



FER

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
F A K U L T E T
ELEKTROTEHNIKE
I RAČUNARSTVA



DANILO BLANUŠA

na raskrižju matematike, fizike i elektrotehnike

Priredio: Ivan Ivanšić

DANILO BLANUŠA

na raskrižju matematike,
fizike i elektrotehnike

Priradio: Ivan Ivanšić



FER

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET
ELEKTROTEHNIKE
I RAČUNARSTVA

ELEMENT

© FER, 2005.

Urednik

Prof. dr. sc. Neven Elezović

Lektorica

Nikolina Ljubanović, prof.

Nakladnik

FER, Zagreb
Element, Zagreb

Design ovitka

Julija Vojković

Tisak

KIKA-GRAF, Zagreb

CIP – Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i sveučilišna knjižnica, Zagreb

UDK 51-05 Blanuša, D.

DANILO Blanuša : na raskrižju matematike, fizike
i elektrotehnike / priredio Ivan Ivanšić. – Zagreb :
Fakultet elektrotehnike i računarstva : Element, 2005.

Kazala.

ISBN 953-197-801-8 (Element)

1. Ivanšić, Ivan
I. Blanuša, Danilo – Život i djelo II.
Matematičari – Hrvatska – Biografije

451019167

ISBN 953-197-801-8

DANILO BLANUŠA

na raskrižju matematike, fizike i elektrotehnike

Priredio: Ivan Ivanšić

1. izdanje

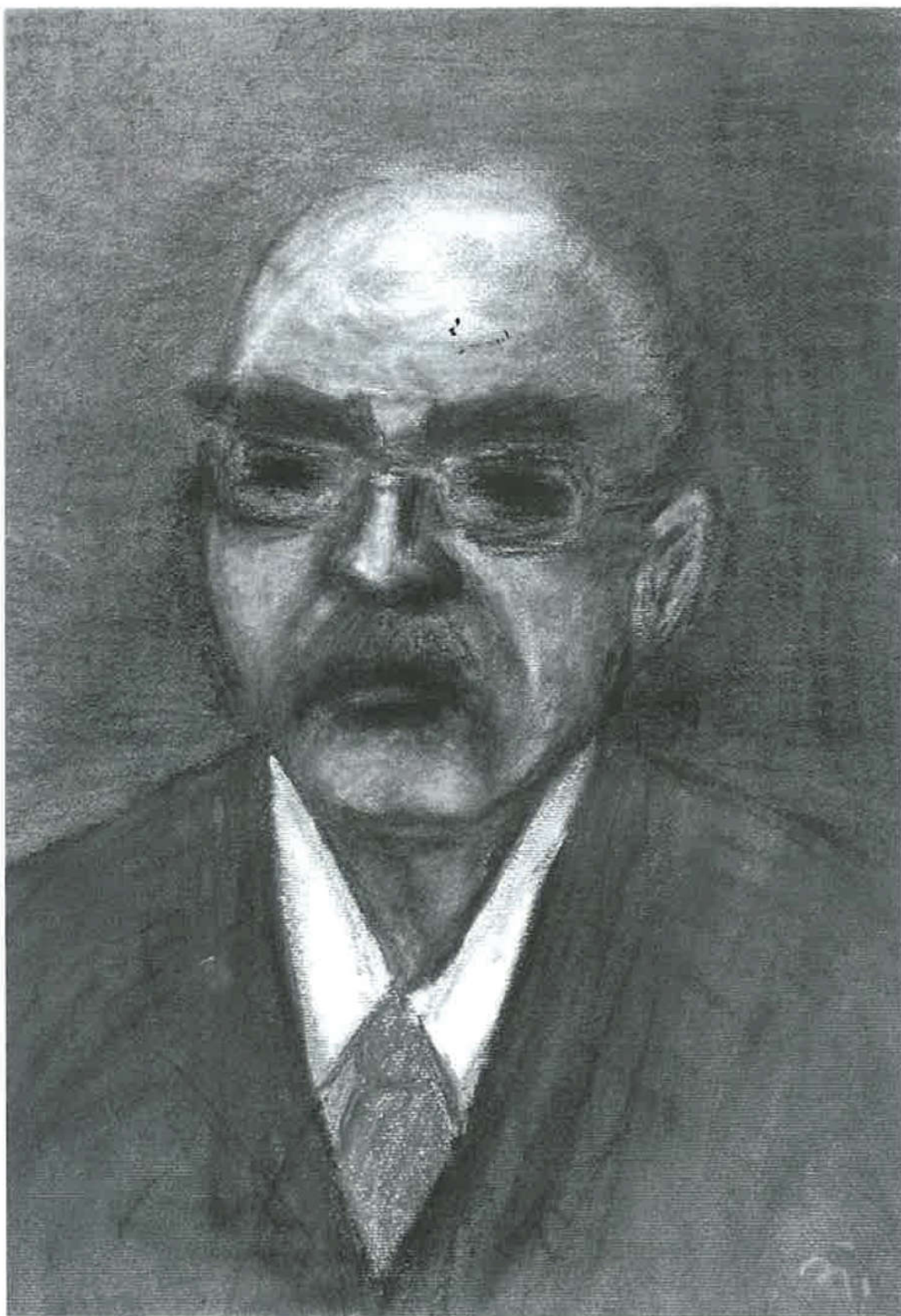
Zagreb, 2005.



Danilo Blanuša, dekan ETF 1957./58.

SADRŽAJ

• Mladen Kos, <i>Proslav</i>	1
• Ivan Ivanšić, <i>Blanušina biografija</i>	3
• Davor Butković, <i>Kratka povijest prostora</i>	21
• Vladimir Devidé, <i>Sjećanja na akademika Danila Blanušu</i>	31
• Ivan Ivanšić, <i>Blanuša matematičar</i>	41
• Tomislav Petković, <i>Blanušini prilozi teoriji relativnosti</i>	57
• Vjekoslav Filipović, <i>Prikaz rada "Metoda simetričnih komponentata"</i>	85
• Miljenko Lapaine, <i>O Blanušinom doprinosu određivanju broja nezavisnih uvjeta u trigonometrijskim mrežama</i>	89
• Ivan Ivanšić, <i>Kronološki popis publikacija Danila Blanuše</i>	115
• Ivan Ivanšić, <i>O prilogima</i>	123
— Danilo Blanuša, <i>Karl Friedrich Gauss, najveći matematički genij svih vremena</i> . Original: Karl Friedrich Gauss, das größte mathematische Genie aller Zeiten, Neue Ordnung 1. 1. 1943., 11. Prijevod: Mario-Osvin Pavčević	124
— Danilo Blanuša, <i>Metoda simetričnih komponentata</i> , Zbornik predavanja sa seminara "Elektroindustrijska problematika velikih elektrana" 15. – 25. 4. 1957.	128
— Danilo Blanuša, <i>Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume</i> , Monatsh. Math. 59 (1955), 217.–229.	145
— Danilo Blanuša, <i>Problem četiriju boja</i> , Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 1 (1946), 31.–42.	158
— Danilo Blanuša, <i>Sur les paradoxes de la notion d'énergie</i> , Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 2 (1947), 249.–250.	170
• Zahvala	173



Petar Javor: "Blanuša", suhi pastel, 25 × 33 cm 1998.

PROSLOV

Mladen Kos

Matematičar, fizičar, inženjer i sveučilišni profesor akademik Danilo Blanuša velikan je hrvatske znanosti i nezaobilazna figura u povijesti Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu. Dugogodišnji profesor i jedan od utemeljitelja modernog Fakulteta elektrotehnike i računarstva ostao je generacijama inženjera u sjećanju kao uzoriti sveučilišni profesor. Fakultet elektrotehnike i računarstva ovom knjigom želi podsjetiti na život i djelo profesora Blanuše. Svjestan sam da za one koji su imali sreću i osobno poznavati uvaženog profesora niti jedna knjiga ne može biti dovoljno dobro napisana. Pa ipak, vjerujem da će ova knjiga one koji su ga poznavali podsjetiti na dio života i rada tog nadasve dragog čovjeka, a mlađima poslužiti kao uzor koji treba pokušati slijediti.

I na kraju, zahvala i čestitke prof.dr.sc. Ivanu Ivanšiću koji je okupio brojne autore i uložio velik trud u priređivanje ove knjige, te uredniku prof.dr.sc. Nevenu Elezoviću i nakladniku Element koji su svoje veliko iskustvo i znanje uložili u pripremu i oblikovanje knjige te je učinili štivom koje se čita u jednom dahu.

BLANUŠINA BIOGRAFIJA

Ivan Ivanšić

P

rema izvatku iz matice krštenih rimokatoličke župe "sl. Imena Bl. Dj. Marije" u Osijeku-Donji grad, Danilo Franjo Đuro Blanuša rođio se 7. 12. 1903. godine u Osijeku-Donji grad, Široka ulica br. 9. Tijekom svog života služio se samo prvo navedenim imenom Danilo. Njegov otac Isidor Blanuša (1869. – 1940.) bio je u trenutku njegovog rođenja artiljerijski kapetan austrougarske vojske, koji je u mirovinu otišao u činu pukovnika jugoslavenske vojske. I djed i pradjed po ocu bili su oficiri u vojsci svog vremena. Majka Marija, udova Štefinović, rođena Muczina (1870. – 1947.) bila je kućanica. Po majci je imao starijeg brata Josipa Štefinovića

koji je bio doktor prava. Otac mu nije imao imetka, dok je majka imala nešto malo, citiram jedan navod iz [Bl]: "otprilike u visini kaucije potrebne za udaju za oficira". Tada se oficir¹ nije mogao ženiti siroticom. Taj je imetak propao za vrijeme Prvog svjetskog rata. Profesor Danilo Blanuša umro je dana 8. 8. 1987. god. u Stubičkim Toplicama².



Sl. 1. Evo me s tatom

Školovanje

Kao dijete oficira školovao se u mjestima službe svog oca. Tako je osnovnu školu pohađao od 1909. – 1913. godine u trima mjestima: Beču, Steyru (Gornja Austrija) i Zagrebu. Slično je i s pohađanjem gimnazije od 1913. – 1921. Započeo je Realnom gimnazijom u Zagrebu, da bi od 6.

¹ Zanimanje opasno po život

² U [1] je pogrešno naveden Zagreb

do 8. razreda nastavio u Osijeku. Maturirao je 1921. godine u Osijeku na realnom odjelu.



Sl. 2. D. Blanuša kao đak osnovac

Školske godine 1921./1922. započeo je studij elektrotehnike na Tehničkoj visokoj školi u Zagrebu da bi sljedeće školske godine nastavio studij na Technische Hochschule in Wien, gdje je 1925. položio I. državni ispit, a 3. 7. 1934. godine II. državni ispit (diplomu) iz elektrotehnike postigavši državno priznatu titulu "Ingenieur (Ing.)". Za boravka u Beču završio je 1924./1925. abiturijentski tečaj na Trgovačkoj akademiji u Beču, kroz koji je, kao što se poznavatelji Blanuše sjećaju, postao vješt u njemačkoj i hrvatskoj stenografiji. Godine 1925. položio je dopunski³ ispit zrelosti iz latinskog jezika na gimnazijskom odjelu Realne gimnazije u Osijeku. Pored obveznih predmeta na studiju elektrotehnike odslušao je u Zagrebu i Beču 14 neobveznih, teorijski orijentiranih predmeta:

- M. Kiseljak: Nauk o skupovima
- A. Smekal: Partielle Differentialgleichungen der Physik
- A. Duschek: Differentialgeometrie
- F. Jung: Hydromechanik
- Th. Schmidt: Projektive Geometrie
- A. Smekal: Molekulartheorie der Festigkeit

³ Uvjet za postizanje diplome

- H. Bauer: Vektorrechnung
- L. Flamm: Geometrische Optik
- A. Duschek: Der Integralbegriff
- L. Flamm: Quantentheorie
- H. Mache: Physikalisches Praktikum I
- A. Duschek: Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen
- W. Gauster: Mechanische Probleme aus der Elektrotechnik
- Th. Radakovich: Variationsrechnung.



Sl. 3. Iz studentskih dana u Beču

No to nije sve. Kroz 6 semestara, od 1926./1927. do uključivo 1928./1929., bio je izvanredni student Filozofskog fakulteta bečkog sveučilišta, gdje je slušao predavanja iz matematike i teorijske fizike i aktivno sudjelovao u Seminaru za teorijsku fiziku profesora H. Thirringa (Seminar für sehr Fortgeschrittene). Evo popisa tih predmeta:

- W. Wirtinger: Funktionentheorie
- Oh. Furtwängler: Algebraische Gleichungen
- H. Thirring: Seminar für theoretische Physik (šest semestara)
- H. Thirring: Theorie der Spektren
- F. Kottler: Höhere Mechanik
- H. Thirring: Theorie der Wärme (dva semestra)
- F. Kottler: Elektrizität und Magnetismus
- F. Kottler: Theorie der Strahlung
- H. Thirring: Theoretische Mechanik (dva semestra)
- F. Kottler: Optik
- F. Kottler: Quantentheorie des Atoms.



Sl. 4. U mladim danima sa Sofijom

Tako intenzivno angažiranje u matematici i fizici usporilo je studij elektrotehnike dovodeći ga u situaciju da je izašao na diplomski ispit bez položenog ispita iz hidromehanike. Tada je postojala mogućnost izlaska na diplomski ispit bez jednog položenog ispita, ali se nepoloženi predmet polagao pred diplomskim povjerenstvom. Vladalo je opće mišljenje da na taj način nije moguće diplomirati. Veliko znanje koje je stekao omogućilo mu je uspjeh, pa je na promociji pobrao najjači pljesak svojih kolega. Iako je to bio poduži period studiranja, u kojemu je Blanuši pomagao njegov brat po majci Josip Štefinović⁴, bio je ispunjen akumuliranjem različitog znanja iz matematike, fizike i tehnike. To je uz prirodnu sklonost jednom moralo eksplodirati u plodan, samostalan znanstveni rad.

⁴ Bio je vlasnik knjižare u Zagrebu u Bogovićevoj ulici, koju je izgubio poslije 2. svjetskog rata. Spomenimo da je poslije 2. svjetskog rata uz pomoć svojih poznanstava s izdavačima iz inozemstva osnovao u Zagrebu Internacionalnu stalnu izložbu publikacija (ISIP) i bio njezin direktor.

Zaposlenje

Nakon diplomiranja treba se zaposliti. Stoga je pokrenuo priznavanje stečene diplome, koju mu je 13. 11. 1934. god. Savjet Tehničkog fakulteta Univerziteta Kraljevine Jugoslavije u Zagrebu nostrificirao za diplomu inženjera elektrotehnike Tehničkog fakulteta u Zagrebu. Zaposlio se 25. 10. 1934. god. u Gradskoj električnoj centrali i to kao volonter u pogonu centrale, gdje od 1. 4. 1935. god. radi kao pogonski elektroinženjer. Od 1. 6. 1937. god. premješten je u baždarnicu električnih brojila iste tvrtke, gdje je od 1. 8. 1941. god. do 1. 2. 1944. god. bio šef odjela. Pored te dužnosti bila mu je povjerena briga za stručno obrazovanje tehničkog osoblja, pa je održao nekoliko tečajeva za tehničko osoblje Gradske električne centrale. Iz ovih nekoliko podataka zaključujemo da je bio uspješan inženjer. Međutim, istovremeno se u slobodno vrijeme bavio istraživanjima Besselovih funkcija izrađivši doktorsku disertaciju čisto matematičkog karaktera, a motivaciju je našao u rješavanju telegrafske jednadžbe. U tom se periodu (2. 10. 1938.) oženio Sofijom, udovom Ambrožić, rođenom Mileusnić (1903. – 1983.). Po zanimanju je bila kućanica, i s njom je imao pokćerku Adelu (1926.) i kći Maju (1940.).

U to se vrijeme pokušao zaposliti kao nastavnik na Tehničkom fakultetu Univerziteta Kraljevine Jugoslavije. U Zavodu za visoki napon i ener-



Sl. 5. U obiteljskom krugu. Maja, Adela, Sofija, Bogomir Šegović (zet), Danilo

getiku Fakulteta elektrotehnike i računarstva sačuvala se nekim načinom njegova prijava na raspisani natječaj za mjesto "ukaznog izvanrednog profesora" za predmete Električni strojevi i transformatori na Katedri za teoriju i građenje električnih mašina i transformatora. Ta prijava nosi datum 18. 12. 1939. god., kada je i zaprimljena na univerzitetu. Jasno da nije uspio na natječaju jer je i dalje radio u Gradskoj električnoj centrali. Zbog kratkovidnosti na oba oka od preko 4 Dpt, bio je proglašen nesposobnim za vojsku. Tako je prema rješenju Zagrebačkog vojnog okruga od 18. 8. 1930. god. proglašen trajno nesposobnim i otpušten iz vojske. Zbog toga ga 2. svjetski rat nije povukao u vojsku, nego je i dalje radio u istoj tvrtki.

Dana 12. 2. 1943. god. obranio je na Tehničkom ⁵ fakultetu u Zagrebu disertaciju pod naslovom "Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija". Promoviran je 16. 6. 1943. god. Habilitacijskom postupku pristupio je 17. 12. 1943. god. na Tehničkom fakultetu s pokusnim predavanjem pod naslovom "Matematika i njezin odnos spram tehnike i prirodnih znanosti". Postavljenje za izvanrednog profesora na Tehničkom fakultetu uslijedilo je 1. 2. 1944. god., a 30. 6. 1945. god. je razriješen službe. ⁶

U [BI] postoji list iz kojeg je vidljivo da se krajem 1945. god. prijavljivao na natječaj na Tehničkom fakultetu za izvanrednog profesora za predmet Mehanika i da "nije došao u obzir". Ponovno priznanje doktorske diplome i habilitacije uslijedilo je 25. 9. 1946. god. po Komisiji za priznavanje akademskih naslova, diploma, ispita i semestara pri Ministarstvu prosvjete Narodne Republike Hrvatske (Broj: 355-1946.). Dana 1. 11. 1945. god. postavljen je za honorarnog nastavnika predmeta Matematika za arhitekte i



Sl. 6. U dobi od 40 godina

⁵ Kao diplomirani inženjer nije mogao doktorirati na Mudroslovnom fakultetu.

⁶ Razlog razrješenja od službe bio je opoziv svih postavljenja i akademskih naslova postignutih tijekom rata.

kemičare na Tehničkom fakultetu. Osim toga postavljen je i za honorarnog nastavnika za matematiku na Poljoprivredno-šumarskom fakultetu. Na temelju potrebe postavljen je 5. 2. 1946. god. i za honorarnog nastavnika za predmet Specijalna poglavlja iz primijenjene matematike na Tehničkom fakultetu.

1. 4. 1947. god. ponovno je postavljen za izvanrednog profesora na Tehničkom fakultetu na osnovi rješenja Predsjedništva vlade Narodne Republike Hrvatske od 10. 3. 1947. god. Nadalje, 16. 11. 1950. god. Ministarstvo za nauku i kulturu odobrilo mu je honorarno predavanje predmeta "Viša matematika" na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, pa je na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu dugo djelovao kao honorarni nastavnik. Šk. god. 1947./1948. uveden je na Tehničkom fakultetu predmet Teorijska elektrotehnika za studente elektrotehničkog odsjeka. Na prijedlog profesora Josipa Lončara predavanja i iz tog predmeta povjerena su Blanuši. To je na honorarnoj osnovi predavao tijekom dviju školskih godina. Za redovitog profesora Tehničkog fakulteta postavljen je 31. 10. 1947. god. Diobom Tehničkog fakulteta na više fakulteta, nastavio je danom 1. 7. 1956. god. raditi na novoosnovanom Elektrotehničkom fakultetu, u istom zvanju u kojem je ostao sve do umirovljenja 31. 1. 1975. god. Na fakultet je dolazio redovito dokle god mu je zdravlje dozvoljavalo.

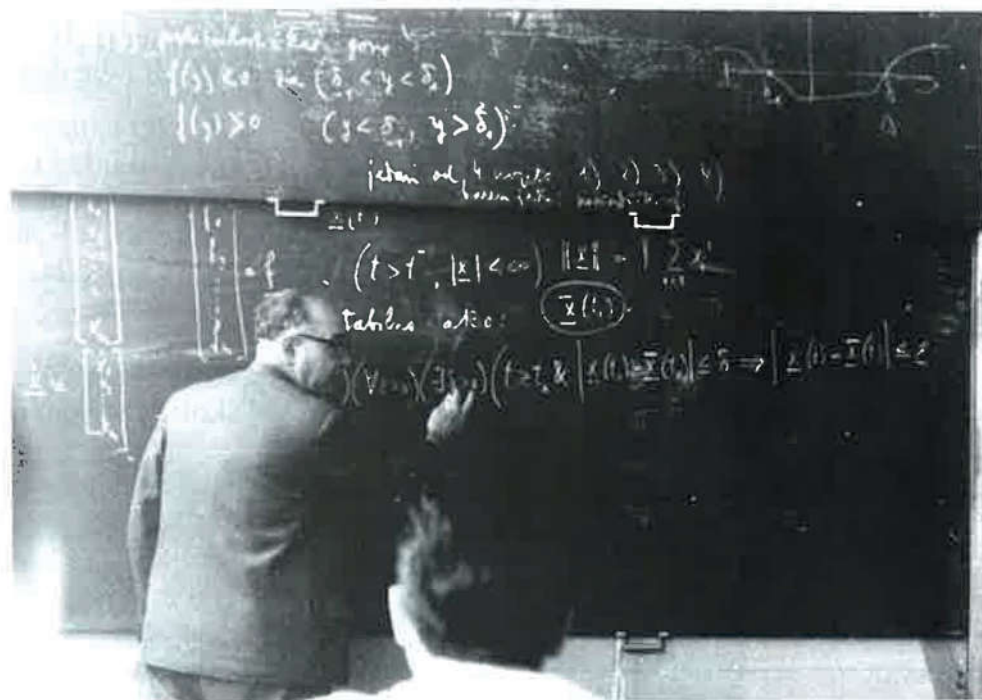
Nastavni rad

Nastavnim radom počeo se baviti šk. god. 1938./1939., kada je kao honorarni nastavnik na Srednjoj tehničkoj školi predavao nekoliko stručnih



Sl. 7. D. Blanuša u dobi od 60 godina

predmeta na večernjem tečaju za elektrotehničke poslovođe. Postavljanjem za izvanrednog profesora na Tehničkom fakultetu započeo je predavati matematičke predmete na Sveučilištu u Zagrebu. U prvom nastavnom periodu (1. 2. 1944. – 30. 6. 1945.) predavao je predmete: Vektorski račun, Konformno preslikavanje, Jednadžbe diferencijala i Parcijalne diferencijalne jednadžbe. U razdoblju kada je bio postavljen za honorarnog nastavnika na Tehničkom fakultetu (1. 11. 1945. – 1. 4. 1947.), predavao je Višu matematiku za studente kemijskog i arhitektonskog odsjeka Tehničkog fakulteta. Pored toga u to je vrijeme predavao i neobvezne predmete: Vektorski račun, Konformno preslikavanje i Parcijalne diferencijalne jednadžbe. U to je vrijeme nastala njegova skripta “Viša matematika za kemičare i arhitekte”, koju je izdao Stručni odsjek Narodne studentske omladine Zagrebačkog sveučilišta. Skriptu su prema Blanušinim predavanjima izradili njegovi demonstratori D. Dvornik i A. Bezjak. Slično tome su studenti Prirodoslovno-matematičkog fakulteta J. Andrić, V. Paar i K. Šaub izradili skriptu “Odabrana predavanja iz matematičkih metoda u fizici”, gdje je Blanuša više godina predavao predmet Matematičke metode fizike.



Sl. 8. Predavanje na PMF-u

Zabilježimo da je kvaliteta njegovog nastavnog rada prepoznata već na samom početku nastavničke karijere. Tako je od Komiteta za sveučilišta i visoke škole u prosincu 1949. god. dobio novčanu nagradu (25 000 din.) za svoj nastavni rad. Predavao je različite predmete na dodiplomskoj i poslijediplomskoj nastavi. Na dodiplomskoj nastavi Tehničkog i Elektrotehničkog fakulteta predavao je različite matematičke predmete već prema trenutnom nastavnom programu, pa je za studente Elektrotehničkog fakulteta napisao skriptu “Laplaceova transformacija”. Da popuni manjak udžbenika iz matematike, novoosnovani Elektrotehnički fakultet⁷ pokre-

⁷ Novoosnovani Elektrotehnički fakultet je u svoje interne dokumente uveo zahtjev da nastava po-

nuo je tiskanje trećeg izdanja knjige prof. Željka Markovića "Uvod u višu analizu I, II". 1961. god. izišao je I. dio u dva sveska, a 1963. god. II. dio u dva sveska u izdanju Sveučilišta u Zagrebu i to u kserografskoj tehnici. *

Istovremeno je profesor Blanuša bio potican od strane dekana Elektrotehničkog fakulteta da napiše prikladan udžbenik iz matematike koji bi pokrивao nastavni program predmeta Viša matematika na Elektrotehničkom fakultetu. Profesor Blanuša se tog izazova prihvatio, ali i puno opsežnijeg pothvata; naime, pisanja knjige koja ima znatno širi matematički sadržaj od programa predmeta Viša matematika na Elektrotehničkom fakultetu. To je bio vrlo opsežan pothvat koji je ostao nedovršen. U izdanju Tehničke knjige izašla su četiri sveska tog projekta. Pored pisanja vlastitih knjiga, puno je pomagao pri izdavanju različitih prijevoda matematičkih



Sl. 9. Amsterdam, 1954. g., svjetski kongres matematičara. Gornji red: Željko Marković, Zlatko Janković. Srednji red: —, Đuro Kurepa, Nada Janković. Donji red: Stanko Bilinski, —, Danilo Blanuša.

jedinog predmeta bude pokrivena pisanim pomagalom, što je onda bilo vezano i za napredovanje nastavnika u pripadnoj grupi predmeta.

*Tisak: Arhitektonsko-građevinsko-geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, štamparija Zavoda za kartografiju i reprodukciju karata.

knjiga. Naime, takva izdanja trebalo je dotjerati kako bi bila matematički korektna i točna.

Bio je vanjski suradnik Instituta "Ruđer Bošković", gdje je na poslijediplomskom studiju "Nuklearna elektronika", koji su organizirali Institut "Ruđer Bošković" i Elektrotehnički fakultet, predavao Teoriju grupa, Linearne diferencijalne jednačbe, Jednačbe diferencija i Nelinearne diferencijalne jednačbe. Kasnije je te predmete predavao na poslijediplomskom studiju Elektrotehničkog fakulteta, a na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu 1962./1963. predavao je predmet Višedimenzionalna diferencijalna geometrija i problemi smještanja. Bio je odličan predavač, možemo slobodno reći legenda. Toga se s dubokim poštovanjem sjeća svaki student tehničkih struka, matematike i fizike koji je slušao njegova predavanja. Svojom prirodnom darovitošću, sposobnošću da osjeti kada slušatelj treba bocnuti nekom dosjetkom, plijenio je slušateljstvo i činio im matematiku bližom.

Znanstveni rad

Još kao student u Beču počeo se baviti znanstvenim radom. Osnovne rezultate rada *Obrat formule za ortogonaliziranje*, Rad Hrvatske akad. znan. umjet. Razred mat.-prirodoslov. **278(86)**(1945), 62–74., dobio je još kao student, što je kasnije doradio i objavio. Poriv za znanstvenim radom nije ugasila svakodnevnica rutinskog rada u Gradskoj električnoj centrali, pa je u slobodno vrijeme istraživao svojstva Besselovih funkcija koje se prirodno pojavljuju u elektrotehnici pri rješavanju telegrafske jednačbe. Taj rad je urodio doktorskom disertacijom "Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija", koju je obranio 12. 2. 1943. god., dok je još radio u Gradskoj električnoj centrali.

I Fourierov spektar često se pojavljuje u elektrotehnici, pa je i njegova svojstva istraživao u radu *Upliv diskontinuiteta neke funkcije i njenih derivacija na Fourierov spektar*, Rad Hrvatske akad. znan. umjet. Razred mat.-prirodoslov. **274(85)**(1942), 273–285. Prelazak na sveučilišnu karijeru još je više rasplamsao njegovu istraživačku aktivnost.

Ako čovjek čita i pregledava njegove radove, onda uočava da su u biti svi matematičke prirode. Evo što time želim reći. U svim se radovima koristi matematičko znanje da bi se dokazao cilj, pa su svi radovi u biti teorijske prirode, a ne eksperimentalne. Ti radovi su ili čisti doprinosi matematici, ili pokušavaju približiti matematiku svima, ili koriste matematiku u obradi problema iz druge znanosti pa su time doprinosi ukupnom fondu znanja. Želimo li razvrstati Blanušine doprinose znanosti, onda nam se prirodno nameće sljedeća podjela:

- 1) doprinosi matematici,
- 2) doprinosi fizici,
- 3) doprinosi elektrotehnici i geodeziji,

o čemu donosimo prikaze u nastavku ove knjige.

Akademik, dužnosti i priznanja

Dopisnim članom Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti postao je 30. 6. 1952. god., a pravim 12. 3. 1958. god. Godine 1970. izabran je za dopisnog člana Srpske akademije nauka i umjetnosti, a 1974. god. za dopisnog člana Austrijske akademije znanosti.

Profesor Blanuša bio je član Elektrotehničkog društva i vrlo aktivan član Društva matematičara i fizičara SR Hrvatske. Od samog osnutka Društva aktivno sudjeluje u njegovom radu. Svojim čestim nastupima na kolokvijima Društva, a posebno na tzv. Malim temama, koje su se održavale zadnje srijede u mjesecu, popularizirao je znanstveno istraživački rad među mlađim generacijama. Tu je naročito dolazilo do izražaja njegovo ogromno poznavanje klasične matematike, fizike, tehnike i svega drugog. Lukavim rješenjima i duhovitim prikazima pojedinih sadržaja davao je poseban ton toj aktivnosti. Bio je član redakcije "Glasnika matematičko-fizičkog i astronomskog" od samog osnutka časopisa 1946. godine do transformacije časopisa u "Glasnik matematički" 1966. god. Poslije toga bio je član redakcije "Glasnika matematičkog" sve do smrti. Vršio je dužnost predsjednika Društva matematičara i fizičara SR Hrvatske i predsjednika Saveza društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije. Bio je član Austrijskog matematičkog društva.

Za svog radnog vijeka obavljao je različite dužnosti. Navodim one kojima sam ušao u trag:

- nadstojnik knjižnice Tehničkog fakulteta,
- predstojnik Zavoda za primijenjenu matematiku Tehničkog fakulteta, a potom Elektrotehničkog fakulteta,
- starješina općeg odjela Tehničkog fakulteta,
- predsjednik Društva matematičara i fizičara SR Hrvatske (1952. – 1954.),
- prodekan Tehničkog fakulteta (1954./1955.),
- dekan Tehničkog fakulteta (1955./1956.),
- predsjednik Saveza društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije (1965. – 1970.),
- dekan Elektrotehničkog fakulteta (1957./1958.),
- predsjednik Savjeta Elektrotehničkog fakulteta (1966./1967. – 1967./1968.),
- tajnik II. razreda JAZU (1972. – 1978.),
- v. d. direktora Instituta za Matematiku Sveučilišta do 1962. *

*U [11] je pogreškom navedeno "direktor".

Nagrade i odličja:

- Nagrada "Ruđer Bošković" 1960.,
- Nagrada grada Zagreba 1967.,
- Nagrada za životno djelo 1974.,
- Orden rada sa crvenom zastavom 1965.,
- Orden zasluga za narod 1975.



Sl. 10. Uručenje ordena 28. 12. 1965. g.

Zadržimo se malo na nagradi "Ruđer Bošković". Nagrada "Ruđer Bošković" bila je netom ustanovljena i 1960. god. izvršena je prva dodjela nagrada. Nagrada je profesoru Blanuši dodijeljena za "izometričko smještanje hiperbolnih i eliptičkih prostora u euklidske prostore" kao značajnom rezultatu (otkriću) u matematici. Javnost je bila zainteresirana doznati o kakvom se značajnom rezultatu radi. Zbog toga se reporter "Vjesnika" (ime reportera nije navedeno) uputio do samog autora da za njegove čitatelje—nestručnjake u matematici objasni na što je moguće popularniji način i napiše u čemu se sastoje njegova istraživanja za koja je nagrađen. Evo Blanušinog teksta koji je 24. srpnja 1960. god. objavljen Vjesniku.

"U srednjoj se školi izlažu i dokazuju svojstva različitih geometrijskih likova i tvorevina bilo u ravnini ili prostoru, i pritom se polazi od najjednostavnijih tvrdnji, koje se ne mogu svesti na još jednostavnije tvrdnje, a primamo ih kao neposredno evidentne. Već su stari Grci razvili takvu geometriju do savršenstva. Prvi sustavni i majstorski prikaz geometrije dao je Euklid (oko god. 300. pr. n. e.) i po njemu se takva geometrija zove "euklidska geometrija". Početne tvrdnje na temelju kojih se dokazuju sve

ostale zovu se “aksiomi”, a iz njih se logičkim zaključivanjem dobivaju složenije tvrdnje, koje označujemo “teoremi”.

Svojstva geometrijskih likova mogu se promatrati ne samo u ravnini, nego i na raznim plohama. Zamislimo da ravninu svinemo bez rastezanja u neku drugu plohu, npr. u parabolni valjak, tj. u plohu koja nastaje, ako pravac klizi duž parabole tako da uvijek ostaje okomit na ravninu te parabole. Pravci ravnine također su se svinuli i postali su tzv. geodetske linije, koje imaju svojstvo da su najkraće spojnice bilo kojih dviju njihovih točaka. Zovemo li te geodetske linije na parabolnom valjku “pravcima” geometrije na toj plohi, ta će se geometrija podudarati s euklidskom geometrijom u ravnini. Možemo, dakle, reći da na takvom valjku vrijedi euklidska geometrija. Naprotiv, na nekim drugim plohama ta geometrija neće vrijediti. Na primjer, na kugli ¹⁰ su geodetske linije glavne kružnice (to su kružnice sa središtem u središtu kugle), no zovemo li te krivulje “pravcima”, onda se bilo koja dva takva “pravca” sijeku u dvjema dijametralno suprotnim točkama kugle (u tzv. “antipodnim” točkama), dok se dva pravca u ravnini sijeku samo u jednoj točki ili u nijednoj, ako su pravci paralelni.

Vratimo se sada na aksiome euklidske geometrije u ravnini. Među njima ima jedan koji je poznat pod imenom “aksiom o paralelama”: kroz zadanu točku može se povući samo jedna paralela sa zadanim pravcem. Već su odavno matematičari sumnjali u to da je taj aksiom nezavisan od ostalih i mislili su da bi se on mogao dokazati na temelju ostalih aksioma, čime bi postao “teorem”. No svi su se pokušaji izjalovili, i konačno su u prvoj polovici prošlog stoljeća Rus N. I. Lobačevski i Mađar J. Bolyai sagradili geometriju u kojoj je aksiom o paralelama nadomješten tvrdnjom da kroz kroz zadanu točku prolazi više nego jedna paralela sa zadanim pravcem. Aksiom o paralelama time se pokazao kao zaista nezavisan. No još uvijek nije bilo sigurno da u takvoj novoj geometriji, koju zovemo geometrija Lobačevskog ili “hiperbolna” geometrija (u obrazloženje toga naziva ne ulazimo), neće doći do proturječja kada se ona dosta daleko razradi. Tu sumnju su uklonili Nijemac F. Klein i Francuz H. Poincaré konstruiravši modele hiperbolne geometrije unutar euklidske geometrije. Time je bila dokazana neproturječnost hiperbolne geometrije pod pretpostavkom da je sama euklidska geometrija neproturječna.

No modeli neeuklidske “hiperbolne” geometrije po Kleinu i Poincaréu bili su u izvjesnom smislu neprirodni, jer su pojedini geometrijski pojmovi u njima dobili drugo značenje. Tako se u Kleinovom modelu pod “pravcima” razumijevaju tetive jedne kružnice (dakle ne beskonačni pravci), a udaljenost dviju točaka i kut među dvama pravcima određeni su dosta složenim matematičkim formulama i ne podudaraju se s kutovima i udaljenostima tih pravaca, odnosno točaka u običnom smislu.

Prirodan model hiperbolne geometrije bila bi ploha u euklidskom prostoru (tj. u prostoru u kojem vrijedi euklidska geometrija), na kojoj bi vrijedila hiperbolna geometrija ako geodetske linije na toj plohi zovemo “pravcima”. No god. 1900. veliki njemački matematičar D. Hilbert dokazao je da takva ploha ne postoji. Mogu se doduše naći plohe na kojima je djelomično

¹⁰ Misli se na kuglinom rubu tj. sferi. Op. ur.

ostvarena hiperbolna geometrija, tj. koje predstavljaju dijelove “hiperbolne ravnine”, ali nema plohe na kojoj bi ta geometrija bila ostvarena u cijelosti. Postavlja se pitanje: ne bi li takva ploha egzistirala u euklidskom prostoru, koji ima više od 3 dimenzije? Takvi su prostori u matematici već odavno poznati i primjenjuju se u teorijama fizike. Matematičari su, doduše, naslućivali da će se Hilbertov dokaz nepostojanja takve plohe moći poopćiti i na višedimenzionalne prostore, tj. mislili su da ni u takvim prostorima neće biti moguće konstruirati “prirodan” model hiperbolne geometrije. Pokazalo se, međutim, da to nije točno: piscu ovog članka uspjelo je odrediti plohu u šesterodimenzionalnom euklidskom prostoru, na kojoj vrijedi hiperbolna geometrija.



Sl. 11. Zagreb, 1981. g., 60. obljetnica mature. Stoje: Voja Krajovan, Branko Kojić, Milivoj Hiršl. Sjede: Mladen Szabo, Danilo Blanuša, Antun Potočnjak.

Hiperbolna geometrija nije jedina neeuklidska geometrija. Naime, aksiom o paralelama može se promijeniti i na drugi način: može se pretpostaviti da kroz zadanu točku sa zadanim pravcem nema nijedne paralele, tj. da se svaka dva pravca u ravnini sijeku u jednoj točki. Treba onda, istina, promijeniti još neke druge aksiome (tzv. aksiome poređaja), a dobivena neeuklidska geometrija zove se “eliptička geometrija”. Ako se ograničimo na dovoljno male dijelove “eliptičke ravnine” na kojoj vrijedi ta geometrija, onda se ona podudara s geometrijom na kugli. Obrnuto možemo dokazati da na dijelu kugle koji ne sadrži ni jedan par antipodnih točaka vrijedi eliptička geometrija. Ali trebalo bi naći plohu na kojoj bi eliptička geometrija u cijelosti bila ostvarena. Pokazuje se da bi to morala biti zatvorena ploha koja ima drukčiju suvislost nego kugla. Ploha takve suvislosti ne može se ostvariti u trodimenzionalnom euklidskom prostoru bez samoprodiranja, a pogotovo se ne može postići da onda na toj plohi vrijedi eliptička geometrija. No pisac ovog članka konstruirao je takvu plohu u peterodimenzionalnom, pa čak i u četverodimenzionalnom euklidskom prostoru.”

U jeziku matematike kaže se da je ovim rezultatima uspjelo “izometričko

smještanje” hiperbolne, odnosno eliptičke ravnine u dotičnim višedimenzionalnim prostorima.”

Kako komentirati ostale velike nagrade i visoka odličja? Jednostavno. Sve je to posljedica nesebičnog rada u svakom pogledu, bilo da se radi o nastavi, znanstvenom radu ili pak općem radu i djelovanju u svojoj i široj sredini. Zadržao sam se na nagradi “Ruđer Bošković” zbog toga što se istraživanje zbog kojeg je dodijeljena nastavlja na istraživanja velikih svjetskih matematičara spomenutih u Blanušinom prikazu svojih rezultata za široku javnost.

Profesor Blanuša bio je svestrano obrazovan, govorio je njemački, francuski, engleski, a služio se talijanskim i ruskim jezikom. Bio je glazbeno obrazovan i svirao glasovir. Volio je društvo i u društvu bio zabavan. Mnogi se sjećaju njegovog “subotnjeg” društva. Po profesiji je to bilo šaroliko društvo koje se redovito sastajalo subotom na čašicu razgovora i pića. Član društva Omer Mujadžić, slikar, naslikao je društvo pod nazivom “Društvo žednih”. Blanuša je bio zabavan i u društvu s djecom koju bi zabavljao na različite načine, a naročito izvođenjem različitih grimasa i pokreta. Svi njegovi suvremenici, koji su se našli u takvoj prilici, sjećaju se duhovitih dosjetki i viceva kojih je uvijek imao pri ruci da zabavi društvo. Naime, imao je običaj da novi vic stenografski zabilježi u svoj džepni kalendar-rokovnik.

Literatura

- [B] S. BILINSKI, *In memoriam*, Danilo Blanuša 7. 12. 1903. – 8. 8. 1987., Spomenica preminulim akademikima–svezak 50, HAZU, Zagreb 1989., 9–14.
- [Bl] D. BLANUŠA, Mapa arhiva Fakulteta elektrotehnike i računarstva, Zagreb.
- [D] V. DEVIDÉ, *Sjećanja na akademika prof. dr. Danila Blanušu*, Spomenica preminulim akademikima–svezak 50, HAZU, Zagreb 1989., 15–26.
- [I] I. IVANŠIĆ, *Danilo Blanuša 07. 12. 1903. – 08. 08. 1987.*, Glas. Mat. Ser. III **22(42)**(1987), 535–540.
- [II] I. IVANŠIĆ, *Blanušin život i doprinosi matematici*, Danilo Blanuša (1903. – 1987.)–Znanstveni skup održan 29. svibnja 2003. u povodu 100. obljetnice rođenja, HAZU, Zagreb 2003., 9–27.
- [W] W. WUNDERLICH, *Danilo Blanuša-Nachruf*, Almanach der Österreichischen Akademie der Wissenschaften **138**(1988), 353–356.





Među dekanima ETF-a 1956./57. – 1981./82.

*Stoje: Vojislav Bego, Radenko Wolf, Ante Šantić, Uroš Peruško, Vladimir Matković,
Vladimir Muljević, Hrvoje Požar, Zvonimir Širotić.*

Sjede: Vatroslav Lopašić, Danilo Blanuša, Berislav Jurković, Anton Dolenc.

Nedostaju: Božidar Stefanini i Zlatko Smrkić.



KRATKA POVIJEST PROSTORA

Davor Butković

Nedavno sam pišući jednu recenziju pokušao ustanoviti kad sam prvi put naišao na prikaze teorije relativnosti koje je pisao profesor Blanuša. To je u svakom slučaju bilo u gimnaziji, koju sam od 1945. do 1953. godine pohađao u Splitu. Radilo se o člancima i priložima za širu, ali znanstveno obrazovanu publiku, koji su nastali iz Blanušinog zanimanja za tu teoriju i za mnoge druge srodne matematičke discipline.

Povod nastojanju da se informiram o kozmologiji bila je Jeansova knjiga o astronomiji [8] koju mi je za dvanaesti rođendan kupila moja pokojna majka, svađajući se s prodavačem koji je (ispravno) tvrdio da to nije knjiga za djecu. U to sam vrijeme bio očaran Kučerininom *Našim nebom*, a djelomično sam bio pročitao i Goldbergov udžbenik astronomije za sedmi razred gimnazije [5], pa sam na povratku iz škole svakog dana zurio u izlog knjižare u kojem je tek izdana Jeansova knjiga stajala. Ta knjiga mi je postala toliko važna da se i danas sjećam njenog početka:

Uvečer 7. siječnja 1610., dana značajnog za ljudski rod, sjedio je Galileo Galilej, profesor matematike na sveučilištu u Padovi, pred dalekozorom što ga je sam napravio.

Stranice knjige gdje se opisuju Einsteinova, de Sitterova i Milneova kozmologija također sam znao manje-više napamet, daleko prije nego li sam u školi naučio kako se računa s tajanstvenim objektom iz jedne druge rečenice te iste knjige (str. 84):

To množenje s kvadratnim korijenom iz -1 je, naravno, osnovna stvar u cijeloj pripovijesti.

Činjenica je da su moja razmišljanja i vjerovanja čitajući Jeansovu knjigu, doživjela revoluciju sličnu onoj koju je iskusio Galilej gledajući kroz dalekozor 1610. godine. To što mi je smisao nekih odlomaka bio nedokučiv, samo me učvrstilo u uvjerenju da sam na tragu skrivene suštine svijeta.

Blanušin prijevod Bornove knjige [2] o teoriji relativnosti proučavao sam nekoliko godina kasnije, kad sam zaista pohađao sedmi razred, gdje je u međuvremenu predmet *Astronomija* bio ukinut. Imao sam sreću da su u gimnaziji moji profesori matematike i fizike bili redom izvrsni (npr. I. Česnik, D. Jurišić, A. Tušek), pa sam bez poteškoća proradio veliki dio Bornovog teksta i Blanušinog *Dodatka*. Koliko znam, jedini prikaz Einsteinove teorije tiskan kod nas između dva rata je prijevod C. Nordmannove

knjižice *Einstein i svemir*. Jedan njezin dio objavljen je u *Matematičkoj čitanci* iz 1947., redigirao ga je jedan od mojih fakultetskih profesora, M. Sevdíć. Nordmannova knjižica nije mi se sviđala jer mi njezini literarni opisi nisu previše govorili. Nasuprot tome, Bornova knjiga u znatnom dijelu svog opsega izlaže fizikalne osnove teorije relativnosti, što je prema Blanušinom predgovoru bio i jedan od razloga zašto je odlučeno da se prevede. No Blanuša na istom mjestu kaže da je bilo potrebno napisati *Dodatak i Bilješke* u kojima je prikazan razvoj teorije od trećeg njemačkog izdanja knjige iz 1922. Mora se napomenuti da osnovnu informaciju o novoj mehanici ima i profesor S. Hondl u svom sjajnom udžbeniku fizike iz 1943. [7], koji je bio u uporabi i nakon 1945. Konačno, osnove klasične fizike s programom sličnim Bornovom programu ima profesor I. Supek u *Svijetu atoma* iz 1942. (kasnije je izdana prerađena verzija te knjige). Ipak, Blanuša je po mom saznanju prvi naš znanstvenik nakon profesora V. Varičaka koji je teoriji relativnosti dao originalne doprinose, što njegovim komentarima daje posebnu vrijednost.



Sl. 1. VII. austrijski kongres matematičara, Beč 1973. g
Ana Vranić, Danilo Blanuša, Sofija Blanuša, Vladimir Vranić, Vilim Niče

To se vidi pregledavajući Bilješke uz Bornov tekst. Npr., što se tiče uvjeta na transformacije koordinata u općoj teoriji (bilješka 33), Blanuša se poziva na svoj rad *Kakva je geometrija na ploči koja rotira* iz 1946. U pogledu tekstova kojima se od njezinog nastanka nastojala provjeriti opća teorija relativnosti (v. [4]), Blanuša u bilješci 30 analizira pomak spektralnih linija

u gravitacijskom potencijalu. Njegovi računi ispituju mogućnost mjerenja tog efekta u Sunčevom sustavu (usp. kontroverze oko testa oko god. 1920 u [13, str. 295] i probleme kod mjerenja u sunčevoj fotosferi [12, str. S45]). Danas se pomak jedne linije spektra $Fe57$ u gama-području mjeri kod promjene potencijala gravitacije Zemlje na razlici visine od samo 22.5 m ([13, ibid.], [10, str. 101])!

Druga dva klasična testa valjanosti opće teorije relativnosti; odklon zrake svjetla na rubu Sunca, vidljiv kod potpune pomrčine, i LeVerrierovo zakretanje Merkurovog perihela od 43 lučne sekunde u stoljeću, stalno se usavršavaju, ali ni danas nisu izolirani ili točno izmjereni drugi faktori koji utječu na rezultat u mjeri da bi navedeni testovi dali jasnu odluku između Einsteinove i srodnih alternativnih teorija gravitacije [12, str. S 45–48]. Ali količina novih testova danas je tolika da za opću teoriju relativnosti vrijedi ono što je Blanuša u *Dodatku* napisao za specijalnu: povratak na prijašnje stanje ne da se zamisliti (str. 222).

Prvo, otkriće pozadinskog mikrovalnog zračenja sredinom šezdesetih godina prošlog stoljeća dalo je prevagu kozmogonijama velikog praska s ekstremno visokim temperaturama ranog svemira. Svi modeli svemirske evolucije zasnivaju se na geometrijama prostor-vremena, no pitanje je daju li opažanja nekima prednost (usp. [6, str. 25], [11, str. 8 i 13], [12, str. S 49] i [10, str. 191]). Drugo, silni napredak kvantne fizike nerazdvojno povezuje kvantne mehanizme sa scenarijima inflacije svemira, tako da su astronomska opažanja ujedno i testovi određenih varijanti teorije čestica (v. [11]). Neovisno od toga uspjela su mjerenja koja bismo mogli svrstati u "direktne" dokaze teorije opće relativnosti. Ovisnost trajanja puta svjetla o gravitacijskom potencijalu, eksperiment koji je inicirao I. I. Shapiro 1964. i nazvao "četvrtim testom" opće teorije relativnosti, do kraja sedamdesetih potvrđen je sa standardnom greškom reduciranom na jedan promil [12, str. S 47]). Nisu bili jednako uspješni eksperimenti kojima se pokušalo detektirati postojanje gravitacijskih valova [10, str. 121]. Uvjerljiv, ali manje direktan dokaz gravitacijskog zračenja je ponašanje Hulse-Taylorovog dvojnog zvjezdanog sustava, otkrivenog sredinom sedamdesetih godina. Pulsar i neutronska zvijezda vrte se oko zajedničkog težišta, a skraćenje perioda vrtnje odaje gubitak energije gravitacijskom emisijom [10, str. 147].

Spektakularnu astronomsku potvrdu opće teorije relativnosti, crne rupe, pratile su velike teorijske i opažačke kontroverzije. Shapiro smatra da danas postoji široki konsenzus u pogledu postojanja crnih rupa reda veličine zvjezdanih i reda veličine galaktičkih masa. Za ove posljednje rastu kinematički dokazi (mjerenjem kinetičkih energija zvijezda), npr. za rupu u jezgri galaksije NGC 4258, a i za naš Mliječni put. Nedavno sam na francuskoj televiziji ARTE vidio emisiju o najnovijim istraživanjima, koja pokazuju frapantnu podudarnost dijagrama dobivenih opažanjima i nastalih teorijskim proračunima, a tiču se postojanja crnih rupa u središtima velikog broja bliskih galaksija. Crne bi rupe objašnjavale i fenomen kvazara [6, str. 34].

Efekt koji se zove *Einsteinov prsten* nastaje kad se dvije galaksije nalaze jedna iza druge na pravcu osi teleskopa. Najčešće nastaje samo dio kru-

žnog luka. To su tzv. *gravitacijske leće*. Prva je otkrivena 1979. godine, a do sada je potvrđeno nekoliko desetaka takvih fenomena. Negdje sam pročitao da mjerenje efekta daje prednost Einsteinovoj teoriji gravitacije pred ostalim teorijama, ali sad ne uspijevam to ponovo naći; no u odnosu na Brans-Dickeovu teoriju to kaže i [11, str. 39].



Sl. 2. Na Dunavu 1976. god. Walter Wunderlich, Sofija Blanuša i Danilo Blanuša

Konačno, u tjedniku Guardian Weekly od 29. travnja do 5. svibnja 2004. tiskan je članak T. Radforda o lansiranju gravitacijske sonde GP-B, koja bi morala pokazati da li Zemlja vrtnjom dodatno tordira savijenu strukturu prostor-vremena. GP-B je sustav od četiriju giroskopa hlađenih na 2 stupnja Kelvina u vrlo visokom vakuumu, i teleskopa koji precizno fiksira orijentaciju sonde prema jednoj zvijezdi. Nakon 13 mjeseci bi odklon giroskopskog sustava koji predviđa Einsteinova teorija morao sa sigurnošću pokazati treba li ponovo revidirati osnove fizike ili ne. Taj pokus je donekle analogan pokusima s kvarcnim satovima na Zemlji i u satelitima oko Zemlje, koji su potvrdili predviđanja specijalne teorije relativnosti, ali nadmašuje pokuse sa satovima već i činjenicom da se planira i razvija punih 40 godina (usp. [12, str. S48]).

Ne pretendirajući na bilo kakvu potpunost informacije o starim i novim testovima opće teorije relativnosti, mislim da je ipak očito da se njima danas ne dovodi u pitanje nužnost proširenja specijalne teorije na neinercijalne prostorno-vremenske sustave, nego se ispituje je li matematički konzistentna Einsteinova teorija gravitacije u skladu s vrtoglavim porastom tehnologije i točnosti mjerenja. Neki od tih eksperimenata, npr., oni koji vode na nove ocjene Hubbleove konstante ili galaktičkih masa, govore za ili protiv određenih kozmoloških modela kojima se bavio i profesor Blanuša.

Članak koji proširuje i detaljnije razrađuje teme *Dodatka* Bornovoj knjizi Blanuša je objavio 1951. godine u *Almanahu Bošković* [1]. On se nastavlja na članak o specijalnoj teoriji relativnosti objavljenom u istom Almanahu

godinu dana ranije; novi članak bavi se problemima kozmologije i kozmogonije, kako je i naslovljen. Oba sam članka čitao već u gimnaziji, i tada su mi donekle razjasnili neke dijelove Jeansa. Npr., ovaj (str. 87):

Ona (Einsteinova kozmologija, op. p.) pretpostavlja da su prostor i vrijeme nerazlučivi u već pokazanom čisto formalnom smislu za biće kojemu je iskustvo ograničeno samo na mali dio svemira; za biće koje može dosižati kroz cjelokupnost prostora i vremena oni postaju sasvim različiti. Nije posve jasno koliko važnosti treba pridati ovom prigovoru ako je on uopće prigovor.

Nije mi, naravno, bilo jasno, a vjerojatno ne može ni biti jasno bez ozbiljnije studije. Meni se i tada činilo da su prostor i vrijeme i nerazlučivi i različiti.

Blanuša se u mnogim svojim (možda i najvažnijim) radovima bavio istraživanjem smještanja raznih prostora u prostore viših dimenzija. I u članku [1] iz *Almanaha* se poziva na svoj rad iz 1947. o izometričkom smještanju eliptičkih prostora u euklidske. U tom je članku detaljno opisao dvodimenzionalni eliptički prostor kao zatvorenu plohu s razgraničtem i prodiranjem, i očito ga je preferirao pred sfernim prostorom kao modelom za trodimenzionalna rješenja. Ta se ploha zove projektivna ravnina. Istu je nemoguće realizirati u trodimenzionalnom prostoru bez prodiranja. U kozmologijama trodimenzionalni protežni prostor, u kojem koordinate određuju položaj zvijezda i galaksija, smješta u četverodimenzionalni "svijet" H. Minkowskog (v. [9, str. 21]). Einstein o tome govori u Dodatku svoje poznate knjižice [4, str. 112] (citiram prema engleskom prijevodu):

The following is essentially nothing but an exposition of Friedman's idea: FOUR-DIMENSIONAL SPACE WHICH IS ISOTROPIC WITH RESPECT TO THREE DIMENSIONS.

Jeansovo biće koje dosiže cjelokupnost prostor-vremena ne bi pred nama imalo prednost time što razlikuje prostor od vremena, nego u tome što bi moglo percipirati razlike u načinu njihove globalne povezanosti. Jedino sam kod Blanuše našao istaknutu fenomenološku razliku sfernog i eliptičkog trodimenzionalnog prostora, i što to znači za astronomiju. A. Weyl ima u [14, str. 273] razliku jednostranih i dvostranih ploha kao alternativne načine kojima bi četverodimenzionalni svijet mogao biti globalno povezan, ali nije razrađivao pojedinosti, posebno nije objašnjavao svoju mnogo citiranu rečenicu o putovanju kroz vrijeme [ibid., str. 274]. W. Pauli navodi da je postojanje dviju mogućnosti prostora s pozitivnom konstantom zakrivljenosti prvi dokazao poznati matematičar F. Klein, koji je ujedno pokazao da za prostor s negativnom zakrivljenošću postoji više mogućnosti [9, str. 52]. Blanuša, međutim, obrazlaže i što nastaje kad se na sferi ili u sfernom prostoru identificiraju dijametralno suprotne točke (što je matematički prirodna operacija): nastaje prostor koji više nema sfernu geometriju, nego drugu od mogućih geometrija prostora s konstantnom pozitivnom zakrivljenošću — rezultat je eliptički prostor [1, str. 187]. U dvjema dimenzijama to je geometrija na plohi sa samoprodiranjem koju sam spomenuo. Sfera i spomenuta samoprodukuća ploha imaju istu geometriju u smislu aksiomatike koja zadržava sve Euklidove aksiome osim

“petog” (aksioma o paralelama), a “pravci” su krivulje najmanje udaljenosti među točkama koje sadrže (“geodetske krivulje”). Negacijom petog aksioma (da točkom van pravca prolazi samo jedan koji ga ne siječe) nastaje osim eliptičke (gdje takvog pravca nema) još i hiperbolička geometrija ili geometrija Lobačevskog (gdje takvih pravaca ima bezbroj). Geometrija na kuglinoj plohi s glavnim krugovima kao pravcima nije takvog tipa, jer u gornjim trima geometrijama kroz dvije točke prolazi samo jedan pravac, dok na sferi kroz dijametralne točke prolazi bezbroj “pravaca” (v.[3, str. 14]).



Sl. 3. F. M., Karikatura Blanuše (≈ 1939 .)

Blanuša na str. 197 analizira prigovore hipotezi zatvorenog svemira “jer bi se tada svaka zvijezda morala vidjeti i s dijametralne strane”, a to nije slučaj. Prigovori su išli sfernom svemiru, no jednaka je situacija i s eliptičkim svemirom, dapače, šanse su tamo veće, jer bi ukupna duljina zatvorenih geodetskih krivulja u eliptičkom slučaju bila upola manja nego li je to u sfernom svemiru (to piše i u [9] na istom mjestu). Kod manjeg opsega svemira možda bismo imali fenomen da je naša galaksija sama sebi gravitacijska leća. Čini mi se da sam o dilemi između sfernog i eliptičkog svemira nedavno još negdje čitao, ali sjećanje mi je nažalost sigurnije kad je u pitanju dalja prošlost. Što bi moglo značiti da je na neki Weylov način moguć povratak u budućnost.

U pregledu kozmoloških teorija Blanuša je u izboru materijala vjerojatno slijedio Jeansa, s tim da su Blanušina obrazloženja u mnogim detaljima ma-

tematički osnovana i time jasnija (npr. Einsteinovo uvođenje kozmološke konstante, Lemaîtreovo dinamičko rješenje s eliptičkim svemirom, itd.). Mislim da vrijeme nije dalo za pravo Jeansu kad je u vezi s Milneovom teorijom napisao (str. 100):

Isto tako vidimo kako je nemoguće pripisati Einsteinovom zakrivljenom prostoru bilo kakvu "fizikalnu realnost", pa značio taj izraz što mu drago. No James Jeans je bio veliki astronom, bez obzira što su se mnoge njegove teorije pokazale neodrživima. Svojom širokom kulturom znao je formulirati znanstvene probleme unoseći uzbuđenje i strast pravog istraživača, što pokazuje i sljedeća rečenica u prijevodu pokojnog profesora Randića (str. 88):

*Baš kao što zrnca pilotine, koja se bace u rijeku, teže da se odijele kad plo-
ve brzicom, tako se raspršuju objekti u de Sitterovu svemiru pri plovljenju
niz rijeku vremena.*

U pedeset godina, koliko je prošlo otkad je profesor Blanuša napisao tekstove koje komentiram, neke su znanstvene discipline doživjele razvoj koji će imati nesagledive posljedice. Među njima je i astronomija, gdje je istraživanje planeta Sunčevog sustava postalo nova geografija, istraživanje Mliječnog puta podsjeća na izvještaj Marka Pola o dalekim zemljama, a karta lokalne grupe galaksija i supergrupe koju dijelimo s oblacima galaksija u Djevici i Berenikinoj kosi je ono što je bila Toscanellijeva karta puta u novi svijet. U Blanušinim radovima lako se mogu naći mjesta koja pokazuju da je točno slutio što će za budući razvoj biti važno. Ipak, glavni zaključak koji se nameće jest da razumjeti jednu teoriju može samo onaj koji joj i pridonosi: razvijanje znanosti i shvaćanje o čemu se tu uistinu radi su različite, ali nerazdvojne kategorije.

Umu koji razmišlja svijet nije dan kao takav.

To je prva rečenica iz Bornove knjige. Ona daje program u kojem su svijest, vrijeme i prostor samo dijelovi. Želim zato citirati i kraj Fran Mažuranićeve crtice *Svemir* (iz *Lišća; Hrvatski pripovjedači*, II izdanje, Zagreb 1908, str. 224) u kojem se prepoznaje Bornova misao:

Što smo mi? Što je ovaj svijet?!

Literatura

- [1] D. BLANUŠA, *Problemi kozmologije i kozmogonije*; Bošković, Almanah hrvatskog prirodoslovnog društva za godinu 1951., Zagreb, 1951., 183–215.
- [2] M. BORN, *Einsteinova teorija relativnosti i njezini fizički osnovi*, prema III. izdanju *Die Relativitätstheorie Einsteins* preveo, Dodačkom i Bilješkama nadopunio D. Blanuša, Zagreb, 1948.
- [3] W. DIECK, *Nichtenklidische Geometrie in der Kugelebene*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1918.

- [4] A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, Fifth edition including the *Relativistic Theory of the Non-Symmetric Field*, Princeton University Press, Princeton N. J. 1955.
- [5] J. GOLDBERG, *Astronomija za VII. razred gimnazije*, II. prerađeno izdanje, Zagreb, 1947.
- [6] H. J. HAUBOLD, A. M. MATHAI, *Universe, Structure of the*, Eprints astro-ph/9612145, 15 Dec 1996.
- [7] S. HONDL, *Fizika za više razrede srednjih škola*, Zagreb, 1943.
- [8] J. JEANS, *Svemir Zvijezde Atomi*, prema IV izdanju *The Universe Around Us* preveo L. Randić, Matica Hrvatska, 1947.
- [9] W. PAULI, *Theory of Relativity*, translated from the German by G. Field, Pergamon Press 1958, Dover edition N. Y. 1981.
- [10] T. PETKOVIĆ, *Uvod u modernu kozmologiju i filozofiju*, 2. prošireno izdanje, "Juraj Šižgorić" – Element, Šibenik-Zagreb, 2002.
- [11] G. G. RAFFELT, *Dark Matter: Motivation, Candidates and Searches*, Contribution to the Proceedings of the 1997 European School of High-Energy Physics, Menstrup near Naestved. Denmark, 25. May – 7. June 1997; Eprints hep-ph/9712538, 29 Dec 1997.
- [12] I. I. SHAPIRO, *A Century of Relativity*, Reviews of Modern Physics, Vol. 71, No. 2, Centenary 1999, S41–S53.
- [13] S. WEINBERG, *Dreams of a Final Theory*, Vintage Books, N. Y. 1994.
- [14] H. WEYL, *Space-Time-Matter*, translated from the German by H. L. Brose of the IV edition 1922, Dover, N. Y. 1950.



Ivica Kranjčević: Bista Danila Blanuše.

SJEĆANJA NA AKADEMIKA DANILA BLANUŠU

Vladimir Devidé

Vjerujem da će se svaki matematičar “treće životne dobi”, baci li pogled unatrag na tijek svojega života, sjetiti nekih svojih učitelja naše znanosti kojima duguje posebnu zahvalnost za sve ono što je od njih čuo i spoznao i kao od matematičara i kao od ljudi.

Za vrijeme osam godina tadašnje srednje škole i pet godina studija na tadašnjem Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, imao sam priliku slušati predavanja iz matematike kakvih petnaestak profesora i jedne profesorice — a i pratiti njihove postupke, poglede, djelovanja i ponašanja općenito.

Gotovo su mi svi oni ostali u lijepoj i ugodnoj uspomeni, tako da ih se i danas, nakon više od pola stoljeća, rado sjećam i spominjem u razgovoru s prijateljima, kolegama iz škole i sa studija, a i drugima.

Međutim, među svim tim matematičarima dvojica su bila posebno istaknuta, izvanredna, nadahnuta, simpatična i u svakom pogledu uzorna: na srednjoj mi je školi to bio profesor Stjepan Škreblin — koji je još znatno ranije kao mladi nastavnik već 1925. godine ušao u veliku knjigu *znamenitih i zaslužnih Hrvata* — a na fakultetu mi je to bio akademik prof. dr. sc. dipl. ing. Danilo Blanuša.

Profesora sam Blanušu po prvi put sreo još kao srednjoškolac.

Za vrijeme Drugog svjetskog rata, 1944. godine, u Bogovićevoj je ulici bila najbolja znanstvena knjižara u Zagrebu. Jednog je dana u izlogu te knjižare, kojoj je vlasnik bio gospodin Štefinović, polubrat profesora Blanuše, osvanula čitava gomila izvanrednih matematičkih publikacija, među njima i dvije knjige *Grundlagen der Mathematik (Osnove matematike)* Davida Hilberta i Paula Bernaysa.

Kad sam spazio te knjige, odjurio sam kući i pokupio svu uštedevinu kako bih ih mogao kupiti. Međutim, tada je — već duboko u ratu — vladala nestašica svega i svačega, pa i knjiga. Stoga mi te knjige nisu htjeli prodati tek tako, negu su tražili da donesem preporuku profesora Blanuše da su mi one zaista potrebne. Blanuša mi je tada napisao lijepu preporuku na osnovi koje mi je onda njegov polubrat izvadio iz izloga dva *Hilbert-Bernaysa* i prodao mi ih.

To je, eto, bio moj prvi susret s profesorom Blanušom — a kasnije ih je bilo na tisuće. Niz godina sam gotovo svakog radnog dana, na povratku s fakulteta, pratio Blanušu kući. On je stanovao u Hercegovačkoj, a ja u Vinogradskoj. Bio sam profesoru Blanuši suradnikom na njegovu *Zavodu za primijenjenu matematiku*, a i kasnije, kad sam prešao na drugi fakultet — svega više od četrdeset godina — do pred kraj njegova života.

Posljednji su naši susreti bili tužni. Jedne je noći, pošavši u svom stanu iz spavaće sobe u WC, pao i slomio kuk. Operirali su ga u bolnici u Zajčevoj ulici i nakon nekog mu je vremena bilo nešto bolje, tako da je poduprt bolničarem mogao prošetati bolničkim hodnikom. Više sam ga puta posjećivao u vremenu od 15 do 17 sati dok su bile dozvoljene posjete, pa bih ga i nahranio kad mu je sestra donijela "jauzn", jer se tada sâm nije mogao služiti rukama.

Blanuša je volio i viceve. U malom ih je notesu imao bezbroj notiranih stenografskim zapisom "šlagvorta" po kojima im je lako mogao rekonstruirati sadržaj. Tako sam mu onda i ja, prilikom tih posjeta u bolnici, znao ispričati kakav novi vic. On bi se tome uvijek osmjehnuo, iako mu sigurno baš i nije bilo do smijeha.

Jednom je vani puhao jak vjetar, a prozor njegove sobe bio je otvoren, pa kad sam odlazio i otvorio vrata, puhnuo je jak propuh i istrгнуo mi iz ruke kvaku vratiju koja su snažno zalupila. Vratio sam se u sobu i ispričao Blanuši zbog nehotične buke, a on je znakovito ponovio glasovitu Cezarovu rečenicu *Et tu, fili Brute*.

Naravno, time nije želio prigovoriti meni, već mi se na ovakav posredni način potužiti kako su ga neki zaboravili. Neki ga njegovi prijatelji niti jednom nisu došli posjetiti u bolnicu "jer, znaš, ja ne volim bolnice".

Kasnije je profesor Blanuša upućen na rehabilitaciju u Stubičke toplice. U toplicama je navodno, iz meni nepoznatih razloga, prestao jesti i uskoro je tamo i umro.



Sl. 1. Zabavlja djecu



Nešto bih se opširnije osvrnuo na okolnosti Blanušina predavanja kojim je Planckove formule relativističke fenomenološke termodinamike podvrgnuo radikalnoj reviziji. O njegovoj korespondenciji oko toga s nekim tadašnjim vodećim stručnjacima opširnije je već govorio profesor Petković.



Sl. 2. U dobrom raspoloženju poseže za džepnim rokovnikom

Za srijedu, 17. prosinca 1947. godine — Blanuši su tada bile 44 godine — najavljen je u Društvu matematičara, fizičara i astronoma Hrvatske kolokvij (predavanje) prof. dr. Blanuše s naslovom *O paradoksim pojma energije*. Po samom se tom naslovu još nije moglo točnije znati o čemu će tu biti riječ. Budući da sam imao sreću da sam mogao prisustvovati tom predavanju i da mi je ono zauvijek ostalo u živom sjećanju kao jedno od najznačajnijih koje sam ikada čuo, bit ću tako slobodan da sjećanja na nj iznesem nešto поближе.

Dvorana u kojoj se kolokviji održavaju bila je dupkom puna i pored postojećih klupa bio je uz desni rub dvorane postavljen još i red stolica; na jednoj od njih sjedio je i naš termodinamičar svjetskog glasa, prof. dr. ing. Fran

Bošnjaković. Posljednji pristigli slušatelji morali su stajati.

Glavni se dio Blanušina predavanja sastojao u kritici Planckovih formula za količinu topline i za apsolutnu temperaturu kako ih je Planck bio postavio za relativističku fenomenološku termodinamiku:

$$Q = Q_0 a, \quad T = T_0 a,$$

gdje su Q_0 i T_0 bile odgovarajuće klasične vrijednosti, a a oznaka za $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Blanuša je obrazlagao zbog čega to nije prihvatljivo i umjesto gornjih Planckovih formula argumentirao kako one zapravo trebaju glasiti

$$Q = Q_0/a, \quad T = T_0/a.$$

Taj je rezultat Blanuša izveo čak na dva načina: jednom korigirajući u Planckovu izvodu njegovu interpretaciju prirasta impulsa što ulazi u izraz za radnju vanjskih silâ, a drugi put preko modifikacije jednog razmatranja M. von Lauea o Carnotovu ciklusu.

Put je tih Blanušinih izlaganja bio — kao i sva njegova predavanja — čist, jasan, siguran i, treba reći, lijep. Na kraju tog dijela kolokvija Blanuša je istaknuo kako pored svega nužnog poštovanja prema autoritetima, konačna i definitivna odluka može i mora pripasti jedino znanstvenoj istini. Vjerujem da je svatko od nas koji smo tada bili u onom auditoriju osjećao kako je ovdje riječ o velikim stvarima: i, posebno, što se tiče relacija koje su bile u pitanju, a i načelno. U diskusiji nakon predavanja za riječ

se javio prof. Bošnjaković. Istaknuo je da on nije teoretičar — bavio se najviše tehničkom termodinamikom — ali da smatra kako je u pravu prof. Blanuša, a ne Planck, poduprijevši to obrazloženjem iz kojih mu se razloga čini nužnim da relativističke vrijednosti za količinu topline i za apsolutnu temperaturu moraju biti veće od klasičnih — kao što izlazi i iz Blanušinih formula — a ne manje — kako bi to bilo prema Planckovim izrazima.

Kratki sažetak Blanušina izlaganja na tom kolokviju tiskan je — na francuskom jeziku — u *Glasniku matematičko-fizičkom i astronomskom*, 1947. br. 4–5, str. 249/50, pod naslovom *Sur les paradoxes de la notion d'énergie*. Te je svoje rezultate prof. Blanuša saopćio i na Kongresu matematičara i fizičara FNRI na Bledu 1949., tiskano u Beogradu 1951., materijali kongresa str. 235–240, pod naslovom *O relativističkoj termodinamici*.

Još 1948. godine Blanuša je o tome korespondirao s W. Paulijem iz Züricha i njegovim suradnikom R. Schlafrothom, o čemu nas je detaljnije u svojem referatu izvijestio prof. Petković. U kapitalnom djelu od 700 stranica H. Arzeliès, *Thermodynamique relativiste et quantique*, Paris, 1968., kao i u kratkoj monografiji C. Müllner, *Relativistic Thermodynamics – A strange Incident in the History of Physics*, København 1967. navode se kao ispravne Blanušine formule, ali se one pripisuju H. Ottu koji je do istih rezultata došao 1960. godine, 13 godina nakon Blanuše.

Planckove relacije bile su prvotno objavljene u *Annalen der Physik* 26 (1908), str. 1–34, u radu *Zur Dynamik bewegter Systeme*; Blanušina je korekcija objavljena, kako je navedeno, četiri desetljeća kasnije — a u međuvremenu nitko nije posumnjao u Planckove formule. Do danas je prošlo daljnjih pet i pol desetljeća, i vjerujem da bi bilo vrijeme da se korigira pogrešna atribucija Blanušinih otkrića H. Ottu jer je ovdje Blanušin prioritet neosporan. To bi, mislim, bio naš dug ne samo akademiku Blanuši osobno, nego i dug ugledu znanosti naše zemlje. Formalno-pravno takvu zahtjevu ne bi moglo biti prigovora jer postoji publikacija u *Glasniku* iz 1947. godine. Osobno sam profesoru Blanuši još za njegova života pokušavao sugerirati da se u tom smjeru poduzmu potrebni koraci, no on to nije prihvatio rekavši da je “važno da je on bio u pravu, a nije bitno kome će za to pripasti slava”.

Inače, Blanuša se teorijom relativnosti bavio već od svojih studentskih dana. Karakterističan je njegov rad *Osnove relativističke kinematike*, objavljen u *Glasniku mat. - fiz. i astr.* T6–1951, str. 1–32, i zanimljivo je usporediti ga s radom Alberta Einsteina *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, objavljenim kao 38. svezak serije *Tagesfragen aus den Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik*.

Einstein u predgovoru svojoj raspravi, na str. III/IV, izrijeком odustaje od elegancije prikaza i, pozivajući se na L. Boltzmannova veli da “eleganciju treba ostaviti krojačima i postolarima”.

Nasuprot tome, Blanuša u svojem citiranom radu izvodi Lorentzove transformacije iz sljedećih pet pretpostavki: 1. Postojanje inercijalnih sustava; 2. Izotropnost prostora; 3. Prvi Newtonov aksiom; 4. Homogenost vremena; 5. Načelo relativnosti. Ad 2. na str. 2. navodi da ga je (tada student)

Vladimir Glaser upozorio na to kako se iz izotropnosti prostora može zaključiti da se slobodna čestica koja ne miruje mora gibati po pravcu (jer bi inače binormala na putanju bila istaknuti smjer). Taj je Blanušin rad uzor elegancije i strogosti prezentacije jedne fundamentalne fizikalne teorije. Mislim da se može ustvrditi kako su njegove konstrukcije i izvođenje, rekao bih *arhitektura* tog rada, savršeno izbrušeni dragulj, pri čemu, kako sam naveo, Blanuša ne zaboravlja zahvaliti jednom svojem studentu.

Želimo li navesti nešto o Blanušinu viđenju ljepote u matematici, nema boljeg načina nego uputiti na njegov predsjednički govor na V. redovitoj godišnjoj skupštini Društva matematičara i fizičara Hrvatske 20. siječnja 1954. godine, kako je zabilježen u *Glasniku* T9–1954, N^o1, str. 65/6.

Gledajući znanstveni rad akademika Blanuše kao cjelinu što je čini nekoliko različitih područja njegovog matematičkog interesa, najznačajniji i najbogatiji dio toga svakako je bio čitav niz radova o izometričkom smještavanju jednih u druge prostorâ različite topološke povezanosti, o čemu je detaljnije govorio profesor Ivanšić. Za razliku od njegova rada na korekciji Planckovih formula relativističke fenomenološke termodinamike, ovi su njegovi rezultati imali značajne i brojne odjeke u svijetu, pa je o njima, pored ostalog, održavan i semestralni seminar na moskovskom univerzitetu Lomonosova. Onome što je o tome ovdje već navedeno dodao bih samo još da je po njima Blanuša jedini hrvatski matematičar (a i šire, jedini s područja bivše Jugoslavije) koji je ušao i u autoritativnu japansku matematičku enciklopediju *Sugaku jiten*, što ju je izdalo Društvo japanskih matematičara uz suradnju njihovih 250 najeminentnijih članova. U tom se djelu u izdanju *Iwanami shoten*, Tokyo 1962., na str. 612. govori o Blanušinu izometričkom smještenju klase C^∞ ravnine Lobačevskoga u šesterodimenzionalni euklidski prostor i, općenitije H^n u E^{6n-5} .

Matematičar koji pomno čita te Blanušine radove o izometričkom smještavanju bit će često zadivljen, pa i — rekao bih — upravo zapanjen virtuoznošću kojom Blanuša konstruira višestruko složene funkcije kojima će ostvariti željeno smještenje, s nizom svojstava kojima nije lako prozreti međuovisnost, međuuvjetovanost i kompatibilnost potrebne za postizanje uzajamno jednoznačnih preslikavanja u pitanju, dakle, recimo, bez samoprodiranja i sličnog odgovarajućih geometrijskih tvorevina. Za svakoga koji je za to imao priliku i mogućnost bilo je posebno zanimljivo — pravi užitak “matematičke estetike” — pratiti kako je akademik Blanuša, hvatajući se u koštac sa sve novim i sve težim problemima iz tog područja, iz dana u dan i iz tjedna u tjedan brusio, polirao i uljepšavao transformacijske relacije kojima će postići traženo smještenje. U tim Blanušinih konstrukcijama koje su sjajni primjeri kako matematika nije samo znanost, nego i umjetnost u najužem kreativnom smislu te riječi, vidi se i stalno osjeća sretna okolnost sjedinjenosti u osobi akademika Blanuše suptilnog i strogog logičara, maštovitog inženjera i briljantnog kombinatoričara. Za razliku od mnogih radova drugih autora u kojima su često bili dani tek egzistencijalni dokazi ili samo načelno konstruktivni dokazi — primjerice u smislu eksplicitnog navođenja određenog konvergentnog postupka iteracije koji će u limesu dati traženo smještenje — Blanušini su eksplicitni zatvoreni izrazi konstruirani pomoću općepoznatih funkcija konstruktivni na znatno

višoj razini, koja ja ujedno i dublja i elementarnija i fundamentalnija. Blanuša mi je svaki od tih radova prije tiskanja davao na kontrolno čitanje jer su često uključivali pomalo mukotrpne provjere tehničkog izračunavanja vrlo kompliciranih derivacija — a te su provjere bile, metaforički rečeno, prave matematičke poslastice, jer se redovno tek putem njih mogao dobiti uvid u heurističke ideje koje su dovele do konačnih konstrukcija.

Nešto treba reći i o opsežnom Blanušinom udžbeniku *Viša matematika* koji u četiri sveska obuhvaća dvije i pol tisuće stranica. Motivacija tog djela nije bila koncipiranje neke “supermoderne” monografije, nego izrada klasičnog udžbenika matematičke analize, bogatog sadržajem i metodama, koji će u prvom redu biti namijenjen nadarenom studentu koji je dublje zainteresiran, ali i stručnjaku. U takvim je okvirima tekst pisan izuzetno strogo i čisto, besprijekorno i s pedagoške i s metodičke strane; nadalje, to je izuzetno zanimljivo štivo i za onog matematičara kojem je sav taj materijal — što se *rezultata* tiče — poznat, jer ga Blanuša vrlo često iznosi na posve nov i originalan način, tako da gotovo svako poglavlje uključuje i njegove izvorne priloge u duhovitim i lijepim modifikacijama nekih dokaza klasičnih teorema više matematike — poput, recimo, izvoda

Taylorova reda ili limesa od $\frac{1}{x} \sin x$ kad $x \rightarrow 0$. U tom smislu vrednovano, to je veliko Blanušino djelo nesumnjivo među najboljima takve vrste i velika je šteta što ga on zbog narušenog zdravlja nije mogao završiti i zaokružiti u prvobitno zamišljenom opsegu. Šteta je također da se — zbog tehničkih poteškoća, ali i neposlovnosti naših izdavača — nije ostvario prijedlog stranih izdavačkih kuća da taj udžbenik bude preveden i objavljen na njemačkom i na engleskom jeziku. Šteta je, konačno, i to što zbog nerazumijevanja jednog recenzenta nije došlo do tiskanja Blanušine *Više matematike* u četiri sveska u drugom izdanju, jer je prvo, odavno rasprodano, teže dostupno zainteresiranom čitatelju.



Dok je u Zagrebu još postojao zajednički Tehnički fakultet ili bar zajednički Zavod za primijenjenu matematiku, obično bismo svi u Zavodu potkraj školske godine otišli na zajedničku večeru. Tako je bilo i 1960. godine. Dobro se sjećam kako smo se našli u restauraciji Matice hrvatskih obrtnika u Ilici. Kad je večera bila gotova, čekali smo da konobar donese račun pa da ga podijelimo sa 15 ili koliko nas je već bilo prisutnih matematičara našeg Zavoda. No, tada se digao prof. Blanuša i, pomalo uzbuđen, rekao kako je upravo obaviješten da mu je dodijeljena (ako se dobro sjećam, tada po prvi put u nas ustanovljena) Republička nagrada za znanost *Ruder Bošković* — i tako on sada želi da to bude *njegova* večera. I sâm je platio čitav račun za sve nas, što je bio nemali dio iznosa njegove nagrade.



Akademik Blanuša bio je velik matematičar ne samo po tome što je kao matematičar bio velik, nego i po tome što *nije* bio *samo* matematičar. Imamo li još matematičara koji bi, poput njega, na glasoviru svirali Chopina

ili naizust recitirali duge pasuse iz Goetheova Fausta ili Nietzscheova Zaratustre? Blanuša je bio velik matematičar i po svemu onome o čemu se s njim moglo razgovarati kad *nije* bila riječ o matematici.



Sl. 3. M. P. Karikatura Blanuše ($\approx$ 1939. god)

Blanuša je bio velik matematičar i po tome što se nikad nije gradio velikim — po čemu ga se također sjećaju tisuće i tisuće njegovih studenata i deseci njegovih suradnika. Nikad mu nije bilo “ispod časti” govoriti ili pisati o takozvanim “malim” stvarima. Listamo li stara godišta *Glasnika*, naći ćemo u izvještajima o radu Društva niz Blanušinih nastupa na *Večerima slobodnih tema, saopćenja i razgovora*, gdje je govorio i o takvim “sitnim” stvarima kao što je, primjerice, izvođenje Heronove formule — i o takvom materijalu on je znao reći mnogo toga novog, zanimljivog i lijepog.

Blanuša je bio velik matematičar i po tome što u njega nije bilo gorčine kad je zasluga za nešto što je on učinio pripala nekom drugom — o čemu je već bila riječ. On je pored primljenih priznanja i više negoli zaslužio i neka koja nije primio, a primili su ih i od njega mnogo manje zaslužni — a i to je prihvatio bez gorčine. Osamdesetih godina prošlog stoljeća predložio sam našem II. razredu tada JAZU da se akademik Blanuša kandidira za nagradu AVNOJ-a, što je tada bila najviša državna nagrada. To je bilo prihvaćeno i o tome sam napisao opširno obrazloženi prijedlog koji

je upućen tadašnjoj Saveznoj stručnoj komisiji za te nagrade. Ako sam bio točno obaviješten i ako se dobro sjećam, predsjednik te komisije bio je akademik prof. dr. Krunoslav Ljolje iz Sarajeva, i po ranglisti koju je izradila njegova komisija Blanuša je bio prvi kandidat za Republiku Hrvatsku. No, izbor Ljoljine komisije nije bio definitivni, već ga je još trebala "amenovati" jedna daljnja Savezna komisija političara. A ta Blanušu nije prihvatila tobože zato jer nije sudjelovao u Narodnooslobodilačkoj borbi! Naravno, to nije bio stvarni razlog, jer je ranije nagradu AVNOJ-a primilo nekoliko ljudi koji također nisu bili u NOB-u: u Hrvatskoj, primjerice, akademik Mladen Paić (koji je za vrijeme Drugoga svjetskog rata radio u višijevskoj Francuskoj), a od matematičara akademik Đuro Kurepa (koji je za vrijeme rata radio u Zagrebu) i akademik Bogoljub Stanković koji je bio u Novom Sadu. I tako je onda ta "viša" komisija nagradu AVNOJ-a dodijelila po Ljoljinoj komisiji nižepozicioniranom kandidatu.

Blanuša je bio velik matematičar i po tome što se uvijek iskreno rado-
vao svakom uspjehu svakog našeg matematičara, pa i onih među njima koji se nisu uvijek radovali njegovim uspjesima ili su ih čak pokušavali obezvrijediti, omalovažiti njihovo značenje.

Blanuša je bio velik matematičar i po tome što je uvijek prelazio preko toga što mu ponetko nije uvijek uzvraćao pažnju pažnjom, brigu brigom, pomoć pomoći i dobro dobrim.

Ukratko, akademik Danilo Blanuša bio je velik matematičar i po tome što je i *kao čovjek* bio velik.

Običaj je da se govoreći o čovjeku koji više nije među nama ne kaže ništa lošeg: *De mortuis nihil nisi bene*. No, ako bismo za inat htjeli biti nekonformisti i zapitati se, za volju neke "aspolutne" objektivnosti, je li u Blanušinu životu bilo nečeg s čime se ne bismo složili, sitna bi nam se zrnca pijeska rasula među prstima i jedva da bi zaostalo išta vrijedno spomena. Pa zato, kad se netko od nas koji smo ga blisko poznavali dugi niz godina i sâm bude spremao na odlazak — nitko ne zna kamo, kako i zašto — morat će, razmislivši o tome koja je bila vrijednost života koji mu je bio dan i koji će biti uzet od njega, na silaznu, tešku i vrijednu zdjelicu vage staviti i poznanstva ljudi koje je sreo i kojih se sjeća, a koji nisu bili tek obični i svakodnevnici nego izuzetni ljudi. A jedno od velikih među takvim sjećanjima bit će sjećanje na akademika Danila Blanušu. Ono danas, na stotu obljetnicu njegova rođenja nije ništa izbljedio od vremena prije šesnaest godina, kad nas je ostavio.



Omer Mujadžić: "Društvo žednih"
 Juraj Denzler, Omer Mujadžić, Vladimir Matković, Danilo Blanuša, Veljko Gortan,
 Milivoj Uzelac, Vilko Niče.



BLANUŠA MATEMATIČAR

Ivan Ivanšić

Blanušine¹ znanstvene radove iz matematike možemo grubo podijeliti u radove iz teorije (specijalnih) funkcija, radove iz diferencijalne geometrije i radove raznih tema. Iako je to možda gruba podjela, ostanimo pri njoj, jer su neka matematička područja zastupljena po jednim radom. Pokušat ću ukratko opisati najznačajnije doprinose matematičari prema svojim trenutnim saznanjima i znanju, jer sutra se može pokazati da nekom Blanušinom rezultatu nisam pridao odgovarajuće značenje. Broj u uglatim zagrada označava Blanušin rad iz priloženog kronološkog popisa publikacija Danila Blanuše.

Matematičari su uvijek cijenili duhovite i elegantne dokaze matematičkih tvrdnji. Tome je uvijek težio i profesor Blanuša. Niz njegovih dokaza ima to obilježje, pa su ga neki matematičari, npr. J. Karamata, zvali lucidnim matematičarem. Takva su se stremljanja u današnje vrijeme odrazila u pojavi knjige "Proofs from THE BOOK", [A-Z]. Evo ukratko o čemu je riječ. Zabilježeno je da je Paul Erdős (1913. – 1996.) stalno govorio o "The Book" u kojoj Bog čuva savršene dokaze matematičara. Erdős je također govorio sljedeće: "Vi ne morate vjerovati u Boga, ali kao matematičar trebali biste vjerovati u The Book". Blanuša je bio matematičar koji je vjerovao u The Book.

Radovi iz teorije (specijalnih) funkcija

Ukratko ćemo prikazati neke radove iz ove skupine za koje mislimo da su ostavili značajan trag u matematici.

1. Radovi iz područja specijalnih funkcija se u najvećem opsegu odnose na Besselove funkcije, čiji su rezultati sadržani u četiri opsežna rada: *Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija I, II, III, IV* (vidi [9], [18] i [25] u popisu radova), koji su potekli iz doktorske disertacije. Evo tehničkog problema koji je izvor rješavanog matematičkog problema. Na početak

¹ Proširen tekst predavanja održanog 29. svibnja 2003. god. u Hrvatskoj akademiji znanosti i umjetnosti povodom 100. obljetnice rođenja akademika Danila Blanuše i potom ponovljenog 1. srpnja 2003. god. na Kolokviju Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu.

beskonačnog električnog voda priključi se u nekom trenutku napon, dan u ovisnosti o vremenu. Duž voda se onda širi elektromagnetski val i treba naći funkcije koje daju napon i jakost struje u ovisnosti o mjestu i vremenu. Parcijalna diferencijalna jednačba koja određuje tok vala poznata je pod imenom *telegrafska*. Uz stanovite početne i granične uvjete, primjenom Riemannove metode rješavanja promatrane diferencijalne jednačbe dobiva se rješenje iste u integralnom obliku, pri čemu je dobiveni integral tipa konvolucije Besselovih funkcija nultog i prvog reda. Ti su integrali (konvolucije) izračunati pomoću odgovarajućih vrijednosti Besselovih funkcija. Diskusija rješenja dovela je Blanušu do nove vrste integralnih teorema za Besselove funkcije. Navodimo dva rezultata iz [9]:

$$\int_a^t \frac{J_1(t-y)}{t-y} J_0(\sqrt{y^2-a^2}) dy = (t-a) \frac{J_1(\sqrt{t^2-a^2})}{\sqrt{t^2-a^2}},$$

$$\int_a^t J_0(t-y) \frac{J_1(\sqrt{y^2-a^2})}{\sqrt{y^2-a^2}} dy = \frac{1}{a} [55J_0(t-a) - J_0(\sqrt{t^2-a^2})].$$

Takvi rezultati inicirali su daljnja razmatranja koja su vodila na višestruku konvoluciju Besselovih funkcija. Ilustrirajmo to pomoću dvostruke konvolucije Besselove funkcije nultog reda. Neka je

$$F_1(t) = J_0(c\sqrt{t^2-x_1^2}) \text{ za } t > x_1 \text{ i } F_1(t) = 0 \text{ za } 0 \leq t \leq x_1,$$

$$F_2(t) = J_0(c\sqrt{t^2-x_2^2}) \text{ za } t > x_2 \text{ i } F_2(t) = 0 \text{ za } 0 \leq t \leq x_2,$$

$$F_3(t) = J_0(c\sqrt{t^2-x_3^2}) \text{ za } t > x_3 \text{ i } F_3(t) = 0 \text{ za } 0 \leq t \leq x_3.$$

Računa se, dakle, konvolucija

$$F_1(t) * F_2(t) * F_3(t) = \int_0^t dy_1 F_1(t-y_1) \int_0^{y_1} dy_2 F_2(y_1-y_2) F_3(y_2).$$

Kako bi to postigao, dokazao je u [9] i [18] niz općih stavaka koji uključuju izračunavanje različitih suma, nalaženje različitih rekurzija, redukciju niza integrala koji u integrandu uključuju Besselove funkcije, te ispituje konvergenciju različitih nepravih integrala. Postupnim razvojem prvo je došao do izravne formule za konvoluciju dviju Besselovih funkcija višeg reda, a potom i do jednačbi rekurzije za višestruku konvoluciju Besselovih funkcija višeg reda pomoću kojih je našao izravne formule za višestruku konvoluciju. Time je dokazao jedan vrlo općenit integralni teorem za Besselove funkcije. Taj opći rezultat zatim je sveden na jednostavniji oblik, nazvan kanonski, za koji je dokazao da je jedinstven. Ti rezultati nisu mogli ostati nezapaženi u specijaliziranoj matematičkoj literaturi, pa su već u [L] spomenuti radovi [9] i [18] i na str. 282 navodi se jedan od integrala koji je Blanuša reducirao u radu [18].

U teoriju funkcija uključio bih i radove [4], [15], [16], [35], [72]. Radovi [15] i [16] donose, u njegovom stilu, nove elegantne dokaze poznatih stavaka, pa ću se zadržati na rezultatima iz [4], [35] i [72].

2. Osvrnimo se prvo na rad [4] pod naslovom *Upliv diskontinuiteta neke funkcije i njezinih derivacija na Fourierov spektar*. Poznat teorem kaže sljedeće. Neka je

$$f : \langle -\infty, \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R}$$

funkcija klase C^k , $k = 0, 1, 2, \dots$, koja je zajedno sa svojih prvih k derivacija apsolutno integrabilna. Tada za njezin Fourierov spektar

$$E(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx$$

vrijedi ocjena

$$E(y) = o(|y|^{-k}),$$

što je oznaka za

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{|E(y)|}{|y|^{-k}} = 0.$$

Blanuša formalno slabi pretpostavke teorema i promatra slučaj kada $f^{(k)}$ ima u $x = 0$ konačan diskontinuitet i dodatno traži da izvan $x = 0$ postoji $f^{(k+1)}$ i da je $f^{(k+1)}$ apsolutno integrabilna. Pod tim uvjetima dokazuje da vrijedi ocjena

$$E(y) = o(|y|^{-k-1}).$$

3. U radu *Jedno poopćenje integralkosinusa*, [35] u popisu radova, polazi od integrala

$$\int_x^\infty t^p \cos t dt.$$

Taj integral divergira za $p \geq 0$. Za $p = -1$ zove se *integralkosinus* i označava sa $Ci(x)$. U analogiji s pojmom sumabilnosti redova uvodi pojam A-sumabilnosti integrala $\int_a^x f(t) dt$ za $x \rightarrow \infty$ i dokazuje A-sumabilnost gornjeg integrala za $p \geq 0$.

4. Rad *On Periodic Functions*, [72] u popisu radova, detaljno istražuje pod kojim uvjetima je suma dviju realnih periodičnih funkcija definiranih na skupu realnih brojeva R ponovo periodična funkcija. Funkcija $f : R \rightarrow R$ je periodična ako postoji realan broj P tako da vrijedi $f(x+P) = f(x)$ za svaki $x \in R$. Najmanji P s tim svojstvom (ako postoji) zove se temeljni (osnovni) period funkcije f . Rezultati istraživanja su sadržani u sedam teorema, čiji su dokazi spretno provedeni, uglavnom pomoću elementarne teorije brojeva i Hamelove baze. Ako f_1 i f_2 imaju isti period P , onda i njihova suma $-f_3$ ima period P . Time dolazimo do jednakosti

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = 0.$$

Ako tu jednakost promatramo, onda se primjerima može provjeriti da zajednički period P može, ili ne, biti temeljni period jedne, dviju ili svih triju funkcija f_1, f_2, f_3 , pa se postavlja sljedeće pitanje: ako su dana tri broja P_1, P_2, P_3 , postoje li tri funkcije, f_1, f_2, f_3 kojima su brojevi P_1, P_2, P_3 temeljni periodi (dakle periodične funkcije), i koje zbrojene daju nulu te kakva su njihova svojstva? To je pitanje koje Blanuša istražuje. Da se ne izgubimo u nekim detaljima i pojmovima, citirat ćemo jedan od teorema koji su dokazani u radu:

Ako su P_1, P_2, P_3 tri komenzurabilna broja, tada postoje funkcije f_1, f_2, f_3 sa zbrojem nula i temeljnim periodima P_1, P_2, P_3 onda i samo onda ako vrijedi razmjer

$$\frac{1}{P_1} : \frac{1}{P_2} : \frac{1}{P_3} = a : b : c,$$

gdje su a, b, c tri prirodna broja koja su po dva relativno prosta.

Radovi iz diferencijalne geometrije

U tu skupinu spada najviše radova (oko 35 prema popisu radova, ovisno o klasifikaciji). Osvrnut ću se samo na nekoliko radova koji su po mojem mišljenju ostavili trajniji trag u matematici. U većini tih radova dokazuje se egzistencija izometričkog smještenja konačnodimenzionalne Riemannove mnogostrukosti konstantne zakrivljenosti u neku drugu tog tipa, napose u euklidske prostore i Riemannov prostor. Naime, kada se apstraktno uvedu diferencijabilne i Riemannove mnogostrukosti, prirodno se postavlja pitanje jesu li to podmnogostrukosti euklidskih prostora? Za diferencijabilne mnogostrukosti to je u svojim radovima pozitivno riješio H. Whitney [W1–W3]. Kod Riemannovih mnogostrukosti stvar se razvija nešto složenije. Već je 1901. god. D. Hilbert [H] dokazao negativan rezultat. Taj rezultat kaže da hiperbolička ravnina H^2 nije glatka ploha u trodimenzionalnom euklidskom prostoru R^3 . Poslije nekoliko daljnjih negativnih rezultata pojavili su se, ali na lokalnom nivou [J], tj. na nivou imerzija, pozitivni rezultati. Na globalnom nivou pojavila su se istraživanja i rezultati tipa C^r izomeričkih smještenja. U to područje istraživanja spadaju Blanušini radovi i rezultati. Navest ću imena nekoliko matematičara koji su prethodili Blanušinom periodu i napadali su takvu problematiku: H. Weyl, M. Janet, E. Cartan, H. Lewy, C. Tompkins. Spomenut ću i imena istraživača koji su u tom području djelovali kada i Blanuša: S. Chern, J. Nash, N. H. Kuiper, E. Calabi, N. V. Efimov. Neki od njih služili su se Blanušinim radovima, jer u njihovim radovima nalazim navedene Blanušine radove. U Sankt Petersburgu (tada Lenjingradu) sam 1982. god., za vrijeme jednog znanstvenog skupa osobno susreo prof. N. H. Kuipera koji me je, vidjevši otkuda dolazim, zapitao poznajem li prof. Blanušu i što znam o njemu? Bilo je to pet godina prije njegove smrti i tada je prof. Blanuša već bio slabijeg zdravlja.

Razmotrimo malo slučaj plohe (dvodimenzionalne mnogostrukosti) u trodimenzionalnom euklidskom prostoru R^3 . Neka je ploha zadana jednadžbama

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v),$$

gdje su u i v parametri (koje zovemo Gaussove koordinate) na plohi. Znamo da je u euklidskom prostoru R^3 kvadrat diferencijala luka dan formulom

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Tada formule za diferencijale varijabli x, y, z glase

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial f_1}{\partial u} du + \frac{\partial f_1}{\partial v} dv, \\ dy &= \frac{\partial f_2}{\partial u} du + \frac{\partial f_2}{\partial v} dv, \\ dz &= \frac{\partial f_3}{\partial u} du + \frac{\partial f_3}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

Uvrstimo li to u formulu za ds^2 , dobivamo formulu za kvadrat diferencijala luka na plohi, tj. diferencijalnu formu, koja glasi

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2,$$

gdje je

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial u}\right)^2, \\ g_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial v} + \frac{\partial f_3}{\partial u} \frac{\partial f_3}{\partial v}, \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

Ovom je diferencijalnom formom dana *Riemannova metrika* plohe, inducirana metrikom smještajnog (ambijentnog) euklidskog prostora. Tako, zadamo li ravninu R^2 jednadžbama $x = u$, $y = v$, $z = 0$, onda je inducirana metrika dana sa $ds^2 = du^2 + dv^2$, dakle podudara se s euklidskom metrikom na R^2 . Time je, sa $x = u$, $y = v$, $z = 0$, ravnina R^2 izometrički smještena u R^3 . Međutim, funkcije g_{11} , g_{12} i g_{22} od kojih je izgrađena diferencijalna forma ds^2 , možemo po volji izabrati, čime dobivamo različite metrike. Recimo da na ravnini R^2 zadamo ovu diferencijalnu formu: $ds^2 = du^2 + ch^2 u dv^2$. Ravnina s tako uvedenom Riemannovom metrikom zove se *hiperbolička ravnina* i označava sa H^2 . Tada ta metrika nije inducirana metrikom ambijentnog prostora R^3 . Kako smo već istaknuli, D. Hilbert je još 1901. god. dokazao da to nije moguće postići u R^3 . Možemo se pitati je li to moguće u nekom R^n , $n > 3$?

Vratimo se natrag funkcijama g_{11} , g_{12} , g_{22} iz kojih se u diferencijalnoj geometriji gradi jedna osnovna veličina koja se zove *Gaussova zakrivljenost*:

$$\kappa = \frac{1}{4G^2} \{g_{11}A + g_{12}B + g_{22}C - 2GD\},$$

gdje je

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u}\right)^2, \\ B &= \frac{\partial g_{11}}{\partial u} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - 2 \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \frac{\partial g_{12}}{\partial v} + 4 \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \frac{\partial g_{22}}{\partial v}, \\ C &= \frac{\partial g_{11}}{\partial u} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - 2 \frac{\partial g_{11}}{\partial u} \frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}$$

$$D = \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^2},$$

$$G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

Općenito se ta veličina mijenja od točke do točke, međutim, κ je veličina koja je invarijantna na transformacije koordinata na plohi. U tzv. neeuclidskim geometrijama², tj. u eliptičkoj geometriji, u hiperboličkoj geometriji (geometriji Lobačevskog), i u graničnom slučaju, u euklidskoj (paraboličkoj) geometriji, Gaussova zakrivljenost je konstantna na cijeloj plohi, i to $\kappa > 0$ u eliptičkoj, $\kappa < 0$ u hiperboličkoj i $\kappa = 0$ u euklidskoj geometriji. Za spomenutu metriku $ds^2 = du^2 + \gamma|h^2 u dv^2$ račun daje $\kappa = -1$, dok za euklidsku metriku $ds^2 = du^2 + dv^2$ daje $\kappa = 0$.

Plohe su topološki klasificirane, pa navodimo neke topološke tipove ploha (kojih ima beskonačno) koje dopuštaju konstantan κ danog predznaka. Plohe imaju isti topološki tip ako se jedna ploha može na drugu neprekinuto deformirati, što znači da između njih postoji 1 – 1 funkcija, pri čemu su i funkcija i njezina inverzna funkcija neprekinute. Npr., sfera i torus su plohe različitog topološkog tipa, dok su sfera i elipsoid istog topološkog tipa. Tako je metrika za koju je $\kappa = 0$ moguća na topološkim tipovima ovih ploha: ravnina, Möbiusova vrpca, kružni valjak, torus i Kleinova boca. Metrika za koju je $\kappa < 0$ moguća je na beskonačno mnogo topoloških tipova ploha, među kojima je i ravnina. Metriku s konstantnim $\kappa > 0$ dopuštaju ova dva topološka tipa: sfera i projektivna ravnina. Ako je r polumjer sfere S^2 , onda je $\kappa = \frac{1}{r^2}$. Ako identificiramo dijametralno suprotne točke sfere S^2 , dobivamo zatvorenu plohu P^2 koja se zove projektivna ravnina. Ta se ploha, kao i Kleinova boca, ne mogu realizirati u R^3 , nego u R^4 .

Prikažimo sada neke Blanušine rezultate iz niza rezultata o izometričkim smještenjima.

1. Blanušin rad [53, vidi popis radova], koji nosi naslov *Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume*, zaslužuje da ga se posebno istakne. U njemu je pozitivno odgovorio na maloprije postavljeno pitanje i dokazao sljedeća dva teorema:

(i) hiperbolička ravnina H^2 dopušta C^∞ izometričko smještenje u šestorodimenzionalni euklidski prostor R^6 ;

(ii) n -dimenzionalni hiperbolički prostor H^n dopušta C^∞ izometričko smještenje u R^{6n-5} .

Ti su rezultati dobiveni nalaženjem eksplicitnih funkcija koje to realiziraju, dakle, direktno. O prepoznavanju vrijednosti tih rezultata najbolje govori referencija [S] u kojoj je Solodovnikov, u rubrici "Novosti iz matematike" časopisa "Matematičeskoe prosvješćenie", prikazao taj rad na dvije i pol stranice.

² Vidi u biografskom dijelu Blanušin tekst vezan uz Nagradu Ruđer Bošković

2. Osim hiperboličke ravnine postigao je C^∞ izometrička smještenja za još tri 2-dimenzionalne Riemannove mnogostrukosti s hiperboličkom metrikom. U radu *La bande de Möbius infiniment large à métrique hyperbolique plongée dans un espace de Hilbert*, Bull. Sci. Cons. Acad. Youg. [38] beskonačnu Möbiusovu traku C^∞ izometrički smjestio u Hilbertov prostor, a u radu *C^∞ -Isometric imbeddings of cylinders with hyperbolic metric in Euclidean 7-space* [62], to je postigao u R^7 za valjak, sa zatvorenom i bez zatvorene geodetske linije.

3. U svojim radovima obuhvatio je i sve plošne oblike koji se javljaju u okviru *Klein-Cliffordovog programa* i dopuštaju metriku konstantne pozitivne zakrivljenosti (eliptičku metriku). Za n -dimenzionalni eliptički prostor E^n postigao je sljedeće:

(iii) n -dimenzionalni eliptički prostor E^n dopušta algebarsko izometričko smještenje u $R^{n(n+3)/2}$.

Ovo zadnje postignuto je u radu [13]. Dakle, E^n je podmногоstrukost od $R^{n(n+3)/2}$, shvaćene kao Riemannove mnogostrukosti opskrbljene analitičkom metrikom.



Sl. 1. Felix Klein
(1849. – 1925.)



Sl. 2. William Kingdon Clifford
(1845. – 1879.)

4. U radu [82] *Imbeddings of some 3-dimensional Euclidean spatial forms in spaces of constant curvature*, Rad Jugoslav. akad. znan. umjet. 331(1965), 237–262., istraživao je mogućnost izometričkog smještenja stanovitih trodimenzionalnih mnogostrukosti koje se dobivaju kao produkt dvodimenzionalne mnogostrukosti (plohe) i jednodimenzionalne mnogostrukosti (a te su pravac R^1 i kružnica S^1). Pritom je varirao i ambijentni prostor, npr. $R^3 = R^2 \times R^1$ je izometrički realizirao u sedam-dimenzionalnoj sferi S^7 , dok je produkt Kleinove boce K i kružnice S^1 izometrički realizirao u H^6 (6-dimenzionalnom hiperboličkom prostoru) i u R^6 (6-dimenzionalnom euklidskom prostoru). Sva su smještenja dana

eksplicitno, pri čemu se služio svojim bogatim znanjem klasične diferencijalne geometrije.

Razno

Izdvojimo neke radove iz ove skupine koji su ostavili značajan trag u matematici.

1. Tu bih se u prvom redu zadržao na radu [10], koji nosi naslov *Problem četiriju boja*. U tom radu Blanuša je konstruirao graf (vidi sliku) sa sljedećim svojstvom: *iz svakog vrha izlaze po tri grane (trivalentan graf) čije je grane nemoguće obojiti trima bojama tako da iz svakog vrha izlaze sve tri boje, kratko ćemo govoriti da je graf 3-obojev.*

Istinitost gornje tvrdnje za Blanušin graf nije očita, pa uvrštavamo Prilog 3 u kojemu su objavljena dva dokaza te tvrdnje.

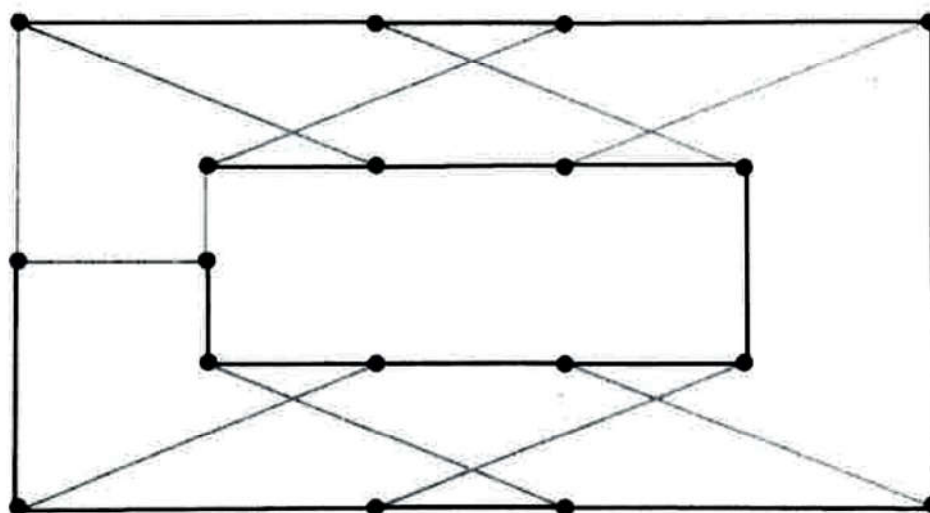
Poslužimo se malo vremeplovom. U to vrijeme je “problem četiriju boja” bio neriješen i dosta popularan. Evo o čemu se radi. Zamislimo na globusu (sferi) ili u ravnini nacrtanu zemljopisnu kartu kojom su sfera ili ravnina podijeljene u konačan broj povezanih područja. Tu kartu treba obojiti tako da područja sa zajedničkom granicom budu raznobojna. Pitanje je vrlo praktično: *Koliko je najmanje različitih boja dostatno za bojenje svake karte pod spomenutim uvjetom?* To je vrlo star problem, a istraživanja su našla pisani trag u pismu A. de Morgana upućenom W. R. Hamiltonu s nadnevkom 23. listopada 1852. god. Na sastanku Londonskog matematičkog društva 13. lipnja 1878. god. A. Cayley je ponovo postavio to pitanje. Lako se vidi da tri boje nisu dostatne, pa se pitalo, a što je sa četirima bojama? 1879. god. A. B. Kempe objavio je rješenje koje se pokazalo netočnim. Na to je 1890. god. P. J. Heawood dokazao da je pet boja dostatno. Tako je rastao glasoviti “problem četiriju boja”, koji je više od 100 godina bio otvoren problem i koji su mnogi matematičari i nematematičari pokušali riješiti. Jasno je da granice (međe) na karti tvore graf, čija čvorišta predstavljaju tromeđe, četveromeđe, ... Izbor karata je pojednostavljen utoliko što je pokazano da je dovoljno promatrati samo karte s tromeđama. To znači da su granice takvih karata trivalentni grafovi. No u obzir dolaze samo oni trivalentni grafovi koji se ne raspadnu uklanjanjem jedne grane. Naime, karta kojoj su granice predstavljene takvim grafom imala bi granicu koja je obojena istom bojom s obje strane. Grafovi koji se ne raspadaju rezanjem jedne grane zovu se grafovi bez “mostova”. Vezu između problema četiriju boja i bojenja trivalentnih grafova ostvario je 1890. god. P. G. Tait. On je dokazao da je problem četiriju boja ekvivalentan bojenju trivalentnih grafova bez mostova trima bojama, i to tako da su grane u svakom vrhu različito obojene, dakle da su 3-obojevi. Smatrajući očitim da su trivalentni grafovi 3-obojevi, objavio je drugo rješenje problema četiriju boja. To zadovoljstvo je kratko trajalo jer je 1898. god. J. Petersen dokazao da svi trivalentni grafovi nisu 3-obojevi. Taj graf danas nosi njegovo ime. Sam graf bio je poznat i prije, npr. pod

nazivom “netrpeljivi susjedi”: tri susjeda žele uvesti plin struju i vodu u svoje kuće, ali pod uvjetom da se vodovi ne križaju (prelaze jedan preko drugog).

Nakon ovog kratkog vremeplova možemo se slobodno pitati u čemu je bila čar tražiti novi trivalentni graf koji nije 3-obojev? Evo u čemu. U to se vrijeme općenito smatralo da je Petersenov graf jedini s tim svojstvom, što se nije uspijevalo dokazati. Time je Blanuša u prvom redu pokazao da je ta slutnja neistinita. I Petersenov i Blanušin graf su nesferni (ne mogu se realizirati na sferi), a promatrane karte su na sferi (ili u ravnini), pa je Blanuša ovako rezonirao. “Kad bi se uspjelo te mreže (Blanuša je koristio termin mreža) potpuno obuhvatiti i klasificirati, možda bi se dalo ustanoviti ima li među njima sfernih, pa bi onda tim putom bio riješen problem četiriju boja.” Postavši stopedesetogodišnjak, problem četiriju boja je pozitivno riješen. Riješili su ga K. Appel i W. Haken 1977. god. uz pomoć kompjutera (teorijski je problem sveden na konačan broj karata koje su onda provjerene).

Vidimo da Blanušinim putem nije riješen taj problem. Međutim, u radu su postignuti rezultati koji su ostavili trajan trag u matematici, pa se taj rad i danas citira³. Bio je to drugi u povijesti poznat graf s tim svojstvom. Danas se u engleskoj literaturi susreće pod imenom “Blanuša’s snark”. Snark je naziv za trivalentni graf koji nije 3-obojev. Danas imamo cijelu teoriju takvih grafova, koja je inicirana pojavom Blanušinog grafa. Više o tome može se naći u [Iv], a o današnjem razvoju “snarkova” u [Wa-W]. Naziv “snark” uveden je u [G]. M. Gardner je 3-valentne grafove koji nisu 3-obojevi, a koji su, prema [Is], rijetki i teško ih je naći, nazvao “snarks” (tajanstvena nepostojeća bića), motiviran pjesmom “The Hunting of the Snark” Lewisa Carrolla.

BLANUŠIN GRAF



Sl. 3. Izložak na izložbi “Znanost u Hrvata”, lipanj – listopad 1996. g. Graf je obojen četirima bojama.

³Sretna je okolnost da je radu dodao poduži sažetak na francuskom jeziku, pa je rad odmah uočen u svijetu.

Blanušin graf nije jedini rezultat rada [10]. Kako bi dokazao da nađeni graf nije 3-obojev, dokazao je jednu vrlo snažnu lemu (vidi npr. [H-S], str. 82–83.). Evo o čemu ta lema govori:

Neka je G povezan trivalentan graf i neka je 3-obojev. Ako korak po korak siječemo grane dok se graf ne raspadne u dva dijela (tj. postane nepovezan), i ako b, c i p označavaju broj presječenih bijelih, crvenih i plavih grana, onda brojevi b, c i p imaju isti paritet, tj. ili su sva tri parna ili sva tri neparna.



Sl. 4. Blanušin graf na logotipu Hrvatskog matematičkog društva

Hrvatsko matematičko društvo je za svoj logotip izabralo Blanušin graf. Autor logotipa je Nenad Dogan (vidi sliku 4). Graf je također ovjekovječen na prigodnoj poštanskoj marki Hrvatske pošte godine 2000. Marka je izdana povodom Svjetske godine matematike. Marka je prigodno puštena u promet 15. lipnja 2000., na dan otvorenja Drugog hrvatskog kongresa matematičara. Dizajner marke je Boris Ljubičić (vidi sliku 5).



Sl. 5. Blanušin graf na prigodnoj poštanskoj marki

2. Istaknimo rad [7], koji nosi naslov *Über die Anzahl der Bedingungsgleichungen in beliebigen geodätischen Netzen*, i po naslovu spada u geodeziju. Točno, problem iz kojeg proistječe Blanušino matematičko razmatranje spada u geodeziju, no sve ostalo u tom radu je čista matematika koja je, usudujem se reći, prethodila matematici u [10]. U geodetskim mjerenjima i računanjima postoje uvjetne jednadžbe (npr. zbroj kutova u trokutu je 180°) da bi se održala suvislost mreže. Obično se radi s triangulacijskim (trokutnim) mrežama i za njih je bio poznat broj međusobno nezavisnih uvjetnih jednadžbi. Blanuša razmatra opće mreže i topološkom metodom izvodi formule za broj međusobno nezavisnih uvjetnih jednadžbi koje kao

poseban slučaj sadržavaju prethodno poznate formule. On geodetsku mrežu tretira općenito kao topološku tvorevinu (kompleks) nad kojom vrši zaključivanje.

3. Rad [86], naslovljen *The functional equation* $f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$, spada u teoriju funkcionalnih jednažbi i to je njegov jedini rad iz tog područja. Tu se radi o funkcionalnoj jednažbi

$$f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y),$$

koja je bila duže rješavana pod dodatnim pretpostavkama (diferencijabilnost, integrabilnost, neprekinutost u nekim točkama). Susrevši se s pitanjem njezinog općeg rješenja, brzo ga je riješio pokazavši da je ekvivalentna tzv. Jensenovoj funkcionalnoj jednažbi

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x + y}{2}\right),$$

čije je opće rješenje poznato. Učinio je to “golim rukama” koristeći svoje ogromno znanje klasičnih područja matematike.

4. U seriji radova objavljenih u “Matematičko-fizičkom listu” pojmovno je i plastično učenicima približavao neeuklidsku geometriju, teoriju relativnosti i druge sadržaje. Evo jednog odlomka:

“Primarna svrha matematike je praktična. Njezina potreba u svojim najjednostavnijim oblicima svakome je poznata iz dnevnog života; čovjek mora znati računati. No i kompliciraniji dijelovi matematike su potrebni.

Čovjek stavljen u prirodu mora se boriti protiv često neprijateljskih prirodnih sila. U tu svrhu mora te sile i njihove zakone najprije što točnije upoznati, da uzmogne njima vladati i iskoristiti ih za svoje potrebe. Istraživanjem tih prirodnih sila bavi se fizika u širem smislu riječi, tj. uključujući one znanosti koje su se tijekom vremena od fizike otcijepile kao samostalne znanosti od kojih ćemo kao primjer spomenuti kemiju.

Prirodni zakoni su takve naravi da je za njihovo spoznavanje, točno formuliranje i primjenjivanje pronađenih zakona potrebna matematika, i to sve kompliciranija matematika što dublje zadiremo u tajne prirodnih zakona.

Iskorištavanje tih prirodnih zakona u praktične svrhe vrši se u tehnici, a za to je opet bezuslovno potrebna matematika. Bez nje se ne bi dala zamisliti današnja naša tehnika. Da nema matematike, ne bismo imali automobila, aviona, električnog tramvaja, električnog osvjetljenja, telegrafa, telefona, a o kakvoj radiotehnici ni govora. Ne treba o tom govoriti, jer je važnost praktične primjene matematike zacijelo svakom jasna. Bez nje bismo spali na sasvim niski stupanj civilizacije.

No ovo nije jedina vrijednost matematike. Htio bih u ovom razmatranju staviti akcent na kulturni značaj te znanosti u idealnom smislu.

Matematika, iako stalno podstrekavana od fizike i tehnike, koje joj stavljaju sve kompliciranije i teže zadatke, razvija se i samostalno kao apstraktna znanost bez obzira na primjenljivost svojih rezultata. Bilo bi krivo smatrati

da je takvo razvijanje bez primjene suvišno. U jednu ruku zato jer se često puta iznenada daju primijeniti dijelovi matematike koji se se isprva razvili bez pomisli na primjenljivost. Tako je, npr., bilo sa tzv. Riemann-ovom geometrijom, to je diferencijalna geometrija zakrivljenih prostora povoljnog broja dimenzija, koja je iznenada našla svoju primjenu u Einsteinovoj teoriji relativnosti. U drugu ruku mora se matematičari dopustiti da ona nalazi svoje opravdanje u samoj sebi, u svojoj nutarnjoj vrijednosti kao stvaralačko psihičko bavljenje. Može se reći da matematičar ima izvjesnu srodnost s umjetnikom.”

5. Želim također istaći radove koji po svom sadržaju predstavljaju vrlo nadahnutu opća razmatranja o matematičari. Bilo da su to njegovi govori priređeni za neke prigode (kongresi, skupštine), bilo da se radi o tekstu ponuđenom za objavu u dnevnom tisku. Prilog tome je nedavni pretisak njegovog članka [2] iz 1940. god. objavljenog u tadašnjim novinama.

Da se dobije bolji osjećaj za takve Blanušine radove, donosimo prijevod vrlo nadahnutog članka o Gaussu, koji je time po prvi puta dostupan na hrvatskom jeziku. Svi ti tekstovi vrlo su produhovljeni i gotovo aktualni. Navodimo samo zadnji pasus iz Predsjedničkog govora održanog 20. siječnja 1954. god. na Godišnjoj skupštini Društva matematičara i fizičara (vidi [46]):

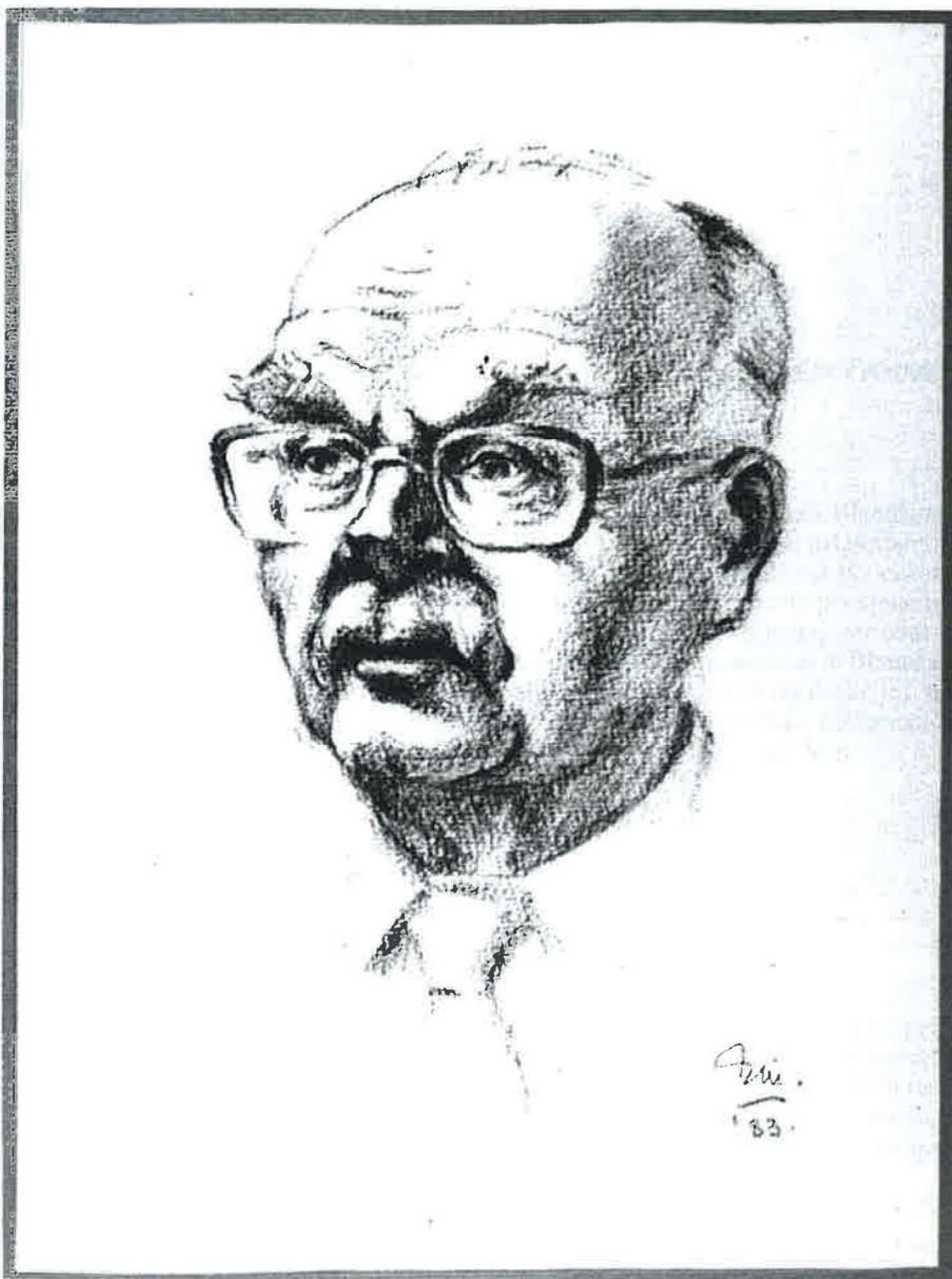
“Matematika je zacijelo najegzaktnija nauka i svijetlo oružje u našoj borbi za vlast nad prirodnim silama. No ona je povrh toga i uzvišena umjetnost. Ako je glazba umjetnost tonova, matematika je umjetnost oštroumlja. Ona je glazba ljudske misli.”

Literatura

- [1]–[95] D. BLANUŠA, Vidi popis radova.
- [C] E. CARTAN, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*, Annales de la société polonaise mathématique **6**(1927), 1–7.
- [C-K] S. CHERN AND N. H. KUIPER, *Some theorems on the isometric imbeddings of compact Riemann manifolds in Euclidean spaces*, Ann. of Math. **56**(No. 3)(1952), 422–430.
- [G] M. GARDNER, *Snarks, Boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem*, Scientific American **234**(No. 4)(1976), 126–130.
- [H] D. HILBERT, *Ueber Flächen von constanter Gausscher Krümmung*, Trans. Amer. Math. Soc. **2**(1901), 87–99.
- [H-S] D. A. HOLTON AND J. SHEEHAN, *The Petersen graph*, Australian Mathematical Lecture Series 7, Cambridge University Press, Cambridge 1993.
- [Is] R. ISAACS, *Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable*, Amer. Math. Monthly **82**(1975), 221–239.
- [Iv] I. IVANŠIĆ, *Blanušin graf*, Poučak br. 1 (2000), 63–69.

- [J] M. JANET, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*, Annales de la société polonaise mathématique **5**(1926), 38–43.
- [K1] N. H. KUIPER, *On C^1 isometric imbeddings I*, Indag. Math. **17**(1955), 545–556.
- [K2] ———, *On C^1 isometric imbeddings II*, Indag. Math. **17**(1955), 583–689.
- [K3] ———, *On some algebraic isometric imbeddings*, Simon Stevin **32**(No. 1)(1958), 23–28.
- [Le] H. LEWY, *On the existence of a closed convex surface realizing a given Riemannian metric*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **2**(No. 2)(1938), 104–106.
- [Lu] Y. L. LUKE, *Integrals of Bessel functions*, Mc Graw Hill, New York 1962.
- [N1] J. NASH, *C^1 isometric imbeddings*, Ann. of Math. **60**(1954), 383–396.
- [N2] ———, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **63**(1956), 20–63.
- [S] A. S. SOLODOVNIKOV, *D. Blanuša. Novaja modelj ploskosti Lobačevskogo*, Matematičeskoe prosvješćenje br. 5 (1960), 241–243.
- [T1] C. TOMPKINS, *Isometric embedding of flat manifolds in Euclidean space*, Duke Math. J. **5**(1939), 58–61.
- [T2] ———, *A flat Klein bottle isometrically embedded in Euclidean 4-space*, Bull. Amer. Math. Soc. **5**(1941), 508.
- [Wa-W] J. J. WATKINS AND R. J. WILSON, *A survey of snarks*, Graph Theory, Combinatorics and Applications Vol. 2 (Kalamazoo, MI, 1988), J. Wiley, New York 1991., 1129–1144.
- [We] H. WEYL, *Über die bestimmung einer geschlossenen flache durch ihr linienelement*, Vierteljahrschrift der naturforschender Gesellschaft, Zurich **61**(1916), 40–72.
- [Wh1] H. WHITNEY, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. (2), **37**(1936), 645–680.
- [Wh2] ———, *The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space*, Ann. of Math. (2), **45**(1944), 220–246.
- [Wh3] ———, *The singularities of a smooth n manifold in $(2n - 1)$ -space*, Ann. of Math. (2) **45**(1944), 247–293.





Ivan Einwalter: Danilo Blanuša 1983.

BLANUŠINI PRILOZI TEORIJI RELATIVNOSTI

Tomislav Petković

Hrvatskoj i svjetskoj znanstvenoj javnosti uglavnom su poznati Blanušini doprinosi u matematici i fizici. U povijesti znanosti ipak nisu još potpuno istraženi i vrednovani onoliko koliko zaslužuju. U fizici su oni povezani s teorijom relativnosti, napose specijalnom u pogledu njezine primjene u fenomenološkoj termodinamici pri relativističkoj transformaciji termodinamičkih veličina količine topline i temperature. U matematici je Blanuša dao značajne priloge u teoriji specijalnih funkcija (Besselove funkcije), u izometričkim smještenjima hiperboličkih u euklidske prostore (diferencijalna geometrija), te u teoriji grafova slavnim Blanušinim grafom.

1. Uvod

U pripremanju ovog članka pored ostalih izvora najviše sam koristio pet knjiga: Paulijevu o teoriji relativnosti¹, Bornovu o Einsteinovoj teoriji relativnosti², Blanušinu o teoriji relativnosti³, Straumannovu o općoj relativnosti⁴ i relativističkoj astrofizici te McGlinnovu⁵ Uvod u relativnost. Uz to, dragocjenim povijesno-znanstvenim izvorom bilo mi je izvorno

¹ W. Pauli, "Relativitätstheorie" in *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Vol. 5, Part 2, B. G. Teubner, Leipzig, 1921, pp. 539–775.

"Supplementary Notes by the Author", in *Theory of Relativity*, Pergamon Press, Inc., New York, 1958, pp. 207–232.

W. Pauli, *Theory of Relativity*, Translated from German by G. Field, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

² Max Born, *Einsteinova teorija relativnosti i njezini fizički osnovi*, prema trećem izdanju preveo, dodatkom i bilješkama nadopunio D. Blanuša, znanstvena djela Hrvatskog prirodoslovnog društva, Knjiga I, "Tipografija" grafičko-nakladni zavod, Zagreb, 1948.

³ Danilo Blanuša, *Teorija relativnosti*, Mala biblioteka za matematiku, fiziku i kemiju br. 7, Školska knjiga, Zagreb, 1955.

⁴ Norbert Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, With 81 Figures, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, Second Printing, 1991. Title of the German edition: *Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik*, 2. Auflage (Lecture Notes in Physics, Vol. 150).

⁵ William D. McGlinn, *Introduction to Relativity*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 2003.

Blanušino pismo iz 1948. godine, upućeno W. Pauliju u Zürichu te Blanušino pismo njegovom dobrom prijatelju P. Urbanu u Grazu⁶. Dobrom početnikom bila mi je i *Spomenica* posvećena Danilu Blanuši u izdanju JAZU⁷, naročito V. Devidéov prilog, koji je ujedno i urednik *Spomenice*. Prve dvije je glavnim knjigama o relativnosti smatrao i Blanuša, a Blanušinu knjigu i danas traže zainteresirani gimnazijalci kad dobiju maturalsnu radnju iz teorije relativnosti. Straumannova knjiga jest svjetski udžbenik, dok petu W. D. McGlinnovu knjigu tiskanu 2003. godine navodim kao pravi dokaz kako tradicionalni tenzorski stil, što ga je Blanuša koristio u tumačenju i svojim napisima o teoriji relativnosti, živi i u suvremenim prikazima teorije relativnosti.

Blanuša je jedan od najvećih hrvatskih matematičara i fizičara 20. stoljeća koji je živio i stvarao u svojoj domovini. Hrvatski znanstvenici i povjesničari znanosti trebaju još puno učiniti na širenju informacija o Blanušinim znanstvenim doprinosima i njegovom nastavničkom radu. Blanuša se kao matematičar i fizičar na neki način može usporediti s Vladimirom Jurkom Glaserom, poznatim hrvatskim teoretskim fizičarem koji je najveći dio života (od 1957. do smrti, 22. 01. 1984.) radio u Teorijskom odjelu u CERN-u. Glaser je poznat po jednoj od prvih modernih knjiga iz kvantne elektrodinamike na hrvatskom jeziku⁸, što ju je uredio baš dr. Danilo Blanuša, dopisni član JAZU. Glaser se bavio modelima teorije polja, teorijskim aspektima proton-proton i proton-antiproton sudara. Glaser je bio duboko zainteresiran za izučavanje Schrodingerove jednadžbe, a svoje radove o njoj ostavio je neobjavljene⁹. Po tome je Blanušin slučaj donekle sličan Glaserovu: svoje radove iz relativističke termodinamike Blanuša nije objavio u svjetskim časopisima iz fizike.

Svoja poznata predavanja na ETF-u i PMF-u Blanuša je ovjekovječio u kapitalnom četverotomnom djelu *Više matematike* (Tehnička knjiga, Zagreb, 1963. – 1974.). Blanuša je, osim toga, poznat po popularnim javnim predavanjima i prikazima za studente i građanstvo, kojima je više nego itko od njegovih suvremenika otkrivao jednostavnost i harmoniju osnovnih teorija prirode i kompliciranih matematičkih formulacija u njima.

2. Blanušina metoda u relativnosti

Blanušin znanstveni put i njegova metoda na tom putu su konstruktivna interferencija s Einsteinovom teorijom s jedne i Platonovim naukom

⁶ Blanušino pismo poštovanom Profesoru W. Pauliju, nadnevka 15. 03. 1948., poslano iz Tehničkog fakulteta u Kačićevoj 26, tipkani tekst na pisačem stroju s Blanušinim ispravkama. Blanušino pismo Paulu Urbanu u Grazu, Universitätplatz 5, nadnevka 1. 06. 1948. Koncept napisan Blanušinom rukom iz kojeg se vidi da je dopisivanje bilo višestruko, uključujući Urbanove odgovore, te da je Blanuša Urbanu slao separate svojih radova.

⁷ DANILO BLANUŠA 1903. – 1987., *Spomenica preminulim akademikima*, Svezak 50. Razred za mat., fiz., kem. i tehničke znanosti, urednik izv. član V. Devidé, JAZU, Zagreb, 1989.

⁸ V. Glaser, *Kovarijantna kvantna elektrodinamika*, uredio dr. D. Blanuša, dopisni član, JAZU, Zagreb, 1955.

⁹ Prema nekrologu V. J. Glaseru u *CERN COURIER*, Vol. 24, No. 2 (1984), p. 67.

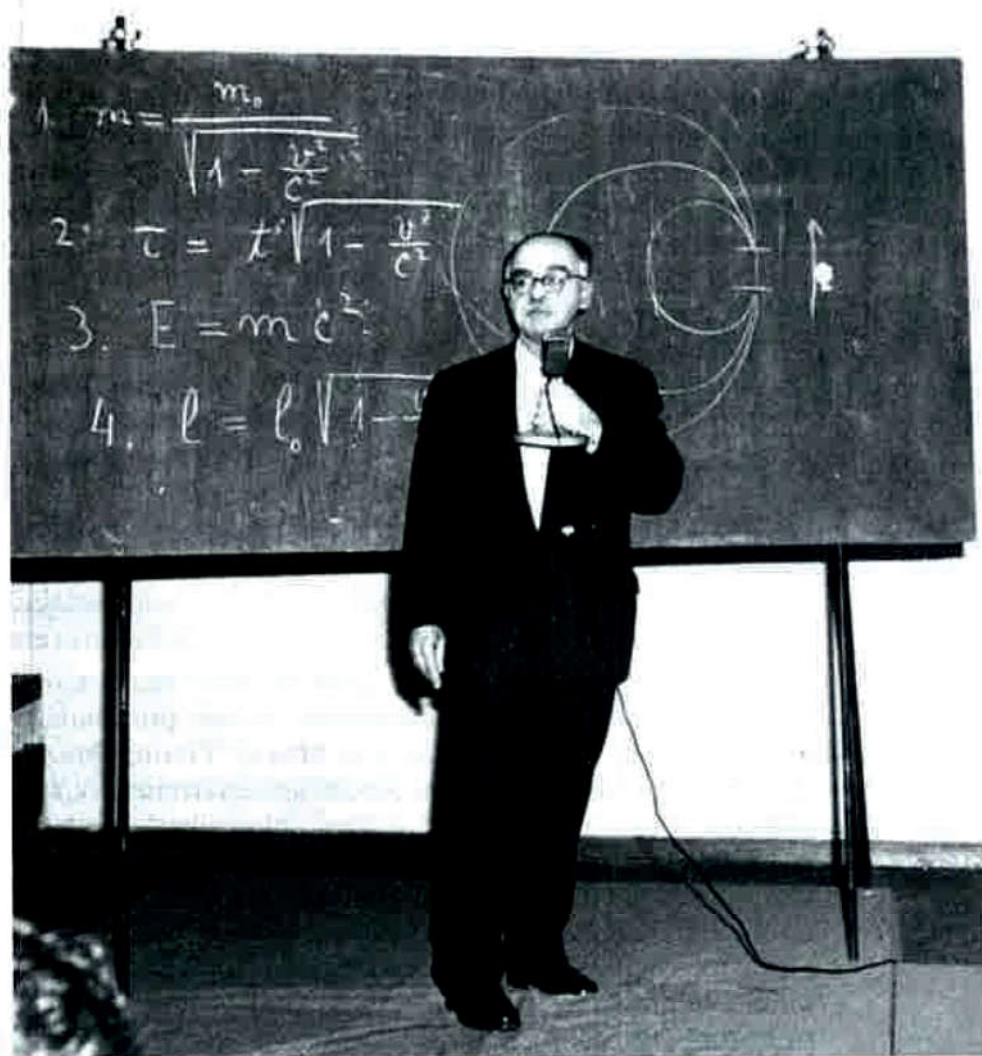
geometrije s druge strane. Akademik Blanuša je vlastitim znanstvenim djelom i pedagoškim radom u matematici i fizici mnogostruko oplodio najstariji princip Platonove akademije, što ga je i sam dao uklesati iznad vrata Zavoda za primijenjenu matematiku ETF-a (FER-a) u kojem je radio: *ΜΗΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΙΤΩ (NEUK U GEOMETRIJI NEKA NE ULAZI)*.

U svijetu su napisane mnoge knjige o teoriji relativnosti, specijalnoj i općoj, iz pera najuglednijih fizičara, matematičara ili filozofa. Između raznih "Uvoda" u ovo temeljno područje fizike, Blanušina je Teorija relativnosti¹⁰, koju je napisao nešto kasnije, od svog blistavog prijevoda M. Bornove Teorije relativnosti, jedinstvena u svijetu. Generacije gimnazijalaca, napose prirodoslovno-matematičkog usmjerenja, služe se Blanušinom knjigom. Blanušin motiv za takvu vrstu knjige bio je sažeti prikaz teorije relativnosti, kako bi se obični čitatelj uputio u glavne misli teorije relativnosti, uvažavajući najnovije eksperimentalne rezultate tadašnjeg vremena. Drugi je motiv, ne manje važan, bio neobičan uspjeh prijevoda Bornove knjige o teoriji relativnosti (knjiga brzo rasprodana), u prijevodu i s nadopunama D. Blanuše, a u izdanju Hrvatskog prirodoslovnog društva. Blanušin metodološki credo bio je učiniti teoriju što razumljivijom i "po mogućnosti pokazati kako nas pokusi upravo sile da teorija bude baš takva, a ne drukčija" (iz Uvoda Blanušine knjige). Preko 80% Blanušine knjige posvećeno je specijalnoj, a nešto manje od 20% općoj teoriji relativnosti. Nabrojat ću neke karakteristike i odlike Blanušine knjige, njezinog prvog dijela o specijalnoj teoriji. To su jednostavni matematički i fizikalni prikaz Newtonovih shvaćanja apsolutnog prostora i vremena, inercijalnih sustava, etera i Michelsonovog pokusa. U vezi s tim pokusom Blanuša analizira hipotezu Lorentzove kontrakcije duljine (gdje uvodi kraticu $\alpha = \sqrt{1 - \beta^2}$ jer će je stalno trebati) i dilataciju vremena na bazi pokusa (Dopplerov učinak na svjetlosti što potječe od kanalnih zraka). Potom obrazlaže ovisnost mase o brzini, a naročitu pažnju posvećuje sinkronizaciji svjetlosnih signala (bljeskova), odnosno satova u inercijalnim sustavima. U svojim analizama Blanuša primjenjuje jednostavne geometrijske slike. Lorentzovim transformacijama i zakonima gibanja (energije i impulsa) s karakterističnom relativističkom algebrom Blanuša posvećuje značajni dio knjige, kao i transformaciji ukupne energije čestica s karakterističnom relativističkom kinematikom. Nastavlja teoremom o zbrajanju brzina s geometrijskim prikazom (tumačenjem) tog teorema. Naročito pomno Blanuša tumači Lorentzove invarijante: prostorno-vremenski razmak ili kraće "intervale" kao temeljnu invarijantu Lorentzove transformacije, invarijante energije i impulsa, invarijantnost tlaka. Od matematičkog aparata više analize Blanuša najčešće koristi razvoj izraza u red, integralni račun kao ilustraciju kako se nešto može kraće napraviti. Poglavlje 22. (princip relativnosti i konstantnost brzine svjetlosti; odbacivanje hipoteze etera; relativnost prostora i vremena) je, po mome mišljenju, glavni dio knjige, s originalnim Blanušinim tumačenjima. Kvantnoj teoriji svjetlosti (fotona) posvećeno je zadnje poglavlje iz dijela knjige o specijalnoj teoriji relativnosti.

Općoj teoriji relativnosti pripada znatno manji dio knjige. Blanuša ob-

¹⁰ Danilo Blanuša, *Teorija relativnosti*, Mala biblioteka za matematiku, fiziku i kemiju br. 7, Školska knjiga, Zagreb, 1955.

razlaže Machov princip, princip ekvivalencije i opći princip relativnosti, koristeći zgodne primjere. Potom obrađuje velike eksperimentalne potvrde opće teorije: zakrivljenje svjetlosne zrake u gravitacijskom polju i gravitacijski Dopplerov učinak. Jednim kratkim poglavljem osvrće se i na paradoks blizanaca, kod Blanuše paradoks satova. U završetku knjige ukazuje na potrebu prijelaza na Riemannovu geometriju da bi opća teorija mogla biti kozmološka, a završava otvorenim, najtežim problemom povezivanja teorije relativnosti i kvantne mehanike.



Sl. 1. Na jednom od svojih predavanja

Rigorozni matematičko-fizikalni pristup općoj teoriji relativnosti Blanuša je primijenio u kratkom i matematički elegantnom članku *Gravitacija* u 6. svesku Tehničke enciklopedije¹¹. Članak pokazuje Blanušin pristup i poimanje teorije relativnosti. Najvažniji izvori iz kojih je Blanuša izvodio svoj pristup teoriji relativnosti, uz Einsteinove radove u kojima je ona postavljena, su radovi i knjige najuglednijih fizičara u tom polju: M. V. Laue, W. Pauli, H. Weyl, P. G. Bergmann, M. Born, S. Weinberg. Utjecaj Maxa Borna je izgleda bio najjači, a Blanuša je, kao uostalom i Einstein, naročito cijenio Bornov cjeloviti povijesni pristup razvoju fizike kao najbolji

¹¹ Danilo Blanuša, *Gravitacija*, Tehnička enciklopedija 6 G Ka, glavni urednik Hrvoje Požar, Jugoslavenski leksikografski zavod, Zagreb 1979., str. 260-265.

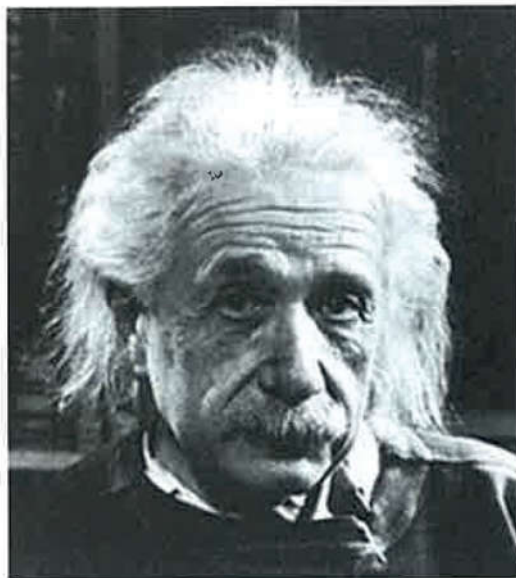
pristup u prikazu i značenju teorije relativnosti u modernoj fizici. Podloga je teoriji relativnosti nesumnjivo fizikalna i matematička. Geometriju i kozmologiju, temeljne zakone klasične mehanike te Newtonov prirodni svjetski sustav, Born uzima za povijesnu, znanstvenu i prirodno-filozofsku podlogu Einsteinovoj teoriji relativnosti. Na takvu podlogu Born smješta temeljne zakone optike i elektrodinamike, da bi iz takve podloge Einsteinovim stvaralačkim duhom izrasla specijalna i opća teorija relativnosti. Takav pristup nije jednostavan, ali jamči razumijevanje i tumačenje teorije relativnosti, njezinih primjena u fizici čestica i kozmologiji, sve do neuspjelih Einsteinovih pokušaja poopćavanja teorije relativnosti tako da bi uz gravitaciju i elektromagnetizam trebao potjecati iz geometrijskih svojstava kontinuuma prostorvremena.

Blanušina metoda pristupa, poimanja i tumačenja teorije relativnosti podudarna je Bornovoj u pogledu povijesnog prikaza fizikalno-matematičke i prirodno-filozofske podloge teorije relativnosti. Ali ona sadrži i izvorne Blanušine elemente koji se naročito tiču eksperimentalnih provjera i potvrda Einsteinove teorije. Blanuša je, kao i Born, bio zadržan matematičkom ljepotom teorije i jasnoćom njezinih postulata i principa, napose diferencijalno-tenzorskom elegancijom opće teorije, smatrajući je matematički savršenom teorijom gravitacije. Blanuši su odlučujući bili eksperimentalni dokazi, tim prije i jače što postoje i suparničke teorije gravitacije drukčije matematičke građe i eksperimentalnih testova od Einsteinove. Blanuša je, ne samo zbog osobnog školovanja i uloge matematičara na Elektrotehničkom fakultetu, volio temeljne izazove što ih teorija relativnosti postavlja visokim tehnologijama i eksperimentalnoj fizici zbog ekstremno finih i osjetljivih izravnih i neizravnih mjerenja pojava i veličina u njoj. Blanušin je stvaralački duh i način razmišljanja (*cogitatio*) tijekom njegovog cijelog života bio na tragu novovjekovnog odnosa teorije i eksperimenta, naročito velikih teorija matematike i fizike i velikih pokusa u fizici. U spomenutom članku o gravitaciji u Tehničkoj enciklopediji zrcali se u kratkom tekstu Blanušina metoda u relativnosti. Blanuša najprije opisuje starija shvaćanja, potom Newtonov zakon i teoriju gravitacije, te daje matematički opis gravitacijskog polja i potencijala. Potom definira i obrazlaže slavne Einsteinove principe — princip ekvivalencije i opće relativnosti, da bi u glavnim crtama pokazao kako se iz njih u okviru opće Riemannove geometrije (*Riemannian Manifolds*) i tenzorskog računa izgrađuju Einsteinove jednačbe gravitacijskog polja. Unatoč zahtjevu skraćenog i elegantnog teksta, Blanuša ne ispušta tumačenja i komentare o razlici pseudoeuclidске metrike (metrike Minkowskog) u specijalnoj teoriji od opće Riemannove u zakrivljenom gravitacijskom polju, preko Einsteinove konvencije (propisa) sumacije¹² i izrazima s indeksima koja se univerzalno primjenjuju u svim formulama, do Riccijevog, odnosno Einsteinovog tenzora. Međutim, skoro polovicu teksta Blanuša je posvetio provjerama Einsteinove teorije gravitacije, razlučujući pokuse i njihove rezultate u četiri grupe: pomak perihela planeta (pomicanje Merkurova pe-

¹² Einsteinova konvencija (pravilo) sumacije za izraze s indeksima: ako se u nekom člani izraza isti indeks pojavljuje dvaput, kao gornji i kao donji indeks, tada taj član u izrazu treba sumirati po svim mogućim vrijednostima tog indeksa. To znači sumiranje od 1 do dimenzije promatranog prostora. U teoriji relativnosti metrika je četverodimenzionalna i u specijalnoj (pseudoeuclidiska), kao i u općoj teoriji (opća Riemannova metrika). Prema tome, treba sumirati od 1 do 4 u skladu s Einsteinovom konvencijom.

rihela), gravitacijski Dopplerov pomak (učinak), odklon svjetlosne zrake u gravitacijskom polju Sunca, potraga za gravitacijskim valovima. Blanuša je bio pristalica Einsteinove teorije, te je s neskrivenim zadovoljstvom u svojim člancima, knjigama i prikazima konstatirao da je teorija relativnosti opažanjima i pokusima izvršno potvrđena.

Interesantan je i Blanušin pogled na teoriju relativnosti što ga je iznio u Predgovoru popularne knjižice *Što je teorija relativnosti*, slavnih ruskih fizičara L. D. Landaua i J. B. Rumer¹³. Blanuša je u Predgovoru napisao da pravi majstori koji poznaju osnovne pojmove i činjenice specijalne teorije relativnosti, ali i njezine najsuptilnije i najsloženije matematičke potankosti, mogu napisati popularnu knjigu bez kompliciranog matematičkog formalizma i približiti je čitaocu. Ova se knjiga ne bavi općom teorijom relativnosti, koju je, kako smatra Blanuša, nemoguće izložiti bez ozbiljnije matematičke pozadine i tako popularizirati. Specijalnu teoriju Blanuša drži neophodnim okvirom u modernoj fizici, jer je potvrđena mnogim fizikalnim iskustvima.



Sl. 2. Albert Einstein (1879. – 1955.)

Dodajmo još na kraju ovog odjeljka da je D. Blanuša prijevodu M. Bornove knjige "Einsteinova teorija relativnosti" 1948. godine dodao svoj originalni prilog na kraju knjige. U njemu je na 13 stranica obradio 4 najvažnija aspekta teorije relativnosti: 1. *Eksperimentalne potvrde teorije relativnosti*, 2. *Kozmološka pitanja*, 3. *Jednadžbe gibanja materijalnih čestica*, 4. *Ujedinjene teorije polja*. U pogledu eksperimentalnih potvrda, Blanuša je konstatirao da opća teorija relativnosti u to doba još nije tako temeljito eksperimentalno provjerena kao specijalna koju podržavaju mnogi pokusi. Zato je u tom *Dodatku* više obrađivao eksperimentalne potvrde opće teorije relativnosti, koje ćemo mi na Blanušinu tragu posebno obraditi u ovom odjeljku. Uvažit ćemo, naravno, novi znanstveno-tehnološki razvoj u tom području, suvremene detektore i pokuse kao i pomoću njih stečene spoznaje i rezultate u vremenu nakon Blanušinog života. Spomenimo da je u istom *Dodatku* vrlo interesantna Blanušina analiza kozmoloških pitanja koja korespondira sa suvremenim stanjem u tom području. Tako je posebno obrađen Einsteinov zatvoren kuglin prostor (svemir), koji je konačan, ali nema granica, s umetnutom nepoznatom kozmološkom konstantom Λ , koju je Einstein morao pretpostaviti da bi dobio baš takvo rješenje i sliku statičkog zatvorenog svemira. Nasuprot takvom prostoru, Blanuša ističe de Sitterov kuglin prostor čiji se polumjer vremenski mijenja, kao i sve mogućnosti koje on u kozmologiji pruža. Njihovu ujedinjenju u euklid-

¹³ L. D. Landau, J. B. Rumer, *Što je teorija relativnosti*, prijevod O. Vernić, predgovor akademik Danilo Blanuša, III izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

ski prostor s neizmjernim rastezanjem, ali s nekom gustoćom materije u njemu i bez ikakve kozmološke konstante ($\Lambda = 0$), Blanuša je posvetio naročitu pažnju. To je slavni Einstein-de Sitterov model svemira, koji je danas glavni model u problematici određivanja starosti svemira na osnovu Hubbleove konstante.

3. Blanušini prilozi u relativističkoj termodinamici

U svojoj slavnoj knjizi o teoriji relativnosti, W. Pauli¹⁴ je četvrtinu knjige posvetio četverodimenzionalnom prikazu Lorentzovih transformacija i njihovoj primjeni u elektrodinamici (teorija elektrona, gustoća četverostruje, očuvanje energije i količine gibanja EM-polja), zatim vezi energije i mase, transformaciji energije i količine gibanja kad je sustav pod djelovanjem vanjskih sila, do termodinamike i statističke mehanike. Motiv je dokazivanje univerzalnosti teorije relativnosti i njezine temeljnosti u fizici. U pogledu termodinamike Pauli je velik naglasak postavio na vladanje termodinamičkih veličina pod Lorentzovim transformacijama, uračunavajući i razne specijalne primjene kao što je, na primjer, Jouleova toplina koja nastaje tijekom struje kroz vodič.

Osnovicu za transformiranje termodinamičkih veličina pri prijelazu u gibajući koordinatni sustav Pauli je vidio u temeljnom Planckovom članku iz 1907. godine i Einsteinovom članku iz iste godine, što je zapravo Planck-Einsteinova koncepcija za primjenu specijalne teorije u termodinamici¹⁵. Jedan od osnovnih principa teorije relativnosti jest povezanost energije i mase. Pauli u svojoj knjizi sakuplja dokaze (radove) o tome da svakom obliku energije E odgovara masa $m = E/c^2$. To znači da se masa tijela povećava zagrijavanjem, kao i da se prijenos mase može izvršiti zračenjem između tijela koje apsorbira zračenje i tijela koje zračenje emitira. U odjeljku o inerciji energije (41. *The inertia of energy*, str. 121–123) u svojoj knjizi Pauli pokazuje da bez obzira o kojoj se vrsti energije radi (mehaničkoj, toplinskoj, svjetlosnom zračenju) i kojem tipu sustava (sustav jedne čestice, sustav idealnog plina, proizvoljni zatvoreni sustav), uvijek vrijedi relacija $\Delta m = \Delta E/c^2$. Može se, prema tome, reći da princip relativnosti zajedno sa zakonima očuvanja energije i količine gibanja daje temeljni princip ekvivalencije mase (bilo koje vrste) i energije (bilo koje vrste). Od takvog temeljnog principa polaze i Pauli i Blanuša u svojim izvodima termodinamičkih relacija.

¹⁴ Wolfgang Pauli (Wien, 25. 04. 1900. - Zürich, 15. 12. 1958.), dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 1945. godine za slavni Paulijev princip isključenja.

¹⁵ M. Planck, *S. B. preus. Akad. Wiss.* (1907) 542. M. Planck, *Zur Dynamik bewegter Systeme, Annalen der Physik*, Leipzig, 76 (1908) 1–34. A. Einstein, *Jb. Radioakt.*, 4 (1907) 440.

3.1. Blanušine transformacijske formule za količinu topline i temperaturu u termodinamici

3.1.1. Planckove transformacije za količinu topline i temperaturu

Upotrijebit ćemo simbole i notaciju koja se uveliko podudara i kod Blanuše i kod Paulija¹⁶. Pogledajmo kako su Pauli i Planck računali termodinamičke veličine pod Lorentzovim transformacijama, te do kojih su relacija koje povezuju te veličine u gibajućem sustavu s onima u sustavu mirovanja došli. Pauli je Planckove izvode¹⁷, čija je početna osnovica varijacijski princip, kao i Einsteinove¹⁸, koje se izravno izvode iz Lorentzovih transformacija, smatrao točnima preuzimajući ih u svoju poznatu knjigu. Pauli najprije sakuplja i definira transformacijske relacije za termodinamičke veličine: tlak (p i p_0), volumen (V i V_0), količinu gibanja G i energiju (E i E_0). Polazi od pretpostavke da skalarni tlak treba biti invarijanta ($p = p_0$) u termodinamici kao i u hidrodinamici, te da je brzina v gibajućeg sustava u smjeru osi x prema sustavu mirovanja. Te formule, prema Paulijevoj knjizi *Teorija relativnosti* (Dio III., (d) Termodinamika i statistička mehanika, 46. Vlanjanje termodinamičkih veličina pod Lorentzovim transformacijama)¹⁹, glase:

$$p = p_0$$

$$V = V_0 \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$G = \frac{v}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot (E_0 + p_0 V_0)$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \left(E_0 + \frac{v^2}{c^2} p_0 V_0 \right).$$

Iz ovih veličina grade se dvije nove, nužne u termodinamici. To su:

$$E + pV = \frac{E_0 + p_0 V_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{i} \quad G = \frac{v}{c^2} (E + pV),$$

pri čemu indeks $_0$ označava veličine u sustavu mirovanja. Iz posljednjih dviju veličina izvode se relacije za količinu topline Q , temperaturu T i entropiju S . Pauli, polazeći od Planckovih i Einsteinovih izvoda, definirajući dQ kao količinu (prijenos) topline koja prelazi na sustav i dA rad što ga vrše vanjske sile na sustavu, definira termodinamičke relacije:

$$dQ = dE - dA$$

$$dA = -pdV + \vec{v} \cdot d\vec{G}.$$

¹⁶ D. Blanuša se služio prvim izdanjem Paulijeve knjige: W. Pauli, "Relativitätstheorie", in *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Vol. 5, Part 2, B. G. Teubner, Leipzig, 1921, pp. 539–775. "Supplementary Notes by the Author", in *Theory of Relativity*, Pergamon Press, Inc., New York, 1958, pp. 207–232. U našim analizama i usporedbama, služili smo se sljedećim izdanjem: W. Pauli, *Theory of Relativity*, Translated from German by G. Field, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

¹⁷ M. Planck, *S. B. preus. Akad. Wiss.*, (1907) 542. M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme, *Annalen der Physik*, Leipzig, 76 (1908) 1–34.

¹⁸ Einstein, *Jb. Radioakt.*, 4 (1907) 440.

¹⁹ Vidi u: W. Pauli, *Theory of Relativity*, Part III, (d) Thermodynamics and statistical mechanics, 46. Behaviour of the thermodynamical quantities under a Lorentz transformation, Translated from German by G. Field, Dover Publications, Inc., New York, 1958, pp. 134–135.

Pomoću njih, pretpostavljajući da je brzina sustava stalna i ugrađujući u njih gornje transformacijske formule za energiju, količinu gibanja, volumen i tlak, Pauli dobiva svoju poznatu formulu:

$$Q = Q_0 \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$$

Ova se formula slaže s transformacijskom formulom za Jouleovu toplinu po jedinici vremena i jedinici volumena, koju je Pauli izveo u okviru fenomenološke elektrodinamike na osnovu tenzora S_{ik} u kojem su sabrane gustoća energije, struja energije, gustoća količine gibanja i komponente tenzora naprezanja T_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$).

Kad (gibajući) sustav ima (dobijete) brzinu v , to se može smatrati adijabatskim procesom. Entropija stoga ostaje nepromijenjenom, pa zato ima istu vrijednost za gibajući, kao i za sustav u mirovanju. Entropija je Lorentzova invarijanta:

$$S = S_0.$$

Ako prijelaz topline dQ teče vrlo (beskonačno) dugo, vrijedit će:

$$dQ = TdS \quad (\text{iz definicije pojma entropije}).$$

Iz relacija $S = S_0$ i $Q = Q_0 \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$, te na osnovu definicije entropije, jednostavno slijedi Planckova transformacijska formula za temperaturu:

$$T = T_0 \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$$

D. Blanuša izveo je drukčiji oblik transformacijskih formula za količinu topline i termodinamičku temperaturu. Iz tog razloga, a nadasve zbog osjećaja dužnosti i poštovanja prema W. Puliju i njegovu djelu i ulozi u fizici, Blanuša je odlučio napisati Pauliju pismo s detaljnim obrazloženjima i argumentima za svoje transformacijske formule u termodinamici. Tako je započelo njihovo znanstveno dopisivanje, kojem se ne može pronaći sličan slučaj u čitavoj hrvatskoj kulturnoj i znanstvenoj povijesti. Dodatni je razlog Blanuša svakako pronašao u činjenici da je Pauli neposredno prije, 1945. godine, primio Nobelovu nagradu za fiziku za slavni Paulijev princip isključenja.

3.1.2. Blanušina fizikalna slika za transformacijske formule u termodinamici

Blanušino izvođenje transformacijskih formula za toplinu i temperaturu je u metodološkom smislu izvođenje "*Ab initio*". On započinje od najjednostavnije fizičke situacije, "iz početka", uvodeći postupno složeni relativistički formalizam. Proračuni "*Ab initio*" lakih jezgara i hiperjezgara u polju fizike nekoliko tijela, kad se treba prikladno osloniti samo na neke pouzdane eksperimentalne rezultate, u naše su vrijeme vrlo popularni i dovode do vrlo korisnih teorijskih modela u nuklearnoj i hipernuklearnoj fizici. Pokazat ćemo, u skraćenom obliku, jednostavnu fizikalnu sliku i izvod koji Blanuša upotrebljava da bi dokazao utemeljenost i točnost vlastitih transformacijskih formula nasuprot slavni Planckovih, a koje je Pauli kao neupitne preuzeo u svojoj knjizi. Riječ je o slici i izvodima koje je Blanuša objavio u svojim dvama radovima: o paradoksima pojma

energije²⁰ na francuskom jeziku 1947. godine, te o relativističkoj termodinamici²¹, 1951. godine. Polazeći od te slike i Blanušinih izvoda, dat ćemo svoje komentare i tumačenja iz suvremenog motrišta. Blanuša smatra da Planckove formule iz relativističke termodinamike:

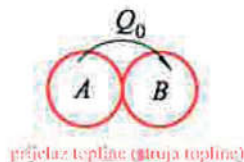
$$Q = Q_0 \cdot \alpha \quad \text{ i } \quad T = T_0 \cdot \alpha,$$

nisu ispravne, te da trebaju imati oblik koji proizlazi iz njegovih višekratnih izvoda i misaonih analiza:

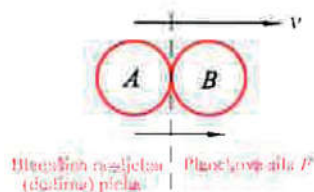
$$Q = \frac{Q_0}{\alpha} \quad \text{ i } \quad T = \frac{T_0}{\alpha},$$

pri čemu je u oba slučaja kratica $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Tijela u mirovanju:
(sustav S_0)



Tijela u gibanju:
(sustav S)



Sl. 3. Fizička slika za Blanušino "Ab initio" izvođenje transformacijskih formula za toplinu i temperaturu

Blanuša promatra prijelaz topline Q_0 iz tijela A u neko drugo tijelo B . Tijela se nalaze jedno pokraj drugoga, recimo, tijelo A lijevo, a tijelo B desno od njega. Kad su tijela u mirovanju, strujom (dotokom) topline Q_0 iz tijela A u tijelo B (vidi sliku 3), tijelu B će se toplina (energija) povećati za Q_0 , a masa za $\Delta m_B = \frac{Q_0}{c^2}$. Promatramo li ova dva ista tijela u nekom gibajućem sustavu u kojem se ona gibaju brzinom v prema naprijed (udesno), tijelu B će se energija (toplina) povećati za iznos $\frac{Q_0}{\alpha}$, prema zakonu za transformaciju energije ($E = \frac{E_0}{\alpha} = \frac{m_0 c^2}{\alpha}$). Tom povećanju energije odgovara povećanje mase za $\Delta m_B = \frac{Q_0}{\alpha c^2}$. Budući da je brzina gibanja tijela (sustava) v konstantna, tijelu B povećao se impuls (količina gibanja) za iznos $\Delta p_B = \Delta m_B \cdot v = \frac{Q_0 v}{\alpha c^2}$. Povećanje impulsa je tijelu B trebalo dovesti. To znači da je tijelo A djelovalo na tijelo B u smjeru gibanja silom F . Preneseni impuls u vremenu t , čije trajanje valja

²⁰ Danilo Blanuša, *Sur les paradoxes de la notion d'énergie*, Glasnik Mat., -Fiz. i Astr., Ser. II 2 (1947), str. 249–250.

²¹ Danilo Blanuša, *O relativističkoj termodinamici*, Prvi kongres mat. i fiz., FNJR, Bled 1949. Naučna knjiga, Beograd, 1951., str. 235–240.

uzimati dugim da bi proces bio reverzibilan, jednak je umnošku sile F i vremena t . Vrijedi jednadžba:

$$F \cdot t = \frac{Q_0 v}{\alpha c^2}.$$

S druge pak strane je sila izvršila rad na tijelu B jer se ono pod djelovanjem sile F pomaklo za put vt u smjeru sile. Zakon očuvanja energije nalaže da energija koja je prešla (dotok $Q_0 a$), mora biti jednaka radu sile (Fvt) na tijelu B , a ostatak odgovara prijelazu topline Q na to isto tijelo. To opisujemo jednadžbom:

$$\frac{Q_0}{\alpha} = Fvt + Q.$$

Iz posljednjih dviju jednadžbi, za preneseni impuls i očuvanje energije u prijenos energije, jednostavno slijedi Planckova transformacijska relacija:

$$Q = Q_0 \alpha.$$

Što je Blanuša ovom jednostavnom fizikalnom slikom i ovim izvodom učinio? Dokazao je, na prvi pogled, valjanost Planckove formule! Međutim, dokazujući na oko Planckovu relaciju, Blanuša želi tehnikom *deductio ad absurdum* pokazati pogreške (proturječnosti) koje Planck, a možda i Pauli nije vidio. Naime, iz formule za očuvanje energije lako se izračuna iznos prenesenog mehaničkog rada, polazeći od Planckove relacije:

$$\text{Rad} \equiv Fvt = \frac{Q_0}{\alpha} - Q = \frac{Q_0}{\alpha} - Q_0 \alpha = Q_0 \cdot \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} = Q_0 \frac{\beta^2}{\alpha}$$

Nakon ove formule za rad Blanuša iznosi svoju glavnu postavku: u njegovu poimanju i fizikalnoj slici nema razloga za uvođenje sile F ($F = 0$) niti njezinog rada ($Fvt = 0$), pa se sva energija koja prelazi, prenosi kao toplina. Ako se takav uvjet ugradi u relaciju očuvanja energije, Blanušina transformacijska formula dobiva se izravno:

$$Q = \frac{Q_0}{\alpha}.$$

U Blanušinom shvaćanju se impuls (količina gibanja) $\frac{Q_0 v}{\alpha c^2}$ prenosi strujanjem (konvekcijski) s energijom $\frac{Q_0}{\alpha}$ kad ona prelazi s tijela A na tijelo B , a ne pomoću sile F kao što je slučaj kod Plancka.

Temeljni Blanušini prigovori Plancku jesu da on u transformacione formule (njihov izvod) uvodi silu F čija *narav nije mehanička* u onom smislu u kojemu sam Planck uobičajeno tumači rad sile u termodinamici, napose u formulaciji 2. glavnog zakona. Naime, Planckova sila F u smjeru gibanja sustava (vidi sliku 3) ne izaziva deformacije, a njezin rad ne da se protumačiti kao rad dizanja utega, što je osnovno tumačenje sile u termodinamici. Prisjetimo se M. Planckove i Lord Kelvinove izvorne formulacije 2. zakona termodinamike: "Ne postoji prirodni proces (toplinski stroj) gdje bi se periodički crpila toplina (vršio rad) samo iz jednog spremnika, a neki



Sl. 4. Zagreb 1962. g. Predavanje u Studentskom centru

uteg podigao.²² Planckov mehanički rad $Fvt = \frac{Q_0}{\alpha} - Q = Q_0 \frac{\beta^2}{\alpha}$ ne može se protumačiti kao rad dizanja utega jer bi time u duhu Carnotovog procesa bio moguć perpetuum mobile 2. vrste. Blanuša u *Pismu Pauliju* (nadnevka 15. 03. 1948.) i u svom radu o relativističkoj termodinamici detaljno analizira narav Planckove sile F u kontekstu Carnotovog ciklusa, dodajući (misaono) tijelima između kojih se događa prijelaz topline odgovarajuće spremnike topline. Tu se vidi i blaga Blanušina ironija prema Plancku, jer ispada da bi Planckovim pojmom rada sile kao rada sile dizanja (njem. "Hubarbeit")²³, što se onda može protegnuti i na rad sile polja u elektrodinamici, bilo moguće crpsti toplinu iz hladnijeg spremišta odnosno podići uteg (perpetuum mobile 2. vrste). Planck je silu F uveo samo zato da bi mogao objasniti prirast impulsa što ga tijelo dobiva u promatranju transformacijskih formula, ali upada u pojmovne poteškoće s pojmom rada što ga takva sila vrši. Te Planckove poteškoće Blanuša je prvi otkrio i analizirao briljantnim stilom. Blanuša je svoje transformacijske formule postavio tako da je njihov fizikalni temelj uvidio u tome da se impuls $\frac{Q_0 v}{\alpha c^2}$ (koji mora postojati jer se tijela gibaju) prenosi strujanjem ("konvektivno", Blanušin izraz, op. T. P.) zajedno s toplinom (energijom).

²² Vidi, na primjer, u: Tomislav Petković, *Uvod u znanost o toplini i termodinamici*, Element, Zagreb, 1997.

²³ Njemačko-švicarski nauk klasične fizike, u što se autor imao prilike osobno uvjeriti, definira rad dizanja kao temeljni pojam na jednostavan način: Der Hub ist definiert als eine Translation in Richtung der Schwerkraft (z-richtung) nach oben: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dz$

3.1.3. Blanušino Pismo W. Pauliju, 15. ožujka 1948. godine

M. Planck²⁴ je umro 1947. g. pa mu Blanuša očito nije mogao pisati o svojim otkrićima i spoznajama u relativističkoj termodinamici do kojih je došao tijekom i nakon 1947. godine. Prirodno je, dakle, Blanušino znanstveno dopisivanje s Paulijem, čija se knjiga temelji na Planckovim i Einsteinovim radovima, a osim toga oni — sva trojica — pripadaju istoj školi njemačko-švicarske fizike.

U Pismu²⁵ Blanuša zahvaljuje vrlo poštovanom gospodinu profesoru Pauliju na njegovom ljubaznom pismu od 18. 02. 1948. (*najvjerojatnije*) i na mišljenju iz pera gospodina Schäffrothla, te se ispričava što zbog obaveza na fakultetu nije odgovorio ranije.

Blanuša je poželio odgovoriti Pauliju na pojedine stvari (točke), i to baš u onima u kojima mu Pauli prigovara. U točki 1 a) Paulijevo teksta se protiv Blanušine transformacijske formule za silu kaže da bi se kao 4. komponentu četverovektora trebala uzeti struja topline, pri čemu onda u gibajućem sustavu proizlazi sila koja je prema Planckovu shvaćanju nužna. Blanuša zato želi precizirati pojam sile koji on koristi. S obzirom da se ne radi o gustoći sile (izvorno *Kraftdichte*), nego o zajedničkoj sili kojom jedno tijelo djeluje na drugo, trebalo bi četverovektor sile općenito prikazati kao:

$$(F_1, F_2, F_3) = \frac{\vec{K}}{\alpha}; \quad F_4 = \frac{L}{c\alpha},$$

gdje je $\alpha = \sqrt{1 - v^2/c^2}$, s time da je v brzina u točki dodira ili sudara (*Angriffspunkte*), odnosno u ravni dodira (*Trennfläche*). Blanuša skreće pozornost Pauliju da je u njegovoj knjizi u formuli (219) u četvrtoj komponenti pogreškom izostavljen faktor $1/\alpha$. U novijim izdanjima Paulijeve knjige ova je pogreška ispravljena, ali se nigdje ne spominje da je Blanuša na nju upozorio. U sustavu mirovanja kad je $v = 0$, dobivaju se komponente $0, 0, 0, \frac{1}{c} \frac{dQ_0}{dt_0}$ kao komponente traženog četverovektora

čijom se transformacijom i računanjem dilatacije vremena doista dobivaju vrijednosti koje Planck smatra nužnim. U svojim izvodima Blanuša, naravno, upotrebljava ct kao četvrtu koordinatu te dilataciju vremena kao $dt_0 = dt \cdot \alpha$. Blanuša, međutim, u Pismu Pauliju stavlja naglasak na to da uopće nije uputno 4 veličine $0, 0, 0, \frac{1}{c} \frac{dQ_0}{dt_0}$ sabrati u četverovektor. To

ilustrira i dokazuje na jednostavnom modelu dvaju tijela koja se dodiruju, između kojih struji toplina, primjerice s lijevog na desno tijelo. U mirovanju i kad je sila nula, tijela se samo dodiruju. Ovu početnu situaciju opisat ćemo navodom izvornog Blanušinog opisa (u hrvatskom prijevodu) iz njegova Pisma Pauliju²⁶:

²⁴ Max Planck (23. 04. 1858., Kiel – 4. 10. 1947., Göttingen), dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 1918. godine za kvantnu teoriju svjetlosti.

²⁵ Blanušino pismo na njemačkom jeziku poštovanom Profesoru W. Pauliju, nadnevka 15. 03. 1948., poslano iz Tehničkog fakulteta u Kačićevoj 26, tipkani tekst na pisačem stroju s Blanušinim ispravkama, ukupno 7 stranica teksta.

²⁶ Ibidem, str. 2.

“Dolazi do prijelaza topline koju možemo smatrati strujom toplinske energije. Koristim sada temeljnu sliku iz teorije relativnosti, a ta je da svaka energija koja struji brzinom v nosi sa sobom odgovarajući impuls $\frac{E}{c^2} \cdot v$. Protok toplinske energije mora dakle sa sobom nositi svoj impuls i stoga istodobno nastaje konvekcijska struja impulsa. Da toplinska struja nosi svoj impuls smatra i Laue, a to isto stoji i kao opći stav za svaku struju energije i u Vašoj knjizi.”

U sustavu u mirovanju S_0 , ako im je dodirna površina jednaka 1, neka struja energije s_0 između dvaju tijela bude $s_0 = \frac{dQ_0}{dt}$, gustoća impulsa g_0 , gustoća energije w_0 , te struja impulsa p_0 . Ove veličine Blanuša sastavlja u karakteristični tenzor veličina energije-impulsa (*Energieimpulsgrößen*). Prema našim spoznajama to je izvorna Blanušina veličina za termodinamičku konvekciju (strujanje), po uzoru na “površinski” tenzor Minkowskog Fik , što ga je Minkowski uveo za četverodimenzionalnu kovarijantnu formulaciju Maxwellovih jednažbi. Blanušin “površinski” tenzor u fenomenološkoj termodinamici označavat ćemo kao B_{ik} . Njegov oblik jest (formula (1) u Pismu Pauliju²⁷):

$$B_{ik} = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & cg_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s_0}{c} & 0 & 0 & w_0 \end{pmatrix}$$

Za Blanušin tenzor B_{ik} vrijedi:

$$cg_0 = \frac{s_0}{c} \quad \text{dakle, tenzor je simetričan,}$$

$$V_0 = \frac{s_0}{w_0} \quad \text{brzina strujanja energije.}$$

Impuls koji sa strujom energije prolazi u jedinici vremena kroz jedinicu površine može se napisati kao:

$$p_0 = g_0 V_0 = \frac{s_0^2}{c^2 w_0}$$

Svoj tenzor toplinskih veličina energije-impulsa Blanuša transformira u drugi gibajući sustav S , koji se prema S_0 giba brzinom v , recimo nalijevo. Blanuša metodološki privremeno ostavlja po strani pitanje hoće li u novom sustavu čitava energija ili tek neki njezin dio biti toplina. Transformacijama se dobivaju nove veličine p , $\frac{s}{t} = cg$ i w u sustavu S . Blanuša sada uvodi interesantno tumačenje i novu transformaciju za strujanje topline i impulsa. Naime, s i p su energija i impuls koji u sustavu S struje kroz jediničnu plohu u jedinici vremena. Da bi dobio odgovarajuće veličine s' i p' u odnosu na razdjelnu (dodirnu) plohu koja se giba zajedno s tijelima, Blanuša jednostavno oduzima energiju i količinu impulsa koja se nakon jedinice vremena nalazi između gibajuće i plohe u mirovanju. Dakle, s' i p' iznose:

$$s' = s - vw$$

²⁷ Ibidem, str. 2

$$p' = p - vg$$

koje, kad se u njih uvrste dobiveni izrazi za s i p , postaju:

$$s' = s_0 + c\beta p_0$$

$$p' = p_0 + \beta \frac{s_0}{c}$$

Blanuša je Pauliju u Pismu pokazao još jedan dokaz, određujući brzinu strujanja (prijenosa) energije $V = \frac{s}{w}$. On je pokazao da se brzina strujanja energije transformira u skladu s adicijskim teoremom za brzine u teoriji relativnosti, što se moglo i očekivati:

$$V = \frac{V_0 + v}{1 + \frac{V_0 v}{c^2}}$$

Blanuša na kraju daje završni krunski dokaz! On pretpostavlja da samo dio (u Blanušinoj notaciji γ -dio) struje energije koja prolazi dodirnom površinom bude označen kao toplina. Pritom će, naravno, i γ -dio struje impulsa p' kao konvekcijski toplinski impuls prolaziti kroz površinu. Ostatak bi se u takvoj slici, prema Blanuši, morao ostvariti kao mehanički rad i prijenos impulsa pomoću sile. Ali Blanuša pokazuje da faktor γ izlazi jednak jedinici ($\gamma = 1$), iz čega nužno slijedi da su sila, prema tome i rad i promjena impulsa zbog sile, jednaki nuli. Blanuša zaključuje i poručuje Pauliju kako je došao do istog rezultata kao i u svom prethodnom pismu. Sljedeći navod iz Blanušinog Pisma Pauliju pokazuje znanstvenu oštrinu Blanušinih formulacija ²⁸:

“Unaprijed je već pomalo iznenađujuće formirati četverovektor 0, 0, 0, $\frac{s_0}{c}$; jer što to znači? Od veličina energije-impulsa toplinske struje uzimaju se tri komponente strujanja (a koje bi u općem slučaju mogle biti različite od nule), gradi se korijen iz njihove sume kvadrata i onda se takva veličina proglašava četvrtom komponentom nekog četverovektora. Kao prve 3 komponente uzimaju se 3 nule neke nepostojeće sile. Ne uviđam zašto bi to trebalo imati smisla. No ideja o takvoj tvorbi mogla bi potjecati od neke naizgled slične ideje, naime od četverovektora gustoće elektromagnetske sile — snage, kao u slučaju kad se razvija Jouleova toplina”.

3.2. Blanušini izvorni pojmovi i prilozi relativističkom formalizmu u fenomenološkoj termodinamici

Blanušini doprinosi u fizici povezani su s primjenom specijalne teorije relativnosti u fenomenološkoj termodinamici, pri relativističkoj transformaciji termodinamičkih veličina količine topline i temperature. D. Blanuša je 1947. godine izveo drukčiji oblik transformacijskih formula za količinu topline i termodinamičku temperaturu od onih koje su izveli Planck (osnovica izvoda varijacijski princip) i Einstein (izravni izvod iz Lorentzovih transformacija) 1907. godine, a koje je Pauli, smatrajući ih točnima, preuzeo u svoju poznatu knjigu o teoriji relativnosti objavljenu 1921. godine.

²⁸ Ibidem, str. 3 i 4.

Budući da je otkrio formule koje su drukčije od Planckovih i Einsteinovih, odnosno Paulijevih u njegovoj knjizi, Blanuša piše pisma Pauliju i svom prijatelju iz studentskih dana Paulu Urbanu u Grazu. Pismo Pauliju smo već obradili, a sada ćemo navesti dva karakteristična ulomka iz Pisma Urbanu koji oslikavaju situaciju u kojoj je Blanuša bio u to vrijeme.

U "Pismu" P. Urbanu²⁹, nadnevka 1. lipnja 1948. godine, Blanuša je napisao:

"A između, ... $\Delta E \alpha^2$ je toplina (po jedinici vremena, mislim), ostatak $\Delta E \beta^2$ je mehanički rad, dakle, sila iz $P_V = \Delta E \beta^2$ jest $P = \Delta E \frac{v}{c^2}$, što je istodobno preneseni impuls po jedinici vremena, dakle, ukupni impuls prenesene energije. Meni je $\Delta E = \frac{\Delta E_0}{\alpha}$ toplina, Plancku je samo $\Delta E \alpha^2 = \Delta E_0 \alpha$ toplina. ... Vidiš, stvar nije tako naivna kao što si možda vjerovao?"

Na kraju istog pisma P. Urbanu Blanuša opisuje Paulijev stav o Planckovim i Blanušnim formulama:

"On (Pauli, op. T. P.) kaže da je moje shvaćanje doduše ispravno, ali da je Planckovo također ispravno i da je pitanje definicije koje će se prihvatiti. On k tome još navodi razloge svrhovitosti u prilog Planckovu shvaćanju. Ja smatram da je Planckovo shvaćanje krivo i ne prihvaćam ga."³⁰

Iz dosadašnjeg našeg prikaza očito proizlazi da je Blanuša izvršno poznavao matematički formalizam teorije relativnosti, te da mu je Paulijeva knjiga bila *masterpiece* u tom području. Svoje transformacijske formule Blanuša je izveo polazeći od jednostavne fizikalne situacije i Lorentzovih transformacija, ukazujući istovremeno na pojmovne pogreške (proturječnosti) u Planckovom izvodu. Izgleda da je Blanušu pogodila Paulijeva sklonost Planckovu izvodu zbog bolje ukorijenjenosti Planckova izvoda u četverodimenzionalni formalizam i suglasje tog izvoda s radovima Einsteina i Minkowskog. Zbog toga je Blanuša u pismu svoje transformacijske formule dokazao i na taj način, uvodeći u analizu Blanušin tenzor B_{ik} veličina u termodinamičkom strujanju (konvekciji).

4. Suvremeni pogled na razvoj teorije relativnosti

Blanuša je inzistirao na *općim principima* specijalne i opće teorije relativnosti: na oba postulata specijalne teorije, na relaciji $E = mc^2$, na principu ekvivalencije, na Einsteinovom projektu geometrizacije fizike po uzoru na zakrivljenost prostorvremena koju stvaraju svemirske mase.

²⁹ Navod iz Blanušina pisma, str. 3, njegovu prijatelju Paulu Urbanu u Graz: Pismo Paulu Urbanu u Grazu, Universitätplatz 5, nadnevka 1. 06. 1948. Koncept pisma, napisan Blanušinom rukom iz kojeg se vidi da je dopisivanje bilo višestruko, uključujući Urbanove odgovore, te da je Blanuša Urbanu slao separate svojih radova.

³⁰ Ibidem, str. 4.

Je li moguća poslije-Einsteinova fizika, na novim postulatima i pojmovima različitim od onih u teoriji relativnosti? Teško je odgovoriti što bi Blanuša zastupao. Možemo nagađati! Blanuša je cjelokupnim životom i radom pokazao privrženost Einsteinovoj teoriji relativnosti. Ali je bio zainteresiran i za druge teorije i nove pojmove u tom području. Sigurno je da bi ih proučavao, te ako bi uvidio njihovu znanstvenu podlogu i cilj, prihvaćao bi ih s oprezom. Sigurno jest i da bi ga eksperimentalne potvrde uvjerile da ih prihvati!

U drugim mojim radovima u povodu 100. obljetnice Blanušinog rođenja [lit. 33. i 34.] ukratko sam obradio pokušaje (prijedloge) izgradnje teorija dvojne specijalne relativnosti, koje se razlikuju od Einsteinove specijalne teorije relativnosti (*STR*) jer se zasnivaju na dvjema skalama neovisnim o promatraču: skali brzine i skali duljine/mase. Einsteinova *STR* počiva na Lorentzovim transformacijama i na jednoj skali neovisnoj od opažača: konstantnosti brzine svjetlosti. Novi teorijski pokušaji ciljaju povezivanju teorije relativnosti i kvantne gravitacije, odnosno opisu *kvantnog prostora-vremena*, što bi se trebao nazirati na Planckovoj duljini L_P .

U ovom članku, međutim, osvrćemo se na jedan suvremeni test opće teorije relativnosti — vrlo precizni pokus naših dana. Tim se osjetljivim pokusom želi pokazati da je Einsteinova teorija relativnosti poput tvrde stijene u znanosti i da je sastavni dio moderne kozmologije. Riječ je o finom opažanju utjecaja Zemljinog gravitacijskog polja i njezine vrtnje na dinamiku zvrka što se giba u satelitskoj stazi oko Zemlje.

4.1. Dinamika zvrka u teoriji relativnosti

U drugoj polovici 20. stoljeća opća je teorija relativnosti općenito bila u položaju slavne teorije, ali osiromašene značajnim eksperimentalnim potvrđama. Njezin mit rođen je 1919. godine, kada su F. Dyson, A. S. Eington i C. Davidson objavili opažanje odklona zrake svjetlosti koja prolazi neposredno kraj Sunca. Po Einsteinovom računu gravitacijsko polje Sunca zakreće zrake za 1.75 lučnih sekundi, dok su spomenuta trojica opazila (1.90 ± 0.16) lučnih sekundi, potvrđujući tako Einsteinovo predviđanje do točnosti 20%. Krucijalni test Einsteinove opće teorije relativnosti koji je započeo 2004. godine jest mjerenje Lense-Thirringove i de Sitterove precesije zvrka u stazi oko Zemlje (*Stanford's and NASA Gravity B Probe*). Razlog našem suvremenom pogledu baš na ovaj test teorije relativnosti nije slučajna! Poznato je da je D. Blanuša kao izvanredni student Filozofskog fakulteta bečkog sveučilišta bio naročito aktivan član u Seminaru za teorijsku fiziku profesora Hansa Thirringa³¹, od početka 1926./27. do šk. god. 1928./29. uključivo. U tom razdoblju Blanuša je

³¹ Hans Thirring (Beč, 23. ožujka 1888. – Beč, 22. ožujka 1976.) poznati austrijski fizičar na Sveučilištu u Beču. Otac također uglednog fizičara Waltera Thirringa, poznatog po udžbenicima iz matematičke fizike važnih za teoriju relativnosti. H. Thirring bio je velik pobornik teorije relativnosti, poznat po proračunu precesije zvrka u gravitacijskom polju rotirajućih nebeskih tijela (Thirring-Lense efekt). Prisilno umirovljen 1938. zbog židovskog podrijetla, profesuru obnavlja 1946. u Beču, postaje dekanom 1946./47., te članom austrijskog Sabora 1957. – 63. Aktivist je mirovnog pokreta (*Friedensbewegung*), poznat i po Thirringovome planu (jednostrano razoružanje Austrije).

odslušao sljedeća Thirringova predavanja: teorijsku mehaniku kroz dva semestra, dva semestra teoriju topline, jedan semestar teoriju spektara, te seminar iz teorijske fizike kroz šest semestara (vidi u lit. 35.). Vrlo je vjerojatno da se Blanušin interes za teoriju relativnosti počeo razvijati baš u Thirringovim seminarima i predavanjima, kod fizičara koji je izvorno predvidio **efekte** u precesiji zvrka pod utjecajima gravitacijskog polja Zemlje i **njezinog** geodetskog spina. Da je kojim slučajem živ, Blanuša bi se sigurno radovao opažanju finih efekata na sustav zvrka i relativističke veličine njegovog gibanja u stazi oko Zemlje. Pogledajmo o kojim se sve efektima zapravo radi.

Vlastiti kutni moment količine gibanja zvrka (zamah zvrka) u Newtonovoj mehanici opisujemo trikomponentnim vektorom $\vec{L}$. U kontekstu specijalne teorije relativnosti vektor $\vec{L}$ definiramo u lokalnom sustavu mirovanja (*local rest frame*). U takvom sustavu, prema principu ekvivalencije, ako na zvrk ne djeluje vanjski moment sile $\vec{M}_{cm} = 0$, slijedi iz jednadžbe $\vec{M}_{cm} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = 0$ da je $\vec{L}_{cm}$ konstantan. Zvrk se u Newtonovoj mehanici neometano vrti, neovisno o tome kako se njegov centar mase (*cm*) giba. U specijalnoj teoriji relativnosti $\vec{L}_{cm}$ se u lokalnom sustavu mirovanja zamjenjuje četverovektorom $L = (0, \vec{L}_{cm})$ čija je vremenska komponenta nula. Vektor L je *poprostoreni* (*spacelike four-vector*) vektor, pa se relativističke jednadžbe vrtnje zvrka u prostoru Minkowskog najzgodnije opisuju u kovarijantnome obliku. U svakoj revoluciji zvrka koja se promatra u obitelji trenutačnih uzastopnih inercijalnih sustava mirovanja zvrka $L = (0, \vec{L}_{cm}(t))$, ispada da se četverovektor L mijenja. Relativistička jednadžba gibanja zvrka u ovisnosti o pravom ili vlastitom vremenu τ (*proptime*) opisuje promjenu njegovog kutnog momenta količine gibanja [vidi u lit. 2.]:

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{d\tau} = \vec{L}_{cm} \times \vec{\Omega}_T,$$

gdje je

$$\vec{\Omega}_T = \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \vec{\beta} \times \frac{d\vec{\beta}}{d\tau}$$

kutna brzina precesije, poznata kao Thomasova precesija zvrka. U njoj su $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ i $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\beta}}{d\tau} \cdot \frac{1}{c}$, dok je $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ Lorentzov faktor. Thomasova precesija se ne pojavljuje u geodetskim gibanjima zvrka. Mogli bismo Thomasovu precesiju — kao precesiju sustava rotirajućeg zvrka — **tumačiti** kao posljedicu Lorentzovih transformacija kojima povezujemo **precesiju** (veličine zvrka) u trenutačnim uzastopnim sustavima (vrijeme τ) s laboratorijskim sustavom (vrijeme t) u kojem se ona za svaki pojedinačni tren t odmah izravno ne vidi.

Međutim, u vrtnji zvrka koji se giba po stazi oko Zemlje (*transporting gyroscope*) mogu se stvarno opažati njegove geodetske precesije u gravitacijskom polju Zemlje, čije mjerenje bi predstavljalo još jednu vrlo

finu provjeru Einsteinove teorije relativnosti. Ta krucijalna ideja testiranja Einsteinove opće relativnosti metodom zvrka oživotvorena je lansiranjem *Stanford's and NASA Gravity B sonde* 20. travnja 2004. u stazu oko Zemlje čija je visina 640 km iznad polova. Sonda će kroz 18-mjesečnu misiju (sakupljanje podataka) precizno mjeriti geodetske precesije zvrka: de Sitterovu i Lense-Thirringovu. De Sitterova precesija zvrka odgovara slučaju vrtnje zvrka u stazi oko Zemlje kad bi Zemlja bila u mirovanju. U tom se slučaju gravitacijsko polje Zemlje opisuje simetričnom i vremenski nezavisnom Schwarzschildovom metrikom. Govorimo o de Sitterovoj geodetskoj precesiji (gibanju) zvrka za Schwarzschildovu metriku, koja nije analogna Thomasovoj precesiji. De Sitterova je precesija karakteristična za slobodno padajuće trenutačne sustave zvrka u polju Zemlje, a ne za ubrzavajuće kao u slučaju Thomasove precesije u prostoru Minkowskog. Zemlja istovremeno ima vrtnju oko svoje osi, mogli bismo reći karakteristični vlastiti geodetski spin, kojim naročito fino utječe na gibanje zvrka. Taj se utjecaj opaža kao Lense-Thirringova precesija, odnosno u fenomenološkom izričaju kao uvijanje trenutačnih uzastopnih sustava zvrka ("frame dragging"). Metrika više nije statička: premda je polje slabo, vrtnja (spin) Zemlje za sobom *smiče (uvija)* lokalni inercijalni sustav zvrka, što se u općoj teoriji relativnosti računa kao Lense-Thirringova precesija. Ova se precesija može izračunati za slabo gravitacijsko polje Zemlje pod uvjetima poslije-Newtonove granice (*PostNewtonian Approximation*, *PN-approximation*). Srednjak kutne precesije zvrka po jednoj njegovoj revoluciji, po godini, koji smo prilagodili parametrima staze satelita, iznosi [vidi lit. 2. i 3.]:

$$|\langle \Omega \rangle| \cong \frac{3GM_{\oplus}^{3/2}}{2r^{5/2}} \cong 8.4 \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{5/2} \text{'' godina,}$$

gdje su $M_{\oplus}$ i $R_{\oplus}$ masa i polumjer (na polu) Zemlje, G Newtonova gravitacijska konstanta, '' oznaka za lučnu sekundu, a r polumjer staze satelita (iznad polova) u polju Zemlje. Gravitacijska satelitska sonda b će sakupljati baš podatke o srednjoj kutnoj precesiji zvrka i efektu uvijanja njegovog lokalnog inercijalnog sustava. Očekuje se da će ona izmjeriti (testirati) 6.614 ''/godini za geodetski efekt zakreta L zvrka, te 0.0409 ''/godini za učinak *uvijanja (dragging)* inercijalnog sustava zvrka. Lansiranje gravitacijske sonde b kao preciznog visokotehnološkog uređaja za testiranje Einsteinove teorije relativnosti ozbiljno je razmatrano još u ranim 60-im godinama 20. stoljeća. Projekt je započeo potkraj travnja 2004. godine, s najsavršenijom satelitskom i astronomskom tehnologijom, te specijalnim zvrkom konstruiranim tehnikama moderne nanotehnologije i supravodičke tehnologije. Zvrk čine 4 kuglice promjera 3.8 cm iz stopljenog kvarca s vanjskom košuljicom od $1.27 \mu\text{m}$ niobijevog sloja. Kapljeviti helij iz Dewarova spremnika drži niobijeve obloge kuglica na 1.8 K da bi se sićušnim magnetskim poljem definirali vrškovi osi rotirajuće kuglice. Kuglice se vrte (spin) frekvencijom 10 000 okretaja/minuti, a od vanjskih magnetskih smetnji u toj vrtnji zaštićene su štitom koji prigušuje vanjske magnetske utjecaje 10_{12} puta. Referentna orijentacija vrtnje kuglica (smjer vrtnje u lokalnom inercijalnom sustavu zvrka) računalno se namješta i kontrolira pomoću malog teleskopa na sondi prema udaljenom zvijezdu *IM Pegaz*. Zvijezde ima ulogu relativnog udaljenog Kopernikan-skog sustava "fiksni zvijezda" za umjeravanje i kontrolu zvrka na sondi.

To će trajati punih 16 mjeseci, tijekom uzimanja podataka. Zvrk je savršeno tehnološki napravljen, a njegovo okruženje precizno umjereno, tako da se iz signala koji se očitavaju pomoću 4 SQUID-pojačala s 4 kuglice mogu opažati pomaci kutnog momenta količine gibanja zvrka L do osjetljivosti ispod $0.04^\circ/\text{godini}$. Pozitivan rezultat ovog pokusa bit će krucijalna potvrda Einsteinove teorije relativnosti (gravitacije), dočim bi nas nulti rezultat pokusa doveo u svojevrsnu Michelson-Morleyevu modernu situaciju 21. stoljeća — kad valja činiti nove teorijske korake.

5. Zaključak

Blanušine doprinose teoriji relativnosti razlučili smo i poredali u 3 ranga: *izvorne doprinose* kroz Blanušine transformacione formule za količinu topline i temperaturu (I.), koje je Blanuša dobio izvornom primjenom *STR* u termodinamici 1947. godine, zatim *znanstveno dopisivanje s W. Paulijem* 1948. godine (II.) o pojmovnim osnovama i formalizmu teorije relativnosti, te *Blanušinu metodu* (III.) u poimanju, objašnjavanju i populariziranju teorije relativnosti. Izdvojili smo, i držimo naročito značajnim, Blanušino pismo poštovanom Profesoru W. Pauliju, što ga je Blanuša napisao na Martovske ide 15. 03. 1948. g. u Tehničkom fakultetu u Kačićevoj 26 u Zagrebu. Ovo je pismo važno u okviru povijesti znanosti jer pokazuje da je teorija relativnosti, kao veličanstvena prirodnoznanstvena teorija još uvijek otvorena što će, vjerujemo, do izražaja doći napose 2005. godine prigodom njezine 100. godišnjice. Blanušin pristup specijalnoj teoriji relativnosti tijekom cijelog njegovog života u najboljem je skladu s Einsteinovim tumačenjem: *STR* je teorija o transformacijskim pravilima koja povezuju fizička opažanja različitih inercijalnih opažača. I u suvremenim *DSR*-pokušajima, kad se *STR* želi revidirati, to se ne osporava. D. Blanuša izveo je drukčiji oblik transformacijskih formula za količinu topline i termodinamičku temperaturu od Planckovih. Planckove relacije Pauli je ugradio u svoju slavnu knjigu iz teorije relativnosti 1921. godine. Blanuša je smatrao da je Planckovo shvaćanje krivo, prema tome su i relacije netočne, te ih nije mogao prihvatiti. Iz osjećaja dužnosti (u Kantovoj formulaciji), odnosno ljubavi (u platoničkoj formulaciji) prema znanstvenoj istini s jedne, te poštovanja prema W. Pauliju i njegovom djelu i ulozi u fizici s druge strane, Blanuša je odlučio pisati Pauliju pisma s detaljnim obrazloženjima i argumentima za svoje transformacijske formule u termodinamici. Tako je započelo njihovo znanstveno dopisivanje, jedinstveno u modernoj hrvatskoj znanstvenoj povijesti, a možda i čitavoj hrvatskoj kulturnoj i znanstvenoj povijesti. Dodatni razlog Blanuša je svakako nalazio i u činjenici da je Pauli neposredno prije, 1945. godine, primio Nobelovu nagradu za fiziku za slavni Paulijev princip isključenja. Blanušine transformacijske formule u relativističkoj termodinamici i kontekst njihova otkrića nisu još u povijesno-znanstvenom okviru završena priča. Naš prikaz i rezultate istraživanja tih pitanja možemo u suvremenom kontekstu sabrati u ove zaključke i prijedloge.

- Blanuša je pogriješio što vlastita otkrića u teoriji relativnosti nije pokušao objaviti u svjetskim časopisima iz fizik tog vremena. Njegovi doprinosi ostali su tako samo "lokalno" prepoznati!
- *Odgovornost znanstvenika* ("Verantwortung des Wissenschaftlers") Blanuša je u ovom slučaju uzimao tako da najprije treba upozoriti najuglednije živuće fizičare (osnivače) u području teorije relativnosti, ne bi li se oni suglasili s njegovim izvodima. U to je doba u Europi to bio Pauli, a Einstein je u Americi bio zaokupljen drugim pitanjima i problemima. Premda Pauli nije Blanuši dao očekivani odgovor, takav Blanušin etički stav ostaje uzor naraštajima budućih istraživača u Hrvatskoj, Europi i svijetu.
- Je li Blanuša u pismima možda trebao upozoriti na usputnu Paulije-
vu i Planckovu opasku (str. 86. Paulijeve knjige, engl. izd. iz 1958.) o tome da poopćavanje tenzora S_{ik} (tenzor Minkowskog) na druge oblike energije osim elektromagnetske može dovesti do stanovitih ("neopravdano uznemirujućih") paradoksa? Bi li Pauli drukčije postupio i preporučio Blanušin rad za objavljivanje u svjetskom časopisu iz fizike, možemo samo nagađati! Ostaje otvorenim što bi "strašni Pauli" ("die fürchterliche Pauli") ili "bič Božji" ("die Geißel Gottes") napravio?
- V. Devidéov zaključak (vidi u lit. 1.) da se Blanušina otkrića u poznatim udžbenicima iz termodinamike neopravdano pripisuju H. Ottu (koji je do istih otkrića došao 13 godina kasnije od Blanuše), najboljim su putokazom što hrvatski znanstvenici trebaju učiniti. Napose se to odnosi na hrvatske povjesničare znanosti!

Blanušina motivacija u njegovim pismima Pauliju bila je isključivo znanstvena. Pored želje da se u relativističkoj termodinamici primjenjuju točne fizikalne formule, Blanuša je naročito želio da De Broglie u svoj novi projekt valno-mehaničke teorije termodinamike tog vremena ugradi



Sl. 5. Zagreb 1981. g. 25-obljetnica ETF. Uručenje plakete

Blanušine, a ne Planckove formule. Blanuša je bio stalno zainteresiran i otvoren za suvremeni razvoj fizike svog vremena. Na kraju pisma Pauliju od 15. 03. 1948. godine, spominjući i pozdrave što ih Pauliju šalje Dr. Havliček, Blanuša naročito moli Paulija da mu pošalje članak o kvantnoj teoriji gravitacije dvojice ruskih fizičara Ivanenka i Sokolova, **objavljen** u Proc. Roy. Soc. A, 173 (1939) 212., a što ga on sam nije u **moгуćnosti** nabaviti.

Prisjetimo se nekih činjenica o Pauliju. Krsni je kum Pauliju bio E. Mach, fizičar i filozof čiji je doprinos idejama Einsteinove teorije relativnosti bio ključan. Općepoznata je činjenica da je W. Pauli imao "teži" karakter. Fizičar Paul Ehrenfest nazivao je Paulija "*strašnim Paulijem*" ("*die fürchterliche Pauli*") ili pak "*bičem Božjim*" ("*die Geißel Gottes*"). Sabrani znanstveni radovi Wolfganga Paulija u dva velika sveska, objavljeni 1964. godine, počinju pretiskom poznatog Paulijevog teksta napisanog pred njegovu smrt 1958. godine, u kojemu on izražava nevjericu u netom otkriveno narušenje simetrije prostornog pariteta (zrcaljenja) u β -raspadu. T. D. Lee i C. N. Yang su 1956. **teorijski pretpostavili takvo narušenje**, a eksperimentalno izmjerila i **protumačila C. Wu u β -raspadu ^{60}Co 1957. godine**. Pauli je takve ideje **teško prihvaćao**, tako da ne **iznenaduje njegov odnos prema Blanuši**, njegovim izvodima i pismima.

S druge pak strane, Blanušine radove i djelovanje u matematici i fizici kao i u njihovu presjeku možemo opisati jednostavnom Poincaré ovom konvencijom: "*Les faits ne parlent pas*" ("*Činjenice ne govore.*"). Henri J. Poincaré ovom trivijalnom konvencijom osigurava mjesto i ulogu matematičkoj fizici, hipotezi i generalizaciji u znanstvenom istraživanju **općenito**. Poincaréova **algebra i filozofske ideje ponovo oživljuju u pokušajima formuliranja novih postulata u fizici relativnosti, kad se relativnost želi proširiti i na fenomenologiju kvantne gravitacije**. Poincaré je želio naglasiti kako nije sve u podacima i pokusima, ma koliko oni veliki i značajni bili! D. Blanuša je mislio i djelovao slično kao i slavni francuski matematičar i filozof Poincaré.

Želimo još reći da termodinamički prijemor između Blanuše i Paulija nije razriješen osjetljivim i preciznim pokusima. Barem koliko je autoru ovog članka poznato! To nam se ne čini stranim jer Blanuša nije svoje otkriće objavio u svjetskom časopisu iz fizike, da bi se time onda pozabavili vrhunski sveučilišni laboratoriji u svijetu. S druge strane, ostvarenje misaonih eksperimentalnih prijedloga iz njegovih članaka, i danas izgleda tvrdim eksperimentalnim problemom. Naime, precizna mjerenja prijelaza topline između tijela u sustavu u mirovanju i odgovarajućem gibajućem sustavu upućuju na gotovo savršenu izolaciju tih sustava od okoline. To je, kako je poznato, jedan od najtežih tehničkih iskušenja termodinamike u njezinoj povijesti!

Možemo na kraju reći da se u razvoju hrvatskog prirodoslovlja i matematike u 20. stoljeću ime profesora Danila Blanuše izdiglo zbog njegovog **dugogodišnjeg interesa i temeljitog bavljenja A. Einsteinom i pitanjima teorije relativnosti**. Smijemo reći da svojim transformacijskim formulama i dokazima za njihovu valjanost Blanuša zaslužuje mjesto uz bok Plancku i Pauliju u područjima STR i termodinamike.

Zabilješke i izvori

- [1] Danilo Blanuša 1903. – 1987., Spomenica preminulim akademcima, Svezak 50, Razred za mat., fiz., kem. i tehničke znanosti, urednik izv. član V. Devidé, JAZU, Zagreb, 1989.
- [2] NORBERT STRAUMANN, *General Relativity and Relativistic Astrophysics, With 81 figures*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, Second printing, 1991. Title of the German edition: *Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik*; 2. Auflage (Lecture Notes in Physics, Vol. 150).
- [3] WILLIAM D. MCGLINN, *Introduction to Relativity*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 2003.
- [4] MAX BORN, *Einsteinova teorija relativnosti i njezini fizički osnovi*, prema trećem izdanju preveo, dodatkom i bilješkama nadopunio D. Blanuša, znanstvena djela Hrvatskog prirodnoslovnog društva, Knjiga I, "Tipografija" grafičko-nakladni zavod, Zagreb, 1948.
- [5] DANILO BLANUŠA, *Teorija relativnosti*, Mala biblioteka za matematiku, fiziku i kemiju br. 7, Školska knjiga, Zagreb, 1955.
- [6] ROBERT H. DICKE, *Gravitation and the Universe*, The Franklin Institute, Memoirs of the American Philosophical Society, Vol. 78 (1970), American Philosophical Society, Philadelphia, 1970.
- [7] DANILO BLANUŠA, *Sur les paradoxes de la notion d'énergie*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II 2 (1947), str. 249–250.
- [8] DANILO BLANUŠA, *O relativističkoj termodinamici*, Prvi kongres mat. i fiz. FNJR, Bled 1949, Naučna knjiga, Beograd 1951., str. 235–240.
- [9] DANILO BLANUŠA, *Osnovi relativističke kinematike*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 6 (1951), str. 1–32.
- [10] Blanušina korespondencija s W. Paulijem:
 10.1. Blanušino pismo poštovanom Profesoru W. Pauliju, nadnevka 15. 03. 1948., poslano iz Tehničkog fakulteta u Kačićevoj 26. Tipkani tekst na pisaćem stroju s Blanušinim ispravkama (ukupno 7 stranica).
 10.2. Blanušino pismo Paulu Urbanu u Grazu, Universitätplatz 5, nadnevka 1. 06. 1948. Koncept napisan Blanušinom rukom (ukupno 4 stranice) iz kojeg se vidi da je dopisivanje bilo višestruko, uključujući Urbanove odgovore, te da je Blanuša Urbanu slao separate svojih radova.
- [11] DANILO BLANUŠA, *Opća teorija relativnosti*, popularno predavanje 08. siječnja 1975., B₁ ETF-a, Elektrotehnički fakultet, Zagreb, 1975.;
 DANILO BLANUŠA, *Gravitacija i svemir*, znanstveni kolokvij na 8. sjednici (prenumerirana u 220. sjednicu) Znanstvenog vijeća ETF-a, održanoj 8. srpnja 1975., Elektrotehnički fakultet, Zagreb.
- [12] V. GLASER, *Kovarijantna kvantna elektrodinamika*, uredio dr. Danilo Blanuša, dopisni član, JAZU, Zagreb, 1955.

- [13] *Nekrolog* Vladimiru Jurku Glaseru, *CERN COURIER*, Vol. **24**, No. 2 (1984), p. 67.
- [14] L. D. LANDAU, J. B. RUMER, *Što je teorija relativnosti*, prijevod O. Vernić, predgovor akademik Danilo Blanuša, III izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- [15] DANILO BLANUŠA, *Gravitacija*, Tehnička enciklopedija 6 G-Ka, glavni urednik Hrvoje Požar, Jugoslavenski leksikografski zavod, Zagreb, 1979., str. 260–265.
- [16] ROGER PENROSE AND WOLFGANG RINDLER, *Spinors and Space-Time*, Volume 1: Two spinor calculus and relativistic fields, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [17] ERWIN SCHRÖDINGER, *Expanding Universes*, Cambridge University Press, 1957.
- [18] PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC, *The Relation between Mathematics and Physics*, Lecture delivered on presentation of the James Scott prize, February 6, 1939. Published in: *Proceedings of the Royal Society (Edinburgh)*, Vol. **59**, 1938. – 39., Part II pp. 122–129.
- [19] A. EINSTEIN, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, *Annalen der Physik*, **49** (1916) 769–822.
- [20] *The new physics*, priređivač P. Davies, Cambridge University Press, Cambridge, 1989., 2. poglavlje, Will, C., *The renaissance of general relativity*, str. 7–33.
- [21] TH. FRANKEL, *Gravitational curvature; An Introduction to Einstein's Theory*, W. H. Freeman and Comp., San Francisco, 1979.
- [22] A. GIAZOTTO, *Interferometric Detection of Gravitational Waves*, *Physics Reports* **182**, br. 6 (1989) 365–425.
- [23] M. HACK, *Sette variazioni sul cielo*, Raffaello Cortina Editore, Milano 1999.
- [24] M. ROSS, *Introduction to Cosmology*, John Wiley & Sons, Chichester, 1994.
- [25] A. PAIS, *Subtle is the Lord ... the Science and Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, Oxford, 1983.
- [26] TOMISLAV PETKOVIĆ, *Uvod u znanost o toplini i termodinamici*, Element, Zagreb, 1997.
- [27] TOMISLAV PETKOVIĆ, *Uvod u modernu kozmologiju i filozofiju*, 2. prošireno izdanje, Gradska knjižnica Juraj Šižgorić Šibenik i Element Zagreb, Šibenik-Zagreb, 2002.
- [28] *Collected Scientific Papers by Wolfgang Pauli*; In Two Volumes, Edited by R. Kronig and V. F. Weisskopf, Interscience Publisher, a division of John Wiley & Sons, J. Wiley, New York, 1964.
W. PAULI, *Relativitätstheorie*, in *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Vol. **5**, Part 2, B. G. Teubner, Leipzig, 1921, pp. 539–775.
Supplementary Notes by the Author, in *Theory of Relativity*, Pergamon Press, Inc., New York, 1958, pp. 207–232.

- [29] *Collected Scientific Papers by Wolfgang Pauli*; Volume 2 (Journal articles, conference reports, and contributions to discussions, by Wolfgang Pauli):
Theorie und Experiment, Dialectica **6**, 141–142 (1952).
Albert Einstein in der Entwicklung der Physik, Universitas **13**, 593–598 (1958). Originally published in *Neue Zürcher Zeitung*, No. **89**, Jan. 12, 1958.
Zur Thermodynamik dissoziierter Gleichgewichtsgemische in äusseren Kraftfeldern, in *Festschrift Jakob Ackeret*, *Z. Angew. Math. Phys.* **9b**, 490–497 (1958).
Impressionen über Albert Einstein, *Neue Zürcher Zeitung* No. **1055**, Aug. 22, 1955.
- [30] M. PLANCK, *S. B. preus. Akad. Wiss.* (1907) 542.
- [31] M. PLANCK, *Zur Dynamik bewegter Systeme, Annalen der Physik*, Leipzig, **76** (1908) 1–34.
- [32] EINSTEIN, *Jb. Radioakt.*, **4** (1907) 440.
- [33] TOMISLAV PETKOVIĆ, *Blanušini doprinosi teoriji relativnosti i njezin razvoj nakon 1955. godine*, Pogovor, str. 153–191, u: D. Blanuša, *Teorija relativnosti*, priredio V. Vujnović, Školska knjiga, Zagreb, 2003.
- [34] TOMISLAV PETKOVIĆ, *Blanušini doprinosi teoriji relativnosti*, str. 29–65, u: Danilo Blanuša (1903. – 1987.), Znanstveni skup održan 29. svibnja 2003. godine u palači Akademije u povodu 100. obljetnice rođenja, urednik akademik S. Mardešić, HAZU, Razred za matematičke, fizičke i kemijske znanosti, Zagreb, 2003.
- [35] IVAN IVANŠIĆ, *Blanušin život i doprinosi matematici*, str. 9–27, u: Danilo Blanuša (1903. – 1987.), Znanstveni skup održan 29. svibnja 2003. godine u palači Akademije u povodu 100. obljetnice rođenja, urednik akademik S. Mardešić, HAZU, Razred za matematičke, fizičke i kemijske znanosti, Zagreb, 2003.



Josip Lončar i Danilo Blanuša. U pozadini Božidar Stefanini.



PRIKAZ RADA “METODA SIMETRIČNIH KOMPONENATA”

Vjekoslav Filipović

Rad je nastao na temelju predavanja koje je autor održao na stručnom seminaru organiziranom na principu kratkotrajnog poslijediplomskog studija za inženjere elektrotehnike. Objavljen je u Zborniku predavanja sa seminara Elektroindustrijska problematika velikih elektrana, održanog od 15. do 25. IV. 1957. u organizaciji Zavoda za elektrostrojarstvo Elektrotehničkog fakulteta Zagreb, izdalo Elektrotehničko društvo Hrvatske.

U uvodnom dijelu rada naveden je pregled literature i obrazložen smisao razvoja metode i njezinog uvođenja u teoriju višefaznih izmjeničnih struja. Autor zatim podsjeća na predočavanje sinusnih i kosinusnih izmjeničnih veličina kompleksnim brojevima te izvodi vezu između produkta kompleksnih brojeva sa skalarnim i vektorskim produktom vektora. Nakon definiranja operatora zakretanja vektora u ravnini uvodi pojam sustava vektora u ravnini i pojam njihove simetričnosti. Tu obrazlaže i pravila zbrajanja i množenja općenitih (nesimetričnih) sustava vektora preko zbrajanja i množenja njihovih komponenata. Za simetrične sustave vektora izvodi posebna pravila koja vrijede kod njihovog množenja. Nakon što uvede pojam zbroja komponenata sustava, utvrđuje njegov iznos za različite simetrične sustave sastavljene od triju vektorskih komponenata. Također pokazuje čemu je jednaka suma zbrojeva komponenata dvaju sustava. Ovdje uvodi i pojam konjugirano kompleksnog sustava vektora u ravnini.

Na temelju definiranih pojmova i pomoću izvedenih i provjerenih pravila autor u središnjem dijelu rada izvodi osnovni teorem metode simetričnih komponenata, bitan za njezino razumijevanje i prihvatanje, koji izriče da se bilo koji sustav s triju vektorskih komponenata može shvatiti kao zbroj triju simetričnih trokomponentnih sustava. Vrijednost tvrdnje da je uvijek moguće jednoznačno rastaviti bilo koji trofazni sustav na tri simetrična (direktni, inverzni i nulti) potkrepljuje analitičkim i geometrijskim dokazima.



Sl. 1. Zagreb 1973.g. Na glavnoj skupštini Elektrotehničkog društva

Da bi pokazao odnos između snaga trofaznog nesimetričnog strujno-naponskog sustava i snaga nadomjesnih simetričnih sustava podsjeća na pojmove i definicije trofazne djelatne, jalove i prividne snage. Korištenjem izvedenih pravila za množenje simetričnih sustava, pravila za određivanje konjugirano-kompleksnog sustava simetričnom sustavu i definicija trofaznih snaga lagano izvodi drugu važnu relaciju metode simetričnih komponenata. Ona kaže da su trofazne snage nesimetričnog strujno-naponskog sustava (djelatna, jalova i kompleksna prividna) jednake zbroju trofaznih snaga nadomjesnih simetričnih sustava.

Primjenu metode autor ilustrira na primjeru jednofaznog kratkog spoja trofaznog voda. Tu ukazuje i na uzroke različitih vrijednosti impendancija direktnog, inverznog i nultog sustava, te upućuje na način njihovog određivanja mjerenjem. Iz poznatih struja i napona jednofaznog kratkog spoja, izraza koji vežu struje pojedinih simetričnih sustava sa strujama nesimetričnog, te naponskih jednadžbi za određene strujne krugove određuje izraze za struje simetričnih sustava, izraz za dozemnu struju, fazne napone mjesta kratkog spoja prema zvjezdištu generatora i prema zemlji.

U ovom radu autor je metodično, na njemu svojstven jednostavan i jasan način prilagođen inženjerskom predznanju izveo osnovne relacije metode simetričnih komponenata, metode koja u teoriji višefaznih strujno-naponskih sustava ima posebno značenje. Na kraju moram spomenuti, iako je rad pun matematičkih izraza, autor je dosljedno proveo interpunkciju kroz cijeli tekst, te je terminologija koju je on tada koristio danas prihvaćena.



Rudi Tollman: Danilo Blanuša 1931.



O BLANUŠINU DOPRINOSU ODREĐIVANJA BROJA NEZAVISNIH UVJETA U TRIGONOMETRIJSKIM MREŽAMA

Miljenko Lapaine

S**ažetak.** Ukratko je opisana problematika geodetskih trigonometrijskih mreža i uvjeti koji se postavljaju pri matematičkoj obradi odgovarajućih geodetskih mjerenja. Prikazan je rad H. Junga iz 1941. na koji se nadovezuju istraživanja D. Blanuše, a zatim i Blanušin rad "Über die Anzahl der Bedingungsgleichungen [in] beliebigen geodätischen Netzen (O broju uvjetnih jednažbi u proizvoljnim geodetskim mrežama)", objavljen 1944. godine. Na kraju je na primjerima ilustriran problem nezavisnosti, odnosno zavisnosti uvjetnih jednažbi u trigonometrijskim mrežama.

Ključne riječi: trigonometrijska mreža, triangulacijska mreža, uvjetne jednažbe, Danilo Blanuša.

1. Uvod

U ovom prikazu bavimo se radom Danila Blanuše: *Über die Anzahl der Bedingungsgleichungen [in] beliebigen geodätischen Netzen* (O broju uvjetnih jednažbi u proizvoljnim geodetskim mrežama), objavljenog na njemačkom jeziku 1944. godine u publikaciji *Zeitschrift für Vermessungswesen*.

Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV) jedan je od najpoznatijih svjetskih geodetskih časopisa. Izlazi od 1872. godine kao stručno glasilo Njemačkog društva geodeta (Deutscher Verein für Vermessungswesen). U njemu se objavljuju najnovija geodetska saznanja iz teorije i prakse. Danas pokriva područja geodezije, geoinformatike i upravljanja zemljištem. Skraćeni naziv časopisa je i dalje ZfV, ali puni naziv je *Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*.

U tom časopisu, u kojem je objavljen navedeni Blanušin rad (1944), objavljen je prije toga rad H. Junga (1941) na koji se Blanušin nadovezuje, a kasnije rad H. Knorra (1952) koji Blanušin rad citira.

Osim ZfV-a, uz spomenuti Blanušin rad vezana je još jedna izuzetno važna geodetska publikacija: *Handbuch der Vermessungskunde*, izdavač J. B. Metzler, Stuttgart. To je geodetski priručnik za koji se može reći da je po opsegu i značaju zapravo geodetska enciklopedija. Prvo izdanje izašlo je još krajem 19. stoljeća. Do danas je objavljeno deset izdanja, koja su svaki put dopunjena i prerađena. Posljednje izdanje iz 1961. godine objavljeno je u deset knjiga (pet glavnih i pet dodatnih svezaka). Poznato je i često se citira i pod nazivom Jordan/Eggert/Kneissl, prema prezimenima trojice glavnih urednika, poznatih njemačkih profesora geodezije.

Handbuch der Vermessungskunde, Band I, 8. izdanje (Jordan, Eggert 1935), jedan je od dvaju izvora na koje se Blanuša poziva u svojem radu. U 10. izdanju, Band IV, *Mathematische Geodäsie (Landesvermessung)* citira se Blanušin rad u §65 na str. 544 (Jordan, Eggert, Kneissl 1958).



Sl. 1. Na Sljemenu

Problematika kojom se Blanuša bavi u svom radu spada u dva uža područja geodezije: račun izjednačenja i višu geodeziju ili državnu izmjeru (Helmert 1872, 1924, Čubranić 1954, Großmann 1961, Gotthardt 1968, Bjerhammar 1973, Höpcke 1980, Haimov 1984, Boljšakov i Markuze 1984, Boljšakov i Levčuk 1985).

Prema Höpckeu (1980), formule za određivanje broja uvjetnih jednadžbi dao je C. F. Gauss, dokazao ih je Ch. Gerling, a dalje proširio F. W. Bessel. Zanimljivo je da za izbor nezavisnih uvjeta u trigonometrijskim mreža-

ma postoji tzv. *Besselovo pravilo* (Englemann 1875/76, Helmert 1924, Čubranić 1954).

D. Blanuša diplomirao je na Elektrotehničkom odsjeku Tehničke visoke škole u Beču, a nekoliko semestara slušao je još i teorijsku fiziku i matematiku. Od 1934. do 1944. radio je kao elektroinženjer Gradske električne centrale u Zagrebu. Godine 1937. počeo je istraživati izvjesna svojstva Besselovih funkcija i na tom području doktorirao 1942. na Tehničkom fakultetu u Zagrebu. Prirodno se postavlja pitanje odakle Blanuši ideja da se otprilike u to doba pozabavi problemom broja uvjetnih jednadžbi u geodetskim trigonometrijskim mrežama? Točan odgovor na to pitanje za sada nije moguće dati. Međutim, činjenica je da se Blanuša 1943. god. habilitirao na Tehničkom fakultetu u Zagrebu za predmet matematika, te da je 1944. izabran za izvanrednog profesora na tom fakultetu. Sigurno je poznao neke od nastavnika koji su u to doba bili na Tehničkom fakultetu pa je vrlo vjerojatno preko nekoga od njih došao do prvih saznanja o nekim geodetskim problemima. Nastavnici geodetskih i njima srodnih predmeta na Tehničkom fakultetu, navedeni abecednim redom, bili su uz Danila Blanušu: Nikolaj Abakumov, Boris Apsen, Josip Baturić, Franjo Braum, Juraj Božičević, Nikola Čubranić, Antal Fasching, Zenon Hanžek, Otto Hoffman, Pavle Horvat, Stjepan Horvat, Ivan Jagnić, Mato Janković, Stevo Jednak, Ljubomir Katušić, Vladimir Kirin, Marije Kiseljok, Ivan Kreiziger, Anđelko Krček, Milan Kreković, Slavko Macarol, Željko Marković, Vilim Niče, Ivan Novak, Mijo Philippović, Leo Randić, Milenko Sevdic, Stjepan Škreb, Mirko Tomić i Vladimir Vranić (Lapaine 2002). Izgleda da se Blanuša kasnije nije više bavio problematikom geodetskih mreža. Ipak, mreže i grafovi ostaju jedna od njegovih preokupacija (vidjeti, npr., Blanuša 1963, Ivanšić 2001).

Na ovome mjestu treba spomenuti par terminoloških momenata. U geodeziji se ponekad mjere kutovi, a ponekad pravci. Kad kažemo *pravac*, tada u geodeziji zapravo mislimo na *smjer*. Naime, u hrvatskoj geodetskoj praksi uobičajen je naziv *pravac*, premda je, npr., na engleskom *direction*, na njemačkom *Richtung* ili ruskom *направление*. Radi se zapravo o očitavanju na skali kutomjera odgovarajućeg geodetskog instrumenta (npr. teodolita). Razlika takvih dvaju očitavanja, odnosno "pravca", zapravo je vrijednost veličine pripadnoga kuta.

U geodetskoj literaturi o trigonometrijskim mrežama susreću se različiti uvjeti, a među njima su figurni i poligonski. Tu treba pripaziti jer se ponekad pod poligonskim uvjetima misli na *figurne*, a ponekad ne. Jedni i drugi objašnjeni su u ovome radu u 3. poglavlju. Ovdje ćemo samo naglasiti da Blanuša upotrebljava termin poligonski uvjet ili poligonska jednadžba (*Polygonleichung*) za uvjet o zbroju kutova u poligonu. U hrvatskoj stručnoj geodetskoj literaturi takvi se uvjeti nazivaju *figurnima* (Čubranić 1954). Vidjeti također napomenu na str. 544 u Jordan/Eggert/Kneissl (1958).

2. Geodetske trigonometrijske mreže

Trigonometrijska ili triangulacijska mreža je skup stabiliziranih točaka na Zemljinoj površini, na izvjestan način međusobno povezanih i položajem određenih u jedinstvenom koordinatnom sustavu.

Budući da se u navedenoj definiciji mreže ne spominju ni trigonometrijske funkcije ni trokuti, prirodno se postavlja pitanje zašto se takve mreže u geodeziji nazivaju trigonometrijskima ili triangulacijskima. Odgovor je moguće naći u povijesti. Naime, u osnovi, u geodeziji je *triangulacija* odabiranje izvjesnog broja točaka na terenu, njihovo međusobno povezivanje obilježavanjem, signalizacijom u oblik trokuta pa pomoću mjerenja kutova njihovo određivanje, tako da se točno ustanovi njihov međusobni položaj (Čubranić, 1954). Triangulaciju je prvi uveo (1615) Holandain Willebrand Snellius. Osnovna je zamisao da poznavajući samo jednu dužinu i upotrijebivši uočene trokute te mjereći kutove u tim trokutima, možemo izračunati stranice svih ostalih trokuta. U tom računu pojavljuju se trigonometrijske funkcije i odatle naziv *trigonometrijska mreža*. Od Snelliusa do našeg doba triangulacija je u geodeziji bila osnovni način određivanja međusobnog položaja stalnih — osnovnih točaka.

Točke se raspoređuju po terenu prema unaprijed sastavljenom projektu, a služe kao oslonac za geodetsku izmjeru i potom za dobivanje topografsko-katastarskih planova i karata različita mjerila, te kao koordinatni sustav (okvir, *eng.* frame) za ostvarivanje mnogih inženjerskih radova na terenu i za razne znanstvene potrebe (određivanje oblika, izmjera i fizikalnih svojstava Zemlje).

Nezamjenjivu ulogu u razvoju geodezije i ostalih geoznanosti ima uspostavljanje i osuvremenjivanje osnovnih geodetskih mreža, koje su temelj za izvođenje ostalih geodetskih radova, bilo za praktične ili znanstvene namjene. Osnovnim geodetskim radovima prikupljaju se temeljni podaci o položaju točaka geodetskih mreža i temeljni podaci o geofizičkim, odnosno geodinamičkim poljima. Geofizička su polja, npr., polje ubrzanja sile teže, geomagnetna polja i sl., a u geodinamička su polja ubrajaju polja sile koje uzrokuju pomake Zemljina tla (npr. pomake tektonskih ploča). To su osnovne geodetske baze, tj. skupina geodetskih mreža i točaka definiranih u *astronomsko-geodetskoj mreži*, *trigonometrijskoj mreži*, *mreži preciznog nivelmana* i *nivelmana velike točnosti*, te *osnovnoj gravimetrijskoj mreži*.

U suvremenoj se geodeziji te mreže ujedinjuju, tj. sve se mjerne veličine (duljine, kutovi, pravci, azimuti, visinske razlike, koordinatne razlike, razlike ubrzanja sile teže i njihove derivacije) zajednički obrađuju, pa je tako nastao novi pojam *integrirana geodezija*.

Primjenom suvremenih satelitskih metoda za uspostavljanje geodetskih mreža i mjerenjem apsolutnih ubrzanja sile teže podaci o geodetskim točkama često se dobivaju samostalno (odvojeno), te je u budućnosti realnije govoriti o polju točaka nego o mreži izravno povezanih točaka.

Trigonometrijske mreže rasprostranjene po cijelom teritoriju države osnovne su državne položajne mreže. One omogućuju ujedinjenje geodetskih radova različitih mjerila, izvedenih u različito vrijeme i na različitim mjestima. U novije je doba istodobnom primjenom kinematičkih globalnih pozicijskih sustava (satelitsko određivanje položaja) i aerofotogrametrije moguće paralelno stvarati mreže i snimati detalje.

Razvijanje trigonometrijskih mreža sastoji se od terenskih radova te obrade i interpretacije rezultata terenskih mjerenja. Terenski se dio rada sastoji u organizaciji i izvođenju astronomsko-geodetskih mjerenja. U posljednje doba tu pripada i prikupljanje baze podataka izravno na terenu. Obrada i interpretacija rezultata obuhvaća redukciju obavljenih mjerenja na prihvaćenu referentnu plohu, matematičku obradu rezultata mjerenja, njihovu sistematizaciju i grafičko prikazivanje, te stvaranje izlaznih podataka.

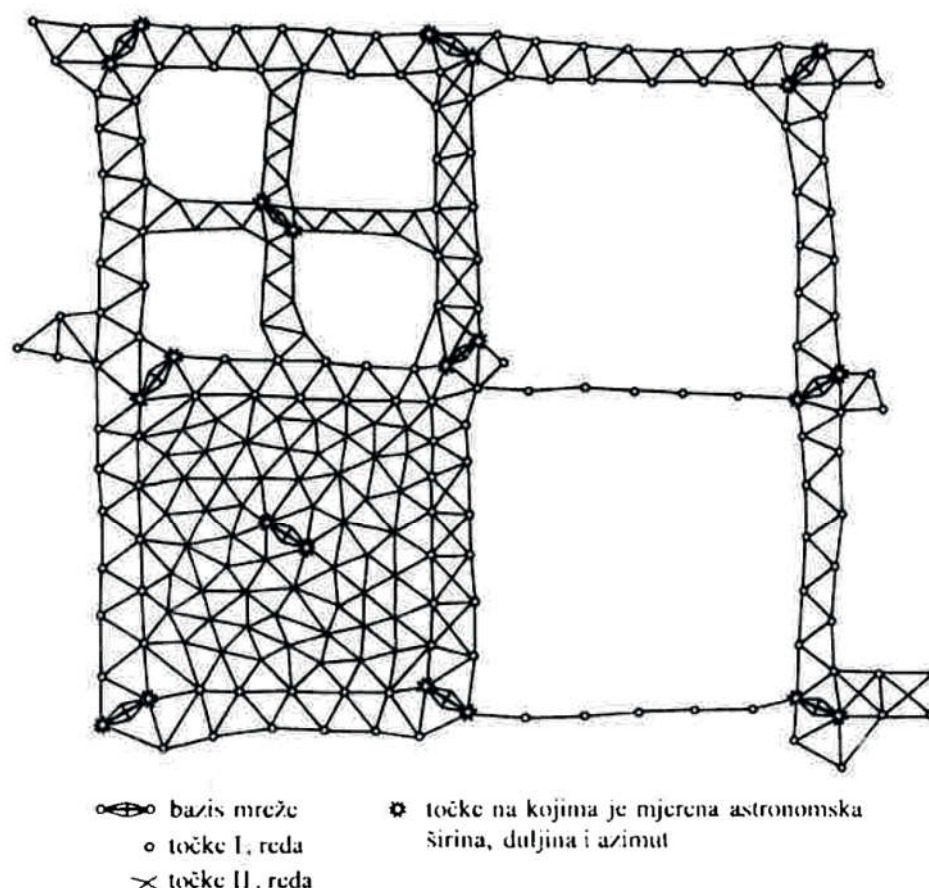
Trigonometrijske se mreže uspostavljaju terestričkim i satelitskim metodama, odnosno pomoću klasične i pomoću satelitske triangulacije, trilateracije i poligonometrije. Već se primjenjuje, a pogotovo će se u budućnosti primjenjivati globalni pozicijski sustav (GPS), koji i na kratkim udaljenostima daje točnost jednaku točnosti klasičnih terestričkih metoda. Ta metoda ne zahtijeva dogledanje stajališta, dakle ni podizanje skupih signala, pa se ubraja među najekonomičnije precizne metode.

Kod klasičnih metoda uspostavljanja trigonometrijskih mreža, već prema obliku i veličini teritorija primjenjivale su se dvije metode: pomoću površinske trokutne mreže i mreže lanaca.

Površinska trokutna mreža pokriva cijeli državni teritorij mrežom trokuta. Zbog velikih troškova, ograničenih tehničkih sredstava, nedovoljnog kadrovskog potencijala, te nemogućnosti zajedničkog izjednačenja, u velikim zemljama takav način razvijanja mreža nije bio prikladan, pa se primjenjivala mreža lanaca uzduž meridijana i paralela s njihovom prosječnom duljinom od 200 km. Na mjestu presjeka lanca mjerene su astronomske koordinate točaka (širina i duljina), azimuti i duljine stranica radi orijentacije i dobivanja mjerila mreže. Točke mreže na kojima su izmjerene astronomska širina, duljina i azimut nazivaju se *Laplaceovim točkama* (Bilajbegović, 1997).

Trigonometrijska mreža I. reda je trigonometrijska mreža s prosječnom udaljenošću točaka od ≈ 30 km. Ona je određena reljefom terena, Zemljinom zakrivljenošću, optičkim mogućnostima instrumenata i meteorološkim uvjetima. Lanci su najčešće sastavljeni od trokuta koji se nižu jedan na drugi i od četverokuta s obje dijagonale, a rjeđe od naslonjenih središnjih sustava i dva reda trokuta (sl. 2).

Daljnja se proglašćivanja mreže izvode po načelu iz velikog u malo. Tako je *trigonometrijska mreža II. reda* skup stabiliziranih točaka na Zemljinoj površini uklopljenih u mrežu I. reda i s pojedinačno ili skupno određenim koordinatama s prosječnom udaljenošću točaka od ≈ 18 km. Jednako su tako točke *trigonometrijske mreže III. reda* uklopljene u mrežu II. reda s prosječnom udaljenošću od ≈ 12 km, a točke *trigonometrijske mreže IV. reda* uklopljene u mrežu III. reda s prosječnom udaljenošću od ≈ 2.5 km.



Sl. 2. Mreža razvijena sustavom lanaca poligonometrije

Trigonometrijske mreže I. reda imaju međunarodno značenje, kako zbog određivanja oblika, izmjera i fizikalnih svojstava Zemlje, tako i zbog ujedinjavanja kartografskih radova države.

3. Uvjeti kod trigonometrijskih mreža

Geodetska mjerenja, ma kako ih točno izveli, neće biti potpuno točna, nego će biti podvrgnuta većim ili manjim pogrešakama. Čak i kad mjerenja popravimo, npr. po metodi najmanjih kvadrata, tako dobiveni rezultati neće biti točne vrijednosti traženih veličina, nego samo približne.

Kod triangulacije u geodeziji dobivamo stranice trokuta i međusobni odnos točaka pomoću mjerenih kutova. Svaki kut mjeri se izravno više puta i iz tih se mjerenja aritmetičkom ili općom sredinom određuju vrijednosti pomoću kojih se računaju stranice. Da bi se dobila neka stranica, redovito se uzima veći broj kutova nego što je neophodno potrebno za računanje te stranice. Na taj način mogla bi se tražena stranica izračunati preko jednih i preko drugih kutova i tako za nju dobiti više rezultata, na temelju kojih bi se onda zaključivalo o konačnom, definitivnom iznosu duljine tražene stranice. No, u geodeziji se obično radi drukčije. Ne računa se duljina

svake stranice iz svih mogućih kombinacija izmjerenih kutova, nego se postavlja zadatak da se mjereni kutovi tako poprave, da se za svaku pojedinu stranicu trokuta računanjem iz bilo koje kombinacije kutova dobiju jednoznačne veličine. Taj postupak naziva se izjednačenjem trigonometrijske mreže.

Promotrimo trokut i neka je zadana jedna stranica c . Tom dužinom dan je međusobni odnos točaka A i B . Želimo li mjerenjem kutova odrediti točku C , potrebno je izmjeriti barem dva kuta u trokutu. No, ako su izmjerena sva tri kuta, α, β, γ , onda stranice a i b možemo izračunati po sinusovom poučku na dva načina. Zbog pogrešaka u izmjerenim kutovima rezultati računanja neće biti potpuno jednaki. To će biti samo onda ako je

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Jedno prekobrojno mjerenje daje jedan uvjet. Razmatrajući trokut na sferi ili elipsoidu, zbroj kutova trokuta mora iznositi $180^\circ + \varepsilon$, gdje je ε odgovarajući eksces.

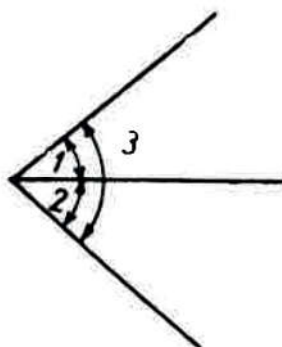
Trigonometrijske mreže redovito nisu sastavljene samo od jednog trokuta, nego od više njih, pa je svaka takva mreža više ili manje kompliciran sustav. Najjednostavniji i osnovni sustavi su centralni sustav i četverokut s objema dijagonalama. Čitava mreža predstavlja jednu povezanu cjelinu. Svi se uvjeti moraju tretirati istodobno i skupno, tj. izjednačenje mora zadovoljiti sve uvjete.

Izjednačenje se sastoji u tome da se zadovolje izvjesni matematički uvjeti, tako da kojim god putem računali, uvijek dobijemo jednoznačne uvjete. Svako neslaganje nakon izjednačenja rezultat je samo netočnog računanja, pa se takve pogreške uvijek daju, a i moraju, pronaći u samom računu i ispraviti.

U geodetskim trigonometrijskim mrežama postoje razne vrste uvjeta.

1. Uvjet figure. U zatvorenoj geometrijskoj figuri (poligonu) zbroj kutova mora iznositi $(n - 2)180^\circ + \varepsilon$, gdje je ε odgovarajući eksces.

2. Uvjet horizonta (stajališni uvjet). Ako na nekoj trigonometrijskoj točki izmjerimo sve kutove, zbroj tih kutova mora biti 360° .



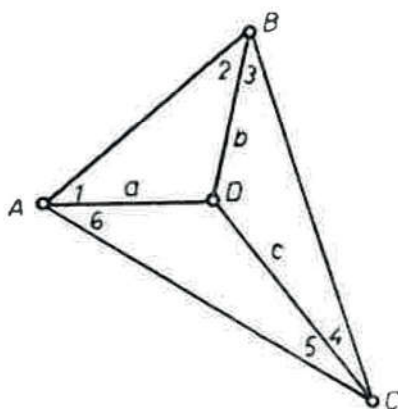
Sl. 3. Kut 3 jednak je zbroju kutova 1 i 2

3. Uvjet zbroja ili razlike (stajališni uvjet). Taj uvjet postoji ako je jedan izmjereni kut zbroj ili razlika drugih mjerenih kutova. Na sl. 3, kut 3 jednak je zbroju kutova 1 i 2.

Izjednačenje mjerenih kutova na stajalištu, odnosno stanici obavlja se redovito i prije općeg izjednačenja, kod stajališnog izjednačenja, no to ne mora biti. Ako se opće izjednačenje obavlja po kutovima, tada je bolje da u to izjednačenje uđu kutovi kakvi su stvarno mjereni (Čubranić, 1954). Stanični uvjeti, iako su prilikom stajališnog izjednačenja bili ispunjeni, trebaju ostati ispunjeni i nakon općeg izjednačenja.

Ako su mjereni pravci (smjerovi), tada nema stajališnih uvjeta.

4. Polusni ili sinusni uvjeti. Kad postoji točka koja je povezana sa svim vrhovima nekog zatvorenog lika, možemo od bilo koje stranice kao početne, pomoću sinusnog poučka izračunati sve ostale stranice i vratiti se natrag na početnu. Uvjet se sastoji u tome da tako izračunata duljina za početnu stranicu mora biti jednaka polaznoj duljini početne stranice. Geometrijske figure koje ovdje dolaze u obzir su centralni sustav, četverokut s objema dijagonalama i zatvoreni lanac trokuta.



Sl. 4. Centralni sistem

Npr., za centralni sustav sa sl. 4, imamo

$$\frac{abc}{bca} = 1, \quad \text{odnosno} \quad \frac{\sin 2 \sin 4 \sin 6}{\sin 1 \sin 3 \sin 5} = 1.$$

Posljednji uvjet nije linearan, pa ga se obično linearizira.

5. Uvjet bazisa. Čim u mreži imamo dvije zadane stranice a i b , nastaje uvjet bazisa, koji se sastoji u tome da polazeći od stranice b računskim putem dobijemo duljinu stranice a , pa se tako izračunata veličina mora potpuno slagati sa zadanom duljinom stranice a . Bazični uvjet po svojoj prirodi nije linearan, pa se redovito linearizira.

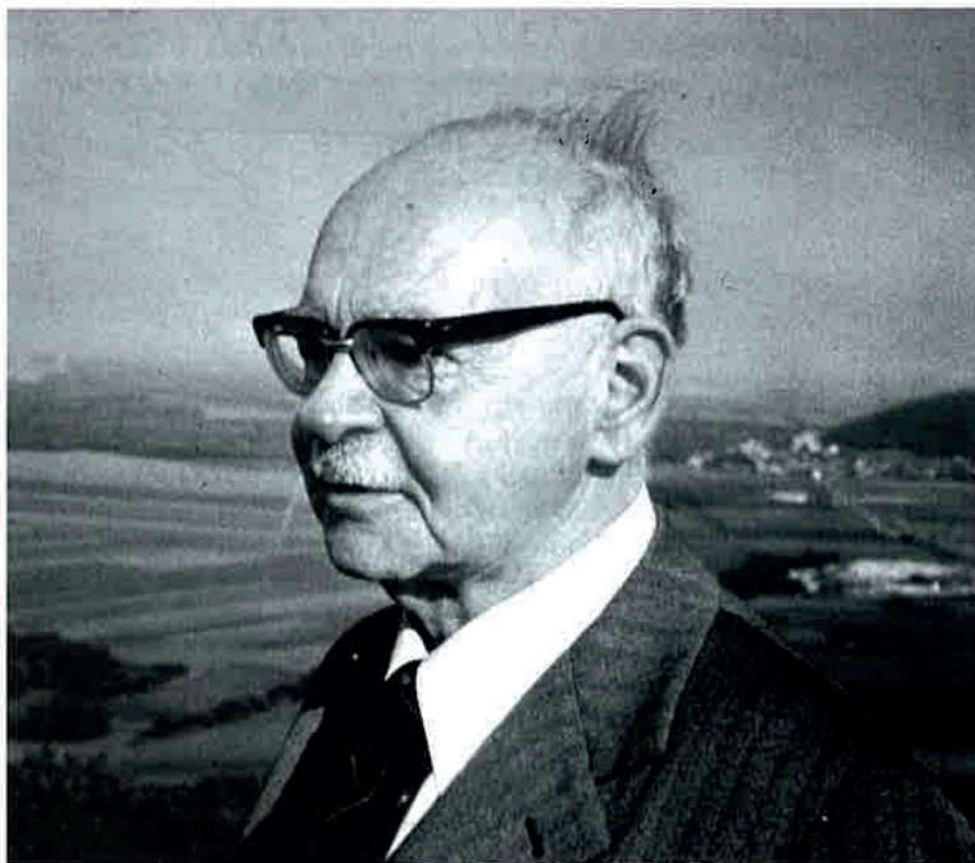
6. Fiksni uvjeti. Kad se nova trigonometrijska mreža nastavlja na staru ili se umeće između dviju starijih, ranije izračunatih mreža, pojavljuju se fiksni uvjeti. Ti uvjeti proističu iz okvira stare mreže, koji mora ostati čvrst, nepromijenjen. Razlikuju se uvjeti fiksnog kuta i uvjeti fiksne stranice.

7. Poligonski uvjeti. Kad mreža ili lanac trokuta potpuno zatvara prostor koji još nije ispunjen trokutnom mrežom, nastaju poligonski uvjeti. Oni nastaju praktički u osnovnoj mreži sistema lanaca oblika zatvorenih poligona, a u popunjujućoj mreži kad se između osnovnih lanaca umeću daljnji popunjujući lanci, odnosno kad se između dviju ranijih triangulacija umeće mreža trokuta, a da na objema stranicama ostane prostor još neispunjen trokutnom mrežom. Više o poligonskim uvjetima može se naći u odgovarajućoj literaturi (vidi, npr., Čubranić, 1954).

Svi detalji o izjednačenju trigonometrijskih mreža s uvjetnim jednadžbama, uključujući prikaz svih oblika uvjetnih jednadžbi i njihov broj u mreži mogu se naći u priručniku (Jordan/Eggert/Kenissl 1958), u poglavlju *Netzausgleichung und Basisvergrößerung*.

4. Broj uvjeta u trigonometrijskim mrežama i motivacija Blanuše na dalje istraživanje

Već je Heinrich Jung iz Instituta za fiziku u Clausthalu (1941) primijetio da uobičajene formule za broj uvjetnih jednadžbi u triangulacijskim mrežama, kao što su, npr., one u poznatom priručniku Jordana i Eggerta (Jordan, 1904; Jordan-Eggert, 1935), mogu zakazati u relativno jednostavnim slučajevima.



Sl. 5. Na izletu u Austriji 1976. g.

Označimo:

W broj izmjerenih kutova u mreži,

p broj svih vrhova mreže,

p' broj točaka određenih jednostranim presjekom (tj. samo presjekom naprijed ili natrag),

l broj svih linija,

l' broj jednostrano opažanih linija.

Tada se prema raznim izdanjima glasovitog *Handbuch der Vermessungskunde*, Band I, (npr. Jordan, 1904; Jordan-Eggert, 1935), može napisati

$$B = W - 2p + 4$$

(A1) broj uvjetnih jednadžbi

$$P = (l - l') - (p - p') + 1$$

(A2) broj poligonskih jednadžbi

$$S = l - 2p + 3$$

(A3) broj jednadžbi stranica

$$St = W - 2l + l' + (p - p')$$

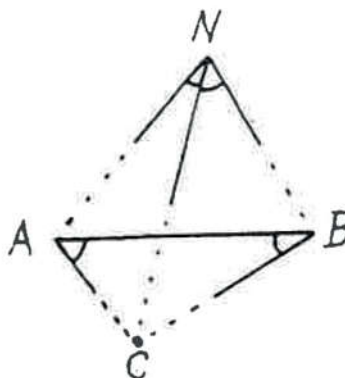
(A4) broj stajališnih jednadžbi

i također

$$B = P + S + St$$

(A5) broj uvjetnih jednadžbi

Te formule dobre su za većinu slučajeva koji dolaze u praksi. Ipak, pri pažljivijem razmatranju može se vidjeti da je njihova primjena ograničena i da one zakazuju u sasvim jednostavnim slučajevima. Jung (1941) je to pokazao na dvama primjerima, od kojih ovdje reproduciramo jedan.



Sl. 6. Određivanje položaja točke C presjekom natrag

Na sl. 6 prikazana je jednostavna shema običnog presjeka natrag. Neka je izmjerena osnovica AB . Iz njezinih krajnjih točaka presjekom naprijed određena je treća točka, C . Konačno, nova točka, N određena je presjekom natrag. Ako su izmjereni kutovi koji su označeni lukovima na sl. 6, tada nema prekobrojnih mjerenja, i prema tome nema uvjetnih jednadžbi. Prebrojavanjem pojedinih elementa dobije se:

$$W = 4, \quad p = 4, \quad p' = 2, \quad l = 6, \quad l' = 5.$$

Pomoću formula (A) dobije se

$$B = 0, \quad P = 0, \quad S = 1, \quad St = -1,$$

što očito nije dobro.

Da bi otklonio pogrešku u formulama (A), Jung uočava da bi trebalo razlikovati *složene* i *jednostavne* mreže. Npr., ako se na sl. 6 izbrišu linije

označene točkicama, tj. one koje prikazuju jednostrano opažane linije, tada se mreža raspada na dva odvojena dijela. Mreža koja se može na opisani način rastaviti na dijelove, naziva se složenom mrežom (*zusammengesetzte Netz*), a svaki od dijelova na koje se raspala podmrežom (*Teilnetz*).

Za slučaj složenih mreža koje se mogu rastaviti na podmreže Jung izvodi nove formule

$$\begin{array}{ll} B = W - 2p + 4 & (A'1) \text{ broj uvjetnih jednažbi} \\ P = (l - l') - (p - p_v) + n & (A'2) \text{ broj poligonskih jednažbi} \\ S = l - 2p - n + 4 & (A'3) \text{ broj jednažbi stranica} \\ St = W - 2l + l' + (p - p_v) & (A'4) \text{ broj stajališnih jednažbi} \end{array}$$

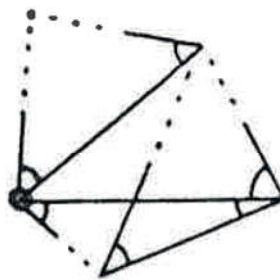
gdje su uvedene nove oznake:

n broj podmreža,
 p'' broj točaka određenih presjekom natrag,
 $p_v = p' - p''$ broj točaka određenih presjekom naprijed.

Za prethodni primjer pomoću formula (A') sad imamo

$$\begin{array}{llll} n = 2, & p'' = 1, & p_v = p' - p'' = 1, \\ B = 0, & P = 0, & S = 0, & St = 0. \end{array}$$

Međutim, postoje mreže za koje ni formule (A) ni (A') nisu dovoljno dobre. Jung ih naziva složenim mrežama sa zglobnim vezama. Primjer jedne takve mreže prikazan je na sl. 7. Ta mreža nije jednostavna, iako su sve prikazane pune linije i dijelovi punih linija međusobno povezani. Ako se te linije zamijene krutim štapovima koji su mjerenim kutovima međusobno kruto povezani, može se primijetiti da je moguća rotacija jednog dijela mreže u odnosu na drugi oko točke prikazane kružićem. Ta se točka naziva *zglobom* i odatle naziv *zglobna povezanost*.



Sl. 7. Mreža sa zglobnom vezom

Konačne formule koje obuhvaćaju i takve mreže prema Jungu glase:

$$\begin{array}{ll} B = W - 2p + 4 & (A''1) \text{ broj uvjetnih jednažbi} \\ P = (l - l') - (p - p_v) + n - g & (A''2) \text{ broj poligonskih jednažbi} \\ S = l - 2p - n + 4 & (A''3) \text{ broj jednažbi stranica} \\ St = W - 2l + l' + (p - p_v) + g & (A''4) \text{ broj stajališnih jednažbi} \end{array}$$

gdje su upotrijebljene ove oznake:

W broj izmjerenih kutova u mreži,
 p broj svih vrhova mreže,
 p_v broj točaka određenih samo presjekom naprijed,

l broj svoj linija,
 l' broj jednostrano opažanih linija,
 n broj podmreža (pričem treba ubrojiti i dijelove spojene zglobovima),
 g broj zglobova.

Jungova razmatranja nisu ipak bila dostatna, kao što i on sam ističe, da bi se ispravnost izvedenih formula mogla jamčiti sasvim općenito. To je motiviralo Blanušu da se posveti problemu i jednom drugom metodom izvede formule za broj uvjetnih jednažbi, i to za sasvim općenite mreže, ne samo mreže trokutova, kao što je slučaj kod Jordana-Eggerta i također Junga. Pritom se pokazuje da su dobivene formule jednakovrijedne Jungovima, tako da je time dokazana i njihova općenita upotrebljivost.

5. Blanušin rad o broju uvjetnih jednažbi u trigonometrijskim mrežama

Blanuša je 1944. godine objavio rad pod naslovom "Über die Anzahl der Bedingungsgleichungen [in] beliebigen geodätischen Netzen (*O broju uvjetnih jednažbi u proizvoljnim geodetskim mrežama*)" (Blanuša, 1944). Možda taj naslov nije baš najsretnije izabran jer se u geodeziji susreću i razmatraju različite druge vrste mreža, a Blanuša se bavi isključivo trigonometrijskim ili triangulacijskim mrežama. Međutim, vjerojatno je naslovom htio naglasiti općenitost svojih izvoda, koji vrijede ne samo za mreže trokuta, nego i drugih poligona u trigonometrijskim mrežama.



Sl. 8. Pozdravni govor na V. kongresu matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, Ohrid 14. 11. 1970. g.

U nastavku se daje prikaz toga Blanušinog rada koji se sastoji od triju osnovnih poglavlja:

1. Određivanje broja uvjetnih jednadžbi pri mjerenju pravaca;
2. Određivanje broja uvjetnih jednadžbi pri opažanju kutova; i
3. Usporedba s jednadžbama što ih je postavio H. Jung.

5.1. Određivanje broja uvjetnih jednadžbi pri mjerenju pravaca (smjerova)

Neka je zadana proizvoljna mreža čije stranice ili linije (Blanuša upotrebljava pojam *Strecke*) mogu biti opažane djelomično jednostrano, a djelomično dvostrano. Pritom je dozvoljeno da se linije međusobno križaju. Nadalje, ne traži se da je svaka linija stranica nekog trokuta, nego minimalni broj stranica svih poligona iz kojih izlazi proizvoljna linija može biti bilo koji pozitivan broj veći od dva. Ne radi se, dakle, o razmatranju mreže samih trokuta. Konačno pretpostavimo zasad da je mreža geometrijski određena postojećim mjerenjima pravaca (smjerova). Jedina je pretpostavka da su iz svake točke mreže opažani ili nijedan ili barem dva pravca. Jedan jedini opažani pravac nema smisla jer time ne bi bio određen nikakav kut.

Blanuša u nastavku istražuje koliko se međusobno nezavisnih poligonskih jednadžbi može postaviti u jednoj takvoj mreži.

Poligon za koji se takva jednadžba postavlja sadržavat će očito samo dvostruko opažane linije, jer inače u jednadžbu ulaze neopažani kutovi. Izvučemo li sada na iscrtanoj mreži sve dvostruko opažane linije crvenom bojom, nastaje određeni kompleks linija (*Streckenkomplex*) kod kojeg moramo također izračunati sve granične točke takvih linija. Otpadaju, dakle, razmatranja svih jednostruko opažanih linija i sve takve točke u kojima se sijeku jednostruko opažane linije. Odgovarajući kompleks može biti u jednom dijelu ili se raspasti na više odvojenih potkompleksa (*Teilkomplexe*).

Točke koje dolaze u komplekse dijelimo na tri tipa:

1. točka se naziva točkom 1. tipa kad iz nje izlazi samo jedna dvostrano opažana linija;
2. točka se naziva točkom 2. tipa kad iz nje izlaze dvije dvostrano opažane linije;
3. točka se naziva točkom 3. tipa kad iz nje izlazi više od dviju dvostrano opažanih linija.

Izvadimo sad jednu proizvoljnu liniju iz kompleksa. Ako linija ima jednu ili dvije granične točke 2. tipa, pređimo preko svake takve točke i nastavimo tako dalje sve dok ne naiđemo na točku 1. ili 3. tipa, odnosno do kraja linije, bez susretanja točaka 1. ili 3. tipa.

Završi li se izlomljena linija (kod Blanuše *Streckenzug*, a u geodetskoj literaturi *poligonski vlak*, *Polygonzug*), bez susretanja točaka 1. ili 3. tipa, nazovimo takvu izlomljenu liniju *zatvorenim izoliranim lancem*

(geschlossene isolierte Kette), skraćeno GI-lanac. Neka su sada $l_d^{(k)}$ i $p_d^{(k)}$ brojevi linija i točaka u GI-lancu. Indeks d upućuje na to da se radi o dvostrano opažanim linijama, odnosno točkama, pri čemu ulazi bar jedna dvostrano opažana linija. Indeks k znači da se radi o lancu (Kette). Očito vrijedi

$$l_d^{(k)} - p_d^{(k)} = 0 \quad (\text{GI-lanac}). \quad (1)$$

Ako su na objema stranama točke 1. tipa, pri čemu takve točke mogu biti jedna ili obje granične točke polazne linije, onda su te točke sigurno međusobno različite, jer će se u dotičnoj točki susresti više od jedne dvostrano opažane linije. Govorimo o *otvorenom izoliranom lancu* (offenen isolierten Kette), skraćeno OI-lanac, i računamo njegove granične točke 1. tipa. Sada vrijedi

$$l_d^{(k)} - p_d^{(k)} + 1 = 0 \quad (\text{OI-lanac}). \quad (2)$$

Ako su na objema stranama točke 3. tipa, te točke mogu biti međusobno identične, tako da se linija zatvori, ali preostaje točka 3. tipa iz koje izlaze još jedna ili više linija našega kompleksa koje ne pripadaju tom potezu linija. Govorimo o *zatvorenom pričvršćenom lancu* (geschlossenen angehefteten Kette), skraćeno GA-lanac. Točku 3. tipa ne računamo u lanac. Dakle, vrijedi

$$l_d^{(k)} - p_d^{(k)} - 1 = 0 \quad (\text{GA-lanac}). \quad (3)$$

Ako su na objema stranama međusobno različite točke 3. tipa, pri čemu jedna ili obje granične točke **izlomljene** linije mogu biti takve točke, govorimo o *otvorenom dvostrano pričvršćenom lancu* (offenen doppelseitig angehefteten Kette), skraćeno OD-lanac. Točke 3. tipa ne računaju se u lanac. Vrijedi

$$l_d^{(k)} - p_d^{(k)} - 1 = 0 \quad (\text{OD-lanac}). \quad (4)$$

Ako je na jednoj strani točka 1. tipa, a s druge strane točka 3. tipa, onda su te točke sigurno međusobno različite, jer su različitoga tipa. Pritom mogu jedna ili obje granične točke polazne linije biti takve točke. Govorimo o *otvorenom jednostrano pričvršćenom lancu* (offenen einseitig angehefteten Kette), skraćeno OE-lanac. Točka 1. tipa računa se u lanac, a točka 3. tipa ne. Vrijedi

$$l_d^{(k)} - p_d^{(k)} = 0 \quad (\text{OE-lanac}). \quad (5)$$

Time su iscrpljene sve mogućnosti. Treba primijetiti da u lanac uvijek računamo granične točke 1. tipa, a ne računamo granične točke 3. tipa. To je radi toga da pri oduzimanju lanca preostale linije imaju sve granične točke, tj. da čine opet jedan kompleks. Kad bismo granične točke 3. tipa računali u lanac, tada bi bile izgubljene granične točke koje se u jednoj takvoj graničnoj točki susreću oduzimanjem odgovarajućeg lanca.

Polazimo sad od jednog proizvoljnog kompleksa za koji se može postaviti određen broj nezavisnih poligonskih jednadžbi. Dodamo li tome jedan otvoreni izolirani lanac, jasno je da se time broj tih jednadžbi neće promijeniti, jer je takav lanac opet zatvoreni poligon. Dakle:

A. *Dodavanjem ili odužimanjem jednog OI-lanca broj P poligonskih jednadžbi se ne mijenja.*

Uzmimo bilo koju točku kompleksa i dodajmo otvoreni jednostrano pričvršćeni lanac. Ako je točka 2. tipa, sada je 3. tipa, ako je 3. tipa, ona ostaje, naravno, 3. tipa. Slučaj da je točka 1. tipa isključujemo, jer tada imamo samo produženje već prethodno otvorenog lanca. U tom slučaju ćemo izaći iz kompleksa u koji pada taj cijeli otvoreni lanac, i onda dodati taj cijeli lanac. Vidi se da također ni sad ne postoji nova poligonska jednadžba, dok, naravno, sve koje vrijede i dalje ostaju. Dakle,

B. *Dodavanjem ili odužimanjem jednog OE-lanca ne mijenja se broj P poligonskih jednadžbi.*

Dodamo li jedan zatvoreni izolirani lanac, povećava se broj poligonskih jednadžbi za jedan, jer takav lanac čini poligon koji prije nije bio obrađen. Dakle,

C. *Dodavanjem ili odužimanjem jednoga GI-lanca povećava se, odnosno smanjuje broj P poligonskih jednadžbi za jedan.*

Isto obrazloženje vrijedi i kad se na jednu točku kompleksa doda zatvoreni pričvršćeni lanac. Tada takav lanac također čini poligon koji prethodno nije uzet u obzir. Ako je točka na koju se lanac dodaje 1. ili 2. tipa, nakon toga bit će 3. tipa, a ako je 3. tipa, ostaje prirodno 3. tipa. Vrijedi:

D. *Dodavanjem ili odužimanjem jednoga GA-lanca povećava se ili smanjuje broj P poligonskih jednadžbi za jedan.*

Uzmimo sada u dvama međusobno odvojenim potkompleksima (Teilkomplexen) po jednu točku 2. ili 3. tipa i spojimo te dvije točke pomoću otvorenog dvostruko pričvršćenog lanca. (Točke 1. tipa ne rabimo iz istog razloga kao u slučaju B.) Taj lanac ne može doći kao zatvoreni poligon, jer bi inače obje granične točke morale biti međusobno spojene pomoću još jednog, od lanca različitog, načina, i prema tome ne bismo mogli imati dva odvojena kompleksa. Dakle:

E. *Dodavanjem jednog OD-lanca, da bi se dvije odgovarajuće točke iz dvaju potkompleksa spojile, ne mijenja se broj P poligonskih jednadžbi. Obratno: ako se odužimanjem jednog OD-lanca kompleks rastavlja na dva odvojena potkompleksa, ne mijenja se broj P poligonskih jednadžbi.*

Spojimo konačno dvije točke 2. ili 3. tipa jednog kompleksa (ili potkompleksa) pomoću otvorenog dvostruko pričvršćenog lanca. Tada granične točke lanca već prije moraju biti spojene bar jednom izlomljenom linijom, jer inače dio kompleksa ne bi bio povezan, pa bi se mogao izgraditi poligon iz te izlomljene linije i lanca koji prije nije bio obrađen. Taj poligon sigurno daje jednu poligonsku jednadžbu koja je nezavisna o prije obrađenima jer u njoj dolaze kutovi koji prije nisu bile obrađeni. Ako su s druge strane obrađene različite mogućnosti za spajanje graničnih točaka, mogu se izgraditi različiti poligoni koji sadrže lanac. Razmotrimo li takva dva poligona, vidimo da oni imaju zajednički dodani lanac i eventualno

još druge linije. Iz linija koje dolaze u samo jedan poligon može se očito sagraditi jedan ili više poligona koji su već prije bili obrađeni. Odgovarajuće poligonske jednačbe moraju prema tome doći u sustav nezavisnih poligonskih jednačbi početnih poligona ili biti iz njih izvedive. Lako se vidi da se pomoću tih, otprije raspoloživih poligonskih jednačbi obje razmatrane poligonske jednačbe u koje dolazi dodani lanac, mogu izvesti jedna iz druge. Lanac može, prema tome, dati samo jednu novu poligonsku jednačbu. Dakle:

E. *Dodavanjem jednog OD-lanca, koji povezuje dvije točke (2. ili 3. tipa) jednog povezanog dijela kompleksa, povećava se broj P poligonskih jednačbi za jedan. Obratno: ostaje li potkompleks nakon oduzimanja OD-lanca povezan, smanjuje se broj P poligonskih jednačbi za jedan.*

Nakon tih predradnji Blanuša potpunom indukcijom dokazuje sljedeće:

Označuju li l_d i p_d broj linija, odnosno točaka povezanog kompleksa, tada je broj nezavisnih poligonskih jednačbi toga kompleksa dan s

$$P = l_d - p_d + 1. \quad (6)$$

Dokaz indukcijom dan je u razmatranu Blanušinu radu u potpunosti, a ovdje ga preskačemo.

Ako je sada dan proizvoljni kompleks koji se raspada u s međusobno odvojenih potkompleksa, od kojih je svaki povezan, to daje zbrajanje odgovarajuće jednačbe (6) za svaki potkompleks za broj poligonskih jednačbi

$$P = l_d - p_d + s. \quad (7)$$

Odatle možemo izreći sljedeći općeniti stavak:

Ako se u jednoj proizvoljnoj mreži kompleks svih dvostrano opažanih linija raspada na s međusobno odvojenih potkompleksa, od kojih je svaki povezan, broj P nezavisnih poligonskih jednačbi dan je jednačbom (7), gdje je broj dvostrano opažanih linija i broj točaka u koje dolazi barem jedna dvostrano opažana linija.

Neka l , odnosno p označavaju ukupan broj linija, odnosno točaka, l' broj jednostrano opažanih linija i p' broj točaka kroz koje prolaze samo jednostrano opažane štreke. Ako se, dakle, stavi $l_d = l - l'$ i $p_d = p - p'$, dobije se broj poligonskih jednačbi

$$P = (l - l') - (p - p') + s, \quad (7a)$$

Da bismo došli do broja uvjetnih jednačbi, pretpostavimo da je mreža geometrijski određena opažanjima pravaca (smjerova) i jednom mjerenom stranicom te pođimo od toga da je za određivanje $p - 2$ točke mreže u odnosu na dvije točke bazisa potrebno ukupno $2p - 4$ kutova, a za određivanje položaja svih p točaka $2p$ veličina (npr. pravokutnih koordinata), od kojih treba oduzeti četiri poznate koordinate obiju bazisnih točaka. Neka su u svakoj točki opažani pravci i određen za jedan manje nezavisni kut. Neka su p_v točke koje su određene samo presjekom naprijed, u kojima niti jedan pravac nije opažan. Dakle, postoji $p - p_v$ točaka u kojima su

opažani pravci, i između broja R opažanih pravaca i broja W pomoću njih određenih kutova vrijedi odnos

$$W = R - (p - p_v). \quad (8)$$

Broj opažanih pravaca dobije se iz broja $l_d = l - l'$ dvostrano i broja l' jednostrano opažanih linija

$$R' = 2l_d + l' = 2l - l'. \quad (9)$$

Ukupan broj B potrebnih uvjetnih jednadžbi je višak broja određenih kutova iznad nužnog broja $2p - 4$ za geometrijsko određivanje, dakle

$$\begin{aligned} B &= W - (2p - 4) = R - (p - p_v) - (2p - 4) \\ &= 2l - l' - (p - p_v) - (2p - 4) = 2l - l' - 3p + p_v + 4. \end{aligned} \quad (10)$$

Da se dođe do broja jednadžbi stranica (*Seitengleichungen*), trebamo oduzeti broj poligonskih jednadžbi od ukupnog broja uvjetnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} S &= B - P = 2l - l' - 3p + p_v + 4 - [(l - l') - (p - p') + s] \\ &= 1 - 2p - p' + p_v - s + 4. \end{aligned} \quad (11)$$

Napišimo zajedno konačne izvedene formule za slučaj opažanja pravaca (smjerova):

$$B = 2l - l' - 3p + p_v + 4 \quad (12a)$$

$$P = (l - l') - (p - p') + s \quad (12b)$$

$$S = 1 - 2p - p' + p_v - s + 4. \quad (12c)$$

Stajališne jednadžbe u tom slučaju prirodno se ne pojavljuju.

5.2. Određivanje broja uvjetnih jednadžbi pri opažanju kutova

A. Mreže bez zglobnih veza. Dosad je bilo pretpostavljeno da su za određivanje mreže opažani pravci (smjerovi). Ako se radi o mjerenjima kutova, pod opažanim pravcem treba smatrati takav pravac koji je krak izmjenjenog kuta. Ovdje se, kao što je poznato, može susresti slučaj da se u jednoj točki mreže opažani pravci raspadaju u pojedine grupe. Svaka grupa na izvjestan način predstavlja kruti proizvod, i oni se međusobno mogu zarotirati. U tom slučaju govori se o zglobnoj vezi. U točki B/ pokazat ćemo zašto se pri zglobnim vezama naša dosadašnja razmatranja ne mogu bez daljnjega primijeniti. Sad ćemo pretpostaviti da nema zglobnih veza, nego da svi opažani pravci u jednoj točki čine kruti sustav, kao što je slučaj pri opažanju pravaca.

Pri opažanju pravaca u svakoj je točki određen za jedan manje nezavisni kut opažan pomoću pravaca. Pri mjerenju kutova može se izmjeriti više kutova nego što je broj opažanih pravaca umanjeno za jedan, tako da u uvjetne jednadžbe dolazi i broj stajališnih jednadžbi. Sada umjesto jednadžbe (8) treba staviti nejednakost

$$W > R - (p - p_v). \quad (13)$$

Ako je St broj stajališnih jednadžbi jednak premašuju poduzetih mjerenja kutova nad desnom stranom nejednakosti (13), tada je prema (9)

$$St = W - R + (p - p_v) = W - 2l + l' + (p - p_v). \quad (14)$$

Izraz za broj poligonskih jednadžbi ostaje nepromijenjen, dok je ukupan broj uvjetnih jednadžbi prirodno $W - 2p + 4$. Broj jednadžbi stranica dobije se nepromijenjen iz $S = B - P - St$.

Stavimo sve formule zajedno:

$$B = W - 2p + 4 \quad (15a)$$

$$P = (l - l') - (p - p') + s \quad (15b)$$

$$S = l - 2p - p' + p_v - s + 4 \quad (15c)$$

$$St = W - 2l + l' + (p - p_v). \quad (15d)$$

B. Mreže sa zglobnim vezama. Kod zglobnih veza nastaje za naše razmatranje sljedeća teškoća: neka su dvije dvostrano opažane linije sadržane u dvama različitim međusobno zakrenutim zglobovima. Tada kut između tih linija nije određen pomoću mjerenih kutova u promatranoj točki mreže, i prema tome, za poligon koji te dvije linije sadrži kao uzastopne, poligonska se jednadžba ne može postaviti.

Da bi se otklonila ta teškoća, rastavit ćemo zglobne veze u njihove pojedine zglobne dijelove.

Neka postoji k zglobnih veza. Kod svake zglobne veze razlikovat ćemo zglobne dijelove 1. tipa i 2. tipa. Pod zglobnim dijelom 1. tipa podrazumijevat ćemo zglobni dio koji sadrži barem jedan opažani pravac koji pripada jednoj dvostrano opažanoj liniji. Zglobni dio 2. tipa sadrži samo pravce koji pripadaju jednostrano opažanim linijama. Pravce koji u promatranoj točki nisu opažani (i prema tome u svakom slučaju odgovaraju jednostrano opažanim linijama), možemo zamišljati kao da su pridruženi proizvoljno pojedinim zglobnim dijelovima.

Razmotrimo sad najprije takve zglobne veze koje sadrže barem dva zglobna dijela 1. tipa. Da bismo te zglobne dijelove 1. tipa međusobno učvrstili, moramo dodati barem g_{1r} kutova. Te kutove nazovimo kutovima 1. tipa i njihov je broj očividno za jedan manji od broja zglobnih dijelova 1. tipa, koji su sadržani u zglobnoj vezi. U zglobnoj vezi koja sadrži jedan ili nijedan zglobni dio 1. tipa treba staviti $g_{1r} = 0$. Da bismo sada učvrstili i preostale zglobne dijelove, koji su svi 2. tipa, moramo još dodati minimalni broj g_{2r} kutova — nazovimo ih kutovima 2. tipa. Ako je u zglobnoj vezi sadržan najmanje jedan zglobni dio 1. tipa, onda je broj g_{2r} jednak broju zglobnih dijelova 2. tipa. Ako, naprotiv, nijedan zglobni dio 1. tipa nije u zglobnoj vezi, onda je g_{2r} jednako za jedan umanjenom broju zglobnih dijelova 2. tipa. Ako nema zglobnih dijelova 2. tipa, treba staviti $g_{2r} = 0$.

Označimo još s g_1 broj svih kutova 1. tipa, s g_2 broj svih kutova 2. tipa i s g broj svih tih kutova, tj.

$$g_1 = \sum_{r=1}^k g_{1r} \quad (16)$$

$$g_2 = \sum_{r=1}^k g_{2r} \quad (17)$$

$$g = g_1 + g_2 \quad (18)$$

Zamislimo sada da iz jedne točke mreže koja je nositelj zglobne veze rastavljanjem u pojedine zglobne dijelove izdvojimo g_{1r} mrežnih točaka iz kojih izlazi barem jedna dvostrano opažana linija i g_{2r} mrežnih točaka iz kojih izlaze samo jednostrano opažane linije. Ako je, dakle, točka mreže takvog tipa da iz nje izlazi barem jedna dvostrano opažana linija, onda nakon rastavljanja postoji $g_{1r} + 1$ mrežnih točaka istog tipa i g_{2r} mrežnih točaka iz kojih izlaze samo jednostrano opažane linije. Ako je mrežna točka bila takvog tipa da iz nje izlaze samo jednostrano opažane linije, onda ne postoje zglobni dijelovi 1. tipa, dakle je g_{1r} i nakon rastavljanja umjesto tih točaka mreže postoji $g_{2r} + 1$ točaka mreže, iz kojih izlaze samo jednostrano opažane linije.

Zamislimo sada da je provedeno rastavljanje zglobnih veza. Sad se postojeći kompleks svih dvostrano opažanih linija može rastaviti u s potkompleksa. Broj poligonskih jednadžbi tih kompleksa je očito jednak broju poligonskih jednadžbi početne mreže. S druge strane, jedan takav poligon početne mreže ne smije imati nikoje dvije uzastopne stranice koje pripadaju različitim zglobnim dijelovima jedne zglobne veze. Rastav zglobne veze na zglobne dijelove ne rezultira, dakle, nikakvim rezanjem poligona, tako da su one sadržane u njemu i nakon rastavljanja postojećeg kompleksa dvostrano opažanim linijama.

Broj točaka mreže kompleksa je očito izvorni postojeći broj točaka mreže $p_d = p - p'$, iz kojih izlazi barem jedna dvostrano opažana linija, uvećan brojem g_1 novonastalih točaka. Prema tome dobijemo u smislu jednadžbe (12b)

$$P = (l - l') - (p - p' + g_1) + s. \quad (19)$$

Ako je rastavljanjem zglobnih veza geometrijska određenost mreže eventualno narušena, to ne smeta, jer pri izvođenju formula (15b), odnosno (12b), takvu određenost nismo trebali pretpostaviti.

Prelazimo sad na određivanje broja stajališnih jednadžbi. Pritom se zglobne veze neće rastavljati. Jasno je da stajališne jednadžbe u jednoj zglobnoj vezi mogu postojati samo između kutova koji pripadaju istom zglobnom dijelu. Dodamo li tome za sve zglobne veze daljnjih g kutova, očito ne može postojati nijedna nova stajališna jednadžba, tako da tako dopunjena mreža, koja sadrži $W + g$ kutova, ima isti broj stajališnih jednadžbi kao i polazna. U smislu (15d) je, dakle,

$$St = W + g - 2l + l' + (p - p_v). \quad (20)$$

Ukupan broj uvjetnih jednadžbi nije, naravno, ovisan o postojanju zglobnih veza. On, prema tome, prema (15a) iznosi

$$B = W - 2p + 4. \quad (21)$$

Iz (18)–(21) dobije se broj jednadžbi stranica

$$S = B - P - St = l - 2p + 4 - (p' - p_v) - s - g_2. \quad (22)$$

Napišimo sve konačne jednadžbe zajedno:

$$B = W - 2p + 4 \quad (23a)$$

$$P = (l - l') - (p - p') + s - g_1 \quad (23b)$$

$$S = l - 2p - (p' - p_v) - s - g_2 + 4 \quad (23c)$$

$$St = W - 2l + l' + (p - p_v) + g_2 \quad (23d)$$

5.5. Usporedba s jednadžbama što ih je postavio H. Jung

Dok Blanuša iz kompleksa izvlači sve dvostruko opažane linije, H. Jung (1941) razmatra nešto drukčiju figuru. On iz dane mreže ne izvlači samo dvostruko opažane linije, nego i polovicu svake jednostrano opažane linije, i to onu polovicu koja završava u točki mreže iz koje će dotični smjer biti opažan. Pritom on sve zglobne veze rastavlja na zglobne dijelove isto tako kao i Blanuša. Tako nastala figura — nazvat ćemo je Jungovom figurom — raspada se sada, između ostalog, u izvjestan broj dijelova koji je Jung označio s n . Postavlja se pitanje koji je odnos između veličine n s Blanušinom veličinom s .

Budući da kod polovice izvučenih linija nema uspostavljenih veza između točaka mreže, bit će očito dijelova na koje se Blanušin kompleks raspao, a također postoje u rastavu Jungove figure. Pritom postoji mogućnost da u Jungovoj figuri postoje novi dijelovi izgrađeni iz polovica linija koji u Blanušinom kompleksu ne postoje.

Razmotrimo najprije točke mreže iz kojih izlazi najmanje jedna dvostrano opažana linija. Sve polulinije koje izlaze iz jedne takve točke su zajedno s tim dvostrano opažanim linijama i nalaze se prema tome na jednom dijelu Blanušinog kompleksa linija. One ne daju, dakle, nijedan novi dio.

Razmotrimo sad druge točke mreže, u kojima dolaze samo jednostrano opažane linije. Ako iz jedne takve točke nije opažan ni jedan pravac, tj. ako je to samo točka dobivena presjekom natrag, tada iz nje ne izlaze polulinije Jungove figure. Ako su pak iz te točke opažana dva ili više pravaca (jedan jedini opažani pravac je, naravno, besmislen), tada ti pravci grade sustav polulinija koji nije povezan ni s jednom drugom točkom mreže. Oni grade, prema tome, dio Jungove figure koji ne postoji u Blanušinom kompleksu. Jungova veličina n je, dakle, veća za broj takvih mrežnih točaka od Blanušine veličine s .

Ako ne postoje nikakve zglobne veze, tada je broj takvih točaka očito jednak $p' - p_v$, gdje je p' broj svih točaka kroz koje prolaze samo jednostrano opažane linije, dok je p_v broj svih točaka određenih presjekom naprijed.

Ako postoje zglobne veze, tada postoji, kao što je već primijećeno, njihovim rastavom u zglobne dijelove g_{2r} novih točaka mreže, iz kojih izlaze samo jednostrano opažane linije, a barem su dva pravca opažana. Sve te nove mrežne točke, čiji je ukupan broj g_2 , povećavaju, dakle veličinu s svaki put za jedan, tako da odnos između s i n glasi

$$s = n - (p' - p_v) - g_{2r} \quad (24)$$

Stavimo li sada taj odnos u jednadžbe (12a, b, c), pri čemu treba staviti $g_1 = g_2 = 0$, dobit ćemo sljedeće jednadžbe:

$$B = 2l - l' - 3p + p_v + 4 \quad (25a)$$

$$P = (l - l') - (p - p') + n \quad (25b)$$

$$S = l - 2p - n + 4, \quad (25c)$$

što odgovara jednadžbama (A_r) u Jungovom radu.

Stavimo li (24) u (23a, b, c, d) uz (18), dobije se:

$$B = W - 2p + 4 \quad (26a)$$

$$P = (l - l') - (p - p') + n - g \quad (26b)$$

$$S = l - 2p - n + 4 \quad (26c)$$

$$St = W - 2l + l' + (p - p_v) + g, \quad (26d)$$

što se podudara s jednadžbama (A'') u Jungovu radu. Ako nema zglobnih veza, tada prirodno treba staviti $g_1 = g_2 = g = 0$, što iz Blanušinih jednadžbi (15a, b, c, d) daje odgovarajuće jednadžbe (A') iz Jungovog rada.

Na taj je način Blanuša pokazao da formule koje je postavio H. Jung vrijede općenito, ne samo za mreže trokutova, nego i za proizvoljne mreže, koje su geometrijski određive pomoću mjerenja jedne osnovne linije (baze) i odgovarajućeg broja kutova.

Prema Blanuši, za praktične potrebe treba Jungovom obliku jednadžbi, kod kojeg još treba iz Jungove figure odrediti veličinu n , dati prednost, jer pritom ne treba razmatrati razliku između zglobnih dijelova 1. i 2. tipa. S druge strane, Blanušinom istraživanju i dokazivanju bilo je primjereno razmatranje kompleksa s dvostrano opažanim linijama, jer izvorno samo takve linije sudjeluju pri postavljanju poligonskih jednadžbi.

6. Nezavisnost uvjetnih jednadžbi u trigonometrijskim mrežama

Izbor nužnih uvjetnih jednadžbi u mreži, koje bi istodobno bile i međusobno nezavisne — pravi je zadatak računa izjednačenja (Haimov 1984). Za izjednačenje koje slijedi važno je odabrati uvjetne jednadžbe na taj način da se ne propusti ni jedan nužan uvjet, jer u protivnom slučaju neki geometrijski odnosi u mreži neće biti ispunjeni. S druge strane, uključivanje suvišnog uvjeta koji je zavisan o ostalima dovodi do singularnog sustava linearnih jednadžbi i nejednoznačnosti rješenja.

Pogledajmo jedan primjer. Zadan je četverokut $ABCD$ u kojem su izmjereni svi kutovi 1, 2, ..., 8 (sl. 9). Mogu se napisati sljedeći figurni uvjeti:

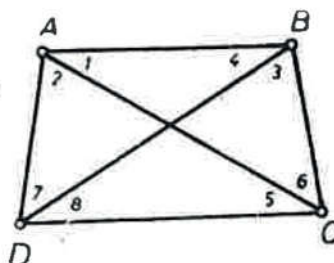
$$1 + 4 + 3 + 6 = 180^\circ \quad (27)$$

$$2 + 5 + 7 + 8 = 180^\circ \quad (28)$$

$$1 + 2 + 4 + 7 = 180^\circ \quad (29)$$

$$8 + 5 + 6 + 3 = 180^\circ \quad (30)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 360^\circ \quad (31)$$



Sl. 9. Geodetski četverokut

Posljednja dva uvjeta ovisna su o prvim trima. To se lako može vidjeti. Kad zbrojimo uvjete (27) i (28), dobijemo uvjet (31), kad zbrojimo uvjete (27) i (28) i odbijemo uvjet (29), dobit ćemo uvjet (30).

Jedan konkretan primjer iz geodetske prakse opisali su Jovičić i dr. (1981). Radilo se o izjednačenju mreže s uvjetnim jednadžbama, a problem se sveo na rješavanje sustava od 23 normalnih jednadžbi. Sustav je rješavan pomoću triju različitih metoda (Gaussova, Banachiewiczova i Choleskoga) i uz različitu točnost računanja (zaokruživanjem na 6, 7, 12 i 16 znamenaka). Dobivena su različita numerička rješenja, a u trima slučajevima metoda rješavanja nije dala jednoznačno rješenje.

Zapravo, sustav je trebao biti teorijski singularan, ali je zbog nužnog zaokruživanja ulaznih podataka bio skoro singularan i zbog toga osjetljiv na redoslijed računskih operacija. Prirodno se postavlja pitanje: zašto je sustav bio takav? Odgovor je pronađen kod sastavljača uvjetnih jednadžbi. Bilo mu je teško izdvojiti nezavisne među njima, pa ih je sve (!) uzeo za sastavljanje normalnih jednadžbi.

7. Zaključak

Rad Danila Blanuše "Über die Anzahl der Bedingungsgleichungen [in] beliebigen geodätischen Netzen (*O broju uvjetnih jednadžbi u proizvoljnim geodetskim mrežama*)" objavljen 1944. godine u jednom od najuglednijih svjetskih geodetskih časopisa, tada, a i danas, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, važna je karika u razvoju saznanja o matematičkoj obradi geodetskih mjerenja u području trigonometrijskih mreža. Vrlo je malo hrvatskih znanstvenika koji su uspjeli nešto objaviti u tom časopisu. Vrijednost razmatranog Blanušinog rada najbolje potvrđuje činjenica da ga citiraju drugi autori (npr. H. Knorr i W. Großmann), a posebno W. Jordan, O. Eggert i M. Kneissl u opće poznatom i svjetski priznatom priručniku *Handbuch der Vermessungskunde*, Band IV, Mathematische Geodäsie (Landesvermessung).

Literatura

- [1] BILAJBEGOVIĆ, A. (1997): *Trigonometrijska mreža*, u: Tehnička enciklopedija, 13. sv. Štefanović, D., gl. ur., Leksikografski zavod "Miroslav Krleža", Zagreb.
- [2] BJERHAMMAR, A. (1973): *Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses*, Elsevier, Amsterdam.
- [3] BLANUŠA, D. (1944): *Über die Anzahl der Bedingungsgleichungen [in] beliebigen geodätischen Netzen*, Neitschrift für Vermessungswesen, 54–62.
- [4] BLANUŠA, D. (1963): *Viša matematika, I dio*, Prvi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb.
- [5] BOLJŠAKOV, V. D., LEVČUK, G. P. (ur., 1985): *Spravočnik geodezista, knjiga 2*, Nedra, Moskva.
- [6] BOLJŠAKOV, V. D., MARKUZE, JU. I. (1984): *Praktikum po teoriji matematičkoj obrabotki geodezičkih izmerenij*, Nedra, Moskva.
- [7] ČUBRANIĆ, N. (1948): *Izbor polusnih uvjeta*, Geodetski list br. 7 i 8.
- [8] ČUBRANIĆ, N. (1954): *Viša geodezija, I. dio*, Školska knjiga, Zagreb.
- [9] ENGLEMAN, R. (ur., 1875/76): *Gradmessung in Ostpreußen, Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel*, Bd. III, §36, str. 96 i dalje, Leipzig.
- [10] GOTTHARDT, E. (1968): *Einführung in die Ausgleichungsrechnung*, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- [11] GROSSMANN, W. (1961): *Grundzüge der Ausgleichungsrechnung*, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin.
- [12] HAIMOV, Z. S. (1984): *Osnovy vysšej geodezii*, Nedra, Moskva.
- [13] HELMERT, F. R. (1872): *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen*, B. G. Teubner Verlag, Leipzig.
- [14] HELMERT, F. R. (1924): *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*, B. G. Teubner Verlag, Berlin.
- [15] HÖPCKE, W. (1980): *Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung*, Walter de Gruyter, Berlin.
- [16] IVANŠIĆ, I. (2001): *Blanušin graf*, u: Knjiga sažetaka predavanja održanih u organizaciji Inženjerske sekcije Hrvatskoga matematičkog društva (ur. M. Lapaine), Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 6–7.
- [17] JORDAN, W. (1904): *Handbuch der Vermessungskunde*, Band I, 5. Aufl. §61, Stuttgart, J. B. Metzlerscher Verlag.
- [18] JORDAN, W. EGGERT, O. (1935): *Handbuch der Vermessungskunde, Band I*, 8. Aufl., §67, Stuttgart, J. B. Metzlerscher Verlag.

- [19] JORDAN, W., EGGERT, O. (1948): *Handbuch der Vermessungskunde, Band I*, 9. Aufl., §67, Stuttgart, J. B. Metzlerscher Verlag.
- [20] JORDAN, W., EGGERT, O., KNEISSL, M. (1958): *Handbuch der Vermessungskunde, Band IV*, Mathematische Geodäsie (Landesvermessung), 10. Aufl., §65, Stuttgart, J. B. Metzlerscher Verlag.
- [21] JOVIČIĆ, D., LAPAINE, M., PETROVIĆ, S. (1981): *Rješavanje normalnih jednadžbi pomoću računala*, Zbornik radova 4. susreta geodeta SRH. Osijek: Savez društava geodeta SR Hrvatske, 1–11.
- [22] JUNG, H. (1941): *Über die Anzahl der verschiedenartige Bedingungsgleichungen in Triangulationsnetzen*, Zeitschrift für Vermessungswesen, 482–492.
- [23] KNORR, H. (1953): *Über die Anzahl der Bedingungsgleichungen bei Verwendung von Richtungsmessungen in Triangulationsnetzen mit Gelenkverbindungen*, Zeitschrift für Vermessungswesen, Nr. 5, 148–151.
- [24] LAPAINE, M. (2002): *Razvoj visokoškolske geodetske nastave*, u: *Exercitationes Gaeodeticae-Geodetske vježbe* (ur. M. Lapaine), Hrvatsko geodetsko društvo, Zagreb, 100–105.



Ninoslav Kunc: Danilo Blanuša.

KRONOLOŠKI POPIS PUBLIKACIJA DANILA BLANUŠE

Ivan Ivanšić

1940. – 1949.

- [1] *Moderna teorija kvantne mehanike i njena primjena na teoriju kemijskih valencija*, Inženjer 1 (br. 3–4, 5–6, 7–8) (1940), 31–37, 54–60, 74–76.
- [2] *Što je matematika? Razmatranja o koncentriranoj logici, elegancija i ljepota najčišćih psihičkih užitaka*, "Novosti", Uskrs–1940., 14.
- [2a] ———, Pretisak u "Hrvatska revija" br. 1–2, 1995., 50–56.
- [2b] ———, Pretisak u "Poučak" br. 2–3, 2000., 89–94.
- [3] *Haevisideov operatorski račun i njegove primjene u elektrotehnici*, Tehnički vjesnik 58 (br. 1–6) (1941), 1–9.
- [4] *Upliv diskontinuiteta neke funkcije i njenih derivacija na Fourierov spektar*, Rad Hrvatske Akad. Znan. Umjet. Razred Mat.-Prirodoslov. 274(85) (1942), 273–285.
- [4a] *Der Einfluss der Unstetigkeiten einer Funktion und ihrer Ableitungen auf ihr Fouriersches Spektrum*, Bull. Int. Acad. Croate Cl. Sci. Math. Nat. No. 35 (1945), 82–88.
- [5] *Mascheronijev problem šestila*, Nastavni vjesnik 51 (1942/43), 80–86.
- [6] *Karl Friedrich Gauss, das größte mathematische Genie aller Zeiten*, "Neue Ordnung" 1. 1. 1943, 11.
- [7] *Über die Anzahl der Bedingungsgleichungen in beliebigen geodätischen Netzen*, Zeitschr. f. Vermessungswesen 73 (br. 3) (1944), 54–62.
- [8] *Obrat formule za ortogonaliziranje*, Rad Hrvatske Akad. Znan. Umjet. Razred Mat.-Prirodoslov. 278(86) (1945), 62–74.
- [8a] *Die Umkehrung der Orthogonalisierungsformel*, Bull. Int. Acad. Croate Cl. Sci. Math. Nat. br. 35 (1945), 100–102.
- [9] *Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija I i II*, Rad Hrvatske Akad. Znan. Umjet. Razred Mat.-Prirodoslov. 278(86) (1945), 75–104, 105–152.
- [9a] *Eine Klasse von Integraltheoremen der Besselschen Funktionen I u. II*, Bull. Intern. Acad. Croate Cl. Sci. Math. Nat. br. 35 (1945), 103–139.

- [10] *Problem četiriju boja*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 1(1946), 31–42.
- [11] *Kakva je geometrija na ploči, koja rotira?*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 1(1946), 97–111.
- [12] *Izračunavanje volumena i oplošja n -dimenzionalne kugle*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 2(1947), 22–25.
- [13] *Le plongement isométrique des espaces elliptiques dans des espaces euclidiens*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 2(1947), 248–249.
- [14] *Sur les paradoxes de la notion d'énergie*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 2(1947), 249–250.
- [15] *Jedan način transformacije kvadratne forme na sumu kvadrata*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 3(1948), 1–5.
- [16] *Jedan dokaz za uvjete definitnosti kvadratne forme*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 3(1948), 6–10.
- [17] *Da li bi čovjek raketom mogao doprijeti do najbližih zvijezda stajačica?*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 3(1948), 52–58.
- [18] *Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija III*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. Razred Mat. Fiz. Tehn. 271(1948), 83–143.
- [18a] *Une espèce de théorèmes intégraux des fonctions de Bessel III^e partie*, Bull. Int. Acad. Yougoslave Cl. Sci. Math. Phys. Tech. (N. S.) br. 2 (1949), 39–61.
- [19] *Nešto o Keplerovu zakonu*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 3(1948), 218–222.
- [20] Prijevod s dodatkom i bilješkama: M. Born, *Einsteinova teorija relativnosti i njezini fizički osnovi*, Znanstvena djela Hrvatskog prirodoslovnog društva, Knjiga I, Tipografija, Zagreb 1948.
- [21] *Viša matematika za kemičare i arhitekte (skripta)*, Stručni odsjek N. S. O-e Zagrebačkog sveučilišta, Zagreb 1948., strana 382.
- [22] *Geometrijska interpretacija Eratostenovog sita*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 4(1949), 201–202.
- [23] i S. Bilinski, *Dokaz nerješivosti jedne mreže*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 4(1949), 78–80.
- [24] *Izabrana poglavlja iz teorijske elektrotehnike. Promjenljiva elektromagnetska polja*, špirografirani rukopis 1948?, strana 198.

1950. – 1959.

- [25] *Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija IV*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. Razred Mat. Fiz. Tehn. 277(1950), 5–128.
- [25a] *Une espèce de théorèmes intégraux des fonctions de Bessel IV^e partie*, Bull. Int. Acad. Yougoslave Cl. Sci. Math. Phys. Tech. (N. S.) br. 3 (1952), 5–58.
- [26] *Teorija relativnosti*, Almanah Bošković, Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, 1950., 200–221.

- [27] *Jednostavan dokaz Heronove formule*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **5**(1950), 56.
- [28] *Osnovi relativističke kinematike*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **6**(1951), 1–32.
- [29] *Problemi kozmologije i kozmogonije*, Almanah Bošković, Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb 1951., 183–215.
- [30] *O nekim problemima smještanja*, Zbornik radova Mat. inst., Srpska akademija nauka knj. 1 (1951), 91–100.
- [31] *O relativističkoj termodinamici*, Prvi kongres mat. i fiz. FNRJ II., Bled 1949., Naučna knjiga, Beograd, 1951., 235–240.
- [32] *Nešto o teoriji relativnosti*, Mat.-fiz. list **2**(br. 1)(1951/52), 5–9.
- [33] *Jedna konstrukcija šestarom*, Mat.-fiz. list **2**(br. 4–5)(1951/52), 125–126.
- [34] *Upotreba glavnih i rednih brojeva za označavanje vremena*, Mat.-fiz. list **2**(br. 4–5)(1951/52), 131–132.
- [35] *Jedno poopćenje integralkosinusa*, Zbornik radova Mat. inst., Srpska akademija nauka knj. 2 (1952), 129–132.
- [36] *Eine isometrische Einbettung der elliptischen Ebene im vierdimensionalen euklidischen Raum*, III Österreichischer Mathematiker Kongress, Salzburg 9. – 14. 9. 1952., Nachr. Österr. Math. Gesell. No. 21/22 (1952), 40.
- [37] *Eine isometrische und singularitätenfreie Einbettung des n -dimensionalen hyperbolischen Raumes im Hilbertschen Raum*, Monatsh. Math. **57**(br. 2)(1953), 102–108.
- [38] *La bande de Möbius infiniment large à métrique hyperbolique plongée dans un espace de Hilbert*, Bull. Sci. Cons. Acad. Youg. **1**(br. 2)(1953), 38.
- [39] *Les espaces elliptiques plongés isométriquement dans espaces euclidiens I. Le plan elliptiques*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **8**(1953), 3–23.
- [40] *Les espaces elliptiques plongés isométriquement dans espaces euclidiens II. Les espaces elliptiques*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **8**(1953), 81–114.
- [41] *Izometričko smještenje euklidske neizmjerne široke vrpce u prostoru R_5* , Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. **296**(1953), 9–15.
- [41a] *Le plongement isométrique de la bande Möbius infiniment large euclidienne dans un espace R_5* , Bull. Int. Acad. Yougoslave Cl. Sci. Math. Phys. Tech. (N. S.) **12**(1954), 7–10.
- [42] *Izometričko smještenje Euklidske neizmjerne široke Möbiusove vrpce u četverodimenzionalnom sfernom, parabolnom i hiperbolnom prostoru*, Rad. Jugoslav. Akad. Znan. i Umjet. **296**(1953), 49–55.
- [42a] *Le plongement isométrique de la bande de Möbius infiniment large euclidienne dans un espace sphérique, parabolique ou hyperbolique à quatre dimensions*, Bull. Int. Acad. Yougoslave Cl. Sci. Math. Phys. Tech. (N. S.) **12**(1954), 19–23.

- [43] *Izometričko smještenje n -dimenzionalnog hiperbolnog prostora u konačnoj udaljenosti od jedne točke u Hilbertovom prostoru*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. **296**(1953), 57–64.
- [43a] *Plongement isométrique de l'espace hyperbolique à n -dimensions à distance finie d'un point dans l'espace de Hilbert*, Bull. Int. Acad. Yougoslave Cl. Sci. Math. Phys. Tech. (N. S.) **12**(1954), 25–30.
- [44] *Immersion de tores euclidiens à parallélogramme fondamental de forme quelconque dans un espace sphérique ou elliptique à trois dimensions*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **9**(1954), 15–25.
- [45] *Le plan elliptique plongé isométriquement dans un espace à quatre dimensions ayant une courbure constante*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **9**(1954), 41–58.
- [46] *Razmatranje o matematici*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **9**(1954), 65–66.
- [47] *Einige Resultate über die Einbettung zweidimensionaler Raumformen konstanter Krümmung in höhere Räume konstanter Krümmung*, Proc. Int. Congress Math. Vol. II, Amsterdam (1954), 204.
- [48] *Über die isometrische Einbettung elliptischer Räume in höhere Räume konstanter Krümmung*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **6**(1954), 91–114.
- [49] *Plongement isometrique de l'espace de Hilbert généralisé dans une hypersphère de l'espace Hilbert*, Bull. Sci. Cons. Acad. **2**(br. 1) (1954), 10.
- [50] *Immersion du cylindre et du plan euclidiens dans des espaces sphériques*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **9**(1954), 161–166.
- [51] *Nešto o prim brojevima*, Mat.-fiz. list **5**(br. 2)(1954/55), 41–42.
- [52] *O neeuclidskim geometrijama*, Mat.-fiz. list **5**(br. 4)(1954/55), 123–126.
- [53] *Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume*, Monatsh. Math. **59**(1955), 217–229.
- [54] *Immersion des espaces elliptiques dans des espaces euclidiens à l'aide de coordonnées de Weierstrass*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **10**(1955), 181–182.
- [55] *Međusobno izometričko smještenje prostora od neizmjereno mnogo dimenzija s konstantnom zakrivljenosti*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. **302**(1955), 87–111.
- [56] *Životno djelo Alberta Einsteina*, Glasnik Mat. -Fiz. i Astr. Ser. II. **10**(1955), 99–112.
- [57] *Teorija relativnosti*, Mala biblioteka za matematiku, fiziku i kemiju br. 7, Školska knjiga, Zagreb 1955. strana 204.
- [58] ———, pretisak s pogovorom Tomislava Petkovića, Školska knjiga, Zagreb 2003. strana 194.
- [59] *O neeuclidskim geometrijama II*, Mat.-fiz. list **6**(br. 1)(1955/56), 5–10.

- [60] *O neeuclidskim geometrijama III*, Mat.-fiz. list **6**(br. 2)(1955/56), 51–55.
- [61] *Quelques identités algébriques concernat les moyennes arithmétique et géométriques*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **11**(1956), 17–22.
- [62] *C^∞ -Isometric imbeddings of cylinders with hyperbolic metric in Euclidean 7-space*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **11**(1956), 243–246.
- [63] *A note on Kurepa's paper "On the Symmetry"*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **11**(1956), 247–248.
- [64] *Matematika i neki njeni problemi*, Republika br. 12 (1956), 53–55, 243–246.
- [65] *Die Einbettung des unendlich breiten Möbiusschen Bandes mit hyperbolischer Metrik in euklidischen Räumen*, IV Österreichischer Mathematikerkongress, Wien 17. – 22. 9. 1956. Nachr. Österr. Math. Gesell. **47/48**(1957), 57.
- [66] *A simple method of imbedding elliptic spaces in Euclidean spaces*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **12**(1957), 189–200.
- [67] *Povećava li se masa nekog tijela dodavanjem energije*, Otkrića **4**(br. 7) (1957), 443.
- [68] *I vi možete shvatiti Einsteinovu teoriju relativnosti*, Savremena tehnika br. 4 (1957), 102–104.
- [69] *Metoda simetričnih komponenata*, Zbornik predavanja sa seminara "Elektroindustrijska problematika velikih elektrana" 15. – 25. 4. 1957. Organizator Zavod za elektrostrojstvo Elektrotehničkog fakulteta Zagreb. Izdalo Elektrotehničko društvo Zagreb 1957., 1–18.
- [70] *Teorija relativnosti i astronautika*, "Vjesnik" 30. 3. 1958., 6.
- [71] *Hoće li čovjek moći doprijeti do drugih sunaca*, "Vjesnik" 13. 4. 1958., 6.
- [72] *On periodic functions*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **14**(1959), 247–283.
- [73] *Skew regular polyhedrons and polytopes*, International Congress of Mathematicians 14. – 21. 8. 1958., Edinburgh 1958., 105.

1960. – 1969.

- [74] *Laplaceova transformacija (skripta)*, Komisija za udžbenike i skripta Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 1960., strana 55.
- [75] *Neeuklidska geometrija*, "Vjesnik" 24. 4. 1960.
- [76] *C^∞ -Isometric Imbeddings of the Hyperbolic Plane and of Cylinders with Hyperbolic Metric in Spherical Spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. **57**(1962), 321–337.
- [77] *Neki problemi izometričkog smještanja*, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **14**(1962), 105–116.
- [78] *O neeuclidskim geometrijama*, Matematička biblioteka 22, Izabrana poglavlja iz matematike II, Beograd, 1962., 143–168.

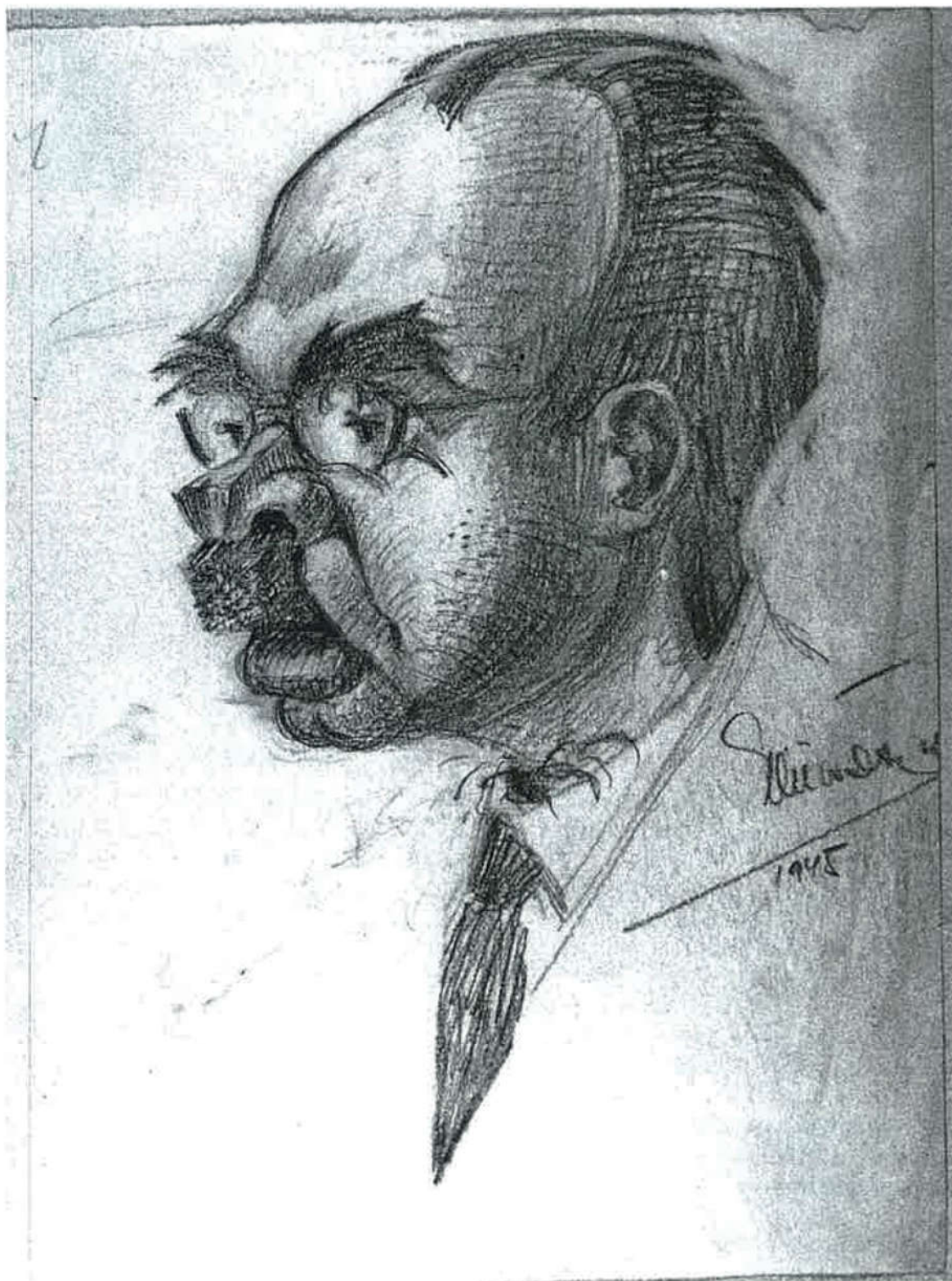
- [79] *Odabrana poglavlja iz matematičkih metoda u fizici (skripta)*, Skriptarnica kluba studenata kemije PMF, Zagreb, 1963., str. 44.
- [80] *Viša matematika I/1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1963. str. 483.
- [81] *Isometric Imbedding of the hyperbolic n -space in a spherical $(6n - 4)$ -space*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **19**(1964), 53–61.
- [82] *Imbeddings of some 3-dimensional Euclidean spatial forms in spaces of constant curvature*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. **331**(1965), 237–262.
- [83] *Viša matematika I/2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965. strana 927.
- [84] *Viša matematika II/1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1969. strana 403.
- [85] *Relativistička transformacija elektromagnetskog polja*, Elektrotehnika **12**(br. 3)(1969), 193–204.

1970. – 1981.

- [86] *The functional equation $f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$* , Aequationes Math. **5**(1970), 63–67.
- [87] *Istaknuti ljudi slavonskog kulturnog kruga iz područja matematike, fizike, astronomije i kemije*, Zbornik radova I. Znanstvenog sabora Slavonije i Baranje, Osijek 1970, 283–286.
- [88] *O perspektivi i mogućnostima matematike*, Zbornik na trudovite I, V Kongres matematičara, fizičara i astronoma, Ohrid 14. – 19. 9. 1970., Sojuz na društva na matematičarite, fizičarite i astronomite Skopje 1973., 5–13.
- [89] *Viša matematika II/2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1974. strana 689.
- [90] i P. Javor, H. Kraljević, D. Mitrović, *Funkcije*, Tehnička enciklopedija, Sv. 5. Jugoslavenski leksikografski zavod Zagreb, Zagreb, 1976., 623–648.
- [91] *Gravitacija*, Tehnička enciklopedija, Sv. 6. Jugoslavenski leksikografski zavod Zagreb, Zagreb, 1979., 260–265.
- [92] i T. Petković, *Albert Einstein-život i djelo*, Zbornik trećeg programa Radio Zagreba (Uz stotu obljetnicu rođenja), **6**(1981), 225–238.

Neobjavljeno, naknadno pronađeno

- [93] *A simple proof of the conditions of definiteness of a binary quadratic form*, stranica 2. Neobjavljeni rukopis (nepoznata godina).
- [94] *Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija*, Izvadak iz radnje odobrene kao disertacija za doktorski ispit pod br. 587 od god. 1943. po izpitnom odboru prema referatu gg. profesora dra. Željka Markovića i dra. Djure Kurepe. stranica 25. (Tiskano, bez bibliografskih podataka).
- [95] *Opća relacija između triju Bessel-ovih funkcija čiji se indeksi razlikuju za cijele brojeve*, stranica 11. Neobjavljeni rukopis iz 1939. g.



Ivan Einwalter: D. Blanuša, karikatura 1945.



O PRILOZIMA

Ivan Ivanšić

K

ako nismo u mogućnosti objaviti Blanušina sabrana djela, stoga donosimo:

- a) prijevod, s njemačkog, jednog rada objavljenog u novinama 1943. god. u Beču,
- b) pretisak jednog sačuvanog neobjavljenog predavanja,
- c) pretiske triju vrlo značajnih publiciranih znanstvenih radova koji se najčešće spominju u prethodnim tekstovima.

To su ovi radovi:

- [1] D. BLANUŠA, *Karl Friedrich Gauss, najveći matematički genij svih vremena* (Karl Friedrich Gauss, das größte mathematische Genie aller Zeiten, Neue Ordnung 1. 1. 1943., 11.), preveo Mario-Osvin Pavčević.
- [2] D. BLANUŠA, *Metoda simetričnih komponenata*, Zbornik predavanja sa seminara "Elektroindustrijska problematika velikih elektrana" 15. – 25. 4. 1957.
- [3] D. BLANUŠA, *Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume*, Monatsh. Math. **59**(1955), 217–229.
- [4] D. BLANUŠA, *Problem četiriju boja*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **1**(1946), 31–42.
- [5] D. BLANUŠA, *Sur les paradoxes de la notion d'énergie*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. **2**(1947), 249–250.

Produhovljeni članak o velikom Gaussu govori sam za sebe kolikom je Blanuša dubinom i osjećajnošću doživljavao matematička otkrića. Profesor Mario-Osvin Pavčević potrudio se da nam to približi svojim prijevodom.

Rad *Metoda simetričnih komponenata* postoji kao umnoženi tekst predavanja namijenjen, vjerujemo i **podijeljen**, sudionicima seminara "Elektroindustrijska problematika velikih elektrana" održanog 1957. god. na Elektrotehničkom fakultetu u Zagrebu. Ovime je taj rad dostupan široj javnosti. Profesor Vjekoslav Filipović potrudio se da nam svojim prilogom približi taj rad.

Mislimo da izbor triju u časopisima objavljenih znanstvenih radova slikovito ilustrira svestranost istraživanja i čini te radove dostupnim čitaocu, te da oni dopunjuju prethodne tekstove.

Karl Friedrich Gauss, najveći matematički genij svih vremena

"Neka ne uđe pod moj krov nitko nevičan geometriji."

Platon

Promatra li se povijesni period koji obuhvaća otprilike posljednja dva desetljeća osamnaestog i prvu polovinu devetnaestog stoljeća, u očima upadaju prije svega veliki politički događaji. Francuska revolucija, Napoleonov uspon i slom, te još neujedinjena, u puno malih država rastrgana Njemačka, daju tom vremenskom razdoblju karakteristično obilježje. Pa ipak su se tada zbivale i druge stvari, koje se, mjerimo li ih njihovom trajnom vrijednošću, ne mogu nimalo podcijeniti u odnosu na krvave ratove u kojima je tadašnja Europa težila stvoriti svoj budući životni oblik. Tko bi uopće mislio da je i u



Sl. 1. Karl Friedrich Gauss (1777. – 1855.)

tim živahnim vremenima jedna mirna znanstvena pojava u neumornom radu našla vlastito ispunjenje: **Karl Friedrich Gauss**, najveći matematički genij svih vremena, stvarao je svoja neprolazna djela. Gotovo da ne postoji drugi primjer takve nadmoćnosti nekog znanstvenika koja bi bila neograničeno i općenito priznata kao što je to slučaj kod Gaussa. Kad je jednom kralj Hannovera dao njemu u spomen iskovati medalju s natpisom "Georgius V. rex Hannoverae mathematicorum principi", podario mu je time počasnu titulu koju mu od tada nitko nije osporio. Kao "Princepsa Mathematicorum" njega znaju i štiju ne samo njemački matematičari, već i matematičari diljem svijeta.

Pred 165 godina, 30. travnja 1777., ugledao je Karl Friedrich Gauss u Braunschweigu svjetlo svijeta. Njegov otac Gerhard Diederich Gauss bio je zidar i posjedovao je skromnu majstorsku "radionicu vodoskoka i fontana". Majka mu je bila rođena prosičkinja. Sa sedam godina dospio je Gauss u katarinsku pučku školu (pučka škola nazvana po sv. Katarini, op. prev.). Tu je, prema školskom pravilniku, nakon dvogodišnjeg pohađanja škole dospio u takozvani računski razred, gdje su se odmah iskazale njegove neuobičajene matematičke sposobnosti. Dobro je poznata priča o tome kako je učitelj jednog dana dao učenicima zadatak da prosumiraju sve brojeve od 1 do 40. Za nekoliko trenutaka Gauss je zadatak riješio u glavi. On se sjetio da se traženi zbroj može razdijeliti na djelomične zbrojeve $1 + 40$, $2 + 39$, $3 + 38$, i.t.d., pri čemu svaki daje 41. Budući se može načiniti 20 takvih djelomičnih zbrojeva, dobiva se rezultat $20 \times 41 = 820$.

Svaka školovana osoba danas poznaje ovu metodu. Ona je sadržana u poznatoj formuli za zbroj aritmetičkog reda. Činjenica da je devetogodišnji dječak u trenu došao na takvu zamisao bila je prvo očitovanje njegove iznimne matematičke inteligencije. Taj neobičan talent uskoro je bio zapažen, te je vojvoda Karl Wilhelm Ferdinand od Braunschweiga mladome Gaussu omogućio pohađanje viših škola. Tako je Gauss 1788. g. dospio u Catharineum, te uspješno ga završivši 1793. godine i u Carolinum, pravu pripremnu školu za sveučilište. Uslijedio je studij u Göttingenu 1795. – 98., nakon kojeg se povukao u Braunschweig i tamo ostao nemajući stalno zaposlenje, privatno podučavavši, do 1807. godine. Te je godine pozvan u Göttingen na mjesto profesora astronomije i direktora zvjezdarnice, a to mjesto zadržao je do svoje smrti.

Činjenica da trenutak pojavljivanja tako moćnog matematičkog talenta kao što je bio Gauss pada u posljednja desetljeća 18. stoljeća, mora se opisati kao sretni splet sudbine. Nakon Newtonovog i Leibnizovog otkrića infinitezimalnog računa u 17. stoljeću, započeo je uzburkani razvitak matematike, koji je vezan uz Eulera, Lamberta, Bernoullija, Maclaurina, d'Alemberta, Lagrangea i Laplacea, da spomenemo samo neka od najvećih imena. U vrijeme kad je Gauss počeo svoje znanstveno djelovanje, plima otkrića bila se ponešto smirila. Nastupio je trenutak potrebitosti za snažnim umom koji bi kritički razjasnio različita pitanja koja se zbog poriva za napredovanjem nisu obrađivala s dovoljnom strogošću, ali i koji bi dao novi odlučujući poticaj za daljnji razvitak i produbljivanje dosegnutih spoznaja.

Prvi znanstveni rad tada 19-godišnjeg Gaussa je njegova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta. Taj je problem uspio riješiti 30. ožujka 1796. i u radosnoj rasplamsalosti poklonio je svom prijatelju sa studija, mađarskom matematičaru Wolfgangu Bolyaiju, malu pločicu na kojoj je sam izveo dotični račun. Prethodnih dvije tisuće godina vjerovalo se, da se od svih pravilnih mnogokuta s neparnim brojem stranica, šestarom i ravnalom mogu konstruirati samo trokut, peterokut i petnaesterokut. Gauss ne samo da je dao konstrukciju sedamnaesterokuta, nego je još dodatno pokazao da bi se morao moći konstruirati svaki mnogokut čiji broj stranica jest takav prim broj da kad ga se umanjuje za jedan, daje potenciju broja dva, čiji eksponent je opet potencija broja dva. Dotične prim brojeve danas zovemo gaussovi prim brojevi, a do sada ih je poznato pet: 3, 5, 17, 257, 65537. Jedno rješenje za slučaj 257-terokuta objavio je kasnije Richelot, a Hermes je uspio doći do rezultata za 65537-terokut tijekom desetgodišnjeg istraživanja. Gaussova teorija diobe kruga, na kojoj se zasnivaju ove činjenice, tvori jedno poglavlje 1801. godine objavljenog Gaussovog remek-djela "Disquisitiones arithmeticae", koje čini osnove moderne teorije brojeva.

1799. godine Gauss je u Helmstedtu stekao akademski stupanj doktora na temelju rada u kojem je dao prvi nepobitan dokaz takozvanog Fundamentalnog teorema algebre, koji govori o egzistenciji korijenja algebarskih jednadžbi.

Jak poticaj za neki problem primijenjene matematike dobio je mladi Gauss 1. siječnja 1801. g. kad je Piazzi otkrio Ceres, prvi od takozvanih malih planeta ili asteroida. Gauss si je postavio zadatak izračunati keplerovo gibanje nove zvijezde čije promatranje je bilo ograničeno na vrlo mali

interval. Taj problem vodi do jednadžbe 8. stupnja i za njezino rješavanje bile su potrebne opsežne metode približnog računa, koje je Gauss s tim u svezi najprije morao savladati. Na temelju njegovih rezultata Ceres je odista ponovno otkriven i taj je uspjeh priskrbio Gaussu prve trenutke slave. Na temelju ovih radova, koje je dalje razradio, stvorio je svoje veliko djelo objavljeno 1809. godine, "*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*", koje je postalo upravo zakon računske astrononije.

Kao direktor zvjezdarnice u Göttingenu Gauss se bavio izračunavanjem smetnji Pallas, druge male planete koju je 28. III. 1802. otkrio Olbers. Tu zadaću, koja je iziskivala golem računski posao, dotjerao je jako daleko, ali je ipak nije uspio privesti kraju. Unatoč tome je bavljenje tom zadaćom postalo neobično plodno, o čemu svjedoče tri velike rasprave izašle 1812., 1814. i 1818. godine. One se tiču za matematičku analizu vrlo važnog hipergeometrijskog reda, problema mehaničke kvadrature i metode sekularnih smetnji.

1816. godine Gaussu je povjeren zadatak provesti zemljišni izmjer Hannovera. Gauss se podvrgnuo tom za tadašnje prilike vrlo teškom zadatku sa samo njemu svojstvenom energijom. Sam je radio na dotičnim mjerenjima od 1821. do 1825. godine, no cjelokupni posao završili su njegovi pomoćnici tek 1841. Znanstveni rezultat tog posla čini nekoliko važnih geodetskih članaka, od kojih valja posebice istaknuti "*Metodu najmanjih kvadrata*" objavljenu 1821. i 1823. godine. Ta metoda izjednačavanja prekobrojnih promatranja ostala je do danas nenadomjestiv priručni alat za računanje u geodeta. Gaussova hipotetička očekivanja, koja se nadovezuju na njegove geodetske radove, otišla su još puno dalje. Njegova 1827. izašla rasprava "*Disquisitiones circa superficies curvas*" bavi se geometrijom zakrivljenih ploha. Nakon što ju je Riemann proširio na više dimenzije, ova je klasična rasprava izrasla, u novije vrijeme posebice pod rukama talijanskih matematičara — spomenimo poimence Riccija — u impozantnu građevinu višedimenzionalne diferencijalne geometrije, grane geometrije koja bi u razvoju moderne fizike trebala odigrati presudnu ulogu.

Na skupštini prirodoslovnih znanstvenika u Berlinu 1828. godine Gauss je upoznao Alexandera von Humboldta. Kasnije se to poznanstvo razvilo u prijateljstvo koje je trajalo cijeli život. Na Humboldtov poticaj počeo se Gauss, zajedno s 27 godina mladim Wilhelmom Weberom, baviti ispitivanjima magnetizma Zemlje. Iz te fizikalno orijentirane aktivnosti proizašla je 1832. godine značajna rasprava o apsolutnoj mjeri pri magnetskim mjerenjima, te daljnje rasprave koje potječu iz razdoblja od 1838. do 1840. godine o magnetizmu Zemlje i o teoriji potencijala. Rezultat od tehničkog značenja nastao iz zajedničke suradnje Gausa i Webera je općepoznata konstrukcija elektromagnetskog telegrafa.

Pored ovih istaknutih doprinosa, koji su još za Gaussova života bili poznati, našlo se u njegovoj ostavštini mnoštvo rezultata koje on nije objavio, a koje su neovisno o njemu kasnije ponovno otkrili drugi matematičari. Tako je on još kao mladić imao dalekosežnih saznanja iz područja eliptičkih funkcija. Najviše tih rezultata su kasnije ponovno našli Jacobi, te posebno genijalni, ali nesretni Norvežanin Niels Henrik Abel (1802. – 1829.). Gauss se također pozabavio prastarim problemom aksioma pa-

ralelnosti. On je došao do potpune spoznaje o mogućnosti postojanja neeuclidске geometrije, koja je kasnije, kroz članke Mađara Bolyaija, sina već spomenutog Wolfganga Bolyaija, i Rusa Lobačevskog, postala opće dobro matematičara. To što Gauss te stvari nije sam objavio treba pripisati njegovoj neuobičajenoj savjesnosti, koja ga je tjerala pustiti u tisk samo potpuno sazrele, formom i sadržajem do zadnje sitnice dotjerane radove.

Unatoč velikim znanstvenim uspjesima i izvana gledano mirnome životnom putu, Gaussu je nedostajalo sreće i zadovoljstva. Lista li se njegov dnevnik, jedini dokument u kojem se otvoreno očituje njegova zatvorena i povučena priroda, može se pored dubokoumnih formula naići i na ovu rečenicu, napisanu finim potezima olovke: "Smrt mi je draža od ovakvog života." Ove riječi, obuzete svojom jednostudnom tragičnošću, bacaju jarko iskre svjetlosti na duševno stanje velikog čovjeka, čiji mu prometejski duh nije davao mira ni dopuštao odmora, već ga je uvijek tjerao dalje k novim izazovima. Njegov posao ne samo da je tražio najveću koncentraciju, nego često i golema izračunavanja, koja je znao provoditi žilavom ustrajnošću i gotovo nečovječnom marljivošću. Nesumnjivo su morali postojati periodi iscrpljenosti i obeshrabrenosti, koji su mogli narasti do zasićenja životom. Dodatno, Gauss je upravo u to vrijeme — riječ je o 1807. godini — imao i materijalnih problema, a trpio je i zbog pomanjkanja razumijevanja svoje najbliže okoline, koja nije mogla shvatiti da svoju radnu energiju posvećuje tako nepraktičnim stvarima. Usud kojeg velikani rijetko ostanu pošteđeni.

Gauss je umro 23. veljače 1855.

Obuhvati li se silno životno djelo ovog pravog titana ljudske duhovnosti, te želi li se naći sličnu pojavu u povijesti matematike, izronit će na vidjelo još možda jedino Arhimedov lik. Taj je Grk razumio, jureći nadaleko ispred svog vremena, razriješiti pitanja koja pripadaju krugu problema integralnog računa, matematičkog alata kojeg su nam gotovo dva tisućljeća kasnije podarili Leibniz i Newton. Njegov majstorski prikaz kvadrature segmenta parabole primjer je starogrčke misaone oštine te se odupire čak i današnjim zahtjevima za logičkom strogošću.

Kada danas bacimo pogled unazad na život i djelo Karla Friedricha Gaussa, tog najistaknutijeg matematičara uopće, onda je to trebao biti simbol za neslućeno širenje, koje je od Gaussovog doba iskusilo područje primjene matematike u prirodnim znanostima i tehnici, kao i za produbljivanje razumijevanja koje nam je dosadašnji razvoj te znanosti podario, počevši od najtežih problema matematičke analize, pa do sasvim temeljnih pitanja koja zadiru u područje čiste logike.

Matematika nije samo najizostrenije oružje u našoj uspješnoj borbi za svladavanje prirodnih sila. Ona je iznad svega jedno od najotmjerenijih zanimanja ljudskoga duha. Ako pod glazbom razumijevamo umjetnost tonova, onda je matematika umjetnost oštroumlja.

S njemačkog preveo: Mario-Osvin Pavčević

Prijevod članka objavljenog u novinama "Neue Ordnung" 1. 1. 1943., neznatno nadopunjen natuknicama samog autora.

Metoda simetričnih komponentata

U okviru teorije višefaznih izmjeničnih struja metoda simetričnih komponentata ima posebno značenje. Prema toj metodi nadomještavaju se višefazni nesimetrični sustavi superpozicijom simetričnih takvih sustava, što daje znatne računske prednosti i povrh toga omogućuje jasniji uvid u fizikalno ponašanje cijelog sustava. Razumije se, da su među višefaznim sustavima najvažniji trofazni, pa ćemo se na takve sustave i ograničiti.

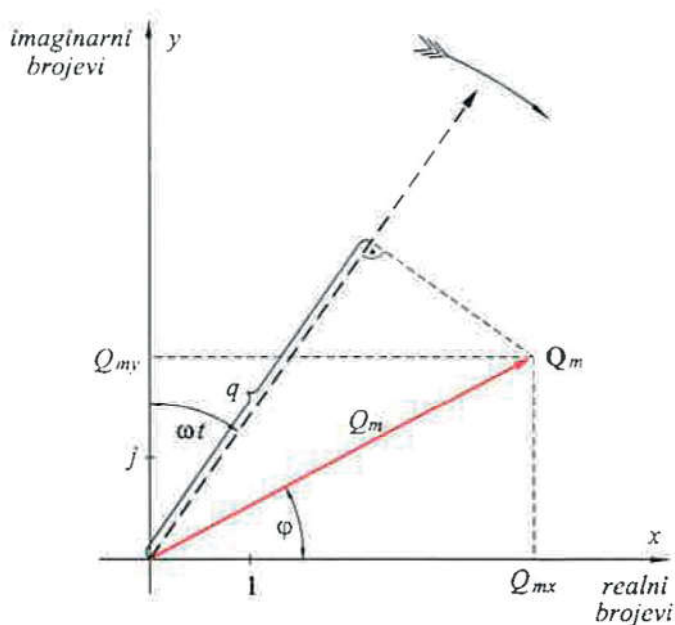
Metodu simetričnih komponentata upotrijebio je već god. 1912. L. G. Stokvis za jedan specijalni problem [1]. Daljni njegovi radovi u tom smislu potječu iz god. 1914. [2]. i 1916. [3]. No sustavnu i temeljitu obradu dao je tek C. L. Fortescue god. 1918. [4], pa se taj njegov rad smatra osnovnim i njime se započinje sustavna primjena metode simetričnih komponentata. Pod [5], [6] i [7] spomenuto je nešto iz kasnije literature, koja je vrlo opsežna. Knjiga navedena pod [7] daje opširan i iscrpan prikaz.

Da ovaj naš kratki uvod bude što jasniji, podsjetit ćemo najprije na neke dobro poznate pojmove.

Promatrajmo najprije sinusnu izmjeničnu veličinu q , t. j. veličinu (napon, struja, snaga), koja je funkcija vremena t prema formuli

$$q = Q_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Pri tom se Q_m zove "tjemena vrijednost" ili "amplituda", ω je "kružna frekvencija", koja je jednaka $2\pi f$, gdje je f "frekvencija" ili broj perioda u jedinici vremena (sekundi), a φ je "početni fazni kut", koji mjerimo u lučnoj mjeri (radijanima).



Sl. 1.

Uz fiksno zadanu frekvenciju ta je funkcija određena amplitudom Q_m i početnim faznim kutom φ (koji je određen do cijelog višekratnika od 2π), pa se može reprezentirati vektorom $\mathbf{Q}_m$ u ravnini, s komponentama Q_{mx} i Q_{my} . Taj se vektor ujedno može shvatiti kao kompleksni broj Q_m u brojevnoj ravnini:

$$\mathbf{Q}_m = Q_{mx} + jQ_{my} \quad (2)$$

ako os x shvatimo kao os realnih brojeva, a os y kao os imaginarnih brojeva te imaginarnu jedinicu $\sqrt{-1}$ označimo sa j (sl. 1). "Duljina" toga vektora ili "apsolutna vrijednost" toga kompleksnog broja je amplituda Q_m .

Ako poluzraka ("vremenska crta", u sličici crtkana) rotira kutnom brzinom ω u negativnom smislu (u smislu kazaljke na satu) tako, da se za $t = 0$ poklapa s osi imaginarnih brojeva (s osi y), onda je projekcija q vektora $\mathbf{Q}_m$ na tu crtu dana sa

$$q = Q_m \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\omega t + \varphi) \right] = Q_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

tj. ona je upravo jednaka trenutnoj vrijednosti veličine q .

Mjesto tjemene vrijednosti uzima se kao duljina vektora u vektorskim dijagramima redovno t. zv. efektivna vrijednost.

$$Q = \frac{Q_m}{\sqrt{2}}, \quad (4)$$

t. j. vektori se crtaju skraćeni u omjeru $1 : \sqrt{2}$. Takav ćemo vektor, shvaćen ujedno kao kompleksan broj, označiti sa

$$\mathbf{Q} = Q_x + jQ_y, \quad (5)$$

a njegovu duljinu sa Q . Budući da je po Eulerovoj formuli

$$\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi}, \quad (6)$$

a za komponente vektora vrijedi

$$Q_x = Q \cos \varphi, \quad Q_y = Q \sin \varphi, \quad (7)$$

to se vektor (kompleksni broj) $\mathbf{Q}$ može napisati i u tzv. trigonometrijskom obliku:

$$\mathbf{Q} = Q \cos \varphi + jQ \sin \varphi = Q(\cos \varphi + j \sin \varphi) = Qe^{j\varphi}, \quad (8)$$

gdje se φ zove "argument" toga kompleksnog broja.

Vektorskom zbrajanju, gdje treba zasebno zbrojiti x -komponente i zasebno y -komponente, odgovara zbrajanje kompleksnih brojeva, gdje se zbrajaju zasebno realni dijelovi i zasebno imaginarni dijelovi tih brojeva. Dakle, za dva vektora $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{V}$ vrijedi

$$\mathbf{Q} + \mathbf{V} = Q_x + jQ_y + V_x + jV_y = Q_x + V_x + j(Q_y + V_y). \quad (9)$$

Pod produktom dvaju vektora razumijevat ćemo onaj vektor, koji odgovara produktu dotičnih kompleksnih brojeva. Ako dakle stavimo

$$\mathbf{V} = Ve^{j\psi}, \quad (10)$$

bit će

$$\mathbf{QV} = Qe^{j\varphi} \cdot Ve^{j\psi} = QVe^{j(\varphi+\psi)}, \quad (11)$$

t. j. duljine treba pomnožiti, a početne fazne kutove (argumente tih kompleksnih brojeva) zbrojiti.

Ta je tvorba produkta drukčija od tvorbe skalarnog i vektorskog produkta u vektorskom računu. Vektorski produkt od $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{V}$ bio bi vektor okomit na ravninu (x, y) . Zamislimo li os z okomitu na ravninu (x, y) i upravljenu prema nama (dok su os x i os y prema običaju usmjerene udesno, odnosno prema gore), onda je z -komponenta vektorskog produkta

$$(\mathbf{Q} \times \mathbf{V})_z = Q_x V_y - Q_y V_x = QV \sin(\psi - \varphi), \quad (12)$$

dok su x -komponenta i y -komponenta jednake nuli. Ako je z -komponenta pozitivna, vektorski produkt ima smjer pozitivne osi z , ako je negativna, taj vektor ima smjer negativne osi z . Prema tome je duljina vektorskog produkta ovdje jednaka apsolutnoj vrijednosti njegove z -komponente.

Skalarni produkt vektora $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{V}$ je skalar, koji je dan sa

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V}) = Q_x V_x + Q_y V_y = QV \cos(\psi - \varphi), \quad (13)$$

pri čemu smo, da ne bude nesporazuma, operaciju skalarnog množenja označili tako da su faktori stavljeni u zagradu, a između njih je točka kao znak operacije.

Uvedimo još oznaku

$$\mathbf{Q}^* = Q_x - jQ_y \quad (14)$$

za broj (vektor), koji je konjugirano kompleksan broju (vektoru) $\mathbf{Q}$. Vrijedi onda

$$\mathbf{Q}^* = Q \cos \varphi - jQ \sin \varphi = Qe^{-j\varphi}. \quad (15)$$

Tvorimo li produkt $\mathbf{Q}^* \mathbf{V}$, to izlazi

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^* \mathbf{V} &= Qe^{-j\varphi} Ve^{j\psi} = QVe^{j(\psi-\varphi)} \\ &= QV \cos(\psi - \varphi) + jQV \sin(\psi - \varphi) \\ &= Q_x V_x + Q_y V_y + j(Q_x V_y - Q_y V_x) \\ &= (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V}) + j(\mathbf{Q} \times \mathbf{V})_z. \end{aligned} \quad (16)$$

Vidi se dakle, da je skalarni produkt ujedno x -komponenta (realni dio) vektora (kompleksnog broja) $\mathbf{Q}^* \mathbf{V}$, a z -komponenta vektorskog produkta je njegova y -komponenta (imaginarni dio). Time je uspostavljena veza između operacije množenja vektora u ravnini kao kompleksnih brojeva i skalarnog i vektorskog množenja vektora u smislu vektorskog računa.

Množimo li neki vektor $\mathbf{Q}$ s kompleksnim brojem $e^{j\psi}$, dobivamo

$$\mathbf{Q}e^{j\psi} = Qe^{j\varphi}e^{j\psi} = Qe^{j(\varphi+\psi)}. \quad (17)$$

Dobivamo, dakle vektor iste duljine kao $\mathbf{Q}$, ali s argumentom, koji je za ψ veći, t. j. vektor, koji je prema $\mathbf{Q}$ zakrenut za kut ψ (u pozitivnom smislu, ako je ψ pozitivan). Stoga ponekad kompleksni broj $e^{j\psi}$ zovemo "operator vrtnje". Napose za $\psi = \frac{\pi}{2}$ dobivamo, da je

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j \quad (18)$$

operator vrtnje za 90° , t. j. množenje sa j znači zakretanje vektora za 90° u pozitivnom smislu. Za nas će biti naročito važan operator zakretanja za 120° , tj. , u lučnoj mjeri, za $\frac{2\pi}{3}$, i taj ćemo operator označiti kraticom a . Bit će dakle

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (19)$$

Dalje se lako dobiva

$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (20)$$

$$a^3 = e^{j\frac{6\pi}{3}} = e^{j2\pi} = \cos 2\pi + j \sin 2\pi = 1, \quad (21)$$

$$\frac{1}{a} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + j \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2. \quad (22)$$

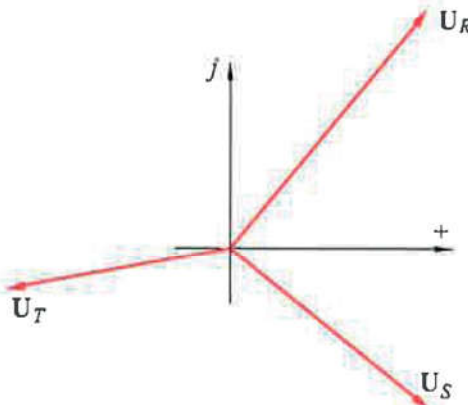
Bilježimo još važne relacije

$$1 + a + a^2 = 0, \quad (23)$$

$$a - a^2 = j\sqrt{3}, \quad (24)$$

$$a^4 = a^3 a = a. \quad (25)$$

Prelazimo sad na razmatranje trofaznih sustava. Pod trofaznim sustavom (sistemom) $S(U)$ razumijevamo tri istovrsne sinusne izmjenične veličine iste frekvencije, koje se u vektorskom dijagramu prikazuju kao tri vektora U_R , U_S i U_T (sl. 2). Opširnija je oznaka za takav sustav



Sl. 2.

$$S \begin{pmatrix} U_R \\ U_S \\ U_T \end{pmatrix}$$

Same vektore U_R , U_S , U_T možemo zvati komponentama tog sustava, pa govorimo o R -

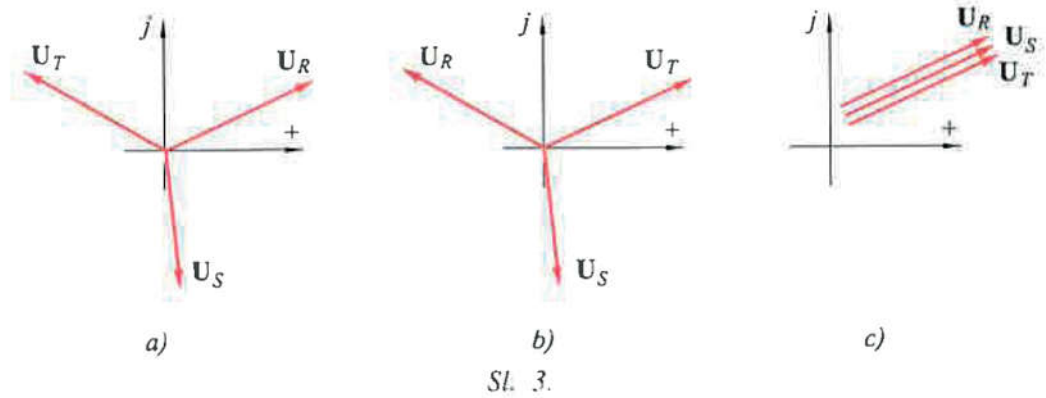
komponenti, S -komponenti i T -komponenti. U tom smislu to dakako nisu komponente vektora, već vektori kao komponente (sastavni dijelovi) trofaznog sustava.

Kažemo da je takav sustav "simetričan", ako su duljine njegovih triju vektora iste, t. j.

$$U_R = U_S = U_T, \quad (26)$$

a povrhu toga i međusobni kutovi jednaki, t. j.

$$\angle(U_R, U_S) = \angle(U_S, U_T) = \angle(U_T, U_R). \quad (27)$$



Sl. 3.

Taj posljednji uvjet moguće je zadovoljiti na tri načina: ili da su sva tri kuta jednaka $\frac{2\pi}{3}$, ili sva tri jednaka $-\frac{2\pi}{3}$ (tj. na pr. $\mathbf{U}_R$ prelazi u $\mathbf{U}_S$ vrtnjom za $\frac{2\pi}{3}$ u negativnom smislu), ili su sva tri kuta jednaka nuli. Dobivamo tako sustav prema sl. 3. U sl. 3a kutovi (27) svi su jednaki $-\frac{2\pi}{3}$, pa te vektore vremenska crta siječe u poređaju R, S, T . Takav se sustav zove “direktan” ili “istohodan” sustav i označuje se indeksom 1, dakle $S_1(\mathbf{U})$. U sl. 3b kutovi su jednaki $+\frac{2\pi}{3}$, vremenska crta vektora siječe u poređaju T, S, R . Takav se sustav zove “inverzan” ili “protuhodan” sustav i označuje se indeksom 2, dakle $S_2(\mathbf{U})$. Konačno su kutovi u sl. 3 jednaki nuli, t. j. sva su tri vektora jednaka, pa se takav sustav zove “nulsustav” i označuje indeksom 0, t. j. $S_0(\mathbf{U})$.

Definirati ćemo sada operacije zbrajanja i množenja dvaju sustava $S(\mathbf{U})$ i $S(\mathbf{V})$ koji ne moraju biti simetrični.

Pod zbrojem dvaju sustava $S(\mathbf{U})$ i $S(\mathbf{V})$ razumijevamo sustav kojemu su komponente zbrojevi dotičnih komponenata pojedinih sustava, dakle

$$S(\mathbf{U}) + S(\mathbf{V}) = S(\mathbf{U} + \mathbf{V}) \quad (28)$$

ili, opširnije,

$$S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_S \\ \mathbf{U}_T \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} \mathbf{V}_R \\ \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R + \mathbf{V}_R \\ \mathbf{U}_S + \mathbf{V}_S \\ \mathbf{U}_T + \mathbf{V}_T \end{pmatrix} \quad (28a)$$

Analogno, pod produktom dvaju sustava razumijevamo sustav kojemu su komponente produkti dotičnih komponenata pojedinih sustava, tj.

$$S(\mathbf{U}) \cdot S(\mathbf{V}) = S(\mathbf{U} \mathbf{V}) \quad (29)$$

ili, opširnije,

$$S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_S \\ \mathbf{U}_T \end{pmatrix} \circ S \begin{pmatrix} \mathbf{V}_R \\ \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R & \mathbf{U}_R \mathbf{V}_S & \mathbf{U}_R \mathbf{V}_T \\ \mathbf{U}_S \mathbf{V}_R & \mathbf{U}_S \mathbf{V}_S & \mathbf{U}_S \mathbf{V}_T \\ \mathbf{U}_T \mathbf{V}_R & \mathbf{U}_T \mathbf{V}_S & \mathbf{U}_T \mathbf{V}_T \end{pmatrix} \quad (29a)$$

Promatrajmo napose direktni simetrični sustav $S_1(\mathbf{U})$. Sjetimo li se da su kutovi (27) kod takvog sustava jednaki $-\frac{2\pi}{3}$, a prema (20) je a^2 operator vrtnje za taj kut, to s obzirom na (21) i (25) vrijedi očito

$$\mathbf{U}_S = a^2 \mathbf{U}_R, \quad \mathbf{U}_T = a^2 \mathbf{U}_S = a^4 \mathbf{U}_R = a \mathbf{U}_R \quad (30)$$

ili preglednije

$$S_1(\mathbf{U}) = S_1 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_S \\ \mathbf{U}_T \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \\ a \mathbf{U}_R \end{pmatrix} \quad (31)$$

Radi li se o inverznom sustavu $S_2(\mathbf{U})$, poslužit ćemo se operatorom a , koji daje vrtnju za $\frac{2\pi}{3}$ u pozitivnom smislu, pa izlazi

$$\mathbf{U}_S = a \mathbf{U}_R, \quad \mathbf{U}_T = a \mathbf{U}_S = a^2 \mathbf{U}_R, \quad (32)$$

t. j.

$$S_2(\mathbf{U}) = S_2 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_S \\ \mathbf{U}_T \end{pmatrix} = S_2 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ a \mathbf{U}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \end{pmatrix} \quad (33)$$

Konačno za nulsustav $S_0(\mathbf{U})$ vrijedi očito

$$\mathbf{U}_R = \mathbf{U}_S = \mathbf{U}_T, \quad (34)$$

odnosno

$$S_0(\mathbf{U}) = S_0 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_S \\ \mathbf{U}_T \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_R \end{pmatrix} \quad (35)$$

Važno je uočiti neka pravila koja vrijede za množenje simetričnih sustava. Pomnožimo li dva direktna sustava, izlazi inverzan sustav. Zaista, dobivamo:

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{U}) S_1(\mathbf{V}) &= S_1 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \\ a \mathbf{U}_R \end{pmatrix} S_1 \begin{pmatrix} \mathbf{V}_R \\ a^2 \mathbf{V}_R \\ a \mathbf{V}_R \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a^4 \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \end{pmatrix} \\ &= S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \end{pmatrix} = S_2(\mathbf{U} \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (36)$$

Dalje, množenje dvaju inverznih sustava daje direktni sustav:

$$\begin{aligned} S_2(\mathbf{U}) S_2(\mathbf{V}) &= S_2 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ a \mathbf{U}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \end{pmatrix} S_2 \begin{pmatrix} \mathbf{V}_R \\ a \mathbf{V}_R \\ a^2 \mathbf{V}_R \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a^4 \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \end{pmatrix} \\ &= S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \end{pmatrix} = S_1(\mathbf{U} \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (37)$$

Množenje direktnog s inverznim sustavom daje nulsustav:

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{U}) S_2(\mathbf{V}) &= S_1 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \\ a \mathbf{U}_R \end{pmatrix} S_2 \begin{pmatrix} \mathbf{V}_R \\ a \mathbf{V}_R \\ a^2 \mathbf{V}_R \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a^3 \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a^3 \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \end{pmatrix} \\ &= S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \end{pmatrix} = S_0(\mathbf{U} \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (38)$$

Množenje direktnog sustava s nulsustavom daje direktni sustav, a množenje inverznog sustava s nulsustavom daje inverzni sustav:

$$S_1(\mathbf{U}) S_0(\mathbf{V}) = S_1 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \\ a \mathbf{U}_R \end{pmatrix} S_0 \begin{pmatrix} \mathbf{V}_R \\ \mathbf{V}_R \\ \mathbf{V}_R \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \end{pmatrix} = S_1(\mathbf{U} \mathbf{V}) \quad (39)$$

$$S_2(\mathbf{U}) S_0(\mathbf{V}) = S_2 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ a \mathbf{U}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \end{pmatrix} S_0 \begin{pmatrix} \mathbf{V}_R \\ \mathbf{V}_R \\ \mathbf{V}_R \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \mathbf{V}_R \end{pmatrix} = S_2(\mathbf{U} \mathbf{V}) \quad (40)$$

Pravila (36) do (40) lako se pamte, ako se uoči, da se indeks produkta dobiva zbrajanjem indeksa pojedinih faktora, s time, da treba odbiti 3, sko je zbroj veći od 2. Tako u (36) za indekse vrijedi $1 + 1 = 2$; u (37) je $2 + 2 = 4$, po odbitku 3 izlazi 1; u (38) je $1 + 2 = 3$, po odbitku 3 izlazi 0; u (39) je $1 + 0 = 1$; u (40) je $2 + 0 = 2$. U jeziku teorije brojeva reklo bi se, da je zbroj indeksa faktora kongruentan modulo 3 indeksu produkta, dakle, ako je

$$S_r(\mathbf{U}) S_s(\mathbf{V}) = S_t(\mathbf{U} \mathbf{V}) \quad (41)$$

da vrijedi

$$r + s = t \pmod{3} \quad (42)$$

gdje r, s, t mogu imati samo vrijednosti 0, 1, 2. Značenje kongruencije je ovo: dva su broja a i b kongruentna modulo c , u simbolima $a \equiv b \pmod{c}$, ako je razlika $a - b$ djeljiva sa c . Zaista je u svim gornjim slučajevima lijeva strana u (42) ili jednaka desnoj ili za 3 veća od desne, tj. razlika je 0 ili 3, što je oboje djeljivo sa 3.

Razmatrajmo još zbroj komponenata nekog sustava $S(\mathbf{U})$. Taj ćemo broj označiti sa $\sum(\mathbf{U})$, tj.

$$\sum(\mathbf{U}) = \mathbf{U}_R + \mathbf{U}_S + \mathbf{U}_T. \quad (43)$$

Prema tome $\sum(\mathbf{U})$ nije sustav triju vektora, već samo jedan vektor dobiven zbrajanjem triju vektora sustava $S(\mathbf{U})$. S obzirom na (23) lako se

dobiva za slučaj simetričnih sustava:

$$\sum_1(\mathbf{U}) = \mathbf{U}_R + a^2\mathbf{U}_R + a\mathbf{U}_R = (1 + a^2 + a)\mathbf{U}_R = 0, \quad (44)$$

$$\sum_2(\mathbf{U}) = \mathbf{U}_R + a\mathbf{U}_R + a^2\mathbf{U}_R = (1 + a + a^2)\mathbf{U}_R = 0, \quad (45)$$

$$\sum_0(\mathbf{U}) = \mathbf{U}_R + \mathbf{U}_R + \mathbf{U}_R = 3\mathbf{U}_R. \quad (46)$$

Zbroj komponenata je dakle jednak nuli za direktne i inverzne sustave, a jednak je trostrukoj jednoj komponenti za nulsustave. To je uostalom i geometrijski evidentno na temelju šlj. 3.

Dalje je na temelju (28) očito

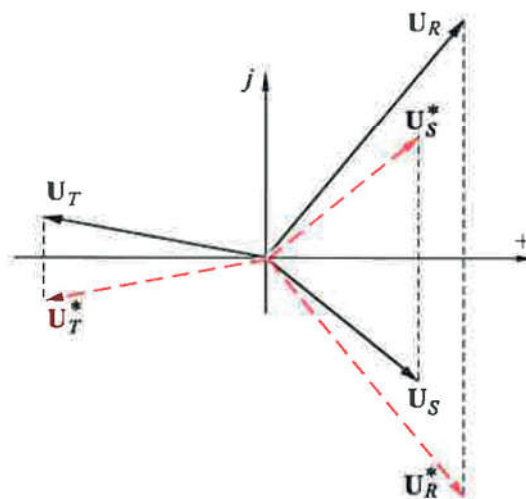
$$\sum(\mathbf{U}) + \sum(\mathbf{V}) = \sum(\mathbf{U} + \mathbf{V}), \quad (47)$$

tj. suma zbrojeva komponenata dvaju sustava jednaka je zbroju komponenata sume tih sustava. To dakako vrijedi i za bilo koji broj sumanada.

Još će nam trebati pojam konjugirano kompleksnog u sustava $S^*(\mathbf{U})$, koji je definiran jednažbom

$$S^* \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_S \\ \mathbf{U}_T \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R^* \\ \mathbf{U}_S^* \\ \mathbf{U}_T^* \end{pmatrix} \quad (48)$$

tj. nekom sustavu $S(\mathbf{U})$ konjugirano kompleksni sustav $S^*(\mathbf{U})$ dobivamo tako, da komponente $\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_S, \mathbf{U}_T$ sustava $S(\mathbf{U})$ nadomjestimo njima konjugirano kompleksnim vektorima $\mathbf{U}_R^*, \mathbf{U}_S^*, \mathbf{U}_T^*$ (sl. 4).



Sl. 4.

Lako je vidjeti da je konjugirano kompleksna vrijednost produkta dvaju kompleksnih brojeva jednaka produktu konjugirano kompleksnih vrijednosti pojedinih faktora. Dalje je prema (19) i (20)

$$a^* = a^2, \quad a^{2*} = a. \quad (49)$$

Uzmemo li dakle konjugirano kompleksni sustav nekog direktnog sustava, lako vidimo da izlazi inverzni sustav:

$$\begin{aligned} S_1^*(\mathbf{U}) &= S_1^* \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ a^2 \mathbf{U}_R \\ a \mathbf{U}_T \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R^* \\ (a^2 \mathbf{U}_R)^* \\ (a \mathbf{U}_T)^* \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R^* \\ a^{2*} \mathbf{U}_R^* \\ a^* \mathbf{U}_T^* \end{pmatrix} \\ &= S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R^* \\ a \mathbf{U}_R^* \\ a^2 \mathbf{U}_T^* \end{pmatrix} = S_2(\mathbf{U}^*), \end{aligned} \quad (50)$$

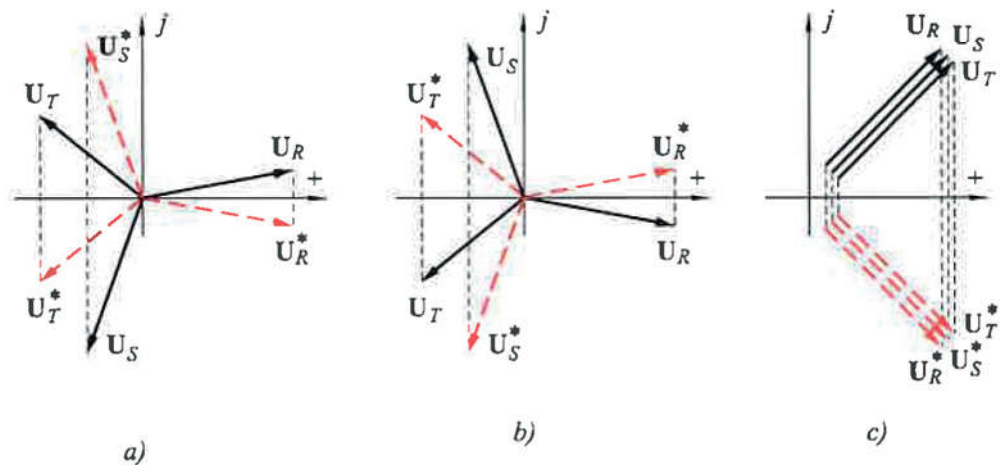
Obrnuto je dakako konjugirano kompleksni sustav inverznog sustava direktni sustav:

$$S_2^*(\mathbf{U}) = S_2^* \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R \\ a \mathbf{U}_R \\ a^2 \mathbf{U}_T \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R^* \\ (a \mathbf{U}_R)^* \\ (a^2 \mathbf{U}_T)^* \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{U}_R^* \\ a^2 \mathbf{U}_R^* \\ a \mathbf{U}_T^* \end{pmatrix} = S_1(\mathbf{U}^*). \quad (51)$$

Konjugirano kompleksni sustav nulsustava je očito opet nulsustav, jer su opet sve tri komponente jednake:

$$S_0^*(\mathbf{U}) = S_0(\mathbf{U}^*). \quad (52)$$

Ove su relacije geometrijski jasne (v. sl. 5).



Sl. 5.

Prelazimo sada na osnovni teorem metode simetričnih komponentata, koji izriče, da se bilo koji sustav $S(\mathbf{U})$ može shvatiti kao zbroj triju simetričnih sustava, jednog direktnog sustava $S_1(\mathbf{U}_1)$, jednog inverznog sustava $S_2(\mathbf{U}_2)$ i jednog nulsustava $S_0(\mathbf{U}_0)$.

Pokušajmo dakle shvatiti

$$S(\mathbf{U}) = S_1(\mathbf{U}_1) + S_2(\mathbf{U}_2) + S_0(\mathbf{U}_0) \quad (53)$$

i odrediti komponente tih triju simetričnih sustava tako, da jednačba (53) bude zadovoljena. Za pojedine komponente ta jednačba daje

$$\mathbf{U}_R = \mathbf{U}_{1R} + \mathbf{U}_{2R} + \mathbf{U}_{0R}, \quad (54a)$$

$$\mathbf{U}_S = \mathbf{U}_{1S} + \mathbf{U}_{2S} + \mathbf{U}_{0S}, \quad (54b)$$

$$\mathbf{U}_T = \mathbf{U}_{1T} + \mathbf{U}_{2T} + \mathbf{U}_{0T}, \quad (54c)$$

No S_1 je direktan sustav, pa vrijedi

$$\mathbf{U}_{1S} = a^2 \mathbf{U}_{1R}, \quad \mathbf{U}_{1T} = a \mathbf{U}_{1R}, \quad (55)$$

a S_2 je inverzni sustav, t. j.

$$\mathbf{U}_{2S} = a \mathbf{U}_{2R}, \quad \mathbf{U}_{2T} = a^2 \mathbf{U}_{2R}, \quad (56)$$

S_0 je nulsustav, dakle je

$$\mathbf{U}_{0R} = \mathbf{U}_{0S} = \mathbf{U}_{0T}, \quad (57)$$

Jednadžbe 54a, b, c time primaju oblik

$$\mathbf{U}_R = \mathbf{U}_{1R} + \mathbf{U}_{2R} + \mathbf{U}_{0R}, \quad (58a)$$

$$\mathbf{U}_S = a^2 \mathbf{U}_{1R} + a \mathbf{U}_{2R} + \mathbf{U}_{0R}, \quad (58b)$$

$$\mathbf{U}_T = a \mathbf{U}_{1R} + a^2 \mathbf{U}_{2R} + \mathbf{U}_{0R}, \quad (58c)$$

pa iz njih treba odrediti nepoznanice $\mathbf{U}_{1R}$, $\mathbf{U}_{2R}$, $\mathbf{U}_{0R}$, čime bi problem bio riješen.

Zbrojimo li jednadžbe (58a, b, c) i uočimo relaciju (23), izlazi smjesta

$$\mathbf{U}_R + \mathbf{U}_S + \mathbf{U}_T = \sum(\mathbf{U}) = 3\mathbf{U}_{0R}. \quad (59)$$

Pomnožimo li sada (58b) sa a , (58c) sa a^2 i opet zbrojimo. Zbog (21), (25) i (23) izlazi lako

$$\mathbf{U}_R + a \mathbf{U}_S + a^2 \mathbf{U}_T = 3\mathbf{U}_{1R}. \quad (60)$$

Množenjem jednadžbe (58b) sa a^2 , a jednadžbe (58c) sa a i zatim zbrajanjem tih jednadžbi izlazi analogno

$$\mathbf{U}_R + a^2 \mathbf{U}_S + a \mathbf{U}_T = 3\mathbf{U}_{2R}. \quad (61)$$

Jednadžbama (59), (60), (61) određene su R -komponente triju simetričnih sustava i time i ostale komponente tih sustava. Uvrštavanjem dobivenih rezultata u (58a, b, c) uvjerili bismo se, da su te jednadžbe zaista zadovoljene.

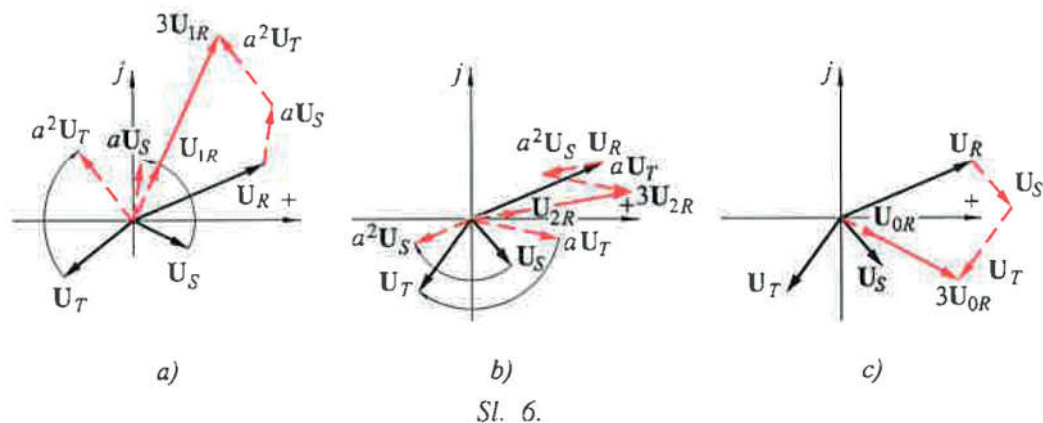
Uzmemo li u obzir značenje faktora a , a^2 kao operatora vrtnje, lako je konstruktivno odrediti R -komponente triju sustava S_1 , S_2 i S_0 na temelju grafički zadanog sustava S . U sl. 6 vide se te konstrukcije.

Ujednostavnjenje tih konstrukcija može se postići, ako se poslužimo vektorima

$$\mathbf{U}_X = \mathbf{U}_S - \mathbf{U}_R, \quad \mathbf{U}_Y = \mathbf{U}_T - \mathbf{U}_S, \quad \mathbf{U}_Z = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_T, \quad (62)$$

koji su na slici neposredno raspoloživi kao spojnice šiljaka triju zadanih vektora $\mathbf{U}_R$, $\mathbf{U}_S$, $\mathbf{U}_T$. Naime, vrijedi

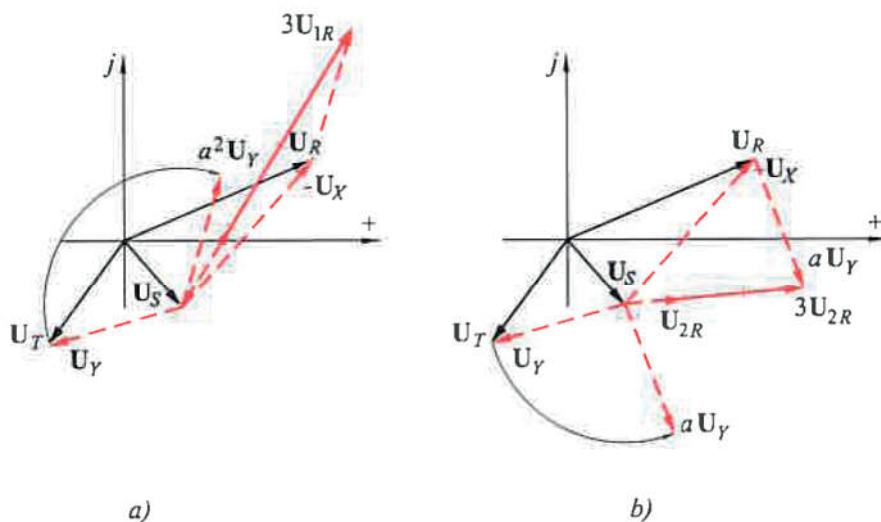
$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{0R} &= \frac{1}{3}(\mathbf{U}_R + \mathbf{U}_S + \mathbf{U}_T) = \frac{1}{3}[\mathbf{U}_R + (\mathbf{U}_R + \mathbf{U}_X) + (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_Z)] \\ &= \frac{1}{3}(3\mathbf{U}_R + \mathbf{U}_X - \mathbf{U}_Z) = \mathbf{U}_R + \frac{\mathbf{U}_X - \mathbf{U}_Z}{3}, \end{aligned} \quad (63)$$



$$\begin{aligned}
 U_{1R} &= \frac{1}{3}(U_R + aU_S + a^2U_T) = \frac{1}{3}[(U_S - U_X) + aU_S + a^2(U_S + U_Y)] \\
 &= \frac{1}{3}(-U_X + (1 + a + a^2)U_S + a^2U_Y) = \frac{-U_X + a^2U_Y}{3},
 \end{aligned}
 \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
 U_{2R} &= \frac{1}{3}(U_R + a^2U_S + aU_T) = \frac{1}{3}[(U_S - U_X) + a^2U_S + a(U_S + U_Y)] \\
 &= \frac{1}{3}(-U_X + (1 + a^2 + a)U_S + aU_Y) = \frac{-U_X + aU_Y}{3}.
 \end{aligned}
 \tag{65}$$

Konstrukcije na temelju formula (64) i (65) vidljive su iz sl. 7. Konstrukcija prema (63) nije bitno kraća od one prema (59), pa je ne donosimo.



Ako su, obrnuto, zadane simetrične komponente nekog sustava $S(U)$, te komponente sustava S_1, S_2, S_0 , onda se komponente sustava S dakako dobivaju izravnim vektorskim zbrajanjem pomoću jednadžbi (54a, b, c) jer je sustav S superpozicija triju simetričnih sustava S_1, S_2, S_0 .

Iz izloženog postupka je vidljivo da je rastavljanje bilo kojeg trofaznog sustava u tri simetrična sustava, jedan direktni, jedan inverzni i jedan nulsustav, uvijek moguće i da je jednoznačno određeno.

Razmotrit ćemo sada određivanje snage nesimetričnih sustava struja i napona na temelju snage simetričnih sustava.

U jednofaznom sustavu sa strujom

$$\mathbf{I} = I_x + jI_y = Ie^{j\psi} \quad (67)$$

i naponom

$$\mathbf{E} = E_x + jE_y = Ee^{j(\psi+\varphi)} \quad (68)$$

djelatna je snaga dana sa

$$N_d = IE \cos \varphi = I_x E_x + I_y E_y = (\mathbf{I} \cdot \mathbf{E}), \quad (69)$$

t. j. kao skalarni produkt tih dvaju vektora, pri čemu je φ pomak faze između struje i napona. Jalova snaga N_j dana je izrazom

$$N_j = IE \sin \varphi = I_x E_y - I_y E_x = (\mathbf{I} \times \mathbf{E})_z, \quad (70)$$

dakle kao z -komponenta vektorskog produkta vektora struje i vektora napona. Ta se dva izraza mogu sastaviti u kompleksni broj (vektor) kao kompleksna "prividna snaga" u obliku

$$N_p = N_d + jN_j = IE \cos \varphi + jIE \sin \varphi = IEe^{j\varphi}. \quad (71)$$

Duljina toga vektora je produkt IE , koji se također često naziva prividnom snagom. Vidi se, da je prema (16)

$$\mathbf{I}^* \mathbf{E} = Ie^{-j\psi} Ee^{j(\psi+\varphi)} = IEe^{j\varphi} = N_p, \quad (72)$$

tj. kompleksna prividna snaga je izražena kao produkt vektoru struje konjugirano kompleksnog vektora i vektora napona.

Zbrajanjem djelatnih snaga triju faza u trofaznom sustavu dobiva se djelatna snaga cijelog sustava. Isto tako se ukupna jalova snaga dobiva kao zbroj jalovih snaga pojedinih faza. Stoga će i kompleksna prividna snaga sustava biti zbroj kompleksnih prividnih snaga pojedinih faza.

Ako je dakle dan trofazni sustav struja $S(\mathbf{I})$ i trofazni sustav napona $S(\mathbf{E})$, onda je ukupna prividna snaga

$$N_p = \mathbf{I}_R^* \mathbf{E}_R + \mathbf{I}_S^* \mathbf{E}_S + \mathbf{I}_T^* \mathbf{E}_T. \quad (73)$$

Promatramo li sustav

$$S^*(\mathbf{I}) S(\mathbf{E}) = S(\mathbf{I}^* \mathbf{E}) = S \begin{pmatrix} \mathbf{I}_R^* & \mathbf{E}_R \\ \mathbf{I}_S^* & \mathbf{E}_S \\ \mathbf{I}_T^* & \mathbf{E}_T \end{pmatrix} \quad (74)$$

vidimo, da je prema (73) i (43)

$$N_p = \sum (\mathbf{I}^* \mathbf{E}). \quad (75)$$

Ako je sustav $S(\mathbf{I}^* \mathbf{E})$ simetričan, onda je prema (44) do (46) prividna snaga jednaka nuli, ukoliko je to direktni ili inverzni sustav, a jednaka je $3 \mathbf{I}_R^* \mathbf{E}_R$, ako se radi o nulsustavu.

Rastavimo onda sustave $S(\mathbf{I})$ i $S(\mathbf{E})$ na njihove simetrične komponentne sustave, t. j.

$$S(\mathbf{I}) = S_1(\mathbf{I}_1) + S_2(\mathbf{I}_2) + S_0(\mathbf{I}_0) \quad (76)$$

i

$$S(\mathbf{E}) = S_1(\mathbf{E}_1) + S_2(\mathbf{E}_2) + S_0(\mathbf{E}_0) \quad (77)$$

Na temelju (50), (51), (52) vrijedi za konjugirano kompleksni sustav $S^*(\mathbf{I})$

$$S^*(\mathbf{I}) = S(\mathbf{I}^*) = S_1^*(\mathbf{I}_1) + S_2^*(\mathbf{I}_2) + S_0^*(\mathbf{I}_0) = S_2(\mathbf{I}_1^*) + S_1(\mathbf{I}_2^*) + S_0(\mathbf{I}_0^*), \quad (78)$$

tj. direktni sustav struje se pretvara u inverzni i obrnuto, kada se uzimaju konjugirano kompleksne vrijednosti. Uzevši u obzir (36) do (40) možemo sada pisati

$$\begin{aligned} S(\mathbf{I}^* \mathbf{E}) &= S^*(\mathbf{I}) S(\mathbf{E}) \\ &= [S_2(\mathbf{I}_1^*) + S_1(\mathbf{I}_2^*) + S_0(\mathbf{I}_0^*)] \cdot [S_1(\mathbf{E}_1) + S_2(\mathbf{E}_2) + S_0(\mathbf{E}_0)] \\ &= S_2(\mathbf{I}_1^*) S_1(\mathbf{E}_1) + S_1(\mathbf{I}_2^*) S_2(\mathbf{E}_2) + S_0(\mathbf{I}_0^*) S_0(\mathbf{E}_0) + \dots \\ &= S_0(\mathbf{I}_1^* \mathbf{E}_1) + S_0(\mathbf{I}_2^* \mathbf{E}_2) + S_0(\mathbf{I}_0^* \mathbf{E}_0) + \dots, \end{aligned} \quad (79)$$

gdje su točkicama označeni ispušteni članovi (svega 6 članova), koji daju direktne ili inverzne sustave, a ispisani su samo članovi, koji daju nulsustave. Tvorimo li sada zbroj komponenata uzimajući u obzir (47), otpast će zbog (44), (45) svi članovi, koji nisu nulsustavi, t. j. članovi naznačeni točkicama. S obzirom na (75) i (46) dobivamo dakle

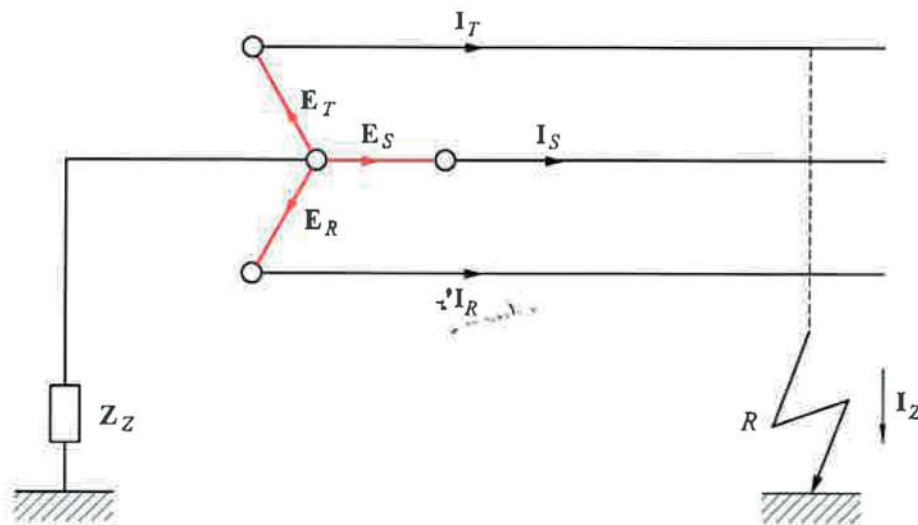
$$\begin{aligned} N_p &= \sum (\mathbf{I}^* \mathbf{E}) = \sum_0 (\mathbf{I}_1^* \mathbf{E}_1) + \sum_0 (\mathbf{I}_2^* \mathbf{E}_2) + \sum_0 (\mathbf{I}_0^* \mathbf{E}_0) \\ &= 3\mathbf{I}_{1R}^* \mathbf{E}_{1R} + 3\mathbf{I}_{2R}^* \mathbf{E}_{2R} + 3\mathbf{I}_{0R}^* \mathbf{E}_{0R}. \end{aligned} \quad (80)$$

No ovdje je prvi član snaga, koja odgovara direktnim komponentnim sustavima struja i napona, drugi član potječe od inverznih sustava, a treći od nulsustava. Vidi se dakle, da se snage (djelatna, jalova i kompleksna prividna) rastavljaju u dijelove, koji odgovaraju direktnim, inverznim i nulsustavima.

Time su izvedene najvažnije relacije iz metode simetričnih komponenata, koje dostaju za jednostavne primjene. Na kraju dajemo za ilustraciju metode jednostavan primjer računa za slučaj jednofaznog dozernog spoja na trofaznomvodu.

Neka je dakle prema sl. 8 otvoren trofazni vod priključen na trofazni generator, u kojemu djeluje direktni simetrični sustav $S_1(\mathbf{E})$ induciranih elektromotornih sila. Zvezdište generatora neka je uzemljeno preko impedancije $\mathbf{Z}_z$. Na jednom mjestu voda nastao je dozerni spoj u fazi R s prelaznim omskim otporom R . Sam vod, a i generator neka su simetrični u pogledu triju faza. Impedancije voda u pojedinim fazama od generatora do mjesta dozernog spoja jednake su dakle, a i svejedno je, da li se one odnose na direktan sustav struja, na inverzni sustav ili na nulsustav. No nije tako u pogledu faznih impedancija generatora. Da te impedancije neće biti iste za direktni sustav, inverzni sustav i nulsustav struja uviđa se odmah, ako se pomisli, da inverzni sustav struja, koje teku u statoru, stvara rotirajuće polje obrnutog smisla vrtnje rotora, pa se to polje okreće relativno prema rotoru dvostrukom kutnom brzinom rotora, dok polje, koje potječe od direktnog sustava struja miruje relativno prema rotoru. Time nastaje različito djelovanje na rotor, kod inverznog sustava, gubici u željezu rotora itd. Jasno je, da će stoga fazne impedancije za te sustave biti različite.

Te se impedancije mogu odrediti pomoću karakteristike praznog hoda te mjerenja na generatoru u jednopolnom, dvopolnom i trolpolnom kratkom spoju. Poblje u to ovdje ne možemo ulaziti.



Sl. 8.

Mi ćemo zamisliti fazne impedancije generatora zbrojene s faznim impedancijama voda od generatora do dozemnog spoja, pa ćemo tako dobivene ukupne impedancije označiti sa Z_1 , Z_2 , Z_0 prema tome, da li se odnose na direktni odnos struja, na inverzni sustav ili na nulsustav.

Ako je

$$S(\mathbf{I}) = S_1(\mathbf{I}_1) + S_2(\mathbf{I}_2) + S_0(\mathbf{I}_0) \quad (81)$$

sustav struja, koje teku u generatoru i vodu, onda će dozemna struja $\mathbf{I}_Z$, koja se vraća kroz zvjezdište generatora, očito biti zbroj struja triju faza, dakle

$$\mathbf{I}_Z = \sum (\mathbf{I}) = \sum_1 (\mathbf{I}_1) + \sum_2 (\mathbf{I}_2) + \sum_0 (\mathbf{I}_0) = \sum_0 (\mathbf{I}_0) = 3\mathbf{I}_{0R}, \quad (82)$$

pri čemu smo upotreбили relacije (44) do (47). No budući da je vod otvoren, to je

$$\mathbf{I}_S = \mathbf{I}_T = 0, \quad (83)$$

tako da je prema (59) do (61)

$$\mathbf{I}_{1R} = \frac{1}{3}(\mathbf{I}_R + a\mathbf{I}_S + a^2\mathbf{I}_T) = \frac{1}{3}\mathbf{I}_R, \quad (84a)$$

$$\mathbf{I}_{2R} = \frac{1}{3}(\mathbf{I}_R + a^2\mathbf{I}_S + a\mathbf{I}_T) = \frac{1}{3}\mathbf{I}_R, \quad (84b)$$

$$\mathbf{I}_{0R} = \frac{1}{3}(\mathbf{I}_R + \mathbf{I}_S + \mathbf{I}_T) = \frac{1}{3}\mathbf{I}_R. \quad (84c)$$

Jednadžbe (82) i (84c) slažu se dakako s time, da je dozemna struja jednaka struji u fazi R , t. j.

$$\mathbf{I}_Z = \mathbf{I}_R. \quad (85)$$

Računajmo dalje napone $\mathbf{U}_R$, $\mathbf{U}_S$, $\mathbf{U}_T$, t. j. sustav

$$S(\mathbf{U}) = S_1(\mathbf{U}_1) + S_2(\mathbf{U}_2) + S_0(\mathbf{U}_0) \quad (86)$$

na mjestu kratkog spoja, i to prema zvjezdištu generatora. Za direktni sustav očito će vrijediti

$$S_1(\mathbf{U}_1) = S_1(\mathbf{E} - \mathbf{Z}_1 \mathbf{I}_1), \quad (87)$$

jer je u svakoj fazi napon na kraju jednak elektromotornj sili minus pad napona u dotičnoj fazi. Za inverzni i nulsustav imamo slijedeće relacije, samo tu nema elektromotornih sila, jer je njihov sustav simetričan i direktan, pa nema inverznog sustava niti nulsustava tih sila. Dakle:

$$S_2(\mathbf{U}_2) = S_2(-\mathbf{Z}_2 \mathbf{I}_2), \quad (88)$$

$$S_0(\mathbf{U}_0) = S_0(-\mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_0). \quad (89)$$

Ukupno je, dakle

$$S(\mathbf{U}) = S_1(\mathbf{E} - \mathbf{Z}_1 \mathbf{I}_1) + S_2(-\mathbf{Z}_2 \mathbf{I}_2) + S_0(-\mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_0). \quad (90)$$

Postavimo sada jednadžbu za krug “ R -faza – zemlja – zvjezdište”:

$$\mathbf{E}_R - [\mathbf{I}_{1R} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{I}_{2R} \mathbf{Z}_2 + \mathbf{I}_{0R} \mathbf{Z}_0 + (R + \mathbf{Z}_Z) 3\mathbf{I}_{0R}] = 0. \quad (91)$$

Ovdje su od elektromotorne sile odbijeni padovi napona u R -fazi generatora i voda, koji potječu po redu od struje direktnog sustava, inverznog sustava i nulsustava. Te struje teku istodobno, ali za njih vrijede različite impedancije. Konačno je odbijen pad napona ukupne struje $\mathbf{I}_Z = 3\mathbf{I}_{0R}$ u pelaznom otporu dozemnog spoja i u impedanciji $\mathbf{Z}_Z$. Iz te jednadžbe izlazi

$$3\mathbf{I}_{0R} = \mathbf{I}_Z = \mathbf{I}_R = \frac{3\mathbf{E}_R}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_0 + 3(R + \mathbf{Z}_Z)}, \quad (92)$$

čime je određena dozemna struja i ujedno struja u fazi R .

Odredimo još napone $\mathbf{U}_R$, $\mathbf{U}_S$, $\mathbf{U}_T$, na mjestu dozemnog spoja prema zvjezdištu generatora pomoću njihovih simetričnih komponenata. Prema (87) do (89) vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{1R} &= \mathbf{E}_R - \mathbf{Z}_1 \mathbf{I}_{1R} = \mathbf{E}_R - \frac{1}{3} \mathbf{Z}_1 \mathbf{I}_R \\ &= \mathbf{E}_R \frac{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_0 + 3(R + \mathbf{Z}_Z)}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_0 + 3(R + \mathbf{Z}_Z)}, \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2R} &= -\mathbf{Z}_2 \mathbf{I}_{2R} = -\frac{1}{3} \mathbf{Z}_2 \mathbf{I}_R \\ &= -\mathbf{E}_R \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_0 + 3(R + \mathbf{Z}_Z)}, \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{0R} &= -\mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_{0R} = -\frac{1}{3} \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_R \\ &= -\mathbf{E}_R \frac{\mathbf{Z}_0}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_0 + 3(R + \mathbf{Z}_Z)}. \end{aligned} \quad (95)$$

Iz toga je prema (58a, b, c)

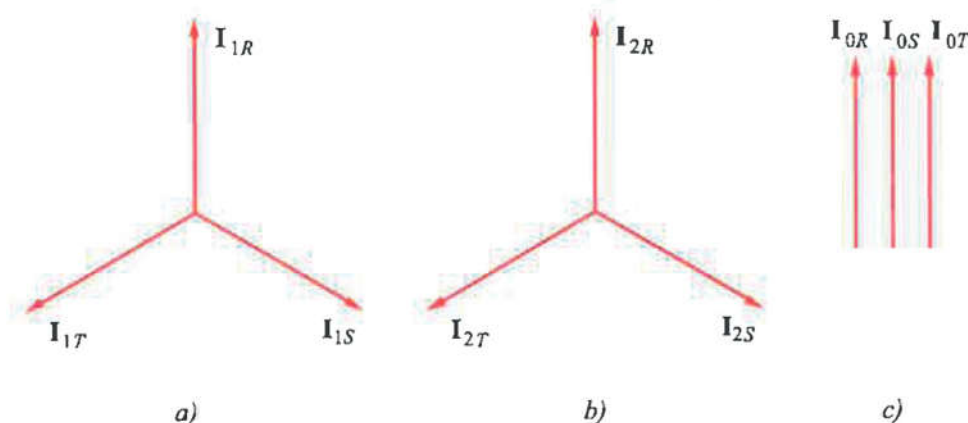
$$\begin{aligned} U_R &= U_{1R} + U_{2R} + U_{0R} \\ &= E_R \frac{3(R + Z_Z)}{Z_1 + Z_2 + Z_0 + 3(R + Z_Z)}, \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} U_S &= a^2 U_{1R} + a U_{2R} + U_{0R} \\ &= E_R \frac{-j\sqrt{3}Z_2 + (a^2 - 1)Z_0 + 3a^2(R + Z_Z)}{Z_1 + Z_2 + Z_0 + 3(R + Z_Z)}, \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} U_T &= a U_{1R} + a^2 U_{2R} + U_{0R} \\ &= E_R \frac{j\sqrt{3}Z_2 + (a - 1)Z_0 + 3a(R + Z_Z)}{Z_1 + Z_2 + Z_0 + 3(R + Z_Z)}, \end{aligned} \quad (98)$$

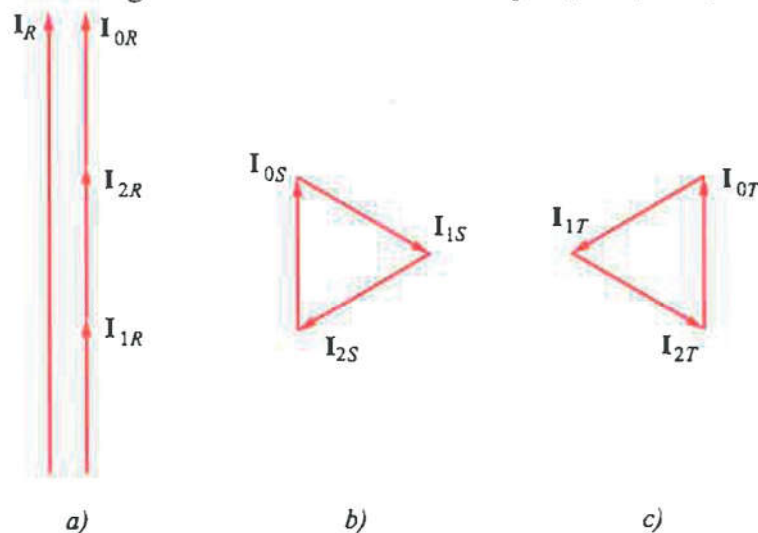
Želimo li naći napone prema zemlji, treba samo tim naponima pribrojiti napon zvjezdišta prema zemlji, koji je očito jednak

$$Z_Z I_Z = -Z_Z I_R = -E_R \frac{3Z_Z}{Z_1 + Z_2 + Z_0 + 3(R + Z_Z)}, \quad (99)$$



Sl. 9.

Dodajemo još sl. 9, koje pokazuju simetrične sustave struja, a u sl. 10 se vidi, kako se iz toga dobiva stvarni sustav struja I_R i $I_S = I_T = 0$.



Sl. 10.

Literatura

- [1] L. G. STOKVIS, *Der Spannungsabfall des synchronen Drehstromgenerators bei unsymmetrischer Belastung*, Oldenbourg, München 1912.
- [2] L. G. STOKVIS *Sur la creation des harmoniques 3 dans les alternateurs par suite des disequilibres des phases*, Comptes Rendus, **159**, 1914, 46–49.
- [3] L. G. STOKVIS *Analysis of Unbalanced Load Three-phase Systems – Reactions in a Generator Carrying an Unbalanced Load Treated as Equivalent to Two Balanced Loads.*, Elec. World **65**, 1915, 1111–1115.
- [4] C. L. FORTESCUE, *Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks*, A. I. E. E. Trans. **37** II, 1918, 1027–1140.
- [5] *Kurzschlussströme in Drehstromnetzen*, Siemens 1956, 72 str.
- [6] G. OBERDORFER, *Das Rechnen mit symmetrischen Komponenten*, Teubner, Leipzig und Berlin 1929, 74 str.
- [7] E. CLARKE, *Circuit Analysis of A-C Power Systems*, Vol. I, Symmetrical and Related Components, J. Wiley, New York 1950, 540 str.



Sonderabdruck aus 59. Band, 1955, 3. Heft der

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK.

Herausgegeben von J. Radon, Wien

Springer-Verlag in Wien

Alle Rechte vorbehalten

Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume.

Von

Danilo Blanusá, Zagreb.*(Eingelangt am 25. Februar 1955.)***1. Einleitung.**

Es ist bekannt, daß sowohl die hyperbolische Ebene [1] als auch der n -dimensionale hyperbolische Raum [2] im Hilbertschen Raum isometrisch eingebettet werden können. In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit zeigte jedoch *J. Nash* [3], daß sich jede Riemannsche Mannigfaltigkeit schon in einem endlichdimensionalen euklidischen Raum einbetten läßt. Nun beruht *Nash's* Existenzbeweis auf einem kunstvoll aufgebauten System schrittweiser Annäherungen, das sich wohl kaum dazu eignet, eine solche Einbettung wirklich auszurechnen.

Wir wollen in dieser Arbeit zunächst eine isometrische Einbettung der hyperbolischen Ebene in einem R_6 (6-dimensionalen euklidischen Raum) formelmäßig angeben. Die Einbettung ist von der Differenzierbarkeitsklasse C^∞ , aber trotzdem nichtanalytisch. (Nach *Nash's* Resultaten ist die Existenz einer Einbettung der Klasse C^1 im R_4 sichergestellt.) Ferner soll eine Einbettung der Klasse C^∞ (ebenfalls nichtanalytisch) des n -dimensionalen hyperbolischen Raumes im R_{6n-5} angegeben werden. (Auf Grund der Resultate von *Nash* muß es eine C^1 -Einbettung im R_{n+3} geben.)

In beiden Fällen gelang es bisher nicht, die Dimensionszahl des Einbettungsraumes herabzusetzen, ohne daß Selbstdurchdringungen auftreten.

2. Die hyperbolische Ebene im R_6 .

Es sei

$$\psi_1(u) = e^{2[(|u|+1)/2]+5}, \quad \psi_2(u) = e^{3[|u|/2]+6}. \quad (1a, b)$$

Dabei bedeuten die in eckige Klammern gesetzten Ausdrücke die größte

ganze Zahl, die nicht größer ist als der eingeklammerte Ausdruck.

Ferner bedeute

$$A = \int_0^1 \sin \pi \xi \cdot e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi, \quad (2)$$

$$\varphi_1(u) = (1/A \int_0^{u+1} \sin \pi \xi \cdot e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi)^{1/2}, \quad (3a)$$

$$\varphi_2(u) = (1/A \int_0^u \sin \pi \xi \cdot e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi)^{1/2}, \quad (3b)$$

$$f_1(u) = \frac{\varphi_1(u)}{\psi_1(u)} \operatorname{sh} u, \quad f_2(u) = \frac{\varphi_2(u)}{\psi_2(u)} \operatorname{sh} u. \quad (4a, b)$$

Sind nun $x_1, \dots, x_6$ rechtwinklige Koordinaten im R_6 und u, v Parameter auf einer Fläche, so behaupten wir, daß die Gleichungen

$$x_1 = \int_0^u \sqrt{1 - [f'_1(\xi)]^2 - [f'_2(\xi)]^2} d\xi, \quad x_2 = v, \quad (5a, b)$$

$$x_3 = f_1(u) \cos(v\psi_1(u)), \quad x_4 = f_1(u) \sin(v\psi_1(u)), \quad (5c, d)$$

$$x_5 = f_2(u) \cos(v\psi_2(u)), \quad x_6 = f_2(u) \sin(v\psi_2(u)) \quad (5e, f)$$

eine C^∞ -Einbettung der hyperbolischen Ebene ohne Selbstdurchdringung im R_6 ergeben. Dabei erhält man die Metrik in der Form

$$ds^2 = \sum_{i=1}^6 dx_i^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 u dv^2. \quad (6)$$

Die Gauss'sche Krümmung der Fläche wäre also gleich -1 . Es ist klar, daß sich durch eine Ähnlichkeitstransformation ein beliebiges negatives Krümmungsmaß erreichen ließe.

Um unsere Behauptung zu beweisen, brauchen wir einige Vorbereitungen.

Zur Abkürzung seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\chi(\xi) = \sin \pi \xi \cdot e^{-1/\sin^2 \pi \xi} = 1/e \sin \pi \xi \cdot e^{-\operatorname{ctg}^2 \pi \xi}, \quad (7)$$

wobei für ganzzahliges ξ $\chi = 0$ zu setzen ist.

$$\varrho_1(u) = 1/A \int_0^{u+1} \chi(\xi) d\xi, \quad \varrho_2(u) = 1/A \int_0^u \chi(\xi) d\xi, \quad (8a, b)$$

also in Hinblick auf (2) und (3a, b)

$$\varphi_1(u) = \sqrt{\varrho_1(u)}, \quad \varphi_2(u) = \sqrt{\varrho_2(u)}. \quad (9a, b)$$

Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume. 219

Im Intervall $[0,1]$ ist $\chi \geq 0$, also wächst $\varrho_2(u)$ in diesem Intervall monoton, u. zw. von 0 bis 1, da $\varrho_2(u) = 0$ und $\varrho_2(1) = 1$ ist. Dasselbe gilt dann für die Funktion $\varphi_2(u)$.

$\chi(u)$ genügt der Funktionalgleichung

$$\chi(\xi + 1) = -\chi(\xi). \quad (10)$$

Es wird daher

$$\begin{aligned} A \varrho_1(u) &= \int_0^{u+1} \chi(\xi) d\xi = \int_0^1 \chi(\xi) d\xi + \int_1^{u+1} \chi(\xi) d\xi = \int_0^1 \chi(\xi) d\xi + \int_0^u \chi(\eta+1) d\eta = \\ &= \int_0^1 \chi(\xi) d\xi - \int_0^u \chi(\eta) d\eta = A - \int_0^u \chi(\xi) d\xi = A - A \varrho_2(u) \end{aligned} \quad (11)$$

oder

$$\varrho_1(u) + \varrho_2(u) = 1, \quad (12)$$

das heißt

$$\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u) = 1. \quad (13)$$

Wegen (12) wird also $\varrho_1(u)$ im Intervall $[0,1]$ monoton fallen, und zwar von 1 bis 0.

Auf Grund der Definitionen (8a, b), (9a, b) gilt

$$\varrho_1(u) = \varrho_2(u + 1) \quad (14)$$

und

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(u + 1), \quad (15)$$

also, wegen (12),

$$\begin{aligned} \varrho_1(u) &= \varrho_2(u + 1) = 1 - \varrho_1(u + 1) = 1 - \varrho_2(u + 2) = \\ &= 1 - [1 - \varrho_1(u + 2)] = \varrho_1(u + 2) \end{aligned} \quad (16)$$

und

$$\varphi_1(u) = \varphi_1(u + 2). \quad (16a)$$

Auf Grund von (12) folgt sofort

$$\varrho_2(u) = \varrho_2(u + 2) \quad (17)$$

und

$$\varphi_2(u) = \varphi_2(u + 2). \quad (18)$$

Wegen (14) muß $\varrho_2(u)$ im Intervall $[1,2]$ von 0 bis 1 monoton wachsen, weil $\varrho_1(u)$ dies im Intervall $[0,1]$ tut. Da ferner $\varrho_2(u)$ im Intervall $[0,1]$ von 0 bis 1 monoton wächst, muß wegen (14) dasselbe für $\varrho_1(u)$ im Intervall $[-1,0]$ und wegen (16) auch im Intervall $[1,2]$ gelten. Es gilt also im Intervall $[0,2]$ und daher wegen (16), (17) überall

$$0 \leq \varrho_1(u) \leq 1, \quad 0 \leq \varrho_2(u) \leq 1. \quad (18a, b)$$

Die Funktionen $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ sind folglich überall reell, und es gilt, wenn die Quadratwurzel in (9a, b) stets positiv genommen wird,

$$0 \leq \varphi_1(u) \leq 1, \quad 0 \leq \varphi_2(u) \leq 1. \quad (19a, b)$$

Man bestätigt leicht, daß für ganzzahliges n

$$\varrho_1(2n) = \varphi_1(2n) = 1, \quad \varrho_1(2n+1) = \varphi_1(2n+1) = 0, \quad (20a, b)$$

$$\varrho_2(2n) = \varphi_2(2n) = 0, \quad \varrho_2(2n+1) = \varphi_2(2n+1) = 1 \quad (21a, b)$$

gilt.

Da sich die Ableitungen der Funktion $\text{ctg } \pi u$ als Polynome in dieser Funktion ausdrücken lassen, ist es klar, daß sich eine beliebig hohe Ableitung von $\chi(u)$ als Produkt der Funktion $\exp(-\text{ctg}^2 \pi u)$ und einer ganzen rationalen Funktion von $\sin \pi u$, $\cos \pi u$ und $\text{ctg } \pi u$ darstellt. Läßt man darin u gegen irgendeine ganze Zahl streben, so ist leicht einzusehen, daß hierbei sowohl die Funktion $\chi(u)$ selbst, als auch deren sämtliche Ableitungen gegen Null streben. Daraus können wir schließen, daß an diesen Stellen die Funktion $\chi(u)$ stetig ist und deren sämtliche Ableitungen existieren und gleich Null sind. Selbstverständlich hat die Funktion auch an allen anderen Stellen Ableitungen beliebiger Ordnung.

Nach (8a, b) und (10) wird

$$\varrho_1^{(n)}(u) = \frac{1}{A} \chi^{(n-1)}(u+1) = -\frac{1}{A} \chi^{(n-1)}(u) \quad (22)$$

und

$$\varrho_2^{(n)} = \frac{1}{A} \chi^{(n-1)}(u). \quad (23)$$

Auf Grund der Eigenschaften der Funktion $\chi(u)$ haben also auch die Funktionen $\varrho_1(u)$ und $\varrho_2(u)$ überall Ableitungen beliebiger Ordnung. Für ganzzahliges u sind sämtliche Ableitungen gleich Null, während $\varrho_1(u)$ und $\varrho_2(u)$ an diesen Stellen die in (20a, b) und (21a, b) angegebenen Werte annehmen.

Auf Grund von (9a, b) schließt man ohne weiteres, daß an allen Stellen, wo $\varrho_1(u) > 0$ bzw. $\varrho_2(u) > 0$ ist, auch $\varphi_1(u)$ bzw. $\varphi_2(u)$ Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt.

Um dies auch an den Stellen, wo φ_1 bzw. φ_2 verschwinden, sicherzustellen, beachten wir zunächst, daß z. B. die n -te Ableitung von φ_2 eine Summe der Form

$$\varphi_2^{(n)} = (\varrho_2^{1/2})^{(n)} = \sum a_r \varrho_2^{1/2-r_0} (\varrho_2')^{r_1} (\varrho_2'')^{r_2} \dots (\varrho_2^{(n)})^{r_n} \quad (24)$$

ist. Dabei sind die a_r gewisse numerische Koeffizienten, r_0 ist eine positive

Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume. 221

ganze Zahl und $r_1, r_2, \dots, r_n$ sind gewisse nichtnegative ganze Zahlen. Es ist leicht zu sehen, daß für alle Glieder dieser Summe

$$\frac{1}{2} - r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_n = \frac{1}{2} \quad (25)$$

gilt. Für $n = 0$ ist das trivial, da dann $r_0 = r_1 = \dots = r_n = 0$ ist. Allgemein folgt es durch vollständige Induktion, da beim Differenzieren der Exponent eines Faktors eines Summengliedes um eine Einheit erniedrigt wird, dafür aber das Glied mit der Ableitung des betreffenden Faktors multipliziert wird. Die Summe der Exponenten ändert sich also nicht, was Gleichung (25) zur Folge hat. Nun erinnern wir uns, daß sich jede Ableitung von ϱ_2 als Produkt aus der in (7) vorkommenden Exponentialfunktion und einer ganzen rationalen Funktion von $\sin \pi u$, $\cos \pi u$ und $\operatorname{ctg} \pi u$ darstellt. Bezeichnen wir eine solche Funktion mit $R(u)$, so wird also ein solches Summenglied $S(u)$ die Form

$$S(u) = R(u) e^{-(r_1 + \dots + r_n) \operatorname{ctg}^2 \pi u} \varrho_2^{1/2 - r_0} \quad (26)$$

haben. Es sei nun m eine ganze Zahl. Unter Anwendung der l'Hospital'schen Regel berechnen wir zunächst den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 2m} \frac{\sin^3 \pi u \varrho_2'(u)}{2\pi \varrho_2(u)} &= \lim_{u \rightarrow 2m} \frac{\sin^3 \pi u \chi(u)}{2A\pi \varrho_2(u)} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 2m} \frac{3\pi \sin^2 \pi u \cos \pi u \chi(u) + \sin^3 \pi u \chi'(u)}{2\pi \chi(u)} = 1. \end{aligned} \quad (27)$$

Man kann daher unter Benützung von (27) und (25) schreiben:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 2m} S(u) &= \lim_{u \rightarrow 2m} (2\pi)^{r_0 - 1/2} \sin^{1/2 - 3r_0} \pi u R(u) \cdot \\ &\cdot e^{-(r_1 + \dots + r_n) \operatorname{ctg}^2 \pi u} [\varrho_2'(u)]^{1/2 - r_0} \left(\frac{2\pi \varrho_2(u)}{\sin^3 \pi u \varrho_2'(u)} \right)^{1/2 - r_0} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 2m} (2\pi e)^{r_0 - 1/2} R(u) \sin^{1/2 - 3r_0} \pi u e^{-(r_1 + \dots + r_n) \operatorname{ctg}^2 \pi u} \cdot \\ &\cdot \sin^{1/2 - r_0} \pi u e^{-(1/2 - r_0) \operatorname{ctg}^2 \pi u} = \lim_{u \rightarrow 2m} (2\pi e)^{r_0 - 1/2} R(u) \sin^{2 - 4r_0} \pi u \cdot e^{-1/2 \operatorname{ctg}^2 \pi u} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Hieraus folgt nach (24) $\varphi_2^{(n)}(u) \rightarrow 0$ für $u \rightarrow 2m$. Da $\varphi_2(u)$ für $u = 2m$ stetig ist, folgt weiter, daß in diesen Punkten sämtliche Ableitungen existieren und gleich Null sind.

Auf Grund von (15) folgt sofort dasselbe für $\varphi_1(u)$ in den Punkten $u = 2m + 1$.

Schließlich sieht man unschwer, daß auch die nach (4a, b) definierten Funktionen $f_1(u)$ und $f_2(u)$ überall Ableitungen beliebiger Ordnung

besitzen. Die in den Nennern vorkommenden Funktionen $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ sind nach (1a, b) Treppenfunktionen, und man überzeugt sich leicht, daß $\varphi_1(u)$ für ungerades u und $\varphi_2(u)$ für gerades u Sprungstellen hat, also gerade dort, wo die im Zähler stehenden Funktionen samt ihren sämtlichen Ableitungen verschwinden. Man überlegt sich weiter, daß dann die Ableitungen von f_1 und f_2 gegen Null streben, wenn man sich von rechts oder von links diesen Punkten nähert; daher existieren sämtliche Ableitungen in diesen Punkten und sind gleich Null.

Wir wollen nun zeigen, daß die durch (5a) definierte Funktion $x_1(u)$ reell ist. Dazu brauchen wir eine (grobe) Abschätzung für $|\varphi'_1(u)|$ und $|\varphi'_2(u)|$.

Da $\chi(\xi)$ nach (7) eine ungerade Funktion ist, ist nach (8b) und (9b) $\varphi_2(u)$ eine gerade Funktion, so daß wegen (18) folgt:

$$\varphi_2(u) = \varphi_2(-u) = \varphi_2(2-u), \quad (29)$$

also

$$\varphi'_2(u) = -\varphi'_2(2-u). \quad (30)$$

Wir können uns daher auf das Intervall $[0, 1]$ beschränken und wegen (15) auf die Funktion $\varphi_2(u)$. Nun ist in diesem Intervall

$$|\varphi'_2(u)| = \varphi'_2(u) = \frac{\varrho'_2(u)}{2\sqrt{\varrho_2(u)}} = \frac{\chi(u)}{2A\sqrt{\varrho_2(u)}}. \quad (31)$$

Im Intervall $[1/2, 1]$ fällt der Zähler monoton gegen Null, während der Nenner monoton gegen $2A$ wächst. Das Maximum von $\varphi'_2(u)$ muß also in $[0, 1/2]$ liegen. In diesem Intervall gilt nun

$$u \leq \sin \pi u \leq \pi u, \quad (32)$$

also

$$\varphi'_2(u) = \frac{\sin \pi u \exp(-1/\sin^2 \pi u)}{2\sqrt{A \int_0^u \sin \pi \xi \exp(-1/\sin^2 \pi \xi) d\xi}} \leq \frac{\pi u \exp(-1/\sin^2 \pi u)}{2\sqrt{A \int_0^u \xi \exp(-1/\sin^2 \pi \xi) d\xi}}. \quad (33)$$

Weiter wird für $0 < \lambda < 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^u \xi e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi &> \int_{\lambda u}^u \xi e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi > \int_{\lambda u}^u \lambda u e^{-1/\sin^2 \pi \lambda u} d\xi = \\ &= u^2 \lambda (1 - \lambda) e^{-1/\sin^2 \pi \lambda u}. \end{aligned} \quad (34)$$

Es folgt mit (33)

Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume. 223

$$\begin{aligned}\varphi_2'(u) &< \frac{\pi \exp(-1/\sin^2 \pi u)}{2\sqrt{A\lambda(1-\lambda)} \exp[-1/(2\sin^2 \lambda \pi u)]} = \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{A\lambda(1-\lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{\sin^2 \pi u} + \frac{1}{2\sin^2 \lambda \pi u}\right).\end{aligned}\quad (35)$$

Da nun für $0 < u < 1/2$ die Sehne zwischen den Punkten $(0,0)$ und $(u, \sin \pi u)$ unter der Sinuslinie $\sin \pi x$ liegt, so gilt

$$\sin \pi x > \frac{\sin \pi u}{u} \cdot x \quad (0 < x < u) \quad (36)$$

oder für $x = \lambda u$

$$\frac{\sin \pi u}{\sin \pi \lambda u} < \frac{1}{\lambda}. \quad (37)$$

Für $\frac{1}{\lambda} < \sqrt{2}$ wird also sicher

$$\sin \pi u < \sqrt{2} \sin \pi \lambda u, \quad (37a)$$

also

$$-\frac{1}{\sin^2 \pi u} + \frac{1}{2 \sin^2 \pi \lambda u} < 0, \quad (38)$$

d. h.

$$\exp\left(-\frac{1}{\sin^2 \pi u} + \frac{1}{2 \sin^2 \pi \lambda u}\right) < 1. \quad (39)$$

Wir wählen insbesondere

$$\lambda = \frac{4}{5} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (40)$$

und erhalten aus (35) und (39)

$$\varphi'(u) < \frac{\pi}{2\sqrt{A\lambda(1-\lambda)}} = \frac{5\pi}{4\sqrt{A}}. \quad (41)$$

Um die Konstante A abzuschätzen, schreiben wir:

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 \sin \pi \xi e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi > \int_{1/4}^{3/4} \sin \pi \xi e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi > \\ &> \int_{1/4}^{3/4} \sin \frac{\pi}{4} e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{2} e^2}.\end{aligned}\quad (42)$$

Hiermit wird schließlich

$$|\varphi_2'(u)| < \frac{5\sqrt[4]{8}e}{4} < 18, \quad (43)$$

und ebenso gilt

$$|\varphi_1'(u)| < 18 \quad (44)$$

für beliebiges u .

Nun lassen sich die Ableitungen f_1' und f_2' abschätzen. Es ist

$$f_1' = \frac{1}{\psi_1} (\varphi_1' \operatorname{ch} u + \varphi_1 \operatorname{sh} u) \quad (45)$$

(wobei ψ_1 als Treppenfunktion wie eine Konstante zu behandeln ist), also nach (19a) und (44)

$$|f_1'| \leq \frac{1}{\psi_1} (|\varphi_1'| e^{|u|} + |\varphi_1| e^{|u|}) < \frac{1}{\psi_1} 19 e^{|u|}. \quad (46)$$

Ebenso folgt wegen (19b) und (43)

$$|f_2'| < \frac{1}{\psi_2} 19 e^{|u|}. \quad (47)$$

Weiter überlegt man sich leicht, daß

$$2\left[\frac{|u|+1}{2}\right] + 1 \geq |u| \quad (48)$$

und

$$2\left[\frac{|u|}{2}\right] + 2 \geq |u|$$

ist. Daraus folgt wegen (1a, b)

$$\psi_1(u) \geq e^{|u|+4}, \quad \psi_2(u) \geq e^{|u|+4}, \quad (49a, b)$$

also sicher

$$|f_1'| < \frac{19}{e^4} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |f_2'| < \frac{19}{e^4} < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (50a, b)$$

(Die Exponenten in (1a, b) könnten natürlich verringert werden, ohne daß dieses Resultat zerstört wird, nicht aber bei einer später benützten Abschätzung.)

Es folgt jetzt sofort

$$1 - f_1'^2 - f_2'^2 > 0, \quad (51)$$

d. h. die Funktion $x_1(u)$ ist reell.

Auf Grund dieser Resultate sieht man, daß durch (5a—f) eine reelle C^∞ -Einbettung gegeben ist. Durch eine einfache Rechnung (bei der ψ_1

Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume. 225

und ψ_2 als Konstante zu behandeln sind und von der Beziehung (13) Gebrauch zu machen ist) überzeugt man sich, daß die Metrik der Fläche in der Tat die Form (6) hat.

Daß die Fläche keine Selbstdurchdringung hat, erkennt man folgendermaßen:

Gäbe es eine Selbstdurchdringung, so müßten zwei Wertepaare der Parameter $u^{(1)}, v^{(1)}$ und $u^{(2)}, v^{(2)}$ dieselben Wertesextupel $(x_1^{(1)}, \dots, x_6^{(1)}) \equiv (x_1^{(2)}, \dots, x_6^{(2)})$ ergeben. Nun folgt aus $x_2^{(1)} = x_2^{(2)}$ wegen (5b) $v^{(1)} = v^{(2)}$. Da weiter wegen (51) x_1 eine monoton wachsende Funktion ist, folgt aus $x_1^{(1)} = x_1^{(2)}$ ebenso $u^{(1)} = u^{(2)}$. Die zwei Wertepaare u, v wären also nicht verschieden. Hiemit ist alles bewiesen.

3. Der n -dimensionale hyperbolische Raum im R_{n-5} .

Es seien φ_1 und φ_2 wieder die nach (2), (3a, b) definierten Funktionen. Ebenso benützen wir die Treppenfunktionen ψ_1 und ψ_2 nach (1a, b). Ferner sei für $u > 0$

$$F_1(u) = \frac{\varphi_1(1/u)}{\psi_1(1/u)} \sqrt{\frac{1}{u^2} - e^{-2u}}, \quad F_2(u) = \frac{\varphi_2(1/u)}{\psi_2(1/u)} \sqrt{\frac{1}{u^2} - e^{-2u}}. \quad (52a, b)$$

Weiter seien $x_0, x_{r1}, \dots, x_{r6}$ ($r = 1, \dots, n-1$) rechtwinklige Koordinaten in einem R_{n-5} . Als Parameter benützen wir u, v_r ($r = 1, \dots, n-1$), wobei u alle positiven und die v_r alle reellen Werte annehmen können.

Wir behaupten, daß dann die Gleichungen

$$x_0 = \int_1^u \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - F_1'^2 - F_2'^2 - e^{-2\xi}} d\xi, \quad (53a)$$

$$x_{r1} = \frac{e^{-u}}{\sqrt{n-1}} \cos(\sqrt{n-1} v_r), \quad x_{r2} = \frac{e^{-u}}{\sqrt{n-1}} \sin(\sqrt{n-1} v_r), \quad (53b, c)$$

$$x_{r3} = \frac{F_1(u)}{\sqrt{n-1}} \cos(\sqrt{n-1} v_r \psi_1(1/u)), \quad (53d)$$

$$x_{r4} = \frac{F_1(u)}{\sqrt{n-1}} \sin(\sqrt{n-1} v_r \psi_1(1/u)), \quad (53e)$$

$$x_{r5} = \frac{F_2(u)}{\sqrt{n-1}} \cos(\sqrt{n-1} v_r \psi_2(1/u)), \quad (53f)$$

$$x_{r6} = \frac{F_2(u)}{\sqrt{n-1}} \sin(\sqrt{n-1} v_r \psi_2(1/u)) \quad (53g)$$

eine C^∞ -Einbettung ohne Selbstdurchdringung des n -dimensionalen hyperbolischen Raumes in einem R_{6n-5} darstellen. Dabei erhält man die hyperbolische Metrik in der Form

$$ds^2 = dx_0^2 + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^6 dx_{rs}^2 = \frac{1}{u^2} (du^2 + \sum_{r=1}^{n-1} dv_r^2). \quad (54)$$

Auf Grund der Eigenschaften der Funktionen $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ sieht man auch hier leicht ein, daß die Einbettung von der Klasse C^∞ ist.

Die Funktionen $F_1(u)$ und $F_2(u)$ sind offensichtlich reell, da für $u > 0$

$$\frac{1}{u^2} - e^{-2u} > 0 \quad (55)$$

ist. Es ist nun zu zeigen, daß die Funktion $x_0(u)$ für jedes $u > 0$ reell ist, d. h. daß der Ausdruck unter der Wurzel in (53a) für $\xi > 0$ positiv ist.

Betrachten wir diesen Ausdruck zunächst für die Werte $\xi > 1$. Es ist

$$\begin{aligned} F_1'(\xi) &= \frac{1}{\psi_1(\frac{1}{\xi})} \left\{ \varphi_1'(\frac{1}{\xi}) \left(-\frac{1}{\xi^2}\right) \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi} + \varphi_1(1/\xi) \frac{-\frac{2}{\xi^3} + 2e^{-2\xi}}{2\sqrt{\frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi}}}} \right\} = \\ &= \frac{1}{\xi_1 \psi_1(\frac{1}{\xi}) \sqrt{1 - \xi^2 e^{-2\xi}}} \left\{ -\varphi_1'(\frac{1}{\xi}) \left(\frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi}\right) - \varphi_1(\frac{1}{\xi}) \left(\frac{1}{\xi} - \xi^2 e^{-2\xi}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (56)$$

Nun ist weiter

$$0 < \frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi} < 1 \quad (\xi > 1). \quad (57)$$

Das Minimum der Funktion $1 - \xi^3 e^{-2\xi}$ (für $\xi = 3/2$) ist positiv, also gilt

$$0 < \frac{1}{\xi} - \xi^2 e^{-2\xi} < 1 \quad (\xi > 1). \quad (58)$$

Schließlich ist das Minimum von $1 - \xi^2 e^{-2\xi}$ (für $\xi = 1$) gleich $1 - e^{-2}$, also

$$1 - \xi^2 e^{-2\xi} > 1 - e^{-2} > \frac{6}{7} > \frac{6^2}{7^2} \quad (\xi > 1). \quad (59)$$

Hiemit wird

Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume. 227

$$|F_1'(\xi)| < \frac{7}{6\xi \psi_1(\frac{1}{\xi})} \left\{ \left| \varphi_1'(\frac{1}{\xi}) \right| + \varphi_1(\frac{1}{\xi}) \right\} \quad (\xi > 1) \quad (60)$$

oder wegen (19a) und (44)

$$|F_1'(\xi)| < \frac{7 \cdot 19}{6\xi \psi_1(\frac{1}{\xi})} = \frac{133}{6\xi \psi_1(\frac{1}{\xi})} \quad (\xi > 1). \quad (61)$$

Weiter gilt für $\xi > 1$

$$\psi_1(1/\xi) = e^5, \quad \psi_2(1/\xi) = e^6. \quad (62a, b)$$

Es wird also nach (61) und auf Grund einer ganz analogen Rechnung für $F_2'(\xi)$

$$|F_1'(\xi)| < \frac{133}{6\xi e^5}, \quad |F_2'(\xi)| < \frac{133}{6\xi e^6}. \quad (63a, b)$$

Aus (59) und (63a, b) folgt

$$\frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi} > \frac{6}{7\xi^2} > \left(\frac{133}{6\xi e^5}\right)^2 + \left(\frac{133}{6\xi e^6}\right)^2 > |F_1'(\xi)|^2 + |F_2'(\xi)|^2. \quad (64)$$

Die Wurzel in (53a) ist also in der Tat reell für $\xi > 1$.

Es sei nun $\xi \leq 1$. Wir schreiben (56) in der Form

$$F_1'(\xi) = \frac{1}{\xi^4 \psi_1(\frac{1}{\xi}) \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi}}} \left\{ -\varphi_1'(\frac{1}{\xi}) (1 - \xi^2 e^{-2\xi}) - \varphi_1(\frac{1}{\xi}) (\xi - \xi^4 e^{-2\xi}) \right\}. \quad (65)$$

Nun ist

$$1 - \xi^2 e^{-2\xi} < 1, \quad \xi - \xi^4 e^{-2\xi} = \xi(1 - \xi^3 e^{-2\xi}) < 1 \quad (\xi \leq 1), \quad (66a, b)$$

und es gilt ferner

$$\frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi} > \frac{1}{2\xi^2} \quad (\xi \leq 1). \quad (67)$$

In der Tat ist

$$1 - 2\xi^2 e^{-2\xi} > 0, \quad (68)$$

da diese Funktion ihr positives Minimum für $\xi = 1$ annimmt. Hieraus folgt leicht (67).

Mit Hilfe von (66a, b) und (67) erhält man

$$|F_1'(\xi)| < \frac{\sqrt{2}}{\xi^3 \psi_1(\frac{1}{\xi})} \left\{ |\varphi_1'(\frac{1}{\xi})| + \varphi_1(\frac{1}{\xi}) \right\} \leq \frac{\sqrt{2} 19}{\xi^3 \psi_1(\frac{1}{\xi})}, \quad (69)$$

bzw. durch eine analoge Rechnung

$$|F_2'(\xi)| < \frac{\sqrt{2} 19}{\xi^3 \psi_2(\frac{1}{\xi})}. \quad (70)$$

In Hinblick auf (49a, b) ist nun

$$\psi_1(1/\xi) \geq e^{\frac{1}{\xi} + 4}, \quad \psi_2(1/\xi) \geq e^{\frac{1}{\xi} + 4}. \quad (71a, b)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{\xi}} - \frac{1}{\xi^2} &= -\frac{1}{\xi^2} + 1 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2! \xi^2} + \frac{1}{3! \xi^3} + \frac{1}{4! \xi^4} + \dots = \\ &= \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2} \right) + 1 + \frac{1}{\xi} \left(1 - \frac{1}{\xi \sqrt{6}} \right)^2 + \frac{1}{4! \xi^4} + \dots > 0, \end{aligned} \quad (72)$$

also

$$e^{\frac{1}{\xi}} > \frac{1}{\xi^2}. \quad (73)$$

Daher wird

$$|F_1'(\xi)| < \frac{\sqrt{2} 19}{\xi e^4}, \quad |F_2'(\xi)| < \frac{\sqrt{2} 19}{\xi e^4}. \quad (74a, b)$$

Es wird also schließlich wegen (67) und (74a, b)

$$|F_1'(\xi)|^2 + |F_2'(\xi)|^2 < 2 \frac{2 \cdot 19^2}{\xi^2 e^8} < \frac{1}{2\xi^2} < \frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi}, \quad (75)$$

so daß auch für $\xi \leq 1$ die Wurzel in (53a) reell ist.

Wir zeigen nun, daß die Mannigfaltigkeit keine Selbstdurchdringung hat. Es müßte sonst zwei verschiedenen Punkten $(u^{(1)}, v_r^{(1)})$ und $(u^{(2)}, v_r^{(2)})$ der Mannigfaltigkeit derselbe Punkt $(x_0^{(1)}, x_{r1}^{(1)}, \dots, x_{r6}^{(1)}) \equiv (x_0^{(2)}, x_{r1}^{(2)}, \dots, x_{r6}^{(2)})$ des Einbettungsraumes entsprechen. Nun sieht man sofort, daß nach (53a) x_0 eine monoton wachsende Funktion von u ist. Aus $x_0^{(1)} = x_0^{(2)}$ folgt also $u^{(1)} = u^{(2)}$. Beachten wir weiter, daß F_1 und F_2 niemals gleichzeitig verschwinden. Es sei also etwa $F_1(u) \neq 0$. Dann folgt aus $x_{r3}^{(1)} = x_{r3}^{(2)}$ und $x_{r4}^{(1)} = x_{r4}^{(2)}$ nach (53d), (53e)

Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume. 229

$$\sqrt{n-1} v_r^{(1)} \psi_1(1/u) = \sqrt{n-1} v_r^{(2)} \psi_1(1/u) + 2k_1\pi \quad (76)$$

und aus $x_{r1}^{(1)} = x_{r1}^{(2)}$ und $x_{r2}^{(1)} = x_{r2}^{(2)}$ nach (53b), (53c)

$$\sqrt{n-1} v_r^{(1)} = \sqrt{n-1} v_r^{(2)} + 2k_2\pi. \quad (77)$$

Nun ist $\psi_1(1/u)$ eine Potenz von e mit ganzem positiven Exponenten, etwa e^s . Die Gleichungen (76) und (77) ergeben dann

$$k_1 = e^s k_2. \quad (78)$$

Das ist aber nur für $k_1 = k_2 = 0$ möglich, da sonst e^s rational, also e algebraisch sein müßte. Es gilt also $v_r^{(1)} = v_r^{(2)}$ ($r = 1, \dots, n-1$), d. h. die beiden Punkte der Mannigfaltigkeit sind identisch. Ist $F_1(u) = 0$, so ist $F_2(u) \neq 0$, und man zieht dieselben Schlußfolgerungen auf Grund der Gleichungen (53b, c) und (53f, g).

Schließlich zeigt eine einfache Rechnung, daß (54) richtig ist. Dabei sind die Treppenfunktionen ψ_1 und ψ_2 wieder als Konstante zu behandeln, und es ist die Beziehung (13) zu benutzen.

Der Sonderfall $n = 2$ ergibt eine Einbettung der hyperbolischen Ebene im R_7 . Wir gaben jedoch oben an, wie man für diesen Fall eine Einbettung bereits im R_6 konstruieren kann.

Literatur.

- [1] L. Bieberbach, Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum. *Comment. math. helv.* 4 (1932), S. 248—255.
- [2] D. Blanuşă, Eine isometrische und singularitätenfreie Einbettung des n -dimensionalen hyperbolischen Raumes im Hilbertschen Raum. *Monatsh. f. Math.*, 57 (1953), S. 102—108.
- [3] J. Nash, C^1 Isometric Imbeddings. *Annals of Math.* 60 (1954), S. 383—396.

Dr. ing. Danilo Blanuša, Zagreb:

PROBLEM ČETIRIJU BOJA*)

Moderna matematika stvara svoje probleme najviše u visoko razvijenim svojim dijelovima, na krajnjim granicama dosada postignute spoznaje. Takvi su problemi razumljivi samo stručnjaku matematičaru, pa katkada čak samo užem specijalistu za dotičnu matematičku disciplinu. No osim toga u matematici susrećemo neke probleme, koji se daju lako i jednostavno formulirati, pa ih shvaća svaki obrazovan čovjek, a ipak su vanredno teški. Neki su od tih problema riješeni poslije stoljetnih, pa i tisućljetnih napora matematičara, često vrlo kompliciranim matematičkim sredstvima. Neki su i do danas neriješeni. Jedan od novijih takvih problema je problem četiriju boja, koji spada u t. zv. topologiju ili analysis situs.

Zamislimo na kugli (globusu) ili u ravnini¹⁾ narisane neke zemljopisne karte, kojom je sva površina razdijeljena u stanoviti konačan broj područja (zemlje, jezera, mora). Tu kartu želimo obojiti tako, da područja sa zajedničkom granicom budu raznobojna. Dopušta se, da se područja iste boje sastaju u pojedinim točkama (na pr. četveromedama i t. d.). Pita se, koliki je najmanji broj boja, kojima se to u svakom slučaju može postići.

Može se pokazati, da je pet boja u svakom slučaju dosta²⁾. Slutnju, da već četiri boje dostaju u svakom slučaju, nije do danas uspjelo dokazati, pa odatle problemu ime.

Prvi puta spominje taj problem u literaturi matematičar (Cayley god. 1878³⁾). Kempe⁴⁾ i Tait⁵⁾ dali su dokaze, da su četiri boje dostatne, no Heawood⁶⁾ je pokazao, da su ti dokazi pogrešni. Kasnije su mnogi matematičari u brojnim istraživanjima dokazali razne zanimljive teoreme, koji nas znatno približavaju rješenju, ali do samog rješenja ipak još nije uspjelo doći.

*) Predavanje održano u kolokviju matematičko-fizičke i astronomske sekcije dne 26. IX. 1945.

Čudnovato je, da analogni problem na kompliciranijim plohama, nego što je kugla, ne pruža tolike poteškoće. Tako se zna, da za obojenje neke razdiobe u područja na torusu (prstenastoj plohi) uvijek dostaje sedam boja, a i treba toliko, jer se ploha torusa može razdijeliti na sedam područja, koja granice svako sa svakim. Slično je uspjelo riješiti problem za cio niz još kompliciranijih ploha, a baš na najjednostavnijoj, na kugli, poteškoće su tolike, da ih ne umijemo svladati⁷⁾.

Da se rješenje problema olakša, nastoji ga se svesti na što jednostavniji oblik. Prvi korak je taj, da pretpostavimo, da se u jednoj točki ne sastaje više od triju zemalja, t. j. da nema četveromeđa, peteromeđa i t. d. Takva pretpostavka ne smanjuje općenitost, jer se točke, u kojima se sastaje više od triju zemalja, mogu prekriti poligonima dotičnog reda, kao što se lako vidi. Može li se tako nastala razdioba obojiti sa četiri boje na željeni način, to ove poligone opet stegnemo na točku. Pri tom ne nastaje novih granica, već se samo neke granice produžuju, pa dobijemo ispravno obojenje prvotno zadane razdiobe. Ako se dakle mogu sa četiri boje obojiti sve razdiobe s tromedama, tada se daju obojiti i sve ostale razdiobe.

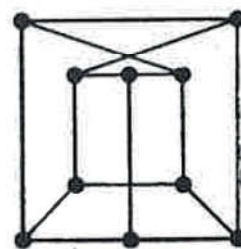
Promatramo li sve granice i sve točke, u kojima se granice sastaju (t. j. tromede), to možemo reći, da one tvore stanovitu mrežu. Tromede ćemo zvati *čvorištima* te mreže, same granice *bridovima*, dok područja na kugli tvore *oka* te mreže. Mreža je razapeta na kugli tako, da se bridovi nigdje ne križaju. Bridovi se dakle sastaju samo u čvorištima, i to u svakom čvorištu po tri brida, pa stoga kažemo, da je mreža trećeg stepena. Odsada ćemo promatrati samo mreže trećeg stepena, pa to ne ćemo više posebno isticati. Mreža, koja se može ovako razapeti na kugli (pri čemu bridove zamišljamo po potrebi rastezljivim), zove se sferna mreža. Promatramo li prostornu mrežu, t. j. stanovit broj točaka, koje su na neki način povezane bridovima tako, da se po tri brida sastaju u svakoj od tih točaka, onda ne smatramo, da ima oka, dok tu mrežu nismo razapeli na nekoj plohi (bez križanja bridova). Može se pokazati, da se uvijek može naći takva ploha, ali to ne mora biti kugla. Ako se mreža ne može razapeti na kugli, zvat ćemo je nesfernom.

Važan korak k rješenju sastoji se u tome, da se problem četiriju boja za oka neke sferne mreže nadomjesti problemom triju boja za bridove takve mreže, t. j. da se pita, mogu li se

bridovi takve mreže obojiti trima bojama tako, da se ni u kojem čvorištu ne sastaju bridovi iste boje.

Isprva se mislilo, da je to moguće za svaku (i nesfernu) mrežu, pa se ta tvrdnja zvala Taitov teorem⁸⁾. Međutim, Petersen⁹⁾ je oborio tu tvrdnju dajući primjer jedne nesferne mreže, kod koje takvo obojenje nije provedivo ili, kako ćemo reći, koja nije »rješiva«. Sl. 1 pokazuje Petersenovu mrežu, a sustavnim pokušavanjem lako je provjeriti, da je nerješiva.

Za sferne mreže može se pokazati, da je problem njihove rješivosti, t. j. obojenje njihovih bridova sa tri boje, ekvivalentan problemu obojenja njihovih oka sa četiri boje, dakle problemu četiriju boja¹⁰⁾. Ako je odgovor na problem četiriju boja jestan, onda su rješive sve sferne mreže, koje nemaju »mostova«. Pod »mostom« se



Sl. 1.

pri tom misli na brid, koji spaja dva dijela mreže tako, da bi se mreža raspala u ta dva dijela, ako dotični brid presiječemo. Uzduž takvog mosta sferne mreže neko bi područje (oko) graničilo samim sobom, što je za zemljopisnu kartu besmisleno.

Rješivost sfernih mreža je pristupačniji problem, koji se može tretirati drukčijim sredstvima, nego li problem četiriju boja, pa je stoga ekvivalencija tih dvaju problema zanimljiva i važna činjenica, koju ćemo ovdje potanje raspraviti. Potrebne su nam za to neke pripreme.

Uzmimo, da je neka mreža riješena, t. j. bridovi su obojeni trima bojama, recimo crvenom, bijelom i plavom, tako, da se ni u kojem čvorištu ne sastaju bridovi iste boje. Podimo od nekog čvorišta po crvenom bridu do susjednog, od ovog po bijelom bridu do trećeg čvorišta, onda opet po crvenom i tako naizmjenice. Dobijemo lanac bridova, u kojem alterniraju crvena i bijela boja. Takav lanac mora završiti najkasnije onda, kada su sva čvorišta dodirnuta. Mora završiti time, da se dođe do nekog već dodirnuto čvorišta, a to može biti samo polazno čvorište, jer su kod ostalih dodirnutih čvorišta i crveni i bijeli brid već upotrijebljeni, dok polazno čvorište još ima slobodan bijeli brid. Lanac se dakle zatvara, pa ga zovemo »izmjeničnim krugom«. Ako još nisu sva čvorišta dodirnuta, započnemo jednim od preostalih čvorišta nov lanac, koji se opet mora zatvoriti. Nastavljamo tako, dok nisu sva čvorišta dodirnuta,

čime je proces završen. Možemo dakle sva čvorišta i njihove crvene i bijele bridove obuhvatiti konačnim brojem »izmjeničnih krugova«. Jasno je, da svaki krug ima ták (paran) broj bridova, jer očito ima isto toliko crvenih kao i bijelih bridova. Krugovi se ne sijeku međusobno i ne sijeku sami sebe, jer nemaju zajedničkih čvorišta, a za bridove pretpostavljamo, da se sastaju samo u čvorištima (dakle, ako je mreža sferna, da se ne križaju). Da smo odabrali druge dvije boje, dobili bismo drugi sustav izmjeničnih krugova. Razmatranje ovakvih krugova je važno sredstvo istraživanja i mnogo se upotrebljava.

Za naša razlaganja trebat će nam pojam poznate Kleinove četvorne grupe. Elementi te grupe mogu imati razno značenje, t. j. grupa se može na razne načine »realizirati«. Neka na pr. elementi e, a, b, c te grupe znače ove transformacije koordinata u ravnini:

$$\begin{array}{llll} x = x' & x = -x' & x = x' & x = -x' \\ y = y' & y = -y' & y = -y' & y = y' \end{array} \quad (1)$$

Prema tome jedinični elemenat e znači identičnu transformaciju, a znači vrtužu koordinatnog sustava za 180° , b je zrcaljenje sustava na osi X , a c zrcaljenje sustava na osi Y . Razumijevamo li pod množenjem dvaju elemenata grupe uzastopno izvođenje dotičnih transformacija, to je lako provjeriti, da vrijede relacije

$$a^2 = b^2 = c^2 = e \quad (2) \quad ; \quad ab = ba = c \quad (3) \quad ; \quad ac = ca = b \quad (4) \quad ; \\ bc = cb = a \quad (5).$$

Iz (3) se množenjem sa c i upotrebom (2) dobije lako

$$abc = e, \quad (6)$$

a iz (2) izlazi množenjem sa a^{-1} , da je

$$a = a^{-1}, \quad b = b^{-1}, \quad c = c^{-1} \quad (7)$$

t. j., da je svaki elemenat jednak svome inverznom elementu (svaka od transformacija (1) jednaka je svojoj inverznoj transformaciji). Ako su s, s_1 i s_2 bilo koja tri elementa te grupe to iz

$$s_1 s = s_2 \quad (8)$$

izlazi množenjem sa s zbog $s^2 = e$

$$s_2 s = s_1. \quad (9)$$

Druga je jedna mogućnost realizacije ove grupe, da njezine elemente smatramo permutacijama, a produkt dvaju elemenata cnom permutacijom, koja odgovara uzastopnom izvođenju do-

tičnih dviju permutacija. Neka dakle elementi e, a, b, c grupe znače stanovite permutacije četiriju broja 1, 2, 3, 4, i to:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

ili, ako permutacije rastavimo u cikle:

$$(1) (2) (3) (4) ; (12) (34) ; (13) (24) ; (14) (23) . \quad (11)$$

Jediničnom elementu odgovara identična permutacija. I ovdje možemo lako provjeriti ispravnost relacija (2) do (9).

Za naše svrhe nam ne treba nikakva realizacija grupe, nego ćemo se služiti apstraktnom četvornom grupom s elementima e, a, b, c , koji zadovoljavaju relacije (2) do (9).

Razmotrimo sad neku mrežu, koja je razapeta (bez križanja bridova) na nekoj plohi, i pretpostavimo, da joj se oka daju obojiti sa četiri boje. Nazovimo te boje slovima e, a, b, c , t. j. nadomjestimo ih elementima naše grupe, a pridajmo svakom bridu onaj elemenat, koji je produkt elemenata susjednih oka. U svakom čvorištu sastaju se tri oka, koja očito moraju biti raznobojna, jer svako graniči sa svakim. Za njihove boje postoje četiri mogućnosti: e, a, b ; e, a, c ; e, b, c ; a, b, c . Tvorimo li u svakoj od tih mogućnosti sve produkte od po dva elementa, dobijemo prema (3), (4), (5) svaki puta elemente a, b, c . Na bridovima se dakle javljaju samo tri elementa i to na bridovima svakog čvorišta tri razna. Time je obojenje bridova trima bojama provedeno. Iz rješivosti problema četiriju boja za oka slijedi dakle rješivost problema triju boja za bridove, dakle »rješivost« mreže, i to na bilo kakvoj plohi, ne samo na kugli.

Obrat je teže dokazati i vrijedi samo na plohama s topološkim svojstvima kugle, dok na pr. na torusu općenito ne vrijedi. Iznosimo najprije vrlo elegantni dokaz, koji je Errera dao u svojoj tezi¹¹⁾.

Tipično je topološko svojstvo kugle, da zatvorena krivulja, koja sama sebe ne siječe, rastavlja tu plohu u dva zasebna dijela (na torusu to primjerice ne vrijedi uvijek). Ako zamislimo na kugli n takvih zatvorenih krivulja, koje se ne sijeku ni međusobno ni same sebe, onda se cijela kuglina ploha može obojiti dvjema bojama, recimo žutom i zelenom, tako, da se uz svaku krivulju nalaze područja razne boje. To se uviđa lako potpunom indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi zbog spomenutog svojstva kugle. Ako je obojenje provedeno za n krivulja, pa dodamo $(n + 1)$ -tu krivulju, koja se sva nalazi u po-

dručju jedne boje, jer ne siječe nijednu drugu krivulju, onda ta krivulja cijelu kuglu rastavlja u dva područja. U jednom od tih područja permutiramo boje, t. j. stavimo zelenu, gdje je bila žuta, i obrnuto. Time je očito postignuto traženo obojenje za $n + 1$ krivulja, i potpuna indukcija je provedena.

U riješenoj sfernoj mreži tvore crveno-bijeli izmjenični krugovi zatvorene krivulje, koje se ne sijeku, pa možemo kuglu obojiti dvjema bojama A i B . Crveno-plavi izmjenični krugovi rastavljaju kuglu na neka druga područja, koja obojimo bojama C i D . Time se svagdje na kugli nalaze dva sloja boje jedan iznad drugoga. Oka mreže su dakle obojena kombinacijama AC , BC , AD i BD . Ni uz koji brid ne može se s obih strana nalaziti ista kombinacija boja, jer svaki brid pripada ili crveno-bijelom ili crveno-plavom izmjeničnom krugu, ili, ako je crven, jednom i drugom takvom krugu. U prvom slučaju su prve boje u kombinacijama različite, u drugom slučaju druge, a u trećem i prve i druge. Smatramo li te četiri kombinacije boja novim bojama, to je traženo obojenje oka provedeno. Vidi se, da u dokaz bitno ulazi tipično topološko svojstvo kugle.

Dajemo još jedan drugi dokaz, koji je srodan dokazu, što ga je dao Wernicke¹²⁾. Za to trebamo najprije jedan pomoćni stavak.

Presijecimo neku riješenu prostornu mrežu zatvorenom plohom, koja prostor dijeli u dva zasebna dijela. Ta ploha ne mora imati topološka svojstva kugle. Može to biti na pr. i torus. Pretpostavljamo, da ploha ne prolazi nijednim čvorištem i da s bridovima ima konačan broj zajedničkih točaka, u kojima bridovi tu plohu probadaju, t. j. susjedne točke sjecišta na bridu nisu sve s iste strane plohe. Ta sjecišta neka su obojena bojom brida, na kojemu leže. Neka je n_1 broj crvenih, n_2 broj bijelih i n_3 broj plavih sjecišta. Zatvorena krivulja sjeći će plohu u takom broju točaka, jer polazeći s jedne točke na krivulji izvan plohe moramo obilazeći krivulju poslije svakog ulaska u unutrašnjost plohe opet iz nje izaći, da se konačno vratimo k toj polaznoj točki izvan plohe. Sjecišta ovako tvore parove i njihov je broj tak. Ako krivulja uopće ne siječe plohu, broj sjecišta je nula, što možemo također smatrati takim brojem. Razmatramo li sad crveno-bijele izmjenične krugove naše mreže, to je broj sjecišta svakog pojedinog, dakle i svih takvih

krugova s plohom tak. No to su baš sva crvena i bijela sjecišta, dakle

$$n_1 + n_2 \equiv 0 \pmod{2} . \quad (12)$$

Analogno je

$$n_2 + n_3 \equiv 0 \pmod{2} . \quad (13)$$

$$n_1 + n_3 \equiv 0 \pmod{2} . \quad (14)$$

Tvorimo li razlike od po dvije takve kongruencije, izlazi lako

$$n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \pmod{2}, \quad (15)$$

a dodavši $n_3 = n_3$ kongruenciji (12) dobijemo konačno

$$n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv N \pmod{2}, \quad (16)$$

ako je $N = n_1 + n_2 + n_3$ ukupni broj svih sjecišta. Riječima to znači: Prema tome, da li je ukupni broj N svih sjecišta tak ili lih, sva su tri broja n_1 , n_2 , n_3 crvenih, bijelih i plavih sjecišta taka, odnosno liha.

Za slučaj sferne mreže možemo zatvorenu plohu nadomjestiti zatvorenim krivuljom na kugli, koja kuglinu plohu, na kojoj je mreža razapeta, dijeli u dva zasebna dijela.

Neka je sad zadana rješiva sferna mreža s bridovima obojenim bojama a , b , c , koje ujedno smatramo elementima naše grupe od četiri elementa. Da se oboje oka, počnemo jednim okom i damo mu po volji jednu od četiriju boja e , a , b , c . Od toga oka prelazimo postepeno na druga oka i prelazeći brid množimo elemenat (boju) s_1 dotičnog oka elementom s toga brida. Dobiveni produkt s_2 smatramo bojom susjednog oka, na koje smo došli. Taj je elemenat uvijek različit od s_1 , jer je s različit od jediničnog elementa e , kojega na bridovima nema. Dobijemo dakle s obih strana nekog brida razne elemente (boje) oka. Relacije (8) i (9) kazuju, da je svejedno u kojem se smjeru neki brid prekorači. Ovako možemo postepeno dobiti boje svih oka, samo treba još istražiti, da li ne može doći do kontradikcije, ako do nekog oka dođemo dvjema raznim putovima, t. j. da li neko oko dobije isti elemenat (boju) bez obzira na to, kojim smo putem do njega došli.

Neka je dakle polazno oko P_1 spojeno s nekim drugim okom P dvjema raznim putovima, koji ne prolaze čvorištima, a zajedno tvore zatvorenu krivulju. Pretpostavljamo, da se putovi ne sijeku, jer ih inače možemo rastaviti u više zatvorenih krivulja i na svaku primijeniti ovaj dokaz. Idući od oka P_1 prvim putom do oka P prekoračili smo stanovit broj bridova

i množili elemenat s_I oka P_1 elementima tih bridova. Njihov produkt neka je p_1 , tako da bi oko P dobilo elemenat

$$s_I = s, p_1 \quad (17)$$

Po drugom putu neka je produkt elemenata bridova p_2 , tako da bi sad oko P dobilo elemenat

$$s_{II} = s, p_2 \quad (18)$$

Neka zatvorena krivulja tvorena od tih dvaju putova siječe svega n_1 bridova s elementom a , n_2 bridova s elementom b , a n_3 bridova s elementom c . Onda je

$$p_1 p_2 = a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} \quad (19)$$

Ako je ukupni broj siječenih bridova tak, onda su prema prije izvedenom stavku sva tri eksponenta n_1, n_2, n_3 taka, a taka potencija bilo kojeg elementa grupe daje prema (2) jedinični elemenat e , dakle je u tom slučaju

$$p_1 p_2 = e. \quad (20)$$

Ako je ukupni broj sjecišta lih, sva su tri broja n_1, n_2, n_3 liha, t. j.

$$n_1 = 2m_1 + 1, n_2 = 2m_2 + 1, n_3 = 2m_3 + 1. \quad (21)$$

Dakle, uzevši u obzir ispravnost komutativnog zakona prema (3), (4), (5),

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} = a^{2m_1+1} b^{2m_2+1} c^{2m_3+1} = \\ &= a^{2m_1} b^{2m_2} c^{2m_3} abc = abc \end{aligned} \quad (22)$$

a to zbog (6) opet daje relaciju (20), koja prema tomu vrijedi u svakom slučaju. Množenjem (17) i (18) dobijemo s obzirom na (2) i (20)

$$s_I s_{II} = e, \quad (23)$$

a množenjem ove relacije sa s_{II} izlazi s obzirom na (2)

$$s_I = s_{II}, \quad (24)$$

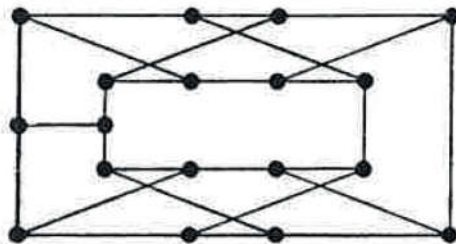
čime je dokaz proveden.

Spomenuti dokaz Wernickeov razlikuje se od našeg po tom, što Wernicke zatvorenu krivulju, tvorenu dvjema putovima, kontinuiranom deformacijom steže na jednu točku, oslobađajući se tako eventualnih čvorova unutar krivulje, dok smo mi tome izbjegli služeći se stavkom izraženim relacijom (15), koji će biti od važnosti i za druga istraživanja, osobito za ispitivanje rješivosti prostornih mreža. I Wernicke se služi Kleinovom grupom, ali njezine elemente interpretira kao permutacije (11). — Boje oka, nazvane brojkama 1, 2, 3, 4, pod-

vrgava kod prijelaza preko bridova permutacijama, koje su umjesto boja pridružene pojedinim bridovima.

Usporedi li se Errerin dokaz s našim, to se vidi, da je prvi dokaz kraći i jednostavniji, dok se u našem dokazu jasnije očituje značenje, koje ima karakteristično topološko svojstvo kugle za provedivost obojenja oka sa četiri boje.¹³⁾

Na kraju još nekoliko riječi o nerješivim mrežama. Može se pokazati, da se nerješiva mreža, u kojoj se pojavljuju dvokuti, trokuti i četverokuti (dvostruko spojena čvorišta tvore dvokute, a trokuti i četverokuti su trojke odnosno četvorke čvorišta, koja su ciklički vezana bridovima) može reducirati, t. j. ispuštanjem jedne stranice (brida) tih likova dobije se jednostavnija mreža, koja je također nerješiva. No ima i nerješivih mreža, koje nemaju dvokuta, trokuta i četverokuta, ne daju se presjecanjem jednoga, dvaju ili triju bridova rastaviti u dva dijela, a kompliciranije su od Petersenove mreže



Sl. 2.

(sl. 1). Dajemo u sl. 2 primjer takve mreže sa 18 čvorišta, koja je dobivena spajanjem dviju Petersenovih mreža uz izbacivanje dvaju čvorišta. Dokaz, da je ta mreža zaista nerješiva, prepuštamo čitaocu.*)

Dosada su razni autori u glavnom istraživali samo sferne mreže, nastojeći dokazati, da su rješive. Za nesferne mreže su na temelju Petersenovog primjera već znali, da nisu sve rješive. No bilo bi zanimljivo istražiti i nerješive mreže. Kad bi uspjelo te mreže potpuno obuhvatiti i klasificirati, možda bi se dalo ustanoviti, da li među njima ima sfernih, pa bi onda tim putem bio riješen problem četiriju boja.

¹⁾ Stereografska projekcija daje mogućnost prijelaza od kugle na ravninu i obrnuto, pa su za naš problem te dvije plohe istog značenja.

²⁾ Kempe: On the geographical problem of the four colours, Am. J. of Math., II, (3), 1879, str. 193—200.

Heawood: Map Colour Theorem, Quart. J. of Math. 1890, str. 332—338. — On the 4-colour Map theorem, Quart. J. of Math. 1898, str. 270—285.

*) Ako koji od naših čitalaca uspije to spretno dokazati, neka nam pošalje dokaz, pa ćemo ga objelodaniti. (Op. ur.).

Rademacher - Töplitz: Von Zahlen und Figuren, Springer, Berlin, 1933, str. 62—70.

³⁾ Cayley: On the colouring of maps, Proc. of the London Math. Soc., 1878, str. 148. — Proc. of the Royal Geogr. Soc. 1879, str. 259—261.

⁴⁾ Vidi pod ²⁾.

⁵⁾ Tait: Note on a Theorem in Geometry of Position, Trans. of the R. Soc. Edinburgh, XXIX, 1880, str. 657—660. — On the colouring of maps, Proc. of the R. Soc. Edinburgh, X, 1880, str. 501—503.

⁶⁾ Heawood: Map Colour Theorem, vidi pod ²⁾.

⁷⁾ Poblize o tom na pr. u Hilbert — Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie, Springer, Berlin 1932, str. 294—300.

⁸⁾ Tait: Note on a Theorem in Geometry of Position, vidi pod ⁵⁾.

⁹⁾ Petersen: Sur le théorème de Tait, Intermédiaire des Mathématiciens, 1898, str. 225—227.

¹⁰⁾ Tu ekvivalenciju je ustvrdio Tait: On the colouring of maps, vidi pod ⁵⁾.

¹¹⁾ Errera: Du coloriage des cartes et de quelques questions d'analysis situs, Thèse, Paris 1921, str. 50.

¹²⁾ Wernicke: Über den kartographischen Vierfarbensatz, Math. Annalen, 58, 1904, str. 413—426, navlastito 415, 416.

¹³⁾ Autor je svoj dokaz našao neovisno i tek naknadno upoznao Errerin i Wernickeov dokaz.

Čitaocima, koji se zanimaju za taj krug problema, preporučamo ovu literaturu:

Errera, vidi pod ¹¹⁾.

Sainte-Laguë: Les réseaux (ou graphes), Mémorial des sc. math. XVIII, Paris, 1926.

Sainte-Laguë: Géométrie de situation et jeux, Mém. sc. math. XLI, Paris 1929.

König: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe) Leipzig, Akad. Verlagsges. 1936.

Reidemeister: Einführung in die kombinatorische Topologie, Vieweg, Braunschweig 1932 (»Die Wissenschaft« Bd. 86).

Dehn u. Heegard: Analysis situs, Enz. d. math. Wiss. III. Bd.: Geometrie I. Teil, 1. Hälfte, 1907.

Résumé

LE PROBLÈME DES QUATRE COULEURS*)

Par

Danilo Blanuša, Zagreb

Après les généralités et un coup d'oeil historique l'attention est portée sur l'équivalence connue du problème des quatre couleurs pour les faces d'un réseau cubique sphérique et du problème des trois couleurs pour les arêtes d'un tel réseau. L'auteur donne une démonstration de cette équivalence, basée sur la considération du groupe de Klein (Viergruppe), et la

compare avec les démonstrations du même théorème d'Errera et de Wernicke.

Étant donné un réseau dont les arêtes sont coloriées à l'aide des trois couleurs a, b, c , on peut colorier les faces du réseau en leur donnant les quatre couleurs e, a, b, c que nous considérons comme éléments d'un groupe abstrait (le groupe connu de Klein) satisfaisant aux relations (2) à (9), e étant l'élément unité qui n'est pas utilisé pour le coloriage des arêtes. Ayant choisi l'élément (la couleur) d'une face initiale, nous passons à une face voisine en multipliant cet élément par l'élément de l'arête franchie qui diffère de l'élément unité; donc la couleur obtenue n'est pas la même et les faces ont reçu des couleurs différentes. En continuant ce procédé nous pouvons colorier toutes les faces. Il faut montrer qu'il n'y a pas de contradiction si l'on parvient à une certaine face par deux chemins différents. Il est aisé de voir qu'il n'y aura pas de contradiction si le produit de tous les éléments a, b, c des arêtes coupées par les deux chemins est égal à l'unité e et que cette condition est nécessaire.

Afin d'établir cette égalité, nous nous appuyons sur le lemme suivant:

Étant donné un réseau cubique résoluble (c'est-à-dire admettant le coloriage de ses arêtes par trois couleurs), nous le coupons par une surface fermée qui divise l'espace en deux parties séparées et nous supposons que la surface ne passe par aucun sommet du réseau. Aux points d'intersection nous attribuons les couleurs des arêtes coupées. Soient n_1, n_2, n_3 les nombres des points d'intersection de trois couleurs différentes et N leur somme. Alors, les trois nombres n_1, n_2, n_3 sont pairs ou impairs selon que leur somme N est paire ou impaire.

Pour démontrer ce lemme, il suffit de remarquer que les cycles alternatifs formés par les arêtes de deux couleurs coupent la surface en nombres pairs de points, ce qui donne les congruences (12), (13) et (14), d'où s'en suit la relation (15) et finalement (16), ce qui équivaut à notre lemme.

Lorsqu'il s'agit d'un réseau sphérique, on peut remplacer la surface fermée par une courbe fermée sur la sphère qui divise le réseau déployé sur la sphère en deux parties séparées.

Les deux chemins dont nous avons parlé forment une telle courbe, pourvu que les chemins ne se coupent pas. S'il se coupent, on pourra les décomposer en plusieurs courbes fermées sans points doubles. La démonstration cherchée est maintenant immédiate, car les arêtes coupées par les deux chemins auront les couleurs a, b, c et en vertu du lemme démontré les nombres des facteurs a, b, c du produit des éléments de ces arêtes seront tous pairs ou tous impairs, ce qui donne toujours l'unité e en vertu des relations (2), (6), (22).—

Quant à la démonstration de Wernicke, elle est effectuée à l'aide d'un groupe de permutations qui est une réalisation du groupe abstrait que nous utilisons. Le lemme démontré nous a permis d'éviter le procédé de déformation continue qu'emploie Wernicke pour resserrer successivement la courbe fermée à un point. Ce lemme pourra être employé aussi dans d'autres recherches dans ce domaine.

La démonstration élégante d'Errera est plus courte et plus simple, mais nous croyons que notre procédé éclaireit mieux le rôle de la propriété topologique fondamentale de la sphère, à savoir qu'une courbe fermée divise la sphère en deux parties séparées.**)

Quant aux réseaux irrésolubles, nous donnons — hors de l'exemple connu de Petersen (fig. 1) — l'exemple d'un réseau irrésoluble à 18 sommets qui ne contient ni digones, ni triangles, ni quadrilatères et qu'on ne peut pas décomposer en deux parties séparées en coupant une, deux ou trois arêtes (fig. 2).

*) Colloque mathématico-physique du 26 septembre 1945.

**) L'auteur a trouvé sa démonstration avant de connaître celles de Wernicke et d'Errera.

D. Blanuša

SUR LES PARADOXES DE LA NOTION D'ÉNERGIE¹

Après quelques exemples instructifs concernant les notions d'énergie et d'impulsion et leurs modifications causées par la théorie de la relativité restreinte on a donné un exposé critique des relations fondamentales de la thermodynamique relativiste.

Dans son mémoire connu² M. Planck obtient les formules de transformations

$$Q = Q_0 \alpha, \quad T = T_0 \alpha$$

pour la chaleur et la température, α étant l'abréviation pour

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Son équation de départ

$$dA = v dG - p dV$$

pour une transformation élémentaire de l'état thermodynamique du rayonnement noir représente le bilan du travail mécanique, dA étant le travail des forces extérieures, v la vitesse, dG l'accroissement d'impulsion, p la pression et dV l'accroissement de volume.

¹ Colloque du 17 décembre 1947.

² M. Planck: Zur Dynamik bewegter Systeme, Ann. d. Physik 26 (1908), p. 1—34.

On critique la signification de dG dans cette équation en avançant l'interprétation que dG n'est que l'accroissement d'impulsion causé par les forces extérieures, tandis que l'accroissement total est composé de ce dG et de l'impulsion $\frac{dQ}{c^2} v$ amenée par convection avec l'énergie de chaleur dQ . La conséquence en est que les formules de transformation pour la chaleur et la température deviennent

$$Q = \frac{Q_0}{\alpha}, \quad T = \frac{T_0}{\alpha}.$$

On arrive au même résultat par des voies différentes. Par exemple, une discussion approfondie du cycle de Carnot considéré par Laue³ fournit les mêmes formules, l'argumentation de Laue devant être modifiée.

Une autre idée esquissée dans cette conférence concerne le mouvement de l'énergie dans un corps en état de tension élastique. Considérons une barre soumise à une pression longitudinale p_0 . La transformation du tenseur d'impulsion et d'énergie fournit les formules

$$w = \frac{1}{\alpha^2} (w_0 + \beta^2 p_0),$$

$$s = \frac{v}{\alpha^2} (w + p_0),$$

pour la densité d'énergie w et la densité d'impulsion s dans le système de référence par rapport auquel la barre se meut avec la vitesse v , β étant l'abréviation pour $\frac{v}{c}$. Il en résulte la vitesse du mouvement d'énergie:

$$V = \frac{s}{w} = v \frac{w_0 + p_0}{w_0 + \beta^2 p_0} > v.$$

Donc, l'énergie se meut plus vite que le corps lui-même. Or, si l'on admet l'hypothèse qu'une grande partie de l'énergie, notamment celle qui est contenue dans les noyaux d'atomes, ne se meut pas plus vite que le corps, on est conduit à supposer que la partie $\frac{\beta^2}{\alpha^2} p_0$ de la densité d'énergie provenant de la pression p_0 est celle qui se meut plus vite. Sa vitesse devient

$$V = \frac{\frac{v p_0}{\alpha^2}}{\frac{\beta^2 p_0}{\alpha^2}} = \frac{c^2}{v}.$$

Ce serait donc la vitesse des ondes de de Broglie. On arrive au même résultat d'une autre manière. La force extérieure agissant de derrière de la barre fournit une certaine impulsion et un certain travail mécanique par seconde. Si l'on admet l'hypothèse que l'énergie mécanique fournie de cette force doit transporter par convection l'impulsion transmise à la barre par cette même force, on arrive également au résultat que cette énergie se meut avec la vitesse $\frac{c^2}{v}$. Il ne faut cependant pas perdre de vue qu'au cas d'une pression négative cette énergie aurait une densité négative.

A la fin de la conférence on a discuté les difficultés connues qui se présentent dans la théorie de la relativité générale en ce qui concerne la localisation de l'énergie du champ de gravitation.

³ M. v. Laue: Die Relativitätstheorie I (1909), p. 236—237.

ZAHVALA

Mislim da je gotovo nemoguće prirediti ovakvu knjigu bez ičije pomoći. Želim zahvaliti Blanušinoj kćeri Maji, od koje sam doznao više obiteljskih podataka. Ona mi je stavila na raspolaganje sve sačuvane fotografije kojima je knjiga ilustrirana. U razgovorima s više kolega, koje mi je teško pobrojati, doznao sam različite činjenice koje sam koristio. Svima im zahvaljujem.

Ivan Ivanšić

U Zagrebu 3. svibnja 2005. Ivan Ivanšić