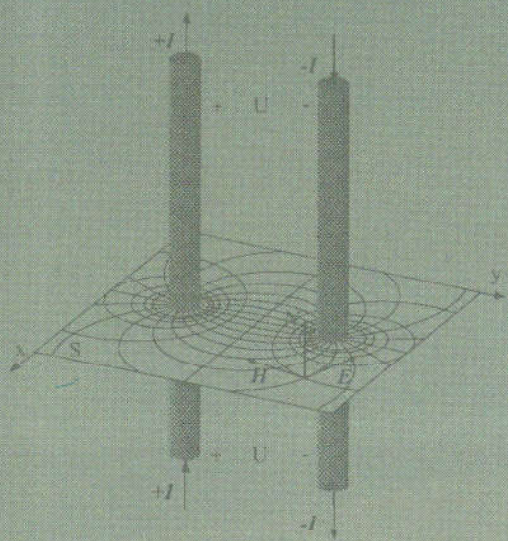


Zijad HAZNADAR
Željko ŠTIH

ELEKTROMAGNETIZAM

1



ŠKOLSKA KNJIGA • ZAGREB



UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS



Urednik

Dr. sc. ŽELIMIR MATUTINOVIĆ

Recenzenti

Prof. dr. sc. DAVOR BUTKOVIĆ

Prof. dr. sc. NIKOLA CINDRO

Prof. dr. sc. RADENKO WOLF

Grafički urednik

ŽELJKO BRNETIĆ

Lektor

DRAŽEN PLEVKO

Crteže izradili

Dr. sc. ŽELJKO ŠTIH

Mr. sc. GORAN MANENICA

Naslovnu stranicu izradila

JANA ŽILJAK

Korektori

SLAVKO BRNČIĆ

ANTE TERZIĆ

Slog i prijelom

Dr. sc. ŽELJKO ŠTIH

Objavljivanje ovog sveučilišnog udžbenika odobrilo je Povjerenstvo za znanstveno-nastavnu literaturu Sveučilišta u Zagrebu rješenjem broj 02-972/1-1996 od 5. lipnja 1996.

Tiskanje ove knjige pomoglo je Ministarstvo znanosti i tehnologije Republike Hrvatske.

© ŠKOLSKA KNJIGA d.d. Zagreb, 1997.

Nijedan dio ove knjige ne smije se umnožavati, fotokopirati ni na bilo koji način reproducirati bez nakladnikova ili autorova pismenog dopuštenja.

**CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i sveučilišna knjižnica, Zagreb**

UDK 621.3.013 (075.8)

537 (075.8)

HAZNADAR, Zijad

Elektromagnetizam / Zijad Haznadar,

Željko Štih. - Zagreb : Školska knjiga,

1997. - 2 sv. : ilustr. ; 24 cm.

- (Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu =
Manualia Universitatis studiorum Zagrabiensis)

ISBN 953-0-31686-0 (cjelina)

Sv. 1 : Elektromagnetska teorija,
statička i kvazistatička polja.

- 420 str.

Bibliografija uz svako poglavlje.

- Kazalo.

ISBN 953-0-31634-8

1. Štih, Željko

970317010

ISBN 953-0-31634-8

ISBN 953-0-31683-6

ISBN 953-0-31686-0 (cjelina)

Tisak: GZH

Prof. dr. sc. Zijad Haznadar
Prof. dr. sc. Željko Štih

ELEKTROMAGNETIZAM

Elektromagnetska teorija, statička i kvazistatička polja

Svezak 1.



Školska knjiga, Zagreb 1997.

Biserki i Leili
Alemki i Vilimu

PREDGOVOR

Ukupno znanje o makroskopskom elektricitetu i magnetizmu možemo sabrati u samo nekoliko jednadžbi i definicija. Elektrostatika se temelji na Coulombovu (1785), magnetostatika na Biot-Savartovu (1820), a elektromagnetizam na Faradayevu zakonu (1831). Analiza električnih krugova temelji se na Ohmovu (1826) i Kirchhoffovim zakonima (1847). Svi su oni sadržani u Maxwellovim jednadžbama (1862). Radi potpunosti njima dodajemo još jednadžbu za Lorentzovu silu kojom elektromagnetsko polje djeluje na naboj u gibanju i tri empirijski određene relacije građe. Te relacije sadrže dinamički odgovor mnoštva atoma materije na interakciju s poljem za makroskopsko približenje tvari. Pristup zadacima u elektrotehnici uglavnom je deduktivan, sve slijedi iz Maxwellovih jednadžbi. Međutim, iznenađujuća je činjenica da se cjelokupna elektromagnetska teorija, uz pomoć specijalne teorije relativnosti, može razviti iz samo jednog eksperimentalnog postulata temeljenog na Coulombovom zakonu. Rezultati u magnetizmu i Biot-Savartov zakon posljedica su toga postulata, a Lorentzov zakon sile iskazuje se kao relativistička transformacija Coulombovog zakona. Iz Lorentzovog zakona sile lako je izvesti Faradayev zakon indukcije i Maxwellove jednadžbe kao dodatne posljedice. Takvu mogućnost pristupa elektromagnetizmu pokazao je 1912. godine L. Page, profesor na sveučilištu Yale. Ograničenje da je klasična elektromagnetska teorija utemeljena na makroskopskom pristupu elektromagnetizmu dopušta da zanemarimo granularnu strukturu materije i naboja. To omogućava veliko pojednostavljenje teorije. I dok se ograničenja koja se postavljaju na klasičnu Newtonovu mehaniku odnose na veličinu brzine gibanja, udaljenosti i veličinu masa, za sve zakone klasične Maxwellove elektromagnetske teorije razumne granice se postavljaju u drugom smjeru. Granice za makroskopski pristup elektromagnetizmu određuju dimenzije i naboj atoma te frekvencije iznad mikrovalnih.

Daljnji razvoj elektromagnetske teorije koji obuhvaća i relativističke učinke učinili su H. A. Lorentz (1853 – 1928), H. Minkowski (1864 – 1909) i A. Sommerfeld (1868 – 1951). Svojstva elektromagnetskih valova u odnosu na njihovu interakciju s materijom bitno ovise o njihovoj valnoj duljini, tj. frekvenciji. Opis interakcije zračenja i materije zahtijeva kvantnu modifikaciju teorije elektromagnetskih valova. Svjetlost se može predstaviti tijekom svjetlosnih kvanta, čija gibanja su statistički određena gibanjem udruženog klasičnog elektromagnetskog vala. Zanemarujući kvante dolazimo u područje klasične elektromagnetske teorije koja je točna unutar svojih ograničenja.

Atomizam elektriciteta bio je kao sastavni dio uključen u Faradayeve eksperimente o elektrolizi (1833). Godine 1881. G. J. Stoney je izložio atomsku teoriju elektriciteta, a 1891. upotrijebio je riječ elektron kao naziv "prirodne jedinice elektriciteta". H. A.

Lorentz je 1895. postavio teoriju elektromagnetskih i optičkih pojava, koja se s jedne strane oslanja na Maxwellovu teoriju, a s druge strane na predstavu o postojanju elementarnih električnih naboja povezanih s česticama materije. Ta je teorija nakon otkrića elektrona nazvana elektronskom teorijom. J. J. Thomson je 1897. eksperimentalno otkrio elektron i utvrdio omjer njegovog naboja prema masi. Godine 1924. započeo je slijed novih razvoja u dinamici atomskih fenomena poznatih kao kvantna mehanika, kvantna dinamika ili valna mehanika. Kvantna teorija valnih polja spaja u jedinstvenu cjelinu korpuskularna i valna svojstva materije sa specijalnom teorijom relativnosti, koju je 1905. godine utemeljio Albert Einstein. Kvantna teorija je područje fizike, koje zadire najdublje u osnovne zakone prirode. Te nove ideje razvili su L.V.P. de Broglie (1892 – 1981), E. Schrödinger (1887 – 1961), W. Heisenberg (1901 – 1975), P.A.M. Dirac (1902 – 1984) i drugi. Oni su formulirali drugačiju sliku atomske strukture i sugerirali da elektron može poprimiti svojstva vala isto tako kao i čestice.

Predmet ove knjige je elektromagnetska teorija koja obuhvaća elektromagnetska polja i valove, u obliku koji je prilagođen za primjene u tehničkim zadaćama i suvremenim istraživanjima. Napisana je s namjerom da znanstvenicima i inženjerima služi kao poticaj, a studentima kao udžbenik i izvor znanja u studiju elektrotehnike. Kao udžbenik namijenjena je za naprednije kolegije o elektromagnetskim poljima i valovima u diplomskom i poslijediplomskom studiju elektrotehnike na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu. Ti kolegiji jesu: Teorijska elektrotehnika, Teorija elektromagnetskih polja, Numerički postupci u proračunu polja, Analiza primjenom računala u elektromagnetskoj teoriji i Primjena metode konačnih elemenata. Tekst se temelji na predavanjima koja su autori održavali na tim kolegijima od 1966, odnosno 1991. godine.

Elektromagnetizam je temeljni subjekt s mnoštvom različitih primjena. Kolegiji o elektromagnetizmu su neupitno među najvažnijim u studiju elektrotehnike. Njihova svojstvena složenost je uvjetovala potrebu za sofisticiranim matematičkim postupcima. Zato pretpostavljamo da je čitatelj studirao vektorsku analizu, kompleksnu varijablu, diferencijalne i integralne jednadžbe, matričnu algebru i numerički račun, te da ima osnovna znanja barem o statičkim električnim i magnetskim poljima.

U knjizi nismo slijedili povijesni tijek, nego smo odabrali logički redoslijed izlaganja gradiva. U prvom poglavlju započinjemo s Maxwellovim jednadžbama kao postulata na kojima se temelji cijela klasična elektromagnetska teorija. Potom smo razvili teoriju elektromagnetskih polja i valova na izrazito makroskopskoj razini, uvjereni da se za tehničke svrhe jednostavnost i jasnoća u udžbeniku postižu postavljanjem teorije na makroskopske osnove. Na kraju u devetom i desetom poglavlju iznijeli smo osnove suvremenog numeričkog izračunavanja elektromagnetskih polja. Opisali smo temeljne numeričke postupke za proračun statičkih i vremenski promjenljivih polja i valova pomoću matematičkih modela s diferencijalnim jednadžbama (metode konačnih elemenata) i pomoću modela s integralnim jednadžbama (momentne metode).

Treba napomenuti da bi ova knjiga bila nepotpuna bez oslanjanja na dva monumentalna djela: *Electromagnetic Theory*, J.A. Strattona i *Classical Electrodynamics*, J.D. Jacksona, koja su nam predstavljala uzore. U pripremi knjige koristili smo mnoge

izvore: monografije, udžbenike, znanstvene članke, referate sa simpozija, rasprave i proračune. Osobno iskustvo i mnogi naši radovi tijekom niza godina imali su značajnog utjecaja na tekst. Vjerojatno je naše dugogodišnje djelovanje na Elektrotehničkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu najviše utjecalo na nastanak ovog udžbenika. Ne možemo posebno ne izdvojiti utjecaj izvanrednih znanstvenika i profesora Josipa Lončara, Tome Bosanca, Vatroslava Lopašića, Viktora Pintera, Davorina Bazjanca, Danila Blanuše, Antona Dolenca, Radenka Wolfa, Hrvoja Požara, Božidara Stefaninija, Tihomila Jelakovića, Miroslava Plohla, Vladimira Muljevića, Vladimira Matkovića, Zlatka Smrkića i Vojislava Bege.

Slike i proračuni u knjizi izrađeni su pomoću programskog sustava *Mathematica* tvrtke Wolfram Research Inc.

Želimo izraziti našu duboku zahvalnost prof.dr.sc. Davoru Butkoviću s Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, prof.dr.sc. Nikoli Cindri s Instituta "Ruđer Bošković" u Zagrebu i prof.dr.sc. Radenku Wolfu s Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu za trud koji su uložili u pomno čitanje i recenziju rukopisa ovog udžbenika. Njihove opaske i napuci pomogli su nam da otklonimo nejasnoće koje bi se mogle pojaviti u knjizi.

Zahvaljujemo se prof.dr.sc. Hrvoju Babiću s Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu na čitanju rukopisa knjige.

Zahvaljujemo dr.sc. Šandoru Dembitzu na strojnoj provjeri teksta programom HASCHECK.

Umjetnica Jana Žiljak dizajnirala je vrlo uspješno ovitke knjiga pa joj se srdačno zahvaljujemo.

Posebno zahvaljujemo dr.sc. Želimiru Matutinoviću na stalnoj brizi i višegodišnjoj podršci tijekom pisanja udžbenika. Na kraju koristimo priliku da zahvalimo suradnicima na katedri Teorijske elektrotehnike u Zavodu za Osnove elektrotehnike i električka mjerenja Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu na pomoći pri pisanju knjige.

U Zagrebu, svibanj 1996.

Zijad Haznadar
Željko Štih

SADRŽAJ

SVEZAK 1.

1. ELEKTROMAGNETSKO POLJE	1
1.1. PREDSTAVLJANJE ELEKTROMAGNETSKIH POLJA	2
1.1.1. Definicije polja E i B	2
1.2. IZVORI POLJA: NABOJI I STRUJE	5
1.2.1. Mikroskopska i makroskopska teorija	6
1.2.2. Gustoće naboja i struje	7
1.2.3. Jednadžba kontinuiteta	9
1.2.4. Singularne gustoće izvora	10
1.2.4.1. Gustoća plošnog naboja i gustoća plošne struje	10
1.2.4.2. Gustoće linijskog naboja i linijske struje	14
1.2.4.3. Točkasti izvori	14
1.2.5. Diskontinuiteti u polju	15
1.2.5.1. Diskontinuiteti u polju zbog plošne gustoće skalarnog izvora	15
1.2.5.2. Diskontinuitet u polju zbog plošne gustoće vektorskog izvora	17
1.3. MAXWELLOVE JEDNADŽBE U VAKUUMU	18
1.3.1. Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku	23
1.3.2. Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku	24
1.4. ELEKTROMAGNETSKA POLJA U MATERIJALU	26
1.4. 1. Makroskopski model vodljivog materijala	28
1.4. 2. Gustoća provodne struje u materijalu. Ohmov zakon	28
1.4. 3. Vodič u električnom polju	30
1.4. 4. Polarizacija materijala. Vektor polarizacije P	34
1.4. 5. Dielektrik u električnom polju. Polarizirani naboj i struja	36
1.4. 6. Magnetiziranje materijala. Vektor magnetiziranja M	39
1.4. 7. Model amperske struje u magnetskom materijalu	42
1.4. 8. Model magnetskog naboja i struje	45
1.4. 9. Vektori polja D i H . Električni i magnetski tijekovi	47
1.4.10. Materijali i relacije građe	53
1.4.10.1. Vodiči	54
1.4.10.2. Permanentni magneti	55
1.4.10.3. Izolatori	57

1.4.10.4. Magnetski materijali	59
1.4.10.5. Histereza	59
1.4.10.6. Feromagnetski materijali	61
1.5. MAXWELLOVE JEDNADŽBE ZA POLJA U MATERIJALU	63
1.5.1. Maxwelllove jednadžbe za model s amperskom strujom	65
1.5.1.1. Jednadžbe	65
1.5.1.2. Uvjeti na granici	66
1.5.2. Maxwelllove jednadžbe za model s magnetskim nabojem	69
1.5.2.1. Jednadžbe	69
1.5.2.2. Uvjeti na granici	70
1.5.3. Maxwelllove jednadžbe za vektore polja E , B , D i H	71
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 1.	80
2. ELEKTROMAGNETSKI POTENCIJALI	81
2.1. VEKTORSKE I SKALARNE POTENCIJALNE FUNKCIJE	81
2.1.1. Potencijali i antipotencijali u dielektriku bez izvora	81
2.1.1.1. Vektorski i skalarni potencijali	82
2.1.1.2. Svojstva potencijala	83
2.1.1.3. Valne jednadžbe	83
2.1.1.4. Antipotencijali	84
2.1.1.5. Opće rješenje	85
2.1.2. Potencijali u vodljivom materijalu bez izvora	86
2.1.3. Potencijali i antipotencijali zadane raspodjele neovisnih izvora	88
2.1.3.1. Vodljivi materijal	88
2.1.3.2. Nevodljivi materijal	89
2.1.3.3. Statički naboji i struje	89
2.1.3.4. Magnetski naboji i struje	90
2.2. BAŽDARSKE TRANSFORMACIJE	91
2.2.1. Lorentzovo baždarenje	92
2.2.2. Coulombovo baždarenje	93
2.2.2.1. Polja bez izvora	93
2.2.2.2. Nevodljivi materijal	93
2.2.2.3. Vodljivi materijal	94
2.2.2.4. Polje s neovisnim izvorima	95
2.3. HERTZOVI POTENCIJALI	97
2.4. INTEGRALNO PREDSTAVLJANJE	100
2.4.1. Skalarni potencijal točkastog naboja	101
2.4.2. Retardirani i avanzirani potencijali. Greenove funkcije neograničenog prostora	103
2.4.2.1. Retardirani potencijal jediničnog impulsa u neograničenom prostoru	103
2.4.2.2. Greenove funkcije neograničenog prostora	107

2.4.2.3. Potencijali vremenski ovisne raspodjele prostornog naboja u neograničenom prostoru	109
2.4.3. Retardirani potencijali u neograničenom prostoru	112
2.4.4. Kirchhoffovo rješenje valne jednadžbe u ograničenom prostoru . . .	114
2.4.5. Greenova funkcija za valnu jednadžbu u ograničenom prostoru	118
2.5. VALNE JEDNADŽBE I INTEGRALI POTENCIJALA I POLJA	121
2.5.1. Valne jednadžbe i integrali potencijala	121
2.5.2. Valne jednadžbe i integrali polja	124
2.5.3. Nadomjesni izvori i valne jednadžbe potencijala	126
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 2.	132
3. ENERGIJA I SILE U ELEKTROMAGNETSKOM POLJU	133
3.1. DJELOVANJE ELEKTROMAGNETSKOG POLJA NA NABOJE U GIBANJU	134
3.1.1. Sile na naboje u gibanju	134
3.1.2. Energija i snaga predana nabojima u gibanju	136
3.2. ELEKTROMAGNETSKA ENERGIJA	138
3.2.1. Očuvanje elektromagnetske energije. Poyntingov teorem	139
3.2.1.1. Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku	139
3.2.1.2. Poyntingov teorem u integralnom obliku	141
3.2.1.3. Očuvanje elektromagnetske energije u vakuumu	141
3.2.2. Pohranjena elektromagnetska energija u vakuumu	144
3.2.3. Tijek elektromagnetske energije. Poyntingov vektor	146
3.3. MATERIJAL U ELEKTROMAGNETSKOM POLJU	148
3.3.1. Elektromagnetska energija apsorbirana u materijalu	149
3.3.2. Poyntingov teorem u materijalu	151
3.3.2.1. Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku	151
3.3.2.2. Poyntingov teorem u integralnom obliku	152
3.3.3. Energija polarizacije i električna energija	152
3.3.3.1. Gustoća energije polarizacije	153
3.3.3.2. Gustoća električne energije	155
3.3.3.3. Ukupna električna energija	156
3.3.4. Energija magnetiziranja i magnetska energija	157
3.3.4.1. Gustoća energije magnetiziranja	157
3.3.4.2. Gustoća magnetske energije	158
3.3.4.3. Ukupna magnetska energija	158
3.3.5. Poyntingov teorem i električna i magnetska energija u materijalima .	159
3.3.6. Tijek snage u stacionarnim sustavima i gubici	159
3.4. ELEKTROMAGNETSKA KOLIČINA GIBANJA	161
3.5. PROSTORNE SILE I PLOŠNA NAPREZANJA	167
3.5.1. Plošna naprezanja u praznom prostoru	168
3.5.1.1. Maxwellov tenzor naprezanja	172
3.5.1.2. Vektor elektromagnetskog naprezanja	174

3.5.2. Sile i plošna naprezanja u materijalima	179
3.5.2.1. Prostorne sile u dielektriku u statičkom električnom polju	181
3.5.2.2. Prostorne sile u materijalu u statičkom magnetskom polju	182
3.5.2.3. Prostorne sile u materijalu u elektromagnetskom polju	183
3.5.3. Plošna naprezanja u statičkim poljima na granici dva materijala . . .	184
LITERATURA UZ POGLAVLJE 3.	190
4. STATIČKO ELEKTRIČNO POLJE	191
4.1. JEDNADŽBE STATIČKOG ELEKTRIČNOG POLJA	191
4.1.1. Skalarni električni potencijal	192
4.1.2. Uvjeti na granici	194
4.2. SLIKA STATIČKOG ELEKTRIČNOG POLJA	195
4.3. ENERGIJA POHRANJENA U STATIČKOM ELEKTRIČNOM POLJU	198
4.3.1. Određivanje sila u statičkom električnom polju pomoću energije . . .	200
4.4. KAPACITET	201
4.4.1. Kapacitet kondenzatora	202
4.4.2. Sustav vodiča i parcijalni kapaciteti	206
4.5. RJEŠAVANJE STATIČKIH ELEKTRIČNIH POLJA	211
4.5.1. Superpozicija rješenja Poissonove jednačbe	211
4.5.2. Jedinstvenost rješenja Poissonove i Laplaceove jednačbe	212
4.5.3. Integral Poissonove jednačbe i Greenove funkcije	214
4.6. RJEŠAVANJE LAPLACEOVE JEDNAČBE SEPARACIJOM VARIJABLI	216
4.6.1. Pravocrtni koordinatni sustav	216
4.6.2. Cilindrični koordinatni sustav	220
4.6.3. Sferni koordinatni sustav	224
4.7. ZADANE RASPODJELE NABOJA U NEOGRANIČENOM PROSTORU	228
4.7.1. Skupina točkastih naboja	229
4.7.2. Linijski naboji	235
4.7.3. Plošni naboji	240
4.7.4. Volumni naboji i razvoj u multipole	243
4.8. RASPODJELA NABOJA U OGRANIČENOM PROSTORU I ODSLIKAVANJE	248
4.8.1. Greenove funkcije ravnih metalnih granica	248
4.8.1.1. Točkasti naboj ispred vodljive ravnine	248
4.8.1.2. Prostorni naboj ispred vodljive ravnine	250
4.8.1.3. Točkasti naboj u vodljivom kutu	250
4.8.1.4. Linijski naboj ispred vodljive ravnine	252
4.8.2. Greenove funkcije ravne dielektričke granice	255
4.8.2.1. Točkasti naboj ispred ravne granice dvaju dielektrika	255
4.8.3. Greenove funkcije cilindričnih granica	259

4.8.3.1. Vodljiva cilindrična granica	260
4.8.3.2. Dielektrička cilindrična granica	263
4.8.4. Greenova funkcija vodljive kuglaste granice	266
4.9. KONFORMNO PRESLIKAVANJE	269
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 4.	276
5. STATIČKO STRUJNO POLJE U VODIČIMA	277
5.1. POLJE NABOJA U JEDNOLIKOM GIBANJU	277
5.2. JEDNADŽBE STRUJNOG POLJA I ANALOGIJE POLJA	278
5.3. RJEŠAVANJE STRUJNIH POLJA ODSLIKAVANJEM	281
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 5.	284
6. STATIČKO MAGNETSKO POLJE	285
6.1. JEDNADŽBE STATIČKOG MAGNETSKOG POLJA	285
6.1.1. Uvjeti na granici	286
6.2. POTENCIJALI U STATIČKOM MAGNETSKOM POLJU	287
6.2.1. Vektorski magnetski potencijal	287
6.2.2. Antipotencijal	290
6.3. SLIKA STATIČKOG MAGNETSKOG POLJA	291
6.4. ENERGIJA POHRANJENA U MAGNETSKOM POLJU	293
6.4.1. Određivanje sila u statičkom magnetskom polju pomoću energije	295
6.5. INDUKTIVITETI	296
6.5.1. Međuinduktivitet	299
6.5.2. Induktiviteti sustava strujnih petlji	303
6.6. MAGNETSKI KRUGOVI	304
6.6.1. Magnetski krug permanentnih magneta	307
6.7. MAGNETSKO POLJE U PROSTORU BEZ STRUJA	309
6.8. POLJE ZADANIH STRUJA U NEOGRANIČENOM PROSTORU	317
6.8.1. Polje strujnica u neograničenom prostoru	318
6.8.1.1. Magnetski dipol	322
6.8.2. Polje plošne struje	326
6.8.3. Polje volumnih struja i razvoj u multipole	329
6.9. ZADANE STRUJE U OGRANIČENOM PROSTORU I ODSLIKAVANJE	334
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 6.	336
7. KVAZISTATIČKO ELEKTROMAGNETSKO POLJE	337
7.1. JEDNADŽBE KVAZISTATIČKOG POLJA	337
7.1.1. Uvjet kvazistatičnosti elektromagnetskog polja	340
7.2. JEDNADŽBE POLJA U FAZORSKOJ DOMENI I KVAZISTATIČNOST SINUSNO PROMJENJIVIH POLJA	341
7.2.1. Vremenski sinusno promjenjiva polja i fazorska notacija	341
7.2.2. Fourierova transformacija i fazorska notacija	342

7.2.3. Elektromagnetski potencijali u fazorskoj domeni i uvjet kvazistatičnosti polja	344
7.3. ENERGIJA U KVAZISTATIČKIM POLJIMA	348
7.3.1. Energija i snaga u sinusno promjenjivim poljima	349
7.4. RJEŠAVANJE KVAZISTATIČKOG POLJA U VODIČIMA	351
7.5. STRUJNE PETLJE U KVAZISTATIČKOM POLJU	377
7.5.1. Sustav mirnih strujnih petlji u kvazistatičkom polju	378
7.5.2. Gibanje strujne petlje u kvazistatičkom polju i elektromagnetska indukcija	382
7.5.3. Elektromehanička pretvorba energije	385
7.6. ELEKTROMAGNETSKA POLJA I ELEKTRIČNI KRUGOVI	389
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 7.	396
KAZALO	

SVEZAK 2.

8. ELEKTROMAGNETSKI VALOVI	397
8.1. VALNE JEDNADŽBE POLJA U NEOGRANIČENOM PROSTORU BEZ IZVORA	398
8.1.1. Valne jednađbe	399
8.1.2. Separacija varijabli valne jednađbe	401
8.2. RAVNI VAL U NEOGRANIČENOM PROSTORU	404
8.2.1. Separacija Helmholtzove jednađbe	404
8.2.2. Jednađbe ravnog vala	406
8.2.3. Ravni valovi sinusni u vremenu	412
8.2.4. Ravni valovi sinusni u prostoru	419
8.2.5. Osnovne značajke ravnih sinusnih valova	421
8.2.5.1. Valna impedancija	421
8.2.5.2. Tijek energije	423
8.2.5.3. Polarizacija	424
8.3. PROSTIRANJE RAVNIH VALOVA	426
8.3.1. Valovi u dielektriku	427
8.3.1.1. Putujući valovi	429
8.3.1.2. Stojni valovi	436
8.3.2. Valovi u vodljivom materijalu s gubicima	440
8.3.2.1. Kompleksne gradivne značajke	445
8.3.2.2. Fazorske jednađbe polja	450
8.3.3. Podjela materijala na izolatore i vodiče	452
8.3.3.1. Dobri izolatori	454
8.3.3.2. Dobri vodiči	457
8.3.4. Površinski učinak	461
8.4. NESINUSNI VALOVI	469

8.4.1. Opće rješenje jednodimenzionalne valne jednačbe u dielektriku . . .	471
8.4.2. Opće rješenje jednodimenzionalne valne jednačbe u materijalu s gubicima	473
8.4.2.1. Zadana raspodjela polja u vremenu	473
8.4.2.2. Zadana raspodjela polja u prostoru	475
8.5. DISPERZIJA	477
8.5.1. Disperzija u dielektricima; klasični model za $\hat{\epsilon}(\omega)$	478
8.5.1.1. Normalna i anomalna disperzija	481
8.5.2. Disperzija u kovinama	486
8.5.3. Disperzija u ioniziranim plinovima	488
8.5.4. Grupna brzina signala	491
8.6. PROSTIRANJE RAVNIH SINUSNIH VALOVA U POLUOGRANIČENIM PROSTORIMA	494
8.6.1. Odbijanje i lom na ravnoj granici	495
8.6.1.1. Zakoni odbijanja i loma	496
8.6.1.2. Fresnelove jednačbe i utjecaj polarizacije	498
8.6.2. Granica između dva dielektrika	504
8.6.2.1. Okomit nailazak vala na granicu	511
8.6.2.2. Potpuna polarizacija vala na granici	514
8.6.2.3. Totalna refleksija	514
8.6.3. Prolaz vala u materijal s gubicima	522
8.6.3.1. Lom vala u dobrom vodiču	527
8.6.4. Odbijanje valova od vodljive površine	532
8.6.4.1. Površinski valovi	537
8.6.5. Okomit nailazak vala na više dielektričkih slojeva	541
8.7. PROSTIRANJE VODENIH RAVNIH VALOVA	543
8.7.1. Prijenosne linije	545
8.7.1.1. Opterećena prienosna linija	555
8.7.2. Valovodi	558
8.7.2.1. Modovi u pravokutnom valovodu	566
8.7.3. Rezonatori	570
8.8. ZRAČENJE ELEKTROMAGNETSKIH VALOVA	575
8.8.1. Zračenje električnog dipola	575
8.8.2. Radijacijsko polje ravnog vodiča	581
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 8.	590
9. METODA KONAČNIH ELEMENATA	591
9.1. DEFINICIJA MKE	591
9.1.1. Iznalaženje integralnog oblika i njegovo približenje	593
9.1.1.1. Funkcional kao integralni oblik	593
9.1.1.2. Metoda težinskih ostataka	595
9.2. DVODIMENZIONALNA STATIČKA POLJA	597
9.2.1 Integralni oblik ekvivalentan Poissonovoj jednačbi	597

9.2.2. Primjena MKE na integralni oblik ekvivalentan Poissonovoj jednadžbi	599
9.2.3. Približenje geometrije domene zadaće	600
9.2.3.1. Organizacija podataka o podjeli na elemente	605
9.2.4. Približenje funkcije na elementu	607
9.2.5. Integralni doprinosi linearnih trokutnih elemenata pri rješavanju Poissonove jednadžbe	610
9.2.6. Formiranje sustava jednadžbi	612
9.2.6.1. Algoritam za formiranje sustava	614
9.2.7. Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi u MKE	615
9.2.7.1. Triangularizacija	616
9.2.7.2. Povratna supstitucija	617
9.2.8. Organizacija podataka o sustavu jednadžbi	623
9.2.9. Proračun vektora jakosti električnog i magnetskog polja	628
9.2.9.1. Proračun vektora električnog polja E i D	629
9.2.9.2. Proračun vektora magnetskog polja B i H	630
9.2.10. Prikaz rezultata proračuna linijama konstantnog potencijala	631
9.2.10.1. Proračun ekvipotencijalnih linija	631
9.2.11. Primjer proračuna	634
9.3. NELINEARNE ZADAĆE	638
9.4. KVAZISTATIČKO POLJE	642
9.4.1. Sinusno promjenjiva polja	642
9.4.2. Nesinusna polja	645
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 9.	649
10. METODA MOMENATA	651
10.1. DEFINICIJA MOM	651
10.2. TRODIMENZIONALNA STATIČKA ELEKTRIČNA POLJA	653
10.2.1. Integralna formulacija zadaće	653
10.2.2. Primjena MOM	656
10.3. RASPRŠENJE ELEKTROMAGNETSKIH VALOVA	659
10.3.1. Integralni oblik jednadžbi	661
10.3.1.1. TM polje	661
10.3.1.2. TE polje	664
10.3.2. Rješenje zadaće raspršenja primjenom MOM	667
10.3.2.1. Raspršenje u TM polju	668
10.3.2.2. Raspršenje u TE polju	672
10.4. TANKOŽIČANE STRUKTURE	676
10.4.1. Nadomjesni izvori	676
10.4.2. Integralna formulacija zadaće raspršenja na tankoj žici	677
10.4.3. Modeli napajanja izvora zračenja	680
10.4.4. Rješenje Pocklingtonove jednadžbe primjenom MOM	682
10.4.4.1. Daleko radijacijsko polje	686

POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 10.	688
PRILOG A: MATEMATIČKI MODELI U ELEKTROMAGNETIZMU	689
A.1. Temeljni pojmovi	689
A.2. Operatorske jednačbe	691
A.3. Zadaci s rubnim vrijednostima	692
A.4. Diferencijalne jednačbe	693
A.5. Rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi	694
A.6. Rubni uvjeti	696
A.7. Svojstvene vrijednosti i funkcije	697
A.8. Helmholtzova jednačba i elementarne valne funkcije	698
PRILOG B: DIRACOVA δ FUNKCIJA	703
PRILOG C: VEKTORSKA ANALIZA	705
C.1. Relacije množenja	705
C.2. Diferencijalne relacije	706
C.3. Integralne relacije	708
PRILOG D: KOORDINATNI SUSTAVI	710
D.1. Pravocrtni koordinatni sustav	710
D.2. Cilindrični koordinatni sustav	711
D.3. Sferni koordinatni sustav	712
PRILOG E: BESSELOVA DIFERENCIJALNA JEDNAČBA	715
PRILOG F: RAZVOJ FUNKCIJA U REDOVE POTENCIJA	720
PRILOG G: ELIPTIČKI INTEGRALI	722
LITERATURA	725
KAZALO	731

1. ELEKTROMAGNETSKO POLJE

Osnovni zakoni elektromagnetske teorije utemeljeni su početkom XIX. stoljeća. Maxwell¹ ih je 1862. godine izrazio u obliku skladno povezanog skupa jednažbi.² Od tada se *Maxwellove jednažbe* upotrebljavaju za točno matematičko opisivanje makroskopskih elektromagnetskih pojava. Ove temeljne jednažbe klasične elektromagnetske teorije opisuju fizikalna svojstva elektromagnetskog polja i povezuju ih s nabojima i strujama, koji predstavljaju izvore.

Pristup teoriji elektromagnetskog polja u knjizi je više deduktivan nego povijesni.³ Započinje s predstavljanjem temeljnih postulata usredotočenih na Maxwellove jednažbe, koje u potpunosti sažimaju sve rezultate mnogogodišnjih eksperimentalnih opažanja i istraživanja elektromagnetskih pojava. Zatim se s tim postulatima, kao zakonima elektromagnetizma, izvode i opisuju matematička i fizikalna svojstva elektromagnetskih polja.

Prve studije elektromagnetske teorije započinju s razvojem pojma "djelovanja na daljinu", u kojem su sile koje djeluju na naboj ili strujni element smatrane izravnom posljedicom sila kojima svi ostali izvori djeluju na taj naboj ili element struje. Nasuprot tome, Maxwell je prihvatio Faradayeve⁴ ideje, koji je prvi uveo pojam električnog polja, koje postoji u svim točkama u mediju koji okružuje naboje kao izvore. Faraday je pojam polja uveo po analogiji s naprezanjima u elastičnom materijalu, a medij je nazivao eterom. Maxwell je kasnije uvođenjem pojma "struje pomaka" upotpunio i matematički formulirao jedinstvenu teoriju elektromagnetskih polja napisavši 1862. svoje klasične jednažbe.⁵

U ovom poglavlju definirat ćemo električno i magnetsko polje⁶ pomoću zakona za

¹ James Clerk Maxwell (1831 – 1879), engleski teorijski fizičar.

² Maxwellove jednažbe prvi su puta objavljene 1862. godine u Maxwellovom članku *On Physical Lines of Force*.

³ Podrobnije o povijesnom razvitku elektromagnetizma pogledati u R.S. Eliott, *Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1966. i K. Simonyi, *Kulturgeschichte der Physik*, Akademiai Kiado, Budapest, 1990.

⁴ Michael Faraday (1791 – 1867), engleski eksperimentalni fizičar.

⁵ Pogledati u J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1873.

⁶ Autori su odlučili upotrebljavati izraze "električno polje" i "magnetsko polje". Premda bi bilo logički dosljednije upotrijebiti izraz "električko polje", prihvatili smo u praksi ustaljeni naziv. Tamo gdje je to uobičajeno upotrebljavat ćemo pridjev "električni" (npr. za polje, naboj, struju ...). Takvu praksu preporučuje i specijalizirana literatura, na pr.: N. Cindro, *Fizika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1985. ; T. Cvitaš, N. Kallay, *Fizikalne veličine i jedinice*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

Lorentzovu⁷ silu, odvojeno od temeljnih postulata elektromagnetskog polja. Studij osnovnih zakona klasične teorije elektromagnetskih polja najprije ćemo ograničiti na prazan prostor. Zatim ćemo osnovne zakone polja u vakuumu prilagoditi za primjenu na polja u materijalu. Analizirat ćemo makroskopsko ponašanje elektromagnetskih polja u vodičima, dielektričkim i magnetskim materijalima. Postulirat ćemo da polarizirani i magnetizirani materijali utječu na zakone polja dodavanjem polariziranih i magnetiziranih naboja i struja k slobodnim nabojima i strujama već nazočnim u osnovnim zakonima.

1.1. PREDSTAVLJANJE ELEKTROMAGNETSKIH POLJA

Za naše potrebe *polje* možemo definirati kao skup vrijednosti pridruženih svakoj točki u danom području, koje određuju ponašanje neke veličine u njemu. Prema tome, ako je neka veličina pridružena svakoj točki u području, i ako su vremenske i prostorne promjene te veličine definirane zakonima izloženim u obliku funkcija koordinata prostora i vremena, smatra se da je polje pridruženo odabranom području.

Postoji više vrsta polja kao i više vrsta matematičkih ili fizikalnih veličina koje mogu biti predstavljene u točki. Općenito, nema matematičkih ograničenja broja vrsta polja ili broja dimenzija područja. U studiju klasičnog elektromagnetizma u ovoj knjizi proučavat ćemo skalarna i vektorska elektromagnetska polja u trodimenzionalnom euklidskom prostoru. Razmatrat ćemo statička i vremenski promjenjiva dinamička polja.

Vrlo je značajno da je elektromagnetsko polje određeno skupom fundamentalnih zakona fizike koji se u matematičkom obliku mogu izraziti pomoću diferencijalnih jednačini⁸ u trodimenzionalnom prostoru i u vremenu. Diferencijalne jednačine povezuju ponašanje polja u danoj točki s ostalim poljima i izvorima smještenim u istoj točki, neovisno o uzrocima smještenim posvuda drugdje. Otuda proizlazi da je ponašanje elektromagnetskog polja izravno ovisno o vrsti i značajkama materijala, koji se nalazi u promatranoj točki i u njezinom neposrednom okolišu. Posljedica toga je da se mogu analizirati opća svojstva različitih polja u ograničenim dijelovima prostora, bez zanimanja za stanje izvan odabranog područja. To je jedna od osnovnih značajki Faradayevog i Maxwellovog pristupa elektromagnetizmu.

1.1.1. Definicije polja E i B

Sile opažene u elektromagnetskim pokusima pripisujemo postojanju električnog naboja i njegovom gibanju. Raspodjelu naboja i njihovo gibanje u prostoru možemo

⁷ Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928), nizozemski teorijski fizičar.

⁸ U Prilogu A pogledati točku 3.

promatrati kao uzrok ili izvor, a opaženu silu kao posljedicu ili učinak. Postojanje naboja i njihovo gibanje tvore elektromagnetsko polje u prostoru. Postoji nekoliko zakona za sile koji opisuju fizikalna svojstva svakog elektromagnetskog sustava i njemu pridruženog elektromagnetskog polja.

U namjeri da izravno pristupimo studiju elektromagnetskih polja i njihovog ponašanja, pažljivo ćemo ponajprije definirati veličine polja. Zato studij ne započinjemo od *Coulombova*⁹ zakona za silu, kako je tekao povijesni razvoj, nego ćemo električno i magnetsko polje definirati pomoću zakona za *Lorentzovu silu* odvojeno od drugih postulata. Brojni eksperimenti s elektromagnetskim silama pokazuju slaganje s nekoliko temeljnih postulata:

1. Postojanje električnog naboja

Prema atomsko-elektronskoj teoriji elektriciteta¹⁰ postoje dvije vrste električnih naboja: *pozitivni* i *negativni*. Svi naboji u prirodi cjelobrojni su višekratnici naboja elektrona čija danas prihvaćena vrijednost iznosi¹¹ $q_e = (1.6021892 \pm 0.0000007) \cdot 10^{-19}$ kulona. Jedinica električnog naboja ili količine elektriciteta definirana je pomoću Coulombovog zakona i mjeri se u *kulonima* (C), što je jednako *ampersekundama* (As). U knjizi ćemo dosljedno upotrebljavati Međunarodni sustav jedinica, ili SI jedinice. Međunarodni sustav jedinica temelji se na sedam osnovnih jedinica: metar, kilogram, sekunda, amper, kelvin, kandela i mol. SI sustav u elektromagnetizmu, koji se naziva i MKSA-sustav, temelji se na 4 osnovne jedinice:¹²

metar (m) za duljinu,
kilogram (kg) za masu,
sekunda (s) za vrijeme,
amper (A) za jakost struje.

2. Očuvanje električnog naboja

U svakom izoliranom sustavu algebarska suma naboja je konstantna. Taj postulat uvodi električni naboj kao temeljnu fizikalnu veličinu u elektromagnetsku teoriju.

3. Zakon Lorentzove sile

Elektromagnetsku silu na ispitni naboj koji se nalazi u zadanoj točki u prostoru možemo izraziti pomoću veličina elektromagnetskog polja u istoj točki. Tako je ukupna sila $\mathbf{F}$ na točkasti naboj q u gibanju brzinom $\mathbf{v}$, izražena pomoću dva vektorska polja koja se nazivaju *jakost električnog polja* $\mathbf{E}$ i *magnetska indukcija* $\mathbf{B}$, dana izrazom

⁹ Charles Auguste de Coulomb (1736 – 1806), francuski fizičar.

¹⁰ Pogledati u N. Cindro, *Fizika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

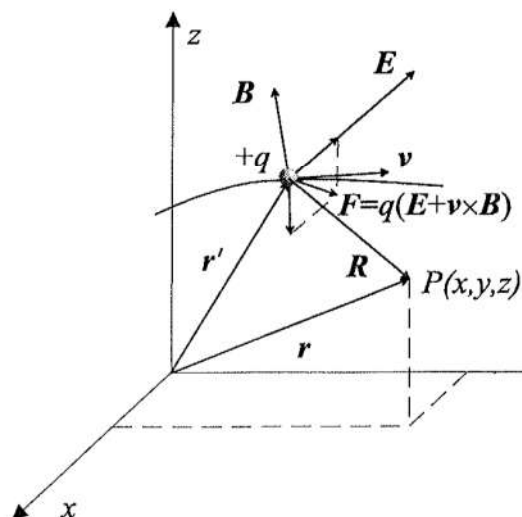
¹¹ Vrijednost prema E.R. Cohen, *Fundamental Physical Constants, Atomic Data and Nuclear Data Tables*, No.6, Vol. 18, 1976. U prirodi nije za sada otkrivena čestica s nabojem manjim od elementarnog, iako najnovija istraživanja upućuju na postojanje čestica još manjeg naboja, tzv. kvarkova.

¹² Definicije svih tih veličina pogledati u N. Cindro, *Fizika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (1.1.1)$$

Ta sila naziva se Lorentzova¹³ sila, a jednadžbu (1.1.1) koristit ćemo kao definicijsku jednadžbu za jakost električnog polja $\mathbf{E}$ i magnetsku indukciju $\mathbf{B}$.

Zadaća je da se vrlo pažljivo postave operacijske definicije veličina polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$. Riječ "operacijska" ovdje znači da definicija propisuje način mjerenja veličine i da osigurava jedinstvenu povezanost teorije i stvarnosti. Ako ne znamo izmjeriti neku veličinu, tada je naše razumijevanje te veličine u osnovi nedovoljno.



Slika 1.1.1. Gibanje naboja q smještenog u točku izvora u $\mathbf{r}'$ brzinom $\mathbf{v}$ u odnosu na promatrača u točki P u $\mathbf{r}$. Udaljenost naboja od promatrača je $|\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

Pozivajući se na to da su električno i magnetsko polje jedinstveno definirani pomoću jednadžbe (1.1.1) za Lorentzovu silu $\mathbf{F}$ koja djeluje na naboj q koji se giba brzinom $\mathbf{v}$ i koristeći taj izraz u nešto preuređenom obliku

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{F}}{q} \right] = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} , \quad (1.1.2)$$

definirat ćemo polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ pomoću njihovih učinaka.

Razmotrimo najprije operacijsku definiciju jakosti električnog polja $\mathbf{E}$. U promatrani prostor u kojem se želi ispitati polje električnih sila unijet ćemo ispitni naboj koji miruje ($\mathbf{v} = 0$) da bi se isključila magnetska komponenta sile. Poželjno je da naboj bude nabijena čestica vrlo malih dimenzija, a najbolje bi bilo kada bi bio točka,¹⁴ da bi se moglo mjeriti lokalno polje u zadanoj točki prostora. Štoviše, po pretpostavci veličina koja se mjeri je električno polje bez prisutnosti ispitnog naboja. Zato je bitno da ispitni

¹³ Pogledati u M. Javid, P. M. Brown; *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.; C.C. Johnson, *Field and Wave Electrodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1965.; L. M. Magid, *Electromagnetic Fields, Energy and Waves*, John Wiley and Sons, New York 1972.

¹⁴ Za točkasti ispitni naboj pretpostavljamo da ima neizmjereno mali naboj, tako da njegovo postojanje i gibanje ne mijenja polja obuhvaćena pokusom.

naboj q bude tako malen da njegovo unošenje ne promijeni polje koje se mjeri. S tog stajališta potrebno je $\mathbf{E}$ definirati kao

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{F}}{q} \right] ; \quad \mathbf{v} = 0 . \quad (1.1.3)$$

Jedinica jakosti električnog polja $\mathbf{E}$ je *njutn po kulonu* (N/C), ili *volt po metru* (V/m). Potrebno je napomenuti da je pri tom pokusu bilo pretpostavljeno da $\mathbf{E}$ nije funkcija vremena, ili pak da je poznata funkcija vremena.

Pošto je definirano i izmjereno polje $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, jednadžbe (1.1.1) i (1.1.2) mogu biti upotrijebljene za operacijsko definiranje polja $\mathbf{B}$ koje je također vektorska funkcija prostora i vremena. Postupak se sastoji u tome da se poznati naboj q giba zadanom brzinom $\mathbf{v}$ i da se ponovno mjeri sila na naboj. Pošto se odbije sila uzrokovana poljem $\mathbf{E}$, iz jednadžbe (1.1.2) lako se odredi polje $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Izravna mjerenja te vrste služe više za načelno definiranje $\mathbf{B}$ nego za praktičnu provedbu mjerenja. Za praksu je mnogo pogodnije mjerenje $\mathbf{B}$ putem sile na vodič koji se nalazi u magnetskom polju. Jedinica magnetske indukcije ili gustoće magnetskog tijeka $\mathbf{B}$ je *tesla* (T), što je ekvivalentno omjeru *veber po četvornom metru* (Wb/m²).

Treba istaknuti da te operacijske definicije veličina polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ zadovoljavajuće propisuju mjerni postupak koliko je to moguće, a u krajnjem slučaju pojmovno. U stvarnosti takva mjerenja vrlo su složena. Danas se u području frekvencija koje su značajne u tehnici, primjenjuju mjerni postupci koji su jednostavniji i izravno povezuju veličine polja s teorijom strujnih krugova i mreža.¹⁵

Zakon za Lorentzovu silu (1.1.1) opskrbio nas je s temeljnim definicijama o vektorima električnog i magnetskog polja. Jedna važna posljedica te definicijske jednadžbe jest činjenica da *svojstva prostora opisana vektorima $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ postoje bez obzira da li je unesen ili ne ispitni naboj q u taj prostor.*

Potrebno je još napomenuti da se u elementarnoj fizici polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ često definiraju putem udaljenih izvora koji ih uzrokuju (Coulombov i Ampèreov zakon).

1.2. IZVORI POLJA: NABOJI I STRUJE

U studiju polja potrebno je držati se činjenice da su polja izgrađena izvorima koji mogu biti smješteni unutar ili izvan područja u kojem se polje promatra. Opredijelit ćemo se za *makroskopsku teoriju klasičnog elektromagnetizma*, uvodeći pojmove "glatkih" raspodjela naboja i struja u prostoru kao izvora elektromagnetskog polja.¹⁶ Obično

¹⁵ Pogledati W.L. Weeks, *Electromagnetic Theory for Engineers Applications*, John Wiley, New York, 1964.; V. Bego, *Mjerenja u elektrotehnici*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1966.

¹⁶ O kontinuiranim ili neprekinutim funkcijama pogledati D. Blanuša, *Viša matematika, I dio*, drugi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.

se smatra da su električni naboji i njihovo uređeno gibanje koje tvori struju primarni izvori polja, a budući je električni naboj uvijek udružen s materijalom, ispravno je uzimati nabijenu tvar (elektrone, jezgre atoma, ione itd.) kao primarne izvore elektromagnetskog polja.

1.2.1. Mikroskopska i makroskopska teorija

Kada analiziramo polja u prostoru koji sadrži materijal, obično u primijenjenoj elektrotehnici nismo zainteresirani za promjene elektromagnetskog polja u međuatomskom prostoru. Studiranje takvih polja u međuatomskim prostorima pripada u područje mikroskopske, odnosno *kvantne teorije polja*.¹⁷ Više smo zainteresirani za vremen-sko-prostorne srednje vrijednosti polja unutar vremenskih intervala i volumena, koji su vrlo maleni u usporedbi s našim mjernim uređajima, ali su veliki u atomskim mjerilima. Takav aproksimativni pristup referira se kao makroskopska teorija polja. *Makroskopska teorija polja omogućava približan pristup stvarnosti.*

U matematičkim izrazima u elektromagnetizmu često ćemo se susretati s volumnim integralima oblika $\int \rho dV$ i s vremenskim derivacijama $\partial \rho / \partial t$, gdje ρ označava gustoću izvora polja. Takve operacije su posljedica graničnih prijelaza

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_n (\rho_n \Delta V_n) = \int_V \rho dV \quad ; \quad V = \sum_n \Delta V_n, \quad (1.2.1a,b)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

U makroskopskom pristupu uzimat ćemo da su dV i dt vrlo male veličine koje su različite od nule. U namjeri da utvrdimo mjerila za volumen i vremenske razmake, poslužiti ćemo se vrlo pojednostavnjenom atomskom teorijom materije s planetarnim modelom atoma.¹⁸ Ako usvojimo da je srednji polumjer putanje elektrona reda 10^{-10} m, tada je srednji "volumen" atoma reda 10^{-30} m³. Pretpostavimo li da elementarni volumen dV iznosi 10^{-18} m³, što čini jedan kubni mikron, čak i tako sićušni element volumena jednak je 10^{12} volumena jednog atoma i može sadržavati milijune atoma tvari. *Zato rezultati makroskopske analize predstavljaju prosječnu vrijednost učinaka velikog broja atoma.* Sličan pristup treba primijeniti i u analizi ovisnosti rezultirajućih polja o njihovim izvorima. Usvojimo li za dt najmanju veličinu reda 10^{-12} s, dakle 1/1000 nanosekunde, možemo biti sigurni da će i u tako malom vremenskom intervalu elektron

¹⁷ Za detaljniji uvid u mikroskopski i makroskopski pristup elektromagnetskoj teoriji pogledati J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York, 1975.; L.D. Landau, E.M. Lifšic, *Elektrodinamika* *splošnih sred*, Gostehizdat, Moskva, 1957.

¹⁸ Planetarnu sliku atoma ne smijemo doslovno shvatiti. Elektronske staze samo su zorni prikaz mnogo složenije kvantnomehaničke stvarnosti. Pogledati N. Cindro, *Fizika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1985; V. Paar *Atomi, molekule, poluvodiči, supravodljivost*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

načiniti na tisuće obilazaka oko jezgre atoma. *Proizlazi da je makroskopsko polje srednja vrijednost vrlo brzih vremenskih promjena u prostoru.*

Nas općenito neće zanimati ponašanje pojedinih mikroskopskih čestica – teorija njihova gibanja pripada u kvantnu teoriju – nego ćemo biti zainteresirani isključivo za prosječne učinke, takve koje ćemo odrediti eksperimentalno u makroskopskim razmjerama. Naravno, nema oštre linije podjele između makroskopske i kvantne teorije. Konačna potvrda valjanosti može biti učinjena jedino dobivanjem rezultata makroskopske teorije koji će biti u skladu s eksperimentima.

1.2.2. Gustoće naboja i struje

Kao što smo rekli, u studiju makroskopske teorije elektromagnetizma upotrijebit ćemo pojmove kontinuiranih raspodjela naboja i struje. Općenito, za sve izvore koji se pojavljuju u stvarnosti pretpostavit ćemo da imaju neprekinutu raspodjelu u prostoru i da se mogu predstaviti neprekinutim funkcijama koordinata prostora i vremena.

Uvest ćemo pojam funkcije gustoće prostornog naboja ρ , ili jednostavno *gustoću naboja* ρ u točki P prostora. Nju ćemo definirati kao omjer ukupne količine naboja ΔQ u malom dijelu prostora oko točke P i volumena ΔV tog djelića prostora, uzimajući limes kada područje konvergira u točku P

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} . \quad (1.2.2)$$

Gustoća naboja mjeri se u *kulonima po prostornom metru* (C/m^3), što odgovara *amper-sekundi po prostornom metru*. *Gustoća naboja* $\rho(\mathbf{r}, t)$ *neprekinuta je funkcija koordinata prostora i vremena u makroskopskom pristupu.*

Radi zornosti navodimo podatak da je u kovinama gustoća slobodnih elektrona reda veličine 10^{29} elektrona po m^3 , što znači da se u elementarnoj kocki, sa stranicom duljine 1 mikron i volumena $10^{-18} m^3$, nalazi oko 100 milijardi slobodnih elektrona.

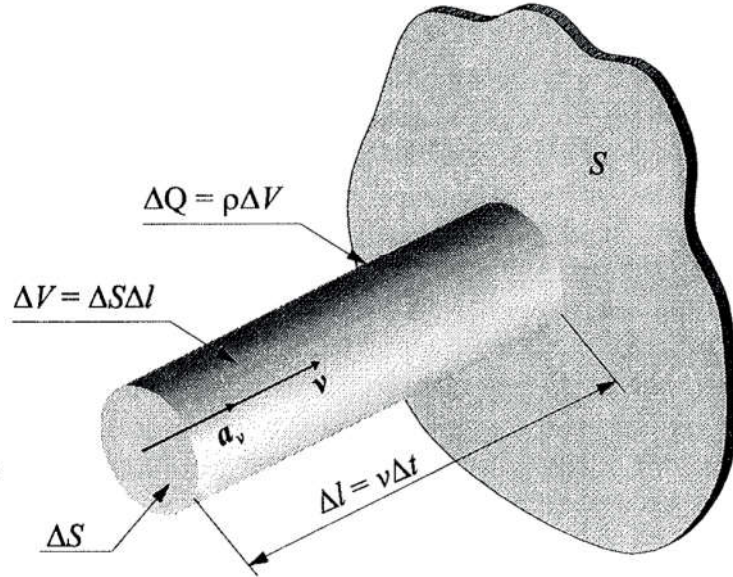
Struju I (tj. *jakost struje*) koja protječe kroz vodič, prikazanu na slici 1.2.1, definirat ćemo kao limes omjera količine naboja ΔQ koji proteče kroz plohu S ploštine ΔS tijekom vremena Δt i vremenskog intervala Δt kada se Δt približava k nuli, tj.

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} . \quad (1.2.3)$$

Jakost struje mjeri se u *amperima* (A), a jedan amper je ekvivalentan *kulonu po sekundi*. Predznak je dogovorno usvojen kao pozitivan za struju koja teče u smjeru gibanja pozitivnih naboja, ili suprotan ako teče u smjeru gibanja negativnih naboja. *Vektor gustoće struje* $\mathbf{J}$, ili struja kroz jedinicu površine, definiran je kao vektor u smjeru pozitivne struje kojem je veličina određena omjerom jakosti struje ΔI , koja protječe kroz element ploštine ΔS smješten okomito na smjer struje prema ploštini ΔS , uzimajući limes kada se ΔS približava k nuli, tj.

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_v \left[\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \right] = \mathbf{a}_v \frac{dI}{dS}, \quad (1.2.4)$$

gdje je $\mathbf{a}_v$ jedinični vektor u smjeru gibanja pozitivnog naboja kako je prikazano na slici 1.2.1.



Slika 1.2.1. Protjecanje struje kroz vodič

Mjerna jedinica za $|\mathbf{J}|$ je prema jednadžbi (1.2.4) *amper po četvornom metru* (A/m²). *Gustoća struje $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ je kontinuirana vektorska funkcija koordinata prostora i vremena u makroskopskoj teoriji.*

Na temelju *definicije struje kao uređenog gibanja naboja* može se očekivati da je gustoća struje izravno srazmjerna gustoći naboja. No nije uvijek tako; to je točno samo za jednu vrstu struja poznatih kao *konvekcijske struje*. Primjera ima mnogo, pa su struje u vakuumskoj cijevi ili u katodnoj cijevi primjeri konvekcijskih struja. Izravnu proporcionalnost između $\mathbf{J}$ i ρ za konvekcijske struje lako ćemo dokazati. Zadani naboj gustoće $\rho(\mathbf{r}, t)$ giba se prema slici 1.2.1. poznatom brzinom $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ okomito na elementarnu plohu ΔS , kroz koju protječe u vremenskom intervalu Δt količina naboja

$$\Delta Q = \rho \Delta V = \rho v \Delta t \Delta S, \quad (1.2.5)$$

gdje je $\Delta V = v \Delta t \Delta S$ volumen zauzet nabojem koji je protekao kroz ΔS u vremenu Δt . Ako je $\mathbf{v} = \mathbf{a}_v v$ vektor srednje brzine naboja iz jednadžbe (1.2.3) slijedi da struja kroz plohu ΔS iznosi $\Delta I = \rho v \Delta S$, a prema (1.2.4) gustoća konvekcijske struje jest

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_v \rho v = \rho \mathbf{v}. \quad (1.2.6)$$

U skladu s definicijom konvekcijskih struja, gibanje električnih naboja u tvari vodi nas do pojma *provodnih* ili *kondukcijskih struja*. To su struje koje rezultiraju iz strujanja elektrona, iona ili obje vrste čestica u različitim oblicima tvari, uključujući kovine, polu-

vodiče, elektrolitske otopine i plinovite plazme. Provodne ili kondukcijske struje razlikuju se od konvekcijskih struja po tome što je $\mathbf{J}$ neovisan o ukupnoj gustoći naboja ρ . U stvarnosti je utvrđeno da je gustoća naboja ρ jednaka nuli u slučaju stacionarnog tijeka istosmjernje struje (gustoće $\mathbf{J}$ različite od nule) kroz homogene vodiče. Utvrđeno je još da je prosječna brzina pokretnih naboja izravno proporcionalna polju $\mathbf{E}$ u vodiču, a kako je gustoća rezultirajuće provodne struje srazmjerna srednjoj brzini čestica, $\mathbf{J}$ je također izravno proporcionalno polju $\mathbf{E}$. Kao posljedica toga slijedi da se gustoća provodnih struja upravlja prema *Ohmovu zakonu*¹⁹

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} , \quad (1.2.7)$$

gdje κ označava *električnu provodnost materijala* u točki u kojoj mjerimo $\mathbf{J}$ i $\mathbf{E}$. Jedinica provodnosti je *simens po metru* (S/m).

Preostaje još da na kraju ovog odjeljka uvedemo integrale za izračunavanje jakosti struje i količine naboja. Polazeći od definicijskih relacija (1.2.3) i (1.2.4), može se struja $I(t)$ kroz plohu S izravno povezati s gustoćom struje $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ integralom

$$I(t) = \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS , \quad (1.2.8)$$

gdje je $\mathbf{n}$ jedinični vektor okomice na plohu S . Slično se količina naboja Q u zatvorenom prostoru volumena V , prema analogiji s relacijom (1.2.5) može izraziti kao

$$Q(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \, dV . \quad (1.2.9)$$

Napominjemo da treba uočiti bitnu razliku između diferencijalnih veličina gustoća $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ i $\rho(\mathbf{r}, t)$, koje su funkcije koordinata točke u prostoru (i vremena), i integralnih veličina iznosa struje i naboja $I(t)$ i $Q(t)$, koje su funkcije vremena, ali nisu funkcije koordinata prostora.

1.2.3. Jednadžba kontinuiteta

U svim fizikalnim pokusima opaženo je da je ukupni naboj uvijek očuvan,²⁰ pa stavak o njegovu očuvanju čini fundamentalni postulat teorijske fizike. On utvrđuje da je iznos tijeka naboja iz zatvorenog konačnog prostora jednak iznosu smanjenja naboja unutar toga prostora

$$\nabla(\rho \, v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (1.2.10)$$

¹⁹ Georg Simon Ohm (1789 – 1854), njemački fizičar.

²⁰ Pogledati članak 1.1.1. Definicije polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, stav 2. Očuvanje električnog naboja.

Prema analogiji s odgovarajućom jednačbom u hidrodinamici, parcijalna diferencijalna jednačba²¹ (1.2.10) naziva se *jednačba kontinuiteta*.

U stvarnosti je za bilo koju vrstu struja valjana jednačba kontinuiteta (1.2.10) izražena u obliku

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.2.11)$$

budući da je produkt $\rho \mathbf{v}$ prema jednačbi (1.2.6) gustoća konvekcijske struje $\mathbf{J}$.

1.2.4. Singularne gustoće izvora

Sva poznata fizikalna polja u prirodi uvijek su konačna i kontinuirana. Uzrokovana su izvorima čije su volumne gustoće također uvijek konačne. U približnoj makroskopskoj elektromagnetskoj teoriji često je, međutim, matematički pogodno realne volumne gustoće struja i naboja, kao izvore polja, idealizirati u oblike plošne ili linijske gustoće ili predstaviti kao izvore koncentrirane u točku. Takve idealizacije rezultiraju u beskonačnoj, tj. singularnoj volumnoj gustoći naboja i struja. Te nestvarne gustoće izvora proizvode diskontinuirana i u nekim slučajevima beskonačna (singularna) polja. Odgovarajuće nefizikalno ponašanje elektromagnetskog polja proizvedenog singularnim nabojima i strujama bit će analizirano kasnije u odjeljku o poljima u tvari, te kada se budu razmatrali granični uvjeti. U svakom slučaju pri prenošenju tako izračunatih polja iz makroskopske teorije u stvarnost to treba imati na umu i činiti to s potrebnim oprezom. Idealizacija realnih naboja i struja u *točkaste, linijske i plošne izvore* omogućava ne samo potrebnu matematičku jednostavnost, nego ona također daje povoda za uvođenje pogodnih fizikalnih pojmova koji opisuju i predstavljaju stvarna polja. Zbog tih ćemo razloga ovdje podrobno raspraviti prirodu takvih hipotetskih izvora, koje ćemo koristiti u okviru približnog makroskopskog pristupa elektromagnetskoj teoriji.

Započet ćemo s vjerojatno najviše upotrebljivanim pojmovima koji obuhvaćaju singularne izvore. To su gustoća plošnog naboja i njegovo gibanje koje tvori plošnu struju.

1.2.4.1. Gustoća plošnog naboja i gustoća plošne struje

Utvrđeno je da se diskontinuiteti u komponentama elektromagnetskog polja događaju na plohama na kojima su naboji i struje raspoređeni u tankom sloju, tj. u obliku

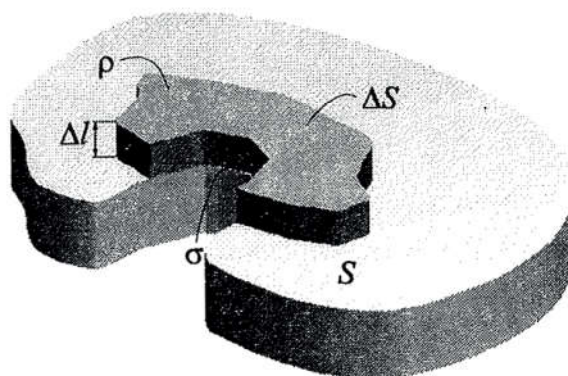
²¹ Opširnije o parcijalnim diferencijalnim jednačbama pogledati u: A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York, 1964.; I.N. Sneddon, *Elements of Partial Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1957.; R. Dennemeyer, *Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York, 1968.; D. Greenspan, *Lectures on the Numerical Solution of Linear, Singular, and Nonlinear Differential Equations*, Prentice-Hall, New York, 1968.; F.B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, New York, 1962.

plošnih naboja i plošnih struja čije gustoće definiramo na sljedeći način:

Plošni naboj definiran je kao naboj raspodijeljen u sloju debljine nula, pa se gustoća plošnog naboja σ na geometrijskoj plohi S definira kao

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS}, \quad (1.2.12)$$

gdje je ΔQ ukupan naboj na elementarnoj plohi ΔS . Mjerna jedinica za σ prema jednačbi (1.2.12) je *kulon po četvornom metru* (C/m^2).



Slika 1.2.2. Uz uvođenje pojma plošnog naboja

Zamislimo da se vrlo mali valjak volumena $\Delta V = \Delta S \Delta l$ (gdje je ΔS površina baze, a Δl visina valjka) nalazi na geometrijskoj plohi S (debljine nula) prema slici 1.2.2. Ako je gustoća naboja ρ poznata, u valjku se nalazi naboj čiji se iznos prema jednačbi (1.2.5) može izračunati kao $\Delta Q = \rho \Delta V = \rho \Delta S \Delta l$. Ako sada pretpostavimo da se visina valjka Δl smanjuje prema nuli, tj. da valjak volumena ΔV degenerira u plošni element ploštine ΔS , tada će naboj konačnog iznosa ΔQ u volumenu ΔV prijeći na plohu ploštine ΔS . Zbog toga mora gustoća prostornog naboja ρ unutar sloja debljine nula postati beskonačna, i mi kažemo da je ρ postao singularan na plohi, tj. da postoji povezanost

$$\sigma = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ \Delta l \rightarrow 0}} (\rho \Delta l). \quad (1.2.13)$$

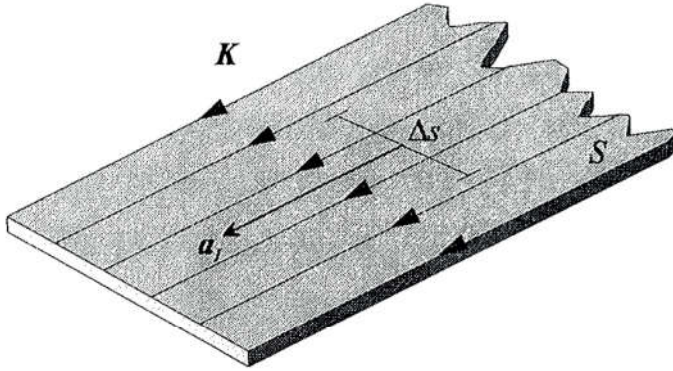
Ukupna količina naboja na plohi ploštine S računa se analogno jednačbi (1.2.9) prema relaciji

$$Q = \int_S \sigma dS. \quad (1.2.14)$$

Plošna struja definirana je kao struja koja teče duž plošnog sloja debljine nula, a gustoća plošne struje K definirana je kao

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[a_I \frac{\Delta I}{\Delta s} \right] = a_I \frac{dI}{ds}, \quad (1.2.15)$$

gdje je, prema slici 1.2.3, ΔI iznos struje koja teče duž plošnog sloja S debljine nula kroz element duljine Δs postavljen okomito na tijek struje ΔI , a $\mathbf{a}_l$ je jedinični vektor u smjeru tijeka struje. Mjerna jedinica za $|\mathbf{K}|$ je *amper po metru* (A/m).



Slika 1.2.3. Uz definiciju plošne struje

Analogno izrazu (1.2.6) gustoća plošne struje može se povezati s gustoćom plošnog naboja σ koji se duž plohe S giba brzinom $\mathbf{v} = \mathbf{a}_l v$ kao

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v} . \quad (1.2.16)$$

I ovdje opažamo da je odgovarajuća gustoća struje $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ beskonačna, tj. singularna na plohi S u dimenziji okomitoj na plohu, budući je gustoća naboja ρ na toj plohi singularna. Prema tome, gustoće $\mathbf{K}$ i $\mathbf{J}$ mogu se povezati izrazom

$$\mathbf{K} = \lim_{\substack{J \rightarrow \infty \\ \Delta l \rightarrow 0}} (J \Delta l) , \quad (1.2.17)$$

gdje je Δl debljina plošnog sloja S koja teži nuli.

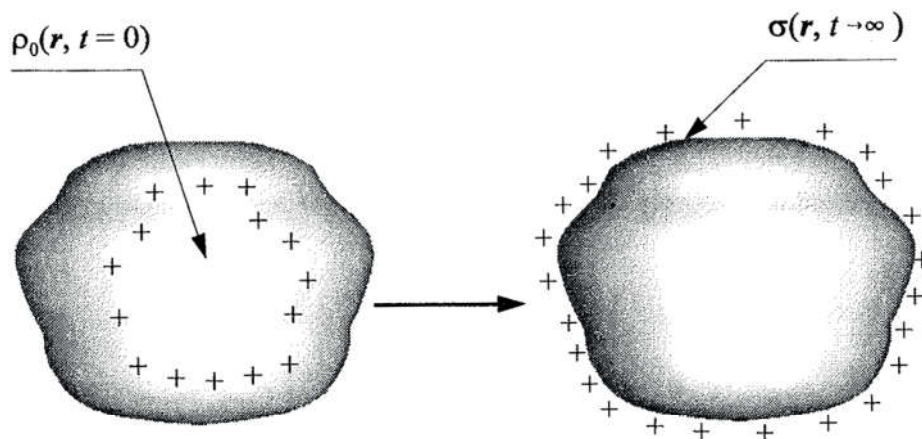
Plošne naboje u stvarnosti nalazimo na površinama vodiča. Unošenjem prostornog naboja gustoće ρ u vodič istovremeno se uspostavlja električno polje $\mathbf{E}$ i poteče provodna struja $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$, koja odvede prostorni naboj na vanjsku površinu vodiča. Pokazat ćemo,²² da ako se uspostavi početna proizvoljna prostorna raspodjela naboja gustoće $\rho_0(\mathbf{r}, t = 0)$ unutar izoliranog, linearnog, izotropnog, homogenog²³ i pasivnog vodiča (tj. vodiča u kojem je provodnost κ u izrazu $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$ pozitivna konstanta), tada gustoća naboja ρ opada eksponencijalno tijekom vremena i brzo postaje nula u svim točkama unutar vodiča. Budući da prema zakonu o očuvanju naboja ukupan naboj u vodiču mora biti sačuvan, to on mora ostati jednak ukupnom konačnom plošnom naboju raspoređenom po plohi S koja zatvara vodljivi volumen V , tj.

$$\int_V \rho_0 dV = \oint_S \sigma dS , \quad (1.2.18)$$

²² Pogledati članak 1.4.3.

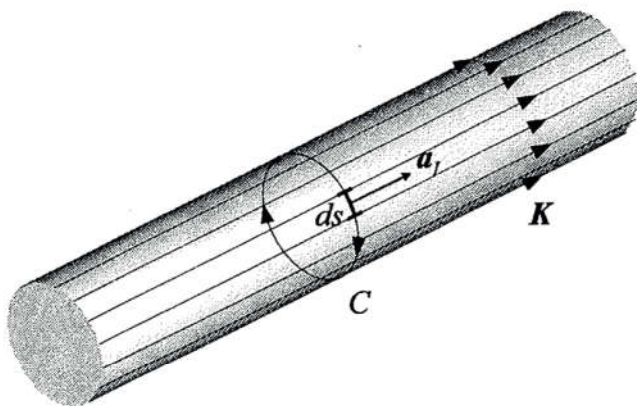
²³ Linearne, izotropne i homogene (LIH) materijale nazvat ćemo "jednostavni materijali".

gdje je σ konačna plošna gustoća naboja na S kako je prikazano na slici 1.2.4.



Slika 1.2.4. Prijenos naboja na površinu vodiča

Plošne struje poprimaju fizikalno značenje ako ih upotrijebimo da bismo približno nadomjestili tijek izmjenične struje u dobrim vodičima, posebno u slučaju površinskog učinka. U takvim slučajevima najveći dio struje teče uz površinu vodiča, posebno pri visokim frekvencijama. Pokazat ćemo²⁴ da u vodiču gustoća struje opada eksponencijalno s okomitom udaljenošću od njegove vanjske površine. Zato se gustoća plošne struje $\mathbf{K}$ često naziva i *strujni oblog*.



Slika 1.2.5. Idealni vodič protjecan plošnom strujom

Pogodno je dobre vodiče, kao što su kovine, približiti idealnim vodičima, tj. vodičima koji imaju beskonačnu provodnost. U idealnim vodičima ($\kappa = \infty$) pojam gustoće plošne struje $\mathbf{K}$ postaje egzakatan. Ukupna struja koja protječe takvim vodičem može se izraziti kao

$$I = \oint_C (\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_r) ds, \quad (1.2.19)$$

²⁴ Pogledati članak 8.3.4.

kako je to prikazano na slici 1.2.5.

1.2.4.2. Gustoće linijskog naboja i linijske struje

Zbog pojednostavnjenja analize često će u makroskopskoj teoriji biti pogodno promatrati električki nabijene vodiče ili vodiče protjecane strujom koji imaju infinitezimalni poprečni presjek. Gustoće naboja i struja u tim linijama (koje su konačne duljine, ali beskonačno malog poprečnog presjeka čija ploština teži nuli) su dvodimenzionalno singularne. Rezultirajuću konačnu gustoću *linijskog naboja u točki* $\mathbf{r}_l$ označit ćemo s $\lambda(\mathbf{r}_l)$, tako da bude

$$Q = \int \lambda(\mathbf{r}_l) dl, \quad (1.2.20)$$

gdje je jedinica za λ *kulon po metru* (C/m).

Ako se linijski naboj gustoće $\lambda(\mathbf{r}_l)$ giba duž crte brzinom $\mathbf{v}(\mathbf{r}_l)$, kažemo da to gibanje čini *linijsku struju*, ili *strujnu nit*, ili jednostavno *strujnicu* iznosa i , a smjera $\mathbf{a}_l$

$$i\mathbf{a}_l = \lambda(\mathbf{r}_l)\mathbf{v}(\mathbf{r}_l), \quad (1.2.21)$$

gdje je $\mathbf{a}_l$ jedinični vektor tangencijalan na liniju u točki $\mathbf{r}_l$. Mjerna jedinica je *amper* (A). S druge strane možemo promatrati linijsku struju kao limes prostorne raspodjele struje čiji poprečni presjek teži nuli i čija gustoća $\mathbf{J}$ postaje beskonačna. Element linije duljine dl i poprečnog presjeka dS protjecan je strujom $\mathbf{J} = Jd\mathbf{l}/dl$. Struja kroz poprečni presjek je $i = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$, gdje je $\mathbf{n}$ vektor okomice na poprečni presjek. Otuda slijedi da je $i d\mathbf{l} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) dS d\mathbf{l}$, a kako su $\mathbf{J}$ i $d\mathbf{l}$ kolinearni to možemo pisati $i d\mathbf{l} = (d\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} dS) \mathbf{J} = J dV$ pa vrijedi

$$J dV = i d\mathbf{l}. \quad (1.2.22)$$

Dakle, raspodjelu struje možemo idealizirati u strujnu nit uz zadovoljenje te ekvivalencije.

1.2.4.3. Točkasti izvori

Na velikim udaljenostima od prostorno raspoređenog naboja, čiji ukupni konačni iznos je $q \neq 0$, polje se može pripisati točkastom naboju q smještenom u središte raspodjele naboja $\mathbf{r}'$. Takva idealizacija rezultira u beskonačnoj, tj. singularnoj gustoći naboja u točki $\mathbf{r}'$, pa se pomoću *Diracove delta funkcije*²⁵ može izraziti kao

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.2.23)$$

a ukupan naboj u volumenu V koji sadrži i točku $\mathbf{r}'$ prema jednadžbi (1.2.9) jest

²⁵ Pogledati Prilog B. Simbol $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ prvi je upotrijebio Kirchhoff, ali ga je značajnije koristio tek Dirac. Delta funkcija nije stvarna funkcija nego distribucija ili poopćena funkcija.

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \int_V q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = q, \quad (1.2.24)$$

budući da je²⁶

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \begin{cases} f(\mathbf{r}') & ; \quad \mathbf{r}' \in V, \\ 0 & ; \quad \mathbf{r}' \notin V. \end{cases}$$

Izvore čije su gustoće predstavljene impulsima oblika $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ nazivamo diskretnim izvorima, singularnim izvorima, ili točkastim izvorima. Oni su matematički pogodni, i usprkos singularitetima udruženim s njima zapamtiti ćemo da predstavljaju konačne veličine smještene u prostoru različitom od nule ali vrlo malom. U elektromagnetizmu model točkastog naboja često se upotrebljava u makroskopskoj teoriji da bi se opisalo ponašanje čestica koje su malene u usporedbi s udaljenostima između njih.

1.2.5. Diskontinuiteti u polju

Kao što je već rečeno, nazočnost plošnog naboja i plošne struje na plohi upućuje na pretpostavku da se mogu očekivati diskontinuiteti (tj. nagli skokovi ili prekidi) u nekim od komponenti polja na plohi koja sadrži σ ili $\mathbf{K}$. Takvi nefizikalni diskontinuiteti u polju nastaju zbog pretpostavljenih nefizikalnih singulariteta u gustoćama izvora.

U ovom članku razmotrit ćemo opći problem diskontinuiteta u poljima koji nastaju zbog singularnih izvora. Zbog općenitosti promatrat ćemo polje $\mathbf{F}$ koje može biti bilo koji vektor polja. Singularnu gustoću vektorskog izvora polja označit ćemo s $\mathbf{K}$, a singularnu gustoću skalarnog izvora sa σ .

1.2.5.1. Diskontinuiteti u polju zbog plošne gustoće skalarnog izvora

Neka je prema slici 1.2.6. na plohi S gustoća skalarnog izvora ρ polja $\mathbf{F}$ singularna, tako da je $\rho dV = \sigma dS$. Ovdje je σ plošna gustoća konačnog iznosa definirana jednadžbom (1.2.13). Ploha S dijeli prostor u dva područja, koja ćemo označiti s 1 i 2, tako da je okomica $\mathbf{n}$ usmjerena iz područja 2 u područje 1. Na slici je prikazan mali valjak volumena ΔV visine Δl sagrađen na S_0 , s bazama S_1 i S_2 usporednim sa S_0 . Primijenimo li teorem divergencije²⁷ na polje $\mathbf{F}$ unutar volumena valjka ΔV , dobivamo

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_{S_{\Delta V}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{\text{plata}}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

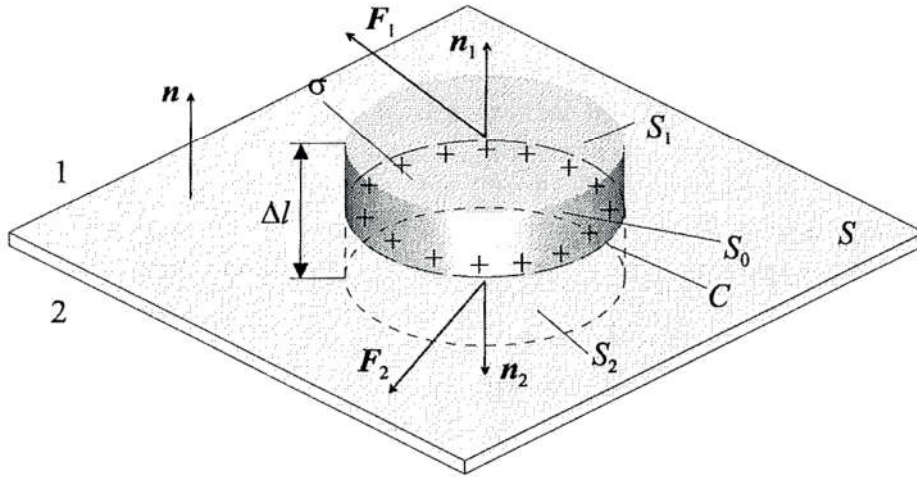
²⁶ Oznaka $\mathbf{r}' \in V$ znači da je $\mathbf{r}'$ član skupa V ; $\mathbf{r}' \notin V$ znači da $\mathbf{r}'$ nije član skupa V .

²⁷ Detaljnije o teoremu divergencije ili Gaussovu teoremu pogledati u Prilogu C.

Kako posljednji integral iščezava s $\Delta l \rightarrow 0$, to je

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left[\int_{S_1} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS \right],$$

gdje su $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ diskontinuirane vrijednosti od $\mathbf{F}$ u istoj točki na S , ali u područjima 1 i 2, a $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$ jedinične okomice u ta dva područja.



Slika 1.2.6. Diskontinuitet u polju $\mathbf{F}$ na plohi S koja nosi plošni skalarni izvor gustoće σ

U odjeljku 1.3 pokazat ćemo da je lijeva strana te jednadžbe jednaka skalarnom izvoru polja $\int \rho dV$ u ΔV , tj.

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \int_{\Delta V} \rho dV = \int_{S_0} \sigma dS.$$

U graničnom prijelazu kad $\Delta l \rightarrow 0$, vrijedi

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left[\int_{S_1} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS \right] = \int_{S_0} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) dS,$$

budući da plohe S_1 i S_2 postaju podudarne sa S_0 , a okomice postaju $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$. Na kraju dobivamo

$$\int_{S_0} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) dS = \int_{S_0} \sigma dS.$$

Ako je ova jednadžba valjana za svaku infinitezimalnu plohu S_0 , integrandi moraju biti jednaki tako da je

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = \sigma \quad .$$

Prema toj jednadžbi ako je gustoća skalarnog izvora vektorskog polja $\mathbf{F}$, singularna na plohi, tada se u okomitoj komponenti polja u bilo kojoj točki na plohi događa diskontinuitet koji je jednak plošnoj gustoći skalarnog izvora polja u toj točki.

1.2.5.2. Diskontinuitet u polju zbog plošne gustoće vektorskog izvora

Pozivajući se ponovno na sliku 1.2.6. razmotrit ćemo gustoću vektorskog izvora $\mathbf{J}$ polja $\mathbf{F}$. Neka je $\mathbf{J}$ singularan u dimenziji okomitoj na plohu S , tj. neka je $\mathbf{J}dV = \mathbf{K}dS$, pri čemu je $\mathbf{K}$ konačan i leži u S . Primjenom rotorskog (Gaussova) teorema²⁸ na polje $\mathbf{F}$ unutar valjka volumena ΔV , dobivamo

$$\int_{\Delta V} \nabla \times \mathbf{F} dV = \oint_{S_{\Delta V}} \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS \quad .$$

U odjeljku 1.3. koji slijedi pokazat ćemo da je lijeva strana te jednadžbe jednaka vektorskom izvoru polja

$$\int_{\Delta V} \nabla \times \mathbf{F} dV = \int_{\Delta V} \mathbf{J} dV = \int_{\Delta S} \int_{\Delta l} (\mathbf{J} dl) dS \quad .$$

Kako je za $\Delta l \rightarrow 0$, limes integrala

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \int_{\Delta l} \mathbf{J} dl \rightarrow \mathbf{K} \quad ,$$

dobivamo konačno iz gornjih izraza

$$\int_{S_0} \mathbf{K} dS = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \oint_{S_{\Delta V}} \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS \quad .$$

Ponovno se plošni integral na desnoj strani te jednadžbe može izraziti sumom triju integrala: doprinosa po S_1 , S_2 i plaštu valjka. U graničnom prijelazu, kada $\Delta l \rightarrow 0$, doprinos plašta iščezava. Iz slike 1.2.6. vidljivo je također

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \int_{S_1} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{F}_1 dS = \int_{S_0} \mathbf{n} \times \mathbf{F}_1 dS \quad ,$$

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \int_{S_2} \mathbf{n}_2 \times \mathbf{F}_2 dS = \int_{S_0} -\mathbf{n} \times \mathbf{F}_2 dS \quad ,$$

²⁸ Detaljnije o Gaussovima teoremima i posebno rotorskom teoremu pogledati u Prilogu C.

pa imamo

$$\int_{S_0} \mathbf{K} dS = \int_{S_0} \mathbf{n} \times (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) dS .$$

Budući da ovo vrijedi i za $S_0 \rightarrow 0$, a budući je $\mathbf{n} \times \mathbf{F}_n \equiv 0$ slijedi

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \times (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) = \mathbf{n} \times (\mathbf{F}_{1n} + \mathbf{F}_{1t} - \mathbf{F}_{2n} - \mathbf{F}_{2t}) = \mathbf{n} \times (\mathbf{F}_{1t} - \mathbf{F}_{2t}) . \quad (1.2.26)$$

Ova jednađba utvrđuje da se u tangencijalnoj komponenti polja $\mathbf{F}$ na plohi S događa diskontinuitet, koji je jednak plošnoj gustoći $\mathbf{K}$ njegovog vektorskog izvora.

Često će u zadaćama polja biti zadane ili pretpostavljene gustoće plošnih skalarnih i vektorskih izvora σ i $\mathbf{K}$ na plohi koja dijeli promatrani prostor u dva područja. Pomoću trostrukog vektorskog produkta oblika $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ dobivamo $\mathbf{n} \times [(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \times \mathbf{n}] = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) - [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)]\mathbf{n}$. Ako uvrstimo da je $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, $(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \times \mathbf{n} = -\mathbf{K}$ i $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) = \sigma$, dobivamo

$$\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \mathbf{K} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \sigma . \quad (1.2.27)$$

To je opći rezultat, koji izražava diskontinuitet u polju $\mathbf{F}$ izravno kao sumu okomitih i tangencijalnih komponenata, tako da možemo pomoću

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1t} - \mathbf{F}_{2t} &= \mathbf{K} \times \mathbf{n} , \\ \mathbf{F}_{1n} - \mathbf{F}_{2n} &= \mathbf{n} \sigma , \end{aligned} \quad (1.2.28a,b)$$

izraziti tangencijalne i okomite diskontinuitete u ovisnosti o vektorskoj i skalarnoj gustoći izvora.

1.3. MAXWELLOVE JEDNADŽBE U VAKUUMU

U namjeri da izravno pristupimo studiju elektromagnetskih polja i njihovom ponašanju, započet ćemo ovaj odjeljak Maxwellovim jednađbama koje se temelje na obilju eksperimentalnih činjenica. Maxwellove jednađbe čine klasičnu elektromagnetsku teoriju.

Elektromagnetska teorija temelji se na nekoliko osnovnih postulata i eksperimenata. Iznenadjuća je činjenica da se sva eksperimentalna opažanja mogu sažeti u samo nekoliko osnovnih zakona: Coulombov, Ampèreov,²⁹ Biot-Savartov,³⁰ Faradayev i druge. Ti eksperimentalno utvrđeni zakoni povezuju klasičnu elektromagnetsku teoriju sa stvarnošću. Dodajući im osnovne definicije, pojmove i neke postulate, usvajajući

²⁹ André Marie Ampère (1775 – 1836), francuski fizičar.

³⁰ Jean Baptiste Biot (1774 – 1862) i Félix Savart (1791 – 1841), francuski fizičari.

makroskopski pristup i uvodeći pojam polja, Maxwell je izgradio potpunu i jedinstvenu³¹ klasičnu makroskopsku elektromagnetsku teoriju. Njezin matematički izraz su jednadžbe polja ili Maxwellove jednadžbe. One sadrže sve prirodne zakone elektromagnetizma. I sva druga proširenja teorije, nastala uvođenjem drugih pojmova i veličina, npr. potencijala, te izgradnjom matematičkih modela i primjenom različitih matematičkih postupaka, dat će rezultate koji će biti onoliko dobri koliko će se slagati s eksperimentalnim činjenicama.

Kao što smo pokazali u članku 1.1.1, operacijske definicije polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ utvrđene su jednadžbom (1.1.2) za Lorentzovu silu. U skladu s makroskopskom približnom teorijom pretpostavljamo da su vektorske funkcije koordinata prostora i vremena, polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, kontinuirane i da imaju kontinuirane derivacije u svim točkama u slobodnom prostoru. U odjeljku 1.2. opredijelili smo se za stav da su naboji i struje primarni izvori polja. Budući da propisivanje izvora jedinstveno definira polje, mi na taj način raspoložemo s dvije definicije polja. Zato ćemo sada preurediti eksperimentalne zakone Coulomba, Ampèrea i Faradaya u oblike izraza za skalarne i vektorske gustoće izvora para polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, tako da rezultirajuća polja tvore silu koja je određena Lorentzovom jednadžbom. Nećemo strogo "izvoditi" ove izraze, nego će oni biti uzeti, kako je već rečeno, kao fundamentalni postulati teorije elektromagnetskog polja. Poopćenje Coulombova zakona za silu između dva točkasta naboja koji jedan prema drugom miruju na izraz za silu kojom raspodijeljeni naboj djeluje na točkasti naboj, izravno vodi k zaključku da je naboj skalarni izvor električnog polja. Zato možemo pisati $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$, gdje je $\rho(\mathbf{r})$ gustoća električnog naboja u točki u kojoj $\mathbf{E}$ promatramo. Budući da se $\mathbf{E}$ mjeri u *voltima po metru*, a ρ u *kulonima po prostornom metru*, moramo uvesti dimenzijsku konstantu za slobodni prostor $\epsilon_0 = (8.85418788 \pm 0.00000007) \cdot 10^{-12}$ As/Vm ili *farada po metru* (F/m). Ona se još naziva i *permitivnost vakuuma* ili *dielektričnost vakuuma*. Konačno, kao posljedica Coulombova zakona slijedi

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_u, \quad (1.3.1)$$

relacija koja povezuje električno polje $\mathbf{E}$ sa skalarnim izvorima, tj. gustoćom ukupnog naboja ρ_u . U praznom prostoru može postojati samo *slobodni naboj* ρ_s , pa je $\rho_u = \rho_s$.

Da bismo upotpunili zadavanje električnog polja $\mathbf{E}$ pomoću njegovih izvora, potrebno je uz divergenciju u jednadžbi (1.3.1) propisati i rotor.³² Eksperimenti pokazuju da promjena magnetskog polja proizvodi električno polje. Ta činjenica izražava se

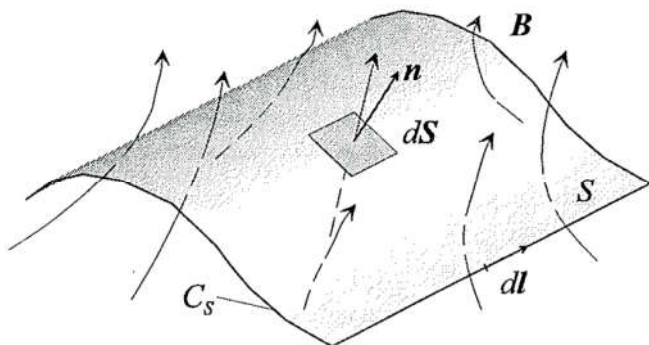
³¹ Da se kod elektromagnetskog polja radi o *jedinstvenom fenomenu*, a ne o dva razna povezana ali odvojena fenomena vidi se analizirajući Lorentzovu silu (1.1.1) u raznim referentnim sustavima sa stajališta *teorije relativnosti*. Atomistički model električne struje uz teoriju relativnosti daje različit rastav elektromagnetskog polja na vektore $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ u raznim koordinatnim sustavima koji su u relativnom gibanju, pa se postojanje magnetskog uz električno polje može smatrati nužnošću sa stajališta teorije relativnosti. Za detaljniji uvid pogledati N. Cindro, *Fizika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

³² Pomoću zadanih $\nabla \cdot \mathbf{E}$ i $\nabla \times \mathbf{E}$ može se iz izraza $\Delta \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ izračunati $\Delta \mathbf{E}$, a potom i $\mathbf{E}$.

Faradayevim zakonom u integralnom obliku

$$\oint_{C_S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.3.2)$$

gdje je C_S krivulja koja zatvara plohu S , čija je pozitivna okomica $\mathbf{n}$ određena smjerom desnog vijka, kao na slici 1.3.1.



Slika 1.3.1. Okomica na plohu S

Primjenom Stokesova teorema³³ na lijevu stranu jednadžbe (1.3.2) dobivamo

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS,$$

pa budući da ova jednadžba mora biti valjana za bilo koju plohu S slijedi

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.3.3)$$

Ova jednadžba utvrđuje da je smanjenje gustoće magnetskog tijeka³⁴ ($-\partial \mathbf{B} / \partial t$) gustoća vektorskog izvora električnog polja $\mathbf{E}$. Treba upozoriti da ovdje imamo "izvor" koji nije ni naboj ni struja. Zbog tog razloga struje i naboje nazivamo "primarnim" izvorima elektromagnetskog polja. Vidjet ćemo kasnije da činjenica da je promjena polja $\mathbf{B}$ izvor polja $\mathbf{E}$ vodi k prostiranju elektromagnetskih valova. Konačno možemo ustvrditi da propisivanje skalarnih i vektorskih izvora prema jednadžbama (1.3.1) i (1.3.3) uz pret-

³³ Pogledati Prilog C.

³⁴ Autori su se opredijelili za upotrebu izraza "tijek" umjesto "tok", pa ćemo tako u knjizi upotrebljavati termine "električni tijek" i "magnetski tijek". Tome u prilog izjašnjava se i Dalibor Brozović u osvrtu pod naslovom *Tijek teče, tok stoji*, koji je objavio u časopisu Hrvatskog filološkog društva "Jezik", godište XXIV, Zagreb, 1976 – 1977. Citat iz tog članka: "Tako onda i *tijek* znači "proces tečenja", a *tok* konkretno mjesto na kojem se ili u kojem taj proces odvija." Budući da je elektromagnetsko polje dinamičko treba govoriti o magnetskom i električnom *tijeku*, te o *tijeku* energije. U statičkim poljima držeći se rečenog načela bilo bi pravilno koristiti izraze električni i magnetski tok. Da ne bi doveli čitatelje u nedoumicu, budući da se radi o istim veličinama i u statičkim i u dinamičkim poljima autori preporučuju korištenje istih izraza *električni* i *magnetski tijek*.

postavku da polje $\mathbf{E}$ i njegove derivacije iščezavaju u beskonačnosti jedinstveno određuju polje $\mathbf{E}$.

Promotrimo sada izvore polja $\mathbf{B}$. Iz Faradayeva zakona indukcije (1.3.3) proizlazi da je $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. To je vidljivo iz činjenice da je divergencija bilo kojeg rotora identično jednaka nuli, tj.

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \equiv 0 .$$

Ova relacija pokazuje da je $\nabla \cdot \mathbf{B}$ uvijek neovisno o vremenu, a to znači da je $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.³⁵ Jednadžba

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (1.3.4)$$

utvrđuje da nema skalarnih izvora polja $\mathbf{B}$. Možemo reći da izolirani magnetski naboji nisu dosada opaženi u prirodi.³⁶ Jednadžbe (1.3.1) i (1.3.4) pokazuju da linije električnog polja $\mathbf{E}$ počinju ili završavaju na električnom naboju, a da su linije magnetskog polja $\mathbf{B}$ zatvorene same u sebe.

Propisivanje veličine $\nabla \times \mathbf{B}$ temelji se na Ampèreovim eksperimentima. U skladu s *Ampèreovim kružnim zakonom*, ili kako se još naziva *zakonom protjecanja*, poopćenim za dinamička polja u praznom prostoru, slijedi integralna relacija

$$\oint_{C_S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_u \cdot \mathbf{n} dS , \quad (1.3.5)$$

gdje je $\mathbf{J}_u$ (ukupna) gustoća svih struja koje teku kroz plohu S i koje su obuhvaćene zatvorenom krivuljom C_S . Dimenziona konstanta u sustavu SI jedinica iznosi $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am ili *henrija po metru* (H/m), u slobodnom prostoru. Naziva se još i *permeabilnost vakuuma*. Primijenimo li Stokesov teorem na lijevu stranu jednadžbe (1.3.5) dobivamo

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mu_0 \mathbf{J}_u \cdot \mathbf{n} dS ,$$

pa kako to vrijedi za bilo koju plohu S , konačno je

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_u . \quad (1.3.6)$$

Relacija (1.3.6) utvrđuje da je gustoća ukupne struje $\mathbf{J}_u$ vektorski izvor polja $\mathbf{B}$. U slobodnom (zrakopraznom) prostoru nema tvari, pa mogu postojati samo slobodni

³⁵ Relacija $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ nije nužna posljedica, ali je najprirodnija.

³⁶ Dana 14.02.1982. godine je fizičar Blas Cabrera u Laboratoriju za niske temperature Stanford Univerziteta (SAD) registrirao događaj koji se može interpretirati kao prolaz magnetskog monopola kroz supravodljivu petlju. Izgleda da kasnije potrage za monopolom nisu dale rezultat, a dio fizičara sumnja u Cabrerin rezultat.

naboji ρ_s koji prema (1.2.6), ako se gibaju brzinom $\mathbf{v}$, tvore konvekcijsku struju gustoće $\mathbf{J}_s = \rho_s \mathbf{v}$. Maxwell je primijetio nepotpunost i nesklad u Ampèreovom kružnom zakonu, pa je ustvrdio da se k struji $\mathbf{J}_s$ mora dodati još jedan član u slobodnom prostoru da bi se dobila ukupna struja $\mathbf{J}_u$ koja bi onda bila u skladu s jednađbama

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_u ,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_u ,$$

i jednađbom kontinuiteta

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 .$$

Naime, pošto je $\mathbf{J}_u$ rotor vektora, to mora biti $\nabla \cdot \mathbf{J}_u \equiv 0$. Međutim, iz jednađbi (1.2.11) i (1.3.1) slijedi

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = -\epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ,$$

tj.

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J}_s + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 ,$$

pa tako izraz u zagradama

$$\left(\mathbf{J}_s + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) ,$$

mora biti jednak rotoru vektora. Prema Maxwellovoj tvrdnji gustoća ukupne struje u slobodnom prostoru treba biti uzeta kao

$$\mathbf{J}_u = \mathbf{J}_s + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (1.3.7)$$

To rezultira u novom vektorskom izvoru polja $\mathbf{B}$ prema jednađbi (1.3.6)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_s + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) . \quad (1.3.8)$$

Pokazat ćemo da je uvođenje člana $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ u jednađbu (1.3.8) vodilo do proricanja prostiranja elektromagnetskog polja konačnom brzinom. Ta činjenica nije bila poznata do Maxwellova vremena, ali je kasnije potvrđena pokusima. To otkriće temeljeno na matematičkoj skladnosti jedan je od najvažnijih doprinosa u povijesti znanosti.

Uveli smo ovdje poopćenje Ampèreova zakona koje je Maxwell našao potrebnim da bi se dobio fizikalni i matematički skladan skup fundamentalnih jednadžbi koje točno opisuju ponašanje vremenski promjenjivog elektromagnetskog polja. Nakon prije učinjene dopune osnovnih eksperimentalnih zakona, *nalazimo da su vremenski promjenjiva električna i magnetska polja povezana*, tj. ona su međusobno ovisna i otud se nazivaju zajedničkim imenom *elektromagnetska polja*.

1.3.1. Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku

Međusobno ovisna električna i magnetska polja, tj. elektromagnetsko polje koje rezultira iz zadanog skupa naboja u gibanju u slobodnom prostoru, može se sažeto izraziti s pomoću četiri diferencijalne jednadžbe koje sumiraju osnovne zakone elektromagnetizma. One glase:

1. *Coulombov zakon (Gaussov³⁷ zakon):*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}, \quad (1.3.9a)$$

2. *Ampèreov (poopćeni) kružni zakon:*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_s + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (1.3.9b)$$

3. *Faradayev zakon indukcije:*

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3.9c)$$

4. *Gaussov zakon (nepostojanje slobodnih magnetskih naboja):*

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.3.9d)$$

Ove četiri jednadžbe poznate su kao *Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku* za vakuum. Pisane su u makroskopskom obliku i zajedno s jednadžbom za Lorentzovu silu tvore temeljne zakone elektromagnetske teorije. Takav oblik jednadžbi valjan je za studij elektromagnetskih polja u sustavima koji miruju. Činjenica je da su relativističke korekcije malokad potrebne u inženjerskim radovima, tj. u klasičnoj elektromagnetskoj teoriji. To nam dozvoljava da u slučaju gibanja sustava manjim brzinama³⁸ elektromagnetsko polje promatramo na taj način, tj. pomoću sličnih jednadžbi s dodat-

³⁷ Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), njemački matematičar, fizičar i astronom.

³⁸ U usporedbi s brzinom svjetla.

nim članovima. Očito je da Maxwellove jednadžbe sumiraju i sadrže sve eksperimentalne činjenice i čitav teorijski razvoj klasičnog elektromagnetizma. Tako je npr. jednadžba kontinuiteta implicitno ugrađena u dvije od njih. Sve Maxwellove jednadžbe nisu neovisne. Pokazali smo da se primjenom operacije divergencije na jednadžbu (1.3.9c) dobiva jednadžba (1.3.9d). Isto tako se lako iz jednadžbe (1.3.9b) i jednadžbe kontinuiteta (1.2.11) izvodi jednadžba (1.3.9a). Zato kažemo da su Maxwellove jednadžbe (1.3.9b) i (1.3.9c) neovisne,³⁹ kao i jednadžba kontinuiteta (1.2.11), dok su jednadžbe (1.3.9a) i (1.3.9d) izvedene.⁴⁰ Sustav od četiri Maxwellove jednadžbe (1.3.9a – d) možemo lako nadomjestiti s dvije glavne Maxwellove jednadžbe (1.3.9b) i (1.3.9c) i s jednadžbom kontinuiteta (1.2.11).

Posebno treba istaći da sinteza svih zakona elektromagnetizma u jedan potpuni skup jednadžbi ne bi bila moguća bez člana $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ u praznom prostoru. Njegovo otkriće i uvođenje u elektromagnetsku teoriju predstavlja bit Maxwellova doprinosa. Važno je podsjetiti da je taj član, kao što je već rečeno, predstavljao ključ za teorijsko otkriće elektromagnetskih valova. Maxwell je preorekao da je svjetlo elektromagnetska valna pojava i da elektromagnetski valovi svih frekvencija mogu biti proizvedeni, što je stimuliralo poduzimanje mnogih teorijskih i eksperimentalnih istraživanja u elektromagnetizmu tijekom druge polovine XIX. stoljeća. Član $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ povijesno nazvan *struja pomaka*, uveo je Maxwell zbog dvaju razloga: prvo, jer je bio potreban dodatni član strujne gustoće da bi se proširio Ampèrov zakon i tako doveo u matematičko suglasje s drugim zakonima, i drugo, jer je u to vrijeme prevladavalo mišljenje da je slobodan prostor neka vrsta materijalnog medija nazvanog *eter*. Stvarno, ništa se ne pomiče u slobodnom prostoru i kao takav izraz "struja pomaka" je obmana. To ime, izniklo iz odbačene eterske teorije elektromagnetizma, ne može imati ništa drugo do povijesni značaj i mi ga kao takvo upotrebljavamo.

1.3.2. Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku

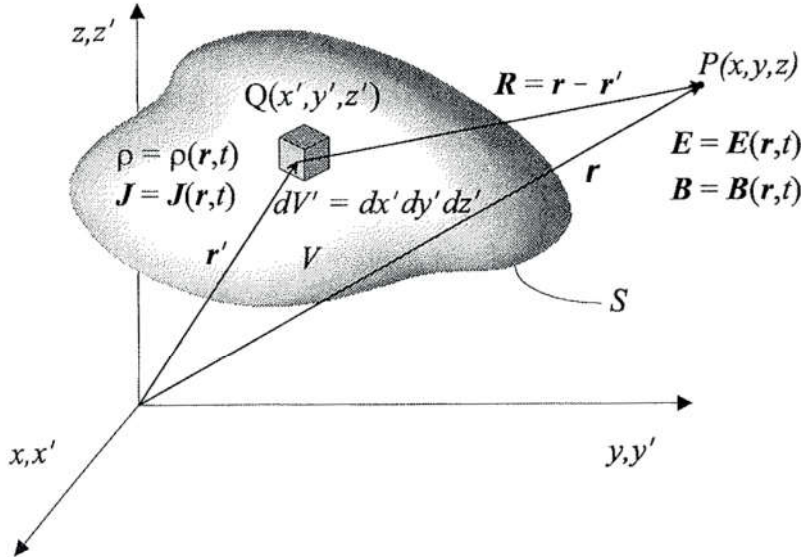
Sustav diferencijalnih Maxwellovih jednadžbi (1.3.9a – d) jest skup relacija pisanih za jednu točku slobodnog prostora. Te linearne diferencijalne jednadžbe simultano povezuju prostorne i vremenske derivacije polja $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ u svakoj točki prostora i u svakom trenutku vremena i međusobno i s gustoćama naboja $\rho_s(\mathbf{r}, t)$ i struja $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)$, smještenih također u istu točku $\mathbf{r}$ i u istom vremenskom trenutku t . Primjećujemo da one izravno ne povezuju polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ u promatranoj točki s izvorima u drugim točkama u prostoru.

Jednako važni integralni izrazi daju raspodjelu polja u unutrašnjosti cijelog područja i često pomažu da bi se fizikalno lakše interpretirali nego pomoću diferencijalnih jednadžbi koje se odnose na neposredni okoliš točke. Integralni oblik Maxwellovih jednad-

³⁹ Često ih nazivamo i *glavne Maxwellove jednadžbe*.

⁴⁰ Nazivamo ih još i *sporedne Maxwellove jednadžbe*.

žbi povezuje ponašanje polja $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ u danoj točki $\mathbf{r}$ s izvorima $\rho(\mathbf{r}',t')$ i $\mathbf{J}(\mathbf{r}',t')$ smještenim posvuda u $\mathbf{r}'$ u danom području, prema slici 1.3.2.



Slika 1.3.2. Proračun polja pomoću sustava Maxwellovih jednačbi u integralnom obliku. $P(x,y,z)$ je točka u kojoj se promatra polje, a $Q(x',y',z')$ je točka u kojoj se nalazi elementarni izvor polja.

Primjenom Stokesova⁴¹ teorema i teorema divergencije može se sustav Maxwellovih diferencijalnih jednačbi (1.3.9a – d) transformirati u sustav integralnih jednačbi koje u slobodnom prostoru glase

$$\begin{aligned}\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V \rho_s dV = Q, \\ \oint_{C_S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \mu_0 \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS, \\ \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS, \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS &= 0.\end{aligned}\tag{1.3.10a – d}$$

Te relacije primjenjuju se na zatvorenu krivulju C_S koja obručljuje otvorenu plohu S i na zatvorenu plohu S koja omeđuje volumen V u slobodnom prostoru. Upotrebom teorema divergencije stavak o očuvanju naboja, tj. jednačba kontinuiteta (1.2.11) može se slično izraziti u integralnom obliku, pa glasi

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\frac{dQ}{dt}.\tag{1.3.11}$$

⁴¹ Sir George Gabriel Stokes (1819 – 1903), engleski matematičar i fizičar.

Jedinični vektor okomice $\mathbf{n}$ na plohu S je pozitivan, ako gleda prema vani iz zatvorene plohe S , ili ako je usmjeren u pravcu desnog vijka iz otvorene plohe S . Kao i u slučaju diferencijalnih jednačbi, ova jednačba može zamijeniti dvije sporedne jednačbe, pa se Maxwellov sustav jednačbi u integralnom obliku može upotrebljavati sastavljen od samo tri neovisne jednačbe (1.3.10b), (1.3.10c) i (1.3.11).

Opća svojstva elektromagnetskih polja u danom ograničenom području praznog prostora, bez poznavanja i zanimanja za stanje izvan tog područja, mogu se odrediti i izračunati pomoću sustava Maxwellovih jednačbi, bilo u diferencijalnom (1.3.9a – d), bilo u integralnom (1.3.10a – d) obliku. Da bi se odredila raspodjela polja izgrađenog zadanom raspodjelom izvora u prostoru zadanog oblika, nužno je da budu zadani i svi potrebni *rubni i početni uvjeti*.⁴² Oni se sastoje u zadavanju raspodjele svih izvora i polja po rubnim plohama koje omeđuju i zatvaraju promatrani prostor u jednom *početnom trenutku* vremena.⁴³ Ti uvjeti osiguravaju da bi se iz općih rješenja diferencijalnog sustava jednačbi izdvojilo samo jedno posebno jedinstveno rješenje. Isto tako oni su potrebni da bi se iz integralnog sustava jednačbi mogla izračunati rješenja, tj. obaviti integracija po zadanim rubnim linijama i plohama.

Zaključno možemo reći da je Maxwell prihvaćajući Faradayevu ideju polja i uvođći pojam struja pomaka u Ampèreov zakon preorekao mnoge prirodne pojave koje su bile potvrđene kasnije (elektromagnetsku prirodu svjetla). Time je izgradio jedinstvenu matematičku osnovu za cijelo područje klasične teorije elektromagnetskih polja. *Ono što su Kirchhoffovi zakoni u teoriji krugova i mreža, to su Maxwellove jednačbe u teoriji polja*. U tablici 1.3.1. na kraju poglavlja pregledno smo prikazali Maxwellove jednačbe za elektromagnetsko polje u slobodnom prostoru.

1.4. ELEKTROMAGNETSKA POLJA U MATERIJALU

U ovom odjeljku proširit ćemo studij elektromagnetizma na makroskopsko ponašanje polja u nazočnosti vodiča, dielektrika i magnetskih materijala. Dovest ćemo u svezu neka makroskopska opažena svojstva materijala s njihovim mikroskopskim izvorima. Pritom ćemo koristiti jednostavne klasične modele koji osiguravaju prihvatljiva približna rješenja esencijalno kvantno-mehaničkih procesa. Iako ćemo nelinearne značajke materijala također analizirati, naglasak ćemo staviti na linearne odnose u elektromagnetskom polju, koji osim što su valjani u slobodnom prostoru, često su dobra aproksimacija i za odnose u materijalima. Strukturu materijala nećemo ovdje posebno proučavati, jer se pretpostavlja njezino poznavanje. Razmotrit ćemo građu materijala samo onoliko koliko

⁴² Poblje o rubnim i početnim uvjetima pogledati u člancima 2.4.4. i 2.4.5, te u odjeljku 4.5, kao i u Prilogu A.

⁴³ Ovdje treba istaknuti da u Maxwellovoj elektrodinamici, kao u ostalom i u Newtonovoj mehanici, vrijedi načelo kauzalnosti, što znači da ako je u nekom početnom trenutku poznato stanje, tada Maxwellove jednačbe jedinstveno određuju stanje polja u bilo kojem sljedećem trenutku.

nam je nužno da bi smo razumjeli električne pojave i interakciju materijala s elektromagnetskim poljem.⁴⁴ Iako sliku planetarnog atoma ne smijemo doslovno shvatiti, model *planetarnog atoma* će nam poslužiti kao osnova za razumijevanje električnih pojava u materijalu. Jasno je da dublje razumijevanje električnih pojava u materijalu zahtijeva kvantno-mehanički pristup. U skladu s rečenim polazimo od činjenice da se sva tvar sastoji od atoma koji su građeni od subatomske čestice. Neke od njih posjeduju pozitivne ili negativne naboje, a neke opet imaju (zbog orbitalnih gibanja i spinova) magnetske dipolne momente. U svjetlosti ovog jednostavnog modela tvari ne iznenađuje da možemo opisati ponašanje materijala kao izvora elektromagnetskih polja. To nas navodi da u zakone polja u slobodnom prostoru uvedemo dodatne gustoće izvora svojstvene materijalu.

Pod djelovanjem vanjskih polja odziv materijala se sastoji u pojavi izvora sekundarnih polja, koja se mogu usporediti s narinutim poljima. Te pojave u makroskopskim mjerilima ekvivalentne su raspodjelama naboja i struja, koje djeluju kao da su smještene u slobodnom prostoru. Ustvari imamo zanimljivu situaciju u kojoj su ekvivalentne raspodjele naboja i struja povezane s ukupnim poljima u materijalu (koja obuhvaćaju narinuta i sekundarna polja), dok su sekundarna polja povezana s ekvivalentnim nabojima i strujama. Slijedeći ovu logiku pokazuje se opravdanim da se uvedu nova vektorska polja i razvije novi skup Maxwellovih jednažbi s pridruženim relacijama građe.

Rezultirajuća elektromagnetska polja u materijalu vrlo su zamršena u njihovom egzaktnom obliku. Na sreću poznavanje tih detaljnih mikroskopskih polja nije nužno za mnoge tehničke primjene. Naše makroskopske naprave i uređaji jednostavno su preveliki ili neosjetljivi na tako fine detalje. Ustvari makroskopska ispitivanja ne mogu izmjeriti stvarna polja u materijalu. U najboljem slučaju, pomoću njih mogu se mjeriti samo polja izgrađena u praznom prostoru u blizini materijala. Upotrebljavat ćemo izraz makroskopska, da bismo označili polja proizvedena izvan, ali u blizini materijala, na udaljenostima dovoljno velikim u odnosu na veličinu atoma unutar materijala na kojima se opažaju samo usrednjeni učinci svih atoma u materijalu.

Suglasno tome ovdje ćemo izložiti prikladan makroskopski model materijala na temelju kojeg ćemo procijeniti, u svakom slučaju korektno, opaženo polje izvan materijala. Iako naši modeli materijala mogu također dati izraze za polja unutar materijala, oni trebaju biti promatrani kao matematički pogodne, ali fizikalno nestvarne veličine potrebne za razvoj teorije makroskopskih polja u blizini materijala. Zato treba upozoriti da makroskopska polja unutar materijala, koja upotrebljavamo u našim analizama, nisu obvezatno polja koja stvarno djeluju na bilo koju česticu materijala.

⁴⁴ Za dublje upoznavanje s kvantno-mehaničkim i stohastičkim procesima u materijalima, te sa svojstvima materijala preporučamo pogledati u monografiji: V.Knapp, P.Colić: *Uvod u električna i magnetska svojstva materijala*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

1.4.1. Makroskopski model vodljivog materijala

Materijale možemo klasificirati kao *vodiče*, *poluvodiče* i *izolatore*, ovisno o njihovu odzivu na narinuto električno polje. Prema klasičnom planetarnom modelu atom se sastoji iz čvrsto vezane, pozitivno nabijene jezgre, okružene difuznim elektronskim oblakom koji ima jednaku količinu negativnog naboja. Većina elektrona je također čvrsto vezana za jezgru atoma, pa ih nazivamo *vezani elektroni*. Ti vezani elektroni mogu se pomicati, ali ne seliti, tj. odstraniti iz atoma pod djelovanjem narinutog električnog polja. Ovamo ne pripadaju *slobodni* ili *provodni elektroni*. Ti elektroni su stalno u stanju termičkog neuređenog gibanja, napuštajući jedan atom i seleći se u drugi. Ako vanjsko električno polje nije narinuto, njihovo gibanje je potpuno nasumično, tj. prepušteno slučaju.⁴⁵ Srednja termalna brzina slobodnih elektrona u makroskopskim mjerilima u materijalu jednaka je nuli tako da nema struje. Ako se električno polje narine, pod djelovanjem Coulombove sile pojavit će se dodatna brzina koja se superponira na nasumična gibanja i koja prouzrokuje strujanje, tj. tijekom srednjeg položaja elektrona u smjeru suprotnom smjeru električnog polja. Taj proces nazivamo *vođenjem struje*.⁴⁶ Materijale u kojima velik broj slobodnih elektrona može sudjelovati u procesu vođenja struje nazivamo *električnim vodičima*. U nekim materijalima samo mali broj ili zanemarlivo malo, elektrona može sudjelovati u vođenju, pa ih nazivamo *izolatorima*.⁴⁷ Za njih je mnogo više karakterističan proces polarizacije, koji će biti objašnjen kasnije. Posebna vrsta materijala u kojima se vođenje struje ne obavlja samo elektronima, nego i drugom vrstom nositelja poznatim kao "šupljine", nalazi se u području između vodiča i izolatora. Te materijale nazivamo *poluvodičima*. Kvantna teorija objašnjava gibanje nositelja struje pomoću energetske nivoa.⁴⁸

1.4.2. Gustoća provodne struje u materijalu. Ohmov zakon

Sveza između gustoće struje i jakosti električnog polja u materijalu ovisi o prirodi materijalnog medija. Razmotrimo dva krajnja slučaja: struju u razrijeđenom plinu i struju u kovini. U svakoj vakuumskoj cijevi postoji vrlo mala količina plina (npr. pri tlaku reda veličine 10^{-6} mm stupca Hg tj. $133.3 \cdot 10^{-6}$ paskala, i pri temperaturi od 300° K, koncentracija plina je reda $3 \cdot 10^{16}$ molekula/m³). Za plin čiji poprečni presjek molekule iznosi $8 \cdot 10^{-20}$ m², kod gornje temperature i tlaka "srednji slobodni put" je oko 400 m,

⁴⁵ Njihova raspodjela vjerojatnosti je Fermi-Dirac-Sommerfeldova raspodjela.

⁴⁶ Zato i naziv provodna struja.

⁴⁷ Izolatori su dobili ime zbog njihova odnosa prema vođenju struje. Iako su izraziti dielektrici, treba ih razlikovati od dielektrika. Karakterizira ih dielektričnost, provodnost i električna (probojna) čvrstoća.

⁴⁸ Pogledati C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley, New York, 1971.

što je mnogo dulje od dimenzija vakuumske cijevi. Zbog tog razloga u takvom mediju smatramo da se elektron giba od katode do anode bez sudara s ostalim česticama. Gibanje elektrona određeno je Lorentzovom silom i Newtonovim zakonom (ubrzanje elektrona izravno je proporcionalno jakosti električnog polja E).

U krutim materijalima srednji slobodni put elektrona je u mikroskopskim dimenzijama, tj. reda veličine 10^{-7}m . Kod bilo kakvog makroskopskog pomaka elektron se često sudara s česticama materijala koje su kod kovina poredane u kristalne rešetke. Zbog velikog broja sudara srednja brzina elektrona u krutim tvarima ovisi linearno o jakosti električnog polja u širokom opsegu od interesa. Kada je jednom uspostavljen linearan odnos između brzine strujanja v i jakosti električnog polja E , možemo pisati da je $v = \mu E$, gdje je μ svojstvo materijala koje se naziva "pokretljivost". Uz gustoću naboja elektrona $\rho_s = -Nq_e$, možemo prema (1.2.6) pisati

$$\mathbf{J}_s = \rho_s \mathbf{v} = -Nq_e \mathbf{v} = -Nq_e \mu \mathbf{E} = \kappa \mathbf{E}, \quad (1.4.1)$$

gdje je N koncentracija elektrona, q_e je naboj elektrona, a κ je konstanta koja se naziva *električna provodnost materijala*. Jednadžbu (1.4.1) uveli smo već u članku 1.2.2. pod oznakom (1.2.7). Nazivamo je *Ohmovim zakonom u elementarnom obliku*, i ona pokazuje da je $\mathbf{J}_s$ proporcionalno s $\mathbf{E}$. Materijali za koje ova relacija vrijedi, tj. da je $\kappa = -q_e N \mu$ neovisno o veličini i smjeru od $\mathbf{E}$, poznati su kao *linearni izotropni vodiči*. Za neke vodiče svaka komponenta od $\mathbf{J}_s$ može biti ovisna o svim komponentama od $\mathbf{E}$. U takvim slučajevima $\mathbf{J}_s$ nije kolinearno s $\mathbf{E}$ i vodič nije izotropan. Takvi vodiči su poznati kao *anizotropni vodiči*.

Opazamo da u oba ova primjera struju čine *slobodni naboji* čiju smo gustoću označili s ρ_s . Oni se mogu gibati u mediju, za razliku od *vezanih naboja*, čiju ćemo gustoću označiti s ρ_p . Provodni naboji u materijalima i prostorni naboji u vakuumskim cijevima su primjeri slobodnih naboja.⁴⁹ Razlikujemo *unutarnje slobodne naboje* (to su slobodni elektroni u kovinama) i *vanjske slobodne naboje* (to su prostorni naboji u vakuumskim cijevima). Često se nazivaju stvarnim strujama one koje nastaju gibanjem tih slobodnih naboja u usporedbi s polarizacijskim i magnetizacijskim strujama koje nastaju pomicanjem vezanih naboja. *Stvarna struja* je prema tome i konvekcijska struja, koja je nastala gibanjem vanjskih slobodnih naboja ρ_s u vakuumskoj cijevi i provodna struja $\mathbf{J}_s$, koja je nastala gibanjem unutrašnjih slobodnih naboja ρ_s u kovini. *Provodne struje* nastaju strujanjem slobodnih elektrona i iona u materijalu pod djelovanjem električnog polja, npr. u kovinama i elektrolitskim otopinama.

Ohmov zakon (1.4.1) može se izraziti i u integralnom obliku, koji se koristi u teoriji strujnih krugova. Zamislimo stacionarnu raspodjelu struje $\mathbf{J}_s$ u vodiču koja se zbog bezdivergentnog karaktera strujanja može predstaviti strujnicama. Označimo s 1 i 2 dvije točke na strujnici čiji je element duljine $d\mathbf{l}$, a sa S ploštinu poprečnog presjeka u ravnini okomitoj na strujnicu. Ploština S je upravo toliko malena da gustoća $\mathbf{J}_s$ po njoj

⁴⁹ U literaturi se slobodni naboji često nazivaju i "stvarnim" nabojima.

bude konstantna, pa iz (1.2.8) slijedi $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = I \oint \frac{d\mathbf{l}}{\kappa S}$. Integracijom po strujnici između točaka 1 i 2, i uz pomoć jednadžbe (1.4.1) dobivamo

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \frac{J_s}{\kappa} d\mathbf{l} = I \int_1^2 \frac{d\mathbf{l}}{\kappa S}.$$

Označimo li s U razliku potencijala, tj. napon između točaka 1 i 2 u stacionarnom polju, gornji izraz možemo pisati u obliku *Ohmova zakona*

$$U = IR, \quad (1.4.2)$$

gdje koeficijent proporcionalnosti struje i napona

$$R = \int_1^2 \frac{d\mathbf{l}}{\kappa S}, \quad (1.4.3)$$

predstavlja *električni otpor* dijela vodiča ploštine poprečnog presjeka S , provodnosti κ , između točaka 1 i 2 u stacionarnom električnom polju. Ohmov zakon (1.4.2) je temeljni zakon teorije krugova i mreža.

1.4.3. Vodič u električnom polju

Namjera nam je utvrditi ograničenja koja se nameću za statička električna i dinamička polja i gustoće provodnih (slobodnih) struja koje mogu postojati u vodljivom materijalu. Ponajprije uvodimo pretpostavku, tj. dodatni postulat teorije polja, da je ponašanje električnih i magnetskih polja u vodljivom materijalu određeno temeljnim jednadžbama polja u slobodnom prostoru (1.3.9a – d), kojima dodajemo dvije nove gustoće izvora: gustoću provodnih struja $\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$ i odgovarajuću gustoću slobodnih električnih naboja ρ_s , koja rezultira iz zakona o očuvanju naboja (1.2.11)

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0. \quad (1.4.4)$$

Statičko električno polje je stacionarno polje uzrokovano stacionarnim nabojima, pa su prema tome u takvom polju svi naboji u stanju mirovanja. Pošto je općenito $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, to je $\mathbf{J} \equiv 0$, jer su svi naboji stacionarni, tj. $\mathbf{v} = 0$. Elektrostatika pretpostavlja da su sve vrste gustoće struje (slobodne, polarizacijske, itd) jednake nuli. Zato možemo zaključiti da *statičko električno polje ne može postojati u vodljivom materijalu*, pošto su u takvom materijalu $\mathbf{J}_s$ algebarski povezane s $\mathbf{E}$ na takav način da je $\mathbf{J}_s = 0$ samo kada je $\mathbf{E} = 0$. S druge strane, budući da je $\mathbf{E} = 0$, tada je $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_s / \epsilon_0 = 0$, pa možemo zaključiti da u *elektrostatičkim uvjetima ne može biti naboja u unutrašnjosti vodiča*.

Tu tvrdnju dokazat ćemo tako što ćemo pomoću jednadžbe kontinuiteta (1.4.4) i

Maxwellove jednadžbe divergencije (1.3.9a) pokazati da će svaki slobodni naboj smješten u unutrašnjosti linearnog izotropnog homogenog vodiča vrlo brzo iščeznuti, tj. postati jednak nuli, čak i u prisutnosti vremenski promjenjivih polja. Dakle, ako u (1.4.4) uvrstimo (1.4.1) i (1.3.9a) slijedi

$$\nabla J_s = \nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = \kappa \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \kappa = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \rho_s + \mathbf{E} \cdot \nabla \kappa = - \frac{\partial \rho_s}{\partial t} ,$$

pa dobivamo diferencijalnu jednadžbu raspodjele slobodnog naboja u unutrašnjosti vodiča

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\kappa}{\epsilon_0} \rho_s = - \mathbf{E} \cdot \nabla \kappa , \quad (1.4.5)$$

u kojoj gustoću slobodnog naboja ρ_s možemo promatrati kao odziv vodiča na funkciju uzbude $\mathbf{E} \cdot \nabla \kappa$. Gustoća ρ_s sastoji se od komponente bez izvora (to je rješenje homogenog dijela diferencijalne jednadžbe (1.4.5), kada je desna strana jednaka nuli) plus komponenta uzrokovana izvorom (funkcijom uzbude). Kako je u unutrašnjosti vodiča u stacionarnom polju $\mathbf{E} \equiv 0$, očito je da je i za homogene vodiče ($\kappa = \text{konst.}$) i za nehomogene vodiče $\kappa = \kappa(\mathbf{r})$, (dok u dinamičkom polju, u kojem slučaju može biti unutar vodiča $\mathbf{E} \neq 0$, tada vrijedi samo za homogene vodiče kod kojih je $\nabla \kappa = 0$), desna strana jednadžbe (1.4.5) jednaka nuli u unutrašnjosti vodiča. Tako je gustoća slobodnog naboja u bilo kojoj točki u unutrašnjosti vodiča dana samo komponentom bez izvora, tj. homogenom diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\kappa}{\epsilon_0} \rho_s = 0 . \quad (1.4.6)$$

Gustoću ρ_s možemo izračunati integracijom izraza

$$\int \frac{d\rho_s}{\rho_s} = - \int \frac{\kappa}{\epsilon_0} dt ,$$

pa slijedi

$$\ln \rho_s = - \frac{\kappa}{\epsilon_0} t + \ln C .$$

C je konstanta integracije koju određujemo iz početnog uvjeta da je u trenutku $t = 0$ početna gustoća slobodnog naboja $\rho_s = \rho_{s0}$, pa imamo

$$\rho_s = \rho_{s0} e^{-(\kappa/\epsilon_0)t} = \rho_{s0} e^{-t/T} , \quad (1.4.7)$$

gdje definiramo

$$T = \frac{\epsilon_0}{\kappa} \quad (1.4.8)$$

To je egzaktni dokaz da se gustoća slobodnog naboja ρ_s u unutrašnjosti vodiča, počev od zadanog početnog iznosa ρ_{s0} , eksponencijalno smanjuje tijekom vremena na nulu s vremenskom konstantom T . Vremenska konstanta $T = \epsilon_0/\kappa$ (dielektričnost slobodnog prostora dijeljena s provodljivošću vodiča) mjeri se u *sekundama* (s), naziva se i *vremenska konstanta relaksacije naboja u vodiču*.⁵⁰ Pokazuje nam kako brzo naboj iščezava u vodiču. Ona predstavlja vrijeme potrebno da bi gustoća naboja pala $e \approx 2.718$ puta, tj. na približno 37% svog početnog iznosa. Praktično uzimamo da nakon $3T$ do $5T$ vremena naboj iščezne u vodiču. Red veličine konstante relaksacije mijenja se od 10^{-19} s za bakar, preko 10^{-6} s za destiliranu vodu, do 10^{+6} s za kremen.⁵¹ Opažamo da je za kovine T ekstremno kratko, tako da možemo pretpostaviti da svaka gustoća slobodnog naboja u unutrašnjosti vodiča iščezava i pojavljuje se kao što je bilo rečeno u članku 1.2.4, na njegovoj površini (skoro) istovremeno. I još više, možemo pretpostaviti da plošni naboj na površini vodiča slijedi sve vremenske promjene električnog polja koje ga je uzrokovalo, tako dugo dok su te promjene polja spore u usporedbi s vremenskom konstantom relaksacije. Ne samo u dobrim vodičima, nego i u destiliranoj vodi, slobodni naboj iščezava s vremenskom konstantom reda 1 μ s, i u vremenu od nekoliko mikrosekunda približava se nuli. S druge strane, vremenska konstanta za izolatore može iznositi i nekoliko dana. Upravo ta činjenica predstavlja jednu od bitnih razlika između vodiča i izolatora u prirodi.

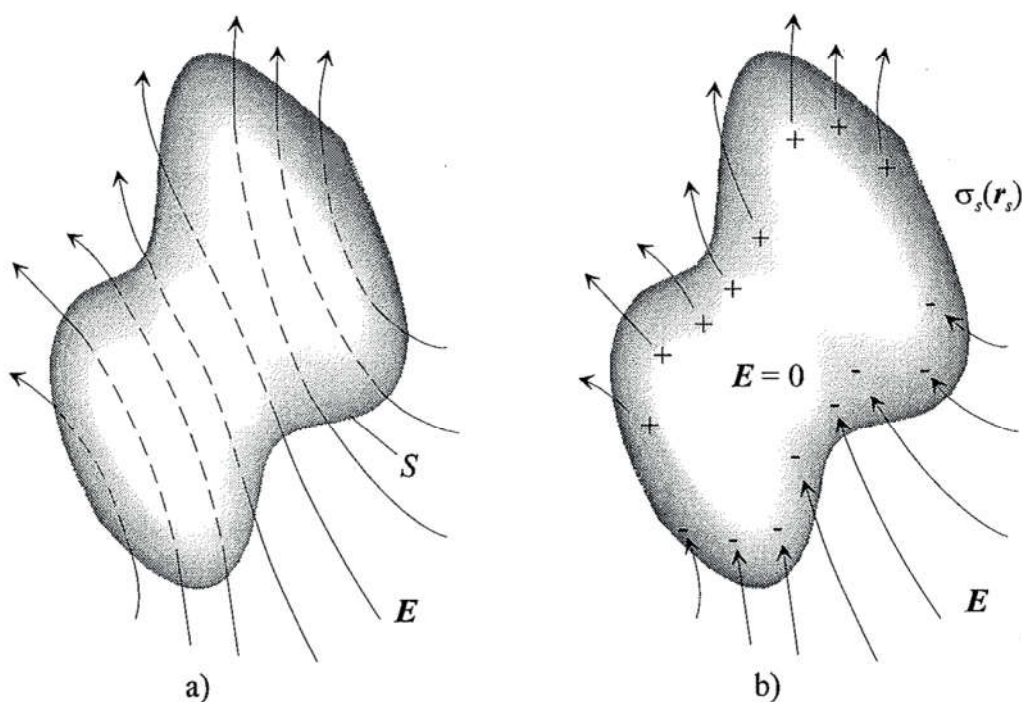
Zbog mnogih razloga pogodno je u makroskopskom pristupu elektromagnetskoj teoriji pretpostaviti da provodnost materijala može biti neizmjenjiva ($\kappa = \infty$). Tako smo uveli *pojam idealnog vodiča* kojeg nema u prirodi, ali su mu vrlo bliski *supravodiči*. U idealnom vodiču je točno $T = 0$, pa se slobodni naboj ne može uopće zadržati u njegovoj unutrašnjosti, nego se odmah pojavi na njegovoj površini. I ne samo to, u takvom materijalu uvijek mora biti (i u statičkom i u dinamičkom polju) $\mathbf{E} \equiv 0$, jer bi u suprotnom slučaju i pri najmanjem polju $\mathbf{E}$ potekla struja čija bi gustoća bila neizmjenjiva, tj. $\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E} \rightarrow \infty$, što nema smisla. Posljedica toga je također da ni vremenski promjenjivo magnetsko polje ne može postojati u njegovoj unutrašnjosti (budući je $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$). Da zaključimo: *u idealnom vodiču nema slobodnih naboja, ne može biti promjenjivog (dinamičkog) magnetskog polja ni bilo kakvog (ni statičkog ni dinamičkog) električnog polja*. Elektromagnetsko polje ne postoji u njemu, tj. ne može prodrijeti u idealni vodič.

Razmotrimo ponovno jednadžbu (1.4.5), i to za slučaj da se homogeni vodič konačnih dimenzija unese u elektrostatičko polje $\mathbf{E}$ u slobodnom prostoru, kao na slici 1.4.1.

⁵⁰ Analogna je vremenskoj konstanti u teoriji krugova $T = RC = \text{otpor} \times \text{kapacitet}$.

⁵¹ Ovdje treba imati na umu da se dielektrična konstanta vode i kremen (koji nisu vodiči kao npr. kovine) razlikuje od ϵ_0 . Pogledati članak 1.5.3.

Tada je $\nabla\kappa$ na površini vodiča (tj. na granici vodič – slobodni prostor) beskonačan i okomit na granicu. Ako polje $\mathbf{E}$ ima okomitu komponentu na granici, tada je desna strana jednadžbe (1.4.5) također beskonačna na graničnoj plohi, tj. na površini vodiča. Očito je da to vodi beskonačnoj volumnoj gustoći slobodnog naboja na graničnoj plohi. Budući da beskonačna gustoća naboja nije fizikalno moguća, to će prema definicijskoj jednadžbi (1.2.13) s jedne strane matematičke granične plohe postojati materijal provodnosti κ i na njemu plošni naboj konačne gustoće σ , a s druge strane granice slobodni prostor. Taj nagli skok na granici, tj. diskontinuitet u prostoru, makroskopski je prihvatljiv. Budući da u vodiču postoje slobodni naboji, označit ćemo tu plošnu raspodjelu naboja sa $\sigma_s(\mathbf{r}_s)$, gdje $\mathbf{r}_s$ je vektor položaja točke na graničnoj plohi S . Naboj na površini vodiča naziva se i *inducirani plošni naboj*.



Slika 1.4.1. Pojava plošnog naboja σ_s na površini neutralnog vodiča unesenog u polje $\mathbf{E}$

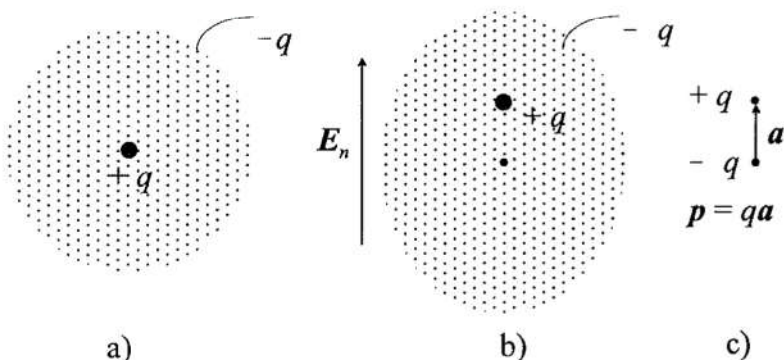
Budući da je σ_s jedini naboj na vodiču, jer u unutrašnjosti vodiča ne može biti naboja, utjecaj vodljivog tijela na elektrostatičko polje $\mathbf{E}$ može se nadomjestiti odgovarajućom raspodjelom plošnog naboja gustoće $\sigma_s(\mathbf{r}_s)$, na površini vodiča S . Taj plošni naboj prije svega poništava električno polje u unutrašnjosti vodiča, a u svom okolišu u slobodnom prostoru mijenja vanjsko polje $\mathbf{E}$. Kažemo da inducirani plošni naboj σ_s proizvodi u slobodnom prostoru vlastito sekundarno električno polje koje se superponira na izvorna narinuto polje $\mathbf{E}$. Na kraju ćemo još jednom upozoriti da postojanje provodnih struja $\mathbf{J}_s$ u vodljivom materijalu ($\kappa \neq 0$) ne nameće nužno postojanje ukupnog naboja gustoće različite od nule u njegovoj unutrašnjosti. Ukupan naboj može, ali ne mora, biti jednak nuli u materijalnom vodljivom mediju kada kroz njega teku provodne struje.

1.4.4. Polarizacija materijala. Vektor polarizacije P

U prethodnim odjeljcima 1.3. i 1.4.3. studirali smo elektromagnetska polja u slobodnom prostoru i u vodičima u prisutnosti slobodnih naboja i struja. Zrak je dovoljno rijedak da zanemarenje njegovih dielektričkih svojstava u polju ne prouzrokuje veliku pogrešku (istina ne uvijek), pa ga često nadomještamo praznim prostorom. U većini zadaća, međutim, susrećemo se s analizom elektromagnetskih polja u materijalnim medijima čiji odziv mora biti uzet u obzir. I dok smo pri studiju polja u vodičima pažnju usredotočili na slobodne naboje i struje, sada ćemo se usredotočiti na vezane naboje u materijalu, tj. na one koje nalazimo u *dielektričkim materijalima*.⁵² Svrha ovog članka jest da odredimo kako mikroskopski pomaci vezanih naboja u prisutnosti narinutog električnog polja mogu biti predstavljeni makroskopskim raspodjelama *polariziranih naboja i struja*.

Već smo rekli da su raspodjele atomskih naboja i struja poremećene iz njihovog neutralnog stanja, ako elektromagnetsko polje postoji u materijalu. Ti poremećaji djeluju na narinuto polje i mogu biti simulirani ekvivalentnim raspodjelama naboja i struja. Da bismo ustanovili tu ekvivalenciju, uvest ćemo pojmove *dipolnog momenta* atoma i *polarizacije* kao gustoće dipolnih momenata atoma i molekula u materijalu.

Na slici 1.4.2. prikazali smo jednostavne modele atoma materijala u neutralnom stanju⁵³ i atoma u kojem je simetrija raspodjele vezanog naboja poremećena narinutim vanjskim poljem.



Slika 1.4.2. Polarizacija vezanog naboja u atomu pod djelovanjem električnog polja; a) neutralni atom, b) polarizirani atom, c) predstavljanje dipolom.

Za materijal čija je raspodjela naboja poremećena iz njezinog normalnog stanja kažemo da je *električno polariziran*. Da bismo utvrdili mjeru stupnja polarizacije takvih materijala, koje nazivamo dielektricima, definirajmo dipolni moment mikroskopskog električnog dipola pripadajućeg atomu. Naime, dvije pomaknute raspodjele naboja u polariziranom atomu ne mogu više u potpunosti neutralizirati jedna drugu.

Ustvari, upotrebljavajući načelo linearne superpozicije, mogu se pomaknuti naboji

⁵² Dielektričkim materijalima, ili kraće dielektricima, nazivamo sve one materijale koji pokazuju svojstvo električne polarizacije.

⁵³ Stvarna raspodjela elektronskih naboja mora, naravno, biti određena kvantno-mehanički.

nadomjestiti, za promatrača izvan atoma, električnim dipolom⁵⁴ čiji dipolni moment p definiramo kao

$$p = qa, \quad (1.4.9)$$

gdje je q količina naboja svakog od dva po iznosu jednaka, a po predznaku suprotna točkasta naboja koji su međusobno za a pomaknuti. Pomak a je vektor usmjeren od negativnog prema pozitivnom naboju kao na slici 1.4.2. Dipolni moment mjeri se u *kulon-metrima* (Cm). Budući da je a atomskih dimenzija, p je vrlo malen.

Razlikujemo tri vrste polarizacije materijala. Mnogi dielektrički materijali neutralni su i ne pokazuju efekte polarizacije ako nije narinuto vanjsko polje. Kažemo da ne postoji permanentna polarizacija u molekularnoj strukturi takvih materijala. To su *nepolarne molekule*. Djelovanjem vanjskog električnog polja na takve nepolarne molekule dolazi do sličnih, prije opisanih, pomaka elektronskih naboja u svim atomima i taj proces nazivamo *elektronska polarizacija*.

Neki dielektrički materijali imaju polarizirane molekularne strukture i bez vanjskih električnih polja. Za takve dielektrike kažemo da imaju *polarne molekule*. Polarizacija pojedinih atoma i molekula, međutim, je nasumice orijentirana i zbog toga materijal nije polariziran u makroskopskim mjerilima. Ako narinemo vanjsko električno polje, ono djeluje na moment polarnih molekula i nastoji ih zakrenuti iz početnog slučajnog položaja u djelomično koherentno stanje duž smjera narinutog polja. Ova druga vrsta polarizacije poznata je kao *orijentacijska polarizacija*. Neki materijali koje nazivamo "elektretima", ako in. omogućimo da se skrutnu u narinutom električnom polju, postaju permanentno polarizirani u smjeru polja, tj. zadržavaju polarizaciju i nakon prestanka djelovanja polja. Neki drugi dielektrici, poznati kao "feroelektrički materijali", pokazuju *spontanu permanentnu polarizaciju*.

Treća vrsta polarizacije, poznata kao *ionska polarizacija*, rezultira iz razdvajanja pozitivnih i negativnih iona u molekulama koji se drže skupa ionskim vezama formiranim prijelazom elektrona s jednog atoma na drugi u molekuli. Sve tri vrste polarizacije mogu se istovremeno događati u materijalu.

Iako su fizikalni mehanizmi tih triju tipova polarizacije u materijalu u osnovi različiti, njihovo zajedničko makroskopsko ponašanje kao izvora elektromagnetskog polja izvan materijala je slično. Najjednostavniji makroskopski model koji možemo upotrijebiti jest da pretpostavimo proizvoljnu prostornu raspodjelu dipola, koja se mijenja relativno glatko i kontinuirano od točke do točke u materijalu. Zato definirajmo makroskopsko vektorsko polje $P(r,t)$, koje nazivamo *gustoća polarizacije* (vektor polarizacije, ili jednostavno polarizacija), tako da predstavlja ekvivalentnu glatku raspodjelu električnih dipola u jediničnom volumenu u svakoj točki polariziranog materijala

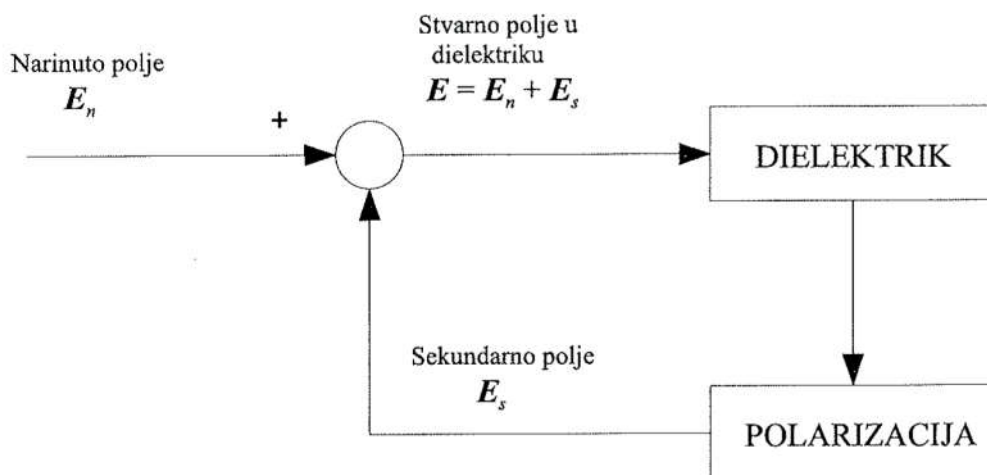
⁵⁴ Multipoli višega reda (kvadrupoli, oktopoli, itd.) mogu se također očekivati, ali je njihovo djelovanje dovoljno slabo da ih ovdje možemo zanemariti.

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ \text{oko } \mathbf{r}}} \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V} \quad (1.4.10)$$

Gustoća polarizacije $\mathbf{P}$ mjeri se u *kulonima po četvornom metru* (C/m²). Definirana je tako da je ukupni dipolni moment volumena dV , određen s $d\mathbf{p} = \mathbf{P}dV$. Očito je da je $\mathbf{P}$ *dipolni moment materijala u jedinici volumena*. Polarizacija je mjera poremećaja raspodjele vezanih naboja u materijalu u makroskopskim mjerilima. U sljedećem članku pokazat ćemo da polarizacija dielektrika proizvodi (sekundarno) polje koje se suprotstavlja narinutom električnom polju i mijenja njegovu raspodjelu i unutar i izvan dielektričkog materijala.

1.4.5. Dielektrik u električnom polju. Polarizirani naboj i struja

Utvdili smo da se polarizacija zbiva u dielektričkim materijalima pod utjecajem narinutog električnog polja. *Definirali smo polarizaciju pomoću vektora polarizacije $\mathbf{P}$* , koja je dipolni moment jediničnog volumena materijala ili broj dipola materijala u jedinici volumena $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ (N je broj molekula materijala u jedinici volumena). Kada unesemo dielektrik u električno polje $\mathbf{E}_n$, inducirana polarizacija proizvodi sekundarno električno polje $\mathbf{E}_s$, koje smanjuje narinuto polje $\mathbf{E}_n$ što opet povratno uzrokuje promjenu vektora polarizacije $\mathbf{P}$, itd.



Slika 1.4.3. Povratna sveza koja objašnjava polarizaciju u dielektriku

Kada je taj proces prilagođavanja potpun, tj. kada se postigne stacionarno stanje, suma originalnog narinutog polja $\mathbf{E}_n$ i sekundarnog polja $\mathbf{E}_s$ mora biti takva da proizvodi polarizaciju $\mathbf{P}$ koja rezultira u sekundarnom polju. To stanje možemo predstaviti *povratnom svezom*, kao na slici 1.4.3, i izraziti relacijom

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_s ,$$

gdje $\mathbf{E}$ predstavlja stvarno (rezultantno, ukupno) polje u dielektriku. Sekundarno polje $\mathbf{E}_s$ uzima u obzir postojanje materijala, a $\mathbf{E}_n$ je (vanjsko, narinuto) polje koje bi postojalo da nema materijalnog sredstva. Pokazali smo da učinak polarizacije materijala možemo jednostavno nadomjestiti raspodjelom dipola čija je gustoća određena jednadžbom (1.4.10). U namjeri da simuliramo učinak dielektrika u elektromagnetskom polju pomoću ekvivalentnih raspodjela naboja i struja, unesimo materijal u vremenski promjenjivo vanjsko električno polje. Pomak $\mathbf{a}_i$ od negativnog do pozitivnog središta naboja $\pm q_i$ u i -tom atomu materijala mijenja se s vremenom i povezan je s brzinom naboja $\mathbf{v}_i = \partial \mathbf{a}_i / \partial t$. Gibanje naboja $\pm q_i$ tvori *strujni element*

$$q_i \mathbf{v}_i = (+q_i) \mathbf{v}_i^+ + (-q_i) \mathbf{v}_i^- .$$

Ako je volumen i -tog atoma δV_i i ako je gustoća polariziranog naboja u tom volumenu $\pm \rho_{pi}$, tada je

$$q_i \mathbf{v}_i = \rho_{pi} \delta V_i \mathbf{v}_i = \rho_{pi} \delta V_i \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t} ,$$

strujni element udružen s i -tim titrajućim dipolom polariziranog materijala. Označimo li gustoću struje i -tog dipola kao $\mathbf{J}_{pi} = \rho_{pi} \mathbf{v}_i = \rho_{pi} \partial \mathbf{a}_i / \partial t$ i $\mathbf{p}_i = q_i \mathbf{a}_i$, tada je

$$\mathbf{J}_{pi} \delta V_i = \rho_{pi} \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t} \delta V_i = q_i \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (q_i \mathbf{a}_i) = \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial t} ,$$

budući da je q_i konstantno za i -ti atom. Ako ovu ekvivalenciju prenesemo u makroskopski oblik sumiranjem mikroskopskih elementarnih struja preko makroskopski malenog volumena dV , dobivamo

$$\mathbf{J}_p dV = \sum_i \mathbf{J}_{pi} \delta V_i = \frac{\partial}{\partial t} \sum_i \mathbf{p}_i ,$$

gdje je $\mathbf{J}_p$ makroskopska *gustoća polarizirane struje*. Konačno dobivamo

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{dV} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} , \quad (1.4.11)$$

pomoću definicije gustoće polarizacije $\mathbf{P}$ dane u jednadžbi (1.4.10). Budući da je polarizirani (vezani) naboj očuvan u svakom atomu materijala, prema jednadžbi kontinuiteta možemo pisati da je

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} \equiv 0, \quad (1.4.12)$$

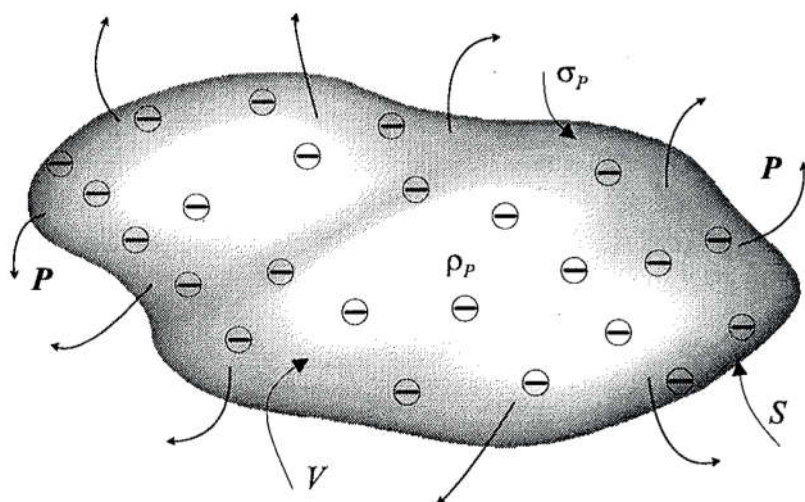
pa ako zamijenimo $\mathbf{J}_p = \partial \mathbf{P} / \partial t$ i zamijenimo red diferenciranja dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_p) \equiv 0.$$

Uz pretpostavku da prije početka integracije nije bilo naboja polarizacije imamo

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \text{u } V, \quad (1.4.13)$$

gdje ρ_p predstavlja makroskopsku *gustoću ekvivalentnog polariziranog naboja u materijalu*. $\mathbf{J}_p$ se mjeri u *amperima po četvornom metru* (A/m^2), a ρ_p u *kulonima po prostornom metru* (C/m^3).



Slika 1.4.4. Izvori polja $\mathbf{P}$ u dielektriku

Istaknimo činjenicu da jednačba (1.4.13) utvrđuje da su izvori vektorskog polja $\mathbf{P}$ negativni (polarizirani) naboji ρ_p u volumenu V , kao što smo pokazali na slici 1.4.4. Ukupan polarizirani naboj Q_p u promatranom volumenu V koji je zatvoren plohom S , prema (1.2.9) i (1.4.13) i uz pomoć Gaussova teorema divergencije iznosi

$$Q_p = \int_V \rho_p dV = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV = - \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.4.14)$$

gdje je $\mathbf{n}$ jedinični vektor okomice na plohu S usmjeren prema vani. Iz jednačbe (1.4.14) proizlazi da se ne pojavljuje gustoća polariziranog naboja u homogenoj prostornoj raspodjeli naboja, tj. $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, jer je $\mathbf{P} = \text{konst.}$ Pojaviti će se zato plošni polarizirani naboj gustoće

$$\sigma_p = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \quad \text{na } S, \quad (1.4.15)$$

na granici homogene raspodjele dipola (na graničnoj plohi S homogenog dielektrika koji

se nalazi u slobodnom prostoru), tj. u točkama u kojima $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ je diskontinuirano. Plošna gustoća vezanog polariziranog naboja σ_p definirana je makroskopski prema jednadžbama (1.2.12) i (1.2.13) analogno kao za slobodne naboje.

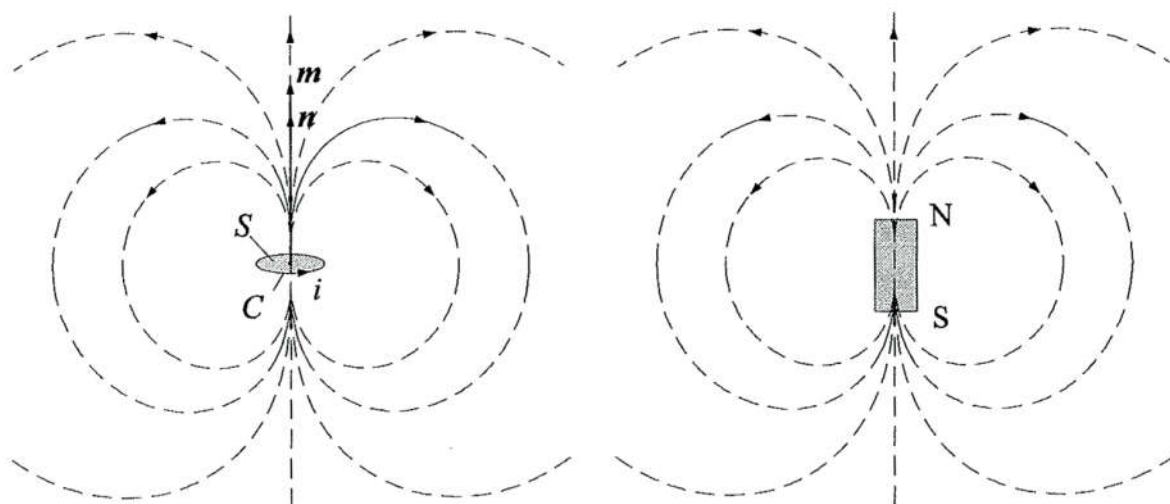
Na kraju treba upozoriti na činjenicu da u materijalu u mirovanju fizikalno nisu opažene plošne polarizirane struje. Naime, ako je za materijal u gibanju s brzinom $\mathbf{v}$, plošni sloj naboja σ_p dovoljan da bi proizveo ekvivalentnu plošnu struju $\mathbf{K}_p = \sigma_p \mathbf{v}$, tada je u stacionarnim sustavima uvijek $\mathbf{K}_p = 0$. Na površini dielektrika u slobodnom prostoru, prema definiciji polariziranih struja $\mathbf{J}_p$ i naboja σ_p mora biti zadovoljena relacija

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_p = - \frac{\partial \sigma_p}{\partial t}, \quad (1.4.16)$$

gdje je $\mathbf{n}$ okomica na površini dielektrika, usmjerena iz dielektrika u slobodni prostor.

1.4.6. Magnetiziranje materijala. Vektor magnetiziranja $\mathbf{M}$

Eksperimentalno je opaženo da neki materijali unijeti u magnetsko polje djeluju na polje i mijenjaju ga. Poznato je da je odziv materijala na vanjsko narinuto polje prouzrokovan mikroskopskim elementarnim magnetskim dipolima koje tvori gibanje vezanih naboja u materijalu. Rezultirajuća promjena koja se iskazuje u mikroskopskim *magnetskim dipolnim momentima* u materijalu poznata je kao *magnetiziranje*. Materijali se nazivaju magnetskim materijalima ili magneticima.



Slika 1.4.5. Magnetsko polje strujne petlje i magnetske igle

Slično kao za električni dipol u članku 1.4.4. definirajmo pojam magnetskog dipolnog momenta. Struja i koja teče petljom C i obrubljuje plohu S proizvodi isti učinak na većim udaljenostima kao i magnetska igla čiji je sjeverni pol orijentiran u smjeru pozitivne okomice $\mathbf{n}$ na plohu S kao što smo pokazali na slici 1.4.5.

Budući da magnetska igla ima dva pola (sjeverni i južni) razmaknuta na malu udaljenost (u usporedbi s udaljenošću promatrača), nazivamo je magnetskim dipolom, a jakost joj mjerimo magnetskim momentom m . Magnetski moment strujne petlje definira se kao

$$m = n i S, \quad (1.4.17)$$

i mjeri se u *amper-četvornim metrima* (Am^2). Budući da gibanje naboja tvori struju, u skladu s pojednostavnjenim planetarnim modelom atoma svaki atom može biti karakteriziran superpozicijom magnetskih dipolnih momenata odgovarajućih orbitalnim gibanjima elektrona, spinovima elektrona i spinu jezgre. Kako je zbog teške mase jezgre kutna brzina spina jezgre mnogo manja od one spina elektrona, stoga dipolni moment uzrokovani nuklearnim spinom možemo zanemariti u usporedbi s ostala dva učinka.

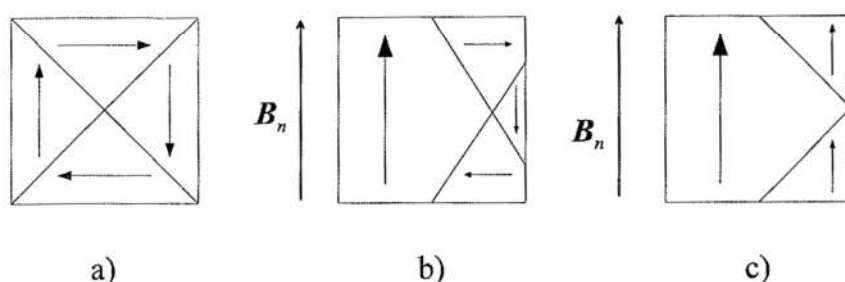
Postoje četiri glavne vrste magnetskih učinaka u materijalu: *feromagnetizam*, *ferimagnetizam*, *paramagnetizam* i *dijamagnetizam*. Prve tri vrste magnetizma pretežno su uzrokovane permanentnim magnetskim dipolnim momentima elektrona, koji rezultiraju iz njihovih svojstvenih spinova oko vlastitih osi. Samo vrlo mali udjel može se pripisati struji proizvedenoj orbitalnim gibanjima elektrona oko pozitivnih jezgri u atomima. Dijamagnetizam nastaje potpuno zbog ovog posljednjeg gibanja. Dijamagnetizam rezultira iz promjena induciranih u magnetskim dipolima orbitalnih elektrona kada se narine vanjsko magnetsko polje.

U mnogim materijalima ukupni magnetski moment svakog atoma je nula u odsutnosti vanjskog magnetskog polja. Narinuto magnetsko polje djeluje tako da inducira dipolni moment ili da *magnetizira* materijal, s tim što mijenja kutne brzine elektrona u orbitama. To inducirano magnetiziranje suprotno je narinutom polju, tako da se pojavi smanjenje gustoće ukupnog magnetskog tijeka u materijalu prema narinutoj vrijednosti. Za takve materijale kažemo da su *dijamagnetični*. Ustvari, dijamagnetizam koji je istovaljan s elektronskom polarizacijom u dielektriku, prevladavajući je u svim materijalima. Paramagnetizam, feromagnetizam i ferimagnetizam razlikuju se međusobno jedino u načinu na koji se permanentni dipolni momenti povezuju. Paramagnetizam je sličan orijentacijskoj polarizaciji u dielektričkim materijalima. U paramagnetskim materijalima pojedini atomi imaju magnetske momente čak i u odsutnosti vanjskog magnetskog polja. Ti permanentni magnetski momenti pojedinih atoma su nasumce orijentirani, tako da je ukupno magnetiziranje u makroskopskim razmjerama nula. Narinuto magnetsko polje zakreće te permanentne dipole u djelomično usmjeren poredak duž polja, inducirajući ukupno magnetiziranje koje rezultira povećanjem narinutog polja.

U feromagnetskim i ferimagnetskim materijalima sile između susjednih molekularnih dipolnih momenata dovoljno su jake u odnosu na neuređene učinke termičkog gibanja da se dipoli orijentiraju u istom smjeru unutar malih područja poznatih kao domene.⁵⁵ Rezultantno magnetsko polje u blizini materijala ovisit će o relativnoj veličini

⁵⁵ Domene je uveo Weiss 1907. godine, pri objašnjenju feromagnetizma.

tih domena i o orijentaciji molekularnih dipola unutar njih. Ono može biti različito od nule, čak i u odsutnosti vanjskog magnetskog polja ispod određene kritične temperature poznate kao Curieva temperatura. (Iznad Curieve temperature iščezava spontana magnetizacija i pojavljuje se paramagnetsko ponašanje.) U tom slučaju materijal se općenito naziva *permanentnim magnetom*. Struktura domena može biti izmijenjena narinutim vanjskim magnetskim poljem. Pod njegovim djelovanjem dolazi do porasta veličine domena u kojima molekularni dipolni momenti imaju komponente paralelne vanjskom polju, dok se druge domene smanjuju. Ta promjena strukture domena očituje se u porastu ukupnog makroskopskog magnetiziranja materijala u smjeru narinutog polja kao što je pokazano na slici 1.4.6.



Slika 1.4.6. Prikaz koraka u postupku magnetiziranja feromagnetskog materijala: a) ne-magnetizirano stanje, b) gibanje granice domena, c) zakretanje domena

Ako se primijeni dovoljno jako vanjsko polje, gibanje granica područja udruženo je s rotacijom domena, pa se materijal magnetizira do *zasićenja*. Materijal zadržava neku magnetiziranost i nakon prestanka djelovanja vanjskog polja. Ustvari, treba primijeniti suprotno vanjsko polje da bi se poništilo ukupno magnetiziranje materijala. Taj fenomen, prema kojem je trenutno stanje magnetiziranja materijala ovisno o njegovoj prethodnoj magnetskoj povijesti, poznat je kao *histereza*. Za razliku od dijamagnetskih i paramagnetskih materijala magnetiziranje feromagnetskih materijala je nelinearna pojava u odnosu na narinuto polje.

Razlika između feromagnetizma i ferimagnetizma nastaje iz toga što su molekularni dipoli unutar svake domene u feromagneticima svi paralelni, dok jake međuatomske veze u ferimagnetskim materijalima prisiljavaju neke molekularne dipole u svakoj domeni da budu antiparalelni glavnom smjeru magnetiziranja u domeni. Podgrupa ferimagnetskih materijala poznatih kao *feriti* posebno je važna u tehnici, budući da ti materijali imaju znatno manju električnu provodnost od feromagnetskih materijala, dok su im magnetska svojstva usporediva s feromagneticima.

Iako smo zbog jasnoće započeli analizu magnetizma tim opisnim pregledom mikroskopskih svojstava magnetskih materijala, poznavanje mikroskopske teorije magnetizma nije nužno za utvrđivanje makroskopskih svojstava magnetskih materijala. Kao i u analognom slučaju električne polarizacije, makroskopski opis ponašanja magnetskog materijala može biti zasnovan na samo jednom novom vektoru, makroskopskoj *gustoći magnetiziranja* $\mathbf{M}$ (vektor magnetiziranja ili jednostavno magnetiziranje), definiranoj pomoću učinaka magnetiziranja opaženih izvan materijala. Pretpostavit ćemo postojanje glatko promjenjive makroskopske gustoće ekvivalentnih dipolnih momenata. Zato definiramo vektor gustoće magnetiziranja $\mathbf{M}$ kao ekvivalentnu kontinuiranu raspodjelu

magnetskih dipola u jedinici volumena, u svakoj točki magnetiziranog materijala, tj.

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ \text{oko } \mathbf{r}}} \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V} . \quad (1.4.18)$$

Gustoća magnetiziranja $\mathbf{M}$ ima značenje dipolnog momenta po jedinici volumena, pa je ukupan dipolni moment u volumenu dV jednak $d\mathbf{m} = \mathbf{M}dV$. Jedinica za $\mathbf{M}$ je *amper po metru* (A/m).

1.4.7. Model amperske struje u magnetskom materijalu

Postoje dva fundamentalno različita teorijska pristupa i metode za analizu ponašanja magnetskog materijala unesenog u elektromagnetsko polje, tj. za određivanje gustoća različitih ekvivalentnih makroskopskih izvora iz vektora magnetiziranja $\mathbf{M}$. Jedan pristup operira s modelom amperskih struja $\mathbf{J}_a$, a drugi s modelom magnetskih naboja i struja ρ_m i $\mathbf{J}_m$. Mi ćemo analizirati i usporediti oba pristupa, započevši prvo s modelom amperskih struja.

Kao i za električnu polarizaciju u točki 1.4.5, magnetiziranje magnetskog materijala unesenog u narinuto polje $\mathbf{B}_n$ možemo ilustrirati povratnom svezom, tj. djelovanjem sekundarnog polja $\mathbf{B}_s$ materijala tako da je stvarno polje u magnetiku

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_n + \mathbf{B}_s . \quad (1.4.19)$$

Slično kao što smo električnu polarizaciju dielektrika uzimali u obzir pomoću polarizacijskog naboja ρ_p učinke spinova elektrona i njihovih orbitalnih gibanja u magneticima uzet ćemo u obzir pomoću ekvivalentne makroskopske električne struje gustoće

$$\mathbf{J}_a = \nabla \times \mathbf{M} , \quad (1.4.20)$$

koju nazivamo *gustoćom amperske struje*, i mjerimo u *amperima po četvornom metru* (A/m²). Model amperske struje temelji se na opažanju da magnetski dipoli mogu biti proizvedeni u slobodnom prostoru pomoću električne struje. Definiciju $\mathbf{J}_a$ pomoću jednadžbe (1.4.20) možemo objasniti na sljedeći način: budući da $\mathbf{J}_a$ predstavlja učinke elektronskih spinova i orbita, ista struja ulazi i napušta diferencijalni volumen dV . Tako je tijekom struje $\mathbf{J}_a$ kroz plohu koja omeđuje diferencijalni volumen dV jednak nuli. Iz definicije divergencije onda slijedi da $\nabla \cdot \mathbf{J}_a$ mora biti jednako nuli, tj.

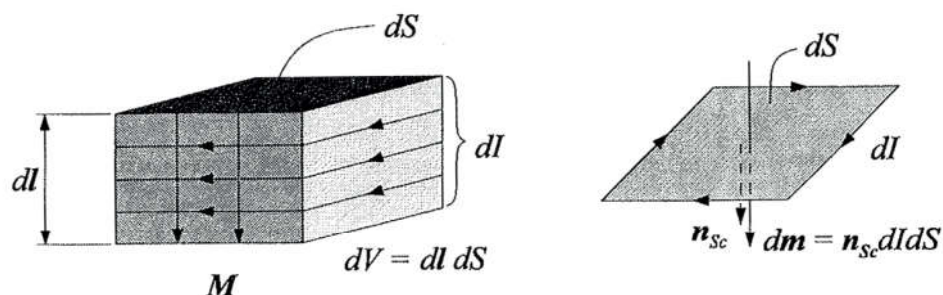
$$\nabla \cdot \mathbf{J}_a = 0 . \quad (1.4.21)$$

Zato možemo zaključiti da $\mathbf{J}_a$ predstavlja vektorsko polje bez izvora, tj. *solenoidalno polje*, pa se ono može izraziti rotorom neke druge vektorske funkcije. Da je ta nova vektorska funkcija upravo magnetiziranje $\mathbf{M}$ proizlazi iz jednostavnog

razmatranja koje slijedi. Prema definicijskoj jednadžbi (1.4.18) ukupni dipolni moment volumena dV magnetiziranog materijala je

$$dm = M dV = (M \cdot dl) \cdot n_{sc} dS ,$$

gdje je $dV = dl dS$, a n okomica određena prema slici 1.4.7.

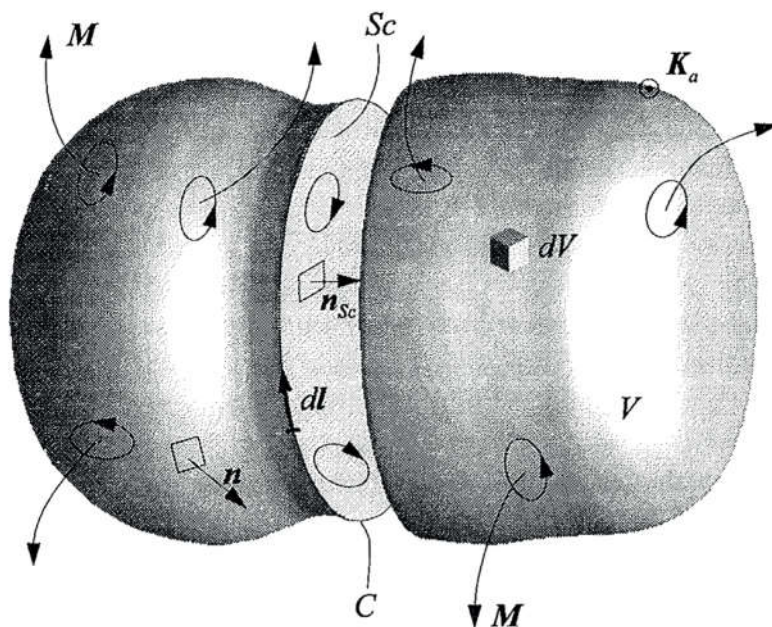


Slika 1.4.7. Uz istraživanje učinka magnetiziranja elementarnog volumena materijala i njegovo predstavljanje amperskim strujama

U skladu s relacijom (1.4.17) dobivamo da je struja u elementarnom volumenu

$$dI = M \cdot dl,$$

gdje je dl duljina u dV u smjeru M .



Slika 1.4.8. Izvori polja M u magnetiziranom materijalu

Ukupna inducirana struja koja teče iz plohe Sc , magnetiziranog materijala dobiva se integracijom diferencijalnih doprinosa preko elementarnih duljina dl krivulje C , koja zatvara plohu Sc

$$I_a = \oint_C dI = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_{Sc} \mathbf{J}_a \cdot \mathbf{n}_{Sc} dS, \quad (1.4.22)$$

gdje je $\mathbf{J}_a$ plošna gustoća makroskopske amperske struje I_a . Podijelimo li jednadžbu (1.4.22) sa Sc i uzmemo li limes kada $Sc \rightarrow 0$, pomoću Stokesova teorema dobivamo da je $\mathbf{J}_a = \nabla \times \mathbf{M}$, tj. relaciju (1.4.20) koju smo željeli dokazati. Jednadžba (1.4.20) upotreb- ljiva je samo ako je $\nabla \times \mathbf{M}$ konačan, tj. nije singularan. Međutim, na graničnoj plohi S magnetskog materijala događaju se diskontinuiteti u $\mathbf{M}$, pa moramo biti pažljivi s upotrebom relacije (1.4.20). Vektor $\mathbf{J}_a$ na površini magnetika zbog toga postaje singula- ran, pa uvodimo pojam sloja *amperske plošne struje* $\mathbf{K}_a$, gustoće

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad \text{na } S, \quad (1.4.23)$$

gdje je $\mathbf{n}$ okomica na graničnu plohu S koja zatvara magnetski materijal u volumenu V . Jedinica mjere amperskog strujnog obloga $\mathbf{K}_a$ je *amper po metru* (A/m).

Ukupna volumna struja kroz poprečni presjek ploštine Sc , volumena V , ograničen s C , kako smo pokazali na slici 1.4.8, dana je integralom (1.4.22)

$$\begin{aligned} I_a &= \int_{Sc} \mathbf{J}_a \cdot \mathbf{n}_{Sc} dS = \int_{Sc} (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n}_{Sc} dS = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \\ &= - \oint_C (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times d\mathbf{l}) = - \oint_C \mathbf{K}_a \cdot (\mathbf{n} \times d\mathbf{l}). \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

Ovdje smo koristili Stokesov teorem da plošnu integraciju transformiramo u linijsku integraciju. Desna strana integrala je upravo plošna struja, koja prolazi kroz krivulju C u suprotnom smjeru od volumne struje. Sumirajući na kraju možemo zaključiti da mag- netski dipolni momenti, nastali magnetiziranjem magnetskog materijala unesenog u magnetsko polje, imaju općenito učinak na nastanak:

- amperske plošne struje, gustoće određene jednadžbom (1.4.23) na graničnim ploha- ma magnetskog materijala;
 - amperske volumne struje, gustoće dane jednadžbom (1.4.20) u magnetskom materi- jalu, i to tako da je ukupna volumna struja koja teče kroz bilo koju poprečnu plohu u materijalu točno suprotna ukupnoj plošnoj struji kroz petlju koja zatvara tu plohu.
- Utvdili smo da amperske struje mijenjaju narinuto magnetsko polje i unutar i izvan magnetskog materijala. Konačni korak u toj teoriji učinit ćemo u članku 1.5.1, gdje ćemo se vratiti našim temeljnim postulatima koji određuju ponašanje elektromagnetskog polja u prisutnosti materijala, i pretpostaviti da se makroskopska polja u magnetskom materijalu pokoravaju osnovnim zakonima za polja u slobodnom prostoru, ali uključu- jući $\mathbf{J}_a$ i $\mathbf{K}_a$ kao dodatne izvore elektromagnetskog polja u magnetskom materijalu.

1.4.8. Model magnetskog naboja i struje

U prethodnom članku opisali smo makroskopske učinke magnetiziranja materijala pomoću ekvivalentne raspodjele struja $\mathbf{J}_a$ i $\mathbf{K}_a$. Taj pristup se temeljio na opažanju da se magnetski dipoli mogu nadomjestiti elementarnim zatvorenim strujnim petljama što se dobro približava fizikalnoj realnosti. S druge strane, elementarna strujna petlja nije jedini prihvatljiv izvor koji proizvodi polje dipola u slobodnom prostoru. Takvo polje mogu proizvesti i dva točkasta naboja suprotna predznaka i jednakog iznosa. Iz matematičkih svojstava Maxwellovih jednadžbi (1.3.9a – d) za elektromagnetsko polje u slobodnom prostoru, takvih kao što su sličnost i antisimetrija po vektorima $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, prema intuiciji bi se moglo očekivati da su analogni magnetski dipoli kao izvori polja moguć i ako bi magnetska kopija električnog naboja bila utvrđena. Nađeno je *da bi magnetski izvor koji bi bio kopija električnog naboja upravo bio magnetski naboj* ρ_m .

Prije nego nastavimo s razradom pojma magnetskog naboja, učinimo neke temeljne opaske. Prvo, izolirani djelić magnetskog naboja još nije bio eksperimentalno opažen u prirodi. Ustvari to je implicitno potvrđeno i u originalnom obliku osnovnih zakona elektromagnetizma kao i u Maxwellovim jednadžbama (1.3.9a – d) za slobodni prostor. Gaušsov zakon (1.3.9d) za magnetsko polje utvrđuje da *nema magnetskog naboja*. Drugo, iako do danas nema eksperimentalne potvrde o postojanju magnetskih naboja ili monopola, uglavnom zbog jednog ranijeg teorijskog Diracova rada,⁵⁶ istraživanje monopola obnavlja se uvijek kada se otkriju nova energetska područja u fizici visokih energija, ili kada novi izvori materijala, takvi kao stijene s Mjeseca, postanu dostupni. Diracov argument se sastojao u tome da bi samo postojanje magnetskog monopola u svemiru osiguralo objašnjenje diskretne prirode električnog naboja, te najdublje misterije fizikalnog svijeta.

S druge strane, invarijantnost Maxwellovih jednadžbi, koja se postiže dualnom transformacijom,⁵⁷ pokazuje da je samo stvar dogovora da govorimo o česticama koje posjeduju električni naboj, a nemaju magnetskog naboja. Jedino je značajno pri tome (da li ili ne) da sve čestice imaju isti omjer magnetskog i električnog naboja. Ako imaju, tada možemo provesti dualnu transformaciju s takvim izborom da magnetski naboji i struje budu nula, tj. $\rho_m = 0$ i $\mathbf{J}_m = 0$. Tada imamo Maxwellove jednadžbe u uobičajenom i dobro poznatom obliku, koji ćemo stalno koristiti i u ovoj knjizi.

Zato pojam magnetskog naboja moramo uzeti kao čistu fikciju matematičke teorije koju uvodimo da bi poslužila što lakšem objašnjenju pojave magnetiziranja materijala u elektromagnetskom polju. Pogotovo jer nema ničega u postojećoj teoriji što bi se protivilo uvođenju magnetskih naboja. Ako nam uvođenje magnetskog naboja omogući egzaktno određivanje mjerljivog vanjskog polja, tada će rezultirajuća makroskopska

⁵⁶ Paul Adrien Maurice Dirac, (1902 – 1984), engleski fizičar. Pogledati P.A.M. Dirac, Proc.Roy.Soc. A133, 60, 1931.g, Phys. Rev. 74, 817, 1948.g.

⁵⁷ Pogledati M. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York, 1975.

teorija magnetiziranog materijala biti valjana, isto kao i ranija teorija izgrađena na petljama amperskih struja. Naravno, da konačna potvrda valjanosti rezultata tih teorija, uostalom kao i svih drugih, treba biti učinjena mjerenjima u pokusima.

Magnetski naboj q_m u magnetiziranom materijalu možemo definirati po analogiji s odgovarajućim vezanim električnim nabojem u polariziranom materijalu. Slično kao što smo definirali električni dipol $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$ u jednadžbi (1.4.9), definirat ćemo i *moment magnetskog dipola*

$$\mathbf{j} = \mu_0 \mathbf{m} = q_m \mathbf{a} , \quad (1.4.25)$$

gdje je permeabilnost vakuumu $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ henrija po metru (H/m), a pojavljuje se samo zato jer se $\mathbf{j} = \mu_0 \mathbf{m}$ po tradiciji uzima da je analogno $\mathbf{p}$. Ako je μ_0 u H/m, i $\mathbf{m}$ u A/m², vidimo da dimenzija q_m je *veber* (Wb), odnosno *volt-sekunda*. Jedinica za $\mathbf{j}$ je *veber-metar* (Wbm). Važno je primijetiti da je jedinica za q_m veber, a ne kulon, i premda je magnetski naboj na mnogo načina sličan električnom naboju q , on ni na koji fizikalni način nije jednak q . Točnije možemo reći da q_m djeluje kao dvojnik (dual) od q , i dok su te dvojne veličine matematički slične, one su fizikalno različite. Nastavljajući zaključivanje po analogiji q_m s q , i $\mathbf{j} = \mu_0 \mathbf{m}$ s $\mathbf{p}$, slijedi da ukupnu makroskopsku raspodjelu izvora u modelu s magnetskim nabojem možemo prema jednadžbama (1.4.11) i (1.4.13) izraziti ekvivalentnim skupom gustoća magnetskih naboja ρ_m

$$\rho_m \equiv -\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{M}) , \quad (1.4.26)$$

i magnetskih struja $\mathbf{J}_m$

$$\mathbf{J}_m \equiv +\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \mathbf{M}) . \quad (1.4.27)$$

Ovdje ρ_m predstavlja gustoću magnetskog volumnog naboja (u Wb/m³), a $\mathbf{J}_m$ gustoću magnetske struje (u V/m²). Polazeći od odgovarajućeg ponašanja ρ_p i $\mathbf{J}_p$ u jednadžbi (1.4.12), jasno je da i magnetski naboj mora zadovoljavati zakon o očuvanju naboja

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m = \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \mathbf{M} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mu_0 \mathbf{M}) = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} . \quad (1.4.28)$$

Da bismo upotpunili propisivanje ekvivalentnih gustoća izvora pomoću magnetskih naboja, dolazimo i do propisivanja *gustoće magnetskog plošnog naboja* σ_m na graničnoj plohi magnetskog materijala u slobodnom prostoru

$$\sigma_m = -\mathbf{n} \cdot \mu_0 \mathbf{M} , \quad (1.4.29)$$

gdje okomica $\mathbf{n}$ na graničnu plohu gleda iz magnetskog materijala u prazni tj. slobodni prostor. Konačno, gustoća magnetskog plošnog naboja mora također zadovoljiti zakon o očuvanju magnetskog naboja, pa je na graničnoj plohi magnetika u slobodnom prostoru

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_m = - \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} . \quad (1.4.30)$$

Kao i u slučaju električne polarizacije, ne postoji *magnetska plošna struja* $\mathbf{K}_m$ (u V/m) u mirujućem materijalu.

1.4.9. Vektori polja $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$. Električni i magnetski tijekovi

U prethodnim člancima postupno smo uveli i opisali vodiče, dielektrike (izolatore) i magnetske materijale. Studirali smo pojave koje se događaju u tim materijalima u nazočnosti električnih i magnetskih polja. Utvrdili smo da u usporedbi s Maxwellovim jednadžbama u slobodnom prostoru, u zakone za polja u materijalu treba uvesti nove izvore polja. To su vektori polarizacije $\mathbf{P}$ i magnetiziranja $\mathbf{M}$, koji predstavljaju makroskopski odziv materijala na narinuto polje. Učinili smo i korak dalje, pa smo interakciju materijala i elektromagnetskog polja zadanog vektorima $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ predstavili uz pomoć već prije definiranih izvora slobodnih naboja ρ_s i struja $\mathbf{J}_s$ (provodnih i konvekcijskih), još i ekvivalentnim vezanim (u materijalu) polarizacijskim nabojima ρ_p i strujama $\mathbf{J}_p$ te amperskim strujama $\mathbf{J}_a$, odnosno magnetskim nabojima ρ_m i strujama $\mathbf{J}_m$. Svi ti prostorno raspoređeni naboji i struje u materijalu često se mogu pojaviti kao plošne gustoće naboja i struja na graničnim plohama materijala o čemu smo prethodno više rekli. Predodžba o rješavanju elektromagnetskog polja u koje je unesen materijal bit će potpuna tek kad se podsjetimo da je u osnovi našeg pristupa postulat da vrijedi načelo linearne superpozicije, tj. da uz zadane neovisne izvore (ρ_s i $\mathbf{J}_s$) i određene ovisne izvore ($\mathbf{P}$ i $\mathbf{M}$, ili ρ_p , $\mathbf{J}_p$, $\mathbf{J}_a$, ρ_m , $\mathbf{J}_m$) koji zamjenjuju djelovanje materijala, ukupno stvarno makroskopsko elektromagnetsko polje, s vektorima $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, računa se tada iz Maxwellovih jednadžbi u slobodnom prostoru. Pritom ne treba smetnuti s uma da se uz prije navedene primarne izvore polja pojavljuju i vremenske promjene električnog i magnetskog polja i već spominjane struje pomaka, kao sekundarni izvori elektromagnetskog polja.

O svemu tome ćemo potanko pisati u odjeljku o Maxwellovim jednadžbama za polje u materijalu. U ovom članku usredotočit ćemo se na uvođenje dva nova vektora polja $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ koji su vrlo važni u makroskopskom pristupu elektromagnetskim poljima. Oni će nam omogućiti rješavanje polja, uključujući materijalne medije, bez eksplicitnog uzimanja u obzir različitih pojava koje se zbivaju u njima. Njihov značaj u inženjerskom pristupu elektromagnetskoj teoriji i njezinoj primjeni u elektrotehnici je velik, pa ih mnogi pisci⁵⁸ uzimaju jednako značajnim vektorima $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, te sva četiri vektora $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ smatraju temeljnim vektorima elektromagnetskog polja.

Usredotočimo zato našu pažnju i odvojimo više prostora uvođenju i definiranju tih,

⁵⁸ Pogledati u jednom od već klasičnih djela elektromagnetske teorije: J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

kako rekosmo, vrlo važnih vektora: *električne indukcije* $\mathbf{D}$ i *jakosti magnetskog polja* $\mathbf{H}$. U člancima 1.4.4. i 1.4.5. utvrdili smo da u dielektričkim materijalima u neutralnom stanju nema makroskopske raspodjele vezanih naboja ni dipola. Unošenjem takvog dielektrika u vanjsko električno polje $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$, koje je izgrađeno od neovisnih slobodnih naboja, čija je raspodjela u slobodnom prostoru nepromjenjiva i čvrsto zadana s $\rho_s(\mathbf{r})$, tako da je $\nabla \cdot \mathbf{E}_n = \rho_s/\epsilon_0$ – vezani naboji u dielektriku zauzet će nove položaje, što će rezultirati u raspodjeli dipola unutar dielektrika. To novo stanje u dielektriku predstavljamo raspodjelom induciranih dipola $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ i njoj odgovarajućom gustoćom vezanih (induciranih) naboja $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$. Ukupno električno polje $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ u polariziranom dielektriku je superpozicija u slobodnom prostoru narinutog neovisnog polja $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ i sekundarnog (induciranog) polja $\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \rho_p/\epsilon_0$ od polarizacije $\mathbf{P}$, tj. od odgovarajućeg vezanog naboja ρ_p tako da je $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_s$. Konačno se to, pomoću jednadžbi (1.3.9a), (1.4.10), (1.4.11) i (1.4.13) izražava relacijom

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}_n + \nabla \cdot \mathbf{E}_s = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} + \frac{\rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} ,$$

pa stoga slijedi

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_s .$$

Definirat ćemo sada novi vektor $\mathbf{D}$, poznat kao *vektor električne indukcije* ili vektor gustoće tijeka pomaka ili jednostavno *vektor električnog pomaka*, kao

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad (1.4.31)$$

koji zadovoljava jednadžbu

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_s . \quad (1.4.32)$$

Primjećujemo da je jedinica za $\mathbf{D}$ ista kao za $\epsilon_0 \mathbf{E}$ i $\mathbf{P}$, tj. *kulon po četvornom metru* (C/m^2), i zato je on *vektor gustoće električnog tijeka*. Treba upozoriti: premda je definicijska jednadžba (1.4.31) pojmovno zadovoljavajuća, ona stvarno ne može biti smatrana operacijskom definicijom. Zbog tog razloga, a i zbog matematičkih pogodnosti, vektor $\mathbf{D}$ se često zamjenjuje u jednadžbama uvođenjem druge nove veličine koja se naziva *dielektričnost*. Već smo prije rekli da $\mathbf{P}$ obično na zamršen i nepoznat način ovisi o $\mathbf{E}$. Podsjetimo se samo da je $\mathbf{E}_s = f_1(\mathbf{P})$ i da je $\mathbf{P} = f_2(\mathbf{E}_n + \mathbf{E}_s)$, pa bi se te jednadžbe morale rješavati simultano. U praktičnim okolnostima nađeno je empiričkim putem da je polarizacija $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ linearno povezana s električnim poljem $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, tako da je

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e \mathbf{E} . \quad (1.4.33)$$

Za izotropne dielektrike tenzor $\tilde{\chi}_e$, koji se naziva *električna susceptibilnost* dielektričkog materijala, je skalarna veličina, pa je

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} , \quad (1.4.34)$$

što pomoću (1.4.31) daje

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} . \quad (1.4.35)$$

U ovim novim *relacijama građe* (1.4.33), (1.4.34) i (1.4.35) izravno su povezani vektori električnog polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{D}$ pomoću novih veličina

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad ; \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r , \quad (1.4.36a,b)$$

koje nazivamo: ϵ , kako je već rečeno, *apsolutna dielektričnost*⁵⁹ (mjeri se u *faradima po metru* (F/m)), i ϵ_r , *relativna dielektričnost*, ili jednostavno *dielektričnost*, a predstavlja bezdimenzionalan broj. Opažamo da je relacija (1.4.35) točna samo za linearne dielektrike, kada je ϵ konstanta, dok definicijska jednadžba (1.4.31) vrijedi općenito. Slobodan prostor naravno ima $\epsilon_r = 1$, a ϵ_0 je dielektričnost slobodnog prostora. Iz navedenog moguće je izraziti $\mathbf{P}$ kao funkciju od $\mathbf{D}$, tako da je

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \mathbf{D} . \quad (1.4.37)$$

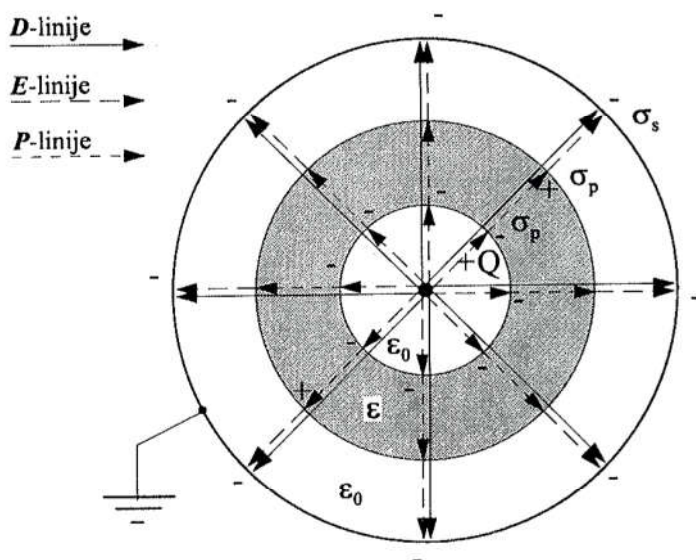
Polazeći od različitih načina kako su definirani vektori $\mathbf{E}$ i $\mathbf{D}$, dolazimo do zanimljive spoznaje o njihovim izvorima. *Očito je da su izvori polja $\mathbf{E}$ svi naboji, tj. slobodni i vezani*, što potvrđuje relacija $\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho_s + \rho_p)/\epsilon_0 = \rho_u/\epsilon_0$. S druge strane, iz (1.4.32) je $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_s$, pa proizlazi da su *izvori polja $\mathbf{D}$ jedino slobodni naboji*.

Uobičajeno je statičko električno polje grafički prikazivati *E-linijama*, ili kako ih još nazivamo *silnicama* (linijama sile) i *D-linijama* ili *linijama tijeka*. O tome će kasnije biti još riječi.⁶⁰ Sada uočimo da na temelju rečenog *E*-linije počinju i završavaju na svim vrstama električnih naboj (slobodnih i polariziranih), dok *D*-linije počinju i završavaju samo na slobodnim električnim nabojima (nikada na polariziranim u materijalu). Prekid u *E*-linijama koji nastaje zbog polariziranih naboj nadomješten je *P*-linijama, kako je to zorno pokazano na slici 1.4.9.

Tijek vektora $\mathbf{E}$ kroz sfernu zatvorenu plohu sa središtem u točkastom naboju Q mijenja se od ruba do ruba materijala, ovisno o dielektričnosti ϵ materijala u kojem je sferna ploha položena. Tijek vektora $\mathbf{D}$ kroz istu plohu uvijek je jednak po iznosu slobodnom naboju Q , neovisno o dielektričnosti materijala koji je obuhvaćen zamišljenom sfernom plohom. Linije vektora $\mathbf{D}$ su neprekinute kroz dielektrik, bez obzira na nehomogenosti koje u njemu postoje.

⁵⁹ U anglosaksonskoj literaturi upotrebljava se naziv električna permitivnost ili jednostavno permitivnost (electric permittivity), u ruskoj literaturi pak dielektrička propustljivost (dielektričeskaja pronicajemost), dok se u germanskom govornom području koristi apsolutna dielektrička konstanta (Absolute Dielektrizitätskonstante).

⁶⁰ Pogledati odjeljak 4.2.



Slika 1.4.9. Gustoća tijeka pomaka D , jakost električnog polja E i vektor polarizacije P točkastog naboja Q smještenog u središte dielektrične ljuske ϵ i uzemljene metalne kugle

Pojam *tijeka*⁶¹ o kojem je ovdje bilo riječi, vrlo je značajan u elektromagnetskoj teoriji. Tijek koji potječe od stvarnih (slobodnih) naboja i koji je neovisan o materijalu, izvorno je otkrio Faraday. On je eksperimentalno utvrdio da je inducirani naboj na površini vodiča neovisan o mediju. Kako god vektor D je uveo kasnije Maxwell, koji ga je nazvao "pomak", što objašnjava ime "gustoća tijeka pomaka".

U namjeri da objasnimo silu na nabijeno tijelo, koju pripisujemo drugim nabijenim česticama, potrebno je uvesti veličinu koja će biti povezana s tim udaljenim česticama. *Načelo kontinuiteta*, koje smo prihvatili u klasičnoj elektromagnetskoj teoriji da bi objasnili temeljne eksperimente, zahtijeva da svaka električno nabijena čestica posjeduje tijek, koji prožima cijeli prostor, i kojemu se gustoća smanjuje s povećanjem udaljenosti. *Nema eksperimenta kojim bi se moglo utvrditi postojanje naboja neovisno o tijeku*. Ideja tijeka⁶² potrebna je da bi se objasnio prijenos električnog utjecaja iz jedne točke prostora u drugu. Gustoća tijeka u bilo kojoj točki prostora može se matematički definirati kao količina tijeka kroz jediničnu ploštinu okomitu na smjer linija tijeka, tj.

$$D = n \frac{d\Phi_e}{dS}, \quad (1.4.38)$$

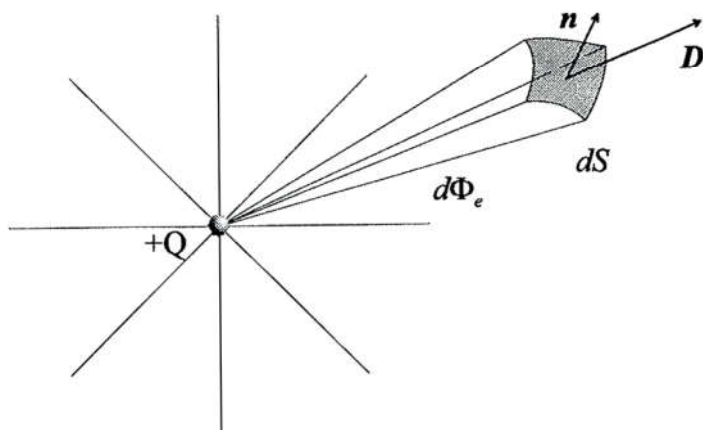
gdje je D gustoća tijeka na elementu plohe dS , a $d\Phi_e$ je iznos tijeka kroz plohu dS određen s

$$d\Phi_e = D \cdot n dS,$$

⁶¹ Pogledati podtekstnicu 34 u odjeljku 1.3.

⁶² Električni tijek je toliko značajan pojam da mu mnogi pripisuju veću važnost nego samom naboju. Nije predmetom klasične elektromagnetske teorije, niti je svrha ove knjige da to utvrđuje. Pogledat npr. P. Silvester, *Modern Electromagnetic Fields*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968.

prema slici 1.4.10.



Slika 1.4.10. Uz određivanje električnog tijeka

Ukupan tijek kroz plohu ploštine S određuje se pomoću plošnog integrala preko plohe S , i iznosi

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS . \quad (1.4.39)$$

U SI sustavu jedinica mjeri se u *kulonima* (C). Ako zamislimo zatvorenu plohu ploštine S oko volumena V , u kojem je zadana raspodjela naboja ρ , ukupnog iznosa Q , tada je prema (1.3.10a) i (1.4.39) ukupni električni tijek kroz zatvorenu plohu S

$$\Phi_{eu} = \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV = Q . \quad (1.4.40)$$

što je integralni oblik Gaussova zakona. Diferencijalni oblik Gaussova zakona izražava se jednačbom (1.4.32). Fizikalno značenje oba oblika je naravno isto: *nema naboja bez tijeka, i nema linije tijeka (D-linije) koja počinje i završava negdje drugo do na (slobodnom) naboju.*

Slično kao za dielektrike utvrdit ćemo sada odnose između vektora $\mathbf{M}$ i $\mathbf{B}$, te uvesti novi vektor $\mathbf{H}$ za polja u magnetskim materijalima. U člancima 1.4.6, 1.4.7. i 1.4.8. utvrdili smo da je resultantno polje $\mathbf{B} = \mathbf{B}_n + \mathbf{B}_s$ superpozicija u slobodnom prostoru narinutog polja $\mathbf{B}_n$ i sekundarnog polja $\mathbf{B}_s$, koje tvori magnetiziranje $\mathbf{M}$, tj. $\mathbf{B}_s = f_1(\mathbf{M})$. Magnetiziranje $\mathbf{M}$ je pak proizvedeno ukupnim poljem, tj. $\mathbf{M} = f_2(\mathbf{B}_n + \mathbf{B}_s)$. Uzimamo da je narinuto polje $\mathbf{B}_n$ stacionarno i da se ne mijenja, da ne ovisi o unošenju i iznošenju materijala iz njega, te da je proizvedeno slobodnim strujama $\nabla \times \mathbf{B}_n = \mu_0 \mathbf{J}_s$. (Ovdje smo s $\mathbf{J}_s$ označili slobodne, a ne sekundarne struje!) Sekundarno polje posljedica je magnetiziranja $\mathbf{M}$ materijala, koje prema dogovoru proizvode ekvivalentne amperske struje $\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_a$. Konačno, pomoću jednačbi (1.3.9b), (1.4.19) i (1.4.20) dobivamo

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_s + \mathbf{J}_a) = \mu_0 (\mathbf{J}_s + \nabla \times \mathbf{M}) ,$$

pa stoga slijedi

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_s .$$

Definirat ćemo sada još jedan novi vektor magnetskog polja $\mathbf{H}$, poznat kao *vektor jakosti magnetskog polja*, koji je dan s

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} , \quad (1.4.41)$$

i koji u stacionarnim poljima zadovoljava jednadžbu

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s , \quad (1.4.42)$$

dok ćemo u odjeljku 1.5. razviti odgovarajući izraz za dinamičko elektromagnetsko polje. Jedinica za $\mathbf{H}$ je ista kao i za $\mathbf{B}/\mu_0$ i $\mathbf{M}$, tj. *amper po metru* (A/m). Uspoređujući s jedinicom za jakost električnog polja $\mathbf{E}$ u voltima po metru, vidljiv je razlog zašto smo $\mathbf{H}$ nazvali jakost magnetskog polja. Ovdje treba upozoriti, da premda je izvod $\mathbf{H}$ načinjen za stacionarna polja, valjanost definicijske jednadžbe (1.4.41) je opća; ona vrijedi i za statička i za dinamička polja. U mnogim magnetskim materijalima postoji linearan odnos između magnetskog polja $\mathbf{H}$ i induciranog magnetiziranja $\mathbf{M}$, tako da je

$$\mathbf{M} = \tilde{\chi}_m \mathbf{H} , \quad (1.4.43)$$

gdje je $\tilde{\chi}_m$ *tenzor magnetske susceptibilnosti*. Ako se ograničimo na *izotropne materijale*, za koje je χ_m skalarni operator, tada je

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} . \quad (1.4.44)$$

Za takve materijale χ_m se naziva *magnetska susceptibilnost*. Magnetska susceptibilnost može biti pozitivna i negativna. Za *paramagnetike* ona je pozitivna, a za *dijamagnetike* je negativna. Za jednostavne materijale se $\mathbf{H}$ pomoću (1.4.41,44) može izraziti kao

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1 + \chi_m)} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mu_r} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} , \quad (1.4.45)$$

gdje definiramo

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad ; \quad \mu = \mu_0\mu_r . \quad (1.4.46a,b)$$

Veličina μ_r je poznata kao *relativna permeabilnost* magnetskog materijala, a μ je *permeabilnost (apsolutna)* magnetskog materijala. Opažamo da je μ_r bezdimenzionalna veličina i da relacija građe (1.4.45) je istinita samo za linearne magnetske materijale, ako se μ uzme kao konstanta za posebnu vrstu magnetskih materijala, dok je definicijska relacija (1.4.41) valjana općenito. Jedinica permeabilnosti μ je *henri po metru* (H/m).

Proračun magnetskih polja je mnogo zamršeniji zbog vrlo čestih nelinearnosti uključenih u μ , u usporedbi s dielektričkim materijalima koji općenito imaju konstantnu dielektričnost. Permeabilnost većine magnetskih materijala je ovisna o polju. Feromagnetici su takvi materijali. Oni mogu biti magnetizirani bez prisutnosti vanjskog polja. U njima veza između $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$ nije linearna, a ovisi osim ostalog i o magnetskoj povijesti materijala. Veza između $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$ u feromagnetskom materijalu dana je tabelarno ili grafički u obliku *krivulje magnetiziranja*. Postoje materijali s μ_r manjim od jedan, dok nema dielektrika čija je ϵ_r manja od jedan. Konačno, može se iz prije izvedenog izraziti $\mathbf{M}$ kao funkciju od $\mathbf{B}$, tako da je

$$\mathbf{M} = \chi_m \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} . \quad (1.4.47)$$

Slično kao u električnim poljima, uvest ćemo pojam *magnetskog tijeka* Φ_m , kao plošni integral gustoće tijeka $\mathbf{B}$

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS , \quad (1.4.48)$$

kroz konačnu i otvorenu plohu ploštine S . Rezultat analogan Gaussovu zakonu u elektrostatici ne možemo dobiti pošto je gustoća magnetskog tijeka $\mathbf{B}$ prema jednadžbi (1.3.9d) solenoidalna vektor bez izvora. Tako je ukupan magnetski tijek kroz svaku zatvorenu plohu prema jednadžbi (1.3.10d) jednak nuli, tj.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 .$$

To znači da su $\mathbf{B}$ -linije s kojima se predstavljaju (statička) magnetska polja, tj. *magnetske silnice zatvorene same u sebe*.

1.4.10. Materijali i relacije građe

Iako vektori polarizacije i magnetiziranja nisu bili eksplicitno uvedeni u njegove jednadžbe, Maxwell je već uočio da su magnetiziranje i polarizacija materijala inducirani poljima narinutim izvana, tako da postoje ovisnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}[\mathbf{E}, \mathbf{B}] , \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}[\mathbf{E}, \mathbf{B}] . \end{aligned} \quad (1.4.49,50)$$

Tim vezama, koje su poznate kao relacije građe, dodaje se za vodljive materijale *poopćeni Ohmov zakon*, koji također pripada u klasu relacija građe

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}[\mathbf{E}, \mathbf{B}] . \quad (1.4.51)$$

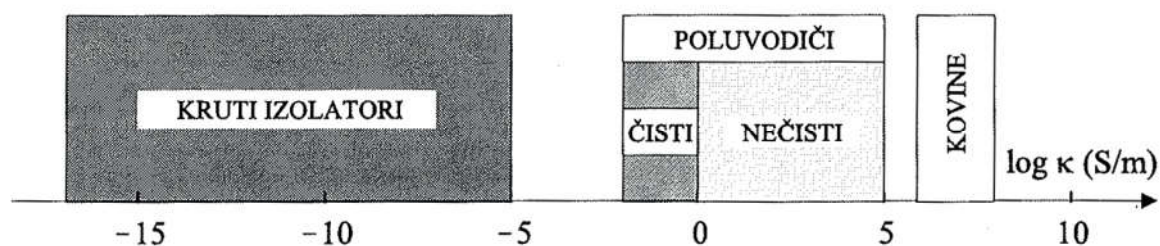
Pravokutne zgrade smo ovdje upotrijebili da bi istakli da te veze nisu nužno jednostavne i da mogu ovisiti o prošlosti materijala (histereza), da mogu biti višeznačne, nelinearne, anizotropne itd. Postoji goleme raznolikost u električnim i magnetskim svojstvima materijala, posebno u kristalnim krutinama. Studij tih svojstava jedno je od područja fizike čvrstog stanja.⁶³ Ovdje ćemo se samo opisno dotaći nekih osnovnih vidova tih makroskopskih svojstava.

1.4.10.1. Vodiči

Polazeći od vodiča, može se reći da gustoća slobodne provodne struje J_s može ovisiti o E na različite načine. Najvažniji je slučaj vođenja slobodne struje u materijalnim tijelima u izotropnim uvjetima. Kao što je već rečeno, u tom slučaju je gustoća struje kod bilo koje dane temperature jedinstvena funkcija električnog polja u obliku

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E},$$

gdje je provodnost κ parametar koji se može odrediti eksperimentalnim mjerenjem. Općenito, κ može biti funkcija i iznosa i smjera od E . U specijalnom, ali vrlo čestom slučaju, kada je κ neovisno o E , kao u kovinama i elektrolitičkim otopinama, J_s je izravno proporcionalno s E , pa se takvi materijali nazivaju *linearnim*.



Slika 1.4.11. Područja provodnosti u različitim vrstama materijala

Na slici 1.4.11. dali smo red veličine provodnosti za vodiče, poluvodiče i izolatore. Konstantne vrijednosti provodnosti ne znače da je gustoća provodne struje srazmjerna jakosti narinutog električnog polja za sve vrijednosti J i E . Opseg gustoće struje pri kojoj je materijal linearan, tj. pri kojoj je provodnost konstantna je vrlo širok za kovine.

U članku 1.4.2. objasnili smo vođenje struje u materijalu, a jednadžba (1.4.1) definira provodnost u linearnim izotropnim materijalima. Iznosi provodnosti za neke materijale navedeni su u tablici 1.4.1.

⁶³ Za sistematičniji pristup i studij elektromagnetskih svojstava materijala treba koristiti neke od mnogih knjiga iz područja fizike krutog stanja, kao na pr.: C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 4 edition, John Wiley, New York, 1971. Pogledati također: V. Knapp, P. Colić, *Uvod u električna i magnetska svojstva materijala*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

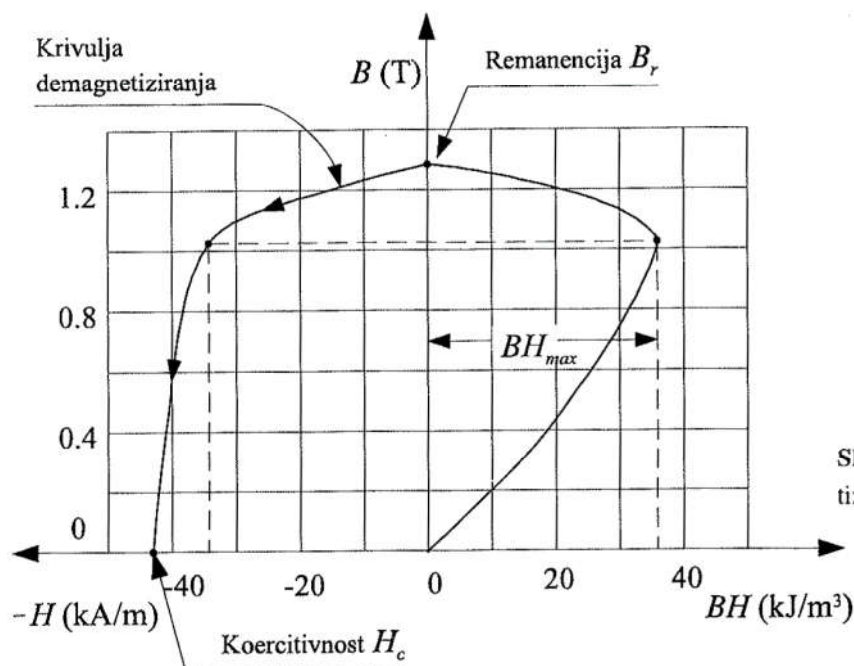
Tablica 1.4.1. Provodnost materijala κ kod 20° C⁶⁴

<i>Materijal</i>	<i>Provodnost S/m</i>	<i>Materijal</i>	<i>Provodnost S/m</i>
srebro	$6.1 \cdot 10^7$	NaCl otopina (zasićena)	$2.3 \cdot 10$
bakar	$5.7 \cdot 10^7$	morska voda	3 – 5
zlato	$4.1 \cdot 10^7$	germanij (čisti)	2.2
aluminij	$3.5 \cdot 10^7$	silicij (čisti)	$1.6 \cdot 10^{-3}$
volfram	$1.8 \cdot 10^7$	voda	10^{-3}
cink	$1.7 \cdot 10^7$	vlažno tlo	$10^{-2} - 10^{-3}$
mjed	$1.5 \cdot 10^7$	voda destilirana (18°C)	$2 \cdot 10^{-4}$
nikal	$1.3 \cdot 10^7$	suho tlo	$10^{-4} - 10^{-5}$
željezo (0°C)	$1.1 \cdot 10^7$	drvo	$10^{-8} - 10^{-11}$
čelik	$0.5 - 1 \cdot 10^7$	staklo	$10^{-10} - 10^{-14}$
kositar	$7.0 \cdot 10^6$	porculan	$2 \cdot 10^{-13}$
olovo	$4.8 \cdot 10^6$	tinjac	$10^{-11} - 10^{-15}$
konstantan (Cu60,Ni40)	$2.0 \cdot 10^6$	petrolej	10^{-14}
živa	$1.0 \cdot 10^6$	jantar	$2 \cdot 10^{-15}$
nikrom	$8.9 \cdot 10^5$	parafin	10^{-15}
		kremen	$0.4 \cdot 10^{-17}$

1.4.10.2. Permanentni magneti

Obratimo li pažnju na svojstva dielektričkih i magnetskih materijala, najjednostavnija situacija se događa kada su $\mathbf{P}$ i $\mathbf{M}$ neovisni o elektromagnetskom polju, tj. kada je njihova raspodjela unaprijed zadana. Približno je to slučaj u praksi kod nekih permanentno magnetiziranih i permanentno polariziranih materijala. Materijali za permanentne magnete karakteriziraju se veličinama koje se određuju iz dijela histerezne petlje u drugom kvadrantu B - H dijagrama, što je prikazano na slici 1.4.12.

⁶⁴ Podaci su orijentacijski, a dani su prema : J.R. Reitz, F.J. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1967., N.N. Rao, *Basic Electromagnetics with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1972., J. D. Kraus, K. R. Carver, *Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1973.



Slika 1.4.12. Krivulje demagnetiziranja i umnoška (BH)

Pregled podataka za neke materijale za permanentne magnete dali smo u tablici 1.4.2.⁶⁵

Tablica 1.4.2. Permanentni magnetski materijali

Materijal	Sastav u %	B_r (T)	H_r (A/m)	$(BH)_{max}$ (J/m ³)
krom-čelik	98 Fe; 0.9 Cr; 0.6 C; 0.4 Mn	1.0	4 000	1 600
oksid	57 Fe; 28O ; 15 Co.	0.2	72 000	4 800
alnico 5 (Alcomax)	51 Fe; 24 Co; 14 Ni; 8 Al; 3 Cu.	1.25	44 000	36 000
platina-kobalt	77 Pt; 23 Co.	0.6	290 000	52 000
samarium-kobalt	sinterirani supermaloj S3	1.1	840 000	235 000
nodium-željezo-bar	neomagloj N35	1.2	790 000	275 000

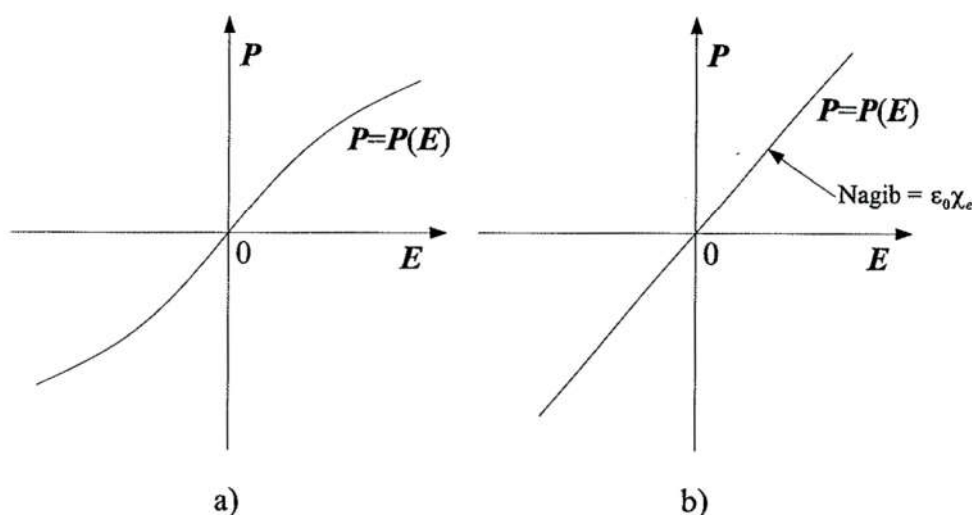
Magnetiziranje visokokvalitetnih permanentnih magneta neovisno je o magnetskom polju u magnetu u širokom rasponu vrijednosti. Slično se ponašaju feroelektri; njihova polarizacija je gotovo neovisna o električnom polju u materijalu.

⁶⁵ Podaci su dani prema: J.R. Reitz, F.J. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1967; J.D. Kraus, K.R. Carver, *Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1973; Swift Levick Magnets Company katalogi.

1.4.10.3. Izolatori

Značajni su slučajevi u kojima su M i P funkcije polja u materijalu. Kao što je pokazano u članku 1.4.9, polarizacija P i magnetiziranje M funkcije su električnog i magnetskog polja, tj. $P = P(E)$ i $M = M(H)$. Takvo ponašanje možemo lako realizirati eksperimentalno u uređajima koji vode na homogena polja unutar homogenog materijala. Započet ćemo prvo s dielektričkim materijalima, tj. izolatorima.

Relacija $P = P(E)$ sadrži veliku raznolikost fizikalnih svojstava dielektričkih materijala. U nekim materijalima, iako je P izravno proporcionalno s E , vrijednost P u danom trenutku vremena nije nužno jedinstveno određena iznosom E u tom istom trenutku. Taj važan fenomen, u kojem je P funkcija "povijesti" od E , poznat je pod imenom *histereza*. Drugi važan slučaj, gdje je P u materijalu funkcija prijašnjih vrijednosti od E , predstavljaju *žiroelektrični materijali*. Kod takvih materijala u određenim uvjetima relacija $P = P(E)$ približava se obliku linearne diferencijalne jednadžbe s vremenskim derivacijama. I konačno, ako P nije ovisan o povijesti od E , tada se relacija $P = P(E)$ reducira na jedinstvenu funkciju od E . Svi prije spomenuti materijali mogu se podijeliti na *izotropne* i *anizotropne*.



Slika 1.4.13. Grafički prikaz povezanosti P i E u a) nelinearnim i b) linearnim izotropnim dielektricima

Izotropni materijali su takvi kod kojih veza između P i E ne ovisi o orijentaciji E u odnosu na materijal. U anizotropnim materijalima P i E , pa ni D nisu kolinearni. Mnoge kristalne strukture predstavljaju anizotropne medije. Da bi se opisala ovisnost P o E u anizotropnim materijalima, općenito je potrebno devet odvojenih skalarnih relacija koje se mogu predstaviti u obliku 3×3 matrice ili tenzora, gdje svaki od devet članova matrice povezuje jednu od tri komponente od P s jednom od triju komponenata od E . U praksi se koriste određene relacije recipročnosti da bi se devet relacija reduciralo na šest ili na manje.

U izotropnim materijalima smjer P i E , pa prema tome i D , podudara se u svakoj točki, tako da je potrebna samo jedna skalarna jednadžba da bi se izrazila povezanost P i E . Na slici 1.4.13.a) prikazano je ponašanje nelinearnog izotropnog materijala s

jedinstvenom relacijom između P i E .

Tablica 1.4.3. Relativna dielektričnost i električna čvrstoća materijala

<i>Materijal</i>	<i>Relativna dielektričnost</i>	<i>Električna čvrstoća MV/m</i>
zrak (atmosferski tlak)	1.0006	3
papir (impregnirani)	2 – 3	15
guma	2 – 3.5	16 – 40
parafin	2.1	30
petrolej	2.1	12
teflon	2.1	
polistiren	2.7	20
drvo	2.5 – 8	
najlon	3.5	16
kremen	3.8	30
bakelit	4.9	25
suho tlo	5	
staklo	4 – 10	9 – 30
tinjac	6	5 – 200
porculan	6	
vlažno tlo	10	
glicerin	50	
voda (destilirana)	81	
barijum titanat	1 200	
barijum titanat-stanat	20 000	

Najjednostavniji su odnosi u linearnom izotropnom materijalu kao na slici 1.4.13.b). Prema jednadžbi (1.4.34) ta linearna ovisnost je izražena analitički kao

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} ,$$

gdje je χ_e električna susceptibilnost materijala. Odgovarajuća linearna relacija građe za izolatore je prema jednadžbi (1.4.35)

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} ,$$

što se obilježava kao

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} , \quad (1.4.52)$$

gdje je dielektričnost $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ konstanta (*dielektrička konstanta*) neovisna o veličini $\mathbf{E}$ u izotropnom linearnom materijalu. Dielektričnost može biti i funkcija položaja, tj. $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$, i biti neovisna o $\mathbf{E}$ u izotropnom, linearnom, ali nehomogenom materijalu. Ako to nije slučaj, materijal je homogen. U makroskopskom pristupu klasičnoj elektromagnetskoj teoriji kao relaciju građe za dielektričke materijale upravo koristimo jednadžbu (1.4.52). U tablici 1.4.3. naveli smo eksperimentalne podatke za relativnu dielektričnost i električnu (probojnu) čvrstoću za neke materijale.⁶⁶

1.4.10.4. Magnetski materijali

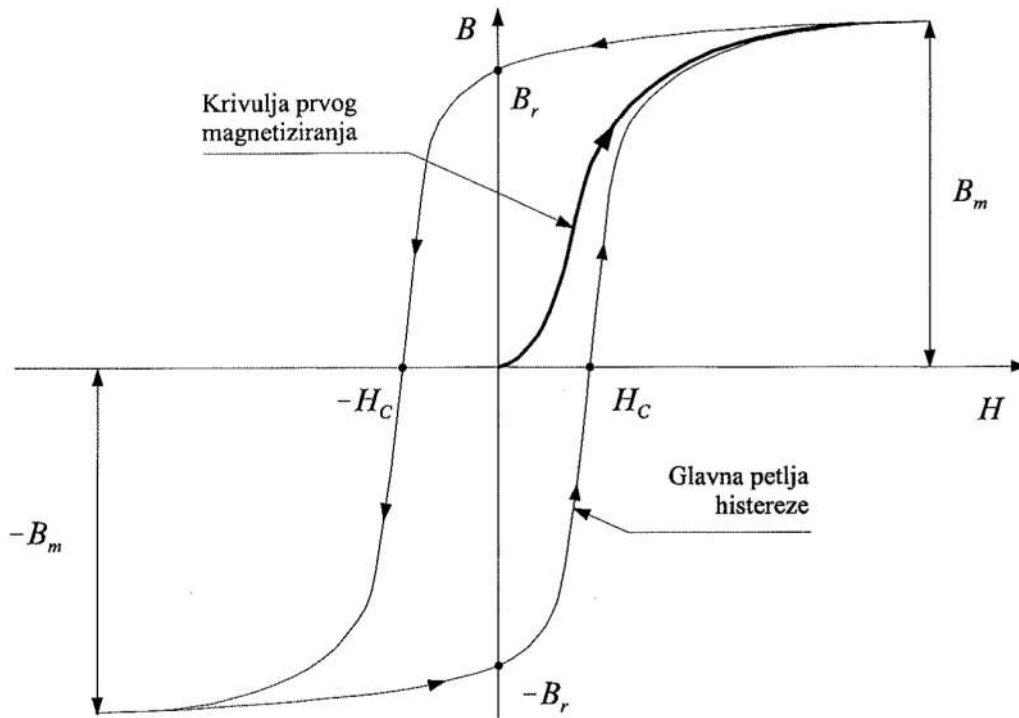
Možemo ih podijeliti na sličan način. Pokazali smo da unutar homogenih materijala vrijedi proporcionalnost $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$. Materijali u kojima $\mathbf{M}$ ovisi o povijesti magnetiziranja pokazuju histerezu ili su žiromagnetski materijali. Razlikujemo također izotropne i anizotropne materijale.

1.4.10.5. Histereza

Pojavu koja uzrokuje da $\mathbf{B}$ zaostaje iza $\mathbf{H}$, tako da krivulja magnetiziranja za rastuća i padajuća polja nije ista, nazivamo histerezu. Petlja koja predstavlja krivulju magnetiziranja naziva se *histerezna petlja* i predstavili smo je na slici 1.4.14. Ako je materijal doveden do *zasićenja* na oba kraja krivulje magnetiziranja, petlju nazivamo *zasićena*, ili *glavna petlja histereze*. Zaostala gustoća tijekom B_r u zasićenoj petlji naziva se *remanentna indukcija* ili *retencija*, a *koercitivna sila* H_c na toj petlji se naziva *koercitivnost*. Tako je retencija materijala maksimalna vrijednost koju zaostala indukcija može poprimiti, a koercitivnost je maksimalna vrijednost koju može poprimiti koercitivna sila. Prema tom opisu nema točke koja bi se mogla nalaziti na B - H dijagramu izvan zasićene petlje histereze, ali su sve točke unutar petlje moguće. U mekim materijalima ili onima koji se lako magnetiziraju, histerezna petlja je uska, s malom ploštinom koju zatvara petlja. U usporedbi s njom histerezna petlja tvrdih magnetskih materijala je široka, s

⁶⁶ Podaci su dani prema: J.R. Reitz, F. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1967.; N.N. Rao, *Basic Electromagnetics with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1972.; J.D. Kraus, K.R. Carver, *Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1973.

velikom ploštinom koju zatvara petlja histereze.



Slika 1.4.14. Histerezna petlja

Već je rečeno u prethodnoj točki da linearne izotropne materijale možemo predstaviti jednostavnim relacijama (1.4.41), (1.4.45) i (1.4.46a,b), koje preuređene glase

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}, \quad (1.4.53)$$

što se obilježava s

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.4.54)$$

gdje je permeabilnost $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ konstanta neovisna o veličini $\mathbf{H}$ u izotropnom linearnom materijalu (analogno slici 1.4.13b). U nehomogenom linearnom izotropnom materijalu permeabilnost je funkcija položaja, tj. $\mu = \mu(\mathbf{r})$. Relacije građe (1.4.54) za magnetske materijale utvrđuju se eksperimentalno mjerenjem.

Kod dijamagnetskih i paramagnetskih materijala, čija se relativna permeabilnost $\mu_r = 1 + \chi_m$ malo razlikuje od jedan, pogodnije je dati podatke za magnetsku susceptibilnost $\chi_m = \mu_r - 1$, što smo i učinili u tablici 1.4.4.⁶⁷

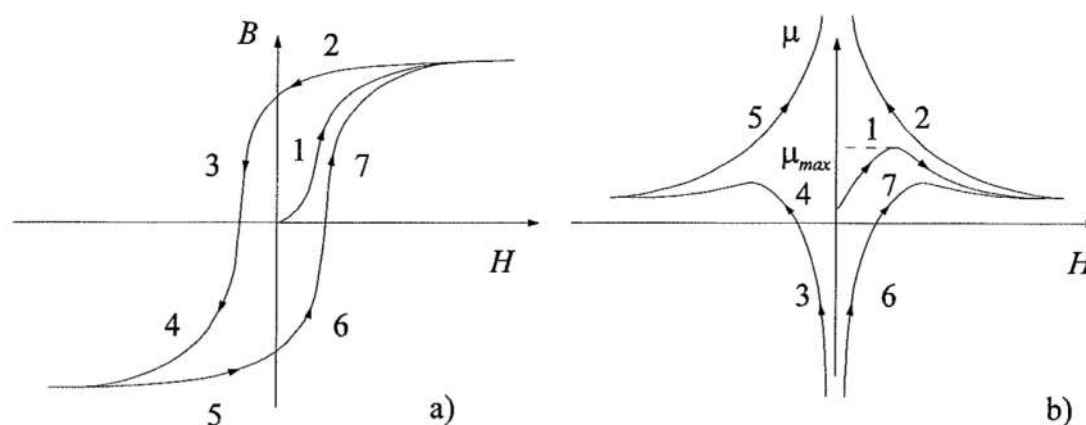
⁶⁷ Podaci su dani prema: N.N. Rao, *Basic Electromagnetics with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1972.

Tablica 1.4.4. Magnetska susceptibilnost dijamagnetskih i paramagnetskih materijala kod sobne temperature i atmosferskog tlaka

<i>Dijamagnetski materijal</i>	χ_m	<i>Paramagnetski materijal</i>	χ_m
ugljični dioksid	$-0.99 \cdot 10^{-8}$	zrak	$3.6 \cdot 10^{-7}$
dušik	$-0.50 \cdot 10^{-8}$	kisik	$2.1 \cdot 10^{-6}$
vodik	$-0.21 \cdot 10^{-8}$	magnezij	$1.2 \cdot 10^{-5}$
zlato	$-3.60 \cdot 10^{-5}$	aluminij	$2.3 \cdot 10^{-5}$
živa	$-3.20 \cdot 10^{-5}$	volfram	$6.8 \cdot 10^{-5}$
srebro	$-2.60 \cdot 10^{-5}$	platina	$2.9 \cdot 10^{-4}$
bakar	$-0.98 \cdot 10^{-5}$	paladij	$8.2 \cdot 10^{-4}$
voda	$-0.98 \cdot 10^{-5}$	tekući kisik	$3.5 \cdot 10^{-3}$
natrij	$-0.24 \cdot 10^{-5}$		
bizmut	$-1.66 \cdot 10^{-4}$		

1.4.10.6. Feromagnetski materijali

Za ove materijale relacija (1.4.54), koja povezuje B i H nije linearna i za njih je karakteristična histereza čiju smo petlju dali na slici 1.4.14.

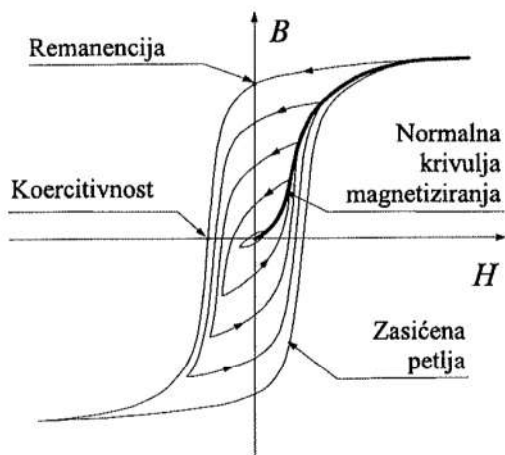


Slika 1.4.15. a) Histerezna petlja. b) Krivulje permeabilnosti

Zato ne postoji jedinstvena vrijednost za μ , tj. μ_r , za pojedine feromagnetske materijale. Stoga ćemo našu pažnju usredotočiti na definiranje pojma permeabilnosti za nelinearne feromagnetske materijale. Skrenimo ponovno pozornost na petlju histereze prikazanu na

slici 1.4.15.a). Odgovarajući graf za $\mu = \mu(H)$ prikazan je na slici 1.4.15.b). Za $H = 0$, očito je prema (1.4.54) da μ postaje beskonačno. Kada je $B = 0$ tada je i $\mu = 0$. U tim uvjetima permeabilnost μ gubi smisao. Zato uporaba μ mora biti povezana sa stanjem u kojem ima smisla, tj. s krivuljom prvog magnetiziranja. Treba zapaziti da pojam maksimalne permeabilnosti označava specifičnu maksimalnu permeabilnost i da je povezan s krivuljom prvog magnetiziranja, a ne s histereznom petljom ili s drugom vrstom krivulja magnetiziranja.

Druga vrsta krivulje magnetiziranja s kojom permeabilnost μ može biti povezana jest *normalna krivulja magnetiziranja*. Ova krivulja je mjesto točaka iz niza histereznih petlji dobivenih cikličkom permutacijom H putem uzastopnih malih pomaka. Prikazana je na slici 1.4.16. Ova krivulja je upotrebljiva jer se može ponoviti i karakteristična je za određenu vrstu feromagnetskih materijala. *Normalna krivulja magnetiziranja je vrlo slična po obliku krivulji prvog magnetiziranja.*⁶⁸



Slika 1.4.16. Normalna krivulja magnetiziranja i histerezne petlje

Nakon ovih kratkih objašnjenja pojma permeabilnosti možemo reći da se relacija građe (1.4.54) upotrebljava i za polja u nelinearnim feromagnetskim materijalima s $\mu = \mu(H)$. Eksperimentalni podaci za te materijale dani su u tablici 1.4.5.⁶⁹

Relativna je permeabilnost vakuuma, odnosno slobodnog prostora, jedan prema definiciji. Najbolji savjet koji se može dati jest da se svaka zadaća koja obuhvaća feromagnetizam razmatra zasebno, pokušavajući da se odredi koje područje B - H dijagrama je važno za tu zadaću, pa da se načine odgovarajuća približenja tom dijelu krivulje. Zato se u praksi za rješavanje svake zadaće s feromagnetskim materijalima koriste podaci za potpunu krivulju prvog magnetiziranja, odnosno za normalnu krivulju magnetiziranja. Oni se određuju eksperimentalno i obično daju tabelarno.

⁶⁸ Podsjetimo da se kod magnetiziranja izmjeničnim poljima uvode još pojmovi diferencijalne permeabilnosti (dB/dH) i inkrementalne permeabilnosti $\mu_{inc} = (dB/dH)_{sr} = \Delta B/\Delta H$, koja se povezuje s minornom histereznom petljom superponiranom na predmagnetiziranje.

⁶⁹ Podaci iz: J.D. Kraus, K.R. Carver, *Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1973.; *American Institute of Physics Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1957.

Tablica 1.4.5. Svojstva petlji histereze za feromagnetske materijale pri sobnoj temperaturi

Materijal	Sastav %	μM_z T	H_c A/m	B_r T	$(\mu_r)_{max}$
permalloy prah 2 – 81	2 Mo, 81 Ni, 17 Fe i nečistoće				130
kobalt		1.79			250
nikal		0.61			600
lijevano željezo			366	0.53	600
ferroxcube 3 ($M_n - Z_n$ – ferrit. prah)	$Mn_x Zn_{(1-x)} Fe_2 O_4$	0.34	16		1 500
meko željezo	0.2C				2 000
Ni – Zn ferit	$Ni_x Zn_{(1-x)} Fe_2 O_4$	0.37	30		2 500
željezo (kaljeno)	0.2 nečistoće	2.16			5 000
permendur	50Co 50Fe	2.4	160	1.4	5 000
silikonsko željezo	96Fe 4Si	1.95	24		7 000
permalloy	55Fe 45 Ni	1.60	24		25 000
hypernik		1.65	3.2	0.73	70 000
mumetal	75Ni, 5Cu, 2Cr, 18Fe	0.65	4		100 000
čisto željezo	0.05 nečistoće				200 000
supermalloy	5Mo, 79Ni	0.8	0.32		1 000 000

1.5. MAXWELLOVE JEDNADŽBE ZA POLJA U MATERIJALU

U ovom odjeljku proširit ćemo Maxwellove jednadžbe⁷⁰ tako da obuhvate ponašanje elektromagnetskih polja u materijalu koji miruje. Na temelju razmatranja provedenih u odjeljku 1.4. usvojili smo gledište da je materijal u osnovi agregat elementarnih naboja i struja udruženih zajedno u slobodnom prostoru, što se može izraziti u obliku postulata o makroskopskom ponašanju elektromagnetskih polja u materijalu: Elektromagnetska polja u nazočnosti materijala podređuju se osnovnim zakonima koji određuju ponašanje

⁷⁰ Pogledati odjeljak 1.3. Maxwellove jednadžbe u vakuumu.

elektromagnetskih polja u slobodnom prostoru, izmijenjenim tako da obuhvate ekvivalentne makroskopske raspodjele naboja i struja u materijalu koje se uzimaju kao da su izvori smješteni u slobodnom prostoru.

Ustvari, našu pažnju ćemo usredotočiti na kontinuirano promjenjiva ili makroskopska polja izvan materijala, koja predstavljaju ukupno ponašanje svih čestica unutar materijala. Pri postavljanju matematičkih modela za makroskopska polja koja opažamo u blizini materijala, stići ćemo također do matematičkih izraza za odgovarajuća makroskopska polja unutar materijala. Ta polja u materijalu bit će uzeta jednostavno kao matematički upotrebljive (ali fizikalno fiktivne) funkcije, koje ćemo koristiti za proračun fizikalno opaženih (i zato realnih) polja izvan materijala.

Pokazali smo da makroskopske učinke polariziranog materijala možemo izraziti pomoću vektora gustoće polarizacije $\mathbf{P}$, i da su prostorne i vremenske promjene od $\mathbf{P}$ ekvivalentne makroskopskoj raspodjeli gustoće polariziranog naboja $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ i gustoće polarizirane struje $\mathbf{J}_p = \partial \mathbf{P} / \partial t$. Osnovni zakoni polja u dielektričkim materijalima mogu se uzeti kao zakoni za slobodni prostor nadopunjeni uz slobodne naboje ρ_s i struje $\mathbf{J}_s$ i izvorima ρ_p i $\mathbf{J}_p$.

Slično se makroskopski učinci magnetiziranog materijala mogu izraziti pomoću vektora gustoće magnetiziranja $\mathbf{M}$. Pokazali smo u člancima 1.4.7. i 1.4.8. da postoje dva različita modela za predstavljanje ekvivalentnih gustoća magnetskih izvora u materijalu, koji počivaju na bitno različitim fizikalnim tumačenjima prirode magnetskih dipolnih momenata. Prvi je *model amperske struje*, koji se temelji na univerzalno prihvaćenoj fizikalnoj slici magnetskog dipolnog momenta izgrađenog elementarnom strujnom petljom. Ekvivalentna makroskopska gustoća magnetskog izvora je u obliku gustoće amperske električne struje $\mathbf{J}_a = \nabla \times \mathbf{M}$. Osnovni zakoni polja u magnetskim materijalima tada slijede iz zakona polja za slobodni prostor, s tim da se $\mathbf{J}_a$ doda gustoći slobodnih struja $\mathbf{J}_s$.

Drugi način predstavljanja magnetiziranja temelji se na *modelu magnetskog naboja*. Iako nije utvrđeno da magnetski naboj postoji, nije u suprotnosti s osnovnim zakonima upotrijebiti model s parom suprotnih magnetskih naboja unutar materijala, da bi se predstavili ekvivalentni magnetski dipolni momenti. Ideju magnetskog naboja možemo upotrebljavati samo kao matematički pojam, koji na analogan način s polariziranim električnim nabojem nadomješta ekvivalentne magnetske dipole u materijalu. Odgovarajuće gustoće magnetiziranih izvora mogu se predstaviti gustoćom magnetskog naboja $\rho_m = -\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{M})$ i gustoćom magnetske struje $\mathbf{J}_m = \partial (\mu_0 \mathbf{M}) / \partial t$. Makroskopski zakoni polja za magnetske materijale dobiju se uključivanjem izvora ρ_m i $\mathbf{J}_m$ u jednačbe polja u slobodnom prostoru uz postojeće slobodne izvore ρ_s i $\mathbf{J}_s$.

Oba ova pristupa poljima u magnetskim materijalima reduciraju se na iste jednačbe u slobodnom prostoru. Iako se u ova dva modela pojavljuju različite veličine za predstavljanje jakosti magnetskog polja unutar magnetskog materijala ($\mathbf{H}_a$ za model s amperskim strujama i $\mathbf{H}$ za model s magnetskim nabojima), one se razlikuju samo za iznos gustoće magnetiziranja $\mathbf{M}$, tj. $\mathbf{H}_a = \mathbf{H} + \mathbf{M}$. Potpuno podudaranje između ova dva pristupa dobiva se ako definiramo gustoću magnetskog tijeka $\mathbf{B}$ jedanput kao $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}_a$ i drugi put kao $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$. Za posljedicu dobivamo da se oba pristupa svode na

jedan skup zakona makroskopskog elektromagnetskog polja unutar materijala, ako ih izrazimo s četiri vektora polja E , B , D i H .

1.5.1. Maxwellove jednadžbe za model s amperskom strujom

Do sada smo analizirali različite pojave koje se događaju u vodičima, dielektricima i magnetskim materijalima u nazočnosti električnih i magnetskih polja. U ovom odjeljku prilagodit ćemo osnovne zakone elektromagnetskog polja da opišu ponašanje polja u materijalu, koristeći model materijala s električnim polariziranim nabojima i strujama i s amperskim magnetskim strujama.

Zadaću ćemo postaviti tako da ćemo u zadanom prostoru volumena V , koji je ispunjen homogenim izotropnim materijalom poznatih značajki, propisati postojanje slobodnih naboja ρ_s i struja J_s , tako da zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta $\nabla \cdot J_s = -\partial \rho_s / \partial t$. Propisano je također da u V postoje vezani polarizirani naboji $\rho_p = -\nabla \cdot P$ i struje $J_p = \partial P / \partial t$, koji zadovoljavaju jednadžbu očuvanja polariziranog naboja $\nabla \cdot J_p = -\partial \rho_p / \partial t$. Konačno, u zadanom volumenu V u materijalu postoje i vezane amperske struje gustoće $J_a = \nabla \times M$, koje su prema definiciji bez izvora. One zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta $\nabla \cdot J_a = 0$.

1.5.1.1. Jednadžbe

Na temelju rečenog u odjeljcima 1.3. i 1.4. postulirat ćemo da su vektori elektromagnetskog polja E i B u svakoj točki prostora u volumenu V koji je ispunjen homogenim izotropnim materijalnim medijem, subjekt Maxwellovih jednadžbi

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J_u = \mu_0 \left(J_s + J_p + J_a + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(J_s + \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \times M + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right), \quad (1.5.1a - d)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_u = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_s + \rho_p) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_s - \nabla \cdot P),$$

$$\nabla \cdot B = 0.$$

Jednadžbe (1.5.1a – d) su Maxwellove jednadžbe elektromagnetskog polja pisane tako da budu valjane za materijal koji se ne giba. One su suglasne s jednadžbama (1.3.9a – d) i lako se mogu svesti na njih. Jednadžbe (1.5.1a – d) pisane su tako da povezuju polja E i B s njihovim izvorima: slobodnim nabojima i strujama, te polariziranim i magnetiziranim nabojima i strujama, kao i vremenskim derivacijama vektora E i B . Vektori D , B i J_s moraju također zadovoljavati definicijske i relacije građe u materijalu koje ih povezuju s E i H_a , odnosno s H , tako da propisuju da je u V

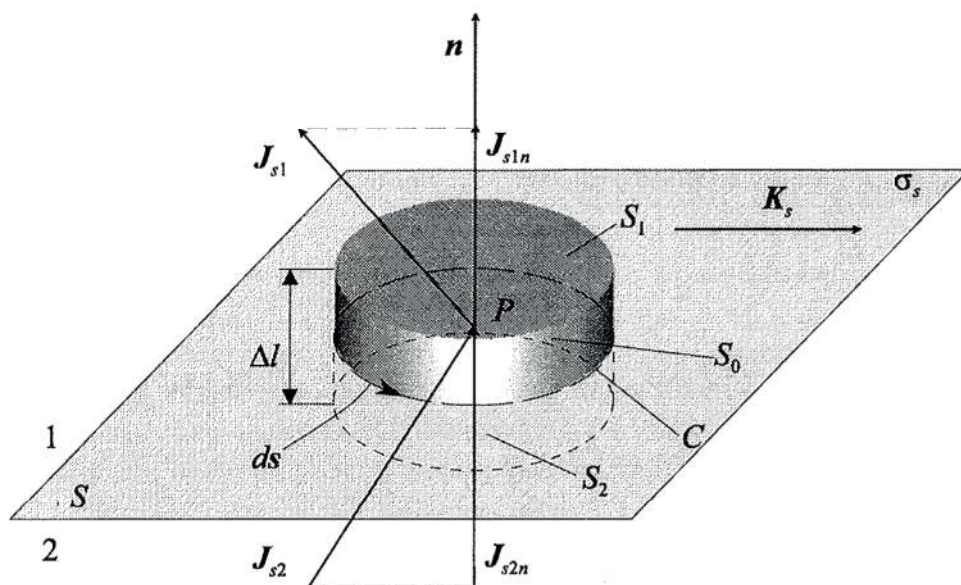
$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \\
 \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}_a = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) , \\
 \mathbf{J}_s &= \kappa \mathbf{E} .
 \end{aligned}
 \tag{1.5.2a - c}$$

Maxwellove jednadžbe (1.5.1a – d) i relacije građe (1.5.2a – c) zajedno s jednadžbom za Lorentzovu silu (1.1.1) čine temeljne zakone elektromagnetske teorije.

1.5.1.2. Uvjeti na granici

U namjeri da opišemo ponašanje elektromagnetskog polja u točkama na graničnoj plohi S između dva homogena izotropna materijala, ili na površini materijalnog medija koji se nalazi u slobodnom prostoru, potrebno je propisati odgovarajuće rubne uvjete. Iz razmatranja provedenog u članku 1.2.5. poznato nam je da se na takvim rubnim ploham događaju diskontinuiteti u komponentama odgovarajućih vektora polja. Analiza provedena u odjeljku 1.4. pokazala je također da se na rubnim ploham materijalnih medija pojavljuju singularne plošne gustoće ekvivalentnih vezanih naboja i struja.

Neka je na graničnoj plohi S između dva različita materijala propisano postojanje slobodnog plošnog naboja gustoće σ_s i slobodnih plošnih struja gustoće $\mathbf{K}_s$ kao što smo prikazali na slici 1.5.1.



Slika 1.5.1. Uz dokaz očuvanja slobodnog naboja na graničnoj plohi S između dva materijala

Pokazat ćemo da na rubnoj plohi S mora biti zadovoljen zakon očuvanja slobodnog naboja. Primijenimo jednadžbu kontinuiteta (1.3.11) u integralnom obliku na elementarni valjak s bazama S_1 i S_2 ploštine ΔS i visine Δl , prikazan na slici 1.5.1. Volumen valjka je ΔV . Ako visina valjka teži k nuli $\Delta l \rightarrow 0$, tada valjak degenerira u plohu S_0 ploštine ΔS na graničnoj plohi S , pa dobivamo

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho_s dV \right),$$

što daje

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{s1} - \mathbf{J}_{s2}) \Delta S + \oint_C \mathbf{K}_s \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{n}) = - \frac{\partial \sigma_s}{\partial t} \Delta S.$$

Ako uvedemo dvodimenzionalni operator divergencije ∇_s prema jednadžbi

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{K}_s \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{n})}{\Delta S} = \nabla_s \cdot \mathbf{K}_s, \quad (1.5.3)$$

zakon očuvanja slobodnog naboja na graničnoj plohi može se konačno izraziti u obliku relacije

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{s1} - \mathbf{J}_{s2}) + \nabla_s \cdot \mathbf{K}_s = - \frac{\partial \sigma_s}{\partial t}. \quad (1.5.4)$$

Propišimo dalje, koristeći jednadžbe (1.2.25) i (1.4.15), da na graničnoj plohi S između dva materijala postoje vezani plošni polarizirani naboji gustoće

$$\sigma_p = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \quad \text{na } S, \quad (1.5.5)$$

koji zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta na graničnoj plohi S

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{p1} - \mathbf{J}_{p2}) = - \frac{\partial \sigma_p}{\partial t}. \quad (1.5.6)$$

Slično se pomoću jednadžbi (1.2.26) i (1.4.23) može propisati postojanje vezanih plošnih amperskih struja magnetiziranja gustoće

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2), \quad (1.5.7)$$

na graničnoj plohi S između dva homogena materijala. Budući da u amperskom modelu nema plošnog magnetskog naboja, to na graničnoj plohi S mora biti zadovoljena jednadžba kontinuiteta

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{a1} - \mathbf{J}_{a2}) = 0. \quad (1.5.8)$$

Zadali smo ili propisali gustoće prostornih naboja i struja i to: slobodnih naboja i struja, polariziranih naboja i struja i amperskih struja magnetiziranja, kao i odnose među njima (jednadžbu kontinuiteta, odnosno zakon očuvanja naboja) u volumenu. Isto tako smo

zadali ili propisali iz uvjeta na graničnoj plohi S gustoće plošnih naboja i struja i to: slobodnih naboja i struja, plošnih polariziranih naboja i plošnih amperskih struja magnetiziranja, te odnose među njima koji proizlaze iz jednadžbe kontinuiteta koja mora biti zadovoljena na graničnoj plohi S između dva materijala.

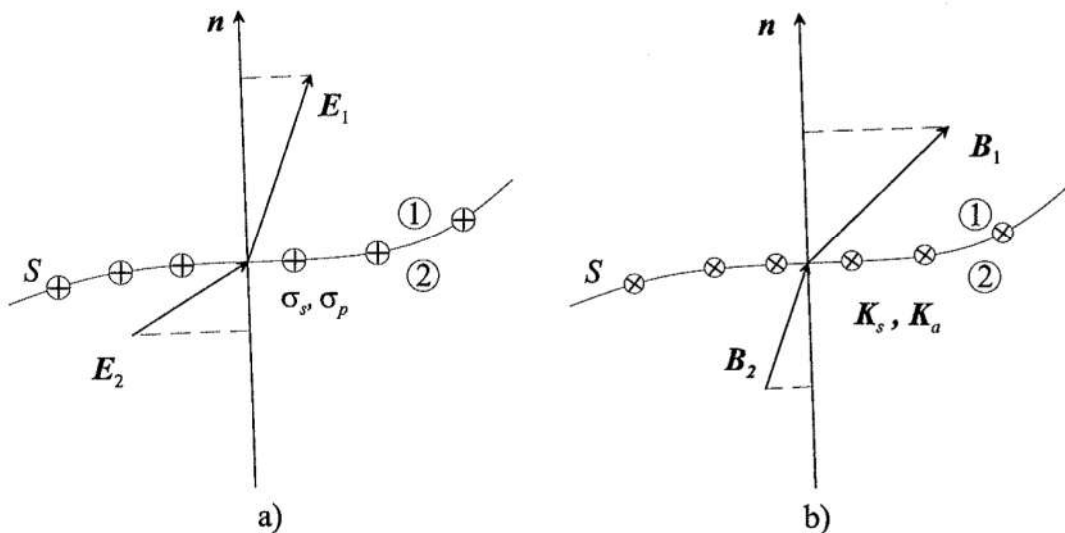
Preostaje nam da koristeći jednadžbe (1.2.25) i (1.2.26) propišemo *rubne uvjete*, odnosno *uvjete na granici*, za okomite i tangencijalne komponente vektora polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, koji trebaju biti zadovoljeni na graničnoj plohi S između dva homogena izotropna materijala (slika 1.5.2), i oni glase

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 ,$$

$$\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_a = \mathbf{K}_s + \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) , \quad (1.5.9a - d)$$

$$\mathbf{n} \cdot \epsilon_0 (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \sigma_s + \sigma_p = \sigma_s - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) ,$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 .$$



Slika 1.5.2. Uz uvjete na granici, a) za vektor $\mathbf{E}$ i b) za vektor $\mathbf{B}$

Radi preglednosti u tablici 1.5.1. na kraju ovog poglavlja ispisani su svi izvori elektromagnetskog polja i uvjeti koje oni trebaju zadovoljavati, kao i Maxwellove jednadžbe s pripadnim uvjetima na granici za polja u materijalu uz korištenje modela s amperskim strujama.

1.5.2. Maxwellove jednadžbe za model s magnetskim nabojem

Namjera nam je prilagoditi sustav Maxwellovih jednadžbi tako da opišu ponašanje elektromagnetskog polja u materijalu, koristeći pritom model materijala s električnim polariziranim nabojima i strujama, te magnetskim nabojima i strujama. Propisat ćemo postojanje slobodnih naboja ρ_s i struja $\mathbf{J}_s$ u prostoru zadanog volumena V , koji je ispunjen homogenim izotropnim materijalom poznatih značajki. Pritom zadani slobodni naboji i struje trebaju zadovoljavati jednadžbe kontinuiteta (1.2.11). Postoje također i vezani polarizirani naboji volumne gustoće $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ i polarizirane struje gustoće $\mathbf{J}_p = \partial \mathbf{P} / \partial t$. I ti vezani izvori trebaju zadovoljiti jednadžbu kontinuiteta (1.4.12). Na kraju, u modelu magnetiziranog materijala s magnetskim nabojem propisujemo i postojanje (fiktivnih) vezanih magnetskih naboja i struja čije su gustoće određene prema jednadžbama (1.4.26) i (1.4.27): $\rho_m = -\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{M})$ i $\mathbf{J}_m = \partial(\mu_0 \mathbf{M}) / \partial t$. Ti izvori također zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta (1.4.28).

1.5.2.1. Jednadžbe

Kao i u prethodnom članku postulirat ćemo da su vektori jakosti električnog i magnetskog polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ u svakoj točki prostora u volumenu V subjekt Maxwellovih jednadžbi

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mathbf{J}_m - \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \mathbf{M}) - \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \mathbf{H}) , \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_p + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E}) , \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_s + \rho_p) = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_s - \nabla \cdot \mathbf{P}) , \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} .\end{aligned}\tag{1.5.10a – d}$$

Te su jednadžbe valjane za materijal koji se ne giba. Pisane su tako da povezuju polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ s njihovim izvorima: slobodnim nabojima i strujama, te vezanim polariziranim i magnetiziranim nabojima i strujama u materijalu, kao i vremenskim derivacijama vektora $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$. Treba uočiti da u slučaju kada u materijalu nema slobodnih naboja ni struja ($\rho_s = 0$, $\mathbf{J}_s = 0$), jednadžbe (1.5.10a – d) su antisimetrične. Relacije građe (1.4.31), (1.4.53) i (1.2.7) koje glase

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) , \\ \mathbf{J}_s &= \kappa \mathbf{E} ,\end{aligned}\tag{1.5.11a – c}$$

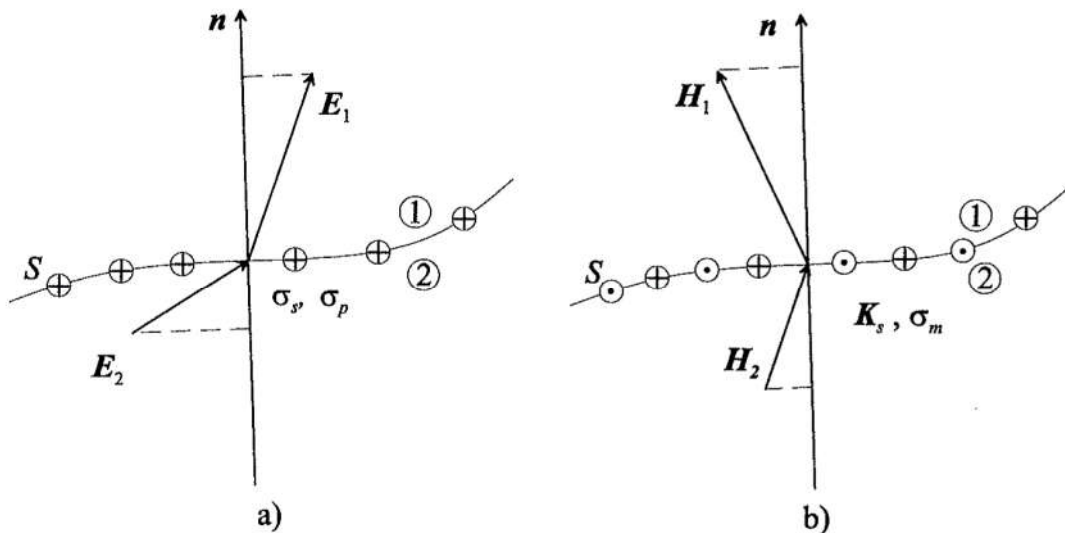
povezuju vektore gustoće električnog i magnetskog tijeka $\mathbf{D}$ i $\mathbf{B}$ kao i gustoće slobodne provodne struje $\mathbf{J}_s$, s vektorima jakosti polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$.

1.5.2.2. Uvjeti na granici

Na graničnoj plohi S koja razdvaja dva homogena izotropna materijala propisat ćemo postojanje slobodnih plošnih naboja i struja zadanih gustoća σ_s i $\mathbf{K}_s$, tako da zadovoljavaju jednađbu kontinuiteta (1.5.4) na plohi S . Na graničnoj plohi pojavit će se vezani polarizirani naboj plošne gustoće $\sigma_p = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$, koja je određena jednađbom (1.5.5), i koji zadovoljava jednađbu kontinuiteta (1.5.6). Za modele s magnetskim nabojem može se na temelju jednađbi (1.2.25) i (1.4.29) propisati postojanje vezanog plošnog naboja magnetiziranja gustoće

$$\sigma_m = -\mathbf{n} \cdot \mu_0 (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2), \quad (1.5.12)$$

na graničnoj plohi S između dva homogena izotropna materijala.



Slika 1.5.3. Uz uvjete na granici, a) za vektor $\mathbf{E}$ i b) za vektor $\mathbf{H}$

Taj naboj, analogno jednađbi (1.4.30), treba također zadovoljiti jednađbu kontinuiteta, pa je na graničnoj plohi S između dva materijala valjana relacija

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{m1} - \mathbf{J}_{m2}) = -\frac{\partial \sigma_m}{\partial t}. \quad (1.5.13)$$

Konačno nam preostaje da koristeći jednađbe (1.2.25) i (1.2.26) propišemo granične uvjete za okomite i tangencijalne komponente vektora jakosti električnog i magnetskog polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$, koji trebaju biti zadovoljeni na graničnoj plohi S , prikazanoj na slici 1.5.3, između dva homogena i izotropna materijala. Oni glase

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0, \\
\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \mathbf{K}_s, \\
\mathbf{n} \cdot \epsilon_0 (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= \sigma_s + \sigma_p = \sigma_s - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2), \\
\mathbf{n} \cdot \mu_0 (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \sigma_m = -\mathbf{n} \cdot \mu_0 (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2).
\end{aligned} \tag{1.5.14a - d}$$

Kratak pregled Maxwellovih jednadžbi i dodatnih uvjeta za model s fiktivnim magnetskim nabojem dali smo u tablici 1.5.2. na kraju poglavlja.

1.5.3. Maxwellove jednadžbe za vektore polja $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$

Ovisne ekvivalentne gustoće izvora ρ_p , $\mathbf{J}_p$, $\mathbf{J}_a$, ρ_m i $\mathbf{J}_m$ ne pojavljuju se eksplicitno u Maxwellovoj izvornoj formulaciji elektromagnetske teorije. Pokazali smo u članku 1.4.9. koliko je značajno bilo uvođenje dvaju novih vektorskih polja $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$, koji su bili uključeni u Maxwellovu formulaciju. Dodavanjem dva nova vektora, definirana prema jednadžbama (1.4.31) i (1.4.41) u temeljne zakone polja koji su u prethodna dva članka izraženi skupovima Maxwellovih jednadžbi (1.5.1a – d) i (1.5.10a – d), razvit ćemo mnogo jednostavniji oblik Maxwellovih jednadžbi, koje će omogućiti rješavanje elektromagnetskih polja u materijalnim medijima bez eksplicitnog uzimanja u obzir različitih fenomena koji se događaju u materijalu. Izražavanje skupa Maxwellovih jednadžbi u obliku

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_s, \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.5.15a - d}$$

čini osnovu za makroskopski opis elektromagnetskih polja u materijalu koji se ne giba. Ovdje treba napomenuti da u *prirodnim zadaćama* izvori, tj. slobodni naboji ρ_s i struje $\mathbf{J}_s$ moraju biti zadani tako da zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}. \tag{1.5.15e}$$

Odgovarajući uvjeti na graničnoj plohi S između dva homogena izotropna materijalna medija, prema jednadžbama (1.2.25) i (1.2.26) jednostavno glase

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0, \\
\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \mathbf{K}_s, \\
\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \sigma_s, \\
\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.5.16a – d}$$

Značajno je svojstvo prednjih skupova jednađbi (1.5.15a – d) i (1.5.16a – d), kao što smo već istakli da su one potpuno slobodne od polariziranih i magnetiziranih izvora, tj. u njima se ne pojavljuju ovisne veličine: $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$, ρ_p , $\mathbf{J}_p$, ρ_m , $\mathbf{J}_m$ i $\mathbf{J}_a$. Ustvari, uvođenjem pojmova dielektričnosti ϵ , permeabilnosti μ i provodnosti κ ⁷¹ materijala, kao fizikalnih makroskopskih veličina koje se mogu mjerenjem odrediti, nalazimo da su Maxwellove jednađbe (1.5.15a – d) poprimile oblik koji ih izravno povezuje s eksperimentalnim opažanjima i tako podređuje eksperimentalnoj provjeri. Upadljiva je sličnost tih zakona polja u materijalu i izvornih zakona polja u slobodnom prostoru (1.3.9a – d). Jedina razlika u izgledu između tih skupova jednađbi jest da se za materijalne medije uvedu dielektričnost ϵ i permeabilnost μ umjesto odgovarajućih vrijednosti ϵ_0 i μ_0 za slobodni prostor. Relacije građe za homogene izotropne materijalne medije, prema jednađbama (1.2.7), (1.4.52) i (1.4.54) glase

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \\
\mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\
\mathbf{J}_s &= \kappa \mathbf{E}.
\end{aligned} \tag{1.5.17a – c}$$

One međusobno povezuju vektore $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ s vektorima $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ i $\mathbf{J}_s$ koji uzimaju u obzir dielektrička, magnetska i provodna svojstva materijala.⁷²

Zajedno s relacijama građe (1.5.17a – c), Maxwellove jednađbe (1.5.15a – d) tvore potpun sustav jednađbi za jedinstveno određivanje elektromagnetskih polja, tj. vektora $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$, za dane izvore ρ_s i $\mathbf{J}_s$ u materijalnom mediju za koji su ϵ , μ i κ mjerenjem utvrđeni uz zadane rubne i početne uvjete.⁷³ Ako područje zanimanja obuhvaća različite, ali homogene i izotropne materijale, tada na graničnim plohama S trebaju biti zadane raspodjele slobodnih plošnih naboja i struja σ_s i $\mathbf{K}_s$ koje također moraju zadovoljiti jednađbu kontinuiteta (1.5.4).

Napomenimo još da su vektori $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ definirani s pomoću zakona za Lorentzovu silu (1.1.1), a da jednađbe (1.4.31) i (1.4.41) definiraju vektore $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$. Ove tri defini-

⁷¹ Pogledati članke 1.2.2, 1.4.9. i 1.4.10.

⁷² Povezanost polja u jednađbama (1.5.17a – c) može biti vrlo općenita. Najjednostavnija je u linearnim, izotropnim i homogenim LIH materijalima. Tada su značajke materijala ϵ , μ , κ skalarnе konstante. U anizotropnim materijalima npr. ne postoji kolinearnost vektora polja na lijevoj i desnoj strani jednađbi (1.5.17a – c). Značajke materijala se daju 3×3 matricama koje su funkcije prostora i koje se na transformacije koordinata ponašaju kao tenzori. Ta je situacija u kristalima.

⁷³ Pogledati Prilog A.

cijske jednadžbe zajedno s Maxwellovim jednadžbama i relacijama grade čine osnovu za proučavanje elektromagnetskih polja u materijalnim medijima. Uvrštavanjem vektora $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ određenih jednadžbama (1.4.31) i (1.4.41) u skupove Maxwellovih jednadžbi (1.5.1a – d) i (1.5.10a – d), mogu se oba skupa lako svesti na jednostavni oblik (1.5.15a – d), koji najčešće koristimo za rješavanje polja u materijalu. Njegova jednostavnost ogleda se i u tome što je dovoljno zadati samo slobodne naboje i struje ρ_s i $\mathbf{J}_s$, koje često nazivamo stvarnim nabojima i strujama. Samo su oni mjerodavni za polja karakterizirana vektorima jakosti polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ i odgovarajućim vektorima gustoće tijeka $\mathbf{D}$ i $\mathbf{B}$. Podsjetimo da su slobodni (stvarni) naboji oni koji se mogu slobodno gibati i nisu vezani za njihove atomske jezgre, kao što su vezani polarizirani naboji. Provodni naboji u materijalima i prostorni naboji u vakuumskim cijevima su primjeri slobodnih naboja. Slobodne (stvarne) struje su one koje tvori uređeno gibanje slobodnih naboja u usporedbi s polariziranim i magnetiziranim (amperskim) strujama koje nastaju gibanjem naboja vezanih za jezgre atoma materijala. Provodne struje u materijalima i konvencijske struje uzrokovane gibanjem prostornog naboja u vakuumskim cijevima su primjeri slobodnih (stvarnih) struja. Tako $\mathbf{J}_s$ može predstavljati i provodne ($\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$) i konvencijske ($\mathbf{J}_s = \rho_s \mathbf{v}$) struje.

U članku 1.4.3. studirali smo ponašanje dobrih vodiča, takvih kao što su kovine, u elektromagnetskom polju. Utvrdili smo da će prema jednadžbama (1.4.7) i (1.4.8) svaki slobodni naboj ρ_s smješten u unutrašnjost linearnog homogenog izotropnog vodiča vrlo brzo iščeznuti. Pokazat ćemo da u unutrašnjosti bilo kojeg homogenog materijala ne može biti (nikakvih) električnih naboja. Dokažimo to prvo za slobodne naboje. Prema definiciji u nevodljivom materijalu ($\kappa = 0$), tj. u dielektriku, ne može biti slobodnog naboja (ni u unutrašnjosti, ni na njegovoj površini). U homogenom vodljivom materijalu (tu uključujemo i dobre i loše vodiče, kao i realne izolatore), pokazat ćemo da također ne može biti slobodnog naboja. U tu svrhu uvrstimo u jednadžbu kontinuiteta (1.4.4), pisanu za slobodne naboje i struje, Maxwellovu jednadžbu (1.5.15c) i relacije grade (1.5.17a) i (1.5.17c), pa dobivamo

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = \nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(\frac{\kappa}{\epsilon} \mathbf{D} \right) = \frac{\kappa}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla \frac{\kappa}{\epsilon} = \frac{\kappa}{\epsilon} \rho_s + \mathbf{D} \cdot \nabla \frac{\kappa}{\epsilon} = - \frac{\partial \rho_s}{\partial t} .$$

Oдавде slijedi diferencijalna jednadžba raspodjele naboja u unutrašnjosti vodljivog homogenog materijala

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\kappa}{\epsilon} \rho_s = - \mathbf{D} \cdot \nabla \frac{\kappa}{\epsilon} . \quad (1.5.18)$$

Napomenimo da se ona prema očekivanju nešto razlikuje od odgovarajuće jednadžbe (1.4.5), koja je pisana isključivo za dobre vodiče (kovine). Ako je materijal homogen, tada je u svakoj točki u njegovoj unutrašnjosti $\nabla(\kappa/\epsilon) = 0$, pa je gustoća slobodnog naboja u unutrašnjosti homogenog vodljivog materijala (za koji je $\kappa \neq 0$) određena rješenjem homogenog dijela diferencijalne jednadžbe (1.5.18), kao

$$\rho_s = \rho_{s0} e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} t} = \rho_{s0} e^{-\frac{t}{T}}, \quad (1.5.19a,b)$$

$$T = \frac{\epsilon}{\kappa}.$$

Jednačbe (1.5.19a,b) pokazuju da se gustoća slobodnog naboja ρ_s u vodljivom homogenom materijalu ($\kappa = \text{konst.} \neq 0$), počev od zadanog početnog iznosa ρ_{s0} eksponencijalno smanjuje na nulu, tj. iščezava s *vremenskom konstantom relaksacije* $T = \kappa/\epsilon$. Slobodni naboj iščezava iz unutrašnjosti vodljivog materijala i pojavljuje se na njegovoj površini u tijeku nekoliko vremenskih konstanti (obično se uzima u trajanju od tri do pet konstanti relaksacije). Gradijent od κ/ϵ na površini vodljivog materijala, zbog skokovite promjene omjera κ/ϵ u makroskopskom pristupu, je beskonačan i okomit na graničnu plohu. Ako polje $\mathbf{D}$ ima okomitu komponentu na granici, tada je desna strana jednačbe (1.5.18) također beskonačna na graničnoj plohi. To vodi na beskonačnu volumnu gustoću slobodnog naboja ($\rho_s \rightarrow \infty$) na površini vodljivog materijala. Posljedica je da se na površini vodljivog homogenog materijala, prema analizi provedenoj u člancima 1.2.4, 1.2.5. i 1.4.3. pojavljuje slobodni plošni naboj konačne gustoće σ_s . Zaključimo da slobodni naboj ne može postojati u unutrašnjosti homogenog vodljivog materijala, dok se na njegovoj površini može pojaviti u obliku plošnog naboja gustoće σ_s .

Preostaje da pokažemo da ni vezanog polariziranog naboja ne može biti u unutrašnjosti *homogenog* materijala. U unutrašnjosti linearnog homogenog izotropnog medija dielektričnost je konstantna, pa je $\nabla \epsilon \equiv 0$. Iz jednačbi (1.5.15c) i (1.5.10c) slijedi da je

$$\rho_s = \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon \frac{\rho_s + \rho_p}{\epsilon_0}.$$

Odavde se može izraziti polarizirani naboj ρ_p u ovisnosti o slobodnom naboju ρ_s u materijalnom mediju kao

$$\rho_p = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0} \rho_s = -\chi_e \rho_s. \quad (1.5.20)$$

Pošto smo dokazali da u *homogenom* materijalu ne može biti slobodnog naboja ($\rho_s \equiv 0$), to iz jednačbe (1.5.20) zaključujemo da u unutrašnjosti homogenog materijala ne može biti ni polariziranog (vezanog) naboja ($\rho_p \equiv 0$).

Konačno zaključimo: u unutrašnjosti *homogenog* materijala ne mogu postojati ni slobodni ni polarizirani naboji. Naboji mogu postojati samo na površini homogenih medija u obliku (singularnih) plošnih gustoća σ_s i σ_p . Zbog toga razloga često će biti pogodno nadomjestiti učinke homogenog materijala s plošnim gustoćama naboja smještenim na graničnim plohama.

U nevodljivim materijalima zbog $\kappa = 0$ ne mogu postojati nikakve provodne struje ($\mathbf{J}_s = 0$, $\mathbf{K}_s = 0$). U vodljivim homogenim materijalima (tu mislimo na sve materijale koji

imaju $\kappa = \text{konst.} \neq 0$), iako nema slobodnih naboja, mogu teći provodne volumne i plošne struje, tj. može biti $\mathbf{J}_s \neq 0$ i $\mathbf{K}_s \neq 0$. Kasnije ćemo pokazati⁷⁴ da i u vremenski promjenjivim elektromagnetskim poljima postoji namjera da se volumne struje potisnu iz unutrašnjosti na površinu vodljivih materijala. Što je frekvencija promjena polja veća, to je i potiskivanje provodne struje na površinu materijala u sve tanji sloj izrazitije.

U odjeljku 1.3. objasnili smo pojam struja pomaka u slobodnom prostoru koji je uveo Maxwell i predstavio članom $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ u jednadžbi (1.3.9b). Preostaje nam da poopćimo pojam gustoće struja pomaka u materijalnim medijima. Iz različitih oblika sustava Maxwellovih jednadžbi (1.5.1a – d), (1.5.10a – d) i (1.5.15a – d), pisanih za polja u materijalu proizlazi da je *gustoća struja pomaka* dana izrazom

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_p + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.5.21)$$

i da se mjeri u *amperima po četvornom metru* (A/m^2). Pošto je u slobodnom prostoru $\mathbf{P} = 0$ i $\mathbf{J}_p = 0$, to je i gustoća struja pomaka jednostavno $\partial \mathbf{D} / \partial t = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$. Možemo reći da se ukupna električna struja $\mathbf{J}_u$ koja predstavlja izvor magnetskog polja $\mathbf{B}$ sastoji iz $\mathbf{J}_u = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_a + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_a + \partial \mathbf{D} / \partial t$.

Pregled Maxwellovih jednadžbi s pripadajućim relacijama građe i rubnim uvjetima dan je u tablici 1.5.3. na kraju poglavlja.

⁷⁴ Pogledati članke 8.3.2. i 8.3.4.

Tablica 1.3.1. Pregled Maxwellovih jednađbi za polje u vakuumu

Slobodni naboji i konvekcijske struje zadani u volumenu V :	$\rho_s = \rho_s(\mathbf{r}, t)$ $\mathbf{J}_s = \rho_s \mathbf{v} = \mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)$
Jednađba kontinuiteta koja mora biti zadovoljena u volumenu V :	$\nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$
Maxwellove jednađbe (diferencijalni oblik) postulirane u volumenu V :	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_s + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$ $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_s$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Maxwellove jednađbe (integralni oblik) postulirane u volumenu V :	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$ $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{J}_s + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS$ $\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_s dV$ $\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$
Naboji i struje zadani na plohi S :	$\sigma_s = \sigma_s(\mathbf{r}_s, t)$ $\mathbf{K}_s = \sigma_s \mathbf{v} = \mathbf{K}_s(\mathbf{r}_s, t)$
Jednađba kontinuiteta koja mora biti zadovoljena na plohi S :	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{s1} - \mathbf{J}_{s2}) + \nabla_s \cdot \mathbf{K}_s = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial t}$

Tablica 1.5.1. Pregled Maxwellovih jednadžbi, izvora i uvjeta na granici za model s amperskom strujom

	<i>Slobodni</i>	<i>Polarizirani</i>	<i>Magnetizirani</i>
Izvori (naboji i struje) zadani i propisani u volumenu V :	$\rho_s = \rho_s(\mathbf{r}, t)$ $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)$	$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ $\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$	$\mathbf{J}_a = \nabla \times \mathbf{M}$
Jednadžba kontinuiteta koja mora biti zadovoljena u V :	$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{J}_a = 0$
Maxwellove jednadžbe (diferencijalni oblik) postulirane u volumenu V :	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_u = \mu_0 \left(\mathbf{J}_s + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_a + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$ $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_u = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_s + \rho_p) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_s - \nabla \cdot \mathbf{P})$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$		
Maxwellove jednadžbe (integralni oblik) postulirane za volumen V :	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$ $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{J}_s + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_a + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS$ $\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (\rho_s + \rho_p) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (\rho_s - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV$ $\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$		
Relacije građe u V :	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad ; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}_a = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad ; \quad \mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$		
Naboji i struje zadani ili propisani iz uvjeta na plohi S :	$\sigma_s = \sigma_s(\mathbf{r}_s, t)$ $\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_s(\mathbf{r}_s, t)$	$\sigma_p = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$	$\mathbf{K}_a = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$
Jednadžba kontinuiteta koja mora biti zadovoljena na S :	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{s1} - \mathbf{J}_{s2}) + \nabla_S \cdot \mathbf{K}_s = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial t}$	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{p1} - \mathbf{J}_{p2}) = \frac{\partial \sigma_p}{\partial t}$	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{a1} - \mathbf{J}_{a2}) = 0$
Granični uvjeti koji moraju biti zadovoljeni na plohi S :	$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$ $\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_a = \mathbf{K}_s + \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$ $\mathbf{n} \cdot \epsilon_0 (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \sigma_s + \sigma_p = \sigma_s - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$ $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$		

Tablica 1.5.2. Pregled Maxwellovih jednadžbi izvora i uvjeta na granici za model s magnetskim nabojem

Izvori (naboji i struje) zadani i propisani u volumenu V :	Slobodni	Polarizirani	Magnetizirani
	$\rho_s = \rho_s(r, t)$ $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s(r, t)$	$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ $\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$	$\rho_m = -\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{M})$ $\mathbf{J}_m = \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \mathbf{M})$
Jednadžba kontinuiteta u V :	$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$
Maxwellove jednadžbe (diferencijalni oblik) postulirane u volumenu V :	$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \mathbf{M}) - \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \mathbf{H})$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_p + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E})$ $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_s + \rho_p) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_s - \nabla \cdot \mathbf{P})$ $\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}$		
Maxwellove jednadžbe (integralni oblik) postulirane za volumen V :	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left[-\mathbf{J}_m - \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \mathbf{H}) \right] \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_S (\mu_0 \mathbf{M} + \mu_0 \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$ $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left[\mathbf{J}_s + \mathbf{J}_p + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}) \right] \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \left[\mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}) \right] \cdot \mathbf{n} dS$ $\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (\rho_s + \rho_p) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (\rho_s - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV$ $\oint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\mu_0} \int_V \rho_m dV = -\frac{1}{\mu_0} \oint_S \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} dS$		
Relacije građe u volumenu V :	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad ; \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad ; \quad \mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$		
Naboji i struje zadani ili propisani iz gr. uvjeta na plohi S :	$\sigma_s = \sigma_s(r_s, t)$ $\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_s(r_s, t)$	$\sigma_p = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$	$\rho_m = -\mathbf{n} \cdot \mu_0 (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$
Jednadžba kontinuiteta na S :	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{s1} - \mathbf{J}_{s2}) + \nabla_S \cdot \mathbf{K}_s = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial t}$	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{p1} - \mathbf{J}_{p2}) = \frac{\partial \sigma_p}{\partial t}$	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{m1} - \mathbf{J}_{m2}) = -\frac{\partial \sigma_m}{\partial t}$
Granični uvjeti koji moraju biti zadovoljeni na S :	$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$ $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}_s$ $\mathbf{n} \cdot \epsilon_0 (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \sigma_s + \sigma_p = \sigma_s - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$ $\mathbf{n} \cdot \mu_0 (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \sigma_m = -\mathbf{n} \cdot \mu_0 (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$		

Tablica 1.5.3. Pregled Maxwellovih jednađbi za vektore polja E , B , D i H .

	<i>Slobodni</i>	<i>Polarizirani</i>	<i>Magnetizirani</i>
Izvori (naboji i struje) zadani i propisani u volumenu V :	$\rho_s = \rho_s(r, t)$ $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s(r, t)$	–	–
Jednađba kontinuiteta u volumenu V :	$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$	–	–
Maxwellove jednađbe (diferencijalni oblik) postulirane u volumenu V :	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_s$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$		
Maxwellove jednađbe (integralni oblik) postulirane za volumen V :	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot n dS$ $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_s \cdot n dS + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot n dS$ $\oint_S \mathbf{D} \cdot n dS = \int_V \rho_s dV$ $\oint_S \mathbf{B} \cdot n dS = 0$		
Relacije građe u V :	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad ; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad ; \quad \mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$		
Naboji i struje zadani ili propisani iz graničnih uvjeta na S :	$\sigma_s = \sigma_s(r, t)$ $\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_s(r, t)$	–	–
Jednađba kontinuiteta koja mora biti zadovoljena na S :	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{s1} - \mathbf{J}_{s2}) + \nabla_s \cdot \mathbf{K}_s = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial t}$	–	–
Granični uvjeti koji moraju biti zadovoljeni na plohi S :	$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$ $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}_s$ $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_s$ $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$		

POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 1.

- T. Bosanac, *Teoretska elektrotehnika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- N. Cindro, *Fizika 2 – Elektricitet i magnetizam*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- Z. Haznadar, *Teoretska elektrotehnika – Elektromagnetska teorija i polja*, Liber, Zagreb, 1972.
- M. Javid, P.M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- V. Knapp, P. Colić, *Uvod u električna i magnetska svojstva materijala*, Školska knjiga, Zagreb 1990.
- K. Küpfmüller, *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, Springer, Berlin, 1955.
- J. Lončar, *Osnovi elektrotehnike*, knjiga 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1956.
- V. Lopašić, *Predavanja iz fizike – Elektromagnetsko polje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
- L.M. Magid, *Electromagnetic Fields, Energy and Waves*, John Wiley, New York, 1972.
- J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Volume I and II, Third Edition (1891), Dover, New York, 1954.
- W.K.H. Panofsky, M Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading, 1972.
- V. Pinter, *Osnove elektrotehnike*, knjiga 1 i 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970. i 1975.
- J.R. Reitz, F.J. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1967.
- J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- I. Supek, *Teorijska fizika i struktura materije*, dio 1. i 2., Školska knjiga, Zagreb, 1951. i 1952.
- K. Šimoni, *Teoretičeskaja elektrotehnika*, MIR, Moskva, 1964.

2. ELEKTROMAGNETSKI POTENCIJALI

U prethodnom poglavlju opisali smo različite oblike Maxwellovih jednačbi pomoću kojih se rješavaju elektromagnetska polja. Polja smo predstavljali glavnim vektorima polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ i pomoćnim vektorima polja $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$. Sljedeći korak učinit ćemo u ovom poglavlju tako da ćemo za predstavljanje polja uvesti nove pomoćne funkcije poznate kao *elektromagnetski potencijali*. Te pomoćne matematičke funkcije, nazvane vektorski i skalarni potencijali, bit će uvedene tako da budu suglasne s Maxwellovim jednačbama. S druge strane, ako se upotrijebe potencijali, proračun i analiza elektromagnetskih polja često će biti znatno pojednostavnjeni i olakšani.

2.1. VEKTORSKE I SKALARNE POTENCIJALNE FUNKCIJE

Općenito smo zainteresirani za pronalaženje *pomoćnih funkcija* pomoću kojih bi što jednostavnije predstavljali i proračunavali elektromagnetska polja. Različiti oblici sustava Maxwellovih jednačbi, za polja u vakuumu tj. slobodnom prostoru i u materijalu koji se ne giba, uvedeni u prethodnom poglavlju, predstavljaju skupove međusobno povezanih parcijalnih diferencijalnih jednačbi prvog reda. Da bi se proračunalo elektromagnetsko polje, nužno je cijeli sustav jednačbi, zbog njihove međusobne povezanosti, rješavati simultano. Simultano rješavanje tako velikih sustava jednačbi vrlo je teška, a često i nerješiva zadaća.

Očita je potreba da se uvede nova klasa funkcija pomoću kojih ćemo predstavljati elektromagnetska polja, umjesto do sada upotrebljavanih vektorskih funkcija jakosti polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$, te indukcija $\mathbf{B}$ i $\mathbf{D}$. Definiranje i uvođenje novih potencijalnih funkcija u teoriju elektromagnetskih polja imat će smisla ako se njihovim uvođenjem prvo bitno smanji broj jednačbi koje treba rješavati u matematičkom modelu polja i drugo, ako uvođenje tih funkcija omogući razdvajanje jednačbi u sustavu tako da ih se može pojedinačno i odvojeno rješavati. U ovom odjeljku pokazat ćemo upravo to, uvođenjem dviju klasa potencijalnih funkcija koje ćemo nazvati *potencijalima* i *antipotencijalima*.

2.1.1. Potencijali i antipotentijali u dielektriku bez izvora

Studij potencijala započet ćemo analizom elektromagnetskog polja u *neograničenom prostoru* koji je ispunjen *materijalom koji se ne giba*. Za materijal koji ne sadrži slobod-

dne naboje i struje ($\rho_s = 0$, $\mathbf{J}_s = 0$), pretpostavit ćemo zbog jednostavnosti da je linearan, izotropan, homogen (LIH) i bez gubitaka. Prema tome, to je dielektrik s konstantnim značajkama ϵ i μ (i s $\kappa = 0$). Ponašanje elektromagnetskog polja u takvom materijalu određeno je homogenim dijelom sustava Maxwellovih jednadžbi (1.5.15a – d), koje sada glase

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{2.1.1a – d}$$

Namjera nam je da uvođenjem potencijalnih funkcija, koje ćemo nazivati potencijalima i antipotencijalima, obavimo pretvorbu tih jednadžbi u odgovarajuće valne jednadžbe elektromagnetskog polja.

2.1.1.1. Vektorski i skalarni potencijali

Suglasno jednadžbi (2.1.1d) magnetsko polje je uvijek *solenoidalno* (bez izvora). Zato vektor $\mathbf{B}$ može biti predstavljen kao rotor drugog vektora $\mathbf{A}$, tj.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} .\tag{2.1.2}$$

Vektorsko polje $\mathbf{A}$ je vektorska potencijalna funkcija elektromagnetskog polja i naziva se *magnetski vektorski potencijal*. Vektorski identitet $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$ osigurava valjanost sporedne Maxwellove jednadžbe (2.1.1d), pa ako $\mathbf{B}$ u jednadžbi (2.1.1a) zamijenimo s $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, dobivamo

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 .$$

Ta relacija pokazuje da vektor $(\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t)$ predstavlja *bezvrtložno* vektorsko polje, koje se u suglasnosti s vektorskim identitetom $\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv 0$ – gdje je $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ proizvoljna skalarna funkcija – može uvijek izraziti kao gradijent skalarne funkcije φ , tj. možemo pisati

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi .$$

Negativni predznak pred gradijentom je posljedica definicije potencijala φ ; prema dogovoru želimo da u statičkom polju vektor $\mathbf{E}$ ima smjer od većeg prema manjem potencijalu. Suglasno toj jednadžbi električno polje $\mathbf{E}$ može biti izraženo pomoću *magnetskog vektorskog potencijala* $\mathbf{A}$ i *električnog skalarnog potencijala* φ relacijom

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.1.3)$$

koja izravno zadovoljava jednadžbu (2.1.1a). Prema jednadžbama (2.1.2) i (2.1.3) jedinica za vektorski potencijal $\mathbf{A}$ je *veber po metru* (Wb/m), a za skalarni potencijal φ je *volt* (V).

Jednadžbe (2.1.2) i (2.1.3) dopuštaju da se polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ u ovom sustavu izraze pomoću dva potencijala φ i $\mathbf{A}$. Potencijali su dvije potpuno proizvoljne i neovisne funkcije prostora i vremena. Oni se određuju iz valnih jednadžbi koje se dobiju kada se potencijali supstituiraju u preostale dvije jednadžbe sustava (2.1.1a – d).

2.1.1.2. Svojstva potencijala

Budući da su vektori polja $\mathbf{B}$ i $\mathbf{E}$ povezani s potencijalima $\mathbf{A}$ i φ s pomoću jednadžbi (2.1.2) i (2.1.3), iz kojih se dobivaju prostornim i vremenskim deriviranjem potencijala, možemo zaključiti da u svakoj točki u kojoj su polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ konačna potencijali φ i $\mathbf{A}$ moraju biti *kontinuirani*. Uvjet neprekinutosti za potencijalne funkcije $\mathbf{A}$ i φ , čini da su one pogodnije za proračun polja nego veličine $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, koje mogu biti (na granicama različitih materijala i na mjestima singularnih gustoća naboja i struja) diskontinuirane.

2.1.1.3. Valne jednadžbe

Očekivane valne jednadžbe za φ i $\mathbf{A}$ slijede iz uvođenja jednadžbi (2.1.2) i (2.1.3) u jednadžbu (2.1.1b) množenu s μ , i u jednadžbu (2.1.1c) dijeljenu s ϵ . Tako dobivamo

$$\Delta \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad (2.1.4a,b)$$

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0,$$

par povezanih linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda za potencijale φ i $\mathbf{A}$, koje se mogu razdvojiti pogodnim izborom potencijala. U jednadžbe (2.1.4a,b) uveden je Laplaceov skalarni operator kao $\Delta \varphi \equiv \nabla \cdot (\nabla \varphi)$, a Laplaceov vektorski operator $\Delta \mathbf{A}$ određuje se iz vektorske relacije¹ $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$.

U odjeljku 2.2. pokazat ćemo da vektorski i skalarni potencijali za jedno te isto elektromagnetsko polje *nisu jedinstveni*. S druge strane, sva parcijalna rješenja sustava jednadžbi (2.1.4a,b) za φ i $\mathbf{A}$ vode k istim vektorima $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ elektromagnetskog polja ako su subjekt istih rubnih i početnih uvjeta. Ta parcijalna rješenja za potencijale razlikovat će se međusobno za proizvoljnu funkciju Ψ . Ova sloboda u izboru potencijala dopušta nam da zahtijevamo da vektorski i skalarni potencijali zadovoljavaju još i jedan drugi uvjet, osim uvjeta da određuju upravo željene vektore polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$. Taj *dodatni uvjet*

¹ Odgovarajuće izraze za $\Delta \varphi$ i $\Delta \mathbf{A}$ u različitim koordinatnim sustavima pogledati u Prilogu D.

sastoji se u propisivanju divergencije vektorskog potencijala.² Taj izbor je uvijek moguć pošto rotor i divergencija bilo kojeg vektorskog polja (takvog kao $\mathbf{A}$) su potpuno neovisna svojstva polja, a samo je $\nabla \times \mathbf{A}$ pomoću jednadžbe (2.1.2) bio do sada propisan.

Dodatni uvjet općenito se bira tako da razdvoji i pojednostavni jednadžbe (2.1.4a,b), koje treba riješiti da bi se izračunali potencijali. U nevodljivim materijalima, tj. dielektricima nalazimo da će se potencijali φ i $\mathbf{A}$ razdvojiti u jednadžbama (2.1.4a,b) ako propišemo da divergencija $\mathbf{A}$ iznosi

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 . \quad (2.1.5)$$

Taj je uvjet poznat kao *Lorentzov uvjet*. Uvrštenjem uvjeta (2.1.5) u jednadžbe (2.1.4a,b) dobivamo simetrične valne jednadžbe

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= 0 , \\ \Delta \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.1.6a,b)$$

Lorentzov uvjet omogućio je da izrazimo osnovne zakone elektromagnetskog polja u ε , μ -mediju bez gubitaka ($\kappa = 0$) u obliku sličnog para nepovezanih, linearnih, diferencijalnih, homogenih valnih jednadžbi drugog reda, za vektorski i skalarni potencijal $\mathbf{A}$ i φ . Zadaće polja svodimo tako na rješavanje tih jednadžbi.

2.1.1.4. Antipotencijali

Treba upozoriti da izrazi (2.1.2) i (2.1.3) za vektore $\mathbf{B}$ i $\mathbf{E}$ nisu opća, nego su to samo parcijalna rješenja homogenog sustava jednadžbi (2.1.1a – d). Kako je taj sustav antisimetričan, to on identično može biti zadovoljen s novim rješenjima

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= -\nabla \times \mathbf{A}^* , \\ \mathbf{H} &= -\nabla \varphi^* - \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} , \end{aligned} \quad (2.1.7a,b)$$

pa možemo dobiti polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ pomoću novih potencijala, koje nazivamo i *antipotencijalima*. Polje $\mathbf{E}$ dobivamo kao

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{A}^* , \quad (2.1.7c)$$

a za određivanje polja $\mathbf{B}$ pomoću antipotencijala koristimo izraz

² Pogledati podtekstnicu 32 u članku 1.3.2.

$$\mathbf{B} = -\mu \left(\nabla \varphi^* + \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \right). \quad (2.1.7d)$$

Sve dosad rečeno za potencijale φ i $\mathbf{A}$ vrijedi jednako i za antipotencijale φ^* i $\mathbf{A}^*$ koji su subjekt sljedećih relacija

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}^* - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}^*}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta \varphi^* - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{A}^* + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.8a - c)$$

Rješavanjem para homogenih valnih jednadžbi (2.1.8a,b) te pripadajućih rubnih i početnih uvjeta određujemo antipotencijale φ^* i $\mathbf{A}^*$. Jedinica mjere za električni vektorski potencijal $\mathbf{A}^*$ je *kulon po metru* (C/m), a za magnetski skalarni potencijal φ^* je *amper* (A).

2.1.1.5. Opće rješenje

Konačno možemo napisati opće rješenje sustava Maxwellovih jednadžbi (2.1.1.a – d) za polje u linearnom homogenom dielektriku bez slobodnih naboja i struja, izraženo pomoću potencijala i antipotencijala, kao

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} - \mu \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} - \mu \nabla \varphi^*, \\ \mathbf{E} &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{A}^*. \end{aligned} \quad (2.1.9a,b)$$

Ta opća rješenja elektromagnetskog polja određenog parom vektora $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, koji se određuju iz potencijala i antipotencijala, tj. iz jednadžbi (2.1.6a,b) i (2.1.8a,b), mogu se protumačiti tako da kažemo: da su funkcije φ i $\mathbf{A}$ potencijali koji odgovaraju slobodnim električnim nabojima i strujama raspodijeljenim izvan područja promatranja, a da su funkcije φ^* i $\mathbf{A}^*$ potencijali, tj. antipotencijali koji odgovaraju ekvivalentnim (fiktivnim) magnetskim nabojima i strujama raspodijeljenim izvan područja promatranja.

Uobičajeno je, kad god je to moguće, da se izabere da su φ^* i $\mathbf{A}^*$ jednaki nuli, pa se polje predstavlja samo jednim parom potencijala φ i $\mathbf{A}$, i da se koriste jednadžbe (2.1.2) i (2.1.3). No ima slučajeva kada je u rješavanju polja pogodno koristiti par antipotencijala φ^* i $\mathbf{A}^*$, ili pak da se koristi samo jedan od njih kao što će to biti slučaj u kvazistatičkim i statičkim magnetskim poljima.

2.1.2. Potencijali u vodljivom materijalu bez izvora

U ovom članku pažnju ćemo usredotočiti na potencijale u neograničenom prostoru koji je ispunjen jednostavnim (LIH) vodljivim materijalom. Treba posebno istaći da u takvom materijalu sa zadanim značajkama ϵ , μ i κ , mogu teći provodne struje, jer je provodnost različita od nule. Prema Ohmovu zakonu (1.2.7), provodne struje mogu postojati u vodljivom materijalu u kojemu egzistira elektromagnetsko polje i u slučaju kada u njemu nema slobodnih naboja.

U stvarnosti će u vodljivom materijalu, ako pretpostavimo da je postojala neka početna zadana raspodjela slobodnih naboja ρ_{s0} , prema jednadžbi (1.5.19a), taj slobodni naboj iščeznuti eksponencijalno u vremenu s vremenskom konstantom relaksacije naboja $T = \epsilon/\kappa$. Za dobre vodiče vrijeme relaksacije je ekstremno kratko, pa možemo pretpostaviti da je gustoća slobodnih naboja uvijek nula u unutrašnjosti vodiča, tj. $\rho_s \equiv 0$.

Pojava da slobodni naboj vrlo brzo iščezava iz unutrašnjosti vodiča i da se prenosi na njegovu površinu upućuje nas na uvođenje pojma *nestacionarne (prijelazne) struje*. Tako možemo slobodnu (stvarnu) struju predstaviti da se sastoji od dva dijela: stacionarnog (stalnog) i nestacionarnog (prijelaznog). Struja se naziva stacionarnom ako nema nakupljanja naboja ni u jednoj točki u polju. Prema Panofskom i Phillipsu³ kriterij stacionarnosti struje jest

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{STAC} = 0, \quad (2.1.10)$$

gdje smo s $\mathbf{J}_{STAC}$ označili gustoću stvarne stacionarne (stalne) raspodjele struje. Nestacionarni (prijelazni) dio stvarne struje potječe od početne raspodjele slobodnog naboja, pa mora biti zadovoljena jednadžba kontinuiteta $\nabla \cdot \mathbf{J}_{PROL} = -\partial \rho_s / \partial t$. Lako se može pokazati da u vodljivom materijalu gustoća stvarne provodne struje može biti izražena kao

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_{PROL} + \mathbf{J}_{STAC} = \mathbf{J}_{s0} e^{-t/T} + \kappa \mathbf{E}, \quad (2.1.11)$$

gdje je $\mathbf{J}_{s0}$ gustoća početnog nestacionarnog dijela provodne struje koja potječe od početne raspodjele slobodnog naboja i povezana je s njom relacijom

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{s0}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_{s0}}{T} = \frac{\kappa}{\epsilon} \rho_{s0}(\mathbf{r}). \quad (2.1.12)$$

Relacija (2.1.11) u skladu s izrazom za relaksaciju naboja $\rho = \rho_{s0} e^{(-t/T)}$ pokazuje nam da u dobrim vodičima nestacionarni dio struje vrlo brzo iščezava, pa se sva stvarna struja može predstaviti stacionarnim dijelom, tj. izraziti kao $\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$.

Imamo li prednje u vidu, razumljivo je da ćemo za proračun polja u dobrim vodičima primijeniti Maxwellov sustav, dan skupom jednadžbi (1.5.15a – d), u koji ćemo

³ Pogledati W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading, 1972.

uvrstiti relacije građe (1.5.17a – c), i činjenicu da je $\rho_s = 0$. Tako dobivamo sustav homogenih jednačbi

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \kappa \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{2.1.13a – d}$$

u koje u prvoj alternativni uvodimo potencijale $\mathbf{A}$ i φ prema jednačbama (2.1.2) i (2.1.3), tj. izraze $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ i $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t$, pa dobivamo

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \kappa \varphi \right), \\ \Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= 0.\end{aligned}\tag{2.1.14a,b}$$

Definirat ćemo za vodljivi materijal Lorentzov uvjet

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \kappa \varphi = 0,\tag{2.1.15}$$

tako da ponovno za potencijale $\mathbf{A}$ i φ dobijemo slične valne jednačbe koje glase

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= 0, \\ \Delta \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0.\end{aligned}\tag{2.1.16a,b}$$

To je par nepovezanih *homogenih prigušenih valnih jednačbi* za potencijale $\mathbf{A}$ i φ koji predstavljaju elektromagnetsko polje u vodljivom materijalu s gubicima. Razlikuju se od para jednačbi (2.1.6a,b) zato što imaju dodatni član $\mu \kappa \partial \mathbf{A} / \partial t$, odnosno $\mu \kappa \partial \varphi / \partial t$ koji predstavlja prigušenje elektromagnetskog vala u materijalu s gubicima ($\kappa \neq 0$). Oba para jednačbi i (2.1.6a,b) i (2.1.16a,b), pokazuju da elektromagnetsko polje u prirodi, u krajnjem određeno sustavom Maxwellovih jednačbi ima valni karakter. Bit će pokazano da se u dobrim vodičima (takvim kao što su kovine), mogu zanemariti članovi s drugim derivacijama $\mu \epsilon \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2$ i $\mu \epsilon \partial^2 \varphi / \partial t^2$, pa prigušene valne jednačbe prelaze u *diferencijalne jednačbe difuzije*,⁴ za koje je karakteristično da se energija u elektromag-

⁴ Pogledati Prilog A.

netskom polju u vodiču više ne prenosi valom (kojega nema), nego slično kao toplina difuzijom.

2.1.3. Potencijali i antipotencijali zadane raspodjele neovisnih izvora

U primijenjenoj teoriji elektromagnetskih polja ima slučajeva kada je polja i njihove potencijale pogodno računati iz zadane raspodjele neovisnih izvora. Pod neovisnim izvorima razumijevamo one na čiju raspodjelu ne djeluju polja obuhvaćena sustavom Maxwellovih jednadžbi koje rješavamo. Zato ćemo u ovom članku izvesti diferencijalne jednadžbe u kojima ćemo povezati neovisne izvore polja i odgovarajuće potencijale A i φ koje oni uzrokuju.

2.1.3.1. Vodljivi materijal

Pretpostavit ćemo da polje postoji u neograničenom prostoru koji je ispunjen linearnim homogenim izotropnim materijalom sa zadanim značajkama ϵ , μ i κ , koje su općenito različite od nule. Raspodjela neovisnih izvora zadana je tako da je zadana neovisna raspodjela slobodnih naboja, koju ćemo označiti s ρ_s' da bi istakli da je neovisna i da na nju izračunato polje ne djeluje. Za gustoću slobodne struje J_s pretpostavit ćemo da se sastoji iz dva dijela: jednog koji je ovisan o polju koje se računa i koji je određen Ohmovim zakonom te iznosi κE , i drugog dijela koji je zadan sa J_s' i koji uzimamo da ne ovisi o polju koje računamo. To možemo pisati tako da je $J_s' = \kappa E'$, gdje je E' električno polje koje nije obuhvaćeno Maxwellovim jednadžbama, za razliku od polja E koje računamo iz Maxwellovih jednadžbi. Drugim riječima, J_s' je dio zadane gustoće struje koji proizvode vanjske elektromotorne sile. On ne sadrži niti jedan dio struje uzrokovane električnim poljima u vodljivom materijalu. Dakle, imamo

$$J_s = \kappa E + J_s' = \kappa(E + E') . \quad (2.1.17)$$

U mnogim slučajevima J_s' je idealizacija slična strujnom izvoru u teoriji krugova. Preostaje da uz zadane neovisne izvore ρ_s' i J_s' definirane potencijale A i φ prema jednadžbama (2.1.2) i (2.1.3) uvedemo Lorentzov uvjet (2.1.15) za vodljivi materijal u sustav Maxwellovih jednadžbi (1.5.15a – d). Budući da smo J_s definirali pomoću (2.1.17) i da preostale relacije građe glase: $D = \epsilon E$ i $B = \mu H$, dobivamo valne jednadžbe potencijala

$$\begin{aligned} \Delta A - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial A}{\partial t} &= -\mu J_s' , \\ \Delta \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\rho_s'}{\epsilon} . \end{aligned} \quad (2.1.18a,b)$$

To su *nehomogene prigušene valne jednadžbe* iz kojih se u jednostavnom (LIH) materijalu mogu izračunati potencijali A i φ kao posljedica neovisnih izvora elektromagnet-

skog polja zadanih pomoću gustoća ρ_s' i $\mathbf{J}_s'$. Parcijalna rješenja tih jednadžbi mogu se izraziti kao integrali preko zadanih raspodjela naboja i struja, dok su njihova komplementarna rješenja, tj. ona od homogenih dijelova jednadžbi, očigledno valna rješenja. Podsjetimo da su neovisni izvori polja ρ_s' i $\mathbf{J}_s'$ proizvedeni vanjskim uzrocima.

2.1.3.2. Nevodljivi materijal

Ako je neograničeni prostor ispunjen jednostavnim materijalom bez gubitaka, tj. dielektrikom ($\kappa = 0$), lako se može pokazati da se potencijali tada računaju iz para *nehomogenih neprigušenih valnih jednadžbi*

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{J}_s', \\ \Delta \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_s'}{\epsilon},\end{aligned}\tag{2.1.19a,b}$$

za zadanu raspodjelu gustoća neovisnih izvora ρ_s' i $\mathbf{J}_s'$. Ovdje treba podsjetiti da je Lorentzov uvjet za dielektrik dan jednadžbom (2.1.5). Pokazat ćemo sada da je jednadžba kontinuiteta uključena u Lorentzov uvjet (2.1.5)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Primijenimo li Laplaceov operator Δ na obje strane ove jednadžbe dobivamo

$$\nabla \cdot \Delta \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varphi).$$

Uvrstimo li iz jednadžbi (2.1.19a,b) vrijednosti za $\Delta \mathbf{A}$ i $\Delta \varphi$, slijedi

$$\mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \mu \left(\nabla \cdot \mathbf{J}_s' + \frac{\partial \rho_s'}{\partial t} \right).$$

Prema tome, primjenom Lorentzova uvjeta (2.1.5) mi uključujemo da je $\nabla \cdot \mathbf{J}_s' + \partial \rho_s' / \partial t = 0$, što predstavlja jednadžbu kontinuiteta. Budući da jednadžba kontinuiteta mora biti zadovoljena kod *prirodnih zadaća* za fizikalne raspodjele naboja i struja, pogodno je upotrijebiti Lorentzov uvjet za razdvajanje valnih jednadžbi po $\mathbf{A}$ i po φ . Iako imamo matematičku slobodu da zadamo bilo kakve raspodjele neovisnih izvora očito je da kod prirodnih zadaća moramo zadavati neovisne izvore $\mathbf{J}_s'$ i ρ_s' tako da oni zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta.

2.1.3.3. Statički naboji i struje

U slučaju statičkih naboja i stalnih (istosmjernih) struja i njihovih statičkih polja ne postoji ovisnost o vremenu, tj. u jednadžbama za polja i potencijale otpadaju članovi

koji sadrže derivacije po vremenu. Tako se električno polje pomoću statičkog električnog potencijala može izraziti prema jednadžbi (2.1.3) kao

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (2.1.20)$$

što je svojstvena relacija *konzervativnog polja*. Vektorski magnetski potencijal propisuje se na temelju relacija

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.21a,b)$$

gdje ova posljednja jednadžba predstavlja *Coulombov dodatni uvjet*. Valne jednadžbe potencijala (2.1.19a,b) za zadane neovisne izvore ρ_s' i $\mathbf{J}_s'$ (koji moraju zadovoljavati statičku jednadžbu kontinuiteta za fizikalne naboje i struje), degeneriraju tada u par nehomogenih diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} &= -\mu \mathbf{J}_s', \\ \Delta \varphi &= -\frac{\rho_s'}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.1.22a,b)$$

koje nazivamo *vektorska i skalarna Poissonova⁵ jednadžba*. One služe za određivanje potencijala iz zadanih izvora u statičkim poljima. Ako statičko polje promatramo u prostoru bez izvora, tada jednadžbe (2.1.22a,b) prelaze u homogene parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda, oblika

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} &= 0, \\ \Delta \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.23a,b)$$

Te najjednostavnije jednadžbe temeljne su jednadžbe statičkih polja pa ih nazivamo *vektorska i skalarna Laplaceova⁶ jednadžba*.

2.1.3.4. Magnetski naboji i struje

Ima slučajeva kada je pogodno elektromagnetska polja računati pomoću antipotencijala φ^* i $\mathbf{A}^*$, koje određujemo iz njihovih zadanih izvora. Promatramo polje u neograničenom prostoru koji je ispunjen nevodljivim jednostavnim (LIH) materijalom, sa zadanim značajkama ε i μ ($\kappa = 0$). Zadana je raspodjela fiktivnih neovisnih magnetskih naboja ρ_m' i neovisnih magnetskih struja $\mathbf{J}_m'$.⁷ Električnih naboja i struja pretpostavljamo da nema. Po sličnosti sa sustavom (1.5.10a,d), možemo pisati Maxwellove jednadžbe za takvo polje

⁵ Siméon Denis Poisson (1781 – 1840), francuski matematičar i fizičar.

⁶ Pierre Simon Marquis de Laplace (1749 – 1827), francuski matematičar i fizičar.

⁷ U članku 1.4.8. pokazano je da se ρ_m' mjeri u Wb/m^3 , a $\mathbf{J}_m'$ u V/m^2 .

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -\mathbf{J}_m' - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} , \\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 , \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= \rho_m' .
\end{aligned}
\tag{2.1.24a - d}$$

Važeće relacije grade u ovom su slučaju

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} , \\
\mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} .
\end{aligned}
\tag{2.1.25a,b}$$

Antipotencijale ϕ^* i A^* uvodimo tako da su vektori polja $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ određeni jednadžbama (2.1.7a,b), dok je odgovarajući Lorentzov dodatni uvjet dan jednadžbom (2.1.8c). Nakon uvrštenja u sustav (2.1.24a - d) dobivamo nehomogene valne jednadžbe oblika

$$\begin{aligned}
\Delta A^* - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A^*}{\partial t^2} &= -\epsilon \mathbf{J}_m' , \\
\Delta \phi^* - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_m'}{\mu} .
\end{aligned}
\tag{2.1.26a,b}$$

Jasno je da se parcijalnim rješenjima tih nehomogenih valnih jednadžbi, koja se dobiju integracijom preko zadanih neovisnih izvora ρ_m' i $\mathbf{J}_m'$, mogu dodati sva parcijalna rješenja homogenih dijelova jednadžbi (2.1.26a,b), odnosno (2.1.8a,b).

Napomenimo na kraju da je *gustoća neovisne magnetske struje $\mathbf{J}_m'$ fiktivna veličina* koja je analogna naponskom izvoru u teoriji krugova. Njezino uvođenje u matematički model često olakšava proračun polja. Tako npr. u sinusnim poljima $\mathbf{J}_m'$ ima karakteristike oscilirajućeg magnetskog dipola i daje istu vrstu polja.

Pregled jednadžbi elektromagnetskih potencijala i antipotencijala dali smo u tablicama 2.1.1. i 2.2.2. na kraju ovog poglavlja.

2.2. BAŽDARSKE TRANSFORMACIJE

Pažljivim pregledom jednadžbi (2.1.2) i (2.1.3) možemo utvrditi da električno i magnetsko polje $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ ostaju nepromijenjeni ako potencijal A transformiramo izrazom

$$A_{novo} = A + \nabla \psi , \tag{2.2.1a}$$

a potencijal ϕ pomoću izraza

$$\varphi_{novo} = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2.2.1b)$$

gdje ψ je po volji odabrana skalarna funkcija prostora i vremena. To znači da svaki zakon elektromagnetizma, ako ga izrazimo s pomoću elektromagnetskih potencijala $\mathbf{A}$ i φ , mora ostati nepromijenjen nakon transformacija danih jednačbama (2.2.1a,b). Fizički zakon koji je invarijantan na takve transformacije naziva se *baždarski invarijantnim*, a te transformacije poznate su pod nazivom: *baždarske transformacije*.

Drugim riječima, zadavanjem potencijala preodređuju se polja i obratno, jedan par polja ima više parova potencijala. Izborom funkcije ψ možemo matematički korektno za jedno te isto polje dano vektorima $\mathbf{B}$ i $\mathbf{E}$ izabrati beskonačno mnogo odgovarajućih potencijala $\mathbf{A}$ i φ . U tom izboru mogućih potencijala posebno su značajne dvije grupe potencijala, nazvanih *Lorentzovi potencijali* i *Coulombovi potencijali*. I jedni i drugi dobiju se zadavanjem odgovarajućih dodatnih uvjeta, a pogodni su jer u prvom redu daju takve matematičke modele, tj. odgovarajuće sustave potencijalnih jednačbi čija rješenja se u potpunosti slažu s realnošću i eksperimentalno utvrđenim činjenicama. S druge strane, *Lorentzovo baždarenje* pogodno je jer uvodi potpunu simetriju između skalarnog i vektorskog potencijala, tj. ono osigurava da oba potencijala zadovoljavaju valnu jednačbu istog oblika. Lorentzovo baždarenje također osigurava relativističku kovarijantnu relaciju između skalarnog i vektorskog potencijala. *Coulombovo baždarenje* nije relativističko. Ono je pogodno zato jer se u tom slučaju postiže najpotpunije razdvajanje potencijala $\mathbf{A}$ i φ i njihovih tzv. transversalnih i longitudinalnih polja. U posebnim slučajevima može se izabrati da φ iščezava, pa se elektromagnetsko polje može predstaviti samo s jednim potencijalom $\mathbf{A}$. Velika prednost Coulombovog baždarenja jest u njegovoj jednostavnosti.

2.2.1. Lorentzovo baždarenje

Ovdje ćemo pokazati da postoji sloboda u izboru i da uvijek mogu biti nađeni novi potencijali koji zadovoljavaju Lorentzov uvjet. Pretpostavimo da u jednostavnom vodljivom materijalu postoji elektromagnetsko polje bez izvora. Neka potencijali $\mathbf{A}$ i φ zadovoljavaju valne jednačbe (2.1.16a,b) i Lorentzov uvjet (2.1.15). Primjenjujući baždarsku transformaciju (2.2.1a,b) uvedimo nove potencijale $\mathbf{A}_{novo}$ i φ_{novo} . Zahtijevamo da novi potencijali zadovoljavaju iste valne jednačbe (2.1.16a,b) i Lorentzov uvjet (2.1.15), tj. da bude

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{novo} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi_{novo}}{\partial t} + \mu\kappa \varphi_{novo} = 0. \quad (2.2.2)$$

Uvrštavajući u ovu jednačbu relacije (2.2.1a,b), slijedi jednačba

$$\Delta \psi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \kappa \varphi \right) = 0 . \quad (2.2.3)$$

Osiguravajući da baždarsku funkciju ψ nađemo tako da zadovolji valnu jednadžbu (2.2.3), mi osiguravamo da i novi potencijali $\mathbf{A}_{\text{novi}}$ i φ_{novi} zadovoljavaju valne jednadžbe (2.1.16a,b) i da je Lorentzov uvjet (2.2.2) ostao očuvan.

Za sve potencijale u toj ograničenoj klasi kaže se da pripadaju Lorentzovu baždarenju. U svim točkama u prethodnom odjeljku 2.1. analizirani su elektromagnetski potencijali za polja u različitim materijalima sa i bez zadanih neovisnih izvora koji su svi pripadali Lorentzovu baždarenju.

2.2.2. Coulombovo baždarenje

Razmotrit ćemo novu klasu potencijala koji pripadaju *Coulombovom* ili *transverzalnom baždarenju*. Već je rečeno da je to najjednostavnije baždarenje i da je određeno jednostavnim dodatnim uvjetom

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 , \quad (2.2.4)$$

koji se naziva Coulombovim uvjetom i koji se uvodi u jednadžbe elektromagnetskih potencijala.

2.2.2.1. Polja bez izvora

Coulombovo ili transversalno baždarenje često se upotrebljava kada u području u kojem promatramo elektromagnetsko polje nema izvora, tj. kad su neovisni slobodni naboji ρ_s' i neovisne slobodne struje $\mathbf{J}_s'$ jednaki nuli.

2.2.2.2. Nevodljivi materijal

Promatramo li polje u nevodljivom jednostavnom (LIH) materijalu bez izvora, polja su tada određena Maxwellovim homogenim jednadžbama (2.1.1a – d). Potencijali uvedeni pomoću relacija (2.1.2) i (2.1.3) zadovoljavaju tada jednadžbe (2.1.4a,b). Uvedemo li Coulombovo baždarenje, tj. uvjet (2.2.4) i uvrstimo baždarske transformacije (2.2.1a,b), slijedi da baždarska funkcija zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\Delta \psi = 0 . \quad (2.2.5)$$

Potencijali se određuju iz transformiranih jednadžbi (2.1.4a,b), koje sada glase

$$\Delta \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \varepsilon \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) , \quad (2.2.6a)$$

$$\Delta \varphi = 0 . \quad (2.2.6b)$$

Vektorski potencijal određuje se u tom slučaju iz nehomogene valne jednačbe, a skalarni potencijal iz Laplaceove jednačbe. Iako je Laplaceova jednačba jednostavna, ovaj par jednačbi ipak nije dovoljno jednostavan da bi se iskoristile sve povoljnosti Coulombova baždarenja.

Naime, uvijek se mogu izabrati trivijalna rješenja za baždarsku funkciju ψ , tj. za skalarni potencijal φ (koji zadovoljavaju istu Laplaceovu diferencijalnu jednačbu), tako da bude $\varphi = 0$, tj. da skalarni potencijal iščezne. U tom slučaju se polje može predstaviti samo s jednim vektorskim potencijalom, koji je na temelju rečenog definiran s

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{B} , \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.2.7a,b)$$

U tom slučaju vektorski potencijal određuje se iz zadanih rubnih i početnih uvjeta⁸ i homogene valne jednačbe

$$\Delta \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 . \quad (2.2.8)$$

Podrazumijevajući da je $\varphi = 0$, slijedi da jednostavne relacije

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} , \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \end{aligned} \quad (2.2.10a,b)$$

određuju vektore elektromagnetskog polja.

2.2.2.3. Vodljivi materijal

Slično se u vodljivom jednostavnom materijalu bez neovisnih izvora, primjenjujući Coulombovo baždarenje na jednačbe (2.1.14a,b) i uvodeći baždarske transformacije (2.2.1a,b), može pokazati da baždarska funkcija zadovoljava Laplaceovu jednačbu $\Delta \psi = 0$, a potencijali $\mathbf{A}$ i φ jednačbe

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \nabla \left(\mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \kappa \varphi \right) , \\ \Delta \varphi &= 0 . \end{aligned} \quad (2.2.11a,b)$$

Taj sustav jednačbi može se bitno pojednostavniti ako se izabere trivijalno rješenje $\varphi = 0$, tj. da skalarni potencijal iščezne. Tada je elektromagnetsko polje u vodljivom materijalu određeno samo jednim vektorskim potencijalom, koji je definiran prema

⁸ Pogledati Prilog A.

(2.2.7a,b). Potencijal se određuje iz prigušene valne jednadžbe

$$\Delta A - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad (2.2.12)$$

a vektori polja $\mathbf{B}$ i $\mathbf{E}$ određeni su tada jednadžbama (2.2.10a,b).⁹

2.2.2.4. Polje s neovisnim izvorima

Čak i onda ako su u promatranom području prisutni i zadani neovisni izvori, mi možemo primijeniti Coulombovo baždarenje, tj. izabrati da bude $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Analizirat ćemo polje u vodljivom homogenom linearnom materijalu sa zadanim značajkama ε , μ , κ i sa zadanim neovisnim slobodnim nabojima ρ_s' i strujama $\mathbf{J}_s'$. Ako smo struju definirali jednadžbom (2.1.17), tj. $\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E} + \mathbf{J}_s'$, polje je određeno Maxwellovim sustavom jednadžbi (1.5.15a – d). Uvedemo li potencijale pomoću izraza (2.1.2) i (2.1.3), dobiju se odgovarajuće jednadžbe

$$\Delta A - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial A}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_s' + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \kappa \varphi \right),$$

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_s'}{\varepsilon}.$$

Primijenimo li Coulombovo baždarenje (2.2.4), možemo izabrati baždarsku funkciju ψ uvijek takvu da bude

$$\Delta A - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial A}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_s' + \nabla \left(\mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \kappa \varphi \right), \quad (2.2.13a,b)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s'}{\varepsilon}.$$

Skalarni potencijal zadovoljava Poissonovu jednadžbu (2.2.13b) čije rješenje, slično kao u članku 2.4.1. i točki 2.4.2.3, pišemo

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho_s'(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (2.2.14)$$

Skalarni potencijal je *istodobni (neretardirani) Coulombov potencijal*, uzrokovan gustoćom slobodnih neovisnih nabojia $\rho_s'(\mathbf{r}, t)$. Otuda potiče i ime "Coulombovo baždarenje". Treba podsjetiti da je Poissonova jednadžba karakteristična za statička polja. Ovdje

⁹ U izrazito vodljivim materijalima možemo zanemariti struje pomaka. To ima za posljedicu da drugi član u jednadžbi (2.2.12) iščezava. Takva polja nazivamo *kvazistatička polja*, a detaljno su obrađena u poglavlju 7.

takvo ograničenje nije zahtijevano, ρ_s' je funkcija vremena i skalarni potencijal slijedi promjene naboja bez bilo kakvog kašnjenja u prostoru (jer Poissonova jednačba ne sadrži član $[\mu\epsilon\partial^2\phi/\partial t^2]$, koji doprinosi retardaciji potencijala). U svakom slučaju lakše je riješiti Poissonovu nego valnu jednačbu.

Jednom kada je riješena jednačba (2.2.14), dajući ϕ iz raspodjele neovisnih slobodnih naboja ρ_s' , može se potencijal A izračunati iz nehomogene prigušene valne jednačbe (2.2.13a). Kada su potencijali ϕ i A izračunati, polja B i E se mogu odrediti iz jednačbi (2.1.2) i (2.1.3). "Strujni" član na desnoj strani jednačbe (2.2.13a), koji sadrži potencijal ϕ , možemo izračunati iz (2.2.14). Budući da taj član sadrži operator gradijent, to je on *bezvrtložan (konzervativan)*, tj. njegov rotor je jednak nuli. To nas navodi na zaključak da možemo ispustiti odgovarajući dio gustoće struje. Zato ćemo neovisnu gustoću struje rastaviti na sumu dvaju članova

$$\mathbf{J}_s' = \mathbf{J}_t' + \mathbf{J}_l', \quad (2.2.15)$$

gdje se $\mathbf{J}_t'$ naziva transverzalnom ili solenoidnom strujom i ima $\nabla \cdot \mathbf{J}_t' = 0$ (bez izvora), dok se $\mathbf{J}_l'$ naziva longitudinalnom ili bezvrtložnom strujom i ima $\nabla \times \mathbf{J}_l' = 0$. Uz pomoć jednačbe kontinuiteta

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s' = \nabla \cdot \mathbf{J}_l' = -\frac{\partial \rho_s'}{\partial t}, \quad (2.2.16)$$

koja povezuje longitudinalni dio struje $\mathbf{J}_l'$ s promjenom neovisnog slobodnog naboja ρ_s' (ako je zadaća prirodna), i iz jednačbe (2.2.13b) slijedi

$$\mathbf{J}_l' = \epsilon \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (2.2.17)$$

Ako je sredstvo nevodljivo, tada su u jednačbi (2.2.13a) članovi koji sadrže κ jednaki nuli, pa je u dielektriku sa zadanom raspodjelom neovisnih izvora ρ_s' i $\mathbf{J}_s'$ potencijale moguće računati iz jednačbi

$$\begin{aligned} \Delta A - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{J}_t', \\ \Delta \phi &= -\frac{\rho_s'}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.2.18a,b)$$

Izvor u valnoj jednačbi za A je transverzalna struja $\mathbf{J}_t'$, koja nije povezana s promjenom neovisnog slobodnog naboja ρ_s' . To je razlog da se Coulombovo baždarenje naziva i "transverzalno baždarenje". Često se koristi i naziv "radijacijsko baždarenje" koji slijedi iz činjenice da su transverzalna radijacijska polja određena samo s vektorskim potencijalom, dok istodobni skalarni Coulombov potencijal pridonosi samo bliskim poljima. To baždarenje posebno je pogodno u kvantnoj elektrodinamici.

Na kraju možemo zaključiti ako nema slobodnih naboja ρ_s' i sva struja je transverzalna $\mathbf{J}'$, ϕ se može izabrati jednakim nuli, i polje se može računati samo s pomoću vektorskog potencijala $\mathbf{A}$. Ako postoje slobodni naboji ρ_s' , potencijal ϕ se računa iz njega pomoću Poissonove jednadžbe, ali slobodni naboj ne djeluje na vektor potencijal $\mathbf{A}$, koji se računa pomoću jednadžbe (2.2.18a) iz raspodjele slobodne (transverzalne) struje.

Usput upozorimo na osobitosti Coulombova baždarenja. Dobro je poznato da se elektromagnetski valovi prostiru konačnom brzinom. Jednadžba (2.2.18b), odnosno (2.2.14), pokazuje da se skalarni potencijal rasprostire trenutno (istodobno) po cijelom prostoru. S druge strane, vektorski potencijal zadovoljava valnu jednadžbu (2.2.18a), koja uključuje konačnu brzinu prostiranja $c = 1/(\mu\epsilon)^{1/2}$. Na prvi pogled teško je objasniti kako to očito nefizikalno ponašanje možemo otkloniti. Odgovor možemo naslutiti u činjenici da su polja prije svega one fizikalne veličine koje nas zanimaju, a ne potencijali kao pomoćne veličine. Sljedeća opaska jest da se transverzalna struja $\mathbf{J}'$ određuje integracijom po cijelom prostoru.¹⁰

Pregled jednadžbi elektromagnetskih potencijala s Coulombovim baždarenjem dali smo u tablici 2.2.1. na kraju ovog poglavlja.

2.3. HERTZOWI POTENCIJALI

U prethodnim odjeljcima 2.1. i 2.2. vidjeli smo da se elektromagnetsko polje može riješiti tako da se odrede vektorski i skalarni potencijali iz kojih se deriviranjem dobivaju vektori polja. Pošto su potencijali međusobno povezani i Lorentzovim uvjetom (2.1.5), može se pretpostaviti da je polje određeno samo s tri funkcije. Ustvari, Hertz¹¹ je pokazao da elektromagnetsko polje, u određenim uvjetima, možemo predstaviti samo jednom vektorskom funkcijom. Promatrat ćemo elektromagnetsko polje u nevodljivom linearnom, izotropnom i homogenom materijalu sa zadanom raspodjelom neovisnih izvora. U članku 2.1.3. pokazali smo da je Lorentzov uvjet (2.1.5) izravna posljedica jednadžbe kontinuiteta. Pošto fizikalni naboji i struje ne mogu biti zadani neovisno jedni od drugih, povoljno je za proračun polja predstaviti ih jednom vektorskom funkcijom izabranom tako da jednadžba kontinuiteta bude uvijek zadovoljena. Stoga uvodimo vektor $\mathbf{P}_s'(\mathbf{r}, t)$, tako da se gustoća neovisnih slobodnih naboja može odrediti samo iz jednog vektora pomoću relacije

$$\rho_s' = -\nabla \cdot \mathbf{P}_s' , \quad (2.3.1a)$$

a da se gustoća neovisnih slobodnih struja određuje iz istog vektora pomoću

¹⁰ Za detaljniju analizu kauzalnosti u Coulombovu baždarenju pogledati J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York, 1975; i O. L. Brill, B. Goodman, *Am. J. Phys.* 35, 832, 1967.

¹¹ Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894), njemački fizičar. Pogledati H. Hertz, *Wiedemann's Ann.*, 36, 1, 1889.

$$\mathbf{J}_s' = \frac{\partial \mathbf{P}_s'}{\partial t} . \quad (2.3.1b)$$

Lako je pokazati da je jednačba kontinuiteta zadovoljena takvim izborom vektora $\mathbf{P}_s'$, dok se s druge strane svaka proizvoljna raspodjela struje može na taj način predstaviti. Funkcija izvora $\mathbf{P}_s'$ poznata je kao ekvivalentna gustoća raspodjele električnih dipola. Povezana je sa (stvarnim) slobodnim nabojima i slobodnim strujama na isti način kao što je vektor polarizacije $\mathbf{P}$ povezan s polariziranim nabojima i strujama, prema jednačbama (1.4.11) i (1.4.13). To je samo matematička sličnost, i treba istaći da ρ_s' i $\mathbf{J}_s'$ predstavljaju neovisne slobodne naboje i struje koji su vanjski izvori polja, tako da je $\mathbf{P}_s'$ potpuno različit od polarizacije $\mathbf{P}$. Vektor $\mathbf{P}_s'$ mjeri se u jedinicama *kulona po četvornom metru* (C/m²). Uvrštavanjem relacija (2.3.1a,b) u nehomogene valne jednačbe (2.1.19a,b) dobivaju se jednačbe elektromagnetskih potencijala

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{P}_s'}{\partial t} , \\ \Delta \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{P}_s' , \end{aligned} \quad (2.3.2a,b)$$

čiji su neovisni izvori zadani pomoću vektora $\mathbf{P}_s'$. Uvedemo li slično novi vektor $\mathbf{Z}$, tako da bude

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} , \\ \varphi &= -\nabla \cdot \mathbf{Z} , \end{aligned} \quad (2.3.3a,b)$$

tada će biti zadovoljen Lorentzov uvjet (2.1.5). Uvrstimo izraze (2.3.3a,b) u valne jednačbe (2.3.2a,b), dobit ćemo jednu te istu jednačbu po $\mathbf{Z}$, koja glasi

$$\Delta \mathbf{Z} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}_s'}{\epsilon} . \quad (2.3.4)$$

Prema tome, uvođenjem izvora $\mathbf{P}_s'$ i vektora $\mathbf{Z}$ zadovoljene su jednom jednačbom (2.3.4) obje jednačbe (2.3.2a,b), odnosno (2.1.19a,b) za potencijal $\mathbf{A}$ i φ . Vektor $\mathbf{Z}$ je "superpotencijal", a često se naziva *polarizacijski potencijal* ili *Hertzov vektor*, odnosno *Hertzov potencijal*. Mjeri se u *volt-metrima* (Vm).

Možemo zaključiti da svako rješenje vektorske nehomogene valne jednačbe (2.3.4) određuje elektromagnetsko polje, čiji vektori se prema (2.1.2), (2.1.3) i (2.3.3a,b) mogu odrediti iz relacija

$$\mathbf{B} = \mu \varepsilon \nabla \times \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}, \quad (2.3.5a,b)$$

$$\mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{Z} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2}.$$

Proširenje tih jednadžbi na homogeni vodljivi materijal bez neovisnih izvora slijedi bez teškoća, pa dobivamo

$$\mathbf{B} = \mu \nabla \times \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \kappa \mathbf{Z} \right), \quad (2.3.6a,b)$$

$$\mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{Z} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{Z},$$

gdje je

$$\Delta \mathbf{Z} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = 0. \quad (2.3.7)$$

Naše razmatranje možemo još proširiti. Zbog antisimetrije Maxwellovog sustava jednadžbi moguće je osim električnog Hertzova vektora $\mathbf{Z}$, uvesti i magnetski Hertzov vektor $\mathbf{Z}^*$. Zadaću ćemo postaviti tako da je u linearnom homogenom nevodljivom materijalu zadana raspodjela neovisnih slobodnih naboja i struja. Moguće je naći gustoću ekvivalentne raspodjele električnih dipola $\mathbf{P}_s'$ i gustoću ekvivalentne neovisne raspodjele magnetskih dipola $\mathbf{M}_s'$, čija elektromagnetska polja su ista kao polja proizvedena slobodnim neovisnim raspodjelama naboja i struja ρ_s' i $\mathbf{J}_s'$. Vektore $\mathbf{P}_s'$ i $\mathbf{M}_s'$ uvest ćemo, slično jednadžbama (2.3.1a,b), prema relacijama

$$\begin{aligned} \rho_s' &= -\nabla \cdot \mathbf{P}_s', \\ \mathbf{J}_s' &= \frac{\partial \mathbf{P}_s'}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}_s', \end{aligned} \quad (2.3.8a,b)$$

tako da za fizikalne naboje i struje bude zadovoljena jednadžba kontinuiteta

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s' + \frac{\partial \rho_s'}{\partial t} = 0. \quad (2.3.9)$$

Gustoća ekvivalentne raspodjele neovisnih magnetskih dipola $\mathbf{M}_s'$ mjeri se u *amperima po metru* (A/m), dok je jedinica magnetskog Hertzova vektora $\mathbf{Z}^*$ *veber* (Wb). Uvedemo li Hertzove vektore $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Z}^*$, tako da bude

$$\mathbf{A} = \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{Z}^* , \quad (2.3.10a,b)$$

$$\varphi = -\nabla \cdot \mathbf{Z} ,$$

tada će biti zadovoljen Lorentzov uvjet (2.1.5) automatski, a time i jednačba kontinuiteta. Uvrstimo li jednačbe (2.3.8a,b) i (2.3.10a,b) u valne jednačbe (2.1.19a,b) dobivamo nove valne jednačbe

$$\Delta \mathbf{Z} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}_s'}{\varepsilon} , \quad (2.3.11a,b)$$

$$\Delta \mathbf{Z}^* - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^*}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{M}_s' .$$

Hertzove vektore trebamo izabrati tako da zadovoljavaju te jednačbe. Pregled jednačbi Hertzovih potencijala dali smo u tablici 2.3.1. na kraju ovog poglavlja.

2.4. INTEGRALNO PREDSTAVLJANJE

U ovom odjeljku prikazat ćemo pristup elektromagnetskim zadaćama pomoću integralnih jednačbi, koji ćemo razviti usporedo s dosad obrađenim pristupom poljima putem diferencijalnih jednačbi. Matematički modeli¹² u elektromagnetskoj teoriji koji sadrže integralne jednačbe čine osnovu tzv. metode momenata.¹³

Razmatrat ćemo izvore i temeljnu zadaću određivanja elektromagnetskog polja izgrađenog zadanom raspodjelom neovisnih naboja i struja. Formalno matematički problem povezivanja polja s njihovim izvorima jest da se riješe nehomogene valne jednačbe elektromagnetskih potencijala. Započnimo istraživanje s parcijalnim rješenjima nehomogenih valnih jednačbi (2.1.19a,b), opisanim u članku 2.1.3.

Uz Lorentzovo baždarenje, za zadane raspodjele struja i naboja, skalarni potencijal φ i kartezijske komponente vektorskog potencijala $\mathbf{A}$ u jednačbama (2.1.19a,b) zadovoljavaju skalarnu nehomogenu valnu jednačbu oblika

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -g(\mathbf{r},t) . \quad (2.4.1)$$

Ovdje funkcija ψ predstavlja skalarni potencijal ili bilo koju pravokutnu komponentu vektora polja ili vektorskog potencijala, a funkcija $g(\mathbf{r},t)$ funkciju gustoće izvora. Pretpostavimo da je zadana raspodjela izvora moguća, tj. da ne proturječi jednačbama

¹² Pogledati Prilog A.

¹³ Pogledati poglavlje 10.

polja, i još k tome da je raspodjela struja i naboja neovisna, tj. da izračunato polje ne utječe na nju niti je mijenja. U jednadžbi (2.4.1) stavili smo $\mu\epsilon$ da je jednako $1/c^2$, gdje c ima dimenziju brzine (m/s). Pretpostavili smo također da je prostor ispunjen materijalom koji je homogen i izotropan i koji ima vodljivost jednaku nuli.

Rješavanju valne jednadžbe pristupit ćemo postupno. Prvo ćemo riješiti polje točkastog izvora, a potom ćemo izvesti opći integral jednadžbe (2.4.1) za kontinuiranu raspodjelu izvora u neograničenom, a potom i u ograničenom prostoru. U stvarnosti samo neki od idealiziranih slučajeva mogu biti riješeni relativno jednostavno. Za praktične primjene pri dobivanju integralnih rješenja u zadacima zamršene geometrije koristit će se numeričke metode.

2.4.1. Skalarni potencijal točkastog naboja

Najjednostavnija raspodjela naboja koju možemo promatrati je ona koja je posvuda mala izuzev u neposrednom okolišu ishodišta. To nas vodi prema hipotetički idealiziranom modelu naboja koncentriranog u ishodište sustava. Takav izvor nazivamo točkastim nabojem. Gustoća takvog točkastog naboja posvuda je nula, izuzev u naboju gdje je beskonačna. Zamislimo dalje točkasti naboj iznosa $f(t)$ koji miruje, ali se njegov iznos vremenski mijenja, tj. poznata je funkcija vremena. To je fizikalno nemoguće, ali će nam ta pretpostavka pomoći da učinimo prvi korak prema rješenju postavljene zadaće. Radi jednostavnosti smjestili smo naboj u ishodište sfernog koordinatnog sustava. Homogeni dio jednadžbe (2.4.1)

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.4.2)$$

mora vrijediti za sve točke neograničenog prostora izuzev za ishodište sustava. S φ smo označili skalarni potencijal točkastog naboja smještenog u ishodištu. Očito je da potencijal ovisi samo o radijalnoj udaljenosti od ishodišta r i da je neovisan o smjeru. Prema tome, zbog sferne simetrije φ je funkcija samo od r i t . Zato jednadžba (2.4.2) pisana u sfernom koordinatnom sustavu glasi

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.4.3)$$

Uvodeći zamjenu $\varphi = V/r$ dobivamo

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (2.4.4)$$

Učinimo transformaciju koordinata

$$\xi = t - \frac{r}{c},$$

$$\eta = t + \frac{r}{c},$$

tako da je

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \right), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}.\end{aligned}$$

Tada jednađžba (2.4.4) postaje

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (2.4.5)$$

a njezino rješenje je

$$V = f(\xi) + h(\eta), \quad (2.4.6)$$

gdje su f i h kakve god funkcije. Konačno je rješenje jednađžbe (2.4.2), odnosno (2.4.3), dano izrazom

$$\varphi = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{h\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (2.4.7)$$

Razmotrimo prvo član $f(t - r/c)$ u rješenju (2.4.7). Ako t poraste na $t + t'$ i r se poveća na $r + ct'$, argument od f ostaje nepromijenjen. Drugim riječima, ako f ima neku vrijednost u trenutku t u točki na udaljenosti r , ona će imati istu vrijednost nakon vremena t' kasnije i u točki na udaljenosti većoj za ct' od prijašnje. Tako smo dobili *val koji se giba prema vani od ishodišta brzinom c* . Zaključimo da prvi član od φ predstavlja *izlazeći val* čija se amplituda smanjuje zbog faktora $1/r$ kako se val giba prema vani. Slično i drugi član od φ predstavlja *ulazeći val* koji putuje prema ishodištu i čija amplituda stalno raste kako se on giba prema ishodištu. Točno određivanje funkcija f i h ovisi o postavljenim uvjetima. Ako npr. pretpostavimo da smo odjednom postavili naboj u ishodište neograničenog prostora, to će uzrokovati val koji će se rasprostirati prema vani, i tada moramo staviti da je h identično nula, jer h predstavlja val koji putuje prema unutra. Općenito h predstavlja poremećaj koji možemo opaziti prije nego li ga je proizveo izvor. Budući da je takvo ponašanje u suprotnosti s makroskopskim eksperimentalnim opažanjima u elektromagnetizmu, to ćemo pretpostaviti da je h jednako nuli.

Funkciju f treba tako izabrati da točno određuje naboj u ishodištu. Ako naboj ima konstantan iznos Q , tada je elektrostatički potencijal $\varphi = Q/4\pi\epsilon r$, pri čemu se pretpostavlja da je potencijal u beskonačnosti jednak nuli. Konačno, skalarni potencijal točkastog naboja iznosa $f(t)$ smještenog u ishodištu neograničenog sustava jest

$$\varphi = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon r} . \quad (2.4.8)$$

Iako je to samo heurističko razmatranje koje ne možemo nadomjestiti strogim razmatranjem jer je zamišljeni model fizikalno nemoguće realizirati, ipak nam je rezultat (2.4.8) koristan. On predstavlja jedno rješenje valne jednačbe (2.4.2) primijenjene na točkasti naboj iznosa $f(t)$, koji je smješten u ishodište koordinatnog sustava u neograničenom prostoru.

2.4.2. Retardirani i avanzirani potencijali. Greenove funkcije neograničenog prostora

Ovdje smo zainteresirani za dobivanje formalnog rješenja valne jednačbe (2.4.1). Pogodno je stoga prikazati dobiveni skalarni potencijal točkastog naboja kao rješenje diferencijalne jednačbe uvodeći poopćene funkcije.¹⁴ Za razliku od rješenja pomoću poopćenih funkcija,¹⁵ ovdje smo se opredijelili za nešto detaljniji matematički izvod potkrijepljen fizikalnim objašnjenjima, kako bi ovo fundamentalno područje prostiranja elektromagnetskog polja konačnom brzinom pomoću valova u slobodnom neograničenom prostoru bilo što detaljnije osvijetljeno.

2.4.2.1. Retardirani potencijal jediničnog impulsa u neograničenom prostoru

U neograničenom prostoru zanima nas partikularno nehomogeno rješenje koje predstavlja putujuće valove prema beskonačnosti. Takvo partikularno rješenje nehomogene valne jednačbe (2.4.1) primijenjene na skalarni potencijal možemo dobiti na temelju jednostavnih razmatranja. Zato razmotrimo slučaj kada izvor zadajemo kao

$$\rho(r,t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < 0 , \\ \delta(r) & ; \quad t > 0 , \end{cases} \quad (2.4.9a)$$

gdje lokalna svojstva Diracove delta funkcije možemo zamišljati kao

¹⁴ O poopćenim funkcijama pogledati u Prilogu B.

¹⁵ Pogledati Z. Haznadar, *Teoretska elektrotehnika, Elektromagnetska teorija i polja*, Liber, Zagreb, 1972.

$$\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & ; \quad \mathbf{r} \neq 0, \\ \infty & ; \quad \mathbf{r} = 0, \end{cases} \quad (2.4.9b)$$

i

$$\int_R \delta(\mathbf{r}) dV = \begin{cases} 1 & ; \quad \mathbf{r} \in R, \\ 0 & ; \quad \mathbf{r} \notin R, \end{cases} \quad (2.4.9c)$$

gdje R predstavlja regiju integracije. Fizikalno jednačbe (2.4.9a,b,c) utvrđuju da prije nultog vremena nije bilo nikakve raspodjele naboja u prostoru i da se jedinični pozitivni točkasti naboj odjednom u trenutku $t = 0$ pojavio u ishodištu koordinatnog sustava.

Na temelju analize i rezultata dobivenih u članku 2.4.1. možemo očekivati da će se uspostaviti potencijalno polje koje će biti određeno slično relaciji (2.4.8). Ako je gustoća naboja u vremenu $t > 0$, prema jednačbi (2.4.9a) zadana kao $\rho = \delta(\mathbf{r})$, što odgovara statičkom polju (jer ρ nije funkcija od t), tada valna jednačba (2.4.1) prelazi u statičku Poissonovu jednačbu za jedinični točkasti naboj u ishodištu u slobodnom prostoru

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = - \frac{\delta(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \quad (2.4.10a)$$

Njegovo rješenje ima poznati oblik za potencijal točkastog naboja koji glasi

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.4.10b)$$

Jasno je da se to polje neće uspostaviti istovremeno u svim točkama u prostoru. Ono što možemo očekivati jest, da se informacija o trenutnoj pojavi jediničnog pozitivnog naboja u ishodištu sustava u trenutku $t = 0$ prenosi dalje od ishodišta nekom konačnom brzinom c . Zato očekujemo da će skalarni potencijal koji nastaje zbog pojave jediničnog pozitivnog naboja u trenutku $t = 0$, prema (2.4.10b), biti

$$\varphi_+(r,t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < 0, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} & ; \quad r < ct, t > 0, \\ 0 & ; \quad r > ct, t > 0. \end{cases} \quad (2.4.11a)$$

Pretpostavimo da u kratkom vremenskom razmaku Δt pozitivni naboj odjednom nestane. To je fizikalno ekvivalentno nagloj pojavi jediničnog negativnog naboja u ishodištu u trenutku $t = \Delta t$. Označimo potencijal proizveden tim negativnim nabojem u trenutku Δt kao

$$\varphi_-(r,t) = \begin{cases} 0 ; & t < \Delta t , \\ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} ; & r < c(t - \Delta t), t > \Delta t , \\ 0 ; & r > c(t - \Delta t), t > \Delta t . \end{cases} \quad (2.4.11b)$$

Ukupni potencijal uzrokovan pojavom jediničnog pozitivnog naboja u ishodištu sustava u trenutku $t = 0$, a zatim njegovim iščeznućem u trenutku $t = \Delta t$ određuje se po načelu superpozicije kao $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$. U svakom trenutku $t > \Delta t$ taj potencijal će biti nula svugdje izuzev unutar uskog područja omeđenog sfernim ploham polumjera $r_1 = ct$ i $r_2 = c(t - \Delta t)$. Prema tome, u trenutku t iznos potencijala unutar sferne ljuske prema (2.4.10b) je $\varphi(r) = 1/4\pi\epsilon_0 r$, što se može, uzimajući u obzir i vremensku ovisnost, izraziti relacijom

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \delta_t\left(t - \frac{r}{c}\right) \Delta t . \quad (2.4.12a)$$

Očito je da potencijal (2.4.12a) predstavlja rješenje nehomogene valne jednadžbe

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\delta(r) \delta_t(t) \Delta t}{\epsilon_0} , \quad (2.4.12b)$$

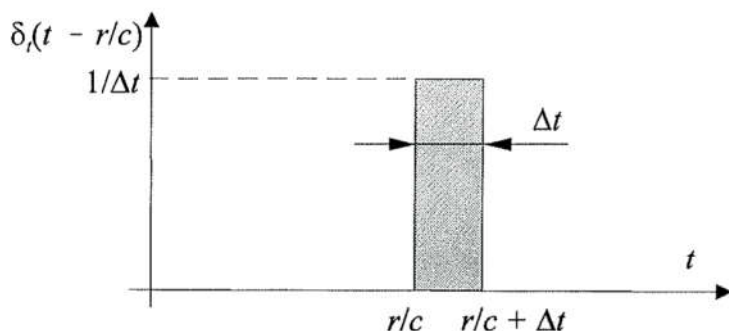
gdje smo izvor u jednadžbi (2.4.1), odnosno raspodjelu naboja u jednadžbi (2.1.19b), za jedinični naboj koji u ishodištu sustava djeluje u kratkom periodu Δt , izrazili u obliku

$$\rho(r,t) = \delta(r) \delta_t(t) \Delta t . \quad (2.4.12c)$$

Prije nego dokažemo tu tvrdnju podsjetimo da izraz $\delta_t(t - r/c) \Delta t$ predstavlja vremensku ovisnost

$$\delta_t\left(t - \frac{r}{c}\right) \Delta t = \begin{cases} 1 ; & 0 < (t - r/c) < \Delta t , \\ 0 ; & \text{za sve ostale trenutke} . \end{cases} \quad (2.4.13a)$$

Tok funkcije $\delta_t(t - r/c)$ prikazali smo na slici 2.4.1.



Slika 2.4.1. Tok funkcije $\delta_t(t - r/c)$

Slično i izraz $\delta_t(t)\Delta t$ predstavlja sljedeću vremensku ovisnost

$$\delta_t(t)\Delta t = \begin{cases} 1 ; & 0 < t < \Delta t , \\ 0 ; & \text{za sve ostale trenutke} . \end{cases} \quad (2.4.13b)$$

Da bismo dokazali da je (2.4.12a) rješenje nehomogene valne jednadžbe (2.4.12b), razvijmo Laplaceov operator u sustavu sa sfernom simetrijom¹⁶ za sljedeći izraz

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right) &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) + \delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] + \\ &+ \left[\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) + \delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) + \delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) \Delta \frac{1}{r} . \end{aligned}$$

Zbog simetrije funkcije $\delta_t(t - r/c)$ možemo pisati da je

$$\frac{\partial}{\partial r} \delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) ,$$

pa uvrštavanjem dobivamo

$$\Delta \left(\frac{\delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right) + \delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) \Delta \frac{1}{r} .$$

Nakon množenja ove jednadžbe s faktorom $\Delta t/4\pi\epsilon_0$, ona glasi

$$\Delta \left[\frac{\delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) \Delta t}{4\pi\epsilon_0 r} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) \Delta t}{4\pi\epsilon_0 r} \right] + \delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) \Delta t \Delta \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \right) .$$

Uvrstimo li sada umjesto $\Delta(1/4\pi\epsilon_0 r) = -\delta(r)/\epsilon_0$, što slijedi iz jednadžbi (2.4.10a,b) i rješenja (2.4.12a), dobivamo konačno

¹⁶ Pogledati Prilog D.

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \delta_t \left(t - \frac{r}{c} \right) \Delta t \left(-\frac{\delta(r)}{\epsilon_0} \right),$$

što daje valnu jednadžbu (2.4.12b)

$$\Delta \varphi(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(r, t) = -\frac{\delta(r) \delta_t(t) \Delta t}{\epsilon_0}.$$

Ovdje treba podsjetiti da funkcija $[\delta(r)\delta_t(t - r/c)]$ ima vrijednost različitu od nule samo u točki $r = 0$, pa se zbog toga može staviti $[\delta(r)\delta_t(t - r/c)] = [\delta(r)\delta_t(t)]$.

Pošto smo izveli dokaz da je za naboj gustoće zadane jednadžbom (2.4.12c), rješenje valne jednadžbe (2.4.12b) dano izrazom (2.4.12a), proslijedit ćemo dalje s razmatranjem. Analogno se može pokazati da jedinični točkasti naboj gustoće $\rho = \delta(r - r')\delta_t(t - t')\Delta t'$, koji je smješten u točku r' u trenutku t' i koji djeluje u vremenskom razmaku $\Delta t'$ (do naglog nestanka), zadovoljava nehomogenu valnu jednadžbu

$$\Delta \varphi_0(r, t | r', t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_0(r, t | r', t') = -\frac{\delta(r - r') \delta_t(t - t') \Delta t'}{\epsilon_0}. \quad (2.4.14)$$

Rješenje ove jednadžbe je

$$\varphi_0(r, t | r', t') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta_t \left(t - t' - \frac{|r - r'|}{c} \right) \Delta t'}{|r - r'|}, \quad (2.4.15)$$

potencijal u točki r u trenutku t , koja je udaljena od jediničnog naboja smještenog u r' u trenutku t' za razmak $R = r - r'$.

2.4.2.2. Greenove funkcije neograničenog prostora

Posebno je važna funkcija koju definiramo kao

$$G_0(r, t | r', t') = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\varphi_0(r, t | r', t')}{\Delta t'} = \frac{\delta \left(t - t' - \frac{|r - r'|}{c} \right)}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}, \quad (2.4.16)$$

gdje smo uvrstili da je

$$\lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \delta_t \left(t - t' - \frac{|r - r'|}{c} \right) = \delta \left(t - t' - \frac{|r - r'|}{c} \right).$$

Jednadžba (2.4.14) i njezino rješenje (2.4.15) upućuje na zaključak da je funkcija $G_0(r, t | r', t')$ određena nehomogenom valnom jednadžbom

$$\Delta G_0(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_0(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')}{\epsilon_0} . \quad (2.4.17)$$

Vidimo da je izvor *impuls* u trenutku $t = t'$ smješten u točku $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Funkcija G_0 naziva se *Greenova¹⁷ funkcija slobodnog neograničenog prostora* za skalarnu valnu jednadžbu. Ona opisuje djelovanje impulsa kako se on prostire iz izvora u $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ tijekom vremena. *Greenova funkcija slobodnog prostora* $G_0(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t')$ predstavlja potencijal opažen u točki $\mathbf{r}$ u trenutku t od jediničnog naboja koji se pojavi u obliku jediničnog impulsa u točki $\mathbf{r}'$ u trenutku t' . Ona predstavlja odziv slobodnog neograničenog prostora na uzbudu jediničnim impulsom. Prema tome, vremenski ovisna Greenova funkcija slobodnog neograničenog prostora jest funkcija samo relativne udaljenosti $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ i relativnog vremena $\tau = t - t'$ između izvora i točke promatranja. Za početne uvjete čini se razumljivim pretpostaviti da bi G_0 trebao biti jednak nula za $t < t'$, tj. ako se impuls pojavio u trenutku t' , ne bi trebale biti prije opažene nikakve posljedice.

Ne bi trebalo smatrati da su te uzročno-posljedične relacije očigledne. Jednosmjerni tijek vremena očit je za makroskopske događaje, ali nije moguće jednostavno ekstrapolirati to iskustvo na mikroskopske pojave. Maxwelllove jednadžbe koje nas stvarno vode k valnim jednadžbama ne sadrže nikakvu nesimetriju po vremenu. Stoga bi moglo biti moguće za mikroskopske događaje da se "efekti" prostiru unazad u vremenu. Posljednjih godina bile su razvijene teorije koje su upotrebljavale takva rješenja valne jednadžbe.¹⁸ Odvelo bi nas daleko da razmotrimo kako takva rješenja mogu dovesti do uzročno-posljedičnih vremenskih relacija u makroskopskim događajima. Za sada ćemo biti suočeni s početnim uvjetom da je $G_0(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') = 0$ za $t < t'$, iako postojanje drugih mogućnosti ne bi trebalo zaboraviti. I dok se u statičkim uvjetima Greenova funkcija, tj. interakcija jediničnih naboja u statičkim zadaćama, pokorava *uvjetu reciprociteta*

$$G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) , \quad (2.4.18a)$$

u vremenski promjenjivim zadaćama za $t > 0$ vrijedi

$$G_0(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') = G_0(\mathbf{r}', -t' | \mathbf{r}, -t) . \quad (2.4.18 b)$$

Zbog usmjerenosti vremena i u namjeri da dobijemo relaciju reciprociteta (2.4.18b), bilo je nužno promijeniti smjer tijeka vremena, tj. predznak od t se mijenja ako se smjer u prostoru promijeni.¹⁹ Funkcija na desnoj strani u toj relaciji je adjungirana funkcija onoj na lijevoj strani.

Funkcija (2.4.16) naziva se i *retardirana Greenova funkcija* jer pokazuje kauzalno ponašanje valne promjene. Argument delta funkcije pokazuje da je efekt opažen u točki

¹⁷ George Green (1793 – 1841), engleski matematičar.

¹⁸ Bilo je predlagano da se u kvantnoj elektrodinamici upotrijebe i retardirani i avanzirani potencijali.

¹⁹ Dokaz relacije reciprociteta (2.4.18b) izveden je u P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Part I, McGraw-Hill, New York, 1953.

$\mathbf{r}$ u trenutku t uzrokovan djelovanjem izvora na udaljenosti R u jednom ranijem odnosno *retardiranom vremenu*

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} = t - \frac{R}{c}. \quad (2.4.19)$$

Vremenski razmak R/c je upravo vrijeme prostiranja poremećaja od jedne točke do druge. Suglasno rješenju (2.4.7) valne jednadžbe (2.4.2), može se uvesti i avanzirana Greenova funkcija $G_0^{(-)}$ (dok bi retardiranu mogli obilježiti $G_0^{(+)}$), kao jedno moguće rješenje nehomogene valne jednadžbe (2.4.17), i ona bi slično glasila

$$G_0^{(-)}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') = \frac{\delta\left(t - t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.4.20)$$

Očito je da $G_0^{(+)}$ predstavlja *divergirajući sferni val* koji se prostire iz izvora, dok $G_0^{(-)}$ predstavlja *konvergirajući sferni val* u slobodnom prostoru.

2.4.2.3. Potencijali vremenski ovisne raspodjele prostornog naboja u neograničenom prostoru

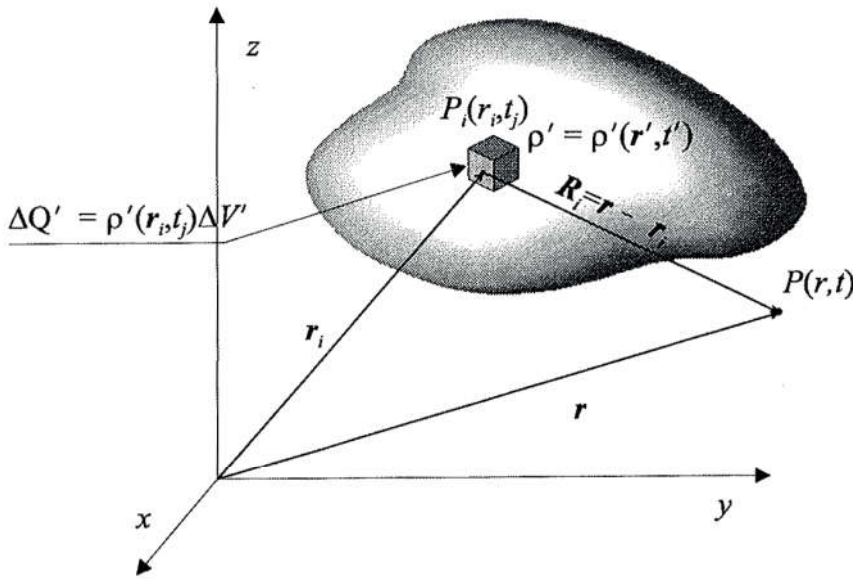
Sada možemo riješiti nehomogenu skalarnu valnu jednadžbu (2.4.1) u neograničenom prostoru za bilo koju zadanu raspodjelu vremenski ovisnih naboja pomoću Greenovih funkcija. Zato neka je zadana kontinuirana raspodjela neovisnog prostornog naboja $\rho'(\mathbf{r}, t)$ po volumenu V koja zadovoljava valnu jednadžbu skalarnog potencijala

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{\rho'(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}. \quad (2.4.21)$$

Bitan korak prema općem rješenju valne jednadžbe (2.4.21) u neograničenom slobodnom prostoru učinit ćemo ako promatramo gustoću naboja $\rho'(\mathbf{r}_i, t_j)$ u točki $\mathbf{r}_i$ u trenutku t_j , da bi izrazili naglu pojavu točkastog naboja iznosa $\rho'(\mathbf{r}_i, t_j)\Delta V'$ u točki $\mathbf{r}_i$ u trenutku t_j u tijeku vremenskog intervala $\Delta t'$. Potencijal proizveden u točki $\mathbf{r}$ u trenutku t ovim točkastim nabojem bit će jednak $[\rho'(\mathbf{r}_i, t_j)\Delta V']$ -strukom potencijalu jediničnog točkastog naboja koji se pojavio u intervalu $\Delta t'$ u točki $\mathbf{r}_i$ u trenutku t_j , proizvedenom u točki $\mathbf{r}$ u trenutku t . Tako dolazimo do potencijala točkastog naboja iznosa $\rho'(\mathbf{r}_i, t_j)\Delta V'$, koji se prema jednadžbi (2.4.15) može izraziti relacijom

$$\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_i, t_j) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho'(\mathbf{r}_i, t_j)\Delta V' \delta_t\left(t - t_j - \frac{R_i}{c}\right)\Delta t'}{R_i}, \quad (2.4.22)$$

gdje je $R_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$. Ako je $\rho' = 0$ izvan volumena V , kao što je prikazano na slici 2.4.2,



Slika 2.4.2. Uz određivanje retardiranog potencijala

potencijal u točki $\mathbf{r}$ u trenutku t proizveden ukupnim nabojem u V , za neograničeni slobodni prostor može se izračunati prema

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_i \sum_j \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_i, t_j) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_j \frac{\rho'(\mathbf{r}_i, t_j) \Delta V' \delta\left(t - t_j - \frac{R_i}{c}\right) \Delta t'}{R_i},$$

ili u graničnom prijelazu, kada $\Delta t' \rightarrow 0$ i $\Delta V' \rightarrow 0$, i uz pomoć jednadžbe (2.4.16)

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{dV'}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho'(\mathbf{r}', t') \delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right)}{R} dt' = \int \int \rho'(\mathbf{r}, t) G_0(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') dV' dt' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho'\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV'. \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Partikularni integrali nehomogene valne jednadžbe (2.4.21) su prema (2.4.16), (2.4.20) i (2.4.23), za slobodan neograničen prostor

$$\varphi^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) = \int \int G_0^{(\pm)}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') \rho'(\mathbf{r}', t') dV' dt', \quad (2.4.24)$$

gdje je ρ' obična funkcija isto kao i φ . Može se pokazati da je φ kontinuirana funkcija ako je to i ρ' , i da φ ima kontinuirane derivacije ako ih ima i ρ' . Potencijali $\varphi^{(+)}$ i $\varphi^{(-)}$ u jednadžbi (2.4.24) poznati su kao *retardirani* i *avanzirani potencijali*. Oni nisu jedina rješenja jednadžbe (2.4.21), jer im možemo dodati bilo koje rješenje homogene jed-

nadžbe

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.4.25)$$

u namjeri da riješimo određenu fizikalnu zadaću. Prije nego što kažemo da je (2.4.24) rješenje jednadžbe (2.4.21) moramo postaviti dodatne uvjete. Razmatranja jedinstvenosti rješenja (2.4.24) učinit ćemo nakon što u članku 2.4.4. izvedemo Kirchhoffova rješenja. Izraze u (2.4.24) možemo smatrati *svojstvenim rješenjima*.²⁰ Zadana raspodjela izvora $\rho'(\mathbf{r}', t')$ u (2.4.24) smještena je u prostoru i vremenu. Različita je od nule samo u konačnom vremenskom intervalu oko $t' = 0$. Dvije krajnje situacije su zanimljive. U prvoj ćemo pretpostaviti da u vremenu $t \rightarrow -\infty$ postoji val $\varphi_{ul}(\mathbf{r}, t)$ koji zadovoljava homogenu valnu jednadžbu (2.4.25). Val φ_{ul} prostire se u vremenu i prostoru; izvor se aktivira i proizvodi vlastite valove. Potpuno rješenje za tu situaciju za cijeli vremenski tijek jest

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_{ul}(\mathbf{r}, t) + \iint G_0^{(+)}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') \rho'(\mathbf{r}', t') dV' dt'. \quad (2.4.26)$$

Nazočnost funkcije $G_0^{(+)}$ osigurava da u dalekom vremenu t , prije nego je izvor bio aktiviran, nije bilo doprinosa od integrala. Samo je propisani val φ_{ul} postojao. Druga situacija je da je u vremenu $t \rightarrow +\infty$ val zadan kao $\varphi_{izl}(\mathbf{r}, t)$, što je poznato rješenje homogene valne jednadžbe (2.4.25). Potpuno rješenje za cijeli vremenski tijek je

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_{izl}(\mathbf{r}, t) + \iint G_0^{(-)}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') \rho'(\mathbf{r}', t') dV' dt'. \quad (2.4.27)$$

Ovdje avanzirana Greenova funkcija $G_0^{(-)}$ osigurava da nema signala iz izvora pošto je izvor prestao djelovati. Najčešće je fizikalno stanje opisano jednadžbom (2.4.26) s $\varphi_{ul} = 0$. Tada se Greenova funkcija za neograničeni prostor izravno uvrštava, pa imamo

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho'] dV'}{R}, \quad (2.4.28a)$$

gdje simbol

$$[\rho'] = \rho'(\mathbf{r}', t') = \rho'\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right), \quad (2.4.28b)$$

označava funkciju s retardiranom fazom. To znači da se vrijeme t' izračunava tako da se prema (2.4.19) stavi $t' = t - R/c$. Vremenski interval R/c je vrijeme potrebno da bi signal prošao put od izvora do promatrača. Brzina kojom se informacija elektromagnet-

²⁰ Pogledati Prilog A.

skim valom prenosi od izvora u $\mathbf{r}'$ do promatrača u $\mathbf{r}$ tj. kojom se prolazi rastojanje $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ u slobodnom prostoru iznosi²¹

$$c = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.9979245 \cdot 10^8 \text{ m/s} , \quad (2.4.29)$$

i jednaka je brzini svjetlosti.

2.4.3. Retardirani potencijali u neograničenom prostoru

Ako jednadžbu za vektorski potencijal (2.1.19a) rastavimo u kartezijske komponente, dobit ćemo tri jednadžbe oblika (2.4.1). Suglasno tome, partikularni integral *retardiranog vektorskog potencijala* u neograničenom slobodnom prostoru iznosi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}'(\mathbf{r}', t') \delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right)}{R} dV' dt' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}'\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{J}']}{R} dV' , \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

za zadanu raspodjelu neovisnih struja $\mathbf{J}'(\mathbf{r}', t')$ u konačnom volumenu V i uz pretpostavku da je $\mathbf{J}' = 0$ izvan V . Jednadžbe (2.4.23), (2.4.28a) i (2.4.30) omogućavaju nam da proračunamo polje odnosno potencijale iz zadane raspodjele neovisnih naboja i struja u slobodnom i neograničenom prostoru. Pritom moramo imati na umu da su nehomogene valne jednadžbe (2.1.19a,b) valjane samo ako je zadovoljen Lorentzov uvjet

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 . \quad (2.4.31)$$

Pokazat ćemo da taj uvjet zadovoljavaju rješenja (2.4.23) i (2.4.30), osiguravajući tako da gustoće zadanih neovisnih naboja i struja zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta. Izračunajmo divergenciju relacije (2.4.30) s obzirom na koordinate promatrača $(\mathbf{r}, t)$

²¹ U odjeljku 1.3. uveli smo (prema E. R. Cohen, *Fundamental Physical Constants, Atomic Data and Nuclear Data Tables*, V 18, No. 6, 1976.) vrijednost za dielektričnost vakuumu u SI-jedinicama $\epsilon_0 = (8.85418788 \pm 0.00000007) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$. Ona je definirana pomoću Coulombova zakona za silu u SI-sustavu. U istom odjeljku 1.3. uvedena je i permeabilnost vakuumu, čija vrijednost je određena mjernim sustavom. U SI-sustavu ona iznosi $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$. Uvedena je pomoću Biot-Savartovog i Ampereovog zakona za silu u magnetskom polju.

Brzina prostiranja elektromagnetskog vala u praznom prostoru dana je izrazom (2.4.29), što je vrlo blizu izmjerenoj brzini svjetlosti u vakuumu: $c_0 = (2.997\,924\,58 \pm 0.000\,000\,012) \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}'(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \mathbf{J}' \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \cdot \mathbf{J}'(\mathbf{r}', t') \right\} dV' .
\end{aligned} \tag{2.4.32}$$

Varijabla $\mathbf{r}$ pojavljuje se u $\mathbf{J}'$ samo pomoću t' , a također je $\nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = -\nabla' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, gdje prim na vektorskom operatoru označava derivaciju obzirom na $\mathbf{r}'$. Tako imamo

$$\nabla \cdot \mathbf{J}'(\mathbf{r}', t') = \frac{\partial \mathbf{J}'}{\partial t'} \cdot \nabla t' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}'}{\partial t'} \cdot \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}'}{\partial t'} \cdot \nabla' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| .$$

Također je

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}'(\mathbf{r}', t') = (\nabla' \cdot \mathbf{J}')_{t'} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}'}{\partial t'} \cdot \nabla' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| ,$$

gdje $()_{t'}$, znači da pri izračunavanju operacija uzimamo da je t' neovisno o $\mathbf{r}'$. Sada (2.4.32) možemo izraziti kao

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\nabla' \cdot \mathbf{J}')_{t'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \tag{2.4.33}$$

Primjenom teorema divergencije slijedi

$$\int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \oint_S \frac{\mathbf{J}' \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' ,$$

gdje je S ploha koja zatvara volumen V . Jedino ograničenje koje postavljamo jest da $\mathbf{J}'$ i ρ' moraju biti jednaki nuli izvan volumena V , tako da V možemo uvijek učiniti dovoljno velikim da $\mathbf{J}'$ bude jednako nuli na plohi S . Zato je

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left\{ (\nabla' \cdot \mathbf{J}')_{t'} + \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \right\} dV' ,$$

tako da jednačba kontinuiteta poprima oblik

$$(\nabla' \cdot \mathbf{J}'(\mathbf{r}', t'))_{t'} + \frac{\partial}{\partial t'} \rho'(\mathbf{r}', t') = 0 , \tag{2.4.34}$$

u svakoj točki čije lokalno vrijeme je t' .

Konačno, slično se za Hertzove vektore opisane u odjeljku 2.3., koji zadovoljavaju

valne jednadžbe (2.3.11a,b) mogu napisati retardirana rješenja

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{[\mathbf{P}'_s]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' , \\ Z^* &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{M}'_s]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' , \end{aligned} \quad (2.4.35a,b)$$

koja su valjana za neograničeni prostor ispunjen nevodljivim homogenim linearnim izotropnim materijalom sa značajkama ϵ i μ .

2.4.4. Kirchhoffovo rješenje valne jednadžbe u ograničenom prostoru

U ovom članku učinit ćemo korak dalje i opisati rješenje skalarne nehomogene valne jednadžbe (2.4.1) u ograničenom prostoru koje potječe od Kirchhoffa.²² Postupak se sastoji u poopćenju postupka za rješenje statičke Poissonove diferencijalne jednadžbe. Opis toga rješenja uz različite modifikacije dan je u nekoliko izvrsnih udžbenika. Tako je Stratton²³ opisao Kirchhoffovo rješenje uvodeći pritom posebno definiranu impulsnu funkciju, dok smo se ovdje opredijelili za prikaz Kirchhoffovih rješenja uz uvođenje funkcija distribucije kako je to učinio Jones.²⁴ Postupak se sastoji u primjeni drugog Greenova identiteta, tj. Greenova teorema²⁵

$$\int_V (u \Delta m - m \Delta u) dV' = \oint_S \left(u \frac{\partial m}{\partial n'} - m \frac{\partial u}{\partial n'} \right) dS' , \quad (2.4.36)$$

u koji ćemo uvrstiti: izraz (2.4.16) koji predstavlja Greenovu funkciju neograničenog prostora $G_0^{(+)}$, koja je rješenje jednadžbe (2.4.17), i potencijal $\phi(\mathbf{r}', t')$ u točki izvora, koji predstavlja rješenje valne jednadžbe (2.4.21) za zadanu kontinuiranu raspodjelu neovisnih naboja $\rho'(\mathbf{r}', t')$. Neka je V volumen zatvorenog područja koje je ograničeno plohom S , i neka je točka $\mathbf{r}$ uvijek unutar V . S $\mathbf{n}'$ smo označili jedinični vektor okomice na rubnu plohu S , usmjeren prema vani iz prostora koji se promatra. Cijeli prostor ispunjen je jednostavnim (LIH) materijalom, koji nije vodljiv ($\kappa = 0$), sa zadanim značajkama ϵ i μ . Na osnovi rečenog uvodimo zamjene

²² Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887), njemački fizičar. Pogledati G. Kirchhoff, Berliner Sitzungsbericht 641 (1882); Ann. Phys. (3), 18, 663(1883). Daljnje poopćenje učinio je W. R. Morgans, Phil. Mag., 9, 141 (1930).

²³ J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

²⁴ D. S. Jones, *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon Press, Oxford, 1964. U našoj literaturi pogledati Z. Haznadar, *Teoretska elektrotehnika, Elektromagnetska teorija i polja*, Liber, Zagreb 1972.

²⁵ Pogledati Prilog C.

$$u = G_0^{(+)} = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right)}{4\pi\epsilon R}, \quad (2.4.37)$$

i

$$m = \varphi(\mathbf{r}', t'), \quad (2.4.38)$$

gdje je $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Retardirana Greenova funkcija neograničenog prostora $G_0^{(+)}$ u relaciji (2.4.37) rješenje je diferencijalne jednačbe

$$\Delta G_0^{(+)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_0^{(+)}}{\partial t^2} = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')}{\epsilon}, \quad (2.4.39)$$

u kojoj je raspodjela izvora zadana kao $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t')$, i predstavlja jedinični impuls u trenutku t' u točki $\mathbf{r}'$. Potencijal $\varphi(\mathbf{r}', t')$ u točki izvora, zadan relacijom (2.4.38), rješenje je valne jednačbe

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho'}{\epsilon}, \quad (2.4.40)$$

gdje je raspodjela izvora zadana kontinuiranom raspodjelom neovisnih naboja $\rho'(\mathbf{r}', t')$. Brzina prostiranja promjene određuje se prema

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

Označimo integral na lijevoj strani teorema (2.4.36) s I , i uvrstimo u njega jednačbe (2.4.37), (2.4.38), (2.4.39) i (2.4.40), tako da dobivamo

$$I = \int_V \left[G_0^{(+)} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} - \frac{\rho'}{\epsilon} \right) - \varphi \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_0^{(+)}}{\partial t'^2} - \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')}{\epsilon} \right) \right] dV'.$$

Nakon integracije po cijelom tijeku vremena imamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I dt' = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

gdje je

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{c^2} \int_V dV' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)}{4\pi\epsilon R} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \varphi(r',t') dt' , \\
I_2 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_V \rho'(r',t') \frac{\delta\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)}{R} dV' , \\
I_3 &= -\frac{1}{c^2} \int_V dV' \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r',t') \frac{\delta''\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)}{4\pi\epsilon R} dt' , \\
I_4 &= \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_V \varphi(r',t') \delta(r-r') \delta(t-t') dV' .
\end{aligned}$$

Konačno dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} I dt' &= \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_V \frac{\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \varphi\left(r', t-\frac{R}{c}\right)}{R} dV' - \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_V \frac{\rho'\left(r', t-\frac{R}{c}\right)}{R} dV' - \\
&\quad - \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_V \frac{\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \varphi\left(r', t-\frac{R}{c}\right)}{R} dV' + \frac{1}{\epsilon} \varphi(r,t) .
\end{aligned}$$

Lijeva strana jednadžbe (2.4.36) integrirana po cijelom tijeku vremena jest

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I dt' = -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_V \frac{\rho'\left(r', t-\frac{R}{c}\right)}{R} dV' + \frac{1}{\epsilon} \varphi(r,t) . \quad (2.4.41)$$

Odredimo sada integral po cijelom tijeku vremena desne strane jednadžbe (2.4.36), i on iznosi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \oint_S \left\{ G_0^{(+)} \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial G_0^{(+)}}{\partial n'} \right\} dS' ,$$

što nakon uvrštenja vrijednosti za $G_0^{(+)}$ daje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I dt' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_S dS' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial n'} \varphi(\mathbf{r}', t') dt' -$$

$$- \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_S dS' \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathbf{r}', t') \cdot \frac{\partial}{\partial n'} \frac{\delta\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)}{R} dt' .$$

Integracijom prvog člana na desnoj strani i provedbom deriviranja po n' složenog izraza u drugom članu dobivamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I dt' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_S \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial n'} \varphi\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) dS -$$

$$- \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_S dS' \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathbf{r}', t') \left\{ \delta\left(t-t'-\frac{R}{c}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R} - \frac{\delta'\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)}{cR} \cdot \frac{\partial R}{\partial n'} \right\} dt' .$$

Konačno je desna strana jednadžbe (2.4.36) integrirana po cijelom tijeku vremena

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I dt' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_S \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial n'} \varphi\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) dS' - \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_S \varphi\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R} dS' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_S \frac{1}{cR} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \varphi\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) \cdot \frac{\partial R}{\partial n'} dS' . \quad (2.4.42)$$

Izjednačavanjem lijeve i desne strane prema relaciji (2.4.36), tj. izjednačavanjem izraza (2.4.41) i (2.4.42), dobivamo

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{[\rho']}{R} dV' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right] - [\varphi] \cdot \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{cR} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \cdot \frac{\partial R}{\partial n'} \right\} dS' , \quad (2.4.43)$$

gdje je $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ s tim da je $\mathbf{r}$ uvijek u V , i gdje $[\partial\varphi/\partial n']$ znači da treba računati $(\partial/\partial n')\varphi(\mathbf{r}', t')$ i tada zamijeniti t' s retardiranim vremenom $(t - R/c)$. Simbol $[\partial\varphi/\partial t]$ označava operaciju $(\partial/\partial t')\varphi(\mathbf{r}', t')$. Uglate zagrade u (2.4.43) označavaju funkcije s retardiranom fazom.

Primjenjujući Greenov teorem i uvodeći Greenovu funkciju neograničenog prostora (2.4.37) pretvorili smo valnu diferencijalnu jednadžbu (2.4.40) za skalarni potencijal u

integralnu jednadžbu. Izraz (2.4.43) predstavlja traženi potencijal u ograničenom području od interesa. Volumni integral u (2.4.43) je partikularno *svojstveno rješenje* nehomogene valne jednadžbe (2.4.40), koji fizikalno predstavlja doprinos potencijalu $\varphi(\mathbf{r}, t)$ svih izvora sadržanih u volumenu V , čija je neovisna raspodjela zadana funkcijom $\rho'(\mathbf{r}', t')$. K tome partikularnom dodano je *opće rješenje homogenog dijela jednadžbe* (2.4.40) izraženo u obliku plošnog integrala po zatvorenoj plohi S koje uzima u obzir sve izvore smještene izvan S .

Ako su svi izvori smješteni na konačnim udaljenostima od neke referentne točke, i ako su počeli djelovati unazad nekog konačnog vremena t' , onda se može postaviti zatvorena ploha S na dovoljnu udaljenost, koju čelo vala zbog konačne brzine prostiranja polja nije doseglo u vremenu t . Tada su φ i njegove derivacije po nedosegnutoj rubnoj plohi S jednaki nuli, pa se u tom slučaju potencijal računa prema jednadžbi (2.4.28a), tj.

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{[\rho'] dV'}{R}, \quad (2.4.44)$$

gdje V predstavlja cijeli volumen ispunjen nabojem. Isto se događa ako rubnu plohu S pomaknemo u beskonačnost i ako električno polje na plohi S opada brže od $1/R$, tada plošni integral iščezava i (2.4.43) se reducira na (2.4.44).

Da bi za zadanu raspodjelu neovisnih naboja ρ' u ograničenom homogenom volumenu V , zatvorenom rubnom plohom S , mogli prema (2.4.43) izračunati potencijal φ u tom istom području, potrebno je da su nam zadani *rubni i početni uvjeti*.²⁶ Zadavanje rubnih i početnih uvjeta sastoji se u zadavanju raspodjele potencijala φ i njegovih derivacija po rubnoj plohi S u početnom trenutku t_0 , da bi se mogao izračunati plošni integral u (2.4.43). Fizikalno iskustvo upućuje nas na zaključak da nije dozvoljeno propisati sve te vrijednosti kakogod. Zato bi bilo kakvo propisivanje potencijala i njegovih derivacija po rubnoj plohi vodilo k preodređenosti zadaće. Preodređenost rješenja danog jednadžbom (2.4.43) uzrokovana je činjenicom da smo mi pri rješavanju nehomogene valne jednadžbe u ograničenom prostoru uveli karakterističnu funkciju $G_0^{(+)}$ za beskonačni prostor, danu s (2.4.37), u Greenov identitet. To će biti detaljno analizirano u sljedećem članku, gdje će biti opisan postupak rješavanja valne jednadžbe za odgovarajuće rubne i početne uvjete pomoću Greenovih funkcija.

2.4.5. Greenova funkcija za valnu jednadžbu u ograničenom prostoru

Ovdje ćemo pokazati da je pomoću Greenovih funkcija moguće riješiti nehomogenu valnu jednadžbu skalarnog potencijala (2.4.40) u ograničenom prostoru i u ograničenom

²⁶ Pogledati Prilog A.

intervalu vremena. Neka je zadana kontinuirana raspodjela neovisnih izvora $\rho'(\mathbf{r}', t')$ u konačnom prostoru volumena V , koji je ispunjen nevodljivim homogenim linearnim materijalom zadanih elektromagnetskih značajki ϵ i μ . Prostor je omeđen zatvorenom plohom S zadane geometrije. Propisani su rubni i početni uvjeti u namjeri da bi se dobilo jedinstveno rješenje jednadžbe (2.4.40). Uvjeti na rubnoj plohi S mogu biti *Dirichletovi*²⁷ ili *Neumannovi*²⁸ ili *linearna kombinacija obaju*, tj. *miješani*. Uvjeti u vremenskoj domeni moraju biti Cauchyjevi.²⁹ To znači da su zadane *rubne vrijednosti* $\varphi_s(\mathbf{r}_s')$ i derivacije u smjeru vanjske okomice $N_s(\mathbf{r}_s') = \partial\varphi_s(\mathbf{r}_s')/\partial n'$ na rubnoj plohi S , i *početne vrijednosti* $\varphi_0(\mathbf{r}')$ i derivacije $T_0(\mathbf{r}') = [\partial\varphi_0(\mathbf{r}', t')/\partial t']_{t'=t_0}$ u svakoj točki područja V unutar S u početnom trenutku $t' = t_0$. S $\mathbf{r}_s'$ označen je radijus vektor za sve točke koje se nalaze na plohi S . Pregledom (2.4.40) dolazimo do zaključka da jednadžba koja određuje Greenovu funkciju $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t')$ glasi

$$\Delta G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = - \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')}{\epsilon}, \quad (2.4.45)$$

a izvor je *jedinični impuls* u trenutku t' smješten u $\mathbf{r}'$. Funkcija G opisuje potencijal toga impulsa kako se on prostire dalje od $\mathbf{r}'$ tijekom vremena. U ograničenom prostoru G zadovoljava homogene rubne uvjete na plohi S , i u pogledu početnih uvjeta pokorava se zahtjevu kauzalnosti da su $G = 0$ i $\partial G/\partial t = 0$ u svim točkama unutar i na S za $t < t'$.

Nehomogenu valnu jednadžbu skalarnog potencijala (2.4.40) riješiti ćemo tako da upotrijebimo diferencijalne jednadžbe

$$\Delta' \varphi(\mathbf{r}', t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}', t')}{\partial t'^2} = - \frac{\rho'(\mathbf{r}', t')}{\epsilon}, \quad (2.4.46)$$

i

$$\Delta' G(\mathbf{r}', t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t')}{\partial t'^2} = - \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')}{\epsilon}, \quad (2.4.47)$$

gdje se ova posljednja jednadžba može dobiti iz (2.4.45) primjenom relacije reciprociteta (2.4.18b)

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') = G(\mathbf{r}', -t' | \mathbf{r}, -t). \quad (2.4.48)$$

Množeći jednadžbu (2.4.46) s G i jednadžbu (2.4.47) s φ i oduzimajući ih, te integrirajući po zadanom volumenu V i po vremenu t' u vremenskom intervalu od t_0 do t^+ , gdje je $t^+ = t + \epsilon$, a $\epsilon \rightarrow 0^+$ je po volji maleno, dobivamo

²⁷ Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), njemački matematičar francuskog podrijetla.

²⁸ Franz Ernst Neumann (1798 – 1895), njemački fizičar.

²⁹ Detaljnije o jedinstvenosti rješenja i o rubnim i početnim uvjetima pogledati u P.M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Part I + II, McGraw-Hill, New York, 1953.

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t^*} dt' \int_V \left\{ (G \Delta' \varphi - \varphi \Delta' G) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t'^2} \varphi - G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} \right) \right\} dV' = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \varphi(\mathbf{r}, t) - \int_{t_0}^{t^*} dt' \int_V \rho'(\mathbf{r}', t') G dV' \right\}. \end{aligned}$$

Primjenjujući Greenov teorem (2.4.36) i nakon uređenja slijedi

$$\varepsilon \int_{t_0}^{t^*} dt' \oint_S \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' + \frac{\varepsilon}{c^2} \int_V \left(\frac{\partial G}{\partial t'} \varphi - G \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \right)_{t_0}^{t^*} dV' + \int_{t_0}^{t^*} dt' \int_V \rho' G dV' = \varphi(\mathbf{r}, t)$$

U navedenom izrazu integrand u prvom integralu određen je propisanim rubnim uvjetima. U drugom integralu integrand postaje jednak nuli za $t' = t^*$ što je posljedica propisanih početnih uvjeta za G , pa preostaju samo početni uvjeti za $t' = t_0$. Treći integral predstavlja doprinos potencijalu od zadane raspodjele neovisnih naboja ρ' u volumenu V . Tako je konačno, u vremenskom intervalu t_0 do t^* , u ograničenom volumenu V i na plohi S potencijal određen relacijom

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \int_{t_0}^{t^*} dt' \int_V G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') \rho'(\mathbf{r}', t') dV' + \\ &+ \varepsilon \int_{t_0}^{t^*} dt' \oint_S \left\{ G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_s', t') \frac{\partial \varphi_s(\mathbf{r}_s')}{\partial n'} - \varphi_s(\mathbf{r}_s') \frac{\partial G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_s', t')}{\partial n'} \right\} dS' - \\ &- \frac{\varepsilon}{c^2} \int_V \left\{ \left(\frac{\partial G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t')}{\partial t'} \right)_{t'=t_0} \varphi_0(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t')_{t'=t_0} \left(\frac{\partial \varphi_0(\mathbf{r}')}{\partial t'} \right)_{t'=t_0} \right\} dV'. \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

Jednadžba (2.4.49) daje potpuno rješenje nehomogene valne jednadžbe (2.4.40) obuhvaćajući zadovoljenje početnih uvjeta. Plošni integral treba pažljivo odrediti, vrijednosti na plohi S treba uzeti kao granične vrijednosti funkcije kako se plohi približavamo iz unutrašnjosti. Prvi integral predstavlja učinak izvora, drugi daje učinak rubnih uvjeta propisanih po rubnoj plohi, dok posljednji, treći, uključuje početne uvjete. Često se uzima za početni trenutak da je $t_0 = 0$.

Treba posebno istaknuti da je poznavanje Greenove funkcije G nužno da bi rješenje (2.4.49) bilo upotrebljivo. Za svaku posebnu zadaću zadane geometrije treba prvo odrediti Greenovu funkciju. To je i najteži dio posla pri rješavanju nehomogene valne jednadžbe u ograničenom području. Doprinos geometrije rubnih ploha po kojima Greenove funkcije moraju zadovoljavati specifične rubne uvjete je bitan. Da bi se

odredila Greenova funkcija, postoje dva pristupa: *metoda odslikavanja* i *metoda svojstvenih funkcija*.³⁰ Za dovoljno pravilne i jednostavne geometrije metoda odslikavanja je vrlo djelotvorna. Kod ove metode koristimo naše poznavanje Greenove funkcije $G_0^{(+)}$ za neograničen prostor (2.4.37). Jedini singularitet koji se pojavljuje nalazi se u točki izvora u trenutku kada je impuls proizveden, tako da je općenito

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right)}{4\pi \epsilon R} + F(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') , \quad (2.4.50)$$

gdje je F rješenje homogene valne jednadžbe po G , koja je slobodna od singulariteta u zadanom području.

2.5. VALNE JEDNADŽBE I INTEGRALI POTENCIJALA I POLJA

2.5.1. Valne jednadžbe i integrali potencijala

Pokazali smo u ovom poglavlju, da se u nevodljivom jednostavnom (LIH) materijalu ($\epsilon, \mu, \kappa = 0$), uz zadane neovisne izvore ($\rho_s', \mathbf{J}_s', \mathbf{P}_s', \mathbf{M}_s'$), mogu odrediti skalarni potencijal ϕ , te pravokutne prostorne komponente vektorskog potencijala $\mathbf{A}$ i Hertzovog električnog i magnetskog vektora $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^*$ pomoću valne jednadžbe oblika (2.4.1), tj. pomoću jednadžbi

$$\begin{aligned} \Delta \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_s'}{\epsilon} , \\ \Delta \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{J}_s' , \\ \Delta \mathbf{Z} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} &= -\frac{\mathbf{P}_s'}{\epsilon} , \\ \Delta \mathbf{Z}^* - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^*}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{M}_s' . \end{aligned} \quad (2.5.1a - d)$$

U prethodnom odjeljku 2.4. pokazali smo da pri određivanju općih integrala tih jednadžbi treba razlikovati dva glavna slučaja. Prvi, kada je prostor od interesa *neograničen*, tj. beskonačan, i drugi kada je prostor *ograničen*. Pokazano je također da se u oba ova slučaja retardirana rješenja mogu dobiti pomoću Greenovih funkcija.

³⁰ Opširnije pogledati u odjeljku 4.8. i Prilogu A.

Tako je za neograničen prostor, prema jednađbi (2.4.16), retardirana Greenova funkcija neograničenog prostora određena izrazom

$$G_0^{(+)} = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right)}{4\pi\epsilon R}, \quad (2.5.2)$$

gdje je $s^2 = 1/\mu\epsilon$ označena brzina prostiranja poremećaja, dok je $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ udaljenost između točaka polja i izvora. Pošto je određena Greenova funkcija, lako je prema (2.4.23) odrediti da je integral valne jednađbe skalarnog potencijala u neograničenom prostoru dan izrazom

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho_s'\left(\mathbf{r}, t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV' \quad (2.5.3)$$

Upotrijebe li se oznake $[\rho_s'] = \rho_s'(\mathbf{r}', t - R/c)$ i za sve ostale izvore, to se rješenja, tj. integrali valnih jednađbi (2.5.1a – d) za potencijale i superpotencijale mogu pisati kao

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{[\rho_s'] dV'}{R}, \\ A &= \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{J}_s'] dV'}{R}, \\ Z &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{[\mathbf{P}_s'] dV'}{R}, \\ Z^* &= \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{M}_s'] dV'}{R}. \end{aligned} \quad (2.5.4a - d)$$

U slučaju ograničenog prostora integracija valne jednađbe predstavlja mnogo složeniju zadaću. Ostavit ćemo za sada po strani približno Kirchhoffovo rješenje (2.4.43), koje je još k tome preodređeno, tj. fizikalno nerealno. Usmjerit ćemo pozornost na postupak rješavanja proveden u prethodnom članku 2.4.5. Tamo smo pokazali da iz valne jednađbe (2.4.45)

$$\Delta G^{(+)} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 G^{(+)}}{\partial t^2} = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')}{\epsilon}, \quad (2.5.5)$$

za svaku zadaću posebne geometrije prvo treba odrediti odgovarajuću retardiranu Greenovu funkciju ograničenog prostora. Određivanje posebne, zadanoj geometriji ograničenog prostora odgovarajuće Greenove funkcije najzamršeniji je dio zadaće. Izuzev nekih posebnih oblika prostora, rješenje je najčešće nemoguće dobiti analitičkim

postupkom. Bitan napredak na tome području rješavanja zadaća rubnih i početnih vrijednosti učinjen je tek u novije doba snažnim prodorom numeričkih postupaka³¹ i elektroničkih računala. Zato se određivanju $G^{(+)}$ iz jednadžbe (2.5.5) pristupa tako da se primijeni načelo superpozicije. Ona se komponira iz dva dijela

$$G^{(+)} = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right)}{4\pi\epsilon R} + F^{(+)} , \quad (2.5.6)$$

gdje prvi član predstavlja odziv neograničenog prostora, koji prema izrazu (2.5.2) označavamo s $G_0^{(+)}$ i dobivamo kao partikularno rješenje nehomogenog dijela valne jednadžbe (2.5.5). Drugi član $F^{(+)}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t')$ u rješenju za Greenovu funkciju $G^{(+)}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t')$ ograničenog prostora određuje se kao partikularno rješenje homogenog dijela valne jednadžbe (2.5.6)

$$\Delta F^{(+)} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 F^{(+)}}{\partial t^2} = 0 , \quad (2.5.7)$$

posebno za svaku geometriju zadane zadaće. Napomenimo da će, unatoč tako opsežnom i zamršenom postupku, rješenja biti moguće dobiti za relativno ograničen broj zadaća pravilnog oblika. Zato ovaj opis treba s praktičnog stajališta pravdati željom da odredimo *formalna rješenja valne jednadžbe* u ograničenom prostoru. Konačno se rješenje valne jednadžbe (2.5.1a) za skalarni potencijal u ograničenom prostoru može prema jednadžbi (2.4.49) pisati

$$\begin{aligned} \varphi^{(+)} = & \int_{t_0}^{t^+} dt' \int_V G^{(+)} \rho_s' dV' + \epsilon \int_{t_0}^{t^+} dt' \oint_S \left\{ G^{(+)} \frac{\partial \varphi_s}{\partial n'} - \varphi_s \frac{\partial G^{(+)}}{\partial n'} \right\} dS' - \\ & - \frac{\epsilon}{c^2} \int_V \left\{ \left(\frac{\partial G^{(+)}}{\partial t'} \right)_{t'=t_0} \varphi_0 - (G^{(+)})_{t'=t_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t'} \right)_{t'=t_0} \right\} dV' . \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Da bi se dobilo jedinstveno rješenje skalarne valne jednadžbe (2.5.1a), iz relacije (2.5.8) vidljivo je da trebaju također biti zadani i svi potrebni rubni i početni uvjeti³² po rubnim ploham S zadane geometrije i po volumenu V u trenutku t_0 .

Formalna rješenja vektorskih valnih jednadžbi (2.5.1b – d) za $\mathbf{A}$, $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Z}^*$ u ograničenom prostoru u vektorskom obliku, ekvivalentnom izrazu (2.5.8), mogu se dobiti uz pomoć tenzora Greenovih funkcija. Kako ćemo se ovdje ograničiti na izračunavanje

³¹ O numeričkom rješavanju zadaća rubnih i početnih vrijednosti pogledati opširnije u poglavljima 9. i 10.

³² U članku 2.4.5. komentirani su potrebni rubni i početni uvjeti za jednadžbu (2.5.8) odnosno (2.4.49). Detaljnije o jedinstvenosti rješenja i potrebnim uvjetima u zadaćama rubnih i početnih vrijednosti pogledati u poglavljima 4, 5, 7, 9 i 10.

vektora $\mathbf{A}$, $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Z}^*$ po njihovim skalarnim pravokutnim komponentama iz analognih skalarnih jednadžbi oblika (2.5.1a) i (2.5.8), to tenzorski oblik Greenovih funkcija nećemo razmatrati.³³

2.5.2. Valne jednadžbe i integrali polja

Maxwellove jednadžbe izražavaju veličine polja u ovisnosti o njihovim izvorima. Jedan put je to par $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ kako je dano u tablici 1.5.1, a drugi puta je to par $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, kako je to dano u tablici 1.5.2. Moguća je i mješovita kombinacija svih četiriju vektora polja $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H})$, kao što je dano u tablici 1.5.3. Ovdje ćemo se odlučiti za par $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Formalni nedostatak Maxwellovih jednadžbi je u tome, što su veličine polja povezane u jednadžbama, pa se rješenja mogu dobiti jedino simultanim rješavanjem cijelog skupa jednadžbi. Vrlo je povoljno ako se veličine polja mogu separirati u zasebne jednadžbe. Da bismo to postigli ponovit ćemo ovdje Maxwellove jednadžbe (1.5.15a – d)

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_s' + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_s' + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_s', \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0.\end{aligned}\tag{2.5.9a – d}$$

U raspravi koja slijedi promatrat ćemo nevodljivi, jednostavni materijal ($\epsilon, \mu, \kappa = 0$). Neovisni izvori ρ_s' i $\mathbf{J}_s'$ su propisani. Primijenit ćemo operaciju rotor na svaku od glavnih Maxwellovih jednadžbi, pa nakon uvrštenja dobivamo

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_s' - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{J}_s' + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{J}_s' - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Razvijajući $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$ i analogno za $\mathbf{H}$, te uvrštavajući sporedne Maxwellove jednadžbe slijedi konačno

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho_s' + \mu \frac{\partial \mathbf{J}_s'}{\partial t},\tag{2.5.10a}$$

³³ Opširnije o tenzorima Greenovih funkcija pogledati u W. Hauser, *Introduction to the Principles of Electromagnetism*, Addison-Wesley Co, Reading, Mass. 1971.

$$\Delta \mathbf{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu \nabla \times \mathbf{J}_s' . \quad (2.5.10b)$$

To su vektorske valne jednačbe separirane po veličinama polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$. Ovdje treba napomenuti da smo izvođeci iz Maxwellovih jednačbi valne jednačbe izgubili neke informacije i da nema garancije da će par $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, koji zadovoljava valne jednačbe, zadovoljiti i Maxwellove jednačbe. Zato rješenja valnih jednačbi u prirodnim zadacima treba ponovno podvrgnuti Maxwellovim jednačbama. Isto tako u prirodnim zadacima neovisni izvori moraju zadovoljavati jednačbu kontinuiteta $\nabla \cdot \mathbf{J}_s' + \partial \rho_s' / \partial t = 0$.

U neograničenom prostoru ispunjenom nevodljivim materijalom, analogno rješenjima (2.5.4a – d), mogu se pisati rješenja valnih jednačbi (2.5.10a,b) za polja

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mu \left(\frac{\partial \mathbf{J}_s'}{\partial t} \right) + \frac{1}{\epsilon} [\nabla' \rho_s']}{R} dV' , \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{[\nabla' \times \mathbf{J}_s']}{R} dV' . \end{aligned} \quad (2.5.11a,b)$$

Pomoću tih integrala mogu se za zadanu raspodjelu neovisnih slobodnih naboja i struja izračunati vektori polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$.

Sličan ćemo postupak ponoviti za Maxwellove jednačbe (1.5.1a – d), gdje su veličine polja $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ u nevodljivom, jednostavnom materijalu ($\kappa = 0$) dane u ovisnosti o njihovim izvorima: neovisnim slobodnim nabojima i strujama ρ_s' i $\mathbf{J}_s'$, te o ekvivalentnim polariziranim nabojima i strujama ρ_p i $\mathbf{J}_p$ i magnetiziranoj amperskoj struji $\mathbf{J}_a$. Pišimo te jednačbe još jednom

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J}_s' + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_a + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) , \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_s' + \rho_p) , \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.5.12a - d)$$

Primjenom operacije rotora na glavne i uvrštenjem sporednih jednačbi, te uređenjem dobivamo sustav od dvije jednačbe

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{J}_s' + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_a) + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla (\rho_s' + \rho_p) , \quad (2.5.13a)$$

$$\Delta \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \times (\mathbf{J}_s' + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_a) . \quad (2.4.13b)$$

Rješenja tih jednađbi za neograničeni prostor jesu

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{J}_s' + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_a) \right]}{R} dV' - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{[\nabla'(\rho_s' + \rho_p)]}{R} dV' , \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\nabla' \times (\mathbf{J}_s' + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_a)]}{R} dV' . \end{aligned} \quad (2.5.14a,b)$$

Te jednađbe ekvivalentne su jednađbama (2.5.11a,b), s tim što se utjecaj materijala na polje nadomješta ekvivalentnim polariziranim nabojima i strujama i magnetiziranim amperskim strujama.

2.5.3. Nadomjesni izvori i valne jednađbe potencijala

Preostao je vrlo mali korak pa da se jednađbe (2.5.1a,b), po uzoru na (2.5.13a,b) pišu u obliku

$$\begin{aligned} \Delta \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho_s' + \rho_p) , \\ \Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 (\mathbf{J}_s' + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_a) . \end{aligned} \quad (2.5.15a,b)$$

One predstavljaju valne jednađbe potencijala (φ , $\mathbf{A}$), s tim da je djelovanje nevodljivog ($\kappa = 0$), homogenog, linearnog materijala na polje izraženo s pomoću nadomjesnih izvora ρ_p , $\mathbf{J}_p$, $\mathbf{J}_a$. Njihova rješenja u neograničenom prostoru glase:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{[\rho_s' + \rho_p]}{R} dV' , \\ \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{J}_s' + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_a]}{R} dV' . \end{aligned} \quad (2.5.16a,b)$$

Tablica 2.1.1. Pregled diferencijalnih jednažbi elektromagnetskih potencijala (φ, A) i antipotentijala (φ^*, A^*) u nevodljivom materijalu ($\kappa = 0$)

	Bez neovisnih izvora u području			S neovisnim izvorima: ρ_m', J_m' u području
	POLJA iz POTENCIJALA	POLJA iz ANTIPOENCIJALA	POLJA iz POTENCIJALA i ANTIPOENCIJALA	
Maxwellove jednažbe	$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$; $\nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} = 0$; $\nabla \cdot D = 0$; $\nabla \cdot B = 0$			$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = -J_m'$ $\nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot D = 0$; $\nabla \cdot B = \rho_m'$
Definicijske relacije	$E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$ $B = \nabla \times A$	$D = -\nabla \times A^*$ $H = -\nabla \varphi^* - \frac{\partial A^*}{\partial t}$	$E = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times A^*$ $B = -\mu \left(\nabla \varphi^* + \frac{\partial A^*}{\partial t} \right)$	$E = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times A^*$ $B = -\mu \nabla \varphi^* - \mu \frac{\partial A^*}{\partial t}$
Lorentzov uvjet	$\nabla \cdot A + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot A^* + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = 0$		$\nabla \cdot A^* + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = 0$
Diferencijalne jednažbe potencijala	$\Delta \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$ $\Delta A - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$	$\Delta \varphi^* - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} = 0$ $\Delta A^* - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 A^*}{\partial t^2} = 0$		$\Delta \varphi^* - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} = -\frac{\rho_m'}{\mu}$ $\Delta A^* - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 A^*}{\partial t^2} = -\varepsilon J_m'$

Tablica 2.1.2. Pregled diferencijalnih jednadžbi elektromagnetskih potencijala u različitim materijalima

	Nevodljivi materijal ($\kappa = 0$)		Vodljivi materijal	
	Bez izvora	S neovisnim izvorima: ρ_s', J_s'	Bez izvora	S neovisnim izvorima: ρ_s', J_s'
Maxwellove jednadžbe	$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_s'$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_s'; \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \kappa \mathbf{E} = \mathbf{J}_s'$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \kappa \mathbf{E} = \mathbf{J}_s'$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_s'; \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Definicijske relacije	$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$			
Lorentzov uvjet	$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$		$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$	
Diferencijalne jednadžbe potencijala	$\Delta \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$ $\Delta \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$	$\Delta \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_s'}{\varepsilon}$ $\Delta \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_s'$	$\Delta \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ $\Delta \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$	$\Delta \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\rho_s'}{\varepsilon}$ $\Delta \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_s'$

Tablica 2.2.1. Pregled diferencijalnih jednačbi elektromagnetskih potencijala s Coulombovim baždarenjem ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$)

	Bez neovisnih izvora		S neovisnim izvorima: ρ_s', J_s'
	Nevodljivi materijal	Vodljivi materijal	Vodljivi materijal: ϵ, μ, κ
DINAMIČKA POLJA	Definicijske relacije	$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$; $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	
	Diferencijalne jednačbe	$\Delta\varphi = 0$ $\Delta\mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu\epsilon \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$	$\Delta\varphi = -\frac{\rho_s'}{\epsilon}$ $\Delta\mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu J_s' + \nabla \left(\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu\kappa\varphi \right)$
	Definicijske relacije	$E = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$; $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	
	Diferencijalne jednačbe	$\varphi = 0$ $\Delta\mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$	$\varphi = 0$ $\Delta\mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu J_s'$
STATIČKA POLJA	Definicijske relacije	$E = -\nabla\varphi$; $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	
	Diferencijalne jednačbe	$\Delta\varphi = 0$ $\Delta\mathbf{A} = 0$	$\Delta\varphi = -\frac{\rho_s'}{\epsilon}$ $\Delta\mathbf{A} = -\mu J_s'$

Tablica 2.3.1. Pregled diferencijalnih jednadžbi Hertzovih vektora (Z i Z^*) elektromagnetskog polja

	Vodljivi materijal bez izvora	Nevodljivi materijal ($\kappa = 0$) s izvorima P'_s	Nevodljivi materijal ($\kappa = 0$) s izvorima P'_s i M'_s
Definicijske relacije	$\varphi = -\nabla \cdot Z$ $A = \mu\epsilon \frac{\partial Z}{\partial t}$		$\varphi = -\nabla \cdot Z$ $A = \mu\epsilon \frac{\partial Z}{\partial t} + \nabla \times Z^*$
Diferencijalne jednadžbe	$\Delta Z - \mu\epsilon \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial Z}{\partial t} = 0$	$\Delta Z - \mu\epsilon \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = -\frac{P'_s}{\epsilon}$	$\Delta Z - \mu\epsilon \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = -\frac{P'_s}{\epsilon}$ $\Delta Z^* - \mu\epsilon \frac{\partial^2 Z^*}{\partial t^2} = -\mu M'_s$

Tablica 2.5.1. Pregled valnih jednadžbi elektromagnetskih potencijala i njihovih formalnih rješenja u nevodljivom materijalu ($\kappa = 0$)

		Neograničeni prostor	Ograničeni prostor
Model sa značajkama ϵ i μ	Valne jednadžbe	$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_s'}{\epsilon} ; \quad \Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J_s' ; \quad c^2 = \frac{1}{\mu \epsilon}$	
	Formalna rješenja	$\Delta G_0^{(*)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_0^{(*)}}{\partial t^2} = -\frac{\delta(r-r') \delta(t-t')}{\epsilon}$ $\varphi^{(*)} = \int \int \rho_s' G_0^{(*)} dV' dt' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho_s'(r', t - \frac{R}{c})}{R} dV'$ $G_0^{(*)} = \frac{\delta(t-t' - \frac{R}{c})}{4\pi\epsilon R}$	$\Delta G_0^{(*)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_0^{(*)}}{\partial t^2} = -\frac{\delta(r-r') \delta(t-t')}{\epsilon}$ $\Delta F^{(*)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F^{(*)}}{\partial t^2} = 0$ $\varphi^{(*)} = \int_{t_0}^{t'} \int_V \rho_s' G^{(*)} dV' + \epsilon \int_{t_0}^{t'} \oint_S \left\{ G^{(*)} \frac{\partial \varphi_s}{\partial n'} - \varphi_s \frac{\partial G^{(*)}}{\partial n'} \right\} dS' -$ $- \frac{\epsilon}{c^2} \int_V \left\{ \varphi_0 \left(\frac{\partial G^{(*)}}{\partial t'} \right)_{t'=t_0} - (G^{(*)})_{t'=t_0} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t'} \right)_{t'=t_0} \right\} dV'$ $G^{(*)} = G_0^{(*)} + F^{(*)} = \frac{\delta(t-t' - \frac{R}{c})}{4\pi\epsilon R} + F^{(*)}$
	Valne jednadžbe	$\Delta \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho_s' + \rho_p)$ $\Delta A - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 (J_s' + J_p + J_a)$	$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_s'}{\epsilon}$
	Formalna rješenja	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_s' + \rho_p}{R} dV'$ $A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[J_s' + J_p + J_a]}{R} dV'$	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{[\rho_s'] dV'}{R} +$ $+ \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right] - [\varphi] \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{cR} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \frac{\partial R}{\partial n'} \right\} dS'$

POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 2.

- W. Hauser, *Introduction to the Principles of Electromagnetism*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1971.
- Z. Haznadar, *Teoretska elektrotehnika – Elektromagnetska teorija i polja*, Liber, Zagreb, 1972.
- J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York, 1975.
- M. Javid, P.M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- D.S. Jones, *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- P. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Part I and II, McGraw-Hill, New York 1953.
- J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

3. ENERGIJA I SILE U ELEKTROMAGNETSKOM POLJU

Predmet ovoga poglavlja jest uvođenje energetske točke promatranja u studij elektromagnetskih polja. Pojam energije jedan je od najznačajnijih pojmova u fizici. Proširit ćemo stoga shvaćanje pojma energije, koju obično povezujemo s materijalnim tijelima, i na prostor u kojem djeluju elektromagnetske sile. Do sada smo elektromagnetsko polje definirali kao prostor u kojem djeluju sile na naboje i struje. Učinit ćemo korak dalje i pridružiti energiju elektromagnetskom polju. Iz definicija vektora polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, koje se temelje na izrazu za Lorentzovu silu na naboj u gibanju, očito je da se prostor u kojem postoji elektromagnetsko polje nalazi u posebnom stanju. Svakom elementu toga prostora možemo pridružiti određenu energiju. U svezi s tim moglo bi se postaviti pitanje realnosti elektromagnetskog polja kao neovisnog fizikalnog entiteta. Poznato je da se još Maxwell odvažio da elektromagnetskom polju pripiše velik stupanj fizikalne realnosti na izravan mehanički način. Treba naglasiti Maxwellovo shvaćanje elektromagnetskog polja kao realne fizikalne biti u kojoj je pohranjena energija, a ne kao matematičke veličine koja služi za opisivanje sile na jedinični naboj. Prostor u kojem djeluje polje je izmijenjen. Polje samo po sebi nosi energiju, bez obzira na to da li u prostoru u kojem ono postoji ima naboja ili ih nema. Opravdanost takvog shvaćanja pokazat ćemo u ovom poglavlju. U mnogim knjigama o elektromagnetizmu često ostaje dojam da je zadaća riješena kada se izračunaju polja. Budući da se mnoge naprave i strojevi od praktičnog interesa temelje na prijenosu ili pretvorbi elektromagnetske energije u druge oblike, to je razumijevanje svojstava pohranjivanja i prijenosa energije bitno za elektroinženjere. Potrebno je osim toga poznavati sile koje će biti razvijene u napravama¹ i energiju koja će biti pohranjena u njima. Često će kriterij uspješnosti konstrukcije biti da se postignu najveće moguće sile i najveća energija u danom volumenu.

Energetska točka promatranja je također korisno oruđe u određivanju ostalih svojstava elektromagnetskog sustava. Mnoge zadaće u elektromehaničkim sustavima bitno se pojednostavnjuju pomoću energetskih analiza i razmatranja.

Naš pristup elektromagnetskoj energiji u ovom poglavlju temelji se na snazi koju elektromagnetsko polje predaje nabojima u gibanju u praznom prostoru. Kasnije tu uključujemo i one naboje na kojima je izgrađen makroskopski model materijala. Rezul-

¹ Pogledati Z. Haznadar, Ž. Štih, *Computation of Electric and Magnetic Fields and Forces in Design of Power Apparatus*, Electromagnetic Forces and Applications, Elsevier, Amsterdam, 1992.

tantna jednadžba energetske ravnoteže, poznata kao Poyntingov teorem, bit će naš vodič za utvrđivanje različitih oblika energije pohranjene i prenesene pomoću elektromagnetskog polja u praznom prostoru i u materijalu.

U ovom poglavlju pokazat ćemo da je moguće dalje proširiti teoriju elektromagnetskih polja tako da možemo opisati takva mehanička svojstva polja kao što su energija, prostorne i plosne sile, naprezanja i količina gibanja.

3.1. DJELOVANJE ELEKTROMAGNETSKOG POLJA NA NABOJE U GIBANJU

Jednadžbu za Lorentzovu silu upotrijebili smo za definiranje polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, no još nismo analizirali radnju koja je povezana s djelovanjem sile na naboj u gibanju. Iz mehanike nam je poznato² da će djelovanje sile na materijalnu česticu biti uzrokom promjene brzine gibanja, što će imati za posljedicu promjenu kinetičke energije čestice, tj. njezinog energetske stanja. Drugim riječima, pri gibanju nabijene čestice u elektromagnetskom polju u vakuumu polje će, djelujući Lorentzovom silom na naboj, obaviti radnju koja će biti utrošena na promjenu putanje i brzine čestice. To će imati za posljedicu promjenu ukupne energije nabijene čestice.

U ovom odjeljku odredit ćemo sile i predanu energiju pri gibanju kako nabijenih čestica, tj. diskretne raspodjele naboja, tako i kontinuirano raspodijeljenih naboja u elektromagnetskom polju u vakuumu.

3.1.1. Sile na naboje u gibanju

Usmjerimo našu pažnju na određivanje sila interakcije kojima elektromagnetsko polje djeluje na različite raspodjele električnih naboja i struja kao i na različite raspodjele ekvivalentnih magnetskih naboja i struja. Smatrat ćemo da se svi naboji gibaju i struje teku u praznom prostoru, što će nam poslije poslužiti za jednostavan elektromagnetski opis unesenih materijala u polje.

Započet ćemo s izrazom (1.1.1) za Lorentzovu silu na diskretni točkasti električni naboj q , koji se giba brzinom $\mathbf{v}_e$ u vakuumu

$$\mathbf{F}_e = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) , \quad (3.1.1)$$

gdje su $\mathbf{E}$ (u V/m) i $\mathbf{B}$ (u Vs/m²) zadani vektori vanjskog narinutog elektromagnetskog polja. $\mathbf{F}_e$ je sila kojom to polje djeluje na električni naboj i mjeri se u *njutnima* (N).

Zbog skladnosti i zbog matematičke sličnosti električnog i magnetskog naboja,

² Pogledati N. Cindro, *Fizika I*, Školska knjiga, Zagreb, 1980.; P. Kulišić, *Mehanika i toplina*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

možemo na potpuno analogan način računati silu³ kojom elektromagnetsko polje djeluje na diskretni točkasti magnetski naboj q_m

$$\mathbf{F}_m = q_m (\mathbf{H} - \mathbf{v}_m \times \mathbf{D}) . \quad (3.1.2)$$

Ovdje je q_m količina magnetskog točkastog naboja mjerena u *volt-sekundama* (Vs), odnosno *veberima* (Wb), koji se giba brzinom $\mathbf{v}_m$ zadanom u *metrima po sekundi* (m/s). Vanjsko narinuto elektromagnetsko polje zadano je vektorima $\mathbf{H}$ (u A/m) i $\mathbf{D}$ (u As/m²). Sila na magnetski naboj $\mathbf{F}_m$ mjeri se u *njutnima* (N). Naime, upotrijebimo li model s magnetskim nabojem⁴ da bi opisali magnetske dipole, lako se može pokazati da će vanjska $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ polja djelovati istim momentom sile na električne i magnetske dipole (koji su fizikalna realnost), ako je magnetski naboj q_m , koji se giba brzinom $\mathbf{v}_m$, subjekt Lorentzove sile oblika (3.1.2).

Učinit ćemo korak dalje u proučavanju sila na naboje u elektromagnetskim poljima. Lako je od izraza za sile na individualne naboje prijeći na izraze za sile na naboje u elementu volumena dV . Prethodno je potrebno pojam singularne raspodjele naboja dane delta funkcijama, tj. diskretnu raspodjelu točkastih naboja, zamijeniti kontinuiranom raspodjelom naboja. Kontinuirana raspodjela naboja u vakuumu opisuje se neprekinutim funkcijama odrednica prostora $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ i $\rho_m = \rho_m(\mathbf{r}, t)$, prema relacijama (1.2.2) i (1.4.26). Sila na beskonačno mali djelić volumena dV , koji sadrži električni naboj iznosa $dQ = \rho dV$, prema (3.1.1) je

$$d\mathbf{F}_e = dQ (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) = (\rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) dV , \quad (3.1.3a)$$

a za magnetski naboj

$$d\mathbf{F}_m = dQ_m (\mathbf{H} - \mathbf{v}_m \times \mathbf{D}) = (\rho_m \mathbf{H} - \rho_m \mathbf{v}_m \times \mathbf{D}) dV . \quad (3.1.3b)$$

Ukupna sila kojom elektromagnetsko polje djeluje na sustav kontinuirano raspodijeljenih električnih i magnetskih naboja u gibanju u vakuumu, unutar konačne regije volumena V , određuje se integracijom po volumenu V

$$\mathbf{F}_e = \int_V (\rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) dV , \quad (3.1.4a, b)$$

$$\mathbf{F}_m = \int_V (\rho_m \mathbf{H} - \rho_m \mathbf{v}_m \times \mathbf{D}) dV .$$

Preostaje još da odredimo volumnu gustoću sila, tj. sile po jedinici volumena kojima polje djeluje na kontinuiranu raspodjelu električnih i magnetskih naboja u jediničnom volumenu u okolišu promatrane točke

³ Pogledati u L. M. Magid, *Electromagnetic Fields, Energy and Waves*, John Wiley and Sons, New York, 1972.

⁴ Pogledati članak 1.4.8, posebno relacije (1.4.25), (1.4.26) i (1.4.27).

$$\mathbf{f}_e = \rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} , \quad (3.1.5)$$

i

$$\mathbf{f}_m = \rho_m \mathbf{H} - \rho_m \mathbf{v}_m \times \mathbf{D} . \quad (3.1.6)$$

Te sile se često nazivaju "volumne sile" i mjere se u *njutnima po prostornom metru* (N/m^3). Uvedemo li prema relaciji za konvekcijske struje (1.2.6) gustoću električne struje u vakuumu $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, dobivamo volumnu silu na električne naboje ρ i električne struje $\mathbf{J}$ u polju u praznom prostoru iz (3.1.5) kao

$$\mathbf{f}_e = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} . \quad (3.1.7)$$

Analogno je gustoća magnetske struje $\mathbf{J}_m = \rho_m \mathbf{v}_m$, pa se volumna sila na magnetske naboje i magnetske struje u elektromagnetskom polju računa prema (3.1.6) kao

$$\mathbf{f}_m = \rho_m \mathbf{H} - \mathbf{J}_m \times \mathbf{D} . \quad (3.1.8)$$

Iako ćemo se u ovom poglavlju još podosta baviti proračunom sila, možemo reći da smo utvrdili sve potrebne relacije za sile interakcije elektromagnetskih polja i sustava kontinuiranih raspodjela naboja i struja. One će nam pomoći da bismo odredili energetske odnose u takvim interakcijama.

3.1.2. Energija i snaga predana nabojima u gibanju

Pristup elektromagnetskoj energiji temeljit će se na utvrđivanju snage predane od elektromagnetskog polja nabojima u gibanju u praznom prostoru. Pritom ćemo pod snagom razumijevati brzinu prijenosa energije iz polja k nabojima u gibanju. Trenutna vrijednost snage određuje se iz relacije⁵

$$P = \frac{dW}{dt} , \quad (3.1.9)$$

i mjeri se u *volt-amperima* tj. *vatima* (W). S W smo obilježili energiju mjerenu u *vat-sekundama* (Ws) odnosno *džulima* (J), a s t vrijeme mjereno u *sekundama* (s).

Odredit ćemo najprije energiju predanu u jedinici vremena tj. snagu predanu od elektromagnetskog polja ($\mathbf{E}, \mathbf{B}$) točkastom električnom naboju q koji se giba brzinom $\mathbf{v}_e$ u vakuumu. Ona je upravo jednaka obavljenom radu u jedinici vremena kada polje djeluje silom $\mathbf{F}_e$ na naboj u gibanju. Predanu snagu odnosno obavljen radnju sile $\mathbf{F}_e$ na putu ds u jedinici vremena, tj. brzinu obavljanja radnje, izračunat ćemo prema definiciji

⁵ Pogledati npr. P. Kulišić, *Mehanika i toplina*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

$$P_e = \mathbf{F}_e \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}_e ,$$

što očito zbog $\mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_e \equiv 0$, daje trenutnu predanu snagu točkastom naboju

$$P_e = q\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{E} . \quad (3.1.10)$$

Slično se snaga predana točkastom magnetskom naboju q_m , koji se giba brzinom $\mathbf{v}_m$ u elektromagnetskom polju $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$ u vakuumu, može izračunati prema izrazu

$$P_m = \mathbf{F}_m \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v}_m = q_m(\mathbf{H} - \mathbf{v}_m \times \mathbf{D}) \cdot \mathbf{v}_m .$$

Ponovno, zbog međusobne okomitosti vektora $\mathbf{v}_m$ i $(\mathbf{v}_m \times \mathbf{D})$, tj. zbog $\mathbf{v}_m \times \mathbf{v}_m \equiv 0$, dobiva se za trenutnu predanu snagu točkastom magnetskom naboju izraz

$$P_m = q_m \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{H} . \quad (3.1.11)$$

Usmjerimo našu pažnju na električne i magnetske naboje čija je kontinuirana raspodjela u praznom prostoru dana funkcijama $\rho(\mathbf{r}, t)$ i $\rho_m(\mathbf{r}, t)$ koji se gibaju brzinama $\mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{v}_m(\mathbf{r}, t)$. Sile kojima će elektromagnetsko polje djelovati na naboje u elementarnom volumenu dV određuju se pomoću (3.1.5) i (3.1.6), kao

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_e &= \mathbf{f}_e dV = (\rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) dV , \\ d\mathbf{F}_m &= \mathbf{f}_m dV = (\rho_m \mathbf{H} - \rho_m \mathbf{v}_m \times \mathbf{D}) dV . \end{aligned}$$

Ove sile predaju ukupnu energiju u jedinici vremena ili ukupnu trenutnu snagu električnim i magnetskim nabojima u gibanju unutar elementarnog volumena određenu izrazom

$$dP = (p_e + p_m) dV = d\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e + d\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v}_m = (\mathbf{f}_e \cdot \mathbf{v}_e + \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v}_m) dV . \quad (3.1.12)$$

Veličinu $p = p_e + p_m$, mjerenu u *vatima po prostornom metru* (W/m^3), nazivamo *volumnom gustoćom snage* ili jednostavno *volumnom snagom*. Ona se iz gornjih izraza može odrediti kao

$$p = \rho \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{E} + \rho_m \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{H} . \quad (3.1.13)$$

Uvedemo li u skladu s (1.2.6) gustoću električne struje u vakuumu $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}_e$ i analogno gustoću magnetske struje $\mathbf{J}_m = \rho_m \mathbf{v}_m$, izraz (3.1.13) za ukupnu trenutnu volumnu snagu, koju elektromagnetsko polje predaje kontinuirano raspodijeljenim električnim i magnetskim nabojima u gibanju, reducira se na

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{H} . \quad (3.1.14)$$

Ovdje su $\mathbf{J}$ i $\mathbf{J}_m$ makroskopske gustoće električnih i magnetskih struja u točki. Ukupna energija predana od elektromagnetskog polja u jedinici vremena (trenutna predana snaga) svim nabojima u volumenu V određuje se integracijom

$$P = \int_V p dV = \int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{H}) dV, \quad (3.1.15)$$

i mjeri se u *vatima* (W).

Električni naboji u gibanju mogu biti slobodni i vezani. Slobodni naboji mogu predstavljati vanjske (konvekcijske) naboje, čije gibanje se ubrzava ili usporava poljem $\mathbf{E}$. Takve raspodjele mogu se naći npr. u ioniziranim plinovima i plazmama i u snopu elektrona u vakuumskim cijevima. Slobodni naboji mogu također predstavljati i unutarnje (kondukcijske) naboje u materijalu, a brzina im je algebarski povezana s električnim poljem $\mathbf{E}$. U relaciji (3.1.14) izrazili smo gustoću energije predane u jedinici vremena od elektromagnetskog polja u danoj točki električnim nabojima u gibanju u praznom prostoru kao skalarni produkt električnog polja $\mathbf{E}$ i ukupne gustoće električne struje $\mathbf{J}$ u točki. Ovdje $\mathbf{J}$ predstavlja doprinose struji kako od gibanja slobodnih električnih naboja, tako i od vezanih električnih naboja koji rezultiraju iz makroskopskog modela polariziranog materijala. Odgovarajuću volumnu snagu predanu od elektromagnetskog polja magnetskim nabojima u gibanju izrazili smo kao skalarni produkt magnetskog polja $\mathbf{H}$ i gustoće magnetske struje $\mathbf{J}_m$ u točki, gdje $\mathbf{J}_m$ predstavlja gustoću magnetske struje koja rezultira iz makroskopskog modela magnetiziranog materijala.

Iz prethodnog možemo zaključiti da iako se volumna energija predana u jedinici vremena odnosi na raspodjele $\mathbf{J}$ i $\mathbf{J}_m$ u vakuumu, izraz (3.1.14) može korisno poslužiti i dovoljno je općenit za primjenu i u ekvivalentnim makroskopskim modelima materijala, koje nadomještamo raspodjelama električnih i magnetskih naboja u praznom prostoru.

3.2. ELEKTROMAGNETSKA ENERGIJA

Ukupna trenutna snaga predana od elektromagnetskog polja slobodnim (kondukcijskim i konvekcijskim) i vezanim (električnim i magnetskim) nabojima, koji se uvijek nalaze u stanju gibanja, prema iskustvu iz mehanike pretvara se jednim dijelom u neki drugi *reverzibilni oblik energije*; npr. kroz ubrzanje ili usporenje naboja u povećanje ili smanjenje kinetičke energije, ili pak kroz promjenu međusobnog položaja naboja u povećanje ili smanjenje potencijalne energije sustava naboja. Drugim dijelom za pretpostaviti je da se nabojima od polja predana energija pretvara i u *ireverzibilni oblik energije*, tj. u toplinu. Toplina nastala pomacima, i uopće gibanjem naboja, predstavlja nepovratno izgubljenu elektromagnetsku energiju. Nazivamo je stoga gubitkom energije ili jednostavno *gubitkom* (snage).⁶ S druge strane univerzalno prirodno načelo očuvanja

⁶ Detaljnije o gubicima polarizacije, histereze i vođenja, pogledati u člancima 3.3.3. i 3.3.4.

energije upućuje nas na pretpostavku da se snaga (3.1.15) predana od elektromagnetskog polja nabojima u gibanju mora namiriti i iskazati kao smanjenje energije polja i kao tijek snage prenesene poljem iz izvora. Suprotno načelu djelovanja na daljinu, načelo polja⁷ kao što je već rečeno uvodi polje sila, koje lokalnom interakcijom prenose učinke od točke do točke kroz prostor. Suglasno ideji polja mi govorimo o *energiji koja je pohranjena* u samom polju i koja se *prenosi poljem*, tj. kroz prostor. *To nam omogućuje da energiju koja ostaje ili se prenosi pomoću elektromagnetskog polja nazivamo "elektromagnetskom energijom"*.

U ovom odjeljku analizirat ćemo prijenos i pohranjivanje elektromagnetske energije u praznom prostoru. Središnja točka te analize bit će *Poyntingov teorem*, temeljna relacija očuvanja energije u elektromagnetskom sustavu. Pokazat ćemo da je s matematičke točke gledišta Poyntingov teorem izravna posljedica Maxwellovih jednadžbi. Njegova fizikalna interpretacija od bitnog je značaja za studij energetske odnosa u elektromagnetskom polju i u elektromagnetskoj teoriji uopće.

3.2.1. Očuvanje elektromagnetske energije. Poyntingov teorem

3.2.1.1. Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku

Temeljnu relaciju za očuvanje energije u elektromagnetskom sustavu, Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku, izvest ćemo polazeći od izraza (3.1.14) za ukupnu trenutnu volumnu snagu koju elektromagnetsko polje predaje električnim i magnetskim nabojima u gibanju

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{H} . \quad (3.2.1)$$

Podsjetimo da strujama $\mathbf{J}$ i $\mathbf{J}_m$ općenito pridonose svi vanjski i unutarnji, slobodni i vezani naboji, pa će ova analiza i zaključci, iako se odnose na gibanje naboja u vakuumu, biti jednako valjani kako za energetske odnose u praznom prostoru tako i unutar makroskopskog modela materijala. To ćemo postići ako za $\mathbf{J}$ i $\mathbf{J}_m$ supstituiramo izraze

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} , \\ \mathbf{J}_m &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} , \end{aligned} \quad (3.2.2a,b)$$

koji važe za makroskopske zakone polja u materijalu kao što smo to opisali u odjeljku 1.5. Polazeći od Maxwellovih jednadžbi (1.5.10a, b) za model s magnetskim nabojem⁸

⁷ Pojam polja opisan je u članku 1.1.1.

⁸ Pogledati makroskopski opis materijala za model s magnetskim nabojem u članku 1.5.2.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} ,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ,$$

možemo izraziti ukupne električne i magnetske struje $\mathbf{J}$ i $\mathbf{J}_m$ kao

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (3.2.3a,b)$$

$$\mathbf{J}_m = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} .$$

Uvrstimo li te izraze za struje $\mathbf{J}$ i $\mathbf{J}_m$ u relaciju (3.2.1), prevest ćemo od polja naboja predanu snagu p u oblik koji sadrži samo veličine polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$. Pa dobivamo izraz

$$\begin{aligned} p &= \left(\nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} + \left(-\nabla \times \mathbf{E} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{H} = \\ &= [\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})] - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} . \end{aligned}$$

Primijenimo li vektorski identitet⁹

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) ,$$

i ekvivalenciju izraza

$$\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \right) ,$$

$$\mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) ,$$

možemo konačno napisati izraz za snagu

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{J}_m = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) . \quad (3.2.4)$$

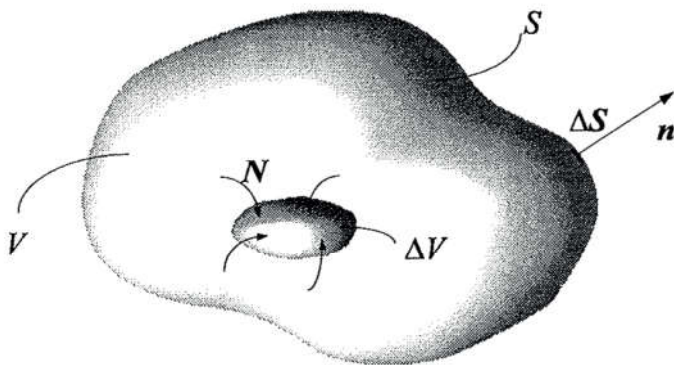
koju elektromagnetsko polje predaje svim električnim i magnetskim naboja u gibanju unutar jediničnog volumena praznog prostora ili materijala. *Jednadžba (3.2.4) je*

⁹ Pogledati Prilog C.

Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku. Predstavlja temeljnu relaciju očuvanja elektromagnetske energije u općem slučaju. Izveo ju je prvi put 1884. godine Poynting, a potom iste godine i Heaviside.

3.2.1.2. Poyntingov teorem u integralnom obliku

Integracijom obiju strana relacije (3.2.4) po ukupnom volumenu V , kojega zatvara



Slika 3.2.1. Tijek energije u volumenu V , kojeg zatvara ploha S .

ploha S , kao na slici 3.2.1, dobivamo

$$\int_V p dV = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{J}_m) dV = - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV - \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) dV.$$

Totalna derivacija zamijenila je parcijalnu derivaciju budući da volumen V ne ovisi o vremenu. Uz primjenu Gaussova teorema divergencije slijedi *relacija za Poyntingov energetska teorem u integralnom obliku*

$$\int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{J}_m) dV = - \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS - \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) dV. \quad (3.2.5)$$

Relacije (3.2.4) i (3.2.5) predstavljaju diferencijalni i integralni oblik Poyntingova teorema. One vrijede općenito, tj. i u praznom prostoru i u prostoru ispunjenom materijalom. Ovdje će pažnja biti usmjerena na energetske odnose u vakuumu, dok će se energetske odnose u materijalu posebno razmotriti u odjeljku 3.3.

3.2.1.3. Očuvanje elektromagnetske energije u vakuumu

Iako izrazi za Poyntingov teorem (3.2.4) i (3.2.5) vrijede općenito, mi ćemo našu pažnju u ovoj točki ograničiti na polja u praznom prostoru odnosno vakuumu. To sve u namjeri da bismo izbjegli poteškoće koje se javljaju zbog nelinearnih i nejedinstvenih odnosa u međudjelovanju elektromagnetskih polja i materijala. Energetske odnose u materijalima bit će posebno razmatrani u članku 3.3.2.

Pojašnjenje Poyntingova teorema o očuvanju energije u općenito vremenski ovisnim elektromagnetskim poljima započet ćemo tumačenjem pojedinih članova u izrazima

(3.2.4) i (3.2.5). Značenje desne strane obiju relacija postat će razumljivije uvedemo li dvije nove veličine. Prije svega uvest ćemo skalarnu veličinu

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{H}|^2, \quad (3.2.6)$$

koju možemo protumačiti kao *volumnu gustoću energije pohranjene u elektromagnetskom polju* ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) u praznom prostoru.

Za vremenski ovisna elektromagnetska polja gustoća pohranjene energije w , koja je raspodijeljena po praznom prostoru, također je funkcija vremena. Zato pojam vremenski ovisne gustoće energije u raznim točkama u prostoru mora biti udružen s hipotezom o tijeku energije u polju. Ova ideja nameće se ako želimo da načelo očuvanja energije bude zadržano. U svakom slučaju promjena jakosti polja ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) i gustoće energije w mora biti povezana s idejom o tijeku energije u elektromagnetskom polju. Uvedimo zato još jednu novu vektorsku veličinu

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (3.2.7)$$

poznatu pod nazivom *Poyntingov vektor*.

Promotrimo najprije diferencijalni oblik Poyntingova teorema (3.2.4) koji sada možemo pojednostavnjeno pisati kao

$$-\nabla \cdot \mathbf{N} - \frac{\partial w}{\partial t} = p. \quad (3.2.8)$$

Desna strana izvedena je iz sila koje djeluju na sve vrste električnih i magnetskih naboja i predstavlja energiju koju u jedinici vremena elektromagnetsko polje predaje svim nabojima u gibanju unutar jediničnog volumena praznog prostora. Drugim riječima to je snaga kojom elektromagnetsko polje snabdijeva naboje u gibanju u jedinici volumena. Ta snaga će biti oduzeta od elektromagnetskog polja bilo iz njegove lokalno pohranjene energije u okolišu točke u kojoj se nalazi naboj, bilo pak negdje drugdje, što onda podrazumijeva prijenos energije poljem kroz prostor. Lijeva strana te jednadžbe reducirana je na dva člana koji sadrže samo polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ i njihove prostorne i vremenske derivacije. To sugerira da ta dva člana predstavljaju inherentne značajke elektromagnetskog polja povezane s pohranjivanjem i s protokom energije u njemu. Iz matematičkog oblika tih izraza identificirat ćemo jedan kao divergenciju tijeka elektromagnetske snage i drugi kao iznos vremenske promjene elektromagnetske energije pohranjene u polju.

Prvi član u jednadžbi (3.2.8) je gustoća s kojom vektorsko polje $\mathbf{N}$ ponire u bilo kojoj točki prostora u kojem postoji elektromagnetsko polje. Može se tumačiti kao gustoća tijeka snage od elektromagnetskog polja izvan ΔV u ΔV (prema sl. 3.2.1). *To znači da se $\mathbf{N}$ može tumačiti kao tijek elektromagnetske snage po jedinici površine koja se prenosi kroz prostor ispunjen elektromagnetskim poljem.*

Drugi član na lijevoj strani jednadžbe (3.2.8) je negativna vremenska derivacija

skalarne veličine w , koja ima dimenziju energije po jedinici volumena. To nas navodi da drugi član protumačimo kao gustoću kojom se snaga predaje nabojima lokalno pomoću elektromagnetskog polja. U tom slučaju naša pretpostavka za w u relaciji (3.2.6), kao o gustoći energije pohranjene u elektromagnetskom polju je valjana.

Tako relaciju (3.2.8), koja predstavlja Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku, možemo tumačiti na sljedeći način: ako je gustoća snage predane nabojima u jediničnom volumenu ΔV kao na slici 3.2.1, tada se ta snaga oduzima dijelom od energije w pohranjene lokalno pomoću $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ polja unutar ΔV ($-\partial w/\partial t$ je iznos za koji se ta energija u ΔV smanjuje) a dijelom se prenosi, tj. dotječe iz okolnog prostora gdje god egzistira elektromagnetsko ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) polje ($-\nabla \cdot \mathbf{N}$ je iznos energije koja u jedinici vremena doteče iz cijelog vanjskog prostora u jedinični volumen ΔV). Kao što se može vidjeti iz relacije (3.2.4), odnosno (3.2.8), mjerne jedinice svih članova jesu: *vati po prostornom metru* (W/m^3). Zanimljiv je slučaj u prostoru bez naboja. Tada je i snaga predana nabojima $p = 0$. Jednadžba (3.2.8) poprima oblik

$$\nabla \cdot \mathbf{N} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (3.2.8a)$$

koji je sličan jednadžbi kontinuiteta (1.2.11) za očuvanje naboja. Očito je, po analogiji, da jednadžba kontinuiteta (3.2.8a) izražava *očuvanje elektromagnetske energije u regiji bez naboja*, pri čemu je w funkcija distribucije energije, a $\mathbf{N}$ vektor tijeka energije.

Integralni oblik Poyntingova teorema dan relacijom (3.2.5) češće je u upotrebi. Pojednostavnjeno pisan glasi

$$-\oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS - \frac{d}{dt} \int_V w dV = P, \quad (3.2.9)$$

gdje je P ukupna (trenutna) elektromagnetska snaga predana nabojima u gibanju unutar zatvorenog volumena V . Definirana je relacijom (3.1.15) i mjeri se u *vatima* (W). Prvi član na lijevoj strani, negativni integral od $\mathbf{N}$ po zatvorenoj plohi S (prema slici 3.2.1), mora biti ukupna elektromagnetska snaga koja utječe u volumen V izvana iz okolnog prostora kroz zatvorenu plohu S . Drugi član predstavlja vremensku promjenu, tj. smanjenje (ako ga uzmemo s negativnim predznakom) ukupne energije pohranjene u elektromagnetskom polju unutar zatvorenog volumena V .

Iz jednadžbe (3.2.9) i načela o očuvanju energije, na temelju rečenog možemo zaključiti da ukupna elektromagnetska snaga P predana svim električnim i magnetskim nabojima unutar volumena V mora biti nadoknađena iz vremenske promjene koja rezultira smanjenjem ukupne elektromagnetske energije W pohranjene u elektromagnetskom polju unutar V , i također od "čistog" tijeka elektromagnetske snage P_N u V iz vanjskog prostora (gdje negativni predznak označava tijek prema unutra u V kroz zatvorenu plohu S).

Zanimljivo je da je Poyntingov teorem moguće dokazati i izravno primjenom načela o očuvanju energije u elektromagnetskom sustavu. Ako imamo u vidu da je relacijom

(3.1.15) definirana snaga P predana od elektromagnetskog polja nabojima u gibanju, lako se može prema (3.1.9) pokazati da je ukupna trenutna energija W_q predana nabojima u volumenu V povezana s P relacijom

$$\frac{dW_q}{dt} = P = \int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{H}) dV . \quad (3.2.10)$$

Također je moguće povezati ukupni tijek snage iz okolnog prostora u volumen V i energiju W_N koja je na taj način prenesena u volumen V

$$\frac{dW_N}{dt} = P_N = \oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS . \quad (3.2.11)$$

Vremenska promjena ukupne pohranjene elektromagnetske energije W u praznom prostoru u volumenu V je prema (3.2.6) dana s

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) dV . \quad (3.2.12)$$

Budući da načelo očuvanja energije u volumenu V zahtijeva da budu ispunjeni uvjeti

$$W_q + W_N + W = \text{konst.} ,$$

ili

$$\frac{d}{dt} (W_q + W_N + W) = 0 , \quad (3.2.13)$$

lako je pokazati da uvrštenjem relacija (3.2.10), (3.2.11) i (3.2.12) dobivamo relaciju (3.2.5), koja predstavlja integralni oblik Poyntingova teorema.

3.2.2. Pohranjena elektromagnetska energija u vakuumu

U dosadašnjim smo se razmatranjima ograničili na proučavanje energije elektromagnetskog polja u vakuumu da bismo izbjegli poteškoće koje dodatno nastaju zbog unošenja materijala u polje. No zato nismo postavljali nikakva ograničenja u pogledu naravi vremenskih promjena veličina polja. Uvažavajući te činjenice poći ćemo od izraza (3.2.6) za skalarnu veličinu

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{H}|^2 , \quad (3.2.14)$$

koju smo uveli kao volumnu gustoću energije pohranjene u elektromagnetskom polju u

vakuumu.¹⁰ Otuda je očito da je elektromagnetska energija pohranjena u onom dijelu prostora gdje se nalazi elektromagnetsko polje ($\mathbf{E}, \mathbf{H}$). Na taj smo način pridružili energiju elektromagnetskom polju. Kako se vidi iz (3.2.14) *pohranjena energija* w je funkcija veličina polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$, tj. neovisna je o izvorima polja bilo slobodnim ili vezanim u materiji. Ova činjenica nam omogućava da odijelimo elektromagnetsku energiju od ostalih oblika energije koji istovremeno mogu biti prisutni u prostoru. Moguće je dalje gustoću w pohranjene energije u elektromagnetskom polju razlučiti u dio

$$w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2, \quad (3.2.15)$$

udružen s električnim poljem koji predstavlja gustoću energije pohranjene u električnom polju u vakuumu i u dio

$$w_H = \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{H}|^2, \quad (3.2.16)$$

udružen s magnetskim poljem koji predstavlja gustoću energije pohranjene u magnetskom polju u vakuumu.

S druge strane Poyntingov vektor, tj. gustoća N tijeka elektromagnetske snage rezultira iz interakcije električnog i magnetskog polja, i zato ne može biti razdvojen u komponente udružene odvojeno s $\mathbf{E}$ i s $\mathbf{H}$. Uz poznatu gustoću w elektromagnetske energije moguće je odrediti ukupnu pohranjenu elektromagnetsku energiju W u prostoru zadanog volumena V pomoću

$$W = \int_V w dV = \int_V \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) dV. \quad (3.2.17)$$

Isto tako ukupnu pohranjenu elektromagnetsku energiju možemo odijeliti u ukupnu energiju pohranjenu u električnom polju u vakuumu unutar V

$$W_E = \int_V w_E dV = \int_V \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 dV, \quad (3.2.18)$$

i u ukupnu energiju pohranjenu u magnetskom polju u vakuumu unutar V

$$W_H = \int_V w_H dV = \int_V \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 dV. \quad (3.2.19)$$

Konačno je

¹⁰ Pogledati prethodni članak 3.2.1, posebno točku 3.2.1.3. U poglavljima 4. i 6. o statičkim poljima pokazat ćemo da se ova interpretacija slaže s proračunom pohranjene energije u statičkim poljima.

$$W = W_E + W_H, \quad (3.2.20)$$

ukupna elektromagnetska energija pohranjena u sustavu u vakuumu. To je točno samo u praznom prostoru. Ako se materijal nalazi u polju, tada $W = W_E + W_H$ predstavlja samo dio ukupne energije pohranjene u $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ poljima u danom sustavu. U tom slučaju će dodatna energija biti pohranjena u polarizaciji i magnetizaciji naboja unutar sustava koji sadrži materijal.¹¹ Potrebno je, također, skrenuti pozornost na činjenicu da se može opaziti određena nejedinstvenost pri izvođenju članova za pohranjenu električnu i magnetsku energiju u elektromagnetskom polju. Gustoće pohranjene energije uvedene u izrazima (3.2.6), (3.2.15) i (3.2.16) izvedene su iz člana s vremenskom derivacijom u Poyntingovu teoremu (3.2.4). Očito je da se uvijek može dodati kojigod vremenski neovisan član obadvjema i w_E i w_H , bez utjecaja na iznos njihove vremenske derivacije, tj. bez utjecaja na bilancu snage u Poyntingovu teoremu. Tu višeznačnost možemo lako izbjeći tako da jednostavno izaberemo proizvoljni nulti nivo gustoće pohranjene elektromagnetske energije u sustavu kada je on elektromagnetski "umrtvljen", tj. kada su sve elektromagnetske veličine jednake nula.

3.2.3. Tijek elektromagnetske energije. Poyntingov vektor

U članku 3.2.1. izveli smo Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku, tj. relaciju (3.2.4) za očuvanje elektromagnetske energije u elementarnom volumenu u vakuumu. Tako smo uveli vektorsku veličinu danu izrazom (3.2.7)

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (3.2.21)$$

poznatu pod nazivom *Poyntingov vektor*. Ona predstavlja gustoću tijeka elektromagnetske snage, tj. energiju koja proteče u jedinici vremena kroz jediničnu površinu u okolišu točke u praznom prostoru u kojem postoji elektromagnetsko polje. Jedinica za $\mathbf{N}$ u SI sustavu je *vat po četvornom metru* (W/m^2). Integral (3.2.11) od $\mathbf{N}$

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS = P_N, \quad (3.2.22)$$

koji se pojavljuje u relacijama (3.2.5) i (3.2.9) jedinstveno određuje tijek elektromagnetske snage kroz zatvorenu plohu S . Važno je upozoriti da naše tumačenje Poyntingova vektora $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ kao gustoće elektromagnetske snage u svakoj točki prostora nije strogo opravdano za oba oblika Poyntingova teorema. Poteškoća je u tome što iako divergencija od $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (ili integral od $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ preko zatvorene plohe) uvijek daje točnu vrijednost snage prenesene elektromagnetskim poljem, vektoru $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ uvijek se

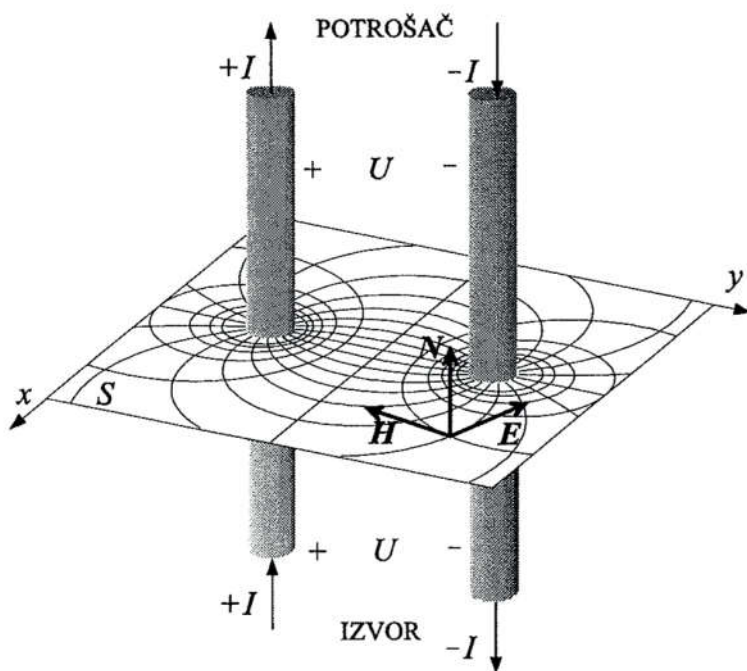
¹¹ Detaljnije pogledati u točkama 3.3.3.2. i 3.3.4.2.

može dodati kojigod vektor $\mathbf{C}$ koji je bez izvora (čija je divergencija jednaka nula: $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0$), tako da bude $\mathbf{N}' = \mathbf{N} + \mathbf{C} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{C}$. Obje vrijednosti $\mathbf{N}$ i $\mathbf{N}'$ zadovoljavaju oba oblika Poyntingova teorema. Drugim riječima, ekstrapolacija prave vrijednosti vektora $\mathbf{N}$ iz njegove divergencije u danoj regiji nije jedinstven postupak. Potrebne su dodatne informacije.

Usvajanje definicije Poyntingova vektora $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ samoga, bez dodatnog člana, kao gustoće tijeka elektromagnetske snage u točki, ima nekoliko prednosti:

- 1) daje uvijek točne vrijednosti za ukupnu snagu koja protječe iz ili u zatvorenu regiju;
- 2) u elektrostatičkom sustavu gdje je $\mathbf{H} = 0$ i u magnetostatičkom sustavu gdje je $\mathbf{E} = 0$, resultantna vrijednost za $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = 0$ je u suglasju s nepostojanjem bilo kojeg opaženog tijeka snage utvrđenog eksperimentalno;
- 3) vrlo je jednostavna.

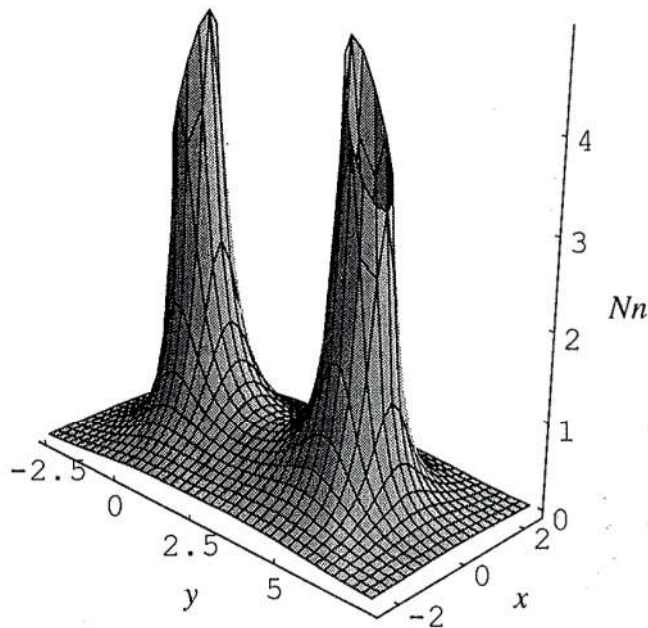
U suglasju s prije rečenim postuliramo da je tijekom elektromagnetske snage kroz jediničnu plohu u svakoj točki prostora određen Poyntingovim vektorom $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Na primjeru dvožičnog prijenosnog voda pokazat ćemo kako se tijekom elektromagnetske snage u prostoru oko vodiča može predložiti pomoću Poyntingova vektora. Na slici 3.2.2 prikazali smo dvožični vod koji služi za prijenos elektromagnetske energije od izvora do potrošača.



Slika 3.2.2. Dvožični prijenosni vod; slika polja vektora $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$

Materijal vodiča je idealni provodnik ($\kappa = \infty$), tako da u vodičima nema gubitaka niti uzdužne komponente jakosti električnog polja, $E_z = 0$. Vektori električnog polja $\mathbf{E}$ i magnetskog polja $\mathbf{H}$ međusobno su okomiti u svakoj točki P i imaju samo transverzalne komponente, tj. leže u poprečnoj ravni S . Njihove veličine mogu se odrediti jednostavnim proračunom pomoću zadanog napona između vodiča i struja koje teku vodičima, te pomoću koordinata točke P . Lako se onda izračuna Poyntingov vektor kao

$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ u svakoj točki P . $\mathbf{N}$ je uvijek okomit na ravninu S , tj. kolinearan je s osima vodiča, pa ima samo N_z komponentu.



Slika 3.2.3. Dvožični prijenosni vod; raspodjela normalizirane gustoće tijeka snage $Nn = N/N_0$; udaljenost između vodiča $d = 5$ cm, polumjer vodiča $r_0 = d/10$, $N_0 = UI/[4\pi \ln(d/r_0)]$

To pokazuje da sva elektromagnetska snaga protječe duž voda od izvora prema potrošaču. Njezinu normaliziranu raspodjelu oko vodiča u poprečnoj ravnini S prikazali smo dijagramom na slici 3.2.3.

3.3. MATERIJAL U ELEKTROMAGNETSKOM POLJU

U prethodnim odjeljcima proučavali smo gibanje naboja i struja u elektromagnetskom polju u vakuumu. Analizirali smo pritom energetske odnose i pretvorbu elektromagnetske energije predane iz polja nabojima u gibanju. U ovom odjeljku analizirat ćemo prijenos i pohranjivanje elektromagnetske energije u materijalu unesenom u elektromagnetsko polje. Utvrdit ćemo da se izrazi izvedeni za energetske odnose pri gibanju naboja u elektromagnetskom polju u vakuumu mogu primijeniti i za materijal unesen u polje. Pokazat ćemo da se elektromagnetska energija predana iz polja nabojima u materijalu pretvara dijelom u reverzibilni dio, a dijelom u ireverzibilni dio energije, tj. pretvara se nepovratno u gubitak energije zbog različitih učinaka. Pritom će nam Poyntingov teorem u materijalu, kao stavak o očuvanju elektromagnetske energije, biti od bitne pomoći.

3.3.1. Elektromagnetska energija apsorbirana u materijalu

Unesemo li materijal u elektromagnetsko polje nastupit će njihovo međusobno djelovanje. Zbog unutarnjih slobodnih i vezanih naboja u materijalu pojavit će se različiti učinci. Promijenit će se i polje, a stanje u materijalu bit će različito od onoga prije unošenja u polje. Nas zanimaju energetske odnose. Da bismo ih utvrdili, primijenimo Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku dan relacijama (3.2.4) i (3.2.8). Elektromagnetska snaga predana iz polja materijalu, tj. apsorbirana u materijalu u nekoj je točki određena s

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{H} , \quad (3.3.1)$$

gdje su $\mathbf{J}$ i $\mathbf{J}_m$ gustoće električnih i magnetskih struja u materijalu. U odjeljku 1.4, u člancima 1.4.2. i 1.4.5, te 1.4.8, pokazano je da su vrijednosti od $\mathbf{J}$ i $\mathbf{J}_m$ u izravnoj svezi s provodnim, dielektričkim i magnetskim svojstvima unesenog materijala.

Zahvaljujući tome sada ćemo biti u stanju da izraz (3.3.1) prevedemo u oblik, koji izražava apsorbiranu elektromagnetsku snagu utrošenu za polarizaciju i za magnetiziranje materijala, te za proces vođenja (naboja) u materijalu. U modelu predstavljanja materijala s ekvivalentnim magnetskim nabojima i strujama, gustoća magnetskih struja $\mathbf{J}_m$ rezultira u mirujućem magnetskom materijalu, prema relaciji (1.4.27) samo iz vremenske promjene magnetizacije $\mathbf{M}$

$$\mathbf{J}_m = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} . \quad (3.3.2)$$

Jasno je da u relaciji (3.3.1) član

$$p_M = \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} , \quad (3.3.3)$$

predstavlja gustoću snage predane elektromagnetskim poljem materijalu kada se njegovo magnetiziranje mijenja tijekom vremena. Drugim riječima, vremenski promjenjivo magnetiziranje materijala ima za posljedicu izmjenu energije p_m (u jedinici vremena i u jediničnom volumenu) između elektromagnetskog polja i materijala.

S druge strane, gustoća električne struje $\mathbf{J}$ općenito se sastoji od slobodne (provodne) struje $\mathbf{J}_s$ i od polarizacijske komponente $\mathbf{J}_p$ struje, pa se uz pomoć jednadžbe (1.4.11) može izraziti

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} . \quad (3.3.4)$$

Polarizacijska komponenta struje $\mathbf{J}_p$ predstavlja gustoću snage koju makroskopsko elektromagnetsko polje predaje materijalu kada se njegova polarizacija mijenja u vremenu i pridonosi komponenti gustoće snage

$$p_p = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} . \quad (3.3.5)$$

Drugim riječima, član p_p predstavlja izmjenu energije između elektromagnetskog polja i materijala uzrokovanu vremenski promjenjivom polarizacijom. Komponenta gustoće snage

$$p_g = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} , \quad (3.3.6)$$

koja rezultira od slobodnih struja $\mathbf{J}_s$ može biti udružena s različitim fizikalnim pojavama. Ako slobodne struje $\mathbf{J}_s$ rezultiraju čisto od vođenja (naboja) u materijalu, sile koje proizvodi električno polje uravnotežene su sa silama trenja koje ovise o brzini pomaka naboja. U tom slučaju snaga predana elektromagnetskim poljem gubi se u obliku topline. To je proces koji vodi k *Jouleovu*¹² zagrijavanju otpornika. Kako je gustoća provodne struje, prema (1.4.1)

$$\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E} , \quad (3.3.7)$$

to je gustoća izgubljene snage u linearnom vodiču dana s

$$p_g = \kappa |\mathbf{E}|^2 . \quad (3.3.8)$$

S druge strane $\mathbf{J}_s$ može predstavljati i ostale oblike gustoće slobodnih struja. Npr. $\mathbf{J}_s$ može biti gustoća neovisnih struja $\mathbf{J}_i$ koje teku iz naponskog ili strujnog izvora. U tom slučaju $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i$ predstavlja snagu predanu od polja izvoru (ako je pozitivna), i od izvora polju (ako je negativna). Dakle,

$$p_i = -\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{E} , \quad (3.3.9)$$

(s uključenim negativnim predznakom) predstavlja gustoću snage predane polju od izvora. Općenito se može reći da

$$\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E}$$

predstavlja elektromagnetsku snagu pretvorenu u neki drugi oblik energije (ako je pozitivna), ili *vice versa* (ako je negativna). Konačno, desna strana izraza (3.3.1) poprima oblik

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i + \kappa |\mathbf{E}|^2 + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -p_i + p_g + p_p + p_M , \quad (3.3.10)$$

ako kombiniramo različite oblike gustoće elektromagnetske snage predane materijalu

¹² James Prescott Joule (1818. – 1889), engleski fizičar.

(točnije nabojima u materijalu) od strane polja. Očito je da snaga predana u jediničnom volumenu nabojima u gibanju koji se nalaze u materijalu i tvore makroskopski model materijala može biti apsorbirana na različite načine. Ona može biti pretvorena u drugi oblik energije unutar neovisnog izvora ($-p_i$), pretvorena u toplinu i izgubljena u vodiču (p_g), prijeći u porast polarizacije dielektričnog materijala (p_p), ili konačno, prijeći u porast magnetiziranosti magnetskog materijala (p_M). Bilo koji, svi, ili nijedan od tih procesa može se dogoditi u danoj točki prostora ovisno o vrijednostima $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ i o vrsti materijala u promatranoj točki.

3.3.2. Poyntingov teorem u materijalu

3.3.2.1. Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku

Unesemo li materijal u polje i na njega se može primijeniti Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku, koji prema (3.2.4) i (3.2.8) glasi

$$-\nabla \cdot \mathbf{N} - \frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{H} = p. \quad (3.3.11)$$

Za analizu energetske odnose u materijalu unesenom u elektromagnetsko polje može se taj izraz, sukladno izvedenom u prethodnoj točki, napisati u mnogo prikladnijem obliku. Tako ćemo za gustoću elektromagnetske snage p , koja se iz polja predaje materijalu, uvrstiti izraz (3.3.10), pa dobivamo konačan diferencijalni oblik Poyntingova teorema u materijalu

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i = & \kappa |\mathbf{E}|^2 + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right), \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

ili u simboličkom obliku

$$[-\nabla \cdot \mathbf{N} + p_i] = [p_g + p_p + p_M] + \left[\frac{\partial}{\partial t} (w_E + w_H) \right]. \quad (3.3.13)$$

To se može i ovako izraziti:

ukupna snaga predana jediničnom volumenu materijala	=	snaga apsorbirana po jedinici volumena materijala	+	snaga pohranjena po $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ polju u jedinici volumena
---	---	---	---	---

Lijeva strana Poyntingova teorema (3.3.13) predstavlja ukupnu snagu po jedinici volu-

mena koja je predana materijalu u promatranoj točki. Dio te snage predan je izvana, tj. izvan tog jediničnog volumena (što je dano s $-\nabla \cdot \mathbf{N}$), dok je ostatak predan iz neovisnog izvora unutar jediničnog volumena (što je označeno s p_i). Desna strana te relacije energetske ravnoteže mora dati sve oblike u koje predana gustoća snage može biti pretvorena u materijalu u danoj točki prostora. Posebice vidimo s desne strane jednadžbe (3.3.12) ili (3.3.13) da gustoća predane snage može prijeći u toplinski gubitak vođenja (p_g), snagu potrebnu za porast polarizacije (p_p) ili magnetiziranja (p_M) u materijalu, ili ona može poslužiti za snabdijevanje porasta pohranjene električne i magnetske energije u jedinici volumena u okolišu točke od interesa ($\partial w_E / \partial t$ i $\partial w_H / \partial t$).

Zbog preglednosti pogodno je sve članove Poyntingova teorema u materijalu prikazati u diferencijalnom obliku kao u tablici 3.3.1. na kraju ovog poglavlja.

3.3.2.2. Poyntingov teorem u integralnom obliku

Integralni oblik Poyntingova teorema u materijalu dobije se integracijom izraza (3.3.12) u volumenu V zatvorenom plohom S , kako je pokazano na slici 3.2.1. Ako upotrijebimo Gaussov teorem za pretvorbu prvog člana na lijevoj strani u plošni integral, i simbol totalnog diferencijala zamijenimo parcijalnom derivacijom pošto je stacionarni volumen V neovisan o vremenu, dobivamo

$$-\oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i dV = \int_V \left(\kappa |\mathbf{E}|^2 + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right) dV + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) dV. \quad (3.3.14)$$

Poyntingov teorem može se izraziti i ovako: dva člana na lijevoj strani jednadžbe (3.3.14) predstavljaju ukupnu snagu koja se predaje u volumen V . Dio te isporučene snage ulazi u V izvana u obliku tijeka gustoće elektromagnetske snage $\mathbf{N}$ koji prolazi kroz koju god plohu S , koja zatvara V . Ostatak predane snage dolazi iz neovisnih izvora unutar V , i dan je volumnim integralom od p_i preko V . Članovi na desnoj strani jednadžbe (3.3.14) predstavljaju različite oblike u kojima se predana snaga apsorbira unutar V . Prvi integral na desnoj strani daje zbroj ukupne snage koja je apsorbirana u materijalu u volumenu V . To je zbroj snage izgubljene kao toplina u vodičima i utrošene za uspostavu procesa polarizacije i magnetiziranja tvari u V . Drugi integral na desnoj strani predstavlja ukupnu snagu potrebnu za porast energije pohranjene u električnom i magnetskom polju unutar V . Sve članove Poyntingova teorema u materijalu u integralnom obliku pregledno smo prikazali u tablici 3.3.2. na kraju ovog poglavlja.

3.3.3. Energija polarizacije i električna energija

Do sada smo utvrdili da su elektromagnetska polja sposobna pohraniti energiju u električnom i magnetskom obliku u praznom prostoru, na način koji dopušta potpun

povratak pohranjenje energije u slučaju kada se polja reduciraju na nulu.

Opazili smo također da elektromagnetska snaga predana slobodnim nabojima u gibanju, koji tvore provodne struje u materijalima i konvekcijske struje u praznom prostoru, nije pohranjena u takvom povratnom obliku. Ta snaga je izgubljena ili odvedena iz električnog sustava i pretvorena u druge oblike energije. Može biti pretvorena u toplinu, kinetičku energiju, ili u neki drugi oblik.

S druge strane još nije odgovoreno na pitanje što se događa s elektromagnetskom snagom s kojom se opskrbljuju procesi polarizacije i magnetiziranja u našim makroskopskim modelima materijala. Ovdje nam je namjera da točno odredimo koliko elektromagnetske snage je pohranjeno kao energija u obliku koji se može vratiti pomoću vezanih polarizacijskih naboja u materijalu, a koliko je izgubljeno za svladavanje unutarnjih sila trenja koje se suprotstavljaju procesu polarizacije.

Slično ćemo u sljedećoj točki analizirati pohranjenu i izgubljenu energiju u magnetskim materijalima pri procesu magnetiziranja.

3.3.3.1. Gustoća energije polarizacije

Iz analize provedene u članku 3.3.1. znamo da je gustoća snage predane vezanim nabojima koji sudjeluju u procesu polarizacije materijala (dielektrika, izolatora), prema jednadžbi (3.3.5) dana kao

$$p_p = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} . \quad (3.3.15)$$

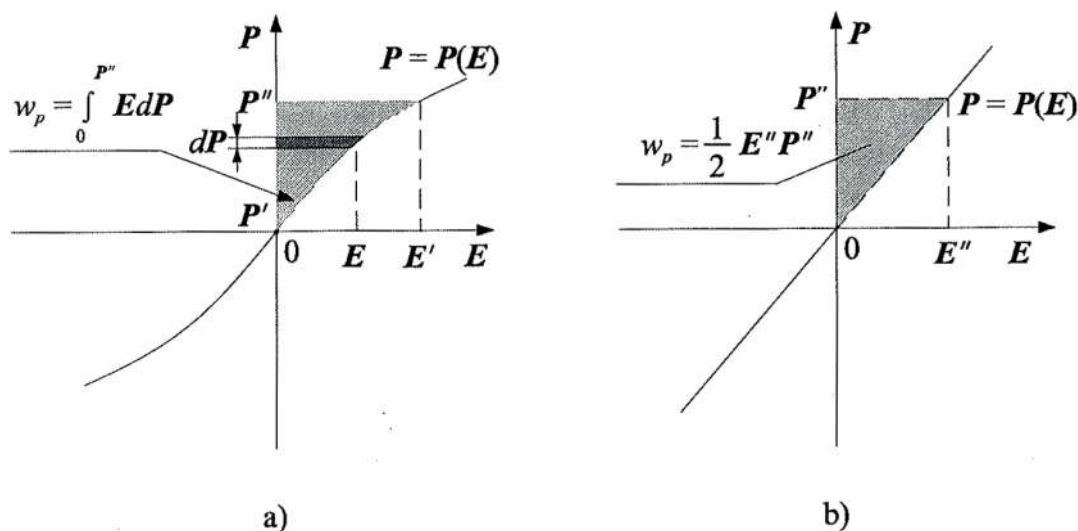
Predana energija po jedinici polariziranog materijala, ako se materijal polagano polarizira iz početnog nepolariziranog stanja u vremenu $t' = 0$ kada je $\mathbf{P}' = 0$, do konačnog stanja u vremenu t'' , kada je polarizacija $\mathbf{P}''$, određena je integralom

$$W_p = \int_{t'=0}^{t''} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} dt = \int_{\mathbf{P}'=0}^{\mathbf{P}''} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} . \quad (3.3.16)$$

Značenje ovog integrala može se najbolje objasniti pomoću relacija građe za dielektričke materijale i izolatore.¹³ Promotrimo najprije nelinearnu, ali jedinstvenu relaciju građe koja pokazuje odnos između $\mathbf{E}$ i $\mathbf{P}$ prema slici 3.3.1a. Integral u (3.3.16) predstavlja ukupnu površinu iznad krivulje polarizacije $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$.

Tako dugo dok je krivulja $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ jedinstvena, tj. dok je jedna, i samo jedna, vrijednost od $\mathbf{P}$ za svaku vrijednost od $\mathbf{E}$ dana u nekoj točki, vidimo da će se isti iznos uložene energije u polarizaciju dielektričkog materijala vratiti u slučaju da se polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{P}$ vrate ponovno na nulu u procesu polarizacije. Gustoća energije polarizacije, dana jednadžbom (3.3.16), pohranjena je u dielektriku u reverzibilnom obliku sve dok je krivulja polarizacije $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ jedinstvena.

¹³ Detaljnije pogledati u članku 1.4.10, točka 1.4.10.3, slika 1.4.13.



Slika 3.3.1. Grafički prikaz gustoće energije polarizacije u dielektričkom materijalu bez gubitaka
a) nelinearnom i b) linearnom

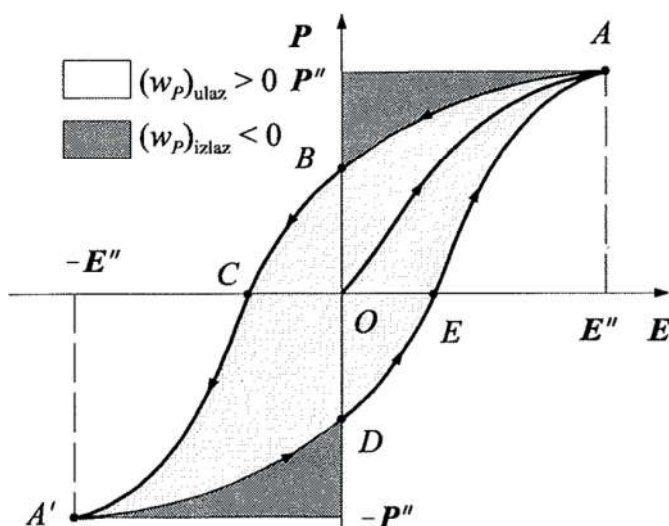
Poseban slučaj jedinstvene gradivne relacije je kod linearnog dielektričkog materijala. Tada je polarizacijska krivulja $P = P(E)$ predstavljena pravcem kroz ishodište kao na slici 3.3.1.b). Energija polarizacije reducira se na površinu trokuta

$$W_P = \int_0^{P''} E \cdot dP = \frac{1}{2} E'' \cdot P'' , \quad (3.3.17)$$

gdje E'' i P'' predstavljaju konačna stanja. S druge strane, dielektrički materijali mogu imati nejedinstvenu krivulju polarizacije $P = P(E)$, koja je u obliku *petlje histereze*. Zato promotrimo slučaj feroelektričnog materijala koji ima petlju histereze kao na slici 3.3.2. Ako iz razmatranja ispustimo početni (djevičanski) dio krivulje od 0 do A, vidimo da se idući po jednoj grani petlje histereze (od A preko B i C do A') energija predaje materijalu, a idući po drugoj grani (od A' preko D i E do A) da se dio energije vraća iz materijala u polje kao elektromagnetska energija. Polazeći iz točke A, preko B, C, A', D, E, pa ponovno nazad u A, dakle učinivši jedan ciklus, nalazimo da je iznos gustoće energije jednak površini zatvorenoj petljom histereze, prema slici 3.3.2, izgubljen iz sustava za svaki ciklus obilaska oko petlje histereze. Ta je energija u jedinici volumena materijala pretvorena u radnju potrebnu da bi se svladale sile trenja koje su odgovorne za histerezu. Na kraju ona obično odlazi iz materijala u obliku topline. Dakle, gustoća energije polarizacije, koja se u jednom ciklusu računa prema

$$w_P = \oint E \cdot dP , \quad (3.3.18a)$$

općenito je poznata kao *histerezni gubitak*.



Slika 3.3.2. Grafički prikaz predaje i povratka elektromagnetske energije za vrijeme procesa polarizacije u dielektriku s gubicima

Zaključimo da smo pri razmatranju iznosa energije predane različitim dielektričkim materijalima za vrijeme njihova pobuđivanja poljem utvrdili da w_p predstavlja gustoću energije predane materijalu za vrijeme njegove polarizacije. Ako je materijal bez histereze (tj. ima jedinstvenu krivulju polarizacije) tada je ta makroskopska energija pohranjena u materijalu u reverzibilnom obliku. Ako materijal ima histerezu (nejedinstvenu krivulju polarizacije), tada se ta energija gubi kao toplina za svladavanje unutrašnjih sila trenja, koje se protive mikroskopskom gibanju naboja, i određuje se u svakom ciklusu polariziranja prema jednadžbi (3.3.18a).

Očito će u izmjeničnom elektromagnetskom polju *frekvencije* f (*perioda u sekundi* ili *herca*) materijal čija je polarizacija u jednom ciklusu predstavljena petljom histereze prikazanom na slici 3.3.2, imati gubitak histereze dan izrazom

$$p_p = f \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} . \quad (3.3.18b)$$

i mjeren u *vatima po prostornom metru* (W/m^3).

3.3.3.2. Gustoća električne energije

Često je pogodno spojiti gustoću energije pohranjene u električnom polju s onom predanom materijalu za vrijeme procesa polarizacije. Jednostavno ćemo sumu tih dviju energija nazvati gustoća električne energije w_e s kojom smo snabdjeli materijal. S pomoću jednadžbi (3.2.15) i (3.3.16) imamo

$$w_e = w_E + w_P = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \int_0^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} . \quad (3.3.19)$$

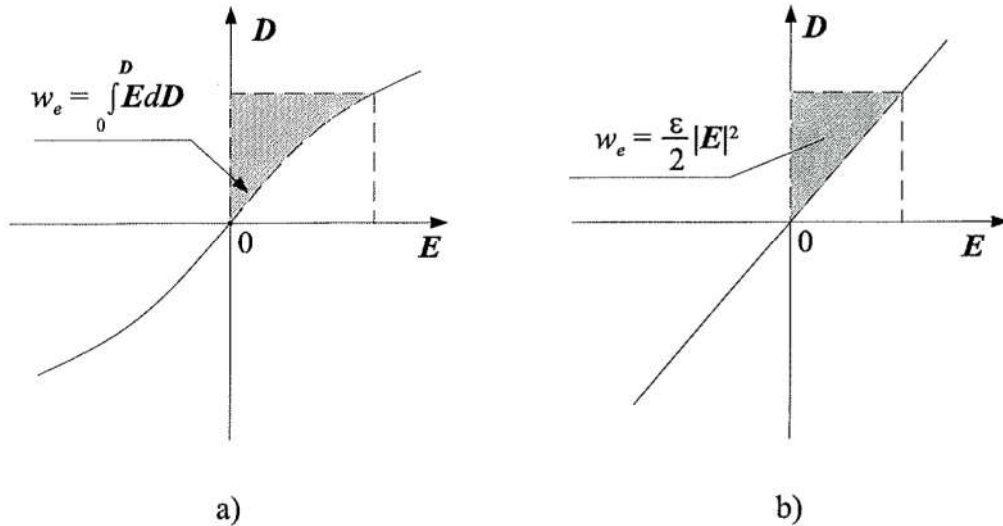
To se dalje može urediti na način

$$w_e = \epsilon_0 \int_0^E \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E} + \int_0^{\mathbf{P}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} = \int_0^{(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})} \mathbf{E} \cdot d(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}, \quad (3.3.20)$$

budući je prema (1.5.11a) gustoća tijeka $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. Slično kao u prethodnoj točki 3.3.3.1. može se pokazati da jednadžba (3.3.20) za makroskopsku električnu energiju pohranjenu u jedinici volumena dielektričkog materijala s jedinstvenom krivuljom $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ predstavlja ploštinu između te krivulje i $\mathbf{D}$ osi kao što je prikazano na slici 3.3.3. Za poseban slučaj linearnog dielektrika, t.j. dielektrika kojemu dielektričnost ϵ u relaciji $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ nije ovisna o $\mathbf{E}$, jednadžba (3.3.20) se reducira u

$$w_e = \epsilon \int_0^E \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E} = \frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad (3.3.21)$$

i predstavljena je ploštinom trokuta na slici 3.3.3. b).



Slika 3.3.3. Grafički prikaz pohranjene gustoće električne energije u dielektričkom materijalu bez gubitaka
a) nelinearnom i b) linearnom

Možemo reći da je kod dielektričkih materijala s jedinstvenom polarizacijskom krivuljom (bez gubitaka polarizacije) ukupna električna energija, koja je jednaka zbiru pohranjene energije u električnom polju i energije polarizacije, pohranjena u sustavu u reverzibilnom obliku.

3.3.3.3. Ukupna električna energija

Ukupna električna energija W_e predana sustavu jednostavno je volumni integral od w_e preko cijelog prostora V

$$W_e = \int_V w_e dV = \int_V \left(\int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \right) dV . \quad (3.3.22)$$

U posebnom slučaju za linearan materijal dielektričnosti ϵ to iznosi

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}|^2 dV . \quad (3.3.23)$$

Do izraza za električnu energiju može se doći i na termodinamički način izjednačavanjem energije i radnje potrebne za izgradnju sustava električnih naboja, izoliranih vodiča i dielektričkih tijela u statičkoj ravnoteži.

3.3.4. Energija magnetiziranja i magnetska energija

3.3.4.1. Gustoća energije magnetiziranja

Ukupna energija predana materijalu u jedinici volumena, koji je bio magnetiziran polagano od početnog neuzbuđenog stanja u $t' = 0$, kada je $\mathbf{M}' = 0$ posvuda, do konačnog stanja u t'' , kada je gustoća magnetiziranja $\mathbf{M}''$, određena je pomoću

$$w_M = \int_{t'=0}^{t''} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \mathbf{M}) dt = \mu_0 \int_{\mathbf{M}'=0}^{\mathbf{M}''} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} . \quad (3.3.24)$$

Značenje tog integrala za gustoću energije magnetiziranja potpuno je analogno u prethodnoj točki izvedenom izrazu (3.3.16) za gustoću energije polarizacije.

Za magnetske materijale s jedinstvenom krivuljom magnetiziranja gustoća energije magnetiziranja može se predložiti površinom koju zatvara krivulja $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ i os $\mathbf{M}$. Ta energija pohranjena je u magnetskom materijalu u reverzibilnom obliku. Ako je materijal linearan, izraz (3.3.24) za gustoću energije magnetiziranja pojednostavnjuje se u oblik

$$w_M = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mu_0 \mathbf{M} , \quad (3.3.25)$$

koji predstavlja površinu trokuta. Magnetski materijal s nejedinstvenom relacijom građe, tj. onaj koji ima petlju histereze, gubi iznos energije ekvivalentan ploštini koju zatvara petlja histereze u svakom ciklusu magnetiziranja

$$w_M = \mu_0 \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} . \quad (3.3.26a)$$

Ta energija se gubi iz elektromagnetskog sustava tako da se obično pretvara u toplinu u magnetskom materijalu. Odgovarajući gubitak snage histereze u materijalu koji se nalazi

u izmjeničnom elektromagnetskom polju frekvencije f jest

$$p_M = f \mu_0 \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} , \quad (3.3.26b)$$

mjeren u *vatima po metru prostornom* (W/m^3). Možemo pokazati da se gubitak snage histereze može izraziti i kao

$$p_M = f \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} , \quad (3.3.26c)$$

budući da je prema jednadžbi (1.5.2.b) indukcija $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$.

3.3.4.2. Gustoća magnetske energije

Kao i u prethodnom slučaju i ovdje ćemo spojiti gustoću energije magnetiziranja w_M s gustoćom energije pohranjene u magnetskom polju w_H koja je dana jednadžbom (3.2.16), da bismo dobili ukupnu gustoću magnetske energije w_m predanu materijalu

$$w_m = w_H + w_M = \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 + \mu_0 \int_0^M \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} = \mu_0 \int_0^H \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} + \mu_0 \int_0^M \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} .$$

Budući je prema jednadžbi (1.5.2b), indukcija $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, to je i $d\mathbf{B} = \mu_0(d\mathbf{H} + d\mathbf{M})$, pa je konačno gustoća magnetske energije u materijalu

$$w_m = \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} . \quad (3.3.27)$$

Za jedinstvenu relaciju građe $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ magnetskog materijala, w_m predstavlja ukupnu makroskopsku magnetsku energiju pohranjenu u jedinici volumena u okolišu zadane točke unutar materijala. Za poseban slučaj linearnog materijala jednadžba (3.3.27) se reducira u

$$w_m = \mu \int_0^H \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} = \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} , \quad (3.3.28)$$

budući da tada materijal ima permeabilnost μ u relaciji $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ neovisnu o $\mathbf{H}$.

3.3.4.3. Ukupna magnetska energija

Ukupna magnetska energija w_m predana sustavu preko cijelog zadanog prostora V jest

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \left(\int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) dV . \quad (3.3.29)$$

Za linearni materijal permeabilnosti μ to iznosi

$$W_m = \int_V \frac{1}{2} \mu |\mathbf{H}|^2 dV ,$$

za sustav u konačnom stanju određenom s $\mathbf{H}$ i $\mathbf{B}$. Odgovarajući izraz za ukupnu magnetsku energiju moguće je također izvesti za statička polja izjednačavanjem energije i radnje potrebne za izgradnju sustava električnih struja i magnetskih tijela u statičkoj ravnoteži.

3.3.5. Poyntingov teorem i električna i magnetska energija u materijalima

Pogodno je diferencijalni (3.3.12) i integralni (3.3.14) oblik Poyntingova teorema, nakon provedenih analiza električne i magnetske energije u materijalima, izraziti u novim oblicima. Tako ćemo koristeći jednadžbe (3.3.20), (3.3.22), (3.3.27) i (3.3.29) doći do novih oblika Poyntingova teorema koje smo ispisali u tablici 3.3.3. na kraju ovog poglavlja.

Za linearne materijale s jedinstvenim krivuljama polarizacije i magnetiziranja, diferencijalni i integralni oblik Poyntingova teorema mogu se jednostavno pisati kao

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i &= \kappa |\mathbf{E}|^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) , \\ -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i dV &= \int_V \kappa |\mathbf{E}|^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) dV . \end{aligned} \quad (3.3.30a,b)$$

Na kraju možemo reći da integracija izraza za makroskopsku gustoću ukupne pohranjene energije i izraza za izgubljenu specifičnu snagu, preko cijelog volumena pasivnog materijala unutar danog sustava, mora uvijek voditi k izrazima koji pojedinačno ovise o iznosima energije i snage predane izvana materijalu pomoću fizikalno mjerljivih elektromagnetskih polja u susjednim područjima praznog prostora.

3.3.6. Tijek snage u stacionarnim sustavima i gubici

Kao jednu ilustraciju tijeka elektromagnetske snage razmotrit ćemo upotrebu Poyntingova teorema da bismo odredili tijek snage u stacionarnim ili vremenski neovisnim poljima. Izabrali smo sustave sa statičkim poljima, jer su nam jednostavni i bliski. Primjere tijeka snage u vremenski promjenjivim sustavima razmotrit ćemo u poglavljima 7. i 8.

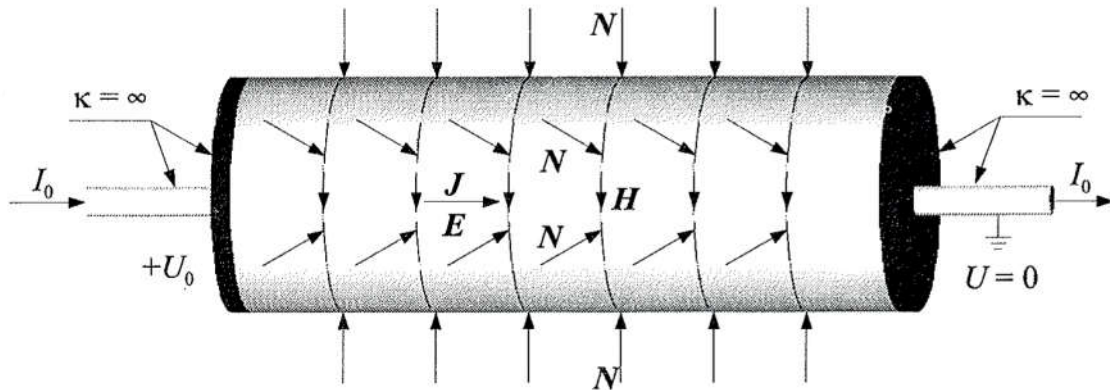
Vremenski neovisan oblik Poyntingova teorema (u diferencijalnoj i integralnoj

formi) za materijale s konstantnim značajkama ϵ , μ i κ , odredit ćemo iz jednadžbe (3.3.30a,b), ako uvrstimo da su sve vremenske derivacije jednake nuli

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{N} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s = \kappa |\mathbf{E}|^2, \\ -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i dV &= \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s dV. \end{aligned} \quad (3.3.31a,b)$$

Prvo što treba vidjeti u tim jednadžbama jest da su svi članovi koji predstavljaju tijek snage za dielektričke i magnetske procese polarizacije (p_p , p_M) i za pohranjivanje elektromagnetske energije u $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ poljima (w_E , w_H) potpuno iščezli jer je $\partial/\partial t = 0$. Sljedeće što treba vidjeti, a to je posebno važno, jest da će stacionarna (istosmjerna) snaga teći u vremenski neovisnim sustavima samo kada se pojavi gustoća istosmjerne (stacionarne) slobodne struje $\mathbf{J}_s$ u istoj točki u kojoj istovremeno postoji statičko $\mathbf{E}$ polje. Gustoća slobodne struje $\mathbf{J}_s$ može biti u obliku gustoće provodne struje $\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$ u vodiču, ili može biti gustoća struje neovisnog izvora $\mathbf{J}_i$ u električnom izvoru. Još općenitije, $\mathbf{J}_s$ može poprimiti oblik bilo kojeg tijeka slobodnih naboja, kao npr. kod elektronske konvekcije struje u vakuumskim cijevima.

Razmotrimo sada vremenski neovisnu snagu koja utječe u jednostavan model otpornika u obliku linearnog, homogenog, provodnog štapa kružnog poprečnog prereza koji je napajan iz električnog istosmjernog izvora U_0 smještenog u beskonačnosti.



Slika 3.3.4. Tijek snage u štapni otpornik s istosmjernim električnim izvorom u beskonačnosti

Otpornik je duljine L , polumjera r načinjen od otpornog materijala malene provodnosti κ , s krajnjim pločama i vodičima od supravodljivog materijala ($\kappa = \infty$) kao što je prikazano na slici 3.3.4. Kroz otpornik će protjecati električna struja iznosa $I_0 = U_0/R$, gdje smo s R označili ukupan električni otpor štapnog otpornika. Za istosmjernu struju znamo da je $R = L/\kappa r^2 \pi$.

Jouleove gubitke snage u otporniku odredit ćemo iz jednadžbe (3.3.8) i prema tablici 3.3.2. Struja I_0 po presjeku štapnog otpornika jednoliko je raspoređena s konstantnom gustoćom

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} = \frac{I_0}{r^2 \pi} \mathbf{e}_r,$$

pa se gubici računaju kao

$$P_g = \int_V \kappa |\mathbf{E}|^2 dV = I_0^2 \frac{L}{\kappa \cdot r^2 \pi} = I_0^2 R.$$

S druge strane, iz integralnog oblika Poyntingova teorema za statički sustav danog jednažbom (3.3.31b), primijenjenog na taj slučaj bez internog neovisnog izvora u promatranom volumenu slijedi relacija

$$-\oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS = P_g. \quad (3.3.32)$$

Ona nam kazuje da se svi gubici u otporniku pokrivaju iz ukupne elektromagnetske snage, koja kroz omotač utječe u otpornik iz vanjskog prostora. Sva ta vremenski neovisna snaga prenesena je elektromagnetskim poljem kroz zrak od izvora u beskonačnosti do otpornika (kao potrošača).

Da bismo se uvjerali u točnost te tvrdnje, preostaje još da izračunamo elektromagnetsku snagu koja utječe u otpornik. Zbog toga što utječe u zatvorenu plohu ima negativan predznak i iznosi

$$-P_N = -\oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS = -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{I_0}{\kappa r^2 \pi} \frac{I_0}{2r\pi} 2r\pi L = I_0^2 \frac{L}{\kappa r^2 \pi} = I_0^2 R.$$

Time je dokazana valjanost Poyntingova teorema u promatranom primjeru. Prednost toga pristupa je i u tome što pomoću Poyntingova teorema možemo u svakom primjeru odrediti i lokaciju pohranjene energije i putanju tijeka elektromagnetske energije kroz elektromagnetsko polje.

3.4. ELEKTROMAGNETSKA KOLIČINA GIBANJA

U ovom odjeljku razmotrit ćemo količinu gibanja, veličinu poznatu iz Newtonove mehanike, sustava koji čine teški naboji i elektromagnetsko polje. Pretpostavimo da se unutar zatvorene plohe S , koja omeđuje prazni prostor volumena V , u elektromagnetskom polju nalaze teški slobodni naboji raspoređeni s gustoćom ρ_s i da gibanje tih naboja može biti opisano strujom gustoće $\mathbf{J}_s$. Sila kojom elektromagnetsko polje djeluje na te naboje i struje u jediničnom volumenu jest Lorentzova i određena je jednažbom (3.1.7), te iznosi

$$\mathbf{f} = \rho_s \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B}, \quad (3.4.1)$$

mjerena u *njutnima po prostornom metru* (N/m^3). Ukupna sila koja djeluje na sustav naboja u volumenu V je

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = \int_V \mathbf{f} dV = \int_V (\rho_s \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B}) dV . \quad (3.4.2)$$

Iz Newtonove mehanike poznato je da sustavu kontinuirane raspodjele teških naboja, gustoće mase μ_m , koji se gibaju brzinom $\mathbf{v}$ u volumenu V , odgovara *količina gibanja*¹⁴ koja se izračunava prema

$$\mathbf{G}_{MEH} = \int_V \mu_m \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{g}_{MEH} dV , \quad (3.4.3)$$

i mjeri se u SI sustavu u *kilogram-metrima po sekundi* (kgm/s). Podintegralni član $\mathbf{g}_{MEH} = \mu_m \mathbf{v}$ predstavlja *volumnu gustoću količine gibanja sustava*.

S druge strane, prema drugom Newtonovu zakonu ukupna sila koja djeluje na sustav teških slobodnih naboja i struja jednaka je brzini promjene količine gibanja određene jednadžbom (3.4.3) i iznosi

$$\mathbf{F} = \int_V (\rho_s \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B}) dV = \frac{d}{dt} \mathbf{G}_{MEH} = \mathbf{F}_{MEH} , \quad (3.4.4)$$

ili preračunata na jedinicu volumena

$$\mathbf{f} = \rho_s \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} = \frac{d}{dt} \mathbf{g}_{MEH} = \mathbf{f}_{MEH} . \quad (3.4.5)$$

To možemo i ovako reći: sila $\mathbf{F}$ kojom elektromagnetsko polje djeluje na teške slobodne naboje i struje u praznom prostoru volumena V je sila akcije, a njoj se prema trećem Newtonovu zakonu suprotstavlja suprotna i po iznosu jednaka masena, tj. inercijska sila reakcije koja sustav naboja drži u dinamičkoj ravnoteži.

U analizi koja slijedi, polazeći od Maxwellovih jednadžbi i koristeći jednadžbe (3.4.4) i (3.4.5), pokazat ćemo da se i elektromagnetskom polju može pridružiti svojstvo inercije koje je svojstveno teškoj tvari. Upotrijebit ćemo sustav Maxwellovih jednadžbi prema tablici 1.5.3, prilagođen za slobodne naboje i struje u vakuumu

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (3.4.6a,b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} ,$$

¹⁴ Za detaljniji opis drugog i trećeg Newtonova zakona, te pojma količine gibanja pogledati npr.: P. Kulišić, *Mehanika i toplina*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} , \quad (3.4.6c,d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 .$$

Iz prve (3.4.6a) i treće (3.4.6c) jednadžbe možemo izraziti slobodne naboje i struje pomoću veličina polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \rho_s &= \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} , \\ \mathbf{J}_s &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \end{aligned} \quad (3.4.7a,b)$$

Silu akcije iz jednadžbe (3.4.1) možemo pomoću jednadžbi (3.4.7a,b) izraziti kao

$$\mathbf{f} = \rho_s \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \epsilon_0 \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (3.4.8)$$

Posljednji član u jednadžbi (3.4.8) možemo uz pomoć jednadžbe (3.4.6b) razviti prema izrazu

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \\ &= -\epsilon_0 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) . \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Integrirajući jednadžbu (3.4.8) preko cijelog volumena V i dodajući član koji je prema jednadžbi (3.4.6d) jednak nula $\mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$, dobivamo

$$\begin{aligned} \int_V (\rho_s \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B}) dV &= \int_V \epsilon_0 [\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] dV + \\ &+ \int_V \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] dV - \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV . \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Uvrstimo li dobivenu jednadžbu (3.4.10) u jednadžbu (3.4.4) i uz pomoć izraza (3.4.3) dobivamo

$$\begin{aligned} \int_V [\rho_s \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B}] dV + \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV &= \frac{d}{dt} \int_V (g_{MEH} + \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = \\ &= \int_V \left\{ \epsilon_0 [\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] + \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \right\} dV . \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Pokazat ćemo dalje da se volumni integral na desnoj strani jednadžbe (3.4.11) može pretvoriti u odgovarajući plošni integral. Zato ćemo uz pomoć vektorske analize iz izraza za divergenciju skalarnog produkta dvaju vektora $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ koji glasi

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) ,$$

razviti odgovarajući izraz prvo za električno polje $\mathbf{E}$ iz jednadžbe (3.4.11), dakle

$$-\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{E}|^2 . \quad (3.4.12)$$

Potom ćemo prvi član s desne strane jednadžbe (3.4.12) razviti u pravokutnom pravocrtном koordinatnom sustavu i dobiti izraz

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} = E_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + E_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + E_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} ,$$

gdje su

$$E_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (E_x \mathbf{E}) - \mathbf{E} \frac{\partial E_x}{\partial x} ,$$

$$E_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (E_y \mathbf{E}) - \mathbf{E} \frac{\partial E_y}{\partial y} ,$$

$$E_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (E_z \mathbf{E}) - \mathbf{E} \frac{\partial E_z}{\partial z} ,$$

i s obzirom da je

$$\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{E} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \mathbf{E} \frac{\partial E_y}{\partial y} + \mathbf{E} \frac{\partial E_z}{\partial z} ,$$

možemo pisati da je

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial x} (E_x \mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial y} (E_y \mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial z} (E_z \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) . \quad (3.4.13)$$

Uvrstimo li rezultat (3.4.13) u jednadžbu (3.4.12), dobivamo da prvi podintegralni član na desnoj strani jednadžbe (3.4.11) glasi

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] &= \left[\frac{\partial}{\partial x} (E_x \mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial y} (E_y \mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial z} (E_z \mathbf{E}) \right] - \\ &\quad - \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \right) . \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Izraz (3.4.14) preuredit ćemo dalje tako da u njega uvrstimo vektor električnog polja izražen po komponentama u pravocrtnom koordinatnom sustavu $\mathbf{E} = a_x E_x + a_y E_y + a_z E_z$, pa dobivamo za prvi član na desnoj strani

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial}{\partial x}(E_x \mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial y}(E_y \mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial z}(E_z \mathbf{E}) \right] = \\
 & = a_x \left[\frac{\partial}{\partial x}(E_x E_x) + \frac{\partial}{\partial y}(E_y E_x) + \frac{\partial}{\partial z}(E_z E_x) \right] + \\
 & + a_y \left[\frac{\partial}{\partial x}(E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial y}(E_y E_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_z E_y) \right] + \\
 & + a_z \left[\frac{\partial}{\partial x}(E_x E_z) + \frac{\partial}{\partial y}(E_y E_z) + \frac{\partial}{\partial z}(E_z E_z) \right] = \\
 & = a_x \nabla \cdot (E_x \mathbf{E}) + a_y \nabla \cdot (E_y \mathbf{E}) + a_z \nabla \cdot (E_z \mathbf{E}) .
 \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Uvrstimo dobiveno rješenje (3.4.15) u jednadžbu (3.4.14), i nakon integracije po volumenu dobivamo

$$\begin{aligned}
 \int_V [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] dV = & a_x \int_V \nabla \cdot (E_x \mathbf{E}) dV + a_y \int_V \nabla \cdot (E_y \mathbf{E}) dV + \\
 & + a_z \int_V \nabla \cdot (E_z \mathbf{E}) dV - \int_V \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \right) dV .
 \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Prva tri volumna integrala na desnoj strani jednadžbe (3.4.16) možemo transformirati pomoću Gaussova teorema divergencije¹⁵ u tri plošna integrala oblika

$$a_x \int_V \nabla \cdot (E_x \mathbf{E}) dV = a_x \oint_S E_x (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint_S a_x E_x (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) dS . \tag{3.4.17}$$

Primjenom gradijentnog teorema¹⁶ četvrti integral na desnoj strani jednadžbe (3.4.16) prelazi u plošni

$$\int_V \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \right) dV = \oint_S \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n} dS . \tag{3.4.18}$$

Uvrstimo jednadžbe (3.4.17) i (3.4.18) u jednadžbu (3.4.16), pa ona prelazi u oblik

¹⁵ Pogledati Prilog B.

¹⁶ Pogledati Prilog B.

$$\begin{aligned}
& \int_V [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] dV = \\
& = \oint_S \left\{ [a_x E_x (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) + a_y E_y (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) + a_z E_z (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})] - \left[\frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n} \right] \right\} dS = \\
& = \oint_S [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{n} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \right)] dS .
\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

Jednadžba (3.4.19) daje rješenje prvog podintegralnog člana volumnog integrala na desnoj strani jednadžbe (3.4.11) za električno polje $\mathbf{E}$. Isto vrijedi i za drugi član, za indukciju magnetskog polja $\mathbf{B}$, i on glasi

$$\int_V [(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] dV = \oint_S [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \mathbf{n} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 \right)] dS . \tag{3.4.20}$$

Konačno se rješenje jednadžbe (3.4.11) može pomoću jednadžbi (3.4.19) i (3.4.20) pisati u obliku

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{g}_{MEH} + \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = \\
& = \oint_S \left\{ \left[(\mathbf{n} \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \right] + \left[\left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) \mathbf{B} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu_0} \right] \right\} dS .
\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

To je vrlo važna relacija koja govori o naravi sila u elektromagnetskom polju i bit će posebno objašnjena u članku 3.5.1. Značenje jednadžbe (3.4.21) najbolje ćemo protumačiti ako zatvorenu plohu S protegnemo u beskonačnost tako da ona obuhvati cijeli slobodni prostor. Tada je doprinos integrala na desnoj strani jednak nula, pa jednadžba (3.4.21) poprima oblik

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{g}_{MEH} + \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = 0 . \tag{3.4.22}$$

Kao i u slučaju zakona o očuvanju energije, jednadžba (3.4.22) izražava *načelo očuvanja ukupne količine gibanja* sustava koji čine teški naboji (nabijene čestice tvari) i elektromagnetsko polje u praznom prostoru, što se može izraziti i kao

$$\int_V (\mathbf{g}_{MEH} + \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = \text{konst.} \tag{3.4.23}$$

Izravna posljedica te tvrdnje jest zaključak da su Newtonov treći zakon i načelo očuvanja količine gibanja valjani samo ako se količina gibanja elektromagnetskog polja uzme u obzir skupa s onom od (teške) nabijene tvari. Prema tome, sustav osim gustoće

mehaničke količine gibanja g_{MEH} , koja odgovara masi nabijenih čestica u gibanju, posjeduje i gustoću *elektromagnetske količine gibanja* g_N

$$g_N = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c_0^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (3.4.24)$$

koja se pridružuje elektromagnetskom polju.¹⁷ Ukupna elektromagnetska količina gibanja G_N situirana u elektromagnetskim $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ poljima dana je izrazom

$$G_N = \int_V \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV = \frac{1}{c_0^2} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{H} dV, \quad (3.4.25)$$

pa se zakon o očuvanju ukupne količine gibanja u sustavu prikazan jednačbom (3.4.23) može izraziti kao

$$G_{MEH} + G_N = konst. \quad (3.4.26)$$

Elektromagnetska količina gibanja G_N mjeri se u SI sustavu u *džul-sekundama po metru* (Js/m) ili u *kilogram-metrima po sekundi* (kgm/s). S c_0^2 označen je kvadrat brzine svjetlosti u vakuumu. Na temelju svega iznesenog možemo zaključiti da *elektromagnetsko polje pokazuje svojstvo inercije* slično kao i materijal. Elektromagnetska količina gibanja pridružena elektromagnetskom polju u usporedbi s mehaničkim sustavima makroskopskih razmjera zapravo je vrlo malena. Razlog za to jest što se prema jednačbi (3.4.24) Poyntingov vektor dijeli s kvadratom brzine svjetlosti da bi se dobila elektromagnetska količina gibanja.

3.5. PROSTORNE SILE I PLOŠNA NAPREZANJA

Povijesno promatrano prva istraživanja elektriciteta i magnetizma u XVIII. stoljeću bila su u okviru promatranja posljedica djelovanja sila na nabijene čestice u mirovanju i u gibanju. Tako se sile među nabojima u mirovanju, prema tom prvotnom povijesnom pristupu, računaju pomoću Coulombova zakona koji je izrazit predstavnik poimanja električnih pojava pomoću tzv. pristupa "djelovanja na daljinu".

Od sredine XIX. stoljeća pridaje se sve veći značaj električnom i magnetskom polju u prostoru oko naboja. Polje je poimano kao prostor u kojem je pohranjena energija i u kojem postoji stanje naprezanja. Električne i magnetske pojave opisane su poljima u prostoru u kojima postojanje električnih naboja nije uvijek nužno. Taj drugi, suvremeni

¹⁷ Relacija (3.4.24) jedan je od temeljnih postulata teorije elektromagnetskih polja i u cijelosti je eksperimentalno potvrđena. Ona je neovisan postulat nerelativističke teorije djelovanja na blizu, dok je u relativističkoj teoriji to jedna od komponenata četverodimenzionalnog tenzora energije i količine gibanja. Pogledati npr. J.E. Tamm, *Fundamentals of the Theory of Electricity*, Mir Publishers, Moskva, 1979.

pristup koji je pojmovno i fizikalno potpuno različit od onog povijesnog, označavamo nazivom "djelovanje na blizu". Izravna primjena shvaćanja djelovanja na blizu jest Maxwellova teorija elektromagnetskog polja izražena Maxwellovim jednažbama.

Jedan od značajnih uspjeha Maxwellove teorije elektromagnetskog polja bila je njezina sposobnost da prostornu, tj. volumnu silu izrazi s pomoću plošnog naprezanja koje se prenosi kroz plohu koja zatvara zadani volumen. Tako je omogućeno da se mehanički učinci u elektromagnetskom polju opišu pomoću djelovanja prenesenog kroz prostor samo putem infinitezimalne udaljenosti. Na taj način izbjegnuto je računanje sila koje djeluju na daljinu.

3.5.1. Plošna naprezanja u praznom prostoru

Da bismo prostornu silu na naboje i struje izrazili s pomoću plošnog naprezanja koje se prenosi lokalno od točke do točke u elektromagnetskom polju, poći ćemo od sljedeće zadaće: zamislimo ograničen dio praznog prostora (bez dielektrika i magnetskog materijala), koji sadrži zadanu raspodjelu slobodnih naboja i struja. Neka je polje proizvedeno dijelom od naboja i struja unutar područja, a dijelom od naboja i struja koji su ostali izvan zadanog područja. Tada u svakoj točki praznog prostora volumena V , koji je ograničen zatvorenom plohom S , vrijede Maxwellove jednažbe (3.4.6a – d)

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}_s + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \\ \nabla \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_s}{\epsilon_0} , \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 .\end{aligned}\tag{3.5.1a – d}$$

Volumne sile kojima polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ djeluju na raspodjelu slobodnih naboja ρ_s i struja $\mathbf{J}_s$, dane su prema jednažbi (3.4.2), odnosno (3.4.4)

$$\mathbf{F}_{MEH} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = \int_V \rho_s \mathbf{E} dV + \int_V (\mathbf{J}_s \times \mathbf{B}) dV .\tag{3.5.2}$$

Da bismo došli do izraza za plošne sile, preuredimo Maxwellove jednažbe (3.5.1a – d) tako da prve dvije glavne jednažbe pomnožimo s vektorima $(\mathbf{B}/\mu_0)$ i $(\epsilon_0 \mathbf{E})$ i zbrojimo, tako da dobijemo

$$\epsilon_0 [(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] = (\mathbf{J}_s \times \mathbf{B}) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) .\tag{3.5.3}$$

Razvit ćemo prvi član na lijevoj strani $\epsilon_0 [(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}]$. U pravocrtnom pravokutnom

koordinatnom sustavu može se dvostruki vektorski produkt pisati u obliku determinante kao

$$[(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Zatim se može svakoj komponenti ovog dvostrukog vektorskog produkta dodati i oduzeti isti član, tako da će npr. x -komponenta glasniti

$$[(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{a}_x = E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} - E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Skraćeno se to može pisati za sve tri komponente

$$[(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{a}_x = \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) - E_x \nabla \cdot \mathbf{E},$$

$$[(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{a}_y = \frac{\partial}{\partial x} (E_y E_x) + \frac{\partial}{\partial y} (E_y^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2) + \frac{\partial}{\partial z} (E_y E_z) - E_y \nabla \cdot \mathbf{E},$$

$$[(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{a}_z = \frac{\partial}{\partial x} (E_z E_x) + \frac{\partial}{\partial y} (E_z E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_z^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2) - E_z \nabla \cdot \mathbf{E},$$

gdje je $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y + \mathbf{a}_z E_z$. Uvest ćemo električni tenzor drugog reda $\tilde{S}^e$ čijih ćemo devet komponenata S_{jk}^e označiti u tablici 3.5.1.

Tablica 3.5.1. Komponente S_{jk}^e električnog tenzora $\tilde{S}^e$

	$k = x$	$k = y$	$k = z$
$j = x$	$\epsilon_0 E_x^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} ^2$	$\epsilon_0 E_x E_y$	$\epsilon_0 E_x E_z$
$j = y$	$\epsilon_0 E_y E_x$	$\epsilon_0 E_y^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} ^2$	$\epsilon_0 E_y E_z$
$j = z$	$\epsilon_0 E_z E_x$	$\epsilon_0 E_z E_y$	$\epsilon_0 E_z^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} ^2$

Kako je divergencija tenzora¹⁸ drugog reda $\tilde{S}^e$ definirana kao operacija koja daje vektor

$$\operatorname{div} \tilde{S}^e = \sum_j \sum_k a_j \frac{\partial S_{jk}^e}{\partial x_k} ; \quad \begin{pmatrix} j=x,y,z \\ k=x,y,z \end{pmatrix},$$

to na kraju dobivamo izraz

$$\epsilon_0 [(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}] = \operatorname{div} \tilde{S}^e - \epsilon_0 \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} . \quad (3.5.4a)$$

Isti postupak kao za električno polje može se primijeniti na dvostruki vektorski produkt za magnetsku indukciju $1/\mu_0 [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]$ u početnoj jednadžbi (3.5.3). Uvođenjem magnetskog tenzora drugog reda $\tilde{S}^m$, s komponentama prikazanim u tablici 3.5.2,

Tablica 3.5.2. Komponente S_{jk}^m magnetskog tenzora $\tilde{S}^m$

	$k = x$	$k = y$	$k = z$
$j = x$	$\frac{1}{\mu_0} B_x^2 - \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} ^2$	$\frac{1}{\mu_0} B_x B_y$	$\frac{1}{\mu_0} B_x B_z$
$j = y$	$\frac{1}{\mu_0} B_y B_x$	$\frac{1}{\mu_0} B_y^2 - \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} ^2$	$\frac{1}{\mu_0} B_y B_z$
$j = z$	$\frac{1}{\mu_0} B_z B_x$	$\frac{1}{\mu_0} B_z B_y$	$\frac{1}{\mu_0} B_z^2 - \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} ^2$

i uz definiranu operaciju

$$\operatorname{div} \tilde{S}^m = \sum_j \sum_k a_j \frac{\partial S_{jk}^m}{\partial x_k} ; \quad \begin{pmatrix} j=x,y,z \\ k=x,y,z \end{pmatrix},$$

može se konačno pisati

$$\frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] = \operatorname{div} \tilde{S}^m - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} . \quad (3.5.4b)$$

Uvrstimo li u jednadžbu (3.5.3) dobivene izraze (3.5.4a,b) za dvostruke vektorske

¹⁸ Za detaljniji uvid u elemente analize tenzora pogledati npr. u B. Spain, *Tensor Calculus*, Interscience, New York, 1960., te u D. S. Jones, *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

produkte, tada dobivamo

$$\operatorname{div} \tilde{S}^e + \operatorname{div} \tilde{S}^m - \epsilon_0 \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{J}_s \times \mathbf{B}) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) .$$

Kako je prema (3.5.1c,d): $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_s / \epsilon_0$ i $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, te uvodeći novi tenzor $\tilde{S} = \tilde{S}^e + \tilde{S}^m$ s komponentama

$$S_{jk} = S_{jk}^e + S_{jk}^m , \quad (3.5.5)$$

i divergencijom

$$\operatorname{div} \tilde{S} = \sum_j \sum_k a_j \frac{\partial S_{jk}}{\partial x_k} ; \quad \begin{pmatrix} j = x, y, z \\ k = x, y, z \end{pmatrix} ,$$

konačno možemo pisati

$$\operatorname{div} \tilde{S} = \rho_s \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) . \quad (3.5.6a)$$

Preuredimo li tu relaciju uvođenjem u nju izraza (3.4.1), odnosno (3.5.2) dobivamo

$$\mathbf{f}_{MEH} = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_m = \rho_s \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} = \operatorname{div} \tilde{S} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) . \quad (3.5.6b)$$

Jednadžba (3.5.6b) predstavlja vrlo važan izraz pomoću kojega se može izraziti i izračunati volumna sila koja djeluje na elemente naboja i struja u jedinici volumena u bilo kojoj točki praznog prostora samo s pomoću vektora polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$.

Preostaje još samo jedan korak da bi se odredile tražene plošne sile. Pošto integriramo jednadžbu (3.5.6a) po volumenu V

$$\mathbf{F}_T = \int_V \operatorname{div} \tilde{S} dV = \int_V \rho_s \mathbf{E} dV + \int_V \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} dV + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV ,$$

i primijenimo teorem divergencije na tenzore, dobivamo

$$\mathbf{F}_T = \oint_S \tilde{S} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV . \quad (3.5.7)$$

Plošni integral na lijevoj strani ove jednadžbe mora biti *totalna sila* $\mathbf{F}_T$ koja djeluje na zadani volumen praznog prostora. Uvedimo novi vektor

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} , \quad (3.5.8)$$

poznat iz mehanike kao vektor (*elektromagnetskog*) *naprezanja*, kojega ćemo jednostavno nazvati "elektromagnetsko naprezanje". On općenito predstavlja totalnu silu u elektromagnetskom polju po jedinici ploštine ili jednostavno plošnu gustoću sile u elektromagnetskom polju. Elektromagnetsko naprezanje mjeri se u njutnima po četvornom metru (N/m²). Očito se, pomoću (3.5.8), iz jednadžbe (3.5.7) može izračunati totalna elektromagnetska sila koja djeluje na volumen V praznog prostora u kojem egzistiraju slobodni naboji ρ_s i struje $\mathbf{J}_s$ kao

$$\mathbf{F}_T = \oint_S \mathbf{t} dS = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV , \quad (3.5.9)$$

ili konačno kao

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_{MEH} + \frac{1}{c_0^2} \frac{d}{dt} \int_V N dV . \quad (3.5.10)$$

Relacije (3.5.9) i (3.5.10) kazuju nam da u određenom volumenu u praznom prostoru, ako u njemu egzistira elektromagnetsko polje, u slučaju da u njemu nema ni slobodnih nabojia ni slobodnih struja, da će ipak postojati elektromagnetsko naprezanje po zamišljenoj zatvorenoj plohi koja zatvara zadani volumen jer je posljednji član na desnoj strani jednadžbe (3.5.9), tj. (3.5.10), različit od nule. To može imati za posljedicu totalnu silu $\mathbf{F}_T$ na taj prazni prostor različit od nule. Samo u slučaju statičkih polja ta sila je uvijek jednaka nuli. Ova činjenica bila je jedan od razloga da je Maxwell u teoriju elektromagnetskih polja uveo pojam etera.

U slučaju stacionarne raspodjele slobodnih nabojia i struja polja su neovisna o vremenu. Krajnji član na desnoj strani u jednadžbama (3.5.9) i (3.5.10) iščezava. Te jednadžbe tada pokazuju da se sila $\mathbf{F}_T$, kojom statička polja djeluju na stacionarnu raspodjelu nabojia i struja, može izraziti pomoću

$$\mathbf{F}_T = \oint_S \mathbf{t} dS = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = \mathbf{F}_{MEH} , \quad (3.5.11)$$

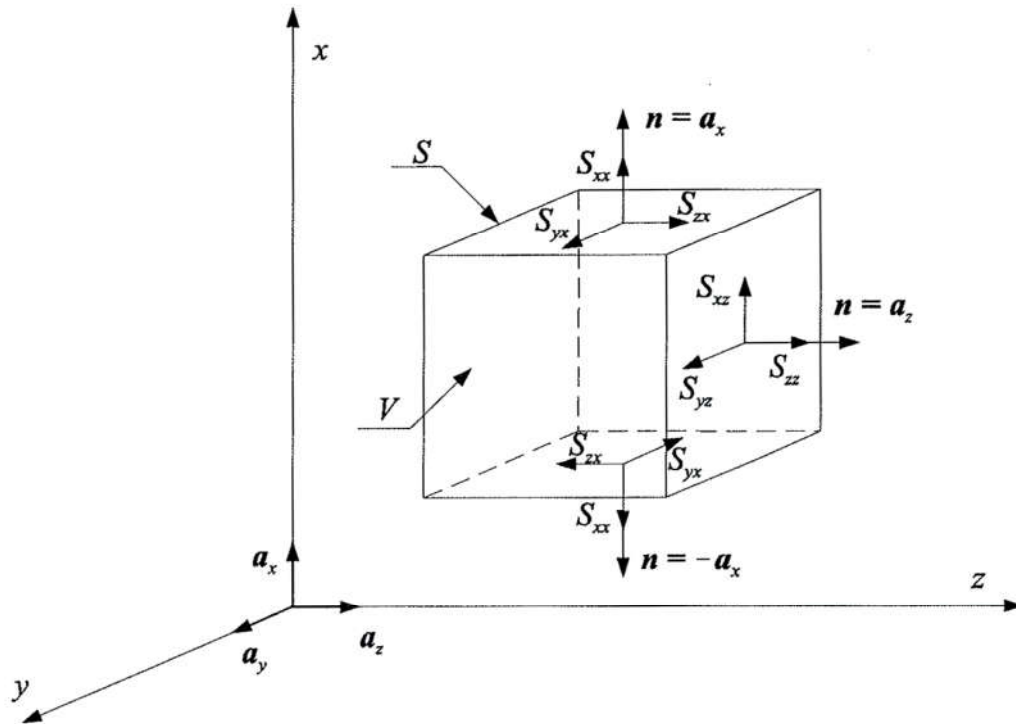
kao integral vektora naprezanja $\mathbf{t}$ preko bilo koje regularne zatvorene plohe koja obuhvaća sve te naboje i struje u praznom prostoru.

3.5.1.1. Maxwellov tenzor naprezanja

Prethodno smo uveli električne i magnetske tenzore $\tilde{\mathbf{S}}^e$ i $\tilde{\mathbf{S}}^m$, koji zajedno tvore tzv. Maxwellov tenzor naprezanja $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{S}}^e + \tilde{\mathbf{S}}^m$ kao jedan uređen poredak od devet funkcija prostora i vremena S_{jk} (koje su prikazane na slici 3.5.1)

$$S_{jk}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 (E_j E_k - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \delta_{jk}) + \frac{1}{\mu_0} (B_j B_k - \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 \delta_{jk}) , \quad (3.5.12)$$

iz kojih možemo izračunati gustoću elektromagnetskih sila kao i ukupne sile. U toj jednadžbi δ_{jk} je *Kroneckerova delta* definirana tako da je $\delta_{jk} = 0$ za $j \neq k$ i $\delta_{jk} = 1$ za $j = k$.



Slika 3.5.1. Djelovanje komponenta tenzora naprezanja S_{jk} na rubne plohe volumena V

Pogodno je Maxwellov tenzor naprezanja pisati u matričnom obliku

$$\tilde{S} = [S_{jk}] = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} . \quad (3.5.12b)$$

Iz jednadžbe (3.5.12a) očito je (a to je vidljivo i iz tablica 3.5.1 i 3.5.2) da je Maxwellov tenzor naprezanja dijagonalno simetričan, tj.

$$S_{jk} = S_{kj} ,$$

pa treba računati samo sa šest komponentata.

Tenzor naprezanja¹⁹ uveli su Maxwell i Faraday da bi se izbjegao račun sa silama koje djeluju na daljinu. Oni su postulirali postojanje etera koji ispunjava čitav prostor i koji je u stanju naprezanja određenog sa $\tilde{S}$. To stanje naprezanja bilo je mjerodavno za prijenos sile od jednog naboja do drugoga na način koji je sličan onom kako se sile prenose u elastičnom mediju. Istraživanja koja su slijedila pokazala su da ideja etera nije održiva, i da komponente naprezanja od $\tilde{S}$ nemaju fizikalne realnosti. Najviše što možemo reći jest da sile možemo računati na temelju fiktivnog postojanja stanja naprezanja danog sa $\tilde{S}$. Tenzor naprezanja $\tilde{S}$ je, dakle, pojam koji nije ovisan o prisutnosti materijala.

3.5.1.2. Vektor elektromagnetskog naprezanja

Vektor elektromagnetskog naprezanja uveden pomoću (3.5.8) kao

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} ,$$

odredit ćemo tako da izračunamo njegove tri ortogonalne komponente

$$t_j = \sum_k S_{jk} n_k \quad ; \quad (j, k = x, y, z) , \quad (3.5.13)$$

koje čine vektor plošnog naprezanja

$$\mathbf{t} = \mathbf{a}_x t_x + \mathbf{a}_y t_y + \mathbf{a}_z t_z . \quad (3.5.14)$$

Uvrstimo li u jednadžbu (3.5.13) vrijednosti komponenata Maxwellova tenzora naprezanja koje su dane izrazom (3.5.12b), ili pak u tablicama 3.5.1. i 3.5.2, dobivamo komponente vektora naprezanja koje prema (3.5.14) možemo složiti u vektor naprezanja $\mathbf{t}$ koji djeluje na element plohe S , čija je pozitivna okomica $\mathbf{n}$

$$\mathbf{t} = \left[(\mathbf{n} \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \right] + \left[\left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) \mathbf{B} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu_0} \right] . \quad (3.5.15)$$

Ovdje treba podsjetiti da smo već u odjeljku 3.4, analizirajući količinu gibanja teških naboja u elektromagnetskom polju, izveli relaciju (3.4.21) za totalnu silu. Očito je da su relacije (3.4.21) i (3.5.7) potpuno identične. Iz obiju slijedi da se plošna gustoća totalne sile, dana relacijom (3.5.15), referira kao elektromagnetsko naprezanje koje djeluje na plohu koja omeđuje promatrani volumen.

Pogodno je elektromagnetsko naprezanje u jednadžbi (3.5.15) podijeliti u dva dijela, tako da se piše

¹⁹ Tenzori su pogodni za opis naprezanja i deformacija u materijalima. Tenzorska analiza je matematički formalizam kojim se opisuju vektorske transformacije u raznim koordinatnim sustavima.

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^e + \mathbf{t}^m . \quad (3.5.16)$$

Ovdje smo s $\mathbf{t}^e$ označili naprezanje uzrokovano samo električnim poljem $\mathbf{E}$, a s $\mathbf{t}^m$ naprezanje uzrokovano samo magnetskim poljem $\mathbf{B}$, pa imamo

$$\mathbf{t}^e = \tilde{\mathbf{S}}^e \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2, \quad (3.5.17a)$$

$$\mathbf{t}^m = \tilde{\mathbf{S}}^m \cdot \mathbf{n} = \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) \mathbf{B} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu_0} .$$

Budući da električni i magnetski članovi naprezanja imaju isti oblik, u daljnjoj analizi usmjerit ćemo našu pažnju na naprezanje $\mathbf{t}^e$ uzrokovano samo električnim poljem $\mathbf{E}$, koje je općenito vremenski promjenljivo. Modul vektora naprezanja u električnom polju dobiva se kvadriranjem, tj.

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}^e|^2 &= [(\mathbf{n} \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2]^2 = \\ &= \epsilon_0^2 \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})^2 |\mathbf{E}|^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{n}|^2 \frac{1}{4} |\mathbf{E}|^4 \right] = \frac{1}{4} \epsilon_0^2 |\mathbf{E}|^4 . \end{aligned}$$

Slijedi modul naprezanja

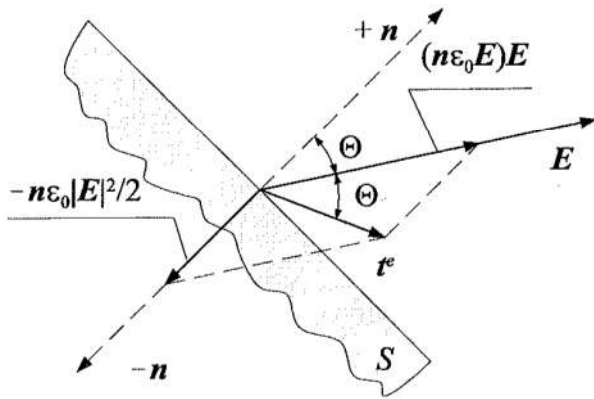
$$|\mathbf{t}^e| = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 , \quad (3.5.18)$$

mjeren u *njutnima po metru četvornom* (N/m²). Iz usporedbe ovoga izraza za plošnu gustoću naprezanja u električnom polju s izrazom (3.2.15) u članku 3.2.2. za volumnu gustoću energije pohranjene u električnom polju slijedi brojna jednakost

$$|\mathbf{t}^e| = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 = w_E . \quad (3.5.19)$$

Gustoća energije w_E mjeri se u *džulima po prostornom metru* (J/m³).

Smjer vektora naprezanja $\mathbf{t}^e$ određen je jednadžbom (3.5.17a). Kao što je vidljivo iz jednadžbe, vektor naprezanja sastoji se iz dviju komponenti. Jedna komponenta vektora $\mathbf{t}^e$ je u smjeru polja $\mathbf{E}$, a druga je usmjerena okomito u element plohe S , kako je to prikazano na slici 3.5.2. Vektor $\mathbf{t}^e$ očito leži i u ravnini od $\mathbf{E}$ i $\mathbf{n}$.

Slika 3.5.2. Odnosi između vektora n , E i t^e

Pretpostavimo da E zatvara kut Θ prema okomici n . Tada je $E \cdot n = E \cos \Theta$, i okomita komponenta od t^e je

$$\begin{aligned} t_n^e &= n \cdot t^e = n \cdot [(n \cdot \epsilon_0 E) E - n \frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2] = \\ &= \epsilon_0 [(n \cdot E)^2 - \frac{1}{2} |E|^2] = \epsilon_0 (|E|^2 \cos^2 \Theta - \frac{1}{2} |E|^2) = \\ &= \epsilon_0 (\frac{1}{2} |E|^2 + \frac{1}{2} |E|^2 \cos 2\Theta - \frac{1}{2} |E|^2) = \frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2 \cos 2\Theta = |t^e| \cos 2\Theta . \end{aligned}$$

Slijedi da t^e mora zatvarati kut 2Θ prema okomici n . Prema tome, *vektor jakosti polja E raspolavlja kut između n i t^e* , kako je pokazano na slici 3.5.2. S druge strane, modul $|t^e|$ ovisi samo o modulu polja $|E|$ i nije ovisan o smjeru polja.

Na sličan način možemo analizirati plošnu gustoću naprezanja t^m uzrokovanu samo magnetskim poljem indukcije B . Doći ćemo do sličnih rezultata, pa je modul naprezanja

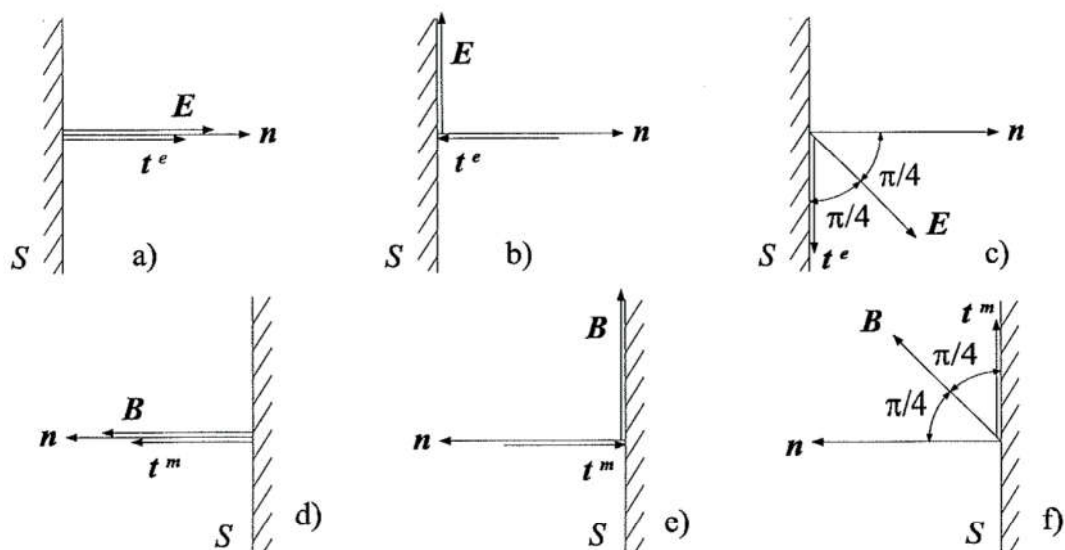
$$|t^m| = \frac{1}{2} \frac{|B|^2}{\mu_0} , \quad (3.5.20a)$$

što se može izraziti i kao

$$|t^m| = \frac{1}{2} \mu_0 |H|^2 = w_H . \quad (3.5.20b)$$

Dalje se može reći da vektor t^m leži u ravnini od B i n u praznom prostoru, tako da vektor B raspolavlja kut između n i t^m . Modul od t^m ovisi samo o modulu od B , a ne ovisi o njegovu smjeru.

U posebnim slučajevima, kada element plohe S leži okomito ili paralelno vektorima polja E i B , imamo jednostavne situacije pokazane u slikama 3.5.3.a) i b).



Slika 3.5.3. Naprezanja za slučaj okomitih, paralelnih i kosih polja

U prvom slučaju a) okomito polje E djeluje vlačnim naprezanjem iznosa $\epsilon_0 |E|^2/2$ na zadanu plohu, dok u drugom slučaju b) paralelno polje E djeluje tlačnim naprezanjem iznosa $\epsilon_0 |E|^2/2$ na plohu S . U slučaju c) polje E je pod 45° nagnuto prema elementu plohe S , pa će prouzrokovati smično (tangencijalno) naprezanje na plohu S , s iznosom $\epsilon_0 |E|^2/2$. Slično su na slikama 3.5.3. d), e) i f) pokazani analogni slučajevi kada magnetsko polje indukcije B proizvodi različita plošna naprezanja.

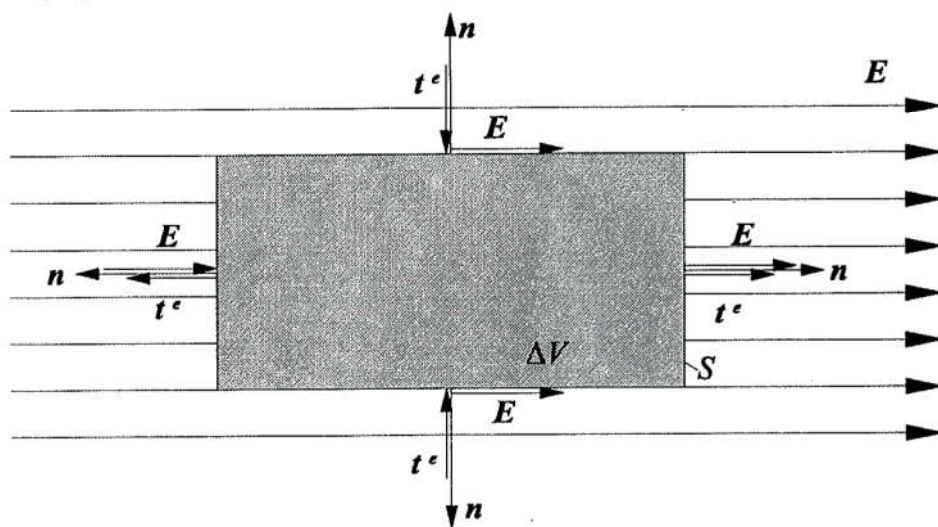
Općenito je pogodno opisati okomito naprezanje koje djeluje prema unutra na zatvorenu rubnu plohu S (u smjeru n), ili okomitu komponentu takvoga naprezanja, kao tlak p na plohu S , pa imamo

$$p = -nt \quad (3.5.21)$$

Tako se može reći da elektromagnetsko polje djeluje tlakom na rubnu plohu. Obično nas zanima slučaj kada elektromagnetsko zračenje pada na određenu plohu i kada se naziva radijacijski tlak.

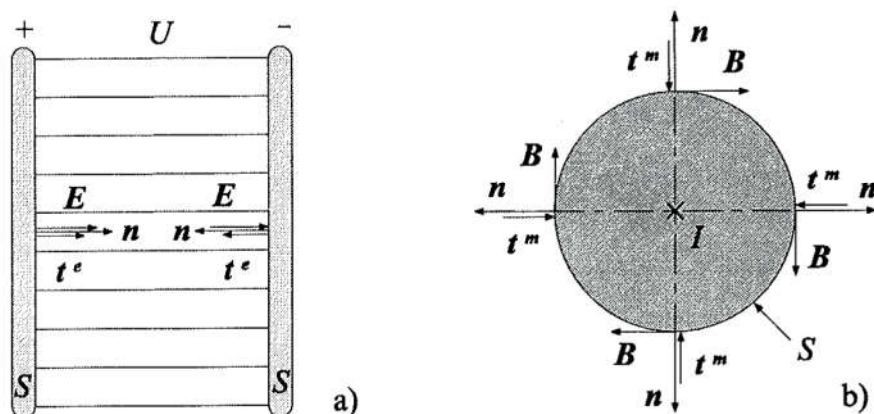
Sada ćemo analizirati plošna naprezanja u polju E u elementarnom volumenu ΔV . Izdvojit ćemo zato dio prostora u obliku pravokutne prizme prikazane na slici 3.5.4. Prema pravilu da polje raspolavlja kut između okomice na plohu i vektora naprezanja proizlazi da će na plohe koje su okomite na smjer polja djelovati vlačna naprezanja, a na plohe koje su paralelne s poljem djelovat će tlačna naprezanja. Ta naprezanja po rubnoj plohi nadomještavaju djelovanje cijelog vanjskog prostora na element ΔV . S obzirom na smjer naprezanja očito je da se element volumena ΔV nastoji skratiti u smjeru silnica i da se nastoji proširiti u poprečnom smjeru na smjer silnica. Dakle, silnice se u uzdužnom smjeru ponašaju kao opruge. Važi pravilo: silnice u polju *napregnute su vlačnim naprezanjem i nastoje se skratiti*, dok se u poprečnom smjeru međusobno odbijaju i nastoje se raspršiti. To pravilo nam pomaže pri određivanju smjera sila

u polju.



Slika 3.5.4. Plošna naprezanja na rubnim plohama elementa volumena ΔV u polju E

Na slikama 3.5.5a) i b) prikazali smo primjere naprezanja u statičkom električnom i magnetskom polju.



Slika 3.5.5. Plošna naprezanja u električnom i magnetskom polju

Tako u slučaju a) električno polje E između ploča nabijenog pločastog kondenzatora uzrokuje takva plošna naprezanja t^e da su sile između ploča privlačne i jednake. U slučaju b) magnetsko polje indukcije B vodiča protjecanog strujom I uzrokuje tlačno naprezanje t^m na površini vodiča. U oba slučaja naprezanja su takva da se silnice nastoje skratiti. U oba ova slučaja ukupna sila na zatvorenu plohu S očito je jednaka nuli, tj. $F_e = 0$ i $F_m = 0$ budući da se promatrani prostori nalaze u ravnoteži. No vrlo često to nije slučaj. Tako je moguće u statičkim poljima pomoću relacija (3.5.9), (3.5.16) i (3.5.17a) izraziti totalnu silu kojom električno polje E djeluje na statičku raspodjelu slobodnih naboja ρ_s (tj. na nabijene vodiče), kao

$$F_e = \int_V \rho_s E dV = \oint_S t^e dS = \oint_S [(n \epsilon_0 E) E - n \frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2] dS. \quad (3.5.22)$$

Na isti način se pomoću relacija (3.5.9), (3.5.16) i (3.5.17b) može izraziti totalna sila

$$\mathbf{F}_m = \int_V \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{t}^m dS = \oint_S \left[\left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) \mathbf{B} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu_0} \right] dS, \quad (3.5.23)$$

kojom magnetsko polje indukcije $\mathbf{B}$ djeluje na stacionarnu raspodjelu slobodnih struja $\mathbf{J}_s$ (tj. na vodiče protjecane strujama).

3.5.2. Sile i plošna naprezanja u materijalima

Analizirali smo do sada volumne sile i plošna naprezanja u elektromagnetskom polju u praznom prostoru. Unošenjem materijala u polje odnosi se mijenjaju. Materijal se polarizira i magnetizira i pojavljuju se dodatne, tzv. polarizacijske i magnetizacijske sile. U prethodnom članku 3.5.1. pokazali smo da totalna sila, koja se prenosi elektromagnetskim poljem kroz bilo koju zatvorenu plohu S u praznom prostoru, može biti pomoću jednadžbi (3.5.9), (3.5.10) i (3.5.15) izražena integralom

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T &= \oint_S \left[(\mathbf{n} \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) \mathbf{B} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu_0} \right] dS = \\ &= \mathbf{F}_{MEH} + \frac{1}{c_0^2} \frac{d}{dt} \int_V N dV. \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

Ovdje je s $\mathbf{F}_{MEH} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$ označena suma sila kojima elektromagnetsko polje djeluje na slobodne naboje i struje u određenom praznom prostoru. Član

$$\frac{dG_N}{dt} = \frac{1}{c_0^2} \frac{d}{dt} \int_V N dV$$

ne iščezava ni u vakuumu i površno sugerira ideju sile na vakuum što nema fizikalnog smisla. Kako god, taj je član prouzrokovao mnoge spekulacije. S $c_0^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$ označena je brzina elektromagnetskog vala u vakuumu. U najvećem broju slučajeva taj član je vrlo malog iznosa zbog dijeljenja s c_0^2 , pa ga možemo zanemariti.

Unesemo li materijal u elektromagnetsko polje, možemo pretpostaviti da će odgovarajući izraz za totalnu silu, koja se elektromagnetskim poljem prenosi kroz zatvorenu plohu S koja sadrži slobodne naboje, struje i materijal, imati isti oblik kao i izraz (3.5.24.). Treba samo zamijeniti konstante praznog prostora ϵ_0 i μ_0 s odgovarajućim vrijednostima materijala ϵ i μ . Tako za totalnu silu na materijal u volumenu V zatvoren plohom S , koji općenito sadrži slobodne naboje i struje, imamo izraz

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_T &= \oint_S \left[(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} |\mathbf{E}|^2 + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{\mu}} \right) \mathbf{B} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\boldsymbol{\mu}} \right] dS = \\
 &= \frac{d}{dt} (G_{MEH} + G_N) .
 \end{aligned} \tag{3.5.25}$$

Prva pretpostavka koja u jednadžbi (3.5.25) mora biti zadovoljena, a odnosi se na materijal, jest da je materijal linearan, tj. da su odnosi između $\mathbf{E}$ i $\mathbf{D}$, kao i $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$ linearni. Druga pretpostavka jest da je materijal izotropan.

Treba napomenuti da se na isti način pomoću (3.5.15) i (3.5.17a,b) mogu odrediti vektori plošnih naprezanja u materijalnom mediju u elektromagnetskom polju

$$\mathbf{t} = \left[(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} |\mathbf{E}|^2 \right] + \left[\left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{\mu}} \right) \mathbf{B} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\boldsymbol{\mu}} \right] , \tag{3.5.26}$$

te u statičkim električnim i magnetskim poljima

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}^e &= (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} |\mathbf{E}|^2 , \\
 \mathbf{t}^m &= \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{\mu}} \right) \mathbf{B} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\boldsymbol{\mu}} .
 \end{aligned} \tag{3.5.27a,b}$$

S druge strane, u odjeljku 3.4. pokazali smo da na slobodne naboje i struje u praznom prostoru u volumenu V zatvorenom plohom S elektromagnetsko polje djeluje prostornom silom $\mathbf{F}_{MEH}$, koja se prema jednadžbi (3.4.4) računa iz izraza

$$\mathbf{F}_{MEH} = \int_V [\rho_s \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B}] dV = \frac{d}{dt} G_{MEH} \tag{3.5.28}$$

U skladu s jednadžbama (3.5.25) i (3.5.28) može se resultantna mehanička prostorna sila, kojom elektromagnetsko polje djeluje na slobodne naboje, struje, polarizirani i magnetizirani materijal u volumenu V , zatvoren plohom S , odrediti iz izraza

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{MEH} &= \oint_S \left[(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} |\mathbf{E}|^2 + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{\mu}} \right) \mathbf{B} - \mathbf{n} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\boldsymbol{\mu}} \right] dS - \\
 &\quad - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{N} dV .
 \end{aligned} \tag{3.5.29}$$

Treba upozoriti da se sile $\mathbf{F}_T$ i $\mathbf{F}_{MEH}$ ne razlikuju mnogo, jer drugi član na desnoj strani jednadžbe (3.5.29) pridonosi zanemarivo malo zbog faktora $1/c^2$. U statičkim poljima te su sile prema (3.5.11) točno jednake.

Očito je da smo ovdje na relativno jednostavan način došli do točnog izraza (3.5.29) za volumnu silu koja djeluje na slobodne naboje i struje i na materijal pomoću vektora plošnog naprezanja u materijalu. Prema izrazu (3.5.12b)

$$S_{jk} = \epsilon \left(E_j E_k - \frac{1}{2} |E|^2 \delta_{jk} \right) + \frac{1}{\mu} \left(B_j B_k - \frac{1}{2} |B|^2 \delta_{jk} \right), \quad (3.5.30a,b)$$

$$t = \tilde{S} \cdot n = \left[(n \cdot \epsilon E) E - n \frac{1}{2} \epsilon |E|^2 \right] + \left[\left(n \cdot \frac{B}{\mu} \right) B - n \frac{1}{2} \frac{|B|^2}{\mu} \right].$$

računamo komponente tenzora naprezanja koje tvore vektor naprezanja u materijalu.

3.5.2.1. Prostorne sile u dielektriku u statičkom električnom polju

Prostornu silu F_{MEH} kojom statičko električno polje djeluje na zadanu raspodjelu slobodnih naboja, kao i na polarizirani dielektrik u određenom volumenu V moguće je, osim preko tenzora plošnog naprezanja, tj. iz jednadžbe (3.5.29), odrediti i izravno. Potrebno je odrediti varijaciju energije u dielektriku u statičkom električnom polju u ovisnosti o promjeni dielektričnosti ϵ u materijalu. Ako se taj postupak provede do kraja, dolazi se do izraza²⁰ za gustoću prostorne mehaničke sile u električnom polju koja djeluje na slobodne naboje i na polarizirani dielektrik

$$f_e = \rho_s E - \frac{1}{2} |E|^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla \left(|E|^2 \gamma \frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma} \right). \quad (3.5.31)$$

U navedenoj jednadžbi prvi član na desnoj strani je prema jednadžbi (3.5.6b) gustoća elektrostatičke sile kojom polje djeluje na slobodne naboje ρ_s zadane raspodjele u dielektriku. Drugi član predstavlja gustoću prostorne sile koja se pojavljuje kad god se nehomogeni dielektrik $\epsilon = \epsilon(r)$ nalazi u električnom polju. Treći član na desnoj strani jednadžbe (3.5.31) zavređuje posebnu pažnju, jer je povezan s deformacijama dielektrika u električnom polju. Naime, *primjena električnog polja na neutralni dielektrik izazvat će polarizaciju materijala s električnom i mehaničkom distorzijom dielektrika kao posljedicom*. Dielektrik će nastojati da poveća linearne dimenzije u smjeru polja. Ta pojava, tj. elastična deformacija dielektrika pod djelovanjem sila uzrokovanih statičkim električnim poljem, naziva se *elektrostrikcija*. Prema tome taj član, poznat kao elektrostriksijski član, daje gustoću prostorne sile koja djeluje na dielektrik u nehomogenom električnom polju. Njegov iznos ovisi eksplicitno o derivaciji $\partial \epsilon / \partial \gamma$, koja predstavlja veličinu promjene dielektričnosti ϵ u ovisnosti o promjeni gustoće γ dielektrika. Pro-

²⁰ Pogledati npr.: J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941, strana 137–146.; W.K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1972, strana 107–111; H.H. Woodson, J.R. Melcher, *Electromechanical Dynamics*, Part II, John Wiley, New York, 1968., str. 463–466.

mjena gustoće mase dielektrika nastaje zbog naprezanja materijala u električnom polju. (Gustoća mase materijala mjeri se u *kilogramima po prostornom metru*, kg/m³.)

U slučaju kada nema slobodnih naboja ($\rho_s = 0$), prvi član u jednadžbi (3.5.31) iščezava, pa dobivamo za gustoću prostorne sile kojom električno polje djeluje na neutralni dielektrik, koji se unošenjem u polje polarizira izraz

$$f_e = -\frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla \left(|\mathbf{E}|^2 \gamma \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma} \right). \quad (3.5.32)$$

Ovaj izraz predstavlja *gustoću polarizacijske sile* i vrlo je pogodan za objašnjene fizikalne naravi sile koje djeluju na dielektrik. Izveden je pod pretpostavkom da varijacija dielektričnosti ϵ za neki infinitezimalni pomak u prostoru može biti razjašnjena nehomogenošću dielektrika i promjenom gustoće mase dielektrika, koja je povezana s njegovom deformacijom u električnom polju. Jasno je da se deformacije u čvrstom dielektriku mogu dogoditi bez promjene volumena. Pošto pretpostavljamo da je dielektrik u statičkoj ravnoteži, mehaničke sile uzrokovane električnim poljem bit će uravnotežene s elastičnim silama izazvanim deformacijom dielektrika.

3.5.2.2. Prostorne sile u materijalu u statičkom magnetskom polju

Kao i u prethodnom slučaju na sličan se način može odrediti gustoća prostorne mehaničke sile u statičkom magnetskom polju koja djeluje na slobodne struje i na magnetizirani nehomogeni, linearni, izotropni magnetski materijal

$$\begin{aligned} f_m &= \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 \nabla \mu + \frac{1}{2} \nabla \left(|\mathbf{H}|^2 \gamma \frac{\partial \mu}{\partial \gamma} \right) = \\ &= \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu^2} \nabla \mu + \frac{1}{2} \nabla \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu^2} \gamma \frac{\partial \mu}{\partial \gamma} \right). \end{aligned} \quad (3.5.33)$$

I ovdje prvi član predstavlja magnetsku silu kojom polje $\mathbf{B}$ djeluje na slobodne struje $\mathbf{J}_s$ zadane raspodjele u magnetskom materijalu. Ako nema slobodnih struja $\mathbf{J}_s = 0$, tada taj član iščezava, pa izraz (3.5.33) prelazi u oblik

$$f_m = -\frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu^2} \nabla \mu + \frac{1}{2} \nabla \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu^2} \gamma \frac{\partial \mu}{\partial \gamma} \right), \quad (3.5.34)$$

i predstavlja *gustoću magnetizacijske sile*. To je sila po jedinici volumena kojom statičko magnetsko polje djeluje na neutralni magnetski materijal koji se unošenjem u polje magnetizira. Prvi član u (3.5.34) je doprinos gustoći magnetizacijske sile, koji rezultira iz nehomogenosti magnetskog materijala. Drugi član predstavlja sile koje su udružene (ili ih uzrokuju) s promjenama u gustoći materijala i naziva se *gustoća magnetostricijskih sila*.

Često se umjesto općeg izraza (3.5.33) za gustoću sile u magnetskom polju uvode sljedeća ograničenja:

- 1) Sveza $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$ je linearna, tj. permeabilnost nije funkcija polja $\mathbf{B}$;
- 2) Nema permanentnih magnetskih dipola u materijalu;
- 3) Nema magnetostrikcije, tj. $\partial\mu/\partial\gamma = 0$.

U tim uvjetima izraz

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu^2} \nabla \mu . \quad (3.5.35)$$

daje gustoću prostorne mehaničke sile kojom statičko magnetsko polje djeluje na slobodne struje i na (mekani) magnetski materijal.

3.5.2.3. Prostorne sile u materijalu u elektromagnetskom polju

Pokazali smo da se resultantna prostorna mehanička sila kojom elektromagnetsko polje djeluje na slobodne naboje i struje i na materijal u volumenu V , koji se u polju polarizira i magnetizira, može računati pomoću integrala vektora plošnog naprezanja $\mathbf{t}$ po plohi S koja zatvara volumen V , iz jednadžbe (3.5.29). S druge strane, prema jednadžbama (3.4.21) i (3.5.7) prilagođenim za materijalni medij zamjenom značajki ϵ_0 i μ_0 s ϵ i μ , može se resultantna mehanička sila na slobodne naboje i struje i na materijal u volumenu V računati, tako da se piše

$$\mathbf{F}_T = \frac{d}{dt} (\mathbf{G}_{MEH} + \mathbf{G}_N) = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m + \epsilon \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV .$$

Uvrštenjem u

$$\mathbf{F}_e = \int_V \mathbf{f}_e dV \quad ; \quad \mathbf{F}_m = \int_V \mathbf{f}_m dV \quad ; \quad \mathbf{F}_{MEH} = \frac{d}{dt} \mathbf{G}_{MEH} ,$$

za $\mathbf{f}_e$ izraza (3.5.29), za $\mathbf{f}_m$ izraza (3.5.31), te za $\mathbf{G}_N$ izraza (3.4.25) slijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{MEH} = & \int_V \left\{ \rho_s \mathbf{E} - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla \left(|\mathbf{E}|^2 \gamma \frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma} \right) \right\} dV + \\ & + \int_V \left\{ \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu^2} \nabla \mu + \frac{1}{2} \nabla \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu^2} \gamma \frac{\partial \mu}{\partial \gamma} \right) \right\} dV + \\ & + \epsilon \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV - \frac{1}{c_0^2} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{H} dV . \end{aligned}$$

Daljnijim uređenjem i zanemarivanjem elektrostrikcije i magnetostrikcije dobivamo za

linearni izotropni materijal izraz za silu

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{MEH} &= \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = \\ &= \int_V \left(\rho_s \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \nabla \epsilon - \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu^2} \nabla \mu + \frac{\epsilon_r \mu_r - 1}{c_0^2} \frac{\partial N}{\partial t} \right) dV. \end{aligned} \quad (3.5.36)$$

To je rezultatna mehanička sila kojom elektromagnetsko polje $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ djeluje na zadanu raspodjelu slobodnih naboja ρ_s , slobodnih struja $\mathbf{J}_s$, te na polarizirani i magnetizirani izotropni materijal (ϵ, μ) u zadanom volumenu V , koji je omeđen zatvorenom plohom S , uz zanemarenje elektrostriktivnih i magnetostruktivnih sila. To je drugi oblik izraza za silu, jer obje jednačbe (3.5.29) i (3.5.36) određuju istu mehaničku silu. U prvom slučaju tu silu računamo putem plošnih naprezanja u polju, a u drugom kao volumnu silu na slobodne naboje i struje, te na vezane dipole polariziranog i magnetiziranog materijala. Na temelju (3.5.36) može se odrediti gustoća prostorne mehaničke sile u elektromagnetskom polju

$$f_{MEH} = \rho_s \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \nabla \epsilon - \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu^2} \nabla \mu + \frac{\epsilon_r \mu_r - 1}{c_0^2} \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (3.5.37)$$

Ovdje su zanemarene pojave elektrostrikcije i magnetostruktije u elektromagnetskom polju.

3.5.3. Plošna naprezanja u statičkim poljima na granici dva materijala

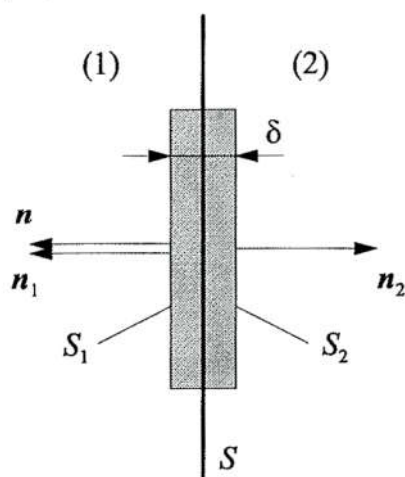
U primijenjenoj elektromagnetskoj teoriji najčešće nas zanimaju sile i naprezanja u statičkim i kvazistatičkim električnim i osobito magnetskim poljima. Većina elektromehaničkih uređaja i strojeva utemeljena je na djelovanju statičkih i još više kvazistatičkih²¹ polja. Zato ćemo pozornost ograničiti na određivanje naprezanja u statičkim i kvazistatičkim električnim i magnetskim poljima.²²

Sile i plošna naprezanja u statičkim poljima na granici između dva materijala slijede iz osnovnih razmatranja o poljima na granici, čiji su zaključci sažeti u jednačbi (1.5.16a – c), i o plošnim naprezanjima u materijalima prema jednačbi (3.5.27a,b). Pretpostavit ćemo da su i dielektrički i magnetski materijali linearni i izotropni. Granica između dva materijala je oštra. Činjenicu da se dielektričke odnosno magnetske značaj-

²¹ Kvazistatička polja su vremenski promjenjiva polja u kojima se zanemaruju struje pomaka. Pogledati poglavlje 7.

²² Pogledati npr. Z. Haznadar, Ž. Štih, S. Berberović, G. Manenica, *Torque Calculation in Switched Reluctance Motor Design*, Nonlinear Phenomena in Electromagnetic Field, Elsevier, Amsterdam, 1992.

ke materijala mijenjaju skokovitim diskontinuitetom na granici zamijenit ćemo slojem vrlo strme ali kontinuirane promjene svojstava materijala. Kako se debljina graničnog sloja smanjuje prema nuli, gradijent promjene značajki ϵ i μ postaje beskonačan, ali i volumen graničnog sloja također iščezava. Moramo tražiti granični prijelaz volumne gustoće sile f u plošnu gustoću sile t , da bismo saznali koja rezultantna sila djeluje na plohu diskontinuiteta S . Najprije ćemo obraditi sile na granici u statičkom električnom polju.



Slika 3.5.6. Granični sloj koji razdvaja dva dielektrika

Na slici 3.5.6. tamna površina predstavlja prijelazni sloj između dielektričkih materijala (1) i (2). Sila kojom električno polje djeluje na materijal i slobodne naboje u tom sloju može se odrediti integracijom (3.5.27a) pomoću dviju ploha S_1 i S_2 . Rezultantna sila na jedinicu površine plohe S u smjeru $\mathbf{n}$, tj. od dielektrika (2) prema dielektriku (1), kako se debljina graničnog sloja približava k nuli poprima iznos

$$t^e = [(\mathbf{n} \cdot \epsilon_1 \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1 - (\mathbf{n} \cdot \epsilon_2 \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_2] - \frac{1}{2} \mathbf{n} [\epsilon_1 |\mathbf{E}_1|^2 - \epsilon_2 |\mathbf{E}_2|^2] . \quad (3.5.38)$$

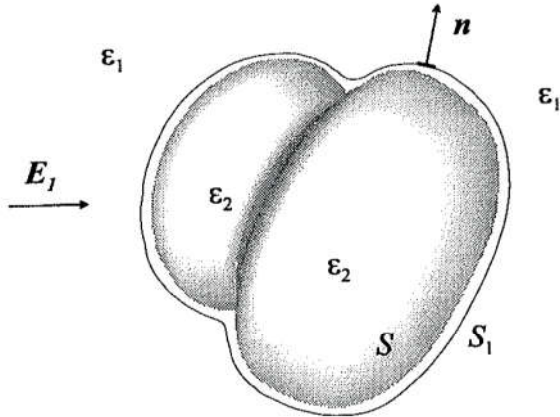
U slučaju da na graničnoj plohi između dva dielektrika nema slobodnih plošnih naboja $\sigma_s = 0$, iz jednadžbe (1.5.16c) slijedi da je $D_{n1} = D_{n2} = D_n$, tj. $\mathbf{n} \cdot \epsilon_1 \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \cdot \epsilon_2 \mathbf{E}_2$. Iz jednadžbe (1.5.16a) slijedi pak da je $E_{t1} = E_{t2} = E_t$. Tangencijalne komponente polja s obje strane granice uvijek su jednake. Njihova je razlika, koja se pojavljuje samo u prvoj uglatoj zagradi u jednadžbi (3.5.38), jednaka nula. Prvi član zato ima samo okomitu komponentu na granici kao i drugi član. Prema tome, tada u slučaju da je $\sigma_s = 0$, postoji samo okomita komponenta resultantnog plošnog naprezanja na granici između dva dielektrika, koja se prema (3.5.38) određuje kao

$$t_n^e = t^e \cdot \mathbf{n} = [\epsilon_1 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1)^2 - \epsilon_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2)^2] - \frac{1}{2} [\epsilon_1 |\mathbf{E}_1|^2 - \epsilon_2 |\mathbf{E}_2|^2] . \quad (3.5.39)$$

Rezultantno naprezanje je okomito na graničnu plohu S i pozitivno (tj. u smjeru okomice $+\mathbf{n}$) ako je $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Ono djeluje u smjeru od dielektrika (2) prema dielektriku (1) u vidu tlaka na graničnu plohu S . Stoga kažemo da *materijal veće dielektričnosti nastoji*

prodrijeti i popuniti prostor koji zauzima materijal manje dielektričnosti. To je opće pravilo prema kojemu se jednostavno određuje smjer sile i naprezanja u statičkom polju.

Ako se neko čvrsto tijelo dielektričnosti ϵ_2 nalazi potpuno okruženo dielektrikom ϵ_1 , kao na slici 3.5.7,



Slika 3.5.7. Čvrsto tijelo okruženo dielektrikom ϵ_1

tada će na tijelo (na dielektrik i na slobodne naboje u njemu) elektrostatičko polje djelovati rezultantnom mehaničkom silom koja se pomoću (3.5.30b) određuje kao

$$F_{UK} = \oint_{S_1} [(n \cdot \epsilon_1 E_1) E_1 - \frac{1}{2} n \epsilon_1 |E_1|^2] dS_1. \quad (3.5.40)$$

Ta sila nadomješta djelovanje vanjskog prostora na čvrsto tijelo. U slučaju da je čvrsto tijelo vodič, npr. kovina, polje E_1 je okomito na rubnu plohu, a $E_2 = 0$, pa je tada rezultantna sila na izolirani vodič

$$F_{UK} = \frac{1}{2} \oint_{S_1} \epsilon_1 |E_1|^2 n dS_1 = \frac{1}{2} \oint_{S_1} \sigma_s E_1 dS_1, \quad (3.5.41)$$

gdje je $\sigma_s = \epsilon_1 n \cdot E_1$ plošna gustoća naboja na površini vodiča. Sada ćemo sličnim postupkom odrediti naprezanja na granici dva linearna magnetska (neferomagnetska) materijala u statičkom magnetskom polju. Analogno jednadžbi (3.5.38) rezultantno plošno naprezanje na granici iznosi

$$t^m = \left[\left(n \cdot \frac{B_1}{\mu_1} \right) B_1 - \left(n \cdot \frac{B_2}{\mu_2} \right) B_2 \right] - \frac{1}{2} n \left[\frac{|B_1|^2}{\mu_1} - \frac{|B_2|^2}{\mu_2} \right]. \quad (3.5.44)$$

U slučaju da na graničnoj plohi između dva magnetska materijala nema slobodnih plošnih struja $K_s = 0$, iz jednadžbe (1.5.16b) slijedi da je $H_{n1} = H_{n2} = H$, tj. da su tangencijalne komponente s obje strane granice jednake. Okomite komponente indukcije su prema (1.5.16d) uvijek jednake, $B_{n1} = B_{n2} = B_n$. Stoga da rezultantni tlak koji je okomit na graničnu plohu S , djeluje iz smjera materijala (2) u materijal (1), ako je $\mu_1 < \mu_2$, i ima

iznos

$$t_n^m = \mathbf{t}^m \cdot \mathbf{n} = \left[\frac{1}{\mu_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1)^2 - \frac{1}{\mu_2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{|\mathbf{B}_1|^2}{\mu_1} - \frac{|\mathbf{B}_2|^2}{\mu_2} \right]. \quad (3.5.45)$$

I u magnetskom polju materijal veće permeabilnosti nastoji istisnuti materijal manje permeabilnosti.

Tablica 3.3.1. Diferencijalni oblik Poyntingova teorema u materijalu

Poyntingov teorem	$-\nabla N + p_i = p_g + p_P + p_M + \frac{\partial}{\partial t}(w_E + w_H)$	
Poyntingov vektor = Tijek EM snage kroz jedinicu ploštine.	$\frac{W}{m^2}$	$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
Snaga predana od neovisnog unutarnjeg izvora po jedinici volumena	$\frac{W}{m^3}$	$p_i = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i$
Gubitak snage po jedinici volumena u linearnom vodiču	$\frac{W}{m^3}$	$p_g = \kappa \mathbf{E} ^2$
Snaga utrošena po jedinici volumena za porast polarizacije materijala	$\frac{W}{m^3}$	$p_P = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$
Snaga utrošena po jedinici volumena za porast magnetiziranja materijala	$\frac{W}{m^3}$	$p_M = \mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$
Porast pohranjene energije u $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ polju u jedinici volumena i u jedinici vremena	$\frac{W}{m^3}$	$\frac{\partial}{\partial t}(w_E + w_H)$
Energija pohranjena u jedinici volumena u $\mathbf{E}$ polju	$\frac{W_s}{m^3}$	$w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} ^2$
Energija pohranjena u jedinici volumena u $\mathbf{H}$ polju	$\frac{W_s}{m^3}$	$w_H = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H} ^2$

Tablica 3.3.2. Integralni oblik Poyntingova teorema u materijalu

Poyntingov teorem: $-\oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i \cdot dV = \int_V (\kappa \mathbf{E} ^2 + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}) dV + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} ^2 + \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H} ^2 \right) dV$	
Simbolički oblik Poyntingova teorema: $-\oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS + P_i = P_g + P_p + P_M + \frac{d}{dt} (W_E + W_H)$	
Ukupan tijek elektromagnetske snage kroz zatvorenu plohu S u volumenu V	$-\oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS = -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$
Ukupna električna snaga isporučena od neovisnih izvora volumenu V	$P_i = - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i dV$
Ukupna snaga izgubljena u linearnim vodičima u volumenu V	$P_g = \int_V \kappa \mathbf{E} ^2 dV$
Ukupna snaga apsorbirana procesom polarizacije tvari u volumenu V	$P_p = \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} dV$
Ukupna snaga apsorbirana procesom magnetiziranja tvari u volumenu V	$P_M = \int_V \mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} dV$
Ukupna električna energija pohranjenja u polju $\mathbf{E}$ u volumenu V	$W_E = \int_V \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} ^2 dV$
Ukupna magnetska energija pohranjenja u polju $\mathbf{H}$ u volumenu V	$W_H = \int_V \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H} ^2 dV$

Tablica 3.3.3. Diferencijalni i integralni oblici Poyntingova teorema u materijalu

Diferencijalni oblici: $-\nabla N + p_i = p_g + \frac{\partial}{\partial t}(w_e + w_m)$ $-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i = \kappa \mathbf{E} ^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right)$	
Integralni oblici: $-\oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS + P_i = P_g + \frac{d}{dt}(W_e + W_m)$ $-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i dV = \int_V \kappa \mathbf{E} ^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \left(\int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) dV$	
Utok elektromagnetske snage po jedinici volumena u promatranoj točki	$-\nabla N = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$
Ukupan tijek elektromagnetske snage kroz plohu S u volumen V	$-\oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$
Snaga po jedinici volumena predana od neovisnog izvora u V	$p_i = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i$
Ukupna električna snaga isporučena od neovisnog izvora u volumen V	$P_i = -\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i dV$
Gubitak snage po jedinici volumena u linearnom vodiču	$p_g = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} = \kappa \mathbf{E} ^2$
Ukupna snaga izgubljena u linearnim vodičima u volumenu V	$P_g = \int_V \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \kappa \mathbf{E} ^2 dV$
Gustoća ukupne električne energije u materijalu u elektromagnetskom polju	$w_e = w_E + w_p = \int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}$
Ukupna električna energija u materijalu u elektromagnetskom polju	$W_e = \int_V \left(\int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \right) dV$
Gustoća ukupne magnetske energije u materijalu u elektromagnetskom polju	$w_m = w_H + w_M = \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$
Ukupna magnetska energija u materijalu u elektromagnetskom polju	$W_m = \int_V \left(\int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) dV$

LITERATURA UZ POGLAVLJE 3.

- M.H. Choudhury, *Electromagnetism*, Ellis Horwood, Chichester, 1989.
- Z. Haznadar, *Teoretska elektrotehnika – Elektromagnetska teorija i polja*, Liber, Zagreb 1972.
- M. Javid, P.M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- P. Kulišić, *Mehanika i toplina*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.
- L.M. Magid, *Electromagnetic Fields, Energy and Waves*, John Wiley, New York, 1972.
- W.K.H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading, 1972.
- J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- H.H. Woodson, J.R. Melcher, *Electromechanical Dynamics*, Parts I, II, III, John Wiley, New York, 1968.

4. STATIČKO ELEKTRIČNO POLJE

U prethodnim poglavljima uveli smo sustav Maxwellovih jednadžbi i elektromagnetsku teoriju koja se na njima temelji. U nastavku ćemo razraditi *primjenu* te teorije pri rješavanju zadaća u elektromagnetizmu. Takve zadaće klasificiramo prema njihovoj složenosti, a ona slijedi iz vremenske ovisnosti veličina polja. Najjednostavnije zadaće u elektromagnetizmu su statičke zadaće u kojima veličine polja ne ovise o vremenu. Ovdje ćemo započeti analizom zadaća u statičkim električnim poljima koja uzrokuju naboji u mirovanju. Takve zadaće najčešće susrećemo pri projektiranju izolacijskih sustava elektromagnetskih naprava.

U početku poglavlja opisat ćemo osnovne jednadžbe statičkog električnog polja koje predstavljaju poseban slučaj Maxwellovih jednadžbi, a zatim ćemo razmotriti značajke skalarnog električnog potencijala u takvom polju. Iz njih slijedi i pogodan način prikazivanja statičkih električnih polja ekvipotencijalnim plohama i linijama polja. Energiju pohranjenu u statičkom električnom polju izvest ćemo iz energije potrebne za formiranje takvog polja, a za određivanje rezultantnih sila koristit ćemo pristup pomoću energije. Kapacitet, kao osnovnu integralnu značajku električnog polja za jednostavne, te parcijalne kapacitete za složene rasporede, definirat ćemo analizom odnosa naboja i potencijala u takvim rasporedima. Posebnu pažnju posvetit ćemo analitičkim postupcima rješavanja zadaća statičkih električnih polja u tri osnovna pravokutna koordinatna sustava: pravolinijskom, cilindričnom i sfernom.¹ Postupke rješavanja ćemo uvesti analizom svojstava i općeg rješenja Poissonove jednadžbe s pomoću Greenovih funkcija, a svrstat ćemo ih u četiri grupe: izravno rješavanje Laplaceove jednadžbe separacijom varijabli, rješavanje zadaća u neograničenom prostoru, određivanje Greenovih funkcija odslikavanjem i konformno preslikavanje. Sve postupke ćemo pojasniti karakterističnim primjerima koji rezultiraju jednostavnijim analitičkim izrazima.

4.1. JEDNADŽBE STATIČKOG ELEKTRIČNOG POLJA

Pod statičkim električnim poljem razumijevamo elektromagnetsko polje u kojem *nema gibanja naboja*. Tada ne teku nikakve struje (vrijedi $J = 0$), sve derivacije po

¹ U Prilogu C pogledati definicije i osnovne veličine tih sustava. Više o koordinatnim sustavima u P. Moon, D.E. Spencer: *Field Theory Handbook*, Springer-Verlag 1961.

vremenu su nula, pa iz jednadžbi (1.5.15a – d) i (1.5.17a – c) slijedi $\mathbf{H} = \mathbf{B} = 0$, a sustav Maxwellovih jednadžbi se svodi na

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho,\end{aligned}\tag{4.1.1,2}$$

uz relaciju građe

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},\tag{4.1.3}$$

gdje je ε dielektričnost materijala koja je za LIH (linearne izotropne i homogene) materijale² skalarna konstanta. Integralni oblik jednadžbi (4.1.1) i (4.1.2) jest

$$\begin{aligned}\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 0, \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V \rho dV.\end{aligned}\tag{4.1.4,5}$$

Ovdje je l zatvorena krivulja, a S površina koja obuhvaća volumen V .³ Iz početne postavke da u statičkom električnom polju ne postoji gibanje naboja slijedi podjela svih materijala u takvim poljima na dvije vrste: *vodiče i dielektrike (izolatore)*. U vodičima je pokretljivost naboja beskonačno velika, pa se svaka preraspodjela naboja odvija u beskonačno malom trenutku. Naboji u dielektricima su nepokretni i podložni samo mehanizmu polarizacije.⁴

4.1.1. Skalarni električni potencijal

Uvođenje skalarnog električnog potencijala⁵ φ u jednadžbe (4.1.1) i (4.1.2) uvelike olakšava rješavanje zadata u statičkim električnim poljima. U homogenim, izotropnim materijalima on zadovoljava *skalarnu diferencijalnu jednadžbu*

$$\nabla \varphi \nabla \varepsilon + \varepsilon \Delta \varphi = -\rho.\tag{4.1.6}$$

Za njezino rješenje potrebno je poznavati funkciju raspodjele dielektričnosti. U praktičnoj primjeni te jednadžbe najčešća su dva slučaja:

² U praktičnim primjenama statičkih električnih polja najčešće koristimo takve materijale. Zadaće s nelinearnim materijalima detaljnije ćemo analizirati u šestom i devetom poglavlju.

³ Jednadžba (4.1.5) poznata je kao Gaussov zakon.

⁴ Pogledati odjeljak 1.4. i članak 8.3.3.

⁵ Uvođenje antipotencijala u jednadžbe statičkog električnog polja nema praktičnog smisla jer time one i dalje ostaju vektorske diferencijalne jednadžbe s istim brojem nepoznatih funkcija kao i prije uvođenja antipotencijala. Pogledati poglavlje 2.

1. Polje u linearnom homogenom dielektriku sa slobodnim prostornim nabojem gustoće ρ_s . Tada se jednažba (4.1.6) svodi na *Poissonovu diferencijalnu jednažbu*⁶

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s}{\epsilon} . \quad (4.1.7)$$

2. Polje u linearnom homogenom dielektriku bez slobodnog prostornog naboja ($\rho_s = 0$). Tada se jednažba (4.1.6) svodi na *Laplaceovu diferencijalnu jednažbu* poznatu iz mnogih područja primjene teorijske fizike⁷

$$\Delta \varphi = 0 . \quad (4.1.8)$$

Veza između skalarnog potencijala i jakosti električnog polja u statičkom električnom polju slijedi iz izraza (2.1.3)

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi , \quad (4.1.9)$$

odnosno

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} , \quad (4.1.10)$$

gdje je $\mathbf{r}_0$ vektor položaja točke referentnog potencijala. Pomoću te jednažbe *možemo skalarni električni potencijal definirati kao radnju* koju trebamo obaviti da bi jedinični naboj koji se giba protiv polja doveli iz referentne točke u točku definiranu vektorom položaja $\mathbf{r}$. Naime, ako jedinični naboj moramo dovesti u smjeru suprotnom statičkom električnom polju, sila koju na tom putu moramo svladati mehaničkom silom je⁸ $-\mathbf{E}$, pa je radnja koju moramo obaviti određena jednažbom (4.1.10). Iz jednažbe (4.1.4) slijedi da taj integral ne ovisi o prijađenom putu između točaka $\mathbf{r}_0$ i $\mathbf{r}$, već samo o njihovom položaju (potencijalu). Ovdje naglašavamo da je jedino *razlika potencijala između dviju točaka, koju zovemo napon*, stvarno mjerljiva veličina. Iz jednažbe (4.1.7) slijedi izraz za određivanje razlike potencijala (napona) između proizvoljno odabranih točaka A i B

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} . \quad (4.1.11)$$

Za proračun potencijala u nekoj točki slobodan je izbor referentne točke, ali se utjecaj tog izbora gubi pri proračunu razlike potencijala (napona).

⁶ Pogledati članak 2.1.3. i Prilog A.

⁷ Pogledati Morse and Feshbach: *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill 1953.

⁸ Pogledati jednažbu (1.1.1).

4.1.2. Uvjeti na granici

Uvjete koje vektori električnog polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{D}$ moraju zadovoljavati na graničnoj plohi između dvaju materijala različitih dielektričnosti izveli smo u odjeljku 1.5, a definirani su jednadžbama (1.5.9a i 1.5.9c). Ukratko, na granici dvaju materijala tangencijalna komponenta jakosti električnog polja prelazi granicu kontinuirano

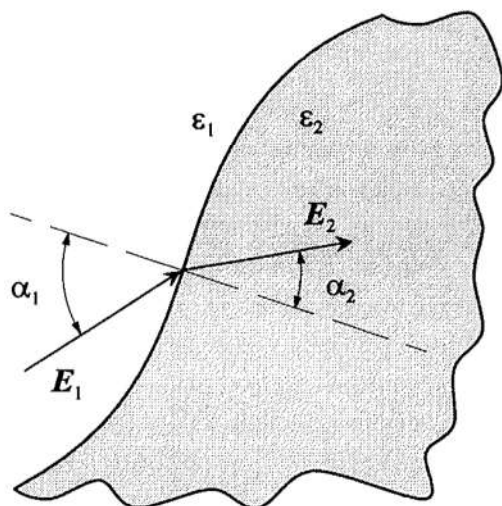
$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0. \quad (4.1.12)$$

Ako granična ploha rastavlja dielektrik i vodič, tada vrijedi $\mathbf{E} = 0$ unutar vodiča, pa u oba materijala mora tangencijalna komponenta $\mathbf{E}$ biti jednaka nuli. Sukladno tome *jakost električnog polja je u statičkim električnim poljima uvijek okomita na površinu vodiča*. Okomita komponenta električne indukcije čini skok za iznos plošne gustoće slobodnih naboja na granici

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma. \quad (4.1.13)$$

Pri primjeni toga uvjeta najčešće se javljaju dva slučaja:

1. Granična ploha razdvaja dva dielektrička materijala.



Slika 4.1.1. Prijelaz električnog polja preko granice dvaju dielektrika

Plošna gustoća slobodnih naboja na granici je u tom slučaju najčešće nula,⁹ pa okomita komponenta $\mathbf{D}$ prelazi granicu kontinuirano. Ako su α_1 i α_2 kutovi koje $\mathbf{D}$ (ili $\mathbf{E}$) zatvara s okomicom na granicu u ovom slučaju vrijedi¹⁰

⁹ U nekim primjenama se može pojaviti slobodni plošni naboj na granicama dvaju dielektrika zbog vanjskih uzroka (na primjer frikcija) ili zbog prolaza malih struja čiji tijek kroz izolaciju ne možemo izbjeći. Detaljnije objašnjenje pogledati u S. Attwood: *Electric and Magnetic Fields*, Dover Publications Inc, New York, 1967.

¹⁰ Ova relacija je analogna Snellovu zakonu loma svjetlosti i često se naziva zakon loma za silnice.

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\frac{D_{t1}}{D_{n1}}}{\frac{D_{t2}}{D_{n2}}} = \frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\epsilon_1 E_{t1}}{\epsilon_2 E_{t2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} . \quad (4.1.14)$$

2. Granična ploha razdvaja vodič i dielektrički materijal. U vodiču vrijedi $D = 0$, pa okomita komponenta vektora električne indukcije D na njegovoj površini mora biti jednaka *plošnoj gustoći slobodnog naboja σ na površini vodiča*.

Skalarni električni potencijal je kontinuiran i konačan u svim točkama polja u kojima nema točkastog naboja ili linijskog naboja,¹¹ pa u statičkom električnom polju mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

- 1) mora težiti nuli u beskonačnosti ako je raspodjela naboja konačna,
- 2) mora biti konstantan u svakom vodiču jer svi naboji miruju,
- 3) mora granicu dvaju različitih materijala prelaziti kontinuirano.

4.2. SLIKA STATIČKOG ELEKTRIČNOG POLJA

Veliku pomoć u razumijevanju statičkog električnog polja pruža prikazivanje pomoću slika polja. Sliku polja u trodimenzionalnom prostoru čine linije polja i ekvipotencijalne plohe. Linije polja mogu biti *silnice* (E -linije) ili *linije tijeka* (D -linije), a definiramo ih tako da su u svakoj točki prostora vektori E i D tangencijalni na te linije. U jednostavnom (LIH) materijalu te su linije identične, a razlikuju se na granici dvaju materijala ili u nehomogenom anizotropnom dielektriku. Linije polja određujemo pomoću diferencijalnih jednačbi

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} . \quad (4.2.1)$$

Ekvipotencijalne plohe definiramo kao skup svih točaka koje imaju isti skalarni električni potencijal i određujemo ih pomoću jednačbe

$$\varphi(x,y,z) = \text{konst.} \quad (4.2.2)$$

Pošto je razlika skalarnih potencijala između dvaju bliskih točaka ekvipotencijalne plohe nula, pomoću jednačbe (4.1.9) *zaključujemo da je vektor E (linija polja) uvijek okomit na ekvipotencijalnu plohu*.

Predočavanje trodimenzionalnih slika koje obuhvaćaju ekvipotencijalne plohe i linije polja vrlo je teško, pa najčešće pribjegavamo dvodimenzionalnim prikazima u ravnini.

¹¹ Pogledati poglavlje 2.

Takvi se prikazi sastoje od linija polja i ekvipotencijalnih linija koje čine mrežu ortogonalnih trajektorija, a nazivamo ih slika polja. Pri crtanju tih slika uobičajena je primjena sljedećeg dogovora:

- 1) ekvipotencijalne linije crtamo tako da je razlika potencijala susjednih linija jednaka za cijeli crtež,
- 2) linije polja crtamo tako da je promjena električnog tijeka između susjednih linija jednaka za cijeli crtež.

Ako formiramo sliku polja primjenom ovog dogovora, dobivamo kvalitativnu i kvantitativnu raspodjelu polja u prostoru.

Primjer 4.2.1. Slika polja točkastog naboja

U točki 2.4.2.1. izveli smo izraz (2.4.10b) za skalarni potencijal jediničnog točkastog naboja u slobodnom prostoru

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (4.2.3)$$

Ekvipotencijalne plohe definirane su izrazom

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} = C \Rightarrow r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 C} , \quad (4.2.4)$$

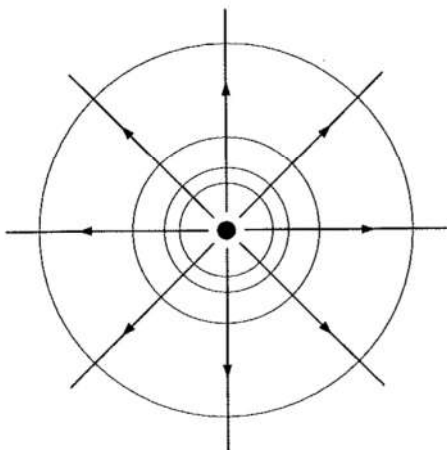
a predstavljaju kugle polumjera r . Pri dvodimenzionalnom prikazu te se plohe svode na kružnice. Za sliku polja odabiremo početni polumjer r_1 ekvipotencijalne linije 1 i iz izraza (4.2.4) odredimo njezin potencijal. Ako želimo polje prikazati s N ekvipotencijalnih linija, uz primjenu dogovora o jednakim razlikama potencijala među njima, polumjere tih linija određujemo pomoću

$$r_i = \frac{r_1}{1 - \frac{i-1}{N-1}} . \quad (4.2.5)$$

Jakost električnog polja jediničnog točkastog naboja određujemo pomoću izraza (4.1.9)

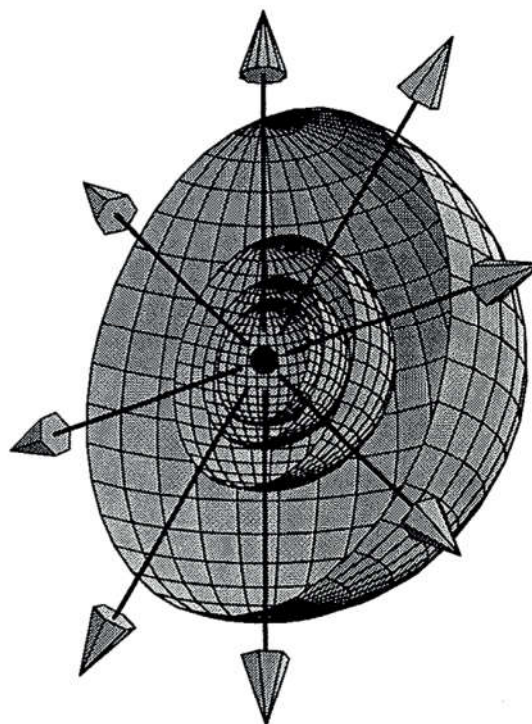
$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} . \quad (4.2.6)$$

Iz ovog izraza je vidljivo da *jakost električnog polja točkastog naboja uvijek ima radijalni smjer*, pa slijedi da su linije polja radijalni pravci. Ako želimo prikazati polje s N radijalnih pravaca, onda uz primjenu dogovora o jednakoj promjeni električnog tijeka među njima slijedi da kut među tim pravcima mora biti jednak i iznositi $2\pi/(N-1)$ radijana. Statičko električno polje jediničnog točkastog naboja u dvije dimenzije prikazali smo slikom 4.2.1.



Slika 4.2.1. Dvdimensionalni prikaz statičkog električnog polja točkastog naboja

U ovom jednostavnom slučaju moguće je formirati i trodimenzionalni prikaz polja na kojem zorno uočavamo da su ekvipotencijalne plohe kugle.¹²



Slika 4.2.2. Trodimenzionalni prikaz statičkog električnog polja točkastog naboja

U knjizi ćemo koristiti još dva načina predočavanja polja:

- 1) trodimenzionalni prikazu raspodjele potencijala u zadanoj ravnini, na primjer $\varphi = f(x, y, z = 0)$,

¹² Tim prikazom izbjegava se sličnost dvodimenzionalnih prikaza bitno različitih polja. Na primjer, prikaz polja beskonačnog linijskog naboja vrlo je sličan prikazu polja točkastog naboja, jer su ekvipotencijalne linije također kružnice a linije polja pravci. (Pogledati Primjer 4.7.2.2.) Jedina razlika u tim prikazima je udaljenost između ekvipotencijalnih linija, a to se na prvi pogled teško uočava.

- 2) prikaz raspodjele jakosti polja vektorima čija je dužina srazmjerna apsolutnoj vrijednosti jakosti polja u prostoru.

4.3. ENERGIJA POHRANJENA U STATIČKOM ELEKTRIČNOM POLJU

Za formiranje bilo kakve statičke raspodjele naboja u nekom sustavu nužan je prijelazni, dinamički proces dovođenja naboja na vodiče i u materijale (izolatore) tog sustava. Pritom teku struje, postoji i magnetsko polje, ali i struje i magnetsko polje iščezavaju uspostavom statičkog stanja. U članku 3.3.3. smo dokazali da je energija utrošena za uspostavu električnog polja¹³ jednaka

$$W_e = \int_V \left\{ \int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \right\} dV. \quad (4.3.1)$$

Za linearne materijale¹⁴ integral iz prethodne jednadžbe prelazi u

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV. \quad (4.3.2)$$

Taj izraz za energiju sadržanu u statičkom električnom polju možemo transformirati i izraziti pomoću naboja i potencijala. Primjena identiteta o divergenciji produkta skalarne i vektorske funkcije¹⁵ na produkt $\varphi \mathbf{D}$ daje

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla \varphi. \quad (4.3.3)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (4.1.2) i (4.1.9) u (4.3.3) dobivamo

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \rho \varphi - \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}). \quad (4.3.4)$$

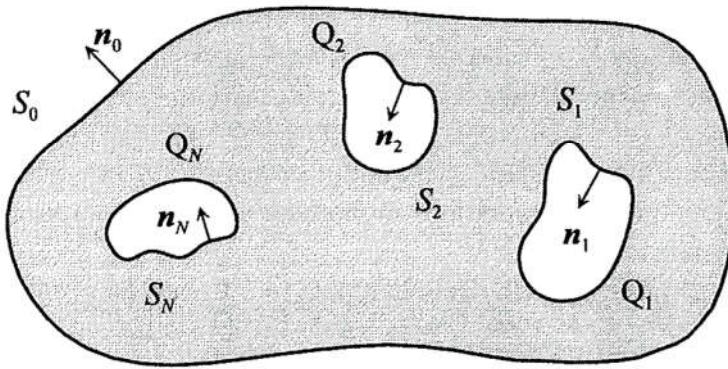
Pretpostavimo da se statičko električno polje sastoji od N nabijenih vodljivih tijela površina $S_1, \dots, S_N$, a da ploha S_0 obuhvaća čitav prostor polja (slika 4.3.1). U linearnom materijalu između vodljivih tijela može se nalaziti i slobodni naboj gustoće ρ . Uvrštavanjem izraza (4.3.4) u (4.3.2) slijedi

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV - \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) dV. \quad (4.3.5)$$

¹³ Pogledati jednadžbe (3.3.21) i (3.3.22).

¹⁴ Energija pohranjena pri uspostavi statičkog električnog polja u linearnom materijalu može se u potpunosti iz njega vratiti pri dezintegraciji tog sustava reverzibilnim procesom pa tu energiju zovemo i potencijalnom energijom. Pod linearnim materijalom razumijevamo materijal s linearnom ovisnošću $\mathbf{E}$ i $\mathbf{D}$.

¹⁵ Pogledati Prilog C.



Slika 4.3.1. Statičko električno polje N nabijenih vodljivih tijela

Primjena Gaussova teorema o divergenciji¹⁶ na tu jednadžbu rezultira s

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV - \frac{1}{2} \left\{ \oint_{S_0} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS + \sum_{k=1}^N \oint_{S_k} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \right\}. \quad (4.3.6)$$

Integral po površini S_0 jednak je nuli, budući je po početnoj pretpostavci ona izvan polja ($\mathbf{D} = 0$). U članku 1.4.3. objasnili smo ponašanje vodiča u električnom polju i pokazali da je vektor $\mathbf{E}$ okomit na vodič u svakoj točki njegove površine. Iz toga i jednadžbe (4.1.9) slijedi da između bliskih točaka vodiča nema razlike potencijala, odnosno *da je površina vodiča u statičkom električnom polju ekvipotencijalna ploha*. Primjenjujući taj zaključak na (4.3.6) dobivamo

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\{ \varphi_k \oint_{S_k} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \right\}, \quad (4.3.7)$$

gdje je φ_k potencijal k -tog vodljivog tijela. Uzimajući u obzir izraz (4.1.5) (Gaussov zakon) i smjer okomice na površinu S_k koja je usmjerena u vodljivo tijelo k slijedi

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k \varphi_k, \quad (4.3.8)$$

gdje je Q_k ukupni naboj vodljivog tijela k . Najčešći je slučaj kad u materijalu između vodljivih tijela nema slobodnog naboja ($\rho = 0$), pa je tada ukupna energija pohranjena u statičkom električnom polju u kojem se nalazi N nabijenih vodljivih tijela¹⁷

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k \varphi_k. \quad (4.3.9)$$

¹⁶ Pogledati Prilog C.

¹⁷ Ovaj izraz možemo primijeniti i za raspored točkastih naboja i on tada iskazuje energiju interakcije tih naboja.

Analizirajući prethodne izraze možemo uočiti više načina za određivanje energije pohranjene u statičkom električnom polju:

- 1) pomoću vektora polja, primjenom jednadžbe (4.3.2), tj. integracijom po cijelom volumenu u kojem postoji polje,
- 2) pomoću poznate raspodjele naboja i potencijala, primjenom izraza (4.3.8), tj. integracijom po volumenu u kojem postoji raspodjela slobodnog naboja i pomoću poznatih naboja i potencijala vodljivih tijela,
- 3) pomoću poznatog naboja i potencijala vodljivih tijela iz izraza (4.3.9) ako ne postoji slobodni naboj,
- 4) ako ploha S_0 ne obuhvaća čitav prostor polja za određivanje ukupne pohranjene energije trebamo dodati doprinos definiran integralom po S_0 iz jednadžbe (4.3.6).

4.3.1. Određivanje sila u statičkom električnom polju pomoću energije

U odjeljku 3.5. i članku 3.5.2. detaljno smo objasnili određivanje sila u statičkom električnom polju iz poznatih veličina polja i raspodjele naboja. Često nije moguće lako odrediti te veličine, pa u tim slučajevima možemo primijeniti određivanje sila pomoću energije pohranjene u statičkom električnom polju. Ta metoda temelji se na *zakonu o očuvanju energije* i načelu virtualnog pomaka poznatom iz mehanike.¹⁸ Ona omogućava određivanje resultantne sile, ali ne daje uvid u prostorni raspored sila.

Analizirajmo sustav statičkog električnog polja prikazan slikom 4.3.1. Zamislimo da je električna sila koja djeluje na jedno tijelo tog sustava pomaknula to tijelo za virtualno mali pomak δs u smjeru osi s . Ako je s -komponenta resultantne sile na to tijelo F_s ta je sila izvršila rad $\delta A_e = F_s \delta s$, pa vrijedi

$$F_s = \frac{\delta A_e}{\delta s} . \quad (4.3.10)$$

Rad električne sile δA_e možemo izraziti prirastom energije pohranjene u statičkom električnom polju i to u dva posebna slučaja:

1. *Naboji u sustavu ostaju konstantni (izolirani sustav).* To znači da smo vodiče sustava spojili na neki izvor i nakon postizanja statičkog stanja odspojili izvor. Svi pomaci u sustavu (rad) u tom su slučaju morali biti izvršeni na račun energije pohranjene u sustavu, pa vrijedi $\delta A_e = -\delta W_e$, odnosno

$$F_s = - \frac{\delta W_e}{\delta s} . \quad (4.3.11)$$

2. *Potencijali u sustavu ostaju konstantni (neizolirani sustav).* To znači da su vodiči

¹⁸ Pogledati P. Kulišić, *Mehanika i toplina*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

sustava ostali spojeni na izvor koji im održava potencijale konstantnim bez obzira na pomake. Da bi to bilo moguće, moraju se pri pomaku δs iz izvora dovesti dodatni naboji $\delta Q_1 \dots \delta Q_N$. Prema definiciji potencijala iz odjeljka 4.1. rad koji pritom izvori obave jest

$$\delta A_i = \sum_{k=1}^N \varphi_k \delta Q_k . \quad (4.3.12)$$

Prema zakonu o očuvanju energije taj se rad može utrošiti samo na rad električnih sila δA_e i povećanje akumulirane energije u polju

$$\delta A_i = \delta A_e + \delta W_e . \quad (4.3.13)$$

Iz izraza (4.3.9) slijedi da se akumulirana energija u polju povećala za

$$\delta W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varphi_k \delta Q_k , \quad (4.3.14)$$

pa slijedi da je $\delta A_e = \delta W_e$. Sukladno tome izraz

$$F_s = \frac{\delta W_e}{\delta s} , \quad (4.3.15)$$

daje komponentu rezultantne sile u smjeru osi s u ovom slučaju.

4.4. KAPACITET

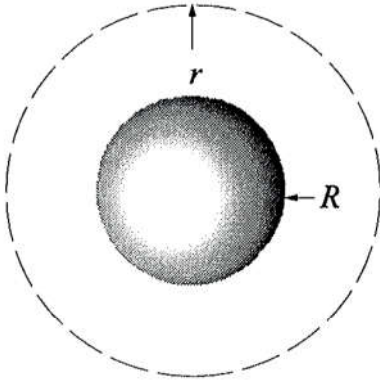
U prethodnom smo poglavlju analizirajući energiju pohranjenu u statičkom električnom polju zaključili da je za nabijanje vodiča, odnosno formiranje statičkog električnog polja, potrebno uložiti energiju. Sukladno tome skalarni električni potencijal vodiča raste dovodenjem naboja na njih. Najjednostavniji sustav statičkog električnog polja sastoji se od jednog vodljivog tijela u linearnom dielektričkom materijalu. Zbog linearnosti vektor jakosti električnog polja $\mathbf{E}$ je u svakoj točki dielektričnog materijala proporcionalan naboju na vodiču, pa iz (4.1.10) slijedi da je potencijal vodiča φ proporcionalan naboju vodiča Q

$$Q = C \varphi . \quad (4.4.1)$$

Konstantu $C = Q/\varphi$ nazivamo *kapacitet* (koristi se i izraz *kapacitivnost*) promatranog tijela. Jedinica za kapacitet je *farad* (F), ($1\text{F} = 1\text{C}/1\text{V}$). U linearnim dielektričkim materijalima *kapacitet je geometrijska karakteristika statičkog električnog polja i dielektričnosti*, a nije ovisan o naboju i potencijalu tijela.

Primjer 4.4.1. Kapacitet usamljene vodljive kugle

Usamljena metalna kugla polumjera R nabijena nabojem Q nalazi se u dielektričkom materijalu dielektričnosti ϵ prema slici 4.4.1. Iz sferne simetrije rasporeda slijedi da je naboj jednoliko raspodijeljen po površini kugle, te da su vektori $\mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$ radijalni.



Slika 4.4.1. Usamljena metalna kugla

Za točke koje su za r ($r \geq R$) udaljene od središta kugle primjenom jednadžbe (4.1.5) na plohu S jednaku površini kugle koncentrične s vodljivom kuglom i polumjera r , slijedi

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{r}{r} . \quad (4.4.2)$$

Možemo reći da je polje izvan kugle jednako kao da je točkasti naboj Q u središtu kugle u homogenom materijalu dielektričnosti ϵ . Potencijal kugle stoga određujemo pomoću jednadžbe (4.2.3)

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon R} \quad (4.4.3)$$

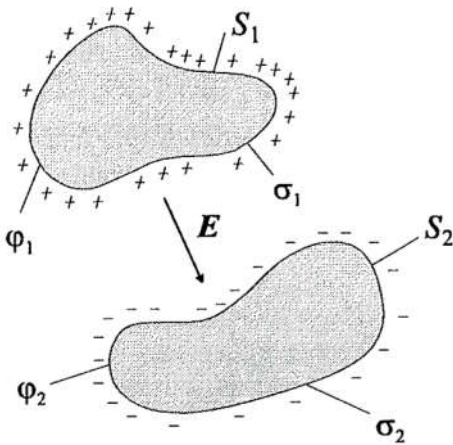
pa je

$$C = \frac{Q}{\varphi(R)} = 4\pi\epsilon R , \quad (4.4.4)$$

konačni izraz za kapacitet usamljene vodljive kugle.

4.4.1. Kapacitet kondenzatora

Sposobnost akumuliranja energije u električnom polju koristimo u napravama koje nazivamo kondenzatori. *Idealni kondenzator* je sustav dvaju vodljivih tijela, nabijenih istim nabojima Q suprotnih predznaka koji se nalaze u beskonačnom prostoru ispunjenom materijalom dielektričnosti ϵ (slika 4.4.2). Vodljiva tijela nazivamo elektrodama (oblogama).



Slika 4.4.2. Kondenzator kao sustav dviju usamljenih elektroda

Električno polje E u tom sustavu povezano je s nabojima na vodičima, a napon (razlika potencijala) između vodiča povezan je s poljem E preko jednadžbe (4.1.10). Ako je materijal između elektroda kondenzatora linearan, vektor E je u svakoj točki proporcionalan naboju Q (ili $-Q$), a to znači da je i napon između elektroda proporcionalan naboju

$$Q = C(\varphi_Q - \varphi_{-Q}) = CU. \quad (4.4.4)$$

Konstantu C nazivamo *kapacitetom kondenzatora*. On ovisi o obliku, dimenziji i međusobnoj udaljenosti elektroda, te o dielektričnosti materijala između elektroda. Prema (4.3.9) energija pohranjena u tom sustavu iznosi

$$W_e = \frac{1}{2}[Q\varphi_Q + (-Q)\varphi_{-Q}] = \frac{1}{2}QU, \quad (4.4.5)$$

pa pomoću jednadžbe (4.4.4) možemo energiju pohranjenu u električnom polju kondenzatora izraziti kao

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}. \quad (4.4.6)$$

Te jednadžbe koristimo pri proračunu sila u kondenzatoru pomoću pohranjene energije. Iz izraza (4.3.11) i (4.3.15) slijedi da silu u smjeru osi s u kondenzatoru kapaciteta C možemo odrediti kao

$$F_s = -\left\{\frac{\partial W_e}{\partial s}\right\}_{Q=\text{konst.}} = -\frac{1}{2}Q^2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{C}\right), \quad (4.4.7)$$

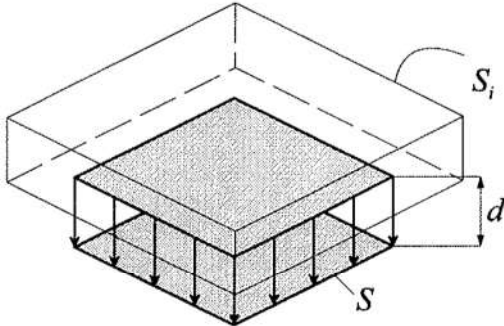
za izolirani kondenzator i kao

$$F_s = \left\{\frac{\partial W_e}{\partial s}\right\}_{U=\text{konst.}} = \frac{1}{2}U^2\frac{\partial C}{\partial s}, \quad (4.4.8)$$

za neizolirani kondenzator.

Primjer 4.4.2. Idealni pločasti kondenzator

Pločasti kondenzator čine dvije paralelne ravne vodljive ploče površine S , čija je međusobna udaljenost d (slika 4.4.3), a među njima se nalazi materijal dielektričnosti ϵ .



Slika 4.4.3. Idealni pločasti kondenzator

Kad govorimo o idealnom pločastom kondenzatoru zamišljamo da su ekvipotencijalne plohe u cijelom kondenzatoru ravnine paralelne elektrodama, a silnice pravci okomiti na elektrode. To, naravno, nije točno¹⁹ u blizini krajeva kondenzatora, ali u području udaljenom od krajeva polje je jednako kao da su elektrode beskonačno velike. Ako je udaljenost d među pločama puno manja od dimenzija ploča, možemo zanemariti rubne učinke i smatrati pločasti kondenzator idealnim. Da bismo mogli odrediti kapacitet idealnog pločastog kondenzatora primjenjujemo jednadžbu (4.1.5) uz izbor plohe integracije S_i prema slici 4.4.3. Slijedi

$$\oint_{S_i} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q = DS \quad \Rightarrow \quad D(x) = \frac{Q}{S}, \quad (4.4.9)$$

unutar idealnog pločastog kondenzatora, a izvan je $\mathbf{D} = 0$. Unutar kondenzatora je jakost električnog polja konstantna

$$\mathbf{E}(x) = \frac{Q}{\epsilon S}, \quad (4.4.10)$$

pa je kapacitet idealnog pločastog kondenzatora

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\int_0^d E(x) dx} = \frac{Q}{\int_0^d \frac{Q}{\epsilon S} dx} = \epsilon \frac{S}{d}. \quad (4.4.11)$$

¹⁹ Za točniji proračun pločastog kondenzatora konačnih dimenzija moramo koristiti približne numeričke metode. Pogledati Primjer 10.2.1.

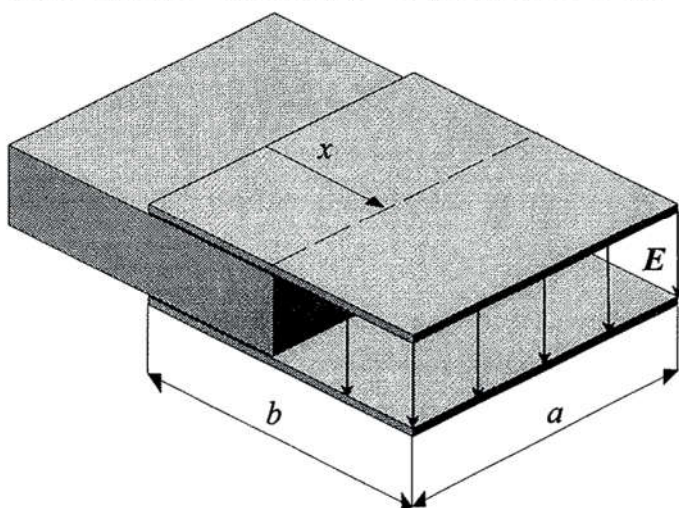
Električno polje u idealnom pločastom kondenzatoru nazivamo i *homogenim poljem*. Na tom primjeru možemo jednostavno prikazati primjenjivost izraza za proračun sile na elektrode kondenzatora. Ako je idealni pločasti kondenzator izoliran, sila na njegove elektrode je

$$F_d = -\frac{1}{2} Q^2 \frac{\partial}{\partial d} \frac{1}{C} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon S} . \quad (4.4.12)$$

Negativni predznak znači da sila djeluje u smjeru smanjenja razmaka između ploča, odnosno povećanja kapaciteta. Ako je idealni pločasti kondenzator priključen na izvor stalnog napona U , sila na njegove elektrode je

$$F_d = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{1}{2} U^2 \epsilon \frac{S}{d^2} , \quad (4.4.13)$$

pa sila i u tom slučaju djeluje u smjeru smanjenja razmaka između ploča. Razmotrimo sada silu na dielektričku ploču ($\epsilon_r > 1$) umetnutu djelomično u idealni pločasti kondenzator ispunjen zrakom ($\epsilon_r = 1$) prema slici 4.4.4.



Slika 4.4.4. Dielektrička ploča unutar pločastog kondenzatora

Najprije moramo odrediti kapacitet takvog kondenzatora. Razlika potencijala između ploča jednaka je duž cijelog kondenzatora, pa je jakost električnog polja jednaka u cijelom kondenzatoru i iznosi

$$E = \frac{U}{d} . \quad (4.4.14)$$

Gustoća tijeka D u dielektriku iznosi $\epsilon_0 \epsilon_r E$, a u zraku $\epsilon_0 E$. Ukupni naboj na elektrodi određujemo primjenom jednadžbe (4.1.5)

$$Q = \epsilon_0 a(b-x) + \epsilon_0 \epsilon_r a x . \quad (4.4.15)$$

Kapacitet kondenzatora možemo odrediti kao

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{ab}{d} + (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \frac{ax}{d}, \quad (4.4.16)$$

pa je sila na ploču

$$F_x = \frac{1}{2} U^2 (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \frac{a}{d}, \quad (4.4.16)$$

za neizolirani kondenzator. Za izolirani kondenzator ta sila iznosi

$$F_x = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_0 a [b + (\epsilon_r - 1)x]^2}. \quad (4.4.17)$$

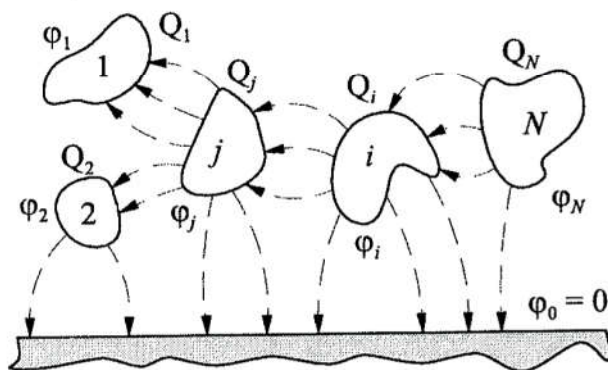
U oba slučaja sila djeluje tako da nastoji uvući ploču u kondenzator, čime je potvrđen zaključak²⁰ da materijal veće dielektričnosti nastoji zbog djelovanja električnog polja popuniti prostor koji zauzima materijal manje dielektričnosti. Korištenjem izraza za silu možemo izračunati i radnju potrebnu da bismo ploču potpuno uvukli u kondenzator. U slučaju neizoliranog kondenzatora ta radnja iznosi

$$A = \int_0^b F_x dx = \frac{1}{2} U^2 (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \frac{ab}{d} = \frac{1}{2} (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 abd = \frac{1}{2} PEV, \quad (4.4.18)$$

što je prema (3.3.17) jednako energiji potrebnoj za polarizaciju dielektričke ploče. Za izolirani kondenzator izvod je sličan.

4.4.2. Sustav vodiča i parcijalni kapaciteti

Sada ćemo razmotriti odnose u statičkom električnom polju koje je formirano od N odvojenih nabijenih vodljivih tijela.



Slika 4.4.5. Električno polje N nabijenih vodiča i referentne plohe

²⁰ Pogledati članak 3.5.2.

Sva su ta tijela električki povezana, naboj svakog tijela nastao je utjecajem naboja sa svih ostalih tijela, a statičko električno polje nastaje djelovanjem naboja sa svih vodiča. U takvom sustavu biramo referentnu ekvipotencijalnu plohu kojoj pridajemo nulti potencijal. Najčešće za tu plohu odabiremo površinu zemlje, jer u zadaćama statičkih električnih polja zemlju smatramo idealnim vodičem (slika 4.4.5). Svako vodljivo tijelo možemo podijeliti na N dijelova iz kojih polaze D -linije na ostalih $N - 1$ tijela i na referentnu plohu kojoj pridjeljujemo indeks 0, pa za ukupni naboj Q_i i -tog vodljivog tijela možemo pisati

$$Q_i = Q_{i0} + \dots + Q_{i,i-1} + Q_{i,i+1} + \dots + Q_{iN} \quad ; \quad i = 0, \dots, N . \quad (4.4.19)$$

U prethodnim člancima tog odjeljka pokazali smo da je u linearnim dielektričkim materijalima naboj proporcionalan razlici potencijala, pa sada možemo uvesti pojam *parcijalnih kapaciteta* kao

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{Q_{ij}}{\varphi_i - \varphi_j} & ; \quad i = 0, \dots, N \quad ; \quad j = 0, \dots, i-1, i+1, \dots, N , \\ 0 & ; \quad i = j . \end{cases} \quad (4.4.20)$$

Zbog simetrije utjecaja vrijedi $C_{ij} = C_{ji}$. Uvrštenjem *parcijalnih kapaciteta* u (4.4.19) dobivamo

$$Q_i = \sum_{j=0}^N C_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) \quad ; \quad i = 0, \dots, N . \quad (4.4.21)$$

U mnogim primjenama pogodno je preurediti taj izraz tako da linearnu ovisnost naboja i razlika potencijala između vodiča prevedemo u linearnu ovisnost naboja i potencijala pojedinih vodiča

$$Q_i = \left\{ \sum_{j=0}^N C_{ij} \right\} \varphi_i + \sum_{j=0}^N (-C_{ij}) \varphi_j = \sum_{j=0}^N c_{ij} \varphi_j \quad ; \quad i = 0, \dots, N , \quad (4.4.22)$$

gdje su c_{ij} *koeficijenti indukcije*,²¹ budući da c_{ij} izražava naboj induciran na i -tom vodljivom tijelu ako je j -to vodljivo tijelo na jediničnom potencijalu dok su sva ostala tijela na nultom potencijalu. Vrijedi

$$c_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=0}^N C_{ik} = c_{ii} & ; \quad i = 0, \dots, N \quad ; \quad j = i , \\ -C_{ij} & ; \quad i = 0, \dots, N \quad ; \quad j = 0, \dots, i-1, i+1, \dots, N . \end{cases} \quad (4.4.23)$$

²¹ Originalno ih je definirao Maxwell, pogledati J.C. Maxwell: *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, 1892.

Koeficijenti c_{ii} nemaju značenje induciranog naboja na vodljivom tijelu od sebe sama, pa ih nazivamo *koeficijentima kapaciteta*.

U statičkom električnom polju koje smo ovdje analizirali zbroj svih naboja u sustavu je nula,²² pa za ukupni naboj na referentnoj plohi vrijedi

$$Q_0 = -\sum_{i=1}^N Q_i . \quad (4.4.24)$$

Uzimajući u obzir tu jednadžbu dobivamo sustav s N nepoznatih naboja i s $N + 1$ nepoznatih potencijala. Uobičajeno je uvesti $\varphi_0 = 0$ i redefinirati ostale potencijale kao potencijalne razlike prema referentnoj plohi. Time eliminiramo prvi redak i stupac u sustavu (4.4.22) i svodimo ga na

$$Q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_j \quad ; \quad i = 1, \dots, N , \quad (4.4.25)$$

s $N(N + 1)/2$ različitih koeficijenata ($c_{ij} = c_{ji}$). S pomoću tih koeficijenata možemo izraziti energiju pohranjenu u sustavu uvrštenjem (4.4.25) u (4.3.9)

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_i \varphi_j . \quad (4.4.26)$$

Ovaj izraz široko primjenjujemo u inženjerskoj praksi jer uključuje jednostavno mjerljive veličine.

Iz jednadžbi (4.4.25) i (4.4.26) slijedi da takav sustav vodiča možemo prikazati nadomjesnom shemom parcijalnih kapaciteta. Potencijal i -tog čvora u takvoj shemi odgovara potencijalu i -tog vodiča u polju a parcijalni kapacitet C_{ik} spajamo između čvorova i i k . Energija pohranjena u polju jednaka je energiji pohranjenoj u kapacitetima nadomjesne sheme. Sustav (4.4.25) možemo napisati u matričnom obliku

$$[Q] = [c][\varphi] , \quad (4.4.27)$$

gdje je $[Q]$ vektor naboja vodljivih tijela, $[c]$ matrica koeficijenata indukcije s elementima c_{ij} definiranim izrazom (4.4.23), a $[\varphi]$ vektor potencijala vodljivih tijela. Množenjem tog sustava slijeva matricom $[c]^{-1}$ dobivamo linearnu svezu potencijala i naboja

$$[\varphi] = [P][Q] , \quad (4.4.28)$$

gdje je $[P] = [c]^{-1}$. Elemente matrice $[P]$ nazivamo *koeficijenti potencijala*, a s koeficijentima indukcije i kapaciteta vezani su operacijom inverzije matrica

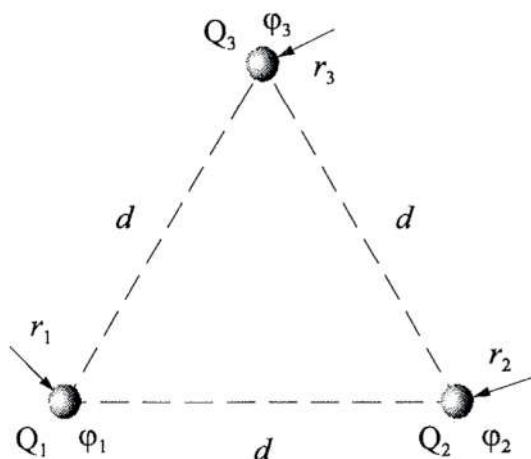
²² Takav sustav nazivamo potpunim sustavom.

$$P_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{(F_{ji})_c}{|c|} \quad ; \quad c_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{(F_{ji})_P}{|P|} , \quad (4.4.29)$$

gdje su $(F_{ji})_P$ i $(F_{ji})_c$ kofaktori²³ od članova P_{ji} i c_{ji} u determinantama matrica $[P]$ i $[c]$.

Primjer 4.4.3. Sustav od tri udaljene usamljene kugle

Ovdje ćemo razmotriti jednostavan slučaj u kojem se tri vodljive kugle polumjera r nalaze u vrhovima istostraničnog trokuta prema slici 4.4.6. uz pretpostavku da je udaljenost d među kuglama puno veća od njihovih polumjera.



Slika 4.4.6. Tri vodljive kugle

Uz pretpostavku $d \gg r$ kugle se ponašaju kao točkasti naboji u njihovu središtu.²⁴ Kao referentnu plohu odabiremo kuglinu plohu beskonačnog polumjera. Stoga možemo za potencijale kugli napisati sljedeći sustav jednažbi

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{Q_1}{4\pi \epsilon r_1} + \frac{Q_2}{4\pi \epsilon d} + \frac{Q_3}{4\pi \epsilon d} , \\ \varphi_2 &= \frac{Q_1}{4\pi \epsilon d} + \frac{Q_2}{4\pi \epsilon r_2} + \frac{Q_3}{4\pi \epsilon d} , \\ \varphi_3 &= \frac{Q_1}{4\pi \epsilon d} + \frac{Q_2}{4\pi \epsilon d} + \frac{Q_3}{4\pi \epsilon r_3} . \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

Matrica tog sustava jednažbi, koja je ujedno i matrica potencijalnih koeficijenata, jest

²³ Detaljnije o inverziji matrica pogledati u S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

²⁴ Odnose bliskih kugli rješavamo tehnikom odslikavanja koju ćemo opisati u članku 4.8.3.

$$[P] = \frac{1}{4\pi\epsilon} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{r_2} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{r_3} \end{bmatrix}, \quad (4.4.31)$$

a njezinom²⁵ inverzijom dobivamo matricu koeficijenata indukcije

$$[c] = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_1 r_2 r_3} - \frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{2}{d^3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_2 r_3} - \frac{1}{d^2} & \frac{1}{dr_3} + \frac{1}{d^2} & -\frac{1}{dr_2} + \frac{1}{d^2} \\ -\frac{1}{dr_3} + \frac{1}{d^2} & \frac{1}{r_1 r_3} - \frac{1}{d^2} & -\frac{1}{dr_1} + \frac{1}{d^2} \\ -\frac{1}{dr_2} + \frac{1}{d^2} & -\frac{1}{dr_1} + \frac{1}{d^2} & \frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{d^2} \end{bmatrix}.$$

Iz matrice koeficijenata indukcije možemo pomoću (4.4.23) odrediti parcijalne kapacitete između kugli, kao i kapacitete kugli prema referentnoj plohi

$$C_{10} = c_{11} - c_{12} - c_{13} = D \left[\frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{d} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) - \frac{3}{d^2} \right]; \quad C_{12} = -c_{12}; \quad C_{13} = -c_{13},$$

$$C_{20} = c_{22} - c_{21} - c_{23} = D \left[\frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{d} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) - \frac{3}{d^2} \right]; \quad C_{21} = -c_{21}; \quad C_{23} = -c_{23},$$

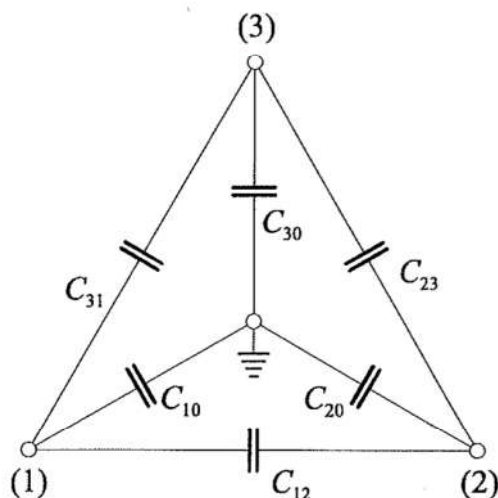
$$C_{30} = c_{33} - c_{31} - c_{32} = D \left[\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{d} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - \frac{3}{d^2} \right]; \quad C_{31} = -c_{31}; \quad C_{32} = -c_{32}.$$

gdje je

$$D = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_1 r_2 r_3} - \frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{2}{d^3}}.$$

²⁵ U tim jednadžbama smo za udaljenost između kugli uvrstili d , što odgovara srednjem doprinosu. Doprinos točkastog naboja Q_1 kugli naboja Q_2 varira između granica $1/(d+r_2) < 4\pi\epsilon P_{21} < 1/(d-r_2)$. Za vrijednosti $r_2 < 0.1d$ za jednake naboje Q_1 i Q_2 potencijal ϕ_2 varira od $+1\%$ do -0.83% u odnosu na srednji potencijal koji smo odredili iz srednjeg doprinosa, pa su te jednadžbe zadovoljavajuća aproksimacija ako vrijedi $d > 10r_2$.

Na kraju, ovaj prostorni raspored kugli (statičko električno polje) možemo prikazati nadomjesnom shemom kapaciteta prema slici 4.4.7.



Slika 4.4.7. Nadomjesna shema statičkog električnog polja triju kugli

U njoj su potencijali kugli 1, 2 i 3 jednaki potencijalima čvorova 1, 2 i 3, a energije pohranjene u kapacitetima nadomjesne sheme i energije pohranjene u prostoru u kojem vlada električno polje jednake.

4.5. RJEŠAVANJE STATIČKIH ELEKTRIČNIH POLJA

Pod rješavanjem statičkih električnih polja razumijevamo određivanje veličina polja koje, najčešće, provodimo u sljedećim koracima:

1. Određivanje funkcije skalarnog električnog potencijala φ .
2. Određivanje funkcije jakosti električnog polja E korištenjem jednadžbe (4.1.9).
3. Određivanje ostalih potrebnih veličina (gustoće naboja, električne sile, kapaciteti...) iz rješenja prethodnih koraka.

Takav pristup rješavanju svodi se na nalaženje rješenja Poissonove²⁶ (Laplaceove) jednadžbe. Stoga ćemo najprije analizirati neke značajke te jednadžbe.

4.5.1. Superpozicija rješenja Poissonove jednadžbe

Superpozicija rješenja Poissonove jednadžbe²⁷ (4.1.7) vrijedi u linearnim materijalima. Pretpostavimo gustoću slobodnih naboja u obliku linearne kombinacije

$$\rho = \sum_{i=1}^N a_i \rho_i, \quad (4.5.1)$$

²⁶ Pogledati jednadžbe (4.1.7) i (4.1.8).

²⁷ Pogledati Prilog A, točku 4.

gdje su a_i , ($i = 1 \dots N$) proizvoljne konstante. Neka u sustavu statičkog električnog polja djeluju slobodni naboji gustoća ρ_{si} , ($i = 1 \dots N$). Ako njima odgovaraju rješenja φ_i , ($i = 1 \dots N$), onda vrijedi

$$\Delta \varphi_i = -\frac{\rho_{si}}{\epsilon} \quad ; \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.5.2)$$

Ako i -tu jednadžbu ovog sustava pomnožimo s koeficijentom a_i , i zbrojimo sve jednadžbe, slijedi

$$\sum_{i=1}^N \{a_i \Delta \varphi_i\} = \Delta \left\{ \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i \right\} = -\frac{1}{\epsilon} \left\{ \sum_{i=1}^N a_i \rho_{si} \right\}. \quad (4.5.3)$$

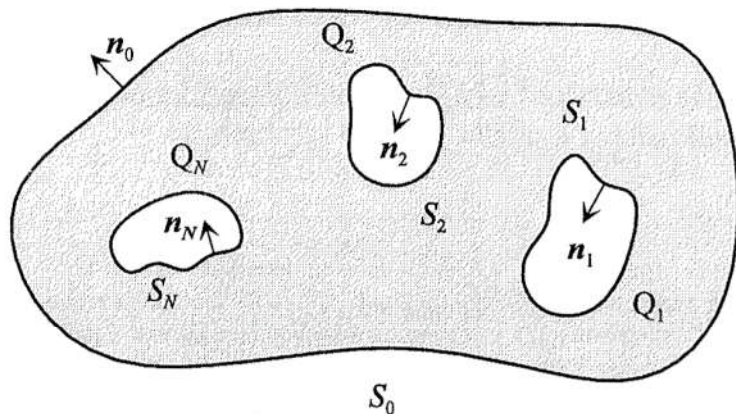
Iz jednadžbi (4.5.1 – 3) slijedi: ako su φ_i ($i = 1 \dots N$) rješenja Poissonove jednadžbe koja su uzrokovali slobodni naboji ρ_{si} , ($i = 1 \dots N$) onda linearnoj kombinaciji pobuda koju smo zadali jednadžbom (4.5.1) odgovara rješenje oblika

$$\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i. \quad (4.5.4)$$

Tu karakteristiku rješenja Poissonove jednadžbe nazivamo načelo superpozicije. *To načelo vrijedi za sve pojave koje se mogu opisati linearnim diferencijalnim jednadžbama.*

4.5.2. Jedinostvenost rješenja Poissonove i Laplaceove jednadžbe

U rješavanju polja možemo primijeniti različite postupke i doći do, prividno, različitih matematičkih izraza. Ovdje ćemo dokazati da ista pobuda linearnog sustava statičkog električnog polja uvijek uzrokuje isto polje u njemu, pa sva rješenja do kojih smo došli različitim načinima moraju biti jednakovrijedna. Analizirajmo sustav statičkog električnog polja prikazan na slici 4.5.1.



Slika 4.5.1. Opći sustav statičkog električnog polja

Neka se unutar volumena V ograničenog površinom S koja se sastoji od više površina $S_0, S_1, \dots, S_N$ nalazi linearni homogeni dielektrički materijal dielektričnosti ϵ i neka se unutar V nalazi slobodni naboj gustoće ρ .²⁸ Pretpostavimo da postoje dva različita rješenja φ_1 i φ_2 Poissonove jednadžbe u V . Mora vrijediti

$$\Delta \varphi_1 = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad ; \quad \Delta \varphi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon} , \quad (4.5.5)$$

pa oduzimanje tih jednadžbi rezultira s

$$\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2 = \Delta (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 . \quad (4.5.6)$$

Dakle, razlika rješenja mora zadovoljavati Laplaceovu jednadžbu. Rješenje statičkog električnog polja je jedinstveno ako je²⁹ $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ili $\varphi_1 - \varphi_2 = konst.$, pa ispitajmo pod kojim uvjetima to možemo postići. Ako u prvi Greenov identitet³⁰

$$\oint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \int_V [u \Delta v + \nabla u \nabla v] dV , \quad (4.5.7)$$

uvrstimo $u = v = \varphi_1 - \varphi_2$ slijedi

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\partial (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n} dS = \int_V [\nabla (\varphi_1 - \varphi_2)]^2 dV . \quad (4.5.8)$$

Desna strana te jednadžbe je nula kada vrijedi

$$\nabla (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 . \quad (4.5.9)$$

Taj uvjet možemo ispuniti samo kad razlika rješenja $\varphi_1 - \varphi_2$ nije funkcija koordinata, odnosno kad vrijedi da je razlika $\varphi_1 - \varphi_2$ konstantna na cijelom volumenu V , a to je upravo slučaj koji nas zanima. Lako možemo ustanoviti da je lijeva strana jednadžbe (4.5.8) jednaka nuli u sljedećim karakterističnim slučajevima:

1. $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, odnosno $\varphi_1 = \varphi_2$ u svim točkama površine S . Tada i u cijeloj domeni V vrijedi $\varphi_1 = \varphi_2$.
2. $\partial \varphi_1 / \partial n - \partial \varphi_2 / \partial n = 0$, odnosno $\partial \varphi_1 / \partial n = \partial \varphi_2 / \partial n$ u svim točkama površine S . Tada u cijeloj domeni V vrijedi $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_0$.
3. $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ na jednom dijelu površine S , a $\partial \varphi_1 / \partial n - \partial \varphi_2 / \partial n = 0$ na ostatku površine S . Tada i u cijeloj domeni V vrijedi $\varphi_1 = \varphi_2$.

Sukladno tome *rješenje Poissonove (Laplaceove) jednadžbe je jedinstveno ako su na rubovima domene proračuna zadani rubni uvjeti definirani u ova tri karakteristična*

²⁸ ρ može biti i nula u svim točkama V (Laplaceova jednadžba).

²⁹ Pogledati jednadžbu (4.1.9).

³⁰ Pogledati Prilog C.

slučaja. Na osnovi toga možemo razlikovati tri formulacije rubnih uvjeta³¹ u rješavanju Poissonove jednačbe:

1. *Dirichletovi*³² uvjeti: Rješenje Poissonove jednačbe jedinstveno je u domeni proračuna V ako je zadan potencijal na zatvorenoj površini koja obuhvaća domenu proračuna.
2. *Neumannovi*³³ uvjeti: Rješenje Poissonove jednačbe je u domeni proračuna V jedinstveno do na konstantu ako je zadano $\partial\varphi/\partial n$ na zatvorenoj površini koja obuhvaća domenu proračuna.
3. *Miješani uvjeti*: Rješenje Poissonove jednačbe jedinstveno je u domeni proračuna ako je na jednom dijelu zatvorene površine S koja obuhvaća domenu proračuna zadan potencijal, $\partial\varphi/\partial n$ na ostatku S .

U svakoj od tih formulacija problema vektori $\mathbf{E}$ i $\mathbf{D}$ će također biti jedinstveni u domeni proračuna V i na zatvorenoj površini S koja obuhvaća V .³⁴

Izravna posljedica jedinstvenosti rješenja Poissonove jednačbe je poučak *da se statičko električno polje ne mijenja ako bilo koji dio ekvipotencijalne plohe (ili cijelu) prekrijemo beskonačno tankim slojem metala*. Naime, ako dovedemo sloj metala na površinu koja je već ekvipotencijalna, zbog svojstva metala da su u statičkom električnom polju ekvipotencijalni, potencijal se na toj površini neće promijeniti. Zbog jedinstvenosti rješenja Poissonove jednačbe potencijal se neće promijeniti ni u jednoj točki polja. Analogno tome, ako u statičko električno polje stavimo metalno tijelo čija se površina podudara s ekvipotencijalnom plohom polja bez tijela, potencijal će u svim točkama na površini i izvan tog tijela ostati isti.³⁵

4.5.3. Integral Poissonove jednačbe i Greenove funkcije

U odjeljku 2.5. odredili smo opće rješenje skalarne valne jednačbe.³⁶ Poissonovu diferencijalnu jednačbu možemo promatrati kao posebni slučaj skalarne valne jednačbe u kojem ne postoje derivacije po vremenu, pa njezino opće rješenje možemo izvesti iz jednačbe (2.5.8)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \varepsilon \oint_S \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS' . \quad (4.5.10)$$

To znači da potencijal zadane raspodjele naboja u ograničenom prostoru možemo

³¹ Pogledati Prilog A, točku 6.

³² Ovaj uvjet je dobio ime po njemačkom matematičaru G.L. Dirichletu (1805 – 1859)

³³ Ovaj uvjet dobio je ime po njemačkom fizičaru F. Neumannu (1798 – 1895)

³⁴ Potrebno je uočiti da dio, ili cijela površina S , mogu biti u beskonačnosti.

³⁵ Tu smo činjenicu već iskoristili pri određivanju kapaciteta usamljene kugle pomoću polja točkastog naboja u odjeljku 4.4. Tamo smo je izveli iz Gaussova zakona.

³⁶ Pogledati izraze (2.5.1a) i (2.5.8).

izračunati kao zbroj doprinosa zadane raspodjele naboja u neograničenom prostoru (prvi član rješenja) i doprinosa na granici prostora S^{37} koji nadomješta utjecaj svih vanjskih izvora polja. Sloboda u definiranju Greenove funkcije G^{38} omogućava pojednostavnjenje proračuna plošnog integrala u (4.5.10) pri rješavanju Dirichletove i Neumannove rubne zadaće. Za *Dirichletovu rubnu zadaću* propisujemo

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad ; \quad \mathbf{r}' \in S, \quad (4.5.11)$$

pa potencijal u tom slučaju možemo odrediti pomoću

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \varepsilon \oint_S \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS'. \quad (4.5.12)$$

Pri rješavanju *Neumannove rubne zadaće* (zadane su derivacije potencijala na granici) moramo biti oprezniji pri propisivanju rubnog uvjeta za G . Najjednostavnijim izborom

$$\frac{\partial G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} = 0 \quad ; \quad \mathbf{r}' \in S, \quad (4.5.13)$$

nije moguće zadovoljiti osnovnu jednadžbu Greenovih funkcija statičkog električnog polja,³⁹ pa usvajamo

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\varepsilon}, \quad (4.5.14)$$

budući da integracijom po zatvorenoj površini S te jednadžbe dobivamo

$$\oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' = -\frac{1}{\varepsilon}. \quad (4.5.15)$$

Sukladno tome najjednostavniji rubni uvjet za G koji možemo propisati pri rješavanju Neumannove rubne zadaće jest

$$\frac{\partial G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} = -\frac{1}{\varepsilon S} \quad ; \quad \mathbf{r}' \in S. \quad (4.5.16)$$

Tada je rješenje za potencijal

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \varepsilon \oint_S \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' + \frac{1}{S} \oint_S \varphi(\mathbf{r}') dS'. \quad (4.5.17)$$

³⁷ Dio granice može biti i u beskonačnosti.

³⁸ Pogledati jednadžbu (2.5.6).

³⁹ Pogledati jednadžbu (2.5.5).

Zadnji član tog rješenja predstavlja srednju vrijednost potencijala na cijeloj rubnoj površini. U slučaju beskonačne rubne površine taj je doprinos jednak nuli. Tako odabrane *Greenove funkcije kojima rješavamo Dirichletovu i Neumannovu rubnu zadaću ne ovise o veličini i raspodjeli rubnih uvjeta, već samo o obliku rubne površine S*. U praktičnim zadacima analitičko određivanje Greenovih funkcija moguće je u razmjerno malom broju geometrija, a najčešće ih određujemo *odslikavanjem naboja*.⁴⁰

4.6. RJEŠAVANJE LAPLACEOVE JEDNAČBE SEPARACIJOM VARIJABLI

U nekim slučajevima moguće je rubne zadaće u statičkom električnom polju riješiti izravnim rješenjem Laplaceove jednačbe postupkom separacije varijabli. On se sastoji u reduciranju parcijalne diferencijalne jednačbe u sustav običnih diferencijalnih jednačbi pomoću pretpostavke

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = F(u_1)G(u_2)H(u_3) . \quad (4.6.1)$$

Takvu pretpostavku najčešće koristimo kad rubovi domene proračuna leže u plohama konstantnih vrijednosti odgovarajućih odrednica koordinatnog sustava u_1 , u_2 i u_3 (tj. u koordinatnim plohama). Tada parcijalne derivacije postaju obične, jer svaka skalarna i realna funkcija F , G , H ovisi samo o jednoj koordinati. Primjenu te metode prikazat ćemo u tri pravokutna koordinatna sustava: *pravocrtnom, cilindričnom i sfernom*.⁴¹

4.6.1. Pravocrtni koordinatni sustav

U ovom koordinatnom sustavu oblik Laplaceove jednačbe (4.1.8) jest⁴²

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 . \quad (4.6.2)$$

Pretpostavimo rješenje te jednačbe u obliku

$$\varphi(x, y, z) = F(x)G(y)H(z) . \quad (4.6.3)$$

Uvrštenjem te pretpostavke u jednačbu (4.6.2) dobivamo

⁴⁰ Pogledati odjeljak 4.8.

⁴¹ Primjenu u drugim koordinatnim sustavima pogledati P. Moon, D.E. Spencer: *Field Theory Handbook*, Springer-Verlag 1961.

⁴² Pogledati Prilog D.

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dy^2} + \frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dz^2} = 0 . \quad (4.6.4)$$

Varijable x , y i z u ovoj jednadžbi možemo razdvojiti deriviranjem po x , y i z . Deriviranje po x rezultira s diferencijalnom jednadžbom po jednoj varijabli

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} \right) = 0 . \quad (4.6.5)$$

Integriranjem po varijabli x ova jednadžba prelazi u

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + k_x^2 F = 0 , \quad (4.6.6)$$

gdje je k_x konstanta integracije. Slično dobivamo jednadžbe

$$\frac{d^2 G}{dy^2} + k_y^2 G = 0 , \quad (4.6.7)$$

i

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + k_z^2 H = 0 . \quad (4.6.8)$$

Veličine k_x , k_y i k_z su realne konstante koje mogu biti pozitivne i negativne. One nisu međusobno neovisne jer uvrštenje (4.6.6 – 8) u (4.6.4) rezultira s

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 . \quad (4.6.9)$$

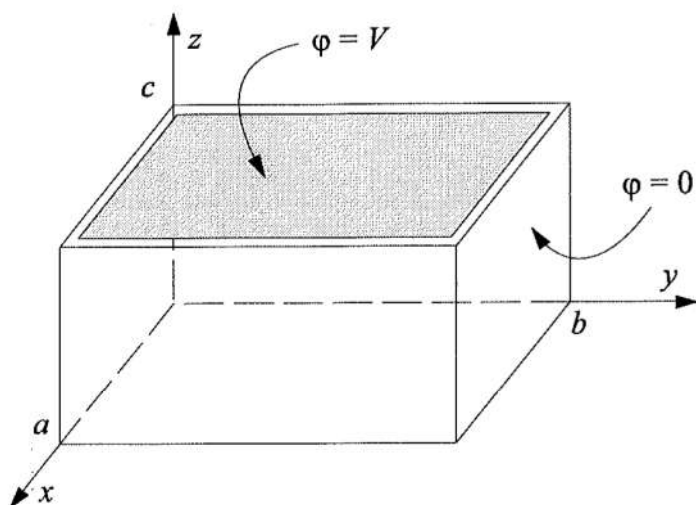
Rješenje jednadžbi (4.6.6 – 8) jest

$$F(x) = \begin{cases} A_x e^{k_x x} + B_x e^{-k_x x} & ; \quad k_x^2 > 0 , \\ A_x x + B_x & ; \quad k_x = 0 , \\ A_x \sin(k_x x) + B_x \cos(k_x x) & ; \quad k_x^2 < 0 . \end{cases} \quad (4.6.10)$$

Ako bilo kakvom linearnom kombinacijom tih rješenja uspijemo zadovoljiti rubne uvjete, to je zbog jedinstvenosti rješenja Laplaceove jednadžbe ujedno i rješenje rubne zadaće.

Primjer 4.6.1.1. Polje u kvadru

Razmotrimo kvadar dimenzija $(a \times b \times c)$ prema slici 4.6.1.



Slika 4.6.1. Uz rješenje polja u kvadru

Sve plohe kvadra su na nultom potencijalu, osim vršne plohe u ravnini $z = c$ koja je na zadanom potencijalu V .⁴³ Iz zadanih uvjeta na rubovima slijedi

$$F(0) = F(a) = 0 \quad ; \quad G(0) = G(b) = 0 \quad ; \quad H(0) = 0 \quad ; \quad H(z) = V. \quad (4.6.11)$$

Rješenja jednačbi (4.6.6 – 8) koja zadovoljavaju ove uvjete jesu svojstvene funkcije⁴⁴ zadaće

$$\begin{aligned} F(x) &= A_x \sin \frac{\pi m x}{a} \quad ; \quad m = 1, 2, \dots \\ G(y) &= A_y \sin \frac{\pi n y}{b} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \\ H(z) &= \sinh \beta_{mn} z. \end{aligned} \quad (4.6.12 - 14)$$

Koeficijent β_{mn} određujemo pomoću jednačbe (4.6.9)⁴⁵

$$k_z = j\beta_{mn} = \sqrt{-(k_x^2 + k_y^2)} = j\sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2} \quad ; \quad j = \sqrt{-1}. \quad (4.6.15)$$

⁴³ Da bi takav raspored potencijala bio moguć, mora postojati zanemarivo mali razmak između vršne i bočnih ploha.

⁴⁴ Pogledati Prilog A, točke 7. i 8.

⁴⁵ S j označavamo imaginarnu jedinicu. Često se u literaturi koristi oznaka i ; ovdje smo zbog uobičajene oznake i za jakost struje odabrali oznaku j .

Prema tome, rješenje Laplaceove jednadžbe koje zadovoljava uvjete (4.6.10) je

$$\varphi_{mn}(x,y,z) = K_{mn} \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b} \sinh \beta_{mn} z, \quad (4.6.16)$$

gdje je K_{mn} proizvoljna konstanta. Njezinu vrijednost odredit ćemo iz uvjeta

$$\varphi(x,y,z=c) = V. \quad (4.6.17)$$

Iz načela superpozicije slijedi da je i linearna kombinacija

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}(x,y,z), \quad (4.6.18)$$

također rješenje Laplaceove jednadžbe koje zadovoljava uvjete (4.6.10). Jednadžba (4.6.18) predstavlja *Fourierov*⁴⁶ *red* u varijablama x i y . Množenjem izraza (4.6.16) s

$$\sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b}, \quad (4.6.19)$$

i zatim integriranjem na području $0 \leq x \leq a$ i $0 \leq y \leq b$ možemo odrediti koeficijente K_{mn} . Koristeći identitete

$$\int_0^a \sin \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi lx}{a} dx = \begin{cases} \frac{a}{2} & ; \quad k=l, \\ 0 & ; \quad k \neq l, \end{cases} \quad (4.6.20,21)$$

$$\int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} dx = \begin{cases} \frac{2a}{\pi k} & ; \quad k=1,3,\dots,2n+1,\dots \\ 0 & ; \quad k=0,2,\dots,2n,\dots \end{cases}$$

dobivamo

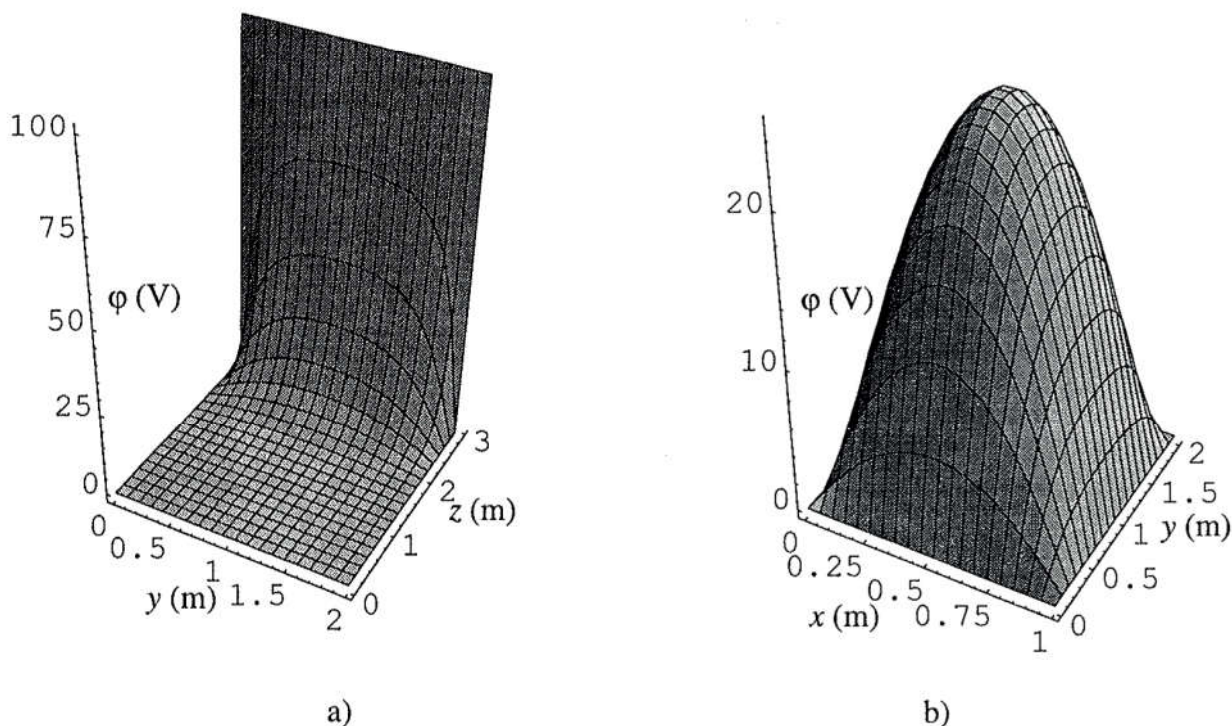
$$K_{mn} = \begin{cases} \frac{16V}{\pi^2 mn \sinh \beta_{mn} c} & ; \quad m \text{ i } n \text{ neparni}, \\ 0 & ; \quad m \text{ i } n \text{ nisu neparni}, \end{cases} \quad (4.6.22)$$

pa je konačno rješenje

$$\varphi(x,y,z) = \frac{16V}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sinh \beta_{mn} z}{mn \sinh \beta_{mn} c} \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b}. \quad (4.6.23)$$

⁴⁶ Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), francuski matematičar i fizičar.

Na slikama 4.6.2.a,b prikazana je raspodjela potencijala za kvadar dimenzija $a = 1\text{ m}$, $b = 2\text{ m}$, $c = 3\text{ m}$ i potencijal $V = 100\text{ V}$ u karakterističnim presjecima kvadra.



Slika 4.6.2. Raspodjela potencijala u kvadru a) u ravni $x = 0.5\text{ m}$ b) u ravni $z = 2.5\text{ m}$

4.6.2. Cilindrični koordinatni sustav

Laplaceova jednačba (4.1.8) u ovom sustavu ima oblik⁴⁷

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 . \quad (4.6.24)$$

Ako pretpostavimo rješenje u obliku

$$\varphi(r, \alpha, z) = F(r) G(\alpha) H(z) , \quad (4.6.25)$$

jednačba (4.6.24) svodi se na

$$\frac{1}{rF} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 G} \frac{d^2 G}{d\alpha^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 H}{dz^2} = 0 . \quad (4.6.26)$$

⁴⁷ Pogledati Prilog D.

Ako tu jednadžbu deriviramo po z i zatim integriramo postupkom opisanim u prethodnom članku, slijedi

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + k^2 H = 0 . \quad (4.6.27)$$

Uvrštenjem te jednadžbe u (4.6.27) i množenjem s r^2 dobivamo

$$\frac{r}{F} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) + \frac{1}{H} \frac{d^2 H}{d\alpha^2} + k^2 r^2 = 0 , \quad (4.6.28)$$

pa zaključujemo da za član koji ovisi o α mora vrijediti

$$\frac{d^2 G}{d\alpha^2} = -n^2 G . \quad (4.6.29)$$

Uključenjem te jednadžbe u (4.6.28) dobivamo

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) + (k^2 r^2 - n^2) F = 0 . \quad (4.6.30)$$

Time smo Laplaceovu jednadžbu u cilindričnom koordinatnom sustavu sveli na tri obične diferencijalne jednadžbe. Jednadžbe (4.6.27) i (4.6.29) imaju rješenja definirana s izrazima (4.6.10). Potrebno je naglasiti da n može biti samo cijeli broj, budući da rješenje jednadžbe (4.6.29) mora biti jednako za kutove α i $\alpha + 2n\pi$.

Jednadžba (4.6.30) ima oblik *Besselove*⁴⁸ *diferencijalne jednadžbe* i njezino rješenje su *Besselova funkcija* $J_n(kr)$ i *Neumannova funkcija* $N_n(kr)$ ⁴⁹ kad je k realan broj, te hiperbolične Besselove funkcije K_m i I_m kad je k imaginarni broj. Ovdje ćemo se ograničiti na slučajeve u kojima vrijedi $k = 0$. To su zadaće u kojima je $Z(z)$ konstanta, odnosno dvodimenzionalne zadaće u cilindričnom sustavu. Tada su funkcije

$$F(r) = \begin{cases} r^n & ; \quad n \neq 0 , \\ C_r \ln r + D_r & ; \quad n = 0 . \end{cases} \quad (4.6.32)$$

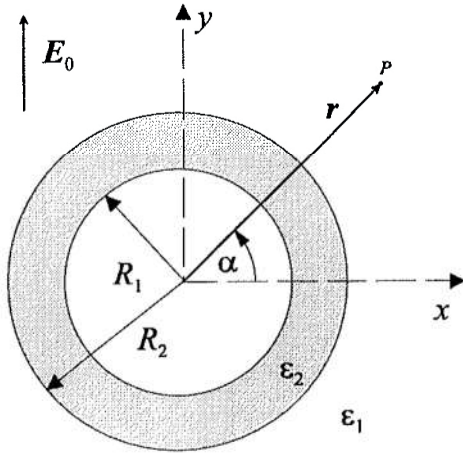
rješenja jednadžbe (4.6.30).

Primjer 4.6.2.1. Cilindrični vodič okružen dielektričkim slojem u vanjskom polju

Pretpostavljamo da je vodič beskonačan, a vanjsko polje homogeno. Tu smo zadaću prikazali slikom 4.6.3. i rješavat ćemo je primjenom načela superpozicije.

⁴⁸ Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846), njemački astronom.

⁴⁹ Pogledati Prilog E.



Slika 4.6.3. Beskonačni cilindrični vodič okružen dielektričkim slojem u homogenom vanjskom polju

Potencijal homogenog polja E_0 je

$$\varphi_0 = -E_0 r \sin \alpha, \quad (4.6.33)$$

a pretpostavit ćemo da ukupni potencijal u ovoj zadaći možemo izraziti kao linearnu kombinaciju rješenja Laplaceove jednačbe (4.6.10) i (4.6.32) u cilindričnom sustavu

$$\varphi_I = -E_0 r \sin \alpha + \sum_n (a_{1n} r^n + b_{1n} r^{-n}) [c_{1n} \sin(n\alpha) + d_{1n} \cos(n\alpha)] \quad ; \quad r \geq R_2, \quad (4.6.34)$$

$$\varphi_{II} = \sum_n (a_{2n} r^n + b_{2n} r^{-n}) [c_{2n} \sin(n\alpha) + d_{2n} \cos(n\alpha)] \quad ; \quad r \leq R_2.$$

Koeficijenti a_{1n} moraju biti jednaki nuli, jer poremećaj koji unosi izolirani cilindar ne može rasti s udaljenošću od cilindra.

Granični i rubni uvjeti koje potencijali u *dva područja ove zadaće* moraju zadovoljiti jesu

$$\varphi_I(R_2) = \varphi_{II}(R_2),$$

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \right)_{r=R_2} = \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial r} \right)_{r=R_2}, \quad (4.6.35a - c)$$

$$\varphi_{II}(R_1) = 0.$$

Pretpostavljeno rješenje (4.6.34) može zadovoljiti uvjet kontinuiranosti (4.6.35a) za svaki α jedino ako vrijedi $n = 1$ i $d_{21} = 0$. Pretpostavljeno rješenje sada poprima oblik

$$\varphi_I(r, \alpha) = \left(-E_0 r + b_1 \frac{1}{r} \right) \sin \alpha, \quad (4.6.36a, b)$$

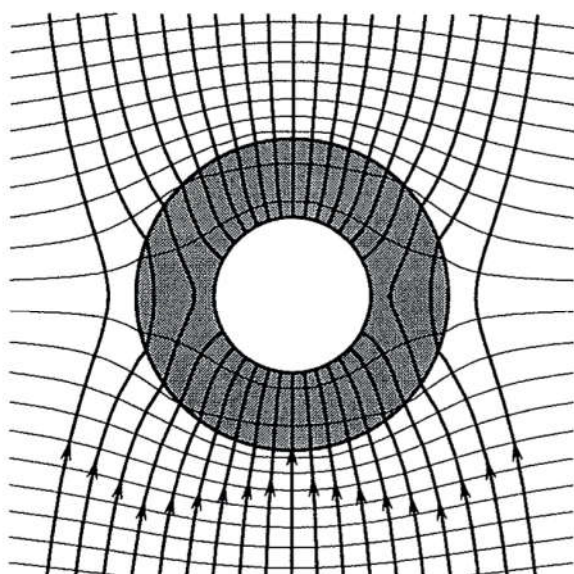
$$\varphi_{II}(r, \alpha) = \left(a_2 r + b_2 \frac{1}{r} \right) \sin \alpha.$$

Uvrštenjem toga rješenja u (4.6.35a – c) dobivamo sustav jednačbi za nepoznate koeficijente b_1 , a_2 i b_2 , pa je konačni oblik izraza za potencijal

$$\varphi = \begin{cases} -E_0 \left[r - \frac{R_2^2 - \varepsilon_1(R_2^2 - R_1^2) + \varepsilon_2(R_2^2 + R_1^2)}{\varepsilon_1(R_2^2 - R_1^2) + \varepsilon_2(R_2^2 + R_1^2)} \right] \sin \alpha & ; \quad r \geq R_2 , \\ -\frac{2E_0 \varepsilon_1 R_2^2}{\varepsilon_1(R_2^2 - R_1^2) + \varepsilon_2(R_2^2 + R_1^2)} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \sin \alpha & ; \quad R_1 \leq r \leq R_2 . \end{cases} \quad (4.6.37)$$

Jakost električnog polja računamo pomoću (4.1.9)

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \mathbf{a}_\alpha . \quad (4.6.38)$$



Slika 4.6.4. Prikaz statičkog električnog polja cilindričnog vodiča u vanjskom homogenom polju

Konačni izraz za komponentu vektora jakosti polja u smjeru osi r jest

$$E_r = \begin{cases} E_0 \left[1 + \frac{R_2^2 - \varepsilon_1(R_2^2 - R_1^2) + \varepsilon_2(R_2^2 + R_1^2)}{r^2 \varepsilon_1(R_2^2 - R_1^2) + \varepsilon_2(R_2^2 + R_1^2)} \right] \sin \alpha & ; \quad r \geq R_2 , \\ \frac{2E_0 \varepsilon_1 R_2^2}{\varepsilon_1(R_2^2 - R_1^2) + \varepsilon_2(R_2^2 + R_1^2)} \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2} \right) \sin \alpha & ; \quad R_1 \leq r \leq R_2 . \end{cases} \quad (4.6.39)$$

Komponentu vektora jakosti polja u smjeru α računamo pomoću

$$E_\alpha = \begin{cases} E_0 \left[1 - \frac{R_2^2 - \varepsilon_1(R_2^2 - R_1^2) + \varepsilon_2(R_2^2 + R_1^2)}{r^2 \varepsilon_1(R_2^2 - R_1^2) + \varepsilon_2(R_2^2 + R_1^2)} \right] \cos \alpha & ; \quad r \geq R_2 , \\ \frac{2E_0 \varepsilon_1 R_2^2}{\varepsilon_1(R_2^2 - R_1^2) + \varepsilon_2(R_2^2 + R_1^2)} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \cos \alpha & ; \quad R_1 \leq r \leq R_2 . \end{cases} \quad (4.6.40)$$

Statičko električno polje tog primjera prikazali smo na slici 4.6.4.

4.6.3. Sferni koordinatni sustav

U ovom koordinatnom sustavu Laplaceova jednačba (4.1.8) ima oblik

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0 . \quad (4.6.41)$$

Ako pretpostavimo rješenje u obliku

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = F(r) G(\vartheta) H(\alpha) , \quad (4.6.42)$$

možemo primjenom postupka sličnog onima iz prethodnih poglavlja separirati jednačbu (4.6.41) u tri obične diferencijalne jednačbe

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} \frac{d^2 H}{d\alpha^2} + m^2 &= 0 , \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dG}{d\vartheta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] G &= 0 , \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} F &= 0 , \end{aligned} \quad (4.6.43 - 45)$$

gdje smo s m^2 i $n(n+1)$ označili konstante. Rješenje jednačbe (4.6.43) je

$$H = e^{\pm j m \alpha} , \quad (4.6.46)$$

gdje m mora biti cijeli broj zbog jedinstvenosti funkcije H za kutove α i $\alpha + 2m\pi$. Rješenja jednačbe (4.6.44) su *Legendreove*⁵⁰ funkcije

⁵⁰ Adrien Marie Legendre (1752 – 1833), francuski matematičar.

$$P_n^m(\cos \vartheta) = \sin^m \vartheta T_{n-m}^m(\cos \vartheta) , \quad (4.6.47)$$

a n mora biti cijeli broj da bi rješenje bilo konačno i neprekidno za sve kutove α i ϑ . Rješenja jednadžbe (4.6.45) jesu

$$F = A r^n + B r^{-n-1} . \quad (4.6.48)$$

Rješenje Laplaceove jednadžbe u sfernom koordinatnom sustavu možemo sada napisati u obliku

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = (A r^n + B r^{-n-1}) [\cos(m\alpha) + \sin(m\alpha)] P_n^m(\cos \vartheta) . \quad (4.6.49)$$

Takve funkcije nazivamo *sferni harmonici*. Ovdje ćemo se ograničiti na razmatranje osnosimetričnih problema. Tada je $m = 0$, rješenja jednadžbe (4.6.44) u tom su slučaju Legendreovi polinomi od $\cos \vartheta P_n(\cos \vartheta)$, a rješenja Laplaceove jednadžbe tada nazivamo *zonski harmonici*.⁵¹

Tablica 4.6.1. Rješenja Laplaceove jednadžbe u sfernom koordinatnom sustavu

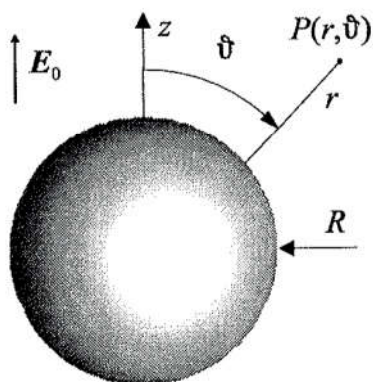
n	$P_n(\cos \vartheta)$	Zonski harmonici	
0	1	1	$\frac{1}{r}$
1	$\cos \vartheta$	$r \cos \vartheta$	$\frac{1}{r^2} \cos \vartheta$
2	$\frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$	$\frac{r^2}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$	$\frac{1}{2r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$
3	$\frac{1}{2} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta)$	$\frac{r^3}{2} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta)$	$\frac{1}{2r^4} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta)$

Primjer 4.6.3.1. Kugla u vanjskom homogenom polju

Konstruirajmo sada rješenje problema vodljive kugle polumjera R u homogenom vanjskom polju (slika 4.6.5). Uvjeti koje rješenje za potencijal mora zadovoljavati su

$$\begin{aligned} r = R & \quad ; \quad \varphi = V , \\ r \gg R & \quad ; \quad \varphi = -E_0 z = -E_0 r \cos \vartheta . \end{aligned} \quad (4.6.50)$$

⁵¹ Pogledati Prilog A, točku 8.



Slika 4.6.5. Kugla u vanjskom homogenom polju

Drugi dio uvjeta slijedi iz činjenice da je utjecaj kugle na polje lokalnog karaktera, te da polje daleko od kugle ostaje homogeno. Pretpostavimo rješenje u obliku linearne kombinacije zonskih harmonika nultog i prvog reda

$$\varphi(r) = A + \frac{B}{r} + Cr \cos \vartheta + \frac{D}{r^2} \cos \vartheta . \quad (4.6.51)$$

Iz uvjeta za $r \gg R$ slijedi

$$\varphi(r \gg R) = -E_0 r \cos \vartheta = A + Cr \cos \vartheta \Rightarrow A = 0 ; C = -E_0 , \quad (4.6.52)$$

a iz uvjeta za $r = R$ slijedi

$$\varphi = V = \frac{B}{R} - E_0 R \cos \vartheta + \frac{D}{R^2} \cos \vartheta \Rightarrow B = VR ; D = E_0 R^3 , \quad (4.6.53)$$

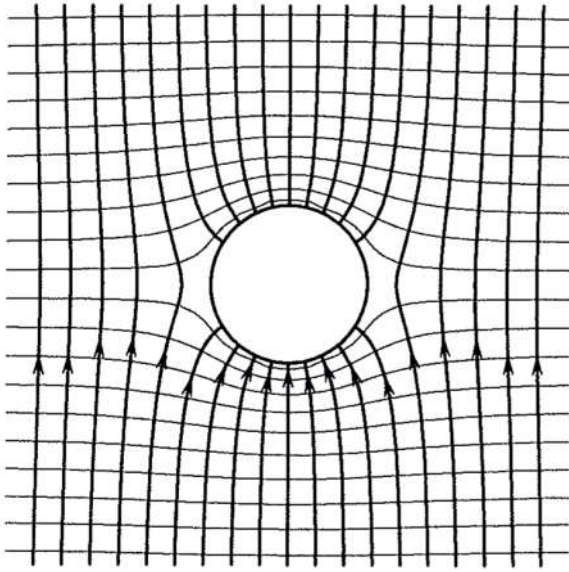
pa je konačno rješenje za potencijal

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{RV}{r} + E_0 \left[-1 + \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] r \cos \vartheta . \quad (4.6.54)$$

Jakost električnog polja je

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = \left\{ \frac{RV}{r^2} + E_0 \left[1 + 2 \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \right\} \cos \vartheta \mathbf{a}_r + E_0 \left[-1 + \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \vartheta \mathbf{a}_\vartheta . \quad (4.6.55)$$

Statičko električno polje metalne kugle na nultom potencijalu ($V = 0$) u homogenom vanjskom polju prikazali smo na slici 4.6.6.



Slika 4.6.6. Polje metalne kugle na nultom potencijalu u vanjskom homogenom polju

Ako umjesto metalne kugle u homogeno električno polje unesemo kuglu dielektričnosti ϵ_1 , mijenjaju se uvjeti koje mora zadovoljavati potencijal

$$r=R \quad ; \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} , \quad (4.6.56)$$

$$r \gg R \quad ; \quad \varphi_0 = E_0 z = E_0 r \cos \vartheta .$$

Uvjeti su u tom slučaju složeniji jer moramo odrediti potencijale φ_u i φ_v u *dvije regije*: unutrašnjoj regiji koja obuhvaća kuglu i vanjskoj regiji koja obuhvaća prostor izvan kugle. U svakoj regiji potencijal zadovoljava Laplaceovu jednadžbu, pa pretpostavljamo rješenja u obliku zonskih harmonika za $n=0$ i $n=1$

$$\varphi_u(r, \vartheta) = A_u + \frac{B_u}{r} + C_u r \cos \vartheta + \frac{D_u}{r^2} \cos \vartheta , \quad (4.6.57, 58)$$

$$\varphi_v(r, \vartheta) = A_v + \frac{B_v}{r} + C_v r \cos \vartheta + \frac{D_v}{r^2} \cos \vartheta .$$

Budući da je potencijal konačan i definiran za $r=0$ slijedi $B_u = D_u = 0$. Ostale konstante određujemo uvrštavanjem u rubne uvjete. Konačno rješenje za potencijal izvan kugle je

$$\varphi_v = E_0 \left[-1 + \left(\frac{R}{r} \right)^3 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon_1} \right] r \cos \vartheta , \quad (4.6.59)$$

a potencijal unutar kugle jest

$$\varphi_u = -\frac{3E_0\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon_1} r \cos \vartheta . \quad (4.6.60)$$

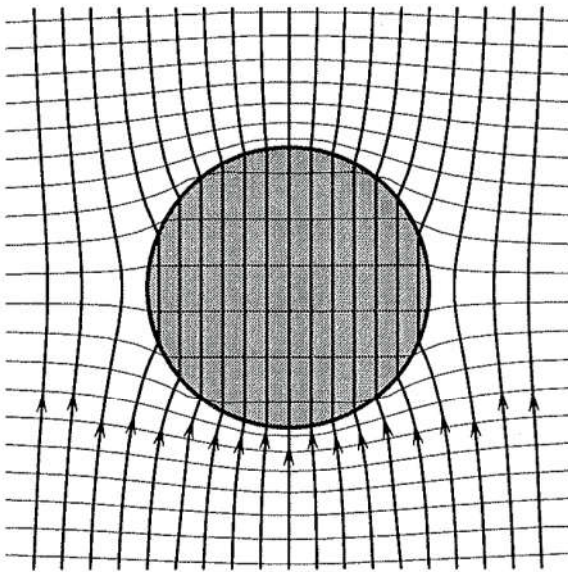
Iz tih izraza slijedi jakost električnog polja izvan

$$\mathbf{E}_v = E_0 \left[1 + 2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon_1} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \vartheta \mathbf{a}_r + E_0 \left[-1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon_1} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \vartheta \mathbf{a}_\vartheta, \quad (4.6.61)$$

i unutar kugle⁵²

$$\mathbf{E}_1 = \frac{3E_0\epsilon_0 \cos \vartheta}{2\epsilon_0 + \epsilon_1} \mathbf{a}_r - \frac{3E_0\epsilon_0 \sin \vartheta}{2\epsilon_0 + \epsilon_1} \mathbf{a}_\vartheta = \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon_1} \mathbf{E}_0. \quad (4.6.62)$$

Statičko električno polje dielektrične kugle u vanjskom homogenom polju prikazali smo na slici 4.6.7.



Slika 4.6.7. Statičko električno polje dielektrične kugle u vanjskom homogenom polju, $\epsilon_r = 3$

4.7. ZADANE RASPODJELE NABOJA U NEOGRANIČENOM PROSTORU

To je najjednostavnija vrsta zadaća koje se pojavljuju pri rješavanju statičkih električnih polja, a rješenje se temelji na načelu superpozicije. Rješenje izvodimo iz općeg integralnog rješenja Poissonove jednačbe definiranog izrazom (4.5.10). Prostor u kojem rješavamo zadaću je neograničen, pa je doprinos člana koji u (4.5.10) predstavlja integral po graničnoj površini S prostora zadaće jednak nuli. Konačni opći integralni oblik rješenja takvih zadaća je

⁵² Iz jednačbi (4.6.59 i 61) vidimo da je polje izvan dielektrika sastavljeno od vanjskog polja i dipolnog tipa polja, pa možemo zaključiti da dielektrična kugla unosi u homogeno polje poremećaj koji za prostor izvan kugle nadomještamo dipolom u središtu kugle momenta $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_0)R^3\mathbf{E}_0/(2\epsilon_0 + \epsilon_1)$, usmjerenog u smjeru vanjskog polja. Detaljnije o polju dipola pogledati u članku 4.7.1, primjer 4.7.1.2.

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_V \rho(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV', \quad (4.7.1)$$

gdje je G Greenova funkcija neograničenog prostora koju smo odredili u članku 2.4.2, a predstavlja potencijal jediničnog točkastog naboja u neograničenom prostoru.

4.7.1. Skupina točkastih naboja

U članku 2.4.2. dokazali smo da je za jedan točkasti naboj Q smješten u točki $\mathbf{r}'$ neograničenog prostora rješenje Poissonove jednačbe

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (4.7.2)$$

pa primjenom načela superpozicije, za potencijal skupine N točkastih naboja smještenih u točkama $\mathbf{r}_i'$ u točki $\mathbf{r}$ vrijedi

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i'|}. \quad (4.7.3)$$

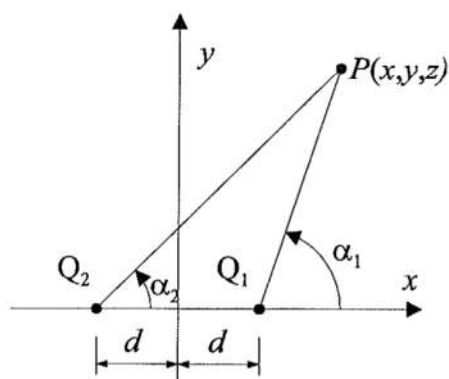
Primjenom jednačbe (4.1.9) dobivamo izraz

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i'|}, \quad (4.7.4)$$

kojim određujemo jakost električnog polja takve skupine točkastih naboja.

Primjer 4.7.1.1. Polje dva točkasta naboja

Dva točkasta naboja Q_1 i Q_2 smještena su u prostoru prema slici 4.7.1.



Slika 4.7.1 Dva točkasta naboja u neograničenom prostoru

Njihov resultantni potencijal u točki $P(x, y, z)$ prema (4.7.3) iznosi

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{Q_1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right]. \quad (4.7.5)$$

Ekvipotencijalne linije u $x-y$ ravnini ($z=0$) definirane su implicitno izrazom

$$\varphi = C = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{Q_1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} \right]. \quad (4.7.6)$$

Točke ekvipotencijalne linije možemo odrediti izračunavanjem y koordinata iz izabranih x koordinata pomoću (4.7.6). Jakost polja zadanih točkastih naboja u točki $P(x,y,z)$ prema (4.7.4) jest

$$\begin{aligned} E(x,y,z) = & \frac{Q_1}{4\pi\epsilon [(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} [(x-d)a_x + ya_y + za_z] + \\ & + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon [(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} [(x+d)a_x + ya_y + za_z]. \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

Linije polja u $x-y$ ravnini su prema (4.2.1)

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}, \quad (4.7.8)$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} & \frac{dx}{Q_1 \frac{x+d}{[(x+d)^2 + y^2]^{3/2}} + Q_2 \frac{x-d}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}}} = \\ & = \frac{dy}{Q_1 \frac{y}{[(x+d)^2 + y^2]^{3/2}} + Q_2 \frac{y}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}}}. \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

Sređivanjem tog izraza i korištenjem

$$d\left(\frac{x \pm d}{y}\right) = \frac{1}{y^2} [y dx - (x \pm d) dy], \quad (4.7.10)$$

dobivamo

$$Q_1 \frac{y^2}{[(x+d)^2 + y^2]^{3/2}} d \left(\frac{x+d}{y} \right) + Q_2 \frac{y^2}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}} d \left(\frac{x-d}{y} \right) = 0 . \quad (4.7.11)$$

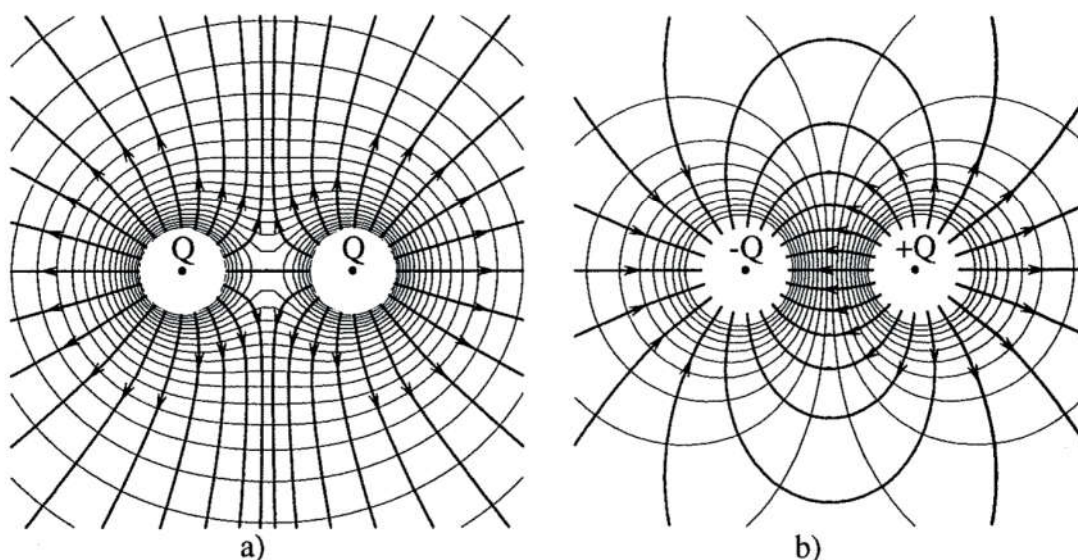
Ako tu jednadžbu pomnožimo s y , onda ona predstavlja totalni diferencijal izraza

$$Q_1 \frac{x+d}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} + Q_2 \frac{x-d}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} = k . \quad (4.7.12)$$

To je jednadžba linija polja. Izbor konstante k daje pojedine linije polja. Taj izraz možemo napisati i u obliku

$$Q_1 \cos \alpha_1 + Q_2 \cos \alpha_2 = k . \quad (4.7.13)$$

Pri proračunu linije polja kroz zadanu točku P u prvom koraku iz zadanih koordinata točke P odredimo k , a zatim pomoću veze x i y u (4.7.11) možemo odrediti točke linije polja. Na slici 4.7.2 prikazali smo slike polja za slučajeve $\pm Q_1 = Q_2$.

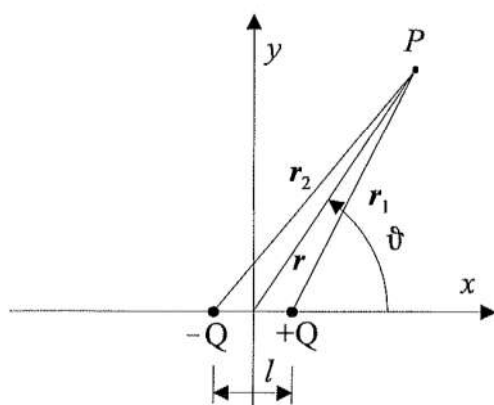


Slika 4.7.2. Slika statičkog električnog polja dvaju točkastih naboja a) jednakih iznosa, b) jednakih iznosa i suprotnih predznaka

Primjer 4.7.1.2. Polje dipola

Pojam dipola kao konfiguracije dvaju naboja istog iznosa, a suprotnog predznaka (slika 4.7.3) uveli smo u 1. poglavlju.⁵³

⁵³ Pogledati članak 1.4.4.



Slika 4.7.3. Električni dipol

Potencijal dipola u točki P je

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right). \quad (4.7.14)$$

Vrijedi

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + rl \cos \vartheta \Rightarrow \frac{r}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{2r}\right)^2 + \frac{l}{r} \cos \vartheta}}. \quad (4.7.15)$$

Taj izraz možemo razviti u red funkcije⁵⁴ $(1+x)^{-1}$. Razmatranje dipola ograničavamo samo na slučajeve kada je udaljenost točke promatranja P puno veća od udaljenosti između naboja ($r \gg l$). Time je uvjet konvergencije reda zadovoljen pa možemo pisati

$$\frac{r}{r_1} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{4r^2} + \frac{l}{r} \cos \vartheta \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{l^2}{4r^2} + \frac{l}{r} \cos \vartheta \right)^2 - \dots \quad (4.7.16)$$

Zbog $r \gg l$ možemo zanemariti sve članove reda koji sadrže potencije veće od $(l/r)^2$, pa se red (4.7.16) svodi na

$$\frac{r}{r_1} \approx 1 - \frac{l}{2r} \cos \vartheta + \frac{l^2}{4r^2} \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2}. \quad (4.7.17)$$

Analogno vrijedi

$$\frac{r}{r_2} \approx 1 + \frac{l}{2r} \cos \vartheta + \frac{l^2}{4r^2} \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2}. \quad (4.7.18)$$

⁵⁴ Pogledati Prilog F.

Uvrštenjem (4.7.17 – 18) u (4.7.14) slijedi potencijal dipola u točki P

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Ql \cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (4.7.19)$$

gdje je $\mathbf{p}$ dipolni moment, vektor usmjeren od negativnog prema pozitivnom naboju veličine Ql . Ekvipotencijalne linije su definirane kao

$$\varphi = C = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p \cos \vartheta}{r^2} \Rightarrow r^2 = \frac{p}{4\pi\epsilon C} \cos \vartheta, \quad (4.7.20)$$

gdje je C odabrani potencijal. Jakost električnog polja dipola $\mathbf{E}$ je u sfernom koordinatnom sustavu

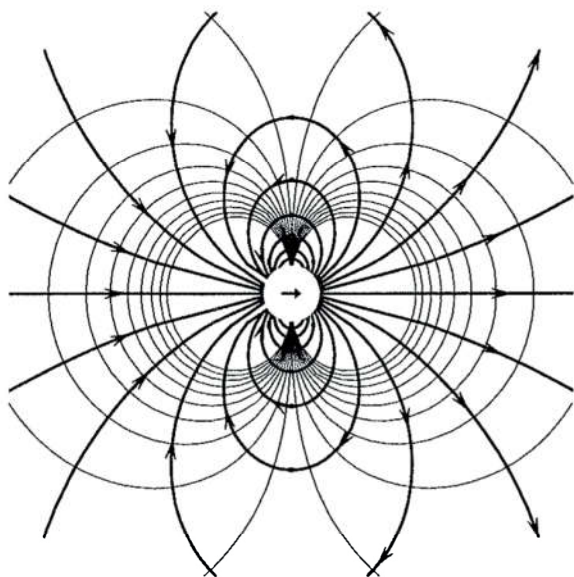
$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \mathbf{a}_\vartheta - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \mathbf{a}_\alpha = \\ &= \frac{2p}{4\pi\epsilon r^3} \cos \vartheta \mathbf{a}_r + \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} \sin \vartheta \mathbf{a}_\vartheta, \end{aligned} \quad (4.7.21)$$

a može se izraziti u funkciji $\mathbf{p}$ i $\mathbf{r}$ pomoću

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]. \quad (4.7.22)$$

Linije polja dipola određujemo pomoću

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\vartheta}{E_\vartheta} \Rightarrow \frac{dr}{r d\vartheta} = \frac{E_r}{E_\vartheta}. \quad (4.7.23)$$



Slika 4.7.4. Statičko električno polje dipola

Iz jednadžbe (4.7.21) slijedi

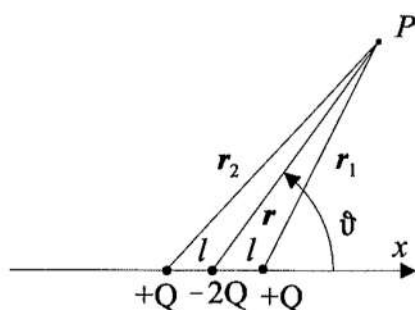
$$\frac{E_r}{E_\theta} = \frac{2 \cos \vartheta}{\sin \vartheta}, \quad (4.7.24)$$

pa integracijom diferencijalne jednadžbe (4.7.23) dobivamo jednadžbu linija polja dipola

$$r = k \sin^2 \vartheta. \quad (4.7.25)$$

Primjer 4.7.1.3. Polje linearnog kvadrupola

Linearni (pravocrtni) kvadrupol je raspored četiriju naboja prema slici 4.7.5.



Slika 4.7.5. Linearni kvadrupol

Potencijal linearnog kvadrupola u točki P je

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{r_1} - 2\frac{Q}{r} + \frac{Q}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \left(\frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2} - 2 \right). \quad (4.7.26)$$

Omjere r/r_1 i r/r_2 možemo pisati koristeći izraze (4.7.17,18)

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_1} &= 1 - \frac{l}{r} \cos \vartheta + \frac{l^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2}, \\ \frac{r}{r_2} &= 1 + \frac{l}{r} \cos \vartheta + \frac{l^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2}, \end{aligned} \quad (4.7.27)$$

pa potencijal linearnog kvadrupola možemo izračunati kao

$$\varphi = \frac{Ql^2}{4\pi\epsilon r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1). \quad (4.7.28)$$

Statički električni potencijal kvadrupola pada s trećom potencijom udaljenosti, za razliku od dipola kod kojeg pada s kvadratom udaljenosti. Ekvipotencijalne linije kvadrupola definirane su izrazom

$$\varphi = C = \frac{Ql^2}{4\pi\epsilon r^3}(3\cos^2\vartheta - 1) \Rightarrow r^3 = \frac{Ql^2}{4\pi\epsilon C}(3\cos^2\vartheta - 1). \quad (4.7.29)$$

Jakost električnog polja linearnog kvadrupola je u sfernom koordinatnom sustavu

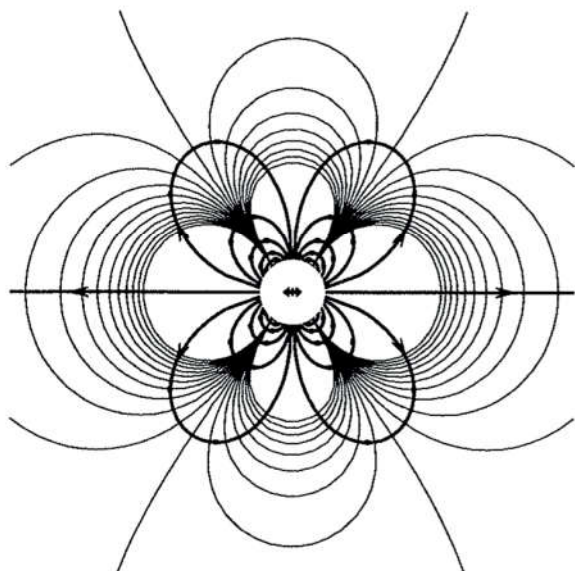
$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{3Ql^2}{4\pi\epsilon r^4}(3\cos^2\vartheta - 1)\mathbf{a}_r + \frac{Ql^2}{4\pi\epsilon r^4}3\sin 2\vartheta \mathbf{a}_\vartheta. \quad (4.7.30)$$

Jednadžbe linija polja kvadrupola slijede iz

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\vartheta}{E_\vartheta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{\sin 2\vartheta} d\vartheta. \quad (4.7.31)$$

Integracijom te jednadžbe dobivamo jednadžbu linija polja kvadrupola

$$r^2 = k\sin^2\vartheta \cos\vartheta. \quad (4.7.32)$$



Slika 4.7.6. Statičko električno polje kvadrupola

Koncept dipola i kvadrupola moguće je proširiti na veći broj pozitivnih i negativnih naboja smještenih na malim međusobnim udaljenostima. Takve rasporede naboja općenito nazivamo *multipolima*.

4.7.2. Linijski naboji

Linijski naboj smo uveli i definirali u članku 1.2.4, a računamo ga pomoću

$$Q = \int_l \lambda dl. \quad (4.7.33)$$

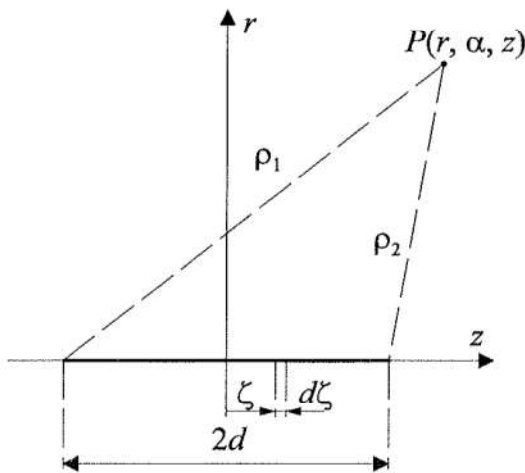
gdje je λ linijska gustoća naboja a l linija na kojoj je taj naboj raspoređen. Dijelu te linije dl koji nosi naboj λdl možemo pridijeliti svojstva točkastog naboja, pa primjenom načela superpozicije potencijal linijskog naboja u neograničenom prostoru iznosi

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\lambda dl}{|r-r'|}, \quad (4.7.34)$$

a jakost električnog polja iz poznate funkcije potencijala određujemo pomoću (4.1.9).

Primjer 4.7.2.1. Polje jednoliko nabijene dužine

Dužina nabijena nabojem jednolike gustoće λ smještena je prema slici 4.7.7. Zadaću rješavamo u cilindričnom koordinatnom sustavu zbog osne simetrije rasporeda.



Slika 4.7.7. Jednoliko nabijena dužina

Prema jednadžbi (4.7.34) potencijal u točki $P(r, \alpha, z)$ računamo kao

$$\varphi(r, \alpha, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-d}^d \frac{\lambda d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + r^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{z+d+\sqrt{(z+d)^2 + r^2}}{z-d+\sqrt{(z-d)^2 + r^2}}, \quad (4.7.35)$$

budući da je udaljenost između elementa linijskog naboja i točke neovisna o obilaznom kutu α . Ako uvedemo dužine ρ_1 i ρ_2 prema slici 4.7.7, jednadžbu ekvipotencijalnih linija u ravnini konstantnog kuta $\alpha = 0$ možemo pisati kao

$$\frac{z+d+\rho_1}{z-d+\rho_2} = k = e^{\frac{4\pi\epsilon}{\lambda}\varphi}. \quad (4.7.36)$$

Vrijedi

$$r^2 = \rho_1^2 - (z+d)^2 = \rho_2^2 - (z-d)^2, \quad (4.7.37)$$

odnosno

$$\begin{aligned}
 (z+d+\rho_1)(\rho_1-z-d) &= (z-d+\rho_2)(\rho_2-z+d) \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{z+d+\rho_1}{z-d+\rho_2} &= k = \frac{\rho_2-z+d}{\rho_1-z-d} .
 \end{aligned}
 \tag{4.7.38}$$

Eliminacijom z iz tih jednadžbi slijedi

$$\rho_1 + \rho_2 = 2d \frac{k+1}{k-1} . \tag{4.7.39}$$

Sukladno toj jednadžbi ekvipotencijalne linije su *konfokalne elipse*⁵⁵ s fokusima u krajevima dužine naelektrizirane jednolikom gustoćom naboja, a *ekvipotencijalne plohe su konfokalni rotacijski elipsoidi*. Os rotacije je os z , a u istoj osi leži i velika poluos elipse a . Za pojedinu ekvipotencijalnu plohu velika a i mala poluos b iznose

$$a = d \frac{k+1}{k-1} \quad ; \quad b = 2d \frac{\sqrt{k}}{k-1} . \tag{4.7.40}$$

Svaku ekvipotencijalnu plohu možemo zamijeniti površinom metala, pa je jednadžbom (4.7.35) definiran i potencijal metalnog rotacijskog elipsoida. Ako su poznate poluosi elipsoida a i b , tada vrijedi

$$d = \sqrt{a^2 - b^2} . \tag{4.7.41}$$

Ukupni naboj na elipsoidu iznosi $Q = 2 \lambda d$, a potencijal površine elipsoida je

$$\varphi_s = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{a+d}{a-d} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{2d} \ln \frac{a+d}{a-d} , \tag{4.7.42}$$

pa pomoću te jednadžbe možemo odrediti *kapacitet usamljenog rotacijskog elipsoida*

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 8\pi\epsilon d \ln \frac{a+d}{a-d} . \tag{4.7.43}$$

Jakost električnog polja možemo naći pomoću jednadžbe (1.4.9)

$$\begin{aligned}
 E = -\nabla\varphi &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{a}_z - \frac{\partial\varphi}{\partial r} \mathbf{a}_r = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left[\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \mathbf{a}_z + \left(\frac{z+d}{r\rho_1} - \frac{z-d}{r\rho_2} \right) \mathbf{a}_r \right] = \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon r} [(\sin\beta_1 - \sin\beta_2) \mathbf{a}_z + (\cos\beta_1 - \cos\beta_2) \mathbf{a}_r] .
 \end{aligned}
 \tag{4.7.44}$$

⁵⁵ Elipsa je definirana kao krivulja na kojoj je suma udaljenosti od fokusa konstantna.

Linije polja definirane su jednadžbom

$$\frac{dz}{E_z} = \frac{dr}{E_r}, \quad (4.7.45)$$

pa uvrštenjem z i r komponenti jakosti električnog polja E iz (4.7.44) slijedi

$$\frac{dz}{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}} = \frac{dr}{\frac{1}{r} \left[\frac{z+d}{\rho_1} - \frac{z-d}{\rho_2} \right]}. \quad (4.7.46)$$

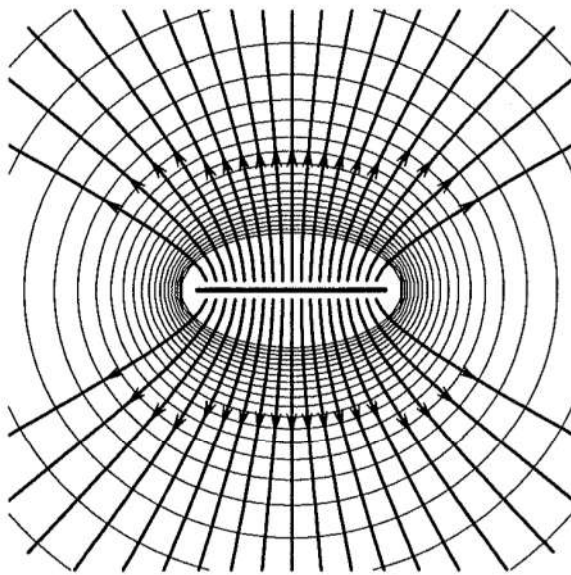
Sređivanje te jednadžbe rezultira s

$$dr \left[\frac{r}{\sqrt{(z-d)^2 + r^2}} - \frac{r}{\sqrt{(z+d)^2 + r^2}} \right] + dz \left[\frac{z-d}{\sqrt{(z-d)^2 + r^2}} - \frac{z+d}{\sqrt{(z+d)^2 + r^2}} \right] = 0. \quad (4.7.47)$$

Ta jednadžba je totalni diferencijal izraza

$$\sqrt{(z-d)^2 + r^2} - \sqrt{(z+d)^2 + r^2} = \rho_1 - \rho_2 = k. \quad (4.7.48)$$

To je jednadžba linija polja, a predstavlja *konfokalne hiperbole*⁵⁶ u ravnini $\alpha = \text{konst.}$



Slika 4.7.8. Statičko električno polje jednoliko nabijene dužine

Za velike omjere a/b možemo rotacijskim elipsoidom približiti cilindrični štap polumjera r i dužine l . Ako odaberemo približenje elipsoidom za koji vrijedi⁵⁷ $2a = l$ i $b = r$ pri

⁵⁶ Hiperbola je, prema definiciji, geometrijsko mjesto točaka za koje je razlika udaljenosti od dvaju fokusa konstantna veličina.

⁵⁷ Ovo je približenje štapa s rotacijskim elipsoidom upisanim u štap. Za približenje rotacijskim elipsoidom opisanim oko štapa poluosi su korijen iz dva puta veće.

omjerima $r/l < 0.05$ vrijedi⁵⁸

$$d = \sqrt{a^2 - b^2} = a \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \approx a \left(1 - \frac{b^2}{2a^2} \right). \quad (4.7.49)$$

Uvrštenjem približenja (4.7.41) u izraz za potencijal elipsoida (4.7.41) dobivamo

$$\varphi_s = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{2a} \ln \frac{2a}{\frac{b^2}{2a^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{a} \ln \frac{2a}{b}, \quad (4.7.50)$$

pa pomoću izraza

$$C = \frac{Q}{\varphi_s} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{l}{r}}, \quad (4.7.51)$$

računamo kapacitet tako približenog štapa.

Primjer 4.7.2.2. Beskonačno dugi linijski naboj

Zamislamo da je pravac nabijen jednoliko nabojem linijske gustoće λ . Takav raspored nije moguće ostvariti jer bi ukupna količina naboja u njemu bila beskonačna, ali predstavlja vrlo korisno približenje pri analizi sustava vodiča čija je dužina mnogo veća od poprečnih dimenzija. Jakost električnog polja u tom slučaju možemo odrediti iz jakosti polja jednoliko nabijene dužine⁵⁹ ako dozvolimo da dužina postane beskonačna

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \lim_{d \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{(z+d)^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z-d)^2 + r^2}} \right] \mathbf{a}_z + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \left[\frac{z+d}{\sqrt{(z+d)^2 + r^2}} - \frac{z-d}{\sqrt{(z-d)^2 + r^2}} \right] \mathbf{a}_r \right\} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \mathbf{a}_r. \end{aligned} \quad (4.7.52)$$

Potencijal određujemo pomoću jednadžbe (4.1.11) izravnom integracijom

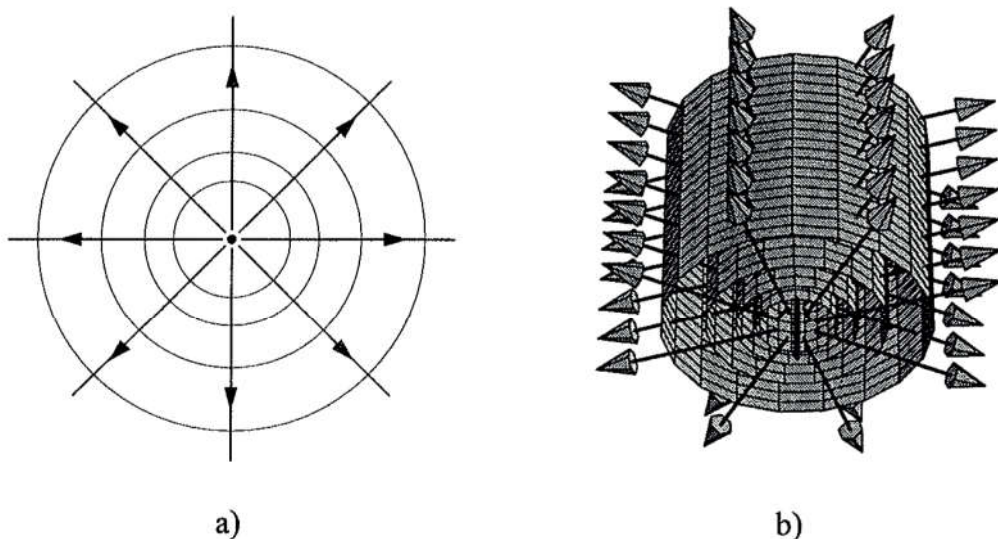
$$\varphi = - \int_{r_0}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_{r_0}^r \frac{\mathbf{a}_r}{r} \cdot \mathbf{a}_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}. \quad (4.7.53)$$

Položaj referentne točke kojoj pridajemo nultu vrijednost potencijala biramo po volji. U

⁵⁸ Pogledati razvoj u red $(1-x)^{1/2}$ u Prilogu F.

⁵⁹ Pogledati jednadžbu (4.7.43).

takvom rasporedu možemo govoriti samo o razlikama potencijala, budući da potencijalna funkcija postaje beskonačnom za obje granične vrijednosti $r = 0$ i $r \rightarrow \infty$ pa je apsolutni potencijal u svakoj točki beskonačan. Iz jednačbe (4.7.52) slijedi da su *linije polja radijalni pravci*, a iz (4.7.53) slijedi da su *ekvipotencijalne plohe cilindri koncentrični s linijskim nabojem*.



Slika 4.7.9. Polje beskonačno dugog linijskog naboja, a) dvodimenzionalni prikaz, b) trodimenzionalni prikaz

4.7.3. Plošni naboji

Plošni naboj plošne gustoće naboja σ koji je raspoređen na plohi S također smo uveli i definirali u članku 1.2.4. pomoću

$$Q = \int_S \sigma dS . \quad (4.7.54)$$

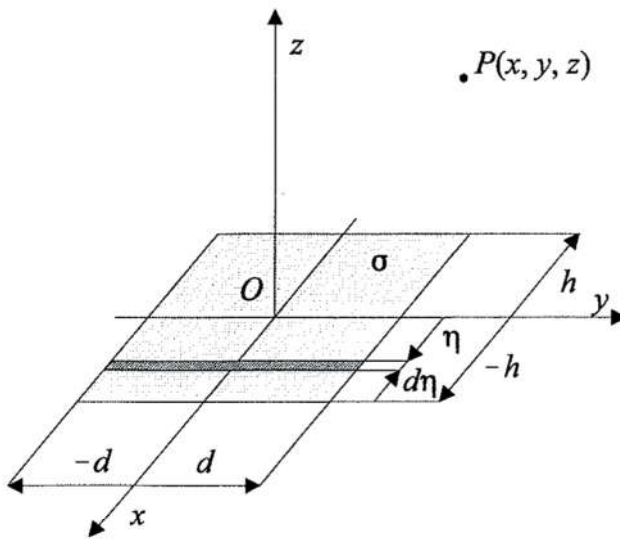
Dijelu površine dS koji nosi naboj σdS možemo pridijeliti svojstva točkastog naboja, pa primjenom načela superpozicije potencijal plošnog naboja u neograničenom prostoru iznosi

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\sigma dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \quad (4.7.55)$$

a jakost električnog polja iz poznate funkcije potencijala računamo pomoću (4.1.9).

Primjer 4.7.3.1 Polje jednoliko nabijene pravokutne ploče

Pravokutna ploča jednoliko nabijena nabojem plošne gustoće σ prikazana je na slici 4.7.10.



Slika 4.7.10. Jednoliko nabijena pravokutna ploča

Potencijal u točki $P(x, y, z)$ određujemo pomoću rezultata primjera 4.7.2.1. Ploču dijelimo na diferencijalno tanke dijelove kojima možemo pridijeliti svojstva jednoliko nabijene dužine. Ukupni potencijal računamo superpozicijom svih takvih dijelova

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \int_{-h}^h \ln \frac{x+d + \sqrt{(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}{x-d + \sqrt{(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} d\eta. \quad (4.7.56)$$

Nakon relativno složenog postupka integracije, koji se sastoji od parcijalne integracije i uobičajenih postupaka integracije funkcija s kvadratnim korijenima,⁶⁰ slijedi rezultat

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} [F(h) + G(h) - F(-h) - G(-h)], \quad (4.7.57)$$

gdje su

$$\begin{aligned} F(\eta) = & -z \arctan \frac{-z(x+d)(y-\eta) - yz\sqrt{(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}{z^2\sqrt{(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} - y(x+d)(y-\eta)^2} + \\ & + z \arctan \frac{-z(x-d)(y-\eta) - yz\sqrt{(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}{z^2\sqrt{(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} - y(x-d)(y-\eta)^2} + \\ & + (x+d) \ln \left[-(y-\eta) + \sqrt{(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} \right] - \\ & - (x-d) \ln \left[-(y-\eta) + \sqrt{(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} \right], \end{aligned} \quad (4.7.58)$$

⁶⁰ Rationalizacija nazivnika i Eulerove supstitucije, detaljnije pogledati u I.N. Bronštejn, K.A. Semendjajev, *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb 1964.

$$\begin{aligned}
G(\eta) = & \eta \ln \frac{(x+d) + \sqrt{(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}{(x-d) + \sqrt{(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} - \\
& - \frac{y}{2} \ln \left\{ [(x+d)^2 + z^2] [2(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 + 2(x+d)\sqrt{(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}] \right\} + \\
& + \frac{y}{2} \ln \left\{ [(x-d)^2 + z^2] [2(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 + 2(x-d)\sqrt{(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}] \right\} .
\end{aligned}$$

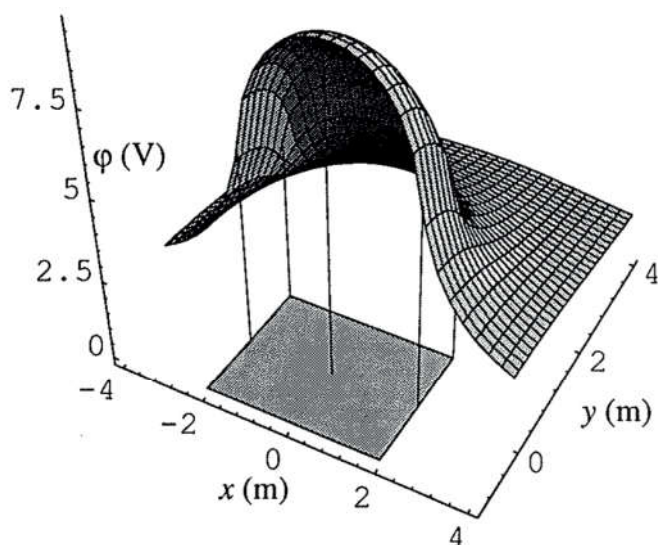
Jakost električnog polja možemo odrediti iz potencijala pomoću izraza (4.1.9), ali je zbog složenosti funkcije potencijala u tom slučaju jednostavnije provesti integraciju

$$E(x,y,z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \int_{-h}^h d\zeta \int_{-d}^d \frac{(x-\eta)\mathbf{a}_x + (y-\zeta)\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{[(x-\eta)^2 + (y-\zeta)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} d\eta = E_x\mathbf{a}_x + E_y\mathbf{a}_y + E_z\mathbf{a}_z . \quad (4.7.59)$$

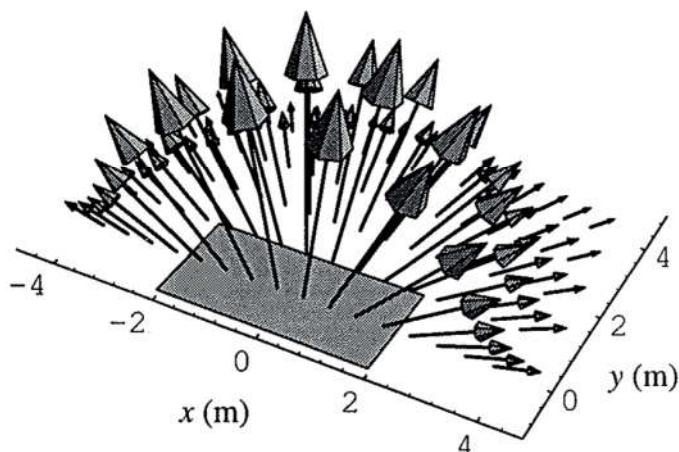
Tu integraciju provodimo po komponentama, a konačni rezultat je

$$\begin{aligned}
E_x = & \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \left\{ -\ln[y-h + \sqrt{(x-d)^2 + (y-h)^2 + z^2}] + \right. \\
& + \ln[y+h + \sqrt{(x-d)^2 + (y+h)^2 + z^2}] + \\
& + \ln[y-h + \sqrt{(x+d)^2 + (y-h)^2 + z^2}] - \\
& \left. - \ln[y+h + \sqrt{(x+d)^2 + (y+h)^2 + z^2}] \right\} , \\
E_y = & \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \left\{ -\ln[x-d + \sqrt{(x-d)^2 + (y-h)^2 + z^2}] + \right. \\
& + \ln[x+d + \sqrt{(x+d)^2 + (y-h)^2 + z^2}] + \\
& + \ln[x-d + \sqrt{(x-d)^2 + (y+h)^2 + z^2}] - \\
& \left. - \ln[x+d + \sqrt{(x+d)^2 + (y+h)^2 + z^2}] \right\} , \\
E_z = & \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \left\{ \arctan \frac{(y-h)(x+d)}{z\sqrt{(x+d)^2 + (y-h)^2 + z^2}} + \right. \\
& + \arctan \frac{(y+h)(x+d)}{z\sqrt{(x+d)^2 + (y+h)^2 + z^2}} + \\
& + \arctan \frac{(y-h)(x-d)}{z\sqrt{(x-d)^2 + (y-h)^2 + z^2}} - \\
& \left. - \arctan \frac{(y+h)(x-d)}{z\sqrt{(x-d)^2 + (y+h)^2 + z^2}} \right\} .
\end{aligned} \quad (4.7.60a - c)$$

Na slici 4.7.11. prikazali smo raspodjelu potencijala jednoliko nabijene ploče plošnim nabojem gustoće $\sigma = 4\pi\epsilon$ i dimenzija $d = 2\text{ m}$ i $h = 1\text{ m}$ u ravnini ploče ($z = 0$), a slika 4.7.12. prikazuje raspodjelu jakosti polja u ravnini $z = 1\text{ m}$ za istu ploču.



Slika 4.7.11. Raspodjela potencijala jednoliko nabijene ploče u ravnini ploče ($z = 0$)



Slika 4.7.12. Raspodjela jakosti polja jednoliko nabijene ploče u ravnini $z = 1\text{ m}$

4.7.4. Volumni naboji i razvoj u multipole

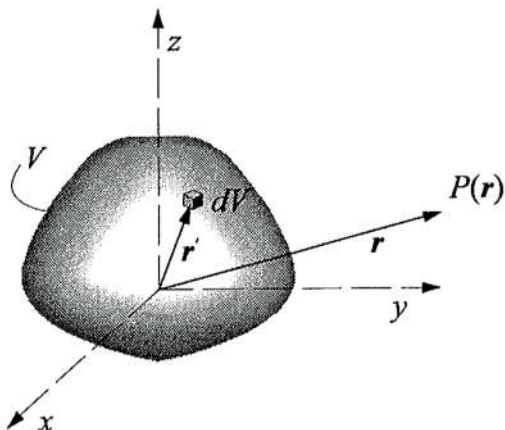
Volumni naboj uveli smo i definirali u članku 1.2.4. pomoću izraza

$$Q = \int_V \rho dV, \quad (4.7.61)$$

gdje je ρ volumna gustoća naboja, a V volumen u kojem je taj naboj raspoređen. Dijelu tog volumena dV koji nosi naboj ρdV možemo pridijeliti svojstva točkastog naboja, pa primjenom načela superpozicije potencijal volumnog naboja iznosi

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (4.7.62)$$

a jakost električnog polja iz poznate funkcije potencijala računamo pomoću (4.1.9). Proračun trostrukog integrala u (4.7.62) najčešće nije moguć analitičkim metodama, pa pribjegavamo numeričkim aproksimacijama. Najjednostavnija je *razvoj potencijala u multipole*. Naboj je raspoređen unutar volumena V , a ishodište koordinatnog sustava odabiremo unutar tog volumena (slika 4.7.13).



Slika 4.7.13. Uz razvoj potencijala u multipole

Udaljenost između točaka $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$ možemo odrediti iz trokuta koji razapinju $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} , \quad (4.7.63)$$

pa možemo pisati

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)}} . \quad (4.7.64)$$

Ako želimo izračunati polje u točkama izvan V , možemo primijeniti razvoj u red⁶¹

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^2 + \dots \right] . \quad (4.7.65)$$

Nakon sređivanja i grupiranja članova te jednadžbe, uz zanemarenje članova s potencijama r^{-3} , r^{-4} ... slijedi

⁶¹ Pogledati razvoj $(1 + x)^{-1/2}$ u Prilogu F.

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}' \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}' \right)^2 - \frac{1}{2} r'^2 \right] + \dots \right\}. \quad (4.7.66)$$

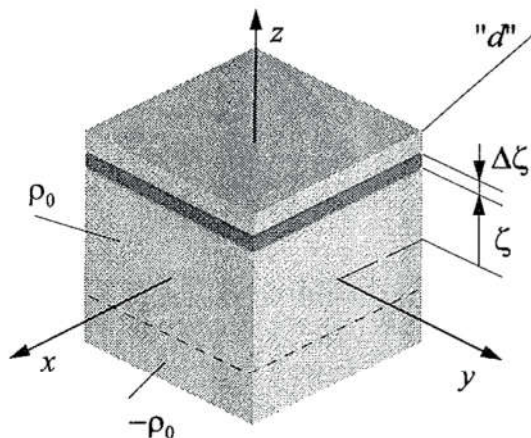
Uvrštenjem tog približenja u jednadžbu (4.7.62) dobivamo sljedeći izraz

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dV + \frac{1}{4\pi\epsilon r^2} \int_V \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon r^3} \int_V \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}' \right)^2 - \frac{1}{2} r'^2 \right] \rho(\mathbf{r}') dV + \dots \end{aligned} \quad (4.7.67)$$

Razmotrimo sada članove tog približenja u slijedu. Prvi član predstavlja potencijal koji bi u točki $\mathbf{r}$ uzrokovao ukupni naboj skoncentriran u ishodište. Taj član nazivamo i *monopolnim članom*; ako su svi naboji istog predznaka, on predstavlja i član s najvećim doprinosom. Drugi član opada s $1/r^2$, jednako kao i potencijal dipola pa ga zovemo *dipolni član*. Sukladno tome treći član zovemo *kvadrupolni član* jer njegov potencijal opada s $1/r^3$.

Primjer 4.7.3.1. Polje nejednoliko nabijene kocke

Nejednoliko nabijena kocka dimenzija $(2a \times 2a \times 2a)$ prikazana je na slici 4.7.14.



Slika 4.7.14. Nejednoliko nabijena kocka

Volumna gustoća naboja ρ zadana je kao:

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 & ; \quad -\frac{a}{2} \leq z \leq a ; \quad -a \leq y \leq a ; \quad -a \leq x \leq a , \\ -\rho_0 & ; \quad -a \leq z < -\frac{a}{2} ; \quad -a \leq y \leq a ; \quad -a \leq x \leq a . \end{cases} \quad (4.7.68)$$

Čak i u tom, vrlo jednostavnom slučaju nije moguće analitički odrediti integral (4.7.62).

Ovdje ćemo usporediti dva pristupa:

1. *Određivanje potencijala superpozicijom doprinosa ploča iz primjera 4.7.3.1. konačne debljine*

U tom pristupu kocku dijelimo na N ploča konačne debljine $\Delta\zeta = 2a/N$. Svaku takvu ploču konačne debljine zamjenjujemo s jednoliko nabijenom plohom u sredini ploče. Gustoća plošnog naboja na svakoj plohi je

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{\rho(z_i) \Delta\zeta 2a 2a}{2a 2a} = \rho(z_i) \Delta\zeta, \quad (4.7.69)$$

pa potencijal kocke računamo približno pomoću

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\Delta\zeta}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N [F_i(a) + G_i(a) - F_i(-a) - G_i(-a)] \rho(z_i), \quad (4.7.70)$$

gdje su

$$\begin{aligned} F_i(\eta) = & -z_i \arctan \frac{-z_i(x+d)(y-\eta) - yz_i \sqrt{(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2}}{z_i^2 \sqrt{(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2} - y(x+d)(y-\eta)^2} + \\ & + z_i \arctan \frac{-z_i(x-d)(y-\eta) - yz_i \sqrt{(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2}}{z_i^2 \sqrt{(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2} - y(x-d)(y-\eta)^2} + \\ & + (x+d) \ln \left[- (y-\eta) + \sqrt{(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2} \right] - \\ & - (x-d) \ln \left[- (y-\eta) + \sqrt{(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2} \right], \quad (4.7.71) \\ G_i(\eta) = & \eta \ln \frac{(x+d) + \sqrt{(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2}}{(x-d) + \sqrt{(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2}} - \\ & - \frac{y}{2} \ln \left\{ \left[(x+d)^2 + z_i^2 \right] \left[2(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2 + 2(x+d) \sqrt{(x+d)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2} \right] \right\} + \\ & + \frac{y}{2} \ln \left\{ \left[(x-d)^2 + z_i^2 \right] \left[2(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2 + 2(x-d) \sqrt{(x-d)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

i

$$z_i = z + a - \left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta\zeta, \quad (4.7.72)$$

čime smo uzeli u obzir translaciju koordinatnog sustava iz primjera 4.7.3.1. za svaku ploču.

2. Multipolni razvoj

Za određivanje doprinosa monopolnog člana moramo izračunati

$$\int_V \rho dV = -2\rho_0 a^3 + 6\rho_0 a^3 = 4\rho_0 a^3. \quad (4.7.73)$$

Za doprinos dipolnog člana vrijedi

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}' \right) \rho(\mathbf{r}') dV &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz' \int_{-a}^a dy' \int_{-a}^a dx' \rho_0 \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \\ &+ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz' \int_{-a}^a dy' \int_{-a}^a dx' \rho_0 \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{3a^4 z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \rho_0, \end{aligned} \quad (4.7.74)$$

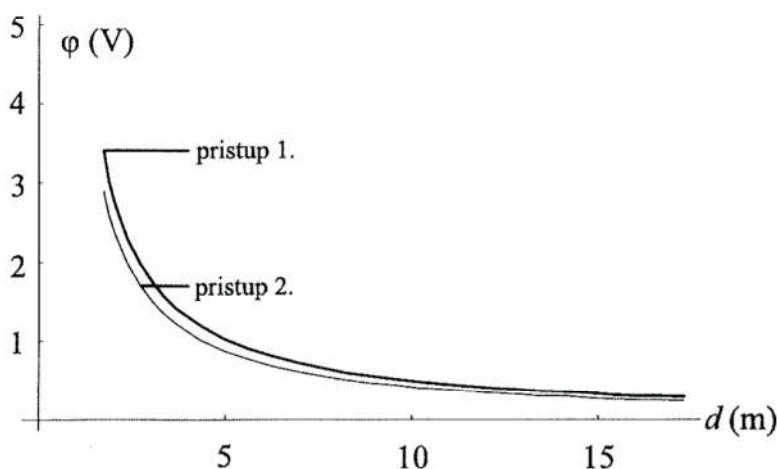
a za kvadrupolni član doprinos je

$$\int_V \left[\frac{3}{2} \frac{(xx' + yy' + zz')^2}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) \right] \rho(x', y', z') dV = \frac{a^5 (x^2 + y^2 - 2z^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)} \rho_0, \quad (4.7.75)$$

pa koristeći izraz (4.7.67) možemo potencijal te kocke u točkama izvan nje približno izračunati pomoću

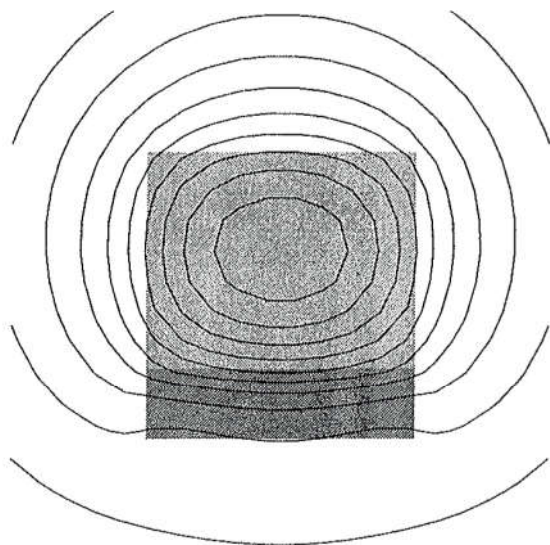
$$\varphi(x, y, z) \approx \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{4a^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{3a^4 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{a^5 (x^2 + y^2 - 2z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right\}. \quad (4.7.76)$$

Na slici 4.7.15. prikazali smo usporedbu rezultata proračuna potencijala kocke duž pravca dijagonale kocke "d".



Slika 4.7.15. Usporedba rezultata proračuna duž pravca dijagonale "d"

Na slici 4.7.16. prikazane su ekvipotencijalne linije u ravnini $x = 0$ koje smo odredili pristupom 1. Podaci kocke su $a = 1$ m i $\rho_0 = 4\pi\epsilon$ C/m³, a broj podjela N u pristupu 1. bio je 10.



Slika 4.7.16. Ekvipotencijalne linije nejednolike nabijene kocke u ravnini $x = 0$

4.8. RASPODJELA NABOJA U OGRANIČENOM PROSTORU I ODSLICKAVANJE

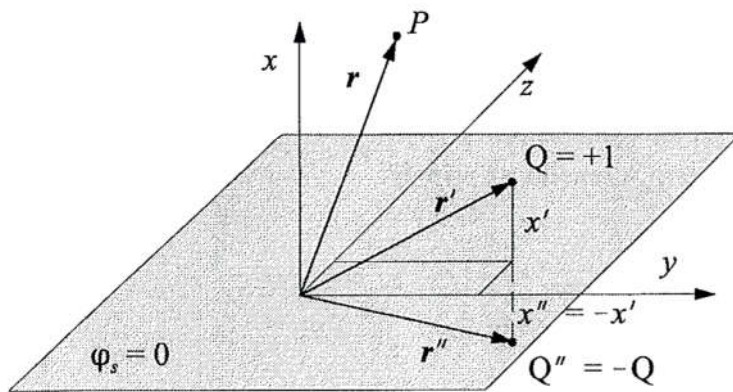
U članku 4.5.3. utvrdili smo da je za rješavanje zadaća statičkih električnih polja za zadane raspodjele naboja u ograničenom prostoru potrebno poznavati Greenove funkcije za zadanu geometriju zadaće. Tada možemo primijeniti opće integralno rješenje Poissonove diferencijalne jednačbe koje smo odredili izrazom (4.5.10).

4.8.1. Greenove funkcije ravnih metalnih granica

4.8.1.1. Točkasti naboj ispred vodljive ravnine

Najprije ćemo odrediti *trodimenzionalnu Greenovu funkciju vodljive ravnine*. Razmotrimo najjednostavniju *Dirichletovu rubnu zadaću*: točkasti naboj Q nalazi se ispred beskonačne vodljive ravnine (slika 4.8.1) na nultom potencijalu. Pokušajmo konstruirati Greenovu funkciju za zadanu geometriju. Iz jednačbe (2.5.6) slijedi oblik Greenove funkcije

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') . \quad (4.8.1)$$



Slika 4.8.1. Točkasti naboj ispred vodljive ravnine

Za Dirichletovu rubnu zadaću propisali smo uvjet (4.5.11) pa slijedi

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + F = 0 \quad \text{za} \quad x=0, \quad (4.8.2)$$

odnosno

$$F(x=0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon\sqrt{(x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}. \quad (4.8.3)$$

Taj izraz predstavlja potencijal točkastog naboja $q'' = -q = -1$ u ravnini $x=0$. Naboj q'' nalazi se u točki $\mathbf{r}''$ za koju vrijedi $x'' = \pm x'$, $y'' = y'$ i $z'' = z'$. Ako odaberemo $x'' = x'$, Greenova će funkcija biti jednaka nuli u svim točkama prostora, što predstavlja trivijalno rješenje pa odabiremo $x'' = -x'$. Konačni oblik Greenove funkcije za zadanu geometriju je prema tome

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}, \quad (4.8.4)$$

pa potencijal točkastog naboja Q u poluprostoru $x \geq 0$ računamo pomoću

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}. \quad (4.8.5)$$

Taj izraz je ekvivalentan izrazu za potencijal točkastih naboja Q i $-Q$ simetrično smještenih u odnosu na ravninu $x=0$. Naboj $-Q$ nazivamo *odslikanim nabojem*,⁶² a takav postupak konstruiranja Greenovih funkcija *odslikavanje*. Na temelju (4.8.4) možemo Greenovu funkciju G_D protumačiti kao potencijal jediničnog točkastog naboja u zadanoj geometriji uz uvjet da je rubna ploha na potencijalu jednakom nuli. To

⁶² On predstavlja zrcalnu sliku naboja Q kroz ravninu $x=0$.

tumačenje⁶³ ćemo nadalje u ovom odjeljku koristiti za konstrukciju Greenovih funkcija.

4.8.1.2. Prostorni naboj ispred vodljive ravnine

Iz jednadžbe (4.5.12) slijedi da za proizvoljnu raspodjelu naboja $\rho(\mathbf{r}')$ u poluprostoru $x > 0$ (ravnina $x = 0$ je na nultom potencijalu) vrijedi

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right\} dV' \quad (4.8.6)$$

Ako je na ravnini $x = 0$ zadana neka raspodjela potencijala $\varphi(0, y', z')$, moramo prema (4.5.12) odrediti $\partial\varphi/\partial n'$. Budući je $\mathbf{n}' = -\mathbf{a}_x$ slijedi

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n'} \right)_S = - \left(\frac{\partial G}{\partial x'} \right)_{x'=0} = - \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{2x}{[x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}. \quad (4.8.7)$$

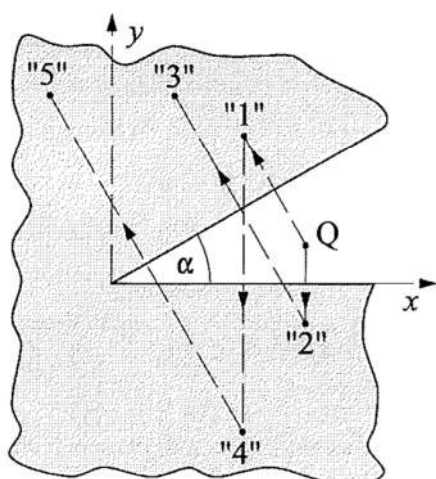
Konačni je izraz za proračun potencijala u tom slučaju

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right\} dV' + \\ + \frac{1}{2\pi} \oint_S \frac{x \varphi(0, y', z')}{[x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dS'. \end{aligned} \quad (4.8.8)$$

4.8.1.3. Točkasti naboj u vodljivom kutu

Rješenje za Greenovu funkciju iz točke 4.8.1.1. možemo iskoristiti za konstrukciju Greenove funkcije naboja koji se nalazi u vodljivom kutu (slika 4.8.2). Greenovu funkciju te geometrije konstruirat ćemo pomoću potencijala jediničnog točkastog naboja i odslikavanja. Da bi Greenova funkcija bila nula u ravnini ($x = \cos\alpha, y = \sin\alpha$), moramo dodati negativni jedinični naboj simetričan jediničnom naboju na mjesto "1". Ali sada Greenova funkcija nije nula u ravnini $y = 0$, pa moramo dodati suprotne jedinične naboje na mjesta "2" i "4". Time smo poremetili rubni uvjet u ravnini ($x = \cos\alpha, y = \sin\alpha$), pa moramo dodati suprotne jedinične naboje u mjesta "3" i "5".

⁶³ Drugim riječima, G_D je odziv geometrije prostora na uzбудu jediničnim točkastim nabojem uz nulti potencijal granica.

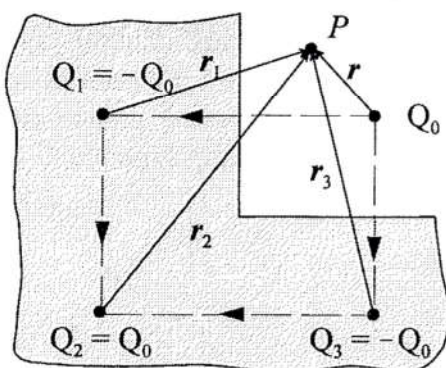


Slika 4.8.2. Točkasti naboj u vodljivom kutu

Takav postupak može trajati beskonačno, ali ako vrijedi $\alpha = \pi/n$ (n je cijeli broj) broj dodatnih odslikanih naboja je konačan i iznosi $(2n - 1)$. Svi naboji (originalni i odslikani) tada leže na kružnici.

Primjer 4.8.1.1. Polje točkastog naboja u vodljivom pravom kutu

Slika 4.8.3. prikazuje konstrukciju Greenove funkcije. Kut α je $\pi/2$, pa je $n = 2$, što rezultira s tri odslikana naboja.

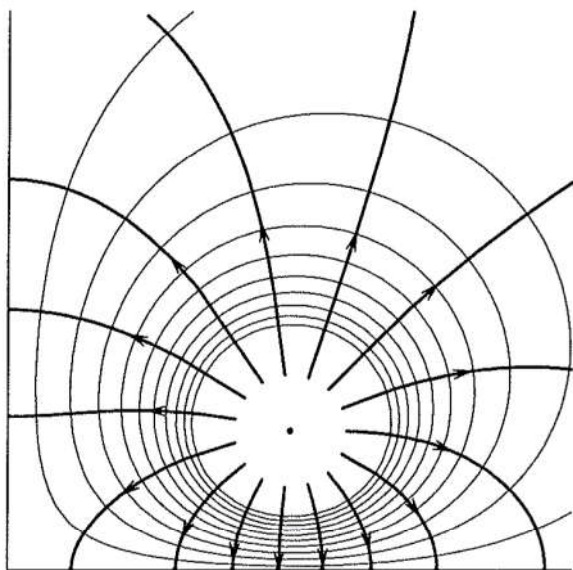


Slika 4.8.3 Točkasti naboj u vodljivom pravom kutu

Potencijal i jakost polja u svim točkama pravokutnog prostora računamo kao potencijal i jakost polja skupine od četiri točkasta naboja u neograničenom prostoru

$$\varphi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right), \quad (4.8.9a,b)$$

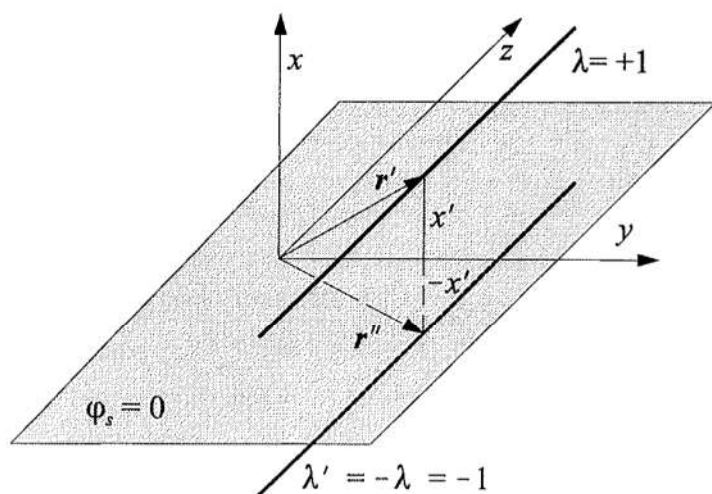
$$E = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} - \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} \right).$$



Slika 4.8.4. Polje točkastog naboja u vodljivom pravom kutu

4.8.1.4. Linijski naboj ispred vodljive ravnine

Sljedeća vrsta zadaća za koju možemo Greenove funkcije odrediti odslikavanjem jesu zadaće koje uključuju beskonačno duge raspodjele naboja neovisno o uzdužnoj koordinati. Tada su zadaće dvodimenzionalne, a za konstruiranje *dvodimenzionalne Greenove funkcije* vodljivih ravnih granica umjesto jediničnog točkastog naboja stavljamo linijski naboj jednolike jedinične gustoće $\lambda = 1$ C/m (u smjeru osi z) ispred vodljive ravnine (slika 4.8.5).



Slika 4.8.5. Linijski naboj ispred vodljive ravnine

Potencijal beskonačno dugog linijskog naboja jednolike gustoće izveli smo u članku 4.7.2. Ako se linijski naboj nalazi u točki $\mathbf{r}'$ njegov potencijal u točki $\mathbf{r}$ je

$$\varphi(x, y) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|r_0 - \mathbf{r}'|}, \quad (4.8.10)$$

gdje je $\mathbf{r}_0$ proizvoljni konstantni vektor koji određuje polumjer cilindra nultog potencijala.⁶⁴ Greenova funkcija (potencijal jediničnog linijskog naboja) u ovom rasporedu mora biti nula u ravnini $x = 0$, a to možemo postići simetričnim dodavanjem jednako naboja suprotnog predznaka. Sukladno tome Greenova funkcija je⁶⁵

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \left\{ \ln \frac{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \ln \frac{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right\}, \quad (4.8.11)$$

odnosno

$$G(x, y, x', y') = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{(x+x')^2 + (y-y')^2}{(x-x')^2 + (y-y')^2}. \quad (4.8.12)$$

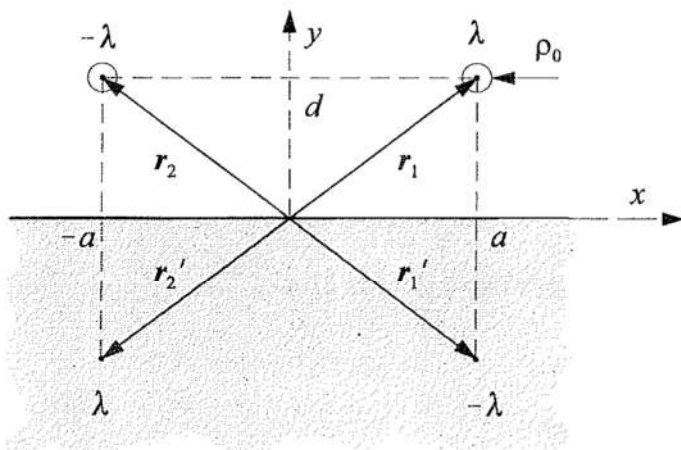
Jednadžba (4.8.12) ukazuje na sličan oblik dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih Greenovih funkcija. Primjenom zamjene

$$\frac{1}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rightarrow \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.8.13)$$

možemo direktno pisati dvodimenzionalne iz trodimenzionalnih Greenovih funkcija.

Primjer 4.8.1.2. Dvožični vod ispred vodljive ravnine

Dvožični vod približujemo s rasporedom linijskih naboja skoncentriranih u središtima vodiča, budući je polumjer vodiča ρ_0 mnogo manji od udaljenosti između vodiča $2a$ i udaljenosti između vodiča i vodljive ravnine d (slika 4.8.6).



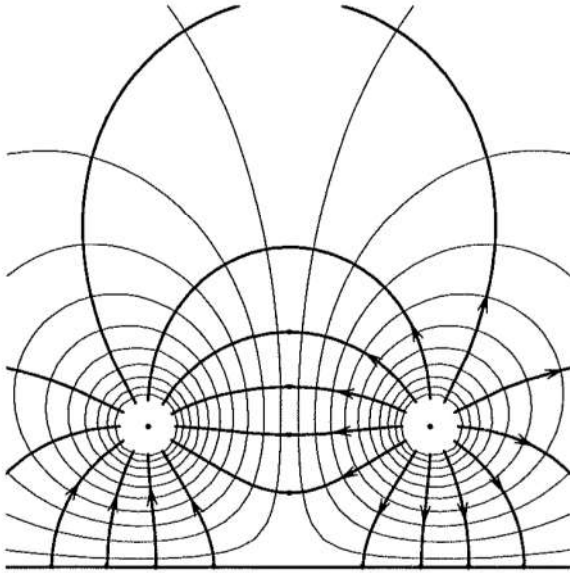
Slika 4.8.6. Dvožični vod ispred vodljive ravnine

⁶⁴ Pogledati primjer 4.7.2.2, jednadžbu (4.7.53).

⁶⁵ $\mathbf{r}_0$ biramo tako da vrijedi: $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'| = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}''|$

Prema jednadžbama (4.8.20 i 21) potencijal u prostoru $y \geq 0$ računamo pomoću⁶⁶

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \left\{ \ln \frac{|r_0 - r_1|}{|r - r_1|} - \ln \frac{|r_0 - r_1'|}{|r - r_1'|} - \ln \frac{|r_0 - r_2|}{|r - r_2|} + \ln \frac{|r_0 - r_2'|}{|r - r_2'|} \right\} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{(x-a)^2 + (y+d)^2}{(x-a)^2 + (y-d)^2} \frac{(x+a)^2 + (y-d)^2}{(x+a)^2 + (y+d)^2}.\end{aligned}\quad (4.8.14)$$



Slika 4.8.7. Polje dvožičnog voda ispred vodljive ravnine

To rješenje možemo iskoristiti za određivanje parcijalnih kapaciteta takvog voda. Potencijali vodiča jesu

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{2d}{r_0} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{d^2 + a^2}{a^2}, \\ \varphi_2 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{d^2 + a^2}{a^2} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{2d}{r_0},\end{aligned}\quad (4.8.15)$$

pa primjenom postupka za određivanje parcijalnih kapaciteta iz članka 4.4.2.⁶⁷ dobivamo

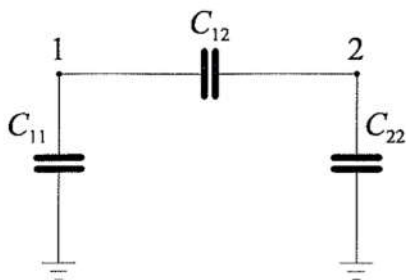
$$C_{12} = C_{21} = \frac{\pi\epsilon}{\ln^2\left(\frac{2d}{r_0}\right) - \ln^2\left(\frac{d^2 + a^2}{a^2}\right)} \ln \frac{d^2 + a^2}{a^2}, \quad (4.8.16a)$$

⁶⁶ Za referentni radijus odabiremo $r_0 = 0$.

⁶⁷ Pogledati jednadžbe (4.4.27 i 28) i primjer 4.4.3.

$$C_{11} = C_{22} = \frac{\pi \varepsilon}{\ln^2\left(\frac{2d}{r_0}\right) - \ln^2\left(\frac{d^2 + a^2}{a^2}\right)} \left\{ \ln \frac{2d}{r_0} - \ln \frac{d^2 + a^2}{a^2} \right\}. \quad (4.8.16b)$$

Nadomjesna shema statičkog električnog polja takvog voda prikazana je na slici 4.8.8.

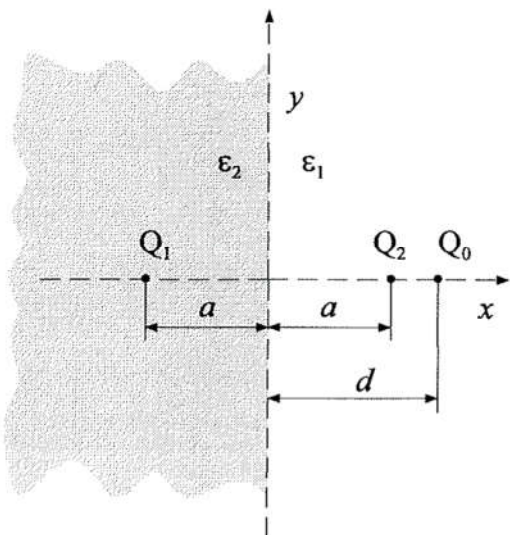


Slika 4.8.8. Nadomjesna shema statičkog električnog voda iznad vodljive ravnine (zemlje)

4.8.2. Greenove funkcije ravne dielektričke granice

4.8.2.1. Točkasti naboj ispred ravne granice dvaju dielektrika

Postupak koji smo razradili u prethodnom članku možemo primijeniti i za određivanje Greenove funkcije neograničenog prostora koji se sastoji od dva poluprostora različitih dielektričnosti, odnosno za određivanje potencijala točkastog naboja Q_0 koji se nalazi u poluprostoru "1" dielektričnosti ε_1 ispred dielektričkog poluprostora "2" dielektričnosti ε_2 (slika 4.8.9).



Slika 4.8.9. Točkasti naboj ispred dielektričkog poluprostora

Pretpostavljamo da potencijal i jakost polja u poluprostoru "1" možemo izračunati superpozicijom kao zbroj djelovanja zadanog naboja Q_0 i njegove zrcalne slike Q_1

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{Q_0}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \frac{Q_1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}} \right), \\
E_1(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \frac{Q_0}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} [(x-d)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{Q_1}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2}} [(x+a)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z] \right\},
\end{aligned} \tag{4.8.17,18}$$

a u poluprostoru "2" kao zbroj djelovanja zadanog naboja Q_0 i druge zrcalne slike Q_2

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{Q_0}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} \right), \\
E_2(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left\{ \frac{Q_0}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} [(x-d)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{Q_2}{[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}} [(x-a)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.8.19,20}$$

Pretpostavili smo takav raspored naboja na pravcu okomitom na granicu budući da jedino on može zadovoljiti uvjet kontinuiranosti potencijala pri prelasku granice dielektrika. Ako uspijemo odrediti Q_1 , Q_2 i a , tako da ispunimo sve uvjete na granici dvaju dielektrika, onda je prema teoremu o jedinstvenosti rješenja Poissonove jednačbe⁶⁸ to i rješenje ove zadaće. Uvjeti na graničnoj plohi $x = 0$ su

$$\begin{aligned}
\varphi_1(0,y,z) &= \varphi_2(0,y,z), \\
D_{x1}(0,y,z) &= D_{x2}(0,y,z), \\
E_{y1}(0,y,z)\mathbf{a}_y + E_{z1}(0,y,z)\mathbf{a}_z &= E_{y2}(0,y,z)\mathbf{a}_y + E_{z2}(0,y,z)\mathbf{a}_z.
\end{aligned} \tag{4.8.21-23}$$

Iz (4.8.22) slijedi $Q_2 = -Q_1$. Uvrštenjem tog uvjeta u (4.8.21 i 23) dobivamo

$$\begin{aligned}
Q_0 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\sqrt{d^2+y^2+z^2}} &= Q_2 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}, \\
Q_0 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{[d^2+y^2+z^2]^{3/2}} &= Q_2 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{[a^2+y^2+z^2]^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{4.8.24,25}$$

⁶⁸ Pogledati članak 4.5.2.

Iz tih jednažbi slijedi

$$a = d ,$$

$$Q_2 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q_0 , \quad (4.8.27a,b)$$

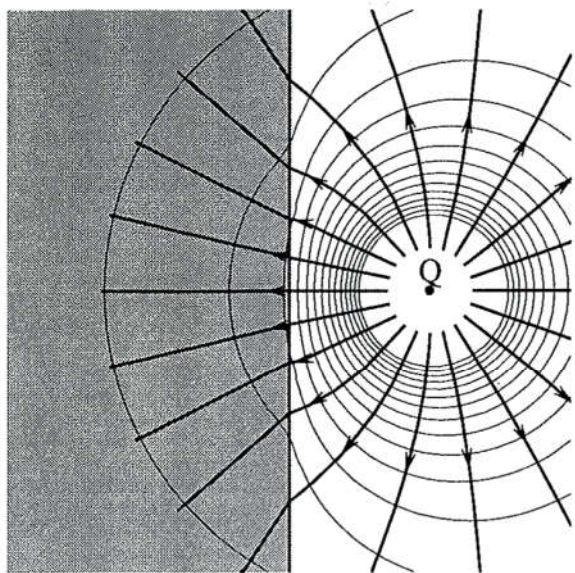
$$Q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q_0 ,$$

pa konačno možemo utvrditi da polje u poluprostoru "1" računamo pomoću dva naboja $Q' = Q_0$ i $Q'' = Q_1$, dok polje u poluprostoru "2" računamo pomoću jednog naboja $Q = Q_0 + Q_2$ na udaljenosti d od granične plohe. Trodimenzionalna Greenova funkcija za poluprostor "1" je

$$G_1(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right] , \quad (4.8.28)$$

a za poluprostor "2"

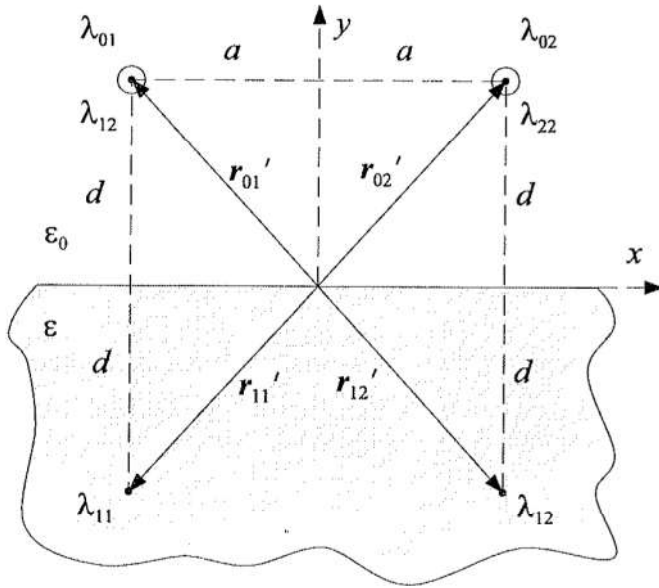
$$G_2(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} . \quad (4.8.29)$$



Slika 4.8.10. Polje točkastog naboja ispred dielektričkog poluprostora

Primjer 4.8.2.1. Dvožični vod ispred dielektričkog poluprostora

Dvožični vod u zraku ispred poluprostora dielektričnosti ϵ prikazali smo na slici 4.8.11.



Slika 4.8.11. Dvožični vod ispred dielektričkog poluprostora

Ako su ispunjeni uvjeti $a \gg \rho_0$ i $d \gg \rho_0$ možemo naboj raspodijeljen po površini vodiča zamijeniti linijskim nabojima u središtima vodiča. Problem je dvodimenzionalan i Greenove funkcije za oba poluprostora možemo izvesti iz jednadžbi (4.8.28,29) uz zamjenu (4.8.13)

$$G_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{02}|}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{01}|} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \ln \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{12}|}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{11}|} \right], \quad (4.8.30,31)$$

$$G_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{2\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon} \ln \frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_{01}|}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_{02}|}.$$

Potencijal i jakost polja u zraku računamo pomoću

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \ln \frac{(x-a)^2 + (y-d)^2}{(x-a)^2 + (y+d)^2} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \ln \frac{(x+a)^2 + (y-d)^2}{(x+a)^2 + (y+a)^2} \right\},$$

$$E_1 = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{8dy(x-a)}{[(x-a)^2 + (y-d)^2][(x-a)^2 + (y+a)^2]} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{8dy(x+a)}{[(x+a)^2 + (y-d)^2][(x+a)^2 + (y+d)^2]} \right\} \mathbf{a}_x$$

$$+ \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{4d[(y^2 - d^2) - (x-a)^2]}{[(x-a)^2 + (y-d)^2][(x-a)^2 + (y+d)^2]} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{4d[(y^2 - d^2) - (x+a)^2]}{[(x+a)^2 + (y-d)^2][(x+a)^2 + (y+d)^2]} \right\} \mathbf{a}_y,$$

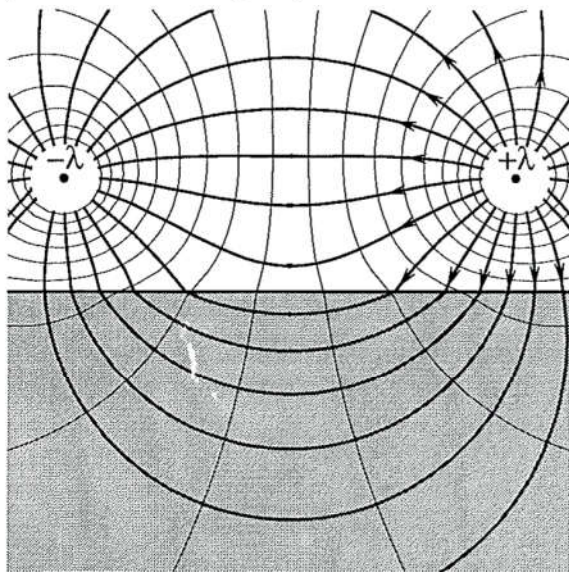
a izrazi za potencijal i jakost polja u dielektriku su

$$\varphi_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \ln \frac{(x-a)^2 + (y-d)^2}{(x-a)^2 + (y+d)^2},$$

$$E_2 = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{8dy(x-a)}{[(x-a)^2 + (y-d)^2][(x-a)^2 + (y+d)^2]} a_x +$$

$$+ \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{4d[(y^2 - d^2) - (x-a)^2]}{[(x-a)^2 + (y-d)^2][(x-a)^2 + (y+d)^2]} a_y. \quad (4.8.34,35)$$

Ako dielektričnost $\epsilon \rightarrow \infty$ onda iz izraza (4.8.27b,c) slijedi $\lambda_1 = -\lambda$ a $\lambda_2 = 0$. Karakteristike dielektrika sve više sliče karakteristikama metala, a rezultat tog primjera postaje jednak rezultatu primjera 4.8.1.2.



Slika 4.8.12. Polje dvožičnog voda ispred dielektričkog poluprostora

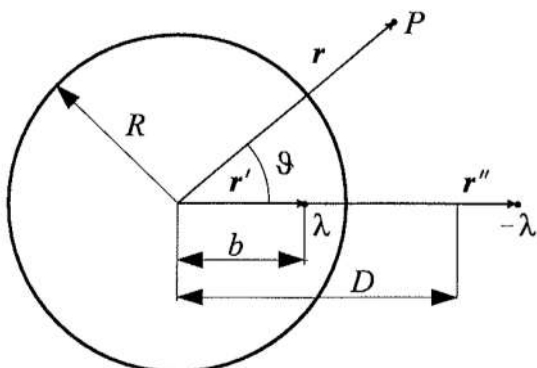
4.8.3. Greenove funkcije cilindričnih granica

Greenove funkcije zadaća koje uključuju cilindričnu granicu možemo pomoću jednostavnih odslikavanja odrediti samo u dvodimenzionalnom slučaju, jer hiperbolnu potencijalnu funkciju točkastog naboja ne možemo spojiti s logaritamskom potencijalnom funkcijom beskonačnog cilindra.⁶⁹

⁶⁹ Detaljnije obrazloženje pogledati u E. Weber, *Electromagnetic theory*, Dover Publishers, New York 1965.

4.8.3.1. Vodljiva cilindrična granica

Neka se beskonačni linijski naboj gustoće λ nalazi unutar vodljivog cilindra prema slici 4.8.13.



Slika 4.8.13. Linijski naboj unutar vodljivog cilindra

Dvodimenzionalnu Greenovu funkciju takvog rasporeda konstruirat ćemo pomoću potencijala jediničnog linijskog naboja u njemu. Koristit ćemo odslikavanje jediničnog linijskog naboja u negativni jedinični naboj na mjestu r'' ($r'' = kr'$). Iz izraza (4.8.11) slijedi potencijal u točki r ⁷⁰

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{|r_0 - r'|}{|r - r'|} + \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{|r_0 - r''|}{|r - r''|} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{|r - r'|}{|r - kr'|} . \quad (4.8.36)$$

Za točke na cilindru polumjera $r = R$ vrijedi

$$\begin{aligned} |r - r'| &= R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos \vartheta , \\ |r - r''| &= R^2 + k^2 r'^2 - 2Rkr' \cos \vartheta . \end{aligned} \quad (4.8.37a,b)$$

Uvrštenjem (4.8.37a,b) u (4.8.36) i uz pretpostavku da je potencijal tog cilindra konstantan i iznosi $\ln C$ slijedi

$$R^2 + k^2 r'^2 - 2Rkr' \cos \vartheta = C(R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos \vartheta) . \quad (4.8.38)$$

Taj uvjet vrijedi za svaki kut ϑ ako je

$$\begin{aligned} 2Rkr' &= 2CRr' , \\ R^2 + k^2 r'^2 &= CR^2 + Cr'^2 . \end{aligned} \quad (4.8.39)$$

Iz tog sustava jednačbi slijedi rješenje

$$k = \frac{R^2}{r'^2} , \quad (4.8.40)$$

⁷⁰ Za polumjer referentnog cilindra r_0 odabiremo $r_0 = (r' + r'')/2$.

pa je Greenova funkcija tog rasporeda oblika

$$G(r, r') = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\left| r - \frac{R^2}{b^2} r' \right|}{|r - r'|} + K = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{C \left| r - \frac{R^2}{b^2} r' \right|}{|r - r'|} . \quad (4.8.41)$$

Konstanta K mora biti takva da $G(r, r')$ bude nula na cilindru $r = R$, pa slijedi

$$C = \frac{b}{R} , \quad (4.8.42)$$

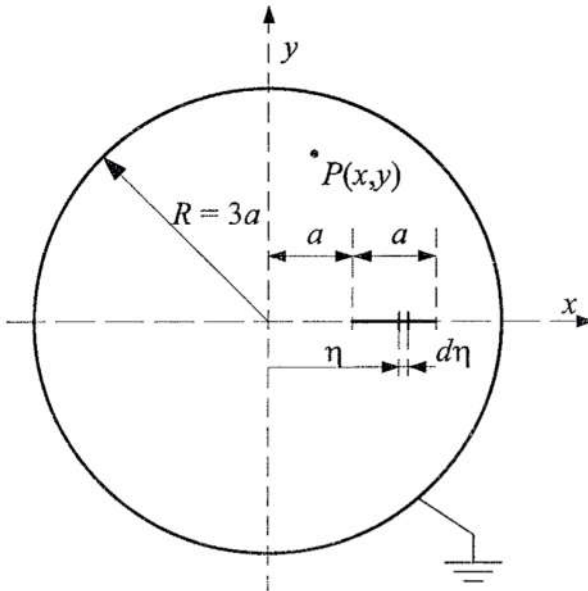
a konačni oblik Greenove funkcije za metalnu cilindričnu granicu je

$$G(r, r') = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\left| \frac{b}{R} r' - \frac{R}{b} r \right|}{|r - r'|} . \quad (4.8.43)$$

Naglašavamo da je nevažan položaj originalnog naboja. Ako je originalni naboj unutar cilindra, tada je G Greenova funkcija za područje unutar cilindra i obratno, ako je originalni naboj izvan cilindra, onda je G Greenova funkcija za područje izvan cilindra.

Primjer 4.8.3.1. Polje trake unutar uzemljenog vodljivog cilindra

Beskonačna traka jednoliko nabijena nabojem plošne gustoće σ nalazi se unutar uzemljenog metalnog cilindra prema slici 4.8.14.



Slika 4.8.14. Traka unutar uzemljenog metalnog cilindra

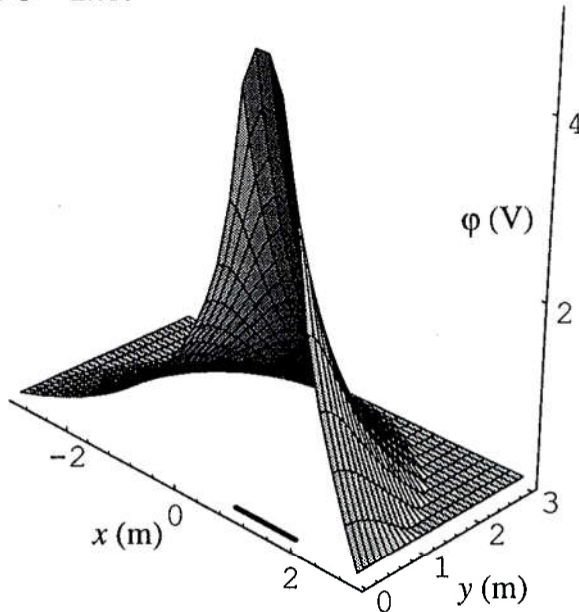
Prema jednadžbi (4.5.12) potencijal unutar cilindra je

$$\begin{aligned}
 \varphi(x,y) &= \int_a^{2a} \sigma d\eta \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\left| \frac{\eta}{R}(xa_x + ya_y) - \frac{R}{\eta}a_x \right|}{|xa_x + ya_y - \eta a_x|} = \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \int_a^{2a} \ln \frac{\left(\eta \frac{x}{R} - R \right)^2 + \frac{\eta^2}{R^2} y^2}{(x-\eta)^2 + y^2} d\eta .
 \end{aligned} \tag{4.8.44}$$

Izračunavanje tog integrala je dosta složeno, a proveli smo ga pomoću postupka parcijalne integracije i primjenom Eulerovih supstitucija. Konačni rezultat jest

$$\begin{aligned}
 \varphi(x,y) &= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \left\{ -2y \left(\arctan \frac{2a-x}{y} - \arctan \frac{a-x}{y} \right) + \right. \\
 &\quad + \frac{2R^2 y}{x^2 + y^2} \left[\arctan \frac{-R^2 x + 2a(x^2 + y^2)}{R^2 y} - \arctan \frac{-R^2 x + a(x^2 + y^2)}{R^2 y} \right] + \\
 &\quad + x \ln \frac{4a^2 - 4ax + x^2 + y^2}{a^2 - 2ax + x^2 + y^2} - \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \ln \frac{R^4 - 4aR^2 x + 4a^2(x^2 + y^2)}{R^4 - 2aR^2 x + a^2(x^2 + y^2)} + \\
 &\quad \left. + 2a \ln \frac{\left(-R + \frac{2ax}{R} \right)^2 + \frac{4a^2 y^2}{R^2}}{(x-2a)^2 + y^2} - a \ln \frac{\left(-R + \frac{ax}{R} \right)^2 + \frac{a^2 y^2}{R^2}}{(x-a)^2 + y^2} \right\} .
 \end{aligned} \tag{4.8.45}$$

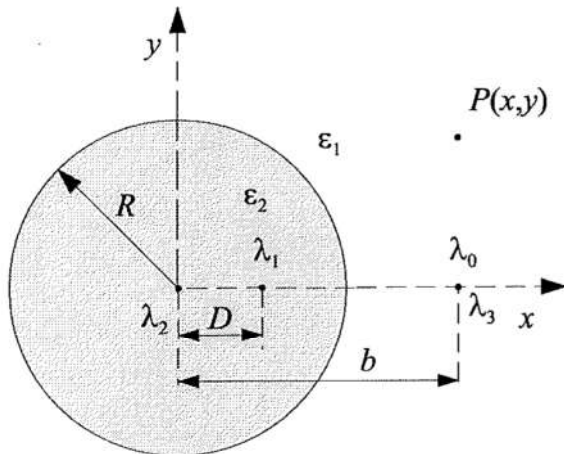
Na slici 4.8.15. prikazali smo raspodjelu potencijala unutar cilindra za $R = 3\text{ m}$, $a = 1\text{ m}$ i $\sigma = 2\pi\epsilon$.



Slika 4.8.15. Raspodjela potencijala jednoliko nabijene trake unutar uzemljenog metalnog cilindra

4.8.3.2. Dielektrična cilindrična granica

Rješenje zadatke određivanja polja linijskog naboja ispred dielektričnog cilindra (slika 4.8.16) potražiti ćemo analogijom s rješenjem polja linijskog naboja ispred dielektričnog poluprostora.⁷¹



Slika 4.8.16. Linijski naboj ispred dielektričnog cilindra

Originalni naboj λ_0 , koji se nalazi u području dielektričnosti ϵ_1 na udaljenosti b od središta cilindra, odslikat ćemo u naboj λ_1 u cilindru na mjesto udaljeno od središta cilindra za $D = R^2/b$ kao i kod metalne cilindrične granice. Time smo unijeli naboj u područje u kojem nema naboja, pa moramo za proračun polja izvan cilindra dodati još jedan linijski naboj $\lambda_2 = -\lambda_1$ u središte cilindra. Za proračun polja unutar cilindra koristimo dodatni naboj $\lambda_3 = -\lambda_1$ na mjestu originalnog naboja λ_0 . Odslikane linijske naboje računamo prema

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \lambda_0 \quad ; \quad \lambda_2 = -\lambda_1 \quad ; \quad \lambda_3 = -\lambda_1 . \quad (4.8.46)$$

Potencijal u području izvan cilindra računamo pomoću

$$\varphi_1(x,y) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \ln \frac{r_0^2}{(x-b)^2 + y^2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \ln \frac{x^2 + y^2}{\left(x - \frac{R^2}{b}\right)^2 + y^2} \right\} , \quad (4.8.47)$$

a potencijal unutar cilindra pomoću

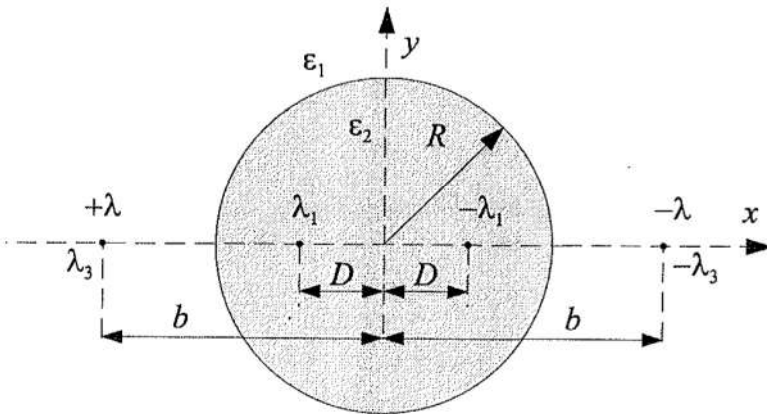
$$\varphi_2(x,y) = \frac{\lambda_0}{4\pi} \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \ln \frac{r_0^2}{(x-b)^2 + y^2} . \quad (4.8.48)$$

⁷¹ Pogledati članak 4.8.3.

Kada se točka $P(x,y)$ nalazi na cilindričnoj plohi vrijedi $x^2 + y^2 = R^2$, mora vrijediti $\varphi_1 = \varphi_2$, pa slijedi da referentni cilindar ima polumjer $r_0 = b$. Dokaz da takav raspored naboja zadovoljava sve uvjete na cilindričnoj granici dvaju područja različitih dielektričnosti prepuštamo čitatelju.

Primjer 4.8.3.2. Dva linijska naboja i dielektrički cilindar

Dva linijska naboja λ i $-\lambda$ nalaze se u prostoru dielektričnosti ϵ_1 i smještene su simetrično u odnosu na os dielektričkog cilindra dielektričnosti ϵ_2 prema slici 4.8.17.



Slika 4.8.17. Dva linijska naboja i dielektrični cilindar

Linijski naboji koje trebamo dodati u središte cilindra poništavaju se, pa potencijal izvan i unutar cilindra računamo pomoću

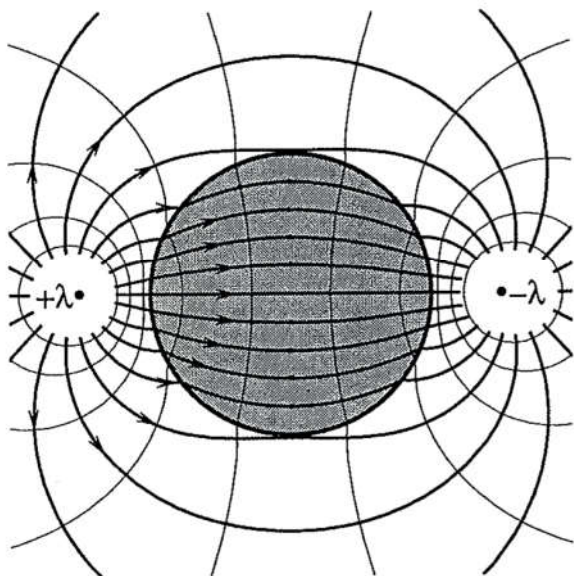
$$\varphi_1(x,y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_1} \left(\ln \frac{(x-b)^2 + y^2}{(x+b)^2 + y^2} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \ln \frac{(x-D)^2 + y^2}{(x+D)^2 + y^2} \right), \quad (4.8.49,50)$$

$$\varphi_2(x,y) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \ln \frac{(x-b)^2 + y^2}{(x+b)^2 + y^2},$$

a jakost električnog polja pomoću

$$\begin{aligned} E_1(x,y) = & -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_1} \left\{ 4 \frac{(x^2 - b^2)b - by^2}{[(x-b)^2 + y^2][(x+b)^2 + y^2]} + \right. \\ & \left. + 4 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{(x^2 - D^2)D - Dy^2}{[(x-D)^2 + y^2][(x+D)^2 + y^2]} \right\} a_x - \\ & - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_1} \left\{ 8 \frac{bxy}{[(x-b)^2 + y^2][(x+b)^2 + y^2]} + \right. \\ & \left. + 8 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{Dxy}{[(x-D)^2 + y^2][(x+D)^2 + y^2]} \right\} a_y. \end{aligned} \quad (4.8.51)$$

$$E_2(x,y) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \left\{ 4 \frac{(x^2 - b^2)b - by^2}{[(x-b)^2 + y^2][(x+b)^2 + y^2]} a_x + \right. \\ \left. + 8 \frac{bxy}{[(x-b)^2 + y^2][(x+b)^2 + y^2]} a_y \right\}. \quad (4.8.52)$$



Slika 4.8.18. Polje dva linijska naboja ispred dielektričnog cilindra

Ako $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ to rješenje postaje rješenjem za dva linijska naboja ispred metalnog cilindra. Drugi zanimljiv slučaj nastaje ako $b \rightarrow \infty$. Tada se odslikani naboji λ_1 i $-\lambda_1$ simetrično približavaju središtu cilindra i čine linijski dipol,⁷² polje dvaju linijskih naboja postaje homogeno, pa pomoću tog rješenja možemo riješiti polje dielektričnog cilindra u vanjskom homogenom polju kao superpoziciju polja linijskog dipola i vanjskog homogenog polja. Vanjsko homogeno polje računamo kao polje dva jednaka linijska naboja $\pm\lambda$ udaljena za $2b$ na sredini njihove spojnice

$$E^0 = \frac{1}{\pi\epsilon} \frac{\lambda_0}{b} a_x. \quad (4.8.53)$$

Udaljenost između naboja linijskog dipola u cilindru jest

$$l = 2D = 2 \frac{R^2}{b}, \quad (4.8.54)$$

⁷² Linijski dipol je konfiguracija dva jednaka linijska naboja suprotnih predznaka $+\lambda$ i $-\lambda$ koja se nalaze na maloj razdaljini l , a polje računamo u točkama čija je udaljenost r od naboja puno veća od razdaljine l među nabojima. Polja linijskog dipola izvodimo analogno izvodu polja točkastog dipola u članku 4.3.4. Potencijal i jakost polja linijskog dipola jesu $\varphi(r) = \lambda l \cos\vartheta / (2\pi\epsilon r)$, $E_r(r) = \lambda l \cos\vartheta / (2\pi\epsilon r^2)$, $E_\vartheta(r) = \lambda l \sin\vartheta / (2\pi\epsilon r^2)$, gdje su r i ϑ odrednice cilindričnog koordinatnog sustava s ishodištem na mjestu dipola.

a naboji linijskog dipola jesu

$$\lambda = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \lambda_0 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \pi \varepsilon_1 b E^0 . \quad (4.8.55)$$

Komponente vanjskog homogenog polja su u cilindričnom koordinatnom sustavu

$$E_r = E^0 \cos \vartheta \quad ; \quad E_\vartheta = -E^0 \sin \vartheta , \quad (4.8.56)$$

pa superpozicija vanjskog homogenog polja i polja linijskog dipola u području izvan cilindra daje

$$\begin{aligned} E_{r1} &= E^0 \left(1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \vartheta , \\ E_{\vartheta 1} &= -E^0 \left(1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \vartheta . \end{aligned} \quad (4.8.57, 58)$$

Ako $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ dobivamo rezultat za metalni cilindar u vanjskom homogenom polju.

Polje u području unutar dielektričkog cilindra definirano je s dva odslikana simetrična linijska naboja na mjestu originalnih naboja i originalnim nabojima. Sukladno tome vrijedi

$$E_2 = \frac{1}{\pi \varepsilon_2} \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\lambda}{b} = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E^0 , \quad (4.8.59)$$

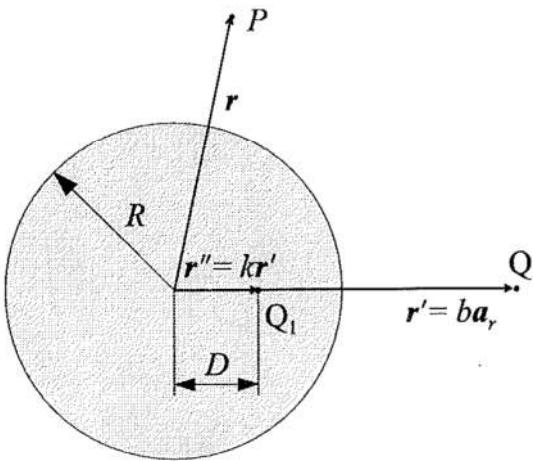
pa slijedi da je polje u cilindru homogeno.⁷³

4.8.4. Greenova funkcija vodljive kuglaste granice

Točkasti naboj Q nalazi se ispred vodljive kugle polumjera R na nultom potencijalu prema slici 4.8.19. Trodimenzionalnu Greenovu funkciju vodljive kuglaste granice odredit ćemo kao potencijal jediničnog točkastog naboja $Q = 1$ na mjestu $\mathbf{r}' = b\mathbf{a}_r$ u ovom rasporedu. Tu zadaću riješit ćemo odslikavanjem. Da bi kugla bila na nultom potencijalu, moramo dodati negativni naboj $-Q_1$ (odslikani) na mjestu $\mathbf{r}'' = k\mathbf{r}'$. Greenova funkcija tog rasporeda je

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left[\frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{Q_1}{|\mathbf{r} - k\mathbf{r}'|} \right] . \quad (4.8.60)$$

⁷³ Rješenja za dielektrički i metalni cilindar u homogenom polju mogu se dobiti i primjenom separacije varijabli u cilindričnom koordinatnom sustavu koju smo opisali u odjeljku 4.6.



Slika 4.8.19. Točkasti naboj Q ispred vodljive kugle na nultom potencijalu

Na kuglinoj plohi gdje vrijedi $r = R$ ta Greenova funkcija mora biti jednaka nuli pa slijedi

$$Q^2(R^2 + k^2b^2 - 2Rkb \cos \vartheta) \equiv Q_1^2(R^2 + b^2 - 2Rb \cos \vartheta) , \quad (4.8.61)$$

odnosno

$$Q^2R^2 \left(1 + \frac{k^2}{R^2}b^2 - 2\frac{k}{R}b \cos \vartheta \right) \equiv Q_1^2b^2 \left(1 + \frac{R^2}{b^2} - 2\frac{R}{b} \cos \vartheta \right) . \quad (4.8.62)$$

Ovaj identitet je zadovoljen za svaki kut ϑ ako vrijedi

$$Q_1 = Q \frac{R}{b} ; \quad k = \frac{R^2}{b^2} , \quad (4.8.63)$$

pa je Greenova funkcija za metalnu kuglastu granicu

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\frac{R}{b}}{4\pi\epsilon \left| \mathbf{r} - \frac{R^2}{b^2} \mathbf{r}' \right|} . \quad (4.8.64)$$

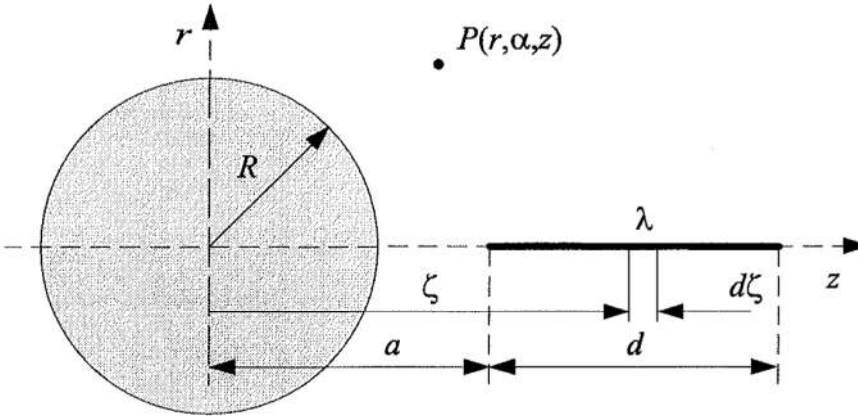
Ova funkcija vrijedi za područje izvan ili unutar kugle ovisno o položaju originalnog naboja, pa pomoću izraza

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_V \rho(\mathbf{r}') \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\frac{R}{b}}{4\pi\epsilon \left| \mathbf{r} - \frac{R^2}{b^2} \mathbf{r}' \right|} \right\} dV' . \quad (4.8.65)$$

računamo potencijal zadane raspodjele naboja $\rho(r')$.⁷⁴

Primjer 4.8.4.1. Jednoliko nabijena dužina i kugla

Jednoliko nabijena dužina nalazi se ispred kugle na nultom potencijalu prema slici 4.8.20.



Slika 4.8.20. Jednoliko nabijena dužina ispred kugle na nultom potencijalu

Zbog osne simetrije rasporeda tu zadaću rješavamo u cilindričnom koordinatnom sustavu. Vrijedi

$$G(r, r') = G(r, z, z') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{(z - \zeta)^2 + r^2}} - \frac{R}{\zeta} \frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{R^2}{\zeta}\right)^2 + r^2}} \right], \quad (4.8.66)$$

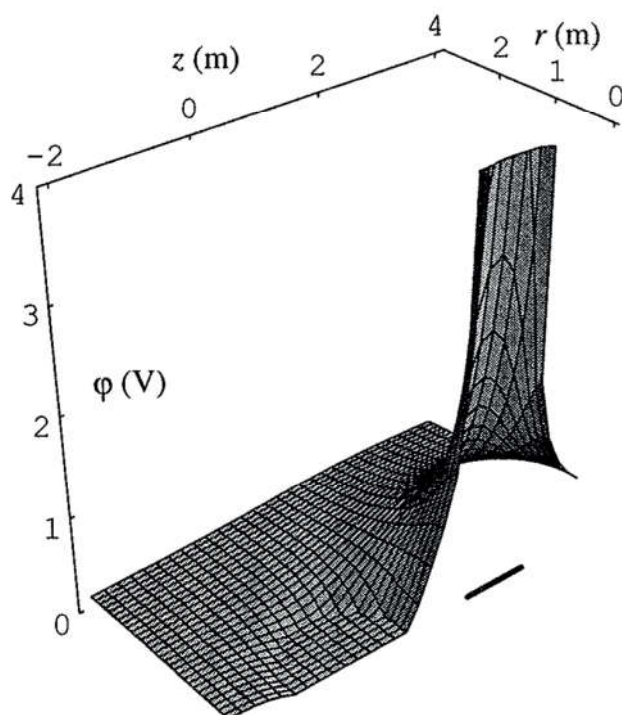
pa potencijal u točki $P(r, z)$ računamo pomoću jednadžbe (4.8.65)

$$\varphi(\rho, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \int_a^{a+d} \left[\frac{1}{\sqrt{(z - \zeta)^2 + r^2}} - \frac{R}{\sqrt{(z\zeta - R^2)^2 + r^2\zeta^2}} \right] d\zeta. \quad (4.8.67)$$

Konačni rezultat za potencijal u točkama prostora izvan kugle je

$$\varphi(r, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left\{ \ln \frac{a + d - z + \sqrt{(a + d)^2 - 2z(a + d) + r^2 + z^2}}{a - z + \sqrt{a^2 - 2za + r^2 + z^2}} - \right. \\ \left. - \frac{R}{r^2 + z^2} \ln \frac{\sqrt{r^2 + z^2} \sqrt{(r^2 + z^2)(a + d)^2 - 2zR^2(a + d) + R^4} + (r^2 + z^2)(a + d) - zR^2}{\sqrt{r^2 + z^2} \sqrt{(r^2 + z^2)a^2 - 2zR^2a + R^4} + (r^2 + z^2)a - zR^2} \right\}. \quad (4.8.68)$$

⁷⁴ Pogledati jednadžbu (4.5.12)



Slika 4.8.21. Raspodjela potencijala jednoliko nabijene dužine ispred kugle na nultom potencijalu u ravnini $\alpha = 0$

4.9. KONFORMNO PRESLIKAVANJE

Opisat ćemo samo osnove te metode rješavanja *dvodimenzionalnih* zadaća u statičkim električnim poljima, budući da njezina praktična primjena pojavom programskih paketa za numeričko rješavanje elektromagnetskih polja opada. Naime, i konformno preslikavanje najčešće ima numerički karakter zbog nemogućnosti analitičkog određivanja funkcije inverznog preslikavanja, pa ga obavljammo točku po točku.⁷⁵ Temelj te metode su svojstva analitičkih funkcija. Ukratko, analitičke funkcije su funkcije kompleksne varijable⁷⁶

$$f(z) = u(x,y) + jv(x,y) , \quad (4.9.1)$$

za koje je granična vrijednost

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} ; \quad z = x + jy ; \quad \Delta z = \Delta x + j\Delta y , \quad (4.9.2)$$

⁷⁵ Detaljan opis konformnog preslikavanja pogledati u E. Weber: *Electromagnetic Field, Volume I – Mapping of Fields*, John Wiley & Sons, New York 1950.

⁷⁶ Detaljan opis funkcija kompleksne varijable pogledati u I. Ivanšić, *Funkcija kompleksne varijable*, Liber, Zagreb 1978.

konačna i jednaka kad Δx i Δy neovisno teže nuli. Tu graničnu vrijednost nazivamo derivacijom $f(z)$. Takve funkcije u području u kojem su analitičke ispunjavaju *Cauchy–Riemannove uvjete*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} . \quad (4.9.3)$$

Deriviranjem i zbrajanjem tih uvjeta dobivamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 , \quad (4.9.4)$$

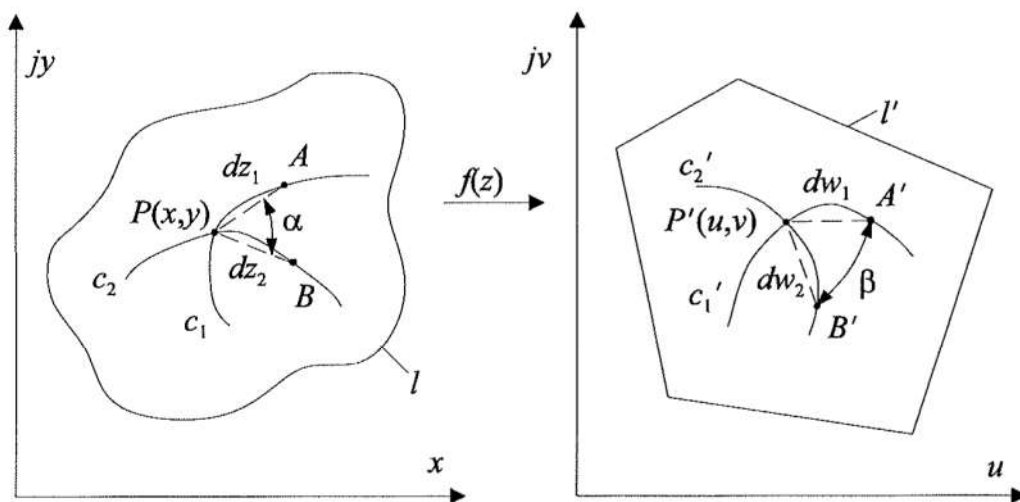
što znači da u području u kojem je funkcija $f(z)$ analitička njezin realni i imaginarni dio zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu.

Sukladno tome, porodica krivulja $u(x,y) = c$ predstavlja skup mogućih ekvipotencijalnih linija, a porodica $v(x,y) = c$ odgovarajući skup linija polja i obratno.

Analitičke funkcije koristimo za preslikavanje rubne zadaće sa složenim rubovima u (x,y) ravnini u novu rubnu zadaću u (u,v) ravnini s jednostavnijim rubovima koju možemo jednostavno riješiti. Iz rješenja u ravnini (u,v) inverznim preslikavanjem određujemo rješenje u (x,y) ravnini. Transformacija koordinata ima oblik

$$w = u(x,y) + jv(x,y) = f(x + jy) = f(z) , \quad (4.9.5)$$

gdje je $f(z)$ analitička funkcija.



Slika 4.9.1. Konformno preslikavanje analitičkom funkcijom

Tom transformacijom krivulja l se preslikava u krivulju l' , a rubna zadaća unutar l preslikava se u rubnu zadaću unutar l' . Ako je A regularna točka $f(z)$, vrijedi

$$\frac{dw_1}{dz_1} = \frac{dw_2}{dz_2} = \frac{df(z)}{dz} = \left| \frac{df(z)}{dz} \right| e^{j\mu}, \quad (4.9.6)$$

budući da derivacija analitičke funkcije ne ovisi o smjeru. Iz jednadžbe (4.9.6) slijedi

$$\frac{dz_1}{dz_2} = \left| \frac{dz_1}{dz_2} \right| e^{j\alpha} = \frac{dw_1}{dw_2} = \left| \frac{dw_1}{dw_2} \right| e^{j\beta}, \quad (4.9.7)$$

a da bi ova jednakost bila zadovoljena mora vrijediti

$$\left| \frac{dz_1}{dz_2} \right| = \left| \frac{dw_1}{dw_2} \right|; \quad \alpha = \beta, \quad (4.9.8)$$

što znači da se kut između krivulja ne mijenja konformnim preslikavanjem. Ako je A točka u kojoj je derivacija $f'(z)$ jednaka nuli svojstvo očuvanja kuta se gubi.

Preslikavanje mijenja ne samo koordinate, već utječe i na transformaciju funkcija. Ako je $\varphi(x,y)$ funkcija u (x,y) ravnini, a $\psi(u,v)$ transformirana funkcija u (u,v) ravnini postavljamo uvjet

$$\varphi(x,y) = \psi[u(x,y), v(x,y)]. \quad (4.9.9)$$

Iz te jednadžbe slijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.9.10,11)$$

Zbrajanjem jednadžbi (4.9.10) i (4.9.11) uzimajući u obzir jednadžbu (4.9.4) i Cauchy–Riemannove uvjete (4.9.3) dobivamo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) |f'(z)|^2, \quad (4.9.12)$$

pa ako je $\varphi(x,y)$ rješenje rubne zadaće

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}; \quad \varphi = \varphi_0 \text{ na rubu } l, \quad (4.9.13)$$

onda je $\psi(u,v)$ rješenje rubne zadaće

$$\Delta \Psi = -\frac{\rho}{\varepsilon |f'(z)|^2} ; \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{na rubu } l' . \quad (4.9.14)$$

Jakost polja u (x,y) ravnini je

$$|E_z| = E_x + jE_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - j\frac{\partial \varphi}{\partial y} , \quad (4.9.15)$$

a u (u,v) ravnini

$$|E_w| = E_u + jE_v = -\frac{\partial \Psi}{\partial u} - j\frac{\partial \Psi}{\partial v} . \quad (4.9.16)$$

Iz uvjeta (4.9.3) slijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} , \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} . \end{aligned} \quad (4.9.17,18)$$

Kvadriranjem i zbrajanjem jednažbi (4.9.17) i (4.9.18), uzimajući u obzir Cauchy–Riemannove uvjete (4.9.3), dobivamo

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 &= |E_z|^2 = \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right] = \\ &= |E_w|^2 |f'(z)|^2 . \end{aligned} \quad (4.9.19)$$

Taj izraz koristimo za transformaciju jakosti električnog polja iz (u,v) ravnine u (x,y) ravninu. Gustoća pohranjene energije u (x,y) ravnini je

$$w_z = \frac{1}{2} \varepsilon |E_z|^2 dx dy , \quad (4.9.20)$$

a u (u,v) ravnini je

$$w_w = \frac{1}{2} \varepsilon |E_w|^2 du dv . \quad (4.9.21)$$

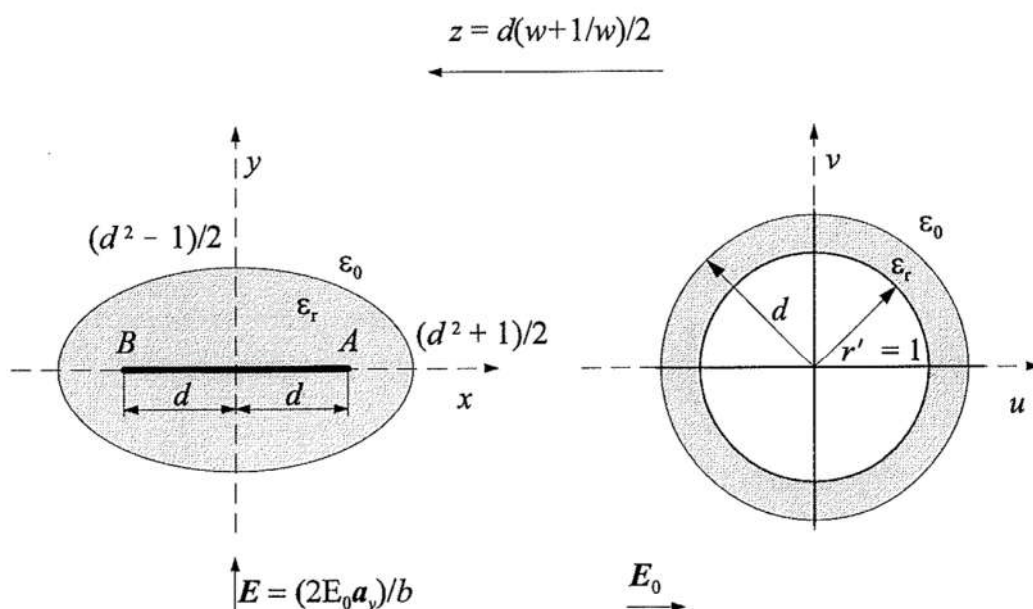
Iz jednažbe (4.9.6) slijedi da za ortogonalne elemente du , dv , dx i dy vrijedi

$$du dv = \left| \frac{df(z)}{dz} \right|^2 dx dy, \quad (4.9.22)$$

pa koristeći jednadžbe (4.9.20 – 22) zaključujemo da je gustoća pohranjene energije jednaka u originalnoj i preslikanoj zadaći. To znači da je ukupna pohranjena energija u obje zadaće jednaka, pa će kapaciteti koje odredimo u (u,v) ravnini biti jednaki onima u (x,y) ravnini.

Primjer 4.9.1. Dielektrički cilindar eliptičkog presjeka u homogenom polju

Dielektrički cilindar eliptičkog presjeka nalazi se u homogenom električnom polju prema slici 4.9.2.



Slika 4.9.2. Dielektrički cilindar eliptičkog presjeka u homogenom polju

Funkcija⁷⁷

$$z = \frac{d}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right), \quad (4.9.23)$$

odnosno

⁷⁷ Ova je transformacija poznata pod imenom "transformacija Žukovskog".

$$x = \frac{d}{2} u \left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right) = \frac{d}{2} \left(r' + \frac{1}{r'} \right) \cos \vartheta' , \quad (4.9.24,25)$$

$$y = \frac{d}{2} u \left(1 - \frac{1}{u^2 + v^2} \right) = \frac{d}{2} \left(r' - \frac{1}{r'} \right) \sin \vartheta' ,$$

transformira krug polumjera $r' = 1$ u segment $(-d, d)$ na x osi, a krug polumjera $r' = d$ u elipsu sa osima $(d^2 + 1)/2$ i $(d^2 - 1)/2$. Pretpostavimo da je cilindar $r' = 1$ u ravnini (u, v) vodič, da je prostor između $r' = 1$ i $r' = d$ ispunjen materijalom ϵ_r i da se cijela ta konfiguracija nalazi u vanjskom homogenom polju $E_0 \mathbf{a}_u$ potencijala

$$\varphi_0 = -E_0 u = -E_0 r' \sin \vartheta' . \quad (4.9.26)$$

Taj primjer riješili smo separacijom varijabli u cilindričnom koordinatnom sustavu.⁷⁸ Potencijal je

$$\varphi(r', \vartheta') = -\frac{2d^2 E_0}{d^2 - 1 + \epsilon_r(d^2 + 1)} \left(r' - \frac{1}{r'} \right) \sin \vartheta' , \quad (4.9.27)$$

u dielektriku, i

$$\varphi(r', \vartheta') = -E_0 \left\{ r' + \frac{d^2}{r'} \left[\frac{d^2 - 1 - \epsilon_r(d^2 + 1)}{d^2 - 1 + \epsilon_r(d^2 - 1)} \right] \right\} \sin \vartheta' , \quad (4.9.28)$$

izvan dielektrika. Iz jednadžbi (4.9.27,28) slijedi potencijal odgovarajućih točaka u (x, y) ravnini, a iz (4.9.24,25) položaj tih točaka. Potencijal unutar cilindra jest

$$\varphi(x, y) = -\frac{4dE_0}{d^2 - 1 + \epsilon_r(d^2 + 1)} y . \quad (4.9.29)$$

Potencijal izvan cilindra računamo točku po točku. Iz odabranih točaka u (x, y) ravnini pomoću jednadžbi

$$u = \frac{x}{d} \pm \frac{1}{\sqrt{2}d} \sqrt{\sqrt{(d^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2 y^2} - (d^2 - x^2 + y^2)} , \quad (4.9.30a,b)$$

$$v = \frac{y}{d} \pm \frac{1}{\sqrt{2}d} \sqrt{\sqrt{(d^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2 y^2} - (d^2 - x^2 + y^2)} .$$

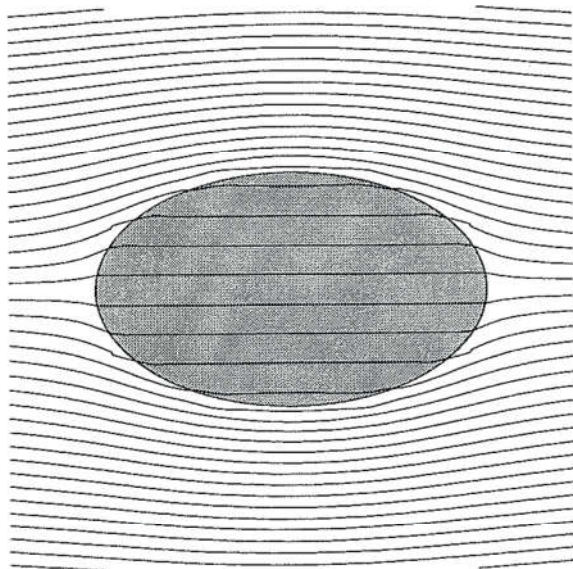
⁷⁸ Pogledati članak 4.6.2, Primjer 4.6.2.1.

prelazimo u (u,v) ravninu gdje pomoću jednadžbi (4.9.27,28) određujemo potencijal tih točaka. Na velikim udaljenostima od cilindra vrijedi

$$\varphi = -E_0 \frac{2y}{b} ,$$

a to je potencijal koji odgovara homogenom polju

$$\mathbf{E} = \frac{2}{b} E_0 \mathbf{a}_y . \quad (4.9.32)$$



Slika 4.9.3. Ekvipotencijalne linije dielektričkog cilindra eliptičkog presjeka u homogenom polju

POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 4.

- S.S. Atwood, *Electric and Magnetic Fields*, John Wiley & Sons, New York, 1958.
- T. Bosanac, *Teoretska elektrotehnika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- Z. Haznadar, *Teoretska elektrotehnika – Elektromagnetska teorija i polja*, Liber, Zagreb, 1972.
- M. Javid, P.M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Volume I and II, Third Edition (1891), Dover, New York, 1954.
- W.T. Scott, *The Physics of Electricity and Magnetism*, John Wiley & Sons, New York, 1966.
- M. Skitek, *Electromagnetic Concepts and Applications*, Prentice-Hall International, London, 1990.
- J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- E. Weber, *Electromagnetic Theory, Static Fields and Their Mapping*, Dover Publications, New York, 1965.

5. STATIČKO STRUJNO POLJE U VODIČIMA

U prethodnom poglavlju razmatrali smo statičko električno polje uzrokovano nabojima u mirovanju. Prirodan nastavak u izučavanju zadaća u elektromagnetizmu je analiza elektromagnetskog polja uzrokovanog nabojima u jednolikom gibanju. Osnovna značajka takvog polja jest da ga možemo rastaviti na dva neovisna: statičko strujno i statičko magnetsko polje. U ovom poglavlju obradit ćemo statičko strujno polje u vodljivim materijalima, dokazati njegovu analogiju sa statičkim električnim poljem, te ukazati na primjenjivost analogija i u ostalim područjima.

5.1. POLJE NABOJA U JEDNOLIKOM GIBANJU

Pretpostavimo da u vodljivoj sredini postoji vremenski neovisna struja.¹ To znači da se naboji gibaju jednoliko, pa su sve veličine elektromagnetskog polja neovisne o vremenu. Sustav Maxwellovih jednažbi tada svodimo na

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{5.1.1 - 4}$$

Jednažbe (5.1.1,2) opisuju električno, a (5.1.3,4) magnetsko polje. Ti parovi jednažbi nisu neovisni, budući je gustoća struje $\mathbf{J}$ funkcija i $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$. Ako je N gustoća slobodnih nosilaca naboja, a njihov naboj q i srednja brzina v vrijedi

$$\mathbf{J} = Nqv, \tag{5.1.5}$$

pa je sila na jednog slobodnog nositelja naboja

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{Nq} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) = q \mathbf{E}_u, \tag{5.1.6}$$

¹ Primarni izvor te struje mora biti neko uzbudno polje.

gdje je E_u ukupno električno polje. Ograničimo li razmatranje na krute i tekuće vodljive materijale provodnosti κ vrijedi

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}_u = \kappa \left(\mathbf{E} + \frac{1}{Nq} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right), \quad (5.1.7)$$

pa možemo pisati

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\kappa} - \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{B}}{Nq}. \quad (5.1.8)$$

Ako je utjecaj drugog člana u jednadžbi (5.1.8) mnogo manji od prvog, možemo parove jednadžbi (5.1.1,2) i (5.1.3,4) smatrati neovisnim. To je slučaj u svim vodičima,² pa možemo računati da je u njima električno polje neovisno o magnetskom polju. To znači da ga možemo odrediti a da ništa ne znamo o magnetskom polju. Takvo električno polje nazivamo *statičkim strujnim poljem u vodičima*.

5.2. JEDNADŽBE STRUJNOG POLJA I ANALOGIJE POLJA

Iz prethodnog odjeljka možemo zaključiti da su jednadžbe tog polja jednake jednadžbama statičkog električnog polja. Ali osim jednadžbi (5.1.1,2) moramo u razmatranje uključiti i jednadžbu kontinuiteta,³ koja u ovom slučaju ima oblik

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (5.2.1)$$

budući da su sve derivacije po vremenu jednake nuli. U izotropnim vodičima veza između vektora gustoće struje $\mathbf{J}$ i vektora jakosti električnog polja $\mathbf{E}$ je⁴

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \kappa \mathbf{E}, \quad (5.2.2)$$

gdje je $\mathbf{J}_i$ gustoća struje izvora. Za područja u kojima nema izvora vrijedi

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}, \quad (5.2.3)$$

pa slijedi

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_s = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varepsilon}{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (5.2.4)$$

² Na primjer, u bakru vrijedi: $\kappa = 57 \text{ MS/m}$, $q = e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, a $N = 8.47 \cdot 10^{28} \text{ elektrona/m}^3$. Ako računamo s jednim slobodnim elektronom po atomu i pretpostavimo maksimalnu indukciju 2T, vrijedi $|B/Nq| = 1.47 \cdot 10^{-10} \ll 1/\kappa = 1.75 \cdot 10^{-8}$.

³ Pogledati članak 1.2.3.

⁴ Ovo je jednadžba Ohmova zakona. Pogledati jednadžbu (2.1.17).

što znači da je u vodiču u kojem teče struja neovisna o vremenu i u kojem nema izvora, gustoća slobodnih nepokretnih naboja jednaka nuli. Slobodni naboji mogu postojati samo na granicama dvaju homogenih vodiča. Uvjeti koje gustoća struje mora zadovoljavati na granici dvaju vodiča različitih provodnosti jesu⁵

$$n \times \left(\frac{\mathbf{J}_2}{\kappa_2} - \frac{\mathbf{J}_1}{\kappa_1} \right) = 0 , \quad (5.2.5,6)$$

$$n \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = \sigma_s .$$

Za tipične vodiče provodnost κ je mnogo veća od dielektričnosti ϵ , pa možemo reći da u statičkom strujnom polju postoji samo strujni tijek, dok je električni tijek jednak nuli. Prema tome, jednadžbe koje opisuju statičko strujno polje u vodičima jesu

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad (5.2.7,8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 ,$$

uz relaciju građe

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} . \quad (5.2.9)$$

Usporedbom jednadžbi (5.2.7 – 9) i (4.1.1 – 3) uočavamo *analogiju statičkog električnog polja i statičkog strujnog polja u vodičima*. Oba polja su određena jednakim jednadžbama, a ako provedemo zamjene

$$\kappa \leftrightarrow \epsilon ; \quad \mathbf{J} \leftrightarrow \mathbf{D} , \quad (5.2.10)$$

možemo za rješavanje zadataka u statičkim strujnim poljima primijeniti sve postupke i rezultate iz zadataka u statičkim električnim poljima i obratno. Skalarni potencijal u statičkim strujnim poljima u područjima bez izvora zadovoljava Laplaceovu jednadžbu.⁶ Sukladno tome, ako u području konačne provodnosti postoje idealni vodiči-elektrode ($\kappa \rightarrow \infty$), njihov potencijal je konstantan, a zadatke sustava elektroda u vodiču su analogne zadacima sustava vodiča u dielektriku. Analogne veličine su naboj pojedinog vodiča i struja koja istječe iz pojedine elektrode. U linearnim vodljivim materijalima sveza potencijala elektroda i struja koje izlaze iz elektroda je linearna

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N R_{ij} J_j \quad ; \quad i = 1, \dots, N , \quad (5.2.11)$$

gdje su R_{ij} *koeficijenti otpora* koji su analogni potencijalnim koeficijentima, pa statičko strujno polje sustava elektroda u vodiču možemo prikazati *nadomjesnom shemom*

⁵ Pogledati članak 1.5.1.

⁶ Pogledati Prilog A.

otpora. Posebno definiramo otpor R sustava dviju usamljenih elektroda pri kojem ukupna struja I koja napušta jednu elektrodu na potencijalu φ_1 ulazi u drugu elektrodu potencijala φ_2 kao

$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \frac{1}{G}, \quad (5.2.12)$$

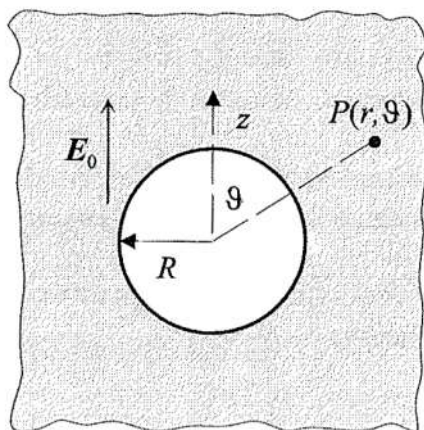
gdje je G *vodljivost* takvog sustava. Analogna veličina vodljivosti je kapacitet, i ako znamo kapacitet za određenu geometriju i dielektričnost ϵ statičkog električnog polja, vodljivost za istu geometriju statičkog strujnog polja provodnosti κ možemo izračunati pomoću

$$G = \frac{\kappa}{\epsilon} C = \frac{1}{R}, \quad (5.2.13)$$

gdje se G mjeri u *simensima* (S). Sličnu analogiju možemo uočiti i sa statičkim temperaturnim poljem, gravitacijskim poljem, strujnim poljem nestlačivih fluida⁷ ... Ovdje nećemo opisivati sve te analogije, a korištenjem tablice 5.1. na kraju ovog poglavlja čitatelj može rješenja zadaća iz statičkih električnih polja izravno primijeniti u statičkom strujnom polju i statičkom temperaturnom polju samo zamjenom odgovarajućih veličina.

Primjer 5.2.1. Kuglasta zračna šupljina u metalu

Zamislimo veliko metalno tijelo provodnosti κ koje sadrži zračnu kuglastu šupljinu polumjera R prema slici 5.2.1.



Slika 5.2.1. Kuglasta zračna šupljina u metalu

Kad ne bi bilo šupljine jakost električnog polja u vodiču E_0 bi bila homogena, a mi trebamo odrediti raspodjelu gustoće struje J kad postoji zračna šupljina provodnosti $\kappa_0 = 0$. Električni potencijal i jakost polja u ovoj zadaći možemo odrediti primjenom analogije sa statičkim električnim poljem iz rješenja primjera dielektričke kugle u

⁷ Pogledati E. Weber, *Electromagnetic Theory*, Dover Publishers Inc. New York, 1965.

vanjskom homogenom polju⁸ ako provedemo zamjene $\epsilon_0 \rightarrow \kappa$ i $\epsilon_1 \rightarrow 0$. Potencijal i jakost polja u metalu jesu

$$\varphi = E_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] r \cos \vartheta, \quad (5.2.14, 15)$$

$$\mathbf{E} = -E_0 \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \vartheta \mathbf{a}_r + E_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \vartheta \mathbf{a}_\vartheta,$$

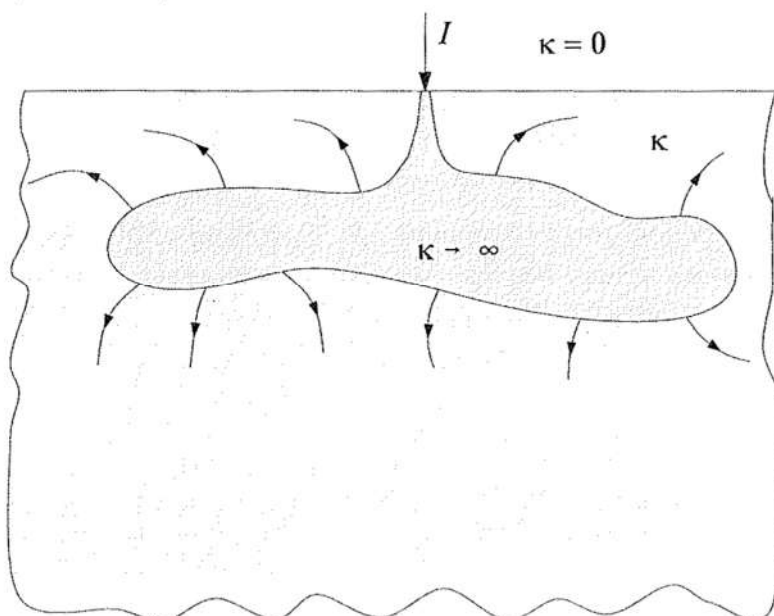
pa je gustoća strujnog tijeka u metalu

$$\mathbf{J} = -\kappa E_0 \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \vartheta \mathbf{a}_r + \kappa E_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \vartheta \mathbf{a}_\vartheta. \quad (5.2.16)$$

Najveća gustoća strujnog tijeka pojavljuje se u metalu na granici sa šupljinom i iznosi $1.5\kappa E_0 \mathbf{a}_\vartheta$, dok u šupljini zbog $\kappa_0 = 0$ ne teku nikakve struje.

5.3. RJEŠAVANJE STRUJNIH POLJA ODSLIKAVANJEM

Zadaće statičkih strujnih polja najčešće se primjenjuju pri rješavanju zadaća u području uzemljivača. Uzemljivač se sastoji od jedne, ili više elektroda ukopanih u tlo (slika 5.3.1).



Slika 5.3.1. Elektroda u homogenom tlu

⁸ Pogledati primjer 4.6.3.1, jednadžbe (4.6.59) i (4.6.61).

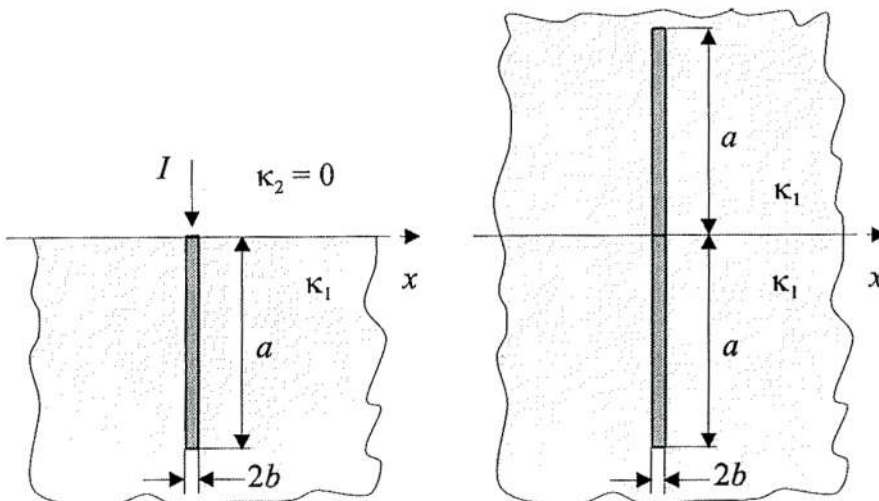
U prvom približenju tlo zamišljamo kao beskonačni homogeni poluprostor⁹ provodnosti κ_1 , a zraku pridjeljujemo svojstva idealnog izolatora provodnosti κ_2 jednake nuli. Takve zadaće rješavamo postupkom odslikavanja¹⁰ uz korištenje analogije sa statičkim električnim poljem. Polje točkastog izvora struje i_0 u tlu provodnosti κ_1 određujemo pomoću originalnog izvora i_0 njegove "slike" i_1 . Iz jednadžbe (4.8.27) i analogije sa statičkim električnim poljem točkastog naboja ispred dielektričkog poluprostora slijedi

$$i_1 = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} i_0 = i_0. \quad (5.3.1)$$

U složenijim rasporedima primjenjujemo načelo superpozicije.

Primjer 5.3.1. Štapni uzemljivač

Jednostavni uzemljivači često se izvide metalnim šipkama vertikalno zabodenim u tlo prema slici 5.3.2. Primjenom odslikavanja zaključujemo da je ova zadaća ekvivalentna zadaći štapa dvostruke dužine u homogenoj sredini provodnosti κ_1 .



Slika 5.3.2. Vertikalni štapni uzemljivač

Tu zadaću rješavamo analogijom s poljem rotacijskog elipsoida,¹¹ odnosno približenjem štapa rotacijskim elipsoidom upisanim u štap. Najčešće značajke uzemljivača koje nas zanimaju su raspodjela potencijala po površini tla i otpor uzemljivača.¹² Potencijal po

⁹ U složenijim modelima uvodimo višeslojni model tla, pa primjenjujemo višestruko odslikavanje na granicama različitih vodljivosti. Pogledati F. Ollendorf, *Erdströme*, Birkhäuser Verlag, Basel 1969.; Z. Haznadar, S. Berberović, *Numerical Field Calculation of Earthing Systems*, u *Electromagnetic Fields in Electrical Engineering*, Plenum Press, New York, 1988.; S. Berberović, Z. Haznadar, Ž. Štih, *An Improved Method for Calculating the Parameters of Large Earthing Systems*, Int. Conference on Lightning Protection, Berlin, 1992.

¹⁰ Pogledati odjeljak 4.8.

¹¹ Pogledati primjer 4.7.2.1.

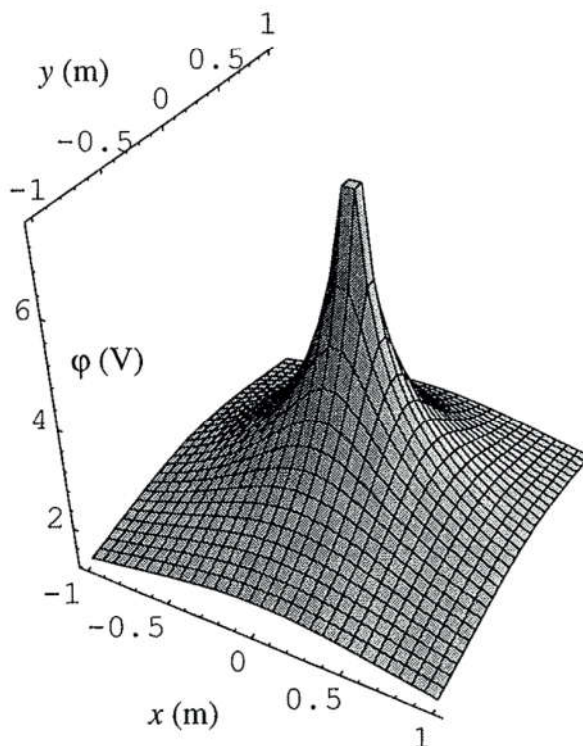
¹² Pogledati Z. Haznadar, S. Berberović, D. Vujević, D. Markovinović, N. Žanić, Z. Žic, *Dodirni naponi i raspodjela potencijala uzemljivača u energetske sustavima*, Energija 7 – 8, Zagreb, 1981.

površini tla određujemo pomoću izraza (4.7.35) za $z = 0$

$$\varphi(r) = \frac{I}{4\pi\kappa_1 a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + r^2}}{-a + \sqrt{a^2 + r^2}}. \quad (5.3.2)$$

Otpor takvog uzemljivača možemo približno izračunati pomoću izraza (4.7.51) i on iznosi

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa_1 a} \ln \frac{2a}{b}. \quad (5.3.3)$$



Slika 5.3.3. Raspodjela potencijala štapnog uzemljivača po površini tla za $I/(4\pi\kappa_1) = 1$ Vm, $a = 1$ m, $r^2 = x^2 + y^2$

Tablica 5.1. Neke analogije polja

Veličina	Statičko električno polje	Statičko strujno polje	Statičko temperaturno polje
potencijal	φ , električni potencijal	φ , električni potencijal	T , temperatura
razlika potencijala	$\varphi_1 - \varphi_2$, napon	$\varphi_1 - \varphi_2$, napon	$T_1 - T_2$, razlika temperatura
gradijent potencijala	$E = -\nabla\varphi$, jakost električnog polja	$E = -\nabla\varphi$, jakost električnog polja	$U = -\nabla T$, temperaturni gradijent
značajka materijala	ϵ , dielektričnost	κ , provodnost	k , toplinska vodljivost
pridruženi vektor polja	$D = \epsilon E$, gustoća električnog tijeka	$J = \kappa E$, gustoća struje	$J = kU$, gustoća tijeka toplinske snage
tijek pridruženog vektora kroz zatvorenu površinu S	$\oint_S D \cdot n dS = Q$ naboj unutar S	$\oint_S J \cdot n dS = 0$	$\oint_S J \cdot n dS = H$ toplinska snaga unutar S
divergencija pridruženog vektora	$\nabla \cdot D = \rho$ volumna gustoća naboja	$\nabla \cdot J = 0$	$\nabla \cdot J = h$ volumna gustoća toplinskih izvora
temeljna diferencijalna jednačba potencijalne funkcije	$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s}{\epsilon}$	$\Delta \varphi = 0$	$\Delta T = -\frac{h}{k}$
integralna značajka	$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$ kapacitet	$G = \frac{I}{\varphi_1 - \varphi_2}$ vodljivost	$C = \frac{Q}{T_1 - T_2}$ toplinski kapacitet

POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 5.

- T. Bosanac, *Teoretska elektrotehnika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- Z. Haznadar, *Teoretska elektrotehnika – Elektromagnetska teorija i polja*, Liber, Zagreb, 1972.
- F. Ollendorf, *Erdströme*, Birkhäuser Verlag, Basel 1969.
- P. Silvester, *Modern Electromagnetic Fields*, Prentice-Hall International, London, 1968.
- E. Weber, *Electromagnetic Theory, Static Fields and Their Mapping*, Dover Publications, New York, 1965.

6. STATIČKO MAGNETSKO POLJE

U ovom poglavlju nastavljamo razmatranje elektromagnetskog polja koje uzrokuje naboji u jednolikom gibanju. U odjeljku 5.1. utvrdili smo da tada statičko, vremenski neovisno, magnetsko polje praktično ne utječe na raspodjelu električnih struja u vodičima. Iz te činjenice slijedi da statičko magnetsko polje možemo analizirati neovisno od statičkog strujnog polja. *Izvori statičkog magnetskog polja mogu biti istosmjerne struje i permanentni magneti.* U 1. poglavlju smo pokazali da se i permanentni magneti kao izvori mogu svesti na ekvivalentne makroskopske struje. Stoga zadaće statičkih magnetskih polja rješavamo uz pretpostavku da su struje, koje su izvori polja, poznate.¹

Započet ćemo s pregledom osnovnih jednadžbi statičkog magnetskog polja, a zatim ćemo opisati uvođenje vektorskog magnetskog potencijala i antipotencijala u takva polja. Zbog nekonzervativnog karaktera statička magnetska polja prikazujemo samo silnicama. Energiju pohranjenu u takvim poljima izvest ćemo iz energije potrebne za njihovu izgradnju, a opisat ćemo i određivanje resultantnih sila pomoću energije. *Induktivitete* koji su osnovne integralne značajke statičkog magnetskog polja definirat ćemo također pomoću energije.

Rješavanje zadaća statičkih magnetskih polja prikazat ćemo najprije kroz približnu, ali praktično široko primjenjivu metodu *magnetskih krugova*. Zatim ćemo razraditi rješavanje zadaća u prostoru bez struja pomoću *antipotencijala* i rješavanje zadaća u neograničenom prostoru pomoću *vektorskog magnetskog potencijala*. Zadaće zadanih raspodjela struja u ograničenom prostoru rješavat ćemo primjenom *odslikavanja*.

6.1. JEDNADŽBE STATIČKOG MAGNETSKOG POLJA

Jednadžbe statičkog magnetskog polja izveli smo u odjeljku 5.1.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{6.1.1,2}$$

gdje je $\mathbf{J}$ poznata funkcija. Između vektora $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$ postoji sveza²

¹ Možemo ih odrediti postupcima opisanim u poglavlju 5.

² Pogledati odjeljak 1.4.

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) , \quad (6.1.3)$$

koja se u izotropnim materijalima svodi na relaciju građe

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} , \quad (6.1.4)$$

gdje je μ permeabilnost materijala.³ Ovdje ćemo se ograničiti na razmatranje zadaća u kojima je μ pozitivna skalarna funkcija veličine vektora $\mathbf{H}$ (ili $\mathbf{B}$).⁴ Integralni oblik jednadžbe (6.1.1) je

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS , \quad (6.1.5)$$

gdje je l zatvorena krivulja oko površine S .⁵ Važna veličina u magnetskim poljima je magnetski tijek Φ koji definiramo kao

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS , \quad (6.1.6)$$

a $\mathbf{n}$ je jedinični vektor okomit na dio površine dS . Vrijedi

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 , \quad (6.1.7)$$

gdje je S zatvorena površina. To je ujedno i integralni oblik jednadžbe (6.1.2).

6.1.1. Uvjeti na granici

Uvjete koje vektori magnetskog polja $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$ moraju zadovoljavati na graničnoj plohi dvaju materijala različitih permeabilnosti izveli smo u odjeljku 1.5. Tangencijalna komponenta vektora jakosti magnetskog polja $\mathbf{H}$ čini skok na granici za iznos gustoće slobodnih plošnih struja

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} , \quad (6.1.8)$$

a okomita komponenta vektora magnetske indukcije $\mathbf{B}$ prelazi graničnu plohu kontinui-

³ U linearnim izotropnim homogenim (LIH) materijalima μ je skalarna konstanta, a u nelinearnim izotropnim materijalima μ je skalarna funkcija apsolutne vrijednosti jakosti polja (indukcije).

⁴ To je najčešće dovoljno dobro približenje ponašanja feromagnetskih materijala. Rješavanje zadaća koje uključuju modeliranje histereze pogledati u I.D. Mayergoyz, *Mathematical Models of Hysteresis*, Springer Verlag, 1991.

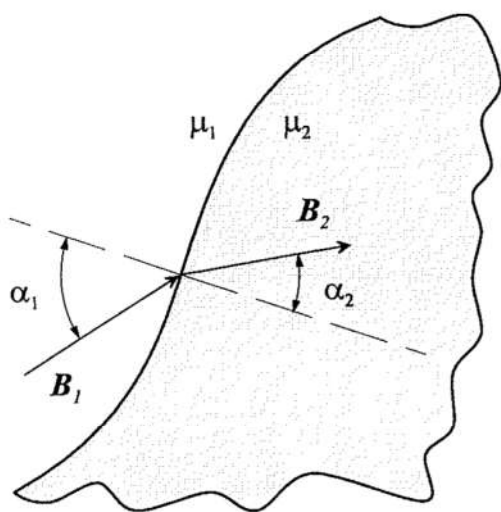
⁵ Tu relaciju često nazivamo Ampèrov kružni zakon.

rano

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 . \quad (6.1.9)$$

U jednadžbama (6.1.8 – 9) $\mathbf{n}$ je jedinični vektor okomit na graničnu plohu i usmjeren od područja 1 prema području 2. Slično kao i u statičkim električnim poljima⁶ možemo izvesti zakon loma za linije vektora $\mathbf{B}$ ⁷ na granicama gdje ne postoje slobodne plošne struje (slika 6.1.1)

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} . \quad (6.1.10)$$



Slika 6.1.1. Prijelaz magnetskog polja preko granice dvaju različitih magnetskih materijala

6.2. POTENCIJALI U STATIČKOM MAGNETSKOM POLJU

6.2.1. Vektorski magnetski potencijal

Jednadžba (6.1.2) ukazuje na *solenoidalni karakter magnetskog polja*. Stoga vektor $\mathbf{B}$ možemo prikazati kao rotor drugog vektora $\mathbf{A}$ ⁸

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (6.2.1)$$

Vektor $\mathbf{A}$ nazivamo *vektorskim magnetskim potencijalom*. Iz jednadžbi (6.1.1) i (6.2.1)

⁶ Pogledati članak 4.1.2.

⁷ U homogenim izotropnim materijalima to su ujedno i linije vektora $\mathbf{H}$.

⁸ Pogledati poglavlje 2.

slijedi

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} . \quad (6.2.2)$$

Za jednostavne (LIH) materijale ova se *vektorska diferencijalna jednadžba* svodi na

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} . \quad (6.2.3)$$

Uvođenjem Coulombova baždarenja⁹

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 , \quad (6.2.4)$$

osiguravamo jedinstvenost vektorskog magnetskog potencijala. Uvrštenjem (6.2.4) u (6.2.3) dobivamo jednadžbu koju mora zadovoljavati vektorski magnetski potencijal u LIH materijalu

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} . \quad (6.2.5)$$

Magnetski tijek Φ kroz plohu S koju ograničava zatvorena krivulja C pomoću poznatog vektorskog magnetskog potencijala računamo s

$$\Phi = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} . \quad (6.2.6)$$

Ova jednakost slijedi iz primjene Stokesova teorema.¹⁰ Pri prijelazu granice dvaju različitih magnetskih materijala na kojoj nema slobodnih plošnih struja mora biti zadovoljen uvjet kontinuiranosti tangencijalne i okomite komponente vektorskog magnetskog potencijala, budući da bi njihov skok uzrokovao postojanje beskonačnih vrijednosti $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$ na granici. Sukladno tome *vektorski magnetski potencijal prelazi granicu dvaju različitih materijala kontinuirano*.

Često se postavlja pitanje opravdanosti uvođenja vektorskog magnetskog potencijala pri rješavanju zadaća statičkih magnetskih polja, jer time ne uspijevamo smanjiti broj nepoznatih funkcija u jednadžbama polja. One i dalje ostaju vektorske, a za određivanje vektora polja moramo provesti dodatnu operaciju deriviranja definiranu jednadžbom (6.2.1). Međutim, bitno jednostavniji uvjet prijelaza granice dvaju različitih magnetskih materijala za vektorski magnetski potencijal, te bitno jednostavnije izračunavanje magnetskog tijeka linijskom integracijom pomoću jednadžbe (6.2.6) umjesto plošnom s pomoću jednadžbe (6.1.6) najčešće opravdavaju uvođenje vektorskog magnetskog

⁹ Pogledati poglavlje 2. U statičkom magnetskom polju Coulombovo i Lorentzovo baždarenje rezultiraju jednakim dodatnim uvjetom koji smo definirali jednadžbom (6.2.4) jer su derivacije po vremenu u takvom polju jednake nuli.

¹⁰ Pogledati Prilog C.

potencijala.

U dvodimenzionalnim zadaćama, kada su veličine polja neovisne o jednoj od odrednica, a struje teku u smjeru te odrednice, *vektorska diferencijalna jednadžba (6.2.2) prelazi u skalarnu diferencijalnu jednadžbu* za nepoznatu komponentu vektorskog magnetskog potencijala u smjeru te odrednice. Na primjer, neka u pravocrtnom koordinatnom sustavu teku struje zadane s

$$\mathbf{J} = J(x, y) \mathbf{a}_z . \quad (6.2.7)$$

Pretpostavljamo da je rješenje za vektorski magnetski potencijal oblika

$$\mathbf{A} = A(x, y) \mathbf{a}_z . \quad (6.2.8)$$

Tom pretpostavkom smo zadovoljili baždarenje (6.2.4), a iz (6.2.1) slijedi da je tada magnetsko polje uvijek paralelno x-y ravnini. Uvrštavanjem pretpostavke (6.2.8) u (6.2.2) dobivamo¹¹

$$\begin{aligned} \nabla \times \left\{ \frac{1}{\mu} \nabla \times [A(x, y) \mathbf{a}_z] \right\} &= \nabla \times \left(\frac{\nabla A(x, y) \times \mathbf{a}_z}{\mu} \right) = \\ &= -\mathbf{a}_z \nabla \frac{\nabla A(x, y)}{\mu} = J(x, y) \mathbf{a}_z , \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

pa je konačan oblik jednadžbe vektorskog magnetskog potencijala u tom dvodimenzionalnom slučaju skalarna diferencijalna jednadžba

$$\nabla \frac{\nabla A(x, y)}{\mu} = -J(x, y) , \quad (6.2.10)$$

koja u jednostavnom materijalu poprima oblik

$$\Delta A(x, y) = -\mu J(x, y) . \quad (6.2.11)$$

Tim rezultatima smo ujedno potvrdili točnost pretpostavljenog oblika rješenja (6.2.8).¹² Nadalje, usporedba s jednadžbom (4.1.7) ukazuje na analogiju dvodimenzionalne zadaće statičkog magnetskog polja i zadaće statičkog električnog polja. Analogne veličine su $A(x, y)$ i φ , te $1/\mu$ i ϵ . Bitna se razlika javlja pri određivanju vektora polja iz potencijala. Vektori $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ i $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ su u svakoj točki jednaki po apsolutnom iznosu, a uzajamno su okomiti.

¹¹ Ovdje ćemo koristiti identitete za rotor produkta skalarne funkcije i vektora te rotor vektorskog produkta. Pogledati Prilog C.

¹² Analogno se može pokazati svođenje vektorske jednadžbe (6.2.2) na skalarnu jednadžbu pri osnoj simetriji, odnosno kada struje u cilindričnom sustavu imaju oblik $\mathbf{J} = J(r, z) \mathbf{a}_\phi$.

6.2.2. Antipotencijal

Osnovni motiv uvođenja antipotencijala u rješavanje statičkih magnetskih polja jest smanjivanje broja nepoznatih funkcija. U područjima u kojima ne teku struje jednadžbe skalarnog magnetskog polja jesu

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{6.2.12,13}$$

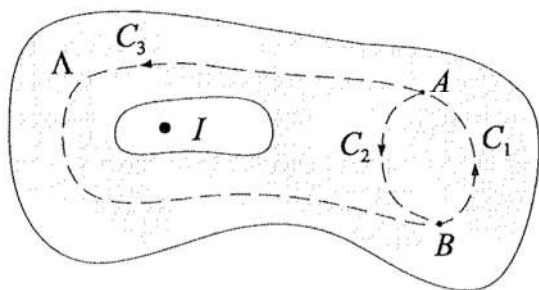
pa prema analogiji sa statičkim električnim poljem¹³ možemo uvesti antipotencijal¹⁴ φ_m u jednadžbe (6.2.12,13) i svesti ih na skalarnu Laplaceovu jednadžbu¹⁵

$$\Delta \varphi_m = 0.\tag{6.2.14}$$

Veza između φ_m i vektora jakosti magnetskog polja $\mathbf{H}$ je

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -\nabla \varphi_m, \\ \varphi_m(\mathbf{r}) &= \int_r^{r_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l},\end{aligned}\tag{6.2.15,16}$$

gdje je $\mathbf{r}_0$ vektor položaja referentne točke. Budući smo φ_m uveli samo za prostor u kojem nema struja, linija integracije u (6.2.16) ne smije prolaziti kroz prostor kojim teku struje. No to ograničenje ne osigurava jednoznačnost φ_m . Da bi φ_m bio jedinstven, njegova vrijednost mora biti neovisna od puta integracije, odnosno integral (6.2.16) po zatvorenoj krivulji mora biti jednak nuli. Ako je područje zadane takvog oblika da se u njemu može zatvoriti petlja koja obuhvaća struje izvan tog područja¹⁶ φ_m nije jedinstven. Naime, zbog (6.1.6) integral (6.2.16) po tako zatvorenoj petlji jednak je sumi obuhvaćenih struja.



Slika 6.2.1. Višestruko povezano područje i nejedinstvenost φ_m

¹³ Pogledati jednadžbe (4.1.1) i (4.1.2).

¹⁴ Taj antipotencijal često nazivamo skalarni magnetski potencijal.

¹⁵ Pogledati Prilog A.

¹⁶ To je moguće u slučaju višestruko povezanih područja.

Tako je u području Λ sa slike 6.2.1 integral (6.2.16) po zatvorenoj petlji koju čine C_1 i C_2 jednak nuli, a po zatvorenoj petlji koju čine C_1 i C_3 jednak I pa je $\varphi_m(B) - \varphi_m(A)$ ovisan o putu integracije. Stoga φ_m možemo uvesti samo u jednostruko povezanim područjima. Za numeričko rješavanje statičkih magnetskih polja koristimo i ostale formulacije antipotencijala koje omogućavaju rješavanje zadaća i u područjima koja obuhvaćaju struje.¹⁷

6.3. SLIKA STATIČKOG MAGNETSKOG POLJA

Slično kao i u statičkim električnim poljima i ovdje veliku pomoć razumijevanju statičkog magnetskog polja pruža prikazivanje pomoću slika polja. *Statičko magnetsko polje nije konzervativno*¹⁸ pa ga ne možemo prikazivati ekvipotencijalnim plohama. Stoga sliku polja čine silnice ($\mathbf{B}$ -linije) koje definiramo kao linije kojima je vektor $\mathbf{B}$ tangencijalan u svakoj točki. Silnice određujemo pomoću diferencijalnih jednačbi

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} . \quad (6.3.1)$$

U dvodimenzionalnim zadaćama silnice možemo odrediti izravno iz vektorskog magnetskog potencijala. U pravolinijskom koordinatnom sustavu jednačba silnice je

$$B_x dy - B_y dx = 0 . \quad (6.3.2)$$

Iz jednačbe (6.2.1) i oblika vektorskog magnetskog potencijala kojeg smo definirali jednačbom (6.2.8) slijedi

$$\mathbf{B} = \frac{\partial A(x,y)}{\partial y} \mathbf{a}_x - \frac{\partial A(x,y)}{\partial x} \mathbf{a}_y . \quad (6.3.3)$$

Uvrštavanjem (6.3.3) u (6.3.2) dobivamo

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial A(x,y)}{\partial y} dy = 0 \quad \Rightarrow \quad dA(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad A(x,y) = konst. , \quad (6.3.4)$$

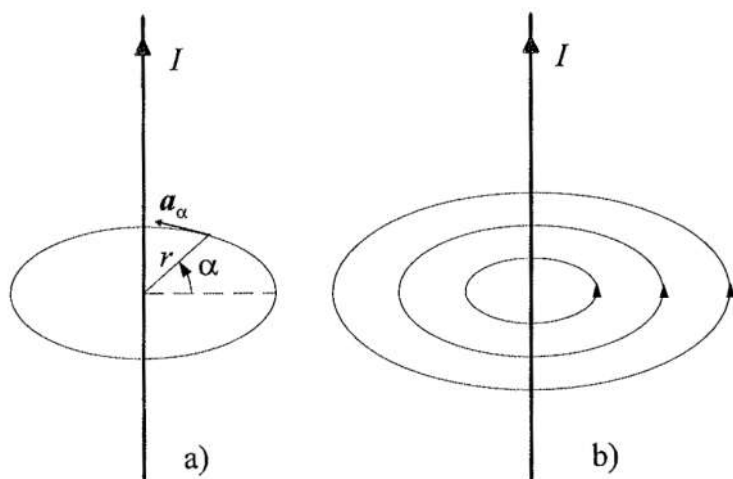
a to znači da su linije konstantnog vektorskog magnetskog potencijala u dvodimenzionalnim zadaćama statičkih magnetskih polja identične silnicama.

¹⁷ Pogledati J. Simkin, C.W.Trowbridge: *Three-dimensional nonlinear electromagnetic field computations using scalar potentials*, IEE Proc, Vol. 127. No.6. 1980.

¹⁸ Usporediti jednačbe (4.1.1) i (6.1.1).

Primjer 6.3.1. Slika polja beskonačne ravne strujnice u neograničenom prostoru

Slika 6.3.1. opisuje zadaću u cilindričnom koordinatnom sustavu. Struja I teče pravcem u smjeru osi z .



Slika 6.3.1. Beskonačna ravna strujnica, a) prikaz zadaće, b) prikaz statičkog magnetskog polja

Za prikaz slike polja silnicama moramo odrediti vektor magnetske indukcije ovog rasporeda. Za to ćemo koristiti jednadžbu (6.1.5), a za krivulju integracije odabrat ćemo kružnicu koncentričnu sa strujnicom.¹⁹ Zbog osne simetrije oko z osi vektor $\mathbf{B}$ može imati samo konstantnu komponentu u smjeru obilaznog kuta

$$\mathbf{B} = B \mathbf{a}_\alpha, \quad (6.3.5)$$

pa integral (6.1.5) iznosi

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{B}{\mu} \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha r d\alpha = \frac{2\pi r B}{\mu} = I. \quad (6.3.6)$$

Iz (6.3.6) i (6.3.5) slijedi rješenje za magnetsku indukciju

$$\mathbf{B} = \mu \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\alpha. \quad (6.3.7)$$

Očigledno je da su silnice statičkog magnetskog polja beskonačne ravne strujnice u neograničenom prostoru kružnice koncentrične sa strujnicom i usmjerene u smjeru obilaznog kuta.

¹⁹ Pod strujnicom razumijevamo idealizirani slučaj kada je ukupna struja I skoncentrirana u tanku nit (geometrijsku crtu) koja ima samo uzdužnu dimenziju.

6.4. ENERGIJA POHRANJENA U MAGNETSKOM POLJU

U članku 3.3.4. pokazali smo da je za uspostavljanje statičkog magnetskog polja nužno uložiti energiju

$$W_m = \int_V \left\{ \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right\} dV . \quad (6.4.1)$$

Podintegralnu funkciju možemo preurediti primjenom identiteta o divergenciji vektorskog produkta²⁰ i jednadžbe (6.1.1)

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot \nabla \times (d\mathbf{A}) = \nabla \cdot (d\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + d\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot (d\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} . \quad (6.4.2)$$

Uvrštenjem (6.4.2) u (6.4.1) dobivamo

$$W_m = \int_V \left\{ \nabla \cdot \int_0^{\mathbf{A}} d\mathbf{A} \times \mathbf{H} + \int_0^{\mathbf{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \right\} dV . \quad (6.4.3)$$

Primjenom Gaussova teorema o divergenciji²¹ na tu jednadžbu dobivamo

$$W_m = \oint_S \left\{ \int_0^{\mathbf{A}} d\mathbf{A} \times \mathbf{H} \right\} \mathbf{n} dS + \int_{V_j} \left\{ \int_0^{\mathbf{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \right\} dV , \quad (6.4.4)$$

gdje je S površina koja obuhvaća domenu zadaće, a V_j je volumen područja u kojem teku struje.²² Ako domena zadaće obuhvaća cijelo područje polja, onda na graničnoj površini S vrijedi $\mathbf{H} = 0$ pa je površinski integral u (6.4.4) jednak nuli. Tada energiju pohranjenu u statičkom magnetskom polju možemo računati pomoću

$$W_m = \int_{V_j} \left\{ \int_0^{\mathbf{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \right\} dV . \quad (6.4.5)$$

U linearnim materijalima izraz (6.4.1) svodi se na

²⁰ Pogledati Prilog C

²¹ Pogledati Prilog C

²² U ostalim dijelovima domene zadaće je $\mathbf{J} = 0$, pa je njihov doprinos drugom članu u izrazu (6.4.4) jednak nuli.

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV, \quad (6.4.6)$$

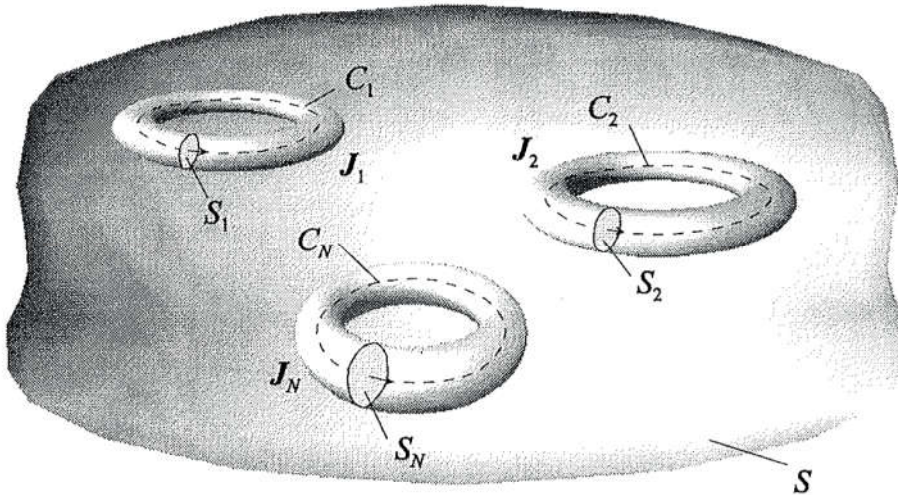
a analognom transformacijom možemo (6.4.6) prevesti u

$$W_m = \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \mathbf{n} dS + \frac{1}{2} \int_{V_j} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (6.4.7)$$

Ako S obuhvaća cijeli prostor polja, onda se izraz (6.4.7) svodi na

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_j} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (6.4.8)$$

Posebno je značajan slučaj energije statičkog magnetskog polja N strujnih petlji $C_1, \dots, C_N$ protjecanih strujama $I_1, \dots, I_N$ koje se nalaze u linearnom materijalu.



Slika 6.4.1. Sustav statičkog magnetskog polja N strujnih petlji

Tada jednačba (6.4.8) postaje

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{A} dV_i. \quad (6.4.9)$$

Ako pretpostavimo da su strujne petlje tanke i konstantnog presjeka, možemo pisati

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{A} dV_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{A} S_i dl_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \oint_{C_i} \mathbf{A} dl_i. \quad (6.4.10)$$

Korištenjem izraza (6.2.6) ta jednačba postaje

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i, \quad (6.4.11)$$

gdje je Φ_i magnetski tijek koji obuhvaća krivulja C_i . Iz ovdje navedenih izraza možemo uočiti nekoliko pristupa proračunu energije akumulirane u statičkom magnetskom polju

- Pomoću vektora polja, primjenom izraza (6.4.1) za nelinearne i izraza (4.6.6) za linearne materijale. Integraciju provodimo po cijelom volumenu u kojem postoji polje.
- Pomoću poznate gustoće struje i vektorskog magnetskog potencijala, primjenom jednadžbe (6.4.5) za nelinearne i jednadžbe (6.4.8) za linearne materijale. Integraciju provodimo po volumenu područja u kojima teku struje.
- Ako ploha S ne obuhvaća čitav prostor polja, pri određivanju ukupne energije treba dodati doprinos definiran integralom po S u (6.4.4) za nelinearne i (6.4.7) za linearne materijale.
- Pomoću struja i magnetskih tijekova primjenom (6.4.11) za sustav tankih strujnih petlji konstantnog presjeka u linearnom materijalu.

6.4.1. Određivanje sila u statičkom magnetskom polju pomoću energije

U odjeljku 3.5. detaljno smo obradili određivanje sila u statičkom magnetskom polju pomoću veličina polja i raspodjele struja. Kao kod statičkih električnih polja i ovdje možemo primijeniti *metodu virtualnih pomaka* za određivanje resultantnih sila. Razmotrimo neku strujnu petlju ili tijelo od linearnog materijala u statičkom magnetskom polju. Ako se pod djelovanjem magnetske sile ta petlja ili tijelo pomaknu za virtualno mali pomak δs u smjeru osi s , ta sila je izvršila radnju $\delta A_m = F_s \delta s$. Kao i u članku 4.3.1. nalazimo da je komponenta magnetske sile u smjeru osi s

$$F_s = \frac{\delta A}{\delta s}. \quad (6.3.12)$$

Radnju magnetske sile možemo izraziti prirastom energije pohranjene u statičkom magnetskom polju u dva slučaja:²³

1. *Magnetski vektorski potencijal ostaje konstantan u svim točkama unutar vodiča²⁴ (izolirani sustav).* Pomoću jednadžbe (6.4.8) zaključujemo da se u tom slučaju sustavu ne dodaje energija, pa se sva radnja obavlja na račun energije pohranjene u

²³ U oba slučaja smatramo da su svi dijelovi sustava magnetskog polja kruti, odnosno nepromjenjivog oblika.

²⁴ Ta pretpostavka odgovara pretpostavci da su svi vodiči u supravodljivom stanju, jer se magnetski tijek kroz nijednu petlju ne mijenja.

sustavu pa vrijedi $\delta A_m = -\delta W_m$, odnosno

$$F_s = -\frac{\delta W_m}{\delta s} . \quad (6.4.13)$$

2. *Gustoća struje J ostaje ista u svim točkama vodiča (neizolirani sustav).* Energija koju treba uložiti pri takvoj promjeni sustava je

$$\delta W_{\text{pomaka}} = \int_{V_j} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} dV . \quad (6.4.14)$$

Ako su materijali linearni, priraštaj pohranjene magnetske energije je

$$\delta W_m = \frac{1}{2} \int_{V_j} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} dV . \quad (6.4.15)$$

Po zakonu o očuvanju energije uložena energija W_{pomaka} može se utrošiti samo na priraštaj pohranjene magnetske energije i radnje magnetske sile pa vrijedi $\delta A_m = \delta W_m$. Iz toga slijedi da pomoću izraza

$$F_s = \frac{\delta W_m}{\delta s} , \quad (6.4.16)$$

možemo izračunati komponentu resultantne sile u smjeru osi s u ovom slučaju.

6.5. INDUKTIVITETI

Razmotrimo najjednostavniji sustav statičkog magnetskog polja: jedna strujna petlja protjecana strujom I u linearnom materijalu. Jakost magnetskog polja i magnetska indukcija u tom su slučaju proporcionalni struji I , pa za energiju akumuliranu u tom sustavu možemo pisati

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{1}{2} LI^2 . \quad (6.5.1)$$

Konstantu L nazivamo *induktivitet*, odnosno *samoinduktivitet*²⁵ promatrane petlje. Jedinica za induktivitet je *henri* (H), ($1\text{H} = 1\text{Wb}/1\text{A}$). U linearnim materijalima induktivitet je geometrijska karakteristika statičkog magnetskog polja i permeabilnosti, a nije ovisan o struji. Računamo ga pomoću izraza

²⁵ Često se naziva i vlastiti induktivitet petlje. Mogu se koristiti i izrazi *induktivnost* i *vlastita induktivnost*.

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{1}{I^2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (6.5.2)$$

Često taj izraz pišemo u obliku

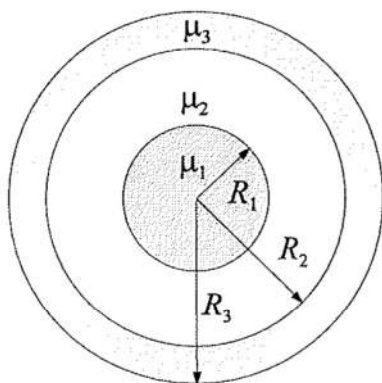
$$L = \frac{1}{I^2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{1}{I^2} \int_{V_u} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV + \frac{1}{I^2} \int_{V_v} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = L_u + L_v, \quad (6.5.3)$$

gdje je V_u volumen unutar vodiča a V_v volumen izvan vodiča. Koeficijent L_u nazivamo *unutrašnji induktivitet*, a L_v *vanjski induktivitet*.

Primjer 6.5.1. Induktivitet suosnog kabela po jedinici dužine

Presjek beskonačno dugog suosnog kabela s ravninom $z = 0$ cilindričnog koordinatnog sustava prikazan je na slici 6.5.1. Unutrašnji vodič polumjera R_1 protjecan je strujom I , a vanjski vodič unutrašnjeg polumjera R_2 i vanjskog polumjera R_3 protjecan je strujom $-I$. Za određivanje unutrašnjeg induktiviteta moramo poznavati raspodjelu gustoće struje. Ovdje ćemo pretpostaviti da je struja jednoliko raspoređena po presjeku unutrašnjeg i vanjskog vodiča, što je za *istosmjernu struju* prirodna pretpostavka.

Za izračunavanje induktiviteta moramo poznavati vektore polja $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$ u cijelom prostoru. Njih ćemo odrediti primjenom izraza (6.1.5). Za krivulju integracije odabiremo kružnice koncentrične s osi kabela. Zbog osne simetrije vektori $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$ imaju samo komponentu konstantnu po iznosu u smjeru obilaznog kuta.



Slika 6.5.1. Suosni kabel

Za područje unutrašnjeg vodiča vrijedi

$$\oint_{C_{ul}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H = \frac{I}{R_1^2 \pi} r^2 \pi = \frac{I}{R_1^2} r^2, \quad (6.5.4)$$

pa su vektori polja u tom području

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi R_1^2} r \mathbf{a}_\alpha \quad ; \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_1 I}{2\pi R_1^2} r \mathbf{a}_\alpha . \quad (6.5.5)$$

Unutrašnji induktivitet po jedinici dužine unutrašnjeg vodiča L'_{u1} je²⁶

$$L_{u1} = l \frac{1}{I^2} \int_0^{R_1} dr \int_0^{2\pi} \frac{\mu_1 I^2}{(2\pi R_1^2)^2} r^2 r d\alpha = \frac{\mu_1 l}{8\pi} \Rightarrow L'_{u1} = \frac{L_{u1}}{l} = \frac{\mu_1}{8\pi} . \quad (6.5.6)$$

Za područje između unutrašnjeg i vanjskog vodiča vrijedi

$$\oint_{C_{u1}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H = I . \quad (6.5.7)$$

Vektori polja u tom području jesu

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\alpha \quad ; \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \mathbf{a}_\alpha , \quad (6.5.8)$$

a vanjski induktivitet područja između vanjskog i unutrašnjeg vodiča po jedinici dužine L'_{v1} jest

$$L_{v1} = l \frac{1}{I^2} \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^{2\pi} \frac{\mu_2 I^2}{(2\pi r)^2} r d\alpha = l \frac{\mu_2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow L'_{v1} = \frac{\mu_2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} . \quad (6.5.9)$$

Za područje unutar vanjskog vodiča vrijedi

$$\oint_{C_{u1}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H = I \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) , \quad (6.5.10)$$

pa su vektori polja u tom području

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \frac{1}{r} \mathbf{a}_\alpha \quad ; \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_3 I}{2\pi} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \frac{1}{r} \mathbf{a}_\alpha . \quad (6.5.11)$$

Unutrašnji induktivitet vanjskog vodiča po jedinici dužine L'_{u2} je

²⁶ Zanimljivo je da unutrašnji induktivitet unutrašnjeg vodiča, kad je gustoća struje jednoliko raspoređena po presjeku, ne ovisi o njegovu polumjeru!

$$L_{u2}' = \frac{1}{I^2} \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^{2\pi} \frac{\mu_3 I^2}{(2\pi)^2} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \frac{1}{r^2} r d\alpha = \frac{\mu_3}{2\pi} \left[\frac{R_3^4}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{3R_3^2 - R_2^2}{4(R_3^2 - R_2^2)} \right] \quad (6.5.12)$$

Vanjski induktivitet područja izvan kabela je nula jer su vektori magnetskog polja izvan kabela jednaki nuli.²⁷ Prema tome, izrazom

$$L' = L_{u1}' + L_{v1}' + L_{u2}' , \quad (6.5.13)$$

određujemo ukupni induktivitet koaksijalnog kabela po jedinici dužine.

6.5.1. Međuiduktivitet

Sljedeći, složeniji sustav statičkog magnetskog polja koji ćemo razmatrati sastoji se od dvije strujne petlje kojima teku struje I_1 i I_2 , a koje se nalaze u linearnom materijalu. Zbog linearnosti možemo primijeniti načelo superpozicije i ukupno rezultatno polje prikazati kao

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 \quad ; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 , \quad (6.5.14)$$

gdje su $\mathbf{H}_1$ i $\mathbf{B}_1$ vektori polja koje uzrokuje I_1 ako u drugoj petlji ne teče struja, a $\mathbf{H}_2$ i $\mathbf{B}_2$ vektori polja koje uzrokuje I_2 ako u prvoj petlji ne teče struja. Ukupnu energiju pohranjenu u takvom sustavu možemo napisati kao

$$W_m = \int_V (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_1 dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{B}_2 dV + \int_V \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2 dV \quad (6.5.15)$$

Prema toj jednadžbi ukupnu pohranjenu energiju možemo prikazati kao zbroj vlastitih energija prve i druge petlje te energije interakcije petlji. Budući da su vektori $\mathbf{H}_1$ i $\mathbf{B}_1$ proporcionalni struji I_1 , a vektori $\mathbf{H}_2$ i $\mathbf{B}_2$ proporcionalni struji I_2 , jednadžbu (6.5.15) pišemo u obliku

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + L_{12} I_1 I_2 , \quad (6.5.16)$$

gdje je

$$L_{11} = \frac{1}{I_1^2} \int_V \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_1 dV , \quad (6.5.17)$$

²⁷ To slijedi iz jednadžbe (6.1.5) jer je suma obuhvaćenih struja izvan kabela jednaka nuli.

$$L_{22} = \frac{1}{I_2^2} \int_V \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{B}_2 dV , \quad (6.5.18,19)$$

$$L_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_V \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2 dV = \frac{1}{I_1 I_2} \int_V \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{B}_1 dV .$$

Koeficijente L_{11} i L_{22} nazivamo *samoinduktivitetima* petlji, a L_{12} nazivamo *međuinduktivitetom*. Ako jednadžbu (6.5.16) napišemo u funkciji parametra $p = I_2/I_1$ dobivamo izraz

$$W_m = \frac{1}{2} I_1^2 (L_{11} + L_{22} p^2 + 2L_{12} p) . \quad (6.5.20)$$

Deriviranjem te jednadžbe po parametru p dobivamo uvjet minimuma pohranjene energije

$$\frac{dW_m}{dp} = I_1^2 (L_{22} p + L_{12}) = 0 . \quad (6.5.21)$$

Zaključujemo da je magnetska energija minimalna ako je

$$p = -\frac{L_{12}}{L_{22}} . \quad (6.5.22)$$

Minimum energije iznosi

$$W_{m, \min} = \frac{1}{2} I_1^2 \left(L_{11} - \frac{L_{12}^2}{L_{22}} \right) . \quad (6.5.23)$$

Pohranjena energija uvijek mora biti veća ili jednaka nuli, pa uvijek mora vrijediti

$$L_{12} \leq \sqrt{L_{11} L_{22}} . \quad (6.5.24)$$

Naravno, integrale u jednadžbama (6.5.17 – 19) možemo odrediti i pomoću vektorskog magnetskog potencijala koristeći jednadžbu (6.4.8)

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{1}{I_1^2} \int_{V_1} \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{A}_1 dV , \\ L_{22} &= \frac{1}{I_2^2} \int_{V_2} \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{A}_2 dV , \end{aligned} \quad (6.5.25,26)$$

$$L_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{V_1} \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{A}_2 dV = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{V_2} \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{A}_1 dV . \quad (6.5.27)$$

U tim jednadžbama²⁸ je V_1 volumen vodiča u kojem teče struja I_1 , a V_2 volumen vodiča u kojem teče struja I_2 . Izraz (6.5.27) omogućava bitno pojednostavnjenje proračuna međuinuktiviteta tankih strujnih petlji kružnog presjeka. Tada $\mathbf{J}dV$ možemo zamijeniti sa $I d\mathbf{l}$ pa izraz (6.5.27) prelazi u

$$L_{12} = \frac{1}{I_2} \oint_{C_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 = \frac{1}{I_1} \oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 . \quad (6.5.28)$$

Koristeći jednadžbu (6.2.6) izraz za izračun međuinuktiviteta tankih strujnih petlji možemo napisati u funkciji magnetskog tijeka

$$L_{12} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} = \frac{\int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} dS_1}{I_2} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} dS_2}{I_1} . \quad (6.5.29)$$

Tijek Φ_{21} je tijek koji uzrokuje struja I_2 a obuhvaća petlja C_1 , a tijek Φ_{12} je tijek koji uzrokuje struja I_1 a obuhvaća petlja C_2 . Izraz (6.5.29) koristimo za alternativnu definiciju međuinuktiviteta dviju tankih strujnih petlji kao omjera *obuhvaćenog tijeka* kroz jednu petlju, a uzrokovanog strujom u drugoj petlji i struje koja je uzrokovala taj tijek.

Isti pristup, u kojem struju raspoređenu po presjeku vodiča koncentriramo u njegovo središte, možemo primijeniti i pri računu vanjskih samoinduktiviteta strujnih petlji od tankih vodiča okruglog presjeka, dok unutrašnji samoinduktivitet moramo odrediti iz energije pohranjene u vodiču.²⁹

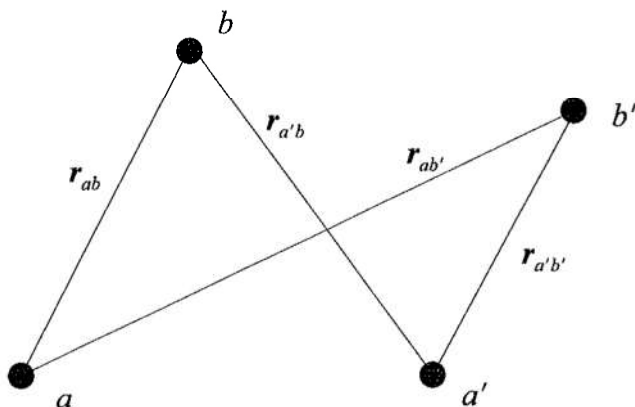
Primjer 6.5.1.1. Međuinuktivitet dvaju paralelnih dvožičnih vodova

Na slici 6.5.2. prikazali smo poprečni presjek dvaju tankih dvožičnih vodova gdje smo s a i a' označili vodiče prvog, a s b i b' vodiče drugog voda. Za određivanje međuinuktiviteta koristit ćemo izraz (6.5.29) tako da ćemo kroz vod $a - a'$ propustiti struju I_1 i izračunati magnetski tijek koji obuhvaća vod $b - b'$ po jedinici dužine. To znači da kroz vodiče a i a' teče struja I_1 u suprotnim smjerovima. Ukupni tijek koji obuhvaća vod $b - b'$ odredit ćemo superpozicijom tijekova što ih uzrokuju struja I_1 kroz

²⁸ Za detaljniji proračun pogledati npr. Z. Haznadar, J. Matjan, *Određivanje induktiviteta sustava ravnih vodiča metodom srednjih geometrijskih udaljenosti*, 1. i 2. dio, Elektrotehnika 1 i 2, Zagreb, 1969.

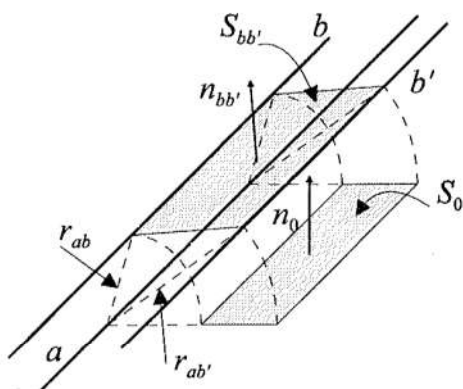
²⁹ Unutrašnji samoinduktivitet strujnice je beskonačan, jer bi morali uložiti beskonačnu energiju za njezino formiranje, odnosno sabijanje struje u geometrijsku liniju bez poprečnih dimenzija.

vodič a i struja $-I_1$ kroz vodič a' .



Slika 6.5.2. Poprečni presjek dvaju paralelnih dvožičnih vodova

Odredimo najprije tijek struje I_1 kroz vodič a . Zadaća je prikazana na slici 6.5.3.



Slika 6.5.3. Uz proračun tijeka vodiča

Magnetsku indukciju beskonačne ravne strujnice odredili smo u primjeru 6.3.1.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{2\pi r} \mathbf{a}_\alpha, \quad (6.5.30)$$

i zaključili da su silnice u tom slučaju kružnice koncentrične sa strujnicom. Stoga je tijek kojeg obuhvaća površina petlje vodiča $b - b'$ $S_{bb'}$ jednak tijeku kojeg obuhvaća površina S_0 . Tijek koji obuhvaća površina S_0 je jednostavno izračunati jer su na njoj vektori $\mathbf{B}$ i $\mathbf{n}_0$ kolinearni pa vrijedi

$$\Phi_{12a} = \int_{r_{ab}}^{r_{ab'}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_0 l dr = \int_{r_{ab}}^{r_{ab'}} \frac{\mu I_1}{2\pi r} l dr = l \frac{\mu I_1}{2\pi} \ln \frac{r_{ab'}}{r_{ab}}. \quad (6.5.31)$$

Sukladno tome, tijek struje $-I_1$ kroz vodič a' kojeg obuhvaća petlja vodiča $b - b'$ je

$$\Phi_{12a'} = -l \frac{\mu I_1}{2\pi} \ln \frac{r_{a'b'}}{r_{a'b}}, \quad (6.5.32)$$

pa je ukupni tijek koji obuhvaća vod $b - b'$ a uzrokuje vod $a - a'$ po jedinici dužine

$$\Phi_{12}' = \frac{\Phi_{12a}}{l} + \frac{\Phi_{12a'}}{l} = \frac{\mu I_1}{2\pi} \ln \frac{r_{ab'} r_{a'b}}{r_{ab} r_{a'b'}} . \quad (6.5.33)$$

Stoga izrazom

$$L_{12}' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_{ab'} r_{a'b}}{r_{ab} r_{a'b'}} , \quad (6.5.34)$$

računamo međuinuktivitet ta dva voda po jedinici dužine.

6.5.2. Induktiviteti sustava strujnih petlji

Polje u sustavu magnetskog polja koji se sastoji od N strujnih petlji protjecanih strujama I_i , $i = 1, \dots, N$, u linearnom materijalu možemo također predstaviti kao zbroj doprinosa svake petlje pojedinačno, ako u ostalim petljama ne teku struje

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_i \quad ; \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i . \quad (6.5.35)$$

Tada energiju pohranjenu u takvom sustavu magnetskog polja možemo napisati u obliku

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_V \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{B}_j dV , \quad (6.5.36)$$

a zbog linearnosti materijala možemo uvesti koeficijente proporcionalnosti L_{ij} kao

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N I_i I_j L_{ij} , \quad (6.5.37)$$

gdje je

$$L_{ij} = \frac{1}{I_i I_j} \int_V \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{B}_j dV , \quad (6.5.38)$$

Koeficijent L_{ii} nazivamo *samoinduktivitet* i -te petlje, a koeficijent L_{ij} nazivamo međuinuktivitet i -te i j -te petlje.

6.6. MAGNETSKI KRUGOVI

Pristup pomoću magnetskih krugova omogućavao je približno rješavanje zadaća statičkih magnetskih polja pri projektiranju elektromagnetskih naprava analogijom s krugovima istosmjernje struje. Taj pristup rezultirao je kvalitativnim uvidom u ponašanje naprave, a kvantitativni rezultati u pravilu su bili korigirani s korekcijskim parametrima nakon usporedbe s mjerenjima. Danas taj pristup više nije dominantan, jer numeričke metode i primjena računala omogućavaju dobivanje mnogo točnijih rezultata, no ne treba ga u potpunosti odbaciti budući da njime na vrlo jednostavan i brz način možemo dobiti prvo približenje rješenja zadaća statičkih magnetskih polja.

Formiranje magnetskih krugova temeljimo na činjenici da prostor statičkog magnetskog polja možemo podijeliti u sustav elementarnih cijevi tjeka koje nazivamo *elementarne silocijevi*.³⁰ Osnovne značajke elementarne silocijevi u statičkom magnetskom polju jesu

- magnetski tijek $d\Phi$ kroz elementarnu silocijev je konstantan, odnosno jednak u svakom njezinom presjeku,
 - elementarne silocijevi su zatvorene same u sebe,
 - poprečni presjek dS i permeabilnost μ mogu se mijenjati duž elementarne silocijevi.
- Ako na zatvorenu krivulju C kroz os elementarne silocijevi primijenimo jednadžbu (6.1.5) dobivamo

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI, \quad (6.6.1)$$

gdje je N broj strujnica protjecanih strujom I koje obuhvaća C . U osi elementarne silocijevi vektor $\mathbf{H}$ je kolinearan s $d\mathbf{l}$, pa uz pretpostavku da su materijali u njoj linearni možemo pisati

$$\oint_C \frac{B}{\mu} dl = \oint_C \frac{1}{\mu} \frac{d\Phi}{dS} dl = NI. \quad (6.6.2)$$

Unutar elementarne silocijevi tijek $d\Phi$ je konstantan pa vrijedi

$$d\Phi = \frac{NI}{\oint_C \frac{1}{\mu} dl}. \quad (6.6.3)$$

Tom jednadžbom možemo jednostavno odrediti magnetski tijek kroz elementarnu siloci-

³⁰ Silocijev je udomačen izraz, a mogao bi se koristiti i termin cijevnica.

jev ako znamo njezin oblik i značajke. Primjenu jednadžbe možemo proširiti i na zatvorene cijevi konačnog presjeka S ako one posjeduju osnovne značajke elementarne silocijevi. Tada je tijek Φ kroz cijev

$$\Phi = \frac{NI}{\oint_c \frac{1}{\mu} \frac{dl}{S}} . \quad (6.6.4)$$

Taj izraz je analogan izrazu za Ohmov zakon u istosmjernom strujnom krugu

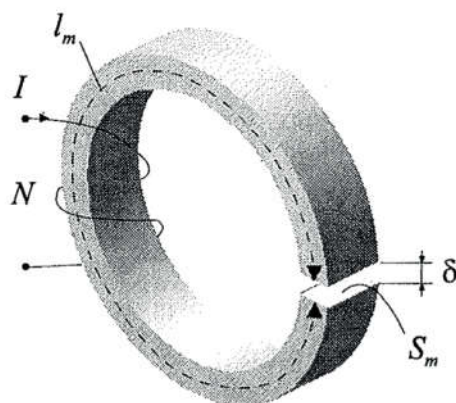
$$I = \frac{U}{\oint_c \frac{1}{\kappa} \frac{dl}{S}} , \quad (6.6.5)$$

a analogne veličine su Φ i I , μ i κ te NI i U . Stoga veličinu definiranu izrazom (6.6.1) često nazivamo *magnetomotornom silom*, a nazivnik izraza (6.6.4) *magnetskim otporom*.

Ako je u zadaći statičkog magnetskog polja magnetski tijek "kanaliziran" tako da sve elementarne silocijevi ili bar njihov najveći dio čine zatvorenu cijev konačnog presjeka i dovoljno poznate geometrije, možemo tijek u toj zadaći približno odrediti pomoću (6.6.4). Efikasno "kanaliziranje" postižemo upotrebom feromagnetskih materijala za formiranje zatvorene cijevi pri čemu, na nekim mjestima, mogu postojati i uski zračni raspori.³¹

Primjer 6.6.1. Magnetski krug torusa sa zračnim rasporom

Zadaću statičkog magnetskog polja u torusu sa zračnim rasporom prikazali smo na slici 6.6.1.



Slika 6.6.1. Torus sa zračnim rasporom

³¹ Naravno, feromagnetski materijali ne mogu idealno kanalizirati magnetski tijek jer ne postoje materijali s $\mu = 0$, pa se dio tijeka uvijek zatvara izvan feromagnetika. No ako ne dolazi do zasićenja, omjer permeabilnosti feromagnetskih i ostalih materijala je tipično 1000, pa se s malom greškom može pretpostaviti da se sav magnetski tijek zatvara kroz feromagnetik.

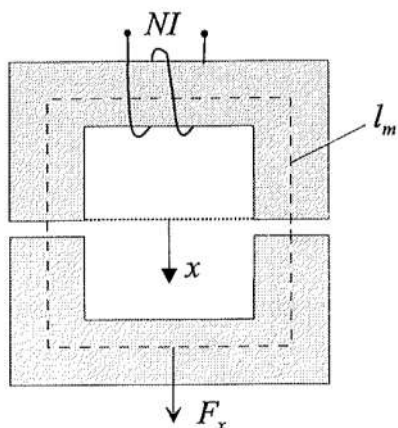
S_m je površina poprečnog presjeka a S_0 je površina zračnog raspora. Tijek se u zraku rasprši, pa je $S_0 > S_m$. Za točno određivanje S_0 potrebno je riješiti statičko magnetsko polje i odrediti silnice između rubova torusa, no time gubimo smisao primjene magnetskih krugova. Zato najčešće zanemarujemo povećanje S_0 i pretpostavljamo $S_0 = S_m$, ili pretpostavljamo da su silnice između rubova torusa polukružnog oblika što odgovara povećanju linearnih dimenzija presjeka torusa za δ . Jednadžba (6.6.4) tada ima oblik

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{1}{\mu} \frac{l_m}{S_m} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\delta}{S_0}}, \quad (6.6.6)$$

pa taj izraz koristimo za približno određivanje magnetskog tijeka u torusu.

Primjer 6.6.2. Elektromagnet

Elektromagnet je važna naprava za pretvorbu električne energije u mehaničku. Osnovni princip rada elektromagneta prikazali smo na slici 6.6.2.



Slika 6.6.2 Elektromagnet

Jednadžba (6.6.4) za takav raspored jest

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{1}{\mu} \frac{l_m}{S_m} + \frac{2}{\mu_0} \frac{x}{S_0}}. \quad (6.6.7)$$

Za površinu zračnog raspora S_0 pretpostavit ćemo da je jednaka površini feromagnetskog dijela S_m jer razmatramo samo slučajeve kad je širina zračnog raspora x mala. Iz izraza (6.4.11) slijedi da pohranjenu magnetsku energiju možemo odrediti kao

$$W_m = \frac{1}{2} NI \Phi = \frac{1}{2} I^2 L, \quad (6.6.8)$$

pa je induktivitet takvog elektromagneta

$$L = \frac{N^2}{\frac{1}{\mu} \frac{l_m}{S_m} + \frac{1}{\mu_0} \frac{2x}{S_m}} \quad (6.6.10)$$

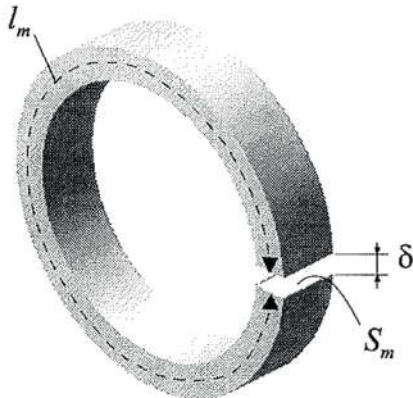
Uz konstantnu struju I rezultatna sila je prema (6.4.16)

$$F_x = \frac{\partial W_m}{\partial x} = \frac{N^2 I^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\frac{1}{\mu} \frac{l_m}{S_m} + \frac{1}{\mu_0} \frac{2x}{S_m}} = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S_m} = -BH_0 S_m \quad (6.6.11)$$

Negativni predznak u tom izrazu ukazuje na privlačnu silu između dva feromagnetska dijela.

6.6.1. Magnetski krug permanentnih magneta

Razmotrimo magnetski krug koji formiraju torusni permanentni magnet i mali zračni raspor prema slici 6.6.3.



Slika 6.6.3. Torusni permanentni magnet sa zračnim rasporom

Pretpostavimo da je površina S_0 jednaka površini magneta. Tom pretpostavkom smo izjednačili magnetske indukcije u magnetu i rasporu. Primjena (6.6.4) rezultira s

$$Hl_m + H_0 \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad H = -\frac{\delta}{l_m} \frac{B}{\mu_0} \quad (6.6.12)$$

To je jednačba pravca u H - B ravnini i točka u kojoj taj pravac siječe krivulju histereze permanentnog magneta u drugom kvadrantu je *radna točka magneta*. Položaj radne točke, a time i magnetska indukcija u magnetu, ovisi o nagibu pravca

$$\tan \alpha = -\mu_0 \frac{l_m}{\delta} \quad (6.6.13)$$

Zadaća dimenzioniranja permanentnog magneta³² najčešće se svodi na dvije varijante:

1. Postizanje zadane indukcije u rasporu s minimalnim utroškom materijala magneta.
2. Uz zadanu količinu materijala magneta potrebno je postići što veću indukciju u rasporu.

Iz jednadžbe (6.6.12) slijedi

$$B = \mu_0 |H| \frac{l_m}{\delta} \Rightarrow \frac{V_m}{V_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{B^2}{B|H|} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{V}{V_0} \mu_0 B|H|}, \quad (6.6.14)$$

gdje je $V_0 = S\delta$ volumen zračnog raspora, a $V_m = Sl_m$ volumen magneta. Iz izraza (6.6.14) zaključujemo da je potrebni volumen magneta za zadanu indukciju utoliko manji koliko je veći produkt (BH) u magnetu, odnosno da je magnetska indukcija u rasporu uz zadani volumen magneta utoliko veća koliko je veći produkt (BH) u magnetu. Oba zaključka upućuju da radnu točku magneta treba postaviti tako da produkt (BH) u magnetu bude maksimalan. Ako histerezu magneta u trećem kvadrantu približno pravcem

$$B = -\frac{B_r}{H_c} H + B_r, \quad (6.6.15)$$

gdje je B_r remanentna indukcija i H_c koercitivno magnetsko polje, produkt (BH) je

$$BH = -\frac{B_r}{H_c} H^2 + B_r H. \quad (6.6.16)$$

Deriviranjem te jednadžbe po H dobivamo uvjet za maksimum produkta (BH)

$$\frac{d(BH)}{dH} = -\frac{2B_r H}{H_c} + B_r = 0 \Rightarrow H_{(BH)_{\text{maks}}} = \frac{H_c}{2}; \quad B_{(BH)_{\text{maks}}} = \frac{B_r}{2}. \quad (6.6.17)$$

Iz ovoga slijedi da je koeficijent pravca (6.6.13) jednak

$$\tan \alpha = -\frac{B_r}{H_c} = -\mu_0 \frac{l_m}{\delta}, \quad (6.6.18)$$

kada je produkt (BH) maksimalan. Stoga je, uz zadane značajke magneta, izrazom

$$\frac{l_m}{\delta} = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_r}{H_c}, \quad (6.6.19)$$

³² Pogledati npr. Z. Haznadar, Ž. Štih, S. Berberović, G. Manenica, *Finite Element Method in Design of Permanent Magnet Synchronous Motors*, Zbornik IGTE – Technische Universität, Graz, 1994.

definiran omjer dužine magneta i širine zračnog raspora u optimalnoj radnoj točki.

6.7. MAGNETSKO POLJE U PROSTORU BEZ STRUJA

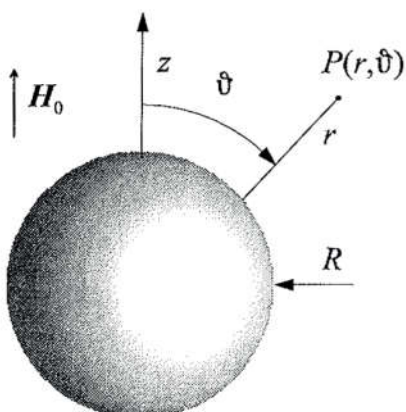
U odjeljku 6.2. pokazali smo da takve zadaće najlakše rješavamo pomoću *antipotencijala*, odnosno uvođenjem *skalarnog magnetskog potencijala*. Ako u jednostruko povezanoj domeni zadaće ne teku struje, antipotencijal zadovoljava Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu. Uz zamjene

$$\varphi \rightarrow \varphi_m \quad ; \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} \quad ; \quad \varepsilon \rightarrow \mu . \quad (6.7.1)$$

možemo metode za rješavanje te jednadžbe u statičkim električnim poljima (separacija varijabli i konformno preslikavanje) koje smo opisali u odjeljcima 4.6. i 4.9. izravno primijeniti i za njezino rješavanje u statičkim magnetskim poljima.

Primjer 6.7.1. Feromagnetska kugla u vanjskom homogenom polju

Zadaću smo u sfernom koordinatnom sustavu prikazali slikom 6.7.1.



Slika 6.7.1. Feromagnetska kugla u vanjskom homogenom polju

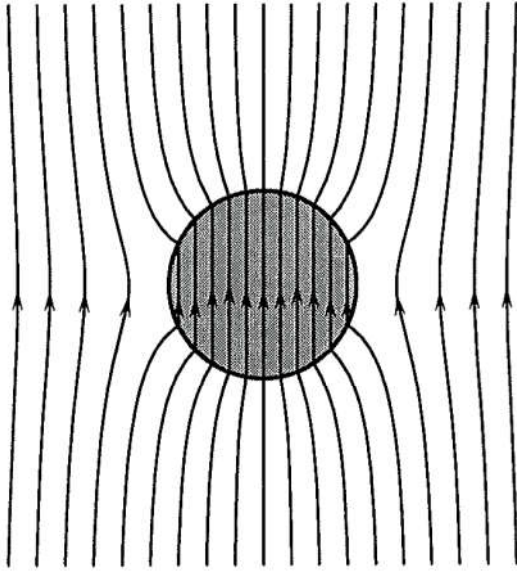
Analogna zadaća u statičkom električnom polju je dielektrička kugla u homogenom električnom polju. Tu smo zadaću riješili u primjeru 4.6.3.1, pa primjenom analogija (6.7.1) možemo izravno napisati rješenje³³ za linearne materijale. Polje izvan kugle je

$$\mathbf{H}_v = H_0 \left[1 + 2 \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \vartheta \mathbf{a}_r + H_0 \left[-1 + \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \vartheta \mathbf{a}_\vartheta , \quad (6.7.2)$$

a polje unutar kugle je homogeno i iznosi

³³ Pogledati jednadžbe (4.6.61) i (4.6.62).

$$\mathbf{H}_u = \frac{3H_0\mu_0\cos\vartheta}{2\mu_0 + \mu} \mathbf{a}_r - \frac{3H_0\mu_0\sin\vartheta}{2\mu_0 + \mu} \mathbf{a}_\vartheta = \frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \mathbf{H}_0 . \quad (6.7.3)$$



Slika 6.7.2. Statičko magnetsko polje feromagnetske kugle u vanjskom homogenom polju ($\mu_r = 100$).

Taj rezultat možemo koristiti i za rješavanje zadaće kugle od nelinearnog ali homogenog i izotropnog materijala u vanjskom homogenom polju. Sveza između jakosti polja i indukcije u kugli je tada³⁴

$$\mathbf{B}_u = \mu_0(\mathbf{H}_u + \mathbf{M}) . \quad (6.7.4)$$

I u tom će slučaju polje u kugli biti homogeno i paralelno vanjskom polju, a vektori $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_u$, $\mathbf{B}_u$ i $\mathbf{M}$ će biti kolinearni. Razlika se javlja u svezi polja i indukcije (6.7.4). Stoga možemo pretpostaviti oblik antipotencijala unutar kugle

$$\varphi_{mu} = Ar\cos\vartheta , \quad (6.7.5)$$

i izvan kugle

$$\varphi_{mv} = \left(-H_0 r + \frac{B}{r^2} \right) \cos\vartheta . \quad (6.7.6)$$

Na površini kugle radijalne komponente vektora magnetske indukcije moraju biti jednake

$$-\left(\frac{\partial \varphi_{mv}}{\partial r} \right)_{r=R} = -\left(\frac{\partial \varphi_{mu}}{\partial r} \right)_{r=R} + M\cos\vartheta , \quad (6.7.7)$$

³⁴ Pogledati članak 1.4.6.

pa vrijedi

$$H_0 + \frac{2B}{R^3} = -A + M . \quad (6.7.8)$$

Istovremeno moraju biti jednake tangencijalne komponente vektora jakosti polja na površini kugle

$$-\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{mv}}{\partial \vartheta} \right)_{r=R} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{mu}}{\partial \vartheta} \right)_{r=R} \Rightarrow AR = -H_0 + \frac{B}{R^2} . \quad (6.7.9)$$

Pomoću jednadžbi (6.7.8) i (6.7.9) nalazimo da je

$$A = \frac{M}{3} - H_0 \quad ; \quad B = \frac{R^3 M}{3} , \quad (6.7.10)$$

pa je konačni oblik potencijala unutar kugle

$$\varphi_{mu} = \left(\frac{M}{3} - H_0 \right) r \cos \vartheta , \quad (6.7.11)$$

i izvan kugle

$$\varphi_{mv} = \left(-H_0 r + \frac{R^3 M}{3r^2} \right) \cos \vartheta . \quad (6.7.12)$$

Polje u kugli je homogeno, jakosti

$$H_u = H_0 - \frac{M}{3} , \quad (6.7.13)$$

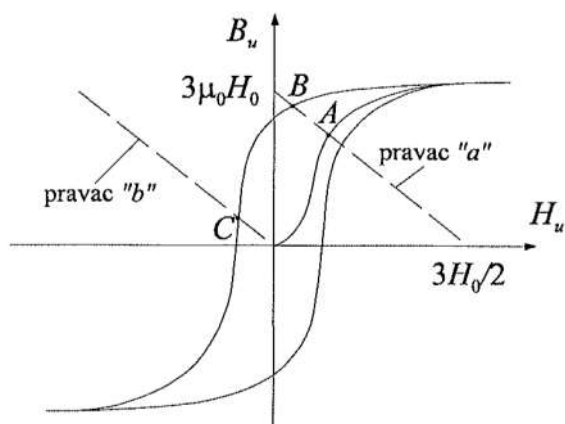
i indukcije

$$B_u = \mu_0 (H_u + M) = \mu_0 \left(H_0 + \frac{2}{3} M \right) . \quad (6.7.14)$$

Eliminiranjem M pomoću jednadžbi (6.7.13) i (6.7.4) dobivamo jednadžbu

$$B_u = \mu_0 (3H_0 - 2H_u) . \quad (6.7.15)$$

To je jednadžba pravca "a" u ravnini H_u - B_u i njegovo sjecište³⁵ s krivuljom magnetiziranja (slika 6.7.3) definira H_u i B_u , odnosno radnu točku feromagnetske kugle.³⁶



Slika 6.7.3. Uz određivanje radne točke feromagnetske kugle u homogenom vanjskom polju i homogeno magnetiziranog kuglastog permanentnog magneta

Ako kugla prije unošenja u homogeno polje nije bila magnetizirana, radna točka je točka A na krivulji prvog magnetiziranja. Ako je kugla bila prethodno namagnetizirana do zasićenja, radna točka je točka B na grani histereze.

Postupak koji smo opisali u ovom primjeru možemo primijeniti za sva tijela koja se u stranom polju homogeno magnetiziraju.³⁷

Primjer 6.7.2. Homogeno magnetizirani kuglasti permanentni magnet

Rezultat prethodnog primjera možemo iskoristiti za određivanje polja homogeno magnetiziranog kuglastog permanentnog magneta. Zamislamo da je nakon magnetiziranja kugle iz prethodnog primjera zaostala magnetizacija M , a vanjsko polje H_0 nestalo. Tako dobivamo permanentni magnet u kojem vlada polje H_p i indukcija B_p . H_p možemo odrediti iz izraza (6.7.13)

$$H_p = \lim_{H_0 \rightarrow 0} \frac{3H_0 - M}{3} = -\frac{M}{3}, \quad (6.7.16)$$

a B_p iz izraza (6.7.14)

$$B_p = \lim_{H_0 \rightarrow 0} \mu_0 \frac{3H_0 + 2M}{3} = \mu_0 \frac{2M}{3}. \quad (6.7.17)$$

³⁵ Ovdje smo nagibe pravaca nacrtali nerealno velikim zbog jasnoće prikaza. Ako je materijal magneta čisto željezo njegova remanentna indukcija iznosi oko 0.6 T a odsječak pravca "a" na B_u osi za $H_0 = 200$ A/m iznosi 0.25 mT. To znači da na slici 7.6.3. za čisto željezo nebi mogli razlikovati pravce "a" i "b" od H_u osi.

³⁶ To je najčešći način jer se krivulje magnetiziranja najčešće zadaju grafički. Ako su zadane tabelarno, onda koristimo približenje, najčešće s polinomima, pa za određivanje radne točke moramo riješiti nelinearnu algebarsku jednadžbu.

³⁷ Na primjer, rotacijski elipsoid, pogledati J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

Iz jednadžbi (6.7.16,17) vidimo da su u permanentnom magnetu B_p i H_p *suprotno usmjereni*. Antipotencijal izvan magneta dobivamo iz izraza (6.7.12)

$$\varphi_{mv} = \frac{R^3 M}{3r^2} \cos \vartheta, \quad (6.7.18)$$

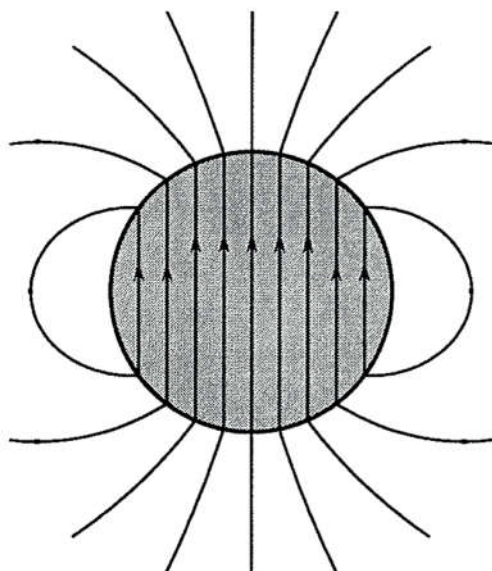
pa je jakost polja izvan magneta

$$\mathbf{H}_v = -\nabla \varphi_{mv} = \frac{R^3 M}{3r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{a}_r + \sin \vartheta \mathbf{a}_\vartheta) \quad ; \quad \mathbf{B}_v = \mu_0 \mathbf{H}_v. \quad (6.7.19)$$

Vezu između polja i indukcije dobivamo iz jednadžbe (6.7.15)

$$\mathbf{B}_p = -2\mu_0 \mathbf{H}_u, \quad (6.7.20)$$

pa je radna točka magneta točka C koja je sjecište pravca (6.7.20) (to je pravac "b" na slici 6.7.3) i grane histereze u drugom kvadrantu.



Slika 6.7.4. Polje homogeno magnetiziranog kuglastog magneta

Primjer 6.7.3. Kuglasta magnetska ljuska u homogenom polju

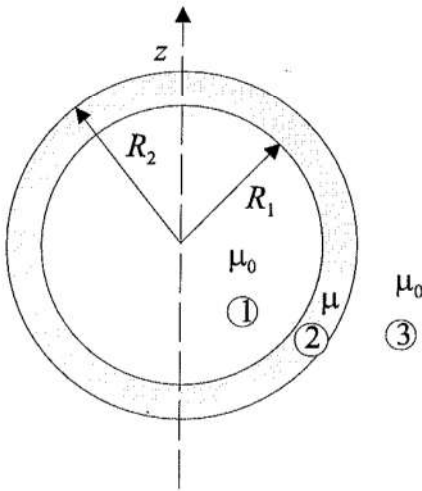
Tim primjerom želimo pokazati primjenu magnetskih oklopa visoke permeabilnosti za zaštitu od magnetskih polja. Analizirat ćemo jednostavan oblik oklopa: kuglastu ljusku unutrašnjeg polumjera R_1 i vanjskog polumjera R_2 od LIH materijala permeabilnosti μ koja se nalazi u homogenom magnetskom polju $\mathbf{H}_0$ prema slici 6.7.5.

Polje u ovoj zadaći riješit ćemo pomoću Laplaceove jednadžbe za antipotencijale primjenom separacije varijabli³⁸ u sfernom koordinatnom sustavu. Antipotencijal u tri

³⁸ Pogledati Prilog A.

područja ove zadaće pretpostavljamo u obliku linearne kombinacije zonskih harmonika nultog i prvog reda

$$\begin{aligned}\varphi_{m3} &= A_3 + \frac{B_3}{r} + C_3 r \cos \vartheta + \frac{D_3}{r^2} \cos \vartheta \quad ; \quad r \geq R_2 , \\ \varphi_{m2} &= A_2 + \frac{B_2}{r} + C_2 r \cos \vartheta + \frac{D_2}{r^2} \cos \vartheta \quad ; \quad R_1 \geq r \geq R_2 , \\ \varphi_{m1} &= A_1 + \frac{B_1}{r} + C_1 r \cos \vartheta + \frac{D_1}{r^2} \cos \vartheta \quad ; \quad R_1 \geq r \geq 0 .\end{aligned}\tag{6.7.21}$$



Slika 6.7.5. Kuglasta ljuska u homogenom polju

Antipotencijal φ_{m1} mora biti konačan u svim točkama, pa mora vrijediti $B_1 = D_1 = 0$. Antipotencijal φ_{m3} mora na velikim udaljenostima od ljuske prijeći u potencijal homogenog polja u smjeru osi z

$$\varphi_{m3}(r \gg R_2) = -H_0 r \cos \vartheta = A_3 + C_3 r \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad A_3 = 0, \quad C_3 = -H_0 .\tag{6.7.24}$$

Antipotencijal mora biti kontinuiran na granicama $r = R_1$ i $r = R_2$ pa zbog $A_3 = 0$ mora vrijediti $A_2 = A_1 = 0$, a zbog $B_1 = 0$ mora vrijediti $B_2 = B_3 = 0$. Uvrštavanjem tih uvjeta u jednadžbe (6.7.21 – 23) dobivamo

$$\begin{aligned}\varphi_{m3} &= -H_0 r \cos \vartheta + \frac{D_3}{r^2} \cos \vartheta \quad ; \quad r \geq R_2 , \\ \varphi_{m2} &= C_2 r \cos \vartheta + \frac{D_2}{r^2} \cos \vartheta \quad ; \quad R_1 \geq r \geq R_2 , \\ \varphi_{m1} &= C_1 r \cos \vartheta \quad ; \quad R_1 \geq r \geq 0 .\end{aligned}\tag{6.7.25}$$

Nepoznate koeficijente C_1 , C_2 , D_2 i D_3 određujemo iz graničnih uvjeta

$$\begin{aligned}\varphi_{m1}(R_1) &= \varphi_{m2}(R_1) , \\ \varphi_{m2}(R_2) &= \varphi_{m3}(R_2) , \\ \mu_0 \left(\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} \right)_{r=R_1} &= \mu \left(\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} \right)_{r=R_1} , \\ \mu_0 \left(\frac{\partial \varphi_{m3}}{\partial r} \right)_{r=R_2} &= \mu \left(\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} \right)_{r=R_2} ,\end{aligned}\tag{6.7.28 – 31}$$

i oni iznose

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{-H_0}{1 + \frac{2(\mu_r - 1)^2}{9\mu_r} \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 \right]} ; \quad C_2 = \frac{-3H_0(2\mu_r + 1)}{9\mu_r + 2(\mu_r - 1)^2 \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 \right]} , \\ D_2 &= \frac{-3H_0 R_2^3 (\mu_r - 1)}{9\mu_r + 2(\mu_r - 1)^2 \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 \right]} ; \quad D_3 = -H_0 \frac{\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-1}}{\frac{\mu_r + 2}{\mu_r - 1} \frac{1}{R_1^3} - \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r + 1} \frac{1}{R_2^3}} .\end{aligned}\tag{6.7.32}$$

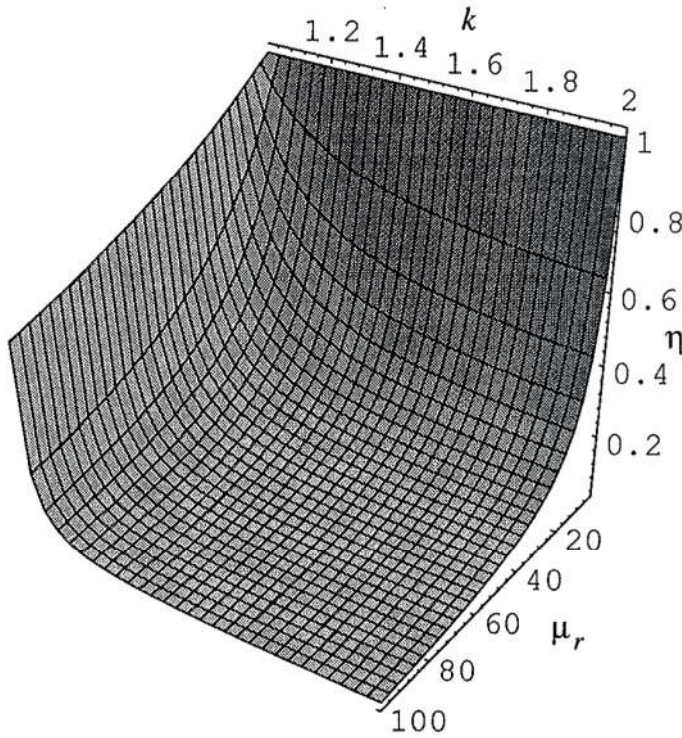
Jakost magnetskog polja u svakom području određujemo pomoću jednadžbe (6.2.15). Polje u šupljini je

$$H_1 = \frac{1}{1 + \frac{2(\mu_r - 1)^2}{9\mu_r} \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 \right]} H_0 ,\tag{6.7.36}$$

pa omjer

$$\eta = \frac{H_1}{H_0} = \frac{1}{1 + \frac{2(\mu_r - 1)^2}{9\mu_r} \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 \right]} ,\tag{6.7.37}$$

govori o kakvoći zaštite, odnosno o smanjenju vanjskog magnetskog polja pomoću zaslona u obliku kuglaste ljuske. Na slici 6.7.6. prikazali smo ovisnost $\eta(k = R_2/R_1, \mu_r)$.



Slika 6.7.6. Ovisnost faktora smanjenja polja η u kuglastoj ljusci o omjeru polumjera $k = R_2/R_1$ i μ_r

Iz te slike je vidljivo da i tanka ljuska može učinkovito smanjiti polje ako je velika relativna permeabilnost. U svakom slučaju, ako je H_0 toliko velik da magnetski materijal ljuske dovodi u zasićenje, učinkovito smanjivanje polja izostaje.³⁹ U slučaju tanke ljuske debljine $\delta = (R_2 - R_1) \ll R_1$ možemo pisati

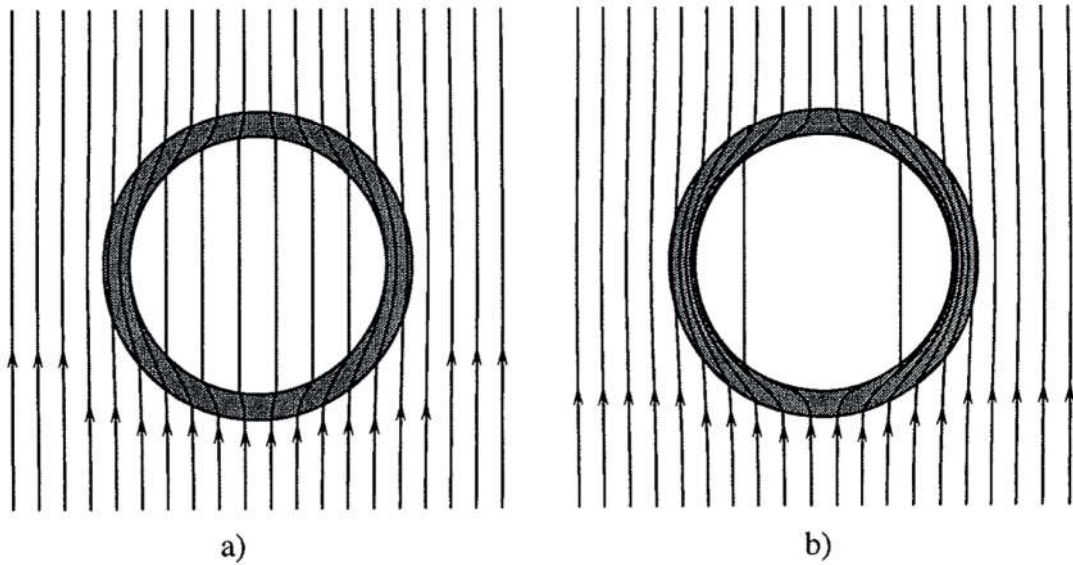
$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-3} = \left(1 + \frac{\delta}{R_1}\right)^{-3} \approx 1 - 3\frac{\delta}{R_1}, \quad (6.7.38)$$

pa za velike μ_r vrijedi

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{2\mu_r\delta}{3R_1}}. \quad (6.7.39)$$

Korištenjem (6.7.39) možemo odrediti potrebnu debljinu ljuske za zadani η , μ_r i R_1 .

³⁹ Čak ni tu, geometrijski vrlo jednostavnu zadaću ne možemo analitički riješiti za nelinearne materijale, pa moramo koristiti numeričke postupke.



Slika 6.7.7. Magnetsko polje kuglaste ljuske u homogenom polju za $k = R_2/R_1 = 1.2$; a) $\mu_r = 2$, i b) $\mu_r = 3$

6.8. POLJE ZADANIH STRUJA U NEOGRANIČENOM PROSTORU

Zadaće te vrste rješavamo integralnim pristupom pomoću vektorskog magnetskog potencijala. U odjeljku 6.2. pokazali smo da vektorski magnetski potencijal u linearnom izotropnom materijalu zadovoljava jednadžbu

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} . \quad (6.8.1)$$

U članku 2.4.3. izveli smo rješenje te jednadžbe u neograničenom prostoru

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (6.8.2)$$

U pravocrtnom koordinatnom sustavu to rješenje možemo napisati kao tri skalarna rješenja

$$A_j(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_j(\mathbf{r}') dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad ; \quad j=x,y,z , \quad (6.8.3)$$

jer jednadžba (6.8.1) u tom sustavu ima oblik⁴⁰

⁴⁰ Pogledati Prilog D.

$$\Delta A = \Delta A_x a_x + \Delta A_y a_y + \Delta A_z a_z = -\mu(J_x a_x + J_y a_y + J_z a_z) . \quad (6.8.4)$$

U ostalim pravokutnim koordinatnim sustavima jednačba (6.8.1) se ne može tako jednostavno rastaviti na tri skalarne diferencijalne jednačbe po komponentama u smjeru odrednica sustava, pa u njima treba obratiti pažnju pri primjeni izraza (6.8.2). Koristeći identitet o rotoru produkta skalarne funkcije i vektorske konstante⁴¹

$$\nabla \times (fC) = \nabla f \times C , \quad (6.8.5)$$

i

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} , \quad (6.8.6)$$

možemo pisati

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \quad (6.8.7)$$

Ta jednačba je poznata pod imenom *Biot-Savartov zakon*.⁴²

6.8.1. Polje strujnica u neograničenom prostoru

Pojam strujnice smo uveli u odjeljku 1.2, a pod njim razumijevamo idealizirani vodič u kojem je sva struja skoncentrirana u geometrijsku crtu. Tada vrijedi

$$JdV = Idl , \quad (6.8.8)$$

pa pomoću izraza

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \end{aligned} \quad (6.8.9,10)$$

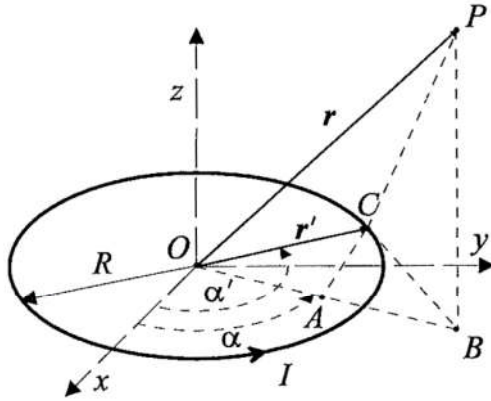
računamo magnetski vektorski potencijal i indukciju strujnica.

⁴¹ Pogledati Prilog C.

⁴² Taj zakon dobio je ime po francuskim fizičarima J. Biotu i F. Savartu, koji su ga eksperimentalno potvrdili 1820. godine.

Primjer 6.8.1.1. Statičko magnetsko polje kružne strujnice

Kružnu strujnicu polumjera R protjecanu strujom I prikazali smo na slici 6.8.1. u cilindričnom koordinatnom sustavu.



Slika 6.8.1. Kružna strujnica

Vektorski magnetski potencijal kružne strujnice u točki P računamo pomoću izraza (6.8.9)

$$\mathbf{A}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (6.8.11)$$

Doprinos $d\mathbf{l}$ diferencijalnom doprinosu $d\mathbf{A}$ u točki P mijenja smjer kako se krećemo po kružnoj strujnici, pa ga moramo preračunati u odrednice cilindričnog koordinatnog sustava u točki $P(r, \alpha, z)$

$$\mathbf{A}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{R[-\sin(\alpha - \alpha')\mathbf{a}_r + \cos(\alpha - \alpha')\mathbf{a}_\alpha] d\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (6.8.12)$$

Iz pravokutnih trokuta OCA , CAB i CBP slijedi

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{[r - R\cos(\alpha - \alpha')]^2 + R^2\sin^2(\alpha - \alpha') + z^2} , \quad (6.8.13)$$

pa vrijedi

$$\mathbf{A}_P = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \left(\mathbf{a}_r \int_0^{2\pi} \frac{-\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr\cos \vartheta}} + \mathbf{a}_\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr\cos \vartheta}} \right) , \quad (6.8.14)$$

gdje je $\vartheta = \alpha - \alpha'$. Integral u smjeru odrednice $\mathbf{a}_r$ možemo riješiti analitički i u granicama 0 do 2π iznosi nula. Stoga vektorski magnetski potencijal ima samo komponentu u smjeru odrednice $\mathbf{a}_\alpha$

$$A_\alpha = \frac{\mu_0 I R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \vartheta}} . \quad (6.8.15)$$

Uvođenjem supstitucije

$$\vartheta = \pi + 2\beta \quad \Rightarrow \quad d\vartheta = 2d\beta \quad ; \quad \cos \vartheta = 2\sin^2 \beta - 1 , \quad (6.8.16)$$

integral (6.8.15) svodimo na oblik

$$A_\alpha = \frac{\mu_0 I R}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin^2 \beta - 1)d\beta}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2 - 4Rr \sin^2 \beta}} . \quad (6.8.17)$$

Ako u (6.8.17) uvrstimo

$$k^2 = \frac{4Rr}{(R+r)^2 + z^2} , \quad (6.8.18)$$

i uvažimo jednakost

$$\frac{2\sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{2 - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} - 2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} \right) , \quad (6.8.19)$$

na kraju dobivamo

$$A_\alpha = \frac{\mu_0 k I}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{r}} \left[\left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} - \frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta \right] . \quad (6.8.20)$$

Integrali u (6.8.20) nisu analitički rješivi, a nazivamo ih potpuni eliptički integral prve vrste $K(k)$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} , \quad (6.8.21)$$

i potpuni eliptički integral druge vrste $E(k)$ ⁴³

⁴³ Pogledati Prilog G.

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta . \quad (6.8.22)$$

Izraz za magnetski vektorski potencijal kružne strujnice obično pišemo u obliku

$$A_\alpha = \frac{\mu_0 I}{\pi k} \sqrt{\frac{R}{r}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right] . \quad (6.8.23)$$

Eliptičke integrale računamo pomoću redova argumenta k . Komponente magnetske indukcije računamo pomoću (6.2.1) u cilindričnom koordinatnom sustavu

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{\partial A_\alpha}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial z} , \\ B_\alpha &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0 , \\ B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r} . \end{aligned} \quad (6.8.24 - 26)$$

Korištenjem identiteta

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(k)}{\partial k} &= \frac{1}{k} \left[\frac{E(k)}{1 - k^2} - K(k) \right] ; \quad \frac{\partial E(k)}{\partial k} = \frac{1}{k} [E(k) - K(k)] , \\ \frac{\partial k}{\partial z} &= -\frac{zk^3}{4Rr} ; \quad \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{k}{2r} - \frac{k^3}{4r} - \frac{k^3}{4R} , \end{aligned} \quad (6.8.27)$$

određujemo konačne izraze za magnetsku indukciju kružne strujnice u točki P

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{r} \frac{1}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \left[-K(k) + \frac{R^2 + r^2 + z^2}{(R-r)^2 + z^2} E(k) \right] , \\ B_z &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \left[K(k) + \frac{R^2 - r^2 - z^2}{(R-r)^2 + z^2} E(k) \right] . \end{aligned} \quad (6.8.28,29)$$

Silnice možemo, zbog osnosimetričnog karaktera polja, odrediti pomoću vektorskog magnetskog potencijala. Jednadžba silnice polja neovisnog o obilaznoj koordinati u cilindričnom koordinatnom sustavu je

$$\frac{B_r}{B_z} = \frac{dr}{dz} . \quad (6.8.30)$$

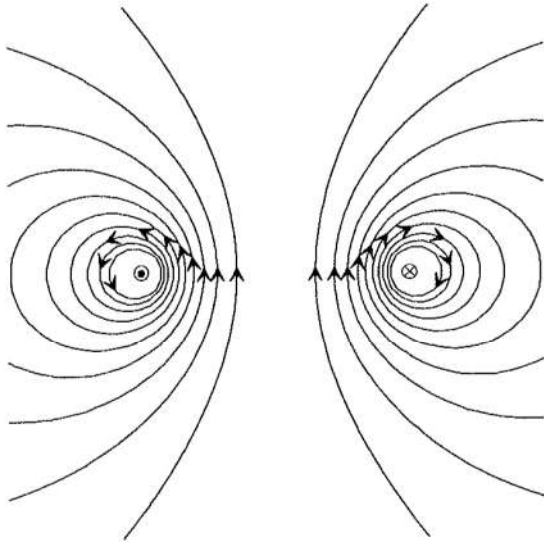
Iz nje slijedi

$$B_z dr - B_r dz = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\alpha)}{\partial r} dr + \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} dz = d(rA_\alpha) = 0 , \quad (6.8.31)$$

pa silnice u takvim zadaćama određujemo kao krivulje

$$rA_\alpha = \text{konst} . \quad (6.8.32)$$

Na slici 6.8.2. prikazali smo polje kružne strujnice protjecane strujom I u smjeru obilaznog kuta α u ravnini $\alpha = \text{konst}$.



Slika 6.8.2. Statičko magnetsko polje kružne strujnice

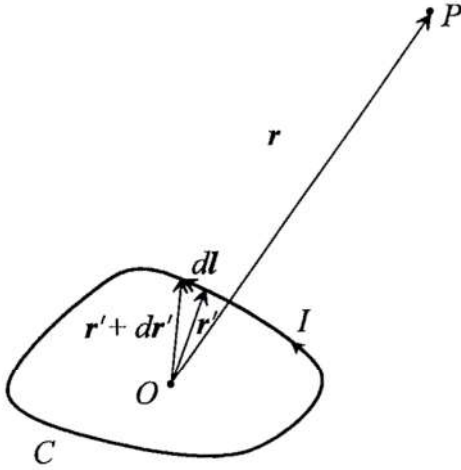
6.8.1.1. Magnetski dipol

Pod magnetskim dipolom razumijevamo zatvorenu strujnicu C protjecanu strujom I koja je jako udaljena od točke promatranja P . Magnetski vektorski potencijal takve strujnice je

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (6.8.33)$$

Iz trokuta kojeg razapinju $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ slijedi

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' . \quad (6.8.34)$$



Slika 6.8.3. Magnetski dipol

Ako je točka promatranja P jako udaljena od strujnice, odnosno ako je $r \gg r'$, možemo približno napisati⁴⁴

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} . \quad (6.8.35)$$

Pod tim uvjetom izraz (6.8.33) poprima oblik

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint_C d\mathbf{l} + \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l} . \quad (6.8.36)$$

Prvi član u tom izrazu jednak je nuli⁴⁵ a iz jednakosti

$$\mathbf{r}' + d\mathbf{r}' = \mathbf{r}' + d\mathbf{l} , \quad (6.8.37)$$

slijedi da $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}'$ pa vrijedi

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' . \quad (6.8.38)$$

Ako pođemo od jednakosti

$$d[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'] = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}' \quad (6.8.39)$$

⁴⁴ Pogledati razvoj u red $(1 - x)^{1/2}$ u Prilogu F.

⁴⁵ Možemo ga interpretirati kao sumu vektora u zatvorenom poligonu koja je uvijek jednaka nuli.

i provedemo linijsku integraciju lijeve i desne strane dobivamo

$$\oint_C d[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}'] = \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + \oint_C (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}' = 0. \quad (6.8.40)$$

Integral na lijevoj strani iznosi nula. Uzimajući u obzir (6.8.40) integral (6.8.38) možemo napisati u obliku

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_C \frac{1}{2} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}'] . \quad (6.8.41)$$

Podintegralnu funkciju u toj jednadžbi transformiramo primjenom pravila o dvostrukom vektorskom produktu,⁴⁶ pa konačno dobivamo

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_C \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} . \quad (6.8.42)$$

Ovdje je $\mathbf{r}$ je konstantan vektor a produkt

$$\frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') , \quad (6.8.43)$$

je vektor površine trokuta kojeg razapinju $\mathbf{r}'$ i $d\mathbf{r}'$. Stoga je

$$\oint_C \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') = \mathbf{S} , \quad (6.8.44)$$

vektor površine koju opisuje strujnica. Izraz za vektorski magnetski potencijal magnetskog dipola je

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{IS} \times \mathbf{r}}{r^3} . \quad (6.8.45)$$

Iz tog izraza slijedi da polje magnetskog dipola ne ovisi o obliku strujnice, već samo o veličini $\mathbf{IS}$ koju nazivamo *dipolnim momentom* i obično označavamo sa $\mathbf{m}$. Magnetsku indukciju u udaljenoj točki računamo pomoću

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[\frac{1}{r^3} (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right] . \quad (6.8.46)$$

Korištenjem pravila za rotor produkta skalarne funkcije i vektora dobivamo izraz za

⁴⁶ Pogledati Prilog C.

magnetsku indukciju magnetskog dipola

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] . \quad (6.8.47)$$

Usporedimo li tu jednadžbu s izrazom (4.6.32) za jakost polja električnog dipola uočit ćemo formalnu analogiju ta dva izraza koja opravdava uvođenje dva fiktivna magnetska naboja kao izvora polja magnetskog dipola.⁴⁷ Sada izraz (6.8.47) možemo napisati i kao negativni gradijent skalarne funkcije

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} . \quad (6.8.48)$$

Funkciju φ_m nazivamo antipotencijal ili skalarni magnetski potencijal dipola.

Primjer 6.8.1.2. Kružna strujnica kao dipol

Razmotrimo polje kružne strujnice u točki P na velikoj udaljenosti od strujnice. Sve oznake su jednake onima iz primjera 6.8.1.1. Za udaljenost r_p točke promatranja P od središta strujnice vrijedi

$$r_p = \sqrt{r^2 + z^2} \gg R , \quad (6.8.49)$$

pa izraz (6.8.15) možemo približno napisati kao

$$A_\alpha = \frac{\mu_0 I \pi}{2\pi} \int_0^\pi \frac{R \cos \vartheta}{r_p} \left(1 + \frac{Rr \cos \vartheta}{r_p^2} \right) d\vartheta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R^2 \pi I r}{r_p^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R^2 \pi I}{r_p^2} \sin \Psi , \quad (6.8.50)$$

gdje je Ψ kut koji zatvaraju os z i $\mathbf{r}_p$. Taj smo rezultat mogli dobiti i direktnom primjenom jednadžbe (6.8.45). Dipolni moment je

$$\mathbf{m} = IR^2 \pi \mathbf{a}_z , \quad (6.8.51)$$

pa je vektorski magnetski potencijal

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2 \pi \mathbf{a}_z \times \mathbf{r}_p}{r_p^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R^2 \pi I}{r_p^2} \sin \Psi \mathbf{a}_\alpha . \quad (6.8.52)$$

⁴⁷ O modelu magnetskih naboja detaljnije pogledati u članku 1.4.8.

6.8.2. Polje plošne struje

Plošne struje smo uveli u odjeljku 1.2, a pod njima razumijevamo struje koje teku po geometrijskoj plohi. U tom slučaju vrijedi

$$JdV = KdS, \quad (6.8.53)$$

gdje je K gustoća plošne struje. Izrazi

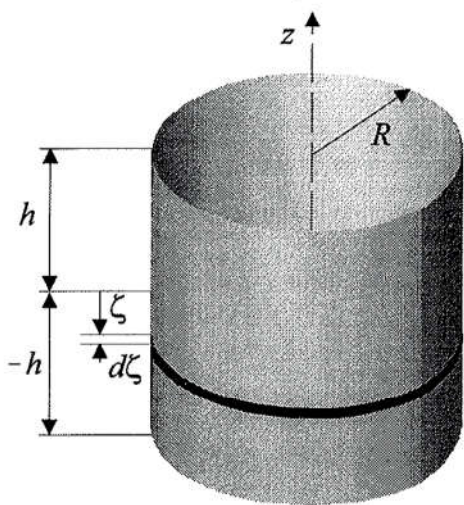
$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{KdS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (6.8.54, 55)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS,$$

određuju vektorski magnetski potencijal i indukciju plošnih struja.

Primjer 6.8.2.1. Statičko magnetsko polje strujnog cilindra

Strujni cilindar polumjera R i visine $2h$ protjecan strujom jednolike plošne gustoće u smjeru odrednice $\mathbf{a}_\alpha$ smjestili smo u cilindrični koordinatni sustav prema slici 6.8.4.



Slika 6.8.4. Strujni cilindar

Tu zadaću rješavamo superpozicijom rješenja iz primjera 6.8.1.1. Iz njega slijedi da vektorski magnetski potencijal ima komponentu samo u smjeru obilaznog kuta $\mathbf{a}_\alpha$, pa primjenom jednadžbe (6.8.15) dobivamo

$$A_\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^\pi R \cos \vartheta d\vartheta \int_{-h}^{+h} \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2 + r^2 + (z - \zeta)^2 - 2Rr \cos \vartheta}}. \quad (6.8.56)$$

Uvođenjem zamjene $u = z - \zeta$ i integracijom po u slijedi

$$A_\alpha = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^\pi R \cos \vartheta \left[\ln(u + \sqrt{R^2 + r^2 + u^2 - 2Rr \cos \vartheta}) \right]_{u=z-h}^{u=z+h} d\vartheta . \quad (6.8.57)$$

Nakon provođenja parcijalne integracije i supstitucije definirane jednačbom (6.8.16) dobivamo

$$A_\alpha = \frac{\mu_0 KR}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{k^2 \sin^2 2\beta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \beta} (a + \sqrt{1-k^2 \sin^2 \beta})} \right]_{u=z-h}^{u=z+h} d\beta , \quad (6.8.58)$$

gdje je

$$k^2 = \frac{4Rr}{(R+r)^2 + u^2} ; \quad a = \frac{u}{\sqrt{(R+r)^2 + u^2}} . \quad (6.8.59)$$

Integral (6.8.58) možemo rastaviti na potpune eliptičke integrale. Za razliku od primjera 8.1.1.1. ovdje se pojavljuje i potpuni eliptički integral treće vrste Π modula k i n

$$\Pi(n, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{(1 + n \sin^2 \beta) \sqrt{1 + k^2 \sin^2 \beta}} . \quad (6.8.60)$$

Konačni rezultat je

$$A_\alpha = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \left\{ \frac{u}{r} \left[-\frac{u^2 + 2R^2 + 2r^2}{\sqrt{(R+r)^2 + u^2}} K(k) + \sqrt{(R+r)^2 + u^2} E(k) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(R-r)^2}{\sqrt{(R+r)^2 + u^2}} \Pi(n, k) \right] \right\}_{u=z-h}^{u=z+h} \quad (6.8.61)$$

a modul n potpunog eliptičkog integrala treće vrste je

$$n = \frac{4Rr}{(R+r)^2} . \quad (6.8.62)$$

Komponente magnetske indukcije možemo računati pomoću (6.2.1), no ovdje ćemo pokazati primjenu Biot-Savartova zakona (6.8.55)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\zeta. \quad (6.8.63)$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} &= (-\sin \vartheta \mathbf{a}_r + \cos \vartheta \mathbf{a}_\alpha) R d\vartheta, \\ \mathbf{r}' &= R \cos \vartheta \mathbf{a}_r + R \sin \vartheta \mathbf{a}_\alpha + \zeta \mathbf{a}_z, \\ \mathbf{r} &= r \mathbf{a}_r + z \mathbf{a}_z. \end{aligned} \quad (6.8.64a - c)$$

Nakon uvrštavanja tih jednakosti u (6.8.63) dobivamo

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-h}^h \frac{(z - \zeta) \cos \vartheta \mathbf{a}_r + (z - \zeta) \sin \vartheta \mathbf{a}_\alpha + (R - r \cos \vartheta) \mathbf{a}_z}{[R^2 + r^2 + (z - \zeta)^2 - 2Rr \cos \vartheta]^{\frac{3}{2}}} d\zeta. \quad (6.8.65)$$

Integral u smjeru obilaznog kuta je nula, pa vektor $\mathbf{B}$ ima samo komponente u smjeru odrednica $\mathbf{a}_r$ i $\mathbf{a}_z$. Nakon zamjene $u = z - \zeta$ nalazimo da za komponentu u smjeru $\mathbf{a}_r$ vrijedi

$$B_r = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} R \cos \vartheta \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 + u^2 - 2Rr \cos \vartheta}} \right]_{u=z-h}^{u=z+h} d\vartheta. \quad (6.8.66)$$

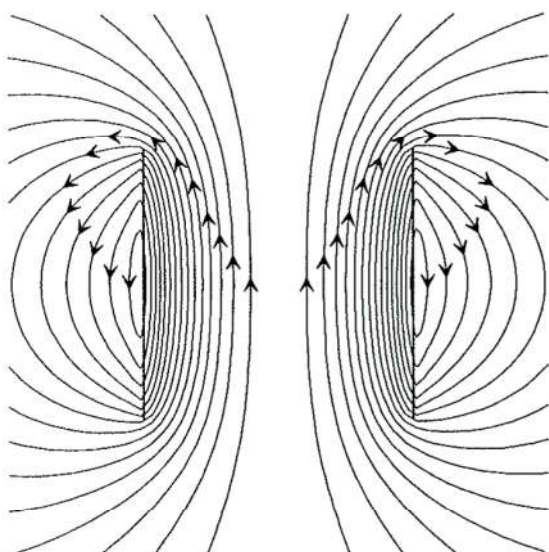
Nakon zamjene (6.8.16) i aritmetičkog preuređivanja izraza (6.8.66) dobivamo konačan izraz za r komponentu magnetske indukcije

$$B_r = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \left\{ \frac{\sqrt{(R+r)^2 + u^2}}{r} \left[\left(2 - \frac{4Rr}{(R+r)^2 + u^2} \right) K(k) - 2E(k) \right] \right\}_{u=z-h}^{u=z+h}. \quad (6.8.67)$$

Sličnim postupkom nalazimo i z komponentu magnetske indukcije

$$B_z = \frac{\mu_0 K}{2\pi} \left\{ \frac{-u}{\sqrt{(R+r)^2 + u^2}} \left[K(k) + \frac{R-r}{R+r} \Pi(n, k) \right] \right\}_{u=z-h}^{u=z+h}. \quad (6.8.68)$$

Na slici 6.8.5. prikazali smo statičko magnetsko polje strujnog cilindra protjecanog strujom plošne gustoće K u smjeru obilaznog kuta $\mathbf{a}_\alpha$ dimenzija $R = h$.



Slika 6.8.5. Statičko magnetsko polje strujnog cilindra

6.8.3. Polje volumnih struja i razvoj u multipole

Vektorski magnetski potencijal i magnetsku indukciju volumnih struja u neograničenom prostoru računamo pomoću

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (6.8.69,70)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Proračun trostrukih integrala u (6.8.69,70) u najvećem broju zadaća nije moguć analitičkim metodama pa i ovdje pribjegavamo numeričkim približenjima. Slično kao i kod statičkih električnih polja⁴⁸ najjednostavnije je približenje razvojem vektorskog magnetskog potencijala u multipole. Ako u izraz (6.8.69) uvrstimo razvoj (4.6.66), dobivamo

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV + \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}' \right)^2 - \frac{1}{2} r'^2 \right] \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV. \end{aligned} \quad (6.8.71)$$

Razmotrimo sada prvi član u tom razvoju. U pravocrtном koordinatnom sustavu je

⁴⁸ Pogledati članak 4.6.3.

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= J_x \mathbf{a}_x + J_y \mathbf{a}_y + J_z \mathbf{a}_z, \\
\mathbf{r} &= x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z, \\
\mathbf{r}' &= x' \mathbf{a}_x + y' \mathbf{a}_y + z' \mathbf{a}_z.
\end{aligned} \tag{6.8.72}$$

Za x komponentu gustoće struje možemo pisati⁴⁹

$$J_x = \mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{J} \cdot \nabla x = \nabla \cdot (x \mathbf{J}) - x \nabla \cdot \mathbf{J}, \tag{6.8.73}$$

pa vrijedi⁵⁰

$$\int_V J_x dV = \int_V \nabla \cdot (x \mathbf{J}) dV - \int_V x \nabla \cdot \mathbf{J} dV = \oint_S x \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS - \int_V x \nabla \cdot \mathbf{J} dV. \tag{6.8.74}$$

Integral po površini koja obuhvaća volumen struja je nula, budući da su na toj površini struje tangencijalne na nju ili jednake nuli. Drugi pribrojnik je također nula jer je $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ u statičkim poljima. Dokaz za ostale komponente struje je identičan. Prema tome, član koji odgovara monopolnom članu u elektrostatičkom razvoju ne postoji u magnetostatičkom razvoju.

Vektorski magnetski potencijal drugog člana razvoja (6.8.71) opada s kvadratom udaljenosti i on predstavlja najznačajniji doprinos. Podintegralnu funkciju tog člana možemo napisati u preglednijem obliku. Vrijedi

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} = \frac{1}{2} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} - \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J})] + \frac{1}{2} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} + \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J})]. \tag{6.8.75}$$

Prvi pribrojnik ovog izraza korištenjem identiteta o trostrukom vektorskom produktu⁵¹ prelazi u oblik

$$\frac{1}{2} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} - \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J})] = \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r}. \tag{6.8.76}$$

Komponenta u smjeru odrednice x drugog pribrojnika u (6.8.75) je

$$(xx' + yy' + zz') J_x + (x J_x + y J_y + z J_z) x' = \mathbf{J} \cdot \nabla (xx'^2 + yy'x' + zz'x'), \tag{6.8.77}$$

pa koristeći identitet o divergenciji produkta skalarne i vektorske funkcije, te činjenicu da je u statičkim poljima $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ dobivamo

⁴⁹ Pogledati divergenciju produkta skalarne i vektorske funkcije u Prilogu C.

⁵⁰ Pogledati Gaussov teorem o divergenciji u Prilogu C.

⁵¹ Pogledati Prilog C.

$$\mathbf{J} \cdot \nabla (xx'^2 + yy'x' + zz'x') = \nabla \cdot [(xx'^2 + yy'x' + zz'x')\mathbf{J}] . \quad (6.8.78)$$

Volumni integral ovog dijela korištenjem Gaussova teorema o divergenciji prelazi u plošni integral po površini koja obuhvaća taj volumen. Integral po toj površini jednak je nuli, budući da po njoj ne teku struje ili su tangencijalne na nju. Sukladno tome drugi član u razvoju (6.8.71) je

$$\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J} \times \mathbf{r} dV . \quad (6.8.79)$$

Vektor $\mathbf{r}$ je konstantan, pa uvodimo pojam magnetskog momenta strujne raspodjele $\mathbf{m}$ kao

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dV , \quad (6.8.80)$$

i na kraju dobivamo približenje vektorskog magnetskog potencijala zadane raspodjele struje

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (6.8.81)$$

Magnetsku indukciju računamo primjenom sveze $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ na ovu jednadžbu. Rezultat je jednak izrazu (6.8.7).

Primjer 6.8.3.1. Strujna cilindrična cijev

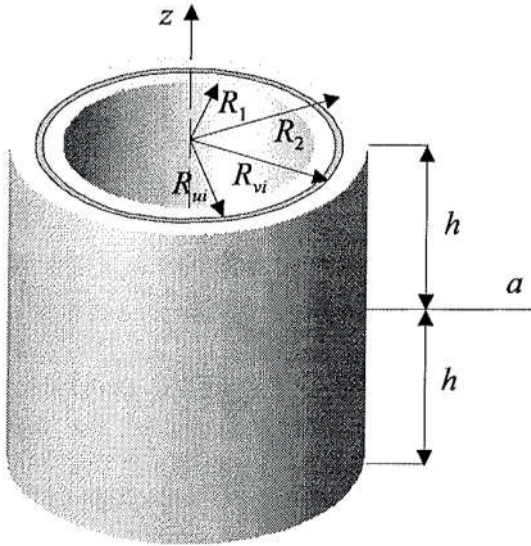
Strujnu cilindričnu cijev unutarnjeg polumjera R_1 , vanjskog polumjera R_2 i visine $2h$ protjecanu strujom volumne gustoće $\mathbf{J} = J\mathbf{a}_x$ prikazali smo na slici 6.8.6. Vektorski magnetski potencijal i magnetsku indukciju ovog rasporeda nije moguće odrediti analitičkom integracijom.⁵² Ovdje ćemo usporediti dva pristupa:

1. *Određivanje vektorskog magnetskog potencijala superpozicijom doprinosa strujnih cilindara iz Primjera 6.8.2.1. konačne debljine.*

U tome pristupu cijev dijelimo na N dionih cijevi konačne debljine $\Delta\eta = (R_2 - R_1)/N$ i svaku dionu cijev zamjenjujemo strujnim cilindrom u sredini cijevi. Unutrašnji i vanjski polumjeri pojedine cijevi jesu

⁵² Za detaljniju obradu te zadaće pogledati L.K. Urankar, *Vector Potential and Magnetic Field of Current-Carrying Finite Arc Segment in Analytical Form, Part III: Exact Computation for Rectangular Cross Section*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol MAG – 18, No. 6, November 1982.

$$\left. \begin{aligned} R_{ui} &= R_1 + (i-1) \Delta \eta \\ R_{vi} &= R_1 + i \Delta \eta \end{aligned} \right\} \quad i = 1 \dots N . \quad (6.8.82)$$



Slika 6.8.6. Strujna cilindrična cijev

Plošna gustoća struje i polumjer i -tog nadomjesnog cilindra iznose

$$\left. \begin{aligned} K_i &= \frac{JS_i}{2h} = (R_{vi} - R_{ui})J \\ R_i &= R_1 + (i-0.5)\Delta \eta \end{aligned} \right\} \quad i = 1 \dots N . \quad (6.8.83)$$

Vektorski magnetski potencijal sada možemo približno izračunati pomoću

$$A_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{K_i u}{r} \left[-\frac{u^2 + 2R_i^2 + 2r^2}{\sqrt{(R_i+r)^2 + u^2}} K(k_i) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{(R_i+r)^2 + u^2} E(k_i) + \frac{(R_i-r)^2}{\sqrt{(R_i+r)^2 + u^2}} \Pi(n_i, k_i) \right] \right\} \Bigg|_{u=z-h}^{u=z+h}, \quad (6.8.84)$$

gdje su moduli k_i i n_i potpunih eliptičkih integrala zadani s

$$\left. \begin{aligned} k_i^2 &= \frac{4R_i r}{(R_i+r)^2 + u^2} \\ n_i &= \frac{4R_i r}{(R_i+r)^2} \end{aligned} \right\} \quad i = 1 \dots N . \quad (6.8.85)$$

2. *Multipolni razvoj*

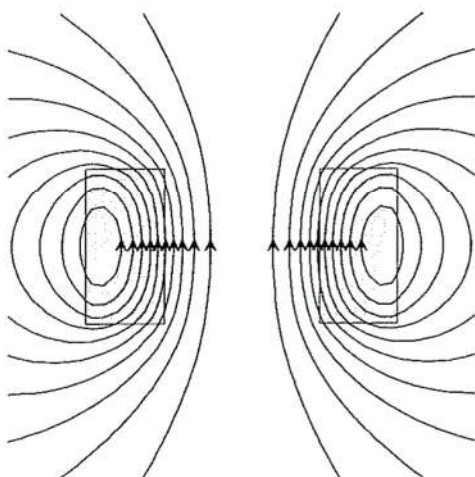
Magnetski moment takve raspodjele struje je

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dV = \frac{1}{2} \int_{-h}^h d\zeta \int_{R_1}^{R_2} d\eta \int_0^{2\pi} (\eta \mathbf{a}_r + \zeta \mathbf{a}_z + \eta \alpha \mathbf{a}_\alpha) \times \mathbf{J} \mathbf{a}_\alpha \eta d\alpha = \\ &= \frac{2\pi J h}{3} (R_2^3 - R_1^3) \mathbf{a}_z, \end{aligned} \quad (6.8.86)$$

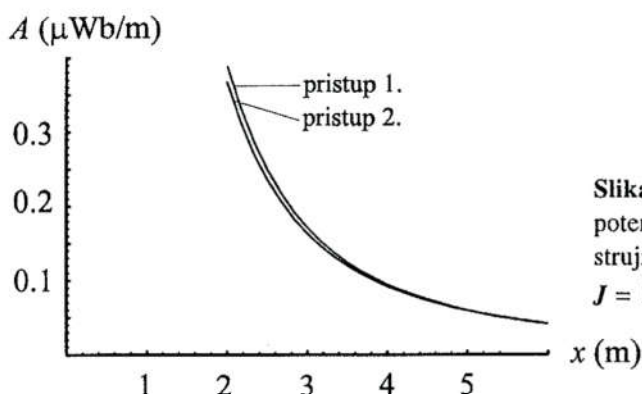
pa vektorski magnetski potencijal u točki $\mathbf{r}$ možemo približno izračunati pomoću

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 J h (R_2^3 - R_1^3)}{6} \frac{\mathbf{a}_z \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (6.8.87)$$

Na slici 6.8.7. prikazali smo statičko magnetsko polje strujne cijevi za koju vrijedi $R_1 = 1\text{ m}$, $R_2 = 2\text{ m}$ i $\mathbf{J} = 1\mathbf{a}_\alpha\text{ A/m}^2$ određeno pristupom 1. uz $N = 10$ podjela, a na slici 6.8.8. prikazali smo usporedbu rezultata proračuna vektorskog magnetskog potencijala pristupima 1 i 2 za istu cijev duž pravca $\mathbf{a}$.



Slika 6.8.7. Statičko magnetsko polje strujne cilindrične cijevi određeno superpozicijom doprinosa strujnih cilindara ($N = 10$, $R_1 = 1\text{ m}$, $R_2 = 2\text{ m}$, $\mathbf{J} = 1\mathbf{a}_\alpha\text{ A/m}^2$)



Slika 6.8.8. Usporedba računa vektorskog magnetskog potencijala strujne cijevi superpozicijom doprinosa strujnih cilindara i dipolom ($R_1 = 1\text{ m}$, $R_2 = 2\text{ m}$ i $\mathbf{J} = 1\mathbf{a}_\alpha\text{ A/m}^2$)

6.9. ZADANE STRUJE U OGRANIČENOM PROSTORU I ODSLİKAVANJE

U članku 6.2.1. ukazali smo na analogiju dvodimenzionalnih statičkih magnetskih polja i statičkih električnih polja. Oba zadovoljavaju Poissonovu jednadžbu, pa sve što smo iznijeli o značajkama te jednadžbe u odjeljku 4.5. i njezinom rješavanju pomoću Greenovih funkcija možemo primijeniti pri rješavanju dvodimenzionalnih statičkih magnetskih polja. Rješenja iz statičkih električnih polja u dvodimenzionalnom pravocrtnom sustavu preslikavamo u statička magnetska polja zamjenama:

$$\varphi \rightarrow A_z \quad ; \quad \varepsilon \rightarrow \frac{1}{\mu} \quad ; \quad \rho \rightarrow j_z . \quad (6.9.1)$$

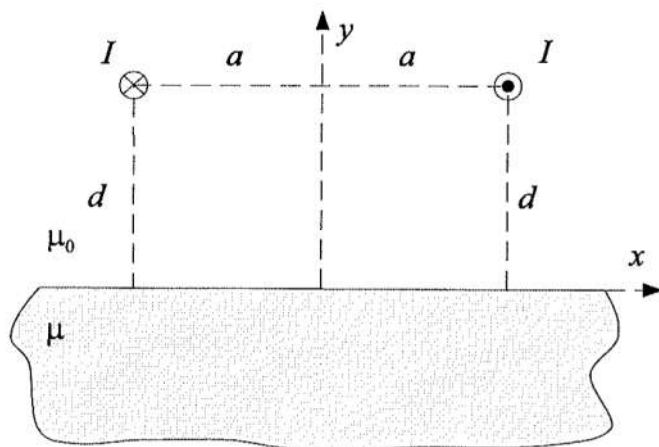
Sukladno tome, dvodimenzionalne Greenove funkcije koje smo odredili u odjeljku 4.8. možemo iskoristiti za određivanje vektorskog magnetskog potencijala koji u dvodimenzionalnim zadaćama ima samo jednu komponentu. Naravno, određivanje polja iz potencijalne funkcije nije više isto kao u statičkim električnim poljima. U dvodimenzionalnim statičkim magnetskim poljima pomoću izraza

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{a}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{a}_y , \quad (6.9.2)$$

određujemo magnetsku indukciju.

Primjer 6.9.1. Dvožični vod ispred magnetskog poluprostora

Zadaću smo prikazali slikom 6.9.1.



Slika 6.9.1. Dvožični vod ispred magnetskog poluprostora

Ova zadaća je analogna zadaći dvožičnog voda ispred dielektričnog poluprostora u

statičkim električnim poljima koju smo riješili u primjeru 4.8.2.1. Korištenjem zamjena (6.9.1) i jednadžbi (4.8.32 i 34) možemo odmah napisati rješenje za magnetski vektorski potencijal u ovoj zadaći

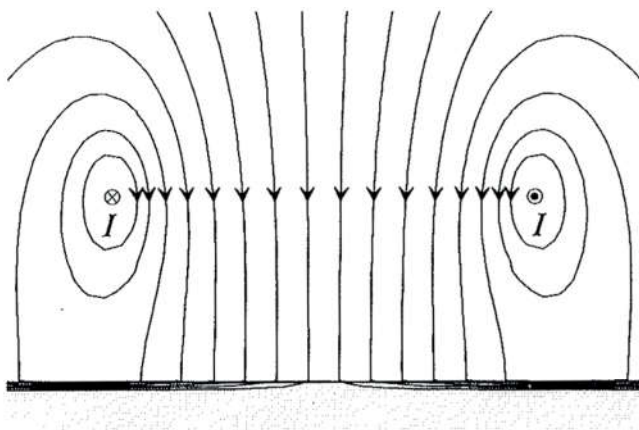
$$A_{z1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \ln \frac{(x-a)^2 + (y-d)^2}{(x-a)^2 + (y+d)^2} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \ln \frac{(x+a)^2 + (y-d)^2}{(x+a)^2 + (y+d)^2} \right\}, \quad (6.9.3a,b)$$

$$A_{z2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} \ln \frac{(x-a)^2 + (y-d)^2}{(x-a)^2 + (y+d)^2}.$$

Primjenom (6.9.2) dobivamo magnetsku indukciju u oba područja ove zadaće

$$B_1 = \frac{-\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \left[\frac{4d[(y^2 - d^2) - (x-a)^2]}{[(x-a)^2 + (y-d)^2][(x-a)^2 + (y+d)^2]} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{4d[(y^2 - d^2) - (x+a)^2]}{[(x+a)^2 + (y-d)^2][(x+a)^2 + (y+d)^2]} \right] a_x - \left[\frac{8dy(x-a)}{[(x-a)^2 + (y-d)^2][(x-a)^2 + (y+d)^2]} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{8dy(x+a)}{[(x+a)^2 + (y-d)^2][(x+a)^2 + (y+d)^2]} \right] a_y \right\}, \quad (6.9.4,5)$$

$$B_2 = \frac{-\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} \left[\frac{4d[(y^2 - d^2) - (x-a)^2]}{[(x-a)^2 + (y-d)^2][(x-a)^2 + (y+d)^2]} a_x - \frac{8dy(x-d)^2}{[(x-a)^2 + (y-d)^2][(x-a)^2 + (y+d)^2]} a_y \right].$$



Slika 6.9.2. Statičko magnetsko polje dvožičnog voda ispred magnetskog poluprostora ($\mu_r = 100$)

POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 6.

- T. Bosanac, *Teoretska elektrotehnika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- Z. Haznadar, *Teoretska elektrotehnika – Elektromagnetska teorija i polja*, Liber, Zagreb, 1972.
- M. Javid, P.M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- S.V. Marshall, G.G. Skitek, *Electromagnetic Concepts and Applications*, Prentice-Hall International, London, 1990.
- A. Nussbaum, *Electromagnetic Theory for Engineers and Scientists*, Prentice-Hall, London, 1968.
- W.T. Scott, *The Physics of Electricity and Magnetism*, John Wiley & Sons, New York, 1966.
- P. Silvester, *Modern Electromagnetic Fields*, Prentice-Hall, London, 1968.
- J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- E. Weber, *Electromagnetic Theory, Static Fields and Their Mapping*, Dover Publications, New York, 1965.

7. KVAZISTATIČKO ELEKTROMAGNETSKO POLJE

U poglavljima 4, 5. i 6. analizirali smo statičke zadaće u elektromagnetizmu. To su najjednostavnije zadaće, a uzrokuju ih naboji u mirovanju ili jednolikom gibanju. Narav elektromagnetskih pojava postaje bitno složenija ako se naboji gibaju nejednoliko. Tada moramo rješavati cijeli sustav Maxwellovih jednažbi i ne možemo neovisno promatrati električno i magnetsko polje, budući da je svako vremenski promjenjivo magnetsko polje uvijek povezano s vrtložnim električnim poljem. To znači da dinamičko električno polje, osim bezvrtložne komponente uzrokovane nabojima, posjeduje i vrtložnu komponentu. Tu komponentu nazivamo *inducirano električno polje*.

No postoji niz zadaća u kojima možemo zanemariti struje pomaka¹ u elektromagnetском polju i time reducirati sustav Maxwellovih jednažbi. Takve zadaće nazivamo *zadaće kvazistatičkih elektromagnetskih polja*. Iz zanemarenja struja pomaka slijedi da zanemarujemo retardaciju polja, te da se tijekom energije u kvazistatičkim elektromagnetskim poljima odvija *difuzijom*, analogno prijenosu topline difuzijom a ne valom.

U ovom poglavlju opisat ćemo reducirani sustav Maxwellovih jednažbi i iz njih izvesti jednažbe difuzije koje zadovoljavaju veličine polja u kvazistatičkim elektromagnetskim poljima. Zatim ćemo uvesti fazorsku notaciju koja bitno olakšava rješavanje zadaća sinusno promjenjivih polja. Posebnu pažnju ćemo pokloniti uvjetima koje zadaće elektromagnetskih polja moraju ispunjavati da bi kvazistatičko približenje bilo valjano. Zatim ćemo razmotriti tijekom energije u takvim poljima. Rješavanje zadaća kvazistatičkih elektromagnetskih polja podijelit ćemo u dvije skupine: zadaće s masivnim vodičima u kojima je raspodjela struja nepoznata, i zadaće s tankim vodičima u kojima je struja jednoliko raspodijeljena. Na kraju ćemo razmotriti odnos teorije krugova i teorije polja.

7.1. JEDNADŽBE KVAZISTATIČKOG POLJA

Osnovna značajka kvazistatičkog elektromagnetskog polja jest zanemarivanje struja pomaka. To znači da u svakom trenutku u jednažbi (1.5.15c) možemo zanemariti pribrojnik $\partial \mathbf{D} / \partial t$. Tada sustav Maxwellovih jednažbi (1.5.15a – d) reduciramo na

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (7.1.1a)$$

¹ Pogledati odjeljak 1.3.

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} , \\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho , \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 ,
\end{aligned}
\tag{7.1.1b - d}$$

uz relacije građe koje vrijede za vodljivi materijal ($\kappa \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} , \\
\mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} , \\
\mathbf{J} &= \kappa \mathbf{E} .
\end{aligned}
\tag{7.1.2a - c}$$

Ako primijenimo operator rotacije na jednadžbu (7.1.1b) dobivamo

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} = \nabla \times (\kappa \mathbf{E}) . \tag{7.1.3}$$

Korištenjem identiteta o dvostrukoj rotaciji vektorskog polja² i jednadžbe (7.1.1d) u linearnim materijalima ova jednadžba prelazi u

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \Delta \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H} = \kappa \nabla \times \mathbf{E} , \tag{7.1.4}$$

pa uzimajući u obzir jednadžbu (7.1.1a) dobivamo jednadžbu koju vektor $\mathbf{H}$ kvazistatičkog elektromagnetskog polja zadovoljava u jednostavnim vodljivim materijalima

$$\Delta \mathbf{H} = \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} . \tag{7.1.5}$$

Sličnim postupkom za vektore $\mathbf{E}$ i $\mathbf{J}$ u kvazistatičkim elektromagnetskim poljima za zadaće bez slobodnih naboja ($\rho = 0$) dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{E} &= \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \\
\Delta \mathbf{J} &= \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} .
\end{aligned}
\tag{7.1.6a,b}$$

Ove jednadžbe, kao i jednadžba (7.1.5), formalno su jednake jednadžbama koje opisuju difuziju topline pa ih nazivamo *difuzijskim jednadžbama*.

Naravno, u sustav jednadžbi (7.1.1a - d) možemo uvesti vektorski magnetski potencijal $\mathbf{A}$ i skalarni električni potencijal φ jednako kao i za ukupni sustav Maxwellovih jednadžbi pa je

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad ; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \tag{7.1.7a,b}$$

² Pogledati Prilog C.

Uz Lorentzovo baždarenje³ postupkom jednakim onome u poglavlju 2. dolazimo do Poissonove jednadžbe za vektorski magnetski potencijal i skalarni električni potencijal u kvazistatičkim elektromagnetskim poljima za materijale bez gubitaka ($\kappa = 0$)

$$\begin{aligned}\Delta A &= -\mu J, \\ \Delta \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon},\end{aligned}\tag{7.1.8a,b}$$

pa su rješenja za potencijale kvazistatičkog polja u prostoru ispunjenom jednostavnim nevodljivim materijalom *formalno* jednaka onima za statička polja⁴

$$\begin{aligned}A(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \\ \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \end{aligned}\tag{7.1.9a,b}$$

Naglašavamo da to nisu retardirani potencijali,⁵ već se sve promjene u polju pojavljuju istog trenutka u svim točkama prostora. U vodljivim materijalima potencijali kvazistatičkog elektromagnetskog polja zadovoljavaju jednadžbe difuzije

$$\begin{aligned}\Delta A - \mu\kappa \frac{\partial A}{\partial t} &= -\mu J, \\ \Delta \varphi - \mu\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\varepsilon}.\end{aligned}\tag{7.1.10a,b}$$

Integralni oblik jednadžbi (7.1.1a – d) jest

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS, \\ \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS, \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V \rho dV, \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS &= 0.\end{aligned}\tag{7.1.11a – d}$$

³ Pogledati članak 2.2.1.

⁴ Pogledati jednadžbe (2.1.22a,b).

⁵ Pogledati rješenje (2.2.14).

Uvjete na granici različitih materijala smo izveli u odjeljku 1.5 i oni vrijede u kvazistatičkim poljima.⁶

7.1.1. Uvjet kvazistatičnosti elektromagnetskog polja

Prvo pitanje koje se prirodno postavlja jest: kada elektromagnetsko polje možemo razmatrati kao kvazistatičko? Odgovor možemo dati samo usporedbom s rješenjem ukupnog sustava Maxwellovih jednadžbi koje smo izveli u poglavlju 2. Uvođenjem Lorentzova baždarenja pokazali smo da je rješenje tog sustava retardirani vektorski magnetski potencijal⁷ oblika

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (7.1.12)$$

Ako razvijemo u Taylorov red⁸ oko točke $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ brojnik podintegralne funkcije u ovoj jednadžbi dobivamo

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) = \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^i}{i!} \left[\frac{\partial^i}{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^i} \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} . \quad (7.1.13)$$

Vrijedi:

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^i} \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} = \left(-\frac{1}{c}\right)^i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) , \quad (7.1.14)$$

pa rješenje za retardirani vektorski magnetski potencijal možemo pisati kao

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu}{4\pi i!} \int_{V'} \frac{(-\tau)^i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) dV' . \quad (7.1.15)$$

Ovdje je

$$\tau = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} , \quad (7.1.16)$$

vrijeme koje je potrebno da bi se promjena izvora koji se nalazi u $\mathbf{r}'$ osjetila u točki $\mathbf{r}$.

⁶ Pogledati jednadžbe (1.5.9a – d).

⁷ Pogledati članak 2.4.3.

⁸ Pogledati Prilog F.

Jednaki razvoj možemo napisati i za retardirani skalarni potencijal. Prvi član u razvoju (7.1.15) jednak je rješenju za kvazistatička elektromagnetska polja. Stoga je uvjet kvazistatičnosti elektromagnetskog polja da doprinos ostalih članova u razvoju (7.1.15) bude mnogo manji od doprinosa prvog člana. Odnos tih doprinosa uvjetuju τ i derivacije promjene izvora po vremenu, pa nije jednostavno procijeniti kada će zbroj ostalih članova reda biti mnogo manji od prvog člana. Svakako, moramo zadovoljiti uvjet

$$J(r,t) \gg \tau_{\text{maks}} \frac{\partial J(r,t)}{\partial t}, \quad (7.1.17)$$

a više derivacije izvora po vremenu moraju pomnožene s $(\tau_{\text{maks}})^i$ biti manje od izvora. Vrijeme τ_{maks} je vrijeme koje je potrebno da bi prošli put između dviju najudaljenijih točki u zadaći.

7.2. JEDNADŽBE POLJA U FAZORSKOJ DOMENI I KVAZISTATIČNOST SINUSNO PROMJENJIVIH POLJA

7.2.1. Vremenski sinusno promjenjiva polja i fazorska notacija

U dinamičkim elektromagnetskim poljima često analiziramo vremenski sinusno promjenjiva polja. U takvim poljima propisujemo da se sve veličine polja mijenjaju sinusno po vremenu na istoj kružnoj frekvenciji⁹ ω_0 . Na primjer, jakost električnog polja u takvim poljima se može općenito izraziti kao

$$E(r,t) = E_x \cos[\omega_0 t + \psi_x(r)] a_x + E_y \cos(\omega_0 t + \psi_y(r)) a_y + E_z \cos[\omega_0 t + \psi_z(r)] a_z. \quad (7.2.1)$$

Analogno izražavamo i ostale veličine elektromagnetskog polja. Prikaz sinusne funkcije vremena kao realnog dijela kompleksne funkcije

$$A \cos(\omega_0 t + \psi) = \text{Re}(A e^{j\psi} e^{j\omega t}) = \text{Re}(\underline{A} e^{j\omega t}), \quad (7.2.2)$$

vodi na prikaz takve funkcije kompleksnim brojem $\underline{A}$ kojeg nazivamo fazor.¹⁰ Primjenom takvog prikaza na skalarne i vektorske veličine sinusno promjenjivih elektromagnetskih polja dobivamo njihov prikaz fazorima. Tako za jakost električnog polja iz

⁹ Iako takvo propisivanje na prvi pogled izgleda jako ograničavajuće, u velikom broju zadaća veličine polja se mijenjaju sinusno, ili ih pomoću Fourierova reda možemo nadomjestiti sumom sinusno promjenjivih članova.

¹⁰ Profesor Elektrotehničkog fakulteta u Zagrebu Đuro Švarc u knjizi *Električni titrajni krugovi*, Zagreb, 1959. upotrebljava i termin "verzor".

jednadžbe (7.2.1) vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_x(\mathbf{r}) \cos[\omega_0 t + \psi_x(\mathbf{r})] \mathbf{a}_x + E_y(\mathbf{r}) \cos(\omega_0 t + \psi_y(\mathbf{r})) \mathbf{a}_y + \\ &+ E_z(\mathbf{r}) \cos[\omega_0 t + \psi_z(\mathbf{r})] \mathbf{a}_z = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left[E_x(\mathbf{r}) e^{j\psi_x(\mathbf{r})} \mathbf{a}_x + E_y(\mathbf{r}) e^{j\psi_y(\mathbf{r})} \mathbf{a}_y + E_z(\mathbf{r}) e^{j\psi_z(\mathbf{r})} \mathbf{a}_z \right] e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re}(\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}) . \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Uvođenjem fazorske notacije *preslikavamo veličine elektromagnetskog polja iz vremenske u fazorsku domenu*. Time izbacujemo vremensku ovisnost iz veličina elektromagnetskog polja i one su u fazorskoj domeni funkcije samo prostornih varijabli. Jedina je poteškoća predočavanje fazora kao vektora u trodimenzionalnom prostoru. Svaka komponenta je kompleksni broj, pa je u svakoj točki fazor određen sa šest brojeva. Uobičajeno je da posebno prikazujemo amplitude i fazne kutove takvih polja.

U sustavu Maxwellovih jednadžbi pojavljuju se parcijalne derivacije po vremenu. U fazorskoj domeni one se svode na množenje s kompleksnim brojem $j\omega$. Vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}(j\omega \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}) , \quad (7.2.4)$$

pa sustav Maxwellovih jednadžbi u fazorskoj domeni ima oblik

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\mathbf{E}} &= -j\omega \underline{\mathbf{B}} , \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= \underline{\mathbf{J}} + j\omega \underline{\mathbf{D}} , \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} &= \underline{\rho} , \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} &= 0 . \end{aligned} \quad (7.2.5a - d)$$

Jednadžba kontinuiteta u fazorskoj domeni je

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} = -j\omega \underline{\rho} . \quad (7.2.6)$$

Prijelaz iz fazorske u vremensku domenu provodimo korištenjem jednadžbe (7.2.3), a svodi se na množenje apsolutne vrijednosti vektora u fazorskoj domeni s faktorom $\cos(\omega_0 t + \psi)$.

7.2.2. Fourierova transformacija i fazorska notacija

Rješavanje linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi često olakšavamo primjenom integralnih transformacija. Najčešće koristimo *Fourierovu transformaciju* koja vektorsko polje $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ u *vremenskoj domeni* preslikava u vektorsko polje $\underline{\underline{\mathbf{A}}}(\mathbf{r}, j\omega)$ u *spektralnoj domeni* pomoću

$$\underline{\underline{A}}(\mathbf{r}, j\omega) = \mathcal{F}[A(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt . \quad (7.2.7)$$

Za preslikavanje iz spektralne u vremensku domenu koristimo *inverznu Fourierovu transformaciju*

$$A(\mathbf{r}, t) = \mathcal{F}^{-1}[\underline{\underline{A}}(\mathbf{r}, j\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{A}}(\mathbf{r}, j\omega) e^{j\omega t} d\omega . \quad (7.2.8)$$

Važno svojstvo te transformacije je preslikavanje derivacija. Vrijedi

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^n A(\mathbf{r}, t)}{\partial t^n}\right] = (j\omega)^n \mathcal{F}[A(\mathbf{r}, t)] . \quad (7.2.9)$$

Korištenjem identiteta (7.2.9) možemo sustav Maxwellovih jednadžbi Fourierovom transformacijom preslikati u spektralnu domenu

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\underline{E}} &= -j\omega \underline{\underline{B}} , \\ \nabla \times \underline{\underline{H}} &= \underline{\underline{J}} + j\omega \underline{\underline{D}} , \\ \nabla \cdot \underline{\underline{D}} &= \underline{\underline{\rho}} , \\ \nabla \cdot \underline{\underline{B}} &= 0 . \end{aligned} \quad (7.2.10a - d)$$

Njima dodajemo i jednadžbu kontinuiteta u spektralnoj domeni

$$\nabla \cdot \underline{\underline{J}} = -j\omega \underline{\underline{\rho}} . \quad (7.2.11)$$

Relacije građe su sada

$$\underline{\underline{D}} = \epsilon \underline{\underline{E}} \quad ; \quad \underline{\underline{B}} = \mu \underline{\underline{H}} \quad ; \quad \underline{\underline{J}} = \kappa \underline{\underline{E}} , \quad (7.2.12a - c)$$

a ϵ, μ, κ su skalarne konstante za jednostavne (LIH) materijale. Ako preslikavanjem dobivamo jednostavniju zadaću, onda je rješavamo u spektralnoj domeni i zatim rješenje inverznom Fourierovom transformacijom preslikavamo u vremensku domenu. Za Fourierovu transformaciju sinusno promjenjivih polja koristimo identitet

$$\mathcal{F}[A \cos(\omega_0 t + \beta)] = A e^{j\beta} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] , \quad (7.2.13)$$

gdje je δ Diracova delta funkcija. Jakost električnog polja zadana jednadžbom (7.2.1) preslikava se u spektralnu domenu kao

$$\underline{\underline{E}}(\mathbf{r}, j\omega) = \pi [E_x e^{j\psi_x} \mathbf{a}_x + E_y e^{j\psi_y} \mathbf{a}_y + E_z e^{j\psi_z} \mathbf{a}_z] [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] . \quad (7.2.14)$$

Kada sve veličine u sinusno promjenjivom elektromagnetskom polju preslikamo u spektralnu domenu i uvrstimo ih u Maxwellove jednadžbe u spektralnoj domeni (7.2.10a – d), možemo u svim jednadžbama pokratiti član koji sadrži Diracove delta funkcije i π te one postaju identične jednadžbama (7.2.5a – d) u fazorskoj domeni. Time smo pokazali da je fazorski prikaz sinusne funkcije u biti Fourierova transformacija te funkcije. Primjenom Fourierove transformacije možemo rješavati i zadaće u kojima se veličine polja ne mijenjaju sinusno.

7.2.3. Elektromagnetski potencijali u fazorskoj domeni i uvjet kvazistatičnosti polja

Lorentzov uvjet¹¹ u fazorskoj domeni ima oblik

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = -j\omega\mu\epsilon\varphi, \quad (7.2.15)$$

a fazorski oblik jednadžbe (7.1.7a) jest

$$\underline{\mathbf{E}} = -\nabla\varphi - j\omega\underline{\mathbf{A}}. \quad (7.2.16)$$

Ako su materijali u zadaći bez gubitaka, tj. ako vrijedi $\kappa = 0$, uvrštenjem (7.2.15 i 16) u (7.2.5a – d) dobivamo jednadžbe elektromagnetskih potencijala u fazorskoj domeni¹²

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\mathbf{A}} + \omega^2\mu\epsilon\underline{\mathbf{A}} &= -\mu\underline{\mathbf{J}}, \\ \Delta \varphi + \omega^2\mu\epsilon\varphi &= -\frac{1}{\epsilon}\underline{\rho}. \end{aligned} \quad (7.2.17a,b)$$

Rješenja¹³ tih jednadžbi jesu

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{j\omega \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \\ \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\underline{\rho}(\mathbf{r}') e^{j\omega \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'. \end{aligned} \quad (7.2.18a,b)$$

Usporedbom tih rješenja s rješenjima (7.1.9) možemo izvesti praktično primjenjiv kriterij za ocjenu kvazistatičnosti elektromagnetskih polja. Da bi te dvije vrste rješenja

¹¹ Pogledati jednadžbu (2.1.5).

¹² To je fazorski oblik jednadžbi (2.1.19a,b).

¹³ To je fazorski oblik rješenja (2.4.28a) i (2.4.30).

bile približno jednake, mora vrijediti

$$\frac{\omega |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{\text{maks}}}{c} \ll 1 . \quad (7.2.19)$$

Tada je eksponencijalni dio podintegralnih funkcija u (7.2.18a,b) približno jednak jedinici i polje možemo rješavati kao kvazistatičko. Sukladno tome, ako najveća udaljenost u zadaćama elektromagnetskih polja s materijalima bez gubitaka zadovoljava uvjet

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll \frac{c}{2\pi f} \quad \text{ili} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll \frac{\lambda}{2\pi} , \quad (7.2.20)$$

onda tu zadaću možemo rješavati kao kvazistatičku.

Ako je jakost struje nepoznata, tj. određena kao $\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}_s + \kappa \underline{\mathbf{E}}$, odnosno ako rješavamo zadaću u vodljivim materijalima, jednačba (7.2.5b) postaje

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}_s + \kappa \underline{\mathbf{E}} + j\omega \epsilon \underline{\mathbf{E}} . \quad (7.2.21)$$

Lorentzov uvjet za takvu zadaću jest¹⁴

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} + j\omega \mu \epsilon \varphi + \mu \kappa \varphi = 0 . \quad (7.2.22)$$

Korištenjem jednačbi (7.2.21,22) i sustava (7.2.5a – d) dobivamo jednačbe elektromagnetskih potencijala¹⁵ u ovoj zadaći

$$\Delta \underline{\mathbf{A}} + (\omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \kappa) \underline{\mathbf{A}} = -\mu \underline{\mathbf{J}}_s , \quad (7.2.23a,b)$$

$$\Delta \varphi + (\omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \kappa) \varphi = -\frac{\rho_s}{\epsilon} .$$

Rješenja tih jednačbi jesu

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{-\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \kappa}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (7.2.24a,b)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}') e^{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{-\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \kappa}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' .$$

U odjeljku 7.1. pokazali smo da potencijali u kvazistatičkom približenju takvih zadaća

¹⁴ Pogledati tablicu 2.1.2.

¹⁵ Pogledati jednačbe (2.1.18a,b).

zadovoljavaju difuzijske jednadžbe.¹⁶ Fazorski oblik tih jednadžbi jest

$$\begin{aligned}\Delta \underline{A} - j\omega \mu \kappa \underline{A} &= -\mu \underline{J}_s, \\ \Delta \underline{\varphi} - j\omega \mu \kappa \underline{\varphi} &= -\frac{\underline{\rho}_s}{\varepsilon}.\end{aligned}\quad (7.2.25a,b)$$

Rješenja tih jednadžbi u neograničenom prostoru jesu

$$\begin{aligned}\underline{A}(\underline{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\underline{J}(\underline{r}') e^{|\underline{r}-\underline{r}'| \sqrt{j\omega \mu \kappa}}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} dV', \\ \underline{\varphi}(\underline{r}) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon} \int_{V'} \frac{\underline{\rho}(\underline{r}') e^{|\underline{r}-\underline{r}'| \sqrt{j\omega \mu \kappa}}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} dV'.\end{aligned}\quad (7.2.26a,b)$$

Usporedbom rješenja (7.2.26a,b) s rješenjima (7.2.24a,b) uočavamo da je kriterij za valjanost kvazistatičkog približenja u takvim zadaćama

$$\omega \mu \kappa \gg \omega^2 \mu \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \gg 1. \quad (7.2.27)$$

Ako želimo za rješenja takvih zadaća koristiti izraze (7.1.8), odnosno ako želimo rješenja zadaće odrediti samo iz poznatih izvora polja Poissonovom jednadžbom, mora doprinos eksponencijalnog dijela podintegralne funkcije u jednadžbama (7.2.24a,b) biti približno jednak jedan. Eksponent tog dijela možemo napisati kao

$$\frac{\omega |\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \sqrt[4]{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} e^{-j\frac{\gamma}{2}}; \quad \gamma = \arctan \frac{\kappa}{\omega \varepsilon}, \quad (7.2.28)$$

pa je eksponencijalni dio podintegralne funkcije u (7.2.24a,b) jednak

$$-\frac{\omega |\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \sqrt[4]{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} \sin \frac{\gamma}{2} + j \frac{\omega |\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \sqrt[4]{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} \cos \frac{\gamma}{2}. \quad (7.2.29)$$

Iz jednadžbe (7.2.28) slijedi $0 \leq \gamma \leq \pi/2$ pa je $\sin(\gamma/2) \leq \cos(\gamma/2)$ a uvjet kvazistatičnosti postaje

$$|\underline{r}-\underline{r}'|_{\text{maks}} \ll \frac{1}{\frac{\omega}{c} \sqrt[4]{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} \cos \frac{\gamma}{2}}. \quad (7.2.30)$$

¹⁶ Pogledati jednadžbe (7.1.10).

Za dobre vodiče možemo pojednostavniti uvjet kvazistatičnosti polja u

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{\text{maks}} \ll \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}}, \quad (7.2.31)$$

budući da za njih vrijedi $\kappa \gg \omega \epsilon^{17}$ pa iz (7.2.28) slijedi $\gamma \approx \pi/2$.

Primjer 7.2.1. Uvjeti kvazistatičnosti elektromagnetskih polja u raznim materijalima

Za zrak vrijedi $\mu = \mu_0$ i $\epsilon = \epsilon_0$. Ako razmatramo frekvenciju 50 Hz iz jednadžbe (7.2.20) slijedi

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{\text{maks}} \ll \frac{1}{100\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 954 \text{ km}, \quad (7.2.32)$$

pa zadaće u zraku možemo rješavati kao kvazistatičke ako je najveća udaljenost u zadaći mnogo manja¹⁸ od 954 km.

Značajke *morske vode* jesu $\mu = \mu_0$, $\epsilon = 81\epsilon_0$ i $\kappa = 5 \text{ S/m}$. Iz jednadžbe (7.2.27) za frekvenciju 50 Hz slijedi

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{\text{maks}} \ll \frac{1}{100\pi\sqrt{81\mu_0\epsilon_0} \sqrt[4]{1 + \frac{25}{(8100\pi\epsilon_0)^2}}} = 22.5 \text{ m}. \quad (7.2.33)$$

Stoga zadaće u morskoj vodi možemo rješavati Poissonovom jednadžbom pri 50 Hz ako je najveća udaljenost u zadaći puno manja od 22.5 m. Difuzijska jednadžba je zadovoljavajuće približenje ako vrijedi

$$\frac{\kappa}{\omega \epsilon} \gg 1. \quad (7.2.34)$$

Ako za graničnu vrijednost ovog omjera uzmemo 100 iz (7.2.34) slijedi da je elektromagnetsko polje u morskoj vodi kvazistatičko do frekvencije od 11 MHz.

Za *bakar* vrijedi: $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\kappa = 58 \text{ MS/m}$. Pri frekvenciji od 50 Hz uvjet za valjanu primjenu rješenja Poissonove jednadžbe jest

¹⁷ Kod dobrih vodiča κ je reda 10^7 S/m , pa je ovaj uvjet zadovoljen i pri najvišim frekvencijama. Tek kod 10^{17} Hz izjednačavaju se doprinosi $\kappa \underline{E}$ i $j\omega \epsilon \underline{E}$.

¹⁸ Uobičajeno uzimamo deset puta manju udaljenost (oko 100 km).

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{\text{maks}} \ll \sqrt{\frac{2}{100\pi\kappa\mu_0}} = 0.0093 \text{ m} . \quad (7.2.35)$$

Iz jednadžbe (7.2.34), uz graničnu vrijednost omjera $\kappa/\omega\epsilon$ jednaku 100, slijedi da je elektromagnetsko polje u bakru kvazistatičko do frekvencije od 10^{16} Hz.

7.3. ENERGIJA U KVAZISTATIČKIM POLJIMA

Tijek struje u vodljivim materijalima i dobrim vodičima uzrokuje gubitke, pa u kvazistatičkim elektromagnetskim poljima moramo razmatrati pohranjenu energiju i snagu. Zakon o očuvanju energije u elektromagnetskim poljima opisuje Poyntingov teorem.¹⁹ Njegov integralni oblik za jednostavne materijale jest

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i dV = \int_V \kappa |\mathbf{E}|^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) dV . \quad (7.3.1)$$

Najčešće zadatke kvazistatičkih elektromagnetskih polja uključuju dobre vodiče i dielektrike. U dobrim vodičima zanemarujemo struje pomaka, pa se Poyntingov teorem svodi na

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i dV = \frac{1}{\kappa} \int_V |\mathbf{J}|^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2 dV , \quad (7.3.2)$$

dok u dielektricima nema gubitaka, vrijedi $\kappa = 0$, pa Poyntingov teorem glasi

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) dV . \quad (7.3.3)$$

Iz jednadžbi (7.3.2,3) slijedi da kvazistatičko elektromagnetsko polje u dobrim vodičima i dielektricima možemo nadomjestiti mrežom otpora, induktiviteta i kapaciteta, i to tako da energija u nadomjesnoj mreži bude jednaka energiji u polju. Otpor vodiča računamo iz gubitaka u vodiču. Unutarnji induktivitet vodiča računamo iz magnetske energije pohranjene u vodiču, a vanjske induktivitete računamo iz energije pohranjene u okolini vodiča. Kapacitet određujemo iz energije pohranjene u električnom polju dielektrika. U dobrom vodiču ne može postojati slobodni naboj,²⁰ pa se u zadacima kvazistatičkih polja u dobrim vodičima i dielektricima može pojaviti samo plošni slobodni naboj na granicama materijala različitih vodljivosti. Stoga primjenjujemo nadomještanje takvih

¹⁹ Pogledati odjeljak 3.3.

²⁰ To smo dokazali u članaku 1.4.3.

polja parcijalnim kapacitetima.²¹

Iz jednadžbe (7.3.1) vidimo da su gubici i pohranjene energije veličine ovisne o brzini vremenske promjene, pa su sukladno tome i nadomjesni elementi ovisni o brzini vremenske promjene (frekvencijska ovisnost). U nekim slučajevima tu vremensku ovisnost možemo zanemariti, pa razlikujemo dvije osnovne vrste zadaća kvazistatičkih elektromagnetskih polja:

- zadaće s masivnim vodičima u kojima je raspodjela struje nepoznata i ovisna o vremenskoj promjeni,
- zadaće s tankim vodičima u kojima pretpostavljamo da je raspodjela struje jednolika po presjeku i neovisna o vremenskoj promjeni.

U sljedećim odjeljcima 7.4. i 7.5. obradit ćemo te dvije vrste zadaća i pokazati kada možemo pretpostaviti jednoliku raspodjelu struje po vodičima.

7.3.1. Energija i snaga u sinusno promjenjivim poljima

U sinusno promjenjivim elektromagnetskim poljima zanimaju nas srednje, a ne trenutne vrijednosti tijekom energije. Ako su vektori $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ zadani s komponentama ($E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ su maksimalne vrijednosti)

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_x \cos(\omega t + \psi_{E_x}) \mathbf{a}_x + E_y \cos(\omega t + \psi_{E_y}) \mathbf{a}_y + E_z \cos(\omega t + \psi_{E_z}) \mathbf{a}_z, \\ \mathbf{H} &= H_x \cos(\omega t + \psi_{H_x}) \mathbf{a}_x + H_y \cos(\omega t + \psi_{H_y}) \mathbf{a}_y + H_z \cos(\omega t + \psi_{H_z}) \mathbf{a}_z,\end{aligned}\tag{7.3.4}$$

srednja vrijednost Poyntingova vektora za sinusno promjenjivo polje periode T iznosi

$$N_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dt. \tag{7.3.5}$$

Korištenjem identiteta

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt &= 0,\end{aligned}\tag{7.3.6}$$

dobivamo izraz za srednju vrijednost Poyntingova vektora

²¹ Pogledati odjeljak 4.4.

$$\begin{aligned}
N_{sr} = & \frac{1}{2} [E_y H_z \cos(\psi_{E_y} - \psi_{H_z}) - E_z H_y \cos(\psi_{E_z} - \psi_{H_y})] a_x + \\
& + \frac{1}{2} [E_z H_x \cos(\psi_{E_z} - \psi_{H_x}) - E_x H_z \cos(\psi_{E_x} - \psi_{H_z})] a_y + \\
& + \frac{1}{2} [E_x H_y \cos(\psi_{E_x} - \psi_{H_y}) - E_y H_x \cos(\psi_{E_y} - \psi_{H_x})] a_z ,
\end{aligned} \tag{7.3.7}$$

koja je jednaka realnom dijelu vektorskog produkta fazora

$$N_{sr} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} (\underline{E} \times \underline{H}^*) \right\} , \tag{7.3.8}$$

gdje je $\underline{H}^*$ konjugirano kompleksni fazor $\underline{H}$

$$\underline{H}^* = H_x e^{-j\psi_{H_x}} a_x + H_y e^{-j\psi_{H_y}} a_y + H_z e^{-j\psi_{H_z}} a_z . \tag{7.3.9}$$

Srednji gubici za sinusno promjenjiva polja izraženi u funkciji fazora $\underline{J}$ (J_x, J_y, J_z su maksimalne vrijednosti) jesu

$$\begin{aligned}
P_{g, sr} = & \frac{1}{\kappa} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_V |J_x \cos(\omega t + \psi_{J_x}) a_x + J_y \cos(\omega t + \psi_{J_y}) a_y + \\
& + J_z \cos(\omega t + \psi_{J_z}) a_z|^2 dV = \frac{1}{2\kappa} \int_V |\underline{J}|^2 dV .
\end{aligned} \tag{7.3.10}$$

Srednja energija pohranjena u magnetskom polju izražena u funkciji fazora $\underline{H}$ (H_x, H_y, H_z su maksimalne vrijednosti) jest

$$\begin{aligned}
W_{m, sr} = & \frac{\mu}{2} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_V |H_x \cos(\omega t + \psi_{H_x}) a_x + H_y \cos(\omega t + \psi_{H_y}) a_y + \\
& + H_z \cos(\omega t + \psi_{H_z}) a_z|^2 dV = \frac{\mu}{4} \int_V |\underline{H}|^2 dV ,
\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

a srednja energija pohranjena u električnom polju izražena u funkciji fazora $\underline{E}$ (E_x, E_y, E_z su maksimalne vrijednosti) jest

$$\begin{aligned}
W_{e, sr} = & \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_V |E_x \cos(\omega t + \psi_{E_x}) a_x + E_y \cos(\omega t + \psi_{E_y}) a_y + \\
& + E_z \cos(\omega t + \psi_{E_z}) a_z|^2 dV = \frac{\varepsilon}{4} \int_V |\underline{E}|^2 dV .
\end{aligned} \tag{7.3.12}$$

Napišimo sada jednadžbu (7.2.5b) za konjugirano kompleksne fazore $\underline{H}^*$, $\underline{E}^*$ i $\underline{J}^*$ te jednadžbu (7.2.5a)

$$\nabla \times \underline{H}^* = \underline{J}^* - j\omega \epsilon \underline{E}^* , \quad (7.3.13a,b)$$

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega \mu \underline{H} .$$

Ako prvu od ove dvije jednadžbe pomnožimo s fazorom $\underline{E}$, a drugu sa konjugirano kompleksnim fazorom $\underline{H}^*$ i odbijemo prvu od druge, dobivamo

$$\underline{H}^* \cdot (\nabla \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{H}^*) = -\underline{E} \cdot \underline{J}^* - j\omega (\mu \underline{H} \cdot \underline{H}^* - \epsilon \underline{E} \cdot \underline{E}^*) . \quad (7.3.14)$$

Nakon primjene vektorskog identiteta

$$-\nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H}^*) = \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{H}^*) - \underline{H}^* \cdot (\nabla \times \underline{E}) , \quad (7.3.15)$$

i integracije po volumenu V kojeg ograničava ploha S , uz korištenje Gaussova teorema o divergenciji, slijedi

$$\oint_S (\underline{E} \times \underline{H}^*) \cdot \underline{n} dS = - \int_V (\underline{E} \cdot \underline{J}^*) dV + j\omega \int_V (\epsilon \underline{E} \cdot \underline{E}^* - \mu \underline{H} \cdot \underline{H}^*) dV . \quad (7.3.16)$$

Množenjem ove jednadžbe s faktorom $1/2$ i usporedbom s izrazima (7.3.10 – 12) dobivamo *kompleksnu relaciju za Poyntingov teorem* koja izražava načelo očuvanja energije u sinusno promjenjivom elektromagnetskom polju

$$P_N = \oint_S \underline{N} \cdot \underline{n} dS = -P_{g,SR} + j2\omega (W_{e,SR} - W_{m,SR}) . \quad (7.3.17)$$

P_N nazivamo *prividnom srednjom snagom* koja u jedinici vremena proteče kroz zatvorenu plohu S . Jednadžba (7.3.17) kazuje da je u sinusno promjenjivim elektromagnetskim poljima negativni realni dio prividne srednje snage jednak srednjim gubicima u volumenu V , dok je imaginarni dio prividne srednje snage jednak umnošku 2ω i razlike srednjih vrijednosti ukupne električne i magnetske energije pohranjene u volumenu V . Stoga u sinusno promjenjivim elektromagnetskim poljima možemo nadomjesne elemente mreže odrediti iz imaginarnog i realnog dijela prividne snage.

7.4. RJEŠAVANJE KVAZISTATIČKOG POLJA U VODIČIMA

U odjeljku 7.1. pokazali smo da veličine kvazistatičkog elektromagnetskog polja u vodičima zadovoljavaju difuzijsku jednadžbu. Kao u statičkim poljima, i ovdje ćemo za

njezino rješavanje primijeniti separaciju varijabli.²² Pretpostavimo da rješenje za vektor $\mathbf{H}$ možemo napisati u obliku

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{r})T(t) , \quad (7.4.1)$$

gdje je $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ vektor neovisan o vremenu, a $T(t)$ vremenska funkcija neovisna o prostoru. Budući da je difuzijska jednačba (7.1.5) linearna jednačba s realnim koeficijentima, rješenja za $\mathbf{H}$ možemo tražiti u kompleksnom obliku, tj. u obliku polja s kompleksnim komponentama. To znači da $\mathbf{P}$ može biti kompleksno vektorsko polje, T kompleksna funkcija, te da realna rješenja dobivamo kao $\mathbf{H} = \text{Re}[\mathbf{P}(\mathbf{r})T(t)]$.²³ Ako pretpostavku (7.4.1) uvrstimo u jednačbu (7.1.5) slijedi

$$T(t) \Delta \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mu \kappa \mathbf{P}(\mathbf{r}) \frac{dT(t)}{dt} . \quad (7.4.2)$$

Tu jednačbu možemo napisati kao

$$\Delta \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mu \kappa \mathbf{P}(\mathbf{r}) \left(\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} \right) . \quad (7.4.3)$$

Deriviranjem te jednačbe po vremenu dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mu \kappa \left[\left(\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} \right) \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} \right) \right] , \quad (7.4.4)$$

a budući da je $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ neovisan o vremenu slijedi da $T(t)$ mora zadovoljavati²⁴

$$\mu \kappa \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = - \frac{k^2}{\mu \kappa} . \quad (7.4.5)$$

Ovdje je k^2 proizvoljna konstanta. Jednačba koju $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ mora zadovoljavati jest²⁵

$$\Delta \mathbf{P}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0 . \quad (7.4.6)$$

Jednačbe (7.4.5,6) su matematički neovisne, ali su fizikalno povezane preko konstante k . Jednačba (7.4.5) je jednostavna diferencijalna jednačba drugog reda i lako je rješavamo. Nasuprot tome, jednačbu (7.4.6) možemo analitički riješiti u malom broju

²² Pogledati Prilog A.

²³ Pogledati odjeljak 7.2. i članak 8.2.2.

²⁴ Ako postoji ovisnost između prostornih koordinata i vremena, onda moramo primjenjivati druge metode rješavanja. Takve zadaće se javljaju kad se materijali gibaju zadanom brzinom koja je funkcija prostornih koordinata. Rješavanje takvih problema najčešće se temelji na pristupu preko integralnih jednačbi; detalje pogledati u Yu.V.Novozhilov, Yu.A.Yappa: *Electrodynamics*, Mir Publishers, Moscow, 1981.

²⁵ Jednačbu takvog oblika nazivamo vektorska Helmholtzova jednačba. Pogledati Prilog A.

geometrijski jednostavnih zadaća primjenom separacije prostornih varijabli. Sinusno promjenjiva polja nastaju iz rastava u kojem je²⁶

$$T(t) = e^{j\omega t}, \quad (7.4.7a)$$

a konstanta k^2 iznosi

$$k^2 = -j\omega\mu\kappa \Rightarrow k = (1-j)\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} = \frac{1-j}{d}. \quad (7.4.7b)$$

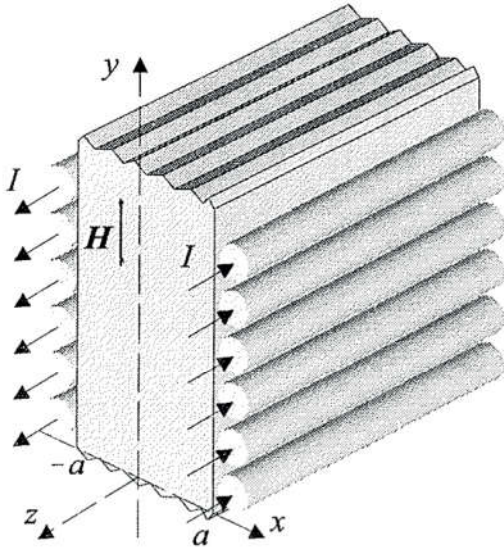
Veličina

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}, \quad (7.4.8)$$

ima dimenzije dužine i nazivamo je *dubina prodiranja*.²⁷ Kroz sljedeće primjere ćemo pokazati da je omjer dimenzija vodiča i dubine prodiranja²⁸ najutjecajniji čimbenik na raspodjelu struje po vodiču.

Primjer 7.4.1. Magnetski lim u promjenjivom magnetskom polju

Zadaću smo prikazali na slici 7.4.1. Zbog jednostavnosti pretpostavljamo da je debljina lima mnogo manja od širine i visine, pa ćemo pretpostaviti da se polje mijenja samo u smjeru x osi.



Slika 7.4.1. Magnetski lim u promjenjivom magnetskom polju

²⁶ Pogledati članak 8.2.3, jednadžbu (8.2.26).

²⁷ Puni smisao ovog naziva pojasnit ćemo u poglavlju o elektromagnetskim valovima prilikom razmatranja prodora elektromagnetskog vala u metale. Pogledati članak 8.3.4.

²⁸ Naglašavamo da je dubina prodiranja frekvencijski ovisna veličina.

Lim se nalazi u magnetskom polju koje ima samo y komponentu

$$\mathbf{H} = H(x, t) \mathbf{a}_y = P(x) T(t) \mathbf{a}_y . \quad (7.4.9)$$

1. ISKLJUČENJE STRUJE

U prvom koraku ćemo riješiti kvazistatičko elektromagnetsko polje u limu ako u trenutku $t = 0$ isključimo struju u namotu koja uzrokuje $\mathbf{H}_0$. Zadaća se svodi na rješavanje difuzijske jednačbe sa sljedećim početnim uvjetima

$$\begin{aligned} H(\pm a, t \geq 0^+) &= 0 \Rightarrow P(\pm a) = 0 , \\ H(x, t = 0^+) &= H_0 \Rightarrow T(0^+) = 1 , \\ \lim_{t \rightarrow \infty} T &= 0 . \end{aligned} \quad (7.4.10a - c)$$

Možemo očekivati eksponencijalno gušenje polja, pa je kod separacije dovoljno pretpostaviti da su prostorna P i vremenska T komponenta polja H realne funkcije. To vodi na jednačbu za T s realnom pozitivnom konstantom k^2 , pa funkciju T određujemo iz jednačbe

$$\mu \kappa \frac{dT}{dt} + k^2 T = 0 , \quad (7.4.11)$$

a funkciju P iz jednačbe

$$\frac{d^2 P(x)}{dx^2} = -k^2 P(x) . \quad (7.4.12)$$

Rješenja ovih jednačbi jesu

$$T(t) = e^{-\frac{k^2}{\mu \kappa} t} ; \quad P(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) . \quad (7.4.13a, b)$$

Zbog uvjeta $H(x) = H(-x)$ mora vrijediti $B = 0$. Iz uvjeta da za svaki $t \geq 0^+$ mora polje na rubovima lima biti jednako nuli, slijedi da $A \cos(kx)$ mora biti jednako nuli za $x = \pm a$, pa je

$$k = \frac{n\pi}{2a} , \quad (7.4.14)$$

gdje je n neparni pozitivni cijeli broj. Time nismo zadovoljili početni uvjet da je polje u $t = 0$ homogeno u cijelom limu, pa pretpostavljamo rješenje u obliku linearne kombinacije

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2a} . \quad (7.4.15)$$

Ovo je Fourierov red koji treba konvergirati konstanti H_0 na intervalu $-a \leq x \leq a$, a koeficijente a_n određujemo pomoću

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a H_0 \cos \frac{n\pi x}{2a} dx = \frac{4H_0}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{2} . \quad (7.4.16)$$

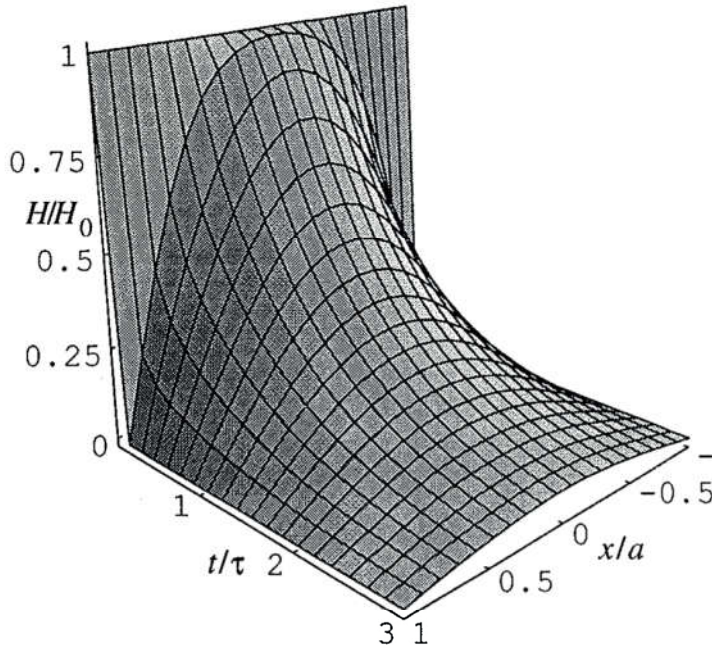
Ti koeficijenti su jednaki nuli kada je n parni broj, a kada je n neparan mijenjaju predznak. Iz jednadžbe (7.4.9) slijedi da svaki član Fourierovog reda moramo pomnožiti s odgovarajućom vremenskom funkcijom T_n zadanom jednadžbom (7.4.13)

$$T_n = e^{-\frac{n^2\pi^2}{4a^2\mu\kappa}t} . \quad (7.4.17)$$

Konačno rješenje za vektor $\mathbf{H}$ jest

$$\mathbf{H}(x,t) = a_y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4H_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4a^2\mu\kappa}t} . \quad (7.4.18)$$

Iz tog rješenja vidimo da se svaki prostorni harmonik reda n u (7.4.18) guši različitom brzinom; viši harmonici se brže guše. Na slici 7.4.2. pokazali smo vremensku ovisnost magnetskog polja u limu pri isključenju struje.

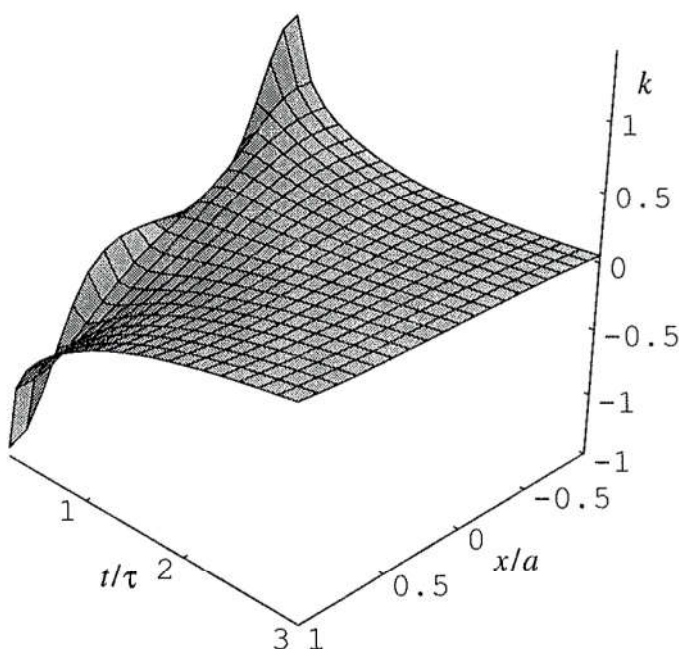


Slika 7.4.2. Vremenska ovisnost jakosti magnetskog polja u ploči pri isključenju struje, $\tau = 4a^2\mu\kappa/\pi^2$.

Vremensku konstantu osnovnog harmonika ($n = 1$) definiramo kao $\tau = 4a^2\mu\kappa/\pi^2$. Ona je ujedno i najveća vremenska konstanta ovog reda, a nazivamo je *difuzijskom vremenskom konstantom* sustava. Struje koje teku u limu određujemo iz jednadžbe (7.1.1b)

$$\mathbf{J} = a_z \frac{\partial H_y}{\partial x} = a_z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2H_0}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4a^2\mu\kappa}t}. \quad (7.4.19)$$

Iz te jednadžbe slijedi da je raspodjela struje po limu neparna funkcija odrednice x . To znači da struje na jednoj strani lima odlaze a na drugoj se strani vraćaju, dok je ukupna struja u limu jednaka nuli. Te struje uzrokuju gubitke u materijalu, a nazivamo ih *vtložne struje*.²⁹ Potrebno je uočiti da u $t = 0$ red (7.4.19) ne konvergira za $x = \pm a$. To je u skladu s pretpostavkom da je u tom trenutku polje izvan lima jednako nuli, a u limu jednako H_0 . Da bi to bilo moguće, na granici $x = a$ moramo uspostaviti plošnu struju u tom trenutku,³⁰ a to znači da je na tom mjestu beskonačna volumna gustoća struje J . Na slici 7.4.3. prikazali smo vremensku ovisnost normalizirane volumne gustoće struje u limu pri iskapčanju u rasponu $0.1\tau \leq t \leq 3\tau$. Tijekom vremena struje ulaze sve više u lim i opadaju.



Slika 7.4.3. Vremenska ovisnost normalizirane gustoće struja $k = Ja/2H_0$ u ploči pri isključivanju, $\tau = 4a^2\mu\kappa/\pi^2$, $0.1\tau \leq t \leq 3\tau$.

2. UKLJUČIVANJE

Rješenje za kvazistatičko elektromagnetsko polje pri uključivanju struje dobivamo

²⁹ Za detaljniji uvid u proračun vrtložnih struja pogledati R.L. Stoll, *The Analysis of Eddy Currents*, Clarendon Press, Oxford, 1974.

³⁰ Pogledati uvjete na granici, jednadžbu (1.5.9b).

jednakim postupkom, samo su početni uvjeti

$$\begin{aligned} H(\pm a, t=0^+) &= H_0, \\ H(x, t=0^+) &= 0 \Rightarrow T(0^+) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} T &= 1, \end{aligned} \quad (7.4.20a - c)$$

a rješenje za vektor $\mathbf{H}$ pri uključenju jest

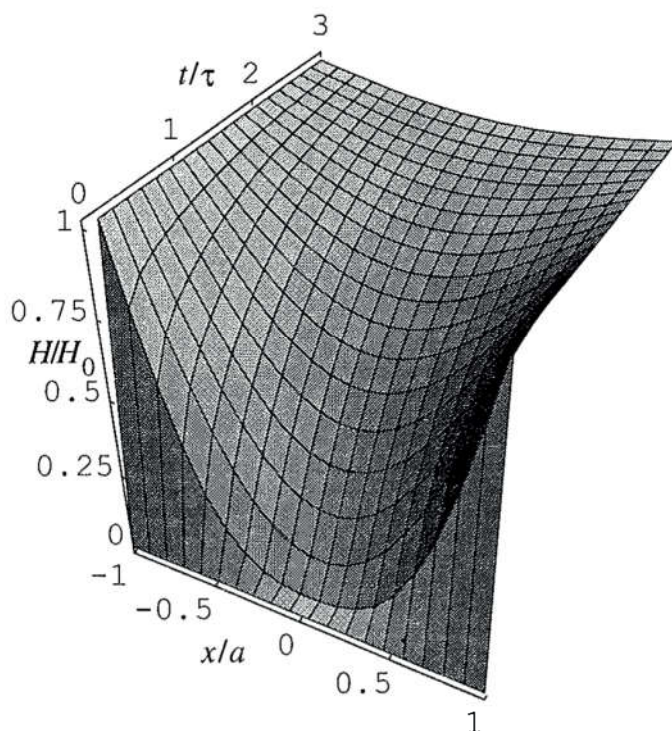
$$\mathbf{H}(x, t) = a_y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4H_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) \left[1 - e^{-\frac{n^2\pi^2}{4a^2\mu\kappa}t}\right]. \quad (7.4.21)$$

Konvergenciju ovog alternirajućeg reda značajno poboljšavamo uvrštavanjem relacije

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) = 1, \quad (7.4.22)$$

u jednadžbu (7.4.21). Konačno, izraz za vektor $\mathbf{H}$ pri uključenju jest

$$\mathbf{H}(x, t) = a_y H_0 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4a^2\mu\kappa}t}\right]. \quad (7.4.23)$$

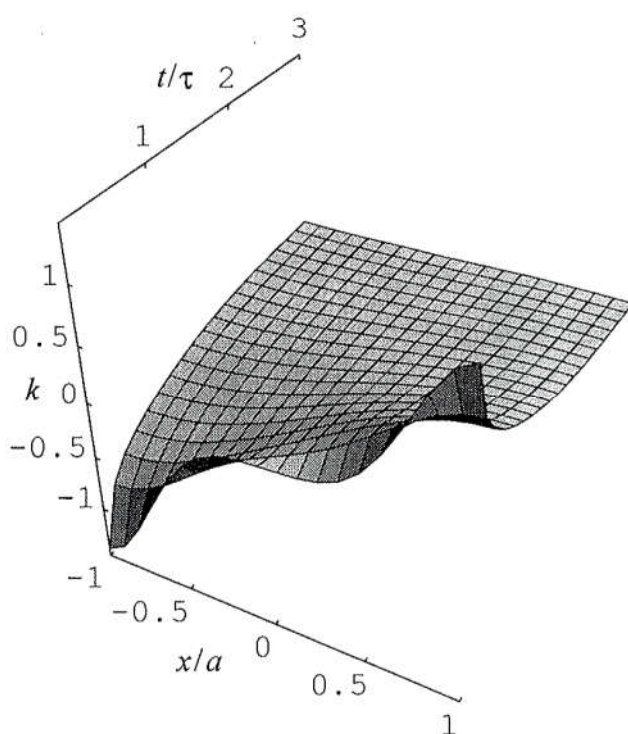


Slika 7.4.4. Vremenska ovisnost jakosti magnetskog polja u ploči pri uključivanju, $\tau = 4a^2\mu\kappa/\pi^2$.

Na slici 7.4.4. pokazali smo vremensku ovisnost magnetskog polja u limu pri uključivanju struje. Vrtložne struje koje teku u limu pri upakčanju određujemo pomoću jednadžbe (7.1.1b)

$$\mathbf{J} = a_z \frac{\partial H_y}{\partial x} = a_z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2H_0}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4a^2\mu\kappa}t}. \quad (7.4.24)$$

Na slici 7.4.5. smo pokazali vremensku ovisnost normalizirane volumne gustoće struja u limu pri upakčanju u rasponu $0.1\tau \leq t \leq 3\tau$ jer je zbog istog razloga koji smo objasnili pri rješavanju isključenja struje u $t = 0$ red (7.4.24) divergentan.



Slika 7.4.5. Vremenska ovisnost normalizirane gustoće struja $k = Ja/2H_0$ u ploči pri uključivanju, $\tau = 4a^2\mu\kappa/\pi^2$, $0.1\tau \leq t \leq 3\tau$.

3. SINUSNO POLJE

Budući se lim nalazi u sinusno promjenjivom vanjskom magnetskom polju $H_0 \cos(\omega t)$, u uvodnom dijelu ovog odjeljka smo vidjeli da trebamo pretpostaviti kompleksni rastav i kompleksnu separacijsku konstantu $k^2 = -j\omega\mu\kappa$. Zadaću rješavamo u fazorskoj domeni. Jednadžba za fazor $\underline{H}$ jest

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dx^2} - j\omega\mu\kappa \underline{H} = 0. \quad (7.4.25)$$

Opći oblik rješenja te jednadžbe jest

$$\underline{H} = C_1 e^{x\sqrt{j\omega\mu\kappa}} + C_2 e^{-x\sqrt{j\omega\mu\kappa}} . \quad (7.4.26)$$

Zbog simetrije mora vrijediti $\underline{H}(x) = \underline{H}(-x)$ pa slijedi da je $C_1 = C_2 = C$, odnosno

$$\underline{H} = C(e^{x\sqrt{j\omega\mu\kappa}} + e^{-x\sqrt{j\omega\mu\kappa}}) = 2C \cosh(x\sqrt{j\omega\mu\kappa}) . \quad (7.4.27)$$

Iz uvjeta da na površini lima vrijedi $\underline{H}(\pm a) = \underline{H}_0$ slijedi

$$C = \frac{H_0}{2 \cosh(a\sqrt{j\omega\mu\kappa})} . \quad (7.4.28)$$

Prema tome, fazor jakosti magnetskog polja u limu jest

$$\underline{H} = H_0 \frac{\cosh(x\sqrt{j\omega\mu\kappa})}{\cosh(a\sqrt{j\omega\mu\kappa})} = H_0 \frac{\cosh\left[(1+j)\frac{x}{d}\right]}{\cosh\left[(1+j)\frac{a}{d}\right]} . \quad (7.4.29)$$

Korištenjem identiteta

$$\begin{aligned} \cosh(a+jb) &= \cosh(a)\cos(b) + j\sinh(a)\sin(b) , \\ \sinh(a+jb) &= \sinh(a)\cos(b) + j\cosh(a)\sin(b) , \\ \cosh^2(a) &= \frac{1}{2}[\cosh(2a) + 1] , \quad \sinh^2(a) = \frac{1}{2}[\cosh(2a) - 1] , \end{aligned} \quad (7.4.30a - d)$$

možemo izraz (7.4.26), odnosno (7.4.29) napisati u obliku

$$\underline{H} = H_{\text{maks}} e^{j\psi_H} , \quad (7.4.31)$$

gdje je modul fazora jakosti magnetskog polja

$$H_{\text{maks}}(x) = H_0 \sqrt{\frac{\cosh\left(\frac{2x}{d}\right) + \cos\left(\frac{2x}{d}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{d}\right) + \cos\left(\frac{2a}{d}\right)}} , \quad (7.4.32)$$

a fazni pomak

$$\psi_H = \arctan \left[\tanh \left(\frac{x}{d} \right) \tan \left(\frac{x}{d} \right) \right] - \arctan \left[\tanh \left(\frac{a}{d} \right) \tan \left(\frac{a}{d} \right) \right]. \quad (7.4.33)$$

Fazor gustoće vrtložnih struja u limu određujemo primjenom jednadžbe (7.1.1b) na izraz (7.4.29) u fazorskoj domeni

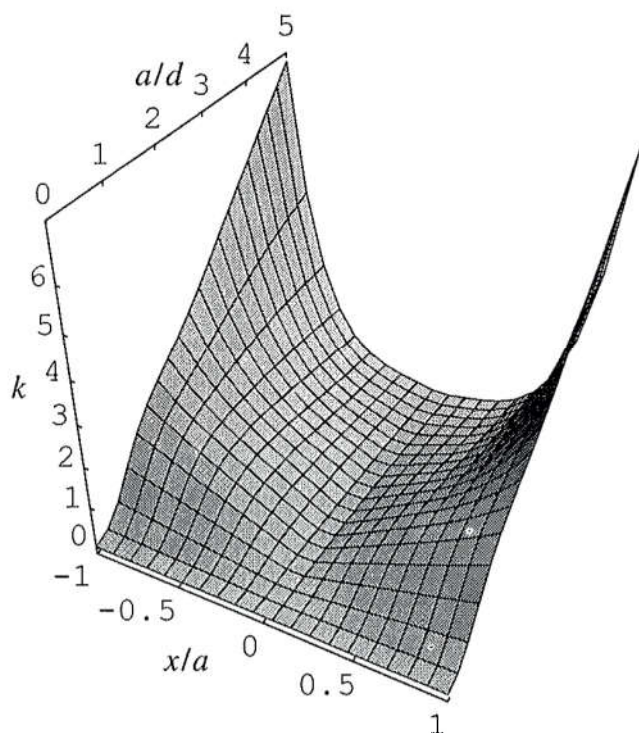
$$\underline{J} = \nabla \times \underline{H} = -a_z \frac{\partial H}{\partial x} = H_0 \frac{(1+j)}{d} \frac{\sinh \left((1+j) \frac{x}{d} \right)}{\cosh \left((1+j) \frac{a}{d} \right)}. \quad (7.4.34)$$

Primjenom identiteta (7.4.30) možemo ovaj izraz napisati kao

$$\underline{J} = J_{\text{maks}} e^{j\psi_J}, \quad (7.4.35)$$

gdje je modul fazora gustoće vrtložnih struja $\underline{J}$

$$J_{\text{maks}}(x) = \sqrt{2} \frac{H_0}{d} \sqrt{\frac{\cosh \left(\frac{2x}{d} \right) - \cos \left(\frac{2x}{d} \right)}{\cosh \left(\frac{2a}{d} \right) + \cos \left(\frac{2a}{d} \right)}}. \quad (7.4.36)$$



Slika 7.4.6. Raspodjela normalizirane gustoće vrtložnih struja $k = J_{\text{maks}} a / H_0$ u limu u funkciji omjera a/d .

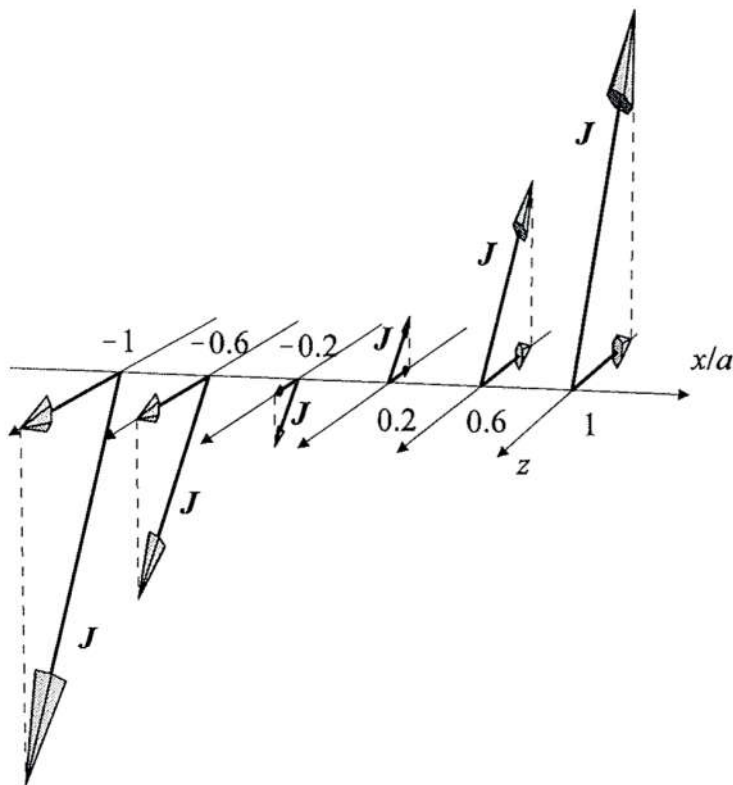
Fazni pomak fazora gustoće struje $\underline{J}$ jest

$$\psi_J = \arctan \frac{\sinh\left(\frac{x}{d}\right) \cos\left(\frac{x}{d}\right) + \cosh\left(\frac{x}{d}\right) \sin\left(\frac{x}{d}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{d}\right) \cosh\left(\frac{x}{d}\right) - \cosh\left(\frac{x}{d}\right) \sin\left(\frac{x}{d}\right)} - \arctan \left[\tanh\left(\frac{a}{d}\right) \tan\left(\frac{a}{d}\right) \right]. \quad (7.4.37)$$

U vremenskoj domeni gustoća vrtložnih struja jest

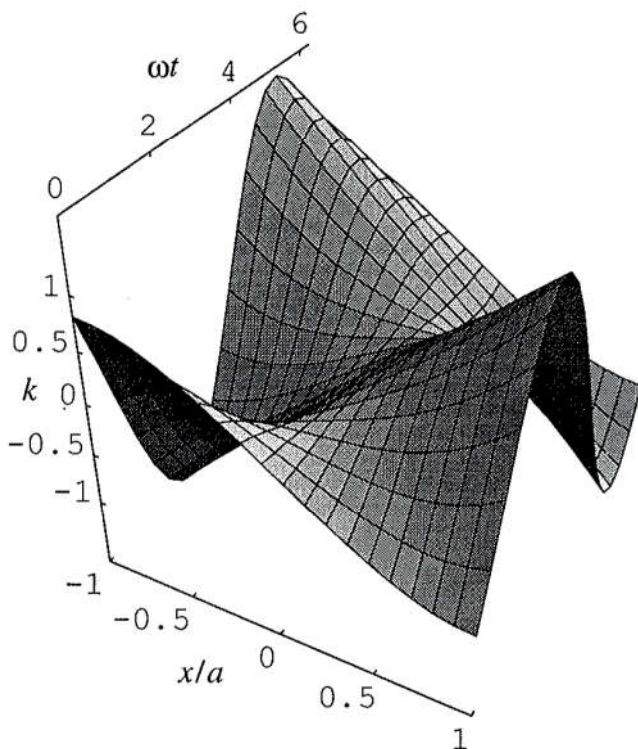
$$\underline{J} = -a_z J_{\text{maks}}(x) \cos[\omega t + \psi_J(x)]. \quad (7.4.38)$$

Na slici 7.4.7. prikazali smo raspodjelu vrtložnih struja u fazorskoj domeni za omjer $a/d = 1$.



Slika 7.4.7. Raspodjela fazora gustoće vrtložnih struje $\underline{J}$ u limu za omjer $a/d = 1$.

Apsolutna vrijednost vektora razmjerna je apsolutnoj vrijednosti fazora, a kut prema z osi je fazni pomak pojedinog fazora. Projekcija fazora na z os je razmjerna veličini vrtložnih struja u vremenskoj domeni za trenutak $t = 0$. Na slici 7.4.8. prikazali smo vremenski tijek vrtložnih struja u limu za omjer $a/d = 1$.

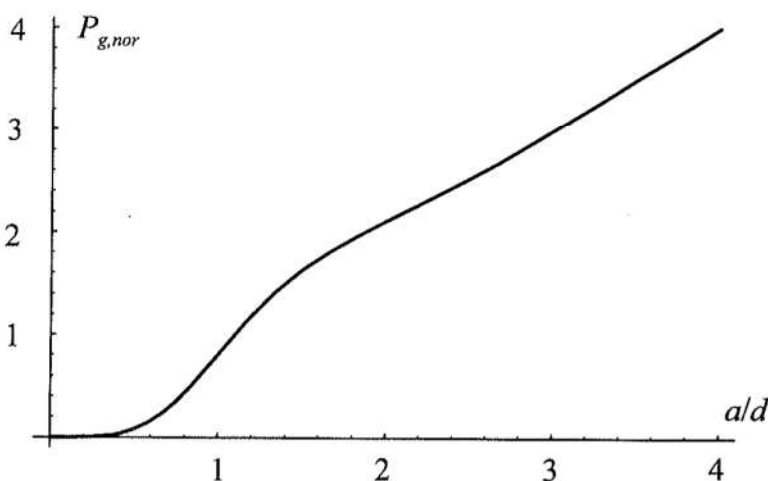


Slika 7.4.8. Vremenski tijek normalizirane gustoće vrtložnih struja $k = J_{\text{maks}} a / H_0$ u limu za omjer $a/d = 1$.

Sada možemo odrediti i gubitke zbog vrtložnih struja u limu po jedinici površine

$$P_{g,sr} = \frac{1}{2\kappa} \int_{-a}^a J_{\text{maks}}^2 dx = \frac{H_0^2}{\kappa d} \frac{\sinh \frac{2a}{d} - \sin \frac{2a}{d}}{\cosh \frac{2a}{d} + \cos \frac{2a}{d}}. \quad (7.4.39)$$

Na slici 4.7.9. prikazali smo ovisnost normaliziranih gubitaka zbog vrtložnih struja o omjeru polovine širine lima a i dubine prodiranja d .



Slika 7.4.9. Ovisnost normaliziranih gubitaka vrtložnih struja $P_{g,nor} = P_{g,sr} a \kappa / H_0^2$ o omjeru a/d .

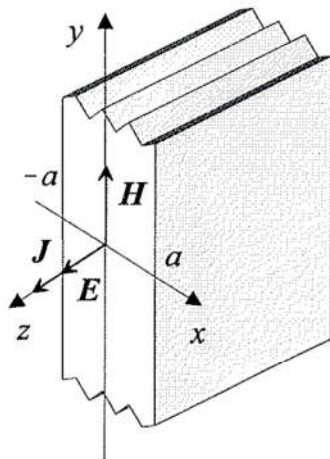
Iz ovog dijagrama i jednadžbe (7.4.39) vidimo da gubici u limu jako rastu s porastom omjera a/d . Kad vrijedi $a \ll d$, vrtložne su struje ograničene nedostatkom prostora, odnosno velikim otporom, a izraz (7.4.39)³¹ možemo približiti s

$$P_{g,sr} \approx \frac{1}{3} \omega^2 \kappa \mu^2 H_0^2 a^3 . \quad (7.4.40)$$

Zbog toga u transformatorima i električnim strojevima koristimo jezgre koje se sastoje od paketa tankih magnetskih limova.

Primjer 7.4.2. Vođenje sinusno promjenjive struje kroz lim

Razmotrimo sada raspodjelu gustoće struja u limu³² ako kroz njega teče sinusno promjenjiva struja fazora $\underline{I}$ u smjeru odrednice z .



Slika 7.4.10. Vođenje sinusno promjenjive struje kroz lim

Tu zadaću rješavamo u fazorskoj domeni; fazor $\underline{H}$ ima samo komponentu u smjeru odrednice y , a fazor $\underline{E}$ ima samo z komponentu

$$\underline{J} = J(x) \underline{a}_z ; \quad \underline{H} = H(x) \underline{a}_y ; \quad \underline{E} = E(x) \underline{a}_z . \quad (7.4.41)$$

Fazori $\underline{E}$ i $\underline{H}$ moraju zadovoljavati jednadžbu difuzije u fazorskoj domeni. Opće rješenje jest

$$\underline{H} = H_1 e^{x\sqrt{j\omega\mu\kappa}} + H_2 e^{-x\sqrt{j\omega\mu\kappa}} , \quad (7.4.42a)$$

³¹ U ove gubitke nisu uključeni gubici zbog histereze i zasićenja.

³² Ovdje ćemo opisati proračun raspodjele gustoće struja u limu, tj. u jednoj dimenziji. Za proračun raspodjele gustoće struja u dvije dimenzije, tj. u sustavima pravokutnih vodiča pogledati Z. Haznadar, J. Matjan, *Određivanje induktiviteta sustava ravnih vodiča metodom srednjih geometrijskih udaljenosti*, "Elektrotehnika", 1/1969 i 2/1969, Zagreb i Z. Haznadar, J. Matjan, *Numerical Calculation of Skin Effect in Systems of Straight Conductors*, "Elektrotehnika", 5/1970, Zagreb.

$$\underline{E} = E_1 e^{x\sqrt{j\omega\mu\kappa}} + E_2 e^{-x\sqrt{j\omega\mu\kappa}}. \quad (7.4.42b)$$

Iz simetrije rasporeda slijedi $-\underline{H}(-x) = \underline{H}(x)$ i $\underline{E}(-x) = \underline{E}(x)$ pa konstante iz jednadžbi (7.4.42) moraju imati oblik:

$$H_1 = -H_2 = \frac{H_0}{2} \quad ; \quad E_1 = E_2 = \frac{E_0}{2}. \quad (7.4.43)$$

Sada možemo rješenja napisati u jednostavnom obliku

$$\begin{aligned} \underline{H} &= H_0 \sinh(x\sqrt{j\omega\mu\kappa}), \\ \underline{E} &= E_0 \cosh(x\sqrt{j\omega\mu\kappa}), \\ \underline{J} &= \kappa \underline{E} = \kappa E_0 \cosh(x\sqrt{j\omega\mu\kappa}). \end{aligned} \quad (7.4.44a - c)$$

Konstantu E_0 određujemo iz ukupne struje $\underline{I}$ u limu. Ako je visina lima $2h$ vrijedi

$$\underline{I} = 2h \int_{-a}^a \kappa E_0 \cosh(x\sqrt{j\omega\mu\kappa}) dx = \frac{4h}{\sqrt{j\omega\mu\kappa}} \kappa E_0 \sinh(a\sqrt{j\omega\mu\kappa}), \quad (7.4.45)$$

pa je izraz za fazor $\underline{E}$

$$\underline{E} = \frac{\underline{I} \sqrt{j\omega\mu\kappa}}{4h\kappa} \frac{\cosh(x\sqrt{j\omega\mu\kappa})}{\sinh(a\sqrt{j\omega\mu\kappa})}. \quad (7.4.46)$$

Za određivanje konstante H_0 koristimo zakon protjecanja

$$\oint \underline{H} \cdot d\mathbf{l} = 2h\underline{H}(a) + 2h\underline{H}(-a) = \underline{I}, \quad (7.4.47)$$

pa vrijedi

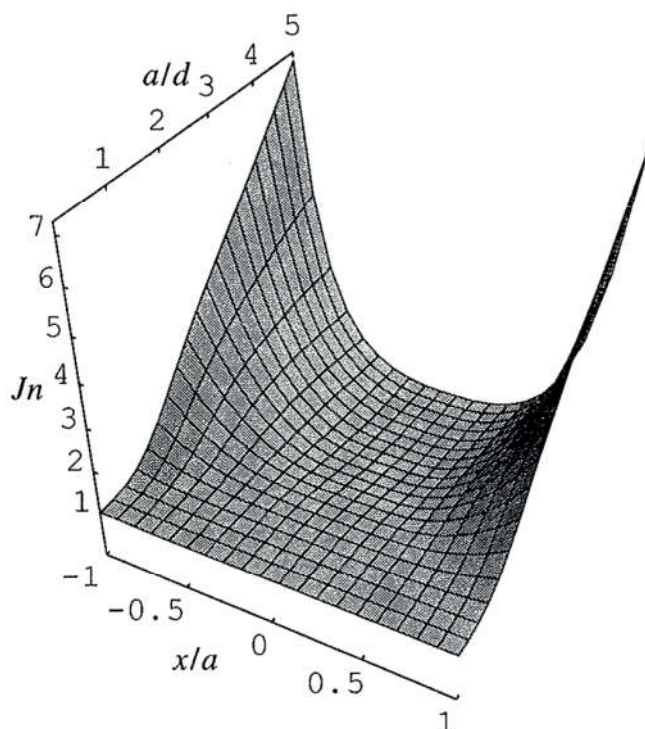
$$H_0 = \frac{\underline{I}}{4h \sinh(b\sqrt{j\omega\mu\kappa})} \Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{I}}{4h} \frac{\sinh(x\sqrt{j\omega\mu\kappa})}{\sinh(a\sqrt{j\omega\mu\kappa})}. \quad (7.4.48a,b)$$

Korištenjem identiteta (7.4.30) možemo pronaći maksimalne vrijednosti i fazne kutove fazora $\underline{J}$ u funkciji odrednice x

$$\underline{J} = \frac{\sqrt{2}I}{4hd} \sqrt{\frac{\cosh\left(\frac{2x}{d}\right) + \cos\left(\frac{2x}{d}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{d}\right) - \cos\left(\frac{2a}{d}\right)}} e^{j\psi_J}, \quad (7.4.49a)$$

$$\psi_J = \frac{\pi}{4} + \arctan \left[\tanh \left(\frac{x}{d} \right) \tan \left(\frac{x}{d} \right) \right] - \arctan \left[\coth \left(\frac{a}{d} \right) \tan \left(\frac{a}{d} \right) \right]. \quad (7.4.49b)$$

Na slici 7.4.11. pokazali smo raspodjelu normalizirane gustoće struje po limu u funkciji omjera a/d . Na njoj vidimo da je pri malim omjerima raspodjela gustoće struje jednolika po limu, a rastom tog omjera struja se sve više koncentrira uz površinu vodiča. Taj učinak nazivamo *površinski učinak*.³³



Slika 7.4.11. Raspodjela normalizirane gustoće struje $J_n = J_{\text{maks}}/J_0$, $J_0 = I/(4ha)$ u limu u funkciji a/d .

Korištenjem izraza (7.3.10) za srednje gubitke u sinusno promjenjivim poljima dobivamo gubitke po jedinici dužine

$$P'_{g,sr} = \frac{I^2}{8hkd} \frac{\sinh\left(\frac{2a}{d}\right) + \sin\left(\frac{2a}{d}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{d}\right) - \cos\left(\frac{2a}{d}\right)}. \quad (7.4.50)$$

Izjednačavanjem srednjih gubitaka u nadomjesnom otporu i srednjih gubitaka u polju dobivamo izraz za proračun *nadomjesnog otpora* po jedinici dužine

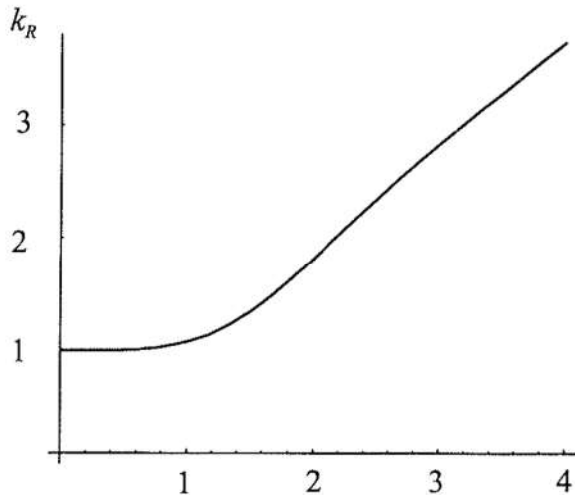
³³ Pogledati članak 8.3.4.

$$R' = \frac{P'_{gsr}}{\left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2} . \quad (7.4.51)$$

Zanimljivo je razmotriti omjer tako određenog otpora i otpora pri jednoliko raspoređenoj struji po presjeku vodiča³⁴

$$k_R = \frac{R'}{R'_0} = \frac{a}{d} \frac{\sinh\left(\frac{2a}{d}\right) + \sin\left(\frac{2a}{d}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{d}\right) - \cos\left(\frac{2a}{d}\right)} . \quad (7.4.52)$$

Ovisnost faktora k_R o omjeru a/d pokazali smo na slici 7.4.12. Na njoj vidimo da pri malim omjerima a/d možemo nadomjesni otpor odrediti metodama iz poglavlja 5.



Slika 7.4.12. Ovisnost faktora povećanja otpora o omjeru a/d .

Korištenjem identiteta (7.4.30) možemo pronaći maksimalne vrijednosti i fazne kuteve fazora $\underline{H}$ u funkciji odrednice x

$$\underline{H} = \frac{I}{4h} \sqrt{\frac{\cosh\left(\frac{2x}{d}\right) - \cos\left(\frac{2x}{d}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{d}\right) - \cos\left(\frac{2a}{d}\right)}} e^{j\psi_H} , \quad (7.4.53a,b)$$

$$\psi_H = \arctan\left[\coth\left(\frac{x}{d}\right)\tan\left(\frac{x}{d}\right)\right] - \arctan\left[\coth\left(\frac{a}{d}\right)\tan\left(\frac{a}{d}\right)\right] .$$

³⁴ Taj otpor određujemo metodama opisanim u poglavlju 5. U toj zadaći on iznosi $R'_0 = 1/(4h\alpha)$.

Korištenjem izraza (7.3.12) dobivamo srednju magnetsku energiju po jedinici dužine

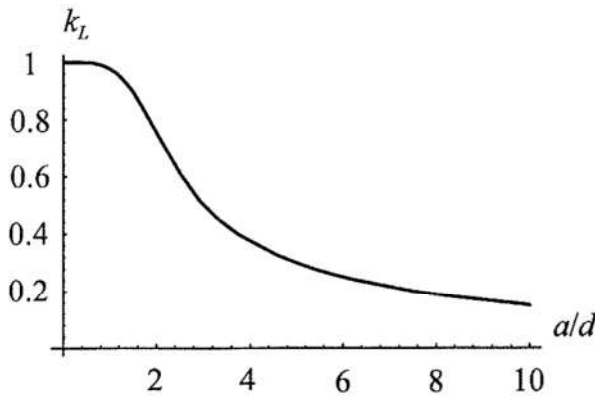
$$W'_{m,sr} = \frac{\mu I^2 d}{32h} \frac{\sinh\left(\frac{2a}{d}\right) - \sin\left(\frac{2a}{d}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{d}\right) - \cos\left(\frac{2a}{d}\right)}. \quad (7.4.54)$$

Izjednačavanjem srednje energije pohranjene u nadomjesnom unutrašnjem induktivitetu i srednje magnetske energije pohranjene u polju, dobivamo izraz za proračun nadomjesnog unutrašnjeg induktiviteta po jedinici dužine

$$L'_u = \frac{2W'_{m,sr}}{\left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2}. \quad (7.4.55)$$

Omjer tako određenog unutrašnjeg induktiviteta i induktiviteta pri jednoliku raspoređenoj struji po presjeku vodiča³⁵

$$k_L = \frac{L'_u}{L'_{u0}} = \frac{3d}{2a} \frac{\sinh\left(\frac{2a}{d}\right) - \sin\left(\frac{2a}{d}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{d}\right) - \cos\left(\frac{2a}{d}\right)} \quad (7.4.56)$$

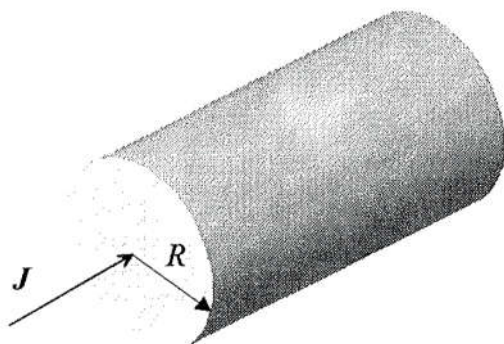


Slika 7.4.13. Ovisnost faktora smanjenja induktiviteta o omjeru a/d .

Primjer 7.4.3. Površinski učinak u cilindru

Razmotrimo cilindrični vodič značajki κ i μ koji provodi sinusno promjenjivu struju u uzdužnom smjeru. Ako je dužina vodiča mnogo veća od promjera možemo tu zadaću rješavati kao osno simetričnu u cilindričnom koordinatnom sustavu.

³⁵ Ovaj induktivitet određujemo metodama opisanim u poglavlju 6. U toj zadaći on iznosi $L'_{u0} = \mu a / (12h)$.



Slika 7.4.14. Cilindrični vodič koji provodi sinusno promjenjivu struju u uzdužnom smjeru

Gustoća struje $\mathbf{J}$ ima samo z komponentu

$$\mathbf{J} = J(r) \mathbf{a}_z, \quad (7.4.57)$$

pa se u cilindričnom koordinatnom sustavu jednačba difuzije svodi na

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial J}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 J}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J}{\partial r} = \mu \kappa \frac{\partial J}{\partial t}. \quad (7.4.58)$$

Preslikavanjem u fazorsku domenu ova jednačba poprima oblik

$$\frac{d^2 \underline{J}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{J}}{dr} + (\sqrt{-j\omega \mu \kappa})^2 \underline{J} = 0. \quad (7.4.59)$$

To je Besselova diferencijalna jednačba nultog reda,³⁶ a njezina rješenja su Besselove funkcije prve J_0 ³⁷ i druge K_0 vrste nultog reda. Gustoća struje mora biti konačna po cijelom presjeku, pa preostaje rješenje oblika

$$\underline{J} = A J_0(r \sqrt{-j\omega \mu \kappa}). \quad (7.4.60)$$

Ovdje moramo uočiti da je argument Besselove funkcije kompleksni broj, pa će i njezine vrijednosti biti kompleksni brojevi. Realni i imaginarni dio Besselovih funkcija određujemo pomoću Kelvinovih funkcija ber i bei³⁸ koje su definirane kao

$$\text{ber}(u) + j \text{bei}(u) = J_0(u e^{j\frac{3\pi}{4}}). \quad (7.4.61)$$

Koristeći te funkcije možemo fazor struje napisati kao

³⁶ Pogledati Prilog E.

³⁷ U literaturi je J_n uobičajena oznaka za Besselove funkcije n -tog reda. Ovdje smo zbog toga zadržali takve oznake, a čitatelja upozoravamo na to da su slične oznakama za gustoću struje J no, po našem sudu, ne postoji opasnost od pogrešnog tumačenja i zamjene gustoće struje s Besselovim funkcijama.

³⁸ Imena ovih funkcija dolaze od skraćenica za Bessel-realni i Bessel-imaginarni dio.

$$\underline{J} = A[\text{ber}(r\sqrt{\omega\mu\kappa}) + j\text{bei}(r\sqrt{\omega\mu\kappa})] . \quad (7.4.62)$$

Jakost magnetskog polja ima samo komponentu u smjeru obilaznog kuta

$$\underline{H} = H(r,t) \underline{a}_\alpha , \quad (7.4.63)$$

a određujemo je pomoću jednadžbe (7.2.5b)

$$\underline{H} = \frac{1}{j\omega\mu\kappa} \frac{dJ}{dr} = A \frac{\sqrt{\omega\mu\kappa}}{j\omega\mu\kappa} [\text{ber}'(r\sqrt{\omega\mu\kappa}) + j\text{bei}'(r\sqrt{\omega\mu\kappa})] . \quad (7.4.64)$$

Konstantu A određujemo pomoću zakona protjecanja. Vrijedi

$$\oint_{r=R} \underline{H} \cdot d\underline{l} = \left\{ \frac{A}{j\sqrt{\omega\mu\kappa}} [\text{ber}'(R\sqrt{\omega\mu\kappa}) + j\text{bei}'(R\sqrt{\omega\mu\kappa})] \right\} 2R\pi = \underline{I} . \quad (7.4.65)$$

Uvrštenjem konstante A u jednadžbu (7.4.60) dobivamo izraz za fazor gustoće struje

$$\underline{J} = \frac{jI\sqrt{\omega\mu\kappa}}{2R\pi} \frac{\text{ber}(r\sqrt{\omega\mu\kappa}) + j\text{bei}(r\sqrt{j\omega\mu\kappa})}{\text{ber}'(R\sqrt{\omega\mu\kappa}) + j\text{bei}'(R\sqrt{\omega\mu\kappa})} = J_{\text{maks}} e^{j\psi_J} , \quad (7.4.66)$$

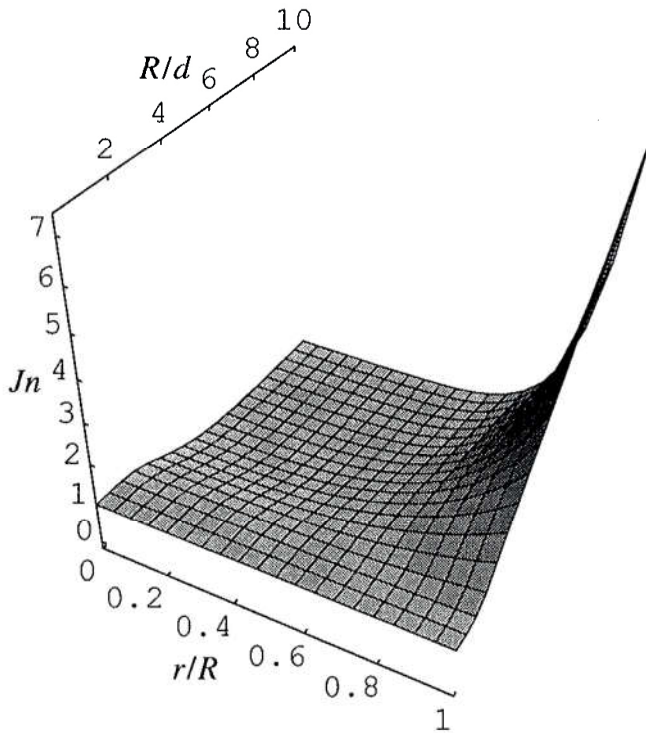
pa je apsolutna vrijednost fazora gustoće struje

$$J_{\text{maks}} = \frac{I}{\sqrt{2}dR\pi} \sqrt{\frac{\left[\text{ber}\left(\frac{r\sqrt{2}}{d}\right) \right]^2 + \left[\text{bei}\left(\frac{r\sqrt{2}}{d}\right) \right]^2}{\left[\text{ber}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right) \right]^2 + \left[\text{bei}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right) \right]^2}} , \quad (7.4.67a)$$

a fazni kut iznosi

$$\psi_J = \arctan \left[\frac{\text{ber}\left(\frac{r\sqrt{2}}{d}\right)}{\text{bei}\left(\frac{r\sqrt{2}}{d}\right)} \right] - \arctan \left[\frac{\text{bei}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)}{\text{ber}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)} \right] . \quad (7.4.67b)$$

Raspodjelu normalizirane gustoće struje po vodiču u funkciji omjera R/d pokazali smo na slici 7.4.15. Na njoj vidimo da je pri malim omjerima R/d struja jednoliko raspoređena po presjeku, a rastom tog omjera površinski učinak postaje sve izrazitiji. Pri vrlo visokim frekvencijama struja teče u uskom pojasu oko površine vodiča.



Slika 7.4.15. Raspodjela normalizirane gustoće struje $J_n = J_{\text{maks}} S / I$ u vodiču u funkciji omjera R/d , $S = R^2 \pi$.

Konačni izraz za fazor jakosti polja jest

$$\underline{H} = \frac{I}{2R\pi} \frac{\text{ber}'(r\sqrt{\omega\mu\kappa}) + j\text{bei}'(r\sqrt{j\omega\mu\kappa})}{\text{ber}'(R\sqrt{\omega\mu\kappa}) + j\text{bei}'(R\sqrt{\omega\mu\kappa})} = H_{\text{maks}} e^{\psi_H}, \quad (7.4.68)$$

gdje je

$$H_{\text{maks}} = \frac{I}{\sqrt{2}R\pi} \frac{\sqrt{\left[\text{ber}'\left(\frac{r\sqrt{2}}{d}\right)\right]^2 + \left[\text{bei}'\left(\frac{r\sqrt{2}}{d}\right)\right]^2}}{\sqrt{\left[\text{ber}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)\right]^2 + \left[\text{bei}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)\right]^2}}, \quad (7.4.69)$$

$$\psi_H = \arctan \left[\frac{\text{ber}'\left(\frac{r\sqrt{2}}{d}\right)}{\text{bei}'\left(\frac{r\sqrt{2}}{d}\right)} \right] - \arctan \left[\frac{\text{bei}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)}{\text{ber}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)} \right].$$

Ovdje, kao i u prethodnom primjeru, možemo odrediti nadomjesni otpor i induktivitet iz gubitaka i energije pohranjene u magnetskom polju. Taj postupak uključuje integraciju

Kelvinovih funkcija pa ćemo u tom primjeru primijeniti Poyntingov teorem.³⁹ Kom-
pleksni Poyntingov vektor na površini vodiča jest

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} [\underline{E}(R) \times \underline{H}^*(R)] = \\ &= -a_r \frac{1}{2} \frac{jI\sqrt{\omega\mu\kappa}}{2\kappa R\pi} \frac{\text{ber}(R\sqrt{\omega\mu\kappa}) + j\text{bei}(R\sqrt{\omega\mu\kappa})}{\text{ber}'(R\sqrt{\omega\mu\kappa}) + j\text{bei}'(R\sqrt{\omega\mu\kappa})} \frac{I}{2R\pi}. \end{aligned} \quad (7.4.70)$$

Površina integracije u primjeni kompleksnog oblika Poyntingova teorema⁴⁰ je površina cilindra (vodiča) dužine l . Na bazama cilindra su N i n okomiti, a na plaštu su pod kutom π , pa je prividna snaga predana jediničnoj dužini vodiča

$$P_N = \oint_S N \cdot n dS = -\frac{1}{2} \frac{jI^2\sqrt{\omega\mu\kappa}}{2\kappa R\pi} \frac{\text{ber}(R\sqrt{\omega\mu\kappa}) + j\text{bei}(R\sqrt{\omega\mu\kappa})}{\text{ber}'(R\sqrt{\omega\mu\kappa}) + j\text{bei}'(R\sqrt{\omega\mu\kappa})}. \quad (7.4.71)$$

Realni dio prividne snage je srednja snaga utrošena u volumenu vodiča dužine l . Iz nje možemo odrediti nadomjesni otpor

$$R_c = \frac{P_{g,sr}}{\left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi R\kappa d} \frac{\text{ber}\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)\text{bei}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right) - \text{bei}\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)\text{ber}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)}{\left[\text{ber}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)\right]^2 + \left[\text{bei}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)\right]^2}. \quad (7.4.72)$$

Iz imaginarnog dijela prividne snage određujemo srednju magnetsku energiju, a iz nje nadomjesni induktivitet

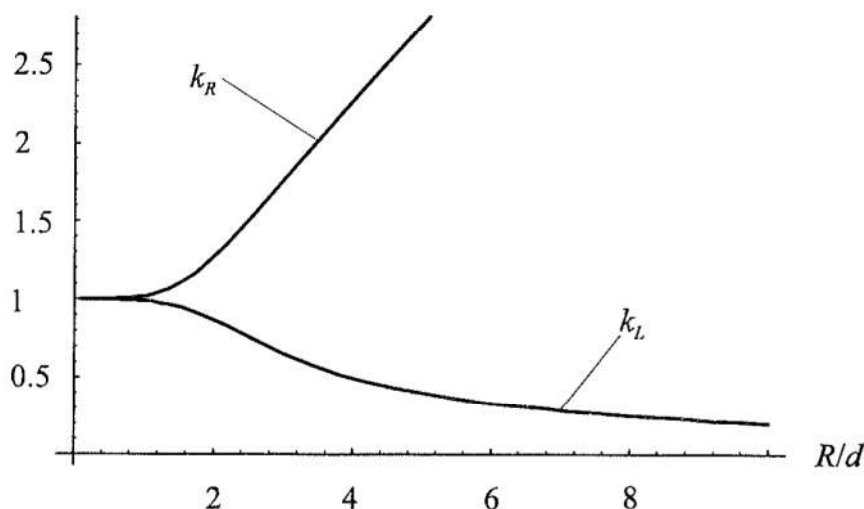
$$\begin{aligned} L &= \frac{W_{m,sr}}{\frac{1}{2}\left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi R\kappa\omega d} \frac{\text{ber}\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)\text{ber}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right) - \text{bei}\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)\text{bei}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)}{\left[\text{ber}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)\right]^2 + \left[\text{bei}'\left(\frac{R\sqrt{2}}{d}\right)\right]^2}. \end{aligned} \quad (7.4.73)$$

Već iz slike 7.4.15. uočavamo da pri niskim omjerima R/d možemo otpor i induktivitet vodiča odrediti postupcima iz statičkih polja. To se može potvrditi i analizom jednadžbi

³⁹ Pogledati članak 7.3.1.

⁴⁰ Pogledati jednadžbu (7.3.17).

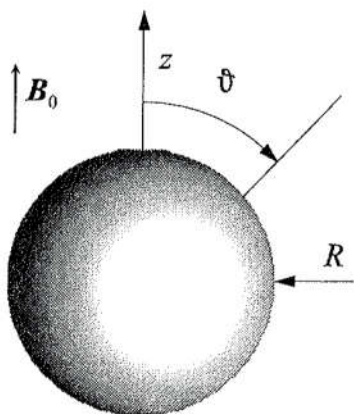
(7.4.71,72) ako u razvoju Kelvinovih funkcija u red uzmemo u račun samo prvih nekoliko članova. Ovisnost faktora povećanja otpora $k_R = R_c/R_0$ i smanjenja induktiviteta $k_L = L/L_0$ o omjeru R/d pokazali smo na slici 7.4.16.⁴¹



Slika 7.4.16. Ovisnost faktora povećanja otpora $k_R = R_c/R_0$ i smanjenja induktiviteta $k_L = L/L_0$ cilindričnog vodiča o omjeru R/d

Primjer 7.4.4. Kugla u sinusno promjenjivom magnetskom polju

Kugla značajki μ i κ nalazi se u sinusno promjenjivom magnetskom polju fazora $\underline{B}_0$ prema slici 7.4.17.



Slika 7.4.17. Kugla u sinusno promjenjivom magnetskom polju

Zadaću rješavamo u sfernom koordinatnom sustavu pomoću vektorskog magnetskog potencijala. Zadajemo

$$\underline{B}_0 = B_0 \underline{a}_z = B_0 \cos \vartheta \underline{a}_r - B_0 \sin \vartheta \underline{a}_\vartheta. \quad (7.4.75)$$

Iz jednadžbe (7.1.7) slijedi da je vektorski magnetski potencijal takvog polja

⁴¹ U ovoj zadaći je $R_0 = 1/(\kappa R^2 \pi)$ i $L_0 = \mu/(8\pi)$.

$$\underline{A}_0 = \frac{1}{2} \underline{B}_0 r \sin \vartheta \underline{a}_\alpha . \quad (7.4.76)$$

Zbog prisutnosti kugle mijenja se polje u njezinoj okolini. Vektorski magnetski potencijal u cijelom prostoru ove zadaće odredit ćemo metodom separacije varijabli. Pretpostavljamo rješenje oblika

$$\underline{A} = \frac{1}{2} \underline{B}_0 \sin \vartheta F(r) \underline{a}_\alpha . \quad (7.4.77)$$

U području izvan kugle vektorski magnetski potencijal zadovoljava Laplaceovu jednadžbu u sfernom koordinatnom sustavu

$$\Delta \underline{A}_v = 0 . \quad (7.4.78)$$

Uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja (7.4.77) u tu jednadžbu slijedi diferencijalna jednadžba za nepoznatu funkciju F

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dF}{dr} - \frac{2}{r^2} F = 0 . \quad (7.4.79)$$

Rješenja ove diferencijalne jednadžbe pokazali smo u poglavlju 4.⁴² Iz uvjeta da ako $r \rightarrow \infty$ onda $A_v \rightarrow A_0$ slijedi

$$\underline{A}_v = \frac{1}{2} \underline{B}_0 \sin \vartheta \left(r + \frac{a}{r^2} \right) \underline{a}_\alpha . \quad (7.4.80)$$

U području unutar kugle vektorski magnetski potencijal zadovoljava difuzijsku jednadžbu

$$\Delta \underline{A}_u - j\omega \mu \kappa \underline{A}_u = 0 . \quad (7.4.81)$$

Uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja (7.4.77) u ovu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dF}{dr} - \left[j\omega \mu \kappa + \frac{2}{r^2} \right] F &= \\ = r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} - 2r \frac{dF}{dr} - (r^2 j\omega \mu \kappa + 2) F &= 0 . \end{aligned} \quad (7.4.82)$$

Linearno neovisna rješenja ovog oblika modificirane Besselove jednadžbe jesu

⁴² Pogledati odjeljak 4.6. jednadžbu (4.6.43).

$$\sqrt{\frac{\pi}{2r\sqrt{j\omega\mu\kappa}}} I_{3/2}(r\sqrt{j\omega\mu\kappa}) = \frac{r\sqrt{j\omega\mu\kappa}}{3} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2}(r\sqrt{j\omega\mu\kappa})^2}{5} + \frac{\left[\frac{1}{2}(r\sqrt{j\omega\mu\kappa})^2\right]^2}{70} + \dots \right\},$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2r\sqrt{j\omega\mu\kappa}}} I_{-3/2}(r\sqrt{j\omega\mu\kappa}) = \frac{1}{-r\sqrt{j\omega\mu\kappa}} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2}(r\sqrt{j\omega\mu\kappa})^2}{-1} + \frac{\left[\frac{1}{2}(r\sqrt{j\omega\mu\kappa})^2\right]^2}{-2} + \dots \right\}.$$

Vektorski magnetski potencijal mora biti definiran za $r = 0$, pa je konačni oblik rješenja unutar kugle

$$\underline{A}_u = \frac{1}{2} B_0 b \sin \vartheta \sqrt{\frac{\pi}{2r\sqrt{j\omega\mu\kappa}}} I_{3/2}(r\sqrt{j\omega\mu\kappa}) \underline{a}_\alpha. \quad (7.4.84)$$

Modificiranu Besselovu funkciju $I_{3/2}$ možemo izraziti pomoću hiperbolnih funkcija⁴³

$$\sqrt{\frac{\pi}{2r\sqrt{j\omega\mu\kappa}}} I_{3/2}(r\sqrt{j\omega\mu\kappa}) = \frac{1}{r\sqrt{j\omega\mu\kappa}} \left(\cosh(r\sqrt{j\omega\mu\kappa}) - \frac{\sinh(r\sqrt{j\omega\mu\kappa})}{r\sqrt{j\omega\mu\kappa}} \right), \quad (7.4.85)$$

pa uvrštenjem dubine prodiranja d^{44} i jednadžbe (7.4.85) u izraz (7.4.84) dobivamo

$$\underline{A}_u = \frac{1}{2} \frac{b B_0 \sin \vartheta}{\frac{r(1+j)}{d}} \left[\cosh \frac{r(1+j)}{d} - \frac{1-j}{2} \frac{d}{r} \sinh \frac{r(1+j)}{d} \right] \underline{a}_\alpha. \quad (7.4.86)$$

Gustoću magnetskog tijeka unutar i izvan kugle određujemo iz vektorskog magnetskog potencijala

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta \underline{A})}{\partial \vartheta} \underline{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{A})}{\partial r} \underline{a}_\vartheta = \underline{B}_r \underline{a}_r + \underline{B}_\vartheta \underline{a}_\vartheta. \quad (7.4.87)$$

Izvan kugle je

$$\underline{B}_i = B_0 \cos \vartheta \left(1 + \frac{a}{r^3} \right) \underline{a}_r - B_0 \sin \vartheta \left(1 - \frac{a}{2r^3} \right) \underline{a}_\vartheta, \quad (7.4.88)$$

⁴³ Pogledati Abramovitz, Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications Inc., New York, 1965.

⁴⁴ Pogledati jednadžbu (7.4.8).

a unutar kugle je

$$\underline{B}_{ru} = \frac{b \underline{B}_0 d \cos \vartheta}{r^2} \left[(1-j) \cosh \frac{r(1+j)}{d} + \frac{jd}{r} \sinh \frac{r(1+j)}{d} \right], \quad (7.4.89a,b)$$

$$\underline{B}_{\vartheta u} = \frac{b \underline{B}_0 d \sin \vartheta}{2r^2} \left[(1-j) \cosh \frac{r(1+j)}{d} + \frac{jd}{r} \sinh \frac{r(1+j)}{d} - \frac{2r}{d} \sinh \frac{r(1+j)}{d} \right].$$

Nepoznate konstante a i b određujemo iz uvjeta na granici kugle ($r = R$)

$$\underline{B}_{ru}(R, \vartheta) = \underline{B}_{rv}(R, \vartheta), \quad (7.4.90a,b)$$

$$\underline{B}_{\vartheta u}(R, \vartheta) = \mu_r \underline{B}_{\vartheta v}(R, \vartheta),$$

i one iznose

$$a = R^3 \frac{(2\mu_r + 1) \left[(1-j) \cosh \frac{R(1+j)}{d} + \frac{jd}{R} \sinh \frac{R(1+j)}{d} \right] - \frac{2R}{d} \sinh \frac{R(1+j)}{d}}{(\mu_r - 1) \left[(1-j) \cosh \frac{R(1+j)}{d} + \frac{jd}{R} \sinh \frac{R(1+j)}{d} \right] + \frac{2R}{d} \sinh \frac{R(1+j)}{d}}, \quad (7.4.91a,b)$$

$$b = \frac{R^2}{d} \frac{3\mu_r}{(\mu_r - 1) \left[(1-j) \cosh \frac{R(1+j)}{d} + \frac{jd}{R} \sinh \frac{R(1+j)}{d} \right] + \frac{2R}{d} \sinh \frac{R(1+j)}{d}}.$$

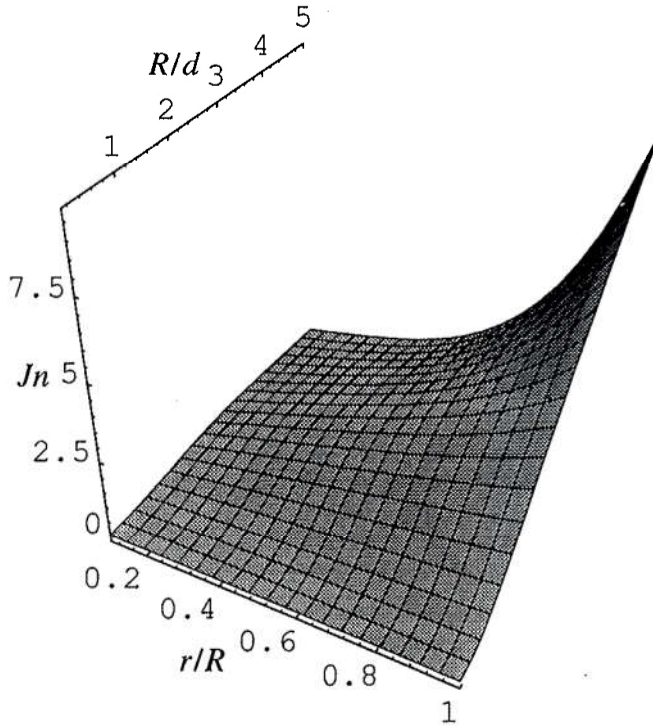
Gustoću vrtložnih struja u kugli određujemo pomoću

$$\underline{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{B}_u = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \underline{A}_u = \frac{1}{\mu} (-\Delta \underline{A}_u) = -j\omega \kappa \underline{A}_u, \quad (7.4.92)$$

i ona je

$$\underline{J}(r, \vartheta) = \frac{-3j \underline{H}_0 \left(\frac{R}{d} \right)^2 \frac{\sin \vartheta}{r} \left[(1-j) \cosh \frac{r(1+j)}{d} + \frac{jd}{r} \sinh \frac{r(1+j)}{d} \right]}{(\mu_r - 1) \left[(1-j) \cosh \frac{R(1+j)}{d} + \frac{jd}{R} \sinh \frac{R(1+j)}{d} \right] + \frac{2R}{d} \sinh \frac{R(1+j)}{d}} \underline{a}_\alpha. \quad (7.4.93)$$

Vrtložne struje teku u smjeru obilaznog kuta α , a raspodjelu normalizirane maksimalne vrijednosti gustoće vrtložnih struja u funkciji omjera r/R i R/d za kut $\vartheta = \pi/2$ prikazali smo na slici 7.4.18.



Slika 7.4.18. Raspodjela normalizirane maksimalne vrijednosti gustoće vrtložnih struja $J_n = J_{\text{maks}} R/H_0$ u kugli za $\vartheta = \pi/2$ i $\mu_r = 1$.

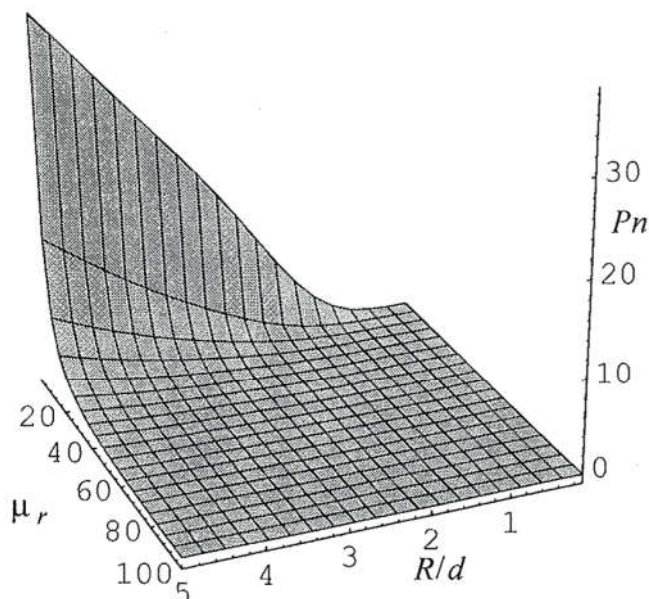
Gubitke u kugli određujemo pomoću izraza (7.3.10)

$$P_{g,sr} = \frac{1}{2\kappa} \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |J|^2 r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\alpha. \quad (7.4.94)$$

Korištenjem identiteta (7.4.29) i integracijom dobivamo konačni rezultat

$$\begin{aligned} P_{g,sr} &= 6\pi H_0^2 \frac{R}{\kappa} \left(\frac{R}{d} \right)^3 \frac{C}{D}, \\ C &= \sinh \frac{2R}{d} + \sin \frac{2R}{d} - \frac{d}{R} \left(\cosh \frac{2R}{d} - \cos \frac{2R}{d} \right), \\ D &= (\mu_r - 1)^2 \left[\cosh \frac{2R}{d} + \cos \frac{2R}{d} + \frac{d^2}{2R^2} \left(\cosh \frac{2R}{d} - \cos \frac{2R}{d} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{R} \left(\sinh \frac{2R}{d} + \sin \frac{2R}{d} \right) \right] + 2(\mu_r - 1) \frac{R}{d} \left(\sinh \frac{2R}{d} - \sin \frac{2R}{d} \right) + \\ &\quad + \frac{2R^2}{d^2} \left(\cosh \frac{2R}{d} - \cos \frac{2R}{d} \right). \end{aligned} \quad (7.4.95)$$

Na slici 7.4.19. prikazali smo ovisnost normaliziranih gubitaka o omjeru R/d i μ_r .



Slika 7.4.19. Ovisnost normaliziranih gubitaka $P_n = P_{g, sr} \kappa / (RH_0^2)$ o omjeru R/d i μ_r .

7.5. STRUJNE PETLJE U KVAZISTATIČKOM POLJU

Pod pojmom strujna petlja razumijevamo vodiče čiji je presjek dovoljno mali da raspodjelu gustoće struje po presjeku možemo smatrati jednolikom i u kvazistatičkim elektromagnetskim poljima. Tada ukupnu struju I kroz vodič presjeka S računamo kao

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = JS. \quad (7.5.1)$$

Iz rezultata prethodnog odjeljka vidimo da je omjer poprečnih dimenzija vodiča i dubine prodiranja osnovni kriterij za ocjenu je li raspodjela struje po presjeku jednolika. Budući da je dubina prodiranja frekventno ovisna veličina i valjanost približenja vodiča strujnom petljom je frekventno ovisna.

Rješavanje takvih zadataka temeljimo na integralnom obliku jednadžbi kvazistatičkog elektromagnetskog polja.⁴⁵ Jednadžba (7.1.11b) za strujne petlje postaje jednaka jednadžbi (6.1.5)

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = JS = I. \quad (7.5.2)$$

⁴⁵ Pogledati jednadžbe (7.1.11a – d)

Stoga kvazistatičko magnetsko polje u zadaćama sa strujnim petljama određujemo metodama koje smo opisali u poglavlju 6. za statička magnetska polja. Magnetsko polje je u tom slučaju vremenski ovisno, pa uzrokuje inducirano električno polje E_i koje određujemo pomoću jednadžbe (7.1.11a). Ako je zadana raspodjela naboja ρ električno polje E koje ona uzrokuje računamo metodama koje smo opisali u poglavlju 4. za statička električna polja.⁴⁶ Ukupno električno polje jest zbroj $E_i + E$.

7.5.1. Sustav mirnih strujnih petlji u kvazistatičkom polju

Razmotrimo sada sustav od N zatvorenih strujnih petlji u mirovanju. U njih dovodimo energiju pomoću vanjskog električnog polja E_s .⁴⁷ Gustoće struja u petljama su tada

$$\mathbf{J} = \kappa(\mathbf{E}_s + \mathbf{E}) = \kappa \left(\mathbf{E}_s - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right). \quad (7.5.3)$$

U svakoj strujnoj petlji je raspodjela struje jednolika, pa je za k -tu strujnu petlju gustoća struje $\mathbf{J}_k$ zadana s

$$\mathbf{J}_k = \frac{i_k}{S_k} \frac{d\mathbf{l}_k}{dl_k}, \quad (7.5.4)$$

gdje su i_k ukupna struja u k -toj petlji, S_k presjek k -te petlje a $d\mathbf{l}_k$ diferencijal luka osi petlje čiji smjer se poklapa sa smjerom struje u k -toj petlji. Ako jednadžbu (7.5.4) uvrstimo u (7.5.3), a zatim dobivenu jednadžbu skalarno pomnožimo sa $d\mathbf{l}_k$ i integriramo po zatvorenoj krivulji C_k koju čini os k -te petlje dobivamo

$$i_k \oint_{C_k} \frac{d\mathbf{l}_k}{\kappa S_k} = \oint_{C_k} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l}_k - \oint_{C_k} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}_k - \oint_{C_k} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l}_k. \quad (7.5.5)$$

U prvom poglavlju smo pokazali⁴⁸ da je linijski integral uz i_k otpor R_k k -te petlje. Prvi član na desnoj strani te jednadžbe je ukupna elektromotorna sila vanjskih izvora u k -toj petlji. Treći član je za zatvorenu petlju C_k jednak nuli, a drugi možemo pisati kao⁴⁹

$$- \oint_{C_k} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}_k = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (7.5.6)$$

⁴⁶ U kvazistatičkim elektromagnetskim poljima ne postoji interakcija ovog električnog polja i magnetskog polja.

⁴⁷ To polje mogu uzrokovati najrazličitiji izvori, ili priključak na električnu mrežu.

⁴⁸ Pogledati jednadžbu (1.4.3).

⁴⁹ Pogledati izraz (6.5.28).

i on predstavlja ukupnu elektromotornu silu induciranu zbog vremenske promjene magnetskog tijeka. Stoga za k -tu petlju vrijedi

$$R_k i_k + \frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}_k. \quad (7.5.7)$$

Ako petlje miruju promjenu magnetskog tijeka u vremenu može uzrokovati samo promjena struja. U jednostavnim materijalima ukupni magnetski tijek koji obuhvaća k -ta petlja je linearna funkcija jakosti struja u svim petljama

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^N L_{ik} i_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.5.8)$$

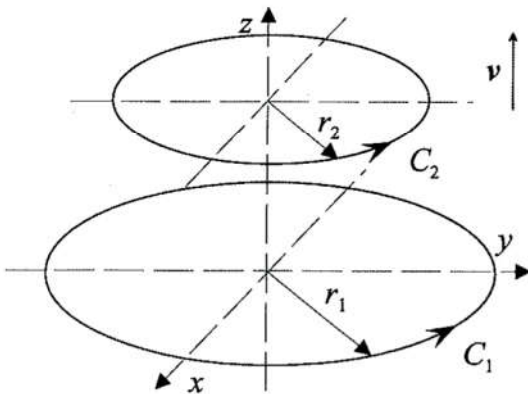
Za sustav mirujućih petlji induktiviteti L_{ik} su konstante, pa jednačba (7.5.5) poprima oblik

$$R_k i_k + \sum_{i=1}^N L_{ik} \frac{di_i}{dt} = \mathcal{E}_k. \quad (7.5.9)$$

Takve jednačbe možemo napisati i za sve ostale konture, pa dobivamo sustav od N linearnih diferencijalnih jednačbi za nepoznate struje i_k , $k = 1 \dots N$. Ako je zadana vremenska ovisnost vanjskih elektromotornih sila $\mathcal{E}_s(t)$, i početne vrijednosti struja $i_k(t=0)$ pomoću tog sustava možemo odrediti struje i_k u svakom trenutku t . Osim toga, jednačba (7.5.9) pokazuje da sustav strujnih petlji možemo nadomjestiti međuinaktivno povezanim serijskim $R-L$ krugovima.

Primjer 7.5.1. Dvije kružne strujne petlje u mirovanju

Dvije kružne strujne petlje polumjera r_1 i r_2 otpora R_1 i R_2 smještene su u zraku prema slici 7.5.1.



Slika 7.5.1. Dvije kružne strujne petlje

Ako kroz petlju C_1 teče struja $i_1 = I_{\text{maks}} \cos(\omega t)$ potrebno je odrediti struju i_2 u petlji C_2 uz uvjet $i_2(t=0) = 0$. Tu zadaću ćemo riješiti primjenom jednačbe (7.5.9) na petlju C_2

$$R_2 i_2 + L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} = 0 . \quad (7.5.10)$$

Rješenje te linearne diferencijalne jednadžbe jest

$$i_2(t) = B e^{-\frac{R_2}{L_{22}} t} - \frac{\omega L_{12} [\omega L_{22} \cos(\omega t) - R_2 \sin(\omega t)]}{\omega^2 L_{22}^2 + R_2^2} I_{\text{maks}} . \quad (7.5.11)$$

Nepoznatu konstantu B određujemo iz početnog uvjeta

$$i_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\omega^2 L_{12} L_{22}}{\omega^2 L_{22}^2 + R_2^2} I_{\text{maks}} . \quad (7.5.12)$$

Za proračun struje moramo odrediti međuinuktivitet L_{12} i samoinduktivitet L_{22} . U primjeru 6.8.1.1. izveli smo izraz (6.8.25) za vektorski magnetski potencijal kružne strujnice

$$A = \frac{\mu_0 I}{\pi k} \sqrt{\frac{R}{r}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right] a_\alpha \quad ; \quad k = \frac{4Rr}{(R+r)^2 + z^2} . \quad (7.5.13)$$

Međuinuktivitet između dvije zadane petlje računamo pomoću izraza (6.5.28) i on iznosi

$$L_{12} = \frac{\int_{C_2} A_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{I_1} = \mu_0 \sqrt{r_1 r_2} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right] . \quad (7.5.14)$$

Za određivanje samoinduktiviteta petlje C_2 moramo uzeti u račun njezin poprečni presjek. U suprotnome bi rezultat bio beskonačni induktivitet. Taj rezultat ukazuje na *fizikalno nemoguću* početnu pretpostavku da je struja u petlji C_2 sabijena u geometrijsku crtu. Pretpostavljamo kružni presjek petlje C_2 polumjera r_0 . Vanjski induktivitet L_{22v} te petlje određujemo pretpostavljajući da je ukupna struja sabijena u os i zanemarujući magnetski tijek u petlji. Obuhvaćeni vanjski magnetski tijek petlje možemo tada odrediti integracijom vektorskog magnetskog potencijala zadanog s (7.5.13), a vanjski induktivitet slijedi iz (7.5.14) ako za polumjere kružnih strujnica uvrstimo r_2 i $r_2 - r_0$, te $z = 0$

$$L_{22v} = \mu_0 \sqrt{r_1(r_1 - r_0)} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right] \quad ; \quad k^2 = \frac{4r_1(r_1 - r_0)}{(2r_1 - r_0)^2} . \quad (7.5.15)$$

Ovdje razmatramo zadaće u kojima vrijedi $r_0 \ll r_2$, pa modul eliptičkih integrala k možemo izraziti kao

$$k = 2 \frac{\sqrt{r_1(r_1 - r_0)}}{2r_1 - r_0} \Rightarrow k^2 \approx 1 - \left(\frac{r_0}{2r_1} \right)^2 \approx 1. \quad (7.5.16)$$

Proračun eliptičkih integrala u (7.5.15) je u tom slučaju bitno jednostavniji. Vrijedi $E(k) \approx E(1) = 1$, a za proračun $K(k)$ koristimo⁵⁰ $K[1 - (r_0/2r_1)^2] \approx \ln(8r_1/r_0)$. Konačni približni izraz za L_{22v} je

$$L_{22v} \approx \mu_0 r_1 \left(\ln \frac{8r_1}{r_0} - 2 \right). \quad (7.5.17)$$

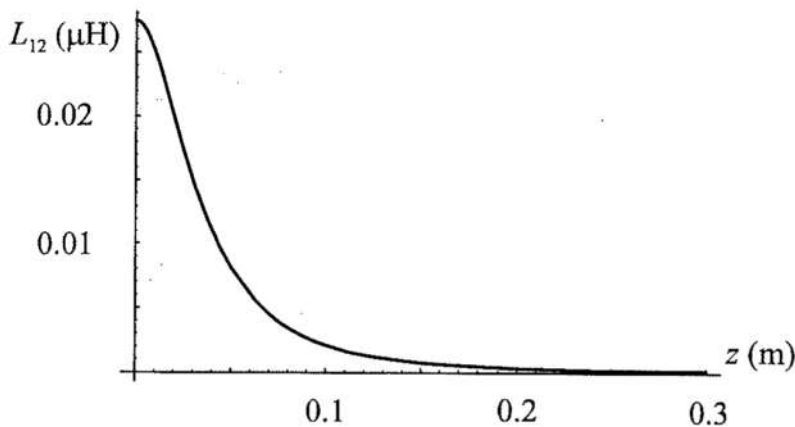
Magnetsko polje u unutrašnjosti vodiča približno je jednako polju koje bi pri istoj ukupnoj struji vladalo u ravnom vodiču. Stoga unutrašnji induktivitet L_{22u} možemo odrediti korištenjem rezultata primjera 6.5.1.⁵¹ za vodič dužine $2r_1\pi$

$$L_{22u} = \frac{\mu_0}{8\pi} 2r_1\pi = \frac{\mu_0 r_1}{4}. \quad (7.5.18)$$

Ukupni vlastiti induktivitet petlje C_2 iznosi

$$L_{22} = L_{22u} + L_{22v} \approx \mu_0 r_1 \left(\ln \frac{8r_1}{r_0} - \frac{7}{4} \right). \quad (7.5.19)$$

Za primjer proračuna odabrali smo strujne petlje polumjera $r_1 = 0.05$ m, $r_2 = 0.025$ m uz $r_0 = 0.0003$ m.⁵² Na slici 7.5.2 smo pokazali ovisnost međuinduktiviteta L_{12} o odrednici z u tom slučaju.



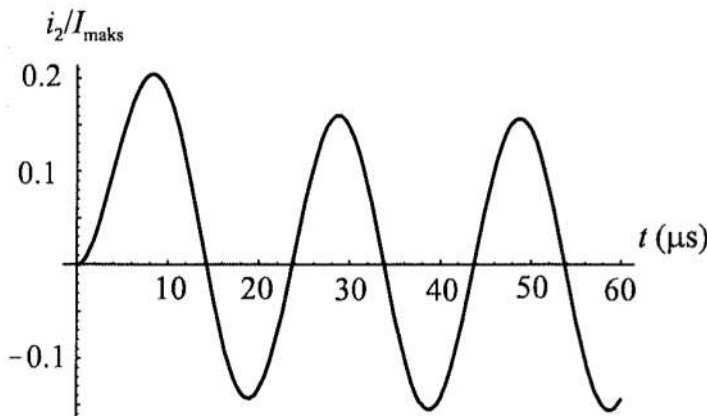
Slika 7.5.2. Ovisnost međuinduktiviteta dvaju kružnih strujnih petlji o udaljenosti

⁵⁰ Pogledati Prilog G, razvoj $K(k')$ u red po komplementarnom modulu $k'^2 = 1 - k^2$.

⁵¹ Pogledati jednažbu (6.5.6).

⁵² Za tu frekvenciju dubina prodiranja iznosi 0.0002956 m, pa iz rezultata primjera 7.4.3. slijedi da je pretpostavka o jednolikoj raspodjeli struje po presjeku vodiča opravdana.

Na slici 7.5.3. prikazali smo vremenski tijek jakosti struje i_2 u petlji C_2 za frekvenciju $f = 50$ kHz ako je $R_2 = 0.019 \Omega$, $L_{22} = 0.149 \mu\text{H}$ i $z = 0.01\text{m}$.



Slika 7.5.3. Vremenski tijek jakosti struje i_2 u mirujućoj petlji C_2 ako u petlji C_1 teče struja $i_1 = I_{\text{maks}} \cos(\omega t)$.

7.5.2. Gibanje strujne petlje u kvazistatičkom polju i elektromagnetska indukcija

Ako se vodljiva strujna petlja giba u promjenjivom magnetskom polju, moramo računati s oblikom jednadžbe (7.1.11a) koji uključuje *vremensku i prostornu promjenu magnetskog tijeka*

$$\oint_C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot n dS. \quad (7.5.20)$$

Ovdje je $\mathbf{E}_i$ inducirano električno polje,⁵³ a na desnoj strani je *totalni diferencijal magnetskog tijeka po vremenu*. Negativni predznak desne strane ukazuje na *Lenzovo*⁵⁴ pravilo: *inducirano električno polje prouzrokuje struju koja nastoji poništiti svoj uzrok (promjenu magnetskog tijeka)*. Na slici 7.5.3. prikazali smo gibanje vodljive petlje u promjenjivom magnetskom polju.

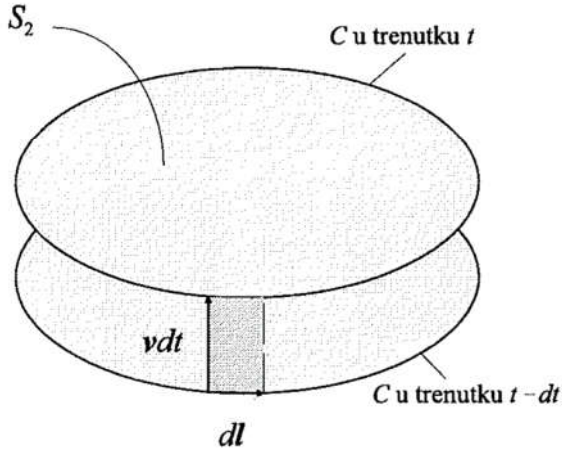
Ako sa S_1 označimo položaj površine petlje u trenutku $t - dt$, a sa S_2 položaj površine petlje u trenutku t totalni diferencijal magnetskog tijeka po vremenu jest

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot n dS = \frac{d}{dt} \left[\int_{S_2} \mathbf{B}(t) \cdot n dS_2 - \int_{S_1} \mathbf{B}(t-dt) \cdot n dS_1 \right]. \quad (7.5.21)$$

Oplošje volumena koji obuhvati petlja pri gibanju formiraju S_1 , S_2 i površina koju prebriše petlja.

⁵³ Integral po zatvorenoj krivulji komponente električnog polja koja potječe od naboja je nula.

⁵⁴ Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804 – 1865), ruski fizičar njemačkog podrijetla.



Slika 7.5.4. Gibanje strujne petlje C u promjenjivom magnetskom polju

Ta prebrisana površina iznosi

$$\oint_C dl \times v dt . \quad (7.5.22)$$

Primijenimo sada Gaussov teorem o divergenciji⁵⁵ na volumen koji obuhvaća petlja pri gibanju

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}(t) dV = 0 = \int_{S_2} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_1} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS + dt \oint_C \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{v} . \quad (7.5.23)$$

Negativni predznak ispred integrala po S_1 slijedi iz usmjerenosti okomice na S_1 u volumen V . Budući da vrijedi

$$\mathbf{B}(t - dt) = \mathbf{B}(t) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt , \quad (7.5.24)$$

integral po S_1 u (7.5.23) možemo napisati u obliku

$$\int_{S_1} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS_1 = \int_{S_1} \mathbf{B}(t - dt) \cdot \mathbf{n} dS_1 + dt \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS_1 . \quad (7.5.25)$$

Iz jednadžbi (7.5.24,25) i (7.3.4) slijedi

$$\int_{S_2} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS_2 - \int_{S_1} \mathbf{B}(t - dt) \cdot \mathbf{n} dS_1 = dt \left[\int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS_1 - \oint_C \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) \right] . \quad (7.5.26)$$

Uvrštenjem (7.5.26) u (7.5.20) uz korištenje pravila o mješovitom produktu vektora⁵⁶

⁵⁵ Pogledati Prilog C.

⁵⁶ Pogledati Prilog C.

dobivamo

$$\oint_C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} . \quad (7.5.27)$$

Prvi član na desnoj strani ove jednadžbe⁵⁷ opisuje *induciranje električnog polja zbog promjene magnetskog polja*, a drugi zbog *gibanja u magnetskom polju*.

Diferencijalne jednadžbe za struje u sustavu strujnih petlji koje se gibaju možemo izvesti iz jednadžbe (7.5.8). Ako se k -ta petlja giba u smjeru odrednice s brzinom v totalni diferencijal magnetskog tijeka po vremenu jest

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_k}{dt} &= \sum_{i=1}^N \left\{ L_{ik} \frac{di_i}{dt} + i_i \frac{dL_{ik}}{dt} \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ L_{ik} \frac{di_i}{dt} + i_i \frac{dL_{ik}}{ds} \frac{ds}{dt} \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ L_{ik} \frac{di_i}{dt} + i_i v \frac{dL_{ik}}{ds} \right\} , \end{aligned} \quad (7.5.28)$$

pa jednadžba

$$R_k i_k + \sum_{i=1}^N \left\{ L_{ik} \frac{di_i}{dt} + i_i v \frac{dL_{ik}}{ds} \right\} = \mathcal{E}_k , \quad (7.5.29)$$

vrijedi za struju u k -toj petlji koja se giba u smjeru odrednice s brzinom v .

Primjer 7.5.2.1. Gibanje jedne kružne strujne petlje u polju druge

Pretpostavimo da se strujna petlja C_2 koja se nalazi u polju petlje C_1 protjecane strujom $i_1(t) = I_{\text{maks}} \cos(\omega t)$ prema slici 7.5.1. u trenutku $t = 0$ počinje gibati jednolikom brzinom v u smjeru odrednice z . Treba odrediti struju u petlji C_2 .

Za rješenje ove zadaće koristit ćemo jednadžbu (7.5.29) primijenjenu na petlju C_2

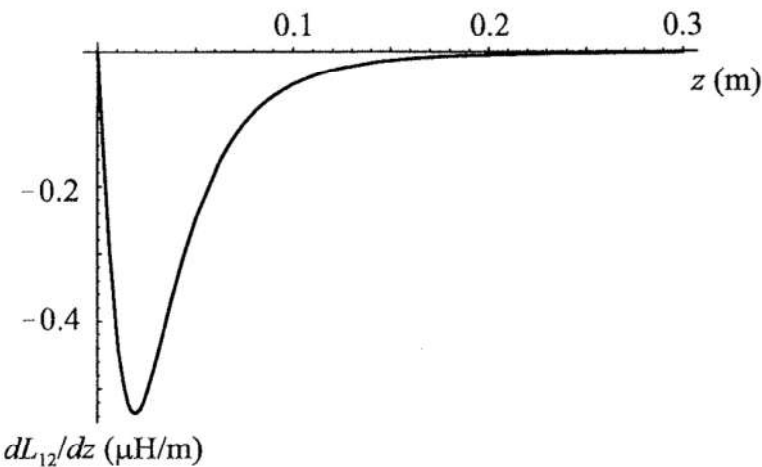
$$R_2 i_2 + L_{12} \frac{di_1}{dt} + i_1 v \frac{dL_{12}}{dz} + L_{22} \frac{di_2}{dt} = 0 , \quad (7.5.30)$$

uz jednadžbu $z = vt$ i početni uvjet $z(t=0) = d$. Novi član u jednadžbi je derivacija međuinuktiviteta L_{12} po varijabli z . Njega određujemo iz jednadžbe (7.5.14) uz korištenje identiteta (6.8.27) i on iznosi

$$\frac{dL_{12}}{dz} = -\mu_0 \frac{zk}{4\sqrt{r_1 r_2}} \left[\frac{2-k^2}{1-k^2} E(k) - 2K(k) \right] . \quad (7.5.31)$$

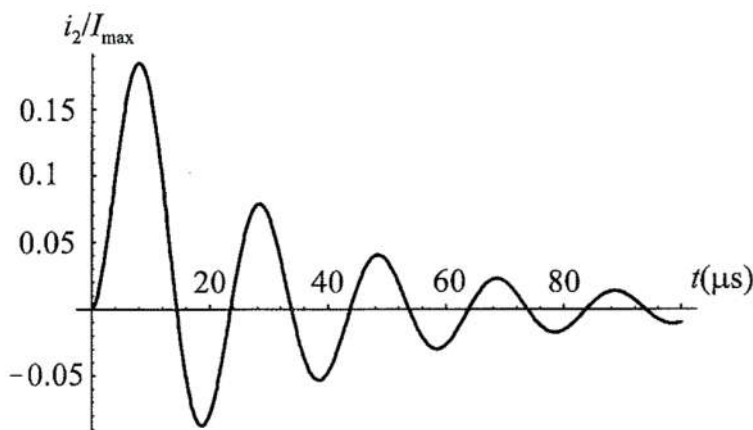
⁵⁷ Ova jednadžba poznata je pod imenom Faradayev zakon o elektromagnetskoj indukciji, a eksperimentalno ga je utvrdio engleski fizičar Michael Faraday 1831. godine.

Na slici 7.5.5. prikazali smo ovisnost derivacije međuinduktiviteta o varijabli z za strujne petlje čije smo dimenzije zadali u primjeru 7.5.1.1.



Slika 7.5.5. Ovisnost derivacije međuinduktiviteta dviju kružnih strujnih petlji po varijabli z o udaljenosti

Jednadžba (7.5.30) je nelinearna diferencijalna jednadžba i možemo je riješiti samo numerički.⁵⁸ Na slici 7.5.6. pokazali smo rješenje za struju i_2 s istim podacima koji su vrijedili u primjeru 7.5.1.1. uz $z(t=0) = 0.01$ m i $v = 1000$ m/s.



Slika 7.5.6. Vremenski tijek jakosti struje i_2 ako se petlja C_2 u trenutku $t = 0$ počinje gibati iz točke $z = 0.01$ m brzinom $v = 1000$ m/s a u petlji C_1 teče struja $i_1 = I_{\text{maks}} \cos(\omega t)$.

7.5.3. Elektromehanička pretvorba energije

Elektromehanički pretvarači energije pretvaraju mehaničku energiju u električnu ili obratno. Oni koriste električne ili magnetske sile, a imaju najmanje dva priključka na koje vezemo izvor ili prijamnik. U praktičnim primjenama najčešći su pretvarači koji koriste magnetske sile zbog potrebe za manjim volumenom pretvarača pri istoj snazi. U poglavlju 3. pokazali smo da je naprezanje na površini vodiča u električnom polju⁵⁹ u

⁵⁸ Za rješenje ove jednadžbe koristili smo metodu Runge-Kutta četvrtog reda. Detaljnije pogledati u R.W. Hamming, *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, Tokyo 1973.

⁵⁹ Pogledati članak 3.5.1.

zraku $t^e = \epsilon_0 E^2/2$, a naprezanje na površini vodiča u magnetskom polju $t^m = B^2/2\mu_0$. Najveća jakost električnog polja koju možemo ostvariti u zraku je oko 3 MV/m, a najveće jakosti magnetskog polja koje možemo ostvariti na površini feromagnetskih materijala u zraku su reda veličine nekoliko T. Omjer ostvarljivih naprezanja na površinu vodiča u magnetskom i električnom polju u zraku jest

$$\frac{t^m}{t^e} \approx \frac{B_{\text{maks}}^2}{\mu_0 \epsilon_0 E_{\text{maks}}^2} \approx 10^4, \quad (7.5.32)$$

pa za postizanje jednake ukupne sile trebamo bitno manji volumen elektromehaničkih pretvarača koji koriste magnetske sile. Stoga ćemo se ovdje ograničiti na razmatranje takvih "magnetomehaničkih" pretvarača.

Iz općeg načela o očuvanju energije slijedi da ukupna energija koju unosimo u pretvarač mora biti jednaka zbroju promjene kinetičke energije sustava, promjene energije pohranjene u magnetskom polju i Jouleovih gubitaka u kvazistatičkom elektromagnetskom polju.⁶⁰ Ako je ukupna sila F na pokretni dio pretvarača koji se giba brzinom v od položaja r_1 do r_2 zbroj magnetske F_{mag} i mehaničke sile F_{meh} promjena kinetičke energije jednaka je radu koji te sile obave

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = \int_0^t (F_{\text{mag}} + F_{\text{meh}}) \cdot v dt = \int_0^t dW_{\text{kin}}. \quad (7.5.33)$$

Energetsku bilancu elektromagnetskog dijela sustava, odnosno strujne petlje u kojoj se pokretni dio pretvarača nalazi, u istom vremenskom intervalu $0 - t$ možemo dobiti ako jednadžbu (7.5.5) pomnožimo sa strujom i integriramo

$$\int_0^t Ri^2 dt + \int_0^t i d\Phi = \int_0^t i \mathcal{E}. \quad (7.5.34)$$

Energija koju unosimo u sustav jest zbroj elektromagnetske energije koju unosimo posredstvom vanjskog polja i rada koji obave mehaničke sile, pa iz načela očuvanja energije slijedi

$$\int_0^t i \mathcal{E} dt + \int_0^t F_{\text{meh}} \cdot v dt = \int_0^t (dW_{\text{mag}} + dW_{\text{kin}}) + \int_0^t i^2 R dt. \quad (7.5.35)$$

Ako jednakosti (7.5.19,20) uvrstimo u (7.5.21) dobivamo zakon o elektromagnetskoj pretvorbi energije u magnetomehničkim pretvaračima

⁶⁰ Zbog jednostavnosti i jasnoće opisa ovdje zanemarujemo sve mehaničke gubitke i akumuliranu elastičnu energiju.

$$\int_0^t i d\Phi = \int_0^t \mathbf{F}_{mag} \cdot \mathbf{v} dt + \int_0^t dW_{mag} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}_{mag} \cdot d\mathbf{r} + \int_0^t dW_{mag} . \quad (7.5.36)$$

Ako pretpostavimo da je pohranjena magnetska energija jedinstvena i diferencijabilna funkcija od magnetskog tijeka Φ i pomaka r možemo pisati

$$dW_{mag} = \frac{\partial W_{mag}}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial W_{mag}}{\partial r} dr . \quad (7.5.37)$$

Tada iz (7.5.22) slijedi

$$i = \frac{\partial W_{mag}(\Phi, r)}{\partial \Phi} ; \quad F_{mag} = - \frac{\partial W_{mag}(\Phi, r)}{\partial r} . \quad (7.5.38)$$

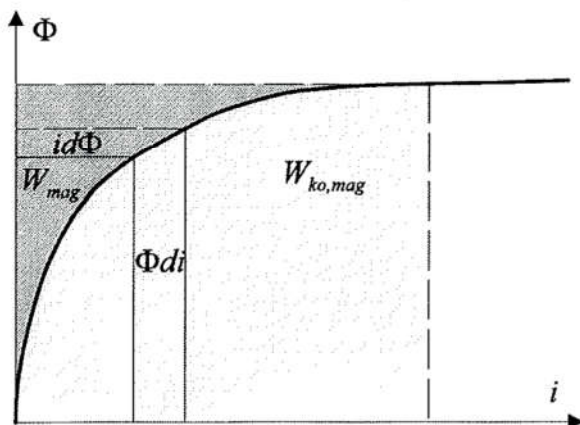
pa možemo odrediti silu na pomičnu petlju i struju kroz nju iz magnetske energije. Ako je magnetska energija zadana u funkciji struje i pomaka r , uvodimo magnetsku koenergiju $W_{ko, mag}$ kao

$$W_{ko, mag}(i, r) = -W_{mag}(\Phi, r) + i\Phi . \quad (7.5.39)$$

Korištenjem te definicije dobivamo

$$\Phi = \frac{\partial W_{ko, mag}(i, r)}{\partial i} ; \quad F_{mag} = \frac{\partial W_{ko, mag}(i, r)}{\partial r} . \quad (7.5.40)$$

Magnetsku koenergiju kao površinu ispod krivulje $\Phi(i)$ i magnetsku energiju kao površinu ispod krivulje $i(\Phi)$ pokazali smo na slici 7.5.4. Za jednostavne materijale te su površine jednake.



Slika 7.5.7. Magnetska energija i koenergija

Jednadžbe gibanja pokretnog dijela pretvarača možemo izvesti izravnom primjenom

Newtonovih⁶¹ zakona i vektorske kinematike,⁶² ili pomoću skalarne energetske formulacije⁶³ korištenjem Lagrangeovih⁶⁴ jednažbi.

Primjer 7.5.3.1. Dvije kružne strujne petlje kao magnetski akcelerator

Namjena magnetskih akceleratora jest ubrzavanje masivnih objekata. Za primjer analize koju trebamo provesti pri projektiranju takve naprave ovdje ćemo razmotriti jednostavnu geometriju koju smo prikazali slikom 7.5.1. Pretpostavljamo da je petlja C_1 učvršćena i da je struja kroz nju zadana, a da se petlja C_2 može gibati u smjeru z pa je brzina

$$i_1(t) = \begin{cases} I_{\text{maks}} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau_0}\right) & ; \quad 0 \leq t \leq \tau_0 , \\ 0 & ; \quad \tau_0 < t . \end{cases} \quad (7.5.41)$$

Za određivanje struje i_2 u petlji C_2 , brzine v petlje C_2 te prijednog puta petlje C_2 postavljamo tri diferencijalne jednažbe. Petlja C_2 može se gibati samo u smjeru z pa je brzina

$$v = \frac{dz}{dt} . \quad (7.5.42)$$

Silu kojom magnetski dio kvazistatičkog elektromagnetskog polja djeluje na petlju C_2 računamo iz izraza (7.5.38). Iz uvjeta ravnoteže sila slijedi druga diferencijalna jednažba

$$m \frac{dv}{dt} = -F_{\text{mag}} = \frac{\partial W_{\text{mag}}}{\partial r} = i_1(t) i_2(t) \frac{dL_{12}(z)}{dz} . \quad (7.5.43)$$

Treća diferencijalna jednažba slijedi iz (7.5.29)

$$R_2 i_2(t) + L_{12} \frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) v \frac{dL_{12}(z)}{dz} + L_{22} \frac{di_2(t)}{dt} = 0 . \quad (7.5.44)$$

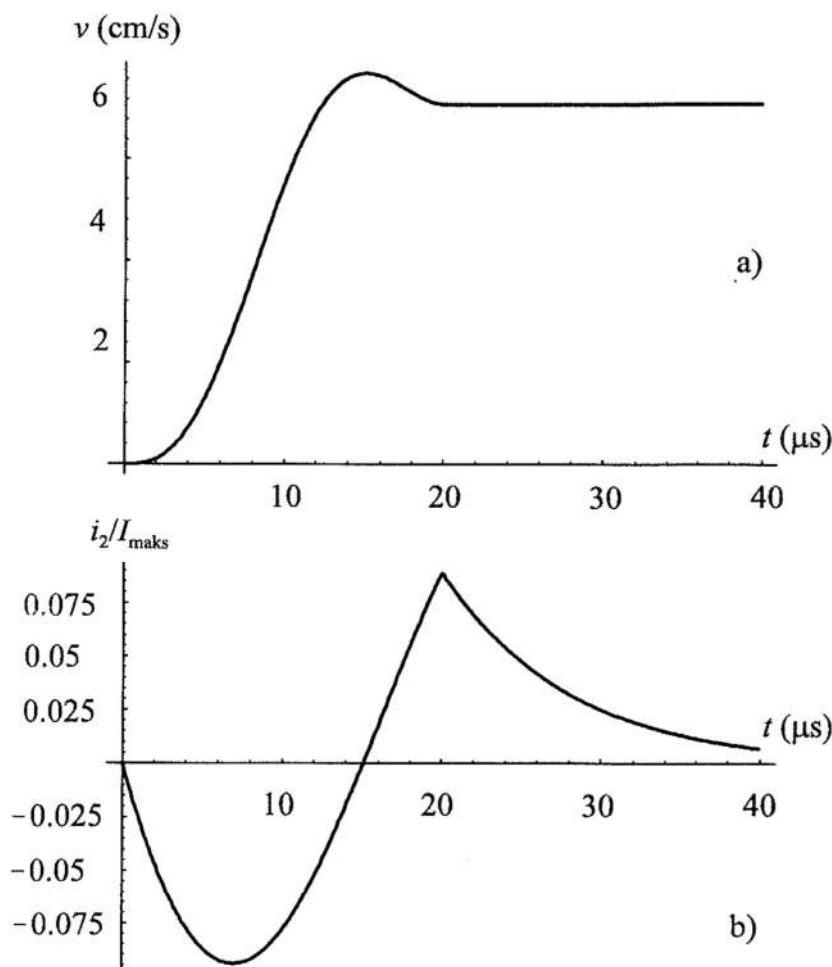
Taj sustav nelinearnih diferencijalnih jednažbi možemo riješiti samo numerički. Ovisnost brzine petlje C_2 i jakosti struje i_2 kroz nju o vremenu za podatke o petlji jednake onima iz primjera 7.5.1.1. uz $\tau_0 = 20 \mu\text{s}$ i $m = 0.4 \text{ g}$ pokazali smo na slikama 7.5.8a,b.

⁶¹ Sir Isaac Newton (1643 – 1727), engleski matematičar i fizičar.

⁶² Pogledati P. Kulišić, *Mehanika i toplina*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

⁶³ Detaljnije pogledati u H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wessley, Reading, 1950.

⁶⁴ Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), francuski matematičar i fizičar.



Slika 7.5.8. a) Vremenska ovisnost brzine v petlje C_2 i b) ovisnost normalizirane jakosti struje i_2/I_{maks} kroz petlju C_2 , ako kroz petlju C_1 poteče struja impulsnog oblika zadanog izrazom (7.5.41).

7.6. ELEKTROMAGNETSKA POLJA I ELEKTRIČNI KRUGOVI

Teorija električnih krugova temelji se na Ohmovom, Faradayevom i Kirchhoffovim zakonima. Ti zakoni su izvedeni iz eksperimentalnih opažanja i nastali su prije Maxwellova utemeljenja teorije elektromagnetskih polja. Poopćavanjem tih jednostavnih zakonitosti teorija polja je u biti i razvijena. Namjera nam je da u ovom odjeljku pojašnimo odnos zakona teorije električnih krugova i teorije elektromagnetskih polja.

Sve zadaće u elektromagnetizmu su *četverodimenzionalne* zadaće elektromagnetskih polja, budući da su veličine polja funkcije vremena i prostora. U prethodnim poglavljima pokazali smo da analitičkim metodama možemo rješavati samo geometrijski relativno jednostavne zadaće elektromagnetskih polja s LIH materijalima. Zadaće koje se javljaju u projektiranju i analizi elektromagnetskih naprava i sustava po složenosti daleko nadilaze ta ograničenja. Stoga cijelu domenu složene zadaće dijelimo na subdomene u kojima možemo riješiti elektromagnetsko polje bilo analitičkim, bilo numeri-

čkim postupcima.⁶⁵ Lokalna naprezanja u subdomenama i integralne značajke subdomena određujemo iz rješenja polja.⁶⁶ Zatim povezujemo integralne značajke subdomena u *nadomjesni električni krug*. Osnovne veličine u električnim krugovima su struje i naponi, a funkcije su samo vremena. Rješavanjem *jednodimenzionalne* zadaće nadomjesnog električnog kruga dobivamo vrlo jednostavno i u velikom broju slučajeva dovoljno točno rješenje cijele početne zadaće.

Za valjanu primjenu takvog postupka moramo poznavati ograničenja koja je potrebno zadovoljiti da bi konačno rješenje bilo dovoljno točno. Dva glavna koraka u svođenju *četverodimenzionalne* zadaće polja na *jednodimenzionalnu* zadaću kruga jesu

1. Uvođenje naponskih i strujnih izvora. Propisujemo da su napon, odnosno struja izvora zadane funkcije u vremenu i neovisne o prostoru.
2. Drugi korak je pretpostavka da unošenje materijala donosi promjenu u elektromagnetsko polje tako da za konačno polje vrijedi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) , \quad (7.6.1)$$

gdje je $\mathbf{E}'$ polje uzrokovano strujama i nabojima induciranim u materijalu. $\mathbf{E}_s$ je vanjsko polje koje smo propisali, a neovisno je o induciranim nabojima i strujama. U terminima teorije krugova možemo reći da dodavanje tereta ne mijenja značajke izvora, pa govorimo o idealnim izvorima.

Električni krugovi sastoje se od *grana* koje se sastaju u *čvorovima*. Temeljne postavke teorije krugova jesu

1. Jakost struje jednaka je u svakoj točki jedne grane, a struje kroz N grana koje se sastaju u čvoru zadovoljavaju prvi Kirchhoffov zakon

$$\sum_{k=1}^N i_k(t) = 0 . \quad (7.6.2)$$

2. Svakom paru čvorova mreže može se pridružiti jedinstvena vrijednost napona među njima. Taj napon ne ovisi o obliku grana kojima su čvorovi povezani, niti o putu po kojem ga izračunavamo. Naponi N grana koje čine *zatvorenu konturu* zadovoljavaju drugi Kirchhoffov zakon

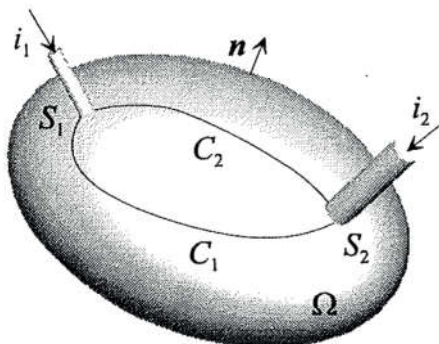
$$\sum_{k=1}^N u_k(t) = 0 . \quad (7.5.3)$$

Iz tih postavki slijede uvjeti koje podjela složene elektromagnetske zadaće na subdomene mora zadovoljavati. Na slici 7.6.1. prikazali smo subdomenu Ω koju želimo nado-

⁶⁵ U poglavljima 9. i 10. ćemo opisati osnove numeričkih postupaka za rješavanje elektromagnetskih polja.

⁶⁶ U poglavljima 4, 5, 6. i 7. pokazali smo da elektromagnetsko polje, ili njegove dijelove, možemo nadomjestiti integralnim značajkama: kapacitetom, otporom i induktivitetom.

mjestiti granom nadomjesne mreže.



Slika 7.6.1. Subdomena elektromagnetskog polja

Struju dovodimo u Ω putem dvaju priključaka površina S_1 i S_2 za koje pretpostavljamo da su idealno vodljivi. Unutar Ω vlada elektromagnetsko polje koje zadovoljava Maxwellove jednadžbe. Neka je površina $S = S_\Omega - S_1 - S_2$ gdje je S_Ω površina koja ograničava cijelu domenu Ω . Da bi struje tekle samo kroz priključke, odnosno da bi bilo valjano približenje Ω s granom, mora na površini S okomita komponenta struje biti jednaka nuli

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{n} \cdot \left(\kappa \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (7.6.4)$$

Taj uvjet zadovoljavaju subdomene Ω za koje je okomita komponenta jakosti električnog polja jednaka nuli na S u slučaju vodljivog materijala izvan površine S , i za koje možemo zanemariti član $\partial \mathbf{D} / \partial t$ na površini S . To znači da takvo nadomještanje možemo provesti samo u elektromagnetskim poljima⁶⁷ za koja vrijedi kvazistatičko približenje.⁶⁸

Da bi vrijedio prvi Kirchhoffov zakon, dimenzije dijela elektromagnetskog polja koje nadomještamo čvorom moraju biti takve da u njima nema zamjetnog gomilanja naboja. Tada on slijedi iz jednadžbe kontinuiteta budući da je $\rho = 0$.

Da bi druga postavka vrijedila, magnetsko polje izvan dijela polja koji nadomještamo mora biti zanemarivo. Ako su S_1 i S_2 idealno vodljive, njihov potencijal je konstantan. U poglavlju 2. smo pokazali da se napon između njih računa kao linijski integral vektora jakosti električnog polja od jedne do druge površine. Napon između S_1 i S_2 na slici 7.6.1. možemo izračunati po krivulji C_1

$$U_{S_1-C_1-S_2} = - \int_{S_1-C_1-S_2} \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) d\mathbf{l}, \quad (7.6.5)$$

⁶⁷ To nadomještanje nazivamo i nadomještanje *koncentriranim značajkama*. Ako ovaj uvjet nije ispunjen, pribjegavamo nadomještanju *distribuiranim značajkama*. Pogledati članak 8.7.1.

⁶⁸ To je u biti ogrničenje dimenzija Ω . Pogledati članke 7.1.1. i 7.2.3.

i krivulji C_2

$$U_{s_1-c_2-s_2} = - \int_{s_1-c_2-s_2} \left(\nabla\varphi + \frac{\partial A}{\partial t} \right) dl . \quad (7.6.6)$$

Razlika tih dvaju napona jest

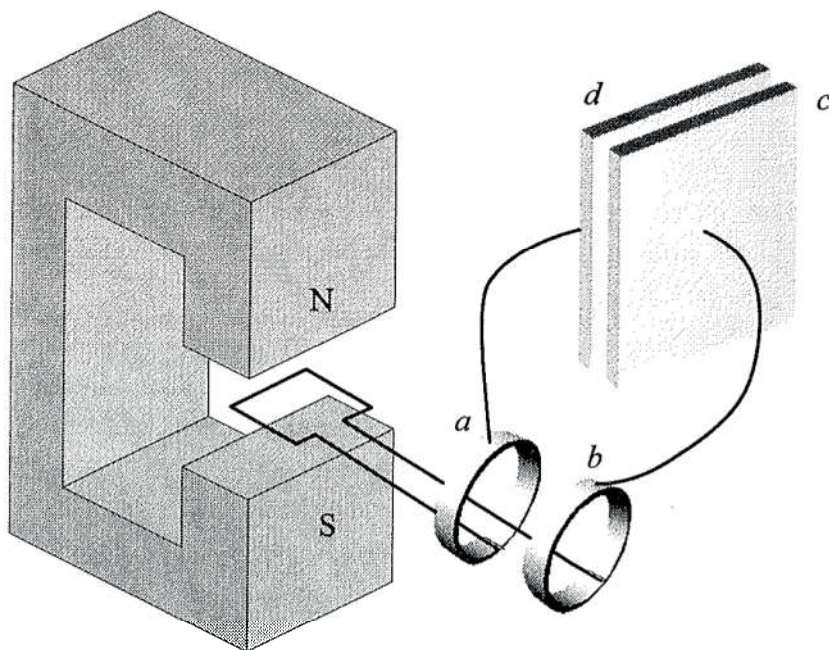
$$\begin{aligned} U_{s_1-c_1-s_2} - U_{s_1-c_2-s_2} &= - \int_{s_1-c_1-s_2} \left(\nabla\varphi + \frac{\partial A}{\partial t} \right) dl - \int_{s_1-c_2-s_2} \left(\nabla\varphi + \frac{\partial A}{\partial t} \right) dl = \\ &= - \oint_{s_1-c_1-s_2-c_2-s_1} \frac{\partial A}{\partial t} dl = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} , \end{aligned} \quad (7.6.7)$$

pa je napon neovisan o putanji samo ako se magnetsko polje izvan dijela polja koje nadomještamo granom može zanemariti. Drugi Kirchhoffov zakon u tom slučaju slijedi iz

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum u_k = 0 . \quad (7.6.8)$$

U većini zadaća uvjeti koje smo prethodno naveli, strogo uzeto, nisu zadovoljeni. No to ne znači da nadomještanje krugovima ne možemo primijeniti. Jedino moramo imati na umu da je konačno rješenje toliko blizu točnom rješenju koliko točno podjela na subdomene zadovoljava ove uvjete.

Pojasnimo sada prethodno opisani postupak primjerom. Zadaću elektromagnetskog polja prikazali smo slikom 7.6.2.



Slika 7.6.2. Zadaća elektromagnetskog polja

Permanentni magnet savijen je u obliku slova C. U zračnom rasporu mehaničkom silom okrećemo strujnu petlju jednolikom kružnom brzinom ω . Izvodi petlje klize preko četkica po kliznim prstenovima. Oni su spojeni sa žicom do kondenzatora i natrag. Ako bi ovu, u biti relativno jednostavnu zadaću, željeli riješiti kao zadaću polja, složenost geometrije, značajki materijala permanentnog magneta i matematičkog modela dovela bi do vrlo zamršene zadaće za čije rješenje bi morali koristiti numeričke postupke i moćna računala. Stoga koristimo približno rješenje. Petlju koja rotira u magnetskom polju permanentnog magneta nadomještamo izvorom napona. Napon na stezaljkama izvora jest

$$u_{ab}(t) = \oint_C \mathbf{E}_S \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_C} \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{n} dS . \quad (7.6.9)$$

Dio petlje C u kojem se inducira napon nalazi se u polju permanentnog magneta i predstavlja namot generatora. Budući da je izvan zračnog raspora magnetsko polje permanentnog magneta zanemarivo, slijedi da napon izvora ne ovisi o obliku petlje izvan raspora, pa je nadomještanje izvorom napona zadovoljavajuće. Napon izvora određujemo pomoću Faradayevog zakona, uz pretpostavku da je magnetsko polje u rasporu magneta homogeno.⁶⁹ Zbog vrtnje namota jednolikom kružnom brzinom obuhvaćeni magnetski tijek se mijenja po sinusnom zakonu, pa je i napon nadomjesnog izvora sinusna funkcija vremena.

Na površini, ili unutar vodiča teče struja gustoće

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} = \kappa (\mathbf{E}_S + \mathbf{E}') . \quad (7.6.10)$$

Inducirano polje $\mathbf{E}'$ određujemo pomoću elektromagnetskih potencijala

$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}(r,t)}{\partial t} , \quad (7.6.11)$$

pa iz pretpostavke (7.6.1) i jednadžbi (7.6.10,11) slijedi

$$\mathbf{E}_S = \frac{\mathbf{J}}{\kappa} + \nabla\varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} . \quad (7.6.12)$$

Integriranjem po vodljivom dijelu petlje dobivamo

$$\int_C \mathbf{E}_S \cdot d\mathbf{l} = \int_C \frac{\mathbf{J}}{\kappa} \cdot d\mathbf{l} + \int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} + \int_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} , \quad (7.6.13)$$

⁶⁹ Za točnije rješenje trebali bismo riješiti magnetsko polje takvog magneta. No ovdje tražimo približno rješenje cijele zadaće, pa bi inzistiranje na prevelikoj točnosti rješenja pojedinih subdomena nepotrebno zamrsilo konačno rješenje, a doprinos točnosti konačnog rješenja bio bi zanemariv.

gdje smo krivulju integracije odabrali po površini vodiča paralelno osi vodiča. Izraz (7.6.12) ne možemo integrirati kroz razmak između ploča, budući da je u tom području $\kappa = 0$ i $J = 0$, pa je prvi član desne strane tamo neodređen. Ako je odnos ω i dimenzija zadane takav da raspodjelu struje po presjeku vodiča možemo smatrati jednolikom, prvi član na desnoj strani izraza (7.6.13) možemo napisati kao

$$i \int_c^d \frac{dl}{\kappa S} = iR, \quad (7.6.14)$$

gdje je R otpor vodljivog dijela zadane. Za drugi član desne strane izraza (7.6.13) vrijedi

$$\int_c^d \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \varphi_c - \varphi_d, \quad (7.6.15)$$

i on je jednak razlici potencijala na pločama kondenzatora. Ako je razmak između tih ploča mali i ako je naboj na površini vodiča zanemariv u odnosu na naboj nagomilan na pločama kondenzatora, razlika potencijala među njima bit će proporcionalna naboju

$$\varphi_c - \varphi_d = \frac{q}{C}, \quad (7.6.16)$$

gdje je C kapacitet kondenzatora.⁷⁰ Budući da je put integracije gotovo zatvorena krivulja (razmak između ploča kondenzatora je vrlo mali) za zadnji član desne strane izraza (7.6.13) vrijedi

$$\int_c^d \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} \approx \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}. \quad (7.6.17)$$

Član na lijevoj strani (7.6.13) odgovara naponu izvora jer $\mathbf{E}_s$ izvan rasporeda magneta zanemarujemo. Konačno, uz navedene pretpostavke možemo izraz (7.6.13) napisati u obliku

$$u_{ab} = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}, \quad (7.6.18)$$

pa je prvo približenje ove zadane serijski R - L - C krug spojen na sinusni izvor napona.

Integrali u (7.6.13) iz kojih smo izveli nadomjesni otpor i induktivitet obuhvaćaju cijeli vodljivi dio zadane, pa su i tako određeni otpori i induktiviteti svojstvo cijele zatvorene, ili gotovo zatvorene petlje. No možemo govoriti o otporu i induktivitetu raznih dijelova takve petlje. Time uvodimo ideju para čvorova i napona između njih.

⁷⁰ Pogledati odjeljak 4.4.

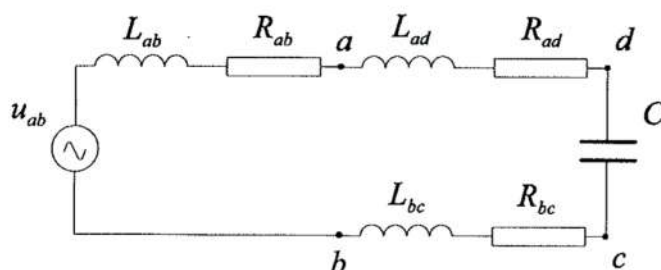
Ako te čvorove označimo s m i n , napon među njima s $u_{mn}(t)$, a struju koja teče između njih s $i_{mn}(t)$ onda umnožak $u_{mn}(t)i_{mn}(t)$ daje snagu koju predajemo dijelu vodljive petlje između čvorova m i n . Prema tome, napon koji pridružujemo dijelu petlje $m - n$ s otporom R_{mn} i induktivitetom L_{mn} povezujemo sa strujom kroz taj dio petlje pomoću izraza

$$u_{mn}(t) = Ri_{mn}(t) + L \frac{di_{mn}(t)}{dt} . \quad (7.6.19)$$

Ako želimo saznati približne napone između točaka a , b , c i d možemo jednadžbu (7.1.13) napisati kao

$$\begin{aligned} \int_c^d \mathbf{E}_S \cdot d\mathbf{l} &= \int_c^d \frac{\mathbf{J}}{\kappa} \cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} = \\ &= \int_c^b \left(\frac{\mathbf{J}}{\kappa} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{l} + \int_b^a \left(\frac{\mathbf{J}}{\kappa} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{l} + \int_a^d \left(\frac{\mathbf{J}}{\kappa} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \\ &= (R_{ab} + R_{bc} + R_{ad})i(t) + (L_{ab} + L_{bc} + L_{ad}) \frac{di(t)}{dt} + \frac{q}{C} . \end{aligned} \quad (7.6.20)$$

Nadomjesni električni krug za takvu podjelu početne zadaće na subdomene prikazali smo na slici 7.6.3.



Slika 7.6.3. Nadomjesni električni krug zadaće prikazane slikom 7.6.2.

POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 7.

- J. Van Bladel, *Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1964.
E.V. Bohn, *Introduction to Electromagnetic Fields and Waves*, Addison-Wessley, Reading, 1968.
H. Hofmann, *Das Electromagnetische Feld*, Springer Verlag, Wien, 1974.
J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York, 1962.
K. Meetz, W.L. Engl, *Electromagnetische Felder*, Springer Verlag, Berlin, 1980.
F.C. Moon, *Magneto – Solid Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
P. Silvester, *Modern Electromagnetic Fields*, Prentice-Hall International, London, 1968.

KAZALO

- Admitancija, 669
admitivnost, 445–447, 449, 450
Ampèreov kružni zakon, 21–22
– poopćeni, 23
amplituda vala, 420, 524
analitičke funkcije, 269–271
analogije polja, 278, 284
anomalna disperzija, 481, 482
antena, 399, 431, 575, 581
antipotencijali, 81, 84, 85, 88
avanzirani potencijali, 103, 108, 110
- Baždarenje, 92–96
baždarske transformacije, 91–94
Besselova diferencijalna jednačba, 715
Besselove funkcije, 715, 716, 718
– modificirane, 718, 719
binomni razvoj, 455, 720
Biot-Savartov zakon, 318
Brewsterov kut, 514
brzina prostiranja energije, 433
- Cauchyjevi rubni uvjeti, 696
Cauchy-Riemannovi uvjeti, 272
cilindrični koordinatni sustav, 220, 326, 704, 711
cilindrični vodič u vanjskom polju, 221–224
Coulombov zakon, 3, 19, 23, 112, 167
- Čvorne varijable, 607
- Delta funkcija, 14, 343, 654, 703
dielektričnost, 19
vakuuma, 19, 112
– izmjenična, 446, 448
dielektrik, 34, 36
dielektrični cilindar u homogenom polju, 273
difrakcija, 495
difuzijska jednačba, 338, 693
difuzijska vremenska konstanta, 356
dijamagnetizam, 40
- dipol,
električni, 39, 46, 232, 576, 580
Hertzov, 576
magnetski, 322, 323, 636
dipolni moment, 34–36, 40, 42, 43
Dirichletovi rubni uvjeti, 214, 598, 615, 642
diskontinuiteti u polju, 15
disperzija, 477, 478, 481, 482, 484–486, 488
– normalna i anomalna, 481
u ioniziranim plinovima, 488
u kovinama, 486
u dielektricima, 478
divergencija, 707
djelatna snaga, 461
djelovanje na daljinu, 1, 139, 167
dobri,
izolatori, 428, 452, 454
vodiči, 452, 457, 459, 461, 477
domena, 691
dominantni mod, 563, 566, 572, 574
dubina prodiranja, 353, 442, 468
dvožični prijenosni vod, 147, 148
- Ekvipotencijalna ploha, 195–197
električna,
energija, 152, 156, 438, 447
provodnost, 9, 41
susceptibilnost, 48, 59
električni,
dipol, 39, 46, 232, 576, 580
krugovi, 389
otpor, 30, 160
tenzor, 169
električno polje, 1, 191
elektroda, 203, 279–281
elektromagnetska,
indukcija, 382
energija, 138
količina gibanja, 161, 167
elektromagnetski val, 397

II

- elektromagnetsko polje, 1
- elektromehanička pretvorba energije, 385
- elektromagnet, 306
- elektronska polarizacija, 35
- elementarne silocijevi, 304, 305
- elementarne valne funkcije, 405, 698, 700–702
- eliminacija, 621
- eliptički integrali, 320, 327, 675, 722, 723
- energija, 134
 - magnetiziranja, 157
 - polarizacije, 152, 154
 - pohranjena u električnom polju, 350
 - pohranjena u magnetskom polju, 293, 350
 - u kvazistatičkim poljima, 348
 - u sinusno promjenjivim poljima, 349
- Eulerova konstanta, 586, 662, 716
- Faktor,
 - dobrote rezonatora, 573
 - magnetskih gubitaka, 449
 - dielektričkih gubitaka, 446, 448
- Faradayev zakon, 20, 23, 384, 676
- fazna,
 - konstanta, 419, 456, 485, 517, 522
 - brzina, 417, 428, 460, 561, 562
- fazni pomak, 359, 361, 417, 428, 460, 516, 582
- fazor, 341
- fazorska notacija, 341, 342
- feromagnetizam, 40
- feriti, 41, 449
- feromagnetizam, 40, 62
- feromagnetska kugla u vanjskom polju, 309
- feromagnetski materijali, 61, 305, 449
- Fourierov integral, 472, 493
- Fourierov red, 219, 355, 701
- Fourierova transformacija, 342, 344
- Fresnelove jednadžbe, 496, 498, 500
- Fredholmove integralne jednadžbe, 693
- funkcional, 593, 594, 598, 691
- Galerkinova metoda, 643, 645, 596, 647, 682
- Gaussov zakon, 23, 45, 192, 199
- Gaussovi teoremi, 708
- geometrijske transformacijske funkcije, 603
- geometrijski čvorovi, 601, 605
- gradijent, 706
- granična,
 - frekvencija TE_{0n} moda, 561
 - valna duljina TE_{0n} moda, 561
- granični valni broj, 568
- Greenovi teoremi, 114, 596, 598, 643, 654
- Greenove funkcije, 107, 695
 - neograničenog prostora, 103, 107
 - ravnih metalnih granica, 248
 - vodljive kuglaste granice, 266
- grupa valova, 492, 493
- grupna brzina, 491, 493, 494
- signala, 491
- gustoća,
 - električne energije, 155
 - električnog tijeka, 284
 - energije polarizacije, 153
 - energije magnetiziranja, 157
 - linijskog naboja, 14
 - magnetiziranja, 41, 42, 157
 - magnetskog tijeka, 5, 20,
 - naboja, 7, 9
 - polarizacije, 35, 36
 - polarizirane struje, 37
 - struje, 8
- Hamiltonov operator, 708
- Hankelove funkcije, 662, 669, 718
- Helmholtzova jednadžba, 692, 698
- Hertzov,
 - vektor, 98, 99, 576, 577
 - dipol, 398, 576
- Hertzovi potencijali, 97
- Hilbertov prostor, 690, 691
- histereza, 41, 54, 57, 59, 61
- homogeno polje, 228, 265, 312
- Idealni vodič, 32
- impedancija, 421
- impeditivnost, 445, 447, 449, 450
- inducirani plošni naboj, 33
- inducirano električno polje, 337, 378, 382
- indukcija, 3, 59, 81, 158, 296, 307, 308, 312, 382
- induktivitet, 348
 - suosnog kabla, 297
- induktiviteti sustava strujnih petlji, 303
- integrali,
 - potencijala, 121
 - polja, 124
- interpolacijske funkcije, 592, 600, 607, 608, 646
- inverzni val, 417, 418, 422, 429
- ionska polarizacija, 35
- izmjenična,
 - dielektričnost, 446, 448
 - permeabilnost, 449
- izolatori, 28, 57
- izoparametarski elementi, 608

- Jacobijeva matrica transformacije, 604
- jakost,
 struje, 3, 7, 218, 345, 390, 461
 električnog polja, 3, 4
 magnetskog polja, 52
- jalova snaga, 461
- jednadžba kontinuiteta, 9, 10
- jednadžbe ravnog vala, 406, 436
- jednadžbe prijenosne linije, 550
- Kapacitet, 32, 191
 kondenzatora, 202, 205, 394
 usamljene vodljive kugle, 202
 sustava vodiča, 208
- karakteristična,
 impedancija, 549, 550, 562–564, 569
 impedancija moda, 562
 impedancija linije, 551
- Kirchhoffovi zakoni, 390
- koeficijent,
 transmisije, 501, 522, 526, 558
 refleksije, 491, 511, 533, 536–538, 556
- koeficijenti otpora, 279
- koenergija, 387
- koercitivnost, 59
- kompleksne gradivne značajke, 445
 – dielektričnost, 445, 488
 – permeabilnost, 445, 449
 – provodnost, 445
- kondenzator, 202–206, 656, 657
- kondukcijske struje, 8, 9
- konformno preslikavanje, 191, 269, 270, 309
- konstanta prostiranja, 413, 428, 441, 455, 551
- konvekcijske struje, 8, 10, 136, 153, 160
- konzervativno polje, 90
- koordinatni sustavi, 710–713
 – pravocrtni, 710
 – cilindrični, 711
 – sferni, 712
- kosinus integrali, 586
- kritični upadni kut, 515
- kritična frekvencija za ionizirani plin, 489
- kružno polariziran,
 putujući val, 434
 stojni val, 438, 440
- Kroneckerova delta, 173, 673
- kugla,
 u vanjskom električnom polju, 225–228
 u sinusno promjenjivom polju, 372
- kuglasti permanentni magnet, 312
- kuglasta magnetska ljuska u vanjskom polju, 313
- kut,
 dielektričkih gubitaka, 446
 magnetskih gubitaka, 449
- kutna brzina, 40
- kvazistatičko elektromagnetsko polje, 348
- Laplaceova jednadžba, 692
 – jedinstvenost rješenja, 212
 – separacija varijabli, 216
- Laplaceov operator, 710
- linearni,
 kvadrupol, 234
 prostor, 689, 690
- linearno polariziran, 419, 423
 čisti stojni val, 436
 putujući val, 431
- linijska,
 gustoća naboja, 14, 236
 struja, 14, 638
- linijski,
 naboj, 14, 235, 239, 252, 260, 263
 magnetski dipol, 636
- Lorentzov uvjet, 84, 344
- Lorentzova sila, 2–5, 19, 23, 66, 72, 133–135
- Magnetiziranje, 39
- magnetska,
 energija, 157–159, 300, 387, 432, 449
 indukcija, 3
 susceptibilnost, 52, 61
- magnetske struje, 46, 64, 451, 676, 677, 681, 682
- magnetski,
 krug, 304, 305, 307
 lim u promjenjivom polju, 353
 naboj, 21, 45, 46, 64, 90, 676
 tijek, 5, 20, 40, 53, 380, 393
 vektorski potencijal, 82, 286, 288, 335
 dipol, 322, 323, 636
 moment strujne petlje, 40
 dipolni moment, 39, 40
- magnetsko polje, 1, 182
- makroskopska elektromagnetska teorija, 19, 537
- makroskopski pristup, 6, 19, 398
- materijal u elektromagnetskom polju, 148
- Maxwellove jednadžbe, 1
 u diferencijalnom obliku, 23
 u fazorskoj domeni, 342
 u integralnom obliku, 24, 25
 u materijalu, 63, 77, 78
 u vakuumu, 18, 76
 za vektore polja, 71, 79

IV

Maxwellov tenzor naprezanja, 172, 173
međuinduktivitet, 299, 301, 303, 380
 dvaju paralelnih dvožičnih vodova, 301
metoda momenata, 651, 652
metoda konačnih elemenata, 591
metrika, 689, 690
miješani uvjeti, 214
modovi, 546, 560, 566, 569
 – neprostirući, 561
 – prijenosne linije, 546
 – prostirući, 561
model,
 amperske struje, 42, 64
 magnetskog naboja, 45
modificirane Besselove funkcije, 718, 719
moment magnetskog dipola, 46

Nabla, 708
nadomjesni izvori, 126, 676
napon, 30, 193
nesinusni valovi, 469
Neumannovi rubni uvjeti, 214, 598, 642
Neumannove funkcije, 715, 717
Newton-Raphsonova metoda, 638
norma, 640, 689, 690
normalna i anomalna disperzija, 481
normirani prostor, 689, 690

Očuvanje,
 električnog naboja, 3, 9
 elektromagnetske energije, 139, 141, 146
odreznici valni broj, 568
odslikavanje, 248, 249, 260, 282, 334, 681
ogib, 495
Ohmov zakon, 9, 28
 u elementarnom obliku, 29
operator, 691
orijentacijska polarizacija, 35
otpor, 30, 280

Paralelna admitancija linije, 550
parametrička disperzija, 478
parcijalni kapacitet, 208
 – tri udaljene usamljene kugle, 209
permanentni magneti, 55, 285
 – magnetski krug, 307
permanentna polarizacija, 35
permeabilnost, 21, 52
 vakuuma, 21, 46, 62, 112
 – izmjenična, 449
permitivnost vakuuma, 19

Poissonova jednadžba, 692
 – superpozicija rješenja, 211
 – jedinstvenost rješenja, 212
 – integral i Greenove funkcije, 214
pločasti kondenzator, 204, 205, 656, 657
plošna,
 impedancija, 467
 naprezanja, 167, 168, 177–179, 184
 struja, 11, 44, 47, 678
plošni,
 naboj, 11, 32, 33, 74, 194, 240, 655
 otpor, 467, 468
područja rezonantne apsorpcije, 482
polarizacija, 34–36
 – orijentacijska, 35
 – permanentna, 35
 – ionska, 35
polarizacija vala, 424, 504, 511, 514
 – linearna, 425
 – kružna, 426
 – eliptička, 426
polarizibilnost, 479
polarizirani naboj, 36, 38, 70, 74
polje, 2
 jednoliko nabijene dužine, 236–239
 jednoliko nabijene dužine i kugle, 268
 jednoliko nabijene pravokutne ploče, 240
 kružne strujnice, 319
 linearnog kvadrupola, 234, 235
 dipola, 231–234
 dva točkasta naboja, 229–231
 dvožičnog voda,
 ispred dielektričkog poluprostora, 257
 ispred magnetskog poluprostora, 334
 ispred vodljive ravnine, 253
 nejednoliko nabijene kocke, 245–248
 strujnog cilindra, 326
 u kvadru, 218–220
 usamljenog točkastog naboja, 196, 197
 točkastog naboja u vodljivom kutu, 251–252
 trake unutar vodljivog cilindra, 261
postojanje električnog naboja, 3
povratna supstitucija, 615, 617, 622
površinski učinak, 365, 367, 369, 461, 644
 u cilindru, 367
površinski valovi, 537, 541
potencijali, 81
Poyntingov teorem, 143, 146, 187, 348, 371
 u diferencijalnom obliku, 139, 141, 187, 189
 u integralnom obliku, 141, 152, 188, 189
Poyntingov vektor, 142, 146, 167, 461, 510, 579

pravocrtni koordinatni sustav, 216, 404, 406, 710
 pravokutni valovod, 558, 559, 564
 preslikavanje, 691
 prigušna konstanta, 418
 prijenosna linija, 545–554, 558
 – bez distorzije, 555
 prividna snaga, 371, 461
 prolazni val, 495–497
 prostorne sile, 167, 181–183
 prostorni naboj, 12, 250
 prostorni faktor, 580, 584, 585
 provodna struja, 12
 provodnost, 9, 12
 putujući val, 416, 429–433

Radijacijsko polje, 579, 581, 583, 584, 686, 687
 raspršeno polje, 659, 660, 662–664
 ravni valovi, 399

- sinusni u prostoru, 419
- sinusni u vremenu, 412
- u neograničenom prostoru, 404

ravnina,

- konstantne faze, 417, 443, 492, 524
- konstantne amplitude, 525

razlika potencijala, 193, 207, 284, 394

razvoj u multipole, 243, 329

refleksije valova, 495, 537

refrakcija, 495

remanentna indukcija, 59, 308, 312

retardirani potencijali, 112, 339

retardirano vrijeme, 109

rezonator, 570, 571, 573

rotor, 707

rubni uvjeti, 213, 222, 636, 644, 692, 696

- Cauchyjevi, 696
- Dirichletovi, 214, 696
- mješoviti, 214, 696
- Neumannovi, 214, 696

Separacija varijabli, 309, 401, 695

- Helmholtzove jednačbe, 404
- valne jednačbe, 401

separacijske konstante, 405, 454, 698, 700, 701

serijska impedancija linije, 550

sferni koordinatni sustav, 224, 712, 713

silnice, 49

silocijev, 304

skalarni električni potencijal, 82, 192

skalarni produkt, 705

skalarni magnetski potencijal, 290, 325

skup, 689

slobodni naboj, 19, 31

smjer prostiranja vala, 406, 408, 469

Snellov zakon, 495, 498, 504

srednja energija, 350

pohranjena u električnom polju, 350

pohranjena u magnetskom polju, 350

srednji gubici, 449, 350

statičko,

električno polje, 191

magnetsko polje, 182

stojni val, 436–438

Stokesovi teoremi, 709

struja pomaka, 1, 47

strujna cilindrična cijev, 331

strujni oblog, 13, 681

strujni element, 1, 37, 576, 580

strujnica, 292, 304, 318, 319, 324, 325, 380, 637

superpozicija, 48, 51, 211, 266, 444

susceptibilnost, 48, 52, 59–61

sustav vodiča, 206, 208

svojstvene funkcije, 218, 698, 701

svojstvene vrijednosti, 405, 560, 697, 698, 701

Širina pojasa, 493

štapni uzemljivač, 282

Tankožičane antene, 676, 687, 688

Taylorov red, 340, 638, 720

TE mod, 560, 563

TEM val, 409

temeljne funkcije, 651, 652, 656, 667

tenzor, 48, 52, 169, 171–174

magnetske susceptibilnosti, 52

naprezanja, 172–174

teorija krugova, 550

težinske funkcije, 595–597

tijek elektromagnetske energije, 146, 510, 544

TM mod, 560

TM val, 517

točkasti,

naboj, 3, 19

izvori, 14, 15

totalna,

refleksija, 398, 514

transmisija, 496

transverzalni,

elektromagnetski val, 409

magnetski, 517, 661

ravni valovi, 404

trenutna vrijednost snage, 136

triangularizacija, 615, 616

VI

- Ulazna impedancija linije, 556
- unutarnji induktivitet, 348
- usklađivanje u točkama, 653
- usmjerena,
 - fazna brzina, 507
 - valna impedancija, 507, 509
 - fazna konstanta, 507
- uvjet kvazistatičnosti, 340, 341, 344, 346, 347
- uvjeti na granici, 66, 70, 194, 286, 676, 677
- uvjet reciprociteta, 108
- Valna,
 - duljina, 417, 428,
 - jednadžba, 83, 121, 399, 692
 - konstanta, 463
 - duljina prostiranja, 561, 562
 - impedancija, 421, 422
- valovi,
 - u dielektriku, 427
 - u vodljivom materijalu s gubicima, 440
- valovod, 544, 558–560, 564, 566, 571
- vanjski induktivitet, 297–299, 380
- vektor,
 - jakosti magnetskog polja, 52
 - električnog pomaka, 48
 - elektromagnetskog naprezanja, 174
 - polarizacije, 34, 35, 50, 98
- vektorski magnetski potencijal, 82, 287
- vektorski produkt, 705
- vektorski prostor, 689
- vezani naboji, 48, 139
- vod, 147, 148, 253, 334, 544, 557, 588
- vodiči, 54
- vodljivost, 280
- vremenska konstanta relaksacije, 32
- virtložne struje, 356, 358
- Zakon,
 - odbijanja, 495, 504
 - protjecanja, 21, 22
 - refleksije, 498
- zračenje električnog dipola, 575
- zračenje elektromagnetskih valova, 575
- zrcalne refleksije, 496

ŠKOLSKA KNJIGA d.d.

Zagreb, Masarykova 28

Za izdavača

Dr. DRAGOMIR MADERIĆ

Tisak dovršen u ožujku 1997.