

*Zijad HAZNADAR
Željko ŠTIH*

ELEKTROMAGNETIZAM

2

ŠKOLSKA KNJIGA • ZAGREB



Prof. dr. sc. Zijad Haznadar
Prof. dr. sc. Željko Štih

ELEKTROMAGNETIZAM

Elektromagnetski valovi i numeričke metode

Svezak 2.



Školska knjiga, Zagreb 1997.

Biserki i Leili
Alemki i Vilimu

SADRŽAJ

SVEZAK 1.

1. ELEKTROMAGNETSKO POLJE	1
1.1. PREDSTAVLJANJE ELEKTROMAGNETSKIH POLJA	2
1.1.1. Definicije polja E i B	2
1.2. IZVORI POLJA: NABOJI I STRUJE	5
1.2.1. Mikroskopska i makroskopska teorija	6
1.2.2. Gustoće naboja i struje	7
1.2.3. Jednadžba kontinuiteta	9
1.2.4. Singularne gustoće izvora	10
1.2.4.1. Gustoća plošnog naboja i gustoća plošne struje	10
1.2.4.2. Gustoće linijskog naboja i linijske struje	14
1.2.4.3. Točkasti izvori	14
1.2.5. Diskontinuiteti u polju	15
1.2.5.1. Diskontinuiteti u polju zbog plošne gustoće skalarnog izvora	15
1.2.5.2. Diskontinuitet u polju zbog plošne gustoće vektorskog izvora	17
1.3. MAXWELLOVE JEDNADŽBE U VAKUUMU	18
1.3.1. Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku	23
1.3.2. Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku	24
1.4. ELEKTROMAGNETSKA POLJA U MATERIJALU	26
1.4. 1. Makroskopski model vodljivog materijala	28
1.4. 2. Gustoća provodne struje u materijalu. Ohmov zakon	28
1.4. 3. Vodič u električnom polju	30
1.4. 4. Polarizacija materijala. Vektor polarizacije P	34
1.4. 5. Dielektrik u električnom polju. Polarizirani naboj i struja	36
1.4. 6. Magnetiziranje materijala. Vektor magnetiziranja M	39
1.4. 7. Model amperske struje u magnetskom materijalu	42
1.4. 8. Model magnetskog naboja i struje	45
1.4. 9. Vektori polja D i H . Električni i magnetski tijekovi	47
1.4.10. Materijali i relacije građe	53
1.4.10.1. Vodiči	54
1.4.10.2. Permanentni magneti	55
1.4.10.3. Izolatori	57

1.4.10.4. Magnetski materijali	59
1.4.10.5. Histereza	59
1.4.10.6. Feromagnetski materijali	61
1.5. MAXWELLOVE JEDNADŽBE ZA POLJA U MATERIJALU	63
1.5.1. Maxwellove jednadžbe za model s amperskom strujom	65
1.5.1.1. Jednadžbe	65
1.5.1.2. Uvjeti na granici	66
1.5.2. Maxwellove jednadžbe za model s magnetskim nabojem	69
1.5.2.1. Jednadžbe	69
1.5.2.2. Uvjeti na granici	70
1.5.3. Maxwellove jednadžbe za vektore polja E , B , D i H	71
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 1.	80
2. ELEKTROMAGNETSKI POTENCIJALI	81
2.1. VEKTORSKE I SKALARNE POTENCIJALNE FUNKCIJE	81
2.1.1. Potencijali i antipotencijali u dielektriku bez izvora	81
2.1.1.1. Vektorski i skalarni potencijali	82
2.1.1.2. Svojstva potencijala	83
2.1.1.3. Valne jednadžbe	83
2.1.1.4. Antipotencijali	84
2.1.1.5. Opće rješenje	85
2.1.2. Potencijali u vodljivom materijalu bez izvora	86
2.1.3. Potencijali i antipotencijali zadane raspodjele neovisnih izvora	88
2.1.3.1. Vodljivi materijal	88
2.1.3.2. Nevodljivi materijal	89
2.1.3.3. Statički naboji i struje	89
2.1.3.4. Magnetski naboji i struje	90
2.2. BAŽDARSKE TRANSFORMACIJE	91
2.2.1. Lorentzovo baždarenje	92
2.2.2. Coulombovo baždarenje	93
2.2.2.1. Polja bez izvora	93
2.2.2.2. Nevodljivi materijal	93
2.2.2.3. Vodljivi materijal	94
2.2.2.4. Polje s neovisnim izvorima	95
2.3. HERTZOVI POTENCIJALI	97
2.4. INTEGRALNO PREDSTAVLJANJE	100
2.4.1. Skalarni potencijal točkastog naboja	101
2.4.2. Retardirani i avanzirani potencijali. Greenove funkcije neograničenog prostora	103
2.4.2.1. Retardirani potencijal jediničnog impulsa u neograničenom prostoru	103
2.4.2.2. Greenove funkcije neograničenog prostora	107

2.4.2.3. Potencijali vremenski ovisne raspodjele prostornog naboja u neograničenom prostoru	109
2.4.3. Retardirani potencijali u neograničenom prostoru	112
2.4.4. Kirchhoffovo rješenje valne jednadžbe u ograničenom prostoru . . .	114
2.4.5. Greenova funkcija za valnu jednadžbu u ograničenom prostoru	118
2.5. VALNE JEDNADŽBE I INTEGRALI POTENCIJALA I POLJA	121
2.5.1. Valne jednadžbe i integrali potencijala	121
2.5.2. Valne jednadžbe i integrali polja	124
2.5.3. Nadomjesni izvori i valne jednadžbe potencijala	126
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 2.	132
3. ENERGIJA I SILE U ELEKTROMAGNETSKOM POLJU	133
3.1. DJELOVANJE ELEKTROMAGNETSKOG POLJA NA NABOJE U GIBANJU	134
3.1.1. Sile na naboje u gibanju	134
3.1.2. Energija i snaga predana nabojima u gibanju	136
3.2. ELEKTROMAGNETSKA ENERGIJA	138
3.2.1. Očuvanje elektromagnetske energije. Poyntingov teorem	139
3.2.1.1. Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku	139
3.2.1.2. Poyntingov teorem u integralnom obliku	141
3.2.1.3. Očuvanje elektromagnetske energije u vakuumu	141
3.2.2. Pohranjena elektromagnetska energija u vakuumu	144
3.2.3. Tijek elektromagnetske energije. Poyntingov vektor	146
3.3. MATERIJAL U ELEKTROMAGNETSKOM POLJU	148
3.3.1. Elektromagnetska energija apsorbirana u materijalu	149
3.3.2. Poyntingov teorem u materijalu	151
3.3.2.1. Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku	151
3.3.2.2. Poyntingov teorem u integralnom obliku	152
3.3.3. Energija polarizacije i električna energija	152
3.3.3.1. Gustoća energije polarizacije	153
3.3.3.2. Gustoća električne energije	155
3.3.3.3. Ukupna električna energija	156
3.3.4. Energija magnetiziranja i magnetska energija	157
3.3.4.1. Gustoća energije magnetiziranja	157
3.3.4.2. Gustoća magnetske energije	158
3.3.4.3. Ukupna magnetska energija	158
3.3.5. Poyntingov teorem i električna i magnetska energija u materijalima .	159
3.3.6. Tijek snage u stacionarnim sustavima i gubici	159
3.4. ELEKTROMAGNETSKA KOLIČINA GIBANJA	161
3.5. PROSTORNE SILE I PLOŠNA NAPREZANJA	167
3.5.1. Plošna naprezanja u praznom prostoru	168
3.5.1.1. Maxwellov tenzor naprezanja	172
3.5.1.2. Vektor elektromagnetskog naprezanja	174

3.5.2. Sile i plošna naprezanja u materijalima	179
3.5.2.1. Prostorne sile u dielektriku u statičkom električnom polju	181
3.5.2.2. Prostorne sile u materijalu u statičkom magnetskom polju	182
3.5.2.3. Prostorne sile u materijalu u elektromagnetskom polju	183
3.5.3. Plošna naprezanja u statičkim poljima na granici dva materijala . . .	184
LITERATURA UZ POGLAVLJE 3.	190

4. STATIČKO ELEKTRIČNO POLJE	191
4.1. JEDNADŽBE STATIČKOG ELEKTRIČNOG POLJA	191
4.1.1. Skalarni električni potencijal	192
4.1.2. Uvjeti na granici	194
4.2. SLIKA STATIČKOG ELEKTRIČNOG POLJA	195
4.3. ENERGIJA POHRANJENA U STATIČKOM ELEKTRIČNOM POLJU	198
4.3.1. Određivanje sila u statičkom električnom polju pomoću energije . . .	200
4.4. KAPACITET	201
4.4.1. Kapacitet kondenzatora	202
4.4.2. Sustav vodiča i parcijalni kapaciteti	206
4.5. RJEŠAVANJE STATIČKIH ELEKTRIČNIH POLJA	211
4.5.1. Superpozicija rješenja Poissonove jednačbe	211
4.5.2. Jedinственost rješenja Poissonove i Laplaceove jednačbe	212
4.5.3. Integral Poissonove jednačbe i Greenove funkcije	214
4.6. RJEŠAVANJE LAPLACEOVE JEDNAČBE SEPARACIJOM VARIJABLI	216
4.6.1. Pravocrtni koordinatni sustav	216
4.6.2. Cilindrični koordinatni sustav	220
4.6.3. Sferni koordinatni sustav	224
4.7. ZADANE RASPODJELE NABOJA U NEOGRANIČENOM PROSTORU	228
4.7.1. Skupina točkastih naboja	229
4.7.2. Linijski naboji	235
4.7.3. Plošni naboji	240
4.7.4. Volumni naboji i razvoj u multipole	243
4.8. RASPODJELA NABOJA U OGRANIČENOM PROSTORU I ODSLIKAVANJE	248
4.8.1. Greenove funkcije ravnih metalnih granica	248
4.8.1.1. Točkasti naboj ispred vodljive ravnine	248
4.8.1.2. Prostorni naboj ispred vodljive ravnine	250
4.8.1.3. Točkasti naboj u vodljivom kutu	250
4.8.1.4. Linijski naboj ispred vodljive ravnine	252
4.8.2. Greenove funkcije ravne dielektričke granice	255
4.8.2.1. Točkasti naboj ispred ravne granice dvaju dielektrika	255
4.8.3. Greenove funkcije cilindričnih granica	259

4.8.3.1. Vodljiva cilindrična granica	260
4.8.3.2. Dielektrička cilindrična granica	263
4.8.4. Greenova funkcija vodljive kuglaste granice	266
4.9. KONFORMNO PRESLIKAVANJE	269
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 4.	276
5. STATIČKO STRUJNO POLJE U VODIČIMA	277
5.1. POLJE NABOJA U JEDNOLIKOM GIBANJU	277
5.2. JEDNADŽBE STRUJNOG POLJA I ANALOGIJE POLJA	278
5.3. RJEŠAVANJE STRUJNIH POLJA ODSLIKAVANJEM	281
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 5.	284
6. STATIČKO MAGNETSKO POLJE	285
6.1. JEDNADŽBE STATIČKOG MAGNETSKOG POLJA	285
6.1.1. Uvjeti na granici	286
6.2. POTENCIJALI U STATIČKOM MAGNETSKOM POLJU	287
6.2.1. Vektorski magnetski potencijal	287
6.2.2. Antipotencijal	290
6.3. SLIKA STATIČKOG MAGNETSKOG POLJA	291
6.4. ENERGIJA POHRANJENA U MAGNETSKOM POLJU	293
6.4.1. Određivanje sila u statičkom magnetskom polju pomoću energije	295
6.5. INDUKTIVITETI	296
6.5.1. Međuinduktivitet	299
6.5.2. Induktiviteti sustava strujnih petlji	303
6.6. MAGNETSKI KRUGOVI	304
6.6.1. Magnetski krug permanentnih magneta	307
6.7. MAGNETSKO POLJE U PROSTORU BEZ STRUJA	309
6.8. POLJE ZADANIH STRUJA U NEOGRANIČENOM PROSTORU	317
6.8.1. Polje strujnica u neograničenom prostoru	318
6.8.1.1. Magnetski dipol	322
6.8.2. Polje plošne struje	326
6.8.3. Polje volumnih struja i razvoj u multipole	329
6.9. ZADANE STRUJE U OGRANIČENOM PROSTORU I ODSLIKAVANJE	334
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 6.	336
7. KVAZISTATIČKO ELEKTROMAGNETSKO POLJE	337
7.1. JEDNADŽBE KVAZISTATIČKOG POLJA	337
7.1.1. Uvjet kvazistatičnosti elektromagnetskog polja	340
7.2. JEDNADŽBE POLJA U FAZORSKOJ DOMENI I KVAZISTATIČNOST SINUSNO PROMJENJIVIH POLJA	341
7.2.1. Vremenski sinusno promjenjiva polja i fazorska notacija	341
7.2.2. Fourierova transformacija i fazorska notacija	342

7.2.3. Elektromagnetski potencijali u fazorskoj domeni i uvjet kvazistatičnosti polja	344
7.3. ENERGIJA U KVAZISTATIČKIM POLJIMA	348
7.3.1. Energija i snaga u sinusno promjenjivim poljima	349
7.4. RJEŠAVANJE KVAZISTATIČKOG POLJA U VODIČIMA	351
7.5. STRUJNE PETLJE U KVAZISTATIČKOM POLJU	377
7.5.1. Sustav mirnih strujnih petlji u kvazistatičkom polju	378
7.5.2. Gibanje strujne petlje u kvazistatičkom polju i elektromagnetska indukcija	382
7.5.3. Elektromehanička pretvorba energije	385
7.6. ELEKTROMAGNETSKA POLJA I ELEKTRIČNI KRUGOVI	389
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 7.	396
KAZALO	

SVEZAK 2.

8. ELEKTROMAGNETSKI VALOVI	397
8.1. VALNE JEDNADŽBE POLJA U NEOGRANIČENOM PROSTORU BEZ IZVORA	398
8.1.1. Valne jednađbe	399
8.1.2. Separacija varijabli valne jednađbe	401
8.2. RAVNI VAL U NEOGRANIČENOM PROSTORU	404
8.2.1. Separacija Helmholtzove jednađbe	404
8.2.2. Jednađbe ravnog vala	406
8.2.3. Ravni valovi sinusni u vremenu	412
8.2.4. Ravni valovi sinusni u prostoru	419
8.2.5. Osnovne značajke ravnih sinusnih valova	421
8.2.5.1. Valna impedancija	421
8.2.5.2. Tijek energije	423
8.2.5.3. Polarizacija	424
8.3. PROSTIRANJE RAVNIH VALOVA	426
8.3.1. Valovi u dielektriku	427
8.3.1.1. Putujući valovi	429
8.3.1.2. Stojni valovi	436
8.3.2. Valovi u vodljivom materijalu s gubicima	440
8.3.2.1. Kompleksne gradivne značajke	445
8.3.2.2. Fazorske jednađbe polja	450
8.3.3. Podjela materijala na izolatore i vodiče	452
8.3.3.1. Dobri izolatori	454
8.3.3.2. Dobri vodiči	457
8.3.4. Površinski učinak	461
8.4. NESINUSNI VALOVI	469

8.4.1. Opće rješenje jednodimenzionalne valne jednačbe u dielektriku . . .	471
8.4.2. Opće rješenje jednodimenzionalne valne jednačbe u materijalu s gubicima	473
8.4.2.1. Zadana raspodjela polja u vremenu	473
8.4.2.2. Zadana raspodjela polja u prostoru	475
8.5. DISPERZIJA	477
8.5.1. Disperzija u dielektricima; klasični model za $\hat{\epsilon}(\omega)$	478
8.5.1.1. Normalna i anomalna disperzija	481
8.5.2. Disperzija u kovinama	486
8.5.3. Disperzija u ioniziranim plinovima	488
8.5.4. Grupna brzina signala	491
8.6. PROSTIRANJE RAVNIH SINUSNIH VALOVA U POLUOGRANIČENIM PROSTORIMA	494
8.6.1. Odbijanje i lom na ravnoj granici	495
8.6.1.1. Zakoni odbijanja i loma	496
8.6.1.2. Fresnelove jednačbe i utjecaj polarizacije	498
8.6.2. Granica između dva dielektrika	504
8.6.2.1. Okomit nailazak vala na granicu	511
8.6.2.2. Potpuna polarizacija vala na granici	514
8.6.2.3. Totalna refleksija	514
8.6.3. Prolaz vala u materijal s gubicima	522
8.6.3.1. Lom vala u dobrom vodiču	527
8.6.4. Odbijanje valova od vodljive površine	532
8.6.4.1. Površinski valovi	537
8.6.5. Okomit nailazak vala na više dielektričkih slojeva	541
8.7. PROSTIRANJE VOĐENIH RAVNIH VALOVA	543
8.7.1. Prijenosne linije	545
8.7.1.1. Opterećena prienosna linija	555
8.7.2. Valovodi	558
8.7.2.1. Modovi u pravokutnom valovodu	566
8.7.3. Rezonatori	570
8.8. ZRAČENJE ELEKTROMAGNETSKIH VALOVA	575
8.8.1. Zračenje električnog dipola	575
8.8.2. Radijacijsko polje ravnog vodiča	581
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 8.	590
METODA KONAČNIH ELEMENATA	591
9.1. DEFINICIJA MKE	591
9.1.1. Iznažanje integralnog oblika i njegovo približenje	593
9.1.1.1. Funkcional kao integralni oblik	593
9.1.1.2. Metoda težinskih ostataka	595
9.2. DVODIMENZIONALNA STATIČKA POLJA	597
9.2.1 Integralni oblik ekvivalentan Poissonovoj jednačbi	597

9.2.2. Primjena MKE na integralni oblik ekvivalentan Poissonovoj jednađbi	599
9.2.3. Približenje geometrije domene zadaće	600
9.2.3.1. Organizacija podataka o podjeli na elemente	605
9.2.4. Približenje funkcije na elementu	607
9.2.5. Integralni doprinosi linearnih trokutnih elemenata pri rješavanju Poissonove jednađbe	610
9.2.6. Formiranje sustava jednađbi	612
9.2.6.1. Algoritam za formiranje sustava	614
9.2.7. Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednađbi u MKE	615
9.2.7.1. Triangularizacija	616
9.2.7.2. Povratna supstitucija	617
9.2.8. Organizacija podataka o sustavu jednađbi	623
9.2.9. Proračun vektora jakosti električnog i magnetskog polja	628
9.2.9.1. Proračun vektora električnog polja E i D	629
9.2.9.2. Proračun vektora magnetskog polja B i H	630
9.2.10. Prikaz rezultata proračuna linijama konstantnog potencijala	631
9.2.10.1. Proračun ekvipotencijalnih linija	631
9.2.11. Primjer proračuna	634
9.3. Nelinearne zadaće	638
9.4. KVAZISTATIČKO POLJE	642
9.4.1. Sinusno promjenjiva polja	642
9.4.2. Nesinusna polja	645
POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 9.	649
10. METODA MOMENATA	651
10.1. DEFINICIJA MOM	651
10.2. TRODIMENZIONALNA STATIČKA ELEKTRIČNA POLJA	653
10.2.1. Integralna formulacija zadaće	653
10.2.2. Primjena MOM	656
10.3. RASPRŠENJE ELEKTROMAGNETSKIH VALOVA	659
10.3.1. Integralni oblik jednađbi	661
10.3.1.1. TM polje	661
10.3.1.2. TE polje	664
10.3.2. Rješenje zadaće raspršenja primjenom MOM	667
10.3.2.1. Raspršenje u TM polju	668
10.3.2.2. Raspršenje u TE polju	672
10.4. TANKOŽIČANE STRUKTURE	676
10.4.1. Nadomjesni izvori	676
10.4.2. Integralna formulacija zadaće raspršenja na tankoj žici	677
10.4.3. Modeli napajanja izvora zračenja	680
10.4.4. Rješenje Pocklingtonove jednađbe primjenom MOM	682
10.4.4.1. Daleko radijacijsko polje	686

POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 10.	688
PRILOG A: MATEMATIČKI MODELI U ELEKTROMAGNETIZMU	689
A.1. Temeljni pojmovi	689
A.2. Operatorske jednačbe	691
A.3. Zadaci s rubnim vrijednostima	692
A.4. Diferencijalne jednačbe	693
A.5. Rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi	694
A.6. Rubni uvjeti	696
A.7. Svojstvene vrijednosti i funkcije	697
A.8. Helmholtzova jednačba i elementarne valne funkcije	698
PRILOG B: DIRACOVA δ FUNKCIJA	703
PRILOG C: VEKTORSKA ANALIZA	705
C.1. Relacije množenja	705
C.2. Diferencijalne relacije	706
C.3. Integralne relacije	708
PRILOG D: KOORDINATNI SUSTAVI	710
D.1. Pravocrtni koordinatni sustav	710
D.2. Cilindrični koordinatni sustav	711
D.3. Sferni koordinatni sustav	712
PRILOG E: BESSELOVA DIFERENCIJALNA JEDNAČBA	715
PRILOG F: RAZVOJ FUNKCIJA U REDOVE POTENCIJA	720
PRILOG G: ELIPTIČKI INTEGRALI	722
LITERATURA	725
KAZALO	731

8. ELEKTROMAGNETSKI VALOVI

Maxwellovo otkriće elektromagnetskih valova, i to dva desetljeća prije Hertzova eksperimentalnog dokaza, i objašnjenje elektromagnetske naravi svjetlosti jedan je od najvećih doprinosa¹ znanosti u XIX. stoljeću. Temeljno svojstvo Maxwellovih jednadžbi za elektromagnetsko polje jest postojanje rješenja za *putujuće valove* koji predstavljaju prijenos energije kroz prostor. Opisat ćemo zato vektorske i skalarne *valne jednadžbe*, koje ćemo izvesti iz sustava Maxwellovih jednadžbi, slično kako je to učinjeno u 2. poglavlju. Ograničit ćemo našu pažnju na rješavanje valnih jednadžbi postupkom *separacije varijabli* u neograničenom linearnom, homogenom, izotropnom materijalu *bez izvora* polja. Drugim riječima, studirat ćemo svojstva valova bez da se zanimamo kako su takva polja proizvedena.

S izuzetkom statičkih polja koja smo razmatrali u poglavljima 4, 5. i 6. najjednostavnija rješenja sustava jednadžbi dinamičkih polja su ona koja ovise o vremenu i o samo jednoj prostornoj varijabli. Takva jednodimenzionalna rješenja u pravocrtnom sustavu predstavljaju *ravne valove*. Mnoge značajke prostiranja elektromagnetskih valova bit će pojašnjene kroz studij svojstava ravnih valova, i zato je analiza ravnih valova subjekt od temeljne važnosti u elektromagnetskoj teoriji.

U ovom poglavlju razmotrit ćemo prostiranje u vodljivim materijalima i u dielektricima homogenih transverzalnih ravnih valova sa sinusnom vremenskom ovisnošću. Ispitat ćemo odziv visokovodljivog materijala na uzbudu jednodimenzionalnim elektromagnetskim poljem sinusne vremenske ovisnosti i naglasiti pojavu *površinskog učinka*. Obradit ćemo prostiranje nesinusnih valova za zadanu raspodjelu polja u vremenu i prostoru. Analizirat ćemo pojavu *disperzije vala* u dielektricima, kovinama i ioniziranim plinovima. Prostiranje ravnih valova u poluograničenim prostorima, tj. nailazak ravnog

¹ Suvremeni hrvatski fizičar Nikola Cindro u svojoj knjizi *Fizika 2* o tome otkriću piše:

"Spoznaja da je svjetlost elektromagnetski val, i svođenje tako različitih znanstvenih područja kao što su elektricitet, magnetizam i optika u jedinstvenu cjelinu nadilazi sve što je znanost XIX. stoljeća do tada pružila. XX. stoljeće je u tim područjima donijelo samo komplementarna otkrića o kvantnoj prirodi zračenja. Međutim, ono što u tom pogledu karakterizira naše stoljeće jest neslućeni razvoj primjene elektromagnetskih valova u telekomunikacijama.

Spektar elektromagnetskog zračenja, kako ga danas poznajemo, obuhvaća zračenje koje se međusobno toliko razlikuje da je njegovo svođenje na zajedničku prirodu – elektromagnetske valove koji se razlikuju samo po frekvenciji – prvorazredni znanstveni uspjeh. Od niskofrekventnog šuma, preko mikrovalova, infracrvenih (toplinskih), svjetlosnih i ultraljubičastih valova, te x- i gama-zraka, ovaj spektar obuhvaća pravilno titranje električnog i magnetskog polja od nekoliko herca do stotine eksaherca (10^{20} Hz). Sve to zračenje ima istu prirodu: sve su to elektromagnetski valovi koji se šire prostorom brzinom $3 \cdot 10^8$ m/s".

vala na ravnu granicu različitih materijala posebno ćemo obraditi. Potpuni prolaz i totalna refleksija samo su posebni slučajevi nailaska vala na ravnu granicu. Odbijanje vala od vodljive površine i površinske valove ćemo zatim detaljno opisati. Prostiranje vođenih ravnih valova primijenili smo u analizi prijenosnih linija, valovoda i šupljih rezonatora. Na kraju ćemo obraditi izvore zračenja: Hertzov dipol i ravni vodič u neograničenom praznom prostoru.

Raspon frekvencija elektromagnetskih valova koji se koriste u elektrotehnici vrlo je velik i obuhvaća područje od nula do nekoliko tisuća gigaherca. U tablici 8.1. dali smo pregled frekvencija, valnih duljina i valnih područja koja se koriste za radiofoniju, televiziju i radar. Treba upozoriti da je kod tih najviših frekvencija još dozvoljen makroskopski pristup i da se tu približavamo granicama valjanosti klasične elektromagnetske teorije, tj. klasične elektrostatike.

Tablica 8.1. Valna područja za elektromagnetske valove u radiofoniji i televiziji prema CCIR²

<i>Područje</i>	<i>Pojas broj</i>	<i>Američka oznaka</i>	<i>Valna duljina (m)</i>	<i>Frekvencija</i>
marijametarsko	4	VLF	$10^5 - 10^4$	3 – 30 kHz
kilometarsko	5 dugi val	LF	$10^4 - 10^3$	30 – 300 kHz
hektometarsko	6 srednji val	MF	$10^3 - 10^2$	300 – 3000 kHz
dekametarsko	7 kratki val	HF	$10^2 - 10$	3 – 30 MHz
metarsko	8 UKV	VHF	$10 - 1$	30 – 300 MHz
decimetarsko	9	UHF	$1 - 0.1$	300 – 3000 MHz
centimetarsko	10	SHF	$0.1 - 0.01$	3 – 30 GHz
milimetarsko	11	EHF	$10^{-2} - 10^{-3}$	30 – 300 GHz
decimilimetarsko	12	–	$10^{-3} - 10^{-4}$	300 – 3000 GHz

8.1. VALNE JEDNADŽBE POLJA U NEOGRANIČENOM PROSTORU BEZ IZVORA

Općenito se za rješavanje zadaća vremenski ovisnih elektromagnetskih polja služimo sustavima Maxwellovih jednadžbi, kako je to opisano u 1. poglavlju.³ I kao što je

² Raspodjela frekvencija prema International Radio Consultative Committee.

³ Pogledati u poglavlju 1. odjeljak 1.3. i članke 1.5.1., 1.5.2. i 1.5.3.

već rečeno, rješavanje tih sustava je vrlo teško, pa se zato koriste iz njih izvedeni sustavi vektorskih valnih jednadžbi kao što smo to učinili u 2. poglavlju.⁴

Prije nego što prosljedimo s izvođenjem valnih jednadžbi i s dobivanjem njihovog jednodimenzionalnog rješenja za ravni val, usmjerit ćemo pozornost na neke činjenice koje su bitne za izbor postupka rješavanja. Kao što je pokazano u 2. poglavlju, gdje smo umjesto polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ uveli elektromagnetske potencijale ϕ i $\mathbf{A}$, moguća su dva pristupa rješavanju polja, koja rezultiraju u primjeni dviju različitih vrsta jednadžbi. Prva vrsta su parcijalne *diferencijalne jednadžbe* valnog oblika, koje mogu biti prigušene ili neprigušene, homogene ili nehomogene.⁵ Druga vrsta su *integralne jednadžbe* koje u pravilu koristimo kad su *zadani izvori polja* i kada je prostor neograničen.⁶ Ako je prostor ograničen, zadaća je još složenija pa koristimo Kirchhoffov integral⁷ valne jednadžbe kako je izvedeno u članku 2.4.4. To su redovito Fredholmmove integralne jednadžbe prve i druge vrste. Integralni oblik jednadžbi koristit ćemo kasnije⁸ za proračun zračenja iz dipola i antena. Za proračun elektromagnetskih polja u *neograničenom prostoru bez izvora*, služit ćemo se homogenim diferencijalnim jednadžbama valnoga oblika, a za njihovo rješavanje upotrebljavat ćemo postupak *separacije varijabli*.

8.1.1. Valne jednadžbe

U nakani da izvedemo valne jednadžbe polja uvest ćemo sljedeće pretpostavke. Prostor u kome se prostire elektromagnetsko polje je neograničen i ispunjen je jednostavnim⁹ materijalom koji se ne giba. I kao što je pokazano u članku 2.1.2. u unutrašnjosti takvog materijala sa zadanim značajkama ϵ , μ i κ , gustoća slobodnog naboja je nula $\rho_s = 0$, a slobodna struja se može predstaviti kao $\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$.

Ponašanje elektromagnetskog polja u takvom neograničenom materijalu određeno je sustavom Maxwellovih jednadžbi (1.5.15a – d)

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_s, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{8.1.1a – d}$$

⁴ Pogledati u poglavlju 2. članak 2.5.2.

⁵ Pogledati jednadžbe (2.1.6), (2.1.16), (2.1.18) i (2.1.19), te Prilog A.

⁶ Pogledati točku 2.4.2.3. i jednadžbe (2.4.26), (2.4.27) i (2.4.28a,b).

⁷ Pogledati jednadžbu (2.4.43).

⁸ Pogledati odjeljak 8.8.

⁹ Jednostavnim materijalom nazivamo sve materijale koji su linearni, izotropni i homogeni (LIH).

Njemu ćemo pridružiti relacije građe (1.5.17a – c)

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} , \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} , \\ \mathbf{J}_s &= \kappa \mathbf{E} . \end{aligned} \tag{8.1.2a – c}$$

Uzmemo li u obzir i činjenicu da je $\rho_s = 0$, dobivamo polazni prilagođeni skup Maxwellovih jednađbi za elektromagnetsko polje predstavljeno parom vektora $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 , \\ \nabla \times \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \kappa \mathbf{E} &= 0 , \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 , \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 . \end{aligned} \tag{8.1.3a – d}$$

Nije suvišno napomenuti da sustav (8.1.3a – d)¹⁰ u potpunosti definira vektore $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$, jer su u njemu propisani rotor i divergencija svakog od tih dvaju vektora, što je nužno ako se neizravno jedinstveno propisuju vektori.

Primijenit ćemo operaciju rotor na svaku od glavnih Maxwellovih jednađbi (8.1.3a,b), pa nakon uvrštenja sporednih jednađbi (8.1.3c,d) dobivamo

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) &= 0 , \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) - \kappa (\nabla \times \mathbf{E}) &= 0 . \end{aligned}$$

Razvijajući $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$ i analogno za $\mathbf{H}$, te uvrštenjem slijede

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 , \\ \Delta \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 , \end{aligned} \tag{8.1.4a,b}$$

prigušene valne jednađbe elektromagnetskog polja.¹¹ To su dvije vektorske, homogene,

¹⁰ Slično je učinjeno u članku 2.5.2, gdje je izveden sustav jednađbi (2.5.9a – d).

¹¹ Nazivaju ih još i "telegrafske jednađbe", iako su se mnogi pisci odlučili da telegrafskim nazivaju jednađbe oblika $\partial^2 \phi / \partial z^2 - a \partial^2 \phi / \partial t^2 - b \partial \phi / \partial t - c \phi = 0$, kao što je to objašnjeno u knjizi, J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

parcijalne diferencijalne jednačbe drugog reda za vektore $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$.¹²

Pokazat ćemo da treći član u jednačbama (8.1.4a,b) predstavlja prigušenje vala ako je materijal vodljiv ($\kappa \neq 0$), tj. s gubicima. Prva dva člana u valnim jednačbama ukazuju na *valni karakter polja*, koji je sadržan u Maxwellovim jednačbama. Ako je materijal nevodljiv ($\kappa = 0$), tj. dielektrik, tada iz (8.1.4a,b) slijede *neprigušene valne jednačbe* polja

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}\tag{8.1.5a,b}$$

Ako pak zbog bilo kojeg razloga u jednačbama (8.1.4a,b) nedostaje drugi član, tada dobivamo

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0, \\ \Delta \mathbf{H} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0.\end{aligned}\tag{8.1.6a,b}$$

To su *jednačbe difuzije*¹³ u polju.

8.1.2. Separacija varijabli valne jednačbe

Vektorske valne jednačbe izvedene u prethodnom članku rješavat ćemo primjenom postupka separacije varijabli.¹⁴ Prvo ćemo pretpostaviti da se u vektorskoj valnoj jednačbi oblika prema (8.1.4a,b)

$$\Delta \mathbf{W}(\mathbf{r},t) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{W}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0,\tag{8.1.7}$$

rješenje za bilo koji vektor polja $\mathbf{W}(\mathbf{r},t)$, može razdijeliti u dva dijela, od kojih jedan sadrži samo vrijeme, a drugi sadrži samo odrednice prostora. Pritom se zbog linearnosti

¹² Jednačbe istog oblika izvedene su za potencijale u članku 2.1.2. i to su jednačbe (2.1.16a,b). Pomoću tih jednačbi i potencijala može se riješiti ista zadaća i dobiti ista rješenja za ravni val.

¹³ Jednačbe difuzije primjenjuju se za rješavanje zadaća raspodjele polja, odnosno gustoće struje u vodičima. To su zadaće proračuna kvazistatičkih polja, koje su obrađene u prethodnom 7. poglavlju. Pogledati jednačbe (7.1.8a – c).

¹⁴ Separaciju varijabli za rješavanje Laplaceove skalarne parcijalne diferencijalne jednačbe za potencijal u statičkim poljima primijenili smo u poglavlju 4, odjeljak 4.6., te u poglavlju 7, odjeljak 7.4. za rješavanje difuzijske jednačbe. Pogledati Prilog A.

jednadžbe (8.1.7) i činjenice da su koeficijenti u toj jednadžbi realni, mogu promatrati kompleksna rješenja tj. vektorske vremenske funkcije kojima su komponente vektora kompleksne. Hoćemo li realno rješenje, dovoljno je uzeti realni dio kompleksnog rješenja, koje je kao i imaginarni dio, također rješenje jednadžbe (8.1.7).¹⁵ Izrazimo dakle vektor $\mathbf{W}$ produktom

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) T(t) , \quad (8.1.8)$$

gdje $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ je vremenski neovisan vektor polja, a $T(t)$ je prostorno neovisna funkcija. I vektorska funkcija $\mathbf{V}$, kao i skalarna funkcija T su kompleksne funkcije. Trenutne realne vrijednosti polja $\mathbf{W}$ pak ne daju realni dijelovi funkcija $\mathbf{V}$ i T , nego realni dio njihovog produkta. Uvrštenjem pretpostavljenog separiranog rješenja (8.1.8) u valnu jednadžbu (8.1.7) dobiva se diferencijalna jednadžba

$$\Delta \mathbf{V} - f(t) \mathbf{V} = 0 , \quad (8.1.9a)$$

gdje je

$$f(t) = \frac{\mu \epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \mu \kappa \frac{\partial T}{\partial t}}{T} . \quad (8.1.9b)$$

Deriviranje jednadžbe (8.1.9a) po t daje

$$\frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{V}) = \frac{d\mathbf{V}}{dt} f(t) + \frac{df(t)}{dt} \mathbf{V} = 0 , \quad (8.1.9c)$$

budući da su $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, pa prema tome i $\Delta \mathbf{V}$ neovisni o vremenu. Iz jednadžbe (8.1.9c) slijedi da je

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 . \quad (8.1.10a)$$

To pokazuje da je funkcija $f(t)$ u stvari konstanta koju ćemo označiti s

$$f(t) = -k^2 . \quad (8.1.10b)$$

Takvo rješenje se i moglo očekivati u prostorima i materijalima koji se ne gibaju. S $(-k^2)$ označena je konstanta koja može biti bilo koji kompleksni broj. Predznak minus je uzet da bi jednadžba (8.1.9a) prešla u standardni oblik *Helmholtzove kompleksne diferencijalne jednadžbe*

$$\Delta \mathbf{V}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{V}(\mathbf{r}) = 0 . \quad (8.1.11a)$$

¹⁵ Pogledati podtekstnicu 23 u članku 8.2.2.

To je prva separirana diferencijalna jednačba, ona sadrži samo varijable prostora, a ne sadrži u sebi vrijeme kao varijablu. Druga separirana diferencijalna jednačba iz valne jednačbe (8.1.7) dobije se iz izraza (8.1.9b) i (8.1.10a) i glasi

$$\mu\epsilon \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \mu\kappa \frac{dT(t)}{dt} + k^2 T(t) = 0 . \quad (8.1.11b)$$

Na taj način smo separirali vektorsku valnu jednačbu (8.1.7) u sustav od dvije diferencijalne jednačbe. Jednu (8.1.11a) Helmholtzovu, koja je "statička" i čija rješenja ovise samo o geometriji elektromagnetskog polja, tj. o varijablama prostora. I drugu (8.1.11b) koja je obična diferencijalna jednačba drugog reda i sadrži samo vrijeme kao varijablu. Ona određuje "oblik" vremenske promjene polja $\mathbf{W}$ u svakoj točki prostora. Iako su te dvije diferencijalne jednačbe matematički neovisne, one nisu i fizikalno, jer se u obje pojavljuje ista konstanta k^2 , što se moglo i očekivati, budući da obje opisuju jedan jedinstveni elektromagnetski val.

Prema tome, separacijom varijabli sveli smo zadaću rješavanja vektorske valne jednačbe (8.1.7) na zadaću rješavanja sustava od dvije diferencijalne jednačbe. Jedne (8.1.11a) vektorske i druge (8.1.11b) koja je skalarna. Prva, Helmholtzova jednačba, ovisi o geometriji polja, tj. o *prostornom obliku vala* u neograničenom prostoru ispunjenom jednostavnim materijalom. Druga vremenska jednačba određuje funkciju $T(t)$, koja opisuje oblik vremenske promjene polja.

Da bi se riješila Helmholtzova vektorska jednačba (8.1.11a) moguća su dva pristupa: *analitički* i *numerički*. Numerički postupci za rješavanje jednačbi polja danas se redovito primjenjuju kod zamršenijih oblika polja kakvi se susreću kod realnih naprava i sustava i njih ćemo opisati kasnije.¹⁶ Analitički se Helmholtzova jednačba, kako je već rečeno u odjeljku 4.6, rješava postupkom separacije varijabli. Da bi to bilo moguće, nužno je da bude osigurana separabilnost jednačbe (8.1.11a) u određenom koordinatnom sustavu.¹⁷

Najjednostavniji geometrijski oblici vala su oni kod kojih se vektorska funkcija prostora

$$\mathbf{V} = \sum_i V_i(u_1, u_2, u_3) \mathbf{a}_i = \mathbf{V}(u_1, u_2, u_3) , \quad (8.1.12a)$$

s tri prostorne komponente V_i , od kojih je svaka ovisna o tri prostorne varijable u_1 , u_2 i u_3 , može izraziti sa samo jednim prostornim vektorom, koji je funkcija samo jedne prostorne varijable. Dakle, kada se može pretpostaviti da je

$$\mathbf{V} = \sum_i V_i(u_1) \mathbf{a}_i = \mathbf{V}(u_1) . \quad (8.1.12b)$$

¹⁶ Pogledati poglavlja 9. i 10. o numeričkim postupcima za proračun polja.

¹⁷ Više separabilnih koordinatnih sustava, različitih oblika koordinatnih ploha, opisano je detaljno u P. Moon, D. E. Spencer: *Field Theory Handbook*, Springer-Verlag, 1961. Pogledati Prilog A.

To su u teoriji polja poznati jednostavni *jednodimenzionalni oblici vala*, kao što su: ravni val, kružno-cilindrični val, sferni val i još neki.¹⁸ Najjednostavniji oblik postiže se u pravocrtnom pravokutnom koordinatnom sustavu, kada se pretpostavi da su veličine polja funkcije samo jedne prostorne varijable. Takav val nazivamo *ravni elektromagnetski val*.

8.2. RAVNI VAL U NEOGRANIČENOM PROSTORU

Najjednostavniji elektromagnetski valovi su *transverzalni ravni valovi*. Mi ćemo dalje proslijediti da vidimo kako takva rješenja za polja mogu biti dobivena u *neograničenom prostoru* bez izvora, ispunjenom *jednostavnim materijalom*. Takve materijale opisujemo značajkama ϵ , μ , κ , koje su skalarne konstante, sve različite od nule. To znači da takav materijal općenito predstavlja materijal s gubicima. Primijenit ćemo najjednostavniji, tj. pravokutni pravocrtni koordinatni sustav pri separaciji varijabli u Helmholtzovoj jednadžbi. Pretpostavit ćemo bilo koju vremensku promjenu polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$. Potom ćemo razmotriti dva posebna slučaja ravnog vala: ravne valove sinusne u vremenu (i prostoru) i ravne valove sinusne (samo) u prostoru.

8.2.1. Separacija Helmholtzove jednadžbe

Kompleksna Helmholtzova vektorska jednadžba (8.1.11a) u pravocrtnom pravocrtnom koordinatnom sustavu, zbog jednostavnog odnosa $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{a}_x \Delta V_x + \mathbf{a}_y \Delta V_y + \mathbf{a}_z \Delta V_z$, razlaže se u tri kompleksne skalarne Helmholtzove jednadžbe po komponentama vektora polja oblika

$$\Delta V + k^2 V = 0 . \quad (8.2.1)$$

Primijenit ćemo separaciju varijabli¹⁹ ponovno, tako da pretpostavimo da je rješenja kompleksne jednadžbe (8.2.1) moguće izraziti u obliku

$$V(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) . \quad (8.2.2)$$

Nakon uvrštenja relacije (8.2.2) u jednadžbu (8.2.1) i uz primjenu operatora

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} ,$$

¹⁸ Mnogi od tih oblika, a posebno ova tri najčešće obrađivana, opisani su u više djela mnogih autora. Mi ćemo vas uputiti npr. na: J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1941.; D.S. Jones, *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon Press, Oxford, 1964.; R.F. Harrington, *Time - Harmonic Electromagnetic fields*, McGraw-Hill, New York, 1961.

¹⁹ Pogledati Prilog A.

dobivamo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi²⁰

$$\begin{aligned}\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -k_x^2, \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -k_y^2, \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= -k_z^2.\end{aligned}\tag{8.2.3a - c}$$

Ovdje su $-k_x^2$, $-k_y^2$, $-k_z^2$ *separacijske konstante* svake od triju diferencijalnih jednadžbi. One su općenito kompleksne i mogu se objasniti kao *svojstvene vrijednosti* operatora d^2/dx^2 na prostoru dvaput derivabilnih funkcija od x . Svakoju svojstvenoj vrijednosti $-k_x^2$ odgovara dvodimenzionalni prostor *svojstvenih funkcija* operatora d^2/dx^2 . To su funkcije dobivene linearnom kombinacijom funkcija $e^{jk_x x}$ i $e^{-jk_x x}$ s kompleksnim konstantama, gdje je k_x jedan od korijena k_x^2 ako je k_x^2 različit od nule, odnosno funkcija 1 i x ako je $k_x^2 = 0$. Te linearne kombinacije su opća rješenja jednadžbi (8.2.3a - c). Umnoškom rješenja $h(k_x x)$, $h(k_y y)$ i $h(k_z z)$, kod čega još mora vrijediti

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2,\tag{8.2.4}$$

dobiju se rješenja Helmholtzove jednadžbe (8.2.1), kao

$$V = \sum_{k_x} \sum_{k_y} V_{k_x k_y} h(k_x x) h(k_y y) h(k_z z).\tag{8.2.5}$$

Umnošci pojedinih svojstvenih funkcija koje razapinju prostore rješenja jednadžbi (8.2.3a - c), daju rješenja Helmholtzove jednadžbe (8.2.1) koja zovemo *elementarne valne funkcije*. To su npr. rješenja oblika

$$e^{\pm j(k_x x + k_y y + k_z z)}.$$

Linearne kombinacije tih elementarnih valnih funkcija također su rješenja jednadžbe (8.2.1). Od svih rješenja (8.2.5) kompleksne skalarne Helmholtzove jednadžbe (8.2.1) izdvojiti ćemo najjednostavnije: ravni val koji se širi u jednom smjeru u prostoru. Neka su k_x^2 , k_y^2 i k_z^2 realne pozitivne konstante. Ove ćemo oznake zadržati i za kompleksne konstante, no ovdje su k_x^2 , k_y^2 i k_z^2 realne i strogo pozitivne. Njima je pridruženo rješenje Helmholtzove jednadžbe

$$V = K e^{+j(k_x x + k_y y + k_z z)} + L e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)},\tag{8.2.6}$$

²⁰ Pogledati Prilog A, točku 8.

gdje su K i L također kompleksne konstante. S druge strane kako je prema (8.2.4)

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (8.2.7a)$$

pogodno je uvesti vektor

$$\mathbf{k} = \mathbf{a}_x k_x + \mathbf{a}_y k_y + \mathbf{a}_z k_z, \quad (8.2.7b)$$

kao vektor koji određuje *smjer prostiranja vala*. Ako za radijvektor pišemo $\mathbf{r} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z$, tada se skalarni produkt može izraziti kao

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z. \quad (8.2.7c)$$

Konačno možemo odabrano elementarno rješenje (8.2.6) skalarne kompleksne Helmholtzove jednadžbe (8.2.1) u pravocrtnom koordinatnom sustavu pisati u obliku

$$V = K e^{+jk \cdot \mathbf{r}} + L e^{-jk \cdot \mathbf{r}}. \quad (8.2.8)$$

Nazivamo ga i trodimenzionalni, pravokutni, pravocrtni "zonski harmonik".²¹

8.2.2. Jednadžbe ravnog vala

Da bismo izveli jednadžbe ravnog vala, potrebno je u nastavku odrediti odnose između pojedinih komponenti polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$, koji proizlaze iz fizikalne naravi dinamičkog elektromagnetskog polja. Zato je pogodno uvesti novi pravokutni, pravocrtni koordinatni sustav (ξ, η, ζ) , koji ima isto ishodište kao i (x, y, z) sustav. Pretpostavit ćemo da se prema slici 8.2.1. os ζ novog sustava podudara sa smjerom vektora $\mathbf{k}$, tj. sa smjerom prostiranja ravnog vala. Uvedemo li novi jedinični vektor usmjeren duž osi ζ

$$\mathbf{a}_\zeta = \cos\alpha \mathbf{a}_x + \cos\beta \mathbf{a}_y + \cos\gamma \mathbf{a}_z, \quad (8.2.9)$$

tada vektor u smjeru prostiranja vala možemo izraziti jednostavno kao

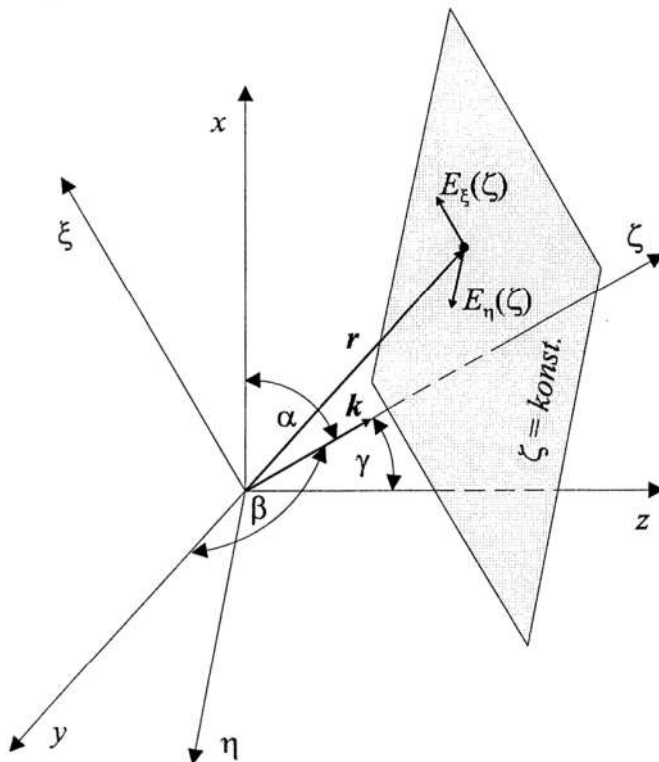
$$\mathbf{k} = \mathbf{a}_\zeta k, \quad (8.2.10)$$

gdje veličinu k određujemo iz jednadžbe (8.2.7a). Budući se radijvektor u novom sustavu može izraziti kao $\mathbf{r} = \mathbf{a}_\xi \xi + \mathbf{a}_\eta \eta + \mathbf{a}_\zeta \zeta$, to je produkt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k\zeta$.²² Naša pretpostav-

²¹ Pogledati M. Javid, P.M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.

²² Koordinatu ζ uvijek možemo izraziti kao $\mathbf{a}_\zeta \cdot \mathbf{r}$, tako da $k\zeta$ možemo napisati kao $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ gdje je vektor $\mathbf{k}$ dan izrazom (8.2.10) i u slučaju kad je k kompleksna konstanta. Taj je oblik posebno pogodan kad je u pitanju više ravnih valova u prostoru. Slučajevi kad formalni račun za vektor smjera $\mathbf{k}$ daje opći kompleksni vektor (npr. kad su kosinusi smjera kompleksni) rezultira valovima koji npr. nisu više homogeni. Pogledati članak 8.6.3.

ka ima za posljedicu da u svim točkama plohe $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_\zeta = \zeta = konst.$, koja predstavlja ravninu okomitu na os ζ , kao što je prikazano na slici 8.2.1, sve komponente V_i određene jednačbom (8.2.8) imaju konstantnu vrijednost, tj. nisu ovisne o koordinatama ξ i η .



Slika 8.2.1. Prostiranje transverznog homogenog ravnog vala duž osi ζ

Očito je da ako u rješenja (8.2.8) uvrstimo $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k\zeta$, tada dobivamo jednačbe oblika

$$V = K e^{+jk\zeta} + L e^{-jk\zeta} . \quad (8.2.11)$$

Takav ravni val nazivamo *homogenim*. Gornji izvod tj. primjer separacije s pozitivnim konstantama pokazuje da se vektori polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ određeni Maxwellovim sustavom jednačbi (8.1.3a – d), u danim uvjetima u pravocrtnom koordinatnom sustavu mogu izraziti u ovisnosti o samo jednoj prostornoj odrednici ζ i vremenu t , tj.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\zeta, t) \quad ; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\zeta, t) , \quad (8.2.12a,b)$$

pri čemu vektori $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ istovremeno zadovoljavaju valne jednačbe (8.1.4a,b) tj. (8.1.7) i mogu se prema (8.1.8) izraziti u obliku separiranih kompleksnih rješenja

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0(\zeta) T(t) , \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0(\zeta) T(t) . \end{aligned} \quad (8.2.13a,b)$$

Uzmemo li u obzir da se vektorski operatori mogu izraziti kao

$$\nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{a}_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} ,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} ,$$
(8.2.14a,b)

i da rješenja (8.2.13a,b) treba ponovno podvrgnuti Maxwellovim jednadžbama (8.1.3a,b), dobivamo

$$\nabla \times \mathbf{E}(\zeta, t) + \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\zeta, t) = 0 ,$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\zeta, t) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\zeta, t) - \kappa \mathbf{E}(\zeta, t) = 0 .$$

Uvrštavanjem odgovarajućih operatora i uređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\zeta \times [\mathbf{a}_\xi E_{0\xi} + \mathbf{a}_\eta E_{0\eta} + \mathbf{a}_\zeta E_{0\zeta}] (\pm jk) e^{\pm jk\zeta} T(t) + \\ + \mu [\mathbf{a}_\xi H_{0\xi} + \mathbf{a}_\eta H_{0\eta} + \mathbf{a}_\zeta H_{0\zeta}] e^{\pm jk\zeta} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = 0 , \\ \mathbf{a}_\zeta \times [\mathbf{a}_\xi H_{0\xi} + \mathbf{a}_\eta H_{0\eta} + \mathbf{a}_\zeta H_{0\zeta}] (\pm jk) e^{\pm jk\zeta} T(t) - \\ - (\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + \kappa T) [\mathbf{a}_\xi E_{0\xi} + \mathbf{a}_\eta E_{0\eta} + \mathbf{a}_\zeta E_{0\zeta}] e^{\pm jk\zeta} = 0 , \end{aligned}$$

a otud slijedi

$$H_\zeta = 0 ,$$

$$\mathbf{E}_\zeta = E_{0\zeta} e^{\pm jk\zeta} T_0 e^{-\frac{t}{\tau}} ; \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\kappa} .$$
(8.2.15a,b)

Iz tog razmatranja možemo zaključiti da longitudinalne komponente magnetskog polja H_ζ , tj. one okomite na ravninu u smjeru prostiranja vala, nema. Ako je vodljivost materijala konačna, onda ne postoji ni longitudinalna komponenta električnog polja $E_\zeta = 0$. Statičko električno polje iščezava eksponencijalno u vremenu, što se moglo i očekivati, s obzirom da u unutrašnjosti vodljivog materijala ne može postojati statičko električno polje. Prema tome, vektori polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ u izrazima (8.2.12a,b) imaju samo po dvije komponente, koje sve leže u ravnini $\zeta = konst.$, koja je okomita na smjer prostiranja vala

$$\begin{aligned} E(\zeta, t) &= a_\xi E_\xi(\zeta, t) + a_\eta E_\eta(\zeta, t) = E_0(\zeta) T(t) , \\ H(\zeta, t) &= a_\xi H_\xi(\zeta, t) + a_\eta H_\eta(\zeta, t) = H_0(\zeta) T(t) . \end{aligned} \quad (8.2.16a,b)$$

Takav ravni val, kojem i vektor električnog polja i vektor magnetskog polja leže u ravnini okomitoj na smjer prostiranja nazivamo *transverzalni elektromagnetski val* ili TEM val.

Preostaje još da odredimo utjecaj vremenske ovisnosti vektora polja u elektromagnetskom valu na ponašanje vala. Da bismo to odredili potrebno je analizirati rješenja diferencijalne jednadžbe (8.1.11b). Da bismo kompleksnu jednadžbu (8.1.11b) riješili, pogodno je pisati je u obliku

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{\kappa}{\varepsilon} \frac{dT}{dt} + \frac{k^2}{\mu \varepsilon} T = 0 . \quad (8.2.17)$$

Njezina karakteristična jednadžba glasi

$$s^2 + \frac{\kappa}{\varepsilon} s + \frac{k^2}{\mu \varepsilon} = 0 , \quad (8.2.18a)$$

a korijeni te kvadratne jednadžbe općenito su kompleksni i glase

$$s_{1,2} = -\frac{\kappa}{2\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{2\varepsilon}\right)^2 - \frac{k^2}{\mu \varepsilon}} . \quad (8.2.18b)$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (8.2.17) je prema tome

$$T(t) = M e^{s_1 t} + N e^{s_2 t} , \quad (8.2.19)$$

gdje su M i N općenito kompleksne konstante. Konačno se kao rješenja prigušenih valnih jednadžbi (8.1.4a,b), odnosno (8.1.7) za vektore polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$, pod uvedenim pretpostavkama za elektromagnetsko polje, tj. uz uvjet da u neograničenom prostoru bez izvora ispunjenom s jednostavnim materijalom postoji putujući homogeni, ravni, transverzalni elektromagnetski TEM val, koji se prostire u smjeru osi ζ , uz pomoć izraza (8.1.8), (8.1.12b), (8.2.11), (8.2.16a,b) i (8.2.19), dobivaju kompleksni izrazi oblika²³

²³ Iako je iz matematičkih razloga pogodno upotrijebiti kompleksne veličine i račun, treba imati na umu da se fizikalna bit polja mora predstaviti realnim funkcijama. Tako se za kompleksna polja u jednadžbama (8.2.20a,b) trenutna realna rješenja dobiju prema konvenciji kao

$$\begin{aligned} E_{Re}(\zeta, t) &= \text{Re}\{E(\zeta, t)\} , \\ H_{Re}(\zeta, t) &= \text{Re}\{H(\zeta, t)\} . \end{aligned}$$

Za detaljno i egzaktno objašnjenje pogledati odjeljak 7.2.

$$\begin{aligned} E(\zeta, t) &= E_1 e^{st+jk\zeta} + E_2 e^{st-jk\zeta} , \\ H(\zeta, t) &= H_1 e^{st+jk\zeta} + H_2 e^{st-jk\zeta} . \end{aligned} \quad (8.2.20a,b)$$

Ovdje su

$$\begin{aligned} E_1 &= a_\xi E_{1\xi} + a_\eta E_{1\eta} , \\ E_2 &= a_\xi E_{2\xi} + a_\eta E_{2\eta} , \\ H_1 &= a_\xi H_{1\xi} + a_\eta H_{1\eta} , \\ H_2 &= a_\xi H_{2\xi} + a_\eta H_{2\eta} , \end{aligned} \quad (8.2.21a - d)$$

s tim da su $E_{1\xi}$, $E_{1\eta}$, $E_{2\xi}$, $E_{2\eta}$ i $H_{1\xi}$, $H_{1\eta}$, $H_{2\xi}$, $H_{2\eta}$ osam kompleksnih konstanti, koje predstavljaju komponente četiri kompleksna vektora E_1 , E_2 , H_1 i H_2 koji svi leže u transverznoj ravnini $\zeta = konst.$ ²⁴

Budući su dvije vektorske kompleksne valne jednadžbe (8.1.4a,b) drugog reda, to i njihova rješenja sadrže dva para vektorskih kompleksnih konstanti. No zbog međusobne fizikalne povezanosti vektora E i H u jedinstvenom elektromagnetskom ravnom valu, samo su dvije kompleksne vektorske konstante neovisne, dok preostale dvije nisu. Tu međusobnu ovisnost konstanti u rješenjima (8.2.20a,b) utvrdit ćemo njihovim ponovnim uvrštavanjem u jednu glavnu Maxwellovu jednadžbu (8.1.3a). Tako pomoću relacije (8.2.14a) dobivamo kompleksnu jednadžbu

$$\left(a_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \times [E_1 e^{st+jk\zeta} + E_2 e^{st-jk\zeta}] + \mu \frac{\partial}{\partial t} [H_1 e^{st+jk\zeta} + H_2 e^{st-jk\zeta}] = 0 .$$

Nakon deriviranja dobivamo jednadžbu

$$[jk(a_\zeta \times E_1) + \mu s H_1] e^{st+jk\zeta} - [jk(a_\zeta \times E_2) - \mu s H_2] e^{st-jk\zeta} = 0 .$$

Nakon izjednačenja koeficijenata uz odgovarajuće eksponencijalne funkcije s nulom

²⁴ Ovdje ćemo skrenuti pozornost na moguća poopćenja rješenja ravnog vala. Neka je npr. materijal bez gubitaka, $\kappa = 0$, tada je $s = jkc$, gdje je $\mu\epsilon = 1/c^2$. U tom slučaju rješenja u (8.2.20a,b) su oblika $e^{jkct \pm jk\zeta} = e^{jk\epsilon(t \pm \zeta/c)}$. Pomoću Fourierovog integralnog teorema moguće je linearnom superpozicijom konstruirati od rješenja oblika $e^{j(t \pm \zeta/c)}$ opće rješenje jednadžbe (8.1.7) oblika $f(\zeta, t) = g(t - \zeta/c) + h(t + \zeta/c)$, gdje su f , g i h proizvoljne realne funkcije. Slično rješenje (2.4.7) dobili smo u članku 2.4.1. za skalarni potencijal točkastog naboja, kao rješenje valne jednadžbe (2.4.2). To je bilo rješenje u sfernim koordinatama i predstavljalo je sferni odlazeći i dolazeći val.

Izravnom supstitucijom lako provjeravamo da je npr. funkcija $\cos[\omega(t - \zeta/c)]$ rješenje valne jednadžbe (8.1.7). Uvrštavanjem step funkcije $U(t - \zeta/c)$ ili delta funkcije $\delta(t - \zeta/c)$, koje su derivabilne u smislu tzv. poopćenih funkcija, i njihovih poopćenih derivacija u jednadžbu (8.1.7) također dobivamo identitet. Stoga ih možemo smatrati poopćenim rješenjima valne jednadžbe, kako je to usvojeno u fizici i u tehnici.

sljede dvije relacije

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{jk}{\mu_s} (a_\zeta \times E_1) , \\ H_2 &= \frac{jk}{\mu_s} (a_\zeta \times E_2) , \end{aligned} \quad (8.2.22a,b)$$

pa rješenja (8.2.20a,b) za vektore polja možemo izraziti sa samo dvije neovisne vektorske kompleksne konstante integracije E_1 i E_2 kao

$$\begin{aligned} E &= E_1 e^{st+jk\zeta} + E_2 e^{st-jk\zeta} , \\ H &= -\frac{jk}{\mu_s} (a_\zeta \times E_1) e^{st+jk\zeta} + \frac{jk}{\mu_s} (a_\zeta \times E_2) e^{st-jk\zeta} . \end{aligned} \quad (8.2.23a,b)$$

Taj sustav jednadžbi pokazuje da su električno i magnetsko polje jedinstvenog elektromagnetskog vala međusobno prostorno *uvijek okomiti*, kao i da su kod TEM vala oba okomiti na pravac prostiranja vala. Rastavimo li vektorske jednadžbe u kompleksne komponente pomoću (8.2.21a – d), iz (8.2.22a,b) dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} (a_\xi H_{1\xi} + a_\eta H_{1\eta}) &= -\frac{jk}{\mu_s} (a_\eta E_{1\xi} - a_\xi E_{1\eta}) , \\ (a_\xi H_{2\xi} + a_\eta H_{2\eta}) &= \frac{jk}{\mu_s} (a_\eta E_{2\xi} - a_\xi E_{2\eta}) , \end{aligned}$$

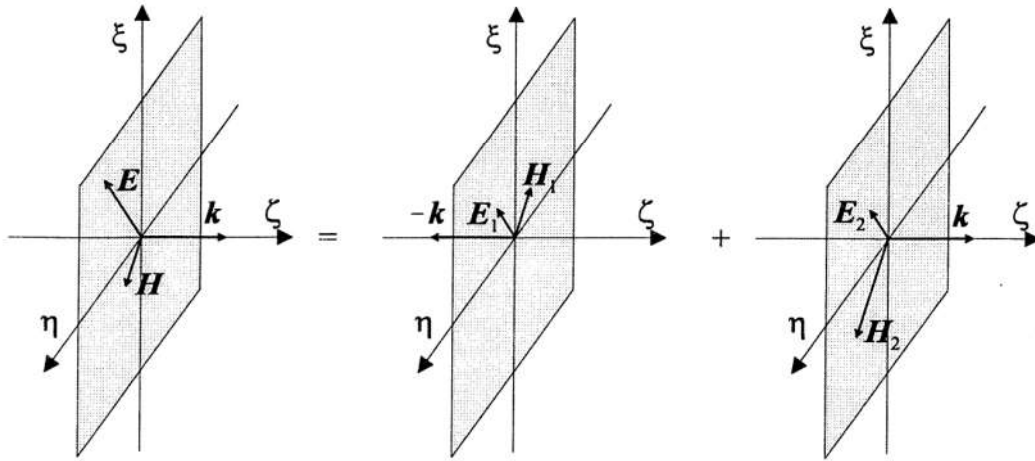
a otud slijede četiri skalarne kompleksne relacije po komponentama polja

$$\begin{aligned} H_{1\xi} &= \frac{jk}{\mu_s} E_{1\eta} \quad ; \quad H_{1\eta} = -\frac{jk}{\mu_s} E_{1\xi} , \\ H_{2\xi} &= -\frac{jk}{\mu_s} E_{2\eta} \quad ; \quad H_{2\eta} = \frac{jk}{\mu_s} E_{2\xi} . \end{aligned} \quad (8.2.24a - d)$$

Očito je da se za pojedine kompleksne komponente polja mogu pisati sljedeća rješenja jednadžbi ravnog vala

$$\begin{aligned} E_\xi &= E_{1\xi} e^{st+jk\zeta} + E_{2\xi} e^{st-jk\zeta} \\ E_\eta &= E_{1\eta} e^{st+jk\zeta} + E_{2\eta} e^{st-jk\zeta} , \\ H_\eta &= -\frac{jk}{\mu_s} E_{1\xi} e^{st+jk\zeta} + \frac{jk}{\mu_s} E_{2\xi} e^{st-jk\zeta} , \\ H_\xi &= \frac{jk}{\mu_s} E_{1\eta} e^{st+jk\zeta} - \frac{jk}{\mu_s} E_{2\eta} e^{st-jk\zeta} . \end{aligned} \quad (8.2.25a - d)$$

Međusobni odnosi vektora polja i njihovih komponenata prikazani su na slici 8.2.2.



Slika 8.2.2. Rastav ukupnog polja ravnog TEM vala (E, H) na inverzni (E_1, H_1) i direktni (E_2, H_2) val, koji se gibaju u smjeru $-\zeta$ i $+\zeta$ osi

Pošto smo definirali homogeni, transversalni elektromagnetski TEM ravni val, riješili smo valne jednačbe (8.1.4a,b) bilo kako u vremenu promjenjivog polja. Kompleksna rješenja tih jednačbi oblika (8.2.20a,b) ili pak oblika (8.2.23a,b) predstavljaju elementarni ravni val. Nakon toga preostaje da ispitamo mnoga svojstva ravnog vala. To ćemo učiniti promatrajući ravne valove koji se sinusno mijenjaju u vremenu.

8.2.3. Ravni valovi sinusni u vremenu

Dva su slučaja koja su u analizi ravnih valova posebno zanimljiva. Oni ovise o izboru oblika vremenske ovisnosti vektora elektromagnetskog polja. Pretpostavit ćemo prvo da je *polje sinusno*²⁵ u vremenu, tj. da se polje mijenja po zakonu $\sin \omega t$ ili $\cos \omega t$, gdje je ω konstantna kružna frekvencija. Mi ćemo često upotrijebiti *fazore*²⁶ za simboličko predstavljanje sinusnih funkcija u kompleksnom području.

Pretpostavimo za vremensku funkciju $T(t)$, određenu diferencijalnom jednačbom (8.2.17), sinusnu ovisnost o vremenu

$$T = T_0 e^{j\omega t} . \quad (8.2.26)$$

Tada jednačba (8.2.17) glasi

$$-\omega^2 T_0 e^{j\omega t} + j\omega \frac{\kappa}{\epsilon} T_0 e^{j\omega t} + \frac{k^2}{\mu \epsilon} T_0 e^{j\omega t} = 0 ,$$

²⁵ Često se upotrebljava i naziv *harmonička* polja.

²⁶ Pogledati članak 7.2.1.

što daje za separacijsku konstantu (8.2.7a) kompleksnu veličinu

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \kappa . \quad (8.2.27)$$

Često se separacijska konstanta u kompleksnom području piše i u obliku

$$k = k' \left(1 + \frac{\kappa}{j\omega \epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} , \quad (8.2.28a)$$

gdje smo uveli realnu konstantu

$$k' = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{c} . \quad (8.2.28b)$$

Ovdje je pogodno uvesti²⁷ (uz pretpostavku da je $\beta > 0$ uvijek)

$$\gamma = jk = \alpha + j\beta , \quad (8.2.29)$$

kao *konstantu prostiranja*. Ta konstanta zamjenjuje jk tako da njezin realni dio predstavlja prigušenje, dok imaginarni dio predstavlja faznu konstantu. Očito da je iz (8.2.27) moguće lako izračunati *konstantu prostiranja* kao

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \kappa . \quad (8.2.30)$$

Preostaje još da izraz (8.2.27) uvrstimo u karakterističnu jednadžbu (8.2.18a), pa dobivamo

$$s^2 + \frac{\kappa}{\epsilon} s + \omega^2 - j\omega \frac{\kappa}{\epsilon} = 0 ,$$

od kuda slijede korijeni

$$s_{1,2} = -\frac{\kappa}{2\epsilon} \pm \left(\frac{\kappa}{2\epsilon} + j\omega \right) .$$

Izdvojiti ćemo jedno rješenje

$$s = j\omega . \quad (8.2.31)$$

Rješenja valnih jednadžbi (8.1.4a,b) u kompleksnom području u slučaju da se polja mijenjaju sinusno u vremenu, prema izrazima (8.2.20a,b), glase

²⁷ Pogledati npr. M. Javid, P. M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.

$$\begin{aligned} E(\zeta, \omega t) &= E_1 e^{\alpha\zeta + j(\omega t + \beta\zeta)} + E_2 e^{-\alpha\zeta + j(\omega t - \beta\zeta)}, \\ H(\zeta, \omega t) &= H_1 e^{\alpha\zeta + j(\omega t + \beta\zeta)} + H_2 e^{-\alpha\zeta + j(\omega t - \beta\zeta)}. \end{aligned} \quad (8.2.32 \text{ a,b})$$

Najčešće se ta kompleksna rješenja za polja $E(\zeta, \omega t)$ i $H(\zeta, \omega t)$ pišu jednostavnije i kraće, tako da se ispusti funkcija ovisnosti o vremenu $e^{j\omega t}$. To znači da se uvedu fazori polja $\underline{E}$ i $\underline{H}$ na sljedeći način

$$E(\zeta, \omega t) = \underline{E} e^{j\omega t},$$

$$H(\zeta, \omega t) = \underline{H} e^{j\omega t},$$

gdje su fazori polja²⁸ određeni s

$$\underline{E} = E_1 e^{+\gamma\zeta} + E_2 e^{-\gamma\zeta}, \quad (8.2.32c,d)$$

$$\underline{H} = H_1 e^{+\gamma\zeta} + H_2 e^{-\gamma\zeta},$$

kao rješenja fazorskih jednadžbi

$$\Delta \underline{E} = \gamma^2 \underline{E}, \quad (8.2.32e,f)$$

$$\Delta \underline{H} = \gamma^2 \underline{H}.$$

To je pogodan i jednostavan način pisanja valnih jednadžbi polja, koji pojednostavnjuje i račun. Često se za oznaku fazora polja koriste simboli $\underline{E}(\zeta, j\omega)$ i $\underline{H}(\zeta, j\omega)$, a nazivaju ih još i "simbolički vektori". Realne (trenutne) vrijednosti polja iz fazora polja određuju se jednostavno iz relacija

$$E_{Re}(\zeta, \omega t) = \text{Re}\{\underline{E} e^{j\omega t}\}, \quad (8.2.32g,h)$$

$$H_{Re}(\zeta, \omega t) = \text{Re}\{\underline{H} e^{j\omega t}\}.$$

Razvijemo li rješenja (8.2.32a,b) po komponentama u relacijama (8.2.25a – d), dobit ćemo četiri skalarne jednadžbe u kompleksnom području. Prije toga izrazit ćemo kompleksne konstante u tim relacijama na sljedeći način

$$E_{1\xi} = A_1 e^{j\delta_1} \quad ; \quad E_{2\xi} = A_2 e^{j\delta_2}, \quad (8.2.33a - d)$$

$$E_{1\eta} = B_1 e^{j\nu_1} \quad ; \quad E_{2\eta} = B_2 e^{j\nu_2},$$

gdje su sve nove konstante, moduli A_1 , A_2 , B_1 i B_2 , te argumenti δ_1 , δ_2 , ν_1 i ν_2 realni.

²⁸ Pogledati članak 7.2.1.

Komponente električnog polja ravnog vala (8.2.25a – d) mogu se nakon uvrštenja (8.2.32a,b) i (8.2.33a – d) pisati kao

$$E_{\xi} = A_1 e^{+\alpha\zeta + j(\omega t + \beta\zeta + \delta_1)} + A_2 e^{-\alpha\zeta + j(\omega t - \beta\zeta + \delta_2)}, \quad (8.2.34a,b)$$

$$E_{\eta} = B_1 e^{+\alpha\zeta + j(\omega t + \beta\zeta + \nu_1)} + B_2 e^{-\alpha\zeta + j(\omega t - \beta\zeta + \nu_2)},$$

a komponente magnetskog polja mogu se tada pisati

$$H_{\xi} = -\frac{j\gamma}{\mu\omega} B_1 e^{+\alpha\zeta + j(\omega t + \beta\zeta + \nu_1)} + \frac{j\gamma}{\mu\omega} B_2 e^{-\alpha\zeta + j(\omega t - \beta\zeta + \nu_2)}, \quad (8.2.34c,d)$$

$$H_{\eta} = \frac{j\gamma}{\mu\omega} A_1 e^{-\alpha\zeta + j(\omega t + \beta\zeta + \delta_1)} - \frac{j\gamma}{\mu\omega} A_2 e^{+\alpha\zeta + j(\omega t - \beta\zeta + \delta_2)}.$$

Uredimo li koeficijente koji se pojavljuju u modulima kompleksnih komponenata magnetskog polja, dobivamo

$$\frac{j\gamma}{\mu\omega} = -\frac{\beta - j\alpha}{\mu\omega} = -\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} e^{j\psi} = \frac{-|\gamma|}{\mu\omega} e^{j\psi}, \quad (8.2.35a,b)$$

$$\frac{-j\gamma}{\mu\omega} = \frac{\beta - j\alpha}{\mu\omega} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} e^{j\psi} = \frac{|\gamma|}{\mu\omega} e^{j\psi},$$

gdje su

$$|\gamma| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}; \quad \tan \psi = \frac{-\alpha}{\beta}. \quad (8.2.36a,b)$$

Nakon toga mogu se komponente magnetskog polja (8.2.34c,d) ravnog TEM vala, uvažavajući relacije (8.2.35a,b) pisati

$$H_{\xi} = \frac{|\gamma|}{\mu\omega} B_1 e^{+\alpha\zeta + j(\omega t + \beta\zeta + \nu_1 + \psi)} - \frac{|\gamma|}{\mu\omega} B_2 e^{-\alpha\zeta + j(\omega t - \beta\zeta + \nu_2 + \psi)}, \quad (8.2.37a,b)$$

$$H_{\eta} = -\frac{|\gamma|}{\mu\omega} A_1 e^{+\alpha\zeta + j(\omega t + \beta\zeta + \delta_1 + \psi)} + \frac{|\gamma|}{\mu\omega} A_2 e^{-\alpha\zeta + j(\omega t - \beta\zeta + \delta_2 + \psi)}.$$

Budući su jednačbe (8.2.34a,b) i (8.2.37a,b) rješenja valnih jednačbi (8.1.4a,b), u kompleksnom području,²⁹ to oba, i realni i imaginarni dio, moraju također biti rješenja.

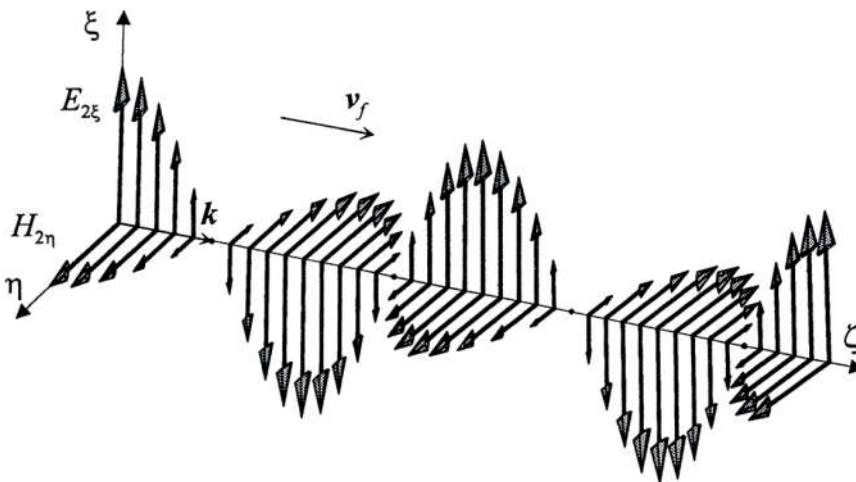
²⁹ Ovdje podsjećamo da se cijela zadaća rješavanja polja za ravne valove mogla svesti na iznalaženje rješenja Fourierove transformacije prigušenih valnih jednačbi (8.1.4a,b). Ako je vremenska promjena polja sinusna (tj. kosinusna) kao u našem slučaju, tada umjesto Fourierove transformacije koristimo fazorski prikaz. Pogledati poglavlje 7. odjeljak 7.2.

Tako ćemo za izražavanje fizikalne biti polja upotrijebiti prema konvenciji realni dio jednadžbi (8.2.34a,b) i (8.2.37a,b) kao rješenja za komponente polja ravnog TEM vala u realnoj vremensko-prostornoj domeni

$$\begin{aligned}
 E_{\xi_{Re}} &= A_1 e^{+\alpha\zeta} \cos(\omega t + \beta\zeta + \delta_1) + A_2 e^{-\alpha\zeta} \cos(\omega t - \beta\zeta + \delta_2) , \\
 E_{\eta_{Re}} &= B_1 e^{+\alpha\zeta} \cos(\omega t + \beta\zeta + \nu_1) + B_2 e^{-\alpha\zeta} \cos(\omega t - \beta\zeta + \nu_2) , \\
 H_{\xi_{Re}} &= \frac{|\gamma|}{\mu\omega} B_1 e^{+\alpha\zeta} \cos(\omega t + \beta\zeta + \nu_1 + \psi) - \\
 &\quad - \frac{|\gamma|}{\mu\omega} B_2 e^{-\alpha\zeta} \cos(\omega t - \beta\zeta + \nu_2 + \psi) , \\
 H_{\eta_{Re}} &= -\frac{|\gamma|}{\mu\omega} A_1 e^{+\alpha\zeta} \cos(\omega t + \beta\zeta + \delta_1 + \psi) + \\
 &\quad + \frac{|\gamma|}{\mu\omega} A_2 e^{-\alpha\zeta} \cos(\omega t - \beta\zeta + \delta_2 + \psi) .
 \end{aligned}
 \tag{8.2.38a - d}$$

Rješenja (8.2.32a,b), kao i rješenja (8.2.34a - d) rješenja su kompleksnih valnih jednadžbi (8.1.4a,b) za polja, tj. komponente polja ravnog vala sinusnog u vremenu, pisane u *kompleksnom području*. Njima odgovarajuća rješenja u *realnom području* dana su jednadžbama (8.2.38a - d). Iz izraza (8.2.38a - d) očito je da su polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$, kao i sve njihove komponente *sinusne u vremenu i prigušeno sinusne u prostoru*.

Posebno treba upozoriti da se u svim gornjim rješenjima za ravni val obvezatno pojavljuju valovi koji se prostiru u dva suprotna smjera, u smjeru $+\zeta$ i u smjeru $-\zeta$. Zato se ti valovi nazivaju i "putujući valovi". Međusobni odnosi polja "direktnih" i "inverznih" putujućih valova prikazani su na slici 8.2.2. Radi zornog prikaza prostiranja sinusnog vala, predstaviti ćemo jedan par $(E_{2\xi}, H_{2\eta})$ komponenti polja direktnog ravnog vala, danih u sustavu rješenja (8.2.38a - d), kako se prostire duž osi $+\zeta$.



Slika 8.2.3. Električno i magnetsko polje ravnog sinusnog direktnog putujućeg TEM vala koji se prostire u neograničenom prostoru u materijalu bez gubitaka u smjeru osi $+\zeta$

Radi jednostavnosti pretpostavili smo da je materijal bez gubitaka, tj. dielektrik, pa su

polja u fazi $\psi = 0$, a nema ni prigušenja $\alpha = 0$, dok smo za početni uvjet izabrali da je kut $\delta_2 = 0$. Prostiranje vala u trenutku $t = 0$ prikazano je na slici 8.2.3.

Argumenti $(\omega t \pm \beta \zeta + \varphi)$ periodičkih funkcija u sustavu jednadžbi (8.2.38a – d) nazivaju se *faze*, a kut φ koji je određen početnim uvjetima kao i odnosima u materijalu naziva se *fazni pomak*. U svakom trenutku su vektori $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ konstantni po cijeloj ravnini $\zeta = \text{konst.}$, pa se ta ravnina naziva *ravnina konstantne faze*.

Da bismo odredili faznu brzinu, promatrač se mora gibati tako brzo u smjeru prostiranja pojedinog vala da uvijek mjeri istu, tj. konstantnu fazu. Prema tome, za sve komponente ravnog vala prema jednadžbama (8.2.38a – d) možemo pisati da je

$$\omega t \mp \beta \zeta + \varphi = \text{konst.} , \quad (8.2.39a)$$

što nakon diferenciranja daje

$$\omega dt \mp \beta d\zeta = 0 . \quad (8.2.39b)$$

Otuda proizlazi da je *fazna brzina* vala određena izrazom

$$v_f = \frac{d\zeta}{dt} = \pm \frac{\omega}{\beta} . \quad (8.2.40)$$

Ona jednostavno predstavlja brzinu prostiranja faze vala i nije nužno da se uvijek podudara s brzinom s kojom se energija vala ili signala prostire. U stvari v_f može nadmašiti kritičnu brzinu svjetla c_0 a da na bilo koji način ne prekrši postulate teorije relativnosti. Očito je $v_f = +\omega/\beta$, što znači da se faza vala giba u smjeru $+\zeta$ osi, za val koji nazivamo *direktni* i čija faza je $(\omega t - \beta \zeta + \varphi)$, dok je $v_f = -\omega/\beta$ za *inverzni val*, koji se giba u smjeru $-\zeta$ osi, i čija faza je $(\omega t + \beta \zeta + \varphi)$. Frekvencija polja je f i povezana je s kružnom frekvencijom ω pomoću izraza

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad ; \quad \omega = 2\pi f . \quad (8.2.41a,b)$$

Vremenski period je

$$T_h = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} , \quad (8.2.41c)$$

mjeren u sekundama. Prostorni period naziva se *valna dužina* i mjeri se u SI – sustavu u metrima, a definira se relacijom

$$\lambda = \frac{v_f}{f} , \quad (8.2.42a)$$

što pomoću (8.2.40) daje

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} . \quad (8.2.42b)$$

Pomoću relacija (8.2.27) i (8.2.30) mogu se za danu kružnu frekvenciju vala ω i ovisno o značajkama materijala ϵ , μ , κ izračunati konstante vala k i γ , koje se redovito pojavljuju u rješenjima za polja ravnog TEM vala. Pomoću jednadžbe (8.2.29) odredit ćemo kvadriranjem dvije vrlo važne konstante, iz relacije

$$\alpha^2 + 2j\alpha\beta - \beta^2 = -\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\kappa ,$$

koja se raspada na dvije realne jednadžbe

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\epsilon ,$$

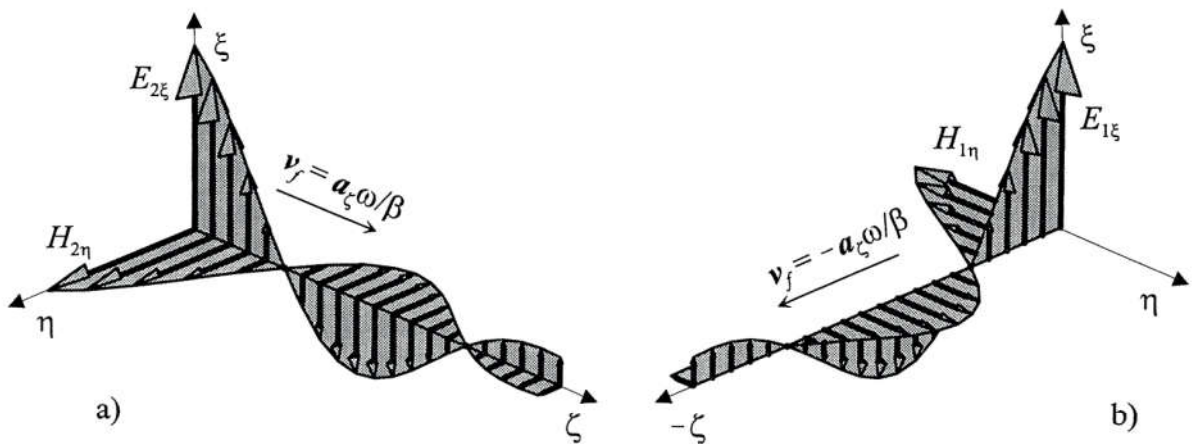
$$2\alpha\beta = \omega\mu\kappa .$$

Otuda se simultanim rješavanjem dobiju konstante

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right)^{1/2} , \quad (8.2.43a,b)$$

$$\beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right)^{1/2} ,$$

gdje $c = 1/(\mu\epsilon)^{1/2}$. Iz kompleksnih rješenja za vektore polja ravnog vala (8.2.32a,b), kao i iz rješenja za komponente polja u realnom području (8.2.38a – d) očito je da množitelj $e^{\pm\alpha\zeta}$ predstavlja prigušenje vala, pa se α naziva *prigušna konstanta*. Jasno je da se direktni val u smjeru $+\zeta$ osi prigušuje s faktorom $e^{-\alpha\zeta}$, a inverzni val u smjeru $-\zeta$ osi prigušuje se s faktorom $e^{+\alpha\zeta}$ kako je to prikazano na slici 8.2.4.



Slika 8.2.4. Prigušenje ravnih valova, a) direktnog s faktorom $e^{-\alpha\zeta}$ i b) inverznog s faktorom $e^{+\alpha\zeta}$

Iz istih rješenja ravnog vala slično se može uočiti da su članovi $\pm \beta \zeta$ dijelovi faze inverznog i direktnog vala, pa otuda naziv za β *fazna konstanta*. Faznu brzinu možemo iz relacije (8.2.40) izračunati pomoću izraza za faznu konstantu β (8.2.43b), kao

$$v_f = \pm c \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1 \right) \right]^{-1/2}, \quad (8.2.44)$$

gdje je $c = 1/(\mu\epsilon)^{1/2}$. Veličine α , β i v_f određuju ponašanje ravnog sinusnog vala u neograničenom prostoru, ovisno o kružnoj frekvenciji polja ω i o značajkama ϵ , μ , κ materijala koji se nalazi u tom prostoru. Utjecaj značajki materijala na prostiranje vala analizirat ćemo u odjeljku 8.3.

U ovom članku izveli smo, dakle, stacionarna rješenja (8.2.32a,b) za polja elektromagnetskog vala u neograničenom prostoru ispunjenom jednostavnim materijalom. Taj val je sinusan u vremenu i prigušeno sinusan u prostoru, putujući, transverzalni elektromagnetski (TEM), linearno polariziran, homogeni, ravni val.

8.2.4. Ravni valovi sinusni u prostoru

U prethodnom smo članku 8.2.3, uz pretpostavku da se polje mijenja sinusno u vremenu (po funkciji $e^{j\omega t}$, odnosno po funkciji $\cos \omega t$), imali za posljedicu da je separacijska konstanta k bila kompleksan broj prema (8.2.27), a isto tako i funkcija prostiranja γ prema (8.2.29). To je rezultiralo imaginarnim rješenjem za korijene s , prema (8.2.31), karakteristične jednačbe (8.2.18a). Za posljedicu iz te pretpostavke dobili smo elektromagnetske valove čija su polja (8.2.32a,b) sinusna u vremenu i prigušeno sinusna u prostoru.

Pretpostavimo li sada da je separacijska konstanta k realna, korijen s prema (8.2.18b) postaje kompleksan

$$s = -\frac{\kappa}{2\epsilon} \pm j \sqrt{\frac{k^2}{\mu\epsilon} - \left(\frac{\kappa}{2\epsilon}\right)^2} = -p \pm jg. \quad (8.2.45)$$

Jedno rješenje kompleksnih valnih jednačbi polja (8.1.4a,b) bit će u tom slučaju dano izrazima

$$\begin{aligned} E(\zeta, t) &= \mathbf{E}_1 e^{-pt + j(gt + k\zeta)} + \mathbf{E}_2 e^{-pt + j(gt - k\zeta)}, \\ H(\zeta, t) &= \mathbf{H}_1 e^{-pt + j(gt + k\zeta)} + \mathbf{H}_2 e^{-pt + j(gt - k\zeta)}. \end{aligned} \quad (8.2.46a,b)$$

Ova rješenja bit će jednaka s onima u (8.2.20a,b) za ravni val u slučaju da je g realan. Jer ako je $(\kappa/2\epsilon)^2 < k^2/\mu\epsilon$ veličina jg je čisto imaginarna i polja (8.2.46a,b) mogu biti predstavljena kao ravni val koji se giba po ζ osi u oba smjera faznom brzinom

$$v = \frac{d\zeta}{dt} = \pm \frac{g}{k} . \quad (8.2.47)$$

Amplituda vala u svakoj točki ζ opada eksponencijalno s t , a prigušenje je bitno određeno vremenskom konstantom $\tau = \epsilon/\kappa$. Prema tome, ako je dana sinusna raspodjela polja s obzirom na koordinatu ζ u jednom trenutku t , tada uz uvjet da je $(\kappa/2\epsilon)^2 < k^2/\mu\epsilon$, može u danom materijalu egzistirati sinusni ravni val, kako je to pokazano jednačbama (8.2.46a,b). To je sigurno slučaj u dielektriku kada je $\kappa = 0$. Taj uvjet može biti zadovoljen i u dobrom izolatoru koji je svojstvima blizak idealnom dielektriku.

U drugom slučaju pak, kada je $(\kappa/2\epsilon)^2 > k^2/\mu\epsilon$, veličina g je imaginarna, a jg je realna veličina, uvest ćemo novu realnu veličinu $r = p - jg$. Tada rješenja jednačbi (8.1.4a,b) uz pretpostavku zadane *sinusne raspodjele polja u prostoru* glase

$$\begin{aligned} E(\zeta, t) &= E_1 e^{-rt+jk\zeta} + E_2 e^{-rt-jk\zeta} , \\ H(\zeta, t) &= H_1 e^{-rt+jk\zeta} + H_2 e^{-rt-jk\zeta} . \end{aligned} \quad (8.2.48a,b)$$

U realnom području, uz pretpostavku da su konstantni vektori realni, te jednačbe glase

$$\begin{aligned} E_{Re}(\zeta, t) &= E_1 e^{-rt} \cos(k\zeta) - E_2 e^{-rt} \cos(k\zeta) , \\ H_{Re}(\zeta, t) &= H_1 e^{-rt} \cos(k\zeta) - H_2 e^{-rt} \cos(k\zeta) . \end{aligned} \quad (8.2.49a,b)$$

Očito je da nema prostiranja elektromagnetskog polja ni energije na način kako smo to do sada upoznali. Jednačbe (8.2.48a,b), kao ni (8.2.49a,b) nisu valne jednačbe. Istina, električno i magnetsko polje su sinusno raspodijeljeni duž osi ζ , ali oni se mijenjaju tako da *monotono opadaju u vremenu t*. Nema gibanja duž osi ζ inicijalnog valnog oblika. Valna pojava je degenerirala u *difuziju*. Kasnije ćemo pokazati da se elektromagnetska energija u takvom polju giba, samo ne valom nego difuzijom. Slično kao kod gibanja topline. To je moguće samo u materijalima u kojima vrijedi odnos

$$\left(\frac{\kappa}{2\epsilon} \right)^2 > \frac{k^2}{\mu\epsilon} .$$

To su materijali kod kojih je $\kappa > 0$, a to su vodiči. Što je materijal bolji vodič, efekt difuzije je jače izražen.³⁰

³⁰ Pogledati poglavlje 7. i gubitke energije zbog površinskog učinka.

8.2.5. Osnovne značajke ravnih sinusnih valova

8.2.5.1. Valna impedancija

Pojam impedancije dobro je poznat u teoriji električnih krugova kao i u teoriji linija. To je pojam koji stavlja u odnos napon i struju i po amplitudi i po fazi. Impedancija koju pokazuje materijal u neograničenom prostoru za valove određenog oblika i vrste predstavlja *odziv* danog materijala na pobudu takvim valom. Ona je usko povezana i s tijekom energije u polju.

U članku 8.2.3. sustav jednadžbi (8.2.34a – d) pisan u kompleksnom području daje rješenje za komponente električnog i magnetskog polja ravnog TEM sinusnog vala. Te jednadžbe sadrže po dvije komponente i električnog i magnetskog polja direktnog vala i po dvije komponente i električnog i magnetskog polja inverznog vala. Kvocijenti modula odgovarajućih komponenata električnog i magnetskog polja za *direktne valove* su *pozitivni* i označavamo ih sa $+Z$

$$Z = \frac{E_{2\xi}}{H_{2\eta}} = \frac{A_2 e^{j\delta_2}}{\frac{-j\gamma}{\mu\omega} A_2 e^{j\delta_2}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}, \quad (8.2.50a,b)$$

$$Z = -\frac{E_{2\eta}}{H_{2\xi}} = -\frac{B_2 e^{j\delta_2}}{\frac{j\gamma}{\mu\omega} B_2 e^{j\delta_2}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma},$$

dok su za *inverzne valove negativni* i označavamo ih sa $-Z$

$$-Z = \frac{E_{1\xi}}{H_{1\eta}} = \frac{A_1 e^{j\delta_1}}{\frac{j\gamma}{\mu\omega} A_1 e^{j\delta_1}} = -\frac{j\omega\mu}{\gamma}, \quad (8.2.50c,d)$$

$$-Z = \frac{-E_{1\eta}}{H_{1\xi}} = -\frac{B_1 e^{j\delta_1}}{\frac{-j\gamma}{\mu\omega} B_1 e^{j\delta_1}} = -\frac{j\omega\mu}{\gamma}.$$

Valna impedancija je prema tome definirana kao omjer odgovarajućih kompleksnih komponenti električnog i magnetskog polja odgovarajućeg direktnog elektromagnetskog sinusnog vala. Za omjer para komponenti polja koje pripadaju inverznom valu upotrebljava se negativna valna impedancija. Valna impedancija,³¹ dakle, iznosi

³¹ Još 1938. g. Schelkunoff je na taj način definirao "unutarnju impedanciju" materijala za ravne TEM valove. Engleski naziv je "intrinsic impedance", a sve se više upotrebljava "wave impedance" ili jednostavno "impedance".

$$Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma} . \quad (8.2.50e)$$

Uz pomoć izraza (8.2.29), gdje su α i β određene izrazima (8.2.43a,b), kompleksna valna impedancija može se pisati u trigonometrijskom obliku

$$Z = \frac{\omega\mu}{|\gamma|} e^{j\varphi} = |Z| e^{j\varphi} , \quad (8.2.50f)$$

gdje su modul i argument od Z određeni s

$$|Z| = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} ; \quad \tan \varphi = \frac{\alpha}{\beta} . \quad (8.2.50g,h)$$

U praznom prostoru valna impedancija se reducira na realan broj

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.6 \, \Omega . \quad (8.2.50i)$$

Pogodno je još valnu impedanciju pisati u obliku

$$Z = Z' \left(1 + \frac{\kappa}{j\omega\epsilon} \right)^{-1/2} , \quad (8.2.50j)$$

gdje smo uveli

$$Z' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} . \quad (8.2.50k)$$

Uvodeći impedanciju Z , moguće je npr. za *direktni*, linearno³² polarizirani sinusni ravni val, komponente polja u kompleksnom području, pisati kao

$$E_{\xi} = E_{\xi_0}^+ e^{-\alpha\zeta + j(\omega t - \beta\zeta)} ,$$

$$H_{\eta} = \frac{E_{\xi_0}^+}{|Z|} e^{-\alpha\zeta + j(\omega t - \beta\zeta - \varphi)} , \quad (8.2.51a,b)$$

a za *inverzni val* kao

³² Pogledati točku 8.2.5.3.

$$\begin{aligned}
E_{\xi} &= E_{\xi 0}^{-} e^{+\alpha \zeta + j(\omega t + \beta \zeta)} , \\
H_{\eta} &= -\frac{E_{\xi 0}^{-}}{|Z|} e^{+\alpha \zeta + j(\omega t + \beta \zeta - \varphi)} ,
\end{aligned}
\tag{8.2.52a,b}$$

gdje su $E_{\xi 0}^{+}$ i $E_{\xi 0}^{-}$ zadani kao realni brojevi.

8.2.5.2. Tijek energije

U trećem poglavlju definirali smo Poyntingov vektor, koji određuje elektromagnet-sku energiju koju ravni val prenosi kroz jedinicu ploštine fazne ravnine u jedinici vremena u smjeru gibanja vala. Uobičajeno je u sinusnim sustavima računati sa sred-njim vrijednostima snage.³³ Tako se *srednja vrijednost tijeka energije, koja se u jedinici vremena prenese kroz jediničnu ploštinu*, računa pomoću izraza (3.2.7) za Poyntingov vektor, pisan u kompleksnom području kao

$$N_{sr} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* , \tag{8.2.53}$$

gdje je $\mathbf{H}^*$ konjugirano kompleksna vrijednost vektora magnetskog polja $\mathbf{H}$.

Neka je zbog jednostavnosti zadan direktni sinusni val, kojemu je vektor $\mathbf{E}$ linearno polariziran u smjeru ξ -osi, a vektor $\mathbf{H}$ u smjeru η -osi. Val se giba u smjeru $+\zeta$ -osi

$$\begin{aligned}
E_{\xi} &= E_{\xi 0}^{+} e^{-\alpha \zeta + j(\omega t - \beta \zeta + \varphi)} , \\
H_{\eta} &= \frac{E_{\xi 0}^{+}}{|Z|} e^{-\alpha \zeta + j(\omega t - \beta \zeta + \varphi)} ,
\end{aligned}
\tag{8.2.54a,b}$$

a konjugirano kompleksni H_{η}^* je

$$H_{\eta}^* = \frac{E_{\xi 0}^{+}}{|Z|} e^{-\alpha \zeta - j(\omega t - \beta \zeta + \varphi)} . \tag{8.2.54c}$$

Srednja vrijednost kompleksnog Poyntingova vektora je prema (8.2.53)

$$(N_{\zeta})_{sr} = \frac{1}{2} E_{\xi} H_{\eta}^* = \frac{E_{\xi 0}^{+2}}{2|Z|} e^{-2\alpha \zeta + j\varphi} . \tag{8.2.55a}$$

Realni dio kompleksnog Poyntingova vektora $N_{\zeta, sr}$ predstavlja srednju djelatnu elektro-magnetsku energiju koja se prenosi ravnim valom kroz prostor i koja prođe kroz jedini-

³³ Pogledati poglavlje 7.

čnu površinu fazne ravnine (ξ, η) u jedinici vremena u smjeru $+\zeta$ osi

$$(N_\zeta)_{Re, sr} = \frac{E_{\xi 0}^{+2}}{2|Z|} e^{-2\alpha\zeta} \cos\varphi, \quad (8.2.55b)$$

gdje je $E_{\xi 0}^+$ realan broj, a $\cos\varphi$ se može odrediti iz

$$\cos\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (8.2.55c)$$

Množitelj $\cos\varphi$ pojavljuje se zbog *faznog pomaka* između kompleksnih vektora E_ξ i H_η , tj. zato jer fazor H_η fazno zaostaje za fazorom E_ξ za kut φ . U idealnim dielektrici-
cima je $\kappa = 0$, pa je i $\alpha = 0$, što ima za posljedicu da je $\cos\varphi = 1$, tj. $\varphi = 0$. U dielek-
triku nema faznog pomaka između fazora električnog i magnetskog polja. Ako u izraz
(8.2.55b) uvrstimo (8.2.50f,g) i (8.2.55c), dobivamo konačno

$$(N_\zeta)_{Re, sr} = \frac{\beta}{2\mu\omega} e^{-2\alpha\zeta} E_{\xi 0}^{+2}. \quad (8.2.55d)$$

Očito je da s porastom prijađenog puta ζ , tj. da s gibanjem vala, specifična snaga koja
se prenosi valom postaje sve manja zbog člana $e^{-2\alpha\zeta}$. Taj gubitak elektromagnetske
snage pretvara se u toplinu u materijalu u kojem se prostire val. Realne gubitke u jedi-
nici volumena materijala izračunat ćemo pomoću izraza (3.3.31a) i (8.2.55d) kao

$$(P_g')_{Re, sr} = -\nabla \cdot (N_\zeta)_{Re, sr} = -\frac{\partial N_\zeta}{\partial \zeta} = \frac{\kappa}{2} e^{-2\alpha\zeta} E_{\xi 0}^{+2}. \quad (8.2.56)$$

To je dio energije nošene elektromagnetskim valom koji se u jedinici vremena u jedini-
čnom volumenu pretvara u toplinski gubitak.³⁴

8.2.5.3. Polarizacija

Krivulja položaja vrha vektora $\mathbf{E}$ ravnog vala, koja je funkcija vremena u danoj
točki u prostoru, općenito određuje polarizaciju vala. U slučaju linearne polarizacije ta
krivulja je pravac, dok je u slučaju kružne polarizacije kružnica. U općem slučaju
krivulja koju opisuje vrh vektora $\mathbf{E}$ je elipsa, čije se dimenzije mogu odrediti pomoću
analitičke geometrije.

Direktni sinusni homogeni ravni val potpuno je zadan pomoću frekvencije polja ω ,
smjera prostiranja $+\zeta$, amplitude i smjera vektora električnog polja, npr.
 $\mathbf{E}_{\xi 0} = \mathbf{a}_\xi E_{\xi 0}$. Ako je prostor neograničen i zadane su značajke LIH materijala ϵ , μ , κ ,

³⁴ U izrazu (8.2.56) pojavljuje se $1/2$, jer je $E_{\xi 0}^+ e^{-\alpha\zeta}$ maksimalna a ne efektivna vrijednost jakosti električnog polja.

tada je i vektor magnetskog polja vala $\mathbf{H}_{\eta 0} = a_{\eta} \mathbf{H}_{\eta 0}$ potpuno određen. Vektor električnog polja pišemo u realnom području kao

$$\begin{aligned} E_{Re}(\zeta, t) &= a_{\xi} \operatorname{Re}[E_{\xi 0} e^{-\alpha \zeta + j(\omega t - \beta \zeta)}] = \\ &= a_{\xi} |E_{\xi 0}| e^{-\alpha \zeta} \cos(\omega t - \beta \zeta + \delta), \end{aligned} \quad (8.2.57a)$$

gdje je $E_{\xi 0} = |E_{\xi 0}| e^{j\delta}$. Ovaj val je sam za sebe *linearно polariziran*, i to u smjeru osi ξ . Na sličan način možemo pisati linearно polarizirani val u smjeru osi η kao

$$\begin{aligned} E_{Re}(\zeta, t) &= a_{\eta} \operatorname{Re}[E_{\eta 0} e^{-\alpha \zeta + j(\omega t - \beta \zeta)}] = \\ &= a_{\eta} |E_{\eta 0}| e^{-\alpha \zeta} \cos(\omega t - \beta \zeta + \nu), \end{aligned} \quad (8.2.57b)$$

gdje je $E_{\eta 0} = |E_{\eta 0}| e^{j\nu}$. Linearna kombinacija tih dvaju polja je također rješenje valne jednadžbe, odnosno sustava Maxwellovih jednadžbi, pa dobivamo novi val

$$E_{Re}(\zeta, t) = \operatorname{Re}[a_{\xi} |E_{\xi 0}| e^{-\alpha \zeta + j(\omega t - \beta \zeta + \delta)} + a_{\eta} |E_{\eta 0}| e^{-\alpha \zeta + j(\omega t - \beta \zeta + \nu)}]. \quad (8.2.58)$$

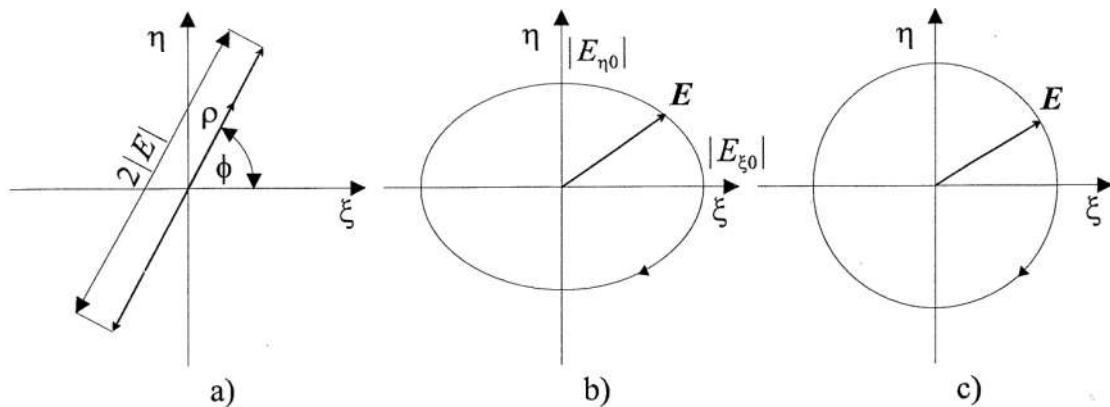
Pogodnim izborom amplituda i faznih pomaka komponenti vektora električnog polja može se utjecati na to da li će polje biti linearно, kružno ili općenito eliptički polarizirano. Pretpostavit ćemo prvo da su zadani sljedeći odnosi

$$|E_{\xi 0}| = |E| \cos \phi \quad ; \quad |E_{\eta 0}| = |E| \sin \phi \quad ; \quad \delta = \nu = \psi, \quad (8.2.59a - c)$$

gdje su veličine $|E|$, ϕ i ψ zadane. Uvrštenjem i uređivanjem dobivamo iz jednadžbe (8.2.58) polje

$$E_{Re}(\zeta, t) = [a_{\xi} \cos \phi + a_{\eta} \sin \phi] |E| e^{-\alpha \zeta} \cos(\omega t - \beta \zeta + \psi), \quad (8.2.60)$$

koje predstavlja linearно polariziran val u smjeru vektora ρ , koji s osi ξ zatvara kut ϕ kao na slici 8.2.5 a).



Slika 8.2.5. Linearно a), eliptično b) i kružno c) polarizirano električno polje ravnog vala

Ako u drugom slučaju pretpostavimo da su u jednažbi (8.2.58) zadani sljedeći odnosi

$$|E_{\xi 0}| \neq |E_{\eta 0}| \quad ; \quad v = \delta \pm \frac{\pi}{2} . \quad (8.2.61 \text{ a,b})$$

tada uvrštavanjem i kvadriranjem jednažbe (8.2.58) dobivamo

$$\left[\frac{E_{\xi}(\zeta, t)}{|E_{\xi 0}|} \right]^2 + \left[\frac{E_{\eta}(\zeta, t)}{|E_{\eta 0}|} \right]^2 = e^{-2\alpha\zeta} . \quad (8.2.62)$$

Ta jednažba koja određuje odnose između komponenata E_{ξ} i E_{η} predstavlja jednažbu elipse za određeni $\zeta = konst.$ Poluosi elipse, prikazane na slici 8.2.5 b), su $|E_{\xi 0}|e^{-\alpha\zeta}$ i $|E_{\eta 0}|e^{-\alpha\zeta}$. Za takav val kažemo da je *eliptično polariziran*. Pod drugim uvjetima, tj. općenito, poluosi elipse mogu ležati u bilo kojem položaju.

Ako pretpostavimo da su još $|E_{\xi 0}| = |E_{\eta 0}| = |E|$ tada jednažba (8.2.62) prelazi u jednažbu kružnice s polumjerom $|E|e^{-\alpha\zeta}$. To je *kružno polarizirani val*. Polarizacija valova može se iskoristiti za procese filtriranja valova.

8.3. PROSTIRANJE RAVNIH VALOVA

U prethodna dva odjeljka u ovom poglavlju iz prigušenih valnih jednažbi i iz Helmholtzove jednažbe separacijom varijabli izveli smo jednodimenzionalna rješenja. Zatim smo propisali uvjete pod kojima smo dobili jednažbe sinusnog ravnog elektromagnetskog vala. Najjednostavniji, fazorski oblik tih jednažbi dan je izrazima (8.2.32c,d). U ovom odjeljku tijekom studija prostiranja ravnih valova u neograničenom prostoru ispunjenom jednostavnim materijalom, upoznat ćemo svojstva sinusnih elektromagnetskih *putujućih valova*. Prvo ćemo analizirati prostiranje sinusnih ravnih valova u (idealnom) dielektriku.³⁵ Promatrat ćemo stojne i putujuće valove, koji su linearno i kružno polarizirani. Zatim ćemo ispitati odziv realnih, tj. materijala s gubicima na uzbuđu poljem ravnog sinusnog vala. Posebno ćemo istražiti vrijednosti valne impedancije i konstanti prostiranja za različite granične slučajeve, kao što su dielektrik, izolator s malim gubicima i visokovodljivi materijal.³⁶ Najprije ćemo promatrati prosti-

³⁵ Autori su se opredijelili i nazvali (idealnim) "dielektrikom" zamišljeni materijal koji je bez gubitaka i čija je vodljivost po dogovoru jednaka nuli ($\kappa = 0$), a sve realne dielektričke materijale koji su s gubicima i čija je vodljivost ma kako malena, ali različita od nule ($\kappa \neq 0$), nazivat ćemo "izolatorima".

³⁶ Prije nego pristupimo analizi funkcionalne ovisnosti značajki materijala Z , α i β o frekvenciji vala ω , treba upozoriti da je vrlo složeni fenomen frekvencijske ovisnosti parametara materijala ϵ , μ i κ obrađen u mnogim djelima, od kojih autori čitatelju posebno preporučuju: V. Knapp, P. Colić, *Uvod u električna i magnetska svojstva materijala*, Školska knjiga, Zagreb, 1990., M. Javid, P. M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.

ranje valova u dielektriku, jer su u tom slučaju valne pojave i matematička analiza najjednostavniji.³⁷ Zatim ćemo analizirati složeniji slučaj prostiranja valova u realnim materijalima s gubicima.

8.3.1. Valovi u dielektriku

Promatrat ćemo prostiranje sinusnih homogenih ravnih transverzalnih elektromagnetskih (TEM) putujućih valova u materijalu bez gubitaka ($\kappa = 0$), tj. u dielektriku, koji ispunjava neograničen prostor. Najčešće je to prazni, neograničeni prostor sa značajkama ϵ_0 i μ_0 . Neka je dani materijal dielektrik sa zadanim gradivnim značajkama ϵ i μ , dok je $\kappa = 0$. Pretpostavit ćemo da je frekvencija vala ω zadana i dovoljno niska da značajke materijala ϵ i μ možemo smatrati konstantama. Uz te pretpostavke možemo relativno jednostavno odrediti temeljne značajke materijala α , β , γ , v_f i Z , koje određuju uvjete prostiranja vala u promatranom dielektriku. Pomoću jednadžbi (8.2.43a,b) možemo odrediti prigušnu i faznu konstantu dielektričkog materijala kao

$$\begin{aligned}\alpha &= 0, \\ \beta &= \frac{\omega}{c} = k',\end{aligned}\tag{8.3.1a,b}$$

gdje je

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c_0}{n}.\tag{8.3.2}$$

S c smo označili brzinu svjetlosti u dielektriku, a s $c_0 = 1/(\mu_0\epsilon_0)^{1/2}$ brzinu svjetlosti u praznom prostoru. U optici se omjer

$$n = \sqrt{\mu_r\epsilon_r},\tag{8.3.3}$$

naziva "indeks loma" dielektrika. Pošto je u svim materijalima, izuzev u feromagnetima, $\mu_r \approx 1$, indeks loma je tada približno $n \approx \epsilon_r^{1/2}$. Ovaj rezultat je najprije utvrdio Maxwell, i bio je osnovom na temelju koje je Maxwell tvrdio da je svjetlost elektromagnetska pojava. Faznu brzinu vala u dielektriku odredit ćemo pomoću izraza (8.2.40) ili (8.2.44) kao

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.\tag{8.3.4}$$

³⁷ U ovom odjeljku 8.3. analizirat ćemo prostiranje valova u materijalima uz pretpostavku da dielektričnost ϵ i vodljivost κ nisu ovisni o frekvenciji vala ω i da su realne konstante, što je dobra aproksimacija za valove frekvencija polja nižih od gigaherca ($f < 10^9$ Hz).

Pomoću izraza (8.2.42a) može se lako za zadanu frekvenciju $f = \omega/2\pi$ odrediti valna duljina u dielektričkom materijalu kao

$$\lambda = \frac{v_f}{f} = \frac{c}{f} = \frac{\lambda_0}{n}, \quad (8.3.5)$$

gdje je $\lambda_0 = c_0/f$ valna duljina kod iste frekvencije u praznom prostoru. Preostaje još da pomoću (8.2.30) odredimo konstantu prostiranja

$$\gamma = j\beta = j\frac{\omega}{c}. \quad (8.3.6)$$

i pomoću (8.2.50e) valnu impedanciju materijala

$$Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{j\frac{\omega}{c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z', \quad (8.3.7a,b)$$

$$\varphi = 0.$$

Na temelju izvedenih izraza (8.3.1a,b) do (8.3.7a,b) možemo za prostiranje vala u jednostavnom dielektriku (pri frekvencijama dovoljno niskim da μ i ϵ budu konstantni) općenito zaključiti:

1. U dielektriku, zato jer je $\kappa = 0$, prema izrazu (3.3.8) nema gubitka snage pri prostiranju vala.
2. Budući je prigušna konstanta $\alpha = 0$, tj. zato jer nema gubitaka snage $p_g = 0$, val se u dielektriku giba bez prigušenja. Konstanta prostiranja vala je imaginarna, $\gamma = j\omega/c$.
3. Fazna brzina gibanja ravnine konstantne faze u dielektriku nije ovisna o frekvenciji vala i jednaka je brzini svjetlosti u danom materijalu $v_f = c$.
4. U svim dielektricima indeks loma je $n > 1$, pa je fazna brzina manja od one u vakuumu $v_f = c_0/n$, što ima za posljedicu da se valna duljina skraćuje u dielektriku u odnosu na onu u vakuumu $\lambda = \lambda_0/n$. Što je materijal "gušći", to je skraćenje valne duljine veće.
5. Budući da nema prigušenja amplitude vala, i budući da su fazne brzine valova različitih frekvencija iste, to u idealnom dielektriku nema ni distorzije signala, koji može biti sastavljen iz cijelog spektra sinusnih valova različite frekvencije. To je vrlo važno svojstvo idealnog dielektrika. Slične osobine pokazuju i izrazito dobri izolatori.
6. Valna impedancija dielektrika je realan broj $Z = Z'$. To uključuje da je fazni pomak između fazora električnog i magnetskog polja vala jednak nuli, $\varphi = 0$, tj. oni su u fazi. Dakle, prostorno su vektori električnog i magnetskog polja postavljeni pod kutom od 90° , dok su vremenski promatrano oni u fazi.
7. Srednja vrijednost kompleksnog Poyntingova vektora za direktni val u smjeru $+z$

u dielektriku je prema (8.2.55a)

$$N_{z,sr} = \frac{(E_{x0}^+)^2}{2Z'} . \quad (8.3.8)$$

Srednja snaga koja se valom prenosi kroz jedinicu površine u dielektriku realna je i konstantna, tj. ne ovisi o prijađenom putu z .

8.3.1.1. Putujući valovi

U članku 8.2.3. izveli smo više oblika rješenja valnih jednadžbi za slučaj putujućeg sinusnog ravnog vala u jednostavnom materijalu. Ovdje ćemo koristiti *fazorski oblik* rješenja (8.2.32c,d) pisan za homogenu TEM valove, koja sadrže i *direktni val* u $+z$ smjeru i *inverzni val* u $-z$ smjeru. Vektori polja $\underline{E}$ i $\underline{H}$ nalaze se u faznoj $x-y$ ravnini i u fazorskom obliku zadovoljavaju jednadžbe (8.2.32e,f)

$$\begin{aligned} \Delta \underline{E} &= \gamma^2 \underline{E} , \\ \Delta \underline{H} &= \gamma^2 \underline{H} , \end{aligned} \quad (8.3.9a,b)$$

te glase

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \underline{E}_1 e^{\gamma z} + \underline{E}_2 e^{-\gamma z} , \\ \underline{H} &= \underline{H}_1 e^{\gamma z} + \underline{H}_2 e^{-\gamma z} . \end{aligned} \quad (8.3.9c,d)$$

Njihove trenutne (realne) vrijednosti računaju se prema izrazu (8.2.32e,f)

$$\begin{aligned} \underline{E}_{Re} &= \text{Re}\{\underline{E} e^{j\omega t}\} , \\ \underline{H}_{Re} &= \text{Re}\{\underline{H} e^{j\omega t}\} . \end{aligned} \quad (8.3.10a,b)$$

U najopćenitijem slučaju mogu se kompleksni vektori $\underline{E}_1$, $\underline{E}_2$, $\underline{H}_1$ i $\underline{H}_2$ rastaviti u skladu s jednadžbom (8.2.21a – d) na četiri para komponenata u faznoj ravnini

$$\begin{aligned} \underline{E}_1 &= a_x \underline{E}_{1x} + a_y \underline{E}_{1y} , \\ \underline{E}_2 &= a_x \underline{E}_{2x} + a_y \underline{E}_{2y} , \\ \underline{H}_1 &= a_x \underline{H}_{1x} + a_y \underline{H}_{1y} , \\ \underline{H}_2 &= a_x \underline{H}_{2x} + a_y \underline{H}_{2y} , \end{aligned} \quad (8.3.11a - d)$$

gdje su $\underline{E}_{1x}$, $\underline{E}_{1y}$, $\underline{E}_{2x}$, $\underline{E}_{2y}$, $\underline{H}_{1x}$, $\underline{H}_{1y}$, $\underline{H}_{2x}$ i $\underline{H}_{2y}$ kompleksne skalarne veličine. To su kompleksne konstante integracije, od kojih je prema (8.2.33a – d) dovoljno četiri zadati, a preostale četiri određuju se pomoću valne impedancije iz relacija (8.2.50a – d), tako da dobivamo

$$\begin{aligned}
E_{1x} &= A_1 e^{j\alpha_1} \quad ; \quad H_{1x} = \frac{B_1}{Z'} e^{j\beta_1} \quad , \\
E_{2x} &= A_2 e^{j\alpha_2} \quad ; \quad H_{2x} = -\frac{B_2}{Z'} e^{j\beta_2} \quad , \\
E_{1y} &= B_1 e^{j\beta_1} \quad ; \quad H_{1y} = -\frac{A_1}{Z'} e^{j\alpha_1} \quad , \\
E_{2y} &= B_2 e^{j\beta_2} \quad ; \quad H_{2y} = \frac{A_2}{Z'} e^{j\alpha_2} \quad ,
\end{aligned}
\tag{8.3.12a - d}$$

gdje su A_1 , A_2 , B_1 i B_2 realne konstante. Preostaje još da te opće relacije za homogene putujuće ravne valove pišemo u obliku fazora po x i y komponentama električnog i magnetskog polja u dielektriku

$$\begin{aligned}
\underline{E}_x^- &= E_{1x} e^{+\gamma z} = A_1 e^{j(\alpha_1 + k'z)} \quad ; \quad \underline{H}_y^- = H_{1y} e^{+\gamma z} = -\frac{A_1}{Z'} e^{j(\alpha_1 + k'z)} \quad , \\
\underline{E}_x^+ &= E_{2x} e^{-\gamma z} = A_2 e^{j(\alpha_2 - k'z)} \quad ; \quad \underline{H}_y^+ = H_{2y} e^{-\gamma z} = \frac{A_2}{Z'} e^{j(\alpha_2 - k'z)} \quad , \\
\underline{E}_y^- &= E_{1y} e^{+\gamma z} = B_1 e^{j(\beta_1 + k'z)} \quad ; \quad \underline{H}_x^- = H_{1x} e^{+\gamma z} = \frac{B_1}{Z'} e^{j(\beta_1 + k'z)} \quad , \\
\underline{E}_y^+ &= E_{2y} e^{-\gamma z} = B_2 e^{j(\beta_2 - k'z)} \quad ; \quad \underline{H}_x^+ = H_{2x} e^{-\gamma z} = -\frac{B_2}{Z'} e^{j(\beta_2 - k'z)} \quad ,
\end{aligned}
\tag{8.3.13a - d}$$

gdje je $k' = \omega/c$. Ovdje su s (E_x^+, H_y^+) i (E_y^+, H_x^+) označena dva para komponenta električnog i magnetskog polja direktnih valova koji se gibaju u smjeru $+z$ osi, dok su s (E_x^-, H_y^-) i (E_y^-, H_x^-) označena polja druga dva inverzna vala koji se gibaju u smjeru $-z$ osi. Jednadžbe (8.3.13a - d) su opće fazorske jednadžbe ravnih putujućih (u $+z$ i $-z$ smjeru) valova. Realne, tj. trenutne vrijednosti polja mogu se odrediti iz (8.3.10a,b). Bilo koji homogeni ravni val u dielektriku može se dobiti superpozicijom odgovarajućih jednadžbi iz (8.3.13a - d).

Zbog jednostavnosti promatrat ćemo samo jedan direktni i jedan inverzni putujući val, i to tako da načinimo superpoziciju polja iz prve i druge jednadžbe u izrazu (8.3.13a - d). Opće x -polarizirano (električno) polje koje se sastoji od dva vala koji se gibaju u suprotnim smjerovima, a nejednakih su amplituda, glasi

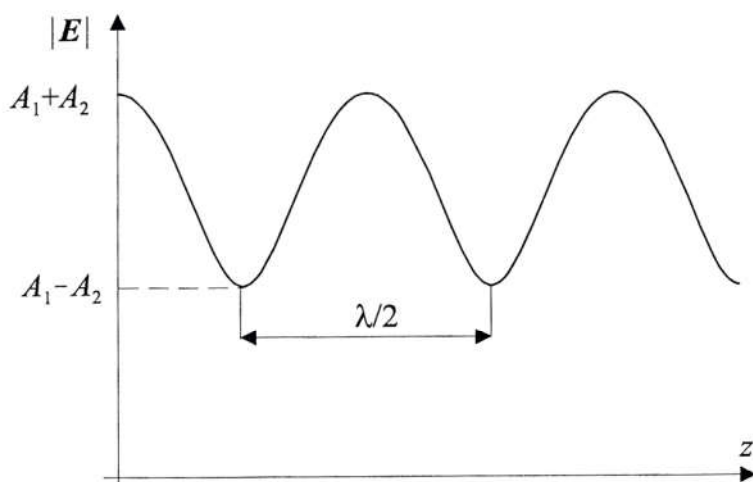
$$\begin{aligned}
\underline{E}_x &= \underline{E}_x^- + \underline{E}_x^+ = A_1 e^{j(\alpha_1 + k'z)} + A_2 e^{j(\alpha_2 - k'z)} \quad , \\
\underline{H}_y &= \underline{H}_y^- + \underline{H}_y^+ = -\frac{A_1}{Z'} e^{j(\alpha_1 + k'z)} + \frac{A_2}{Z'} e^{j(\alpha_2 - k'z)} \quad .
\end{aligned}
\tag{8.3.14a,b}$$

To su jednadžbe općeg *linearno polariziranog putujućeg vala*. U posebnom slučaju, ako je konstanta $A_1 = 0$, imamo "čisti" *direktni* putujući, linearno polarizirani val. Ako je pak $A_2 = 0$, onda imamo "čisti" *inverzni* putujući val. Slučaj kada je $|A_1| = |A_2|$ posebno je interesantan i analizirat ćemo ga u točki 8.3.1.2.

Ako su realne konstante $A_1 \neq A_2$, a zbog jednostavnosti neka su $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, tada se rezultatno x -polarizirano električno polje, koje nastaje superpozicijom dva suprotno usmjerena putujuća vala, u bilo kojoj točki na osi z može izraziti kao

$$\underline{E}_x = (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 2k'z)^{1/2} \cdot e^{-j \arctan\left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tan k'z\right)} = |\underline{E}_x| e^{-j\psi} \quad (8.3.15)$$

Dijagram ovisnosti amplituda $|E_x|$ rezultatnog električnog polja o položaju na osi z prikazan je na slici 8.3.1.



Slika 8.3.1. Prikaz ovisnosti amplitude fazora rezultatnog električnog polja dva vala u suprotnom gibanju, o udaljenosti z .

Treba napomenuti da bi mala proba, tj. prijamna antena spojena pomoću ispravljača, unesena u polje takvog vala, pokazivala napon koji bi po obliku upravo bio jednak onome na slici 8.3.1. Napomenimo da bi za čisti putujući val ($A_1 = 0$ ili $A_2 = 0$) dijagram na slici 8.3.1. bio konstantan, tj. pravac paralelan sa z -osi.

Sada ćemo analizirati poseban slučaj *linearno polariziranog čistog direktnog putujućeg vala*, koji predstavlja elementaran primjer homogenog ravnog TEM vala. Fazorske jednadžbe polja takvog vala određene su drugim parom izraza u (8.3.13a – d) i glase

$$\begin{aligned} \underline{E}_x^+ &= E_0 e^{-jk'z} , \\ \underline{H}_y^+ &= H_0 e^{-jk'z} = \frac{E_0}{Z'} e^{-jk'z} . \end{aligned} \quad (8.3.16a,b)$$

Trenutne vrijednosti vektora polja linearno polariziranog čistog direktnog putujućeg vala u dielektriku jesu

$$\begin{aligned}
 E_{x_{Re}}^+ &= E_0 \cos(\omega t - k'z) = E_0 \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda}\right), \\
 H_{y_{Re}}^+ &= \frac{E_0}{Z'} \cos(\omega t - k'z) = \frac{E_0}{Z'} \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda}\right),
 \end{aligned}
 \tag{8.3.16c,d}$$

i prikazane su na slici 8.2.3. Ovdje smo uvrstili da je $A_2 = E_0$ realna veličina i da je $\alpha_2 = 0$.

Vrlo su zanimljivi energetske odnosi. Tako se gustoće pohranjene ukupne električne i ukupne magnetske energije u dielektričkom materijalu mogu pomoću izraza (3.3.21) i (3.3.28) računati u realnom području kao

$$\begin{aligned}
 (w_e)_{Re} &= \frac{\epsilon}{2} \{Re(\underline{E}_x^+ e^{j\omega t})\}^2 = \frac{\epsilon}{2} \{Re(E_0 e^{j(\omega t - k'z)})\}^2 = \\
 &= \frac{\epsilon}{2} E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right) = \frac{\epsilon}{4} E_0^2 \left[1 + \cos 2\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right)\right], \\
 (w_m)_{Re} &= \frac{\mu}{2} \{Re(\underline{H}_y^+ e^{j\omega t})\}^2 = \frac{\mu}{2} \{Re(H_0 e^{j(\omega t - k'z)})\}^2 = \\
 &= \frac{\mu}{2} \frac{E_0^2}{\epsilon} \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right) = \frac{\epsilon}{2} E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right) = \\
 &= \frac{\epsilon}{4} E_0^2 \left[1 + \cos 2\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right)\right],
 \end{aligned}
 \tag{8.3.17a,b}$$

gdje je E_0 amplituda, tj. maksimalna vrijednost jakosti električnog polja. Treba uočiti da su trenutne vrijednosti gustoće pohranjene električne i magnetske energije linearno polariziranog čistog putujućeg vala međusobno jednake, $w_e = w_m$, tj. pola ukupne pohranjene energije vala je električna, a pola je magnetska energija. Maksimalni iznos gustoće i jedne i druge energije pohranjene u dielektriku konstantan je duž osi prostiranja vala $+z$. Mijenja se samo trenutna vrijednost ovisno o trenutku promatranja. Frekvencija promjena gustoće energije je dvostruka, tj. iznosi 2ω . Na taj promjenjivi dio dodaje se jedan stalni iznos $\epsilon/4 E_0^2$, koji nije ovisan ni o položaju na osi z ni o trenutku promatranja.

Sve dosad rečeno u funkciji je prijenosa energije TEM ravnim valom u smjeru $+z$ osi. Naime, stalne promjene pohranjene energije u jediničnim volumenima duž osi z moguće su jedino ako postoji tijekom energije u dielektriku u kojem se prostire ravni putujući val. Prosječni tijek energije u jedinici vremena određen je srednjom vrijednošću kompleksnog Poyntingova vektora prema izrazu (8.3.8) i iznosi

$$N_{sr}^* = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2} \underline{a}_x \underline{E}_x^* \times \underline{a}_y \underline{H}_y^* = \frac{1}{2} (\underline{a}_x \times \underline{a}_y) \frac{E_0^2}{Z'} = \underline{a}_z \frac{E_0^2}{2Z'} . \quad (8.3.18)$$

Očito je da je gustoća srednje snage koja se prenosi čistim putujućim linearno polariziranim valom kroz dielektrik *radna* i *stalna*, tj. ne ovisi o prijeđenom putu. Trenutnu vrijednost gustoće elektromagnetske snage koja se prenosi "čistim" direktnim putujućim valom odredit ćemo pomoću

$$\begin{aligned} N_{Re}^* &= \text{Re}(\underline{a}_x \underline{E}_x^* e^{j\omega t}) \times \text{Re}(\underline{a}_y \underline{H}_y^* e^{j\omega t}) = \underline{a}_z \frac{E_0^2}{Z'} \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right) = \\ &= \underline{a}_z \frac{E_0^2}{2Z'} \left[1 + \cos 2\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right) \right] . \end{aligned} \quad (8.3.19)$$

I ovdje uz jedan stalan iznos trenutne snage $E_0^2/2Z'$ (koji je upravo jednak srednjoj prenesenoj snazi), koji se kroz prostor prenosi čistim direktnim putujućim linearno polariziranim valom, prenosi se i jedan sinusno promjenjiv dio koji titra dvostrukom frekvencijom 2ω .

Uobičajeno je još definirati *brzinu prostiranja energije* v_e valom kao *omjer trenutnih vrijednosti* gustoće tijeka snage i gustoće pohranjene energije

$$v_e = \frac{N_{Re}}{w_{eRe} + w_{mRe}} . \quad (8.3.20)$$

Za homogeni putujući ravni val iz (8.3.17a,b) i (8.3.19) slijedi da je

$$v_e = \frac{1}{\epsilon Z'} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = c = v_f . \quad (8.3.21)$$

Općenito ove dvije brzine ne moraju biti jednake. Fazna brzina može biti veća ili manja od brzine svjetlosti c , ali brzina prostiranja energije nikad nije veća od brzine svjetlosti. U (idealnom) dielektriku te su dvije brzine jednake i jednake su brzini svjetlosti.

Kao sljedeće analizirat ćemo poseban slučaj putujućeg ravnog TEM vala s *kružno polariziranim poljem*. Promatrat ćemo čisti direktni putujući val, koji sadrži x i y komponentu polja u faznoj ravnini. To je val koji nastaje superpozicijom obaju komponenta direktnog vala (8.3.13b) i (8.3.13d), i glasi

$$\begin{aligned} \underline{E}^+ &= \underline{a}_x \underline{E}_x^+ + \underline{a}_y \underline{E}_y^+ = (\underline{a}_x E_{2x} + \underline{a}_y E_{2y}) e^{-\gamma z} , \\ \underline{H}^+ &= \underline{a}_y \underline{H}_y^+ + \underline{a}_x \underline{H}_x^+ = (\underline{a}_y H_{2y} + \underline{a}_x H_{2x}) e^{-\gamma z} . \end{aligned} \quad (8.3.22a,b)$$

Nakon uređenja dobivamo relacije

$$\underline{E}^+ = (a_x A_2 e^{j\alpha_2} + a_y B_2 e^{j\beta_2}) e^{-jk'z}, \quad (8.3.22c,d)$$

$$\underline{H}^+ = (a_y A_2 e^{j\alpha_2} - a_x B_2 e^{j\beta_2}) \frac{1}{Z'} e^{-jk'z}.$$

Ako pretpostavimo da su konstante integracije zadane tako da je $\alpha_2 = 0$ i $\beta_2 = \pi/2$ tako da je $A_2 = B_2 e^{j\pi/2} = E_0$, tada slijede relacije

$$\underline{E}^+ = (a_x - ja_y) E_0 e^{-jk'z}, \quad (8.3.23a,b)$$

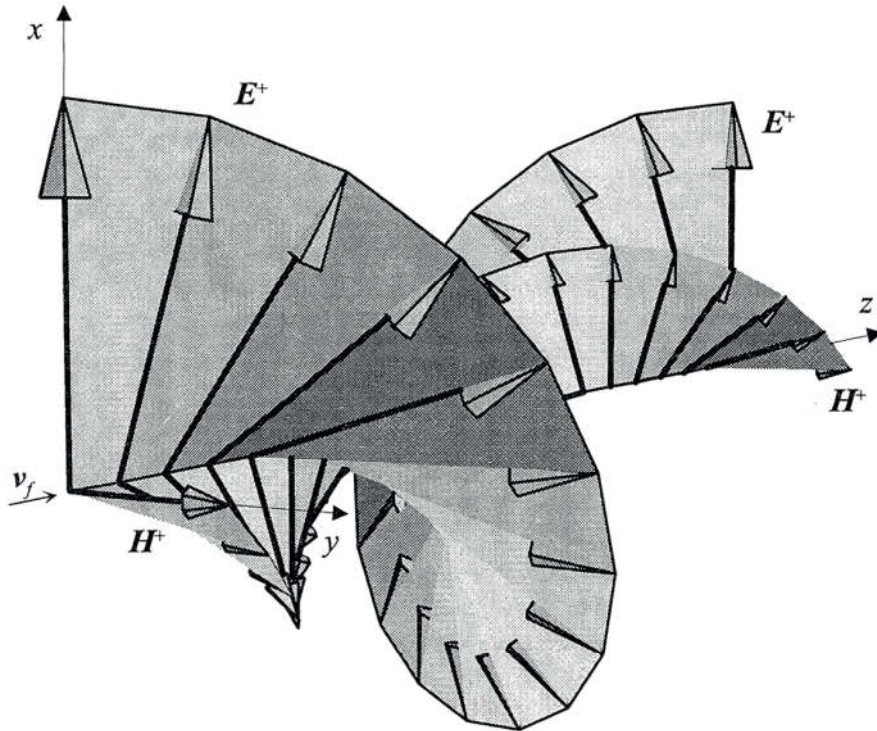
$$\underline{H}^+ = (a_x - ja_y) j \frac{E_0}{Z'} e^{-jk'z},$$

koje predstavljaju jednadžbe kružno polariziranog čistog direktnog putujućeg vala u dielektriku u fazorskom obliku. Trenutne, tj. realne vrijednosti jakosti polja dobit ćemo pomoću jednadžbi (8.3.10a,b), i one iznose

$$E_{Re}^+ = a_x E_0 \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda}\right) + a_y E_0 \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right), \quad (8.3.23c,d)$$

$$H_{Re}^+ = a_y \frac{E_0}{Z'} \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda}\right) - a_x \frac{E_0}{Z'} \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right),$$

i prikazane su na slici 8.3.2.



Slika 8.3.2. Prostiranje kružno polariziranog čistog direktnog (u smjeru +z osi) putujućeg vala faznom brzinom $v_f = c$.

Tri vektora $\mathbf{E}^+$, $\mathbf{H}^+$ i $\mathbf{v}_f$ na slici 8.3.2. čine pravokutni sustav koji se giba u smjeru osi $+z$ i rotira oko nje po pravilu desnog vijka kako vrijeme teče. Trenutne vrijednosti vektora $\mathbf{E}_{Re}^+$ i $\mathbf{H}_{Re}^+$ su konstantne i iznose $|\mathbf{E}_{Re}^+| = E_0$ i $|\mathbf{H}_{Re}^+| = E_0/Z'$ što je značajka kružno polariziranog vala.

Tijek srednje energije nošene kružno polariziranim čistim direktnim putujućim valom u jedinici vremena određen je srednjom vrijednošću kompleksnog Poyntingova vektora prema izrazima (8.3.18) i (8.3.23a,b), te iznosi

$$\begin{aligned} N_{sr}^+ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}^+ \times \mathbf{H}^{+*} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y) E_0 e^{-jk'z} \times (-j\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y) \frac{E_0}{Z'} e^{+jk'z} = \\ &= \frac{1}{2} [(\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y) - (\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x)] \frac{E_0^2}{Z'} = \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{Z'}. \end{aligned} \quad (8.3.24)$$

U usporedbi sa snagom linearno polariziranog vala prema (8.3.18), kružno polarizirani val prenosi dvostruko veću srednju elektromagnetsku snagu. S druge strane, trenutna vrijednost gustoće snage koja se prenosi tim valom može se izračunati iz izraza (8.3.19) i (8.3.23c,d), kao

$$\begin{aligned} N_{Re}^+ &= \mathbf{E}_{Re}^+ \times \mathbf{H}_{Re}^{+*} = \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{Z'} \left[\cos^2 \left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda} \right) + \sin^2 \left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \right] = \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{Z'}. \end{aligned} \quad (8.3.25)$$

Moglo se očekivati da je trenutna vrijednost gustoće snage koja se prenosi kružno polariziranim valom konstantna i nepromjenjiva u vremenu, te upravo jednaka iznosu srednje snage. Treba usmjeriti pozornost da su posebno važna svojstva kružno polariziranog TEM čistog direktnog putujućeg homogenog sinusnog vala upravo ta da su mu vektori električnog i magnetskog polja konstantni po iznosu, da rotiraju po pravilu desnog vijka i da je tijek snage koja se prenosi valom stalan i nepromjenjiv u vremenu.

Gustoće pohranjene električne i magnetske energije u dielektriku prigodom prostiranja vala su prema (8.3.17a,b) i (8.3.23c,d)

$$\begin{aligned} (w_e)_{Re} &= \frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}_{Re}^+|^2 = \frac{\epsilon}{2} E_0^2, \\ (w_m)_{Re} &= \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}_{Re}^+|^2 = \frac{\mu}{2} \left(\frac{E_0}{Z'} \right)^2 = \frac{\epsilon}{2} E_0^2, \end{aligned} \quad (8.3.26)$$

gdje je E_0 maksimalna vrijednost, tj. amplituda jakosti električnog polja.

U polju kružno polariziranog vala u dielektriku nema prema tome promjene ni gustoće pohranjene energije, ni promjene snage koja se valom prenosi, bilo u vremenu

bilo u prostoru. Kružni polarizirani val ima stacionaran tijek energije analogno kao kod višefaznog simetričnog sustava za prijenos snage.

8.3.1.2. Stojni valovi

Još neka svojstva valova možemo prikazati pomoću stojnih valova. Jednadžbu za putujući val danu u prethodnoj točki 8.3.1.1. preuredit ćemo tako da ćemo u izrazu (8.3.14a,b) za linearno polarizirani putujući val pretpostaviti da su zadani

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{E_0}{2} \quad ; \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} \quad , \\ A_2 &= \frac{E_0}{2} \quad ; \quad \alpha_2 = +\frac{\pi}{2} \quad . \end{aligned} \quad (8.3.27a - d)$$

Tako ćemo dobiti linearno polarizirani val oblika

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &= \frac{E_0}{2} e^{j\left(-\frac{\pi}{2} + k'z\right)} + \frac{E_0}{2} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - k'z\right)} = E_0 j \frac{e^{-jk'z} - e^{+jk'z}}{2} = E_0 \sin(k'z) \quad , \\ \underline{H}_y &= -\frac{E_0}{2Z'} e^{j\left(-\frac{\pi}{2} + k'z\right)} + \frac{E_0}{2Z'} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - k'z\right)} = j \frac{E_0}{Z'} \frac{e^{-jk'z} + e^{+jk'z}}{2} = j \frac{E_0}{Z'} \cos(k'z) \quad . \end{aligned} \quad (8.3.28a,b)$$

To su fazorske jednadžbe ravnog vala. Odgovarajuće trenutne vrijednosti u realnom području glase

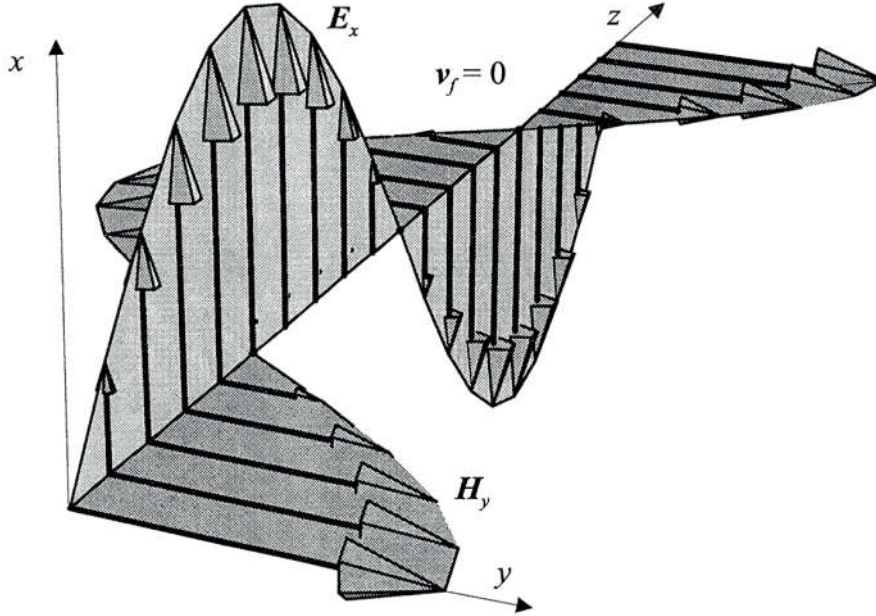
$$\begin{aligned} E_{x_{Re}} &= E_0 \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \cos(\omega t) \quad , \\ H_{y_{Re}} &= -\frac{E_0}{Z'} \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \sin(\omega t) \quad . \end{aligned} \quad (8.3.29a,b)$$

Primjećujemo da su vektori $\underline{E}_x$ i $\underline{H}_y$ fazno pomaknuti za 90° , tj. polje $\underline{E}_x$ vremenski *zaostaje* u fazi za poljem $\underline{H}_y$ za $\pi/2$. S druge strane, bez obzira na trenutak promatranja, tj. tijekom cijelog vremena promatranja, električno i magnetsko polje linearno polariziranog ravnog vala sinusno su raspodijeljeni duž osi z . Nultočke od $\underline{E}_x$ i $\underline{H}_y$ su fiksirane na osi z u prostoru, i nultočka od $\underline{E}_x$ je prostorno *pomaknuta* za četvrtinu valne duljine ($\lambda/4$) u odnosu na nultočku od $\underline{H}_y$. Dakle, nema gibanja duž osi z . Takav val se naziva *stojni val*. On je homogen i linearno polariziran, a prikazan je na slici 8.3.3. za jedan određeni vremenski trenutak.

Energetske odnose kod *linearno polariziranog čistog stojnog vala* odredit ćemo iz relacija (8.3.17a,b), (8.3.18) i (8.3.19) i usporediti sa sličnima za čisti putujući val. Tako je gustoća pohranjene energije

$$(w_e)_{Re} = \frac{\epsilon}{2} E_{x_{Re}}^2 = \frac{\epsilon}{2} E_0^2 \sin^2\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \cos^2(\omega t) , \quad (8.3.30a,b)$$

$$(w_m)_{Re} = \frac{\mu}{2} H_{y_{Re}}^2 = \frac{\epsilon}{2} E_0^2 \cos^2\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \sin^2(\omega t) .$$



Slika 8.3.3. Električno i magnetsko polje homogenog linearno polariziranog ravnog stojnog vala

Kompleksni Poyntingov vektor, tj. njegovu srednju vrijednost izračunat ćemo pomoću izraza (8.3.28a,b)

$$N_{sr} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_x \underline{E}_x \times \mathbf{a}_y \underline{H}_y^*) = -\mathbf{a}_z \frac{1}{4} j \frac{E_0^2}{Z'} \sin 2\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) . \quad (8.3.31a)$$

U realnom području trenutna vrijednost Poyntingova vektora za čisti stojni val iznosi prema (8.3.29a,b)

$$N_{Re} = (\mathbf{a}_x E_{x_{Re}} \times \mathbf{a}_y H_{y_{Re}}) = -\mathbf{a}_z \frac{1}{4} \frac{E_0^2}{Z'} \sin^2\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \sin(2\omega t) . \quad (8.3.31b)$$

Srednja vrijednost (tijekom vremena) Poyntingova vektora u realnom području iz izraza (8.3.31b) jest

$$N_{Re,sr} = \frac{1}{T} \int_0^T N_{Re} dt = 0 , \quad (8.3.31c)$$

budući je srednja vrijednost funkcije $\sin(2\omega t)$ uvijek jednaka nuli. To je također očito iz relacije (8.3.31a), u kojoj je realni dio jednak nuli.

Analiziramo li dobivene rezultate možemo zaključiti da energetske odnose u linear-
no polariziranom stojnom valu obilježava sljedeće:

1. Pohranjena električna energija je maksimalna kada je magnetska nula i obratno.
2. Pohranjena energija u dielektriku titra između električnog i magnetskog oblika.
3. Nema prijenosa energije kroz prostor stojnim valom, jer je srednja aktivna (realna) snaga jednaka nuli, $N_{Re,sr} = 0$.
4. Kroz dielektrik se giba srednja jalova (imaginarna) snaga, i to različitim intenzite-
tom gustoće tijekom snage na različitim mjestima duž osi z .
5. Trenutna vrijednost aktivne snage titra u $+z$ i $-z$ smjeru dvostrukom frekvencijom
 2ω od točke do točke po z osi ($N_{Re} \neq 0$).

Proslijedit ćemo dalje s analizom ravnog stojnog vala s kružno polariziranim poljem.
Jakosti polja odredit ćemo tako da u jednadžbi (8.3.13a – d) pretpostavimo da su zadani

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{E_0}{2} \quad ; \quad \alpha_1 = -\frac{\pi}{2} \quad , \\ A_2 &= \frac{E_0}{2} \quad ; \quad \alpha_2 = +\frac{\pi}{2} \quad , \\ B_1 &= \frac{E_0}{2} \quad , \quad \beta_1 = 0 \quad , \\ B_2 &= \frac{E_0}{2} \quad ; \quad \beta_2 = \pi \quad . \end{aligned} \tag{8.3.32a – d}$$

Uvrstimo li te izraze u (8.3.9a,b) i (8.3.11a – d) dobivamo za *kružno polarizirani stojni val* izraze za jakosti polja u fazorskom obliku

$$\begin{aligned} \underline{E} &= (a_x + ja_y) E_0 \sin(k'z) \quad , \\ \underline{H} &= (a_x + ja_y) \frac{E_0}{Z'} \cos(k'z) \quad . \end{aligned} \tag{8.3.33a,b}$$

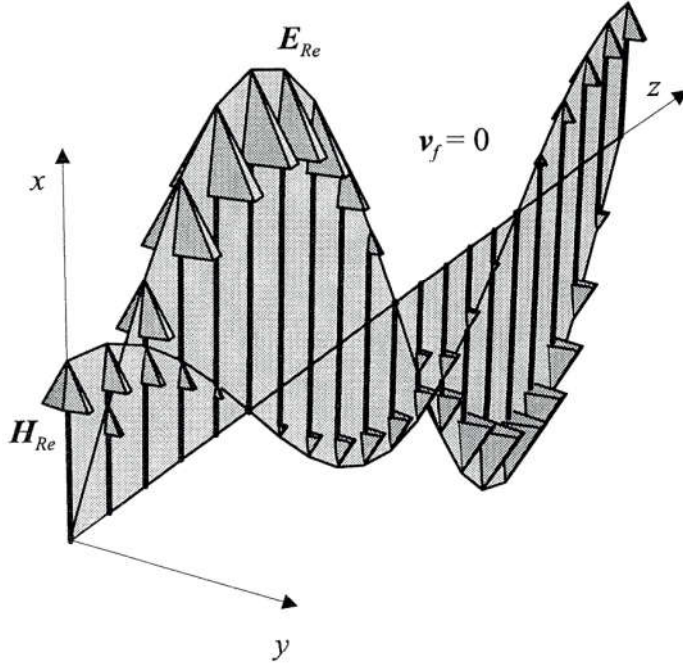
Odgovarajuće trenutne vrijednosti kružno polariziranog stojnog vala u realnom području glase

$$\begin{aligned} E_{Re} &= [a_x \cos(\omega t) - a_y \sin(\omega t)] E_0 \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \quad , \\ H_{Re} &= [a_x \cos(\omega t) - a_y \sin(\omega t)] \frac{E_0}{Z'} \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \quad . \end{aligned} \tag{8.3.34a,b}$$

Odmah uočavamo da su vektori polja $\underline{E}_{Re}$ i $\underline{H}_{Re}$ kružno polariziranog stojnog vala *paralelni u prostoru* jedan s drugim i da tako paralelni *zajedno rotiraju* oko osi z kako vrijeme teče. Tako je dijagram polja u trenutku $t = 0$ prikazan na slici 8.3.4. Amplitude polja $\underline{E}_{Re}$ i $\underline{H}_{Re}$ mogu se odrediti iz relacija (8.3.34a,b) kao

$$E_m = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_0 \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = E_0 ,$$

$$H_m = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \frac{E_0}{Z'} \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = \frac{E_0}{Z'} .$$
(8.3.35a,b)



Slika 8.3.4. Trenutne vrijednosti polja E_{Re} i H_{Re} kružno polariziranog ravnog stojnog vala u trenutku $t = 0$.

Očito da *amplitude polja E_{Re} i H_{Re} ne ovise o vremenu*, tj. konstantne su u vremenu. One su samo funkcije od z , tj. mijenjaju se sinusno duž osi z . Budući da je val stojni, to su nultočke od E i H fiksirane na određenim mjestima duž osi z . S druge strane, tijekom vremena paralelni vektori E i H rotiraju oko osi z , odnosno cijela slika 8.3.4. rotira oko osi z , tj. smjer paralelnih vektora polja mijenja se u prostoru kako vrijeme teče. Gustoću pohranjene energije i snagu koja se giba u polju stojnog vala odredit ćemo slično kao i u prethodnom slučaju

$$(w_e)_{Re} = \frac{\epsilon}{2} |E_{Re}|^2 = \frac{\epsilon}{2} E_0^2 \sin^2\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) ,$$

$$(w_m)_{Re} = \frac{\mu}{2} |H_{Re}|^2 = \frac{\epsilon}{2} E_0^2 \cos^2\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) ,$$
(8.3.36a – d)

$$N_{Re} = E_{Re} \times H_{Re} = 0 ,$$

$$N_{sr} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = -j a_z \frac{E_0^2}{2Z'} \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) .$$

Zanimljivo je da gustoće pohranjenih energija nisu ovisne o vremenu. Ukupna gustoća

pohranjene energije

$$(w_{uk})_{Re} = (w_e)_{Re} + (w_m)_{Re} = \epsilon E_0^2, \quad (8.3.37)$$

nije ovisna ne samo o vremenu, nego ni o odrednici z , tj. ona je konstantna u cijelom prostoru u kojem egzistira kružno polarizirani stojni val. Takav slučaj stojnog vala može se pojaviti u rezonantnoj šupljini koja bi nastala ako bismo postavili dvije idealno vodljive ravnine u točkama gdje je električno polje nula, tj. u $z = n\lambda/2$, uz $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Ravnine su okomite na os z , tj. paralelne su s faznom ravninom ravnog kružno polariziranog vala.

8.3.2. Valovi u vodljivom materijalu s gubicima

U prethodnom članku 8.3.1. obradili smo prostiranje putujućih, direktnih i inverznih valova, kao i nastanak stojnih valova u idealnom dielektriku. Idealni dielektrik jest materijal kojeg nema u prirodi. Prema definiciji je provodnost idealnog dielektrika jednaka nuli, $\kappa = 0$.

U ovom članku analizirat ćemo prostiranje sinusnih ravnih valova u realnim materijama kakve nalazimo u prirodi. Njihove elektromagnetske značajke (ϵ , μ , κ) različite su od nule. Posebno treba naglasiti da su svi realni materijali provodni. Njihova provodnost, ovisno o vrsti materijala, varira u vrlo širokom opsegu od najnižih pa do vrlo visokih vrijednosti.³⁸ Za sve njih znakovito je da je prostiranje valova u takvim materijalima popraćeno s gubicima energije, što ima za posljedicu prigušenje amplitude vala.

Analizu započnimo tako da promatramo prostiranje direktnog sinusnog TEM vala, zadane frekvencije ω , u neograničenom prostoru ispunjenom jednostavnim vodljivim materijalom s poznatim gradivnim značajkama ϵ , μ i κ . Upotrijebit ćemo fazorski oblik jednadžbi ravnog vala, dan relacijama (8.2.32c,d), koje samo za direktni val u smjeru osi $+z$ glase

$$\begin{aligned} \underline{E}_x^+ &= E_0 e^{-\gamma z}, \\ \underline{H}_y^+ &= H_0 e^{-\gamma z}. \end{aligned} \quad (8.3.38a,b)$$

Realne trenutne vrijednosti jakosti polja vala određuju se iz fazorskih pomoću

$$\begin{aligned} E_{Re} &= \text{Re} \{ \underline{E} e^{j\omega t} \}, \\ H_{Re} &= \text{Re} \{ \underline{H} e^{j\omega t} \}, \end{aligned} \quad (8.3.39a,b)$$

gdje su E_0 i H_0 maksimalne vrijednosti polja. Treba uočiti da je jedina razlika u tim

³⁸ Pogledati tablicu 1.4.1. Ove provodnosti mogu se uzeti približno konstantnim u području frekvencija do jednog gigaherca.

rješenjima valnih jednadžbi za realne materijale s gubicima i za idealne dielektrike bez gubitaka u tome da je *konstanta prostiranja* γ *kompleksna* za materijale s gubicima, dok je čisto imaginarna za materijale bez gubitaka. Ta činjenica proizlazi iz izraza za značajke α , β , γ , Z i v_f , koje određuju ponašanje vala u realnim materijalima s gubicima. One su dane relacijama (8.2.43a,b), (8.2.29), (8.2.50e) i (8.2.44) koje glase

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right)^{1/2}, \\ \beta &= \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right)^{1/2}, \\ \gamma &= \alpha + j\beta, \\ Z &= \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{j\varphi}; \quad \tan \varphi = \frac{\alpha}{\beta}, \\ v_f &= \pm c \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right) \right]^{-1/2},\end{aligned}\tag{8.3.40a – e}$$

gdje je $c^2 = 1/\mu\epsilon$. Sve te značajke različite su od nule. Fazorske jednadžbe (8.3.38a,b) za polja direktnog ravnog vala možemo pomoću (8.3.40a – d) pisati u obliku

$$\begin{aligned}\underline{E}_x^+ &= E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \\ \underline{H}_y^+ &= \frac{E_0}{Z} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = \frac{E_0}{|Z|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\varphi},\end{aligned}\tag{8.3.41a,b}$$

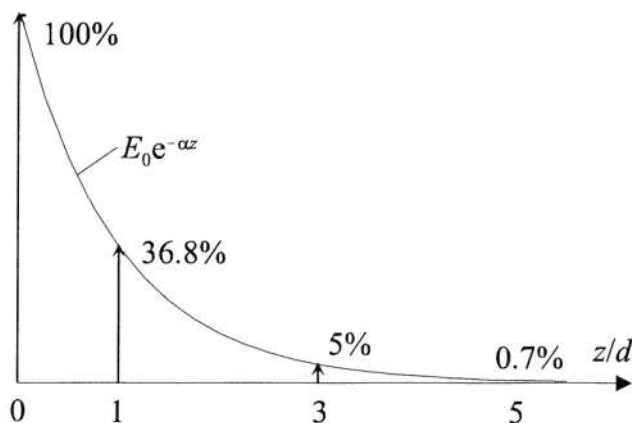
dok odgovarajući realni izrazi za trenutne vrijednosti jakosti polja, prema (8.3.39a,b) glase

$$\begin{aligned}E_{x,Re} &= E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \\ E_{y,Re} &= \frac{E_0}{|Z|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \varphi).\end{aligned}\tag{8.3.42a,b}$$

Analizom izraza (8.3.40a – e) i izvedenih jednadžbi (8.3.42a,b) možemo, slično kao i u članku 8.3.1. o prostiranju vala u dielektriku, izvesti općenite zaključke o prostiranju sinusnog ravnog vala u jednostavnom *vodljivom materijalu s gubicima*, kako slijedi:

1. U vodljivom materijalu, zbog konačne provodnosti ($\kappa \neq 0$), prigušna konstanta je uvijek različita od nule $\alpha \neq 0$, pa su oba i električno i magnetsko polje putujućeg vala *prigušeni* u smjeru gibanja vala.

2. Prigušenje amplituda oba polja u ravnini konstantne faze vala određeno je konstantom prigušenja α , koja ovisi o frekvenciji polja vala. Prigušenje raste s frekvencijom vala i s povećanjem provodnosti materijala.
3. U analizi elektromagnetskih valova rabi se pojam "dubine prodiranja" vala u vodljivi materijal.³⁹ To je udaljenost na kojoj se amplituda polja vala priguši na iznos $1/e \approx 0,368$, tj. na približno 36,8% početne vrijednosti, kao što je prikazano na slici 8.3.5.



Slika 8.3.5. Eksponencijalno prigušenje amplitude električnog polja ravnog vala u smjeru gibanja vala duž osi $+z$ u vodljivom materijalu

Dubina prodiranja vala definirana je sa $z = d$, kada je $\alpha z = \alpha d = 1$, što daje

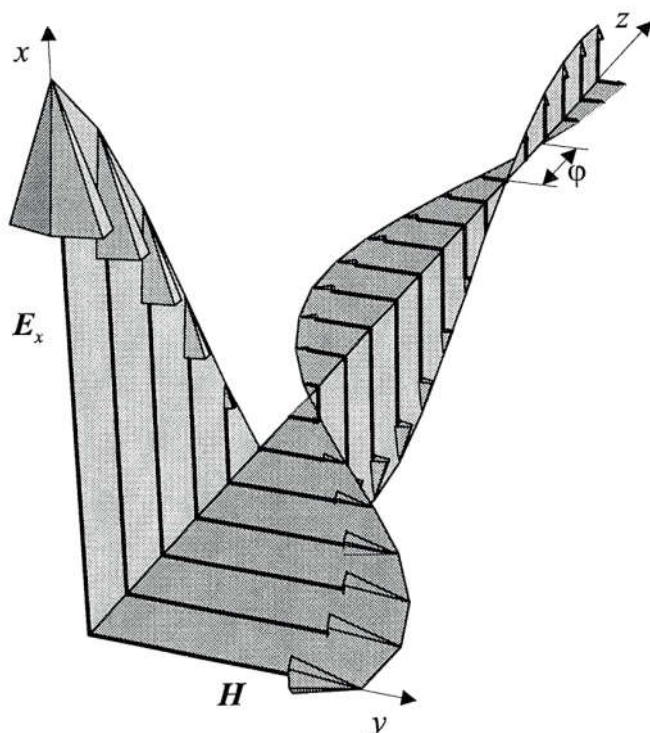
$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}c}{\omega} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (8.3.43)$$

Mjeri se u *metrima* (m). Dubina prodiranja vala ovisi o frekvenciji vala i o značajkama materijala. Dubina prodiranja vala je to manja što je frekvencija viša, jer se val brže prigušuje. Isto tako materijal s većom provodnošću κ ima manju dubinu prodiranja. Uobičajeno je u primijenjenoj teoriji elektromagnetskih polja računati s udaljenošću $z = 3d$, odnosno $z = 5d$, na kojoj se amplituda polja priguši na približno 5%, odnosno približno 0.7% početnog iznosa, kao s udaljenošću na kojoj se polje praktički potpuno priguši. Dakle, *uzima se da val iščezne na udaljenosti jednakoj trostrukoj dubini prodiranja* i to s pogreškom od 5%, ili na udaljenosti jednakoj peterostruko dubini prodiranja, tada s pogreškom od 0.7%.

4. Iz relacija (8.3.42a,b) proizlazi da *električno i magnetsko polje nisu u fazi*. Magnetsko polje zaostaje za električnim za fazni kut ϕ . Njegov iznos određen je izrazom (8.3.40d) i ovisi o frekvenciji i gradivnim značajkama materijala. Što je provodnost materijala veća i što je niža frekvencija polja, to je kut faznog pomaka između električnog i magnetskog polja veći. Lako je pokazati da je za dielektrike i za materijale sa zanemarivo malom provodnošću $\phi \approx 0$, a da je za materijale s vrlo velikom provodnošću, kao npr. za kovine $\phi \approx 45^\circ$. Zato se može ustvrditi da se za

³⁹ Pogledati odjeljak 7.4, jednadžbu (7.4.8).

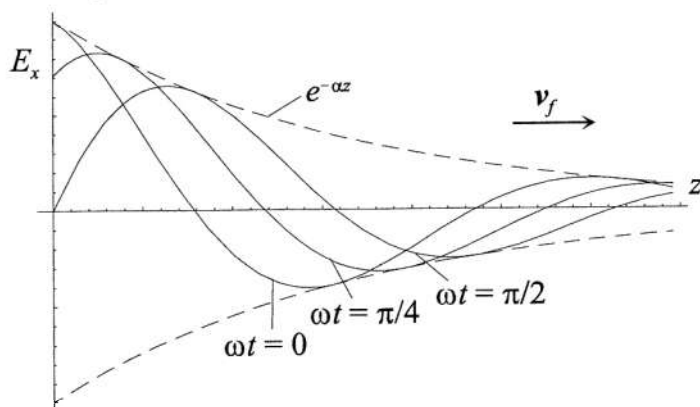
sve materijale i za cijelo područje tehničkih frekvencija kut faznog pomaka nalazi u granicama $0 \leq \varphi \leq 45^\circ$.



Slika 8.3.6. Vektori električnog i magnetskog polja ravnog prigušenog TEM vala u vodljivom materijalu s gubicima

Na slici 8.3.6. prikazana je ovisnost vektora E_x i H_y o odrednici z u određenom vremenskom trenutku $t = 0$, gdje amplitude električnog i magnetskog polja opadaju eksponencijalno, kako se val giba duž osi z . Val magnetskog polja fazno je pomaknut prema valu električnog polja za kut φ .

5. Konačna provodnost materijala $\kappa \neq 0$ ne samo da ima za posljedicu prigušenje putujućeg TEM vala, nego utječe i na njegovu faznu brzinu. Ravnina konstantne faze prostire se faznom brzinom, koja se određuje iz izraza (8.3.40e). Fazna brzina v_f raste s frekvencijom vala tako dugo dok su značajke ϵ , μ , κ neovisne o frekvenciji. Ovisnost fazne brzine o značajkama materijala analizirat ćemo u članku 8.3.3.



Slika 8.3.7. Gibanje električnog polja ravnog TEM vala koji je linearno polariziran i prostire se duž osi z , prikazano u nekoliko vremenskih trenutaka

Na slici 8.3.7. prikazali smo kako se električno polje putujućeg TEM vala giba brzinom v_f duž osi z tijekom vremena. Istovremeno se val i amplitudno prigušuje.

6. Prigušenje putujućeg TEM vala, koji se prostire u vodljivom materijalu, posljedica je gubitaka energije na tom putu. Gubici u jediničnom volumenu materijala u jedinici vremena, u okolišu točke na odrednici z , u realnom području računaju se prema izrazu (8.2.56) iz divergencije Poyntingova vektora kao

$$(P_g')_{Re, sr} = -\nabla \cdot (N_z)_{Re, sr} = \frac{\kappa}{2} E_0^2 e^{-2\alpha z}, \quad (8.3.44)$$

mjereno u vatima po prostornom metru. E_0 je amplituda, tj. maksimalna vrijednost električnog polja u početnoj točki $z = 0$. Srednja snaga koja se prenosi putujućim TEM valom kroz jediničnu površinu u okolišu točke na udaljenosti z od ishodišta određena je izrazom (8.2.55b) i iznosi

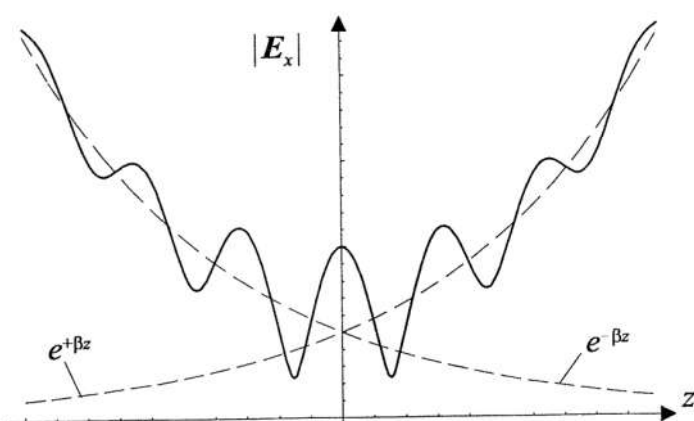
$$(N_z)_{Re, sr} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|Z|} e^{-2\alpha z} \cos \varphi. \quad (8.3.45)$$

Razumljivo je da zbog prigušenja i električnog i magnetskog polja srednja specifična elektromagnetska snaga koju TEM val nosi sobom opada eksponencijalno s $e^{-2\alpha z}$. Za dano polje ta snaga ovisi o modulu impedancije, faznom pomaku i prigušenju u materijalu, koji su pak ovisni o frekvenciji i gradivnim značajkama materijala.

Analizu prostiranja valova u materijalima s gubicima nastaviti ćemo tako da promatramo opći slučaj, kada se i direktni i inverzni putujući val gibaju duž osi z . Neka se x -polarizirano električno polje sastoji od dva vala: jednoga koji se giba u $+z$ smjeru i drugoga koji se giba u $-z$ smjeru. Valovi su nejednakih amplituda, a fazorske jednadžbe analogno izrazima (8.3.14a,b) glase

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &= \underline{E}_x^- + \underline{E}_x^+ = A_1 e^{\alpha z} e^{j\beta z} + A_2 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \\ \underline{H}_y &= \underline{H}_y^- + \underline{H}_y^+ = -\frac{A_1}{Z} e^{\alpha z} e^{j\beta z} + \frac{A_2}{Z} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \end{aligned} \quad (8.3.46a,b)$$

gdje je kompleksna valna impedancija određena izrazom (8.3.40d). Superpozicija putujućih valova u suprotnim smjerovima, kao što je dano izrazima (8.3.46a,b), i uz pretpostavku da su im amplitude jednake, tj. $A_1 = A_2$, iskazuje se kao pojava i stojnog vala. No budući da zbog prigušenja nije moguće imati dva "jednaka" vala, koji se prostiru u suprotnim smjerovima, to oni mogu biti jednaki samo na jednom mjestu. Neka to bude na mjestu, tj. u ravnini $z = 0$. *Stojni val imat ćemo tada u okolišu točke $z = 0$, dok će s udaljavanjem na obje strane u $+z$ i $-z$ smjeru stojni val iščezavati, kao što smo prikazali na slici 8.3.8.*



Slika 8.3.8. Stojni val u točki $z = 0$, nastao od dva "jednaka" prigušena putujuća vala, koji se gibaju u suprotnim smjerovima u materijalu s gubicima

8.3.2.1. Kompleksne gradivne značajke

Često je pogodno u *sinusnim* elektromagnetskim poljima karakterizirati jednostavne materijale *kompleksnim gradivnim značajkama* $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$ i $\hat{\kappa}$. Tada kompleksne gradivne značajke $\hat{\epsilon}(\omega)$, $\hat{\mu}(\omega)$ i $\hat{\kappa}(\omega)$ upotrebljavamo umjesto realnih gradivnih značajki ϵ , μ i κ , tako da relacije (1.5.17a – c) pisane za fazore polja u kompleksnom području glase

$$\begin{aligned}\underline{D} &= \hat{\epsilon}(\omega) \underline{E} , \\ \underline{B} &= \hat{\mu}(\omega) \underline{H} , \\ \underline{J} &= \hat{\kappa}(\omega) \underline{E} .\end{aligned}\tag{8.3.47a – c}$$

Značajku $\hat{\epsilon}$ nazivamo *kompleksna dielektričnost*, $\hat{\mu}$ je *kompleksna permeabilnost*, a $\hat{\kappa}$ je *kompleksna provodnost* materijala. Općenito se realne značajke ϵ , μ i κ , koje strogo vrijede za nepromjenjiva (istosmjerna) polja i kompleksne značajke $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$ i $\hat{\kappa}$, koje vrijede za sinusna (izmjenična) polja, ne podudaraju. Ali vrijedi granični odnos

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{\epsilon}(\omega), \hat{\mu}(\omega), \hat{\kappa}(\omega) \rightarrow \epsilon, \mu, \kappa .$$

Realne značajke za istosmjerna polja mogu se, međutim, dobro upotrijebiti za sinusna polja preko dovoljno širokog područja frekvencija za neke materijale, ali nikad za sve frekvencije.

Pogodno je dalje, u kompleksnom području za analizu ponašanja polja sinusnog vala u materijalu, uvesti neke nove značajke materijala. Tako nova kompleksna značajka $\hat{y}(\omega)$ ima dimenziju provodnosti po jedinici duljine (S/m), naziva se *admitivnost* materijala i računa se kao

$$\hat{y}(\omega) = \hat{\kappa} + j\omega \hat{\epsilon} .\tag{8.3.48}$$

Sljedeća nova kompleksna značajka $\hat{z}(\omega)$ ima dimenziju otpornosti po jedinici duljine (Ω/m); naziva se *impeditivnost* materijala i računa se kao

$$\hat{z}(\omega) = j\omega \hat{\mu} . \quad (8.3.49)$$

Admitivnost $\hat{y}$ je kombinacija značajki $\hat{\kappa}$ i $\hat{\epsilon}$. Utvrđivanje $\hat{y}$ mjerenjem je relativno jednostavno, ali je teško razdvojiti $\hat{\kappa}$ od $\hat{\epsilon}$. Razlika je prije svega teorijska. Ako su struje u materijalu uzrokovane slobodnim nabojima, tada njihove efekte uključujemo u $\hat{\kappa}$. Ako su u pitanju struje pomaka, tj. one uzrokovane vezanim nabojima u materijalu, tada njihove efekte uključujemo u $\hat{\epsilon}$. Ako analiziramo sinusna polja u *vodičima*, uobičajena konvencija je admitivnost računati pomoću izraza

$$\hat{y}(\omega) = \hat{\kappa} + j\omega \epsilon_0 . \quad (8.3.50)$$

U *dobrim vodičima*,⁴⁰ kao što su kovine, provodnost $\hat{\kappa}$ je vrlo bliska istosmjernoj vrijednosti κ za sve radiofrekvencije, tj. sve do infracrvenog frekvencijskog spektra. Dielektričnost kovina $\hat{\epsilon}$ teško je mjeriti, ali se nalazi približno vrijednosti vakuuma ϵ_0 . Tako su za *nemagnetske kovine*

$$\begin{aligned} \hat{y}(\omega) &\approx \kappa + j\omega \epsilon_0 , \\ \hat{z}(\omega) &\approx j\omega \mu_0 . \end{aligned} \quad (8.3.51a,b)$$

U *feromagnetskim kovinama* μ_0 treba zamijeniti s $\hat{\mu}$, o čemu će biti više riječi kasnije.

Pri analizi sinusnih polja u *dobrim izolatorima*⁴¹ koji su nemagnetični, uobičajeno je zanemariti $\hat{\kappa}$ i izraziti $\hat{y}$ u ovisnosti o $\hat{\epsilon}$. Tako su za *nemagnetične izolatore*

$$\begin{aligned} \hat{y}(\omega) &\approx j\omega \hat{\epsilon} , \\ \hat{z}(\omega) &\approx j\omega \mu_0 . \end{aligned} \quad (8.3.52a,b)$$

Razmotrimo sada $\hat{\epsilon}(\omega)$ detaljnije. Moguće je kompleksnu dielektričnost $\hat{\epsilon}$ izraziti u pravokutnom i polarnom obliku kao

$$\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon' - j\epsilon'' = |\hat{\epsilon}| e^{-j\delta} , \quad (8.3.53)$$

gdje su ϵ' , ϵ'' i δ realne veličine. Realna značajka materijala ϵ' naziva se *izmjenična dielektričnost*, značajka ϵ'' je *faktor dielektričkih gubitaka*, a δ je *kut dielektričkih gubitaka*. Izračunava se iz omjera

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} . \quad (8.3.54)$$

Izmjerene vrijednosti od $\hat{\epsilon}(\omega)$ obično se izražavaju pomoću ϵ' i $\tan \delta$, ili pomoću ϵ' i ϵ'' i predstavljaju se dijagramima za pojedine izolatore. Fizikalno značenje veličina ϵ' i ϵ''

⁴⁰ Pogledati točku 8.3.3.2.

⁴¹ Pogledati točku 8.3.3.1.

postaje jasnije ako se ima u vidu da se ukupna električna energija pohranjena u materijalu, dana izrazom (3.3.23), može u izmjeničnim poljima u izolatoru s gubicima izraziti pomoću ϵ' kao

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} \epsilon' |\underline{E}|^2 dV. \quad (8.3.55)$$

S druge strane, gubicima vođenja u materijalu danim izrazom (3.3.8), mogu se u izmjeničnim poljima u izolatoru s gubicima dodati dielektrički gubici

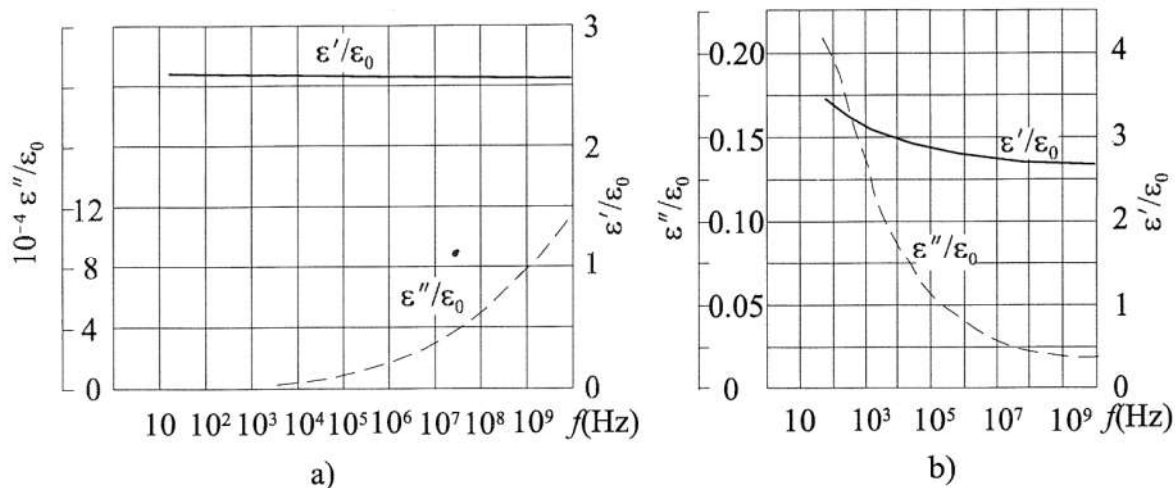
$$P_g = \int_V \omega \epsilon'' |\underline{E}| dV. \quad (8.3.56)$$

Idealan dielektrik je onaj materijal za koji je $\epsilon'' = 0$. Jedini *idealan dielektrik je vakuum*, tj. prazan prostor. U vakuumu su izrazi za admitivnost i impeditivnost najjednostavniji i glase

$$\hat{y}_0(\omega) = j\omega\epsilon_0, \quad (8.3.57a,b)$$

$$\hat{z}_0(\omega) = j\omega\mu_0,$$

što vrijedi za sve frekvencije i za sve jakosti polja. Pod dobrim izolatorom razumijevamo onaj materijal čiji ϵ' ostaje približno konstantan za sve radiofrekvencije i čiji je ϵ'' , odnosno $\tan\delta$, vrlo malen. Primjeri dobrih izolatora su polistiren, parafin i teflon, dok su pleksiglas, porculan i bakelit primjeri (loših) izolatora s gubicima. U tablici 8.3.1. dane su kompleksne dielektričnosti $\hat{\epsilon}$ za pojedine materijale u ovisnosti o frekvenciji.



Slika 8.3.9. Značajke ϵ' i ϵ'' u ovisnosti o frekvenciji za a) polistiren kod 25 °C i b) pleksiglas kod 25 °C

Tablica 8.3.1. Izmjenična dielektričnost ϵ' i faktor dielektričkih gubitaka ϵ'' za pojedine materijale u ovisnosti o frekvenciji

Materijal	T°C		Frekvencija (Hz)						
			10 ²	10 ⁴	10 ⁶	10 ⁸	3·10 ⁸	3·10 ⁹	10 ¹⁰
jantar	25	ϵ'_r	2.7	2.7	2.65	...	2.6	2.6	...
		10 ⁴ ϵ''_r	34	84	148	...	223	234	...
bakelit	24	ϵ'_r	8.2	6.5	4.9	4.4	...	3.64	3.52
		10 ³ ϵ''_r	1100	410	360	340	...	190	130
glina suha	25	ϵ'_r	4.73	3.27	2.44	...	2.38	2.27	2.16
		10 ³ ϵ''_r	570	390	98	...	48	34	28
etilni alkohol	25	ϵ'_r	...	...	24.1	23.7	22.3	6.5	1.7
		10 ² ϵ''_r	...	...	80	150	600	165	10
staklo, fosfatno	25	ϵ'_r	5.25	5.25	5.3	4.8	4.54	4.40	4.37
		10 ⁴ ϵ''_r	115	85	75	105	130	240	210
glineno tlo	25	ϵ'_r	3.06	2.69	2.53	...	2.47	2.44	2.44
		10 ⁴ ϵ''_r	2100	950	460	...	160	27	34
parafin	25	ϵ'_r	2.25	2.25	2.25	2.25	...	2.25	2.24
		10 ⁴ ϵ''_r	5	5	5	5	...	4.5	5
	81	ϵ'_r	2.02	2.02	2.02	...	...	2.00	...
		10 ⁴ ϵ''_r	10	1	4	...	...	10.4	...
porculan suhi	25	ϵ'_r	5.5	5.23	5.08	5.04	5.02	...	4.74
		10 ⁴ ϵ''_r	1200	550	380	390	490	...	740
kremen	25	ϵ'_r	3.78	3.78	3.78	3.78	...	3.78	3.78
		10 ⁴ ϵ''_r	32	23	7.5	4	...	2.3	4
pjeskovito tlo, suho	25	ϵ'_r	3.42	2.75	2.59	...	2.55	2.55	2.53
		10 ⁴ ϵ''_r	6700	940	440	...	250	160	92

Postoji grupa izolatora koji imaju neobično visoke dielektričke konstante. U tu grupu pripadaju titanati i keramički feriti, koji još posjeduju i svojstvo feromagnetičnosti. Takvi izolatori obično imaju značajnije gubitke. Kvantitativno objašnjenje ponašanja značajke $\hat{\epsilon}(\omega)$ i njezine frekvencijske ovisnosti pripada u područje kvantne elektrodinamike, pa ćemo mi $\hat{\epsilon}(\omega)$ promatrati fenomenološki, jednostavno kao izmjerenu značajku. U linearnim feromagnetskim materijalima, za analizu ponašanja sinusnih polja, mogu se admitivnost i imeditivnost izraziti kao

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \kappa + j\omega \hat{\epsilon} \ , \\ \hat{z}(\omega) &= j\omega \hat{\mu} \ .\end{aligned}\tag{8.3.58a,b}$$

Kompleksna permeabilnost $\hat{\mu}(\omega)$ može se promatrati na sličan način kao i $\hat{\epsilon}(\omega)$, tako da izrazimo

$$\hat{\mu}(\omega) = \mu' - j\mu'' = |\hat{\mu}| e^{-j\delta_m} \ ,\tag{8.3.59}$$

gdje su μ' , μ'' i δ_m realne veličine. Značajku μ' nazivamo *izmjenična permeabilnost*, μ'' *faktor magnetskih gubitaka* i δ_m *kut magnetskih gubitaka*. Izračunavamo ga pomoću izraza

$$\tan \delta_m = \frac{\mu''}{\mu'} \ .\tag{8.3.60}$$

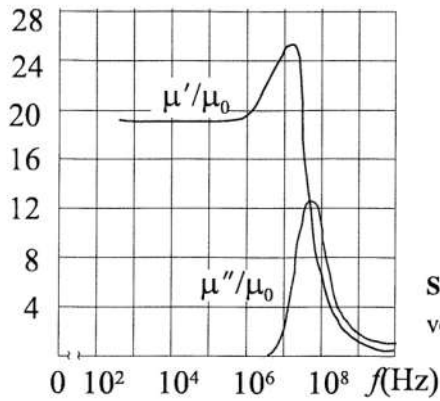
Ukupna magnetska energija pohranjena u feromagnetskom materijalu, dana izrazom (3.3.29b), može se pomoću μ' računati kao

$$W_m = \int_V \frac{1}{2} \mu' |\underline{H}|^2 dV \ ,\tag{8.3.61}$$

dok su srednji gubici samo magnetske snage

$$P_g = \int \omega \mu'' |\underline{H}|^2 dV \ .\tag{8.3.62}$$

Ovim gubicima moraju se dodati gubici vođenja (3.3.8) i dielektrički gubici (8.3.56) da bi se izračunali ukupni gubici u magnetskom materijalu. Tako vidimo da μ' pridonosi pohranjenoj energiji, a μ'' gubicima snage u materijalu. Izmjerene vrijednosti za $\hat{\mu}(\omega)$ izražavaju se tako da se izmjeri μ' i $\tan \delta_m$ ili pak da se izmjere μ' i μ'' . Poznato je da feromagnetske kovine imaju vrlo visoke gubitke (primarno zbog provodnosti κ) i da su također nelinearne s obzirom na $\hat{\mu}$, pa ih rjeđe koristimo za radiofrekvencije. S druge strane keramički feromagnetski materijali najčešće se koriste za radiofrekvencije da bi se postigli visoki μ' . Oni imaju samo magnetske gubitke (8.3.62), pa je zato važan μ'' . Na slici 8.3.10. dane su magnetske karakteristike jednoga keramičkog feromagnetskog materijala.



Slika 8.3.10. Ovisnost kompleksne permeabilnosti $\hat{\mu} = \mu' - j\mu''$ o frekvenciji za Feram A materijal kod 25 °C

8.3.2.2. Fazorske jednadžbe polja

Elektromagnetska polja sinusnog ravnog vala možemo izraziti u kompleksnom području, kao npr. u relacijama (8.2.32a,b). Pokazali smo⁴² da je ta sinusna polja vrlo pogodno izraziti u fazorskom obliku, kako je dano u izrazima (8.2.32e,d). Realne, tj. trenutne vrijednosti sinusnog polja računaju se prema relacijama (8.2.32e,f). Drugim riječima, električno polje sinusno promjenjivo u vremenu

$$\underline{E} = E_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (8.3.63a)$$

može se predstaviti fazorom (u kompleksnom području)

$$\underline{E} = E_0 e^{j\alpha}, \quad (8.3.63b)$$

tako da se trenutna vrijednost polja (u realnom području) može izračunati kao

$$\underline{E} = \text{Re} \{ \underline{E} e^{j\omega t} \}. \quad (8.3.63c)$$

Uvođenjem kompleksnih značajki materijala $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$ i $\hat{\kappa}$ za sinusna polja u prethodnoj točki 8.3.2.1., postiže se bitno pojednostavnjenje svih jednadžbi polja. Tako Maxwellove jednadžbe u najčešće upotrebljavanom obliku (1.5.15a – d) odnosno (8.1.1a – d), pisane pomoću fazora polja i kompleksnih značajki materijala u kompleksnom području glase

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= -j\omega \underline{B} = -j\omega \hat{\mu} \underline{H}, \\ \nabla \times \underline{H} &= j\omega \underline{D} + \underline{J}_s = j\omega \hat{\epsilon} \underline{E} + \underline{\kappa} \underline{E}, \\ \nabla \cdot \underline{D} &= \rho_s, \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0. \end{aligned} \quad (8.3.64a - d)$$

Primjenom relacije (8.3.48) za admitivnost i (8.3.49) za impeditivnost materijala u

⁴² Pogledati u poglavlju 7, odjeljak 7.2. i u ovom poglavlju članak 8.2.3.

sinusnim poljima, dobivamo još sažetiji oblik fazorskih Maxwellovih jednačbi iz (8.1.3a – d)

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{E} &= -\hat{z} \underline{H} , \\ \nabla \times \underline{H} &= +\hat{y} \underline{E} , \\ \nabla \cdot \underline{D} &= 0 , \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0 .\end{aligned}\tag{8.3.65a – d}$$

U visokofrekvencijskoj tehnici, zbog antisimetrije glavnih Maxwellovih jednačbi, pogodno je uvesti totalne gustoće električne i magnetske struje, kao

$$\begin{aligned}\underline{J}_e^t &= \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \kappa \underline{E} + \underline{J}' = \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial t} + \kappa \underline{E} + \underline{J}' , \\ \underline{J}_m^t &= \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{J}_m' = \mu_0 \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \underline{M}}{\partial t} + \underline{J}_m' .\end{aligned}\tag{8.3.66a,b}$$

Ovdje treba posebno upozoriti da su $\underline{J}'$ gustoća (zadane) neovisne električne struje, koju uzrokuje vanjski izvor, a $\underline{J}_m'$ gustoća (zadane) neovisne magnetske struje. Tada se glavne Maxwellove jednačbe mogu u realnom području jednostavno izraziti kao

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{E} &= -\underline{J}_m^t , \\ \nabla \times \underline{H} &= \underline{J}_e^t .\end{aligned}\tag{8.3.67a,b}$$

Ako želimo posebno predstaviti izvore, tada ćemo neovisnu električnu i magnetsku struju izdvojeno pisati, pa fazorski oblik Maxwellovih jednačbi za opći slučaj u sinusnim poljima glasi

$$\begin{aligned}-\nabla \times \underline{E} &= \hat{z}(\omega) \underline{H} + \underline{J}_m' , \\ \nabla \times \underline{H} &= \hat{y}(\omega) \underline{E} + \underline{J}' .\end{aligned}\tag{8.3.68a,b}$$

Ovdje $\hat{z}(\omega)$ i $\hat{y}(\omega)$ određuju svojstva materijala, a $\underline{J}_m'$ i $\underline{J}'$ predstavljaju neovisne izvore. Rješavanje tih jednačbi jedna je od glavnih zadaća u visokofrekvencijskoj teoriji polja. Prigušene i neprigušene valne jednačbe dane izrazima (8.1.4a,b) i (8.1.5a,b) kao i jednačbe difuzije (8.1.6a,b), pisane u fazorskom obliku, općenito glase

$$\begin{aligned}\Delta \underline{E} - \hat{y} \hat{z} \underline{E} &= \hat{z} \underline{J}' + \nabla \times \underline{J}_m' , \\ \Delta \underline{H} - \hat{y} \hat{z} \underline{H} &= \hat{y} \underline{J}_m' - \nabla \times \underline{J}' .\end{aligned}\tag{8.3.69a,b}$$

Ako nema neovisnih izvora, tada je desna strana u obje jednačbe jednaka nuli.

8.3.3. Podjela materijala na izolatore i vodiče

Utjecaj provodnosti materijala⁴³ i frekvencije polja na prostiranje elektromagnetskih valova u materijalima s gubicima može se najlakše odrediti analizom izraza (8.3.40a – e) koji definiraju temeljne značajke koje određuju ponašanje sinusnog vala u materijalu. Ispitivanje tih izraza pokazuje da je ponašanje značajki α , β , γ , Z i v_f u biti određeno omjerom $\kappa/\omega\epsilon$. Značenje omjera $\kappa/\omega\epsilon$ proizlazi iz Maxwellove jednačbe (1.5.15b), iz koje slijedi da je ukupna gustoća struje

$$\mathbf{J}_u = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \kappa \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (8.3.70a)$$

što se u fazorskom obliku za sinusne struje piše

$$\underline{\mathbf{J}}_u = \kappa \underline{\mathbf{E}} + j\omega \epsilon \underline{\mathbf{E}} = (\kappa + j\omega \epsilon) \underline{\mathbf{E}}. \quad (8.3.70b)$$

Odavde proizlazi da je $\kappa/\omega\epsilon$ jednako *omjeru amplituda gustoća provodnih i struja pomaka* u materijalu u sinusnim elektromagnetskim poljima.

Dvije su vrste materijala od posebnog interesa u analizi prostiranja ravnih valova koju smo obavili u prethodnom članku 8.3.2. Jedni su *dobri izolatori*,⁴⁴ u njima su struje pomaka mnogo veće od provodnih struja, tj. $\kappa/\omega\epsilon \ll 1$. Drugi su *dobri vodiči*, u njima su provodne struje mnogo veće od struja pomaka, tj. $\kappa/\omega\epsilon \gg 1$. Očito je da je temeljni kriterij za razvrstavanje jednostavnih materijala pri zadanoj frekvenciji polja u grupu dobrih izolatora, odnosno dobrih vodiča, iznos omjera provodnih i struja pomaka. Taj omjer $\kappa/\omega\epsilon$ određuje ponašanje materijala u polju elektromagnetskog vala zadane frekvencije.⁴⁵ U ovom članku razvit ćemo *približne izraze* za značajke α , β , γ , Z , v_f za ova dva slučaja. Dobiveni izrazi bitno će pojednostavniti i olakšati analizu prostiranja valova u materijalima s gubicima.

⁴³ Ovdje ćemo ponovno podsjetiti, kako je to učinjeno i u odjeljku 8.3, da za sve realne materijale (s gubicima) uzimamo da su realni κ i ϵ približno neovisni o frekvenciji polja ω , što je dosta dobra aproksimacija za valove frekvencija nižih od jednog gigaherca ($f < 10^9$ Hz). Osim toga analiza s konstantnim i realnim značajkama ϵ , μ , κ bitno je jednostavnija, nego da to činimo s kompleksim $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$ i $\hat{\kappa}$.

⁴⁴ U literaturi ih se naziva i dobri (ali ne idealni) dielektrici.

⁴⁵ Postoji više načina za razvrstavanje realnih materijala (s gubicima) na dobre izolatore i dobre vodiče. Mi smo se za ovaj pristup s pomoću omjera $\kappa/\omega\epsilon \gg 1$, odlučili prema M. Javid, P. M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963, koji nam se čini vrlo jednostavnim i dosljednim. Slična podjela provedena je i u T. Bosanac, *Teoretska elektrotehnika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973, te u Z. Haznadar, *Teoretska elektrotehnika – Elektromagnetska teorija i polja*, Liber, Zagreb, 1972. Vrlo slična podjela provedena je i u J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941. Stratton je uveo omjere $\kappa^2/\epsilon^2\omega^2 \ll 1$ za dobre dielektrike i $\kappa^2/\epsilon^2\omega^2 \gg 1$ za dobre vodiče. Konačno, u R. F. Harrington, *Time – Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1961 uvedena je podjela na dobre dielektrike i dobre vodiče tako, da je kriterij za dobre dielektrike $\epsilon''/\epsilon' \ll 1$, a za dobre vodiče $\kappa/\omega\epsilon \gg 1$. Ova analiza je suptilnija i zahtijeva više podataka o materijalima.

Za prikazivanje u dijagramima ovisnosti značajki α , β , $|Z|$ i φ o omjeru provodnih i struja pomaka u realnim materijalima, pogodno je uvesti normalizirane vrijednosti. Tako ćemo *normaliziranu* prigušnu i faznu konstantu izraziti kao

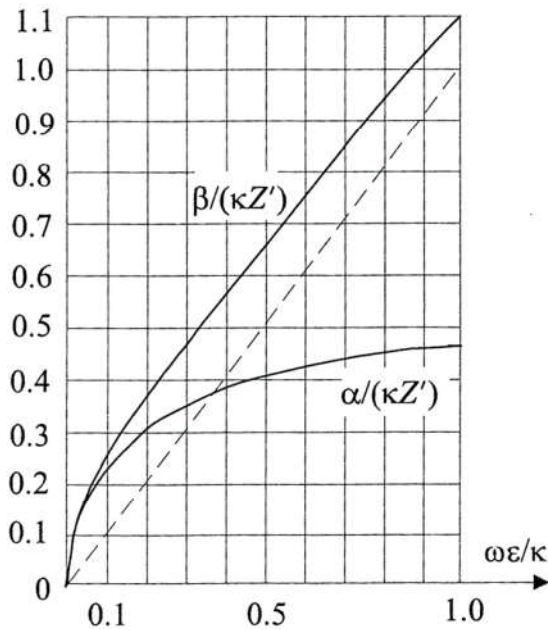
$$\frac{\alpha(\omega)}{\kappa Z'} = \frac{1}{\sqrt{2}} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)^{1/2}, \quad (8.3.71a,b)$$

$$\frac{\beta(\omega)}{\kappa Z'} = \frac{1}{\sqrt{2}} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)^{1/2},$$

gdje su

$$x = \frac{\omega \varepsilon}{\kappa}, \quad (8.3.72,73)$$

$$Z' = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$



Slika 8.3.11. Normalizirana vrijednost prigušne i fazne funkcije u ovisnosti o frekvenciji za različite materijale s gubicima

Normaliziranu vrijednost valne impedancije materijala izrazit ćemo kao

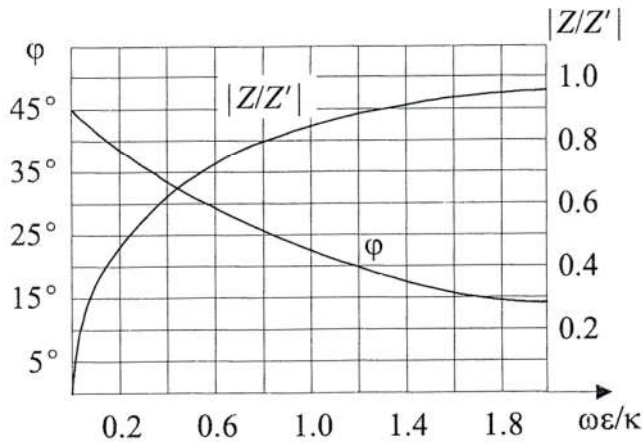
$$\frac{Z}{Z'} = \left(1 + \frac{\kappa}{j\omega \varepsilon} \right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{-1/4} e^{j \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{x}}, \quad (8.3.74)$$

gdje su normalizirani modul valne impedancije

$$\left| \frac{Z}{Z'} \right| = \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{-1/4}, \quad (8.3.75a)$$

i pripadajući kut (normalizirane) impedancije

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{x}. \quad (8.3.75b)$$



Slika 8.3.12. Argument i normalizirani modul valne impedancije za različite materijale s gubicima u ovisnosti o frekvenciji

8.3.3.1. Dobri izolatori

Rečeno je već da su dobri izolatori oni materijali kod kojih je pri zadanoj frekvenciji polja ω , omjer provodnih i struja pomaka vrlo malen,⁴⁶ tj. $\kappa/\omega\epsilon \ll 1$. Uvažavajući tu činjenicu izvest ćemo asimptotske, tj. približne izraze za značajke γ , α , β , Z i v_f , koje određuju ponašanje sinusnog vala u materijalu s gubicima (ϵ , μ , $\kappa \neq 0$). U tu svrhu preuredit ćemo jednadžbe (8.3.40a – e) u pogodan oblik koji glasi

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + j\beta = jk = jk' \left(1 + \frac{\kappa}{j\omega\epsilon} \right)^{1/2}, \\ Z &= \frac{j\omega\mu}{\gamma} = Z' \left(1 + \frac{\kappa}{j\omega\epsilon} \right)^{-1/2}, \\ v_f &= \frac{\omega}{\beta}. \end{aligned} \quad (8.3.76a - c)$$

Ovdje su k i k' separacijske konstante određene izrazima (8.2.28a,b)

⁴⁶ Drugim riječima provodne struje $\underline{J} = \kappa \underline{E}$ mogu se zanemariti.

$$k = k' \left(1 + \frac{\kappa}{j\omega\epsilon} \right)^{1/2}, \quad (8.3.77a,b)$$

$$k' = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{c},$$

a Z i Z' valne impedancije propisane izrazima (8.2.50j,k), odnosno (8.3.73). Fazna brzina određena je relacijom (8.2.40). Primijenimo li binomni razvoj u red⁴⁷ za izraze (8.3.76a,b) dobivamo za konstantu prostiranja γ i za valnu impedanciju Z sljedeće redove

$$\gamma = \alpha + j\beta = jk' \left[1 - j \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^2 + j \frac{1}{16} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^3 + \dots \right], \quad (8.3.78a,b)$$

$$Z = Z' \left[1 + j \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^2 + j \frac{5}{16} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^3 + \dots \right].$$

Budući je $\kappa/\omega\epsilon \ll 1$, to kod dobrih izolatora možemo ispustiti članove s potencijama višim od druge, pa dobivamo

$$\alpha \approx \frac{k'}{2} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right) \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^2 + \dots \right] \approx \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^2 + \dots \right],$$

$$\beta \approx k' \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^2 + \dots \right] \approx \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^2 + \dots \right], \quad (8.3.79a - c)$$

$$Z \approx Z' \left\{ \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right)^2 + \dots \right] + j \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \right) + \dots \right] \right\}.$$

Analizom navedenih izraza možemo zaključiti sljedeće:

1. Približni izraz za prigušnu konstantu kod dobrih izolatora, ako aproksimaciju provedemo samo prvim članom iz (8.3.79a), glasi

$$\alpha \approx \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (8.3.80)$$

Tako je kod materijala i pri frekvenciji polja, kod kojih je $\kappa/\omega\epsilon \leq 0.2$, tj. struje pomaka pet i više puta veće od provodnih, pogreška u proračunu prigušne konstante prema približnom izrazu (8.3.80) iznosi samo 0.5% i manje. Očito je da prigušna

⁴⁷ Pogledati Prilog F.

konstanta (8.3.80) nije ovisna o frekvenciji, dok je linearno proporcionalna provodnosti izolatora i idealnoj valnoj impedanciji Z' .

2. Prva aproksimacija za faznu konstantu kod dobrih izolatora prema (8.3.79b) jest

$$\beta \approx \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} , \quad (8.3.81)$$

i približno je jednaka onoj kod idealnog dielektrika. Analiza točnosti je ista kao za prigušnu konstantu, tj. već kod omjera $\kappa/\omega\epsilon \leq 0.2$ postiže se točnost s pogreškom od samo 0.5%. Fazna konstanta je linearno ovisna o frekvenciji.

3. Približni izraz za valnu impedanciju dobrih izolatora, zanemarujući članove višeg reda, može se prema izrazu (8.3.79c) pisati kao

$$Z \approx Z' \left[1 + j \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon} \right) \right] ; \quad \varphi \approx \arctan \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon} \right) , \quad (8.3.82a,b)$$

i predstavljati kompleksnim brojem. Ako je omjer $\kappa/\omega\epsilon \leq 0.2$, tada pišemo još jednostavnije

$$Z \approx Z' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} ; \quad \varphi \approx 0 , \quad (8.3.82c,d)$$

i činimo u realnom članu pogrešku od najviše 1.5%. Zanemarenjem imaginarnog člana činimo pogrešku od najviše 10%. Prema tome, ako pri omjeru $\kappa/\omega\epsilon \leq 0.2$ računamo impedanciju prema izrazu (8.3.82a), tada činimo samo u realnom članu pogrešku od najviše 1.5%. A ako računamo impedanciju kao realan broj (što odgovara idealnom dielektriku) prema izrazu (8.3.82c), tada činimo još dodatnu pogrešku u imaginarnom dijelu od 10%. Analiziramo li približan izraz za kompleksnu impedanciju dobrog izolatora, očito je da imaginarni dio izravno linearno ovisi o provodnosti izolatora i recipročno o frekvenciji polja. Valna impedancija dobrih izolatora je realna i visoka, a električno i magnetsko polje su praktično u fazi.

4. Približni izraz za faznu brzinu sinusnog vala u dobrom izolatoru odredit ćemo pomoću izraza (8.3.76c) i (8.3.79b), odnosno (8.3.81). Tako je

$$v_f \approx \frac{c}{1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon} \right)^2} , \quad (8.3.83a)$$

a ako zanemarimo članove višeg reda, tada je

$$v_f \approx c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} . \quad (8.3.83b)$$

Očito je da za omjer $\kappa/\omega\epsilon \leq 0.2$, činimo najveću pogrešku od 0.5%, ako brzinu

računamo prema izrazu (8.3.83b). U tablici 8.3.2. na kraju poglavlja dani su izrazi za približan proračun osnovnih značajki dobrih izolatora.

Na kraju možemo zaključiti, da se zbog vrlo malih vrijednosti provodnosti κ (odnosno $\omega\epsilon''$)⁴⁸, polje sinusnog vala vrlo malo, tj. neznatno prigušuje u dobrom izolatoru, dok se u svemu drugom val praktično ponaša kao da se prostire u idealnom dielektriku. Tako npr. prigušna konstanta za porculan kod svih frekvencija do reda 10 GHz iznosi približno $16 \cdot 10^{-12}$ 1/m, što predstavlja vrlo malu vrijednost. Ili drugi primjer, val frekvencije 10 MHz prigušuje se u polistirenu samo 0.5% po kilometru duljine, a električno i magnetsko polje su mu fazno pomaknuti za kut $\varphi = 0.003^\circ$. Valna impedancija, fazna brzina i valna duljina u dobrom izolatoru manji su nego u vakuumu, budući je obično $\epsilon' > \epsilon_0$ (tj. $\epsilon' > \epsilon_0$) i $\mu = \mu_0$. Gubici u jedinici volumena, koji se određuju pomoću izraza (8.3.44) ili (8.3.56) vrlo su mali, budući je provodnost κ (tj. $\omega\epsilon''$) vrlo mala u dobrim izolatorima.

8.3.3.2. Dobri vodiči

Dobri vodiči su u sinusnim poljima karakterizirani omjerom $\kappa/\omega\epsilon \gg 1$. U dobrom vodiču struje pomaka mogu biti potpuno zanemarene u usporedbi s provodnim strujama.⁴⁹ To je jedna od bitnih značajki ponašanja vodiča u sinusno promjenjivim poljima. Analizu ponašanja sinusnog vala u dobrim vodičima učinit ćemo preglednijom ako izvedemo približne izraze za temeljne značajke γ , α , β , Z i v_f materijala. U tu svrhu preuredit ćemo izraze (8.3.76a,b) i uvažavajući da je $\kappa/\omega \gg 1$, tj. $\omega\epsilon/\kappa \ll 1$, razviti ih binomnim razvojem u red.⁵⁰ Nakon preuređenja i uvažavajući da je

$$\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}},$$

slijedi

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu\kappa} \left(1 + j \frac{\omega\epsilon}{\kappa}\right)^{1/2} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} \left(1 + j \frac{\omega\epsilon}{\kappa}\right)^{1/2}, \quad (8.3.84a,b)$$

$$Z = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} \left(1 + j \frac{\omega\epsilon}{\kappa}\right)^{-1/2}.$$

Iz binomnog razvoja dobivamo

$$\gamma = \alpha + j\beta = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} \left[1 + j \frac{1}{2} \left(\frac{\omega\epsilon}{\kappa}\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{\omega\epsilon}{\kappa}\right)^2 - j \frac{1}{16} \left(\frac{\omega\epsilon}{\kappa}\right)^3 \dots \right],$$

⁴⁸ Pogledati tablice I.4.1. i 8.3.1. te izraz (8.3.56).

⁴⁹ Pogledati članak 7.2.3. i uvjet (7.2.46).

⁵⁰ Pogledati Prilog F.

$$Z = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} \left[1 - j\frac{1}{2}\left(\frac{\omega\epsilon}{\kappa}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{\omega\epsilon}{\kappa}\right)^2 + j\frac{5}{16}\left(\frac{\omega\epsilon}{\kappa}\right)^3 \dots \right],$$

pa ispuštanjem članova drugog i višeg reda dobivamo približne izraze za γ i Z u dobrom vodiču

$$\gamma \approx (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} \left[1 + j\frac{1}{2}\left(\frac{\omega\epsilon}{\kappa}\right) \right], \quad (8.3.85a,b)$$

$$Z \approx (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} \left[1 - j\frac{1}{2}\left(\frac{\omega\epsilon}{\kappa}\right) \right].$$

Ako su struje pomaka samo 1% od provodnih struja, tj. ako je omjer struja pomaka i provodnih struja $\omega\epsilon/\kappa \leq 0.01$, (tj. *ako su provodne struje 100 puta veće od struja pomaka*, odnosno $\kappa/\omega\epsilon \geq 100$), tada struje pomaka možemo potpuno zanemariti u izrazima (8.3.85a,b) za dobre vodiče,⁵¹ pa dobivamo

$$\gamma \approx (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}, \quad (8.3.86a,b)$$

$$Z \approx (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}}.$$

Pogreška koju činimo u proračunu γ i Z pri potpunom zanemarenju struja pomaka, tj. kada ih računamo prema izrazima (8.3.86a,b) i kada je $\kappa/\omega\epsilon \geq 100$ iznosi najviše 0.5%. Na temelju izvedenog možemo zaključiti:

1. Približan iznos prigušne konstante uz zanemarenje struja pomaka u dobrom vodiču određujemo iz izraza (8.3.86a) kao

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \kappa}. \quad (8.3.87)$$

⁵¹ Kovine su izraziti primjer materijala koji pripadaju u dobre vodiče. U kovinama redovito možemo zanemariti struje pomaka, budući je κ reda 10^7 S/m. Istina, ne zna se mnogo o dielektričnosti u kovinama, ali nema razloga vjerovati da ona poprma veće vrijednosti.

U J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941, navodi se da veličina dielektričnosti ϵ u kovinama je reda 10^{-11} F/m. Otud se zaključuje da su struje pomaka manje od provodnih u cijelom opsegu frekvencija do 10^{17} Hz, što pak leži u domeni atomskih fenomena i nije više područje valjanosti makroskopske elektromagnetske teorije. Dakle, u kovinama ćemo umjesto ϵ pisati s dovoljnom točnošću ϵ_0 za cijelo područje tehničkih frekvencija. Pogledati članak 8.5.2.

Prigušna konstanta mjeri se u *neperima po metru* (1/m). Ona je za dobre vodiče vrlo velika. Tako za bakar kod 50 Hz ona iznosi 106 1/m, kod 10 MHz je 47000 1/m, a kod 1 GHz ona iznosi 470000 1/m. Prigušenje u dobrim vodičima vrlo je veliko, i to veće što su vodljivost i permeabilnost materijala veći i što je frekvencija polja viša. Tako se npr. val od 10 MHz u *bakru* na putu od 0.06 mm priguši na 5.8% početne vrijednosti. To znači da se val praktički potpuno prigušio i da valovi ne prodiru duboko u kovine. *Kovine djeluju kao štit protiv elektromagnetskih valova*. S druge strane i materijali s lošijom provodnošću, kao npr. *morska voda* sa značajkama $\kappa = 5 \text{ S/m}$, $\epsilon = 81\epsilon_0$ i $\mu = \mu_0$, kod određenih frekvencija ponašaju se kao dobri vodiči. Uvjet koji mora biti ispunjen da bi morska voda bila dobar vodič jest da bude $\kappa/\omega\epsilon \geq 100$. Pa imamo

$$f \leq \frac{\kappa}{200\pi\epsilon} \approx 11 \cdot 10^6 \text{ Hz} .$$

Dakle, za valove frekvencije $f \leq 11 \text{ MHz}$ morska voda se ponaša kao dobar vodič. To je vrlo široki opseg frekvencija. Pa je tako npr. prigušna konstanta za morsku vodu za valove frekvencije 50 Hz $\alpha = 0.0314 \text{ 1/m}$, za valove 10 kHz $\alpha = 0.4427 \text{ 1/m}$ i za valove 10 MHz $\alpha = 14.042 \text{ 1/m}$. Zato će se u morskoj vodi elektromagnetski valovi frekvencije 50 Hz na dubini od 50 m prigušiti na 20.8% početnog iznosa. Približno na isti iznos prigušit će se i valovi frekvencije 10 kHz na dubini od 7.1 m, odnosno valovi frekvencije 10 MHz na dubini od 0.225 m.

- Zanemarenjem struja pomaka prva aproksimacija za faznu konstantu u dobrom vodiču iznosi prema (8.3.86a)

$$\beta \approx \alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\kappa} . \quad (8.3.88)$$

Fazna konstanta približno je jednaka prigušnoj konstanti. Proporcionalna je drugom korijenu frekvencije, permeabilnosti i provodnosti materijala. Jedinica joj je 1/m. Vrijednosti fazne konstante za dobre vodiče su vrlo velike u usporedbi s iznosom fazne konstante za dobre izolatore pri istoj frekvenciji.

- Valna impedancija u dobrom vodiču računa se prema približnom izrazu (8.3.86b), pa se može pisati

$$Z \approx (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}} e^{j\pi/4} , \quad (8.3.89a - c)$$

$$|Z| \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}} ; \quad \varphi \approx \frac{\pi}{4} .$$

Valna impedancija dobrih vodiča je kompleksna i ekstremno mala kod radiofrekvencija. Tako valna impedancija bakra ima modul 0.012Ω za frekvenciju 10 MHz.

Proporcionalna je drugom korijenu frekvencije, permeabilnosti i recipročne vrijednosti provodnosti materijala. Realni i imaginarni dio su joj približno jednaki, pa *fazni pomak između fazora električnog i magnetskog polja iznosi 45°*.

4. Fazna brzina sinusnog vala u dobrom vodiču može se približno izračunati prema izrazima (8.3.76c) i (8.3.88) kao

$$v_f = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\kappa}}. \quad (8.3.90)$$

Fazna brzina u dobrim vodičima je mnogo manja nego u praznom prostoru. Mjeri se u metrima po sekundi. Posebno treba istaknuti frekvencijsku ovisnost fazne brzine u dobrim vodičima i u vodljivim materijalima uopće.⁵² Tako su harmonici višeg reda složenog vala konstantno ubrzani u odnosu na one nižega reda.

5. Definicija valne duljine je nepromijenjena za dobre vodiče, pa se ona određuje prema izrazima (8.2.42a,b) kao

$$\lambda = \frac{v_f}{f} = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (8.3.91a)$$

Kako je, pak, prema (8.3.88) $\beta \approx \alpha$ u dobrim vodičima, to je

$$\lambda \approx \frac{2\pi}{\alpha} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f \mu \kappa}}. \quad (8.3.91b)$$

Budući da frekvencija jednog sinusnog vala ostaje ista, a kako je fazna brzina (8.3.90) vala u dobrom vodiču mnogo manja od brzine vala iste frekvencije u vakuumu $v_f = c_0 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$, to je prema (8.3.91a) *valna duljina u dobrom vodiču mnogo manja od one u vakuumu*. Općenito možemo zaključiti da je valna duljina u dobrom vodiču vrlo mala u usporedbi s valnom duljinom u praznom prostoru. Npr. kod frekvencije od 10 MHz valna duljina u vakuumu je 30 m, dok je u morskoj vodi 0.45 m, a u bakru je samo 0.133 mm.

6. Specifični gubici, tj. gubici u jedinici volumena u dobrom vodiču računaju se prema izrazu (8.2.56), odnosno (8.3.44) i iznose

$$(P_g')_{sr,Re} = \frac{\kappa}{2} |E_0|^2 e^{-2\alpha z} = \frac{1}{2} \omega \mu |H_0|^2 e^{-2\alpha z}. \quad (8.3.92)$$

Budući je κ dobrih vodiča vrlo visok, pogotovo kovina, to su specifični gubici veliki, posebno na početku ($z = 0$) dok val nije prigušen.

7. Snaga koja se prenosi sinusnim elektromagnetskim poljem po jedinici ploštine u

⁵² Signal složen iz više sinusnih valova različitih frekvencija prostirat će se tako da će se svaki sinusni val prostirati drugom faznom brzinom i pritom će se signal deformirati. Kažemo da će signal pretrpjeti distorziju.

dobrim vodičima iznosi prema (8.2.53)

$$\begin{aligned} N_{sr} &= \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2} a_z |E_0|^2 \frac{1}{Z} e^{-2\alpha z} = \frac{1}{2} a_z |H_0|^2 Z e^{-2\alpha z} = \\ &= \frac{1}{2} a_z |H_0|^2 e^{-2\alpha z} (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}}. \end{aligned} \quad (8.3.93)$$

Poyntingov vektor je kompleksna veličina, pa ga često predočavamo s dvije realne veličine

$$N_{sr} = P_{sr} + jQ_{sr}, \quad (8.3.94a)$$

gdje je modul

$$|N_{sr}| = \sqrt{P_{sr}^2 + Q_{sr}^2}, \quad (8.3.94b)$$

prividna snaga po jedinici ploštine koja se sinusnim elektromagnetskim poljem prenosi kroz prostor. Veličinu P_{sr} nazivamo *aktivnom ili djelatnom snagom*, a veličinu Q_{sr} nazivamo *reaktivnom ili jalovom snagom*.

Na kraju možemo zaključiti da se u dobrim vodičima mogu zanemariti struje pomaka (prema provodnim strujama). Polje sinusnog vala se jako prigušuje, budući su specifični gubici u materijalu veliki. Magnetsko polje zaostaje za električnim za fazni kut koji približno iznosi $\phi \approx 45^\circ$. Kovine kao izrazito dobri vodiči su reflektori elektromagnetskih valova.

U tablici 8.3.2. na kraju poglavlja dali smo pregled izraza za proračun osnovnih značajki za prostiranje sinusnog vala u dobrim vodičima.

8.3.4. Površinski učinak

Prostiranje valova dosad smo analizirali u vodljivim materijalima s gubicima u članku 8.3.2 i posebno u dobrim vodičima (čiji su izraziti predstavnici kovine) u točki 8.3.3.2. Utvrdili smo da se val koji polazi od površine dobrog vodiča i prostire u njegovu unutrašnjost, vrlo brzo priguši na beznačajnu vrijednost.⁵³ Zato je u kovinama sinusno elektromagnetsko polje lokalizirano u tankom sloju uz površinu. To ima za posljedicu da su i sinusne provodne struje gustoće $J = \kappa E$, koje teku u kovinama kao posljedica polja, potisnute prema površini i usredotočene u tankom površinskom sloju vodiča. Ova pojava poznata je u elektromagnetskoj teoriji pod nazivom *površinski učinak*.⁵⁴

⁵³ Pogledati sliku 8.3.5. i izraz za dubinu prodiranja u dobar vodič u tablici 8.3.2.

⁵⁴ Engleski naziv je The Skin Effect, a u našoj literaturi se upotrebljavaju i naziv "potiskivanje struje". Pogledati R. Stoll, *The Analysis of Eddy Currents*, Clarendon Press, Oxford, 1974; Z. Haznadar, J. Matjan, *Numerical Calculation of Skin Effect in Systems of Straight Conductors*, Elektrotehnika 5/70, Zagreb, 1970.

Zbog posebne važnosti tog fenomena analizirat ćemo ovu pojavu detaljnije i opširnije. U točki 8.3.3.2. pokazali smo da u dobrim vodičima možemo zanemariti struje pomaka. Zanemarenje struja pomaka ima za posljedicu da u sinusnom polju u kovini nema retardacije elektromagnetskog polja.⁵⁵ To pak znači da je elektromagnetsko polje u kovinama kvazistatičko, pa se elektromagnetska energija ne prenosi valom nego difuzijom. Činjenicu da u dobrom vodiču vala zapravo nema, nego da postoji kvazistatičko sinusno promjenljivo elektromagnetsko polje, moguće je i zorno prikazati. Prema izrazima (8.3.43) i (8.3.88) dubina prodiranja sinusnog vala u dobar vodič, tj. kovinu jest

$$d_k \approx \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} , \quad (8.3.95)$$

dok bi valna duljina vala u kovini, prema izrazima (8.3.91a,b) bila

$$\lambda_k \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega \mu \kappa}{2}}} . \quad (8.3.96)$$

Otuda slijedi karakteristični odnos za kovine

$$\lambda_k \approx 2\pi d_k . \quad (8.3.97)$$

U članku 8.3.2. objašnjeno je da u praktičnim tehničkim zadacima uzimamo da se val u kovinama priguši na beznačajnu vrijednost (na približno 5% početnog iznosa, tj. polja na površini vodiča) na dubini $3d_k$ ispod površine kovine. Očito je da elektromagnetsko polje iščezne puno prije (nakon $3d_k$) nego što val uspije prijeći u kovini put koji bi bio jednak jednoj valnoj duljini ($\lambda_k = 6.28d_k$), pa o elektromagnetskom valu u kovini nema smisla govoriti.

Sve zadatke proračuna površinskog učinka u dobrim vodičima različitog oblika, protjecanim strujama bilo kako promjenljivim u vremenu, mogu se riješiti pomoću jednadžbi (8.1.6a,b) za proračun raspodjele kvazistatičkog elektromagnetskog polja u vodičima

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 , \\ \Delta \mathbf{H} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 . \end{aligned} \quad (8.3.98a,b)$$

To su jednadžbe difuzije koje su izvedene iz prigušenih valnih jednadžbi (8.1.4a,b),

⁵⁵ To znači da se sve pojave događaju istovremeno u polju. Pogledati odjeljak 7.1.

kada se zanemare struje pomaka u dobrim vodičima, pa otpadnu članovi $\mu\epsilon\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$ i $\mu\epsilon\partial^2\mathbf{H}/\partial t^2$. Kada se izračuna raspodjela električnog polja $\mathbf{E}$ u vodiču, preostaje da se množenjem s provodnošću kovine odredi raspodjela gustoće struje u kovini kao $\mathbf{J} = \kappa\mathbf{E}$. Moguće je i izravno računati raspodjelu struja u vodiču iz jednadžbe (8.3.98a), tako da se ona pomnoži s κ kovine, pa se dobiva diferencijalna jednadžba

$$\Delta \mathbf{J} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0, \quad (8.3.98c)$$

koja određuje raspodjelu provodnih struja u vodiču. Za *sinusne struje* u vodiču, tj. sinusno promjenjiva elektromagnetska polja, pogodno je provesti račun s fazorima⁵⁶ polja. Sustav jednadžbi (8.3.98a – c) poprima tada oblik

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\mathbf{E}} &= \gamma^2 \underline{\mathbf{E}}, \\ \Delta \underline{\mathbf{H}} &= \gamma^2 \underline{\mathbf{H}}, \\ \Delta \underline{\mathbf{J}} &= \gamma^2 \underline{\mathbf{J}}. \end{aligned} \quad (8.3.99a - c)$$

To su temeljne diferencijalne jednadžbe za proračun raspodjele sinusnih kvazistatičkih elektromagnetskih polja i struja u dobrim vodičima, tj. za proračun površinskog učinka.

Valna konstanta za kovine γ određena je pretvorbom jednadžbi (8.3.98a – c) u fazorske jednadžbe. No može se odrediti i iz izraza (8.2.30), ako se zanemare struje pomaka u dobrom vodiču, pa se ispusti član $(-\omega^2\mu\epsilon)$ i dobije

$$\gamma^2 \approx j\omega\mu\kappa, \quad (8.3.100)$$

te je konačno γ za kovine

$$\gamma \approx \sqrt{j\omega\mu\kappa} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} = (1+j)\alpha. \quad (8.3.101)$$

Primijenit ćemo ovaj opći matematički model za rješenje zadatke površinskog učinka s najjednostavnijom geometrijom, kako bi smo razjasnili pojam *povećanja električnog otpora vodiča zbog potiskivanja struje* u njemu. Geometrija je zadana na slici 8.3.13. Desni poluprostor ($z \geq 0$) ispunjen je kovinom sa zadanim značajkama ϵ_0 , μ_0 i κ , a lijevi poluprostor ($z \leq 0$) ispunjen je dobrim izolatorom, npr. zrakom s ϵ_0 , μ_0 i $\kappa = 0$. Narinuto je sinusno elektromagnetsko polje frekvencije ω , tako da u vodiču teku izmjenične struje gustoće $\mathbf{J} = \mathbf{J}(z)$. Hallovom sondom izmjerena je amplituda jakosti magnetskog polja na samoj površini vodiča i ona iznosi H_0 A/m.

Rješenje difuzijskih diferencijalnih jednadžbi (8.3.99a – c) u fazorskoj domeni u pravocrtnom koordinatnom sustavu, s ovisnošću fazora polja $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{H}}$, samo o koordinati z ,

⁵⁶ Pogledati članak 7.2.1.

glasi

$$\begin{aligned}\underline{E} &= \underline{a}_x (E_1 e^{+\gamma z} + E_2 e^{-\gamma z}) , \\ \underline{H} &= \underline{a}_y (H_1 e^{+\gamma z} + H_2 e^{-\gamma z}) , \\ \underline{J} &= \underline{a}_x (J_1 e^{+\gamma z} + J_2 e^{-\gamma z}) .\end{aligned}\tag{8.3.102a - c}$$

Rubni uvjeti za tako jednostavnu geometriju jesu

$$\begin{aligned}z=0 &\Rightarrow \underline{H}(0) = \underline{a}_y H_0 , \\ z \rightarrow \infty &\Rightarrow \underline{H}(\infty) = 0 .\end{aligned}\tag{8.3.103a,b}$$

Njihovim uvrštenjem u jednadžbu (8.3.102b) slijedi

$$H_1 = 0 , \quad H_2 = H_0 .\tag{8.3.103c,d}$$

Impedancija dobrih vodiča određena je izrazima (8.3.89a - c), pa prema relacijama (8.2.50a,c) dobivamo za direktni val

$$\begin{aligned}E_1 &= -H_1 Z = 0 , \\ E_2 &= H_2 Z = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}} H_0 = E_0 , \\ J_1 &= \kappa E_1 = 0 , \\ J_2 &= \kappa E_2 = (1+j) \alpha H_0 = J_0 .\end{aligned}\tag{8.3.103e - h}$$

Konačno, rješenja za raspodjelu fazora polja i gustoće struje u kovini koja ispunjava poluprostor glase

$$\begin{aligned}\underline{E} &= \underline{a}_x E_0 e^{-(1+j)\alpha z} = \underline{a}_x (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}} H_0 e^{-(1+j)z\sqrt{\frac{\omega \mu \kappa}{2}}} , \\ \underline{H} &= \underline{a}_y H_0 e^{-(1+j)\alpha z} = \underline{a}_y H_0 e^{-(1+j)z\sqrt{\frac{\omega \mu \kappa}{2}}} , \\ \underline{J} &= \underline{a}_x J_0 e^{-(1+j)\alpha z} = \underline{a}_x (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu \kappa}{2}} H_0 e^{-(1+j)z\sqrt{\frac{\omega \mu \kappa}{2}}} .\end{aligned}\tag{8.3.104a - c}$$

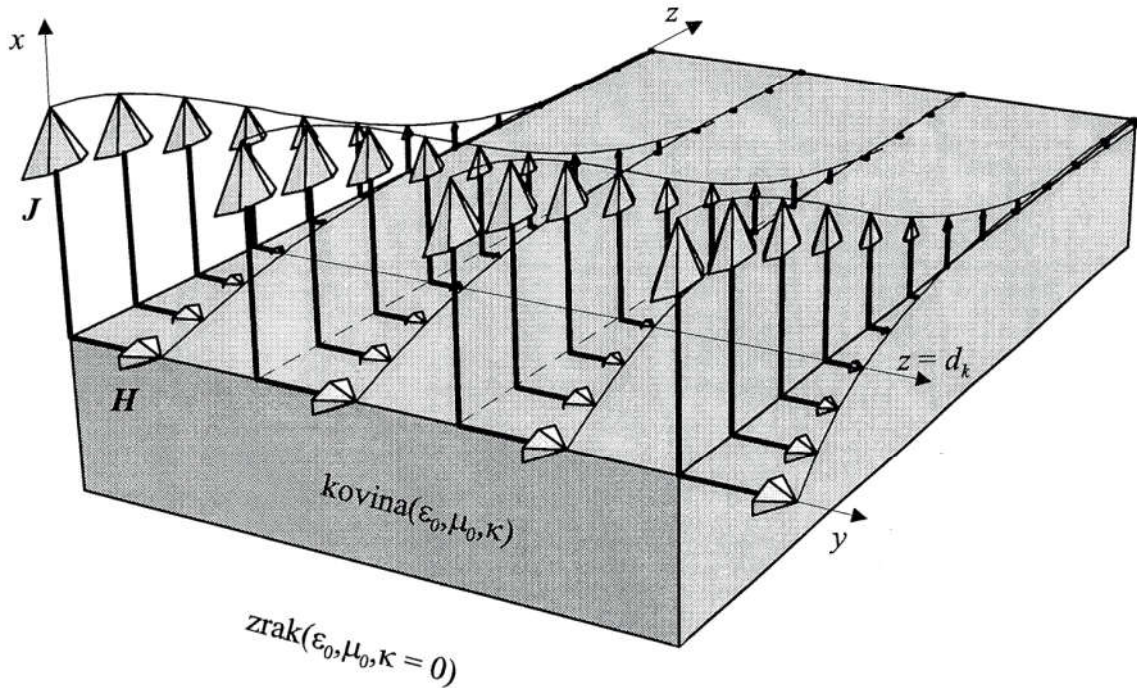
U realnom području trenutne vrijednosti jakosti polja i gustoće struje jesu

$$E_{Re} = \underline{a}_x \sqrt{\frac{\omega \mu}{\kappa}} H_0 e^{-z\sqrt{\frac{\omega \mu \kappa}{2}}} \cos \left(\omega t - z\sqrt{\frac{\omega \mu \kappa}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) ,\tag{8.3.105a}$$

$$H_{Re} = a_y H_0 e^{-z\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}} \cos\left(\omega t - z\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}\right), \quad (8.3.105b,c)$$

$$J_{Re} = a_x \sqrt{\omega\mu\kappa} H_0 e^{-z\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}} \cos\left(\omega t - z\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Budući da je sva struja u kovini usredotočena uz površinu u sloju debljine $3d_k$, to se često govori o *strujnom oblogu* na površini vodiča.



Slika 8.3.13. Potiskivanje struja i jakosti magnetskog polja prema površini kovine

Iznos debljine tog strujnog sloja u bakru i aluminiju, koji su izrazito dobri tehnički vodiči, pri različitim frekvencijama polja dan je u tablici 8.3.3. Očito je da su te debljine strujnog sloja npr. u bakru reda od 28 mm pri 50 Hz do 2 μm pri frekvenciji od 10 GHz (mikrovalna frekvencija za radar i druge primjene) vrlo male. Stvarno ima smisla govoriti o strujnom oblogu, a nikako o jednolikoj raspodjeli struje u kovini.

Pomoću izraza

$$\underline{K} = \int_0^\infty \underline{J} dz = a_x \int_0^\infty (1+j)\alpha H_0 e^{-(1+j)\alpha z} dz = a_x H_0 e^{-(1+j)\alpha z} \Big|_0^\infty = a_x H_0, \quad (8.3.106)$$

možemo izračunati fazor strujnog obloga, tj. struje u kovini (tj. u cijeloj dubini kovine

$z \rightarrow \infty$) po jednom metru poprečne duljine na površini kovine.⁵⁷ Ukupna struja u kovini po jedinici poprečne duljine, tj. iznos (modul) strujnog obloga K brojno je jednak iznosu jakosti magnetskog polja na površini kovine H_0 .

Tablica 8.3.3. Dubina prodiranja i debljina strujnog sloja uz površinu bakra i aluminija

Frekvencija (Hz)	Bakar		Aluminij	
	Dubina prodiranja d_k (mm)	Debljina strujnog sloja $3d_k$ (mm)	Dubina prodiranja d_k (mm)	Debljina strujnog sloja $3d_k$ (mm)
50	9,4	28,2	12	36
60	8,6	25,8	11	33
10^3	2,1	6,3	2,7	8,1
10^6	0,07	0,21	0,08	0,24
10^9	0,002	0,006	0,003	0,009
10^{10}	$0,7 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$0,85 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$

U svjetlu te činjenice zanimljivo je pojasniti novo značenje valne impedancije Z . Imali smo otprije, tj. prema izrazima (8.2.50a) i (8.3.59a – c) da je valna impedancija u dobrim vodičima, poglavito kovinama, za direktni sinusni TEM val definirana kao

$$Z = \frac{E_x^+}{H_y^+} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}}. \quad (8.3.107)$$

Budući da relacije (8.3.103f) i (8.3.106) također moraju biti zadovoljene, to se može postaviti opći odnos

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = \frac{E_0}{K} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}}. \quad (8.3.108)$$

Uz pomoć relacije (8.3.88) odnosno (8.3.95) dobiva se konačno

$$Z = \frac{E_0}{K} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}} = (1+j) \frac{1}{\kappa d_k} = (1+j) R_s. \quad (8.3.109)$$

⁵⁷ Pogledati članak 1.2.4. i izraze (1.2.15) i (1.2.17).

Valna impedancija Z ili unutarnja impedancija naziva se još i *plošna impedancija vodiča*, a R_s je njezin *plošni otpor*. Budući da se duljine koje su uključene u proračun impedancije računaju duž različitih osi, dimenzije od Z i R_s dogovorno se uzimaju kao "omi po četvorini". Očito je također da su realni i imaginarni dio valne impedancije, tj. plošne impedancije vodiča jednaki, tj. $R_s = X_s$. Energija koja se u jedinici volumena i u jedinici vremena gubi, tj. specifični gubici u kovini mogu se prema (8.3.92) izračunati kao

$$(P_g')_{Sr,Re} = \frac{1}{2} \omega \mu |H_0|^2 e^{-2\alpha z} = \frac{1}{2} \omega \mu |\underline{K}|^2 e^{-2\alpha z} . \quad (8.3.110)$$

Ukupni gubici u jediničnoj prizmi beskonačne duljine ($1\text{m} \times 1\text{m} \times \infty$) mogu se tada odrediti integracijom

$$P_{gs} = \int_0^\infty P_g' dz = \frac{1}{2} \omega \mu \frac{1}{2\alpha} |\underline{K}|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}} K^2 = \frac{1}{2} R_s K^2 \quad (8.3.111a)$$

S druge strane ukupni gubici koji se pretvaraju u toplinu u jediničnoj prizmi P_{gs} (W/m^2), namiruju se iz elektromagnetske energije vala koji egzistira u zraku ispred površine kovine. Stoga prema (8.3.93) ta energija mora biti donesena valom kroz površinu ($z = 0$) vodiča u vodič, tj.

$$P_{gs} = \text{Re}\{N_0\} = \frac{1}{2} H_0^2 \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}} = \frac{1}{2} R_s K^2 . \quad (8.3.111b)$$

Prema očekivanju izrazi (8.3.111a,b) u skladu su s Jouleovim zakonom. Otuda slijedi da je pri eksponencijalnoj raspodjeli gustoće struje u kovini za proračun gubitaka mjerdavan plošni otpor vodiča R_s , koji je dan relacijom (8.3.109) i iznosi

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}} = \frac{1}{\kappa d_k} . \quad (8.3.112)$$

Iz izraza (8.3.112) slijedi vrlo zanimljivo objašnjenje otpora vodiča koji uzima u obzir potiskivanje izmjeničnih struja prema površini vodiča, tj. površinskog učinka. Naime, usporedimo li taj izraz s klasičnim izrazom za omski otpor vodiča protjecanog homogenom raspodjelom gustoće struje po presjeku vodiča

$$R = \frac{l}{\kappa S} , \quad (8.3.113)$$

očito je da je $l = 1\text{ m}$ i da je poprečni presjek $S = 1\text{m} \times d_k$. Prema tome, plošni otpor R_s beskonačno široke jedinične prizme (duljine $l = 1\text{ m}$) iz kovine ekvivalentan je omskom otporu R jedinične prizme (duljine $l = 1\text{ m}$) poprečnog presjeka $1\text{m} \times d_k$, tj. širine d_k , u

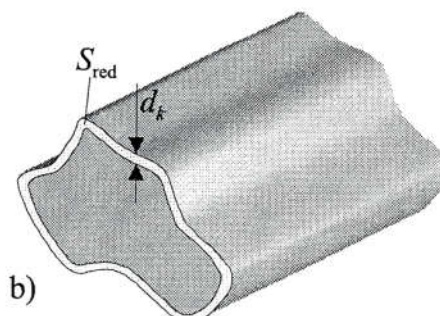
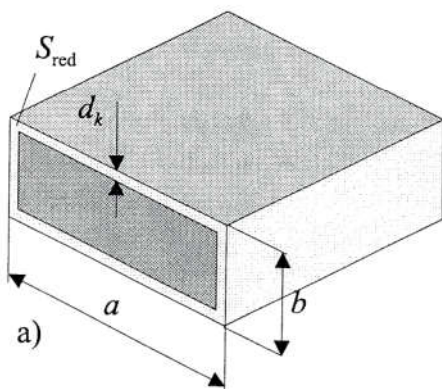
slučaju kada je struja jednoliko raspoređena po presjeku $S = lm \times d_k$. Budući da je sva struja zamišljena kao jednoliko usredotočena u sloj debljine d_k , to je bila i osnova da se veličina d_k nazove *dubina prodiranja*. Iz izraza (8.3.111a,b) i (8.3.112) očito je da su gubici u vodiču (kovini) to veći što je veći plošni otpor vodiča, a on je upravo proporcionalan korijenu iz frekvencije i permeabilnosti materijala, a obratno proporcionalan korijenu provodnosti vodljivog materijala. Tako je za frekvenciju od 10 GHz, koja se koristi u radaru i u drugim primjenama dubina prodiranja približno $0.7 \mu\text{m}$, pa polje prodire u stijenku vodiča (npr. valovoda) od bakra oko 2 mikrona. Da bi se gubici smanjili, dovoljno je da se bakrene stijenke prevuku slojem srebra mikronske debljine.

Izraz (8.3.112) ima posebnu važnost za proračun površinskog učinka, tj. plošnog otpora i gubitaka u dobrim vodičima protjecanim izmjeničnim strujama, pogotovu viših frekvencija. Naime, kada izračunamo dubinu prodiranja d_k prema izrazu (8.3.95), za vodič bilo kakvog oblika poprečnog presjeka (na primjer pravokutnoga ili proizvoljnog oblika, kao na slici 8.3.14) nije teško tada izračunati prema (8.3.112) približnu vrijednost otpora izmjeničnoj struji

$$R_{\text{red}} \approx \frac{l}{\kappa S_{\text{red}}} = \frac{l}{\kappa O d_k} \quad (8.3.114)$$

Ovdje je l aksijalna duljina vodiča u metrima, a reducirani poprečni presjek vodiča $S_{\text{red}} = O d_k$, gdje je O označen opseg poprečnog presjeka vodiča. Za pravokutni vodič je $O = 2(a + b)$. Prema tome, ako je po poprečnom presjeku $S = ab$ nejednoliko raspodijeljena izmjenična struja, to se onda efektivni otpor toj izmjeničnoj struji približno računa tako da se po dubini prodiranja pretpostavi da je sva struja koncentrirana jednoliko po cijelom sloju debljine d_k . Efektivni presjek za jednoliko raspoređenu struju računa se onda kao umnožak opsega vodiča i dubine prodiranja. Pritom je proračun po izrazu (8.3.114) više točan, što je više ispunjen temeljni uvjet

$$l_{\text{min}} \geq 6d_k \quad .$$



Slika 8.3.14. Geometrija vodiča poprečnog pravokutnog a) i bilo kojeg b) presjeka za proračun otpora vodiča R_{red} izmjeničnoj struji

Točan proračun otpora vodiča izmjeničnoj struji za pravokutni i kružni oblik poprečnog presjeka vodiča proveli smo u poglavlju 7.

8.4. NESINUSNI VALOVI

U članku 8.1.1. ovog poglavlja iz Maxwellovih jednadžbi izveli smo prigušene valne jednadžbe (8.1.4a,b) za vektore dinamičkog elektromagnetskog polja u jednostavnom materijalu s gubicima

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 , \quad (8.4.1a,b)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 .$$

Budući da su obje vektorske valne jednadžbe istog oblika u članku 8.1.2, predstavili smo ih jednom vektorskom jednadžbom

$$\Delta \mathbf{W} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = 0 . \quad (8.4.2)$$

Ako pretpostavimo da je elektromagnetski val ravan i da veličine polja ovise samo o jednoj dimenziji, na primjer z , tada jednadžbe (8.1.4a,b) prelaze u jednostavniji oblik

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 , \quad (8.4.3a,b)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 .$$

Ovaj val se giba duž osi z i partikularna rješenja prema (8.2.20a,b) glase

$$\mathbf{E}(z,t) = (\mathbf{E}_1 e^{jkz} + \mathbf{E}_2 e^{-jkz}) e^{st} , \quad (8.4.4a,b)$$

$$\mathbf{H}(z,t) = (\mathbf{H}_1 e^{jkz} + \mathbf{H}_2 e^{-jkz}) e^{st} ,$$

gdje su sa s označeni korijeni karakteristične jednadžbe (8.2.18a), za diferencijalnu jednadžbu po vremenu (8.2.17), koji prema (8.2.18b) glase

$$s_{1,2} = -\frac{\kappa}{2\epsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{2\epsilon}\right)^2 - \frac{k^2}{\mu\epsilon}} . \quad (8.4.5a,b)$$

Značajka k je separacijska konstanta ili valni broj, pa je prema (8.2.6b) pogodno uvesti vektor $\mathbf{k}$, kao vektor koji određuje smjer prostiranja vala. U našem slučaju on jest

$$\mathbf{k} = a_z k . \quad (8.4.6)$$

Pretpostavimo li još da je ravni jednodimenzionalni val sinusni u vremenu i prostoru, kako je to pokazano u članku 8.2.3, separacijska konstanta prema (8.2.27) poprima kompleksni iznos

$$k = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - j \omega \mu \kappa} , \quad (8.4.7)$$

a korijeni postaju imaginarni

$$s_{1,2} = j\omega . \quad (8.4.8)$$

To odgovara Fourierovoj transformaciji valnih jednadžbi (8.4.3a,b) koje u kompleksnom području glase

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + (\omega^2 \mu \varepsilon - j \omega \mu \kappa) \mathbf{E} = 0 , \quad (8.4.9a,b)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + (\omega^2 \mu \varepsilon - j \omega \mu \kappa) \mathbf{H} = 0 ,$$

što možemo pisati kraće

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (8.4.10a,b)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{H} = 0.$$

Vektori $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ leže u transverzalnoj ravnini i mogu imati samo x i y komponente. Partikularna rješenja tih jednadžbi su prema (8.4.4a,b)

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1 e^{jkz} + \mathbf{E}_2 e^{-jkz}) e^{j\omega t} , \quad (8.4.11a,b)$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{H}_1 e^{jkz} + \mathbf{H}_2 e^{-jkz}) e^{j\omega t} ,$$

i predstavljaju sinusni val u prostoru i vremenu, pritom je prostorni sinus prigušen. U prethodnom odjeljku 8.3. detaljno smo analizirali prostiranje takvih sinusnih valova.

Međutim, u realnim uvjetima takva se idealizirana (partikularna) sinusna rješenja ne pojavljuju. Redovito ćemo u najvećem broju slučajeva imati posla ne s jednim "čistim" sinusnim valom, nego s konačnim nizom sinusnih valova različite frekvencije i valne duljine. Taj niz valova vrlo često može biti proizveden u obliku *impulsa* konačnog vremena trajanja, ili pak može biti *moduliran nekim signalom* drugog oblika. Prostiranje nesinusnih valova zamršenija je zadaća. Takvu zadaću, ako su odnosi linearni, tj. ako se nesinusni val prostire u jednostavnom materijalu, rješavamo primjenom načela superpozicije.

Prostiranje jednodimenzionalnog nesinusnog vala određenog jednačbama (8.4.3a,b) rješavamo tako da prvo Fourierovom transformacijom prebacimo te jednačbe u spektralnu domenu (8.4.10a,b). Potom izračunamo partikularna sinusna rješenja (8.4.11a,b). Da bi dobili opća rješenja jednodimenzionalnih jednačbi za nesinusni val, pomnožit ćemo ta partikularna rješenja s po volji odabranim konstantama i zbrojiti. Pritom treba imati u vidu da zbroj ravnih valova može opet dati ravni val, ali i jednodimenzionalni val bilo kojeg prostornog i vremenskog oblika. Dobivanje općih rješenja pomoću parcijalnih u biti vodi k ideji Fourierovih redova i integrala.

Konstante u općim rješenjima određujemo iz rubnih i početnih uvjeta, koji trebaju za svaku zadaću biti zadani. Tako npr, zadana prostorna raspodjela vektora polja u ovisnosti o koordinati z u početnom trenutku t_0 jedinstveno će odrediti polje u svim sljedećim trenucima. Ili, ovisnost polja o vremenu t može biti propisana u jednoj ravnini $z = z_0$ i polje će biti određeno u svim točkama u prostoru i u vremenu.

8.4.1. Opće rješenje jednodimenzionalne valne jednačbe u dielektriku

U dielektriku, tj. materijalu bez gubitaka ($\kappa = 0$), jednodimenzionalne valne jednačbe (8.4.3a,b) za nesinusni val reduciraju se u neprigušene, pa za svaku x i y komponentu vektora polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ prema (8.4.2) poprimaju oblik

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (8.4.12)$$

Za sinusne valove Fourierova transformacija te jednačbe jest

$$\frac{\partial^2 w}{dz^2} + \omega^2 \mu \epsilon w = 0. \quad (8.4.13)$$

Označimo li prema (8.2.30) s

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \quad ; \quad c^2 = \frac{1}{\mu \epsilon},$$

tada je prema (8.2.29)

$$\gamma = jk = \alpha + j\beta = j \frac{\omega}{c}, \quad (8.4.14)$$

$$k = \beta = \frac{\omega}{c}.$$

Fazna brzina je za sve sinusne valove, prema (8.2.40), ista i iznosi

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad (8.4.15)$$

i neovisna je o frekvenciji sinusnog vala u dielektriku. Budući da nema gubitaka u materijalu $\alpha = 0$, a značajke k i ω su realne veličine. Svaku od tih veličina ω ili k možemo promatrati kao neovisnu varijablu. Izaberemo li ω kao neovisnu varijablu, tada je $k = k(\omega) = \omega/c$.

Partikularno rješenje jednodimenzionalne valne jednadžbe (8.4.13) za sinusni val za bilo koju x ili y komponentu oba polja, u kompleksnom području, prema (8.4.11a,b) glasi

$$w(z,t) = w_1 e^{j\omega\left(t+\frac{z}{c}\right)} + w_2 e^{j\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}. \quad (8.4.16)$$

Koeficijenti w_1 i w_2 su kompleksne veličine i mogu ovisiti o frekvenciji ω . Zato svakoj sinusnoj komponenti određene frekvencije ω pridružujemo odgovarajuću amplitudu, što označavamo s $w_1(\omega)$ i $w_2(\omega)$. Opće rješenje jednodimenzionalne valne jednadžbe (8.4.12) za nesinusni val, tj. za val bilo kakvog oblika i bilo kakve vremenske ovisnosti koji se duž osi z prostire u dielektriku dobivamo zbrajanjem partikularnih (sinusnih) rješenja (8.4.16) preko područja frekvencija ω . Ako je $w(z,t)$ *bilo kakva periodička funkcija*, tada se zbrajanje obavlja preko *beskonačnog diskretnog skupa* frekvencija sinusnih valova, pa je

$$w(z,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[w_{1m} e^{j\omega_m\left(t+\frac{z}{c}\right)} + w_{2m} e^{j\omega_m\left(t-\frac{z}{c}\right)} \right]. \quad (8.4.17)$$

Općenito, ako je valna funkcija $w(z,t)$ bilo kojeg oblika i u vremenu i u prostoru, tj. *aperiodička i u vremenu i u prostoru*, tada se zbrajanje (integriranje) obavlja preko kontinuiranog beskonačnog frekvencijskog spektra. Opće rješenje od (8.4.12) je upravo Fourierov integral⁵⁸

$$w(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[w_1(\omega) e^{j\omega\left(t+\frac{z}{c}\right)} + w_2(\omega) e^{j\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)} \right] d\omega. \quad (8.4.18)$$

Koeficijente $w_1(\omega)$ i $w_2(\omega)$ određujemo iz rubnih i početnih uvjeta. To se rješava tako da se propišu vrijednosti valne funkcije i njezina normalna prostorna derivacija kao funkcije vremena u zadanoj ravnini $z = konst.$, ili u zadanom početnom trenutku t_0 . Npr. neka

⁵⁸ Prvi put smo obavili Fourierovu transformaciju jednadžbe (8.4.12) u (8.4.13) i dobili spektar sinusih partikularnih rješenja (u frekventnoj domeni), koja smo integralom (8.4.18) inverznom Fourierovom transformacijom vratili u vremensku domenu.

su u ravnini $z = 0$ zadane funkcije

$$w(0,t) = f(t) \quad ; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0} = F(t) . \quad (8.4.19 \text{ a,b})$$

Detaljan opis određivanja koeficijenata $w_1(\omega)$ i $w_2(\omega)$ pomoću Fourierovih integrala i dobivanje konačnih rješenja opisao je Stratton⁵⁹ i nećemo ga ovdje izvoditi.

Za opće rješenje jednodimenzionalne valne jednadžbe (8.4.12) uz zadane rubne i početne uvjete (8.4.19a,b) dobivamo iz (8.4.18) jednadžbu

$$w(z,t) = \frac{1}{2} f\left(t + \frac{z}{c}\right) + \frac{1}{2} f\left(t - \frac{z}{c}\right) - \frac{1}{2} h\left(t + \frac{z}{c}\right) + \frac{1}{2} h\left(t - \frac{z}{c}\right) . \quad (8.4.20)$$

Nesinusni (aperiodički u vremenu i u prostoru) jednodimenzionalni elektromagnetski val u dielektriku, čije su x i y komponente vektora polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ određene valnom jednadžbom (8.4.12), ima rješenja oblika (8.4.20) za sve četiri komponente polja. Funkcija h određuje se iz početnih uvjeta tako da bude $dh/dt = -cF(t)$. Zamjena varijable t u $f(t)$ s $(t - z/c)$ ili $(t + z/c)$ rezultira u gibanju vala bez distorzije udesno ili ulijevo duž osi z s faznom brzinom c . Tako se početna raspodjela polja dijeli u dva vala, od kojih se jedan giba u $+z$ a drugi u $-z$ smjeru. Na ta dva vala superponiraju se h valovi, tako izabrani da u $z = 0$ oni poništavaju jedan drugoga, ali tako da se derivacija od w približava propisanoj vrijednosti $F(t)$.

8.4.2. Opće rješenje jednodimenzionalne valne jednadžbe u materijalu s gubicima

8.4.2.1. Zadana raspodjela polja u vremenu

Rješenje jednodimenzionalnih valnih jednadžbi (8.4.3a,b) za slučaj zadane sinusne raspodjele polja *u vremenu* (i u prostoru) opisano je detaljno u članku 8.2.3. Partikularna sinusna rješenja u kompleksnom području su oblika (8.4.11a,b). Opća rješenja jednodimenzionalnih valnih jednadžbi (8.4.3a,b) za bilo kakav oblik vala (općenito aperiodički u vremenu i u prostoru) u materijalu s gubicima, a pomoću sinusnih rješenja oblika (8.4.11a,b), dobit ćemo zbrajanjem svih tih parcijalnih sinusnih komponenti. Sve četiri x i y komponente vektora polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ označit ćemo s $w(z,t)$. Uz pretpostavku da su w_1 , w_2 i k kompleksne funkcije od ω , dobivamo za opće rješenje jednadžbu

$$w(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[w_1(\omega) e^{jk(\omega)z} + w_2(\omega) e^{-jk(\omega)z} \right] e^{j\omega t} d\omega . \quad (8.4.21a)$$

⁵⁹ Pogledati J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941., odjeljak 5.8. General solution of the One-dimensional Wave Equation in a Nondissipative Medium.

Ova jednadžba je rješenje za jednodimenzionalni val u pravocrtnom sustavu bilo kojeg prostornog oblika, koji se prostire duž osi z s bilo kojom vremenskom funkcijom u materijalu s gubicima.

Pretpostavit ćemo da je zadana raspodjela polja u vremenu tako da su propisane valna funkcija i njezina okomita derivacija kao poznate funkcije vremena u određenoj ravnini $z = konst.$, tj.

$$w(0,t) = f(t) \quad ; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0} = F(t) . \quad (8.4.21b)$$

Iz tih zadanih rubnih uvjeta određuju se pomoću Fourierovih integrala nepoznati koeficijenti $w_1(\omega)$ i $w_2(\omega)$, dok se separacijska konstanta k uzima iz relacije (8.4.7). Označimo li s J_0 Besselovu funkciju nultog reda, a s α prigušnu konstantu za materijale s gubicima koji se mogu svrstati u dobre izolatore, koja prema izrazu (8.3.80) iznosi

$$\alpha \approx \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} , \quad (8.4.22)$$

tada je opće rješenje jednodimenzionalne valne jednadžbe sa zadanom raspodjelom polja u vremenu dano izrazom⁶⁰

$$\begin{aligned} w(z,t) = & \frac{1}{2} e^{\alpha z} f\left(t + \frac{z}{c}\right) + \frac{1}{2} e^{-\alpha z} f\left(t - \frac{z}{c}\right) + \\ & + \frac{1}{2} c e^{-\frac{\kappa}{2\epsilon} t} \int_{t-\frac{z}{c}}^{t+\frac{z}{c}} f(\tau) e^{\frac{\kappa}{2\epsilon} \tau} \frac{\partial}{\partial z} J_0\left(\alpha \sqrt{z^2 - c^2(t-\tau)^2}\right) d\tau + \\ & + \frac{1}{2} c e^{-\frac{\kappa}{2\epsilon} t} \int_{t-\frac{z}{c}}^{t+\frac{z}{c}} F(\tau) e^{\frac{\kappa}{2\epsilon} \tau} J_0\left(\alpha \sqrt{z^2 - c^2(t-\tau)^2}\right) d\tau . \end{aligned} \quad (8.4.23)$$

Ta jednadžba je valjana za materijale s gubicima koji se mogu svrstati u dobre izolatore, tj. one koji ispunjavaju uvjet $\kappa/\omega\epsilon \leq 0.2$. Tada je α dana s (8.4.22), a fazna brzina je za sve sinusne komponente približno ista i prema (8.3.83b) iznosi $v_f = c$. Na kraju možemo zaključiti da je valna funkcija $w(z,t)$ koja se u vodljivom materijalu u ravnini $z = 0$ reducira u $f(t)$ i čija se okomita derivacija reducira u $F(t)$, a koja ujedno zadovo-

⁶⁰ Pogledati J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941., odjeljak 5.9. Dissipative Medium; Prescribed Distribution in Time.

Ijava jednadžbu oblika

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial w}{\partial t} = 0 , \quad (8.4.24)$$

posvuda određena izrazom (8.4.23). Iz ovog izraza vidljivo je da se karakteristike prostiranja vala temeljito mijenjaju zbog vodljivosti materijala. Početni impuls $f(t)$ razlaže se u dva vala, svaki po polovicu početne amplitude, kao i u slučaju prostiranja vala u dielektriku. Valovi se gibaju u $+z$ i $-z$ smjeru, svaki s brzinom c , koja je neovisna o frekvenciji i o provodnosti materijala. Oni se prigušuju eksponencijalno u smjeru svoga gibanja, a prigušenje je približno onom za sinusne komponente, danom s (8.4.22). Početna funkcija ne prostire se bez promjene oblika, jer integrali koji predstavljaju doprinose polju traju cijelo vrijeme bez ograničenja (do beskonačnosti) u svim poprečnim točkama valne fronte. Val ostavlja u svom izvoru ostatak ili dio koji splašnjava eksponencijalno u vremenu.

8.4.2.2. Zadana raspodjela polja u prostoru

Rješenje jednodimenzionalnih valnih jednadžbi (8.4.3a,b) za slučaj zadane sinusne raspodjele polja u *prostoru* opisano je detaljno u članku 8.2.4. Komponente oba polja određene su tada skalarnom diferencijalnom jednadžbom (8.2.24)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial w}{\partial t} = 0 . \quad (8.4.25)$$

Partikularna rješenja za prigušenu sinusnu raspodjelu polja u prostoru određena su u kompleksnom području prema relacijama (8.2.46a,b) s

$$w(z,t) = w_{1,2} e^{-pt+j(\pm qt+kz)} + w_{3,4} e^{-pt+j(\pm qt-kz)} , \quad (8.4.26)$$

gdje su korijeni karakteristične jednadžbe dani pomoću relacije (8.2.45) kao

$$s = -\frac{\kappa}{2\varepsilon} \pm j \sqrt{\frac{k^2}{\mu \varepsilon} - \left(\frac{\kappa}{2\varepsilon}\right)^2} = -p \pm jq . \quad (8.4.27)$$

Pretpostavka je da je separacijska konstanta k realna, a veličine p i q su tada

$$p = \frac{\kappa}{2\varepsilon} , \quad (8.4.28a,b)$$

$$q = \sqrt{\frac{k^2}{\mu \varepsilon} - \left(\frac{\kappa}{2\varepsilon}\right)^2} = \sqrt{c^2 k^2 - p^2} .$$

Provođenje harmoničke analize ima smisla u prostoru prije nego u vremenu, pa se opće

rješenje za zadanu raspodjelu u prostoru može konstruirati iz partikularnih sinusnih rješenja oblika danih u (8.4.26) pogodnih za ovu svrhu

$$w(z,t) = e^{-pt} (w_1 e^{jqz} + w_2 e^{-jqz}) e^{jkz} . \quad (8.4.29)$$

Uz pretpostavku da su w_1 , w_2 i q funkcije od k dobivamo za opće rješenje jednadžbu

$$w(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} [w_1(k) e^{jq(k)t} + w_2 e^{-jq(k)t}] e^{jkz} dk . \quad (8.4.30a)$$

Ta jednadžba je rješenje za jednodimenzionalni val u pravocrtnom sustavu bilo kojeg prostornog oblika, koji se duž osi z prostire bilo kojom vremenskom funkcijom u materijalu s gubicima. Ona je pogodna za rješavanje polja ako su *zadani početni uvjeti* tako da su u početnom trenutku $t = 0$ zadane raspodjela polja w i njegova vremenska derivacija $\partial w / \partial t$ kao funkcije koordinate z u prostoru, tj.

$$w(z,0) = g(z) \quad ; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{t=0} = G(z) . \quad (8.4.30b)$$

Pomoću Fourierovih integrala određuju se koeficijenti $w_1(k)$ i $w_2(k)$. Ako s J_0 označimo Besselovu funkciju nultog reda, dobiva se za rješenje jednodimenzionalne valne funkcije koja se u vodljivom materijalu u $t = 0$ reducira u $g(z)$ i čija vremenska derivacija u istom momentu je $G(z)$, izraz oblika⁶¹

$$\begin{aligned} w(z,t) = e^{-pt} & \left\{ \frac{1}{2} g(z+ct) + \frac{1}{2} g(z-ct) + \right. \\ & + \frac{1}{2c} \int_{z-ct}^{z+ct} [pg(L) + G(L)] J_0(\alpha \sqrt{(z-L)^2 - c^2 t^2}) dL + \\ & \left. + \frac{1}{2c} \int_{z-ct}^{z+ct} g(L) \frac{\partial}{\partial t} J_0(\alpha \sqrt{(z-L)^2 - c^2 t^2}) dL \right\} . \end{aligned} \quad (8.4.31)$$

Koeficijent α određen je izrazom (8.4.22). Ovo rješenje ne razlikuje se u biti od rješenja (8.4.23) iz prethodne točke. Početna raspodjela polja duž osi z razlaže se u dva vala koji se prostiru u $+z$ i $-z$ smjeru. Ako je κ različita od nule, ostaci polja iza prolaza valnog fronta prigušuju se eksponencijalno u vremenu.

⁶¹ Za dokaz pogledati u J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941., odjeljak 5.10. Dissipative Medium; Proscribed Distribution in Space, ili J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York, 1962.

8.5. DISPERZIJA

Do sada smo uglavnom analizirali prostiranje *sinusnih valova* u vakuumu, (idealnim) dielektricima i materijalima s gubicima. Zadaća se znatno zamrsi i poteškoće nastaju želimo li analizirati prostiranje nesinusnog vala ili *signala* u realnim materijalima. U odjeljku 8.4. pojasnili smo da se u jednostavnim materijalima takav signal može konstruirati superpozicijom *nizova sinusnih valova* beskonačne duljine i trajanja. Zato se i analiza prostiranja takvih signala može opet svesti na analizu prostiranja sinusnih komponenti, tj. valova. Pokazali smo da fazne brzine tih sinusnih komponenti ovise o značajkama ϵ , μ i κ materijala⁶² koje smo do sada uzimali konstantama. Prostiranje nesinusnog signala u vakuumu ili u idealnom dielektriku, gdje značajke ϵ i μ ($\kappa = 0$) ne ovise o frekvenciji i gdje su fazne brzine konstantne za sinusne komponente svih frekvencija, jest *bez distorzije*, tj. bez izobličenja. Zato možemo zaključiti da u takvim *nedisperzivnim materijalima* nesinusni signal putuje neizobličen. Svi materijali u prirodi, međutim, pokazuju određenu disperziju. Činjenica je, pak, da unutar ograničenog opsega frekvencija većina materijala pokazuje dovoljno malu disperziju, tako da faznu brzinu možemo smatrati konstantnom i neovisnom o frekvenciji svake sinusne komponente nesinusnog signala. U svakom slučaju, čak kada značajke ϵ , μ i κ ovise o frekvenciji, postupak dan u prethodnim odjeljcima za *nedisperzivne* materijale ostaje valjan za svaku frekvencijsku komponentu zasebno. O *disperziji* se može govoriti kod složenih nesinusnih signala ili impulsa koji se prostiru u materijalima u kojima postoji frekvencijska ovisnost faznih brzina sinusnih komponenata, zbog čega nastaje *raspršenje* pojedinih komponenata i kao posljedica *izobličenje signala*.

Disperzija je izrazita u materijalima koji su dobri vodiči kao npr. kovine. Kod dobrih vodiča su fazne brzine sinusnih komponenata signala ovisne o frekvenciji. Za sve materijale u kojima je fazna brzina ovisna o frekvenciji kaže se da su *disperzivni*.

Svojstvo disperzije kod dovoljno visokih frekvencija može pokazati čak i dobar izolator, tj. materijal kojemu je provodnost potpuno zanemariva. Prema Strattonu⁶³ kod frekvencija nižih od 100 MHz dielektrička konstanta za većinu materijala je neovisna o frekvenciji, ali ona pokazuje značajnu ovisnost u opsegu koji počinje u ultravisokom radiopodručju i proteže se do infracrvenog i više. Disperzivno djelovanje dobrih izolatora može biti u potpunosti pripisano ovisnosti dielektričke konstante o frekvenciji.

Prema Javidu i Brownu⁶⁴ kod frekvencija nižih od približno 100 MHz statičke značajke ϵ , μ i κ u jednostavnim materijalima općenito se mogu uzeti kao neovisne o frekvenciji i predstavljaju istinske značajke. Kod viših frekvencija dielektrička "konstan-

⁶² Pogledati tabelu 8.3.2.

⁶³ Pogledati J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

⁶⁴ Pogledati M. Javid, P.M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.

ta" dielektrika mora biti zamijenjena s dielektričkom funkcijom, koja pokazuje značajnu frekvencijsku ovisnost. Isto vrijedi i za provodnost kovina oko frekvencije infracrvenih valova. Disperziju kod visokih frekvencija uzrokovanu činjenicom da se statičke, tj. niskofrekvencijske značajke ϵ i κ zamjenjuju kompleksnim funkcijama $\hat{\epsilon}(\omega)$ i $\hat{\kappa}(\omega)$, često nazivamo *parametrička disperzija*.

8.5.1. Disperzija u dielektricima; klasični model za $\hat{\epsilon}(\omega)$

Maxwell i Sellmeyer utemeljili su klasični model koji su poboljšali Lorentz⁶⁵ i drugi. Taj je model dao vrlo dobre rezultate u analizi disperzije. Sve teorije disperzije uzimaju u obzir molekularni i atomski sastav tvari. Čestice tvari promatraju se kao mehanički titrajni sustavi koji imaju svoju prirodnu, slobodnu, tj. rezonantnu frekvenciju i koji su uzbuđeni narinutim elektromagnetskim poljem. Za proračun gibanja u tim sustavima primijenjeni su prvotno zakoni klasične dinamike. Danas se zna da su ta gibanja upravljana mnogo strožim načelima kvantne mehanike. Obje, klasična i kvantna teorija disperzije računaju pomak naboja iz gravitacijskog centra atomskog sustava kao funkciju frekvencije i jakosti narinutog polja. Potom se iz pomaka elektrona u atomu, prosječnog broja atoma u molekuli i broja molekula u jediničnom volumenu tvari izračunava molekularni dipolni moment i polarizacija tvari. Na kraju se određuje odgovarajuća kompleksna dielektrična funkcija $\hat{\epsilon}$ materijala. Budući da rezultati dobiveni u jednostavnom klasičnom modelu posve dobro odgovaraju kvantno-mehaničkoj formuli disperzije, to ćemo kratko opisati klasični model.

Promatrat ćemo djelovanje sinusno vremenski promjenjivog elektromagnetskog polja (u spektralnoj domeni)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega t}, \quad (8.5.1)$$

na dielektrički materijal, takav kao što je plin dielektričnosti ϵ . Da bi izbjegli utjecaj položaja elektrona u odnosu na jezgru atoma pri proračunu sila, ograničit ćemo se na upadna elektromagnetska zračenja koja imaju valnu duljinu mnogo veću nego što su dimenzije atoma tvari. Ova pretpostavka obuhvaća čak i ultravioletno zračenje. Iako je egzaktna priroda lokalne sile kojom vanjsko polje djeluje na elektrone u atomima i molekulama tvari donekle osjetljivo pitanje, mi ćemo se zadovoljiti ovim dosta grubim klasičnim modelom dok daje upotrebljive rezultate. Pod djelovanjem sile $q_0 \mathbf{E}_0 e^{j\omega t}$ od narinutog električnog polja $\mathbf{E}$, ako se uzmu u obzir i ostale sile, kao što je inercijska $m(d^2\mathbf{r}/dt^2)$, povratna $(m\omega_0^2\mathbf{r})$ i prigušna $g(d\mathbf{r}/dt)$ koja nastaje zbog kolizija i zračenja energije, svaki elektron u atomu ili molekuli učini pomak $\mathbf{r}$. Jednadžba gibanja elektrona koji ima naboj q_0 jest

⁶⁵ H.A. Lorentz, *The Theory of Electrons*, Dover Publications, New York, 1952.

$$m \left[\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + g \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} \right] = q_0 \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} . \quad (8.5.2)$$

S m je označena masa elektrona, ω_0 je prirodna, tj. rezonantna frekvencija elektrona, a g je prigušna konstanta koja uzima u obzir prigušne frikcione sile u materijalu. Konstante ω_0 i g karakteriziraju molekule određenog materijala i određuju se iz podataka izmjerenih u pokusima. Djelovanje sile od narinutog sinusnog električnog polja na elektron izazvat će sinusno titranje elektrona. Atomi i molekule materijala ponašat će se kao mehanički oscilatori. Zato ćemo za pomak elektrona pretpostaviti rješenje oblika

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{j\omega t} , \quad (8.5.3)$$

što u konačnom daje rješenje od (8.5.2) u obliku

$$\mathbf{r} = \frac{q_0}{m} [\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega g]^{-1} \mathbf{E} . \quad (8.5.4)$$

Tako nastaje dipolni moment zbog gibanja elektrona iznosa

$$\mathbf{p} = q_0 \mathbf{r} = \frac{q_0^2}{m} [\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega g]^{-1} \mathbf{E} . \quad (8.5.5)$$

Pretpostavimo da ima Z elektrona u molekuli plina i da ima N molekula u jedinici volumena. Ako umjesto jedne rezonantne frekvencije ω_0 i prigušne konstante g imamo n_i elektrona s rezonantnim frekvencijama ω_{0i} i prigušnim konstantama g_i , tada se molekularni dipolni moment može pisati kao

$$\mathbf{p}_m = \frac{q_0^2}{m} \sum_i \frac{n_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) + j\omega g_i} \mathbf{E} , \quad (8.5.6)$$

gdje je⁶⁶

$$Z = \sum_i n_i .$$

Uvedemo li atomsku ili molekularnu, tj. mikroskopsku *polarizibilnost* α , koja se defini-
ra⁶⁷ pomoću relacije

$$\mathbf{p}_m = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E} , \quad (8.5.7)$$

⁶⁶ Pogledati M.H. Choudhury, *Electromagnetism*, Ellis Horwood Lim, Chichester, 1989.

⁶⁷ Pogledati ibid. Neki autori definiraju je i kao $\mathbf{p}_m = \alpha \mathbf{E}$.

dobije se konačno

$$\alpha = \frac{q_0^2}{m\epsilon_0} \sum_i \frac{n_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) + j\omega g_i} . \quad (8.5.8)$$

S druge strane Clausius Mossottijeva relacija, koja povezuje makroskopsku dielektričku konstantu ϵ s mikroskopskom polarizibilnošću α molekula dielektrika glasi⁶⁸

$$\alpha = \frac{3}{N} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} . \quad (8.5.9)$$

Polarizibilnost α u izrazu (8.5.9) odnosi se na *guste materijale*. Budući da su susjedni atomi u takvim materijalima posve blizu, interakcija između njih je vrlo jaka. To rezultira u porastu prigušnih konstanti g_i i raspršivanju rezonantnih frekvencija ω_{0i} . Zato će ω_{0i} i g_i za atome u gustim materijalima biti različiti od onih za slobodne atome. No čak i s ovom rezervom mi možemo izraziti, u krajnjem slučaju približno, polarizibilnost α izrazom (8.5.8). Uz tu ogradu iz relacija (8.5.8) i (8.5.9) dobivamo jednadžbu

$$\frac{\hat{\epsilon}(\omega) - \epsilon_0}{\hat{\epsilon}(\omega) + 2\epsilon_0} = \frac{N\alpha}{3} = \frac{Nq_0^2}{3m\epsilon_0} \sum_i \frac{n_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) + j\omega g_i} , \quad (8.5.10)$$

iz koje možemo odrediti $\hat{\epsilon}(\omega)$ u ovisnosti o frekvenciji primijenjenog elektromagnetskog vala. Za rijetke tvari, kao za plinove gdje je N vrlo mali broj, može se relacija (8.5.10) pisati u približnom obliku

$$\hat{\epsilon}(\omega) \approx \epsilon_0 \hat{\epsilon}_r(\omega) \approx \epsilon_0 (1 + N\alpha) = \epsilon' - j\epsilon'' , \quad (8.5.11)$$

te nakon uvrštenja izraza (8.5.8) dobivamo *relativnu kompleksnu dielektričku funkciju* plina

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) \approx 1 + N\alpha = 1 + \frac{Nq_0^2}{m\epsilon_0} \sum_i \frac{n_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) + j\omega g_i} , \quad (8.5.12)$$

Preostaje još da iz relacija (8.5.11) i (8.5.12) odredimo

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon_0 \left[1 + \frac{Nq_0^2}{m\epsilon_0} \sum_i \frac{n_i(\omega_{0i}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 g_i^2} \right] , \quad (8.5.13a)$$

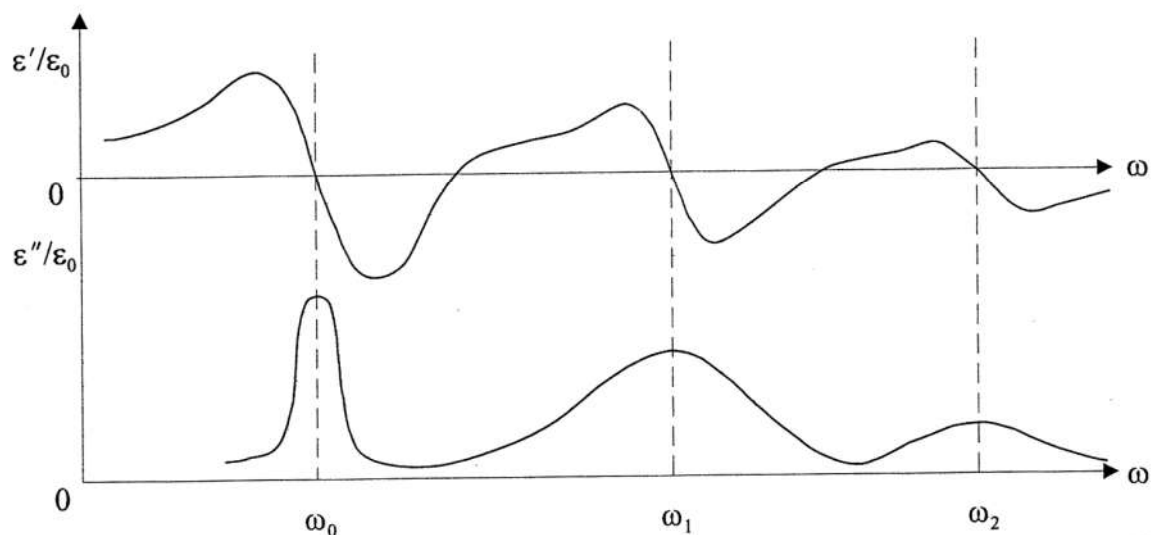
⁶⁸ Pogledati ibid. Ova relacija dobivena je na temelju Lorentzove relacije, koja određuje da je mikroskopsko, tj. molekularno polje u dielektriku $E + P/(3\epsilon_0)$.

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{Nq_0^2}{m} \sum_i \frac{n_i \omega g_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 g_i^2} \quad (8.5.13b)$$

a to su *realni i imaginarni dio* kompleksne dielektričke funkcije.

8.5.1.1. Normalna i anomalna disperzija

Analizom izraza (8.5.13a,b) za realnu i imaginarnu vrijednost kompleksne dielektrične funkcije dielektrika utvrdit ćemo kvaliteta odziva različitih materijala na uzbuđu sinusnim elektromagnetskim valovima u cijelom frekvencijskom opsegu od najnižih do najviših frekvencija. Budući da su općenito prigušne konstante g_i dovoljno male u usporedbi s odgovarajućim rezonantnim frekvencijama ω_{0i} , bit će $|\omega_{0i}^2 - \omega^2| \gg \omega g_i$ u svim slučajevima kada frekvencija polja ω nije previše bliska rezonantnim frekvencijama ω_{0i} . To znači da je $\hat{\varepsilon}(\omega)$ približno realno za najviše frekvencija ω . Kod niskih frekvencija za koje je $\omega < \text{Min}\{\omega_{0i}\}$, budući da je $(\omega_{0i}^2 - \omega^2) > 0$ za $\omega_{0i} > \omega$ i $(\omega_{0i}^2 - \omega^2) < 0$ za $\omega_{0i} < \omega$, suma u (8.5.13a) je pozitivna. S druge strane, ako je $\omega > \text{Min}\{\omega_{0i}\}$ ali manja od svih drugih ω_{0i} , tada je član sume koji sadrži $\text{Min}\{\omega_{0i}\}$ negativan. Kako frekvencija ω raste, tako da sukcesivno prelazi vrijednosti ω_{0i} , sve će više članova sume u (8.5.13a) postajati negativno, dok konačno cijela suma ne postane negativna i poprimi vrijednost $\varepsilon'/\varepsilon_0 < 1$. Kako se ω približava bilo kojoj ω_{0i} , oba $\varepsilon'/\varepsilon_0$ i $\varepsilon''/\varepsilon_0$ rastu, da bi iza toga naglo pali. Vrijednost $\varepsilon'/\varepsilon_0$ doseže maksimum kod vrijednosti od ω nešto manje od ω_{0i} , padajući iza toga strmo k nuli u $\omega = \omega_{0i}$, gdje $\varepsilon''/\varepsilon_0$ poprima svoj maksimum. Na slici 8.5.1. prikazani su dijagrami ovisnosti $\varepsilon'/\varepsilon_0$ i $\varepsilon''/\varepsilon_0$ o frekvenciji ω za dielektrički materijal. U području gdje je nagib krivulje $\varepsilon'(\omega)/\varepsilon_0$ pozitivan disperzija je *normalna*. U uskom pojasu krivulje $\varepsilon'(\omega)/\varepsilon_0$ u blizini rezonantnih frekvencija ω_{0i} nagib krivulje je negativan, za disperziju se kaže da je *anomalna*.



Slika 8.5.1. Opći izgled krivulje realnog $\varepsilon'/\varepsilon_0$ i imaginarnog $\varepsilon''/\varepsilon_0$ dijela kompleksne dielektričke funkcije izolacijskog materijala u ovisnosti o frekvenciji ω

Na slici 8.5.1. se vidi da su uski frekvencijski intervali u kojima je nagib krivulje $\epsilon'(\omega)$ negativan, tj. u kojima se događa *anomalna disperzija*, točno tamo gdje je $\epsilon''(\omega)$ maksimalan i znatan. Tada se događa prijelaz energije iz elektromagnetskog vala u materijal, tj. imamo *gubitak energije*. Ti frekvencijski intervali nazivaju se *područja rezonantne apsorpcije*. Kada se pojave slučajevi da je $\epsilon''(\omega) < 0$, tada imamo prijelaz energije iz tvari u elektromagnetski val. U slučaju kada se elektromagnetski val opskrbljuje energijom iz materijala, *val se pojačava* kao što se to događa u *maseru* ili *laseru*.

Razmotrimo posljedice disperzije, tj. postojanja kompleksne dielektričke funkcije $\hat{\epsilon}(\omega)$ materijala na prostiranje ravnog sinusnog vala. Neka je jednostavni materijal dielektrik sa značajkama $\hat{\epsilon}(\omega)$, μ_0 i $\kappa = 0$. Maxwellove jednačbe za polje u takvom materijalu glase

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 , \\ \nabla \times \mathbf{H} - \hat{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 ,\end{aligned}\tag{8.5.14a - d}$$

dok valne jednačbe poprimaju oblik

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \hat{\epsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 , \\ \Delta \mathbf{H} - \mu_0 \hat{\epsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= 0 .\end{aligned}\tag{8.5.15a,b}$$

Za sinusne valove frekvencije ω te jednačbe u fazorskom obliku glase

$$\begin{aligned}\Delta \underline{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu_0 \hat{\epsilon} \underline{\mathbf{E}} &= 0 , \\ \Delta \underline{\mathbf{H}} + \omega^2 \mu_0 \hat{\epsilon} \underline{\mathbf{H}} &= 0 .\end{aligned}\tag{8.5.16a,b}$$

Sve fazorske skalarne komponente vektora $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ mogu se tada izračunati iz skalarних fazorskih jednačbi istoga oblika

$$\Delta \underline{w} + \omega^2 \mu_0 \hat{\epsilon} \underline{w} = 0 .\tag{8.5.17}$$

Ako se *ravni* (jednodimenzionalni) *sinusni val* prostire duž osi $+z$, kao direktni, tada (8.5.17) prelazi u jednostavan oblik

$$\frac{\partial^2 \underline{w}}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \hat{\epsilon} \underline{w} = 0 .\tag{8.5.18}$$

Uvedemo li valnu funkciju $\gamma(\omega)$ pomoću

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu_0 \hat{\epsilon} = (\alpha + j\beta)^2, \quad (8.5.19)$$

jednadžba (8.5.18) prelazi u oblik

$$\frac{\partial^2 \underline{w}}{\partial z^2} = \gamma^2 \underline{w}, \quad (8.5.20)$$

a njezino rješenje samo za *direktni val* u fazorskom obliku

$$\underline{w} = w_0 e^{-\gamma z} = w_0 e^{-\alpha z - j\beta z}, \quad (8.5.21)$$

ili u izravnom kompleksnom obliku

$$w = w_0 e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)}. \quad (8.5.22)$$

Trenutna vrijednost u realnom području skalarnih komponenti polja vala ima oblik

$$w_{Re} = |w_0| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \delta), \quad (8.5.23)$$

gdje je kompleksna konstanta dana općenito s

$$w_0 = |w_0| e^{j\delta}. \quad (8.5.24)$$

Preostaje da pomoću (8.5.11) i (8.5.19) izračunamo valnu funkciju iz relacije

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu_0 \hat{\epsilon} = -\omega^2 \mu_0 (\epsilon' - j\epsilon'') = \omega^2 \mu_0 \epsilon' \left(j \frac{\epsilon''}{\epsilon'} - 1 \right).$$

Uvedemo li kompleksnu funkciju

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon'} \sqrt{-1 + j \frac{\epsilon''}{\epsilon'}} = |\gamma| e^{j\psi} = |\gamma| \cos \psi + j |\gamma| \sin \psi = \alpha + j\beta, \quad (8.5.25)$$

dobivamo kao rješenje za valnu funkciju

$$|\gamma| = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0} \left[1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]^{1/4}}; \quad \psi = \frac{1}{2} \arctan \left(-\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right), \quad (8.5.26a,b)$$

gdje je $c_0 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$. Konačno se iz (8.5.25) i (8.5.26) mogu odrediti prigušna funkcija koja se često naziva i apsorpcijski koeficijent $\alpha(\omega)$ i fazna funkcija $\beta(\omega)$ dielektrika u kojem se uzima u obzir pojava disperzije

$$\alpha(\omega) = \pm \frac{\omega}{\sqrt{2}c_0} \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}^{1/2},$$

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{2}c_0} \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]^{1/2} + 1 \right\}^{1/2},$$
(8.5.27a,b)

s tim da se za slučaj da je $\epsilon'' < 0$ uzima negativan predznak od α . Obično je u dielektričkim materijalima, tj. u dobrim izolatorima slučaj da je $|\epsilon''| < |\epsilon'|$, pa se značajke α i β mogu približno uzeti kao

$$\alpha \approx \frac{\omega}{2c_0} \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right),$$

$$\beta \approx \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}}.$$
(8.5.28a,b)

Činjenica je da smo analitički dokazali da se prema izrazima (8.5.22) i (8.5.27a,b) ili (8.5.28a,b) sinusni val prostire u dielektriku u kojem postoji disperzija s prigušenjem $\alpha(\omega)$ nepera po metru i s faznom brzinom

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\sqrt{2}c_0}{\sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]^{1/2} + 1 \right\}^{1/2}}},$$
(8.5.29a)

ili

$$v_f \approx \frac{c_0}{\sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}}},$$
(8.5.29b)

koja je ovisna o frekvenciji sinusnog vala. Posljedica svega toga jest da pojava disperzije u dielektriku izaziva distorziju i prigušenje signala složenog iz niza sinusnih valova.

Razmatranje disperzije dielektrika možemo bitno pojednostavniti ako uzmemo u obzir samo jednu rezonantnu frekvenciju, i to onu prvu, tj. najnižu ω_0 . Ako se ograničimo na analizu plinova i para u kojima je gustoća polariziranih molekula vrlo mala, tada je N vrlo mali broj, pa se $\hat{\epsilon}_r$ vrlo malo razlikuje od jedan. Tako se indeks loma n može računati pomoću (8.5.13a) i (8.5.29b) te pomoću binomnog razvoja u red, približno pomoću prva dva člana kao

$$n = \frac{c_0}{v_f} = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}} = \left[1 + a^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 g^2} \right]^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 g^2} \quad (8.5.30)$$

gdje smo s a^2 označili konstantu

$$a^2 = \frac{n_0 N q_0^2}{m \epsilon_0}.$$

S ($n_0 N$) označili smo broj elektrona u jedinici volumena. Ako je frekvencija primijenjenog polja dovoljno niska, tj. $\omega \ll \omega_0$, zadnja dva člana u nazivniku u (8.5.30) mogu se ispustiti, pa dobivamo

$$n \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{\omega_0^2}. \quad (8.5.31)$$

Prema tome indeks loma i fazna brzina vala nisu frekvencijski ovisni. Prigušenje je također zanemarivo, $\alpha \approx 0$. Kažemo da u dielektriku *nema disperzije*.

Ako je frekvencija ω narinutog vala znatna u odnosu na rezonantnu frekvenciju ω_0 tvari, ali joj nije preblizu, tada prigušni član može biti zanemaren, tj. $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg \omega g$, pa je

$$n \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8.5.32)$$

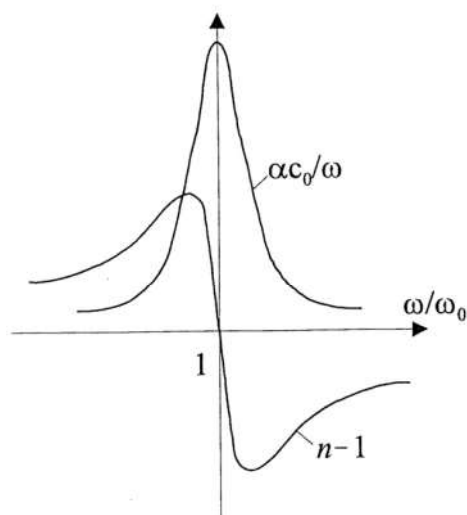
Prigušni član je i dalje nula, $\alpha \approx 0$. Tvar je transparentna, tj. propusna za valove, ali indeks loma i fazna brzina vala su funkcije frekvencije. Ako je $\omega < \omega_0$, n će biti veći od jedan, a porast ω vodi k porastu n i smanjenju fazne brzine v_f . Ako je $\omega > \omega_0$, indeks loma je manji od jedan, a porast ω vodi k smanjenju n i porastu fazne brzine v_f . *Disperzija* je u tom slučaju *normalna*. Konačno, ako je frekvencija ω približno jednaka rezonantnoj ω_0 , tada je indeks loma

$$n \approx 1 + \frac{a^2}{2} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 g^2}, \quad (8.5.33)$$

a prigušnu konstantu, tj. indeks apsorpcije računamo pomoću (8.5.28a) binomnim razvojem u red, kao

$$\alpha \approx \frac{a^2}{2c_0} \frac{\omega^2 g}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 g^2}. \quad (8.5.34)$$

Prigušenje odnosno indeks apsorpcije pokazuje u ovom slučaju vrlo izrazit maksimum u ω_0 , tako da je za to područje frekvencija tvar neprozirna (nepropusna) za sinusni val. U uskom području oko ω_0 , porast frekvencije ω vodi k padu indeksa loma n , tj. do porasta fazne brzine v_f . Za tu vrstu *disperzije* kažemo da je *anomalna*. U stvarnosti najviše materijala pokazuje anomalnu disperziju.



Slika 8.5.2. Frekvencijska ovisnost prigušne konstante α (indeksa apsorpcije) i indeksa loma (fazne brzine) u neioniziranom plinu u blizini rezonantne frekvencije

U slučaju gušćih tvari, kao što su tekući i čvrsti materijali, ove rezultate treba u određenom stupnju korigirati, jer pretpostavka o maloj gustoći tvari više nije točna. No opći oblik prikazanih krivulja ostaje valjan.

8.5.2. Disperzija u kovinama

Kovine kao izraziti predstavnici dobrih vodiča imaju velik broj *slobodnih elektrona*. Ako pretpostavimo da je u izrazu za dielektričnost materijala (8.5.12) *frakcija* n_0 *elektrona slobodna*, na način da svi imaju $\omega_0 = 0$, tada dielektričnost $\hat{\epsilon}(\omega)$ ima singularitet u točki $\omega \rightarrow 0$. Zato je pogodno izraz (8.5.12) pretvoriti u oblik

$$\hat{\epsilon}(\omega) = \left[\epsilon_0 + \frac{Nq_0^2}{m} \sum_i \frac{n_i}{(\omega_i^2 - \omega^2) + j\omega g_i} \right] - j \frac{Nq_0^2}{m\omega} \frac{n_0}{(g_0 + j\omega)} ; \quad (i \neq 0) . \quad (8.5.35)$$

Označimo članove u pravokutnoj zagradi s

$$\hat{\epsilon}^\circ(\omega) = \epsilon_0 + \frac{Nq_0^2}{m} \sum_i \frac{n_i}{(\omega_i^2 - \omega^2) + j\omega g_i} ; \quad i \neq 0 . \quad (8.5.36)$$

S druge strane, u drugoj glavnoj Maxwelllovoj jednadžbi možemo pisati da je

$$\nabla \times \mathbf{H} = \hat{\mathbf{k}} \mathbf{E} + \hat{\epsilon}^\circ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (8.5.37)$$

gdje smo po analogiji za stacionarni slučaj uveli provodnost (od slobodnih elektrona u kovini) $\hat{\kappa}$ kao $\mathbf{J} = \hat{\kappa}\mathbf{E}$. Uz uvažavanje da je $\hat{\mu} = \mu_0$ za sve neferomagnetske kovine možemo (8.5.37) izraziti za sinusna polja pomoću fazora kao

$$\nabla \times \mathbf{H} = \hat{\kappa} \mathbf{E} + j\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} = j\omega \left(\hat{\epsilon} - j \frac{\hat{\kappa}}{\omega} \right) \mathbf{E} = j\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} . \quad (8.5.38)$$

Usporedbom izraza (8.5.35) i (8.5.38) dobivamo za kompleksnu provodnost vodiča, tj. kovina izraz⁶⁹

$$\hat{\kappa}(\omega) = \frac{n_0 N \frac{q_0^2}{m}}{g_0 + j\omega} . \quad (8.5.39)$$

Taj izraz u biti je i rezultat dobiven u Drudeovu modelu za provodnost od elektrona u kovinama, s tim da $n_0 N$ predstavlja broj *slobodnih elektrona* u jedinici volumena.

Ako kao u prethodnoj točki 8.5.1.1. analiziramo utjecaj kompleksne vodljivosti $\hat{\kappa}$ na prostiranje sinusnog vala u kovinama, možemo prema (8.5.20) za skalarne komponente polja u fazorskom obliku pisati jednadžbu

$$\frac{\partial^2 \underline{w}}{\partial z^2} = \gamma^2 \underline{w} , \quad (8.5.40)$$

gdje je funkcija prostiranja γ određena s

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + j\omega \mu_0 \hat{\kappa} = (\alpha + j\beta)^2 . \quad (8.5.41)$$

Iz tog izraza mogu se izračunati prigušna $\alpha(\omega)$ i fazna $\beta(\omega)$ funkcija za slučaj disperzije u kovinama za sinusni val frekvencije ω . Za značajke kovina uvrstili smo vrijednosti ϵ_0 , μ_0 i $\hat{\kappa}$. Budući je poznato da rezonantne frekvencije ω_{0i} vezanih elektrona atoma kovina leže daleko u ljubičastom i ultraljubičastom području frekvencijskog spektra, to prema relacijama (8.5.11) i (8.5.12), za frekvencije narinutog vala ω sve do vidljivog crvenog i infracrvenog područja, i svakako za sve radiofrekvencije, možemo dielektričnost kovina $\hat{\epsilon}(\omega)$ sigurno zamijeniti s približnom vrijednošću jednakom ϵ_0 . Prema tome, *dielektričnost kovina je sve do infracrvenog frekvencijskog područja neovisna o frekvenciji narinutog polja, tj. konstantna i približno jednaka dielektričnosti vakuuma*, tj.

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 . \quad (8.5.42)$$

S druge strane, kod dovoljno niskih frekvencija ω narinutog polja, inercijska sila

⁶⁹ Pogledati J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

$m(d^2\mathbf{r}/dt^2)$ u izrazu (8.5.39) za kompleksnu provodnost je zanemariva s obzirom na viskoznu silu $mg_0(d\mathbf{r}/dt)$. To ima za posljedicu da *kompleksna provodnost* $\hat{\kappa}(\omega)$, dana izrazom (8.5.39), može biti u prije rečenom frekvencijskom području reducirana na približnu konstantnu i realnu vrijednost

$$\hat{\kappa} \approx \frac{n_0 N q_0^2}{m g_0}, \quad (8.5.43)$$

koja je identična sa *statičkom provodnošću* κ .⁷⁰ Međutim, točno je da je za bolje razumijevanje mehanizma električne provodnosti *kvantni pristup nuždan*, budući da Paulijev princip igra važnu ulogu. Ova razmatranja pokazuju također da se može opaziti da je razlika između dielektrika i vodiča artificijelna, iako je korisna. Kod nižih frekvencija tvar koja sadrži znatan broj slobodnih elektrona možemo smatrati vodičem. Ali kod ultravisokih frekvencija, bilo da sadrži ili ne slobodne elektrone, tvar se ponaša kao izolator.

8.5.3. Disperzija u ioniziranim plinovima

Neionizirane plinove svrstavamo u izolatore, uzimajući zbog jednostavnosti da je $\kappa \approx 0$. Disperziju u izolatorima obradili smo u članku 8.5.1, točnije u točki 8.5.1.1. Prigušnu i faznu funkciju za prostiranje vala u neioniziranim plinovima možemo odrediti iz izraza (8.5.27a,b), ili pak iz približnih izraza (8.5.28a,b) i (8.5.33). Fazna brzina sinusnog vala u neioniziranim plinovima određuje se iz izraza (8.5.29a,b) ili iz približnih izraza (8.5.31), (8.5.32) i (8.5.33).

Istraživanje prostiranja valova u *ioniziranim plinovima*, kao što je na primjer prostiranje kratkovalnih radio valova (HF područje od 3 do 30 MHz) kroz slojeve ionosfere iznad Zemlje ukazalo je na zanimljivu pojavu. To je promjena u ionosferskom sloju, koji od reflektora radiovalova postaje transparentan medij. Da bi razumjeli ovu pojavu, analizirat ćemo prostiranje valova u neutralnom ali djelomično ioniziranom plinu. Valna funkcija dana je izrazom (8.5.19) kao

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu_0 \hat{\epsilon}, \quad (8.5.44)$$

gdje je relativna kompleksna dielektričnost određena izrazom (8.5.12). Za frekvencije ω koje su mnogo više od najviše rezonantne frekvencije ω_0 , relacija (8.5.12) reducira se u približan izraz

⁷⁰ U J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941, navodi se da su Hagen i Rubens 1903. godine pokazali da vrijednosti provodnosti kovina mjerene pod statičkim uvjetima mogu biti upotrijebljene bez značajnije pogreške za frekvencije polja do područja infracrvenog svjetla. Kod valnih duljina kraćih od 25 μm provodnost pokazuje ovisnost o frekvenciji i disperzija se pomoću izraza (8.5.39) mora uzeti u obzir.

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) \approx 1 - \frac{NZq_0^2}{m\epsilon_0\omega^2} ; \quad \text{za} \quad \omega \gg \text{Max}\{\omega_{oi}\}, \quad (8.5.45)$$

gdje je NZ ukupan broj elektrona u jedinici volumena. Pogodno je uvesti *kritičnu frekvenciju za ionizirani plin* prema izrazu

$$\omega_c^2 = \frac{NZq_0^2}{m\epsilon_0}. \quad (8.5.46)$$

Tada se izraz (8.5.45) može jednostavnije pisati kao

$$\hat{\epsilon}(\omega) \approx \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right), \quad (8.5.47)$$

gdje je za $\omega > \omega_c$ dielektričnost $\hat{\epsilon}(\omega)$ realna funkcija frekvencije. Uvrstimo li izraz (8.5.47) u (8.5.44) dobivamo za svaku frekvencijsku komponentu valnu funkciju

$$\gamma \approx j \frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \approx \alpha + j\beta, \quad (8.5.48)$$

gdje je $c_0 = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$. Valnu impedanciju ćemo odrediti ako relaciju (8.5.48) uvrstimo u izraz (8.2.50e), pa dobijemo

$$Z \approx Z_0 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1/2}, \quad (8.5.49)$$

gdje je $Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$. Opažamo da kod kritične frekvencije $\omega = \omega_c$ u ioniziranom plinu nastaje zanimljivo stanje, jer radikandi u oba izraza (8.5.48) i (8.5.49) postaju jednaki nula. Zato je pogodno promatrati što se događa jednom kada je $\omega > \omega_c$, i drugi put kada je $\omega < \omega_c$. Analizom tih izraza dobivamo

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \frac{\omega}{c_0} \left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2} ; \quad \beta = 0 ; \quad \text{za} \quad \omega < \omega_c, \\ \alpha &= 0 ; \quad \beta \approx \frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} ; \quad \text{za} \quad \omega > \omega_c, \\ Z &= -jZ_0 \left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1 \right)^{-1/2} ; \quad \text{za} \quad \omega < \omega_c, \end{aligned} \quad (8.5.50 \text{ a - c})$$

$$Z = Z_0 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1/2} ; \quad \text{za } \omega > \omega_c . \quad (8.5.50d)$$

Često se relacija (8.5.48) piše i u obliku

$$\omega^2 = \omega_c^2 - c_0^2 \gamma^2 = \omega_c^2 + c_0^2 k^2 , \quad (8.5.51)$$

i naziva se relacija disperzije. U dielektricima je ta relacija valjana za $\omega \gg \omega_c$. Međutim, postoje slučajevi kao u *ioniziranoj ionosferi* ili u *razrijeđenoj elektroničkoj plazmi*, kada je prigušenje gibanja elektrona zbog kolizija vrlo malo, pa jednadžbe (8.5.47), (8.5.48,49), (8.5.50a – d) i (8.5.51) vrijede za široki opseg frekvencija uključujući i one kada je $\omega < \omega_c$. Za slučaj da je $\omega \ll \omega_c$, dobivamo iz (8.5.50a,c) još jednostavnije izraze

$$\alpha \approx \frac{\omega_c}{c_0} ; \quad Z \approx -j \frac{\omega}{\omega_c} Z_0 ; \quad \text{za } \omega \ll \omega_c . \quad (8.5.52)$$

Iz izraza (8.5.50a,c) proizlazi da ionizirani plin za frekvencije niže od kritičnih ($\omega < \omega_c$) djeluje na narinuti val kao *prigušivač bez gubitaka* (reaktivni atenuator), dok iz (8.5.50b,d) proizlazi da za frekvencije više od kritičnih ($\omega > \omega_c$) ionizirani plin djeluje na val kao *prijenosni sustav bez prigušenja*. Fazna brzina vala u takvom sustavu dana je kao

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \approx c_0 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1/2} ; \quad \text{za } \omega > \omega_c , \quad (8.5.53a)$$

dok je za slučaj $\omega \gg \omega_c$

$$v_f \approx c_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) ; \quad \text{za } \omega \gg \omega_c . \quad (8.5.53b)$$

Najznačajnije svojstvo ionizirane atmosfere za valove koji se prostiru u njoj jest nagla promjena valne impedancije Z od *čisto reaktivne* u *čisto otpornu* impedanciju kod frekvencije $\omega = \omega_c$. Sve to ima za posljedicu da su radiovalovi ispod kritične⁷¹ frekvencije ionosfere *idealno reflektirani*, dok su iznad te frekvencije *više ili manje propušteni*.

⁷¹ M. Javid, P.M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963, izračunali su iz relacije (8.5.46) kritičnu frekvenciju ioniziranog plina kao $f_c = 9(ZN)^{1/2}$. Uz pretpostavku da ionosfera ima gustoću 10^{12} elektrona/m³ proizlazi da se signali ispod frekvencije 9 MHz totalno reflektiraju. Amplituda reflektiranog vala kod 30 MHz je reda veličine 3% upadnog vala. Ta frekvencija dijeli HF i VHF područja pa može se očekivati da svi signali u ili iznad VHF područja prolaze kroz ionosferu bez refleksije.

Koeficijent refleksije naglo opada kako frekvencija vala raste.⁷²

Treba upozoriti da pri upadu vala u *plazmu* također dolazi do refleksije od njezine površine. Kritična frekvencija ω_c u izrazu (8.5.46) naziva se tada *frekvencija plazme*. Pri frekvenciji upadnog vala $\omega < \omega_c$, polje unutar plazme opada eksponencijalno s udaljenošću od površine plazme, a prigušna konstanta određena je s (8.5.50a) ili s (8.5.52). Dubina prodiranja vala u plazmu jest

$$d_{pl} = \frac{1}{\alpha} = \frac{c_0}{(\omega_c^2 - \omega^2)} \quad ; \quad \text{za} \quad \omega < \omega_c , \quad (8.5.54a)$$

ili približno

$$d_{pl} \approx \frac{c_0}{\omega_c} \quad ; \quad \text{za} \quad \omega \ll \omega_c . \quad (8.5.54b)$$

To izbacivanje elektromagnetskog polja iz unutrašnjosti plazme često koristimo u uređajima za zatvaranje plazme u kontroliranim termonuklearnim procesima.

Na kraju ovog odjeljka treba reći da je bit ovih istraživanja da se pokaže da formule disperzije određuju ovisnost gradivnih makroskopskih značajki materijala ϵ , μ i κ o frekvenciji narinutog elektromagnetskog vala. U rješavanju te zadaće susrećemo se sa srazom makroskopske i mikroskopske teorije, pa je danas jedino ispravno primijeniti u tom području kvantnu elektrodinamičku teoriju. Mi smo u okviru mogućnosti klasične elektromagnetske teorije i mehanike prenijeli približan pristup proračunu pomoću prihvaćenih klasičnih modela u literaturi koji daju za makroskopske svrhe dosta prihvatljive rezultate. Činjenica je da na temelju iznesenog i svih podataka u dostupnoj literaturi, kod frekvencija nižih od oko 10^8 Hz, tj. od 100 MHz dielektričnost, permeabilnost i provodnost (ϵ , μ , κ) jednostavnih materijala su općenito neovisni o frekvenciji elektromagnetskog polja i to su stvarni parametri. Kod viših frekvencija dielektričke konstante materijala moraju biti zamijenjene dielektričkim funkcijama koje pokazuju značajnu frekvencijsku ovisnost. Isto je slučaj za provodnost kovina iznad frekvencije infracrvene svjetlosti.

8.5.4. Grupna brzina signala

Pojam *fazne brzine* definirali smo u članku 8.2.3. pomoću izraza (8.2.40)

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} . \quad (8.5.55)$$

⁷² Stvarni prolaz elektromagnetskih valova kroz ionosferu dodatno je zamršen postojanjem Zemljinog magnetskog polja. Ta zadaća rješava se u knjizi J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

i on ima smisla samo za *putujuće sinusne valove*, tj. za sinusni valni niz beskonačnog trajanja. Tada v_f predstavlja brzinu kojom putuje ravnina konstantne faze u smjeru gibanja ravnog vala, čije skalarne komponente polja mogu biti prikazane jednađbom

$$w(z,t) = w_0 e^{j\omega t - \beta z} . \quad (8.5.56)$$

Valni niz konačne duljine ili konačnog vremena trajanja ne može se jednostavno predstaviti formulom (8.5.56), i pojam fazne brzine gubi svoje značenje. S druge strane, za *nesinusni val* ma i beskonačnog vremena trajanja nema smisla rabiti pojam fazne brzine, budući da se ne može govoriti o frekvenciji ω . Zato se uvodi pojam *grupne brzine* koji ima posebno značenje za nesinusne valove bilo konačnog, bilo beskonačnog vremena trajanja.

Promatramo kao najjednostavniji slučaj val koji nastaje superpozicijom dvaju sinusnih valova, čije se frekvencije i fazne konstante razlikuju za vrlo male iznose. Neka su ti valovi dani jednađbama

$$\begin{aligned} w_1(z,t) &= W_0 \cos(\omega t - \beta z) , \\ w_2(z,t) &= W_0 \cos[(\omega + \delta \omega)t - (\beta + \delta \beta)z] . \end{aligned} \quad (8.5.57a,b)$$

Njihova suma iznosi

$$w = 2W_0 \cos\left(\frac{\delta \omega t - \delta \beta z}{2}\right) \cos\left[\left(\omega + \frac{\delta \omega}{2}\right)t - \left(\beta + \frac{\delta \beta}{2}\right)z\right] . \quad (8.5.58)$$

Polje tog vala titra s frekvencijom koja se neznatno razlikuje od ω , dok se njegova amplituda

$$A = 2W_0 \cos\left(\frac{\delta \omega t - \delta \beta z}{2}\right) , \quad (8.5.59)$$

polako mijenja između sume amplituda sinusnih komponenata i nule. Posljedica toga je da se polje duž osi z kao i duž vremenske osi t pojavljuje kao niz periodičkih ponavljanja *grupe valova*, kako je to prikazano na slici 8.5.3. Ravnina u kojoj je amplituda grupe A nastale sumom dva ravna vala konstantna, određena je jednađbom

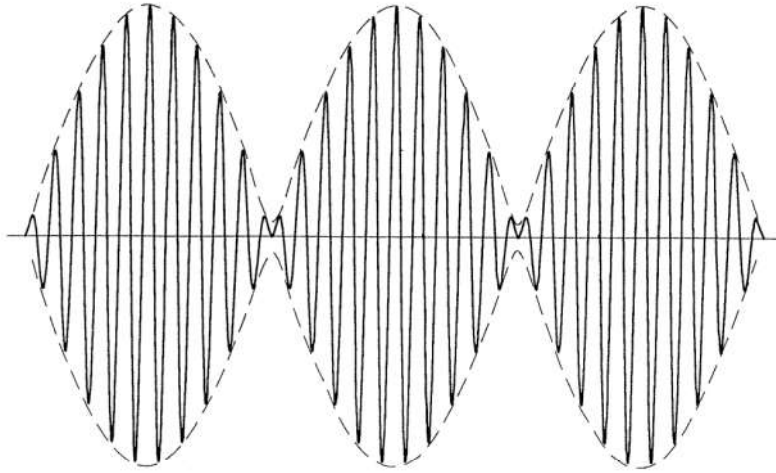
$$\delta \omega t - \delta \beta z = \text{konst.} ,$$

a otud slijedi da se grupa giba brzinom

$$v_g = \frac{\delta \omega}{\delta \beta} . \quad (8.5.60)$$

Tu brzinu nazivamo grupnom brzinom vala koji je nastao zbrajanjem dva sinusna vala bliske frekvencije. Ovdje je ω noseća frekvencija, a amplituda A je modulirajući signal. Očito je frekvencija modulacije $\delta \omega$ mnogo manja od noseće frekvencije ω . Ovdje je

zanemareno prigušenje valova ($\alpha \approx 0$).



Slika 8.5.3. Grupa valova nastala superpozicijom dva sinusna vala bliske frekvencije

Iz slike 8.5.3. može se vidjeti da se grupna brzina može promatrati kao fazna brzina modulacijske anvelope. Grupna brzina v_g je za modulacijski signal ono što je fazna brzina v_f za noseću frekvenciju. Pojam "grupna brzina" obuhvaća ograničenje da je *širina pojasa* signala dovoljno uska da se može pretpostaviti da se sve frekvencijske komponente gibaju istom brzinom koja je jednaka grupnoj brzini. U nedisperzivnim materijalima je $\beta = \omega/v_f$, tj. $d\beta = d\omega/v_f$, pa je $v_g = d\omega/d\beta = v_f$. U disperzivnim materijalima njihove vrijednosti su različite.

Složenija je situacija ako se samo jedan impuls ili jedna grupa valova konačnog trajanja i bilo kojeg oblika prostire nedisperzivnim materijalom. Za sintetiziranje takvog impulsa pomoći će nam Fourierov integral, tj. transformacija, tako da izaberemo amplitude sinusnih komponenta u izrazu

$$w(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega . \quad (8.5.61)$$

Ako impuls u uskom frekvencijskom pojasu $\omega_0 - d\omega \leq \omega \leq \omega_0 + d\omega$ sadrži sinusne komponente, tj. ako je izvan toga pojasa $A(\omega) = 0$, možemo pisati

$$w(z,t) = \int_{\omega_0 - d\omega}^{\omega_0 + d\omega} A(\omega) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega , \quad (8.5.62)$$

pri čemu pretpostavljamo da je $\beta(\omega)$ realna i poznata funkcija. Tada u okolišu noseće frekvencije ω_0 možemo funkciju $\beta(\omega)$ razviti pomoću Taylorova reda u

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega = \omega_0} + \dots \quad (8.5.63)$$

Uvrstimo li (8.5.63) u izraz za valni paket (8.5.62) dobivamo

$$w(z,t) = \int_{\omega_0 - d\omega}^{\omega_0 + d\omega} A(\omega) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z) + j(\omega - \omega_0) \left[t - \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} z \right]} d\omega ,$$

i uvedemo li srednju amplitudu w_0 paketa, koju definiramo kao

$$w_0 = \int_{\omega_0 - d\omega}^{\omega_0 + d\omega} A(\omega) e^{j(\omega - \omega_0) \left[t - \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} z \right]} ,$$

konačno imamo

$$w = w_0 e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} .$$

Srednja amplituda w_0 paketa valova, tj. impulsa, konstantna je u plohi određenoj s

$$\left[t - \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} z \right] = konst. ,$$

a otud deriviranjem dobivamo

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \left(\frac{d\omega}{d\beta} \right)_{\omega = \omega_0} . \quad (8.5.64)$$

Očito da se jedan impuls ili valni paket giba grupnom brzinom v_g . Ako je materijal nedisperzivan, v_g se podudara s faznom brzinom v_f (za ω_0), u suprotnom je funkcija osnovne frekvencije ω_0 . Treba naglasiti da je grupna brzina uskopojasni pojam i ne može se primijeniti na širokopojasne signale (npr. takve kao što je pravokutni impuls) u disperzivnim materijalima.

8.6. PROSTIRANJE RAVNIH SINUSNIH VALOVA U POLUOGRANIČENIM PROSTORIMA

U prethodnim odjeljcima ovog poglavlja upoznali smo se s prostiranjem ravnih valova u neograničenim prostorima (bez izvora). Neograničeni prostori su, naravno, apstrakcija. Najzanimljivije elektromagnetske pojave u stvarnosti su upravo one koje se događaju pri nailasku vala na plohe diskontinuiteta, tj. naglih promjena fizikalnih svojstava materijala. Tada govorimo o prostiranju valova u *ograničenim prostorima* koji ne sadrže izvore. Zadaće rješavanja polja u takvim prostorima, tj. na njihovim granica-

ma, nazivamo *zadacama graničnih ili rubnih vrijednosti*.⁷³ Zadaće graničnih vrijednosti mogu se podijeliti u dvije vrste u skladu s geometrijom granica područja koje nas zanima. Prva vrsta su zadaci prostiranja valova u *poluograničenim područjima*, koje vode k odbijanju i upijanju valova od granice. Druga vrsta zadata su prostiranja valova u *prostorima koji su potpuno ograničeni, tj. zatvoreni*, kao što je slučaj kod prijenosa valova u valovodima, ili pri titranju valova u šupljim rezonatorima.

U ovom odjeljku analizirat ćemo polje i prostiranje ravnih sinusnih valova u ravnim poluograničenim prostorima. To su takvi prostori koji su ograničeni, tj. razdvojeni jedan od drugoga beskonačnom ravnom plohom. U tim analizama uzimat ćemo u obzir uzročno-posljedične relacije između polja u jednom i drugom poluprostoru. Te relacije su *granični uvjeti*⁷⁴ koji moraju biti zadovoljeni na graničnim ploham. Rješavat ćemo, dakle, klasičnu zadaću *refleksije valova*. Pretpostavit ćemo da se ravni val iz udaljenog neovisnog izvora prostire u jednom jednostavnom materijalu i da nailazi na ravninu diskontinuiteta koja predstavlja granicu drugog jednostavnog materijala. U tom slučaju nužna pretpostavka jest da su linearne dimenzije granične plohe mnogo veće od valne duljine, što će biti osigurano uvijek ako je granična ravnina beskonačna. Dio energije *upadnog vala odbija se ili reflektira* od granične plohe, a ostatak *prolazi*, tj. prenosi se u drugi materijal. Smjer prostiranja općenito se mijenja, a to savijanje *prolaznog vala* naziva se *lom ili refrakcija*. Zakoni koji određuju odbijanje i lom elektromagnetskog vala od ravne beskonačne granične plohe relativno su jednostavni i bit će izvedeni u članku koji slijedi.

Treba napomenuti da su u slučajevima kada je bilo koja, ili sve dimenzije granične plohe, tj. plohe diskontinuiteta (koja u tom slučaju nije beskonačna) reda veličine valne duljine upadnog vala, poteškoće matematičkog modeliranja pojave naglo se povećavaju. Poremećaj polja upadnog vala u tom slučaju naziva se *ogib ili difrakcija*.

8.6.1. Odbijanje i lom na ravnoj granici

U ovom i sljedećim člancima u odjeljku razmatrat ćemo elektromagnetski pristup nizu zadata s kojima smo se susretali u ranijim kolegijima fizike⁷⁵ poznatim pod imenom refleksija i refrakcija valova na granicama. Našu analizu ograničit ćemo na *ravne granice i ravne valove u sinusnom stacionarnom stanju*. Da bi pojednostavnili analizu, najprije ćemo promatrati opći slučaj nailaska homogenog ravnog TEM vala pod bilo kojim upadnim kutom na ravnu granicu između dva jednostavna materijala s gubicima. Navest ćemo rezultate koje ćemo izvesti u ovom i ostalim člancima, a to su:

1. *Zakon odbijanja i Snellov zakon loma*. Ti zakoni utvrđuju da okomica na graničnu plohu i jedinični vektori u smjeru prostiranja upadnog, odbijenog i prolaznog vala

⁷³ Engleski naziv je: *Boundary-value problems*. Pogledati Prilog A.

⁷⁴ Pogledati članak 1.2.5. i granične uvjete u tablicama 1.3.1, 1.5.1, 1.5.2, i 1.5.3.

⁷⁵ Pogledati npr. udžbenik V. Henč-Bartolić, P. Kulišić, *Valovi i optika*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

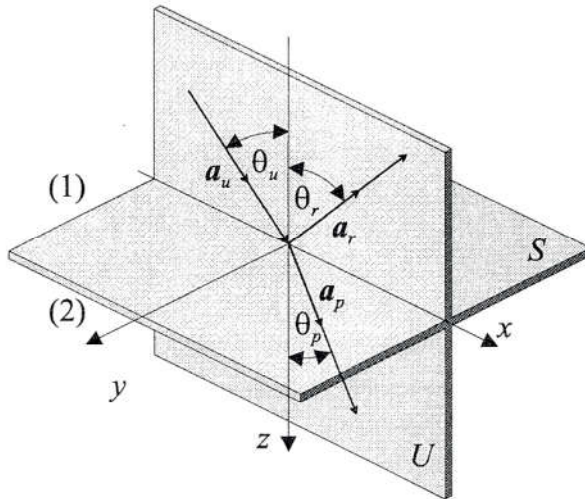
leže u jednoj ravnini; da su upadni i kut odbijanja jednaki, i da su kutovi upada i loma povezani faznim brzinama u oba materijala.

2. *Fresnelove jednadžbe.* Te jednadžbe povezuju amplitude odbijenog i prolaznog vala s amplitudom polja upadnog vala. Odnosi ovise o polarizaciji upadnog vala.
3. *Pojava totalne refleksije* od granice između dva (idealna) dielektrika. To je pojava potpunog odbijanja vala od granice, tj. pojava u kojoj se srednja snaga stacionarnog vala, koji se prostire iz optički gušćeg u optički rjeđi dielektrik, potpuno reflektira od granice kada je upadni kut vala veći od određenog graničnog upadnog kuta.
4. *Pojava totalne transmisije.* Postoji upadni kut pri kojem stacionarna srednja snaga upadnog vala na granicu između dva dielektrika potpuno prolazi kroz granicu (ništa se ne odbija) u slučaju kada vektor električnog polja leži u upadnoj ravnini.
5. *Pojava zrcalne refleksije.* Ta pojava nastaje kada se val koji nailazi iz dielektrika odbija od površine idealnog vodiča. Idealni vodič je savršeno zrcalo.

8.6.1.1. Zakoni odbijanja i loma

Analizirat ćemo nailazak sinusnog homogenog ravnog TEM vala na granicu dva jednostavna materijala sa značajkama $\epsilon_1, \mu_1, \kappa_1$ i $\epsilon_2, \mu_2, \kappa_2$, koji imaju za zajedničku granicu neograničenu ravninu S , a u ostalim smjerovima su neograničeni i bez izvora. Najprije ćemo propisati geometriju i pretpostaviti valove i njihove smjerove u oba materijala. Potom ćemo označiti kutove upada, odbijanja i prolaza (loma). Definirat ćemo *upadnu ravninu* kao ravninu u kojoj se nalaze vektor smjera prostiranja upadnog vala i okomica na graničnu plohu S .

Bez gubitka općenitosti možemo koordinatni sustav postaviti tako da koordinatni početak O leži u graničnoj ravnini S . Jedinичni vektor $\mathbf{a}_z$ koji je usmjeren u materijal (2) predstavlja okomicu na graničnu ravninu S , kao što je prikazano na slici 8.6.1.



Slika 8.6.1. Nailazak ravnog vala na ravnu granicu S između materijala (1) i (2) s vektorima smjerova prostiranja valova u upadnoj ravnini U i kutovima upada, odbijanja i prolaza

Budući je radijvektor iz ishodišta O do bilo koje točke na granici i u prostoru s obje strane granice dan s $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$, to je granična ravnina S određena jednadžbom $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{r} = 0$ ili $z = 0$.

Fizikalno je jasno da primarno elektromagnetsko polje upadnog vala izaziva titrajno

gibanje slobodnih i vezanih naboja u blizini granice S . Inducirane struje primarnog polja i naboji proizvode svoje vlastito sekundarno polje u oba materijala. Kao rezultat imamo činjenicu da u materijalu (1) postoji resultantno polje koje je zbir primarnog polja upadnog vala i sekundarnog polja odbijenog vala, kojeg zrače inducirani naboji i struje oko granice. Zračenje sekundarnog induciranog polja ima za posljedicu da u materijalu (2) postuliramo postojanje polja prolaznog vala, koje predstavlja prolazak (i lom) primarnog vala u materijal (2). Kao što je već rečeno, upadnu ravninu U definirali smo vektorima $\mathbf{a}_u$ i $\mathbf{a}_z$, koji leže u njoj. Budući da je geometrija zadatke simetrična obzirom na upadnu ravninu, ni jedna strana nije preferirana, pa nema razloga da bilo koji od valova skrene na $+y$ ili $-y$ stranu. *Zato možemo pretpostaviti da će vektori smjerova prostiranja $\mathbf{a}_u$, $\mathbf{a}_r$ i $\mathbf{a}_p$ svih valova ležati u jednoj te istoj upadnoj ravnini U* , kao na slici 8.6.1. i neće biti ovisni o koordinati y . Označimo li kutove upada, odbijanja i prolaza (loma) s θ_u , θ_r i θ_p , tada iz geometrijskih odnosa na slici 8.6.1. možemo pisati izraze za jedinične vektore smjerova prostiranja upadnog, odbijenog i prolaznog vala kako slijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_u &= \mathbf{a}_x \sin \theta_u + \mathbf{a}_z \cos \theta_u, \\ \mathbf{a}_r &= \mathbf{a}_x \sin \theta_r + \mathbf{a}_z \cos \theta_r, \\ \mathbf{a}_p &= \mathbf{a}_x \sin \theta_p + \mathbf{a}_z \cos \theta_p.\end{aligned}\tag{8.6.1a - c}$$

Pretpostavit ćemo da su sva tri vala ravni homogeni⁷⁶ TEM valovi, čije kompleksne jednadžbe⁷⁷ za električno i magnetsko polje glase

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_u &= \mathbf{E}_0 e^{j\omega t - \gamma_1 \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{r}} \quad ; \quad \mathbf{H}_u = \frac{1}{Z_1} (\mathbf{a}_u \times \mathbf{E}_u), \\ \mathbf{E}_r &= \mathbf{E}_1 e^{j\omega t - \gamma_1 \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}} \quad ; \quad \mathbf{H}_r = \frac{1}{Z_1} (\mathbf{a}_r \times \mathbf{E}_r), \\ \mathbf{E}_p &= \mathbf{E}_2 e^{j\omega t - \gamma_2 \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{r}} \quad ; \quad \mathbf{H}_p = \frac{1}{Z_2} (\mathbf{a}_p \times \mathbf{E}_p),\end{aligned}\tag{8.6.2a - f}$$

gdje su $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}_1$ i $\mathbf{E}_2$ kompleksne amplitude upadnog, odbijenog i prolaznog vala. Amplitude su po pretpostavci neovisne o koordinatama x , y , z . Valne konstante prostiranja određene su izrazima (8.2.29), (8.2.30) i (8.2.43a,b)

$$\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1 \quad ; \quad \gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2, \tag{8.6.3a,b}$$

a valne impedancije izrazom (8.2.50a)

⁷⁶ U nekim slučajevima će račun za prolazni val dati općenitije rješenje nego li je (8.6.2e,f). Pogledati članak 8.6.3.

⁷⁷ Pogledati članke 8.2.2. i 8.2.3. i točku 8.2.5.1.

$$Z_1 = \frac{j\omega\mu_1}{\gamma_1} \quad ; \quad Z_2 = \frac{j\omega\mu_2}{\gamma_2} . \quad (8.6.4a,b)$$

Za dielektrike su značajke γ i Z određene izrazima (8.3.6) i (8.3.7a,b), dok su za materijale s gubicima dane u tablici 8.3.2.

Odnose na granici S pri *kosom upadu vala* riješit ćemo zadovoljenjem uvjeta za tangencijalne komponente vektora električnog i magnetskog polja koje na granici trebaju biti jednake.⁷⁸ Da bi tangencijalne komponente ukupnih polja s obje strane granice S bile jednake, potrebno je da argumenti eksponencijalnih faktora u izrazima (8.6.2a – f) budu jednaki na graničnoj plohi S . To vodi na uvjetne relacije

$$\gamma_1 \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{r} \big|_{z=0} = \gamma_1 \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r} \big|_{z=0} = \gamma_2 \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{r} \big|_{z=0} , \quad (8.6.5a,b)$$

koje trebaju biti zadovoljene na graničnoj ravnini $z = 0$. Te jednadžbe izražavaju ustvari jednakost faznih brzina sva tri vala na graničnoj ravnini S . Uvrštenjem relacija (8.6.1a – c) i uvjeta $z = 0$ u jednadžbe (8.6.5a,b) izvodimo *zakon refleksije* (odbijanja), koji glasi

$$\theta_r = \theta_u , \quad (8.6.6)$$

i *Snellov zakon refrakcije* (loma), koji glasi

$$\frac{\sin \theta_p}{\sin \theta_u} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} . \quad (8.6.7)$$

Zakon refleksije (8.6.6) utvrđuje da je kut odbijanja jednak upadnom kutu, dok Snellov zakon refrakcije⁷⁹ (8.6.7) utvrđuje da je omjer sinusa kutova loma (prolaza) i upada jednak recipročnom omjeru konstanti prostiranja materijala u odgovarajućim poluprostorima. Navedeni izrazi upućuju na činjenicu da oba zakona ne ovise o polarizaciji upadnog vala.

8.6.1.2. Fresnelove jednadžbe i utjecaj polarizacije

Primijenit ćemo uvjete o jednakosti tangencijalnih komponenti vektora ukupne jakosti električnog i magnetskog polja s obje strane granice S da bismo odredili odnose između amplituda polja $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}_1$ i $\mathbf{E}_2$. Amplitude su općenito kompleksne konstante, budući da su upadni, reflektirani i prolazni TEM valovi po pretpostavci *homogeni* i *linearно polarizirani*. Zato u svim točkama u ravnini S trebaju biti zadovoljene relacije

$$\mathbf{a}_z \times (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) = \mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_2 , \quad (8.6.8a)$$

⁷⁸ Pogledati članak 1.2.5.

⁷⁹ Primjetimo da je Snellova jednadžba (8.6.7) za kompleksne konstante prostiranja općenito rješiva jedino ako za kut prolaza dozvolimo kompleksne vrijednosti.

$$\mathbf{a}_z \times (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1) = \mathbf{a}_z \times \mathbf{H}_2 . \quad (8.6.8b)$$

Uz pomoć relacije za trostruki vektorski produkt

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} ,$$

i vektorskim množenjem jednadžbe (8.6.8a) s okomicom $\mathbf{a}_z$ dobivamo

$$[\mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1)]\mathbf{a}_z - (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z)(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) = (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{a}_z - (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z)\mathbf{E}_2 . \quad (8.6.9)$$

Pomoću relacije za trostruki vektorski produkt, te uvrštenjem izraza (8.6.2a – f) i (8.6.5a,b) u (8.6.8b) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_1} [(\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{a}_u - (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_u)\mathbf{E}_0 + (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{E}_1)\mathbf{a}_r - (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r)\mathbf{E}_1] = \\ = \frac{1}{Z_2} [(\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{a}_p - (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_p)\mathbf{E}_2] . \end{aligned} \quad (8.6.10)$$

Smjer vektora $\mathbf{E}_0$ je bilo koji. No mi uvijek možemo vektor $\mathbf{E}_0$ rastaviti u komponentu koja je okomita na upadnu ravninu U i zato uvijek tangencijalnu na S i u komponentu koja leži u upadnoj ravnini U . Analiza će se bitno pojednostavniti ako ova dva slučaja promatramo odvojeno.

1. Vektor $\mathbf{E}_0$ je okomit na upadnu ravninu U .

U tom slučaju se sva tri vektora električnog polja upadnog, odbijenog i prolaznog vala, mogu pisati kao

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_y E_{0y} \quad ; \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_y E_{1y} \quad ; \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{a}_y E_{2y} . \quad (8.6.11a - c)$$

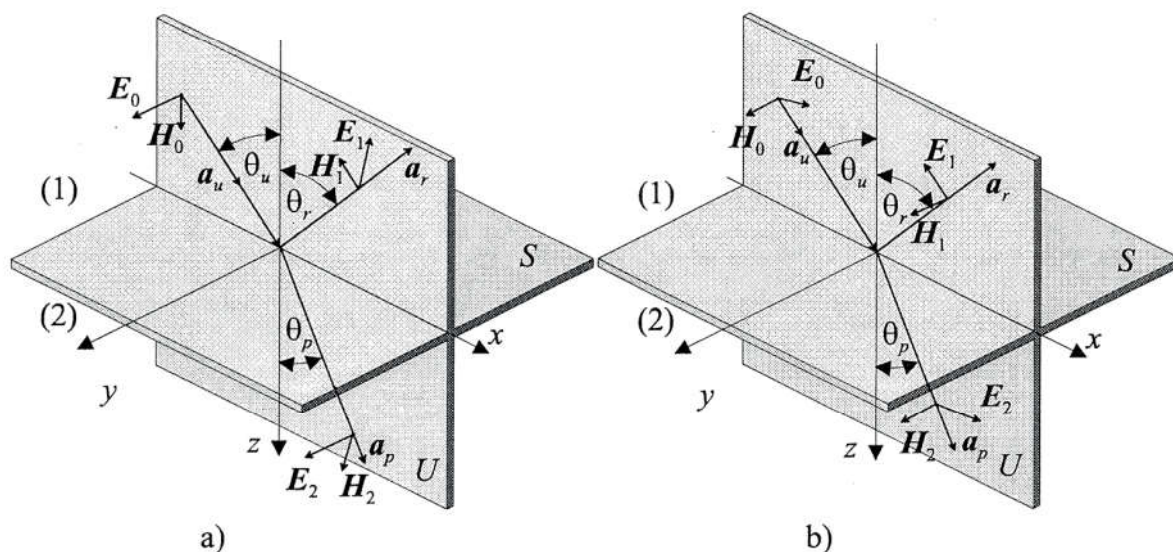
Otud slijedi da je

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{E}_0 &= \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y E_{0y} = 0 , \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{E}_1 &= \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y E_{1y} = 0 , \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{E}_2 &= \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y E_{2y} = 0 . \end{aligned} \quad (8.6.12a - c)$$

Uvrstimo li relacije (8.6.12a – c) u izraze za rubne uvjete (8.6.9) i (8.6.10), dobivamo izraze za amplitude polja na granici S

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_2 , \\ Z_2 \cos \theta_u \mathbf{E}_0 - Z_2 \cos \theta_r \mathbf{E}_1 &= Z_1 \cos \theta_p \mathbf{E}_2 . \end{aligned} \quad (8.6.13a,b)$$

Smjerovi vektora električnog i magnetskog polja za sva tri linearno polarizirana vala prikazani su na slici 8.6.2a).



Slika 8.6.2. Ravni val na granici dva materijala: a) polarizacija valova je okomita na upadnu ravninu, b) polarizacija valova je paralelna upadnoj ravnini

Iz jednadžbi (8.6.13a,b) i uz pomoć relacija (8.6.6) i (8.6.7) mogu se za zadane E_0 i θ_u izračunati amplitude odbijenog i prolaznog vala E_1 i E_2 kao

$$E_{1\perp} = \frac{Z_2 \cos \theta_u - Z_1 \cos \theta_p}{Z_2 \cos \theta_r + Z_1 \cos \theta_p} E_{0\perp}, \quad (8.6.14a,b)$$

$$E_{2\perp} = \frac{Z_2 \cos \theta_u + Z_2 \cos \theta_r}{Z_2 \cos \theta_r + Z_1 \cos \theta_p} E_{0\perp}.$$

Te jednadžbe poznate su kao *Fresnelove jednadžbe* za slučaj da je ispunjen uvjet $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{E}_0 = 0$, tj. da je električno polje upadnog vala okomito na upadnu ravninu. U tom slučaju govorimo da je polarizacija upadnog vala okomita na upadnu ravninu. Jednadžbe nisu tako jednostavne kako to na prvi pogled izgleda. Prolazni kut θ_p je prema (8.6.7) *kompleksan* ako je bilo koji od dva materijala (1) ili (2) s gubicima, tj. vodljiv. Kut θ_p može biti kompleksan i u slučaju da su čak i oba materijala dielektrici bez gubitaka.⁸⁰ Pomoću zakona odbijanja (8.6.6) i loma (8.6.7) dobivaju se odnosi

⁸⁰ Kompleksni prolazni kut znači da početne pretpostavke nisu više zadovoljene i prolazni val sigurno više nije ravni homogeni TEM val! U stvari, u tom slučaju pojave u sredstvu (2) mogu biti jako zamršene i jako se razlikuju od slučaja do slučaja (pogledati članke 8.6.2. i 8.6.3.). Primjetimo da Fresnelove jednadžbe koje sad vrijede samo formalno, ipak daju ispravne odnose među amplitudama raznih valnih pojava.

$$\cos \theta_r = \cos \theta_u \quad ; \quad \cos \theta_p = \frac{1}{\gamma_2} (\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_u)^{1/2} , \quad (8.6.15a,b)$$

pa se kutovi odbijanja i prolaza mogu eliminirati iz Fresnelovih jednadžbi (8.6.14a,b) i tada dobivamo alternativni oblik tih relacija

$$E_{1\perp} = \frac{Z_2 \cos \theta_u - \frac{Z_1}{\gamma_2} (\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_u)^{1/2}}{Z_2 \cos \theta_u + \frac{Z_1}{\gamma_2} (\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_u)^{1/2}} E_{0\perp} , \quad (8.6.16a,b)$$

$$E_{2\perp} = \frac{2Z_2 \cos \theta_u}{Z_2 \cos \theta_u + \frac{Z_1}{\gamma_2} (\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_u)^{1/2}} E_{0\perp} .$$

Jednadžbe (8.6.2a – c) i (8.6.11a – c) pokazuju nam da u slučaju kada su vektori E_u , E_r i E_p okomiti na upadnu ravninu U postoje samo y komponente. Amplitude smo im bilježili s E_{0y} , E_{1y} , E_{2y} . To su tangencijalne komponente na graničnu ravninu S . Često je pogodno Fresnelove jednadžbe izraziti kao *omjere amplituda tangencijalnih komponenti električnih polja odbijenog i prolaznog vala prema upadnom valu*⁸¹

$$\rho_{\perp} = \frac{E_{1y}}{E_{0y}} = \frac{\frac{Z_2}{\cos \theta_p} - \frac{Z_1}{\cos \theta_u}}{\frac{Z_2}{\cos \theta_p} + \frac{Z_1}{\cos \theta_u}} , \quad (8.6.17a,b)$$

$$\tau_{\perp} = \frac{E_{2y}}{E_{0y}} = \frac{2 \frac{Z_2}{\cos \theta_p}}{\frac{Z_2}{\cos \theta_p} + \frac{Z_1}{\cos \theta_u}} .$$

Veličine $\rho_{\perp}$ i $\tau_{\perp}$ su *koeficijenti refleksije i transmisije* i koriste se za proračun veličine amplituda tangencijalnih električnih polja odbijenog i prolaznog vala. Ti koeficijenti općenito su kompleksne veličine, što znači *da se odbijeni i prolazni val razlikuju ne samo po veličini nego i po fazi od upadnog vala*.

⁸¹ Pogledati M. Javid, P.M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.

2. Vektor E_0 je paralelan upadnoj ravnini U .

U prethodnom slučaju vektori električnog polja bili su tangencijalni na granicu S . U ovom slučaju vektori magnetskog polja su okomiti na upadnu ravninu U i tangencijalni na granicu S . Otuda slijedi

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{a}_y H_{0y} \quad ; \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{a}_y H_{1y} \quad ; \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{a}_y H_{2y} \quad , \quad (8.6.18a - c)$$

i

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{H}_0 &= \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y H_{0y} = 0 \quad , \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{H}_1 &= \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y H_{1y} = 0 \quad , \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{H}_2 &= \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y H_{2y} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (8.6.19a - c)$$

Iz (8.6.2a – f) i uz pomoć (6.2.5a,b) imamo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= -Z_1 (\mathbf{a}_u \times \mathbf{H}_0) \quad , \\ \mathbf{E}_1 &= -Z_1 (\mathbf{a}_r \times \mathbf{H}_1) \quad , \\ \mathbf{E}_2 &= -Z_2 (\mathbf{a}_p \times \mathbf{H}_2) \quad , \end{aligned} \quad (8.6.20a - c)$$

što uvršteno u granične uvjete (8.6.8a,b) i uz pomoć (8.6.2a – f) daje

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 &= \mathbf{H}_2 \quad , \\ Z_1 \cos \theta_u \mathbf{H}_0 - Z_1 \cos \theta_r \mathbf{H}_1 &= Z_2 \cos \theta_p \mathbf{H}_2 \quad , \end{aligned} \quad (8.6.21a,b)$$

gdje su vektori $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_1$ i $\mathbf{H}_2$ amplitude magnetskog polja upadnog, odbijenog i prolaznog vala ($\mathbf{H}_u$, $\mathbf{H}_r$ i $\mathbf{H}_p$). Smjerovi električnih i magnetskih vektora polja za sva tri vala prikazani su na slici 8.6.2. b). Rješenje sustava (8.6.21a,b) vodi

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_{1\perp} &= \frac{Z_1 \cos \theta_u - Z_2 \cos \theta_p}{Z_1 \cos \theta_r + Z_2 \cos \theta_p} \mathbf{H}_{0\perp} \quad , \\ \mathbf{H}_{2\perp} &= \frac{Z_1 \cos \theta_u + Z_1 \cos \theta_r}{Z_1 \cos \theta_r + Z_2 \cos \theta_p} \mathbf{H}_{0\perp} \quad . \end{aligned} \right\} \quad \text{za } \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{H}_0 = 0 \quad . \quad (8.6.22a,b)$$

Pomoću sustava (8.6.22a,b) možemo za zadanu amplitudu vektora magnetskog polja $\mathbf{H}_0$ upadnog vala koji se prostire u materijalu (1) izračunati amplitude magnetskog polja reflektiranog $\mathbf{H}_1$ i prolaznog vala $\mathbf{H}_2$. Općenito su one kompleksne veličine i fazno pomaknute prema $\mathbf{H}_0$. Izraze (8.6.14a,b) i (8.6.22a,b) u nešto manje općenitom obliku izveo je Fresnel 1823. godine iz dinamičkih svojstava hipotetičkog etera. Eliminiramo li pomoću (8.6.6) i (8.6.7) kutove θ_r i θ_p iz (8.6.22a,b) dobivamo izraze

$$H_{1\perp} = \frac{Z_1 \cos \theta_u - \frac{Z_2}{\gamma_2} \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_u}}{Z_1 \cos \theta_u + \frac{Z_2}{\gamma_2} \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_u}} H_{0\perp},$$

$$H_{2\perp} = \frac{2Z_1 \cos \theta_u}{Z_1 \cos \theta_u + \frac{Z_2}{\gamma_2} \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_u}} H_{0\perp}.$$
(8.6.23a,b)

U prethodnom slučaju 1. ukupno električno polje imalo je samo y komponentu i bilo je tangencijalno na graničnu ravninu S . Ako je kao u ovom slučaju 2. upadno polje linearno polarizirano da E_0 bude u *upadnoj ravnini*, samo je dio od E_0 (E_{0x} komponenta) tangencijalan na granicu S . Stoga se val dijelom odbija i dijelom prolazi bez promjene polarizacije. Prema tome, koeficijenti refleksije i transmisije, koji stavljaju u odnos amplitude *tangencijalnih* komponenti odbijenog, prolaznog i upadnog električnog polja, sada glase

$$\rho_{||} = \frac{E_{1x}}{E_{0x}} = \frac{\frac{Z_2}{\cos \theta_u} - \frac{Z_1}{\cos \theta_p}}{\frac{Z_2}{\cos \theta_u} + \frac{Z_1}{\cos \theta_p}},$$

$$\tau_{||} = \frac{E_{2x}}{E_{0x}} = \frac{2 \frac{Z_2}{\cos \theta_u}}{\frac{Z_2}{\cos \theta_u} + \frac{Z_1}{\cos \theta_p}}.$$
(8.6.24a,b)

Fresnelove jednadžbe pokazuju da dio upadnog vala koji je odbijen i dio koji prolazi (i po amplitudi i po fazi) ovisi ne samo o materijalima na granici i o kutu upada nego i o polarizaciji upadnog vala.

3. Okomit upad vala na granicu S .

Ako je upadni val okomit na graničnu plohu S , tada je $\theta_u = 0$. U tom slučaju nema razlike između slučaja 1. i slučaja 2. Prema (8.6.6) i (8.6.7) kut odbijanja je $\theta_r = 0$, a kut prolaza je $\theta_p = 0$. Prema (8.6.14a,b) amplitude odbijenog i prolaznog jesu

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} E_0, \\ E_2 &= \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} E_0, \end{aligned} \right\} \quad \text{za } \mathbf{a}_u = \mathbf{a}_z.$$
(8.6.25a,b)

Budući da su i električno i magnetsko polje tangencijalni na granicu S , isti rezultat bi se dobio i pomoću izraza (8.6.17a,b), kao i (8.6.24a,b). Koeficijenti refleksije (odbijanja) i transmisije (prolaza) za okomit upad vala na graničnu plovu S glase

$$\rho = \frac{E_1}{E_0} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad (8.6.26a,b)$$

$$\tau = \frac{E_2}{E_0} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}.$$

Prema tome, pri okomitom upadu polarizacija vala nema nikakvu ulogu. Refleksije uopće nema ($\rho = 0$) ako je $Z_2 = Z_1$. Potpuna refleksija $|\rho| = 1$ nastaje onda kada je Z_2 jednako nula, ili je beskonačno, ili je pak čisto imaginarno.

8.6.2. Granica između dva dielektrika

Analizirat ćemo nailazak ravnog homogenog TEM vala na ravnu granicu S između dva dielektrika sa značajkama $\epsilon_1, \mu_1 = \mu_0$ i $\epsilon_2, \mu_2 = \mu_0$. Dielektrici⁸² su idealni materijali bez gubitaka, pa su im provodnosti $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Iako je to idealizirani slučaj koji ne postoji u stvarnosti, analiza je relativno jednostavna i rezultati su vrlo pregledni. Mogu poslužiti kao aproksimacija za mnoge dobre izolatore u realnosti. Zakon odbijanja (8.6.6) ostaje nepromijenjen

$$\theta_r = \theta_u, \quad (8.6.27)$$

dok Snellov zakon loma (8.6.7) možemo pisati pomoću (8.3.6) kao

$$\frac{\sin \theta_p}{\sin \theta_u} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{c_2}{c_1}, \quad (8.6.28)$$

te pomoću (8.3.3) i (8.3.4) u drugom obliku

$$\frac{\sin \theta_p}{\sin \theta_u} = \frac{v_{f2}}{v_{f1}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}. \quad (8.6.29)$$

U izrazu (8.6.29) v_{f1} i v_{f2} su fazne brzine, n_1 i n_2 su indeksi loma dielektrika (1) i (2), dok je n_{12} relativni indeks loma ta dva dielektrika.

Ako je odnos relativnih dielektričkih konstanti materijala $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$, tada je relativni indeks loma $n_{12} < 1$, što znači da će svakom kutu pada θ_u odgovarati realni kut loma

⁸² Pogledati odjeljak 8.3.1.

θ_p , budući da je $(n_{12} \sin \theta_u) < 1$. Ako je pak $\epsilon_{r2} < \epsilon_{r1}$, kao npr. u slučaju kada val nailazi iz tekućeg ili krutog dielektrika u zrak, tada je θ_p realan samo za onu veličinu kuta θ_u za koju je $(n_{12} \sin \theta_u) \leq 1$. U suprotnom, kada je $(n_{12} \sin \theta_u) > 1$, nastupa pojava *totalne refleksije*,⁸³ tj. potpunog odbijanja upadnog vala. Tu pojavu nećemo sada analizirati, nego ćemo našu pozornost usmjeriti na primjenu Fresnelovih jednadžbi za određivanje odnosa među amplitudama upadnog, odbijenog i prolaznog vala na granici dva dielektrika za slučajeve realnih kutova prolaza, tj. $0 \leq \theta_p \leq 90^\circ$.

Ponajprije ćemo dodatno uvesti veličine koje se koriste u analizi prostiranja elektromagnetskih valova povezanoj s graničnim zadaćama. Sve to će pojednostavniti način pisanja i samu analizu. Tako možemo jednadžbe električnog polja upadnog, odbijenog i prolaznog vala pomoću (8.6.1a – c), (8.6.2a – c), (8.3.4) i (8.3.6) pisati u izmijenjenom obliku

$$\begin{aligned} E_u &= E_0 e^{j\omega t - j\frac{\omega}{v_{f1}}(x \sin \theta_u + z \cos \theta_u)} = E_0 e^{j\omega \left(t - \frac{x}{v_{f1x}} - \frac{z}{v_{f1z}} \right)}, \\ E_r &= E_1 e^{j\omega t - j\frac{\omega}{v_{f1}}(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} = E_1 e^{j\omega \left(t - \frac{x}{v_{f1x}} + \frac{z}{v_{f1z}} \right)}, \\ E_p &= E_2 e^{j\omega t - j\frac{\omega}{v_{f2}}(x \sin \theta_p + z \cos \theta_p)} = E_2 e^{j\omega \left(t - \frac{x}{v_{f2x}} - \frac{z}{v_{f2z}} \right)}, \end{aligned} \quad (8.6.30a - c)$$

gdje smo uveli *fazne brzine u smjeru x-osi i z-osi* kao

$$v_{fx} = \frac{v_f}{\sin \theta} \quad ; \quad v_{fz} = \frac{v_f}{\cos \theta}, \quad (8.6.31a,b)$$

prema slici 8.6.1. (θ je bilo koji kut od $\theta_u, \theta_r, \theta_p$). Brzine v_{fx} i v_{fz} mogu biti veće od v_f , odnosno od odgovarajuće brzine svjetlosti c u oba dielektrika (1) ili (2). Brzine v_{fx} i v_{fz} su matematičke veličine koje pokazuju kojom brzinom bi se morao gibati promatrač po osi x odnosno po osi z da bi uvijek mjerio konstantu faza odgovarajućeg vala. Ako bi val upadao okomito na graničnu ravninu S , tj. gibao se u smjeru osi z , tada bi brzina v_{fx} bila beskonačna, jer sve točke u ravnini $z = konst.$ istovremeno poprime istu fazu. Lako je sada pokazati da upravo zbog uvjeta da upadni, reflektirani i prolazni valovi po graničnoj ravnini S imaju istu faznu brzinu v_{fx} u smjeru osi x , što pišemo kao

$$v_{fx} = \frac{v_{f1}}{\sin \theta_u} = \frac{v_{f1}}{\sin \theta_r} = \frac{v_{f2}}{\sin \theta_p}, \quad (8.6.32)$$

proizlaze zakoni odbijanja (8.6.27) i loma (8.6.28). U nastavku ćemo pomoću (8.3.1b) i (8.6.31a,b) uvesti fazne konstante u smjeru x -osi i z -osi, kao

⁸³ Pogledati točku 8.6.2.3.

$$\begin{aligned}\beta_x &= \frac{\omega}{v_{fx}} = \frac{\omega}{v_f} \sin \theta = \beta \sin \theta \quad ; \quad v_{fx} = \frac{\omega}{\beta_x}, \\ \beta_z &= \frac{\omega}{v_{fz}} = \frac{\omega}{v_f} \cos \theta = \beta \cos \theta \quad ; \quad v_{fz} = \frac{\omega}{\beta_z},\end{aligned}\tag{8.6.33a – d}$$

pa se iz jednadžbi (8.6.2a – f) pomoću (8.6.30a – c) i (8.6.33a – d) mogu vektori električnog i magnetskog polja upadnog, odbijenog i prolaznog vala pisati kao

$$\begin{aligned}E_u &= E_0 e^{j(\omega t - \beta_{1x}x - \beta_{1z}z)} \quad ; \quad H_u = H_0 e^{j(\omega t - \beta_{1x}x - \beta_{1z}z)}, \\ E_r &= E_1 e^{j(\omega t - \beta_{1x}x + \beta_{1z}z)} \quad ; \quad H_r = H_1 e^{j(\omega t - \beta_{1x}x + \beta_{1z}z)}, \\ E_p &= E_2 e^{j(\omega t - \beta_{2x}x - \beta_{2z}z)} \quad ; \quad H_p = H_2 e^{j(\omega t - \beta_{2x}x - \beta_{2z}z)},\end{aligned}\tag{8.6.34a – f}$$

gdje su odnosi između amplituda električnog i magnetskog polja određeni relacijama (8.6.2d – f) kao

$$\begin{aligned}H_0 &= \frac{\mathbf{a}_u \times \mathbf{E}_0}{Z_1}, \\ H_1 &= \frac{\mathbf{a}_r \times \mathbf{E}_1}{Z_1}, \\ H_2 &= \frac{\mathbf{a}_p \times \mathbf{E}_2}{Z_2}.\end{aligned}\tag{8.6.35a – c}$$

Uvest ćemo također i pojam valne impedancije u smjeru zadane osi. U zadaćama kosog upada na granicu S pogodno je definirati valnu impedanciju kao omjer komponenata električnog i magnetskog polja koje su paralelne, tj. tangencijalne na graničnu ravninu S . Razlog za to jest jednakost tangencijalnih komponenti ukupnog električnog i magnetskog polja s obje strane granice S . Tako za upadni i odbijeni val, koji u dielektriku (1) tvore kut θ_u s normalom $\mathbf{a}_z$ na granicu S (prema slici 8.6.1) i za prolazni val koji u dielektriku (2) prolazi pod kutom θ_p , mogu se definirati valne impedancije dielektrika (1) i (2) koje se referiraju u z smjeru kao omjeri komponenti polja u ravninama poprečnim na z smjer. Analizirat ćemo tri karakteristična slučaja.

1. Vektor E_0 okomit na upadnu ravninu U .

Pretpostavimo da je zadana amplituda električnog polja E_{0y} upadnog vala koja je okomita na upadnu ravninu U , tj. tangencijalna na graničnu ravninu S . Zadan je također i upadni kut θ_u pod kojim val nailazi na granicu S . Pomoću koeficijenata odbijanja i loma (8.6.17a,b) možemo odrediti amplitude odbijenog i prolaznog vala E_{1y} i E_{2y} . Kutovi odbijanja i loma određeni su relacijama (8.6.27) i (8.6.29). Valne

impedancije dielektrika (1) i (2) realni su brojevi i određujemo ih pomoću (8.3.7a,b) kao

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} \quad ; \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}} . \quad (8.6.36a,b)$$

Amplitude magnetskih polja upadnog, odbijenog i prolaznog vala odredit ćemo iz jednadžbi (8.6.35a – c) pomoću relacija (8.6.1a – c) i (8.6.11a – c), pa dobivamo

$$\begin{aligned} H_0 &= a_x H_{0x} + a_z H_{0z} = -a_x \frac{E_{0y} \cos \theta_u}{Z_1} + a_z \frac{E_{0y} \sin \theta_u}{Z_1} , \\ H_1 &= a_x H_{1x} + a_z H_{1z} = -a_x \frac{E_{1y} \cos \theta_u}{Z_1} + a_z \frac{E_{1y} \sin \theta_u}{Z_1} , \\ H_2 &= a_x H_{2x} + a_z H_{2z} = -a_x \frac{E_{2y} \cos \theta_p}{Z_2} + a_z \frac{E_{2y} \sin \theta_p}{Z_2} . \end{aligned} \quad (8.6.37a - c)$$

Definirat ćemo sada *valnu impedanciju* za *z-smjer* pomoću komponenti amplituda električnog i magnetskog polja koje se nalaze u ravnini transverzalnoj na *z*-os. Za valove polarizirane s električnim poljem okomitim na upadnu ravninu u dielektriku (1) to iznosi

$$Z_{1z} = -\frac{E_{0y}}{H_{0x}} = \frac{E_{1y}}{H_{1x}} = \frac{Z_1}{\cos \theta_u} , \quad (8.6.38)$$

i u dielektriku (2)

$$Z_{2z} = -\frac{E_{2y}}{H_{2x}} = \frac{Z_2}{\cos \theta_p} , \quad (8.6.39)$$

uz uvjet da je $a_z \cdot E_0 = a_z \cdot E_1 = a_z \cdot E_2 = 0$. Pošto smo uveli i definirali *usmjerene fazne brzine* v_{fx} i v_{fz} pomoću (8.6.31a,b), i *usmjerene fazne konstante* β_x i β_z pomoću (8.6.33a – d), te *usmjerene valne impedancije* Z_{1z} i Z_{2z} pomoću (8.6.38) i (8.6.39) za slučaj da je vektor E_0 okomit na upadnu ravninu U , možemo uvesti izmijenjene izraze za koeficijente refleksije i transmisije. Uvrstimo li izraze (8.6.38) i (8.6.39) u (8.6.17a,b) dobivamo jednostavnije pisane koeficijente

$$\begin{aligned} \rho_{\perp} &= \frac{E_{1y}}{E_{0y}} = \frac{Z_{2z} - Z_{1z}}{Z_{2z} + Z_{1z}} , \\ \tau_{\perp} &= \frac{E_{2y}}{E_{0y}} = \frac{2Z_{2z}}{Z_{2z} + Z_{1z}} . \end{aligned} \quad (8.6.40a,b)$$

Totalna polja u dielektricima (1) i (2) možemo jednostavno odrediti. Totalna polja u dielektriku (1) su zbir polja upadnog i reflektiranog vala, pa prema (8.6.34a – f), (8.6.37a – c) i (8.6.40a,b) imamo

$$\begin{aligned} E_{1T} &= E_u + E_r = a_y E_{0y} e^{j(\omega t - \beta_{1x}x)} [e^{-j\beta_{1z}z} + \rho e^{+j\beta_{1z}z}] , \\ H_{1T} &= H_u + H_r = -a_x \frac{E_{0y} \cos \theta_u}{Z_1} e^{j(\omega t - \beta_{1x}x)} [e^{-j\beta_{1z}z} - \rho e^{+j\beta_{1z}z}] + \\ &\quad + a_z \frac{E_{0y} \sin \theta_u}{Z_1} e^{j(\omega t - \beta_{1x}x)} [e^{-j\beta_{1z}z} + \rho e^{+j\beta_{1z}z}] . \end{aligned} \quad (8.6.41a,b)$$

Totalno polje u dielektriku (2) jest

$$\begin{aligned} E_{2T} &= E_p = a_y E_{0y} \tau e^{j(\omega t - \beta_{2x}x - \beta_{2z}z)} , \\ H_{2T} &= H_p = \left[-a_x \frac{E_{0y} \tau \cos \theta_p}{Z_2} + a_z \frac{E_{0y} \tau \sin \theta_p}{Z_2} \right] e^{j(\omega t - \beta_{2x}x - \beta_{2z}z)} . \end{aligned} \quad (8.6.42a,b)$$

Iz jednadžbi (8.6.41a,b) proizlazi da totalno elektromagnetsko polje u dielektriku (1) ima svojstvo putujućeg vala u smjeru x -osi i kombinacije putujućeg i stojnog vala u smjeru z -osi, ali takve da minimum jakosti polja vala u smjeru z -osi općenito ne doseže vrijednost nula.⁸⁴ Omjer maksimuma i minimuma električnog polja može biti izražen kao omjer stojnog vala S . Jednadžbe (8.6.42a,b) utvrđuju da u dielektriku (2) postoji elektromagnetsko polje prolaznog vala, koje ima svojstvo putujućeg vala u smjeru x -osi i u smjeru z -osi.

2. Vektor E_0 paralelan upadnoj ravnini U .

Za takvu polarizaciju upadnog vala napisat ćemo granične uvjete za jednakost tangencijalnih komponenti ukupnih polja E_{xT} i H_{yT} s obje strane granice S , uključujući i upadnu i odbijenu komponentu u dielektriku (1)

$$\begin{aligned} E_{0x} + E_{1x} &= E_{2x} , \\ H_{0y} + H_{1y} &= H_{2y} . \end{aligned} \quad (8.6.43a,b)$$

Ako ponovno definiramo valne impedancije u smjeru z -osi kao omjer amplituda tangencijalnih komponenti električnog i magnetskog polja na granicu S , dobivamo

$$Z_{1z} = \frac{E_{0x}}{H_{0y}} = -\frac{E_{1x}}{H_{1y}} = Z_1 \cos \theta_u , \quad (8.6.44a)$$

⁸⁴ Pogledati točke 8.3.1.1. i 8.3.1.2.

$$Z_{2z} = \frac{E_{2x}}{H_{2y}} = Z_2 \cos \theta_p, \quad (8.6.44b)$$

uz uvjet da je $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{H}_0 = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{H}_1 = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{H}_2 = 0$. Koeficijente refleksije i transmisije dobivamo ako izraze (8.6.44a,b) uvrstimo u jednadžbe (8.6.24a,b), pa je

$$\begin{aligned} \rho_{||} &= \frac{E_{1x}}{E_{0x}} = \frac{Z_{2z} - Z_{1z}}{Z_{2z} + Z_{1z}}, \\ \tau_{||} &= \frac{E_{2x}}{E_{0x}} = \frac{2Z_{2z}}{Z_{2z} + Z_{1z}}. \end{aligned} \quad (8.6.45a,b)$$

Očito je da smo dobili formalno identične relacije onima u (8.6.40a,b). Razlika je samo u različitim izrazima za usmjerene valne impedancije Z_{1z} i Z_{2z} . Totalna polja u dielektrcima (1) i (2) odredit ćemo kao u prethodnom slučaju, s tim da pretpostavimo da su zadani amplituda magnetskog polja upadnog vala H_{0y} i upadni kut θ_u , pa imamo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1T} &= \mathbf{E}_u + \mathbf{E}_r = \mathbf{a}_x Z_1 H_{0y} \cos \theta_u e^{j(\omega t - \beta_{1x} x)} [e^{-j\beta_{1z} z} + \rho e^{+j\beta_{1z} z}] + \\ &\quad + \mathbf{a}_z Z_1 H_{0y} \sin \theta_u e^{j(\omega t - \beta_{1x} x)} [-e^{-j\beta_{1z} z} + \rho e^{+j\beta_{1z} z}], \\ \mathbf{H}_{1T} &= \mathbf{H}_u + \mathbf{H}_r = \mathbf{a}_y H_{0y} e^{j(\omega t - \beta_{1x} x)} [e^{-j\beta_{1z} z} - \rho e^{+j\beta_{1z} z}], \\ \mathbf{E}_{2T} &= \mathbf{E}_p = [\mathbf{a}_x Z_{1z} H_{0y} \tau - \mathbf{a}_z Z_{1z} \tan \theta_p H_{0y} \tau] e^{j(\omega t - \beta_{2x} x - \beta_{2z} z)}, \\ \mathbf{H}_{2T} &= \mathbf{H}_p = \mathbf{a}_y \frac{Z_{1z}}{Z_{2z}} H_{0y} \tau e^{j(\omega t - \beta_{2x} x - \beta_{2z} z)}. \end{aligned} \quad (8.6.46a - d)$$

Jednadžbe (8.6.46a – d) utvrđuju da u dielektriku (1) kao i u prethodnom slučaju postoji putujući val u smjeru x -osi i kombinacija putujućeg i stojnog vala u smjeru z -osi. U dielektriku (2) postoji putujući val koji se prostire u smjerovima x -osi i z -osi. Zanimljiva je analiza faze odbijenog i prolaznog vala u odnosu na fazu upadnog vala u oba prethodna slučaja. Budući da su sve usmjerene valne impedancije u relacijama (8.6.40a,b) i (8.6.45a,b) realne, oba su vala i reflektirani i prolazni ili *u fazi* s upadnim valom ili *u protufazi*. Očito je dalje da je u oba slučaja *prolazni val u fazi s upadnim valom*. Faza odbijenog vala ovisit će o veličini usmjerenih impedancija Z_{1z} i Z_{2z} . U oba slučaja, ako je $Z_{2z} > Z_{1z}$ tada su električna polja *odbijenog i upadnog vala u fazi*. To se događa kada upadni val s električnim poljem okomitim na upadnu ravninu nailazi iz rjeđeg u gušći dielektrik, tj. kada je $\epsilon_2 > \epsilon_1$. U protivnom su valovi u protufazi. Kod valova koji su polarizirani paralelno upadnoj ravnini odnosi su zamršeniji, pa svaki pojedinačni slučaj treba zasebno analizirati.

Energetske odnose pri nailasku vala na granicu između dva dielektrika možemo analizirati pomoću Poyntingova vektora definiranog relacijom (8.2.53). Srednji tijek elektromagnetske energije određen je realnim dijelom kompleksnog Poyntingova vektora. U dielektricima srednji Poyntingov vektor je realna veličina. Za upadni, odbijeni i prolazni val Poyntingovi vektori prema relacijama (8.2.53) ili (8.3.18) iznose

$$\begin{aligned} N_{u,SR} &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_u \times \mathbf{H}_u^* = \mathbf{a}_u \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}}, \\ N_{r,SR} &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_r \times \mathbf{H}_r^* = \mathbf{a}_r \frac{E_1^2}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}}, \\ N_{p,SR} &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^* = \mathbf{a}_p \frac{E_2^2}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}}. \end{aligned} \quad (8.6.47a - c)$$

Iz tih relacija lako možemo izračunati ukupnu srednju snagu koja upadnim valom nailazi na jedinicu površine granične ravnine S između dva dielektrika, kao

$$N_{uz,SR} = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{N}_{u,SR} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \frac{E_0^2}{2} \cos \theta_u, \quad (8.6.48a)$$

dok se u dielektrik (1) reflektira snaga

$$N_{rz,SR} = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{N}_{r,SR} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \frac{E_1^2}{2} \cos \theta_u, \quad (8.6.48b)$$

a u dielektrik (2) prolazi snaga po jedinici površine

$$N_{pz,SR} = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{N}_{p,SR} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} \frac{E_2^2}{2} \cos \theta_p. \quad (8.6.48c)$$

U suglasju sa stavkom o očuvanju energije možemo pisati da je

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{N}_{u,SR} + \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{N}_{r,SR} = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{N}_{p,SR}, \quad (8.6.49)$$

što daje relaciju

$$\sqrt{2} E_0^2 \cos \theta_u - \sqrt{\epsilon_1} E_1^2 \cos \theta_u = \sqrt{\epsilon_2} E_2^2 \cos \theta_p. \quad (8.6.50)$$

Može se dokazati da Fresnelove jednadžbe zadovoljavaju tu jednadžbu. Koeficijenti

refleksije i transmisije mogu se definirati i pomoću energetske odnosa.⁸⁵ Za razliku od prethodnih označit ćemo ih s R i T . Tako koeficijent refleksije definiramo kao *omjer srednje reflektirane i upadne snage*

$$R = \frac{|N_{rz,SR}|}{|N_{uz,SR}|} = \frac{E_1^2}{E_0^2}, \quad (8.6.51a)$$

a koeficijent transmisije kao *omjer srednje prolazne i upadne snage*

$$T = \frac{|N_{pz,SR}|}{|N_{uz,SR}|} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \cos \theta_p}{\epsilon_1 \cos \theta_u}} \frac{E_2^2}{E_0^2}. \quad (8.6.51b)$$

Iz tih relacija proizlazi da mora biti

$$R + T = 1, \quad (8.6.52)$$

što znači da energija upadnog vala ostaje sačuvana. Za slučaj da je vektor E_0 upadnog vala okomit na upadnu ravninu U mogu se izračunati koeficijenti

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_p - \theta_u)}{\sin^2(\theta_p + \theta_u)}; \quad T_{\perp} = \frac{\sin 2\theta_u \sin 2\theta_p}{\sin^2(\theta_p + \theta_u)}, \quad (8.6.53a,b)$$

a koeficijenti

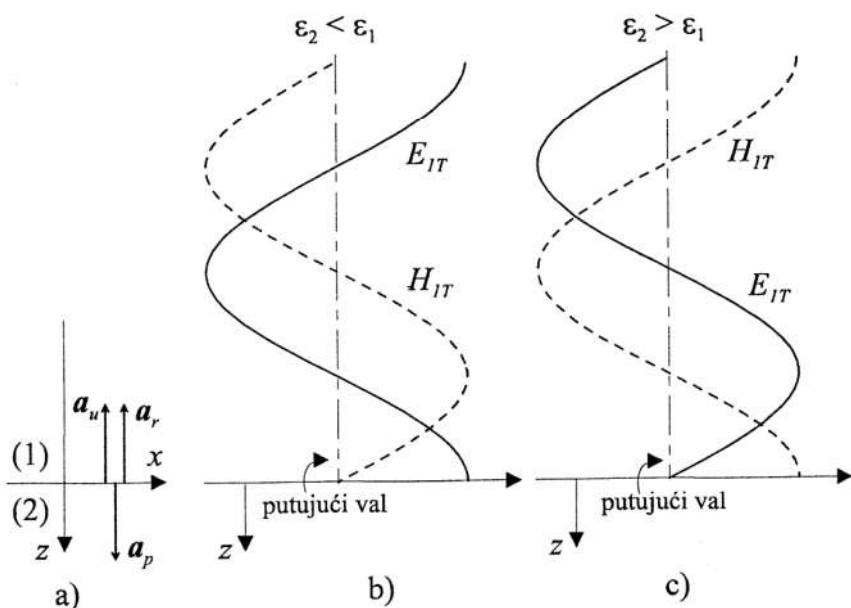
$$R_{\parallel} = \frac{\tan^2(\theta_u - \theta_p)}{\tan^2(\theta_u + \theta_p)}; \quad T_{\parallel} = \frac{\sin 2\theta_u \sin 2\theta_p}{\sin^2(\theta_u + \theta_p) \cos^2(\theta_u - \theta_p)}, \quad (8.6.54a,b)$$

vrijede za slučaj da je vektor E_0 paralelan upadnoj ravnini U .

8.6.2.1. Okomit nailazak vala na granicu

Razmotrit ćemo nekoliko posebnih slučajeva nailaska homogenog ravnog vala na ravnu granicu između dva dielektrika. Najjednostavniji je slučaj okomitog nailaska, a njegovu analizu je najlakše provesti. Dva dielektrika sa značajkama $\epsilon_1, \mu_1 = \mu_0, \kappa_1 = 0$ i $\epsilon_2, \mu_2 = \mu_0, \kappa_2 = 0$ razdvaja ravna granica S , prema slici 8.6.3. a). Pretpostavit ćemo da ravni homogeni TEM val, proizveden iz udaljenog *neovisnog* izvora, nailazi iz dielektrika (1) *okomito* na granicu S . Prema točki 8.6.1.2. polarizacija vala nema nikakvu ulogu, pa pretpostavljamo da je amplituda električnog polja upadnog vala E_{0y} zadana i da je u smjeru y -osi.

⁸⁵ Pogledati J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.



Slika 8.6.3. Okomit upad vala na granicu dva dielektrika, a) jedinični vektori smjera upadnog, odbijenog i prolaznog vala, b) i c) raspodjela amplituda polja u dielektriku (1), koje se sastoji od putujućeg i stojnog vala.

Upadni kut je $\theta_u = 0$, pa su prema (8.6.27) i (8.6.28) kutovi odbijenog i prolaznog vala $\theta_r = \theta_p = 0$. Pomoću (8.3.6) i (8.3.7a) može se utvrditi odnos valnih konstanti prostiranja i impedancija dvaju dielektrika kao

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{Z_2}{Z_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}. \quad (8.6.55a,b)$$

Koeficijenti refleksije i transmisije se prema (8.6.26a,b) mogu izračunati i iznose

$$\rho = \frac{E_{1y}}{E_{0y}} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} - 1}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} + 1}; \quad \tau = \frac{E_{2y}}{E_{0y}} = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} + 1}. \quad (8.6.56a,b)$$

Iz tih jednadžbi vidimo da nema refleksije ako su dielektričnosti jednake $\epsilon_1 = \epsilon_2$, tj. za trivijalan slučaj istih dielektrika. Koeficijent refleksije je općenito uvijek manji od jedan i približava se jedinici kako omjer ϵ_1/ϵ_2 teži nuli ili beskonačnom iznosu. Općenito, kod nekog konačnog omjera dielektričnosti ϵ_1/ϵ_2 , u prostoru dielektrika (1) imamo resultantna polja čije iznose utvrđujemo prema (8.6.41a,b)

$$E_{IT} = a_y E_{0y} [e^{j(\omega t - \beta_1 z)} + \rho e^{j(\omega t + \beta_1 z)}], \quad (8.6.57a,b)$$

$$H_{IT} = -a_x \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} E_{0y} [e^{j(\omega t - \beta_1 z)} - \rho e^{j(\omega t + \beta_1 z)}].$$

Polje u dielektriku (2) jest polje prolaznog vala i određujemo ga pomoću (8.6.42a,b) kao

$$\begin{aligned} E_{2T} &= a_y E_{0y} \tau e^{j(\omega t - \beta_2 z)}, \\ H_{2T} &= -a_x \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} E_{0y} \tau e^{j(\omega t - \beta_2 z)}. \end{aligned} \quad (8.6.58a,b)$$

Jednadžbe (8.6.57a,b) za polje u dielektriku (1), u kojem postoje upadni val koji se giba u $+z$ smjeru i djelomično odbijeni val koji se giba u $-z$ smjeru, mogu se pisati i u drugom obliku

$$\begin{aligned} E_{1T} &= a_y E_{0y} (1 - \rho) e^{j(\omega t - \beta_1 z)} + a_y E_{0y} \rho [e^{j(\omega t - \beta_1 z)} + e^{j(\omega t + \beta_1 z)}], \\ H_{1T} &= -a_x \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} E_{0y} (1 - \rho) e^{j(\omega t - \beta_1 z)} - a_x \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} E_{0y} \rho [e^{j(\omega t - \beta_1 z)} - e^{j(\omega t + \beta_1 z)}]. \end{aligned} \quad (8.6.59a,b)$$

Te jednadžbe utvrđuju da se polje u dielektriku (1) sastoji od dva vala od kojih je jedan (prvi član u jednadžbama) *putujući* i prostire se u $+z$ smjeru, a drugi je *stojni val* (drugi član u jednadžbama).⁸⁶ Putujući val u dielektriku (1) nosi energiju koja prelazi u dielektrik (2) i prostire se dalje prolaznim valom (8.6.58a,b) u smjeru $+z$ -osi. Na slika-ma 8.6.3. b) i c) prikazano je polje u dielektriku (1). Pogodno je izraziti omjer izmjenične amplitude maksimalnog polja prema minimalnom kao omjer stojnog vala, pa imamo

$$S = \frac{|E_{1T}|_{\text{maks}}}{|E_{1T}|_{\text{min}}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}. \quad (8.6.60)$$

Lako je pokazati da je

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \quad \text{za} \quad \epsilon_1 > \epsilon_2, \\ S &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad \text{za} \quad \epsilon_2 > \epsilon_1. \end{aligned} \quad (8.6.61a,b)$$

Isto tako maksimum električnog polja je na granici S ako je $\rho > 0$, budući su upadni i odbijeni valovi neparni. To je slučaj kada je $\epsilon_1 > \epsilon_2$. Ako je $\epsilon_2 > \epsilon_1$ na graničnoj rav-nini, S je maksimum magnetskog polja.

⁸⁶ Ovaj slučaj opisan je u točki 8.3.1.1. Posebno pogledati sliku 8.3.1.

8.6.2.2. Potpuna polarizacija vala na granici

U slučaju kada je upadni val na granicu S polariziran tako da je električno polje paralelno upadnoj ravnini U , postoji samo jedan uvjet pod kojim *nema refleksije*. Koeficijent refleksije je prema (8.6.54a) jednak nuli $R_{||} = 0$, uz uvjet da je $\theta_u + \theta_p = \pi/2$. Zato je $\sin \theta_p = \sin(\pi/2 - \theta_u) = \cos \theta_u$, pa iz relacije (8.6.29) dobivamo uvjet koji mora biti ispunjen da bi $R_{||}$ bio jednak nula

$$\tan \theta_u = \tan \theta_{up} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = n_{21} . \quad (8.6.62)$$

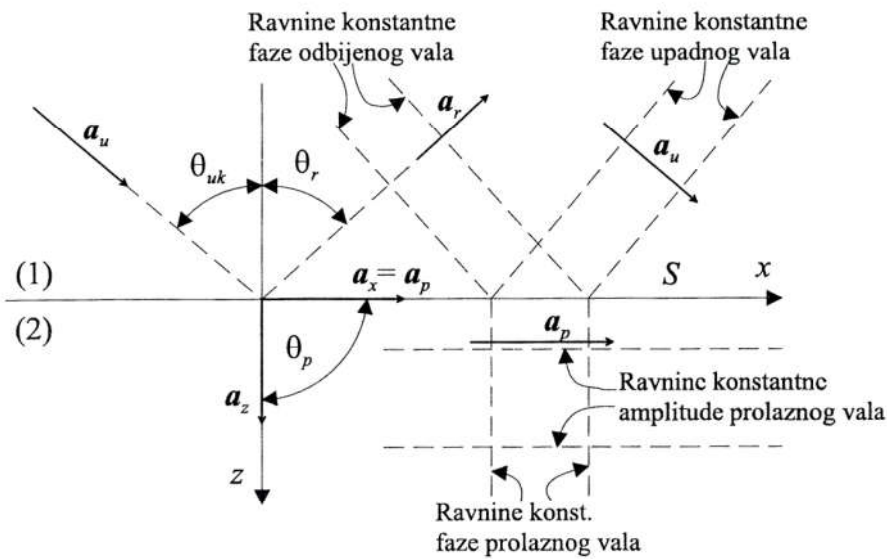
Upadni kut koji zadovoljava uvjet (8.6.62) nazivamo *Brewsterov kut*. Kod toga upadnog kuta nema odbijanja vala koji je polariziran paralelno upadnoj ravnini. Oba koeficijenta refleksije $\rho_{||}$ i $R_{||}$ su prema (8.6.45a) i (8.6.54a) jednaki nula. U tom slučaju su oba koeficijenta transmisije $\tau_{||}$ i $T_{||}$ prema (8.6.45b) i (8.6.54b) jednaka jedinici, što pokazuje da sva elektromagnetska energija upadnog vala prolazi iz dielektrika (1) u dielektrik (2). To je slučaj potpunog prolaza vala kroz granicu bez ikakve refleksije.

S druge strane poznato je da se polje svakog ravnog TEM vala koji nailazi na ravnu granicu S između dva dielektrika može rastaviti u dvije ortogonalne komponente, jednu koja je polarizirana okomito i drugu koja je paralelna upadnoj ravnini. Koeficijenti refleksije za te dvije komponente su različiti, što ima za posljedicu da polarizacija odbijenog vala ovisi o upadnom kutu. Ako upadni kut zadovoljava uvjet (8.6.62), u ovom posebnom slučaju odbijeni val se *polarizira potpuno* u smjeru okomitom na upadnu ravninu. Zato se Brewsterov kut naziva i *kut potpune polarizacije*. Tako npr. u slučaju granice između zrake i vode relativni indeks loma n_{21} može se mijenjati od 1.33 (kod frekvencije svjetlosti) do 9 (u području radiofrekvencija) i kut potpune polarizacije od 53° do 84.6° , što je blizu nailasku upadnog vala paralelno s graničnom ravninom S . Nepravilnosti u radio prijenosu preko vodenih površina sigurno mogu biti pripisane tom uzroku.⁸⁷

8.6.2.3. Totalna refleksija

Analizirat ćemo slučaj kada se pod određenim uvjetima ravni TEM val, koji koso nailazi na granicu S između dva (idealna) dielektrika, u *cijelosti odbija* i kada nikakva srednja elektromagnetska snaga ne prelazi u drugi dielektrik. To je slučaj koji smo isključili na početku analize u članku 8.6.2, a poznat je pod nazivom "totalna refleksija". Da bismo odredili uvjete pod kojima dolazi do totalne refleksije, pretpostavit ćemo da ravni homogeni val iz dielektrika (1) upada pod kutom θ_u na ravnu granicu S između dielektrika (1) i (2), kako je prikazano na slici 8.6.4. Dielektrici su sa značajkama $\epsilon_1, \mu_1 = \mu_0, \kappa_1 = 0$ i $\epsilon_2, \mu_2 = \mu_0, \kappa_2 = 0$.

⁸⁷ Pogledati J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.



Slika 8.6.4. Ravnine konstantne faze i ravnine konstantne amplitude u dielektriku (2) pri totalnoj refleksiji

Pretpostavit ćemo zatim da je odnos dielektričnosti $\epsilon_1 > \epsilon_2$, tj. da val nailazi iz optički gušćeg u optički rjeđi materijal, i da je upadni kut θ_u takav da prema (8.6.29) bude $\sin \theta_p > 1$. To znači da je prolazni kut θ_p kompleksan. Taj najmanji upadni kut označit ćemo s θ_{uk} i nazvati ga *kritični upadni kut*. Računamo ga kao

$$\sin \theta_{uk} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (8.6.63)$$

Uz uvjet da je

$$\sin \theta_u > \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad \text{ili} \quad \theta_u > \theta_{uk}, \quad (8.6.64 \text{ a,b})$$

tj. ako je upadni kut veći od kritičnog upadnog kuta, i ako val nailazi iz optički gušćeg u optički rjeđi materijal ($\epsilon_1 > \epsilon_2$) nastaje pojava *totalne refleksije* upadnog vala. To je *pojava kod koje se ukupna srednja snaga upadnog vala u cijelosti odbija od granice S* u dielektrik (1), pa nema prolaza nikakve srednje snage u dielektrik (2). Faktori refleksije i transmisije su i prema (8.6.53a,b) i prema (8.6.54a,b)

$$R = 1 \quad ; \quad T = 0, \quad (8.6.65 \text{ a,b})$$

što znači da *to vrijedi bez obzira na smjer polarizacije upadnog vala*.

Iz (8.6.64a,b) proizlazi da kako kut upada θ_u raste i približava se kritičnom kutu θ_{uk} , tako i prolazni kut θ_p raste prema $\pi/2$, a smjer prolaznog vala $\mathbf{a}_p$ približava se k $\mathbf{a}_x$, tj. prolazni val će se prostirati paralelno graničnoj ravnini S . Kod vrijednosti $\theta_u > \theta_{uk}$ postaje iznos $|\sin \theta_p| > 1$ i θ_p nije više realan kut, tj. θ_p je kompleksan kut. Kompleksni kut loma svakako znači da u dielektriku (2) ne postoji homogeni TEM val.

Vidjet ćemo da u dielektriku (2) postoje valni fenomeni, čak i strujanje energije, ali nema strujanja iz sredstva (1). Jedna od posljedica kompleksnog kuta loma je da na granici sredstava postoji fazni pomak i da se u dielektriku (2) pojavljuje prigušenje proporcionalno udaljenosti od granice.

Prema tome, činjenica da se pri pojavi totalne refleksije tj. za $\theta_u > \theta_{uk}$, cjelokupna stacionarna (srednja) snaga upadnog vala reflektira u dielektrik (1) i nikakva se srednja snaga ne prenosi u dielektrik (2), ne znači da u dielektriku (2) uopće nema elektromagnetskog polja. Naprotiv, iskustvo *pokazuje da u dielektriku (2) postoji elektromagnetsko polje*. Ta tvrdnja bit će točna ako nema gibanja faze u smjeru z -osi, tj. ako je prema (8.6.33b) $\beta_{2z} = 0$. Da bismo to dokazali, izračunajmo prethodno iz relacije (8.6.29) veličine

$$\begin{aligned}\sin \theta_p &= \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_u > 1, \\ \cos \theta_p &= \pm j \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_u - 1}.\end{aligned}\tag{8.6.66a,b}$$

U izrazima (8.6.2e) i (8.6.2f) za jakosti električnog i magnetskog polja prolaznog vala, u ovom slučaju eksponencijalni član glasi

$$\begin{aligned}e^{j\omega t - \gamma_2 \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{r}} &= e^{j\omega t - j \frac{\omega}{c_2} (\mathbf{a}_x \sin \theta_p + \mathbf{a}_z \cos \theta_p) \cdot (\mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z)} = \\ &= e^{j\omega t - j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_2} (x \sin \theta_p + z \cos \theta_p)} = \\ &= e^{j\omega t - \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_2} \left(jx \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_u + z \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_u - 1} \right)}.\end{aligned}\tag{8.6.67}$$

Zadnji član eksponenta u gornjem izrazu može biti pozitivan ili negativan. Negativan predznak otpada, jer bi tada polje u dielektriku (2) raslo u smjeru $+z$ osi što je fizikalno nemoguće. Konačno možemo pisati da je jakost električnog polja prolaznog vala određena izrazom (8.6.2e)

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_2 e^{-\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_u - 1} z + j(\omega t - \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_1} \sin \theta_u x)}.\tag{8.6.68}$$

To možemo pisati i u jednostavnom obliku

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_2 e^{-\alpha_2 z + j(\omega t - \beta_{2x} x)},\tag{8.6.69}$$

gdje su α_2 prigušna konstanta polja u smjeru z -osi, tj. u smjeru okomitom na graničnu

ravninu S , a β_{2x} je fazna konstanta prolaznog vala u smjeru osi x , tj. u smjeru paralelnom s graničnom ravninom S . One iznose

$$\alpha_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_2} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_u - 1 \right)^{1/2} = \frac{\omega}{c_1} (\sin^2 \theta_u - \sin^2 \theta_{uk})^{1/2}, \quad (8.6.70a,b)$$

$$\beta_{2x} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_1} \sin \theta_u = \frac{\omega}{c_1} \sin \theta_u.$$

Jakost magnetskog polja prolaznog vala određena je izrazima (8.6.2f) i (8.6.69). Pa ako je amplituda električnog polja $E_2 = a_y E_{2y}$, tada prolazno magnetsko polje iznosi

$$H_p = [a_x j \alpha_2 + a_z \beta_{2x}] \frac{E_{2y}}{\omega \mu_0} e^{-\alpha_2 z + j(\omega t - \beta_{2x} x)}, \quad (8.6.71)$$

gdje je amplituda

$$H_2 = [a_x j \alpha_2 + a_z \beta_{2x}] \frac{E_{2y}}{\omega \mu_0} e^{-\alpha_2 z}, \quad (8.6.72)$$

što vrijedi za slučaj da je električno polje upadnog vala okomito na upadnu ravninu.

Vidimo da se u slučaju totalne refleksije u dielektriku (2) pojavljuje elektromagnetski val koji se prostire u smjeru paralelnom graničnoj ravnini S i koji nije transverzalan (nije TEM). Taj val ima transverzalno električno polje, a magnetsko polje više nije transverzalno, nego ima i uzdužnu komponentu u smjeru prostiranja. To je *transverzalni električni*, tj. *TE val*. Jasno je da može postojati i *transverzalni magnetski*, tj. *TM val*. S druge strane val u dielektriku (2) zbog prigušnog člana praktički postoji samo uz graničnu površinu. Tumačenje izraza (8.6.68) odnosno (8.6.69) je sljedeće:

1. U dielektriku (2) pri totalnoj refleksiji postoji elektromagnetsko polje.
2. To polje ima valni karakter, pa ga nazivamo prolaznim TE ili TM valom.
3. Prolazni val prostire se samo u smjeru $+x$ osi, tj. paralelno graničnoj ravnini S . Fazna konstanta prolaznog vala u smjeru osi x u dielektriku (2) dana je relacijom (8.6.70b).
4. Budući da je dielektrik (2) bez gubitaka, nema prigušenja prolaznog vala u smjeru prostiranja, tj. u smjeru x -osi.
5. Elektromagnetsko polje u dielektriku (2) prigušuje se eksponencijalno u smjeru $+z$ osi, tj. u smjeru okomitom na graničnu ravninu S . Konstanta prigušenja polja u z smjeru je α_2 i dana je relacijom (8.6.70a).
6. Prema tome faktor prostiranja

$$e^{j\omega t - \gamma_2 a_p \cdot r} = e^{-\alpha_2 z + j(\omega t - \beta_{2x} x)},$$

pokazuje da je prolazni val *nehomogeni ravni TE ili TM val* koji se prostire u smjeru x -osi.

7. Ravnine konstantne faze su okomite na os x , a ravnine konstantne amplitude su okomite na os z , kao što je prikazano na slici 8.6.4.
8. Snaga (prolaznog) vala u dielektriku (2) nije uzeta iz udaljenog izvora u dielektriku (1), nego mora imati svoj izvor u dielektriku (2) u $x \rightarrow -\infty$. Nema prolaza srednje realne snage iz dielektrika (1) u dielektrik (2).
9. Pomoću (8.2.53) možemo lako dokazati navedenu tvrdnju. Srednja kompleksna snaga po jedinici površine u dielektriku (2) određena je Poyntingovim vektorom u koji ćemo uvrstiti izraze (8.6.69) i (8.6.71) koji vrijede za slučaj kada je električno polje okomito na upadnu ravninu U , pa dobivamo

$$N_{p,sr} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^* = (\mathbf{a}_x \beta_{2x} + \mathbf{a}_z j \alpha_2) \frac{E_{2y}^2}{2 \omega \mu_0} e^{-2\alpha_2 z} . \quad (8.6.73)$$

Gustoća srednje realne (djelatne) snage koja se prenosi prolaznim valom u dielektriku (2) jest

$$(N_p)_{Re,sr} = \mathbf{a}_x \frac{\beta_{2x} E_{2y}^2}{2 \omega \mu_0} e^{-2\alpha_2 z} , \quad (8.6.74)$$

mjerena u vatima po četvornom metru. Očito je iz (8.6.74) da se sva srednja realna snaga giba u $+x$ smjeru i da se na tom putu ne prigušuje, tj. nije funkcija koordinate x . Kako se udaljujemo od granične površine S u smjeru z -osi gustoća te snage opada s $e^{-2\alpha_2 z}$. Ona opada tim brže, što su pri totalnoj refleksiji veći: ω , ϵ_2 , ϵ_1/ϵ_2 i θ_u .

10. Zbog prigušnog člana $e^{-2\alpha_2 z}$ polje vala i snaga koju nosi u dielektriku (2) ograničeni su na dio prostora neposredno uz graničnu plohu S . Pri totalnoj refleksiji imamo izraženu pojavu *površinskog efekta* u dielektriku (2).

Budući da amplitude električnog i magnetskog polja odbijenog i prolaznog vala uvijek zadovoljavaju uvjete kontinuiteta polja na granici, odredit ćemo ih iz Fresnelovih jednadžbi. Ako je električno polje okomito na upadnu ravninu U , tj. uz pretpostavku da je zadana amplituda upadnog vala $\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_y E_{0y}$ i upadni kut θ_u , pomoću relacija za koeficijente refleksije i transmisije (8.6.40a,b) uz uvrštenje (8.6.66b) dobivamo

$$\begin{aligned} \rho_{\perp} &= \frac{E_{1y}}{E_{0y}} = \frac{\cos \theta_u + j \sqrt{\sin^2 \theta_u - \sin^2 \theta_{uk}}}{\cos \theta_u - j \sqrt{\sin^2 \theta_u - \sin^2 \theta_{uk}}} , \\ \tau_{\perp} &= \frac{E_{2y}}{E_{0y}} = \frac{2 \cos \theta_u}{\cos \theta_u - j \sqrt{\sin^2 \theta_u - \sin^2 \theta_{uk}}} . \end{aligned} \quad (8.6.75a,b)$$

Također, uz zadanu amplitudu magnetskog polja upadnog vala $\mathbf{H}_0 = \mathbf{a}_y H_{0y}$ (okomita na upadnu ravninu U) i upadni kut θ_u , pomoću relacija (8.6.45a,b) i (8.6.66b) dobivamo za paralelno polarizirani upadni val

$$\rho_{||} = \frac{E_{1x}}{E_{0x}} = - \frac{\cos \theta_u + j \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{\sin^2 \theta_u - \sin^2 \theta_{uk}}}{\cos \theta_u - j \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{\sin^2 \theta_u - \sin^2 \theta_{uk}}} ,$$

$$\tau_{||} = \frac{E_{2x}}{E_{0x}} = - \frac{j 2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{\sin^2 \theta_u - \sin^2 \theta_{uk}}}{\cos \theta_u - j \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{\sin^2 \theta_u - \sin^2 \theta_{uk}}} .$$
(8.6.76a,b)

Iz izraza (8.6.75a) za slučaj okomite polarizacije upadnog vala, i iz izraza (8.6.76a) za slučaj paralelne polarizacije upadnog vala, proizlazi da su apsolutne vrijednosti koeficijenata refleksije u oba slučaja $|\rho_{\perp}| = 1$ i $|\rho_{||}| = 1$. Budući da su $\rho_{\perp}$ i $\rho_{||}$ kompleksne veličine, to ih možemo pisati kao

$$\rho_{\perp} = e^{j2\delta_{\perp}} ; \quad \rho_{||} = e^{j2\delta_{||}} ,$$
(8.6.77a,b)

pri čemu mora biti

$$|e^{j2\delta_{\perp}}| = 1 ; \quad |e^{j2\delta_{||}}| = 1 .$$
(8.6.78a,b)

Lako je pokazati da je kut δ određen s

$$\tan \delta_{\perp} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_u - \sin^2 \theta_{uk}}}{\cos \theta_u} ; \quad \tan \delta_{||} = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{\sin^2 \theta_u - \sin^2 \theta_{uk}}}{\varepsilon_2 \cos \theta_u} .$$
(8.6.79a,b)

Iz izraza (8.6.77a,b) i (8.6.78a,b) možemo zaključiti da pri totalnoj refleksiji električno polje odbijenih valova za oba slučaja polarizacije ima po iznosu istu amplitudu kao i upadni val, ali su njihove faze pomaknute za kut $2\delta_{\perp}$, odnosno $2\delta_{||}$.

Jednadžbe totalnog polja u dielektriku (2) dane su izrazima (8.6.69) i (8.6.71). Odredit ćemo sada jednadžbe totalnog polja u dielektriku (1). Učinit ćemo to za slučaj okomite polarizacije vala, dok se za slučaj paralelne polarizacije to može učiniti na sličan način. Pretpostavit ćemo da je zadano električno polje upadnog vala $\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_y E_{0y}$ i upadni kut θ_u , tako da prema (8.6.64b) bude $\theta_u > \theta_{uk}$. Ukupno elektromagnetsko polje u dielektriku (1) odredit ćemo pomoću (8.6.41a,b), (8.6.75a) i (8.6.77a). Električno polje resultantnog vala jest

$$\begin{aligned} E_{1T} &= \mathbf{E}_u + \mathbf{E}_r = \mathbf{a}_y E_{0y} e^{j(\omega t - \beta_{1x} x)} [e^{-j\beta_{1z} z} + e^{j2\delta_{\perp}} e^{+j\beta_{1z} z}] , \\ E_{1T} &= \mathbf{a}_y E_{0y} [e^{-j(\beta_{1z} z + \delta_{\perp})} + e^{+j(\beta_{1z} z + \delta_{\perp})}] e^{j(\omega t - \beta_{1x} x + \delta_{\perp})} , \\ E_{1T} &= \mathbf{a}_y 2 E_{0y} \cos(\beta_{1z} z + \delta_{\perp}) e^{j(\omega t - \beta_{1x} x + \delta_{\perp})} . \end{aligned}$$
(8.6.80a)

Magnetsko polje resultantnog vala jest

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{1T} = \mathbf{H}_u + \mathbf{H}_r = & -\mathbf{a}_x \frac{E_{0y} \cos \theta_u}{Z_1} e^{j(\omega t - \beta_{1x} x)} [e^{-j\beta_{1z} z} - e^{j2\delta_\perp} e^{+j\beta_{1z} z}] + \\
 & + \mathbf{a}_z \frac{E_{0y} \sin \theta_u}{Z_1} e^{j(\omega t - \beta_{1x} x)} [e^{-j\beta_{1z} z} + e^{j2\delta_\perp} e^{+j\beta_{1z} z}] , \\
 \mathbf{H}_{1T} = & \mathbf{a}_x j 2 \frac{E_{0y} \cos \theta_u}{Z_1} \sin(\beta_{1z} z + \delta_\perp) e^{j(\omega t - \beta_{1x} x + \delta_\perp)} + \\
 & + \mathbf{a}_z 2 \frac{E_{0y} \sin \theta_u}{Z_1} \cos(\beta_{1z} z + \delta_\perp) e^{j(\omega t - \beta_{1x} x + \delta_\perp)} .
 \end{aligned} \tag{8.6.80b}$$

Na temelju izraza (8.6.80a,b) ukupno polje u dielektriku (1) pri totalnoj refleksiji možemo objasniti na sljedeći način:

1. U dielektriku (1) postoji sinusni putujući elektromagnetski val kao rezultat zbrajanja upadnog i reflektiranog vala.
2. Resultantni val giba se u smjeru $+x$ osi.
3. Za slučaj okomite polarizacije upadnog TEM vala resultantni val je TE, a za slučaj paralelne polarizacije TEM vala resultantni val je TM.
4. Budući da je dielektrik (1) bez gubitaka, nema prigušenja vala u smjeru gibanja.
5. Ukupno električno polje, tj. njegova y -komponenta i z -komponenta magnetskog polja, mijenjaju se u dielektriku (1) duž osi z po zakonu kosinusa, a x -komponenta magnetskog polja mijenja se duž osi z po zakonu sinusa. (Os z je okomita na granicu S i negativna je u dielektriku (1).)
6. Prema tome, u slučaju okomite polarizacije u dielektriku (1) postoji pri totalnoj refleksiji sinusni resultantni TE putujući val koji se giba duž osi x i koji je nehomogen.
7. Ravnine konstantne faze su okomite na os x , a ravnine konstantne amplitude su okomite na os z kao što je pokazano na slici 8.6.5.
8. Gustoća srednje kompleksne elektromagnetske snage koju resultantni val nosi sa sobom u dielektriku (1) određena je Poyntingovim vektorom (8.2.53) u koji ćemo uvrstiti izraze za polja (8.6.80a,b), pa dobivamo

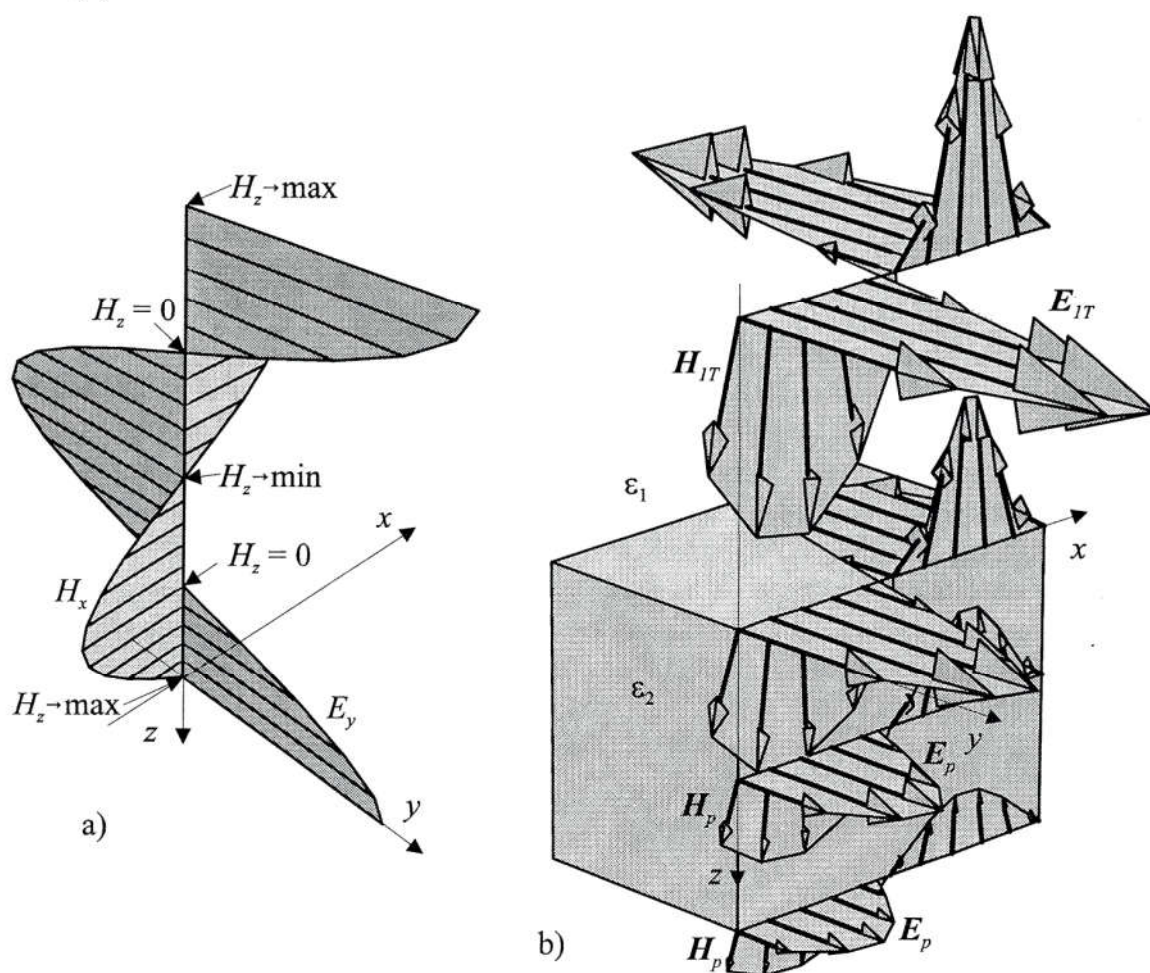
$$N_{1T, sr} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_{1T} \times \mathbf{H}_{1T}^* , \tag{8.6.81}$$

$$N_{1T, sr} = \mathbf{a}_x \frac{2E_{0y}^2}{Z_1} \sin \theta_u \cos^2(\beta_{1z} z + \delta_\perp) - \mathbf{a}_z j \frac{E_{0y}^2}{Z_1} \cos \theta_u \sin 2(\beta_{1z} z + \delta_\perp) .$$

9. Gustoća srednje realne, tj. djelatne snage koja se prenosi resultantnim TE valom u dielektriku (1) jest

$$\begin{aligned}
 (N_{1T})_{Re, sr} &= a_x \frac{2E_{0y}^2}{Z_1} \sin \theta_u \cos^2(\beta_{1z}z + \delta_{\perp}) = \\
 &= a_x \frac{E_{0y}^2}{Z_1} \sin \theta_u [1 + \cos 2(\beta_{1z}z + \delta_{\perp})] .
 \end{aligned}
 \tag{8.6.82}$$

To potvrđuje da se djelatna snaga u dielektriku (1) giba samo u smjeru $+x$ -osi. Nema gibanja nikakve srednje djelatne snage u smjeru z -osi. Rezultantni TE val je nehomogen, pa gustoća snage ovisi o udaljenosti od granice S . Naime, postoji jedan konstantni član srednje djelatne snage koja se giba u smjeru x -osi i koji ne ovisi o koordinati z . Na njega se superponira jedan član koji o koordinati z ovisi po zakonu $\cos 2(\beta_{1z}z + \delta_{\perp})$. Inače u smjeru osi z nema nikakvog prigušenja vala u dielektriku (1).



Slika 8.6.5. a) Raspodjela amplituda polja u dielektriku (1). Prikaz stojnog vala u smjeru z -osi. U smjeru x -osi nastaje putujući nehomogeni TE val. b) Prikaz totalnog polja vala u dielektriku (1) i dielektriku (2) u trenutku $t = 0$ i za $\theta_u = \pi/3$.

10. Usporedimo li jednadžbe polja resultantnog vala (8.6.80a,b) s onima u točki 8.3.1.2 za stojni val (8.3.28a,b) vidimo da električno polje, tj. njegova y -komponenta i x -komponenta magnetskog polja u dielektriku (1) čine stojni val u smjeru osi z . Konačno, možemo izvesti dva vrlo važna zaključka iz izraza za totalno polje u dielektriku (1) pri totalnoj refleksiji. Prvi je od praktične važnosti. *Pod uvjetom totalne refleksije granica između dva dielektrika "vodi" val u smjeru koji je paralelan objema ravninama i graničnoj S i upadnoj U . To je osnova djelovanja dielektričkog valovoda i svjetlovoda.* Drugi, da je pod uvjetom totalne refleksije odbijeni val prema izrazima (8.6.77a,b) fazno pomaknut u odnosu na upadni val u dielektriku (1). Za dva tipa polarizacije fazni pomaci su različiti. To znači, ako je upadni val linearno polariziran u smjeru koji nije ni okomit ni paralelan upadnoj ravnini, tada će reflektirani val biti *eliptički polariziran*.⁸⁸

8.6.3. Prolaz vala u materijal s gubicima

Zakoni odbijanja i loma, kao i svi koeficijenti refleksije i transmisije, izvedeni u članku 8.6.1. općenito su valjani u svim slučajevima, pa i u ovom kada homogeni ravni TEM val nailazi iz idealnog dielektrika (1) sa značajkama $\epsilon_1, \mu_1 = \mu_0, \kappa_1 = 0$ i prolazi u jednostavni materijal (2) s gubicima i značajkama $\epsilon_2, \mu_2, \kappa_2 \neq 0$. Do sada smo u članku 8.6.2. temeljito analizirali zadaće odbijanja i loma valova na ravnoj granici između dva (idealna) dielektrika. Sada ćemo našu pozornost usmjeriti na materijale s gubicima. Zbog jednostavnosti ćemo materijal (1) uzeti da je bez gubitaka. Najčešće će to biti vakuum ili zrak. Pojave odbijanja i loma značajno se modificiraju u slučaju materijala s gubicima, tj. u slučaju vodljivih materijala na granici. Svi zakoni i koeficijenti izvedeni u 8.6.1. vrijede čisto formalno, ali kompleksne vrijednosti valnih konstanti prostiranja γ i valnih impedancija Z , vode kompleksnim vrijednostima prolaznog kuta θ_p i koeficijenata refleksije ρ i transmisije τ . To vodi potpuno različitim fizikalnim objašnjenjima od onih kada su na granici bili dielektrici. Polje u dielektriku (1) uistinu ima isti oblik kao u slučaju kada je materijal (2) bio bez gubitaka, tj. dielektrik. Utjecaj gubitaka u materijalu (2) unosi glavnu promjenu u polje prolaznog vala koji postaje *nehomogeni ravni val*. Sada ćemo pristupiti izračunavanju tog prolaznog polja i njegova vala.

Prema izrazima (8.3.1a,b) (8.3.2) i (8.3.6) za dielektrik slijede prigušna i fazna konstanta i konstanta prostiranja u materijalu (1)

$$\alpha_1 = 0,$$

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c_1} = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}, \quad (8.6.83a - c)$$

$$\gamma_1 = j\beta_1.$$

⁸⁸ Pogledati točku 8.2.5.3.

Materijal (2) s gubicima ima konstantu prostiranja prema izrazu (8.3.40c), tj. (8.6.3b)

$$\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2 . \quad (8.6.84)$$

Neka homogeni ravni TEM val ($\mathbf{E}_u$, $\mathbf{H}_u$) frekvencije ω nailazi pod zadanim upadnim kutom θ_u na granicu S prema slici 8.6.6. Pretpostavit ćemo da je $\theta_u < \theta_{uk}$. Iz jednakosti faznih brzina na granici S , prema relaciji (8.6.5b) je

$$\gamma_1 \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{r} \big|_{z=0} = \gamma_2 \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{r} \big|_{z=0} . \quad (8.6.85)$$

Konstante prostiranja γ_1 i γ_2 upadnog i prolaznog vala čija polja su određena izrazima (8.6.2a,b) i (8.6.2e,f), određene su izrazima (8.6.83c) i (8.6.84). Jedinični vektori smjera upadnog i prolaznog vala $\mathbf{a}_u$ i $\mathbf{a}_p$ dani su izrazima (8.6.1a,c). Radijvektor je $\mathbf{r} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z$, granična ravnina S je definirana sa $z = 0$, dok je upadna ravnina U određena s $y = 0$. Nakon uvrštenja iz kompleksne jednadžbe (8.6.85) dobivamo dvije realne

$$\begin{aligned} \alpha_2 \sin \theta_p &= 0 , \\ \beta_1 \sin \theta_u &= \beta_2 \sin \theta_p . \end{aligned} \quad (8.6.86a,b)$$

Uvedemo li pomoću relacija (8.6.33a,c) fazne konstante β_{1x} , β_{2x} i β_{2z} u smjeru x i z osi, dobivamo

$$\begin{aligned} \beta_{1x} &= \beta_1 \sin \theta_u , \\ \beta_{2x} &= \beta_2 \sin \theta_p , \\ \beta_{2z} &= \beta_2 \cos \theta_p . \end{aligned} \quad (8.6.87a - c)$$

Na sličan način uvest ćemo i prigušne konstante u materijalu (2) α_{2x} i α_{2z} duž x i z osi kao

$$\begin{aligned} \alpha_{2x} &= \alpha_2 \sin \theta_p , \\ \alpha_{2z} &= \alpha_2 \cos \theta_p . \end{aligned} \quad (8.6.88a - c)$$

Tada relacije (8.6.86a,b) možemo pisati i u pogodnijem obliku

$$\begin{aligned} \alpha_{2x} &= 0 , \\ \beta_{1x} &= \beta_{2x} = \frac{\omega}{c_1} \sin \theta_u . \end{aligned} \quad (8.6.89a,b)$$

Prema tome, iz uvjeta kontinuiteta polja na granici S ($z = 0$) odredili smo prigušnu i faznu konstantu prolaznog vala u smjeru x osi. Preostaje još da odredimo te konstante u smjeru z osi u materijalu (2). Prema (8.6.2e) električno polje prolaznog vala

$$\mathbf{E}_p = E_2 e^{j\omega t - \gamma_2 \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{r}}, \quad (8.6.90)$$

ima eksponent koji pripada faktoru prostiranja u materijalu (2)

$$\gamma_2 \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{r} = (\alpha_2 + j\beta_2)(\mathbf{a}_x \sin \theta_p + \mathbf{a}_z \cos \theta_p) \cdot (\mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z),$$

što nakon uređenja daje

$$\gamma_2 \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{r} = \alpha_2 \sin \theta_p x + \alpha_2 \cos \theta_p z + j(\beta_2 \sin \theta_p x + \beta_2 \cos \theta_p z).$$

Konačno, uvažavajući (8.6.87b,c), (8.6.88a,b) i (8.6.89a) dobivamo

$$\gamma_2 \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{r} = \alpha_{2z} z + j(\beta_{2x} x + \beta_{2z} z). \quad (8.6.91)$$

Uvedimo vektor prostiranja prolaznog vala, koji općenito definiramo kao

$$\boldsymbol{\gamma}_p = \mathbf{a}_x(\alpha_{2x} + j\beta_{2x}) + \mathbf{a}_y(\alpha_{2y} + j\beta_{2y}) + \mathbf{a}_z(\alpha_{2z} + j\beta_{2z}), \quad (8.6.92)$$

pa prema (8.6.91) u našem slučaju imamo

$$\boldsymbol{\gamma}_p = \gamma_2 \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_z \alpha_{2z} + j(\mathbf{a}_x \beta_{2x} + \mathbf{a}_z \beta_{2z}). \quad (8.6.93)$$

Električno polje prolaznog vala u materijalu (2) s gubicima prema (8.6.90) i (8.6.93), možemo konačno pisati kao

$$\mathbf{E}_p = E_2 e^{j\omega t - \boldsymbol{\gamma}_p \cdot \mathbf{r}} = E_2 e^{-\alpha_{2z} z + j(\omega t - \beta_{2x} x - \beta_{2z} z)}. \quad (8.6.94)$$

Magnetsko polje prolaznog vala određeno je relacijom (8.6.2f). Na temelju jednadžbe (8.6.94) možemo zaključiti:

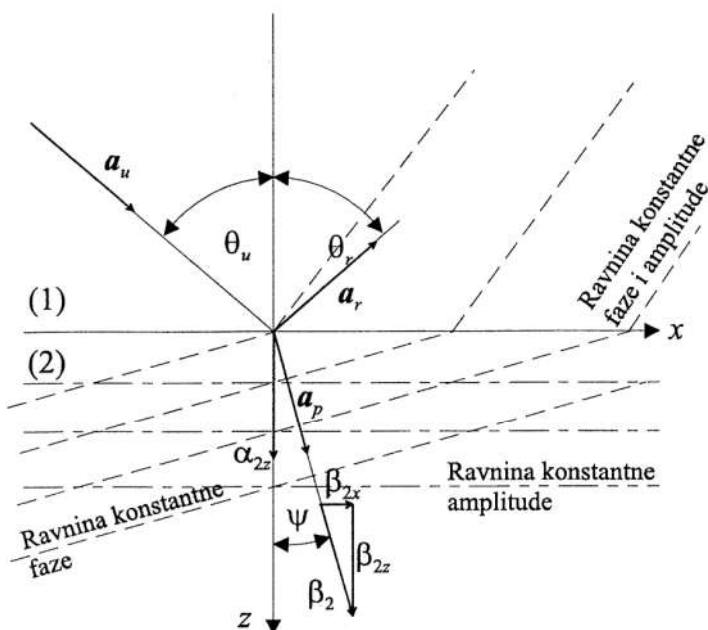
1. Prolazni val prigušuje se u smjeru z -osi, tj. okomito na graničnu ravninu S . Amplituda vala ovisi samo o dubini na koju je prošao prolazni val.
2. Ravnina konstante amplitude u materijalu (2) s gubicima definirana je jednadžbom $z = konst.$ i okomita je na z os.
3. Faza prolaznog vala giba se u smjeru $\mathbf{a}_p$, tj. i u smjeru osi x i u smjeru osi z .
4. Ravnina konstantne faze određena je jednadžbom

$$\beta_{2x} x + \beta_{2z} z = konst., \quad (8.6.95)$$

i okomita je na vektor $\mathbf{a}_p$. Kut ψ koji čine vektor normale $\mathbf{a}_z$ na graničnu ravninu S i jedinični vektor $\mathbf{a}_p$ smjera prolaznog vala u materijal (2) *istinski je (realni) kut loma* i definiran je s

$$\sin \psi = \frac{\beta_{2x}}{\sqrt{\beta_{2x}^2 + \beta_{2z}^2}}. \quad (8.6.96)$$

Odnos ravnina konstantne amplitude prema ravninama konstantne faze prolaznog vala u materijalu (2) prikazan je na slici 8.6.6.



Slika 8.6.6. Prolaz vala u materijal (2) s gubicima

5. Prolazni val je ravni *nehomogeni* val.

Iz jednadžbe (8.2.30) i kvadriranjem izraza (8.6.93) dobivamo

$$-\omega^2 \mu_2 \epsilon_2 + j \omega \mu_2 \kappa_2 = \alpha_{2z}^2 + j 2 \alpha_{2z} \beta_{2z} - \beta_{2x}^2 - \beta_{2z}^2 ,$$

a otud dobivamo dvije realne jednadžbe

$$\alpha_{2z}^2 - \beta_{2z}^2 = \beta_{1x}^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} ,$$

$$2 \alpha_{2z} \beta_{2z} = \omega \mu_2 \kappa_2 .$$

Rješavanjem tih jednadžbi izračunavamo nepoznate konstante u smjeru z-osi

$$\alpha_{2z} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{\sin^2 \theta_u}{c_1^2} \right) \left[\left(1 + \left(\frac{\kappa_2}{\omega \epsilon_2} \right)^2 \left(\frac{c_1^2}{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta_u} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2} , \quad (8.6.97a,b)$$

$$\beta_{2z} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{\sin^2 \theta_u}{c_1^2} \right) \left[\left(1 + \left(\frac{\kappa_2}{\omega \epsilon_2} \right)^2 \left(\frac{c_1^2}{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta_u} \right)^2 \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2} .$$

Faktor prostiranja prolaznog vala u izrazu (8.6.94) potpuno je određen, jer je prigušna konstanta α_{2z} izračunata u (8.6.97a), a fazne konstante β_{2x} i β_{2z} izračunate su u relacijama (8.6.89b) i (8.6.97b). Za okomit nailazak upadnog vala $\theta_u = 0$ na granicu S , jednadžbe (8.6.97a,b) reduciraju se na izračunate u relacijama (8.3.40a,b). Preostaje još da se izračuna amplituda E_2 prolaznog vala u (8.6.94) za dva slučaja različito polariziranih valova.

1. Vektor E_0 okomit na upadnu ravninu U

Za zadani vektor električnog polja upadnog vala $E_0 = a_y E_{0y}$ i upadni kut θ_u tako da bude $\theta_u < \theta_{uk}$, odredit ćemo za danu frekvenciju ω amplitudu prolaznog vala u materijal (2) prema (8.6.11c)

$$E_2 = a_y E_{2y}, \quad (8.6.98)$$

gdje je prema (8.6.17b) koeficijent transmisije

$$\tau_{\perp} = \frac{E_{2y}}{E_{0y}} = \frac{2Z_2 \cos \theta_u}{Z_2 \cos \theta_u + Z_1 \cos \theta_p}. \quad (8.6.99)$$

Kompleksni prolazni kut θ_p određen je prema (8.6.7) kao

$$\sin \theta_p = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin \theta_u, \quad (8.6.100a,b)$$

$$\cos \theta_p = \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2 \theta_u},$$

pa su za slučaj okomito polariziranog upadnog TEM vala polja prolaznog TE vala određena prema (8.6.94) i (8.6.35c) kao

$$E_p = a_y E_{0y} \frac{2Z_2 \cos \theta_u}{Z_2 \cos \theta_u + Z_1 \cos \theta_p} e^{-\alpha_{2z} z + j(\omega t - \beta_{2x} x - \beta_{2z} z)}, \quad (8.6.101a,b)$$

$$H_p = (-a_x \cos \theta_p + a_z \sin \theta_p) E_{0y} \frac{2 \cos \theta_u}{Z_2 \cos \theta_u + Z_1 \cos \theta_p} e^{-\alpha_{2z} z + j(\omega t - \beta_{2x} x - \beta_{2z} z)},$$

uz uvjet da je $\theta_u < \theta_{uk}$, tj. $\sin \theta_u < (\epsilon_2/\epsilon_1)^{1/2}$.

2. Vektor E_0 paralelan upadnoj ravnini U

Pretpostavit ćemo da je zadan vektor magnetskog polja upadnog TEM vala koji je tangencijalan na graničnu ravninu S i okomit na upadnu ravninu U , tako da je $H_0 = a_y H_{0y}$. Zadani su također upadni kut θ_u , frekvencija ω i značajke dielektrika (1) i materijala (2) s gubicima. Amplituda prolaznog vala je prema (8.6.18c)

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{a}_y H_{2y} , \quad (8.6.102)$$

pa prema (8.6.23b) ona iznosi

$$H_{2y} = \frac{2Z_1 \cos \theta_u}{Z_1 \cos \theta_u + Z_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2 \theta_u}} H_{0y} . \quad (8.6.103)$$

Vektor električnog polja prolaznog vala odredit ćemo iz relacija (8.6.2f) pomoću (8.6.103) kao

$$\mathbf{E}_2 = -(\mathbf{a}_p \times \mathbf{H}_2) Z_2 .$$

Uvrštavanjem vrijednosti za $\mathbf{H}_2$ i $\mathbf{a}_p$ dobivamo

$$\mathbf{E}_2 = (\mathbf{a}_x \cos \theta_p - \mathbf{a}_z \sin \theta_p) \frac{2Z_1 Z_2 \cos \theta_u}{Z_1 \cos \theta_u + Z_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2 \theta_u}} H_{0y} . \quad (8.6.104)$$

Konačno se prema (8.6.94) mogu pisati vektori električnog i magnetskog polja prolaznog TM vala u materijal (2) s gubicima kao

$$\mathbf{E}_p = (\mathbf{a}_x \cos \theta_p - \mathbf{a}_z \sin \theta_p) \frac{2Z_1 Z_2 \cos \theta_u}{A_1} H_{0y} e^{-\alpha_{2z} z + j(\omega t - \beta_{2x} x - \beta_{2z} z)} ,$$

$$\mathbf{H}_p = \mathbf{a}_y \frac{2Z_1 \cos \theta_u}{A_2} H_{0y} e^{-\alpha_{2z} z + j(\omega t - \beta_{2x} x - \beta_{2z} z)} ,$$

(8.6.105a – d)

$$A_1 = Z_1 \cos \theta_u + Z_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2 \theta_u} ,$$

$$A_2 = Z_1 \cos \theta_u + Z_2 \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2 \theta_u} ,$$

uz uvjet $\theta_u < \theta_{uk}$. Vrijednosti $\sin \theta_p$ i $\cos \theta_p$ određene su izrazima (8.6.100a,b).

8.6.3.1. Lom vala u dobrom vodiču

Posebno važan slučaj prolaska vala u materijal s gubicima jest kada je materijal (2) dobar vodič. Analizirat ćemo slučaj kada iz zraka sa značajkama $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$ i

$\kappa_1 = 0$, ravni homogeni TEM val nailazi na ravnu površinu kovine i *prodire u kovinu*. Uzet ćemo da kovina ima značajke $\epsilon_2 \approx \epsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$ i $\kappa_2 \neq 0$. Kovina ima $\kappa_2/\omega\epsilon_2 \gg 1$ i izrazito je dobar vodič.⁸⁹ Prema izrazima (8.3.1a,b), (8.3.2), (8.3.6) i (8.3.7a) značajke zraka koji se nalazi u prostoru (1) jesu

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0 \quad ; \quad \beta_1 = \frac{\omega}{c_1} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \, , \\ \gamma_1 &= j\beta_1 \, , \\ Z_1 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \, .\end{aligned}\tag{8.6.106a – d}$$

Iz tablice 8.3.2. slijede značajke dobrih vodiča, tj. kovina (Cu, Al itd.)

$$\begin{aligned}\alpha_2 &\approx \beta_2 \approx \sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu_0 \kappa_2} \, , \\ \gamma_2 &\approx (1+j)\beta_2 = \sqrt{\omega \mu_0 \kappa_2} e^{j\frac{\pi}{4}} \, , \\ Z_2 &\approx (1+j)\sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\kappa_2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\kappa_2}} e^{j\frac{\pi}{4}} \, .\end{aligned}\tag{8.6.107a – c}$$

Najprije ćemo izračunati realni kut loma ψ u kovini pri nailasku upadnog vala pod kutom θ_u iz zraka na površinu kovine. Prema (8.6.89b) i (8.6.97a,b) uz $\kappa_2/\omega\epsilon_2 \gg 1$ jesu

$$\begin{aligned}\beta_{2x} &= \frac{\omega}{c_1} \sin \theta_u \, , \\ \beta_{2z} &\approx \frac{\omega}{\sqrt{2}c_2} \sqrt{\frac{\kappa_2}{\omega \epsilon_2}} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \kappa_2}{2}} = \beta_2 \, , \\ \alpha_{2z} &\approx \frac{\omega}{\sqrt{2}c_2} \sqrt{\frac{\kappa_2}{\omega \epsilon_2}} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \kappa_2}{2}} = \alpha_2 \, .\end{aligned}\tag{8.6.108a – c}$$

Prigušna i fazna konstanta u smjeru osi z , tj. okomito na graničnu ravninu S u kovini (2) neovisne su o kutu upada vala. Realni kut loma dan relacijom (8.6.96) iznosi

⁸⁹ Omjer $\kappa_2/\omega\epsilon_2 \gg 1$ znači da su provodne struje puno veće od struja pomaka, pa se ove posljednje mogu zanemariti. Pogledati točku 8.3.3.2 i članak 8.3.4.

$$\sin \psi = \frac{\beta_{2x}}{\sqrt{\beta_{2x}^2 + \beta_{2z}^2}} = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sin \theta_u}{\sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \sin^2 \theta_u + \frac{1}{2} \omega \mu_0 \kappa_2}}, \quad (8.6.109a)$$

$$\sin \psi \approx \sqrt{\frac{2\omega \epsilon_0}{\kappa_2}} \sin \theta_u.$$

Budući da je $\omega \epsilon_0 / \kappa_2 \ll 1$, vidimo da je u kovini realni kut loma približno

$$\psi \approx 0, \quad (8.6.109b)$$

bez obzira na veličinu upadnog kuta θ_u . To je vrlo važno svojstvo loma vala u kovini. Kako provodnost materijala raste, a frekvencija pada ravnine konstantne faze i ravnine konstantne amplitude sve više postaju podudarne. *Prodiranje prolaznog vala u kovinu je okomito na površinu S, neovisno o upadnom kutu vala na površinu kovine.*

1. Vektor E_0 okomit na upadnu ravninu U

Zadani su električno polje upadnog vala u zraku $E_0 = a_y E_{0y}$ i upadni kut θ_u . Električno i magnetsko polje prolaznog vala u kovini su prema relacijama (8.6.101a,b)

$$E_p \approx a_y 2E_{0y} \cos \theta_u \sqrt{\frac{\omega \epsilon_0}{\kappa_2}} e^{-\alpha_2 z + j\left(\omega t - \omega \frac{x}{c_0} \sin \theta_u - \beta_2 z + \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (8.6.110a,b)$$

$$H_p \approx -a_x 2E_{0y} \cos \theta_u \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{-\alpha_2 z + j\left(\omega t - \omega \frac{x}{c_0} \sin \theta_u - \beta_2 z\right)}.$$

Ovdje su uzeti $\theta_p \approx 0$ i $\kappa_2 / \omega \epsilon_0 \gg 1$, što dobro odgovara stvarnosti u kovinama, kakve su npr. bakar i aluminij. Budući da je $\omega \epsilon_0 / \kappa_2 \ll 1$, prolazno električno polje u kovini (8.6.110a) je vrlo malog iznosa u odnosu na polje u zraku. *Magnetsko polje zaostaje za električnim u kovini za $\pi/4$. Oba polja se prigušuju s faktorom $e^{-\alpha_2 z}$ kako polje napreduje u dubinu vodiča.* Praktično, polje prodire u kovinu do dubine $3d_k$, gdje je d_k dubina prodiranja uvedena prema relaciji (8.3.95) kao

$$d_k \approx \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_2 \kappa_2}} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \kappa_2}}. \quad (8.6.111)$$

U tablici 8.3.3. izračunate su dubine prodiranja za bakar i aluminij pri različitim frekvencijama polja. No dubina prodiranja polja nije velika ni u materijalima s mnogo manjom provodnošću od one u kovinama. Npr. ako za morsku vodu uzme-mo $\kappa_2 \approx 5 \text{ S/m}$, $\epsilon_2 \approx 81 \epsilon_0$ i $\mu_2 \approx \mu_0$, dobivamo pri frekvenciji polja od 1 MHz

dubinu prodiranja 0,23 m. Polje frekvencije 1 MHz prodire u morsku vodu samo do dubine od približno 0,68 m. Realni kut loma je $\psi \approx 0$.

Srednju kompleksnu snagu koja po jedinici granične površine S prolazi iz zraka u kovinu odredit ćemo prema (8.6.73) kao

$$N_{p,sr} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^* \approx a_z 2E_{0y}^2 \cos^2 \theta_u \frac{|Z_2|}{|Z_1|^2} e^{-2\alpha_2 z} e^{j\pi/4}, \quad (8.6.112)$$

pa kroz granicu S , tj. za $z = 0$ prolazi

$$(N_{p,sr})_{z=0} \approx a_z \sqrt{2} (1+j) E_{0y}^2 \cos^2 \theta_u \frac{|Z_2|}{|Z_1|^2}. \quad (8.6.113)$$

To je gustoća kompleksne snage mjerena u W/m^2 koja prolazi kroz graničnu površinu S . *Gustoća srednje djelatne snage* koja prolazi kroz graničnu plohu S u kovinu jednaka je *realnom dijelu* u izrazu (8.6.113). *Gubitke u jedinici volumena u kovini* (2) odredit ćemo iz (8.6.112) pomoću (8.2.56) kao

$$(P_g')_{Re,sr} = -\nabla \cdot (N_p)_{Re,sr} = -\frac{\partial N_p}{\partial z} \approx 2\alpha_2 (N_p)_{Re,sr} = 2E_{0y}^2 \omega \epsilon_0 \cos^2 \theta_u e^{-2\alpha_2 z}. \quad (8.6.114)$$

Sva djelatna energija prolaznog vala, tj. realni dio energije koja prođe kroz graničnu plohu S pretvara se u kovinu u gubitke izračunate prema relaciji (8.6.114). Prolaz energije u kovinu je najveći ako je upadni kut $\theta_u = 0$, tj. ako val iz zraka nailazi okomito na površinu kovine.

2. Vektor E_0 paralelan upadnoj ravnini U

Zadani su magnetsko polje upadnog vala u zraku $\mathbf{H}_0 = a_y H_{0y}$ i upadni kut θ_u . Prema relacijama (8.6.105a,b) odredit ćemo polja prolaznog vala u kovini i budući da je $\kappa_2/\omega\epsilon_0 \gg 1$, to je $\theta_p \approx 0$ i $Z_2 \ll Z_1$ pa imamo

$$\mathbf{E}_p \approx a_x 2H_{0y} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\kappa_2}} e^{-\alpha_2 z + j\left(\omega t - \omega \frac{x}{c_0} \sin \theta_u - \beta_2 z + \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (8.6.115a,b)$$

$$\mathbf{H}_p \approx a_y 2H_{0y} e^{-\alpha_2 z + j\left(\omega t - \omega \frac{x}{c_0} \sin \theta_u - \beta_2 z\right)},$$

uz uvjet da je $\theta_u < \theta_{uk}$. To su približni izrazi za jakosti polja prolaznog vala. Treba upozoriti da amplitude polja prolaznog vala u tim jednadžbama ne ovise o kutu upada θ_u , tj. nailaska upadnog vala na površinu kovine, što dobro odgovara za kutove $\theta_u < \pi/2$. Što je upadni kut manji, to je račun točniji. U slučaju kada je upadni kut $\pi/2$, tj. kada imamo paralelni nailazak vala na granicu S , nastaje pose-

ban slučaj koji ćemo razmotriti u analizi površinskih valova.⁹⁰ Prolazni val u vodič prema (8.6.109a,b) praktično uvijek prolazi pod realnim prolaznim kutom $\psi \approx 0$, tj. giba se u smjeru osi z . *Gustoća srednje kompleksne snage* koja ulazi u vodič na njegovoj površini S , tj. za $z = 0$, iznosi prema (8.6.112)

$$(N_{p,sr})_{z=0} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^* \approx a_z \sqrt{2} (1+j) H_{0y}^2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\kappa_2}}. \quad (8.6.116)$$

Gustoća djelatne snage koja prolazi kroz granicu S jednaka je realnom dijelu izraza (8.6.116). *Gustoća kompleksne snage* koju nosi prolazni val je prema (8.6.112) i (8.6.116)

$$N_{p,sr} \approx a_z \sqrt{2} (1+j) H_{0y}^2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\kappa_2}} e^{-2\alpha_2 z}, \quad (8.6.117)$$

a gubici u jedinici volumena u vodiču prema (8.6.114) iznose

$$(P_g')_{Re,sr} = 2H_{0y}^2 \omega \mu_0 e^{-2\alpha_2 z} = \frac{1}{2} \kappa_2 E_{2x}^2 e^{-2\alpha_2 z}. \quad (8.6.118)$$

Budući da je $\kappa_2/\omega\epsilon_0 \gg 1$, te $Z_2 \ll Z_1$ u kovinama kao što su npr. bakar i aluminij, to je iz relacija (8.6.115a,b) vidljivo da je amplituda magnetskog polja prolaznog vala H_{2y} u kovini na graničnoj plohi S , koja je tangencijalna na tu plohu, jednaka dvostrukoj amplitudi magnetskog polja upadnog vala na površini kovine, tj.

$$H_{2y} = 2H_{0y} \quad \text{za} \quad z = 0. \quad (8.6.119)$$

Amplituda električnog polja prolaznog vala je pak *vrlo mala* u odnosu na amplitudu električnog polja upadnog vala, tj.

$$E_{2x} = 2H_{0y} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\kappa_2}} = H_{2y} |Z_2|, \quad (8.6.120)$$

budući da je $|Z_2| \ll |Z_1|$. Osim toga ona je uvijek tangencijalna na graničnu plohu S (ima samo x -komponentu), neovisno o upadnom kutu θ_u upadnog vala. Polje prolaznog vala u kovini vrlo brzo se priguši. Dubina prodiranja polja (8.6.111) u kovinama je vrlo mala. Sva djelatna snaga koja uđe kroz graničnu plohu S u kovinu pretvara se u gubitke topline u materijalu. Elektromagnetska energija se, dakle, pretvori u toplinu u tankom sloju uz površinu kovine. To je poznata pojava

⁹⁰ Pogledati točku 8.6.4.1.

površinskog učinka.⁹¹ Energija se u tankom sloju vodiča prenosi difuzijom a ne više valom. Gustoća provodne struje $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}_p$ pojavi se u vodiču kao posljedica prolaznog polja $\mathbf{E}_p$. Smjer provodne struje je u smjeru osi x , tj. u smjeru nailaska upadnog vala.

8.6.4. Odbijanje valova od vodljive površine

Razmatranja u ovom članku nastavak su razmatranja koja smo započeli u prethodnom članku 8.6.3. Zbog zamršenosti analize pretpostavili smo da je materijal (1) idealni dielektrik, tj. materijal bez gubitka. Najčešće će to biti zrak ili vakuum. Za materijal (2) smo pretpostavili da je materijal s gubicima, tj. da je vodljiv, a posebno smo u točki 8.6.2.1. analizirali polje kada smo za materijal (2) pretpostavili da je dobar vodič, tj. nemagnetska kovina. U prethodnom članku analizirali smo *samo* polje u materijalu (2), tj. u vodiču. U ovom članku analizirat ćemo polje *samo* u dielektriku (1), pošto smo upoznali polje u vodiču. Pretpostavit ćemo da su zadana polja upadnog vala $\mathbf{E}_u$ i $\mathbf{H}_u$ i smjer prostiranja $\mathbf{a}_u$, tj. upadni kut θ_u prema slici 8.6.6. Zadane su i značajke *dielektrika* (1) $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$ i $\kappa_1 = 0$, kao i materijala (2) s gubicima za koji pretpostavljamo da je *kovina* s $\epsilon_2 \approx \epsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$ i $\kappa_2 \neq 0$. Frekvencija vala je takva da je $\kappa_2/\omega\epsilon_2 \gg 1$, tj. da u kovini možemo zanemariti struje pomaka. Konstante prostiranja i impedancije oba materijala određene su s (8.6.106a – d) i (8.6.107a – c) kao

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \quad ; \quad \beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \quad ; \quad \gamma_1 = j\beta_1 \quad , \\ Z_1 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad , \\ \alpha_2 &\approx \beta_2 \approx \sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu_0\kappa_2} \quad ; \quad \gamma_2 \approx (1+j)\beta_2 \approx \sqrt{\omega\mu_0\kappa_2}e^{j\frac{\pi}{4}} \quad , \\ Z_2 &\approx (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\kappa_2}} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\kappa_2}}e^{j\frac{\pi}{4}} \quad . \end{aligned} \tag{8.6.121a – g}$$

Omjer impedancija tih dvaju materijala jest

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \sqrt{\frac{\omega\epsilon_0}{\kappa_2}}e^{j\frac{\pi}{4}} = v e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}v \quad , \tag{8.6.122a}$$

gdje smo s v

⁹¹ Pogledati članak 8.3.4.

$$\left| \frac{Z_2}{Z_1} \right| = \sqrt{\frac{\omega \epsilon_0}{\kappa_2}} = v \ll 1, \quad (8.6.122b)$$

označili omjer modula impedancija.

1. Vektor E_0 okomit na upadnu ravninu U

Zadani su $E_0 = a_y E_{0y}$ i θ_u (uz uvjet da je $\theta_u < \theta_{uk}$), pa je prema (8.6.14a) t.j. (8.6.17a) i (8.6.77a) koeficijent refleksije

$$\rho_{\perp} = -r_{\perp} e^{j2\delta_{\perp}} = \frac{E_{1y}}{E_{0y}} = -\frac{Z_1 \cos \theta_p - Z_2 \cos \theta_u}{Z_1 \cos \theta_p + Z_2 \cos \theta_u}, \quad (8.6.123)$$

gdje se $r_{\perp}$ može mijenjati u granicama $-1 \leq r_{\perp} \leq 1$. Budući da je prema (8.6.7) i (8.6.122b)

$$\left| \frac{\sin \theta_p}{\sin \theta_u} \right| = \left| \frac{1+j}{\sqrt{2}} v \right| \ll 1, \quad (8.6.124)$$

to zbog $|\sin \theta_p| = v \sin \theta_u \ll 1$ možemo uzeti $\cos \theta_p \approx 1$. Uvrstimo li to u (8.6.123) možemo primijeniti razvoj u Mac Laurinov red, pa dobivamo

$$\rho_{\perp} \approx -\frac{1 - \frac{1+j}{\sqrt{2}} v \cos \theta_u}{1 + \frac{1+j}{\sqrt{2}} v \cos \theta_u} \approx -\left[1 - 2 \frac{1+j}{\sqrt{2}} v \cos \theta_u \right] \approx -r_{\perp} e^{j2\delta_{\perp}},$$

i konačno

$$\begin{aligned} r_{\perp} &\approx 1 - \sqrt{2} v \cos \theta_u, \\ \tan 2\delta_{\perp} &\approx -\sqrt{2} v \cos \theta_u. \end{aligned} \quad (8.6.125a,b)$$

Amplituda polja reflektiranog vala od površine kovine u dielektriku (1) je kompleksna i iznosi

$$E_1 \approx -a_y E_{0y} (1 - \sqrt{2} v \cos \theta_u) e^{j2\delta_{\perp}} \approx -a_y E_{0y} (1 - a) e^{j2\delta_{\perp}}, \quad (8.6.126)$$

gdje je

$$a = \sqrt{2} v \cos \theta_u = \sqrt{\frac{2\omega \epsilon_0}{\kappa_2}} \cos \theta_u, \quad (8.6.127)$$

i vrlo je mala veličina. Ako (8.6.80a) primijenimo u ovom slučaju, tada pomoću (8.6.2a) za *totalno električno polje* u dielektriku (1) dobivamo

$$\mathbf{E}_{1T} = \mathbf{E}_u + \mathbf{E}_r = \mathbf{a}_y E_{0y} e^{j(\omega t - \beta_{1x}x - \beta_{1z}z)} - \mathbf{a}_y E_{0y} (1-a) e^{j(\omega t - \beta_{1x}x + \beta_{1z}z + 2\delta_\perp)} . \quad (8.6.128a)$$

To se može prikazati i kao

$$\mathbf{E}_{1T} = -\mathbf{a}_y j(1-a) E_{0y} \sin(\beta_{1z}z + \delta_\perp) e^{j(\omega t - \beta_{1x}x + \delta_\perp)} + \mathbf{a}_y a E_{0y} e^{j(\omega t - \beta_{1x}x - \beta_{1z}z)} . \quad (8.6.128b)$$

Tako smo dobili da se totalno električno polje u (8.6.128b) u dielektriku (1) sastoji od dva dijela. Prvi dio pripada nehomogenom ravnom valu koji se giba u smjeru $+x$ -osi. Drugi dio pripada homogenom ravnom valu koji se giba u smjeru $\mathbf{a}_u$. Budući da je u kovinama $a \ll 1$, to ovaj drugi dio možemo u prvoj aproksimaciji zanemariti, pa imamo

$$\mathbf{E}_{1T} \approx -\mathbf{a}_y j(1-a) 2E_{0y} \sin(\beta_{1z}z + \delta_\perp) e^{j(\omega t - \beta_{1x}x + \delta_\perp)} . \quad (8.6.129)$$

Totalno magnetsko polje u dielektriku (1) odredit ćemo pomoću (8.6.1a,b), (8.6.2.b,d) i (8.6.129) kao

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{1T} \approx & -\mathbf{a}_x (1-a) \frac{2E_{0y}}{Z_1} \cos \theta_u \cos(\beta_{1z}z + \delta_\perp) e^{j(\omega t - \beta_{1x}x + \delta_\perp)} \\ & - \mathbf{a}_z j(1-a) \frac{2E_{0y}}{Z_1} \sin \theta_u \sin(\beta_{1z}z + \delta_\perp) e^{j(\omega t - \beta_{1x}x + \delta_\perp)} , \end{aligned} \quad (8.6.130)$$

uz uvjet da je $\theta_u < \theta_{u,k}$, tj. $\sin \theta_u < 1$. U (8.6.130) zanemarili smo članove s vrlo malom amplitudom kao i kod električnog polja. U realnom području trenutne vrijednosti električnog i magnetskog polja dobivamo iz relacija (8.6.129) i (8.6.130) kao

$$\begin{aligned} E_{1T,Re} & \approx \mathbf{a}_y (1-a) 2E_{0y} \sin(\beta_{1z}z + \delta_\perp) \sin(\omega t - \beta_{1x}x + \delta_\perp) , \\ \mathbf{H}_{1T,Re} & \approx -\mathbf{a}_x (1-a) \frac{2E_{0y}}{Z_1} \cos \theta_u \cos(\beta_{1z}z + \delta_\perp) \cos(\omega t - \beta_{1x}x + \delta_\perp) - \\ & - \mathbf{a}_z (1-a) \frac{2E_{0y}}{Z_1} \sin \theta_u \sin(\beta_{1z}z + \delta_\perp) \sin(\omega t - \beta_{1x}x + \delta_\perp) . \end{aligned} \quad (8.6.131a,b)$$

Tijek srednje kompleksne snage po jedinici površine u elektromagnetskom polju u dielektriku (1) određen je kompleksnim Poyntingovim vektorom

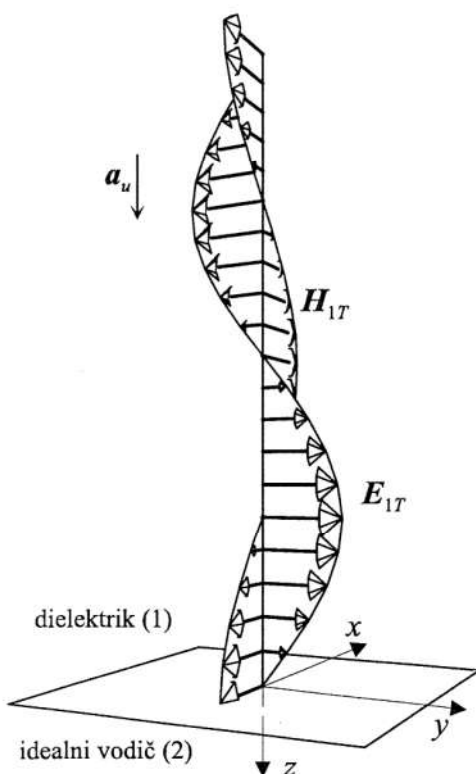
$$\begin{aligned} N_{sr} \approx \frac{1}{2} \mathbf{E}_{1T} \times \mathbf{H}_{1T}^* \approx & -\mathbf{a}_z j(1-2a) \frac{E_{0y}^2}{Z_1} \cos \theta_u \sin 2(\beta_{1z}z + \delta_\perp) - \\ & - \mathbf{a}_x (1-2a) \frac{E_{0y}^2}{Z_1} \sin \theta_u [1 - \cos 2(\beta_{1z}z + \delta_\perp)] . \end{aligned} \quad (8.6.132)$$

Budući da smo zanemarili određene dijelove polja u izrazima (8.6.129) i (8.6.130) koje smo koristili u izrazu (8.6.132), to je i taj izraz za snagu u dielektriku (1) približan i pokazuje da u dielektriku uz granicu s kovinom postoji gibanje srednje i djelatne i jalove snage elektromagnetskog polja. Jalova srednja snaga giba se u smjeru osi z , dok se djelatna snaga giba uz graničnu površinu S , tj. u smjeru osi x . Gustoće tijeka i djelatne i jalove snage u dielektriku (1) ovisne su o odrednici z , tj. o udaljenosti od granične plohe S . U slučaju da dielektrik (1) graniči s "idealnim vodičem" ($\kappa \rightarrow \infty$, $a = 0$, $\delta_{\perp} = 0$), jednadžbe (8.6.129), (8.6.130) i (8.6.132) postaju jednostavnije i potpuno točne. Kada upadni val nailazi na površinu idealnog vodiča okomito, tj. da je $\theta_u = 0$, gornji izrazi poprimaju vrijednosti

$$E_{1T} = -a_y j 2 E_{0y} \sin(\beta_1 z) e^{j\omega t} \quad ; \quad H_{1T} = -a_x \frac{2 E_{0y}}{Z_1} \cos(\beta_1 z) e^{j\omega t} , \quad (8.6.133a - c)$$

$$N_{sr} = -a_z j \frac{E_{0y}^2}{Z_1} \sin(2\beta_1 z) .$$

To je "čisti" stojni val duž osi z koji je prikazan na slici 8.6.7.



Slika 8.6.7. Raspodjela totalnog polja u dielektriku pri nailasku TEM upadnog vala pod kutom $\theta_u = 0$ na granicu dielektrik – vodič (stojni val)

2. Vektor E_0 paralelan s upadnom ravninom U

Zadani su $H_0 = a_y H_{0y}$ i θ_u , a prema (8.6.24a) i (8.6.122a,b) može se odrediti koeficijent refleksije

$$\rho_{||} = -r_{||} e^{j2\delta_{||}} = \frac{E_{1x}}{E_{0x}} = \frac{Z_1 \cos \theta_u - Z_0 \cos \theta_p}{Z_1 \cos \theta_u + Z_2 \cos \theta_p}, \quad (8.6.134)$$

gdje je $\cos \theta_p \approx 1$, a $r_{||}$ se može mijenjati u granicama $-1 \leq r_{||} \leq +1$. Uređenjem (8.6.134) dobivamo

$$r_{||} \approx \frac{\cos \theta_u - a}{\cos \theta_u + a}, \quad (8.6.135a,b)$$

$$\tan 2\delta_{||} \approx -\sqrt{2}v \frac{1}{\cos \theta_u},$$

gdje je veličina a dana izrazom (8.6.127). Za male kutove upada θ_u može se približno računati ($\cos \theta_u \approx 1$) s

$$r_{||} \approx 1 - \frac{a}{\cos \theta_u} \approx 1 - b \quad ; \quad b = \sqrt{\frac{2\omega \varepsilon_0}{\kappa_2}}. \quad (8.6.135c,d)$$

Totalno polje u dielektriku (1) određujemo na sličan način kao u prethodnom slučaju, pa dobivamo

$$\begin{aligned} H_{1T} = H_u + H_r = a_y H_{0y} e^{j(\omega t - \beta_{1x}x - \beta_{1z}z)} + \\ + a_y H_{0y} (1 - b) e^{j(\omega t - \beta_{1x}x + \beta_{1z}z + 2\delta_{||})}, \end{aligned} \quad (8.6.136a)$$

što nakon uređenja daje

$$H_{1T} \approx a_y (1 - b) 2H_{0y} \cos(\beta_{1z}z + \delta_{||}) e^{j(\omega t - \beta_{1x}x + \delta_{||})} \quad (8.6.136b)$$

Električno polje je tada

$$\begin{aligned} E_{1T} \approx -a_x j(1 - b) 2H_{0y} Z_1 \cos \theta_u \sin(\beta_{1z}z + \delta_{||}) e^{j(\omega t - \beta_{1x}x + \delta_{||})} - \\ - a_z (1 - b) 2H_{0y} Z_1 \sin \theta_u \cos(\beta_{1z}z + \delta_{||}) e^{j(\omega t - \beta_{1x}x + \delta_{||})}, \end{aligned} \quad (8.6.137)$$

uz uvjet da je $\theta_u < \theta_{uk}$. Gustoća tijeka kompleksne snage elektromagnetskog polja u dielektriku (1) jest

$$\begin{aligned} N_{sr} = \frac{1}{2} E_{1T} \times H_{1T}^* = -a_x j(1 - 2b) H_{0y}^2 Z_1 \cos \theta_u \sin 2(\beta_{1z}z + \delta_{||}) + \\ + a_z (1 - 2b) H_{0y}^2 Z_1 \sin \theta_u [1 + \cos 2(\beta_{1z}z + \delta_{||})]. \end{aligned} \quad (8.6.138)$$

Nakon analize provedene u ovom članku možemo zaključiti sljedeće:

1. Kao i u slučaju *totalne refleksije* na granici dva dielektrika, tako i u ovom slučaju refleksije od površine kovine, dvije različito polarizirane komponente vala reflektiraju se u skladu s različitim zakonima. Posljedica toga jest da će upadni val, čiji smjer polarizacije nije ni okomit ni paralelan s upadnom ravninom, biti *reflektiran eliptički polariziran*.
2. Koeficijenti refleksije kovina i u slučaju okomite i u slučaju paralelne polarizacije razlikuju se malo od -1 , tj. $\rho \approx -1$, čak i kod najviših radiofrekvencija. Praktički su neovisni i o upadnom kutu θ_{in} .
3. Kod magnetskih kovina, kao što su željezo ili čelik, provodnost željeza je i do deset puta manja od provodnosti bakra, ali je relativna permeabilnost i do tisuću puta veća. Usprkos tome koeficijent refleksije i dalje je vrlo blizu -1 .
4. Rezultati mjerenja Hagena i Rubensa⁹² 1903. godine potvrdili su kod analiza refleksije valova od površine kovina da je *makroskopska elektromagnetska teorija* valjana za sve valne duljine veće od oko $10 \mu\text{m}$ ili za sve frekvencije manje od oko 10^4 GHz.
5. Temeljne formule i pristup analizi prikazan u ovom članku za slučaj refleksije radio i mikrovalova od površine vodiča, mogu se primijeniti i za analizu prostiranja valova iznad morske površine i zemlje ($\kappa_2/\omega\epsilon \ll 1$). No rezultati te analize bit će potpuno drugog reda. Linearano polarizirani upadni val, bilo kojeg smjera polarizacije, bit će i u slučaju refleksije od površine mora, jezera i zemlje eliptički polariziran.
6. Analiza prostiranja valova na granici dvaju materijala, od kojih su oba s gubicima, dosta je zamršena i zamorna.⁹³ Opća slika nije tako pregledna, a točniji proračun kvantitativnih odnosa zahtijeva primjenu računala. U nastavku ćemo primijeniti rezultate ovih analiza za proučavanje površinskih valova.

8.6.4.1. Površinski valovi

Obradit ćemo poseban slučaj nailaska ravnog TEM vala iz (idealnog) dielektrika (1) na granicu S s materijalom (2) koji je izrazito dobar vodič (kovina), uz uvjet da *nema refleksije vala od vodljive površine S* . To je za tehničke primjene vrlo zanimljiva zadaća. Analizu ćemo temeljiti na rezultatima dobivenim u člancima 8.6.3. i 8.6.4., te u točki 8.6.3.1. U njima smo do sada analizirali totalna polja i prostiranje vala samo u jednom materijalu uz granicu dielektrik – vodič. Budući da su odnosi uz takve granice zamršeni, učinjena su bitna približenja da bi se analiza pojednostavnila, pa su dobivene aproksimativne relacije za odnose među poljima.

U ovom posebnom slučaju, uz uvjet da nema refleksije upadnog vala u dielektriku

⁹² Pogledati J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

⁹³ Podrobnija analiza i interpretacija rezultata za slučaj nailaska vala na granicu dva vodljiva materijala s gubicima dana je npr. u R.B. Adler, L.J. Chu, R.M. Fano, *Electromagnetic Energy Transmission and Radiation*, John Wiley, New York, 1960.

(1) od vodljive granične površine S , analizirat ćemo totalna polja u oba materijala. Neka je zbog jednostavnosti dielektrik (1) zrak sa značajkama $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$ i $\kappa_1 = 0$. Materijal (2) je izrazito dobar vodič, tj. *kovina* u kojoj možemo zanemariti struje poma-ka u odnosu na provodne struje, tj. $\kappa_2/\omega\epsilon_0 \gg 1$. Značajke materijala (2) su $\epsilon_2 \approx \epsilon_0$, $\mu_2 \approx \mu_0$ i $\kappa_2 \neq 0$. Valne konstante i impedancije oba materijala određene su izrazima (8.6.121a – g). Omjer valnih impedancija tih dvaju materijala dan je u (8.6.122a) kao

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \sqrt{\frac{\omega\epsilon_0}{\kappa_2}} e^{j\pi/4}, \quad (8.6.139)$$

a omjer valnih konstanti slijedi iz (8.6.121c,f)

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{\omega\epsilon_0}{\kappa_2}} e^{j\pi/4}. \quad (8.6.140)$$

Vidimo da je $Z_2/Z_1 = \gamma_1/\gamma_2 \ll 1$. Pretpostavimo da je vektor $\mathbf{E}_0$ paralelan upadnoj ravnini U . Uz polarizaciju upadnog vala paralelnu upadnoj ravnini, zadan je vektor magnetskog polja $\mathbf{H}_0 = \mathbf{a}_y H_{0y}$, prema slici 8.6.6, i frekvencija polja ω . Nas zanima pod kojim uvjetima, točnije pod kojim upadnim kutom θ_u mora upadni val naići na granicu da ne bude refleksije vala od te granice. Drugim riječima, tada je koeficijent refleksije prema relaciji (8.6.134) jednak nula, tj.

$$\rho_{||} = \frac{Z_2 \cos \theta_p - Z_1 \cos \theta_u}{Z_2 \cos \theta_p + Z_1 \cos \theta_u} = 0. \quad (8.6.141)$$

To će biti u slučaju da je brojnik u (8.6.141) jednak nula, tj.

$$\cos \theta_u = \frac{Z_2}{Z_1} \cos \theta_p. \quad (8.6.142)$$

Istovremeno prema Snellovu zakonu (8.6.7) vrijedi omjer

$$\sin \theta_p = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin \theta_u. \quad (8.6.143)$$

Te relacije vode nas općenito prema kompleksnom upadnom kutu θ_u što je matematički moguće. U našem slučaju kada je materijal (2) kovina, moguće je to znatno pojednostavniti. Tako prema (8.6.109b) imamo $\psi \approx 0$, pa približno možemo uzeti da je i $\theta_p \approx 0$. Konačno iz (8.6.139) i (8.6.142) dobivamo da je $\cos \theta_u \ll 1$, tj. da je približno

$$\theta_u \approx \frac{\pi}{2}. \quad (8.6.144)$$

To rješenje zadovoljava i relaciju (8.6.143). Dakle, *uvjet da ne bude nikakve refleksije upadnog vala od površine kovine* ($\rho_{||} = 0$) *jest da upadni val nailazi u dielektriku (1) približno paralelno s granicom S, tj. da je $\theta_u \approx 90^\circ$.* Preostaje još da odredimo iznose totalnih polja u dielektriku (1) i u kovini (2). Najprije ćemo odrediti totalno polje u kovini. To je polje prolaznog vala u kovinu. No nećemo ga računati prema relacijama (8.6.115a,b), gdje su uvedena prevelika zanemarenja. Zato ćemo ga izračunati pomoću relacija (8.6.105a,b), uvrštavajući $\theta_p \approx 0$ i $\theta_u \approx \pi/2$

$$E_{2T} \approx \left[a_x Z_2 - a_z \frac{Z_2^2}{Z_1} \right] H_{0y} e^{-\alpha_2 z + j(\omega t - \beta_2 z)} .$$

Konačno možemo izraziti totalno polje kao prolazni val u kovini koji se giba u smjeru $+z$ osi

$$E_{2T} \approx \left[a_x \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\kappa_2}} e^{j\pi/4} - a_z \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\kappa_2} e^{j\pi/2} \right] H_{0y} e^{-\alpha_2 z + j(\omega t - \beta_2 z)} , \quad (8.6.145a,b)$$

$$H_{2T} \approx H_p = a_y H_{0y} e^{-\alpha_2 z + j(\omega t - \beta_2 z)} .$$

Totalno polje u kovini prigušuje se kako val prodire u dubinu kovine. To prigušenje je vrlo izraženo, a dubina prodiranja je dana u relaciji (8.6.111). Valna duljina je vrlo mala i dana u (8.3.96). *Polje u kovini je kvazistatičko* i potisnuto uz samu površinu kovine S. Električno polje ima i E_{2z} komponentu, koja je međutim mnogo manja od E_{2x} komponente pa je možemo zanemariti. Uz to su i fazni pomaci tih dviju komponenata električnog polja u kovini različiti. *Posljedica E_{2x} komponente električnog polja su provodne struje u kovini*, čija je gustoća

$$J_2 \approx a_x \kappa_2 E_{2x} \approx a_x (1+j) \sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu_0 \kappa_2} H_{0y} e^{-\alpha_2 z + j(\omega t - \beta_2 z)} . \quad (8.6.146)$$

Struja u kovini očito je usredotočena uz površinu kovine i teče u smjeru $+x$ osi, tj u smjeru prostiranja upadnog vala u dielektriku. To je poznata pojava površinskog učinka u kovini.⁹⁴

Preostaje da odredimo totalno polje u dielektriku (1), tj. u zraku uz površinu kovine. Polje u dielektriku (1) je polje upadnog vala, jer je prema (8.6.141) $\rho_{||} = 0$, tj. nema reflektiranog vala. Iz relacije (8.6.136a) slijedi magnetsko polje u dielektriku kao

$$H_{1T} \approx H_u \approx a_y H_{0y} e^{j(\omega t - \beta_1 x)} . \quad (8.6.147a)$$

⁹⁴ Pogledati članak 8.3.4.

Iz (8.6.1a) i (8.6.2b) može se pomoću (8.6.147a) izračunati električno polje u dielektriku (1) kao

$$\mathbf{E}_{1T} = \left[\mathbf{a}_x \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\kappa_2}} e^{j\frac{\pi}{4}} - \mathbf{a}_z \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \right] H_{0y} e^{j(\omega t - \beta_1 x)} . \quad (8.6.147b)$$

Totalno polje u dielektriku je neprigušeni, tj. homogeni ravni TM val, koji se giba duž +x osi, tj. paralelno provodnoj graničnoj ravnini S. Taj val ima dvije komponente električnog polja E_{1x} i E_{1z} . Komponenta E_{1x} je longitudinalna komponenta polja i tangencijalna na granicu S. Ona je po iznosu mnogo manja od E_{1z} , tj. $|E_{1x}| \ll |E_{1z}|$. Na graničnoj površini S ona pridonosi tijeku kompleksne elektromagnetske snage u kovinu

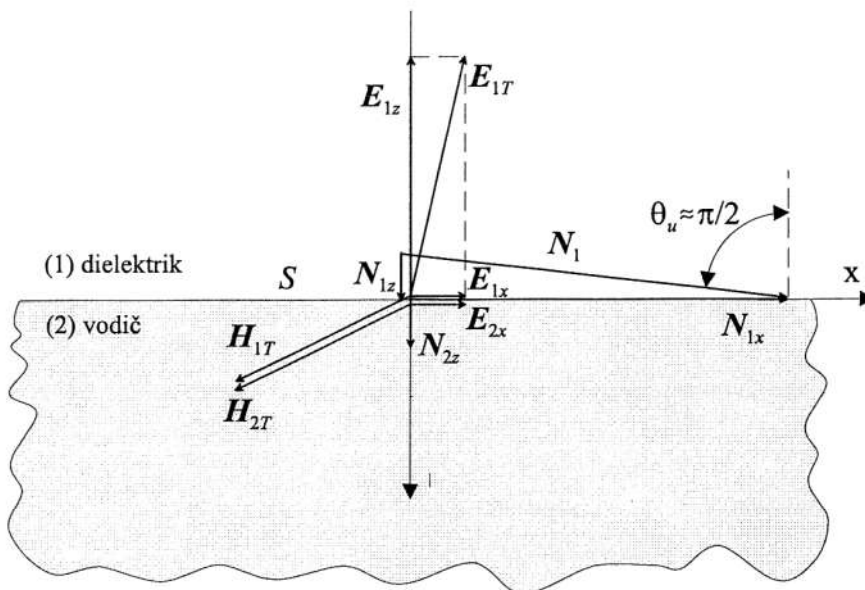
$$N_{1z} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_x E_{1x} \times \mathbf{a}_y H_{1y}^* = \mathbf{a}_z \frac{(1+j)}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\kappa_2}} H_{0y}^2 . \quad (8.6.148)$$

Realni dio od (8.6.148) služi za pokrivanje Jouleovih gubitaka u kovini koji nastaju zbog tijeka struje (8.6.146).

Komponenta E_{1z} je mnogo većeg modula i služi za prijenos elektromagnetske snage valom koji se giba uz površinu kovine. Gustoća tijeka elektromagnetske snage uz površinu kovine u dielektriku jest

$$N_{1x} = \frac{1}{2} (-\mathbf{a}_z E_{1z} \times \mathbf{a}_y H_{1y}^*) = \mathbf{a}_x \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{0y}^2 . \quad (8.6.149)$$

Ta snaga je u usporedbi s N_{1z} puno većeg iznosa, realna je, i giba se u smjeru tijeka struje u vodiču. Odnosi su prikazni na slici 8.6.8.

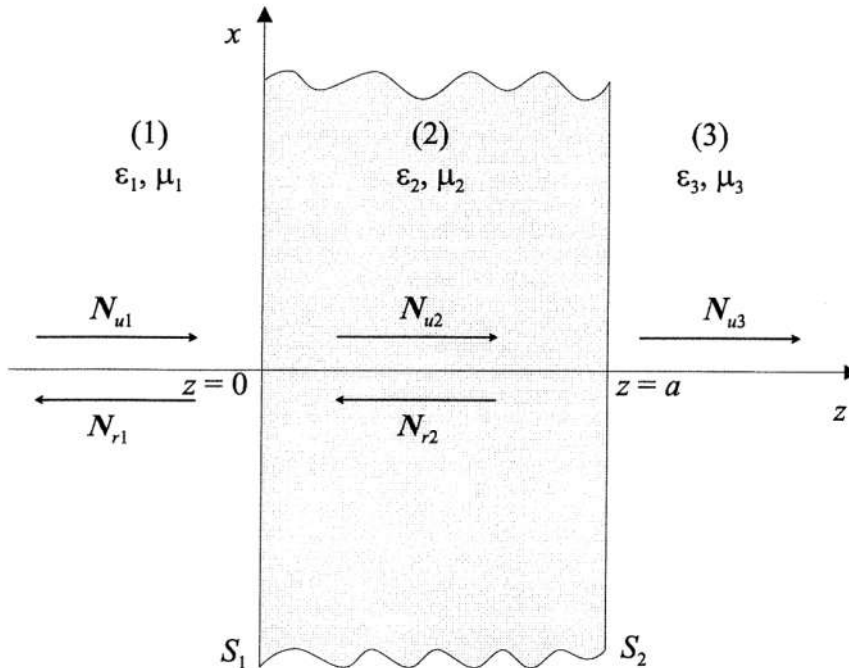


Slika 8.6.8. Prostiranje površinskog TM vala uz površinu vodiča

Budući da se val giba uz površinu vodiča (bez refleksije) i budući da se energija prenosi u dielektriku uz površinu vodiča, takav val nazivamo *površinski val*. Površinski valovi su posebno važni za prijenos elektromagnetske energije i signala vodičima. Taj površinski val je homogeni TM ravni val. Zadamo li upadni val tako da je E_0 polariziran okomito na upadnu ravninu U , sličnom analizom dobit ćemo TE površinski val.

8.6.5. Okomit nailazak vala na više dielektričkih slojeva

Razmotrit ćemo slučaj nailaska vala na dvije usporedne granice između tri (idealna) dielektrika kao što je prikazano na slici 8.6.9.



Slika 8.6.9. Odbijanje i prolaz vala na granicama između tri dielektrika

Pretpostavit ćemo da se sinusni homogeni ravni TEM val N_u prostire kroz dielektrik (1) i da nailazi *okomito* ($\theta_u = 0$) na granicu S_1 . Zadaću možemo analizirati tako da promatramo beskonačni niz uzastopnih refleksija od S_1 i S_2 . Tako se upadni val dijeli u odbijeni dio i u dio koji prolazi kroz granicu S_1 . Dio koji prođe u dielektrik (2) opet na granici S_2 djelomično prolazi u dielektrik (3), a djelomice se odbija nazad u dielektrik (2) i putuje do granice S_1 . Tu na granici S_1 dijelom prolazi u dielektrik (1), a djelomice se odbija nazad u dielektrik (2) i tako redom dalje do unedogled.

Ovaj se postupak može zaobići tako da se promatra konačno cjelovito stacionarno stanje. Zato pretpostavimo da su poznate značajke za sva tri dielektrika $\epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2, \mu_2$ i ϵ_3, μ_3 . Dielektrici su bez gubitaka, tj. $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$. Impedancije i fazne konstante su prema (8.6.106a – d) dane s

$$Z_n = \sqrt{\frac{\mu_n}{\epsilon_n}} \quad ; \quad \beta_n = \omega \sqrt{\mu_n \epsilon_n} \quad ; \quad n = 1, 2, 3. \quad (8.6.150a, b)$$

Zadaću ćemo postaviti tako da za zadanu amplitudu E_0 upadnog vala, frekvenciju ω i upadni kut $\theta_u = 0$ treba odrediti amplitude električnog polja prolaznog E_3 i reflektiranog E_1 vala. Napišimo jednadžbe direktnih i inverznih valova u sva tri dielektrika. Tako imamo u dielektriku (1)

$$\begin{aligned} E_{u1} &= E_0 e^{j(\omega t - \beta_1 z)} & ; & & H_{u1} &= \frac{E_{u1}}{Z_1} , \\ E_{r1} &= E_1 e^{j(\omega t + \beta_1 z)} & ; & & H_{r1} &= -\frac{E_{r1}}{Z_1} , \end{aligned} \quad (8.6.151a - d)$$

u dielektriku (2)

$$\begin{aligned} E_{u2} &= E_2^+ e^{j(\omega t - \beta_2 z)} & ; & & H_{u2} &= \frac{E_{u2}}{Z_2} , \\ E_{r2} &= E_2^- e^{j(\omega t + \beta_2 z)} & ; & & H_{r2} &= -\frac{E_{r2}}{Z_2} , \end{aligned} \quad (8.6.152a - d)$$

i u dielektriku (3)

$$E_{u3} = E_3 e^{j(\omega t - \beta_3 z)} & ; & H_{u3} = \frac{E_{u3}}{Z_3} . \quad (8.6.153a,b)$$

Potom ćemo postaviti granične uvjete kontinuiteta tangencijalnih komponenti električnih i magnetskih polja na granici $S_1 (z = 0)$.

$$\begin{aligned} E_{u1} + E_{r1} &= E_{u2} + E_{r2} & ; & & E_0 + E_1 &= E_2^+ + E_2^- , \\ H_{u1} + H_{r1} &= H_{u2} + H_{r2} & ; & & \frac{E_0 - E_1}{Z_1} &= \frac{E_2^+ - E_2^-}{Z_2} , \end{aligned} \quad (8.6.154a - d)$$

i na granici $S_2 (z = d)$

$$\begin{aligned} E_{u2} + E_{r2} &= E_{u3} & ; & & E_2^+ e^{-j\beta_2 d} + E_2^- e^{+j\beta_2 d} &= E_3 e^{-j\beta_3 d} , \\ H_{u2} + H_{r2} &= H_{u3} & ; & & \frac{E_2^+ e^{-j\beta_2 d} - E_2^- e^{+j\beta_2 d}}{Z_2} &= \frac{E_3 e^{-j\beta_3 d}}{Z_3} . \end{aligned} \quad (8.6.155a - d)$$

Uvedemo li prema (8.6.26a) koeficijente refleksije na granicama S_1 i S_2 imamo

$$\rho_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad ; \quad \rho_{23} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} . \quad (8.6.156a,b)$$

Konačno su amplitude reflektiranog vala u dielektriku (1) i prolaznog vala u dielektriku (3) određene iz graničnih uvjeta (8.6.154b,d) i (8.6.155b,d) kao

$$E_1 = \frac{\rho_{12} + \rho_{23} e^{-j2\beta_2 d}}{1 + \rho_{12} \rho_{23} e^{-j2\beta_2 d}} E_0 ,$$

$$E_3 = \frac{1}{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right)} \frac{4 e^{-j(\beta_2 - \beta_3)d}}{1 + \rho_{12} \rho_{23} e^{-j2\beta_2 d}} E_0 . \quad (8.6.157a,b)$$

Proračun višeslojnih refleksija je složen i zahtijeva upotrebu računala. Zanimljiv je slučaj kada uopće nema odbijenog vala u dielektriku (1), tj. kada je u jednadžbi (8.6.157a) $E_1 = 0$. To se postiže tako da debljina dielektričnog sloja (2) bude

$$d = \frac{\lambda_2}{4} = \frac{\frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_2}}}{4} = \frac{2\pi}{4\beta_2} , \quad (8.6.158)$$

budući da je u tom slučaju

$$e^{-j2\beta_2 d} = e^{-j\pi} = -1 .$$

Osim toga treba biti $\rho_{12} = \rho_{23}$, što se postiže ako je ϵ_2 geometrijska sredina od ϵ_1 i ϵ_3 . Prema tome, u centimetarskom i milimetarskom području valnih duljina (tj. za frekvencije od 3 do 300 GHz) može se umetanjem između dva dielektrika (1) i (3) dielektričnog sloja (2), debljine $\lambda_2/4$ i dielektričnosti

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_3} ,$$

postići da nema nikakve refleksije vala.

8.7. PROSTIRANJE VOĐENIH RAVNIH VALOVA

U prethodnim odjeljcima ovog poglavlja studirali smo prostiranje elektromagnetskih ravnih valova u neograničenim ili u poluograničenim prostorima. U ovom odjeljku analizirat ćemo prostiranje elektromagnetskih valova u neposrednoj blizini vodljivih i dielektričkih granica zamršenog oblika, u slučaju kada oblik tih granica ima učinak

vođenja valova. Kod vođenja valova mi podrazumijevamo da smjer tijeka energije mora primarno biti duž sustava za vođenje. U svim takvim sustavima vođenje valova je postignuto u izravnoj povezanosti između polja valova, struja i naboja na vodljivim granicama ili je pak povezano s posebnim uvjetima refleksije na dielektričkim granicama.

Sustavi za vođenje elektromagnetskih valova služe za prijenos "električne" energije i informacija. Najjednostavniji i najčešći sustav za vođenje je "par žica", tj. "dvožični vod" ili *prijenosna linija*. Sljedeći sustav je "suosni kabel" u kojem je jedna žica zamijenjena metalnim oklopom oko druge žice. Na taj način polje se zatvara u određeni prostor, pa se gubici zračenja znatno smanjuju u odnosu na otvoreni dvožični vod. Druga mogućnost jest da se tijekom elektromagnetske energije upusti u šuplju metalnu cijev nazvanu *valovod*. Razlog za to jest što se u suvremenim *mikrovalnim* uređajima elektromagnetska energija proizvodi na frekvencijama od $3 \cdot 10^9$ Hz i više, što predstavlja valnu duljinu vođenih valova od 10 cm i manje. Kod tih frekvencija prijenos pomoću žica uključivao bi nedopuštene gubitke zračenja. Za milimetarske valove koriste se dielektrički valovodi. Svi ti sustavi mogu se svrstati pod pojam prijenosnih linija, dok ćemo mi pod pojmom prijenosnih linija podrazumijevati samo one sustave koji imaju dva ili više vodiča.

S druge strane, sustave za vođenje valova pogodno je razvrstati na temelju oblika polja ili *modova*, koje mogu prenositi. Tako svi sustavi mogu biti podijeljeni u dvije grupe:

1. Sustavi koji prenose *TEM modove*, a to su oni kod kojih su $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ vektori transverzalni, pa nemaju komponente polja u smjeru prostiranja. Tu pripadaju sve linije s dva (i više) vodiča, kao npr. dvožična prijenosna linija i suosna linija.
2. Sustavi koji mogu prenositi samo *modove višeg reda*, a to su oni koji uvijek imaju najmanje jednu komponentu polja u smjeru prostiranja. Tu npr. pripadaju šuplji metalni valovodi i dielektrički štapovi.

Sve vrste sustava za vođenje možemo analizirati s dvije točke gledišta. Jedan put kao zadaće poopćene *teorije krugova*, uključujući struje u vodičima zadanog oblika, a drugi put kao zadaće *teorije elektromagnetskih valova* vođenih vodičima. U slučaju niskih frekvencija i prijenosnih udaljenosti kod kojih se retardacija može zanemariti pristup pomoću teorije krugova je jednostavniji. Pristup pomoću teorije polja kod valovoda pomaže da bi se zorno sagledale fizikalne pojave.

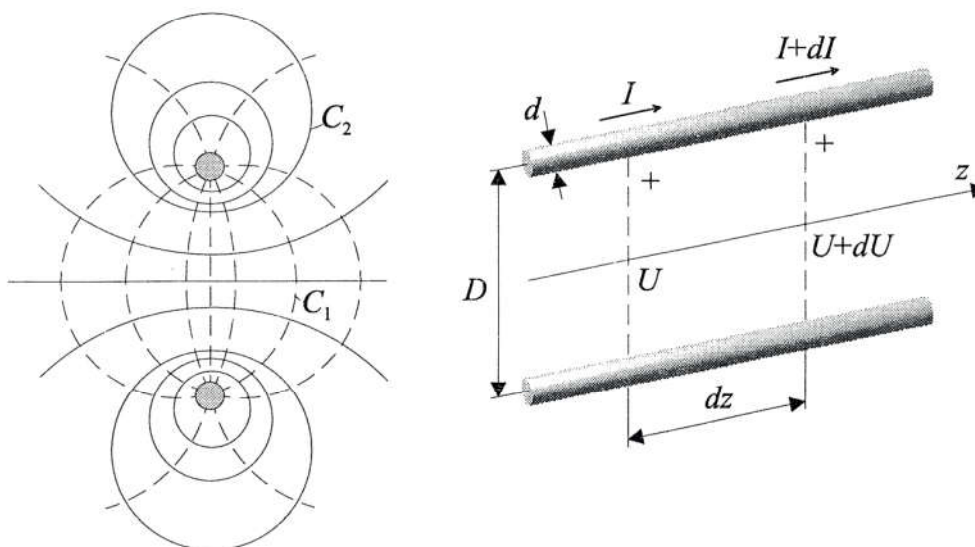
Zaključno možemo reći da ćemo u ovom poglavlju razviti opću teoriju vođenih valova. Elektromagnetsko polje kod otvorenog dvožičnog voda zauzima vanjski beskonačni prostor, a u drugim slučajevima polje je zatvoreno u prostor određenog oblika. Može se reći da je kod dvožičnog voda polje ograničeno vodičima *iznutra*, a u ostalim slučajevima ograničeno je vodičima *izvana*. U dielektričkom valovodu koji je poseban slučaj *otvorenog* valovoda u obliku dielektričkog štapa s TE i TM površinskim valovima prostor od interesa formalno je "zatvoren" posebnim graničnim uvjetima koji važe za totalnu refleksiju.

U matematičkoj analizi želimo naći takva rješenja valnih jednadžbi (za vektore

polja, ili potencijale, ili superpotencijale⁹⁵), koja će zadovoljiti rubne i granične uvjete postavljene na vodljivim i dielektričkim granicama prijenosnih sustava za vođenje valova, usredotočujući se na ona rješenja koja predstavljaju prijenos energije uzduž prijenosnog sustava. Ta rješenja bit će neposredno povezana sa sustavom preko struja koje teku u njemu i preko induciranih naboja. Opisat ćemo i analizirati i bitne karakteristike polja u elektromagnetskim šupljim rezonatorima.

8.7.1. Prijenosne linije

Izvest ćemo teoriju prijenosnih linija⁹⁶ iz teorije elektromagnetskih polja, tj. pomoću vođenih valova koji se gibaju u njima i povezati je s teorijom krugova.



Slika 8.7.1. Električno i magnetsko polje između vodiča dvožične prijenosne linije

Na slici 8.7.1. prikazana je *otvorena dvožična* ili Lecherova prijenosna linija koja se sastoji od dva provodnika promjera d , razmaknuta na udaljenost D . Provodnici su idealno vodljivi $\kappa \rightarrow \infty$ i položeni su duž osi z . Dielektrik u okolnom prostoru je također bez gubitaka, sa značajkama ϵ , μ i $\kappa = 0$. Prijenosna linija je *idealna* (bez gubitaka), jednolika i neizmjereno duga. Elektromagnetsko polje uspostavljeno između vodiča mora zadovoljiti granične uvjete na površini idealnih vodiča. Na graničnoj plohi između (idealnog) dielektrika i idealnog vodiča u idealnoj prijenosnoj liniji mogu postojati samo plošne struje i plošni naboji. Ti uvjeti približno vrijede i u stvarnim prijenosnim linijama. Prema tome, u idealnoj prijenosnoj liniji ne postoje longitudinalne komponente vektora polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$, tj. $E_z = H_z = 0$. To su TEM polja direktnog vala, koji se po pretpo-

⁹⁵ Pogledati poglavlje 2, posebno članke 2.1.1. i 2.1.2, i odjeljak 2.3.

⁹⁶ U literaturi uobičajeni su za prijenosne linije i nazivi "prijenosni vodovi" ili jednostavno "vodovi".

stavci giba po liniji u + z smjeru.

Odmah treba reći da to nije jedini val koji se može gibati po prijenosnoj liniji. Iz Maxwellovih jednadžbi proizlazi da beskonačno mnogo vrsta valova može postojati na prijenosnoj liniji. Svaki mogući val naziva se *mod*, a *TEM val* naziva se *mod prijenosne linije*. Svi drugi valovi, koji moraju imati E_z ili H_z ili obje longitudinalne komponente, nazivaju se *modovi višeg reda*. Modovi višeg reda obično su važni samo u blizini diskontinuiteta na liniji. Ovdje ćemo se ograničiti na analizu TEM modova.

Budući da postoji potpuna sličnost između sinusnih ravnih TEM valova u neograničenom prostoru i vođenih valova u idealnoj prijenosnoj liniji, pretpostavit ćemo da se prema izrazima (8.3.9c,d) uzduž linije giba direktni putujući ravni TEM val oblika

$$\underline{E}_T = \underline{E}_0 e^{-\gamma z}, \quad (8.7.1a,b)$$

$$\underline{H}_T = \underline{H}_0 e^{-\gamma z},$$

gdje su $\underline{E}_0$ i $\underline{H}_0$ kompleksni vektori, a $\underline{E}_T$ i $\underline{H}_T$ kompleksni fazori transverzalnih polja, dok je γ kompleksna konstanta prostiranja. Ta pretpostavka će biti valjana uz uvjet da polja (8.7.1a,b) budu rješenja valnih jednadžbi (8.1.5a,b), koje smo izveli iz sustava Maxwellovih jednadžbi (8.1.3a – d). Za *sinusno promjenljiva polja u stacionarnom stanju* jednadžbe (8.1.5a,b) prelaze u Helmholtzove fazorske jednadžbe (8.3.9a,b)

$$\Delta \underline{E}_T = \gamma^2 \underline{E}_T, \quad (8.7.2a,b)$$

$$\Delta \underline{H}_T = \gamma^2 \underline{H}_T,$$

koje moraju biti zadovoljene uz pripadajuće granične uvjete da bi rješenja (8.7.1a,b) bila valjana. Da bismo zadaću pojednostavnili, definirat ćemo *transverzalni Laplaceov operator* koji djeluje u x-y ravnini, kao

$$\Delta_T = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (8.7.3)$$

Ako ga uvedemo u fazorske jednadžbe (8.7.2a,b) dobivamo

$$\Delta_T \underline{E}_T = \left(\gamma^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \underline{E}_T, \quad (8.7.4a,b)$$

$$\Delta_T \underline{H}_T = \left(\gamma^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \underline{H}_T,$$

koje moraju biti zadovoljene uz pripadajuće granične, tj. rubne uvjete. Ako rješenja (8.7.1a,b) uvrstimo u desnu stranu jednadžbi (8.7.4a,b), proizlazi da su obje jednake nula, tj. dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \underline{E}_T}{\partial z^2} - \gamma^2 \underline{E}_T &= 0, \\ \frac{\partial^2 \underline{H}_T}{\partial z^2} - \gamma^2 \underline{H}_T &= 0,\end{aligned}\tag{8.7.4c,d}$$

a to su jednodimenzionalne Helmholtzove fazorske jednadžbe čija su rješenja upravo relacije (8.7.1a,b), pa je jedini uvjet koji moraju zadovoljiti transverzalna polja $\underline{E}_T$ i $\underline{H}_T$ da bi postojao TEM ravni val na prijenosnoj liniji da budu i

$$\begin{aligned}\Delta_T \underline{E}_T &= 0, \\ \Delta_T \underline{H}_T &= 0.\end{aligned}\tag{8.7.5a,b}$$

Prema tome transverzalna elektromagnetska polja $\underline{E}_T$ i $\underline{H}_T$ na prijenosnoj liniji *moraju zadovoljavati "čistu" statičku Laplaceovu jednadžbu* i pripadajuće rubne uvjete. Rubni uvjeti za tu zadaću jesu

$$(E_T)_t = 0 \quad ; \quad (H_T)_n = 0, \tag{8.7.5c,d}$$

na površini idealnih vodiča. To je vrlo važan zaključak, koji možemo poopćiti da glasi: *svakom dvodimenzionalnom elektrostatičkom polju možemo dodati faktor prostiranja $e^{(j\omega t - \gamma z)}$ i dobiti električno polje TEM ravnog vala. Isto vrijedi i za statičko magnetsko polje.* Oblik elektromagnetskog transverznog polja ovisi o obliku poprečnog prereza vodiča koji pripadaju prijenosnoj liniji. To polje nije više homogeno, pa *TEM ravni val nije homogen.*

Treba upozoriti da ta rješenja daju točne rezultate uz uvjet da je razmak između vodiča D prijenosne linije mnogo manji od duljine vala λ koji se giba duž linije, tj. uz uvjet da je $D \ll \lambda$. Očito je da u slučaju vrlo visokih frekvencija valna duljina postaje dovoljno malena da može doći do snažnog zračenja elektromagnetske energije u poprečnom smjeru na pravac voda što ovdje nije uzeto u obzir. Predodžba o kvazistatičkom transverzalnom elektromagnetskom polju također više ne odgovara stvarnosti.

Odnose među komponentama transverznog polja odredit ćemo tako da rješenja (8.7.1a,b) ponovno uvrstimo u glavne Maxwellove jednadžbe (8.1.3a,b)

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{E}_T &= -j\omega \mu \underline{H}_T, \\ \nabla \times \underline{H}_T &= j\omega \varepsilon \underline{E}_T.\end{aligned}\tag{8.7.6a,b}$$

Prije toga ćemo transverzalna polja (8.7.1a,b) rastaviti u komponente

$$\begin{aligned}\underline{E}_T &= \underline{a}_x E_{x0} e^{-\gamma z} + \underline{a}_y E_{y0} e^{-\gamma z}, \\ \underline{H}_T &= \underline{a}_x H_{x0} e^{-\gamma z} + \underline{a}_y H_{y0} e^{-\gamma z},\end{aligned}\tag{8.7.7a,b}$$

i uvrstiti u jednadžbe (8.7.6a,b), pa dobivamo

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{a}_x E_{x0} e^{-\gamma z} + \mathbf{a}_y E_{y0} e^{-\gamma z}) &= -j\omega\mu(\mathbf{a}_x H_{x0} e^{-\gamma z} + \mathbf{a}_y H_{y0} e^{-\gamma z}) , \\ \nabla \times (\mathbf{a}_x H_{x0} e^{-\gamma z} + \mathbf{a}_y H_{y0} e^{-\gamma z}) &= j\omega\varepsilon(\mathbf{a}_x E_{x0} e^{-\gamma z} + \mathbf{a}_y E_{y0} e^{-\gamma z}) .\end{aligned}$$

Rješenja tih jednadžbi mogu se u skraćenom obliku napisati kao

$$\frac{E_{x0}}{H_{y0}} = -\frac{E_{y0}}{H_{x0}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = Z . \quad (8.7.8)$$

U jednostavnom dielektriku bez gubitaka je prema (8.3.6) valna konstanta prostiranja određena s

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} , \quad (8.7.9)$$

pa je valna impedancija dielektrika

$$Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z' . \quad (8.7.10)$$

Gustoća kompleksne elektromagnetske snage koja se prenosi duž linije jednaka je srednjem Poyntingovu vektoru prema (8.3.8)

$$\begin{aligned}N_{sr} &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^* = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_x E_{x0} e^{-\gamma z} + \mathbf{a}_y E_{y0} e^{-\gamma z}) \times (\mathbf{a}_x H_{x0} e^{+\gamma z} + \mathbf{a}_y H_{y0} e^{+\gamma z}) , \\ N_{sr} &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_z (E_{x0} H_{y0} - E_{y0} H_{x0}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}_z \left(\frac{E_{x0}^2}{Z'} + \frac{E_{y0}^2}{Z'} \right) .\end{aligned} \quad (8.7.11)$$

Ako je modul linearno polariziranog vektora (8.7.1a) određen prema (8.7.7a) kao

$$E_0^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 , \quad (8.7.12)$$

to je konačno gustoća tijeka srednje snage duž idealne prijenosne linije realna veličina koja prema (8.7.11) iznosi

$$N_{sr} = \mathbf{a}_z \frac{|E_0(x,y)|^2}{2Z'} . \quad (8.7.13)$$

Ukupnu snagu koja se prenosi linijom možemo odrediti ako gustoću snage (8.7.13) integriramo po površini neograničene poprečne ravnine.

Budući da se transverzalno elektromagnetsko polje dobiva kao rješenje statičkih Laplaceovih jednadžbi (8.7.5a,b) i pripadajućih rubnih uvjeta (8.7.5c,d), zbog tog raz-

loga mogu se "statički" *kapaciteti i induktiviteti* upotrijebiti za prijenosne linije, iako je polje sinusno promjenjivo u vremenu. Zato ćemo izravno povezati napon $\underline{U}$ i struju $\underline{I}$ u prijenosnoj liniji s kvazistatičkim poljima $\underline{E}_T$ i $\underline{H}_T$ pomoću integrala

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \int_{C_1} \underline{E}_T \cdot d\mathbf{l} , \\ \underline{I} &= \oint_{C_2} \underline{H}_T \cdot d\mathbf{l} ,\end{aligned}\tag{8.7.14a,b}$$

gdje su C_1 i C_2 prikazani na slici 8.7.1. Iz jednadžbi (8.7.7a,b) i (8.7.8) lako je pokazati da za direktni val u prijenosnoj liniji vrijedi odnos

$$\underline{E}_T = Z'(\underline{H}_T \times \mathbf{a}_z) \quad ; \quad \underline{H}_T = \frac{1}{Z'}(\mathbf{a}_z \times \underline{E}_T) .\tag{8.7.15a,b}$$

Pomoću (8.7.14b) i (8.7.15b) dobivamo

$$\underline{I} = \frac{1}{Z'} \int_{C_2} (\mathbf{a}_z \times \underline{E}_T) \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{Z'} \oint_{C_2} (E_0)_n e^{-\gamma z} dl .\tag{8.7.16}$$

Kapacitet je u statičkim poljima definiran prema (4.4.4), pa kapacitet po jedinici duljine prijenosne linije iznosi

$$C' = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon}{\underline{U}} \int \underline{E}_T \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\epsilon}{\underline{U}} \oint_{C_2} (E_0)_n e^{-\gamma z} dl ,\tag{8.7.17}$$

mjeren u faradima po metru dužine linije.

Uvest ćemo novi pojam nazvan *karakteristična impedancija* prijenosne linije i definirati ga kao omjer direktnog vala napona $\underline{U}$ i struje $\underline{I}$ na vodu. Pomoću (8.7.16) i (8.7.17) dobivamo za karakterističnu impedanciju izraz

$$Z_0 = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Z' \frac{\epsilon}{C'} .\tag{8.7.18}$$

Slično se pomoću relacija (8.7.14a) i (8.7.15a) mogu povezati karakteristična impedancija linije i induktivitet linije po jedinici duljine

$$\underline{U} = Z' \int_{C_1} (\underline{H}_T \times \mathbf{a}_z) \cdot d\mathbf{l} = Z' \int_{C_1} (H_0)_n e^{-\gamma z} dl .\tag{8.7.19}$$

Induktivitet voda po jedinici duljine u magnetskim statičkim poljima iznosi

$$L' = \frac{\Psi}{\underline{I}} = \frac{\mu}{\underline{I}} \int_{C_1} \underline{H}_T \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\mu}{\underline{I}} \int_{C_1} (H_0)_n e^{-\gamma z} dl ,\tag{8.7.20}$$

pa se karakteristična impedancija linije, iz (8.7.19) i (8.7.20) računa i kao

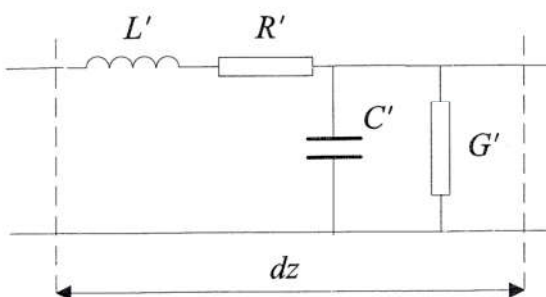
$$Z_0 = \frac{U}{I} = Z' \frac{L'}{\mu} . \quad (8.7.21)$$

Iz (8.7.18) i (8.7.21) proizlazi da su značajke idealne prijenosne linije L' i C' međusobno povezane relacijom

$$L'C' = \mu\epsilon = \frac{1}{c^2} . \quad (8.7.22)$$

Pošto odredimo elektrostatički kapacitet C' , ili statički magnetski induktivitet L' , možemo iz (8.7.18) ili (8.7.21) odrediti karakterističnu impedanciju Z_0 idealne prijenosne linije. Za neke uobičajene oblike prijenosnih linija vrijednosti Z_0 dane su u tablici 8.7.1. na kraju ovog poglavlja. Vrijednosti parametara ovise o geometriji prijenosne linije i određuju se obavezno iz teorije polja. Ovdje statička električna i magnetska polja imaju vektore $\mathbf{E}_T$ i $\mathbf{H}_T$ svugdje ortogonalne jedan na drugi, pa se nazivaju *konjugirana polja*.

Primijenit ćemo sada *teoriju krugova* na dvožičnu liniju prikazanu na slici 8.7.1. Da bi izveli jednadžbe raspodjele napona i struje po liniji, promatrat ćemo infinitezimalni djelić voda duljine dz prema slici 8.7.2.



Slika 8.7.2. Ekvivalentni krug djelića prijenosne linije

Ako sa Z_V' označimo *serijsku impedanciju linije po jedinici duljine*, a s Y_V' *paralelnu admitanciju linije po jedinici duljine*, iz teorije krugova slijedi

$$d\underline{U} = -\underline{I}Z_V' dz , \quad (8.7.23a,b)$$

$$d\underline{I} = -\underline{U}Y_V' dz .$$

Gornje relacije omogućavaju postavljanje *jednadžbi prijenosne linije*

$$\frac{d\underline{U}}{dz} = -\underline{I}Z_V' , \quad (8.7.24a,b)$$

$$\frac{d\underline{I}}{dz} = -\underline{U}Y_V' .$$

Te jednadžbe uključuju pretpostavke da nema međuinduktivne veze između elementarnih dijelova linije i da paralelna struja $d\underline{I}$ teče u ravninama transverzalnim na z -os. To

je u teoriji polja ekvivalentno pretpostavci da ne postoje E_z i H_z komponente polja. Prijenosna linija je homogena, tj. jednolika ako su Z_V' i Y_V' neovisni o koordinati z . Nakon deriviranja i uređenja jednačbi (8.7.24a,b) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \underline{U}}{dz^2} - Z_V' Y_V' \underline{U} &= 0, \\ \frac{d^2 \underline{I}}{dz^2} - Z_V' Y_V' \underline{I} &= 0,\end{aligned}\tag{8.7.25a,b}$$

dvije *jednodimenzionalne Helmholtzove jednačbe* za fazore napona i struje na prijenosnoj liniji. Te jednačbe su istog oblika kao jednačbe polja (8.7.4c,d). Opća rješenja jednačbi (8.7.25a,b) predstavljaju zbir direktnih i inverznih putujućih valova, pa uvedemo li konstantu prostiranja

$$\gamma = \sqrt{Z_V' Y_V'},\tag{8.7.26}$$

možemo ih pisati u *fazorskom obliku*

$$\begin{aligned}\underline{U} &= U_1 e^{\gamma z} + U_2 e^{-\gamma z}, \\ \underline{I} &= I_1 e^{\gamma z} + I_2 e^{-\gamma z}.\end{aligned}\tag{8.7.27a,b}$$

Odlučili smo se samo za direktni val koji se giba u $+z$ smjeru, pa dobivamo rješenje

$$\begin{aligned}\underline{U}^+ &= U_0 e^{-\gamma z}, \\ \underline{I}^+ &= I_0 e^{-\gamma z},\end{aligned}\tag{8.7.28a,b}$$

gdje su U_0 i I_0 općenito kompleksne veličine, a u idealnoj liniji su to realne veličine. Ako rješenja (8.7.28a,b) uvrstimo u (8.7.24a,b) dobivamo

$$\frac{\underline{U}^+}{\underline{I}^+} = \frac{Z_V'}{\gamma} = \frac{\gamma}{Y_V'} = \sqrt{\frac{Z_V'}{Y_V'}}.\tag{8.7.29}$$

Sada možemo uvesti *karakterističnu impedanciju linije* kao

$$Z_0 = \frac{\underline{U}^+}{\underline{I}^+} = \sqrt{\frac{Z_V'}{Y_V'}}.\tag{8.7.30}$$

Prema slici 8.7.2. praktično je za ekvivalentni krug prijenosne linije pisati

$$\begin{aligned} Z_V' &= R' + j\omega L' , \\ Y_V' &= G' + j\omega C' , \end{aligned} \quad (8.7.31a,b)$$

izraženo u omima i simensima po metru dužine linije. Očito je, nakon svega, da postoji potpuna podudarnost i analogija između linearno polariziranog TEM ravnog vala i prijenosne linije. To smo prikazali u tablici 8.7.2.

Tablica 8.7.2. Usporedba između TEM ravnog vala i napona i struje na idealnoj prijenosnoj liniji

<i>TEM ravni val</i>	<i>Napon i struja u liniji</i>
$\frac{d^2 \underline{E}_T}{dz^2} - \gamma^2 \underline{E}_T = 0$	$\frac{d^2 \underline{U}}{dz^2} - \gamma^2 \underline{U} = 0$
$\frac{d^2 \underline{H}_T}{dz^2} - \gamma^2 \underline{H}_T = 0$	$\frac{d^2 \underline{I}}{dz^2} - \gamma^2 \underline{I} = 0$
$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\gamma = \sqrt{Z_V' Y_V'} = j\omega\sqrt{L' C'}$
$\underline{E}_T = \underline{E}_1 e^{\gamma z} + \underline{E}_2 e^{-\gamma z}$	$\underline{U} = \underline{U}_1 e^{\gamma z} + \underline{U}_2 e^{-\gamma z}$
$\underline{H}_T = \underline{H}_1 e^{\gamma z} + \underline{H}_2 e^{-\gamma z}$	$\underline{I} = \underline{I}_1 e^{\gamma z} + \underline{I}_2 e^{-\gamma z}$
$Z' = \frac{E_1}{H_1} = -\frac{E_2}{H_2} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$Z_0 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = -\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \sqrt{\frac{Z_V'}{Y_V'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$
$N_{sr} = \frac{1}{2} \underline{E}_T \times \underline{H}_T^*$	$P = \frac{1}{2} \underline{U} \underline{I}^*$
$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$	$c = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$

Analizirat ćemo sada *utjecaj gubitaka u realnoj prijenosnoj liniji* na sustav jednažbi u

tablici 8.7.2. Ako umjesto dielektrika uvedemo u analizu *izolator s gubicima*,⁹⁷ a pretpostavimo da su vodiči i dalje idealni, tj. bez gubitaka, sve naše jednadžbe ostaju i dalje valjane, a Z_0 i γ postaju opći *kompleksni* brojevi. Najvažniji učinak gubitaka u izolatoru jest da je val prigušen u smjeru gibanja. Prema tablici 8.3.2. prigušna konstanta dobrog izolatora nije velika i iznosi

$$\alpha \approx \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad (8.7.32)$$

a fazna konstanta ostaje i dalje ista, tj.

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{c}, \quad (8.7.33)$$

pa su

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad ; \quad Z \approx Z' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (8.7.34a,b)$$

Ako su pak i vodiči realni, *polje nije više točno TEM* i potpuno egzaktna rješenja nisu više praktična. Elektromagnetski valovi će biti karakterizirani i dalje konstantom prostiranja $\gamma = \alpha + j\beta$, s tim da će prigušenje α biti jače izraženo. Napon i struju u liniji s gubicima ćemo prema (8.7.27a,b) pisati u *kompleksnom području* kao

$$\begin{aligned} U &= U_1 e^{\alpha z + j(\omega t + \beta z)} + U_2 e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)}, \\ I &= -\frac{U_1}{Z_0} e^{\alpha z + j(\omega t + \beta z)} + \frac{U_2}{Z_0} e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)}, \end{aligned} \quad (8.7.35a,b)$$

gdje su U_1 , U_2 i Z_0 kompleksne veličine. Tijek kompleksne srednje snage prema tablici 8.7.2. jest

$$P_N = UI^* = \frac{1}{2} \left[-\frac{|U_1|^2}{Z_0^*} e^{2\alpha z} + \frac{|U_2|^2}{Z_0^*} e^{-2\alpha z} \right], \quad (8.7.36)$$

dok je tijek srednje djelatne snage duž prijenosne linije

$$P_{N,Re} = \text{Re} \{P_N\}, \quad (8.7.37)$$

pa ako na neizmjereno dugoj liniji postoji samo direktni val, tada je

⁹⁷ Pogledati točku 8.3.3.1.

$$P_{N,Re} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{|U_0|^2}{2Z_0^*} e^{-2\alpha z} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{|U_0|^2}{2|Z_0^*|} e^{-2\alpha z + j\varphi_0} \right\} = \frac{|U_0|^2}{2|Z_0|} e^{-2\alpha z} \cos \varphi_0 . \quad (8.7.38)$$

Gubitke snage po jedinici dužine u liniji određujemo prema (8.2.56) kao

$$P_g' = -\nabla \cdot \mathbf{P}_{N,Re} = +2\alpha P_{N,Re} = 2\alpha P_0 e^{-2\alpha z} \cos \varphi_0 , \quad (8.7.39)$$

gdje smo označili

$$P_0 = \frac{|U_0|^2}{2|Z_0|} ; \quad Z_0^* = |Z_0| e^{-j\varphi_0} . \quad (8.7.40a,b)$$

Iz izraza (8.7.39) može se izračunati prigušna konstanta realne prijenosne linije kao

$$\alpha = \frac{P_g'}{2P_{N,Re}} . \quad (8.7.41)$$

To je potpuno točan izraz za određivanje prigušne konstante. Gubici i prenijeta djelatna snaga mogu se odrediti mjerenjem na realnoj liniji. Ako to nije moguće, veličine P_g' i $P_{N,Re}$ mogu se računati na različite više ili manje točne načine. Postoje različite mogućnosti aproksimacije tih veličina.

Drugi način jest da valnu konstantu prostiranja i karakterističnu impedanciju realne linije računamo pomoću nadomjesne sheme. Tako pomoću (8.7.2b) i (8.7.31a,b) dobivamo

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} , \quad (8.7.42)$$

a pomoću (8.7.30) i (8.7.31a,b)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} . \quad (8.7.43)$$

Ovdje su R' uzdužni otpor linije po jedinici duljine, a G' poprečni odvod po jedinici duljine linije. Uzdužni induktivitet po jedinici duljine linije je L' , a C' je poprečni kapacitet po jedinici duljine prijenosne linije. Veličine L' i C' računamo pomoću teorije polja kako je to prikazano u poglavljima 4 i 5. Pokazali smo da ako R' i G' mogu biti zanemareni, da onda imamo idealnu liniju (bez gubitaka). Ako R' i G' nisu zanemarivi, ali su mali, tada možemo približno pisati

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \left[1 + j \left(\frac{G'}{2\omega C'} - \frac{R'}{2\omega L'} \right) \right] . \quad (8.7.44)$$

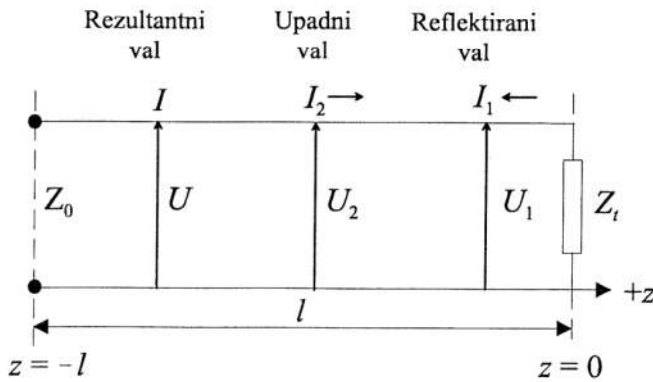
Ako je zadovoljen *Heavisideov uvjet*, da je

$$\frac{G'}{C'} = \frac{R'}{L'} , \quad (8.7.45)$$

tada je Z_0 realno, a takvu prijenosnu liniju nazivamo *linija bez distorzije*.

8.7.1.1. Opterećena prijenosna linija

Dosad smo analizirali struje na prijenosnim linijama koje su bile neizmjenjerno duge. Sada ćemo analizirati slučaj kada je linija karakteristične impedancije Z_0 na kraju opterećena teretom impedancije Z_t kao na slici 8.7.3.



Slika 8.7.3. Opterećena prijenosna linija

Teret je u $z = 0$, a pozitivna udaljenost mjeri se ulijevo od tereta na kraju. Ukupni napon i struja su prema (8.7.35a,b) suma dva putujuća vala koji se gibaju jedan suprotno drugom, kao na beskonačno dugoj prijenosnoj liniji. Val koji se giba udesno uzimamo kao upadni (direktni) val, a val koji se giba ulijevo je reflektirani (inverzni) val. Impedancija tereta određuje odnos reflektiranog i upadnog vala na prijenosnoj liniji. Na udaljenosti d od kraja voda, tj. tereta Z_t , ukupni napon i struja u liniji su $\underline{U}(-d)$ i $\underline{I}(-d)$, a $\underline{U}_2$ i $\underline{I}_2$ su napon i struja na istom mjestu uzrokovani upadnim putujućim valom, dok su $\underline{U}_1$ i $\underline{I}_1$ napon i struja uzrokovani reflektiranim valom. Zbir od $\underline{U}_2$ i $\underline{U}_1$ mora biti jednak naponu $\underline{U}_t$ koji se pojavi na teretu Z_t u $z = 0$, tj.

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{U}_t . \quad (8.7.46)$$

Slično tome, zbir struja u direktnom i reflektiranom valu po liniji u točki diskontinuiteta mora biti jednak struji koja teče kroz teret Z_t , tj.

$$\underline{I}_2 + \underline{I}_1 = \underline{I}_t . \quad (8.7.47)$$

Prema (8.7.35b) možemo (8.7.47) pisati kao

$$\frac{\underline{U}_2}{Z_0} - \frac{\underline{U}_1}{Z_0} = \frac{\underline{U}_t}{Z_t} . \quad (8.7.48)$$

Pomoću (8.7.46) i (8.7.48) možemo uvesti *koeficijent refleksije* kao omjer napona u reflektiranom valu i napona u upadnom valu

$$\rho = \frac{U_1}{U_2} = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}, \quad (8.7.49)$$

i *koeficijent transmisije* kao omjer napona na teretu i napona u upadnom valu

$$\tau = \frac{U_t}{U_2} = \frac{2Z_t}{Z_t + Z_0}. \quad (8.7.50)$$

Najzanimljiviji je slučaj kada je $Z_t = Z_0$. Tada je $\rho = 0$, što znači da *nema reflektiranog vala*. Sva energija upadnog vala je tada prenesena teretu. Koeficijent transmisije je $\tau = 1$. Linija se ponaša kao da je beskonačno duga.

Omjer između ukupnog napona i struje $\underline{U}/\underline{I}$ na udaljenosti d od kraja izražen pomoću koeficijenta refleksije $\rho = \underline{U}_1/\underline{U}_2$ u $z = 0$, dobivamo ako (8.7.27a) podijelimo s (8.7.27b). Taj omjer nazivamo impedancijom linije u bilo kojoj točki d i on iznosi

$$Z_d = \frac{\underline{U}(-d)}{\underline{I}(-d)} = Z_0 \frac{1 + \rho e^{-2\gamma d}}{1 - \rho e^{-2\gamma d}} = Z_0 \frac{Z_t \cosh \gamma d + Z_0 \sinh \gamma d}{Z_0 \cosh \gamma d + Z_t \sinh \gamma d}. \quad (8.7.51)$$

Impedanciju na početku voda izračunat ćemo ako uvrstimo $d = l$. Nazivamo je *ulazna impedancija linije* i ona iznosi

$$Z_u = Z_0 \frac{Z_t \cosh \gamma l + Z_0 \sinh \gamma l}{Z_0 \cosh \gamma l + Z_t \sinh \gamma l}. \quad (8.7.51)$$

Za liniju u praznom hodu, tj. kada je $Z_t \rightarrow \infty$, ulazna impedancija iznosi

$$Z_{u,ph} = Z_0 \coth \gamma l, \quad (8.7.52)$$

a za liniju u kratkom spoju, tj. kada je $Z_t = 0$, ukupna impedancija jest

$$Z_{u,ks} = Z_0 \tanh \gamma l. \quad (8.7.53)$$

Zanimljivo je zabilježiti da je produkt tih impedancija jednak kvadratu karakteristične impedancije linije, tj.

$$Z_0^2 = Z_{u,ph} Z_{u,ks}. \quad (8.7.54)$$

Za liniju bez gubitaka te impedancije su čisto imaginarne i iznose

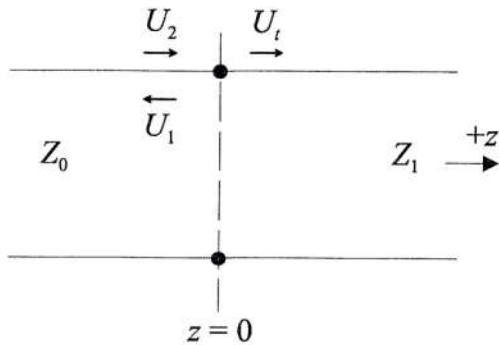
$$Z_{u,ph} = -jZ_0 \cot \beta l = -jZ_0 \cot \left(2\pi \frac{l}{\lambda} \right), \quad (8.7.55a)$$

$$Z_{u,ks} = jZ_0 \tan \beta l = jZ_0 \tan \left(2\pi \frac{l}{\lambda} \right). \quad (8.7.55b)$$

Pogodno je uvesti omjer napona stojnog vala na prijenosnoj liniji. On za liniju bez gubitaka iznosi

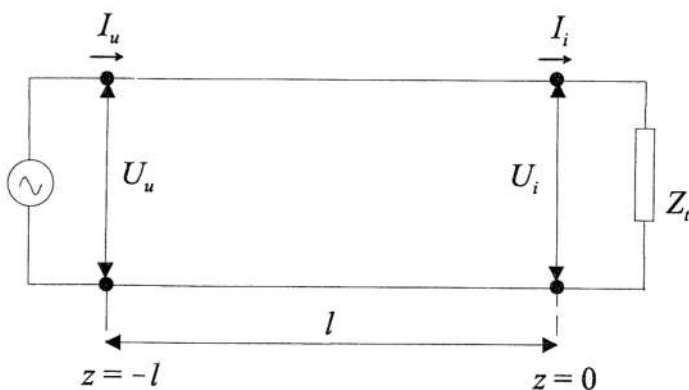
$$S = \frac{U_{\text{maks}}}{U_{\text{min}}} = \frac{U_2 + U_1}{U_2 - U_1} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}. \quad (8.7.56)$$

Treba napomenuti da impedancija tereta u izrazima za koeficijente (8.7.49) i (8.7.50) može biti koncentrirana, kao što je predstavljeno na slici 8.7.3, ili može biti raspodijeljena, tj. predstavljena karakterističnom impedancijom druge linije Z_1 kako je prikazano na slici 8.7.4. U tom posljednjem slučaju (8.7.50) daje napon $\underline{U}_i$ vala iza spojnog mjesta.



Slika 8.7.4. Spoj linija s različitim karakterističnim impedancijama

Vrlo često je pogodno na prijenosnoj liniji konačne duljine, koja je prikazana na slici 8.7.5, izraziti napon i struju na ulazu $\underline{U}_u$ i $\underline{I}_u$ u ovisnosti o naponu i struji na izlazu $\underline{U}_i$ i $\underline{I}_i$.



Slika 8.7.5. Opterećena prijenosna linija konačne duljine

Potrebno je samo u izraze za valove napona i struje na vodu, prema tablici 8.7.2, za izlaz iz voda uvrstiti $z = 0$, a za ulaz u vod $z = -l$, te koristiti izraz za karakterističnu impedanciju također dan u tablici 8.7.2. Time dobivamo

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_i &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2, \\
 \underline{I}_i &= -\frac{\underline{U}_1}{Z_0} + \frac{\underline{U}_2}{Z_0}, \\
 \underline{U}_u &= \underline{U}_1 e^{-\gamma l} + \underline{U}_2 e^{+\gamma l}, \\
 \underline{I}_u &= -\frac{\underline{U}_1}{Z_0} e^{-\gamma l} + \frac{\underline{U}_2}{Z_0} e^{+\gamma l}.
 \end{aligned}$$

Nakon uređenja uz poznate i zadane $\underline{U}_i$ i $\underline{I}_i$ dobivamo relacije

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_u &= \underline{U}_i \cosh \gamma l + Z_0 \underline{I}_i \sinh \gamma l, \\
 \underline{I}_u &= \underline{I}_i \cosh \gamma l + \frac{\underline{U}_i}{Z_0} \sinh \gamma l,
 \end{aligned} \tag{8.7.57a,b}$$

koje su vrlo pogodne za praktične potrebe. One vrijede potpuno općenito.

Stanje na prijenosnim linijama može se prikazivati i grafički. Proračuni linija često su olakšani upotrebom *kružnih dijagrama*. Pravokutni i mnogo više u upotrebi *polarni Smithov dijagram*⁹⁸ izvanredno je koristan za izračunavanje ulaznih impedancija i prilagođenja u svim vrstama prijenosnih linija. Ti dijagrami impedancija prijenosne linije temelje se na jednadžbama prijenosnih linija u koje se uvodi koeficijent refleksije.

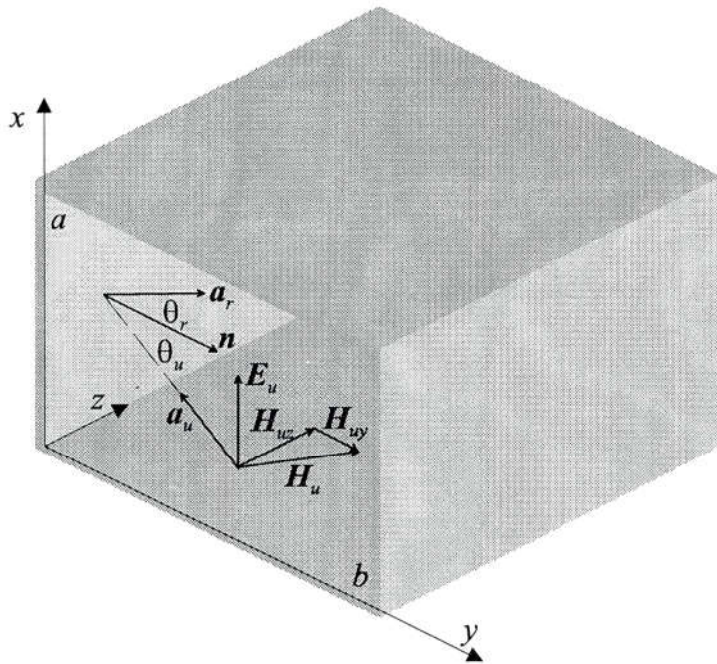
8.7.2. Valovodi

Sustavi koji vode elektromagnetske valove nazivaju se valovodi. Valovodi su šuplje cijevi od visokovodljive kovine najčešće pravokutnog ili kružnog poprečnog presjeka. Uz dvožičnu prijenosnu liniju najčešće upotrebljavamo pravokutni valovod koji smo prikazali na slici 8.7.6. Prostiranje elektromagnetskih valova kroz cijevi detaljno je prvi razmatrao Rayleigh 1897. godine, a prijenos duž dielektričkih žica istražili su Hondros i Debye nešto kasnije, 1910. godine.⁹⁹ Eksperimentalnu potvrdu učinio je Schrieffer 1920. godine. Sve to tada nije imalo većeg praktičnog značaja, jer su postojale poteškoće u generiranju valova dovoljno visoke frekvencije. Napretkom u gradnji kratkovalnih oscilatora otklonjene su sve zapreke i modalno vođenje valova ostvareno je u Bellovim

⁹⁸ Uveo ga je P.H. Smith u *Electronics*, 12, 29–31 (siječ. 1939) pod naslovom "Transmission – Line Calculator". Pogledati npr., S. Ramo, J.R. Whinnery, T. von Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, John Wiley, New York, 1965, U hrvatskoj literaturi su iscrpno obrađeni u B. Stefanini, *Prijenos električne energije I*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1963.; T. Bosanac, *Teoretska elektrotehnika*, I dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973; Z. Smrkić, *Mikrovalna elektronika*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

⁹⁹ Pogledati J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

laboratorijima 1936. godine. Poslije su učinjeni brojni doprinosi na ovom području.



Slika 8.7.6. Pravokutni valovod s TEM upadnim valom

Polje u valovodu i prijenos energije rješavaju se pomoću Maxwellovih jednadžbi ili jednadžbi izvedenih iz njih. Za predstavljanje polja u valovodu mogu se upotrijebiti vektori polja ili par potencijala, ili pak jedan od superpotencijala. Zbog zornosti, upotrijebit ćemo rješenja valne jednadžbe izvedena u članku 8.6.4.

Analizirat ćemo elektromagnetsko polje u pravokutnom beskonačno dugom idealnom valovodu prema slici 8.7.6. Valovod je pravokutna cijev načinjena od idealno vodljive kovine ($\kappa_k \rightarrow \infty$) i ispunjena (idealnim) dielektrikom sa značajkama ϵ , μ , $\kappa = 0$. Valne značajke dielektrika su $\alpha = 0$, $\beta = \omega(\mu\epsilon)^{1/2}$, $\gamma = j\beta$, $Z = j\omega\mu/\gamma = \omega\mu/\beta = (\mu/\epsilon)^{1/2}$. Redovito je dielektrik u valovodu zrak. Pretpostavit ćemo da na $x-z$ ravninu pod kutom θ_u prema okomici $\mathbf{n} = \mathbf{a}_y$ upada ravni val, čija polja su zadana jednadžbama (8.6.2a,b). Val će se od idealno vodljive stijenke u $x-z$ ravnini reflektirati pod istim kutom prema normali, tj. $\theta_r = \theta_u$. Jednadžba električnog *totalnog* polja dana je relacijom (8.6.129). Budući da je $\kappa_k \rightarrow \infty$, to su za idealan vodič, prema (8.6.125b) i (8.6.127) $\delta_{\perp} = 0$ i $a = 0$, pa za totalno električno polje nakon refleksije od zida valovoda u novom koordinatnom sustavu dobivamo relaciju

$$E_{Tx} = E_{0x} \sin(\beta y \cos \theta_u) e^{-j\beta z \sin \theta_u}. \quad (8.7.58)$$

U jednadžbu (8.6.129), tj. (8.7.58) uvodimo u novom koordinatnom sustavu oznake

$$E_{0x} = -j2E_0, \quad (8.7.59)$$

uz pretpostavku da je polje E_{0x} okomito na upadnu ravninu U , zatim uvodimo

$$\beta_y = \beta \cos \theta_u = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \cos \theta_u = \beta_c, \quad (8.7.60a,b)$$

$$j\beta_z = j\beta \sin \theta_u = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sin \theta_u = \gamma_v.$$

Nakon kvadriranja i oduzimanja tih dviju jednadžbi dobivamo

$$\gamma_v^2 = \beta_c^2 - \beta^2, \quad (8.7.61)$$

pa totalno električno polje (8.7.58) u valovodu možemo pisati kao

$$\underline{E}_{Tx} = \underline{E}_{0x} \sin(\beta_c y) e^{-\gamma_v z}. \quad (8.7.62)$$

Analizirajmo da li to polje uopće može postojati u idealnom pravokutnom valovodu. Prvo, na plohama $x = 0$ i $x = a$, postoji samo x -komponenta E_{Tx} električnog polja, tj. nema tangencijalne komponente polja. To je u skladu s graničnim uvjetima na površini idealnog vodiča. Drugo, na plohama $y = 0$ i $y = b$ tangencijalna komponenta električnog polja mora biti jednaka nula. To znači da mora biti još zadovoljen uvjet

$$\beta_c b = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.7.63)$$

Odavde možemo odrediti

$$\beta_c = \frac{n\pi}{b}, \quad (8.7.64)$$

dozvoljene vrijednosti od β_c da bi bili zadovoljeni granični uvjeti u valovodu. To su vlastite vrijednosti ili svojstvene vrijednosti rubnog problema.¹⁰⁰

Ovdje se susrećemo s mogućim poljima u valovodu, jer svaki izbor u (8.7.64) određuje moguće polje ili *mod*. Modovi u valovodu obično su razdijeljeni u skladu s postojanjem uzdužne z -komponente polja. Tako se mod koji nema E_z naziva *TE mod*, a onaj koji nema H_z naziva se *TM mod*. Svi modovi u pravokutnom valovodu pripadaju jednoj od tih dviju vrsta. Svi modovi predstavljeni s (8.7.62) i (8.7.64) nemaju E_z i to su TE modovi. Za $n = 1, 2, 3, \dots$ dobivamo prema tome TE_{0n} modove. Indeks 0 označava da nema ovisnosti o x , a indeks n označava izbor u (8.7.64). U sljedećoj točki 8.7.2.1. razmotrit ćemo cjelovito sustav modova u valovodu.

Ako je dielektrik bez gubitaka $\beta = \omega/c$ je realno, a za valovod općenito možemo uvesti konstantu prostiranja $\gamma_v = \alpha_v + j\beta_v$, pa pomoću (8.7.61) i (8.7.64) dobivamo

$$\gamma_v = \alpha_v = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \beta^2} \quad ; \quad \beta < \frac{n\pi}{b}, \quad (8.7.65a)$$

¹⁰⁰ Pogledati Prilog A.

$$\gamma_v = j\beta_v = j\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad ; \quad \beta > \frac{n\pi}{b} \quad (8.7.65b)$$

Očito je da u slučaju kada je $\beta > \beta_c$, tj. $\gamma_v = j\beta_v$ imamo prostiranje vala u z -smjeru duž valovoda i taj mod se naziva *prostirući mod*. U slučaju kada je $\beta < \beta_c$, tj. $\gamma_v = \alpha_v$ polje opada eksponencijalno duž osi z i nema prostiranja vala u valovodu. U tom slučaju mod se naziva *neprostirući mod*. Prelazak od jednog načina ponašanja polja u valovodu na drugi događa se naglo za $\beta = \beta_c = n\pi/b$, tj. kada je $\alpha_v = \beta_v = 0$. Za taj slučaj, ako uvrstimo da je $\beta = \omega/c$, dobivamo tzv. *odrežnu frekvenciju* ili *graničnu frekvenciju* TE_{0n} moda kao

$$f_c = \frac{n}{2b\sqrt{\mu\epsilon}} \quad , \quad (8.7.66)$$

dok je odgovarajuća *granična valna duljina* TE_{0n} moda

$$\lambda_c = \frac{2b}{n} \quad . \quad (8.7.67)$$

Kada je frekvencija vala $f > f_c$, tj. $\lambda < \lambda_c$, mod se prostire, a u slučaju kada je $f < f_c$, tj. $\lambda > \lambda_c$, mod se ne prostire duž valovoda. Poznavanje f_c ili λ_c je ekvivalentno poznavanju β_c u valovodu, jer je prema (8.7.64), (8.7.66) i (8.7.67) očito

$$\beta_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} = 2\pi f_c \sqrt{\mu\epsilon} \quad . \quad (8.7.68)$$

Veličine f_c i λ_c su također određene rubnim problemom. Konstanta prostiranja valovoda (8.7.65a,b) može se sada pomoću (2.7.66) i (2.7.67) izraziti kao

$$\gamma_v = \alpha_v = \beta_c \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad ; \quad f < f_c \quad , \quad (8.7.69a,b)$$

$$\gamma_v = j\beta_v = j\beta_c \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad ; \quad f > f_c \quad .$$

Vidimo da je fazna konstanta β_v prostirućeg moda u valovodu uvijek manja od fazne konstante β dielektrika. Konstanta β_v približava se β kako $f \rightarrow \infty$. Prigušna konstanta α_v neprostirućeg moda uvijek je manja od β_c . Konstanta α_v približava se β_c kako $f \rightarrow 0$.

Za mod polja koji se *prostire* u valovodu mogu se odrediti valna duljina λ_p i fazna brzina v_p uzduž valovoda. Tako se *valna duljina prostiranja* određuje kao duljina na kojoj faza električnog polja poraste na 2π , tj. $\beta_v \lambda_p = 2\pi$. Uvrstimo li β_v iz (8.7.69b) dobivamo

$$\lambda_p = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}, \quad (8.7.70)$$

pokazujući da je valna duljina prostiranja u valovodu uvijek veća od valne duljine $\lambda = 2\pi/\beta$ u samom dielektriku. Faznu brzinu v_p prostiranja duž valovoda određujemo prema

$$v_p = \frac{\omega}{\beta_v} = \frac{v_f}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}, \quad (8.7.71)$$

gdje je $v_f = \omega/\beta$ fazna brzina moda u dielektriku. Fazna brzina vođenja duž valovoda veća je od fazne brzine u samom dielektriku. Posebno važno svojstvo modova polja u valovodu jest postojanje *karakteristične valne impedancije*. Zato pomoću (8.6.130) i (8.7.62) napišimo sve komponente polja prostirućeg vala u valovodu. Prvo, jednačba (8.6.130) u novom koordinatnom sustavu glasi

$$\begin{aligned} \underline{H}_T = & \underline{a}_z \frac{\underline{E}_{0x} \cos \theta_u}{j} \frac{1}{Z} \cos(\beta y \cos \theta_u) e^{-j\beta z \sin \theta_u} + \\ & + \underline{a}_y \underline{E}_{0x} \frac{\sin \theta_u}{Z} \sin(\beta y \cos \theta_u) e^{-j\beta z \sin \theta_u}. \end{aligned} \quad (8.7.72)$$

Konačno uvrštenjem potrebnih vrijednosti iz (8.7.62) i (8.7.72) dobivamo sve komponente polja

$$\begin{aligned} \underline{E}_{Tx} &= \underline{E}_{0x} \sin(\beta_c y) e^{-\gamma_v z}, \\ \underline{H}_{Ty} &= \frac{\gamma_v}{j\omega\mu} \underline{E}_{0x} \sin(\beta_c y) e^{-\gamma_v z}, \\ \underline{H}_{Tz} &= \frac{\beta_c}{j\omega\mu} \underline{E}_{0x} \cos(\beta_c y) e^{-\gamma_v z}. \end{aligned} \quad (8.7.73a - c)$$

Valna impedancija valovoda u smjeru z -osi jest

$$Z_z = \frac{\underline{E}_{Tx}}{\underline{H}_{Ty}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_v} = Z_0, \quad (8.7.74)$$

i naziva se *karakteristična impedancija moda*. Označava se sa Z_0 . Ako u (8.7.74) uvrsti-

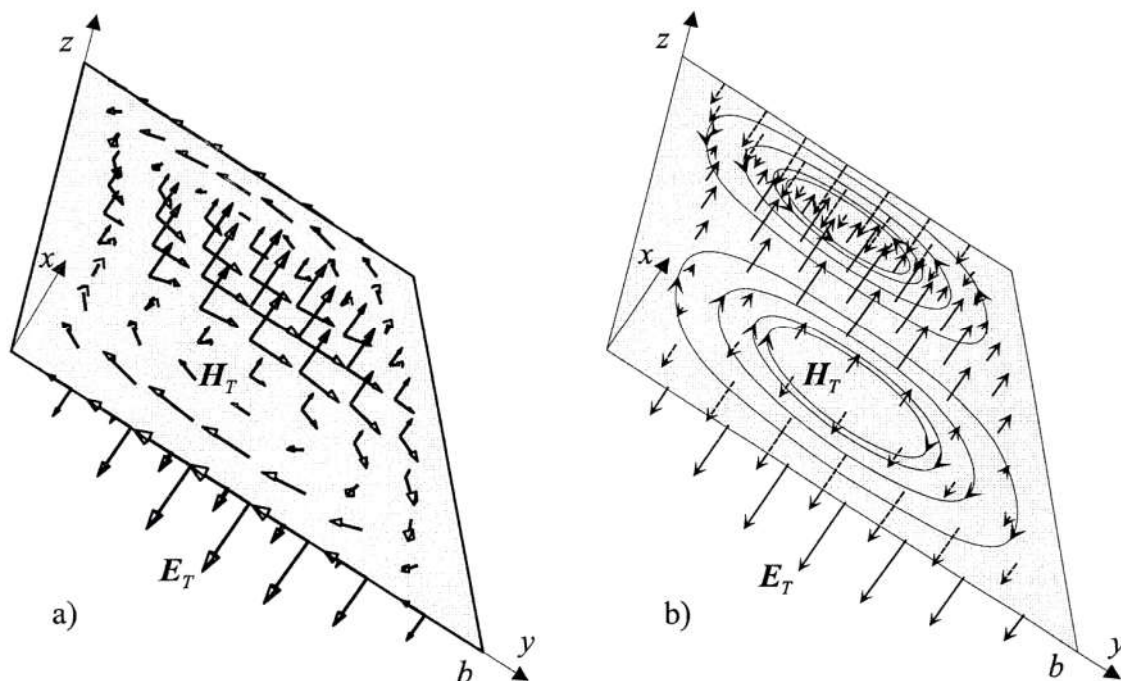
mo (8.7.69a,b) dobivamo karakterističnu impedanciju za TE mod

$$Z_0 = \frac{jZ}{\sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}} \quad ; \quad f < f_c ,$$

$$Z_0 = \frac{Z}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad ; \quad f > f_c .$$
(8.7.75a,b)

Tako vidimo da je karakteristična impedancija neprostrućeg TE moda *imaginarna* i približava se nuli kako $f \rightarrow 0$. Karakteristična impedancija TE_{0n} prostirućeg moda je uvijek veća od valne impedancije dielektrika i približava se vrijednosti od Z kako $f \rightarrow \infty$.

Treba napomenuti da su u našoj analizi do sada korišteni samo direktni valovi koji su se gibalili u smjeru $+z$ osi. Isto tako mogući su i valovi u $-z$ smjeru koji se dobiju ako se u (8.7.73a – c) umjesto $+\gamma$ stavi $-\gamma$. Istovremeno postojanje jednih i drugih valova istog moda rezultira u *stojnim valovima duž valovoda*. Mod s najnižom graničnom frekvencijom u valovodu naziva se *dominantni mod*. U valovodu u kojem je $b > a$, dominantni mod je TE_{01} mod. Granična valna duljina TE_{01} moda iz (8.7.67) je $\lambda_c = 2b$. Prema tome, prostiranje vala u pravokutnom valovodu može se dogoditi samo ako je šira strana valovoda veća od $\lambda/2$. Na slici 8.7.7. prikazana je slika elektromagnetskog polja u valovodu u jednom trenutku.



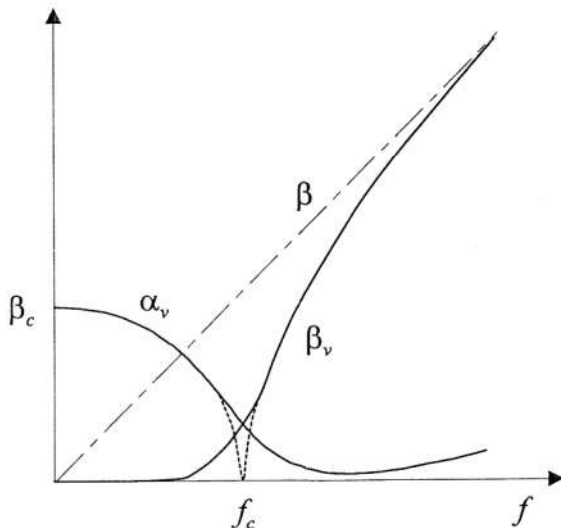
Slika 8.7.7. Slika polja TE_{01} moda u pravokutnom valovodu u vremenskoj domeni,
a) prikaz vektorima polja, b) prikaz silnicama

Kako vrijeme teče tako i slika polja putuje u smjeru $+z$ osi. Pravokutni valovod obično radi tako da se samo TE_{01} mod prostire. To je jedini val značajne amplitude duž valovoda. Zbog njegove važnosti razmotrimo ga detaljnije. Kompleksnu snagu koja se prenosi valovodom dobit ćemo integracijom longitudinalne komponente Poyntingova vektora po poprečnom presjeku valovoda

$$P_N = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b E_{Tx} H_{Ty}^* dx dy = \frac{1}{4} |E_{0x}|^2 \frac{ab}{Z_0^*} . \quad (8.7.76)$$

To je srednja kompleksna snaga koja se prenosi valovodom *koja je realna iznad granične frekvencije*. Ispod granične frekvencije je imaginarna što kazuje da se nikakva djelatna srednja snaga ne prenosi valovodom.

Naša analiza se dosad odnosila na idealan *valovod bez gubitaka*. Ako želimo uzeti u obzir samo gubitke u izolatoru, sve relacije su i dalje valjane, ali je većina parametara kompleksna. Ne postoji više realna granična frekvencija, a γ_v nikad nije nula. Karakteristična impedancija je kompleksna kod svih frekvencija. ovisnost $\gamma_v = \alpha_v + j\beta_v$ u slučaju manjih gubitaka dana je na slici 8.7.8.



Slika 8.7.8. Konstanta prostiranja za valovod s gubicima

Najvažniji učinak gubitaka u izolatoru jest postojanje prigušne konstante kod svih frekvencija. U slučaju malih gubitaka jest

$$\gamma_v = \alpha_v + j\beta_v \approx j\beta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} , \quad (8.7.77)$$

osiguravajući da f nije preblizu f_c . Prema tablici 8.3.2. možemo prigušnu konstantu valovoda zbog gubitaka u dobrom izolatoru računati kao

$$\alpha_i \approx \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}, \quad (8.7.78)$$

gdje je κ provodnost izolatora. Može se zamijeniti s $\omega\varepsilon''$. Mnogo značajnije prigušenje vala u valovodu nastaje zbog konačne provodnosti stijenki valovoda. Prije dobivena rješenja nisu više potpuno točna, budući da se granični, tj. rubni uvjeti mijenjaju. Kod dobrih vodiča tangencijalna komponenta od $\mathbf{E}_T$ nije više nula ali je vrlo mala, i polje se malo promijeni u odnosu na rješenje bez gubitaka. Rješenje bez gubitaka koristi se da bi se aproksimirao $\mathbf{H}_T$ na vodiču. Tada se pomoću (8.3.111b) približno izračuna izgubljena snaga u vodiču. Tako izgubljena snaga po jedinici duljine u stijenci $y = 0$ valovoda iznosi

$$(P_{g,sr})_{y=0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} \int_0^a |\underline{H}_{Tz}|^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} |\underline{E}_{0x}|^2 \left(\frac{f_c}{Zf}\right)^2 a. \quad (8.7.79)$$

Isti iznos snage se gubi i u stijenci $y = b$. Snaga koja se po jedinici duljine gubi u stijenci $x = 0$ iznosi

$$\begin{aligned} (P_{g,sr})_{x=0} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} \int_0^b (|\underline{H}_{Ty}|^2 + |\underline{H}_{Tz}|^2) dy = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} |\underline{E}_{0x}|^2 \left[\frac{b}{2Z_0^2} + \left(\frac{f_c}{Zf}\right)^2 \frac{b}{2} \right], \end{aligned} \quad (8.7.80)$$

a isti iznos se gubi i u stijenci $x = a$. Ukupna izgubljena snaga u stijenka valovoda jest zbir svih gubitaka

$$P_{g,sr} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} |\underline{E}_{0x}|^2 \left[\frac{b}{Z_0^2} + \left(\frac{f_c}{Zf}\right)^2 (2a+b) \right]. \quad (8.7.81)$$

Jednadžba (8.7.41) je valjana za svaki putujući val, pa pomoću (8.7.76) i (8.7.81) dobivamo

$$\alpha_s = \frac{Z_0}{ab} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} \left[\frac{b}{Z_0^2} + \left(\frac{f_c}{Zf}\right)^2 (2a+b) \right], \quad (8.7.82)$$

prigušnu konstantu uzrokovanu gubicima u stijenka valovoda. U slučaju da su prisutni i gubici u izolatoru i gubici u stijenka valovoda, ukupna prigušna konstanta u

valovodu iznosi

$$\alpha_v = \alpha_i + \alpha_s . \quad (8.7.83)$$

Slična analiza može se provesti i za TM modove. Tada polje u valovodu ima uzdužnu E_z komponentu, a postupak je praktički isti. Za valovod kružnog poprečnog presjeka treba riješiti valnu odnosno Helmholtzovu diferencijalnu jednadžbu u kružnocilindričkom koordinatnom sustavu.

8.7.2.1. Modovi u pravokutnom valovodu

Zadaću određivanja modova u pravokutnom valovodu riješit ćemo primjenom vektorskih potencijala i antipotencijala. U prethodnom članku 8.7.2. analizirali smo samo dominantni mod, dok ćemo sada analizirati cijeli spektar modova. U pravokutnom idealnom valovodu prikazanom na slici 8.7.6. mogu postojati TM modovi ($H_z = 0$) i TE modovi ($E_z = 0$). Analizirat ćemo prvo valove s TM modovima u valovodu. Za predstavljanje polja s TM modovima pogodno je uvesti vektorski magnetski potencijal $\underline{A}$ prema tablici 2.1.1. Budući je magnetsko polje transverzarno i ima samo H_x i H_y komponentu, to vektorski potencijal ima samo longitudinalnu komponentu $A_z = A$. Vektorski magnetski potencijal u dielektriku zadovoljava valnu jednadžbu

$$\Delta \underline{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} = 0 , \quad (8.7.84)$$

koja separacijom varijabli prelazi u Helmholtzovu jednadžbu (8.2.1), odnosno za sinusna polja u skalarnu fazorsku Helmholtzovu jednadžbu

$$\Delta \underline{A} + k^2 \underline{A} = 0 , \quad (8.7.85)$$

gdje je prema (8.2.6a)

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 , \quad (8.7.86)$$

separacijska jednadžba u pravocrtnom koordinatnom sustavu. Rješenja jednadžbe (8.7.85) prema (8.2.3a – c) mogu se pisati u obliku

$$\underline{A} = \underline{A}_0 \sin k_x x \sin k_y y e^{-jk_z z} . \quad (8.7.87)$$

Prema tablici 2.1.1. magnetsko polje u valovodu računamo iz

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} , \quad (8.7.88)$$

što daje

$$\underline{B} = \underline{a}_x \frac{\partial \underline{A}}{\partial y} - \underline{a}_y \frac{\partial \underline{A}}{\partial x} = \mu (\underline{a}_x \underline{H}_x + \underline{a}_y \underline{H}_y + \underline{a}_z \underline{H}_z) , \quad (8.7.89)$$

od kuda slijede komponente fazora magnetskog polja TM modova

$$\begin{aligned}\underline{H}_x &= \frac{A_0}{\mu} k_y \sin k_x x \cos k_y y e^{-jk_z z}, \\ \underline{H}_y &= -\frac{A_0}{\mu} k_x \cos k_x x \sin k_y y e^{-jk_z z}, \\ \underline{H}_z &= 0.\end{aligned}\tag{8.7.90a – c}$$

Komponente električnog polja TM modova odredit ćemo pomoću (8.7.90a – c) iz prve glavne Maxwellove jednačbe u dielektriku pisane u fazorskom obliku

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega \epsilon \underline{E}.$$

Tako dobivamo komponente

$$\begin{aligned}\underline{E}_x &= -\frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z}, \\ \underline{E}_y &= \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z}, \\ \underline{E}_z &= \frac{1}{j\omega \epsilon} \left[\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \right].\end{aligned}\tag{8.7.91a – c}$$

Nakon uvrštenja (8.7.90a – c) u (8.7.91a – c) i uvodeći oznaku

$$\underline{E}_{0z} = (k_x^2 + k_y^2) \frac{A_0}{j\omega \mu \epsilon},\tag{8.7.92}$$

dobivamo komponente električnog polja TM modova

$$\begin{aligned}\underline{E}_x &= -j \frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} \underline{E}_{0z} \cos k_x x \sin k_y y e^{-jk_z z}, \\ \underline{E}_y &= -j \frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} \underline{E}_{0z} \sin k_x x \cos k_y y e^{-jk_z z}, \\ \underline{E}_z &= \underline{E}_{0z} \sin k_x x \sin k_y y e^{-jk_z z}.\end{aligned}\tag{8.7.93a – c}$$

Iz graničnih uvjeta na idealno provodnim stijenkama valovoda, tj. za $x = 0$ i $x = a$ te za $y = 0$ i $y = b$ tangencijalne komponente električnog polja moraju biti jednake nula, tj. $E_z = 0$, slijedi

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad ; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (8.7.94a, b)$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Objašnjenje svakog moda je slično kao i za dominantni TE_{01} mod u prethodnom članku 8.7.2. Prije svega iz jednažbi (8.7.86) i (8.7.94a,b) dobivamo

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_z^2 = k^2 \quad (8.7.95)$$

Po analogiji s (8.7.61) uvodimo konstantu prostiranja duž valovoda

$$(\gamma_v)_{mn}^2 = (k_c)_{mn}^2 - k^2 \quad (8.7.96)$$

dok je iz jednažbi polja (8.7.90a – c) i (8.7.93a – c) očito da ona iznosi

$$\gamma_v = jk_z \quad (8.7.97)$$

Konstanta prostiranja γ_v postaje jednaka nula u slučaju da u jednažbi (8.7.95) k poprimi vrijednost

$$(k_c)_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (8.7.98)$$

Veličina $(k_c)_{mn}$ naziva se *granični valni broj* ili *odrezni valni broj mn-moda*. Tako za sve vrijednosti k imamo

$$(\gamma_v)_{mn} = jk_z = (\alpha_v)_{mn} = \sqrt{(k_c)_{mn}^2 - k^2} \quad ; \quad k < k_c \quad (8.7.99a, b)$$

$$(\gamma_v)_{mn} = jk_z = j(\beta_v)_{mn} = j\sqrt{k^2 - (k_c)_{mn}^2} \quad ; \quad k > k_c$$

Za $k > k_c$ mod se prostire, a za $k < k_c$ mod se ne prostire duž valovoda. Iz (8.7.98) slijede granične frekvencije mn -modova

$$(f_c)_{mn} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (8.7.100)$$

i granične valne duljine

$$(\lambda_c)_{mn} = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (8.7.101)$$

Pomoću granične frekvencije možemo izraziti konstante prostiranja mn -modova kao

$$(\gamma_v)_{mn} = (\alpha_v)_{mn} = (k_c)_{mn} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad ; \quad f < f_c , \quad (8.7.102a,b)$$

$$(\gamma_v)_{mn} = j(\beta_v)_{mn} = jk \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad ; \quad f > f_c .$$

Prema jednadžbi (8.2.27) valni broj za dielektrik jest

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon . \quad (8.7.103)$$

Konačno možemo fazorske komponente polja TM_{mn} modova pisati kao

$$\begin{aligned} (\underline{E}_x)_{mn} &= -jE_{0z} \frac{k_x k_z}{k_c^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma_v z} , \\ (\underline{E}_y)_{mn} &= -jE_{0z} \frac{k_y k_z}{k_c^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma_v z} , \\ (\underline{E}_z)_{mn} &= E_{0z} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma_v z} , \\ (\underline{H}_x)_{mn} &= j\omega \epsilon E_{0z} \frac{k_y}{k_c^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma_v z} , \\ (\underline{H}_y)_{mn} &= -j\omega \epsilon E_{0z} \frac{k_x}{k_c^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma_v z} , \\ (\underline{H}_z)_{mn} &= 0 , \end{aligned} \quad (8.7.104a - f)$$

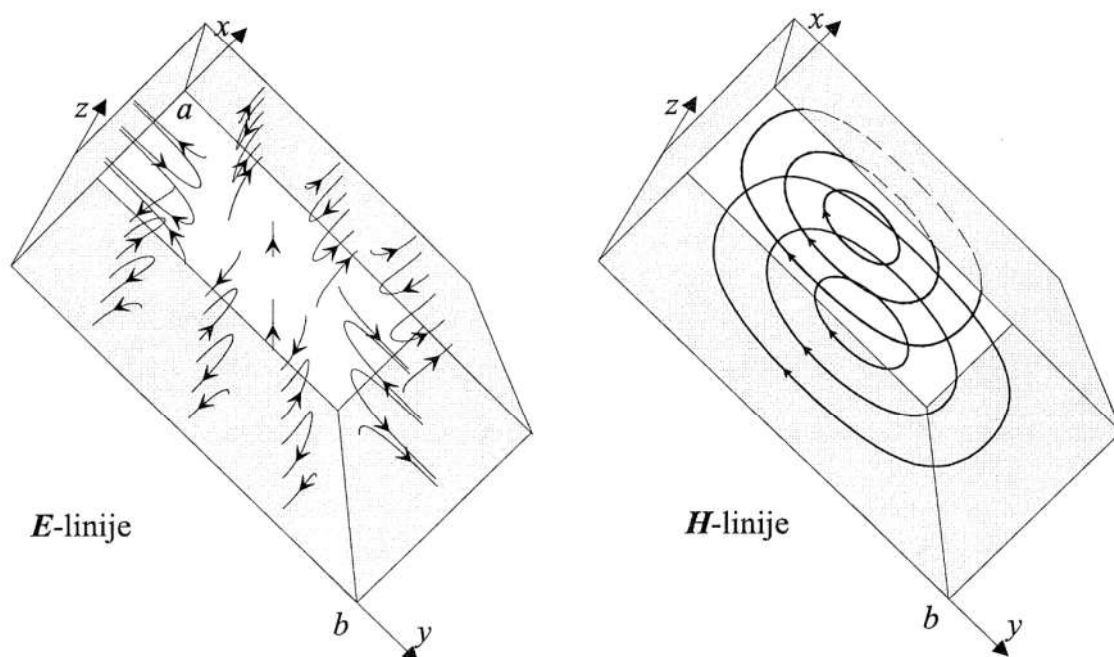
za $f > f_c$. Karakteristična impedancija za TM modove jest

$$Z_0 = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k_z}{\omega \epsilon} = Z \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad ; \quad f < f_c , \quad (8.7.105)$$

gdje je $Z = (\mu/\epsilon)^{1/2}$.

Fizičke dimenzije valovoda u usporedbi s valnom duljinom određuju koji će se modovi prostirati duž valovoda. Valovodi su obično konstruirani tako da se prostire samo jedan mod. Zbog toga je obično $b/a > 1$. Najčešće se koristi omjer $b/a = 2$, a veći omjer za prijenos snage nije povoljan.

Slično se, uvodeći vektorski električni potencijal A^* , mogu izračunati svi viši TE modovi u valovodu. Na slici 8.7.9 prikazan je TM_{11} mod u pravokutnom valovodu.

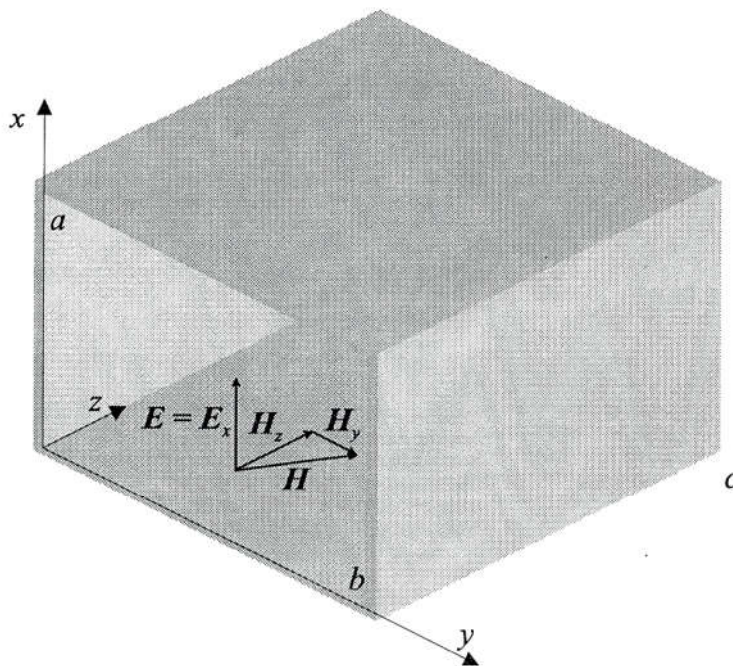


Slika 8.7.9. Električno i magnetsko polje TM_{11} moda u pravokutnom valovodu

8.7.3. Rezonatori

Razmotrit ćemo elektromagnetske valove u dielektričkom prostoru potpuno zatvorenom vodičima. U idealnim uvjetima, tj. u slučaju kada nema gubitaka, elektromagnetsko polje može postojati unutar područja bez izvora zatvorenog idealnim vodičima. Polje može egzistirati samo kod određenih frekvencija koje nazivamo *rezonantne frekvencije*. To znači da trebaju biti zadovoljeni određeni uvjeti. Najbitnije je da su dimenzije šupljine u odnosu na valnu duljinu takve da se *stojni val* elektromagnetskog polja može uspostaviti unutar šupljine. Provest ćemo matematičku analizu za jednostavni pravokutni oblik *šupljeg rezonatora* pomoću Maxwellovih jednažbi, uz zahtjev da polja zadovoljavaju određene granične uvjete. Primijenit ćemo dosad razvijena rješenja za refleksiju valova. Promatrat ćemo rezonantni stojni val elektromagnetskog polja u dielektričkoj šupljini kao interferenciju proizvedenu superpozicijom različitih valova reflektiranih od idealno vodljivih stijenki rezonatora.

Šuplji rezonatori koriste se kod ekstremno visokih frekvencija, tj. u području *mikrovalova*. Postoje rezonatori i za optičke frekvencije, koji se od mikrovalnih razlikuju po tome što su im dimenzije mnogo veće od valne duljine upotrijebljene svjetlosti, ali ih mi ovdje nećemo analizirati. *Pravokutni šuplji rezonator* prikazan je na slici 8.7.10. Pretpostavljamo da su i dielektrik i vodiči idealni.



Slika 8.7.10. Pravokutni šuplji rezonator s TE_{011} modom

Želimo naći rješenje za električno polje kojemu su tangencijalne komponente na površinama svih šest stijenki rezonatora jednake nula. U prethodnom članku 8.7.2. vidjeli smo da TE_{01} mod zadovoljava ovaj uvjet na sve četiri bočne stijenke valovoda. Zato ćemo pretpostaviti da je polje u rezonatoru duž z -osi stojni val oblika

$$\underline{E}_x = A \sin \frac{\pi y}{b} (e^{-j\beta_v z} + e^{+j\beta_v z}), \quad (8.7.106)$$

što se može prikazati i kao

$$\underline{E}_x = \underline{E}_0 \sin \frac{\pi y}{b} \sin \beta_v z. \quad (8.7.107)$$

Rubni uvjeti po z -osi jesu da je za $z = 0$ i $z = c$ polje $E_x = 0$, što rezultira da je $\beta_v c = \pi$, tj.

$$\beta_v = \frac{\pi}{c}, \quad (8.7.108)$$

pa električno polje TE_{01} moda u rezonatoru glasi

$$\underline{E}_x = \underline{E}_0 \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi z}{c}. \quad (8.7.109)$$

Konstanta prostiranja za idealan valovod je prema (8.7.96b), pa uvrštenjem (8.7.108) i $\beta = \omega(\mu\epsilon)^{1/2}$ dobivamo

$$\beta_v = \frac{\pi}{c} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad ; \quad f > f_c, \quad (8.7.110)$$

gdje je prema (8.7.66) granična frekvencija za TE₀₁ mod

$$f_c = \frac{1}{2b \sqrt{\mu \epsilon}}. \quad (8.7.111)$$

Ako (8.7.110) riješimo za *rezonantnu frekvenciju* $f = f_r$ dobivamo

$$f_r = \frac{1}{2bc} \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{\mu \epsilon}}, \quad (8.7.112)$$

ili izraženo pomoću valne duljine rezonantnog stojnog vala

$$\lambda = \frac{c}{f_r} = \frac{2bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \quad (8.7.113)$$

Pod uvjetom da je a najmanja dimenzija šupljeg rezonatora onda su to rezonantna frekvencija i valna duljina *dominantnog moda*, kojeg označavamo s TE₀₁₁. Dodani indeks 1 označava da smo izabrali prvu nultočku od $\sin \beta_v z$. Više nultočke daju *modove višeg reda*, tj. modove s višim rezonantnim frekvencijama. Pomoću druge glavne Maxwellove jednadžbe u fazorskom obliku

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega \mu \underline{H}, \quad (8.7.114)$$

pisane za dielektrik u koju uvrštavamo (8.7.109) dobivamo

$$\begin{aligned} \underline{H}_x &= 0, \\ \underline{H}_y &= -\frac{1}{j\omega \mu} \frac{\partial \underline{E}}{\partial z}, \\ \underline{H}_z &= \frac{1}{j\omega \mu} \frac{\partial \underline{E}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (8.7.115a - c)$$

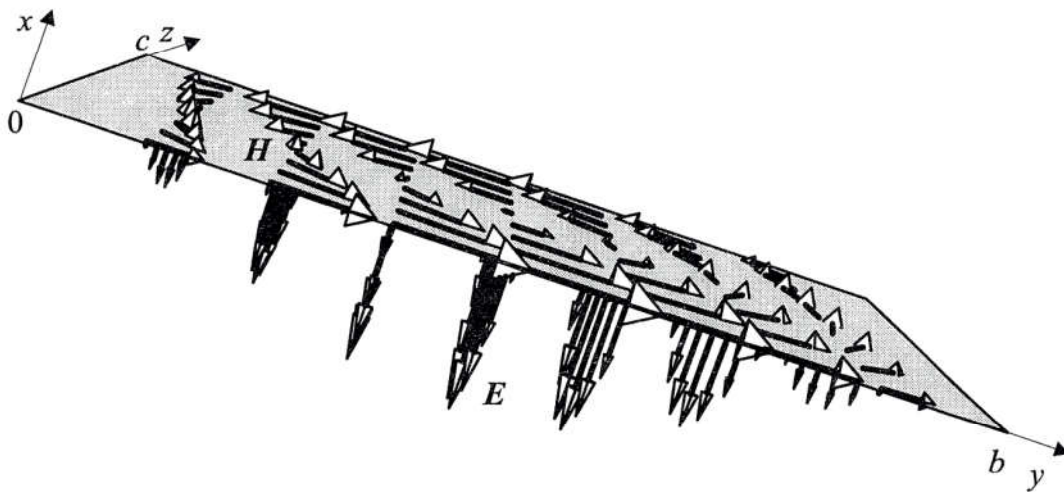
Nakon deriviranja (8.7.109) i uvrštenja (8.7.112) dobivamo komponente polja stojnog TE₀₁₁ vala u rezonatoru

$$\underline{H}_y = j \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \frac{E_0}{Z} \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi z}{c}, \quad (8.7.116a)$$

$$H_z = -j \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \frac{E_0}{Z} \cos \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi z}{c}, \quad (8.7.116b,c)$$

$$E_x = E_0 \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi z}{c}.$$

Treba upozoriti na činjenicu da su električno polje E_x i komponente magnetskog polja H_y i H_z pomaknute u fazi za $\pm \pi/2$, što potvrđuje da nema tijeka djelatne snage u idealnom rezonatoru. Raspodjela trenutnih vrijednosti linija polja u momentu kada su i električno i magnetsko polje različiti od nule prikazana je na slici 8.7.11.



Slika 8.7.11. Električno i magnetsko polje TE_{011} moda u pravokutnom šupljem rezonatoru

Ako nas zanima pohranjena elektromagnetska energija u šupljini rezonatora, iz stavka o očuvanju energije u sinusnim poljima (7.3.17) proizlazi da je $W_{e,sr} = W_{m,sr}$. Srednja električna odnosno magnetska pohranjena energija jesu

$$W_{e,sr} = W_{m,sr} = \frac{\epsilon}{2} \int_V |E|^2 dV = \frac{\epsilon}{8} |E_0|^2 abc. \quad (8.7.117)$$

Iz istog stavka je očito da je ukupna energija u šupljem rezonatoru neovisna o vremenu, tj. konstantna i da iznosi

$$W = W_{e,sr} + W_{m,sr} = \frac{\epsilon}{4} |E_0|^2 abc. \quad (8.7.118)$$

Za rezonator s gubicima, kakav susrećemo u stvarnosti, uvodi se *faktor dobrote rezonatora* kao iznos kružne frekvencije pomnožene s pohranjenom energijom i podijeljene sa srednjom izgubljenom snagom

$$Q = \frac{\omega W}{P_{g,sr}} . \quad (8.7.119)$$

Ako je izolacijski materijal s gubicima, tada možemo računati faktor dobrote kao

$$Q_i = \frac{\omega \epsilon \int_V |\underline{E}|^2 dV}{\kappa \int_V |\underline{E}|^2 dV} = \frac{\omega \epsilon}{\kappa} = \frac{\epsilon'}{\epsilon''} .$$

Ova relacija je valjana za bilo koji mod u rezonatoru. Ako su i stijenke rezonatora načinjene iz dobrog vodiča s gubicima, tada gubitke u stijkama računamo pomoću (8.3.11b), pa dobivamo

$$P_{g,sr} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}} \oint_{S_{\text{supljine}}} |\underline{H}|^2 dS = \frac{\sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}} |\underline{E}_0|^2}{2Z^2(b^2 + c^2)} [bc(b^2 + c^2) + 2a(b^3 + c^3)] , \quad (8.7.120)$$

te konačno dobivamo faktor dobrote zbog gubitka u stijkama rezonatora

$$Q_s = \frac{\pi Z}{2 \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}}} \frac{a(b^2 + c^2)^{3/2}}{bc(b^2 + c^2) + 2a(b^3 + c^3)} . \quad (8.7.121)$$

Iz simetrije Q_s u b i c evidentno je da u slučaju kada je $b = c$ nastupa maksimum od Q_s . Za šupljinu kvadratične osnove, tj. u slučaju kada je $b = c$ dobivamo

$$f_r = \frac{1}{b\sqrt{2\mu\epsilon}} \quad ; \quad Q_s = \frac{1.11Z}{\sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa} \left(1 + \frac{b}{2a}\right)}} . \quad (8.7.122a,b)$$

Faktor dobrote raste s porastom a , ali ako je $a > b$ mi nećemo više imati dominantni mod u rezonatoru. Za prostornu kocku konstruiranu od bakra dobivamo

$$Q_s = \frac{1.07 \cdot 10^9}{\sqrt{f}} ,$$

što kod mikrovalnih frekvencija iznosi nekoliko tisuća.

8.8. ZRAČENJE ELEKTROMAGNETSKIH VALOVA

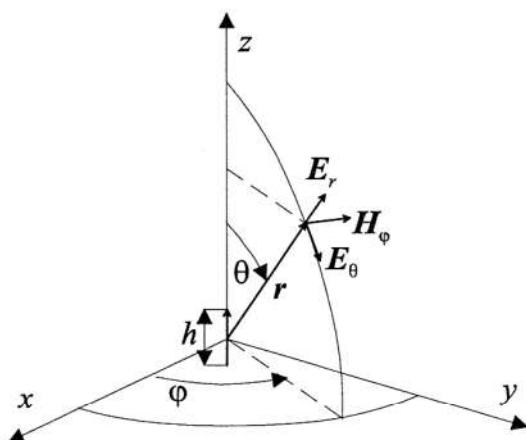
U prethodnim odjeljcima analizirali smo prostiranje elektromagnetskih valova ne zanimajući se za način kako su nastali. U ovom odjeljku studirat ćemo elementarne izvore elektromagnetskih valova. Pokazat ćemo da je izvor u neograničenom prostoru karakteriziran zračenjem elektromagnetske energije. Osnovna zadaća bit će da odredimo veličinu i raspodjelu polja elektromagnetskih valova proizvedenih pretpostavljenim raspodjelama naboja i struja u izvorima u neograničenim prostorima. U tu svrhu upotrijebit ćemo u poglavlju 2. izvedena retardirana integralna rješenja za Hertzove vektore i za vektorske potencijale. Analizirat ćemo zračenje dipola i ravnih tankožičnih antena.

8.8.1. Zračenje električnog dipola

Uobičajeno je polja oko tankih ravnih vodiča protjecanih sinusnim strujama visokih frekvencija, koji služe kao izvori elektromagnetskih valova pa ih nazivamo antenama, računati iz *pretpostavljene* raspodjele struje duž vodiča. Najjednostavniji slučaj za proračun izračene snage i raspodjele elektromagnetskog polja oko vodiča jest linijski element tako kratak da se raspodjela struje po cijeloj njegovoj duljini može smatrati jednolikom. Takve elemente nazivamo *električnim dipolima*. Mnogo zamršeniji oblici antena mogu se promatrati kao da su izgrađeni od većeg broja takvih malih elemenata. Promatrat ćemo samo slučajeve kada su elementi smješteni u neograničenom prostoru i kada su protjecani sinusnim strujama, koje se u kompleksnom području mogu izraziti s

$$I = I_0 e^{j\omega t} . \quad (8.8.1)$$

Pretpostavit ćemo, prema tome, da struja sinusno titra u ravnom djeliću žice smještenom u ishodište koordinatnog sustava prema slici 8.8.1; prostor je neograničen i prazan sa značajkama ϵ_0 , μ_0 i $\kappa = 0$.



Slika 8.8.1. Komponente polja oko električnog dipola

Pretpostavljamo da je duljina elementa žice protjecanog sinusnom strujom mnogo manja od duljine vala, tj. $h \ll \lambda$. Ovdje je h duljina elementa, a valna duljina jest

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}. \quad (8.8.2)$$

Pretpostavit ćemo da struja I naglo završava na krajevima žice uzrokujući pohranjivanje naboja u krajnjim točkama $z' = \pm h/2$. Pohranjeni naboji u tim točkama iznose

$$q = \pm \int I dt = \pm \frac{I}{j\omega} = \pm \frac{I_0}{j\omega} e^{j\omega t}. \quad (8.8.3)$$

Vidimo da su naboji pridruženi strujnom elementu (Ih) udruženi s *titrajućim* električnim dipolom. Zato strujni element nazivamo *zračeći električni dipol*, ili jednostavno *Hertzov dipol*. Iznos električnog dipolnog momenta jest

$$\mathbf{p} = q\mathbf{h} = \frac{Ih}{j\omega} = \frac{I_0 h}{j\omega} e^{j\omega t}. \quad (8.8.4)$$

Polje Hertzova dipola možemo računati na više načina. Jedan jest da iz nehomogene valne jednadžbe (2.5.1c) izračunamo opći integral Hertzova vektora $\mathbf{Z}$ u neograničenom prostoru. Integral Hertzova vektora (2.5.4c) prilagodit ćemo našim uvjetima tako što ćemo dipolni moment pisati

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}_z \frac{I_0 h}{j\omega} e^{j\omega t}, \quad (8.8.5)$$

a njegovu *retardiranu vrijednost* promatranu iz točke N pisat ćemo kao

$$[\mathbf{p}] = \mathbf{p} \left(0, t - \frac{r}{c_0} \right), \quad (8.8.6)$$

što se u kompleksnom području računa¹⁰¹ kao

$$[\mathbf{p}] = \mathbf{a}_z \frac{I_0 h}{j\omega} e^{j\left(\omega t - \frac{\omega r}{c_0}\right)} = \mathbf{a}_z \frac{I_0 h}{j\omega} e^{j(\omega t - kr)}, \quad (8.8.7)$$

pa umjesto integracije iz (2.5.4c) dobivamo rješenje za Hertzov vektor električnog titrajnog dipola u obliku

¹⁰¹ Pogledati članak 7.2.3. i rješenje u fazorskoj domeni (7.2.25).

$$\mathbf{Z} = \mathbf{a}_z \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{I_0 h}{j\omega} e^{j(\omega t - kr)} , \quad (8.8.8)$$

gdje je $k = \omega/c_0$. Očito da je Hertzov vektor kolinearan s električnim dipolom, tj. sa z-osi. Opada s $1/r$ i ima valni karakter. Prema (2.3.3a) vektorski magnetski potencijal električnog titrajućeg dipola može se računati u sinusnom polju kao kompleksna veličina

$$\mathbf{A} = j\omega\mu_0\epsilon_0\mathbf{Z} , \quad (8.8.9)$$

što daje

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0}{4\pi r} I_0 h e^{j(\omega t - kr)} , \quad (8.8.10)$$

veličinu neovisnu o azimutalnom kutu φ . To je *sferni izlazeći val*, budući da su plohe konstantne faze kugle. Elektromagnetsko polje oko strujno protjecanog kratkog elementa, tj. oko titrajućeg električnog dipola, odredit ćemo iz vektorskog potencijala (8.8.10). Prethodno ćemo izraz (8.8.10) pisati u sfernim koordinatama (r, θ, φ) uvodeći relaciju

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_r \cos \theta - \mathbf{a}_\theta \sin \theta . \quad (8.8.11)$$

Tako, za vektorski magnetski potencijal u sfernim koordinatama dobivamo

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_r \cos \theta - \mathbf{a}_\theta \sin \theta) \frac{\mu_0}{4\pi r} I_0 h e^{j(\omega t - kr)} . \quad (8.8.12)$$

Prema (2.1.2) dobivamo magnetsko polje dipola

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_\varphi \frac{I_0 h}{4\pi} e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta . \quad (8.8.13)$$

Električno polje titrajućeg električnog dipola možemo odrediti iz kompleksnog oblika prve Maxwellove jednadžbe za polje u dielektriku

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\mathbf{E} , \quad (8.8.14)$$

a otud dobivamo u sfernim koordinatama

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{I_0 h}{4\pi} Z_0 e^{j(\omega t - kr)} & \left[\mathbf{a}_r \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) 2\cos \theta + \right. \\ & \left. + \mathbf{a}_\theta \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin \theta \right] . \end{aligned} \quad (8.8.15)$$

Ovdje su uvedene valna impedancija slobodnog prostora Z_0 prema (8.2.50i) i realna separacijska konstanta k prema (8.2.28b), pa imamo

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.6 \, \Omega \quad ; \quad k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c_0} . \quad (8.8.16a,b)$$

Opća slika polja titrajućeg električnog dipola lako se može dobiti iz relacija (8.8.13) i (8.8.15). Na prvom mjestu opažamo da vektor električnog polja leži u meridijalnoj ravnini koja je položena kroz os dipola, a vektor magnetskog polja je okomit na tu ravninu, tj. ima samo azimutalnu komponentu. Magnetske silnice su suosne kružnice oko osi dipola. Podsjetimo se da je to najjednostavniji slučaj proračuna izračenog elektromagnetskog polja iz vrlo kratkog ravnog elementa žice protjecanog izmjeničnom strujom koja ne ovisi o odrednici z . Dobiveni rezultati su tim točniji što je duljina elementa h manja od valne duljine λ . Uvedene pretpostavke postaju neodržive, tj. rezultati nisu valjani ako je $h/\lambda > 0.1$.

1. Blizu induksijsko polje

Električno i magnetsko polje u jednadžbama (8.8.13) i (8.8.15) sadrže članove koji pripadaju trima različitim vrstama čiji članovi opadaju s trećom, drugom i prvom potencijom recipročne vrijednosti polumjera udaljenosti ($1/r^3$, $1/r^2$ i $1/r$). Za dio prostora vrlo blizu strujnom elementu ($r \ll \lambda$) najznačajniji članovi su oni s najvišim potencijama od r . Ako prema (8.8.5) pišemo iznos dipolnog momenta kao

$$p = \frac{I_0 h}{j\omega} e^{j\omega t} , \quad (8.8.17)$$

budući da je $r \ll \lambda$, dobivamo iz (8.8.13) i (8.9.15) približne izraze za polja u blizoj zoni

$$\left. \begin{aligned} E &\approx \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (a_r 2 \cos \theta + a_\theta \sin \theta) , \\ H &\approx a_\phi \frac{I_0 h e^{j\omega t}}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} . \end{aligned} \right\} r \ll \lambda \quad (8.8.18a,b)$$

Usporedimo li reducirani izraz (8.8.18a) za električno polje u blizoj zoni dipola s izrazom (4.7.21) za polje statičkog električnog dipola, uočiti ćemo potpunu podudarnost. Slično ćemo uočiti potpunu podudarnost reduciranog izraza (8.8.18b) za magnetsko polje titrajućeg dipola i izraza (6.8.7) za polje istosmjernog strujnog elementa računatog po Biot-Savartovu zakonu. Polje u blizoj zoni je prema tome *kvazistatičko*, a nazivamo ga *induksijsko polje* ili *blizo polje*. Treba istaći činjenicu da su električno i magnetsko polje u tom području pomaknuta u fazi za 90° , tako da ne postoji tijekom srednje djelatne elektromagnetske energije. Postoji samo tijekom srednje reaktivne energije čija je gustoća

dana s Poyntingovim vektorom prema (8.2.53)

$$N_{sr} \approx j \frac{1}{2} \left(\frac{I_0 h}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\omega \epsilon_0 r^5} [a_\theta \sin 2\theta - a_r \sin^2 \theta] . \quad (8.8.19)$$

2. Daleko radijacijsko polje

Daleko od strujnog elementa, tj. zračećeg izvora ($r \gg \lambda$), jednadžbe polja (8.8.13) i (8.8.15) reduciraju se u približne izraze za komponente

$$\left. \begin{aligned} E_\theta &\approx \frac{jkI_0 h}{4\pi r} Z_0 e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta , \\ H_\phi &\approx \frac{jkI_0 h}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta , \end{aligned} \right\} r \gg \lambda \quad (8.8.20a,b)$$

pri čemu je

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = Z_0 . \quad (8.8.21)$$

To polje je sferni odlazeći val i nazivamo ga *radijacijsko polje*. Na velikim udaljenostima od izvora svaki dio plohe sfernog vala je ravni val, tako da možemo očekivati tipičan homogeni ravni val. Polja E_θ i H_ϕ su u fazi i povezana su sa Z_0 . Međusobno su prostorno pod pravim kutom kao i u odnosu na smjer prostiranja. Poyntingov vektor je tada u cijelosti radijalan. Zanimljiv je srednji tijek djelatne energije, a gustoća mu iznosi

$$N_{r,sr} = \frac{1}{2} \left(\frac{I_0 h}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{r} \right)^2 Z_0 \sin^2 \theta . \quad (8.8.22)$$

Ukupni tijek izračene djelatne energije iz izvora dobit ćemo ako Poyntingov vektor (8.8.22) integriramo po kugli polumjera r , za $r \gg \lambda$. Tako prema slici 8.8.1. dobivamo

$$P_{N,sr} = \oint_S N_{r,sr} dS = \int_0^\pi N_{r,sr} 2\pi r \sin \theta r d\theta = 40\pi^2 I_0^2 \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 , \quad (8.8.23)$$

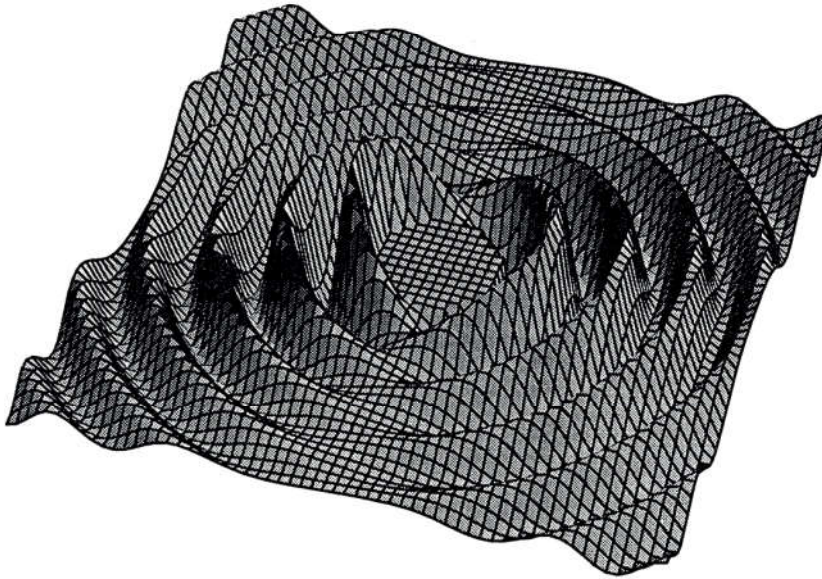
gdje su $\lambda = 2\pi/k$, i $Z_0 \approx 120\pi$. Izračena srednja djelatna snaga izvora neovisna je o polumjeru kugle po kojoj je provedena integracija.

Pogodno je uvesti *otpor zračenja* izvora. Otpor zračenja definira se kao djelatni otpor u kojem se troši isti iznos ukupne izračene snage iz izvora kao kada bi kroz otpor tekla ista struja, pa je prema tome ekvivalentni otpor zračenja Hertzova dipola

$$R = \frac{2P_{Nsr}}{I_0^2} = 80\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2, \quad (8.8.24)$$

izražen u omima.

Iz (8.8.24) očito je da je kratki linearni strujni element vrlo nedjelotvoran izvor zračenja elektromagnetskih valova, budući da je otpor zračenja proporcionalan kvadratu omjera duljine elementa i valne duljine i budući da smo kratki element ograničili s $h/\lambda \ll 1$. Tako, npr, tanka žica duljine jedne stotinke valne duljine zrači 0.08 vata po amperu na kvadrat. Pri frekvenciji od 100 kHz stotinka valne duljine iznosi 30 m. Zanimljiva je još slika polja strujnog elementa. Magnetsko polje predstavljeno je suosnim kružnicama. Električno polje (8.8.15) je zamršenije i prikazano je na slici 8.8.2.



Slika 8.8.2. Raspodjela dalekog radijacijskog električnog polja E_θ u ravni $\varphi = \text{konst.}$ Hertzova dipola u vremenskoj domeni za $t = 0$

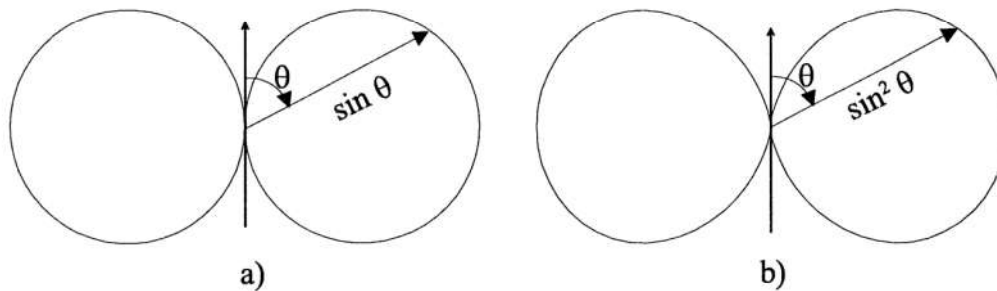
Svi izvori zračenja su više ili manje usmjereni. Zrače više snage u jednom smjeru nego u drugom. To prikazujemo *dijagramom zračenja* izvora. Usmjerenost izvora, tj. antene možemo predstaviti na dva načina: kao dijagram raspodjele polja ili kao dijagram raspodjele snage zračenja. Dijagram raspodjele polja prikazuje amplitudu dalekog električnog ili dalekog magnetskog polja kao funkciju kutova θ i φ kod jednog stalnog polumjera r . On je obično normiran s obzirom na njegovu maksimalnu vrijednost. Tako za električni dipol možemo pisati

$$E_\theta = Z_0 H_\varphi = jZ_0 \frac{khI_0 e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi r} F(\theta, \varphi), \quad (8.8.25)$$

a otud je prostorni faktor ili faktor usmjerenosti izvora

$$F(\theta, \varphi) = \sin \theta = \frac{E_\theta(\theta, \varphi)}{E_{\theta, m}} = \frac{H_\varphi(\theta, \varphi)}{H_{\varphi, m}}. \quad (8.8.26)$$

Za dipolnu antenu $F(\theta, \varphi)$ je neovisan o kutu φ . Raspodjelu polja prikazat ćemo u polarnom dijagramu prema slici 8.8.3.a).



Slika 8.8.3. a) Raspodjela radijacijskog polja i b) raspodjela izračene snage Hertzova dipola

Dijagram raspodjele izračene snage je obično normiran dijagram funkcije $N_{r,sr}(\theta, \varphi)$ i ima oblik kvadrirane raspodjele polja. Za elementarni dipol prikazan je na slici 8.8.3.b).

8.8.2. Radijacijsko polje ravnog vodiča

Zadaća proračuna elektromagnetskog polja usamljenog ravnog vodiča konačne duljine protjecanog strujom rješiva je samo u slučaju ako je raspodjela struje u vodiču unaprijed propisana. Najčešće se raspodjela struje u ravnom vodiču aproksimira sinusnom raspodjelom po duljini vodiča. Ako pretpostavljena sinusna raspodjela struje ne daje dovoljno točne rezultate, tada raspodjelu možemo aproksimirati Fourierovim redom sinusnih članova. Te članove možemo odrediti npr. analizom eksperimentalno izmjerene raspodjele struje.

Strogo određivanje raspodjele struje po vodiču zadaća je rubnih vrijednosti. Abraham je 1898. godine, primjenjujući rješenja za vodljivi rotacijski elipsoid, potvrdio da je raspodjela struje duž jedne izolirane ravne vodljive žice u biti sinusna i da je odnos duljine žice prema valnoj duljini polovica cijelog broja tako dugo dok su dimenzije poprečnog presjeka vodiča male u odnosu na njegovu duljinu. Mnogo veći uzrok pogreške od konačnog promjera vodiča jest prigušenje vala struje zbog zračenja, kao i gubitka energije koja se troši na toplinu u vodiču. Na raspodjelu struje u vodiču utječe također blizina površine zemlje i ostalih objekata.

U radiokomunikacijskoj tehnici uobičajeno je uređaje kojima je primarna svrha zračenje ili prijam elektromagnetske energije nazivati *antenama*. Upravo je tankožični ravni vodič protjecan strujom primjer linearne antene. Ako je napajan u središtu, tada ga nazivamo dipolna antena. Analiza i proračuni koje ćemo ovdje provesti predstavljaju osnovicu za određivanje polja i dijagrama zračenja antena.

U ovom članku promatrat ćemo proces zračenja linearne antene potpuno izolirane u slobodnom prostoru. Usvojit ćemo pretpostavku sinusne raspodjele struje duž tankožičnog ravnog vodiča i računat ćemo radijacijsko elektromagnetsko polje uzrokovano tom poznatom raspodjelom struje. Vodič je duljine l i smješten je u ishodište koordinatnog sustava prema slici 8.8.4. Struja u bilo kojoj točki udaljenoj za z' od središta žice je

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-h}^{+h} \frac{I(z') e^{j(\omega t - kR)}}{R} dz' .$$

To je izraz za proračun vektorskog potencijala u točki udaljenoj za $\mathbf{r}$ od ishodišta O u kojem je smješten ravni tankožični vodič duljine $l = 2h$ usmjeren duž osi z prema slici 8.8.4. Ovdje prema slici 8.8.4. uzimamo

$$\mathbf{r}' = \mathbf{a}_z z' \quad ; \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| . \quad (8.8.32)$$

Preostaje da se provede integracija izraza

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-h}^{+h} \frac{\sin k(h - |z'|)}{R} e^{j(\omega t - kR)} dz' , \quad (8.8.33)$$

koji ćemo pojednostavniti uvodeći određena približenja. Prvo ćemo za daleko radijacijsko polje ($r \gg h$) pisati omjer

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} , \quad (8.8.34)$$

i izvući ga ispod integracije po prim koordinatama. Drugi faktor koji utječe na vektorski potencijal jest razlika u fazi svakog doprinosa valu u $\mathbf{r}$ od elementarnih izvora u $\mathbf{r}'$, što je izraženo faktorom $e^{jk(r - r')}$. Ako prema slici 8.8.4. za $r \gg h$ približno pišemo u eksponentu

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |\mathbf{r} - \mathbf{a}_z z'| \approx r - z' \cos \theta , \quad (8.8.35)$$

konačno dobivamo integral vektorskog potencijala

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \int_{-h}^{+h} \sin k(h - |z'|) e^{jkz' \cos \theta} dz' . \quad (8.8.36)$$

Vektorski potencijal dalekog radijacijskog polja tankožičnog ravnog vodiča duljine $l = 2h$ dobiva se integracijom

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I_0}{2\pi kr} \frac{\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)}{\sin \theta} e^{j(\omega t - kr)} . \quad (8.8.37)$$

Iz vektorskog potencijala pomoću (2.1.2) i prve glavne Maxwellove jednadžbe u kompleksnom području dobiju se vektori dalekog polja

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) , \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{j\omega \mu_0 \epsilon_0} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega \mu_0 \epsilon_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) . \end{aligned} \quad (8.8.38a,b)$$

Ako u sfernom koordinatnom sustavu riješimo gornje jednadžbe i zanemarimo sve članove s $1/r^2$ i $1/r^3$, tada za radijacijsko polje ravnog vodiča dobivamo

$$E_{\theta} = Z_0 H_{\varphi} = Z_0 \frac{jI_0}{2\pi r} \frac{\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)}{\sin \theta} e^{j(\omega t - kr)} . \quad (8.8.39)$$

Za visokofrekvencijske antene koriste se duljine vodiča koji su višekratnici polovice valne duljine. Tako imamo

$$l = 2h = m \frac{\lambda}{2} \quad ; \quad kh = m \frac{\pi}{2} \quad ; \quad k = \frac{m\pi}{l} . \quad (8.8.40a - c)$$

Uvrstimo li izraz (8.8.40b) u (8.8.39) dobivamo polja sfernog radijacijskog vala

$$E_{\theta} = Z_0 H_{\varphi} = Z_0 \frac{jI_0}{2\pi r} \cdot e^{j(\omega t - kr)} \left[\frac{\cos\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{m\pi}{2}}{\sin \theta} \right] . \quad (8.8.41)$$

Izraz u zagradi je *prostorni faktor* $F(\theta)$, pa jednadžbe polja možemo pisati

$$E_{\theta} = Z_0 H_{\varphi} = Z_0 \frac{jI_0}{2\pi r} F(\theta) e^{j(\omega t - kr)} , \quad (8.3.42)$$

gdje je

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{m\pi}{2}}{\sin \theta} . \quad (8.8.43)$$

Iznos prostornog faktora je različit za vodiče čija je duljina parni ili neparni višekratnik poluvalne ili valne duljine. Budući da je $m = l/(\lambda/2)$, to ćemo za prostorni faktor dobiti sljedeće izraze

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{\cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \cos \theta\right]}{\sin \theta} \quad ; \quad \text{za } m = (2n-1) , n = 1, 2, 3, \dots \\ F(\theta) &= \frac{2 \cos^2\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \cos \theta\right]}{\sin \theta} \quad ; \quad \text{za } m = 2(2n-1) , n = 1, 2, 3, \dots \\ F(\theta) &= \frac{2 \sin^2(n\pi \cos \theta)}{\sin \theta} \quad ; \quad \text{za } m = 4n , n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (8.8.44a - c)$$

Iz dobivenih izraza za jakost polja (8.8.42) i za prostorni faktor (8.8.44a – c) vidljivo je da jakost radijacijskog polja ne ovisi o duljini vodiča, nego samo o modu raspodjele struje po vodiču. Na taj način smo polje vodiča prikazali kao polje dipola smještenog u središte koordinatnog sustava, s tim da amplitudu polja treba modificirati prostornim faktorom $F(\theta)$. U tablici 8.8.1. na kraju ovog poglavlja prikazani su dijagrami raspodjele polja ravnog vodiča za različite uzbudne modove.

Intenzitet zračenja, tj. gustoća tijeka elektromagnetske snage u radijacijskom polju ravnog vodiča određena je srednjom vrijednošću djelatnog Poyntingova vektora koji iznosi

$$N_{sr} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{a}_r \frac{Z_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2} F^2(\theta) , \quad (8.8.45)$$

mjereno u vatima po četvornom metru. Ukupnu izračenu snagu iz ravnog vodiča dobit ćemo tako da izraz (8.8.45) integriramo po kugli polumjera r , pa dobivamo

$$P_{N, sr} = \oint_S N_{sr} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^\pi N_{sr} 2r^2 \pi \sin \theta d\theta ,$$

što daje

$$P_{N, sr} = 30 I_0^2 \int_0^\pi F^2(\theta) \sin \theta d\theta , \quad (8.8.46)$$

gdje smo uvrstili $Z_0 = 120\pi$ i $kh = m\pi/2$. Integracija izraza (8.8.46) uvođenjem određenih supstitucija i pretvorbi daje izraze

$$P_{N, sr} = 15 I_0^2 \text{Cin}(2m\pi) \quad ; \quad \text{za } m \text{ neparno} , \quad (8.8.47a,b)$$

$$P_{N, sr} = I_0^2 [60 \text{Cin}(m\pi) - 15 \text{Cin}(2m\pi)] \quad ; \quad \text{za } m \text{ parno} ,$$

gdje su

$$\text{Cin} x = \int_0^x \frac{1 - \cos x}{x} dx = C + \ln x + \int_x^\infty \frac{\cos x}{x} dx , \quad (8.8.48a,b)$$

$$\text{Ci} x = - \int_x^\infty \frac{\cos x}{x} dx ,$$

kosinus integrali,¹⁰² a $C = 0.577$ je Eulerova konstanta. Otpor zračenja možemo izračunati iz (8.4.47a,b) i izraza

$$R_0 = \frac{2P_{N,SR}}{I_0^2}, \quad (8.8.49)$$

pa za karakteristične slučajeve poluvalne i punovalne dipolne antene dobivamo

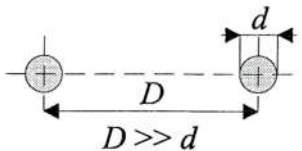
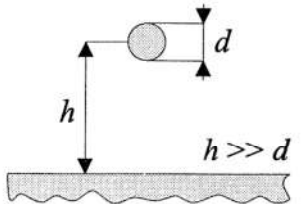
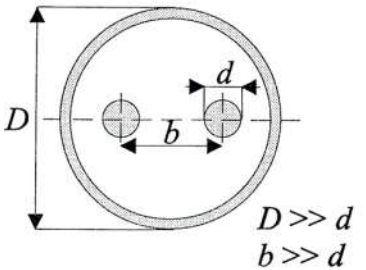
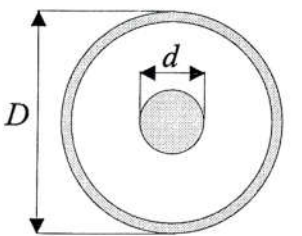
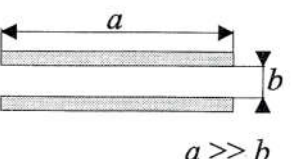
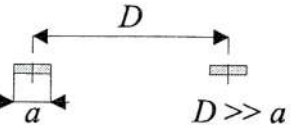
$$\begin{aligned} R_0 &\approx 73 \, \Omega \quad ; \quad m = 1, \\ R_0 &\approx 199 \, \Omega \quad ; \quad m = 2. \end{aligned} \quad (8.8.50a,b)$$

¹⁰² Pogledati E. Jahnke, F. Emde, *Table of Functions with Formulae and Curves*, Dover Publications, New York, 1945., i u J.N. Bronštejn, K.A. Semedjajev, *Spravočnik po matematike*, Gosudarstvennoje izdateljstvo, Moskva, 1957.

Tablica 8.3.2. Pregled osnovnih značajki za prostiranje sinusnog vala u dobrim izolatorima i dobrim vodičima

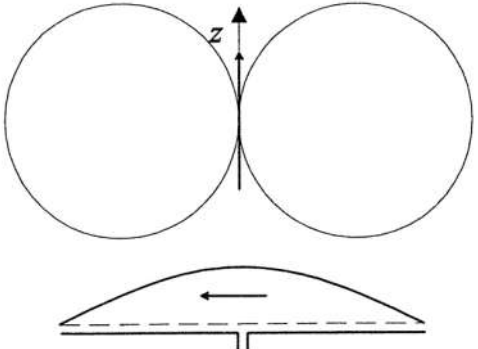
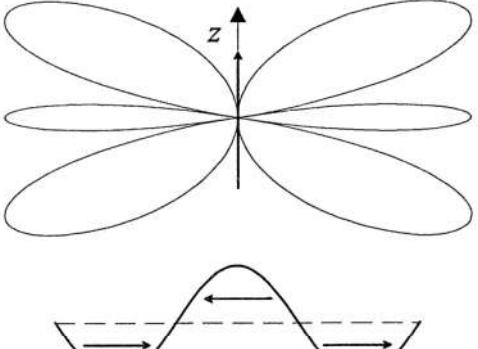
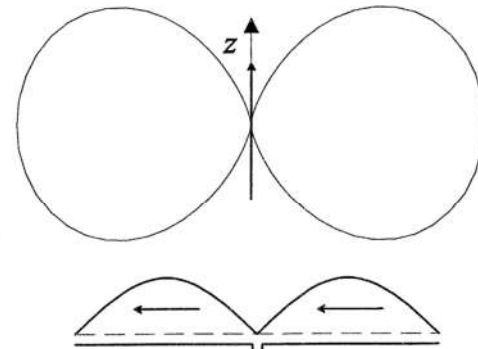
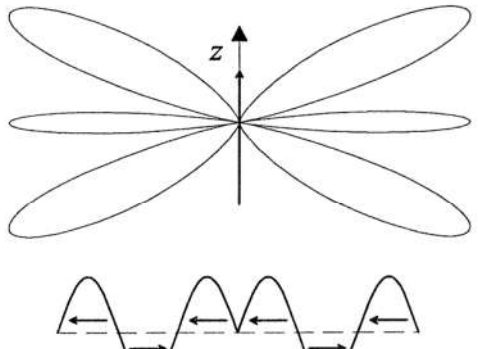
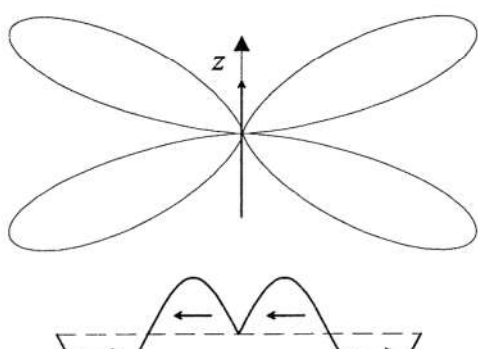
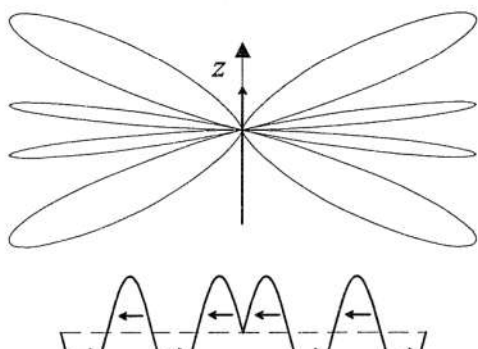
<i>Materijal</i>	<i>Dobar izolator</i>	<i>Dobar vodič</i>
nuždan uvjet	$\frac{\kappa}{\omega \epsilon} \leq 0,2$	$\frac{\kappa}{\omega \epsilon} \geq 100$
prigušna konstanta	$\alpha \doteq \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\alpha \doteq \beta \doteq \sqrt{\frac{\omega \mu \kappa}{2}}$
fazna konstanta	$\beta \doteq \frac{\omega}{c}$	
dubina prodiranja	$d = \frac{1}{\alpha} \doteq \frac{2}{\kappa} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$	$d = \frac{1}{\alpha} \doteq \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}}$
valna impedancija	$Z = Z \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ $\varphi \doteq 0$	$Z \doteq (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}}$ $ Z \doteq \sqrt{\frac{\omega \mu}{\kappa}}, \varphi \doteq 45^\circ$
fazna brzina	$v_f \doteq c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$	$v_f \doteq \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \kappa}}$
valna duljina	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \doteq \frac{c}{f}$	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \doteq \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega \mu \kappa}{2}}}$
Poyntingov vektor	$N_{sr} \doteq \frac{1}{2} a_z H_0 ^2 e^{-2\alpha z} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$N_{sr} \doteq \frac{1}{2} a_z H_0 ^2 e^{-2\alpha z} (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}}$
specifični gubici	$P'_{gsr} \doteq \frac{\kappa}{2} E_0 ^2 e^{-2\alpha z}$	$P'_{gsr} \doteq \frac{\kappa}{2} E_0 ^2 e^{-2\alpha z} =$ $= \frac{1}{2} \omega \mu H_0 ^2 e^{-2\alpha z}$

Tablica 8.7.1. Karakteristične impedancije nekih oblika idealnih prijenosnih linija¹⁰³

Prijenosna linija	Oblik	Karakteristična impedancija
Dvožična (Lecherov vod)		$Z_0 \approx \frac{Z'}{\pi} \ln \frac{2D}{d}$
Jednožična iznad zemlje		$Z_0 \approx \frac{Z'}{2\pi} \ln \frac{4h}{d}$
Oklopljena dvožična		$Z_0 \approx \frac{Z'}{\pi} \ln \frac{2b}{d} \frac{D^2 - b^2}{D^2 + b^2}$
Suosna		$Z_0 \approx \frac{Z'}{2\pi} \ln \frac{D}{d}$
Paralelne trake		$Z_0 \approx Z' \frac{b}{a}$
Kolinearne trake		$Z_0 \approx \frac{Z'}{\pi} \ln \frac{4D}{a}$

¹⁰³ Podaci iz R.F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1961.

Tablica 8.8.1. Dijagrami raspodjele radijacijskog polja ravnog vodiča

	$n = 1$	$n = 2$
$m = 2n - 1$	 $m = 1, l = \lambda/2$	 $m = 3, l = 3\lambda/2$
$m = 2(2n - 1)$	 $m = 2, l = \lambda$	 $m = 6, l = 3\lambda$
$m = 4n$	 $m = 2, l = 2\lambda$	 $m = 8, l = 4\lambda$

POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 8.

- T. Bosanac, *Teoretska elektrotehnika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- M.H. Choudhury, *Electromagnetism*, Ellis Horwood, Chichester, 1989.
- R. F. Harrington, *Time – Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- W. Hauser, *Introduction to the Principles of Electromagnetism*, Addison-Wesley, Reading, 1971.
- Z. Haznadar, *Teoretska elektrotehnika – Elektromagnetska teorija i polja*, Liber, Zagreb, 1972.
- V. Henč-Bartolić, P. Kulišić, *Valovi i optika*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
- J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York, 1975.
- M. Javid, P. M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- D.S. Jones, *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- S. Ramo, J.R. Whinnery, T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, John Wiley, New York, 1965.
- S.R. Seshadri, *Fundamentals of Transmission Lines and Electromagnetic Fields*, Addison-Wesley, Reading, 1971.
- K. Simonyi, *Teoretičeskaja elektrotehnika*, Mir, Moskva 1964.
- Z. Smrkić, *Mikrovalna elektronika*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.
- W.R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

9. METODA KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata¹ (u daljnjem tekstu MKE) danas je široko rasprostranjeno sredstvo za rješavanje zadaća polja. Postoji velik broj programskih MKE sustava opće namjene, kao i MKE sustava posebno prilagođenih rješavanju zadaća u elektromagnetizmu koje možemo nabaviti na tržištu. Namjera nam je da u ovom odjeljku upoznamo čitatelja s temeljima MKE i njezinom primjenom u elektromagnetizmu.

Poteškoće u opisivanju i svladavanju MKE izviru iz njezine interdisciplinarnosti. Potrebno je poznavati fizikalne postavke zadaće, teoriju približenja, matematičko modeliranje varijacijskim formulacijama, matričnu algebru, numeričke metode, programiranje računala... Stoga smo se ovdje opredijelili za postupni pristup opisujući rješavanje zadaća u elektromagnetizmu. Počet ćemo s jednostavnim, dvodimenzionalnim statičkim zadacima i tu ćemo detaljno razraditi sve bitne korake rješenja. Zatim ćemo prijeći na nelinearne zadatke, a na kraju ćemo opisati rješavanje dinamičkih kvazistatičkih polja.

Nadamo se da će čitatelj nakon čitanja ovog dijela knjige moći razumjeti i koristiti postojeće programske sustave, a algoritmi koje ćemo izložiti kroz jednostavno razumljive logičke konstrukcije proceduralnog programiranja omogućit će mu izradu vlastitih programa.

9.1. DEFINICIJA MKE

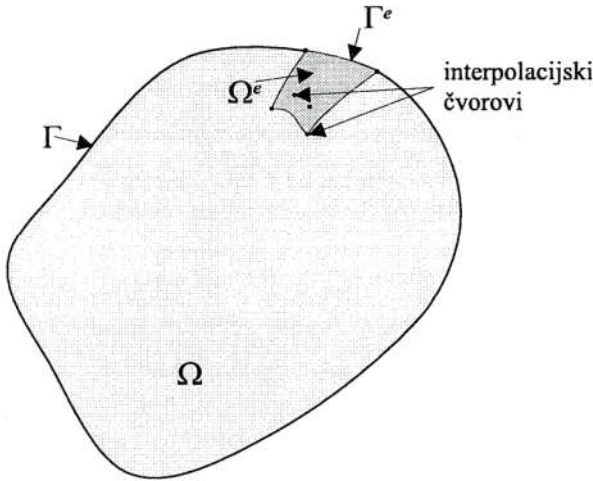
U prethodnim poglavljima smo pokazali da zadaće u elektromagnetizmu, kao i u drugim područjima tehnike, matematički opisujemo parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. Općenito je potrebno odrediti nepoznatu funkciju u koja zadovoljava sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

$$\mathbf{D}(u) = \begin{bmatrix} D_1(u) \\ D_2(u) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = 0, \quad (9.1.1)$$

u domeni Ω , uz zadane uvjete na rubu domene Γ

¹ Engleski naziv jest Finite Element Method (FEM).

$$R(u) = \begin{bmatrix} R_1(u) \\ R_2(u) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 . \quad (9.1.2)$$

Slika 9.1.1. Domena zadaće Ω i njezina granica Γ

MKE se temelji na dva osnovna koraka pri *iznalaženju približnog rješenja zadaće* zadane s (9.1.1,2):

1. Podjela domene Ω na subdomene Ω^e koje nazivamo elementi.
2. Približenje nepoznate funkcije u na svakom elementu u obliku

$$u \approx \sum_i N_i u_i . \quad (9.1.3)$$

Ovdje su N_i interpolacijske funkcije koje odabiremo, a u_i vrijednosti funkcije u u izabranim točkama pojedinog elementa koje nazivamo interpolacijski čvorovi. Da bismo omogućili približenje element po element moramo naći *integralni oblik* koji je ekvivalentan sustavu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (9.1.1,2)

$$\int_{\Omega} O(u) d\Omega + \int_{\Gamma} G(u) d\Gamma = 0 . \quad (9.1.4)$$

Naime, ukoliko su funkcije O i G integrabilne na Ω i Γ , možemo pisati

$$\int_{\Omega} O(u) d\Omega + \int_{\Gamma} G(u) d\Gamma = \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{\Omega^e} O(u) d\Omega + \int_{\Gamma^e} G(u) d\Gamma \right\} = \sum_{e=1}^N W^e . \quad (9.1.5)$$

Ovdje je N ukupni broj elemenata, Ω^e je domena e -tog elementa, Γ^e je dio granice koji pripada e -tom elementu, a W^e je integralni doprinos e -tog elementa. Iznalaženje ekvivalentnog integralnog oblika najčešće provodimo primjenom energetskih funkcionala ili

metodom težinskih ostataka. Ako su parcijalne diferencijalne jednačbe linearne, onda sustav (9.1.1,2) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} D(u) &= [D]u + d = 0, \\ R(u) &= [R]u + r = 0. \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

Tada podjelom domene na elemente i uvrštavanjem približenja (9.1.3) u odgovarajući integralni oblik dobivamo sustav linearnih algebarskih jednačbi za nepoznate koeficijente u_i

$$[K]u = F. \quad (9.1.7)$$

Članove matrice sustava K i vektora desne strane F računamo pomoću

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^N K_{ij}^e \quad ; \quad F_i = \sum_{e=1}^N F_i^e. \quad (9.1.8)$$

Odabranom geometrijom elementa i oblikom interpolacijskih funkcija nakon rješenja sustava (9.1.7) definirali smo približenje nepoznate funkcije u na cijeloj domeni Ω .

9.1.1. Iznalaženje integralnog oblika i njegovo približenje

9.1.1.1. Funkcional kao integralni oblik

U okviru ove točke želimo čitatelja najprije upoznati s osnovama računa varijacija koje su potrebne za razumijevanje MKE bez ulaženja u detaljnija matematička razmatranja. Funkcional Π je skalarna funkcija skupa funkcija i njihovih derivacija

$$\Pi = \Pi(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots). \quad (9.1.9)$$

Prvu varijaciju Π definiramo kao

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Pi}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \dots \quad (9.1.10)$$

Ovdje su δu i $\delta(\partial u / \partial x)$ proizvoljne varijacije funkcija u i $\partial u / \partial x$. Osnovna svojstva operatora varijacije jesu

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \delta u, \\ \delta \left(\int_V u dV \right) &= \int_V \delta u dV, \end{aligned} \quad (9.1.11a,b)$$

$$\begin{aligned}\delta(u+v) &= \delta u + \delta v, \\ \delta(uv) &= u \delta v + v \delta u.\end{aligned}\tag{9.1.11c,d}$$

Za neke zadaće oblika (9.1.1,2) možemo iznaći energetski funkcional oblika

$$\Pi = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \dots) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \dots) d\Gamma, \tag{9.1.12}$$

za koje je funkcija u koja zadovoljava uvjet stacionarnosti Π

$$\delta \Pi = 0, \tag{9.1.13}$$

ujedno i rješenje sustava (9.1.1,2). Primijenimo li uvjet stacionarnosti (9.1.13) na (9.1.12) nakon deriviranja dobivamo

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta u \mathbf{A}(u) d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u \mathbf{B}(u) d\Gamma = 0. \tag{9.1.14}$$

Budući da ova jednadžba mora vrijediti za bilo koju varijaciju δu , slijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(u) &= 0 \quad \text{u } \Omega, \\ \mathbf{B}(u) &= 0 \quad \text{na } \Gamma.\end{aligned}\tag{9.1.15a,b}$$

Ako je ovaj sustav identičan sustavu (9.1.1,2), onda je rješenje jednadžbe (9.1.13) ujedno i rješenje početnog sustava. Jednadžbe (9.1.15a,b) zovemo *Eulerove diferencijalne jednadžbe*. One odgovaraju uvjetu stacionarnosti funkcionala (9.1.12). Za svaki funkcional možemo pronaći Eulerove diferencijalne jednadžbe, ali samo neki sustavi parcijalnih diferencijalnih jednadžbi su Eulerove jednadžbe funkcionala. Uvrštenjem u uvjet stacionarnosti (9.1.13) približenja (9.1.3) dobivamo

$$\delta \Pi = \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} \delta u_i = 0. \tag{9.1.16}$$

Budući da ova jednadžba mora biti zadovoljena za bilo koju varijaciju δu_i , slijedi da nepoznati koeficijenti u_i moraju zadovoljavati sustav jednadžbi

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, N. \tag{9.1.17}$$

Primjenu ovog pristupa pokazat ćemo u odjeljku o rješavanju dvodimenzionalnih statičkih polja.

9.1.1.2. Metoda težinskih ostataka

Sustav parcijalnih diferencijalnih jednačbi (9.1.1) mora biti jednak nuli u svakoj točki domene Ω pa mora vrijediti

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{D}(u) d\Omega = \int_{\Omega} (v_1 D_1(u) + v_2 D_2(u) + \dots) d\Omega = 0 . \quad (9.1.18)$$

U ovoj jednačbi je

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} , \quad (9.1.19)$$

skup po volji odabranih funkcija v_i , a broj tih funkcija jednak je broju jednačbi, odnosno broju komponenata funkcije u u zadaći. Možemo reći i drugačije: ako je jednačba (9.1.18) zadovoljena za bilo koji skup funkcija $\mathbf{v}$ tada diferencijalne jednačbe (9.1.1) moraju vrijediti u svakoj točki domene Ω . Dokaz te tvrdnje je očit ako pretpostavimo mogućnost da vrijedi $A(u) \neq 0$ u bilo kojoj točki domene. Tada odmah možemo iznaći skup funkcija $\mathbf{v}$ za koji integral u (9.1.19) nije jednak nuli, pa smo time dokazali tvrdnju. Ako rubne uvjete (9.1.2) moramo zadovoljiti u svakoj točki granice domene Γ , analogno vrijedi

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{R}(u) d\Gamma = \int_{\Omega} (v_1 R_1(u) + v_2 R_2(u) + \dots) d\Gamma = 0 , \quad (9.1.20)$$

za bilo koji skup funkcija $\mathbf{v}$. Sukladno tome integralna formulacija

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}_1^T \mathbf{D}(u) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v}_2^T \mathbf{R}(u) d\Gamma = 0 , \quad (9.1.21)$$

koja je zadovoljena za bilo koji skup funkcija v_1 i v_2 ekvivalentna je diferencijalnoj formulaciji (9.1.1,2). Ako nepoznatu funkciju približimo oblikom (9.1.3), tj. ako pretpostavimo

$$u \approx \sum_i N_i u_i , \quad (9.1.22)$$

integralna formulacija (9.1.21) omogućava nam da umjesto bilo kojih skupova funkcija v_1 i v_2 u nju uvrstimo unaprijed propisane *težinske funkcije*

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = w_i \\ v_2 = \bar{w}_i \end{array} \right\} \quad i = 1, \dots, n , \quad (9.1.23)$$

gdje je n broj nepoznatih koeficijenata u_i . Integralna formulacija (9.1.21) tada poprima oblik

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_i^T \mathbf{D} \left(\sum_i N_i u_i \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{R} \left(\sum_i N_i u_i \right) d\Gamma = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n . \quad (9.1.24)$$

Ako uočimo da $\mathbf{D}(\sum N_i u_i)$ predstavlja ostatak ili grešku koju smo dobili uvrštenjem približenja u diferencijalne jednačbe, a $\mathbf{R}(\sum N_i u_i)$ ostatak u rubnim uvjetima, onda je jednačba (9.1.24) *težinski integral takvih ostataka*. Stoga takvo približenje nazivamo *metoda težinskih ostataka*. Najčešće primjenjujemo Galerkinovu metodu u kojoj je $w_i = N_i$.

Primjer 9.1.1.1. Primjena metode težinskih ostataka

Neka je zadana parcijalna diferencijalna jednačba oblika

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla u(\mathbf{r})) = q(\mathbf{r}) \quad ; \quad \mathbf{r} \in \Omega , \quad (9.1.25)$$

koju zadovoljava skalarna funkcija u , uz rubne uvjete Neumannova

$$\alpha \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} - p(\mathbf{r}) = 0 \quad ; \quad \mathbf{r} \in \Gamma_1 , \quad (9.1.26)$$

i Dirichletova tipa

$$u(\mathbf{r}) - u_0 = 0 \quad ; \quad \mathbf{r} \in \Gamma_2 . \quad (9.1.27)$$

Γ_1 i Γ_2 čine cijeli rub domene Ω . Težinski integral ostatka ove zadaće prema jednačbi (9.1.24) jest

$$\int_{\Omega} w_i [\nabla \cdot (\alpha \nabla u - q)] d\Omega + \int_{\Gamma_1} \bar{w}_i \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} - p \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{w}_i (u - u_0) d\Gamma = 0 . \quad (9.1.28)$$

Primjenom Greenova teorema² na prvi integral u ovom izrazu dobivamo

$$-\int_{\Omega} (\nabla w_i) \cdot (\alpha \nabla u) d\Omega + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} w_i \alpha \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} w_i q d\Omega . \quad (9.1.29)$$

Time smo reducirali derivabilnost približenja na elementu i ono sada mora biti samo jednom derivabilno. Ako odaberemo težinske funkcije tako da vrijedi

$$\bar{w}_i = -w_i , \quad (9.1.30)$$

² Pogledati Prilog C.

onda uvrštenje (9.1.29) u (9.1.30) rezultira s

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (\nabla w_i) \cdot (\alpha \nabla u) d\Omega + \int_{\Gamma_2} w_i \alpha \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} w_i q d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_1} w_i p d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{w}_i (u - u_0) d\Gamma = 0 . \end{aligned} \quad (9.1.31)$$

Dirichletov rubni uvjet na rubu Γ_2 obično zadajemo, pa iz te formulacije izbacujemo ostatke na toj granici. U Galerkinovoj metodi težinske funkcije w_i jednake su interpolacijskim funkcijama N_i . Budući da su interpolacijske funkcije definirane lokalno na elementu koji sadrži nepoznatu vrijednost funkcije u u i -tom čvoru izraz (9.1.31) definira sustav algebarskih jednadžbi oblika

$$[A] U = C . \quad (9.1.32)$$

Elemente matrice A računamo pomoću

$$A_{ij} = \int_{\Omega^e} (\nabla N_i) \cdot (\alpha \nabla N_j) d\Omega . \quad (9.1.33)$$

Vektor U sadrži nepoznate vrijednosti funkcije u u interpolacijskim čvorovima, a pomoću

$$C_i = \int_{\Omega^e} N_i q d\Omega , \quad (9.1.34)$$

računamo elemente vektora C .

9.2. DVODIMENZIONALNA STATIČKA POLJA

U ovom odjeljku ćemo najprije detaljno pojasniti primjenu MKE pri rješavanju linearnih dvodimenzionalnih statičkih električnih i magnetskih polja. Osnovni postupci koje ćemo opisati u ovom odjeljku jednaki su i pri primjeni MKE u složenijim trodimenzionalnim i dinamičkim zadaćama, a jednostavnost grafičkih prikaza i izraza u dvodimenzionalnim zadaćama omogućava njihovo lakše razumijevanje.

9.2.1 Integralni oblik ekvivalentan Poissonovoj jednadžbi

U poglavljima 4. i 6. pokazali smo da potencijali u dvodimenzionalnim statičkim električnim i magnetskim nelinearnim poljima zadovoljavaju Poissonovu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f_v = 0, \quad (9.2.1)$$

uz zadane rubne uvjete na granicama Γ domene zadaće

$$\begin{aligned} u - u_0 &= 0, \\ v \frac{\partial u}{\partial n} - q &= 0. \end{aligned} \quad (9.2.2a,b)$$

Ovdje su:

x, y – odrednice pravocrnog koordinatnog sustava,

u – nepoznata funkcija potencijala (ϕ ili A_z),

v – značajka materijala (ϵ ili $1/\mu$),

f_v – zadani izvori polja (ρ ili J_z).

Jednadžbom (9.2.2a) zadali smo Dirichletove rubne uvjete na dijelu granice Γ_0 , a s (9.2.2b) smo zadali Neumannove rubne uvjete na dijelu granice domene Γ_n .³ Funkcional čiji uvjet stacionarnosti daje ujedno i rješenje Poissonove zadaće jest⁴

$$\Pi = \int_{\Omega} \left[\frac{v}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - f_v u \right] d\Omega - \int_{\Gamma_n} q u d\Gamma. \quad (9.2.3)$$

Varijacija ovog funkcionala jest

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \left[v \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \frac{\partial u}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - f_v \delta u \right] d\Omega - \int_{\Gamma_n} q \delta u d\Gamma. \quad (9.2.4)$$

Primjenom svojstva (9.1.11a) i Greenova teorema⁵

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Psi \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy &= \\ &= - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy + \oint_{\Gamma} \Psi \left(v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma, \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

uz propisivanje $\Psi = \delta u$ jednadžba (9.2.4) prelazi u

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta u \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f_v \right] dx dy + \oint_{\Gamma_n} \delta u \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - q \right) d\Gamma = 0, \quad (9.2.6)$$

³ Dirichletove i Neumannove rubne uvjete smo uveli u članku 4.5.2.

⁴ To je energija pohranjena u polju, pogledati odjeljke 4.3. i 6.4.

⁵ Pogledati Prilog C.

ako je $\delta u = 0$ na dijelu granice Γ_0 . Jednadžba (9.1.23) mora vrijediti za *bilo koju varijaciju* δu . Ako nepoznatu funkciju u zadamo tako da je $u = u_0$ i $\delta u = 0$ na dijelu granice Γ_0 , onda je (9.2.3) integralni oblik čiji je uvjet stacionarnosti ujedno i rješenje Poissonove jednadžbe.

9.2.2. Primjena MKE na integralni oblik ekvivalentan Poissonovoj jednadžbi

Primjenu provodimo u dva koraka:

1. Podjela domene Ω na elemente Ω^e tako da vrijedi

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{\Omega} \left[\frac{v}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - f_v u \right] d\Omega - \int_{\Gamma_n} q u d\Gamma = \\ &= \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{\Omega^e} \left[\frac{v^e}{2} \left(\frac{\partial u^e}{\partial x} \right)^2 + \frac{v^e}{2} \left(\frac{\partial u^e}{\partial y} \right)^2 - f_v^e u^e \right] d\Omega - \int_{\Gamma_n^e} q^e u^e d\Gamma \right\}. \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

2. Približenje nepoznate funkcije u na svakom elementu u obliku

$$u^e \approx \sum_i N_i^e u_i^e = [N_i^e] \mathbf{u}_i^e. \quad (9.2.8)$$

Ovdje su N_i interpolacijske funkcije e -tog elementa, a $\mathbf{u}_i$ je vektor nepoznatih koeficijenata interpolacije odnosno vrijednosti nepoznate funkcije u interpolacijskim čvorovima e -tog elementa. Uvrštenjem približenja (9.2.8) u (9.2.7) dobivamo

$$\begin{aligned} \Pi &\approx \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{\Omega^e} \left[\frac{v^e}{2} \left(\sum_i \frac{\partial N_i^e}{\partial x} u_i^e \right)^2 + \frac{v^e}{2} \left(\sum_i \frac{\partial N_i^e}{\partial y} u_i^e \right)^2 - f_v^e \left(\sum_i N_i^e u_i^e \right) \right] d\Omega \right\} - \\ &- \sum_e \left\{ \int_{\Gamma_n^e} q^e \left(\sum_i N_i^e u_i^e \right) d\Gamma \right\}. \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

Uvjet stacionarnosti Π u ovom obliku prema jednadžbi (9.1.17) jest

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i^e} = 0, \quad (9.2.10)$$

i on rezultira u sustavu jednadžbi za sve nepoznate koeficijente interpolacije u_i^e . Derivacija (9.2.9) po nepoznatom koeficijentu u_j^e jest

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_j^e} = & \sum_e \left\{ \int_{\Omega^e} \left[v^e \left(\sum_i \frac{\partial N_i^e}{\partial x} u_i^e \right) \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + v^e \left(\sum_i \frac{\partial N_i^e}{\partial y} u_i^e \right) \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] dx dy \right\} - \\ & - \sum_e \left\{ \int_{\Omega^e} f_v^e N_j^e dx dy - \int_{\Gamma_n^e} q^e N_j^e d\Gamma \right\} = \sum_e W^e . \end{aligned} \quad (9.2.11)$$

Sustav jednačbi za nepoznate koeficijente u_i^e sukladno jednačbi (9.1.28) ima oblik

$$[K]u = F . \quad (9.2.12)$$

Članovi matrice sustava jesu

$$K_{ij} = K_{ji} = \sum_e \left\{ \int_{\Omega^e} \left[v^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \right] dx dy \right\} , \quad (9.2.13)$$

a članovi vektora desne strane jesu

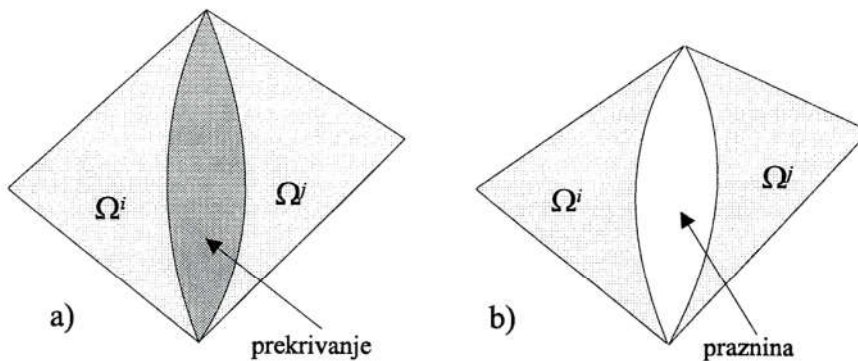
$$F_j = \sum_e \left\{ \int_{\Omega^e} N_j^e f_v^e dx dy + \int_{\Gamma_n^e} N_j^e q^e d\Gamma \right\} . \quad (9.2.14)$$

Sukladno tome za formiranje sustava (9.2.12) moramo najprije odabrati geometrijski oblik elementa i interpolacijske funkcije, a zatim njima približiti geometriju domene Ω i nepoznatu funkciju u .

9.2.3. Približenje geometrije domene zadaće

Približenje geometrije domene Ω obavljammo podjelom na elemente Ω^e . Pravila koja moramo poštivati pri podjeli slijede iz jednačbe (9.2.7):

- dva različita elementa mogu imati zajedničke točke samo na zajedničkoj granici. Nije dozvoljeno preklapanje elemenata (slika 9.2.1a),

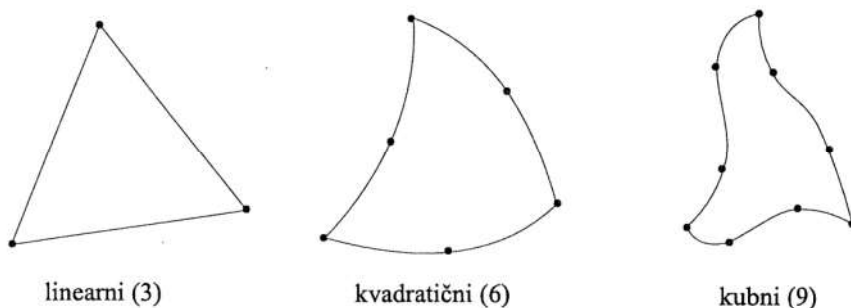


Slika 9.2.1. Nedoželjene podjele na elemente

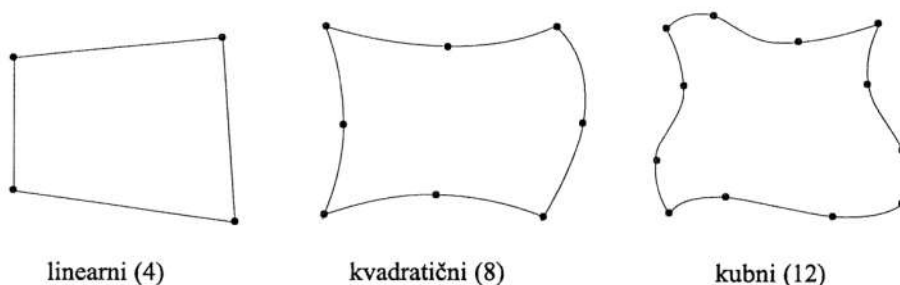
- spojeni elementi ne smiju ostavljati neprekrivena područja (rupe) unutar domene (slika 9.2.1b),
- unutar jednog elementa značajke materijala v^e i izvori f_v^e se ne mijenjaju.

Ova pravila možemo zadovoljiti ako je geometrija elementa *analitički* definirana. Točke kojima definiramo geometriju elementa nazivamo geometrijskim čvorovima. Svaki element mora biti jednoznačno definiran s geometrijskim čvorovima koji pripadaju elementu ili njegovoj granici. Oblike i geometrijske čvorove dvodimenzionalnih elemenata u širokoj primjeni prikazali smo na slici 9.2.2.

trokutni elementi



četverokutni elementi

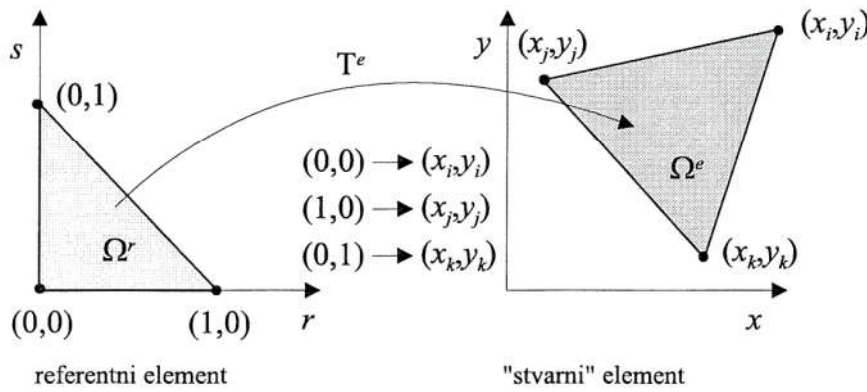


Slika 9.2.2. Klasični oblici dvodimenzionalnih konačnih elemenata

Ovdje ćemo, zbog jednostavnosti, razraditi primjenu linearnih trokutnih elemenata. Jednak pristup primjenjujemo i pri korištenju elemenata složenijih geometrija.⁶ Najjednostavnije analitičke izraze postizemo uvođenjem *referentnih elemenata*. Njih definiramo u *bezdimenzionalnom koordinatnom sustavu* s odrednicama (r,s) jednostavnim oblikom, a njihovu geometriju preslikavamo u geometriju "stvarnih" elemenata u (x,y) prostoru primjenom geometrijskih transformacija T^e . Referentni i "stvarni" linearni trokutni element prikazali smo slikom 9.2.3. Transformacijom T^e definiramo koordinate svake točke elementa Ω^e u ovisnosti bezdimenzionalnih odrednica (r,s) . Ona mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

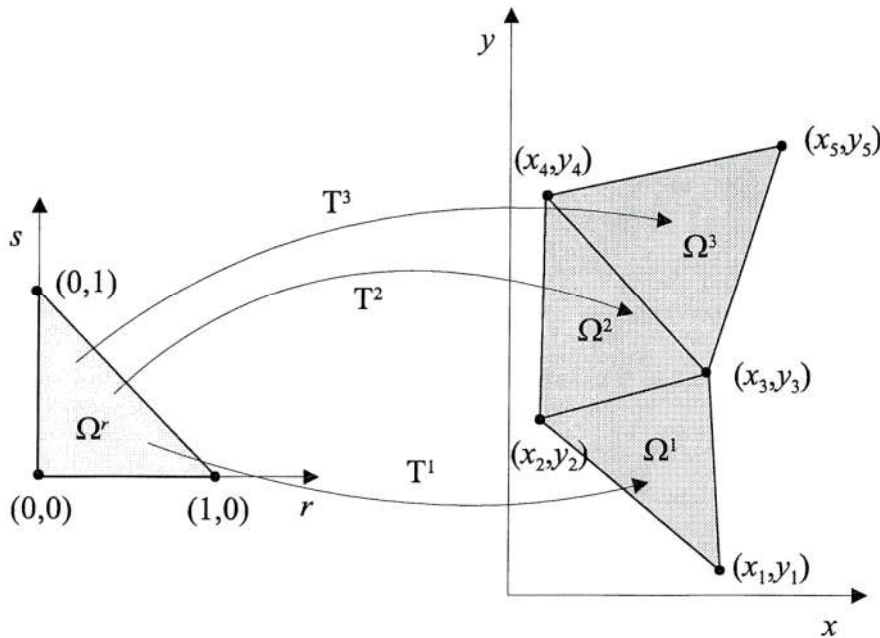
- preslikavanje mora biti jedan – jedan preslikavanje, a to znači da svakoj točki Ω^r mora odgovarati jedna i samo jedna točka Ω^e ,
- geometrijski čvorovi Ω^r moraju se preslikati u geometrijske čvorove Ω^e ,

⁶ Pogledati, na primjer, G. Dhatt, G. Touzot: *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley & Sons, New York 1985.



Slika 9.2.3. Referentni i "stvarni" element

- dio Ω^r koji smo definirali geometrijskim čvorovima te granice mora se preslikati u dio granice Ω^e koji smo definirali s odgovarajućim preslikanim čvorovima. Jedan referentni element određenog tipa preslikavamo u sve "stvarne" elemente istog tipa upotrebom različitih transformacija T^i kao što smo prikazali slikom 9.2.4.



Slika 9.2.4. Preslikavanje referentnog u "stvarne" elemente

Vrijedi

$$\begin{aligned}
 \Omega^1 \rightarrow T^1: (r,s) \rightarrow (x,y)^1 &= [x(r,s,x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3), y(r,s,x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3)]^1, \\
 \Omega^2 \rightarrow T^2: (r,s) \rightarrow (x,y)^2 &= [x(r,s,x_2,y_2,x_3,y_3,x_4,y_4), y(r,s,x_2,y_2,x_3,y_3,x_4,y_4)]^2, \\
 \Omega^3 \rightarrow T^3: (r,s) \rightarrow (x,y)^3 &= [x(r,s,x_3,y_3,x_4,y_4,x_5,y_5), y(r,s,x_3,y_3,x_4,y_4,x_5,y_5)]^3.
 \end{aligned} \tag{9.2.15}$$

Ako upotrijebimo jednake geometrijske transformacije za obje koordinate, možemo pisati

$$\begin{aligned}
 x(r,s) &= [G_1(r,s) \ G_2(r,s) \ G_3(r,s)] \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{bmatrix} , \\
 y(r,s) &= [G_1(r,s) \ G_2(r,s) \ G_3(r,s)] \begin{bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{bmatrix} .
 \end{aligned}
 \tag{9.2.16}$$

Funkcije G_i zovemo *geometrijskim transformacijskim funkcijama* i one su obično polinomi. Sve linearne trokutne elemente možemo dobiti iz referentnog linearnog trokutnog elementa linearnim transformacijama, pa su funkcije G_i oblika

$$\begin{aligned}
 G_1(r,s) &= a_{10} + a_{1r}r + a_{1s}s , \\
 G_2(r,s) &= a_{20} + a_{2r}r + a_{2s}s , \\
 G_3(r,s) &= a_{30} + a_{3r}r + a_{3s}s .
 \end{aligned}
 \tag{9.2.17}$$

Iz uvjeta

$$\begin{aligned}
 x(0,0) &= x_i \ ; \quad x(1,0) = x_j \ ; \quad x(0,1) = x_k , \\
 y(0,0) &= y_i \ ; \quad y(1,0) = y_j \ ; \quad y(0,1) = y_k ,
 \end{aligned}
 \tag{9.2.18}$$

slijedi

$$\begin{aligned}
 G_1(0,0) &= 1 \ ; \quad G_2(0,0) = 0 \ ; \quad G_3(0,0) = 0 , \\
 G_1(1,0) &= 0 \ ; \quad G_2(1,0) = 1 \ ; \quad G_3(1,0) = 0 , \\
 G_1(0,1) &= 0 \ ; \quad G_2(0,1) = 0 \ ; \quad G_3(0,1) = 1 ,
 \end{aligned}
 \tag{9.2.19}$$

pa su geometrijske transformacijske funkcije za linearne trokutne elemente

$$\begin{aligned}
 G_1 &= 1 - r - s , \\
 G_2 &= r , \\
 G_3 &= s .
 \end{aligned}
 \tag{9.2.20}$$

Sada moramo provjeriti da li ta transformacija zadovoljava sve uvjete koje smo naveli. Transformacija je jedan – jedan preslikavanje ako Jacobijeva matrica transformacije J nije singularna. Za transformaciju koju smo uveli vrijedi

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_j - x_i) & (y_j - y_i) \\ (x_k - x_i) & (y_k - y_i) \end{bmatrix}. \quad (9.2.21)$$

Determinanta Jacobijeve matrice te transformacije jest

$$\det[J] = (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i) = 2S_{\Delta}, \quad (9.2.22)$$

i jednaka je dvostrukoj površini trokuta kojeg razapinju točke (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_k, y_k) S_{Δ} . Stoga transformacija koju smo zadali s (9.2.16,20) nije jedan – jedan preslikavanje samo kad su te tri točke na istom pravcu. Granicu koja prolazi kroz geometrijske čvorove referentnog elementa Ω' (1,0) i (0,1) zadajemo jednačbom

$$1 - r - s = 0 \quad ; \quad 0 \leq r, s \leq 1. \quad (9.2.23)$$

Nju preslikavamo u "stvarni" element pomoću

$$\begin{aligned} x &= [0 \quad r \quad 1-r] \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{bmatrix} = x_j + (1-r)x_k, \\ y &= [0 \quad r \quad 1-r] \begin{bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{bmatrix} = y_j + (1-r)y_k. \end{aligned} \quad (9.2.24)$$

Ove jednačbe su parametarske jednačbe pravca između točaka (x_j, y_j) , (x_k, y_k) . Jednako možemo dokazati da se i ostale granice referentnog elementa pravilno preslikavaju u odgovarajuće granice "stvarnog" elementa. Važno je napomenuti da su površine svih elemenata orijentirane, pa svi elementi moraju biti povezani s geometrijskim čvorovima u istom smjeru obilaska, suprotno ili u smjeru gibanja kazaljke na satu.

9.2.3.1. Organizacija podataka o podjeli na elemente

Ako sve geometrijske čvorove domene Ω numeriramo slijedno od 1 do n , a sve njihove koordinate definiramo u zajedničkom koordinatnom sustavu (x,y) podatke o geometrijskim čvorovima možemo grupirati u polje XYCVOR:

geometrijski čvorovi

	1	2	3	...	n
x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

polje XYCVOR

Ako sve elemente domene Ω numeriramo slijedno od 1 do m i popišemo sve geometrijske čvorove (vrhove trokuta) koji pripadaju pojedinom elementu, podatke o vezi elemenata i geometrijskih čvorova možemo grupirati u polje ELTPOV:

elementi

	1	2	3	...	m
i	i_1	i_2	i_3	...	i_m
j	j_1	j_2	j_3	...	j_m
k	k_1	k_2	k_3	...	k_m

polje ELTPOV

Dva polja: XYCVOR i ELTPOV dovoljna su za potpunu definiciju transformacije T^e za svaki element. Koordinate u smjeru osi x preslikavamo pomoću

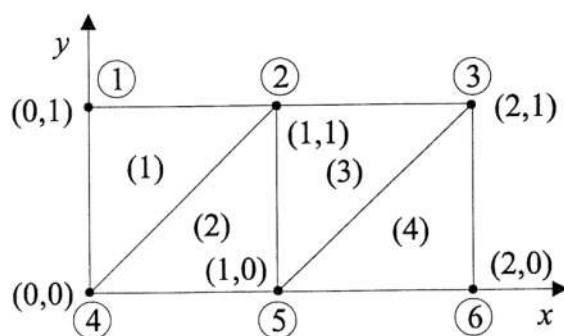
$$x^e(r,s) = [1-r-s \quad r \quad s] \begin{bmatrix} x_i^e \\ x_j^e \\ x_k^e \end{bmatrix}, \quad (9.2.25a)$$

a u smjeru osi y pomoću

$$y^e(r,s) = \begin{bmatrix} 1-r-s & r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i^e \\ y_j^e \\ y_k^e \end{bmatrix}. \quad (9.2.25b)$$

Primjer 9.2.3.1. Podjela pravokutne domene na četiri elementa

Pravokutnu domenu u (x,y) koordinatnom sustavu i njezinu podjelu na četiri elementa prikazali smo na slici 9.2.5.



Slika 9.2.5. Podjela pravokutne domene

Broj geometrijskih čvorova ove podjele je šest, pa je polje XYCVOR:

	1	2	3	4	5	6
x	0	1	2	0	1	2
y	1	1	1	0	0	0

Broj elemenata je četiri, pa je polje ELTPOV:

	1	2	3	4
i	1	2	2	3
j	2	5	3	6
k	4	4	5	5

9.2.4. Približenje funkcije na elementu

Osnovna značajka MKE je *ovisnost približenja funkcije na elementu samo o vrijednostima funkcije u interpolacijskim čvorovima koji pripadaju tom elementu*. Oblik približenja jest

$$u^e(x,y) \approx \sum_i N_i^e(x,y) u_i^e(x_i,y_i) . \quad (9.2.26)$$

Ovdje su N_i interpolacijske funkcije, u_i nepoznati koeficijenti koji predstavljaju vrijednosti funkcije u odabranim točkama elementa koje nazivamo interpolacijski čvorovi. U jednadžbi (9.2.26) približenje je definirano na "stvarnom" elementu. Tada interpolacijske funkcije ovise o geometriji "stvarnog" elementa, pa prelazimo približenju na referentnom elementu

$$u(r,s) \approx \sum_i N_i(r,s) u_i(r_i,s_i) , \quad (9.2.27)$$

uz transformaciju koordinata

$$T:(r,s) \rightarrow [x(r,s) \ y(r,s)] = [G_1(r,s) \ G_2(r,s) \ G_3(r,s)] \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{bmatrix} . \quad (9.2.28)$$

U ovom približenju interpolacijske funkcije ne ovise o geometriji "stvarnog" elementa, pa za sve elemente koji imaju jednak referentni element koristimo *jedinstveni skup interpolacijskih funkcija* N_i .

Kod linearnih trokutnih elemenata izabiremo interpolacijske čvorove identične geometrijskim čvorovima. Nepoznati koeficijenti u_i , koje nazivamo i *čvornim varijablama*, su vrijednosti nepoznate funkcije u vrhovima trokuta. Približenje tada ima oblik

$$u(r,s) \approx [N_1(r,s) \ N_2(r,s) \ N_3(r,s)] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} . \quad (9.2.29)$$

Ako pretpostavimo linearnu raspodjelu nepoznate funkcije u po elementu interpolacijske funkcije, N_i imaju oblik

$$\begin{aligned} N_1(r,s) &= b_{10} + b_{1r}r + b_{1s}s , \\ N_2(r,s) &= b_{20} + b_{2r}r + b_{2s}s , \\ N_3(r,s) &= b_{30} + b_{3r}r + b_{3s}s . \end{aligned} \quad (9.2.30)$$

Iz uvjeta

$$u(0,0) = u_i \quad ; \quad u(1,0) = u_j \quad ; \quad u(0,1) = u_k \quad , \quad (9.2.31)$$

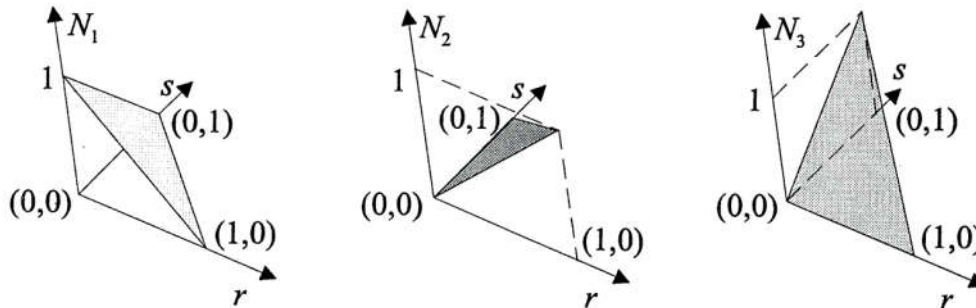
slijedi

$$\begin{aligned} N_1(0,0) &= 1 \quad ; \quad N_2(0,0) = 0 \quad ; \quad N_3(0,0) = 0 \quad , \\ N_1(1,0) &= 0 \quad ; \quad N_2(1,0) = 1 \quad ; \quad N_3(1,0) = 0 \quad , \\ N_1(0,1) &= 0 \quad ; \quad N_2(0,1) = 0 \quad ; \quad N_3(0,1) = 1 \quad , \end{aligned} \quad (9.2.32)$$

pa su interpolacijske funkcije za linearne trokutne elemente

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - r - s \equiv G_1 \quad , \\ N_2 &= r \equiv G_2 \quad , \\ N_3 &= s \equiv G_3 \quad , \end{aligned} \quad (9.2.33)$$

identične geometrijskim transformacijskim funkcijama. Takve elemente za koje vrijedi $N_i \equiv G_i$ nazivamo *izoparametarskim elementima*. Funkcije N_1 , N_2 i N_3 grafički su prikazane na slici 9.2.6.



Slika 9.2.6. Interpolacijske funkcije linearnih trokutnih elemenata

Jednadžbe koje želimo riješiti zadali smo u "stvarnoj" domeni. One uključuju nepoznatu funkciju u , njezine derivacije i integrale. Budući da provodimo približenje na referentnom elementu, trebamo i operatore derivacije i integrala transformirati u prostor referentnog elementa. Za prve derivacije vrijedi

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad , \quad (9.2.34)$$

ili pisano u skraćenom obliku

$$[\partial_{r,s}] = [J][\partial_{x,y}] , \quad (9.2.35)$$

gdje je $[J]$ Jacobijeva matrica geometrijske transformacije. Slično možemo pisati i

$$[\partial_{x,y}] = [J][\partial_{r,s}] . \quad (9.2.36)$$

Uvrštenjem (9.2.36) u (9.2.35) dokazujemo da vrijedi

$$[J] = [J]^{-1} . \quad (9.2.37)$$

Kako smo pokazali da je uvjet valjanosti geometrijske transformacije $\det[J] \neq 0$, $[J]$ uvijek postoji i određujemo je iz $[J]$. U našem slučaju je

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} ; \quad [J]^{-1} = [J] = \frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} . \quad (9.2.38)$$

Članove Jacobijeve matrice određujemo izravno, derivacijom izraza za geometrijsku transformaciju referentnog elementa

$$[x \ y] = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{bmatrix} , \quad (9.2.39)$$

pa konačno dobivamo

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial r} & \frac{\partial G_2}{\partial r} & \frac{\partial G_3}{\partial r} \\ \frac{\partial G_1}{\partial s} & \frac{\partial G_2}{\partial s} & \frac{\partial G_3}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_j - x_i) & (y_j - y_i) \\ (x_k - x_i) & (y_k - y_i) \end{bmatrix} . \quad (9.2.40)$$

Zamjenom varijabli koju smo definirali izrazom (9.2.16) jednostavnijom integracijom po referentnom elementu

$$\int_{\Omega^e} f(x,y) dx dy = \int_{\Omega^e} f[x(r,s), y(r,s)] \det[J'] dr ds , \quad (9.2.41)$$

zamjenjujemo integraciju po domeni "stvarnog" elementa.

9.2.5. Integralni doprinosi linearnih trokutnih elemenata pri rješavanju Poissonove jednačbe

Opći oblik integralnih doprinosa elemenata pri rješavanju Poissonove jednačbe odredili smo jednačbama (9.2.13,14). Za linearni trokutni element vrijedi

$$u^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e] \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \\ u_k^e \end{bmatrix}, \quad (9.2.42)$$

pa je integralni doprinos e -tog elementa

$$W^e = [k^e]u^e + f^e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \\ u_k^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix}. \quad (9.2.43)$$

Iz jednačbe (9.2.13) slijedi da članove matrice $[k^e]$ računamo pomoću

$$k_{ij}^e = \int_{\Omega^e} v^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy, \quad (9.2.44)$$

pa stoga matricu $[k^e]$ možemo napisati u obliku

$$[k^e] = \int_{\Omega^e} v^e [N_{xy}^e]^T [N_{xy}^e] dx dy, \quad (9.2.45)$$

gdje je $[N_{xy}^e]$ matrica

$$[N_{xy}^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (9.2.46)$$

a $[N_{xy}^e]^T$ transponirana matrica $[N_{xy}^e]$. Pri prelasku na približenje na referentnom elementu dobivamo

$$[N_{xy}^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} \end{bmatrix} = [J^e] [N_{rs}] , \quad (9.2.47)$$

pa je transponirana matrica $[N_{xy}^e]^T$ za približenje na referentnom elementu

$$[N_{xy}^e]^T = [N_{rs}]^T [J^e]^T . \quad (9.2.48)$$

Korištenjem jednadžbe (9.2.41) prelazak na integraciju po referentnom elementu rezultira s

$$\begin{aligned} [k^e] &= \int_{\Omega^e} v^e [N_{xy}^e]^T [N_{xy}^e] dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-r} v^e [N_{rs}]^T [J^e]^T [J^e] [N_{rs}] \det[J^e] dr ds . \end{aligned} \quad (9.2.49)$$

Značajka materijala v^e je konstantna po elementu, matrice $[N_{rs}]$ i $[J^e]$ su konstantne, a $\det[J^e] = 2S_{\Delta}^e$, pa vrijedi

$$\begin{aligned} [k^e] &= 2 v^e S_{\Delta}^e [N_{rs}]^T [J^e]^T [J^e] [N_{rs}] \int_0^1 \int_0^{1-r} ds dr = \\ &= v^e S_{\Delta}^e [N_{rs}]^T [J^e]^T [J^e] [N_{rs}] . \end{aligned} \quad (9.2.50)$$

Uzimajući u obzir da je

$$[N_{rs}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [J^e] = \frac{1}{2S_{\Delta}^e} \begin{bmatrix} (y_k^e - y_i^e) & -(y_j^e - y_i^e) \\ -(x_k^e - x_i^e) & (x_j^e - x_i^e) \end{bmatrix} , \quad (9.2.51)$$

dobivamo članove matrice $[k^e]$

$$[k^e] = \frac{v^e}{2[(x_j^e - x_i^e)(y_k^e - y_i^e) - (x_k^e - x_i^e)(y_j^e - y_i^e)]} \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix} . \quad (9.2.52)$$

U ovoj jednadžbi članovi matrice k_{ij}^e jesu

$$\begin{aligned}
k_{11}^e &= (y_k^e - y_j^e)^2 + (x_k^e - x_j^e)^2, \\
k_{12}^e &= k_{21}^e = (y_k^e - y_j^e)(y_i^e - y_k^e) + (x_k^e - x_j^e)(x_i^e - x_k^e), \\
k_{13}^e &= k_{31}^e = (y_j^e - y_i^e)(y_k^e - y_j^e) + (x_j^e - x_i^e)(x_k^e - x_j^e), \\
k_{22}^e &= (y_k^e - y_i^e)^2 + (x_k^e - x_i^e)^2, \\
k_{23}^e &= k_{32}^e = (y_i^e - y_k^e)(y_j^e - y_i^e) + (x_i^e - x_k^e)(x_j^e - x_i^e), \\
k_{33}^e &= (y_j^e - y_i^e)^2 + (x_j^e - x_i^e)^2.
\end{aligned} \tag{9.2.53}$$

Iz izraza (9.2.14) slijedi

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} f_v^e \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} dx dy + \int_{\Gamma^e} q^e \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} d\Gamma. \tag{9.2.54}$$

U rješavanju statičkih električnih i magnetskih polja najčešće možemo odrediti granice za koje vrijedi

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{\partial A_z}{\partial n} = 0. \tag{9.2.55}$$

To su granice na koje ekvipotencijalne linije statičkog električnog polja upadaju pod pravim kutom, odnosno granice na koje silnice statičkog magnetskog polja upadaju pod pravim kutom. Stoga pri izračunavanju elemenata vektora $\mathbf{f}^e$ uvodimo pretpostavku $q^e = 0$. Jednadžba (9.2.55) prelazi u

$$\mathbf{f}^e = f_v^e \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} dx dy = f_v^e \int_0^{1-r} \int_0^{1-r-s} \begin{bmatrix} 1-r-s \\ r \\ s \end{bmatrix} \det[\mathbf{J}^e] ds dr = \frac{f_v^e S_{\Delta}^e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{9.2.56}$$

budući da je f_v konstantno po elementu.

9.2.6. Formiranje sustava jednadžbi

U prethodnim smo člancima opisali dva početna koraka u primjeni MKE: podjelu domene na elemente i približenje nepoznate funkcije na elementu. Nakon provedbe ta

dva koraka poznat nam je doprinos svakog elementa u obliku

$$\mathbf{w}^e = [\mathbf{k}^e] \mathbf{u}^e + \mathbf{f}^e . \quad (9.2.57)$$

Vektor $\mathbf{u}^e$ sadrži nepoznate koeficijente (čvorne varijable) e -tog elementa i različit je za svaki element. Sljedeći korak u primjeni MKE jest formiranje sustava jednačbi za nepoznate čvorne varijable *cijele domene* oblika

$$[\mathbf{K}] \mathbf{U} + \mathbf{F} = \mathbf{0} . \quad (9.2.58)$$

Vektor $\mathbf{U}$ sadrži nepoznate čvorne varijable *cijele domene* i svi vektori $\mathbf{u}^e$ sadržani su u njemu. Matricu $[\mathbf{K}]$ i vektor $\mathbf{F}$ dobivamo zbrajanjem doprinosa svih elemenata

$$K_{ij} = \sum_e K_{ij}^e \quad ; \quad F_j = \sum_e F_j^e .$$

Zbrajanje elementarnih doprinosa u obliku (9.2.57) nije moguće jer se vektori $\mathbf{u}^e$ razlikuju za svaki element. Stoga ih moramo napisati u funkciji vektora *svih čvornih varijabli* $\mathbf{U}$. To postizemo proširenjem $[\mathbf{k}^e]$ i $\mathbf{f}^e$ u $[\mathbf{K}^e]$ i $\mathbf{F}^e$ koji su istih dimenzija kao $[\mathbf{K}]$ i $\mathbf{F}$. Svi članovi $[\mathbf{K}^e]$ i $\mathbf{F}^e$, osim onih koje sadrže $[\mathbf{k}^e]$ i $[\mathbf{f}^e]$, su nule. Integralni doprinosi linearnih trokutnih elemenata imaju oblik

$$\mathbf{w}^e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \\ u_k^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix} . \quad (9.2.60)$$

Ako domena Ω sadrži n čvorova numeriranih slijedno od 1 do n vektor čvornih varijabli jest

$$\mathbf{U}^T = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_i \ \dots \ u_j \ \dots \ u_k \ \dots \ u_n] . \quad (9.2.61)$$

Prošireni integralni doprinosi imaju oblik

$$\mathbf{W}^e = \begin{bmatrix} \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & k_{11}^e & \dots & k_{12}^e & \dots & k_{13}^e & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & k_{12}^e & \dots & k_{22}^e & \dots & k_{23}^e & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & k_{13}^e & \dots & k_{23}^e & \dots & k_{33}^e & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ u_i \\ \cdot \\ u_j \\ \cdot \\ u_k \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ f_1^e \\ \cdot \\ f_2^e \\ \cdot \\ f_3^e \\ \cdot \end{bmatrix} . \quad (9.2.62)$$

Nakon proširenja integralnih doprinosa elemenata sustav jednadžbi za nepoznate čvorne varijable dobivamo pomoću

$$W = \sum_{e=1}^m W^e = \left\{ \sum_{e=1}^m [K^e] \right\} U + \left\{ \sum_{e=1}^m F^e \right\} = [K] U + F, \quad (9.2.63)$$

gdje je m ukupni broj elemenata na koji smo podijelili domenu zadaće.

Primjer 9.2.6.1. Formiranje sustava za domenu iz primjera 9.2.3.1.

Prošireni integralni doprinos prvog elementa jest

$$W^1 = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & 0 & K_{44}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \\ F_4^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.2.64)$$

Analogno tome formiramo i proširene integralne doprinose za ostale elemente. Konačni oblik sustava jest

$$W = W^1 + W^2 + W^3 + W^4 = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ 0 & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}. \quad (9.2.65)$$

9.2.6.1. Algoritam za formiranje sustava

Za formiranje sustava (9.2.63) primjenjujemo algoritam FORSIS koji koristi podatke iz polja ELTPOV, matrice $[k^e]$ i vektora f^e

PONOVI $e = 1, m$

PONOVI $u = 1, 3$

$i = \text{ELTPOV}(u, e)$

PONOVI $v = 1, 3$

```

      j = ELTPOV(v,e)
      K(i,j) = K(i,j) + ke(u,v)
    KRAJ
    F(i) = F(i) + fe(u)
  KRAJ
KRAJ

```

U formirani sustav jednadžbi moramo uključiti i rubne uvjete Dirichletova tipa⁷ $u = u_0$ na dijelu ruba $\Gamma = \Gamma_0$. Nakon podjele na konačne elemente Dirichletovi rubni uvjeti poprimaju oblik

$$u_i(x_i, y_i) = u_{i0} \quad ; \quad (x_i, y_i) \in \Gamma_0. \quad (9.2.66)$$

Najjednostavniji način njihova uključivanja u sustav jest korištenje velikog broja na dijagonalnom članu.⁸ Matricu $[K]$ i vektor F formiramo bez obaziranja na Dirichletove rubne uvjete. Nakon toga uvodimo uvjet $u_i = u_{i0}$ tako da dijagonalni član K_{ii} zamijenimo s $K_{ii} + \alpha$ gdje je $\alpha \gg K_{ii}$ uz uvjet da vrijedi $K_{ii} + \alpha = \alpha$,⁹ a član F_i zamijenimo sa αu_{i0} . Time smo sustav "prisilili" na rješenje $u_i = u_{i0}$, budući da je doprinos ostalih elemenata u i -tom retku zanemariv u odnosu na α . Ova metoda je jednostavna za programiranje i ne narušava simetriju matrice sustava.

9.2.7. Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi u MKE

Rješenje sustava

$$[K]U = F, \quad (9.2.67)$$

je sljedeći korak u primjeni MKE. Točnost i opseg primjene metode su *u biti ograničeni samo veličinom sustava* koji računalo kojim raspolažemo može riješiti. Metode rješavanja svrstavamo u dvije grupe: iterativne i direktne.¹⁰ Široko se primjenjuju jedne i druge, a ovdje ćemo opisati Gaussovu eliminaciju koja je temeljna direktna metoda za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi. Nju provodimo u dva osnovna koraka: triangularizacija i povratna supstitucija.

⁷ Neumannov rubni uvjet tipa $\partial u / \partial n = 0$ smo uključili u račun f^e . Pogledati izraze (9.2.54 – 56).

⁸ Postoji i niz drugih načina uključivanja Dirichletovih rubnih uvjeta koji kompliciraju algoritme formiranja matrice sustava i smanjuju njezinu veličinu. Pogledati E.Hinton, J.Owen: *Finite Element Programming*, Academic Press 1977.

⁹ Na primjer, za računalo koje ima točnost na šest znamenaka je $1.23456 + 10^{15} = 1.00000 \cdot 10^{15}$.

¹⁰ Literatura o metodama rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžbi vrlo je ospežna. Za kratki pregled metoda i dodatnu literaturu pogledati G.Dhatt, G. Touzot: *The Finite Element Method Displayed*, John Willey & Sons, New York 1985.

9.2.7.1. Triangularizacija

Primjenom niza linearnih transformacija originalni sustav prevodimo u gornjotro-
kutni oblik

$$\begin{bmatrix} K_{11}' & K_{12}' & K_{13}' & \dots & K_{1,n-1}' & K_{1n}' \\ 0 & K_{22}' & K_{23}' & \dots & K_{2,n-1}' & K_{2n}' \\ 0 & 0 & K_{33}' & \dots & K_{3,n-1}' & K_{3n}' \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{4,n-1}' & K_{4n}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{n-1,n-1}' & K_{n-1,n}' \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K_{nn}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \\ F_4' \\ \vdots \\ F_{n-1}' \\ F_n' \end{bmatrix}. \quad (9.2.68)$$

Transformacije provodimo slijedno eliminacijom nepoznanica u_s , redni broj kojih mijenjamo kao $s = 1, 2, \dots, n-1$ iz jednadžbi redni broj $s+1, s+2, \dots, n$. Eliminaciju u_s provodimo u dva koraka:

1. Množenje jednadžbe broj s koeficijentom $-K_{is}/K_{ss}$.
2. Zbrajanje tako pomnožene jednadžbe broj s s jednadžbom broj i .

Ova dva koraka provodimo za vrijednosti $s = 1, 2, \dots, n-1$ i $i = s+1, s+2, \dots, n$. U koraku broj s eliminiramo nepoznanicu u_s iz jednadžbi $s+1, s+2, \dots, n$ i time mijenjamo članove

$$\left. \begin{aligned} K_{ij}^{(s)} &= K_{ij}^{(s-1)} - \frac{K_{is}^{(s-1)}}{K_{ss}^{(s-1)}} K_{sj}^{(s-1)} \\ F_i^{(s)} &= F_i^{(s-1)} - \frac{K_{is}^{(s-1)}}{K_{ss}^{(s-1)}} F_s^{(s-1)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &s = 1, 2, \dots, n-1, \\ &i, j = s+1, s+2, \dots, n. \end{aligned} \quad (9.2.69)$$

U posljednjem koraku eliminiramo nepoznanicu u_{n-1} iz jednadžbe broj n i sustav prelazi u gornjotrokutni oblik. Pomoću algoritma:

PONOVI $s = 1, n-1$

PONOVI $i = s+1, n$

$a = K(i, s)/K(s, s)$

$F(i) = F(i) - a * F(s)$

PONOVI $j = s+1, n$

$K(i, j) = K(i, j) - a * K(s, j)$

KRAJ

KRAJ
KRAJ

primjenjujemo postupak triangularizacije na računalu u prostoru koji zauzima početna matrica.

9.2.7.2. Povratna supstitucija

Sustav u gornjotrokutnom obliku rješavamo počevši od zadnje jednadžbe koja ima samo jednu nepoznanicu do prve

$$u_k = \frac{1}{K_{kk}^{(s-1)}} \left(F_k^{(s-1)} - \sum_{j=k+1}^n K_{kj}^{(s-1)} u_j \right) ; \quad k = n, n-1, \dots, 1 . \quad (9.2.70)$$

Ako smo triangulariziranu matricu pohranili u prostoru početne matrice sustava, za povratnu supstituciju koristimo algoritam:

```

u(n) = F(n)/K(n,n)
PONOVI k = n - 1, 1, - 1
    a = 0
    PONOVI j = k + 1, n
        a = a + K(k,j)*u(j)
    KRAJ
    u(k) = (F(k) - a)/K(k,k)
KRAJ
```

Osnovne značajke matrice sustava koji nastaje primjenom MKE jesu

- vrlo velike dimenzije,
- matrica sustava u MKE nastaje zbrajanjem rijetko popunjenih matrica¹¹ pa je velik broj njezinih članova jednak nuli,
- najčešće su simetrične.

Zbog tih značajki pohrana cijele matrice u memoriju računala i direktna primjena Gaussove eliminacije praktički je neprimjenjiva u MKE. Stoga primjenjujemo rastav matrice $[K]$ u gornjotrokutnu matricu $[G]$ i donjotrokutnu matricu $[D]$ tako da vrijedi

$$[K] = [D][G] , \quad (9.2.71)$$

gdje su matrice $[D]$ i $[G]$ oblika

¹¹ Pogledati članak 9.2.6.

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ D_{31} & D_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & D_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} ; \quad [G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & \dots & G_{1n} \\ 0 & G_{22} & G_{23} & \dots & G_{2n} \\ 0 & 0 & G_{33} & \dots & G_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \quad (9.2.72)$$

Algoritam za rastav najlakše izvodimo usporedbom članova produkta $[D][G]$ s članovima matrice $[K]$. Tu usporedbu provodimo po područjima $P(p)$ koje definiramo indeksom p

$$\begin{bmatrix} p=1 & p=2 & \dots & p=s & \dots & \\ K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1s} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2s} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{s1} & K_{s2} & \dots & K_{ss} & \dots & K_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{ns} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (9.2.73)$$

Za područje $p = 1$ vrijedi

$$1G_{11} = K_{11} \Rightarrow G_{11} = K_{11}, \quad (9.2.74)$$

a za područje $p = 2$ je

$$D_{21}G_{11} = K_{21} \Rightarrow D_{21} = \frac{K_{21}}{G_{11}}, \quad (9.2.75)$$

$$1G_{12} = K_{12} \Rightarrow G_{12} = K_{12},$$

$$D_{21}G_{12} + 1G_{22} = K_{22} \Rightarrow G_{22} = K_{22} - D_{21}G_{12},$$

a u području $p = s$ članove matrica $[D]$ i $[G]$ računamo pomoću

$$\left. \begin{aligned} D_{si} &= \frac{1}{G_{ii}} \left(K_{si} - \sum_{m=1}^{i-1} D_{sm} G_{mi} \right) \\ G_{is} &= K_{is} - \sum_{m=1}^{i-1} D_{im} G_{ms} \end{aligned} \right\} \quad i=1,2,\dots,s-1, \quad (9.2.76)$$

$$D_{ss} = 1,$$

$$G_{ss} = K_{ss} - \sum_{m=1}^{s-1} D_{sm} G_{ms}.$$

Iz te jednadžbe vidimo da u računu elemenata matrica $[D]$ i $[G]$ za područje $p = s$ sudjeluju članovi matrice $[K]$ iz tog područja, te prethodno izračunati članovi matrica $[D]$ i $[G]$ iz područja $p = 1, 2, \dots, s-1$. Stoga rastav matrice možemo organizirati u području u kojem je pohranjena matrica $[K]$ pomoću algoritma DGRAS:

PONOVI $s = 2, n$

PONOVI $i = 1, s-1$

PONOVI $m = 1, i-1$

$K(s, i) = K(s, i) - K(s, m) * K(m, i)$

$K(i, s) = K(i, s) - K(i, m) * K(m, s)$

KRAJ

$K(s, i) = K(s, i) / K(i, i)$

KRAJ

PONOVI $m = 1, s-1$

$K(s, s) = K(s, s) - K(s, m) * K(m, s)$

KRAJ

KRAJ

Nakon provedbe ovog algoritma članovi početne matrice $[K]$ su uništeni, a na njezinom mjestu su pohranjeni članovi matrica $[D]$ i $[G]$. Ako je matrica $[K]$ simetrična, vrijedi $K_{ij} = K_{ji}$ pa iz jednadžbi (9.2.76) slijedi

$$G_{ij} = D_{ji} G_{ii}. \quad (9.2.77)$$

Tada nije potrebno računati i pohranjivati matricu $[D]$. Za provedbu rastava trebamo samo gornji trokut matrice $[K]$ i u njemu proračunavamo i pohranjujemo samo članove matrice $[G]$. Uvrštavanjem (9.2.77) u (9.2.76) dobivamo izraze za proračun članova matrice $[G]$ za simetričnu matricu $[K]$ u području $p = s$

$$G_{is} = K_{is} - \sum_{m=1}^{i-1} G_{mi} G_{ms} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, s-1, \quad (9.2.78a)$$

$$G_{ss} = K_{ss} - \sum_{m=1}^{s-1} \frac{G_{ms}^2}{G_{mm}} . \quad (9.2.78b)$$

Algoritam SDGRAS za proračun članova gornjotrokutne matrice $[G]$ rastava $[D][G]$ simetrične matrice $[K]$ jest:

```

PONOVI  $s = 2, n$ 
  PONOVI  $i = 1, s - 1$ 
    PONOVI  $m = 1, i - 1$ 
       $K(i, s) = K(i, s) - K(m, i) * K(m, s) / K(m, m)$ 
    KRAJ
  KRAJ
  PONOVI  $m = 1, s - 1$ 
     $K(s, s) = K(s, s) - K(m, s)^2 / K(m, m)$ 
  KRAJ
KRAJ

```

Matrica $[K]$ ima velik broj članova jednakih nuli. Razlikujemo dva područja:

- područje nula u kojem su svi članovi stupca ili retka jednaki nuli počevši od prvog člana,
- ostatak koji se sastoji od članova koji nisu jednaki nuli.

Ova dva područja razdvaja *granica nula*. To je linija iznad koje u gornjem trokutu matrice $[K]$ nema članova različitih od nule, odnosno linija ispod koje u donjem trokutu $[K]$ nema članova različitih od nule. U izrazu

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & 0 & K_{36} \\ 0 & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}, \quad (9.2.79)$$

smo prikazali granicu nula za jednu matricu. Matrice koje nastaju primjenom pravila za

formiranje sustava¹² imaju simetrične granice nula gornjotrokutnog i donjotrokutnog dijela $[K]$. Bitna značajka matrica $[D]$ i $[G]$ u tom slučaju jest da imaju jednake granice nula kao i matrica $[K]$. To slijedi iz jednadžbi (9.2.76). Ako za područje $p = s$ vrijedi

$$\left. \begin{array}{l} K_{su} = 0 \\ K_{us} = 0 \end{array} \right\} u = 1, 2, \dots, l \quad ; \quad l \leq s-1, \quad (9.2.80)$$

onda je

$$\begin{aligned} D_{s1} &= \frac{K_{s1}}{G_{11}} = 0 & (K_{s1} = 0) \\ D_{s2} &= \frac{1}{G_{22}} (K_{s2} - D_{s1} G_{11}) = 0 & (K_{s2} = 0, D_{s1} = 0) \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ D_{sl} &= \frac{1}{G_{ll}} \left(K_{sl} - \sum_{i=1}^{l-1} D_{si} G_{il} \right) = 0 & (K_{sl} = 0, D_{sk} = 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, l) \quad (9.2.81) \\ G_{1s} &= K_{1s} = 0 & (K_{1s} = 0) \\ G_{2s} &= K_{2s} - D_{11} G_{1s} & (K_{2s} = 0, G_{1s} = 0) \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ G_{ls} &= K_{ls} - \sum_{i=1}^{l-1} D_{li} G_{is} = 0 & (K_{ls} = 0, G_{us} = 0 \quad ; \quad u = 1, \dots, l-1) . \end{aligned}$$

To svojstvo omogućava bitne uštede memorije računala, budući da je za $[D][G]$ rastav matrice $[K]$ potrebno poznavati samo članove matrice $[K]$ unutar granica nula. Ako je matrica $[K]$ simetrična, onda trebamo pohraniti samo članove gornjeg trokuta ispod granice nula. Nakon provedbe $[D][G]$ rastava matrice $[K]$ sustav poprima oblik

$$[D][G]U = F, \quad (9.2.82)$$

koji rješavamo u dva koraka:

1. Eliminacija

$$[D]F' = F. \quad (9.2.83)$$

¹² Pogledati članak 9.2.6.

Ovo je donjotrokutni sustav i rješavamo ga pomoću

$$\begin{aligned} F_1' &= F_1, \\ F_i' &= F_i - \sum_{j=1}^{i-1} D_{ij} F_j' \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (9.2.84)$$

2. Povratna supstitucija

$$[G] U' = F' . \quad (9.2.85)$$

Ovo je gornjotrokutni sustav i rješavamo ga od posljednje jednadžbe

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{F_n'}{G_{nn}}, \\ u_i' &= \frac{1}{G_{ii}} \left(F_i' - \sum_{j=i+1}^n G_{ij} u_j' \right) \quad ; \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{aligned} \quad (9.2.86)$$

Ako pohranimo $[D]$ i $[G]$ matrice u prostoru matrice $[K]$ algoritam za rješavanje sustava (9.2.82) jest

```

PONOVI  $i = 2, n$ 
     $a = 0$ 
    PONOVI  $j = 1, i - 1$ 
         $a = a + K(i, j) * F(j)$ 
    KRAJ
     $F(i) = F(i) - a$ 
KRAJ
 $F(n) = F(n) / K(n, n)$ 
PONOVI  $i = n - 1, 1, - 1$ 
     $a = 0$ 
    PONOVI  $j = i + 1, n$ 
         $a = a + K(i, j) * F(j)$ 
    KRAJ
     $F(i) = (F(i) - a) / K(i, i)$ 
KRAJ

```

Nakon provedbe ovog algoritma vektor F sadrži rješenje U . Ako je $[K]$ simetrična matrica, korak eliminacije možemo provesti pomoću elemenata matrice $[G]$ korištenjem izraza (9.2.77)

$$\begin{aligned}
 F_1' &= F_1, \\
 F_i' &= F_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{G_{ji}}{G_{jj}} F_j \quad ; \quad i=2,3,\dots,n.
 \end{aligned}
 \tag{9.2.87}$$

Algoritmom

```

PONOVI  $i = 2, n$ 
   $a = 0$ 
  PONOVI  $j = 1, i - 1$ 
     $a = a + K(j,i) * F(j) / K(j,j)$ 
  KRAJ
   $F(i) = F(i) - a$ 
KRAJ
 $F(n) = F(n) / K(n,n)$ 
PONOVI  $i = n - 1, 1, -1$ 
   $a = 0$ 
  PONOVI  $j = i + 1, n$ 
     $a = a + K(i,j) * F(j)$ 
  KRAJ
   $F(i) = (F(i) - a) / K(i,i)$ 
KRAJ

```

rješavamo simetrični sustav nakon provedbe $[D][G]$ rastava algoritmom SIMRJE.

9.2.8. Organizacija podataka o sustavu jednadžbi

Organizaciju podataka o sustavu jednadžbi prilagođavamo prednostima $[D][G]$ rastava. Trebamo pohraniti samo članove $[K]$ ispod linije nula, a zbog simetričnosti matrice $[K]$ računamo i pohranjujemo samo gornjotrokutnu matricu $[G]$ na prostoru u koji smo pohranili gornji trokut matrice $[K]$. Organizaciju temeljimo na poznavanju linije nula matrice $[K]$. Nju određujemo pomoću podataka iz polja ELTPOV u kojem smo pohranili podatke o vezi elemenata i čvornih varijabli.

Matricu sustava $[K]$ dobivamo zbrajanjem proširenih matrica integralnih doprinosa elemenata $[K^e]$.¹³ Članovi matrice $[K^e]$ koji su različiti od nule jesu

$$K_{ij}^e \quad ; \quad \begin{cases} i = \text{ELTPOV}(u,e) & ; \quad u = 1,2,3 \\ j = \text{ELTPOV}(v,e) & ; \quad v = 1,2,3 \end{cases}
 \tag{9.2.88}$$

¹³ Pogledati članak 9.2.6.

Zbog simetričnosti matrice $[K^e]$ trebamo analizirati samo njezin dio iznad dijagonale. Za njega vrijedi $j > i$, a za svaki član $[K_{ij}^e]$ koji nije jednak nuli visina iznad dijagonale je $h_{ij} = j - i$. Sukladno tome visina stupca j iznad dijagonale do linije nula za e -ti član jest

$$h_j^e = \max_i \{h_{ij}\}, \quad (9.2.89)$$

a visina stupca j iznad dijagonale do linije nula za matricu sustava $[K]$ jest

$$h_j = \max_e \{h_j^e\}. \quad (9.2.90)$$

Korištenjem tih izraza visine stupaca matrice $[K]$ iznad dijagonale do linije nula određujemo algoritmom VISSTUP:

```

PONOVI  $e = 1, m$ 
  PONOVI  $u = 1, 3$ 
     $i = \text{ELTPOV}(u, e)$ 
    PONOVI  $v = 1, 3$ 
       $j = \text{ELTPOV}(v, e)$ 
      AKO  $j > i$ 
        ONDA
           $hh = j - i$ 
          AKO  $hh > h(j)$ 
            ONDA
               $h(j) = hh$ 
            KRAJA
          KRAJA
        KRAJA
      KRAJ
    KRAJ
  KRAJ
KRAJ

```

U visinu stupca nije uključen dijagonalni član. Nakon određivanja visine svih stupaca članove matrice $[K]$ pohranjujemo u jednodimenzionalno polje PROFIL po stupcima. Pri tome koristimo kazalo za dijagonalni član svakog stupca KAZDIA koje definiramo kao

$$\begin{aligned} \text{KAZDIA}(1) &= 1, \\ \text{KAZDIA}(i) &= \text{KAZDIA}(i-1) + h(i) + 1; \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Sukladno tome dimenzija polja PROFIL koja je potrebna da u njega pohranimo sve elemente gornjeg trokuta $[K]$ jest $\text{KAZDIA}(n)$. Član K_{ij} se nalazi u polju PROFIL na mjestu $\text{KAZDIA}(j) - j + i$. Kazalo KAZDIA formiramo algoritmom KAZALO

$$\text{KAZDIA}(1) = 1$$

PONOVI $j = 2, n$

$$\text{KAZDIA}(j) = \text{KAZDIA}(j-1) + h(j) + 1$$

KRAJ

Formiranje matrice sustava u polju PROFIL i vektora F provodimo primjenom algoritma FORMPR:¹⁴

PONOVI $e = 1, m$

PONOVI $u = 1, 3$

$$i = \text{ELTPOV}(u, e)$$

PONOVI $v = 1, 3$

$$j = \text{ELTPOV}(v, e)$$

$$\text{AKO } j \geq i$$

ONDA

$$l = \text{KAZDIA}(j) - j + i$$

$$\text{PROFIL}(l) = \text{PROFIL}(l) + k^e(u, v)$$

KRAJ

$$F(i) = F(i) + f^e(v)$$

KRAJ

KRAJ

KRAJ

Primjer 9.2.8.1. Pohrana sustava iz primjera 9.2.6.1.

Matrica sustava jest

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ 0 & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}. \quad (9.2.91)$$

Vektor visina stupaca jest

$$h_j^T = [0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3], \quad (9.2.92)$$

pa je kazalo

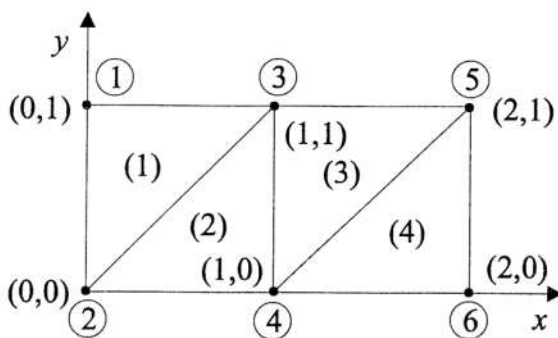
¹⁴ Pri tome koristimo informacije iz polja ELTPOV (Pogledati točku 9.2.3.1.), matrice $[k^e]$ i vektora f^e (pogledati članak 9.2.5.).

$$\text{KAZDIA}^T = [1 \ 3 \ 5 \ 9 \ 13 \ 17] . \quad (9.2.93)$$

To znači da polje PROFIL mora imati 17 članova:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{33} & K_{14} & K_{24} & 0 & K_{44} & K_{25} & K_{35} \\ K_{45} & K_{55} & K_{36} & 0 & K_{56} & K_{66} \end{bmatrix} \quad (9.2.94)$$

Broj članova matrice $[K]$ različitih od nule neovisan je o načinu numeracije čvorova, no položaj linije nula ovisi o numeraciji čvorova. Korisno pravilo za smanjenje broja članova jednakih nuli ispod linije nula jest da se pri numeraciji nastoji smanjiti najveća razlika između rednih brojeva čvorova koji pripadaju istom elementu.¹⁵ Razmotrimo prenumerirane čvorove iz primjera 9.2.6.1. prema slici 9.2.7.



Slika 9.2.7. Prenumerirani čvorovi primjera 9.2.6.1.

Matrica povezanosti elementa i čvorova je sada

$$\text{ELTPOV} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad (9.2.95)$$

a matrica sustava poprima oblik

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & 0 \\ 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ 0 & 0 & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ 0 & 0 & 0 & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}. \quad (9.2.96)$$

¹⁵ Razrađeni su razni algoritmi prenumeracije čvorova kako bi se postigao što manji broj članova polja PROFIL. Pogledati na primjer H.R. Schwarz: *Finite Element Methods*, Academic Press, London 1988.

Vektor visina stupaca za ovu numeraciju jest

$$\mathbf{h}_j^T = [0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2] , \quad (9.2.97)$$

pa je kazalo

$$\text{KAZDIA}^T = [1 \ 3 \ 6 \ 9 \ 12 \ 15] . \quad (9.2.98)$$

To znači da polje PROFIL sada mora imati 15 članova

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{22} & K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{24} & K_{34} & K_{44} & K_{35} & K_{45} \\ K_{55} & K_{46} & K_{56} & K_{66} & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (9.2.99)$$

Takvom numeracijom čvorova postigli smo optimalno rješenje, budući da ni jedan član u polju PROFIL nije jednak nuli.

Pohranjivanjem matrice u polje PROFIL bitno smo smanjili potrebnu memoriju računala. Za korištenje tog načina pohrane moramo prilagoditi algoritme za $[D][G]$ rastav i rješenje sustava, imajući u vidu izbjegavanje operacija s nula članovima iznad linije nula i simetriju matrice $[K]$. Algoritam SDGRAS¹⁶ modificiramo u algoritam za račun gornjotrokutne matrice $[G]$ simetrične matrice $[K]$ pohranjene u polju PROFIL:

PONOVI $s = 2, n$

$is = s - (\text{KAZDIA}(s) - \text{KAZDIA}(s - 1) - 1)$

PONOVI $i = is, s - 1$

$ii = i - (\text{KAZDIA}(i) - \text{KAZDIA}(i - 1) - 1)$

$mp = is$

AKO $ii > is$

ONDA

$mp = ii$

KRAJA

$kis = \text{KAZDIA}(s) - s + i$

PONOVI $m = mp, i - 1$

$kmi = \text{KAZDIA}(i) - i + m$

$kms = \text{KAZDIA}(s) - s + m$

$kmm = \text{KAZDIA}(m)$

$\text{PROFIL}(kis) = \text{PROFIL}(kis) - \text{PROFIL}(kmi) * \text{PROFIL}(kms) / \text{PROFIL}(kmm)$

KRAJ

KRAJ

PONOVI $m = is, s - 1$

$kss = \text{KAZDIA}(s)$

¹⁶ Pogledati članak 9.2.7.

```

    kms = KAZDIA(s) - s + m
    kmm = KAZDIA(m)
    PROFIL(kss) = PROFIL(kss) - PROFIL(kms)2/PROFIL(kmm)
KRAJ
KRAJ

```

Algoritam SIMRJE¹⁷ modificiramo u algoritam NPSIRJ za rješavanje simetričnog sustava nakon određivanja gornjotrokutne matrice $[G]$ algoritmom NPFSDG:

```

PONOVI i = 2, n
    is = i - (KAZDIA(i) - KAZDIA(i - 1) - 1)
    PONOVI j = is, i - 1
        kji = KAZDIA(i) - i + j
        kjj = KAZDIA(j)
        F(i) = F(i) - PROFIL(kji)*F(j)/PROFIL(kjj)
    KRAJ
KRAJ
knn = KAZDIA(n)
F(n) = F(n)/PROFIL(knn)
PONOVI i = n - 1, 1, - 1
    kii = KAZDIA(i)
    a = 0
    PONOVI j = i + 1, n
        hj = KAZDIA(j) - KAZDIA(j - 1) - 1
        AKO hj ≥ j - i
            ONDA
                kij = KAZDIA(j) - j + i
                a = a + PROFIL(kij)*F(j)
            KRAJA
    KRAJ
    F(i) = (F(i) - a)/PROFIL(kii)
KRAJ

```

9.2.9. Proračun vektora jakosti električnog i magnetskog polja

Nakon rješenja sustava (9.2.58) poznamo približenje potencijala ϕ ili A_z u cijeloj domeni Ω . Pri analizi elektromagnetskih naprava i sustava često nas zanimaju lokalna naprezanja i kritične vrijednosti vektora polja. Stoga u praktičnoj primjeni MKE mora-

¹⁷ Pogledati članak 9.2.7.

mo izračunati i vektore polja E i D ili B i H .

9.2.9.1. Proračun vektora električnog polja E i D

Veza vektora statičkog električnog polja i skalarnog električnog potencijala jest¹⁸

$$\begin{aligned} E &= -\nabla \varphi, \\ D &= \varepsilon E, \end{aligned} \quad (9.2.100)$$

pa u dvodimenzionalnim zadaćama vrijedi

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{a}_x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{a}_y = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y. \quad (9.2.101)$$

Korištenjem izraza za deriviranje približenja na referentnom elementu (9.2.36) dobivamo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} &= [J^e] \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial r} & \frac{\partial G_2}{\partial r} & \frac{\partial G_3}{\partial r} \\ \frac{\partial G_1}{\partial s} & \frac{\partial G_2}{\partial s} & \frac{\partial G_3}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i^e \\ \varphi_j^e \\ \varphi_k^e \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2S_\Delta^e} \begin{bmatrix} (y_k^e - y_i^e) & -(y_j^e - y_i^e) \\ -(x_k^e - x_i^e) & (x_j^e - x_i^e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i^e \\ \varphi_j^e \\ \varphi_k^e \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2S_\Delta^e} \begin{bmatrix} (y_j^e - y_k^e) & (y_k^e - y_i^e) & (y_i^e - y_j^e) \\ (x_k^e - x_j^e) & (x_i^e - x_k^e) & (x_j^e - x_i^e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i^e \\ \varphi_j^e \\ \varphi_k^e \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (9.2.102)$$

pa pomoću izraza

$$E_x^e = -\frac{1}{2S_\Delta^e} [(y_j^e - y_k^e) \varphi_i^e + (y_k^e - y_i^e) \varphi_j^e + (y_i^e - y_j^e) \varphi_k^e], \quad (9.2.103a)$$

¹⁸ Pogledati odjeljak 4.1.

$$E_y^e = -\frac{1}{2S_\Delta^e} [(x_k^e - x_j^e) \varphi_i^e + (x_i^e - x_k^e) \varphi_j^e + (x_j^e - x_i^e) \varphi_k^e] ,$$

$$D_x^e = \varepsilon^e E_x^e ,$$

$$D_y^e = \varepsilon^e E_y^e ,$$
(9.2.103b – d)

računamo vektore statičkog električnog polja na za e -tom elementu.

9.2.9.2. Proračun vektora magnetskog polja B i H

Veza vektora statičkog magnetskog polja i vektorskog magnetskog potencijala jest¹⁹

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_z ,$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} ,$$
(9.2.104)

pa u dvodimenzionalnim zadaćama vrijedi

$$\mathbf{B} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{a}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{a}_y = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y .$$
(9.2.105)

Korištenjem izraza za deriviranje približenja na referentnom elementu (9.2.36) dobivamo konačni izraz za gustoću magnetskog tijeka na e -tom elementu

$$B_x^e = \frac{1}{2S_\Delta^e} [(x_k^e - x_j^e) A_i^e + (x_i^e - x_k^e) A_j^e + (x_j^e - x_i^e) A_k^e] ,$$

$$B_y^e = \frac{1}{2S_\Delta^e} [(y_j^e - y_k^e) A_i^e + (y_k^e - y_i^e) A_j^e + (y_i^e - y_j^e) A_k^e] ,$$
(9.2.106)

$$H_x^e = \frac{B_x^e}{\mu^e} ,$$

$$H_y^e = \frac{B_y^e}{\mu^e} .$$

Izrazi (9.2.106) i (9.2.103) pokazuju da su veličine polja konstantne na pojedinom elementu. To slijedi iz linearnog približenja potencijala na elementu.²⁰

¹⁹ Pogledati odjeljak 6.1.

²⁰ Za elemente višega reda (kvadratične, kubne ...) vektore polja približujemo funkcijama koje su za jedan red niže od približenja potencijala.

9.2.10. Prikaz rezultata proračuna linijama konstantnog potencijala

Rezultate proračuna u numeričkom obliku vrlo je teško analizirati i primijeniti. Trebamo pregledati niz vrlo sličnih brojeva, a to je vrlo zamorno i odbija korisnike, pa je nužno grafički prikazati rezultate. Najčešće polje u dvije dimenzije prikazujemo linijama konstantnog potencijala i silnicama.²¹ Jednadžba silnica u dvodimenzionalnim magnetskim poljima jest

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} \Rightarrow B_x dy - B_y dx = 0 . \quad (9.2.107)$$

Uvrštenjem izraza za x i y komponente vektora $\mathbf{B}$ u ovu jednadžbu dobivamo

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} dx + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy = dA_z = 0 \Rightarrow A = konst. \quad (9.2.108)$$

Slijedi da su u dvodimenzionalnim magnetskim poljima linije konstantnog vektorskog magnetskog potencijala A_z silnice.

9.2.10.1. Proračun ekvipotencijalnih linija

Približenje potencijalne funkcije u na referentnom elementu jest²²

$$u^r(r,s) = [1-r-s \quad r \quad s] \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \\ u_k^e \end{bmatrix} . \quad (9.2.109)$$

Ekvipotencijalnu liniju potencijala u_0 zadajemo s $u = u_0$, pa je na referentnom elementu ona pravac

$$r(u_j^e - u_i^e) + s(u_k^e - u_i^e) + u_i^e - u_0 = 0 . \quad (9.2.110)$$

Referentni element definiramo s

$$s \geq 0 \quad ; \quad r \geq 0 \quad ; \quad 1-r-s \geq 0 , \quad (9.2.111)$$

a njegove su granice

²¹ Pogledati odjeljke 4.2 i 6.3.

²² Pogledati članak 9.2.4.

$$\begin{aligned}
(i-j) &\rightarrow s=0 ; 0 \leq r \leq 1 , \\
(j-k) &\rightarrow s=1-r ; 0 \leq r \leq 1 , \\
(k-i) &\rightarrow r=0 ; 0 \leq s \leq 1 .
\end{aligned}
\tag{9.2.112}$$

Iz definicije referentnog elementa (9.2.111,112) i jednadžbe ekvilinije na e -tom elementu (9.2.110) proizlaze uvjeti za proračun ekvilinija:

1. Ekvilinija potencijala u_0 prolazi kroz e -ti element ako vrijedi

$$\min\{u_i^e, u_j^e, u_k^e\} \leq u_0 \leq \max\{u_i^e, u_j^e, u_k^e\} . \tag{9.2.113}$$

2. Ekvilinija potencijala u_0 siječe granicu $(i-j)$ u točki

$$[x_{ij}^e \ y_{ij}^e] = \left[1 - \frac{u_0 - u_i^e}{u_j^e - u_i^e} \quad \frac{u_0 - u_i^e}{u_j^e - u_i^e} \quad 0 \right] \begin{bmatrix} x_i^e & y_i^e \\ x_j^e & y_j^e \\ x_k^e & y_k^e \end{bmatrix} , \tag{9.2.114}$$

ako vrijedi

$$(u_j^e > u_i^e \text{ i } u_i^e \leq u_0 \leq u_j^e) \text{ ili } (u_j^e < u_i^e \text{ i } u_i^e \geq u_0 \geq u_j^e) . \tag{9.2.115}$$

3. Granica $(i-j)$ je ekvilinija potencijala u_0 ako je $u_i^e = u_j^e = u_0$.
4. Ekvilinija potencijala u_0 siječe granicu $(j-k)$ u točki

$$[x_{jk}^e \ y_{jk}^e] = \left[0 \quad \frac{u_0 - u_k^e}{u_j^e - u_k^e} \quad \frac{u_j^e - u_0}{u_j^e - u_k^e} \right] \begin{bmatrix} x_i^e & y_i^e \\ x_j^e & y_j^e \\ x_k^e & y_k^e \end{bmatrix} , \tag{9.2.116}$$

ako vrijedi

$$(u_j^e > u_k^e \text{ i } u_k^e \leq u_0 \leq u_j^e) \text{ ili } (u_j^e < u_k^e \text{ i } u_k^e \geq u_0 \geq u_j^e) . \tag{9.2.117}$$

5. Granica $(j-k)$ je ekvilinija potencijala u_0 ako je $u_j^e = u_k^e = u_0$.
6. Ekvilinija potencijala u_0 siječe granicu $(k-i)$ u točki

$$[x_{ki}^e \ y_{ki}^e] = \left[1 - \frac{u_0 - u_i^e}{u_k^e - u_i^e} \quad 0 \quad \frac{u_0 - u_i^e}{u_k^e - u_i^e} \right] \begin{bmatrix} x_i^e & y_i^e \\ x_j^e & y_j^e \\ x_k^e & y_k^e \end{bmatrix} , \tag{9.2.118}$$

ako vrijedi

$$(u_k^e > u_i^e \text{ i } u_i^e \leq u_0 \leq u_k^e) \text{ ili } (u_k^e < u_i^e \text{ i } u_i^e \geq u_0 \geq u_k^e) . \quad (9.2.119)$$

7. Granica $(i - j)$ je ekvilinija potencijala u_0 ako je $u_k^e = u_i^e = u_0$.

Algoritam za proračunavanje koordinata točaka ekvilinije potencijala u_0 jest:

$il = 0$

PONOVI $e = 1, m$

PONOVI $i = 1, 3$

$kz = \text{ELTPOV}(i, e)$

$u(i) = F(kz)$

$x(i) = \text{XYCVOR}(1, kz)$

$y(i) = \text{XYCVOR}(2, kz)$

KRAJ

$umin = \min(u(1), u(2), u(3))$

$umax = \max(u(1), u(2), u(3))$

AKO $umin \leq u_0 \leq umax$

ONDA

AKO $((u(1) > u(2)) \text{ i } (u(1) \geq u_0 \geq u(2))) \text{ ili } (((u(1) < u(2)) \text{ i } (u(1) \leq u_0 \leq u(2))))$

ONDA

$il = il + 1$

$G1 = (u(2) - u_0) / (u(2) - u(1))$

$G2 = (u_0 - u(1)) / (u(2) - u(1))$

$x(il) = G1 * x(1) + G2 * x(2)$

$y(il) = G1 * y(1) + G2 * y(2)$

KRAJA

AKO $u(1) = u(2) = u_0$

ONDA

$il = il + 1$

$x(il) = x(1)$

$y(il) = y(1)$

$il = il + 1$

$x(il) = x(2)$

$y(il) = y(2)$

KRAJA

AKO $((u(2) > u(3)) \text{ i } (u(2) \geq u_0 \geq u(3))) \text{ ili } (((u(2) < u(3)) \text{ i } (u(2) \leq u_0 \leq u(3))))$

ONDA

$il = il + 1$

$G2 = (u_0 - u(3)) / (u(2) - u(3))$

$G3 = (u(2) - u_0) / (u(2) - u(3))$

$x(il) = G2 * x(2) + G3 * x(3)$

$y(il) = G2 * y(2) + G3 * y(3)$

```

KRAJA
AKO  $u(2) = u(3) = u_0$ 
ONDA
   $il = il + 1$ 
   $x(il) = x(2)$ 
   $y(il) = y(2)$ 
   $il = il + 1$ 
   $x(il) = x(3)$ 
   $y(il) = y(3)$ 
KRAJA
AKO  $((u(3) > u(1)) \text{ i } (u(3) \geq u_0 \geq u(1)))$  ili  $((u(3) < u(1)) \text{ i } (u(3) \leq u_0 \leq u(1)))$ 
ONDA
   $il = il + 1$ 
   $G1 = (u(3) - u_0) / (u(3) - u(1))$ 
   $G3 = (u_0 - u(1)) / (u(3) - u(1))$ 
   $x(il) = G1 * x(1) + G3 * x(3)$ 
   $y(il) = G1 * y(1) + G3 * y(3)$ 
KRAJA
AKO  $u(1) = u(3) = u_0$ 
ONDA
   $il = il + 1$ 
   $x(il) = x(3)$ 
   $y(il) = y(3)$ 
   $il = il + 1$ 
   $x(il) = x(1)$ 
   $y(il) = y(1)$ 
KRAJA
KRAJ
KRAJ

```

9.2.11. Primjer proračuna

Pripremu zadaće polja za rješenje pomoću MKE provodimo u sljedećim koracima:

- analiza geometrije zadaće i formiranje modela koji je zadovoljavajuće približenje stvarne zadaće,
- generiranje mreže konačnih elemenata,
- identifikacija materijala i njihovih značajki te njihovo pridruživanje mreži,
- definicija rubnih uvjeta i njihovo unošenje u sustav jednadžbi MKE.

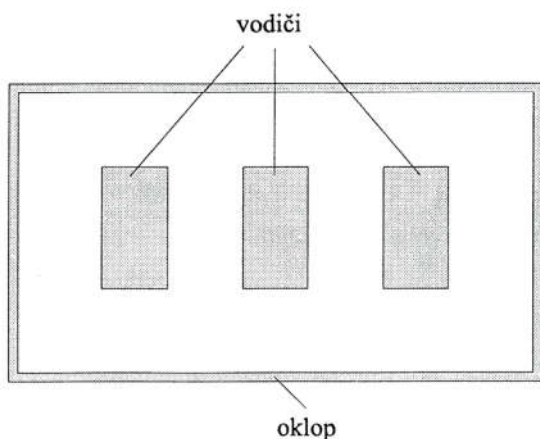
Cijeli ovaj postupak uobičajeno nazivamo *preprocesiranje*, a dio MKE programskih sustava koji ga podržavaju nazivamo *preprocesor*.

Nakon pripreme slijedi faza rješavanja sustava jednadžbi MKE. To je središnji zadatak u rješavanju zadaće, a dio MKE programskih sustava koji ga obavlja nazivamo

jezgra. Rezultat te faze je niz vrijednosti nepoznate funkcije u čvorovima koje definiraju njezino matematičko približenje.

Sljedeći korak je proračun inženjerski prihvatljivih podataka iz matematičkog približenja. On najčešće obuhvaća grafički prikaz rezultata, proračun najvećih lokalnih naprežanja i određivanje integralnih značajki zadaće. Ovaj korak nazivamo *postprocesiranje*, a dio MKE programskih sustava koji ga obavljaju nazivamo *postprocesor*.

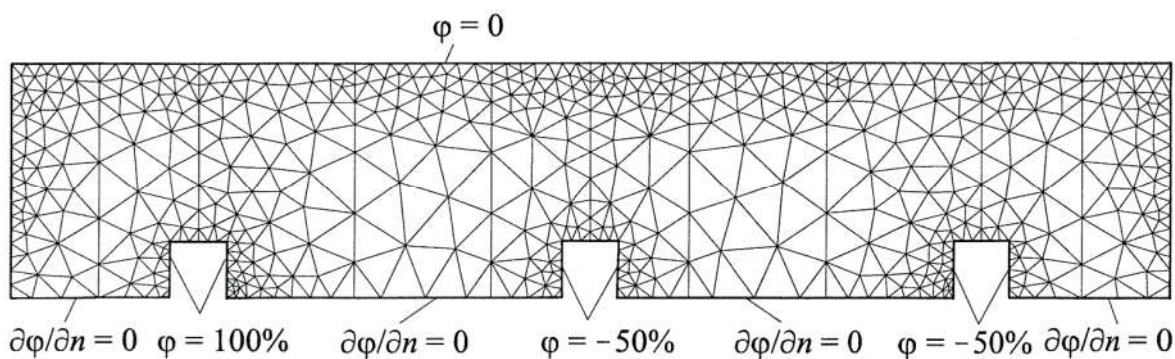
Za primjer²³ proračuna dvodimenzionalnog statičkog električnog i magnetskog polja odabrali smo oklopljene trofazne sabirnice. To je trodimenzionalna zadaća, no omjer dužine i poprečnog presjeka takvih sabirnica opravdava dvodimenzionalno modeliranje. Poprečni presjek sabirnica prikazali smo na slici 9.2.8.



Slika 9.2.8. Poprečni presjek oklopljenih sabirnica

Primjer 9.2.11.1. Statičko električno polje

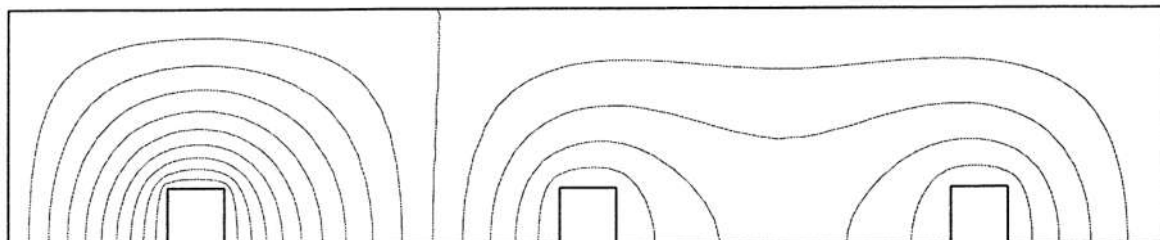
Matematički model sabirnica i mreža konačnih elemenata za proračun statičkog električnog polja prikazali smo na slici 9.2.9.



Slika 9.2.9. Mreža konačnih elemenata za proračun statičkog električnog polja sabirnica

²³ Složenije primjere proračuna linearnih polja pogledati npr. u Z. Haznadar, J. Matjan, *Proračun polja u visokonaponskim oklopljenim postrojenjima i prijenosnim sustavima*, Elektrotehnika 5 – 6, Zagreb, 1972; Z. Haznadar, S. Sadović, *Macro Elements in the Finite Element Method – Application to the High-Voltage Insulating Sydtem Design*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. Mag 18, No. 2. March 1982.

Rubni uvjeti koje smo ovdje primijenili su Dirichletova tipa, što znači da su nam poznati potencijali metalnih dijelova zadaće i Neumannova tipa na simetrali zadaće. U tipičnom trenutku pogonskog stanja potencijal oklopa je jednak nuli, potencijal lijevog vodiča je 100% faznog pogonskog napona, a potencijali srednjeg i desnog vodiča su – 50% faznog pogonskog napona, dok na simetrali vrijedi $\partial\phi/\partial n = 0$. Ekvipotencijalne linije za tako odabrane rubne uvjete prikazali smo na slici 9.2.10.

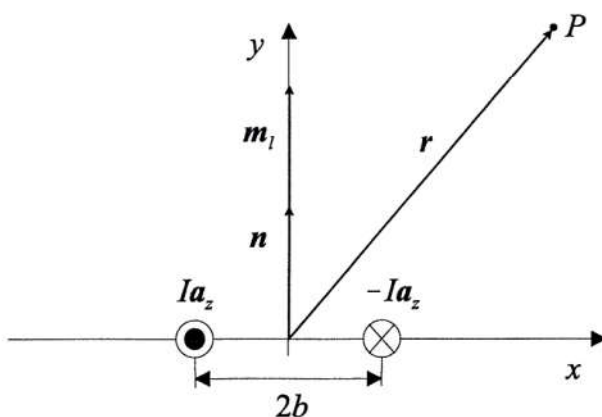


Slika 9.2.10. Ekvipotencijalne linije MKE rješenja statičkog električnog polja sabirnica, razlika potencijala između ekvilinija je 10% pogonskog faznog napona

Drugačijim izborom rubnih uvjeta možemo simulirati različite trenutke u pogonskom stanju i pri kvarovima.

Primjer 9.2.11.2. Statičko magnetsko polje sabirnica

Formiranje modela za rješenje ove zadaće je bitno složenije, budući da se magnetsko polje rasprostire u cijelom prostoru. Za modeliranje takvih zadaća u MKE najčešće uvodimo "umjetne" granice koje su dovoljno udaljene da ne utječu bitno na točnost rješenja u dijelu prostora koji nas zanima. Praktično pitanje koje se odmah postavlja jest: koliko daleko moramo udaljiti "umjetne" granice? U trodimenzionalnim zadaćama zadanih raspodjela struja razvojem potencijala u multipole²⁴ utvrdili smo da ih, ako se dovoljno udaljimo od raspodjele struje, možemo približiti magnetskim dipolom. Analognim postupkom možemo pokazati da zadane dvodimenzionalne raspodjele struje možemo približiti linijskim magnetskim dipolom.



Slika 9.2.11. Linijski magnetski dipol

²⁴ Pogledati članak 6.8.3.

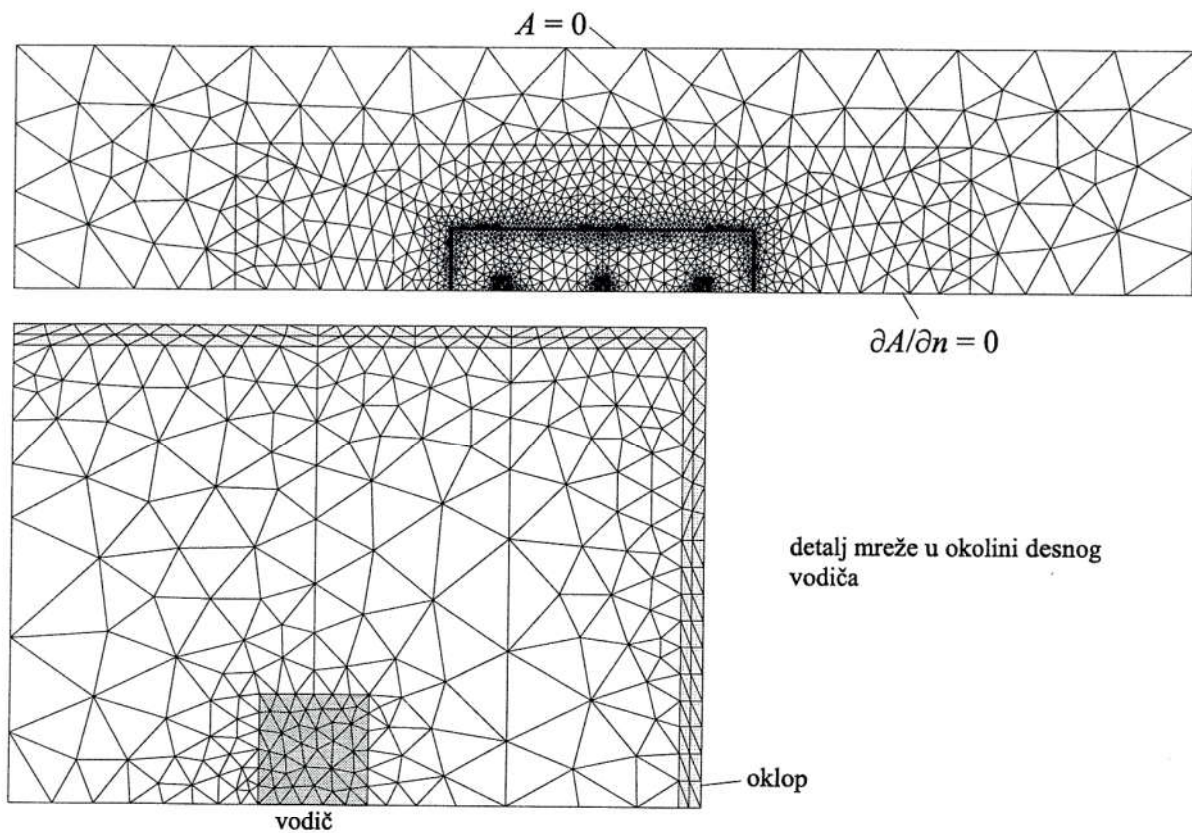
On se sastoji od dvije linijske strujnice kroz koje protječe jednaka struja I u suprotnim smjerovima prema slici 9.2.11. Udaljenost promatranja je mnogo veća od razmaka između linijskih strujnica. Vektorski magnetski potencijal linijskog magnetskog dipola opada recipročno s udaljenošću

$$A = \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{r^2} \mathbf{m}_l \times \mathbf{r} . \quad (9.2.120)$$

Ovdje je $\mathbf{m}_l$ magnetski dipolni moment po jedinici dužine linijskog magnetskog dipola koji definiramo umnoškom površine jedinične dužine petlje i struje koja teče kroz strujnice

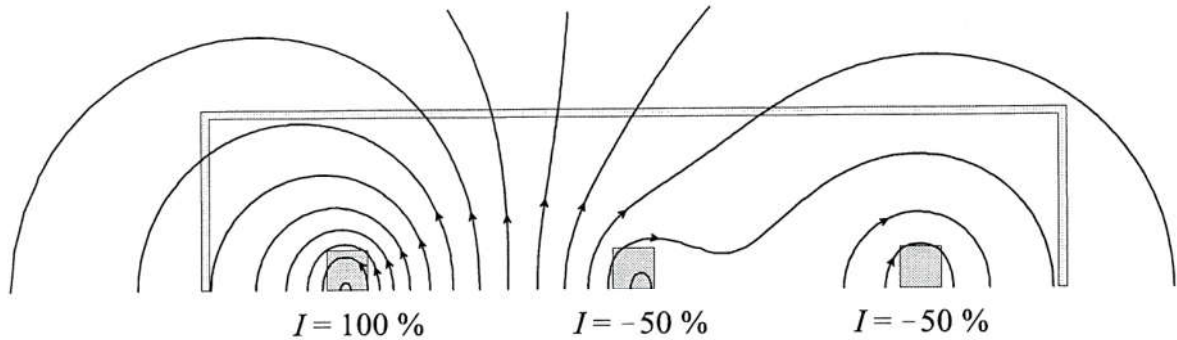
$$\mathbf{m}_l = 2bI\mathbf{n} . \quad (9.2.121)$$

Ako je udaljenost točke promatranja četiri do šest puta veća od dimenzija raspodjele struja, možemo je približiti linijskim magnetskim dipolom budući da tada doprinos ostalih članova multipolnog razvoja koji opadaju s r^{-2} , r^{-3} možemo zanemariti u odnosu na prvi član koji opada s r^{-1} . Stoga možemo umjetne granice postaviti na udaljenosti četiri do šest puta većoj od dimenzija raspodjele struja. Matematički model za proračun statičkog magnetskog polja i mrežu konačnih elemenata prikazali smo na slici 9.2.12.



Slika 9.2.12. Granice i mreža konačnih elemenata za proračun statičkog magnetskog polja sabirnica

Ovdje²⁵ smo primijenili rubne uvjete Dirichletova tipa $A_z = 0$ na udaljenim "umjetnim" granicama zadaće i Neumannova tipa $\partial A_z / \partial n = 0$ na simetrali zadaće. U lijevom vodiču teče 100% pogonske linijske struje, a u srednjem i desnom – 50% pogonske linijske struje. Na slici 9.2.13. prikazali smo silnice statičkog magnetskog polja u sabirnicama i njihovoj bliskoj okolini.



Slika 9.2.13. Silnice statičkog magnetskog polja sabirnica određene MKE

9.3. NELINEARNE ZADAĆE

Nelinearne zadaće obično susrećemo pri rješavanju zadaća magnetskih polja s feromagnetskim materijalima zbog njihovih izrazito nelinearnih značajki. Globalni sustav u takvim zadaćama ima oblik

$$[K(U)]U = F. \quad (9.3.1)$$

To je nelinearni sustav koji *ne možemo riješiti direktnim postupcima*. Primjenjujemo iterativne postupke, a najraširenija je *Newton-Raphsonova metoda* zbog brze konvergencije. Da bismo pokazali primjenu te metode uvodimo vektor funkcija ostataka $O(U)$

$$O(U) = [K(U)]U - F, \quad (9.3.2)$$

koji je nelinearna funkcija vektora svih nepoznanica. Označimo rješenje u i -tom koraku postupka s U^i i pretpostavimo da nas ne zadovoljava njegova točnost. Tada je

$$O(U^i) = [K(U^i)]U^i - F \neq 0. \quad (9.3.3)$$

U koraku $i + 1$ možemo vektorsku funkciju $O(U^{i+1})$ razviti u Taylorov red. Uzmemo li u obzir samo derivacije prvog reda dobivamo

²⁵ Mreža za proračun statičkog magnetskog polja oklopljenih sabirnica može biti jednostavnija budući da je materijal oklopa nemagnetski ($\mu_r = 1$) pa ga nije potrebno posebno dijeliti na elemente. Ovdje ćemo u odjeljku 9.4. s istom mrežom konačnih elemenata rješavati i kvazistatičko elektromagnetsko polje pa smo stoga proveli i detaljnu podjelu oklopa na elemente budući da je materijal oklopa vodljiv ($\kappa \neq 0$).

$$\begin{bmatrix} O_1^{i+1} \\ O_2^{i+1} \\ \vdots \\ O_n^{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O_1^i \\ O_2^i \\ \vdots \\ O_n^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial O_1}{\partial U_1} \Big|_i & \frac{\partial O_1}{\partial U_2} \Big|_i & \cdots & \frac{\partial O_1}{\partial U_n} \Big|_i \\ \frac{\partial O_2}{\partial U_1} \Big|_i & \frac{\partial O_2}{\partial U_2} \Big|_i & \cdots & \frac{\partial O_2}{\partial U_n} \Big|_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial O_n}{\partial U_1} \Big|_i & \frac{\partial O_n}{\partial U_2} \Big|_i & \cdots & \frac{\partial O_n}{\partial U_n} \Big|_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{i+1} - U_1^i \\ U_2^{i+1} - U_2^i \\ \vdots \\ U_n^{i+1} - U_n^i \end{bmatrix}. \quad (9.3.4)$$

Cilj nam je postići da U^{i+1} konvergira točnom rješenju. Tada je ostatak $O(U^{i+1}) = 0$, pa iz prethodne jednadžbe slijedi

$$-\begin{bmatrix} O_1^i \\ O_2^i \\ \vdots \\ O_n^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial O_1}{\partial U_1} \Big|_i & \frac{\partial O_1}{\partial U_2} \Big|_i & \cdots & \frac{\partial O_1}{\partial U_n} \Big|_i \\ \frac{\partial O_2}{\partial U_1} \Big|_i & \frac{\partial O_2}{\partial U_2} \Big|_i & \cdots & \frac{\partial O_2}{\partial U_n} \Big|_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial O_n}{\partial U_1} \Big|_i & \frac{\partial O_n}{\partial U_2} \Big|_i & \cdots & \frac{\partial O_n}{\partial U_n} \Big|_i \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} U_1^{i+1} \\ U_2^{i+1} \\ \vdots \\ U_n^{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1^i \\ U_2^i \\ \vdots \\ U_n^i \end{bmatrix} \right\}. \quad (9.3.5)$$

Matrica koeficijenata u sustavu jednadžbi (9.3.5) jest Jacobijeva matrica $[J]$ vektorske funkcije $O(U)$ koju smo izračunali u i -tom koraku. Ako uvedemo vektor popravka $\Delta U^i = U^{i+1} - U^i$ koristeći jednadžbe (9.3.3 i 5) možemo pisati

$$U^{i+1} = U^i + \Delta U^i = U^i - [J]^{-1} \{ [K^i] U^i - F \}. \quad (9.3.6)$$

Tim izrazom definiramo iterativni postupak rješavanja nelinearnog sustava jednadžbi. U i -tom koraku vektor popravka određujemo iz *linearnog* sustava

$$[J] \Delta U^i = [K^i] U^i - F. \quad (9.3.7)$$

Zatim određujemo rješenje za $i + 1$ korak kao $U^{i+1} = U^i + \Delta U^i$. Takav postupak ponavljamo sve dok vektor popravka ΔU^i ne postane nul vektor, ili dok postane zanemariv u odnosu na vektor U^i .

Bit primjene tog postupka jest u određivanju doprinosa pojedinog elementa u iterativnom postupku, a ukupni sustav jednadžbi (9.3.7) formiramo i rješavamo jednako kao

i u linearnim zadaćama.²⁶ Ovdje smo se ograničili na primjenu linearnih trokutnih elemenata,²⁷ pa je doprinos pojedinog elementa $\mathbf{O}^e(\mathbf{U}^e)^k$ vektoru $\mathbf{O}(\mathbf{U})^k$ u rješavanju nelinearnih statičkih magnetskih polja²⁸

$$\mathbf{O}^e(\mathbf{A}^e)^k = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_1^e \\ \mathbf{O}_2^e \\ \mathbf{O}_3^e \end{bmatrix}^k = \frac{\mathbf{v}^e{}^k}{4S_\Delta^e} \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^e \\ \mathbf{A}_2^e \\ \mathbf{A}_3^e \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \\ \mathbf{f}_3^e \end{bmatrix} = \mathbf{v}^e{}^k [\mathbf{G}^e] \mathbf{A}^e{}^k - \mathbf{f}^e. \quad (9.3.8)$$

U nastavku ćemo izostaviti oznaku iteracije, budući da se svi izrazi odnose na veličine u istoj iteraciji. Članovi g_{ij} matrice $[\mathbf{G}]$ i $\mathbf{f}_i$ vektora $\mathbf{f}$ u jednadžbi (9.3.8) ovise samo o geometriji elementa,²⁹ pa su članovi Jacobijeve matrice vektorske funkcije $\mathbf{o}^e(\mathbf{A}^e)$ oblika

$$J_{ij}^e = \mathbf{v}^e g_{ij}^e + \frac{\partial \mathbf{v}^e}{\partial \mathbf{A}_j^e} \left(\sum_{k=1}^3 g_{ik} \mathbf{A}_k \right). \quad (9.3.9)$$

Stoga pri proračunu doprinosa svakog elementa Jacobijevoj matrici moramo poznavati derivacije $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{A}_j$. Za feromagnetske materijale poznajemo ovisnost reluktancije $\mathbf{v}$ o apsolutnoj vrijednosti gustoće magnetskog tijeka $\mathbf{B}$, pa te derivacije određujemo pomoću

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{A}_i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \mathbf{A}_i}. \quad (9.3.10)$$

Koristeći izraze (9.2.103,106)³⁰ lako pokazujemo da je konačni oblik doprinosa pojedinog elementa u iterativnom rješavanju zadaće nelinearnog magnetskog polja

$$\left\{ \mathbf{v}^e [\mathbf{g}^e] + \frac{\partial \mathbf{v}^e}{\partial \mathbf{B}^e} \frac{1}{S_\Delta^e \mathbf{B}^e} [\mathbf{g}^e] \mathbf{A}^e \mathbf{A}^e{}^T [\mathbf{g}^e]^T \right\} \Delta \mathbf{A}^e = -\mathbf{v}^e [\mathbf{g}^e] \mathbf{A}^e + \mathbf{f}^e. \quad (9.3.11)$$

U iterativnom postupku i -ti korak obuhvaća:

- određivanje $\mathbf{v}^e$ i $\partial \mathbf{v}^e / \partial \mathbf{B}^e$ iz ovisnosti $\mathbf{v}(\mathbf{B})$. U prvom koraku uzimamo $\mathbf{v}^e$ iz linearnog dijela zavisnosti $\mathbf{v}(\mathbf{B})$,³¹
- proračun vektora popravka $\Delta \mathbf{A}$ iz sustava linearnih algebarskih jednadžbi koje formiramo iz elementarnih doprinosa oblika (9.3.11),
- ispitivanje kriterija završetka postupka, a to je najčešće da je euklidska norma vektora popravka $\mathbf{O}^T \mathbf{O}$ manja od neke unaprijed zadane vrijednosti ϵ .

²⁶ Pogledati članke 9.2.6. i 7.

²⁷ Pogledati članke 9.2.4 – 10.

²⁸ Pogledati članak 9.2.5.

²⁹ Pogledati jednadžbe (9.2.53) i (9.2.56).

³⁰ Pogledati točku 9.2.9.2.

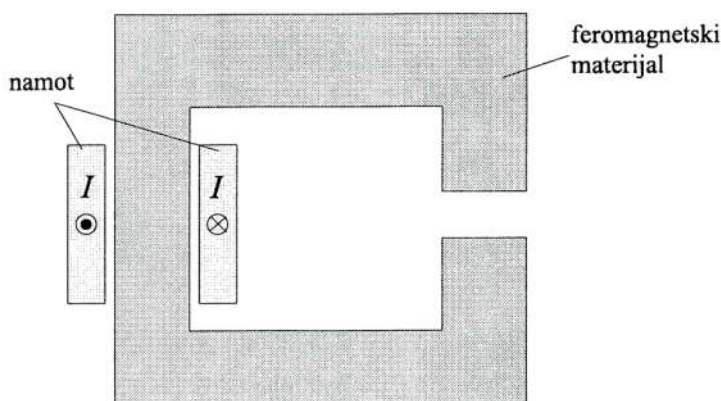
³¹ Tada je $\partial \mathbf{v}^e / \partial \mathbf{B}^e$ jednako nuli.

Član $B\partial v^e/\partial B^e$ jako ovisi o načinu približenja³² ovisnosti $v(B)$ i to bitno utječe na konvergenciju postupka. Najčešće koristimo približenje u dva područja:

- nezasićeno linearno područje u kojem je $B - H$ ovisnost linearna, pa je i približavamo pravcem,
- koljeno i zasićeni dio $B - H$ zavisnosti koji približavamo različitim polinomima, najčešće splineovima.³³

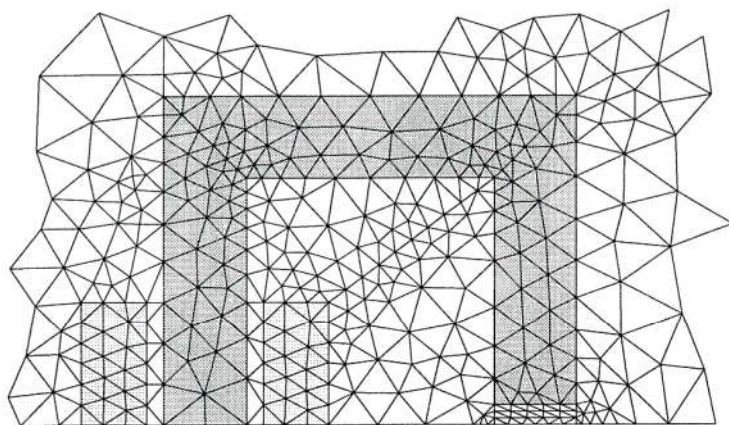
Primjer 9.3.1. Statičko magnetsko polje elektromagneta

Nelinearni proračun statičkog magnetskog polja prikazat ćemo na proračunu magnetskog polja elektromagneta³⁴ kojeg smo prikazali na slici 9.3.1.



Slika 9.3.1. Elektromagnet

Dvodimenzionalni model elektromagneta na slici 9.3.1. i mrežu konačnih elemenata prikazali smo na slikama 9.3.2. i 9.3.3.

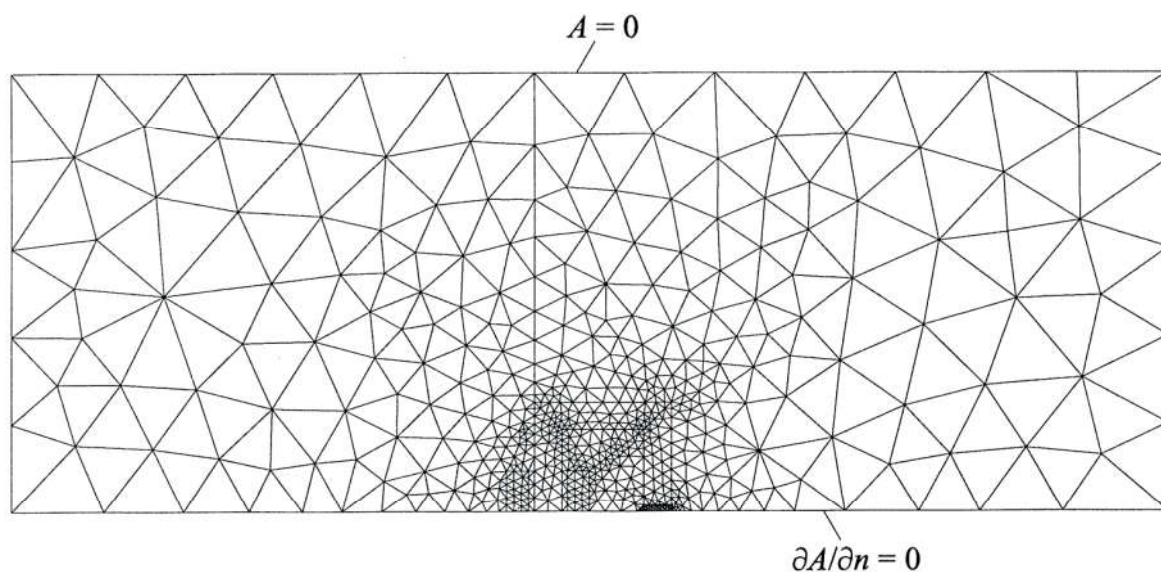


Slika 9.3.2. Detalj mreže u okolini elektromagneta

³² Detaljnije o načinima približenja $B - H$ ovisnosti pogledati u P. Silvester, *Computer – Aided Design in Magnetics*, Springer Verlag, New York 1986.

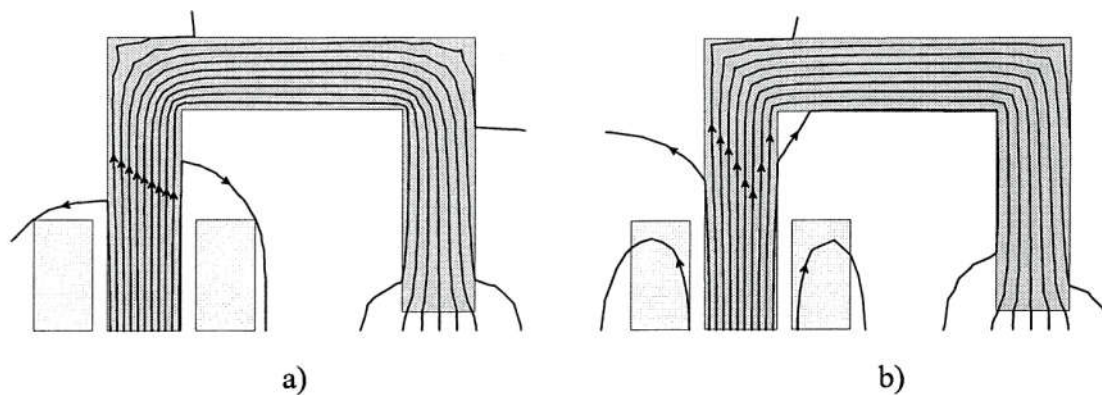
³³ Detaljnije o glatkoj aproksimaciji krivulja splineovima pogledati u P.M. Prenter, *Splines and Variational Methods*, Wiley Interscience, New York, 1975.

³⁴ Složenije primjene pogledati npr. u Z. Haznadar, R. Jokić, *Proračun polja sinkronih generatora metodom konačnih elemenata*, Elektrotehnika br. 1, Zagreb, 1976; Z. Haznadar, F. Pužar, *Primjena metode konačnih dijelova za proračun reaktancija sinkronih strojeva*, Elektrotehnika br. 4, Zagreb, 1981.



Slika 9.3.3. Granice i mreža konačnih elemenata za dvodimenzionalni proračun magnetskog polja elektromagneta

Na simetrali smo postavili Neumannove rubne uvjete $\partial A_z / \partial n = 0$, a na umjetnim granicama Dirichletove rubne uvjete $A_z = 0$. Rezultate proračuna za nezasićeno stanje jezgre prikazali smo na slici 9.3.3.a) a za zasićeno stanje dijela jezgre na slici 9.3.3.b).



Slika 9.3.4. Rezultati MKE proračuna elektromagneta; a) nezasićeno stanje, b) zasićeno stanje

9.4. KVAZISTATIČKO POLJE

9.4.1. Sinusno promjenjiva polja

Sinusno promjenjiva kvazistatička polja rješavamo u fazorskoj domeni. Vektorski magnetski potencijal u zadaćama s linearnim materijalima zadovoljava vektorsku jed-

nadžbu difuzije u fazorskoj domeni³⁵

$$\Delta \underline{A} - j\omega \mu \kappa \underline{A} = -\mu \underline{J} . \quad (9.4.1)$$

Ovdje ćemo se zbog jednostavnosti ograničiti na razmatranje dvodimenzionalnih zadaća. U njima vektorski magnetski potencijal i gustoća struje izvora imaju samo komponentu u smjeru odrednice z , pa jednačba (9.4.1) poprima oblik

$$\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial y^2} - j\omega \mu \kappa \underline{A} + \mu \underline{J}_s = 0 . \quad (9.4.2)$$

Pronalaženje integralnog oblika ekvivalentnog ovoj jednačbi prvi je korak u primjeni MKE. Metodom težinskih ostataka dobivamo izraz

$$\int_s W_i \left(\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial y^2} - j\omega \mu \kappa \underline{A} + \mu \underline{J}_s \right) dS = 0 , \quad (9.4.3)$$

a primjenom Greenova teorema možemo tu jednačbu svesti na

$$\int_s \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \underline{A}}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \underline{A}}{\partial y} \right) dS - \oint_{\Gamma} W_i \frac{\partial \underline{A}}{\partial n} dl - j\omega \mu \kappa \int_s W_i \underline{A} dS = -\mu \int_s W_i \underline{J}_s dS . \quad (9.4.4)$$

Uključivanjem Dirichletovih i Neumannovih rubnih uvjeta u taj izraz, te primjenom Galerkinove metode, dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_j \underline{A}_j \int_s \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dS - j\omega \sum_j \mu \kappa \underline{A}_j \int_s N_j dS = \\ = -\sum_j \mu \underline{J}_{sj} \int_s N_j dS + \sum_j \frac{\partial \underline{A}_j}{\partial n} \int_{\Gamma_n} N_j d\Gamma . \end{aligned} \quad (9.4.5)$$

I ovdje ćemo primijeniti linearne trokutne elemente koje smo uveli u članku 9.2.3. Integralni doprinos pojedinog elementa je *kompleksan* i određujemo ga postupkom vrlo sličnim onome kojega smo primijenili u članku 9.2.5. Konačni oblik doprinosa jest

$$W^e = \left\{ \frac{1}{4S_\Delta^e} \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix} + j\omega \mu^e \kappa^e \frac{S_\Delta^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \underline{A}_i^e \\ \underline{A}_j^e \\ \underline{A}_k^e \end{bmatrix} + \frac{\mu^e \underline{J}_s^e S_\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (9.4.6)$$

³⁵ Pogledati članak 7.2.3, jednačbu (7.2.35).

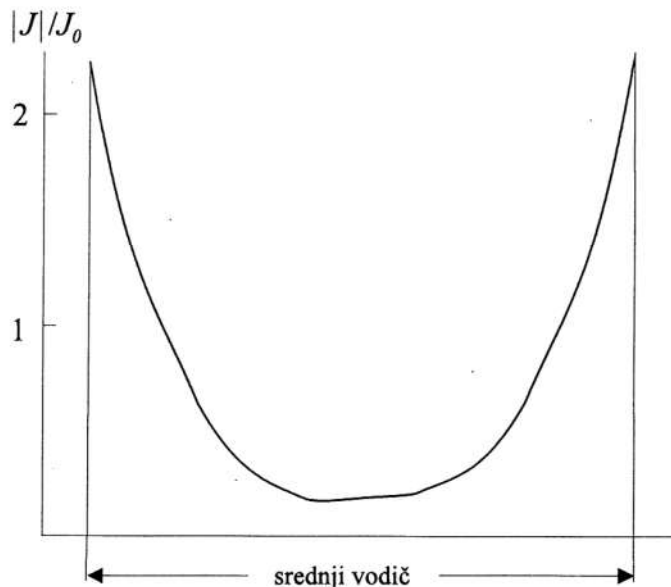
Realni članovi matrice doprinosa elementa jednaki su kao i za statička polja³⁶ i iznose

$$\begin{aligned}
 k_{11}^e &= (y_k^e - y_j^e)^2 + (x_k^e - x_j^e)^2, \\
 k_{12}^e &= k_{21}^e = (y_k^e - y_j^e)(y_i^e - y_k^e) + (x_k^e - x_j^e)(x_i^e - x_k^e), \\
 k_{13}^e &= k_{31}^e = (y_j^e - y_i^e)(y_k^e - y_j^e) + (x_j^e - x_i^e)(x_k^e - x_j^e), \\
 k_{22}^e &= (y_k^e - y_i^e)^2 + (x_k^e - x_i^e)^2, \\
 k_{23}^e &= k_{32}^e = (y_i^e - y_k^e)(y_j^e - y_i^e) + (x_i^e - x_k^e)(x_j^e - x_i^e), \\
 k_{33}^e &= (y_j^e - y_i^e)^2 + (x_j^e - x_i^e)^2.
 \end{aligned} \tag{9.4.7}$$

Ako su Neumannovi rubni uvjeti u zadaći različiti od nule, moramo ih uključiti u proračun vektora f^e . Ostali koraci u primjeni MKE jednaki su onima u odjeljku 9.2, samo moramo voditi računa da su elementarni doprinosi kompleksne veličine.

Primjer 9.4.1.1. Sinusno promjenjivo kvazistatičko polje sabirnica

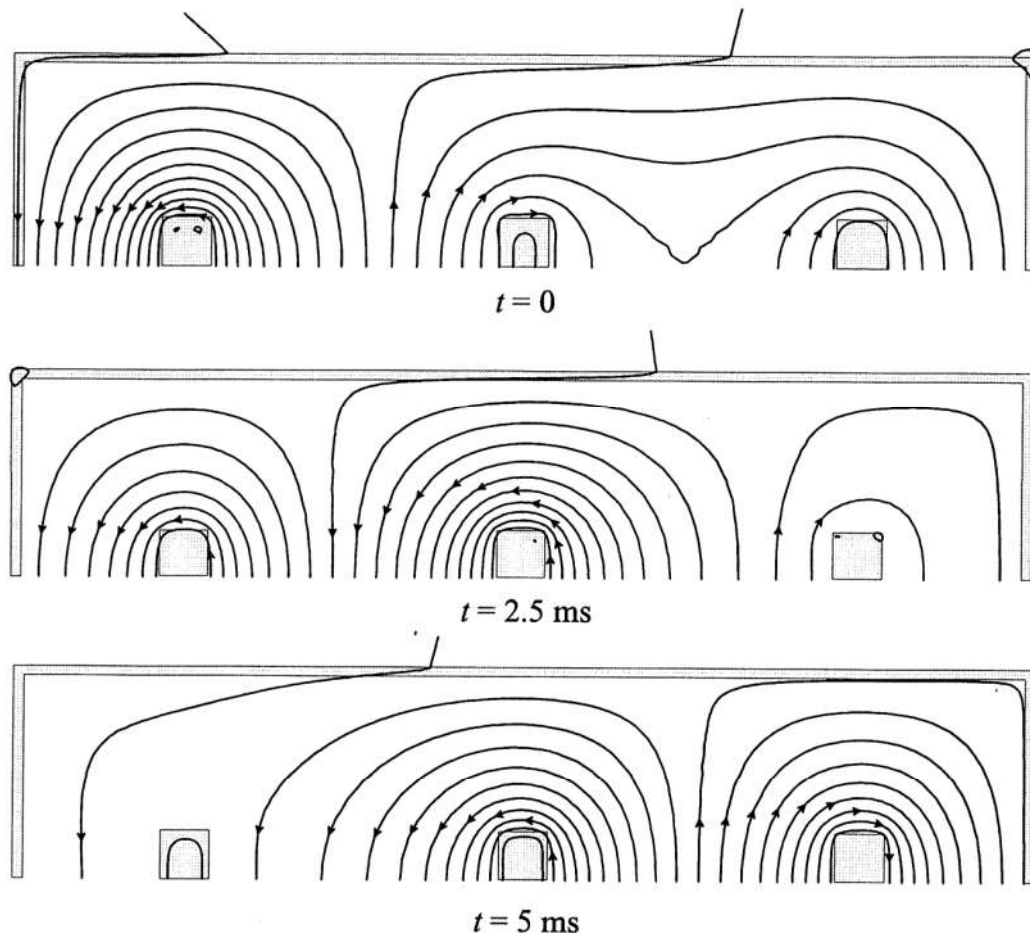
Geometriju sabirnica definirali smo u članku 9.2.11. a mreža konačnih elemenata jednaka je onoj iz primjera 9.2.11.2. Za proračun sinusno promjenjivog kvazistatičkog polja u sabirnicama odabrali smo slučaj kad sabirnice vode trofazni simetrični sustav struja. U lijevom vodiču teče struja $I \cos(\omega t)$, u srednjem teče struja $I \cos(\omega t - 2\pi/3)$ a u desnom $I \cos(\omega t - 4\pi/3)$ na frekvenciji 50 Hz. Za odabranu geometriju sabirnica izražen je površinski učinak već pri frekvenciji 50 Hz. To smo prikazali slikom raspodjele apsolutne vrijednosti fazora gustoće struje po simetrali sabirnica u srednjem vodiču.



Slika 9.4.1. Raspodjela normalizirane apsolutne vrijednosti fazora gustoće struje $\underline{J}$. Ovdje je $J_0 = I/S$, a S je površina vodiča.

³⁶ Pogledati članak 9.2.5, izraz (9.2.53).

Na slici 9.4.2. prikazali smo magnetsko polje silnicama u različitim vremenskim trenucima.



Slika 9.4.2. Silnice vektora jakosti magnetskog polja sinusno promjenjivog kvazistatičkog polja u sabirnicama u različitim vremenskim trenucima

9.4.2. Nesinusna polja

Vektorski magnetski potencijal u linearnim dvodimenzionalnim zadaćama vremenski nesinusno promjenjivih polja zadovoljava jednačbu

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \mu \kappa \frac{\partial A}{\partial t} + \mu J_s = 0 . \quad (9.4.8)$$

Nakon primjene Galerkinove metode u prostornoj domeni (x,y) , analogno prethodnom članku, dobivamo integralni doprinos pojedinog elementa

$$W^e = \frac{1}{4S_\Delta^e} \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i^e \\ A_j^e \\ A_k^e \end{bmatrix} + \mu^e \kappa^e \frac{S_\Delta^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} A_i^e \\ A_j^e \\ A_k^e \end{bmatrix} + \frac{\mu^e J_s^e S_\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (9.4.9)$$

Nakon formiranja sustav jednačbi za nepoznate koeficijente poprima oblik

$$[K]A + [S] \frac{\partial A}{\partial t} + F = 0. \quad (9.4.10)$$

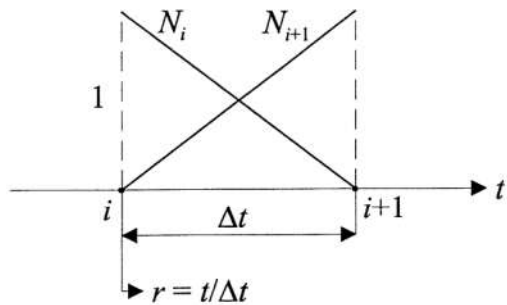
Tu jednačbu rješavamo primjenom metode težinskih ostataka u vremenskoj domeni T

$$\int_T w_i^T \left\{ [K]A + [S] \frac{\partial A}{\partial t} + F \right\} dt = 0. \quad (9.4.11)$$

Ovdje su w_i težinske funkcije u vremenskoj domeni. Nadalje primjenjujemo uobičajeni postupak približenja u vremenskoj domeni

$$A \approx \sum N_i(t) A_i. \quad (9.4.12)$$

A_i je vektor čvornih varijabli u i -tom trenutku. Interpolacijsku funkciju $N_i(t)$ uzimamo jednaku za svaku komponentu vektora A_i pa je ona skalar. Najniži stupanj polinoma koji možemo koristiti za N_i su polinomi prvog reda budući da u jednačbu (9.4.11) ulaze samo prve derivacije po vremenu. Pogledajmo sada tipični vremenski element dužine Δt koji povezuje trenutke $i+1$ i i koji smo prikazali na slici 9.4.3.



Slika 9.4.3. Linearne interpolacijske funkcije na vremenskom elementu

Linearne interpolacijske funkcije zadajemo kao

$$\left. \begin{aligned} N_i &= 1 - r & ; & \quad \frac{\partial N_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta t} \\ N_{i+1} &= r & ; & \quad \frac{\partial N_{i+1}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad ; \quad r = \frac{t}{\Delta t}, \quad (9.4.13)$$

i one zadovoljavaju sve uvjete koje smo u članku 9.2.3. propisali. Ako pretpostavimo da je vremenska domena jednaka jednom elementu, jednačba (9.4.11) postaje

$$\int_0^1 \mathbf{w}_t^T \left\{ [\mathbf{K}] (N_i \mathbf{A}_i + N_{i+1} \mathbf{A}_{i+1}) + [\mathbf{S}] \left(\frac{\partial N_i}{\partial t} \mathbf{A}_i + \frac{\partial N_{i+1}}{\partial t} \mathbf{A}_{i+1} \right) + \mathbf{F} \right\} dr = 0 . \quad (9.4.14)$$

Tim izrazom opisali smo zadaću početnih vrijednosti, budući da pretpostavljamo da poznajemo vektor čvornih varijabli u i -tom trenutku $\mathbf{A}_i$ a želimo odrediti vektor čvornih varijabli $\mathbf{A}_{i+1}$ u trenutku $i+1$. Uvrštavanjem interpolacijskih funkcija (9.4.13) u izraz (9.4.14) dobivamo vezu između $\mathbf{A}_i$ i $\mathbf{A}_{i+1}$

$$\begin{aligned} & \left([\mathbf{K}] \int_0^1 W_t r dr + [\mathbf{S}] \int_0^1 W_t \frac{dr}{\Delta t} \right) \mathbf{A}_{i+1} + \\ & + \left([\mathbf{K}] \int_0^1 W_t (1-r) dr - [\mathbf{S}] \int_0^1 W_t \frac{dr}{\Delta t} \right) \mathbf{A}_i + \int_0^1 W_t \mathbf{F} dr = 0 . \end{aligned} \quad (9.4.15)$$

U ovaj izraz možemo uvrstiti različite težinske funkcije W_t . Općenito možemo pisati

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{S}] + \theta [\mathbf{K}] \right) \mathbf{A}_{i+1} + \left(-\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{S}] + (1-\theta) [\mathbf{K}] \right) \mathbf{A}_i + \theta \mathbf{F}_{i+1} + (1-\theta) \mathbf{F}_i = 0 . \quad (9.4.16)$$

Ovdje je

$$\theta = \frac{\int_0^1 w_t r dr}{\int_0^1 w_t dr} . \quad (9.4.17)$$

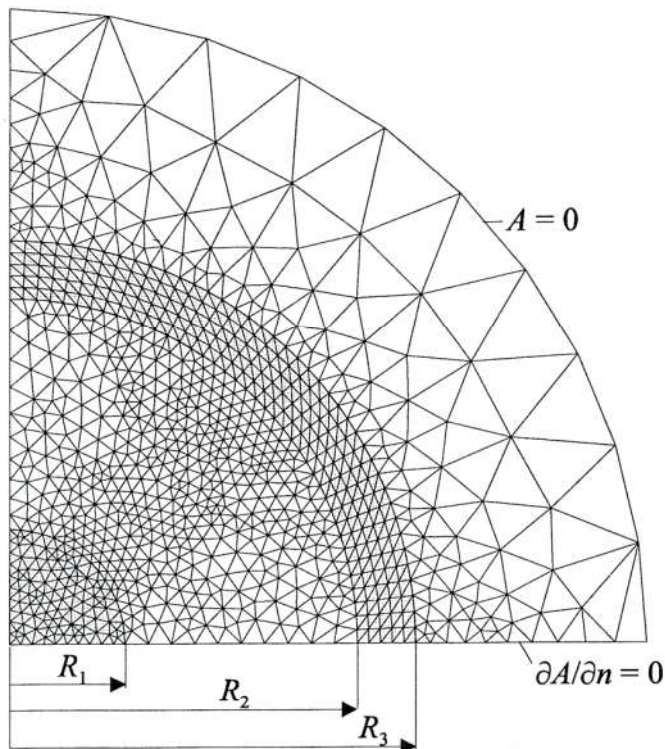
Ako i u vremenskoj domeni želimo primijeniti Galerkinovu metodu, onda za težinsku funkciju odabiremo³⁷ $w_t = r$. Tada je $\theta = 2/3$.

Proračun vremenske ovisnosti vektorskog magnetskog potencijala provodimo iterativnim postupkom. Iz poznate vrijednosti $\mathbf{A}_i$ u i -tom vremenskom trenutku pomoću (9.5.16) određujemo $\mathbf{A}_{i+1}$ koji je ujedno početna vrijednost za sljedeći korak.

³⁷ Drugim izborom težinskih funkcija možemo dobiti dobro poznate formule koje uobičajeno izvodimo iz približenja konačnim diferencijama. Eulerovu metodu dobivamo za $w_t = \delta(i)$, a Crank-Nicholsonovu metodu dobivamo za $w_t = \delta(i + 0.5)$. U ovoj knjizi smo odabrali Galerkinovu metodu koja predstavlja prirodan izbor budući da smo isti pristup koristili i u prostornoj domeni.

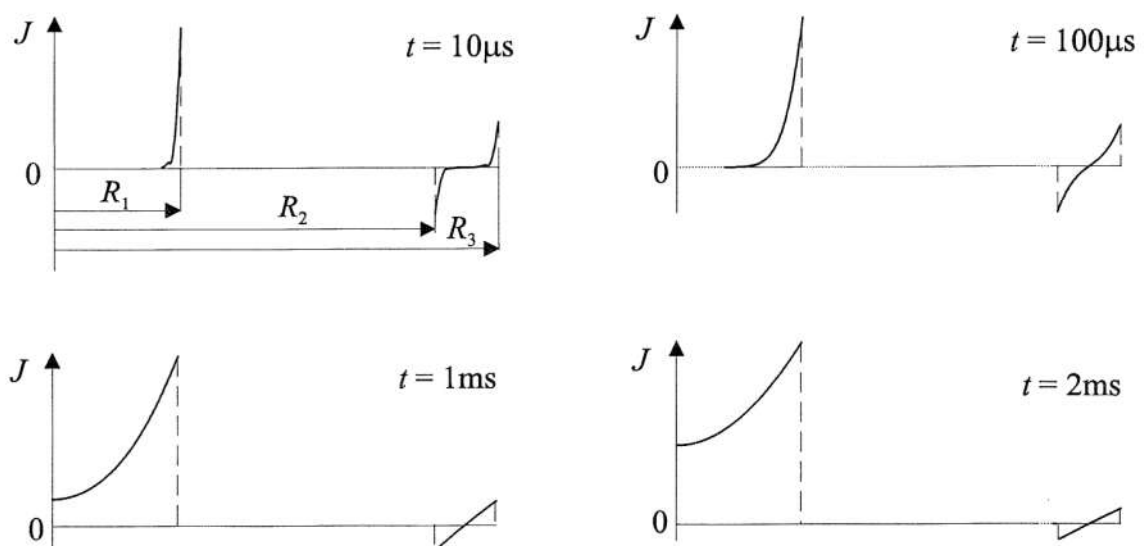
Primjer 9.4.2.1. Ukapčanje suosnog kabela

Suosni kabel i mrežu konačnih elemenata prikazali smo na slici 9.4.4. U trenutku $t = 0$ na vodič kabela priključujemo struju $i(t) = I \sin(\omega t)$.



Slika 9.4.4. Mreža konačnih elemenata i geometrija suosnog kabela

Raspodjelu gustoće struja po vodiču i plaštu kabela tijekom ukapčanja prikazali smo na slici 9.4.5.



Slika 9.4.5. Raspodjela gustoće struje po vodiču i plaštu suosnog kabela tijekom ukapčanja struje $i(t) = I \sin(\omega t)$ za frekvenciju $f = 50$ Hz.

POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 9.

- K.J. Bath, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- G. Dhatt, G. Touzot, *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley & Sons, New York, 1985.
- E. Hinton, D.R.J. Owen, *Finite Element Programming*, Academic Press, London, 1977.
- D.A. Lowther, P.P. Silvester, *Computer – Aided Design in Magnetism*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- H.R. Schwarz, *Finite Element Methods*, Academic Press, London 1988.
- P.P. Silvester, R.L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- G.Strang, G. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, London, 1977.

10. METODA MOMENATA

U prethodnom poglavlju smo opisali svođenje parcijalnih diferencijalnih jednačbi na sustav algebarskih jednačbi primjenom metode konačnih elemenata. U ovom poglavlju obradit ćemo metode svođenja linearnih integralnih jednačbi na sustav linearnih algebarskih jednačbi koje možemo nazvati zajedničkim imenom *metoda momenata* (u daljnjem tekstu MOM). Ovdje ćemo se ograničiti samo na zadaće s jednostavnim materijalima, budući da je u njima primjena MOM najučinkovitija i svodi se na određivanje nepoznatih izvora polja na granicama materijala. Stoga se primjena MOM u takvim zadaćama često naziva metoda rubnih elemenata.¹

Na početku ćemo definirati MOM i uvesti najčešće korištene postupke svođenja integralnih jednačbi na sustav algebarskih jednačbi. Primjenu MOM najprije ćemo pokazati na rješavanju trodimenzionalnih statičkih električnih polja. Zatim ćemo obraditi zadaće iz područja raspršenja elektromagnetskih valova te zračenja i raspršenja na tankožičanim strukturama.

10.1. DEFINICIJA MOM

Integralnu jednačbu možemo simbolički napisati kao

$$L(f) = g, \quad (10.1.1)$$

gdje je L linearni integralni operator, g zadana funkcija, a f nepoznata funkcija koju želimo odrediti.² Prvi korak u svođenju izraza (10.1.1) na sustav algebarskih jednačbi jest razvoj f u red unaprijed odabranih funkcija f_i , $i = 1, \dots, N$ u domeni funkcije f

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i, \quad (10.1.2)$$

gdje su α_i nepoznati koeficijenti razvoja. Funkcije f_i zovemo *temeljne funkcije*. Za točno rješenje najčešće u (10.1.2) moramo provesti zbrajanje beskonačnog reda. U približnom rješavanju koje ovdje obrađujemo zbrajamo konačni broj članova u (10.1.2). Uvrštenjem jednačbe (10.1.2) u (10.1.1) i korištenjem linearnosti operatora L dobivamo

¹ Engleski naziv je Boundary Element Method (BEM).

² Pogledati Prilog A.

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i L(f_i) = g . \quad (10.1.3)$$

Sustav linearnih algebarskih jednadžbi za nepoznate koeficijente α_i dobivamo primjenom metode težinskih ostataka. Jednadžba (10.1.3) vrijedi u svakoj točki domene Ω funkcije f_i . Stoga za bilo koji skup funkcija v_i , $i = 1, \dots, N$, vrijedi

$$\int_{\Omega} v_j \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i L(f_i) - g \right\} d\Omega = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, N . \quad (10.1.4)$$

Pri traženju približnog rješenja primjenom MOM najprije odabiremo temeljne funkcije f_i i N , a zatim skup *težinskih funkcija* v_i , $i = 1, \dots, N$ u domeni temeljnih funkcija Ω . Tada je izraz (10.1.4) težinski integral ostatka zbog uvrštenja približenja i predstavlja sustav linearnih algebarskih jednadžbi za nepoznate koeficijente α_i . Matrični oblik tog sustava³ jest

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} v_1 L(f_1) d\Omega & \int_{\Omega} v_1 L(f_2) d\Omega & \dots & \int_{\Omega} v_1 L(f_N) d\Omega \\ \int_{\Omega} v_2 L(f_1) d\Omega & \int_{\Omega} v_2 L(f_2) d\Omega & \dots & \int_{\Omega} v_2 L(f_N) d\Omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega} v_N L(f_1) d\Omega & \int_{\Omega} v_N L(f_2) d\Omega & \dots & \int_{\Omega} v_N L(f_N) d\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} v_1 g d\Omega \\ \int_{\Omega} v_2 g d\Omega \\ \vdots \\ \int_{\Omega} v_N g d\Omega \end{bmatrix} . \quad (10.1.5)$$

Ako matrica sustava nije singularna, rješenje odnosno vrijednosti koeficijenata približenja α_i nalazimo metodama za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi koje smo opisali u članku 9.2.7.

Iz izraza (10.1.5) vidimo da je matrica sustava pri MOM *potpuno popunjena* za razliku od rijetko popunjene matrice sustava pri MKE. No dimenzije matrice sustava za rješavanje istog zadatka primjenom MOM bitno su manje od dimenzija sustava pri primjeni MKE, budući da integralni operatori u elektromagnetskim zadaćama s jednostavnim materijalima povezuju izvore polja koji se nalaze samo na granicama različitih materijala. Nasuprot tome diferencijalni operatori povezuju cijeli prostor koji polje obu-

³ Integral $\int x^n f(x) dx$ nazivamo n -ti moment funkcije f . Članove matrice sustava računamo integralima oblika $\int w_n L(f_n) dx$. Taj integral zovemo momentom od $L(f_n)$ budući da je u njemu x^n zamijenjeno s w_n . Otud slijedi i naziv metoda momenata.

hvaća.⁴ Od niza mogućnosti za izbor težinskih funkcija najčešće primjenjujemo dvije:

1. Galerkinovu metodu u kojoj je $v_i = f_i$. Osnovna poteškoća u primjeni te metode je složeno i često dugotrajno izračunavanje elemenata matrice sustava višestrukim numeričkim integracijama.
2. Usklađivanje u točkama.⁵ U toj metodi koristimo Diracove delta funkcije kao težinske funkcije,⁶ pa zbog svojstva Diracove delta funkcije

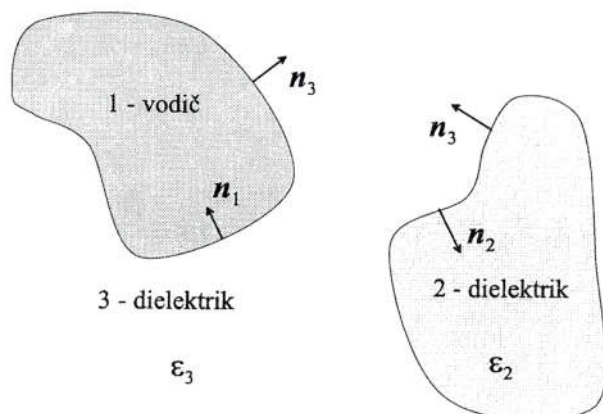
$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\Omega = f(\mathbf{r}_0) , \quad (10.1.6)$$

izbjegavamo jednu numeričku integraciju. Time postizemo točno rješenje u unaprijed odabranim točkama domene Ω pa iz toga slijedi i naziv metode. Točnost rješenja ovisi o broju i položaju tih točaka. Ako odaberemo dovoljno velik broj točaka, približno rješenje postaje zadovoljavajuće točno.

10.2. TRODIMENZIONALNA STATIČKA ELEKTRIČNA POLJA

10.2.1. Integralna formulacija zadaće

Ovdje ćemo zbog jednostavnosti najprije izvesti integralne jednadžbe koje opisuju zadaću koja se sastoji od regije vodljivog materijala na poznatom potencijalu i dviju dielektričkih regija s raznim dielektričnostima kao na slici 10.2.1.



Slika 10.2.1. Zadaća statičkog električnog polja

⁴ Ta se prednost gubi kod nelinearnih materijala, pa je primjena MOM u zadacima s takvim materijalima rijetka. Često se u tim zadacima povezuju primjena MKE za nelinearni i primjena MOM za linearni dio zadatka. Pogledati na primjer Z. Haznadar, S. Milojković, I. Kamenica, *Numerical Field Calculation of Insulator Chains for High Voltage Transmission Lines*, Third International Symposium on High Voltage Engineering, Milan, 1979.

⁵ Engleski naziv je Point Matching.

⁶ Pogledati Prilog B.

Ovdje $\mathbf{n}_i$ su jedinični vektori okomiti na graničnu površinu S_i volumena V_i usmjereni u i -tu regiju. Potencijal φ_i u i -toj regiji zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\Delta \varphi_i = 0, \quad (10.2.1)$$

a na granicama mora zadovoljavati rubne uvjete

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{r}) &= \varphi_3(\mathbf{r}) = \varphi_{10} \quad ; \quad \mathbf{r} \in S_1, \\ \varphi_3(\mathbf{r}) &= \varphi_2(\mathbf{r}) \quad ; \quad \mathbf{r} \in S_2, \\ \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{n}_2} &= -\varepsilon_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mathbf{n}_3} \quad ; \quad \mathbf{r} \in S_2, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}_1} &= 0 \quad ; \quad \mathbf{r} \in S_1. \end{aligned} \quad (10.2.2a - d)$$

Za rješenje Laplaceove jednadžbe u drugom poglavlju uveli smo Greenovu funkciju⁷

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (10.2.3)$$

koja zadovoljava uvjet

$$-\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (10.2.4)$$

Ovdje je δ Diracova delta funkcija. S $\mathbf{r}'$ označavamo točke u kojima se nalaze izvori polja. Ako jednadžbu (10.2.1) pomnožimo s G i jednadžbu (10.2.4) s φ_i i zatim ih zbrojimo dobivamo

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta \varphi_i(\mathbf{r}) - \varphi_i \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \varphi_i(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (10.2.5)$$

Integriranjem te jednadžbe po volumenu i -te regije V_i i primjenom Greenova teorema slijedi

$$\int_{S_i} \left\{ -G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}_i} + \varphi_i(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}_i} \right\} dS_i = \begin{cases} \varphi_i(\mathbf{r}) & ; \quad \mathbf{r} \in V_i, \\ 0 & ; \quad \mathbf{r} \notin V_i. \end{cases} \quad (10.2.6)$$

Ako ovaj izraz primijenimo na sve regije u zadaći i zbrojimo, a zatim u taj izraz uvrstimo rubne uvjete, dobivamo

⁷ Pogledati odjeljak 2.4.

$$\int_{S_1} -G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi_3(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}_1} dS_1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\right) \int_{S_2} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi_3(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}_3} dS_2 = \begin{cases} \varphi_1(\mathbf{r}) ; \mathbf{r} \in V_1 , \\ \varphi_2(\mathbf{r}) ; \mathbf{r} \in V_2 , \\ \varphi_3(\mathbf{r}) ; \mathbf{r} \in V_3 . \end{cases} \quad (10.2.7)$$

Član $\varepsilon_0(\partial\varphi_3)/(\partial\mathbf{n}_1)$ je ukupni plošni naboj σ_1 na granici vodič – dielektrik, a član $\varepsilon_0(1 - \varepsilon_3/\varepsilon_2)(\partial\varphi_3)/(\partial\mathbf{n}_3)$ je polarizacijski plošni naboj σ_2 na granici dva dielektrika.

Drugu integralnu jednadžbu koju zadovoljavaju veličine iz (10.2.7) dobivamo primjenom rubnog uvjeta (10.2.2c) i ona glasi

$$\begin{aligned} & -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2\varepsilon_2} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_P)}{\partial \mathbf{n}_3} - \left(1 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\right) \int_{S_2} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}_3} \frac{\partial G(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}_3} dS_2 + \\ & + \int_{S_1} \frac{\partial \varphi_3(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}_1} \frac{\partial G(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}_3} dS_1 = 0 . \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

Ovdje je

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_P \in S_2 , \\ & \frac{\partial G(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}_3} = \nabla G(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_3 . \end{aligned} \quad (10.2.9)$$

Ako jednadžbu (10.2.7) primijenimo na plohu S_1 s poznatim potencijalom, a jednadžbu (10.2.8) na plohu S_2 dobivamo integralne jednadžbe⁸

$$\begin{aligned} & \varphi_{01}(\mathbf{r}) - \sum_{i=1}^2 \int_{S_i} \sigma_i(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS_i = 0 \quad ; \quad \mathbf{r} \in S_1 , \\ & \sigma_2(\mathbf{r}) - 2 \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 + \varepsilon_2} \sum_{i=1}^2 \int_{S_i} \sigma_i(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}_3} dS_i = 0 \quad ; \quad \mathbf{r} \in S_2 . \end{aligned} \quad (10.2.10a,b)$$

Izraze (10.2.10) možemo primijeniti i na zadaće s više vodljivih i dielektričkih regija. Tada je S_1 unija svih granica vodič – dielektrik, S_2 unija svih granica dielektrik – dielektrik, a pri primjeni (10.2.10b) moramo upotrijebiti odgovarajući par dielektričnosti za svaku granicu.⁹

⁸ Takvi oblici jednadžbi su poznati kao 1. i 2. Fredholmova integralna jednadžba. Pogledati Prilog A.

⁹ Pogledati npr. u O.V. Tozoni, I.D. Majergojz, *Rasčet trehmjernih elektromagnitnih poljeja*, Tehnika, Kijev, 1974.

10.2.2. Primjena MOM

Prvi korak u primjeni MOM jest izbor temeljnih funkcija. Najčešće dijelimo domenu nepoznate funkcije izvora polja na subdomene i približenje temeljnim funkcijama definiramo po subdomenama, no možemo definirati i temeljne funkcije na cijeloj domeni. Ovdje ćemo opisati najjednostavniji postupak približenja po subdomenama. Domena nepoznatih plošnih naboja su granične površine S_1 i S_2 . Njih dijelimo na subdomene

$$\Delta S_{ij} \quad ; \quad i=1,2 \quad ; \quad j=1,\dots,N_i, \quad (10.2.11)$$

a za temeljne funkcije odabiremo konstante na subdomeni

$$f_{ij}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & ; \quad \mathbf{r} \in \Delta S_{ij} \\ 0 & ; \quad \mathbf{r} \notin \Delta S_{ij} \end{cases} \quad ; \quad i=1,2 \quad ; \quad j=1,\dots,N_i. \quad (10.2.12)$$

Sada nepoznate funkcije plošnih naboja možemo približiti konstantama po subdomenama

$$\sigma_i(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_i} \sigma_{ij} f_{ij} \quad ; \quad i=1,2 \quad ; \quad j=1,\dots,N_i. \quad (10.2.13)$$

Nepoznate koeficijente σ_{ij} određujemo usklađivanjem u točkama. Težinske funkcije su tada Diracove delta funkcije

$$v_{ij}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}_{C,ij}) \quad ; \quad i=1,2 \quad ; \quad j=1,\dots,N_i. \quad (10.2.14)$$

Ovdje je $\mathbf{r}_{C,ij}$ vektor položaja središta j -te subdomene i -te površine. Uvrštenjem izraza (10.2.13,14) u jednadžbe (10.2.10) dobivamo

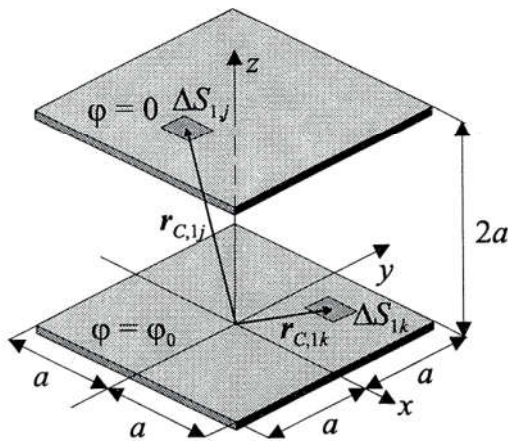
$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{N_i} \sigma_{ij} \int_{\Delta S_{ij}} G(\mathbf{r}_{C,1k}, \mathbf{r}') dS = \varphi_{01}(\mathbf{r}_{C,1k}) \quad ; \quad k=1,\dots,N_1, \quad (10.2.15a,b)$$

$$\sigma_2(\mathbf{r}_{C,2l}) - 2 \frac{\epsilon_3 - \epsilon_2}{\epsilon_3 + \epsilon_2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{N_i} \sigma_{ij} \int_{\Delta S_{ij}} \frac{\partial G(\mathbf{r}_{C,2l}, \mathbf{r}')}{\partial n_3} dS = 0 \quad ; \quad l=1,\dots,N_2,$$

a to je sustav linearnih algebarskih jednadžbi za nepoznate koeficijente σ_{ij} .

Primjer 10.2.1. Pločasti kondenzator

Geometriju zadatke smo prikazali na slici 10.2.2. Potrebno je odrediti približenje nepoznate raspodjele plošne gustoće naboja po pločama kondenzatora ako zadana razlika potencijala između ploča iznosi φ_0 .



Slika 10.2.2. Pločasti kondenzator

Granične plohe u ovoj zadaći¹⁰ jesu

$$S_{11} : (x, y, 0) \quad ; \quad -a \leq x \leq a \quad ; \quad -a \leq y \leq a \quad , \quad (10.2.16)$$

$$S_{12} : (x, y, 2a) \quad ; \quad -a \leq x \leq a \quad ; \quad -a \leq y \leq a \quad ,$$

pa za primjenu postupka MOM koji smo opisali u prethodnom članku uvodimo

$$S_1 = S_{11} + S_{12} \quad . \quad (10.2.17)$$

Granične plohe dijelimo na pravokutnike na kojima pretpostavljamo jednoliku raspodjelu plošnog naboja. Tada izraz (10.2.15a) možemo napisati u matricnom obliku

$$[P][\sigma_1] = [\varphi_0] \quad . \quad (10.2.18)$$

Ovdje su elementi P_{kj} matrice $[P]$ doprinosi potencijalu u točki $r_{C,1k}$ od pravokutnika ΔS_{1j} . Elementi vektora $[\sigma_1]$ su nepoznati koeficijenti približenja raspodjele plošne gustoće naboja u točkama $r_{C,1k}$, a elementi vektora $[\varphi_0]$ su zadani potencijali u istim točkama. Izraz za potencijal jednolike nabijene pravokutne ploče izveli smo u članku 4.7.3,¹¹ pa ćemo ga ovdje primijeniti za proračun elemenata $[P]$. Ako obje ploče dijelimo na jednak broj dijelova $2N$ u x i y smjeru onda matrica sustava ima $(4N)^2$ elemenata, a vektori $[\sigma_1]$ i $[\varphi_0]$ imaju $4N$ elemenata. Nepoznati vektor $[\sigma_1]$ određujemo rješavanjem sustava linearnih algebarskih jednačbi (2.10.18). Bitan utjecaj na točnost računa ima izbor položaja točaka $r_{C,1k}$, odnosno načina podjela ploča na pravokutnike. Jednostavno pravilo jest da podjela mora biti gušća u područjima gdje očekujemo da se raspodjela gustoće naboja brže mijenja. Budući da je plošna gustoća naboja singularna

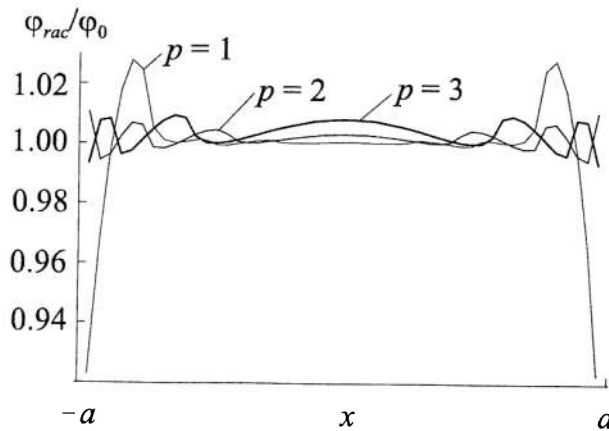
¹⁰ Za složenije proračune pogledati npr. Ž. Štih, *High Voltage Insulating System Design by Application of Electrode and Insulator Contour Optimization*, IEEE Trans. on Electrical Insulation, Vol. EI-21, No. 4, 1986.; Z. Haznadar, S. Berberović, *Electric and Magnetic Field Calculations of Vacuum Circuit Breaker*, IEEE Trans. on Magnetics, No.6., 1985.

¹¹ Pogledati primjer 4.7.3.1. Polje pravokutne ploče, izraze (4.7.56 – 60).

na bridovima ploča, propisali smo slijedeći algoritam za izbor odrednica graničnih točaka pravokutnika $\Delta S_{lmn} : (x, y, z_0) ; x d_m \leq x \leq x g_m ; y d_n \leq y \leq y g_n ; m = 1, \dots, 2N ; n = 1, \dots, 2N$

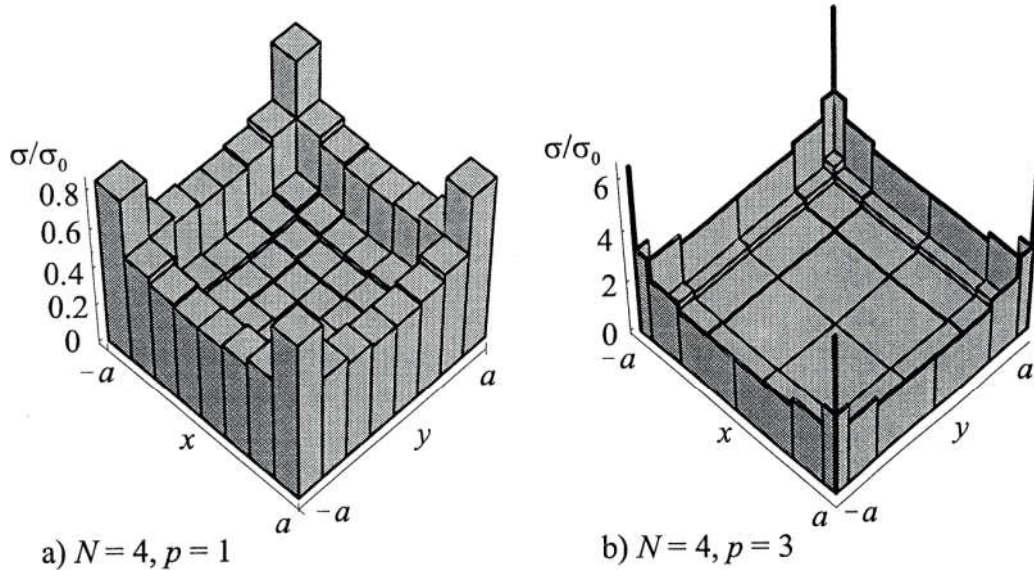
$$\begin{aligned}
 x d_m &= \begin{cases} a \left[-1 + \left(\frac{i}{N} \right)^p \right] & ; \quad i = 0, \dots, N \quad ; \quad m = i + 1 , \\ a \left[1 + \left(1 - \frac{i}{N} \right)^p \right] & ; \quad i = 1, \dots, N-1 \quad ; \quad m = N + i + 1 , \end{cases} \\
 x g_m &= \begin{cases} a \left[-1 + \left(\frac{i}{N} \right)^p \right] & ; \quad i = 1, \dots, N \quad ; \quad m = i , \\ a \left[1 + \left(1 - \frac{i}{N} \right)^p \right] & ; \quad i = 1, \dots, N \quad ; \quad m = N + i , \end{cases} \\
 y d_n &= \begin{cases} a \left[-1 + \left(\frac{i}{N} \right)^p \right] & ; \quad i = 0, \dots, N \quad ; \quad n = i + 1 , \\ a \left[1 + \left(1 - \frac{i}{N} \right)^p \right] & ; \quad i = 1, \dots, N-1 \quad ; \quad n = N + i + 1 , \end{cases} \\
 y g_n &= \begin{cases} a \left[-1 + \left(\frac{i}{N} \right)^p \right] & ; \quad i = 1, \dots, N \quad ; \quad n = i , \\ a \left[1 + \left(1 - \frac{i}{N} \right)^p \right] & ; \quad i = 1, \dots, N \quad ; \quad n = N + i . \end{cases}
 \end{aligned} \tag{10.2.19}$$

Parametrom p mijenjamo veličinu podjela, za $p = 1$ svi pravokutnici su jednaki, a rastom p smanjuju se pravokutnici uz bridove ploča, a povećavaju se pravokutnici u unutrašnjosti ploča. Utjecaj parametra p na točnost računa prikazali smo slikom 10.2.3.



Slika 10.2.3. Omjer izračunatog φ_{rac} i zadanog potencijala φ_0 na ploči u ravнини $z = 0$ duž osi x

Na toj slici vidimo da dobrom podjelom možemo bitno povećati točnost proračuna ne povećavajući dimenzije sustava i dužinu proračuna. Na slici 10.2.4. prikazali smo normalizirana približenja plošne gustoće naboja na ploči u ravni $z = 0$ za $p = 1$ i $p = 3$.



Slika 10.2.4. Približenje raspodjele normalizirane plošne gustoće naboja pločastog kondenzatora za $N = 4$, $\sigma_0 = \epsilon_0 \varphi_0 / (2a)$; a) jednolika podjela ($p = 1$), b) nejednolika podjela ($p = 3$)

10.3. RASPRŠENJE ELEKTROMAGNETSKIH VALOVA

U ovom i sljedećem odjeljku razradit ćemo primjenu MOM u rješavanju zadaća iz područja elektromagnetskih valova u fazorskoj domeni. Neka su $\underline{E}$ i $\underline{H}$ vektori elektromagnetskog polja koje uzrokuje sinusna električna struja gustoće $\underline{J}$ u jednostavnom materijalu značajki (μ, ϵ) . Oni zadovoljavaju Maxwellove jednadžbe u fazorskoj domeni

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega \mu \underline{H}, \quad (10.3.1a,b)$$

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega \epsilon \underline{E} + \underline{J}.$$

Ista struja u jednostavnom materijalu drugih značajki, na primjer vakuumu, uzrokuje drugačije polje $\underline{E}_0$, $\underline{H}_0$ koje također zadovoljava Maxwellove jednadžbe

$$\nabla \times \underline{E}_0 = -j\omega \mu_0 \underline{H}_0, \quad (10.3.2a,b)$$

$$\nabla \times \underline{H}_0 = j\omega \epsilon_0 \underline{E}_0 + \underline{J}.$$

Razliku između ta dva polja nazivamo "raspršeno polje" $\underline{E}^s$, $\underline{H}^s$

$$\underline{E}^s = \underline{E} - \underline{E}_0, \quad (10.3.3a,b)$$

$$\underline{H}^s = \underline{H} - \underline{H}_0.$$

Oduzimanjem jednadžbi (10.3.1,2) dobivamo jednadžbe koje mora zadovoljavati raspršeno polje

$$\nabla \times \underline{E}^s = -j\omega(\mu - \mu_0)\underline{H} - j\omega\mu_0\underline{H}^s, \quad (10.3.4a,b)$$

$$\nabla \times \underline{H}^s = j\omega(\epsilon - \epsilon_0)\underline{E} + j\omega\epsilon_0\underline{E}^s.$$

Ako uvedemo ekvivalentne struje¹²

$$\underline{K}_m = j\omega(\mu - \mu_0)\underline{H}, \quad (10.3.5a,b)$$

$$\underline{J}_e = j\omega(\epsilon - \epsilon_0)\underline{E},$$

iz jednadžbi (10.3.4a,b) vidimo da se elektromagnetsko polje raspršeno na materijalu značajki koje su različite od μ_0 i ϵ_0 može odrediti pomoću ekvivalentnih struja koje teku u prostoru. Te struje teku samo u dijelu prostora u kojem su značajke različite od μ_0 i ϵ_0 , budući da su množitelji $(\mu - \mu_0)$ i $(\epsilon - \epsilon_0)$ samo tamo različiti od nule. Određivanje polja zadanih struja je jednostavno, no određivanje ekvivalentnih struja u (10.3.5) složen je postupak jer su $\underline{E}$ i $\underline{H}$ nepoznati. No takav pristup nam omogućava izvođenje integralnih formulacija za $\underline{E}$ i $\underline{H}$ koje ćemo rješavati primjenom MOM. Kompleksnu dielektričnost u (10.3.5) možemo pisati kao¹³

$$\epsilon = \epsilon' - j\frac{\kappa}{\omega}, \quad (10.3.6)$$

pa jednadžba (10.3.5b) postaje

$$\underline{J}_e = [\kappa + j\omega(\epsilon' - \epsilon_0)]\underline{E}. \quad (10.3.7)$$

Prvi član desne strane ove jednadžbe jest gustoća provodnih struja. U dobrim vodičima taj je član mnogo veći od ostalih, pa izraz za $\underline{J}_e$ možemo svesti na

$$\underline{J}_e = \kappa \underline{E}. \quad (10.3.8)$$

Osim toga, u većini dobrih vodiča vrijedi $\mu = \mu_0$ pa $\underline{K}_m$ nestaje. Stoga je za tijela od dobrih vodiča ekvivalentna struja jednaka provodnoj struji. Ona je općenito raspoređena u volumenu tijela. U ovom odjeljku ćemo razmatrati samo idealne vodiče beskonačne vodljivosti. Oni su u najvećem broju slučajeva dovoljno dobro približenje realnih vodiča. Tada se ekvivalentna volumna struja svodi na plošnu struju.

Da bismo izbjegli u početku nepotrebno zamršivanje postupaka ograničit ćemo se na dvodimenzionalne probleme. U njima pretpostavljamo da su sve veličine polja neovisne o odrednici z pravocrtnog koordinatnog sustava, odnosno da za vektore polja

¹² Pogledati točku 8.3.2.2.

¹³ Pogledati točku 8.3.2.1. Ovdje smo upotrijebili za $\epsilon'' = \kappa/\omega$.

vrijedi $\underline{E} = \underline{E}_x(x,y)\underline{a}_x + \underline{E}_y(x,y)\underline{a}_y + \underline{E}_z(x,y)\underline{a}_z$, $\underline{H} = \underline{H}_x(x,y)\underline{a}_x + \underline{H}_y(x,y)\underline{a}_y + \underline{H}_z(x,y)\underline{a}_z$ i $\underline{J} = \underline{J}_x(x,y)\underline{a}_x + \underline{J}_y(x,y)\underline{a}_y + \underline{J}_z(x,y)\underline{a}_z$. Jednadžbe (10.3.1a,b) tada poprimaju oblik

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \underline{a}_x - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \underline{a}_y + \left(\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \right) \underline{a}_z &= -j\omega\mu(\underline{H}_x \underline{a}_x + \underline{H}_y \underline{a}_y + \underline{H}_z \underline{a}_z), \\ \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \underline{a}_x - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \underline{a}_y + \left(\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \right) \underline{a}_z &= (j\omega\varepsilon \underline{E}_x + \underline{J}_x) \underline{a}_x + (j\omega\varepsilon \underline{E}_y + \underline{J}_y) \underline{a}_y + \\ &+ (j\omega\varepsilon \underline{E}_z + \underline{J}_z) \underline{a}_z. \end{aligned} \quad (10.3.9a,b)$$

Iz tih jednadžbi vidimo da su međusobno povezane veličine $\underline{J}_z$, $\underline{E}_z$, $\underline{H}_x$ i $\underline{H}_y$ koje čine transverzalni magnetski dio u odnosu na os z (u daljnjem tekstu TM) elektromagnetskog polja, te $\underline{H}_z$, $\underline{J}_x$, $\underline{J}_y$, $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$ koji čine transverzalni električni (u daljnjem tekstu TE) dio elektromagnetskog polja. Svako dvodimenzionalno elektromagnetsko polje možemo prikazati kao zbroj TM i TE dijela. Budući da TM i TE dio nisu međusobno ovisni, možemo svakoga razmatrati zasebno i time vektorsku zadaću reducirati na skalarnu.

10.3.1. Integralni oblik jednadžbi

U zadaće raspršenja svrstavamo one u kojima se tijelo nalazi u poznatom vanjskom elektromagnetskom polju. Izvori tog polja su udaljeni i nisu dio zadaće raspršenja.

10.3.1.1. TM polje

Za dvodimenzionalno TM polje vrijedi $\underline{E} = \underline{E}_z(x,y)\underline{a}_z$, $\underline{H} = \underline{H}_x(x,y)\underline{a}_x + \underline{H}_y(x,y)\underline{a}_y$ i $\underline{J} = \underline{J}_z(x,y)\underline{a}_z$ pa sustav (10.3.9a,b) svodimo na

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \underline{a}_x - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \underline{a}_y &= -j\omega\mu(\underline{H}_x \underline{a}_x + \underline{H}_y \underline{a}_y), \\ \left(\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} + \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \right) \underline{a}_z &= (j\omega\varepsilon \underline{E}_z + \underline{J}_z) \underline{a}_z. \end{aligned} \quad (10.3.10a,b)$$

Iz ovih jednadžbi slijedi *skalarna* jednadžba za $\underline{E}_z$

$$\Delta \underline{E}_z + k^2 \underline{E}_z = j\omega\mu \underline{J}_z, \quad (10.3.11)$$

gdje je $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu = 2\pi/\lambda$ valni broj. Ova jednadžba ima oblik dvodimenzionalne Helmholtzove jednadžbe. U članku 2.4.2. pokazali smo da za njezino integralno rješenje moramo najprije odrediti Greenovu funkciju koja ovdje predstavlja polje jedinične linijske strujnice. Zbog osne simetrije tu zadaću rješavamo u cilindričnom koordinatnom

sustavu. Nakon separacije varijabli¹⁴ jednažba (10.3.2) u prostoru oko strujnice prelazi u Besselovu diferencijalnu jednažbu nultoga reda

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathbf{E}_z}{dr} \right) + k^2 \mathbf{E}_z = 0 . \quad (10.3.12)$$

Rješenja te jednažbe su Besselove funkcije prve i druge vrste, nultog reda te Hankelove funkcije prve i druge vrste nultog reda.¹⁵ Rješenje koje zadovoljava uvjet da raspršeno polje nestaje za velike udaljenosti od izvora jesu Hankelove funkcije nultog reda druge vrste

$$H_0^{(2)}(kr) = J_0(kr) - jN_0(kr) , \quad (10.3.13)$$

koje predstavljaju izlazni val. Pretpostavljamo rješenje oblika

$$\mathbf{E}_z = -j\mathbf{I}\omega\mu C H_0^{(2)}(kr) . \quad (10.3.14)$$

Konstantu C određujemo iz uvjeta

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint \mathbf{H} r d\alpha = \mathbf{I} , \quad (10.3.15)$$

budući da kroz strujnicu protječe struja $\mathbf{I}$, a $\mathbf{H}$ je zbog osne simetrije zadaće neovisan o obilaznom kutu α . Fazor jakosti magnetskog polja $\mathbf{H}$ određujemo iz jednažbe (10.3.1a) u cilindričnom koordinatnom sustavu

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{-j\omega\mu} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial r} = -\frac{j\mathbf{I}\omega\mu C}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(2)}(kr) . \quad (10.3.16)$$

Za male argumente Hankelovu funkciju nultog reda druge vrste približavamo s

$$H_0^{(2)}(kr) = 1 - j\frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{kr}{2} + \gamma \right) , \quad (10.3.17)$$

gdje je $\gamma = 0.5772\dots$ Eulerova konstanta. Stoga vrijedi

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[-\mathbf{I} C \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(2)}(kr) \right] = j \frac{2\mathbf{I}C}{\pi r} , \quad (10.3.18)$$

pa iz (10.3.15) dobivamo $C = 1/4j$. Ako se izvor polja nalazi u točki $\mathbf{r}'$, onda moramo izvršiti translaciju koordinatnog sustava za taj vektor, pa je Greenova funkcija za zadaće

¹⁴ Pogledati Prilog A.

¹⁵ Pogledati Prilog E.

koje zadovoljavaju dvodimenzionalnu Helmholtzovu jednadžbu

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) . \quad (10.3.19)$$

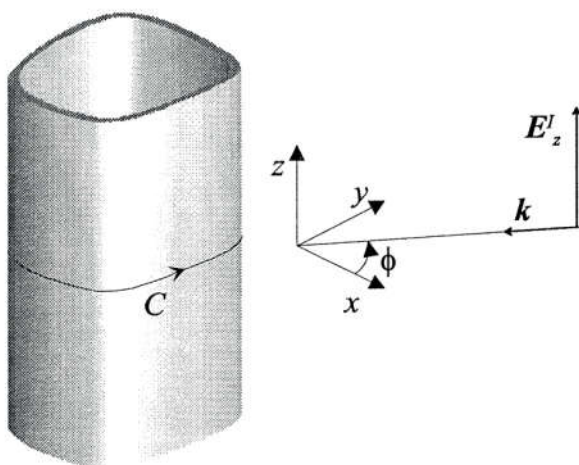
Konačni izraz za jakost električnog polja u točki $\mathbf{r}$ jedinične linijske strujnice koja se nalazi u točki $\mathbf{r}'$ jest

$$\underline{E}_z(\mathbf{r}) = -\frac{kZ'}{4} H_0^{(2)}(k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (10.3.20)$$

gdje je $Z' = (\mu/\epsilon)^{1/2}$. Opće rješenje za zadanu raspodjelu struja jest

$$\underline{E}_z(\mathbf{r}) = -\frac{kZ'}{4} \int_S \underline{J}_z(\mathbf{r}') H_0^{(2)}(k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dS . \quad (10.3.21)$$

Razmotrimo sada idealno vodljivo tijelo u narinutom vanjskom TM polju u odnosu na os z kao što smo prikazali na slici 10.3.1.



Slika 10.3.1. Idealno vodljivo tijelo u vanjskom TM polju

Narinuto polje inducira plošne struje $\underline{J}_z$ na površini vodljivog tijela, a one uzrokuju raspršeno polje $\underline{E}_z^s$. To polje određujemo pomoću jednadžbe (10.3.21) koju primijenjujemo samo na površinu tijela. Na idealnom vodiču je tangencijalna komponenta jakosti električnog polja jednaka nuli, pa na krivulji C vrijedi

$$\underline{E}_z = \underline{E}_z^I + \underline{E}_z^s = 0 . \quad (10.3.22)$$

Iz izraza (10.3.21 i 22) slijedi integralna jednadžba

$$\underline{E}_z^I(\mathbf{r}) = -\frac{kZ'}{4} \int_C \underline{J}_z(\mathbf{r}') H_0^{(2)}(k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dl \quad ; \quad \mathbf{r}' \in C , \quad (10.3.23)$$

u kojoj je narinuto polje $\underline{E}^I$ poznato, a gustoća plošnih struja $\underline{J}_z$ je nepoznata i moramo je odrediti.

10.3.1.2. TE polje

U zadacima s dielektricima i idealnim vodičima ($\kappa \rightarrow \infty$) struje mogu teći samo po površinama idealnih vodiča S , pa integralno rješenje za vektorski magnetski potencijal jest¹⁶

$$\underline{A}(\mathbf{r}) = \mu \int_S \underline{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' , \quad (10.3.24)$$

gdje je G Greenova funkcija zadaće. Jakost magnetskog polja računamo pomoću

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A} = \nabla \times \int_S \underline{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' . \quad (10.3.25)$$

Korištenjem identiteta¹⁷ $\nabla \times (\underline{J}G) = \nabla G \times \underline{J} + G(\nabla \times \underline{J}) = -\underline{J} \times \nabla G$ dobivamo

$$\underline{H}(\mathbf{r}) = - \int_S \underline{J}(\mathbf{r}') \times \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' . \quad (10.3.26)$$

Ovdje obrađujemo zadaće raspršenja u kojima ukupno magnetsko polje računamo pomoću

$$\underline{H} = \underline{H}^I + \underline{H}^S . \quad (10.3.27)$$

$\underline{H}^I$ je zadano narinuto magnetsko polje, a $\underline{H}^S$ je raspršeno polje uzrokovano strujama koje teku po vodičima. Stoga ga računamo pomoću izraza (10.3.26). Na granici vodič – dielektrik vrijedi uvjet za tangencijalnu komponentu jakosti magnetskog polja¹⁸

$$\underline{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \underline{H} = \mathbf{n} \times \underline{H}^I(\mathbf{r}) + \mathbf{n} \times \underline{H}^S(\mathbf{r}) ; \quad \mathbf{r} \in S . \quad (10.3.28)$$

Na graničnoj plohi S se jakost magnetskog polja $\underline{H}$ skokovito mijenja. Ispred nje je $\underline{H}$ konačan, unutar nje je jednak nula, a na granici C je jednak plošnoj gustoći struje. Stoga moramo $\underline{H}^S$ izračunati kao graničnu vrijednost kad se plohi S približavamo izvana

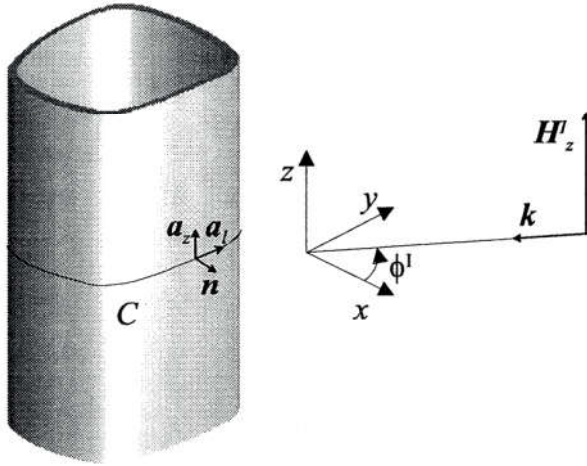
$$\underline{J}(\mathbf{r}) + \lim_{\mathbf{r} \rightarrow S} \left[\mathbf{n} \times \int_S \underline{J}(\mathbf{r}') \times \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right] = \mathbf{n} \times \underline{H}^I(\mathbf{r}) ; \quad \mathbf{r} \in S . \quad (10.3.29)$$

U dvodimenzionalnom sinusno promjenjivom TE polju prikazanom na slici 10.3.2. je $\underline{H} = [\underline{H}_z^I(x,y) + \underline{H}_z^S(x,y)]\mathbf{a}_z$, $\underline{E} = \underline{E}_x(x,y)\mathbf{a}_x + \underline{E}_y(x,y)\mathbf{a}_y$ i $\underline{J} = \underline{J}_x(x,y)\mathbf{a}_x + \underline{J}_y(x,y)\mathbf{a}_y = \underline{J}\mathbf{a}_\parallel$.

¹⁶ Pogledati članke 2.4.5. i 2.5.1.

¹⁷ Pogledati Prilog C. Član $G(\nabla \times \underline{J})$ jednak je nuli budući da je $\underline{J}$ funkcija samo od $\mathbf{r}'$.

¹⁸ Pogledati tablicu 1.5.1.



Slika 10.3.2. Idealno vodljivo tijelo u vanjskom TE polju

Ako te veličine uvrstimo u jednadžbu (10.3.29) i zatim taj izraz skalarno pomnožimo s jediničnim vektorom $\mathbf{a}_l$ dobivamo *skalarnu integralnu jednadžbu*

$$\underline{J}(\mathbf{r}) + \lim_{\mathbf{r} \rightarrow C} \left[\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{n} \times \int_C \underline{J}(\mathbf{r}') \mathbf{a}_l' \times \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{l}' \right] = -\underline{H}_z^I(\mathbf{r}) \quad ; \quad \mathbf{r} \in C, \quad (10.3.30)$$

budući da je $\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{a}_z \underline{H}_z^I = \mathbf{a}_l \cdot (-\mathbf{a}_l) \underline{H}_z^I = -\underline{H}_z^I$. Dvodimenzionalnu Greenovu funkciju izveli smo u prethodnoj točki,¹⁹ pa korištenjem izraza

$$\frac{dH_0^{(2)}(x)}{dx} = -H_1^{(2)}(x), \quad (10.3.31a)$$

i identiteta

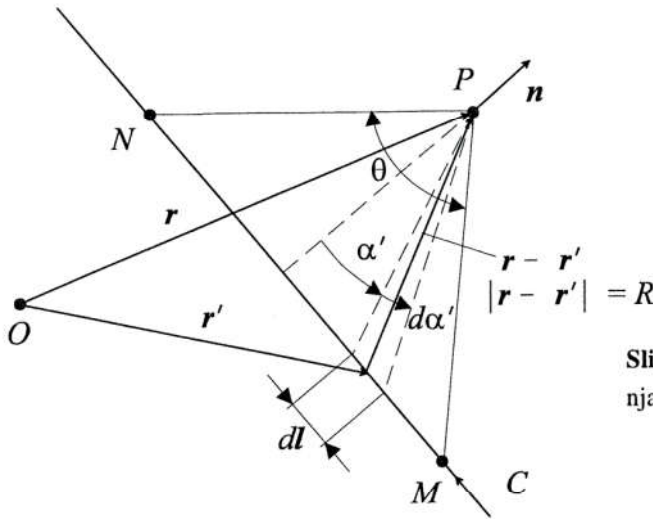
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_l \cdot \mathbf{n} \times \left(\mathbf{a}_l' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= \mathbf{a}_l \cdot \mathbf{n} \times \left[(\mathbf{a}_z \times \mathbf{n}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \\ &= \mathbf{n}' \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \cos \alpha', \end{aligned} \quad (10.3.31b)$$

jednadžba (10.3.30) prelazi u

$$\underline{J}(\mathbf{r}) - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow C} \frac{k}{4j} \int_C \underline{J}(\mathbf{r}') \cos \alpha' H_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{l}' = -\underline{H}_z^I(\mathbf{r}) \quad ; \quad \mathbf{r} \in C. \quad (10.3.32)$$

Graničnu vrijednost kada $\mathbf{r} \rightarrow C$ određujemo tako da iz krivulje C izdvajamo mali dio u okolini točke $P(\mathbf{r})$ ograničen točkama M i N prema slici 10.3.3.

¹⁹ Pogledati izvod izraza (10.3.19) u točki 10.3.2.1.



Slika 10.3.3. Uz izvod integralne jednadžbe raspršenja u TE polju

Jednadžba (10.3.32) tada poprima oblik

$$\begin{aligned} \underline{J}(\underline{r}) - \frac{k}{4j} \int_{C-MN} \underline{J}(\underline{r}') \cos \alpha' H_1^{(2)}(k|\underline{r}-\underline{r}'|) d\ell' - \\ - \lim_{r \rightarrow \overline{MN}} \frac{k}{4j} \int_{\overline{MN}} \underline{J}(\underline{r}') \cos \alpha' H_1^{(2)}(k|\underline{r}-\underline{r}'|) d\ell' = -\underline{H}_z^I(\underline{r}) \quad ; \quad \underline{r} \in C . \end{aligned} \quad (10.3.33)$$

Na malom luku krivulje između točaka M i N možemo gustoću struje $\underline{J}(\underline{r}')$ smatrati konstantnom, a za proračun granične vrijednosti integrala po tom luku umjesto funkcije $H_1^{(2)}$ uvrstavamo njezino približenje za male argumente

$$H_1^{(2)}(k|\underline{r}-\underline{r}'|) \approx \frac{k|\underline{r}-\underline{r}'|}{2} + j \frac{2}{k\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \approx j \frac{2}{k\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} . \quad (10.3.34)$$

Granična vrijednost integrala po luku između točaka M i N time prelazi u

$$\frac{\underline{J}(\underline{r})}{2\pi} \int_M^N \frac{\cos \alpha'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d\ell' = \frac{\underline{J}(\underline{r})}{2\pi} \int_M^N d\alpha' = \underline{J}(\underline{r}) \frac{\theta}{2\pi} . \quad (10.3.35)$$

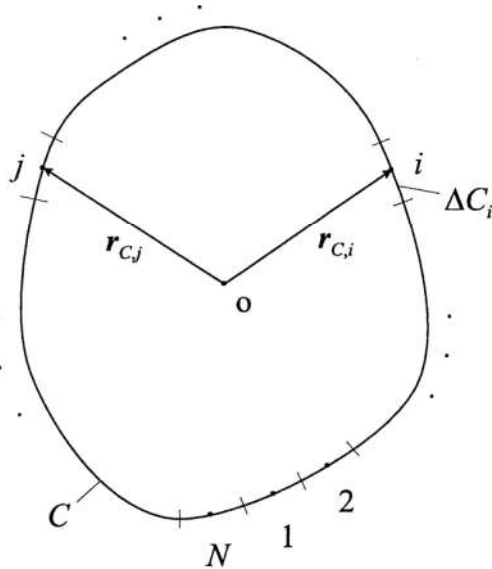
Kako se P približava luku θ se približava π . Ako pustimo da dužina MN teži k nuli jednadžba (10.3.32) prelazi u

$$\frac{\underline{J}(\underline{r})}{2} - \frac{k}{4j} \int_C \underline{J}(\underline{r}') \cos \alpha' H_1^{(2)}(k|\underline{r}-\underline{r}'|) d\ell' = -\underline{H}_z^I(\underline{r}) \quad ; \quad \underline{r} \in C , \quad (10.3.36)$$

a to jest integralna jednadžba zadatice raspršenja u TE polju.

10.3.2. Rješenje zadaće raspršenja primjenom MOM

I ovdje ćemo koristiti približenje nepoznate funkcije raspodjele struje po subdomena. Budući da razmatramo dvodimenzionalne zadaće, domena nepoznate funkcije je granična kontura C . Nju dijelimo na N odsječaka ΔC_i , $i = 1, \dots, N$ prema slici 10.3.4.



Slika 10.3.4. Podjela konture C na odsječke

Za temeljne funkcije odabiremo konstante po odsječku

$$f_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & ; \quad \mathbf{r} \in \Delta C_i \\ 0 & ; \quad \mathbf{r} \notin \Delta C_i \end{cases} ; \quad i = 1, \dots, N , \quad (10.3.37)$$

pa nepoznatu struju približavamo konstantama po dijelovima

$$\underline{J}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \underline{J}_i f_i \quad ; \quad i = 1, \dots, N . \quad (10.3.38)$$

Ovdje su $\underline{J}_i$ nepoznati *kompleksni koeficijenti* i određujemo ih postupkom usklađivanja u točkama. Težinske funkcije jesu Diracove delta funkcije

$$v_i = \delta(\mathbf{r}_{C,i}) \quad ; \quad i = 1, \dots, N , \quad (10.3.39)$$

a $\mathbf{r}_{C,i}$ je vektor položaja središta i -tog odsječka. Primjenom metode težinskih ostataka dobivamo iz integralnih jednačbi sustav linearnih algebarskih jednačbi za nepoznate koeficijente $\underline{J}_i$.

10.3.2.1. Raspršenje u TM polju

Postupak koji smo prethodno opisali primjenjujemo na jednadžbu (10.3.23). Približenje (10.3.39) uvrštavamo u (10.3.23) i postavljamo uvjet da tako dobivena jednadžba vrijedi u N točaka koje se nalaze u središtu odsječaka

$$\underline{E}'_z(\mathbf{r}_{C,m}) = \sum_{i=1}^N \underline{J}_{z,i} \frac{kZ'}{4} \int_{\Delta C_i} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_i|) dl \quad ; \quad m = 1, \dots, N. \quad (10.3.40)$$

Time smo dobili sustav od N linearnih algebarskih jednadžbi s N nepoznanica koji pišemo u matričnom obliku

$$[Z]\underline{J} = \underline{E}' \quad (10.3.41)$$

Ovdje je $\underline{J}$ vektor nepoznatih koeficijenata struje, $\underline{E}'$ je vektor čiji su kompleksni elementi vrijednosti narinutog polja u središtima odsječaka

$$\underline{E}'_i = \underline{E}'_{z,i}(x_i, y_i) \quad ; \quad i = 1, \dots, N, \quad (10.3.42)$$

a $[Z]$ je matrica čiji su kompleksni elementi

$$Z_{ij} = \frac{kZ'}{4} \int_{\Delta C_j} H_0^{(2)}[k\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2}] dl' \quad (10.3.43)$$

Njih ne možemo izračunati jednostavnim analitičkim izrazima, već moramo koristiti numeričku integraciju. Obično je N dovoljno velik da odsječke ΔC možemo smatrati pravcima, pa koristimo parametrizaciju po odsječku oblika

$$\left. \begin{aligned} x'_j(t) &= x_{jp} + (x_{jk} - x_{jp})t \\ y'_j(t) &= y_{jp} + (y_{jk} - y_{jp})t \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (10.3.44)$$

Ovdje je (x_{jp}, y_{jp}) početna a (x_{jk}, y_{jk}) krajnja točka j -tog odsječaka. Uvrštenjem parametrizacije (10.3.44) u (10.3.43) račun Z_{ij} prelazi u

$$Z_{ij} = \frac{kZ'}{4} \Delta l_j \int_0^1 H_0^{(2)}[k\sqrt{(x_i - x'_j(t))^2 + (y_i - y'_j(t))^2}] dt', \quad (10.3.45)$$

gdje je Δl_j dužina j -tog odsječaka. Za proračun tih integrala koristimo jednodimenzionalnu numeričku integraciju.²⁰ Posebnu pažnju moramo usmjeriti računu dijagonalnih

²⁰ Detaljnije o numeričkoj integraciji pogledati u P.J. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press Inc, Orlando 1984. Ovdje smo koristili Gaussovu integraciju.

elemenata Z_{ii} . Tada je točka (x_i, y_i) na odsječku l_i pa u njoj Hankelova funkcija $H_0^{(2)}$ postaje singularna, a integral postaje nepravi. Točku (x_i, y_i) zadajemo parametrom t_0

$$\begin{aligned} x_i(t_0) &= x_{ip} + (x_{ik} - x_{ip})t_0, \\ y_i(t_0) &= y_{ip} + (y_{ik} - y_{ip})t_0. \end{aligned} \quad (10.3.46)$$

Okoliš te točke unutar kojeg vrijedi približenje (10.3.17) Hankelove funkcije $H_0^{(2)}$ malih argumenata izdvajamo, pa dijagonalni element Z_{ii} računamo kao

$$Z_{ii} = \frac{kZ'}{4} \Delta l_i \left\{ \int_0^{t_0-\zeta} H_0^{(2)}[k(t_0-t) \Delta l_i] dt + S_{ii} + \int_{t_0+\zeta}^1 H_0^{(2)}[k(t-t_0) \Delta l_i] dt \right\}. \quad (10.3.47)$$

Integrali u tom izrazu nisu nepravi pa ih možemo izračunati numerički, a izdvojeni dio S_{ii} jest

$$\begin{aligned} S_{ii} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{t_0-\zeta}^{t_0-\epsilon} \left(1 - j \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{k(t_0-t) \Delta l_i}{2} + \gamma \right) \right) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0+\epsilon}^{t_0+\zeta} \left(1 - j \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{k(t-t_0) \Delta l_i}{2} + \gamma \right) \right) dt \right], \end{aligned} \quad (10.3.48)$$

i možemo ga izračunati analitički. Konačni izraz za proračun dijagonalnih elemenata Z_{ii} jest

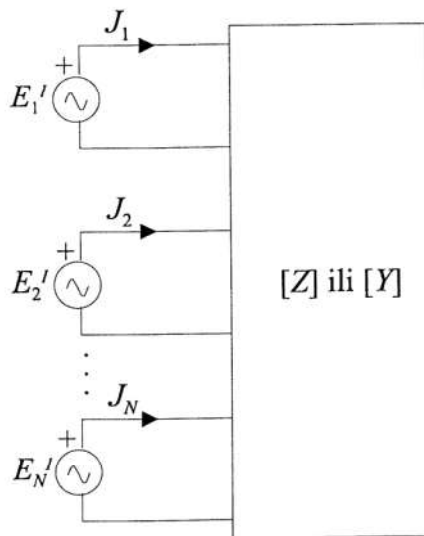
$$\begin{aligned} Z_{ii} &= \frac{kZ'}{4} \Delta l_i \left\{ \int_0^{t_0-\zeta} H_0^{(2)}[k(t_0-t) \Delta l_i] dt + \int_{t_0+\zeta}^1 H_0^{(2)}[k(t-t_0) \Delta l_i] dt + \right. \\ &\quad \left. + 2\zeta \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{k\zeta \Delta l_i}{2} + 1 + \gamma \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.3.49)$$

Koeficijente struje dobivamo rješenjem sustava linearnih algebarskih jednadžbi (10.3.41)

$$\underline{J} = [\underline{Z}]^{-1} \underline{E} = [\underline{Y}] \underline{E}. \quad (10.3.50)$$

Budući da su jedinice za $\underline{J}$ A/m, a za $\underline{E}$ V/m slijedi da je Ω jedinica članova matrice $[\underline{Z}]$. Stoga je često zovemo poopćena matrica impedancija, a $[\underline{Y}]$ zovemo poopćena matrica admitancija. Ako zamislimo da svaki odsječak ΔC_i predstavlja i -ta vrata multipola na koja priključujemo napon $\underline{E}^i(x_i, y_i)$, onda jednadžbu (10.3.50) možemo tumačiti kao prikaz poopćenom matricom admitancije multipola s N vrata, a (10.3.41) kao prikaz poopćenom matricom admitancija istog multipola u teoriji električnih mreža. Stoga vod-

Ijivo tijelo u narinutom polju možemo prikazati multipolom prema slici 10.3.5.



Slika 10.3.5. Prikaz vodljivog tijela u narinutom polju multipolom s N vrata

Jakost električnog polja u prostoru oko vodljivog tijela nakon određivanja koeficijenata struja računamo pomoću

$$\underline{E}_z(x, y) = \underline{E}' - \frac{kZ'}{4} \sum_{j=1}^N I_j \Delta l_j \int_0^1 H_0^{(2)}[k\sqrt{(x-x'_j(t))^2 + (y-y'_j(t))^2}] dt' . \quad (10.3.51)$$

Za proračun dalekog polja u izraz (10.3.51) uvrštavamo približenje $H_0^{(2)}$ za velike argumente

$$H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \underset{r \gg r'}{\approx} \sqrt{\frac{2j}{\pi k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}} e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} , \quad (10.3.52)$$

i koristimo izraze²¹

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \underset{r \gg r'}{\approx} \frac{1}{r} ; \quad e^{j|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \underset{r \gg r'}{\approx} e^{j\left(r - \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}'\right)} , \quad (10.3.53)$$

pa time izbjegavamo numeričku integraciju.

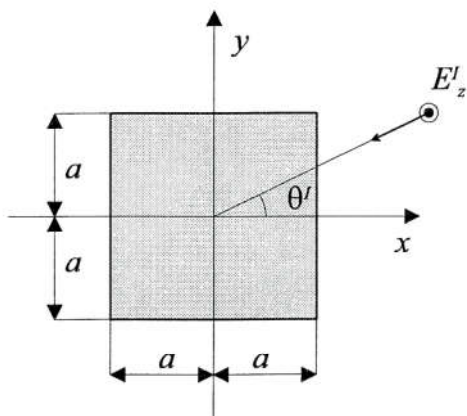
Primjer 10.3.2.1. Raspršenje ravnog TM vala na vodiču kvadratnog presjeka

Vodič kvadratnog presjeka nalazi se u polju ravnog TM vala u odnosu na os z koji nailazi pod kutem θ'

²¹ Pogledati članak 8.8.2.

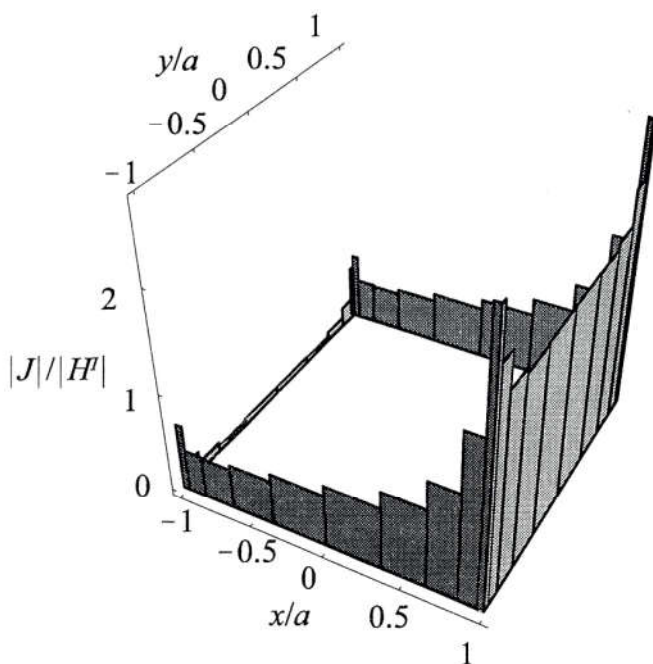
$$\underline{E}_z^I = E_0^I e^{jk(x \cos \theta' + y \sin \theta')}, \quad (10.3.54)$$

prema slici 10.3.6.



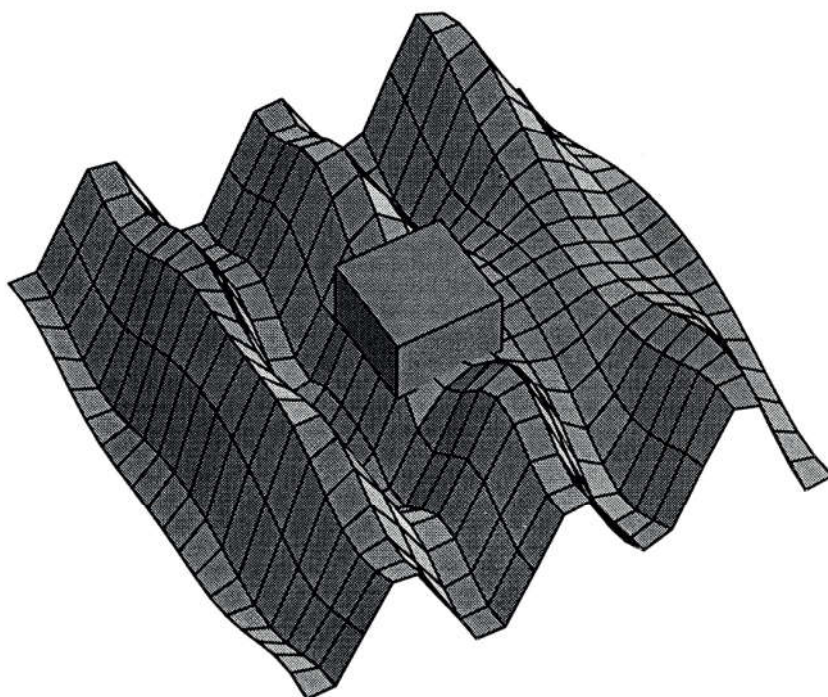
Slika 10.3.6. Vodič kvadratnog presjeka u vanjskom TM polju

Budući da u vrhovima kvadrata struja ima singularitete, ovdje smo također primijenili nejednoliku podjelu na odsječke algoritmom koji smo opisali izrazima (10.2.19). Priблиženje struje po plaštu vodiča u zraku za $N = 40$ odsječaka uz $p = 2$, $\theta' = 0$ i $ka = 2$ prikazali smo slikom 10.3.7.



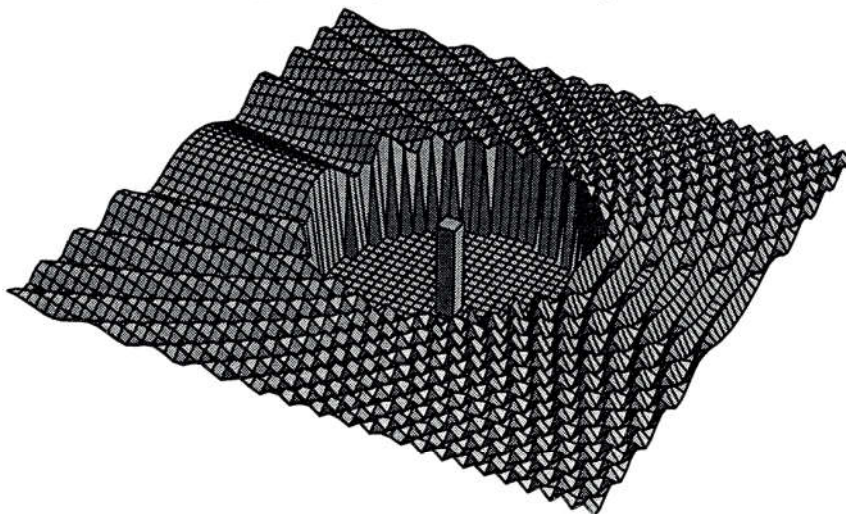
Slika 10.3.7. Normalizirana apsolutna vrijednost fazora koeficijenata struje po plaštu vodiča, $|\underline{H}^I| = |\underline{E}_z^I|/Z'$

Jakost električnog polja u blizini vodiča izračunali smo primjenom izraza (10.3.51) i prikazali slikom 10.3.8.



Slika 10.3.8. Raspodjela jakosti električnog polja u okolini vodiča (blizo polje), prikaz u vremenskoj domeni za trenutak $t = 0$

Jakost električnog polja na velikim udaljenostima od vodiča izračunali smo primjenom izraza (10.3.51) i približenja (10.3.52,53) i prikazali slikom 10.3.9.



Slika 10.3.9. Raspodjela apsolutne vrijednosti fazora jakosti električnog polja na velikim udaljenostima od vodiča (daleko polje)

10.3.2.2. Raspršenje u TE polju

Integralnu jednadžbu (10.3.36) prevodimo u sustav linearnih algebarskih jednadžbi postupkom usklađivanja u točkama. Sustav jednadžbi jest

$$\frac{\underline{J}(\underline{r}_{C,m})}{2} - \sum_{i=1}^N \underline{J}_i \frac{k}{4j} \int_{\Delta C_i} \cos \alpha' H_1^{(2)}(k|\underline{r}_{C,m} - \underline{r}'|) d\underline{l}' = -\underline{H}_z^I(\underline{r}_{C,m}) ; m = 1, \dots, N \quad (10.3.55)$$

Ovdje su $\underline{r}_{C,m}$, $m = 1, \dots, N$ vektori položaja središta m -tog odsječka, a $\underline{J}_i$ kompleksni

koeficijenti približenja nepoznate funkcije struje. Matrični oblik sustava jest

$$[\Gamma]\underline{J} = \underline{H} . \quad (10.3.56)$$

Elemente kompleksne matrice $[\Gamma]$ računamo pomoću

$$\Gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{2} - \frac{k}{4j} \int_{\Delta C_j} H_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{n}' \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' , \quad (10.3.57)$$

gdje je δ_{ij} Kroneckerova delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 ; & i=j , \\ 0 ; & i \neq j . \end{cases} \quad (10.3.58)$$

Ako su odsječci ΔC_i dužine, onda krivuljni integral (10.3.57) računamo uvođenjem parametrizacije (10.3.44). Jedinični okomiti vektor $\mathbf{n}$ jednak je vektorskom produktu jediničnog vektora tangente na ΔC i jediničnog vektora u smjeru odrednice z . Na dužini je on konstantan i iznosi

$$\mathbf{n}_i = \frac{(y_{ik} - y_{ip})\mathbf{a}_x - (x_{ik} - x_{ip})\mathbf{a}_y}{\sqrt{(x_{ik} - x_{ip})^2 + (y_{ik} - y_{ip})^2}} , \quad (10.3.59)$$

pa izraz (10.3.57) prelazi u

$$\Gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{2} - \frac{k}{4j} \frac{1}{\Delta l_j} \int_0^1 H_1^{(2)}[k\sqrt{(x_{C,i} - x'(t))^2 + (y_{C,i} - y'(t))^2}] f(t) dt , \quad (10.3.60)$$

$$f(t) = \frac{(y_{jk} - y_{jp})[x_{C,i} - x'(t)] - (x_{jk} - x_{jp})[y_{C,i} - y'(t)]}{\sqrt{(x_{C,i} - x'(t))^2 + (y_{C,i} - y'(t))^2}} .$$

Integral u tom izrazu računamo numerički, jednodimenzionalnom integracijom. Integralni doprinosi dijagonalnim elementima matrice $[\Gamma]$ za podjelu krivulje C na dužine jednaki su nuli, budući da je tada $\cos \alpha' = 0$. Elemente vektora desne strane računamo iz poznatog narinutog polja

$$\underline{H}_i = -\underline{H}_z^I(\mathbf{r}_{C,i}) . \quad (10.3.61)$$

Vektor nepoznatih kompleksnih koeficijenata $\underline{J}$ dobivamo rješavanjem sustava linearnih algebarskih jednadžbi (10.3.56).

Jakost magnetskog polja u prostoru oko vodljivog tijela nakon određivanja nepoznatih koeficijenata $\underline{J}_i$ računamo pomoću izraza (10.3.26)

$$\underline{H}(x,y) = \underline{H}^I - \frac{k}{4j} \sum_{i=1}^N \underline{J}_i \int_{\Delta C_i} \left(\underline{n}' \cdot \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) H_1^{(2)}(k|\underline{r} - \underline{r}'|) d\ell' . \quad (10.3.62)$$

Pri proračunu dalekog polja izbjegavamo numeričku integraciju tako da u izraz (10.3.62) uvrstimo približenje $H_1^{(2)}$ za velike argumente

$$H_1^{(2)}(k|\underline{r} - \underline{r}'|) \underset{r \gg r'}{\approx} \sqrt{\frac{2j}{\pi k|\underline{r} - \underline{r}'|}} e^{-jk|\underline{r} - \underline{r}'|} , \quad (10.3.63)$$

i približenja²²

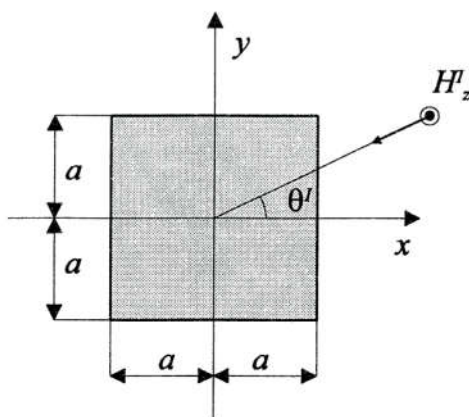
$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underset{r \gg r'}{\approx} \frac{1}{r} ; \quad e^{j|\underline{r} - \underline{r}'|} \underset{r \gg r'}{\approx} e^{j\left(r - \frac{\underline{r}}{r} \cdot \underline{r}'\right)} ; \quad \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underset{r \gg r'}{\approx} \frac{\underline{r}}{r} . \quad (10.3.64)$$

Primjer 10.3.2.1. Raspršenje ravnog TE vala na vodiču kvadratnog presjeka

Vodič kvadratnog presjeka nalazi se u polju ravnog TE vala u odnosu na os z koji nailazi pod kutem θ'

$$\underline{H}_z^I = H_0^I e^{jk(x \cos \theta' + y \sin \theta')} , \quad (10.3.65)$$

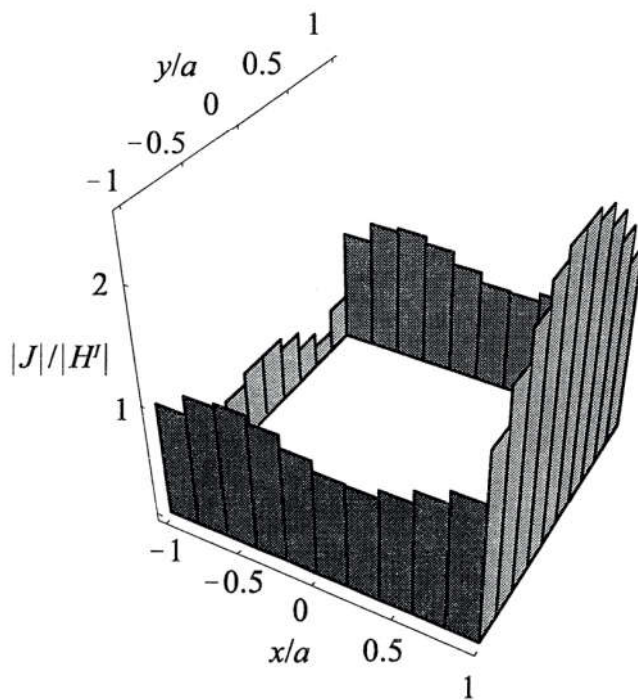
prema slici 10.3.10.



Slika 10.3.10. Vodič kvadratnog presjeka u vanjskom TE polju

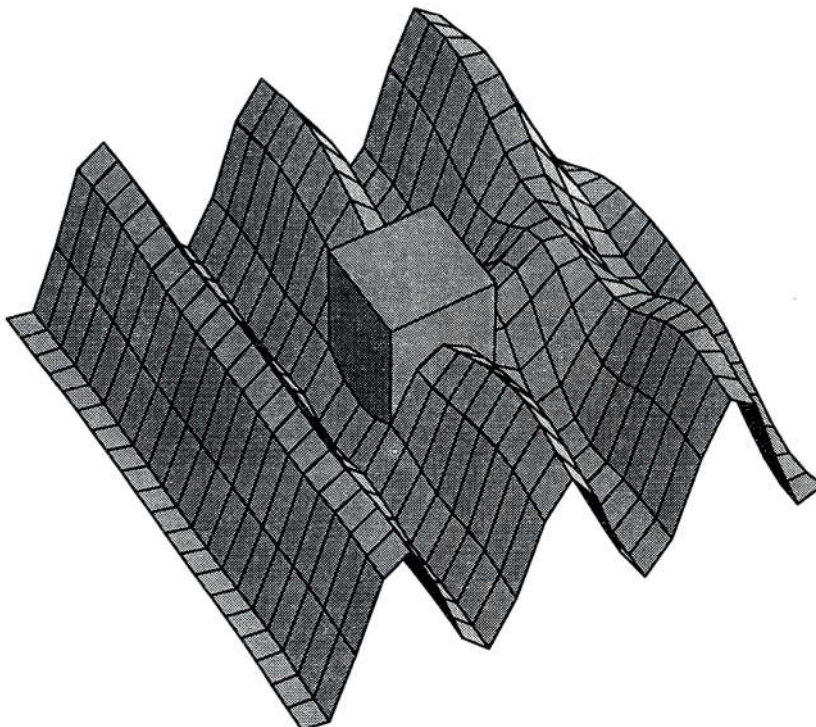
Ovdje smo brid vodiča podijelili na jednake segmente budući da struja nema singularitete u vrhovima kvadrata. Približenje struje po plaštu vodiča za $N = 40$ odsječaka uz $p = 1$, $\theta' = 0$ i $ka = 2$ prikazali smo slikom 10.3.11.

²² Pogledati članak 8.8.2.



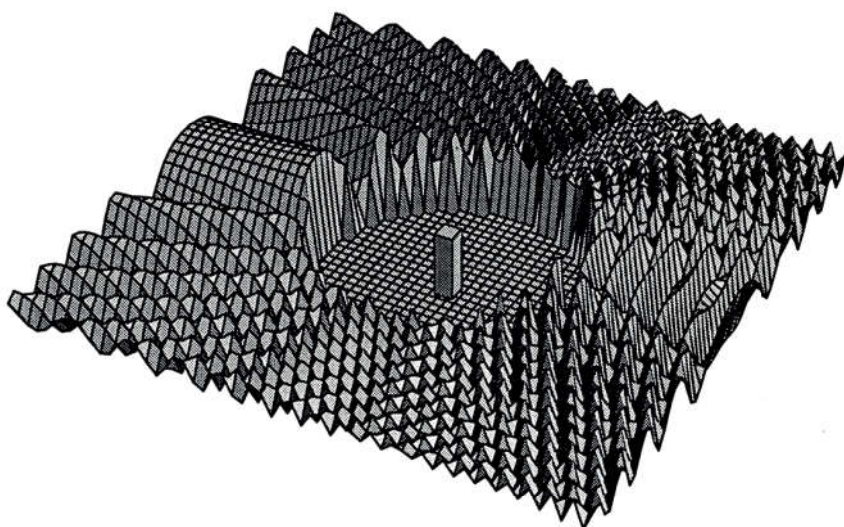
Slika 10.3.11. Normalizirana apsolutna vrijednost fazora koeficijenta struje po plaštu vodiča

Jakost magnetskog polja u blizini vodiča izračunali smo pomoću izraza (10.3.62) i prikazali slikom 10.3.12.



Slika 10.3.12. Jakost magnetskog polja u blizini vodiča (blizo polje), prikaz u vremenskoj domeni za trenutak $t = 0$

Jakost magnetskog polja na velikim udaljenostima od vodiča izračunali smo pomoću izraza (10.3.62) i korištenjem približenja (10.3.63,64) i prikazali slikom 10.3.13.



Slika 10.3.13. Apsolutna vrijednost fazora jakosti magnetskog polja na velikim udaljenostima od vodiča

10.4. TANKOŽIČANE STRUKTURE

U ovom odjeljku obradit ćemo zadaće zračenja i raspršenja sa strukturama od idealnih cilindričnih vodiča u otvorenom homogenom prostoru. Pretpostavljamo da kroz vodiče teče struja samo u uzdužnom smjeru i da je neovisna o obilaznom kutu. To na prvi pogled strogo ograničenje ima veliku praktičnu važnost, budući da navedene pretpostavke dovoljno točno zadovoljavaju široko rasprostranjene tankožičane antene.

10.4.1. Nadomjesni izvori

Pri rješavanju zadaća zračenja često nas zanima samo ograničeni dio prostora. Tada možemo djelovanje područja koja nas ne zanimaju zamijeniti ekvivalentnim izvorima koje smještamo u ta područja ili na njihovu granicu s dijelom prostora koji nas zanima. Izbor nadomjesnih izvora nije jedinstven, već postoji niz različitih načina kojima ih tvorimo. Pritom moramo ispuniti uvjet da se polje i izvori u području koje nas zanima ne mijenjaju uvođenjem nadomjesnih izvora, i zahtjev da su ispunjeni svi uvjeti na granici tog područja. Kad dva različita izbora nadomjesnih izvora daju isto rješenje u području,²³ onda takve dvije zadaće nazivamo ekvivalentnim zadaćama.

U prvom poglavlju²⁴ pokazali smo da možemo uvesti magnetske naboje kao izvore polja, iako oni u stvarnosti možda i ne postoje. Za tvorbu nadomjesnih izvora dodajemo u Faradayev zakon magnetske struje $\underline{J}_m$ koje čine magnetski naboji. Tada dvije glavne

²³ Treba uočiti da će takva dva različita izbora zasigurno dati različita rješenja u područjima koja nas ne zanimaju.

²⁴ Pogledati članak 1.4.8.

Maxwellove jednadžbe u fazorskoj domeni postaju²⁵

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega \underline{B} - \underline{J}_m, \quad (10.4.1a,b)$$

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega \underline{D} + \underline{J}.$$

Iz tih jednadžbi izvodimo uvjete na granici dvaju materijala za tangencijalne komponente $\underline{E}$ i $\underline{H}$. Postupkom koji je jednak onome u točki 1.5.1.2. možemo pokazati da su sada uvjeti na granici

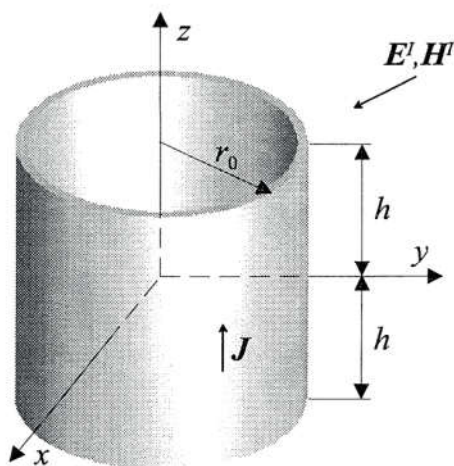
$$\underline{n} \times (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = \underline{K}, \quad (10.4.2a,b)$$

$$\underline{n} \times (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) = \underline{K}_m.$$

Ovdje je $\underline{K}_m$ fazor strujnog obloga magnetske struje i njime smo omogućili skok u tangencijalnoj komponenti jakosti električnog polja. Slijedi da dio prostora za kojeg poznajemo vrijednost $\underline{n} \times \underline{E}$ na granici s prostorom koji nas zanima možemo nadomjestiti strujnim oblogom magnetske struje koji teče po graničnoj površini, a dio za kojeg poznajemo $\underline{n} \times \underline{H}$ možemo nadomjestiti strujnim oblogom električne struje na granici.

10.4.2. Integralna formulacija zadaće raspršenja na tankoj žici

Razmotrimo u početku jednu idealno vodljivu cilindričnu cijev konačne dužine koja se nalazi u vanjskom polju prema slici 10.4.1.



Slika 10.4.1. Idealno vodljiva cilindrična cijev u vanjskom polju

Budući da je cijev idealno vodljiva struje teku samo po površini vodiča. Sljedeće pojednostavnjenje jest da je jakost narinutog električnog polja oblika

²⁵ Pogledati točku 8.3.2.2, jednadžbe (8.3.68a,b).

$$\underline{E}^I = \underline{E}_r^I(r, z) \underline{a}_r + \underline{E}_z^I(r, z) \underline{a}_z, \quad (10.4.3)$$

odnosno da je neovisna o obilaznom kutu i da nema komponentu u smjeru obilaznog kuta u cilindričnom koordinatnom sustavu. Budući da je geometrija zadatke neovisna o obilaznom kutu, slijedi da su sve veličine u zadatci neovisne o toj odrednici. Plošna struja na vodiču može uz ove pretpostavke imati samo z komponentu, budući da bi komponenta u smjeru obilaznog kuta uzrokovala tu komponentu u raspršenom električnom polju i narušila neovisnost svih veličina polja o obilaznom kutu. Na površini idealnog vodiča tangencijalna komponenta jakosti električnog polja jednaka je nula, pa na površini žice vrijedi

$$\underline{E}_z^s(z) + \underline{E}_z^I(z) = 0. \quad (10.4.4)$$

Vektorski magnetski potencijal u zadatci ima samo z komponentu, budući da samo tu komponentu imaju struje koje teku u zadatci po površini vodiča, pa vrijedi

$$\underline{E}_z^s = -j\omega \underline{A}_z - \frac{d\varphi}{dz}. \quad (10.4.5)$$

Lorentzovo baždarenje u fazorskoj domeni ima oblik²⁶

$$\frac{d\underline{A}_z}{dz} = -j\omega \mu \epsilon \varphi. \quad (10.4.6)$$

Deriviranjem te jednadžbe te uvrštenjem u izraz (10.4.5), a zatim u (10.4.4) dobivamo

$$j\frac{\omega}{k^2} \left(\frac{d^2 \underline{A}_z}{dz^2} + k^2 \underline{A}_z \right) = \underline{E}_z^I. \quad (10.4.7)$$

U odjeljku 8.8. izveli smo Greenovu funkciju slobodnog prostora²⁷ pa je opće rješenje za vektorski magnetski i skalarni električni potencijal u našoj zadatci

$$\begin{aligned} \underline{A}_z &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h}^h \underline{J}_z(z') \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} r_0 d\alpha' dz', \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-h}^h \underline{\varrho}(z') \int_0^\pi \frac{e^{-jkR}}{R} r_0 d\alpha' dz'. \end{aligned} \quad (10.4.8a,b)$$

²⁶ Pogledati točku 2.1.1.3.

²⁷ Nju očitavamo iz izraza (8.8.10) za vektorski magnetski potencijal električnog dipola kao vektorski magnetski potencijal jediničnog dipola u fazorskoj domeni.

Ovdje je R udaljenost između točke u kojoj je izvor (r_0, α', z') i točke u kojoj računamo polje (r, α, z) . Budući da je $\underline{J}_z$ neovisan o obilaznom kutu α , možemo uvesti ukupnu uzdužnu struju $\underline{I}$ kao

$$\underline{I}(z) = 2r_0 \pi \underline{J}(z) . \quad (10.4.9)$$

Iz jednadžbe kontinuiteta²⁸ možemo odrediti vezu plosne gustoće naboja $\underline{\sigma}$ i ukupne struje

$$\frac{d\underline{I}(z)}{dz} = -j2r_0 \pi \omega \underline{\sigma}(z) . \quad (10.4.10)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (10.4.9,10) u (10.4.8a,b) dobivamo

$$\underline{A}_z(z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h}^h \underline{I}(z') F(z-z') dz' , \quad (10.4.11a,b)$$

$$\underline{\varphi}(z) = j \frac{Z'}{4\pi k} \int_{-h}^h \frac{d}{dz'} \underline{I}(z') F(z-z') dz' .$$

U ovim izrazima je

$$F(z-z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\alpha' . \quad (10.4.12)$$

Integro-diferencijalnu jednadžbu za nepoznatu struju $\underline{I}(z')$ dobivamo uvrštavanjem (10.4.11a,b) u (10.4.5)

$$j \frac{Z'}{4\pi k} \left\{ k^2 \int_{-h}^h \underline{I}(z') F(z-z') dz' + \frac{d}{dz} \int_{-h}^h \frac{d}{dz'} \underline{I}(z') F(z-z') dz' \right\} = \underline{E}_z^I(z) , \quad (10.4.13)$$

ili uvrštavanjem (10.4.11a) u (10.4.7)

$$j \frac{Z'}{4\pi k} \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \int_{-h}^h \underline{I}(z') F(z-z') dz' = \underline{E}_z^I(z) . \quad (10.4.14)$$

Jednadžbe (10.4.13,14) su alternativni oblici i često ih zovemo *Pocklingtonova*²⁹ jed-

²⁸ Pogledati odjeljak 7.2.

²⁹ Objavio ju je H.C. Pocklington u radu *Electrical oscillations in wires*, Cambridge Phil. Soc. Proc, vol. 9, Cambridge, 1897.

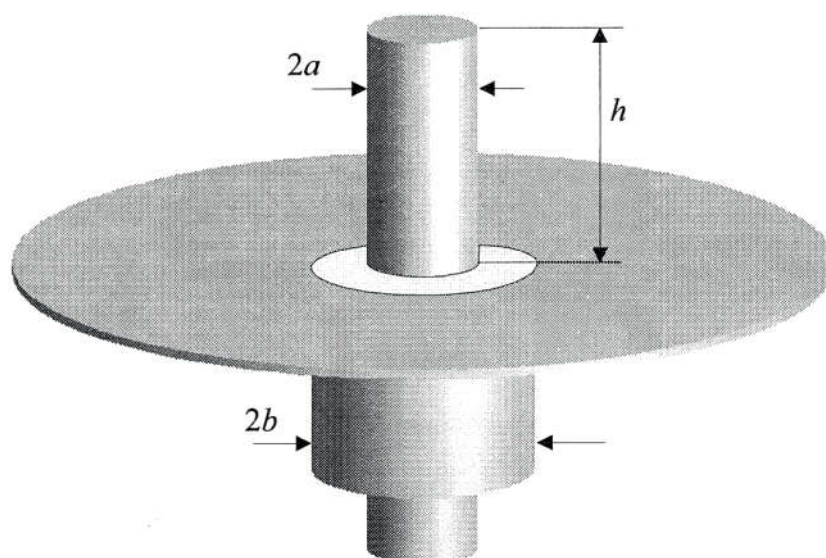
nadžba. Rješavamo ih uz granični uvjet da je ukupna struja na krajevima žice³⁰ jednaka nuli

$$I(\pm h) = 0. \quad (10.4.15)$$

Primjenom Pocklingtonove jednadžbe omogućavamo jednaku formulaciju zadaća raspršenja i zračenja tankožičanih struktura. U zadaćama zračenja vanjsko polje $\underline{E}_z^I$ jest polje izvora napajanja, a u zadaćama raspršenja polje $\underline{E}_z^I$ jest polje udaljenih izvora koji nisu dio zadaće.

10.4.3. Modeli napajanja izvora zračenja

Pocklingtonovu jednadžbu koju smo izveli u prethodnom članku možemo izravno primijeniti u zadaćama raspršenja. Ako žičanu strukturu želimo analizirati kao izvor zračenja, moramo izvesti jednadžbe za struju koju u njoj inducira napajanje. Izvore ćemo modelirati tako da u Pocklingtonovu jednadžbu uvrstimo odgovarajuće narinuto električno polje $\underline{E}_z^I$. To ćemo pokazati na primjeru napajanja suosnim kabelom kroz uzemljenu ravninu koje smo pojednostavnjeno prikazali na slici 10.4.2.

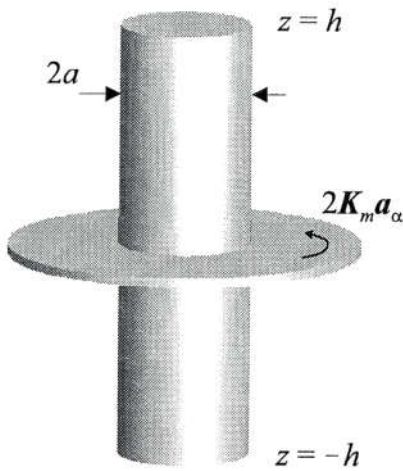


Slika 10.4.2. Napajanje cilindričnog izvora zračenja suosnim kabelom kroz uzemljenu ravninu

U takvom načinu napajanja cilindričnu cijev pobuđujemo elektromagnetskim poljem koje prolazi kroz otvor na ravnini u obliku kružnog vijenca. To znači da napajanje cilindrične cijevi možemo predstaviti poljem koje nastaje radijacijom iz tog otvora. Budući da nas zanima samo poluprostor iznad uzemljene ravnine, djelovanje donjeg

³⁰ Ovaj granični uvjet je točan za beskonačno tanke cijevi, no ako žica ima metalom ispunjeni završetak u $z = \pm h$ po tom završetku teku struje. Naravno one također doprinose raspršenom polju $\underline{E}^s$, ali za tanke žice je površina završetka mali dio ukupne površine pa se njihov doprinos može zanemariti.

poluprostora nadomjestit ćemo nadomjesnim izvorima u otvoru. Na toj granici tangencijalna komponenta jakosti električnog polja ima skok, pa ćemo za nadomjesni izvor odabrati strujni oblog magnetskih struja $\underline{K}_m$ koje teku po idealnom vodiču u prostoru otvora. Zbog simetrije geometrije tangencijalna komponenta jakosti električnog polja na uzemljenoj ravni ima samo radijalnu komponentu, pa iz (9.4.2b) slijedi da magnetske struje imaju samo komponentu u smjeru obilaznog kuta, jer vrijedi $\underline{K}_m \mathbf{a}_\alpha = -\underline{E}_r' \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_z$. Takvim uvođenjem nadomjesnih izvora uzemljena ravnina postaje potpuno ispunjena, pa možemo cilindričnu cijev i plošne magnetske struje $\underline{K}_m$ odslikati³¹ i formirati ekvivalentni model s $2\underline{K}_m$ i dvostrukom dužinom cijevi s pomoću kojeg određujemo polje u prostoru iznad uzemljene ravine. Konačni nadomjesni model se sastoji od metalne cijevi pobuđene poljem koje zrači nadomjesna magnetska struja prema slici 10.4.3.



Slika 10.4.3. Nadomjesni model cijevi napajane suosnim kabelom

$\underline{E}_r'$ je općenito nepoznat, ali ako je $(b-a) \ll \lambda$ vrijedi kvazistatičko približenje, pa iz poznatog napona $\underline{U}$ između cilindra i vanjskog vodiča suosnog kabela možemo odrediti

$$\underline{E}_r' = \frac{\underline{U}}{r' \ln \frac{b}{a}}. \quad (10.4.16)$$

Korištenjem (10.4.2b) dobivamo strujni oblog magnetskih struja $\underline{K}_m$

$$\underline{K}_m = -\frac{\underline{U}}{r' \ln \frac{b}{a}} \mathbf{a}_\alpha. \quad (10.4.17)$$

Iz jednadžbi (10.4.1a,b) slijedi

$$-\nabla \times \nabla \times \underline{E} + k^2 \underline{E} = j\omega \mu \underline{J} - \nabla \times \underline{J}_m, \quad (10.4.18)$$

³¹ Odslikavanje kao metodu uveli smo i detaljno opisali u odjeljku 4.8.

pa budući da je ovdje $\underline{J} = 0$ jakost električnog polja koje uzrokuju magnetske struje računamo pomoću³²

$$\begin{aligned}\underline{E}(\underline{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \nabla \times \underline{K}_m(\underline{r}') \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} dS' = \\ &= -\frac{\underline{U}}{2\pi \ln \frac{b}{a}} \int_0^{2\pi} \int_0^b \nabla \times \underline{a}_\alpha \frac{e^{-jkD}}{D} d\alpha' dr' ,\end{aligned}\quad (10.4.19)$$

$$D = \sqrt{z^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha'} .$$

Jakost električnog polja u odabranoj točki primjenom tog izraza možemo izračunati samo numeričkom integracijom.³³ Za točke na osi z udaljenost D ne ovisi o obilaznom kutu, pa integral u (10.4.19) možemo izračunati analitički. Jakost električnog polja tada ima samo z komponentu koja iznosi

$$\underline{E}_z = \frac{\underline{U}}{2\pi \ln \frac{b}{a}} \left(\frac{e^{-jk\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{e^{-jk\sqrt{z^2+b^2}}}{\sqrt{z^2+b^2}} \right) . \quad (10.4.20)$$

I za druge načine napajanja možemo slično odrediti nadomjesne izvore i formirati model koji rješavamo primjenom Pocklingtonove jednadžbe.

10.4.4. Rješenje Pocklingtonove jednadžbe primjenom MOM

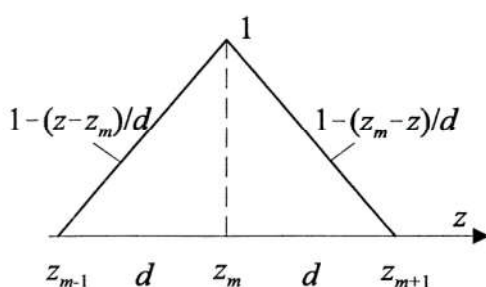
Pri rješavanju ove zadaće pokazat ćemo primjenu Galerkinove metode. To znači da ćemo odabrati jednake temeljne i težinske funkcije. Ovdje ćemo opisati primjenu po dijelovima trokutnih funkcija

$$w_m(z) = \begin{cases} 1 - \frac{|z - z_m|}{d} & ; \quad z_{m-1} \leq z \leq z_{m+1} , \\ 0 & ; \quad z < z_{m-1} \text{ ili } z > z_{m+1} . \end{cases} \quad (10.4.21)$$

Ovdje je $d = z_m - z_{m-1} = z_{m+1} - z_m$. Te smo funkcije grafički prikazali slikom 10.4.4.

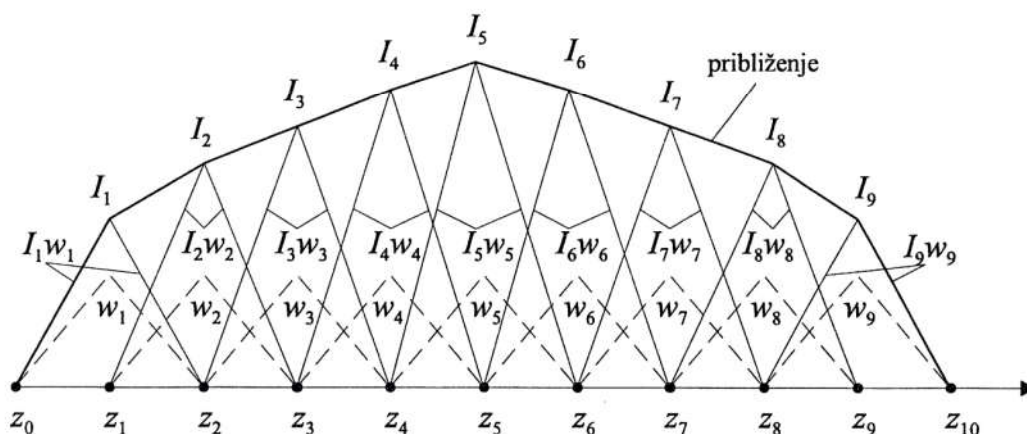
³² Pogledati odjeljak 2.5.2.

³³ Detaljan izvod rješenja zadaće polja strujnog obloga magnetskih struja na kružnom vijencu i niz korisnih približenja pogledati u R. Mittra, *Computer Techniques for Electromagnetics*, Pergamon Press, Oxford, 1973.



Slika 10.4.4. Po dijelovima trokutne težinske funkcije

Takvim izborom temeljnih funkcija unaprijed smo osigurali zadovoljenje uvjeta (10.4.15). U drugom koraku cilindar dijelimo na odsječke prema slici 10.4.5.



Slika 10.4.5. Temeljne i težinske trokutne funkcije za 10 podjela cilindra

Korištenjem Galerkinove metode Pocklingtonova jednadžba (10.4.14) prelazi u

$$j \frac{Z'}{4\pi k} \int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \left[\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \int_{-h}^h I(z') K(z - z') dz' \right] w_m(z) dz =$$

$$= \int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \underline{E}_z^I(z) w_m(z) dz \quad ; \quad m = 1, \dots, N-1,$$
(4.10.22)

budući da je težinska funkcija $w_m(z)$ jednaka nula izvan intervala (z_{m-1}, z_{m+1}) . Dvostrukom primjenom parcijalne integracije uz korištenje $w_m(z_{m\pm 1}) = 0$ možemo pokazati da vrijedi

$$\int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \left[\frac{d^2 A(z)}{dz^2} \right] w_m(z) dz = \frac{2}{d} [A(z_{m+1}) - 2A(z_m) + A(z_{m-1})],$$
(10.4.23)

pa korištenjem tog identiteta izraz (10.4.22) prelazi u oblik

$$\begin{aligned}
& j \frac{Z'}{4\pi k} \frac{2}{d} \int_{-h}^h \underline{I}(z') [F(z_{m+1} - z') - 2F(z_m - z') + F(z_{m-1} - z')] dz' + \\
& + j \frac{kZ'}{4\pi} \int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \left[\int_{-h}^h \underline{I}(z') F(z - z') dz' \right] w_m(z) dz = \int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \underline{E}'_z(z) w_m(z) dz \quad ; \quad m=1, \dots, N-1 .
\end{aligned} \tag{10.4.24}$$

Nepoznatu funkciju struje približavamo također po dijelovima trokutnim funkcijama

$$\underline{I}(z') = \sum_{i=1}^{N-1} \underline{I}_i w_i(z') . \tag{10.4.25}$$

Uvrštenjem tog približenja u (10.4.24) dobivamo sustav linearnih algebarskih jednadžbi za nepoznate koeficijente $\underline{I}_i$

$$[Z] \underline{I} = \underline{V} . \tag{10.4.26}$$

Elementi matrice $[Z]$ jesu

$$\begin{aligned}
Z_{ij} = & j \frac{Z'}{4\pi k} \frac{2}{d} \int_{z_{j-1}}^{z_{j+1}} \underline{I}(z') [F(z_{i+1} - z') - 2F(z_i - z') + F(z_{i-1} - z')] dz' + \\
& + j \frac{kZ'}{4\pi} \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \left[\int_{z_{j-1}}^{z_{j+1}} \underline{I}(z') F(z - z') dz' \right] w_m(z) dz ,
\end{aligned} \tag{10.4.27}$$

a vektora desne strane

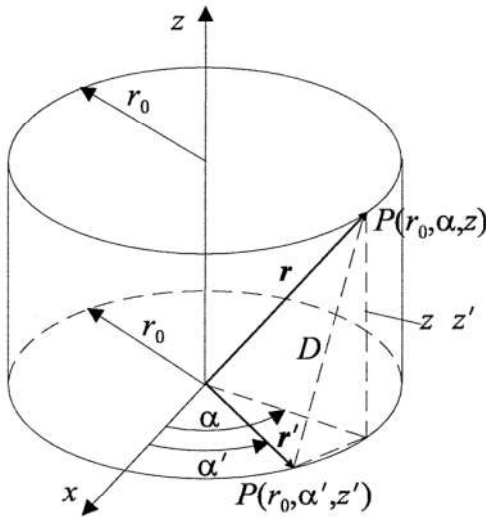
$$\underline{V}_i = \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \underline{E}'_z(z) w_m(z) dz . \tag{10.4.28}$$

Pri računu elemenata matrice $[Z]$ i vektora $\underline{V}$ koristimo numeričku integraciju. Posebnu pažnju i ovdje moramo posvetiti slučaju kad je $z - z' = 0$ budući da tada integral postaje nepravilni zbog singulariteta Greenove funkcije. Geometrijske odnose pri proračunu jezgre $F(z - z')$ prikazali smo slikom 10.4.6. Iz te slike vidimo da vrijedi

$$D = \sqrt{(z - z')^2 + 2r_0^2 - 2r_0^2 \cos(\alpha - \alpha')} , \tag{10.4.29}$$

pa jezgru $F(z - z')$ računamo pomoću

$$F(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{(z - z')^2 + 2r_0^2 - 2r_0^2 \cos(\alpha - \alpha')}}}{\sqrt{(z - z')^2 + 2r_0^2 - 2r_0^2 \cos(\alpha - \alpha')}} d(\alpha - \alpha') . \tag{10.4.30}$$



Slika 10.4.6. Geometrijski odnosi pri proračunu jezgre za Pocklingtonovu jednadžbu

Da bismo razmotrili singularno ponašanje jezgre $F(z - z')$ napisat ćemo je u obliku

$$F(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d(\alpha - \alpha')}{\sqrt{(z - z')^2 + 2r_0^2 - 2r_0^2 \cos(\alpha - \alpha')}} + \quad (10.4.31)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{(z - z')^2 + 2r_0^2 - 2r_0^2 \cos(\alpha - \alpha')}} - 1}{\sqrt{(z - z')^2 + 2r_0^2 - 2r_0^2 \cos(\alpha - \alpha')}} d(\alpha - \alpha') .$$

Podintegralna funkcija drugog integrala u tom izrazu je ograničena i kontinuirana čak i u točki $(z - z') = 0$ budući da vrijedi

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{-jk\sqrt{2r_0^2 - 2r_0^2 \cos \alpha}} - 1}{\sqrt{2r_0^2 - 2r_0^2 \cos \alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{e^{-jk\sqrt{2r_0^2 - 2r_0^2 \cos \alpha}} - 1}{\sqrt{2r_0^2 - 2r_0^2 \cos \alpha}} = -jk . \quad (10.4.32)$$

Stoga taj integral možemo lako numerički izračunati. Prvi integral u izrazu (10.4.31) supstitucijom³⁴ $\alpha - \alpha' = \pi + 2\beta$ svodimo na eliptički integral prve vrste³⁵

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d(\alpha - \alpha')}{\sqrt{(z - z')^2 + 2r_0^2 - 2r_0^2 \cos(\alpha - \alpha')}} = \frac{kK(k)}{\pi r_0} ; \quad k = \frac{2r_0}{\sqrt{(z - z')^2 + 4r_0^2}} . \quad (10.4.33)$$

Taj dio jezgre je singularan za $k = 1$ pa ćemo ga proširiti dodavanjem i oduzimanjem

³⁴ Ovu supstituciju smo detaljno opisali u primjeru 6.8.1.1.

³⁵ Pogledati Prilog G.

približenja $K(k)$ za male argumente³⁶

$$\frac{1}{\pi r_0} \left\{ kK(k) + \ln \frac{|z - z'|}{8r_0} \right\} - \frac{1}{\pi r_0} \ln \frac{|z - z'|}{8r_0} . \quad (10.4.34)$$

Izraz u vitičastim zagradama možemo integrirati numerički budući da kada $k \rightarrow 1$ on teži k nuli. Logaritamski singularitet koji je preostao možemo integrirati analitički korištenjem izraza

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 , \quad (10.4.35)$$

pa oblik

$$\begin{aligned} F(z - z') = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{(z-z')^2 + 2r_0^2 - 2r_0^2 \cos(\alpha - \alpha')}} - 1}{\sqrt{(z-z')^2 + 2r_0^2 - 2r_0^2 \cos(\alpha - \alpha')}} d(\alpha - \alpha') + \\ & + \frac{1}{\pi r_0} \left\{ kK(k) + \ln \frac{|z - z'|}{8r_0} \right\} - \frac{1}{\pi r_0} \ln \frac{|z - z'|}{8r_0} , \end{aligned} \quad (10.4.36)$$

koristimo za račun integrala koji sadrže singularitet jezgre F .

10.4.4.1. Daleko radijacijsko polje

Nakon rješenja sustava jednadžbi (10.4.26) možemo odrediti vektorski magnetski potencijal u prostoru oko antene pomoću

$$\underline{A} = \mu \int_S \underline{J} \frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS . \quad (10.4.37)$$

Korištenjem izraza (10.4.9), (10.4.25) te uobičajenih približenja za daleke točke danih izrazima (10.3.64) vektorski magnetski potencijal u području udaljenom od antene određujemo pomoću

$$\underline{A} = \underline{a}_z \frac{\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \sum_{i=1}^{N-1} I_i \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} w(z') e^{-jkr' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}} dz' . \quad (10.4.38)$$

Jakost električnog polja računamo iz elektromagnetskih potencijala korištenjem izraza

³⁶ Ovdje smo iskoristili približenje eliptičkog integrala prve vrste kada $k \rightarrow 1$ s prvim članom reda za komplementarni modul $K(k) \approx -\ln(k'/4)$.

$$\underline{E} = -j\omega \underline{A} - \nabla \varphi . \quad (10.4.39)$$

Iz te jednadžbe korištenjem Lorentzova uvjeta dobivamo

$$\underline{E} = -j\frac{\omega}{k^2}[k^2 \underline{A} + \nabla(\nabla \cdot \underline{A})] . \quad (10.4.40)$$

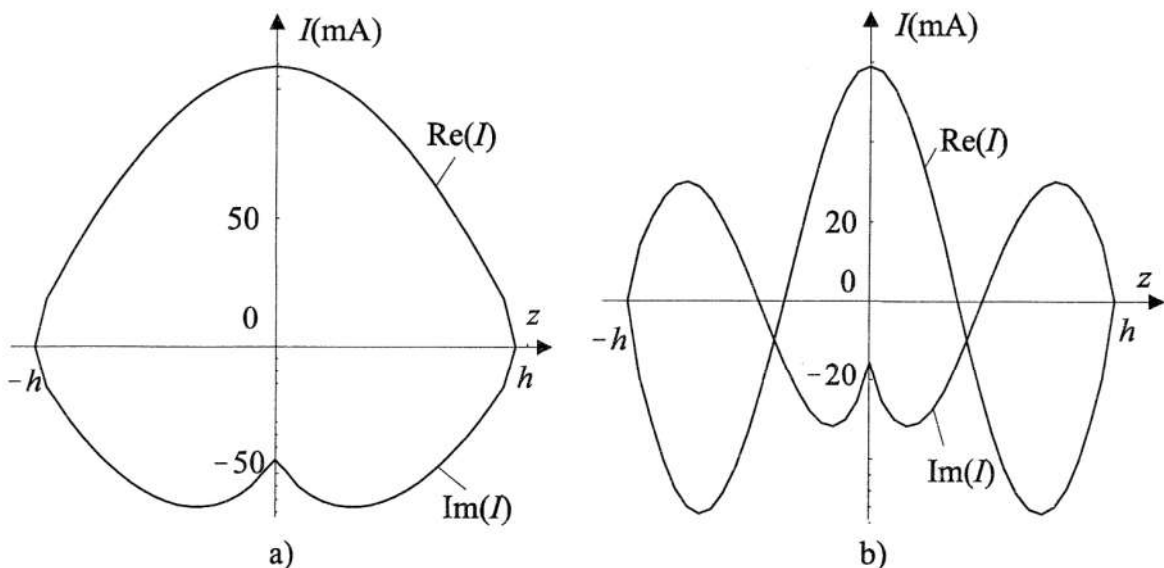
Ako u taj izraz uvrstimo jednadžbu (10.4.38) i uzmemo u obzir samo članove koji doprinose dalekom radijacijskom polju, tj. članove koji opadaju s $1/r$, dobivamo

$$\underline{E} = -j\omega \left[\underline{A} - \frac{\underline{r}}{r} \left(\frac{\underline{r}}{r} \cdot \underline{A} \right) \right] = j\omega \frac{\underline{r}}{r} \times \left(\frac{\underline{r}}{r} \times \underline{A} \right) , \quad (10.4.41)$$

pa taj izraz koristimo za proračun jakosti električnog polja u udaljenoj, radijacijskoj zoni.

Primjer 10.4.4.1. Zračenje tankožičane antene pobuđene suosnim kabelom

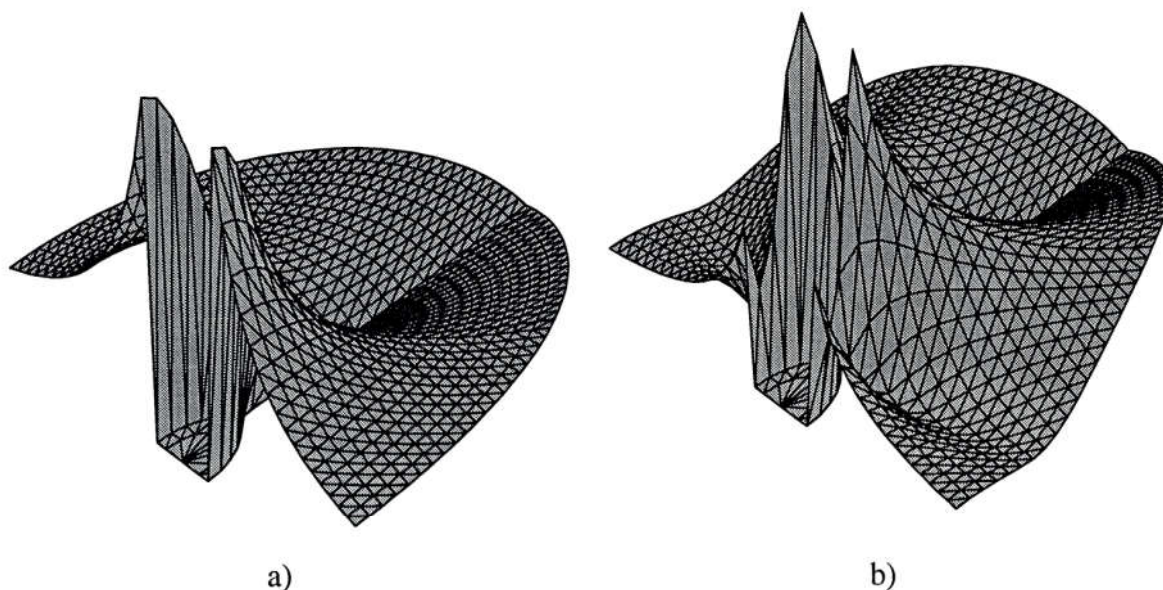
Za primjer proračuna smo odabrali proračun radijacijskog polja tankožičane antene pobuđene suosnim kabelom prema slici 10.4.2. Matematički model te zadaće prikazali smo slikom 10.4.3. Raspodjelu struje po modelu antene za visine $2h = \lambda/2$ i $2h = 3\lambda/2$, uz $\underline{U} = 1$ V, $r_0 = 0.01\lambda$, $a = r_0$ i $b = 2r_0$ prikazali smo na slici 10.4.7.



Slika 10.4.7. Raspodjela struje po modelu tankožičane antene pobuđene suosnim kabelom

a) $2h = \lambda/2$, b) $2h = 3\lambda/2$

Udaljeno radijacijsko polje smo izračunali primjenom izraza (10.4.41). Raspodjelu apsolutne vrijednosti fazora vektora jakosti električnog polja u radijacijskoj zoni prikazali smo na slici 10.4.8.



Slika 10.4.8. Raspodjela apsolutne vrijednosti fazora vektora jakosti električnog polja u radijacijskoj zoni tankožičane antene pobuđene suosnim kabelom a) $2h = \lambda/2$, b) $2h = 3\lambda/2$

POPIS LITERATURE UZ POGLAVLJE 10.

- J. Van Bladel, *Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1964.
 R.F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, MacMillian Co., New York, 1968.
 R.F. Harrington, *Time – Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1964.
 J.A. Kong, *Theory of Electromagnetic Waves*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
 R. Mittra, *Computer Techniques for Electromagnetics*, Pergamon Press, Oxford, 1973.
 R. Mittra, *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*, Springer Verlag, Berlin, 1975.

PRILOG A

MATEMATIČKI MODELI U ELEKTROMAGNETIZMU

A.1. Temeljni pojmovi

Skup je svaka cjelina sastavljena od osnovnih dijelova ili *elemenata*. U matematici se promatraju skupovi kojima su elementi realni ili kompleksni brojevi, funkcije, vektori, matrice itd.

Metrika na skupu Ω je nenegativna realna funkcija d para elemenata f i g iz Ω za koju vrijedi

$$\begin{aligned}d(f,g) > 0 & \quad ; \quad f \neq g , \\d(f,g) = 0 & \quad ; \quad f = g , \\d(f,g) = d(g,f) , \\d(f,h) & \leq d(f,g) + d(g,h) .\end{aligned}\tag{A.1}$$

Skup s metrikom definiranom na njemu nazivamo *metrički prostor*. Pod pojmom "prostor" razumijevamo skup s nekom strukturom.

Skup Ω nazivamo *linearni prostor* ako je za svaka dva elementa f i g iz Ω definiran zbroj, tj. element h iz Ω kojeg označavamo s $f + g$, a za svaki element f iz Ω i skalar α definiran produkt αf , tako da vrijedi

$$\begin{aligned}f + g &= g + f , \\f + (g + h) &= (f + g) + h , \\\alpha(f + g) &= \alpha f + \alpha g , \\(\alpha + \beta)f &= \alpha f + \beta f , \\\alpha(\beta f) &= (\alpha\beta)f , \\1f &= f , \\0f &= 0 .\end{aligned}\tag{A.2}$$

Linearni prostor se često naziva *vektorski prostor*. Linearni prostor je *realan*, odnosno *kompleksan*, ako je skup skalara pomoću kojih je definiran skup realnih, odnosno kompleksnih brojeva. Najvažnije klase funkcija i vektora su linearni prostori. Linearni prostor Ω nazivamo *normirani prostor* ako je svakom elementu f u Ω pridružen realan broj označen s $\|f\|$, *norma* od f , tako da je

$$\begin{aligned}
\|f\| > 0 & \quad ; \quad f \neq 0 , \\
\|f\| = 0 & \quad ; \quad f = 0 , \\
\|\alpha f\| &= \alpha \|f\| , \\
\|f+g\| &\leq \|f\| + \|g\| .
\end{aligned}
\tag{A.3a - d}$$

Norma odgovara pojmu duljine vektora. Normirani prostor je ujedno i metrički ako je metrika $d(f,g)$, koja odgovara pojmu udaljenosti među elementima f i g , definirana relacijom

$$d(f,g) = \|f-g\| . \tag{A.4}$$

Skup $\mathcal{H}$ nazivamo Hilbertovim prostorom ako zadovoljava sljedeće uvjete:

1. $\mathcal{H}$ je linearan prostor,
2. svakom paru elemenata f, g iz $\mathcal{H}$ možemo pridružiti kompleksni broj $\langle f, g \rangle$ koji zovemo *skalarni produkt* elemenata f i g tako da vrijedi

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^* , \tag{A.5}$$

gdje je $\langle g, f \rangle^*$ konjugirano kompleksni broj od $\langle f, g \rangle$, te

$$\begin{aligned}
\langle f_1 + f_2, g \rangle &= \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle , \\
\langle \alpha f, g \rangle &= \alpha \langle f, g \rangle , \\
\langle f, \alpha g \rangle &= \alpha^* \langle f, g \rangle , \\
\langle f, f \rangle &> 0 \quad ; \quad f \neq 0 , \\
\langle f, f \rangle &= 0 \quad ; \quad f = 0 ,
\end{aligned}
\tag{A.6}$$

3. norma elementa f je definirana izrazom

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} , \tag{A.7}$$

4. $\mathcal{H}$ je potpun prostor u metrici

$$d(f,g) = \|f-g\| , \tag{A.8}$$

što znači da za svaki niz f_n elemenata iz $\mathcal{H}$, za koji $\|f_n - f_m\|$ ($m > n$) teži prema nula kad n neograničeno raste, postoji element f iz $\mathcal{H}$ takav da i $\|f_n - f\|$ teži prema nula.

5. $\mathcal{H}$ je separabilan skup. To znači da u $\mathcal{H}$ postoji prebrojiv podskup $\{f_n\}$ elemenata iz $\mathcal{H}$ takvih da je svakom elementu f iz $\mathcal{H}$ po volji blizu neki element iz $\{f_n\}$. Ovo svojstvo se najčešće ne traži kao nužno u definiciji Hilbertova prostora, ali ga imaju svi najvažniji Hilbertovi prostori u primjenama.

Hilbertov prostor koji je realan kao linearni prostor i za kojeg je skalarni produkt realan

broj nazivamo *realni Hilbertov prostor*.

Preslikavanje M jest operacija kojom svakom elementu a iz skupa $\mathcal{A}$ pridružujemo jedan element b iz skupa $\mathcal{B}$, što zapisujemo kao

$$M(a) = b . \quad (\text{A.9})$$

Domena od M je skup na kojem je preslikavanje M definirano.

Funkcija je sinonim za preslikavanje. Poblize se imenuje prema dolaznom prostoru. Skalarna funkcija znači funkciju s vrijednostima u prostoru skalara, kompleksna funkcija funkciju s vrijednostima u kompleksnom prostoru $\mathbb{C}$ itd. Tako npr. skalarna funkcija skalarne varijable koju zapisujemo s $y = f(x)$, jest preslikavanje iz skalarnog prostora $\mathcal{X}$ s elementima x u skalarni prostor $\mathcal{Y}$ s elementima y .

Operatore u metričkim prostorima definiramo kao preslikavanje među prostorima: ako su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ dva metrička prostora, svakom elementu f iz $\mathcal{F}$ pridružen je jedinstveno određen element g iz $\mathcal{G}$. Tome odgovara zapis

$$g = L(f) , \quad (\text{A.10a})$$

u kojem je L *operator* (ili preslikavanje) definiran na prostoru $\mathcal{F}$, koji preslikava $\mathcal{F}$ u $\mathcal{G}$.

Funkcional je operator s vrijednostima u prostoru skalara (dakle u prostoru $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$). Tako, ako je $\mathcal{G}$ realni prostor $\mathbb{R}$ ili kompleksni prostor $\mathbb{C}$, tj. ako je g realan ili kompleksan broj, operator se naziva funkcional.

Linearni operator je preslikavanje među linearnim prostorima koje čuva linearne operacije: ako su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ linearni prostori, f i g elementi iz $\mathcal{F}$, a α i β skalari, operator L iz $\mathcal{F}$ u $\mathcal{G}$ je *linearan* ako vrijedi

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) . \quad (\text{A.10b})$$

Linearni funkcional jest linearni operator s vrijednostima u prostoru $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

A.2. Operatorske jednadžbe

Analizirajmo nehomogenu operatorsku jednadžbu oblika

$$L(f) = g , \quad (\text{A.11})$$

gdje je L *operator*, g je izvor ili *pobuda*, a f je *polje* ili odziv. Ako neki od navedenih elemenata nije poznat jednadžbom (A.11) zadan je određeni zadatak (ili zadaća). Zadatak je *korektan* ako postoji *jedinstveno* rješenje te operatorske jednadžbe, tj. ako je samo jedan f pridružen danom g . Zadatak *analize* uključuje određivanje polja f kada su operator L i izvor g zadani. Zadatak *sinteze* uključuje pak određivanje operatora L kada su polje f i izvor g zadani. Ako postoji rješenje jednadžbe

$$L(f) = g , \quad (\text{A.12})$$

i jedinstveno je za sve g , tada postoji i inverzni operator L^{-1} takav da je

$$f = L^{-1}(g) , \quad (\text{A.13})$$

rješenje originalne zadaće ako je zadano g . L i L^{-1} predstavljaju par operatora od kojih je svaki inverzija drugog (npr. operatori diferenciranja i integriranja).

A.3. Zadaci s rubnim vrijednostima

Općenito, da bi izgradili matematički model nekog realnog fizikalnog problema moramo uz zadane izvore g poznavati i odgovarajuće fizikalne zakone (obično izražene operatorskim jednadžbama) koji upravljaju tom pojavom u naravi. Operatori L su najčešće diferencijalni, integralni ili miješani. Veličine koje predstavljaju fizikalne pojave, tj. polja f mogu biti skalarne i vektorske. Prostori u kojima ih prikazujemo mogu biti jedno, dvo, tro ili višedimenzionalni. Da bi zadaća bila korektna rješenja operatorskih jednadžbi uz egzistenciju moraju biti jedinstvena. Često se u definiciji korektnosti traži i stabilnost, tj. zahtjev da male promjene početnih uvjeta imaju za posljedicu male promjene rješenja. Da bi rješenje operatorske jednadžbe bilo jedinstveno moraju biti zadani i odgovarajući *rubni uvjeti*. Drugim riječima, da bi operator bio do kraja definiran potrebno je da bude označena operacija (diferenciranje, integriranje, i sl.) i domena operatora, tj. skup funkcija na koje se operacija može primijeniti, a koje zadovoljavaju određene uvjete na granici područja.

Ako je ispravno postavljen, matematički model svake realne fizikalne zadaće zadovoljava sve te kriterije. Matematički model fizikalne zadaće u pravilu sadrži operatorske i/ili algebarske jednadžbe i rubne uvjete u obliku dodatnih operatorskih i/ili algebarskih relacija, te propisane funkcije izvora.

Standardni oblici nekih diferencijalnih jednadžbi drugog reda koje koristimo u teoriji elektromagnetizma jesu

1. Laplaceova jednadžba

$$\Delta \varphi = 0 , \quad (\text{A.14})$$

2. Poissonova jednadžba

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} , \quad (\text{A.15})$$

3. Helmholtzova jednadžba

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 , \quad (\text{A.16})$$

4. Valna jednadžba

$$\Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{A.17})$$

5. Jednadžba difuzije

$$\Delta \varphi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.18})$$

Najčešći oblici integralnih jednadžbi koje koristimo u teoriji elektromagnetskih polja jesu

1. Fredholmova jednadžba prve vrste

$$\varphi(z) = \int_a^b K(z, z') \psi(z') dz', \quad (\text{A.19})$$

2. Fredholmova jednadžba druge vrste

$$\psi(z) = \lambda \int_a^b K(z, z') \psi(z') dz' + \varphi(z), \quad (\text{A.20})$$

gdje su φ i K poznate funkcije, a ψ je nepoznata funkcija koju određujemo. Veličinu $K(z, z')$ nazivamo *jezgra*¹ integralne jednadžbe.

A.4. Diferencijalne jednadžbe

Opći oblik nehomogene diferencijalne jednadžbe prema (A.11) jest

$$L\psi = F, \quad (\text{A.21})$$

gdje ψ može biti skalarno ili vektorsko polje, a funkcija je koordinata prostora i vremena $\psi = \psi(u_1, u_2, u_3, t)$. Operator L mješavina je funkcija koordinata prostora i vremena, parcijalnih derivacija po prostornim koordinatama i vremenu, i katkad vektorskih operatorskih funkcija u vektorskom prostoru. Veličina F je izvor, i skalarna je ili vektorska funkcija prostora i vremena. U zadaćama analize veličine L i F su poznate, a polje ψ je nepoznato i treba ga odrediti. Jednadžba (A.21) je linearna po nepoznanici ψ ako je operator L linearan, a to je slučaj ako npr. nema člana koji sadrži ψ^2 , ili produkt dviju komponenata od ψ , ili više potencije odnosno nelinearne funkcije od ψ .

Ako je $F = 0$, jednadžba je *homogena*. Ako je $(\psi_1, \psi_2, \dots)$ skup rješenja homogene

¹ Engleski kernel, njemački Kern.

linearne jednadžbe

$$L\psi = 0, \quad (\text{A.22})$$

tada je linearna kombinacija rješenja

$$\Psi = \sum a_i \psi_i \quad (\text{A.23})$$

također rješenje jednadžbe (A.22). Rješenja ψ_i su partikularna, a Ψ je opće rješenje te jednadžbe ako se izborom konstanti a_i može dobiti bilo koje rješenje od (A.22).

Ako je $F \neq 0$, jednadžba je *nehomogena*. Ako je ψ_n rješenje nehomogene linearne jednadžbe

$$L\psi_n = F, \quad (\text{A.24})$$

a ako je ψ_h bilo koje rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe

$$L\psi_h = 0, \quad (\text{A.25})$$

tada je zbroj rješenja $\Psi = \psi_n + \psi_h$ rješenje nehomogene jednadžbe. Također, ako je ψ_1 rješenje nehomogene linearne jednadžbe

$$L\psi_1 = F_1, \quad (\text{A.26})$$

a ψ_2 rješenje nehomogene linearne jednadžbe

$$L\psi_2 = F_2, \quad (\text{A.27})$$

i tako redom dalje, tada je zbroj

$$\Psi = \sum a_i \psi_i, \quad (\text{A.28})$$

rješenje nehomogene linearne jednadžbe oblika

$$L\Psi = \sum a_i F_i. \quad (\text{A.29})$$

A.5. Rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

Parcijalne diferencijalne jednadžbe oblika (A.21) sadrže više od jedne neovisne varijable, tj. polje je funkcija $\psi = \psi(u_1, u_2, \dots)$. Te jednadžbe je mnogo teže riješiti nego obične diferencijalne jednadžbe koje sadrže samo jednu neovisnu varijablu. Posebnu važnost imaju dvije metode rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (A.21)

$$L\psi = g, \quad (\text{A.30})$$

poznate kao metoda Greenove funkcije i metoda separacije varijabli. Greenovom metodom rješenja se traže u obliku integrala s jezgrom. Takva rješenja imaju prednost da su općenita. Integral je invarijantan na transformacije koordinata ako ih provodimo poštujući pravila koja osiguravaju tu invarijantnost. Kad se jednom odredi Greenova funkcija rubnog problema, u načelu možemo odrediti rješenje homogene ili nehomogene jednadžbe. Tako npr. Poissonova diferencijalna jednadžba (A.15) oblika

$$\Delta \psi = -g(x, y, z), \quad (\text{A.31})$$

ima integralno rješenje

$$\psi(x, y, z) = \int_{V'} \frac{g(x', y', z')}{4\pi R} dx' dy' dz'. \quad (\text{A.32})$$

Veličinu $1/(4\pi R)$ nazivamo *Greenova funkcija* i ista je za bilo koju funkciju izvora g . R jest udaljenost između točke (x, y, z) i točke (x', y', z') . Nehomogeni dio jednadžbe, tj. funkcija g , jest konačna integrabilna funkcija od x, y, z , koja pada prema nula u beskonačnosti brzinom koja osigurava egzistenciju integrala (A.32). Rješenje sličnog oblika možemo dobiti i za homogene jednadžbe. Tada je funkcija g određena rubnim uvjetom, a Greenova je funkcija dana vrstom jednadžbe koju treba riješiti.

Druga metoda rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi jest *postupak faktORIZACIJE* ili *separacije varijabli*. Početnu jednadžbu od nekoliko neovisnih varijabli dijelimo, tj. separiramo u skup običnih diferencijalnih jednadžbi od kojih svaka sadrži samo jednu neovisnu varijablu. Ovaj postupak nije općenit. Separaciju biramo svaki put ponovno prema koordinatnom sustavu, i možemo je provesti samo u posebnim slučajevima.² Dobivena rješenja separiranih običnih diferencijalnih jednadžbi označit ćemo s $U_1(u_1), U_2(u_2), \dots$. Plohe $\psi(u_1, u_2, \dots) = 0$ nazivaju se nodalne plohe od ψ . U ograničenom skupu koordinatnih sustava možemo naći skup ψ_i -ova s nodalnim plohami $\psi = 0$, koje se podudaraju s tri familije koordinatnih ploha ($u_i = \text{konst.}$), i gdje se svi ψ_i -ovi mogu izraziti kao produkt faktora

$$\psi_i = U_1(u_1)U_2(u_2)\dots \quad (\text{A.33})$$

Takva rješenja jednadžbe (A.30) separirana su u faktore koji svaki ovisi o jednoj koordinati. Naravno, familija separiranih rješenja (A.33) čini mali podskup skupa svih rješenja jednadžbe (A.30). Ključno svojstvo koje taj podskup mora zadovoljavati jest da *sva rješenja* parcijalne diferencijalne jednadžbe možemo izgraditi od linearnih kombinacija članova familije separiranih rješenja. Potpuno rješenje jednadžbe (A.30) u općem obliku može glasiti

² Separabilni koordinatni sustavi u tri dimenzije za Helmholtzovu jednadžbu za 11 slučajeva prikazani su u P.M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Part I, McGraw-Hill, New York, 1953. Opširniji prikaz pogledati u P. Moon, D.E. Spencer, *Field Theory Handbook*, Springer-Verlag, Berlin 1961.

$$\Psi = \sum a_i \psi_i . \quad (\text{A.34})$$

Jednom kada odredimo separirana rješenja ψ_i lako određujemo i sva ostala.

Koordinatni sustavi koji daju familije separiranih rješenja za određenu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu nazivaju se *separabilni koordinatni sustavi*. Za takve sustave moguće je dobiti rješenja u jednostavnijem obliku nego li su to rješenja u obliku redova ili integrala funkcija od više varijabli.

A.6. Rubni uvjeti

Zadaci s rubnim vrijednostima moraju uz diferencijalnu jednadžbu sadržavati i zadane rubne uvjete. Diferencijalne jednadžbe (A.14 – 18) imaju beskonačan broj različitih rješenja. Jedinstvenost rješenja, što je zahtjev iz primjena i nužan u fizikalnim interpretacijama, slijedi jedino uz dodatne uvjete, najčešće uvjete koje rješenje mora zadovoljavati na granici područja. Općenito nije teško naći opće rješenje jednadžbe (A.30), nego je glavni problem utvrditi *partikularno rješenje* koje odgovara zadanoj rubnoj zadaći. Zadaci s rubnim vrijednostima međusobno se razlikuju po prirodi primijenjenih *rubnih uvjeta*. I oblik (geometrija) rubova i propisano *ponašanje polja* ψ mogu biti različiti. Treba napomenuti da ovdje i *početne uvjete* uzimamo kao *rubne uvjete* za plohu $t = 0$. Posljedica toga jest da rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi razvrstavamo u skladu s oblicima rubnih ploha koji "generiraju" rješenja, i također u skladu s prirodom rubnih uvjeta na rubnim ploham.

Razlikujemo dvije vrste rubnih ploha: *zatvorene* i *otvorene plohe*. Zatvorena rubna ploha je ona koja obuhvaća polje sa svih strana i zatvara ga u konačni dio prostora. Otvorena ploha jest ona koja potpuno ne zatvara polje i dopušta mu da se prostire u beskonačnost u najmanje jednom smjeru tako da se polje prostire u beskonačnom volumenu. Obično su postavljeni rubni uvjeti za polje zadane vrijednosti polja u svakoj točki na rubnoj plohi, ili je zadana komponenta gradijenta okomita na plohu na samoj rubnoj plohi, ili obadvoje. Postoji nekoliko vrsta rubnih uvjeta:³

1. *Dirichletovi rubni uvjeti* zadaju vrijednost od ψ na rubnoj plohi.
2. *Neumannovi rubni uvjeti* zadaju vrijednost okomite komponente gradijenta $\partial\psi/\partial n$ na rubnoj plohi.
3. *Mješoviti rubni uvjeti* zadaju vrijednost od ψ na jednom dijelu rubne plohe, a vrijednost okomite komponente gradijenta $\partial\psi/\partial n$ po drugom (preostalom) dijelu rubne plohe.
4. *Cauchyjevi rubni uvjeti* zadaju obadvoje, i vrijednost polja ψ i vrijednost okomite komponente gradijenta $\partial\psi/\partial n$ na istoj rubnoj plohi.

³ Pogledati npr. Z. Haznadar, M. Lovenjak, *Rješavanje polja metodom konačnih diferencija*, Elektrotehnika 5/71, Zagreb, 1971.

Različite vrste rubnih uvjeta odgovaraju za različite vrste parcijalnih diferencijalnih jednačbi i za različite rubne plohe. Tako *eliptičke* diferencijalne jednačbe (Helmholtzova, Poissonova i Laplaceova) i zatvorene rubne plohe uz Dirichletove ili Neumannove uvjete daju jedinstveno rješenje rubne zadaće. *Paraboličke* diferencijalne jednačbe (jednačbe difuzije) i otvorene rubne plohe (uz Dirichletove ili Neumannove uvjete) imaju jedinstveno rješenje zadaće. Konačno, *hiperboličke* diferencijalne jednačbe (valna jednačba u dvije dimenzije) i otvorene rubne plohe uz Cauchyjeve uvjete imaju jedinstveno i stabilno rješenje.

U odnosu na oblik rubova može se reći da je najbolje, ako je moguće, "izgraditi" na rubovima koordinatni sustav odgovarajući rubovima i to tako da koordinatne plohe sustava budu podudarne s rubnim plohama u zadaći.

A.7. Svojstvene vrijednosti i funkcije

Središnji problem teorije polja jest prilagođenje rješenja dane parcijalne diferencijalne jednačbe primjerenim rubnim uvjetima. Svaka fizikalna zadaća sadrži diferencijalnu jednačbu i rubne uvjete koje rješenje te jednačbe mora zadovoljiti. U odjeljku A.6. smo pokazali da za pojedinu vrstu diferencijalnih jednačbi postoji određen skup rubnih uvjeta koji daju jedinstveno rješenje. Pomoću *svojstvenih funkcija* možemo dobiti rješenja diferencijalne jednačbe koja će zadovoljiti rubne uvjete na rubnim plohama posebno jednostavnog oblika. Analizirat ćemo homogenu jednačbu (A.22)

$$L\psi = 0, \quad (\text{A.35})$$

gdje smo s L označili linearne operatore koji mogu biti $n \times n$ matrice na n -dimenzionalnom realnom ili kompleksnom prostoru, operatori diferenciranja na prostorima diferencijalnih funkcija, integralni operatori, itd. Polje ψ je skalarno ili vektorsko, te može biti realna ili kompleksna funkcija koordinata prostora i vremena.

Svojstvene vrijednosti linearnog operatora L u jednačbi (A.35) su *skalari* λ , realni ili kompleksni, takvi da vrijedi

$$L\psi = \lambda\psi, \quad (\text{A.36})$$

barem za jedan element $\psi \neq 0$ iz prostora u kojem operator djeluje. Element ψ je *svojstveni element*. Ako operator djeluje na prostoru funkcija ψ je *svojstvena funkcija*. Relacija (A.36) jest kanonski oblik jednačbe svojstvenih vrijednosti.⁴

Za diferencijalne operatore L prostori svih diferencijabilnih funkcija su u određenom smislu "preveliki" budući da često svojstvena vrijednost može biti svaki komplek-

⁴ Uz izraz svojstvene vrijednosti često se koristi izraz *karakteristične vrijednosti*. Njemački izraz "eigenwerte" se toliko proširio da se na engleskom govornom području uobičajio njemačko-engleski hibrid "eigenvalue".

sni broj. Zato djelovanje tih operatora (npr. Δ ili d^2/dx^2) promatramo na klasama funkcija koje zadovoljavaju određene uvjete na krajevima područja. Tako dolazimo do *svojstvenih vrijednosti* i *svojstvenih funkcija zadataka s rubnim vrijednostima*. Treba paziti da se kao definicijska jednadžba često svojstvena vrijednost uzima definirana s

$$L\psi = -\lambda\psi, \quad (\text{A.37})$$

što daje razliku u predznaku s obzirom na uobičajenu definiciju svojstvene vrijednosti operatora.

Metoda redova kojom se rješavaju zadaci sa zadanim uvjetima na granici područja na kojem vrijedi diferencijalna jednadžba (A.30) osniva se na nizovima svojstvenih funkcija. Postupak uključuje separaciju parcijalne diferencijalne jednadžbe u nekoliko običnih diferencijalnih jednadžbi. Rješenja tih jednadžbi sadrže *separacijske konstante*. Ako ta rješenja izaberemo tako da svako zadovoljava zadane jednostavne rubne uvjete na krajevima područja odgovarajuće neovisne varijable dobivamo svojstvene funkcije. Svojstvene vrijednosti zadaće su one vrijednosti separacijske konstante za koje odgovarajuće svojstvene funkcije zadovoljavaju zadane rubne uvjete. Redovi svojstvenih funkcija za sve (dozvoljene) svojstvene vrijednosti separacijskih konstanti zadovoljavaju po volji izabrani niz rubnih vrijednosti. Svojstvene vrijednosti funkcije zadaće s rubnim vrijednostima odnose se dakle na diferencijalnu (ili integralnu) jednadžbu (A.35) i zadane rubne uvjete (prema odjeljku A.6). Parcijalne diferencijalne jednadžbe u tri ili više varijabli imaju svojstvene funkcije od više od jedne varijable.

A.8. Helmholtzova jednadžba i elementarne valne funkcije

Analizirat ćemo rješenja linearne nehomogene diferencijalne jednadžbe (A.30)

$$L\psi = g, \quad (\text{A.38})$$

s karakterističnim oblikom diferencijalnog operatora

$$L = \Delta + k^2, \quad (\text{A.39})$$

gdje je k^2 označena konstanta koja može biti bilo koji kompleksni broj i gdje simbol Δ označava Laplaceov operator u jednom od ortogonalnih koordinatnih sustava u kojem je moguće provesti separaciju varijabli.⁵ Za slučaj da je pobuda $g = 0$ dobivamo jednadžbu oblika

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad (\text{A.40})$$

koju nazivamo homogena *Helmholtzova jednadžba*. Uobičajeno je nazivati jednadžbu

⁵ Pogledati npr. P. Moon, D.E. Spencer, *Field Theory Handbook*, Springer-Verlag, Berlin 1961.

kompleksnom kad se traže rješenja polja ψ u kompleksnom području, bez obzira da li je k^2 realno ili kompleksno.⁶ Jednadžba je skalarna ili vektorska prema tome da li je ψ skalarno ili vektorsko polje.

Ako je konstanta $k = 0$ jednadžba (A.40) prelazi u Laplaceovu jednadžbu, a za $k = 0$ u (A.38) i $g \neq 0$ dobivamo Poissonovu jednadžbu. Obje te jednadžbe predstavljaju statička polja. Ako je pak $k^2 \neq 0$ dobivamo jednadžbu koja slijedi iz valne jednadžbe separacijom varijabli.

Analizirajmo poseban slučaj kada skalarna Helmholtzova jednadžba (A.40) u pravocrtnom koordinatnom sustavu glasi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0, \quad (\text{A.41})$$

gdje uzimamo da je ψ skalarna kompleksna funkcija, a k^2 realna pozitivna konstanta ($k^2 > 0$). Opća rješenja Helmholtzove jednadžbe (A.41) dobit ćemo postupkom separacije varijabli u pravocrtnom koordinatnom sustavu tako da nađemo rješenje

$$\psi = X(x)Y(y)Z(z), \quad (\text{A.42})$$

tj. u obliku umnoška separiranih rješenja tri skalarne kompleksne funkcije od po samo jedne prostorne koordinate. Nakon uvrštenja rješenja (A.42) u jednadžbu (A.41) i dijeljenja s ψ dobivamo

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0. \quad (\text{A.43})$$

Budući da je svaka varijabla neovisna, jednadžba (A.43) može biti nula za sve vrijednosti varijabli samo ako je svaki član jednadžbe neovisan o varijablama x , y i z . To znači da mora biti

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -k_x^2, \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -k_y^2, \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= -k_z^2, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

gdje su k_x^2 , k_y^2 i k_z^2 konstante. Izbor predznaka minus pred kvadratom konstanti uzeli

⁶ Točnije bi bilo svrstati jednadžbe na realne i kompleksne prema konstanti k^2 , i onda za realno k^2 govoriti o realnim ili kompleksnim rješenjima realne Helmholtzove jednadžbe.

smo zbog kasnijih pogodnosti, slično kao u jednadžbi (A.37). Konačno možemo trodimenzionalnu Helmholtzovu jednadžbu (A.41) separirati u tri obične (jednodimenzionalne) kompleksne jednadžbe

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X &= 0, \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y &= 0, \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z &= 0.\end{aligned}\tag{A.45}$$

Iz (A.43) proizlazi da *separacijske konstante* moraju zadovoljavati jednadžbu

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2, \tag{A.46}$$

koju nazivamo *separacijska jednadžba*.

Sve jednadžbe u (A.45) su istoga oblika. Ako je konstanta separacije pozitivna, jednadžbu takvog oblika u matematici i fizici zovemo *jednadžba harmoničkog titranja*. Svako rješenje te jednadžbe nazvat ćemo *harmoničkom funkcijom*. Fundamentalni sustav rješenja, tj. harmoničke funkcije čijom linearnom kombinacijom dobivamo svaku harmoničku funkciju, jest par

$$\sin(k_i u_i), \cos(k_i u_i) \quad \text{ili} \quad e^{\pm j k_i u_i} \tag{A.47}$$

pa ćemo svaku takvu funkciju za $i = x, y, z$ označavati s $h(k_i u_i)$.⁷ Bilo koje dvije od tih su linearno neovisne. Množene s konstantom opet daju harmoničku funkciju. Suma harmoničkih funkcija opet je harmonička funkcija. Prema (A.42) i (A.45) slijedi da su

$$\Psi_{k_x k_y k_z} = h(k_x x) h(k_y y) h(k_z z), \tag{A.48}$$

elementarna rješenja skalarne kompleksne Helmholtzove jednadžbe (A.41) uz uvjet da separacijske konstante zadovoljavaju jednadžbu (A.46). Ova rješenja nazivamo još i *elementarne valne funkcije* ili *elementarni zonski harmonici*.

Prema (A.34) linearne kombinacije elementarnih valnih funkcija (A.48) moraju također biti rješenja Helmholtzove jednadžbe (A.41). Iz relacije (A.46) proizlazi da za

⁷ Harmoničke funkcije u matematici su dvaput neprekidna derivabilna rješenja Laplaceove jednadžbe. Točnije, to su rješenja koja su neprekidna zajedno sa svojim prvim i drugim derivacijama. U jednoj dimenziji Laplaceova jednadžba se svodi na $d^2 X/dx^2 = 0$, pa bi harmoničke funkcije bile sve linearne kombinacije funkcija 1 i x . U primijenama je uobičajen naziv "harmoničke funkcije" u slučaju jedne neovisne varijable proširiti na svako rješenje općenitije jednadžbe (A.45).

zadani k samo dvije od tri separacijske konstante k_x , k_y i k_z možemo izabrati neovisno, tako da možemo dobiti *opće valne funkcije* zbrajanjem preko mogućih izbora za jednu ili dvije separacijske konstante. Na primjer

$$\psi = \sum_{k_x} \sum_{k_y} B_{k_x k_y} \psi_{k_x k_y k_z} = \sum_{k_x} \sum_{k_y} B_{k_x k_y} h(k_x x) h(k_y y) h(k_z z) , \quad (\text{A.49})$$

je rješenje Helmholtzove jednadžbe. Koeficijenti $B_{k_x k_y}$ su općenito kompleksne konstante. Vrijednosti realnih pozitivnih konstanti k_x^2 , k_y^2 i k_z^2 dovoljnih za svaku posebnu zadaću određuju se pomoću postavljenih rubnih uvjeta. Nazivamo ih još i valni brojevi, a predstavljaju *svojstvene vrijednosti rubne zadaće*. Elementarne valne funkcije koje odgovaraju svojstvenim vrijednostima su *svojstvene funkcije rubne zadaće*. Izraz (A.49) možemo prepoznati kao dvostruki Fourierov red po varijablama x i y za neku fiksnu vrijednost varijable $z = z_0$.

Opće valne funkcije možemo dobiti i integracijom preko jedne ili dviju konstanti k_i , ($i = x, y, z$). Tada je rješenje Helmholtzove jednadžbe npr.

$$\psi = \int \int_{k_x k_y} b(k_x, k_y) \psi_{k_x k_y k_z} dk_x dk_y = \int \int_{k_x k_y} b(k_x, k_y) h(k_x x) h(k_y y) h(k_z z) dk_x dk_y , \quad (\text{A.50})$$

gdje je $b(k_x, k_y)$ analitička funkcija, a integraciju provodimo po bilo kojem putu u kompleksnoj (k_x, k_y) domeni. Jednadžba (A.50) ima kontinuiranu promjenu separacijskih konstanti, pa kažemo da postoji neprekinuti spektar svojstvenih vrijednosti. Opće valne funkcije oblika (A.50) najčešće se koriste za tvorbu Fourierovih integrala.

Analizirajmo fizikalno značenje dobivenih rješenja Helmholtzove jednadžbe (A.41). Pretpostavimo da polje ψ može biti skalarna ili vektorska, realna ili kompleksna funkcija koordinata prostora i vremena, ili fazor, i da k^2 može biti bilo koji kompleksan ili realan broj. Iako je iz matematičkih razloga pogodno upotrijebiti kompleksne veličine i račun, treba imati na umu da se fizikalna bit polja mora predstaviti realnim funkcijama. Tako se za kompleksno polje ψ u jednadžbi (A.41) trenutno realno rješenje dobije kao realni dio kompleksnog rješenja

$$\psi_{Re} = \text{Re} \{ \psi \} , \quad (\text{A.51})$$

koje je, kao i imaginarni dio, također rješenje jednadžbe (A.41). Ako je polje $\underline{\psi}$ u fazorskom prikazu amplituda vremenski sinusnih titraja ovisna o prostornim koordinatama, te ako prostornu razdiobu određuje jednadžba (A.41), tada se realna vrijednost polja određuje kao

$$\psi_{Re} = \text{Re} \{ \underline{\psi} e^{j\omega t} \} . \quad (\text{A.52})$$

Rješenja jednadžbe (A.41), tj. elementarne valne funkcije u obliku $h(kx) = e^{-jkx}$, gdje je k pozitivno i realno, predstavljaju sinusne valove koji neprigušeni putuju u $+x$ smjeru. Ako je k kompleksno i $\text{Re}\{k\} > 0$ imamo sinusne u $+x$ smjeru putujuće valove koji su

ili prigušeni ili pojačani, već prema tome da li je $Im\{k\}$ negativno ili pozitivno. Slično rješenje u obliku $h(kx) = e^{+jkx}$, uz $Re\{k\} > 0$, predstavljaju u $-x$ smjeru putujuće sinusne valove, prigušene ili pojačane ako je k kompleksan broj. U slučaju da je k čisto imaginaran broj tada dvije valne funkcije e^{+jkx} i e^{-jkx} predstavljaju polja koja iščezavaju kada x teži u $+\infty -\infty$. Rješenja oblika $h(kx) = \sin(kx)$ i $h(kx) = \cos(kx)$ s realnim k predstavljaju čiste stojne valove. Ako je k kompleksno te funkcije predstavljaju lokalne stojne valove, a ako je k čisto imaginarno imamo dva polja koja iščezavaju. Za degenerirani slučaj $k = 0$ imamo harmoničke funkcije $h(0,x) = 1,x$. Izbor odgovarajuće harmoničke funkcije (A.47) tj. elementarne valne funkcije kao rješenja Helmholtzove jednadžbe (A.41) je u svakom posebnom slučaju zadatka s rubnim vrijednostima stvar iskustva i domišljatosti.

PRILOG B

DIRACOVA δ FUNKCIJA

U makroskopskom pristupu izvore polja opisujemo kontinuiranim raspodjelama u prostoru. Ponekad je korisno idealizirati raspodjelu izvora pretpostavkom da je izvor konačne veličine zbijen u točku. To rezultira beskonačnom (ili singularnom) gustoćom izvora. Za opisivanje takvih veličina Dirac⁸ je uveo δ funkciju koju u jednoj dimenziji definiramo kao

$$\delta(x-x')=0 \quad ; \quad x \neq x' , \quad (B.1)$$

uz uvjet da vrijedi

$$\int_l \delta(x-x') dx = 1 , \quad (B.2)$$

ako je x' u domeni integracije l . To znači da u točki x' ta funkcija postaje neizmjerljiva, a u svim ostalim jednaka je nuli a integral u relaciji (B.2) je određeno proširenje integracije na takve singularitete. Možemo zamisliti da nastaje iz pravokutnog impulsa ako širina tog impulsa teži k nuli, a visina teži u beskonačnost tako da mu površina ostaje konstantna. Diracova δ nije funkcija u uobičajenom smislu te riječi, pa za imenovanje ovakvih singularnih veličina često koristimo izraze "poopćena funkcija" ili "simbolička funkcija". Važna svojstva δ funkcije jesu

$$\int_l \psi(x) \delta(x-x') dl = \begin{cases} \psi(x') & ; \quad x' \in l , \\ 0 & ; \quad x' \notin l , \end{cases} \quad (B.3)$$

i

$$\delta(x-x') = \delta(x'-x) . \quad (B.4)$$

Trodimenzijsku δ funkciju definiramo relacijama

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=0 \quad ; \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' , \quad (B.5)$$

i

⁸ Pogledati u P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, Fair Lawn, 1935.

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{x} = 1 \quad ; \quad \mathbf{r} \in V . \quad (\text{B.6})$$

Odgovarajuće izrazima (B.3) i (B.4) i za trodimenzionalnu δ funkciju vrijedi

$$\int_V \psi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \begin{cases} \psi(\mathbf{r}') & ; \quad \mathbf{r}' \in V , \\ 0 & ; \quad \mathbf{r}' \notin V , \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

i

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) . \quad (\text{B.8})$$

Važan identitet koji koristimo jest

$$-\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (\text{B.9})$$

U pravocrtnom koordinatnom sustavu vrijedi

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') , \quad (\text{B.10})$$

a za cilindrični koordinatni sustav jest

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(r - r') \delta(\alpha - \alpha') \delta(z - z')}{r} . \quad (\text{B.11})$$

U sfernom koordinatnom sustavu je

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(r - r') \delta(\alpha - \alpha') \delta(\vartheta - \vartheta')}{r^2 \sin \vartheta} . \quad (\text{B.12})$$

Diracovu δ funkciju mjerimo u jedinicama recipročnog volumena bez obzira na to koliko prostor ima dimenzija.

PRILOG C

VEKTORSKA ANALIZA

U ovom prilogu dajemo kratak pregled rezultata vektorske algebre i analize koje najčešće koristimo u teoriji elektromagnetizma. Apsolutna vrijednost A vektora $\mathbf{A}$, koju označavamo i s $|\mathbf{A}|$ ima sljedeća svojstva

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &\geq 0, \\ |\mathbf{A}| = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}, \\ |\lambda \mathbf{A}| &= |\lambda| |\mathbf{A}|, \\ |\mathbf{A} + \mathbf{B}| &\leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Ovdje je λ skalar. Vektor

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{A}, \tag{C.2}$$

jest jedinični vektor u smjeru vektora $\mathbf{A}$.

C.1. Relacije množenja

Skalarni ili in-produkt dva vektora $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ definiramo kao

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \alpha, \tag{C.3}$$

gdje je α kut između vektora $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$. Svojstva skalarnog produkta jesu

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \\ (\lambda \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{B}) = \lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \\ |\mathbf{A}| &= A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Vektorski ili eks-produkt dva vektora $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ definiramo kao

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = n |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \alpha, \tag{C.5}$$

gdje je α kut između vektora $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, a n jedinični vektor u smjeru okomitom i na $\mathbf{A}$ i na

B tako da A , B i n tvore desno orijentirani sustav. Svojstva vektorskog produkta jesu

$$\begin{aligned} A \times B &= -B \times A, \\ A \times (B + C) &= A \times B + A \times C, \\ (\lambda A) \times B &= A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B), \\ A \times A &= 0. \end{aligned} \tag{C.6}$$

Vektorske relacije višestrukih produkata jesu

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= C \cdot (A \times B) = B \cdot (C \times A), \\ A \times (B \times C) &= B(A \cdot C) - C(A \cdot B), \\ A \times (B \times C) - C \times (B \times A) &= B \times (A \times C), \\ A \times [B \times (C \times D)] &= (B \cdot D)(A \times C) - (B \cdot C)(A \times D), \\ (A \times B) \cdot (C \times D) &= (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C), \\ (A \times B) \times (C \times D) &= [(A \times B) \cdot D]C - [(A \times B) \cdot C]D, \\ (A \times B) \cdot [(B \times C) \times (C \times A)] &= [A \cdot (B \times C)]^2. \end{aligned} \tag{C.7}$$

C.2. Diferencijalne relacije

Derivacijom skalarnog polja $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ u zadanoj točki vektora položaja $\mathbf{r}$ po vektoru $\mathbf{c}$ zovemo graničnu vrijednost kvocijenta

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{c}) - \varphi(\mathbf{r})}{\epsilon}. \tag{C.8}$$

Derivacija $\partial \varphi / \partial c_0$ pokazuje brzinu prirasta funkcije φ u smjeru jediničnog vektora $\mathbf{c}_0$ u svakoj točki. Od svih derivacija u zadanoj točki po različitim jediničnim vektorima najveća je derivacija $\partial \varphi / \partial n$ u smjeru jediničnog vektora $\mathbf{n}$ okomice na ekvipotencijalnu plohu u toj točki.

Gradijentom skalarnog polja φ zovemo vektor koji ima smjer okomice na ekvipotencijalnu plohu i duljinu koja je jednaka $\partial \varphi / \partial n$. Taj vektor označavamo s $\nabla \varphi$ ili s grad φ i definiramo ga kao

$$\nabla \varphi(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{n} \varphi dS}{\Delta V}. \tag{C.9}$$

Ako je λ skalarna konstanta, a u i v su skalarna polja osnovna svojstva gradijenta jesu

$$\begin{aligned}
\nabla\lambda &= 0 , \\
\nabla(u+v) &= \nabla u + \nabla v , \\
\nabla\lambda u &= \lambda \nabla u , \\
\nabla(uv) &= v\nabla u + u\nabla v , \\
\nabla u(v) &= u'(v) \nabla v .
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Divergenciju vektorskog polja $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ u točki $\mathbf{r}$ označavamo s $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ili $\text{div}\mathbf{F}(\mathbf{r})$ i definiramo kao skalar koji je granična vrijednost kvocijenta

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V} . \tag{C.11}$$

Ovdje je ΔV volumen koji sadrži točku $\mathbf{r}$ a okružuje ga *zatvorena* površina S , dok je $\mathbf{n}$ jedinični vektor okomice na površinu dS . Divergencija predstavlja tijek vektora $\mathbf{F}$ iz volumena ΔV po jedinici tog volumena, i ako je na nekom mjestu različita od nule tada $\mathbf{F}$ na tom mjestu ima svoj izvor ili ponor. Osnovna svojstva divergencije jesu

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{C} &= 0 , \\
\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} , \\
\nabla \cdot \lambda \mathbf{A} &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{A} , \\
\nabla \cdot (u\mathbf{A}) &= u \nabla \cdot \mathbf{A} + (\nabla u) \cdot \mathbf{A} , \\
\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) .
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Ovdje su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ vektorska polja, u je skalarno polje, $\mathbf{C}$ je konstantan vektor, a λ skalar-na konstanta.

Rotacija ili rotor vektorskog polja $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ koju označavamo s $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ili $\text{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r})$ jest vektor koji je granična vrijednost kvocijenta

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS}{\Delta V} . \tag{C.13}$$

I ovdje je ΔV volumen koji sadrži točku $\mathbf{r}$ a okružuje ga *zatvorena* površina S , dok je $\mathbf{n}$ jedinični vektor okomice na površinu dS . Osnovna svojstva rotora jesu

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} , \\
\nabla \times \lambda \mathbf{A} &= \lambda \nabla \times \mathbf{A} , \\
\nabla \times (u\mathbf{A}) &= (\nabla u) \times \mathbf{A} + u(\nabla \times \mathbf{A}) , \\
\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} .
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Ovdje su A i B vektorska polja, u je skalarno polje, a λ skalarna konstanta. Sve smo izraze pisali korištenjem *Hamiltonova operatora* ∇ (*nabla*). To je vektorski diferencijalni operator i pri njegovoj primjeni moramo poštovati zakone vektorske algebre i pravila parcijalnog deriviranja.

Korisni identiteti koji uključuju gradijent, divergenciju i rotor jesu

$$\begin{aligned}
 \nabla(A \cdot B) &= A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B , \\
 \nabla \times (\nabla u) &= 0 , \\
 \nabla \cdot (\nabla \times A) &= 0 , \\
 \nabla \times (\nabla \times A) &= \nabla(\nabla \cdot A) - \Delta A , \\
 \nabla \cdot (\nabla u) &= \Delta u , \\
 \Delta(uv) &= u \Delta v + (\nabla u) \cdot (\nabla v) + v \Delta u , \\
 \Delta(uA) &= u \Delta A + A \Delta u + 2[(\nabla u) \cdot \nabla]A .
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

Ovdje su A i B vektorska polja, u i v su skalarna polja, a $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ je *Laplaceov operator*.

C.3. Integralne relacije

U izrazima koji slijede V je volumen ograničen regularnom plohom S . Jedinični vektor $\mathbf{n}$ je okomit na dS , a pozitivnog je predznaka kada je usmjeren prema van iz zatvorene plohe. Temeljni izraz za različite integralne relacije jest

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial u} dV = \oint_S f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_u) dS \tag{C.16}$$

Ovdje je $\mathbf{a}_u$ jedinični vektor u smjeru proizvoljne odrednice u a f skalarno polje. Primjenom tog izraza u trodimenzionalnim ortogonalnim koordinatnim sustavima dobivamo sljedeće *Gaussove teoreme*

$$\begin{aligned}
 \int_V \nabla \cdot A dV &= \oint_S (A \cdot \mathbf{n}) dS , \\
 \int_V \nabla \times A dV &= \oint_S (\mathbf{n} \times A) dS , \\
 \int_V \nabla u dV &= \oint_S u \mathbf{n} dS .
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

Ovdje je A vektorsko a u skalarno polje. Odabirom posebnih vektora, kao na primjer $u(\nabla v)$, gdje su u i v skalarna polja, i njihovim uvođenjem u izraze (C.17) možemo dobiti niz *Greenovih teorema* od kojih najčešće koristimo dva

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV = \oint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS , \quad (C.18)$$

$$\int_V [u \Delta v + (\nabla u) \cdot (\nabla v)] dV = \oint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS .$$

Ako je S regularna dvostrana ploha koju obrubljuje zatvorena krivulja l vrijede *Stokesovi teoremi*

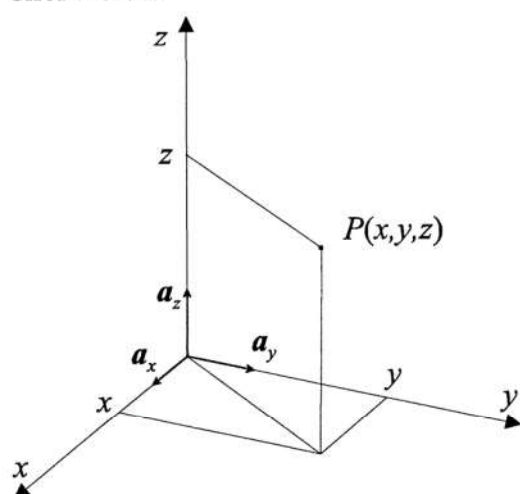
$$\begin{aligned} \int_S [\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] dS &= \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} , \\ \int_S [\mathbf{n} \times (\nabla u)] dS &= \oint_l u d\mathbf{l} , \\ \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{A} dS &= \oint_l d\mathbf{l} \times \mathbf{A} , \\ \int_S [(\nabla u) \times (\nabla v)] \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_l u (\nabla v) \cdot d\mathbf{l} = - \oint_l v (\nabla u) \cdot d\mathbf{l} . \end{aligned} \quad (C.19)$$

PRILOG D

KOORDINATNI SUSTAVI

D.1. Pravocrtni koordinatni sustav

Pravocrtni ili Kartezijev koordinatni sustav čine jedinični vektori $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ i $\mathbf{a}_z$ prema slici D.1.1.



Slika D.1.1. Pravocrtni koordinatni sustav, položaj točke i jedinični vektori

Vektor položaja točke P s odrednicama (x, y, z) jest

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z, \quad (\text{D.1})$$

a za jedinične vektore $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ i $\mathbf{a}_z$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0, \\ \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_z \quad ; \quad \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x \quad ; \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Nabla i Laplaceov operator u pravocrtnom koordinatnom sustavu imaju oblik

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

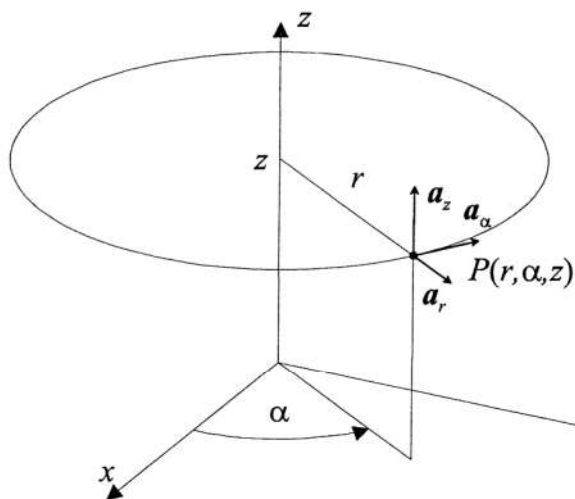
Za skalarno polje $u(x, y, z)$ i vektorsko polje $\mathbf{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\mathbf{a}_x + F_y(x, y, z)\mathbf{a}_y + F_z(x, y, z)\mathbf{a}_z$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\nabla u &= \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{a}_z , \\
\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} , \\
\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z , \\
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} , \\
\Delta \mathbf{F} &= \Delta F_x \mathbf{a}_x + \Delta F_y \mathbf{a}_y + \Delta F_z \mathbf{a}_z .
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Diferencijalni elementi duljine u smjeru odrednica jesu dx , dy i dz , a element volumena jest $dV = dxdydz$.

D.2. Cilindrični koordinatni sustav

Jedinične vektore $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\alpha$ i $\mathbf{a}_z$ koji čine cilindrični koordinatni sustav prikazali smo na slici D.2.1.



Slika D.2.1. Cilindrični koordinatni sustav, položaj točke i jedinični vektori

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_r &= \cos \alpha \mathbf{a}_x + \sin \alpha \mathbf{a}_y , \\
\mathbf{a}_\alpha &= -\sin \alpha \mathbf{a}_x + \cos \alpha \mathbf{a}_y , \\
\mathbf{a}_x &= \cos \alpha \mathbf{a}_r - \sin \alpha \mathbf{a}_\alpha , \\
\mathbf{a}_y &= \sin \alpha \mathbf{a}_r + \cos \alpha \mathbf{a}_\alpha .
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Jedinični vektori $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\alpha$ i $\mathbf{a}_z$ zadovoljavaju sljedeće relacije

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\alpha &= \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = 0, \\ \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\alpha &= \mathbf{a}_z \quad ; \quad \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_r \quad ; \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\alpha, \\ \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \alpha} &= \mathbf{a}_\alpha \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial \alpha} = -\mathbf{a}_r.\end{aligned}\tag{D.6}$$

Nabla u cilindričnom koordinatnom sustavu ima oblik

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{a}_\alpha + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z.\tag{D.7}$$

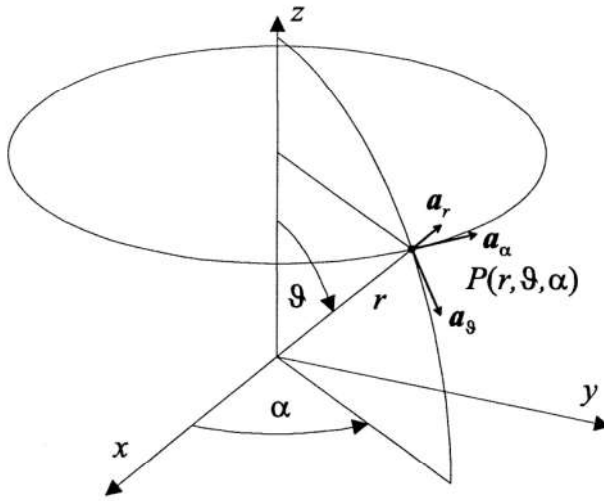
Vektorsko polje $\mathbf{F}(r, \alpha, z) = F_r(r, \alpha, z)\mathbf{a}_r + F_\alpha(r, \alpha, z)\mathbf{a}_\alpha + F_z(r, \alpha, z)\mathbf{a}_z$ i skalarno polje $u(r, \alpha, z)$ zadovoljavaju sljedeće relacije

$$\begin{aligned}\nabla u &= \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \mathbf{a}_\alpha + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{a}_z, \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \right) \mathbf{a}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \mathbf{a}_\alpha + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rF_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \alpha} \right) \mathbf{a}_z, \\ \Delta u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \Delta \mathbf{F} &= \left(\Delta F_r - \frac{F_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} \right) \mathbf{a}_r + \left(\Delta F_\alpha - \frac{F_\alpha}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial \alpha} \right) \mathbf{a}_\alpha + \Delta F_z \mathbf{a}_z.\end{aligned}\tag{D.8}$$

Diferencijalni elementi duljine u smjeru odrednica cilindričnog koordinatnog sustava su dr , $r d\alpha$ i dz , a element volumena jest $dV = r dr d\alpha dz$.

D.3. Sferni koordinatni sustav

Sferni koordinatni sustav čine jedinični vektori $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\vartheta$ i $\mathbf{a}_\alpha$ u smjeru odrednica r , ϑ i α . Položaj točke $P(r, \vartheta, \alpha)$ i jedinične vektore prikazali smo na slici D.3.1.



Slika D.3.1. Sferni koordinatni sustav, položaj točke i jedinični vektori

Odnosi između jediničnih vektora pravocutnog i sfernog koordinatnog sustava jesu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_r &= \sin \vartheta \cos \alpha \mathbf{a}_x + \sin \vartheta \sin \alpha \mathbf{a}_y + \cos \vartheta \mathbf{a}_z, \\
 \mathbf{a}_\vartheta &= \cos \vartheta \cos \alpha \mathbf{a}_x + \cos \vartheta \sin \alpha \mathbf{a}_y - \sin \vartheta \mathbf{a}_z, \\
 \mathbf{a}_\alpha &= -\sin \alpha \mathbf{a}_x + \cos \alpha \mathbf{a}_y, \\
 \mathbf{a}_x &= \sin \vartheta \cos \alpha \mathbf{a}_r + \cos \vartheta \cos \alpha \mathbf{a}_\vartheta - \sin \alpha \mathbf{a}_\alpha, \\
 \mathbf{a}_y &= \sin \vartheta \sin \alpha \mathbf{a}_r + \cos \vartheta \sin \alpha \mathbf{a}_\vartheta + \cos \alpha \mathbf{a}_\alpha, \\
 \mathbf{a}_z &= \cos \vartheta \mathbf{a}_r - \sin \vartheta \mathbf{a}_\vartheta.
 \end{aligned} \tag{D.9}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\vartheta &= \mathbf{a}_\vartheta \cdot \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_r = 0, \\
 \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\vartheta &= \mathbf{a}_\alpha; \quad \mathbf{a}_\vartheta \times \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a}_r; \quad \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\vartheta, \\
 \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \vartheta} &= \mathbf{a}_\vartheta; \quad \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \alpha} = \sin \alpha \mathbf{a}_\alpha; \quad \frac{\partial \mathbf{a}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -\mathbf{a}_r; \quad \frac{\partial \mathbf{a}_\vartheta}{\partial \alpha} = \cos \alpha \mathbf{a}_\alpha.
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

Hamiltonov operator u sfernom koordinatnom sustavu ima oblik

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{a}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{a}_\alpha. \tag{D.11}$$

Za vektorsko polje $\mathbf{F}(r, \vartheta, \alpha) = F_r(r, \vartheta, \alpha) \mathbf{a}_r + F_\vartheta(r, \vartheta, \alpha) \mathbf{a}_\vartheta + F_\alpha(r, \vartheta, \alpha) \mathbf{a}_\alpha$ i skalarno polje $u(r, \vartheta, \alpha)$ u sfernom koordinatnom sustavu vrijede relacije

$$\begin{aligned}
\nabla u &= \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \mathbf{a}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \mathbf{a}_\alpha, \\
\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta F_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha}, \\
\nabla \times \mathbf{F} &= \left\{ \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial(\sin \vartheta F_\alpha)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \alpha} \right] \right\} \mathbf{a}_r + \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_\alpha)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\vartheta + \\
&\quad + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r F_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{a}_\alpha, \\
\Delta u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}, \\
\Delta \mathbf{F} &= \left(\Delta F_r - \frac{2 F_r}{r^2} - \frac{2 \cot \vartheta F_\vartheta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} \right) \mathbf{a}_r + \\
&\quad + \left(\Delta F_\vartheta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} - \frac{F_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} \right) \mathbf{a}_\vartheta + \\
&\quad + \left(\Delta F_\alpha + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \alpha} - \frac{F_\alpha}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \alpha} \right) \mathbf{a}_\alpha.
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Diferencijalni elementi duljine u smjeru odrednica jesu dr , $r d\vartheta$ i $r \sin \vartheta d\alpha$, a element volumena jest $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\alpha$.

PRILOG E

BESSELOVA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Pri rješavanju problema u cilindričnom koordinatnom sustavu Laplaceovu jednadžbu separacijom varijabli često možemo svesti na diferencijalnu jednadžbu oblika

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(k^2 - \frac{p^2}{r^2} \right) f = 0 . \quad (\text{E.1})$$

Zamjenom $x = kr$ tu jednadžbu svodimo na standardni oblik *Besselove diferencijalne jednadžbe* p -tog reda

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2} \right) f = x \frac{d}{dx} \left(x \frac{df}{dx} \right) + (x^2 - p^2) f = 0 . \quad (\text{E.2})$$

Rješenja te jednadžbe jesu Besselove funkcije $J_{\pm p}(x)$ koje računamo pomoću

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+p+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m} . \quad (\text{E.3})$$

Ako p nije cijeli broj funkcije J_p i J_{-p} su dva neovisna rješenja jednadžbe (E.2). Kad je p cijeli broj gama funkcija $\Gamma(m+p+1)$ se svodi na $(m+p)!$ pa vrijedi $J_{-p} = (-1)^p J_p$ i ta dva rješenja više nisu neovisna. Tada za drugo neovisno rješenje umjesto J_{-p} uvodimo *Neumannove funkcije*⁹

$$N_p(x) = \lim_{n \rightarrow p} \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} . \quad (\text{E.4})$$

Kada je p pozitivan cijeli broj vrijedi

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m} , \quad (\text{E.5a})$$

⁹ Često se Neumannove funkcije nazivaju Besselove funkcije druge vrste, a J_p Besselove funkcije prve vrste.

$$N_0(x) = J_0(x) \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \phi(m), \quad (\text{E.5b})$$

za funkcije nultog reda i

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n},$$

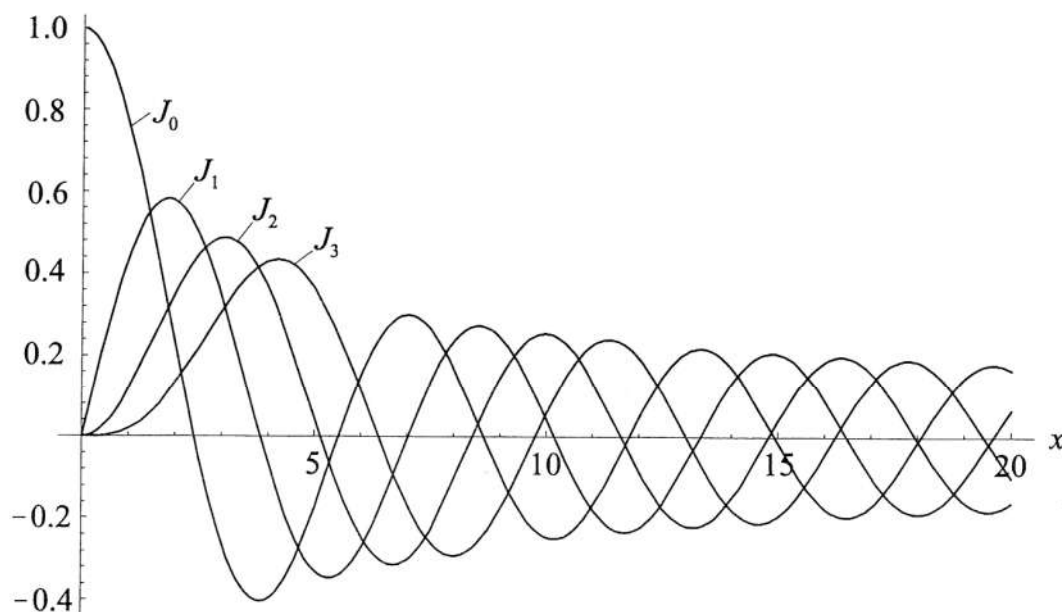
$$N_n(x) = J_n(x) \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2m} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} [\phi(m) + \phi(m+n)], \quad (\text{E.6})$$

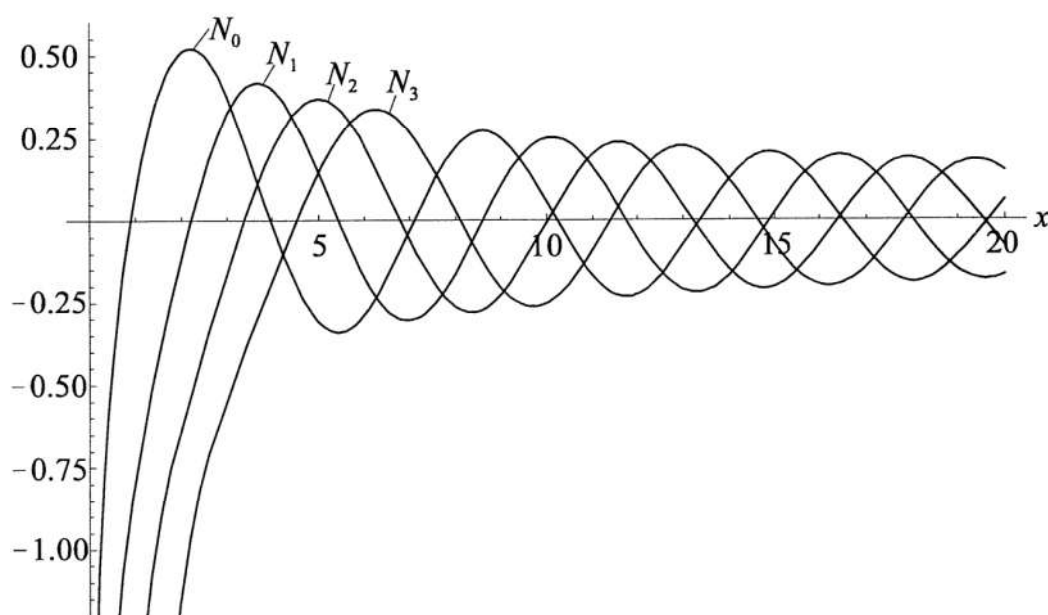
za cjelobrojni pozitivni n . U izrazima (E.5,6) je $\ln \gamma = 0.577216\dots$ Eulerova konstanta, a funkcija $\phi(m)$ jest

$$\phi(m) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}. \quad (\text{E.7})$$

Na slikama E.1 i E.2 prikazali smo tok Besselovih i Neumannovih funkcija.



Slika E.1. Besselove funkcije



Slika E.2. Neumannove funkcije

Često koristimo približenja za male argumente

$$\begin{aligned}
 J_0(x) &\approx 1, \\
 N_0(x) &\approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2}, \\
 J_n(x) &\approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2} \right)^n, \\
 N_n(x) &\approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^n,
 \end{aligned} \tag{E.8}$$

i približenja za velike argumente

$$\begin{aligned}
 J_n(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right), \\
 N_n(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{E.9}$$

Za opisivanje valnih pojava pogodno je definirati linearne kombinacije

$$\begin{aligned}
 H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + jN_n(x), \\
 H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - jN_n(x),
 \end{aligned} \tag{E.10}$$

koje se nazivaju *Hankelove funkcije* prve i druge vrste i također su rješenja Besselove diferencijalne jednačbe. Približenja Hankelovih funkcija za male argumente izvodimo iz izraza (E.8), a približenja za velike argumente iz (E.9)

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \sqrt{\frac{2}{j\pi x}} j^{-n} e^{jx} , \\ H_n^{(2)}(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \sqrt{\frac{2j}{\pi x}} j^n e^{jx} . \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Iz približenja (E.9) očit je valni karakter Hankelovih funkcija. Ako s $F_n(x)$ označimo bilo koje rješenje Besselove diferencijalne jednačbe njihove derivacije određujemo pomoću

$$\begin{aligned} F_n'(x) &= F_{n-1}(x) - \frac{n}{x} F_n(x) , \\ F_n'(x) &= -F_{n+1}(x) + \frac{n}{x} F_n(x) , \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

što za posebni slučaj $n = 0$ daje

$$F_0'(x) = -F_1(x) . \quad (\text{E.13})$$

Rješavanje Helmholtzove jednačbe u sfernom koordinatnom sustavu separacijom varijabli često možemo svesti na diferencijalnu jednačbu oblika

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \left(k^2 + \frac{p^2}{r^2} \right) f = 0 . \quad (\text{E.14})$$

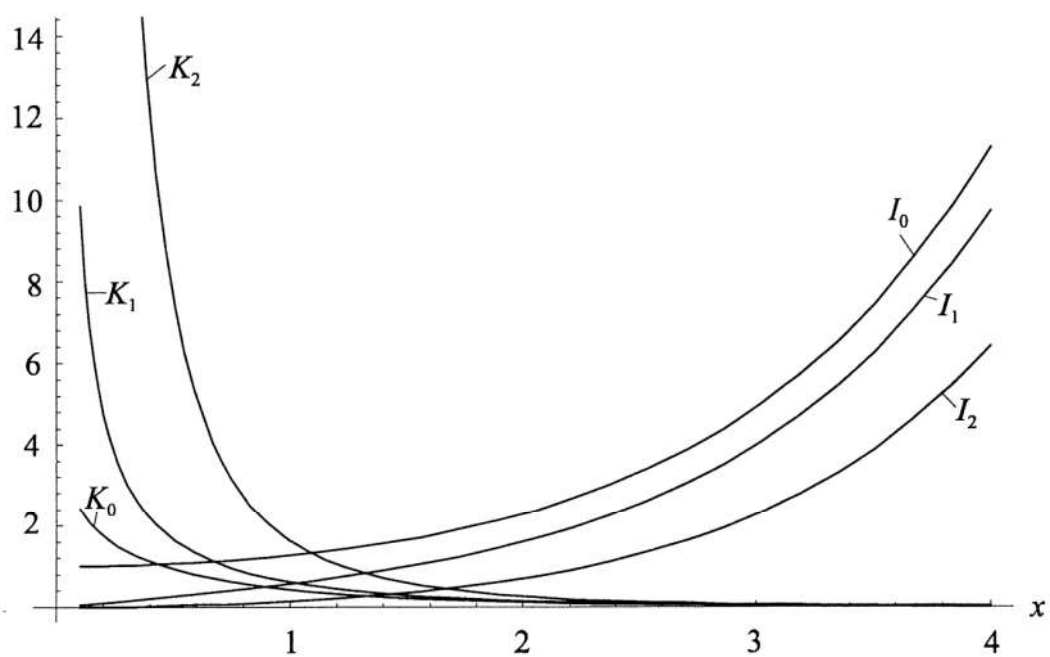
Zamjenom $x = kr$ tu jednačbu svodimo na standardni oblik *modificirane Besselove diferencijalne jednačbe* p -tog reda

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} - \left(1 + \frac{p^2}{x^2} \right) f = x \frac{d}{dx} \left(x \frac{df}{dx} \right) - (x^2 + p^2) f = 0 . \quad (\text{E.15})$$

Rješenja te jednačbe jesu *modificirane Besselove funkcije* p -tog reda prve vrste $I_p(x) = j^{-p} J_p(jx)$ i $I_{-p}(x) = j^p J_{-p}(jx)$ kada p nije cijeli broj, te $I_p(x)$ i modificirana Besselova funkcija p -tog reda druge vrste

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2} j^{p+1} H_p^{(1)}(jx) , \quad (\text{E.16})$$

kada je p cijeli broj. Na slici E.3 prikazali smo modificirane Besselove funkcije.



Slika E.3. Modificirane Besselove funkcije I_p i K_p

PRILOG F

RAZVOJ FUNKCIJA U REDOVE POTENCIJA

Funkciju $f(x)$ koja je neprekinuta i ima sve derivacije za $x = a$ možemo izraziti u obliku zbroya reda potencija

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots \quad (\text{F.1})$$

Taj red nazivamo *Taylorov red* za funkcije jedne varijable. Možemo ga napisati u obliku

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_n \quad (\text{F.2})$$

Ovdje je R_n ostatak

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad ; \quad a < \xi < x, \quad (\text{F.3})$$

i Taylorov red konvergira k vrijednosti funkcije na lijevoj strani izraza (F.1) ako za $n \rightarrow \infty$ $R_n \rightarrow 0$. Za funkciju s m varijabli Taylorov red pišemo u simboličkom obliku

$$f(x_1 + a_1, \dots, x_m + a_m) = f(x_1, \dots, x_m) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} a_j \right)^i f(x_1, \dots, x_m) \quad (\text{F.4})$$

Ako odaberemo $f(x) = (1 \pm x)^m$ i $m > 0$ iz izraza (E.1) slijedi *binomni red*

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (\text{F.5})$$

Kad je m cijeli broj taj red je konačan i sadrži $m + 1$ članova. Binomni red (E.5) konvergira ako vrijedi $|x| \leq 1$. Neki od binomnih redova s pozitivnim eksponentom koje često koristimo jesu

$$\begin{aligned}
(1 \pm x)^{\frac{1}{2}} &= 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{3}{48}x^3 - \frac{15}{384}x^4 + \dots, \\
(1 \pm x)^{\frac{1}{3}} &= 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{2}{18}x^2 \pm \frac{10}{162}x^3 - \frac{80}{1944}x^4 + \dots, \\
(1 \pm x)^{\frac{3}{2}} &= 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \pm \frac{3}{48}x^3 + \frac{9}{384}x^4 + \dots, \\
(1 \pm x)^{\frac{5}{2}} &= 1 \pm \frac{5}{2}x + \frac{15}{8}x^2 \pm \frac{15}{48}x^3 + \frac{15}{384}x^4 + \dots
\end{aligned} \tag{F.6}$$

Za negativne eksponente dobivamo binomni red

$$(1 \pm x)^{-m} = 1 \mp mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \mp \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots, \tag{F.7}$$

koji konvergira ako vrijedi $|x| < 1$. Često korišteni binomni redovi s negativnim eksponentom jesu

$$\begin{aligned}
(1 \pm x)^{-1} &= 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots, \\
(1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{15}{48}x^3 + \frac{105}{384}x^4 \mp \dots, \\
(1 \pm x)^{-\frac{1}{3}} &= 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{4}{18}x^2 \mp \frac{28}{162}x^3 + \frac{280}{1944}x^4 + \dots, \\
(1 \pm x)^{-\frac{3}{2}} &= 1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 \mp \frac{105}{48}x^3 + \frac{945}{384}x^4 + \dots, \\
(1 \pm x)^{-\frac{5}{2}} &= 1 \mp \frac{5}{2}x + \frac{35}{8}x^2 \mp \frac{315}{48}x^3 + \frac{3465}{384}x^4 + \dots
\end{aligned} \tag{F.8}$$

PRILOG G

ELIPTIČKI INTEGRALI

Ako simbolom R označimo racionalnu funkciju onda integrale oblika

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}) dx, \\ \int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}) dx, \end{aligned} \quad (G.1)$$

nazivamo *eliptičkim integralima* i u pravilu ih ne možemo izraziti pomoću elementarnih funkcija. Raznim pretvorbama te integrale svodimo na elementarne funkcije i tri vrste integrala

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \\ \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \\ \int \frac{dt}{(1+ht)^2 \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \end{aligned} \right\} 0 < k < 1 \quad (G.2)$$

Supstitucijom $t = \sin \varphi$ te integrale svodimo na *kanonski ili Legendrov oblik* za eliptički integral prve vrste

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad (G.3)$$

eliptički integral druge vrste

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi, \quad (G.4)$$

i eliptički integral treće vrste

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \quad (G.5)$$

Pripadne određene integrale s donjom granicom nula označavamo simbolima

$$\left. \begin{aligned} F(\varphi, k) &= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} , \\ E(\varphi, k) &= \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi , \\ \Pi(\varphi, h, k) &= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} , \end{aligned} \right\} 0 < k < 1 \quad (\text{G.6})$$

i nazivamo ih nepotpunim eliptičkim integralima prvog, drugog i trećeg reda. Parametar φ nazivamo amplituda, k modul a n karakteristika eliptičkog integrala. Integral $F(\pi/2, k)$ nazivamo potpuni eliptički integral prve vrste i označavamo ga s $K(k)$, a integral $E(\pi/2, k)$ nazivamo potpuni eliptički integral druge vrste i označavamo ga s $E(k)$. Potpune eliptičke integrale prve i druge vrste računamo pomoću redova modula k

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 k^4 + \left(\frac{15}{48}\right)^2 k^6 + \dots \right] , \\ E(k) &= \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{15}{48}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right] , \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

ili komplementarnog modula $k' = (1 - k^2)^{1/2}$

$$\begin{aligned} K(k') &= \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 \right) + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 - \frac{2}{12} \right) + \dots , \\ E(k') &= 1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 \right) k'^2 + \frac{3}{8} \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 - \frac{2}{12} \right) k'^4 + \dots \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Derivacije potpunih eliptičkih integrala po modulu jesu

$$\begin{aligned} \frac{dK(k)}{dk} &= \frac{E(k)}{kk'^2} - \frac{K(k)}{k} , \\ \frac{dE(k)}{dk} &= -\frac{E(k) - K(k)}{k} . \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

LITERATURA

- S.S. Atwood, *Electric and Magnetic Fields*, John Wiley & Sons, New York, 1958.
- K.J. Bath, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- E.F. Beckenbach, *Modern Mathematics for the Engineers*, McGraw-Hill, 1956.
- K.J. Binns, P.J. Lawrenson, *Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems*, Pergamon, Oxford, 1963.
- D. Blanuša, *Viša matematika*, I dio, I i II svezak, Tehnička knjiga, Zagreb, 1963. i 1965.
- E.V. Bohn, *Introduction to Electromagnetic Fields and Waves*, Addison-Wesley, Reading, 1968.
- T. Bosanac, *Teoretska elektrotehnika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- I.N. Bronštejn, K.A. Semendjajev, *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb 1964.
- H. Buchholz, *Elektrische und magnetische Potentialfelder*, Springer, Berlin, 1957.
- L. Cairo, T. Kahan, *Variational Techniques in Electromagnetism*, Blackie, London, 1965.
- M.A. Choudhury, *Electromagnetism*, Ellis Harwood, Chichester, 1989.
- N. Cindro, *Fizika 2 – Elektricitet i magnetizam*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- R.E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- D.R. Corson, P. Lorrain, *Introduction to Electromagnetic Fields and Waves*, Freeman, San Francisco, 1962.
- J.W. Dettman, *Mathematical Methods in Physics and Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- G. Dhatt, G. Touzot, *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley & Sons, New York, 1985.
- R.S. Elliott, *Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- P. Hammond, *Applied Electromagnetism*, Pergamon, Oxford, 1971.
- R.F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- R.F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, The Macmillan, New York, 1968.
- W. Hauser, *Introduction to the Principles of Electromagnetism*, Addison-Wesley, Reading, 1971.
- Z. Haznadar, *Zbirka zadataka iz teoretske elektrotehnike*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1963.

- Z. Haznadar, J. Matjan, *Određivanje induktiviteta sustava ravnih vodiča metodom srednjih geometrijskih udaljenosti* (1) i (2), *Elektrotehnika* 1 i 2, Zagreb, 1969.
- Z. Haznadar, J. Matjan, *Numerical Calculation of Skin Effects in Systems of Conductors*, *Elektrotehnika* 5, Zagreb, 1970.
- Z. Haznadar, M. Lovenjak, *Rješavanje polja metodom konačnih diferencija*, *Elektrotehnika* 5, Zagreb, 1971.
- Z. Haznadar, J. Matjan, *Proračun polja u visokonaponskim oklopljenim postrojenjima i prijenosnim sustavima*, *Elektrotehnika* 5 – 6, Zagreb, 1972.
- Z. Haznadar, *Teoretska elektrotehnika – Elektromagnetska teorija i polja*, Liber, Zagreb, 1972.
- Z. Haznadar, M. Đurek, *Solution of Electrostatic Axisymmetric Fields by Integral Equations Using the Finite Elements Technique*, Proceeding of the Santa Barbara Meeting, University of California, USA, 1978.
- Z. Haznadar, S. Sadović, *Macro Elements in the Finite Element Method – Application to the High-Voltage Insulating System Design*, IEEE Transaction on Magnetics, Vol. MAG-18, March 1982.
- Z. Haznadar, F. Pužar, *Berechnung der Transienten Reaktanz einer Synchronmaschine mit der Methode finiter Elemente*, Zbornik radova 10. Wissenschaftliche Konferenz, TU Dresden, 1984.
- Z. Haznadar, S. Berberović, *Electric and Magnetic Field Calculations of Vacuum Circuit Breaker*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-21, 1985.
- Z. Haznadar, Ž. Štih, S. Berberović, *Anwendung von CAD-Hilfsmitteln in der Elektrotechnik*, 11. Wiss. Konferenz der Sektion der TU Dresden, Dresden, 1987.
- Z. Haznadar, S. Berberović, *Numerical Field Calculation of Earthing Systems*, Zbornik Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, Plenum Publishing Company, London, 1988.
- Z. Haznadar, S. Žutobradić, *An Improved Method for Calculation of Impulse Impedances of Grounding Grids*, 20th International Conference on Lightning Protection, Interlaken, 1990.
- Z. Haznadar, Ž. Štih, S. Berberović, *Application of 3D Electrical Fields Calculation in High Voltage Insulating Systems Design*, 4th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, Graz, 1990.
- Z. Haznadar, Ž. Štih, *Computation of Electric and Magnetic Fields and Forces in Design of Power Apparatus*, knjiga *Electromagnetic Forces and Applications*, Elsevier Science Publisher B.V., Amsterdam, 1992.
- Z. Haznadar, Ž. Štih, S. Berberović, G. Manenica, *Torque Calculation in Switched Reluctance Motor Design*, knjiga *Nonlinear Phenomena in Electromagnetic Fields*, Elsevier Science Publisher B.V., Amsterdam, 1992.
- Z. Haznadar, Ž. Štih, S. Berberović, G. Manenica, *Finite Element Method in Design of Permanent Magnet Synchronous Motors*, 6th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, Graz, Austrija, 26 – 28. rujan 1994.

- Z. Haznadar, Ž. Štih, S. Berberović, *Computation of Integral Parameters in Electric Motor Design by Application of the Finite Element Method*, Brodogradnja, Zagreb, 1996.
- V. Henč-Bartolić, P. Kulišić, *Valovi i optika*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
- E. Hinton, D.R.J. Owen, *Finite Element Programming*, Academic Press, London, 1977.
- H. Hofmann, *Das Electromagnetische Feld*, Springer Verlag, Wien, 1974.
- J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York, 1975.
- M. Javid, P.M. Brown, *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- T. Jelaković, *Uvod u elektrotehniku i elektroniku*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.
- C.C. Johnson, *Field and Wave Electrodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- D.S. Jones, *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon, Oxford, 1964.
- V. Knapp, P. Colić, *Uvod u električna i magnetska svojstva materijala*, Školska knjiga, Zagreb 1990.
- J.A. Kong, *Theory of Electromagnetic Waves*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- J. D. Kraus, K.R. Carver, *Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- P. Kulišić, *Mehanika i toplina*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.
- K. Küpfmüller, *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, Springer, Berlin, 1955.
- S. Kurepa, *Matematička analiza*, I, II, III, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970, 1971., 1975.
- A. Kusko, T. Wroblewski, *Computer – Aided Design of Magnetic Circuits*, M.I.T Press, Cambridge, 1969.
- L. Landau, E. Lifšic, *Teorija polja*, OGIZ, Moskva, 1948.
- R.V. Langmuir, *Electromagnetic Fields and Waves*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- J. Lončar, *Osnovi elektrotehnike I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1956.
- J. Lončar, *Osnovi elektrotehnike II*, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1949.
- V. Lopašić, *Predavanja iz fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
- D.A. Lowther, P.P. Silvester, *Computer – Aided Design in Magnetics*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- L.M. Magid, *Electromagnetic Fields, Energy, and Waves*, John Wiley, New York, 1972.
- Ž. Marković, *Uvod u višu analizu, I i II dio*, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1950. i Školska knjiga, Zagreb, 1952.
- S.V. Marshall, G.G. Skitek, *Electromagnetic Concepts and Applications*, Prentice-Hall International, London, 1990.
- H.C. Martin, G.F. Carey, *Introduction to Finite Element Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- J. Matjan, *Auditorne vježbe iz teoretske elektrotehnike*, Sveučilište u Zagrebu, 1975.
- J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Volume I, II (1873.), Dover, New York, 1954.
- K. Meetz, W.L. Engl, *Electromagnetische Felder*, Springer Verlag, Berlin, 1980.
- R. Mittra, *Computer Techniques for Electromagnetics*, Pergamon Press, Oxford, 1973.

- R. Mittra, *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*, Springer Verlag, Berlin, 1975.
- F.C. Moon, *Magneto-Solid Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- P. Moon, D.E. Spencer, *Field theory for Engineers*, Van Nostrand, Princeton, 1961.
- P. Moon, D.E. Spencer, *Field Theory Handbook*, Springer Verlag, Berlin, 1961.
- Morse P. M, Feshbach H, *Methods of Theoretical Physics Parts I, II*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- L.R. Najman, K.S. Demirčjan, *Teoretičeskije osnovi elektrotehniki*, Energija, Moskva, 1966.
- A.B. Netušil, K.M. Polivanov, *Osnovi elektrotehniki – Teorija elektromagnitnoga polja*, Moskva, 1956.
- D.H. Norrie, G. de Vries, *The Finite Element Method*, Academic Press, New York, 1973.
- A. Nussbaum, *Electromagnetic Theory for Engineers and Scientists*, Prentice-Hall, London, 1968.
- F. Ollendorf, *Erdströme*, Birkhäuser Verlag, Basel 1969.
- W.G.H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading, 1972.
- C.H. Papas, *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- V. Pinter, *Osnove elektrotehnike, I i II*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.
- S. Ramo, J.R. Whinnery, T.V. Duzer, *Fields and Waves in Communications Electronic*, John Wiley, New York, 1965.
- N.N. Rao, *Basic Electromagnetics with Applications*, Prentice-Hall, 1972.
- J.R. Reitz, F.J. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1967.
- V. Rojansky, *Electromagnetic Fields and Waves*, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.
- R. Rüdenberg, *Elektrische Wandeswellen*, Springer, Berlin, 1962.
- J.B. Scarborough, *Numerical Mathematical Analysis*, Jakus Hopkins Press, Baltimore, 1966.
- H.R. Schwarz, *Finite Element Methods*, Academic Press, London 1988.
- M. Schwartz, *Principles of Electrodynamics*, McGraw-Hill, 1972.
- W.T. Scott, *The Physics of Electricity and Magnetism*, John Wiley & Sons, New York, 1966.
- S.R. Seshadri, *Fundamentals of Transmission Lines and Electromagnetic Fields*, Addison-Wesley, Reading, 1971.
- P.P. Silvester, *Modern Electromagnetic Fields*, Prentice-Hall International, London, 1968.
- P.P. Silvester, R.L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- K. Simonyi, *Kulturgeschichte der Physik*, Akademiai Kiado, Budapest, 1990.
- M. Skitek, *Electromagnetic Concepts and Applications*, Prentice-Hall International, London, 1990.

- Z. Smrkić, *Mikrovalna elektronika*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.
- W.R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic, New York, 1964.
- R.L. Stoll, *The Analysis of Eddy Currents*, Clarendon, Oxford, 1974.
- G. Strang, G. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1973.
- J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- I. Supek, *Teorijska fizika i struktura materije, I i II dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1951.
- K. Šimonji, *Teorijska elektrotehnika*, Mir, Moskva, 1964.
- Ž. Štih, *Numerički proračun električnih polja u transformatoru pomoću integralnih jednadžbi*, Elektrotehnika 3, Zagreb 1983.
- Ž. Štih, *Metoda optimiranja oblika elektroda u osnosimetričnim električnim poljima*, Elektrotehnika 3, Zagreb 1985.
- Ž. Štih, Z. Haznadar, M. Šindler, *The Evaluation of Simulated Magnetic Sources of Inhomogeneous Bodies*, knjiga Numerical Methods for Non-Linear Problems, Pineridge Press, Swansea, 1986.
- Ž. Štih, Z. Haznadar, *Electrode and Insulator Contour Optimization in Axially Symmetric Electric Fields*, 2nd International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, Graz, 1986.
- Ž. Štih, *High Voltage Insulating System Design by Application of Electrode and Insulator Contour Optimization*, IEEE Transaction on Electrical Insulation, Vol. EI-21, No. 4., August 1986.
- I.E. Tamm, *Fundamentals of the Theory of Electricity*, Mir, Moscow, 1979.
- O.V. Tozoni, J.D. Majergojz, *Rasčrt trehmjesnih elektromagnitnih poljeja*, Tehnika, Kijev, 1974.
- N. Tralli, *Classical Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- J. Van Bladel, *Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- H. Wayland, *Differential Equations Applied in Science and Engineering*, D. van Nostrand, Princeton, 1968.
- E. Weber, *Electromagnetic Theory, Static Fields and Their Mapping*, Dover Publications, New York, 1965.
- W.L. Weeks, *Electromagnetic Theory for Engineering Applications*, John Wiley, New York, 1964.
- B. Wendroff, *Theoretical Numerical Analysis*, Academic Press, New York, 1967.
- S. Wolfram, *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley, Reading, 1993.
- H.H. Woodson, J.R. Melcher, *Electromechanical Dynamics*, Parts I,II,III, John Wiley, New York, 1968.
- O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, London, 1977.

KAZALO

- Admitancija, 669
admitivnost, 445–447, 449, 450
Ampèreov kružni zakon, 21–22
– poopćeni, 23
amplituda vala, 420, 524
analitičke funkcije, 269–271
analogije polja, 278, 284
anomalna disperzija, 481, 482
antena, 399, 431, 575, 581
antipotencijali, 81, 84, 85, 88
avanzirani potencijali, 103, 108, 110
- Baždarenje, 92–96
baždarske transformacije, 91–94
Besselova diferencijalna jednačba, 715
Besselove funkcije, 715, 716, 718
– modificirane, 718, 719
binomni razvoj, 455, 720
Biot-Savartov zakon, 318
Brewsterov kut, 514
brzina prostiranja energije, 433
- Cauchyjevi rubni uvjeti, 696
Cauchy-Riemannovi uvjeti, 272
cilindrični koordinatni sustav, 220, 326, 704, 711
cilindrični vodič u vanjskom polju, 221–224
Coulombov zakon, 3, 19, 23, 112, 167
- Čvorne varijable, 607
- Delta funkcija, 14, 343, 654, 703
dielektričnost, 19
– vakuuma, 19, 112
– izmjenična, 446, 448
dielektrik, 34, 36
dielektrični cilindar u homogenom polju, 273
difrakcija, 495
difuzijska jednačba, 338, 693
difuzijska vremenska konstanta, 356
dijamagnetizam, 40
- dipol,
– električni, 39, 46, 232, 576, 580
– Hertzov, 576
– magnetski, 322, 323, 636
dipolni moment, 34–36, 40, 42, 43
Dirichletovi rubni uvjeti, 214, 598, 615, 642
diskontinuiteti u polju, 15
disperzija, 477, 478, 481, 482, 484–486, 488
– normalna i anomalna, 481
– u ioniziranim plinovima, 488
– u kovinama, 486
– u dielektricima, 478
divergencija, 707
djelatna snaga, 461
djelovanje na daljinu, 1, 139, 167
dobri,
– izolatori, 428, 452, 454
– vodiči, 452, 457, 459, 461, 477
domena, 691
dominantni mod, 563, 566, 572, 574
dubina prodiranja, 353, 442, 468
dvožični prijenosni vod, 147, 148
- Ekvipotencijalna ploha, 195–197
električna,
– energija, 152, 156, 438, 447
– provodnost, 9, 41
– susceptibilnost, 48, 59
električni,
– dipol, 39, 46, 232, 576, 580
– krugovi, 389
– otpor, 30, 160
– tenzor, 169
električno polje, 1, 191
elektroda, 203, 279–281
elektromagnetska,
– indukcija, 382
– energija, 138
– količina gibanja, 161, 167
elektromagnetski val, 397

- elektromagnetsko polje, 1
 elektromehanička pretvorba energije, 385
 elektromagnet, 306
 elektronska polarizacija, 35
 elementarne silocijevi, 304, 305
 elementarne valne funkcije, 405, 698, 700–702
 eliminacija, 621
 eliptički integrali, 320, 327, 675, 722, 723
 energija, 134
 magnetiziranja, 157
 polarizacije, 152, 154
 pohranjena u električnom polju, 350
 pohranjena u magnetskom polju, 293, 350
 u kvazistatičkim poljima, 348
 u sinusno promjenjivim poljima, 349
 Eulerova konstanta, 586, 662, 716
- Faktor,**
 dobrote rezonatora, 573
 magnetskih gubitaka, 449
 dielektričkih gubitaka, 446, 448
 Faradayev zakon, 20, 23, 384, 676
 fazna,
 konstanta, 419, 456, 485, 517, 522
 brzina, 417, 428, 460, 561, 562
 fazni pomak, 359, 361, 417, 428, 460, 516, 582
 fazor, 341
 fazorska notacija, 341, 342
 feromagnetizam, 40
 feriti, 41, 449
 feromagnetizam, 40, 62
 feromagnetska kugla u vanjskom polju, 309
 feromagnetski materijali, 61, 305, 449
 Fourierov integral, 472, 493
 Fourierov red, 219, 355, 701
 Fourierova transformacija, 342, 344
 Fresnelove jednadžbe, 496, 498, 500
 Fredholmove integralne jednadžbe, 693
 funkcional, 593, 594, 598, 691
- Galerkinova metoda, 643, 645, 596, 647, 682
 Gaussov zakon, 23, 45, 192, 199
 Gaussovi teoremi, 708
 geometrijske transformacijske funkcije, 603
 geometrijski čvorovi, 601, 605
 gradijent, 706
 granična,
 frekvencija TE_{0n} moda, 561
 valna duljina TE_{0n} moda, 561
 granični valni broj, 568
 Greenovi teoremi, 114, 596, 598, 643, 654
- Greenove funkcije, 107, 695
 neograničenog prostora, 103, 107
 ravnih metalnih granica, 248
 vodljive kuglaste granice, 266
 grupa valova, 492, 493
 grupna brzina, 491, 493, 494
 signala, 491
 gustoća,
 električne energije, 155
 električnog tijeka, 284
 energije polarizacije, 153
 energije magnetiziranja, 157
 linijskog naboja, 14
 magnetiziranja, 41, 42, 157
 magnetskog tijeka, 5, 20,
 naboja, 7, 9
 polarizacije, 35, 36
 polarizirane struje, 37
 struje, 8
- Hamiltonov operator, 708
 Hankelove funkcije, 662, 669, 718
 Helmholtzova jednadžba, 692, 698
 Hertzov,
 vektor, 98, 99, 576, 577
 dipol, 398, 576
 Hertzovi potencijali, 97
 Hilbertov prostor, 690, 691
 histereza, 41, 54, 57, 59, 61
 homogeno polje, 228, 265, 312
- Idealni vodič, 32
 impedancija, 421
 imeditivnost, 445, 447, 449, 450
 inducirani plošni naboj, 33
 inducirano električno polje, 337, 378, 382
 indukcija, 3, 59, 81, 158, 296, 307, 308, 312, 382
 induktivitet, 348
 suosnog kabela, 297
 induktiviteti sustava strujnih petlji, 303
 integrali,
 potencijala, 121
 polja, 124
 interpolacijske funkcije, 592, 600, 607, 608, 646
 inverzni val, 417, 418, 422, 429
 ionska polarizacija, 35
 izmjenična,
 dielektričnost, 446, 448
 permeabilnost, 449
 izolatori, 28, 57
 izoparametarski elementi, 608

Jacobijeva matrica transformacije, 604

jakost,

struje, 3, 7, 218, 345, 390, 461

električnog polja, 3, 4

magnetskog polja, 52

jalova snaga, 461

jednadžba kontinuiteta, 9, 10

jednadžbe ravnog vala, 406, 436

jednadžbe prijenosne linije, 550

Kapacitet, 32, 191

kondenzatora, 202, 205, 394

usamljene vodljive kugle, 202

sustava vodiča, 208

karakteristična,

impedancija, 549, 550, 562–564, 569

impedancija moda, 562

impedancija linije, 551

Kirchhoffovi zakoni, 390

koeficijent,

transmisije, 501, 522, 526, 558

refleksije, 491, 511, 533, 536–538, 556

koeficijenti otpora, 279

koenergija, 387

koercitivnost, 59

kompleksne gradivne značajke, 445

– dielektričnost, 445, 488

– permeabilnost, 445, 449

– provodnost, 445

kondenzator, 202–206, 656, 657

kondukcijske struje, 8, 9

konformno preslikavanje, 191, 269, 270, 309

konstanta prostiranja, 413, 428, 441, 455, 551

konvekcijske struje, 8, 10, 136, 153, 160

konzervativno polje, 90

koordinatni sustavi, 710–713

– pravocrtni, 710

– cilindrični, 711

– sferni, 712

kosinus integrali, 586

kritični upadni kut, 515

kritična frekvencija za ionizirani plin, 489

kružno polariziran,

putujući val, 434

stojni val, 438, 440

Kroneckerova delta, 173, 673

kugla,

u vanjskom električnom polju, 225–228

u sinusno promjenjivom polju, 372

kuglasti permanentni magnet, 312

kuglasta magnetska ljuska u vanjskom polju, 313

kut,

dielektričkih gubitaka, 446

magnetskih gubitaka, 449

kutna brzina, 40

kvazistatičko elektromagnetsko polje, 348

Laplaceova jednadžba, 692

– jedinstvenost rješenja, 212

– separacija varijabli, 216

Laplaceov operator, 710

linearni,

kvadrupol, 234

prostor, 689, 690

linearno polariziran, 419, 423

čisti stojni val, 436

putujući val, 431

linijska,

gustoća naboja, 14, 236

struja, 14, 638

linijski,

naboj, 14, 235, 239, 252, 260, 263

magnetski dipol, 636

Lorentzov uvjet, 84, 344

Lorentzova sila, 2–5, 19, 23, 66, 72, 133–135

Magnetiziranje, 39

magnetska,

energija, 157–159, 300, 387, 432, 449

indukcija, 3

susceptibilnost, 52, 61

magnetske struje, 46, 64, 451, 676, 677, 681, 682

magnetski,

krug, 304, 305, 307

lim u promjenjivom polju, 353

naboj, 21, 45, 46, 64, 90, 676

tijek, 5, 20, 40, 53, 380, 393

vektorski potencijal, 82, 286, 288, 335

dipol, 322, 323, 636

moment strujne petlje, 40

dipolni moment, 39, 40

magnetsko polje, 1, 182

makroskopska elektromagnetska teorija, 19, 537

makroskopski pristup, 6, 19, 398

materijal u elektromagnetskom polju, 148

Maxwellove jednadžbe, 1

u diferencijalnom obliku, 23

u fazorskoj domeni, 342

u integralnom obliku, 24, 25

u materijalu, 63, 77, 78

u vakuumu, 18, 76

za vektore polja, 71, 79

- Maxwellov tenzor naprezanja, 172, 173
 međuinduktivitet, 299, 301, 303, 380
 dvaju paralelnih dvožičnih vodova, 301
 metoda momenata, 651, 652
 metoda konačnih elemenata, 591
 metrika, 689, 690
 miješani uvjeti, 214
 modovi, 546, 560, 566, 569
 – neprostirući, 561
 – prijenosne linije, 546
 – prostirući, 561
 model,
 amperske struje, 42, 64
 magnetskog naboja, 45
 modificirane Besselove funkcije, 718, 719
 moment magnetskog dipola, 46
- Nabla, 708
 nadomjesni izvori, 126, 676
 napon, 30, 193
 nesinusni valovi, 469
 Neumannovi rubni uvjeti, 214, 598, 642
 Neumannove funkcije, 715, 717
 Newton-Raphsonova metoda, 638
 norma, 640, 689, 690
 normalna i anomalna disperzija, 481
 normirani prostor, 689, 690
- Očuvanje,
 električnog naboja, 3, 9
 elektromagnetske energije, 139, 141, 146
 odrezni valni broj, 568
 odslikavanje, 248, 249, 260, 282, 334, 681
 ogib, 495
 Ohmov zakon, 9, 28
 u elementarnom obliku, 29
 operator, 691
 orijentacijska polarizacija, 35
 otpor, 30, 280
- Paralelna admitancija linije, 550
 parametrička disperzija, 478
 parcijalni kapacitet, 208
 – tri udaljene usamljene kugle, 209
 permanentni magneti, 55, 285
 – magnetski krug, 307
 permanentna polarizacija, 35
 permeabilnost, 21, 52
 vakuuma, 21, 46, 62, 112
 – izmjenična, 449
 permitivnost vakuumu, 19
- Poissonova jednačba, 692
 – superpozicija rješenja, 211
 – jedinstvenost rješenja, 212
 – integral i Greenove funkcije, 214
 pločasti kondenzator, 204, 205, 656, 657
 plošna,
 impedancija, 467
 naprezanja, 167, 168, 177–179, 184
 struja, 11, 44, 47, 678
 plošni,
 naboj, 11, 32, 33, 74, 194, 240, 655
 otpor, 467, 468
 područja rezonantne apsorpcije, 482
 polarizacija, 34–36
 – orijentacijska, 35
 – permanentna, 35
 – ionska, 35
 polarizacija vala, 424, 504, 511, 514
 – linearna, 425
 – kružna, 426
 – eliptička, 426
 polarizibilnost, 479
 polarizirani naboj, 36, 38, 70, 74
 polje, 2
 jednoliko nabijene dužine, 236–239
 jednoliko nabijene dužine i kugle, 268
 jednoliko nabijene pravokutne ploče, 240
 kružne strujnice, 319
 linearnog kvadrupola, 234, 235
 dipola, 231–234
 dva točkasta naboja, 229–231
 dvožičnog voda,
 ispred dielektričkog poluprostora, 257
 ispred magnetskog poluprostora, 334
 ispred vodljive ravnine, 253
 nejednoliko nabijene kocke, 245–248
 strujnog cilindra, 326
 u kvadru, 218–220
 usamljenog točkastog naboja, 196, 197
 točkastog naboja u vodljivom kutu, 251–252
 trake unutar vodljivog cilindra, 261
 postojanje električnog naboja, 3
 povratna supstitucija, 615, 617, 622
 površinski učinak, 365, 367, 369, 461, 644
 u cilindru, 367
 površinski valovi, 537, 541
 potencijali, 81
 Poyntingov teorem, 143, 146, 187, 348, 371
 u diferencijalnom obliku, 139, 141, 187, 189
 u integralnom obliku, 141, 152, 188, 189
 Poyntingov vektor, 142, 146, 167, 461, 510, 579

- pravocrtni koordinatni sustav, 216, 404, 406, 710
- pravokutni valovod, 558, 559, 564
- preslikavanje, 691
- prigušna konstanta, 418
- prijenosna linija, 545–554, 558
 - bez distorzije, 555
- prividna snaga, 371, 461
- prolazni val, 495–497
- prostorne sile, 167, 181–183
- prostorni naboj, 12, 250
- prostorni faktor, 580, 584, 585
- provodna struja, 12
- provodnost, 9, 12
- putujući val, 416, 429–433

- Radijacijsko polje**, 579, 581, 583, 584, 686, 687
- raspršeno polje, 659, 660, 662–664
- ravni valovi, 399
 - sinusni u prostoru, 419
 - sinusni u vremenu, 412
 - u neograničenom prostoru, 404
- ravnina,
 - konstantne faze, 417, 443, 492, 524
 - konstantne amplitude, 525
- razlika potencijala, 193, 207, 284, 394
- razvoj u multipole, 243, 329
- refleksije valova, 495, 537
- refrakcija, 495
- remanentna indukcija, 59, 308, 312
- retardirani potencijali, 112, 339
- retardirano vrijeme, 109
- rezonator, 570, 571, 573
- rotor, 707
- rubni uvjeti, 213, 222, 636, 644, 692, 696
 - Cauchyjevi, 696
 - Dirichletovi, 214, 696
 - mješoviti, 214, 696
 - Neumannovi, 214, 696

- Separacija varijabli**, 309, 401, 695
 - Helmholtzove jednadžbe, 404
 - valne jednadžbe, 401
- separacijske konstante, 405, 454, 698, 700, 701
- serijska impedancija linije, 550
- sferni koordinatni sustav, 224, 712, 713
- silnice, 49
- silocijev, 304
- skalarni električni potencijal, 82, 192
- skalarni produkt, 705
- skalarni magnetski potencijal, 290, 325
- skup, 689

- slobodni naboj, 19, 31
- smjer prostiranja vala, 406, 408, 469
- Snellov zakon, 495, 498, 504
- srednja energija, 350
 - pohranjena u električnom polju, 350
 - pohranjena u magnetskom polju, 350
- srednji gubici, 449, 350
- statičko,
 - električno polje, 191
 - magnetsko polje, 182
- stojni val, 436–438
- Stokesovi teoremi, 709
- struja pomaka, 1, 47
- strujna cilindrična cijev, 331
- strujni oblog, 13, 681
- strujni element, 1, 37, 576, 580
- strujnica, 292, 304, 318, 319, 324, 325, 380, 637
- superpozicija, 48, 51, 211, 266, 444
- susceptibilnost, 48, 52, 59–61
- sustav vodiča, 206, 208
- svojstvene funkcije, 218, 698, 701
- svojstvene vrijednosti, 405, 560, 697, 698, 701

- Širina pojasa, 493
- štapni uzemljivač, 282

- Tankožičane antene**, 676, 687, 688
- Taylorov red, 340, 638, 720
- TE mod, 560, 563
- TEM val, 409
- temeljne funkcije, 651, 652, 656, 667
- tenzor, 48, 52, 169, 171–174
 - magnetske susceptibilnosti, 52
 - naprezanja, 172–174
- teorija krugova, 550
- težinske funkcije, 595–597
- tijek elektromagnetske energije, 146, 510, 544
- TM mod, 560
- TM val, 517
- točkasti,
 - naboj, 3, 19
 - izvori, 14, 15
- totalna,
 - refleksija, 398, 514
 - transmisija, 496
- transverzalni,
 - elektromagnetski val, 409
 - magnetski, 517, 661
 - ravni valovi, 404
- trenutna vrijednost snage, 136
- triangularizacija, 615, 616

Ulazna impedancija linije, 556

unutarnji induktivitet, 348

uskladjivanje u točkama, 653

usmjerena,

fazna brzina, 507

valna impedancija, 507, 509

fazna konstanta, 507

uvjet kvazistatičnosti, 340, 341, 344, 346, 347

uvjeti na granici, 66, 70, 194, 286, 676, 677

uvjet reciprociteta, 108

Valna,

duljina, 417, 428,

jednadžba, 83, 121, 399, 692

konstanta, 463

duljina prostiranja, 561, 562

impedancija, 421, 422

valovi,

u dielektriku, 427

u vodljivom materijalu s gubicima, 440

valovod, 544, 558–560, 564, 566, 571

vanjski induktivitet, 297–299, 380

vektor,

jakosti magnetskog polja, 52

električnog pomaka, 48

elektromagnetskog naprezanja, 174

polarizacije, 34, 35, 50, 98

vektorski magnetski potencijal, 82, 287

vektorski produkt, 705

vektorski prostor, 689

vezani naboji, 48, 139

vod, 147, 148, 253, 334, 544, 557, 588

vodiči, 54

vodljivost, 280

vremenska konstanta relaksacije, 32

virtložne struje, 356, 358

Zakon,

odbijanja, 495, 504

protjecanja, 21, 22

refleksije, 498

zračenje električnog dipola, 575

zračenje elektromagnetskih valova, 575

zrcalne refleksije, 496

ŠKOLSKA KNJIGA d.d.
Zagreb, Masarykova 28

Za izdavača

Dr. DRAGOMIR MADERIĆ

Tisak dovršen u ožujku 1997.