

DR JOSIP LONČAR
OSNOVI ELEKTROTEHNIKE
KNJIGA PRVA
ČETVRTO IZDANJE



DR JOSIP LONČAR

PROFESOR ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

OSNOVI ELEKTROTEHNIKE

KNJIGA PRVA

ČETVRTO (PROŠIRENO) IZDANJE

TEHNIČKA KNJIGA

ZAGREB 1956

TISAK »GRAFIČKOG ZAVODA HRVATSKE« U ZAGREBU

P R E D G O V O R

Ovim djelom pisac je nastojao da dađe, za visokoškolsku upotrebu i za stručnjake u praksi, visoko zasnovani udžbenik opće elektrotehnike. Prema tomu primjenjivana su, po potrebi, također suptilnija teorijska razmatranja, kao i postupci više matematike i vektorske analize, koji omogućuju dublje razumijevanje obrađivane materije. No istodobno nastojalo se da se osnovni pojmovi uvedu, i osnovne povezanosti donesu, po mogućnosti pristupačno i čitaocu s manje matematičkog predznanja i više praktičke orijentacije; to je, naravno, bilo lakše izvesti kod primijenjenih tema.

Djelo, koje ovim izlazi prošireno već u IV. izdanju, sastoji se od dvije knjige. Knjiga I., nakon uvoda o nekim osnovnim spoznajama suvremene fizike, obrađuje općenito zakonitosti mirnih električkih polja, zatim mehanizme i svojstva provodnih električkih struja, pa zakonitosti mirnih magnetskih polja, te konačno međusobne povezanosti vremenski promjenljivih električkih i magnetskih polja. Obradeni su dakle pojavi i njihove primjene na kojima počiva elektrotehnika, upravo »osnovi elektrotehnike« u užem smislu; s ovog područja uključeni su na raznim mjestima ovog izdanja Knjige I. i brojni dulji ili kraći dodaci o nekim najnovijim dostignućima. No uzeto je i ovaj puta, kako je već bilo učinjeno u III. izdanju, u Knjigu I. još poglavlje o generatorima i motorima istosmjerne struje, koje je prvobitno bilo u Knjizi II. Ostala su tako za novo izdanje Knjige II., koje će također biti nadopunjeno novijom tematikom, poglavlje s detaljnom teorijom izmjeničnih (jednofaznih i višefaznih) struja, pa poglavlja o transformatorima, o generatorima i motorima izmjenične struje, o pretvaračima i o usmjerivačima (ispravljačima), te o teorijskim osnovima nastajanja elektromagnetskih valova i principima njihove upotrebe u radiotehnici.

Savjestan čitalac sam će pomnijim i opetovanim studijem teksta — a samo će uz takav studij imati pune koristi od djela — uočiti motive zbog kojih je pisac, nadovezujući na tradicije prijašnjih izdanja i vodeći računa o suvremenom razvoju, smatrao prikladnim poći i dosljedno dalje ići baš odabranim putevima: kod uvođenja osnovnih pojmova, kod izbora polaznih tvrdnja i izvođenja iz njih ostalih stavaka, kod izbora sustava jedinica (dosljedno današnjem stanju u pravilu se upotrebljava m-kg-s-A-sustav odn. V-A-s-m-sustav, no ne odbacuje se ni V-A-s-cm-sustav), kod načina pisanja formula (ove se redovito donose kao »relacije između veličina« i »racionalizirano«), itd. U pogledu oznaka pojedinih veličina nije se odstupalo prema ranijim izdanjima, gdje su oznake već bile, osim u opravdanim slučajevima, prilagođene po mogućnosti općoj upotrebi, iako ni danas još, usprkos IEC-preporuka, na

tomu području nema jedinstva (što se može vidjeti na pr. usporedbom najnovijih anglo-američkih, ruskih i njemačkih knjiga); k tomu se htjelo očuvati simultanu upotrebljivost raznih izdanja ovog djela i izbjeći potrebu zamjene mnogobrojnih klišeja novima. Neka još bude tek napomenuto da se i u nekim drugim pojedinostima nomenklature, ortografije i sl. pisac priklonio izvjesnim postupanjima tek nakon procjenjivanja mnogobrojnih, često suprotnih gledišta.

U skladu s općenitom namjenom djelo sadrži i najvažnije principe električkih mjerenja. U potankosti na tom području nije se moglo zalaziti; one su obrađene na pr. u piščevu djelu »Električka mjerenja«, i na njih se na odnosnim mjestima upućuje kraticom: E.M.

Svakom poglavlju dodan je stanoviti broj vježbi, kojih će veliku većinu lako izraditi iole pažljiviji čitalac; za manji broj ne posve jednostavnih problema zamišljeno je da ih uz manje ili više razmišljanja svlada napredniji čitalac. Za kontrolu su iza svake vježbe navedeni rezultati; pitanke upute za izrađivanje vježbi piscu se ne čine prikladne, jer odučavaju od samostalnog mišljenja.

Za odličnu tehničku izradbu ovog izdanja treba zahvaliti »Tehničkoj knjizi« na susretljivoj brizi i »Grafičkom zavodu Hrvatske« na kvalitetnom radu, a za savjesno čitanje korektura, crtanje novih slika i sl. pisac se zahvaljuje svojim brojnim suradnicima u Zavodu za osnove elektrotehnike i električka mjerenja Elektrotehničkog fakulteta u Zagrebu. Da pak knjiga izlazi na odličnom papiru i inače dostojno opremljena, a ipak uz cijenu pristupačnu širokom krugu interesenata, omogućeno je punim razumijevanjem za potrebu ovakvoga djela sa strane vodećih zagrebačkih elektrotehničkih poduzeća i ustanova (»Rade Končar«, »Zajednica elektroprivrednih poduzeća N.R. Hrvatske«, »Elektra«, »Radioindustrija Zagreb«, »ELKA«, »Nikola Tesla«, »Kontakt«, »Munja«, »TEP«), kojih su pripomoći isključivo iskorištene u spomenutom smislu.

U Zagrebu, u novembru 1956.

Dr. J. L.

SADRŽAJ KNJIGE PRVE

	Stranica
OZNAKE, JEDINICE, KONSTANTE	12
A) MIRNI ELEKTRIČKI NABOJI I NJIHOVA POLJA (str. 17 do 115)	
A-I. POZITIVNI I NEGATIVNI ELEKTRICITET (A-1. do A-19.)	17
Pozitivni i negativni električki naboji; vodiči i izolatori. Elementarni naboji; elementarne čestice. Jedinice naboja i mase; sistemi jedinica. Suvremeni nazori o sastavu materije; važnije zakonitosti. Uzbudena i ionizirana stanja atoma; resonantna i ionizaciona radnja. Slobodni elektroni u kovnim vodičima; elektronski plin; izlazna radnja elektrona.	
A-II. SILE NA NABOJE I VEKTOR JAKOSTI ELEKTRIČKOG POLJA $\mathcal{F}$; INFLUENCIONI UČINCI I VEKTOR GUSTOĆE ELEKTRIČKOG POMAKA $\mathcal{D}$ (A-20. do A-39.)	36
Dvije kategorije učinaka električkih polja. Sile na naboj i pojam vektora jakosti električkog polja $\mathcal{F}$. Površine elektroda kao sijela nabojâ. Dielektričke tvari kao nosioci polja. Elektrometri; elektrometrička mjerenja množina elektriciteta. Pojavi influencije; Maxwellova dvoploča. Pojam vektora gustoće električkog pomaka $\mathcal{D}$. Mjerenja množina elektriciteta balističkim galvanometrima; neke primjene.	
A-III. ZAKON OMJERA VEKTORA $\mathcal{D}$ I $\mathcal{F}$; ZAKON TOKA VEKTORA $\mathcal{D}$ (A-40. do A-64.)	50
Problemi odnosa vektora $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ prema nabojima i prema dielektricima. »Zakon omjera« kao prva osnovna tvrdnja; »influenciona konstanta« ϵ_0 i »apsolutna« dielektrička konstanta $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon'$. Pitanja jedinica; zaokruženi sustavi sa četiri osnovne jedinice; ekvivalentni sustavi m-kg-s-A i V-A-s-m (uporedo i sustav V-A-s-cm). Odnos vektora $\mathcal{D}$ prema nabojima neovisan o naravi dielektrikuma. Pojam toka nekog vektora; »zakon toka« vektora $\mathcal{D}$ (u integralnom obliku) kao druga osnovna tvrdnja. Primjene: Coulombov zakon, ESJ, polja ravnih elektriziranih ploha, skok normalne komponente jakosti polja pri prelazu elektrizirane plohe, polje tik uz površinu nabijene elektrode, polje pločastoga kondenzatora, polje cilindričkog vodiča. Kvantitativno o nabojima kao »izvorima« i »ponorima« $\mathcal{D}$-linija. Pojam »divergencije nekog vektora; »zakon toka« u diferencijalnom obliku.	

A- IV. O SKALARU ELEKTRIČKOM POTENCIJALU V (A-65. do A-90.)	68
Pojam električkog potencijala V. Veza između skalaru V i vektora $\mathcal{F}$. Primjeri proračunavanja potencijala. Niveau-plohe, i silnice kao ortogonalne trajektorije niveau-ploha. Elektrode kao niveau-plohe; raspodjela naboja na elektrodama. Mjerenja razlika potencijala ili napona. Konturni linijski integrali vektora $\mathcal{F}$. Polja bez vrtloga i s vrtlozima, Vektorska operacija <i>rot</i> ili <i>curl</i>. Laplaceova i Poissonova jednačba potencijala. Radnja pri gibanju danog naboja između točaka danog napona; odnosi kod elementarnih čestica zbog ovisnosti mase o brzini; ekvivalencija mase i energije.	
A-V. ELEKTRIČKA POLJA I DIELEKTRIKA (A-91. do A-100.)	86
Vektor $\mathcal{D}$ na granici dvaju dielektrika; zakon loma $\mathcal{D}$-linija. Višeslojni kondenzatori. Općenite definicije vektora $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$. K fizikalnom shvaćanju dielektrika; ideja širenja električkih učinaka od točke do točke, i električkih polja kao stanja uzbuđenosti dielektrika. Kondenzator s vakuumom i s materijalnim dielektrikumom; »polarizacija« materijalnih dielektrika. Dielektrika kao nosioci energije električkih polja. Vrtlozi magnet-skih polja kod vremenskih mijenjanja vektora $\mathcal{F}$; »pomaćne struje« prema »provodnim strujama«. Izraz za gustoću pomaćnih struja.	
A-VI. PRORAČUNAVANJE KAPACITETA; KONDENZATORI (A-101. do A-127.)	94
Pojam kapaciteta. Proračunavanja pločastih kondenzatora; pitanja električke čvrstoće i nesavršenosti materijalnih dielektrika. Kuglasti i cilindrički kondenzatori. Kapacitet voda od dva vodiča i sustava horizontalnoga vodiča i zemlje. Paralelna i serijska spajanja kondenzatora. Parcijalni kapaciteti; pogonski kapaciteti. Energija nabijenoga kondenzatora.	
VJEŽBE UZ POGLAVLJE A):	113

B) PROVODNE ELEKTRIČKE STRUJE (str. 116 do 199)

B-I. O MEHANIZMU ELEKTRIČKIH STRUJANJA (B-1. do B-15.)	116
Struje u linearnim vodičima. Izvori stalnih struja. Termostruje i fotostruje. Provodne struje kao pojav gibanja električkih naboja. Konstantnosti koncentracija i konstantne gibljivosti nosilaca naboja uvjeti za Ohmov zakon; pojam električkog otpora. Slučajevi ne-omskih strujanja u vakuumu i u plinovima. Primjeri gibljivosti nosilaca naboja u nekim vodičima i poluvodičima.	

B-II. O ELEKTRIČKOM OTPORU (B-16. do B-29.)	128
Jedinice otpora i vodljive vrijednosti; stare i nove praktičke električke jedinice. Specifički otpor ρ i vodljivost κ . Temperaturni i ostali fizikalni utjecaji na iznos otpora. Otpori s posebnim ovisnostima. Iz atomistike krutih tijela. Elektronski poluvodiči; kristalne diode.	
B-III. OHMOV ZAKON I ZAKONI RAZGRANJIVANJA (B-30. do B-73.)	139
Ohmov zakon za zatvorene strujne krugove; EMS i protu-EMS. Prvi i drugi Kirchhoffov zakon razgranjivanja. Jednostavnije primjene Ohmova zakona i zakona razgranjivanja. Proširivanja mjernih opsega voltmetara predotporima i ampermetara nuzotporima. Metode mjerenja električkih otpora: U-I-metoda, Wheatstoneov most, Thomsonov most, metoda om-metra, metoda gubitka naboja. Mjerenja naponâ, strujâ i otporâ metodom kompenzacije. Spajanje elemenata u baterije. Paralelni rad generatorâ. Odnosi kod sustava triju vodiča. Metoda superpozicije, Théveninov teorem i metoda pretvorbe mreža kod rješavanja problema s razgranjivanjima. Problemi u »poljima strujanja«; Ohmov zakon u »elementarnom« obliku. Proračunavanja uzemljenja. Odnosi u dvoslojnim kondenzatorima s različitim omjerima $\epsilon_1 : \epsilon_2$ i $\kappa_1 : \kappa_2$.	
B-IV. RAD (RADNJA) I SNAGA (UČIN) ELEKTRIČKE STRUJE; STRUJNA TOPLINA (B-74. do B-97.)	166
Energija električke struje; njeni ekvivalenti: toplina, rentgenske zrake, mehanička i kemijska energija i sl. Izrazi za radnju A i snagu (učin) N struje; Jouleov zakon za strujnu toplinu. Elementarni oblik Jouleova zakona. Električke sijalice (žarulje); osnovni pojmovi fotometrije. Rasvjeta tinjalicama i svijetlećim cijevima. Fluorescentne cijevi. Lučna izbijanja. Gubici kod prenosa električke energije na daljinu; potreba visokih napona kod većih učina i većih daljina; sustav triju vodiča kod istosmjerne struje.	
B-V. POJAVI ELEKTROLIZE; PRIMARNI ELEMENTI; AKUMULATORI (B-98. do B-120.)	182
Bit elektrolitičkog vođenja struje. Prvi i drugi Faradayev zakon elektrolize. Pojavi elektrolitičke polarizacije. Važniji primarni elementi; depolarizacija u njima. Primjene polarizacije u sekundarnim elementima (akumulatorima). Olovni, želježno-nikaljni i srebreno-cinčani akumulatori. Elektrolitički ventili; elektrolitički kondenzatori.	
VJEŽBE UZ POGLAVLJE B):	195

C) POJAVI MAGNETSKIH POLJA (str. 200 do 310)

Stranica

- C-I. VEKTOR JAKOSTI MAGNETSKOG POLJA $\mathcal{H}$ U VAKUUMU; ZAKON PROTJECANJA (C-1. do C-30.) 200
 Magnetska polja kao pratioci gibanih električkih naboja; nepostojanje »magnetskih masa«. Indikatori magnetskih polja: magnetske silnice. Magnetometrički pokusi. Definicija vektora $\mathcal{H}$ jakosti magnetskog polja u vakuumu. Mjerenja $\mathcal{H}$ Hallovim generatorom. Zakon protjecanja u vakuumu. Magnetski potencijali i magnetski naponi. Mjerilo magnetskih napona. Primjena zakona protjecanja na proračunavanja jakosti magnetskih polja. Biot-Savartov zakon. Prva Maxwelllova osnovna jednadžba elektromagnetskog polja.
- C-II. VEKTOR MAGNETSKE INDUKCIJE $\mathcal{B}$ U VAKUUMU; ZAKON INDUKCIJE (C-31. do C-71.) 221
 Uvjet ekvivalencije $Q \cdot v = I \cdot l$. Sile na naboje u gibanju, odn. na strujne vodiče. Definicija vektora $\mathcal{B}$; omjer $\mathcal{B}/\mathcal{H} = \mu_0$ u vakuumu (indukciona konstanta). Tok vektora $\mathcal{B}$. Otkloni katodnih zraka magnetskim poljem. Elektroni i ioni pod utjecajem magnetskih i električkih polja u vakuumu. Ciklotron. Sile na strujne svitke i petlje; instrumenti s pomičnim svitkom u polju permanentnog magneta i elektromagnetski oscilografi. Elektrodinamske sile; mjerne sprave elektrodinamskog tipa. Princip elektromotora. Elektromagnetska indukcija u gibanim vodičima; prvi oblik zakona elektromagnetske indukcije. Elektromagnetska indukcija s gledišta zatvorenih strujnih krugova, gibljivih ili promjenljivih u vremenski stalnom magnetskom polju; drugi oblik zakona elektromagnetske indukcije. Posveopćenje na nepromjenljive mirne strujne krugove u vremenski promjenljivom magnetskom polju. Lenzovo pravilo; elektromagnetska kočenja. Primjeri elektromagnetske indukcije; balistička mjerenja strujnih i naponskih udara. Teorija mjera magnetskih napona. Druga Maxwelllova osnovna jednadžba elektromagnetskoga polja; električka elektrodinamska polja. Betatron. Gubici u željezu zbog vrtložnih struja. Skin-efekt.
- C-III. POJAVI FEROMAGNETIZMA; MAGNETSKI KRUG (C-72. do C-118.) 255
 Feromagnetička i neferomagnetička (diamagnetička i paramagnetička) materijalna sredstva, omjer $\mathcal{B}/\mathcal{H} = \mu = \mu_0 \mu'$ u takvim sredstvima. Balistička ispitivanja feromagnetika; komutacione krivulje. Pojam vektora magnetske polarizacije $\mathcal{M}_m$ i vektora magnetiziranja $\mathcal{J}$. Tumačenja pojava magnetiziranja, naročito kod feromagnetikâ. Pojavi histereze; Warburgov stavak. Praktičke metode proračunavanja gubitaka zbog histereze i vrtložnih struja u željeznim limovima. Pojavi magnetskoga starenja. Curieova temperatura. Pojam magnetskoga kruga; Ohmov zakon za magnetski krug. Magnetski otpori; magnetske karakteristike. Magnetsko rasipanje. Proračunavanje magnetskih krugova strojeva. Magnetska polja kao sijela energije. Ma-

gneti; magnetski moment Γ magneta; »razmagnetizirajući učinci polova«. Materijali za permanentne magnete; određivanje točke sa $(BH)_{\max}$. Pojavi na graničnim ploham feromagnetikâ. Nosiva sila magneta.

C-IV. SAMOINDUKTIVITETI I MEĐUSOBNI INDUKTIVITETI (C-119. do C-144.)	289
Samoinduktiviteti i međuinduktiviteti, te EMS samoindukcije i međusobne indukcije. Energetički odnosi u samoinduktivnim strujnim krugovima. Proračunavanja samoinduktiviteta svitaka. Samoinduktivitet voda od dva vodiča. Međuinduktiviteti; definicija stepena induktivnog vezanja strujnih krugova; energetički odnosi u međuinduktivnim sustavima. Pojavi variranja struje kod primjene ili uklanjanja stalne vanjske EMS, odnosno stalnog napona. Pojavi izbijanja i specijalno električkih titranja u krugovima s kapacitetom, induktivitetom i otporom.	
VJEŽBE UZ POGLAVLJE C):	306

D) STROJEVI ISTOSMJERNE STRUJE (str. 311 do 359)

D-I. OPĆENITO O ISTOSMJERNIM STROJEVIMA (D-1. do D-41.)	311
Bitni dijelovi istosmjernih generatora i motora. Zatvoreni armaturni namotaji. Prstenasti namotaji (dvopolni i višepolni). Proizvedeni napon i napon između kefica. Moment vrtnje. Cilindrički dvopolni namotaji. Diametralno i tetivno namatanje. Cilindrički višepolni namotaji. Petljasti namotaji; valoviti namotaji sa serijskim i serijsko-paralelnim spajanjem. Magnetska karakteristika, karakteristika praznog hoda istosmjernog stroja. Poprečno polje opterećena istosmjernog stroja. Pomak neutralne zone. Reakcija armature. Pojavi komutacije. Pomoćni polovi. Kompenzacioni namotaji. Načini uzbuđivanja istosmjernih strojeva.	
D-II. GENERATORI ISTOSMJERNE STRUJE (D-42. do D-49.)	338
Istosmjerni generatori u pogonu; karakteristike nezavisno uzbuđenih, serijskih, porednih i kompaundnih generatora. Generatori konstantne struje.	
D-III. MOTORI ISTOSMJERNE STRUJE (D-50. do D-67.)	343
Istosmjerni motori; tri osnovne relacije. Kritična brzina. Serijski, poredni i kompaundni motori. Pokretači uz istosmjerne motore. Reguliranja brzine »naponom« i »poljem«. Leonardov spoj. Električko kočenje .	
D-IV. STEPEN DJELOVANJA ISTOSMJERNIH STROJEVA (D-68. do D-73.)	354
Gubici u bakru, gubici u željezu, mehanički gubici. Izrazi za stepene djelovanja generatorâ i motorâ. Mjerenja stepena djelovanja; Hopkinsonova metoda.	
VJEŽBE UZ POGLAVLJE D):	357

OZNAKE, JEDINICE, KONSTANTE

A) OZNAKE

Djelo OSNOVI ELEKTROTEHNIKE, Knjiga I. + Knjiga II., raspoređeno je u poglavlja A) do J). Knjiga I. obuhvaća poglavlja A) do D), a Knjiga II. poglavlja E) do J). Zbog lakše orijentacije pojedine stranice, osim rednim brojevima, označivane su i slovima poglavlja. Poglavlja su dalje podijeljena s jedne strane u »odsječke«, numerirane kurentno rimskim brojkama (ispred kojih se kod citiranja dodaje i slovo poglavlja), i s druge strane u paragrafe, označivane kurentno arapskim brojkama (ispred kojih se kod citiranja također dodaje slovo poglavlja). Na taj se način mogu lako nalaziti pojedina citirana mjesta. Na pr. A-35. treba čitati: poglavlje A, paragraf 35.; slično B-III. označuje poglavlje B), odsječak III. U indeksu (kazalu) na kraju djela, gdje se pomiješano citiraju stranice obih knjiga, upotrebljavane su oznake kao I-135 (Knjiga I., stranica 135.) ili II-208 (Knjiga II., stranica 208.). Slike su u cijelom djelu kurentno numerirane.

Različite veličine označivane su u tekstu i u formulama ovako: a) *skalarne* veličine: oznakama u »kurzivnom« pismu (primjeri: elektr. potencijal V , elektr. napon U , elektr. otpor R ; itd.), no katkad i drugim slovima (primjeri: magn. tok Φ , magn. otpor $\mathcal{R}$, itd.); b) *vektorske* veličine, kao i veličine s područja izmjeničnih struja koje se, iako nisu vektori, mogu *reprezentirati* vektorima u x-y-ravnini s početkom u ishodištu koordinata, a u daljoj konsekvenciji se mogu *reprezentirati* i kompleksnim brojevima: u pravilu oznakama u »pisanom« pismu, a njihovi iznosi i njihove komponente »kurzivnim« pismom. Primjeri: vektor jakosti magn. polja $\mathcal{H}$, njegov iznos H , njegove komponente u smjeru osi x-y-z pravokutnoga prostornog koordinatnog sustava H_x - H_y - H_z , njegova komponenta H_s u smjeru elementa puta ds ; moment vrtnje $\mathcal{M}$, njegov iznos M ; izmjenični sinusoidni napon $\mathcal{E} = E(\cos \psi + j \sin \psi) = E \cdot e^{j\psi} = E \cdot \|\psi\|$ (sa: $j = \sqrt{-1}$), njegov iznos E , njegov fazni kut ψ ; kompleksni otpor (impedancija) $\mathcal{Z} = R + jX = Z \cdot \|\varphi\|$, iznosa $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ i faznog kuta $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$. Tek iznimno su vektorske veličine označivane i strjelicom iznad oznake; to je učinjeno kod $\vec{ds}$ (vektor pridijeljen po A-84. elementu pomaka ds), kod $\vec{dS}$ (vektor pridijeljen po A-46. plošnom elementu dS) i kod vektora brzine $\vec{v}$ (iznosa v).

Kratice jedinica pojedinih veličina označivane su »uspravnim« pismom. Primjeri: (amper A , sekunda s , ampersekunda As , volt po metru V/m , tesla T , itd.), no za jedinicu elektr. otpora upotrebljavana je oznaka Ω (veliko grčko slovo omega). Za dekadске mnogokratnike i dekadске alikvotne dijelove pojedinih jedinica upotrebljavane su oznake s naprijed pridodanim znakovima za prefikse po A-43. (primjeri: megom $M\Omega$, kilovolt po centimetru kV/cm , mikroampersekunda μAs , mikroampersekunda po dijelu skale $\mu As/d.sk.$, gigavatsat GWh , itd.).

B) JEDINICE

U pogledu jedinica u ovom se djelu već od I. izdanja davala prednost koncepciji suvremenih četverodimenzionalnih sistema jedinica, baziranih na prikladnim »četvorkama« ili »kvadruplima« nezavisno odabranih *osnovnih* jedinica, iz kojih »koherentno« (prirodno nadovezano), na način vidljiv sumarno iz tabele

pod IV) na str. 14./15. i približe iz pripadnih izvoda u poglavljima A) do C), slijede kao *izvedene* ostale jedinice (osim »psiholoških« i sličnih; v. A-12).

U ovom IV. izdanju, u skladu s novijim razvojem, izbor je pao na jedinice bazirane na kvadruplu m-kg-s-A (MKSA) odn. kvadruplu V-A-s-m, tabelarno predložene na str. 14. pod A). Oba kvadrupla, kao uostalom i niz drugih (poimenice kvadrupli: m-kg-s- Ω , m-kg-s- $\frac{H}{m}$, m-kg-s-C, m-Wb-s-C), sve dakako uz upotrebu »apsolutnih« A, V, Ω , C, H, Wb (v. B-18.), koji su od g. 1948. internacionalno obavezni, međusobno su ekvivalentni u tom smislu da svi oni, naime svaki sa svoje četiri osnovne jedinice i s ostalim jedinicama iz njih izvedenima, daju isti skup jedinica, dakle da u svima njima dolaze iste jedinice, kao 1 kg za masu, 1 N za silu, 1 V/m za jakost elektr. polja itd., samo dimenziono različito izražene, već prema odabranom osnovnom kvadruplu. Dodatno je prikazan na str. 15. pod B) još sistem V-A-s-cm, koji je bio u prvom redu upotrebljavan u prijašnjim izdanjima, a ne mogu mu se ni danas poricati mnoge prednosti. Uostalom sistemi V-A-s-m i V-A-s-cm razlikuju se samo jedinicom duljine, pa se podudaraju u svim jedinicama osim onih gdje igra ulogu duljina (v. predzadnji stupac na str. 15.). No bez obzira na spomenuto, gornji i svi drugi četverodimenzionalni sistemi koherentnih jedinica imaju veliku prednost da za sve njih vrijede iste formule, uz uvjet da se one pišu u obliku »relacija između veličina« (a ne »numeričkih relacija«), i dakako uz upotrebu baš onih jedinica, osnovnih i izvedenih, koje odnosni sistem sačinjavaju (A-55.). Treba još dodati da se veličine i pripadne jedinice uvađalo polazeći od takvih stavaka da su se same nadavale formule u »racionaliziranom« obliku (dakle bez iracionalnog faktora 4π u praktički važnijim relacijama; A-107., C-16.). Čitalac, ako samo pokuša postupati po starijim metodama s upotrebom CGS-ESJ i CGS-EMJ (A-54.), STJ (str. 15.) i sl., brzo će sam sagledati velike prednosti novih postupaka.

Evo još karakterizacije osnovnih jedinica sistema pod A) i B) na str. 14./15.:

I. OSNOVNE JEDINICE m-kg-s-A-sistema

- a) *metar* (m): jedinica duljine definirana razmakom kod 0 °C između dvije crte na prototipu metra iz PtIr, čuvanom u Sèvresu (kraj Pariza) i internacionalno usvojenom g. 1889.;
- b) *kilogram* (kg): jedinica mase definirana masom PtIr-prototipa iz Sèvresa, usvojenog g. 1889.;
- c) *sekunda* (s): jedinica vremena, 86400-ti dio »srednjega sunčanog dana«;
- d) *amper* (A): jedinica jakosti struje definirana stalnom strujom kroz svaki od dva tanka, beskonačno duga, paralelna i 1 m razmaknuta vodiča, u vakuumu, uz koju djeluje sila između obih vodiča $0,2 \cdot 10^{-6}$ N po metru duljine sistema vodiča; više glede ove definicije (i empiričke karakterizacije iz A-9. u cilju prilagođivanja apsolutnom amperu) v. u C-47.

II. OSNOVNE JEDINICE V-A-s-m-sistema

- a) *volt* (V): jedinica električkoga napona i EMS definirana stalnim naponom vodiča koji pri struji 1 A troši snagu 1 W; više glede ove definicije (i empiričke karakterizacije iz A-13. u cilju prilagođivanja apsolutnom voltu) v. u C-55.;
- b) do d): *amper*, *sekunda* i *metar*: kao pod I.d), I.c) i I.a).

III. OSNOVNE JEDINICE V-A-s-cm-sustava

- a) do c): *volt* kao pod II.a), *amper* kao pod I.d), *sekunda* kao pod I.c);
- d) *centimetar* (cm): jedinica duljine, 100-ti dio metra iz I.a).

IV) NAJVAŽNIJE VELIČINE I NJIHOVE JEDINICE u koherentnim sistemima

Redni broj	Veličine	Oznake	A) Jedinice u ekvivalentnim sistemima m-k-g-s-A (MKSA) odn. V-A-s-m			
			Imena jedinica	Kratice	Jedinice dimenziono izražene u sistemu m-k-g-s-A (MKSA)	Jedinice dimenziono izražene u sistemu V-A-s-m
1	masa	m	kilogram	kg	osnovne jedinice sistema m-k-g-s-A (MKSA)	VAs^3/m^2
2	duljina	l, s	metar	m		osnovne jedinice sistema V-A-s-m
3	vrijeme	t	sekunda	s		
4	jakost elektr. struje	I	amper	A		
5	elektr. potencijal elektr. napon; EMS	V, U, E	volt	V		
6	brzina (linearna)	$\vec{v}$	metar na sek.	m/s	$kg\ m^2/As^3$	m/s
7	akceleracija (linearna)	$\vec{a}$	metar na sek. po sekundi	m/s ²	m/s^2	m/s ²
8	sila	$\mathcal{P}$	njutn	N	$kg\ m/s^2$	VAs/m
9	moment vrtnje	$\mathcal{M}$	njutn-metar (džul)	Nm (J)	$kg\ m^2/s^2$	VAs
10	radnja, rad energija	A, W, E, W	vatsekunda, džul (džaul)	Ws, J	$kg\ m^2/s^2$	VAs
11	snaga, učin	N	vat	W	$kg\ m^2/s^3$	VA
12	množ. elektriciteta, el. naboj tok gustoće el. pomaka; el. tok	Q, Ψ	ampersekunda, kulon	As, C	As	As
13	električki otpor (rezistancija)	R	om	Ω	$kg\ m^2/A^2s^3$	V/A
14	jakost elektr. polja	$\mathcal{F}$	volt po metru	V/m	$kg\ m/As^3$	V/m
15	gustoća elektr. pomaka (elektr. pomak)	$\mathcal{D}$	ampersekunda po kv. metru	As/m ²	As/m ²	As/m ²
16	dielektrička polarizacija	$\mathcal{M}_e$	ampersekunda po kv. metru	As/m ²	As/m ²	As/m ²
17	jakost magn. polja	$\mathcal{H}$	amper po metru	A/m	A/m	A/m
18	magnetska indukcija (gustoća magn. toka)	$\mathcal{B}$	tesla	T	kg/As^2	Vs/m ²
19	tok magn. indukcije (magn. tok)	Φ, Ψ	voltsekunda, veber	Vs, Wb	$kg\ m^2/As^2$	Vs
20	magn. polarizacija	$\mathcal{M}_m$	tesla	T	kg/As^2	Vs/m ²
21	magn. napon, MMS	$U', \Theta(wI)$	amper (amperzavoj)	A (AZ)	A	A
22	magn. otpor (reluktancija)	$\mathcal{R}$	amper po voltsekundi	A/Vs	$A^2s^2/kg\ m^2$	A/Vs
23	kapacitet	C	farad	F	$A^2s^4/kg\ m^2$	As/V
24	induktivitet	L, M	henri	H	$kg\ m^2/A^2s^2$	Vs/A
25	influnciona konstanta (aps. diel. konstanta vakuuma)	ϵ_0	ampersekunda po voltmetru	As/Vm	$A^2s^4/kg\ m^3$	As/Vm
26	indukciona konstanta (aps. m. permeabilnost vakuuma)	μ_0	voltsekunda po amper metru	Vs/Am	kgm/A^2s^2	Vs/Am

m-kg-s-A odn. V-A-s-m (i u V-A-s-cm), te numeričke veze s ESJ, EMJ itd.

Redni broj	B) Jedinice u sistemu V-A-s-cm			Veze jedinica pod B) s jedinicama pod A) (Identičnost jedinica naznačivana sa: B≡A)	Glavne numeričke veze jedinica sistema pod A) s jedinicama mehan. sist. CGS i na CGS (po A-54., C-27., C-39. itd.) naslonjenima ESJ odn. EMJ, veze s mehaničkim starim tehn. jedinicama STJ, te drugi podaci
	Imena jedinica	Kratice	Jedinice dimenziono izražene u sistemu V-A-s-cm		
1	V-A-s-cm-jedinica mase	$VA s^3/cm^2$	$VA s^3/cm^2$	$1 VA s^3/cm^2 = 10^4 kg$	Masa: 1 kg (-masa) = 1000 g (CGS) = 0,102 STJ mase; u A-14. uvedenoj AJM odgovara $1,66 \cdot 10^{-27} kg$ Jak. el. struje: $1 A = 0,1 EMJ \approx 3 \cdot 10^9 ESJ$ El. napon: $1 V = 10^8 EMJ \approx \frac{1}{300} ESJ$ Sila: $1 N = 10^5 dina (CGS) = 0,102 kg \cdot (kg-sila \text{ ili kilopond; STJ})$ Mom. vrtnje: $1 N \cdot m = 10^7 din \cdot cm (CGS) = 0,102 kg \cdot m (STJ)$ Radnja i energija: $1 J = 10^7 erga (CGS) = 0,102 kg \cdot m^2/s^2 (= 0,239 cal)$ $1 eV = 0,160 \cdot 10^{-18} J$ Snaga (učin): $1 W = 10^7 erg/s (CGS) = 0,102 kg \cdot m^2/s^3 (STJ)$ Množina el. (el. nabo): $1 As = 0,1 EMJ \approx 3 \cdot 10^9 ESJ$ El. otpor: $1 \Omega = 10^9 EMJ \approx \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} ESJ$ Recipročna vrijednost el. otpora zove se elektr. vodljiva vrijednost. Otporu R u $\Omega (= V/A)$ odgovara vodljiva vrijednost $1/R$ u recipročnim omima $\Omega^{-1} (= A/V)$. Za Ω^{-1} uobičajeni su oznaka i naziv S (simens). Glede specif. otpora (otpornosti, rezistivnosti) i glede specifičke vodljive vrijednosti (vodljivosti, konduktivnosti) vidi B-19. do B-21. Kod izmj. struja glede uvijek recipročnih veličina prividnog otpora Z i prividne vodljive vrijednosti Y, i glede veza između njihovih komponenata $R-X$ odn. $G-B$ vidi približe u poglavlju E) Jakost magn. polja: $1 A/m = 4\pi \cdot 10^{-3} Oe (EMJ)$ Magn. indukc.: $1 T = 1 \frac{Wb}{m^2} = 10^4 G (EMJ)$ Tok magn. indukcije: $1 Wb = 10^8 M (EMJ)$ Magn. polarizacija: $1 T = 10^4 G (EMJ)$ Za magnetiziranje (ili intenzitet magnetiziranja) jedinica je ista kao za jakost magn. polja (v. C-80.) Kapacitet: $1 F = 10^{-9} EMJ \approx 9 \cdot 10^{11} RSJ (cm)$ Induktivitet: $1 H = 10^9 EMJ (cm) \approx \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} ESJ$ U mehan. sistemima CGS i STJ tri osn. veličine i jedinice jesu: u CGS duljina 1 cm, vrijeme 1 s, masa 1 g; u STJ duljina 1 m, vrijeme 1 s, sila 1 kg* (kg-sila, kilopond) Influenciona konstanta ϵ_0 ima u sistemima pod A) vrijednost $8,854 \cdot 10^{-12} As/Vm$, u sistemu pod B) vrijedn. $0,08854 \cdot 10^{-12} As/Vcm$; kod upotrebe ESJ uzimati je numerički iznosa 1. Indukciona konstanta μ_0 ima u sistemima pod A) vrijednost $0,4\pi \cdot 10^{-6} Vs/Am$, u sistemu pod B) vrijednost $0,4\pi \cdot 10^{-8} Vs/Acm$; kod upotrebe EMJ uzimati je numerički iznosa 1. Pamti još: $1 Ah = 3600 As$ $1 kWh = 860000 cal = 860 kcal = 367000 kg \cdot m$ $1 KS (= 1 PS) = 75 kg \cdot m/s = 736 W$ $1 HP = 746 W$
2	centimetar	cm	osnovne jedinice sistema V-A-s-m	$1 cm = 10^{-2} m$	
3	sekunda	s		$B \equiv A$	
4	amper	A		$B \equiv A$	
5	volt	V		$B \equiv A$	
6	centimetar na sekundu	cm/s	cm/s	$1 cm/s = 10^{-2} m/s$	
7	centim. na sek. po sekundi	cm/s ²	cm/s ²	$1 cm/s^2 = 10^{-2} m/s^2$	
8	V-A-s-cm-jedinica sile	$VA s/cm$	$VA s/cm$	$1 VA s/cm = 10^2 N (= 10^2 VA s/m)$	
9	V-A-s-cm-jed. momenta vrtnje (džul)	$Ws (J)$	$VA s$	$B \equiv A$	
10	vatsekunda, džul (džaul)	Ws, J	$VA s$	$B \equiv A$	
11	vat	W	VA	$B \equiv A$	
12	ampersekunda, kulon	As, C	As	$B \equiv A$	
13	om	Ω	V/A	$B \equiv A$	
14	volt po centim.	V/cm	V/cm	$1 V/cm = 10^2 V/m$	
15	ampersek. po kv. centimetru	As/cm^2	As/cm^2	$1 As/cm^2 = 10^4 As/m^2$	
16	ampersek. po kv. centimetru	As/cm^2	As/cm^2	$1 As/cm^2 = 10^4 As/m^2$	
17	amper po centimetru	A/cm	A/cm	$1 A/cm = 10^2 A/m$	
18	voltsek. po kv. centimetru	Vs/cm^2	Vs/cm^2	$1 Vs/cm^2 = 10^4 T (= 10^4 Vs/m^2)$	
19	voltsekunda, veber	Vs, Wb	Vs	$B \equiv A$	
20	voltsek. po kv. centimetru	Vs/cm^2	Vs/cm^2	$1 Vs/cm^2 = 10^4 T (= 10^4 Vs/m^2)$	
21	amper (amperzavoj)	A (AZ)	A	$B \equiv A$	
22	amper po voltsekundi	A/Vs	A/Vs	$B \equiv A$	
23	farad	F	As/V	$B \equiv A$	
24	henri	H	Vs/A	$B \equiv A$	
25	ampersekunda po voltcentim.	As/Vcm	As/Vcm	$1 As/Vcm = 10^2 As/Vm$	
26	voltsekunda po ampercentim.	Vs/Acm	Vs/Acm	$1 Vs/Acm = 10^2 Vs/Am$	

C) VAŽNIJE KONSTANTE

Influenciona konstanta (ili »apsolutna dielektrička konstanta vakuuma«):

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \left(= 0,08854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vcm}} = 0,08854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{cm}} \right)$$

Indukciona konstanta (ili »apsolutna magnetska permeabilnost vakuuma«):

$$\mu_0 = 0,4\pi \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = 0,4\pi \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}} \left(= 0,4\pi \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vs}}{\text{Acm}} = 0,4\pi \cdot 10^{-8} \frac{\text{H}}{\text{cm}} \right)$$

[Glede veze između ϵ_0 , μ_0 i brzine svjetlosti u vakuumu c vidi A-44.]

Elementarni električki naboji: $\pm Q_0 = \pm 0,160 \cdot 10^{-18} \text{ As (C)}$

Masa mirovanja elektrona: $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 0,00055 \text{ AJM}$

Omjer naboja i mase elektrona: $Q_0/m_0 = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ As/kg}$

Masa mirovanja protona: $m_p = 1,6724 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,0076 \text{ AJM}$

Masa mirovanja neutrona: $m_N = 1,6747 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,0090 \text{ AJM}$

Masa mirovanja α -čestice: $m_\alpha = 6,6438 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 4,0028 \text{ AJM}$

Planckova konstanta: $h = 6,623 \cdot 10^{-34} \text{ Js (Ws}^2\text{)}$

Brzina svjetlosti u vakuumu: $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Faradayeva konstanta: $Q_F = 96500 \text{ As (C)}$

Broj atoma u gramatomu ili broj molekula u molu neke tvari (Loschmidtov broj, zvan i Avogadrov broj): $N = 0,6024 \cdot 10^{24}$

1 eV = $0,160 \cdot 10^{-18} \text{ J (Ws)}$; 1 MeV = 10^6 eV ; 1 GeV (američki: BeV) = 10^9 eV .

Veze po relaciji ekvivalencije mase i energije (A-90.): masi mirujućeg elektrona odgovara 0,511 MeV ili $82 \cdot 10^{-15} \text{ J}$; masi mirovanja 1 kg odgovara $5,61 \cdot 10^{20} \text{ MeV}$ ili $25 \cdot 10^9 \text{ kWh}$ (= 25000 GWh).

Češće upotrebljavana slova grčkog pisma:

a) mala: α [izgovor: a, ime: alfa], β [b, beta], γ [g, gama], δ [d, delta],
 ϵ [e (kratko), epsilon], ζ [z, zeta], η [e (dugo), eta], θ [th, theta],
 κ [k, kapa], λ [l, lambda], μ [m, mi], ν [n, ni], ξ [ks, ksi],
 π [p, pi], ρ [r, ro], σ [s, sigma], τ [t, tau], ϕ [f, fi], χ [h, hi],
 ψ [ps, psi], ω [o (dugo), omega];

b) velika: Γ [g, gama], Δ [d, delta], Θ [th, theta], Σ [s, sigma], Φ [f, fi],
 Ψ [ps, psi], Ω [o (dugo), omega].

A) MIRNI ELEKTRIČKI NABOJI I NJIHOVA POLJA

I) POZITIVNI I NEGATIVNI ELEKTRICITET

Pozitivni i negativni električki naboji; vodiči i izolatori. Elementarni naboji; elementarne čestice. Jedinice naboja i mase; sistemi jedinica. Suvremeni nazori o sastavu materije; važnije zakonitosti. Uzbudena i ionizirana stanja atoma; resonantna i ionizациона radnja. Slobodni elektroni u kovnim vodičima; elektronski plin; izlazna radnja elektrona.

1. Ako se u potankosti razmotre pojavi iz područja nauke o elektricitetu, kojih industrijske i druge praktičke primjene čine predmete proučavanja elektrotehnike, dolazi se do spoznaje da se kod svih njih, posredno ili neposredno, radi u zadnjoj liniji o manifestacijama električkih i magnetskih polja, o manifestacijama električkih i magnetskih »sila« u prostoru. Električka polja podržavaju provodne električke struje tjerajući električke elementarne čestice (elektrone) da struje u metalnim vodičima i elektrizirane čestice materije (ione) da se gibaju prema elektrodama u elektrolitičkim kupeljima. Magnetska se polja javljaju uvijek tamo gdje elektricitet struji. Vrlo zanimljive, i ne baš jednostavne, međusobne povezanosti između električkih i magnetskih polja stvaraju kod vremenskog mijenjanja magnetskoga polja na nekom mjestu vrtloge električkoga polja na tom mjestu, a kod vremenskog mijenjanja električkoga polja vrtloge magnetskoga polja. Šireći se prostorom ogromnom, ali ipak još konačnom brzinom, polja valova radija, istodobno električka i magnetska, omogućuju bežičnu signalizaciju na velike daljine itd.

Za dublje razumijevanje elektrotehnike ne će, prema rečenomu, nipošto biti beskorisno ako razmatranja u ovoj knjizi baziramo u prvom redu na proučavanju svojstava električkih i magnetskih polja, koja ćemo postepeno upoznavati nadovezujući na pripadne fizikalne spoznaje nauke o elektricitetu. Takvo postupanje možda još nije bilo toliko potrebno u prvim stadijima elektrotehnike, pa i u prvim decenijama jačega njezinoga razvoja, recimo tamo do početka ovoga stoljeća, kad se moglo smatrati za nuždu još dovoljnim prilaziti elektrotehnici sa samo najopćenitijim znanjem o načinima proizvodjenja električkih struja i o učincima tih struja. No danas je ovo postupanje vrlo shodno. S jedne strane zato što je elektrotehnika danas već tako bujno razvijena (i razvija se iz godine u godinu sve više) da današnji elektrotehničar treba da shvaća bitnost vrlo raznolikih primjena elektriciteta, i onakvih kakvih starija elektrotehnika nije ni poznavala. A s druge strane i zato što je napretkom moderne fizike, poimence novijim i najnovijim otkrićima o elementarnim električkim česticama, o izgradnji atoma i o drugom sličnom, uneseno svjetlosti ne samo u neka osnovna pitanja prirodnih nauka uopće, nego i u teme čisto elektrotehničkoga interesa. Ukratko govoreći, elektrotehničar danas, više

nego ikad prije, treba da je u velikoj mjeri i fizičar, da izgrađuje svoja naziranja koristeći se tekovinama *suvremene* nauke o elektricitetu, i fizike uopće.

2. Najprije ćemo svratiti pozornost *električkim* poljima. Međutim, da odnose odmah u početku previše ne zamršimo, prethodno ćemo se ograničiti na relativno jednostavne slučajeve električkih polja: na *elektrostatska* polja.

Razmotrimo malo поближе što pod tim treba razumijevati. Već u elementima fizike zamišlja se da postoje »električki naboji« ili »množine elektriciteta«. A da bi se i pitanje mogla tumačiti njihova međusobna djelovanja, zamišljaju se dvije različite, upravo suprotne vrste električkih naboja, dvije vrste elektriciteta, nazvane »pozitivni« i »negativni« elektricitet [»pozitivnim« je, slučajno, nazvan onakav elektricitet kakav se po elementarnom shvaćanju nakupi između ostaloga na staklu natrtom na pr. prikladno prepariranom (amalgamiranom) kožom, i prema tomu je i ime »negativni« elektricitet ostalo za onu drugu vrst elektriciteta, kakva se javlja na pr. na krznom natrtoj tvrdoj gumi (ebonitu)]. Različitost obih vrsta elektriciteta manifestira se time što se pozitivni i pozitivni električki naboji (a po tom i tim nabojima »elektrizirana« tjelesa, nosioci tih naboja) međusobno, a također i negativni i negativni naboji međusobno *odbijaju*, dok se naprotiv pozitivni i negativni međusobno *privlače* (»istoimeni se elektriciteti odbijaju, a raznoimeni privlače«). Suprotni pak karakter obih vrsta elektriciteta odražava se u činjenici da je svakoj vanredno neznatnoj pozitivnoj množini elektriciteta, smještenoj unutar nekoga nadasve malenoga prostora (elementa volumena) dv , moguće pridružiti neku unutar drugoga nekoga elementa volumena dv' smještenu negativnu množinu elektriciteta takvu da, kod približenja spomenutih dvaju električkih naboja (pozitivnoga u elementu volumena dv i negativnoga u elementu volumena dv') na nadasve neznatnu udaljenost, dode do potpunoga međusobnoga poništenja pojedinačnih djelovanja obih promatranih naboja na ostale ma kakve treće naboje, pozitivne ili negativne, u povoljnim *konačnim* daljinama od obih na opisani način združenih naboja, točnije: u daljinama prema kojima iščezavaju dimenzije volumnih elemenata dv i dv' i međusobni razmak tih elemenata. Za naboje kojih se učinci uz opisane uslove poništavaju prema vani veli se da su »jednaki po iznosu i protivni po predznaku« (»množine raznoimenih elektriciteta $+dQ$ i $-dQ$ se neutraliziraju«).

I evo sad, po modernom shvaćanju, za prostore oko ovako uvedenih i ovako zamišljenih električkih naboja, i to već onda kad ti naboji *miruju*, treba uzimati da su u nekom naročitom *stanju*, po kojemu i zbog kojega oni postaju sijela izvjesnih karakterističnih manifestacija, izvjesnih usmjerenih djelovanja (sile na druge naboje dovedene u prostore oko nekoga naboja, odnosno između dva udaljena naboja, jedan su primjer za takva djelovanja). A to se kraće izriče kad se veli da su ti prostori sijela *elektrostatskih* polja, za koja smo rekli da ćemo ih prva proučavati. Mirni naboji, dakle statičke prilike, pretpostavljaju se zato, jer kod gibanih naboja, kakve susrećemo kod (provodnih) električkih struja, pridolaze i drugi pojavi (poimence magnetski učinci).

3. Obično će električki naboji biti porazmješteni na prikladnim materijalnim tjelesima kao nosiocima; no uzimat ćemo da su materije tih nosilaca dobro *vodljive* za elektricitet (kako je to osobito kod kovina). Električki dobro vodljivim materijama zovu se one u kojima su električki naboji lako slobodno gibljivi; prepušteni sami sebi naboji će se dakle na nosiocima od tvari dobre vodljivosti, t. zv. *elektrodama* (konduktorima), brzo porazmjestiti u rasporedaj koji odgovara statičkim prilikama ravnotežja (i to, uz pretpostavljane statičke prilike, porazmjestit će se na površini nosilaca, kako ćemo još vidjeti i kako se donekle i »a priori« može očekivati obzirom na međusobno odbijanje istoimenih naboja neke elektrode).

Naprotiv za prostore između elektroda, prostore gdje uzimamo da vladaju električka polja koja ćemo proučavati, pretpostavljat ćemo, idealizirajući do daljega, da uopće ne dopuštaju slobodnoga gibanja električkih naboja, dakle da su potpuni (idealni) *nevodiči* ili *izolatori* za elektricitet; inače bi preko tih prostora električki naboji mogli prelaziti između elektroda, ili odlaziti u zemlju itd.

Dobro evakuirani prostor (visoki vakuum), pa još i uzduh normalnoga pritiska u običnim prilikama, praktički odgovaraju zahtjevu idealnih izolatora. Kako je izvrstan izolator uzduh pod običnim prilikama, vidi se već po tomu što se u uzduhu mogu dobro izvoditi pokusi sa statičkim električkim poljima, a naboji sabrani na elektrodama koje se nalaze u uzduhu drže se na ovima kroz sate i dane. No djelovanjem različitih uzroka (obasjavanje rentgenskim i drugim zrakama, jaka električka polja, učinci radioaktivnih tvari itd.) uzduh, kod normalne gustoće i razrijeđen, može se lako dovesti u stanje slabije ili jače »ionizacije« (v. kasnije), u kome prestane biti izolator. Od krutih i tekućih tjelesa jako se približavaju zahtjevu nevodljivosti materije obično u praksi zvane dobrim izolatorima, i obično upotrebljavane za električke izolacione svrhe: staklo, porculan, smolaste tvari, guma, jantar, tinjac, »umjetne mase« kao polistirol i sl., različita ulja itd. Ali sve ove tvari pokazuju nešto, pa makar i posve neznatno malo, vodljivosti prema elektricitetu; jer ipak se na pr. čak i jantaru električki naboji mogu izvana privoditi, a i obrnuto se naboji sa jantara, koji se pojave na ovomu recimo nakon trenja suknom, dadu prenijeti, skoro bi se moglo reći »sastrugati«, na metalne elektrode, elektrometre itd.

Prema rečenom će kovne elektrode, ako se ne želi da elektricitet s njih ode u zemlju, morati biti »izolirano« montirane. Tako na pr. u sl. 2. (na str. 38.) kovna kugla K treba da je učvršćena na držak D od vrlo dobroga izolatora (na pr. jantara, polistirola itd.). Dobra izolacija od važnosti je osobito kod pokusa s elektricitetom u statičkom stanju, gdje su u igri neznatne množine elektriciteta, koje lako i preko mnogih, sa stajališta električkih struja još dobrih »izolatora« odilaze u zemlju itd.

4. Spominjući električke naboje, njihovo gibanje, njihov ovakav ili onakav razmještaj po elektrodama i slično, mi se već izražavamo kao da pridajemo množinama elektriciteta supstancijalni karakter, karakter agensa koji se dadu prenositi s mjesta na mjesto, skupljati ili dijeliti, itd.

Već u staroj fizici postavljena je bila ovakva pretpostavka supstancijalnih električkih vanredno »fina« agensa, različitih od obične materije, t. zv. »električkih fluida«. Samo je pitanje bilo: a) da li treba uzimati da ima dvije vrste električkih fluida, pozitivnih i negativnih, pa se pozitivno ili negativno električnima čine tjelesa nabijena jednim ili drugim fluidom; odnosno pozitivno električnima ona koja imadu više pozitivnoga nego negativnoga fluida, a negativno električnima ona koja imadu više negativnoga nego pozitivnoga fluida (t. zv. *dualistička* teorija

fluidâ); ili je b) dovoljno zamišljati samo jedan električki fluid, koji je normalno svagdje jednoliko porazdijeljen, pa nam se električnima u jednom ili drugom smislu čine samo ona tjelesa koja imaju više ili manje toga fluida nego normalno, tako da bi, uz supoziciju da na pr. postoji samo fluid negativnoga elektriciteta, tjelesa s pretičkom toga fluida iznad normalne mjere izlazila kao negativno električna, a ona s manje toga fluida nego normalno kao pozitivno električna (t. zv. *unitarna* teorija fluidâ).

5. No same po sebi ove *teorije* fluida nisu još ni morale značiti da električki fluidi (dvovrsni po dualističkoj teoriji, a jednovrsni po unitarnoj) doista i postoje.

U vrijeme kad su uvedeni električki fluidi pretpostavljalo se u fizici da postoje i drugi fluidi, poimence toplinski i magnetski.

Ali kasniji razvoj fizike razorio je temelje na kojima je počivala hipoteza fluida topline, pa mi danas znademo da je topline oblik energije, te ako ipak još govorimo o »množini topline« od toliko i toliko kalorija, koju smo »priveli« određenom volumenu nekog plina povisivši mu time temperaturu za izvjesni broj stupnjeva Celzijeve skale, mi dobro znamo, i mislimo time tō samo reći, da smo zapravo plinu priveli energiju potrebnu da se povisi živahnost toplinskog gibanja njegovih čestica, a nipošto ne pomišljamo da smo plinu priveli nekoga fluida »kalorikuma« (s kojim je još g. 1824. jedan od osnivača termodinamike Carnot u svojem besmrtnom djelu »Réflexions sur la puissance motrice du feu« operirao).

Slično mi danas nemamo nikakvoga razloga vjerovati u egzistenciju magnetskih naboja, masâ »sjevernoga« i »južnoga« magnetizma, zamišljenih nekoć na polovima magneta, jer se magnetski pojavi neprisiljeno tumače električki.

Pa i u samoj nauci o elektricitetu bilo je periodâ kad se električke pojave htjelo vidjeti samo u prostorima ispunjenima izolatorima, a izbjegavalo se govoriti o nabojima, odnosno smatralo se ove samo »sekundarnim pojavima na graničnim plohama izolatora i vodiča«.

6. Ako smo dakle ovdje usprkos toga na početak razmatranja stavili električke naboje, mora da je tomu bio dublji razlog: da su pridošli u novije vrijeme dalji momenti, koji ukazuju na supstancijalni karakter elektriciteta.

I doista, moderna fizikalna istraživanja iznijela su vanredno mnogo nadasve uvjerljivih *eksperimentalnih*, ne samo kvalitativnih, nego i kvantitativnih spoznaja, koje nas sile da ne samo u elektricitetu gledamo nešto supstancijalno i da prihvatimo dualističko shvaćanje, nazor o dvama suprotnim elektricitetima, nego da osim toga još obim elektricitetima pridajemo i atomističku strukturu.

Danas se smatra da su svi negativni električki naboji cjelobrojni mnogokratnici jednoga te istoga *elementarnoga* kvantuma (množine) $-Q_0$ negativnog elektriciteta, najmanjega dosad poznatoga negativnoga električkog naboja, dakle da su po iznosu uvijek jednaki $-nQ_0$, gdje n može biti 1, 2, 3, i uopće samo cijeli broj, a isto tako i svi pozitivni električki naboji da mogu biti samo cjelobrojni mnogokratnici $+nQ_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) najmanjega pozitivnog električkoga naboja $+Q_0$,

elementarnoga kvantuma pozitivnoga električnoga, jednakoga po iznosu i protivnoga po predznaku negativnomu elementarnom kvantumu $-Q_0$.

7. Od klasičnih pokusa *Millikana* i drugih sa sićušnim kapljicama ulja, rasprskavanjem elektriziranimi neznatnim nabojima Q i mikroskopom promatranima u njihovim gibanjima vertikalno gore i dolje (uz primjenu jakih električkih polja i bez tih polja), postoje za ovu tvrdnju neposredne empirijske potvrde, jer iz opažanja brzina promatranih kapljica slijede kao iznosi Q (pozitivnih) naboja pojedinih kapljica ulja uvijek cjelobrojni mnogokratnici $+nQ_0$ jednoga te istoga kvantuma $+Q_0$. Povrh toga opaža se da se naboj Q sićušnih uljnih kapljica katkad naglo promijeni prema gore ili prema dolje, ali uvijek *diskontinuirano* za iznos elementarnoga kvantuma, ili njegov dvostruki iznos itd., što se pripisuje tomu da pozitivno nabijena uljna kapljica prima k sebi pozitivno ili negativno nabijene električke čestice, t. zv. *ione* iz uzduha, pa prema tomu također i ti ioni nose samo pojedine elementarne električke naboje, pozitivne $+Q_0$ ili negativne $-Q_0$, ili po dva, tri itd. ta naboja.

8. Također na elementarne naboje, ili njihove dvokratnike, trokratnike itd., nailazi se, doduše ne tako neposredno, ali ipak uvjerljivo, ako se detaljnije prouče mnogi drugi eksperimentalni fakti: pojavi kod prolaza električnoga u umjereno evakuiranim i u vanredno jako (*»visoko«*) evakuiranim prostorima, kod radioaktivnih raspada materije, kod t. zv. kozmičkih zraka, itd., zatim zakonitosti opažane kod elektrolize, kod emisija optičkih i rentgenskih spektara, kod kemijskih reakcija i drugog sličnog.

Iz mnogobrojnih opažanja s nabrojenih, naoko često potpuno heterogenih područja rezultiraju, pored mnogih osnovnih spoznaja o građi materije, a djelomice i u vezi s njima, uvijek jednostruki, dvostruki itd. isti onakvi elementarni naboji, kakvih se mnogokratnici (obično viši) susreću kod gore spomenutih pokusa po *Millikanu*.

No još i više se spoznaje: nailazi se tu djelomice na elementarne naboje vezane već uz pojedine atome, atomske grupe ili cijele molekule materije (umjesto, kao kod pokusa po *Millikanu*, uz doduše mikroskopski sitne, ali prema atomima i molekulima ipak relativno silno glomazne uljne kapljice), a djelomice čak i na pojedinačne elementarne naboje $-Q_0$ i $+Q_0$ nevezane na atome materije, dakle na elementarne čisto električke čestice, *»atome električnoga«, nazvane elektronima* u slučaju negativnog elementarnoga naboja $-Q_0$ i *pozitronima* u slučaju pozitivnoga elementarnoga naboja $+Q_0$.

Tako na pr. vođenje električnoga u elektrolitičkim tekućinama treba svoditi na sudjelovanje pozitivno i negativno elektriziranih atoma i atomskih grupa, čestica zvanih *ionima*, na koje se mnoge tvari, *»elektroliti«,* otapanjem u vodi spontano (još prije prolaza struje) *»raspadaju«* ili *»disociiraju«*. Isto tako nisu ništa drugo nego električki nabijeni atomi (i to atomi helija s dvostrukim elementarnim pozitivnim nabojem) ni t. zv. α -čestice, izbacivane velikim brzinama kao *» α -zrake«* na pr.

iz preparata radiuma. Elektrone pak treba gledati u brzim česticama koje sačinjavaju »katodne zrake« u katodnim cijevima, zatim u česticama emitiranim iz usijanih negativnih elektroda (katodâ) cijevi radiotehnike, rentgenskih cijevi itd., dok naročito brze elektrone izbacuju, pod imenom » β -zrakâ«, preparati u radioaktivnom raspadanju. Pozitroni se naprotiv ne susreću ni izdaleka tako često kao elektroni, pa su i razmjerno kasno (Anderson, 1932.) otkriveni, i vanredno su kratkog vijeka; u elektrotehnici su oni od manjeg interesa.

9. Nije međutim samo utvrđeno da u prirodi dolaze, pojedinačno ili u manjim ili većim skupinama, uvijek samo isti elementarni električki naboji, negativni $-Q_0$ i pozitivni $+Q_0$, nego je štoviše, kod izvjesnih u A-8. spomenutih istraživanja, a također i kod Millikanovih pokusa iz A-7., uspjelo doći i do apsolutnoga iznosa Q_0 elementarnih naboja, što je ujedno i apsolutni iznos naboja elektrona i naboja pozitrona.

Konkretnije govoreći: uspjelo je odrediti odnos elementarne množine elektriciteta prema općenito u elektrotehnici upotrebljavanoj jedinici množine elektriciteta *ampersekundi* (As), zvanoj također *kulon* (C). Zajedno s amperom (A), omom (Ω), voltom (V), faradom (F) itd. spada ampersekunda (As) među internacionalno upotrebljavane jedinice, te, kako joj već ime pokazuje, odgovara množini elektriciteta kod prolaza struje jakosti 1 amper (1 A) za vrijeme od 1 sekunde (1 s). A da zasad empirički karakteriziramo As i A (ostavljajući za kasnije jednu drugu definiciju ampera u smislu t. zv. apsolutnog ampera), mi ćemo do daljega zamišljati da 1 As predstavlja množinu elektriciteta potrebnu da se elektrolitički izluči (na pr. iz otopine srebrenog nitrata) 1,11815 miligrama srebra, uzevši time već u obzir kod As i A (a tako ćemo učiniti u ovoj knjizi i kasnije kod Ω , V, F itd.) po numeričkom značenju posve neznatnu, ali principno važnu, nedavno provedenu reviziju (s početkom g. 1948. kao rokom stupanja na snagu) starijih prvobitnih, još g. 1908. internacionalno prihvaćenih i do konca 1947. upotrebljavanih električkih jedinica (više kasnije), kojom se revizijom internacionalno prešlo na apsolutni amper, apsolutni volt itd.

I evo, za ovako uvedenu množinu ampersekundu ili kulon nađeno je da bi se dala realizirati sa 6,25 trilijuna ($6,25 \cdot 10^{18}$) elementarnih naboja, tako da bi na pr. za 1 As negativnog elektriciteta trebalo 6,25 trilijuna elektrona, dok bi 1 As pozitivnog elektriciteta bio ukupni naboj od 6,25 trilijuna recimo ionâ vodika, jer ioni vodika su električki nabijene čestice s jednim elementarnim pozitivnim nabojem. Obrnuto to znači da je naboj elektrona, i uopće elementarnoga negativnoga kvantuma elektriciteta:

$$-Q_0 = -0,160 \cdot 10^{-18} \text{ As} \quad (1)$$

a naboj pozitivnoga elementarnog kvantuma elektriciteta:

$$+Q_0 = +0,160 \cdot 10^{-18} \text{ As} \quad (1')$$

10. Kako je neznatna elementarna množina elektriciteta, prema množinama elektriciteta koje su u igri kod električkih struja, vidi se po tomu što već obična 25-vatna sijalica za napon od 220 volta troši 0,114 ampera struje, a to znači da kroz njezinu nit mora sekundno prolaziti ogromni broj od malo ne tri četvrtine trilijuna elektrona. Najosjetljiviji moderni galvanometri pokazuju još (za obične prilike fantastično slabe) struje oko 10^{-10} A i slabije; a ipak to znači da oni daju otklone tek ako kroz njih sekundno teku stotine milijuna elektrona. Međutim najosjetljivijim instrumentima statičkoga elektriciteta (elektrometrima specijalne konstrukcije) uspijeva ipak mjeriti već i struje sve do samo 1000 ili čak 100 ili manje elektrona sekundno.

Što je ipak uspjelo učiniti vidljivima i pojedinačne staze brzih u uzduhu gibanih elektrona, α -čestica itd., pa i pozitrona, zasluga je jednoga vrlo uspješnog postupka, metode *Wilsonove komorice*. Metoda po C. T. R. Wilsonu počiva na stvaranju sićušnih kapljica vode u uzduhu, prezasićenom vodenom parom nakon ohlađenja naglim rastezanjem (ekspanzijom). Kapljice vode kondenziraju se pri tom u prvom redu na ionima u uzduhu kao »kondenzacionim jezgrama«. A kako elektroni, a pogotovo α -čestice, jureći uzduhom razbijaju (i to na račun svoje brzine) molekule u uzduhu u parove pozitivnih i negativnih iona (koji se uostalom dosta brzo natrag spajaju u neelektrične molekule u uzduhu), to će, ako se u vlažnom uzduhu u prikladnoj komorici proizvede ekspanzija, i ako se odmah iza toga puste u komoricu elektrizirane čestice koje stvaraju ione, staze tih čestica postati vidljive po kapljicama koje se stvore na ionima, što su ih proizvele čestice, kao jezgrama. Pojav se, uz prikladnu rasvjetu, daje i motriti i fotografirati. Reproduciranih fotografija staza po ovoj metodi može se naći u boljim fizikama. Staze α -čestica su uglavnom pravocrtne, te zbog gusto stvaranih parova iona nešto deblje, a ne sežu daleko (dosežu su im tek po nekoliko centimetara u uzduhu normalne gustoće, već prema brzinama s kojima α -čestice izlijeću iz jezgri pojedinih radioaktivnih elemenata). Masom mnogo neznatniji elektroni β -zraka daju tanke i više krivudave staze. I rentgenske zrake i γ -zrake daju u Wilsonovim komorama tragove staza (od elektrona proizvedenih u uzduhu djelovanjem tih zraka).

Pored opisanih komorica s ekspanzijom ima danas već i trajno (a ne samo neposredno nakon ekspanzije) osjetljivih, t. zv. *kontinuiranih* kondenzacionih komorica.

Po centimetru staze načine teški projektili α -zraka po 20000, a i znatno više pari iona, a elektroni β -zraka, iako znatno brži, proizvode zbog svoje neznatne mase mnogoput manje, na pr. samo na stotine parova iona.

Mjesto fotografiranjem nizova kapljica u Wilsonovoj komorici mogu se tragovi α -čestica fiksirati i *direktno fotografski*. I od prolaza α -čestica kroz fotografsku emulziju ostanu naime neposredni tragovi, pa se na fotografskim pločama, nakon razvijanja i promatranja razvijene ploče u vrlo velikom povećanju (recimo 500-strukom), vide fotografske registracije (uostalom vanredno kratkih) staza α -čestica u osjetljivom sloju ploče.

Teška taneta kakva predstavljaju α -čestice mogu se individualno konstatirati i još jednim načinom, *metodom scintilacije*. Kako je već davno opaženo, pojedinačni sudari s kristalićima cinčanog sulfida ZnS (s primjesama bakra i mangana) α -česticâ, dovoljno rijetko emitiranih iz

vanredno neznatnih količina radioaktivnih preparata, kod te se metode individualno manifestiraju kao slabašni bljeskovi svijetla (scintilacije), kojima kristali spomenute materije reagiraju na ozljede zadane im udarcima α -čestica. Bljeskovi su vrlo slabašni, ali se sigurno dadu motriti u punoj tami i s odmorenim okom (najbolje s lupom koja oko 6 do 10 puta povećava).

Danas je poznat velik broj tvari koje ne samo čestice korpuskularnih zraka nego i primljene fotone (kvante) rentgenskih i gama radijacija (v. A-19.) registriraju scintilacijama. Te tvari služe kao detektori prodornih radijacija, i njihovi se vrlo slabašni i vrlo kratkotrajni bljeskovi, fotoelektrički pretvoreni u električke impulse i milijunski pojačani u t. zv. fotomultiplikatorima, mogu učiniti pojedinačno zamjetljivima, te još i pri mnogo bljeskova sekundno registrirati elektroničkim brojačima (scalerima).

Ima konačno još jedan princip po komu se dadu učiniti individualno zamjetljivima korpuskularne zrake (i rentgenski i gama fotoni); to su *ionizacioni postupci brojenja* (mjesto prvobitnih Geigerovih »brojača sa šiljkom« danas se isključivo upotrebljavaju kudikamo bolje »Geiger-Müllerove cijevi«); također ovim putem dobiveni električki impulsi, prikladno pojačani i priređeni, mogu se registrirati scalerima, čak i kad vrlo gusto nadolaze. Neka još bude spomenut »Rosenblumov brojač«, koji je vrlo jednostavan i registrira α -čestice sitnim iskricama u uzduhu obične gustoće.

11. Elektronima i pozitronima, iako su to električke čestice koje, protivno nego je to slučaj kod iona, nisu vezane ni uz kakve atome ili atomske grupe kemijskih elemenata, treba ipak pripisivati neku »tromost« u smislu »otpora« protiv ubrzavanja ili usporavanja njihova gibanja, dakle neku *tromu masu*, kakvu prema mijenjanju brzine pokazuje i materija. Ta se masa može odrediti iz pokusa otklona do velike brzine električkim silama u evakuiranom prostoru ubrzanih elektrona, t. j. *katodnih zraka*, ako se te zrake otklone prikladno primijenjenim električkim i magnetskim poljima. Zapravo se iz tih otklona dade zaključiti na kvocijent Q_0/m_0 naboja Q_0 i tromе mase m_0 elektronâ i na brzinu v elektrona koji čine katodne zrake, pa m_0 tek posredno slijedi s pomoću inače poznatoga Q_0 .

12. Da bismo i numerički karakterizirali veličine Q_0/m_0 i m_0 , kraj već uvedene jedinice množine elektriciteta As , i njom po (1) izraženoga Q_0 , bit će potrebno još odlučiti se za jedinicu mase, da bismo njom izrazili m_0 . A to vodi dalje na pitanje i ostalih jedinica, odnosno na pitanje izbora *sistema jedinica* koji će se u ovom djelu upotrebljavati.

Kako je poznato, može se u *mehanici* izići s *tri* »osnovne« jedinice, iz kojih se onda dadu prirodno izvesti ostale *mehaničke* jedinice, tako da nastaje sistem povezanih ili koherentnih mehaničkih jedinica. Na pr. u fizici uobičajeni CGS-sustav (cm-g-s-sustav) ima osnovne jedinice: jedinicu duljine 1 cm (centimetar, stoti dio »internacionalnog metra«), jedinicu mase 1 g (gram, tisući dio »internacionalnog kilograma«) i već u A-9. spomenutu jedinicu vremena 1 s (sekunda, 86400-ti dio »srednjega sunčanog dana«); iz njih na poznati način slijede: jedinica brzine 1 cm/s, jedinica akceleracije 1 cm/s², jedinica sile 1 g·cm/s² (= 1 din), jedinica radnje (rada) 1 g·cm²/s² (= 1 erg), jedinica snage (učina) 1 g·cm²/s³ (= 1 erg na sekundu), itd.

Međutim u sustavima jedinica koje treba da obuhvate i *električke i magnetske* pojave nije moguće izići s *tri* osnovne jedinice, nego su, kako će se tokom kasnijih izvoda još pobliže vidjeti i kako su još pred više od pola stoljeća počeli Giorgi, Mie i dr. isticati, za zaokruženi koherentni sustav jedinica, primjenljiv na sve fizi-

kalne pojave, potrebne i dovoljne četiri »osnovne« jedinice, iz kojih se onda prirodno dadu definirati ostale, t. zv. »izvedene« jedinice (isključujući tu, dakako, specijalne, više manje samovoljne jedinice, kao što su jedinice temperaturnih skala, »psihološke« jedinice fotometrije i slične).

13. Pitanje je samo: koje četiri veličine, i koje vrijednosti tih veličina, je najprikladnije odabrati kod postavljanja osnovnih veličina, odn. osnovnih jedinica. U tom pogledu ima mnogo mogućnosti, pa je izneseno već i mnogo razrađenih propozicija koherentnih sustava baziranih na različitim kombinacijama četiriju osnovnih veličina, odn. t. zv. četvorki (kvadrupla) osnovnih jedinica. Nažalost dugo nije dolazilo do općenitoga i definitivnoga prihvaćanja ideje koherentnih »četverodimenzionalnih« sistema, a još manje do prihvaćanja jedne konkretne od iznašanih propozicija. Tek u najnovije vrijeme, osobito zaključcima IEC (Internacionalne elektrotehničke komisije; Opatija 1953., Philadelphia 1954.) odluka je pala za MKSA-sistem (m-kg-s-A-sistem), koji je u slavu Giorgia nazvan »Giorgijev sistem« (kg = kilogram-masa; A = apsolutni amper iz A-9.).

Vodeći računa o iznesenom, u ovom djelu (u kome je uostalom već od I. izdanja rađeno dosljedno s četverodimenzionalnim V-A-s-cm-sistemom, čime su već onda kod nas bile ilustrirane prednosti suvremenog postupanja) u pravilu će se raditi, prema podacima u uvodu (str. 12. do 15.) i potanjim razmatranjima u poglavljima A) do C), sa suvremenim sistemom »koherentnih« jedinica, baziranim na prikladno odabranom »kvadruplu« osnovnih jedinica, i pripadnim izvedenim jedinicama. No kvadrupli osnovnih jedinica koje ćemo alternativno upotrebljavati, a to će biti ili m-kg-s-A ili (baš s elektrotehničkog gledišta možda nešto prikladniji) V-A-s-m (V = apsolutni volt, koji ćemo zasad empirijski karakterizirati podatkom da elektromotorna sila »Westonova internacionalnog normalnog elementa« u normalnim prilikama iznosi 1,01865 V), »ekvivalentni« su u tom smislu da oba (kao i još nekoliko drugih ekvivalentnih kvadrupla) vode uopće na identične jedinice. Samo eventualno pojedina jedinica može biti osnovna kod upotrebe jednog kvadrupla i izvedena kod upotrebe drugog kvadrupla.

Tako specijalno izlazi jedinica mase 1 kg kao osnovna jedinica u kvadruplu m-kg-s-A, ali i iz kvadrupla V-A-s-m izvedena jedinica VAs^3/m^2 izlazi na masu 1 kg. Naprotiv jedinica sile zvana 1 N (1 njutn), kod oba kvadrupla izlazi kao izvedena, i vrijedi (v. str. 14. i 15.) za tu jedinicu ova veza s CGS-jedinicom sile 1 din, i s nažalost još uvijek upotrebljavanom jedinicom sile $1 kg^* t.$ zv. »tehničkog« sustava mehaničkih jedinica (kg^* ili »kg-silu« ili »kilopond« nipošto ne treba zamijeniti sa kg ili »kg-masom« kvadrupla m-kg-s-A!):

$$1 N = 1 VAs/m = 10^5 \text{ dina} = 0,102 kg^* \quad (2)$$

Slično iz jednoga ili drugoga od oba gore navedena kvadrupla izvedene jedinice snage (učina) i radnje (rada), odn. energije, izlaze identične; za snagu izlazi jedinica:

$$1 W (\text{vat}) = 10^7 \text{ erga na sekundu} = 0,102 kg^*m/s \quad (3)$$

a za radnju jedinica:

$$1 \text{ Ws (vatsekunda)} = 1 \text{ J (džul)} = 10^7 \text{ erga} = 0,102 \text{ kg}^* \text{m} \quad (4)$$

Ostavljajući za drugdje detaljniju razradu tematike koherentnih sustava jedinica, primjetimo još uzgredice da baš elektrotehnički može biti prednosti i od upotrebe koherentnog sustava jedinica na bazi kvadrupla V-A-s-cm (s jedinicom duljine 1 cm umjesto 1 m kao kod inače jednakog kvadrupla V-A-s-m). Taj sistem vodi na iste jedinice električke (V, A, Ω , H, F itd.) i mehaničke (W, J) kao kod normalnog Giorgi-sistema, osim u slučajevima gdje dolazi do izražaja razlika duljinâ 1 cm i 1 m. Tako na pr. za jakost električkog polja izlazi u V-A-s-cm-sistemu jedinica 1 V/cm (prema 1 V/m kod upotrebe kvadrupla V-A-s-m), a i jedinica mase je u tom sistemu različita od 1 kg; za nju vrijedi: $1 \text{ VAs}^3/\text{cm}^2 = 10^4 \text{ kg}$. Uopće je velika prednost kod preračunavanja jedinica različitih četverodimenzionalnih sistema, usmjerenih na danas i internacionalno prihvaćene apsolutne praktičke električke jedinice amper, volt, itd., da »faktori preračunavanja« između njih međusobno, kao i u odnosu prema mehaničkim CGS-jedinicama, izlaze jednostavnog oblika 10^n uz n cjelobrojno (a ne numerički komplicirane veze kao: $1 \text{ W} = 0,102 \text{ kg}^* \text{m/s}$).

14. Prema svemu gornjemu, upotrebljavajući 1 kg za jedinicu mase (m-kg-s-A ili V-A-s-m), a usput se obazirući i na veze sa CGS- i V-A-s-cm-jedinicama, možemo pisati za omjer naboja i mase elektrona:

$$Q_0/m_0 = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ As/kg} (= 1,76 \cdot 10^8 \text{ As/g} = 1,76 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2/\text{Vs}^2)$$

i za masu elektrona:

$$m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (= 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ g} = 9,11 \cdot 10^{-35} \text{ VAs}^3/\text{cm}^2) \quad (5)$$

Ta masa m_0 , jednaka uostalom kod elektrona kao i kod pozitrona, vrlo je neznatna i prema najmanjoj inače poznatoj masi, masi atoma elementa s najmanjom atomnom masom: vodika H, točnije kudikamo najčešćeg »izotopa« (v. A-17.) vodika H^1 . U atomskoj fizici običajne su specijalne »atomističke jedinice mase« (AJM), takve da masa atoma izotopa kisika O^{16} iznosi 16,0000 AJM. Za masu atoma vodika H^1 izlazi onda u ovim jedinicama: $m_{\text{H}} = 1,00814 \text{ AJM}$, a kako se danas znade broj $N = 0,602 \cdot 10^{24}$ atoma vodika H^1 u »gramatomu« (ili 1,00814 grama) H^1 , a iz toga se može navesti i u gramima masa atoma vodika H^1 : $m_{\text{H}} = 1,6733 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, nije bilo teško izraziti ni masu m_0 elektrona ili pozitrona gore u formuli (5) u kg (odn. i u g i VAs^3/cm^2), kao što se i obrnuto masa elektrona ili pozitrona može izraziti umjesto po (5) i u AJM:

$$m_0 = 0,00055 \text{ AJM} \quad (5')$$

Usporedbom pak iznosâ m_0 i m_{H} vidi se da je masa elektrona ili pozitrona oko 1840-struko manja od mase atoma vodika H^1 .

Navedimo odmah i masu m_p »jezgre« atoma vodika H^1 : *protona* (atoma vodika H^1 lišenoga jedinog elektrona koji taj atom u neutralnom stanju sadrži); za tu masu vrijedi:

$$m_p = 1,6724 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,00760 \text{ AJM} \quad (6)$$

Uostalom glede m_0 treba još primijetiti dvije stvari. U prvom redu da se masa elektrona razlikuje od običnih masa tim što nema razloga držati da ona, poput ovih posljednjih, ima i karakter »teške mase«, t. j. nije poznato da bi na elektrone

djelovala »sila teža« kao na čestice materije; naprotiv masa elektrona manifestira se »otporom tromosti«, koji pokazuju elektroni protiv ubrzavanja kad na njih djeluju električka polja silama koje ih nastoje gibati. To se može dovesti u vezu s magnetskim poljem koje nastaje oko gibana električkoga naboja, i može se uzeti da se energija toga magnetskoga polja mora pokrivati iz radnje upotrebijene za ubrzavanje elektrona. Prema tomu se cijela masa elektrona može shvatiti kao »troma masa«; o »težini« elektrona nema još nikakvih opažanja.

A drugo što treba dodati jest da i za ovako shvaćenu masu elektrona vrijedi iznos m_0 formule (5) samo približno kod brzina koje smiju biti ogromne (i elektroni ih zbog svoje neznatne tromosti relativno lako postizavaju u jakim električkim poljima), ali su ipak još ispod ekstremno velikih iznosa koji već čine priličan dio brzine svjetlosti u vakuumu (ta je brzina vrlo približno $c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Kod sve većih brzina v elektron se naime vlada kao da mu masa raste s brzinom, i to tako da iznosi, uz m_0 dano relacijom (5):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (7)$$

Prema tomu bi masa elektrona kod brzine $v = c$ postala beskonačno velika, t. j. elektroni bi se mogli svojom brzinom brzini svjetlosti samo približiti, ali je ne bi mogli dostići, odnosno preći. Koja se fizikalna razmatranja ovdje mogu nadovezati, neka ostane pušteno po strani; primijetimo samo da izraz (7) odgovara formuli za ovisnost svake mase o brzini na kakvu vodi Einsteinova specijalna teorija relativnosti.

Što kod ne prevelikih brzina elektrona izgleda da oni imaju masu m jednaku stalnom iznosu m_0 iz formule (5), to postaje lako razumljivo ako se uvaži da izraz pod korijenom u (7) ima vrijednost malo različitu od 1 još i kod $v = 0,6 \cdot 10^8$ m/s, dakle kod brzine v jednake petini brzine svjetlosti, jer uz $v/c = 0,2$ e $1 - (v/c)^2 = 0,96$, pa po (7) onda za m izlazi iznos $m_0/\sqrt{0,96} = 1,02 \cdot m_0$. Tako je približno čak kod $v = c/5$, a pogotovo kod manjih brzina v elektrona: $m \approx m_0$ (znak $\approx$ znači: približno jednako), pa u takvim slučajevima formula (5) praktički izražava masu elektrona. Ali već uz $v/c = 0,5$ postaje m/m_0 oko 1,16, a kod $v/c = 0,99$ čak 6,9. Modernim »elektronskim sinhrotronom« uspjelo je elektrone čak toliko ubrzati da im je masa porasla na $2000 \cdot m_0$.

Za kvantnoteorijska tumačenja mnogih opažanih pojava treba još uzimati da elektroni rotiraju oko vlastite osi, te zbog toga pretpostavljati određenog iznosa »vlastiti impuls vrtnje« ili »spin« elektrona, kao i magnetskom djelovanju takvoga spina korespondentni »magnetski moment« elektrona.

15. Velikom većinom pojavi koji su doveli do elementarnih električkih naboja takvoga su karaktera da su se njihovim utjecajem postepeno morale iskristalizirati bitne promjene u shvaćanju naravi atoma, odnosno sastava materije. Moderna atomistika čini doduše posebno ogromno područje fizike, koje je i danas još u živahnom razvoju i jakom previranju, no osnovne koncepcije s ovoga područja oploduju i ostale grane fizike i kemije, kao i tehnike. Danas i elektrotehnika ne može bar neke od tih koncepcija ne držati pred očima, i bit će kasnije još prilika gdje će biti potrebno na njih se pozivati. Zato neka o tomu bude bar najnužnije natuknuto.

Po suvremenim idejama atome kemijskih elemenata ne treba smatrati nedjeljivim jednostavnim česticama, kakvima ih je zamišljala starija kemija. Umjesto toga treba uzimati da svaki pojedini prema vani električki neutralni (neelektrični) atom predstavlja cio jedan sistem sastavljen od nekoga centralnoga tijela i određenoga broja trabanata, koji su trajno u gibanju oko toga centralnoga tijela, dakle sistem u sićušnom donekle barem analogan sustavu Sunca i njegovih planeta u velikom.

Pri tomu centralnom tijelu u atomu, t. zv. *jezgri* atoma, treba pripisivati: a) da praktički sadrži u sebi koncentriranu cijelu masu atoma; te b) da nosi pozitivni električki naboj u iznosu od određenoga cijeloga broja Z elementarnih naboja $+Q_0$, dakle naboj $+ZQ_0$, gdje je Z karakteristični broj za svaki pojedini kemijski element i zove se *redni broj* toga elementa. Ulogu pak trabanata imaju u atomskom sustavu elementarne čestice negativnoga elektriciteta, dakle elektroni, i njih mora u svakom atomu elementa rednoga broja Z , ako atom ima djelovati električki neutralno prema vani, biti Z na broju (jer se onda ukupni naboj elektronâ oko jezgre $-ZQ_0$ baš poništi s pozitivnim nabojem $+ZQ_0$ jezgre).

Tako najjednostavnije građeni atomski sistem, neutralni atom vodika ($Z = 1$), sadrži kao atomsku jezgru česticu pozitivnoga naboja $+Q_0 = +0,160 \cdot 10^{-18}$ As (A-9.), za koju smo već (u A-14.) spomenuli, da nosi ime *proton* i da ima masu $m_p = 1,6724 \cdot 10^{-27}$ kg, i oko toga protona obilazi jedan elektron naboja $-Q_0 = -0,160 \cdot 10^{-18}$ As. Uz »obični« vodik H^1 , hydrogenium, s atomima po opisanoj shemi, poznat je i »teški« vodik H^2 ili D, deuterium, element istog rednog broja $Z = 1$ s vodikom H^1 , dakle u tomu pogledu srodan ili, kako se to stručno veli, *izotopan* s ovim, no jezgra toga teškoga vodika, zvana *deuteron*, ima uz isti pozitivni naboj $+Q_0$ oko dvaput toliku masu $m_D \approx 2m_p$ kao proton; oko nje obilazi, kao i kod običnog vodika, jedan elektron. Naden je (u tragovima) čak i jedan dalji (uostalom vrlo jako radioaktivni) *izotop* vodika, tritium H^3 , s jezgrom mase oko $3m_p$; slično i drugi elementi imaju svojih »izotopa«, većinom neradioaktivnih, a nerijetko i (prirodno ili umjetno) radioaktivnih. Slijedeći po rednom broju ($Z = 2$) element helij ima jezgru atomske mase oko četiriput toliku kao masa protona i pozitivnoga naboja $+2Q_0$. Tu smo jezgru upoznali pod imenom α -čestice u A-8. kao projektil velike brzine izbacivan kod raspada jezgre elementa radiuma (Ra; $Z = 88$); oko nje obilaze normalno (kod neelektričnih atoma helija) dva elektrona. Rečeno vrijedi zapravo za izotop He^4 (ima još, u tragovima, i izotopa He^3).

Slično kod daljih po rednom broju ($Z = 3$) izotopâ elementa litija (Li) jezgre treba zamišljati nabijene sa $+3Q_0$ i oko njih, kod atoma u neutralnom stanju, tri elektrona u gibanju; i tako dalje za više i više redne brojeve Z , a prema tomu i sve kompliciranije i kompliciranije građene atome, sve do $Z = 92$ (do elementa urana), i preko toga (transurani!).

16. Na ovom mjestu bit će dovoljno, ako samo još dodamo da glede Z elektronskih trabanata nekoga elementa rednoga broja Z treba pretpostavljati, da se

ti elektroni obilazeći oko atomske jezgre normalno zadržavaju u izvjesnim istaknutim tek ograničeno promjenljivim daljinama, dakle da se gibaju ostajući u t. zv. *elektronskim ljuskama*, koje se označuju slovima K, L, M, ... Q. U najbližoj oko jezgre ljuski, K-ljuski, treba zamišljati jedan elektron atoma vodika, a u sličnu ljusku smjeste se i oba elektrona atoma helija. Međutim s dva elektrona K-ljuskę treba smatrati već zasićenom, jer kod daljih elemenata s rednim brojevima $Z = 3$ (litij) do $Z = 10$ (neon) treba od ukupnoga broja njihovih elektrona zamišljati u K-ljuski samo dva elektrona, a preostale elektrone u idućoj L-ljuski tih elemenata. Tako u L-ljuski elementa litija ($Z=3$) treba uzimati jedan elektron, u L-ljuski elementa berilija ($Z=4$) dva elektrona; i zatim dalje u L-ljuskama šest elemenata od bora ($Z=5$) do neona ($Z=10$) sukcesivno po jedan elektron više, dok konačno kod neona ($Z=10$), s njegovih 10 elektrona, ne bude popunjena pored K-ljuske (s 2 elektrona) i L-ljuska (sa $2 + 6$, dakle 8 elektrona); za sve je elemente s rednim brojevima 3 do 10 L-ljuska »vanjska ljuska«. Kod idućega po rednom broju elementa natrija ($Z=11$) počinje se onda popunjavati već i M-ljuska, i ta treća ljuska je i vanjska ljuska za natrij ($Z=11$) i magnezij ($Z=12$), te daljih šest elementa od aluminijsa ($Z=13$) do argona ($Z=18$). Nakon toga počinje se s elementima kalijem ($Z=19$) i kalcijem ($Z=20$) puniti četvrta N-ljuska, no s idućih, po rednom broju, deset elemenata, od skandija ($Z=21$) do cinka ($Z=30$), nastavlja se i dovršava punjenje prethodne M-ljuske, koja se prema tomu zasiti sa svega $2 + 6 + 10$, t. j. 18 elektrona. Nakon toga elementima sve viših rednih brojeva, sve do urana ($Z=92$) i cijeloga niza umjetno dobivenih »transurana«: neptunija ($Z=93$), plutonija ($Z=94$), i još viših transurana, nastavlja se, po određenoj shemi, punjenje N-ljuske i ostalih viših ljusaka, kod čega treba zamišljati sve do sedam ljuski K, L, ..., Q, dijelom zasićenih i dijelom ne posve popunjenih ili nepopunjenih.

Kako je poznato, elementi se po periodicitetu kemijskih svojstava dadu poredati u *periodski sustav elemenata*, na što je upozorio već Mendelejev, i zanimljivo je da se besprikoran ovakav sistem dobiva tek ako se poredaju elementi po rednom broju Z i ako se novi period (redak) sistema započne svaki puta, kad se dođe do elementa kod kojega se počima puniti iduća (nova vanjska) ljuska, i sl.

Treba još dodati da ni jezgre atoma ne treba smatrati krajnjim dalje nerazorivim česticama. Na to ukazuju već radikalni pojavi, jer na pr. jezgra atoma radiuma emitira α -česticu raspadajući se. Tokom proučavanja korpuskularnih zraka, osobito onih emitiranih iz radioaktivnih preparata, našlo se čak da se jezgre atoma mogu i umjetno, na pr. bombardiranjem α -česticama, razbijati ili uopće mijenjati. A mogu se takvim bombardiranjem stvoriti i nestabilne jezgre, koje se spontano raspadaju poput jezgara prirodno radioaktivnih tvari (»umjetna radioaktivnost«). Poblizim istraživanjima došlo se do zaključka da su valjda, u zadnjoj liniji, sve atomske jezgre više ili manje stabilni konglomerati *protona* i još jedne naročito zanimljive vrsti korpuskulâ nazvanih *neutroni*, s masom približno jednakom onoj protona, ali bez naboja. Masa neutrona jest:

$$m_N = 1,6747 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,00899 \text{ AJM} \quad (6')$$

Ona je neznatno veća od relacijom (6) iz A-14. dane mase m_P protona. Proton i neutron, kao čestice od kojih su građene atomske jezgre (»nukleji«), često se obuhvaćaju zajedničkim

nazivom: *nukleoni*. Neutralni atom određenog izotopa nekog elementa sa ukupno A nukleona, ako se radi o elementu rednog broja Z , imat će jezgru sa Z protona i prema tomu $A - Z$ neutrona, i oko te jezgre Z elektrona, te će se pozitivni naboj jezgre $+ZQ_0$ neutralizirati sa Z negativnih naboja po $-Q_0$ atomovih elektrona. Tako jezgru atoma u prirodi kudikamo najčešće susretanog izotopa kisika O^{16} ($Z = 8$) treba zamišljati sastavljenu iz $A = 16$ nukleona, od toga $Z = 8$ protona i $A - Z = 8$ neutrona, a jezgre drugih dvaju (uostalom vanredno rijetkih) izotopa kisika ($Z = 8$), naime izotopa O^{17} i O^{18} ($A = 17$ i $A = 18$), treba i opet uzimati sa 8 protona, no kod O^{17} sa 9 i kod O^{18} sa 10 neutrona.

Treba zamišljati i mogućnost transmutacije neutrona n u proton p uz istodobnu emisiju jednog elektrona e^- i jedne specijalne čestice ν_0 nazvane *neutrino* (hipotetički uvedene čestice bez električkog naboja i zanemarive mase mirovanja), dakle po relaciji: $n \rightarrow p + e^- + \nu_0$. Kod suprotnog prelaza, inače znatno zamršenijeg, nestajanje protona prati nastajanje neutrona uz istodobnu emisiju pozitrona (e^+) i neutrina.

Međutim elektrotehnički ova pitanja sastava jezgri, djelomice još vrlo zakučasta, te neriješena, odn. polemična, zasad još nisu od neposrednog interesa; direktno važni su za elektrotehniku samo pojavi izvan atomske jezgre, u elektronskim ljuskama, a od njih u prvom redu pojavi *ionizacije* i pojavi *uzbuđivanja* atoma. Pojavi u jezgrama samo su indirektno, bar zasad, od elektrotehničkog interesa kao mogući izvori energije (zbog oslobađanja ogromnih količina topline kod mnogih »nuklearnih reakcija«).

17. U već spomenutim *ioniziranim* i *uzbuđenim* stanjima atoma ne treba gledati drugo nego poremetnje gore opisanoga *osnovnoga* (normalnoga) stanja, kod kojega atom sa svojih Z elektrona oko jezgre naboja $+Z \cdot Q_0$, dakle električki neutralan, ima »nutarnje« elektronske ljuske, počevši od »najniže« K-ljuske pa redom dalje, zasićene prema raspoloživom broju elektrona, a još eventualno preostali elektroni su u idućoj, nepotpuno zaposjednutoj i za taj atom »vanjskoj« ljuski.

Treba sad zamišljati da se osnovna stanja pojedinih atoma, točnije pojedinačna osnovna energetska stanja atomovih Z elektrona u pripadnim ljuskama, dadu mijenjati različitim vanjskim utjecajima (na pr. »srazovima« proizvedenima brzim slobodnim elektronima i uopće djelovanjem različitih zraka, zatim visokim temperaturama itd.), te da se nastale promjene prema njihovoj znatnosti mogu dvojako karakterizirati.

U jednu ruku mogu rezultirati dublje promjene praćene promjenom broja atomovih elektrona, bilo u tom smislu da jedan ili više između normalno Z elektrona (oko jezgre atoma elementa s rednim brojem Z) budu potpuno izbačeni iz veze s atomskom jezgrom, bilo u obrnutom smislu da povrh normalno prisutnih Z elektrona budu od drugud u atomsku vezu uvučeni jedan ili više elektrona. U svim takvim slučajevima govori se o *ioniziranim* atomima, i to jednostruko, dvostruko itd. *pozitivno* ioniziranim u slučaju smanjenja za jedan, dva itd. broja elektrona ispod iznosa Z (jer onda naboj jezgre prevladava nad nabojem elektrona oko jezgre za iznos jednostrukoga, dvostrukoga itd. pozitivnoga elementarnoga naboja), ili obrnuto: o jednostruko, dvostruko itd. *negativno* ioniziranim u slučaju povećanja broja elektrona iznad iznosa Z (jer u tom slučaju prevladava naboj elektrona nad nabojem jezgre za iznos jednostrukoga, dvostrukoga itd. negativnoga elementarnog naboja).

S druge strane promjene mogu biti manje duboke i ograničene u tom smislu da nijedan od Z elektrona vezanih na jezgru ne bude potpuno izbačen iz atomske veze, ali da se veza s jezgrom kod jednoga ili više od tih elektrona oslabi prema osnovnom stanju, i to na taj način da se pripadni elektron prisili na obilaženje jezgre u kojoj udaljenijoj od mogućih staza obilaženja oko jezgre; u takvim slučajevima govori se o *uzbuđenim* atomima. Po *teoriji kvanta* kao moguće imaju se smatrati samo diskretno na ljuske porazdijeljene, t. zv. kvantne staze (jezgri najbliže takove staze su one karakterizirane ljuskama u kojima se gibaju elektroni u osnovnom stanju atoma; iza njih redom slijede udaljenije), te svakoj od tih staza treba pripisati izvjesni *niveau* energije, i to tim viši što je pripadna staza udaljenija, dakle u neku ruku višega ranga. Zato se uzbuđivanje atoma kod kojega se jedan od njegovih elektrona »podigne« s niže p -te na višu q -tu stazu dađe provesti samo ako se elektronu privede razlika $E_q - E_p$ *niveau*-â energije E_q i E_p pripadne više i pripadne niže kvantne staze, dakle posve određena količina energije. A ta se količina energije obrnuto oslobađa kad promatrani elektron (brzo iza uzbuđenja) »padne« s labilnijega stanja na višoj stazi natrag na stabilnije stanje na nižoj stazi, i kao ekvivalent za oslobođenu energiju pojavi se radijacija (optička ili rentgenska) posve određene frekvencije f (dakle emisija točno definirane »spektralne linije« duljine vala $\lambda = c/f$, gdje c znači brzinu širenja svjetlosti u vakuumu) po formuli teorije kvanta:

$$h \cdot f = E_q - E_p \quad (8)$$

U toj formuli h naznačuje »Planckovu konstantu«, za koju treba staviti iznos $h = 6,623 \cdot 10^{-34}$ Ws², ako se E_q i E_p izraze vatsekundama (Ws), drukčije zvanima i džulima [ili džaulima] (J), dakle već u A-13. uvedenom jedinicom za radnju, odn. energiju ($1 \text{ Ws} = 1 \text{ J} = 1 : 9,81 \text{ kg} \cdot \text{m} = 0,102 \text{ kg} \cdot \text{m}$), a f u titrajima na sekundu (»ciklima na sekundu«, c/s, zvanima također i »hercima« Hz). Dimenziona jedna-džba relacije (8) je onda: $[\text{Ws}^2] \cdot [\text{s}^{-1}] = [\text{Ws}]$.

Tek kvantnim shvaćanjima pojavâ uzbuđenja i pojavâ emisije uzbuđenih atoma postali su razumljivi bogatstvo i karakteristična porazdjeljenja spektralnih linija što ih atomi pojedinih elemenata daju na pr. u cijevima s prolazom električke struje kroz plinove i pare (u novije vrijeme i tehnički sve više upotrebljavanima za rasvjetu), pa mnoge važne zakonitosti rentgenskih spektara. A dali su se na bazi novih shvatanja tumačiti i mnogi drugi pojavi, električki i magnetski, kao i oni s područja kemijskih reakcija. No dodajmo odmah, iako je nemoguće u to ovdje pobliže ulaziti, da je za razumijevanje fine strukture atomskih spektara, i mnogih opaženih pojedinosti iz drugih područja, trebalo znatno usavršiti, te dovesti u sklad s relativističkim utjecajima na masu i djelovanjima vanjskih polja, prvobitnu jednostavnu kvantnu atomistiku, te naročito (po Pauli-ju) pri-dati pojedinim elektronima, pa i onima unutar iste ljuske, različita i uvijek naj-više jednom elektronu pripadna kvantna stanja energije, karakterizana osim

»glavnim kvantnim brojem« n (K-ljuska: $n = 1$; L-ljuska: $n = 2$; itd.) još trima daljima: »azimutalnim kvantnim brojem« l (koji kod danoga n može poprimiti pozitivne cjelobrojne iznose 0 do $n - 1$), »orbitalnim kvantnim brojem« m (koji može uz dano l poprimiti cjelobrojne iznose od $-l$ preko 0 do $+l$, i konačno »spinskim kvantnim brojem« s (u vezi sa »spinom elektrona« po A-14., koji može poprimiti dvije orijentacije, karakterizirane brojevima $+\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{2}$). Na taj način može se na pr. lako izvesti da u K-ljuski može biti »mjesto« za samo dva elektrona (pri $n = 1$ i po tom $l = m = 0$ postoje samo mogućnosti $s = +\frac{1}{2}$ i $s = -\frac{1}{2}$); da u L-ljusku može stati najviše 8 elektrona (pri $n = 2$ sa $l = m = 0$ može biti $s = +\frac{1}{2}$ ili $s = -\frac{1}{2}$, a slično svaka od mogućnosti $l = 1$ sa $m = 1$, pa $l = 1$ sa $m = 0$, te $l = 1$ sa $m = -1$ daje po dva stanja, već prema tomu da li se uzme $s = +\frac{1}{2}$ ili $s = -\frac{1}{2}$); konačno da se M-ljuska zasiti sa 18 elektrona; itd.

Najmanji mogući iznos energije zahtijevat će prema gornjemu ono uzbuđivanje atoma kod kojega treba da najslabije vezani elektron (iz vanjske elektronske ljuske nekoga atoma) bude podignut na iduću višu stazu. Bez te minimalne energije, odnosno privedene radnje, nazvane *resonantnom* radnjom (jer se kod »pada« elektrona natrag na prvobitnu stazu emitira karakteristična »resonantna« spektralna linija pripadnoga atoma), niti dolazi do uzbuđenja niti atom može manji iznos energije od spomenutoga uopće primiti; atom po teoriji kvanta može mijenjati svoju energiju samo u diskretnim iznosima. Minimalno pak potrebna radnja da se najslabije vezani elektron »podigne« nad sve kvantne staze (dakle do »kontinuum«, u kome već prestaje njegova veza s atomom, pa ovaj posljednji postaje jednostruko pozitivno nabijeni ion zbog gubitka jednoga elektrona), zove se *ionizacijska* radnja. Za vodikov atom u osnovnom stanju resonantna je radnja $1,628 \cdot 10^{-18}$ Ws, a ionizacijska $2,170 \cdot 10^{-18}$ Ws, a istoga reda veličine su korespondentni iznosi i za druge atome.

Kako su kod atoma u osnovnom stanju vanjske nezasićene elektronske ljuske najmanje stabilne, atomi gube relativno lako elektrone iz takvih ljusaka, ili primaju vanjske elektrone u te ljuske. Stvaraju se tako pozitivni, odn. negativni ioni; na pr. disocijacijom elektrolita u elektrolitičkim otopinama pozitivni jednostruko nabijeni (i kemijski jednovalentni) ioni kao H^+ , Na^+ , Ag^+ , NH_4^+ , dvostruko nabijeni (kemijski dvovalentni) kao Ca^{++} , Mg^{++} , trostruko nabijeni (trovalentni) kao Al^{+++} , pa negativni jednovalentni, dvovalentni itd. kao Cl^- , NO_3^- , SO_4^{--} itd. Kako se vidi, mogu postojati ne samo ioni atoma, nego i atomskih grupa, dijelova molekula (radikalâ). A i cijeli molekulâ mogu biti ionizirani, ako im elektroni prema neutralnom stanju preteču ili nedostaju.

Jačim privedenim energijama moguće je s uspjehom zahvatiti i u zasićene ljuske, pa i one nutarnje, tako da elektroni iz tih ljusaka budu »podignuti« na više niveau-e (uzbuđenje) ili čak potpuno »istrgnuti« iz atomske veze (ionizacija). Ima na pr. iona He^+ , He^{++} (α -čestica), Li^+ , Li^{++} , Li^{+++} itd. No kako su kod toga često u igri vanredno velike energije, u slučaju uzbuđenja za pripadne radijacije izlaze po formuli (8) vanredno visoke frekvencije f (odnosno vanredno sićušne duljine vala λ), a to kod elemenata nešto većih rednih brojeva već vodi u područja rentgenskih radijacija (K-, L-, M-, itd. linije rentgenskih spektara). Za Pt ($Z = 78$) niveau L-ljuske viši je od niveau-a K-ljuske za oko $10000 \cdot 10^{-18}$ Ws, a između kontinuumâ i K-ljuske razlika niveau-â je oko $12000 \cdot 10^{-18}$ Ws.

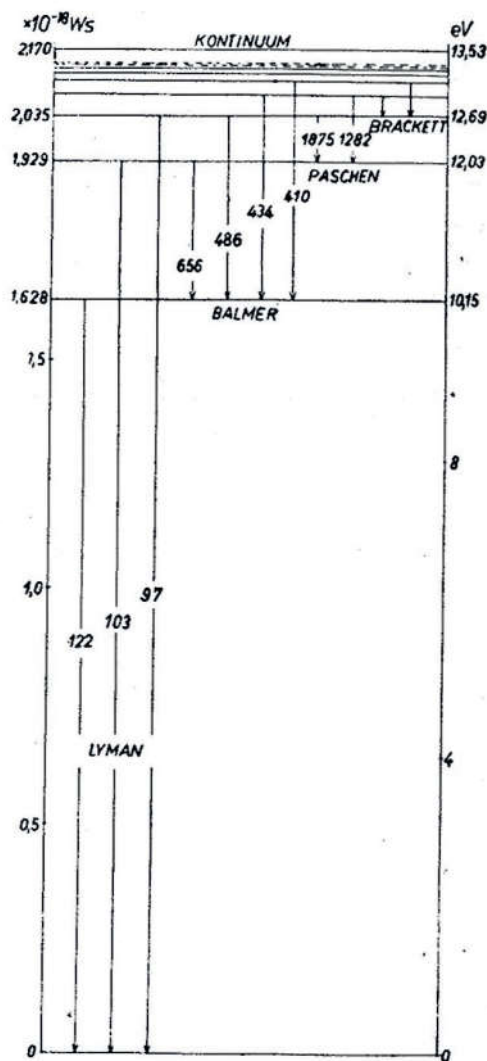
18. Da bi se barem u najbitnijem pokazalo kako je samo uvođenjem Planckove konstante h , i kvantne teorije uzbuđivanja i emisije atoma, bilo moguće pregledno obuhvatiti na prvi pogled vrlo zapletene odnose kod pojava emisije i apsorpcije spektralnih linija po atomima različitih elemenata, razložimo nešto bliže prilike

bar kod najjednostavnije moguće atomske konfiguracije, kakvu predstavlja neutralni atom vodika. Spektralne linije atomarnoga vodika mogu se grupirati u »serije«. Tih je danas već pet poznato, a sve se one daju obuhvatiti *Rydbergovom* formulom:

$$f = 3,29 \cdot 10^{15} \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right) \quad (9)$$

gdje je $3,29 \cdot 10^{15}$ nazvano »Rydbergova frekvencija«. Prva se serija (Lyman, 1906.) dobiva, ako se za p stavi fiksni broj 1, a q se pusti da poprima redom vrijednosti 2, 3, 4, ...; druga serija (Balmer, 1885.) slijedi uz $p = 2$ i $q = 3, 4, 5, \dots$; treća serija (Paschen, 1900.) uz $p = 3$ i $q = 4, 5, 6, \dots$; četvrta (Brackett, 1922.) uz $p = 4$ i $q = 5, 6, 7, \dots$; peta (Pfund, 1924.) uz $p = 5$ i $q = 6, 7, 8, \dots$. Pripadne duljine vala za svaku tako dobivenu frekvenciju slijede po formuli $\lambda = c/f$, uz $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s, pa tako kod linija Lymanove serije za duljine vala (preračunane u milimikrone $m\mu$, t. j. milijuntine milimetra) izlaze brojevi 122, 103, 97, ...; za linije Balmerove serije 656, 486, 434, ...; za linije Paschenove serije 1875, 1282, 1094, ...; itd. (vidi sl. 1.). Baš na ove duljine vala vodi i teorija kvantata. Treba samo kod proračunavanja iznosâ f primijeniti formulu (8) na shemu niveauâ energije kvantnih staza atomarnoga vodika, naznačenu lijevo u sl. 1. Po kojima je principima ova shema postavljena, ne ćemo ovdje tumačiti; niveau (ne apsolutni iznos) najniže staze ranga 1, dakle one u kojoj elektron obilazi jezgru atoma u osnovnom stanju, odabran je kao »početni« i prema tome mu je dodijeljen iznos 0. Kako je strjelicama u sl. 1. naznačeno, linije Lymanove serije treba smatrati proizvedene padanjem elektrona s viših staza na stazu ranga 1, linije Balmerove serije padanjem elektrona s viših staza na stazu ranga 2, i tako dalje za ostale serije, po čemu se odmah razabire značenje indeksâ p i q u formuli (8).

Da se na pr. izračuna λ za drugu liniju Balmerove serije (486 $m\mu$), dosta je očitati iz sl. 1. niveau-e $E_4 = 2,035 \cdot 10^{-18}$ Ws i $E_2 = 1,628 \cdot 10^{-18}$ Ws, pa izračunavši f po formuli (8) preći na pripadni $\lambda = c/f$. Izlazi: $f = (E_4 - E_2)/h = 0,617 \cdot 10^{15}$ Hz.



Sl. 1.

Prema tomu za pripadnu duljinu vala λ u m slijedi iznos:

$$\lambda = 3 \cdot 10^8 / f = 486 \cdot 10^{-9} \text{ m } (= 486 \text{ m}\mu = 4860 \text{ \AA})$$

koji stvarno daju za tu liniju spektroskopska opažanja [$1 \text{ m}\mu$ (milimikron) = $0,001 \mu = 10^{-6} \text{ mm} = 10^{-9} \text{ m}$; $1 \text{ \AA}$ (angstrom, po Ångströmu) = 10^{-10} m].

Iz sl. 1. mogu se direktno očitati i »resonantna« i »ionizaciona« radnja, navedene u A-17. Desno u sl. 1. označeni su nivoi kvantnih staza i iznosima u drugoj jedinici, običajnoj u atomskoj fizici: eV (čitaj: elektronski volt ili elektronvolt). Vrijedi relacija:

$$1 \text{ eV} = 0,160 \cdot 10^{-18} \text{ Ws.}$$

Povoljno je bilo kod primjera s atomom vodika što su se praktički mogle zanemariti neke pojedinosti, koje kod drugih elemenata igraju veću ulogu; no u bitnosti osnovne ideje kvantne teorije spektralnih linija razabiru se već na primjeru ovako jednostavne teorije vodikova atoma.

19. Primijetimo još nešto o *slobodnim elektronima* u kovnim vodičima. Prema A-3. u dobrim vodičima elektriciteta potrebno je zamišljati električke naboje lako pomičnima. Tako se vodljivost za električku struju elektrolitičkih tekućina i ioniziranih plinova može svesti na više ili manje gibljive materijalne nosioce i pozitivnih i negativnih električkih naboja, od kojih se prvi (pozitivni ioni) gibaju u smjeru nazvanom smjerom električkog polja, a drugi (negativni ioni) u protivnom smjeru. Naprotiv kod električkih struja u kovinama, ili bolje u vodičima kovnoga karaktera (»vodičima prve klase«, za razliku od elektrolitičkih vodiča kao »vodiča druge klase«) ništa ne govori za to da bi elektricitet prenosili materijalni nosioci, pa se zato zamišlja da u kovnim vodičima ima samo gibljivih elementarnih električkih čestica, i to u pravilu negativnih takvih čestica, dakle elektrona.

Za te od veze s jezgrama pojedinih atoma kovine uglavnom oslobođene, t. j. približno »slobodne« elektrone (za razliku od onih koji ostanu kruće vezani na svoju atomsku jezgru), treba uzeti da se gibaju u relativno vrlo prostranim međuprostorima unutar, grubo uzeto, krutoga skeleta pozitivnih kovnih iona, te da se, izvodeći svoja vlastita nepravilna gibanja, srazuju i međusobno i sa ionima kovnoga skeleta donekle analogno česticama plina po kinetičkoj teoriji topline, pa se obzirom na to govori katkad, simbolički, o »elektronskom plinu« u kovini. Ali taj »elektronski plin« ne treba zamišljati prema teoriji plinova klasične fizike. Na bazi teorije kvanta došao je Fermi do pojma »izobličenog elektronskog plina«, po kome »slobodni elektroni« u metalima imaju povišene energije gibanja, pa i blizu nule apsolutne temperature još onakve kakve bi po klasičnim zakonima imali tek kod vrlo visokih temperatura.

U normalnim prilikama su slobodni elektroni u kovini, statistički uzeto, podjednako porazdijeljeni među pozitivnim ionima kovnoga skeleta, pa se kovina pod takvim prilikama čini svagdje neelektričnom. No djelovanjem vanjskih električkih polja nastanu, i superponiraju se prvobitnima uglavnom nepravilnima i, statistički govoreći, na sve moguće smjerove jednoliko porazdijeljenima gibanjima elektrona, još usmjerena gibanja, i to, obzirom na negativni naboj elektrona, u smjeru protivnom od smjera nazvanoga »smjerom polja«.

Ovakvim gibanjima mogu se mjestimično izazvati nestašice, a mjestimično suvišci gustoće naboja elektrona prema gustoći naboja pozitivnih iona metalnoga skeleta, što daje utisak pozitivnih odnosno negativnih naboja na pripadnim prvobitno neutralnim mjestima. Slično će se neka izolirana, prvobitno neutralna elektroda činiti jače ili slabije negativno odnosno pozitivno električnom, ako joj se od drugud privede, odnosno s nje drugamo odvede, više ili manje elektrona. I ovdje dakle, kao i kod iona, »negativnost« ili »pozitivnost« naboja ne znači da su u igri samo negativni ili pozitivni elektricitet, nego tu postoji suvišak elektrona ili pomanjkanje elektrona prema normalnom stanju.

Ako neki linearni (dugački prema svome presjeku) vodič čini »zatvoreni krug« električke struje, slobodni nosioci naboja u njemu cirkulirat će trajno krugom pod utjecajem (uzdužnih komponenata) električkog polja održavanog u krugu. Nastat će zatvorene provodne struje. Pod smjerom (smislom) tih struja razumijeva se smjer kojim bi polje tjeralo pozitivne nosioce naboja (negativne nosioce polje će tjerati u suprotnom smislu). Prema tomu kod struje u danom smislu kroz neki zatvoreni krug iz elektrolitičkog vodiča stvarno će u smislu struje cirkulirati pozitivni ioni, a negativni će cirkulirati u suprotnom smislu, dok će kod zatvorenih krugova iz metalnih vodiča sa samo negativnim slobodnim nosiocima naboja, elektronima, ovi potonji cirkulirati u smislu suprotnom od onoga što se po definiciji zove »smjerom struje«.

I slobodne elektrone u kovini priječe električke sile (privlačenja pozitivnih iona) da izidu u vanjski prostor. Za te sile ima razloga uzimati da su osobito jake neposredno uz površinu kovine. Da bi se elektron oslobodio kovine, treba svladati te sile, dakle izvršiti određenu radnju, koja je dobila ime *izlazna radnja* (ona se, kao i resonantna i ionizaciona radnja, može izraziti u Ws ili u eV). Tu radnju mogu od sebe dati, na račun vlastite kinetičke energije, samo oni elektroni koji, nalazeći se u blizini površine kovine, imaju dovoljno veliku komponentu brzine u smjeru okomitom na površinu kovine. A da bi iole spomena vrijedan broj elektrona takvu brzinu postigao, povisi se kovini temperatura, čime se poveća i živahnost gibanja slobodnih elektrona (emisija elektrona kod visokih temperatura, na pr. iz katoda radio-cijeve). Međutim ima još i drugih sredstava, kojima se elektroni mogu izbaciti iz kovina: foto-emisije elektrona iz kovina; sekundarne emisije uzrokovane korpuskularnim zrakama; emisije uzrokovane učincima vanredno jakih električkih polja u vakuumu.

Mnoge pojedinosti ovih i drugih atomističkih pojava uspjelo je uostalom obuhvatiti tek kvantno-teorijskom zamisli povezanosti pojava elektromagnetskih valova i pojava brzih elektriziranih čestica (»dualitet: val-čestica«), odn. zamisli: »foton« kao kvanta energije valnih pojava, i obrnuto: »valnih duljina« pripadnih brzim električkim česticama, itd. Po shvaćanjima uvedenima od de Broglie-a čestici mase m i brzine v treba pripisivati valnu duljinu $\lambda = h/mv$, gdje h znači »Planckovu konstantu«, uvedenu u A-17. Specijalno, na bazi ove formule i odnosa navedenih u A-89., elektronu koji bi se ubrzao utjecajem napona U kV (kilovolta) na ne preveliku brzinu v , tako da bi se mogla zanemariti razlika između m i m_0 po formuli (7) iz A-14., korespondirala bi valna duljina λ Å (angstrema; v. A-18.) po numeričkoj relaciji: $\lambda = 0,389 : \sqrt{U}$ (dakle na pr. elektronu ubrzanom naponom 10 kV valna duljina 0,12 Å). Kod brzih elektrona treba računati sa m i v po odnosima iz A-90.

Međutim mnoga dostignuća »atomske fizike«, predstavljajući pojmovno doduše revolucionarno novo, kod primjena u velikom (u »makrofizici«) iz statističkih razloga većinom vode na iste rezultate kao i metode klasične fizike, kojima ćemo se u budućim razmatranjima moći najčešće služiti.

II) SILE NA NABOJE I VEKTOR $\mathcal{F}$; INFLUENCIONI UČINCI I VEKTOR $\mathcal{D}$

Dvije kategorije učinaka električkih polja. Sile na naboje i pojam vektora jakosti polja $\mathcal{F}$. Površine elektroda kao sijela naboja. Dielektričke tvari kao nosioci polja. Elektrometri; elektrometrička mjerenja množina elektriciteta. Pojavi influencije; Maxwellova dvoploča. Pojam vektora gustoće električkog pomaka $\mathcal{D}$. Mjerenja množina elektriciteta balističkim galvanometrima; neke primjene.

20. Upoznavši se s električkim nabojima razmotrimo *električka polja* stvarana samim prisustvom *mirnih* električkih naboja u nevodljivim sredstvima oko njih.

Dvije karakteristične i eksperimentalnim istraživanjima dosta lako dohvatljive manifestacije ovakvih »elektrostatskih« polja (koja će, ako su proizvedena nabojima fiksnog iznosa i s fiksnim prostornim rasporedajem, biti općenito od mjesta do mjesta promjenljiva, no vremenski stalna) najprije ćemo u ovom odsjeku A-II. u najbitnijem predstaviti, te zatim u idućim odsjecima A-III. do A-V. pobliže razmatrati.

Spomenute dvije manifestacije jesu: a) *sile* opažane na stranim nabojima dovedenima u prostore gdje vladaju električka polja određenih mirnih naboja, b) *influencijski učinci* opažani na prvobitno neelektričnim elektrodama (vodljivim tjelesima) dovedenima u električka polja mirnih naboja.

21. Prvi od ova dva učinka u polju određenoga i na određeni način po nekoj elektrodi ili inače u prostoru raspoređenoga naboja ukupnog iznosa Q ispoljava se, pri danom nevodljivom sredstvu kao sijelu polja, posve određenim *silama* na druge u pojedina mjesta polja dovedene »točkaste« (t. j. u vanredno neznatan po dimenzijama volumen sažete) naboje Q_1 , same za sebe (elektroni, pozitroni) ili vezane na materijalne nosioce (ioni, elektrizirane uljne kapljice, elektrizirane kovne kuglice, i uopće elektrizirana tjelešca).

Odnosi pri tomu mogu se pobliže tako izraziti da se, u specijalnim slučajevima kad je i naboj Q prostorno toliko sažet da se može smatrati također točkastim, govori kao u A-2., već prema jednakim ili suprotnim predznacima obih točkastih naboja Q i Q_1 , o *odbojnim* ili o *privlačnim* silama u smjeru spojnice naboja Q i Q_1 , dakle o vektorskim veličinama $\mathcal{P}$, kojima iznos P u određenom nevodljivom sredstvu kao nosiocu polja ovisi jedino o veličinama obih naboja Q i Q_1 i o njihovoj udaljenosti r . Pri tom je običaj smjer sile $\mathcal{P}$ kod *pozitivnoga* naboja Q_1 nazivati *smjerom djelovanja polja* ili kraće *smjerom polja* naboja Q na istraživanom mjestu (što znači da polje na negativni naboj Q_1 mora djelovati silom suprotnom smjeru koji se zove »smjer polja«). A općenitije, kod polja proizvedena prostorno ma kako raspoređenim ukupnim nabojem Q , treba taj naboj Q zamisliti rastavljen u točkaste naboje $Q_a, Q_b, \dots$ s udaljenostima $r_a, r_b, \dots$ do Q_1 i s djelovanjima na Q_1 u vidu sila $\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b, \dots$ iznosâ $P_a, P_b, \dots$ određenih sa $Q_a-Q_1-r_a, Q_b-Q_1-r_b, \dots$. Tako onda ukupno na Q_1 u sl. 2. proizvedena sila $\mathcal{P}$ iznosa P izlazi kao rezultanta

silâ $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots$, a smjer se sile $\mathcal{P}$ u slučaju *pozitivnog* naboja Q_1 zove »smjerom polja«.

22. Drugi su pojav *influencijski učinci*, koji se primjećuju na prvobitno neelektričnima i izolirano u polje uvedenima elektrodama.

Ti se učinci tako ispoljuju da se na protivnim krajevima svake od uvedenih elektroda A, B, ... pojave suprotni električki naboji jednakih apsolutnih iznosa, t. zv. *influencirani naboji*, dakle na elektrodi A naboji $+Q'_A$ i $-Q'_A$, na elektrodi B naboji $+Q'_B$ i $-Q'_B$, itd. Naboji su na svakoj elektrodi tako raspoređeni kao da je polje potjeralo pozitivne odn. negativne naboje već sadržane u elektrodi, i to pozitivne, kao uvijek, u smjeru svoga djelovanja, prema području na elektrodi gdje se primijete pozitivni naboji, a negativne u suprotnom smjeru, prema području na elektrodi gdje se javljaju negativni naboji.

23. Da bismo sad поближе mogli karakterizirati najprije prvu od navedenih dviju manifestacija polja, uvesti ćemo naročitu veličinu: *jakost električkog polja*, koju ćemo kao vektor označivati sa $\mathcal{F}$ (i prema tomu njezin iznos sa F).

Pokusi pokazuju da iznosi P silâ $\mathcal{P}$ kojima dano polje djeluje na različite naboje dovedene u isto mjesto polja variraju proporcionalno iznosima Q_1 tih naboja. Da bi se dakle mogli uspoređivati intenziteti djelovanja na različitim mjestima istoga polja, ili čak i različitih polja, očito će sva opažanja trebati zamišljati izvedena s istim iznosom naboja Q_1 , ili će sile opažene na različitim nabojima trebati zamišljati preračunane na jedan određen i uvijek isti naboj. A svakako će biti najjednostavnije odabrati u tu svrhu naboj $+1$, »pozitivni jedinični naboj«. Smjer djelovanja na pozitivni jedinični naboj svedenih sila polja očito će se podudarati sa smjerom koji je u A-21. definiran kao »smjer polja«. Prema tomu za mjerilo intenziteta djelovanja električkih polja po definiciji se uzima vektor »*jakost električkog polja*» $\mathcal{F} = \mathcal{P}/Q_1$, sa smjerom korespondentnim »smjeru polja« i s iznosom $F = P/Q_1$ dobivenim preračunavanjem na naboj $+1$ iznosa sile P opažene na po mogućnosti neznatnom točkastom »ispitnom naboju« Q_1 , dovedenom u istraživanu točku polja. Skraćeno se dakle o »*jakosti polja*« može govoriti kao o »*sili na pozitivni jedinični naboj*«. Po tomu će se obrnuto za silu $\mathcal{P}$ koju bi polje jakosti $\mathcal{F}$ izvodilo na ma kakav naboj Q_1 moći pisati relacija:

$$\mathcal{P} = Q_1 \cdot \mathcal{F} \quad (10)$$

pri čemu će se očito, u skladu s već u A-21. rečenim, kod pozitivnih naboja Q_1 smjerovi vektorâ $\mathcal{P}$ i $\mathcal{F}$ međusobno podudarati, a kod negativnih naboja Q_1 će biti suprotni.

Što se gore kod definicije vektora $\mathcal{F}$ pretpostavljalo što neznatnije naboje Q_1 dovedene u istraživano polje, učinjeno je zato da bi se definicija mogla primijeniti također na slučajeve polja proizvedenih prostorno nefiksiranim nabojima, na pr. nabojima Q porazmještenima i slobodno gibljivima na elektrodama konačnih dimenzija. Samo naime uz ispitivanje polja naboja Q neznatnim nabojima Q_1 bit će zanemarivi odbojni ili privlačni učinci ovih potonjih na različite dijelove naboja Q , i prema tomu isključene poremetnje prvobitnog rasporedaja naboja Q na elektrodama zbog blizine naboja Q_1 , dakle i poremetnje prvobitnog polja, koje je baš predmet

opažanja. Slično treba i termometar koji bi se hladan uronio u malenu količinu vruće vode zamisljati što neznatniji (što manjega toplinskog kapaciteta), jer bi prevelik termometar zamjetljivo ohladivši vodu pokazao nižu temperaturu vode od prvobitne.

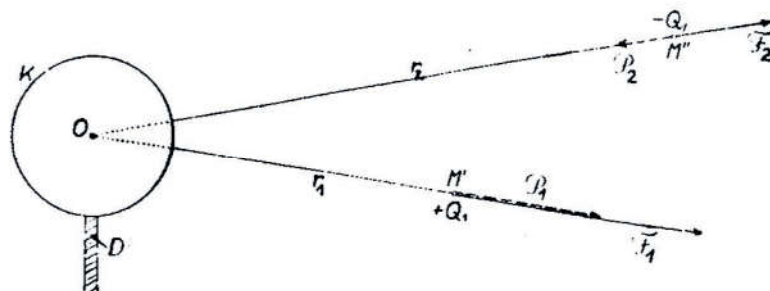
Posve strogo treba zamišljati definiciju vektora $\mathcal{F}$ izvedenu upravo graničnim prelazom na beskonačno maleni ispitni naboj dQ_1 , na koji bi djelovala beskonačno malena sila $d\mathcal{P}$ iznosa dP . Prema tomu bi jakost polja slijedila preračunavanjem sile dP od naboja dQ_1 na pozitivni jedinični naboj po relaciji:

$$\mathcal{F} = \frac{d\mathcal{P}}{dQ_1}$$

iako se i ovdje, zbog kratkoće, govori o jakosti polja kao »sili na naboj +1«.

Kako se rasporedaj naboja na elektrodama može poremetiti blizinom naboja drugih elektroda, vidi se na pr. iz sl. 10. (str. 44), gdje je privlačenjem naboja dviju suprotno nabijenih kugala došlo do gušćega rasporedaja naboja na međusobno okrenutim područjima obih kugala (kod istoimeno nabijenih obih kugala odbojnim djelovanjem došlo bi na tim područjima do rjeđega rasporedaja naboja), dok se naprotiv zbog simetrije kod svake kugle zamišljene same u prostoru može očekivati jednolik rasporedaj naboja na cijeloj kugli. Slično bi vanredno duga cilindrična elektroda zamišljena sama u prostoru pokazivala istu gustoću naboja na svakom mjestu svoje površine. No poremećenje simetrije postaje zamjetljivo utjecajem dovoljno blize druge takve paralelne suprotno nabijene elektrode, pa i utjecajem zemlje (odn. na njoj influenciranih naboja; sl. 11.).

24. Kao primjer električkog polja uzmimo polje po sl. 2. pozitivnog naboja $+Q$ smještena na kuglastoj elektrodi K s drškom D od izolatora. Zbog simetrije



Sl. 2.

to bi se polje manifestiralo u točkama M' i M'' , s daljinama r_1 i r_2 od središta O kugle K, radijalnim silama $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ na naboje $+Q_1$ i $-Q_1$, i to silom $\mathcal{P}_1$ na $+Q_1$ u smjeru radijalno *od* kugle i silom $\mathcal{P}_2$ na $-Q_1$ u smjeru radijalno *prema* kugli, dok bi naprotiv vektori $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ jakosti polja u oba slučaja bili usmjereni radijalno *od* kugle. Kod kugle K nabijene negativnim nabojem sile $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ bi bile obrnuto smjera, a vektori $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ bili bi usmjereni radijalno *prema* kugli.

Kad bi se u M' i M'' nalazila elektrizirana lagana tjelešca, sile polja na elastično montirana ta tjelešca postale bi vidljive po pripadnim statičkim naprezanjima (na pr. kod tjelešaca elastično gibljivo montiranih na način već po Coulombu upotrebljavane i iz fizike poznate »torsione vage« trebalo bi torziju nit zakrenuti za određen kut da se proizvede ravnotežje sa silama polja). A sile na slobodno gibljiva elektrizirana tjelešca (pa i nevezana na materiju: elektroni u vakuumu) došle bi do izražaja dinamički: u radijalnom sve bržem i bržem gibanju prema kugli ili od kugle nesmetano gibljivih, i bez vlastite brzine u polju ostavljenih, po-

zitivno ili negativno nabijenih tjelešaca. Pri tom bi se na sile koje su djelovale na gibani naboj tokom pojedinih odsječaka puta zaključivalo iz pripadnih prirasta njihove kinetičke energije (na pr. kod elektrona, s nabojem Q_0 i masom m_0 , koji bi u vakuumu prevalili put s u polju jakosti F , i po tom pod utjecajem sile iznosa $Q_0 F$, moglo bi se na postignutu brzinu v i kinetičku energiju $\frac{1}{2} m_0 v^2$ zaključiti po relaciji: $\frac{1}{2} m_0 v^2 = Q_0 F \cdot s$).

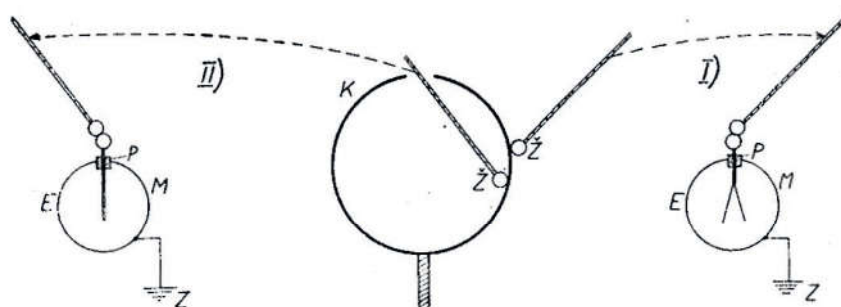
25. Povucimo još neke važne konsekvencije dosad izvedenih odnosa. Tako možemo odmah zaključiti, zbog toga što polje, gdje god postoji, giba slobodno gibljive naboje, da može samo onda biti statičkih prilika (mirnih, prema stanju ravnotežja raspoređenih naboja) na vodičima, okruženima sredstvom koje potpuno izolira, ako u *nutarnjosti vodiča nigdje ne djeluje polje*. Statički porazdi jele se dakle naboji na elektrodama uvijek tako, da u *nutarnjosti elektroda nema nikakvih polja*, a ni naboja, koji bi polja izvodili. Naboji se prema tomu svi smjeste na *površini elektroda* (dalje u izolator ne mogu, dok on izolira). Elektrostatska polja počinju dakle i svršavaju na nabojima na površinama elektroda; ona se uspostave samo u izolatorima, zbog čega ove i zovu rado također »dielektrika« ili »dielektrička sredstva« (sredstva *kroz* koja djeluju električke sile, prema grčkom *dia* = kroz); u vodičima se naprotiv, kod elektrostatskih prilika, eventualno nastala polja brzo »slome«.

Po teoriji slobodnih elektrona u metalnim vodičima (A-19.) elektroda se dakako ima smatrati na pojedinim mjestima svoje površine jače ili slabije pozitivno, odnosno negativno »nabijenom« (obloženom pozitivnim, odnosno negativnim nabojem veće ili manje »plošne gustoće«), prema tomu da li je na tim mjestima došlo do veće ili manje nestašice, odnosno suviška elektrona prema normalnom stanju.

26. Praktički se osebina električkih polja da završavaju na površinama vodiča iskorišćuje kod zaštićivanja tjelesa od djelovanja električkih polja zastorima od kovnih limova ili kovnih mreža. Nenabijeni elektrometar smješten u kovnu krletku ostaje nenabijen, makar na krletku udarale i električke iskre (Faradayeva krletka). Na opisani se način realiziraju visokonaponske zaštite na pr. kod uređaja za visokonaponska ispitivanja.

Eksperimentalno se pak činjenica, da su naboji raspoređeni samo po površini vodiča, a u unutarnjosti njihovoj ih nema, pokazuje obično na »Faradayevu vrču«, t. j. na izoliranoj elektrodi u obliku šuplje kugle (ili šupljega valjka) K, s otvorom (po sl. 3.) na gornjoj strani. Ma kako jako bila elektroda K nabijena, prelazit će, kod doticaja elektrizirane šuplje elektrode K »električkom žličicom« Ž (t. j. sićušnom kovnom kuglicom ili još bolje maljušnom pločicom, na dršku od odlična izolatora), na »žličicu« Ž nešto od naboja sa K samo ako se doticanje izvrši na kojem mjestu vanjske površine od K, kao kod I) u sl. 3., dok naprotiv »žličica« ostane nenabijena kod doticanja K iznutra, kao kod II) u sl. 3. U prvom se naime slučaju dotiče mjesto elektrode gdje ima naboja, a u drugom mjesto elektrode gdje naboja uopće nema.

Da se žličica doista nabije nakon kontakta po I), kao i da ostane nenabijena nakon kontakta po II) u sl. 3., najosjetljivije se pokazuje tako da se žličicu nakon ticanja elektrode K po I) ili po II) dovede u doticaj s poznatom elementarnom, ali kod dobre izvedbe vrlo osjetljivom spravom: *elektroskopom*; obično su u tu svrhu dovoljni već oni jednostavniji s dva nježna zlatna listića, koji se jače ili slabije otklone (»divergiraju«) kad se elektroskopu privede više ili manje naboja. Takav elektroskop (kakav se vidi u sl. 3. desno i lijevo; P mu je »provodni izola-



Sl. 3.

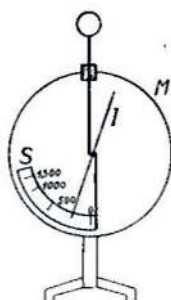
tor« na pr. od jantara, a M metalno »kućište«, vodljivo spojeno sa zemljom Z) pokaže dakle divergenciju, odnosno ostane neotklonjen, već prema tomu da li je bio dotaknut nabijenom žličicom, nakon pokusa I), ili nenabijenom, kakvom žličica ostane nakon pokusa II); vidi sl. 3. desno odn. lijevo.

27. Zbog kasnijih primjena treba još spomenuti da je lako postići da žličica Ž kod prenašanja naboja sa K svoj naboj svakiput potpuno preda elektroskopu, makar ovaj već imao naboja. Treba samo u tu svrhu elektroskopu kuglicu zamijeniti malim Faradayevim vrčem. Žličicom se onda dotiče nutarnja strana vrča. Ovakvi elektroskopi s Faradayevim vrčem na vrhu mogu se lako i baždari u »množinama elektriciteta«, t. j. može se odrediti koliko rastu otkloni nekog elektroskopa kome se naboji povisuju postepeno za uvijek jednake iznose, na pr. prenoseći na Faradayev vrč elektroskopa žličicom Ž jednake male doze naboja s istog mjesta uvijek jednako elektrizirano držane elektrode. S ovako baždarenom napravom, koja se u preciznijoj izvedbi, prikladnoj za finija mjerenja, zove već *elektrometar*, mogu se onda mjeriti i neznatne druge naprave privedene množine elektriciteta po porastima otklona koje izazovu njihova prenašanja na elektrometar.

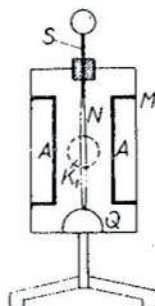
28. Kako su elektroskopi, odn. elektrometri, osim na opisani način kao mjera množina elektriciteta, i na druge načine upotrebljivi, poimence za mjerenja električkih razlika potencijala ili napona (ako su prema tomu baždareni i upotrebljavani, o čem će još biti govora), vrijedno će biti spomenuti bar neke njihove konstrukcije.

Od elektrometara robustnije izvedbe mnogo se susreće *Braunov elektrometar* (sl. 4.), kod koga se na skali S očitava otklon lagane aluminijske igle I; M je metalno kućište (s otvorom za očitavanje skale).

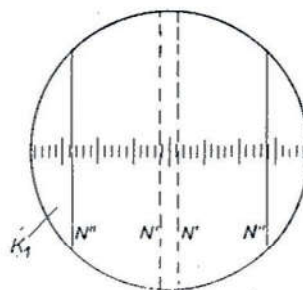
Za finije svrhe laboratorijske prakse vrlo je prikladna modifikacija elektroskopa poznata pod imenom (Wulfova) *dvonitnog elektrometra*. Po sl. 5. i tu seže, proveden kroz (na pr. jantarski) izolator, u nutarnjost kućišta M donji kraj metalnoga provoda S, no na njemu su pričvršćene, umjesto zlatnih listića, dvije vanredno tanke vodljive niti N (žice od samo malo tisućinki mm promjera), elastično držane zajedno nježnim stremenom Q od amorfna kremenja. Lijevo i desno od sistema



Sl. 4.



Sl. 5.



Sl. 6.

niti N smješten je po jedan kovni štapić A, vodljivo spojen s kućištem. Ako se dvonitni elektrometar nabije, niti N se međusobno razmaknu, odnosno približe se štapićima A, koliko kod danih elektrostatskih sila dopusti elastični stremen Q. Razmak niti može se očitati u velikom povećanju, motreći mikroskopom (sa skalom u okularu) sredinu nitnoga sistema (na pr. dio ograničen kružnicom K, u sl. 5.), tako da vidno polje mikroskopa izgleda kao u sl. 6.: kad nema naboja niti se na skali vide blizu, na pr. kao $N' - N'$ na sl. 6., a kod nabijenoga elektrometra vide se više ili manje razmaknute, na pr. kao $N'' - N''$. Mjesto da se motri ovako »subjektivno« mikroskopom, može se razmak niti i »objektivno« demonstrirati projekcijom u velikom povećanju. Dvonitni se elektrometri odlikuju lakom prenosivošću, brzim reagiranjem na promjene njihova stanja i tim da omogućuju precizna očitavanja otklona, a i osjetljivost im je velika.

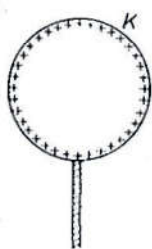
Za još veće osjetljivosti potrebne su nešto drukčije konstrukcije. Jedna takva je na pr. (Wulfov) *jednonitni elektrometar*, kod koga je samo jedna nit N napeta između S i Q, a štapići A iz sl. 5. nisu vodljivo spojeni s kućištem, nego imaju odvođe prema vani provedene kroz izolatore. Prema tomu je moguće kod ove konstrukcije privesti štapićima A prikladne »pomoćne naboje«, i to jednomu od njih pozitivni, a drugomu negativni (priključivši ih na pozitivni, odn. negativni pol posebne baterije od mnogo malih suhih elemenata; sredina baterije spoji se s kućištem M i zemljom). Nit N otklanjat će se, makar bila i neznatno električna, tjerana jakim poljem u prostoru između suprotno nabijenih štapića A.

Pored elektrometara ima još manje osjetljivih, te katkad i s manje pomnom izolacijom izvedenih naprava na principu sila u statičkim električkim poljima. Ove se u elektrotehnici zovu *elektrostatski instrumenti* (i mogu služiti na pr. za mjerenja i visokih napona).

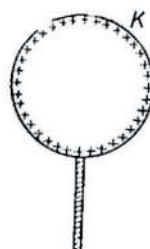
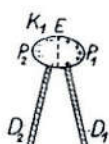
29. Da bismo sad bolje razmotrili drugi osnovni pojava u električkim poljima, *influencono* djelovanje polja, zamislimo na pr. po sl. 7. desno od recimo pozitivno nabijene kuglaste elektrode K vodič K_1 u obliku rotacionoga elipsoida, postavljaje-

noga s osi rotacije u »smjer polja«, dakle s ravninom »ekvatora« okomitom na taj smjer. Na strani okrenutoj *od* K na površini toga elipsoida pojavili bi se pozitivni (odnosno, općenitije, *istoimeni* s onima na K) *influencirani* naboji, a na protivnoj strani, okrenutoj *prema* K, negativni (odnosno *raznoimeni*) *influencirani* naboji, i uz to bi *istoimenih* i *raznoimenih* bilo u istom ukupnom iznosu.

Kod neznatnih prema daljini elipsoida od K dimenzija elipsoida, izolirano dovedenoga u polje i orijentiranoga prema polju kao u sl. 7., područje *istoimenoga* *influenciranog* elektriciteta obuhvaćalo bi praktički površinu polutke P_1 elipsoida okrenute *od* K, a područje *raznoimenoga* površinu polutke P_2 okrenute *prema* K, i mjesta najgušćega porazdjeljenja (najveće plošne gustoće) naboja jednoga i drugoga predznaka bili bi »polovi« polutaka P_1 i P_2 .



Sl. 7.



Sl. 8.



Kad bi se naprotiv promatrani elipsoid vodljivo spojio sa zemljom Z, kako je naznačeno u sl. 8., pa bi prema tomu činio sa zemljom jedan jedini vodič, ostao bi na elipsoidu samo *raznoimeni* *influencirani* elektricitet, a *istoimeni* bi otišao u zemlju, odakle i imena *vezanoga* elektriciteta *influenције* za prvi i *slobodnoga* elektriciteta *influenције* za drugi. Ova se činjenica iskorišćuje ako se prvobitno neelektrična tjelesa dovodenjem u blizinu nabijenih elektroda žele nabiti protivnim elektricitetom.

Po A-22. negativni *influencirani* elektricitet lijevo i pozitivni desno na elipsoidu u sl. 7. izlaze na suvišak, prema normalnom stanju, elektrona lijevo i nestašicu desno na elipsoidu, koji nastanu zbog gibanja slobodnih elektrona u vodiču podvrgnutom *influenциji* pod utjecajem vanjskoga električkoga polja; gibanje prestane kad se *influencirani* naboji tako porazmjestе da se njihovim poljem poništi unutar vodiča vanjsko polje.

30. Eksperimentalno se gornje činjenice o *influenциji* lako mogu verificirati različitim pokusima. Tako je, principno, lako razabrati da bi se ispitivanjima pojedinih mjesta elipsoida u sl. 7. s pomoću »električke žlice« i elektrometra lako ustanovilo, koji dio površine elipsoida pokazuje pozitivni i koji negativni elektricitet, kao i to da su mjesta najveće plošne gustoće obih elektriciteta polovi elipsoida. A da se pokaže protivnost po predznaku i jednakost po iznosu naboja *influenciranih* na obje polutke malenoga i od kugle K dovoljno udaljenoga elipsoida, postavljena prema K kao u sl. 7., dovoljno je da se taj elipsoid realizira kombinacijom dviju uzduž ekvatora E tijesno međusobno prislonjenih, ali inače rastavljivih

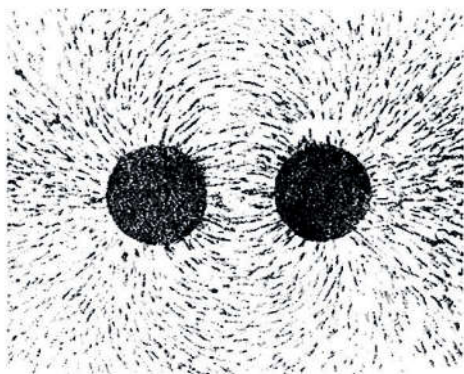
polutaka P_1 i P_2 , s drščima D_1 i D_2 od odlična izolatora. P_1 i P_2 stave se u polje elektrode K prislonjene jedna uz drugu i u položaju kao u sl. 7., dok su još u polju, razmaknu se jedna od druge i tako razmaknute uklone se iz polja. Polutka P_1 pokaže se pozitivno, a polutka P_2 negativno nabijena, kako je i gore rečeno. Ako se sad još polutke P_1 i P_2 ponovno dovedu u kontakt, obje postanu neelektrične, znak da je influenciranih elektriciteta obih predznaka bilo jednako mnogo.

31. Istom ako se uzme u pomoć i influencija, dadu se tumačiti mnogi pojavi poznati iz elementarne elektrostatike. Navedimo samo važnije primjere:

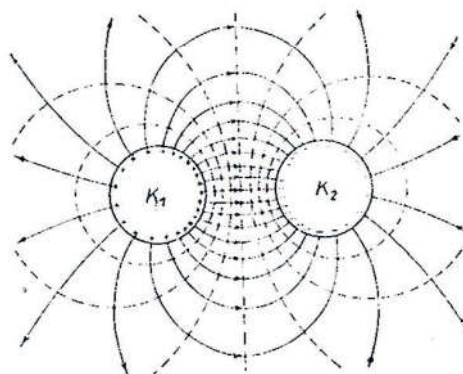
a) I kod neelektričnog tijela K_1 primjećuju se privlačne sile u smjeru prema elektriziranom tijelu K, no tek po tom što se na tijelu K_1 , dovedenom u polje tijela K, influencijom pojavi protivni elektricitet na njegovom, tijelu K bližem, a istoimeni na njegovom daljem kraju; polje vodiča K tjera raznoimeni elektricitet prema K, a istoimeni od K_1 no prevladava prvo djelovanje, jer je polje u većoj blizini od K jače. Prema tomu električka polja djeluju zapravo neposredno samo na naboje; najprije se giblju ovi unutar influenciranih tjelesa, a zatim slijede, kod nehomogenih (prostorno promjenljivih) polja, i privlačne sile na tjelesa. Ako privučeno tijelo takne elektrodu, te se poništi raznoimeni elektricitet influencije jednim dijelom naboja elektrode, dolazi do odbijanja tijela, jer ostane samo odbojnost zbog međusobnog djelovanja istoimenih naboja.

b) Naprotiv na neelektrična tjelesa u homogenom (svagdje jednakom) polju ne će rezultirati sile progresivnoga gibanja. Ali kod dugoljastih i koso prema polju orijentiranih tjelesa rezultat će na svako takvo tijelo »par sila«, koji će, izvodeći određeni moment vrtnje, nastojati tijelo tako orijentirati da se po duljini postavi u smjer polja. Na pr. kad bi eliposid iz sl. 7. bio u homogenom polju priklonjen svojom osi rotacije pod kutom α prema smjeru polja, na njega bi djelovao moment vrtnje proporcionalan sa $\sin \alpha$. Praktički se na ovaj način sitnim dugoljastim tjelešcima dadu barem grubo demonstrirati *električke silnice* ili *crte polja*, t. j. linije koje svojim smjerom (točnije smjerom svoje tangente) naznačuju u svakoj točki smjer djelovanja polja. Uspjelo je na pr. tako električke silnice realizirati (i na taj način demonstrirati prostorne raspodjele i kompliciranijih električkih polja) opreznim sipanjem na staklenu podlogu prašine od (većinom dugoljastih) kristalića na pr. svježe strugane sadre. A mogu se za realizaciju silnica upotrebiti i različite druge lake i dugoljaste sitne čestice. Primjer po ovim principima realiziranih električkih silnica između dvije jednako velike i jednako jako nabijene okrugle elektrode prikazuje sl. 9.; čestice orijentirale su se grubo u smjer polja, te zbog električkoga privlačenja nadovezale bar uglavnom u nizove, koji približno markiraju električke silnice. Po teoriji bi u promatranom slučaju silnice tekle kao između K_1 i K_2 u sl. 10. U sl. 11. predloženo je kako bi tekle električke silnice između horizontalnoga nabijenoga električkoga voda K, i njemu blize zemlje Z [na kojoj je naboj s voda K influencijom proizveo suprotni (vezani) elektricitet influencije].

c) Zbog influencije svaki nabijeni vodič K izaziva na prema njemu okrenutim dijelovima površine susjednih vodiča K_1 , K_2 , K_3 itd. (koji neka su spojeni sa

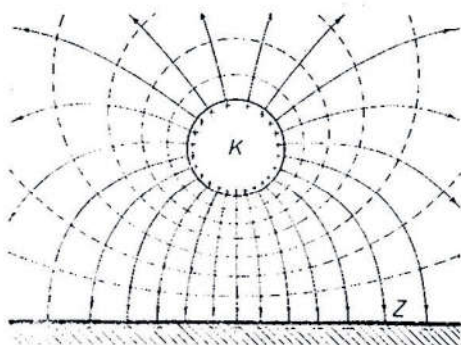


Sl. 9.



Sl. 10.

zemljom ili neka su sami velikih dimenzija) suprotne naboje vezanoga influenciranog elektriciteta. (Tako će, specijalno, nabijeni vodič, ako je više ili manje blizu



Sl. 11.

zemlji, influencirati suprotne naboje na bližim dijelovima površine zemlje, kako je bio slučaj u sl. 11.). Između naboja na K i influenciranih protivnih naboja na K_1 , K_2 , K_3 itd. treba prema tomu pomišljati električke silnice, kojih rasporedaj, eksperimentalno ispitani ili teoretski nađeni, predodređuje električko polje u međuprostorima između elektrode K i okolnih elektroda. Te silnice uvijek tako teku (v. na pr. sl. 10. i 11.) da bi se sile koje se primjećuju između K i K_1 , K_2 , K_3 , ... dobile i onda,

kad bi se zamislilo kao da su električke silnice neke elastične napete niti, koje se nastoje skratiti, a međusobno se odbijaju, i često puta već razmatranja silnica nekoga polja s ovoga gledišta dopuštaju važne zaključke glede privlačnih ili odbojnih sila između različitih elektroda.

I kod elektrometara (s kućištem spojenim sa zemljom) naboj priveden mjernomu dijelu elektrometra influencira protivni (raznoimeni) vezani naboj na kućištu; tako rezultiraju električke silnice između suprotno nabijenih elektroda (mjernoga dijela i kućišta), te međusobno privlačenje između tih elektroda, a po tomu i otklon pomičnoga sistema elektrometra.

32. Preostaje još da uvedemo neku veličinu kojom ćemo moći kvantitativno karakterizirati influenciona djelovanja u različitim točkama istoga ili čak različitih električkih polja.

Prirodno bi bilo u tu svrhu zamisliti da se stavlja u istraživana mjesta polja određena prikladna elektroda, pa da se tražena veličina tako uvede da dođe u vezu s iznosom suprotnih influenciranih naboja na toj elektrodi. Kao takvu ispitnu

»influencionu« elektrodu mogli bismo u prvi mah zamisliti u polutke P_1 i P_2 rastvorivu elektrodu K_1 po sl. 7., s rotacionom osi orijentiranom u smjer polja.

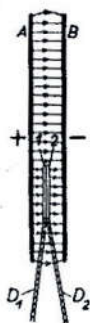
Jasno je da bi upotrebljena simetrična elektroda morala biti neznatnih dimenzija, da ne može doći do djelovanja influenciranih naboja na rasporedaj (po elektrodi ili elektrodama gibljivih) naboja Q kojih polje treba ispitivati. Slično se u A-23. kod određivanja »jakosti polja« pretpostavljao što neznatniji »ispitni naboj«.

No potrebno je još više zahtijevati od influencione elektrode da bi postala prikladna za mjerenja intenziteta influencionih djelovanja polja. Ma kako naime sitna bila dugoljasta elipsoidna elektroda po sl. 7., i prema tomu bez utjecaja na raspodjelu naboja Q , pojavom pozitivnih i negativnih influenciranih naboja na njoj poremetilo bi se prvobitno polje neposredno oko same takve elektrode, dakle baš na mjestu ispitivanja. Naprotiv, utjecaja influenciranih naboja ne će biti ako se upotrebi ekstremno plosnata elektroda, na pr. pločasta elektroda debljine neznatne prema njenim ostalim malim dimenzijama. Kod takvih ekstremno plosnatih, upravo nada sve tankih pločastih dovoljno sitnih elektroda, orijentiranih zbog što jačeg influencionog učinka da im normala pada u smjer polja (dakle da im je ploha okomita na silnice), ne će biti zamjetljivih poremetnji prvobitnog polja na mjestu ispitivanja, jer će se suprotni influencirani naboji, kao naboji istog iznosa i svagdje korespondentno porazdijeljeni na obje nada sve blize plohe ovakvih elektroda, međusobno u djelovanju prema vani praktički poništavati. Tako rasporedaj polja, odn. tok njegovih silnica, ostaje sačuvan nakon stavljanja u polje male pločaste influencione elektrode; razlika će biti samo u kratkom prekidu polja i silnica korespondentnom zanemarivoj debljini elektrode, odn. silnice se dosižući do plohe s negativnim influenciranim nabojima gotovo neprekinuto dalje nastavljaju od suprotne plohe s pozitivnim influenciranim nabojima.

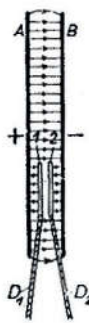
Konačno će još, zbog mogućnosti separiranja (a time i mjerenja) suprotnih influenciranih naboja, opisana pločasta elektroda morati biti, poput elektrode K_1 iz sl. 7., ekvatorijalno rastavljiva, t. j. ona će morati zapravo biti dvostruka ploča, »dvoploča«. Obično je zovu *Maxwellova dvoploča*.

33. Tako bi po sl. 12., koja predstavlja primjer ispitivanja praktički vrlo važnog polja između dvije paralelne velike i blize elektrode A i B, nabijene suprotnim nabojima $+Q$ i $-Q$, Maxwellovu dvoploču sastavljenu iz dvije jednake ekstremno tanke sitne pločice 1 i 2 s dršcima iz izolatorâ D_1 i D_2 trebalo zamisliti, pri međusobno prislonjenim pločicama 1 i 2, postavljenu okomito na silnice na ispitivanom mjestu polja, u kome bi se slučaju na neznatnim površinama iznosa ΔS pločica 1 i 2 pojavili određeni neznatni influencirani naboji $-\Delta Q'$ i $+\Delta Q'$. A zatim bi trebalo po sl. 13. pločice 1 i 2 malo razmaknuti, i tako između njih prekinuti vodljivu vezu. Time bi influencirani naboji ostali na 1 i 2 i nakon uklanjanja tih pločica iz istraživanog polja, pa ne bi bilo poteškoća da se isti iznos $\Delta Q'$ obih suprotnih naboja na 1 i 2 kvantitativno odredi, elektrometarski po A-27. ili drugim prikladnim načinom.

No uz poznato ΔS i izmjerene iznose $\Delta Q'$ s povoljnim dvopločama u različitim točkama istoga ili različitih polja, obzirom na to što se na istom mjestu mogu očekivati s različitim dvopločama iznosi $\Delta Q'$ proporcionalni površinama ΔS ,



Sl. 12.



Sl. 13.

no neovisni o debljinama tih dvoploča, moći će se za karakterizaciju intenziteta influencionog djelovanja uzimati na jedinicu površine preračunani influencirani naboji, dakle veličine $\frac{\Delta Q'}{\Delta S}$ zване »plošnim gustoćama« naboja influenciranih na Maxwellovim dvopločama. Slično su i kod definicije iznosa F jakosti polja sile opažane na malenu naboju dovedenu u polje bile uzimane preračunano na jedinicu naboja.

34. Strogo uzeto opisano ispitivanje trebalo bi dakako zamišljati s graničnim prelazom na beskonačno malene dvoploče površine dS s beskonačno malenim influenciranim nabojima iznosa dQ' , tako da bi intenzitet influencionog djelovanja polja bio dan relacijom: $D = \frac{dQ'}{dS}$. A kako se influencijom djelovanju očito

može pridijeliti i posve određeni smjer, naime »smjeru polja« korespondentni smjer normale na dvoploču orijentiranu na maksimum učinka, i to normale u smislu od plohe negativnog influenciranog naboja prema onoj pozitivnog naboja, moći će se govoriti i o vektoru $\mathcal{D}$ iznosa D karakterističnom za influencijno djelovanje polja.

Drugim riječima: definirat ćemo neki vektor $\mathcal{D}$, nazvan *vektorom gustoće električkog pomaka* ili kraće *vektorom pomaka*, s iznosom jednakim plošnoj gustoći naboja $D = \frac{dQ'}{dS}$ influenciranih na dvoploči orijentiranoj normalom u smjer polja i sa smjerom određenim smjerom polja, a time i smjerom vektora jakosti polja $\mathcal{F}$.

35. Praktički se, osim s pomoću elektrometara po A-27., mogu male množine elektriciteta, poput množina $\Delta Q'$ influenciranih na ne premalim dvopločama u ne preslabim poljima, mjeriti i *balističkim galvanometrima*.

Balistički galvanometri zapravo su samo na naročiti način upotrebljavani, i prema tomu sa što više osjetljivosti i dovoljno tromosti izvedeni, galvanometri po poznatom sustavu pomičnog svitka od mnogo zavoja, elastično vrtivog u magnetskom polju permanentnog magneta. Ovi galvanometri osnivaju se na mehaničkim silama magnetskih polja na naboje u gibanju, odn. na vodiče protjecane električkim strujama, o čemu će kasnije biti govora. Izvedbe tih galvanometara mogu biti sa »zrcalnim očitavanjem« ili s (materijalnim) kazalom.

Upotrebljavani običnim načinom ovi instrumenti daju stalne otklone α proporcionalne strujama stalne jakosti I trajno slanimi kroz njihove pomične svitke, tako da za određeni galvanometar vrijedi relacija proporcionalnosti:

$$I = C_0 \cdot \alpha \quad (11)$$

u kojoj se veličina C_0 , karakteristična za osjetljivost galvanometra pri opisanom načinu upotrebe, zove »strujna konstanta« galvanometra. Po (11) ima C_0 očito značenje one stalne struje koja bi proizvela stalni otklon $\alpha = 1$, zbog čega se C_0 redovito i izražava na pr. u »nanoamperima (ili mikroamperima) po dijelu skale galvanometra« (gdje nanoamper znači milijardninu i mikroamper milijuntinu ampera).

Međutim kod upotrebe istih tih galvanometara kao »balističkih«, za koju su svrhu osobito prikladne izvedbe s nešto duljim titrajnim vremenima, pusti se mjerena količina elektriciteta da se *naglo* izbije kroz galvanometar, dakle da prođe galvanometrovim svitkom u obliku vrlo kratkotrajne struje, t. zv. *strujnog udara*. Pod utjecajem učinaka magnetskog polja na svitak u vanredno kratkom vremenskom intervalu trajanja strujnog udara, pomični sustav galvanometra dobije određen mehanički udarac ili impuls, odn. dobije određenu brzinu, pa biva »bačen« do nekoga trenutnog najvećeg otklona (»balističkog otklona«) α_1 , koji treba brzo znati očitati, jer pomični sustav galvanometra odmah nastupa povratno gibanje prema nuli skale.

36. Teorija balističkih galvanometarskih gibanja (grčki: *balein* = bacati) spada u disciplinu električkih mjerenja i nije posve jednostavna (poblize: E. M.); no ona vodi na jednostavni rezultat da, za određeni »otvoreni« galvanometar (t. j. galvanometar kao u sl. 14. sa stezaljkama nepremoštenima nekim vanjskim vodičem), odnos množina elektriciteta Q ukupno prostrujalih tokom pojedinih strujnih udara i pripadnih balističkih otklona α_1 udovoljava i opet zakonu proporcionalnosti, ali ovdje s konstantom proporcionalnosti C'_B posve drukčijom od konstante C_0 iz (11). Drugim riječima, vrijedi relacija:

$$Q = C'_B \cdot \alpha_1 \quad (12)$$

u kojoj konstanta C'_B , karakteristična za balističku osjetljivost otvorenog galvanometra i zvana »balistička konstanta otvorenog galvanometra«, ima očito značenje one množine elektriciteta koja bi proizvela balistički otklon $\alpha_1 = 1$, zbog čega se C'_B i izražava na pr. »u nanoampersekundama po dijelu skale galvanometra« (nanoampersekunda je milijardnina ampersekunde).

Ono bitno što relacija (12) tvrdi jest, da je kod vrlo kratkog trajanja strujnih udara odlučan za otklon α_1 samo *ukupni* iznos Q prostrujalih naboja. To znači: ako i znači momentani iznos tokom trajanja t_1 kratkog strujnog udara po volji promjenljive jakosti struje kroz galvanometar, te po tom $i \cdot dt$ u vremenu dt prostrujalu množinu elektriciteta, odlučna za α_1 ostaje po (12) ukupno prostrujala množina elektriciteta:

$$Q = \int_0^{t_1} i \cdot dt \quad (13)$$

bez obzira na to po kojem je zakonu u detaljima tekao strujni udar. Tako na pr. neki balistički otklon α_1 , koji odgovara strujnom udaru iznosa $Q = 10^{-5}$ As može

biti proizveden isto tako strujom 10^{-1} A u 10^{-4} s ($10^{-1} \times 10^{-4} = 10^{-5}$), kao i strujom 10^{-2} A u 10^{-3} s ($10^{-2} \times 10^{-3} = 10^{-5}$), ili kojim kompliciranije proteklom udarom, kod koga je iznos $Q = 10^{-5}$ As trebalo računati integralom (13).

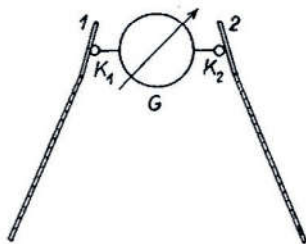
37. Dodajmo odmah, zbog kasnijih primjena, da se galvanometri mogu balistički upotrebljavati i »zatvoreno«, t. j. nadopunjeni u »zatvoreni strujni krug« nekim određenim vanjskim vodičem električkog otpora R_v , priključenim na stezaljke galvanometra. Iz valjanih razloga »vanjski otpor« R_v uzima se redovito u nekom posve određenom i za svaki galvanometar karakterističnom iznosu R_a , iznosu »vanjskog graničnog otpora«, kod kojega pomični sustav galvanometra baš gubi svojstvo oscilatornoga gibanja. Onda ukupni strujni krug galvanometra unutarnjega otpora R_g predstavlja otpor $R_g + R_a$. Za balistička mjerenja množina elektriciteta, na pr. množina Q ukupno prostrujalih pri kratkotrajnim pojavima elektromagnetske indukcije izazvanima u nekom svitku uključen u galvanometarski krug kao dio vanjskog graničnog otpora, vrijedi sad relacija:

$$Q = C_B \cdot \alpha_1 \quad (14)$$

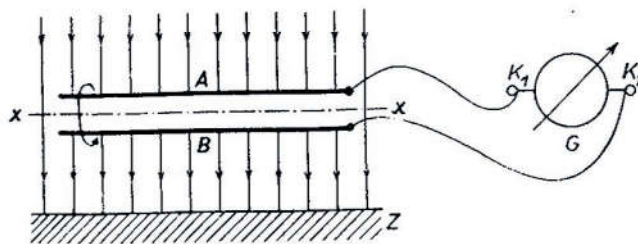
s »balističkom konstantom galvanometra u aperiodskom graničnom stanju« C_B nešto većom (dakle s balističkom osjetljivošću nešto manjom) nego kod upotrebe istoga galvanometra »otvoreno« sa $R_v = \infty$.

Za balistička mjerenja s otvorenim galvanometrom pri $R_v = \infty$ i sa zatvorenim pri $R_v = R_a$ treba dakako poznavati pripadne konstante C'_B i C_B . Ako za njih nema gotovih podataka, njih je lako eksperimentalno odrediti za neki dani galvanometar šaljući kroz ovaj potonji poznate množine elektriciteta Q , motreći proizvedene balističke otklone α_1 i zaključujući na C'_B i C_B po relacijama $C'_B = Q/\alpha_1$ odn. $C_B = Q/\alpha_1$. A ima i načina da se iznosi C'_B i C_B odrede i računski (iz podataka dobivenih mjerenjem »titrajnog vremena« i »stepena prigušenja« gibanja otvorenog galvanometra, kao i galvanometrove strujne konstante C_0). Na pr. za neki određeni galvanometar sa zrcalnim očitavanjem dobiveno je baždarenjem (i računom): $C'_B = 3 \cdot 10^{-9}$ i $C_B = 7 \cdot 10^{-9}$ »As po mm skale udaljene 1 m«.

38. Ako bi sad trebalo balistički izmjeriti apsolutni iznos $\Delta Q'$ raznoimenih naboja influenciranih nekim jakim poljem na obim ploham neke dvoploče s bazama ΔS , onda bi po sl. 14., nakon što bi se po A-33. naboji $-\Delta Q'$ i $+\Delta Q'$



Sl. 14.



Sl. 15.

izazvali i ploče 1 i 2 separirale i izvadile iz polja, dovoljno bilo naprosto istodobno prisloniti ploče 1 i 2 na stezaljke K_1 i K_2 balistički dovoljno osjetljiva galvanometra G, pa zaključiti iz opaženoga balističkog otklona α_1 na $\Delta Q'$ po relaciji:

$\Delta Q' = C'_B \cdot \alpha_1$, te dalje iz $\Delta Q'$ i na plošnu gustoću naboja $D = \Delta Q' / \Delta S$, dakle na iznos vektora pomaka $\mathcal{D}$ u istraživanom mjestu polja.

U intenzivnim, prostranim i od mjesta do mjesta samo malo promjenljivim poljima, gdje se mogu upotrebljavati i nešto veće dvoploče, s današnjim najosjetljivijim instrumentima ne bi bilo poteškoća da se postignu dovoljno veliki balistički otkloni pri izvođenju ovakvih mjerenja; kod nedovoljne osjetljivosti galvanometra zbog premalih dvoploča i slabih polja moglo bi se dakako $\Delta Q'$ određivati elektrometarski (s prenošenjem naboja na elektrometar uz upotrebu Faradayeva vrča; A-26.), te dalje zaključivati na D kao gore.

39. Naprotiv mnogo manje balističke osjetljivosti nego li ih mogu dati najosjetljiviji galvanometri bile bi dovoljne kad bi se sličnim načinom određivale nešto veće množine elektriciteta, na pr. iznos Q suprotnih naboja na kombinaciji po sl. 12. od dvije oveće paralelne i blize elektrode A i B (nazvanoj, iz razloga o kojima će još biti govora, »pločasti kondenzator«). I ovdje bi se obje elektrode A i B priključile na stezaljke K_1 i K_2 balističkog galvanometra i očitao bi se balistički otklon α_1 ; na Q bi se došlo po relaciji: $Q = C'_B \cdot \alpha_1$.

A mogu se balistički mjeriti i naboji Q jedne jedine elektrode. Treba onda samo tom elektrodom taknuti samo jednu stezaljku K_1 balističkog galvanometra pri drugoj stezaljki K_2 spojenoj sa zemljom. U tomu slučaju naboj Q prostruji kroz galvanometar u zemlju, pa i opet vrijedi relacija $Q = C'_B \cdot \alpha_1$.

Spomenimo još ispitivanje polja naročitom aparaturom s balističkim galvanometrom po sl. 15. Ovom se aparaturom mogu ispitivati električka polja u atmosferi, u različitim visinama iznad zemlje Z. Radi se s pomoću sustava od dvije oveće paralelne ploče iz kovne mreže A i B, recimo svaka površine $S = 1 \text{ m}^2$. Na pločama, dok su horizontalno položene, ispitivano polje izvodi influencijom gustoće naboja $+D$ i $-D$, odn. ukupne naboje $+Q = +D \cdot S$ i $-Q = -D \cdot S$. Ako se sistem paralelnih ploča naglo zaokrene oko osi $x-x$ za 90° u vertikalni položaj, pločasti kondenzator naboja Q što ga predstavlja sustav ploča A i B isprazni se kroz priključeni balistički galvanometar G i iz proizvedenog otklona α_1 može se zaključiti na $D = Q/S$, te dalje, po (15) iz A-41., na $F = Q/\epsilon_0 S$. Zakretom sustava ploča za 180° balistički bi se otklon dakako podvostručio, jer bi se gustoća naboja promijenila od $+D$ na $-D$, dakle za $2D$, a time i naboj za $2Q$.

Lako se vidi da kod zakreta za 90° sustava A-B iz sl. 15. proteče kroz G baš naboj Q . Treba samo u sl. 14. shvatiti naboj $+Q$ na 1 kao manjak, prema neutralnom stanju, korespondentnoga broja elektrona, a naboj $-Q$ na 2 kao suvišak isto tolikoga broja elektrona. Da bi sad istodobno nestalo suviška elektrona na 2 i manjka elektrona na 1, dovoljno je da se suvišak elektrona odvede sa 2 i kroz G dovede na 1, dakle da kroz G prostruji toliko elektrona koliko odgovara ukupnom naboju apsolutnoga iznosa Q .

U nešto jačim električkim poljima dovoljni balistički otkloni dobili bi se, uz upotrebu ekstremno osjetljivih modernih galvanometara neznatne balističke konstante, već s pločama relativno malene površine. Mogle bi se onda ispitivati i raspodjele jakosti polja oko ovećih naprava pod visokim naponom. Na pr. pri $S = 100 \text{ cm}^2$ i $C'_B = 0,2 \cdot 10^{-9} \text{ As/d.sk.}$ postigao bi se već uz $F = 1400 \text{ V/cm}$ velik balistički otklon $\alpha_1 = \epsilon_0 F S / C'_B = 62 \text{ d.sk.}$, kad bi se par ploča A-B iz sl. 15., početno postavljen okomito na očekivani smjer polja, naglo zakrenuo za 90° (ili jednostavnije: kad bi se, pri sistemu A-B ostavljenom na miru u početnom položaju, napon ispitivane naprave ukopčao ili iskopčao).

III) ZAKON OMJERA VEKTORÂ $\mathcal{D}$ I $\mathcal{F}$; ZAKON TOKA VEKTORA $\mathcal{D}$

Problemi odnosa vektorâ $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ prema nabojima i prema dielektricima. »Zakon omjera« kao prva osnovna tvrdnja; »influenciona konstanta« ϵ_0 i »dielektrička konstanta« $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon'$. Pitanja jedinica; zaokruženi sustavi sa četiri osnovne jedinice; ekvivalentni sustavi m-k-g-s-A i V-A-s-m (također i sustav V-A-s-cm). Odnos vektora $\mathcal{D}$ prema nabojima neovisan o naravi dielektrikuma. Pojam toka nekog vektora; »zakon toka« vektora $\mathcal{D}$ (u integralnom obliku) kao druga osnovna tvrdnja. Primjene: Coulombov zakon, ESJ, polja ravnih elektriziranih ploha, skok normalne komponente jakosti polja pri prelazu elektrizirane plohe, polje tik uz površinu nabijene elektrode, polje pločastog kondenzatora, polje cilindričkog vodiča. O nabojima kao »izvorima« i »ponorima« $\mathcal{D}$ -linija. Pojam »divergencije« nekog vektora; »zakon toka« u diferencijalnom obliku.

40. Prema dosadanjim razmatranjima mogu za karakteriziranje električkih polja poslužiti dvije veličine, naime vektor gustoće električkog pomaka $\mathcal{D}$ i vektor jakosti električkog polja $\mathcal{F}$. Prirodno se sad nameću dva pitanja: a) kakav je odnos vektorâ $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ uzetih za određenu točku određenog dielektrikuma (označujući taj odnos simbolom $\mathcal{D}/\mathcal{F}$ mi ćemo, više precizirano, pod njim razumijevati omjer D/F iznosâ po A-34. istosmjernih vektora $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$); b) kakva su prostorna variranja veličinâ $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ u polju proizvedenom danom raspodjelom naboja u određenom dielektrikumu.

U dvjema relacijama koje ćemo postaviti u ime odgovora na ova dva pitanja mi ćemo gledati sažeto, u obliku osobito prikladnom za primjene, temeljne veze električkih polja mirnih naboja, odnosno uzdići ćemo te relacije na *osnovne tvrdnje* potrebne i dovoljne za rješavanje daljih problema spomenutih polja, a prikladnije za takva rješavanja od često mjesto njih manje suvremeno uzimanih dviju drugih tvrdnja kao polaznih: Coulombova zakona o silama između naboja u vakuumu i stavka o smanjenjima silâ Coulombova zakona u različitim omjerima kod zamjene vakuuma među nabojima različitim materijalnim dielektricima.

41. Postavimo najprije za odnos vektorâ $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$, dakle omjer D/F , osnovnu tvrdnju da je taj odnos uvijek isti (konstantan) u istom dielektrikumu, no da varira s vrstom dielektrikuma. To znači da su variranja vektorâ $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$, odn. njihovih iznosâ D i F , proporcionalna u određenom dielektrikumu, s nekim posve fiksnim i za taj dielektrikum karakterističnim »odnosom proporcionalnosti« ϵ , što se može pisati i u obliku osnovne relacije:

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{F}} = \frac{D}{F} = \epsilon \quad (15)$$

Za obrazloženje ovog stavka primijetimo da doista pokusi mjerenja iznosâ D i F u različitim mjestima električkih polja u vakuumu i u materijalnim dielektricima ukazuju na proporcionalnosti po relaciji (15). Tako specijalno između gustoće naboja D , influencirane na danom elementu vodljive plohe s normalom orijentiranom u smjer polja, i sile F polja preračunane na jedinični naboj postoji u vakuumu paralelizam u tom smislu, da kad jedna od ovih veličina postane 2, 3, 4 itd. puta veća i druga veličina postane 2, 3, 4 itd. puta veća. Odnos vektorâ $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$, i točnije

njihovih iznosa D i F , može se posebno za vakuum predložiti relacijom s nekom konstantnom veličinom ϵ_0 :

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{F}} = \frac{D}{F} = \epsilon_0 \quad (15')$$

Konstantnu veličinu ϵ_0 običaj je zvati *apsolutnom dielektričkom konstantom* (dielektričnošću) *vakuumu* ili kraće *influencionom konstantom*.

Slični paralelizmi postoje između $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ (odn. D i F) na pr. u uzduhu, u transformatorskom ulju i uopće u svim dielektricima, samo je odnos proporcionalnosti za svaki od ovih dielektrika drugi: on je za izvjesni, vrstom dielektrikuma određeni, faktor ϵ' veći od onoga u vakuumu. Tako za uzduh sa $\epsilon' = 1,0006$ spomenuti je odnos $\epsilon = \epsilon_0 \cdot 1,0006$, za transformatorsko ulje sa $\epsilon' = 2$ on bi bio $\epsilon = \epsilon_0 \cdot 2$, itd. Čisto omjerni bezdimenzioni brojevi ϵ' za pojedina dielektrika, koji upućuju na aktivnu ulogu dielektrika kod električkih pojava, zovu se *relativne dielektričke konstante* tih dielektrika, a veličine ϵ po relaciji:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon' \quad (16)$$

nazvane su njihovim *apsolutnim dielektričkim konstantama* (dielektričnostima). Time odmah postaje razumljiv i naziv »apsolutne dielektričke konstante vakuumu« za veličinu ϵ_0 , jer za vakuum bi očito trebalo uzimati kao relativnu dielektričku konstantu $\epsilon' = 1$. Po tomu može se doista posve općenito pisati formula (15), u kojoj se ϵ po (16) može zamisliti i nadomješteno sa $\epsilon_0 \epsilon'$.

42. Ostavljajući za kasnije teorijska razmatranja o proporcionalnostima vektora $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$, različitima u različitim dielektričkim sredstvima, uočimo zasad praktičku konsekvenciju tih proporcionalnosti: da je u određenom dielektrikumu poznate dielektričke konstante $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon'$ dovoljno upoznati jednu od obih vektorskih veličina $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ da bi se odmah mogla znati i druga od njih. Tako je na pr. moguće odrediti, kao u A-39., veličinu $\mathcal{D}$ na nekom mjestu atmosferskog električkog polja zaključiti odmah i na jakost polja na ispitivanom mjestu po relaciji $\mathcal{F} = \mathcal{D}/\epsilon$, koja bi se relacija uostalom, kraj zanemarivane razlike relativnih dielektričkih konstanta 1,0006 i 1 uzduha i vakuumu, mogla ovdje pisati aproksimirano: $\mathcal{F} = \mathcal{D}/\epsilon_0$. Čak se, kad ϵ ne bi bilo različito za različita dielektrička sredstva, ne bi ni trebala voditi dva različita vektora $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ za karakterizaciju električkih polja, jer, da je taj odnos u svim dielektricima isti, jedna ili druga veličina jednoznačno bi karakterizirala ma koje polje.

Prema rečenomu međutim za praktičku upotrebu relacije $\mathcal{F} = \mathcal{D}/\epsilon$ trebat će očito poznavati za odnose u vakuumu influencionu konstantu ϵ_0 , a za druga dielektrika još i relativne dielektričke konstante ϵ' tih dielektrika.

Time se postavlja prije svega pitanje dimenzije i iznosa veličine ϵ_0 . A kako je to pitanje očito u vezi s jedinicama koje se odaberu za vektore $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$, odn. za njihove iznose D i F , svodi se problem na pitanje izbora sistema jedinica.

Kako je već u A-13. istaknuto, u pravilu će se u ovom djelu upotrebljavati jedinice koje se mogu postaviti u sistem bilo kao Giorgijev m-k-g-s-A-sistem koherentnih jedinica, bilo kao (za elektrotehničke svrhe možda prikladniji i na *iste* po iznosima jedinice vodeći) V-A-s-m-sistem koherentnih jedinica. A iznimno će se upotrebljavati i V-A-s-cm-sistem koherentnih jedinica, različit od V-A-s-m-sistema tek osnovnom jedinicom dužine, i onim izvedenim jedinicama gdje interveniraju dužine, površine i volumeni.

No izborom sistema odmah su određene i jedinice veličina $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$, odn. njihovih iznosa D i F . U V-A-s-m-sistemu veličini $\mathcal{D}$, kojoj je iznos kvocijent množine elektriciteta, izražavane u V-A-s-m-sistemu u ampersekundama (As), i površine, izražavane u V-A-s-m-sistemu u kvadratnim metrima (m^2), jedinica će dakako biti ampersekunda na kvadratni metar (As/m^2). A veličini $\mathcal{F}$, kojoj po relaciji $\mathcal{P} = Q \cdot \mathcal{F}$ pripada karakter kvocijenta sile, u V-A-s-m-sistemu izražavane u VAs/m ($1 \text{ VAs/m} = 1 \text{ N} = 10^5 \text{ dina} = 0,102 \text{ kg}^*$), i množine elektriciteta, u V-A-s-m-sistemu izražavane sa As, pripadat će u V-A-s-m-sistemu jedinica (VAs/m) : (As), dakle jedinica V/m (volt po metru). Analogno kod V-A-s-cm-sustava jedinice za $\mathcal{D}$ odn. $\mathcal{F}$ bi bile As/cm^2 odn. V/cm , prva 10000 puta veća od As/m^2 i druga 100 puta veća od V/m (prema čemu bi se određena gustoća električkog pomaka izražavala 10000 puta manjim brojem u As/cm^2 nego u As/m^2 , a određena jakost električkog polja 100 puta manjim brojem u V/cm nego u V/m).

43. Dodajmo još da uopće različite jedinice mogu pri praktičkim primjenama biti, već prema prilikama, neudobno velike ili malene. U takvim se slučajevima upotrebljavaju, zbog udobnosti izražavanja, najčešće dekadski »multipla« i »submultipla« jedinica nekog sistema, no u formule, shvaćene kao »relacije među veličinama« (za razliku od »numeričkih relacija«, koje ne vrijede nego uz upotrebu posve određenih jedinica) treba ipak stavljati iznose u punim jedinicama, a ne u njihovima dekadskim multiplima ili submultiplima (aliquotnim dijelovima).

Tako se »prefiksima« mili- (10^{-3}), mikro- (10^{-6}), nano- (10^{-9}) i piko- (10^{-12}) označuju dekadski dijelovi, a »prefiksima« kilo- (10^3), mega- (10^6), giga- (10^9) i tera- (10^{12}) dekadski mnogokratnici neke jedinice. Kratice su: za mili- m, za mikro- μ , za nano- n, za piko- p, za kilo- k, za mega- M, za giga- G, te za tera- T.

Primjeri: 1 nAs (nanoampersekunda) = 10^{-9} As ; 1 kV (kilovolt) = 10^3 V ; 1 MW (megavat) = 10^6 W ; $1 \text{ T}\Omega$ (teraom) = 10^{12} oma ; 1 mA (miliamper) = 10^{-3} A ; $1 \mu\text{V}$ (mikrovolt) = 10^{-6} V ; 1 nF (nanofarad) = 10^{-9} F , 1 pF (pikofarad; neki ga pišu manje dosljedno i $\mu\mu\text{F}$, mikromikrofarad) = 10^{-12} F .

Katkad se, kako ćemo još vidjeti, upotrebljavaju i nedekadski multipla odnosno submultipla; na pr. za Wh (vatsat) vrijedi: $1 \text{ Wh} = 3600 \text{ Ws}$. A od Wh se onda dalje dolazi i na multipla: kWh, GWh itd.: 1 kWh (kilovatsat) = 10^3 Wh , 1 GWh (gigavatsat) = 10^9 Wh , i sl. Treba još spomenuti: 1 MeV (megaelektronvolt) = 10^6 eV , 1 GeV (u američkoj literaturi obično označeno sa BeV, jer tamo 10^9 zovu »bilijun«, a ne »miliarda.«) = 10^9 eV , i slično dalje.

Prefikse kao deka-, hekto-, deci- centi- i sl. trebalo bi uglavnom izbjegavati; ipak kratica cm se, dakako, mnogo rabi. Slično bi se V-A-s-cm-jedinica sile VAs/cm mogla zvati »hektonjutna«.

44. Uz malo prije uvedene V-A-s-m-jedinice As/m^2 i V/m za veličine $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ za kvocijent ovih dviju veličina u vakuumu, dakle za influencionu konstantu ϵ_0 , izlazi V-A-s-m-jedinica 1 (As/m^2) : (V/m), dakle jedinica 1 As/Vm). A to će biti ujedno jedinica apsolutnih dielektričkih konstanta ma kakvih dielektrika, jer u relaciji $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon'$ predstavlja relativna dielektrička konstanta ϵ' samo omjerni broj bez dimenzija, isti u svakom sustavu jedinica.

Specijalno numerički, mjerenja iznosâ $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ u vakuumu daju za influencionu konstantu vrijednost:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \left(= 0,08854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vcm}} \right) \quad (17)$$

Vrijednost u zagradi formule (17) lako je verificirati iz već u A-42. istaknutih razlikâ između As/m^2 i As/cm^2 i između V/m i V/cm .

Zapravo je iz teorijskih razloga (teorija elektromagnetskih valova, izvedena iz obih Maxwellovih jednačbi; v. kasnije u poglavlju o principima radiotehnike) ϵ_0 određeno relacijom:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

gdje c znači brzinu svjetlosti u vakuumu, a μ_0 t. zv. indukcionu konstantu vakuuma. A kako u V-A-s-m-sistemu c ima zapravo vrijednost $2,998 \cdot 10^8$ m/s, a za μ_0 treba uzimati iznos $0,4\pi \cdot 10^{-6}$ Vs/Am, točna vrijednost (17) izlazi, po netom spomenutoj formuli za c , jednaka recipročnom iznosu produkta $0,4\pi \cdot 10^{-6} \cdot (2,998 \cdot 10^8)^2$, što je lako računski kontrolirati. Uz vrlo približnu vrijednost $c = 3 \cdot 10^8$ m/s za ϵ_0 može se stavljati:

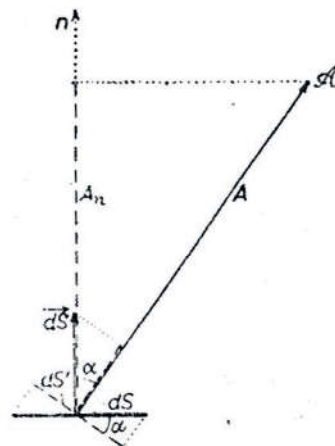
$$\epsilon_0 = \frac{1}{0,4\pi \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \left(= \frac{1}{36\pi \cdot 10^{11}} \frac{\text{As}}{\text{Vcm}} \right)$$

45. Možemo sada pristupiti osnovnom pitanju b) iz A-40. o kvantitativnim odnosima pri prostornim variranjima veličinâ $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ u poljima s danom raspodjelom naboja i danim dielektrikumom. Pri tom će biti principno dovoljno istražiti kvantitativno samo jednu od veličina $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$; ona druga će, po relaciji $\mathcal{D}/\mathcal{F} = \epsilon = \epsilon_0 \epsilon'$, samim tim biti također kvantitativno obuhvaćena.

Mi ćemo, suprotno starijim postupcima, koji počinjući s Coulombovim zakonom polaze od jakosti polja $\mathcal{F}$, razmatranja suvremenije usmjeriti na veličinu $\mathcal{D}$, te postaviti uz bok već u A-41. za osnovnu tvrdnju uzete relacije (15) kao dalju osnovnu tvrdnju jedan posve određeni i od naravi dielektrikuma potpuno neovisni odnos između naboja koji neko polje proizvode i influencionih učinaka toga polja karakteriziranih vektorom električkoga pomaka $\mathcal{D}$.

46. Osobito pregledno moći ćemo predočiti spomenuti odnos ako se poslužimo pojmom *toka* (»fluksa«) vektora pomaka $\mathcal{D}$.

Uvedeno je da se kao tok $d\Phi$ ma kojega vektora $\mathcal{A}$ kroz element plohe površine dS postavljen *okomito* na smjer od $\mathcal{A}$, točnije izraženo: orijentiran s danom



Sl. 16.

svojom normalom n u istom smjeru i u istom smislu kao $\mathcal{A}$, definira produkt iznosa A vektora i površine dS plošnog elementa. Općenitije, ako je plošni element tako orijentiran prema $\mathcal{A}$ da mu normala čini *ma kakav kut* α sa $\mathcal{A}$, pod tokom vektora $\mathcal{A}$ kroz taj plošni element treba razumijevati (sl. 16. i 17.) produkt, komponente $A_n = A \cdot \cos \alpha$ vektora $\mathcal{A}$ u smjeru normale n plošnog elementa i površine dS toga elementa, ili također produkt cijeloga iznosa A vektora $\mathcal{A}$ i površine $dS' = dS \cdot \cos \alpha$ na vektor $\mathcal{A}$ okomite projekcije elementa dS , kako je naznačeno u sl. 16. Tako se može pisati:

$$d\Phi = A_n \cdot dS = A \cdot dS' = A \cdot \cos \alpha \cdot dS \quad (18)$$

A može se simbolizirano, zamišljajući zadani (normalom u određenom smjeru orijentirani) plošni element karakteriziran po sl. 16. nekim vektorom $\vec{dS}$ iznosa jednakoga površini dS elementa i smjera određena smjerom njegove normale n , te uvodeći pojam i simbol $\mathcal{A} \cdot \vec{dS}$ unutarnjeg ili skalarnog »produkta« dvaju vektora $\mathcal{A}$ i $\vec{dS}$, pisati također:

$$d\Phi = \mathcal{A} \cdot \vec{dS} \quad (18')$$

U vektorskom se naime računu uopće pod skalarnom veličinom zvanom *unutarnji (skalarni) produkt* dvaju vektora $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ razumijeva produkt iznosâ A i B tih vektora i kosinusa kuta φ što ga oni čine, t. j. unutarnji se produkt definira relacijom:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = A \cdot B \cdot \cos \varphi \quad (19)$$

a baš izraz takvog sastava $A_n \cdot dS = A \cdot dS' \cdot \cos \alpha$ odgovara po (18) elementu toka $d\Phi$ vektora $\mathcal{A}$ kroz plošni element $\vec{dS}$.

Tok Φ vektora $\mathcal{A}$ kroz konačnu plohu S bit će prema tomu jednak sumi elementarnih tokova $d\Phi$ kroz pojedine plošne elemente površine dS plohe S , dakle plošnom integralu uzetom po plohi S :

$$\Phi = \int_{(S)} d\Phi = \int_{(S)} A_n \cdot dS = \int_{(S)} A \cdot dS' = \int_{(S)} \mathcal{A} \cdot \vec{dS} \quad (20')$$

Specijalno u slučaju integracijâ po *zatvorenim* plohama S , dakle plohama koje potpuno ograničuju (»obavijaju«) konačne dijelove prostora, mi ćemo pripadne »obvojne« plošne integrale simbolički naznačivati kružnicom preko znaka integrala:

$$\Phi = \oint d\Phi = \oint A_n \cdot dS = \oint A \cdot dS' = \oint \mathcal{A} \cdot \vec{dS} \quad (20)$$

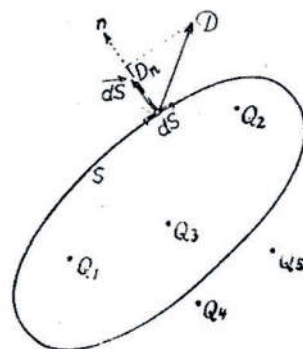
47. Uz pomoć netom uvedenog pojma vektorskog toka može se sad gore u A-45. nagoviještena osnovna tvrdnja o odnosu naboja i vektora pomaka nekoga

električkog polja lako tako izraziti da se kaže da *tok* Ψ vektora $\vec{D}$ kroz ma kakvu zatvorenu plohu S izlazi, neovisno o vrsti dielektrikuma, uvijek jednak algebarskoj sumi naboja obuhvaćenih plohom S .

To znači da se, ako D_n predstavlja »normalnu komponentu« vektora $\vec{D}$ (t. j. njegovu komponentu u smjeru normale n plošnog elementa $d\vec{S}$ površine dS), na pr. za polja proizvedena »diskretno« u prostoru porazmještenim nabojima Q_1, Q_2 itd. može postaviti specijalna relacija za spomenuti tok Ψ vektora $\vec{D}$ (zvan i »električki tok«):

$$\Psi = \oint D_n \cdot dS = Q_1 + Q_2 + \dots = \sum Q \quad (21')$$

s plošnom integracijom razumijevanom preko cijele zatvorene plohe S , te sa sumom desno ograničenom *samo* na naboje unutar S (naboji izvan S ne dolaze u račun, kao da ni ne postoje). Na pr. konkretno po sl. 17. naboji Q_1, Q_2 i Q_3 bili bi obuhvaćeni sa $\sum Q$, no naboji Q_4 i Q_5 bili bi isključeni iz $\sum Q$. A u općenitijim slučajevima, kad bi se naboji morali pretpostavljati u prostoru kontinuirano raspoređeni, tako da bi elementu volumena dv pripadao naboj dQ , koji bi se, uz uvođenje pojma ρ »prostorne gustoće naboja« ili »naboja preračunana na jedinicu obujma«, mogao izraziti sa $dQ = \rho \cdot dv$, trebalo bi pisati općenitu relaciju:



Sl. 17.

$$\Psi = \oint D_n \cdot dS = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int dQ = \int \rho \cdot dv \quad (21)$$

gdje bi i opet znakovi $\oint$ predstavljali integraciju preko cijele plohe S , a znakovi $\int$ prostorne integrale uzete *samo* po prostoru unutar S . Relacija (21') može se shvatiti kao specijalni slučaj relacije (21).

48. Za obrazloženje mi ćemo tvrdnju (21) dovesti u vezu sa zakonitostima kod pojava influencije, te pokazati njezinu najtjesniju vezu s općenitom osobitosti influencionih učinaka, koju je u jednostavnijim slučajevima lako pokusima verificirati. Ta je osobitost da recimo neka elektroda K, nabijena nabojem $+Q$ i okružena drugima prije influencije neelektričnim elektrodama A, B, C itd., influencira pri ma kojem dielektrikumu među elektrodama na dijelu elektrode A bližemu elektrodi K na pr. naboj $-Q_A$ i na daljem dijelu elektrode A naboj $+Q_A$, na elektrodi B naboje jednake iznosom i protivne predznakom $-Q_B$ i $+Q_B$, itd., no uvijek tako da apsolutni iznos sume $Q' = Q_A + Q_B + \dots$ ukupno na *svim* influencionim elektrodama influenciranih naboja jednoga odn. drugoga predznaka ispada baš jednak apsolutnom iznosu naboja Q koji je influenciju izveo. T. j. vrijedi relacija:

$$Q' = Q_A + Q_B + \dots = Q \quad (22)$$

a prema tomu i relacije $Q_A \leq Q$, $Q_B \leq Q$, itd., u kojima znakovi jednakosti dolaze u obzir samo onda kad su pripadne elektrode jedine na koje nabijena elektroda K influenciono djeluje (jer ostalih elektroda oko K ili nema ili su daleke i neznatne). Sličan rezultat $Q' = Q_A + Q_B + \dots = Q$ vrijedio bi i za vezane raznoimene influencirane naboje elektrodâ kojima bi se slobodni istoimeni influencirani naboji odveli u zemlju; prema tomu doista kod kombinacije pločastog kondenzatora, s influencionim odnosom ograničenim samo na dvije paralelne ploče površine S odijeljene slojem povoljnog dielektrikuma neznatne debljine d , treba očekivati na pločama naboje $+Q$ i $-Q$, i plošne gustoće $+D = Q/S$ i $-D = -Q/S$, suprotne predznakom i jednake apsolutnim iznosom, kako je već u A-33. bilo anticipirano napomenuto.

Eksperimentalno bi se zakon (22) tako pokazao da bi se usporedio na pr. balistički izmjereni naboj Q nabijene elektrode sa sumom balistički izmjerenih svih influenciranih naboja istoga predznaka. A da je na relaciju (22) potpuno bez utjecaja vrst dielektrikuma u prostoru među elektrodama, manifestiralo bi se time da bi balistički otkloni ispadali jednaki uz prostor među elektrodama vakuum ili koji drugi dielektrikum.

49. Zamislimo sada najprije kao nabijenu elektrodu kuglu K_0 polumjera R_0 i naboja Q , dakle plošne gustoće naboja $D = Q/4R_0^2\pi$. Kad bismo u daljini d od površine, i po tom daljini $R = R_0 + d$ od središta O promatrane kugle K_0 , postavljali dvoploče s normalama usmjerenima radijalno, gustoće naboja koje bi one pokazivale morale biti $D = Q/4R^2\pi$. Jer kad bismo takve pokuse zamislili istodobno izvedene s beskonačno mnogo dvoploča tijesno međusobno nadovezanih okolo naokolo oko kugle K_0 u jednu jedinu nada sve tanku influencionu kuglu K koncentričnu kugli K_0 , zbog $Q' = Q$ ukupni iznosi naboja suprotnog predznaka influenciranih s nutarnje i naboja istoga predznaka influenciranih s vanjske strane influencione kugle morali bi biti $-Q$ i $+Q$; a kraj površine influencione kugle jednake $4R^2\pi$ to bi doista značilo raznoimene i istoimene gustoće naboja apsolutnog iznosa $D = Q/4R^2\pi$, jednako na influencionoj kugli kao i na njoj pripadnim dvopločama.

No to se drugim riječima može i tako izraziti da se kaže da je vektor $\mathcal{D}$, u daljini $R > R_0$ od središta kugle, iznosa $D = Q/4R^2\pi$. A ta tvrdnja izlazi na osnovnu relaciju (21) za specijalni slučaj da se za zatvorenu integracionu plohu S odabere gore zamišljena influencionna kugla polumjera R . U tom slučaju očito bi naime bilo $D_n = D = Q/4R^2\pi$ jednako na svakom mjestu zatvorene integracione plohe S površine $4R^2\pi$, pa bi plošni integral $\oint D_n \cdot dS$ ovdje prešao u $D \cdot \oint dS = D \cdot 4R^2\pi$, a taj izraz, kraj $D = Q/4R^2\pi$, doista bi bio jednak ukupnomu plohom S obuhvaćenom naboju, naime naboju Q kugle K , po relaciji:

$$\frac{Q}{4R^2\pi} \cdot 4R^2\pi = Q$$

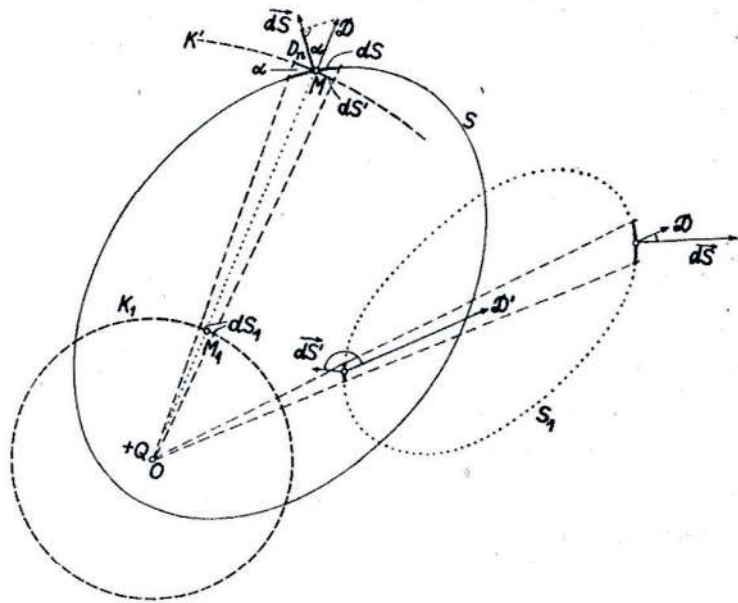
50. Lako je sada dalje proširivati relaciju (21). Prije svega prema toku netom izloženih razmatranja očito je za električke učinke u daljini $R > R_0$ od središta O kugle K_0 naboja Q sama veličina R_0 polumjera nabijene kugle beznačajna, pa nema zapreke da se prvobitna nabijena kugla zamišlja nadomještena kuglama oko O istog naboja Q no sve manjih i manjih polumjera, što bi konačno graničnim prelazom dovelo na »točkasti« naboj Q u O. Drugim riječima: za točke *izvan* neke kugle K_0 polumjera R_0 učinci naboja Q jednoliko porazdijeljena po površini kugle K_0 isti su kao da je cio naboj kugle koncentriran u njenom središtu O.

Prema tomu zakon (21) može se smatrati proširenim i na točkaste naboje uz supoziciju kuglastih integracionih ploha S oko mjesta O tih naboja kao središta.

51. No može se ići još dalje i zamišljati zatvorenu integracionu plohu S ma kakvom i ma kako položenom prema točkastom naboju Q . Ako bismo naime po sl. 18. za plošni element dS takve plohe, pri naboju Q smještenu u točki O *unutar*

S, načinili u smislu izvoda iz A-46. produkt $\vec{D} \cdot d\vec{S} = D_n \cdot dS = D \cdot dS'$, pripadna na smjer polja okomita projekcija dS' plošnoga elementa dS bila bi dio neke kugle K' polumjera $OM = R$ i

središta O. A ta projekcija dS' mogla bi se dalje projicirati iz O kao centra u plošni element dS_1 na nekoj zamišljenoj kugli K_1 polumjera R_1 , sa središtem i opet u O. Mjestima na površini kugle K_1 neka odgovara vektor pomaka $\vec{D}_1$ iznosa D_1 . A kako se sad, kraj istoga prostornog kuta pod kojim se iz O vide dS' i dS_1 , mogu ovi elementi smatrati istom frakcijom ukupnih površina svojih kugala, te se po tom zamišljeni kao dvoploče



Sl. 18.

mogu smatrati i sijelima jednakih iznosa influenciranih naboja, morat će vrijediti relacija: $D \cdot dS' = D_1 \cdot dS_1$, a po tom i relacija: $D_n \cdot dS = D_1 \cdot dS_1$. Ako bismo slično na kuglu K_1 sveli i produkte $D_n \cdot dS$ za sve ostale elemente integracione plohe S, očito bi time ukupni tok vektora $\vec{D}$ kroz S bio sveden na ukupni tok kroz K_1 , dakle na iznos: $D_1 \cdot 4R_1^2 \pi = Q$. Prema tomu može se za slučaj točkastog naboja Q obuhvaćena ma kakvom zatvorenom plohom S staviti:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint D_n \cdot dS = Q \quad (23)$$

Naprotiv za integraciju po povoljnoj zatvorenoj plohi kao S_1 na sl. 18. takvoj da naboj Q u točki O ostaje *izvan* S_1 trebalo bi staviti:

$$\oint \mathcal{D} \cdot d\vec{S} = \oint D_n \cdot dS = 0 \quad (23')$$

To je zato što bi na pr. tok vektora $\mathcal{D}$ izveden poljem pozitivnog naboja Q kroz $d\vec{S}$ na S_1 bio pozitivni »izlazni«, a iznosom jednaki tok kroz $d\vec{S}'$ na S_1 , viđen iz O pod istim prostornim kutom kao $d\vec{S}$, bio bi negativni »ulazni« (kut je vektorâ $\mathcal{D}$ i $d\vec{S}$ šiljast, a kut vektorâ $\mathcal{D}'$ i $d\vec{S}'$ tup). A slično bi se i ostali dijelovi plohe S_1 dali grupirati u parove plošnih elemenata s tokovima koji bi davali algebarsku sumu nula. Tako doista i ukupni tok kroz S_1 ispada korespondentno relaciji (23') jednak nuli.

52. Da bi se konačno postiglo puno posveopćenje na tvrdnju (21), treba samo uzeti u obzir da se ma kako u prostoru raspoređeni naboji mogu zamisliti sastavljeni iz točkastih naboja Q_1, Q_2 itd., odn. kod kontinuirano zamišljene raspodjele u beskonačni skup naboja $dQ = \rho \cdot dv$, koji se pojedince mogu smatrati točkastima. Kod integracije preko određene ma kakve zatvorene plohe S za vektore pomaka svakog od spomenutih točkastih naboja vrijedila bi relacija (23) ili (23'), već prema tomu da li bi pripadni naboj ležao unutar ili izvan S . A kako se polje svih naboja može zamisliti nastalo superpozicijom polja pojedinačnih naboja, može se pripadni rezultujući vektor pomaka smatrati geometrijskom sumom pojedinačnih vektora pomaka, i po tom komponenta D_n rezultujućeg vektora uzeta normalno na element dS plohe S algebarskom sumom na element dS normalnih komponenta pojedinačnih vektora (po poznatom stavku da je projekcija rezultante u povoljni smjer jednaka algebarskoj sumi projekcija komponenta u taj smjer). U konačnoj konsekvenciji to vodi na to da integral po (23) ili (23') toka rezultujućeg vektora pomaka $\mathcal{D}$ kroz zatvorenu plohu S izlazi jednak sumi tokova pojedinačnih vektora pomaka. A kako su ovi potonji jednaki pripadnim pojedinačnim nabojima ako su ti naboji unutar S , i jednaki nuli ako su ti naboji izvan S , slijedi neposredno relacija (21), koju je trebalo obrazložiti.

53. Obje tvrdnje, na koje su nas dosadnja razmatranja postepeno dovela, naime *zakon omjera* o stalnom no za svaki dielektrikum drugom odnosu vektora električkog pomaka prema vektoru jakosti polja, i *zakon toka*, o odnosu naboja i po njima proizvedenih tokova vektora pomaka neovisnomu o vrsti dielektrikuma, mogu se sada uzeti za polazne tvrdnje za sve dalje izvode, i primjenjivati na najrazličitije probleme elektrostatskih polja. Radikalnije postupajući mogli smo čak te tvrdnje staviti i bez naročite motivacije na čelo razmatranja, i smatrati ih indirektno dokazanima time da im se konsekvencije u najrazličitijim slučajevima podudaraju s iskustvom.

Tako Coulombov zakon u vakuumu i stavak da se sile Coulombova zakona kod zamjene vakuuma dielektrikumom relativne dielektričke konstante ϵ' smanjuju ϵ' -struko, dakle dvije tvrdnje koje se još i danas katkad stavljaju na čelo elektrostatskih razmatranja, neposredno slijede specijalizacijom zakona toka i naknadnom primjenom zakona omjera na točkasti naboj Q (u vakuumu i inače) komu je na daljinu R približen neki drugi naboj Q_1 . Po A-49. naboj Q u daljini R izvodio bi polje s vektorom pomaka iznosa $D = Q/4R^2\pi$ i po tom u vakuumu s vektorom jakosti polja $F = D/\epsilon_0 = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$. A u dielektrikum sa $\epsilon = \epsilon_0\epsilon'$ jakost polja bila bi iznosa $F' = Q/4\pi\epsilon_0\epsilon' R^2 = F/\epsilon'$. Po definiciji iznosâ F i F' kao silâ na jedinični naboj očito bi sile kojima bi naboj Q djelovao općenito na ma kakav naboj Q_1 u daljini R bile u vakuumu odn. u drugom dielektrikum:

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{QQ_1}{R^2} \quad (24) \quad P' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon'} \cdot \frac{QQ_1}{R^2} = \frac{P}{\epsilon'} \quad (24')$$

No dobivena relacija (24) ni nije drugo nego iz elemenata fizike poznati Coulombov zakon o privlačnim ili odbojnim silama između dvaju naboja, proporcionalnim iznosima Q i Q_1 tih naboja i obrnuto proporcionalnim kvadratu R^2 njihove udaljenosti, dok relacija (24') izražava mnogo kasnije Faradayevo otkriće o ϵ' -struko smanjenim tim silama pridolaskom utjecaja drugog dielektrikuma umjesto vakuuma.

U V-A-s-m-sustavu u relacije (24) i (24') stavljale bi se dakako sve veličine u jedinicama toga sustava, pa specijalno i influenciona konstanta s vrijednošću (17) iz A-44.

Upozorimo još na stavak, lako dobiven u A-50., po kome bi na naboj Q_1 u M iste sile (24) i (24') kao naboj Q u O pri $OM = R$ izvodili i naboji Q porazmješteni na povoljnim kuglama sa središtima u O i polumjerima $R_0 < R$ (dakako po A-23. uz Q_1 tako neznatno da se praktički ne bi poremetio jednoliki rasporedaj naboja Q na pripadnim kuglama). Neposredno iz Coulombova zakona taj bi se stavak dobio tek duljim računom.

54. Baš iz relacije (24) lijepo se vidi kako su u fizici samovoljnim narivavanjem influencionoju konstanti ϵ_0 iznosa $1/4\pi$ postigli da faktor $1:4\pi\epsilon_0$, dakle neka nova konstanta K , nazvana »konstanta Coulombova zakona«, poprими baš iznos $K = 1$. Time se uz CGS-jedinice 1 din za P i 1 cm za R automatski pojavila kao jedinica množine naboja ona množina elektriciteta koja bi na isto toliku množinu elektriciteta u daljini 1 cm djelovala silom 1 din, jer bi uz spomenute odnose sa $K = 1:4\pi\epsilon_0 = 1$ doista relacija (24) bila numerički zadovoljena:

$$1 = 1 \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2}$$

Lako je vidjeti usporedbom relacije (24) pisane jednom s V-A-s-cm-jedinicama, a drugiput sa P u dinima i R u cm (mehaničke CGS-jedinice!) te s Q i Q_1 u novoj jedinici naboja, kojoj je kao i jedinicama drugih električkih i magnetskih veličina izvedenih iz nje dan naziv »elektrostatskih jedinica« (ESJ), da postoji odnos

(uz brzinu svjetlosti u vakuumu zaokruženo uzimanu sa $3 \cdot 10^{10}$ cm/s i uz ESJ množine elektriciteta nazvanu: franklin, Fr):

$$1 \text{ As} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ ESJ (mn. el.)} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ Fr} \quad (25)$$

Kako se vidi, uvođenje ESJ nije postignuto samim pozivanjem na cm, g i s kao tri samovoljno uzete jedinice, nego tek uz dodatnu četvrtu samovoljnu supoziciju o iznosu $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$ influencione konstante, što je ekvivalentno izboru četvrte samovoljne jedinice, naime baš ESJ množine elektriciteta. A to je upućivalo na potpun sustav sa četiri osnovne jedinice, na pr.: cm-g-s-Fr-sustav! Nažalost nije se u prijašnjim decenijama ova činjenica dovoljno zapazila, nego se polazeći od *numeričke* vrijednosti $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$ influencione konstante, i po tom od *numeričke* vrijednosti konstante Coulombova zakona $K = 1$, ovu potonju konstantu, kao faktor iznosa 1, neopravdano uopće ispuštalo iz Coulombova zakona, odn. taj se zakon pisalo za vakuum u obliku: $P = QQ_1/R^2$. Ovo tobožnje »pojednostavnjenje« donijelo je samo konfuziju, jer veličina ϵ_0 , kao kvocijent dviju raznovrsnih veličina $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$, nije bezdimenzioni omjerni broj, pa tako ni faktor K nije veličina bez dimenzija, i ne smije se ignorirati ni onda kad slučajno ispada iznosom jednak jedinici, ako se ne želi naići na krive dimenzione relacije.

Za još veću konfuziju bio je u fiziku uveden i slični nesavršeni »sustav« t. zv. »elektromagnetskih jedinica« (EMJ). I tu se, polazeći od cm, g i s kao tri osnovne jedinice, jedna konstanta u vezi s pojavama magnetskog polja samovoljno determinirala na iznos 1, i zatim uopće (dakle i dimenziono) ignorirala, pa su i opet izlazile krive dimenzione veze.

Tako i jest dolazilo do toga da su iste električke i magnetske veličine ispadale različitih tobožnjih »dimenzija« u oba CGS-»sustava« ESJ i EMJ, odn. obrnuto istu tobožnju »dimenziju« imale su različite veličine u ESJ i u EMJ (na pr. »1 cm« je izlazio u ESJ kao jedinica električkog kapaciteta i u EMJ kao jedinica induktiviteta). A i umjesto tobožnjeg »sustava« EMJ se upravo nudio prikladan sustav sa 4 osnovne jedinice, na pr., uz EMJ jakosti struje (= 10 A) nazvanu (po Biotu) biō, Bi: cm-g-s-Bi-sustav!

55. Nedosljednosti kao gore dakako otpadaju kod upotrebe ispravno postavljenih sustava koherentnih jedinica, baziranih na kvadruplima (međusobno ekvivalentni kvadrupli m-kg-s-A i V-A-s-m, m-kg-s-Ω i još nekoliko daljih; zatim ima kvadrupl V-A-s-cm, onda kvadrupl cm-g-s-Fr, pa kvadrupl cm-g-s-Bi, itd.).

U pripadno pisanim formulama kao (24) i (24'), dakle s faktorom $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ bez obzira na njegov eventualni iznos 1, treba pak gledati »relacije među veličinama«, u kojima svaku veličinu treba zamišljati da je naznačena i numeričkim iznosom i dimenzijama te veličine, i da se s dimenzijama računski postupa kao i s numeričkim iznosima. Tako jednadžba jednolikog gibanja $s = c \cdot t$ shvaćena kao »relacija između veličina« ili »veličinska relacija« daje put s u m, ako se brzina c stavi u m/s i vrijeme t u s; ili također s u m, ako se c stavi u m/min i t u min; odn. s u km uz c u km/h i t u h; itd.

Naprotiv »numeričke relacije«, sadržeći tek numeričke iznose veličina i konstante ovisne o izboru jedinica tih veličina, nužno vrijede samo uz odabrane jedinice, i po tom su svakako manje prikladne, iako su se prije najviše upotrebljavale. Tako kod poznate jednadžbe za razvijenu snagu motora N u W, pri razvijenom momentu vrtnje M u kg*m i pri brzini vrtnje n u okr/min, vrijedi relacija $N =$

$= 1,028 \cdot M \cdot n$ samo uz navedene jedinice za veličine koje u njoj dolaze. I formule $P = QQ_1/R^2$ te $P' = QQ_1/\epsilon'R^2$ su samo numeričke relacije.

Sad u potpunim sustavima koherentnih jedinica i onako su danim sustavom sve jedinice određene, pa kod upotrebe relacija između veličina već samom supstitucijom numeričkih iznosa zadanih veličina u korespondentnim jedinicama same od sebe izlaze tražene veličine izražene njima pripadnim jedinicama sustava, tako da je dovoljno voditi računa samo o numeričkim odnosima i ne brinuti se o odnosima dimenzija u upotrebljavanim relacijama. Baš tim važnim stvarnim pojednostavljenjem pogotovo se opravdava upotreba, i sve veće prihvatanje u praksi, određenog potpunog sistema jedinica, na pr. na bazi kvadrupla m-kg-s-A (V-A-s-m).

56. Primijenimo dalje zakon toka i zakon omjera na proračunavanja jakosti polja ravnih elektriziranih ploha.

Zamislimo po sl. 19. okomito na ravninu crtanja beskonačnu ravninu jednoliko obloženu pozitivnim elektricitetom plošne gustoće D i okruženu ma kojim dielektrikumom dielektričke konstante $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon'$. Za integracionu plohu S kod proračunavanja toka vektora $\mathcal{D}$ uzmimo valjak s horizontalnom osi i s bazama površine S_0 u daljini x nadesno i nalijevo od elektrizirane ravnine. Tako će dio naboja elektrizirane ravnine obuhvaćen plohom S biti $D \cdot S_0$. Zbog simetrije će se polje F , i pripadna gustoća pomaka $\epsilon \cdot F$, moći pretpostavljati okomiti na baze valjka, i pri istoj daljini x od ravnine posvuda iznosom jednaki, no usmjereni na desnoj bazi nadesno i na lijevoj bazi nalijevo. Prema tomu bit će, za integraciju po obim bazama S_0 valjka S , ϵF ujedno i iznos normalnih komponenata vektora pomaka, obih usmjerenih u smjeru vanjskih normala valjka. Naprotiv za integraciju po plaštu valjka površine P polje će dati normalnu komponentu vektora pomaka jednaku nuli, jer je taj vektor tangencijalan na plašt. Tako se za tok vektora pomaka kroz S može staviti:

$$\epsilon F \cdot S_0 + \epsilon F \cdot S_0 + 0 \cdot P = D \cdot S_0.$$

To neposredno daje rezultat:

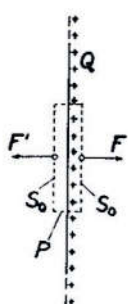
$$F = \frac{D}{2\epsilon} = \frac{D}{2\epsilon_0 \epsilon'} \quad (26)$$

u kome daljina x uopće ne dolazi. Drugim riječima: u ma kojoj daljini od jednoliko nabojem plošne gustoće D elektrizirane beskonačne ravnine polje ima jakost $F = D/2\epsilon$ (odn. specijalno u vakuumu, a praktički i u uzduhu, jakost $F = D/2\epsilon_0$).

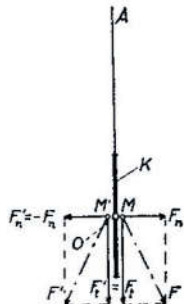
Isti izraz za jakost polja praktički bi vrijedio i u slučajevima kružnih ploha polumjera r_1 , obloženih gustoćom naboja D , za polja u točkama M zamišljenima na normalama kroz središta O takvih ploha u daljinama $x = OM$ neznatnima prema r_1 , t. j. uz uvjet $x \ll r_1$ (polje u M , koje će zbog simetrije biti normalno na kružnu plohu, bilo bi praktički isto kao i ono od cijele beskonačne elektrizirane ravnine, jer bi plošni elementi ravnine *izvan* kružne plohe djelovali praktički tangencijalno, i mogli bi se k tomu zamisliti kombinirani u diametralno suprotne parove, kojih bi se učinci poništavali).

Nasuprot tome u točkama M uzetima ekscentrično prema kružnoj plohi, a u njezinoj neposrednoj blizini, te uopće u točkama M neposredno blizima kakvim god ograničenim ravnim ploham A obloženima gustoćom naboja D , izraz $D/2\epsilon$ (odn. specijalno $D/2\epsilon_0$) predstavljao bi komponentu polja okomitu na elektriziranu plohu, dakle normalnu komponentu F_n .

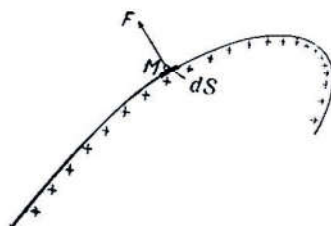
Ako je naime O probodište okomice spuštene iz M na plohu A , onda možemo uvijek oko O zamisliti opisanu kružnicu polumjera dovoljno velikoga prema daljini OM , koja bi isjekla jedan dio promatrane elektricitetom obložene plohe A . Ovaj u misli isječen krug K (sl. 20.) izvodi sam za sebe isto polje $D/2\epsilon_0\epsilon'$ kao i beskonačna ravnina, kako je gore pokazano, i prema tomu *sve* preostalo vanjsko pod-



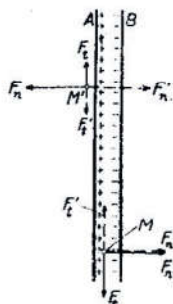
Sl. 19.



Sl. 20.



Sl. 21.



Sl. 22.

ručje cijele beskonačne ravnine, kojoj je A dio, kad bi upravo i bilo svagdje obloženo elektricitetom, ne bi imalo spomena vrijedna utjecaja na iznos »normalne komponente« polja; pogotovo se dakle može tvrditi da ne će biti prinosa normalnoj komponenti u promatranom slučaju, kad je samo jedan ograničeni dio toga vanjskog područja obložen elektricitetom.

Naprotiv će, općenito, naboji izvan K proizvesti neku »tangencijalnu« (s ravni- nom elektrizirane plohe paralelnu) komponentu polja F_t , jer ovdje ne će biti simetrije plošnih elemenata izvan kruga K kao prije. Ukupno polje F desno od pozitivno nabijene plohe A bilo bi onda po sl. 20. rezultanta normalne komponente $F_n = D/2\epsilon$ i tangencijalne F_t , a slično bi polje F' lijevo od A bilo rezultanta od $F'_n = -F_n$ i $F'_t = F_t$.

57. Usporedbom polja F' i F u beskonačno blizim točkama M' i M lijevo i desno od A vidi se da kod prelaza plohe A nastupa *skok* (diskontinuitet) normalne komponente polja u iznosu $F_n - (-F_n) = D/\epsilon = D/\epsilon_0\epsilon'$, dok naprotiv tangencijalna komponenta ne dobiva skoka: $F'_t = F_t$.

Takav se skok D/ϵ normalne komponente jakosti polja može i općenito očekivati pri prelazu povoljnih ploha s plošnom gustoćom naboja D na mjestu prelaza O . Naime normalnoj komponenti polja proizvedenog ma kakvima i ma kako raspoređenima nabojima svakako će plošni element dS u obliku kruga poput K na sl. 20., zamišljenog na prelaznoj plohi oko mjesta prelaza O kao središta, dopri-

nositi dio $D/2\epsilon$, usmjeren na pr. pri $D > 0$ s obje strane plošnog elementa *od* tog elementa, tako da bi kod prelaza od M' na M skok toga dijela bio D/ϵ . A kako pri prelazu od M' na M ne bi bilo povoda za ikakve druge diskontinuitete, to bi skok D/ϵ bio ujedno i skok normalne komponente cijelog polja, dok tangencijalna komponenta ne bi uopće imala diskontinuiteta.

Važna je konsekvencija ovoga stavka da tik uz površinu mjesta gustoće naboja D ma kakve elektrode vlada jakost polja $F_0 = D/\epsilon$ (a time i pomak $D_0 = D$). Ako naime polja unutar elektrode pri statičkim prilikama uopće nema, i ako polje s vanjske strane vodiča tik uz njegovu površinu mora biti okomito na površinu vodiča (kad ne bi bilo okomito, imalo bi tangencijalnu komponentu, koja bi pomicala naboje po vodiču, pa ne bi bilo ravnotežja), onda skok D/ϵ očito predstavlja i cijelo polje F_0 :

$$F_0 = \frac{D}{\epsilon} = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon'} \quad (27)$$

Polovicu $D/2\epsilon$ ukupnoga iznosa $F_0 = D/\epsilon$ sile na naboj $+1$ tik uz točku M na mjestu elektrode s plošnom gustoćom D proizveo bi po (26) već naboj na plošnom elementu površine dS oko M . Drugu polovicu iznosa F_0 treba prema tomu pripisivati kombiniranom djelovanju svih ostalih naboja na elektrodi. No onda i naboj $D \cdot dS$ na elementu dS treba smatrati podvrgnutim sili $D^2 \cdot dS/2\epsilon$ (koja ga nastoji izbaciti okomito iz elektrode). Drugim riječima: na različitim mjestima površine elektrode treba zamišljati da djeluje *elektrostatski površinski «tlak»* (sila na jedinicu površine) s iznosima $D^2/2\epsilon$ proporcionalnim kvadratima plošne gustoće D na pripadnim mjestima. Zbog toga tlaka mjehur od sapunice elektriziran postaje veći.

58. Dalje je sada lako zaključiti da između dvije blize paralelne ravne plohe, jednoliko obložene protivnim elektricitetima istoga apsolutnoga iznosa D plošne gustoće, ako su im dimenzije vrlo velike prema njihovom razmaku d , vlada *homogeno* ili *jednoliko* (smjerom svagdje na plohe normalno i jakošću svagdje u međuprostoru između ploha jednako) električko polje. Jakost toga polja jest:

$$F = \frac{D}{\epsilon} = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon'} \quad (28)$$

pri čemu se još, ako su ploče površine S i nose naboje $+Q$ i $-Q$, može pisati:

$$D = \frac{Q}{S} \quad (29)$$

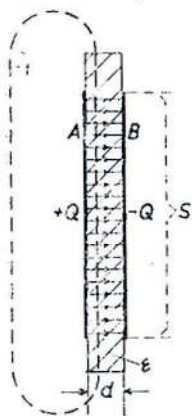
Po sl. 22. pozitivno nabijena lijeva ploha izvodila bi u M polje s komponentama F_n i F_t , a negativno nabijena desna ploha polje s komponentama F_n' i F_t' ; tangencijalne bi se komponente, kao suprotne, ukidale, a normalne bi se baš podupirale i dale ukupno $F_n + F_n' = D/2\epsilon + D/2\epsilon = D/\epsilon$.

Naprotiv van prostora među plohama polje bi praktički imalo jakost $F = 0$, jer bi se na pr. u M' u sl. 22. ukidale, kao međusobno suprotne, i tangencijalna komponenta s tangencijalnom i normalna s normalnom.

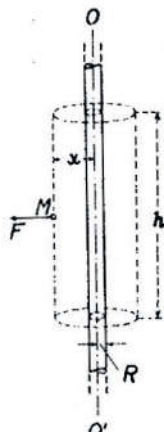
Električke silnice »pločastih kondenzatora« jesu prema tome u bitnosti paralelni ekvidistantni pravci, te su po tom već na sl. 12. i 13. crtane s počecima na

pozitivnoj plohi i svršecima na negativnoj (nehomogenosti polja opažaju se tek oko rubova, gdje polje naglo slabi prema nuli; one su to neznatnije, što je razmak ploča d bliži nuli).

59. Dodajmo još da smo izraz (28) za polje u dielektrikumu dielektričke konstante ϵ i debljine d među pločama A i B površine S pločastog kondenzatora mogli dobiti i neposrednom primjenom zakona toka (21) na zatvorenu integracionu plohu



Sl. 23.



Sl. 24.

S_1 po sl. 23., koja bi, tekući jednim svojim dijelom između elektroda A i B i paralelno s njima, obuhvatala elektrodu A, i po tom naboj $+Q = +D \cdot S$. Plošna integracija po plohi S_1 reducirala bi se ovdje samo na njezin dio površine S između elektroda, jer izvan toga prostora ni ne bi bilo polja (učinci beskonačno blizih naboja $+Q$ i $-Q$ na A i B bi se prema vani ukidali). Kako je polje među elektrodama homogeno i normalno na S , može se, stavljajući $\epsilon \cdot F$ mjesto D i $D \cdot S$ mjesto Q , pisati: $\epsilon F \cdot S = D \cdot S$. A iz toga i opet slijedi nadasve važna relacija (28).

60. Da bismo konačno proračunali polje u točki M izvan cilindričnog vodiča (na pr. nabijene žice), zamislimo beskonačno dugi cilindar K, po sl. 24. polumjera R i osi OO' , jednoliko obložen po jedinici duljine nabojem λ (taj se naboj na jedinicu duljine zove *linearna gustoća naboja* vodiča K). Dielektrikum oko K neka ima dielektričku konstantu ϵ . Neka je točka M, za koju se traži jakost polja F , daleko od osi OO' da daljinu $x > R$. Zamislimo položenu kroz M valjkastu integracionu plohu S visine h , koaksijalnu sa K. Baze B_1 i B_2 te plohe S bit će površine $x^2\pi$, a njezin plašt P će imati površinu $2x\pi \cdot h$. Zbog simetrije, polje u M će imati smjer normalan na plašt P i tangencijalan na baze B_1 i B_2 . Tako se kod integracije po P može staviti $D_n = D = \epsilon F$, a kod integracijâ po B_1 i B_2 naprotiv $D_n = 0$. Ukupni plošni integral po S vektora pomaka prelazi time u $\epsilon F \cdot 2x\pi h + 0 + 0$. A kako taj izraz mora biti jednak dijelu naboja cilindra K obuhvaćenom plohom S , dakle naboju iznosa $\lambda \cdot h$, može se pisati: $\epsilon F \cdot 2x\pi h = \lambda \cdot h$, što odmah daje za traženu jakost polja:

$$F = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon x} \quad (30)$$

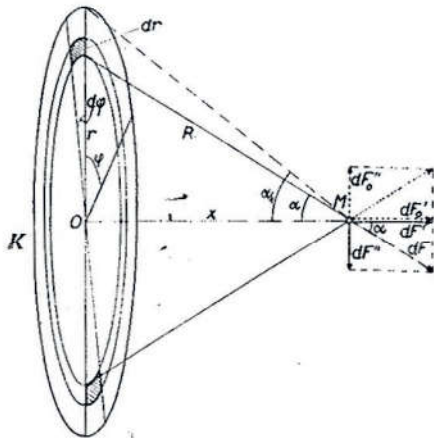
Kod vodiča naboja Q i određene duljine l , vrlo velike prema R i prema x , može se proširivanjem razlomka desno u (30) faktorom l , zbog $Q = \lambda \cdot l$, relacija (30) nadomjestiti i relacijom:

$$F = \frac{Q}{2\pi\epsilon x l} \quad (30')$$

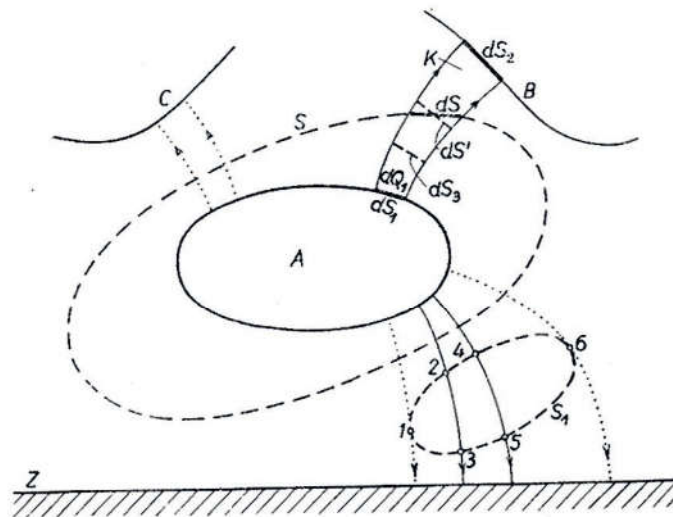
Postignute rezultate mnogo je teže izvesti prilazeći pripadnim problemima sa stajališta Coulombova zakona. Onda na pr. proračun polja beskonačne ravne plohe treba po sl. 25. zahvatiti tražeći polje u točki M na osi plošnom gustoćom naboja D elektrizirane kružne plohe K u daljini $OM = x$ od središta O plohe K, te zamišljajući u dobivenoj formuli polumjer r_1 kružne plohe K beskonačno povećan. A da bi se proračunalo polje plohe K, treba tu plohu zamisliti rastavljenu na elementarne sektore infinitezimalnog kružnog vijenca polumjera r , debljine dr , središnjeg kuta $d\varphi$ i daljine R od M (poput onoga šrafiranog u sl. 25. gore). Trebalo bi zatim proračunati tim sektorom u M proizvedeni diferencijal polja dF , zatim iz dF isključiti tangencijalnu komponentu dF'' kao onu koja bi se poništila s isto takovom komponentom dF_0'' diametralno suprotnog plošnog elementa (naznačena također šrafirano u sl. 25. dolje). Ostale bi tako samo normalne komponente dF' , koje bi se algebarski sumirale po relaciji: $F = \int dF'$, što bi zahtijevalo dvostruku integraciju: po φ u granicama od 0 do 2π , i po r u granicama od 0 do r_1 . Konačni rezultat, pisan sa $\cos \alpha_1 = x : \sqrt{x^2 + r_1^2}$, bio bi:

$$F = \frac{D}{2\epsilon} (1 - \cos \alpha_1) \quad (31)$$

te bi pri r_1 poraslom u beskonačnost, i po tomu α_1 jednakom pravom kutu i $\cos \alpha_1$ jednakom nuli, doista prešao u relaciju (26) iz A-56.



Sl. 25.



Sl. 26.

61. Zakon toka (21) dopušta vrlo zornu interpretaciju. Može se u njemu gledati točnije izraženo već tokom dosadanih razmatranja višeput natuknuto shvaćanje o pozitivnim nabojima kao »izvorima« i negativnim kao »ponorima« električkih silnica.

Pomislimo po sl. 26. nabijenu elektrodu A, i oko nje influencione elektrode B, C itd. sve do zemlje Z. Izvan A, tik uz element spomenute elektrode dS_1 s gustoćom naboja D_1 i ukupnim nabojem $D_1 \cdot dS_1$, iznos će vektora pomaka po A-57. biti D_1 . Da bismo sad zorno predložili vektor pomaka silnicama, možemo zamisliti povučen iz (pozitivnim suponiranog) naboja dQ_1 na dS_1 kao »izvora« roj silnica numerički baš jednak iznosu naboja dQ_1 , dakle roj takve »gustoće« G_1 (broja silnica preračunana na jedinicu površine elementa dS_1 , na koji su silnice normalne) da bude: $dQ_1 = G_1 \cdot dS_1$. A kako je s druge strane također: $dQ_1 =$

$= D_1 \cdot dS_1$, uz pretpostavljene bi odnose tik uz mjesto gdje počinju silnice vrijedila relacija: $G_1 = D_1$, odn. gustoća silnica bila bi *numerički jednaka* iznosu vektora pomaka. Tako bi se vektor pomaka u različitim točkama tik uz nabijenu elektrodu mogao smatrati upravo predloženom gustoćom silnica, što bi izlazile gušće ili rjeđe s pripadnih mjesta površine elektrode već prema plošnoj gustoći naboja tih mjesta.

No ne će, uz silnice zamišljene povučene iz naboja u broju numerički jednakom iznosu naboja, odnosi numeričke jednakosti gustoće silnica i iznosa vektora pomaka vladati samo tik uz nabijenu elektrodu, nego će, kako ćemo odmah pokazati, uopće za sve točke polja vrijediti numerička jednakost gustoće G silnica i iznosa D vektora pomaka.

S jedne strane zamišljeni roj silnica početnoga prereza dS_1 očito će se neprekidno nastavljati, zauzimajući po sl. 26. prostor neke cijevi K s promjenljivim od mjesta do mjesta okomitim prerezima kao $dS_3, dS', \dots dS_2$, pa ako su $G_3, G, \dots G_2$ gustoće silnica na spomenutim prerezima, izražavajući jednakost brojeva silnica svagdje u K s prvobitnim brojem silnica $G_1 \cdot dS_1$ zamišljenim iz dS_1 moći ćemo pisati:

$$G_1 \cdot dS_1 = G_3 \cdot dS_3 = G \cdot dS' = \dots = G_2 \cdot dS_2 \quad (\text{I})$$

S druge strane neka, pored već uvedenog iznosa D_1 vektora pomaka u području prereza dS_1 , budu $D_3, D, \dots D_2$ iznosi vektora pomaka na mjestima prereza $dS_3, dS', \dots dS_2$. Primijenimo zakon toka (21) na pr. na plohu S_0 danu dijelom cijevi K s bazama dS_1 (tik iznad površine elektrode A) i dS_3 . Unutar S_0 ne bi bilo naboja, pa bi zato iščezavao integral $\oint D_n \cdot dS$, koji bi se ovdje reducirao na samo dva člana, po A-51. na negativni »ulazni« $-D_1 \cdot dS_1$ i na pozitivni »izlazni« $D_3 \cdot dS_3$, jer bi treći član, onaj po plaštu plohe S_0 , ispadao jednak nuli, budući da uzduž toga plašta iščezava normalama komponenta vektora pomaka. Prema tomu bi vrijedila relacija: $-D_1 \cdot dS_1 + D_3 \cdot dS_3 = 0$ ili $D_1 \cdot dS_1 = D_3 \cdot dS_3$. A slične bi relacije slijedile analogno i između drugih parova presjeka cijevi K . Tako bi se konačno moglo pisati:

$$D_1 \cdot dS_1 = D_3 \cdot dS_3 = D \cdot dS' (= D \cdot \cos \alpha \cdot dS = D_n \cdot dS) = \dots = D_2 \cdot dS_2 \quad (\text{II})$$

pri čemu je odmah uveden i općeniti izraz za elementarni tok $D_n \cdot dS$ kroz kosi pre rez dS cijevi K , priklonjen pod kutom α prema pripadnom okomitom prerezu dS' .

Usporedimo sad obje relacije (I) i (II), koje u bitnosti izražavaju da je cijev K »cijev stalnog toka silnica« i istodobno »cijev stalnog toka vektora pomaka«, i dovedimo ih u vezu s polaznom relacijom $G_1 = D_1$. Slijedit će relacije: $G_3 = D_3$; $G = D$; $\dots$; $G_2 = D_2$, koje su baš matematski izraz gore postavljene tvrdnje o jednakosti, na *svakom* mjestu polja, gustoće silnica i iznosa vektora pomaka, uz jedini uvjet da se svaki naboj, već prema predznaku, smatra izvorom ili ponorom (negativnim izvorom) od baš onolikog broja silnica, upravo $\mathcal{D}$ -linija, koliko odgovara iznosu naboja, dakle naboj dQ_1 izvorom od dQ_1 $\mathcal{D}$ -linija, i općenito naboj Q izvorom od Q $\mathcal{D}$ -linija.

Tako se povlačeći u posvema određenomu »doziranju« silnice kao $\mathcal{D}$ -linije iz naboja kao izvora i ponora mogu zorno predočivati polja vektora $\mathcal{D}$, a posredno preko relacije $\mathcal{D}/\mathcal{F} = \epsilon$ pri danom dielektrikumu i polja vektora $\mathcal{F}$, i u tomu treba gledati slikovito izražen smisao zakona toka vektora $\mathcal{D}$. Baš zato, što naboji po svojoj veličini znače određene veće ili manje izvore i ponore tokova vektora $\mathcal{D}$, moraju nabojem Q nabijenih elektroda poput A na sl. 26. ukupno na susjednim elektrodama B, C, ... Z influencirani naboji obih predznaka biti apsolutnim iznosima jednaki naboju Q , jer određeni broj Q $\mathcal{D}$ -linija proizašlih iz A može završiti samo na ukupno jednakoj količini suprotnih naboja na B, C, ... Z. Specijalno onda i naboji »korespondentnih« elemenata kao dS_1 i dS_2 na sl. 26., pripadnih istoj »cijevi stalnog toka« K, moraju biti predznacima suprotni i iznosima jednaki, naime dQ_1 i $-dQ_1$.

Moglo bi se u prvi mah činiti neprilično da je broj $\mathcal{D}$ -linija, koje prema gornjem treba zamišljati povučene na pr. iz određenog naboja na određenoj elektrodi, posve određen s jednom silnicom po jedinici naboja, tako da bi iz dijelova jediničnog naboja trebalo zamišljati dijelove pojedinih $\mathcal{D}$ -linija. Osim toga, zbog predočivanja što finije strukture polja silnicama, poželjno je da ove budu što gušće povučene. Zbog jednoga i drugoga mogu se pojedine $\mathcal{D}$ -linije zamišljati povučene dovoljno »rašćlanjene«, pa se polja mogu predočivati milijuntinama $\mathcal{D}$ -linija (mikrolinijama), bilijuntinama $\mathcal{D}$ -linija (pikolinijama) ili još jače raščlanjenim $\mathcal{D}$ -linijama. Tako se na pr. iz neke kugle K_1 pozitivnog naboja 80 pAs (A-43.) može zamišljati povučeno 80 »pikolinija«, koje bi završavale na susjednoj kugli K_2 negativnog naboja od također 80 pAs (uspor. sl. 10.).

Dodajmo još u vezi sa sl. 26. da se zakon toka (21) može zamišljati dobiven integriranjem po cijeloj plohi S elementarnih relacija $D_n \cdot dS = D \cdot dS' = dQ_1$, te da se kod integracije po plohi S_1 koja ne obuhvata nikakvih naboja ukidaju kao suprotni predznakom i jednaki apsolutnim iznosom tokovi kroz elemente 2-4 i 3-5 pripadne toj cijevi stalnog toka, pa i ukupni tokovi kroz obje strane 1-2-4-6 i 1-3-5-6 plohe S_1 .

62. Polja vektora poput $\mathcal{D}$ s izvorima (»polja s izvorima«) karakterizirana su time da su im integrali preko zatvorenih ploha općenito različiti od nule. No osim »integralnim oblikom« po relaciji (21) iz A-47. daje se izdašnost takvih polja kao izvora na različitim mjestima prostora karakterizirati i *diferencijalnom* relacijom uz pomoć pojma vektorske operacije *divergencije* (kratica: div). Općenito se pod divergencijom nekog vektora $\mathcal{A}$ na nekom mjestu polja toga vektora razumijeva tok toga vektora kroz zatvorenu plohu, koja je međa elementu volumena dv zamišljenom na ispitivanom mjestu, podijeljen s volumenom dv , dakle ukratko »tok vektora preračunan na jedinicu volumena«:

$$\text{div } \mathcal{A} = \frac{1}{dv} \oint A_n \cdot dS = \frac{1}{dv} \oint \mathcal{A} \cdot \vec{dS} \quad (32)$$

63. Operacija *div* primjenjuje se na vektorske veličine i vodi na skalarne. Kod danoga sistema koordinata (prostorne pravokutne koordinate, cilindričke koordinate, kuglaste koordinate) daje se divergencija određenoga vektora $\mathcal{D}$ izraziti na određeni način parcijalnim prostornim derivacijama komponenata vektora $\mathcal{D}$ u tom

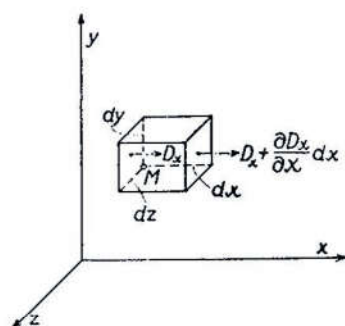
sistemu. Specijalno u pravokutnom prostornom koordinatnom sistemu vrijedi ova relacija:

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (33)$$

Za dokaz relacije (33) primijenimo operaciju naznačenu u (32) na elementarni pravokutni paralelepiped $dv = dx \cdot dy \cdot dz$ u sl. 27. Plošni integral vektora $\mathcal{D}$ prelazi u promatranom specijalnom slučaju u sumu od šest elementarnih tokova: kroz lijevi i desni plošni element $dy \cdot dz$, kroz donji i gornji element $dx \cdot dz$, te kroz stražnji i prednji $dx \cdot dy$. Kroz lijevi element $dy \cdot dz$ tok je, uz pozitivno D_x , negativan (ulazni): $-D_x \cdot dy \cdot dz$, a kroz desni element $dy \cdot dz$ on je pozitivan (izlazni): $(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} \cdot dx) \cdot dy \cdot dz$, tako da nastaje suvišak toka: $\frac{\partial D_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$.

Slično izlaze suvišci tokova kod ostala dva para plošnih elemenata. Tako konačno, nakon sumiranja svih suvišaka i dijeljenja sa $dv = dx \cdot dy \cdot dz$, izlazi relacija (33).

64. Ako se sad primijene operacije naznačene relacijom (21) na ma kakav volumni element dv na promatranom mjestu električkoga polja s prostornom gu-



Sl. 27.

stoćom naboja ρ , integral desno u (21) prijeći će na-prosto u $\rho \cdot dv$ (jer se integrira samo po volumnom elementu dv), a plošnu integraciju u (21) treba u ovom specijalnom slučaju zamisliti primijenjenu po plohi S koja dv omeđuje. Vrijedit će dakle tako specijalizirana relacija (21); no ona se, s obzirom na definiciju jednadžbu (32), daje za točke polja gdje vlada prostorna gustoća naboja $\rho \neq 0$ preudeliti u relaciju koja može (21) zamijeniti:

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \rho \quad (34)$$

Ova je relacija nazvana »diferencijalni oblik« zakona toka vektora pomaka $\mathcal{D}$. Specijalno za točke polja gdje nema naboja, t. j. uz $\rho = 0$, prelazi (34) u relaciju:

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = 0 \quad (34')$$

Posebno u pravokutnim prostornim koordinatama relacije (34) i (34') glasilе bi (alternativno za polja s nabojima i bez njih):

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (35)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (35')$$

IV) O SKALARU ELEKTRIČKOM POTENCIJALU V

Pojam električkoga potencijala V . Veza između skalara V i vektora $\mathcal{F}$. Primjeri proračunavanja potencijala. Niveau-plohe, i silnice kao ortogonalne trajektorije niveau-ploha. Elektrode kao niveau-plohe; raspodjela naboja na elektrodama. Mjerenja razlika potencijala ili naponâ. Konturni linijski integrali vektora $\mathcal{F}$. Polja bez vrtloga i s vrtlozima. Vektorska operacija *rot* ili *curl*. Laplaceova i Poissonova jednadžba potencijala. Radnja pri gibanju danog naboja između točaka danog napona; odnosi kod elementarnih čestica zbog ovisnosti mase o brzini; ekvivalencija mase i energije.

65. Prema dosadanjima razmatranjima moglo bi se električko polje u pogledu učinaka na naboje dovedene u to polje smatrati potpuno karakterizirano vektorom

jakosti polja $\mathcal{F}$. Ali veličina $\mathcal{F}$, baš kao i njoj po relaciji $\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{F}$ paralelna veličina $\mathcal{D}$, jest vektorska veličina. To znači da se rezultujuća jakost polja od više naboja može dobiti samo *geometrijskom* sumacijom pojedinačnih polja tih naboja, odn. kod naboja kontinuirano porazdijeljenih, na pr. onih na elektrodama, geometrijski kombinirajući u rezultantu $\mathcal{F}$ beskonačno mnogo elementarnih vektora jakosti polja $d\mathcal{F}$, koje bi proizveli u ispitivanoj točki polja elementarni djelići dQ ukupnog naboja. Ova *geometrijska* sumiranja, neizbježiva kod upotrebe vektora jakosti polja, nisu udobna, te se samo u specijalnim povoljnim slučajevima dadu svesti na *algebarske* sumacije, odn. integracije.

Zato je značila važan napredak spoznaja da se izvjesna vektorska polja, kao elektrostatska polja jakosti $\mathcal{F}$, pa magnetska polja jakosti $\mathcal{H}$ na mjestima gdje *nema* električkih struja, itd., dadu karakterizirati i *skalarnom veličinom* ili *skalarom*, dakle veličinom, kojoj u svakoj točki treba naznačiti samo iznos, a ne smjer i iznos kao kod vektora, te koje se iznosi u nekoj danoj točki kombiniraju jednostavnom *algebarskom* sumacijom. Taj skalar, zvan *potencijal*, predstavlja pomoćnu veličinu, kojoj je značenje u tom što se od njezinih iznosa, odnosno od diferencija njezinih iznosa zvanih *naponima* ili *napetostima*, lako prelazi na pripadni vektor jakosti polja, odnosno na njegove komponente u ma kojem smjeru. Već prema vrsti predloženoga polja govori se onda o električkim, magnetskim itd. potencijalima, odn. električkim, magnetskim itd. naponima ili diferencijama potencijala.

66. Da bismo došli do pojma *električkoga* potencijala, odnosno *električkoga* napona, zamislimo u točki M (sl. 28.) električki naboj $+Q$, koji se pod utjecajem vektora jakosti polja $\mathcal{F}$ (iznosa F) može slobodno gibati po nekoj stazi s . Na elementu puta MM_1 duljine ds , priklonjenom prema $\mathcal{F}$ pod kutom α , izvršena radnja dA električkoga polja će se dati izraziti trojako po shemi:

$$dA = Q \cdot F \cdot \cos \alpha \cdot ds = Q \cdot F_s \cdot ds = Q \cdot F \cdot dn \quad (36)$$

gdje $F_s = F \cdot \cos \alpha$ znači komponentu polja tangencijalnu na liniju s u točki M, a $dn = ds \cdot \cos \alpha$ projekciju MM_1 od ds u smjer vektora $\mathcal{F}$. Tolika bi se, obrnuto, radnja morala izvršiti protiv sila polja, odnosno tolika bi se energija morala utrošiti, kad bi se htjelo silama izvana naboj $+Q$ dovesti natrag iz M_1 u M.

Radnja dA je ista za pomak $MM_1 = dn$ u smjeru polja kao i za sve koso prema smjeru polja priklonjene elementarne pomake MM_1' , MM_1'' itd. koji imaju istu projekciju dn u smjer polja. Ona je specijalno jednaka nuli za elementarne pomake MM' , MM'' itd. pod pravim kutom prema smjeru polja.

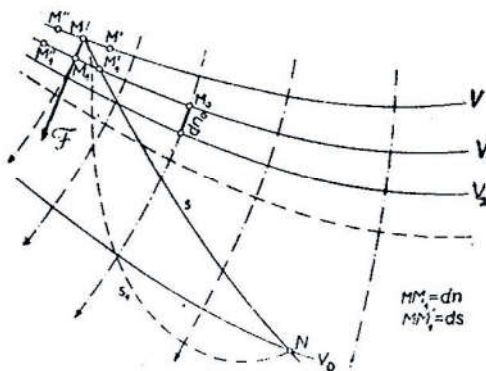
Slične prilike, kao ovdje kod dobivanja radnje pomicanjem električkih naboja utjecajem električkoga polja, susreću se i u mehanici kod promatranja radnje koja postaje raspoloživa ako se materijalna tjelesa zamisle gibana pod utjecajem sile teže za pomake $MM_1 = dn$ vertikalno dolje, odnosno za pomake na niži niveau MM_1' , MM_1'' itd. kojih su projekcije u vertikalnom smjeru jednake dn . A i ovdje u mehanici za pomake MM' , MM'' itd. okomite na smjer sile teže, dakle u ovom

slučaju za horizontalne pomake od točke M do točaka istoga niveau M' , M'' itd., vrijedi da je radnja jednaka nuli.

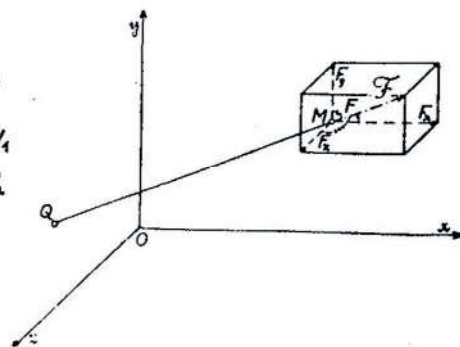
Međutim u mehanici se tjelesima na istom niveau-u pripisuje jednaka »potencijalna energija«. A ako se tijelo pod utjecajem sile teže spusti na niži niveau, tijelu se na novom niveau-u pripisuje energija niža za onoliko koliko se radnje dobije kod toga spuštanja.

Slično se, prema onomu što će biti pokazano u A-68., mogu pridijeliti nekom naboju Q gibljivom u električkom polju, a u daljoj konsekvenciji i samim točkama u kojima naboj zamišljamo, različite potencijalne energije, ili točnije *niveaui* energije, jer u bitnosti će se tu raditi o *razlikama* potencijalne energije između pojedinih točaka polja, gdje apsolutni iznosi nisu od interesa i početni niveau može principno biti po volji odabran (i u mehanici se potencijalna energija može mjeriti od po volji odabranoga početnoga niveaua).

Ako specijalno zamislimo naboj $+1$ kao gibani naboj Q , pripadni niveaui energije zovu se *električki potencijali*. Drugim riječima, ako se točkama M , M' , M'' , i ostalima između kojih se naboj $+1$ pomiče bez radnje, pridijeli po volji uzeti iznos V potencijala, točkama M , M' , M'' itd. u sl. 28. trebat će pridijeliti



Sl. 28.



Sl. 29.

drugi potencijal V_1 , niži od V za iznos dV koji predstavlja radnju električkoga polja kod pomaka naboja $+1$ na putu $MM_1 = dn$ (ili na putu $MM_1' = ds$, odn. kojegod drugom putu kojega se projekcija na smjer polja podudara sa dn).

67. Prema tomu, ako kod pomaka dn u smjeru djelovanja polja od točke M potencijala V do točke M_1 potencijala V_1 , te općenitije kod elementarnoga pomaka ds u povoljnom smjeru od ma koje točke potencijala V do ma koje točke potencijala V_1 , potencijal postigne pad $V - V_1 = dV$, i po tomu prirast $V_1 - V = -dV$, vrijedi relacija:

$$V_1 - V = -dV = F \cdot dn = F_s \cdot ds$$

iz koje odmah slijedi i osnovna formula kojom se pomoću potencijala izražava jakost polja:

$$F = -\frac{dV}{dn} \quad (37)$$

ili općenitije komponenta toga polja u ma kojem smjeru s :

$$F_s = -\frac{dV}{ds} \quad (38)$$

Specijalno će vektoru jakosti polja $\mathcal{F}$ zamišljenom u pravokutnom prostornom koordinatnom sistemu (sl. 29.) biti komponente F_x , F_y i F_z u smjerovima x -, y - i z -osi određene parcijalnim derivacijama:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Kad su pak određene komponente vektora $\mathcal{F}$ u smjeru triju osi, lako je naći iznos F toga vektora (na temelju relacije: $F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$) i smjer vektora (koji je određen kutovima α , β i γ vektora $\mathcal{F}$ prema x -, y - i z -osi, odnosno relacijama: $\cos \alpha = F_x/F$, $\cos \beta = F_y/F$ i $\cos \gamma = F_z/F$). Tako je kod poznate raspodjele potencijala u nekom prostoru određen vektor $\mathcal{F}$ jakosti polja u cijelom tom prostoru, po veličini i po smjeru.

68. Sve ove pažnje vrijedne relacije za proračunavanje vektora $\mathcal{F}$ u pojedinim točkama električkih polja proizvedenih nabojima dobivaju dakako istom onda realnu vrijednost, ako je funkciju sa svojstvima kakva smo pridijelili potencijalu V doista za ova polja moguće navesti, odnosno izraziti u ovisnosti od spomenutih naboja i njihova rasporedaja u prostoru.

Taj zadatak nije teško izvesti; treba se samo osloniti na osnovnu relaciju (38) između komponente F_s jakosti polja u kojegod smjeru s i potencijala V , odnosno na njezin obrat:

$$V = -\int F_s \cdot ds \quad (38')$$

Tako točkasti naboj Q_1 , za koji ćemo odmah posve općenito uzeti da je urođen u ma koji dielektrikum relativne dielektričke konstante ϵ' , i po tomu apsolutne $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon'$, u točki M u daljini r_1 od Q_1 (sl. 30.a) izvodi u smjeru r_1 polje jakosti $F_1 = Q_1/4\pi\epsilon r_1^2$. Ako se označi sa dr_1 projekcija na smjer r_1 puta $MM_s = ds$ (puta u nekom smjeru s pod kutom α prema r_1), i ako je F_{1s} projekcija polja F_1 u smjer s , izraz za potencijal V_1 u točki M , pretpostavljajući da se niveau 0 pripiše potencijalu u daljini $r_1 = \infty$, glasi:

$$V_1 = -\int F_{1s} \cdot ds = -\int F_1 \cdot \cos \alpha \cdot ds = -\int F_1 \cdot dr_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \int \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot dr_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_1}{r_1}$$

Slično bi neki drugi naboj Q_2 u daljini r_2 od M izvodio u toj točki sam za sebe potencijal:

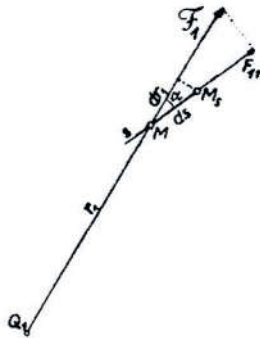
$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_2}{r_2}$$

Ako sad polje $\mathcal{F}$ u točki M izvode istodobno dva naboja Q_1 i Q_2 , udaljena od M za r_1 i r_2 , bit će $\mathcal{F}$ geometrijska suma pojedinačnih polja $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$, koja bi

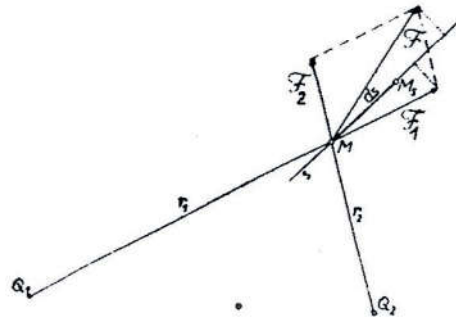
naboji Q_1 i Q_2 izvodili svaki sam za sebe. Ako je pomak ds priklonjen prema $\mathcal{F}$ pod kutom α , prema $\mathcal{F}_1$ pod kutom α_1 i prema $\mathcal{F}_2$ pod kutom α_2 (sl. 30.b), po poznatom stavku projekcija F_s ukupnoga polja (iznosa F) u smjer s toga pomaka mora biti jednaka sumi projekcija u isti smjer F_{1s} i F_{2s} pojedinačnih polja (iznosa F_1 i F_2), tako da vrijedi relacija: $F_s = F_{1s} + F_{2s}$. Prema tomu će potencijal V ukupnoga polja biti:

$$V = - \int F_s \cdot ds = - \int F_{1s} \cdot ds - \int F_{2s} \cdot ds = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_2}{r_2} = V_1 + V_2$$

Ovom je relacijom odmah karakterizirana skalarnost veličine V . Dok je naime vektore $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ polja pojedinih naboja Q_1 i Q_2 u M trebalo *geometrijski*



Sl. 30.a)



Sl. 30.b)

sumirati da bi se dobilo $\mathcal{F}$, pripadni potencijali V_1 i V_2 dali su ukupni potencijal V zbrojeni *algebarski*.

Prema gornjemu očito bi potencijal od ma koliko diskretno u prostoru porazdijeljenih naboja Q s pripadnim daljinama r od istraživane točke M bio izražen sa:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum \frac{Q}{r} \quad (39)$$

69. U slučaju kontinuirano porazdijeljenih naboja trebalo bi naboje zamisliti rastavljene u iznose dQ beskonačno malene rasprostranjenosti, pa ako bi r bile pripadne udaljenosti naboja dQ od M , potencijal u M bio bi izražen integralom:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dQ}{r} \quad (40)$$

Specijalne slučajeve kontinuirano porazdijeljenih naboja predstavljali bi: a) naboji porazdijeljeni po površinama (na pr. na elektrodama), i b) naboji s prostornom raspodjelom. U slučajevima a) moguće je raspodjelu naboja karakterizirati »plošnom gustoćom« D naboja, te bi za dQ u (40) trebalo staviti množinu naboja $D \cdot dS$ na elementu plohe dS , dok bi se u slučajevima b) mogla uvesti »prostorna gustoća« ρ naboja, razumijevajući po A-47. pod tim »naboj preračunan na jedinicu

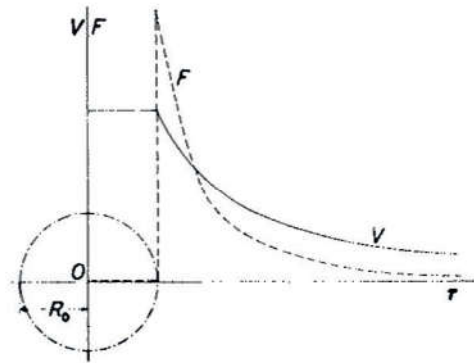
volumena», pa bi se za dQ u (40) mogla staviti množina naboja $\rho \cdot dv$ u elementu volumena dv . Tako iz (40) kao specijalni slučajevi slijede formule:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{D \cdot dS}{r} \quad (40') \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho \cdot dv}{r} \quad (40'')$$

od kojih je (40') predviđena za slučajeve a), a (40'') za slučajeve b).

70. Po formuli (40') mogao bi se računati na pr. potencijal naboja na kugli polumjera R_0 nabijenog nabojem Q (te zamišljenoj daleko od drugih vodiča, a prema tomu i zemlje, pa zato već zbog simetrije s nabojem jednoliko porazdi-jeljenim po površini).

Međutim u ovom specijalnom slučaju mnogo bi se brže izraz za potencijal dobio polazeći od stavka iz A-50., da naboj Q jednoliko porazmješten po površini kugle središta O i polumjera R_0 djeluje, u točkama M *izvan* kugle daljine $r > R_0$ od O , kao da je sav koncentriran u središtu O kugle. Prema tomu i za potencijal u tim točkama mora vrijediti isti izraz $V = Q/4\pi\epsilon r$ kao za točkasti naboj Q za-mišljen u O . Graničnim prelazom $r \rightarrow R_0$ dobio bi se za potencijal točaka *na* kugli izraz $V = Q/4\pi\epsilon R_0$; ovo bi ujedno bio i izraz za točke *unutar* kugle, jer u statičkim prilikama potencijal u cijeloj elektrodi mora ostati konstantan, budući da samo uz kon-stantno V može po relaciji $F_s = -dV/ds$ jakost polja unutar elektrode svagdje i u svakom smjeru iščezavati (v. A-25.). Prema tomu, bi po izvučenoj krivulji u sl. 31., po-tencijal V kugle u ovisnosti od $r = OM$ naj-prije od $r = 0$ do $r = R_0$ bio stalan, da zatim kod sve većih r postaje sve manji, va-riirajući obrnuto proporcionalno sa r ; na-protiv bi, po crtanoj krivulji u sl. 31., jakost polja F u intervalu $0 < r < R_0$ bila nula, a zatim bi, skočivši uz $r = R_0$ na iznos $Q/4\pi\epsilon R_0^2$, pri $r > R_0$ opadala varirajući indirektno proporcionalno s kvadratom od r .



Sl. 31.

Slično bi se lako određivali na bazi relacije (38) i potencijali u prostorima među obim elektrodama pločastih kondenzatora, kao i oni u prostorima oko bes-konačno dugih cilindričkih elektroda. U prvom slučaju trebalo bi u (38) uzimati ds u smislu razmaka elektroda i stavljati $F_s = F = D/\epsilon$, a u drugom slučaju uzelo bi se $ds = dx$ radijalno i stavilo bi se $F_s = F_x = F$ po (30) ili (30'). Izišli bi rezul-tati da V varira u prvom slučaju linearno među elektrodama pločastih kondenza-tora, a u drugom slučaju proporcionalno prirodnom logaritmu daljine x od osi cilindričkih elektroda.

71. Po definiciji se geometrijska mjesta točaka s istim potencijalom zovu *niveau-plohe* (nivô-plohe) ili *ekvipotencijalne plohe* (plohe jednakoga potencijala).

Kako gibanja električkih naboja po niveau-plohi moraju biti moguća bez radnje, niveau-plohe za različite iznose potencijala su karakterizirane i određene tim što vektor $\mathcal{F}$ stoji okomito na svaku niveau-plohu u svakoj njezinoj točki, odnosno što silnice okomito probadaju ove plohe. Stručno se to izriče tako da se kaže: »silnice su *ortogonalne trajektorije* niveau-ploha«.

Lako je dakle odrediti niveau-plohe, ako je poznato kako teku silnice; i obrnuto: lako je dobiti silnice, ako su poznate niveau-plohe nekoga polja; polje se daje jednako dobro karakterizirati silnicama (izvučeno naznačenima u sl. 10. i 11.) i niveau-plohama (kojih su tragovi crtkano naznačeni u sl. 10. i 11.).

No ne samo na smjer vektora $\mathcal{F}$ nego i na njegov iznos F daje se zaključiti iz rasporedaja niveau-ploha (kao uostalom, po A-61., i iz rasporedaja silnica). U tu svrhu treba niveau-plohe zamisliti povučene diskretno s uvijek istom, a inače što manjom razlikom potencijala između dvije susjedne niveau-plohe. Ako se za tu uvijek istu razliku odabere iznos dV , pa se po sl. 28. niveau-plohi kroz točku M dodijeli potencijal V , idućoj (onoj kroz M_1) potencijal $V_1 = V - dV$, trećoj potencijal $V_2 = V_1 - dV = V - 2 \cdot dV$, i tako dalje, onda se različite jakosti polja, kao na pr. F u M , F_0 u M_0 itd., mogu smatrati indirektno proporcionalnima razmacima dn , dn_0 itd. niveau-ploha na pripadnim mjestima. Radnja je naime kod prelaza ma kojega razmaka dviju niveau-ploha s razlikom potencijala dV jednaka produktu jakosti polja i pripadnoga razmaka, tako da vrijedi: $F \cdot dn = F_0 \cdot dn_0 = \dots$, ili također:

$$F : F_0 : \dots = \frac{1}{dn} : \frac{1}{dn_0} : \dots \quad (41)$$

pa se može reći: gdje su niveau-plohe bliže, tamo je polje jače, i obrnuto.

Niveau-plohe točkastoga naboja Q_1 s radijalnim silnicama bile bi koncentrične kugle sa središtem u Q_1 , i slijedile bi kod približavanja naboju Q_1 u sve manjim razmacima jedna za drugom (usporedno sa sve većim prirastom jakosti polja). I u sl. 10. i 11. niveau-plohe su bliže (a i silnice gušće) u područjima gdje je polje jače.

72. Ako je uz razmak dn poznata i diferencija potencijala dV dviju vanredno blizih niveau-ploha, jakost polja po apsolutnom iznosu jednaka je:

$$|F| = \left| \frac{dV}{dn} \right| \quad (42)$$

Ova relacija nije drugo nego specijalni slučaj jednadžbe (37), kod kojega su uzete u obzir samo apsolutne vrijednosti. Riječima izraženo ona veli da je jakost polja promjena potencijala dV uzeta po pomaku dn u smjeru polja, te preračunana na jedinicu pomaka. Predznak minus u (37) imao je da naznači, da polje ima smjer od mjesta višega potencijala prema onima nižega.

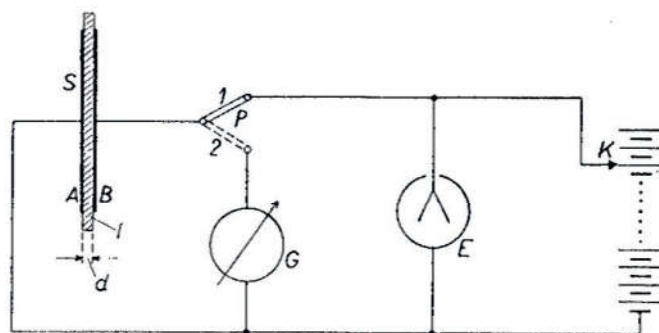
73. U *vektorskoj analizi* odnosi poput opisanih između *vektora* jakosti polja $\mathcal{F}$ i *skalara* potencijala V izriču se tako da se iskoristi pojam *gradijenta* nekog vektora, odn. zamisli primijenjena vektorska operacija »grad« na skalar V . Po definiciji se

pod »gradijentom« $\mathcal{A} = \text{grad } B$ nekog skalar B razumijeva vektor $\mathcal{A}$ takav da za komponentu A_s toga vektora u ma kome smjeru s vrijedi: $A_s = \frac{dB}{ds}$. Prema relaciji (38) može se onda reći: *vektor jakosti polja je negativni gradijent potencijala;*

$$\mathcal{F} = -\text{grad } V \quad (43)$$

74. Ako je polje homogeno, gradijent potencijala ne mora se računati kao diferencijalni kvocijent dV/dn , nego se može izraziti kvocijentom konačnog iznosa razlike potencijala ili napona $U = V_1 - V_2$ između krajnjih točaka M_1 i M_2 puta, uzetoga u smjeru najjačega variranja potencijala, i duljine d toga puta. Tako na pr. kod napona U između elektroda pločastog kondenzatora iz sl. 22. s razmakom ploča d polje ima jakost iznosa $F = U/d$.

Relacija $F = U/d$ primjenjuje se na pr. kod aparature po sl. 32., kojom se mogu određivati karakteristične veličine ϵ i ϵ' pojedinih izolacionih tvari (ako su ove dovoljno blizu »savršenim« izolatorima). Ne treba u tu svrhu drugo nego, po sl. 32., preklopom P okrenutom u položaj 1 nabiti na povoljni napon U pločasti kondenzator s elektrodama A



Sl. 32.

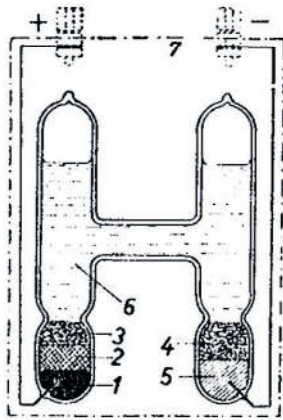
i B rastavljenima slojem debljine d ispitivanoga dielektrikuma. Napon U , udešen pomičnim kontaktom K s pomoću potrebnog broja elemenata baterije desno u sl. 32., mjeri se elektrometrom E . A zatim se, okretanjem preklopke P u položaj 2, izbije kondenzator kroz balistički galvanometar G . Kako se iz balističkog otklona α_1 može zaključiti na naboj Q , a po tomu i na gustoću naboja $D = Q/S$ na pločama A i B , dok iz napona U pokazanoga elektrometrom E izlazi $F = U/d$, postoji ne samo mogućnost da se i za neki dielektrikum različit od vakuuma odredi odnos $D/F = \epsilon$, nego i da se kod poznatoga ϵ_0 izračuna ϵ' toga dielektrikuma iz samih mjerenih ili poznatih veličina.

Kod »nesavršenih« izolatora (s već zamjetljivom električkom vodljivošću, s pojavima »zaostatka naboja« na izolatoru i sličnim) umjesto metode mjerenja po sl. 32. primjenjuju se nabijanja i izbijanja kondenzatora naizmjenice sad u jednom sad u drugom smislu (s pomoću prikladno proizvedenih »izmjeničnih« napona), te drukčiji spojevi (zvani »mostovi izmjenične struje«), o čemu će biti kasnije govora.

75. Jedinica za *električke potencijale* V i njihove diferencije *električke napone* U u »V-A-s-m-sustavu«, kao i u »V-A-s-cm-sustavu«, jest volt (V).

U oba ova sistema V je (uz A , m i s odn. A , cm i s) osnovna jedinica, i ona je po A-13. bila slobodno odabrana. Praktički mogli smo također, držeći se obzira koji su uzimani u račun u A-9. i A-42. kod uvođenja As , A i V , fiksirati napon

1 V kao onaj napon koji mora vladati između krajeva stupca žive dugoga 106,25 cm svagdje jednakoga prereza, težine 14,4453 grama i temperature 0°C (taj stupac predstavlja otpor koji ćemo kasnije upoznati kao otpor »1 om«), da bi struja kroz taj stupac bila već u A-9. naznačeni 1 A.



Sl. 33.

Kao standard za realizaciju napona 1,01865 V uzet je po A-13. *internacionalni normalni element* po Westonu. Napon 1,01865 V može se očekivati između stezaljki strujom neopterećena i na temperaturi 20°C držanoga takvoga elementa, građenoga po shemi u sl. 33., gdje se vide: »pozitivna« (višeg potencijala) elektroda 1 od žive Hg, prekrivena slojem 2 paste merkurosulfata Hg_2SO_4 i kadmijeva sulfata CdSO_4 , i iznad te paste slojem 3 kristalâ CdSO_4 , te »negativna« elektroda 5 kadmijeva amalgama $\text{Cd} + \text{Hg}$ sa 12,5% Cd, prekrivena slojem 4 kristalâ CdSO_4 ; obje elektrode spaja zasićena otopina 6 kadmijeva sulfata u destiliranoj vodi. Kod temperatura različitih od 20°C treba uzeti u obzir »temperaturnu korekciju«. Element je smješten u prikladnom kućištu 7.

Veći naponi mogli bi se realizirati serijskim spajanjem normalnih elemenata u baterije. Praktički će redovito biti dovoljno upotrebljavati druge običnije elemente, kojih je napon uspoređen sa onim normalnoga, na pr. olovne akumulatore (koji daju oko 2 V po elementu) ili suhe elemente Leclanchéova tipa (koji daju oko 1,5 V po elementu).

76. Kad je fiksirana jedinica potencijala i napona, fiksirana je ujedno i jedinica jakosti polja, jer je polje po (42) jednako kvocijentu napona i duljine. U sustavima V-A-s-m odn. V-A-s-cm jedinica jakosti polja je prema tomu V/m odn. V/cm (volt po metru odn. centimetru), kako je već u A-42. drugim načinom dobiveno.

Posebnoga imena ove jedinice nemaju, jer se u praksi jakosti polja redovito ni ne mjere neposredno, nego se na njih zaključuje preko napona. Na pr. polje u prostoru među elektrodama pločastoga kondenzatora s razmakom ploča $d = 0,2 \text{ mm} = 0,02 \text{ cm}$, priključenima na pozitivni, odn. negativni pol baterije akumulatora napona $U = 400 \text{ V}$, ima jakost $F = 400/0,02 \text{ V/cm} = 20000 \text{ V/cm} = 2 \cdot 10^4 \text{ V/m}$.

Prema ovdje za osnovnu jedinicu odabranom *voltu* bila bi ESJ (A-54.) potencijala i napona u odnosu:

$$1 \text{ V} = \frac{1}{299,79} \text{ ESJ} \approx \frac{1}{300} \text{ ESJ} \quad (44)$$

Slično između jedinica V/m odn. V/cm i ESJ jakosti polja vrijede relacije:

$$1 \text{ V/cm} = 100 \text{ V/m} \approx \frac{1}{300} \text{ ESJ} \quad (44')$$

U praksi se jedinice V i V/cm mnogo upotrebljavaju s već u A-43. navedenim prefiksima. Tako bi se na pr. napon pločastog kondenzatora mjesto sa 5000 V mogao navesti sa 5 kV. A njegovo polje pri razmaku kondenzatorskih ploča $d = 2 \text{ mm} = 0,2 \text{ cm}$ bilo bi jakosti $5000/0,2 \text{ V/cm} = 25000 \text{ V/cm} = 25 \text{ kV/cm}$. Dielektričke tvari u visokonaponskim kabelima moraju biti sposobne

da izdrže polja od mnogo kV/cm. Naprotiv za prijem signala u radiotehnici dostaju obilno već polja od malo mV/m (stoput manja jedinica od mV/cm!), a moguć je prijem i kod polja od samo nekoliko $\mu\text{V/m}$.

77. Prema relaciji $F_s = -dV/ds$ ne može biti komponente polja u smjeru u komu nema promjene potencijala. A u području u kojemu uopće nema polja potencijal mora biti prostorno konstantan. Prema tomu i potencijal u cijeloj unutarnjosti nabijene elektrode na kojoj je električnost u ravnotežju može biti samo konstantan, a i na površini mora biti svagdje isti. Za kuglu je to već u A-70. bilo iskorišćeno za izvođenje jednakosti izrazâ za potencijal u unutarnjosti i na njezinoj površini.

Površina je dakle svake elektrode u pretpostavljenim prilikama *niveau-ploha*; već zato silnice moraju na nju biti okomite.

Ako je potencijal na svakom mjestu neke elektrode konstantan, zapravo je suvišno govoriti o potencijalima pojedinih njezinih točaka, pa se može odmah govoriti o potencijalima cijelih elektroda, odnosno o razlikama potencijala ili naponima između pojedinih elektroda. U tom smislu već je govoreno o potencijalu kugle, o naponu između elektroda pločastoga kondenzatora, itd.

78. Kako po A-66. apsolutni iznos potencijala nije od važnosti, jer učinke izvode samo *razlike* potencijala, nema zapreke da se ma koji potencijal uzme kao početni, dakle kao potencijal 0. Tako je u A-68. niveau 0 potencijala pojedinačnih naboja bio pridijeljen točkama u beskonačnoj daljini od tih naboja.

U elektrotehnici je pak općenito uvedeno da se kao »potencijal nula« uzima potencijal zemlje. Prema tomu na pr. kod voda istosmjerne struje s naponom od 220 V, komu je P pozitivni vodič, a N negativni, treba uz uzemljeni vodič N smatrati da je vodič P na potencijalu +220 V, a vodič N na potencijalu 0, dok uz uzemljeni vodič P treba taj vodič uzimati na potencijalu 0, a vodič N na potencijalu -220 V.

Uopće se prema rečenomu elektrode mogu zvati pozitivno ili negativno električnima *prema zemlji*, već prema tomu da li su na višem ili nižem potencijalu nego zemlja; elektrode na istom potencijalu kao zemlja bile bi »neelektrične« prema zemlji. Slično vrijedi i inače za elektrode različitih potencijala: od dvije dane elektrode treba pozitivnom u odnosu prema onoj drugoj smatrati elektrodu višega potencijala. Tek ako se proizvede *razlika* potencijalâ između dvije elektrode, dakle električki *napon* između njih, stvorit će se u prostoru između tih elektroda električko polje (s električkim silnicama koje počinju na elektrodi višega potencijala i svršavaju na onoj nižega).

Ako se potencijal zemlje uzima kao početni, to još ne znači da je zemlja bez električkih naboja. Baš naprotiv, opažanja električkih polja u atmosferi, usmjerenih vertikalno dolje i kod normalnog stanja tik uz površinu zemlje jakih prosječno iznad 1 V/cm (100 V/m), upućuju na to da je površina zemaljske kugle obložena negativnim električnošću. Uz polje $F \approx 1,35 \text{ V/cm}$ formula $D = \epsilon_0 F$ (A-38.) dala bi za plošnu gustoću naboja na površini zemlje $D \approx 0,12 \cdot 10^{-12} \text{ As/cm}^2$. Kako zemaljska kugla ima površinu $S = 510 \cdot 10^{16} \text{ cm}^2$, njezin ukupni naboj iznosio bi $Q \approx -600000 \text{ As}$. No kugla u veličini zemaljske kugle, dakle s polumjerom $R = 6,37 \cdot 10^8 \text{ cm}$,

nabijena sa $Q \approx -600000$ As i zamišljena sama u prostoru, imala bi po formuli $V = Q/4\pi\epsilon_0 R$ prema točkama u beskonačnosti napon $V \approx -850$ milijuna volta! Međutim ta činjenica nema nikakve praktičke važnosti za predmete na zemlji, jer su oni nabijeni u bitnosti na isti potencijal.

U visokim slojevima atmosfere prevladavaju obrnuto pozitivni naboji (zbog čega električko polje zemlje već u visinama od nekoliko km nad zemaljskom površinom poprima iznose nekoliko puta manje nego tik uz površinu zemlje), tako da Zemlja kao cjelina prema vani uglavnom djeluje kao neelektrično tijelo.

Kod abnormalnih prilika, za vrijeme oluja i sl., javljaju se u atmosferi neisporedivo jača polja; tako na pr. prije pojava munja dolaze polja od mnogo kV/cm, i razlike potencijala koje broje na stotine milijuna V.

79. Stavak o konstantnosti potencijala u elektrodama bazirao se na činjenici da bi kod postojanja prostorno promjenljivoga potencijala u nekoj elektrodi moralo postojati električko polje, zbog kojega bi naboji u elektrodi strujali dok god se potencijali svagdje u elektrodi ne bi međusobno izjednačili.

Takvo izjednačenje potencijala treba očekivati i ako se dvije elektrode različitih potencijala, na pr. dvije metalne kugle K_1 i K_2 iz sl. 34., spoje nekim metalnim vodičem z. Zbog različitosti potencijala obih elektroda zastrujao bi odmah nakon izvedenoga spoja elektricitet s jedne elektrode na drugu. Pozitivni bi morao strujati s elektrode višega potencijala na onu nižega, a kod negativnoga bi bilo obrnuto; ali kako su u metalnim elektrodama gibljivi samo elektroni, strujali bi zapravo tek elektroni kao negativne čestice s elektrode na nižem potencijalu prema elektrodi na višem potencijalu, i tim bi se potencijal one prve povisivao, a one druge snizivao, dok oba potencijala ne bi postala jednaka: $V_1 = V_2$.

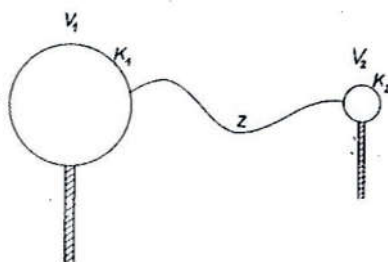
80. Ova jednostavna činjenica, koju je lako demonstrirati elementarnim pokusima, ima važnih primjena. Tako se na bazi sl. 34. dadu izvesti razmatranja o podjeli elektriciteta po površini elektroda. Ako je naime već pokazano da elektricitet kod statičkih prilika mora biti smješten na vanjskoj površini elektroda, nije još rečeno kako se on na njima porazdijeli; samo kod elektroda zamišljenih daleko od drugih vodiča i oblikom takvih da se mogu uzeti u pomoć razlozi simetrije, dakle kod kugala, beskonačno dugih cilindara itd., moglo se očekivati da će plošna gustoća elektriciteta D biti svagdje na elektrodi ista. Inače postoji ovisnost plošne gustoće D o zakrivljenosti površine na pripadnim mjestima elektrode. Pokus po sl. 34. s kuglama K_1 i K_2 polumjera R_1 i R_2 , nabijenim nabojima Q_1 i Q_2 može nam u tom pogledu poslužiti kao polazna točka. Po formuli $V = Q/4\pi\epsilon_0\epsilon'R$ mogu naime potencijali V_1 i V_2 obih kugala postati jednaki samo uz ispunjen uvjet $Q_1/R_1 = Q_2/R_2$ (pretpostavlja se da su kugle K_1 i K_2 daleko jedna od druge i da je poremećenje izazvano tankom spojnom žicom z zanemarivo). Uz pomoć plošnih gustoća naboja $D_1 = Q_1/4R_1^2\pi$ i $D_2 = Q_2/4R_2^2\pi$ ovaj se uvjet može transformirati da glasi:

$$D_1 : D_2 = R_2 : R_1$$

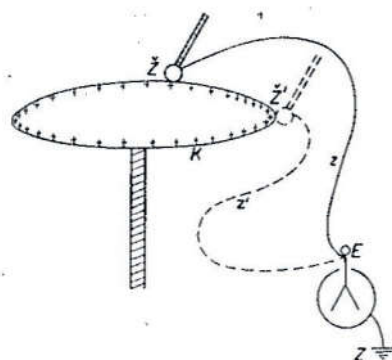
Prema tomu kugla s n puta manjim polumjerom (dakle s n puta većom zakrivljenošću) ima doduše ukupno n puta manje naboja, ali joj je kod njezine n^2 puta manje površine *gustoća naboja* povećana n puta.

Posveopćujući mogu se u gruboj aproksimaciji slični odnosi pretpostaviti i za raznoliko zakrivljena mjesta ma kakvih elektroda, t. j. mogu se očekivati kod ma kakvih elektroda veće plošne gustoće elektriciteta na mjestima gdje je zakrivljenost površine veća. Zbog toga i jesu na pr. pozitivni naboji na dugoljastoj elektrodi u sl. 35. gušće naznačeni na jače zakrivljenim mjestima.

Osobito velike plošne gustoće treba očekivati na oštrim rubovima elektroda, a pogotovo na šiljcima. A kako su zbog $F = D/\varepsilon$ polja F tik uz površinu vodiča



Sl. 34.



Sl. 35.

proporcionalna gustoćama D naboja na pripadnim mjestima elektrode, to se kod vrlo jako nabijenih tjelesa u blizini oštih rubova i šiljaka mogu očekivati vanredno jaka polja, pa i takva kod kojih prestaje na pr. izolaciona sposobnost uzduha (jer se ovaj ionizira).

Zato se u visokonaponskoj tehnici u pravilu izbjegavaju prejake zakrivljenosti elektroda, oštri rubovi, šiljci itd. A gdje ima prejakih zakrivljenosti, tamo se, kod vrlo visokih napona, u koliko ne dode do »proboja« cijeloga sloja uzduha između protivno nabijenih elektroda, javljaju (već prema predznaku naboja različita) *tinjava ispražnjivanja* elektriciteta, praćena često slabim svjetlucanjima, stvaranjem ozona itd., na pr. oko šiljaka, oko tankih žica pod naponima od mnogo kV (»korona«) i sl.

Redovito će se tinjava izbijanja dakako izbjegavati. No katkad se namjerno izazivaju i iskorisćuju. Na pr. kod naprava za proizvodnju ozona, te kod elektrofiltera (za čišćenje plinova od čestica prašine, dima itd.). Kod ovih posljednjih napon od dovoljno mnogo kV primijeni se između negativne elektrode (katode) u obliku tanke žice i pločaste ili cilindrične pozitivne elektrode (anode). Oko katode stvore se ioni. Od ovih pozitivni dosegnu brzo katodu, a negativni se na svome putu prema anodi sjedinjuju s česticama prašine, dima itd., koje se tim elektriziraju, pa i same pojure na anodu.

81. Važnu primjenu izjednačenja potencijala međusobno spojenih elektroda predstavljaju *mjerjenja napona* elektrometrima (i uopće elektrostatskim instrumentima). Ove sprave moraju za tu svrhu biti baždarene na pr. u voltima (recimo uz pomoć baterija elemenata poznatoga napona, priključenih jednim polom na sistem i drugim na kućište), pa se onda zovu »elektrostatski voltmetri«.

Neka na pr. treba odrediti napon neke povoljne elektrode K prema zemlji. Onda je dovoljno elektrostatski voltmetar E spojiti s kojimgod mjestom te elek-

trode i očitati na skali od E volte; kućište od E treba da je u ovom slučaju spojeno sa zemljom. Elektricitet će naime preko spojne žice dotle strujati između K i E dok E ne dobije isti napon prema zemlji kao i ispitivana elektroda. Treba dakako nastojati da elektrometar E bude takav u odnosu prema kudikamo većoj elektrodi K da se nabije tek zanemarivim dijelom naboja sa K.

Slično bi se mjerio na pr. napon između obih elektroda pločastoga kondenzatora; bilo bi dovoljno spojiti sistem elektrometra s jednom elektrodom, a kućište s drugom elektrodom, tako da bi sistem poprimio potencijal prve elektrode, a kućište potencijal druge, i napon pokazan od E bio bi ujedno napon između pločastih elektroda.

Vrlo je instruktivno načiniti pokus po shemi u sl. 35. Tu elektrometar E ostaje na elektrodi K stalno priključen preko spojne žice i električke žličice, ali se ova pomiče, tako da dotiče mjesta različite plošne gustoće naboja na elektrodi. Ipak E pokazuje uvijek isti otklon (koji se može odmah očitati u voltima, ako E ima skalu u voltima), jer u spoju elektrometra kao u sl. 35. mjeri se *napon* (elektrode K prema zemlji Z), te elektricitet uvijek struji između K i E dok se E ne nabije na isti potencijal kao i K, ma gdje bio kontakt sa K realiziran.

Obično se elektrometri upotrebljavaju na gornji način za mjerenja napona. Međutim mogu se upotrebljavati i na način kao u sl. 3. (A-26.); samo se u tom slučaju ispituju naboji preneseni na E žličicom Ž, a time posredno i gustoće naboja na pripadnim mjestima ispitivane elektrode, koja su žličicom prije toga ticana. Kad bi se na ovaj način prenosili na E redom naboji sa različitim mjestima elektrode K u sl. 35., E bi pokazivao različite otklone već prema gustoći naboja na ispitivanim mjestima (i skala od E bi trebala biti na pr. u nanoampersekundama), a dobiveni rezultati mogli bi služiti kao potvrda stavka iz A-80. da je plošna gustoća naboja na nekoj elektrodi tamo veća gdje je zakrivljenost elektrode jača.

82. Povratimo se sad na sl. 28., i zamislimo da električko polje giba naboj $+1$ uzduž neke zakrivljene staze s , kojoj su M i N početna i konačna točka. Radnja na elementu staze $MM_1 = ds$ bila bi jednaka $V - V_1$, radnja na idućem elementu staze, onom od sjecišta staze s i niveau-plohe V_1 do sjecišta staze s i niveau-plohe V_2 , bila bi $V_1 - V_2$, i slično dalje, tako da bi ukupna radnja po cijeloj stazi s , dakle vrijednost *linijskoga integrala* $\int_{(s)} F_s \cdot ds$ uzetoga uzduž linije $s = MM_1' \dots N$

bila:

$$(V - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{n-1} - V_n) = V - V_n$$

To znači da bi ona naprosto bila jednaka *diferenciji potencijala* ili *naponu* U između početne i krajnje točke puta, i prema tomu određena samo vrijednostima potencijala u tim dvjema točkama, a *neovisna* o tom da li se iz početne u konačnu točku išlo promatranom stazom s ili kojomgod drugom, na pr. stazom s_1 , također naznačenom u sl. 28., s početkom u M i svršetkom u N kao i kod s :

$$\int_{(s)} F_s \cdot ds = \int_{(s_1)} F_s \cdot ds = \dots = V - V_0 = U \quad (45)$$

Ako se specijalno zamisli da M ostaje na niveau-plohi V , a N da se pomiče dok ne dode na niveau-plohu $V_0 = 0$, pripadni linijski integrali za različite staze iz M u N imat će neovisno o odabranoj stazi vrijednost V . Potencijal V neke točke

M jednak je dakle radnji, koju bi električke sile izvršile gibajući naboj $+1$ iz M do kojegod točke potencijala 0, odnosno i obrnuto radnji koju bi trebalo izvršiti protiv sila polja gibajući naboj $+1$ iz neke točke potencijala 0 do istraživane točke M. Ovo se katkad uzima kao polazna definicija kod uvođenja potencijala; ostala već spomenuta svojstva potencijala moraju se dakako onda istom izvesti.

83. Zanimljiv specijalan slučaj formule (45) dobiva se ako se zamisli da konačna točka N staze s padne u početnu točku M, dakle da se radi o putu po *zatvorenoj* liniji s kao u sl. 36. Poradi $M = N$ mora biti i $V = V_0$, pa u relaciji (45) za ovaj slučaj desna strana postaje jednaka nuli; riječima: linijski integral vektora $\mathcal{F}$ po ma kakvoj *zatvorenoj* liniji, dakle ne samo liniji s nego i liniji s_1 u sl. 36., ima vrijednost nulu.

Označujući simbolički linijske integrale po zatvorenim konturama s kružnicom preko znaka integrala (isti smo simbol upotrebljavali već prije i za plošne integrale preko zatvorenih ploha S , dakle ploha koje obavijaju određene dijelove prostora), možemo prema tome pisati:

$$\oint F_s \cdot ds = 0 \quad (46)$$

Linijski integral vektora jakosti polja mirnih električkih naboja uzduž ma kakve *zatvorene* linije jednak je dakle uvijek nuli. Za polja, odnosno pripadne vektore, koji udovoljavaju uvjetu (46) kaže se da *nemaju vrtloga* ili da su *slobodni od vrtloga*.

84. I na izraze u (45) i (46) pod znakom integrala može se primijeniti već u A-46. uvedeni pojam *unutarnjega* ili *skalarnoga* »produkta« dvaju vektora: $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = A \cdot B \cdot \cos \varphi$. I izraz $F_s \cdot ds$ po elementu puta $ds = MM_1'$ u sl. 28. zapravo zamjenjuje izraz $F \cdot ds \cdot \cos \alpha$, pa se može shvatiti kao unutarnji produkt vektora $\mathcal{F}$ i nekoga vektora $\vec{ds}$, koji treba zamišljati s *iznosom* jednakim ds i *smjerom* određenim smjerom elementa MM_1' , odnosno smjerom tangente na krivulju s u točki M. Prema tomu se može mjesto $F_s \cdot ds$ pisati $\mathcal{F} \cdot \vec{ds}$, odnosno mjesto (46) formula oblika:

$$\oint \mathcal{F} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (46')$$

85. U kasnijim razmatranjima susretat ćemo i polja s vrtlozima, t. j. onakva kod kojih konturni linijski integral (46) odn. (46') *nije* jednak nuli. Tako za magnetska polja konturni linijski integrali gore opisanoga tipa, uzeti preko kontura koje obuhvaćaju električke struje, vode na iznose različite od 0, a pod izvjesnim prilikama stvaraju se i električka polja koja nisu bez vrtloga.

Kvantitativno se po postupcima vektorske analize mogu u pogledu vrtlogâ karakterizirati vektorska polja upotrebom vektorske operacije *rot* ili *curl*. Zamišlimo skup na sve moguće načine orijentiranih plošnih elemenata iste (beskonačno

malene) površine dS , položenih točkom M , pa uzmimo da odredimo za svaki takav element kvocijent konturnoga linijskog *integrala* vektora $\mathcal{F}$, uzetoga po konturi s promatranoga plošnog elementa, i *površine* toga elementa. Da bi došli do pojma *rot*, skrenimo pozornost onomu od dobivenih kvocijenata koji iziđe najveći, pa kao $\text{rot } \mathcal{F}$ ($\text{curl } \mathcal{F}$) vektora $\mathcal{F}$ u točki M definirajmo *vektor* po iznosu jednak spomenutom najvećem kvocijentu:

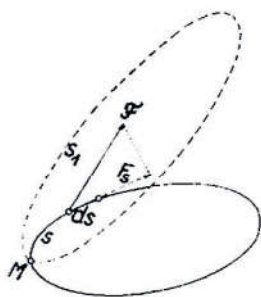
$$|\text{rot } \mathcal{F}| = \frac{1}{dS} \oint \mathcal{F} \cdot d\vec{s} \quad (47)$$

a po smjeru normalan na pripadni plošni element, pri čemu smjer obilaženja konture i smjer vektora rotacije treba zamisliti povezane kao smjer vrtnje i progresivnoga gibanja »desnoga« vijka.

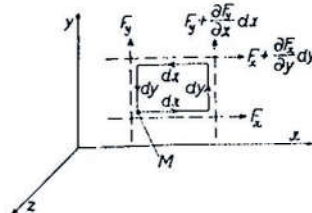
Prema tomu se, osim *integralnom* relacijom (46) odn. (46'), svojstvo »beztložnosti« elektrostatskih polja može izraziti i *diferencijalnom* relacijom:

$$\text{rot } \mathcal{F} = 0 \quad (48)$$

dok naprotiv kod nekoga vektora $\mathcal{A}$ s vrtlozima ne bi $\text{rot } \mathcal{A}$ bilo jednako nuli.



Sl. 36.



Sl. 37.

86. Specijalno u prostornom pravokutnom koordinatnom sistemu komponente W_x , W_y , W_z vektora $\mathcal{W} = \text{rot } \mathcal{F}$ dadu se ovako izraziti parcijalnim derivacijama zadanoga vektora:

$$W_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad W_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad W_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (49)$$

Da se razabere kako se dolazi do ovih izraza, može se zamisliti da se za plohu dS (uz istraživanu točku M) odabere elementarni pravokutnik sa stranicama dx i dy u ravnini $x-y$. Obilazeći konturu toga pravokutnika od M kao polazne točke pa dalje u smislu obrnutom nego kod gibanja kazala na uri, dakle onako kako je u sl. 37. strjelicama naznačeno, trebalo bi očito na prvomu dijelu puta dx uzeti u obzir kao tangencijalnu komponentu polja iznos F_x , na idućem dijelu dy iznos $F_y + \frac{\partial F_y}{\partial x} \cdot dx$, i slično na trećem i četvrtom dijelu staze, onako kako je naznačeno u sl. 37. Pri tom bi još trebalo uzeti u obzir da se smjer obilaženja i smjer u kojem

se računaju komponente polja podudaraju za prva dva dijela staze, ali da su oni suprotni na trećem i četvrtom dijelu. Tako se računani konturni integral u ovom slučaju svodi na algebarsku sumu od dva pozitivna i dva negativna posve određena člana, koja sređena (nakon poništavanja nekih suprotno jednakih članova) poprima jednostavni oblik:

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy$$

Dijeljenjem sa $dS = dx \cdot dy$ dolazi se na izraz za komponentu W_z onakav kakav je naveden u (49.). Slično bi se dobili i izrazi W_x i W_y uzimajući pripadni $dS = dy \cdot dz$, odn. pripadni $dS = dz \cdot dx$.

87. Moguće je i u osnovne relacije iz A-64. o toku vektora pomaka $\mathcal{D}$ uvesti skalar potencijal V . Tako se mjesto relacije $\text{div } \mathcal{D} = 0$, valjane za točke polja slobodne od naboja, može, zbog $\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{F}$ i konstantnosti veličine ϵ , pisati i $\text{div } \mathcal{F} = 0$. A kako je $\mathcal{F} = -\text{grad } V$, to dalje slijedi (nakon množenja sa -1):

$$\Delta V = \text{div grad } V = 0 \quad (50)$$

Tu je odmah upotrebljen simbol Δ (čitaj: delta) za konsekutivnu primjenu operacija grad i div. Primijenjena na neki skalar operacija *grad* daje neki vektor a na taj vektor primijenjena operacija *div* daje kao rezultat ponovno skalarnu veličinu.

U pravokutnim prostornim koordinatama moguće je $\text{div } \mathcal{F}$ po (33) izraziti prvim parcijalnim prostornim derivacijama komponenta vektora polja, i prema tomu, obzirom na relacije iz A-67. između komponenta vektora polja i potencijala, drugim parcijalnim prostornim derivacijama potencijala. Tako konačno izlazi klasična i kod rješavanja mnogih problema o potencijalu vrlo dobro upotrebljiva *Laplaceova jednadžba potencijala* za polja slobodna od električkih naboja:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (51)$$

Ako naprotiv na istraživanom mjestu ima naboja ($\rho \neq 0$), mjesto Laplaceove vrijedi *Poissonova jednadžba za polja s prostornim nabojima*:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (52)$$

Ova formula nije uostalom drugo nego transkribirana jednadžba $\text{div } \mathcal{D} = \rho$, koja se može pisati i u obliku $\text{div } \mathcal{F} = \rho/\epsilon$. I Poissonova jednadžba ima važnih primjena [v. na pr. kasnije u vj. 32. Langmuirove formule za anodnu struju visokovakuumskih (elektronskih) cijevi].

88. Pored gore uvedene Δ -operacije dolaze u vektorskoj analizi i druge višestruke vektorske operacije, kombinacije jednostrukih operacija grad, div i rot. Međutim kako se prva od spomenutih triju jednostavnih operacija primjenjuje na

skalare i daje vektore, a druga primijenjena na vektore daje skalare i konačno treća primijenjena na vektore daje vektore, u obzir dolaze samo one kombinacije tih operacija koje odgovaraju navedenim odnosima. Tako je moguća bila Δ -operacija, jer je na skalar V bilo moguće primijeniti grad-operaciju i zatim je na rezultujućem vektor $-\mathcal{F}$ bilo moguće primijeniti operaciju div , dolazeći time ponovno na skalar, naime na ΔV . No ne bi bila moguća na pr. kombinirana operacija div div , jer div primijenjena na neki vektor dala bi skalar, a od tog skalara se zatim ne bi mogla tražiti div . Naprotiv je moguća, i ima čak veliku važnost kod vektorskih razmatranja, operacija rot rot primjenjivana na vektore, budući da na pr. $\text{rot } \mathcal{F}$ po (49) daje vektor $\mathcal{W}$ s komponentama $W_x - W_y - W_z$, a na taj se vektor $\mathcal{W}$ može i opet primijeniti rot-operacija: $\text{rot rot } \mathcal{F} = \text{rot } \mathcal{W}$. Zanimljiv je, i nije ga teško dokazati, rezultat koji $\text{rot rot } \mathcal{F}$ izražava sa $\mathcal{F}$:

$$\text{rot rot } \mathcal{F} = \text{grad div } \mathcal{F} - \Delta \mathcal{F} \quad (53)$$

pri čemu, po definiciji, pod $\Delta \mathcal{F}$ treba razumijevati vektor s komponentama skalarnim veličinama: $\Delta F_x - \Delta F_y - \Delta F_z$, a treba i paziti na razliku operacije $\text{grad div } \mathcal{F}$, primjenjivane na vektor $\mathcal{F}$ od operacije $\text{div grad } V$ primjenjivane na skalar V .

89. Ako se iz točke M potencijala V u točku N potencijala V_0 giba naboj Q , radnja A , obzirom na relacije (10) iz A-23. i (45) iz A-82. i uzevši u obzir da je $V - V_0$ jednako naponu U između M i N, bit će:

$$A = Q(V - V_0) = QU \quad (54)$$

Na temelju ove osnovne relacije bit će razumljivo, zašto je u A-13. bila spomenuta voltampersekunda (VAs), drukčije zvana i vatsekunda (Ws), kao jedinica radnje i energije koja se sama od sebe nadaje u V-A-s-m-sustavu (a i u V-A-s-cm-sustavu). Ako se naime u (54) izrazi Q u As, a $V - V_0$ u V, A mora biti u VAs (Ws); 1 Ws odgovara transportu naboja 1 As za iznos napona 1 V. Uz Q i $V - V_0 = U$ stavljenima u (54) u ESJ izišlo bi A u ergima.

Sad će biti odmah shvatljiva i jedinica 1 eV uvedena u A-18. To je radnja kod prelaza napona 1 V nabojem 1 elektrona, dakle nabojem $0,160 \cdot 10^{-18}$ As. Primjenom formule (54) odmah se dolazi na relaciju između eV i Ws (navedenu već u A-18.). Običajne su još jedinice keV (10^3 eV), MeV (10^6 eV), i sl.

90. Ako se radnja A kod gibanja elektrona djelovanjem polja sva iskoristi na ubrzavanje elektrona, dakle na stvaranje kinetičke energije $m_0 v^2/2$ (pretpostavljajući pri $v \ll c$ masu elektrona identičnu s njegovom masom mirovanja m_0), moći će se staviti:

$$A = Q_0 U = \frac{m_0 v^2}{2} \quad (54')$$

odnosno:

$$v = \sqrt{2 \frac{Q_0}{m_0} \cdot U} \quad (54'')$$

Kako je m_0 poznato, moći će se na temelju prve od dviju navedenih relacija svakom A (bilo u Ws bilo u eV) pridijeliti određeno v . A na temelju druge relacije v je proporcionalno sa $\sqrt{U}$.

Tako već uz radnju 1 eV, dakle kad se elektron ubrza naponom 1 V, izlazi brzina elektrona oko 600 km/s (km na sekundu), s naponom 100 V može se elektron ubrzati već na oko 6000 km/s, a s naponom 10000 V čak na oko 60000 km/s.

No kod ove potonje brzine, i postepeno sve više kod daljih većih brzina, počinje se već izrazitije manifestirati relativistička relacija (7) iz A-14. o porastu mase s brzinom, kao i relativistička relacija o »ekvivalenciji mase i energije«, po kojoj masi mirovanja m_0 elektrona pripada energija $A_0 = m_0 c^2$ (c = brzina svjetlosti u vakuumu), a elektronu brzine v , i toj brzini pripadne formulom (7) dane mase m , pripada *ukupna* energija $A' = mc^2$. A uz te prilike za kinetičku energiju A elektrona treba staviti diferenciju $A' - A_0$, odn. treba pisati relaciju:

$$A = A' - A_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

prema kojoj se mogu točno računati kinetičke energije elektrona ubrzanih do određene brzine v određenim naponom U . Po definiciji ako je taj napon ubrzavanja U na pr. 200000 V govori se o energiji elektrona 200000 eV ili 0,2 MeV.

Zanimljivo je da se razvojem u beskonačni red izraza u zagradi u gore danoj relativističkoj formuli za A , uz ograničenje na samo prva dva člana toga reda (dovoljeno uz pretpostavku $v \ll c$) dolazi, nakon sređivanja rezultata, iz relativističke formule za A na klasičnu formulu $A = m_0 v^2/2$, koja je prema tomu tek aproksimacija, valjana za malene brzine v , no posve neupotrebljiva kod brzina v koje su već znatan dio brzine c . Tako bi elektronu ubrzanom naponom 400000 V po klasičnoj formuli pripala relativistički već nemoguća brzina $3,75 \cdot 10^8$ m/s, dok relativistički računano u tom slučaju izlazi ispravna brzina: $2,48 \cdot 10^8$ m/s, i za omjer masa elektrona: $m/m_0 = 1,78$.

Uopće će se trebati sprijatelжити s relativističkim shvaćanjem pretvorivosti mase u energiju i obrnuto, prema kojem na pr. pri nekoj nuklearnoj reakciji, praćenoj stvaranjem izvjesne količine energije, može doći do iščezavanja pripadnog iznosa mase (t. zv. *defekt mase*). Na pr. kod stvaranja α -čestica (jezgri atoma običnog He) iz dva protona i dva neutrona, zbog nastale kod tog procesa energije, ima nastala α -čestica manjak mase prema sumi masa dvaju protona i dvaju neutrona, od kojih je ona postala; uspor. vj. 22.b) na str. 115. I prema vani defektima mase pri nuklearnim reakcijama mogu se oslobađati velike količine energije (atomske reaktori i sl.). Obrnuto fotonima visokih energija hf (kvantima gama-radijacija vanredno visokih frekvencija f), pri prolazu tih fotona kroz materiju mogu, uz potpuno iščezavanje energije hf fotona, biti stvarani »parovi« elektron-pozitron, s tim da se dio A_1 ukupne energije fotona utroši prema formuli $A_1 = 2m_0 c^2$ na stvaranje obih masa mirovanja m_0 proizvedenog para, a ostatak A_2 se utroši na stvaranje kinetičkih energija novih čestica: $hf = A_1 + A_2$. S druge strane proces može teći i suprotnim smjerom: par elektron-pozitron može iščeznuti dajući određeni foton.

Mirujućoj masi 1 g (= 0,001 kg), po formuli ekvivalencije $A_0 = m_0 c^2$ za *ma koju* mirujuću masu m_0 i pripadnu energiju A_0 , korespondirala bi energija: $0,001 \cdot (3 \cdot 10^8)^2$ Ws = $90 \cdot 10^{12}$ Ws

ili $562 \cdot 10^{24}$ MeV, masi pak 1 AJM energija $149 \cdot 10^{-12}$ Ws ili 931 MeV, te konačno masi mirovanja elektrona ili pozitrona 0,00055 AJM energija $82 \cdot 10^{-15}$ Ws ili 0,511 MeV.

Ovdje je dakako bilo moguće tek nešto malo natuknuti iz gornje problematike, koju će čitalac opširnije razradenu naći u atomskim fizikama. A tu će naći više i o već u A-16. uvedenom »neutrinu«, te o dosad nespomenutim česticama: »mezonima« i (tek pod jesen 1955. nađenom) »antiprotonu« ili »negativnom protonu« (čestici mase kao kod protona, ali negativnog elementarnog naboja $-Q_0$), zasad za elektrotehničara manje važnima.

V) ELEKTRIČKA POLJA I DIELEKTRIKA

Vektor $\mathcal{D}$ na granici dvaju dielektrika; zakon loma $\mathcal{D}$ -linija. Višeslojni kondenzatori. Općenite definicije vektorâ $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$. K fizikalnom shvaćanju dielektrika; ideja širenja električkih učinaka od točke do točke i električkih polja kao stanja uzbuđenosti dielektrika. Kondenzator s vakuumom i s materijalnim dielektrikumom; »polarizacija« materijalnih dielektrika. Dielektrika kao nosioci energije električkih polja. Vrtlozi magnetskih polja kod vremenskih mijenjanja vektora $\mathcal{D}$; »pomačne struje« prema »provodnim strujama«. Izraz za gustoću pomačnih struja.

91. Upoznali smo u A-III., na bazi osnovnih zakona o odnosu vektorâ $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ i o toku vektora $\mathcal{D}$, uglavnom veze električkih polja s nabojima koji ih izvide, ne ulazeći pobliže u ulogu dielektrika pri električkim poljima. Baš na tu ulogu obratit ćemo sada pozornost i izvesti niz praktički i teorijski vanredno dalekosežnih zaključaka.

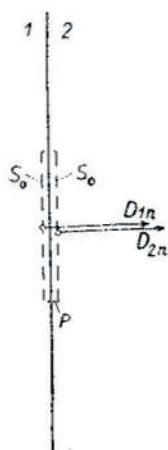
Počet ćemo razmatrajući zanimljive konsekvencije na koje vodi primjena zakona toka vektora $\mathcal{D}$ na slučajeve prelaza granične plohe dvaju dielektričkih sredstava s različitim dielektričkim konstantama, apsolutnima ϵ_1 i ϵ_2 , odnosno relativnima ϵ'_1 i ϵ'_2 . Izvorima i ponorima toka vektora $\mathcal{D}$, a po tomu i $\mathcal{D}$ -linija, mogu biti samo električki naboji, a ovih ne može biti na »savršenim« izolatorima, pa prema tomu ni na graničnoj plohi dvaju takvih izolatora. Tako ne može kod prelaza granične plohe dvaju savršenih dielektrika biti »diskontinuirane promjene« ili »skoka« u gustoći toka vektora pomaka $\mathcal{D}$, dakle ni skoka normalne komponente D_n vektora $\mathcal{D}$, koja figurira u izrazu za tok.

Prema tomu $\mathcal{D}$ -linije kod ovakvoga prelaza idu nastavljajući se iz jednoga sredstva dalje u drugom sredstvu. Ipak, zbog toga što stavak o kontinuitetu iznosa kod prelaza granice dvaju sredstava vrijedi samo za normalnu komponentu vektora $\mathcal{D}$, kod kosoga smjera vektora $\mathcal{D}$ prema graničnoj plohi dvaju dielektričkih sredstava prelaz te plohe prati jedna osobitost, naime nagla promjena smjera vektora $\mathcal{D}$, odnosno nagla promjena smjera $\mathcal{D}$ -linija, t. zv. *lom crta vektora gustoće pomaka*, za koji vrijedi »tg-zakon loma $\mathcal{D}$ -linija«:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon'_1}{\epsilon'_2} \quad (55)$$

pri čemu α_1 i α_2 znače kutove što ih sa smjerom normale na graničnu plohu čine smjerovi vektora $\mathcal{D}$ (smjerovi $\mathcal{D}$ -linija) u korespondentnim beskonačno blizim točkama M_1 i M_2 neposredno uz graničnu plohu u prvom i drugom sredstvu.

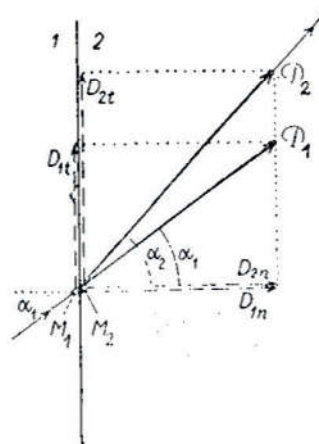
92. Kod dokaza zakona (55) treba uzeti u obzir: a) upravo spomenutu činjenicu o jednakosti normalnih komponenta D_{1n} i D_{2n} vektora gustoće pomaka u korespondentnim beskonačno blizim točkama M_1 i M_2 s jedne i druge strane granične plohe, koja činjenica uostalom neposredno slijedi primjenom formule (21) na elementarni valjak po shemi u sl. 38. s bazama površine S_0 paralelnima graničnoj plohi izolatorâ 1 i 2 i s plaštom površine P , koji neka iščezava prema S_0 , tako da se za ovaj slučaj može staviti: $(-D_{1n} \cdot S_0) + (+D_{2n} \cdot S_0) = 0$, dakle $D_{1n} = D_{2n}$; te b) činjenicu da kod prelaza granične plohe sredstava 1 i 2 ne dobiva skok također tangencijalna komponenta vektora $\mathcal{F}$, tako da se mogu smatrati jednakima iznosi F_{1t} i F_{2t} za točke M_1 i M_2 kao gore, što neposredno slijedi pri-



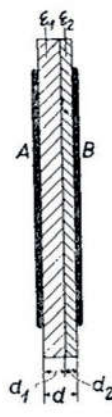
Sl. 38.



Sl. 39.



Sl. 40.



Sl. 41.

mjenom relacije (46) iz A-83. na elementarnu konturu 1-2-3-4 u sl. 39. s elementima staze 1-2 i 3-4 duljine a , prema kojoj neka bude zanemariva duljina b elementa staze 2-3 i 4-1, jer se uz navedene uvjete može pisati: $(-F_{1t} \cdot a) + (+F_{2t} \cdot a) = 0$, dakle: $F_{1t} = F_{2t}$.

Po sl. 40. moraju sada vrijediti relacije: $\operatorname{tg} \alpha_1 = D_{1t}/D_{1n} = \epsilon_1 F_{1t}/D_{1n}$ i $\operatorname{tg} \alpha_2 = D_{2t}/D_{2n} = \epsilon_2 F_{2t}/D_{2n} = \epsilon_2 F_{1t}/D_{1n}$; dijeljenjem prve relacije s drugom dolazi se odmah na (55).

93. U tehničkoj praksi vrlo često $\mathcal{D}$ -linije idući iz jednoga sredstva u drugo zgađaju normalno graničnu plohu tih sredstava: po (55) one onda prelazeći u drugo sredstvo ne će mijenjati smjer. Takav je slučaj kod pločastih *višeslojnih kondenzatora*, na pr. kod kondenzatora u sl. 41. s dva dielektrička sloja debljinâ d_1 i d_2 »u seriji« između elektroda A i B.

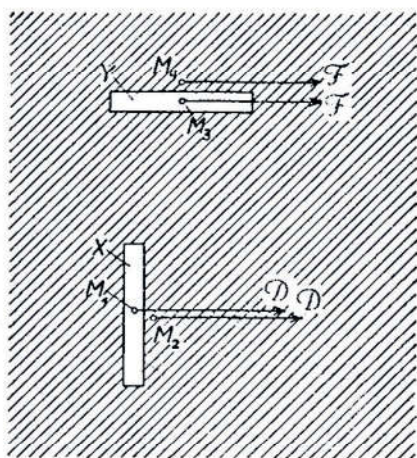
Kako uz pretpostavljene prilike normalne komponente D_{1n} , D_{2n} itd. vektora pomaka predstavljaju odmah i cijele iznose D_1 , D_2 , itd. toga vektora u pojedinim sredstvima, dozvoljeno je pisati: $D_1 = D_2 = \dots$, a po tomu također:

$$F_1 : F_2 : \dots = \frac{1}{\epsilon_1} : \frac{1}{\epsilon_2} : \dots = \frac{1}{\epsilon'_1} : \frac{1}{\epsilon'_2} : \dots \quad (56)$$

Formula (56) otkriva zanimljivu činjenicu da se kod više dielektričkih slojeva jakosti polja porazdijele na različita dielektrička sredstva proporcionalno *recipročnim vrijednostima* dielektričkih konstanta tih sredstava, stvar na koju ćemo se povratiti kod kondenzatora.

94. Još jedna konsekvencija, teoretskog interesa, dade se izvesti iz obih stavaka istaknutih u A-92.

Neka u sl. 42. X i Y predstavljaju dvije infinitezimalne valjkovite šupljine (slobodne od svake materije) zamišljene u materijalnom dielektrikumu apsolutne dielektričke konstante ϵ i relativne ϵ' , koji neka ispunjava prostor između elektroda na pr. pločastoga kondenzatora, te je prema tomu sijelo električkog polja. Obje šupljine neka su orijentirane svojim (kružnim) bazama okomito na smjer polja; kod šupljine X neka visina iščezava prema promjeru baza, a kod šupljine Y neka naprotiv promjer baza iščezava prema visini, tako da se kod valjka X može zanemariti utjecaj plašta kao granične plohe prema onomu baza, a kod Y da je baš obrnuto.



Sl. 42.

U točki M_1 usred šupljine X bit će sad vektor gustoće pomaka isti po smjeru i iznosu kao u neposredno blizoj točki M_2 u materijalnom dielektrikumu, jer kod prelaza bazâ valjka X kao graničnih ploha okomitih na smjer polja vrijedi stavak pod a) u A-92.

Obrnuto u točki M_3 usred Y i u točki M_4 u materijalnom dielektrikumu neposredno blizoj točki M_3 ostao bi isti po smjeru i veličini vektor jakosti polja, jer tu dolazi u obzir kao granična ploha plašt valjka Y, prema kojemu je polje tangencijalno, pa treba primijeniti stavak pod b) u A-92.

Prema tomu, ako treba konkretizirati definiciju vektorâ $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ u krutom dielektrikumu, dosta je zamišljati da su određeni: $\mathcal{D}$ u šupljini kao X, a $\mathcal{F}$ u šupljini kao Y na sl. 42.

95. Postavimo još pitanje o fizikalnom shvaćanju pojava u dielektričkim sredstvima.

U tom pogledu treba odmah primijetiti da vektore $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ treba smatrati uvedene njihovim definicijama, te karakterizirane obim osnovnim relacijama, naime »zakonom omjera« i »zakonom toka«, kao izričajima iskustvenih činjenica neovisnima o ma kakvoj konkretnoj slici, kojom se mogu pokušavati manje ili više nesavršeno predočiti pojavi u dielektričkim sredstvima.

Dublji je smisao uvođenja dvaju vektora $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ za karakterizaciju električkih polja u tomu što ono otvara mogućnost da se pregledno obuhvate i za različita dielektrička sredstva odnosi između naboja i manifestacijâ pripadnih električkih polja.

Prema prvobitnom shvaćanju stare fizike iz Coulombovih vremena, odnosno stare »teorije fluida« (A-4.), odlučnima su za pojave oko električkih naboja bili smatrani isključivo sami naboji, koji su jedan na drugi imali djelovati bez sudjelovanja međusredstva nekim teško pobliže shvatljivim *silama na daljinu* (»djelovanje na daljinu«), dok sredstvu oko naboja, zamišljenih na elektrodama, nije pripisivana nikakva druga uloga osim da *ne vodi* elektricitet (iz čega bi nužno slijedilo da razlike u naravi dielektričkih sredstava, ako ona samo jednako potpuno izoliraju, ne bi ni najmanje utjecale na manifestacije električkih polja).

Kasniji pogledi na električke pojave izazvani su Faradayevim otkrićem (1838.) utjecaja naravi dielektrikuma na električke pojave. Kako to otkriće izlazi na to da se zamjenom dielektrikuma vakuuma nekim materijalnim dielektrikumom relativne dielektričke konstante ϵ' u prostoru između dvije elektrode s nabojima $+Q$ i $-Q$ i razlikom potencijala U izaziva ϵ' -struko povećanje omjera Q/U (uz stalno održavano Q smanji se U na ϵ' -ti dio; obrnuto: uz stalno U postane Q ϵ' -struko; itd.), nije preostalo drugo nego da se dielektrikumu pripiše aktivna uloga kod električkih pojava.

Po klasičnim idejama Faradaya i Maxwella dielektrikum je zapravo nosilac manifestacija električkoga polja, te je već sama egzistencija električkih naboja dovoljna da u dielektričkim sredstvima oko njih proizvede osobita stanja, stanja neke uzbuđenosti, zbog kojih baš dolazi, već prema intenzitetima uzbuđenog stanja na pojedinim mjestima dielektrikuma, do jačih ili slabijih manifestacija električkoga polja u obliku sila na druge naboje (vektor $\mathcal{F}$) i u obliku influencijonih učinaka na Maxwelllove dvoploče (vektor $\mathcal{D}$).

Za ta uzbuđena stanja dielektrikuma treba zamišljati da se dadu stvoriti samo na račun određenih utrošaka energije po jedinici volumena dielektrikuma. S tim u vezi cijeli prostor dielektrikuma u kome vlada električko polje postaje nosiocem energije, koja se kod razgrađivanja polja oslobađa i pretvara u druge oblike. Slično se napeta stanja u elastičnim sredstvima mogu proizvesti samo utroškom mehaničke radnje, a kod razgrađivanja napetoga stanja postaje uložena radnja opet raspoloživa.

96. Ovo shvaćanje električkih pojava, po kojemu su oni vezani s naročitim promjenama u stanju dielektrikuma, pokazalo se vrlo plodnim. Po njemu električko polje i električke silnice prestaju biti geometrijskom apstrakcijom, te im odgovara neka realna promjena stanja prema normalnom u dielektrikumu. Za električke pak učinke zamišlja se da se šire posredstvom dielektrikuma od točke do točke (»djelovanje na blizinu«). Bitna se razlika prema teoriji fluida vidi u tomu što po ovoj posljednjoj za nastajanje električkih sila trebaju bar dvije množine elektriciteta u određenom razmaku, da bi jedna mogla djelovati na drugu, dok se po Faraday-Maxwellovu shvaćanju već prisutnost jednoga jedinoga naboja, odnosno egzistencija polja, manifestira promjenama u dielektrikumu, i određenom energijom kojoj taj dielektrikum postane sijelo.

Vrijednost gornjih ideja o aktivnom učešću dielektrikuma kod električkih polja (i sličnih o utjecajima sredstva kod »magnetskih polja«) došla je do izražaja osobito kad je Maxwell, osim običnih »provodnih struja« kakve predstavljaju naboji koji se gibaju u vodičima, uveo još i pojam »struja pomaka« u dielektričkim sredstvima, o kojima će vrlo brzo biti govora u A-99. Tim je Maxwell uspio obuhvatiti osobito naglo promjenljive pojave u električkim i magnetskim poljima, te dokazati da se one šire u dielektrikumu doduše ogromnom ali konačnom brzinom (u vakuumu brzinom $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s, dakle brzinom svjetlosti). Došao je tako i do pojma »elektromagnetskih valova«, koji su kasnije doista i proizvedeni električkim sredstvima (Hertzovi pokusi; valovi radija). A bio je jedan od najvećih trijumfa nauke, kad je na elektromagnetske valove uspjelo svesti i pojave svjetlosti (»elektromagnetska teorija svjetlosti«).

Faraday-Maxwellovo shvaćanje električkih pojava bilo je upravo suprotno shvaćanju teorije fluida. Prvo pripisuje sve pojave dielektrikumu, drugo nabojima. No dok je prvim lako tumačiti elektromagnetske valove i slične pojave, na ono drugo upućuju: elektroliza, opažanja elementarnih električkih čestica, itd. Današnje je shvaćanje zato u neku ruku kombinacija obih nazora: ono priznaje naboje, gledajući ih dakako atomistički, kako su u A-I. uvedeni, ali i Faraday-Maxwellove ideje o događajima u dielektričkim sredstvima. Između jednih i drugih, između naboja i dielektričkih sredstava, postoji tijesna veza, iz koje rezultira golemo šarenilo električkih, magnetskih i optičkih pojava.

97. Za misao da su električka polja stanja uzbuđenosti dielektričkih sredstava, te da ta sredstva u uzbuđenom stanju postaju sijela energije, govori podudaranje konsekvencija takvoga shvaćanja s eksperimentalnim činjenicama koje bi inače ostale nerazumljive.

Od sekundarne je važnosti kod toga da je detaljniju predodžbu o pojavi uzbuđivanja dielektričkih sredstava teško postaviti.

Zapravo ni nema danas mogućnosti da se takva predodžba uopće postavi, bar u koliko se radi o uzbuđenju vakuuma, dakle prostora bez ikakve materije. Iako bez materije, vakuum je također dielektrikum, i to još najsavršeniji, pa i njemu uz određeni intenzitet uzbuđenja, dakle uz dano $\mathcal{F}$ (odnosno $\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{F}$) na nekom mjestu pripada određena količina energije na jedinicu volumena, dakle određena *gustoća energije* pripadnoga polja, koju ćemo već u A-98. čak vrlo lako izračunati. A ipak mi ništa ne znamo o svojstvima prostora bez materije.

Nešto lakšim postaje problem, ako treba predočiti utjecaj materije na svojstva nekoga materijalnoga dielektrikuma. U tom pogledu vrlo zanimljivu polaznu točku može dati usporedba prilika kod pločastoga kondenzatora s elektrodama A i B površine S i razmaka d , nabijenima stalnim nabojima $+Q$ i $-Q$, i to: a) kod potpunog vakuuma (bez ikakvih materijalnih čestica u prostoru između elektroda), te b) u slučaju da se vakuumu između elektroda pridoda vrlo velik broj vrlo sitnih, međusobno odijeljenih, ali vodljivih kuglica, kako je za jedan dio kondenzatora

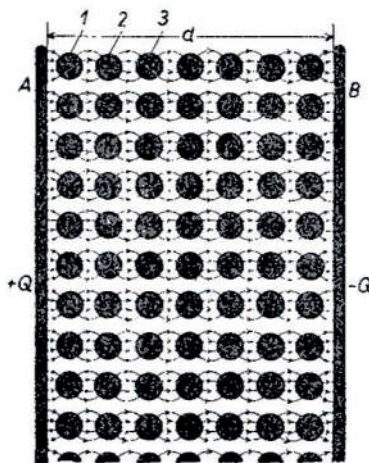
grubo naznačeno na sl. 43. Ako su sad U_0 i U iznosi napona između elektroda A i B u slučajevima a) i b), morat će Q/U ispasti veće nego Q/U_0 . Jer zbog stalnoga Q isti ukupni broj silnica u vakuumu teći će između A i B u oba slučaja; no dok bi te silnice u slučaju a) išle bez prekida cijelim razmakom d elektroda, pa dale napon $U_0 = F_0 d$ između A i B, ako je F_0 polje u vakuumu, u slučaju b) one bi išle isprekidano: od A na negativni influencioni naboj kuglice 1, zatim nakon maloga prekida od pozitivnoga influenciranog naboja kuglice 1 na negativni kuglice 2, pa opet nakon prekida dalje od pozitivnoga naboja kuglice 2 na kuglicu 3, i tako dalje sve do elektrode B, tako da bi u slučaju b) prosječno ukupna duljina d' puta silnica prema njezinom iznosu d u slučaju a) spala na recimo ϵ' -ti dio, čime bi napon $U = F_0 d'$ postao ϵ' -ti dio napona U_0 , a po tomu kvocijent Q/U ϵ' -struko toliki kao Q/U_0 .

Prelazom od slučaja a) na slučaj b) isti bi se dakle efekt ϵ' -strukoga povećanja omjera naboja i napona postigao kakav je primijećen kod Faradayeva otkrića (A-95.) pri zamjeni vakuuma između dviju elektroda nekim materijalnim dielektrikumom relativne dielektričke konstante ϵ' .

To navodi na misao da se utjecaj materije dielektrikuma svede na djelovanje električkoga polja koje ponešto »pomakne« (u smjeru polja, odnosno suprotno tomu smjeru) raznoimene i apsolutnim iznosom jednake naboje u sitnim česticama materije. U tu svrhu treba spomenute naboje zamišljati vezanima uz pripadne čestice, ali ipak gibljivima unutar područja tih čestica. Ovaj se pojav zove *polarizacija* dielektrikuma, jer dielektrikum postane sijelom u smjeru polja orijentiranih »dipola« ili »dvopola« s ponešto razmaknutim »električkim težištima« ili »električkim polovima« pozitivnih i negativnih naboja u pojedinim česticama (produkt množine naboja pola i razmaka polova zove se »električki moment dipola«).

Podlogu za ovu ideju daje i sama moderna atomistika, koja u molekulama materije vidi konglomerate čestica s pozitivno nabijenim jezgrama praćenima negativnim nabojima elektrona.

Usprkos relativno zamršenih prilika u samim molekulama, usprkos komplikacijâ zbog termičkoga gibanja i dr., misao o polarizaciji dielektrikuma dade se razraditi na bazi današnjih shvaćanja sastava materije, pa se na taj način dadu čak nadovezati na električka svojstva pojedinih tvari zaključci o detaljima njihova sastava. Uglavnom treba kao moguća uzimati dva tipa dipolâ u polariziranom



Sl. 43.



Sl. 44.

dielektrikumu: jedne dipole bi davale čestice kojima u neuzbuđenom stanju električki polovi padaju u istu točku, te koje dipolima postanu tek pomicanjem unutar čestice pozitivnih naboja u smjeru polja i negativnih u suprotnom smjeru, dok kod drugih čestica treba uzimati da već i neuzbudene predstavljaju dipole, ali orijentirane nepravilno u svim mogućim smjerovima, a električko ih polje samo uglavnom manje ili više orijentira u toliko što kod termičkoga gibanja ostaju relativno dulje u smjeru polja. Međutim razradivanje ovih pitanja čini posebno područje teoretske fizike, odnosno atomistike i kemije, pa ovdje u ove stvari ne ćemo dalje ulaziti.

Primijetimo samo još da se, čisto matematski, polarizacija dielektrikuma (dielektrička polarizacija) kod nekog polja $\mathcal{F}$ dade definirati kao »dodatna gustoća pomaka« $\mathcal{M}_e$ materije dielektrikuma, koju treba pribrojiti gustoći pomaka $\mathcal{D}_0$ koju bi proizvelo u vakuumu isto polje $\mathcal{F}$, tako da za ukupnu gustoću $\mathcal{D}$ pomaka u materijalnom dielektrikumu vrijedi:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{M}_e \quad (57)$$

Prema tomu može se pisati: $\mathcal{M}_e = \mathcal{D} - \mathcal{D}_0 = \epsilon_0 \cdot (\epsilon' - 1) \cdot \mathcal{F}$; veličina $\xi_e = \epsilon' - 1 = (\epsilon - \epsilon_0)/\epsilon_0$ zove se »električka susceptibilnost« dielektrikuma.

98. Izračunajmo sad energiju A_1 lokaliziranu u jedinici volumena nekog dielektrikuma apsolutne dielektričke konstante ϵ , u kome vlada polje $\mathcal{F}$.

Pomislmo po sl. 44. pločasti kondenzator s oblozima A i B »uronjenima« u prostor inače sav ispunjen promatranim dielektrikumom. Na oblozima A i B površine S i razmaka x neka su protivni naboji iznosa Q i gustoće $D = Q/S$, a napon kondenzatora neka je U . Kako se za jakost polja $\mathcal{F}$ iznosa F toga kondenzatora može uzeti da postoji samo u ograničenom prostoru obujma $S \cdot x$ između obloga, i da je svagdje jednak u tom prostoru, energija polja cijeloga kondenzatora može se izraziti sa $A_1 \cdot S \cdot x$.

Kad bismo sada, svladavajući silu privlačenja P između ploča A i B kondenzatora, razmak x tih ploča povećali za dx , volumen područja u kome vlada polje porastao bi za iznos $S \cdot dx$, a prirast energije polja bio bi $A_1 \cdot S \cdot dx$. Taj prirast energije može se smatrati ekvivalentom za radnju $P \cdot dx$ utrošenu na udaljivanje ploča za razmak dx , tako da se može postaviti: $A_1 \cdot S \cdot dx = P \cdot dx$ odnosno $A_1 = P/S$.

Međutim P je lako izračunati. Komponenta u smjeru x polja proizvedena nabojem ploče A bila bi u vakuumu $D/2\epsilon_0$. U ma kojem dielektrikumu bi ona bila $D/2\epsilon_0\epsilon' = D/2\epsilon$. Na naboj cijele ploče B naboj sa A izvodio bi dakle po (10) u A-23. silu $P = Q \cdot D/2\epsilon = D^2S/2\epsilon$, pri čemu treba primijetiti da D predstavlja i iznos vektora $\mathcal{D} = \epsilon\mathcal{F}$ gustoće pomaka u dielektrikumu kondenzatora.

Prema tomu mora tražena *prostorna gustoća energije* električkoga polja (= energija na jedinicu volumena) biti $A_1 = P : S = (D^2S/2\epsilon) : S = D^2/2\epsilon$, odnosno konačno:

$$A_1 = \frac{FD}{2} = \frac{\epsilon F^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon' F^2}{2} \quad (58)$$

Ako su vektori $\mathcal{D}$ i $\mathcal{F}$ promjenljivi u nekom prostoru, ukupna energija A polja bila bi izražena prostornim integralom:

$$A = \int \frac{F\mathcal{D}}{2} dv = \int \frac{\epsilon F^2}{2} dv \quad (59)$$

uzetim po cijelom volumenu prostora gdje postoji polje.

Kod upotrebe V-A-s-m- odn. V-A-s-cm-sistema jedinica izlazi A_1 u Ws/m^3 odn. Ws/cm^3 . Gustoće energije što se daju nakrcati u dielektričkim tvarima ograničene su tim što svaki dielektrikum podnosi bez proboja samo polja do izvjesne jakosti. One uopće nisu velike.

Neka je na pr. dan dielektrikum sa $\epsilon' = 5$ i neka u njemu vlada već vanredno jako polje $F = 15000000 \text{ V/m} = 150000 \text{ V/cm}$, koje neka taj dielektrikum još izdrži. Okruglo po (58) izlazi:

$$A_1 = 5000 \text{ Ws/m}^3 = 0,005 \text{ Ws/cm}^3$$

Tomu naprotiv gustoća energije magnetskih polja može, kako ćemo još vidjeti, dosegnuti znatno veće iznose, na pr. 100000 Ws/m^3 ili $0,1 \text{ Ws/cm}^3$, i još znatno više.

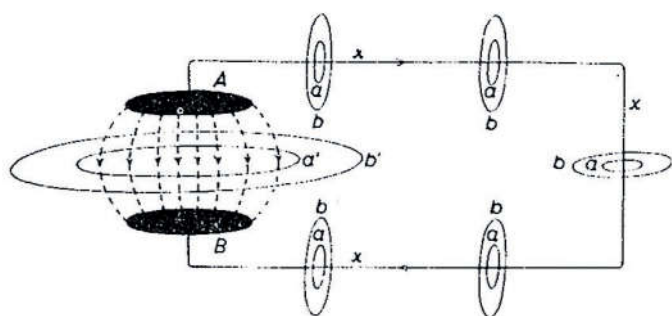
99. Završavajući ovo poglavlje zadržimo se još časak na *strujama pomaka*, već spomenutima u A-96. U stvari to nisu nikakva strujanja, nego se tim imenom simbolički nazivaju pojavi vremenskih mijenjanja vektora gustoće pomaka $\mathcal{D}$. Ime »struja« dobili su ovi pojavi po tomu što su po Maxwellu oni uvijek praćeni isto onakvim manifestacijama *magnetskih* učinaka kakve su poznate kao nerazdruživi pratioci gibanih množina elektriciteta, dakle običnih »provodnih« električkih struja.

Ako se na pr. izbija po shemi u sl. 45. kondenzator kapaciteta C kroz vodič (žicu) x , primjećuju se ne samo svagdje oko x »magnetska polja«, karakterizirana »magnetskim silnicama« zatvorenima u sebe i »zakvačenima« o struju vodiča x poput onih naznačenih sa $a, b, \dots$ u sl. 45. (magnetska iglica orijentirala bi se svagdje u prostoru oko vodiča protjecana strujom tangencijalno na takvu silnicu), nego se također primjećuju magnetska polja karakterizirana silnicama kao $a', b' \dots$, »zakvačenima« o iščezavajući tok vektora $\mathcal{D}$ kroz dielektrikum kondenzatora, te proporcionalna brzini mijenjanja toga toka, a po tomu proporcionalna i vremenskoj derivaciji $d\mathcal{D}/dt$ vektora gustoće pomaka $\mathcal{D}$. Općenito treba uzimati da se kod svakoga mijenjanja vektora $\mathcal{D}$ na kojem god mjestu dielektrikuma javljaju slični »vrtlozi« magnetskoga polja oko toga mjesta, s odnosima koji će se kasnije kvantitativno precizirati.

100. Uvođenjem pojma pomačnih struja postizava se i to, da se može ustvrditi da ima samo *zatvorenih* električkih struja. Tako se na pr. »provodne« struje kroz x u sl. 45. mogu zamišljati nastavljene kroz dielektrikum kondenzatora kao »pomačne« struje, i u tom smislu krug je struje u sl. 45. »zatvoren«.

Lako je razabrati još ovo: ako želimo da pomačnu struju u dielektrikumu kondenzatora možemo i numerički smatrati nastavkom provodne struje kojom se po priključnim vodovima električki naboji oblozima kondenzatora dovode ili s njih odvođe, treba *gustoću pomačne struje*, t. j. struju na jedinicu površine okomite na smjer te struje, odnosno na smjer vektora $\mathcal{D}$, staviti baš jednakom vremenskoj derivaciji $d\mathcal{D}/dt$ vektora $\mathcal{D}$.

Ako se na pr. pločasti kondenzator s površinom obloga S i nabojem Q u momentu t nabija provodnom strujom, koja neka u momentu t ima jakost i , može



Sl. 45.

se pisati (ako se uzme u obzir definicija jakosti struje kao množine elektriciteta na jedinicu vremena): $i = dQ/dt$. Ali deriviranjem relacije $Q = D \cdot S$ iz A-58. dobiva se dalje: $dQ/dt = (dD/dt) \cdot S$. Prema tomu $(dD/dt) \cdot S$ treba smatrati ukupnom pomačnom strujom u dielektrikumu kondenzatora, a dD/dt iznosom G_1 »gustoće pomačne

struje«, koja se općenitije može predočiti (uzevši u obzir i smjer struje) vektorom:

$$G_1 = \frac{d\mathcal{D}}{dt} \quad (60)$$

U V-A-s-m- odn. V-A-s-cm-sustavu jedinica bi prema (60) jedinice za G_1 bile $(As/m^2):s = A/m^2$, odn. $(As/cm^2):s = A/cm^2$.

VI) PRORAČUNAVANJE KAPACITETA; KONDENZATORI

Pojam kapaciteta. Proračunavanja pločastih kondenzatora; pitanja električke čvrstoće i nesavršenosti materijalnih dielektrika. Kuglasti i cilindrički kondenzatori. Kapacitet voda od dva vodiča i sustava horizontalnoga vodiča i zemlje. Paralelna i serijska spajanja kondenzatora. Parcijalni kapaciteti; pogonski kapaciteti. Energija nabijenoga kondenzatora.

101. Prema dosadanjima razmatranjima kod dane dvije elektrode određenoga oblika i određenoga geometrijskog rasporedaja, suponirane same u nekom danom dielektrikumu, treba određene naboje na tim elektrodama, po apsolutnom iznosu Q jednake i po predznaku protivne, smatrati izvorom i ponorom posve određenoga toka vektora $\mathcal{D}$, pa očekivati u električkom polju između tih elektroda prostorno na posve određeni način raspodijeljene vrijednosti vektora $\mathcal{D}$ i analogno raspodijeljene vrijednosti vektora $\mathcal{F} = \mathcal{D}/\epsilon$, te prema tomu i posve određenu raspodjelu iznosa potencijala V , kojega je $\mathcal{F}$ negativni gradijent, dakle u zadnjoj liniji i posve određenu ukupnu razliku potencijala ili napon U između elektroda promatrane kombinacije.

Uz to promjene iznosa Q moraju proizvesti proporcionalne promjene vrijednosti $\mathcal{D}$ u pojedinim točkama polja, a po tomu i proporcionalne promjene vrijednosti $\mathcal{F}$, odnosno dalje iznosâ V , dakle konačno i proporcionalne promjene napona U .

Prema tomu se za neku danu kombinaciju dviju određenih, na određeni način porazmještenih, te određenom vrsti (ili određenim vrstama) dielektrikuma rastavljenih elektroda, kraće općenito naznačivanu imenom *kondenzator*, može postaviti relacija proporcionalnosti:

$$Q = CU \quad (61)$$

u kojoj kao konstanta proporcionalnosti dolazi neka za svaki kondenzator karakteristična veličina C , nazvana električkim *kapacitetom* toga kondenzatora.

102. Praktična vrijednost pojma kapaciteta vrlo je velika. Ona leži u tomu što se upotrebom kapaciteta dadu povezati nada sve jednostavnom relacijom (61) naboj Q na elektrodama ili oblozima nekoga kondenzatora i napon U između njegovih obloga, a to su dvije praktički važne i lako izmjerive veličine.

Prema tomu, ako je kraj poznatoga C jedna od veličina Q i U zadana ili određena, ona druga slijedi odmah iz $Q = CU$, odn. iz $U = Q/C$. Ako su pak izračunane ili izmjerene obje veličine Q i U , može se iz njihovih vrijednosti izračunati sam kapacitet $C = Q/U$.

103. Po relaciji (61) uz $U = 1$ izlazi $Q = C$. To znači da se kao mjerilo kapaciteta nekoga kondenzatora može smatrati onaj naboj koji treba privesti kondenzatoru da se on nabije do jedinice napona, dakle također i onaj naboj koji bi primili oblozi kondenzatora priključena na oba pola izvora elektriciteta stalnoga napona $U = 1$.

Specijalno bi dakle jedinicu kapaciteta $C = 1$ imao onaj kondenzator koji bi se jedinicom naboja $Q = 1$ nabio na jedinicu potencijala $U = 1$.

U sustavima V-A-s-m i V-A-s-cm jedinicu kapaciteta predstavljao bi dakle kapacitet kondenzatora koji bi se nabojem 1 As nabio na napon 1 V, tako da bi jedinica kapaciteta bila 1 As/V. No kako se jedinica As/V vrlo mnogo upotrebljava, za nju je uvedeno posebno ime *farad* (kratica: F).

Sam farad je međutim jedinica koja se doduše principno nadaje u V-A-s-m-sistemu (i u V-A-s-cm-sistemu), ali nije osobito prikladna za karakteriziranje mnogo puta manjih kapaciteta kakvi se susreću u praksi, pa se kapaciteti obično navode, već prema veličini, u određenim dijelovima farada, odnosno u »sekundarnim« jedinicama izvedenima iz farada, kao što su: mikrofarađ μF , nanofarađ nF ili čak pikofarađ pF (A-43.):

$$1 \text{ F} = 10^6 \mu F = 10^9 \text{ nF} = 10^{12} \text{ pF}$$

No i u takvim slučajevima u formule kao (61) treba dakako uz Q u As i U u V stavljati uvijek iznose C preračunane u F, jer je samo farad »primarna« jedinica sustava V-A-s-m (i V-A-s-cm).

104. U »sustavu« ESJ (A-54.) jedinica kapaciteta bila bi okruglo $9 \cdot 10^{11}$ -puta manja nego farad, budući da je u tom »sistemu«, u isporodbi sa V-A-s-m- ili V-A-s-cm-sistemom, jedinica množine elektriciteta oko $3 \cdot 10^9$ -put manja, a jedinica napona oko 300-put veća, pa vrijedi: $(3 \cdot 10^9) : (1/300) = 9 \cdot 10^{11}$.

Za kuglastu elektrodu, zamišljenu u vakuumu, pri drugoj elektrodi u beskonačnoj daljini, ispada u ESJ, kako će se doskora primjenom graničnog prelaza na formulu kapaciteta kuglastog kondenzatora pokazati, kapacitet C kugle numerički jednak polumjeru R u cm. U ESJ pišu prema

tomu naprosto: $C \approx R$ (numerička relacija!), pa se i kapaciteti izražavaju u »cm«. Kako se još i danas kapaciteti katkad, no već vrlo rijetko, navode u »cm«, dobro je upamtiti:

$$1 \text{ pF} = 0,899 \text{ »cm«} \approx 0,9 \text{ »cm«} \quad 1 \text{ »cm«} \approx 1,11 \text{ pF}$$

105. Dok se kod teorijskih razlaganja pojmu kondenzatora daje općenito značenje kombinacije elektroda po A-101., u praksi se u užem smislu kondenzatorima zovu takve kombinacije elektroda koje uz neki dopušteni maksimalni napon realiziraju određeni kapacitet sa što manjim razmakom i dimenzijama obloga (primjer: pločasti kondenzator na sl. 32.).

Kraj svoga spram dimenzija relativno velikoga kapaciteta C ovakvi će kondenzatori primiti kod danoga napona U relativno mnogo naboja $Q = CU$; odatle i ime »kondenzator« (= sakupljač, zgušćivač) električnosti.

106. Kapaciteti kondenzatora u jednostavnim slučajevima mogu se izračunati a inače se određuju mjerenjem (po formuli $C = Q/U$ mjereći, u slučajevima gdje to ide bez komplikacija naboj Q balistički i napon U elektrometarski po shemi u sl. 32., a inače na pr. već u A-74. spomenutim mostovima izmjenične struje i drugim metodama). Navesti ćemo sad nekoliko karakterističnih primjera proračunavanja kapaciteta kondenzatora.

Najjednostavniji je račun kapaciteta *pločastoga kondenzatora* s kakvim god dielektrikumom apsolutne dielektričke konstante ϵ i relativne ϵ' , te razmakom ploča d zanemarivim prema dimenzijama obloga površine S . Ako znači D apsolutni iznos gustoće suprotnih naboja na oblozima, a F jakost polja u dielektrikumu među oblozima, mora s jedne strane biti: $Q = DS = \epsilon FS$, a s druge: $U = Fd$, tako da po $C = Q/U$ izlazi:

$$C = \frac{\epsilon SF}{Fd} = \epsilon \frac{S}{d} = \epsilon_0 \epsilon' \frac{S}{d} \quad (62)$$

pri čemu za ϵ_0 , već prema sistemu jedinica, treba staviti vrijednosti (17) po A-44. ili $1/4\pi$ po A-54.; mjesto As/Vm odnosno As/Vcm u (17) može se, nakon uvedene jedinice F , staviti i F/m odnosno F/cm .

107. Često se, umjesto sa samo dva obloga i jednim slojem izolatora, pločasti kondenzatori grade po shemi u sl. 46. s većim brojem $n+1$ obloga »djelotvorne« površine S (v. sliku), te brojem n slojeva izolatora debljine d i relativne dielektričke konstante ϵ' , koji ispunjavaju prostore među tim oblozima (na sl. 46. je: $n+1 = 19$; $n = 18$). Neparne po redu ploče spojene su u jedan »pol« A kondenzatora, a parne u protivni B.

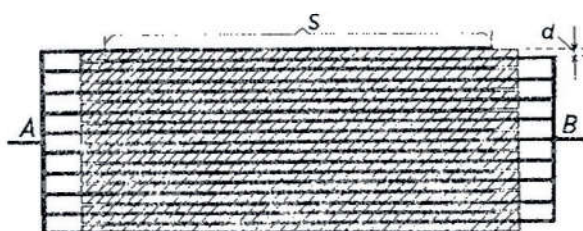
Takav je kondenzator zapravo kombinacija od n pojedinačnih kondenzatora kapaciteta $\epsilon S/d$ spojenih »paralelno« (v. kasnije), te predstavlja ukupni kapacitet:

$$C = n \cdot \epsilon S/d = n \cdot \epsilon_0 \epsilon' S/d \quad (62')$$

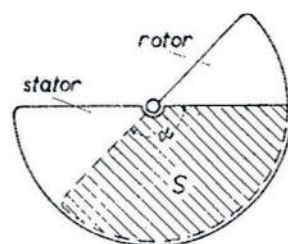
Za realizaciju istoga ukupnog kapaciteta s n pojedinačnih jednako dimenzioniranih, ali odijeljeno građenih kondenzatora trebalo bi $2n$ elektrodnih ploča i n ploča izolatora, tako da prednost konstrukcije po sl. 46. leži, osim u postignutoj kompaktnosti, još i u uštednji materijala za $n-1$ elektrodu.

Dodajmo ovdje da se, osim *racionaliziranih* relacija s veličinama $\mathcal{D}$, Ψ i ε kako su u ovom djelu uvedene, t. j. prema napomeni na str. 13: *bez* 4π u nekim važnijim i *sa* 4π u nekim drugim relacijama, dosta još susreću *neracionalizirane* relacije, koje s *neracionalnim* veličinama $\mathcal{D}'' = 4\pi\mathcal{D}$, $\Psi'' = 4\pi\Psi$ i $\varepsilon'' (= \varepsilon_0'' \varepsilon) = 4\pi\varepsilon (= 4\pi\varepsilon_0\varepsilon')$ sadrže 4π gdje ga u racionaliziranim relacijama nema, i obrnuto, pa se onda mjesto racionaliziranih formula kao (21), (21'), (34), (58), (62) i sl. stavlja $\Psi'' = \oint \mathcal{D}'' \cdot d\vec{S}$ jednako $4\pi \int dQ$ odn. $4\pi \Sigma Q$, $\text{div } \mathcal{D}'' = 4\pi\rho$, $A_1 = D''F/8\pi$, $C = \varepsilon''S/4\pi d$, itd.; no također se piše mjesto (24'), (39), (40) i sl.: $P' = QQ_1/\varepsilon''R^2$, $V = \Sigma Q/\varepsilon''r$, $V = \int dQ/\varepsilon''r$, itd. Pripadnu opasku kod magnetskih polja v. u C-16.

108. Ako su potrebni *promjenljivi* kapaciteti ne prevelikih iznosa, najjednostavnije je također primijeniti princip dvaju sistema ploča po sl. 46. uz uzduh ($\varepsilon' = 1$) kao dielektrikum, no s tom razlikom da se na pr. kao elektrode pola A uzmu polukružne ili drugoga kojega oblika metalne ploče združene u nepomičan sistem, t. zv. stator, a ploče pola B, također polukružne ili kakvoga specijalnoga



Sl. 46.



Sl. 47.

oblika, da se montiraju na zajedničkoj osovinu, tako da sve zajedno budu vrtive s tom osovinom, čineći t. zv. rotor. Kapacitet ove kombinacije moguće je onda kontinuirano povećavati vrtnjom rotora, ako se kod te vrtnje ploče rotora tako pomiču da ulaze postepeno sve više i više u međuprostore među pločama statora, čime se mijenja »djelotvorna« površina obloga S (naznačena šrafirano u sl. 47.), a s njom i kapacitet $C = n \cdot \varepsilon S/d$ ovakvoga *varijabilnoga* ili *vrtivoga* kondenzatora.

Prikladnim izborom oblika statorskih i rotorskih ploča ovakvih varijabilnih kondenzatora dadu se proizvesti tipovi kod kojih iznos kapaciteta C raste, od nekog minimuma do nekog maksimuma, na pr. linearno s kutom zakretanja kondenzatora (ploče statora i rotora polukružne) ili po kojem kompliciranijem zakonu.

109. Kako se iz (62) vidi, kapacitet C pločastih kondenzatora upravo je razmjernan površini S obloga kao i relativnoj dielektričkoj konstanti ε' dielektrikuma, a neupravno razmjernan debljini d sloja dielektrikuma. Za postizavanje što većih C povoljno će dakle utjecati, uz veliko S i veliko ε' , što manje d .

No s druge strane debljina d mora svakako ostati bar tolikoga najmanjega iznosa koliki je potreban da kondenzator može još trajno podnositi bez oštećenja predviđeni najveći napon U za koji je građen, odnosno da njegov dielektrikum još može izdržati bez *proboja* pripadno polje jakosti $F = U/d$.

Zbog sigurnosti se mora čak »ispitni« napon za koji se kondenzator gradi (i koji onda kondenzator kod ispitivanja po stanovitim propisima mora izdržati) uzeti znatno veći nego li »pogonski« napon (onaj koji se trajno dopušta u pogonu).

Kondenzatori određeni za veće napone moraju se dakle graditi i s debljim slojem dielektrikuma, pa će prema tomu biti i skuplji.

Prema tomu za upotrebljivost nekoga dielektrikuma kod gradnje kondenzatora osim njegove relativne dielektričke konstante ϵ' dolazi kod viših napona u obzir i njegova otpornost protiv proboja, a ta je također, barem grubo uzeto, karakteristična veličina dielektrikuma, i naziva se, naznačena obično »naponom proboja« u kilovoltima za debljinu 1 m odn. 1 cm sloja dielektrikuma (u kV/m odn. kV/cm), *električkom čvrstoćom* F_p dielektrikuma.

Uostalom probojni naponi u kV za cm sloja dielektrikuma dadu se navesti samo grubo. Oni variraju već kod pokusa sa 1 cm debelim slojevima dielektrikuma, na pr. zbog nehomogenosti dielektrikuma ili razlika u temperaturi; probojnu čvrstoću ulja (za transformatore i sklopke) znatno smanjuju već neznatni tragovi vode. Tako ulje sa samo $0,01\%$ vode ima $F_p = 150$ kV/cm, no pri tek nešto većim primjesama vode 0,015, 0,02, 0,05, 0,1 i $0,5\%$ pada F_p na iznose 100, 75, 41, 32 i 23 kV/cm. Uz to ni ne postoji baš proporcionalnost između probojnoga napona i debljine sloja istoga dielektrikuma, pa se iznos probojnoga napona naveden za 1 cm debljine sloja dielektrikuma ne smije bez daljega uzimati proporcionalno manji za tanje slojeve. Tako kod stakla, kojega 1 cm debeli sloj između paralelnih elektroda biva probijen uz napon 200 kV, treba za proboj 2 mm debeloga sloja između paralelnih elektroda već napon 60 kV (umjesto 40 kV, kako bi odgovaralo zakonu proporcionalnosti).

Odstupanja od zakona proporcionalnosti primjećuju se naročito kod kratkih »iskrišta« u uzduhu. Kod uzduha normalnoga tlaka i temperature za proboj sloja 1 cm treba oko 30000 V ($F_p \approx 30$ kV/cm). No za iskrišta s razmacima elektroda 0,1 cm, 0,01 cm, 0,001 cm probojni naponi su 5400 V, 920 V, odnosno 380 V. Za proboj ma kako kratkoga iskrišta u uzduhu treba barem 320 V.

Osim proboja kondenzatora ne smije dakako kod kondenzatora s *krutim* dielektrikumom doći ni do *klizavih* izbijanja uz površinu i oko rubova dielektrikuma kondenzatora, odnosno do *preskoka* kondenzatora. U tu svrhu dovoljno veliki dio ploče dielektrikuma oko rubova ostavi se neobložen elektrodoma (v. sl. 32.). A treba i zgodnim oblikom rubova elektroda predusretati pojave na ostrim bridovima vodiča (A-80.) i slično.

110. Još je jedno svojstvo izolatora važno kod njihove upotrebe u kondenzatorima. Izolacione materije kakve dolaze u praksi pokazuju naime u većoj ili manjoj mjeri različite nesavršenosti (A-3.; A-74.), pa kod kondenzatora s ovakvim tvarima kao dielektrikumom nastaju veći ili manji gubici energije, zbog kojih se kondenzatori, osobito kod priključka na izmjenične napone, gdje su izvrgnuti brzim uzastopnim nabijanjima i izbijanjima, ugrijavaju. To ograničuje njihovu upotrebu na područja relativno znatno nižih izmjeničnih napona prema onima koje bi kondenzatori obzirom na probojnost dielektrikuma mogli izdržati.

Dva klasična pokusa pokazuju lijepo nesavršenosti realnih izolatora. To su: a) pokus o zaostatku električkoga naboja, te b) pokus s rastavljivim kondenzatorom. Ako se na pr. iz elementarne fizike poznati kondenzator sa staklom »lajdenska boca« nabije na mnogo kV i izbije, pa zatim ostavi neko vrijeme na miru, ona će, ponovno izbijena, dati malu iskr, znak da se na staklu zadržao neki »zaostatak«, koji je tek postepeno postao slobodan.

Slično pokus s kondenzatorom koji se daje rastaviti pokazuje da dio naboja privedenoga elektrodoma priliježe uz dielektrikum kondenzatora. Ako na pr. laj-

densku bocu najprije nabijemo, zatim je rastavimo i njezine elektrode potpuno ispraznimo, a onda bocu opet sastavimo, ona će opet dati iskru ispražnjivanja.

Pojav zaostatka naboja u kondenzatorima može se tumačiti supozicijom da u dielektrikumu ima čestica koje pod utjecajem jakoga električkoga polja ostanu još neko vrijeme polarizirane iza kako polja već nestane. Njihovim djelovanjem zaostane na oblozima kondenzatora nešto naboja. Kad polarizacije nestane, postanu slobodni za izbijanje i zaostali naboji na elektrodama. Vrlo je vjerojatno da čestice što u dielektrikumu ostanu polarizirane nisu molekule, nego mala područja u izolatoru sa slabom električkom vodljivošću, kakvih će osobito biti kod izolacionih tvari s nehomogenostima. Zato se zaostaci naboja opažaju u mnogo manjoj mjeri kod homogenih, kemijski točno definiranih izolatora, na pr. tinjca, kremenca (kvarca), tvrdoga parafina itd., dok su relativno veći kod stakla, ebonita, umjetnih izolacionih smjesa itd.

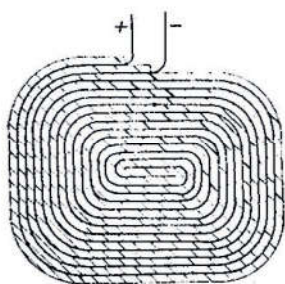
Kako se dugo može naboj zadržati u izolatoru kabela, pokazuje ovaj pokus: kabel nabijen na 100 kV bio je spojen jednu minutu sa zemljom, a onda izoliran. Nabio se malo po malo sam od sebe na 7 kV. Nakon spoja sa zemljom kroz 5 minuta nabio se izoliran i prepušten sam sebi još uvijek na 0,8 kV.

111. No opisani pojavi nisu jedine nesavršenosti realnih izolatora, niti su gubici energije što nastaju neutralizacijom zaostataka naboja od prethodnoga nabijanja jednim dijelom protivnih naboja od novoga nabijanja jedini gubici u kondenzatorima podvrgnutima izmjeničnim naponima. Osim a) ovih gubitaka javljaju se još kao izvori gubitaka: b) Jouleova toplina (toplina razvijena prolazom provodnih struja) od prolaženja elektriciteta kroz dielektrikum, jer materijalni izolatori pokazuju ipak određene neznatne vodljivosti za elektricitet, c) gubici (u visokonaponskim kondenzatorima) od »tihih izbijanja«, ionizacije tankih slojeva uzduha u slučaju nepotpunoga prilijeganja obloga uz površinu dielektrikuma (v. kasnije; A-116.), te slično. Uopće će gubici, a prema tomu i ugrijavanja, biti znatno veći kod priključka kondenzatora na izmjenične napone nego na slično velike istosmjerne.

Anticipirajući primijetimo već ovdje da se gubici u dielektrikumu podvrgnutom izmjeničnom električkom polju karakteriziraju (u praksi redovito neznatnim) t. zv. »*kutom gubitaka* kondenzatora« δ , koji predstavlja jedan od faktora u izrazu $N = U^2 \omega C \delta$ za učin N gubitaka u kondenzatoru kapaciteta C podvrgnutom izmjeničnom naponu »efektivne« vrijednosti U i kružne frekvencije ($= 2\pi$ -kratnika broja titraja na sekundu izmjeničnoga napona) ω .

Taj kut δ (obično se navodi $\text{tg} \delta$, koji je praktički jednak kao i $\sin \delta$ samom kutu δ u *lučnoj mjeri*, jer je ovaj neznatan) imao bi vrijednost 0 kod dielektrikuma bez ikakvih gubitaka; za prvorazredne tinjce $\text{tg} \delta \approx \delta$ kreće se oko 0,0002, dok neke druge dielektričke tvari, pa i one za koje se često misli da su dosta savršeni izolatori znadu imati, znatno veće dielektričke gubitke, dakle i znatno veći $\text{tg} \delta$; na pr. za porculan δ je 0,01 ili slično. Vrijednosti $\text{tg} \delta$ karakteristične su ne samo za pojedine izolatore, nego uglavnom uzeto i za kondenzatore s pojedinim tim izolatorima kao dielektrikumom, t. j. mjerenja na ma kako različitim kondenzatorima s istim dielektrikumom vodit će uglavnom na isti δ , karakterističan za taj dielektrikum (definicija $\text{tg} \delta$ i drugi detalji kod izmjeničnih struja).

112. Prema izloženomu potrebna su, da se karakterizira neki dielektrikum, barem tri podatka: ϵ' , F_p i $\text{tg}\delta$; katkad se navode još i »električka vodljivost« dielektrikuma (o kojoj ovisi, kolika će provodna struja između obloga kondenzatora teći kroz nesavršeni dielektrikum) i »specifički površinski električki otpor« (iz kojega se može zaključiti, koliko će struje između obloga teći po površini dielektrikuma). Za »dobru izolaciju« u elektrostatici prikladni su izolatori koji se osim malenom vodljivošću odlikuju posebno velikim površinskim otporom; o mjerenju površinskog otpora postoje određeni propisi.



Sl. 48.

Kod dielektričkih tvari za gradnju kondenzatora, koji su u tehničkoj praksi većinom podvrgnuti izmjeničnim naponima, pa i visokofrekventnima (radiofrekventnima), pored velikoga ϵ' i velikoga F_p važno je, dakako, da bude $\text{tg}\delta$ što manje.

Osim uzduha kao dielektrikuma (na pr. kod varijabilnih kondenzatora radiotehnike) upotrebljavaju se za gradnju kondenzatora tinjac, staklo, papir (»papirnati« kondenzatori po shemi u sl. 48., vrlo obični u praksi) itd., a u novije vrijeme i savremene keramičke materije prikladne i kod visokih frekvencija, kao frekventa, kalit, kondenza itd. (s primjesama spojeva magnezija ili titana; one između njih koje sadrže titanova oksida, na pr. kondenza, odlikuju se i tim da imaju $\epsilon' \approx 40$ do 80, dakle neobično veliko).

Odlični kondenzatori danas se grade i s organskim »umjetnim masama«, na pr. s folijama stirofleksa i sl.

O t. zv. *elektrolitičkim kondenzatorima* bit će kasnije govora (v. B-120.).

Povoljniju električku čvrstoću nego uzduh normalnoga tlaka imaju komprimirani uzduh ili dušik. Zato su kod nekih konstrukcija voltmetara za najviše napone elektrode smještene u komoricu s dušikom od na pr. 10 at, koji ima električku čvrstoću oko 200 kV/cm (jednaku onoj porculana).

113. Razmotrimo dalje *kuglasti kondenzator* s dvije koncentrične kugle polumjera R i R_1 s nabojima $+Q$ i $-Q$ i povoljnim dielektrikumom u prostoru među njima (sl. 49.). Ako je M točka udaljena od zajedničkoga središta O kugala za daljinu r ($R \leq r \leq R_1$), potencijal naboja $+Q$ na kugli polumjera R i naboja $-Q$ na kugli polumjera R_1 bili bi izraženi formulama u smislu izvodâ iz A-70., a napon između obih kugala polumjera R i R_1 bio bi:

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{R_1 - R}{RR_1}$$

po formuli $C = Q/U$ izlazi tako odmah:

$$C = \frac{4\pi\epsilon \cdot RR_1}{R_1 - R} \quad (63)$$

Ako je debljina sloja dielektrikuma $R_1 - R = d$ neznatna prema R , izlazi specijalno (zbog $R_1 \approx R$):

$$C = \epsilon \cdot 4R^2\pi/d = \epsilon \cdot S/d$$

dakle oblikom ista formula kao kod pločastoga kondenzatora (S ovdje znači površinu kuglastih obloga).

S druge strane uz $R_1 = \infty$, dakle uz kuglu polumjera R zamišljenu samu u prostoru, iščezava suptrahend u malo prije navedenoj diferenciji kojom je bio predložen napon U , pa izlazi $U = Q/4\pi\epsilon R$, dakle $C = 4\pi\epsilon R$. Specijalno u uzduhu uz upotrebu ESJ bilo bi: $\epsilon = \epsilon_0 = 1/4\pi$, dakle $C = R$, što je već u A-104. bilo primijenjeno.

114. Kod proračunavanja kapaciteta *cilindričkoga kondenzatora*, t. j. kondenzatora sastavljena od dva vrlo duga koaksijalna valjka polumjera R i R_1 i duljine l , s nabojima $+Q$ i $-Q$ i s, ma kakvim dielektrikumom u prostoru među njima, upotrebila bi se formula (30) iz A-60 uz $\lambda = Q/l$.

Za napon U između oba valjka (predložena na sl. 50. a) vrijedilo bi:

$$U = - \int_{R_1}^R F \cdot dx = - \int_{R_1}^R \frac{Q}{2\pi\epsilon l \cdot x} \cdot dx = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \cdot \ln \frac{R_1}{R} \quad (64)$$

i prema tomu bi bilo:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(R_1/R)} \quad (65)$$

Specijalno uz $R_1 - R = d$ vrlo maleno može se prirodni logaritam $\ln(R_1/R) = \ln(1 + d/R)$ razviti po poznatoj shemi:

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

u beskonačni red i zadržati samo prvi član reda d/R ; to daje:

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{d/R} = \epsilon \frac{S}{d}$$

dakle i opet formulu oblikom istu kao (62), samo što ovdje S znači površinu $2R\pi \cdot l$ obloga valjkastoga kondenzatora.

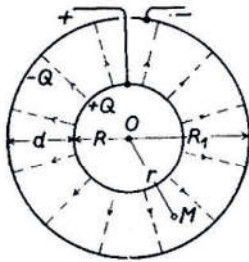
Po formuli (65) proračunavaju se na pr. kapaciteti *jednopolnih* (jednožilnih) *kabela*; R je onda polumjer vodiča kabela, koji dobiva neki određeni napon U prema zemlji (odnosno prema kabelskom oklopu unutarnjega polumjera R_1 koji je kod kabela položenoga u zemlju na potencijalu zemlje). Za kapacitet u F odn. μF po km duljine kabela izlazi po (65) zbog $l = 10^3$ (m) i $\epsilon = \epsilon_0\epsilon'$, te jer je u V-A-s-m-sustavu $2\pi\epsilon_0 \approx 10^{-9}/18$, numerička relacija:

$$C_1 = \frac{\epsilon'}{18 \cdot 10^9 \cdot \ln(R_1/R)} \text{ F/km} = \frac{\epsilon'}{18 \cdot \ln(R_1/R)} \mu F/\text{km} \quad (65')$$

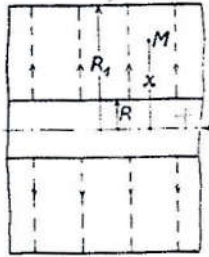
115. Koliku će debljinu d sloja dielektrikuma morati imati na pr. kuglasti kondenzator ili jednopolni kabel, to ovisi o njihovom naponu U i električkoj čvrstoći F_p

upotrebljenih dielektrika (kod kabela jake struje to je obično papir impregni-
ran uljem); obično se, zbog sigurnosti, traži da iznos F_m polja na mjestu gdje je
ono najjače ne prekorači neki iznos F' koji je određeni dio od F_p .

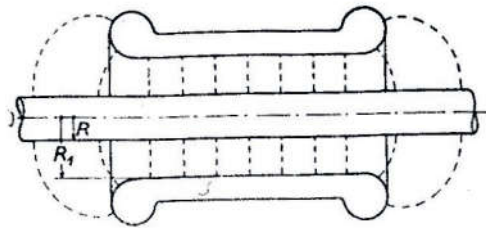
Međutim općenito nije dozvoljeno naprosto računati najmanji mogući d tako
da odgovara relaciji $F_m = U/d$, čak ni onda, ako bi se pretpostavila proporcio-
nalnost između debljine sloja i napona proboja dielektrikuma (bez obzira na ono
što je rečeno u A-109.). Razlog je tomu što se, protivno nego kod pločastih kon-



Sl. 49.



Sl. 50. a)



Sl. 50. b)

denzatora, polja u kondenzatorima kao po sl. 49. i sl. 50. a); i sličnima, ne mogu
smatrati homogenima. Na pr. kod kuglastoga kondenzatora po sl. 49. i cilindričkog
kondenzatora po sl. 50. a) najjače polje F_m uspostavi se u točkama tik uz nutarnji
oblog, jer se $\mathcal{D}$ -linije idući od nutarnjega obloga prema vanjskome šire.

Tako je lako izvesti općeniti izraz za polje F u daljini x od O po sl. 49. sa Q
izraženim s pomoću CU i sa C supstituiranim po (63); uzimajući onda $x = R$ do-
biva se dakle za kuglasti kondenzator:

$$F_m = UR_1/(R_1R - R^2)$$

Za cilindrički kondenzator (jednožilni kabel) račun pak teče ovako. Očito u
daljini x od osi po sl. 50. a) za polje F vrijedi: $F = Q/2\pi\epsilon l x$. Ako se ova relacija
proširi sa $\ln(R_1/R)$, brojnik postaje po (64) jednak $2\pi\epsilon l \cdot U$, pa F dobiva oblik:

$$F = \frac{U}{x \cdot \ln(R_1/R)} \quad (66)$$

uz $R < x < R_1$. Maksimum jakosti F_m postići će F za $x = R$:

$$F_m = \frac{U}{R \cdot \ln(R_1/R)} \quad (66')$$

Taj F_m , koji dielektrikum neposredno uz nutarnji oblog mora izdržati, može
biti mnogo veći od grubo (prosječno) računane vrijednosti U/d polja. Na pr. uz
 $U = 100$ kV, $R = 0,5$ cm, $R_1 = 4$ cm formula (66') daje $F_m = 100/(0,5 \times 2,08) =$
 $= 96$ kV/cm, dok bi vrijednost U/d bila samo: $U/d = 100/3,5 = 28,6$ kV/cm.

Specijalno računski jednostavan i za mjerne svrhe prikladan slučaj nastaje ako se uzme R_1/R upravo jednako bazi e prirodnih logaritama. Tada F_m postaje naprosto:

$$F_m = U/R = 2,718 \cdot U/R_1$$

Baš ovakvi uređaji s dva koaksijalna valjka, kod kojih vanjski valjak ima polumjer e-put toliki kao unutarnji, služe u prikladnoj izvedbi za ispitivanja električke čvrstoće plinova; v. sl. 50.b).

I tik uz površinu relativno tankih zračnih vodova pod vrlo visokim naponima treba očekivati jaka polja dovoljna za pojav »korone« (A-80.)

Dodajmo još da se zahvalni problemi ekstremnih vrijednosti dobivaju polazeći od gore izvedenih formula za F_m kuglastog i cilindričnog kondenzatora i tražeći, na pr. pri danima U i R_1 kondenzatora, te danom F_p i prema njemu odabranom F' (vidi str. 102.) njihova dielektrikuma, »najpovoljnije« R , uz koje bi se izišlo s najmanjom debljinom d dielektrikuma. Računi vode kod kuglastog kondenzatora na uvjet $R = R_1/2$, i kod jednožilnog kabela na $R = R_1/e = R_1/2,718$; uspor. i vj. 18. na str. 115.

116. Kako kod računa s električkom čvrstoćom treba biti oprezan, pokazuje i primjer kondenzatorâ s više slojeva različitih izolatora.

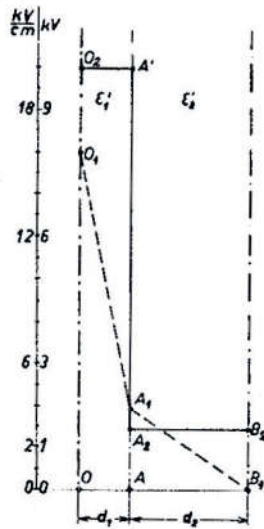
Ilustrirajmo prilike na primjeru dvoslojnog pločastog kondenzatora (sl. 41.) već spomenutom u A-92. Ako su $+Q$ i $-Q$ naboji na oblozima toga kondenzatora, te ako U predstavlja njegov ukupni napon, a U_1 i U_2 napone što otpadaju na jedan i drugi dielektrikum, za iznose F_1 i F_2 jakosti električkoga polja u oba dielektrikuma vrijedi s jedne strane po (56) iz A-92.: $F_1 : F_2 = \epsilon_2 : \epsilon_1$. S druge strane očito mora biti: $U = U_1 + U_2 = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2$.

Po prvom od ove dvije relacije jače električko polje vladat će u dielektrikumu manje dielektričke konstante, bez obzira na to što to može biti nepovoljno u slučajevima, koji uostalom odgovaraju prilikama kakve dolaze obično u praksi, da dielektrikum manje dielektričke konstante ima manju električku čvrstoću, umjesto veće, kakva bi bila poželjna kod dielektrikuma koji mora podnositi jače polje. U takvim slučajevima onaj koji je slabiji mora više podnositi, pa eventualno uopće ne podnese bez proboja, ako je U preveliko.

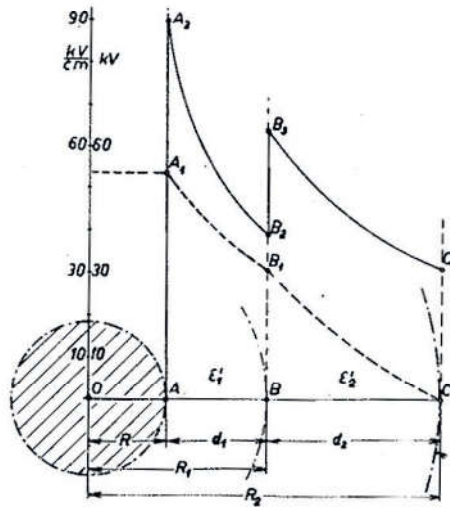
Ako je na pr. prvi dielektrikum u sl. 41. uzduh sa $\epsilon' \approx 1$ i $F_p \approx 30$ kV/cm, a drugi izvjesna vrst stakla sa $\epsilon' \approx 6$ te $F_p \approx 210$ kV/cm, bit će polje u uzduhu 6-put jače kraj 7-put manje probojne čvrstoće uzduha.

Osobito nepovoljna situacija može nastati ako se uzduh pokuša potpuno nadomjestiti staklom, pa preostane još vrlo tanki sloj uzduha između staklene ploče i obloga kondenzatora. Kod dovoljno velikoga U nastaju kod toga tako jaka električka naprezanja tankog sloja uzduha da dolazi do ionizacije toga sloja, stvaranja topline itd., što konačno može uništiti i cijeli kondenzator. Prema tomu treba da oblozi visokonaponskih kondenzatora priliježu potpuno (bez zračnih međuprostora) uz ploče izolatora, te kod izradbe visokonaponskih kondenzatora i kabela ne smije zaostati u impregnaciji zračnih mjehurića i slično. A i inače kod izradbe kabela s više slojeva različitih izolatora treba voditi računa o relaciji (56), pazeći da jačim poljem bude napregnut dielektrikum veće električke čvrstoće.

Sve jača naprežanja sve tanjih slojeva uzduha uz stalan ukupni napon U i stalan ukupni razmak d obloga kondenzatora po sl. 41. pokazuje lijepo ovaj numerički primjer: Neka bude $U = 8 \text{ kV}$, $d = 1 \text{ cm}$, $\epsilon'_1 = 1$ (uzduh), $\epsilon'_2 = 7$ (staklo). Ako se sad redom uzmu za debljinu d_1



Sl. 51.a)



Sl. 51.b)

sloja uzduha 1; 0,5; 0,3 i 0,1 cm (i prema tomu kao debljine $d_2 = d - d_1$ sloja stakla 0; 0,5; 0,7 i 0,9 cm), lako se iz relacija $F_1 : F_2 = \epsilon'_2 : \epsilon'_1$ i $U = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2$ izračuna polje F_1 u uzduhu. Izlaze redom iznosi 8, 14, 20 i 35 kV/cm, od kojih posljednji već nadvisuje probojnu čvrstoću uzduha. Za treći od promatrana četiri slučaja, onaj sa $d_1 = 0,3 \text{ cm}$ i $d_2 = 0,7 \text{ cm}$, grafički su u sl. 51.a) naznačeni odnosi polja (izvučeni) i potencijala (crtkano); polje u prvom dielektriku ostaje konstantno 20 kV/cm, i u drugom konstantno 2,86 kV/cm. A po-

tencijal pada u prvom dielektriku linearno od 8 do 2 kV, a u drugom od 2 do 0 kV (desni oblog kondenzatora smatrati uzemljenim). Ima i analognih računa dvo- i višeslojnih cilindričkih kondenzatora; grafički su pripadni odnosi za jedan takav slučaj predloženi na sl. 51.b); i tu variraju polja F po izvučenoj i potencijali V po crtanoj krivulji. Radi se o 300 m dugom jed-nopolnom dvoslojnom kabelu sa $R-d_1-d_2$ iznosâ 3-4-7 mm, sa $\epsilon'_1 = 5$ i $\epsilon'_2 = 3$, te s maksimum polja u prvom sloju 90 kV/cm. Izlaze: $C = 41,7 \text{ nF}$ i $U = 54 \text{ kV}$, a F i V variraju po sl. 51.b).

117. I vodiči nekoga zračnoga voda (visoko nad zemljom, da se njezin utjecaj može zanemariti) mogu se shvatiti kao elektrode nekoga kondenzatora s uzduhom kao dielektrikumom ($\epsilon' \approx 1$; $\epsilon \approx \epsilon_0$), pa i danoj duljini l takvoga voda pripada određeni kapacitet C .

Evo kako se taj kapacitet računa. Neka r znači iznos polumjera obih paralelnih vodiča s razmakom osi $O_1O_2 = d$, nabijenih raznoimenim jednakim nabojima linearne gustoće $\lambda = Q/l$.

U točki M (sl. 52.) na O_1O_2 udaljenoj za x od O_1 i za $d - x$ od O_2 ukupno polje F bit će jednako zbroju polja F_1 i F_2 od prvoga i drugoga vodiča (zbog protivnih naboja obih vodiča ta se polja pomažu u djelovanju). To daje, po (30) iz A-60.:

$$F = F_1 + F_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l x} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l (d - x)}$$

Za napon U između točaka N_1 i N_2 na O_1O_2 , dakle općenito za napon kondenzatora, moći će se dakle pisati:

$$U = - \int_{d-r}^r F \cdot dx = + \int_r^{d-r} (F_1 + F_2) \cdot dx$$

Kad se naznačene supstitucije izvedu i rezultat uredi, izlazi:

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot \left[\ln x - \ln(d-x) \right]_{x=r}^{d-r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot 2 \ln \frac{d-r}{r}$$

što dalje daje:

$$U = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 l} \cdot \ln \frac{d-r}{r}$$

i prema tomu konačno:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{d-r}{r}}$$

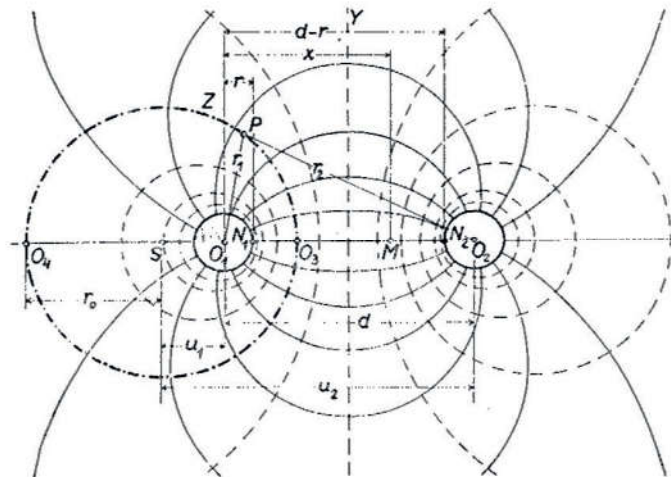
Cijeli je račun dovoljno točan samo ako je r vrlo maleno prema d (inače dolaze do izražaja nesimetrije zbog većih gustoća naboja na međusobno okrenutim stranama obih vodiča, pa se za »geometrijske« osi vodiča s tragovima O_1 i O_2 ne može više uzeti da se praktički podudaraju s »električkim« osima). Možemo se dakle ograničiti na taj slučaj, koji je baš važan za praksu; tada je dopušteno staviti d mjesto $d-r$, pa se za kapacitet voda duljine l od dva vodiča polumjera r i razmaka d dobiva izraz:

$$C = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{d}{r}} \quad (67)$$

Za kapacitet C_1 u faradima po km duljine voda treba staviti u (67) $l = 10^3$ (m) pa, uz $\pi\epsilon_0 \approx 10^{-9}/36$ (u V-A-s-m-sistemu), izlazi numerička relacija:

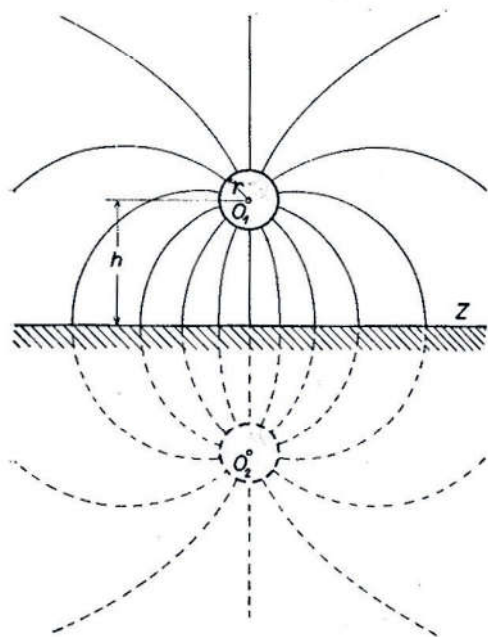
$$C_1 = 1/[36 \cdot 10^9 \cdot \ln(d/r)] \text{ F/km} = 1/[36 \cdot \ln(d/r)] \text{ } \mu\text{F/km} \quad (67')$$

118. Proračunavanje kapaciteta horizontalnoga vodiča polumjera r u visini h nad zemaljskom površinom da se lako svesti na slučaj voda s dva vodiča daleko od zemlje. Naime dio sl. 53. koja prikazuje ovakav vodič duljine l i naboja $+Q$ nad zemljom Z , i $\mathcal{D}$ -linije između njega i zemlje, potpuno odgovara dijelu slike 52. lijevo od ravnine simetrije Y . Zemlja Z u sl. 53. igra ulogu ravnine simetrije Y iz sl. 52. (obima pripada potencijal $V=0$). Može se dakle primijeniti »metoda odslikavanja« (metoda zrcaljenja), da se problem sl. 53. svede na problem sl. 52. t. j. može se zamisliti s druge strane zemaljske površine kao ravnine simetrije vodič simetričan s promatranim,



Sl. 52.

ali nabijen nabojem $-Q$, dakle neke vrsti »slika« promatranoga vodiča sa zemljom Z kao »zrcalom« (u ovom slučaju: »ravnim zrcalom«). Taj zamišljeni vodič i $\mathcal{D}$ -linije između njega i zemlje naznačene su crtkano na sl. 53.



Sl. 53.

Promatrani vodič i njegova slika izvide tako isto polje (iste $\mathcal{D}$ -linije) u prostoru iznad Z kao sam taj vodič i zemlja Z. No treba (uz Z uzeto na potencijalu nula) uzeti u obzir da je na sl. 52. bila U diferencija potencijala između oba vodiča, pa je prema tome diferencija potencijala između jednoga vodiča i ravnine Y bila $U/2$. Uz isti naboj Q na vodiču na sl. 53. treba dakle potencijal uzeti samo u polovici vrijednosti. A da Q ostane isto, po relaciji: »naboj = potencijal $\times$ kapacitet« treba kapacitet uzeti dvostruko. Osim toga na sl. 53. odgovara h polovici iznosa d na sl. 52., tako da treba staviti $d = 2h$. Ako se uzmu u obzir označene promjene na formulama (67) i (67'), izlaze za tražene iznose ukupnoga kapaciteta

C i kapaciteta C_1 po km duljine voda (uz r neznatno prema h , dakle $2h - r$ približno jednako $2h$) formule (68) i (68'). Prva glasi:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(2h/r)} \quad (68)$$

Za kapacitet C_1 u F po km duljine vrijedi numerička relacija:

$$C_1 = 1/[18 \cdot 10^6 \cdot \ln(2h/r)] \text{ F/km.} \quad (68')$$

119. Metoda odslikavanja daje se primijeniti i uz druge niveau-plohe uzete kao »zrcala«. Ako na pr. treba naći u kojemu god dielektrikumu apsolutne dielektričke konstante ϵ sliku naboja $+Q$ uz točka-crtkano na sl. 52. naznačenu niveau-plohu s tragom Z zamišljenu kao zrcalo, dosta je sjetiti se da u ma kojoj točki P s udaljenostima r_1 od O_1 i r_2 od O_2 za polja F' i F'' linearnih naboja $+Q$ i $-Q$ na osima s tragovima O_1 i O_2 vrijedi formula (30) uz $x = r_1$ i $x = r_2$, te $\lambda_1 = +Q/l$ i $\lambda_2 = -Q/l$, a za pripadne potencijale izlazi $-\int F' \cdot dr_1$ i $-\int F'' \cdot dr_2$, tako da se za ukupni potencijal V u točki P može staviti (uz $V = 0$ pripisivano niveau-plohi Y):

$$V = -\frac{Q}{2\pi\epsilon l} \left(\int \frac{dr_1}{r_1} - \int \frac{dr_2}{r_2} \right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (69)$$

Kako na cijeloj niveau-plohi Z potencijal V izražen relacijom (69) ostaje konstantan, ta ploha predstavlja geometrijsko mjesto točaka u kojima kvocijent r_2/r_1 zadržava neku konstantnu vrijednost k .

Jednostavno geometrijsko razmatranje pokazuje, da ploha Z koja zadovoljava uvjetu $r_2/r_1 = k$ mora biti cilindrička ploha, kojoj je trag u ravnini crtanja kružnica (t. zv. Apolonijeva kružnica). Ta kružnica, kojoj središte S leži na pravcu kroz O_1 i O_2 , siječe spomenuti pravac u točkama O_3 i O_4 . Prema tomu se radi o cilindričko-sfernoj plohi zrcaljenja Z . Mora dakle, ako r_0 znači polumjer kružnice, a u_1 i u_2 su udaljenosti središta S kružnice od O_1 i O_2 , vrijediti (zbog $r_2/r_1 = k$) relacija:

$$(u_2 - r_0) : (r_0 - u_1) = (r_0 + u_2) : (r_0 + u_1)$$

koja uređena vodi na jednostavni odnos:

$$u_1 u_2 = r_0^2 \quad (70)$$

S pomoću vrlo važnog uvjeta (70), zvanoga također »zakonom recipročnih polumjera«, moguće je po volji odabranima iznosima u_1 i r_0 odrediti korespondentni u_2 , t. j. povoljnom linearnom naboju $+Q$ uz jednu od njegovih niveau-ploha uzetu kao zrcalo odrediti položaj onoga linearnog naboja $-Q$ koji predstavlja njegovu sliku; primjene formule (70) v. na pr. u A-125. i A-126.

Kad uz fiksno $O_1 O_2$ konvergira $k = r_2/r_1$ k jedinici, S odmiče u beskonačnost i r_0 teži k ∞ , pa niveau-ploha s tragom Z u sl. 52. degenerira u ravninu Y .

120. Kombiniranjem više kondenzatora mogu se proizvesti novi kapaciteti, koji će već prema upotrebljenom spoju biti veći ili manji od kapaciteta upotrebljavanih kondenzatora. Spajanja mogu biti uglavnom: a) paralelna, b) serijska; no moguća su dakako kod više od dva kondenzatora i c) mješovita spajanja, t. j. kombinacije spojeva iz a) i b).

Kod *paralelnoga spajanja* (spajanja po površini) spoje se svi plus-oblozi pojedinih kondenzatora međusobno i svi minus-oblozi međusobno po shemi u sl. 54.a). Ako su $C_1, C_2, C_3, \dots$ kapaciteti pojedinih kondenzatora, takva kombinacija djeluje kao jedan jedini kondenzator kapaciteta:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (71)$$

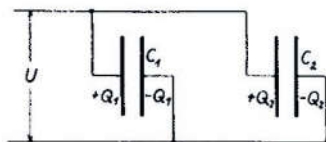
t. j. kod paralelno spojenih kondenzatora kapaciteti se naprosto zbrajaju. Tako na pr. kondenzator od 4 mikrofara i kondenzator od 1 mikrofara daju paralelno spojeni kombinaciju kapaciteta 5 mikrofara.

Dokaz formule (71): napon U isti je za sve paralelno spojene kondenzatore, pa ako su Q_1, Q_2 itd. naboji tih kondenzatora, vrijedi: $Q_1 = C_1 U$, $Q_2 = C_2 U$ itd., dakle $Q = (C_1 + C_2 + \dots) \cdot U = CU$.

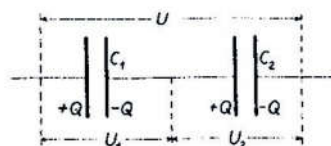
U specijalnom slučaju kad su svi kondenzatori jednakoga kapaciteta C_1 , a svega se njih n paralelno spoji, izlazi $C = n \cdot C_1$. Na pr. »baterija« od 10 paralelno spojenih kondenzatora po 2 mikrofara ima kapacitet 20 mikrofara.

121. Kod *spajanja u seriju* (u kaskadu) spaja se po volji mnogo kondenzatora kapaciteta C_1, C_2 itd. po principu naznačenomu u sl. 54.b) na primjeru dvaju kondenzatora.

Ako se oba pola ovakve serijske kombinacije priključe na izvor elektriciteta stalnoga napona U , pa lijevi oblog prvoga kondenzatora u sl. 54. primi naboj $+Q$, taj naboj $+Q$ vezat će influencijom na desnom oblogu prvoga kondenzatora naboj $-Q$, dok će nevezani naboj influencije $+Q$ otići na lijevi oblog drugoga kondenzatora i vezati na desnom oblogu toga kondenzatora naboj $-Q$; slično za dalje kondenzatore, ako ih ima više od dva. Naboj će dakle u svim kondenzatorima



Sl. 54. a)



Sl. 54. b)

biti isti, tako da se kod ukupno n kondenzatora može staviti, ako znače: V_0 potencijal lijeve elektrode prvoga kondenzatora, V_1 zajednički potencijal desne elektrode prvoga i lijeve elektrode drugoga kondenzatora, itd., te ako su U_1 , U_2 itd. naponi pojedinih kondenzatora:

$$\begin{aligned} V_0 - V_1 &= U_1 = Q/C_1 \\ V_1 - V_2 &= U_2 = Q/C_2 \\ &\dots \dots \dots \\ V_{n-1} - V_n &= U_n = Q/C_n \end{aligned}$$

Ako se zbroji ovih n jednadžbi i dobiveni izraz uredi uzevši u obzir da razlika $V_0 - V_n$ nije drugo nego U , dobiva se:

$$U = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \right)$$

dok bi za jedan jedini kondenzator kapaciteta C , koji bi se istim nabojem Q nabio na isti napon U vrijedilo: $U = Q \cdot \frac{1}{C}$. Odavde odmah slijedi da je serijska kombinacija ekvivalentna po iznosu kapaciteta kondenzatoru kapaciteta C takvoga da je:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (72)$$

t. j. kod serijskoga spajanja recipročna vrijednost proizvedenoga kapaciteta jednaka je sumi recipročnih vrijednosti kapaciteta pojedinih kondenzatora serijskoga spoja.

Tako na pr. kondenzator od 4 mikrofara i kondenzator od 1 mikrofara spojeni u seriju daju kapacitet $C=0,8$ mikrofara ($1/C=1/4+1/1=5/4$; $C=4/5$); uostalom kod samo dva kondenzatora može se (72) preudeliti i u oblik:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (72')$$

koji dopušta da se C izračuna neposredno, a ne preko $1/C$.

Kod n jednakih kapaciteta C_1 vodi (72) na relaciju: $C = C_1/n$. Tako 10 jednakih kondenzatora po $2 \mu\text{F}$ u seriji čine $0,2 \mu\text{F}$; no svaki od tih 10 kondenzatora mogao bi biti građen samo za desetinu ukupnoga napona U narinutoga serijskoj kombinaciji.

122. Kako slijedi iz izvoda formule (72), odnosili bi se »parcijalni« naponi U_1 , U_2 itd. serijski spojenih kondenzatora obrnuto kao pripadni kapaciteti C_1 , C_2 itd. To se može iskoristiti za različite svrhe. Ako se na pr. paralelno kondenzatoru kapaciteta C_1 priključi elektrometar E , koji pokaže napon U_1 toga kondenzatora, zamišljenoga u serijskom spoju s nekim drugim kondenzatorom kapaciteta C_2 koji neka je podvrgnut ostatku $U - U_1$ ukupnoga napona cijele kombinacije U , vrijedit će: $U_1 C_1 = (U - U_1) \cdot C_2$, odnosno:

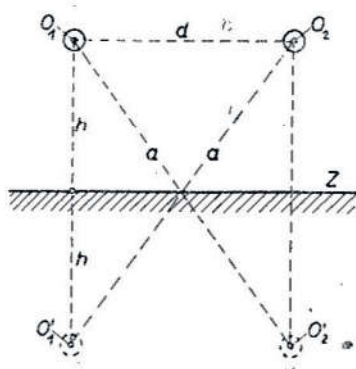
$$U = \frac{U_1 (C_1 + C_2)}{C_2} \quad (73)$$

pa će se iz očitavanja na E iznosa U_1 moći zaključiti (uz poznate C_1 i C_2) na možda mnogo veći U , koji već leži izvan dosega mjerenja elektrometra E (proširenje »mjernih opsega« elektrometara *kapacitivnim dijeljenjem napona*; kapacitet C_0 elektrometra E neka je zanemariv prema C_1 ili uračunan u C_1).

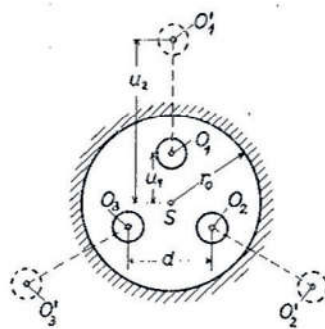
Ova razmatranja o podjeli napona na pojedine članove serijskoga spoja kondenzatora vrijede strogo tek uz savršeni dielektrikum kondenzatora. Serijski kombinirani kondenzatori s nesavršenim izolatorima različitih električkih vodljivosti, a kod izmjeničnih struja s izolatorima različitih $\text{tg} \delta$, mogu dati znatna odstupanja od podjela napona kakve bi odgovarale relaciji (73).

123. Zapleteniji je problem, kad treba izračunati kapacitet od više nego dvije elektrode nabijene na različite potencijale. U tom slučaju nastupa niz međusobnih djelovanja elektroda jednih na druge, pa se moraju uvesti t. zv. *parcijalni kapaciteti* (djelomični kapaciteti).

Ilustrirajmo, na relativno jednostavnim slučajevima: a) horizontalnoga voda od dva vodiča bliza zemlji i b) tropolnoga kabla, kako se primjenom »metode odslikavanja« iz A-118. i A-119. dadu proračunavati parcijalni kapaciteti.



Sl. 55.



Sl. 56.

Neka je po shemi u sl. 55. dan horizontalni vod duljine l s dva vodiča jednakih polumjera iznosa r , neznatnoga prema razmaku d tih vodiča kao i u sl. 52., ali visinâ jednakog iznosa h nad zemljom tako malenoga da se utjecaj zemlje na vo-

diče ne može zanemariti. Linearni naboji Q_1 i Q_2 obih vodiča, zamišljeni transponirani na osi tih vodiča s tragovima O_1 i O_2 , mogu se zamisliti odslikani, uzimajući zemlju Z kao zrcalo, linearnim nabojima $-Q_1$ i $-Q_2$, simetrično raspoređenima na osima s tragovima O'_1 i O'_2 . Za naboje $+Q_1$ i $-Q_1$ s jedne strane i naboje $+Q_2$ i $-Q_2$ s druge strane vrijedi za svaku točku polja relacija (69), pa ako se specijalno zamisli točka na površini vodiča s nabojem Q_1 udaljena: od O_1 za r , od O'_1 uz $r \ll h$ vrlo približno za $2h$, od O_2 približno za d , te od O'_2 približno za $a = \sqrt{d^2 + 4h^2}$, mora za pripadni potencijal V_1 (kraj $\epsilon = \epsilon_0$) vrijediti jednačba:

$$V_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot \left(Q_1 \cdot \ln \frac{2h}{r} + Q_2 \cdot \ln \frac{a}{d} \right)$$

Analogno se za drugi vodič može pisati:

$$V_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot \left(Q_1 \cdot \ln \frac{a}{d} + Q_2 \cdot \ln \frac{2h}{r} \right)$$

Rješavanjem obiju dobivenih jednačbi po Q_1 i Q_2 dobiva se:

$$Q_1 = \frac{2\pi\epsilon_0 l \cdot V_1 \cdot \ln \frac{2h}{r} - 2\pi\epsilon_0 l \cdot V_2 \cdot \ln \frac{a}{d}}{\left(\ln \frac{2h}{r} \right)^2 - \left(\ln \frac{a}{d} \right)^2}$$

i analogno za Q_2 . Dodavajući i istodobno oduzimajući binomu u brojniku izraza za Q_1 član $2\pi\epsilon_0 l \cdot V_1 \cdot \ln \frac{a}{d}$ otvara se mogućnost da se Q_1 predoči u obliku:

$$Q_1 = K_{10} \cdot V_1 + K_{12} \cdot (V_1 - V_2)$$

Slično se predezbom izraza za Q_2 može dobiti Q_2 u obliku:

$$Q_2 = K_{20} \cdot V_2 + K_{21} \cdot (V_2 - V_1)$$

Međutim V_1 i $V_1 - V_2$ predstavljaju *napone* prvoga vodiča prema zemlji i prema drugomu vodiču, a V_2 i $V_2 - V_1 = -(V_1 - V_2)$ *napone* drugoga vodiča prema zemlji i prema prvom vodiču, pa se pripadni faktori K_{10} i K_{12} u izrazu za Q_1 zovu parcijalni kapaciteti prvoga vodiča prema zemlji i prema drugom vodiču, dok faktori K_{20} i K_{21} u izrazu za Q_2 predstavljaju parcijalne kapacitete drugoga vodiča prema zemlji i prema prvom vodiču.

Nakon provedbe gore naznačenih operacija i uređenja dobivenih izraza dobiva se za promatrani slučaj horizontalnoga voda nad zemljom:

$$K_{12} = K_{21} = \frac{2\pi\epsilon_0 l \cdot \ln \frac{a}{d}}{\ln \left(\frac{2h}{r} \cdot \frac{a}{d} \right) \cdot \ln \left(\frac{2h}{r} \cdot \frac{d}{a} \right)} \quad (74)$$

$$K_{10} = K_{20} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \left(\frac{2h}{r} \cdot \frac{a}{d} \right)} \quad (75)$$

Također kod voda s različitim visinama h_1 i h_2 obih vodiča nad zemljom (i inače) bilo bi: $K_{12} = K_{21}$; no K_{10} i K_{20} bi se dakako razlikovali.

124. Kod određenoga načina upotrebe nekoga sustava vodiča od interesa je poznavati t. zv. *pogonski kapacitet* toga sustava.

Ako na pr. horizontalni vod s dva vodiča P i N polumjera r i razmaka d u visinama h_1 i h_2 nad zemljom Z predstavlja vod istosmjerne struje napona U , u kojemu prvi (pozitivni) vodič nosi naboj $Q_1 = +Q$, a drugi (negativni) naboj $Q_2 = -Q$, pogonskim kapacitetom zove se kvocijent $C = Q/U$. Pri tomu očito kapacitetu C ne pridonosi samo neposredna kapacitivna veza P-N karakterizirana parcijalnim kapacitetom K_{12} , nego i toj vezi paralelna posredna kapacitivna veza P-Z-N karakterizirana serijskim spojem parcijalnih kapaciteta K_{10} i K_{20} , dakle po (72') iz A-121. kapacitetom $K_{10}K_{20}/(K_{10} + K_{20})$.

Prema tomu će za specijalni slučaj horizontalnoga voda iz sl. 55., kod kojega se zbog $h_1 = h_2$ može odmah staviti $K_{10} = K_{20}$, vrijediti: $C = K_{12} + K_{10}/2$, pa će, nakon supstituiranja vrijednosti K_{12} i K_{10} iz (74) i (75) i uređenja dobivenoga izraza, konačno izići:

$$C = \frac{\pi \epsilon_0 l}{\ln \left(\frac{d}{r} \cdot \frac{2h}{a} \right)} \quad (76)$$

Izrazi (76) i (67) za horizontalni vod s uzetim u obzir utjecajem zemlje i zanemarenim tim utjecajem razlikuju se samo tim, što u nazivniku prvoga dolazi $\ln(d/r) + \ln(2h/a)$, a u nazivniku drugoga $\ln(d/r)$. Prema tomu uz $2h/a \approx 1$ [dakle: $\ln(2h/a) \approx 0$] postaje zanemariv utjecaj zemlje i smije se upotrebljavati formula (67). Tako na pr. kod $r = 0,2$ cm, $d = 25$ cm, $h = 400$ cm zanemarenjem člana:

$$\ln 2(h/a) = \ln(2h/\sqrt{4h^2 + d^2}) = \ln(800/800,4)$$

nastaje pogreška od jedva 0,01%.

125. U slučaju tropolnoga kabla sa simetrično raspoređenim vodičima i oklopom kružnoga presjeka po shemi u sl. 56. parcijalni kapaciteti našli bi se metodom odslikavanja naboja Q_1, Q_2, Q_3 zadanih vodiča na sličan način. Ovi naboji, zamišljeni preneseni na osi svojih vodiča s tragovima O_1, O_2, O_3 , mogu se odslikati naboja $-Q_1, -Q_2, -Q_3$, na osima s tragovima O'_1, O'_2, O'_3 , uzimajući za zrcalnu niveau-plohu analognu plohi Z iz sl. 52. nutarnju površinu kabelskoga oklopa, s krugom središta S i polumjera r_0 u sl. 56. kao tragom.

Uz poznato $u_1 = O_1S = O_2S = O_3S$ udaljenost $u_2 = O'_1S = O'_2S = O'_3S$ slijedi odmah primjenom zakona recipročnih polumjera (70) iz A-119. A potencijali V_1, V_2, V_3 triju vodiča kabla (uz potencijal oklopa uzet jednak nuli) slijedili bi slično kao u A-123. primjenom formule (69) iz A-119.

Kako će zbog simetrije parcijalni kapaciteti K_{12}, K_{13}, K_{23} između vodiča u sl. 56. imati istu vrijednost K , a isto tako parcijalni kapaciteti K_{10}, K_{20}, K_{30} vo-

diča prema zemlji istu vrijednost K_0 , metodom postupanja sličnom kao u A-123. dobile bi se u promatranom slučaju ove relacije:

$$\begin{aligned} Q_1 &= V_1 K_0 + (V_1 - V_2) K + (V_1 - V_3) K \\ Q_2 &= V_2 K_0 + (V_2 - V_1) K + (V_2 - V_3) K \\ Q_3 &= V_3 K_0 + (V_3 - V_1) K + (V_3 - V_2) K \end{aligned}$$

iz kojih se K i K_0 mogu izračunati slično kao u A-123. Uz $u_1 = a$, $u_2 = b$, $O_1 O_2 = d = a\sqrt{3}$ i $O_1 O_2' = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$ izlaze za K i K_0 određeni izrazi, koje ne ćemo na ovom mjestu potanje navoditi.

126. Specijalno bi se graničnim prelazom na beskonačno r_0 i istodobnom specijalizacijom od ϵ na ϵ_0 dobile iz izrazâ za K i K_0 i formule za parcijalne kapacitete trofaznoga simetričnog *uzdušnog voda*, dalekog od zemlje. Rezultat bi bio:

$$K = -\frac{2\pi\epsilon_0 l}{3 \cdot \ln \frac{a\sqrt{3}}{r}} \quad (77) \quad K_0 = 0 \quad (78)$$

127. Svaki nabijeni kondenzator sijelo je određene količine energije. Za tu energiju treba uzimati da se proizvede radnjom izvršenom kod nabijanja kondenzatora i lokalizira kod stvaranja polja kondenzatora u njegovu dielektrikumu, te da se oslobađa kod izbijanja kondenzatora i razgrađivanja polja u kondenzatorovu dielektrikumu. Kao ekvivalent za energiju oslobođenu izbijanjem kondenzatora javljaju se drugi oblici energije: toplina ugrijavanja vodiča kroz koji se kondenzator izbijaju; u slučaju »iskre izbijanja«: toplina, svjetlost i zvuk iskre, i drugo.

Za ukupnu množinu A energije nakrcane u kondenzatoru kapaciteta C nabijenom na napon U množinom elektriciteta Q lako je izvesti tri međusobno ekvivalentna izraza (koji se svi u praksi upotrebljavaju, već prema tomu koje se dvije veličine između triju vezanih relacijom $Q = CU$ zadadu):

$$A = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} \quad (79)$$

Bit će dovoljno izvesti jedan od tri izraza (79) za A , jer iz ma kojega od njih ostala dva neposredno slijede primjenom relacije $Q = CU$.

Neka napon kondenzatora kapaciteta C rastući tokom procesa nabijanja od početnoga iznosa 0 do konačnoga U ima u određenom momentu iznos u . Pripadni naboj, koji neka tokom nabijanja raste od 0 do Q , bit će $q = C \cdot u$. Ako sada napon kondenzatora treba da dalje poraste za iznos du , može se to zamisliti izvedeno oduzimanjem pozitivnoj elektrodi i prenošenjem na negativnu iznosa $dq = C \cdot du$ negativnoga naboja, odnosno pripadnoga broja elektrona, dakle transportom količine elektriciteta apsolutnoga iznosa $C \cdot du$ za razliku potencijala u . No po (54) u A-89. ovakav je transport skopčan s vršenjem radnje $dA = dq \cdot u = C \cdot u \cdot du$.

Ukupna pak radnja A za cijelo nabijanje kondenzatora dobila bi se integracijom izraza $C \cdot u \cdot du$ od 0 do U :

$$A = \int_0^U C \cdot u \cdot du = \frac{CU^2}{2}$$

Kako se energija nabijenoga kondenzatora javlja u obliku energije dielektrikuma, veličina A se može izraziti i integralom (59) iz A-98. protegnutim na cijeli dielektrikum kondenzatora.

Za pločasti kondenzator, kod kojega je polje homogeno i ograničeno na volumen $S \cdot d$, integral (59) vodi čak neposredno na izraz (79), jer u tom specijalnom slučaju (59) daje:

$$A = \frac{\epsilon F^2}{2} \cdot S \cdot d = \frac{\epsilon U^2}{2d^2} \cdot S \cdot d = \frac{CU^2}{2}$$

Evo primjera za energije nabijenih kondenzatora, kakve je lako realizirati u praksi (i za velike učine, koji se dobivaju brzim oslobađanjem tih energija). U kondenzatoru sa $C = 2 \mu\text{F} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ nabijenu na $10 \text{ kV} = 10^4 \text{ V}$ nakrcana energija iznosi:

$$A = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 / 2 = 100 \text{ Ws} (\approx 10 \text{ kg} \cdot \text{m})$$

Ako bi se kondenzator izbio u vremenu od 0,001 s, prosječni učin za vrijeme izbijanja bio bi: $N = 100/0,001 \text{ W} = 100000 \text{ W} = 100 \text{ kW} = 136 \text{ KS}$ (konjskih snaga). Energije oslobodene naglim izbijanjima kondenzatorâ vrlo velikih kapaciteta, nabijenih na visoke napone, mogu se iskoristiti za proizvodnje vanredno jakih svjetlosnih bljeskova (fotografiranja na pr. taneta u lijetu osvjetljenog električkom iskrom; «elektronski bljeskovi» i «elektronski stroboskopi» sa flash-cijevima punjenima na pr. ksenonom: prvi služe za fotografske snimke, drugi za ispitivanja recimo nepravilnosti kod brzih rotacija na bazi «stroboskopskog efekta» i sl.).

Primjer: Elektronski bljesak (flash) sa $C = 600 \mu\text{F}$ i $U = 520 \text{ V}$ kod svakog izbijanja daje po (79) energiju oko 80 J (Ws) , kojom se mogu proizvesti bljeskovi srednjeg toka svjetlosti na pr. 1000000 «lumena» (v. B-85.) i trajanja na pr. 4 milisekunde, dakle svjetlosni udari od 4000 lumenskundi, a ti bi baš bili prikladni za brze fotografske moment-snimke.

VJEŽBE UZ POGLAVLJE A):

1. Neka se potanko razradi izvod formule (31) iz Coulombova zakona po smjericama u A-60. i na bazi sl. 25.

$$\left[F = \int dF' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_1} \frac{D \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi}{r^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} \text{ daje, do kraja izračunano, (31)} \right]$$

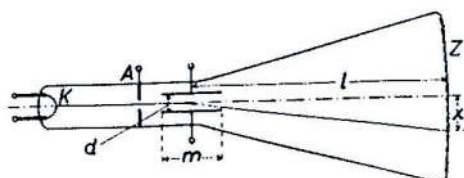
2. Neka se nade izraz za jakost polja F u točki M na sl. 25. na taj način da se po formuli (40') izračuna potencijal V u M, a iz V se na F zaključi primjenom relacije (43). [Rezultat: formula (31)]

3. Neka se neposredno primjenom formule (40') izračuna potencijal V naboja Q na kugli polumjera R_0 za točke M a) u daljini $r \geq R_0$ b) u daljini $r \leq R_0$ od središta kugle. [Rezultat kao u A-70. i sl. 31.]

4. Dvije kugle promjera 125 mm s razmakom središta 5 m, daleko od zemlje, nabijene su jednakim po iznosu i protivnim po predznaku nabojima na +110 kV i -110 kV; naći (približno): a) iznos naboja kugala, b) polje neposredno uz površinu kugala, c) silu međusobnoga privlačenja tih kugala.

[a) $0,764 \mu\text{As}$; b) $17,6 \text{ kV/cm}$; c) $210 \cdot 10^{-6} \text{ N} (= 0,0214 \text{ g}^*)$

5. Koliku će brzinu v približno postići elektroni emitirani iz užarene katode cijevi za katodne zrake uz »anodni napon« (napon anode A prema katodi K; sl. 57.)



Sl. 57.

$U_a = 1500 \text{ V}$. Ako se pramen proizvedenih katodnih zraka nakon prolaza kroz otvor anode propusti kroz otklonski sustav od dvije paralelne pločice duljine $m = 2 \text{ cm}$ i razmaka $d = 0,8 \text{ cm}$ podvrgnut »mjernom naponu« $U = 100 \text{ V}$, koliki će to dati pomak x svijetle mrlje na svjetlucavom zastoru Z cijevi udaljenom

$l = 21 \text{ cm}$ od središta otklonskoga sustava.

[$v = 593000 \cdot \sqrt{U_a} \text{ m/s} = 23000 \text{ km/s}$; $x = Uml/2U_a d = 17,5 \text{ mm}$]

6. Kod mjerenja jakosti polja po shemi u sl. 15. galvanometar sa $C_B = 1,64 \text{ nAs}$ po dijelu skale» dao je uz zakret za 180° sustava ploča A i B sa $S = 200 \text{ cm}^2$ otklon $\alpha = 8,0 \text{ d. sk.}$; naći naboj ploča i mjereno polje. [6,56 · 10⁻⁹ As; 370 V/cm]

7. Koliki napon (prikladnoga predznaka) treba dati pločastom kondenzatoru s razmakom ploča 2 cm, da u njegovu polju baš lebdi uljna kapljica mase $1,02 \cdot 10^{-15} \text{ kg}$ nabijena sa 5 elementarnih naboja Q_0 . [250 V]

8. Izvesti izraze za $\text{div } \mathcal{F}$ i za $\Delta V (= \text{div grad } V)$ u cilindričkim koordinatama z, r, φ .

$$\left[\text{div } \mathcal{F} = \frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}; \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right]$$

9. Dokazati relaciju: $\text{rot rot } \mathcal{F} = \text{grad div } \mathcal{F} - \Delta \mathcal{F}$ (u kojoj neka, po definiciji $\Delta \mathcal{F}$ predstavlja vektor s komponentama $\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z$).

[Zbog višestrukih vektorskih operacija v. A-88.]

10. Polje jakosti 2 kV/cm u staklu sa $\epsilon' = 7$ dolazi pod kutom 60° prema normali na graničnu plohu staklo-uzduh; naći kut polja i njegovu jakost na uzdušnoj strani. [13,9°; 7,21 kV/cm]

11. Naći kapacitet pločastoga kondenzatora s oblozima u obliku kvadrata sa stranicom 2 dm i s 1 mm debelim slojem stakla (sa $\epsilon' = 6$) kao dielektrikumom. Naći i gustoću energije nakrcane u dielektrikumom uz napon 15 kV.

[2125 pF; 5980 Ws/m³]

12. Koliki je maksimalni kapacitet zakretnoga kondenzatora sa 13 polukružnih ploča efektivne površine 34 cm^2 i s debljinom uzdušnih slojeva među pločama 0,7 mm? Koliko će približno iznositi kapacitet kod kuta zakreta $\alpha = 120^\circ$ rotora prema statoru?

[516 pF; 344 pF]

13. Neka se iz poznatoga (na pr. vaĝom određenoga) iznosa $0,51 \text{ g}^* (= 0,005 \text{ VAs/m} = 0,005 \text{ N})$ za silu privlačenja dviju okruglih paralelnih međusobno pomičnih ploča promjera 100 mm i razmaka 5 mm zaključi na napon U između tih ploča pretpostavljajući kao dielektrikum a) uzduh (princip »Thomsonova apsolutnog elektrometra«), b) ulje sa $\epsilon' = 2,5$. [1896 V; 1200 V]

14. Kondenzator kapaciteta $1 \mu\text{F}$ nabija se stalnom strujom $0,01 \text{ mA}$; naći: a) napon kondenzatora nakon 1 h nabijanja, b) prosječni učin koji bi ovako nabijeni kondenzator proizveo kad bi se izbio u tisućem dijelu sekunde. [36 kV; 648 kW]

15. Kod mjerenja kapaciteta C pločastoga kondenzatora sa savršenim dielektrikumom po sl. 32. elektrometar je pokazivao 300 V ; a galvanometar sa $C'_B = 10^{-8} \text{ As}$ po dijelu skale dao je balistički otklon 57 dijelova skale; naći C . [1900 pF]

16. Pločasti kondenzator nabijen na 5 kV ima obloge površine $S = 100 \text{ cm}^2$ i tri dielektrička sloja relativnih dielektričkih konstanta $2, 3, 4$ i debljinâ $2, 1, 5, 1 \text{ mm}$. Neka se odrede polja u pojedinim dielektričkim slojevima i kapacitet kondenzatora. Nacrtati i sl. 51.a) analognu sliku za ovaj slučaj. [14,3; 9,52; 7,14 kV/cm; 50,6 pF]

17. Naći najmanju debljinu d izolacije, te kapacitet, naboj i nakrcanu energiju 5 km dugoga kabla pod naponom 75 kV , uz pretpostavku da vodič kabla ima polumjer $R = 0,4 \text{ cm}$ i da mu dielektrikum sa $\epsilon' = 6$ podnosi polja do 105 kV/cm . [$d = 1,98 \text{ cm}$; $R_1 = R + d = 2,38 \text{ cm}$; $C = 0,935 \mu\text{F}$; $Q = 0,0701 \text{ As}$; $A = 2630 \text{ Ws}$]

18. Koji bi polumjer vodiča R' odgovarao uvjetu da kod stalnoga R_1 i stalnoga F' kabel podnosi što veći napon U' ; naći specijalno R' i U' uz $R_1 = 2,38 \text{ cm}$ i $F' = 105 \text{ kV/cm}$ iz vj. 17. [$R_1/R' = 2,718$; $R' = 0,879 \text{ cm}$; $U' = 92,3 \text{ kV}$]

19. Uz iste dimenzije $R' = 0,879 \text{ cm}$ i $R_1 = 2,38 \text{ cm}$ kao u vj. 18. kabelska izolacija izvede se »dvoslojno«, uzevši za unutarnji sloj dielektrikum sa $F' = 105 \text{ kV/cm}$ i rel. diel. konst. 6 , a za vanjski sloj dielektrikum s istim F' , ali manjom rel. diel. konst. $3,5$; kolike će biti debljine d_1 i d_2 obih izolacija i na koliko će porasti dopustivi napon U'' kabla prema U' iz vj. 18. i U iz vj. 17. Prikazati grafički polje F kao funkciju udaljenosti x od osi kabla. [$d_1 = 0,628 \text{ cm}$; $d_2 = 0,873 \text{ cm}$; $U'' = 122 \text{ kV}$]

20. Naći kapacitet 8 km dugoga uzdušnog voda (visoko nad zemljom) kod promjera vodiča 2 mm i razmaka 25 cm . [0,0403 μF]

21. Naći kapacitet 10 km dugoga horizontalnoga voda s vodičem prereza 10 mm^2 visoko 4 m nad zemljom. [0,0662 μF]

22. Naći kapacitete koji se mogu dobiti kombinirajući na sve moguće načine tri kondenzatora sa $C_1 = 3 \mu\text{F}$, $C_2 = C_3 = 2 \mu\text{F}$. [0,75; 1; 1,2; 1,43; 1,71; 2; 3; 3,2; 4; 5; 7 μF]

22.a) Naći brzine v_1 do v_3 naponom 40 kV ubrzanih: 1) protona, 2) deuterona, 3) α -čestice. Uzeti m_p po A-14., te $m_D \approx 2m_p$ i $m_\alpha \approx 4m_p$.

$$[v_1 = 2766 \text{ km/s}; v_2 = 1956 \text{ km/s}; v_3 = 1956 \text{ km/s}]$$

22.b) Sa m_p u g po A-14. i m_N u g po A-16., te uzimajući masu α -čestice $m_\alpha = 6,6438 \cdot 10^{-24} \text{ g}$, naći u A-90. uvedeni »defekt mase« Δm u g pri stvaranju α -čestice po relaciji: $2m_p + 2m_N \rightarrow m_\alpha + \Delta m$. Naći i defektu Δm korespondentnu energiju A_α . [$\Delta m = 0,0504 \cdot 10^{-24} \text{ g}$; $A_\alpha = 4,53 \cdot 10^{-12} \text{ Ws} = 28,2 \text{ MeV}$]

B) PROVODNE ELEKTRIČKE STRUJE

I) O MEHANIZMU ELEKTRIČKIH STRUJANJA

Struje u linearnim vodičima. Izvori stalnih struja. Termostruje i fotostruje. Provodne struje kao pojav gibanja električkih naboja. Konstantnosti koncentracijâ i konstantne gibljivosti nosilaca naboja uvjeti za Ohmov zakon; pojam električkog otpora. Slučajevi ne-omskih strujanja u vakuumu i u plinovima. Primjeri gibljivosti nosilaca naboja u nekim vodičima i poluvodičima.

1. U prethodnom poglavlju promatrani su mirni električki naboji i pojavi u dielektrikumu oko takvih naboja. Počevši odsad uglavnom će se skretati pozornost na prilike uz koje dolazi do gibanja električkih naboja, dakle do električkih »provodnih« struja u električki »vodljivim« sredstvima (i inače prostorima gdje su nosioci naboja slobodno gibljivi: elektroni u vakuumu), kao i na popratne pojave tih provodnih struja, osnovno važne baš za elektrotehniku po tomu što je na njima izgrađen kudikamo najveći dio praktičkih primjena elektriciteta.

Specijalno u ovom poglavlju razmatrat će se *zakovitosti* i, koliko bude potrebno, *mehanizmi* strujanja vremenski konstantnih provodnih električkih struja, t. zv. *istosmjernih stalnih* struja.

No i na ovom području zasad će se uglavnom razmatranja ograničiti na slučajeve istodobno najvažnije po opsegu primjena i najpreglednije po prilikama strujanja: one kod kojih se mogu očekivati jednostavne ovisnosti t. zv. *Ohmova zakona*. Ti su slučajevi karakterizirani a) kod »linearnih« vodiča (vodiča stalnoga prereza, neznatnog po dimenzijama prema duljini vodiča) i kod »mreža« (kombinacija) takvih vodiča: proporcionalnostima ili bar linearnim odnosima između »električkih napona« (razlika potencijala) U , primjenjivanih među krajevima pojedinih vodiča, i »jakosti struje« (množinâ elektriciteta prostrujalih u jedinici vremena) I kroz te vodiče, podržavanih spomenutim naponima; odnosno općenitije b) kod ma kako (na pr. »plošno« ili »prostorno«) porazdijeljenih električkih strujanja: proporcionalnostima na ma kojem mjestu »polja strujanja« između vektora »jakosti električkoga polja« $\mathcal{F}$ i vektora »gustoće provodne struje« $\mathcal{G}$, ako se kao $\mathcal{G}$ definira vektor po smjeru određen »smjerom struje« (A-19.), a po iznosu (analogno definiciji »gustoće pomaćne struje« $\mathcal{G}_1$ iz A-100.) jednak »struji na jedinicu površine«, točnije: kvocijentu $G = dI/dS$ jakosti provodne struje dI kroz neki plošni element, okomit na smjer struje, i površine dS toga elementa.

2. Prema A-79. linearnim vodičem z u sl. 34. (str. 79.) teći će struja samo dotle dok se potencijali elektroda ne izjednače, odnosno dok bude nekoga električkog napona između krajeva vodiča z , priključenih na K_1 i K_2 . No kako se baš strujom kroz z naboji elektrodâ K_1 i K_2 tako mijenjaju da napon između krajeva

vodiča z sve više opada, ne mogu struje kroz dobre vodiče koji spajaju različito nabijene elektrode, po shemi u sl. 34., biti vremenski stalne i dugotrajne. Čak ni kondenzatori relativno većih kapaciteta ne predstavljaju rezervoare količina elektriciteta dovoljnih za održavanje makar samo nešto jačih struja izbijanja kroz iole dulje vrijeme. Tako na pr. kondenzator kapaciteta $C = 1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ nabijen na napon $U = 1000 \text{ V}$ sadrži naboja $Q = 10^{-6} \cdot 10^3 = 10^{-3} \text{ As}$, dakle ne više nego bi dostajalo za (prosječnu) struju izbijanja $0,001 \text{ A}$ u vremenu od 1 s , ili $0,01 \text{ A}$ u $0,1 \text{ s}$, itd. Uopće elektrostatske naprave, pa ni »elektrostatski generatori« koji neprekidno dobavljaju naboje potrebne za održavanje struja u priključenim vodičima, ne mogu — i pored inače visokih napona, koje su oni kadri proizvesti — trajno davati nego samo vrlo slabašne struje. Tako se poznatim elektrostatskim »strojevima na influenciju« daju doduše postići naponi reda veličine 100 kV , ali maksimalno tek struje reda veličine 10^{-5} A ili slično.

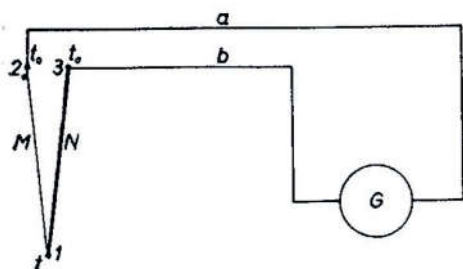
Zato su se proizvodnju relativno jačih stalnih struja, a time i praktičkim primjenama učinaka takvih struja, istom onda otvorile mogućnosti kad su pronađeni (neelektrostatski) »izvori struja«, kadri da daju, trajno ili bar na dulje vrijeme, jake stalne »zatvorene« provodne struje, koje neprekidno cirkuliraju kroz »krugove struje«, sastavljene od samih tih »izvora« i od prikladnih na njih priključenih vodiča: »potrošača«.

I mi ovdje, prelazeći na proučavanje zakona električkih struja, zamišljat ćemo, obzirom na rečeno, struje stalne jakosti I održavane takvim izvorima u priključenim vodičima, te stalne napone U na krajevima tih vodiča kao preduvjete tih struja. Ne treba dakako kod toga zaboraviti, da nema kvalitativnih razlika između provodnih električkih struja u danom vodiču, bile one proizvedene ma kojim načinom; razlike mogu biti samo kvantitativne.

3. Kao izvori ili generatori vremenski konstantnih struja dolaze uglavnom u obzir: a) *kemijski* izvori struja (elementi i baterije), koji energiju električke struje proizvode na račun energije što se oslobađa kod kemijskih procesa, te ujedno predstavljaju najstarije poznate izvore električkih struja (o njima će se doskora pobliže govoriti); b) *strojevni* generatori istosmjernih struja na principu pojava »elektromagnetske indukcije«, elektrotehnički kudikamo najvažniji izvori struja, kojima je moguće pretvarati mehaničku radnju u energiju električke struje (i oni će se kasnije potanje razmatrati); osim toga dolaze tehnički u obzir, ako i ne baš za proizvodnje jačih struja, a ono zbog drugih primjena (za različita mjerenja itd.): c) *termoelementi*, prikladni za neposrednu pretvorbu toplinske energije u električku i d) *fotoelementi* »sa slojem poluvodiča«, naprave za pretvorbu energije svjetlosti u električku.

4. *Termoelementi* su kombinacije po shemi u sl. 58. dvaju vodiča iz različitih kovina ili kovnih slitina M i N , koji su jednim parom krajeva međusobno spojeni (obično svari), tako da nastaje spojište I , koje se grije (ili hladi) na neku temperaturu t različitu od neke »početne« temperature t_0 (na pr. »sobne«: 20°C),

podržavane na spojištima 2 i 3 dobivenima spajanjem preostalog slobodnog para krajeva termoelementa s krajevima priključenoga potrošača (na pr. galvanometra G s pripadnim priključnim vodovima a i b kao u sl. 58.).



Sl. 58.

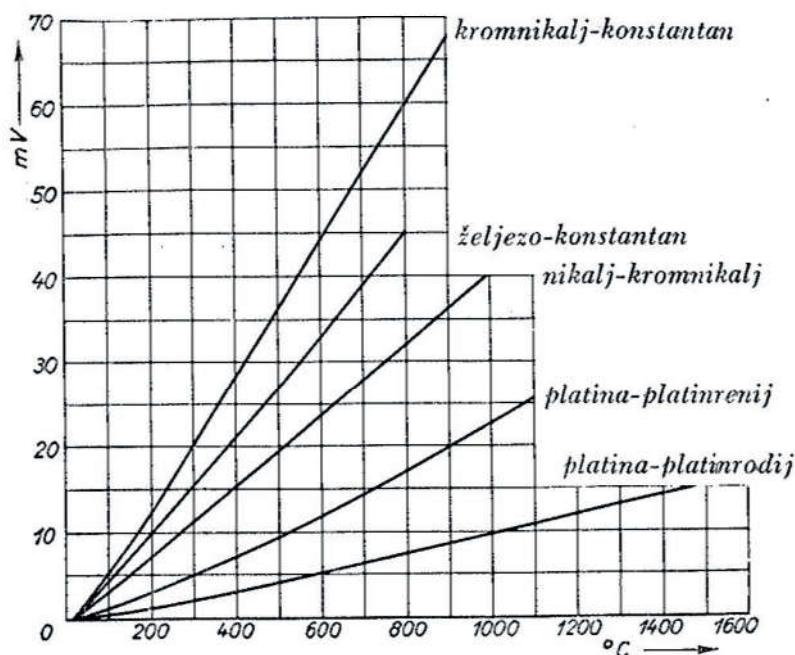
Kod danoga termoelementa i danoga priključenoga (vanjskog) vodiča jakost struje kroz zatvoreni krug struje termoelementa i vanjskoga vodiča varira približno proporcionalno razlici temperatura $t - t_0$ grijanoga (ili hladenoga) spojišta 1 i zajedničke temperature spojišta 2 i 3.

Od bitnoga je utjecaja i izbor obih komponentata termoelementa. Osobito jaka djelovanja daju na pr. bakar ili željezo uzeti za komponentu M uz »konstantan« (slitinu Cu-Ni s primjesom Mn) uzet za komponentu N; takva kombinacija uz $t > t_0$ izvodi struju u smislu M-a-G-b-N, tako da Cu (odn. Fe) predstavlja pozitivni pol termoelementa, a konstantan negativni (uz $t < t_0$ teče struja u obrnutom smislu).

Kod zatvorenih krugova provodnih strujâ dopušteno je smatrati izvor struje sijelom t. zv. *elektromotorne sile* (kratica: EMS), koja se smije uzeti kao uzrok strujanja elektriciteta kroz cijeli krug i prema tomu se može predočiti ili izraziti nekim zamišljenim »proizvedenim naponom« E , tolikim da se njim baš pokriju potrošci napona cijeloga strujnoga kruga, t. j. kako samoga izvora tako i potrošača. Specijalno termoelementima dadu se praktički realizirati samo neznatne elektromotorne sile. Tako relativno vrlo povoljni »termopar« željezo-konstantan nije kadar, po krivulji u sl. 59., ni uz $t = 720^\circ\text{C}$ i $t_0 = 20^\circ\text{C}$, t. j. uz razliku temperatura od punih 700 stupnjeva Celzijeve skale, proizvesti više od 0,04 V (40 mV). Prema tomu će obično biti neznatne i dobivene termostruje, koje ovise još i o »električkom otporu« strujnoga kruga (v. B-6. i dalje). Zato se termoelementi redovito ni ne upotrebljavaju zbog proizvodjenja termostruja, nego za mjerenja temperatura t (na pr. čak do kojih 2000°C u industrijskim pećima, kotlovima itd.) i slično.

Treba li mjeriti temperature t u nekom vrućem prostoru, stavi se spojište 1 prikladnog zaštićenoga termoelementa na istraživano mjesto, i na iznos t se zaključuje iz otklona instrumenta G u sl. 58. Ovaj može odmah imati skalu s naznačenim iznosima t uz određenu temperaturu t_0 »hladnih spojišta« 2 i 3 (koju onda dakako treba prikladnim načinom i podržavati). No može se na termopar priključiti i instrument sa skalom u milivoltima (milivoltmetar). Kako će se još pokazati, milivoltmetri galvanometarskoga tipa dadu se graditi s iznosima otpora tolikim da prema njima otpori termoelementa i vodova ostaju zanemarljivi; u tom slučaju očitani iznos milivolta predstavlja praktički EMS E termoelementa, pa se na temperaturu t može zaključiti iz krivuljâ temperatura t kao funkcija EMS E (v. sl. 59. za nekoliko kombinacija termoelemenata običajnih kod ovakvih »termoelektričkih pirometara«). A kod nešto većih iznosa otpora termoelemenata i dovoda primijenit će se korekciona formula, na temelju koje se iz očitnog na G napona E_k može izračunati EMS E termoelementa.

Mnogo osjetljivije reagiraju, i mogu dati zamjetljive termostruje na pr. već i kod posve neznatnih razlika temperatura, *termobaterije* s više termoelemenata, koji se spoje po shemi u sl. 60. »serijski«, tako da se proizvedeni naponi sumiraju (neparna spojišta 1, 3, 5 itd. drže se na početnoj temperaturi, a parna 2, 4, 6 itd. se izlože na pr. utjecaju ugrijavanja, od istraživanih radijacija i sl.).

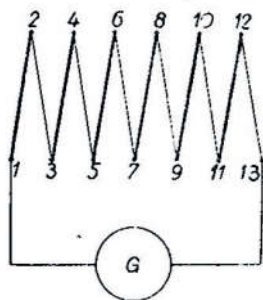


Sl. 59.

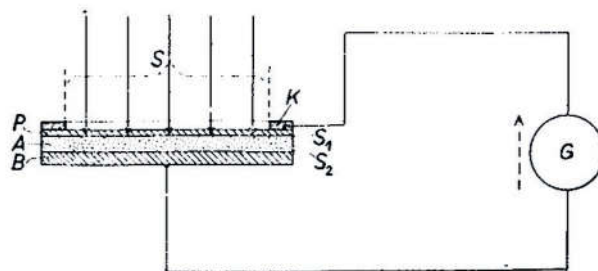
Termoelektričkom pojavu suprotan je *Peltierov pojav*. Ako se iz nekoga vanjskoga izvora pošalje struja (dovoljno slaba, da ne bude smetnji od »strujne topline«, koja uopće ugrijava vodiče protjecane strujom) kroz spojno mjesto 1 na sl. 58. u smislu N-1-M, koji neka odgovara smjeru termostruje termoelemenata M-N uz $t > t_0$, to spojno mjesto 1 će se ohladiti; strujom u protivnom smislu spojište 1 bi se ugrijalo.

5. Kod *fotoelemenata* (fotostanica sa »zapornim slojem«, koje obasjane same stvaraju EMS) struja se proizvodi puštajući svjetlost na osjetljivu površinu fotoelementa. Na pr. kod tipa »fotoelemenata s prednjom stijenkom« po shemi u sl. 61. izloži se svjetlosti »prednja elektroda« P, koju realizira vanredno tanka za svjetlost još propustljiva metalna kožica, proizvedena prikladnim postupkom na površini sloja A poluvodiča »bakrenog oksidula« Cu_2O (ovaj se opet sa svoje strane dobiva oksidiranjem kod visoke temperature gornje površine »temeljne ploče« B od bakra); pri tom nastaju granični »zaporni slojevi« S_1 i S_2 , dobro propustljivi za struju elektrona u smislu vodič-poluvodič, a slabo propustljivi u protivnom smislu. Prodrijevši kroz P i zgađajući S_1 , svjetlost izbija iz poluvodiča elektrone i nagomilava ih na P, odakle oni, crpeni odvodnim kovnim kontaktnim kolutom K, struje kroz potrošač G (na pr. galvanometar) prema B, i dalje preko S_2 u A. Kako se po A-19. smjerom struje ima zvati smjer protivan onom kojim struje elektroni, smjer struje fotoelementa na sl. 61. naznačuje crtkana strjelica i B predstavlja pozitivni, a P negativni pol fotoelementa. Ima i drugih tipova fotoelemenata s bakrenim

oksidulom. A vrlo mnogo se upotrebljavaju i *selski fotoelementi*, sa slojem (nanesenim na željeznu podlogu) elementa selena (s neznatnom primjesom joda), prekrivenim tananim prozirnim metalnim slojem poput P na sl. 61. I »kristalne diode« s poluvodičima germanijem ili silicijem mogu poslužiti, i danas se već mnogo upotrebljavaju, kao fotoelementi (»fotodiode«, »fototransistori«).



Sl. 60.



Sl. 61.

Fotoelementi mogu davati samo neznatne EMS i neznatne jakosti struje, a služe najviše za mjerenja množine energije svjetlosti (»toka svjetlosti«) Φ što padne na osjetljivu plohu površine S fotoelementa, te posredno i za mjerenja »jakosti rasvjete« (gustoće Φ/S toka svjetlosti na nekom mjestu), a u daljoj konsekvenciji i za mjerenja jakosti J izvora svjetlosti kod poznatih udaljenosti tih izvora od fotoelementa (fotoelektrička fotometrija, električka »mjerila ekspozicije« u fotografiji itd.). Veliko područje primjena imaju i naprave s fotoelementima kao »svjetlosni releji«.

Treba još dodati da naročito Se, pa PbS, Cu_2O , Ge itd. mijenjaju kod obasjavanja električku vodljivost. A s njima građeni »suhi ispravljači« djeluju, u strujnim krugovima podvrgnutima izmjeničnim električkim naponima, da lako propuštaju struje jednog smjera i gotovo nikako one suprotnog smjera.

Od *unutarnjega* fotoefekta u opisanim fotoelementima s »poluvodičima« treba razlikovati *vanjski* fotoefekt izbacivanja elektrona iz metalnih vodiča pod utjecajem »fotona«, već spomenut u A-19. U fotoelektričkim stanicama (s vakuumom ili razrijeđenim plinom), osnovanim na vanjskom fotoefektu, izbačeni elektroni, pod utjecajem električkog napona iz nekog vanjskog izvora, daju već prema intenzitetu obasjavanja slabije ili jače »fotostruje«.

6. Rečeno je u B-I., da će se u prvom redu obraćati pozornost onim slučajevima vođenja elektriciteta kod kojih naponi U između krajeva nekoga vodiča i struje I kroz taj vodič stoje u odnosu upravne proporcionalnosti, dakle u nadasve jednostavnom odnosu *Ohmova zakona*, kako se takav odnos specijalno za par veličina U i I također kraće naziva. Matematski se spomenuta ovisnost izražava međusobno ekvivalentnima i već prema potrebi primjenjivanim formulama:

$$\frac{U}{I} = R \quad (80) \quad I = \frac{U}{R} \quad (80') \quad U = IR \quad (80'')$$

u kojima R predstavlja neku za svaki pojedini vodič karakterističnu *konstantu* (ovisnu o tvari i dimenzijama vodiča); ta se konstanta naziva *električki otpor* vodiča.

Vodiči (i strujni krugovi od više vodiča), za koje se smije očekivati, da udovoljavaju netom napisanim formulama, t. j. vodiči kojima je moguće pridijeliti neki određen iznos R otpora, konstantan kod svih iznosa struje i napona dok

fizikalne prilike vodiča ostaju nepromijenjene, odlikuju se osobitom prednošću, da uz poznato R omogućuju da se unaprijed proračuna primjenom formule (80') struja I koju će u vodiču proizvesti neki povoljni napon U , kao i da se unaprijed proračuna primjenom formule (80'') napon U potreban za postizavanje povoljne struje I [naprotiv formula (80) može poslužiti da se iz samo jednoga para iznosa U i I , izmjerenoga ili inače kako određenoga, proračuna otpor R kod vodiča za koje vrijedi Ohmov zakon].

Ime »otpor« za konstantu R lako je opravdati. Pomislimo, da jednaki napon U proizvedemo na krajevima dvaju različitih vodiča, od kojih neka drugi vodič ima R veće n puta nego prvi. Po relaciji $I = U/R$ izlazi onda jakost struje kroz drugi vodič n puta manja od one kroz prvi vodič. Kraj istoga dakle napona vodič propušta toliko puta slabiju struju koliko puta ima veće R ; taj vodič, može se reći, stavlja prolazu struje onoliko puta veći »otpor« koliko mu je puta R veće, pa je prema rečenomu bilo prirodno, da je kao mjerilo toga »otpota« nekoga vodiča uzeta baš veličina R , koja je zato naprosto i dobila ime: »otpor«.

7. Općenito uzevši istom će biti stvar pobližega ispitivanja ustanoviti, da li je i pod kojim je uvjetima opravdano pripisivati danim vodičima neki određeni električki »otpor« u gornjem značenju, odnosno uzimati da u razmatranjima o tim vodičima ima mjesta primjeni Ohmova zakona.

Da bi se stvar razjasnila, potrebno je začeti detaljnije u mehanizam provodnih struja u različitim vodičima, odnosno vodljivim prostorima. Već po dosad rečenom može se smatrati utvrđenim, da svuda gdje teku provodne struje bit tih struja čini transport električkih naboja pod utjecajem električkih polja; isto tako treba očekivati, da će kod stacionarnoga strujanja jakost struje I biti jednaka u cijelom toku strujnoga kruga.

Tako struja može samo onda cirkulirati strujnim krugom u sl. 62., ako i u dijelu promatranoga strujnoga kruga što ga predstavlja međuprostor dviju veoma blizih pločastih elektroda A i K razmaka l i površine q ima više ili manje slobodno gibljivih nosilaca naboja, koji onda služe kao posrednici prenosa elektriciteta između spomenutih elektroda. Struju stalne jakosti I , pokazanu na pr. galvanometrom G, izvodit će u spomenutom međuprostoru napon stalnoga iznosa U podržavan izvorom struje, na pr. baterijom B, i mjeren na pr. elektrostatskim voltmetrom E, odnosno električko polje $F = U/l$, koje napon U izvodi u prostoru između A i K.

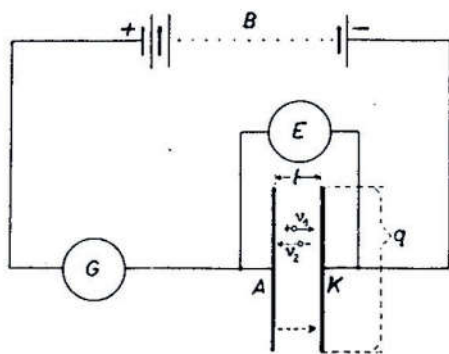
Pretpostavimo konkretno u prostoru polja F s volumenom $V = q \cdot l$ po jedinici volumena na pr. Z pozitivno nabijenih gibljivih nosilaca sa n elementarnih naboja $+Q_0 = +0,160 \cdot 10^{-18}$ As po nosiocu i isti broj Z negativno nabijenih nosilaca sa n elementarnih naboja $-Q_0 = -0,160 \cdot 10^{-18}$ As, tako da gustoća prostornoga naboja ostane jednaka nuli:

$$(+Z \cdot n \cdot Q_0) + (-Z \cdot n \cdot Q_0) = 0.$$

Nosioci, privedeni ili proizvedeni na pr. nekim vanjskim utjecajem (»nesamostalno vođenje elektriciteta«), moći će općenito biti bilo različite materijalne elektrizirane čestice (na pr. ioni; A-8.) bilo elementarni električki naboji (redovito elektroni) nevezani na atome materije. Uopće uzeto oni će dakle biti različito lako »gibljivi« pod utjecajem električkoga polja F , koje će pozitivne čestice tjerati unutar promatrajnoga međuprostora u »smjeru struje«, naznačenom crtkanom strjelicom u sl. 62. (t. j. u smjeru od »ulazne« za struju elektrode ili »anode« A prema »izlaznoj« za struju elektrodi ili »katodi« K), a negativne u protivnom smjeru. Ovakve nosioce moguće je na pr. proizvesti ionizirajući uzduh rentgenskim zrakama, poslanima kroz prostor između elektroda A i K.

8. Neka sad polje $F = U/l$ izazove gibanje pozitivnih nosilaca naboja brzinom v_1 u smjeru prema K, a negativnih brzinom v_2 u smjeru prema A, te neka prema tomu u izvanredno kratkom vremenu dt oni prvi izvedu pomak $dl_1 = v_1 \cdot dt$, a ovi drugi pomak $dl_2 = v_2 \cdot dt$.

Pretpostavimo za čas u vodljivom prostoru između A i K: $v_1 = 0$, $v_2 > 0$, t. j. uzmimo da dođe samo do gibanja negativnih nosilaca. Zbog toga gibanja izlučio bi se u vremenu dt na anodi A skup negativnih naboja iz elementarnoga



Sl. 62.

sloja debljine $dl_2 = v_2 \cdot dt$ volumena $q \cdot dl_2$ neposredno uz A, a ukupna množina $Z \cdot n \cdot Q_0 \cdot q \cdot dl_2$ negativnog elektriciteta s tih nosilaca neutralizirala bi se s jednakom množinom pozitivnoga naboja sa A. Nastali manjak pozitivnoga naboja na A, kao i smanjenje negativnoga naboja katode K uvjetovano vezanjem dijela naboja sa K sa samo pozitivnim nabojima zaostalima u elementarnom sloju debljine dl_2 i volumena $q \cdot dl_2$ tik uz K zbog odlaska negativnih nosilaca, morao bi se dakako nadokna-

diti djelovanjem izvora struje B, ako napon U između elektroda A i K treba da ostane konstantan i struja u strujnom krugu treba da se trajno podržava. U tu svrhu dovoljno bi bilo da u vremenu dt djelovanjem izvora struje B odstruji množina elektrona korespondentna naboju $Z \cdot n \cdot Q_0 \cdot q \cdot dl_2$ sa A preko G prema B i dostruji od B na K; tim bi krug struje postao zatvoren, a galvanometar G pokazivao bi struju u smislu B-G-A-K-B (kojim bi se gibalili pozitivni naboji).

Kad bismo naprotiv pretpostavili $v_1 > 0$, $v_2 = 0$, množina od ukupno $Z \cdot n \cdot Q_0 \cdot q \cdot dl_1$ (uz $dl_1 = v_1 \cdot dt$) pozitivnog elektriciteta s pozitivnih nosilaca oslobodila bi se na katodi K i neutralizirala bi dio negativnoga naboja te elektrode, a suvišak samo negativnih naboja preostalih uz anodu vezao bi dio pozitivnoga naboja anode, pa da se napon U između A i K uzdrži, morao bi odstrujati u vremenu dt naboju $Z \cdot n \cdot Q_0 \cdot q \cdot dl_1$ odgovarajući broj elektrona od A preko G prema B i dostrujati

iz B na K, što bi odgovaralo struji u istom smjeru B-G-A-K-B kao malo prije i G bi reagirao u istom smislu kao gore.

9. Prema rečenom učinci istodobnoga gibanja pozitivnih nosilaca u smjeru polja A-K i negativnih u suprotnom smjeru K-A u prostoru između A i K morat će se potpomagati, jer jedni i drugi izazivaju odtjecanje elektrona sa A i pritjecanje elektrona na K, odnosno struje istoga smjera B-G-A-K-B.

Sumu I tih struja, pokazanu galvanometrom G , lako je izračunati. Ukupno struji I doprinose u vremenu dt pozitivni nosioci naboj $dQ_1 = Z \cdot n \cdot Q_0 \cdot q \cdot v_1 \cdot dt$, a negativni nosioci naboj $dQ_2 = Z \cdot n \cdot Q_0 \cdot q \cdot v_2 \cdot dt$. Njihova suma jest naboj $dQ = dQ_1 + dQ_2$, tako da je pripadna jakost struje:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Z \cdot n \cdot Q_0 \cdot q \cdot (v_1 + v_2) \cdot dt}{dt} = Z \cdot n \cdot Q_0 \cdot q \cdot (v_1 + v_2) \quad (81)$$

10. No mi smo rekli, da ćemo specijalno proučavati slučajeve kad vrijedi Ohmov zakon, odnosno kad U/I ostaje jednako nekoj konstanti R , koju smo nazvali električkim otporom. Budući da se za vodljivi prostor između A i K (s geometrijskim prilikama strujanja sličnima kao kod linearnih vodiča) može staviti $U = F \cdot l$, a na I se smije primijeniti formula (81), za omjer napona i struje (ako se još za kvocijente v_1/F i v_2/F uvedu oznake g_1 i g_2) dobiva se:

$$\frac{U}{I} = \frac{1}{Z \cdot n \cdot Q_0} \cdot \frac{1}{g_1 + g_2} \cdot \frac{l}{q}$$

Da bi sad ovaj izraz ostao kod različitih korespondentnih iznosa U i I jednak nekoj konstanti R , dovoljno je, obzirom na to što su l i q svakako konstante, zahtijevati, da ostane konstantan faktor ispred l/q desno u promatranoj relaciji. A tomu je moguće udovoljiti uz ova dva uvjeta: a) $Z \cdot n \cdot Q_0$ je konstanta, b) g_1 i g_2 su konstante.

Uz ispunjena ova dva uvjeta vrijede dakle formule (80), (80') i (80'') iz B-6., te ima smisla spominjati određeni, t. j. o primijenjenom naponu (i njim proizvedenoj struji) neovisni »električki otpor« vodiča:

$$R = \frac{1}{Z \cdot n \cdot Q_0 \cdot (g_1 + g_2)} \cdot \frac{l}{q} = \rho \cdot \frac{l}{q} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{q} \quad (82)$$

koji, kako se vidi, mora biti upravo proporcionalan duljini l , a neupravno proporcionalan prerezu q vodiča, a osim toga (uz određene fizikalne uvjete) ovisi još i o naravi samoga vodljivoga sredstva obuhvaćenoj karakterističnom konstantom za svako takvo sredstvo, njezinim t. zv. *specifičkim otporom*:

$$\rho = \frac{1}{Z \cdot n \cdot Q_0 \cdot (g_1 + g_2)} \quad (83)$$

ili recipročnom vrijednošću specifičkoga otpora: $\kappa = 1/\rho$, t. zv. *vodljivošću*, za koju se prema tome može staviti:

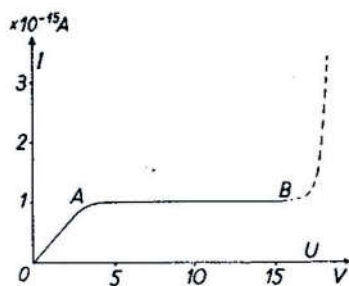
$$\kappa = Z \cdot n \cdot Q_0 \cdot (g_1 + g_2) \quad (83')$$

11. Razmotrimo pobliže, što znače malo prije postavljeni uvjeti: a) konstantnoga $Z \cdot n \cdot Q_0$ i b) konstantnih g_1 i g_2 .

Izraz $Z \cdot n \cdot Q_0$ predstavlja prostorne gustoće naboja (naboje na jedinicu obujma) pozitivnih odnosno negativnih nosilaca u promatranom vodljivom prostoru. Uvjet da $Z \cdot n \cdot Q_0$ ima biti konstantno ekvivalentan je dakle zahtjevu da broj Z nosilaca jednoga odnosno drugoga predznaka ostane izvanredno velik prema broju nosilaca kojih se naboji troše kod vođenja struje ili koji se inače kako gube (na pr. suprotni ioni uzduha »natrag se spajaju« ili »rekombiniraju« u neelektrične molekule; A-10.), odnosno zahtjevu da se taj potrošeni dio nosilaca trajno (na pr. izvanjskim utjecajima) nadoknađuje. U slučaju naime da se gubici ne nadoknađuju potpuno, moraju gustoće prostornoga naboja pozitivnih i negativnih nosilaca s vremenom opadati, a struja I usprkos stalnoga napona U podržavanoga između krajeva vodiča slabiti, pa nema ni govora o pravilnostima Ohmova zakona.

Zahtjev pak da veličine $g_1 = v_1/F$ i $g_2 = v_2/F$ budu konstantne, dakle da brzine $v_1 = g_1 \cdot F$ i $v_2 = g_2 \cdot F$ ostaju proporcionalne polju F , koje ih nastoji gibati, izlazi na to, da se u vodljivom sredstvu pretpostave otpori gibanju nosilaca, tako da se ovi mogu probijati kroz vodljivo sredstvo samo svladavajući zapreke slične trenju (na pr. srazujući se s molekulama vodljivoga sredstva), zbog čega se vodič prolazom struje ugrijava (»strujna toplina« ili »Jouleova toplina«). Pod tim okolnostima nosioci poprimaju konstantne i polju F proporcionalne brzine, dok bi naprotiv uz potpuno slobodan put elektrizirane čestice vanredno malene mase tjerane električkim poljem izvodile jednoliko ubrzano gibanje (primjer: elektroni izišli iz katode visoko evakuirane »cijevi za katodne zrake« na putu prema anodi; vidi vj. 5. na str. 114.); tako i sićušna čestica prašine pada u mirnom uzduhu zbog trenja jednoliko neznatnom brzinom, a u vakuumu bi padala jednoliko ubrzano.

12. Vrlo instruktivan primjer za opisane okolnosti predstavljaju struje ionizacije kroz uzduh ioniziran na pr. rentgenskim zrakama ili zrakama iz radioaktivnih preparata. Ako se prostor između elektroda A i K



Sl. 63.

u sl. 62. podvrgne djelovanju rentgenskih zraka određene jakosti, taj prostor će postati električki vodič. Dok sad naponi U primijenjeni između A i K budu dovoljno maleni, i pripadne struje I toliko slabe, da se brojem parova nosilaca naboja sekundno stvaranih ionizacionim agensom baš nadoknađuju potrošci nosilaca zbog podržavanja struje i zbog procesa »rekombinacije«, primjećivat će se između iznosâ napona U i struje I , pokazanih elektrometrom E odn. galvanometrom G, proporcionalnosti, t. j. vrijedit će ovisnost Ohmova zakona predložena pravocrtnim početnim dijelom OA krivulje struje I u ovisnosti od napona U u sl. 63.

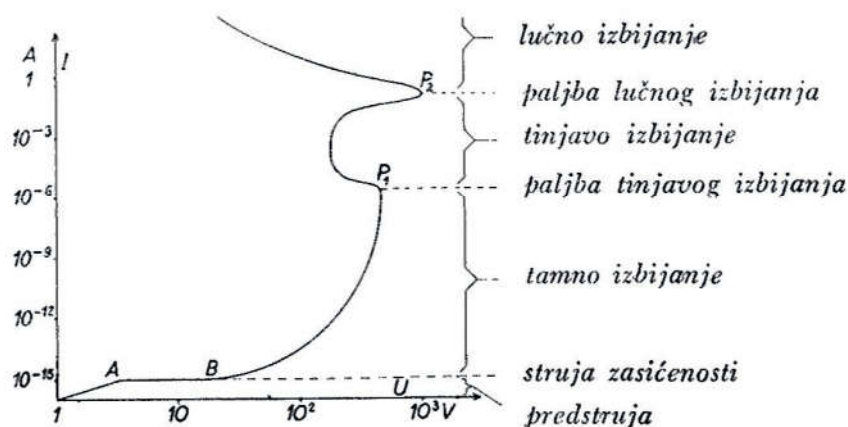
Naprotiv kod viših napona postepeno će toliko porasti brzine nosilaca, da će praktički svi proizvedeni nosioci biti utrošeni na podržavanje struje I , koja će prema tomu, kod dovoljno visokih iznosa U , postići stalni iznos I_s »struje zasićenosti«, t. j. o Ohmovu zakonu ne će više biti ni govora i odnos struje i napona bit će predložen horizontalnim dijelom AB krivulje na sl. 63.

Na ovaj se način, t. j. mjereći struje zasićenosti postignute kod dovoljno visokih napona, određuju »dozni intenziteti« rentgenskih zraka.

U izvanredno neznatnim tragovima ionizacija se daće konstatirati i kod uzduha u običnim prilikama. Nju pripisuju ionizacionim uzrocima koji svagdje djeluju: tragovima radioaktivnih tvari razasutima pomalo svagdje na zemlji, prodornim visinskim zrakama kozmičkoga porijekla, itd. (»spontano« vođenje elektriciteta u uzduhu). Ipak je uzduh normalno još toliko električki nevodljiv da ga je obično dopušteno smatrati praktički idealnim izolatorom (A-3.).

13. Nakon duljega horizontalnoga toka krivulja struje iz sl. 63. kod osobito visokih napona U , i prema tomu jakih polja F , ipak počinje kretati uvis (crtkano naznačeno u sl. 63.), i to vrlo naglo.

I tomu odgovaraju okolnosti kod kojih ne vrijedi Ohmov zakon. Tu se »ne-samostalnom« vođenju elektriciteta počinje superponirati »samostalno« zbog »ioni-



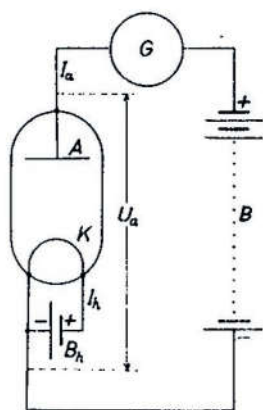
Sl. 64.

zacije srazom«: pod utjecajem jakih električkih polja dobivaju ioni u uzduhu tako velike brzine da postanu kadri i sami cijepati u ione molekule uzduha s kojima se sraze; ovako stvoreni ioni postizavaju pod utjecajem polja također velike brzine i stvaraju srazovima s novim molekulima dalje parove iona itd., tako da se stvori vrlo mnogo nosilaca i jakost struje I može poprimiti velike iznose; no pri tomu nema proporcionalnosti između U i I .

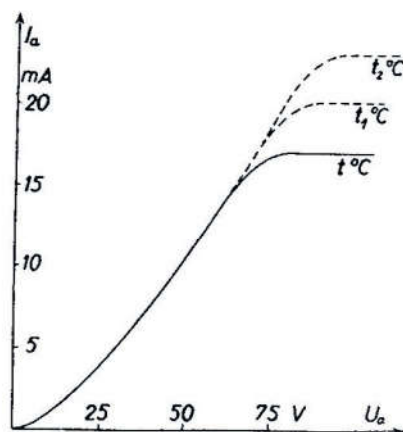
U daljem razvoju ovoga procesa može u uzduhu, i uopće u prostorima s plinovima i parama, doći do pojavâ izbijanja praćenih svjetlošću, i vrlo raznolikih već prema vrsti i gustoći plinovitoga sredstva u kojemu se pojavi odigravaju, prema vrsti i geometrijskim odnosima elektroda, koje kod pojava dijelom također sudjeluju, i sl. (tinjava izbijanja, električke iskre, električki luk itd.). Također i ovdje ne vrijede jednostavni odnosi Ohmova zakona; ovisnosti struje od napona su čak

obično vrlo komplicirane, pa porastima struje pod izvjesnim okolnostima mogu na pr. odgovarati i smanjenja napona («silazna karakteristika», na pr. kod «električkih lukova» s ugljenim elektrodama).

Kvantitativno se odnosi između struja I i napona U kod tinjavih i lučnih izbijanja među prikladnim elektrodama u plinovima mogu predložiti krivuljama poput one u sl. 64. (u kojoj su, zbog bolje preglednosti, i apscise i ordinate nanesene u *logaritmičkoj* skali). Mjesta A i B na sl. 64. odgovaraju jednako označenim mjestima na sl. 63.; od B do P_1 krivulja struje u ovisnosti od napona postaje sve strmija, jer sve više dolaze do izražaja pojavi ionizacije srazom, no izbijanje ostaje još tamno do P_1 , od kojega mjesta počinju područja potpuno «samostalnih» izbijanja. Kod P_1 dolazi do «proboja» plina u obliku «paljbe» praćene svijetlim «tinjanim izbijanjem», kojega područje dopire do P_2 . Od P_2 , točke «paljbe lučnoga izbijanja», dalje seže područje lučnoga izbijanja sa svijetlim lukom, vrlo vrućom katodom i relativno jakim strujama kod razmjerno niskih napona. Prema prilikama mogu pojedini od nabrojanih oblika izbijanja i izostati.



Sl. 65.



Sl. 66.

14. Još jedan slučaj, kad ne vrijedi Ohmov zakon, predstavlja nesamostalno vođenje struje *elektronima u visokom vakuumu*.

U različitim «elektronskim cijevima», upotrebljavanima za različite svrhe radio-tehnike i za «ispravljanje» izmjeničnih struja u istosmjerne, u rentgenskim cijevima s visokim vakuumom, u visoko evakuiranim televizijskim i drugim cijevima za katodne zrake itd., elektroni «emitirani» (A-8.; A-19.) iz katode K, koja se u tu svrhu po shemi u sl. 65. užari posebnom «strujom grijanja» I_h , idu prema anodi A visokim vakuumom gotovo slobodno, t. j. praktički bez srazova s molekulama uzduha.

Njihova dakle brzina neprestano se povećava pod utjecajem silâ polja, što već ne odgovara uvjetu b) iz B-10.

No osim toga elektroni na putu između katode i anode predstavljaju negativni prostorni naboj određene gustoće, koji nije neutraliziran protivnim isto tolikim

nabojem pozitivnih nosilaca, jer takvih u prostoru između katode i anode u ovom slučaju nema. Zbog ovoga »učinka prostornoga naboja«, na koji treba primijeniti Poissonovu jednadžbu (52) iz A-87. za polja s prostornim nabojima, dolazi do promijenjene raspodjele električnog polja između katode i anode, što također utječe na omjer između anodnoga napona U_a cijevi (napona anode cijevi prema katodi) i anodne struje I_a kroz cijev, pokazane na pr. galvanometrom G u sl. 65. Kako pobliži račun pokazuje (vidi vj. 32. iza poglavlja B), ovdje kod niskih anodnih napona U_a vrijedi t. zv. Langmuirova formula $I_a = K \cdot U_a^{3/2}$, t. j. konstantan je omjer $U_a^{3/2} : I_a$, a ne omjer $U_a : I_a$, kako bi bilo da vrijedi Ohmov zakon (v. konkavni dio krivulje u sl. 66.).

Kod viših iznosa U_a postizava se u danoj cijevi uz danu temperaturu t užarene katode određena struja zasićenosti (v. izvučeni horizontalni dio krivulje u sl. 66.), znak da praktički svi kod temperature t po katodi emitirani elektroni dosegnu anodu; kod viših temperatura katode t_1 , t_2 itd. katoda sekundno emitira više elektrona i pripadne struje zasićenosti su veće (crtkano naznačeno u sl. 66.).

15. Za razliku od navedenih slučajeva, kod kojih se o proporcionalnom porastu struje u odnosu prema naponu moglo govoriti samo u početnom području napona (sl. 63.) ili takvoga odnosa uopće nije bilo (sl. 66.), može se uzeti u kovnim, a također i u elektrolitičkim vodičima sve do najvećih iznosa napona i struja, koji praktički dolaze u obzir, da postoje kod točno definiranih fizikalnih vodiča (stalna temperatura itd.) linearni odnosi između napona i struje. Uporedo s time mogu se pripisivati različitim nosiocima u tim vodičima karakteristične »gibljivosti« g_1 i g_2 (koje, po definiciji tih veličina iz B-10., imaju značenje brzina tih nosilaca kod polja $F = 1$).

Razumije se samo sobom da usmjerena gibanja nosilaca naboja pod utjecajem električkoga polja, pretpostavljana kod izvođenja formula (81) i (82), treba smatrati tek superponiranim njihovima mnogo većim na sve moguće smjerove porazdieljenim termičkim gibanjima, kako je to specijalno kod kovnih vodiča već u A-19. pobliže opisano.

Ma da su prema gornjem kod kovnoga i elektrolitičkoga vođenja struje jednako dobro ispunjeni preduvjeti za Ohmov zakon, ipak između obih ovih vrsta vođenja postoji bitna razlika: a) kod kovnoga vođenja treba gibljivima pod utjecajem polja smatrati naboje nevezane uz materijalne čestice, pa prema tomu ne može biti kod metalnog vođenja struje nikakvoga izlučivanja materije; još detaljnije: sumarno govoreći može se, uz zanemarenje nekih elektrotehnički sporednih opažanja, reći da struju podržavaju upravo slobodni elektroni relativno velikih gibljivosti g_2 , koji se probijaju kroz prostornu mrežu pozitivnih, poljem negibanih kovnih iona, dakle čestica gibljivosti $g_1 = 0$; naprotiv b) kod elektrolitičkoga vođenja polje giba nosioce obiju predznaka, i ti nosioci su ioni, kojih se materijalni dijelovi nakon neutralizacije ionskih naboja »elektrolitički izluče« kao primarni »produkti elektrolize« na katodi odn. anodi, tako da je elektrolitičko vođenje uvijek

vezano na izlučivanja materije na elektrodama; gibljivosti g_1 i g_2 elektrolitičkih iona (koji mogu biti i »raznovalentni«: na pr. na svaka dva jednovalentna iona Na^+ može dolaziti po jedan dvovalentni SO_4^{--}) bit će u istoj tekućini općenito različite.

Gibljivosti pozitivnih i negativnih iona u uzduhu, iona u vodi itd. dadu se odrediti eksperimentima. Za ione u uzduhu atmosferskoga tlaka dobivaju se na pr. u V-A-s-cm-jedinicama ($\text{cm/s} : (\text{V/cm})$ ili cm^2/Vs) na pr. iznosi: $g_1 = 1,4 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ odn. $g_2 = 1,9 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. Gibljivosti iona u vodi su stotine i tisuće puta manje. Naprotiv gibljivosti elektrona u dobro vodljivim kovinama su relativno velike (na pr. za elektrone u Cu treba uzimati: $g_2 \approx 30 \text{ cm}^2/\text{Vs}$).

U poluvodljivim kristalima Ge, Si i sl., i naročito u (tek nedavno po Welkeru proizvedenim) poluvodljivim kristalima »intermetalnih spojeva« između elemenata treće i pete grupe periodskog sistema elemenata kao InSb (indium-antimon), nailazi se na mnogostruko veće gibljivosti slobodnih elektrona, na pr. kod Ge na gibljivosti reda veličine $1000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, a kod InSb čak do $60000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ i više!

Stvarno postignute brzine nosilaca ovise, dakako, i o jakostima polja F , koje iz različitih obzira u pojedinim vodljivim sredstvima imaju vrlo nejednake praktičke granice. U uzduhu atmosferskog tlaka nije na pr. ništa naročito polje $F = 100 \text{ V/cm}$, koje ionima uzduha daje brzine $v_1 = 1,4 \cdot 100 = 140 \text{ cm/s}$ i $v_2 = 1,9 \cdot 100 = 190 \text{ cm/s}$, dok slobodni elektroni u bakru kod polja $F = 0,001 \text{ V/cm}$ (za bakar izvanredno jakoga, jer uz to polje po formuli (116), koju ćemo upoznati u B-66., gustoća struje u bakru dosiže već iznos u blizini od 600 A/cm^2 ili 6 A/mm^2 i bakar se tada strujom već dobro ugrijava) zadobivaju brzine samo $v_2 = 30 \cdot 0,001 = 0,03 \text{ cm/s}$.

II. O ELEKTRIČKOM OTPORU

Jedinice otpora i vodljive vrijednosti; stare i nove praktičke električke jedinice. Specifički otpor ρ i vodljivost χ . Temperaturni i ostali fizikalni utjecaji na iznos otpora. Otpori s posebnim ovisnostima. Iz atomistike krutih tijela. Elektronski poluvodiči; kristalne diode.

16. Pređimo sad na razmatranja struja u kovnim i u elektrolitičkim vodičima. Linearnim takvim vodičima prereza q i duljine l pripada uz stalne nuzgredne uvjete (osobito temperatura) posve određeni električki otpor. On je definiran (uz pretpostavku da vodič nije sijelo EMS) relacijom: $R = U/I$, iz koje se vidi da dimenzije veličine R moraju biti jednake dimenzijama kvocijenta napona U između krajeva otpora i struje I kroz otpor.

Prema tomu bi se jedinica otpora jednako u V-A-s-m- kao i u V-A-s-cm-sustavu mogla zvati V/A, a slično bi se moglo postupati i u drugim sustavima jedinica. Međutim kako uz napon i struju otpor predstavlja najčešće upotrebljavanu veličinu, za jedinicu otpora V/A (volt po amperu) zbog kratkoće upotrebljava se redovito posebno ime: *om* (po Ohmu; kratica: Ω), pa ćemo i mi otpore navoditi u Ω , odn. u dekadskim multiplima i alikvotnim dijelovima te jedinice, na pr. u $\text{M}\Omega$ ($10^6\Omega$), $\text{k}\Omega$ ($10^3\Omega$), $\mu\Omega$ ($10^{-6}\Omega$) itd.

Po relaciji $R = U/I$ posve općenito otpor $R = 1$ pripada vodiču kroz koji napon $U = 1$ proizvodi struju $I = 1$, pa se specijalno u elektrotehničkom sustavu otpor 1 *om* može definirati kao otpor vodiča, kroz koji uz napon između krajeva vodiča 1 *volt* (naznačen po A-43. i A-75. time da se naponu stezaljki neopterećena internacionalnoga Westonova normalnog elementa kod 20°C pripiše iznos $1,01865 \text{ V}$) teče struja 1 *amper* (naznačena po A-9. kao struja koja sekundno elektrolitički izlučuje $1,11815 \text{ mg}$ srebra). Ovako fiksirani otpor 1 *om* može se karakterizi-

rati i »empiričkim« propisom kao *otpor kod 0 °C stupca žive od 14,4453 grama, duljine 106,25 cm i svagdje jednakoga presjeka*¹⁾, kako je već u A-75. spomenuto.

17. Recipročna vrijednost otpora nekoga vodiča, dakle veličina $1/R$, zove se »vodljiva vrijednost« vodiča; jer što je kod danoga napona otpor nekoga vodiča manji, te prema tomu njegova vodljiva vrijednost veća, to jača struja prolazi kroz vodič i to više on »vrijedi« kao vodič.

Vodljiva vrijednost izražava se u *simensima* (po Siemensu; kratica: S); na pr.: vodič od 5Ω ima vodljivu vrijednost $\frac{1}{5} = 0,2$ S, vodič od $1\text{ M}\Omega$ ima vodljivu vrijednost $1\text{ }\mu\text{S}$ itd.

18. Kako su tri osnovne električke veličine *napon, struja i otpor* vezane Ohmovim zakonom $U/I = R$, to uz samovoljno odabrane jedinice za dvije od tih veličina jedinica za treću veličinu slijedi sama po sebi. Baš zbog toga smo mogli malo prije definirati jedinicu Ω već uvedenim jedinicama A i V; a kod A i V pripadnih V-A-s-m-sustavu, u pravilu upotrebljavanomu u ovom dijelu, pripada i jedinica Ω tom sustavu.

Prvobitno su po t. zv. »londonskim zaključcima« iz g. 1908. bili definirani kao internacionalne električke jedinice: a) 1 *amper* kao struja koja elektrolitički izluči sekundno 1,11800 mg srebra, b) 1 *om* kao otpor kod 0 °C stupca čiste žive svagdje istog prereza duljine 106,3 cm i mase 14,4521 g, pa je onda c) za 1 *volt* slijedila po a) i b) i Ohmovu zakonu jedinica napona kojom je napon stezaljki neopterećena internacionalnog Westonova elementa kod 20 °C izlazio izražen sa 1,01830 V.

Pri tom je tendencija bila da se iz empirički definiranih dviju jedinica *ampera i oma*, po potrebi uz pripomoć sekunde kao jedinice vremena, nadjaju na temelju osnovnih odnosa kod električkih i magnetskih pojava same sobom ostale električke jedinice, na pr. *volt* ($\text{A}\Omega$), *kulon* (As), *farad* ($\text{As}/\text{A}\Omega = \text{s}/\Omega$) itd., pa i neke od mehaničkih jedinica, na pr. *vat* ($\text{A}^2\Omega$) i *vatsekunda* ($\text{A}^2\Omega\text{s}$), no da istodobno na empiričkim definicijama dviju osnovnih električkih internacionalnih jedinica, bazirane jedinice budu što točnije dekadski mnogokratnici ili dekadski alikvotni dijelovi »sustava EMJ« (A-54.). Poimence htjelo se da 1 A bude baš 0,1 EMJ struje, 1 Ω baš 10^9 EMJ otpora, 1 V baš 10^8 EMJ napona, itd., te prema tomu da također 1 VA = 1 W predstavlja točno 10^7 CGS-jedinica učina = 1 »apsolutni« vat, i po tomu 1 Ws da predstavlja 10^7 CGS-jedinica radnje = 1 »apsolutni« džul, tako da internacionalne električke jedinice budu u numerički jednostavnoj vezi s jedinicama mehaničkoga, t. zv. »apsolutnoga« CGS-sustava.

Spomenuti cilj: da internacionalno uvedene električke jedinice *amper, om* itd. budu u navedenom smislu i same »apsolutni« amper, »apsolutni« om, itd., bio je međutim londonskim definicijama iz g. 1908. samo približno postignut, jer primijenjeni odnosi nisu u ono vrijeme, kraj znatno slabije nego danas razvijene mjerne tehnike, bili dovoljno točno poznati. Prihvatom novih, nešto malo promijenjenih iznosa po B-16. dolazi se naprotiv na jedinice koje praktički potpuno odgovaraju »apsolutnima« električkim jedinicama, kakve su i internacionalno prihvaćene s početkom g. 1948. Tako ne treba više razlikovati VA od »apsolutnog« vata, odn. VAs od »apsolutnog« džula, a apsolutnim V i A uvedeni sustavi V-A-s-m i V-A-s-cm istodobno odgovaraju novim električkim jedinicama i korespondiraju samo faktorima 10^n s cjelobrojnim n sa CGS-jedinicama, odn. EMJ. Uostalom o apsolutnom voltu i apsolutnom amperu bit će još govora u C-55. odn. C-47.

Međutim razlike između starih (do 1948.) i novih (od 1948.) električkih jedinica nisu prelazile ni u kojem slučaju 0,05%, pa se praktički promjena 1948. jedva zamijetila. I najtočniji naime instrumenti s kazalom »klase 0,1« mjere u najboljem slučaju pouzdano tek na 0,1%. Istom kod najpreciznijih laboratorijskih mjerenja »kompenzatorima« (B-54.) postižu se točnosti mjerenja od 0,02% i gore spomenute razlike novih jedinica prema starima već su dolazile do izražaja.

¹⁾ Kraj navedene mase žive i navedene duljine stupca taj je presjek baš 1 mm^2 .

19. Veličine *specifički otpor* ili *otpornost* (rezistivnost) ρ i *specifička vodljivost* ili *vodljivost* (konduktivnost) κ uvedene u B-10. u izrazu (83) za otpor:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{q} = \frac{l}{\kappa q} \quad (84)$$

predočuju očito otpor i vodljivu vrijednost vodiča duljine $l = 1$ i prereza $q = 1$. Iz ovoga njihova značenja imena veličina ρ i κ postaju sama sobom razumljiva.

Što *manje* ρ (i prema tomu *veće* κ) ima neki vodljivi materijal, to bolje »vodljivim« treba ga smatrati za struju i to će veći broj simensa imati vodič određene duljine l i određenoga prereza q iz toga materijala u usporedbi s vodičima jednake duljine i jednakoga prereza od drugih vodljivih tvari.

20. Prema gornjemu poznavanje iznosa ρ (ili iznosa $\kappa = 1/\rho$) neke tvari od bitne je važnosti za proračunavanje otpora ma kakvih vodiča iz te tvari, pa ćemo ρ i κ navesti za neke važnije vodljive materije.

No na dvije stvari treba prije toga upozoriti. Ponajprije treba primijetiti da bi se u sustavima V-A-s-m odn. V-A-s-cm, koji inače rade sa m i m² odn. cm i cm² kao jedinicama duljine i površine, bilo dosljedno kad bi se navodili specifički otpor i vodljivost svedeni na duljinu vodiča m odn. cm i prerez vodiča m² odn. cm², dakle kad bi specifički otpori bili izražavani u $\Omega \cdot \text{m}^2/\text{m}$ ($= \Omega \cdot \text{m}$) odn. u $\Omega \cdot \text{cm}^2/\text{cm}$ ($= \Omega \cdot \text{cm}$), a vodljivosti u $\text{S} \cdot \text{m}/\text{m}^2$ ($= \text{S}/\text{m}$) odn. u $\text{S} \cdot \text{cm}/\text{cm}^2$ ($= \text{S}/\text{cm}$). U fizici se po drugoj alternativni obično i radi. Međutim u elektrotehnici se od toga, kod metalnih vodiča, odstupa, pa se specifički otpor i vodljivost navode pretpostavljajući vodiče duljine 1 m i prereza 1 mm², t. j. ρ se navodi u $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ (u iznosima 10⁶ puta *većima* od onih u $\Omega \cdot \text{m}^2/\text{m}$ i 10⁴ puta *većima* od onih u $\Omega \cdot \text{cm}^2/\text{cm}$) i κ se navodi u $\text{S} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$ (u iznosima 10⁶ puta *manjima* od onih u $\text{S} \cdot \text{m}/\text{m}^2$ i 10⁴ puta *manjima* od onih u $\text{S} \cdot \text{cm}/\text{cm}^2$); u tom slučaju, dakako, treba i u relacije $R = \rho \cdot l/q$ i $1/R = \kappa \cdot q/l$ stavljati l u m i q u mm², da bi R izišlo u Ω , odn. $1/R$ u S.

Ipak kod elektrolitičkih vodiča, gdje je uostalom običaj računati jedino s vodljivošću, i kod elektrotehničkih mjerenja navode se katkad iznosi vodljivosti i u S/cm, u kojem slučaju kod proračunavanja Ω^{-1} ili S izrazom $\kappa \cdot q/l$ treba staviti duljinu vodiča u cm i prerez u cm². Da ne bude zabune, mi ćemo malo dalje u Tabeli I. i za elektrolitičke tvari svejedno navesti ρ i κ u $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ i $\text{S} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$, a za iznose vodljivosti u $\text{S} \cdot \text{cm}/\text{cm}^2$ ($= \text{S}/\text{cm}$) zapamtiti ćemo, da izlaze množeci sa 10⁴ one u $\text{S} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$.

Druga je stvar, na koju treba pripaziti, ova: iznose ρ i κ treba navesti za određenu temperaturu, jer na otpore općenito utječu fizikalne prilike, a od njih obično kudikamo najjače temperatura. Uz ρ i κ navedene za određenu temperaturu t_0 izlazi dakako i iznos R računan po (84) baš za tu temperaturu. U elektrotehnici je općenito uobičajeno navoditi ρ i κ za temperaturu $t_0 = 20^\circ \text{C}$, pa ćemo i mi tako raditi.

21. Nakon ovih prethodnih upozorenja evo tabele veličina ρ i κ za niz čistih kovnih i drugih vodljivih tvari, poredanih po rastućem ρ (u tabelu su odmah unesene i vrijednosti veličine α , o kojoj će odmah biti govora; brojevi kod sastavnih dijelova slitina naznačuju postotke težine):

Tabela I.

Materijal	ρ ($\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$)	κ ($\text{S} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$)	α
Srebro	0,0164	61	+ 0,0038
Bakar	0,0175	57	+ 0,0039
Aluminij	0,029	34	+ 0,0637
Žuta mjed (Cu-Zn)	0,07	14	+ 0,002
Željezo	0,1 do 0,15	10 do 7	+ 0,0045
Olovo	0,22	5,5	+ 0,0039
Nikelin (67Cu-30Ni-3Zn)	0,42	2,4	+ 0,0002
Manganin (86Cu-12Ni-2Mn)	0,43	2,3	$\pm$ 0,00001
Konstantan (54Cu-45Ni-1Mn)	0,5	2	— 0,00003
Kromnikalj (20Cr-80Ni)	1,1	0,9	+ 0,0004
Kantal A (Fe-Cr-Al-Co)	1,45	0,69	
Retortni ugljen (prosječno)	100	0,01	— 0,0005
30% H_2SO_4 + 70% H_2O	13000	0,000076	— 0,02
Morska voda (prosječno)	300000	0,000003	
Silit (Si-SiC)	oko 10^8	oko 10^{-8}	
Zemlja (vlažna do suha)	10^8 do 10^{10}	10^{-8} do 10^{-10}	
Destilirana voda	oko 10^{10}	oko 10^{-10}	
Transformatorsko ulje (prema čistoći)	10^{17} do 10^{18}	10^{-17} do 10^{-18}	

22. Veličinom α u tabeli I., nazvanom »temperaturni koeficijent otpora«, karakterizirane su promjene otpora s temperaturom, suponirane linearne unutar dovoljno uskih temperaturnih granica. Temperaturni koeficijent otpora α , naveden za danu tvar i danu početnu temperaturu $t_0 = 20^\circ\text{C}$, na koju se i iznosi ρ i κ odnose, nije ništa drugo no porast otpora 1Ω (kod t_0) od promatrane tvari po 1 stupnju C temperaturnoga porasta, tako da porast otpora R uz povišenje temperature od t_0 na t , dakle za iznos $t - t_0$, iznosi $R \cdot \alpha \cdot (t - t_0)$.

Prema tomu za ukupni iznos otpora R_t kod temperature $t^\circ\text{C}$, uz ρ i α navedene za $t_0 = 20^\circ\text{C}$ vrijedi (ako je $\vartheta = t - 20$):

$$R_t = R \cdot [1 + \alpha(t - 20)] = R(1 + \alpha\vartheta) = \rho \cdot \frac{l}{q} \cdot (1 + \alpha\vartheta) \quad (85)$$

23. Kako se iz navedenih iznosa ρ i κ vidi, iza srebra, koje je vrlo skupo, najbolje struju vode čisti bakar i aluminij. Zato su bakrene i aluminijske žice vrlo

prikladne za električne vodove, a bakrene uz to i za namotaje električkih strojeva i transformatora, budući da kraj istoga otpora po metru duljine imaju manji prerez od aluminijskih (iako su teže zbog velike »rel. gustoće« $\gamma = 8,9$ bakra u usporedbi sa $\gamma = 2,7$ aluminijske). Tek u nuždi nadomještali su bakar i aluminij manje prikladnim tvarima kao cink, željezo itd. Paralelno s visokim električkim vodljivošću Ag, Cu i Al, i više manje čistih kovina uopće, idu i njihove visoke toplinske vodljivosti (Wiedeman i Franz), što je i teorijski lako obrazložiti.

Važno je znati, da se na povoljne iznose ρ i α za bakar, aluminij itd., kako su navedeni u tabeli I., smije računati samo kod ovih kovina po mogućnosti čistih od stranih primjesa, jer i maleni postoci nečistoća, kakvih na pr. ima uvijek u običnom »neraфинiranom« bakru, znatno povećavaju ρ i smanjuju α : samo 1% nečistoća u Cu može povećati ρ na dvostruko odn. smanjiti α na polovicu. Zato se za vodove i namotaje upotrebljava samo osobito čisti, t. zv. elektrolitički (elektrolizom rafinirani) bakar sa svakako iznad 99% Cu.

Primjesama se ne samo povećava ρ , nego se obično smanjuje i α , koji je kod čistih kovina po tabeli I. pozitivan (otpor raste s temperaturom) i obično u blizini od 0,004 (t. j. za 1 stupanj povišenja temperature otpor poraste za oko $\frac{4}{1000}$ ili 0,4%, za 25 stupnjeva poraste već za 10% itd., dakle prilično mnogo).

24. Ipak se kovine s primjesama i slitine od nekoliko kovina mnogo upotrebljavaju u elektrotehnici. Tako se često dodaju bakru dodaci koji povećavaju materijalu mehaničku čvrstoću, poželjnu na pr. kod uzdušnih vodova, ne smanjujući mu mnogo vodljivost (različite »bronce«, koje osim bakra sadržavaju i prikladnu primjesu; na pr. »silicijska bronca«, »fosforna bronca« itd.).

Ima s druge strane kovnih slitina hotimično kombiniranih u cilju postizavanja što većega ρ (dakle što manjega α) i istodobno malenoga α . Do tih je slitina dovela potreba elektrotehnike za materijalima kojima se mogu realizirati određeni otpori uz što manju duljinu kraj danoga prereza žice; većinom je pored toga bilo poželjno, da proizvedeni otpori budu istodobno i što manje ovisni o temperaturi. Takvi otpori potrebni su na pr. za pravljenje različitih »otpornika« ili »reostata« (otpora za reguliranje jakosti struje i poništavanje napona, otpora za mjerne svrhe itd.), zatim kod gradnje električkih kuhala, glačala, peći itd. Za ove potonje svrhe upotrebljavane tvari treba dakako da mogu podnositi, bez oksidacije i taljenja, i usijavanja u uzduhu na što više temperature. Kantal A dobro podnosi temperaturu do 1300 °C (i tali se kod 1500 °C). Primjeri raznih »tvari za otpore« s velikim ρ i malenim α jesu u tabeli I. nikelin, manganin itd. sve do kantala.

Kako se vidi, naročito kod manganina α gotovo iščezava, pa se ova slitina zato (i zbog drugih dobrih svojstava) upotrebljava za proizvodjenje precizionih temperaturno neovisnih »mjernih otpora« (otpora za mjerenja). Druga poznata tvar za mjerne otpore bila bi već u vezi s termoelementima spomenuti konstantan (B-4.).

25. Zanimljive osobitosti pokazuju elektrolitički vodiči. Ne samo da su vodljivosti i najbolje vodljivih elektrolita relativno vrlo malene (na pr. vodom razrijeđena

sumporna kiselina maksimalne vodljivosti, t. j. ona sa 30% H_2SO_4 , vodi struju 750000 puta slabije nego bakar, a morska voda 17 milijuna puta), nego je za razliku od kovina još kod svih njih temperaturni koeficijent negativan i po apsolutnom iznosu relativno velik (tako se kod 30%-tne H_2SO_4 α kreće oko $-0,02$, što znači da po stupnju C povišenja temperature otpor kupelji s tom tekućinom pada za 2%, t. j. pada 5 puta naglije, nego li raste otpor bakra). Zato se i mora kod mjerenja otpora elektrolitičkih kupelji naročito paziti na temperaturu.

Pomno destilirana voda po tabeli I. izvanredno je slabo vodljiva, no već neznatne primjese otopljenih soli, baza i kiselina čine je zbog »elektrolitičke disocijacije« mnogo puta bolje vodljivom (riječna i vodovodna voda; voda s primjesom sode Na_2CO_3 u nekoć više upotrebljavanim »tekućinskim pokretačima« uz elektromotore).

26. Zanimljivo je da i otpor ugljena opada kod porasta temperature. Zato su stare sijalice s ugljenom niti imale oko dvaput niži otpor u usijanom stanju nego u hladnom. Obrnuti je slučaj kod današnjih sijalica s volframom, kojima otpor prilično jako raste s temperaturom; ove sijalice imaju hladne mnogo puta (na pr. 12 do 17 puta) niži otpor nego užarene do pogonske temperature, pa im struja u času ukapčanja kratkotrajno postizava znatno veći iznos od nominalnoga. Samo zbog spomenutih promjena otpora s temperaturom omjer napona i struje ne ostaje konstantan kod povećavanja napona od neznatnih iznosa do nominalnoga (normalnoga) za danu sijalicu.

I vodljivost stakla raste s temperaturom. Užareno staklo već posve lijepo vodi struju. Slično i porculan. Za krute visokoomske otpore mnogo se upotrebljavaju štapići od silita (smjese silicija i silicijskog karbida), koji po Tabeli I. ima neobično visok ρ ; no silitni otpori nisu »naponski neovisni«. Temperaturni koeficijent silita je negativan.

27. Kako je električki otpor veličina, koja se dađe lako točno mjeriti (v. kasnije), blizu je bila misao iz vrijednosti otpora R_2 i R_1 određenih kod neke nepoznate temperature t_2 i neke poznate temperature t_1 zaključiti na iznos temperature t_2 .

Tako se mjere temperature na pr. magnetskih namotaja električkih strojeva: izmjeri se otpor R_1 namotaja u hladnom stanju prije pogona i otpor R_2 u vrućem stanju nakon duljega pogona.

Ako je α temperaturni koeficijent otpora za temperaturu t_0 kao polaznu, te ako je t_1 temperatura hladnoga namotaja, a t_2 vrućega namotaja, lako se dvostrukom primjenom relacije (85), odbijanjem dobivenih jednadžbi i drugim jednostavnim transformacijama dobiva:

$$t_2 = t_1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot \alpha} \left[1 + \alpha \cdot (t_1 - t_0) \right] \quad (86)$$

Specijalno uz t_1 jednako (ili bar blizu) temperaturi t_0 , za koju se α uzima (na pr. za 20 °C može se α uzeti iz tabele I.), formula (86) pojednostavljuje se u: $t_2 = t_1 + (R_2 - R_1)/(R_1 \alpha)$. Ova jednostavnija formula može se primijeniti čak i kod t_1 znatno različitoga od t_0 , ako se za α stavi iznos, koji odgovara temperaturi t_1 . Za Cu se taj iznos može na pr. računati po formuli $\alpha = 1/(235 + t_1)$; v. vj. 27.

Slično se mogu po promjeni otpora mjeriti i druge, pa i vrlo neznatne promjene temperatura u nekom prostoru, ako se prikladno izvedeni temperaturno osjetljivi otpor (na pr. namotaj tanke nikalne žice) dovede na istraživano mjesto, koje može biti više ili manje udaljeno; tako postoji posebno područje električke mjerne tehnike: »mjerjenja temperature otporima« (pored već u B-4. spomenutih »mjerjenja temperature termoelementima«). Sprave za finija mjerjenja na principu promjene otpora s temperaturom, kod kojih se promjene otpora mjere metodom t. zv. Wheatstoneova mosta, zovu se katkad »bolometri«; obično se na promjenu temperature zaključuje iz promjene otpora vrlo fine Pt-žice.

Baš radi povišenja otpora namotaja strojeva ugrijavanjem kod pogona obično se ni ne uzima kod proračunavanja električkih strojeva za bakar $\rho = 0,0175$ ili $\kappa = 57$, nego se odmah stavlja $\rho = 0,02$ odn. $\kappa = 50$, t. j. računa se odmah s »pogonski vrućim« stanjem stroja. Vrijednosti $\rho = 0,02$ odgovarala bi po (85) temperatura od skoro 60°C .

Kod velikih promjena temperature linearna relacija (85) nije više dovoljno točna i promjene otpora ne mogu se više smatrati proporcionalnim promjenama temperature. Bolju aproksimaciju nego (85) daje formula oblika: $R_t = R \cdot (1 + \alpha\theta + \beta\theta^2)$, u kojoj dolaze dvije konstante α i β . A najtočnije se variranje otpora s temperaturom predložuje krivuljom s iznosima t kao apscisama i R_t kao ordinatama.

Kako jako varira otpor Cu s temperaturom, vidi se iz ovoga primjera: otpor bakrenoga vodiča kod $-192, 0, +200$ i $+400^\circ\text{C}$ iznosio je 15, 100, 186 i 276 oma.

Otpor vodiča od željeza, ugrianih na pr. strujnom toplotom do temperaturâ slaboga žara, raste izvanredno naglo s temperaturom, pa se u spomenutom području temperaturâ utjecaj povišenja napona na iznos struje gotovo kompenzira utjecajem porasta otpora, t. j. struja ostaje gotovo konstantna i kod variranja napona, odn. pripadni dio krivulje struje u ovisnosti od napona teče gotovo horizontalno. Ovo se katkad iskorišćuje za podržavanje stalnih struja kod promjenljivih napona; u tu svrhu u seriju s potrošačem ukopča se željezni vodič smješten u staklenu cijev s vodikom: otpornici sa »željezom u vodik«.

U novije vrijeme mnogo se primjenjuju za važne svrhe otpori iz materija sa vrlo visokim negativnim temperaturnim koeficijentima, koje prema tomu vode vruće mnogostruko bolje nego hladne. Mehanizam njihova vođenja struje je drukčiji nego kod metalnih vodiča, to su t. zv. *poluvodiči* (koji sadrže na pr. neke okside, kao spinel oksida magnezija i titana $2\text{MgO} \cdot \text{TiO}_2$, i sl.). Komercijalna imena ovih otpora jesu: termistor (*thermo-sensitive resistor*), ternevid, NTC-otpor i tako dalje.

Ima i otpora *naponski* vrlo ovisnih: kod viših napona oni mnogostruko bolje vode nego kod nižih napona.

Kod ekstremno niskih temperatura otpor nekih kovina (i nekih slitina) kod određene, za pojedinu tvar karakteristične, temperature padne naglo praktički na nulu; nastupa stanje »supravodljivosti«, kod kojega se struje u vodiču mogu podržavati praktički bez potroška napona i bez razvijanja strujne topline. Na pr. olovo postaje supravodljivo kod $-265,7^\circ\text{C}$ i struja kroz zavojnicu olova, kad je jednom povedena (elektromagnetskom indukcijom), struji dalje sama od sebe sate i sate. Kroz živu dovedenu u supravodljivo stanje ohlađivanjem ispod $-268,8^\circ\text{C}$ mogu se podržavati struje od 1000 A/mm^2 , a da se supravodljivo stanje ne poremeti. Supravodljivost je dosad opažena samo u blizini »apsolutne ničice« temperature 0°K ($= -273,2^\circ\text{C}$).

28. Osim temperature mogu utjecati na otpor vodiča i drugi fizikalni utjecaji. Tako se i tehnički iskorišćuje činjenica da otpor vodiča od selena silno padne, ako se takav vodič iole jače osvijetli. Otpor pak plosnate spirale od bizmuta pokazuje veće ili manje poraste, kad se takva spirala stavlja na pr. u uzdušne pukotine električkih strojeva, gdje postoje jača magnetska polja (mjerjenja magnetskih polja bizmutovom spiralom). Još mnogoput osjetljivija reagiranja na magnetska polja

pokazuju već u B-15. spomenuti naročiti »poluvodiči« kao InSb, tipa spojeva $A^{III}B^V$ elemenata A^{III} treće skupine i B^V pete skupine periodskog sistema. Uopće su »elektronski poluvodiči« (o njima će odmah biti govora) od najvećeg interesa za elektrotehniku, pogotovo kao ispravljačke »kristalne diode« i kao »transistori« na bazi elemenata četvrte skupine Ge ili Si. Poluvodiči kao InSb i sl. zapravo reagiraju i na slaba magnetska polja zbog po B-15. posve iznimno velikih »gibljivosti« njihovih slobodnih nosilaca naboja, koje magnetska polja lako otklanjaju, izazivajući promjene otpora (i stvaranja »Hallovih napona«; o ovima kasnije u C-15.).

I nutarnja struktura tvari od utjecaja je na otpor. Tako vučeni bakar s nutarnjim napetostima ima povećani specifički otpor prema onomu koji je žarenjem i polaganim ohlađivanjem oslobođen tih napetosti. A mjerni otpori od manganina ne poprime svježe namotani odmah baš potpuno točno konačni iznos otpora, nego istom nakon više mjeseci »starenja« (koje se može i umjetno skratiti, na pr. podržavanjem kroz 24 h na temperaturi 140°C : »umjetno starenje«).

29. Navedeni su dosad, a dali bi se i dalje obilno navoditi, mnogobrojni fizikalni faktori kojima podliježu specifički otpori ρ , odn. vodljivosti $\kappa = 1/\rho$, naročito krutih tjelesa, pa bi se moglo postaviti pitanje suvremenog tumačenja detalja, kvalitativno i kvantitativno toliko raznolikih, pri pojavima električkih struja kroz kruta tjelesa.

To je izrazito fizikalna problematika, točnije problematika s područja atomske fizike, upravo odsjeka atomske fizike koji se bavi krutim tjelesima, i to u njihovom kristaliničnom stanju, kad su im atomi povezani u pravilne »prostorne mreže«.

Predaleko bi dakako odvelo, već s gledišta raspoloživog prostora, kad bi se na ovom mjestu pokušalo ma i nešto potanje razraditi ovako specijalno područje, koje je samo još u djelomičnom previranju, no uz najnovija, također i tehnički važna otkrića o neobičnostima vođenja struja u izvjesnim krutim tjelesima, ne će biti suvišno ako se bar nešto o postavljenom problemu i ovdje iznese, prvenstveno u vezi s »elektronskim poluvodičima«. Treba odmah upozoriti da se činjenice ne mogu kvantitativno obuhvatiti metodama klasične fizike, nego tek na bazi naj-suvremenije, u mnogomu prema prvobitnim zamislima znatno profinjene teorije kvanta, koja je najviše kadra da dađe teoriju elektronâ iz vanjskih ljusaka atoma pri njihovim manifestacijama unutar krutih kristaliziranih tjelesa. Bez djelomično komplicirane pojmovne i matematske aparature moderne kvantne atomistike razmatranja će doduše morati ostati više lapidarna i više kvalitativna, ali će i ovakva pridonijeti razumijevanju tehnički važnih odnosa.

Kristalinična struktura može se smatrati normalnom za materiju u krutom stanju; kod tjelesa nazvanih nekristaliničnima ili amorfnima radi se ili o struktura mnogobrojnih sraslih mikrokristala ili o zapravo nekrutim staklastim tvarima s karakterom »pothlađenih tekućina«. Kristalinične strukture karakteriziraju u idealnom slučaju posve određeni rasporedaji pojedinih atoma krutih tjelesa, njihovi

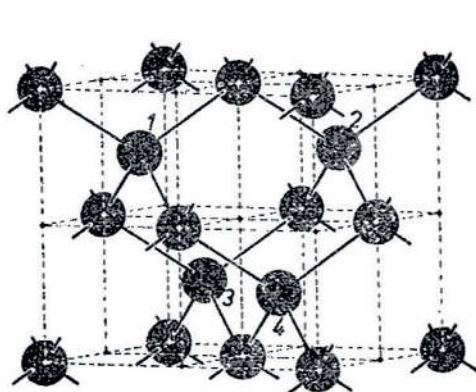
razmještaji u određene pravilne »prostorne rešetke« s praktički fiksnim mjestima atomâ u rešetki u blizini apsolutne nule temperature, te postepeno jačim titrajima atomâ oko njihovih mjesta u rešetki pri postepeno višim temperaturama. Kod još daljih povišenja temperatura može doći do sloma prostorne rešetkaste strukture i prelaza tvari u tekuće, i napokon i u plinovito stanje, a može doći i do raspada molekularnih veza (disocijacije) tvari.

Rešetkaste kristalinične strukture treba zamišljati podržavane određenim vezama između susjednih atoma u rešetki. Te veze mogu biti dvovrsne: »heteropolarne« i »homeopolarne«, a mogu obje vrste veza i kockizistirati u istom kristalu. Tako u *ionskim kristalima* kao NaCl treba zamišljati heteropolarne ione Na^+ i Cl^- naizmjenice razmještene u prostornu rešetku, i podržavane u tom razmještaju privlačenjima između susjednih iona Na^+ i Cl^- (ioni Na^+ i Cl^- prostorne mreže NaCl-kristala nastaju time da jedini elektron vanjske ljuske prvobitno neutralnog atoma Na dođe u sastav prvobitno neutralnog atoma Cl, u čijoj vanjskoj ljuski već ima sedam elektrona, pa se pridolom elektrona ta ljuska baš popuni; osiromašenjem za jedan elektron atoma Na i obogaćenjem za jedan elektron atoma Cl rezultiraju ioni Na^+ i Cl^-). No važnije su, i nas će jedine dalje interesirati, homeopolarne veze, podržavane parovima elektrona kao vezama među susjednim atomima. Na te veze *elektronskih kristala*, susretane recimo kod kristala sastavljenih iz atoma istog elementa, troše se elektroni vanjske ljuske atoma rešetke, i to po jedan takav vanjski elektron od svakog atoma za vezu prema svakom susjednom atomu, tako da nastanu veze s po jednim parom elektrona, jednim elektronom od jednoga i jednim elektronom od drugoga od dvaju međusobno susjednih atoma.

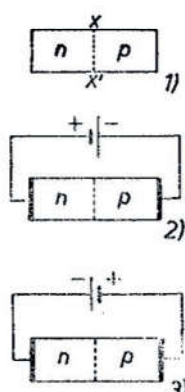
Tako specijalno kod »diamantske« prostorne rešetke, u kojoj kristaliziraju elementi četvrte skupine periodičkog sistema elemenata: ugljik C (diamant), germanij Ge, silicij Si, ..., rešetkasta struktura odgovara raspoređaju po sl. 67.a) i između svaka dva susjedna atoma bez vanjskih elektrona na pr. Ge (na slici: kuglice) drže vezu dva vanjska elektrona, po jedan iz svakoga od tih atoma (na slici po jedna linija između susjednih kuglica; za grubu predodžbu mogu se ta dva elektrona zamišljati u gibanju u ljuski oko oba njima vezana atoma). Očito se time u praktički idealnoj diamantskoj rešetki sva četiri vanjska elektrona svih atoma utroše na veze, i ne preostane vanjskih elektrona koji bi mogli postati slobodni elektroni, nosioci električkih struja (poput u kovinama uvijek obilno prisutnih slobodnih elektrona, zbog kojih kovine i jesu dobri vodiči). Zato kristal, u praktički idealnim prilikama, blizu apsolutne nule temperature i bez nečistoća, predstavlja praktički potpun izolator (savršen materijalni dielektrikum).

No stvar se mijenja kod viših temperatura, kad zbog pojačanih termičkih gibanja ispadanjem pojedinih elektrona iz pripadnih veza ti elektroni postaju slobodni nosioci naboja $-Q_0$, i na njihovim prvobitnim mjestima ostaju »praznine« (»rupe«) lišene negativnog naboja, koje se vladaju kao pozitivni nosioci naboja $+Q_0$ i mase uglavnom jednake masi elektrona m_0 , dakle kao neki fiktivni »manj-

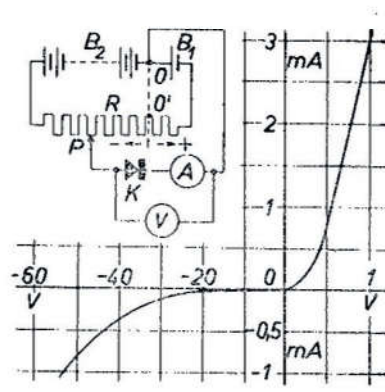
kajući elektroni» (defektelektroni), koji pored slobodnih elektrona pridonose vođenju električke struje pri postojanju električkog polja u kristalu. Pojav treba gledati statistički u tom smislu da u svakom momentu postoje izvjesne iste koncentracije elektrona istrgnutih iz njihovih veza, dakle negativnih nosilaca naboja, i rupa ili defektelektrona, ekvivalentnih pozitivnim nosiocima naboja, s time da se trajno na raznim mjestima stvaraju rupe gubitkom vezanih elektrona i na drugim mjestima iščezavaju rupe njihovim rekombiniranjem sa slobodnim elektronima, pa se i rupe mogu smatrati fiktivnim slobodnim pozitivnim nosiocima, kako su i negativni nosioci slobodni elektroni. Ako se sad primjenom vanjskog električkog napona proizvede unutar kristala električko polje, pod utjecajem toga polja doći će do suprotnih strujanja obih vrsta nosilaca naboja, elektrona u smjeru suprotnom od



Sl. 67.a)



Sl. 67.b)



Sl. 67.c)

smjera djelovanja polja i rupa ili defektelektrona u smjeru polja. A oba ta strujanja, u smislu razmatranja iz B-9., predstavljaju električku struju u smjeru polja, odnosno izlaze na to da kristal pokazuje pri rastućoj temperaturi najprije neznatnu i dalje sve veću »vlastitu« vodljivost, dakle da već predstavlja nepotpun izolator, drukčije rečeno: da postaje već ponešto vodič, t. j. poluvodič, s vodljivošću prema (83') uz $n = 1$ (jer se radi o nosiocima jednostrukih naboja $-Q_0$ i $+Q_0$), dakle proporcionalnom prostornoj koncentraciji Z jednih odn. drugih nosilaca, te gibljivostima g_1 i g_2 prvih i drugih.

Međutim ta kod običnih temperatura redovno malena »vlastita« vodljivost kristala može biti znatno natkriljena »dodatnom« vodljivošću izazvanom djelovanjem ma i neznatnih primjesa, koje se obično na taj način proizvedu da se optoivanima kristalizacijama do najveće moguće čistoće dovedenoj osnovnoj tvari kristala, dakle na pr. vanredno čistom Ge, i to rastaljenom obliku te tvari u vakuumu ili atmosferi inertnog plina, pridodaju neznatne primjese izvjesnih stranih elemenata, bilo onih pete skupine periodičkog sustava (kao As), bilo onih treće skupine (kao Al). Tako, pri polaganom postepenom skrućivanju primjesama namjerno i točno dozirano onečišćene rastaljene mase, bivaju u prostornu mrežu nastalih

kristala, umjesto atoma osnovne tvari, na pojedinim mjestima ugrađeni strani atomi primjese kojom se »dotirala« (snabdijela) rastaljena masa. Ako je sad dotiranje izvršeno elementom pete skupine, od svega pet ^{elektrona} ~~atoma~~ vanjske ljuske nekog njegovog atoma moći će se tek četiri utrošiti na stvaranje veza prema susjednim atomima osnovne tvari, a preostali peti elektron ostat će neiskorišćen, i po tomu raspoloživ da postane slobodan elektron. Kako i primjese od neznatnog djelića procenta predstavljaju vrlo mnogo stranih atoma u kristalu, pojavit će se u kristalu obilje slobodnih (vodljivih) elektrona, zbog kojih će kristali postati već znatnije vodljivi poluvodič, uglavnom s nosiocima naboja negativnog predznaka, odakle mu i ime *n*-poluvodič. Primiješani element, uzrok stvaranju elektronskih nosilaca, zove se *donator* (davalac). Posve suprotan efekt imat će dotiranje osnovne tvari malim primjesama koga elementa treće skupine, jer s tek tri vanjska elektrona atoma takvog elementa ugrađenih u rešetku, namjesto prvobitnih atoma na pr. Ge, ne može se posve zadovoljiti potreba četiriju veznih elektrona koje bi imali dati pojedini atomi, što otvara mogućnost da strani atomi manjkajuće elektrone nadoknade time da bar djelomice preuzmu po jedan vezni elektron atoma osnovne tvari, i stvore na taj način pripadni broj rupa. U tom slučaju kristal postane poluvodič s preobiljem rupa, fiktivnih pozitivnih nosilaca naboja, dakle *p*-poluvodič. A primiješani element, kao onaj koji preuzimanjem elektrona stvara rupe ili defektelektrone, zove se *akceptor* (primalac).

Može se uostalom, pri uzgajanju kristala, polaganim izvlačenjem ovoga iz rastaljene mase, dotirati ova potonja naizmjence donatorima i akceptorima, i time postići da se u nastalom kristalu nadovezuju područja s *n*-vodljivošću i ona s *p*-vodljivošću. Tako mogu nastati na pr. *n-p*-kombinacije, te *n-p-n*-kombinacije i *p-n-p*-kombinacije sa Ge ili Si kao osnovnom tvari, od kojih prve služe kao odlični ispravljači (»plošne« Ge- odn. Si-diode, umjesto cijevnih ispravljačkih dioda po sl. 65.), a druge u prikladnim spojevima mogu kao »plošni« transistori dati pojačala, oscilatore itd., nadomještajući cijevne triode, o čemu će kasnije biti govora. Još prije plošnih kristalnih ispravljačkih dioda i plošnih transistora bile su poznate diodske i transistorske kombinacije s kontaktom realiziranim pritiskom jednog metalnog šiljka, dakle *n*-vodiča, na kristalni *p*-poluvodič, i one na bazi dvaju vrlo blizih metalnih šiljaka raznih prednapona (jedan dalji spoj je tu uvijek na kristal pripajana metalna ploha). Osnovni pojav kod ovih i drugih primjena poluvodiča jesu neobične manifestacije pri graničnim plohama između područja *n*- i *p*-vodljivosti. Dade se pokazati da difuzijom *n*-nosilaca i *p*-nosilaca, prvih preko granice u *p*-područje i drugih preko granice u *n*-područje, dolazi već bez primjene vanjskih napona do poremetnja potencijala, kao i do zapornog djelovanja u slučaju da se primjenom vanjskog napona želi poslati struju u smjeru *n-p* (zaporni sloj poluvodiča), i do propuštanja struje u smjeru *p-n* u slučaju suprotno primijenjenog vanjskog napona (ispravljačko djelovanje).

Prema netom rečenom po sl. 67.b), zbog pojava s obje strane granične plohe $X-X'$ između n - i p -područja po 1), treba očekivati da će kod priključena nekog vanjskog izvora napona s polaritetom kao u 2) doći do izražaja »zaporno« djelovanje n - p -kombinacije, i da po tom praktički ne će doći do struje u smislu n - p , dok će naprotiv kod izvora priključena sa suprotnim polaritetom kao u 3) zbog propusnog djelovanja n - p -kombinacije lako teći struja u smislu p - n . Na sl. 67.c) prikazano je kako bi se snimala »karakteristika« struje (mA) u ovisnosti od napona (V) kristalne diode K (struje bi se očitavale na miliampermetru A vrlo neznačajnog otpora, a naponi na voltmetru V vanredno visokog otpora; naponi diode K udešavali bi se »potenciometarski« pomicanjem kliznog kontakta P po otporu R, priključenom na bateriju $B_1 - B_2$ s odvojkom O, komu neka na R odgovara točka istog potencijala O'. Pomicanjem kontakta P desno od O' uspostavljali bi se »pozitivni« naponi (oni u smislu propusnog djelovanja), a kod P pomicanjem lijevo od O' »negativni« naponi. Donesena karakteristika odnosi se na diodu koja propušta 3 mA već kod +1 V, a praktički je zaporna sve do -20 V (negativne apscise su nanesene u 20-struko manjem mjerilu nego pozitivne); tek za napone negativnije od -20 V ova dioda gubi postepeno zaporno djelovanje.

III. OHMOV ZAKON I ZAKONI RAZGRANJIVANJA

Ohmov zakon za zatvorene strujne krugove; EMS i protu-EMS. Prvi i drugi Kirchhoffov zakon razgranjivanja. Jednostavnije primjene Ohmova zakona i zakona razgranjivanja. Proširivanja mjernih opsega voltmetara predotporima i ampermetara nuzotporima. Metode mjerenja električkih otpora: U-I-metoda, Wheatstoneov most, Thomsonov most, metoda ommetra, metoda gubitka naboja. Mjerenja naponâ, strujâ i otporâ metodom kompenzacije. Spajanje elemenata u baterije. Paralelni rad generatorâ. Odnosi kod sustava triju vodiča. Metoda superpozicije, Théveninov teorem i metoda pretvorbe mreža kod rješavanja problema s razgranjivanjima. Problemi u »poljima strujanja«; Ohmov zakon u »elementarnom« obliku. Proračunavanja uzemljenjâ. Odnosi u dvoslojnim kondenzatorima s različitim omjerima $\kappa_1 : \kappa_2$ i $\epsilon_1 : \epsilon_2$.

30. Sad ćemo pobliže razmatrati strujne krugove sastavljene na različite načine iz pojedinih vodiča s određenim iznosima otpora. Ako strujni krug čine vodiči priključeni uzastopce jedan na drugi (u seriju), tako da cijela struja teče redom svim vodičima, dovoljno je osloniti se na sam Ohmov zakon; no ako je strujni krug sastava s mjestimice usporedno (paralelno) spojenim vodičima (granama), ili općenitije, ako predstavlja »mrežu« ma kako kombiniranih vodiča, tako da dolazi i do razgranjivanja struja na spojištima od više nego dva vodiča (razgraništima ili čvorovima), onda pored Ohmova zakona dolaze u upotrebu i Kirchhoffovi »zakoni razgranjivanja«.

Katkad se Kirchhoffovi zakoni razgranjivanja mogu nadomjestiti drugim računskim postupcima (formulama za »kombinacione otpore« dvaju ili više paralelnih vodiča, pravilima o »pretvorbi mreža«, »zakonom superpozicije« itd.); ovi doduše mogu u određenim slučajevima pružati formalnih prednosti, no ne kažu ništa novo prema Kirchhoffovim zakonima.

31. Uzmimo najprije jednostavni slučaj serijski u zatvoreni krug spojenih vodiča s otporima R_1, R_2 itd. Kako tu ne može biti razgranjivanja, ista struja jakosti I teći će redom otporima R_1, R_2 itd. i po (80'') u B-6. vrijedit će relacije: $U_1 = IR_1$, $U_2 = IR_2$, itd., ako U_1, U_2 itd. znače napone između krajeva otpora R_1, R_2 itd.

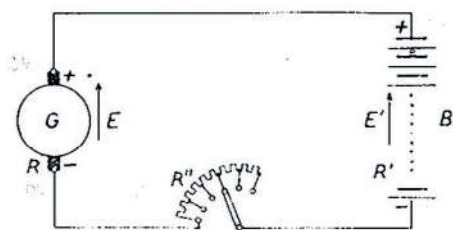
Iznose napona U_1, U_2 itd. utrošene na održavanje struje redom u svim otporima R_1, R_2 itd. promatranoga zatvorenoga kruga mora pokrivati »elektromotorna sila« ili »proizvedeni napon« E izvora struje (B-4.), tako da mora vrijediti:

$$E = U_1 + U_2 \dots = IR_1 + IR_2 + \dots \quad (87)$$

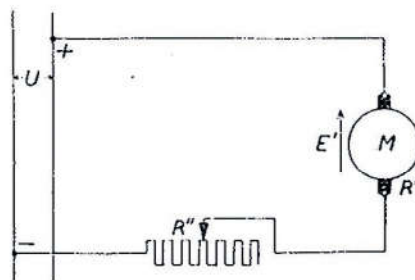
Označimo sa R sumu $R_1 + R_2 + \dots$ svih otpora strujnoga kruga. U R mora dakako biti uračunan i otpor R_u samoga izvora struje, t. zv. *unutarnji* otpor kruga struje, pa ako se suma svih ostalih otpora strujnoga kruga nazove *vanjskim* otporom R_v , mora biti: $R = R_u + R_v$, te umjesto u obliku (87) može se *Ohmov zakon* za *zatvoreni* krug struje pisati također u obliku: $E = IR = IR_u + IR_v$, odnosno u obliku:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{E}{R_u + R_v} \quad (88)$$

Ako je promatrani krug sijelo više elektromotornih sila, kako to na pr. biva kod strujnih krugova s baterijama od više serijski spojenih elemenata, zatim kod krugova gdje generatori istosmjerne struje nabijaju akumulatore ili tjeraju motore itd., treba pod E u (87) i (88) razumijevati *algebarsku* sumu svih elektro-



Sl. 68.a)



Sl. 68.b)

motornih sila (EMS), uzimajući pozitivnima one EMS, koje bi same za sebe proizvele struju u smjeru struje I , a negativnima one koje djeluju u protivnom smjeru; ove posljednje zovu se također *protu-EMS* (pa se na pr. govori o protu-EMS nabijanih akumulatora, o protu-EMS motora u gibanju i sl.).

Ako je na pr. po sl. 68.a) na generator G unutarnjega otpora R i EMS E preko otpora za reguliranje udešenoga na iznos R'' priključena na nabijanje akumulatorska baterija B unutarnjega otpora R' , koja kod nabijanja razvija protu-EMS E' , za struju nabijanja I vrijedit će relacija:

$$I = \frac{E - E'}{R + R' + R''} \quad (88')$$

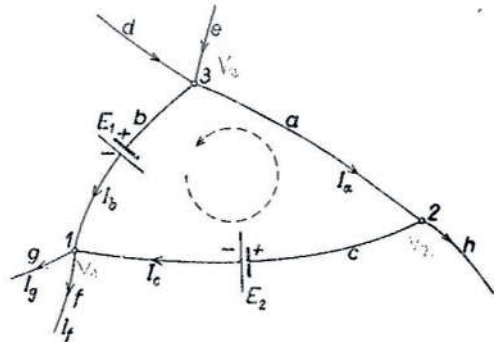
Slično bi t. zv. serijski motor M ukupnoga otpora R' priključen po sl. 68.b) preko otpora R'' na mrežu napona U i proizvedeći kod određene brzine gibanja armature (rotora) protu-EMS E' , uzimao kod te brzine iz mreže struju:

$$I = \frac{U - E'}{R' + R''} \quad (88'')$$

32. Prelazeći na kompliciranije strujne rasporedaje pomislimo ma kakvu kombinaciju linearnih vodiča stalnoga otpora: linearnu mrežu; dio te mreže neka je predložen u sl. 69.

U razgraništima ili čvorištima ovakvih mreža sastaju se »grane«: na pr. u razgraništu 1 na sl. 69. grane b, c, f, g; u razgraništu 2 grane a, c, h; u razgraništu 3 grane a, b, d, e. Kroz pojedine grane a, b, ... neka teku struje apsolutnih iznosa $I_a, I_b, \dots$ i smjerovi tih struja neka odgovaraju strjelicama ucrtanima u pripadne grane. Osim toga mogu pojedine grane biti sijela EMS apsolutnih iznosa E_1, E_2 itd.; u sl. 69. te su EMS simbolizirane elementima s označenim polaritetima + i — polova.

Očekivati je sada prije svega da će kod stacionarnih strujanja suma jakosti struja koje ulaze u neko razgranište biti jednaka sumi jakosti struja koje izlaze iz toga razgraništa. Ovaj stavak, zvan *I. Kirchhoffov zakon* razgranjivanja, počiva u bitnosti na nazoru o održanju električnih naboja, na temelju kojega smo već prije za jednostavne nerazgranjene strujne krugove mogli ustvrditi da jakost struje mora svagdje u krugu biti jednaka. Kad za neko razgranište gore navedeni stavak ne bi vrijedio, pa bi na pr. ukupni broj elektrona dostrujalih sekundno u to razgranište nadvisivao broj odstrujalih, vodilo bi to do sve većeg nagomilavanja elektrona na razgraništu i do odgovarajućih poremetnja raspodjele potencijala.



Sl. 69.

Matematski bi se *I. Kirchhoffov zakon* na pr. za razgranište 1 mogao tako izraziti da se zbroj struja grana b i c, koje po naznačenim strjelicama treba smatrati »ulaznima« za promatrano razgranište, stavi jednakim zbroju »izlaznih« struja grana g i f:

$$I_b + I_c = I_g + I_f$$

No pregledniji se izraz dobiva ako se ulaznim strujama nekoga razgraništa dodijeli na pr. negativni predznak, a izlaznim pozitivni, pa se sa strujama postupa kao s relativnim brojevima. U tom slučaju relacija za razgranište 1 prešla bi u:

$$-I_b - I_c + I_g + I_f = 0.$$

A posve općenito se *I. Kirchhoffov zakon* može sažeti u tvrdnju da je *algebarska suma svih struja nekoga razgraništa jednaka nuli*; u formuli:

$$\sum I = 0 \quad (89)$$

33. No ima još jedna zakonitost razgranjivanja, nazvana *II. Kirchhoffov zakon*. Taj se zakon odnosi na ma kakve *zatvorene zamke* promatrane linearne mreže. U bitnosti taj zakon predstavlja posveopćenje Ohmova zakona na slučajeve takvih zamki.

U sl. 69. predložena je na pr. zatvorena zamka od tri grane a, b, c. Potencijali razgraništa 1, 2, 3 na promatranoj zamci neka budu V_1, V_2, V_3 ; za napone U_a, U_b, U_c između krajeva grana a, b, c, brojene pozitivno ili negativno, prema tomu da li djeluju u nekom po volji uzetom »smislu obilaženja« zamke (naznačenom u sl. 69. crtkanom strjelicom) ili obrnuto, vrijedi očito:

$$\begin{aligned}U_a &= V_2 - V_3 \\U_b &= V_3 - V_1 \\U_c &= V_1 - V_2\end{aligned}$$

Ako se napisane relacije zbroje, izlazi relacija:

$$U_a + U_b + U_c = 0 \quad (90)$$

koja se može i riječima tako izraziti da se za sume poput one lijevo u (90) uvede naziv *obilazni napon* i utvrdi: »obilazni napon neke zatvorene zamke jednak je nuli«.

Međutim za svaku granu zamke uzetu za sebe mora vrijediti Ohmov zakon. Tako u sl. 69. napon U_a grane a, koja nije sijelo nikakve EMS, mora biti jednak umnošku s otporom R_a struje I_a kroz tu granu, brojene pozitivno ili negativno prema tomu da li ona teče u smislu ili *nasuprot* smislu obilaženja naznačenom crtkanom strjelicom u sl. 69., dakle u konkretnom slučaju brojene negativno. Tako se može staviti za granu a:

$$U_a = -I_a \cdot R_a$$

Naprotiv u granama b i c naponi U_b i U_c , osim što podržavaju struje kroz pripadne otpore R_b i R_c , dolaze u odnos i s elektromotornim silama apsolutnih iznosa E_1 i E_2 . Pri tomu je, po polaritetu naznačenom u slici, smisao djelovanja EMS E_1 takav da nju napon U_b mora svladati, pa se spomenuta EMS, shvaćena kao korespondentni potrošak napona U_b , mora računati pozitivno. Prema tomu može se, obzirom na to što i I_b po sl. 69. treba računati pozitivno, pisati:

$$U_b = +I_b \cdot R_b + E_1$$

Obrnuto u grani c i struju I_c i EMS E_2 kako su ucrtane u sl. 69. treba računati negativno, tako da vrijedi:

$$U_c = -I_c \cdot R_c - E_2$$

Supstitucijom izraza za U_a, U_b, U_c u (90) dobiva se lako relacija

$$-E_1 + E_2 = -I_a \cdot R_a + I_b \cdot R_b - I_c \cdot R_c$$

u kojoj lijevo dolaze samo EMS, brojene ovoga puta pozitivno ili negativno prema podudaranju smisla njihova djelovanja s odabranim smislom obilaženja promatrane zamke, dok desno dolaze samo umnošci s pripadnim otporima struja u pojedinim granama, računanih pozitivno ili negativno prema tomu da li struje teku u smislu obilaženja zamke ili njemu nasuprot.

Tako se posve općenito II. Kirchhoffov zakon može pisati u obliku formule:

$$\sum E = \sum IR \quad (91)$$

kod koje je prema rečenom od bitne važnosti paziti na gore obrazložena pravila o pozitivnim i negativnim predznacima struja i EMS kod jednom odabranoga smisla obilaženja zamke; riječima: *u svakoj zatvorenoj zamci algebarska suma EMS jednaka je algebarskoj sumi produkata struje s pripadnim otporom.*

34. Sad ćemo dobivene zakone strujanja primjenjivati na pojedine jednostavnije i zamršenije zadatke.

Već iz formula (87) i (88) Ohmova zakona dadu se povući vrlo važne konsekvencije. Po (87) očito svaki vodič zatvorenoga strujnog kruga troši od ukupnoga proizvedenog napona (EMS) E kruga dio proporcionalan otporu toga vodiča: u svakom se vodiču određenog otpora R_k u krugu *gubi* ili *troši* napon određen »formulom za gubitak napona«:

$$\delta_k = IR_k \quad (92)$$

pri čemu I znači istu struju kroz sve vodiče jednostavnoga nerazgranjenoga kruga struje.

Taj je gubitak neizbježiv jednako u samom izvoru struje kao i u dovodnim žicama i potrošaču. Ako na pr. izvor struje (strojevni generator ili dinamo, baterija akumulatora i sl.) koji ima unutarnji otpor $0,5\Omega$ hrani preko voda od dva vodiča po $1,5\Omega$ grupu sijalica ukupnom strujom $4A$, potrošit će se od ukupnoga izvorom proizvedenog napona, recimo $234V$, u samom izvoru $0,5 \cdot 4 = 2V$, u oba vodiča voda $2 \cdot 1,5 \cdot 4 = 12V$, tako da će sijalice dobiti samo $234 - 2 - 12 = 220V$.

Baš zbog što manjih gubitaka napona u izvoru struje, u vodovima itd., nepoželjnih ne samo zbog utroška energije nego i zbog drugih neprilika koje su s gubitkom napona skopčane (strujna toplina; mijenjanje napona potrošača s opterećenjem), nastoji se namotaje dinamostrojeva, vodove, baterije itd. graditi sa što manje otpora, pa će se na pr. namotaji i vodovi izvoditi recimo od bakrenih i uz to, koliko prilike dopuštaju, debelih žica, u baterijama će se po mogućnosti upotrebljavati elementi s velikim i blizim elektrodama i sl.

35. Neposredna konsekvencija gubitaka napona $\delta_u = IR_u$ u izvoru struje unutrašnjega otpora R_u opterećenomu strujom I jest da *napon stezaljki* U_k izvora struje ostaje iznosom uvijek ispod proizvedenoga napona (EMS) E izvora $U_k < E$, te da razlika $E - U_k = IR_u$ kao i sam iznos $U_k = E - IR_u$ variraju već prema jakosti struje opterećenja I strujnoga kruga.

Tako je u malo prije navedenom slučaju izvora s EMS $E = 234V$ i s unutarnjim otporom $R_u = 0,5\Omega$ kod struje opterećenja $I = 4A$ gubitak napona u izvoru bio $2V$, čemu je odgovaralo $U_k = 234 - 2 = 232V$, dok bi kod veće struje opterećenja $I = 10A$ gubitak napona u izvoru porastao na $0,5 \cdot 10 = 5V$, odn. napon stezaljki bi pao na $U_k = 234 - 5 = 229V$.

36. Treba dakle dobro razlikovati »napon stezaljki« izvora struje od »proizvedenoga napona« ili EMS toga izvora. Ipak ima jedan specijalni slučaj kad se može staviti $U_k = E$. To je slučaj kad je krug struje prekinut, drugim riječima kad izvor struje nije premošten konačnim vanjskim otporom R_v , odnosno kad je vanjski otpor $R_v = \infty$, dakle slučaj »otvorenoga« izvora struje. Pod tim je okolnostima očito $I = 0$, dakle i $IR_u = 0$, pa je prema tomu: $U_k = E$. Napon dakle stezaljki *neopterećenoga* izvora struje jednak je njegovoj EMS.

Na tomu se osniva i mjerenje EMS: ako treba mjeriti EMS nekoga izvora, na pr. neke baterije, dovoljno je naprosto priključiti na stezaljke izvora prikladan (visokog otpora) voltmetar dok je krug struje otvoren.

37. Kod priključka elektrostatskih voltmetara (A-81). krug se struje uopće ne zatvara i opisano mjerenje EMS je teoretski posve korektno.

Međutim doskora ćemo kao praktički prikladnije za voltmetre upoznati *galvanometričke voltmetre* (B-41.). Kako ti instrumenti nisu drugo nego galvanometri upotrebljavani na posban način, njihovim priključkom zapravo se opterećuje izvor struje, tako da bi, strogo uzevši, bilo $U_k < E$. Ali struja I_g što je troše galvanometrički voltmetri za svoj otklon relativno je tako neznatna, zbog redovito razmjerno velikih otpora spomenutih instrumenata, da gubitak napona $I_g R_u$ praktički obično ostaje zanemariv, pa se prema tomu može staviti $U_k = E$. Naravno, kod izvora s iznimno velikim R_u može iznos $I_g R_u$ i kod neznatnoga I_g biti osjetljivo velik; u tom slučaju razlika između U_k i E ne će biti zanemariva i E će onda trebati mjeriti bilo elektrostatskim instrumentima, bilo galvanometričkim instrumentima specijalno osjetljive izvedbe, odn. s posve iznimno mnogo »oma po voltu« (Ω/V).

Primjeri: Na element sa $E = 2$ V i $R_u = 0,5$ Ω priključi se galvanometrički voltmetar sa skalom do 2 V i otporom $R_g = 1000$ Ω ; instrument uzima struju $I_g = 2/1000,5 \approx 0,002$ A, pa je razlika između U_k i E samo $0,002 \cdot 0,5 = 0,001$ V. Voltmetar bi dakle morao pokazati 1,999 V, dok EMS iznosi 2,000 V. Međutim razlika 0,001 V jedva se primjećuje i na najpreciznijim instrumentima, tako da u promatranom slučaju ne može biti prigovora mjerenju iznosa E galvanometričkim voltmetrom. Obrnuto bi galvanometrički voltmetar sa skalom do 200 V i otporom $R_g = 100000$ Ω (dakle istim brojem Ω/V kao i malo prije) crpao iz izvora sa $E = 200$ V i $R_u = 10000$ Ω struju $I_g = 200/110000 = 0,00182$ A, i instrumentom pokazani napon U_k bio bi od $E = 200$ V manji za iznos $I_g R_u = 18,2$ V, t. j. on bi bio samo oko 182 V, dakle za 9% premalen. Elektrostatskim instrumentom pokazani U_k bio bi naprotiv i kraj ovakvoga izvora jednak iznosu E .

38. Kod opterećenja izvora struje unutarnjeg otpora R_u priključkom nekoga vanjskoga otpora R_v , koji troši struju I , pasti će, kako je već rečeno, napon stezaljki na iznos U_k manji za IR_u od E ; taj iznos U_k pokazat će sada voltmetar zanemariva potroška struje priključen na stezaljke izvora, dakle *paralelno* izvoru. Još općenitije: voltmetar zanemariva potroška struje pokazivat će uopće napon U priključen *paralelno* i ma kojem dijelu R vanjskoga otpora, kojega potrošak napona iznosi $U = IR$. Voltmetri se dakle uvijek priključuju *paralelno* otporima u »glavnom toku« struje, i to na točke između kojih napon treba odrediti.

Svakako je i u ovakvim slučajevima važno da upotrebljavani instrumenti (ako su galvanometričkoga tipa) troše što manje struje, kako bi se priključivanjem voltmetara paralelno pojedinim dijelovima ispitivanih krugova struje proizvele što manje poremetnje prvobitnih prilika u tim krugovima.

39. Prelazeći na primjene zakona razgranjivanja razmotrimo najprije jednostavni slučaj po volji mnogo paralelno spojenih otpora R_1, R_2 itd.; v.sl. 70.a). Kako ovi otpori čine paralelne grane koje počinju i svršavaju u zajedničkim čvorištima A i B s potencijalima V_A i V_B , isti napon $U = V_A - V_B$ djeluje između krajeva svakoga od otpora R_1, R_2 itd., pa ako su $I_1, I_2, I_3, \dots$ struje u pojedinim granama, vrijedi relacija:

$$U = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3 = \dots$$

na temelju koje se odnos struja i vodljivih vrijednosti pojedinih grana promatrane kombinacije može prikazati u obliku:

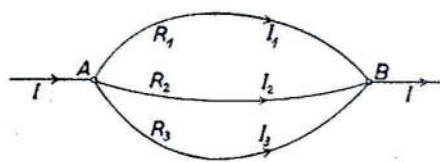
$$I_1 : I_2 : I_3 : \dots = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3} : \dots \quad (93)$$

(»struje u pojedinim granama odnose se upravo kao vodljive vrijednosti tih grana«).

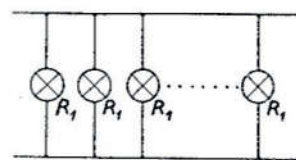
Specijalno kod samo dva paralelna otpora R_1 i R_2 relacija (93) može se jednostavnije predložiti proporcijom:

$$I_1 : I_2 = R_2 : R_1 \quad (94)$$

po kojoj se struje kombinacije od samo dvije paralelne grane odnose obrnuto kao otpori tih grana (prema tomu kroz onu granu koja ima n puta manji otpor, dakle n puta veću vodljivu vrijednost, teče n puta jača struja).



Sl. 70.a)



Sl. 70.b)

40. Nastaje sad zanimljivo pitanje: ako se neka struja I razgranjuje u više paralelnih grana kao u sl. 70.a), koliki bi morao biti onaj otpor R koji bi sam za sebe mogao zamijeniti cijelu promatranu kombinaciju grana, tako da bi iznosi napona $U = V_A - V_B$ i nerazgranjene struje I ostali isti u oba slučaja.

Po I. Kirchhoffovu zakonu mora biti: $I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$; no istodobno s jedne strane mora biti: $I = U/R$, a s druge: $I_1 = U/R_1$, $I_2 = U/R_2$, itd. Prema tomu se ovdje I. Kirchhoffov zakon (nakon kraćenja sa U) svodi na relaciju:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (95)$$

po kojoj je »vodljiva vrijednost zamke od više paralelnih grana jednaka sumi vodljivih vrijednosti pojedinih grana«.

Sam pak »ekvivalentni otpor« R ovakve kombinacije jest:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots} \quad (95')$$

Kod n jednakih otpora R_1 spojenih paralelno, ekvivalentna vodljiva vrijednost postaje $1/R = n/R_1$ i prema tomu za ekvivalentni otpor izlazi: $R = R_1/n$. Na pr. 20 paralelno priključenih sijalica, od kojih svaka iz mreže od 220 V uzima struju 0,182 A i prema tomu ima otpor $R_1 = 1210 \Omega$, predstavljaju za mrežu teret od $R = 1210/20 = 60,5 \Omega$; v. sl. 70.b).

U specijalnom slučaju samo dvaju paralelnih otpora R_1 i R_2 malom predezbom relacija (95) daje se svesti na izraz:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (96)$$

Prema tomu je u promatranom specijalnom slučaju:

$$U = IR = I \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

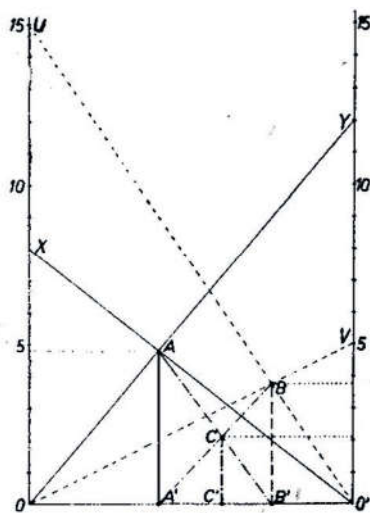
pa za struje u pojedinim granama izlaze formule:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{IR_2}{R_1 + R_2} \quad (97)$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{IR_1}{R_1 + R_2} \quad (98)$$

Za tri paralelna otpora R_1 - R_2 - R_3 relacija (95) za rezultujući otpor R mogla bi se predesiti u formulu:

$$R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \quad (99)$$



Sl. 71.

Osim računski, po formulama (96), (99) i sl., mogu se i grafički određivati rezultujući otpori dvaju ili više *paralelno* spojenih otpora (a slično će se moći kasnije raditi i s *paralelnim* samoinduktiviteta, kao što se također može postupati i sa *serijski* spojenim kapacitetima, jer se oni računaju analogno paralelnim otporima). Postupak, koji nije drugo nego primjena sličnosti trokuta, lako je razabrati iz sl. 71., u kojoj su na primjer grafički određeni: otpor A'A iznosa 4,8 Ω ekvivalentan paralelnoj kombinaciji otpora 8 i 12 Ω (uspor. sjecište A pravaca kroz O' i X te kroz O i Y) i otpor B'B iznosa 3,75 Ω ekvivalentan paralelnoj kombinaciji otpora 15 i 5 Ω (uspor. sjecište B pravaca kroz O' i U te kroz O i V). Očito bi se konstrukcija lako i dalje nastavila kod tri ili više paralelnih otpora (na pr. rezultujući otpor C'C iznosa 2,1 Ω paralelne kombinacije četiriju otpora 8-12-15-5 Ω bio bi određen sjecištem C pravaca kroz A' i B te kroz B' i A).

41. Primjenjujući dosadanje rezultate na mjernu tehniku razmotrimo *proširivanja mjernih opsega* kod voltmetara i ampermetara.

Već je rečeno da se u praksi mnogo upotrebljavaju za mjerenja istosmjernih struja i napona galvanometri s pomičnim svitkom i permanentnim magnetom, te da se kod mjerenja struja ovakvi instrumenti ukapčaju u *glavni* tok struje, u kojem slučaju oni pokazuju neposredno mjerenu struju I i mogu imati iznose I odmah naznačene na skali, dok se naprotiv kod mjerenja napona spomenuti instrumenti ukapčaju u *poredni* tok, t. j. paralelno dijelu glavnoga toka kojemu napon treba mjeriti.

U ovom drugom slučaju instrument otpora R_g doduše ne pokazuje neposredno napon U između točaka na koje je priključen, ali pokazuje struju $I_g = U/R_g$ proizvedenu tim naponom, i kraj stalnoga otpora R_g instrumenta proporcionalnu tom naponu, tako da bi galvanometri određeni za mjerenja napona mogli imati iznose $U = I_g R_g$ neposredno naznačene na skali.

Međutim galvanometri se redovito izvode kao osjetljivi instrumenti, na pr. kao miliampermetri, koji neposredno priključeni u glavni tok mogu pokazati samo struje I_g do nekoliko miliampera, a i otpori R_g galvanometara su obično premaleni da bi naponi $U = I_g R_g$ pokazani tim instrumentima priključenima poredno dostigli iznose veće od na pr. nekoliko desetaka milivolta.

Drugim riječima: sam galvanometarski sistem koji recimo daje puni otklon kod struje $I_g' = 3 \text{ mA}$ i ima otpor $R_g = 20 \Omega$ ne može neposredno poslužiti kao ampermetar za struje veće od $0,003 \text{ A}$, ni kao voltmetar za napone više od $0,003 \cdot 20 \text{ V} = 0,06 \text{ V}$ ($= 60 \text{ mV}$).

Lako je međutim ovakve galvanometričke sisteme nadopuniti u voltmetre za više napone, i u ampermetre za jače struje, dodavajući u prvom slučaju sistemu prikladan *serijski otpor* ili *predotpor* X , a u drugom prikladan *poredni otpor* ili *nuzotpor* (shunt) Y (sl. 72.).

42. Račun predotpora za voltmetre posve je jednostavan. Ako galvanometarski sustav otpora R_g ima mjeriti najviši napon U , te ako je I_g struja potrebna za puni otklon sustava, iznos X predotpora treba očito uzeti toliko da bude ispunjen uvjet: $U = I_g(R_g + X)$; iz te relacije izlazi:

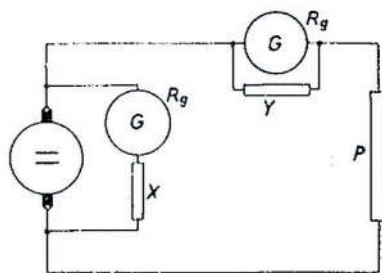
$$X = \frac{U - I_g R_g}{I_g} \quad (100)$$

Slično se lako računaju i poredni otpori za ampermetre. Ako se galvanometarski sustav s otporom R_g kombiniran s porednim otporom Y ukopča u tok struje I , kod koje sistemom treba da teče struja punoga otklona I_g , očito ostatak struje $I - I_g$ mora teći kroz poredni otpor. Po B-39. mora onda vrijediti razmjer: $I_g : (I - I_g) = Y : R_g$; iz njega za Y izlazi formula:

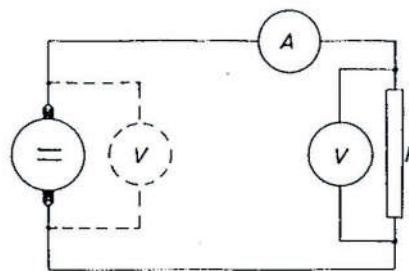
$$Y = \frac{I_g R_g}{I - I_g} = \frac{\delta_g}{I - I_g} \quad (101)$$

u kojoj $\delta_g = I_g R_g$ znači »potrošak napona galvanometarskog sistema«.

Što je manje I_g kod voltmetara, odnosno $I_g R_g$ kod ampermetara, to će veći biti kod danoga U ukupni otpori voltmetara $R_v = R_g + X$ i manji kod danoga I »ekvivalentni otpori« (B-40.) ampermetara $r_A = R_g Y / (R_g + Y)$. A voltmetri s po mogućnosti što višim otporom i ampermetri sa što neznatnijim otporom baš su u praksi poželjni, jer samo onda paralelno priključivanje prvih i serijsko priključivanje drugih ne poremećuje zamjetljivo odnose u ispitivanim strujnim krugovima. Uz to kod ovakvih instrumenata i »vlastiti potrošak« energije, te njihovo ugrijavanje strujnom toplinom ostaju praktički dovoljno neznačajni.



Sl. 72.

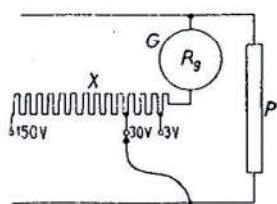


Sl. 73.

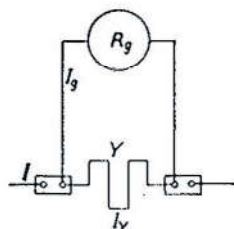
Obično se predotpori i poredni otpori odmah ugrade u same pripadne instrumente; zato ćemo ubuduće, po shemi u sl. 73., spominjući voltmetre V otpora R_v i ampermetre A otpora r_A razumijevati kompletne takve instrumente s već ugrađenim X , odn. Y .

Primjeri: Galvanometar sa $I_g = 0,003$ A i $R_g = 20$ Ω , dakle $\delta_g = 0,06$ V treba nadopuniti: a) u voltmetar za napone do $U = 150$ V; b) u ampermetar za struje do $I = 6$ A. U slučaju a) izlazi $X = 49980$ Ω i $R_g + X = R_v = 50000$ Ω , a u slučaju b) $Y = 20/1999$ Ω i $r_A = R_g Y / (R_g + Y) = 0,01$ Ω .

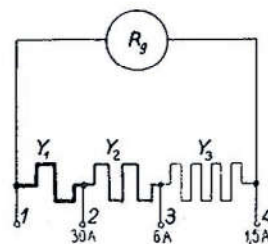
43. Ako se, zbog točnijega mjerenja manjih naponskih iznosa, želi imati voltmetar s više »mjernih opsega«, na pr. s tri opsega skale: 3 V, 30 V i 150 V, mogu se iz predotpora X instrumenta za najviši mjerni opseg izvesti »odvojci«



Sl. 74.



Sl. 75.



Sl. 76

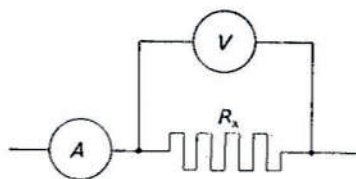
kao u sl. 74.; ti odvojci izvedu se iz X kod onih iznosa otpora koji odgovaraju predviđenim manjim opsezima skale, dakle u navedenom primjeru iz ukupnoga X dimenzioniranoga za 150 V kod iznosa otpora koji odgovaraju maksimalnim naponima 3 V i 30 V.

Kod ampermetara promjene mjernoga opsega mogu se postići na pr. različitim nuzotporima Y , priključivanima paralelno istomu R_g ; no u tom slučaju nuzotpori moraju biti lako izmjenljivi (sl. 75.). Različiti mjerni opsezi mogu se postići i »serijskim nuzotporima« po shemi u sl. 76. Prema toj slici: a) kod instrumenta ukopčana u ispitivani strujni krug stezaljkama 1 i 2 funkcija nuzotpora pripadala bi otporu Y_1 , a funkcija otpora sistema otporu $Y_2 + Y_3 + R_g$, te bi instrument iz sl. 76. mjerio struje do 30 A; b) kod upotrebe stezaljki 1 i 3 uloga nuzotpora pripadala bi otporu $Y_1 + Y_2$, a uloga otpora sistema otporu $Y_3 + R_g$, te bi instrument mjerio struje do 6 A; konačno c) sa stezaljkama 1 i 4 nuzotpor bi bio $Y_1 + Y_2 + Y_3$, otpor sistema bio bi R_g , a instrument bi mjerio struje do 1,5 A.

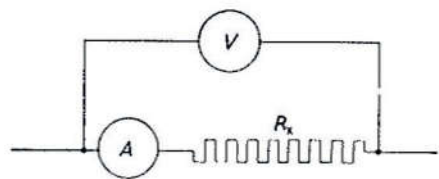
Lako je općenito izvesti da kombinacije kao $Y_1 + Y_2 + Y_3 = Y$ po sl. 76. predstavljaju zapravo shuntove upotrebljive s galvanometrima raznih R_g u tom smislu da, kod označene sa 1/1 osjetljivosti kombinacije galvanometra ma koga R_g i punog shunta Y , ostale, parovima stezaljki 1-2, 1-3 i sl. pripadne, osjetljivosti izlaze iznosâ $1/n$, $1/n_1$ i sl., ako se Y_1 , $Y_1 + Y_2$ i sl. odaberu da čine n -ti, n_1 -ti i sl. dio ukupnog shunta Y . A da paru stezaljki 1-4 pripadna osjetljivost 1/1 ne bi ispala bitno manja od osjetljivosti galvanometara samih za sebe, dovoljno je uzeti Y znatno veće od raznih R_g koji se mogu očekivati (Ayrtonovi ili univerzalni shuntovi).

Mnogo se upotrebljavaju i instrumenti s različitim ugrađenim predotporima i nuzotporima, koji uz prikladnu preklopu mogu poslužiti kao voltmetri i kao ampermetri različitih mjernih opsega (»višestruki instrumenti«).

44. Važne primjene zakona strujanja predstavljaju i različite metode *mjerenja električkih otpora*. Spomenimo najprije t. zv. *U-I-metodu* (metodu s mjerenjem napona i struje). Ako su na raspolaganju točan voltmetar V zanemariva potroška struje i točan ampermetar A zanemariva potroška napona, u spoju kao u sl. 77. ili 78., ispitivani otpor R_x može se po Ohmovu zakonu izračunati iz očitanih na V i A iznosa napona U i struje I po formuli: $R_x = U/I$. Ako se na pr. na spomenuti način ustanovi, da kroz sijalicu pod naponom $U = 220$ V teče struja $I = 0,682$ A, otpor te sijalice, pri danoj struji, iznosi: $R_x = 220/0,682 = 323 \Omega$.



Sl. 77.



Sl. 78.

Strogo uzevši, ako je voltmetar V galvanometričkoga tipa, pa troši makar i neznatnu struju, formula $R_x = U/I$ nije potpuno točna, ako su U i I očitani iznosi kod spoja po sl. 77., jer u tom slučaju A mora pokazati sumu struja kroz R_x i V , dakle struju veću od struje kroz R_x , koju je trebalo odrediti, pa iznos $R_x = U/I$ ispada premalen.

Ni mjerenje po shemi u sl. 78. ne će biti potpuno točno, jer ampermetri imaju uvijek neki, makar i neznatni, potrošak napona, te V kod promatranoga spoja pokazuje sumu napona potrošenih u R_x i A , pa iznos $R_x = U/I$ ispada prevelik.

Po potrebi uzet će se zato kod spoja po sl. 77. korekcija struje očitane na A zbog vlastitog potroška instrumenta V. A kod spoja po sl. 78. korigirat će se napon očitani na V odbitkom potroška napona instrumenta A, odnosno od kvocijenta U/I oduzet će se otpor r_A ampermetra. No većinom se nastoji odabrati između obih spojeva po sl. 77. i 78. onaj koji je za dani specijalni slučaj prikladniji, odn. kod kojega su korekcije zanemarive. U tu svrhu kod mjerenja *manjih* otpora odabrat će se spoj po sl. 77., a kod mjerenja *većih* spoj po sl. 78., jer će u prvom slučaju struja kroz instrument V otpora mnogostruko većega nego R_x ostati zanemariva, dok će se u drugom slučaju moći zanemariti pad napona u neznatnom otporu instrumenta A prema mnogoput većem padu napona u R_x .

Prednost je mjerenja otpora $U-I$ -metodom da su ona moguća kod povoljnih (na pr. pogonskih) struja, što je važno ako se otpor istraživana potrošača mijenja sa strujom opterećenja, kako je to na pr. kod sijalica. Osim toga $U-I$ -metodom mogu se dobro mjeriti otpori vrlo različitih iznosa, od najmanjih do najvećih.

45. Kod metode *Wheatstoneova mosta* dovoljno je imati na raspolaganju pored »otpora za usporedbu« samo osjetljiv *nul-instrument*, t. j. instrument koji ne mora biti baždaren u V ili u A, nego samo treba pokazati kad struje nema.

Metoda *Wheatstoneova mosta*, mnogo upotrebljavana za ne prevelike i ne premalene otpore, osniva se na principu razgranjivanja. Po shemi u sl. 79. mjereni otpor R_x kombiniran je u »četverokut otporâ« s poznatim otporom R i otporima R_a i R_b , kojih se omjer može varirati kontaktom K, pomičnim na »kliznoj žici« MNQ. U jednoj »diagonali« toga četverokuta je izvor struje B (mala baterija), a u drugoj osjetljivi galvanometar G prikladnoga otpora R_g . Pomicanjem kontakta K na mjesto N klizne žice kod kojega G pokaže nulu struje most se dovodi u »ravnotežje«. U tom slučaju točke P i N su očito na istom potencijalu, pa su međusobno jednaki naponi između M i P te M i N, kao i oni između P i Q te N i Q. A kako je struja kroz galvanometar G jednaka nuli, to mora teći ista struja I_1 kroz R_x i R ; slično mora biti ista struja I_2 kroz R_a i kroz R_b . Tako se može pisati: $I_1 R_x = I_2 R_a$ i $I_1 R = I_2 R_b$. Odatle odmah izlazi kao uvjet-ravnotežja mosta (ako se još, pretpostavljajući »kliznu žicu« svagdje istoga specifičnog otpora ρ i jednolikoga prereza q s dijelovima duljine $MN = a$ i $NQ = b$, pojednostavi R_a/R_b u a/b):

$$R_x = R \cdot \frac{R_a}{R_b} = R \cdot \frac{a}{b} \quad (102)$$

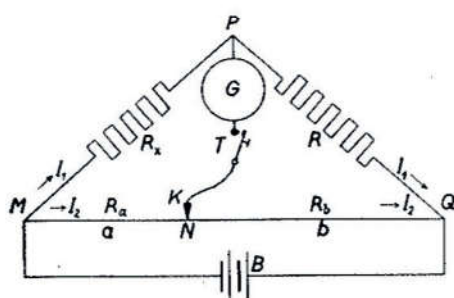
Obično je R dekadski otpor (na pr. 1, 10, 100 ili 1000 Ω), a iznosi a/b naznačeni su odmah uz pripadna mjesta N na kliznoj žici, tako da iznos R_x slijedi bez većega računanja. Grana sa G ukapča se samo na časove tipkom T (sl. 79.).

46. Za mjerenja veoma malenih otpora (recimo ispod 0,1 Ω) metoda *Wheatstoneova mosta* nije točna, jer u takvim slučajevima već zamjetljivo utječu »prelazni otpori« priključaka otpora R_x kod M i P i sl. Maleni otpori, sve do najmanjih, mjere se zato (osim $U-I$ -metodom) metodom *Thomsonova dvostrukoga mosta* po

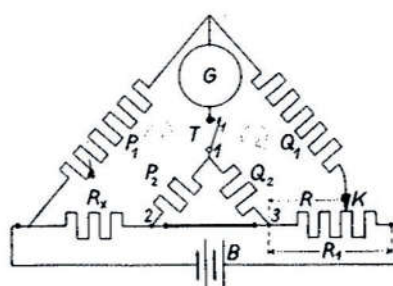
shemi u sl. 80. Razgranjivanje je, kako se vidi, nešto malo zamršenije nego kod Wheatstoneova mosta. Ako se kao P_1 i P_2 uzmu međusobno jednaki otpori, a kao Q_1 i Q_2 također međusobno jednaki otpori, pa ako je $n = P_1 : Q_1 = P_2 : Q_2$ omjer iznosa otpora jednoga i drugoga para, nepoznati otpor R_x odnosit će se prema dijelu R promjenljivoga poznatoga otpora R_1 (udešenom pomičnim kontaktom K) kao $n : 1$, t. j. vrijedit će uvjet ravnotežja Thomsonova mosta:

$$R_x = nR = R \cdot \frac{P_1}{Q_1} = R \cdot \frac{P_2}{Q_2} \quad (103)$$

Za dokaz uvjeta ravnotežja (103) dovoljno je primijeniti II. Kirchhoffov zakon na zatvorene zamke $P_1-G-P_2-R_x$ i Q_2-G-Q_1-R ; to daje u zajednici s relacijama $P_1 : Q_1 = n$ i $P_2 : Q_2 = n$ nakon nekoliko preudezbi relaciju (103).



Sl. 79.



Sl. 80.

Kod nekih izvedbi Thomsonova dvostrukoga mosta ne varira se iznos R , nego se udesi fiksno $R = R_1$, a variraju se, i to istodobno i za jednaki iznos, P_1 i P_2 . Uvjet ravnotežja (103) vrijedi dakako i u ovom slučaju, samo se sada ravnotežje traži udešavanjem omjera n umjesto iznosa R (v. i E. M.).

Da se vidi kako se Thomsonovim mostom lako mjere i neznatni otpori (na pr. kratkih uzoraka debelih bakrenih žica, kakvi dolaze kod određivanja specifičkoga otpora bakra za vodove), navedimo numerički primjer: neka je R_1 klizna žica otpora $0,01 \Omega$ i neka bude $P_1 = P_2 = 10 \Omega$ i $Q_1 = Q_2 = 1000 \Omega$, dakle $n = 0,01$; ako se ravnotežje postigne kod K na desetini klizne žice, bit će $R = 0,1 \cdot 0,01 = 0,001 \Omega$, i prema tomu: $R_x = 0,001 \cdot 0,01 = 0,00001 \Omega (= 10 \mu\Omega)$.

47. Veći otpori zgodno se mjere *metodom ommetra*. Kod toga se upotrebljava na pr. voltmetar V (ili općenitije makar i nebaždaren galvanometar s otklonima proporcionalnima jakosti struje).

Po shemi u sl. 81. najprije se, uz preklopku P u položaju 1, dakle uz instrument V neposredno priključen na neki izvor struje unutarnjega otpora zanemariva prema otporu R_g instrumenta V, očita proizvedeni napon E izvora (ili njemu proporcionalni otklon α). A zatim se, uz preklopku u položaju 2, očita napon E_1 (odnosno njemu proporcionalni otklon α_1) utrošen u otporu R_g instrumenta V kod dodanoga u seriju mjerenoga otpora R_x . Za R_x vrijedi onda formula:

$$R_x = R_g \left(\frac{E}{E_1} - 1 \right) = R_g \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} - 1 \right) \quad (104)$$

Ako je naime I_1 struja kod preklopke u položaju 2, mora (kraj $I_1 = E_1/R_g$) biti: $E = E_1 + I_1 R_x = E_1 + E_1 \cdot R_x/R_g$, iz čega odmah izlazi (104).

Primjer: $R_g = 0,1 \text{ M}\Omega$, $E = 220 \text{ V}$, $E_1 = 10 \text{ V}$; $R_x = 2,1 \text{ M}\Omega$. Kako se vidi, ovom se metodom mogu lako mjeriti i megomski iznosi otpora, a prema tomu i izolacioni otpori izoliranih vodiča nekoga voda međusobno i prema zemlji (koji nisu beskonačni, zbog većih ili manjih nesavršenosti izolacije). Kod »mjerila izolacije s induktorom« ulogu izvora struje igra na pr. mali induktorski generator tjeran posredstvom zupčanika ručkom, koja se rukom pokreće određenom brzinom (više o mjerenjima izolacije u E.M.).

48. Ekstremno visoki otpori mogu se mjeriti *metodom gubitka naboja*. Ako se na pr. kondenzator kapaciteta C izbija kroz otpor R , opadati će postepeno naboj Q , a time i napon u kondenzatora, pa ako je i struja izbijanja u času t , a du je promjena napona nastala u vremenu dt , mora zbog $Q = C \cdot u$, odn. $dQ = C \cdot du$, te $i = -dQ/dt = -C \cdot du/dt = u/R$ (kraj pozitivno računane struje izbijanja i , t. j. one kojoj odgovara smanjenje $-dQ$ naboja kondenzatora) vrijediti relacija:

$$C \cdot R \cdot \frac{du}{u} = -dt$$

Integracijom u granicama $u = U_1$ za $t = t_1$ i $u = U_2$ za $t = t_2$ (označujući odmah interval vremena $t_2 - t_1$ sa t_0) dobiva se:

$$C \cdot R = \frac{t_0}{\ln U_1 - \ln U_2} \quad (105)$$

Na temelju ove relacije daje se iz opažanih iznosa U_1 , U_2 i t_0 odrediti produkt $C \cdot R$. Specijalno može se dakle izračunati na pr. R uz poznato C i očitane (na elektrostatskom voltmetru) iznose U_1 i U_2 u prikladno odabranom vremenskom razmaku t_0 .

Primjer: Napon kondenzatora sa savršenim dielektrikumom i kapacitetom $C = 10^{-8} \text{ F}$, izbijanoga kroz neki otpor R , pao je u vremenskom razmaku od 60 s sa 400 V na 160 V. Za otpor R slijedi:

$$R = \frac{60}{10^{-8} \cdot (\ln 400 - \ln 160)} = \frac{60 \cdot 10^8}{\ln 2,5} = 6,55 \cdot 10^9 \Omega = 6550 \text{ M}\Omega$$

Ako je dielektrikum kondenzatora nesavršen, pa kondenzator umjesto praktički beskonačnoga ima neki konačni, makar i vanredno visoki, »izolacioni« otpor R'' , moći će se po formuli (105) proračunati i R'' ; treba samo nabijeni kondenzator poznatoga kapaciteta C motriti kako se izbija prepušten sam sebi. Izolacione kvalitete kondenzatora karakteriziraju se uostalom obično umnoškom CR'' , koji formula (105) neposredno daje. Tako dobri kondenzatori s timcem znadu imati $CR'' = 30000 \mu\text{F} \cdot \text{M}\Omega$ ili slično.

Iz relacije $CR \cdot \frac{du}{u} = -dt$ odmah se dobiva, neodređenom integracijom, i jednadžba vremenskog toka napona u pri izbijanju kondenzatora početnog napona U kroz otpor R . Iz općeg integrala

$$\ln u = -\frac{t}{CR} + \ln K$$

($\ln K =$ konstanta integracije), ako ga se preuđe u oblik:

$$u = K \cdot e^{-\frac{t}{CR}}$$

i ako se stavi u dobiveni izraz početni uvjet: $u = U$ pri $t = 0$, slijedi neposredno: $K = U$, i po tomu konačno:

$$u = U \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (105')$$

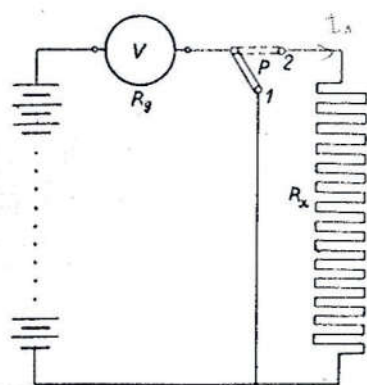
Veličina $\tau = CR$ zove se »vremenska konstanta« strujnog kruga sa C i R ; nakon vremena $\tau = CR$ kondenzator se izbiye na e-ti dio prvobitnog napona (i naboja).

49. Po formuli (105) mogu se određivati i kapaciteti C kondenzatora. U tu svrhu obično je dovoljno pustiti da se ispitivani kondenzator izbiya kroz poznati otpor R .

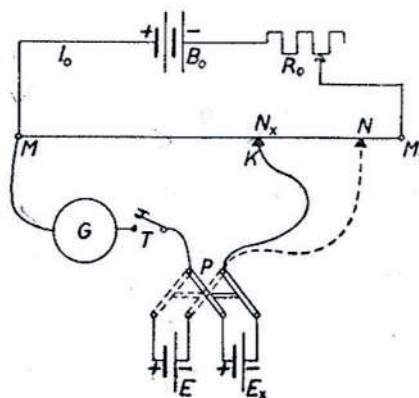
Također se po formuli (105) dadu mjeriti i vremenski razmaci t_0 , pa i oni vanredno kratki; uz poznato C i R očitaju se onda iznosi U_1 i U_2 prije započetoga i nakon prekinutoga izbijanja kondenzatora. Tako se mogu određivati na pr. neznatni vremenski intervali t_0 potrebni da tane iz puške prevale prikladno odabrani kratki dio staze poznate duljine d_0 , iz čega se može zaključiti i na brzinu $v = d_0/t_0$ taneta (v. vj. 46.).

50. Principno i praktički, s gledišta precizione mjerne tehnike, veoma je važna primjena zakona strujanja na mjerenja napona, struja i otpora *metodom kompenzacije*.

Kao i kod mostova i ovdje se radi o nulmetodi. Principna shema spajanja kod uspoređivanja neke nepoznate EMS E_x s nekom poznatom E , na pr. onom akumulatorskog elementa (≈ 2 V) ili onom Westonova normalnog elementa (1,01865 V; A-75.) predočena je u sl. 82.



Sl. 81.



Sl. 82.

Pretpostavimo najprije preklopkom P okrenutom lijevo priključen element poznate EMS E paralelno dijelu MN klizne žice MM_1 , protjecane »pomoćnom strujom« I_0 iz vrlo konstantnoga izvora struje B_0 , na pr. iz akumulatorske baterije.

Neka se sad pomicanjem kliznoga kontakta K nađe na kliznoj žici MM_1 mjesto N kod kojega uz zatvorenu tipku T galvanometar G pokazuje struju $I_g = 0$. Tim je očito postignuto stanje, kod kojega se međusobno »kompenziraju« EMS E i potrošak napona δ_{MN} na dijelu MN klizne žice uvjetovan strujom I_0 kroz MM_1 ,

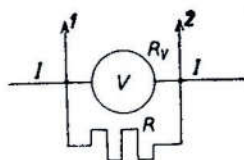
jer kod polariteta baterije B_0 i ispitivanoga elementa kao u sl. 82. E i δ_{MN} su suprotnoga djelovanja (napon δ_{MN} sam za sebe proizveo bi struju kroz G u smislu od lijeva na desno, a EMS E sama za sebe struju u protivnom smislu).

Kad je uz stalan iznos I_0 (udešen promjenljivim otporom R_0) jednom određena duljina MN kod koje se kompenzira E , klizna žica MM_1 je u neku ruku baždarena u naponima. Ako je na pr. struja I_0 kroz MM_1 tako udešena da uz $E = 2$ V duljina MN izide baš 40 cm, onda očito svaki cm klizne žice MM_1 vrijedi 0,05 V. Prema tomu, ako se zakretom preklopke P na desnu stranu priključi na kompenzacioni spoj element nepoznate EMS E_x , pa se nula struje pokazane galvanometrom G postigne na pr. kod mjesta N_x na MM_1 takvoga da je $MN_x = 31,2$ cm, E_x mora očito biti $31,2 \cdot 0,05 = 1,56$ V.

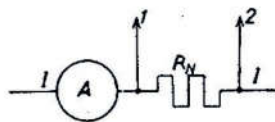
Ne treba pri tomu zaboraviti da u momentu ravnotežja nema struje u grani s priključenim elementom, te da se prema tomu mjerenja kompenzacijom po shemi u sl. 82. vrše (kao i ona s elektrostatskim napravama) bez ikakvoga opterećenja ispitivanih izvora struje, tako da se doista i principno korektno mjere EMS, a ne kao kod upotrebe galvanometričkih voltmetara *naponi stezaljki* makar i neznatno opterećenih izvora struje.

51. No ne samo EMS, nego i *naponi* između krajeva po volji uzetih potrošača protjecanih strujom mogu se mjeriti kompenzacijom. Tako se specijalno kompenzacijom mogu lako baždariti voltmetri.

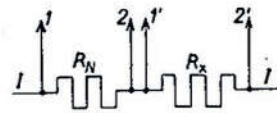
Ako se naime umjesto elementa s nepoznatom EMS E_x priključi na kompenzacioni spoj iz sl. 82., posredstvom odvojaka 1 i 2 s njegovih krajeva, povoljni otpor R protjecan povoljnom strujom I (iz nekoga stranog izvora), mjerenje kompenzacijom dat će očito napon $U = IR$; a ako se još po shemi u sl. 83. otporu R paralelno priključi voltmetar otpora R_v , koji treba baždariti, tako da nastane kombinacioni otpor $R_k = RR_v/(R + R_v)$, kompenzacijom od ukupne struje I izmjereni napon U bit će jednak produktu IR_k . Taj iznos U mora voltmetar pokazivati, pa ako pokazuje neki drugi iznos U' , onda instrument ima »apsolutnu« pogrešku $U' - U$, »relativnu« $(U' - U)/U$ i »postotnu« $p\% = 100 \cdot (U' - U)/U$.



Sl. 83.



Sl. 84.



Sl. 85.

Reguliranjem struje I na prikladne iznose mogu se voltmetri ovim načinom ispitati na različitim mjestima skale.

52. Posredno je kompenzacijom moguće mjeriti i *struje* kroz ma kakve potrošače, a prema tomu baždariti i ampermetre.

U tu svrhu treba, po shemi u sl. 84., iz prikladnoga posebnog izvora poslati struju, nareguliranu na povoljni iznos I , redom kroz poznati (normalni) otpor R_N i ispitivani ampermetar A. Ako se sada malo prije opisanom metodom izmjeri napon U između krajeva otpora R_N , može se staviti $I = U/R_N$, pa ako ampermetar A pokazuje neki drugi iznos struje I' , pogriješka ampermetra u % pravoga iznosa jest: $p\% = 100 \cdot (I' - I)/I$.

53. Konačno se mogu kompenzacijom uspoređivati i *otpori*. Tako se specijalno mogu uspoređivati precizioni mjerni otpori s »normalima« ili »standardima« otpora. Neka povoljna struja I teče redom kroz poznati otpor R_N i ispitivani otpor R_x i neka se metodom iz B-50. odrede gubici napona U_N i U_x u tim otporima (sl. 85.). Zbog iste struje I kroz oba otpora mora vrijediti relacija:

$$R_N : R_x = U_N : U_x$$

iz koje se, kod poznatoga iznosa R_N i mjerenjem dobivenih U_N i U_x , lako dobiva R_x .

54. Kod osobito preciznih mjerenja kompenzacijom, uz upotrebu Westonova normalnog elementa i vrlo osjetljivih zrcalnih galvanometara, mogu se postići rezultati pouzdani i na pet decimalnih mjesta. No u takvim slučajevima moraju se, umjesto (samo zbog ilustracije principa u sl. 82. naznačenoga) primitivnoga mjernoga rasporedaja s kliznom žicom, uzeti kompliciraniji uređaji s grupama vanredno precizno adjustiranih mjernih otpora, t. zv. *aparati za kompenzaciju* ili *kompenzatori* (engl. »potentiometers«; više u E. M.). Pomoćna struja ovih kompenzatora iznosi na pr. samo 0,0001 A, a opterećenja normalnog elementa kod traženja ravnotežja pogotovo su posve neznatna (a takva su jedina i dopuštena kod normalnih elemenata).

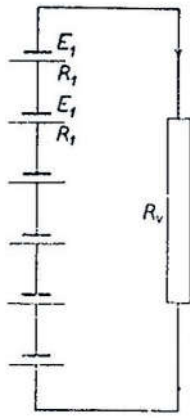
Prema svemu izloženom su metodom kompenzacije, principno besprikornom i praktički usavršivom do najvećih točnosti, moguća baždarenja instrumenata i uopće mjernih aparatura, i time svođenja svih električkih veličina na samo dvije polazne: *napon* (realiziran normalnim elementom upotrebljavanim uz kompenzator) i *otpor* (realiziran precizionim otporima u kompenzatoru i pomoćnim »normalnim otporima«); točnost te metode već je u B-18. naglašena.

55. Primjenu zakona strujanja na različite mogućnosti *spajanja elemenata* najbolje će biti ilustrirati na konkretnom primjeru.

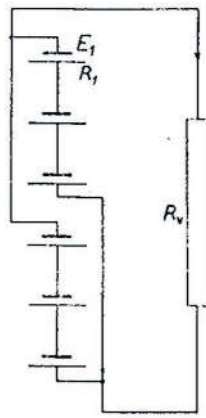
Uzmimo $n = 6$ elemenata, svaki sa EMS $E_1 = 1,5$ V i unutarnjim otporom $R_1 = 0,3 \Omega$. Spojiti te elemente moguće je na četiri načina predložena u sl. 86. do 89., t. j. pored *serijskoga* spoja po sl. 86. i *paralelnoga* po sl. 89. moguća su još dva *mješovita* spoja, od kojih onaj u sl. 87. ima dvije grupe s po tri serijski spojena elementa, a onaj u sl. 88. tri grupe s po dva serijski spojena elementa.

Očito sad kombinacije elemenata po sl. 86. do 89. predstavljaju izvore struje s ukupnom EMS E jednakom $6 \times 1,5 = 9$ V; $3 \times 1,5 = 4,5$ V; $2 \times 1,5 = 3$ V; $1 \times 1,5 = 1,5$ V i ukupnim unutarnjim otporom $6 \times 0,3 = 1,8 \Omega$; $3 \times 0,3/2 = 0,45 \Omega$; $2 \times 0,3/3 = 0,2 \Omega$; $1 \times 0,3/6 = 0,05 \Omega$. Ako se dakle isti potrošač u

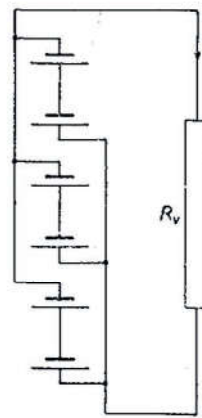
obliku vanjskoga otpora $R_v = 0,45 \Omega$ priključi na pojedine promatrane kombinacije, dobivena struja I imat će redom iznose 4; 5; 4,62; 3 A, dok će uz $R_v = 0,2 \Omega$ iznosi struje biti 4,5; 6,92; 7,5; 6 A. U oba slučaja *najjača struja* dobivena je s onim spojem elemenata kod koga je unutarnji otpor R_u baš odgovarao vanjskom otporu R_v u tom slučaju, t. j. uz uvjet: $R_v = R_u$.



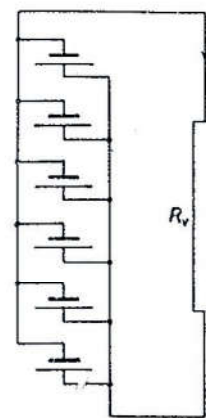
Sl. 86.



Sl. 87.



Sl. 88.



Sl. 89.

Općenito, kod određenoga otpora R_v priključena na bateriju sa n elemenata, sastavljenu od y paralelnih grupa po x serijski spojenih elemenata EMS E_1 i otpora R_1 , struja kroz R_v (kraj $y = n/x$) iznosit će:

$$I = \frac{E}{R_u + R_v} = \frac{x E_1}{\frac{x R_1}{y} + R_v} = \frac{E_1}{R_1 \frac{x}{n} + \frac{R_v}{x}} \quad (106)$$

i prema tomu će biti najjača ako nazivnik desnoga izraza za I bude najmanji. A da to bude, mora derivacija toga nazivnika po x biti jednaka nuli, t. j. mora biti: $R_1/n - R_v/x^2 = 0$, što vodi na isti uvjet:

$$R_v = R_1 \cdot \frac{x^2}{n} = R_u \quad (107)$$

kao i malo prije u specijalnom slučaju.

56. U praksi će se dakle za postizavanje što jače struje kroz neki potrošač morati odabrati onaj spoj elemenata u bateriju kod kojega se unutarnji otpor što više približava otporu potrošača. Drugim riječima: otpori R_v i R_u potrošača i izvora morat će biti jedan drugomu što više *prilagođeni*.

No ne treba zaboraviti da uvjet maksimuma struje $R_u = R_v$ povlači za sobom konsekvenciju da i gubici napona moraju biti jednaki u izvoru struje i u vanjskom otporu. Stupanj djelovanja kod ovakvih spajanja ne može dakle biti povoljan, pa se zato prilagođivanje primjenjuje tek u prilikama kakve na pr. dolaze u tehnici slabih struja, kad se želi svakako postići što jača struja signala, a stupanj djelovanja nije toliko važan. U tehnici jakih struja pravilo $R_u = R_v$ nema praktičke važnosti.

57. Od daljih problema razgranjivanja, kod kojih treba primijeniti i II. Kirchhoffov zakon, uzmimo *paralelni rad* dvaju generaoara G_1 i G_2 s EMS E_1 i E_2 , te unutarnjim otporima R_1 i R_2 . Generatori neka su priključeni kao u sl. 90.a) na vod zanemariva otpora opterećen nekim potrošačem P , koji iz voda crpe struju I .

Ako su I_1 i I_2 prinosi obih generatora ukupnoj struji I voda, mora prije svega vrijediti I. Kirchhoffov zakon:

$$I = I_1 + I_2$$

Istodobno se, primjenjujući II. Kirchhoffov zakon na zatvorenu zamku G_1 -vod- G_2 i pazeći na pravila o predznacima (B-33.), može pisati:

$$E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2 = I_1 R_1 - I R_2 + I_1 R_2$$

što odmah daje:

$$I_1 = \frac{I R_2}{R_1 + R_2} + \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \quad (108)$$

Analogno vrijedi:

$$I_2 = \frac{I R_1}{R_1 + R_2} - \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \quad (109)$$

58. Po svojoj sličnosti s izrazima (97) i (98) u B-40. prvi članovi desno u (108) i (109) mogu se shvatiti kao »struje razgranjivanja« ukupne struje $I = I_1 + I_2$ kroz otpore R_1 i R_2 ; naprotiv drugi član desno u promatranim formulama, aditivan u (108) i suptraktivan u (109), predstavlja »struju izjednačenja«, koja teče i uz $I = 0$ između oba generatora ako im EMS nisu jednake. Uz $E_1 > E_2$ ta struja povećava I_1 i smanjuje I_2 ; tako se, varirajući razliku $E_1 - E_2$, uvijek može postići po volji odabrana podjela opterećenja na oba generatora (na pr. takva da svaki generator daje struju prema učinku za koji je građen).

59. Zanimljivo je izračunati i napon U mreže kod paralelnoga rada promatranih generatora. Očito mora vrijediti: $U = E_1 - I_1 R_1 = E_2 - I_2 R_2$, pa kad se stavi za I_1 izraz iz (108), ili za I_2 onaj iz (109), izlazi relacija:

$$U = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2} - I \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (110)$$

iz koje se vidi da bi se paralelna kombinacija dvaju generatora mogla zamijeniti jednim jedinim generatorom G s EMS $E = (E_1 R_2 + E_2 R_1) / (R_1 + R_2)$ i s unutarnjim otporom $R_u = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$.

60. Ako se na generatore G_1 i G_2 unutarnjih otpora R_1 i R_2 priključi po sl. 90.b) *vod s tri vodiča* P , O , N s otporima R , R_0 , R , te ako potrošači P_1 i P_2 priključeni na svršetak toga voda uzimaju, kod jednakih napona U , struje I_1 i I_2 , EMS E_1 i E_2 obih generatora slijede neposredno primjenom II. Kirchhoffova zakona na zatvorene zamke G_1 - P - P_1 - O - G_1 i G_2 - O - P_2 - N - G_2 .

Neka je na pr. $U = 220$ V, $I_1 = 60$ A, $I_2 = 5$ A, $R = 0,05$ Ω , $R_0 = 0,1$ Ω , $R_1 = 0,2$ Ω , $R_2 = 0,15$ Ω . Na temelju II. Kirchhoffova zakona može se pisati:

$$\begin{aligned} E_1 &= 60 \cdot (0,2 + 0,05) + 220 + (60 - 5) \cdot 0,1 = 240,5 \text{ V} \\ E_2 &= 5 \cdot 0,15 - (60 - 5) \cdot 0,1 + 220 + 5 \cdot 0,05 = 215,5 \text{ V} \end{aligned}$$

dok za napone U_1 i U_2 na početku voda izlaze iznosi:

$$U_1 = 240,5 - 60 \cdot 0,2 = 228,5 \text{ V}$$

$$U_2 = 215,5 - 5 \cdot 0,15 = 214,75 \text{ V}$$

Slično bi se rješavali i drugi slični problemi, kao onaj gdje bi se naponi E_1 i E_2 uzimali jednaki (pa bi izišli nejednaki naponi U_1 i U_2 potrošača P_1 i P_2), itd.

61. Za ilustraciju načina primjenjivanja već u B-30. spomenutoga *zakona superpozicije*, po kojemu se »struje u granama neke linearne mreže s više EMS mogu smatrati nastalima superpozicijom struja koje bi bile proizvedene od pojedinih ovih EMS, kad bi one same djelovale u inače nepromijenjenoj toj mreži«, riješimo ponovno problem iz B-57. do B-59. paralelnoga rada dvaju generatora.

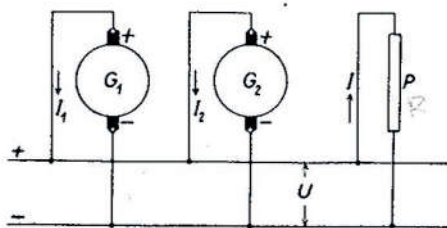
Pretpostavljajući spoj po sl. 90.a), s potrošačem P otpora R , označimo sa I'_1 struju generatora G_1 uz $E_1 \neq 0$ i $E_2 = 0$. A I'_2 neka je analogno struja generatora G_2 uz $E_1 = 0$ i $E_2 \neq 0$. Očito onda proračunavanje struje I'_1 izlazi na problem strujnoga kruga kod kojega je na izvor struje EMS E_1 i unutarnjega otpora R_1 priključen potrošač u obliku kombinacionoga otpora $RR_2/(R + R_2)$, a proračunavanje struje I'_2 na problem kruga kojemu izvor ima EMS E_2 i unutarnji otpor R_2 , a potrošač mu je kombinacioni otpor $RR_1/(R + R_1)$. Prema tomu može se pisati:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + RR_2/(R + R_2)} = \frac{E_1 \cdot (R + R_2)}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}$$

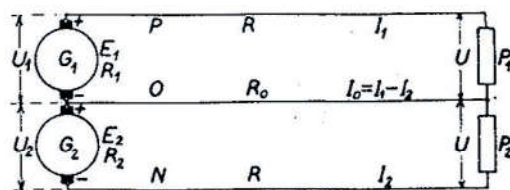
i analogno

$$I'_2 = \frac{E_2 \cdot (R + R_1)}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}$$

Ako sad od struje I'_2 generatora G_2 uz $E_1 = 0$ i $E_2 \neq 0$ teče dio I''_1 kroz generator G_1 , koji uz pretpostavljanje okolnosti reprezentira tek otpor R_1 , taj dio



Sl. 90.a)



Sl. 90.b)

I''_1 može se smatrati proizveden djelovanjem napona mreže $U = E_2 - I'_2 R_2$ na otpor R_1 , pa se može staviti: $I''_1 = U/R_1$, i odnosno (kad se stave vrijednosti U i I' i dobiveni izraz uredi):

$$I''_1 = \frac{E_2 R}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}$$

Kod istodobnoga djelovanja obih EMS E_1 i E_2 ukupna struja I_1 kroz G_1 nastala *superpozicijom* struja I'_1 i I''_1 , bila bi (obzirom na to što kod pozitivno ozna-

čene I_1 iz G_1 treba struju I_1'' , kao onu koja teče u G , označiti u odnosu prema G_1 negativno):

$$I_1 = I_1' - I_1'' = \frac{E_1(R + R_2) - E_2R}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}$$

Analogno bi izraz za ukupnu struju I_2 kroz generator G_2 glasio:

$$I_2 = I_2' - I_2'' = \frac{E_2(R + R_1) - E_1R}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}$$

Ukupna struja I potrošača P bila bi prema tomu dana izrazom:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}$$

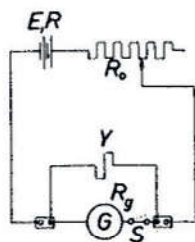
koji je lako uz pomoć relacije $U = IR$ preduesiti u:

$$U(R_1 + R_2) + IR_1R_2 = E_1R_2 + E_2R_1$$

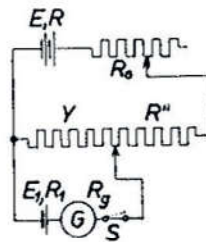
i dalje u formulu (110), dobivenu u B-59. posve drugim načinom.

62. Katkad vrlo prikladan za rješavanja problema razgranjivanja jest i *Théveninov teorem*, koji kaže: *struja u ma kojoj grani A neke linearne mreže može se računati zamišljajući u toj grani, pri utrnulima stvarnim EMS mreže, neku fiktivnu EMS E_A , jednaku naponu što bi se pri prekidu grane A pojavio između mjesta prekida, kod djelovanja stvarnih EMS mreže.*

Za ilustraciju zamislimo spojeve po sl. 91.a) i 91.b), u kojima obima izvor EMS E i otpora R djeluje u razgranjenjima s otporu Y paralelnom galvanometarskom granom, samo što se u toj grani u prvom slučaju zamišlja galvanometar otpora R_g sâm, a u drugom slučaju uz serijski dodan izvor EMS E_1 i otpora R_1 .



Sl. 91.a)



Sl. 91.b)

Serijski neka je još izvoru sa E i R dodan otpor X . Taj otpor X neka je u sl. 91.a) realiziran otporom R_0 i u sl. 91.b) otporom $R_0 + R''$. Neka se oba puta traži galvanometarska struja I_g , u kome slučaju kod spoja po sl. 91.a) problem izlazi na shuntirani galvanometar uključen u strujni krug izvora s E i R i potrošača otpora $X = R_0$, a spoj po sl. 91.b) na problem struje kroz G kod općenito još neudešenog ravnotežja pri kompenziranju napona E_x po sl. 82. (sa E_x kao E_1 , otporom M-K kao Y , otporom K-M₁ kao R'' , dakle sa $R_0 + R'' = X$, itd.). Očito je spoj po sl. 91.a) tek specijalni slučaj spoja po sl. 91.b), sa $E_1 = 0$ i $R_1 = 0$, pa će biti dosta

riješiti odmah ovaj potonji slučaj. Kod prekinute galvanometarske grane bi napon E hranio nerazgranjeni strujni krug EMS E i ukupnog otpora $R + X + Y$, pa bi »Théveninov napon« galvanometarske grane izišao jednak padu napona U na Y kombiniranom s njemu u galvanometarskoj grani suprotnom EMS E_1 , t. j. moglo bi se galvanometarsku granu smatrati izvorom EMS $E_A = U - E_1$ i otpora $R_1 + R_g$, koja šalje struju kroz petlju s otporima Y i $R + X$ kao granama, uzimajući $E = 0$. Tako se, kod U izračunatog iz relacije

$$E: U = (R + X + Y) : Y$$

može, konačno, staviti po Ohmovu zakonu kao općenito rješenje spoja po sl. 91. b):

$$I_g = \frac{\frac{EY}{R + X + Y} - E_1}{R_1 + R_g + \frac{(R + X)Y}{R + X + Y}} = \frac{EY - E_1(R + X + Y)}{(R_1 + R_g)(R + X + Y) + (R + X)Y}$$

Na mnogo jednostavniji slučaj spoja po sl. 91.a) može se doći, osim neposrednim računom, i specijalizacijom netom dobivene formule: $E_1 = 0$, $R_1 = 0$, $X = R_0$. Rezultat jest:

$$I_g = \frac{EY}{R_g(R + R_0 + Y) + (R + R_0)Y}$$

On se može lako verificirati računajući običnim načinom (Ohmovim zakonom i formulama razgranjivanja) najprije ukupnu struju I izvora sa E_1 i R_1 , te zatim dio I_g te struje kroz galvanometarsku granu.

63. Razmotrimo još između problema o t. zv. *pretvorbama mreža* specijalno slučaj pretvorbe *trokuta* otporâ u (trokraku) *zvijezdu* otporâ i obrnuto.

Neka je po sl. 92. dan »trokut« otporâ R_{12} , R_{23} , R_{13} uključen preko 1, 2, 3 u ma kakvu linearnu mrežu. Ako taj trokut otporâ treba zamijeniti »zvijezdom« otporâ R_{10} , R_{20} , R_{30} , koji su jednim krajem priključeni na 1, odn. 2, odn. 3, a protivnim su krajevima spojeni u zajedničko »zvjezdíšte« O , tom zamjenom dobit će se samo onda rasporedaj ekvivalentan prvobitnom rasporedaju ako ostanu nepromijenjeni potencijali V_1 , V_2 , V_3 točaka 1, 2, 3, kao i struje I_1 , I_2 , I_3 dovodâ k trokutu, odnosno k zvijezdi (računane pozitivno, ako su ulazne, a negativno, ako su izlazne).

Evo uz koje će odnose između otporâ trokuta i otporâ zvijezde taj uvjet biti ispunjen. Neka su I_{12} , I_{23} , I_{31} ($= -I_{13}$) struje u otporima trokuta, računane pozitivno u smislu naznačenom redoslijedom indeksa. Onda moraju s jedne strane vrijediti jednadžbe:

$$V_1 - V_2 = I_{12}R_{12} \quad V_2 - V_3 = I_{23}R_{23} \quad V_3 - V_1 = I_{31}R_{13}$$

koje zbrojene (uz istodobnu primjenu jednadžbi: $I_{23} = I_{12} + I_2$ i $I_{31} = I_{12} - I_1$, te uvođenje pojma »obilaznoga otpora« trokuta: $R = R_{12} + R_{23} + R_{13}$) daju relaciju:

$$I_{12} = \frac{I_1 R_{13} - I_2 R_{23}}{R}$$

i dalje (supstitucijom izraza za I_{12} u $V_1 - V_2 = I_{12}R_{12}$) relaciju:

$$V_1 - V_2 = \frac{R_{12}(I_1 R_{13} - I_2 R_{23})}{R} \quad (111)$$

S druge strane, razmatrajući zvijezdu, može se pisati (ako je V_0 potencijal zvjezdišta O):

$$V_1 - V_0 = I_1 R_{10} \quad V_2 - V_0 = I_2 R_{20} \quad V_3 - V_0 = I_3 R_{30}$$

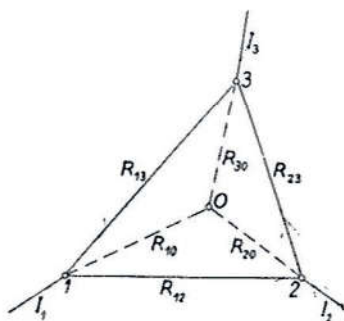
pa na pr. odbijanjem prvih dviju ovih relacija izlazi:

$$V_1 - V_2 = I_1 R_{10} - I_2 R_{20} \quad (112)$$

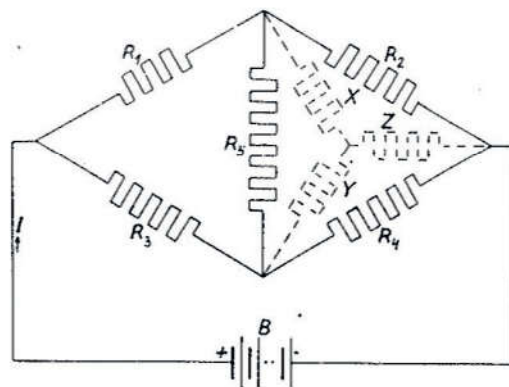
Ako relacije (111) i (112), kao i analogne za napone $V_2 - V_3$ i $V_3 - V_1$, imaju biti identične, moraju koeficijenti jednakih veličina I_1, I_2, I_3 u njima biti jednaki, t. j. moraju vrijediti *formule za pretvorbu trokuta u zvijezdu*:

$$R_{10} = \frac{R_{12}R_{13}}{R} \quad (113) \quad R_{20} = \frac{R_{12}R_{23}}{R} \quad (113') \quad R_{30} = \frac{R_{13}R_{23}}{R} \quad (113'')$$

Riječima: krak zvijezde dobiva se dijeleći produkt tomu kraku susjednih otpora trokuta s obilaznim otporom trokuta.



Sl. 92.



Sl. 93.

Za protivni prelaz, sa zvijezde na trokut, vrijede formule:

$$R_{12} = \frac{R_{10}R_{20}}{R_0} \quad (114) \quad R_{23} = \frac{R_{20}R_{30}}{R_0} \quad (114') \quad R_{13} = \frac{R_{10}R_{30}}{R_0} \quad (114'')$$

u kojima $1/R_0$ znači »vodljivu vrijednost zvijezde« definiranu sumom $1/R_{10} + 1/R_{20} + 1/R_{30}$ vodljivih vrijednosti krakova zvijezde. Formule (114) do (114'') lako se izvode uzimajući formule (113) do (113'') kao sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice R_{12}, R_{23}, R_{13} .

Općenitije se n -kraka zvijezda otpora R_{10} do R_{n0} daje zamijeniti sa $n \cdot (n-1)/2$ otpora potpunoga n -kuta (u kome se i diagonale broje među stranice), pri čemu za otpor grane mnogokuta između vrhova p i q vrijedi relacija: $R_{pq} = R_{p0} \cdot R_{q0} / R_0$, u kojoj $1/R_0$ znači sumu vodljivih vrijednosti n krakova zvijezde.

Obrnuti problem pretvorbe n -kuta u n -kraku zvijezdu općenito je »preodređen« jer za n nepoznanica R_{10} do R_{n0} postoji $n \cdot (n - 1)/2$ relacija za R_{pq} . Samo kod $n = 3$ je $n \cdot (n - 1)/2$ baš jednako n , pa je prelaz s trokuta u zvijezdu uvijek moguć, kako je uostalom malo prije bilo i neposredno dokazano.

64. Kao primjenu formula (113) do (113'') za transfiguraciju trokuta u zvijezdu proračunajmo otpor kombinacije u sl. 93. sa četiri grane neuravnotežena Wheatstoneova mosta realizirane otporima R_1 do R_4 i s petom (kod mosta galvanometarskom) granom otpora R_5 . Promatrana kombinacija neka je priključena na izvor struje EMS E i otpora R_u , a zadatak neka bude: naći ukupnu struju I što će teći iz izvora.

U tu svrhu dovoljno je transfigurirati na pr. »trokut« otporâ R_3 , R_2 , R_4 u »zvijezdu« otporâ X , Y , Z , crtkano naznačenu u sl. 93. Kad su pak iznosi X , Y , Z određeni, problem se pojednostavljuje u slučaj strujnoga kruga s običnim razgranjivanjem u dvije paralelne grane (s otporima $R_1 + X$ i $R_5 + Y$), pa treba samo još primijeniti poznatu formulu za kombinacioni otpor ovakvoga razgranjivanja da se problem svede na jednostavni nerazgranjeni strujni krug.

Ako konkretno otpori R_1 do R_5 u sl. 93 imaju redom iznose 85, 140, 140, 160 i 100 Ω , formule za transfiguraciju daju:

$$X = 100 \cdot 140 / 400 = 35 \Omega \quad Y = 100 \cdot 160 / 400 = 40 \Omega \quad Z = 140 \cdot 160 / 400 = 56 \Omega$$

pa, ako baterija B ima unutarnji otpor $R_u = 16 \Omega$ i EMS $E = 18$ V, zadatak izlazi na strujni krug otpora:

$$16 + \frac{(85 + 35)(140 + 40)}{85 + 35 + 140 + 40} + 56 \Omega$$

t. j. ukupnoga otpora 144 Ω , u kojemu EMS $E = 18$ V izvodi struju $I = 0,125$ A.

65. Zahvalan problem transfiguracije trokuta u zvijezdu predstavlja i svođenje spoja Thomsonova dvostrukoga mosta po shemi u sl. 80. na obični Wheatstoneov most. Treba samo trokut otpora 1-2-3 iz sl. 80. s otporima $1-2 = P_2$, $2-3 = S$, $1-3 = Q_2$ transfigurirati u zvijezdu s otporima R_{10} , R_{20} , R_{30} ; nastaje time Wheatstoneov most, u kojemu se R_{10} pribraja otporu R_g galvanometra G; R_{20} pribraja se otporu R_x , a R_{30} otporu R . Primjenjujući formulu ravnotežja Wheatstoneova mosta:

$$(R_x + R_{20}) : (R + R_{30}) = P_1 : Q_1$$

nailazi se time lako čak na općenitiji uvjet ravnotežja Thomsonova mosta:

$$R_x = R \cdot \frac{P_1}{Q_1} + \frac{Q_2 S}{P_2 + Q_2 + S} \cdot \left(\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_2}{Q_2} \right) \quad (115)$$

koji vrijedi i u slučaju, da P_1/Q_1 i P_2/Q_2 nisu posve jednaki, a u slučaju $P_1/Q_1 = P_2/Q_2 = n$ prelazi u specijalniji uvjet (103) iz B-46.

66. Ohmov zakon i zakoni razgranjivanja mogu se pisati i u elementarnom obliku. U tom se obliku ovi zakoni primjenjuju kod prostornih električkih strujanja, u t. zv. *poljima strujanja*. Najviše se upotrebljavaju u elementarnom obliku Ohmov zakon i I. Kirchhoffov zakon; za njih izvedimo korespondentne formule.

Za Ohmov zakon zamislimo u polju električne struje elementarni uspravni valjak s bazama površine dS okomitima na smjer strujanja. Visina valjka neka je dl , a razlika potencijala između baza neka bude dU . Ako je dI jakost struje kroz elementarni valjak, pripadni iznos »gustoće struje« bit će $G = dI/dS$, pa se po Ohmovu zakonu $dU = dI \cdot R$ za ovaj slučaj može pisati:

$$dU = G \cdot dS \cdot \rho \cdot dl/dS = \rho \cdot G \cdot dl$$

Kako se još dU/dl može shvatiti kao iznos jakosti električkoga polja F , može se također staviti: $F = \rho \cdot G$, odnosno mogu se (uzimajući u obzir vektorsku narav veličina jakosti električkoga polja $\mathcal{F}$ i gustoće provodne struje $\mathcal{G}$, kao i relaciju $\rho = 1/\kappa$) također pisati formule:

$$\mathcal{F} = \rho \mathcal{G} \quad (116) \quad \mathcal{G} = \kappa \mathcal{F} \quad (116')$$

koje nisu drugo nego dva međusobno ekvivalentna izraza Ohmova zakona u elementarnom obliku.

67. Do elementarnoga oblika I. Kirchhoffova zakona dolazi se zamišljajući u polju strujanja zatvorenu plohu S i tražeći ukupni *tok* vektora gustoće provodne struje. Po I. Kirchhoffovu zakonu algebarska suma ulaznih i izlaznih elementarnih tokova $G_n \cdot dS$ mora biti jednaka nuli, t. j. mora vrijediti relacija za ma koju zatvorenu plohu S :

$$\oint G_n \cdot dS = \oint \mathcal{G} \cdot \vec{dS} = 0 \quad (117)$$

(»polje strujanja slobodno je od izvora i ponora«). Ovo je matematski izražen I. Kirchhoffov zakon razgranjivanja u elementarnom obliku.

68. Obično će se kod primjena zakona strujanja u elementarnom obliku F izražavati u V/cm, G u A/cm², dS u cm² i dl u cm. U tom slučaju treba dakako i iznose ρ i κ zamišljati svedene na vodiče s bazom 1 cm² i duljinom 1 cm, t. j. u formule (116), (116') i (117) treba stavljati ρ u $\Omega \cdot \text{cm}$, odn. κ u S/cm (B-20.). Treba dakle stavljati 10⁴-struko smanjene iznose ρ iz tabele I. u B-21. i 10⁴-struko povećane iznose κ iz te tabele.

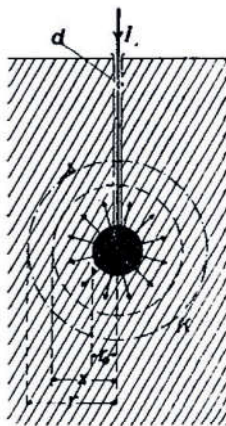
69. Neka na pr. treba odrediti do kojih praktički dopustivih iznosa mogu sezati električka polja u bakrenim vodičima. Kako se ovi već prilično ugrijavaju strujnom toplinom kod gustoće struje 6 A/mm², odn. 600 A/cm², dosta je, uzimajući navedenu gustoću struje kao gornju granicu, staviti $G = 600 \text{ A/cm}^2$, pa uz vrijednost $0,0175 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{cm}$ za specifički otpor bakra po formuli (116) izlazi rezultat:

$$F = 0,00000175 \cdot 600 = 0,00105 \approx 0,001 \text{ V/cm}$$

koji je bio već u B-15. spomenut.

70. Kao primjer zadatka gdje treba primijeniti pored formule (116) i formulu (117) navedimo proračunavanje »prelaznoga otpora« R kovne (dakle praktički savršeno vodljive) kuglaste elektrode polumjera r_0 (sl. 94.), duboko ukopane u zemlju

vodljivosti κ . Kovni dovod d , kojim se uzemljenoj elektrodi privodi struja I , neka je izoliran i dovoljno tanak, da se ne naruši simetrija.



Sl. 94.

Crte strujanja teći će zbog simetrije očito svagdje radijalno iz površine kuglaste elektrode, pa ako je G iznos vektora G gustoće struje u točkama polja strujanja udaljenima od središta uzemljene elektrode za daljinu x , dakle točkama kojih je geometrijsko mjesto crtkano naznačena kuglasta ploha u sl. 94., »izlazni« tok struje kroz spomenutu plohu bit će očito $G \cdot 4x^2\pi$, dok će »ulazni« tok predstavljati jedino struja I , što teče dovodom d . Računajući izlazni tok pozitivno, a ulazni negativno, moći će se dakle (117) pisati:

$$G \cdot 4x^2\pi - I = 0$$

To daje: $G = I/4x^2\pi$; no po (116') dade se G zamijeniti sa κF , ako je F iznos vektora električkoga polja $\mathcal{F}$ u daljini x od središta uzemljene kovne kugle (vektor $\mathcal{F}$ radijalan je po smjeru kao i vektor G). Tako izlazi relacija: $F = I/(\kappa \cdot 4x^2\pi)$. Uz poznato električko polje lako je dalje naći napon U između uzemljene elektrode polumjera r_0 i točaka M polja strujanja neke zamišljene (u sl. 94. točka-crtkano naznačene) kuglaste plohe K polumjera r , koncentrične s uzemljenom elektrodom:

$$U = - \int_r^{r_0} F \cdot dx = - \int_r^{r_0} \frac{I}{4\pi\kappa} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{I}{4\pi\kappa} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right] \quad (118)$$

Kod velikih daljina r član $1/r$ u uglatoj zagradi u (118) iščezava prema $1/r_0$, tako da se U približava graničnoj vrijednosti: $U = I/4\pi\kappa r_0$, a kvocijent $U/I = R$, nazvan »prelaznim otporom između uzemljene elektrode i zemlje«, graničnoj vrijednosti:

$$R = \frac{1}{4\pi\kappa r_0} \quad (119)$$

Obično se dopušta, da je granična vrijednost izrazâ za U i R praktički postignuta kod daljine $r = 100r_0$, kad iznos $1/r$ padne na stoti dio iznosa $1/r_0$, t. j. s točnošću 1% može se prelazni otpor uzemljene kugle određenoga polumjera smatrati lokaliziranim unutar prostora polja strujanja u obliku kugle 100 puta većega polumjera, a za preostalo područje polja strujanja može se uzeti da praktički ništa ne doprinosi smanjenju prelaznoga otpora.

Primjeri: 1. Kod uzemljene kugle polumjera $r_0 = 20$ cm u tlu vodljivosti $\kappa = 10^{-4}$ S/cm ($= 10^{-8}$ S·m/mm²) otpor uzemljenja bio bi: $R = 1/(4\pi \cdot 10^{-4} \cdot 20) \approx 40 \Omega$.

2. Ako se uzemljenje nekoga stupa za vodove smije pretpostaviti nadomješteno uzemljenom polukuglom polumjera $r_0 = 80$ cm s ekvatorom u razini tla, prelazni otpor uzemljenja stupa bit će očito dvaput toliki koliki bi bio otpor uzemljenja cijele kugle polumjera r_0 duboko u zemlji, t. j. on će biti (uz istu vodljivost tla kao u primjeru 1.):

$$R = 1/(2\pi\kappa r_0) = 1/(2\pi \cdot 10^{-4} \cdot 80) \approx 20 \Omega$$

71. Sličnim načinom, polazeći od linijskih izvora, dolazi se na izraz za prelazne otpore dugih i tankih cilindričkih elektroda (kovnih cijevi) ukopanih vertikalno u zemlju; za cijev duljine l_0 vrlo velike prema polumjeru r_0 , položenu u zemlju vodljivosti κ , dobiva se:

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l_0} \cdot \ln \frac{2l_0}{r_0} \quad (120)$$

Primjer: Cijev duljine 1,5 m i promjera 4 cm u zemlji vodljivosti 10^{-4} S/cm imala bi po formuli (120):

$$R = \frac{\ln(2 \cdot 150/2)}{2\pi \cdot 10^{-4} \cdot 150} = \frac{5 \cdot 10^4}{2\pi \cdot 150} = 53 \Omega$$

Neka još bude upozoreno na vrlo jednostavno proračunavanje »izolacionog otpora« cilindričkog jednožilnog kabela (uputu v. uz vj. 31. na str. 196.).

72. Do zanimljivih konsekvencija dolazi se primjenom stavka (117) na granične prilike dvaju nesavršenih dielektrika koji pored dielektričkih konstanata ϵ_1 i ϵ_2 pokazuju još i određene konačne vodljivosti κ_1 i κ_2 .

Kad se pod utjecajem električkoga polja uspostavi stacionarno protjecanje provodne struje iz jednoga dielektrikuma u drugi, za normalne komponente gustoće struje s jedne i druge strane granične plohe primjenom relacije (117) na plohu poput S_0 u sl. 38. (str. 87.) dobiva se: $G_{1n} = G_{2n}$. Po (116') može se onda dalje staviti: $\kappa_1 F_{1n} = \kappa_2 F_{2n}$. S druge strane po sl. 39. (str. 87.) i ovdje vrijedi: $F_{1t} = F_{2t}$. Analognim zaključivanjem kao kod $\mathcal{D}$ -linija u savršenim izolatorima (A-91.) došlo bi se ovdje na »zakon loma« crta vektora gustoće provodne struje $\mathcal{G}$ (loma »crta strujanja«): $\text{tg } \alpha_1 : \text{tg } \alpha_2 = \kappa_1 : \kappa_2$, analogan zakonu (55) iz A-91.

Prema tomu će crte strujanja u lošijem vodiču biti više priklonjene okomici na graničnu plohu. Kod prelaza iz srednje vodljivoga sredstva u loše vodljivo sredstvo crte strujanja ulazile bi u ovo potonje praktički normalno na graničnu plohu.

73. Posebno je vrijedno razmotriti slučaj, kad su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{F}$ okomiti na graničnu plohu, t. j. kad tangencijalne komponente ovih vektora iščezavaju, pa se $G_{1n} = G_{2n}$ može zamijeniti sa $G_1 = G_2$, odn. $\kappa_1 F_{1n} = \kappa_2 F_{2n}$ sa $\kappa_1 F_1 = \kappa_2 F_2$.

Kad bi se dakle radilo o kondenzatoru po sl. 41. (str. 87.) s dva dielektrikuma, vrijedila bi po (56) u A-93., uz pretpostavku podjele jakosti polja samo pod utjecajem dielektričkih konstanata ϵ_1 i ϵ_2 , relacija:

$$F_1 : F_2 = \epsilon_2 : \epsilon_1 \quad (121)$$

dok će se naprotiv uz konačne κ_1 i κ_2 kod stalnoga istosmjernoga napona U kondenzatora nakon postignuća stacionarnoga stanja uspostaviti općenito drugačija raspodjela polja u oba dielektrikuma po relaciji $\kappa_1 F_1 = \kappa_2 F_2$, odnosno:

$$F_1 : F_2 = \kappa_2 : \kappa_1 \quad (122)$$

Kako se vidi, obje će raspodjele moći biti iste samo uz uvjet da su slučajno za oba dielektrikuma omjeri dielektričkih konstanata i električkih vodljivosti jednaki.

Zanimljivo je da u stacionarnom stanju kod različitih omjera $\epsilon_1:\epsilon_2$ i $\kappa_1:\kappa_2$ izlaze različiti iznosi za D_1 i D_2 , tako da se na graničnom sloju kod postignutoga stacionarnog protjecanja struje mora pretpostaviti (pravi) električki naboj plošne gustoće $D_0 = D_1 - D_2$. Da se D_0 proračuna, dovoljno je $\kappa_1 F_1 = \kappa_2 F_2$ preudeliti u $\kappa_1 D_1/\epsilon_1 = \kappa_2 D_2/\epsilon_2$. Onda je: $D_1 = \epsilon_1 \kappa_2 D_2/\epsilon_2 \kappa_1$ i prema tomu:

$$D_0 = D_2 \left(\frac{\epsilon_1 \kappa_2}{\epsilon_2 \kappa_1} - 1 \right) \quad (123)$$

Ovim se tumače »zaostaci naboja« na granici različitih dielektrika, kao i u izolacionim tvarima s nehomogenostima (A-110.).

Ako naponi kondenzatora nisu vremenski konstantni, kako je malo prije pretpostavljano, nego su »izmjenični« (vremenski brzo promjenljivi polaritetom, na pr. po zakonu sinusoide), uspostavlja se i kod razlika omjera $\epsilon_1:\epsilon_2$ i $\kappa_1:\kappa_2$, kakve u praksi dolaze, ipak približno podjela polja po relaciji (121); to se može dokazati približim razmatranjima. No gubici energije su veći, i to redovito čak mnogostruko veći, u nesavršenim izolacionim tvarima kod primjene izmjeničnih napona, nego kod primjene istosmjernih (uspor. tg δ iz A-111.).

IV) RAD (RADNJA) I SNAGA (UČIN) STRUJE; STRUJNA TOPLINA

Energija električke struje; njeni ekvivalenti: toplina, rentgenske zrake, mehanička i kemijska energija i sl. Izrazi za radnju A i snagu ili učin N struje; Jouleov zakon za strujnu toplinu. Elementarni oblik Jouleova zakona. Električke sijalice (žarulje); osnovni pojmovi fotometrije. Rasvjeta tinjalicama i svijetlećim cijevima. Fluorescentne cijevi. Lučna izbijanja. Gubici kod prenosa električke energije na daljinu; potreba visokih napona kod većih učina i većih daljina; sustav triju vodiča kod istosmjerne struje.

74. Po (54) u A-89. električke sile prenoseći naboj Q između točaka s razlikom potencijala (naponom) U izvrše radnju $A = QU$. No i provodne električke struje nisu ništa drugo nego prenos naboja podržavan električkim naponima, pa i kod njih električke sile dakako vrše radnju. Kako je množina elektriciteta prenesena vremenski konstantnom strujom I u vremenu t jednaka $Q = It$, za radnju električke struje može se postaviti formula:

$$A = UI t \quad (124)$$

a za učin (snagu, efekt) električke struje, t.j. radnju po jedinici vremena, formula:

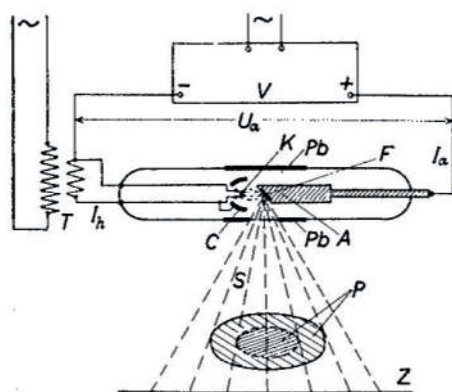
$$N = UI \quad (125)$$

75. Već prema prilikama kao ekvivalent za ovu radnju dobivaju se drugi oblici energije.

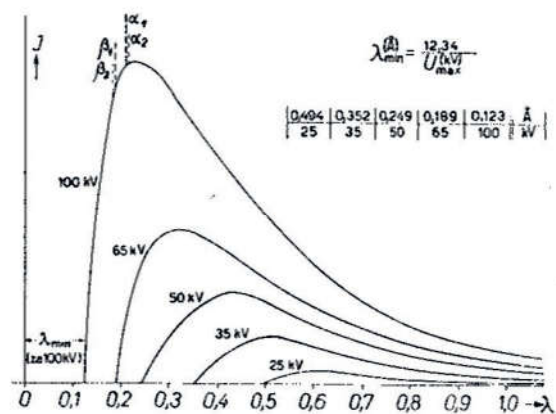
Tako se u elektronskoj cijevi s dvije elektrode (diodi) iz sl. 65. na str. 126. učin $U_a I_a$ troši na ubrzavanje, odn. stvaranje kinetičke energije elektrona na njihovom putu od katode K k anodi A, tako da elektroni udaraju na anodu velikim brzinama, i zaustavljani anodom izvide njeno ugrijavanje, katkad do crvenog žara.

Kod rentgenskih cijevi s visokim vakuumom po sl. 95.a) elektroni, emitirani iz užarene katode K ugrijane strujom grijanja I_h na pr. iz transformatora T, dobiju pod utjecajem osobito visokih anodnih napona U_a (po nekoliko desetaka ili

čak stotina kV), proizvedenih posebnom visokonaponskom napravom V, tako velike brzine da se jednim dijelom energije tih elektrona pogodeno mjesto F (fokus) anode (antikatode) A uzbuđuje na isijavanje elektromagnetskih radijacija ekstremno visokih frekvencija f , na pr. reda veličine 10^{18} ili 10^{19} Hz (daleko najveći dio energije elektrona i ovdje se troši na ugrijavanje anode, koju prema tomu treba dobro hladiti). Tako cijev postaje izvor nevidljivih *rentgenskih zraka* (A-17.), više ili manje prodornih za predmete inače neprozirne za vidljive zrake svjetlosti (ko-



Sl. 95.a)



Sl. 95.b)

jima frekvencije f sežu od ca. $4 \cdot 10^{14}$ do $8 \cdot 10^{14}$ Hz). Kako je poznato, proizvedene rentgenske zrake mogu se tako učiniti zamjetljivima da ih se pusti djelovati na fotografske emulzije ili svjetlucave zastore od prikladnih fluorescentnih masa sa Pt- ili Zn-solima (Z na sl. 95.a)), na kojima onda postaju vidljive i »sjene« predmeta P stavljenih između cijevi i emulzije, odn. zastora.

Anoda A iz sl. 95.a) u praksi se izvodi u obliku bakrenoga valjka s kosom bazom, na kojoj je, na mjestu gdje ima nastati fokus, učvršćena pločica od volframa, kovine koja uz visoko talište ima i visoku atomnu težinu. Elektroni iz K koncentriraju se na fokus F šupljom elektrodom C postavljenom oko K. Pb je zaštitni, za zrake praktički nepropusni ovoj s prozorčićem, tako da rentgenske zrake iz cijevi izlaze praktički samo u čunjastom pramenu poput S u sl. 95.a). Osim »zaštite protiv zrakâ« rentgenski uređaji moraju dakako biti izvedeni i sa »zaštitom protiv visokih napona«.

Zbog potpunosti dodajmo da (neposrednim kočenjem elektrona s katode izazvanom) »kočnom isijavanju« antikatore u obliku kontinuiranoga spektra rentgenskih valova, protegnutoga sve do neke minimalne valne duljine $\lambda = c/f$ to manje što je anodni napon rentgenske cijevi veći; može pridoći, kod anodnih napona počevši od nekog za materijal antikatore karakterističnog »uzbudnog napona« pa na više, također »vlastito isijavanje« karakterističnih za spomenuti materijal rentgenskih spektralnih linija po A-I. (od elektrona u sastavu atoma antikatore, uzbuđenih na titranja bombardiranjem antikatore elektronima iz katode).

Bliže se odnosi »kočnog« i »vlastitog« isijavanja rentgenskih zraka mogu razabrati iz sl. 95.b). Tu su nizom krivulja naznačene, u samovoljnoj skali te za anodne napone 25-35-50-65-100 kV, raspodjele intenziteta J radijacija po valnim duljinama λ u Å (angstrom; A-18.) kontinuiranog »kočnog« spektra zrakâ iz volframove antikatore. Krivulje se naglije uzdižu nego što rastu pripadni naponi, a pomiču se prema kraćim valovima (tvrdim zrakama) i mjestu maksimumâ krivulja. Naročito se oštro ističu »minimalne« valne duljine $\lambda_{\min}$, do kojih pojedine krivulje još sežu, tako da cijev radijacije ispod minimalne valne duljine uz dani

napon, i to čak neovisno o materijalu anode, uopće ne emitira. Na sl. 95.b) naznačena je veličina $\lambda_{\min} = 0,123 \text{ \AA}$ za cijev tjeranu sa 100 kV, a dana je tabela iznosâ $\lambda_{\min}$ za ostale napone cijevi. Lako je verificirati numeričku relaciju:

$$\lambda_{\min} = \frac{12,34}{U_{\max}}$$

koja veže $\lambda_{\min}$ (u $\text{\AA}$) s naponom cijevi, upravo s maksimalnim naponom $U_{\max}$ (u kV), jer cijev može biti tjerana i s »pulzirajućim« istosmjernim naponom, s potonjim iznosom kao maksimalnim. Treba samo pomisliti da je najvišim naponom $U_{\max}$ ubrzani elektron nosilac energije $Q_0 U_{\max}$, i da se najveća frekvencija $f_{\max}$, a time i najmanja valna duljina $\lambda_{\min} = c/f_{\max}$ (c = brzina svjetlosti u vakumu), mogu očekivati tek u ekstremnom slučaju da se energija $Q_0 U_{\max}$ potpuno pretvori u energiju radijacija po kvantnoj formuli:

$$Q_0 U_{\max} = h \cdot f_{\max} = hc/\lambda_{\min}$$

u kojoj h znači »Planckovu konstantu« (A-17.). Stavljajući u V-A-s-m-jedinicama iznose naboja elektrona Q_0 i iznose h i c , te uzimajući u račun relacije: $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ i $1 \text{ kV} = 1000 \text{ V}$, brzo se dolazi na dokazivanu numeričku relaciju.

Na sl. 95.b) naznačene su i četiri »vlastite« linije volframa, t. zv. K-linije α_1 - α_2 - β_1 - β_2 volframa, linije najmanjih valnih duljina 0,209-0,213-0,184-0,179 $\text{\AA}$, koje se pojave superponirane kočnom isijavanju tek kod naponâ iznad nekog graničnog »uzbudnog« napona (u danom slučaju volframa oko 70 kV). Zato tih linija još nema kod krivulja 25-35-50-65 kV, ali ih ima uz krivulju 100 kV. Linija α_1 je najintenzivnija, intenzivna je i linija β_1 , a slabije su radijacije linije α_2 i pogotovo β_2 . Za stepen djelovanja η_r stvaranja rentgenskih zraka, razumijevajući pod tim omjer N_r/N učina N_r u W proizvedenih radijacija i učina N struje elektrona koji zgađaju antikatodu, može se grubo staviti: $\eta_r = ZU/10^6$, gdje su Z redni broj atoma materijala antikatode i U pretpostavljeni stalni istosmjerni napon cijevi u kV. Iznos η_r , i u povoljnim slučajevima materijala antikatode s velikim Z te upotreba visokih napona U , izlazi vrlo nepovoljan; pa na pr. ni kod volframove antikatode ($Z = 74$) i visokog $U = 135 \text{ kV}$ ne prelazi $74 \cdot 135/10^6$ ili 0,01, t. j. samo se 1% raspoložive snage pretvara u radijacije, a s punih 99% tek se grije fokus antikatode! Kod stalnog U i danog Z radijacije se pojačavaju praktički proporcionalno anodnoj struji I cijevi (miliamperi!), koja se povećava povišavanjem struje grijanja katode rentgenske cijevi.

76. I svladavanje protu-EMS skopčano je s vršenjem električke radnje. Tako se na svladavanje protu-EMS E' kod nabijanja strujom I akumulatorske baterije B iz sl. 68.a), a slično i kod pogona strujom I motora M protu-EMS E' iz sl. 68.b), od ukupne u vremenu t izvršene radnje EIt u slučaju sl. 68.a), odn. radnje UIt u slučaju sl. 68.b), troši dio $E'It$ na svladavanje jedne, odn. druge protu-EMS, i kao njegov ekvivalent dobiva se povećanje kemijske energije nabijanoga akumulatora, odn. mehanička radnja motora. Preostali dio $(E - E')It$, odn. $(U - E')It$ ukupne utrošene radnje gubi se na svladavanje otpora $R + R' + R''$ u slučaju sl. 68.a), odn. otpora $R' + R''$ u slučaju sl. 68.b).

77. Ovaj potonji slučaj, da se radnja električke struje troši na svladavanje otpora električkih vodiča, često predstavlja jedini utrošak električke radnje, i kao ekvivalent za taj utrošak javlja se već u B-11. spomenuta *strujna (Jouleova) toplina*.

Ako se strujna toplina kao oblik energije izrazi Ws ili J, dakle jedinicom i V-A-s-m- i V-A-s-cm-sustava, uz U , I , R i t izražene također u tom sustavu, vrijedit će za iznos Q' te topline relacija $A = Q'$ odnosno za A i Q' vrijedit će

obzirom na formule (124), (80'') i (80') ova tri međusobno ekvivalentna izraza (»Jouleov zakon«):

$$A = Q' = UI t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t \quad (126)$$

a snaga, odn. radnja ili toplina po jedinici vremena, dobile bi se dijeljenjem sa t .

Po A-55. treba u (126) gledati »jednadžbe između veličina«, ispravne u svakom koherentnom sustavu jedinica, gdje se toplina Q' izražava istom jedinicom kao i radnja A . Ako se naprotiv veličina Q' izrazi *kalorijom* (»gramkalorijom«; kratica: cal), dakle jedinicom običajnom u nauci o toplini i po definiciji jednakom množini topline potrebnoj da se masi 1 g vode povisi temperatura od 14,5° na 15,5° C, trebat će za Q' u cal uz U izraženo u V, I u A, te t u s upotrebiti *numeričke* relacije:

$$Q' = 0,239 UI t = 0,239 I^2 R t = 0,239 \frac{U^2}{R} t \quad (126')$$

jer, kako je iz nauke o toplini poznato, vrijede odnosi: 1 cal = 0,427 kg·m = 0,427·9,81 Ws = 4,18 Ws, odnosno obrnuto: 1 Ws = 0,239 cal.

Da izraz (125) doista predstavlja na jedinicu vremena preračunanu radnju električkih sila što se, uz pretpostavku nabijenih nosilaca određenih gibljivosti g_1 i g_2 , troši na svladavanje »sila poput trenja« kod gibanja tih nosilaca pod utjecajem polja $F = U/l$ u vodljivom prostoru preza q i duljine l između elektroda A i K na sl. 62., vidi se neposredno iz ovoga izvoda, u kome je radnja računana kao »sila × put«. Kraj ukupnoga naboja $ZnQ_0 \cdot ql$ pozitivnih i isto tolikog naboja negativnih nosilaca u promatranom vodljivom prostoru, polje F izvodit će po (10) u A-23. na skup pozitivnih nosilaca silu $ZnQ_0 \cdot ql \cdot F$ u smjeru svoga djelovanja, a na skup negativnih isto toliku silu u protivnom smjeru. Kako će se u vremenu dt skup pozitivnih nosilaca pomaknuti za element puta $g_1 F \cdot dt = v_1 \cdot dt$ u smjeru polja, a skup negativnih za element puta $g_2 F \cdot dt = v_2 \cdot dt$ u protivnom smjeru, ukupna po električkim silama izvršena radnja, preračunana na jedinicu vremena, bit će:

$$N = \frac{ZnQ_0 \cdot ql \cdot F \cdot (v_1 + v_2) \cdot dt}{dt}$$

t. j. za nju će, obzirom na relaciju $Fl = U$ i izraz (81) iz B-9. za I vrijediti formula $N = UI$, identična s formulom (125).

78. I Jouleov zakon (126) daje se transkribirati u »elementarni« oblik. Ako kroz element volumena s bazom dS i duljinom dl teče struja gustoće G uz napon dU između baza, za učin $N = I^2 R$ utrošen i u toplinu pretvoren u promatranom valjku može se očito staviti: $N = (G \cdot dS)^2 \cdot \rho \cdot dl / dS = \rho G^2 \cdot dS \cdot dl$, prema čemu za učin N_1 na *jedinicu obujma* (uzevši u obzir i Ohmov zakon u elementarnom obliku) izlazi:

$$N_1 = \rho G^2 = GF = \kappa F^2 \quad (127)$$

U V-A-s-m- odn. V-A-s-cm-sustavu N_1 bi po relacijama (127) izišlo u W/m³ odn. W/cm³. U cal·s⁻¹·cm⁻³ bi se N_1 uz G u A/cm², F u V/cm, ρ u Ω·cm, κ u S/cm računalo po »numeričkoj« relaciji:

$$N_1 = 0,239 \cdot \rho \cdot G^2 = 0,239 \cdot G \cdot F = 0,239 \cdot \kappa \cdot F^2$$

Tako bi se u elektrolitičkoj otopini vodljivosti $\kappa = 0,418$ S/cm protjecanoj strujom gustoće $G = 2$ A/cm² stvaralo sekundno 0,239·2²/0,418 ≈ 2,3 cal/cm³, i tekućina bi se, ako bi

imala specifičnu toplinu jednaku onoj vode i ako ne bi bilo odvoda topline, sekundno ugrijavała za 2,3 st. C. Praktički međutim, zbog nagloga povećavanja vodljivosti elektrolitičkih tekućina, ugrijavaње bi teklo čak naglije.

79. Dosljedno bi bilo, ostajući u V-A-s-m- ili u V-A-s-cm-sustavu upotrebljavati samo W kao jedinicu za N i samo Ws kao jedinicu za A i Q'. U elektrotehničkoj (i uopće u tehničkoj praksi) običajne su međutim, osim napomenutih, još i različite izvedene i druge jedinice za učin (snagu), radnju (rad) i toplinu. To su naročito:

a) za snagu N: $1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$; $1 \text{ »konjska snaga«} = 1 \text{ KS} = 75 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = 736 \text{ W} = 0,736 \text{ kW}$ (naprotiv: $1 \text{ »britanska konjska snaga«} = 1 \text{ HP} = 0,746 \text{ kW}$).

b) za radnju A: $1 \text{ »kilovatsat«} = 1 \text{ kWh} = 1000 \text{ Wh} = \text{radnja izvršena kod snage } 1 \text{ kW u } 1 \text{ h}$ (ili kod snage $0,2 \text{ kW}$ u 5 h , itd.); očito je: $1 \text{ kWh} = 1000 \cdot 3600 \text{ Ws} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws} = 3,6 \cdot 10^6 / 9,81 \text{ kg}\cdot\text{m}$ ($\approx 367000 \text{ kg}\cdot\text{m}$);

c) za množinu topline Q': $1 \text{ kilokalorija} = 1 \text{ kcal} = 1000 \text{ cal}$; 1 kWh vrijedi $0,239 \cdot 1000 \cdot 3600 \text{ cal} = 860000 \text{ cal} = 860 \text{ kcal}$.

80. Primjene Jouleove topline vrlo su mnogobrojne. Spomenimo samo: različite sprave za grijanje i kuhanje (električne peći, električka kuhala, električka glačala), zatim rastalne osigurače protiv prejakih struja, kod kojih se prikladna žica, na pr. od srebra, rastali, prekidajući krug struje kad struja nadmaši određenu jakost.

Kako je po (126') toplina razvijena sekundno u jedinici duljine žice određenoga materijala i određenoga prereza proporcionalna ne samo kvadratu jakosti struje, nego i otporu jedinice duljine žice, moguće je kombinirajući u nekom strujnom krugu u seriju vodiče manjega specifičkoga otpora ili većega prereza s vodičima većega specifičkoga otpora ili manjega prereza, postići da se kod prikladne struje oni prvi praktički gotovo ništa ne ugriju, dok ovi drugi postanu vrlo vrući ili se čak užare. Tako na pr. bakreni dovodi električkim kuhalima ili gladilima ostaju uglavnom hladni, dok se vodiči u grijaćim tijelima tih naprava vrlo ugriju, odn. užare, ako su uz dovoljno malen prerez i dovoljno velikog specifičkog otpora. Prema tomu će se za grijaća tijela električkih toplinskih naprava upotrebljavati materijal velikoga iznosa ρ (nikelin, kromnikalj itd.), i prereza tolikoga da sigurno podnese predviđenu struju.

81. No najvažnija primjena strujne topline leži na području električke rasvjetne tehnike. U električkim sijalicama ili žaruljama, koje su prvobitno imale ugljene »niti«, a danas se grade s kovnim volframovim nitima, lako je proizvesti strujnom toplinom tako jaka usijavanja niti da sijalica emitira više ili manje intenzivnu svjetlost.

Kako se vidi, u sijalicama se struja zapravo ne iskorišćuje neposredno za proizvodnje svjetlosti, nego ona tek ugrijava nit sijalice do temperature kod kojih nit već dobro svijetli. Pri tomu energija emitiranih vidljivih zraka ostaje samo dio ukupne u obliku zrakâ emitirane energije (većinom bivaju emitirane nevidljive toplinske infracrvene zrake, a u neznatnoj mjeri emitiraju se i ultraljubičaste);

pogotovo pak je u vidljive zrake pretvorena energija samo maleni dio ukupne u strujnu toplinu pretvorene električke radnje (jer se proizvedena toplina gubi i odvodom).

Kako jakost svjetlosti usijanih tjelesa vanredno naglo raste s temperaturom usijavanja, moglo je o barem donekle racionalnoj električkoj rasvjeti sijalicama, t. j. o barem donekle povoljnom odnosu $\xi = \Phi/N$ između emitirane količine svjetlosti Φ [za koju ćemo odmah vidjeti, da se redovito izražava u *lumenima* (lm)] i potrošenoga električkog učina N [u W] biti govora istom kad je uspjelo proizvesti niti koje su (u vakuumu ili u kojem kemijski neaktivnom plinu) mogle izdržati stotine i tisuće sati kod vrlo visokih temperatura usijavanja. Osim kod sve viših temperatura ujedno se spektralni sastav emitirane svjetlosti, u kojoj kod slabijih usijavanja jako prevladavaju crvene zrake, sve više poboljšava, približavajući se u sve većoj mjeri sastavu bijele »danje« svjetlosti.

Stare sijalice imale su ugljenu nit u vakuumu, i mogle su izdržati prosječno 500 do 800 h pogona kod temperatura niti oko 1750 °C. Svjetlost im je još bila crvenkasto-žute nijanse. Više temperature kod sijalica s ugljenom niti nisu prikladne, manje zbog pogibelji da se nit rastali (talište ugljena leži vanredno visoko, znatno iznad 4000 °C), nego zbog nagloga rasprašivanja prejako usijanih ugljenih niti: čestice ugljena sjedaju na unutarnju površinu staklenoga balona sijalice i čine ovu postepeno sve manje prozirnom za svjetlost, a i nit takvih sijalica nakon nekoga vremena »pregori«.

U sijalicama s niti od volframa, kovine s vrlo visokim talištem (oko 3380 °C), pogonska temperatura niti dala se racionalno povisiti, uz prosječan život oko 1000 h kod sijalica za svrhe obične rasvjete, na kojih 2100 °C do 2500 °C, i još više. U donjem dijelu navedenoga temperaturnoga područja radile su starije sijalice s istegnutom volframovom niti, a rade danas one s tankom spiraliziranom volframovom niti u *vakuumu*, dok one s debljim spiraliziranim (ili dvaput spiraliziranim) nitima u kemijski neaktivnom (inertnom) *plinu*, na pr. dušiku, ili argonu s dušikom, ili argonu, itd., podnose više temperature. Svjetlost sijalica s volframovom niti već je bliža bijeloj svjetlosti, pogotovo kod »plinom punjenih« sijalica s višim nitnim temperaturama. Hladni volfram ima specifički otpor oko 0,05 $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$, no kod pogonskih temperatura niti taj naraste na oko 0,70 $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ kod sijalica s vakuumom i čak na oko 0,85 $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ kod onih punjenih plinom.

82. Da bismo i kvantitativno razmotrili u B-81. spomenuti omjer $\xi = \Phi/N$, i ostale odnose kod rasvjete sijalicama, uvesti ćemo neke pojmove iz nauke o mjerenju svjetlosti ili fotometrije.

Rasvjetna vrijednost nekoga izvora svjetlosti ne da se jednostavno izraziti jedinicama fizikalno zatvorenih sustava. Tako bi bilo nepotpuno karakterizirati jakost nekoga izvora svjetlosti navodeći, na pr. u elektrotehničkom sustavu u W, energiju radijacija sekundno emitiranih tim izvorom. Kod rasvjete naime dolazi u obzir od ukupno emitiranih zraka samo usko spektralno područje vidljivih zraka,

a i kod tih dolazi u obzir vrlo različita osjetljivost oka za radijacije različitih boja (vrijednosti relativnih osjetljivosti čovječjega oka, počinjući s malim iznosima na crvenonarančastom kraju vidljivoga spektra postizavaju izrazit maksimum u žuto-zelenom području spektra, točnije: kod valne duljine zraka $0,556 \mu$, nakon kojega naglo opadaju kod prelaza u plavo-ljubičasti kraj vidljivoga spektra). Prema tomu jedinica za jakost nekoga izvora može biti samo »psihološka«. I doista se u fotometričkoj praksi za jedinicu jakosti svjetlosti odabiru jakosti svjetlosti emitirane od samovoljno odabranih izvora svjetlosti, a stvar je »fotometrije« kako će se izabranim izvorom svjetlosti uspoređivati ispitivani izvori, što očito mora biti lakše izvedivo ako je svjetlost ispitivanoga izvora približno sličnoga spektralnoga sastava kao i ona jedinice izvora svjetlosti, dok kod dviju svjetlosti vrlo različitih spektralnih sastava uspoređivanje očito mora biti teže.

83. Između mnogih predlaganih jedinica jakosti svjetlosti do pred nekoliko godina upotrebljavale su se u tehničkoj praksi: a) »Hefnerova svijeća« (HS), b) »internacionalna svijeća« (IS); osim toga c) bilo je predviđeno da se s početkom g. 1948. općenito uvede »nova svijeća« ili »kandela« (cd).

Kao 1 HS uzimana je jakost svjetlosti, kojom je u horizontalnom smjeru svijetlila uz normirane prilike »Hefnerova normalna svjetiljka« (gorivo: amilacetat $C_7H_{14}O_2$, promjer stijenja: 8 mm, visina plamena: 40 mm). Slično se 10 IS dalo realizirati normiranom svjetiljkom s pentanom C_5H_{12} . Za 1 cd predviđeno je da njom izražena svjetlost okomito emitirana sa 1 cm^2 površine »crnoga tijela« ili »integralnoga radiatora«, usijanoga na temperaturu skrućivanja platine (1774°C), bude baš 60 cd.

Grubo se može uzimati 1 HS za 10% manjom i 1 IS za 2% većom od 1 cd; točnije se odnosi ne mogu navesti zbog različitih spektralnih sastava svjetlosti pojedinih izvora kojima se jedinice 1 HS, 1 IS i 1 cd definiralo, a i kod fotometriiranja tehničkih izvora svjetlosti smetaju razne boje svjetlosti sijalica s vakuumom, onih punjenih plinom, fluorescentnih svjetiljki itd.

84. Pored pojma jakosti izvora svjetlosti J mnogo se upotrebljavaju u rasvjetnoj tehnici pojmovi jakosti rasvjete L i toka svjetlosti Φ .

Neka po sl. 96. bude $d\psi$ u m^2 izraženi plošni element kugle K_1 polumjera 1 m sa središtem O, t. j. neka $d\psi$ izražava »prostorni kut« pod kojim bi se iz O vidio elementu $d\psi$ korespondentni čunjeviti dio prostora. Neka se dalje u O nalazi izvor svjetlosti koji svijetli jakošću J u smjeru prema $d\psi$.

Po definiciji se onda *jakost rasvjete* L na mjestu plošnog elementa, dakle u daljini 1 m od izvora, uzima jednaka J . A pod *tokom svjetlosti* $d\Phi$ kroz $d\psi$ razumijeva se umnožak $J \cdot d\psi$, tako da ukupni tok izvora jakosti J u sav prostor, dakle u puni prostorni kut 4π , izlazi jednak integralu uzetom preko cijele plohe kugle K_1 :

$$\Phi = \int d\Phi = \oint J \cdot d\psi \quad (128)$$

Međutim, ako ne dolazi do apsorpcije kod širenja svjetlosti, treba iz energetičkih razloga uzimati, da jakost rasvjete L u jednu ruku varira obrnuto raz-

mjerno kvadratu daljine od izvora, a u drugu ruku da kod kosoga upadanja svjetlosti na rasvjetljenu plohu varira razmjerno kosinusu kuta upadanja. Prema tomu elementu $d\psi$ na kugli K_1 korespondentni element površine dS u sl. 96., udaljen r m od izvora jakosti J zamišljena u O , te tako orijentiran da ga svjetlost zgađa pod kutom upadanja α , bit će rasvjetljen jakošću $L = J \cdot \cos\alpha/r^2$. Naprotiv treba tok svjetlosti kroz dS smatrati jednakim toku svjetlosti kroz $d\psi = dS \cdot \cos\alpha/r^2$.

Tako se posve općenito može za elementarni tok $d\Phi$ staviti:

$$d\Phi = J \cdot d\psi = J \cdot dS \cdot \cos\alpha/r^2 = L \cdot dS \quad (129)$$

te prema tomu za ukupni tok Φ kroz ma kakvu zatvorenu plohu S koja obuhvaća promatrani izvor svjetlosti, ako je dS plošni element plohe S , mora vrijediti:

$$\Phi = \oint L \cdot dS = \oint J \cdot d\psi \quad (130)$$

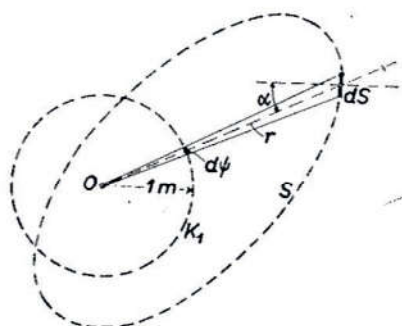
dakle specijalno kod izvora koji svijetli istom jakošću J u svim smjerovima prostora:

$$\Phi = J \cdot \oint d\psi = 4\pi J \quad (130')$$

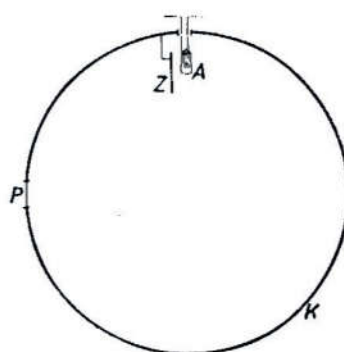
85. Iz relacija (128) do (130') lako je razabrati različite odnose između J , Φ i L .

Ako se jedinici kandela (cd) za J pridijele jedinica *lumen* (lm) za Φ i jedinica *luks* (lx) za L , mora po (129) vrijediti na pr. relacija: $1 \text{ lm} = 1 \text{ lx} \cdot 1 \text{ m}^2$, prema čemu se rasvjeta neke plohe može definirati i *tokom svjetlosti na jedinicu površine* te plohe.

Nadalje po (130') reći za neki izvor svjetlosti, da svijetli istom jakošću J cd u svim smjerovima prostora (ili da mu je J cd aritmetička sredina jakosti u poje-



Sl. 96.



Sl. 97.

dinim smjerovima, t. zv. srednja sferna jakost) izlazi na isto što i reći, da taj izvor emitira tok svjetlosti $4\pi J$ lm. Prema tomu se ukupni svjetlosni učin nekoga izvora danas karakterizira tokom toga izvora (4π -kratnikom prvobitno u tu svrhu obično upotrebljavane srednje sferne jakosti); dakako za potanju karakterizaciju u O pretpostavljenoga izvora različite jakosti $J = d\Phi/d\psi$ u različitim smjerovima

ipak treba naznačiti iznose J za sve smjerove, na pr. predočujući ih plohom oko O , kojoj točke M svojim udaljenostima OM od O predstavljaju iznose J za pripadne smjerove OM .

Primjer: Sijalica s volframovom niti u vakuumu neka uz napon 220 V i struju 0,182 A, dakle uz potrošak električkoga učina 40 W, svijetli srednjom sfernom jakošću $J = 35$ cd, te ima specifički potrošak električkoga učina $40/35 = 1,14$ W/cd. Ona daje tok svjetlosti $\Phi = 4\pi \cdot 35 = 440$ lm (= 44 »dekalumena«), t. j. ona svijetli sa $\xi = 440/40 = 11$ lm/W. Kad bi sijalica visjela 3 m iznad poda, i kad bi vertikalno dolje svijetlila jakošću $J_v = 45$ cd, rasvjeta poda baš ispod sijalice bila bi $L = 45/3^2 = 5$ lx.

Rasvjeta neke prostorije ili nekoga radnog mjesta dovoljna je, ako su određena mjesta prostorije ili radno mjesto obasjani dovoljnim iznosom lx. Na pr. za čitanje je udobno oko 50 lx, dok se za fini i sitni rad na pr. u crtaonama, radionicama fine mehanike itd. traži recimo 400 i više lx. Po danu sunčana rasvjeta je silno jaka (ljeti o podne na pr. reda veličine 10^5 lx), ali i silno varira. Kod punog mjeseca rasvjeta znade biti na pr. 0,25 lx.

86. Mjeriti veličine J , L i Φ moguće je vrlo različitim metodama, koje međutim spadaju u fiziku. Od pripadnih mjernih naprava spomenimo na pr. primitivni fotometar po Bunsenu, kod kojega se ispitivanim izvorom jakosti J_x i normalnim jakosti J (recimo sijalicom baždarenom u cd) rasvjetljuje s obih strana iz udaljenosti r_x i r na pr. list poluprozirnoga papira s masnom (stearinskom ili sl.) mrljom, pa se iz iščezavanja mrlje zaključuje na jednakost rasvjetâ J_x/r_x^2 i J/r^2 , a odavde i na mjereni iznos $J_x = J(r_x/r)^2$.

Mnogo savršeniji fotometar po istom principu jednakih rasvjeta jest onaj od Lummera i Brodhuna s posebnom kombinacijom dviju pravokutnih tijesno prislonjenih prizmi, t. zv. Lummer-Brodhunovom kockom.

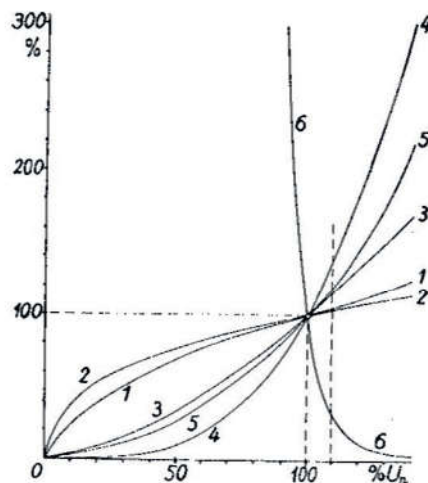
Za mjerenja iznosa L , a posredno i iznosa J , mnogo se upotrebljavaju i fotoelementi (B-5); struje pokazane galvanometrom mogu se smatrati razmjernima jakosti rasvjete kojoj je izložena osjetljiva površina fotoelementa. No kod točnijih mjerenja treba pripaziti da odabrani fotoelement, po potrebi nadopunjen prikladnim optičkim filterom, pokazuje spektralnu osjetljivost sličnu onoj čovječjega oka.

Neposredna mjerenja ukupnoga toka svjetlosti Φ , odn. srednje sferne jakosti $\Phi/4\pi$, moguća su t. zv. Ulbrichtovom kuglom. Po sl. 97. to je velika šuplja kugla K , s nutarnjom površinom obloženu slojem bijele boje, koja difuzno reflektira sve zrake svjetlosti. Ako u unutarosti kugle svijetli sijalica A , rasvjeta L prozorčića P , zaštićenoga malenim zaslonom Z od neposredne svjetlosti sijalice A i prema tomu rasvijetljenoga samo zrakama reflektiranim s unutarne površine kugle, bit će, kako teorija pokazuje, razmjerna ukupnom toku svjetlosti Φ sijalice. Ako se dakle pod P postavi fotoelement ili koji drugi fotometrički uređaj, bit će lako Φ izmjeriti.

87. S gledišta ekonomije potroška učina bio bi povoljniji pogon sijalica kod što većih napona i struja, kod kojih se nit ugrijava na višu temperaturu, pa sijalica prema tomu daje više lm/W. No povišenjem temperature niti iznad određenih granica naglo se skraćuje trajanje ili život sijalice. Tako odnosi pogonskoga napona, struje, učina itd. prema temperaturi niti, trajanju itd. sijalica ispadaju uvijek

kompromisno: s nominalnim (predviđenim) iznosima tako odabranima da sijalice dajući što više lm/W traje još dovoljno mnogo h (sati).

Da se to i kvantitativno razabere, dosta je pogledati sl. 98., u kojoj su krivuljama 1 do 6 predloženi, u postocima pripadnih nominalnih iznosa, struja (1), otpor (2), učin (3), ukupni tok svjetlosti (4), specifički tok svjetlosti ili tok svjetlosti po jedinici električkoga učina (5) i prosječni život sijalice (6) u ovisnosti od napona sijalice, i samoga izraženog u postocima nominalnoga iznosa U_n . Lako se vidi, po toku krivulja 5 i 6, da i kod maloga povišenja napona iznad nominalnoga iznosa doduše jako poraste tok svjetlosti po jedinici električkoga učina, ali se istodobno jako smanji prosječni život sijalice. Ako bi se na pr. kod sijalice iz B-85., koja je kod nominalnoga napona 220 V, struje 0,182 A, učina 40 W, otpora 1210 Ω , dajući ukupno 440 lm svijetlila sa 11 lm/W , moglo recimo računati na prosječno 1000 h života, povišenjem napona za samo 10%, dakle na 110% nominalnoga iznosa (242 V), već bi se po sl. 98., uz struju povećanu na 105,5% nominalnoga iznosa (0,192 A), učin na 116%, (46,4 W), otpor na 104,1% (1260 Ω), ukupni tok svjetlosti na 137% (600 lm), i specifički tok svjetlosti na 118% (13,0 lm/W), prosječni život sijalice skratio na samo 30% (300 h).



Sl. 98.

Kod prosječno 500 do 800 h života sijalice s ugljenom niti davale su oko 3 do 5 lm/W , dok kod 1000 h prosječnoga trajanja sijalice s volframovom niti u vakuumu daju 7 do 11 lm/W , a one punjene plinom 7 do 25 lm/W .

Kod sijalica određenih da svijetle samo na kratke vremenske razmake, ali što intenzivnije, dopuštaju se jako povišeni pogonski naponi i znatno više temperature niti nego normalno. Tako sijalice za fotografska snimanja, radeći kod temperatura niti oko 3200 °C, daju oko 32 lm/W i više, no pregore već nakon prosječno nekoliko desetaka sati pogona.

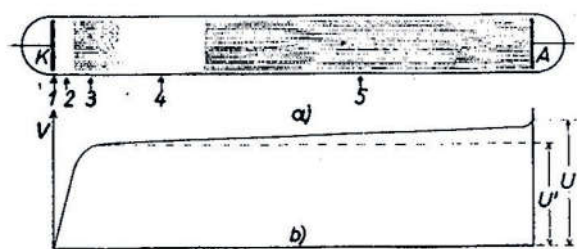
88. Spomenimo još ukratko i ostale električke izvore svjetlosti. U bitnom se kod tih izvora iskorišćuju pojavi svjetlosti kod tinjavih i lučnih izbijanja.

Na principu svijetljenja razrijeđenih plinova kod tinjavih izbijanja rade poznate male neonske »tinjalice« kao i »svijetleće cijevi«, koje se uzimaju obično dugačke i tanke. Izvedene na pr. u obliku reklamnih slova ili figura one svijetle u različitim bojama, već prema plinu koji sadrže. Ma da se i kod tinjalica i kod svijetlećih cijevi radi o strujama iz područja »tinjavih izbijanja« u plinovima (sl. 64.), ipak između njih postoji principna razlika.

Da bismo tu razliku bolje uočili, uzmimo u obzir da se po sl. 99.a) u prostoru izbijanja između katode K i anode A cijevi s vrlo razrijeđenim plinom, na pr. uzduhom, opažaju normalno izvjesna karakteristična područja. Tik uz katodu opaža se tanki svijetli sloj 1, t. zv. katodna kožica; dalje se nadovezuju: tamni prostor

2, t. zv. prvi ili Hittorfov (Crookesov) tamni prostor; pa (s katodne strane jasno, a s anodne nejasno omeđeni) svijetli sloj 3, t. zv. negativna tinjava svjetlost; onda još jedan tamni prostor 4, zvan drugi ili Faradayev tamni prostor; te konačno dalje sve do anode, već prema raspoloživom preostalom prostoru, dulji ili kraći svijetli stup 5 (jednolik ili prugast), t. zv. pozitivna ili anodna svjetlost.

Bitna su za podržavanje izbijanja područja 1 do 3; po krivulji u sl. 99.b), koja predočuje mijenjanje potencijala V u prostoru između K i A, to su ujedno



Sl. 99.

i područja najaglijih mijenjanja potencijala, dakle i najjačih električkih polja, i u njima se normalno troši posve određeni napon U' , nazvan »katodni pad« napona. U ne predugim cijevima katodni pad U' , određen materijalom elektroda i vrstom plina, a tek malo ovisan o gustoći plina, predstavlja obično glavni dio ukupnoga

napona cijevi U , jer u području pozitivne svjetlosti 5 potencijal varira tek polagano (osim tik uz anodu, gdje se primjećuje mali »anodni pad« napona); kod sve dužih cijevi produžuje se samo područje pozitivne svjetlosti, na koju se onda troše i razmjerno veći naponi, tako da iznos U sve više nadvisuje stalni iznos U' .

89. U neonskim tinjalicama za istosmjernu struju uz veliku pločastu katodu i njoj blizu smještenu sitnu anodu dolazi do izražaja samo negativna tinjava svjetlost, koja okružuje cijelu katodu, a pozitivne svjetlosti praktički nema. Za katodu se uzima željezo, po potrebi s prevlakom kalija, a za plin neon, jer ta kombinacija zahtijeva samo relativno malene katodne padove, pa se neonske tinjalice, koje uostalom samo slabašno svijetle i služe većinom tek kao signalne svjetiljke, mogu tjerati neposredno iz rasvjetnih mreža. Kod izmjenične struje obje su elektrode na pr. jednake spirale, pa već prema polaritetu napona svijetli čas jedna čas druga.

Naprotiv kod svijetlećih cijevi, kraj velike duljine tih cijevi i prikladnoga oblika i razmještaja elektroda, svijetli uglavnom samo pozitivna svjetlost (uz plin neon narančasta, uz argon sa Hg-parama plava itd.). Te cijevi trebaju na pr. 1000 V i više, pa se naponi izmjeničnih rasvjetnih mreža, iz kojih se ovakve cijevi obično tjeraju, moraju transformacijom povišiti.

U novije vrijeme mnogo se širi, osobito za specijalne svrhe (rasvjeta ulica, cesta, tvornica itd.), rasvjeta svjetiljkama u kojima svijetle pare Hg ili Na. Svjetiljke s Hg-parama daju ne baš ugodnu zeleno-plavu svjetlost samo određenih spektralnih linija, dok svjetiljke s parama Na daju praktički jednoboju žutu svjetlost. No čak uz proračunane gubitke u pripadnom priboru (induktancijama) prve daju 40 do 46, a druge čak 50 do 60 lm/W. Boja svjetlosti Hg-svjetiljki može se uostalom donekle popraviti tim, da se prevuče nutarnja površina stakle-

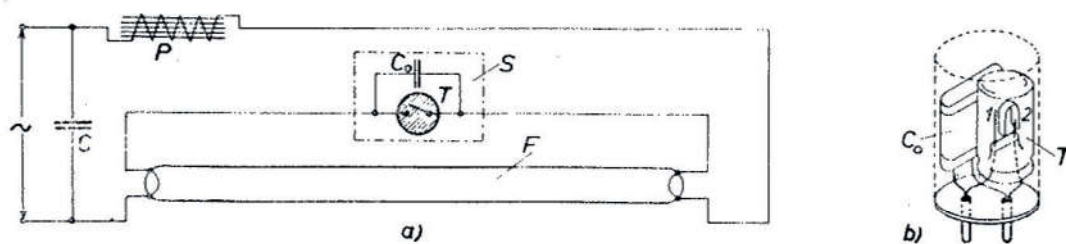
noga balona svjetiljke slojem prikladno odabranih svjetlucahivih tvari, koje jedan dio energije nevidljivih ultraljubičastih zraka Hg-svjetiljke pretvaraju u svjetlost.

90. U suvremenim luminescentnim (fluorescentnim) cijevima, svjetilkama sa živinim parama i svjetlucahivim masama, dobiva se svjetlost slična danjoj (ili koje druge željene nijanse) time da se živine pare uzbude da relativno slabo emitiraju vlastite linije vidljivog dijela spektra i relativno jako ultraviolettne linije, naročito nevidljivu svjetlost valne duljine $253,7 \text{ m}\mu$ ($2537 \text{ \AA}$), koja uglavnom uzbuđuje svjetlucahu masu. Tako od svjetlucahe mase dolazi kudikamo najveći dio svjetlosti.

Konkretno se u slučaju cijevne svjetiljke koja zajedno s pridodanom induktancijom troši 40 W može uzeti da se oko 1 W pretvara neposredno u vidljivu emisiju i oko 24 W na ultraviolettну emisiju živinih para. Od spomenuta 24 W pretvara se oko 8 W u vidljivu emisiju svjetlucahe mase. Tako se ukupno u vidljivu svjetlost pretvara kojih 9 W , a ostatak od kojih 31 W troši se na pokrivanje gubitaka (grijanje elektroda i druga razvijanja topline u cijevi, induktanciji itd.).

Teorijski bi se, kod stopostotne pretvorbe električne energije u vidljivu svjetlost, kod emitiranja jednoboje žuto-zelene svjetlosti, za koju je oko najosjetljivije, moglo očekivati kojih 620 lm/W , a kod emitiranja bijele svjetlosti najrazličitijih boja, prema kojima je oko različito osjetljivo, kojih 290 lm/W . Stvarno današnje fluorescentne svjetiljke daju do 45 i više lm/W , nadvisujući time tri i više puta sijalice. Neprilika je samo s novim fluorescentnim svjetilkama da, kao duge ravne ili u krug svinute cijevi, trebaju posebnu montažu, te da zahtijevaju dodatne naprave: serijski uključenu induktanciju: *prigušnicu* (balast), i pomoćnu paljbenu sklopku: *starter* (na pr. »tinjavi starter«).

91. Tinjavi starteri po sl. 100.b) su razrijeđenim neonom punjeni baloni s dvije elektrode, od kojih je jedna bimetalna (vrpca složena iz dva tanka sloja kovina s vrlo različitim toplinskim rastezanjima, koja se grijana izvina na stranu kovine s manjim rastezanjem). Prigušnica P i starter S priključuje se, u slučaju jedne



Sl. 100.

fluorescentne cijevi F, u spoju po sl. 100.a). Nakon ukapčanja izmjeničnog napona najprije se uspostavi tinjavo izbijanje startera S. Toplinom stvaranom pri tom izbijanju izvija se onda bimetalna elektroda startera S dok ne dođe do kontakta obih elektroda startera. Time pak nestane tinjavog izbijanja u starteru i poraste struja kroz prigušnicu P i kroz niti (s oksidima Ba, Sr itd., radi što lakše emisije elektrona) obih katoda cijevi F, a zbog ovoga potonjega niti se »strujom pregrijavanja« jako užare. Time se pripravi paljba cijevi F. A do te paljbe dolazi kad se ohla-

divanjem kratko spojenog startera S njegova bimetalna elektroda odmakne od suprotne elektrode, te time proizvede nagli prekid struje prigušnice P. Ovim prekidom proizvedeni samoinduktivni prenapon izazove naime, konačno, i paljbu same cijevi F, a da ne dođe do ponovne paljbe (cijevi F paralelnoga) startera S, jer napon gorenja cijevi F leži ispod naponskog područja u kome se struja startera održava. Prigušnica P služi i kao stabilizator pri variranjima napona mreže. Ona je u strujnom krugu sa P i F potrebna zbog »silazne« karakteristike potrošača F samog za sebe (uspor. donji silazni dio odsjeka P_1P_2 krivulje na sl. 64.). Kondenzatorom C_0 (kapaciteta na pr. 8000 pF) regulira se vremenski tok prekidanja struje starterom S, i njim se udešava prikladni paljbeni napon cijevi F.

Obično se dodaje i kondenzator C do nekoliko mikrofara (za poboljšanje »faktora snage« $\cos \varphi$, o kome će biti govora kod izmjeničnih struja); bez tog kondenzatora, uz jako samoinduktivnu prigušnicu P, strujni krug sa P i F imao bi loš (malen) $\cos \varphi$.

Osim za rasvjetu upotrebljavaju se cijevi slične cijevima F iz sl. 100.a), no bez fluorescentnog sloja na nutarnjoj stijenci cijevi, te sa stijenama od specijalnog stakla koje propušta i kratkovalni ultravioletni dio spektra, za svrhe sterilizacije (baktericidne ultraviolettne svjetiljke).

91. Najstarija električka rasvjeta, danas ograničena samo na specijalne svrhe, bila je ona sa svijetlim lukom, koji se stvara između dvije ugljene elektrode kod dovoljno visokoga napona (barem okruglo 40 V). Ugljeni se na čas prislone jedan na drugi i zatim malko razmaknu; zbog mirnijeg pogona doda se u seriju prikladan otpor.

No osim između ugljenâ lučna izbijanja sa svijetlećim parama i plinovima mogu se proizvesti i između željeznih, bakrenih i drugih kovnih elektroda; tehničku važnost imaju naročito lukovi sa živom kao katodom.

Po B-13. i sl. 64. obilježena su lučna izbijanja relativno jakim strujama i silaznom karakteristikom s razmjerno niskim pogonskim naponima; pri tomu katoda vrlo obilno emitira elektrone, koji izlaze uz vrlo velike gustoće struje iz vruće mrlje na katodi. Prema tomu je kod električkih lukova i pad napona tik uz katodu relativno malen (a nisu veliki ni pad napona u luku i onaj tik uz anodu).

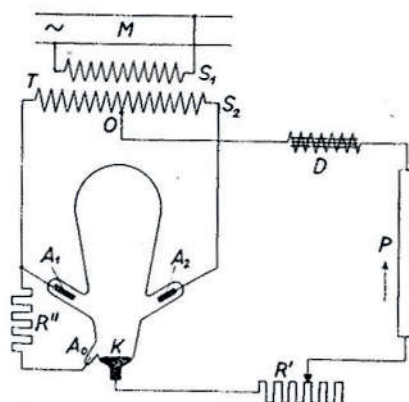
92. Kod ugljenoga luka katodna mrlja ostaje uglavnom nepomična, dok mrlja luka sa živinim parama u prostoru bez uzduha (sa živinom katodom i na pr. grafitnom anodom) neprestano mijenja mjesto na površini žive. Najvrući dio u luku s običnim ugljenima i uzduhu normalne gustoće jest pozitivni mali krater, koji se u toku pogona stvori na anodi; njegova se temperatura kreće oko 3900 °C, a njegova »svjetlina«, definirana brojem cd po cm^2 emisije površine, t. zv. *stilbima* (sb), doseže goleme iznose, na pr. 18000 sb, zbog čega se ovakvi lukovi upotrebljavaju za projekcione svrhe, reflektore i sl. Dodajući elektrodama prikladne primjese postizava se i znatno pojačano svijetljenje samoga luka, a daje se još pojačati i svjetlina kratera.

I zbog toplinskih učinaka upotrebljavaju se lukovi između ugljenih ili kovnih elektroda (električke lučne peći; električka lučna svarivanja).

93. Lučna izbijanja sa Hg-parama u vakuumu vrlo su bogata emisijama ultraljubičastih zraka. Da bi se te zrake mogle upotrebiti, na pr. za obasjavanje u medicinske svrhe i sl., posuda za izbijanje izvodi se iz kremenoga stakla, koje dobro propušta ultraljubičaste zrake (kremene svjetiljke sa živom).

Za običnu rasvjetu upotrebljavane svjetiljke sa živinim parama također se mnogo izvode za takve tlakove i takve temperature para, odn. tako velike gustoće struje, kakve već odgovaraju lučnim izbijanjima; naročito velike jakosti izvora svjetlosti i velike svjetline dobivaju se kod novijih »visokotlačnih« svjetiljki sa Hg-parama; ove već daju kontinuiran spektar vrlo bogat svjetlošću iz plavog dijela spektra.

94. Osim što rade kao izvori svjetlosti, naprave sa lukom od živinih para, koje uz jednu elektrodu od žive imaju drugu na pr. od grafita, pokazuju i svojstvo da propuštaju struju samo u jednom smjeru, i to uz živu kao katodu. Kod jednom postignute paljbe (izvedene na pr. tim da se na čas uspostavi i odmah prekine kontakt žive i suprotne elektrode) stvorenom katodnom mrljom na površini žive održava se dalje lučno izbijanje. Naprotiv uz grafitnu ili sličnu elektrodu kao katodu luk se ne stvara. Prema tomu opisana naprava pokazuje svojstva »ventila«, propustljivog samo za struje određenoga smjera, pa može u prikladnoj izvedbi, na pr. poput one u sl. 101., poslužiti kao ispravljač ili usmjerivač izmjeničnih struja u istosmjernu (živini ispravljači).



Sl. 101.

Treba li iz mreže M izmjenične struje snabdijevati istosmjernom strujom potrošač P (t. j. tjerati istosmjerni motor ili projekcionu lučnicu, nabijati akumulatorsku bateriju itd.), priključit će se po sl. 101. na tu mrežu primarni namotaj S_1 transformatora T, a na njegov sekundarni namotaj S_2 , koji neka ima u sredini odvojak O, priključit će se, po shemi u slici, živin ispravljač sa živinom katodom K i dvije anode A_1 i A_2 . Već prema tomu koja od elektroda A_1 i A_2 bude u određenom času pozitivna, zatvarat će se živin luk uz K kao katodu prema A_1 odn. A_2 , no struja kroz potrošač P teći će u svakom slučaju u smjeru izvučene strijelice. A_0 je mala pomoćna anoda, spojena s A_1 preko zaštitnoga otpora R'' ; njom se (nagibanjem posude ispravljača) uvodi paljba; R' je otpor za reguliranje, a D svitak za »izgladivanje« pulzacija ispravljene struje.

Također ispravljački mora djelovati i visoko evakuirana cijev s dvije elektrode (dioda): struja očito kroz cijev u sl. 65. može prolaziti samo kad je užarena nit katoda, a hladna elektroda anoda. Ima i plinom punjenih ispravljačkih cijevi s užarenom jednom elektrodom. A ima i metalnih suhih ispravljača, koji se osnivaju na razlikama u propustljivosti »zapornih slojeva« između kovina i poluvodiča (B-5.) za struje u jednom i drugom smislu. Uostalom o ispravljačima bit će još prilika govoriti.

95. Dok se kod električkih peći, kuhala itd., kod sijalica, lučnica itd. stvaranje strujne topline može smatrati neposredno ili posredno korisnim, i dok se kod svladavanja protu-EMS motora, nabijanih akumulatora itd. električki učin

također korisno troši na stvaranje mehaničke radnje, kemijske energije itd., jedan dio ukupnoga učina N danoga strujnog kruga uvijek će se trošiti neželjeno, dakle gubiti, na svladavanje unutarnjega otpora izvora struje, otpora priključenih motora, nabijanih akumulatora itd., a kod većih ili manjih udaljenosti potrošača od izvora također i na svladavanje otpora dovodnih žica, odn. električkih vodova između izvora i potrošača. Navedeni gubici znače neugodnost, jer ne samo da se trati energija, nego nastala toplina može biti i inače vrlo neprilična, na pr. tim što se tom toplinom ugrijavaju strojevi i ograničuje njihova opteretivost itd.

Kako je već u B-34. rečeno, nastojat će se u praksi neželjeni gubici napona, koji uvjetuju i gubitke učina, svesti na što manju mjeru. Mi ćemo ovdje specijalno pobliže razmotriti gubitke u vodovima kod električkih *prenosa energije* na daljinu i kod toga pokazati, da su praktički prihvatljivi prenosi većih učina na veće daljine, koji spadaju u tehniku *jake struje*, mogući jedino upotrebom vrlo visokih napona. Tehnika jake struje baš je zato i napredovala u tolikoj mjeri, jer je električnost uopće najprikladnije sredstvo za racionalno (i vanredno brzo) prenošenje energije, i njezinu razdiobu na povoljne iznose u povoljnim mjestima, te je bez takmaca kod prenosa većih učina na velike daljine.

Racionalnim se može smatrati prenos učina na daljinu, ako se tek umjereno malen dio učina izgubi kod prenosa. Neka treba izvršiti prenos ukupno raspoloživoga učina N vata na daljinu l' metara, a da gubitak u vodu iznosi tek malenu frakciju x iznosa N (na pr. desetinu, 10%, u kojem slučaju bi se stavilo: $x=0,1$). To znači: dopušteno je da se sekundno u dovodnim žicama pretvori u Joulcovu toplinu (ako je to jedini izvor gubitaka) učin $x \cdot N = x \cdot UI$, gdje je U napon u V na početku voda, a I u A struja voda. Ako je R ukupni otpor voda, u Ω , kojim se prenos obavlja, uz isti prerez q i isti specifički otpor ρ obih vodiča voda očito će se, kraj ukupne duljine obih vodiča $l = 2l'$ moći staviti:

$$x \cdot UI = I^2 \rho \cdot \frac{2l'}{q} = \frac{N}{U} \cdot I \cdot \rho \frac{2l'}{q}$$

odnosno (nakon kraćenja sa I):

$$q = \frac{2N\rho l'}{xU^2} \quad (131)$$

96. Kako se vidi, potrebni prerez q vodiča obrnuto je razmjeran s kvadratom napona U . To znači, da na pr. uz tri puta veći napon U na početku voda treba za vod 9 puta manje bakra i sam vod onda stoji mnogo manje. A lako je iz (131) izvesti neizbježnost visokih napona kod prenosa velikih učina na velike daljine. Prema (131), iako sve viši naponi donose sa sobom izolacione i druge teškoće, veći prenosi bez njih praktički su neizvedivi, jer već kod malo jačih učina i većih daljina formula (131) kod malih napona vodi na tako goleme prereze q vodiča, da takvi vodiči praktički otpadaju iz kombinacije. Na primjer: uz $U = 100000$ V (100 kV), $x = 0,1$, $l' = 300000$ m (300 km), moglo bi se po (131)

bakrenim vodom ($\rho \approx 0,02 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$) prenijeti $N=10^7 \text{ W}$ (10000 kW, 10 MW) već uz prerez vodiča $q=120 \text{ mm}^2$, što bi praktički bilo posve izvedivo; no kad bi se htjelo raditi sa četiri puta manjim naponom $U=25000 \text{ V}$, prerez vodiča narastao bi na 16-struko, t. j. na $19,2 \text{ cm}^2$! Dakle ni sa 25000 V ne može biti govora o prenosu 10000 kW na 300 km, a da se i ne govori o nižim naponima; praktički se pače ne bi moglo ići mnogo ispod 100 kV. U praksi se prenosi vrše obično trofaznom strujom s vodovima od tri jednaka vodiča, no i tu prilike nisu bitno drugačije od onih u gornjem primjeru prenosa istosmjernom (ili jednofaznom izmjeničnom) strujom.

Dok su prema rečenom za prenose na velike daljine potrebni visoki naponi, potrošačima treba dati niske napone, već zbog sigurnosti i jednostavnije izvedbe instalacija. Tu je jedan od razloga, što su u elektrotehnici nadvladale izmjenične struje, koje se lako po potrebi transformiraju na visoki napon u svrhu prenosa, te na niski napon nakon prenosa. A od izmjeničnih struja prevladale su (iz različitih razloga, o kojima će kasnije biti govora) trofazne struje. No i visokonaponski prenosi istosmjernom strujom predlagani su također (Thury), pa se u novije vrijeme zbog određenih razloga čak opet spominju.

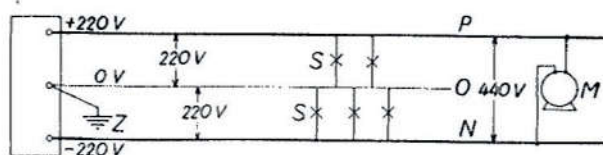
Historijski znamenit kao jedan od prvih većih visokonaponskih električkih prenosa postao je prenos Lauffen-Frankfurt/M. iz god. 1891. na daljinu od 175 km (kod njega je već upotrebljena trofazna struja). Danas se općenito energije prenose visokonaponski na velike daljine a naponi u krajnjim slučajevima dostižu već i 220 ili 380 kV, a i više. Osim gubitaka učina zbog otpora voda igraju kod vrlo visokih napona ulogu i gubici zbog »korone« (A-80.).

97. Kod centrala istosmjerne struje napon centrale mora se ravnati prema naponu potrošača. Kod prenosa s dva vodiča (pozitivnim P i negativnim N) napon centrale može od napona što ga dobivaju potrošači biti veći samo za gubitak napona u vodu, jer za istosmjernu struju nema transformiranja. Baš zbog niskoga napona centrale istosmjerne struje imale su uvijek poteškoća zbog vrlo ograničenoga radija djelovanja, koji na pr. kod 220 V i voda s dva vodiča ne može biti veći od nekoliko stotina metara, ako se kod iole većih učina dopuste samo umjereni gubici prenošenja. Zato su ovakve centrale morale uvijek ostati ograničene na manja mjesta (ili je veća mjesta trebalo dijeliti na samostalne sektore).

Međutim uvođenjem sistema *triju* vodiča uspjelo je ipak ovo stanje bar donekle ublažiti. Ukratko govoreći istosmjerno postrojenje se po sl. 102.a) snabdijuje vodom s tri vodiča, dva »vanjska« P i N i jednim »srednjim« O, koji je redovito spojen sa zemljom Z, pa ima potencijal nula. Između P i N proizvede se dvostruki mrežni napon, na pr. 2×220

V, i to tako da P ima pozitivni potencijal $+220 \text{ V}$ prema srednjem vodiču, a N negativni potencijal -220 V . Jedna grupa potrošača priključi se sad na P i O, i dobiva napon oko 220 V za svoje sijalice,

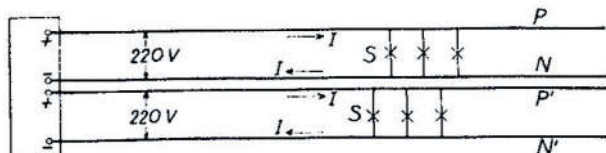
kuhala itd. dok se druga grupa potrošača priključuje na O i N, pa i potrošači ove grupe imaju napon oko 220 V; veći motori mogu se priključiti i direktno između P i N na oko 440 V. Prema tomu ovakva »centrala $2 \times 220 \text{ V}$ « ima osim mre-



Sl. 102.a)

žnoga napona 220 V (za rasvjetu i uopće manje potrošače) još i napon 440 V (za veće strojeve).

Lako je sada razabrati, da se sustavom po sl. 102.a), ako su samo potrošači priključeni na P i O i oni na N i O spretno porazdijeljeni, tako da jedni i drugi troše ukupno podjednaku struju, postizava velika uštednja na gubicima prenosa,



Sl. 102.b)

odn. na bakru za vodiče. Sustav u sl. 102.a) zamjenjuje naime zapravo dva sustava po 220 V s dva voda P-N i P'-N' (sl. 102.b.) i očito bi se kod potpuno jednakoga iznosa I struje oprerećenja u oba sustava ukinule povratna struja kroz N prvoga

sustava i polazna struja drugoga sustava kroz P', kad bi N i P' spojili u zajednički vodič O poput onoga u sl. 102.a) No u tom slučaju ne bi kroz O tekla uopće nikakva struja i on bi mogao biti uzet neizmjereno malenoga prereza, odn. on bi mogao biti uopće ispušten, a potrošačke grupe P-O i O-N u sl. 102.a) dovoljno bi bilo spojiti u seriju, s priključkom prema sl. 102.a) na zemlju Z. Cijeli sustav radio bi kao da nema srednjega vodiča i da centrala ima samo 440 V. Tako bi se ispuštanjem dvaju vodiča zaštedilo 50% bakra, odn. 50% gubitaka prenosa, odn. radij djelovanja centrale bio bi povećan zbog višega napona. Naravno u praksi se ne može računati, da će opterećenje obih polovica sistema u sl. 102.a) ostati uvijek posve jednako (jer se ne može očekivati, da će potrošači grupâ P-O i N-O uvijek istodobno ukapčati i iskapčati svoje sijalice itd.), pa se zato zbog izjednačenja nejednakosti ipak dodaje vodič O obično s 50% prereza vanjskih vodiča; no i to još daje lijepu uštednju na bakru, a sustav kao u sl. 102.a) može lako imati radij djelovanja oko 1 km, dakle dovoljan već i za veća mjesta.

Problem nesimetrično opterećena voda s tri vodiča već je razrađen u B-60. među zadacima o razgranjivanju. Tamo su naponi na kraju voda imali isti iznos U , a od napona U_1 i U_2 veći je ispio napon U_1 na strani potrošača P_1 s većim potroškom struje. Obrnuto kod istog iznosa napona na početku voda niži bi napon na kraju voda dobio potrošač većeg potroška struje.

Pokušavalo se ideju sustava s više vodiča primijeniti i u obliku »sustava s pet vodiča« P-P₁-O-N₁-N. No sustavi s više od tri vodiča nisu se proširili u praksi (zbog različitih komplikacija koje oni donose sa sobom, kao i zbog toga što se problem prenosa i razdiobe električne energije i onako bolje rješava sistemima izmjeničnih, naročito trofaznih struja).

V) POJAVI ELEKTROLIZE; PRIMARNI ELEMENTI; AKUMULATORI

Bit elektrolitičkoga vođenja struje. Prvi i drugi Faradayev zakon elektrolize. Pojavi elektrolitičke polarizacije. Važniji primarni elementi; depolarizacija u njima. Primjene polarizacije u sekundarnim elementima ili akumulatorima. Olovni, željezno-nikaljni i srebreno-cinčani akumulatori. Elektrolitički ventili; elektrolitički kondenzatori.

98. Kako je u B-15. spomenuto, prolaz električne struje kod elektrolitičkoga vođenja kroz izvjesne tekućine, t. zv. »elektrolitičke vodiče« ili »vodiče druge klase« (A-19.), podržava se materijalnim nosiocima obaju predznaka: pozitivnim i negativnim »ionima« (A-8.; A-17.).

Pod utjecajem električkoga polja pozitivni ioni idu prema izlaznoj elektrodi, katodi, pa se zovu također »kationi«, a negativni se gibaju prema anodi, pa se zovu i »anioni«. Na anodi ili katodi ioni se neutraliziraju i nastale neelektričke čestice materije izlučuju se kao primarni produkti elektrolize, koji međutim često odmah dalje reagiraju s molekulama elektrolitičkoga vodiča ili elektroda, pa se u takvim slučajevima konačno javljaju sekundarni produkti elektrolize.

Prema tomu prolaz struje kroz vodiče druge klase prate uvijek kemijski pojavi, koji su neposredna ili posredna manifestacija pojava elektrolize; mi ćemo te pojave sada pobliže razmatrati.

99. Tako se kod prolaza struje kroz dovoljno koncentriranu vodenu otopinu srebrenoga nitrata AgNO_3 , uz anodu od srebra i katodu koja ne mora biti srebrna, nego može biti i ugljena, bakrena itd., opaža postepeno nestajanje srebra s anode i u jednakoj mjeri njegovo izlučivanje u obliku postepeno sve deblje prevlake na katodi (katoda se dakle elektrolitički posrebruje).

Pojav, koji je poslužio i kod empiričke karakterizacije A i As (A-9.), u detaljima teče ovako: molekuli AgNO_3 su u vodenoj otopini spontano već prije primjene električkoga napona između anode i katode u većem ili manjem postotku disociirani u jednovalentne (A-17.) katione Ag^+ i anione NO_3^- ; kationi Ag^+ se na katodi neutraliziraju primajući po jedan elektron i izlučuju kao neutralni atomi Ag, a anioni NO_3^- , predavši na anodi po jedan elektron, dali bi neutralne atomske grupe (kemijske radikale) NO_3 ; no kako ovakve grupe ne mogu same za sebe postojati, kemijskom se reakcijom sa Ag s anode stvara kao sekundarni produkt elektrolize ponovno AgNO_3 . Prema tomu doista, kako je uvodno rečeno, u konačnoj bilansi sve izlazi na to da Ag s anode nestaje, a na katodi se izlučuje.

Sličan je primjer elektroliza zasićene otopine bakrenoga sulfata (modre galice) CuSO_4 uz Cu-anodu i na pr. bakrenu, ugljenu, grafitnu itd. katodu: dvovalentni kationi Cu^{++} na katodi uzimaju po dva elektrona i izlučuju se kao atomi Cu, dok se dvovalentni anioni SO_4^{--} , predavši na anodi po dva elektrona, vežu sa Cu s anode nadoknađujući CuSO_4 otopine (princip »galvanostegijskoga« pobakrivanja; princip »galvanoplastičkoga« pravljenja reljefnih kopija, na pr. kopija tiskarskih klišeja ili voštanih ploča s urezanim tragovima gramofonskoga snimanja zvukova, učinjenih na površini vodljivima finom prevlakom grafitnoga praha; također princip elektrolitičkoga »rafiniranja« nečistoga bakra anode u čisti »elektrolitički« bakar, što se izluči na katodi; B-23.).

Klasičan je primjer elektroliza smjese vode H_2O i sumporne kiseline H_2SO_4 uz obje elektrode od platine. Primarno se neutraliziraju po dva jednovalentna kationa H^+ na katodi i po jedan dvovalentni anion SO_4^{--} , na anodi; atomi H izlučuju se na katodi, a radikali SO_4 reagiraju s vodom H_2O stvarajući natrag H_2SO_4 , koja ostaje u tekućini, te O, koji se izlučuje na anodi, tako da je konačna bilansa rastvorba vode, čije se sastojine oslobađaju na obim elektrodama (»elektroliza vode«). Volumno se u promatranom slučaju izlučuje dvaput toliko vodika na katodi

koliko kisika na anodi: njihova smjesa, t. zv. praskavac, zapaljena izgara uz jaku eksploziju u vodu. 1 A izlučuje u minuti 10,44 cm³ praskavca (kod tlaka 760 mm stupca žive i temperature 0 °C).

100. Najčešće se kao elektrolitički vodiči upotrebljavaju vodene otopine »elektrolita«: soli, baza i kiselina; pri tom vodik i kovni atomi (ili radikali kovnoga karaktera kao amonij NH₄) iz pojedinih molekula daju katione, a ostaci molekula anione. No i rastaljeni elektroliti pokazuju pojave elektrolitičke disocijacije, i prema tomu vode struju elektrolitički.

Kao primjer navedimo elektrolitičko dobivanje alkalijskih kovina, osobito Na (najviše iz rastaljenoga suhoga NaOH, no također iz rastaljenoga NaCl). Zatim je važno spomenuti dobivanje Al iz aluminijskoga oksida Al₂O₃ otopljenoga u rastaljenom kriolitu AlF₃·3NaF (Al₂O₃ se opet sa svoje strane dobiva iz rude boksita). U prikladnim električkim pećima, kojih se mnogo ukopča u seriju, a pojedinačno ne troše više od okruglo 5,5 V, teku struje reda veličine 10⁴A i nastala strujna toplina dovoljna je da podržava elektrolitičku masu u rastaljenom stanju. Katoda je željezna posuda obložena ugljenom, a kao anoda služi veći broj paralelno spojenih ugljenih elektroda.

Također se u električkim pećima proizvode kalcijski karbid CaC₂, karborundum SiC, i mnogi drugi »elektrokemijski«, odn. »elektrometalurški« proizvodi.

101. Kvantitativni pogled u pojave elektrolize daju *Faradayevi zakoni elektrolize*, kojih ima dva.

I. Faradayev zakon elektrolize kaže da je množina elektrolizom izlučene tvari proporcionalna s jakošću I i trajanjem t struje, dakle proporcionalna s ukupno prostrujalom množinom elektriciteta $Q = It$. Ako se dakle sa G označi množina neke tvari u miligramima, koja se strujom I ampera izluči u t sekunda, te ako a označuje »elektrokemijski ekvivalent« te tvari, t. j. množinu u miligramima izlučenu strujom 1 A u 1 s, sadržaj I. Faradayeva zakona dat će se izraziti relacijom:

$$G = a \cdot I \cdot t = a \cdot Q \quad (132)$$

Po II. Faradayevu zakonu množine G i G' različitih tvari izlučenih istom strujom u istom vremenu, dakle specijalno također i njihovi *elektrokemijski* ekvivalenti a i a' , odnose se kao kvocijenti A/n i A'/n' atomnih težina A i A' i kemijskih valencija n i n' tih tvari (ovi se kvocijenti u kemiji zovu *kemijski* ekvivalenti pripadnih tvari); u formuli:

$$G : G' = a : a' = \frac{A}{n} : \frac{A'}{n'} \quad (133)$$

102. Zakon (132) lako je obrazložiti na temelju osnovnih predodžbi koje smo postavili o mehanizmu elektrolitičkoga vođenja struje. On je konsekvencija činjenice da se za neutralizaciju svakoga pojedinoga na katodi ili anodi izlučenoga jednovalentnoga iona određene vrsti potroši po jedan suprotni elementarni naboj $Q_0 = 0,160 \cdot 10^{-18}$ As (A-9.), za neutralizaciju svakoga dvovalentnoga po dva takva

naboja $2Q_0$, itd. Prema tomu se za neutralizaciju određenoga broja određenih atomskih ili radikalskih iona mora potrošiti množina elektriciteta Q proporcionalna ukupnom broju neutraliziranih iona, dakle također proporcionalna ukupnoj količini G izlučene tvari, a to baš i tvrdi I. Faradayev zakon.

Po I. Faradayevu zakonu je $I = G/at$, t. j. jakost struje I može se odrediti izmjerivši množinu tvari G s poznatim elektrokemijskim ekvivalentom a izlučene elektrolizom u određenom vremenu t . Sprave kojima se jakost struje mjeri na ovaj način zovu se *voltametri*. Zapravo su voltametri primarno sprave za mjerenja množinâ elektriciteta Q , pa se i tehnički upotrebljavaju kao elektrolitička Ah-brojila; na I se pak može zaključiti iz Q , ako je poznato t .

Najobičniji je voltametar sa srebrom, on se upotrebljava osobito za finija mjerenja, a ima otopinu srebrenoga nitrata te srebrenu anodu i platinenu katodu. Ideja ovoga voltametra poslužila je kod empiričke karakterizacije ampera (A-9.). Za jače struje mnogo se upotrebljava voltametar s bakrom, kod kojega se Cu izlučuje iz otopine CuSO_4 . Manje je točan voltametar s praskavcem (B-99.).

Dakako da će se ovako mučnim metodama, kao što su mjerenja voltametrima, struje u praksi rijetko mjeriti. Ali voltametrom sa srebrom mogu se baždariti ampermetri, odn. s dobivenim rezultatima mogu se koordinirati mjerenja struje kompenzacijom (B-52.), odn. kompenzatorima (B-54.) kao napravama kojima se baždarenja najpreciznijih instrumenata doista vrše.

103. Za izvod formule (133) potrebno je osim teorije disocijacije uzeti u pomoć još fizikalno i kemijski vrlo mnogobrojnim činjenicama zajamčeni stavak, da *grammolekula* ili *mol* ma kojega spoja, t. j. toliko grama nekoga spoja, koliko iznosi njegova molekularna težina, a isto tako i *gramatom* ma kojega elementa (ili radikala, koji je ekvivalentan elementu), t. j. toliko grama elementa koliko iznosi njegova atomna težina, sadrže uvijek posve određeni isti broj N molekula, odn. atoma. Taj broj, nazvan »Avogadrov broj« ili »Loschmidtov broj«, iznosi, kako je na više načina utvrđeno:

$$N = 0,6024 \cdot 10^{24} \quad (134)$$

Prema tomu za neutralizaciju A grama, t. j. 1 gramatoma, iona nekoga jednovalentnog elementa (odn. analognu količinu radikalskih iona) trebat će naboj (nazvan *Faradayeva konstanta*):

$$Q_F = N \cdot Q_0 = 0,6024 \cdot 10^{24} \times 0,160 \cdot 10^{-18} \approx 96500 \text{ As};$$

za neutralizaciju gramatoma dvovalentnih iona trebat će dvostruko tolika količina $2 \times 96500 \text{ As}$, i općenito kod valencije n ionâ n -struka količina $N \cdot nQ_0 = n \cdot Q_F$ ($=96500 \cdot n \text{ As}$). Obrnuto će onda 1 As izlučivati po $A/96500$ grama ili $1000 A/96500$ miligrama svake jednovalentne tvari, odnosno količinu miligrama n -valentne tvari:

$$a = \frac{1000 \cdot A}{96500 \cdot n} = 0,010365 \frac{A}{n} \quad (135)$$

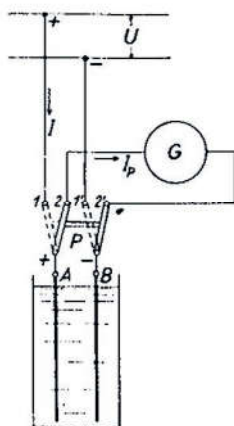
Kod dviju tvari atomnih težina A i A' i valencija n i n' pripadni elektrokemijski ekvivalenti a i a' iznosili bi dake $0,010365 \cdot A/n$, i $0,010365 \cdot A'/n'$, i njihov omjer (kao i općenitije omjer $G:G'$ množina tih tvari izlučenih ma kojom istom količinom $Q=It$ elektriciteta) odgovarao bi relaciji (133), odn. II. Faradayevu zakonu.

Primjenom formule (135) moguće je izračunati elektrokemijski ekvivalent a svake tvari kojoj je poznata atomna težina i valencija. Tako za živu Hg sa $A = 200,6$ i $n = 2$ izlazi:

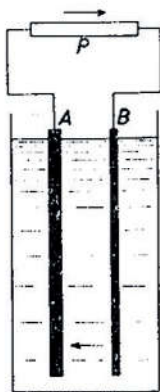
$$a = 0,010365 \cdot 200,6/2 \text{ mg/As} = 1,040 \text{ mg/As} (= 1,040 \cdot 3600/1000 \text{ g/Ah} = 3,74 \text{ g/Ah}).$$

104. Važnu ulogu kod običnih »primarnih« elemenata, a također i kod »sekundarnih« elemenata (akumulatora), igraju pojavi *elektrolitičke polarizacije*.

Neka je po sl. 103. preklopom P okrenutom u položaj 1-1' priključena na mrežu napona U posuda s elektrodama A i B od platine uronjenima u razrijeđenu



Sl. 103.



Sl. 104.

sumpurnu kiselinu. U vezi s izlučivanjem kisika na anodi i vodika na katodi (B-99.) elektrode A i B će se *polarizirati*, t. j. napraviti za elektrolizu iz sl. 103. će se ponajprije kao neki (galvanski) element, kojemu je anoda A pozitivan pol, a katoda B negativan. EMS toga elementa E_p djelovat će nasuprot naponu U , ona će u odnosu prema U biti protu-EMS (B-31.). Što više, ako se aparat za elektrolizu zakretom preklopke P u položaj 2-2' iskopča iz strujnog kruga mreže napona U i premosti nekim potrošačem, na pr. galvanometrom G, moći će se iz aparata za elektrolizu crpsti kao iz svakoga drugog elementa neko (vrlo kratko) vrijeme struja I_p , koju bi galvanometar G pokazivao: polarizacija ostane i nakon prestanka struje elektrolize.

Prema rečenomu vidi se da je za održavanje elektrolize potreban napon U , koji nadvisuje protu-EMS E_p polarizacije. Kod primjera elektrolize iz sl. 103. E_p bi iznosilo oko 2 V; kod drugih elektrolita i drugih elektroda vrijednosti E_p bile bi druge. Ima slučajeva da polarizacije uopće nema: na pr. kod elektrolize koncentrirane rastopine CuSO_4 uz anodu od Cu (i katodu, koja se po B-99. i onako pobakri) ne će uopće biti polarizacije, jer je i na katodi i na anodi ista tvar Cu, a u elementu s dva jednaka pola ne stvara se EMS (tekućinu bi trebalo miješati, da ne nastanu nejednakosti u koncentraciji).

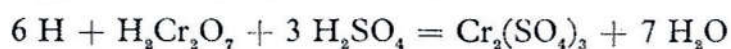
105. Kod primarnih elemenata pojavi polarizacije djeluju nepovoljno na funkciju elemenata kao izvora struje, i prema tomu ih se nastoji spriječiti. Ako se po sl. 104. krug struje primarnog elementa s polovima A (pozitivni) i B (negativni) zatvara kroz neki potrošač P, struja od pozitivnoga pola A elementa ide kroz P prema negativnom polu B i nastavlja se kroz tekućinu elementa prema pozitivnom polu A. Prema tomu za element koji daje struju, negativni pol B predstavlja anodu, a pozitivni pol A katodu (dok je za elektrolitički aparat iz sl. 103., koji je primao struju, elektroda A bila anoda, a elektroda B katoda). Zato se kod elektrolitičkih pojava u elementu, kad on daje struju, ima očekivati izlučivanje anionâ na negativnom polu (to je redovito Zn; međutim kod Westonova elementa Zn je zamijenjen sa Cd), a kationâ na pozitivnom polu (taj je najčešće ugljen, a katkad Cu, Hg, ili sl.).

Kod toga treba pripisivati naročito utjecaju izlučivanja kationa, većinom vodika, stvaranje polarizacionih EMS E_p suprotnih prvobitno proizvedenima EMS E pojedinih elemenata. Elementi se zbog polarizacije vladaju kao da imaju smanjenu EMS $E - E_p$. Zato struje elemenata u kojima nisu primijenjena sredstva protiv polarizacije (takav je bio na pr. po Volti nađeni najstariji element sa Cu i Zn u razrijeđenoj H_2SO_4) postepeno sve više slabe: elementi su »nestalni«, odn. ne mogu dulje vrijeme davati spomena vrijedne struje.

106. Mnogo su savršeniji »stalni« elementi sa spriječenim ili bar ublaženim pojavima polarizacije. Mnogi od njih kadri su davati sate i dane, odn. dok se kemijski ne iscrpe, struje koje ostaju praktički stalne, ako im iznosi ne premašuju određene, sastavom ili dimenzijama elemenata dane granice.

Osobito je bila blizu misao spriječiti polarizaciju učinivši neškodljivim vodik izlučivan na pozitivnom polu elementa na taj način da ga se prikladnim oksidacionim sredstvom oksidira u (neškodljivu) vodu. Ima mnogo tvari prikladnih za ovakvu funkciju sprječavatelja polarizacije, t. zv. depolarizatora.

Tako kod elementa s (bi)kromnom kiselinom $H_2Cr_2O_7$ (koja se dobiva dodajući razrijeđenoj H_2SO_4 kalijaskoga bikromata $K_2Cr_2O_7$) nastaju između vodika izlučena na pozitivnom polu elementa i $H_2Cr_2O_7$ iz tekućine elementa reakcije kod kojih sekundarno sudjeluje i H_2SO_4 iz tekućine, pa se u konačnoj bilansi stvaraju kromisulfat $Cr_2(SO_4)_3$ i voda H_2O po kemijskoj jednadžbi:



(zbog stvorenoga kromisulfata prvobitno ružičastocrvena tekućina elementa prelazi postepeno u tamnozelenu; EMS svježeg elementa doseže gotovo 2 V).

Kod Leclanchéova elementa s ugljenom i Zn u otopini amonijskoga klorida (salmijaka) NH_4Cl okruži se pozitivna ugljena elektroda smjesom čestica ugljena i manganova dioksida MnO_2 ; ovaj potonji oksidira vodik, izlučen kod prolaza struje, u vodu, a sam prelazi u Mn_2O_3 , po svoj prilici po formuli: $2H + 2MnO_2 = H_2O + Mn_2O_3$. Vodik na pozitivni pol dolazi time što se salmijak raspada u NH_4^+ i Cl^- ; izlučeni Cl reagira sa Zn negativnoga pola, tako da se stvara cinčani klorid $ZnCl_2$, dok se izlučeni NH_4 raspada u amonijak NH_3 i u vodik H. EMS Leclanchéova elementa je oko 1,5 V.

Većinom se Leclanchéovi elementi izvode u obliku t. zv. suhih elemenata, kod kojih je dodatkom prikladnih primjesa elektrolitički vodič elementa preveden u doduše vlažnu, ali ipak ne više tekuću masu (potpuno suhi elementi ne postoje).

Relativno novi su *živini suhi elementi* (EMS 1,35 V, na plus-polu HgO , minus-pol Zn, elektrolit $KOH + K_2ZnO_2 + H_2O$). Kad element radi, sažeto rečeno, prelaze HgO u Hg i Zn u ZnO .

Kod Lalande-Edisonovih elemenata (EMS oko 0,9 V) pozitivni pol i depolarizator jesu bakar Cu s bakrenim oksidom CuO , tekućina je otopina natrijskoga hidroksida $NaOH$, a negativni pol je Zn. Kad element radi, CuO se reducira postepeno u Cu, no nastali Cu daje se u struji vrućega zraka ponovno oksidirati u CuO .

I upotrebom dviju tekućina, rastavljenih na pr. šupljikavom glinenom »diafragmom« (ili time da se specifički teža tekućina drži dna posude, a specifički lakša da ostane iznad one

prve), moguće je izbjeći polarizaciji. Primjer: Daniellov element, sa EMS oko 1,1 V, po slijedećoj shemi: $\text{Cu}-\text{CuSO}_4-\text{ZnSO}_4-\text{Zn}$; vrlo poznata njegova modifikacija jest Meidingerov element po ovoj shemi: $\text{Cu}-\text{CuSO}_4-\text{MgSO}_4-\text{Zn}$.

Opisani (i drugi) »primarni« elementi nemaju u velikom praktičke važnosti. Za proizvodnju električke energije na veliko oni ne dolaze u obzir kraj neusporedivo jeftinijega i udobnijega dobivanja struje strojevima. A za potrebe u malom danas se samo još za specijalne svrhe upotrebljavaju suhi elementi; inače se, ako je u blizini rasvjetna mreža, radije upotrebljavaju »sekundarni« elementi, koji daju struju istom nakon »nabijanja« iz mreže (ali se iscrpeni mogu ponovno nabijati).

107. Sekundarni elementi ili *akumulatori* neposredna su primjena pojava polarizacije. Kod pokusa o polarizaciji po sl. 103. naprava s Pt-elektrodama A i B mogla je, nakon što je bila protjecana izvana privedenom strujom, davati tek kratko vrijeme struju kroz priključeni potrošač G, jer su izlučivani plinovi vodik i kisik samo vrlo nepotpuno zaostajali na pripadnim elektrodama.

No Plantéu je uspjelo naći u olovu tvar elektroda uz koju se elektrolizom razrijeđene sumporne kiseline izazivaju kemijske promjene reverzibilnoga karaktera, koje zadiru manje ili više duboko u elektrode. Uz spomenute elektrode i spomenuti elektrolit primjećuju se, nakon duljega djelovanja izvana privedene struje, t. zv. struje nabijanja ili punjenja, razlike kemijskoga sastava na površinama obih elektroda: na jednoj elektrodi, i to anodi, opaža se čokoladnosmedi sloj olovnoga superoksida PbO_2 , a na drugoj, katodi, po izgledu sivoj, olovo Pb. Zbog proizvedenih razlika u kemijskom sastavu elektroda elektrolitička sprava postaje galvanski element sa PbO_2 kao pozitivnim polom i Pb kao negativnim. Ovaj element može dakle sam »sekundarno« davati struju, t. zv. struju izbijanja ili pražnjenja, dok razliku sastava obih elektroda ne izbrišu kemijski procesi, koji kod izbijanja pretvaraju postepeno površine obih elektroda u olovni sulfat PbSO_4 . A budući da se, kako ćemo doskora pokazati, stvoreni PbSO_4 kod ponovnoga nabijanja natrag pretvara na anodi u PbO_2 , a na katodi u Pb, nabijanja i izbijanja mogu se u principu po volji mnogo puta ponavljati.

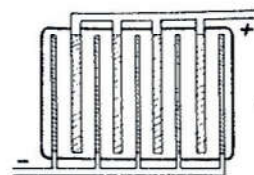
108. Izumom sekundarnih elemenata praktički je riješen problem električkoga akumuliranja ili nakrcavanja energije: energijom struje nabijanja povećava se kemijska energija nabijanoga sekundarnog elementa, a taj po potrebi tu energiju uglavnom daje natrag u obliku energije struje izbijanja; odatle i ime »akumulatori« (energije) za sekundarne elemente.

Prema gornjemu će akumulator biti sposoban nakrcati to veću količinu energije, što veću masu tvari na elektrodama uspije strujom nabijanja prevesti u PbO_2 i Pb, odn. strujom izbijanja u PbSO_4 . No kako kod masivnih olovnih ploča kemijske promjene u početku vrlo malo zalaze u unutarnjost ploča, množine aktivne ili djelotvorne mase akumulatora, a time i iznosi energije što ih akumulator može nakrcati, kod prvih su nabijanja vrlo maleni.

Već je Planté nastojao povećati aktivnu masu što većom površinom elektroda. Zbog toga se i danas obično po nekoliko međusobno spojenih pozitivnih ploča kombinira u pozitivni pol akumulatora i pripadni broj negativnih ploča u nega-

tivni pol, pri čemu se po shemi u sl. 105. paži da svaka pozitivna ploča dode između dvije negativne, tako da akumulatorski element uz n pozitivnih ploča ima redovito $n + 1$ negativnih ploča.

Također je već Planté bio spoznao da se povećanje aktivne mase na elektrodama akumulatora postizava i *formiranjem*, t. j. mnogim uzastopnim nabijanjima i izbijanjima akumulatora prije njegova davanja u redovitu upotrebu. Formiranjem se površina akumulatora postepeno tako preparira da kemijske promjene kod svakoga novoga nabijanja zalaze sve dublje u ploče, i olovo akumulatorskih ploča prelazi do izvjesnih granica u aktivnu masu akumulatora.



Sl. 105.

109. Dobro građen i dobro formiran akumulator može i kod umjerenih dimenzija davati kod izbijanja struju od više ampera kroz više sati. Da bi se i numerički u tomu pogledu akumulatori karakterizirali, kaže se na pr. za akumulator koji može davati struju 10 A za vrijeme od 12 h da ima *kapacitet* $10 \times 12 \text{ Ah} = 120 \text{ Ah}$. Treba međutim primijetiti da pojam kapaciteta akumulatora (Ah), upotrebljavan u netom navedenom smislu, nema nikakve veze s pojmom kapaciteta kondenzatora (F), upotrebljavanim za karakteriziranje elektrostatskih odnosa.

110. Budući da su prvobitni akumulatori s masivnim olovnim pločama zahtijevali formiranja koja su trajala i mjesece, a uz to su bila vezana i na gubitke energije, nastojalo se brzo iza Plantéa naći sredstva kojima bi se formiranje moglo običiti ili barem skratiti. Već je Faure pokušao obložiti olovne ploče miniumom Pb_3O_4 , a po sličnoj ideji počelo se kasnije i na druge načine općenito graditi akumulatorske ploče kod kojih se formiranje dade izvršiti u vrlo kratko vrijeme.

Danas se u olovnim pločama načine mnogobrojne pukotine i udubine, u koje se utisne zgodno odabrana masa, na pr. ona s miniumom Pb_3O_4 , olovnom gledom PbO i drugim primjesama; ovu masu struja nabijanja reducira na katodi na Pb , a na anodi je oksidira na PbO_2 .

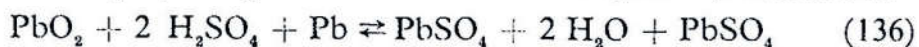
Dakako da će se ugradnja mase u ploče nastojati tako izvesti da aktivna masa ne može kod upotrebe akumulatora iz ploča lako ispadati, a to zgodnim oblicima ploča i udubina u njima prilično i uspijeva postići. Ipak je trajnost akumulatorskih ploča dobivenih po principu pridodanih oksidnih masa, t. zv. »ploča s masom«, pri upotrebi manja nego kod ploča akumulatora po Plantéovu postupku, koje se danas grade s pločama jako namreškanima gustim dubokim žljebovima, tako da imaju jako povećanu površinu, zbog čega ovakve ploče i zovu »pločama velike površine«.

Uostalom se »ploče velike površine« upotrebljavaju samo za pozitivne ploče akumulatora osobite otpornosti i trajnosti, dok su pozitivne »ploče s masom« osjetljive na grubi postupak i prikladne više za velike stacionarne baterije. Naprotiv negativne ploče redovito se grade s umjetno dodanom aktivnom masom utisnutom u skelet od olova, a da masa teže ispada iz svoje mreže, zaštititi se još olovnim rešetkama s malenim rupicama.

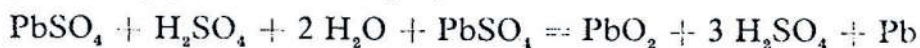
Pozitivne ploče osobite trajnosti, ako već nisu izvedene u obliku ploča velike površine (zgodnim obrađivanjem moguće je površinu osam puta povećati, pa je formiranje dosta kratkotrajno) mogu se izraditi i po principu Tudor; i u ovom slučaju pozitivna ploča je od masivnoga olova s mnogo gustih žljebova, u kojima je u tankim slojevima smješten olovni oksid. No taj djeluje samo neko vrijeme kao aktivna masa, jer malo po malo ispada; međutim, kako se upotrebom akumulatora istodobno postepeno formira masivna olovna ploča, akumulator ipak zadržava svoj kapacitet.

Pokušavalo se masivne olovne ploče učiniti prikladnima za brzo formiranje naročitim kemijskim procedurama; tako se katkad ploče za pozitivne polove stave u kupelj od sumporne kiseline s natrijskim perkloratom NaClO_4 , u kojoj se ploče tako promijene da dobiju veliku djelotvornu površinu, pa se brže formiraju.

111. Kemijske promjene koje se događaju u akumulatorima za vrijeme izbijanja i nabijanja dosta su zamršene, ako se u potankosti promatraju. Sumarno uzeto, po klasičnoj teoriji od Gladstonea (ima i teorija od Ferya; v. na pr. ETZ, 1930. str. 403.) kod izbijanja PbO_2 s pozitivnoga pola i Pb s negativnoga prelaze oba u PbSO_4 . Promjene nastaju na taj način, da se od iona 2H^+ i SO_4^{--} sumporne kiseline ovaj posljednji izluči na negativnom polu i izlučeni SO_4 veže Pb s negativnoga pola neposredno u PbSO_4 , dok se naprotiv ioni 2H^+ izlučuju na pozitivnom polu i izlučeni 2H tako reagiraju sa PbO_2 s pozitivnoga pola i sa H_2SO_4 iz tekućine, da se stvara PbSO_4 na pozitivnom polu i $2\text{H}_2\text{O}$ u tekućini. Ukupno uzeto pojavi kod izbijanja mogu se karakterizirati kemijskom jednadžbom:



Kod nabijanja naprotiv od iona 2H^+ i SO_4^{--} ioni 2H^+ idu na negativni pol i izlučeni oduzimaju olovnom sulfatu s negativnoga pola SO_4 , tako da se stvaraju Pb na negativnom polu i H_2SO_4 u tekućini, dok ion SO_4^{--} , izlučujući se u ovom slučaju na pozitivnom polu, reagira sa PbSO_4 toga pola i sa $2\text{H}_2\text{O}$ iz tekućine, tako da se stvaraju PbO_2 na pozitivnom polu i $2\text{H}_2\text{SO}_4$ u tekućini. U konačnoj bilansi pojavi dakle idu po jednadžbi:



koja se međutim (obzirom na to, što se jedna od tri nastale molekule sumporne kiseline kompenzira s jednom potrošenom) može smatrati potpuno korespondentnom jednadžbi (136).

Prema tomu reakcije kod nabijanja i kod izbijanja teku točno suprotno, prve po jednadžbi (136) čitanoj u smislu od desna na lijevo, a druge po istoj toj jednadžbi, no čitanoj u protivnom smislu, pa se teoretski nakon svakoga para nabijanja i izbijanja potpuno uspostavlja, kako na pločama tako i u tekućini akumulatora, prvobitno stanje, prema čemu se nabijanja i izbijanja akumulatora u principu mogu neograničeno ponavljati.

112. Nabijanja i izbijanja prate, kako se vidi, ne samo promjene na pločama olovnoga akumulatora, nego i promjene u tekućini. Kod izbijanja se po (136) mjesto

sumporne kiseline stvara (u količinama razmjernim danima Ah) voda, a kod nabijanja se obrnuto mjesto vode stvara (u količinama razmjernim primljenima Ah) sumporna kiselina. Tokom izbijanja mora dakle gustoća kiseline u akumulatoru opadati, a tokom nabijanja kiselina mora postajati opet sve gušća.

Mjereći areometrom gustoću kiseline, koja u praksi samo malo varira ne udaljujući se mnogo od maksimalne vrijednosti kod potpuno nabijenoga akumulatora [ova se obično kreće oko iznosa $d = 1,20$ kojemu odgovara koncentracija sa 32 utezna (ili 25 volumnih) % H_2SO_4], može se dakle zaključiti na stupanj do kojega se neki akumulator tokom izbijanja izbilo, odn. tokom nabijanja nabio. I doista se ovakvim areometarskim kontrolama akumulatori često nadziru.

113. No udobnija je kontrola izbijanja i nabijanja mjerenjem napona stezaljki akumulatora. Napon stezaljki U_k svježe nabijena akumulatora iznosi nešto iznad 2 V i odmah u početku izbijanja padne neznatno ispod 2 V. Tokom cijeloga daljega izbijanja napon stezaljki drži se iznosa nešto ispod 2 V padajući tek vanredno polagano, t. j. krivulja U_k (V) u ovisnosti od vremena izbijanja t (h) teče u kudikamo najvećem dijelu izbijanja gotovo horizontalno. Istom kod iscrpljenja akumulatora napon počinje naglo padati i krivulja napona počinje se strmo spuštati, no to je i znak da izbijanje treba prekinuti. Obično se uzima 1,8 V kao granica napona stezaljki opterećena akumulatora ispod koje nije dozvoljeno akumulator dalje izbijati. A ako je akumulator do te granice izbijen, treba ga po mogućnosti odmah ponovno nabiti (nabijen može čekati na upotrebu).

Kod nabijanja napon stezaljki U'_k već odmah na početku skoči na preko 2 V i tokom nabijanja drži se, samo polagano rastući, oko 2,25 V. Tek pri kraju nabijanja U'_k naraste do oko 2,6 V; kod toga stadija akumulator prestaje nakrcavati energiju i nabijanje treba prekinuti, već zato što se poslije toga struja troši samo na elektrolizu vode (kao vidljivi znak počnu se u velikoj mjeri dizati s ploča mjehurići praskavca: akumulator »ključa« ili »kuha«).

Izbijeni akumulator mora se što prije nabiti, jer se olovni sulfat, ako duže vremena stoji, polagano transformira u jednu grubo-kristaliničnu modifikaciju (sulfatiranje ploča). Sulfatiranje je s više razloga nepoželjno, a naročito jer smanjuje kapacitet akumulatora. Češćim nabijanjima i izbijanjima, ili »dopunjivanjima na odmore«, može se uostalom sulfatiranom akumulatoru više manje povratiti prvobitni kapacitet.

114. Da je napon stezaljki U'_k kod nabijanja akumulatora veći od napona U_k kod izbijanja, ima se svesti u jednu ruku na gubitak napona zbog svladavanja unutarnjega otpora R_u akumulatora (taj je otpor u praksi uvijek veoma malen, na pr. reda veličine 0,01 Ω), a u drugu ruku na to da je i EMS E' kod nabijanja veća, nego EMS E kod izbijanja: $E' > E$.

Kod nabijanja strujom I napon stezaljki U'_k mora svladavati unutarnji otpor i protu-EMS E' akumulatora: $U'_k = IR_u + E'$. Kod izbijanja s istom jakošću struje očito će biti $U_k = E - IR_u$. Prema tomu, sve kad bi bilo $E' = E$, imali bismo razliku $2IR_u$ između U'_k i U_k ; uistinu je međutim $E' > E$, tako da je

razlika $U'_k - U_k$ još veća. Da je $E' > E$, tomu je uzrok u razvijanju plinova kod nabijanja; ovi povisuju EMS polarizacije.

Zanimljivo je, da kapacitet akumulatora osjetljivo ovisi o jakosti struje izbijanja. Na pr. neki akumulator izbijan do određenoga napona stezaljki dao je jedamput 11 A kroz vrijeme od 10 h, drugiput 18 A kroz 5 h, a trećiput 27 A kroz 3 h. To znači, da je bio kadar prviput dati 110 Ah, drugiput 90 Ah, a trećiput samo 81 Ah.

Uz prejake struje ne samo da pada kapacitet akumulatora, nego akumulator čak može stalno stradati. Nerazumnim preopterećivanjima, osobito kratkim spojevima, mnogi je akumulator i potpuno uništen.

Kod akumulatora treba biti to više oprezan, što je njihov unutarnji otpor neznatan, pa kod eventualnoga kratkog spoja poteku silno jake struje, koje mogu znatno oštetiti akumulator; na pr. akumulator unutarnjega otpora $0,004 \Omega$ u kratkom spoju kraj svoje EMS oko 2 V dao bi struju $I \approx 2/0,004 = 500$ A.

115. Zbog različitih gubitaka, na pr. izlučivanja kisika i vodika osobito pri kraju nabijanja, množina Ah primljenih kod nabijanja izlazi u praksi veća od množine Ah, koje akumulator daje kod izbijanja. Omjer danih Ah prema primljenima Ah zove se *stepen vrsnoće* ξ akumulatora.

Za energetičku bilansu nije međutim dosta usporediti dane Ah s primljenima, nego treba usporediti radnju električke struje, koju akumulator korisno može izvršiti, s radnjom utrošenom na nabijanje, t. j. treba usporediti dane Wh s primljenima Wh, odn. izračunati *stepen djelovanja* η akumulatora. Kako je napon U_k kod izbijanja akumulatora manji od napona U'_k kod nabijanja, stepen djelovanja η osjetljivo je manji od stepena vrsnoće ξ .

Ako se na pr. akumulator uz prosječno 2,25 V napona nabijao strujom 26 A u vrijeme od 2,6 h, a kod izbijanja je uz prosječni napon 1,95 V davao struju 10 A kroz 6 h, njegov stepen vrsnoće ξ bio bi: $\xi = (10 \times 6)/(26 \times 2,6) = 0,89$. dok bi za η imali:

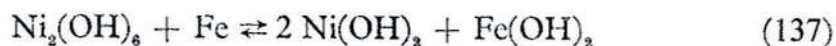
$$\eta = (1,95 \times 10 \times 6)/(2,25 \times 26 \times 2,6) = 0,77.$$

Uz $\eta = 0,77$ akumulator povratu 77% uložene energije u obliku korisne radnje električke struje. Usporedi li se taj stepen djelovanja s onim ostalih vrsta akumulatora (B-116.), treba priznati da ovakav η nije nepovoljan.

Baterije velikih akumulatora služe u tehnici jakih struja, bilo zato da nagomilavaju energiju u vrijeme kad je u centralama potrošak struje malen, pa da onda u vrijeme povećanoga potroška pomažu generatore, bilo opet za održavanje što stalnijega napona kod mreža s vrlo promjenljivim potroškom struje, (na pr. tramvajskih); u ovom potonjem slučaju služe kao »puferbaterije« uz generatore. U malom su primjenu akumulatora vrlo mnogobrojne (automobilski akumulatori; akumulatori u tehnici slabe struje; uređaji za rasvjetu u nuždi; itd.).

116. Kušalo se graditi akumatore i bez teškoga olova i neprilične sumporne kiseline. Ali mnogi pokusi u tom smjeru, vršeni već od Plantéa i poslije njega od mnogih drugih, pokazali su samo još bolje, da je baš aktivnom masom obloženo olovo u kiselini vrlo prikladna kombinacija za akumatore.

Kao starije akumulatore s nekim doista bitnim prednostima, no također i nedostacima prema olovnima, treba spomenuti »alkalijske akumulatore« (željezno-nikaljne akumulatore) od Jungnera i od Edisona. Negativni pol kod ovih akumulatora jest fino razdijeljeno željezo Fe, koje se kod izbijanja pretvara u $\text{Fe}(\text{OH})_2$, dok je pozitivni pol $\text{Ni}_2(\text{OH})_6$, koji kod izbijanja prelazi u $\text{Ni}(\text{OH})_2$. Tekućina je otopina KOH (dakle lužnata ili alkalijska, a ne kisela tekućina); odatle i ime alkalijski akumulatori. Konačni je rezultat svih reakcija u ovom akumulatoru:



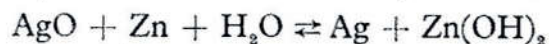
pri čemu jednadžbu (137) treba čitati kod izbijanja od lijeva na desno, a kod nabijanja od desna na lijevo.

Ima i modifikacija opisanih alkalijskih akumulatora. Među te spadaju na pr. kadmijsko-nikaljni akumulatori.

Prednosti su alkalijskih akumulatora: da im ne škode udarci i trešnje, da se ne kvare izbijanjima ili nabijanjima uz vrlo jake struje, da nemaju kiseline itd.; no s druge strane napon stezaljki im je manji nego kod olovnih akumulatora i naglije opada tokom izbijanja (na pr. od 1,4 do 1,0 V); a kako je kod nabijanja napon relativno velik i raste tokom nabijanja (na pr. od 1,6 do 1,8 V), stepen djelovanja η ovih akumulatora izlazi nepovoljniji nego kod olovnih: $\eta \approx 0,5$.

Što se tiče težine, alkalijski akumulatori ne daju bitno više Wh/kg nego najlakši specijalno građeni olovni akumulatori. Prvi mogu dati 25 do 35 Wh/kg, dok se osobito laki olovni dadu izvesti da daju 20 do 25 i više Wh/kg; kod stacionarnih olovnih akumulatora, kod kojih težina ne igra toliku ulogu, silazi se međutim i na 5 do 10 Wh/kg.

117. Znatne prednosti u vidu malene težine i malenog volumena, kraj drugih dobrih svojstava, pokazuju u novije vrijeme po H. Andréu usavršeni *srebrenocinčani akumulatori*. Pozitivne ploče u izbijenom stanju akumulatora jesu čisto srebro Ag, prikladno preparirano, dok su negativne ploče od cinčanog hidroksida $\text{Zn}(\text{OH})_2$. Elektrolit je jaka otopina kalijске lužine KOH. Za separatore između ploča upotrebljen je celulozni materijal, koji istodobno dopušta lako difundiranje u njemu apsorbiranog elektrolita i sprečava migraciju metalnih čestica između ploča. Posuda je od lake umjetne mase, kao polistirola, metilmetakrilata i sl. Pri formiranju zasiti se KOH-otopina cinkom u obliku kalijskog cinkata K_2ZnO_2 . Kod nabijanja na pozitivnom se polu stvara srebreni oksid AgO i na negativnom čisti cink Zn, a da se KOH uopće ne troši. Kod izbijanja proces teče obrnuto. Tako su reakcije u akumulatoru dane jednadžbom:



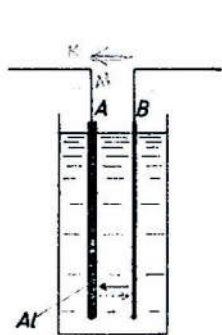
pri čemu za nabijanje treba reakcionu relaciju čitati s lijeve na desnu stranu i za izbijanje s desne na lijevu stranu.

Pri nabijanju napon poraste i do 2,1 V, a pri izbijanju s ne premalom strujom akumulator daje gotovo trajno potpuno stalan napon (vrlo horizontalnu krivulju izbijanja), na pr. »0,75 Ah-element« trajno 1,5 V pri 0,25 A kroz vrijeme od 2 h, i tek dalje napon polagano pada. A cijeli taj element za nominalno 0,75 Ah nije teži od ca. 21 g. Onaj za nominalno 15 Ah ne teži pak više od 230 g, što predstavlja $1,5 \text{ V} \cdot 15 \text{ Ah} / 0,23 \text{ kg}$ ili oko 100 Wh/kg. S ovim akumulatorima mogu se dosegnuti stepeni vrsnoće 0,90 do 0,95 i stepeni djelovanja 0,7 do 0,8.

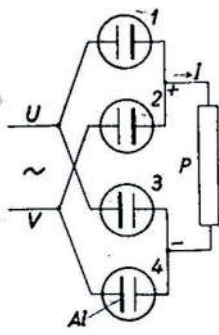
118. Kroz elektrolitičku napravu po sl. 106. s jednom elektrodom A od aluminija i drugom B od neke druge tvari, na pr. željeza, olova, ugljena itd., te s rastopinom natrijskoga bikarbonata ili amonijskoga fosfata ili kiselog amonijskoga borata ili sl., daje se lako poslati struja u smislu od B prema A, dakle kad je aluminij katoda, no ne da se u spomena vrijednoj jakosti podržavati u protivnom smislu od A prema B, dakle uz aluminij kao anodu (osim ako raspoloživi napon prekorači neku kritičku zapornu vrijednost, nekoliko desetaka volta).

Naprave po sl. 106. djeluju dakle uz ne prevelike napone kao strujni ventili, kakve smo u drugim oblicima već u B-20., B-94. itd. susreli. U promatranom slučaju radi se o *elektrolitičkim ventilima*, kod kojih se ventilno djelovanje svodi na elektrolitički stvoreni vrlo tanki izolacioni sloj oko aluminijske anode. Uzima se da se kod aluminija kao anode stvori tanka kožica jednoga netopivoga aluminijskoga spoja, valjda hidratiziranoga (s vodom vezanoga) aluminijskoga oksida, i još jedan vrlo tanki sloj plina.

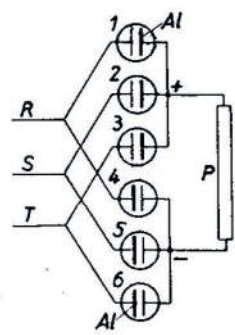
Praktički se opisani elektrolitički učinak, odnosno izolacioni sloj što se stvara na aluminiju, može dvojako primijeniti: a) za gradnju elektrolitičkih ispravljača



Sl. 106.



Sl. 107.



Sl. 108.

(B-94.) izmjenične struje u istosmjernu, b) za gradnju elektrolitičkih kondenzatora s vanredno neznatnim debljinama dielektrikuma i prema tomu naročito velikim kapacitetima kod dane površine obloga.

119. Kao *ispravljač* jednostavna bi naprava po sl. 106. propuštala samo onu polovicu perioda izmjenične struje uz koju bi A bila katoda, a druga polovica perioda ne bi bila nikako iskorišćena (t. zv. poluvalno ispravljanje).

Međutim s četiri elektrolitička (ili općenitije i koja druga) ispravljačka elementa 1 do 4 u t. zv. Graetzovu spoju po shemi u sl. 107. moguće je iskoristiti obje polovice vala izmjenične struje i kroz potrošač P dobiti struju uvijek istoga smjera, naznačenoga strjelicom, ma kakav bio polaritet obih vodiča U i V izmjenične mreže napona U . Kako se vidi, aluminijske elektrode su kod 1 i 2 desno, a kod 3 i 4 lijevo, te kakogod struja prolazila izmjeničnom mrežom, struja kroz P uvijek će teći u istom smislu, tako da se iskorišćuju za ispravljanje obje polovice perioda izmjenične struje (punovalno ispravljanje).

I trofaznu struju lako je potpuno ispraviti u istosmjernu, no onda treba šest ventilnih elemenata 1 do 6, koji se spoje kao na sl. 108.

I naprava s jednom katodom i samo dvije anode iz sl. 101. (str. 179.) radi s punovalnim ispravljanjem; kod nje je bio potreban transformator s odvojkom u sredini sekundarnoga namotaja. Treba li ispravljati kod viših napona nego li ih mogu podnijeti pojedini ispravljački elementi sami za sebe, uzimaju se umjesto pojedinih ispravljačkih elemenata serijske kombinacije od po nekoliko takvih elemenata. Tako bi kod viših napona trebalo svaki od elemenata 1 do 4 u sl. 107. zamijeniti s nekoliko takvih elemenata u seriji. Slično se postupa kad se ispravljanje, na pr. u Graetzovu spoju, vrši metalnim suhim ispravljačima, koji po elementu podnose samo nekoliko volta.

120. Kod *elektrolitičkih kondenzatora* aluminijska elektroda služi kao jedan (pozitivni) oblog kondenzatora, izolacioni sloj oko nje predstavlja sloj dielektrikuma, a sama tekućina zajedno sa drugom elektrodom od Al ili Cu, koja je obično odmah i posuda za tekućinu elektrolitičkoga kondenzatora, predstavlja drugi (negativni) oblog.

Kako se vidi, mora se kod priključka elektrolitičkih kondenzatora paziti na polaritet elektroda, pa se, redovito, ti kondenzatori i upotrebljavaju samo kod istosmjernih napona.

Elektrolitički kondenzatori izvode se i u obliku t. zv. suhih elektrolitičkih kondenzatora s elektrolitičkim vodičem vlažnim, ali ne više tekućim (na pr. od papira promoćena elektrolitičkom tekućinom; potpuno suhih elektrolitičkih kondenzatora nema, kao ni potpuno suhih galvanskih elemenata).

VJEŽBE UZ POGLAVLJE B):

23. Na termopar željezo-konstantan priključen je po sl. 58. dovodima a i b ukupnoga otpora $0,4 \Omega$ milivoltmetar G otpora a) 18Ω , b) 320Ω . Kod kojega iznosa mV instrumenta G treba staviti oznaku 600°C , ako termopar izvodeći po sl. 59. EMS, 33 mV ima kod 600°C otpor $1,6 \Omega$. [a) 29,7 mV; b) 32,8 mV]

24. Kod mjerenja otpora željezne žice promjera 0,5 mm i duljine 0,7 m uro njene u uljnu kupku dobiveni su iznosi $0,428 \Omega$ i $0,527 \Omega$ uz temperature uljne kupke 20°C i 70°C ; koliki su pripadni ρ u $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ i α po st. C. [0,12; 0,00463]

25. Koliki je približno otpor kod 35°C između dvije blize paralelne ravne elektrode površine $1,5 \text{ dm}^2$ i razmaka 0,6 cm uronjene u sumpornu kiselinu s vodljivošću i temperaturnim koeficijentom po tabeli I. (str. 131.). [0,00364 Ω]

26. U kojim će granicama trebati mijenjati regulacioni otpor R'' kod nabijanja akumulatorske baterije od 67 elemenata stalnom strujom 20 A iz mreže stalnoga napona 220 V, ako u toku nabijanja napon stezaljki po elementu poraste od 2,2 do 2,6 V. [3,63 Ω ; 2,29 Ω]

27. Neka se za bakar iz iznosa 0,00392 temperaturnoga koeficijenta otpora kod 20°C izvede izraz za α kod kojegod temperature $t^\circ\text{C}$. [$\alpha = 1/(235 + t)$]

28. Kod mjerenja po sl. 82. uz $E = 2,05 \text{ V}$ neka je s pomoću R_0 udešeno ravnotežje uz $MN = 41 \text{ cm}$. Kod pripadnoga mjerenja napona U između krajeva otpora

$R_N = 0,4 \Omega$ iz sl. 84. ravnotežje se postigne kod $MN_x = 39,6$ cm. Kolika je struja kroz R_N i kolika je pogreška $p\%$ ampermetra A, ako on pokazuje 5,00 A.

[4,95 A; $\approx +1\%$]

29. Mjereći mostom po sl. 79. uz $R = 10 \Omega$ bakreni magnetni namotaj nekoga stroja a) hlađen (20°C), b) nakon duljega pogona stroja (u pogonski vrućem stanju, kod prosječne temperature $t^\circ\text{C}$) postignuta su ravnotežja kod $a:b = 5,6$ i $a:b = 6,8$; naći otpore hladnoga i vrućega namotaja, te povišenje temperature $t - 20$ st. C (α za Cu v. na str. 131.).

[56 i 68 Ω ; 55 st. C]

30. Na bateriju sa $E = 36$ V i $R_u = 5 \Omega$ priključeni su u seriju otpor $R_1 = 28 \Omega$ i kombinacija paralelnih otpora $R_2 = 20 \Omega$ i $R_3 = 30 \Omega$; naći struje kroz R_1 , R_2 i R_3 , te napon stezaljki baterije.

[0,8; 0,48 i 0,32 A; 32 V]

31. Naći izolacioni otpor R'' (B-48.) kabela iz vj. 17. (str. 115.) pretpostavljajući da je vodljivost njegova dielektrikuma $\kappa = 10^{-12}$ S/cm.

$$\left[\text{Iz } U = - \int_{R_1}^R F \cdot dx \text{ sa } F \text{ nadenim po (117) izlazi } R'' = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\kappa l} \cdot \ln \frac{R_1}{R} = 0,568 \text{ M}\Omega \right]$$

32. Neka se nade ovisnost anodne struje I_a o anodnom naponu U_a za slučajeve elektronskih cijevi (dioda) kojima bi katoda i anoda bile: a) ravne paralelne plohe površine S i neznatnog razmaka d_0 , b) ravna žica duljine l i jednako dugi s njom koaksijalni valjak malena nutarnjeg polumjera r_0 . (Kod rješavanja primijeniti Poissonovu jednadžbu a) u pravokutnim koordinatama i b) u cilindričkim koordinatama po vj. 8. na str. 114., a kao rješenja diferencijalnih jednadžbi pretpostavljati $V = K_0 \cdot x^n$, odn. $V = K \cdot r^n$, sa K_0 i K konstantama i $x \leq d_0$, odn. $r \leq r_0$; uzeti V-A-s-m- ili V-A-s-cm-jedinice).

$$\left[\text{a) } I_a = 2,34 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{S}{d_0^2} \cdot U_a^{1,5} = k_0 \cdot U_a^{1,5}; \text{ b) } I_a = 14,66 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{l}{r_0} \cdot U_a^{1,5} = k \cdot U_a^{1,5} \right]$$

33. U sl. 65. neka je katoda ravna nit koaksijalna cilindričkoj anodi od glatkoga volframova lima, te neka U_a i I_a iznose 800 V, odn. 100 mA. Kolika će se toplina stvarati sekundno na anodi, te kolika je približno vanjska površina anode potrebna kod dopuštene anodne temperature 1000°C , ako se kao jedini bitni gubitak može uzeti isijavanje topline s vanjske površine anode, te ako kod naznačene temperature glatka površina volframa isijava 0,576 cal/(cm²·s).

[19,12 cal/s; 33,2 cm²]

34. Po definiciji jedinicu 1 r (rentgen) »doze« rentgenskih zraka karakterizira ona količina proizvedenih iona uzduha, pod normalnim prilikama tlaka i temperature, uz koju se kod struje zasićenosti izmjeri na svaki cm³ prostora među elektrodama naboj 1 Fr (A-54.); koji broj M stvorenih parova (jednovalentnih) iona uzduha odgovara jedinici 1 r.

[$M = 2,085 \cdot 10^9$]

35. Jakost rentgenskih zraka koje sekundno, odn. minutno, daju množinu 1 r (v. vj. 34.) označuje se sa 1 r/s, odn. sa 1 r/min; koliko bi r/s odn. r/min bila

jakost rentgenskih zraka u prostoru obujma 240 cm^3 između elektroda A i K u sl. 62. uz struju zasićenosti 10^{-10} A po sl. 63. $[0,00125 \text{ r/s} = 0,075 \text{ r/min}]$

36. Naći iznose predotpora za 3, 30 i 150 V iz sl. 74. i nuzotporā za 1,5, 6 i 30 A iz sl. 76. uz pretpostavku da instrument G daje puni otklon kod struje 0,005 A, odn. kod napona 0,1 V. $[580; 5980 \text{ i } 29980 \Omega; \frac{15}{299}; \frac{4}{299} \text{ i } \frac{1}{299} \Omega]$

37. Napon tinjčeva kondenzatora od 500 pF padne u 1 h sa 1500 na 1060 V. Naći R'' (B-48.) kondenzatora te κ njegova tinjca, koji neka ima $\epsilon' = 7$ i beskonačan specifički površinski otpor (A-112.). $[20,7 \text{ T}\Omega \text{ (A-43.)}; \kappa \approx 60 \cdot 10^{-18} \text{ S/cm}]$

38. Voltmetar otpora 3000Ω i ampermetar otpora $0,05 \Omega$ pokazali su a) kod nekoga mjerenja U-I-spojem za veće otpore 50,1 V i 1,0 A, b) kod nekoga drugoga mjerenja U-I-spojem za manje otpore 60,0 V i 5,02 A; naći mjerene otpore po približnoj formuli, odn. uz korekciju. $[a) 50,1 \text{ i } 50,05 \Omega; b) 11,952 \text{ i } 12 \Omega]$

39. U kojem će otporu R_v izvor sa $E = 100 \text{ V}$ i $R_u = 2 \Omega$ izvoditi korisni učin 800 W? Uz koji η ? U kojem bi se otporu proizvelo najviše učina i koliki bi bio taj učin i pripadni η ? $[8 \text{ i } 0,5 \Omega \text{ uz } \eta = 0,8 \text{ i } 0,2; 2 \Omega \text{ i } 1250 \text{ W uz } \eta = 0,5]$

40. Koliki će biti napon U_s između krajeva otpora R_s u sl. 93., te struja I_s kroz taj otpor, uz pretpostavku da baterija B ima $E = 24 \text{ V}$ i $R_u = 0,2 \Omega$ i da otpori R_1 do R_5 iznose redom 6; 3; 9; 12 i 15 Ω . $[3,75 \text{ V}; 0,25 \text{ A}]$

41. Fe-Ni-akumulator nabijan 6 h strujom 15 A uz prosječni napon stezaljki 1,7 V izbio se u 8 h strujom 10 A uz prosječni napon stezaljki 1,2 V; koliki su mu ξ i η . $[0,89; 0,63]$

42. Koliko se Zn ($A = 65,4$; $n = 2$) teoretski potrošilo u galvanskom elementu koji je dao 60 Ah. $[73,2 \text{ g}]$

43. Koliko će Al ($A = 27,0$; $n = 3$) proizvesti u 24 h tvornica aluminija koja radi sa 30 serijski spojenih peći napona 5,4 V i struje 20 kA i koliki će biti teoretski potrošak kWh po kg proizvedenoga aluminija.

$[4836 \text{ kg}; 16,1 \text{ kWh/kg (praktički treba računati s oko } 23 \text{ kWh/kg)}]$

44. Ako su $0,46 \cdot 10^{-3}$ i $0,70 \cdot 10^{-3} \text{ (cm/s)}$: (V/cm) gibljivosti iona Na^+ i Cl^- kod 20°C , kolika je vodljivost $\frac{1}{1000}$ -normalne otopine NaCl, t. j. otopine koja po litri sadrži $\frac{1}{1000}$ »mola« ili 0,05846 g NaCl (uzimajući u obzir da se kod vrlo razrijeđenih otopina jakih elektrolita svi molekuli mogu smatrati disociiranim u ione i da se mogu zanemariti nepravilnosti zbog međusobnih utjecaja ionā otopine).

$[112 \mu\text{S/cm}]$

45. Naći najveće dopuštene iznose jakosti polja i gustoće struje u tekućini iz prethodne vježbe uz pretpostavku da sekundno proizvedena strujna toplina ne smije prekoračiti $0,4 \text{ cal/cm}^3$.

$[122,3 \text{ V/cm}; 13,7 \text{ mA/cm}^2]$

46. Kod mjerenja brzine taneta po B-49. u rasporedaju po sl. 109. izbijanje kondenzatora kapaciteta $C = 0,5 \mu\text{F}$ kroz otpor $R = 1000 \Omega$ započinje se prekidom spojne vrpce 1, a zaustavlja se prekidom spojne vrpce 2. Kolika je brzina taneta ako

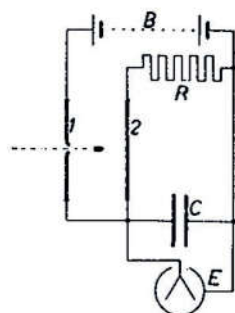
razmak 1-2 iznosi 10 cm, a elektrostatski voltmetar E pokaže početni napon $U_1 = 220$ V i konačni $U_2 = 166$ V. [710 m/s]

47. Neka se odrede struje I_0 do I_6 kod rasporedaja po sl. 110.

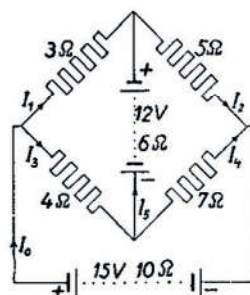
[1,0294; -0,1346; 1,0221; 1,1640; 0,0073 i 1,1567 A]

48. Kuhalo od 300 W zagrije u 13,5 min 500 g vode od 14°C do vrelišta, a za vrelu vodu isparuje brzinom 7,2 g/min. Naći stepene djelovanja kuhala kod zagrijavanja i kod isparivanja (toplina isparivanja vode: 539 cal/g). [0,74; 0,90]

49. Koliko će ugljena kaloričke vrijednosti 4000 kcal/kg trošiti godišnje centrala koja uz godišnju proizvodnju od $30 \cdot 10^6$ kWh radi s ukupnim prosječnim $\eta = 0,16$. [40330 tona]



Sl. 109.



Sl. 110.

50. U hidroelektričkoj centrali s padom vode 20 m turbina stepena djelovanja 0,85 tjera generator stepena djelovanja 0,92, koji daje učin 700 kW; a) koliko m^3/s mora biti priliv vode rezervoaru, da razina vode u ovome ne pada; b) za koliko bi pala razina vode u rezervoaru površine $0,4 \text{ km}^2$, ako bi priliv vode izostao 1 h.

[4,56 m^3/s ; 4,10 cm]

51. Koliko će učina i struje trošiti kod napona 220 V i punoga opterećenja radionica sa 8 sijalica po 100 W i 2 motora koji kod $\eta = 0,88$ daju po 5 KS. Koliko će kWh potroška iskazivati mjesečni račun centrale ako su sijalice ukopčane po 3 h, a motori po 8 h dnevno (računati mjesečno 25 radnih dana).

[9,16 kW; 41,7 A; 1733 kWh]

52. Koliki (uz zanemarene gubitke i uz gubitke jednake 20% privedenog učina) mora biti učin grijala koje zagrijava od 17°C na 65°C vodu s jakošću strujanja 0,6 litara na minutu.

[2 kW; 2,5 kW]

53. Koliko će struje trošiti uz napon 220 V motor sa $\eta = 0,90$ dižući 10 tona tereta brzinom 0,4 m/s.

[198,3 A]

54. Priključen preko voda duljine 60 m s vodičima prereza 6 mm^2 na bateriju od 84 akumulatorska elementa sa $E_1 = 2$ V i $R_1 = 0,005 \Omega$ (serijski) motor otpora $0,45 \Omega$ uzima struju 20 A; naći: a) napon stezaljki U baterije, b) napon stezaljki U_1 motora, c) učin N_1 što ga motor prima, d) protu-EMS E' motora, e) struju I_k u slučaju da motor bude mehanički zaustavljen, f) pokretački otpor R, uz pretpostavku da struja kod pokretanja ne snije nadvisiti 30 A.

[159,6 V; 152,6 V; 3052 W; 143,6 V; 137,7 A; 4,38 Ω]

55. Kod Bunsenova fotometra jednakost rasvjetâ postigne se uz sijalicu poznate jakosti 10 cd u daljini 60 cm i ispitivanu sijalicu jednolike jakosti u svim smjerovima u daljini 107,5 cm; naći J i Φ ove potonje. [32,1 cd; 403 lm]

56. Kombinacija selenskoga fotoelementa površine 10 cm^2 s galvanometrom otpora 50Ω ima osjetljivost $475 \mu\text{A/lm}$. Ako uz okomitu rasvjetu fotoelementa sijalicom udaljenom 2 m instrument pokazuje $100 \mu\text{A}$, kolika je jakost svjetlosti sijalice J u pripadnom smjeru. Koliku bi struju pokazao instrument, ako bi se fotoelement tako nagnuo da ga svjetlost zgađa pod kutom upadanja 30° . [842 cd; $86,6 \mu\text{A}$]

57. Sijalica S iste jakosti J u svim smjerovima obješena 6 m nad horizontalnim tлом neka daje još $2,4 \text{ lx}$ rasvjete tla 8 m daleko od nožišta S' sijalice; naći J i Φ , te potrošak N električkoga učina sijalice, ako ona daje 17 lm/W , kao i rasvjetu tla oko S' . [400 cd; 5030 lm; 296 W; $11,1 \text{ lx}$]

58. Koliki predotpor mora imati kod priključka na 60 V lučnica za 10 A kojoj luk kod navedene struje treba napon 38 V i svijetli srednjom sfernom jakošću 836 cd; koliko se učina troši i koliko se topline stvara u predotporu i koliki je omjer ξ (B-82.) lučnice. [2,2 Ω ; 220 W; 52,6 cal/s; $17,5 \text{ lm/W}$]

59. Priključen na zemlju Z i uzastopce na vodiče P i N voda pod naponom 220 V voltmetar otpora $0,1 \text{ M}\Omega$ pokaže 25, odn. 15 V; naći izolacione otpore R_1 , R_2 i R pojedinih vodiča i cijeloga voda prema zemlji Z (Frischova metoda). [1,2; 0,72 i 0,45 $\text{M}\Omega$]

60. Koji najmanji presjek moraju imati vodiči dvopolnoga voda iz Cu ($\kappa = 56 \text{ S}\cdot\text{m/mm}^2$) za prenos 10 kW učina na daljinu 0,5 km, uz napon na početku voda 220 V, ako gubici prenosa ne smiju premašiti 10% raspoloživoga učina. [36,9 mm^2]

61. Paralelna kombinacija dinama unutarnjega otpora $0,15 \Omega$ i EMS 240 V te akumulatorske baterije unutarnjega otpora $0,35 \Omega$ i EMS 236 V daje u mrežu redom struje: 80; 40; 10 i 0 A; kolika je u ova četiri slučaja struja baterije (pozitivna ako se baterije izbija, a negativna ako se nabija). [$+ 16$; $+ 4$; $- 5$ i $- 8 \text{ A}$]

62. Naći E_1 i E_2 paralelnih generatora G_1 i G_2 s otporima $0,1$ i $0,15 \Omega$, koji opterećeni u omjeru svojih nominalnih učina 40 i 20 kW hrane mrežu napona 440 V strujom 132 A. Ako uz isti mrežni napon opterećenje padne na 40 kW, koje E_1 i E_2 treba udesiti da cijeli teret preuzme G_1 . [448,8 i 446,6 V; 449,1 i 440 V]

63. Neke se odrede (metodom superpozicije) struje triju paralelnih generatora sa EMS 250, 245 i 240 V i unutarnjim otporima $0,25$; $0,15$ i $0,10 \Omega$, ako priključeni potrošač ima 2Ω . [48,8; 48,0 i 22,0 A]

64. Koliki bi u sistemu triju vodiča iz B-60., uz jednake napone $U_1 = U_2 = 220 \text{ V}$ na početku voda, kraj potrošačkih struja I_1 i I_2 kao u B-60. bili naponi U' i U'' na svršetku voda. [211,5 V; 225,3 V]

C) POJAVI MAGNETSKIH POLJA

I) VEKTOR $\mathcal{H}$ U VAKUUMU; ZAKON PROTJECANJA

Magnetska polja kao pratioci gibanih električkih naboja; nepostojanje »magnetskih masa«. Indikatori magnetskih polja; magnetske silnice. Magnetometrički pokusi. Definicija vektora $\mathcal{H}$ jakosti polja u vakuumu. Mjerenja $\mathcal{H}$ Hallovim generatorom. Zakon protjecanja u vakuumu. Magnetski potencijali i magnetski naponi. Mjerilo magnetskih napona. Primjena zakona protjecanja na proračunavanja jakosti polja. Biot-Savartov zakon. Prva Maxwelllova osnovna jednačba elektromagnetskoga polja.

1. Dosad smo pobliže razmatrali pojave strujne topline i pojave elektrolize i u njima smo upoznali popratne fenomene provodnih električkih struja, odn. gibanih električkih naboja, koji su se dali svesti na posljedice mehanizma električkih strujanja što se uz određene preduvjete javljaju u samom toku tih strujanja, i kod neispunjenih tih preduvjeta mogu i izostati (na pr. po B-15. elektrolitičkih učinaka nema kod kovnoga vođenja struje, a po B-27. kod vodiča u supravodljivom stanju ne dolazi do stvaranja strujne topline).

Naprotiv za treću kategoriju popratnih pojava strujanja električkih naboja, naime za *magnetske učinke* takvih strujanja, koje smo u toku dosadašnjih razlaganja samo spominjali, a sada ćemo ih potanje proučavati, može se reći: da se ne dadu neposredno izvesti iz mehanizma električkih strujanja, da neizbježno prate takva strujanja, te da se primjećuju i izvan samoga toka tih strujanja kao naročita stanja prostora. Ovo se potonje i tako označuje, da se kaže da su s električkim strujanjima uvijek povezana *magnetska polja* tih strujanja (slično kako se već i uz mirne električke naboje smatraju povezana električka polja).

2. Započinjući pobliže proučavanje magnetskih polja bit će od interesa najprije spomenuti na koje se sve načine takva polja dadu realizirati. U tom pogledu s čisto izvanjskoga gledišta mogu se — pored malo prije navedenoga ostvarivanja magnetskih polja provodnim strujama ili gibanim električkim nabojima, te također već istaknutoga (A-99.) ostvarivanja magnetskih polja pomačnim strujama ili vremenskim mijenjanjima električkih polja — navesti i *magneti*.

Kod t. zv. permanentnih magneta, t.j. na osobiti način uzbuđenih (točnije govoreći: tim da su bili izvrgnuti djelovanju izvanjskoga magnetskog polja trajno više ili manje »magnetiziranih«) štapova, potkova, iglica itd. od željeza i nekih njegovih rudača (na pr. magnetita Fe_3O_4), od niklja, od kobalta i od nekih drugih u magnetskom pogledu željezu sličnih t. zv. feromagnetičkih tvari, magnetski učinci, često vrlo intenzivni, bili su čak najprije upoznati (već u starom vijeku). Naprotiv je do Oerstedova otkrića magnetskih učinaka provodnih struja,

koje je i same uspjele proizvesti istom početkom 19. stoljeća, došlo tek g. 1820. A pojam je pomaćnih struja još i kasnije razrađen od Maxwella.

No spominjući, iako prethodno samo ukratko, magnete, treba odmah dodati da je njihov način djelovanja različit od magnetskih učinaka provodnih električkih struja samo po vanjskom rasporedu primijenjenih sredstava, odnosno da se djelovanja magneta dadu svesti na t. zv. elementarne struje što trajno struje unutar magneta; prema tomu nema potrebe zamišljati, kako se to u starijoj teoriji činilo, magnete kao sijela nekih naročitih agensa, nekih »množina magnetizma«, analognih »množinama elektriciteta« ili »električkim nabojima«, nego je dovoljno uzimati da se i kod magneta, u zadnjoj liniji, radi o učincima provodnih struja, te da se i učinci izazvani magnetima mogu zamisliti izazvanima od provodnih struja, odnosno općenitije od gibanih električkih naboja. A isto i učinci vanjskih magnetskih polja na magnete mogu se svesti na djelovanja tih polja na provodne struje ili gibane naboje ekvivalentne tim magnetima.

Preostaju dakle samo dva stvarno različita načina proizvodjenja magnetskih polja: provodnim strujama ili gibanjem električkih naboja i pomaćnim strujama ili vremenski promjenljivim električkim poljima.

3. Kao dalju zadaću, koja se prirodno nameće, možemo postaviti pitanje vanjskih manifestacija magnetskih polja, dakle pojava po kojima se magnetska polja dadu konstatirati, te po mogućnosti mjeriti.

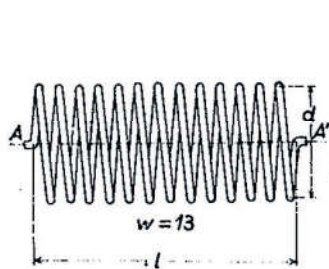
Klasificirane s čisto vanjskoga gledišta manifestacije magnetskih polja mogu se označiti kao vrlo raznolične; tako je jedna od njih, utjecaj magnetskog polja na otpor električkih vodiča, poimence bizmuta, već bila spomenuta u B-28., a iz fizike su poznati utjecaji magnetskih polja na optičke pojave (na pr. zakretanje ravnine polarizacije linearno polarizirane svjetlosti u »optički aktivnim« supstancijama).

Za studij elektrotehnike dovoljno je međutim svratiti pozornost na dvije najosnovnije manifestacije: a) na sile koje magnetska polja izvode na gibane električke naboje, a prema tomu specijalno i na vodiče protjecane provodnim strujama, te b) na pojave t. zv. elektromagnetske indukcije, koji se opažaju kod vodiča gibanih u magnetskim poljima (a u daljoj konsekvenciji i kod mirnih vodiča u vremenski promjenljivim magnetskim poljima). Pri tomu treba dodati da će se pojavi pod b), iako se na prvi pogled mogu činiti potpuno samostalni, dati u toku kasnijih razmatranja predložiti u zadnjoj liniji kao posljedica pojava spomenutih pod a).

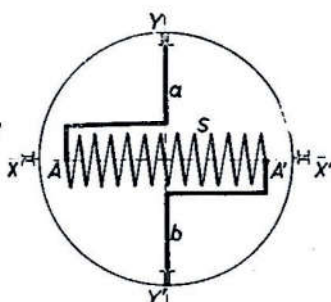
4. Ne ulazeći još u kvantitativne odnose zadovoljimo se najprije time da, iskorisćujući orijentacione učinke magnetskih polja na vodiče prikladnoga oblika protjecane strujom, utvrdimo usmjereno djelovanje u svakoj točki tih polja. Drugim riječima: da utvrdimo vektorski karakter magnetskih polja.

Kako ćemo doskora i pobliže izvesti za magnetska polja može se uzeti da djeluju silama na pojedine elemente duljine linearnih strujom protjecanih vodiča,

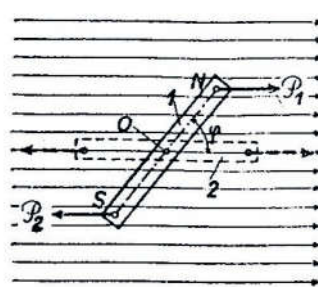
tako da se ukupno djelovanje na zatvorene krugove struje ili konačne dijelove takvih krugova, na pr. na kružne, eliptične, pravokutne itd. pojedinačne zavoje, ili cijele »zavojnice« ili »svitke« s više jedan uz drugi gušće ili rjeđe nanizanih i redom istom strujom protjecanih takvih zavoja (sl. 111.), može uvijek shvatiti kao skupni učinak silâ na njihove pojedine elementarne dijelove. Kako ćemo lako izvesti upoznavši zakon djelovanja za pojedine elemente vodiča, naročito jednostavno manifestira se taj skupni učinak kod pojedinačnih zavoja ili svitaka od takvih zavoja u homogenim (svagdje unutar promatranoga prostora jednolikim; uspor. A-58.) magnetskim poljima: učinci polja na zavoje i svitke ispoljuju se određenim momentima



Sl. 111.



Sl. 112.



Sl. 113.

vrtnje. Pod utjecajem tih momenata vrtnje zavoji ili svici, ako su slobodno gibljivi u svim smjerovima prostora, orijentiraju se svojom osi (dakle osi AA' kod svitka u sl. 111.) u svakoj točki polja u posve određeni smjer, koji ćemo zvati smjerom magnetskoga polja na istraživanom mjestu. Više precizirano, mi ćemo spomenuti smjer računati u takvom smislu AA' poljem orijentiranoga svitka da smisao obilaženja struje zavojima toga svitka i smisao AA' stoje u analognom odnosu kao smisao vrtnje i smisao napredovanja običnoga (t. zv. desnoga) vijka.

5. Praktički bi se pokus orijentiranja svitaka protjecanih strujom izveo na pr. napravom po sl. 112. sa svitkom S od vrlo mnogo zavoja, montiranim slobodno vrtivo u indiferentnom ravnotežju oko međusobno okomitih osi XX' i YY'. Protjecan strujom iz prikladnoga izvora privedenom dovodima a i b ovakav svitak, suponiran tako malen da se polje u prostoru svitka može smatrati praktički homogenim, orijentirat će se na svakom mjestu istraživanoga magnetskoga polja u određeni smjer, nazvan smjerom polja.

Međutim već je u C-2. bila istaknuta činjenica da se i učinci vanjskih magnetskih polja na magnete imaju smatrati u zadnjoj liniji učincima tih polja na elementarne struje unutar magneta, i ta tvrdnja dalje razrađena dopušta da se u misli pojedini magneti nadomjesto određenima strujom protjecanim svicima, ekvivalentnima tim magnetima, kao i obrnuto određeni strujni svici pripadnima ekvivalentnim magnetima.

Prema tomu u principu izlazi na isto, no praktički je mnogo udobnije, umjesto naprava po sl. 112. sa strujnim svicima, koje zahtijevaju još i naročite izvore struje,

upotrebljavati kao indikatore smjera magnetskih polja permanentne magnetiće, t. zv. magnetske iglice, dovoljno gibljive da se mogu slobodno orijentirati u svim smjerovima prostora. Ovakvi magnetići predstavljaju u konačnoj konsekvenciji svitke kojima se struja sama od sebe trajno podržava, i oni se u magnetskom polju orijentiraju svojom dužinom u smjer polja.

Točnije govoreći, može se uzeti da će na magnetiće postavljen u ma kakvom položaju u homogeno magnetsko polje djelovati po sl. 113. dvije sile $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ određenih hvatišta N i S, te iste jakosti P . Prva od tih sila djelovat će u smislu polja, a druga *nasuprot* smislu polja. Tako treba očekivati da će se pod utjecajem momenta vrtnje proizvedenoga spomenutim parom sila magnetiće, uz dovoljnu slobodu gibanja, svojom »magnetskom osi« (t. j. spojnicom hvatišta S i N, zvanih također »južnim«, odn. »sjevernim« *polom* magnetića, jer se u magnetskom polju naše zemlje magnetići vrtivi oko vertikalne osi orijentiraju uvijek tako da sa N pokazuju po prilici prema sjeveru, a sa S po prilici prema jugu) postaviti u smjer magnetskoga polja, i to tako da smisao $\vec{SN}$ orijentiranoga magnetića, kako je točka-crtkano naznačen u sl. 113., odgovara smislu orijentiranja AA' svitka iz sl. 111. po konvenciji iz C-4.

6. I doista se u praksi za ustanovljivanje postojanja i smjera djelovanja magnetskih polja u ispitivanim prostorima najčešće upotrebljavaju baš magnetići; što smo u razmatranja uveli magnete već u C-2., još prije nego li se pružila prilika za potanje raščišćivanje odnosa u magnetiziranim tvarima, bilo je baš i učinjeno više zbog naročite prikladnosti magnetića kao indikatora magnetskih polja, nego zbog obzira prema magnetima kao kudikamo najdulje poznatim stvaraocima magnetskih polja i indikatorima takvih polja.

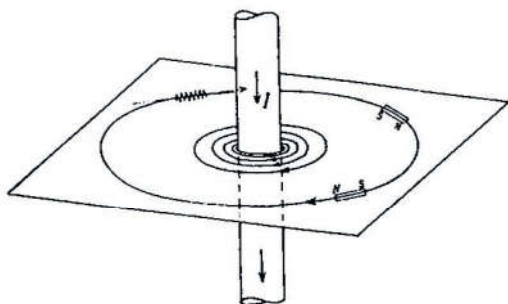
Magnetska polja općenito ma kakvoga smjera ispitivala bi se dakako magnetskim iglicama »kardanski montiranim« poput svitka u sl. 112., dakle takvima koje se slobodno mogu orijentirati u ma koji smjer prostora, te dovoljno male-nima da se ispitivano polje u prostoru ispitne iglice može smatrati praktički homogenim. A za polja s horizontalnim smjerovima djelovanja dovoljne će biti i magnetske iglice vrtive oko vertikalne osi, kakve se susreću na pr. u kompasima.

7. Još jednostavnije, iako samo vrlo grubo, postizava se, kako je iz elementa fizike poznato, orijentacija sitnih magnetića upotrebom željezne pilotine razasute po horizontalnoj podlozi: manje ili više dugoljaste čestice pilotine samim se djelovanjem istraživanoga magnetskog polja magnetiziraju i uglavnom svojom dužinom orijentiraju u nizovima, koji približno predstavljaju *magnetske silnice*, t. j. linije koje u svakoj točki svojim smjerom, odn. smjerom svoje tangente, naznačuju smjer djelovanja magnetskoga polja (dakle linije analogne električkim silnicama, uvedenim u A-31.).

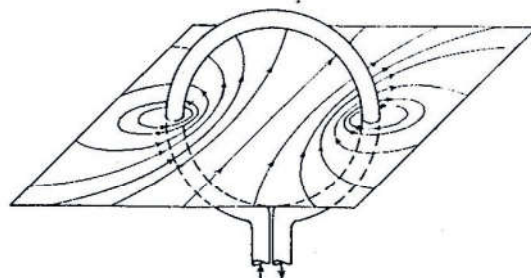
8. Imajući na raspolaganju strujne svitke i magnetske iglice kao indikatore smjera magnetskih polja lako bismo ispitivali magnetska polja vodiča različitoga

oblika protjecanih strujom; evo. rezultata za nekoliko klasičnih jednostavnijih takvih slučajeva.

Po sl. 114. u polju vrlo dugoga ravnoga vodiča protjecanog strujom sitni strujni svici ili male magnetske iglice orijentiraju se svagdje tangencijalno na kružnice koaksijalne vodiču. Te kružnice su dakle magnetske silnice u promatranom slučaju; grubo realizirane metodom željezne pilotine one su markirane i na sl. 116. nizovima čestica pilotine oko crne mrlje, koja predstavlja trag vodiča.

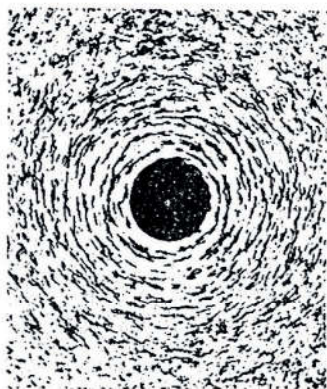


Sl. 114.

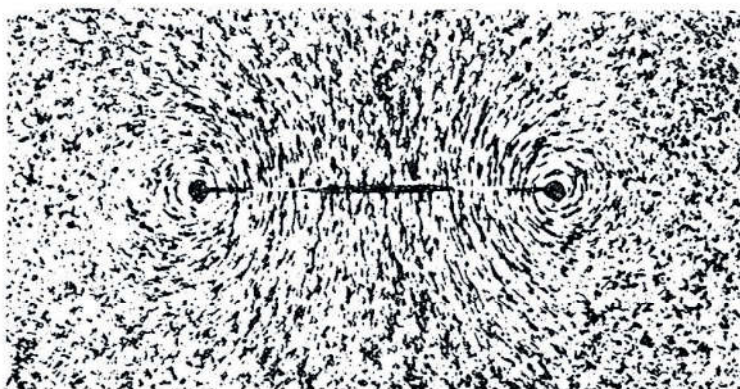


Sl. 115.

Za smisao djelovanja polja dugih ravnih vodiča, odn. za smisao obilaženja koji treba pripisati kružnim silnicama što takve vodiče okružuju, lako bi se strujnim svicima i magnetskim iglicama, po dogovoru o smislu računanja smjera magnetskih polja iz C-4. i C-5., utvrdilo ovo pravilo: ako struja na sl. 114. teče vodičem odozgo prema dolje, za motrioca koji gleda u smjeru struje silnice će teći u



Sl. 116.



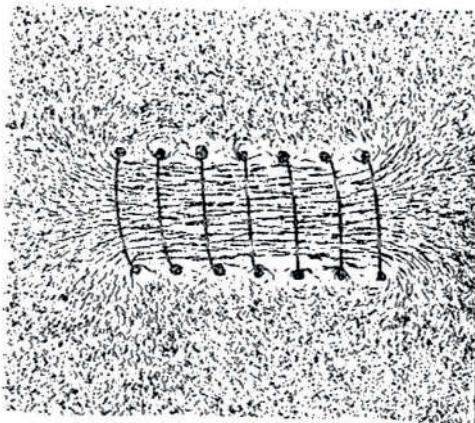
Sl. 117.

smislu obilaženja kazala na uri (kako je to na samim silnicama u sl. 114. naznačeno). Može se također reći: struja u smjeru palca desne ruke izvodi magnetsko polje u smislu savinutih prstiju te ruke.

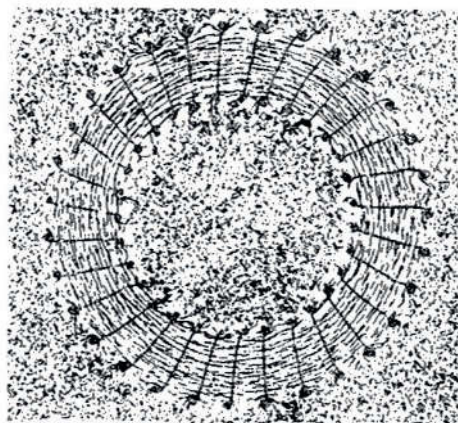
Kod zakrivljenih vodiča, na pr. kružnih vodiča (i sličnih strujom protjecanih »petlji« od jednoga zavoja), po principnoj sl. 115. i njezinoj gruboj realizaciji željeznom pilotinom u sl. 117., magnetske silnice doduše nisu više kružnice, ali se,

obuhvatajući vodič, zatvaraju i u ovakvim slučajevima same u sebe: silnice i vodič, odn. silnice i tok struje međusobno su »zakvačeni« (»povezani«) kao karike lanca. (Pokusi i snimke za sl. 116., kao i za slične sl. 117., 118. i 119., izvedeni su od pisca).

Slične su prilike i kod svitaka s povoljnim zavojima: tu je također svaka magnetska silnica zakvačena s tokom struje, odn. obuhvaća jedan ili više zavoja. Pri

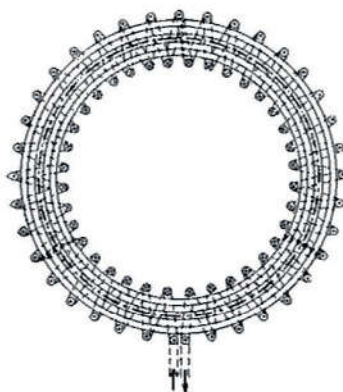


Sl. 118.



Sl. 119.

tomu kod svitaka s gustim zavojima malenoga promjera spram duljine svitka kudikamo najveći dio magnetskih silnica ostaje zakvačen s praktički svim zavojima, tako da silnice prolaze u gustom paralelnom svežnju unutrašnjošću svitka, razilazeći se i zatvarajući se same u sebe u širokom okolnom prostoru svitka. Polje je dakle u takvim slučajevima praktički homogeno, i relativno vrlo jako, samo u unutarnjosti svitka, i naglo slabi kod prelaza u vanjski prostor (sl. 118.).



Sl. 120.

Ako je svitak s vrlo gustim zavojima namotan toroidalno (prstenasto), tako da se početak i svršetak svitka međusobno sastaju, magnetske silnice uopće idu cijelim svojim tokom unutaršnjošću svitka i svaka je silnica zakvačena sa svim zavojima ovakvoga svitka; v. pripadnu realizaciju silnica željeznom pilotinom u sl. 119. po shemi u sl. 120. (u sl.

120. znači $\otimes$ struju u smislu od naprijed prema natrag, a $\odot$ struju od natrag prema naprijed; pomisliti na »pera« i »šiljak« strjelice koja bi se gibala u smjeru struje).

9. Iz navedenih rezultata o magnetskim poljima provodnih struja, odn. gibanih naboja, kao i iz rezultata navedenih u A-99. o magnetskim poljima pomaćnih struja, odn. vremenski promjenljivih električkih polja, te imajući u vidu činjenicu da se i magnetizam magneta daje svesti na elementarne struje ili gibane naboje u njima, prema čemu nema opravdanja pretpostavljati egzistenciju tobožnjih

»množina magnetizma«, možemo povući ovu osnovno važnu konsekvenciju: magnetska polja su *vektorske* naravi i silnice tih polja su uvijek *same u sebe zatvorene linije*; drugim riječima: postoje samo *vrtilozi* magnetskih polja, koji su uvijek zakvačeni bilo s provodnim strujama ili gibanim nabojima, bilo s pomačnim strujama ili promjenljivim električkim poljima.

Dok elektrostatska polja predstavljaju po A-61. i A-62. polja s *izvorima* (silnice im »izviru« u pozitivnim električkim nabojima, a »poniru« u negativnim) i *bez vrtloga* (ima također *vrtiložnih* električkih polja, no ta ćemo istom kasnije upoznati), magnetska polja su baš obrnuto polja *bez izvora* i s *vrtilozima* (magnetska polja s izvorima ne ćemo čak uopće ni susresti).

10. Za dalje upoznavanje magnetskih polja potrebno će biti strujne svitke ili magnetske iglice, mjesto da ih upotrebljavamo kao jednostavne indikatore smjera magnetskih polja, kombinirati u naprave koje omogućuju prosuđivati intenzitet spomenutih polja. U tu svrhu umjesto u svaki smjer slobodno pomičnih strujnih svitaka ili iglica zamišljat ćemo svitke ili iglice prikladno elastično montirane, tako da će se iz elastičnih naprezanja pripadnih naprava upotrebljivanih na određeni način na različitim mjestima nekoga magnetskog polja moći zaključiti na vrijednosti intenziteta toga polja na tim mjestima.

Ako se na pr. uzme mala magnetska igla iz sl. 113. u položaju 1 s magnetskom osi $\vec{SN}$ pod kutom φ prema smjeru magnetskih silnica, odn. smjeru magnetskoga polja, kod razmaka a polova N i S bit će na iglu proizvedeni moment vrtnje M obzirom na os O okomitu na ravninu kuta φ očito

$$M = P \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin \varphi + P \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin \varphi = P \cdot a \cdot \sin \varphi \quad (138)$$

i prema tomu mogu se kod upotrebe iste igle zakrenute za isti kut φ na različitim mjestima magnetskih polja dobiveni momenti vrtnje M , veličine relativno lako izmjerive na pr. protumomentom vrtnje elastičnoga pera, uzeti za prvi čas kao mjerila relativnih iznosa intenziteta polja na spomenutim mjestima.

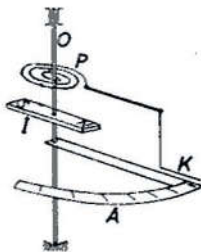
Kao određeni uvijek isti kut φ zakreta igle najjednostavnije je pretpostaviti kut 90° , kod kojega $\sin \varphi$ postaje jednak 1 i moment vrtnje M poprima maksimalni iznos:

$$M_0 = P \cdot a \quad (139)$$

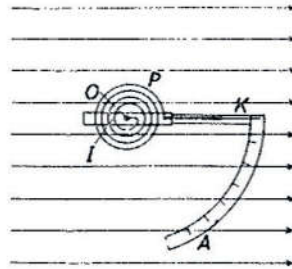
Praktički bi se onda tako postupalo da se igla I, na koju su po sl. 121. pričvršćeni spiralno pero P s kazaljkom K i skala A za očitavanje zakreta pera prema igli, najprije pusti da se orijentira posve slobodno uz nenapeto pero, dakle uz kazaljku K na početnom položaju skale A, svojom magnetskom osi $\vec{SN}$ u smjer polja (sl. 122.a)); nakon toga dovela bi se igla I, uz fiksiran smjer njezine osi vrtnje O, napinjući pero P zakretom kazaljke K za neki kut α prema igli, veći ili manji

već prema intenzitetu djelovanja na iglu, u položaj okomit na smjer polja (sl. 122.b)). Kraće rečeno, igla bi se zakrenula za kut 90° , a kazaljka K prema svomu položaju u sl. 122.a) za kut $90^\circ + \alpha$, a prema igli I i skali A za kut α . Taj se pak kut α , očitao na A, može prema prije rečenom uzeti kao prethodna mjera jakosti istraživanih magnetskih polja.

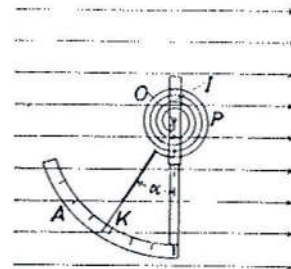
11. Pomislimo sada da opisanom napravom (nazovimo je magnetometar), ili sličnom napravom koja bi umjesto s iglicom bila snabdjevena sa svitkom protjecanog strujom, podvrgnemo ispitivanju intenzitete magnetskih polja u okolici ma kako prostorno raspoređenih krugova struje, odn. njihovih dijelova, na pr. ravnih i zakrivljenih vodiča, svitaka sa zavojima različitoga oblika i veličine i sl.



Sl. 121.



Sl. 122.a)



Sl. 122.b)

Rezultat ovakvih ispitivanja bio bi, da kod određenoga prostornoga rasporeda toka struje određene jakosti I magnetsko polje te struje varira intenzitetom na posve određeni način od točke do točke, no tako da odnosi prostorne raspodjele intenziteta polja ostaju neporemećeni kod promjena jakosti struje I u tom smislu što na pr. kod podvostručene, potrostručene itd. jakosti struje I i pripadni kutovi zakreta kazaljke magnetometra postaju za isto mjesto polja također dvostruki, trostruki itd.

12. Sve to daje nam opravdanje da ustvrdimo: magnetsko polje provodne struje tokom dane prostorne raspodjele kao *cjelina* određeno je *jakošću* ove struje i *proporcionalno* je toj jakosti.

No ako su tako, po definiciji, magnetska polja provodnih struja u cjelini dovedena u razmjernost sa strujama koje ih uzbuđuju, za karakterizaciju intenziteta tih polja u *pojedinih točkama* njihova postojanja očito treba uzeti u obzir i prostorne relacije ispitivanoga mjesta prema elementima toka struje koja polje uzbuđuje.

Prema tomu će se osobito jednostavno dati karakterizirati ona magnetska polja kod kojih se spomenuti prostorni odnosi dadu lako pregledati, i lako praktički više ili manje približno realizirati.

Takav slučaj naročito predstavljaju magnetska polja unutar svitaka s jednolikim i jednoliko gustim zavojima, uz uvjet da se radi o ravnim svicima po sl. 111. duljine l izvanredno velike (teoretski beskonačno velike) prema dimenzijama zavoja, ili o dugim prema promjeru zavoja i prstenasto namotanim svicima po sl.

120., kojima se krajevi sastaju. Po sl. 118. već i u svicima s malim brojem rijetkih zavoja magnetsko polje je praktički homogeno u cijelom unutarnjem prostoru svitka, osim u blizini krajeva, gdje se magnetske silnice prelazeći u vanjski prostor naglo razilaze. A pogotovo se mogu očekivati, zbog zanemariva utjecaja blizine krajeva, homogena magnetska polja u gotovo cijeloj unutarnjosti vrlo dugih ravno protegnutih svitaka s relativno, prema duljini svitka, malim i vrlo gustim zavojima, odn. u unutarnjosti svitaka s malim gustim zavojima prstenasto namotanima po sl. 120., gdje pripadni svitak krajeva uopće ni nema.

13. Međutim i apstrahirajući od navedenih činjenica mogle bi se već iz razloga simetrije specijalno kod svitaka s gustim jednoliko raspoređenim kružnim zavojima, i to vanredno dugih, prema promjeru zavoja, ravno protegnutih kao i prstenastih takvih svitaka, očekivati jednolike jakosti magnetskog polja uzduž osi ravnih ili srednjih linija (poput one točka-crtkano naznačene u sl. 120.) prstenastih svitaka. A smjerovi tih polja mogli bi se očekivati u smislu osi, odn. tangenata srednjih linija, spomenutih svitaka.

Kako se pak kod toga pomicanja uzduž osi, odn. srednje linije, kao veza jednoliko jakoga polja nekog svitka sa svitkom kao uzбудiteljem toga polja dađe jedino navesti svagdje uzduž svitaka isti broj zavoja po jedinici duljine svitaka protjecanih istom strujom, to ne će biti neopravdano ako se za karakterizaciju intenziteta magnetskih polja uzduž osi ili srednje linije kod promatranih ravnih ili prstenastih svitaka uvede produkt $w_1 I$ broja zavoja w_1 po jedinici duljine svitka s jakošću struje I što teče redom zavojima svitka.

Ovo je pogotovo opravdano jer se, kako i pokusi pokazuju, uz pretpostavljene prilike odnosi unutar spomenutih svitaka mogu smatrati takvima da ni promjer zavoja ne ulazi u račun, nego je samo bitan umnožak broja zavoja po cm duljine svitka sa strujom kroz te zavoje, dakle ukupno »obloženje« strujom po cm duljine svitka, bez obzira na to da li je ono izvedeno na pr. strujom 4 A kod gustoće namatanja 25 zavoja po cm duljine svitka ili strujom 2 A kod 50 zavoja po cm, ili slično.

14. Prema tomu može se, uzevši u obzir i vektorsku narav magnetskih polja, svakoj točki polja na osi (odn. srednjoj liniji) netom promatranih svitaka pridijeliti neki vektor $\mathcal{H}$, zvan *vektor jakosti magnetskog polja*, definiran a) po *smjeru* onim smislom obilaženja duljine svitka koji prema smislu obilaženja struje zavojima svitka stoji u istom odnosu kao smisao napredovanja prema smislu vrtnje desnoga vijka (baš u tom smislu i orijentira se svojom magnetskom osi $\vec{SN}$ slobodno gibljiva magnetska iglica), i b) po *iznosu* veličine $H = w_1 I$, koja se može također izraziti formulom:

$$H = \frac{w \cdot I}{l} \quad (140)$$

gdje w znači ukupni broj zavoja po cijeloj duljini l promatranoga svitka (odn. općenitije: ako je w broj zavoja na l jedinica duljine svitka), a wI znači »amperzavoje« AZ (produkt broja zavoja w cijelog svitka i struje I kroz svaki od tih zavoja).

Konkretno to znači da će u V-A-s-m-sistemu jedinica jakosti magnetskog polja biti: 1 AZ/m (amperzavoj po metru) i u V-A-s-cm-sistemu 1 AZ/cm (amperzavoj po centimetru), ili kraće: 1 A/m (amper po metru) odn. 1 A/cm (amper po centimetru), ako se zamisli broj ampera struje $I' = wI$, dakle suma struja kroz svih w zavoja svitka. Očito će između obje jedinice A/m i A/cm vrijediti odnos:

$$1 \text{ A/m} = 0,01 \text{ A/cm} \quad (140a)$$

pa će na pr. polje prstenastog svitka srednje duljine 0,8 m ili 80 cm, uz pretpostavku da kroz njegovih 400 zavoja teče struja 4 A biti jednako:

$$H = \frac{400 \cdot 4}{0,8} \text{ A/m} = \frac{400 \cdot 4}{80} \text{ A/cm}$$

ili $H = 2000 \text{ A/m} = 20 \text{ A/cm}$, t. j. sa stotruko manjom od A/cm jedinicom A/m bit će polje izraženo 100-struko većim iznosom nego kod upotrebe jedinice A/cm.

15. Uveden na gornji način vektor $\mathcal{H}$ može dakako neposredno poslužiti samo za potpunu karakterizaciju magnetskih polja u točkama na osi ili srednjoj liniji prije pretpostavljenih svitaka.

Međutim uz pomoć magnetometra iz C-10., u ovom slučaju čak upotrebljavana samo za indikaciju *jednakosti* magnetskih polja, moguće je proširiti značenje vektora $\mathcal{H}$ i na povoljna magnetska polja.

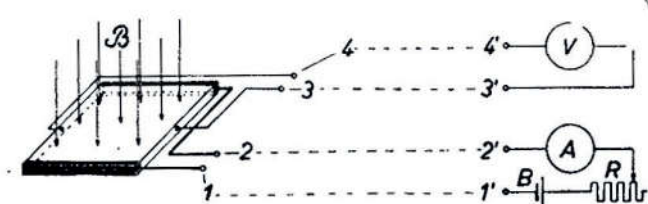
Točnije govoreći, nema poteškoća prethodno provesti to proširenje uz pretpostavku da se pripadni magnetski pokusi zamisle izvedeni u *vakuumu* [no praktički se oni također mogu zamišljati — uz zanemarenje posve neznatnih i za tehniku irelevantnih utjecaja na magnetske pojave svih tvari osim »feromagnetičkih« (C-2.) — izvedeni i u drugim »neferomagnetičkim« sredstvima, na pr. u uzduhu, ulju itd., u kojima se inače dade zamisliti upotreba magnetometra]; to znači, da ostavljamo za kasnije razmatranja o utjecajima feromagnetičkih tvari na magnetske pojave.

Uz spomenuto ograničenje pridijelit ćemo po definiciji povoljnoj točki M ma kakvog magnetskoga polja, na pr. polja beskonačno dugoga ravnoga vodiča protjecana strujom, polja permanentnoga magneta itd., iznos $H = w_1 I = wI/l$, ako isti magnetometar po sl. 121., pretpostavljen zanemarivih dimenzija, stavljen na mjesto ispitivanoga polja definirano točkom M, dade isti otklon α iz sl. 122.b) kao i na osi svitaka pretpostavljenih u C-12., kojima su u svrhu postizavanja toga otklona α iznosi w_1 (odn. w i l) i l prikladno udešeni, odn. odabrani.

A kako se polju u ispitivanoj točki M lako dade metodama iz C-4. do C-6. pridijeliti i određeni smjer, ništa ne priječi da se ne pridijeli svakoj točki M ma kakvih magnetskih polja i posve određeni vektor $\mathcal{H}$ jakosti polja iznosa H uvedena netom opisanim načinom.

Praktički bi se istraživala prostorna raspodjela iznosâ vektora $\mathcal{H}$, na pr. jakosti polja beskonačno dugog ravnoga vodiča protjecana strujom određene jakosti I_0 , stavljajući magnetometar u što više točaka M, M', M'' itd. na određene načine prostorno raspoređenih prema vodiču i određujući pripadne otklone magnetometra $\alpha, \alpha', \alpha''$ itd., a zatim, uz magnetometar iznesen iz ispitivanoga polja i doveden u unutarnjost svitka po C-12., regulirajući, uz recimo fiksiran broj w_1 zavoja po jedinici duljine prikladnim načinom struju svitka na takve iznose I, I', I'' itd., da pripadni otkloni magnetometra postanu $\alpha, \alpha', \alpha''$ itd.; jakosti H, H', H'' itd. istraživanoga polja u M, M', M'' itd., bile bi onda: $H = w_1 I; H' = w_1 I'; H'' = w_1 I''$ itd.

Suvremenije bi se, umjesto »magnetometrički«, po C-5. i pripadnim slikama 121., 122.a) i 122.b), magnetska polja na raznim mjestima mogla mjeriti upotrebom *Hallovih generatora*.



Sl. 123.

Po sl. 123. »Hallov generator« sastoji se od tanke pločice iz jednoga od poluvodiča tipa $A^{III}B^V$ (već spomenutih u B-28.), na pr. iz InSb. Kroz takvu se pločicu »uzdužno« pusti iz prikladne baterije B »struja upravljanja« pokazivana ampermetrom A i regulirana kliznim reostatom R (na slici: spojevi 1-1' i 2-2'). Ako se spomenuta pločica tako postavi prema magnetskom polju da nju magnetske sil-

nice okomito probadaju, pojavi se »poprečno« napon: »Hallov napon« U , koji se može očitati na prikladnom osjetljivom visokoomskom voltmetru V (na slici: spojevi 3-3' i 4-4'). Pokazani napon U , proizveden silama magnetskog polja na gibane naboje koji podržavaju struju upravljanja, praktički je proporcionalan produktu iznosâ struje upravljanja I_s i jakosti istraživanoga magnetskog polja H , pa se kod stalno udešene struje upravljanja mogu očitavanja voltmetra smatrati mjerom iznosâ H (odnosno nakon baždarenja aparature poljem poznatog iznosa mogli bi se na instrumentu V nanijeti i neposredno iznosi H u A/m ili u A/cm).

16. Uzmimo sada da smo eksperimentima opisane vrsti upoznali vektor $\mathcal{H}$ za pojedine točke na različitim zatvorenim linijama s , koje općenito neka teku prostorom povoljno, tako da obuhvaćaju sve ili samo neke ili nijedan od vodiča protjecanih strujama I_1, I_2, I_3 itd., koje sve zajedno uzbuđuju istraživano magnetsko polje.

Uz jednom određen po smjeru i veličini vektor $\mathcal{H}$ za svaku točku neke zatvorene linije s_0 ne bi bilo teško odrediti iznos *linijskoga integrala* vektora $\mathcal{H}$ za povoljni dio MPN takve linije (dakle s određenim smislom pomicanja od M kao početne točke staze preko točke P do N kao konačne točke), a po tomu specijalno i iznos:

$$\oint H_s \cdot ds = \oint \mathcal{H} \cdot \vec{ds}$$

toga integrala za cijelu zatvorenu liniju s_0 (uz integraciju u određenom smislu obilaženja).

No rezultati za različite zatvorene linije s_0 , točni dakako unutar granica točnosti s kojima bi se dala izvesti određivanja vektora $\mathcal{H}$ u pojedinim točkama integra-

cione linije, ne bi općenito vodili na iznos integrala 0 kao u formulama (46) i (46') kod analognih integrala vektora $\mathcal{F}$ elektrostatskoga polja. Naprotiv, sva određivanja linijskih integrala vektora magnetskoga polja $\mathcal{H}$ za najrazličitije zatvorene linije s_0 upućivala bi uvijek na isti općeniti rezultat, na fundamentalnu formulu:

$$\oint H_s \cdot ds = \oint \mathcal{H} \cdot \vec{ds} = \sum I \quad (141)$$

kraće zvanu u razmatranjima o odnosima magnetskih polja spram provodnih struja *zakonom protjecanja*. Pri tomu desnoj strani $\sum I$ u (141), t. zv. »protjecanju« (»probadanju«) provodnim strujama kojegod plohe S , kojoj integraciona krivulja s_0 čini konturu, treba pripisivati značenje *algebarske* sume onih struja među uzbudnim strujama I_1, I_2, I_3 itd. proučavanoga magnetskoga polja koje zatvorena linija s_0 obuhvaća, odn. koje pripadnu plohu S »probadaju« (prema čemu se struje neobuhvaćene zatvorenim linijom s_0 uopće ne broje, kao da ih ni nema); »algebarskom« je pak označena suma $\sum I$, da se naznači da se obuhvaćene struje imaju brojiti pozitivno ili negativno prema tomu da li je smjer tih struja sa smjerom obilaženja odabranim kod integracije po zatvorenoj liniji s_0 kao pozitivnim vezan na jednak ili na protivan način kako je vezan smjer napredovanja sa smjerom vrtnje desnoga vijka.

Analogno opasci iz A-107. i ovdje bi se uvođenjem »neracionalnog« $\mathcal{H}'' = 4\pi \cdot \mathcal{H}$ došlo na *neracionalizirane* relacije, pa bi se na pr. mjesto (141) pisalo: $\oint \mathcal{H}'' \cdot \vec{ds} = 4\pi \sum I$, kao što bi se i umjesto kasnijih formula kao (149'), (152) itd. pisalo: $\oint \mathcal{H}'' \cdot \vec{ds} = 4\pi \int \mathcal{G} \cdot \vec{dS}$, $\text{rot } \mathcal{H}'' = 4\pi \mathcal{G}$, itd.

17. Prema tomu kod integracije u smislu naznačenu strjelicom na *izvučeno* crtanoj zatvorenoj liniji s_0 u sl. 124. pod znak sumacije Σ od pretpostavljenih pet struja I_1 do I_5 ušle bi samo struje I_1 do I_4 obuhvaćene linijom s_0 , i od njih bi trebalo, kod naznačenih smjerova pojedinih struja, računati struje I_1 i I_4 negativno, a struje I_2 i I_3 pozitivno.

Naprotiv u specijalnim slučajevima integracijâ po zatvorenim linijama »nezakvačenima« ni s jednom od uzbudnih struja magnetskoga polja, na pr. kod integracije po crtkano naznačenoj liniji s'_0 u sl. 124., vrijednost integrala (141) bila bi, analogno relaciji (46) iz A-83., koja vrijedi neograničeno kod elektrostatskih polja, jednaka nuli:

$$\oint H_s \cdot ds = \oint \mathcal{H} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (142)$$

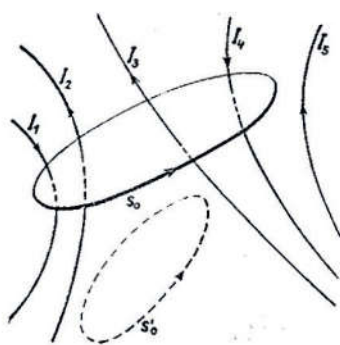
18. U bitnosti relacija (142) veli da specijalno kod obilaženja zatvorenih linija nezakvačenih sa strujama (i to ne samo provodnima, nego i pomačnima, kako ćemo odmah vidjeti) magnetska polja pokazuju svojstva »polja slobodnih od vrtloga« (A-83.).

U skladu s tim može se u prostorima gdje *nema* struja — po analogiji s korespondentnom relacijom (45) iz A-82., uvijek valjanom za odnose u elektrostatskim poljima — za linijske integrale vektora magnetskoga polja $\mathcal{H}$, uzete po po-

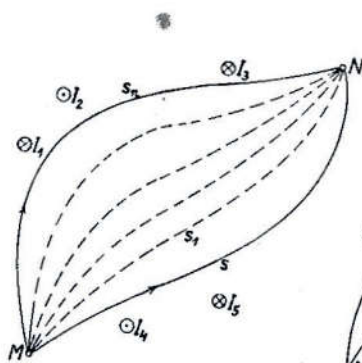
voljnim stazama s, s_1 itd. s istim krajnjim točkama, početnom M i konačnom N (sl. 125.), smatrati da su iznosom međusobno jednaki:

$$\int_{(s)} H_s \cdot ds = \int_{(s_1)} H_s \cdot ds = \dots = \dots \quad (143)$$

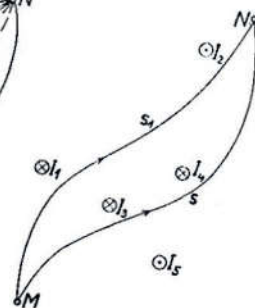
odnosno može se — uvodeći paralelno nazivu »električkih napona« $U = V - V_0$, upotrebljavanom za linijske integrale iz (45) s tangencijalnim komponentama F_s vektora $\mathcal{F}$ električkoga polja, naziv *magnetskih napona* za linijske integrale s tangencijalnim komponentama H_s vektora $\mathcal{H}$ magnetskoga polja poput onih u (143) — ustvrditi da su magnetski naponi za sve staze $s, s_1 \dots s_n$ s istim početkom M i s istim svršetkom N međusobno jednaki, ako se kod prelaženja linijâ s, s_1 itd. kontinuiranim mijenjanjem jedne u drugu ne zahvati nijedna od uzbudnih struja.



Sl. 124.



Sl. 125.



Sl. 126.

Mogu se čak u prostorima bez struja pojedinim točkama magnetskih polja pridijeliti u ovakvim specijalnim slučajevima i određeni *magnetski potencijali* V' povezani s pripadnim vektorima $\mathcal{H}$ relacijom:

$$\mathcal{H} = - \text{grad } V' \quad (144)$$

sličnom relaciji (43) iz A-73., koja veže vektore $\mathcal{F}$ jakosti električkoga polja s električkim potencijalima V u električkim poljima. Iznosi tih magnetskih potencijala V' sadržavali bi neku povoljnu konstantu integracije, no razlika njihovih iznosa za dvije određene točke, na primjer razlika $V' - V'_0 = U'$ iznosâ V' i V'_0 za krajnje točke M i N linijâ s, s_1 itd., t. j. magnetski napon između tih dviju točaka, korrespondantan razlici električkih potencijala ili električkom naponu $V - V_0 = U$ relacije (45) iz A-82., imao bi kod ograničenja na prostore bez struja posve određeni iznos. U takvim se dakle specijalnim slučajevima u magnetskim poljima susreću posve slični odnosi kao u elektrostatskima.

19. Naprotiv kod integracije po dvjema stazama s i s_1 s istim početkom i svršetkom M i N (sl. 126.), takve da je zamka $MsNs_1M$ zakvačena ma samo s jednom od uzbudnih struja magnetskoga polja, magnetski naponi $\int_{(s)} H_s \cdot ds$ i $\int_{(s_1)} H_s \cdot ds$ za po-

magnetskih polja, odnosno zakvačenost silnica sa strujama, dolazi do izražaja u spomenutim ovisnostima magnetskih napona o integracionim stazama, ili — što izlazi na isto — u relaciji (141) s desnom stranom različitom od 0.

Unutar područja sa strujama, na pr. unutar vodiča protjecanih provodnim strujama, ne vladaju uopće prilike koje bi se dale izraziti malo prije spomenutim »skalarnim« magnetskim potencijalom, ali se za karakterizaciju magnetskih polja u takvim područjima može uvesti posebna vektorska veličina, zvana magnetski *vektorpotencijal*. Ne ulazeći pobliže u odnosna razmatranja spomenimo samo, da se vektorpotencijal $\mathcal{A}$ neke točke M prostornoga područja s provodnim strujama, uz pretpostavku da je gustoća struje u elementima volumena dv udaljenima od M za iznos r predočena vektorom $\mathcal{G}$, dobiva po relaciji:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{G} \cdot \frac{dv}{r} \quad (145)$$

građenoj slično relaciji (40'') iz A-69. za proračunavanje skalarnih električkih potencijala V ; samo što u (145) mjesto skalarnih veličina V i ρ/ϵ iz (40'') dolaze vektorske veličine $\mathcal{A}$ i $\mathcal{G}$. A kod poznatoga vektora $\mathcal{A}$ za neko magnetsko polje moguće je proračunavati i vektor $\mathcal{H}$ za pojedine točke toga polja po relaciji:

$$\mathcal{H} = \text{rot } \mathcal{A} \quad (146)$$

20. Relacija (141) od osnovne je važnosti kao općeniti kvantitativni izražaj odnosa između magnetskih polja i struja. Kakogod se u prvi mah činila nepreglednim magnetska polja prostorno ma kako komplicirano zamišljenih struja, ipak za sva ta polja vrijedi jedan uvijek isti zakon (141).

Pokusima se ovaj zakon dakako može verificirati samo unutar granica točnosti eksperimentiranja, dakle približno, a uz to je naravno eksperimentima moguće izvesti verifikaciju samo za konačni broj konkretnih slučajeva.

No ne upućuju samo svi pokusi s neposrednim ciljem verifikacije ili neverifikacije na relaciju (141), nego za nju jednako govori plodnost svih konsekvencija ispravno povučenih iz te relacije u najrazličitijim teoretskim razmatranjima.

Sve su ovo dovoljni razlozi da zakon (141) uzdignemo na jednu od *polaznih* tvrdnja teorije elektriciteta, na jedan od čvrstih osnova te teorije, podržavan, osim neposrednim verifikacijama relacije (141) pokusima u pojedinim slučajevima, također, i čak naročito, time što i svi posredno iz njega izvedeni zaključci odgovaraju opažanim činjenicama. U tom smislu treba dakle definitivno shvaćati relaciju (141) i njezin specijalni slučaj relaciju (142).

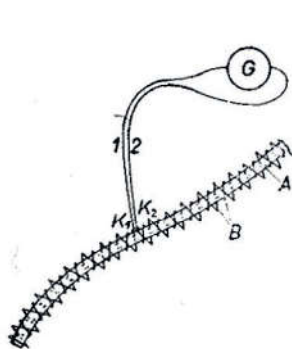
21. Umjesto da se mjeri sam vektor $\mathcal{H}$ za pojedine točke zatvorenih linija s_0 , s'_0 itd., ili linija s , s_1 itd. s početnim i krajnjim točkama M i N, pa da se onda linijski integrali relacija (141), (142) i (143) računaju, jednostavnije i neposrednije se dade eksperimentima verificirati »zakon protjecanja« naročitom spravom, t. zv. *mjerilom magnetskih napona*.

Opišimo odmah ovdje konstrukciju i način upotrebe ovoga mjerila, ostavljajući razmatranja o teoriji njegova djelovanja za idući odsjek, gdje će biti govora o elektromagnetskoj indukciji.

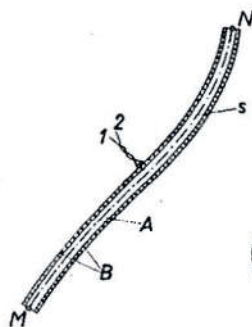
U bitnosti je mjerilo magnetskih napona prikladno namotan vrlo dugoljast *gibak* (fleksibilan) svitak, na koji se priključi dovoljno osjetljiv balistički galvanometar.

Gipkost je potrebna, kako bi se svitak mogao duljinom prilagoditi određenoj integracionoj liniji s početkom M i svršetkom N; na tu integracionu liniju odnosi se onda mjerilom određeni magnetski napon.

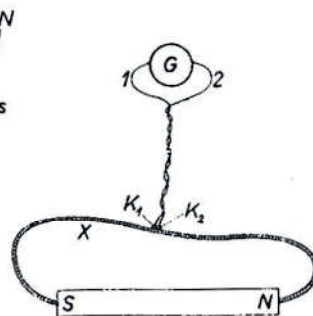
Praktički je za postizavanje gipkosti najjednostavnije namotati svitak na pruživom nosiocu u obliku kožnatoga ili gumenoga remena. Cijela duljina l takvoga remena prekrije se gusto i jednoliko zavojima svitka, koji treba da je po shemi u sl. 127. namotan s dva tijesno uz remen A priljubljena sloja od ukupno w zavoja, tako da se oba kraja svitka B sastaju (na pr. oko sredine svitka kao na sl. 127.); onda dovodi 1 i 2 k balističkom galvanometru G polaze iz neposredno blizih stezaljki K_1 i K_2 i mogu se voditi tijesno jedan uz drugi (kod samo jednoga sloja



Sl. 127.



Sl. 128.



Sl. 129.

zavoja priključna mjesta dovoda 1 i 2 bila bi na udaljenim stezaljkama pri oba kraja remena, pa bismo povrh zavoja na samom remenu imali još i neželjeni veliki zavoj B-1-G-2-B).

S opisanim mjerilom mjerenja magnetskih napona izvodila bi se po shemi u sl. 128. Pretpostavljajući da treba mjeriti magnetski napon U' po stazi s , koja počinje i svršava u točkama M i N, a duljinom baš odgovara duljini l remena A i svitka B mjerila, i da je sav remen jednoliko prekriven od ukupno w na njemu namotanih zavoja tako neznatne površine S da se ispitivano magnetsko polje u prostoru svakoga pojedinoga zavoja može smatrati homogenim, dovoljno bi bilo remen sa svitkom tako porazmjestiti da što točnije slijedi integracionu stazu s u cijelom njezinu toku, pa ga zatim, kraj priključenog galvanometra G, naglo ukloniti iz istraživanoga polja (ili samo polje naglo dovesti do iščezavanja, što je lako izvedivo na pr. iskapčanjem uzbudnih struja polja, u slučajevima polja proizvedenih strujama u prostorima bez feromagnetičkih materija).

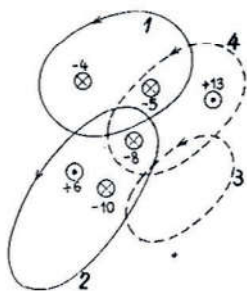
Kao posljedica spomenute nagle promjene pojave se onda u strujnom krugu sastavljenom od svitka B i galvanometra G kratkotrajne struje »elektromagnetske indukcije«, pod utjecajem kojih galvanometar dađe određeni »balistički otklon« α_1 (A-35. do A-38.), za koji ćemo u C-67. moći dokazati da je proporcionalan mjenom magnetskom naponu U' , t. j. da vrijedi relacija:

$$U' = K \cdot \alpha_1 \quad (147)$$

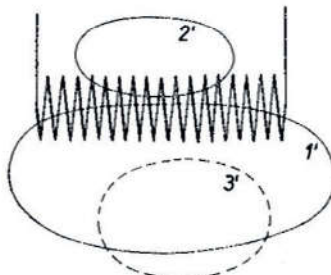
s konstantom K potpuno određenom upotrebljavanim mjerilom magnetskoga napona (točnije: srednjom površinom S zavoja svitka B i brojem $w_1 = w/l$ tih zavoja po cm duljine mjerila) i pripadnim galvanometarskim odnosima (t. j. ukupnim otporom R strujnoga kruga sa svitkom B i galvanometrom G, te pripadnom već u A-37. spominjanom balističkom konstantom galvanometra G).

Slično se mogu ispitivati i polja permanentnih magneta. Mogu se na pr. ispitivati magnetizirani željezni štapovi, potkove i sl., prislanjajući na krajeve takvih magneta po sl. 129. krajeve mjerila magnetskoga napona i naglo ih zatim udaljujući.

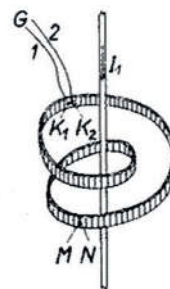
22. Prema izloženomu bi bilo lako, priljubljajući gipki svitak B različitim stazama $s, s_1, \dots, s_n$ po sl. 125. u C-18., verificirati stavak izražen relacijom (143) o jednakostima magnetskih napona za različite staze između dvije točke M i N u prostorima bez struja; spomenuta jednakost došla bi do izražaja u jednakosti otklonâ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ dobivenih kod pojedinih mjerenja.



Sl. 130.



Sl. 131.



Sl. 132.

Naprotiv otkloni α_1 i α_2 kod mjerenja po stazama s i s_1 iz sl. 126. u C-19., s istim početkom M i svršetkom N no uz pretpostavku da je protjecanje $\Theta = \Sigma I$ zamke $MsNs_1M$ različito od 0, ispali bi različiti, kako i odgovara različitim magnetskim naponima za pomake po stazama s i s_1 , odn. različitim iznosima pripadnih linijskih integrala vektora $\mathcal{H}$.

23. Za verifikaciju relacija (141) i (142) dovoljno bi bilo izvesti mjerenja: a) zbog realizacije prilika pretpostavljenih kod relacije (141), obuhvaćajući mjerilom magnetskoga napona svinutim u oblik povoljnih zatvorenih linija poput 1 i 2 na sl. 130. ili 1' i 2' na sl. 131., po volji jedan ili više strujnih vodiča, odn. sve ili samo neke zavoje strujnih svitaka; odn. b) zbog realizacije odnosa relacije (142), zatvarajući magnetsko mjerilo u zatvorene zamke poput 3 i 4 na sl. 130. ili 3' na

sl. 131. nezakvačene ni s kakvim strujnim vodičima i ni s kakvim zavojima strujnih svitaka, ili tako zakvačene s više struja da ukupno protjecanje zamke realizirane mjerilom magnetskoga napona ispadne jednako 0, kao što je to slučaj na pr. u sl. 130. za zamku 4, za koju je:

$$\Sigma I = (+13) + (-5) + (-8) = 0.$$

U slučajevima ispunjenih preduvjeta za relaciju (141) doista bi izlazili balistički otkloni galvanometra priključena na mjerilo magnetskih napona u svakom slučaju baš proporcionalni u tom slučaju mjerilom obuhvaćenoj algebarskoj sumi struja, dakle pripadnom »protjecanju» $\Theta = \Sigma I$. A kod višekratnoga obuhvaćanja jedne te iste struje mjerilom napona, na pr. dvokratnoga obuhvaćanja struje I_1 po shemi u sl. 132., otklon balističkoga galvanometra izlazi proporcionalno veći, na pr. u slučaju sl. 132. dvostruko toliki kao kad se mjerilom magnetskoga napona vodič sa strujom I_1 jednokratno obuhvati.

Naprotiv kod ispunjenih preduvjeta za relaciju (142) galvanometar ne bi dao nikakav balistički otklon.

24. Mjerenja na temelju relacije (141) mogu poslužiti i za *baždarenja* mjerila magnetskih napona, točnije govoreći za određivanja konstante K iz formule (147) za pojedine kombinacije mjerila i galvanometara. Uz jednom određen iznos K mogu se onda mjerenja magnetskih napona kod povoljnih staza, odn. mjerenja protjecanja Θ kod zatvorenih integracionih staza, vršiti čak u apsolutnim iznosima, dakle pri sustavima V-A-s-m i V-A-s-cm s amperom kao jedinicom.

Kako je već u C-21. spomenuto, konstanta K fiksirana je osebina upotrebljavanoga mjerila i priključenoga galvanometra, pa ju je u principu moguće i računski odrediti, no mjerenjem na temelju relacije (141) dobiva se neposrednije, i zato obično točnije.

Kod baždarenja postupa se naprosto tako da se mjerilom magnetskoga napona, svinutim u zatvorenu zamku, obuhvate svi zavoji prikladnoga »pokusnog svitka« poznatoga broja zavoja w_0 , kroz koji teče struja jakosti I_0 (iznos I_0 očita se na dodanom u seriju ampermetru). Tako je ukupno protjecanje zamke ispitivanoga magnetskog mjerila $\Theta = w_0 I_0$, pa ako se iskapčanjem struje I_0 galvanometar mjerila balistički otkloni za iznos α_1 , mora po (147), u vezi sa (141), vrijediti:

$$w_0 \cdot I_0 = K \cdot \alpha_1 \quad (147')$$

iz čega se odmah dobiva konstanta ispitivane kombinacije: $K = w_0 I_0 / \alpha_1$.

25. Prema dosad izloženomu moguće je, ostajući na definiciji vektora $\mathcal{H}$ iz C-14. i C-15. i uzimajući zakon (141) kao polaznu tvrdnju, izvoditi formule za jakost polja u pojedinim teoretski ili praktički zanimljivim specijalnim slučajevima.

Kao prvi primjer uzmimo formulu za jakost polja H u udaljenosti x od beskonačno dugoga ravnog vodiča protjecana strujom I . Iz razloga simetrije magnetske silnice oko ovakvoga vodiča bit će kružnice koaksijalne vodiču (sl. 114.), i vektor $\mathcal{H}$ jakosti magnetskoga polja bit će na svakoj od takvih kružnica po iznosu H kon-

stantan, a po smjeru tangencijalan na kružnicu. Prema tomu u ovom specijalnom slučaju linijski integral vektora $\mathcal{H}$ po kružnici polumjera x prelazi naprosto u $H \cdot 2x\pi$, pa kako za točke izvan vodiča predstavlja I pripadno strujno protjecanje kružne integracione staze, mora po (141) biti: $H \cdot 2x\pi = I$, odnosno:

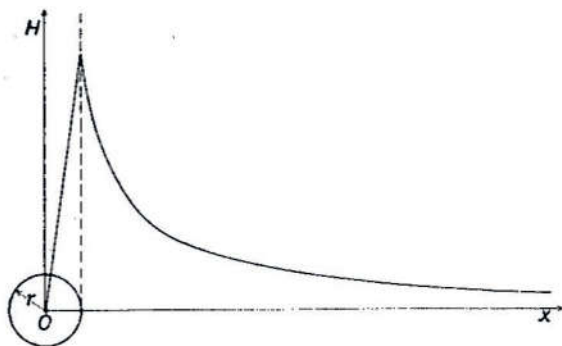
$$H = \frac{I}{2x\pi} \quad (148)$$

pri čemu specijalno uz I u A, i x u m odn. cm, izlazi H u A/m odn. A/cm. Polje varira dakle u prostoru izvan vodiča obrnuto razmjerno s udaljenošću od osi vodiča.

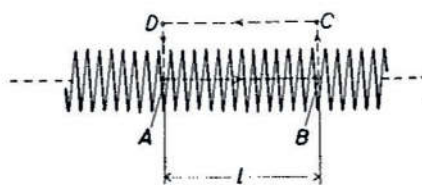
Naprotiv unutar okrugloga vodiča polumjera r od neferomagnetičke tvari, na pr. od bakra, dakle u daljini x od osi vodiča takvoj da je $x < r$, linijski integral vektora $\mathcal{H}$ po kružnoj integracionoj stazi polumjera x ostaje jednak $H \cdot 2x\pi$, no u strujno protjecanje te staze smije se uračunati samo dio $I' = I \cdot x^2/r^2$ ukupne struje I vodiča, što uz gustoću struje jednoliku na cijelom prerezu vodiča otpada na prerez $x^2\pi$ kruga polumjera x . Tako se može pisati $H \cdot 2x\pi = I' = I \cdot x^2/r^2$, odnosno:

$$H = \frac{I \cdot x}{2r^2\pi} \quad (148')$$

Po (148') varira H u unutarnjosti okrugla vodiča polumjera r linearno s udaljenošću x od osi vodiča, tako da za točke na osi vrijedi $H = 0$, a za točke na površini vodiča $H = I/2r\pi$; na ovaj potonji iznos dolazi se graničnim prelazom jednako po formuli (148) kao i po formuli



Sl. 133.



Sl. 134.

(148'). Korespondentno gornjim izvodima u sl. 133. grafički su predloženi u ovisnosti od udaljenosti x od osi vodiča iznosi H unutar vodiča i izvan njega.

Kao drugu primjenu izračunajmo jakost polja ma gdje unutar ravnih ili prstenastih svitaka beskonačno dugih prema dimenzijama zavoja. Ako sl. 134. predstavlja mali dio jednoga od spomenutih svitaka s w , gustih, jednoliko porazdijeljenih zavoja po jedinici duljine svitka, za magnetske silnice može se iz razloga simetrije uzeti da će teći u smjeru duljine svitka. A za prostor izvan svitka moći će se pretpostaviti da nije sijelo magnetskoga polja. Prema tomu, ma kakav oblik imali zavoji svitka, za integraciju po zatvorenoj zamci u obliku pravokutne staze ABCD

po shemi u sl. 134. s dijelom AB duljine l ma gdje unutar svitka u smjeru silnica i dijelom CD izvan svitka relacija (141) dat će:

$$H \cdot \overline{AB} + 0 \cdot \overline{BC} + 0 \cdot \overline{CD} + 0 \cdot \overline{DA} = w_1 \cdot I \cdot l$$

odnosno, uz $AB = l$ i $w_1 \cdot l = w$, moći će se također pisati osnovna relacija:

$$H = \frac{wI}{l}$$

Naime polje H djeluje samo u smjeru dijela staze $\overline{AB}$, dok uzduž dijela $\overline{CD}$ polja uopće ni nema, a uzduž $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$ u području izvan svitka nema također polja, dok unutar svitka nema komponente polja u smjeru $\overline{BC}$, odn. $\overline{DA}$.

Definiciona jednadžba (140) iz C-14. izlazi tako kao specijalni slučaj netom izvedenih odnosa. Dok je međutim kod (140) još bilo potrebno ograničiti se na slučajeve kružnih zavoja (i to, najstrože uzimajući, čak zavoja određenoga polumjera), te na točke na osi ili srednjoj liniji pripadnih svitaka, mi sada vidimo da formula $H = wI/l$ vrijedi uopće u unutarnjosti svitaka, beskonačno dugih prema dimenzijama zavoja, dakle ne samo kod svitaka s kružnim zavojima ma kakvoga polumjera ma gdje unutar svitaka, nego i svagdje unutar analognih svitaka s drukčije formiranim, na pr. kvadratičnim, pravokutnim itd. zavojima. Sve ovo može poslužiti i za naknadno ponovno opravdanje puta odabranoga kod definicije veličine $\mathcal{H}$ u C-13. do C-15.

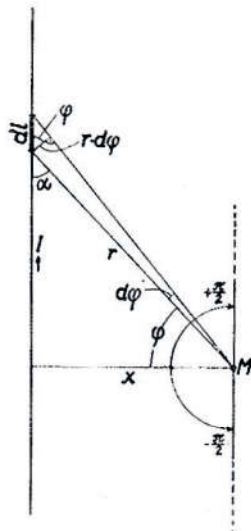
26. U starijim djelima umjesto od relacije (141), vrlo prikladne za primjene, polazilo se od t. zv. Biot-Savartova zakona. Po tomu zakonu, kojemu je vezu sa zakonom protjecanja (141) moguće dokazati uz upotrebu stavaka (145) i (146) iz

iz C-19., linearni vodič ma kakvoga oblika, protjecan strujom I , izvodi u ma kojoj točki M izvan vodiča magnetsko polje, za koje se može uzeti da nastaje superpozicijom elementarnih polja pojedinih elemenata duljine dl toga vodiča s jakošću:

$$dH = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

i smjerom određenim okomicom na ravninu određenu sa dl i M , pri čemu r znači udaljenost točke M od dl , a α je $\sphericalangle(r, dl)$ kao u sl. 135. (smisao djelovanja polja dH je kao u C-14.: kod struje I kroz dl u smjeru palca desne ruke dH bi djelovalo u smislu zavinutih prstiju te ruke).

Međutim Biot-Savartov zakon, ma da se u elementima fizike često uzima za polaznu točku, vrlo je neprikladan za praktičke primjene, jer već u samo malo zamršenijim slučajevima njegova primjena vodi na velike ili čak nesavladive matematičke poteškoće, tako da ga je zapravo lako primjeniti samo na proračunavanje polja beskonačnih ravnih vodiča, zatim polja u središtu ili na osi kružnih vodiča ili na slične posve lagane probleme. Zbog veće preglednosti i prikladnosti bolje je zato uzimati za polaznu točku umjesto Biot-Savartova zakona zakon protjecanja, kako je to u ovom djelu dosljedno provadano.



Sl. 135.

Za primjer kako Biot-Savartov zakon vodi na rezultate jednake onima na temelju relacije (141), izvedimo spomenutim zakonom ponovno formulu (148) za polje H u daljini x od beskonačnoga ravnoga vodiča s jakošću struje I . Po sl. 135., obzirom na relaciju $\varphi = \pi/2 - \alpha$ i obzirom na činjenicu da sva elementarna polja dH djeluju u promatranom slučaju u istom smislu, može se pisati (primjenjujući ujedno relacije $dl = r \cdot d\varphi / \cos \varphi = x \cdot d\varphi / \cos^2 \varphi$ i $r^2 = x^2 / \cos^2 \varphi$):

$$H = \int dH = \frac{I}{4\pi} \int \frac{dl \cdot \sin \alpha}{r^2} = \frac{I}{4\pi x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot d\varphi$$

što daje konačno: $H = I/2\pi x$ u skladu s već na drugi način dobivenom relacijom (148).

27. Nadovezujući na zakon Biota i Savarta primijetimo još nešto o jedinici vektora jakosti magnetskoga polja »ersted« (Oe; po Oerstedu), koja se pored A/m i A/cm također još uvijek upotrebljava.

Na jedinicu Oe dolazi se ako se umjesto konstantnoga faktora $\frac{1}{4\pi}$, koji desno u formuli Biot-Savartova zakona, kako je napisana u C-26., dolazi uz $I \cdot dl \cdot \sin \alpha / r^2$, kod dH izraženoga u A/cm, I u A, te dl i r u cm, stavi određeni okrugli broj, i to 0,1. Kako se time desna strana formule Biot-Savartova zakona poveća u omjeru $0,1 : \frac{1}{4\pi} = 0,4\pi$, to se lijeva strana mora učiniti $0,4\pi$ -put većom, a to je uz netaknute jedinice A i cm za veličine I , dl i r samo tako moguće da se jakost polja, koja jedina figurira na lijevoj strani formule, izrazi $0,4\pi$ -put manjom jedinicom od jedinice 1 A/cm; ta je nova jedinica nazvana »ersted«. Prema tomu vrijede ove relacije:

$$1 \text{ A/cm} = 0,4\pi \text{ Oe} (\approx \frac{5}{4} \text{ Oe}) \quad 1 \text{ Oe} = \frac{1}{0,4\pi} \text{ A/cm} (\approx \frac{4}{5} \text{ A/cm})$$

a time, zbog $1 \text{ A/m} = 0,01 \text{ A/cm}$, i ove relacije između A/m i Oe:

$$1 \text{ A/m} = \frac{0,4\pi}{100} \text{ Oe} (\approx \frac{1}{80} \text{ Oe}) \quad 1 \text{ Oe} = \frac{100}{0,4\pi} \text{ A/m} (\approx 80 \text{ A/m})$$

Označujući sa H^* polje u Oe, *numerička* relacija Biot-Savartova zakona, uz I u A, te dl i r u cm, postaje dakle: $dH^* = 0,1 \cdot I \cdot dl \cdot \sin \alpha / r^2$, dok bi pripadnu numeričku relaciju zakona protjecanja trebalo pisati:

$$\oint H_s^* \cdot ds = 0,4\pi \cdot \Sigma I \quad (141')$$

Po svome podrijetlu Oe je jedinica »sustava« EMJ (A-54.), a u ovomu jedinici jakosti struje korespondira 10-kratnik ampera: 1 EMJ jakosti struje = 10 A. Prema tomu, ako je I^* jakost struje u EMJ, sa H^* u Oe, te dl i r u cm, konstanta Biot-Savartova zakona poprima baš iznos 1, a *numerička* relacija Biot-Savartova zakona postaje: $dH^* = I^* \cdot dl \cdot \sin \alpha / r^2$. Sam pak »zakon protjecanja« mora se onda pisati:

$$\oint H_s^* \cdot ds = 4\pi \Sigma I^* \quad (141'')$$

28. Uz fundamentalnu formulu (141) potrebno je dodati još nekoliko primjedbi. Tako je moguće, a kod polja prostornih strujanja je po B-66. to čak i potrebno, uvesti u (141) vektor $\mathcal{G}$ gustoće provodne struje zamjenjujući izraz ΣI desno u (141) plošnim integralom vektora $\mathcal{G}$ kroz povoljnu nezatvorenu plohu S ograničenu zatvorenim integracionom linijom s_0 linijskoga integrala lijevo u (141) kao konturom.

Prenoseći razmatranja iz A-46. na slučaj integracije u poljima strujanja po spomenutoj plohi S s konturom s_0 lako je razabrati da pripadni plošni integral vektora $\mathcal{G}$ predstavlja strujno protjecanje integracione linije s_0 , tako da se mjesto u obliku (141) zakon protjecanja može pisati u obliku:

$$\oint H_s \cdot ds = \int_{(S)} G_n \cdot dS \quad (149)$$

odnosno sa »skalarnim« ili »unutarnjim« produktima pripadnih vektora (A-46.; A-84.):

$$\oint \mathcal{H} \cdot \vec{ds} = \int_{(S)} \mathcal{G} \cdot \vec{dS} \quad (149')$$

29. No ima još jedna, i to ne samo formalna, nego stvarna nadopuna zakonu protjecanja. Dosad naime nije uzimana u obzir činjenica, već u A-99. naglašena, da su i pomaćne struje praćene vrtlozima magnetskih polja. Proširujući u tom pogledu zakon protjecanja mi ćemo, općenitije, za buduća razmatranja kao polaznu tvrdnju uzimati relaciju analognu relaciji (149'), no na desnoj strani s plošnim integralom vektorske sume $\mathcal{G} + \mathcal{G}_1$ gustoće $\mathcal{G}$ provodne struje i gustoće $\mathcal{G}_1$ pomaćne struje, t. j. uzet ćemo konačno za polaznu tvrdnju već od Maxwella postavljenu t. zv. *prvu osnovnu jednadžbu* elektromagnetskoga polja:

$$\oint \mathcal{H} \cdot \vec{ds} = \int_{(S)} [\mathcal{G} + \mathcal{G}_1] \cdot \vec{dS} \quad (150)$$

koja se također, uz pomoć relacijâ (116') iz B-66., (60) iz A-100. i (15) iz A-41., može predesiti u oblik:

$$\oint \mathcal{H} \cdot \vec{ds} = \int_{(S)} \left[\kappa \mathcal{F} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right] \cdot \vec{dS} \quad (150')$$

30. Mjesto u »integralnom« obliku češće se zakon izražen relacijom (150) ili (150') piše u »diferencijalnom« obliku. Prenoseći naime relacije (47) i (49) iz A-85. i A-86. o *rot* ili *curl* vektora električkoga polja $\mathcal{F}$ na vektor magnetskoga polja $\mathcal{H}$ očito se na temelju formula (150) i (150') može I. Maxwellova jednadžba pisati u obliku:

$$\text{rot } \mathcal{H} = \mathcal{G} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \kappa \mathcal{F} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \quad (151)$$

a specijalno zakon protjecanja (141), ispravan uz pretpostavku vremenske konstantnosti vektora $\mathcal{F}$ ili zanemarivosti utjecaja vremenskih mijenjanja toga vektora (koja je gotovo uvijek dopuštena kod primjena u tehnici »jake struje«), može se predložiti u obliku:

$$\text{rot } \mathcal{H} = \mathcal{G} \quad (152)$$

Prema tomu se, obzirom na relaciju (146) iz C-19., vektor $\mathcal{G}$ može smatrati vezanim s vektorpotencijalom $\mathcal{A}$ formulom:

$$\mathcal{G} = \text{rot } \mathcal{H} = \text{rot rot } \mathcal{A}$$

(glede operacije *rot rot* nekoga vektora vidi A-88. i vj. 9. na str. 114.)

II) VEKTOR $\mathcal{B}$ U VAKUUMU; ZAKON INDUKCIJE

Uvjet ekvivalencije $Q \cdot v = I \cdot l$. Sile na naboje u gibanju, odn. na strujne vodiče. Definicija vektora $\mathcal{B}$; omjer $\mathcal{B}/\mathcal{H} = \mu_0$ u vakuumu. Tok vektora $\mathcal{B}$. Otkloni katodnih zraka magnetskim poljem. Elektroni i ioni pod utjecajem magnetskih i električkih polja u vakuumu. Ciklotron. Sile na strujne svitke i petlje; instrumenti s pomičnim svitkom u polju permanentnog magneta i elektromagnetski oscilografi. Elektrodinamske sile; mjerne sprave elektrodinamskog tipa. Princip motora. Elektromagnetska indukcija u gibanim vodičima; prvi oblik zakona indukcije. Elektromagnetska indukcija s gledišta zatvorenih strujnih krugova gibljivih ili promjenljivih u vremenski stalnom magnetskom polju; drugi oblik zakona indukcije. Posveopćenje na nepromjenljive mirne strujne krugove u vremenski promjenljivom polju. Lenzovo pravilo; elektromagnetska kočenja. Primjeri elektromagnetske indukcije; balistička mjerenja strujnih i naponskih udara. Teorija mjerila magnetskih napona. Druga osnovna jednadžba elektromagnetskog polja; električka elektrodinamska polja. Betatron. Gubici u željezu zbog vrtložnih struja. Skin-efekt.

31. Upoznavši u C-I. odnose prostorne raspodjele vektora $\mathcal{H}$ za povoljna magnetska polja, dakle polja uzbuđivana povoljnim provodnim ili pomačnim strujama povoljno raspoređenima u prostoru, možemo sada svratiti pozornost vanjskim manifestacijama tih polja.

Od dvije u C-3. pod a) i b) spomenute i elektrotehnički najvažnije takve manifestacije treba, kako je već i u C-3. istaknuto, primarnom manifestacijom smatrati sile za koje se primjećuje da djeluju na gibane električke naboje u magnetskim poljima, odn. posredno i na vodiče protjecane provodnim strujama u spomenutim poljima, te na magnete kao nosioce elementarnih provodnih struja stavljene u magnetska polja.

Ove smo sile već kvalitativno upoznali i iskoristili služeći se kod uvođenja vektora $\mathcal{H}$ orijentacionim učincima magnetskih polja na svitke protjecane strujom i magnetske iglice. A sad ćemo i kvantitativno proučavati spomenute sile na gibane naboje i vodiče protjecane strujom, ostavljajući magnete za kasnija razmatranja.

32. Budući da prema gornjemu sile na vodiče protjecane strujom treba u zadnjoj liniji svesti na sile proizvedene utjecajem magnetskoga polja na naboje, kojih gibanja unutar vodiča baš i čine provodnu struju vodiča, započnimo postavljajući pitanje ekvivalencije naboja Q gibanih brzinom karakteriziranom nekim vektorom $\vec{v}$ određenoga smjera i određenoga iznosa v u odnosu prema strujama jakosti I koje protječu vodič malene duljine l u smjeru identičnom sa smjerom brzine $\vec{v}$. Lako je vidjeti da uvjet ekvivalencije glasi:

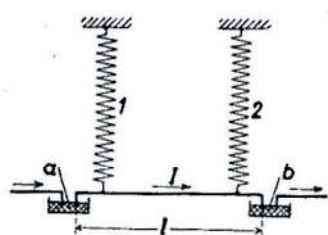
$$Q \cdot v = I \cdot l \quad (153)$$

Ako se naime zamisli da naboj $Q = \rho \cdot q \cdot l$ jednolike prostorne gustoće ρ u obujmu $q \cdot l$ linearnoga vodiča prereza q i duljine l izvodi struju I toga vodiča gibajući se brzinom v u smjeru duljine vodiča, bit će pomak naboja Q u vremenu dt jednak iznosu $v \cdot dt$, pa će kroz prerez q prostrujala množina naboja biti $q \cdot \rho \cdot v \cdot dt$, a prostrujala množina na jedinicu vremena ili jakost struje I bit će: $I = \rho \cdot q \cdot v$. Proširujući sa l može se dakle pisati: $I \cdot l = \rho \cdot q \cdot l \cdot v = Q \cdot v$.

33. Pokusima je lako demonstrirati jednako sile na slobodno u prostoru određenom brzinom gibanje naboje u magnetskim poljima kao i sile na vodiče protjecane jačim ili slabijim strujama.

Primjer za prvo su više ili manje komplicirane staze na koje bivaju (na pr. električkim poljima do određene brzine ubrzani i zatim sebi prepušteni) elektroni skrenuti sa svoje staze, po zakonu ustrajnosti pravocrtne, kad dođu u područje djelovanja magnetskih polja (otkloni »katodnih zraka« u magnetskim poljima); iz staza opisivanih od ovakvih elektrona u različitim slučajevima mogu se izvesti zaključci o pripadnim dinamičkim prilikama, odnosno o otklonskim silama koje su tu djelovale.

Primjer za drugo bili bi pokusi otklona u magnetskim poljima kružnih i pravokutnih vodiča ili dugoljastih svitaka protjecanih strujama, a u najjednostavnijim



Sl. 136.

slučajevima demonstracije sile na pravocrtne vodiče protjecane strujama i stavljene u homogena magnetska polja; momenti vrtnje za zatvorene strujne zamke ili na strujne svitke lako bi se mjerili statički, na pr. motreći protusile torzije poljem otklonjenih takvih strujnih zamki ili strujnih svitaka, montiranih na način iglice u sl. 121., odnosno po sl. 136. kod pravocrtnih vodiča duljine l protjecanih strujom I , pomično montiranih (s pomoću spojišta sa živom a i b) i tako postavljениh u prikladna magnetska polja da nastale sile djeluju vertikalno dolje, motreći produženja elastičnih pera 1 i 2 na kojima je vodič obješen.

34. Kao rezultat svih ovakvih pokusa s gibanim nabojima i strujnim vodičima pod ma kakvim prostornim odnosima prema različitim stranim magnetskim poljima iskristalizirala bi se spoznaja da je sila $\mathcal{P}$ iznosa P u slučajevima naboja Q gibanih brzinom $\vec{v}$ iznosa v i smjera pod kutom α prema smjeru magnetskoga polja (sl. 137.), odn. u slučajevima struje jakosti I kroz pravocrtni vodič duljine l stavljen u homogeno polje pod kutom priklona α prema smjeru polja (sl. 138.), označena ovim osebinama: a) *iznos* P te sile u određenom magnetskom polju proporcionalan je kod gibanih naboja množini naboja Q i brzini v naboja kao i sinusu kuta α (manjega od 180°) što ga po sl. 137. čine smjer MR' brzine i smjer MS polja, a kod pravocrtnih linearnih strujnih vodiča u homogenom polju proporcionalan je jakosti struje I i duljini l vodiča, te sinusu kuta α (manjega od 180°) što ga po sl. 138. čine smjer struje MR'' i smjer polja MS ; b) *smjer* pak sile $\mathcal{P}$ odgovara normali na ravninu kuta α , pri čemu je kod pozitivnoga naboja Q

gibanoga u smjeru MR' i kod električne struje I u smjeru MR'' , (t. j. kod strujanja pozitivnih naboja u smjeru MR'' , a negativnih naboja, na pr. slobodnih elektrona u kovinama, nasuprot smjeru MR'') sila $\mathcal{P}$ usmjerena u onom smislu spomenute normale, u kojemu bi napredovao desni vijak okretan onako, kako bi se najkraćom vrtnjom kraka MR' ili MR'' dosegao krak MS u sl. 137., odn. 138. Kod negativnoga naboja Q u sl. 137. i kod obrnutoga smjera struje prema onom u sl. 138. sila $\mathcal{P}$ bi djelovala u protivnom smislu.

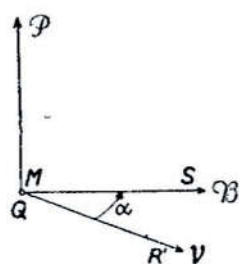
35. Prema rečenomu mogu se za iznos sile $\mathcal{P}$ u slučajevima sl. 137. i 138. pisati formule:

$$P = B \cdot Q \cdot v \cdot \sin \alpha \quad (154)$$

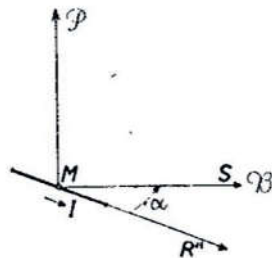
$$P = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha \quad (155)$$

u kojima B znači neki konstantni faktor, »faktor proporcionalnosti«, koji u skladu s relacijom (153) ostaje isti u obje napisane formule za istu točku M magnetskoga polja, no općenito je različitoga iznosa za različite točke polja.

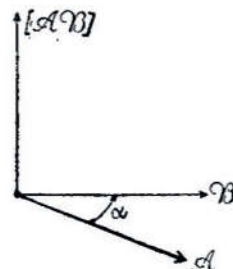
36. Kako je kod specijaliziranih prilika, t. j. uz isto Q , v i α , odn. I , l i α , sila $\mathcal{P}$ za različita polja određena samo veličinom B , može očitio veličina B poslužiti za karakterizaciju intenziteta djelovanja magnetskoga polja u pojedinim točkama polja. Može se čak u svrhu te karakterizacije uvesti vektorska veličina, t. zv. *magnetska indukcija* $\mathcal{B}$, tako da se po definiciji za iznos vektora $\mathcal{B}$ uzme malo prije spomenuti iznos B , a smjerom toga vektora da se smatra smjer MS u sl. 137. i 138.



Sl. 137.



Sl. 138.



Sl. 139.

Vektorom $\mathcal{B}$ magnetske indukcije moguće je karakterizirati određeno magnetsko polje u pojedinim njegovim točkama baš kao i vektorom $\mathcal{H}$ »jakosti magnetskoga polja«. A iskustvo pokazuje da u vakuumu (što je praktički isto kao i u uzduhu) oba vektora podudarajući se smjerom imaju u svim prilikama iznose B i H u posve čvrstom omjeru, tako da se kvocijent B/H iznosâ vektorâ $\mathcal{B}$ i $\mathcal{H}$, kraće kvocijent samih tih vektora u smislu uzetom već u A-40., može staviti jednakim određenoj konstantnoj skalarnoj veličini μ_0 , nazvanoj *indukcionom konstantom* ili »apsolutnom magnetskom permeabilnošću vakuumâ« (praktički i uzduha); u formuli: $\mathcal{B}/\mathcal{H} = \mu_0$, odnosno:

$$\mathcal{B} = \mu_0 \cdot \mathcal{H}$$

37. U zakonu o silama $\mathcal{P}$ na gibane naboje u magnetskim poljima, s iznosima P po (154) i smjerovima u smislu primjedaba uz (154), predleži posve naro-

čiti odnos vektora $\mathcal{P}$ prema vektorima $\vec{v}$ i $\mathcal{B}$ brzine gibanoga naboja i magnetske indukcije, te kutu α vektorâ $\vec{v}$ i $\mathcal{B}$. Ovakav odnos običava se u vektorskom računu opisivati uz pomoć pojma *vanjskoga* ili *vektorskoga* »produkta« vektora $\vec{v}$ i $\mathcal{B}$.

Općenito se vanjski ili vektorski produkt ma kakvih dvaju vektora $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ simbolički označuje sa $[\mathcal{A}\mathcal{B}]$ ili $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (za razliku od unutarnjega ili skalarnoga »produkta« tih vektora iz A-46. i A-84., koji se simbolizira sa $\mathcal{A}\mathcal{B}$ ili $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$), a po definiciji se pod vektorskim produktom vektora $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ međusobno priklo-njenih pod kutom α (manjim od 180°) razumijeva vektor iznosa $A \cdot B \cdot \sin \alpha$ (jednakoga površini paralelograma sastavljena duljinama obih vektora) i smisla u onom smjeru normale na ravninu vektorâ $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ koji bi odgovarao smislu napre-dovanja desnoga vijka, uz onakvu vrtnju toga vijka kakvom bi se vektor $\mathcal{A}$ zakre-tom za kut α doveo u smjer vektora $\mathcal{B}$ (sl. 139.).

Dodajmo da za vektorsku operaciju vanjskog ili vektorskog produkta ne vrijedi »komutativni zakon« multiplikacije, nego se naprotiv mora pisati: $[\mathcal{A}\mathcal{B}] = -[\mathcal{B}\mathcal{A}]$, budući da zakreti vektora $\mathcal{B}$ u smjer vektora $\mathcal{A}$ i vektora $\mathcal{A}$ u smjer vektora $\mathcal{B}$ predstavljaju iznosom jednake, no smislom suprotne vektore.

Uz upotrebu pojma vanjskog ili vektorskog produkta može se specijalno zakon o sili $\mathcal{P}$ na množinu elektriciteta Q gibanu brzinom $\vec{v}$ u polju magnetske indukcije $\mathcal{B}$ simbolizirati relacijom:

$$\mathcal{P} = Q \cdot [\vec{v}\mathcal{B}] \quad (156)$$

38. U sustavima V-A-s-m odn. V-A-s-cm kao jedinica magnetske indukcije nadaje se 1 Vs/m^2 odn. 1 Vs/cm^2 , što je lako razabrati uzimajući u obzir da bi na pr. kod upotrebe V-A-s-m-sustava u formulama (154) i (155) trebalo staviti P u VAs/m ili N (A-42.), Q u As, v u m/s, I u A i l u m, u kojemu slučaju bi B izla-zilo izraženo u Vs/m^2 po svakoj od spomenutih formula. A analogno bi se u V-A-s-cm-sustavu B dobilo u Vs/cm^2 .

Za *tok* pak vektora $\mathcal{B}$ kroz povoljnu plohu S omeđenu nekom konturnom linijom s , dakle po (20') u A-46. za veličinu:

$$\Phi = \int_{(S)} d\Phi = \int_{(S)} B_n \cdot dS = \int_{(S)} \mathcal{B} \cdot d\vec{S} \quad (157)$$

jedinica jednako u V-A-s-m-sustavu kao i u V-A-s-cm-sustavu očito je *volt-sekunda* Vs. Za Vs se međutim upotrebljava i posebno ime *veber* Wb (po Weberu), prema čemu se dosljedno i mjesto Vs/m^2 odn. Vs/cm^2 mogu upotrebljavati nazivi Wb/m^2 odn. Wb/cm^2 . Specijalno mjesto Vs/m^2 ili Wb/m^2 mi ćemo upotrebljavati nedavno i internacionalno uvedeni naziv 1 T (»tesla«; po našem Tesli).

Tako bi na pr. specijalno u homogenim magnetskim poljima tok Φ magnetske indukcije $\mathcal{B}$ kroz konačnu ravnu plohu površine S okomitu na $\mathcal{B}$ bio izražen relacijom:

$$\Phi = B \cdot S \quad (157')$$

u kojoj bi, uz Φ u Vs, te uz S u m² odn. cm² (već prema tomu da li bi se radilo u sustavu V-A-s-m ili u sustavu V-A-s-cm), trebalo staviti B u T (Vs/m²) odn. u Vs/cm².

Uz jednom odabrane jedinice za $\mathcal{B}$ i $\mathcal{H}$ postaje dakako i iznos μ_0 omjera $\mathcal{B}/\mathcal{H}$ za vakuum (praktički i uzduh) veličina posve određenog iznosa; specijalno u sustavima V-A-s-m odn. V-A-s-cm vrijede alternativne relacije:

$$\mu_0 = 0,4\pi \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs/m}^2}{\text{A/m}} = 0,4\pi \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = 0,4\pi \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad (158)$$

odnosno:

$$\mu_0 = 0,4\pi \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vs/cm}^2}{\text{A/cm}} = 0,4\pi \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vs}}{\text{Acm}} = 0,4\pi \cdot 10^{-8} \frac{\text{H}}{\text{cm}} \quad (158')$$

(u kojima smo, anticipirajući, primijenili i relaciju jedinice induktiviteta *henri*: 1 H = 1 Vs/A; v. kasnije u C-126.).

39. U elektrotehničkoj praksi još uvijek se, umjesto u dosljedno postavljenim jedinicama: Vs za Φ , te T (Vs/m²) odn. Vs/cm² za B , iznosi Φ i B nerijetko susreću izraženi u *maksvelima* M (po Maxwellu) i *gausima* G (po Gaussu).

Za odnose jedinica M i G prema malo prije uvedenim jedinicama sustavâ V-A-s-m odn. V-A-s-cm vrijede međutim jednostavne *dekadske* relacije:

$$1 \text{ M} = 10^{-8} \text{ Vs} \quad (159) \quad 1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T} = 10^{-8} \text{ Vs/cm}^2 \quad (160)$$

pa nema zapreke, čak ako se i ostane kod sustava V-A-s-m ili sustava V-A-s-cm, da se M i G upotrebljavaju i kao dekadska submultipla od Vs, odn. od T i od Vs/cm², radeći sa M kao »stomilijuntinom« jedinice Vs, i sa G kao desetstisućinkom jedinice T ili stomilijuntinom jedinice Vs/cm². Treba samo onda paziti da se u »relacije između veličina«, kakva je na pr. (156), kod ostalih veličina supstituiranih u jedinicama upotrebljavanog sistema, također i iznosi Φ ili B stave preračunani u Vs, ili T (Vs/m²) odn. Vs/cm²; slično se u tehničkoj praksi obično navode kapaciteti kondenzatorâ u mikrofaradima, nanofaradima ili pikofaradima, ali se na pr. u relaciju $Q = CU$, uz Q u As i U u V, iznosi C stavljaju preračunani na F.

Primarno su M i G jedinice sustava EMJ, u kome po C-27. jedinicu jakosti magnetskoga polja predstavlja Oe. Za EMJ magnetske indukcije 1 G izbor je pao tako da se za indukcionu konstantu htio dobiti numerički iznos 1. Označujući, kao i u C-27., zvjezdicom veličine izražene u EMJ možemo dakle pisati, kraj $\mu_0^* = 1$, numerički za vakuum: $B^* = H^*$ (uz B^* u G i H^* u Oe). Naprotiv sa B^* u G, i H u A/m odn. u A/cm, indukcionu konstantu dobili bismo numeričkog iznosa $\mu_0^* = 0,004\pi$ odn. $\mu_0^+ = 0,4\pi$; drugim riječima: mjesto numeričkih relacija $B(T) = 0,4\pi \cdot 10^{-6} \cdot H(\text{A/m})$ odn. $B(\text{Vs/cm}^2) = 0,4\pi \cdot 10^{-8} \cdot H(\text{A/cm})$ odn. $B^* = H^*$ trebalo bi pisati: $B^* = \mu_0^* \cdot H(\text{A/m}) = 0,004\pi \cdot H(\text{A/m})$ (161), odn.: $B^* = \mu_0^+ \cdot H(\text{A/cm}) = 0,4\pi \cdot H(\text{A/cm})$ (161')

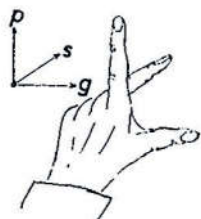
Dodajmo još da bi se sa $B^*(G)$, $I^*(\text{EMJ})$, $P^*(\text{dini})$ i $l(\text{cm})$ formula (155) pisala numeričkom relacijom: $P^* = B^* \cdot I^* \cdot l \cdot \sin \alpha$, pri čemu treba imati na umu već u C-27. spomenutu ekvivalenciju 1 EMJ jakosti struje sa 10 (*apsolutnih*) A, odn. obrnutu vezu: 1 A = 0,1 EMJ jakosti struje.

Primjer: Unutar prstenastog svitka sa $w = 1600$ zavoja od Cu-žice, sa uzdušnom jezgrom površine $S = 0,0010 \text{ m}^2 = 10 \text{ cm}^2$ i srednje duljine puta magnetskih silnica $0,8 \text{ m} = 80 \text{ cm}$, vlada kod struje $I = 4 \text{ A}$ polje jakosti: $H = 1200 \cdot 4 / 0,8 \text{ A/m} = 6000 \text{ A/m}$ ili $H = 1200 \cdot 4 / 80 \text{ A/cm} = 60 \text{ A/cm}$ ili $H^* = 75,4 \text{ Oe}$. Magnetska indukcija unutar jezgre iznosi: $B = 0,4\pi \cdot 10^{-6} \cdot 6000 \text{ T} = 0,00754 \text{ T}$ ili $B = 0,4\pi \cdot 10^{-8} \cdot 60 \text{ Vs/cm}^2 = 75,4 \cdot 10^{-8} \text{ Vs/cm}^2$ ili $B^* = 75,4 \text{ G}$. A magnetski tok kroz svaki zavoj svitka jest $\Phi = 754 \cdot 10^{-8} \text{ Vs}$ ($\Phi^* = 754 \text{ M}$).

40. Maksimalni iznosi $P_m = BQv$ i $P_m = BIl$ postići će se za silu P u formulama (154) i (155) kod $\sin \alpha = 1$, odn. $\alpha = 90^\circ$, dakle kod okomitoga gibanja naboja Q i okomite duljine l vodiča struje I prema smjeru vektora $\mathcal{B}$ magnetske indukcije.

Naprotiv uz $\alpha = 0$, t.j. kod podudaranja smjera gibanja naboja Q i smjera struje I sa smjerom polja, sila P bila bi jednaka nuli.

Po formuli $P_m = BIl$ moguće je konkretizirati definiciju veličine B ako se kaže: magnetsku indukciju $B = 1$ treba pripisivati polju, u kome na vodič struje



Sl. 140.

$I=1$ i duljine $l=1$, okomit na smjer polja, djeluje sila $P=1$.

Specijalno će dakle trebati pripisivati iznos indukcije 1 T onom polju u kome na vodič duljine 1 m, okomit na polje i protjecan strujom 1 A, djeluje sila 1 N, a iznose indukcije 1 Vs/cm² odn. 1 G onim poljima, u kojima na vodič duljine 1 cm, okomit na polje i protjecan strujom 1 A, odn. 1 EMJ (10 A), djeluje sila 1 VAs/cm, odn. 1 din. Usporedbom ovako definiranih jedinica 1 T, 1 Vs/cm² i 1 G neposredno se dolazi na relaciju (160), prema kojoj je EMJ G desettisući dio V-A-s-m-jedinice T i stomilijunti dio V-A-s-cm-jedinice Vs/cm². Kod definicije G uz 10 puta jaču struju sila je na pr. bila uzimana 10⁷ puta slabija nego kod definicije Vs/cm², pa je magnetska indukcija morala ispasti 10 · 10⁷ manja od Vs/cm².

Za praktičke primjene formule $P_m = BIl$ zgodno je pamti Flemingovo pravilo *lijeve* ruke: kod tri prva prsta lijeve ruke ispružena po sl. 140, sila će nastojati gibati vodič u smislu palca kod magnetskoga polja u smislu kažiprsta i struje kroz vodič u smislu srednjega prsta (upamtiti poredak: **g-p-s**). Ekvivalentno je i ovo pravilo: kod *lijeve* ruke s ispruženim prstima i odmaknutim palcem sila će nastojati gibati vodič u smislu palca, ako magnetske silnice udaraju okomito na dlan, a struja teče u smislu ispruženih ostalih prstiju.

41. U praksi se često susreću primjene formula (154) i (155); najčešći su dakako njihovi specijalni slučajevi sa $\alpha = 90^\circ$ i $P = P_m$.

Primjere za (154) predstavljaju proračunavanja staza iona i elektrona ubačenih s određenom brzinom v u evakuirane prostore s magnetskom indukcijom $\mathcal{B}$, općenito promjenljivom od mjesta do mjesta. Ako specijalno treba odrediti, kako će se pod utjecajem magnetskih polja otkloniti od svoje pravocrtnne staze ioni ubrzani električkim naponom U do brzine v , trebat će poći od izvoda iz A-90., pa tražeći općenito brzinu v čestice naboja Q i mase m ubrzane električkim naponom U pisati izraz:

$$v = \sqrt{2 \frac{Q}{m}} \cdot \sqrt{U} \quad (162)$$

Ovaj je izraz bio specijalno za elektrone dan već u A-90. veličinskom relacijom (54''), mjesto koje se može pisati i numerički:

$$v^{(m/s)} = 593000 \cdot \sqrt{U^{(V)}} \quad (162')$$

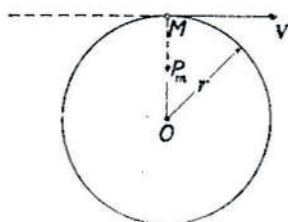
Ako sad po sl. 141.a) na česticu u točki M evakuirana prostora, kod brzine v te čestice u smjeru od lijeva na desno, počne djelovati homogeno magnetsko polje indukcije $\mathcal{B}$ u smjeru od natrag prema naprijed prema ravnini slike, sila $P_m = BQv$ ostajat će u svakoj točki staze čestice okomita na smjerove vektora $\vec{v}$ i $\mathcal{B}$, što po zakonima mehanike znači da će čestica, zadržavajući iznos i neprestano mijenjajući smjer brzine, opisivati kružnu stazu posve određenoga polumjera r u ravnini crtanja v. sl. 141.a). Po teoriji centralnih gibanja centripetalna sila potrebna za podržavanje gibanja mase m brzinom v po kružnici polumjera r jest mv^2/r , pa kako je ta sila u promatranom slučaju identična sa BQv , može se za r u sl. 141.a) staviti:

$$r = \frac{m}{Q} \cdot \frac{v}{B} \quad (163)$$

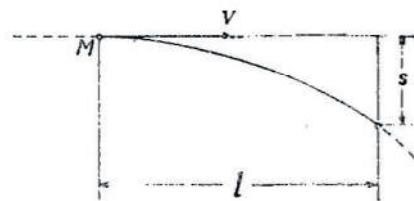
ili specijalno za elektrone, numerički s V-A-s-m-jedinicama:

$$r^{(m)} = 3,4 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\sqrt{U^{(V)}}}{B^{(T)}} \quad (163')$$

Kako se vidi, izlazi r upravno razmjerno brzini v u polje ubačenih čestica (odn. drugom korijenu pripadnoga električkoga napona U) i obrnuto razmjerno magnetskoj indukciji B ; međutim ophodno vrijeme T opisivanih kružnica razli-



Sl. 141.a)



Sl. 141.b)

čitoga polumjera r ostaje neovisno o v , odn. o U , te varira samo obrnuto razmjerno iznosu B . Relaciju $T = 2\pi r/v$ lako je naime posredstvom formule (163) preurediti u: $T = 2\pi m/QB$. A uvodeći frekvenciju obilaženja f (broj obilaženja na sekundu) mogli bismo također pisati:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{QB}{2\pi m} \quad (163a)$$

Ako brzina v čestice čini sa smjerom *homogenog* polja kut α različit od pravoga, možemo v zamisliti s komponentama v_1 i v_2 , prvom okomitom na smjer polja i drugom u smjeru polja; iz gibanja brzinom v_1 rezultirala bi kružna staza polumjera r danoga relacijom (163), dok se gibanje brzinom v_2 ne bi magnetskim poljem poremetilo. Kombinacijom obih gibanja nastalo bi gibanje po helikoidalnoj stazi (vij-kastoj krivulji). U *nehomogenim* poljima ionske staze bi se pogotovo komplicirale.

U radiotehnici se s pomoću magnetskih polja vrše u t. zv. magnetronskim cijevima utjecaji na strujanja elektrona na njihovu putu iz vruće pravocrtne katode

prema koaksijalnoj hladnoj anodi u obliku valjka, cijeloga ili porazdijeljenoga u više uzdužnih sektora. A kod cijevi s »katodnim zrakama« (za *katodnu oscilografiju*, za *televiziju*, za *elektronsku mikroskopiju* itd.) primjenjuju se na katodne zrake, pored električkih polja, i magnetska polja, i to ne samo za otklanjanje pramenova katodnih zraka, nego i za koncentracije tih zraka na određena mjesta (slične koncentracijama optičkih zraka na pr. staklenim lećama); već prema tomu, kakvim se poljima ove koncentracije vrše, govori se onda o električkim ili magnetskim »elektronskim lećama«. I pojavi Hallovih napona (C-15.) imaju korijen u silama po (156) na strujne nosioce naboja.

Relacija (163), sa supstituiranim m i Q za dani ion ili elektron, može se shvatiti kao jednadžba s nepoznicama v i Q/m . Druga jednadžba s istim nepoznicama dobiva se iz otklona zraka iona ili elektrona početne brzine v u električkom polju iznosa F i smjera okomitog na v . Kod takvog otklona po shemi u sl. 141.b) rezultira parabolično gibanje čestica koje se može smatrati nastalim superpozicijom jednolikoga gibanja u smjeru v i jednoliko ubrzanoga u smjeru okomitom na v pod utjecajem sile QF , odn. akceleracije $a = QF/m$. Ako je $t = l/v$ vrijeme potrebno za pomak l u smjeru v , za pripadni pomak s u smjeru okomitom na v vrijedit će očito jednadžba:

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{m} \cdot F \cdot \frac{l^2}{v^2} \quad (164)$$

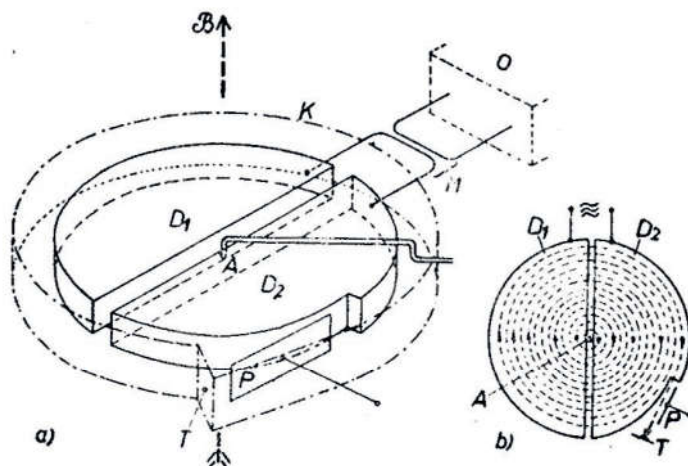
u kojoj dolaze, kao i u (163), v i Q/m kao nepoznanice. Moguće je dakle, postupajući sa (163) i (164) kao s dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, određivati v i Q/m iona odn. elektrona.

42. Na vrlo važnu noviju primjenu odnosâ po relacijama (162) i (163) nailazi se u *ciklotronu*, napravi nađenoj po Lawrenceu i određenoj za ubrzavanje protona H^+ ($m_p \approx 1840m_0$; $Q = Q_0$) deuteronu D^+ ($m_D \approx 3680m_0$; $Q = Q_0$), α -čestica He^{++} ($m_\alpha \approx 7360m_0$; $Q = 2Q_0$) i sl. na ekstremne brzine v , odn. pripadne kinetičke energije $\frac{1}{2}mv^2$. Takve čestice energijâ od mnogo MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 0,160 \cdot 10^{-12} \text{ Ws}$; v. A-18.), često se traže kod nuklearnih istraživanja, no one se ne dadu praktički postići neposrednim jednokratnim ubrzavanjem »teških« iona H^+ , D^+ itd. nekim fiksnim naponom U po relaciji (162), zbog poteškoća da se proizvedu potrebni ekstremno visoki naponi i pripadnih problema električke izolacije. Međutim mogu se ubrzavanja do velikih energija teških čestica postići i postepenom primjenom umjerenih napona, puštajući da čestice prolaze redom prostore u kojima, prikladno usmjereno, djeluju električka polja na naboje tih čestica, tako da se čestica u prvom polju ubrza do neke umjerene brzine, u drugom dalje ubrza do veće brzine, i tako dalje u svakom idućem polju, sve dok takvim kumulativnim efektom ne postigne željenu ekstremnu brzinu v_1 i pripadnu veliku energiju $\frac{1}{2}mv_1^2$.

Prva od naprava koje opisani princip realiziraju cikličkim (cirkularnim) stazama ubrzavanih čestica, dakle prvi *ciklički* akcelerator, bio je već spomenuti ciklotron (naprave sa sličnom svrhom s linearnim stazama čestica zovu se *linearni* akceleratori). Kod ciklotrona (sl. 142.) se ubrzavane čestice puštaju da, djelovanjem okomito na njihovu stazu usmjerenog magnetskog polja indukcije $\mathcal{B}$ i postepeno sve veće brzine v samih čestica, izvode po sl. 142. pod b) polukružne staze sve većeg polumjera r . U tu svrhu one se ubace iz prikladnog »izvora iona« A s relativno malom početnom brzinom v_0 , da bi se dalje gibale redom unutar šupljina dviju u evakuira-

noj komori K ponešto razmaknuto smještenih specijalnih elektroda D_1 i D_2 u obliku »poludoza« (»duanata« ili »D-elektrodâ«, zbog njihova oblika koji podsjeća na slovo »D«), koje bismo mogli zamisliti nastale diametralnim prerezivanjem plosnate okrugle šuplje metalne doze.

U električka polja ubrzavanja dolaze čestice u ispravnim momentima pri prelazima međuprostora između obih D-elektroda. Ta polja proizvode se primjenom umjereno visokog izmjeničnog napona između D-elektroda ciklotrona. To je radiofrekventni napon, u praksi proizveden u prikladnom cijevnom oscilatoru O, i njegova frekvencija f mora biti baš usklađena na



Sl. 142.

»sinhronizam« s gibanjem čestica, dakle, po relaciji (163a), neovisno o rastućoj brzini v i po tom rastućem polumjeru r staza unutar D-elektroda, usklađena s određenim iznosom B magnetske indukcije u prostoru D-elektroda, koju proizvodi određenom istosmjernom strujom I_M uzbuđeni veliki elektromagnet ciklotrona.

Očito će sinhronizacija biti osigurana pri promjenama polariteta radiofrekventnog napona narinutog D-elektrodama u intervalima jednakima polovici obilaznog vremena čestica, tako da na pr. kod čestice naišle u polje stvoreno od pozitivnog D_1 i negativnog D_2 čestica bude ubrzana u smislu od D_1 k D_2 na veće v i bačena na stazu još većega r , pa da pri idućem diametralno suprotnom prelazu u smislu od D_2 k D_1 zbog polja od sada pozitivnog D_2 i negativnog D_1 i opet dođe do ubrzavanja na još veće v i prebacivanja na stazu još većega r , i slično dalje. No to znači da pola periode radiofrekventnog napona D-elektrodâ mora odgovarati polovici vremena jednog punog obilaska čestice, da dakle period, a time i frekvencija, na D-elektrode primjenjenoga napona s trajanjem jednog obilaska čestice odn. brojem obilazaka na sekundu koincidiraju, odnosno da formula (163a) predstavlja i izraz za frekvenciju napona D-elektrodâ ciklotrona. Prema tomu frekvencija f napona na D-elektrodama i magnetska indukcija B ciklotrona moraju, kod čestice danog naboja Q i dane mase m , biti međusobno prilagođene na bazi relacije (163a). Kod postignutog prilagođenja rastu onda brzine v , a s njima po formuli (163) i polumjeri r staza čestica, sve do nekih određenih graničnih vrijednosti $v = v_1$ odn. $r = r_1$, određenih veličinom D-elektrodâ, odn. uvjetom da, uz dane dimenzije D-elektrodâ, čestice ne dosegnu plohe tih elektroda. Na konačnu brzinu v_1 i konačni polumjer staze r_1 ubrzane čestice mogu se puštati da udaraju u odabranu »metu« u koju se svrhu ponešto otkloni pramen ubrzanih iona s pomoću prikladno

nabijene otklonske pločice P. Dok se konačna brzina v_1 čestica može računati po (163) uz supstituirano r_1 , frekvencija f napona D-elektroda slijedi po (163a), a konačna energija čestica dobiva se stavljajući u izraz $\frac{1}{2}mv^2$ iznos v_1 dobiven kako je malo prije rečeno, što daje:

$$A_1 = \frac{Q^2 \cdot B^2 \cdot r_1^2}{2m} \quad (163b)$$

Iz toga se vidi važnost upotrebljavanja D-elektroda što većih dimenzija, što za sobom povlači podržavanje B -iznosa u opsežnim prostorima, pa kako i B -iznosi treba da budu što veći, rezultiraju ogromni i skupi elektromagneti. A vidi se iz izraza (163a) da će kod praktički dostiživih vrijednosti B , na pr. 1,5 T, s obzirom na to da odnos Q/m izlazi vanredno velikog iznosa As/kg, ciklotronski oscilatori morati biti vanredno visokih frekvencija f , na pr. desetak MHz (frekvencije kratkih radio valova!). A kako i naponi između D-elektroda moraju biti veliki, na pr. do 200 i više kV tjemene vrijednosti, potrebni su uz ciklotrone i visokofrekventni oscilatori velike snage, do mnogo desetaka kW. Uzme li se još u obzir potreba visoko razrađenog uređaja za stvaranje i podržavanje visokog vakuuma, zatim pomno građenih izvora iona (cijevi s izbijanjem s raznim profinjenjima), brojnih mjernih aparata, kontrolnih i sigurnosnih uređaja, te zaštitnih mjera od visokih napona i prodornih radijacija, razumjet će se da ciklotroni predstavljaju vanredno skupe, ali za mnoge primjene vrlo korisne naprave. Veći ciklotroni imaju D-elektrode promjerâ do 1,5 m i više, njihovi elektromagneti sadrže na stotine tona željeza i bakra, te daju magnetske indukcije oko 1,2 do 1,5 T. Postizavane energije čestica dosižu i do 45 MeV pri ionskim strujama jakosti oko 1 mA.

Ubrzavanja običnim ciklotronima na još veće energije ograničavaju smetnje od relativističkog povećavanja mase ubrzavanih teških čestica, jer ove pri sve većim brzinama sve više zaostaju u gibanju, pa se sinhronizam konačno gubi. Ipak t. zv. »frekventno moduliranim ciklotronima« (FM-ciklotroni), kod kojih se visokofrekventnom naponu frekvencija f prikladno periodski varira, a i nekim drugim najnovijim cikličkim akceleratorima, uspijeva dobiti mnogostruko veće energije čestica nego s običnim klasičnim ciklotronima. Za ubrzavanja elektrona obični ciklotroni nisu prikladni, jer se kraj neznatne mase elektrona već kod manjih energija gubi sinhronizam. Elektroni se ubrzavaju najjednostavnije »betatronima«, koji se osnivaju na električkim vrtložnim poljima, proizvedenima izmjeničnim magnetskim tokovima po zakonima elektromagnetske indukcije. O betatronima će zato biti govora kod primjena elektromagnetske indukcije.

Kod zagrebačkog ciklotrona »Instituta R. Bošković« (u momentu pisanja ovih redaka još u gradnji) predviđaju se magnetske indukcije 1,4 T, proizvedene magnetom mase željeza 60 tona i mase bakra namotaja 12 tona, za uzbuđivanje magnetu trebat će snaga 80 kW, promjer D-elektroda bit će oko 1,3 m, predviđeni granični promjer $2r_1$ bit će oko 1,2 m, oscilator će biti frekvencije oko 11 MHz, tjemnog napona između D-elektroda 160 kV i korisne snage 80 kW. U ionskom izvoru, sa utroškom snage 2,5 kW za struju grijanja Wo-niti, stvarat će se ioni H^+ , D^+ i sl., a ubrzavat će se na pr. ioni D^+ do oko 16 MeV (odn. ioni H^+ do oko 8 MeV).

43. Kao primjenu formule (155) uzmimo račun momenta vrtnje M na pravokutni zavoј duljine l i visine h , s osi vrtnje okomitom na smjer homogenoga magnetskoga polja. Ako je u sl. 143. φ kut priklona normale MN pravokutnika prema smjeru vektora $\mathcal{B}$, sile na svaku od obje stranice duljine l , od kojih će jedna djelovati vertikalno gore i druga vertikalno dolje, bit će jednakoga iznosa Bil , i jedine će one proizvesti moment vrtnje:

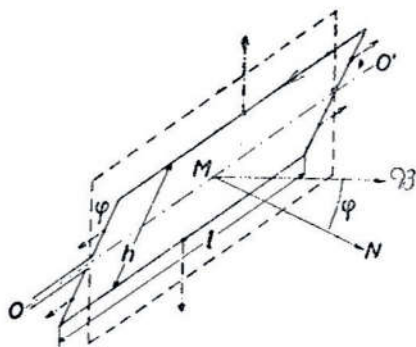
$$M = Bil \cdot \frac{h}{2} \cdot \sin \varphi + Bil \cdot \frac{h}{2} \cdot \sin \varphi = Bilh \cdot \sin \varphi$$

No produkt $l \cdot h$ je površina pravokutnika, a $B \cdot l \cdot h$ je po (158') najveći magnetski tok Φ_m kroz pravokutnik, t. j. onaj što bi prolazio kroz pravokutnik postavljen s ravninom okomito na smjer vektora $\mathcal{B}$, dakle s normalom MN pod kutom $\varphi = 0$. Prema tomu se za jedan zavoј može staviti: $M = \Phi_m \cdot I \cdot \sin \varphi$, a za svitak od w zavoја:

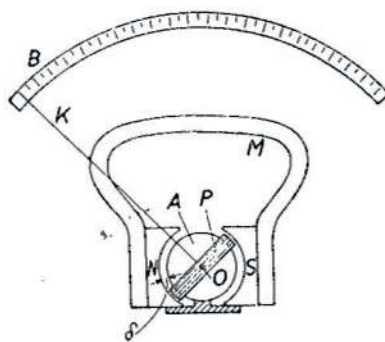
$$M = w \cdot \Phi_m \cdot I \cdot \sin \varphi \quad (165)$$

Kako se vidi, M je razmjerno sa $\sin \varphi$ (kao i u C-10. kod magnetske igle s magnetskom osi priklonjenom pod kutom φ prema smjeru homogenoga polja). Maksimalni iznos M_0 postizava M uz $\varphi = 90^\circ$ (dakle uz normalu MN okomitu na smjer polja, odn. ravninu zavoја u smjeru polja); za iznos pak $M = 0$ mora biti $\varphi = 0^\circ$ ili $\varphi = 180^\circ$ (t. j. MN mora ležati u smjeru polja, a ravnina zavoја okomito na smjer polja): dok je uz $\varphi = 0^\circ$ ravnotežje stabilno, uz $\varphi = 180^\circ$ ono je labilno.

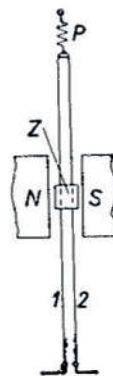
44. U praksi se sile vrtnje na strujne svitke u magnetskim poljima primjenjuju na pr. kod galvanometarskih mjernih sustava s pomičnim svitkom u polju



Sl. 143.



Sl. 144.



Sl. 145.

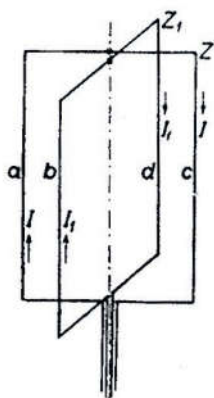
proizvedenom permanentnim magnetom (E.M.); uz dodatak nuzotpora i predotpora ovi mjerni sustavi daju najpreciznije ampermetre i voltmetre, kako je već u B-41. do B-43. razloženo. Međutim, protivno nego u sl. 143. magnetsko polje kod mjernih sustava s pomičnim svitkom je »radijalno«, t. j. ono je po shemi u sl. 144. svagdje okomito na usku uzdušnu pukotinu između u tu svrhu naročito izvedenih polnih nastavaka N i S permanentnoga magneta i prikladnoga valjkastoga srednjega komada A mekoga željeza. U toj pukotini ostaje, vrteći se oko osi O, pomični svitek P, tako da uzdužne stranice zavoја svitka P ostaju trajno okomite na

homogeno polje u pukotini i na smjer svojega gibanja, prema čemu na svitak djeluje moment vrtnje jednak u svakom položaju svitka uz stalnu struju I svitka, te proporcionalan toj struji. A kako se odklonu svitka α suprotstavljaju elastične sile spiralnih perâ i sl., mora kod pretpostavljenih prilika postojati proporcionalnost između odklona α svitka i jakosti struje I kroz svitak, t. j. mora vrijediti relacija (11) iz A-35. sa »strujnom konstantom« C_0 kao faktorom proporcionalnosti.

45. I *petljasti oscilografi* (elektromagnetski oscilografi) osnivaju se na elektromagnetskom principu djelovanja magnetskih polja na strujne vodiče. U sl. 145. među polnim nastavcima N i S jakoga elektromagneta ili permanentnoga magneta struja teče kroz petlju sastavljenu od nježnih vodiča 1 i 2. Na tu petlju, koju drži napetom pero P, pričvršćeno je zrcalce Z. Kako su struje kroz vodiče 1 i 2 suprotnoga smisla, magnetsko polje nastojat će pomaknuti jedan od njih prema naprijed, a drugi prema natrag. Time će se zrcalce Z više ili manje otkloniti. Otklon se može učiniti vidljivim s pomoću uskoga pramena zraka svjetlosti, koji se pusti da se odbija na zrcalcu. Radi neznatne tromosti pomičnog sustava petljasti oscilografi kadri su vjerno slijediti i vrlo brze promjene mjerne struje, pa se njima mogu na pr. vidljivo predočiti ili fotografski registrirati (oscilografirati) krivulje vremenskih variranja periodskih ili neperiodskih brzo promjenljivih električkih struja i napona, odn. detalji pripadnih električkih pojava (više u E.M.). Zbog ovoga svojstva petljasti oscilografi su važna pomagala i kontrola kod mnogih naučnih i tehničkih ispitivanja.

Danas se pored elektromagnetskih oscilografa sve općenitije upotrebljavaju katodni oscilografi, kod kojih se brzo promjenljivi pojav tako ispituje da se motre ili fotografiraju otkloni svijetle mrlje, koji se na svjetlucavom zastoru proizvode tim da se u prikladno građenim cijevima djeluje na katodne zrake u njima posredstvom električkih ili magnetskih polja, proizvedenih ispitivanim pojavom (v. sl. 57. na str. 114., te E.M.).

46. Iz stavka o silama na strujne vodiče u magnetskim poljima lako je dobiti i izraz za mehaničke sile između takvih vodiča. Sila koja rezultira kod određenoga



Sl. 146.

prostornoga odnosa obih vodiča može se tako računati, da se odredi magnetska indukcija proizvedena strujom I prvoga vodiča na mjestima gdje se nalaze elementi duljine dl drugoga vodiča sa strujom I_1 , i da se onda po C-34. i C-35. odrede po smjeru i po veličini pripadne sile na te elemente dl ; ukupno djelovanje jednoga vodiča na drugi vodič bilo bi onda karakterizirano rezultantom spomenutih elementarnih sila.

Primjenom ove metode na specijalne slučajeve proračunavanja ovakvih »elektrodinamskih« sila lako bi bilo pokazati, da se paralelni vodiči protjecani strujama u istom smislu privlače, a protjecani strujama u suprotnom smislu da se odbijaju. Ako su pak vodiči unakrst, oni će se nastojati tako postaviti da postanu po mogućnosti paralelni i da struje u njima teku u istom smislu. Te je zaključke lako i pokusima potvrditi. Slično bi bilo moguće odrediti, i pokusima ispitati,

i djelovanja između cijelih zavoja i čak cijelih svitaka protjecanih strujama. Tako bi specijalno elektrodinamske sile između dva pravokutna zavoja Z i Z_1 sa strujama I i I_1 , uz pretpostavku da ti zavoji stoje u međusobnom položaju kao u sl. 146. i da je, uz čvrsto Z , Z_1 vrtivo oko svoje vertikalne osi, nastojale zakrenuti Z_1 u ravninu zavoja Z . To je očito, jer bi između stranica a i b i između stranica c i d protjecanih strujama u istom smislu sile bile privlačne, dok bi između b i c i između a i d kraj suprotnoga smisla protjecanja pripadnih struja sile bile odbojne.

47. Kvantitativno bi se sila P između dvaju pravocrtnih paralelnih vodiča duljine l vrlo velike prema udaljenosti d tih vodiča lako odredila. Ako je I struja kroz prvi vodič, u daljini d od osi toga vodiča jakost polja struje I bila bi $H = I/2\pi d$ (C-25.), a magnetska indukcija (u vakuumu, a praktički i u uzduhu) bila bi: $B = \mu_0 \cdot H = \mu_0 I/2\pi d$ (C-36.), tako da se za silu P na drugi vodič struje I_1 u magnetskom polju prvoga vodiča struje I (ujedno i za silu na prvi vodič u magnetskom polju drugoga vodiča) konačno dobiva relacija među veličinama, valjana u svakom potpunom sustavu jedinica:

$$P = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot I_1 \cdot l}{2\pi d} \quad (166)$$

S pomoću (166) može se sad konačno 1 A (što od g. 1948. internacionalno znači »1 (apsolutni) A«, zamišljan prvotno po C-27. i C-39. kao 0,1 EMJ jakosti struje), povezati, umjesto s EMJ, neposredno s mehaničkim jedinicama 1 m i 1 N ($= 1 \text{ J/m}$), ali i s magnetskim svojstvima vakuuma, time da se definira: 1 A je jakost stalne struje uz koju, poslanu kroz dva paralelna, beskonačno duga, tanka i za 1 m razmaknuta vodiča u vakuumu, nastaje sila između vodiča $0,2 \cdot 10^{-6} \text{ N}$ po svakom metru duljine sistema paralelnih vodiča.

S pozivom na gornju definiciju uveden je na str. 13. pod I.d) odn. II.b) *amper* u osnovne ekvivalentne kvadruple m-kg-s-A odn. V-A-s-m, i pod III.b) u osnovni kvadrupl V-A-s-cm. Istoj definiciji prilagođeno, bio je u A-9., B-18. itd. empirijski uveden, iz praktičkih obzira i samo prethodno, amper kao struja koja elektrolitički sekundno izlučuje 1,11815 mg Ag; no to prilagođivanje nije moglo biti provedeno nego u granicama točnosti danas poznatih podataka, i treba ga zamišljati trajno dotjerivanim budućim još preciznijim rezultatima mjerenja.

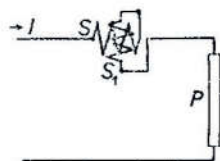
Kod I i I_1 u A, te d i l u cm, uz zamijenjeno μ_0 iz (166) sa $\mu_0^* = 1$, dobilo bi se, s obzirom na razlike između A i EMJ struje, za silu po (166) u dinima: $P^* = 0,02 \cdot I \cdot I_1 \cdot l/d$, dakle na pr. konkretno, uz odnose kao gore kod definicije apsolutnog ampera: $0,02 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 100/100 = 0,02$ dina ($= 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ N}$) za svaki metar duljine.

48. Sile između strujnih svitaka primjenjuju se naročito kod mjernih sprava *elektrodinamskoga* tipa. Unutar nepomičnoga većega svitka montiran je kod elektrodinamskih instrumenata manji, pomični svitak, i to tako da je vrtiv prema većemu po prilici kao u sl. 146. zavoj Z_1 prema zavoju Z . Taj pomični svitak tjeraju prema položaju ravnotežja, točnije govoreći položaju pod priklonim kutom 90° pomičnog svitka prema nepomičnom, elastična pera koja odmah služe i za dovod i odvod struje pomičnom svitku. U principu elektrodinamski instrumenti odgovaraju običnim instrumentima s pomičnim svitkom iz C-43., no s tom bitnom razlikom da je pomični svitak kod ovih potonjih povrgnut djelovanju praktički radijal-

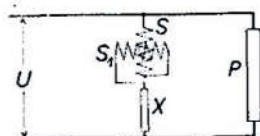
noga polja u uzdušnim pukotinama između polnih nastavaka permanentnoga magneta i pripadnoga srednjega komada mekoga željeza, a kod elektrodinamskih mjernih sustava vrtiv je u magnetskom polju nepomičnoga svitka, prostorno na određeni način raspoređenom i u cjelini proporcionalnomu jakosti struje I kroz spomenuti svitak. Ostavljajući na ovom mjestu po strani potankosti izvedbe (više u E.M.), odmah se vidi da će kod elektrodinamskih instrumenata kut odklona α pomičnoga svitka prema položaju ravnotežja, osim o obliku i broju zavoja obih svitaka, o njihovim geometrijskim odnosima itd., biti ovisan i o strujama I i I_1 kroz nepomični i pomični svitak, i da će bar približno, dok odkloni α ostanu dovoljno maleni, biti proporcionalan umnošku $I \cdot I_1$ tih struja.

Kad se elektrodinamski instrument upotrebljava kao *ampermetar*, pusti se po sl. 147. mjerena struja redom kroz nepomični svitak S i pomični S_1 , tako da je $I = I_1$, i odklon α određen je sa I^2 . Kako dolazi kvadrat jakosti struje, to predznak struje ne utječe na smjer odklona i ovakav ampermetar može mjeriti i izmjenične struje.

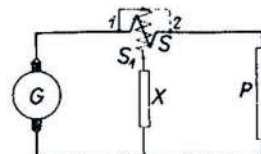
Kod elektrodinamskih *voltmetara* spoj je po sl. 148., t. j. mjerenim naponom U proizvedena struja I_0 teče redom kroz nepomični svitak S , pomični S_1 i predotpor voltmetra X (B-42.). Ako je R_g otpor mjernoga sustava, i ako je prema tomu



Sl. 147.



Sl. 148.



Sl. 149.

$R_0 = R_g + X$ ukupni otpor voltmetra, odklon α instrumenta bit će određen sa $I_0^2 = U^2/R_0^2$, dakle i sa U^2 , pa će se na skalu voltmetra doista moći nanijeti odmah naponi U , a instrument će moći mjeriti i izmjenične napone.

Osim kao elektrodinamski ampermetri i voltmetri, koji su važni naročito za izmjenične struje i napone, jer ove nije moguće neposredno mjeriti instrumentima s pomičnim svitkom i permanentnim magnetom, elektrodinamski mjerni sustavi dragocjeni su još i zato što omogućuju, prikladno izvedeni i ispravno priključeni, neposredna mjerenja električkoga učina N jednako kod istosmjernih struja kao i kod izmjeničnih. Ovakvi instrumenti, zvani elektrodinamski *watmetri*, građeni su s nepomičnim svitkom S od malo zavoja debele žice, i taj se po sl. 149. priključuje u glavni tok struje, i s pomičnim svitkom S_1 od mnogo zavoja tanke žice, i ovaj se zajedno s dodanim predotporom X priključuje u poredni tok. Za odklon ovakvoga instrumenta može se dakle uzeti, da je određen produktom $I \cdot I_1$ strujâ kroz S i S_1 , dakle produktom $I \cdot U/R_w$, gdje je R_w suma otpora R_1 svitka S_1 i njemu dodanoga predotpora X . Otklon α je dakle u zadnjoj liniji kod istosmjernih struja sa $N = UI$ određen izrazom N/R_w , u kome mjereni električki učin N dolazi u prvoj potenciji. Prema toku odkloni α instrumenta po sl. 149. mogu služiti kao mjera

za učin N , i na skalu instrumenta mogu se odmah nanijeti iznosi N u vatima. A dade se pokazati, da uz prikladnu izvedbu poredne grane otpora $R_1 + X$ ovakvih vatmetara, točnije predotpora X te grane, elektrodinamski vatmetri upotrebljavani i u mrežama izmjenične struje pokazuju također vate, odnosno t. zv. »pravi učin« izmjeničnih struja $N = U \cdot I \cdot \cos \varphi$ (E.M.).

49. Dok se kod instrumenta s pomičnim svitkom i permanentnim magnetom po C-43. mogu očekivati otkloni proporcionalni mjerenoj struji ili naponu, kod ampermetara i voltmetara elektrodinamskog tipa otkloni uglavnom, osobito na početnom dijelu mjernoga područja, rastu proporcionalno kvadratu mjerene struje, odn. mjerena napona, t. j. skala elektrodinamskih ampermetara i voltmetara je uglavnom »kvadratičnoga« karaktera, što povlači za sobom relativno slabiju osjetljivost tih instrumenata na početnim područjima njihovih mjernih opsega nego kod instrumenata s jednolikom skalom.

Spomenutu osobitost dijele s elektrodinamskim instrumentima uopće mjerni sustavi ampermetara i voltmetara koji neposredno reagiraju i na izmjenične struje, na pr. oni s produženjem žice zbog ugrižavanja strujnom toplinom (»termički instrumenti« ili »instrumenti s vrućom žicom«; E.M.), pa oni s mekim željezom koje se otklanja u magnetskom polju svitka protjecanoga strujom (»instrumenti s pomičnim željezom«, zvani također »instrumenti s mekim željezom« ili »elektromagnetski instrumenti«; E.M.).

Kod elektrodinamskih vatmetara otkloni su naprotiv uglavnom razmjerni umnošku struje I strujnoga svitka i napona U naponske grane, a kod izmjeničnih struja i »faktoru učina« $\cos \varphi$, t. j. skala tih instrumenata je praktički jednolika.

Treba međutim dodati, da se principno vatmetrom pokazani učin N_0 razlikuje od mjerena učina N zbog »vlastitoga potroška« instrumenta. Prema tomu bi zapravo uvijek trebalo očitano vrijednost N_0 »korigirati« dodavajući ili oduzimajući joj neki iznos, kojim se N_0 nadopuni u N . Ova korekcija različita je prema tomu da li se radi o »spoju I« ili »spoju II« vatmetra (sa slobodnim krajem naponskoga svitka priključenim ispred strujnoga svitka, dakle kod 1 kao u sl. 149., ili iza strujnoga svitka, t. j. kod 2 po istoj slici), te da li se radi o mjerenju učina »generatora« G ili »potrošača« P (E.M.). No u praksi su većinom, uz vrlo velik otpor R_w naponske grane, odn. neznatan otpor r_w strujnoga svitka, odnosi takvi da se korekcija može zanemariti. Tako bi, kako je lako razabrati, kod mjerenja učina generatora po spoju I) iz sl. 149. korekcija bila $+U^2/R_w$ i iznosila bi uz $U = 200 \text{ V}$ i $R_w = 5000 \Omega$ samo $200^2/5000 = 8 \text{ W}$, tako da bi se na pr. kod $N_0 = 2000 \text{ W}$ ili slično mogla doista zanemariti.

Najstarije, danas već istisnute mjerne sprave istosmjerne struje bili su »galvanometri s iglom« (s magnetom pomičnim u polju čvrstoga strujnoga svitka). Samo pak na izmjenične struje reagiraju sustavi po principu magnetskog »zakretnoga polja« i drugi »indukcioni« instrumenti (E.M.).

Posredno mogu se mjeriti izmjenične struje i naponi također sustavima s pomičnim svitkom i permanentnim magnetom, i to čak dvojako: a) ako se spomenutim sustavima doda »metalni suhi ispravljač«, koji mjerenu izmjeničnu struju »ispravi« (E.M.); b) ako se sustavu doda termoelement, u kojem strujna toplina izmjenične struje proizvede termostruju, a na ovu mjerni sustav reagira (E.M.).

50. Sile P na strujne vodiče kao one iz C-40., odnosno momenti vrtnje M na pojedine strujne zavoje ili svitke od više takvih zavoja poput onih iz C-43. i sličnih,

moгу se iskoristiti i za naprave s neprekidnom vrtnjom, koje čak mogu vršiti i mehaničku radnju na račun privedene energije električne struje.

Ostavljajući za kasnije bliža razmatranja o sastavu i funkcioniranju naprava po ovom principu, *elektromotora*, spomenimo zasad samo to, da je za neprekidnu vrtnju na pr. svitka u raspoređaju po sl. 143. potrebno između izvora koji daje struju svitka i samoga svitka predvidjeti neki uređaj, nazivan »komutatorom« ili »kolektorom«, kojim se obrne ili komutira struja svitka u času, kad svitak nakon pokreta iz labilnoga položaja po C-43. uz $\varphi = 180^\circ$ dođe načinivši polovicu okretaja u stabilni položaj karakteriziran sa $\varphi = 0$. Istom se naime tim obratima smjera struje svitka pretvara ravnotežje svitka svaki puta u labilno i svitak, prešavši zbog ustrajnosti gibanja pripadni položaj, dolazi i dalje pod utjecaj momenta vrtnje u smislu svoga gibanja.

Praktička realizacija komutatora bila bi osobito jednostavna kod gore pretpostavljenoga primitivnoga raspoređaja po sl. 143. sa svitkom vrtivim u homogenom magnetskom polju, a također i kod tehnički već nešto dotjeranijih starinskih raspoređaja elektromotora po shemi u sl. 150. s »armaturom dvostruko T« (t. j. s dijelom motora u obliku valjka od poprečno poredanih željeznih limova A, koji vrtivo montiran između polnih nastavaka N i S magneta poput onih u sl. 144., nosi u svoja dva diametralno suprotna žlijeba 1 i 2 zavoje strujnoga svitka). Uz spomenute raspoređaje dosta bi bilo naime za postizavanje komutacije priključiti krajeve 3 i 4 strujnog svitka na komutator od samo dvije poluvaljkaste lamele 5 i 6 izolirano montirane na jednom valjku vrtivom zajedno s armaturom A, pa pustiti da lamele 5 i 6 uslijed vrtnje motora dolaze, naizmjenice i u pravi čas, u kontakt s prikladno po sl. 150. već prema položaju komutatora na osovini motora postavljenim i na njega elastično prislonjenim čvrstim »keficama« 7 i 8 (obično pločicama od tvrdoga ugljena), koje su spojene s oba pola izvora, odn. mreže istosmjerne struje.

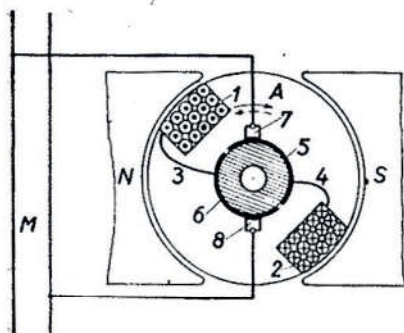
Tri bitna dijela motora (i uopće, kako ćemo još vidjeti, strojeva, dakle i generatora) istosmjerne struje dadu se razabrati već na jednostavnom raspoređaju elektromotora po sl. 150.: a) magneti (obično elektromagneti); b) armatura, koja međutim kod savršenijih strojeva istosmjerne struje ima redovito oveci broj žljebova ispunjenih vodičima zamršenije nego u sl. 150. izvedenih »namotaja« (takvi su na pr. Gramme-Pacinottievi »prstenasti« ili Hefner-Alteneckovi »cilindrički«, od kojih se međutim praktički danas još upotrebljavaju samo cilindrički); c) komutator ili kolektor, s redovito mnogo lamela; njihov se broj i vodljiva veza s pojedinim mjestima namotaja uvijek ravna prema odabranom tipu namotaja.

51. Vratimo se sad na zakon (157) iz C-37., da bismo ga primijenili na pojave *elektromagnetske indukcije* u gibanim vodičima.

Pomislmo po sl. 151. u homogenom magnetskom polju gibani na pr. bakreni vodič duljine $l = AM$ priklonjen pod kutom φ_1 prema normali $\mathcal{N}$ uzetoj u smislu kao C-34.b) na ravninu vektorâ $\vec{v} = AA'$ i $\vec{\mathcal{B}} = AA''$, koji neka označuju brzinu vodiča i magnetsku indukciju polja. Kut pak vektorâ $\vec{v}$ i $\vec{\mathcal{B}}$ (manji od 180°) neka bude φ .

Po C-34. i C-35. javila bi se na pozitivni naboj Q giban brzinom $\vec{v}$ u polju indukcije $\mathcal{B}$ sila $\mathcal{P}$ u smislu normale $\mathcal{N}$ i s jakošću $P = BQv \cdot \sin\varphi$, koja se uz upotrebu pojma vanjskoga ili vektorskoga produkta može izraziti i formulom $\mathcal{P} = Q \cdot [\vec{v} \mathcal{B}]$ iz C-37., a na negativni naboj istoga iznosa sila bi bila iste jakosti, no suprotnoga smisla. Javila bi se dakle sila koja u bitnosti izlazi na djelovanje $\mathcal{P} = Q \cdot \mathcal{F}$ (A-23.) nekoga električkoga polja $\mathcal{F}$ jakosti F na promatrani naboj, tako da se, skrativši sa Q , može postaviti:

t. j. može se postaviti *zakon elektromagnetske indukcije*, po kojemu na naboj Q giban brzinom v u polju indukcije $\mathcal{B}$ djeluje električko polje, zvano *inducirano električko polje* i jednako vanjskom produktu vektora $\vec{v}$ i $\mathcal{B}$.



Podvrgnuti djelovanju induciranoga električnog polja naboji Q , kad bi bili potpuno slobodni, gibali bi se, već prema predznaku, u smislu ili nasuprot smislu induciranoga polja $\mathcal{F}$, odnosno u smislu ili nasuprot smislu sile $\mathcal{P}$ u sl. 151. Kako su međutim elektroni u pretpostavljenom vodiču AM duljine l gibljivi samo uzduž te duljine l , dolazi za njihovo gibanje od sile $\mathcal{P}$ iznosa $P = BQv \cdot \sin\varphi$ u obzir samo komponenta $\mathcal{P}'$ iznosa $P' = BQv \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi_1$ u smjeru duljine l .

Pod utjecajem te sile $\mathcal{P}'$ došlo bi u promatranom vodiču do strujanja elektrona u smislu od M prema A, i zbog toga gibanja stvarala bi se postepeno sve veća razlika potencijala U između krajeva vodiča, a time i korespondentno elektrostatsko polje $\mathcal{F}''$ unutar vodiča. To polje očito bi se protivilo gibanju elektrona, a kod odstrujale u smjeru od M prema A dovoljne količine elektrona ono bi toliko naraslo, i to zbog posve neznatne tromosti elektrona u praktički zanemarivom dijelku vremena, da bi dalje gibanje elektrona u vodiču prestalo. Uspostavilo bi se naime ravnotežje između sile $\mathcal{P}' = Q_0 \cdot \mathcal{F}'$ na naboje Q_0 elektrona proizvedane komponentom $\mathcal{P}'$ induciranoga električkoga polja $\mathcal{F} = [\vec{v} \mathcal{B}]$ uzetom u smjeru duljine vodiča i sile $\mathcal{P}'' = Q_0 \mathcal{F}''$ proizvedane na elektrone poljem $\mathcal{F}''$ od poremećene

raspodjele naboja u vodiču, za koje potonje polje očito treba pretpostaviti, da bi u slučaju ravnotežja kod raspoređaja po sl. 151. bilo jednako jako svagdje uzduž vodiča, t. j. da bi za iznos F'' toga polja vrijedila jednostavna formula: $U = F'' \cdot l$.

Prema tomu se uz pretpostavku postignutoga ravnotežja uspostavlja između iznosâ P' i P'' silâ $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{P}''$ relacija: $P' = P''$, koja se može pisati i u obliku: $Q_0 \cdot Bv \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi_1 = Q_0 \cdot U/l$, tako da za napon U izazvan pojavom elektromagnet-ske indukcije između krajeva vodiča iz sl. 151. izlazi izraz: $U = Bvl \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi_1$.

52. Netom izračunani napon U može se smatrati potpuno analognim »naponu stezaljki« neopterećenih izvora struje: akumulatora, termoelementa itd. Kako kod svih neopterećenih izvora, t. j. onih na koje nije priključen nikakav konačni »vanjski otpor« R_v , napon stezaljki doseže iznos EMS izvora, može se i vodič iz sl. 151. smatrati sijelom neke naponu U iznosom jednake *inducirane EMS* (EMS indukcije):

$$e = Bvl \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi_1 \quad (168)$$

Kao svaka druga EMS i ova EMS e proizvela bi struju $i = e/R$ u zatvorenom strujnom krugu ukupnoga otpora R , što bi se dobio, kad bi se na krajeve A i M vodiča iz sl. 151., koji neka sâm predstavlja neki »unutarnji otpor« R_u strujnoga kruga, priključio neki konačni vanjski otpor R_v , tako da bi bilo: $R = R_u + R_v$. Ukupni iznos e inducirane EMS trošio bi se onda na održavanje spomenute struje i , t. zv. *struje indukcije*, odnosno na pokrivanje »gubitaka napona« iR_u u vodiču duljine l kao »izvoru« i iR_v u priključenom vanjskom otporu kao »potrošaču«, a radnja dA struje indukcije i u elementu vremena dt bila bi: $dA = e \cdot i \cdot dt$.

53. Netom dobiveni rezultati o induciranim EMS e u vodičima gibanima u magnetskom polju, te o strujama indukcije i , koje se tima EMS mogu održavati u zatvorenim strujnim krugovima sastavljenima od električkih otpora, dadu se osvijetliti s još dvije vrlo zanimljive strane: s gledišta u C-38. uvedenoga »magnet-skoga toka« presijecanoga kod gibanja vodiča i s gledišta energetičkih odnosa kod zatvorenih krugova struje protjecanih induciranim strujama.

Ako se razmotri izraz desno u (168), lako je razabrati da on također predstavlja volumen kosokutnoga paralelepipeda s bridovima duljine B , v i l prostorno raspoređenima kao u sl. 151. Taj je naime volumen jednak produktu ma koje baze paralelepipeda s korespondentnom visinom paralelepipeda, a desno u (168) ni ne stoji drugo nego umnožak donje baze $B \cdot v \cdot \sin\varphi$ paralelepipeda iz sl. 151. s pripadnom visinom $l \cdot \cos\varphi_1$. No isti obujam predstavljao bi i umnožak lijeve baze paralelepipeda sastavljene od bridova l i v pod kutom ψ s pripadnom visinom paralelepipeda, koja se može izraziti sa $B \cdot \cos\psi_1$, ako se sa ψ_1 označi kut brida B prema normali na ravninu određenu sa l i v . Konačno se isti obujam može predočiti i produktom stražnje baze, sastavljene od bridova l i B pod kutom χ , s visinom paralelepipeda na tu bazu okomitom (koja se dobiva množeći v s kosinusom priklona χ_1 brida v prema normali na spomenutu bazu). Prema tomu se može staviti:

$$e = Bv \sin\varphi \cdot l \cos\varphi_1 = lv \sin\psi \cdot B \cos\psi_1 = Bl \sin\chi \cdot v \cos\chi_1 \quad (169)$$

Prvi od dobivena tri izraza za e već smo imali u (168). Da razaberemo značenje drugoga, sjetimo se da $lv \sin \psi$ predstavlja plohu površine S opisanu vodičem l brzine v u jedinici vremena, a $B \cos \psi_1$ komponentu vektora magnetske indukcije $\mathcal{B}$ normalnu na spomenutu plohu, tako da izraz $lv \cdot \sin \psi \cdot B \cos \psi_1 = B_n \cdot S$ ima po (157) iz C-38. značenje »toka« magnetske indukcije, što ga gibani vodič siječe u jedinici vremena. Ako se po analogiji s postupkom kod vektora $\mathcal{D}$ u A-61. tok vektora $\mathcal{B}$ predoči magnetskim silnicama, koje se u takvom slučaju zovu specijalnije *crte magnetske indukcije* ili $\mathcal{B}$ -linije i treba ih zamišljati povučene tako gusto da im »gustoća« (A-61). ispadne numerički jednaka iznosu B na svakom mjestu polja, dobiveni rezultat može se izraziti jednostavnim pravilom: elektromagnetskom indukcijom u pravocrtnom vodiču, gibanom po smjeru i iznosu stalnom brzinom u homogenom magnetskom polju, inducira se napon jednak broju u jedinici vremena presječenih »crta magnetske indukcije« ($\mathcal{B}$ -linija), u elektrotehnici manje precizirano također zvanih »magnetskim silnicama«.

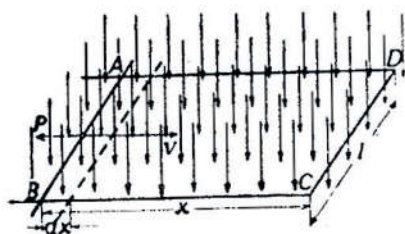
54. Zadnji izraz u (169) dopušta također zanimljivo tumačenje. Ako je naime gibani vodič AM iz sl. 151. nadopunjen povoljnim vanjskim vodičem u zatvoreni strujni krug ukupnoga otpora R , tako da njime teče struja indukcije $i = e/R$, dobivana električka radnja u jedinici vremena, dakle električki učin, bit će $N = ei$. No kad gibanim vodičem AM teče struja, naboji u njemu, osim što se jednoliko gibaju zajedno s vodičem u smjeru v , još i jednoliko struje uzduž duljine l vodiča. Međutim po C-34. i C-35. kod struje i uzduž l javit će se sila $\mathcal{P}_0$ iznosa $P_0 = Bil \cdot \sin \chi$ u smislu normale kao u sl. 138., dakle sila suprotna sili $-\mathcal{P}_0$ zamišljenoj u smislu normale $\mathcal{N}'$ u sl. 151., pa će za gibanje vodiča AM brzinom v biti potrebno svladati komponentu iznosa $AA_0 = P_0 \cos \chi_1$ suprotnu po smislu brzini v vodiča, t. j. vršiti mehanički učin: $N' = P_0 \cdot \cos \chi_1 \cdot v = Bil \cdot \sin \chi \cdot \cos \chi_1 \cdot v$. No po (169) netom dobiveni izraz baš je jednak električkom učinku $N = ei$ što ga proizvodi struja indukcije u svome strujnom krugu: $N = N'$.

Prema tomu mogu se također pojavi elektromagnetske indukcije u gibanim vodičima koordinirati pod općeniti zakon održanja energije, i u njima se u konačnoj konsekvenciji može gledati sredstvo za pretvorbu mehaničke energije u električku. U principu se mogu dakle smatrati ispunjenima preduvjeti za gradnju strojeva s gibanjem vodiča u magnetskom polju, dakle mehaničkom energijom tjeranih izvora ili generatora električke struje na bazi pojava elektromagnetske indukcije, strojeva koji su tek zapravo omogućili tehnički racionalnu proizvodnju električkih struja na veliko, a suprotni su po svrsi električkim motorima, kojima je zadatak davati mehaničku energiju kao ekvivalent za privedenu električku. Čak su principno strojevi istosmjerne struje jednako građeni, trebali oni služiti u motorske ili generatorske svrhe. Tako bi stroj po sl. 150., koji je u C-50. bio razmatran kao motor, uz vrtnju armature mehaničkim sredstvima radio kao generator istosmjerne struje: naponi inducirani u vodičima žljebova 1 i 2 armature, gibanima kod vrtnje armature čas jednim čas drugim polnim područjem stroja, bili bi doduše naizmjenice

čas jednoga čas drugoga smisla, no zbog učinka komutatora napon između kefika 7 i 8, i pripadna struja generatora kod priključenih na mrežu M potrošača, bili bi stalno istoga smisla (naponi između kefika, odn. proizvedeni momenti vrtnje kod jednostavnih generatora i motora po sl. 150. još »pulziraju«, t.j. ne mijenjajući smjera vremenski variraju; kod strojeva sa savršenijim armaturama, poimence onih s već u C-50. spomenutima cilindričkim namotajima s velikim brojem namotanih svitaka i komutatorima s mnogo lamela, dobiveni istosmjerni naponi, odn. momenti vrtnje, čak su, kako će se pobliže razabrati u poglavlju o istosmjernim strojevima, praktički vremenski stalni, odn. zanemarivih pulzacija).

Zapravo se isti pojavi otklona gibanih naboja u magnetskim poljima iskorišćuju i kod motora i kod generatora. Kod motora se primjenom vanjskoga napona U izvode strujanja jakosti I elektrona u vodičima armature, pa pod utjecajem magnetskoga polja nastaju sile na te elektrone, a time i na vodiče armature. Kad se armatura svladavajući mehaničke protusile vrti i vrši mehaničku radnju, gibaju se elektroni vodiča armature također u smislu vrtnje armature, čime se induciraju sile na elektrone suprotne smislu strujanja elektrona uzduž vodiča, a po tome i određena EMS (protu-EMS E' motora iz B-31.) suprotna vanjskom naponu U . Baš na svladavanje spomenute protu-EMS E' troši se u praksi glavni dio napona U , odn. pretvara se u mehaničku radnju pripadni dio $E'I$ ukupnoga učina UI privedenoga motoru. Kod strojevnih generatora podržava se obrnuto mehaničkim sredstvima vrtnja armature, i u smislu te vrtnje gibaju se elektroni vodiča armature u magnetskom polju, a nastalom induciranom EMS E generatora mogu se podržavati strujanja elektrona kroz vodiče armature i priključeni potrošač: međutim uz takva strujanja pod utjecajem magnetskoga polja nastaju sile na elektrone protivne vrtnji armature, i u praksi se baš glavni iznos mehaničkoga učina privedenoga generatoru troši na svladavanje tih protusila.

55. Specijalni slučaj odnosa po sl. 151., obično navađan u elementarnim djelima, bili bi pojavi indukcije strujnoga kruga po sl. 152. u obliku horizontalnoga pravokutnoga okvira duljine x i širine l od



Sl. 152.

recimo bakrene gole žice, okomito probadanoga silnicama homogenoga polja s vektorom magnetske indukcije $\mathcal{B}$, iznosa B i smjera vertikalno dolje. Prednja stranica BC i stražnja DA, te desna stranica CD neka su nepomične, a lijeva stranica AB duljine l neka ostajući paralelna sama sebi skliže uz potpun kontakt po BC i AD brzinom v nadesno. Kako uz

navedene prilike gibani vodič AB stoji okomito na smjer svoga gibanja i na smjer magnetskoga polja, radi se o slučaju sl. 151. sa $\varphi = 90^\circ$ i $\varphi_1 = 0^\circ$, pa se po (167) i (168) može za električko polje nastalo u vodiču AB staviti $F = B \cdot v$, odn. za induciranu EMS:

$$e = B \cdot l \cdot v \quad (170)$$

Ovdje se pogotovo lako razabire da je inducirana EMS jednaka magnetskom toku presijecanom u jedinici vremena, odn. broju presječenih $\mathcal{B}$ -linija po jedinici vremena; gibani naime vodič opiše u jedinici vremena plohu $l \cdot v$, a magnetski tok Φ kroz tu plohu jest $B \cdot l \cdot v$.

Lako je verificirati da se u oba sustava V-A-s-m i V-A-s-cm e u (170) dobiva u voltima, iako se u prvom sustavu B mora stavljati u T (Vs/m²), l u m i v u m/s, a u drugom B u Vs/cm², l u cm i v u cm/s; naprotiv bi u odnosu na V-A-s-cm-jedinice kod upotrebe EMJ trebalo raditi sa B^* u G, uz l u cm i v u cm/s, pa bi i pripadna EMJ napona e^* ispala 10^8 puta manja od V (zbog $1 \text{ G} = 10^{-8} \text{ Vs/cm}^2$): $1 \text{ EMJ napona} = 10^{-8} \text{ V}$.

Umjesto ovom relacijom (po kojoj je 1 apsolutni V prvotno baš i zamišljen kao 10^8 EMJ napona) dade se 1 V povezati s 1 A iz C-47. i s mehaničkom jedinicom snage $1 \text{ W} (= 1 \text{ J/s})$, time da se definira: 1 V je napon na krajevima vodiča koji pri struji 1 A troši snagu 1 W . Ta je definicija uzeta kod uvođenja volta na str. 13. u osnovne kvadruple V-A-s-m i V-A-s-cm pod II.a) i III.a). U empiričkom podatku (v. u A-13. i drugdje), po kome je 1 V dan time da se EMS Westonova normalnoga elementa uzima $1,01865 \text{ V}$, treba gledati samo prilagođivanje gornjoj definiciji volta, koje prilagođivanje, slično kao kod 1 A po C-47., treba zamišljati trajno dotjerivano prema napretku mjerne tehnike.

Ako bi se po (170) htjelo imati e u V uz magnetsku indukciju B^* u G, l u cm i v u cm/s, trebalo bi pisati numeričku relaciju (170'): $e = B^* \cdot l \cdot v \cdot 10^{-8}$ volta.

Za brzo orijentiranje o smjeru inducirane EMS kod odnosa po sl. 152. može poslužiti svako od ova dva pravila *desne* ruke (u neku ruku suprotna pravilima *lijeve* ruke iz C-40. o sili na strujni vodič okomit na magnetsko polje): a) po Flemmingovu pravilu *desne* ruke uz palac te ruke postavljen u smjer gibanja i kažiprst u smjer magnetskoga polja pokazuje srednji prst smjer inducirane struje (inducirane EMS): **g-p-s**; b) ako silnice udaraju okomito na dlan ispružene *desne* ruke i odmaknuti palac daje smjer gibanja vodiča, pokazuju prsti smjer inducirane EMS.

56. Prema izvodima o smislu induciranih polja i EMS u gibanim vodičima djelovat će EMS e dana relacijom (170) u smislu od B prema A u sl. 152., i struja indukcije $i = e/R$, ako je R otpor kruga ABCD, teći će u smislu BADC.

Međutim i vlastiti magnetski tok neke struje poslane u spomenutom smislu obilaženja kroz pravokutnik tekao bi po C-4. baš u smislu toka pretpostavljanoga u sl. 152., pa ako se želi, da se može reći za neku po volji »pozitivno« označenu struju da izvodi »pozitivni« tok kroz svoju petlju, odn. obrnuto da za neki po volji »pozitivnim« nazvani tok kroz neku petlju treba struja u »pozitivnom« smislu obilaženja, morat će se nazvati »pozitivnim« i smisao BADC obilaženja pravokutnika iz sl. 152. u odnosu prema toku $\Phi = B \cdot l \cdot x$ kroz taj pravokutnik, odn. općenitije morat će se nazvati »pozitivnim« u odnosu prema danomu toku onaj smisao obilaženja neke zatvorene petlje, koji prema smislu prolaženja toka kroz tu petlju, stoji u odnosu kao smisao vrtnje prema smislu napredovanja desnoga vijka; obrnuti smisao obilaženja zvat će se »negativnim«.

Uz spomenuti dogovor kod gibanja nadesno vodiča AB u sl. 152. treba EMS e , kao i pripadnu struju indukcije $i = e/R$ brojiti pozitivno. A presječen u vremenu dt magnetski tok $B \cdot l \cdot dx = B \cdot l \cdot v \cdot dt$ u stvari je smanjenje ukupnoga toka $\Phi = B \cdot l \cdot x$ kroz promatrani strujni krug, dakle negativni prirast $-d\Phi$, tako da se za desnu stranu u (170) može uzeti da predstavlja taj negativni prirast preračunan na jedinicu vremena, dakle negativnu vremensku derivaciju ili negativnu

brzinu mijenjanja $-\frac{d\Phi}{dt}$ veličine Φ . Naprotiv kod gibanja vodiča AB brzinom v nalijevo e i i bi djelovali u negativnom smislu obilaženja, t. j. bili bi negativni, dok bi se ukupni tok Φ strujnoga kruga pri spomenutom gibanju povećavao računajući za iznos $d\Phi = B \cdot l \cdot v \cdot dt$ u vremenu dt , dakle uz brzinu mijenjanja $\frac{d\Phi}{dt}$.

U oba navedena slučaja e i $\frac{d\Phi}{dt}$ izlaze po apsolutnom iznosu jednaki, a po predznaku protivni, tako da se uvodeći ukupni tok Φ strujnog kruga relacija (170) može, i to čak i u slučaju da bi iznos brzine v vodiča AB vremenski varirao, pisati također u obliku:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (171)$$

prema kojemu je inducirana EMS e promatranoga pravokutnoga strujnog kruga u svakom momentu t jednaka negativnoj derivaciji magnetskoga toka kroz taj krug.

Formula (171), kao jednadžba između veličina, vrijedi dakako jednako dobro u sustavu V-A-s-m kao i u sustavu V-A-s-cm. A uz inducirani napon e^* u EMJ i magnetski tok Φ^* u M (uz ostavljeno t u s) pisalo bi se: $e^* = - \frac{d\Phi^*}{dt}$, prema čemu bi se, ako bi se e željelo imati u V uz Φ^* u M, pisala numerička relacija (171'):

$$e = - \frac{d\Phi^*}{dt} \cdot 10^{-8} \text{ volta}$$

57. Sva dosadašnja razmatranja o elektromagnetskoj indukciji u gibanim vodičima dadu se proširiti na vodiče ma kakvoga oblika, te ma kako gibane u magnetskim poljima prostorno i vremenski ma kako promjenljivima.

U tu svrhu zamislimo, posveopćujući slučaj sl. 151., da AM' u spomenutoj slici predstavlja element duljine ds općenito krivocrtnoga linearnoga vodiča duljine s sa krajnjim točkama X i Y. Vodič XY neka se općenito i giba i deformira, tako da njegovim elementima duljine pripadaju različiti iznosi i smjerovi vektora brzine. Ako je $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ vektor brzine elementa ds i ako je $\vec{\mathcal{B}} = \overrightarrow{AA''}$ vektor magnetske indukcije na mjestu toga elementa, bit će uzduž elemenata ds djelotvorno električko polje F_s očito jednako komponenti tangencijalnoj na vodič XY inducirano polja $\mathcal{F}$, koje se po (167) iz C-51. može izraziti »vanjskim produktom» $[\vec{v} \vec{\mathcal{B}}]$ vektora $\vec{v}$ i $\vec{\mathcal{B}}$, a za pripadni napon de induciran u ds vrijedit će relacija: $de = F_s \cdot ds$, odn. uz upotrebu pojma »unutarnjega produkta» vektorâ $\mathcal{F}$ i $\overrightarrow{AM'} = \vec{ds}$ relacija:

$$de = \mathcal{F} \cdot \vec{ds} = [\vec{v} \vec{\mathcal{B}}] \cdot \vec{ds} \quad (172)$$

No onda za ukupni napon e induciran u cijelom vodiču XY možemo staviti (primjenjujući integraciju na cijelu duljinu s vodiča XY):

$$e = \int_{(s)} de = \int_{(s)} [\vec{v} \vec{\mathcal{B}}] \cdot \vec{ds} \quad (173)$$

Da bi se sad dobili odnosi kod zatvorenih krugova struje, dovoljno je uzeti, da su se krajnje točke X i Y nekoga vodiča sastale i da je nastala zatvorena krivulja s_0 ; onda integraciju treba zamisliti izvedenu po krivulji s_0 time stvorenoga strujnog kruga i e dobiva značenje EMS kruga:

$$e = \oint de = \oint [\vec{v} \vec{\mathcal{B}}] \cdot \vec{ds} \quad (174)$$

čime se relacija (168) može smatrati posveopćenom. Relacija (174) zove se »prvi oblik zakona elektromagnetske indukcije«.

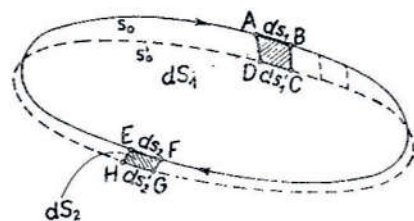
58. No i formula (171) daje se posveopćiti u »drugi oblik zakona elektromagnetske indukcije«. Kod toga posveopćenja formula (171) ostaje čak nepromijenjena.

Da se to razabere, zamislimo po sl. 153. u magnetskom polju indukcije $\mathcal{B}$ zatvorenu vodljivu petlju s_0 , koja neka se u vremenu dt gibanjem ili deformacijom (ili na oba načina) promijeni u s'_0 , tako da elementi duljine $ds_1, ds_2, \dots$, petlje s_0 postanu elementima duljine $ds'_1, ds'_2, \dots$, nakon što su opisali pripadne elementarne plohe $dS_1, dS_2, \dots$, šrafirane na sl. 153. i time presjekli elementarne magnetske tokove $d\Phi'_1, d\Phi'_2, \dots$.

Ako se strjelicom na s_0 naznačeni smisao obilaženja odabere za pozitivni, te ako je pozitivan i magnetski tok $d\Phi'_1$ kroz elementarnu plohu dS_1 uz smisao ABCD obilaženja te plohe odabran kao pozitivan, napon de_1 sa smislom AB, induciran gibanjem elemenata vodiča ds_1 , bit će s gledišta petlje s_0 pozitivan, a pripadni presječni tok $d\Phi'_1$ uzet s gledišta ukupnoga toka Φ kroz cijelu petlju s_0 predstavljat će negativni prinos toku Φ , dakle njegovo smanjenje.

Naprotiv kad bi elementom vodiča ds_2 presječni elementarni tok $d\Phi'_2$ u odnosu prema smislu obilaženja EFGH konture elementa plohe dS_2 opisane gibanjem elementa vodiča ds_2 bio također pozitivan, nastali elementarni napon de_2 sa smislom EF bio bi za petlju s_0 kao cjelinu negativan, a pripadni presječni tok $d\Phi'_2$ s gledišta ukupnoga toka Φ petlje s_0 predstavljao bi pozitivan prinos toku Φ , dakle njegovo povećanje.

Ukratko, gdje god bi uzduž s_0 elementarni inducirani naponi ispali s gledišta obilaženja cijele petlje s_0 pozitivni, pripadni presječni tokovi $d\Phi'$ s gledišta ukupnoga toka Φ te petlje predstavljali bi negativne prinose tomu toku, odnosno i obrnuto: uz negativne elementarne napone de pripadni presječni tokovi $d\Phi'$ činili bi pozitivne prinose toku Φ . No kako se inducirani napon (EMS indukcije) e cijele zatvorene petlje s_0 može staviti jednakim algebarskoj sumi za cijelu petlju s_0 naponâ de po relaciji $e = \int de$, a ukupna promjena $d\Phi$ toka cijele petlje se može smatrati nastalom algebarskom sumacijom elementarnih presječenih tokova $d\Phi'$ po relaciji $d\Phi = \int d\Phi'$, to se, obzirom na malo prije istaknute odnose između predznaka, kao i obzirom na činjenicu, koja se daje razabrati već iz razmatranja u C-56., da se svaki de po apsolutnom iznosu može staviti jednakim pripadnim presječenom toku preračunanom na jedinicu vremena, t. j. po apsolutnom iznosu veličini $\frac{d\Phi}{dt}$, očito smije i u promatranom najopćenitijem slučaju gibanih vodiča pisati: $e = - \frac{d\Phi}{dt}$.



Sl. 153.

59. Time da je u promatranom posvećenom slučaju izišla formalno ista relacija (171) kao i u jednostavnom primjeru iz C-56., može se zakon izražen spomenutom relacijom smatrati proširenim na ma kakve strujne krugove s gibanim vodičima, a također i na mirne strujne krugove pod utjecajem gibanih magnetskih polja, točnije polja proizvedenih gibanim vodičima, magnetima i sl., jer su kod dosadanih slučajeva bitna bila samo gibanja vodiča i magnetskih linija jednih prema drugima.

No formuli (171) može se dati još šire značenje. Ona se može primijeniti i na zatvorene petlje s_0 bez gibanih dijelova, zamišljene unutar magnetskih polja uzbuđenih napravama, koje i same miruju. Dakako u tom slučaju mijenjanja magnetskih tokova kroz petlje s_0 mogu biti proizvedena samo vremenskim mijenjanjima magnetskih polja, kakva će biti na pr. lako proizvesti mijenjajući jakost uzbudnih struja spomenutih polja pa specijalno i prekidajući ili komutirajući (obručujući) te struje. Ako su na pr. dane dvije petlje A i B u čvrstom međusobnom raspoređaju, kod kojega od ukupnoga toka Φ_1 struje I_1 prve ili primarne petlje A dio Φ_{12} prolazi i drugom petljom, inducirat će se u drugoj ili sekundarnoj petlji B kod svakoga mijenjanja struje I_1 , i samo za vrijeme trajanja toga mijenjanja, EMS $e = -\frac{d\Phi_{12}}{dt}$, te će kod zatvorenoga strujnoga kruga petlje B teći kroz nju i pripadna struja indukcije.

Može se dakle također pri odnosima kod mirnih vodiča EMS e inducirana u nekoj zatvorenoj petlji s_0 , kroz koju prolazi vremenski promjenljivi magnetski tok Φ , smatrati dana relacijom (171), koja općenito postavljena ima baš za primjene u elektrotehnici vrlo prikladan oblik, a riječima se može ovako izraziti: *ukupni napon e induciran uzduž neke zatvorene petlje (»obilazni napon petlje«) jednak je negativnoj brzini povećanja (»brzini opadanja«) $-\frac{d\Phi}{dt}$ magnetskoga toka Φ kroz tu petlju.*

Da bi se bar donekle učinila plauzibilnom činjenica da se napon inducira kod vremenskoga mijenjanja magnetskoga polja i mirne u odnosu prema polju petlje jednako kao i kad se petlja pomiče relativno prema vremenski stalnom magnetskom polju i njezini dijelovi sijeku $\mathcal{B}$ -linije, moglo bi se slikovito zamisliti jačanje i slabljenje magnetskoga toka kroz petlju proizvedeno kao nekim zgušćivanjem ili razrjeđivanjem $\mathcal{B}$ -linija obuhvaćenih petljom, tako da bi spomenute linije ulazeći u sastav toka petlje ili izlazeći iz njega sjekle petlju.

U pogledu energetičkih odnosa treba u električkim učincima ei strujâ i proizvedenih u mirnim zatvorenim vodljivim petljama naponima e induciranim kod vremenskoga opadanja magnetskih tokova obuhvaćenih petljama gledati ekvivalent za energiju po jedinici vremena oslobođanu pripadnim razgrađivanjem magnetskih polja, koja su (baš kao po A-98. i električka) uvijek sijela određenih prostornih gustoća energije. O ovomu će kasnije biti više govora.

60. Prema gornjim izvodima, ako tok Φ obuhvaćen nekom zatvorenim i prema uzbudnim napravama toka mirnom petljom raste, pa je njegova vremenska derivacija pozitivna, inducirani napon e bit će negativan, pa će nastojati proizvesti i negativnu struju kroz petlju, a ova opet vlastiti tok po C-56. negativan u odnosu

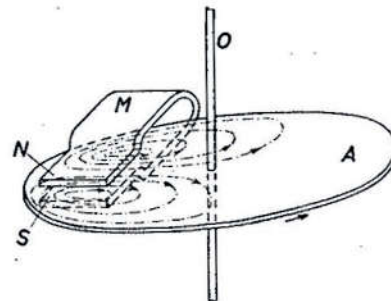
prema Φ . No taj negativni tok proizveden strujom indukcije nastojao bi oslabiti onaj prvobitni tok Φ , kojega jačanje je baš izazvalo pojav indukcije.

Obrnuto, da Φ opada, bila bi njegova vremenska derivacija negativna, dakle napon e pozitivan, a pozitivna struja i , koja bi tomu odgovarala, proizvela bi pozitivni vlastiti tok, koji bi nastojao pojačati prvobitni tok Φ , što je svojim slabljenjem izazvao indukciju.

Raste li dakle tok Φ , utjecaj struje indukcije bit će uperen na slabljenje toga toka; slabi li Φ , struja indukcije nastojat će ga pojačati. Prema tomu ne samo da su po C-54. kod indukcije proizvedene gibanjem vodiča struje indukcije uvijek tako usmjerene, da nastanu mehaničke protusile koje nastoje zapriječiti gibanje vodiča, nego i kod indukcije vremenskim mijenjanjem magnetskih polja nastale EMS nastoje proizvesti struje indukcije kojih je djelovanje uvijek protivno mijenjanju toka, koje je indukciju izvelo.

Može se dakle posve općenito izreći *Lenzovo pravilo*, prema kojemu EMS indukcije imaju uvijek takav smjer, da bi od struja proizvodnih tima EMS rezultirali učinci suprotni promjeni koja je indukciju proizvela. Ovo pravilo je tako općenito da se njime često puta »a priori« mogu predvidjeti učinci strujâ indukcije na temelju same činjenice da te struje moraju teći u smislu sprječavanja promjena koje izazivaju indukciju.

61. Tako se unaprijed smije očekivati da će se sama po sebi posve lako oko osi O na sl. 154. vrtiva aluminijska ili bakrena ploča A dati vrtjeti samo uz svladavanje jakih sila kočenja, ako joj se po sl. 154. tako primakne jak magnet M, da ploča kod vrtnje mora sjeći silnice magnetskoga polja između krajeva N i S magneta. U onim dijelovima ploče A što sijeku silnice induciraju se naime EMS indukcije i ove izazivaju u ploči struje indukcije, koje se uz dane prilike zatvaraju po crtama strujanja u obliku »vrtlogâ«, na slici točka-crtano naznačenima. Ma kako komplicirano tekle ove »vrtložne struje«, njihov tok bit će po Lenzovu pravilu uvijek takav, da će pod utjecajem magnetskoga polja magneta M nastati sile koje će vrtnju ploče kočiti. Ovakva »(elektro-)magnetska kočenja« primjenjuju se općenito kod električnih brojila (E.M.), kod »kočnica s vrtložnim strujama« itd.



Sl. 154.

Sile koje kod vrtnje ploče A treba primijeniti za svladavanje kočenja analogne su silama što se troše kod svladavanja trenja. S energetičkoga gledišta može se reći: mehaničkom radnjom utrošenom na vrtnju ploče stvara se električka radnja vrtložnih struja, koje dalje daju strujnu toplinu ugrijavajući ploču A.

Iz sličnih razloga lako njiše »Waltenhofenovo njihalo« s masivnom bakrenom pločom između polova neuzbudena elektromagneta, ali se brzo zaustavi, ako se magnet uzbuđi. Praktički se ovakva zaustavljanja gibanja ili titranja, t. zv. »(elektro-)magnetska prigušenja«, iskorišćuju na

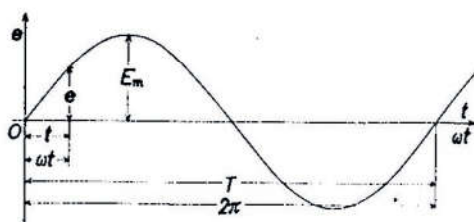
pr. za prigušenja titranja kod otklona nekih mjernih instrumenata (E.M.). Također već u A-37. spomenuto utjecanje na stepen prigušenja galvanometarskih gibanja različitim iznosima vanjskih otpora R_v priključenih na otpor galvanometra R_g bit će sada lako razumljivo: kod manjega R_v , a time i manjega ukupnoga otpora $R = R_v + R_g$ strujnoga kruga galvanometra uz istu brzinu gibanja galvanometrova svitka, i prema tomu istu EMS induciranu u svitku, pripadna inducirana struja $i = e/R$ bit će jača, a po tomu i sile kočenja na gibani svitak galvanometra veće.

62. Često se zbog jačega djelovanja isti promjenljivi tok Φ proizvede redom kroz svih w zavoja nekoga svitka; onda se $\Psi = w\Phi$ može nazvati ukupnim tokom kroz cijeli svitak, i za ukupnu EMS e induciranu u svitku treba umjesto relacije (171) staviti:

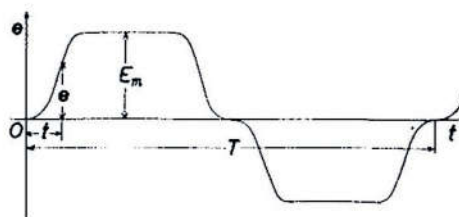
$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -w \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad (175)$$

Dosljedno tomu mjesto relacije (171') pisat će se: $e = -w \cdot \frac{d\Phi^*}{dt} \cdot 10^{-8}$ volta (175').

63. Za primjenu formule (175) proračunajmo iznos, u momentu t , napona e inducirana u svitku s w pravokutnih zavoja duljine l i visine h , dakle plohe $S = l \cdot h$, uz pretpostavku da je taj svitak vrtiv oko uzdužne osi OO' orijentirane u magnet-skom polju poput osi petlje u sl. 143., te da jednoliko rotira kutnom brzinom ω . U vrijeme $t = 0$ normala na promatrani svitak neka čini kut $\varphi = 0$ sa smjerom vektora $\mathcal{B}$, t. j. svitak neka je u položaju kad svakim njegovim zavojem prolazi



Sl. 155.



Sl. 156.

maksimalni tok indukcije $\Phi_m = B \cdot l \cdot h$. Nakon vremena t svitak će prema tom položaju biti zakrenut za kut $\varphi = \omega t$, i u momentu t bit će tok kroz svaki zavoj svitka $\Phi = \Phi_m \cdot \cos \varphi$, dakle tok kroz cijeli svitak $\Psi = w \cdot \Phi = w \cdot \Phi_m \cdot \cos \varphi = w \cdot B \cdot l \cdot h \cdot \cos \omega t$. Po (175) inducirani napon e bit će dakle:

$$e = \omega \cdot w \cdot B \cdot l \cdot h \cdot \sin \omega t = E_m \cdot \sin \omega t \quad (176)$$

Dobiveni napon je *izmjenični*, i to po zakonu *sinusoide*, s »maksimalnom« ili »tjemenom« vrijednošću $E_m = \omega \cdot w \cdot B \cdot l \cdot h$ i s titrajnim vremenom T određenim relacijom $\omega T = 2\pi$, odn. $T = 2\pi/\omega$, dakle s »brojem titraja na sekundu« ili »numeričkom frekvencijom« $f = 1/T = \omega/2\pi$ (sl. 155.).

Prema tomu bi bila izmjenična i struja kroz potrošač priključen pomoću kefica prislonjenih na dva klizna koluta spojena s krajevima rotiranoga svitka i vrtiva s osovinom svitka. Naprotiv kolektorom poput onoga iz sl. 150. postiglo bi se da napon između kolektorskih kefica i struja kroz potrošač budu pulzatorno-istosmjerni (C-54.).

I za napone inducirane u stroju po sl. 150. može se uzimati da nastaju mijenjanjem toka $\Psi = w\Phi$ kroz w zavoja armaturnoga svitka zbog gibanja armature; inducirani naponi bit će izmjenični, no ne »sinusoidni« (zbog zamršenijega zakona mijenjanja toka Φ): v. sl. 156. Napon između kefica i struje u potrošačkom dijelu strujnoga kruga promatranoga generatora ostali bi kod upotrebe kliznih koluta izmjenični, dok bi se po C-54. komutatorom usmjerili.

64. Strujni udari proizvedeni kratkotrajnim pojavima indukcije u strujnim krugovima s uključenim galvanometrom, odn. pripadne prostrujale množine elektriciteta Q po relaciji (12) iz A-36., mogu se mjeriti balističkim galvanometarskim otklonima α_1 , za koje je lako pokazati da su proporcionalni razlikama iznosâ magnetskih tokova na početku i na svršetku pojava indukcije.

Ako se na pr. strujni krug indukcionoga svitka S s otporom R' i galvanometra G s otporom R_g po sl. 157. nadopuni zbog postizavanja »aperiodskoga graničnog slučaja« (A-37.) galvanometarskih gibanja otporom iznosa R'' , uz koji $R' + R''$ poprima iznos R_a »vanjskoga graničnog otpora«, pa balistička konstanta galvanometra postigne pripadni iznos C_B , moći će se pisati:

$$Q = C_B \cdot \alpha_1 \quad (177)$$

pa će biti potrebno samo još izvesti proporcionalnost između razlika početnih i konačnih tokova i pripadnih prostrujalih naboja.

U tu svrhu sjetimo se da će iznos e EMS inducirane u momentu t kod istoga toka Φ svaki od w zavoja svitka S biti dan relacijom (175). Pripadna inducirana struja kroz strujni krug na sl. 157. ukupnoga otpora $R = R_g + R' + R'' = R_g + R_a$ neka bude $i = e/R$. U vremenskom intervalu dt prostrujat će onda kroz galvanometar množina elektriciteta $dQ = i \cdot dt$. A ukupna prostrujala množina Q dobila bi se integracijom od momenta $t = 0$ započetoga pojava indukcije kod iznosa $\Phi = \Phi_0$ do momenta $t = t_1$ svršetka indukcije kod $\Phi = \Phi_1$:

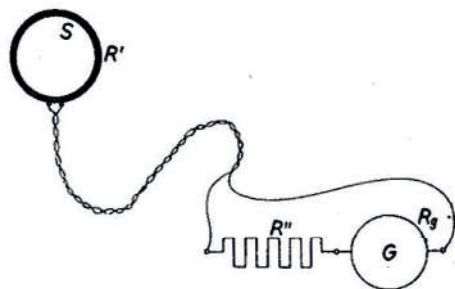
$$Q = \int_0^{t_1} i \cdot dt = - \int_0^{t_1} \frac{w}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot dt = \frac{w \cdot (\Phi_0 - \Phi_1)}{R} \quad (178)$$

Tim je dokazana proporcionalnost između Q i $w(\Phi_0 - \Phi_1)$. Prosječna jakost I'' struje tokom vremenskog intervala t_1 trajanja indukcije, dakle na jedinicu vremena preračunana prostrujala množina elektriciteta, bila bi:

$$I'' = \frac{Q}{t_1} = \frac{w \cdot (\Phi_0 - \Phi_1)}{R \cdot t_1} \quad (179)$$

a prosječna vrijednost E'' inducirana napona za vrijeme trajanja indukcije bila bi:

$$E'' = I'' R = \frac{w \cdot (\Phi_0 - \Phi_1)}{t_1} \quad (180)$$



Sl. 157.

Kao jednadžbe između veličina dobivene tri relacije vrijede bez daljega u sustavima V-A-s-m i V-A-s-cm. Kod iznosâ magnetskoga toka izraženih sa Φ^* u M (uz nemijenjane ostale veličine) vrijedile bi numeričke relacije građene slično formulama (178) do (180), no s faktorom 10^8 u nazivnicima razlomaka u tim formulama.

65. Kako Q , mjereno otklonom α_1 iz (177), nije po (178) samo upravno proporcionalno iznosu $w(\Phi_0 - \Phi_1)$, nego je i neupravno proporcionalno otporu R strujnoga kruga galvanometra, mogu se kod određenoga R , i njime određene balističke konstante C_B za mjerenja iznosa Q po (177), balističkim otklonima α_1 galvanometra smatrati po relaciji:

$$Q \cdot R = C_B \cdot R \cdot \alpha_1 = K_B \cdot \alpha_1$$

proporcionalni produkti $Q \cdot R = I'' t_1 \cdot R = E'' \cdot t_1$, dakle produkti *napona i vremena* i to s posve određenom konstantom proporcionalnosti $K_B = C_B \cdot R$.

Točnije govoreći, otklon α_1 može se, kako se iz izvoda formule (178) neposredno razabire, staviti proporcionalnim u zadnjoj liniji »vremenskom integralu napona« $\int_0^{t_1} e \cdot dt$, veličini vezanoj sa $w(\Phi_0 - \Phi_1)$ i $K_B \cdot \alpha_1$ relacijom:

$$\int_0^{t_1} e \cdot dt = w \cdot (\Phi_0 - \Phi_1) = K_B \cdot \alpha_1 \quad (181)$$

te potpuno analognoj »vremenskom integralu struje« iz (13) u A-36. i prikladnoj za karakterizaciju učinaka kratkotrajnih napona, t. zv. *naponskih udara*, slično kako su vremenski integrali struje prikladni za karakterizaciju *strujnih udara* uvedenih već u A-35.

Konstantu proporcionalnosti K_B iz (181) prikladno će biti pri tomu zvati »balističkom konstantom« galvanometra za mjerenje naponskih udara; uz e u voltima i t u sekundama K_B bi se izražavalo u »voltsekundama po dijelu skale«.

Već prema prilikama balistički galvanometri mogu dakle poslužiti bilo za mjerenje strujnih udara (As) po relacijama (14) iz A-37. ili (177) iz C-64., bilo za mjerenja naponskih udara, a time i promjena magnetskih tokova po relaciji (181); balističke konstante su dakako u svakom od navedenih slučajeva drukčije.

66. Dobivene formule imaju mnogo važnih primjena. Tako se po formuli (181) lako određuju magnetska indukcija B u različitim točkama nekoga magnetskog polja. Kod toga se naglo na pr. ukloni iz polja plosnati mali »ispitni svitak« sa w zavoja površine S uključen u galvanometarski krug ukupnoga otpora R . Ako se pokus izvede sa svitkom tako malenim da se istraživano polje u području svitka može smatrati praktički homogenim, i tako postavljenim da magnetski tok prolazi okomito plohom svitka, ukupni tok svitka prije uklanjanja iz polja iznositi će $w \cdot B \cdot S$, a tok nakon uklanjanja bit će jednak 0. Ako sada uklanjanje ispitnoga svitka izazove otklon α_1 balističkoga galvanometra, sa K_B kao konstantom za mjerenje naponskih udara vrijedit će po (181) relacija $w \cdot B \cdot S = K_B \cdot \alpha_1$, iz koje je određivani iznos B lako izračunati. Tako se na pr. određuje magnetska indukcija B u uzdušnim pukotinama električnih strojeva (na pr. u sl. 150. između N i A, te A i S).

Umjesto uklanjanjem svitka može se dakako otklon α_1 proizvesti i uklanjanjem polja, na pr. udaljivanjem magneta ili prekidanjem uzbudne struje polja; a kod »komutacije« uzbudne struje vrijedila bi relacija: $2 \cdot w \cdot B \cdot S = K_B \cdot \alpha_1$; iz nje bi se dobilo: $K_B = 2 \cdot w \cdot B \cdot S / \alpha_1$.

Po istom principu određivala bi se konstanta K_B nekoga galvanometra uključenoga u krug određenoga otpora R . Dovoljno bi bilo u tu svrhu ispitni svitak s poznatim iznosima w i S na pr. ukloniti iz polja poznate magnetske indukcije B i očitati pripadni balistički otklon α_1 ; K_B bi onda bilo jednako wBS/α_1 .

67. Na principu relacije (181) počiva i teorija »mjerila magnetskih napona«, uvedenih već u C-21.

Zamislamo, kao i u C-21., svitak duljine l mjerila magnetskih napona s vakuumom (praktički i s kožom, gumom i uopće neferomagnetičkom tvari) kao jezgrom, s malenim zavojima srednje površine S i s ukupnim brojem zavoja w , dakle brojem zavoja $w_1 = w/l$ po jedinici duljine. Mjerilo neka je po sl. 128. prilagođeno nekoj liniji s duljine l s početkom M i svršetkom N , za koju treba odrediti »magnetski napon« ili »linijski integral vektora $\mathcal{H}$ «. Ako je ds element duljine linije s , na njega će otpadati $w_1 \cdot ds = w \cdot ds/l$ zavoja mjerila magnetskih napona, pa ma kako bili orijentirani zavoji toga mjerila prema smjeru vektora $\mathcal{H} = \mathcal{B}/\mu_0$ na mjestu elementa ds , magnetski tok kroz $w_1 \cdot ds$ zavoja mjerila pripadni tomu elementu bit će, ako su B_s i H_s komponente vektora $\mathcal{B}$ i $\mathcal{H}$ tangencijalne na liniju s :

$$d\Psi_0 = B_s \cdot S \cdot w_1 \cdot ds = \mu_0 \cdot H_s \cdot S \cdot w_1 \cdot ds$$

Kroz sve zavoje mjerila magnetskih napona ukupno će dakle teći tok:

$$\Psi_0 = \int_{(s)} d\Psi_0 = \mu_0 \cdot S \cdot w_1 \cdot \int_{(s)} H_s \cdot ds$$

pa kod nagloga iščezavanja toga toka, t. j. njegova smanjenja na iznos $\Psi_1 = 0$, izvedenoga na pr. naglim uklanjanjem mjerila iz istraživanoga polja ili naglim poništavanjem toga polja ma kojim načinom, mora nastati naponski udar u strujnom krugu mjerila i priključenoga galvanometra. Galvanometar konstante K_B kod danoga otpora R strujnoga kruga dat će balistički otklon α_1 proporcionalan ukupnoj promjeni $\Psi_0 - \Psi_1 = \Psi_0$ cijeloga toka po relaciji $\Psi_0 = K_B \alpha_1$, specijalnom slučaju formule (181), a po tomu proporcionalan i linijskom integralu vektora $\mathcal{H}$ ili magnetskom naponu U' za odabranu integracionu stazu s po formuli:

$$U' = \int_{(s)} H_s \cdot ds = \int_{(s)} \mathcal{H} \cdot \vec{ds} = \frac{K_B}{\mu_0 \cdot S \cdot w_1} \cdot \alpha_1 = K \cdot \alpha_1 \quad (182)$$

Dobivena relacija, s izrazom $K_B/\mu_0 S w_1 = C_B R/\mu_0 S w_1$ stegnutim u K doista je identična s relacijom $U' = K \cdot \alpha_1$ iz C-21., koju je trebalo dokazati.

Na temelju relacije $K = K_B/\mu_0 S w_1 = C_B R/\mu_0 S w_1$, kojom je K u (182) uvedeno, dalo bi se K proračunati uz poznat iznos indukcione konstante μ_0 iz konstruktivnih podataka S i w_1 mjerila i vrijednosti K_B (odn. vrijednosti C_B i R) za oda-

brani strujni krug s galvanometrom i mjerilom. No praktički je prikladnije tako postupati, da se mjerilom obuhvati na pr. po zatvorenoj liniji l' iz sl. 131. svih w zavoja nekoga svitka struje I , koja se očita ampermetrom, pa da se motri otklon α_1 galvanometra proizveden iskapčanjem struje I ; po (141) i (182) bit će onda $wI = K\alpha_1$, odn. $K = wI/\alpha_1$.

Običaj je veličinu $K_1 = 1/\mu_0 Sw_1$ nazivati »konstantom mjerila magnetskih napona«; po relaciji $U' = K_1 \Psi_0$ veže K_1 magnetski napon s električkim naponskim udarom odn. s njime povezanom promjenom ukupnoga magnetskoga toka mjerila kod nestajanja istraživanoga polja. U sustavima V-A-s-m i V-A-s-cm sa U' u A i Ψ_0 u Vs izražavalo bi se K_1 u A/Vs.

Treba još spomenuti da se kod svih pokusa s magnetskim mjerilom kod obrtanja umjesto prekidanja strujâ dobivaju dvostruki balistički otkloni, jer se Ψ_0 promijeni ne u 0, nego u $-\Psi_0$, t. j. za iznos $2\Psi_0$.

68. Smatrajući EMS e opažanu kod pojava indukcije u mirnim zatvorenim vodljivim petljama s_0 posljedicom električkih polja $\mathcal{F}$ induciranih vremenskim mijenjanjem magnetskoga toka Φ petlje s_0 po relaciji:

$$e = \oint de = \oint F_s \cdot ds = \oint \mathcal{F} \cdot \vec{ds}$$

moći ćemo zakon indukcije pisati i u obliku:

$$\oint F_s \cdot ds = \oint \mathcal{F} \cdot \vec{ds} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (183)$$

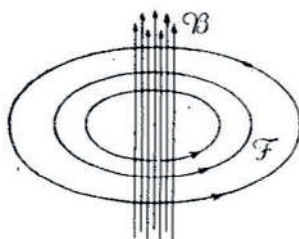
Ovo je »integralni« oblik Maxwellove druge osnovne jednadžbe elektromagnetskoga polja za mirna tjelesa, koja se pored prve Maxwellove jednadžbe (150) ili (150') iz C-29. može uzeti za bazu teorije elektromagnetskoga polja.

Poput prve izražava se i druga osnovna jednadžba češće u »diferencijalnom« obliku. Slično kao u C-30. pri prelazu iz integralnoga oblika (150) u diferencijalni oblik (151) prve osnovne jednadžbe došlo bi se i ovdje kod druge osnovne jednadžbe od (183) na diferencijalni oblik te jednadžbe:

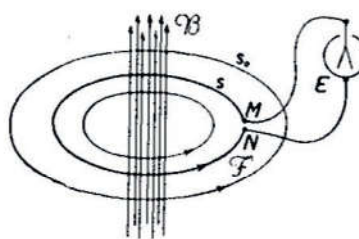
$$\text{rot } \mathcal{F} = - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (184)$$

69. Po produbljenom shvaćanju pojava indukcije izraženomu relacijom (183) ili (184) bit pojava indukcije čine dakle »vrtlozi« vektora jakosti električkoga polja $\mathcal{F}$ »zakvaćeni« s vremenski promjenljivim tokovima vektora magnetske indukcije $\mathcal{B}$, dakle zatvorene $\mathcal{F}$ -linije koje treba zamišljati zakvaćene o vremenski promjenljive $\mathcal{B}$ -linije. Spomenuta inducirana polja $\mathcal{F}$ treba uvijek pretpostavljati, pa i onda kad je mjesto, gdje $\mathcal{F}$ -linije treba da nastanu, *dielektrikum*, a ne vodič (sl. 158.a)); ta inducirana polja su primarni pojav kod indukcije, a napone opažane kod pojava indukcije između krajeva M i N otvorenih vodljivih petlji s (koji se dadu demonstrirati elektrometrom E na sl. 158.b)), kao i EMS i struje indukcije u zatvorenim vodljivim petljama s_0 , treba smatrati samo sekundarnim pojavima proizvedenima u vodičima djelovanjem induciranih električkih polja.

Zatvorene električne linije zakvačene o magnetski tok, koji se mijenja, mogu se dovesti u analogiju za zatvorenim magnetskim linijama zakvačenima s električkim pomačnim strujama po relaciji $\text{rot } \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$ dobivenoj specijalizacijom formule (151) prve osnovne jednadžbe za slučaj, kad nema provodnih struja. Analogona zatvorenim magnetskim linijama zakvačenima s provodnim električkim strujama po zakonu protjecanja $\text{rot } \mathcal{H} = \mathcal{G}$ nema, jer nema ni magnetskih masa analognih električkim nabojima, koji gibani čine električke struje.



Sl. 158.a)



Sl. 158.b)

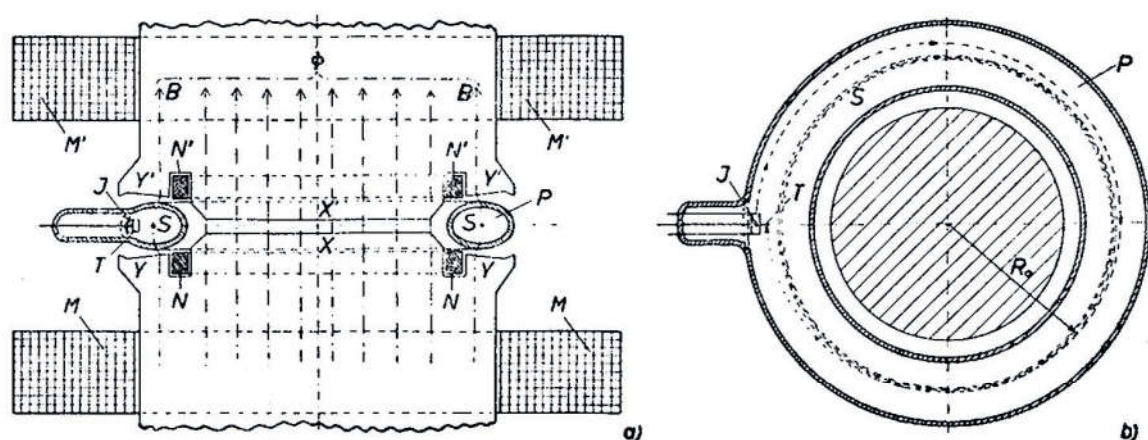
Vrtložna i bez izvora *elektrodinamska* električka polja s $\text{rot } \mathcal{F}$ po (184) različitim od nule bitno su različita od *elektrostatskih* polja sa $\text{rot } \mathcal{F}$ po (48) u A-85. jednakim nuli, koja su bez vrtloga, te izviru u pozitivnim i poniru u negativnim električkim nabojima.

Relacije prve osnovne jednadžbe (150) ili (151) i druge (183) ili (184) napisane za mirna tjelesa treba nadopuniti u slučaju gibanih tjelesa; za tehničke primjene jedino kod toga praktički mogu doći u obzir polja inducirana u gibanim vodičima po relaciji (167) iz C-51. Potanje u teorijskim fizikama.

69a. Već u C-42. spomenuti akcelerator elektrona *betatron* lijep je primjer primjene II. Maxwellove jednadžbe (184), odn. pojava vrtlogâ elektrodinamskih polja, koji po sl. 158.a) i 158.b) prate vremenska mijenjanja magnetskih polja indukcije $\mathcal{B}$. Zamislimo po sl. 159. pod a) i b) veliki elektromagnet iz transformatorskih limova, uzbuđivan izmjeničnom strujom, poslanom kroz glavni uzbuđni namotaj M-M' na njemu. Elektromagnet će u prostoru među svojim polnim ploham X i X' specijalnog oblika proizvoditi periodski promjenljivo magnetsko polje. Ako se sad u spomenuti prostor postavi, kao na sl. 159., veliki, šuplji, pod dobrim vakuumom držani recimo stakleni prsten P, te ako se u šupljinu toga prstena, iz prikladno konstruiranoga izvora elektrona, t. zv. *elektronskog topa* ili *elektronske štrcaljke* J, ubace elektroni, ti će elektroni biti, zbog djelovanja promjenljivim magnetskim tokom induciranih vrtložnih električkih polja, poput onih predloženih $\mathcal{B}$ -linijama na sl. 158.a) i 158.b), tjerani da na pr. u intervalima porasta magnetskog toka neprekidno kruže u istom smislu unutar prstena sa sve većima brzinama v i energijama A , pa će kod dostignute neke vrlo visoke konačne brzine v_1 i pripadne energije $A_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ (m_1 masa kod brzine v_1) moći

biti iskorišteni, na pr. za nuklearna istraživanja, a kod nešto manjih v_1 da udarajući na prikladnu zapreku, t. zv. *metu* T, na pr. iz volframa, proizvode vanredno tvrde rentgenske zrake, upotrebljive za medicinske svrhe, za radiografska ispitivanja materijalâ i slično.

Do velike brzine, već vrlo blize brzini svjetlosti, i do velike energije, kod koje im masa već postane mnogostruko veća od mase mirovanja, elektroni će se u betatronu zato ubrzavati jer svakom obilasku prstena odgovara prirast brzine određen naponom po zakonu indukcije $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, gdje je Φ magnetski tok obuhvaćen kružnom stazom elektrona (uspor. napon pokazan elektrometrom E na sl. 158.b), a grupa ubrzanih elektrona u relativno dugom intervalu ubrzavanja od recimo $\frac{1}{4}$ periode, pri relativno niskoj frekvenciji uzbudne struje elektromagneta,



Sl. 159.

dospije da izvrši vanredno velik broj obilazaka prstena. Tako se u neku ruku u betatronu dobiva kumulativni napon kao u visokonaponskom transformatoru s vanredno mnogo sekundarnih zavoja, no s tim da se kod gibanja elektrona u vakuumu spomenuti napon sav utroši na ubrzavanje elektrona.

Poteškoća je bila kod realizacije betatrona u tomu što se trebalo pobrinuti da se snop S ubrzanih elektrona gibanih u polju vremenski promjenljive indukcije B , iznosa pri sve većim brzinama v i relativistički povećanim masama m elektrona, održi unutar prstena na kružnoj stazi uvijek istog polumjera R_0 i pored relacije (163) iz C-41., zbog koje su na pr. kod ciklotrona po C-42. pri stalnom B ubrzavane čestice izvodile polukružne staze sve većega r (iskorišćivanje intervalâ povećavanja iznosa B magnetske indukcije pri ubrzavanju elektrona, upotreba polnih nastavaka osobitog oblika poput $Y-Y'$ na sl. 159., primjena prikladnog dodatnog magnetskog »polja-vodilice«, proizvedenoga pomoćnim uzbudnim namotajem $N-N'$; i sl.).

I betatronski elektromagneti su vrlo veliki i skupi. Uzbudna struja uzimlje se frekvencije 50 do 500 Hz. Manji betatroni (za prodorne rentgenske zrake za medicinu i radiografiju) ubr-

zavaju elektrone do tridesetak MeV, veći (za nuklearne laboratorije) i do stotinâ MeV. Kod ubrzavanja znatno iznad 100 MeV počinje prevladavati poteškoća da sve brže kružeći elektroni već postepeno sve znatnije (proporcionalno 4. potenciji iznosa MeV) isijavaju energiju u obliku radiovalova, pa obični betatron ne bi mogao ni teorijski ići iznad 500 MeV (kod najvećih jedinica u USA došlo se stvarno do 300 MeV). Međutim sretnom kombinacijom betatronskog i ciklotronskog djelovanja u *elektronskom ciklotronu* dobilo se i elektrone od 500 MeV.

Evo još nekih podataka za betatron »Fizikalnog instituta J. Stefan« u Ljubljani (proizvod: Brown Boveri, Baden). Elektromagnet teži oko tri i po tone. Uzbudjenje: 6200 V, 170 A (što daje »prividnu snagu« oko 1 MVA), frekvencija 50 Hz, »prava snaga« glavnog uzbuđnog kruga nije veća od 9 kW, jer se »jalova snaga« kruga kompenzira kondenzatorima (važnost što manje promjenljive frekvencije mreže!). Ukupno naprava troši 15 kW. Polumjer R_0 iz sl. 159. pod b) iznosi 25 cm, maksimalni iznos magnetske indukcije B na mjestu stabilne staze je 4000 G ili 0,4 T. Elektroni se ubacuju naponskim impulsima 50 kV. Pri maksimalno na 31 MeV ubrzanim elektronima dozni intenzitet proizvedenih rentgenskih radijacija na daljini 1 m od mete T dosiže 100 r/min.

70. Prema svemu izloženomu treba očekivati da će se inducirati vrtložna električka polja, a po tom i vrtložne provodne struje, i u masivnim vodičima mirnim unutar vremenski promjenljivih magnetskih polja, na pr. unutar manje ili više brzo oscilatornih, odn. »izmjeničnih« magnetskih polja, proizvedenih izmjeničnim strujama podržavanima u strujnim svicima i drugim vodičima. I kao što se po C-61. kod vrtložnih struja induciranih kod gibanja masivnih vodiča u vremenski stalnim magnetskim poljima i primjenjivanih za kočenja i prigušenja gibanih sustava toplina proizvedena u vodiču vrtložnim strujama mogla smatrati ekvivalentom za kinetičku energiju gibanoga sistema poništenu kočenjem ili prigušenjem, tako se strujna toplina vrtložnih struja mirnih vodiča u vremenski promjenljivim magnetskim poljima može smatrati proizvedenom na račun energije tih polja, odn. energije struja trošene na podržavanje tih polja.

Prema tomu mogu se kod masivnih vodiča u izmjeničnim poljima očekivati ugrijavanja. Ova mogu biti namjerno izazvana, a mogu predstavljati i nepriličan popratni pojav, koji će se nastojati po mogućnosti potisnuti.

Namjerno se ugrijavanja kovina (sve do temperatura usijavanja ili talenja) vrtložnim strujama s pomoću magnetskih polja proizvedenih izmjeničnim strujama vrlo visokih frekvencija, na pr. reda veličine 10^5 ili 10^6 Hz (»herca«; A-17.), primjenjuju u »visokofrekventnim pećima«. I kod evakuacije (isisavanja) elektronskih cijevi dadu se iskoristiti visokofrekventna grijanja vrtložnim strujama: cijev u toku evakuiranja dolazi unutar svitka protjecana jakom visokofrekventnom strujom, pa se na pr. kovna anoda cijevi užari do svijetlo-crvenoga žara i time oslobodi ostataka apsorbiranih plinova, koji bi inače pokvarili vakuum već evakuirane cijevi, kad bi izlazili iz anode ugrijane kod pogona cijevi (anode elektronskih cijevi ugrijavaju se u pogonu zbog bombardiranja elektronima spomenutoga u B-75.; također se taj pojav može iskoristiti za usijavanje anode kod evakuacije cijevi).

Najvažniji primjer nepoželjnih ugrijavanja vrtložnim strujama predstavljaju ugrijavanja željeznih jezgri transformatora i željeznih dijelova električkih strojeva izvrgnutih izmjeničnim magnetskim poljima. Ovim ugrijavanjima ne samo da

se suviše troši energija, nego se ograničuje i opteretivost transformatora i strojeva. A odnosi su pogotovo zato nepovoljni, jer se, kako ćemo kod proučavanja pojava magnetiziranja željeza vidjeti, javljaju pod istim prilikama i ugrijavanja zbog pojava t. zv. histereze. Tako se sekundni »gubici u željezu«, t. j. učin $N_{re} = N_h + N_v$ pretvaran u toplinu, na pr. u željezu transformatora, mogu zamisliti rastavljeni u dva sumanda: gubitke N_h zbog histereze i gubitke N_v zbog vrtložnih struja; o jednima i drugima više ćemo reći kod razmatranja o magnetiziranju željeza.

71. Izmjeničnim strujama kroz masivne vodiče unutar samih tih vodiča proizvedene vrtložne struje i njima pripadna magnetska polja superponirat će se u vodiču prvobitnim strujama, odn. poljima. Time može nastati poremetnja prvobitno po cijelom prerezu vodiča jednolike gustoće struje, t. j. može doći do potiskivanja struje, a s time u vezi i magnetskoga polja, prema površini vodiča. Specijalno kod žica, na pr. onih kružnoga prereza, mogu se kod prolaza struja vrlo visokih frekvencija stvoriti takvi odnosi da struja uglavnom teče vanjskim dijelovima prereza vodiča i da joj gustoća naglo opada prema unutarnjosti vodiča, t. j. da struja približno teče kao da je vodič cjevast, a ne masivan. Prema tomu treba očekivati da će se vodič određenoga prereza q i određene duljine l prema prolazu izmjeničnih struja vladati kao da mu je prerez umanjen, odn. otpor R_t kod izmjenične struje frekvencije f povećan prema otporu R_0 za istosmjernu struju.

Matematsko rješavanje ovoga t. zv. *skin-efekta* skopčano je s velikim poteškoćama, odn. moguće je dosadašnjim sredstvima samo u relativno jednostavnim slučajevima.

Tako se već kod problema ravnoga cilindričkoga vodiča primjenom zakona protjecanja i zakona indukcije dolazi na »Besselovu diferencijalnu jednadžbu«, a po tomu i na »Besselove funkcije«. Evo samo konačnih aproksimativnih rezultata o odnosu R_t/R_0 kod frekvencije f Hz za navedeni specijalni slučaj. Ako vodič ima polumjer r mm i ako mu je materijal vodljivosti κ S·m/mm² neferomagnetičan (nemagnetičan), tako da se odnos $\mathcal{B}/\mathcal{H}$ u njemu može praktički staviti jednakim indukcionalnoj konstanti μ_0 (u V·A·s·cm-sustavu po C-38. jednakoj $0,4\pi \cdot 10^{-8}$ Vs/Acm), te ako se uvede pomoćna veličina:

$$x = r\pi \sqrt{\frac{f \cdot \kappa}{10^7}} \quad (185)$$

može se kvocijent R_t/R_0 praktički dovoljno točno izraziti aproksimirajući beskonačni red za Besselovu funkciju nultoga reda.

Tako se dobivaju formule za manje, odnosno veće iznose x :

$$\frac{R_t}{R_0} = 1 + \frac{x^4}{3} \quad (186)$$

$$\frac{R_t}{R_0} = x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} \quad (187)$$

Prva je to točnija što je x više ispod 1, a druga što je x više iznad 1.

Za malen ili čak zanemariv skin-efekt povoljni su dakle maleni polumjer vodiča i malena vodljivost njegova materijala; osim toga skin-efekt je dakako manji

kod struja nižih frekvencija. Uz dano r i dano f kod bakra će R_t više nadvisivati R_0 nego kod manganina (zbog veće vodljivosti bakra prema onoj manganina); ipak skin-efekt kod »tehničkih« frekvencija od 50 Hz ili sl. s područja jake struje ostaje i kod bakrenih tankih žica često zanemariv, odn. dolazi jače do izražaja istom kod struja »srednjih« (tonfrekventnih) i naročito »visokih« (radiofrekventnih) frekvencija.

Formule (186) i (187) smiju se primijeniti i kod vodiča od feromagnetičkoga materijala, samo se onda veličina x u njima mora umjesto po (185) računati po numeričkoj relaciji:

$$x = r\pi \sqrt{\frac{f \cdot \kappa \cdot \mu'}{10^7}} \quad (185')$$

gdje μ' označuje »relativnu permeabilnost« feromagnetičke tvari, o kojoj će biti govora u C-72; kako μ' (suponirano konstantno) može za željezo biti vrlo veliko, pripadni skin-efekt ispada znatno pojačan u željezu.

Treba dodati da i međusobnim utjecajima magnetskih polja susjednih zavoja nekoga vodiča i uopće blizih vodiča protjecanih istom izmjeničnom strujom nastaju djelovanja koja pojačavaju skin-efekt (»učinak blizine«), tako da je teško teoretski predvidjeti omjer R_t/R_0 na pr. nekoga svitka. Magnetska polja vrtložnih struja stvaranih u kovnim limovima mogu se iskoristiti za slabljenje vanjskih djelovanja onih izmjeničnih magnetskih polja, na pr. od svitaka s izmjeničnim (osobito visokofrekventnim) strujama, koja izazivaju vrtložne struje. Na ovomu se osnivaju »elektromagnetska zaslanjanja« od izmjeničnih magnetskih polja: svitak ili sl. okruži se oklopom iz materijala visoke vodljivosti κ , na pr. bakra ili aluminijsa (zbog visokoga μ' vrlo se jako zaštićivaju postizava i slabije vodljivim željezom, no uz željezo su gubici učina veći).

III POJAVI FEROMAGNETIZMA; MAGNETSKI KRUG

Feromagnetička i neferomagnetička (diamagnetička i paramagnetička) materijalna sredstva, omjer $\mathcal{B}/\mathcal{H} = \mu = \mu_0\mu'$ u takvim sredstvima. Balistička ispitivanja feromagnetika; komutacione krivulje. Pojam vektora magnetske polarizacije $\mathcal{M}_m$ i vektora magnetiziranja $\mathcal{J}$. Tumačenja pojava magnetiziranja, naročito kod feromagnetika. Pojavi histereze; Warburgov stavak. Praktičke metode proračunavanja gubitaka zbog histereze i vrtložnih struja u željeznim limovima. Pojavi magnetskoga starenja. Curieova temperatura. Pojam magnetskoga kruga; Ohmov zakon za magnetski krug. Magnetski otpori; magnetske karakteristike. Magnetsko rasipanje. Proračunavanje magnetskih krugova strojeva. Magnetska polja kao sijela energije. Magneti; magnetski moment magnetâ; razmagnetizirajući učinci polova. Materijali za permanentne magnetâ; određivanje točke sa $(BH)_{\max}$. Pojavi na graničnim plohama feromagnetikâ. Nosiva sila magnetâ.

72. Dosad smo, strogo uzevši, vektor $\mathcal{B}$ magnetske indukcije i njegov odnos prema vektoru $\mathcal{H}$ jakosti magnetskoga polja pobliže razmatrali samo u vakuumu, a tek smo zanemarujući prelazili preko utjecajâ *neferomagnetičkih* materija na pojave u magnetskim poljima, jer su ti praktički doista nezamjetljivi i s gledišta tehničkih primjena nevažni. Naprotiv utjecaji željeza i drugih *feromagnetičkih* tvari ne mogu se nikako zanemariti, jer se njima slika magnetskih pojava i kvalitativno i

kvantitativno toliko mijenja, a može se reći nepravilnostima zbog histereze i sl. i komplicira, da je pojave feromagnetizma bilo prikladno ostaviti za ovaj posebni odsjek.

Razumijevajući i unutar ma kakve tvari pod vektorom $\mathcal{B}$ veličinu, kako je u C-II. uvedena za karakterizaciju učinaka magnetskih polja na gibane električke naboje, odn. za karakterizaciju pojava elektromagnetske indukcije, a pod vektorom $\mathcal{H}$ veličinu, kako je u C-I. uvedena za karakterizaciju uzбудnih odnosa magnetskih polja, može se utjecaj feromagnetičkih tvari na magnetske pojave smatrati prije svega označenim činjenicom, da u tim tvarima omjer $\mu = \mathcal{B}/\mathcal{H}$ vektora $\mathcal{B}$ prema vektoru $\mathcal{H}$, veličina zvana *apsolutnom permeabilnošću* promatrane tvari, izlazi mnogostruko toliki kao omjer μ_0 istih vektora u vakuumu, nazvan u C-36. »indukcionom konstantom«. Uz to još kvocijent $\mu' = \mu/\mu_0$, t. zv. *relativna permeabilnost* promatrane tvari, ne ostaje ni jednak za svaki korespondentni par veličine $\mathcal{B}$ i $\mathcal{H}$ nego je općenito manje ili više komplicirana funkcija veličine $\mathcal{H}$, odn. njoj pripadne veličine $\mathcal{B}$, a zbog t. zv. »histereze« čak i funkcija »magnetske prošlosti« feromagnetičke tvari. Prema tomu ne mogu ni magnetski pojavi u feromagnetičkim sredstvima biti lako matematički obuhvaćeni kao u vakuumu i u neferomagnetičkim sredstvima, pa se po potrebi za njihovu karakterizaciju primjenjuju i grafički prikazi kao »krivulja (prvoga) magnetiziranja«, »krivulja histereze« i slično.

Što smo u toku nekih dosadanjih izvoda mogli uzimati da magnetske pojave u bakru, aluminiju, drvetu, koži, gumi itd. teku praktički jednako kao u vakuumu, tomu je razlog, što kod neferomagnetičkih tvari utjecaj na magnetske pojave dođuše postoji, ali je tako neznatan da se gotovo posve točno kod njih može stavljati $\mu = \mu_0$, odn. $\mu' = 1$.

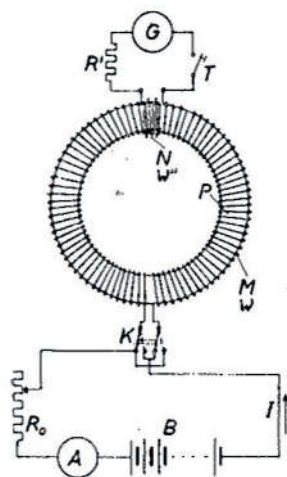
Dok kod željeza i drugih feromagnetičkih tvari iznosi μ' dosižu stotine i hiljade, točni iznosi μ' za pojedine neferomagnetičke tvari razlikuju se od iznosa $\mu' = 1$ za vakuum jedva za koju milijuntinu; pri tom se *paramagnetičkima* zovu tvari sa $\mu' > 1$ (za primjer navedimo: aluminij sa $\mu' \approx 1 + 0,000020$), a *diamagnetičkima* tvari sa $\mu' < 1$ (primjer: bakar sa $\mu' \approx 1 - 0,000010$).

Feromagnetička svojstva pokazuju pored različitih vrsta željeza i čelika još kobalt i nikalj, a većinom i slitine željeza, kobalta i niklja, pa i neke njihove rudače (kao magnetit Fe_3O_4). I iz samih neferomagnetičkih tvari dadu se načiniti feromagnetičke slitine (Heuslerove Cu-Mn-Al-slitine).

73. Konkretno se prisustvom feromagnetičke tvari uvjetovano μ' -struko povećanje omjera $\mu = \mathcal{B}/\mathcal{H}$, odn. uz pretpostavku istoga smjera vektorâ $\mathcal{B}$ i $\mathcal{H}$ prema iznosu u vakuumu μ' -struko povećano opažani iznos B kod danoga iznosa H i dane feromagnetičke tvari, može pokazati i čak kvantitativno odrediti pokusom, kod kojega se iznos H smatra određenim definicionom formulom (140) iz C-14., a na iznos B se zaključuje iz balističkih mjerenja po C-64.

Pomislmo svitak M sa w zavoja na pr. bakrene tanke izolirane žice gusto namotanih po sl. 160. na jezgru u obliku prstena P od željeza (odn. koje druge feromagnetičke tvari). Struja kroz taj svitak, pokazivana ampermetrom A , neka je crpena iz baterije akumulatora B i privedena svitku posredstvom komutatora

K, a željeni iznos I neka se regulira promjenljivim otporom R_0 . Srednja duljina l prstena P neka je velika prema dimenzijama njegova presjeka S . Osim svitka M kao »primarnoga« na prstenu P je po sl. 160. još jedan svitak N sa w'' zavoja; taj »sekundarni« svitak neka se tipkom T dade uključiti u krug galvanometra G,



Sl. 160.

a promjenljivim otporom R' neka mu je otpor R'' nadopunjen na iznos $R_a = R'' + R'$ »vanjskoga graničnog otpora« za upotrebljavani galvanometar G otpora R_g , tako da galvanometarski krug ima ukupni otpor $R_2 = R_a + R_g$ i galvanometar balističku konstantu iznosa C_B za »aperiodski granični slučaj« galvanometarskih gibanja (A-37.).

Zamislimo sada da uz zatvoren tipkom T strujni krug sekundarnoga svitka naglo obrnemo komutatorom K struju I primarnoga svitka, kojom je u unutarjnosti svitka bila podržavana jakost magnetskoga polja po relaciji:

$$H = \frac{wI}{l} \quad (188)$$

Tom komutacijom proizvedenoj promjeni iznosa struje I na iznos $-I$ odgovarat će promjena jakosti polja u svitku od iznosa H na iznos $-H$. Ako se pretpostavi da će se time i iznos magnetske indukcije u željeznoj jezgri prstena promijeniti od iznosa B pripadnoga jakosti polja H na iznos $-B$ što pripada jakosti polja $-H$, mora se zaključiti da će se magnetski tok kroz spomenutu jezgru promijeniti od iznosa $\Phi_0 = BS$ na iznos $\Phi_1 = -BS$, dakle za razliku $\Phi_0 - \Phi_1 = 2BS$. Ta pak promjena toka mora po formulama (177) i (178) izazvati u galvanometru G posve određeni balistički otklon α_1 , s kojim će B biti vezano relacijom:

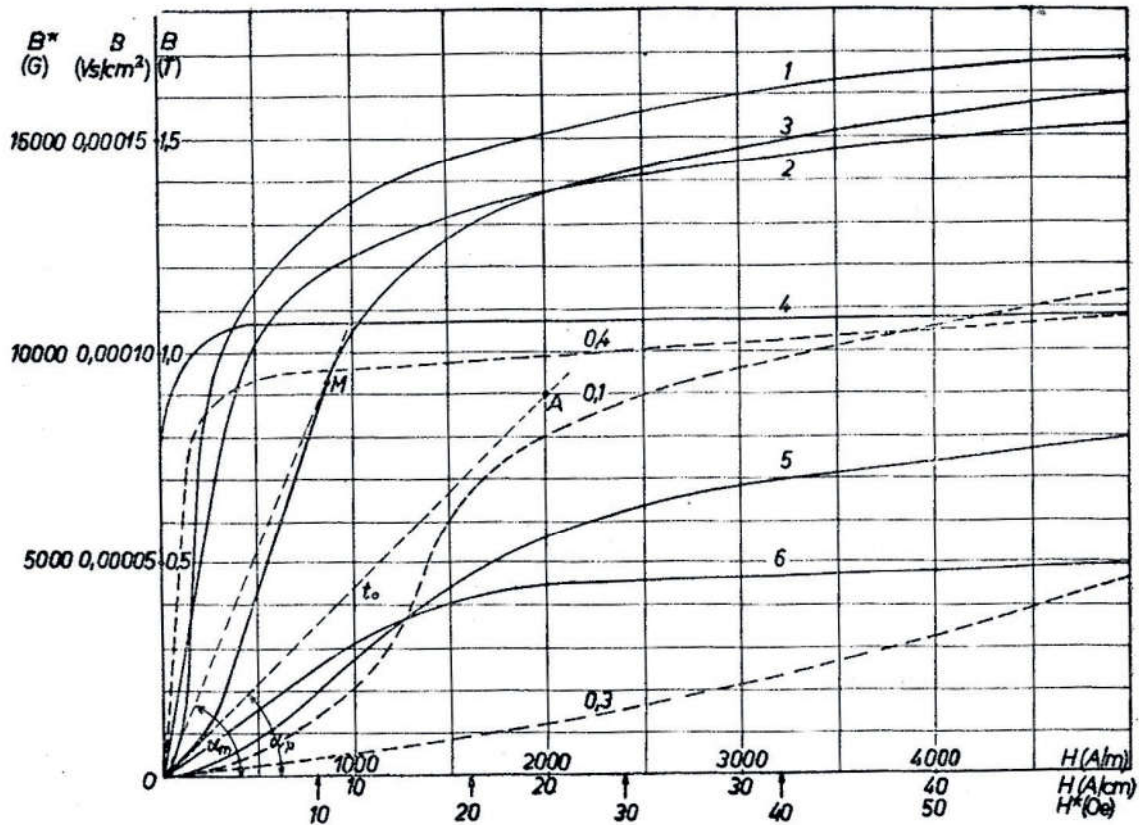
$$B = \frac{C_B R_2}{2Sw''} \cdot \alpha_1 \quad (189)$$

Prema tomu se s pomoću iznosa struje I udešavanih sa R_0 i očitavanih na A mogu proizvoditi u promatranom željezu povoljna polja H dana relacijom (188), a iz balističkih otklona α_1 izazvanih komutacijom struje I mogu se po relaciji (189) računati pripadni iznosi B . Rezultati ovakvih mjerenja doista vode na iznose $\mu = B/H$ općenito različite za pojedine parove B i H , te mnogostruko veće od uvijek istoga iznosa $\mu_0 = B/H$ iz C-36., kakav bi pokusi s komutacijama struje primarno i motrenjima balističkih otklona sekundarno davali, kad bi jezgra svitka M mjernoga uređaja iz sl. 160. bila vakuum umjesto željeza i uopće feromagnetičkih tvari.

74. Opisanom komutacionom metodom lako se dadu mjeriti iznosi B dani relacijom (189) kod različitih iznosa jakosti polja H po relaciji (188), proizvedenih u prstenima od različitih feromagnetičkih tvari.

Rezultate je najbolje grafički predočiti »komutacionim krivuljama« po sl. 161.a), koje prikazuju međusobne ovisnosti iznosâ B i H za ispitivane tvari. U praksi se ove krivulje crtaju s iznosima H u A/m ili u A/cm (ili u Oe) kao apscisama i iznosima B u T (Vs/m²) ili u Vs/cm² (ili u G) kao ordinatama.

75. Već se iz primjerâ u sl. 161.a) vidi kako se vrlo nejednako u magnetskom pogledu vladaju različite vrste željeza i željeznih slitina. Dok u području iznosa od 0 do 5000 A/m odn. od 0 do 50 A/cm (odn. od 0 do 62,8 Oe; C-27.) kod krivulje 1, koja predočuje prosječne odnose kod t. zv. »nelegiranih« (slobodnih od Si) li-



Sl. 161.a)

move za armature strojeva, pa i jezgre transformatora itd., kao i kod izvjesnih lijevanih čelika, vrijednosti B najprije naglo rastu već kod relativno malenih vrijednosti H , i dok su kod krivulje 2 za transformatorske (i slične) »visoko legirane« limove (sa oko 4% Si) odnosi slični i samo obzirom na visinu iznosa B nešto manje povoljni, opažaju se kod izvjesnih lijevanih čelika komutacione krivulje poput krivulje 3 u sl. 161.a), dakle s manje izraženom tendencijom nagloga porasta veličine B kod malenih vrijednosti H , no s visokim iznosima B kod nešto većih H , dok se obrnuto slitinama prikladnima specijalno za upotrebu u slabim poljima H (na pr. slitinom »permalloy« sa 78% Ni po krivulji 4) dosižu već uz posve neznatne vrijednosti H iznosi B od oko 1 T ili 10⁴ G, no koji praktički više ne rastu kod pre-

laza na veće H . Nasuprot nabrojenim magnetski vrijednijim tvarima malo u magnetskom pogledu vrijede na pr. lijevana željeza (krivulja 5), a pogotovo neželjezne feromagnetičke tvari, na pr. Ni (krivulja 6), jer se njima i u jačim poljima dosižu samo skromni iznosi magnetske indukcije.

Zbog bolje jasnoće u sl. 161.a) početni dijelovi krivulja 1, 3 i 4 ponovno su naznačeni crtkanim krivuljama 0,1 0,3 i 0,4 s 10-struko prema krivuljama 1, 3 i 4 povećanom apscisnom skalom (dakle za područje vrijednosti H od 0 do 500 A/m, 0 do 5 A/cm, odn. od 0 do 6,28 Oe) i nepromijenjenom ordinatnom skalom.

76. Činjenica, da se u danoj feromagnetičkoj tvari opažaju gustoće B magnetskih tokova (gustoće $\mathcal{B}$ -linija) μ' -struko tolike kao gustoće B_0 u vakuumu kod iste jakosti polja H , može se i tako izraziti, da se feromagnetičkoj tvari za dano H , odn. za pripadno B pripiše »propustljivost« μ' za $\mathcal{B}$ -linije relativno prema »propustljivosti« 1 pripisivanoj vakuumu. I drugi naziv »permeabilnost« za μ' znači »propustljivost«.

Veličina μ' nije konstantna za pojedine feromagnetičke tvari, nego ovisi o H , a po tomu i o iznosima B . Ove ovisnosti za različite feromagnetičke tvari mogu se grafički predložiti krivuljama s iznosima μ' kao ordinatama i na pr. iznosima B kao apscisama. U sl. 161.b) vide se tri takve krivulje 1', 3' i 5' izvedene iz krivulja magnetiziranja 1 (0,1), 3 odn. 5 iz sl. 161.a).

77. Kao omjerni broj dviju istovrsnih veličina $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}_0$ (odn. njihovih iznosa B i B_0) ne ovisi μ' o sustavu jedinica. Prema tomu se, označujući zvjezdicom iznose u EMJ, može specijalno staviti: $\mu' = B^*/B_0^*$; no kako po C-39. u EMJ B_0^* ispada numerički jednako H^* , moći će se dalje staviti: $\mu' = B^*/H^*$. Dovoljno je dakle za proračunavanje iznosa μ' pripadnih pojedinim točkama krivulja iz sl. 161.a) podijeliti ordinatu promatrane točke u G s apscisom te točke u Oe. A kod jednakoga mjerila za Oe na apscisnoj osi i za G na ordinatnoj osi μ' bi bilo jednako tangensu kuta priklona α pravca povučena ishodištem O i promatranom točkom krivulje.

Kod praktičkih proračunavanja magnetskih krugova traže se često jakosti magnetskih polja kod danih indukcija, posebno u uzduhu. Dakako, pri dosljednoj primjeni bilo sustava V-A-s-m bilo sustava V-A-s-cm vrijedit će relacija između veličina: $H = B/\mu = B/\mu_0\mu'$. Međutim, kako se u tehničkoj praksi još uvijek mnogo upotrebljavaju iznosi B^* u G, pri iznosima H bilo u A/m bilo u A/cm, očito će u prvom slučaju H u A/m slijediti iz B^* u G po numeričkoj relaciji:

$$H^{(A/m)} = \frac{B^*}{0,004\pi \cdot \mu'} = \frac{B^*}{\mu_0^\times \cdot \mu'} = \frac{B^*}{\mu^\times} \quad (I)$$

a u slučaju da se zahtijeva H u A/cm trebat će pisati:

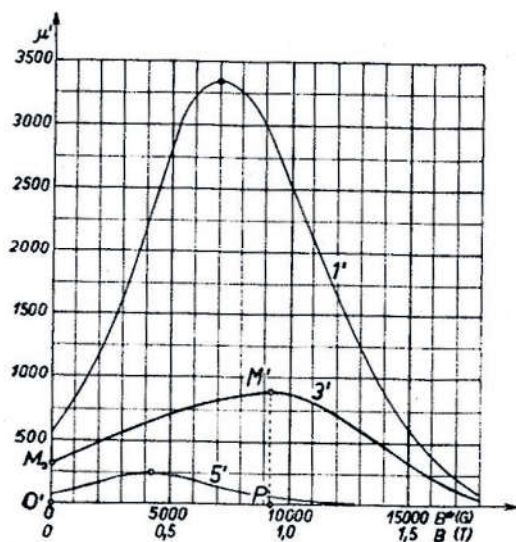
$$H^{(A/cm)} = \frac{B^*}{0,4\pi \cdot \mu'} = \frac{B^*}{\mu_0^+ \cdot \mu'} = \frac{B^*}{\mu^+} \quad (II)$$

pri čemu su uvedene oznake $\mu_0^\times = 0,004\pi$; $\mu_0^+ = 0,4\pi$; $\mu^\times = \mu_0^\times \cdot \mu'$ i $\mu^+ = \mu_0^+ \cdot \mu'$.

Treba dakle specijalno za *uzduh* (i uopće neferomagnetička sredstva) računati pri B^* u G: a) sa $B^*/H^{(A/m)}$ -iznosom $\mu_0^x = 0,004\pi = 0,01257$, b) sa $B^*/H^{(A/cm)}$ -iznosom $\mu_0^+ = 0,4\pi = 1,257$; c) sa B^*/H^* -iznosom $\mu_0^* = 1$.

Primjer: Na mjestu u uzduhu sa $B^* = 10000$ G bit će: a) $H = 10000/0,01257$ A/m = 797000 A/m; b) $H = 10000/1,257$ A/cm = 7970 A/cm; c) $H^* = 10000/1$ Oe = 10000 Oe.

78. Razmotrimo sada variranja, u ovisnosti od magnetske indukcije B , iznosa μ' (i njemu proporcionalnih iznosâ μ^x i μ^+) neke feromagnetičke tvari s danom B - H -krivuljom. Uzmimo za primjer krivulju 3 iz sl. 161.a) Početnoj točki O te krivulje, dakle indukciji $B=0$, odgovara očito »početna relativna permeabilnost« μ'_p (i pripadni »početni« μ_p^x i μ_p^+), određeni tangentom OA u točki O krivulje 3, upravo kutom priklona α_p te tangente prema apscisnoj osi. Da bi se dobili iznosi μ' (μ^x i μ^+) za indukcije B pripadne ostalim točkama N krivulje 3, treba zamisliti samo poluzrake ON povučene iz O kroz točke N krivulje 3 sa željenom ordinatom B ; kutom priklona α tih poluzraka prema apscisnoj osi određeni su iznosi μ' (μ^x i μ^+).



Sl. 161.b)

Prema tomu za točke dijela OM krivulje 3 ovi iznosi će rasti, te će se postići iznos »maksimalne relativne permeabilnosti« μ'_m (i »maksimalnih« μ_m^x i μ_m^+) za indukciju pripadnu onoj točki M krivulje 3 koju poluzraka OM iz O zgađa baš tangencijalno. Poluzrake povučene kroz točke na 3 iza M postepeno će bivati sve manje strme, i pripadnim indukcijama B korespondentni iznosi μ' (te μ^x i μ^+) postajat će postepeno sve manji i manji, konvergirajući k iznosima 1 (te 0,01257 i 1,257). Prema tomu se variranje iznosa μ' (te μ^x i μ^+) može prikazati krivuljom po sl. 161.b), s apscisama B u dva mjerila (G i T) i s ordinatama μ' (te μ^x i μ^+), u mjerilima pripadnim iznosima za uzduh tih veličina: 1 te 0,01257 i 1,257. Osim krivulje 3' na sl. 161.b), izvedene iz krivulje 3 na sl. 161.a), koja krivulja 3' prikazuje magnetski osrednji materijal s umjerenim iznosima $\mu'_p = 358$ i $\mu'_m = 890$ početne i maksimalne permeabilnosti, predloženi su na sl. 161.b) krivuljama 1' i 5' još odnosi magnetski odličnog i magnetski vrlo lošeg materijala po krivuljama 1 i 5 iz sl. 161.a), pa se vidi da na pr. μ'_p i μ'_m u krivulji 1' dosižu iznose 613 odn. 3380, a na krivulji 5' jedva dosižu μ'_p i μ'_m iznose 125 odn. 250. Kod permalloya su početna permeabilnost 10000 i maksimalna 40000 čak mnogo povoljnije nego kod materijala po krivulji 1' iz sl. 161.b).

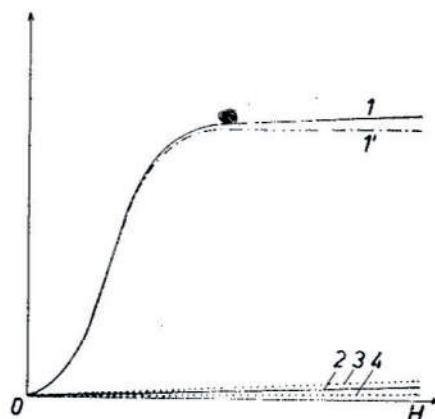
79. Imenom *krivulja magnetiziranja*, u praksi također upotrebljivanih za komutacione krivulje poput onih iz sl. 161.a), želi se izraziti, da relativno vrlo ye-

like iznose B opažane u feromagnetičkim tvarima treba u bitnosti pripisivati naročito stanju »magnetiziranja«, koje ove tvari poprimaju već kod skromnih iznosa H jakosti polja.

Točnije se međutim (u formalnoj analogiji s izvodima iz A-97.) *magnetska polarizacija* dane feromagnetičke tvari (»feromagnetikuma«) kod neke jakosti polja $\mathcal{H}$ definira kao »dodatna magnetska indukcija« $\mathcal{M}_m$ materije feromagnetikuma, koju treba pribrojiti magnetskoj indukciji $\mathcal{B}_0$, što bi uz isto $\mathcal{H}$ nastala u vakuumu, tako da za ukupnu indukciju $\mathcal{B}$ u prostoru sa feromagnetikumom vrijedi:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 + \mathcal{M}_m \quad (190)$$

80. Strogo uzevši predstavljale bi dakle istom krivulje s ordinatama iznosa M_m vektora $\mathcal{M}_m$ pri iznosima H kao apscisama, udjele magnetske indukcije koji potječu od »magnetiziranja« feromagnetičkih tvari. Po sl. 162. iznosi M_m ordinatâ tih M_m - H -krivulja 1' dobivali bi se, zbog $M_m = B - B_0$, odbijajući od B -iznosâ B - H -krivulje 1 danog feromagnetikuma B_0 -iznose B_0 - H -krivulje 2 pripadne vakuumu (ili praktički i uzduhu); i veličini M_m , kao razlici magnetskih indukcija B i B_0 , pripada dimenzija magnetske indukcije, pa ćemo je izražavati u T (ili u Vs/cm² ili u G). Magnetska zasićenost nekog feromagnetikuma manifestira se tek potpuno horizontalnim dijelom M_m - H -krivulje; B - H -krivulja, zbog sumanda B_0 u njoj, ne teče nikad



Sl. 162.

posve horizontalno. No kod slabijih polja, s kakvim se redovito radi u elektrotehnici, razlike krivulja $M_m = f_1(H)$ spram krivulja $B = f(H)$ po sl. 161.a) praktički iščezavaju, jer uz velike vrijednosti μ' po sl. 161.b) iznosi B_0 , za koje B nadvisuju M_m , relativno su neznatni, pa se praktički doista može stavljati: $B \approx M_m$.

Naprotiv kod velikih i ekstremno velikih H , s kakvima se u fizici proučavaju magnetska svojstva feromagnetikâ, iznosi μ' postaju maleni i ne mogu se više zanemarivati razlike između $B = B_0 + M_m$ (gdje barem član B_0 mora rasti sa H) i samoga M_m (koji zbog pojava magnetske *zasićenosti* sve polaganije raste sa H asymptotski se približavajući nekom graničnom »iznosu zasićenosti« M'_m , karakterističnom za promatranu tvar); zato se u fizici susreću krivulje veličine $M_m = f_1(H)$, ili veličinâ proporcionalnih veličini M_m , dok u elektrotehnici krivulje $B = f(H)$ mogu poslužiti približno kao »krivulje magnetiziranja«.

Prema rečenom može se pisati: $\mathcal{M}_m = \mathcal{B} - \mathcal{B}_0 = \mu_0(\mu' - 1) \cdot \mathcal{H}$; veličina $\xi_m = \mu' - 1 = (\mu - \mu_0)/\mu_0$ zove se »magnetska susceptibilnost« tvari; za uzduh je $\xi_m = 0$, diamagnetičke odn. paramagnetičke tvari karakterizirane su sa μ' resp. ξ_m tek neznatno manjim odn. većim od 1, resp. od 0, dok kod feromagnetičkih iznosi μ' , a time i iznosi ξ_m , lako dosižu i više tisuća.

Umjesto veličinom $\mathcal{M}_m$ mnogi radije stepen magnetiziranja neke tvari karakteriziraju veličinom $\mathcal{J} = \mathcal{M}_m/\mu_0 = (\mathcal{B} - \mathcal{B}_0)/\mu_0$; tu veličinu $\mathcal{J}$ onda i zovu »magnetiziranjem« ili »intenzitetom magnetiziranja«, i izražavaju je u A/m (ili u A/cm ili u Oe). Očito bi u μ_0 -struko promijenjenom ordinatnom mjerilu krivulja 1' u sl. 162. predstavljala krivulju iznosâ $\mathcal{J}$ vektora $\mathcal{J}$, a krivulje 1 odn. 2 bi predstavljale iznose B/μ_0 odn. H veličinâ $\mathcal{B}/\mu_0$ odn. $\mathcal{H}$, u zavisnosti od iznosâ H .

81. Veličinom $\mathcal{M}_m$ (odn. njoj razmjernom veličinom $\mathcal{J}$) mogu se stanja magnetiziranja željeza smatrati samo formalno karakterizirana. Dublji je problem, kako treba u potankosti ta stanja zamišljati, te kako treba tumačiti različite vanjske manifestacije tih stanja kod feromagnetičkih, a u vezi s time i kod paramagnetičkih i diamagnetičkih tvari.

U suvremenom tumačenju umjesto kao nekoć na naročite agense, nazivane sjevernim i južnim magnetizmom, svode se magnetski pojavi u materijalnim sredstvima na t. zv. molekularne struje, odn. gibanja električkih naboja unutar tih sredstava. Kao gibanj naboji mogu se uzimati na atomske jezgre vezani elektroni, za koje u svrhu tumačenja magnetskih svojstava različitih tvari treba zamišljati da općenito ne opisuju samo staze oko atomskih jezgara, nego da se još gibaju i rotatorno na način zvrkova (elektronski »spini«; uspor. A-14.).

Kao uopće⁹ gibanja električkih naboja tako se i ova gibanja elektrona, ove molekularne struje u materiji, moraju zamišljati praćena određenim magnetskim poljima. A činjenicu da se kod određenoga uzbuđenja vanjskim poljem jakosti $\mathcal{H}$, s iznosom $H = wI/l$ proizvedenim strujom I kroz w zavoja prstenastoga svitka duljine l , zamjećuje unutar jezgre toga svitka ispunjene određenom materijom magnetska indukcija $\mathcal{B}$ već prema materiji jezgre više ili manje promijenjena prema magnetskoj indukciji $\mathcal{B}_0$, koja bi se uz jednako uzbuđenje $\mathcal{H}$ opazala u vakuumu, treba onda tako shvatiti, da se $\mathcal{B}$ smatra nastalim superpozicijom magnetske indukcije $\mathcal{B}_0$ proizvedene jakošću polja $\mathcal{H}$ u vakuumu i magnetske indukcije koreponentne kombiniranom učinku magnetskih polja molekularnih struja unutar promatrane materijalne jezgre. Taj učinak nastaje utjecajima vanjskoga uzbuđenja, poimence ubrzavanjima ili usporavanjima elektrona pri stvaranju određenoga uzbuđenja $\mathcal{H}$, odn. i orijentacionim učincima toga uzbuđenja na elektrone u obilaznim gibanjima i vrtnji.

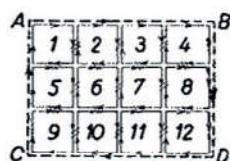
82. Pri tomu su kod diamagnetičkih tvari ti utjecaji takvi, da doprinos molekularnih struja veličini $\mathcal{B}$ ispada relativno neznatan i proporcionalan sa $\mathcal{H}$, te ukupno uzeto suprotan vektoru $\mathcal{B}_0$, pa rezultira $\mathcal{B} < \mathcal{B}_0$ s iznosima B tek posve neznatno manjima od iznosa B_0 i proporcionalnima iznosima H (v. krivulju 4 na sl. 162.), dok kod nediamagnetičkih tvari spomenuti utjecaji, neznatni i proporcionalni uzbuđenju kod paramagnetičkih i izvanredno intenzivni bez proporcionalnosti s uzbuđenjem kod feromagnetičkih tvari, izlaze na podupiranje indukcije $\mathcal{B}_0$, zbog čega u paramagnetičkim tvarima nastaju tek posve neznatno veći iznosi B prema iznosima B_0 za vakuum (v. krivulju 3 na sl. 162.). A kod feromagnetika iznosi B izlaze mnogostruko veći od iznosa B_0 i k tomu ne rastu proporcionalno iznosima H (v. krivulju 1 na sl. 162.).

Kod paramagnetičkih, a pogotovo kod feromagnetičkih tvari molekularne struje u materiji djeluju dakle u neku ruku kao »dodatna uzbuđenja« vanjskim uzbuđenjima $\mathcal{H}$, proizvedenima strujom uzbudnoga svitka, dakle kao dodatni A/m odn. A/cm, koji pojačavaju strujnim svitkom proizvedene A/m odn. A/cm, koji su jedini neposredno zamjetljivi i uzimaju se u obzir za veličinu $\mathcal{H}$, pa omjer $\mathcal{B}/\mathcal{H} = \mu = \mu_0\mu'$ izlazi μ' -struko povećan prema omjeru $\mathcal{B}_0/\mathcal{H} = \mu_0$.

83. Stvar je fizike, da u potankosti razmatra pojave dia-, para- i feromagnetizma. Spomenimo samo ukratko, da se kod diamagnetičkih tvari, dok još nisu u magnetskom polju, atomi zamišljaju s međusobno kompenziranim magnetskim učincima gibanih elektrona, te da se istom pojavom elektromagnetske indukcije kod uspostavljanja uzbudnoga polja ovi kompenzirani odnosi unutar tvari tako poremete, da pretegne djelovanje molekularnih struja s magnetskim učincima u smislu slabljenja indukcije $\mathcal{B}_0$ vakuuma.

Kod paramagnetičkih tvari treba zamišljati da i kod odsustva uzbudnoga polja postoje nekompenzirana elektronska gibanja, no prostorno nepravilno i vremenski promjenljivo orijentirana, tako da tvar kao cjelina izlazi magnetski indiferentna; do paramagnetičkoga učinka dolazi time, što pretegne u paramagnetičkoj tvari u manjoj ili većoj mjeri orijentacioni učinak uzbudnoga polja na nekompenzirane molekularne struje, koji djeluje u smislu podupiranja indukcije $\mathcal{B}_0$ vakuuma.

84. Izvanredno intenzivno magnetsko djelovanje i druge magnetske osobitosti feromagnetičkih tvari moguće je tumačiti pretpostavkom da kod tih tvari dolazi do složnoga djelovanja molekularnih struja u cijelim malim područjima tih tvari, u sićušnim kristalićima (mikrokristalima). To složno djelovanje treba pripisivati jednakosti orijentacijâ magnetskih osi svih molekularnih struja istoga magnetića. Uzimajući da ta jednakost ostaje i kod svakoga preorijentiranja molekularnih struja, izazvanog u pojedinim kristalićima dovoljno jakim uzbudnim poljima, time sačuvana što molekularne struje istoga magnetića bivaju sve istodobno »preklopljene« u novi položaj ravnotežja, koji bolje odgovara primijenjenom polju, može se po magnetskom djelovanju skup svih molekularnih struja istoga kristalića smatrati ekvivalentnim jednoj jedinoj »preklopljivoj« sitnoj struji s odnosom prema molekularnim strujama donekle sličnim odnosu crtano u sl. 163. naznačene »konturne« struje ABDCA prema skupu izvučeno naznačenih struja 1 do 12 iste jakosti, koji bi se u magnetskom pogledu strujom ABDCA očito dao nadomjestiti.



Sl. 163.

Na bazi ovakve predodžbe kristalića feromagnetikuma ekvivalentnih sitnim strujama, »elementarnim strujama« iz C-2., odnosno »elementarnim magnetićima«, kako se elementarne struje također nazivaju da bi se istaknuli magnetski tokovi proizvedeni tim strujama, veća područja feromagnetika u *nemagnetiziranom* stanju treba smatrati konglomeratima elementarnih magnetića s magnetskim osima razli-

čitih orijentacija za različite magnetiće, no jednoliko porazdijejenih na sve smjerove prostora, zbog čega nemagnetizirane feromagnetičke tvari, uzete kao cjelina, ni ne pokazuju magnetskih djelovanja.

Pojav pak *magnetiziranja* feromagnetičkih tvari treba tako zamišljati da utjecajem uzbudnoga polja već prema smjeru njegova djelovanja, nastupaju preklapanja elementarnih magnetića feromagnetikuma, te da se ovaj pojav pri prvom magnetiziranju zbiva za različite magnetiće i različite orijentacije njihovih magnetskih osi kod različitih iznosa sve više pojačavanoga uzbudnog polja, te slično pri mijenjanju već postignutoga magnetiziranja kod različitih promjena jakosti ili smjera uzbudnoga polja. Tako se kod sve većih jakosti polja $\mathcal{H}$, ili sve većih promjena tih jakosti, preklapa i time prilagođuje smjeru djelovanja polja sve više i više elementarnih magnetića, što dolazi do izražaja u sve većem »polariziranju« $\mathcal{M}_m$, a kod vrlo jakih uzbuđenja i preklopljenih praktički svih elementarnih magnetića u »polariziranju zasićenosti« $\mathcal{M}_m'$ feromagnetikuma u smjeru polja $\mathcal{H}$. Magnetska djelovanja magnetiziranih feromagnetika lako je pri tomu tumačiti skupnim učinkom magnetskih tokova elementarnih struja koje se preklapanjem manje ili više usmjeruju i daju djelovanje donekle slično onomu, kakvo bi dale struje 1 do 12 iz sl. 163., zamišljene ovaj puta kao elementarne struje.

85. Na temelju gornjih predodžbi, te predodžbi o međusobnim utjecajima kristala feromagnetikuma i sličnih, kojih se upotrebljivost pravo manifestira istom kvantitativnim razrađivanjem potankosti, moguće je barem uglavnom tumačiti vrlo raznolike pojave opažane kod magnetiziranja feromagnetika.

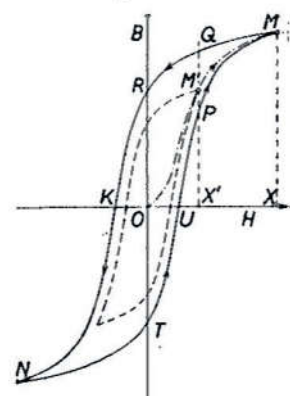
Tako se može unaprijed očekivati da feromagnetičnost, ako je vezana na mikrokristale, a time i na kristaliničnu strukturu feromagnetikuma, ne će biti svojstvo atoma tvari samih za sebe kao na pr. radioaktivnost. I doista, sami atomi željeza, recimo u parama željeza, ne pokazuju feromagnetičnost, dok naprotiv atomi radioaktivnih elemenata pokazuju pojedince radioaktivnost i tanki su slojevi radioaktivnih preparata toliko radioaktivni, koliko radioaktivnih atoma sadrže.

Isto se tako povezanošću feromagnetičnosti s mikrokristaliničkom strukturom tvari daje tumačiti činjenica da strukturno raznolikim vrstama željeza i željeznih slitina odgovaraju krivulje magnetiziranja s raznolikim i manje ili više kompliciranim ovisnostima magnetiziranja o uzbuđenju, te sa stanjima zasićenosti postizavanima kod različitih iznosa magnetiziranja i različitih uzbuđenja potrebnih za praktičko postizavanje tih stanja. Naročitim strukturnim odnosima mogu se tumačiti i feromagnetička svojstva Heuslerovih slitina (C-72.).

86. Slično treba promjene magnetiziranja feromagnetičkih tvari pod utjecajem postepeno variranoga uzbudnoga polja zamišljati u sićušnim »skokovima«, koji odgovaraju preklapanjima pojedinih elementarnih magnetića i mogu se i eksperimentalno učiniti zamjetljivima (Barkhausenovi šumovi: prikladno odabrani feromagnetikum, kome se mijenja magnetiziranje, obuhvati se indukcionim svitkom na koji je preko pojačala s elektronskim cijevima priključen zvučnik; kod mijenjanja

magnetiziranja čuju se onda šumovi od preklapanja elementarnih magnetića). Tako krivulje ovisnosti iznosâ M_m magnetske polarizacije (odn. iznosâ J magnetiziranja), te iznosâ B magnetske indukcije, o iznosima H uzbuđenja stalnoga smjera treba zamišljati sa sitnim »stepenicama«, koje se međutim redovito ne primjećuju kod običnih proba feromagnetika s ogromnim brojem elementarnih magnetića.

87. Još značajniju, a k tomu i tehnički naročito važnu osobitost u odnosima između iznosâ M_m ili B prema iznosima H predstavljaju pojavi *histereze*. Tim se imenom nazivaju pojavi opažani u manjoj ili većoj mjeri kod svih feromagnetika, da iznosi B i M_m ne pokazuju ovisnosti $B = f(H)$ krivulja prvog magnetiziranja, niti korespondente ovisnosti $M_m = f_1(H)$ (C-80.), ako se feromagnetikum nakon prvoga magnetiziranja kod uzbuđenja H variranoga od 0 do nekoga maksimalnoga iznosa $+H_m$ podvrgne premagnetiziranju »silaznim« variranjem uzbuđenja H od iznosa $+H_m$ do suprotnoga iznosa $-H_m$, kao i da spomenute ovisnosti izlaze opet drukčije kod daljega premagnetiziranja feromagnetikuma »uzlaznim« variranjem uzbuđenja od $-H_m$ ponovno do maksimalnoga iznosa $+H_m$. Odnosi su pri tomu uvijek takvi da se, po sl. 164., kod svakoga potpunog ciklusa izmjeničnoga magnetiziranja, dakle kod variranja iznosa H od $+H_m$ preko 0 do $-H_m$ i natrag od $-H_m$ preko 0 sve do $+H_m$, opiše zatvorena *petlja histereze* MRKNTUM s krajnjim točkama $M(+H_m, +B_m)$ i $N(-H_m, -B_m)$, koje leže simetrično obzirom na ishodište koordinata O (praktički bila bi zbog odnosa između M_m i B po C-80. jednaka uz ne prevelike H_m i petlja s iznosima M_m umjesto iznosa B kao ordinatama u prikladnom mjerilu).



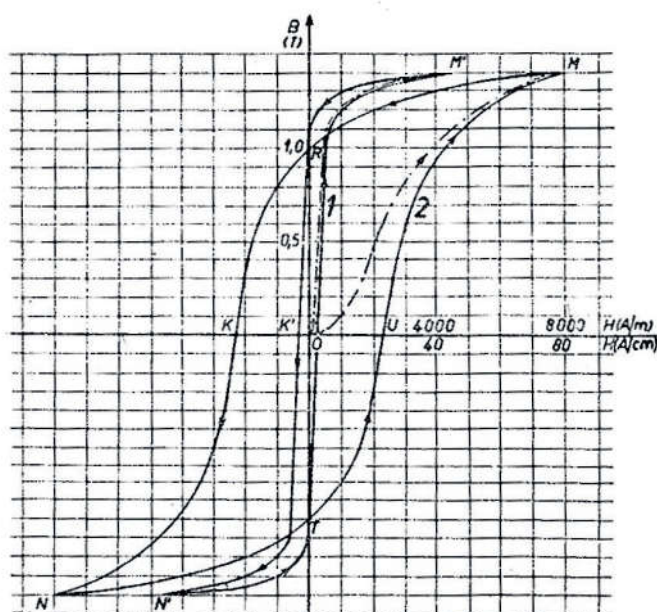
Sl. 164.

Kako se vidi, histereza se manifestira time da kod izmjeničnoga magnetiziranja iznosi B (odn. M_m) ne slijede krivulju prvoga magnetiziranja $OM'M$, nego kod silaznoga variranja uzbuđenja H do iznosa 0 ostaju na dijelu MR viši, nego bi odgovaralo krivulji $MM'O$. Kako se iz položaja točaka K i R razabire, prstenu od ispitivanoga feromagnetikuma ostaje i kod dostignutoga iznosa $H = 0$ još neka »remanentna indukcija« ili »remanencija« $B_r = OR$ (odn. pripadna »remanentna polarizacija« M'_m), te je potrebno proizvesti izvjesno suprotno uzbuđenje $-H_c = OK$, da se B (odn. M_m) dovede do iščezavanja. Ako se sada i dalje nastavi mijenjanjem polja H sve do iznosa $-H_m$, dolazi se konačno na točku N , u kojoj svršava silazni i počinje uzlazni dio petlje histereze sa $OT = OR$ i $OU = OK$, te ordinatama B (odn. M_m) nižima nego na silaznom dijelu, a u dijelu TUM čak i nižima nego odgovora krivulji $OM'M$.

Kod cikličkih magnetiziranja izmjeničnim strujama toliko se puta opiše u sekundi pripadna petlja histereze koliku frekvenciju f (u Hz) ima izmjenična struja.

88. Pojav histereze silno komplicira teoretsko obrađivanje magnetskih problema. On se može označiti kao neko zaostajanje ili zakašnjanje (no ne vremensko

jer se petlja histereze dobiva i kod izmjeničnih magnetiziranja vrlo sporim tempom) promjenâ iznosâ B i M_m prema promjenama iznosâ H , tako da ovi iznosi za isto



Sl. 165.

H već prema »magnetskoj prošlosti« feromagnetikuma izlaze različiti (na pr. za $H = OX'$ u sl. 164. moguća su tri iznosa B , naime $X'M'$, $X'P$ i $X'Q$). Sumarno gledano, sve se događa kao da se feromagnetikum protivi promjenama indukcije, odn. magnetiziranja, kao da se preklapanju elementarnih magnetića u njemu protivi neka sila poput trenja, nazivana koercitivnošću. Zato i ostane jednom magnetiziranom prstenu nešto magnetske indukcije, odn. magnetičnosti, i kad nestane uzbuđenja, a za mjerilo toga zaostatka prirodno je bilo uzeti remanenciju

$B_r = OR$, odn. pripadno remanentno magnetiziranje M_m'' , dok se kao mjerilo koercitivnosti ispitivanoga feromagnetikuma kod dane petlje histereze prirodno uzima uzbuđenje $H_c = OK$ potrebno da se ponište B_r , odn. M_m'' .

89. Poput krivulja magnetiziranja i krivulje histereze vrlo se razlikuju za različite vrste željeza. Za magnetski »mekane« vrste željeza, armature i transformatorske limove i sl., petlje histereze su relativno uske, t. j. pripadne tvari imaju malene iznose $H_c = OK$ po sl. 164 (uspor. petlju 1 za meko željezo na sl. 165.); često čak znatno ispod 100 A/m (1 A/cm ; $1,25 \text{ Oe}$). Razne vrste permalloja iz C-75. imaju pogotovo neznatne H_c , na pr. tek 4 A/m ($0,04 \text{ A/cm}$; $0,05 \text{ Oe}$).

Petlje magnetski tvrdih materijala, osobito one različitih čelika za permanentne magnete, naprotiv su relativno široke i pripadne koercitivnosti H_c dosižu hiljade i desetke hiljada A/m (desetke ili stotine A/cm); uspor. petlju 2 na sl. 165. za obični magnetski čelik. Kod iznosâ remanencije $B_r = OR$ razlike između magnetski mekih i tvrdih vrsta željeza naprotiv obično nisu velike; iznosi B_r ne udaljuju se mnogo prema gore, ni jako mnogo prema dolje, od na pr. iznosa $0,8 \text{ T}$ ($0,00008 \text{ Vs/cm}^2$; 8000 G).

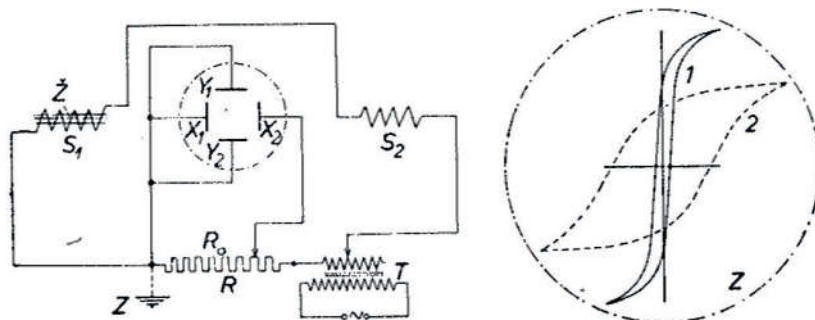
Karakteristično je kod histereze, da krajnje točke M , M' itd. petlji različitih »amplituda« $H_m = OX$ (izvučena petlja na sl. 164.), $H'_m = OX'$ (crtkana petlja na sl. 164.) itd. leže praktički na krivulji prvoga magnetiziranja $OM'M$. Zato i jesmo mogli u C-79. okrstiti imenom »krivulja magnetiziranja« (točnije se moglo reći: krivulja prvoga magnetiziranja) »komutacione« krivulje iz sl. 161.a): kod pokusa

po sl. 160. komutirana su bila po C-73. uzbuđenja H dana relacijom (188) i pretpostavljeno je kod izvođenja relacije (189), da proizvedene promjene magnetskoga toka iznosa $2BS$, a prema tomu i promjene magnetske indukcije $2B$, t. j. da se magnetska indukcija obrne od iznosa $+B$, pripadnoga uzbuđenju H na krivulji OM'M iz sl. 164., na suprotni iznos $-B$, a takvu promjenu baš predstavlja silazna polovica poput MRKN petlje histereze. Samim prekidom struje I i pripadnim smanjenjem uzbuđenja H tek do iznosa 0 magnetska indukcija, mijenjajući se po zakonu dijelova petlji histereze poput MR, smanjila bi se istom do iznosa remanencije; pokusima ovoga tipa s konačnim ili početnim iznosima $H = 0$, zgodno kombiniranima (pobliže u E.M.), moguće je balističkom metodom s prstenom po sl. 160. snimati i »petlje histereze«.

Praktički dovoljno točno mogu se krivulje magnetiziranja i petlje histereze snimati osim balističkom metodom s prstenom još i balističkom metodom s jarmom (E.M.), te Koepselovim aparatom (E.M.). Od novijih naprava, koje uz druga magnetska mjerenja mogu poslužiti i za određivanje petlji histereze, neka bude spomenut »Siemensov ferometar«; u zajednici s t. zv. pisačem koordinata; taj aparat automatski bilježi krivulje histereze za različita maksimalna uzbuđenja (E.M.).

Za demonstracije histereze mnogo se upotrebljavaju metode s cijevi za katodne zrake (sl. 57. na str. 112.): ako se prikladnim raspoređajem horizontalni otkloni katodnih zraka učine proporcionalni uzbudnoj struji, odn. uzbudnom polju, a vertikalni otkloni proporcionalni magnetskoj indukciji ispitivane željezne probe, kod izmjenične uzbudne struje svijetla mrlja na zastoru cijevi pomicat će se po zakonu petlje histereze, koja će time postati vidljiva, odn. moći će se fotografirati.

Shema spojeva vidljiva je u sl. 166. lijevo. Izmjenična struja iz transformatora T vodi se redom kroz otpor R , zatim kroz uzbudni svitak S_1 , u koji se stavlja istraživana proba Z u obliku tankog i dugog snopa željeznih limova ili žica, i konačno kroz kompenzacioni svitak S_2 . Horizontalno izmjenično magnetsko polje probe Z otklanja svijetlu mrlju vertikalno gore-



Sl. 166.

dolje približno proporcionalno u svakom momentu, iznosima B postignutima u ispitivanoj probi. A otkloni mrlje horizontalno desno-lijevo, proporcionalni uzbudnoj struji, a time i uzbudnom polju H , postizavaju se primjenom pada napona sa dijela R_0 otpora R na otklonski par pločica X_1-X_2 katodne cijevi (par pločica Y_1-Y_2 za vertikalni otklon kratko se spoji). Svitkom S_2 kompenziraju se magnetski učinci koje bi svitak S_1 proizvodio sam po sebi, tako da kod izvađene probe ni ne dolazi do vertikalnih otklona mrlje. Desno u sl. 166. vide se na svijetlom

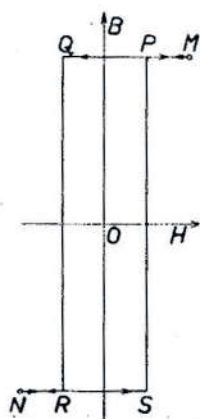
zastoru Z petlje histereze 1 i 2, od kojih bi se prva postigla s magnetski mekom i druga s magnetski tvrdom probom.

Osim opisanom jednostavnom metodom, dosta grubom zbog upotrebe dugoljastih *otvorenih* proba feromagnetikâ, mogu se krivulje histereze točnije katodnooscilografski realizirati nešto kompliciranijim spojevima, poimence onim po Krügeru i Plendlu, koji dopušta upotrebu *prstenastih* proba; B-ordinate dobivaju se tu »metodom integracije«, s pomoću napona uzimanoga s prikladno uključenog kondenzatora.

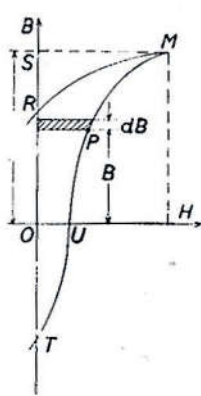
Pojedinim malim kristalima feromagnetika, kao malima zasićenim magnetima koji se u cjelini premagnetiziraju preklapanjem, pripadale bi petlje histereze slične onoj u sl. 167. s posve strmim dijelovima SP i QR, kakve se približno opažaju i kod »jedinčnih kristala« visokovrijednoga permalloya sa 92% Ni (obične vrsti permalloya sadrže manje Ni; C-75.); naoko zaobljene petlje histereze kao u sl. 164. i 165. samo su prosječni rezultat skupnoga djelovanja vanredno mnogobrojnih mikrokristala različite orijentacije, od kojih je sastavljen ispitivani feromagnetikum.

90. Pojavi histereze neugodni su kod tehničkih primjena pogotovo zato što zbog njih svaki ciklus magnetiziranja zahtijeva određeni potrošak energije, a prema tomu i svako podržavanje izmjeničnih magnetiziranja, na pr. kod željeznih jezgara transformatora, određeni gubitak snage (učina) zbog histereze N_h . Kako se time gubicima pridružuju po C-70. i gubici zbog vrtložnih struja u željezu N_v , a jedni i drugi su, kako je u C-70. istaknuto, nepoželjni ne samo kao gubici, nego i kao izvori ugrijavanja transformatora i strojeva, razmotrit ćemo sada поблише ovisnosti kod jednih i drugih spomenutih gubitaka, a time i ukupnih »gubitaka u željezu« $N_{Fe} = N_h + N_v$.

91. U tu svrhu dokažimo najprije da se kod opisivanja svake petlje histereze doista troši po jedinici obujma željeza određena radnja A_1 , koja je po »Warburgovu stavku« proporcionalna, a kod prikladnoga mjerila za B i H čak i jednaka, površini obuhvaćenoj petljom histereze (prema čemu magnetski mekane tvari s uskim petljama histereze moraju imati malene gubitke N_h u odnosu prema magnetski tvrdima sa širokim petljama histereze, pa se u praksi samo one prve upotrebljavaju za jezgre transformatora i dijelove strojeva izvrnute izmjeničnim magnetiziranjima).



Sl. 167.



Sl. 168.

Neka u sl. 168. budu točkom P, na uzlaznom dijelu NTUM krivulje histereze iz sl. 164., predstavljeni magnetski odnosi u željeznom prstenu srednje duljine l i prereza S , uzbuđivanom na kontinuirano povećavanu magnetsku indukciju B poljem $H = wI/l$ struje I kroz w zavoja svitka M namotana na prstenu. Ako se zbog pojačavanja uzbuđenja H za iznos dH u vremenu dt magnetska indukcija B povisi za iznos dB , a time i magnetski tok $\Phi = B \cdot S$ prstena za iznos $d\Phi = dB \cdot S$, inducirani napon u svakom od w zavoja svitka M iznositi će $d\Phi/dt$, a inducirani napon u cijelom svitku M bit će

ukupno $e = w \cdot d\Phi/dt$. Taj napon e može se shvatiti kao protu-napon (protu-EMS), kojega svladavanje zahtijeva isto toliki potrošak napona na račun EMS.

izvora struje svitka M . Prema tomu za promatrano povećanje magnetske indukcije cijeloga prstena izvor struje pridonosi radnju dA po relaciji:

$$dA = e \cdot I \cdot dt = w \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot I \cdot dt = w \cdot dB \cdot S \cdot I = H \cdot dB \cdot S \cdot l$$

odn. za jedinicu volumena željeza radnju dA_1 po relaciji:

$$dA_1 = \frac{dA}{S \cdot l} = H \cdot dB \quad (191)$$

(s iznosom na pr. u Ws/cm^3 jednakim, uz supoziciju 1 A/cm apscisâ i 1 Vs/cm² ordinatâ predočenih duljinom 1 cm, površini u cm² infinitezimalnoga pravokutnika sa stranicama H i dB , šrafiranoga na sl. 168.).

Za povećavanje indukcije B po dijelu TUM petlje histereze potrošila bi se prema tomu po jedinici volumena željeza radnja određena površinom TUMSROT a kod smanjivanja indukcije B po dijelu MR petlje dobila bi se natrag radnja određena površinom MSR, tako da bi na desnoj polovici petlje histereze suvišak gubitka nad dobitkom radnje bio određen baš plohom obuhvaćenom desnom polovicom petlje histereze. A kako slično vrijedi i za lijevu polovicu petlje histereze, može se konačno reći da je radnja A_1 , utrošena po cm³ željeza za svaki ciklus histereze, određena površinom MRKNTUM pripadne petlje histereze, odn. u formuli integralom:

$$A_1 = \int H \cdot dB \quad (192)$$

protegnutim na cijelu petlju histereze. A to baš i čini sadržaj Warburgova stavka.

Kod magnetske indukcije i uzbuđenoga polja u EMJ, dakle u G i u Oe, za radnju po cm³ u ciklusu histereze u ergima vrijedi umjesto (192), ako zvjezdica upućuje na nabrojene jedinice:

$$A_1^* = \frac{1}{4\pi} \int H^* \cdot dB^* \quad (192')$$

92. Prema gornjemu trebalo bi za točno proračunavanje gubitaka učina zbog histereze, na pr. gubitaka N_h u W za v cm³ željeza podvrgnutog izmjeničnim magnetiziranjima frekvencije f Hz (cikla po sekundi) s krajnjim vrijednostima magnetske indukcije $+B_m$ i $-B_m$ Vs/cm², poznavati i planimetrirati s matematičkoga gledišta uvijek zamršenu petlju histereze za upotrebljavano željezo i pretpostavljajući maksimalnu indukciju B_m . Pretpostavljajući da je planimetriranjem određen iznos A_1 iz (192), gubici N_h računali bi se onda po formuli: $N_h = A_1 \cdot f \cdot v$.

Međutim za tehničku praksu opisano određivanje gubitaka N_h po Warburgovu stavku malene je vrijednosti, jer je vezano na određivanje i planimetriranje petlji histereze. Zato se u elektrotehnici za proračunavanje gubitaka zbog histereze upotrebljavaju prikladne empirijske formule, koje se osnivaju na činjenici da na pr. za različite limove iznosi A_1 rastu unutar dovoljno uskih područja B_m , koja jedina dolaze u obzir u praksi, približno proporcionalno određenoj potenciji od B_m , koju je lako mjerenjima ustanoviti. Tako su nastale empirijske formule za N_h s različitim potencijama iznosa B_m kao faktorom.

Najstarija takva formula jest Steinmetzova. Kod te formule, upotrebljive u slučajevima magnetski slabije opterećenih limova, recimo s iznosima maksimalne indukcije od 0,6 do 1 T, dakle pri B_m^* u G u granicama od 6000 G do 10000 G, pretpostavlja se $A_1 = \eta \cdot B_m^{*1,6}$, pri čemu η znači neki koeficijent koji karakterizira upotrebljavani magnetski materijal, tako da za N_h u W treba staviti (numerički):

$$N_h = \eta \cdot B_m^{*1,6} \cdot f \cdot v \quad (193)$$

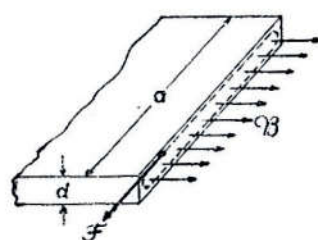
Kod jačih magnetskih opterećenja limova, sa B_m u T u granicama od 1 do 1,6 T, dakle sa B_m^* u granicama od 10000 G do 16000 G, Steinmetzova formula, koja je radi eksponenta 1,6 (ili eksponenta 1,7, stavljenoga katkad, dakako uz istodobno promijenjen koeficijent η u neki drugi η' , umjesto eksponenta 1,6) uopće nezgodna za računanje, postaje i posve netočna, pa je bolje, pretpostavljajući da iznosi A_1 rastu proporcionalno kvadratu iznosa B_m , te dajući istodobno izgubljeni učin N_h u W za masu G u kg (a ne kao u Steinmetzovoj formuli za obujam v u cm^3) željeza, pisati (numerički):

$$N_h = \epsilon \cdot \frac{f}{100} \cdot B_m^2 \cdot G \quad (194)$$

gdje je ϵ i opet neka konstanta, određena upotrebljavanom vrstom limova i jedinicama W, T, Hz i kg, u kojima se izraze N_h , B_m , f i G .

U praksi su iznosi η (η'), odn. ϵ , za različite limove vrlo različiti; može se reći da na pr. osrednji armaturni i transformatorski limovi imaju η oko $0,002 \cdot 10^{-7}$ ili slično, a ϵ oko 2,5 do 4,5, već prema vrsti lima.

93. Za gubitke u željezu zbog vrtložnih struja N_v može se, prema onomu što je o njima rečeno u C-70., a priori očekivati da će biti relativno veliki zbog velikih



Sl. 169.

magnetskih indukcija u željezu, no da će se dati smanjiti izvlačeći željezne dijelove transformatora i strojeva izvrnute izmjeničnim magnetiziranjima porazdijeljeno umjesto masivno, dakle na pr. u obliku međusobno električki izoliranih (recimo tankim papirom, lakom, slojem oksida) limova, u kojima se mijenjanjem gustoće B -linija vrtlozi induciranih električkih polja F , crtkano naznačeni u sl. 169., imaju manje prilike razviti, nego u masivnim komadima. Još je dobro pobrinuti se, na pr. legirajući

željezo s prikladnim primjesama, da se električka vodljivost limova toliko smanji koliko je to moguće bez bitnoga pogoršanja magnetskih kvaliteta limova, jer kod smanjene vodljivosti isti vrtlozi induciranih električkih polja proizvode slabije vrtložne struje, a time i smanjeno ugrijavanje limova strujnom toplinom tih struja.

Iz navedenih razloga u praksi se već kod struja niskih frekvencija upotrebljavaju samo limovi neznatnih debljina d , na pr. sa $d = 1, 0,5$ ili $0,35$ mm. A željezu tih limova pridodaje se često, makar da to poskupljuje proizvodnju, do 4% silicija; već prema postotku Si ovi »nisko«, »srednje« i »visoko« legirani limovi imaju

manje ili više snižene električne vodljivosti κ u odnosu prema običnim »nelegiranim« limovima i snižene gubitke N_v , a time i ukupne gubitke u željezu $N_{Fe} = N_h + N_v$ (preko 4% Si ne pridodaje se već zato, jer bi proizvedeni limovi bili krhki i neprikladni za obrađivanje).

94. Dade se pokazati, da gubici N_v kod ne previsokih frekvencija f , poimence kod frekvencija 50 Hz običnih izmjeničnih struja, rastu razmjerno prvoj potenciji električne vodljivosti κ i kvadratu debljine d limova, te razmjerno kvadratu frekvencije f i maksimalne indukcije B_m . A razmjerni su dakako i volumenu v , odn. masi G željeza. Može se dakle pisati formula:

$$N_v = k \cdot (f \cdot d \cdot B_m^*)^2 \cdot v \quad (195)$$

u kojoj k predstavlja neku konstantu proporcionalnu vodljivosti κ materijala; kod d u mm, i ostalih jedinica kao u (193), k se za nelegirane limove može uzeti oko $2 \cdot 10^{-13}$, a za visoko legirane oko $0,5 \cdot 10^{-13}$ i niže. No može se također postaviti relacija:

$$N_v = \sigma \cdot \left(\frac{f}{100} \right)^2 \cdot B_m^2 \cdot G \quad (196)$$

iz koje se neposredno vidi kvadratična ovisnost veličine N_v od f i B_m , a debljina d limova i električna vodljivost njihova materijala uzete su u obzir u konstanti σ (koja prema tomu mora biti različita za limove različite debljine, ako su i od istoga materijala); uz iste jedinice kao u (194) može se na pr. za nelegirane dinamo-limove debljine 0,5 mm staviti σ oko 5,5 a za visoko legirane limove (4% Si) debljine 0,35 mm oko 0,6.

Spajajući relacije (194) i (196) mogu se ukupni gubici u željezu N_{Fe} u W izraziti (uz f u Hz, B_m u T i G u kg, te σ i ε kao gore) relacijom:

$$N_{Fe} = \left[\varepsilon \cdot \frac{f}{100} + \sigma \cdot \left(\frac{f}{100} \right)^2 \right] \cdot B_m^2 \cdot G \quad (197)$$

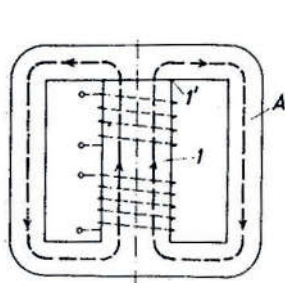
a slično bi se dale spojiti u jednu i relacije (193) i (195).

Klasična metoda za mjerenje gubitaka N_{Fe} jest *vatmetrička* (Epsteinov aparat. E. M.). Teži je već problem »razlučiti« gubitke, t. j. odrediti, kako je iznos N_{Fe} porazdijeljen na N_h i N_v (E. M.). Ukupni gubici u W po kg limova kod $B_m = 1 \text{ T} = 10000 \text{ G}$ i $B_m = 1,5 \text{ T} = 15000 \text{ G}$, dobili su u elektrotehnici ime »konstanta gubitaka« (tih limova). Označimo ih sa V_{10} i V_{15} ; tim dvama podacima mogu se grubo karakterizirati u pogledu gubitaka limovi različitih vrsta i debljina. Na pr. za nelegirane limove od 0,5 mm je $V_{10} \approx 3,6$ i $V_{15} \approx 8,1$, a za visoko legirane od 0,35 mm je $V_{10} \approx 1,3$ i $V_{15} \approx 3,0$ kod 50 Hz.

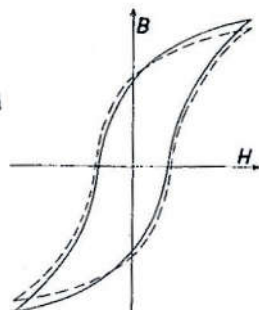
Po potanijem računu rastu kod *visokih* frekvencija gubici N_v uz dano B_m proporcionalno sa d i sa $f^{1,5}$ a ne sa d^2 i sa f^2 kao kod niskih frekvencija.

Uz struje s frekvencijama od nekoliko stotina, tisuća, pa i do deset tisuća Hz upotrebljavaju se tanji limovi nego u tehnici jake struje, sve do na pr. 0,1 ili čak 0,01 mm debljine. A kod visokih frekvencija radiotehnike za jezgre svitaka i transformatora uzimaju se danas mase kao »ferokart«, »sirufer«, »draloperm« i slične s »trodimenzionalnom razdiobom željeza (fina željezna prašina s dodatkom prikladnoga veziiva stisnuta je kod tih tvari u kruhu masu); magnetska permeabilnost μ' takvih masa nije velika, no gubici u njima ostaju i kod visokih frekvencija maleni.

95. Naročitu točnost ne treba zahtijevati kod proračunavanja ili određivanja gubitaka u željezu, ni inače kod magnetskih mjerenja, jer se gubici i ostala svojstva feromagnetičkih tvari mijenjaju već mehaničkim obrađivanjima, savijanjima itd. komada tih tvari. A mijenjaju se također spontaninim strukturnim promjenama



Sl. 170.a)



Sl. 170.b)

u ovim tvarima, koje se opažaju u prvim tjednima ili mjesecima nakon njihove proizvodnje, sve dok im se strukturni odnosi ne stabiliziraju.

Zbog ovih pojava, t. zv. *pojava magnetskoga starenja*, odležani limovi za transformatorske jezgre uz druge promjene pokazuju veće gubitke zbog histereze u odnosu prema svježima, permanentni magneti mijenjaju prvo vrijeme

nakon magnetiziranja magnetičnosti itd. Baš kod tvari za permanentne magnete, koji na pr. u mjernim spravama moraju imati ustaljena magnetska svojstva, magnetsko starenje nastoji se umjetno skratiti, što uspijeva na pr. ugrijavanjem kroz 24 h na oko 100 °C, katkad praćenim i trešnjom (»umjetno starenje«).

Kako mehanička naprezanja mogu promijeniti magnetska svojstva željeznoga materijala, pokazuje i ovaj primjer: kod lima A po sl. 170.a), kakav se upotrebljava za male »ogrnutе transformatore« (s namotajima na kraku 1), u stanju kakav je došao iz tvornice, ustanovljena je petlja histereze predložena izvučeno u sl. 170.b); no iza kako je srednji krak 1 lima zavinut za samih 30° (koliko bi trebalo, da se lim svine pri umetanju kraka 1 u namotaj kod sastavljanja transformatora) izmjerena je crtkano u sl. 170.b) predložena petlja histereze s većim H_c i manjim B_m uz isto H_m . Pogotovo su osjetljivi prema mehaničkim naprezanjima, i gube svoja iznimna magnetska svojstva trešnjama, udarcima, savijanjima i sl., najkvalitetniji magnetski meki materijali kao permalloy, permenorm, mumetal i sl.

Željezo se potpuno »razmagnetizira«, tako da ne ostane tragova prijašnjih magnetiziranja, ako se podvrgne ciklusima histereze sa sve manjima H_m (na pr. tim da se postepeno slabi izmjenična struja kojom se vrši magnetiziranje, ili da se željezo polagano vadi iz svitka proticana izmjeničnom strujom; izmjenično polje neka u početku ne bude preslabo).

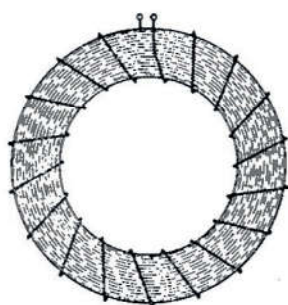
96. Važni su i temperaturni utjecaji na svojstva feromagnetika. Od njih je najizrazitiji nagli gubitak feromagnetičkih svojstava kod ugrijavanja feromagnetika na određenu »kritičnu« temperaturu za magnetizam, t. zv. *Curieovu točku* ili *Curieovu temperaturu*, karakterističnu za svaku feromagnetičku tvar.

Kod različitih vrsta željeznih feromagnetika Curieova točka leži obično između 700 i 870 °C, dok nikalj prestaje biti feromagnetičan već kod kojih 360 °C, a Heuslerove slitine već kod temperature ispod 100 °C (kotva od Heuslerove slitine prijanja uz čelični magnet u hladnoj vodi, no otpadne, kad se voda ugrije da skoro vrije). Na duboke strukturne promjene kod Curicove temperature upućuju i druge nagle promjene fizikalnih svojstava tvari opažane istodobno sa skokom iz feromagnetičkog u paramagnetičko stanje tvari, poimence jako smanjenje specifičke topline.

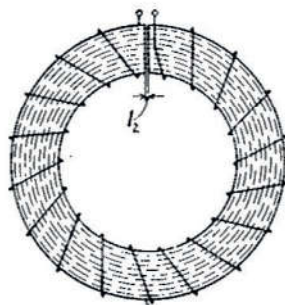
Zanimljiva svojstva pokazuje nikaljni čelik sa 75% Fe i 25% Ni. Ugrije li se feromagnetički komad ovakve slitine na 600 °C, on gubi feromagnetičnost. No ohlađen na običnu temperaturu on još ostane neferomagnetičan, i poprima natrag feromagnetička svojstva istom kod vrlo niske temperature, da bi ih onda zadržao i kod običnih temperatura. Kod obične temperature mogu dakle postojati dvije modifikacije ovakve slitine: jedna, koja jest, i druga, koja nije feromagnetična.

97. Dosadnja razmatranja o utjecajima feromagnetikâ na magnetske pojave zahtijevaju bitnu nadopunu. Kod opisivanja mjerenja balističkom metodom po sl. 160., i na njih nadovezanih razmatranja, pretpostavljalo se da se utjecajem uzbuđenja $H = wI/l$, proizvedenih uzbuđnim strujama I u unutarnjosti samih u sebe zatvorenih svitaka, s brojem zavoja w , srednjom duljinom l i presjekom jezgre S , stvaraju iznosi magnetske indukcije B i zatvoreni magnetski tokovi $\Phi = BS$ uzduž jezgre svitka cijele ispunjene proučavanim feromagnetikumom. Drukčije izraženo: uzimani su za bazu razmatranja, *magnetski krugovi* sa snopovima samih u sebe zatvorenih B -linija određene srednje duljine l , jednolikoga prereza S i jednolike tvari. Takav je i potpuno od istoga željeza zamišljeni magnetski krug u sl. 171.

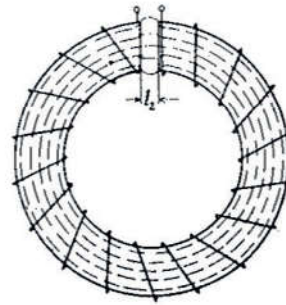
Sad možemo proširiti problem postavljajući pitanje ovisnosti veličina B i Φ o uzbuđenju H također za slučajeve po sl. 172. i 173. i slične, kod kojih je dio prvobitnoga magnetskoga kruga zamijenjen na većem ili manjem dijelu puta l magnet-



Sl. 171.



Sl. 172.

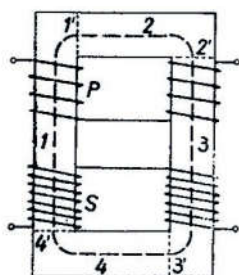


Sl. 173.

skih linija neferomagnetičkim sredstvom, na pr. uzduhom, ili kojim feromagnetičkim sredstvom drugih magnetskih svojstava nego u ostalom dijelu kruga. Još općenitije možemo magnetski krug iz sl. 171. zamisliti nadomješten u sebe zatvorenim nizom dijelova različitih duljina l_1, l_2 itd. različitih prereza S_1, S_2 itd., te različitih feromagnetičkih sredstava, t. j. možemo postaviti problem općenitoga »magnetskoga kruga«.

Taj je problem baš tehnički od velikoga interesa, jer se u praksi jednostavni, potpuno zatvoreni i po prerezu i sredstvu jednoliki magnetski krugovi, poput onoga u sl. 171., obično ni ne susreću, nego se magnetski tok zatvara kroz željeza različitih vrsta i različitih prereza, a djelomično i kroz manje ili veće uzdušne pukotine (na pr. kod stroja po sl. 177. u nekoliko dijelom detaljno, a dijelom sumarno crtkano naznačenih grana, od kojih se svaka zatvara kroz kućište, kroz obje polne

jezgre i oba polna nastavka magneta, kroz obje uzdušne pukotine, te kroz zupce i truplo armature stroja). Čak i kod magnetskih krugova »jezgrastih« transformatora s jezgrama složenima iz limova po sl. 174. za izmjenični magnetski tok (preko



Sl. 174.

kojega se podržava induktivna veza između primarnoga namotaja transformatora P, napajanoga iz mreže izmjenične struje, i sekundarnoga S, koji hrani priključene potrošače), mora se uzimati da osim kroz željezo limova 1 do 4 prolazi i kroz neznatne nepravilne pukotine na uvijek manje ili više nepotpunim »sastavima« 1' do 4' limova jezgre, pri čemu se svaka takva pukotina može računati ekvivalentna na pr. putu magnetskih linija u uzduhu duljine 0,05 mm ili slično; sličnu doticajnu pukotinu treba zamišljati na sastavu 1' limova A po sl. 170.a)

za jezgre ogrnutih transformatora s transformatorskim namotajem na srednjem kraku 1, i magnetskim tokom koji se zatvara u dvije grane naznačene crtkano na sl. 170.a).

98. Prije nego prijedemo na kvantitativno obrađivanje općenitih magnetskih krugova, primijetimo da se već za magnetski tok $\Phi = BS$ najjednostavnijih magnetskih krugova po sl. 171., dakle krugova sa svagdje istim prerezom S i s cijelim srednjim putem duljine l crtâ magnetske indukcije u istoj tvari, može, na temelju relacije $B = \mu H$ ovisnosti indukcije B o uzbuđenju $H = wI/l$ proizvedenom strujom I kroz svitak od w zavoja, postaviti relacija:

$$\Phi = \frac{wI}{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S}} = \frac{\Theta}{\mathcal{R}} \quad (198)$$

Po ovoj relaciji izlazi Φ kao kvocijent »amperzavoja« $\Theta = wI$ magnetskoga kruga i neke veličine $\mathcal{R} = l/\mu S$, koja se može nazvati »magnetskim otporom« ili »reluktancijom« magnetskoga kruga. Izraz za $\mathcal{R}$ je naime analogno građen izrazu za električki otpor $R_0 = l/\kappa q$ kruga električke struje realiziranoga zatvorenim vodičem duljine l , svagdje istoga prereza q i iste električke vodljivosti κ , pri čemu kao korespondentnu električkoj vodljivosti κ treba uzimati magnetsku propustljivost μ . Kao kvocijent veličine $\Theta = wI$ izražene u A i veličine Φ u Vs, magnetski otpor $\mathcal{R}$ izražava se, jednako u sustavu V-A-s-m kao i u sustavu V-A-s-cm, u A/Vs ili H^{-1} (»recipročnim henrijima«). A »magnetskoj vodljivoj vrijednosti« $1/\mathcal{R}$ u oba spomenuta sustava jedinica je Vs/A ili H.

Gledana na gornji način formula (198) potpuno sjeća na Ohmov zakon za električku struju $I_0 = E_0/R_0$, ako se još i veličina $\Theta = wI$, shvaćena kao uzročnik toka Φ magnetske indukcije kroz promatrani magnetski krug magnetskog otpora $\mathcal{R} = l/\mu S$, dovede u analogiju s elektromotornom silom (EMS) E_0 , uzročnikom električke struje I_0 kroz promatrani strujni krug električkoga otpora $R_0 = l/\kappa q$.

99. Ova nas spoznaja može navesti na misao da i kod ma kako zamršenih magnetskih krugova sastavljenih iz po volji mnogo dijelova duljinâ l_1, l_2 itd., prerezâ S_1, S_2 itd., te permeabilnosti μ_1, μ_2 itd., pretpostavimo formalnu analogiju s krugovima električne struje duljinâ vodiča l_1, l_2 itd., prerezâ q_1, q_2 itd., te vodljivosti κ_1, κ_2 itd., pa da zamislimo da se ukupno za održavanje magnetskoga toka Φ raspoloživa magnetomotorna sila (MMS) $\Theta = wI$ troši po relaciji:

$$\Theta = wI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots = \Sigma Hl \quad (199)$$

pod vidom magnetskih napona $U' = H_1 l_1, U'' = H_2 l_2$ itd. potrebnih za svladavanje magnetskih otpora $\mathcal{R}_1 = l_1/\mu_1 S_1, \mathcal{R}_2 = l_2/\mu_2 S_2$ itd. cijeloga magnetskoga kruga. Baš tako se raspoloživa EMS E_0 kruga električne struje jakosti I_0 porazdijeli po relaciji $E_0 = F_1 l_1 + F_2 l_2 + \dots = U_1 + U_2 + \dots$ na održavanje električkih polja F_1, F_2 itd. uzduž duljina l_1, l_2 itd. strujnoga kruga, odn. na održavanje struje I_0 kroz otpore $R_1 = l_1/\kappa_1 q_1, R_2 = l_2/\kappa_2 q_2$ itd., za koje su potrebni naponi $U_1 = F_1 \cdot l_1, U_2 = F_2 \cdot l_2$ itd.

100. Opravdanje za to, kao i uopće za naziv »magnetski krug«, neka bude činjenica da uz pretpostavku nepostojanja »množina magnetizma« (C-2.) magnetske tokove Φ (i $\mathcal{B}$ -linije koje te tokove predočuju) ni nije moguće drukčije zamišljati, nego zatvorene same u sebe, odn. bez izvora i ponora, baš kao što se i trajno strujanje elektriciteta uvijek zamišlja u zatvorenima krugovima vodiča. Vektorski izraženo, za magnetska polja, koja se u ma kojem sredstvu mogu karakterizirati vektorom $\mathcal{B}$, vrijedi u svakoj njihovoj točki relacija:

$$\text{div } \mathcal{B} = 0 \quad (200)$$

odn. za integraciju preko svake zatvorene površine S može se pisati:

$$\oint B_n \cdot dS = \oint \mathcal{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (201)$$

protivno nego kod vektora $\mathcal{D}$ gustoće električkoga pomaka, kod kojega su općenito vrijedile relacije (34) iz A-64. i (21) iz A-47., s desnim stranama različitim od 0 na mjestima polja gdje ima električkih naboja.

101. Međutim u relaciji (199) lako je prepoznati osnovnu relaciju (141) *zakona protjecanja* specijaliziranu na promatrane magnetske krugove. Ako ona doista općenito vrijedi, to upućuje na to da zakon protjecanja treba smatrati ispunjenim i uzduž zatvorenih linija kojih različiti dijelovi prolaze magnetski različitim sredstvima, a ne samo uzduž zatvorenih linija u vakuumu, kako je samo prethodno u C-16. bilo rečeno.

Iskustvo sad pokazuje da formula (199) i općenitija formula (141) doista vrijede posve općenito, čime onda specijalno postaju u principu rješivi i problemi općenitih magnetskih krugova, kod kojih će se polaziti bilo neposredno od formule

(199), nazivane »prvim« oblikom »Ohmova zakona za magnetske krugove«, bilo od relacije ekvivalentne formuli (199):

$$\Phi = \frac{\Theta}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \dots} = \frac{wI}{l_1/\mu_1 S_1 + l_2/\mu_2 S_2 + \dots} \quad (202)$$

koju možemo nazvati »drugim« oblikom Ohmova zakona magnetskih krugova, i koja se manje upotrebljava, jer u njoj dolaze permeabilnosti μ_1 , μ_2 itd., koje se obično ne zadaju neposredno.

Prema rečenomu pojam »jakosti polja« $\mathcal{H}$ u formulama (199) i (141) treba smatrati posveopćenim na ma kakva sredstva u tom smislu, da $\mathcal{H}$ predstavlja kvocijent $\mathcal{B}/\mu$ indukcije $\mathcal{B}$ u određenom sredstvu i pripadne apsolutne permeabilnosti μ , odn. vektor $\mathcal{H}$ iznosa $H = wI/l$, kakav bi kao korespondentan vektoru $\mathcal{B}$ iznosa B izašao kod pokusa s prstenom od istoga materijala po sl. 160.

Numerički bi se, upotrebljavajući $\mu' = B^*/H^*$ iz C-77. i upućujući oznakama Φ^* , Θ^* , $\mathcal{R}_1^* = l_1/\mu_1' S_1$ i sl. (sa l_1 u cm i S_1 u cm²) na EMJ, Ohmov zakon za magnetske krugove umjesto u »racionaliziranom« obliku formulama (199) i (202) izražavao »neracionaliziranim« relacijama (sa I u A, a ne u EMJ, te s duljinama l , l_1 , $l_2 \dots$ u cm):

$$\Theta^* = 0,4\pi wI = H_1^* l_1 + H_2^* l_2 + \dots = \Sigma H^* l \quad (203)$$

$$\Phi^* = \frac{\Theta^*}{\mathcal{R}^*} = \frac{0,4\pi wI}{\mathcal{R}_1^* + \mathcal{R}_2^* + \dots} \quad (203')$$

pri čemu je sa $\mathcal{R}^*$ označena suma $\mathcal{R}_1^* + \mathcal{R}_2^* + \dots$ reluktancijâ cijeloga magnetskoga kruga.

102. Praktički bi se, recimo, mogli tražiti iznosi uzbudne struje I uz dani broj zavoja w i dani magnetski tok Φ u magnetskim krugovima dane ukupne duljine l i danoga prereza S određene vrsti željeza, i to na pr. najprije bez uzdušne pukotine (raspora), a zatim s posve kratkom, odn. nešto duljom takvom pukotinom, kako je naznačeno na slikama 171. do 173.

Radimo u V-A-s-m-sustavu, i zamislimo da se željezni prsten po sl. 171. sastoji od limova s krivuljom magnetiziranja 1 (0,1) iz sl. 161.a) i da uz kvadratični presjek ima nutarnji promjer 0,171 m i vanjski 0,211 m, tako da je srednja duljina prstena $l = 0,191 \cdot \pi = 0,60$ m, a prerez željeza da je (uzimajući da kod jezgri od limova željezo čini samo na pr. 88% jezgre, a ostatak otpada na izolaciju između limova): $S = 0,02 \cdot 0,02 \cdot 0,88 = 0,000352$ m². Neka je u sva tri promatrana slučaja broj zavoja $w = 36$, te neka treba proizvesti tok $\Phi = 0,0004$ Vs (= 40000 M). U slučaju po sl. 171. put l_1 magnetskih linija u željezu jednak je cijeloj duljini l magnetskoga kruga, a u dalja dva slučaja neka je dio željeza nadomješten uzdušnom pukotinom l_2 od 0,1%, odn. 1% duljine l magnetskoga kruga, tako da budu: $l_1 = 0,5994$ m i $l_2 = 0,0006$ m, odn. $l_1 = 0,594$ m i $l_2 = 0,006$ m.

U prvom slučaju prstena bez uzdušne pukotine indukcija u željezu bila bi $B_1 = 0,0004/0,000352 = 1,136$ T, a ovoj indukciji po krivulji 0,1 iz sl. 161.a) odgovara jakost polja $H_1 = 480$ A/m. Po relaciji $36 \cdot I = 480 \cdot 0,6$ potrebna uzbudna struja bila bi dakle: $I = 8,0$ A.

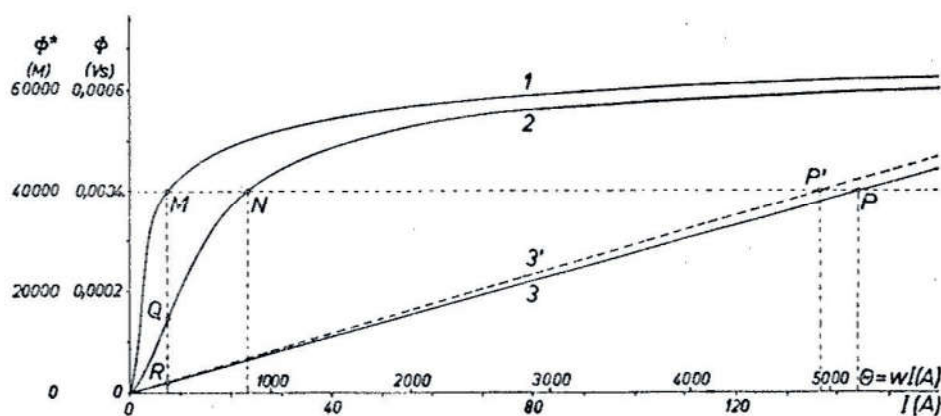
U drugom slučaju na putu $l_1 = 0,5994$ m kroz željezo magnetska indukcija B_1 i jakost polja H_1 ostali bi isti, na putu $l_2 = 0,0006$ m u uzduhu uz indukciju $B_2 = B_1 = 1,136$ T polje bi, obzirom na relaciju (158) iz C-38., bilo $H_2 = = 1,136/(1,257 \cdot 10^{-6}) = 904000$ A/m, prema čemu bi za uzbudnu struju po (199) vrijedilo: $I = (480 \cdot 0,5994 + 904000 \cdot 0,0006)/36 = 23,1$ A.

U trećem slučaju račun bi bio sličan, samo bi se, zbog velike duljine $l_2 = = 0,006$ m pukotine, magnetske linije na pripadnom dijelu magnetskoga kruga već zamjetljivo raširile, po prilici kako je u sl. 173. naznačeno, a to bi se uzelo u obzir računajući na pr. u konkretnom slučaju s proširenim prerezom pukotine $S_0 = 1,1 \cdot S = 1,1 \cdot 0,000352 = 0,000387$ m², dakle sa smanjenom indukcijom $B_2 = = 0,0004/0,000387 = 1,033$ T, odn. s jakošću polja $H_2 = B_2/\mu_0 = 823000$ A/m. Prema tomu bi u ovom slučaju izišlo: $I = (480 \cdot 0,594 + 823000 \cdot 0,0006)/36 \approx 145$ A.

Dok bi dakle u krugu bez pukotine po sl. 171. bila uz pretpostavljene prilike dovoljna struja I kroz uzbudni svitak od samih 8 A, odn. MMS Θ od $36 \cdot 8 = 288$ A, potrebni iznos A kod samo $1/_{\infty}$ puta $\mathcal{B}$ -linija u uzduhu bio bi već gotovo 3-struki, a kod $1/_{\infty}$ puta u uzduhu čak 18-struki (uspor. točke M, N i P na krivuljama 1, 2 i 3 u sl. 175.); odavde se razabire, zašto će se obično nastojati da magnetski krugovi budu po mogućnosti bez uzdušnih pukotina, odn. da te pukotine, gdje u praksi dolaze (pukotine između polnih nastavaka i armature strojeva kao u sl. 177., doticajna mjesta kao u sl. 170.a) i 174., te slično), budu što manje.

S malo promjena gornji račun bi se dakako lako izveo i u V-A-s-cm-sistemu. Slično bi se lako računalo i s EMJ (gdje se kao i u V-A-s-cm-sistemu radi sa cm i cm²).

103. Pregledno se odnosi promatranih triju magnetskih krugova pod različitim okolnostima dadu razabrati iz krivulja 1, 2 i 3 u sl. 175., zvanih magnetskim karakteristikama tih krugova. Pojedine točke tih krivulja dobile bi se kao malo prije po-



Sl. 175.

lazeći od po volji odabranih iznosa Φ i računajući pripadne uzbudne struje I , odn. MMS wI ; kod povoljno mnogo tako određenih točaka dadu se dovoljno točno povući i same spomenute krivulje.

Krivulja 3' dobivena je uz pretpostavku istoga kruga kao i krivulja 3, samo što je suponirano željezo tako visokih iznosa permeabilnosti da su gubici magnetskoga napona za održavanje toka Φ na putu kroz željezo postali zanemarivi, odn. da se sva MMS kruga utrošila na svladavanje magnetskoga otpora pukotine. Kako se usporedbom krivulja 3 i 3' vidi, već kod $l_2 = 0,01 \cdot l$ ne bi se mnogo pogriješilo kad bi se uz prilike pretpostavljene kod krivulje 3 zanemario magnetski otpor željeznoga dijela magnetskoga kruga prema onomu uzdušne pukotine.

104. Krivulje 2 i 3 iz sl. 175. i slične osobito su korisne kod rješavanja obrata problema po C-102., t. j. kad se za neki krug sastavljen od različitih dijelova po volji zadadu iznosi wI , odn. I , pa se traže proizvedeni tokovi Φ .

Takvi se problemi ne dadu neposredno rješavati, jer permeabilnost dijelova kruga sa željezom ovisi o indukciji u željezu, a ta nije unaprijed dana. No uz pomoć magnetske karakteristike za promatrani magnetski krug iznos Φ dobiva se kao ordinata točke te karakteristike, kojoj je apscisa odabrano I , odn. wI ; uspor. točke M, Q i R u sl. 175., po kojima bi uzbudna struja istoga iznosa 8 A proizvela u tri kruga iz C-102. tokove 0,0004, 0,000155 i 0,000019 Vs (40000, 15500 i 1900 M), odn. sve manji tok kod sve veće duljine uzdušne pukotine, po prilici kako je to na sl. 171. do 173. naznačeno.

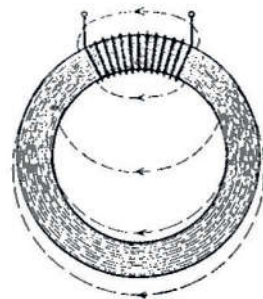
105. Po formuli (199) rješavaju se i problemi kompliciranijih magnetskih krugova, pa i onih kojih se magnetski tokovi razgranjuju u dvije grane (kao u sl. 170.a), ili se zamršene zatvaraju (kao kod strojeva s više pari p polova; v. sl. 177. sa $p = 2$, t. j. s 2 sjeverna ili N-pola i 2 južna ili S-pola).

Kod ovakvih problema prije svega se odrede dijelovi istraživanoga kruga, te odnosi eventualnih razgranjivanja magnetskih tokova, za koja se može uzeti da su podvrgnuta zakonima sličnima Kirchhoffovim zakonima razgranjivanja električnih struja, pa da je na pr. suma razgranjenih tokova nekoga magnetskoga toka jednaka nerazgranjenom tomu toku, da dva paralelna magnetska otpora $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ predstavljaju magnetski otpor $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 / (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)$, itd.

Kad su jednom spomenuti odnosi raščišćeni, dovoljno je kod zadanoga Φ i traženoga wI (ili uz traženo I kod fiksiranoga w) izmjeriti ili izračunati duljine l_1 , l_2 itd. i prereze S_1 , S_2 itd. dijelova magnetskoga kruga s predviđenim iznosom Φ magnetskoga toka ili određene frakcije toga toka. Imajući na raspolaganju krivulje magnetiziranja poput onih u sl. 161.a) za tvari od kojih je sastavljen krug, treba onda samo još odrediti uz pomoć tih krivulja indukcijama $B_1 = \Phi/S_1$, $B_2 = \Phi/S_2$ itd. pripadne jakosti polja H_1 , H_2 itd., te primijeniti relaciju (199). Da bi se dobila jakost polja u uzdušnim pukotinama, dovoljno je dakako iznose magnetske indukcije u tim pukotinama podijeliti s permeabilnošću uzduha, kako se već u C-102. postupalo.

106. Još jednu okolnost treba kod proračunavanja kompliciranijih magnetskih krugova uzimati u obzir. Ta je *magnetsko rasipanje*. O manjem ili većem »rasipanju«

(magnetskoga toka) govori se, kad manji ili veći dio nekom MMS ukupno proizvedenoga toka Φ_1 prolazi porednim stazama (na pr. uzduhom, koji također ima neku ma i neznatnu propustljivost za magnetske tokove, ili željeznim dijelovima nekoga stroja i sl.), tako da u svrhu zbog koje se magnetski tok proizvodi ostaje korisno upotrebljiv samo neki smanjeni, t. zv. »glavni« (korisni) tok Φ . Za karakterizaciju rasipanja može poslužiti omjer $\nu = \Phi_1/\Phi$ ukupnog toka prema korisnomu, t. zv. Hopkinsonov »koeficijent rasipanja«. Taj je koeficijent veći od 1 u slučajevima s rasipanjem, kakvi bi bili na pr. onaj po sl. 176. (s $\mathcal{B}$ -linijama samo u željezu kao korisnima, te onima koje se djelomice zatvaraju kroz uzduh kao »rasipnima«) ili onaj magnetskoga kruga stroja po sl. 177. (gdje se korisnim tokom iz nekoga pola smatra onaj dio ukupnoga toka toga pola koji prolazi i armaturom), i sl. Tek kod krugova bez rasipanja, po sl. 171. i sličnih, Hopkinsonov koeficijent postizava iznos 1, jer se ukupni i korisni tok podudaraju.



Sl. 176.

Ako se na pr. kod nekoga rasporedaja sa $\nu = 1,25$ želi proizvesti korisni tok $\Phi = 0,01 \text{ Vs} = 10^6 \text{ M}$, ukupno će trebati proizvesti tok $\Phi_1 = 0,0125 \text{ Vs} = 1,25 \cdot 10^6 \text{ M}$, t. j. tok za 25% veći od korisnoga. Kod današnjih strojeva s jednim ili više pari polova u rasporedaju po sl. 177. koeficijenti rasipanja obično se kreću oko iznosa 1,15 do 1,25; kod starijih strojeva, na pr. onih s potkovastim magnetima, koeficijenti rasipanja bili su nepovoljniji, krećući se sve do iznosa 1,4 ili sličnih.

107. Neka se na pr. traži ona struja I_M kroz »magnetske svitke« M_1 , i M_2 itd. stroja po sl. 177. koju bi uz zw zavoja po svakom takvom svitku trebalo proizvesti da se kod suponiranoga koeficijenta rasipanja ν postignu po polu stroja »glavni tokovi« (tokovi kroz pukotinu) iznosa Φ , odn. da »ukupni tokovi« po polu budu $\Phi_1 = \nu \cdot \Phi$.

Kako se iz sl. 177. vidi, kod promatranoga stroja sa $p = 2$ para polova zatvaraju se magnetske linije u četiri jednaka magnetska toka, od kojih na pr. onaj u desnom gornjem kvadrantu slike potanje naznačeni daje tok $\Phi_1/2$ kroz desnu polovicu $S_p/2$ srednjega presjeka S_p N-pola gore u slici (odn. jezgre 1 i polnoga nastavka 2 toga pola), te dalje (vodeći računa o rasipanju) tok $\Phi/2$ kroz polovicu $S_0/2$ srednjega prereza S_0 uzdušne pukotine 3 spomenutoga pola, zatim tok $\Phi/2$ kroz područje armature 4 srednjega presjeka $S_a/2$, pa isti tok $\Phi/2$ kroz prerez $S_0/2$ uzdušne pukotine 5 susjednoga S-pola, onda ponovno tok $\Phi_1/2$ kroz polovicu $S_p/2$ prereza toga S-pola i konačno tok $\Phi_1/2$ kroz dio 8 jarma (kućišta) srednjega presjeka S_j .

Uz navedene odnose, uzimajući u obzir cijeli tok što izlazeći iz svakoga N-pola iskorištenim dijelom prolazi kroz pôlu pripadnu pukotinu u armaturu, a ostatkom se rasipa, može se uz l_p i δ_0 kao srednje duljine magnetskih putova u polovima i pukotinama, te l_a i l_j kao takve duljine u dijelovima armature poput 4, odn. dijelovima jarma poput 8, računati kao da kod stroja s p pari polova postoji p mag-

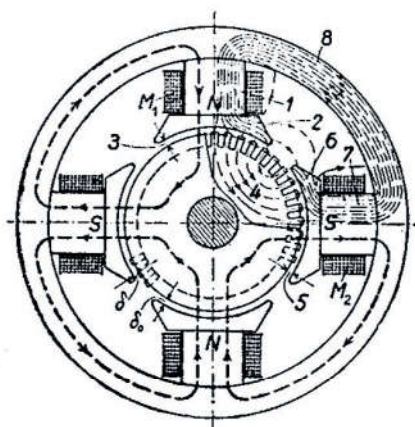
netskih krugova, te da se svaki od tih krugova, uzbuđen s dva magnetska svitka po w zavoja, razgranjuje kroz dva dijela armature 4 ukupnoga prereza S_a , odn. kroz dva dijela 8 jarma ukupnoga presjeka $2S_j$.

Prema tomu bit će dovoljno za proračunavanje MMS $2wI_M$ po paru polova, primjenjujući zakon (199) na ovaj slučaj, postaviti relaciju:

$$\Theta = 2 \cdot wI_M = H_p l_p + H_0 \delta_0 + H_a l_a + H_0 \delta_0 + H_p l_p + H_j l_j$$

u kojoj se iznosi H_p , H_a i H_j očitaju iz krivulja magnetiziranja pripadnih vrsta željeza kao korespondentni magnetskim indukcijama $B_p = \Phi_1/S_p$, $B_a = \Phi/S_a$ i $B_j = \Phi_1/2S_j$, a iznos H_0 se dobiva dijeleći $B_0 = \Phi/S_0$ sa μ_0 .

Primijenimo rečeno na konkretni problem; ali ovaj put, umjesto da radimo dosljedno s jedinicama V-A-s-m ili s jedinicama V-A-s-cm, upotrebimo, zbog



SI. 177.

ilustracije postupka još uvijek u praksi nerijetko susretanoga, Φ^* u M i B^* u G, no pri H u A/cm (i uopće duljinama u cm i time površinama u cm^2), u kome slučaju treba po C-39. i C-77. računati u uzduhu s kvocijentom G i A/cm: $\mu_0^+ = 1,257$. Neka su dakle polovi i armatura stroja po sl. 177. od lijevanog čelika odn. armaturnih limova, te neka oba materijala imaju krivulju magnetiziranja danu krivuljom 1 iz sl. 161.a). Neka su još: $l_p = 13,5$ cm, $S_p = 165$ cm^2 , $l_a = 22$ cm, $S_a = 245$ cm^2 . Pretpostavimo dalje za jaram: lijevano željezo po krivulji 5 u sl. 161.a), $l_j = 56$ cm, $S_j = 146$ cm^2 ; za pukotine: $\delta_0 = 0,6$ cm, $S_0 = 310$ cm^2 . Za $\Phi^* = 2,0 \cdot 10^6$ M sa $v = 1,17$, t. j. $\Phi_1^* = v \cdot \Phi^* = 2,34 \cdot 10^6$ M, izišlo bi $B_p^* = 14200$ G i $B_a^* = 8160$ G, odn. po krivulji 1 u sl. 161.a) $H_p = 14,0$ A/cm i $H_a = 2,1$ A/cm, zatim $B_j^* = 8000$ G odn. po krivulji 5 u sl. 161.a) $H_j = 50$ A/cm, te konačno $B_0^* = 6452$ G, dakle $H_0 = 6452/1,257 = 5134$ A/cm; prema tomu bi se, stavivši numeričke iznose, dobilo (u »amperzavojima po polu«):

$$wI_M = \frac{1}{2} \cdot (2H_p l_p + 2H_0 \delta_0 + H_a l_a + H_j l_j) \approx 4700$$

tako da bi na pr. uz $w = 2000$ zavoja trebala kroz svaki od svitaka M_1 , M_2 , itd. po sl. 177. teći struja $I_M = 2,35$ A, uz $w = 200$ zavoja struja $I_M = 23,5$ A, itd.

108. Kod »glatkih« armatura, t. j. onih bez žljebova (utora) za smještaj vodiča armaturnog namotaja, kakva je pretpostavljena u gornjem slučaju, predstavljalo bi δ_0 stvarnu duljinu uzdušne pukotine. Međutim u praksi uvijek dolaze »žljebaste« armature s aksijalno orijentiranim mnogobrojnim žljebovima i zupcima i magnet-ski tokovi stroja prolaze u takvim slučajevima uglavnom kroz zupce (sl. 177.). Po Carteru se ovi odnosi mogu uzeti u račun da se postupa kao da se radi o uzdušnoj pukotini uz glatku armaturu; duljina δ_0 te zamišljene pukotine slijedi mno-

ženjem stvarnoga razmaka δ vrhova zubaca od polnih nastavaka s nekim faktorom K_c (Carterovim koeficijentom).

Za Carterov koeficijent nadeno je, da ovisi na pr. kod žljebastih armatura s (potpuno) »otvorenim« žljebovima kao u sl. 177. o širini t zubaca i širini s žljebova, te o omjeru s/δ po relaciji:

$$K_c = \frac{t + s}{t + fs}$$

u kojoj je f neki faktor određen omjerom s/δ . Za f vrijedi:

Tabela II.

s/δ	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	1	0,92	0,84	0,78	0,72	0,62	0,55	0,49	0,44	0,40	0,37	0,35	0,33

(ili krivulja s iznosima s/δ kao apscisama i iznosima f po tabeli II. kao ordinatama).

Ako na pr. mjesto stroja iz C-107. s pukotinom duljine $\delta_0 = 0,6$ cm pretpostavljanom uz glatku armaturu, izvučeno ucrtanu u sl. 177., zamislimo stroj sa žljebastom armaturom, također naznačenom u sl. 177., sa $\delta = 0,5$ cm, $t = 1,09$ cm, i $s = 1,15$ cm, omjeru $s/\delta = 2,3$ odgovarat će (kako je lako naći interpolacijom uz pomoć tabele II. ili iz pripadne krivulje) $f = 0,69$, dakle $K_c \approx 1,2$ i po tomu $\delta_0 = 1,2 \cdot 0,5 = 0,6$ cm. kao i u primjeru iz C-107. Pretpostavljajući iste kao u C-107. i veličine Φ , v , S_0 , S_p , S_j , l_p i l_j , no smanjene zbog prostora zauzetoga zupcima iznose $S'_a = 156$ cm² i $l'_a = 19,5$ cm srednjega presjeka i srednjega puta toka u armaturi, te uzimajući u obzir djelotvornim prerezom $S_z = 107$ cm² i duljinom $l_z = 3$ cm prolaz toka kroz zupce (uz zanemaren neznatni poredni tok kroz uzdušne međuprostore između zubaca), dobilo bi se uz isti magnetski materijal kao u C-107.: $B'_a = \Phi/S'_a = 12800$ G i $B_z = \Phi/S_z = 18700$ G, dakle po krivulji 1 iz sl. 161.a) i njezinom produženju): $H'_a = 8,1$ A/cm i $H_z = 170$ A/cm tako da bi konačno izašlo (u amperzavojima po polu):

$$wI_M = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 14 \cdot 13,5 + 2 \cdot 5134 \cdot 0,6 + 8,1 \cdot 19,5 + 50 \cdot 56 + 2 \cdot 170 \cdot 3) \approx 5260$$

prema čemu bi na pr. uz $w = 2000$ zavoja moralo biti $I_M = 2,63$ A.

109. Ne treba zaboraviti da je analogija između krugova električke struje i magnetskih krugova samo nepotpuna.

Tako vodljivost κ električkih vodiča redovito ne varira s gustoćom G provodne električke struje, dok permeabilnost μ feromagnetika vrlo varira s gustoćom B magnetskoga toka, pa magnetski otpor magnetskih krugova nije konstanta i formulu $\Phi = \Theta/(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \dots)$ prikladno je zato upotrebljavati samo u onim granicama, u kojima se permeabilnosti $\mu_1, \mu_2, \dots$, mogu smatrati konstantnima (zbog čega se i upotrebljava više oblik $\Theta = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots$ Ohmova zakona za magnetski krug). Osim toga su vakuum, uzduh, ulje itd. za električke struje praktički potpuni izolatori, a prema magnetskim tokovima i neferomagnetička sredstva kao uzduh, vakuum itd. imaju ipak neku ma i relativno malu propustljivost μ_0 , zbog koje može doći do rasipanja magnetskih tokova, tako da se ovi djelomično zatvaraju kroz uzduh i sl. A onda znatnu komplikaciju čine u željeznim dijelovima magnetskih krugova pojavi histereze, koje je samo donekle opravdano zanemariti kod upotrebe magnetski mekih vrsta željeza.

No najbitnija je razlika kvalitativne prirode: dok su strujanja električkih naboja kroz krugove električkih otpora dinamički pojav, koji se može podržavati samo uz utrošak određene snage, magnetski tokovi kroz krugove magnetskih otpora

su statički pojav, a utrošak energije potreban je samo za stvaranje spomenutih tokova, a ne i za njihovo podržavanje. Ako struja i teče dalje kroz zavoje svitka koji izvodi MMS magnetskoga kruga, njezina se energija, kad se tok indukcije već stvorio, ne troši na podržavanje toka, nego samo još na stvaranje Jouleove topline zbog svladavanja električkoga otpora svitka, odn. ona bi se smanjila na nulu, kad bi otpor svitka postao zanemariv (na pr. uz materijal svitka doveden u supravodljivo stanje; B-27.).

110. Nije teško naći i izraz za energiju utrošenu na stvaranje magnetskoga toka i nakrcanu u pojedinim dijelovima pripadnoga magnetskoga kruga. Primjenjujući izводе iz C-91. na slučaj da se u nekom mjestu pojačavanjem uzbuđenja od 0 do H proizvede po određenoj krivulji magnetiziranja, poput onih iz sl. 161.a), povećanje magnetske indukcije od 0 do B , lako je razabrati da je pri tomu utrošena energija po jedinici volumena određena izrazom:

$$A_1 = \int_0^B H \cdot dB$$

te da prema tomu ukupna energija uložena u stvaranje magnetskoga toka nekoga magnetskog kruga iznosi:

$$A = \int A_1 \cdot dv \quad (204)$$

gdje dv znači element volumena magnetskoga kruga, a integracija se proteže na cijeli prostor kruga.

Veličinu A_1 moguće je i pobliže izraziti, ako je poznat funkcionalni odnos $B = f(H)$. Ako se na pr. specijalno može B smatrati proporcionalnim sa H , dakle μ konstantnim (kako to doista jest kod neferomagnetikâ, a grubo približno se može uzimati i kod magnetski nezasićenih feromagnetika), može se staviti:

$$A_1 = \mu \int_0^H H \cdot dH = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu' H^2}{2} = \frac{B \cdot H}{2} \quad (205)$$

Kako se vidi, za prostornu gustoću energije magn. polja izlazi uz supoziciju konstantne permeabilnosti relacija potpuno analogna relaciji (58) iz A-98. za prostornu gustoću energije električkoga polja. Neka na pr. treba odrediti energiju nakrcanu u uzdužnoj pukotini prereza $S = 3,52 \text{ cm}^2$ i duljine $l_2 = 0,06 \text{ cm}$, dakle obujma $v_2 = 3,52 \cdot 0,06 = 0,211 \text{ cm}^3$, pretpostavljanoj kod drugoga slučaja magnetskih krugova iz C-102. sa $\Phi = 0,0004 \text{ Vs}$ ($= 40000 \text{ M}$) i $B = 0,0001136 \text{ Vs/cm}^2$ ($= 11360 \text{ G}$). Kako bi jakost polja u pukotini bila $H_2 = 9040 \text{ A/cm}$, pripadna energija bila bi, u skladu sa (205):

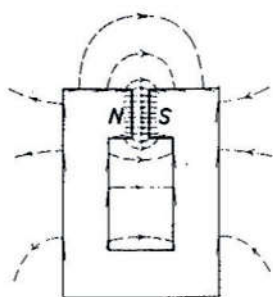
$$A_2 = \frac{0,0001136 \cdot 9040}{2} \cdot 0,211 \text{ Ws} = 0,1083 \text{ Ws}$$

dok bi se za energiju što bi se nakrcala u ostalom dijelu promatranoga magnetskog kruga, volumenno 999-strukomu u odnosu prema pukotini i realiziranomu željezom sa $B = 0,0001136 \text{ Vs/cm}^2$ uz $H_1 = 4,8 \text{ A/cm}$, pretpostavljajući grubo proporcionalnost između veličinâ B i H_1 , dobio samo iznos:

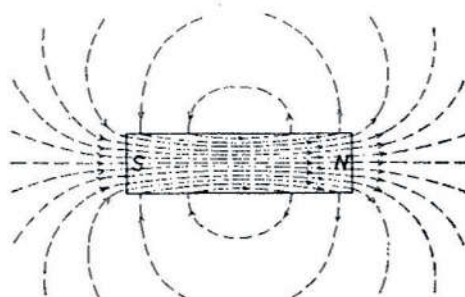
$$A_1 = \frac{0,0001136 \cdot 4,8}{2} \cdot 59,94 \cdot 3,52 \text{ Ws} = 0,0575 \text{ Ws}$$

111. Povlačeći dalje konsekvencije tvrdnje, izražene relacijom (200) ili (201) iz C-100., da se $\mathcal{B}$ -linije, koje predočuju magnetske tokove Φ , uvijek same u sebe zatvaraju i nigdje ne izviru ni ne poniru, svratimo sad pozornost *graničnim plohama*, koje $\mathcal{B}$ -linije nužno probadaju prelazeći iz sredstva u sredstvo u slučajevima magnetskih krugova složenih iz magnetski različitih sredstava, na pr. iz određene vrsti željeza i iz uzduha kao u sl. 172. i 173., ili iz više vrsta željeza i iz uzduha kao u sl. 177.

Ako specijalno željezne, odn. feromagnetičke sektore magnetskih krugova nazovemo kratko *magnetima* («elektromagnetima» kod magnetskih tokova podržavanih uzbuđnim strujama kroz pripadne namotaje i «permanentnim magnetima» kod remanentnih magnetskih tokova zaostalih zbog histereze i nakon prestanka uzbuđenja), morat ćemo na svakom magnetu u uzduhu (i uopće neferomagnetičkom



Sl. 178.



Sl. 179.

sredstvu) očekivati površinsko područje izlazenja $\mathcal{B}$ -linija iz magnetu, za koje se veli da čini područje »sjevernoga pola« (N-pola) magnetu, i područje ulazenja $\mathcal{B}$ -linija u magnet, t. zv. područje »južnoga pola« (S-pola) magnetu; oba su polna područja odijeljena užom ili širom »neutralnom zonom«.

Prema tomu magnetizirani prsten po sl. 171. ne će uopće imati polova, prsten po sl. 172. s posve uskom pukotinom imat će kod smjera obilaženja $\mathcal{B}$ -linija u smislu gibanja kazala na uri lijevu prereznu plohu kao N-pol i desnu kao S-pol, a po tomu cijeli plašt prstena kao neutralnu zonu, dok će kod prstena po sl. 173. i permanentnoga magnetu po sl. 178. s nešto širim pukotinama, a naročito na pr. kod permanentno magnetiziranoga čeličnoga štapa po sl. 179. s cijelim okolnim prostorom kao uzdušnim dijelom magnetskoga kruga, $\mathcal{B}$ -linije izlaziti i ulaziti osim na bazama također postrance, tako da će polna područja sezati manje ili više preko baza, a neutralna zona će biti više ili manje sužena.

112. Kako relacija $\text{div } \mathcal{B} = 0$ u svakom slučaju vrijedi, morat će ukupni izlazni tok na N-polu nekoga magnetu i ukupni ulazni na S-polu biti po apsolutnom iznosu jednaki, pa ako se izlazni tok označi sa $+\Phi$ i nazove »jakošću« N-pola, a ulazni se označi sa $-\Phi$ i nazove »jakošću« S-pola, moći ćemo reći da svi magneti, pa i magneti dobiveni komadanjem većih magnetu sve do neznatnih djelića, imaju oba pola suprotnoga predznaka i jednakoga apsolutnoga iznosa jakosti.

Uvođenje polnih područja ili polova magneta omogućuje lokalizaciju sila na magnete u magnetskim poljima i sila između magneta. Potanjim razmatranjima doista se nailazi na graničnim plohama magneta na mehaničke sile, koje se dakako u zadnjoj liniji daju tumačiti kombinacionim učincima magnetskih polja na gibane naboje, odn. na elementarne struje unutar pripadnih feromagnetika (C-35.).

113. Tako je lako razabrati, da će na magnetski pol jakosti Φ izvrnut utjecaju homogenoga magnetskog polja jakosti $\mathcal{H}$ djelovati sila $\mathcal{P} = \Phi \mathcal{H}$ po formuli analognoj relaciji (10) iz A-23., prema čemu bi specijalno jakost polja $\mathcal{H}$ odgovarala sili na pol jakosti $\Phi = 1$, dok bi sile na N-polove (sa $\Phi > 0$) djelovale u smjeru vektora $\mathcal{H}$, a one na S-polove (sa $\Phi < 0$) nasuprot tom smjeru. Nadalje je za polove dvaju različitih magneta moguće pokazati, da će se međusobno »privlačiti«, ako su raznoimeni, ili »odbijati«, ako su istoimeni, te da će specijalno kod zanemarivih dimenzija polnih područja prema njihovim međusobnim udaljenostima, odn. uz uvjet da se magneti smiju zamišljati s dva pola koncentrirana u dvije točke (polovi u užem smislu, kako su bili uvedeni već u C-5.), za iznos P privlačne ili odbojne sile u vakuumu između dva pola jakosti Φ_1 i Φ_2 razmaknuta za daljinu r vrijediti izraz $P = \Phi_1 \Phi_2 / 4\pi\mu_0 r^2$, analogan oblikom formuli (24) iz A-53. Coulombova zakona elektrostatičke.

Za obrazloženje stavka da na pol jakosti Φ doveden u polje jakosti H djeluje sila iznosa $P = \Phi H$, zamislimo permanentni magnet u obliku štapa duljine a , s prerezom na pr. u obliku pravokutnika s osnovnom stranicom l i visinom h neznatnima prema a . Ako prethodno pretpostavimo, idealizirajući stvarne odnose, jednoliko magnetiziranje u smjeru duljine štapa, s gustoćom magnetskoga toka B_1 , područja N-pola i S-pola činit će baze štapa površine $l \cdot h$, jakost polova iznositi će $B_1 l h$, a umnožak jakosti i razmaka polova, t. zv. *magnetski moment* Γ magneta bit će $B_1 l h a$.

Međutim jednak po jakosti i prostornoj raspodjeli toka, a time pretpostavljenom magnetu i inače ekvivalentan, bio bi uzdušni svitak duljine a iste kao kod magneta i sa w zavoja u obliku pravokutnika sa stranicama l i h kao gore, ako bi struja I udovoljavala relaciji $\Phi \cdot a = \mu_0 \cdot (wI/a) \cdot l h \cdot a = \mu_0 w I l h$, t. j. svitku se mogu pripisati svojstva magneta s jakošću polova $\mu_0 w I l h / a$ i magnetskim momentom $\mu_0 w I l h$. Sad na isti svitak orijentiran pod kutom φ prema homogenom polju jakosti H i indukcije $B = \mu_0 H$ djelovao bi moment vrtnje $w \cdot \mu_0 H \cdot l \cdot h I \cdot \sin\varphi$, jer je momente vrtnje $B l h \cdot \sin\varphi$ izračunane po (165) u C-43. za pojedine zavoje dozvoljeno po zakonima mehanike uz pretpostavljene odnose naprosto sumirati. A za ekvivalentni magnet bi po C-10. moment vrtnje uz iste pretpostavke bio $P a \cdot \sin\varphi$. Izjednačenjem obih momenata vrtnje (nakon kraćenja se $\sin\varphi$) izlazi neposredno tražena relacija: $P = \Phi H$.

U praksi se od veličina formule $M_0 = P a = \Phi H a$ iz C-10. daju M_0 , Φ i H samostalno mjeriti (M_0 na pr. magnetometarski po sl. 122.b) iz C-10.; Φ balistički po sl. 157. iz C-64.; s prikladno malenim S iz sl. 157. štapa se obuhvati oko sredine i zatim se S naglo ukloni; H se može odrediti po formuli iz C-14.; a $\Phi H a$ može se odrediti i iz brzine titranja štapa u polju H ; v. vj. 88.). Time postaju i razmak polova a i magnetski moment $\Gamma = \Phi a$ nekoga magneta izmjerivi. Opažanja daju za a kod magnetskih štapova manje iznose od duljine a' tih štapova, t. j. štapovi su manje pravilno magnetizirani nego je gore suponirano, a njihove polne točke treba umjesto posve na krajevima zamišljati ponešto unutar štapa (na to upućuje i rasporedaj B -linija kod štapa po sl. 179.).

114. No ako razmatranjima kao gore i sličnima uspijeva samom upotrebom polova zahvatiti na pr. pojave orijentiranja magnetiča u magnetskim poljima, ako je moguće privlačenje komadića mckoga željeza (željezna pilotina i sl.) prema polnim područjima magneta svesti na magnetiziranja prvobitno nemagnetičnih

feromagnetičkih čestica u jakim poljima u blizini polnih područja magneta (pri čemu u blizini određenoga pola čestica dobije suprotni pol na strani okrenutoj k polu, a istoimeni na strani okrenutoj od pola, pa privlačenje bližega suprotnoga pola prevlada nad odbijanjem daljega istoimenoga pola), te ako se upotreba polova i inače pokazuje katkad kao udobna, ne treba nikad zaboraviti, da su sva razmatranja s polovima samo formalne prirode. Dublji uzroci također i mehaničkih učinaka u magnetskim poljima, kako je već na početku ovoga poglavlja rečeno i malo prije ponovljeno, u stvari su učinci na gibane električke naboje, te tobožnjih »magnetskih masa« ili »množina magnetizma« iznosa Φ , koji bi konkretizirali polove slično kako električki naboji iznosa Q konkretiziraju množine elektriciteta, usprkos analogije nekih relacija o magnetskim polovima s onima o električkim nabojima uopće nema. Ako se prema tomu u nekim djelima spominju »magnetske mase«, treba to prosuđivati s gore iznesenoga gledišta.

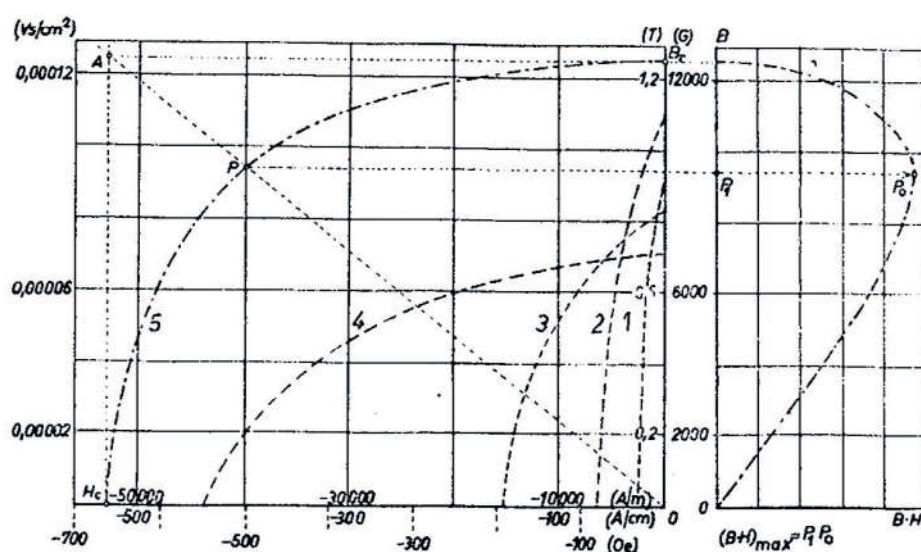
Slično su samo formalnoga značenja i izriču tek u drugom obliku konsekvencije zakona protjecanja razmatranja o *razmagnetizirajućim učincima polova* kod magneta. Gdje se magnetski tokovi magneta na zamršeni način zatvaraju kroz uzdušna područja, kao kod magnetskih štapova, potkova itd., može biti udobno na takve učinke svoditi poremetnje indukcije $\mathcal{B}$ i pripadne jakosti polja $\mathcal{H}$ u feromagnetičkim dijelovima magnetskih krugova uvjetovane djelomičnim zatvaranjem magnetskoga toka kroz uzduh, dok je kod iole preglednijih odnosa u magnetskim krugovima, kakvi se obično susreću u elektrotehnici, zgodnije neposredno primjenjivati teoriju magnetskoga kruga.

Za ilustraciju vratimo se na sl. 175. na str. 277. i razmotrimo točke M, Q i R, prema kojima uz fiksirano $w = 36$ zavoja, $l = 60$ cm i $I = 8$ A u željezu prstena bez pukotine i polova iz sl. 171. nastaje po C-104. indukcija 1,136 T ili 11360 G, kod blizih polova uz $l_2 = 0,06$ cm po sl. 172. indukcija u istom željezu dosiže samo 0,440 T ili 4400 G, a kod dalje razmaknutih polova uz $l_2 = 0,6$ cm po sl. 173. pada čak na 0,054 T ili 540 G. Dok dakle kod zatvorenoga prstena bez polova postignuta indukcija odgovara polju $H_0 = 480$ A/m = 4,8 A/cm kakvo bi vladalo i uz uzduh umjesto željeza u jezgri svitka, u oba slučaja nepotpunih željeznih prstenova s polovima bile su indukcije u željezu tolike da bi im po krivulji 0,1 iz sl. 161.a) na str. 258. odgovarale manje jakosti polja $H = 130$ A/m = 1,3 A/cm i $H = 50$ A/m = 0,5 A/cm. Ova se pak činjenica može i tako izraziti, da se zamisli kao da su smanjenja indukcije B nastala time što je »vanjsko polje« H_0 oslabljeno zbog polova na iznos H' »faktičnoga polja« u željezu nekim pretpostavljenim suprotnim »poljem razmagnetiziranja« iznosa H' po relaciji: $H = H_0 - H'$.

115. Prema rečenom treba očekivati jake učinke razmagnetiziranja kod jače otvorenih magneta u obliku potkova, štapova itd. Po sl. 179. za magnetsku indukciju $\mathcal{B}$, i za kod magnetski mekih vrsta željeza njom praktički jednoznačno određenu jakost polja $\mathcal{H}$, koju možemo zamisliti kao rezultantu vanjskoga polja $\mathcal{H}_0$ i polja razmagnetiziranja $\mathcal{H}'$, treba očekivati da će unutar magnetiziranoga štapa varirati od mjesta do mjesta i po smjeru i po veličini. No teorija pokazuje da se unutar željeznih rotacionih elipsoida (dakle i kugala) smještenih u homogeno vanjsko polje, s osi rotacije paralelno sa smjerom toga polja, stvori homogeno faktično polje, tako da se može naprosto staviti (kao i malo prije): $H = H_0 - H'$; pri tomu

se još H' može uzeti razmjerno magnetiziranju željeza J po relaciji: $H' = N \cdot J$, gdje je N »faktor magnetiziranja«. Približno se tako može H računati i za sredinu magnetiziranih štapova, dok se kod štapova duljine izvanredno velike prema dimenzijama baza može čak pretpostavljati $N \approx 0$ i $H' \approx 0$.

Kod permanentno magnetiziranih štapova treba uzimati $H_0 = 0$, pa će oko njihove sredine biti $H = -H' = -N \cdot J$, što očito znači da »radnu točku« ovakvih magneta, umjesto u R na sl. 164. u C-87., treba zamišljati negdje na dijelu RK petlje histereze, pri čemu ordinata B spomenute radne točke može biti visokoga pozitivnoga iznosa, ako se materijal magneta, osim velikom remanencijom $B_r = OR$, odlikuje i velikom koercitivnošću $H_c = OK$. Određenje se kvaliteta nekog čelika za permanentne magnete naznačuje brojem vrsnoće $(BH)_{\max}$, t. j. produktom



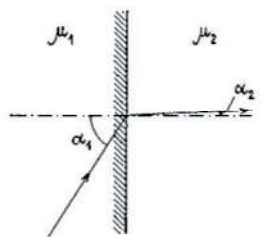
Sl. 180.

ordinate i apscise »najpovoljnije« radne točke P, one (između raznih mogućih radnih točaka) s najvišim produktom iznosa B i H (najveća nakrcana magnetska energija po jedinici volumena jest prema C-110. polovica tog produkta). Približno se P nalazi po sl. 180., na pr. za naročito odlični materijal za permanentne magnete »alcomax II« sa Co i Al, s dijelom petlje histereze $B_r H_c$ po krivulji 5 na sl. 180. lijevo, tako da se potraži sjecište P krivulje 5 i diagonale OA pravokutnika sastavljena iz ordinate remanencije B_r i apscise koercitivnosti H_c . Točkom P određenoj ordinati OP_1 na sl. 180. desno odgovara najveća vrijednost $(BH)_{\max}$ produkta apsolutnih iznosa koordinata B i H pripadnih točki P (u konkretnom slučaju taj se može pisati, s upotrebom jedinica T i A/m, kao $0,94^{(T)} \cdot 40000^{(A/m)}$, ili s upotrebom G i Oe kao $9400^{(G)} \cdot 503^{(Oe)}$. Za ostale ordinate između O i B_r iznosi BH variraju korespondentno apscisama krivulje na sl. 180. desno.

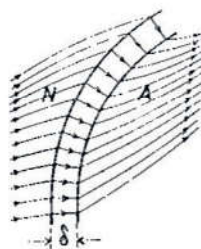
Još uvijek odličan moderni materijal za permanentne magnete predstavlja krivulja 4 (alnico, slitina Al-Ni-Co-Fe), vrlo dobar je još i materijal po krivulji 3 (čelik sa 15% Co), pa i onaj po krivulji 2 (čelik sa 6% Co), dok se krivulja 1 odnosi na stariji magnetski čelik s 1% ugljika.

Kao materijal za permanentne magnete dobar je već obični tvrdi čelik sa oko 1% ugljika. No bolji su čelici s dodatkom volframa, kroma ili molibdena, a još bolji oni koji osim kroma imaju oko 30% do 40% kobalta. U novije vrijeme natkriljeni su i kobaltni čelici čelicima s nikljem i aluminijem, ev. i kobaltom (no i bez skupoga kobalta). Kod čelika s ugljikom postizavaju se iznosi do $H_c = 40$ A/cm uz $B_r = 7000$ G, kod kobaltnih iznosi H_c do 200 A/cm uz $B_r = 9000$ G, a kod Fe-Ni-Al-čelika, na pr. sa 63% Fe + 25% Ni + 12% Al, koercitivnosti do 600 A/cm uz remanencije oko 10000 G. Koercitivnosti i preko 2000 A/cm pokazuje slitina sa 77% Pt i 23% Co. Još neke podatke o novijim visokokvalitetnim slitinama lako je očitati iz sl. 180. Treba još upozoriti na »sinterovane magnete«, te na »keramičke magnete«.

116. Razmatranjima posve jednakim onima iz A-91., o toku vektora $\mathcal{D}$ u slučajevima prelaza granične plohe dvaju dielektrika s različitim dielektričkim konstantama, lako je razabrati da ni kod prelaza granične plohe dvaju sredstava različitih apsolutnih permeabilnosti μ_1 i μ_2 , odn. relativnih μ'_1 i μ'_2 , ne može biti »skoka« u gustoći toka vektora $\mathcal{B}$, dakle ni skoka normalne komponente B_n vektora $\mathcal{B}$. Prema tomu se $\mathcal{B}$ -linije prelazeći okomito na graničnu plohu iz jednoga sredstva u drugo nastavljaju u drugom sredstvu ne mijenjajući gustoće ni smjera, a kod kosoga smjera vektora $\mathcal{B}$ prema graničnoj plohi, zbog činjenicâ da normalna kom-



Sl. 181.a)



Sl. 181.b)

ponenta vektora $\mathcal{B}$, i slično kao kod odnosâ u električkim poljima tangencijalna vektora $\mathcal{H}$, ostaju kontinuirane na granici dvaju sredstava, dolazi do nagle promjene smjera $\mathcal{B}$ -linija, za koju vrijedi »tg-zakon loma $\mathcal{B}$ -linija« (sl. 181.a)):

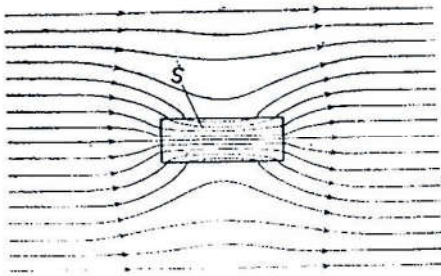
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu'_1}{\mu'_2} \quad (206)$$

potpuno analogan zakonu (55) o lomu $\mathcal{D}$ -linija. Isto bi se tako razmatranjima kao u A-94. izvelo da se definicija vektora $\mathcal{B}$ i $\mathcal{H}$ u krutim sredstvima, pa i onima feromagnetičkih svojstava, može konkretizirati tako da se $\mathcal{B}$ zamišlja određeno u šupljini kao X, a $\mathcal{H}$ u šupljini kao Y u sl. 42., zamišljajući obje ove šupljine u istraživanom sredstvu.

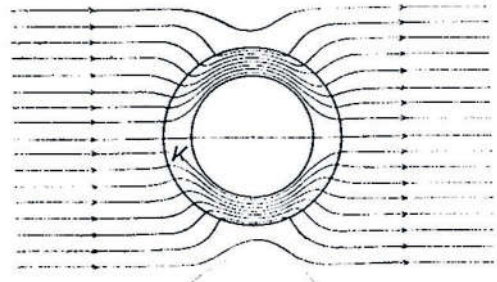
Po zakonu loma (206), u vezi s činjenicom da su permeabilnosti željeza stotine i tisuće puta tolike kao permeabilnost uzduha, moraju $\mathcal{B}$ -linije idući iz željeza u uzduh ili obratno biti u uzduhu praktički okomite na graničnu plohu željezo-uzduh, makar u željezu zgađale tu plohu pod velikim kutovima prema normali. Ako je na pr. po sl. 181.a) prvo sredstvo željezo sa $\mu'_1 = 3000$,

a drugo uzduh ($\mu'_2 = 1$), bit će i kod vrlo velikoga kuta upadanja $\alpha_1 = 85^\circ$ kut α_2 jednak $0,2^\circ$ ($\text{tg } 85^\circ : \text{tg } 0,2^\circ = 3000:1$). Zato bi i prolazile $\mathcal{B}$ -linije u pukotini δ između polnoga nastavka pola N i glatke armature A u sl. 181.b) praktički »radijalno«.

117. Zbog visoke permeabilnosti željeza $\mathcal{B}$ -linije prvobitno homogenih magnetskih polja u uzduhu bivaju stavljenima u takva polja komadima željeza skrenute da po sl. 182. prolaze gušće željezom S, više propustljivim (više permeabilnim) za magnetski tok. Slično bi i crte strujanja vode neke rijeke kojoj bi korito inače bilo obraslo recimo šašem, i po tom manje propuštalo strujanje vode, bile skrenute da gušće prolaze očišćenim od šasa i zato bolje propustljivim područjima.



Sl. 182.



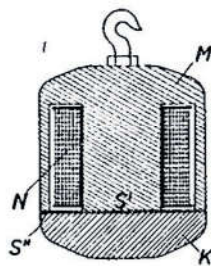
Sl. 183.

Ako se, specijalno, visoka permeabilnost željeza iskoristi za to da se $\mathcal{B}$ -linije prvobitno homogenoga magnetskog polja tako skrenu da po shemi u sl. 183. praktički prolaze samo kroz dovoljno debelu kuglinu ljusku K, magnetsko polje u uzdušnoj šupljini bit će oslabljeno na neznatan iznos koji odgovara neznatnoj permeabilnosti uzduha.

Ovakvo *magnetsko zaslanjanje*, djelotvorno i kod vremenski stalnih magnetskih polja, upotrebljava se na pr. kod nekih instrumenata, a principno se razlikuje od elektrostatskog zaštićivanja po principu Faradayeve krletke (A-26.), gdje bi stijenke zaslona kugle mogle biti po volji tanke i polje bi unutar kugle posve iščezavalo, a isto tako i od elektromagnetskoga zaslanjanja protiv vremenski promjenljivih magnetskih polja (C-71.).



Sl. 184.



Sl. 185.

S kotve. Kako će iznos B magnetske indukcije uz bazu magneta ostati praktički isti i kod prolaza magnetskoga toka kroz pukotinu u kotvu, energija nakrcana u volumenu $S \cdot x$ pukotine, obzirom na formulu (205) iz C-110. i obzirom na to što je za uzduh $\mu = \mu_0$, bit će:

$$A = \frac{\mu_0 H^2}{2} \cdot S \cdot x = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot S \cdot x$$

pa ako se, zbog privlačenja silom P suprotnih polnih ploha magneta i kotve, ploha kotve primakne magnetu za dx , izvršit će se radnja $P \cdot dx$ i istodobno će se, uz zanemarenu promjenu magnetske indukcije B , smanjiti magnetska energija nakrcana u pukotini za iznos $dA = B^2 \cdot S \cdot dx / 2\mu_0$. Izjednačujući dobivenu radnju i utrošenu energiju (i krateći sa dx) dobiva se relacija između veličina (valjana u sustavu m-kg-s-A odn. V-A-s-m, kao i u sustavu V-A-s-cm):

$$P = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot S \quad (207)$$

Naprotiv za neposredno dobivanje sile P u kg^* može se, kako je lako razabrati primjenjujući veze između pojedinih jedinica i zaokružujući 8π na 25, raditi pri B u T i S u cm^2 po približnoj numeričkoj relaciji:

$$P(\text{kg}^*) \approx [2B(\text{T})]^2 \cdot S \quad (207')$$

A radeći sa B^* (s magnetskom indukcijom u G) i sa S u cm^2 uzimalo bi se analogno:

$$P(\text{kg}^*) \approx \left(\frac{B^*}{5000} \right)^2 \cdot S \quad (207'')$$

Uz indukciju $1,8 \text{ T} = 0,00018 \text{ Vs/cm}^2 = 18000 \text{ G}$, koja se s elektromagnetima, još dade praktički postići, dobile bi se dakle sile privlačenja od oko 13 kg^* po cm^2 baze, dakle više od 1 t^* (1000 kg^*) po dm^2 baze. Kod elektromagneta po shemi u sl. 185. pod S treba dakako razumijevati sumu $S' + S''$ doticajnih ploha magneta M i kotve K .

Formula (207) je i zato zanimljiva, što pokazuje princip po kojem bi se, makar samo grubo, mogli lako mjeriti iznosi B na pr. permanentnih magneta. Trebalo bi samo odrediti težinu koju magnet najviše može nositi, zatim uz izmjereno S izračunati po (207) iznos B .

IV) SAMOINDUKTIVITETI I MEĐUSOBNI INDUKTIVITETI

Samoinduktiviteti i međuinduktiviteti, te EMS samoindukcije i međusobne indukcije. Energetički odnosi u samoinduktivnim strujnim krugovima. Proračunavanja samoinduktiviteta svitaka. Samoinduktivitet voda od dva vodiča. Međuinduktiviteti; definicija stepena induktivnog vezanja strujnih krugova; energetički odnosi u međuinduktivnim sustavima. Pojavi nastajanja i nestajanja struje kod primjene ili uklanjanja stalne vanjske EMS, odn. stalnog napona. Pojavi izbijanja i specijalno električkih titranja u krugovima s kapacitetom, induktivitetom i otporom.

119. U tehnici se magnetski tokovi kudikamo najviše primjenjuju za proizvođenje indukcionih EMS. Po zakonu elektromagnetske indukcije, kako je izražen formulom (171) iz C-56., inducira se EMS u nekom strujnom krugu samo onda, kad se mijenja magnetski tok Φ obuhvaćen tim krugom, pri čemu je za konačni rezultat nebitno, da li je mijenjanje toka Φ uzrokovano vremenskim mijenjanjem magnetskoga polja uz nepomičan strujni krug, ili se to mijenjanje postizava mijenjanjem položaja strujnoga kruga u vremenski stalnom magnetskom polju određene prostorne raspodjele.

Specijalno se govori o pojavu *samoindukcije* ili *vlastite indukcije* u nekom strujnom krugu, ako se inducirana EMS u tom krugu time stvara što se mijenja vlastita struja, a time i vlastiti magnetski tok kruga. Naprotiv se govori o učinku *međusobne indukcije* što ga u nekom krugu 2 izvodi neki krug 1, kad se uz određeni

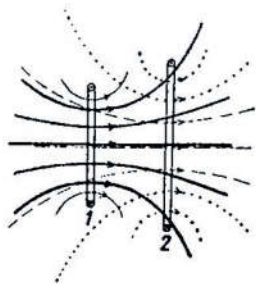
prostorni međusobni rasporedaj obih krugova stvara u krugu 2 inducirana EMS kod vremenskoga variranja struje i ukupnoga toka kruga 1, pa prema tomu i variranja dijela toka kruga 1 obuhvaćenoga krugom 2; dakako da nema zapreke da dođe i obrnuto do EMS međusobne indukcije proizvedene u krugu 1 mijenjanjem struje i toka kruga 2.

Ako na pr. u sl. 186. debele i tanke izvučene $\mathcal{B}$ -linije predočuju ukupni tok Ψ_{11} struje i_1 kruga 1, tako da debele naznačuju dio Ψ_{12} spomenutoga toka koji prolazi i krugom 2, a tanke »razasuti« dio Ψ_{1s} , te ako slično crtane i točkane $\mathcal{B}$ -linije predočuju ukupni tok Ψ_{22} struje i_2 kruga 2, s dijelom Ψ_{21} što prolazi i kroz krug 1 i razasutim dijelom Ψ_{2s} , nastat će kod svakoga mijenjanja struje i_1 EMS samoindukcije u krugu 1 zbog mijenjanja toka Ψ_{11} i EMS međusobne indukcije u krugu 2 zbog mijenjanja toka Ψ_{12} , a kod svakoga mijenjanja struje i_2 EMS samoindukcije u krugu 2 zbog mijenjanja toka Ψ_{22} i EMS međusobne indukcije u krugu 1 zbog mijenjanja toka Ψ_{21} .

120. Pojavi samoindukcije i međusobne indukcije od osnovne su važnosti kod vrlo mnogih problema elektrotehnike. Specijalno se prvi manifestiraju kod prolaza izmjeničnih struja i kod ukapčanja i iskapčanja stalnih i izmjeničnih struja, na pr. kroz strujne svitke. A pored samoinduktivnih igraju odlučnu ulogu i međusobni pojavi naročito kod transformatora i strojeva izmjenične struje, koji se potonji dadu svesti na transformatore.

Prema tomu bit će u kasnijim poglavljima mnogo prilika baviti se samoindukcijom i međusobnom indukcijom; prethodno neka u ovom odsjeku bude rečeno o njima samo najopćenitije, s primjenama na pojave stvaranja i iščezavanja struja uz stalnu EMS odn. stalan napon, te na pojave izbijanja kondenzatora kroz strujne svitke.

121. Lako je razabrati da će se matematski pregledno i općenito dati pojavi samoindukcije i međusobne indukcije razmatrati samo za one strujne krugove kojima se magnetski tokovi zatvaraju kroz sredstva konstantne permeabilnosti, odn. kroz sredstva gdje je omjer $\mu = \mathcal{B} / \mathcal{H}$ magnetske indukcije $\mathcal{B}$ i pripadne jakosti polja $\mathcal{H}$ na određenom mjestu toka određena konstantna veličina. Uz



Sl. 186.

fiksirane geometrijske odnose nekoga određenoga kruga kod samoindukcije, odn. određene kombinacije krugova po sl. 186. kod međusobne indukcije, uvijek je naime ukupni tok Ψ proizveden strujom i jednoga samoga kruga proporcionalan vrijednostima vektora $\mathcal{B}$ u pojedinim točkama, a uz pretpostavku konstantnoga μ on će biti proporcionalan i pripadnim uzbudnim poljima $\mathcal{H}$, koja su opet dalje uvijek proporcionalna iznosima i uzbudne struje toga kruga; slično će kod kombinacija po sl. 186. uvijek tokovi Ψ_{11} i Ψ_{12} biti proporcionalni magnetskim indukcijama $\mathcal{B}$ proizvedenima strujom i_1 kruga 1, dakle uz

konstantno μ proporcionalni pripadnim jakostima polja $\mathcal{H}$, a time proporcionalni

i samoj struji i_1 , dok će tokovi Ψ_{22} i Ψ_{21} biti proporcionalni vrijednostima $\mathcal{B}$, i uz konstantno μ pripadnim vrijednostima $\mathcal{H}$, a time i struji i_2 kruga 2.

Uz navedene odnose postoji onda mogućnost da se netom spomenuti tok Ψ jednoga samog kruga struje i izrazi formulom:

$$\Psi = Li \quad (208)$$

a tokovi kombinacije po sl. 186. formulama $\Psi_{11} = L_1 i_1$ i $\Psi_{12} = M i_1$, odn. $\Psi_{22} = L_2 i_2$ i $\Psi_{21} = M' i_2$, gdje L , L_1 i L_2 znače konstante pripadnih krugova nazvane »koeficijentima vlastite indukcije« ili »koeficijentima samoindukcije«, kraće: *samoinduktivitetima* (ili kratko *induktivitetima*) pripadnih krugova, a veličine M i M' konstante nazvane »koeficijentima međusobne indukcije« ili *međusobnim induktivitetima* (*međuinuktivitetima*) kombinacije po sl. 186. i karakteristične za magnetsko djelovanje kruga 1 na krug 2 odnosno kruga 2 na krug 1.

Anticipirajući rezultat, koji ćemo kasnije razabrati na jednom primjeru (C-134.), da se praktički uvijek (osim u naročitim slučajevima kod struja izvanredno visokih frekvencija) M i M' smiju smatrati jednakima: $M = M'$, mogli bismo dakle za cjelokupne tokove Ψ_1 i Ψ_2 kroz krugove 1 i 2 iz sl. 186. kod istodobno podržanih struja i_1 i i_2 pisati relacije:

$$\Psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad (209) \quad \Psi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \quad (210)$$

122. Po definicionoj relaciji $\Psi = Li$ samoinduktivitet nekoga strujnoga kruga ili dijela takvoga kruga, na pr. svitka, ima značenje ukupnoga toka na jedinicu vlastite struje (uz $i = 1$ je $\Psi = L$), dok međusobni induktiviteti kombinacije dvaju krugova imaju značenje parcijalnoga toka kroz jedan od oba kruga zbog djelovanja jedinice struje onoga drugoga (uz $i_2 = 1$ je $\Psi_{21} = M$, uz $i_1 = 1$ je $\Psi_{12} = M$).

Kod jednom po volji pozitivno odabranoga smisla obilaženja danoga kruga, ili svakoga od krugova dane kombinacije, te kod pridijeljenoga svakom takvom smislu i pozitivnoga smisla prolaženja magnetskih tokova kroz zamku pripadnoga kruga u skladu s odnosom između smisla vrtnje i smisla napredovanja »desnoga« vijka kao u C-4. i C-56., trebat će i struje i odn. i_1 i i_2 , te tokove Ψ , odn. Ψ_{11} , Ψ_{12} , Ψ_{22} , Ψ_{21} itd. računati pozitivno ili negativno prema tomu da li teku u odabranom smislu obilaženja, odn. prolaženja, ili nasuprot tomu smislu.

Lako je vidjeti da uz tu konvenciju samoinduktiviteti, kojih su apsolutni iznosi dakako određeni geometrijskim odnosima pripadnih strujnih krugova, mogu biti samo pozitivne veličine, jer po C-56. vlastiti magnetski tok neke pozitivne struje može biti samo pozitivan, odn. kod negativne struje on može biti samo negativan, a uz isti predznak veličinâ Ψ i i kvocijent $L = \Psi/i$ mora biti pozitivan.

Naprotiv međusobni induktiviteti, kojima iznos osim o geometrijskim odnosima samih obih krugova pripadne kombinacije ovisi još i o međusobnoj orijentaciji i razmaku tih krugova, mogu biti i pozitivni i negativni, pa i nula, jer već prema međusobnom položaju krugova 1 i 2 i odabranim pozitivnim smislovima

obilazjenja tih krugova može pozitivna struja kroz 1 proizvesti i pozitivan i negativan, a u osobitim međusobnim rasporedajima i nikakav tok kroz zamku kruga 2 (i obrnuto). Što se M po apsolutnom iznosu kod mijenjanja međusobnoga rasporedaja dvaju krugova više povećava, to se tjesnije »induktivno« ili »magnetski« vezanima smatraju oba kruga.

123. Bitna prednost uvođenja samoinduktiviteta i međusobnih induktiviteta jest u tomu što se njihovom pomoću naponi inducirani samoindukcijom ili međusobnom indukcijom dadu izraziti vremenskim derivacijama struje, dakle bez ikakva pozivanja na magnetske tokove.

Ako se na pr. zbog promjenljive struje i mijenja vlastiti tok Ψ nekoga kruga induktiviteta L , za EMS samoindukcije vrijedit će relacija:

$$e = - \frac{d\Psi}{dt} = - L \cdot \frac{di}{dt} \quad (211)$$

dok će se za EMS međusobne indukcije inducirane promjenljivim strujama i_1 ili i_2 sistema dvaju krugova po sl. 186. moći staviti:

$$e_1 = - \frac{d\Psi_{21}}{dt} = - M \cdot \frac{di_2}{dt} \quad (212) \quad e_2 = - \frac{d\Psi_{12}}{dt} = - M \cdot \frac{di_1}{dt} \quad (213)$$

Iz relacija (211) do (213) odmah se razabire, zašto su veličine L i M dobile ime »koeficijenata« samoindukcije odn. međusobne indukcije. A vidi se i to da se umjesto tokovima mogu veličine L i M definirati i naponima koji se induciraju samoindukcijom ili međusobnom indukcijom kod brzine 1 mijenjanja pripadne promjenljive struje (brzine kod koje se struja mijenja za jedinicu svoje jakosti u jedinici vremena). Tako bi na pr. specijalno jedinica samoinduktiviteta pripadala onakvim strujnim krugovima, u kojima se samoindukcijom inducira jedinica napona, kad im se struja mijenja za jedinicu jakosti u jedinici vremena.

124. Ne treba zaboraviti da formule (208) do (210), odn. (211) do (213), strogo uzete dolaze u obzir samo uz pretpostavku konstantnoga μ . Kod feromagnetikâ μ ovisi o vrijednosti magnetske indukcije, odn. jakosti polja, tako da se ne može govoriti o konstantnom kvocijentu ukupnoga ili parcijalnoga toka neke struje i jakosti te struje, dakle ni o određenim koeficijentima samoindukcije i međusobne indukcije. Ako bi se ipak uvco na pr. kvocijent $L' = \Psi/i$, trebalo bi, zbog promjenljivosti toga kvocijenta, pisati:

$$\frac{d\Psi}{dt} = L' \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot \frac{dL'}{dt}$$

a time bi se uvele veće komplikacije nego kad bi se radilo neposredno s tokom Ψ , bez obzira na to da bi još pridošle i komplikacije zbog histerceze.

Samo kod strujnih krugova, svitaka itd. s vodičima od neferomagnetičkih tvari, i s tokovima koji se zatvaraju potpuno u neferomagnetičkim prostorima, na pr. u uzduhu, može se dakle govoriti o posve određenim samoinduktivitetima,

odn. kod kombinacija takvih strujnih krugova, svitaka itd., o posve određenim međusobnim induktivitetima, i samo u tim slučajevima mogu se strogo kod proračunavanja induciranih EMS primjenjivati formule (211) do (213).

Kod svitaka s magnetskim krugovima potpuno ili djelomično od željeza, recimo kao u sl. 171. do 173., može se govoriti tek grubo približno o određenim induktivitetima, i to samo uz ograničenje na približno pravocrtne prve dijelove pripadnih magnetskih karakteristika i uz još zanemarive pojave histereze (uspoređ. 3 i 3' na sl. 175.).

125. Ako se kod svitaka sa w zavoja strujom i svitka proizvede isti tok Φ kroz svaki zavoj svitka, ukupni tok kroz cijeli svitak bit će $\Psi = w\Phi$, pa će se prema tomu moći staviti $L = \Psi/i = w\Phi/i$, a relacija $e = -w \cdot \frac{d\Phi}{dt}$ glavit će:

$$e = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

dakle jednako kao u (211), jer se L razumijeva za svitak kao cjelinu.

126. Po svojoj naravi, odn. po formulama (208) do (210) i (211) do (213), veličine L i M kao kvocijenti magnetskih tokova i jakosti struja, odn. kvocijenti napona i vremenskih derivacija struja, imat će dimenzije tih kvocijenata i mjerit će se prema tomu u V-A-s-m i u V-A-s-cm-sustavu u Vs/A ili Ω s. Kraće se Vs/A zove *henri* (H), prema čemu se veličine L i M u spomenutim sustavima izražavaju i stavljaju u formule u henrijima, dok se iznosi samoinduktiviteta i međusobnih induktiviteta po potrebi navode i u dijelovima te jedinice, na pr. u mH (milihenrijima, 0,001 H), μ H (mikrohenrijima, 0,000001 H) itd.

Riječima se 1 H može, po (208), definirati kao induktivitet strujnoga kruga, ili samostalnoga dijela takvoga kruga, u kome bi struja 1 A proizvela magnetski tok 1 Vs, odn. u kome bi se po (211) stvarao napon samoindukcije apsolutnog iznosa 1 V kod jednolikog mijenjanja struje za iznos 1 A u vremenu od 1 s.

U sustavu EMJ, upućujući zvjezdicama na M, EMJ struje (10 A), EMJ napona (10^{-8} V) i EMJ induktiviteta, pisalo bi se dakako (uz t u s): $\Psi^* = L^* i^*$, odn. $e^* = -L^* \cdot di^*/dt$, pa kako kod toga jedinica induktiviteta izlazi kao omjer 10^8 puta manje jedinice toka ili napona prema 10 puta većoj jedinici struje ili njezine derivacije, vrijedi relacija:

$$1 \text{ EMJ induktiviteta } (= 1 \text{ *cm*}) = 10^{-9} \text{ H}$$

prema čemu samoinduktiviteti i međusobni induktiviteti izlaze u EMJ u 10^9 -struko povećanim brojevima prema onim u henrijima.

127. Za primjer upotrebe induktiviteta razmotrimo pojave samoindukcije kod nastajanja i nestajanja struje i u nekom krugu s izvorom stalne EMS ili u nekom potrošaču priključenu na mrežu stalnoga napona. Ako je R ukupni otpor kruga ili potrošača, stalna EMS ili stalni mrežni napon E ne će odmah moći proizvesti struju $I = E/R$, koja bi slijedila po Ohmovu zakonu uz zanemarene pojave samoindukcije, jer će zajedno s postepenim rastenjem iznosa i struje od 0 prema spomenutoj vrijednosti I kao konačnoj varirati i pripadni ukupni magnetski tok Ψ kruga ili potrošača, tako da će se proizvedenom naponu ili EMS E kruga, odn. narinutom naponu E potrošača, superponirati, dok god bude i raslo, EMS e samoindukcije.

Prema tomu udovoljavat će općenito iznos i struje u momentu t relaciji $E + e = Ri$, odn. zbog $e = -\frac{d\Psi}{dt}$ relaciji:

$$E = Ri + \frac{d\Psi}{dt} \quad (214)$$

koja se specijalno u slučajevima određenoga samoinduktiviteta L može pisati i u obliku:

$$E = Ri + L \cdot \frac{di}{dt} \quad (215)$$

Odavde se vidi da kod stvaranja i uopće jačanja struje, dakle uz $\frac{d\Psi}{dt} > 0$, odn. $\frac{di}{dt} > 0$, EMS indukcije e ima protivan smjer nego E , te se samo dio od E troši na gubitak napona zbog svladavanja otpora R , dok se drugi dio gubi na svladavanje EMS samoindukcije. Zato će, dok god Ψ raste, jakost struje i biti manja od konačne vrijednosti $I = E/R$, t. j. zbog samoindukcije struja kruga ili potrošača rasti će tek postepeno prema spomenutoj konačnoj vrijednosti kao gornjoj granici. Baš bi obrnuto bilo, kad bi se nakon nekoga vremena, iza kako je struja već dostigla vrijednost $I = E/R$, najednom uklonila EMS E (uz otpor R ostavljen nepromijenjen). Sad bi zbog $\frac{d\Psi}{dt} < 0$, odn. $\frac{di}{dt} < 0$, bilo e pozitivno, t. j. EMS samoindukcije nastojala bi potpomoći struju u krugu ili potrošaču, te bi ova tek postepeno padala od vrijednosti I prema nuli.

128. Matematski je lako integracijom dobiti i kao funkciju vremena t za slučajeve obuhvaćene relacijom (215). Ostavljajući međutim to za kasnije (C-137.), pomnožimo na ovom mjestu obje strane jednadžbe (215) sa $i \cdot dt$ i integrirajmo; dobit ćemo kod raspoloživoga stalnoga iznosa E EMS ili mrežnoga napona kao ukupnu radnju A kruga struje ili potrošača otpora R i induktiviteta L , u intervalu vremena $(0, T)$ uzetom tolikim da na koncu toga intervala i već praktički postigne konačnu vrijednost $I = E/R$:

$$A = \int_0^T E \cdot i \cdot dt = \int_0^T i^2 \cdot R \cdot dt + \left[\frac{Li^2}{2} \right]_0^T = \int_0^T i^2 \cdot R \cdot dt + \frac{L \cdot I^2}{2} \quad (216)$$

Kako se vidi, ukupna izvršena radnja dijeli se na dva sumanda: prvi sumand predstavlja naprosto ukupnu Jouleovu toplinu stvorenu u vremenu $(0, T)$, dok drugi sumand $\frac{1}{2}LI^2$ daje energiju utrošenu u neku određenu svrhu, naime u stvaranje *potencijalne energije magnetskoga polja struje*.

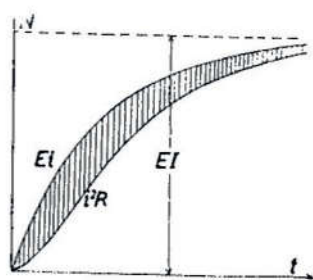
129. Općenitije se kod ma koje struje svitka i (a ne samo konačne I) ukupna magnetska energija može izraziti sa $\frac{1}{2}Li^2$. A kako za prostornu gustoću A_1 ener-

gije nakrcane u magnetskom polju vrijedi formula (205) iz C-110., može se očito staviti:

$$\frac{L \cdot i^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \int \mu \cdot H^2 \cdot dv = \frac{1}{2} \cdot \int \mu_0 \cdot \mu' \cdot H^2 \cdot dv \quad (217)$$

gdje dv znači element volumena, a integracija se proteže na cijeli prostor magnetskoga polja promatrane struje. Pored formule (208) mnogo se upotrebljava i formula (217) za proračunavanje induktiviteta.

130. Grafički se energetički odnosi po relaciji (216) mogu predočiti krivuljama Ei i i^2R po sl. 187. u koordinatnom sustavu s iznosima vremena t kao apscisama i iznosima učina N kao ordinatama. Površina između krivulje Ei i osi apscisa predstavlja ukupnu radnju A , površina između krivulje i^2R i osi apscisa radnju



Sl. 187.

Jouleove topline, a razlika obih površina, šrafirana na sl. 187., jest radnja uložena u energiju magnetskoga polja. Slični se odnosi susreću u mehanici, kad se neko tijelo mase m gibajući se uz svladavanje neke zapreke gibanju, na pr. trenja, ubrzava nekom silom P do neke konačne brzine v_0 . I ovdje se izvršena radnja utroši dijelom na svladavanje zapreke gibanju, a dijelom na stvaranje kinetičke energije gibanoga tijela. Čak su formule $\frac{1}{2}Li^2$ i $\frac{1}{2}mv^2$ energije magnetskoga polja i kinetičke energije

gibanoga tijela kod struje i i brzine v u času t posve analogne, ako se usporede L sa m i i sa v .

Uopće su pojavi samoindukcije u elektricitetu i pojavi tromosti mase u mehanici analogni: zbog samoindukcije krug struje protivi se mijenjanju jakosti struje, zbog tromosti masa se protivi mijenjanju brzine; slično se kod nestajanja struje u krugu sa samoindukcijom (s kojim nestajanjem je skopčano i nestajanje magnetskoga toka te struje) energija magnetskoga polja oslobađa i prelazi u druge oblike energije, kako se i kod zaustavljanja mase kinetička energija oslobađa i prelazi u druge oblike energije.

Ako se pokuša naglo prekinuti krug struje sa svitkom velikoga induktiviteta (na pr. kod velikih elektromagneta), mogu nastati vrlo velike EMS samoindukcije, zbog kojih može stradati izolacija namotaja svitka (a može nastati i pogibelj za poslužno osoblje); istodobno se iskrom, odn. lukom na mjestu prekidanja, prekid ponešto zategne.

Mirnije se struje kod velikih induktiviteta iskapčaju, da ih se regulira postepeno prema nuli, ili da se istodobno s iskapćanjem izvora struje svitak kratko spoji ili premesti otporom, da bi se prekidanjem nastale struje samoindukcije, t. zv. ekstra-struje prekidanja, imale priliku izjednačiti. Na pr. magnetni namotaji strojeva obično se kratko spoje sami u sebe kod iskapćanja struje magnetiziranja. Energija Jouleove topline ekstra-struja, iskara (lukova) prekidanja itd. potječe od energije, koja se oslobađa iščezavanjem magnetskoga toka svitka.

131. Koeficijenti L i M mogu se u principu dvojako određivati: računom i mjerenjem. Za računsko određivanje dolaze u obzir samo jednostavniji slučajevi,

a i kod tih se već često moraju upotrebljavati eliptičke funkcije, Legendreovi polinomi itd. Ovdje ćemo uzeti samo za ilustraciju postupka nekoliko najjednostavnijih slučajeva, gdje ne treba većih računa.

Tako bi se na pr. samoinduktivitet prstenastoga svitka sa w zavoja s jezgrom cijelom ispunjenom sredstvom konstantne permeabilnosti μ kod duljine l svitka velike prema dimenzijama jezgre, kojoj presjek neka bude S , lako računao na temelju formule (208) iz C-121. Izjednačujući $\Psi = wBS = \mu wHS = \mu_0 \mu' \cdot w \cdot \frac{wi}{l} \cdot S$ sa Li dobilo bi se odmah (nakon kraćenja sa i , te uzimajući u obzir reluktanciju $\mathcal{R}$ iz C-98.):

$$L = \frac{\mu w^2 S}{l} = \frac{\mu_0 \mu' w^2 S}{l} = \frac{w^2}{\mathcal{R}} \quad (218)$$

Isti bi se rezultat dobio primjenom formule (217) iz C-129. izjednačujući $\frac{Li^2}{2}$ sa $\frac{\mu}{2} \cdot H^2 \cdot S \cdot l = \frac{\mu_0 \mu'}{2} \cdot \frac{w^2 i^2}{l^2} \cdot S \cdot l$ i skraćujući sa i^2 .

Kod svitaka s uzdušnom ili uopće neferomagnetičkom jezgrom u V-A-s-m-sustavu stavljat će se u (218): $\mu' = 1$, $\mu_0 = 0,4\pi \cdot 10^{-6}$; u tom će slučaju numerička relacija za L (uz l i S u m i m²) glasniti:

$$L = \frac{4\pi w^2 S}{10^9 l} \text{ henrija} \quad (218')$$

Sa S u cm² i l u cm izlazi numerička relacija koja se od (218') razlikuje samo tim da u nazivniku mjesto 10^9 dolazi 10^9 , dakle relacija: $L = 4\pi w^2 S / 10^9 l$ henrija.

Na svitke s jezgrom od željeznih limova po sl. 171. moći će se formula (218'), samo grubo približno primjenjivati uz ne prevelike magnetske indukcije, na pr. do $B = 0,8 \text{ T}$ ($= 0,00008 \text{ Vs/cm}^2 = 8000 \text{ G}$). Ako je pak željezna jezgra prekinuta uzdušnom pukotinom duljine δ m i srednjega presjeka toka S_0 m² (poput onih iz sl. 172. i 173.), često se magnetski otpor željeznoga dijela magnetskoga kruga smije zanemariti, odn. smije se uzeti da magnetski otpor $\mathcal{R}_0$ pukotine praktički predstavlja otpor cijeloga magnetskoga kruga, tako da se uz zanemarivo rasipanje može staviti:

$$L \approx \frac{w^2}{\mathcal{R}_0} \quad (218'')$$

a iz te se relacije može izvesti i numerička formula za L , koja se od (218') samo tim razlikuje da mjesto l u m ima δ u m (uz S u m²).

Prema svemu rečenomu L raste kod svitaka razmjerno kvadratu broja zavoja w , pa je za realizaciju većih L osobito povoljno uzeti w veće. A naročito izlazi L veliko ako je jezgra svitka željezna.

132. Formula (218') vrijedi približno i za cilindričke jednoslojne svitke s uzduhom, ako im je duljina l vrlo velika prema promjeru d zavoja; no ona daje već znatnije previsoke iznose kod svitaka kod kojih je l veličina istoga reda kao d ; u takvim slučajevima treba desno u (218') zamisliti neki korekcionni faktor k (Nagaokin faktor), tako da se, nadovezujući na (218) i supstituirajući $S = d^2\pi/4$, može za L staviti (numerički): $L = k \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot w^2 \cdot l / 10$ mikrohenrija, gdje d i l dolaze u m, a w , znači broj zavoja po 1 m duljine svitka, t. j. omjer w/l ukupnoga broja zavoja i duljine svitka. Za Nagaokin faktor k služi:

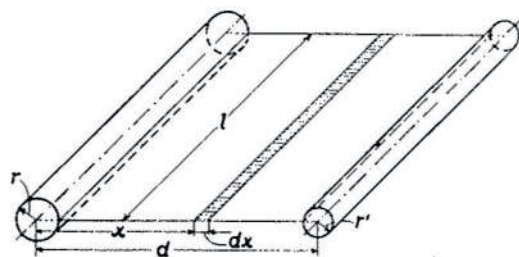
Tabela III.

d/l	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4	6	10
k	0,98	0,96	0,92	0,85	0,79	0,74	0,69	0,64	0,60	0,53	0,47	0,43	0,37	0,28	0,20

133. Još ćemo naći induktivitet voda od dva dugačka paralelna vodiča polumjerâ r i r' . Osi vodiča neka su udaljene za d , vod neka se nalazi u uzduhu i vodiči neka su od neferomagnetičkoga materijala (Cu, Al itd.), dakle sa $\mu' = 1$, odn. $\mu = \mu_0$. Za induktivitet L , što otpada na l m duljine voda (dakle $2l$ m duljine žice), uz d vrlo veliko prema r i r' , te uz d , r i r' u istim jedinicama (m, cm ili mm), i sa $\mu_0 = 0,4\pi \cdot 10^{-6}$ H/m, vrijedi formula:

$$L = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \cdot \left(2 \cdot \ln \frac{d^2}{rr'} + 1 \right) \quad (219)$$

Da bismo to izveli, sjetimo se da magnetski tok voda nastaje podupiranjem tokova obih vodiča kroz petlju voda. Kod dane polazne i povratne struje i voda



Sl. 188.

doprinos iznosu Li magnetskoga toka prvoga vodiča može se rastaviti na dio a) zbog toka od površine toga prvog vodiča do osi drugoga i na dio b) zbog toka prvoga vodiča od njegove osi do njegove površine; na slična se dva dijela c) i d) zbog toka izvan i unutar drugoga vodiča može rastaviti i doprinos drugoga vodiča. Da bi se našao dio a), dosta je uz upotrebu formule (148)

iz C-25. izračunati element toka $B \cdot l \cdot dx$ kroz infinitezimalnu šrafiranu površinu $l \cdot dx$ na sl. 188. i dobiveni izraz integrirati u granicama r i d , što daje rezultat:

$$\int_r^d B \cdot l \cdot dx = \int_r^d \mu_0 \cdot \frac{i}{2x\pi} \cdot l \cdot dx = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot l \cdot \ln \frac{d}{r}$$

Slično bi se za dio c) dobilo $\frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot l \cdot \ln \frac{d}{r'}$. Kod proračunavanja dijela b) treba uzeti u obzir da u unutarnjosti vodiča, ako se smije pretpostavljati jednolika gustoća struje u cijelom prerezu vodiča, za jakost polja H vrijedi relacija (148') iz C-25; ako je još pripadni elementarni tok $\mu_0 \cdot \frac{ix}{2r^2\pi} \cdot l \cdot dx$, kao tok zakvačen tek s jednim dijelom struje i vodiča, dopušteno brojiti razmjerno manje za vodič kao cjelinu, i to toliko puta manje, koliko odgovara omjeru $\frac{x^2}{r^2}$ prereza $r^2\pi$ cijeloga vodiča i dijela $x^2\pi$, s kojim je tok povezan (tako da spomenuti elementarni tok kod proračunavanja dijela b) treba snabdjeti faktorom $\frac{x^2}{r^2}$), integrirajući od 0 do r dobit će se, neovisno o iznosu r , za dio b):

$$\int_0^r \mu_0 \cdot \frac{ix}{2r^3\pi} \cdot \frac{x^2}{r^2} \cdot l \cdot dx = \frac{\mu_0 il}{2r^3\pi} \cdot \frac{r^4}{4} = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \cdot i$$

a isti iznos dobio bi se sličnom integracijom od 0 do r' i za dio d). Ukupno iz svega izvedenoga slijedi relacija:

$$Li = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \cdot \left(2 \cdot \ln \frac{d}{r} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \ln \frac{d}{r'} + \frac{1}{2} \right) \cdot i$$

a time, nakon kraćenja sa i i stezanja sume logaritama u logaritam produkta, i formula (219), koju je trebalo dokazati.

Specijalno bi za induktivitet L_1 u henrijima po km duljine voda ($l = 1000$ m), uz pretpostavke neferomagnetičkog materijala ($\mu_0 = 4\pi/10^7$ H/m) i jednakih polumjera $r = r'$ vodiča, koje će odgovarati običnim prilikama u praksi, vrijedilo numerički [kraj $\ln(d^2/r^2) = 2 \cdot \ln(d/r)$]:

$$L_1 = \frac{10^3}{10^7} \cdot \left(4 \cdot \ln \frac{d}{r} + 1 \right) \text{ H/km} = 0,4 \cdot \ln \frac{d}{r} + 0,1 \text{ mH/km} \quad (220)$$

Ako su vodiči od željeza, samoinduktivitet uzdušnoga voda ne može se navesti kao neka određena konstanta zbog promjenljivoga $\mu = \mu_0 \mu'$ unutar vodiča; približno se kraj $r = r'$ umjesto (220) katkad stavlja (pretpostavljajući određeno konstantno μ , a time i μ' željeza):

$$L_1 = 0,4 \cdot \ln \frac{d}{r} + 0,1 \cdot \mu' \text{ mH/km} \quad (220')$$

134. I međusobni induktiviteti dadu se lako računati u osobito jednostavnim slučajevima. Neka na pr. treba uz pretpostavku prstena P od željeza konstantne permeabilnosti $\mu = \mu_0 \mu'$ naći koeficijente M i M' u smislu definicija iz C-121. za sustav dvaju svitaka 1 i 2 sa w_1 i w_2 zavoja jednoliko namotanih po cijeloj duljini l prstena P, kojemu presjek neka bude S .

Budući da ne će biti rasipanja, teći će isti tok kroz ma koji zavoj ma kojega od oba svitka. Tako će se specijalno strujom i_1 svitka 1 i njom izazvanom indukcijom B_1 proizvesti kroz svaki zavoj svitaka 1 i 2 tok $B_1 S = \mu w_1 i_1 S/l$, pa će tokovi $\Psi_{11} = L_1 i_1$ i $\Psi_{12} = M i_1$ iz C-121. biti $w_1 \cdot \mu w_1 i_1 S/l$ i $w_2 \cdot \mu w_1 i_1 S/l$, iz čega pored relacije $L_1 = \mu w_1^2 S/l$, koja je samo specijalni slučaj formule (218), slijedi (ako je $\mathcal{R}$ magnetski otpor prstena P):

$$M = \frac{\mu w_1 w_2 S}{l} = \frac{\mu_0 \mu' w_1 w_2 S}{l} = \frac{w_1 w_2}{\mathcal{R}} \quad (221)$$

Analognim razmatranjima tokova svitaka 2 i 1 proizvedenih strujom i_2 svitka 2 i njom izazvanom indukcijom B_2 dobile bi se relacije $L_2 = \mu w_2^2 S/l$ i $M' = \mu w_1 w_2 S/l = w_1 w_2 / \mathcal{R}$. Time se usput na promatranom primjeru razabire i dublji smisao relacije $M = M'$, primijenjene već u C-121.

135. U netom promatranom primjeru nije bilo magnetskoga rasipanja i magnetska induktivna veza strujnih krugova svitaka 1 i 2 bila je, koliko je moguće, najtješnija. Tokovi svitaka 1 i 2 zatvarali su se kroz potpun ili savršen magnetski krug,

a pripadne veličine M , L_1 i L_2 udovoljavale su, kako je lako neposredno razabrati, relaciji: $M^2 = L_1 L_2$, odn. relaciji: $M^2/L_1 L_2 = 1$, koja se može smatrati karakterističnom za »potpuno« ili »savršeno« magnetsko vezanje dvaju krugova struje.

Naprotiv kod manje tijesne induktivne veze dvaju krugova 1 i 2, kad prolazi samo dio toka kruga 1 kroz krug 2, i obrnuto: samo dio toka kruga 2 kroz krug 1, bit će: $M^2 < L_1 L_2$, odn.: $M^2/L_1 L_2 < 1$.

Konačno se može dogoditi da su krugovi 1 i 2 tako daleko ili u takvom međusobnom položaju, da induktivne veze između njih i nema; tada bi bilo: $M = 0$, a po tomu također: $M^2/L_1 L_2 = 0$.

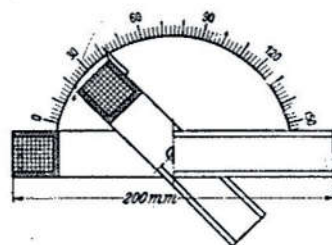
Kako se vidi, što je vezanje slabije, to manje postaje M^2 prema $L_1 L_2$, tako da omjer $k = M^2/L_1 L_2$ može služiti kao mjerilo za *stepen vezanja* dvaju krugova struje. Što je taj omjer bliži jedinici, to je bliže vezanje krugova idealnom slučaju potpunoga vezanja; što je bliži nuli, to je vezanje slabije, a uz $M^2/L_1 L_2 = 0$ vezanja uopće nema. Zato se $k = M^2/L_1 L_2$ (u postocima: $k\% = 100 M^2/L_1 L_2$) i zove »faktor vezanja«; katkad, osobito u radiotehnici, upotrebljavaju za karakteriziranje stepena vezanja i drugi korijen veličine k , dakle veličinu: $m = M/\sqrt{L_1 L_2}$ (u postocima: $m\% = 100 M/\sqrt{L_1 L_2}$).

136. U zamršenijim slučajevima samoinduktiviteti i međusobni induktiviteti određuju se mjerenjima. Ima različitih metoda za mjerenja veličina L i M . Među najpoznatije spadaju metode »Wheatstonecova mosta za izmjenične struje«, o kojima će biti govora kod izmjeničnih struja.

Međusobni induktiviteti mogu se mjeriti i balistički. Ako na pr. treba izmjeriti M sustava dvaju svitaka sa w_1 i w_2 zavoja, može se prvi svitak priključiti na izvor istosmjerne struje na način svitka M iz sl. 160. na str. 257., a drugi na način svitka N iz spomenute slike na balistički galvanometar poznate konstante C_B . Komutacijom struje i_1 prvoga svitka, očitane na ampermetru, dakle promjenom struje prvog svitka s iznosa i_1 na iznos $-i_1$, promijenit će se tok kroz drugi svitak od Mi_1 na $-Mi_1$, dakle ukupno za iznos $2Mi_1$, a to će po formulama (177) i (178) iz C-64. proizvesti, uz ukupni otpor R_2 galvanometarskoga kruga korespondentan iznosu C_B balističke konstante, balistički otklon $\alpha_1 = 2Mi_1/C_B R_2$, iz kojega se lako može naći M (uz poznato M ovim se načinom može odrediti C_B galvanometra). Kad bi se struja i_1 , umjesto da se komutira, tek prekinula, t. j. promijenila s iznosa i_1 na iznos 0, balistički bi otklon bio: $\alpha_1 = Mi_1/C_B R_2$.

Kod mnogih se mjerenja upotrebljavaju točno određeni, t. zv. *normalni* samoinduktiviteti i međusobni induktiviteti, kojima se iznos na pr. proračuna na temelju relacije (218) odn. (221).

Za neka mjerenja, za svrhe radiotehnike itd., potrebni su *promjenljivi* induktiviteti: oni se realiziraju po shemi u sl. 189. s dva svitka od kojih je jedan vrtiv unutar drugoga. Kod međusobnih induktiviteta svici nisu u vodljivoj vezi. Kod samo-



Sl. 189.

induktiviteta oni su spojeni u seriju ili paralelno, pa ako je na pr. uzet serijski spoj i ako su L_1 i L_2 samoinduktiviteti obih svitaka, a M međusobni induktivitet za određeni međusobni položaj njihov, ukupni samoinduktivitet cijele kombinacije jest, kako je lako pokazati: $L = L_1 + L_2 \pm 2M$, pri čemu treba uzeti član $+ 2M$ ili $- 2M$, prema tomu da li se kod protjecanja struje napravom magnetski tokovi obih svitaka podupiru ili slabe.

Gdje su potrebni svici bez samoindukcije (kako je to na pr. kod realizacije mjernih otpora) primijenit će se *bifilarno* (dvonitno) namatanje po shemi u sl. 190., uz koje se magnetski učinci obih polovica namotaja međusobno poništavaju.

137. Vraćajući se na razmatranja iz C-127. nađimo integracijom diferencijalne jednačbe (215) izraz za struju i iz te jednačbe. Separacijom varijabli, koja je moguća uz konstantno E , dobili bismo iz (215):

$$\frac{di}{i - \frac{E}{R}} = -\frac{R}{L} \cdot dt$$

a integracijom, označujući sa $\ln C$ neku konstantu (konstantu integracije):

$\ln \left(i - \frac{E}{R} \right) = -\frac{R}{L} \cdot t + \ln C$, odn. također:

$$i - \frac{E}{R} = C \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \quad (222)$$

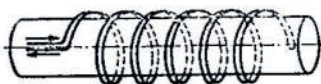
Konstanta integracije ovisi o početnim uvjetima. Tako kod *ukapćanja struje* stavljeno u (222) $i = 0$ za $t = 0$ daje: $0 - E/R = C \cdot 1$, dakle $C = -I$ (uz $E/R = I$). S ovom vrijednošću za C prelazi (222) u:

$$i = I \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) \quad (222')$$

Kod *prekidanja struje*, nakon što je i poslije spajanja već postiglo konačnu vrijednost I , u momentu $t = 0$ iskopćanog E (uz R ostavljeno isto), bit će $i = I$ i po tomu $C = I$, tako da (222) u ovom slučaju postaje:

$$i = I \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \quad (222'')$$

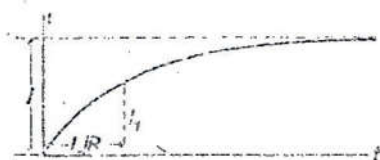
Po (222') varira struja i kod ukapćanja od početne vrijednosti $i = 0$ po krivulji u sl. 191. rastući postepeno sve slabije i približavajući se asimptotski graničnoj vrijednosti $i = I$. Teoretski bi i postiglo konačnu vrijednost I tek iza vremena $t = \infty$, no praktički se redovito i brzo toliko približi vrijednosti I da se razlika između i i I ne da više ni konstatirati. Osobito je zanimljiv moment $t = \tau = L/R$, za koji eksponent od e



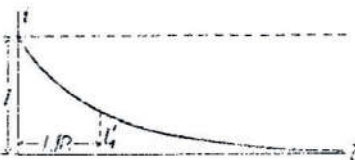
Sl. 190.

postaje jednak -1 ; tada i poprima iznos $I_1 = I - I/e = 0,632 \cdot I$, t. j. nakon vremena $\tau = L/R$ postigne i okruglo dvije trećine svoje konačne vrijednosti. Kvocijent $\tau = L/R$ zove se *vremenska konstanta* svitka, odn. kruga struje.

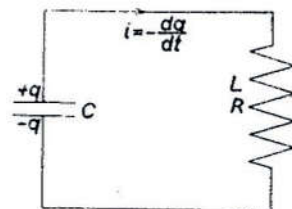
Po (222'') struja iskapčanja pada postepeno asimptotski se približavajući iznosu 0 (sl. 192.). Struje bi dakle teoretski nestalo istom poslije vremena $t = \infty$; no u praksi i redovito padne nakon relativno kratkoga vremena na praktički neza-



Sl. 191.



Sl. 192.



Sl. 193.

mjetljiv iznos. Nakon vremena $\tau = L/R$ (vremenska konstanta) struja padne na iznos $I'_1 = 0,368 \cdot I$, t. j. okruglo trećinu svoje vrijednosti na početku iskapčanja.

Evo još tabele, iz koje se vidi, kako naglo struja iščezava, odn. nastaje u svitku određenoga omjera $\tau = L/R$:

Tabela IV.

Vrijeme t	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	8τ
Iznos $e^{-t/\tau}$	0,368	0,135	0,050	0,0183	0,0067	0,0003
Iznos $1 - e^{-t/\tau}$	0,632	0,865	0,950	0,9817	0,9933	0,9997

Vremenska konstanta τ svitaka obično iznosi tek malen dio sekunde; kod velikih elektromagneta i drugih velikih samoindukcija dosegne τ više sekunda. Već je prije, kod sličnih računa s kondenzatorom kapaciteta C i otporom R , dobiveno da je »vremenska konstanta« ovakvog spoja dana sa $\tau = RC$ (B-48.).

Konstruktivno se τ može dobiti kao apscisa sjecišta tangente za $t = 0$ krivulje iz sl. 191. s pravcem $i = I$, ili pak kao apscisa sjecišta tangente za $t = 0$ krivulje iz sl. 192. s osi apscisa.

138. Razmotrimo još *izbijanje kondenzatora* kapaciteta C kroz vodič otpora R i induktiviteta L . Na početku izbijanja, u vrijeme $t = 0$, kondenzator neka ima naboj q_0 (naboj $+q_0$ na gornjoj i naboj $-q_0$ na donjoj ploči u sl. 193.), dakle napon $u_0 = q_0/C$; nakon vremena t naboj i napon neka su q i $u = q/C$. Kao smjer, u kojemu ćemo struju i u momentu t kroz priključeni vodič računati pozitivno, odabrat ćemo u ovom slučaju smjer struje izbijanja kondenzatora, t. j. označit ćemo pozitivno struju i proizvedenu opadanjem za iznos dq ili negativnim porastom $-dq$ naboja q kondenzatora po relaciji: $i \cdot dt = -dq$, odn. $i = -dq/dt$.

Do osnovne jednadžbe za naboj q doći ćemo, ako E u formuli (215) iz C-127. zamijenimo sa $u = q/C$. Time dolazimo na polaznu relaciju: $q/C = R \cdot i + L \cdot di/dt$, koja se primjenom relacija $i = -dq/dt$ i $di/dt = -d^2q/dt^2$ daje svesti na homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugoga reda s konstantnim koeficijentima i desnim članom nula:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (223)$$

Po poznatoj metodi do općega integrala jednadžbe (223) dolazi se uz pomoć njezine »karakteristične jednadžbe«:

$$r^2 + \frac{R}{L} \cdot r + \frac{1}{LC} = 0$$

Već prema tomu kakvi su korijeni karakteristične jednažbe, imat će opći integral diferencijalne jednadžbe (223) različita svojstva. Treba razlikovati tri mogućnosti: a) korijeni r_1 i r_2 karakteristične jednadžbe su realni različiti brojevi, b) korijeni r_1 i r_2 su realni i međusobno jednaki, te c) korijeni r_1 i r_2 su kompleksni brojevi (poznato je, da oni onda moraju biti konjugirano kompleksni brojevi, t.j. ako je prvi $r_1 = -\eta + j\omega$, onda je drugi $r_2 = -\eta - j\omega$, gdje »j« znači »imaginarnu jedinicu« $\sqrt{-1}$, a $-\eta$ i ω su realni brojevi).

Proučit ćemo sve tri nabrojene mogućnosti, zadržavši se osobito kod treće, najzanimljivije, jer tu ćemo naići na *oscilatorne* struje, dakle na *električke titraje*.

139. Razmatrajući najprije slučaj a) realnih i različitih korijena r_1 i r_2 sjetimo se da prema formulama:

$$r_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad r_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

r_1 i r_2 mogu biti samo onda realni, ako je izraz pod korijenom u pripadnim formulama pozitivan, dakle uz uvjet: $R^2 > 4L/C$. A lako je i dalje razabrati, da su r_1 i r_2 uvijek negativni. Opći integral diferencijalne jednadžbe (223) glasi, kako je poznato:

$$q = C' \cdot e^{r_1 t} + C'' \cdot e^{r_2 t} \quad (224)$$

ako su C' i C'' dvije konstante (konstante integracije). Naboj kondenzatora q izlazi po tomu kao algebarska suma dviju eksponencijalnih funkcija s negativnim eksponentima (jer su r_1 i r_2 negativni). Svaka od ovih funkcija konvergira s porastom t prema nuli, pa i za naboj q mora to isto vrijediti.

Kondenzator dakle postepeno gubi naboj, izbija se bez oscilacija, *aperiodski*. Bližim razmatranjem početnih uvjeta lako je vidjeti da će C' i C'' uvijek biti protivnoga predznaka, tako da algebarska suma, koja čini izraz za q , predstavlja zapravo razliku dviju različitih pozitivnih eksponencijalnih funkcija s negativnim eksponentima $r_1 t$ i $r_2 t$. Te su funkcije na sl. 194.a) označene sa A i B; na slici je vidljiv i zakon, po kome opada naboj $q = A - B$ (izvučena linija).

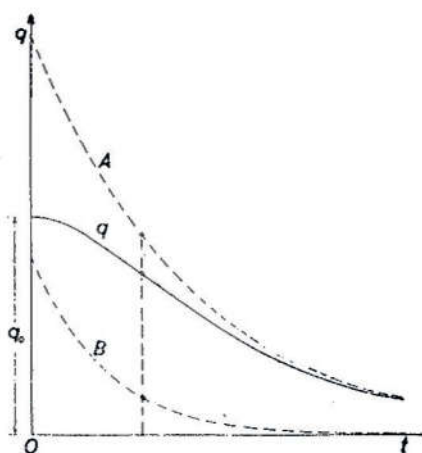
Kod poznatoga zakona variranja naboja q s vremenom t (a time i zakona mijenjanja napona $u = q/C$) lako bi bilo naći i zakon mijenjanja jakosti struje i , koja nije drugo nego negativna vremenska derivacija veličine q . Izlazi da je i diferencija dviju eksponencijalnih funkcija s negativnim eksponentima: $i = C - D$; samo ovdje obje funkcije imaju istu početnu vrijednost, t. j. $C = D$ za $t = 0$, tako da je na početku izbijanja $i = 0$, kako odgovara i neposredno početnim uvjetima.

Kako za $t = \infty$ postaje i također jednako 0, može se zaključiti da i najprije raste od 0 do nekoga maksimuma, zatim asimptotski opada opet k 0; v. sl. 194.b).

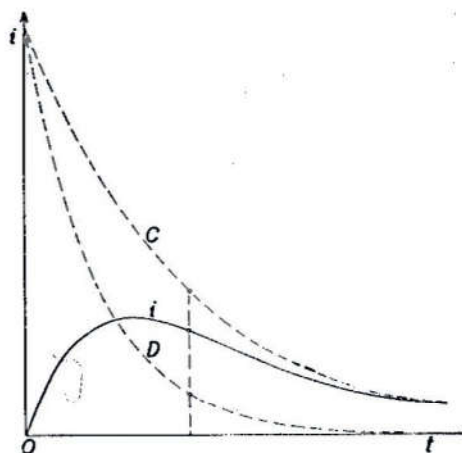
140. Oba korijena karakteristične jednadžbe bit će jednaka u *graničnom* slučaju: $R^2 = 4L/C$; tada r_1 i r_2 postaju jednaki negativnom broju $r_0 = -R/2L$. Po teoriji diferencijalnih jednadžbi za ovakav slučaj jednaki korijeni opći integral ima oblik:

$$q = C' \cdot e^{r_0 t} + C'' \cdot t \cdot e^{r_0 t} = (C' + C''t) \cdot e^{r_0 t} \quad (225)$$

iz kojega se vidi, da naboj q kondenzatora mora opadati s rastućim t prema nuli. Naime q je umnožak linearne funkcije $C' + C''t$ koja raste u beskonačnost sa t , i jedne eksponencijalne s negativnim eksponentom, koja s porastom t konvergira prema 0 mnogo naglije, nego li $C' + C''t$ raste u beskonačnost, tako da q kao pro-



Sl. 194.a)



Sl. 194.b)

dukt tih funkcija ipak konvergira prema 0. Slično jakost struje, koja počinjući s iznosom $i = 0$ za $t = 0$ nakon nekoga vremena postigne određeni maksimum, također konvergira prema 0 za $t = \infty$. I u ovom »graničnom« slučaju ispražnjivanje kondenzatora je dakle još »aperiodično«.

141. Za slučaj c) uvjet je: $R^2 < 4L/C$, tako da izraz pod korijenom u formuli za r_1 i r_2 ispada negativan, i izraz $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ pozitivan. Korijen iz posljednjega izraza je realan, pa ako pozitivan iznos njegov označimo sa ω i član $-\frac{R}{2L}$ sa $-\eta$, bit će doista $r_1 = -\eta + j\omega$ i $r_2 = -\eta - j\omega$ konjugirano kompleksni brojevi. Opći integral (224) može se sada primjenom poznatoga poučka $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \cdot \sin \omega t$ ovako preurediti:

$$q = e^{-\eta t} \cdot [(C' + C'') \cdot \cos \omega t + j \cdot (C' - C'') \cdot \sin \omega t]$$

tako da se uz uvođenje dviju novih konstanti $C_1 = C' + C''$ i $C_2 = j(C' - C'')$ dobiva:

$$q = e^{-\eta t} \cdot (C_1 \cdot \cos \omega t + C_2 \cdot \sin \omega t) \quad (226)$$

Dijeljenjem ovoga izraza sa C dobio bi se napon u , a deriviranjem po t negativni iznos jakosti struje i . Konstante C_1 i C_2 odredile bi se stavljanjem, u izraz (226) i njegovu derivaciju, početnih uvjeta: $q = q_0$ i $i = 0$ kod $t = 0$; lako je verificirati, da to daje: $C_1 = q_0$ i $C_2 = \eta q_0 / \omega = q_0 R / 2 \omega L$ (tako da su obje konstante pozitivne).

Supstitucijom dobivenih vrijednosti za C_1 i C_2 i primjenom stavka elementarne trigonometrije, po kojemu se izrazi oblika $C_1 \cdot \cos \omega t + C_2 \cdot \sin \omega t$ mogu uvijek svesti na oblik $K \cdot \sin(\omega t + \psi)$ s novim konstantama K i ψ na jednostavan način vezanima sa C_1 i C_2 , odn. s veličinama, kojima su C_1 i C_2 određene (izlazi: $K = q_0 / \omega \sqrt{LC}$ i $\tan \psi = 2 \omega L / R$), dobili bi se, uz pripomoć još nekih transformacija i uz uvođenje početnoga napona kondenzatora $u_0 = q_0 / C$, za q i i ovi konačni izrazi:

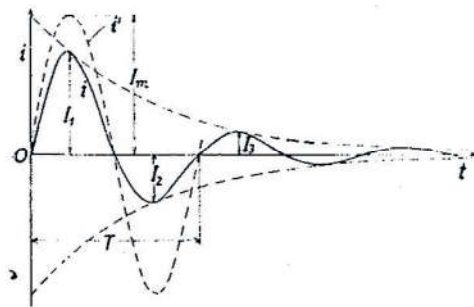
$$q = \frac{q_0}{\omega \sqrt{LC}} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sin(\omega t + \psi) = \frac{u_0}{\omega} \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sin(\omega t + \psi) \quad (227)$$

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{\omega CL} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sin \omega t = \frac{u_0}{\omega L} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sin \omega t \quad (228)$$

Kako se vidi ispražnjivanje kondenzatora zbiva se »oscilatorno«: nastaju *titraji*, i to *prigušeni* titraji (zbog faktora $e^{-\frac{R}{2L}t}$) s posve određenim »brojem titraja na sekundu« ili »numeričkom frekvencijom« (C-63.):

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (229)$$

odn. s titrajnim vremenom $T = 1/f = 2\pi/\omega$. Zato se kombinacije po sl. 193. sa C , L i R uz ispunjen uvjet za slučaj c) i zovu električki »titrajni krugovi«.



Sl. 195.

Između titraja naboja q (i napona $u = q/C$) i titraja struje i postoji »razlika faza«, t. j. kut sinusa u izrazu za q nadvisuje kut sinusa u izrazu za i za kut ψ određen relacijom $\tan \psi = 2 \omega L / R$, dakle za kut manji i samo na graničnom prelazu jednak pravom kutu; u vezi s tim maksima i minima struje i nastupaju *kasnije* od maksima i minima naboja q (odn. napona $u = q/C$) za interval vremena manji ili najviše jednak $T/4$. Za $t = 0$ je $i = 0$, što

odgovara početnim uvjetima. Za prvi maksimum I_1 struje po sl. 195. (vrlo približno, stavljajući u izraz (228): $\omega t = \pi/2$, odn. $\sin \omega t = 1$) izlazi:

$$I_1 = \frac{u_0}{\omega L} \cdot e^{-\frac{R\pi}{4\omega L}}$$

142. Vrlo često kod titrajnih krugova visokih frekvencija f iznos ωL daleko nadmašuje iznos R , pa se ψ malo razlikuje od pravoga kuta; u tom slučaju u momentima maksima i minima veličina q i u prolazi i kroz nul-točke, i obrnuto. Ako je, još specijalnije, $R^2/4L^2$ vrlo maleno, pa se može zanemariti, postaje faktor zbog kojega dolazi do prigušenja u (227) i (228) jednak 1, pa »prigušeno oscilatorni« pojavi u titrajnom krugu sa C , L i R postaju »neprigušeno oscilatorni«, t. j. oni pokazuju tendenciju da se trajno podržavaju uopće ne slabeći; uspor. crtkanu sinusoidu u sl. 195. s maksimalnom vrijednošću:

$$I_m = u_0/\omega L = u_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Za frekvenciju f vrijedi kod ovih električkih oscilacija mjesto relacije (229) jednostavnija formula:

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (229')$$

a po tom za titrajno vrijeme T naprosto: $T = 2\pi \sqrt{LC}$, što nije drugo nego glasovita »Thomsonova (Kelvinova) formula«, nađena već 1853.

Titrajni krugovi su osobito zato od važnosti, što pružaju mogućnost proizvodjenja strujâ vrlo visokih frekvencija, s kakvima radi radiotehnika. Formula (229') za f , i na nju vezana Thomsonova formula za T , izvedene uz pretpostavku neprigušenih titrajnih krugova, vrijede vrlo približno i za relativno slabo prigušene titrajne krugove, kakvi redovito dolaze u radiotehnici. Dalja je radiotehnička primjena titrajnih krugova njihovo osjetljivo reagiranje (resonancija) na izmjenične EMS frekvencije f po formuli (229'); više o tomu kod izmjeničnih struja.

143. Energetički je pojav oscilacija titrajnih krugova lako shvatiti. U bitnosti se tu radi o međusobnim pretvorbama oblika energije električkoga polja nabijanoga kondenzatora i magnetskoga polja samoinduktivnoga vodiča protjecanoga strujom. Te se pretvorbe podržavaju dijelom strujama izbijanja kondenzatora, dijelom strujama samoindukcije, kojima se izbijeni kondenzator ponovno nabije u suprotnom smislu; uz to dolazi do gubitaka zbog Jouleove topline, što se stvara kod prolaza titrajnih struja kroz samoinduktivni vodič s otporom, pa se iznos raspoložive energije sve više smanjuje i »njihanje« energije između električkoga i magnetskoga oblika, a time i titraji krugova sve više slabe.

Prema tomu bi, pretpostavljajući odnose kad nema odvoda energije iz zadannog titrajnog kruga (da ne dolazi do »isijavanja« elektromagnetskih valova po C-144., ni prenosa energije na pr. preko međuinaktivne veze na neki drugi titrajni krug i sl.), bio samo otpor R uzrok prigušenju električkih oscilacija u krugovima sa C , L i R , pa kad do stvaranja te topline ne bi dolazilo, t. j. kad bi se R smanjilo na 0, titraji bi se trajno podržavali. Naprotiv uz naročito velike iznose R , počevši od graničnoga iznosa $R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ pa na gore, a naravno pogotovo kod izbijanja kondenzatora kroz čisti otpor R kao u B-48., ni ne dolazi do električkih titraja.

Slični su odnosi u mehanici kod njihala, kod titraja glazbene viljuške (u vakuumu), kod gibanja vode u U-cijevi itd.; tu umjesto njihanja energije između električkoga i magnetskoga polja dolazi do njihanja između oblika potencijalne i kinetičke energije, a ulogu otpora igraju zapreke gibanja kao trenje i sl. uz koje njihaji postepeno slabe (kod vrlo jakoga trenja, na pr. kod gibanja njihala u vrlo viskoznom sredstvu, ni ne dolazi do njihaja, nego pojav teče aperiodski). Amo spadaju i »periodska«, »granično aperiodska« i »gmizava« gibanja galvanometarskih sustava, na kojima se osniva i teorija balističkih galvanometarskih mjerenja (A-36.; C-21.; C-64.).

144. Egzistenciju oscilatornih izbijanja utvrdio je pokusom već davno Feddersen motreći uz pomoć brzo rotiranoga zrcala iskre izbijanja kondenzatora kroz samoinduktivne vodiče (danas se najjednostavnije električki titraji demonstriraju oscilografski); tek kasnije se otkrilo da, uz izvjesne preduvjete, električki titrajni krugovi mogu također više ili manje »isijavati« energiju u vanjski prostor u obliku »elektromagnetskih valova« (v. pogl. o radiotehnici). To dakako povećava gubitke energije i proizvodi jače prigušenje titraja nego kod utjecaja samo vlastitog otpora titrajnog kruga (sve se događa kao da se stvarni otpor R povećao za neki fiktivni »otpor ispijavanja« R_s , pa titrajni krugovi s isijavanjem imaju prigušenje korespondentno ne otporu R nego otporu $R + R_s$). Slično i glazbena viljuška, titrajući u uzduhu, isijava jedan dio svoje energije u okolni uzduh u obliku »zvučnih valova«.

Kvocijent k susjednih amplituda istoga predznaka kod ma kakvih prigušenih titraja zove se *omjer prigušenja*, a njegov prirodni logaritam δ *logaritmički dekrement prigušenja*. Ako su I_1, I_2, I_3 itd. pozitivne amplitude titraja po sl. 195., bilo bi: $k = I_1/I_2 = I_2/I_3 = \dots$ i $\delta = \ln k$. Kod električkih krugova sa C, L i R odmah se vidi da je:

$$\delta = \eta T = \frac{RT}{2L} \approx \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (230)$$

Dok dakle frekvencija f vlastitih titraja ne prejako prigušenih titrajnih krugova ovisi po (229') praktički samo u umnošku CL , prigušenje tih titraja ovisno je osim o R još i o kvocijentu C/L (tako da je za što manje prigušenje uz dano R bolje realizirati željenu frekvenciju f produktom CL kod kojega je C što manje i L što veće). Kod titraja bez prigušenja bilo bi: $k = 1$ i $\delta = 0$.

VJEŽBE UZ POGLAVLJE C):

65. Magnetometar po sl. 121. daje u istraživanom polju u uzduhu otklon $\alpha = 52^\circ$ iz sl. 122.), a u unutarnjosti dugoga svitka sa 9 zavoja po cm duljine i strujom 3 A otklon $\alpha = 36^\circ$; naći H i B istraživanoga polja.

$$[39 \text{ A/cm} (= 49 \text{ Oe}); 49 \cdot 10^{-8} \text{ Vs/cm}^2 (= 49 \text{ G})]$$

66. Izvesti Biot-Savartov zakon uz pomoć formula (145) i (146) iz C-19.

[Primijeniti formulu (49) iz A-86.; rez.: kao u C-26.]

67. Naći (uz upotrebu Biot-Savartova zakona) magnetsku indukciju u točki M na osi kružnoga vodiča s polumjerom r , središtem O i strujom I , za dano $OM = x$.

$$[B = \mu_0 \cdot Ir^2/2 \sqrt{(r^2 + x^2)^3}]$$

68. Uz istu cijev i isto v kao u vj. 5. i sl. 57. na str. 114. zamisliti katodne zrake umjesto djelovanju električkoga polja iz vj. 5. podvrgnute na području korespondentnom međuprostoru pločica iz sl. 57. djelovanju magnetskoga polja indukcije 6 G u smjeru okomitom na ravninu crtanja; naći polumjer r staze zraka u području polja i pripadni otklon x mrlje (u izrazu za x zanemariti m^2 prema r^2).

$$[r = 22 \text{ cm}; x \approx BQ_0 ml/m_0 v = 19,1 \text{ mm}]$$

69. Rasporedajem po sl. 127. s konstantom K formule (147) jednakom 50 A/d.sk. mjere se magnetski naponi uzduž staza s_1 i s u sl. 126.; ako se kod mjerenja po s_1 dobije balistički otklon $\alpha_1 = 15$ d.sk., koliki će biti balistički otklon kod mjerenja po s , ako su u sl. 126. $I_3 = 60$ A i $I_4 = 90$ A. [12 d.sk.]

70. Naći prosječni inducirani napon i prosječnu jakost struje u svitku sa 800 zavoja otpora 8Ω premoštenomu otporom 12Ω uz pretpostavku, da se magnetski tok 0,002 Vs po zavoju obrne u vremenu 0,2 s. [16 V; 0,8 A]

71. Kod rasporedaja po sl. 152. neka je $B = 0,5 \text{ T} = 0,00005 \text{ Vs/cm}^2$ i pravokutni okvir sa $AB = 10 \text{ cm}$ neka je realiziran žicama debljine 2 mm iz bakra vodljivosti $57 \text{ S} \cdot \text{m/mm}^2$; koliki bi uz zanemaren prelazni otpor doticajnih mjesta kod A i B i brzinu $v = 6 \text{ m/s}$ prečke AB bili napon i struja indukcije, te kolika bi mehanička sila i mehanička snaga bile potrebne za gibanje prečke AB u času, kad je $x = 30 \text{ cm}$. [0,3 V; 67,1 A; 3,36 N ili 0,0336 VAs/cm ($\approx 0,34 \text{ kg}^*$); 20,1 W]

72. Pravokutni svitak sa 80 zavoja duljine 12 cm i visine 8 cm rotira po shemi u sl. 143. u polju indukcije 0,12 T sa 1500 okretaja na minutu; naći inducirani napon e svitka. [$e = 14,5 \cdot \sin 157t$]

73. Kod balističkih mjerenja po sl. 160. prsten P neka ima srednju duljinu 50 cm i prerez 6 cm^2 , te neka se uz primarno 400 i sekundarno 40 zavoja komutiranjem primarnih struja 0,1; 0,3; 1; 3 i 10 A dobiju balistički otkloni 62; 102; 136; 155 i 179 d. sk. s galvanometrom otpora $R_g = 700 \Omega$, sa $R_a = 800 \Omega$ i pripadnim $C_B = 0,3 \mu\text{As/d.sk.}$; koliki će biti potreban otpor R' iz sl. 160., ako svitak N ima 4Ω i kolike će biti koordinate H u A/cm i B u G mjerenjem određivanih točaka krivulje $B = f(H)$ željeza prstena.

$$[796 \Omega; (0,8; 5810), (2,4; 9560), (8; 12750), (24; 14530) \text{ i } (80; 16780)]$$

74. Da bi se odredila konstanta K iz formule (147) za određenu kombinaciju mjerila magnetskoga napona i galvanometra, obuhvaćeno je tim mjerilom 320 zavoja nekoga svitka struje $I = 4 \text{ A}$ i prekidom struje I izazvan je balistički otklon $\alpha_1 = 12,8$ d.sk.; kolika izlazi konstanta K , te kolika je konstanta K_1 iz C-67., ako kod otpora $R = 1600 \Omega$ strujnoga kruga mjerila galvanometar ima $C_B = 0,125 \mu\text{As/d.sk.}$ [$K = 100 \text{ A/d.sk.}$; $K_1 = 0,5 \cdot 10^6 \text{ A/Vs.}$]

75. Naći koeficijent η Steinmetzove formule (193) za željezne limove podvrgnute izmjeničnom magnetiziranju sa $B_m^* = 9000 \text{ (G)}$ kod $f = 50 \text{ Hz}$ uz pretpostavku da se planimetriranjem za površinu pripadne petlje histereze preračunanu na mjerila $1 \text{ Oc} = 1 \text{ cm}$ i $1 \text{ G} = 1 \text{ cm}$ dobije 32000 cm^2 . [$0,00120 \cdot 10^{-7}$]

76. Pretpostavljajući da limovi iz vj. 75. imaju debljinu 0,5 mm i konstantu k iz C-94. jednaku $2 \cdot 10^{-13}$, naći broj kalorija po dm^3 željeza i sekundi stvaranih: a) histerezom, b) vrtložnim strujama. [3,04 i 2,42 cal/ dm^3s]

77. Na bazi relacije (197) iz određenih uz $B_m = 1,5 \text{ T}$ ukupnih gubitaka N_{Fe} količine 10 kg izvjesnih limova 69 W kod 42 Hz i 116 W kod 60 Hz, naći pripadne ϵ i σ formule (197), te »konstantu gubitaka« V_{15} (razumijevanu kod 50 Hz). [4,3 i 7,2; 8,9 W/kg]

78. Naći ukupne gubitke u željezu transformatora za 50 Hz s jezgrom od 320 kg limova debljine 0,35 mm i s konstantama iz formule (197) za taj lim: $\epsilon = 2,5$ i $\sigma = 0,6$ uz $B_m = 1,2 \text{ T}$. [645 W]

79. Uz koju će magnetsku indukciju B u G, odn. jakost polja H u A/cm iznositi prostorna gustoća energije magnetskoga polja u uzduhu 0,1 Ws/ cm^3 ; kolika bi ta gustoća bila u uzduhu s indukcijom 40000 G, kakva se postizava u međuprostoru među zašiljenim polnim nastavcima velikih elektromagneta za magnetska istraživanja. [$B \approx 5000 \text{ G}$; $H \approx 4000 \text{ A/cm}$; $A_1 \approx 6,4 \text{ Ws/cm}^3$]

80. Naći R_f/R_0 iz C-71. kod 6 kHz za žice promjera 2 mm a) iz bakra i b) iz manganina (sa $\times$ po tabeli I. iz B-21.), te c) iz željeza s pretpostavljenim $\times = 10 \text{ S} \cdot \text{m/mm}^2$ i konstantnim $\mu' = 300$; naći R_f/R_0 i d) za 2 mm-žicu iz bakra kod 600 kHz. [1,038; 1,00006; 4,48; 6,07]

81. Kolikom bi se silom po metru duljine odbijali 10 cm razmaknuti vodiči voda istosmjerne struje protjecani »strujom kratkoga spoja« od 20000 A. [800 N/m ($\approx 82 \text{ kg}^*/\text{m}$)]

82. Pored točke $\Phi = 2,0 \cdot 10^6 \text{ M}$ kod $I_M = 2,63 \text{ A}$ odrediti još točke s ordinatama $0,8 \cdot 10^6$; $1,5 \cdot 10^6$ i $1,8 \cdot 10^6 \text{ M}$ »magnetske karakteristike« (C-103.) stroja iz C-108. (pretpostavljajući magnetni namotaj od $w = 2000$ zavoja). [Apscise: 0,80; 1,54 i 2,06 A]

83. Naći omjer magnetskih otpora željeznoga i uzdušnoga dijela magnetskoga kruga s karakteristikom 2 iz sl. 175. za točke N i Q te karakteristike (uzeti podatke iz C-102. i C-104. i iz krivulje 1 u sl. 161.a). [0,53; 0,37]

84. Naći numeričke vrijednosti obih reluktancija iz vježbe 83. za točku N karakteristike iz sl. 175.: a) u V-A-s-m-sustavu, b) u V-A-s-cm-sustavu, c) u EMJ, d) uz pretpostavku da su u (199) ili (202) izraženi Φ odn. B u M odn. G, te H u A/cm (dakle uz upotrebu iznosa μ^+ iz C-77.). [a) $0,0072 \cdot 10^8$ i $0,0136 \cdot 10^8$; b): kao a); c) 0,0090 i 0,0170; d) 0,0072 i 0,0136]

85. Naći maksimalnu vrijednost struje $i = I_m \sin \omega t$ u namotaju P od 200 zavoja kod maksimalnog toka 0,0012 Wb kroz jezgru iz sl. 174. sa željezom po krivulji 2 u sl. 161.a), s prerežom 12 cm^2 i duljinama puta magnetskih linija po 12 cm u dijelovima 1 i 3, i po 8 cm u dijelovima 2 i 4, te s pukotinama na sastavima 1' do 4' ekvivalentnima po 0,005 cm; koliko maksimalnih AZ otpada na željezni i koliko na uzdušni dio puta magnetskih linija. [1,74 A; 188 AZ; 159 AZ]

86. Potkovasti permanentni magnet s bazama prereza po 8 cm^2 nosi kod posve prislonjene kotve najviše 353 N ili 36 kg^* ukupnoga tereta; koliko mu T odn. G i Wb odn. M iznose indukcija i tok. [$B \approx 0,75 \text{ T} = 7500 \text{ G}$]; $\Phi \approx 0,0006 \text{ Wb} = 60000 \text{ M}$]

87. Uz koju će uzbudnu struju kroz namotaj od 100 zavoja moći potkovasti elektromagnet iz magnetskoga materijala po krivulji 1 iz sl. 161.a) s prerezom 4 cm^2 i srednjom duljinom puta $\mathcal{B}$ -linija 20 cm nositi a) 18 kg^* i b) 82 kg^* ukupne težine kotve i tereta uz pretpostavku potpuno prislonjene kotve s istim srednjim presjekom magnetskoga toka kao kod elektromagneta, a srednjom duljinom puta $\mathcal{B}$ -linija 10 cm ; također naći c) struju potrebnu da magnet nosi 82 kg^* uz kotvu odmaknutu $0,02 \text{ cm}$ od polnih ploha. [0,54; 10,5 i 15,6 A]

88. U horizontalnom polju jakosti $H = 15 \text{ A/cm}$ niže, s titrajnim vremenom $T = 0,8 \text{ s}$ kod malih amplituda, na način deklinatorne igle montirani magnetski štap iz čelika relativne gustoće 7,8, dug 12 cm , a širok i visok $0,6 \text{ cm}$ i $0,4 \text{ cm}$; naći magn. moment Γ štapa u smislu definicije iz C-113. polazeći od činjenice, da po C-10. i C-113. u sustavu V-A-s-cm moment vrtnje M kod otklonâ φ magneta prema polju iznosi $\Gamma H \sin \varphi$, dakle kod malih φ približno $\Gamma H \varphi$ (tako da postoje uvjeti harmoničkih titranja s titrajnim vremenom $T = 2\pi \sqrt{K/\Gamma H}$, gdje je K pripadni moment ustrajnosti, ovdje približno jednak dvanaestini produkta mase i kvadrata duljine štapa). [$11100 \cdot 10^{-8} \text{ Vs} \cdot \text{cm}$ ($= 11100 \text{ Gcm}^3$)]

89. Kod balističkoga mjerenja polne jakosti Φ štapa iz vj. 88. po metodi navedenoj u C-113. naglim uklanjanjem svitka S iz sl. 157. sa 108 zavoja uz R_g galvanometra 600Ω i $C_B = 0,04 \mu\text{As/d.sk.}$ kod $R_a = R' + R'' = 400 \Omega$ izazvan je balistički otklon 30 d.sk.; naći traženu polnu jakost Φ , i gustoću B magnetskoga toka oko sredine štapa, te (uzimajući u obzir Γ već određeno u vj. 88.) polni razmak magneta, odn. omjer toga razmaka prema ukupnoj duljini štapa.

[$1110 \cdot 10^{-8} \text{ Vs}$ ($= 1110 \text{ M}$); $4630 \cdot 10^{-8} \text{ Vs/cm}^2$ ($= 4630 \text{ G}$); 10 cm ; 5:6]

90. Naći prosječni iznos EMS samoindukcije svitka sa samoinduktivitetom $0,4 \text{ H}$ uz struju svitka 90 A komutiranu u $0,06 \text{ s}$. [1200 V]

91. Naći EMS međusobne indukcije nekoga kruga 2 vezana međuinduktivitetom $M = 0,02 \text{ H}$ na neki krug 1, kome se struja 30 A jednolikim smanjivanjem iskopča u $0,1 \text{ s}$. [6 V]

92. Kolika je energija A svitka samoinduktiviteta $0,08 \text{ H}$ i struje 30 A , te koji dio te energije postaje raspoloživ smanjenjem struje svitka od 30 A na 10 A .

[36 Ws; 32 Ws]

93. Naći induktivitet voda iz vj. 20. na str. 115. s vodičima a) od bakra, b) od željeza s konstantnim relativnim permeabilitetom 300. [18,5 mH; 258 mH]

94. Izvesti formulu (219) na bazi relacije (217) [umjesto na bazi relacije (208), kako je u C-133. učinjeno]. [Rezultat: formula (219)]

95. Izvesti formulu ukupne energije A nakrcane u kombinaciji dvaju svitaka samoinduktiviteta L_1 i L_2 i međuinduktiviteta M kod strujâ svitaka I_1 i I_2 .

[$A = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$]

96. Naći w i L cilindričkoga jednoslojnog svitka duljine 5 cm s tijesno prislonjenima kružnim zavojima promjera 4 cm iz žice debele (zajedno s izolacijom) 0,4 mm.
[125 zavoja; 365 μ H]

97. Zadan je sustav induktivno vezanih svitaka sa $L_1 = 0,2$ H i $L_2 = 0,8$ H i faktorom vezanja (C-135.): $k = 0,0625$, odn. $m = 0,25$; koliki je međuinduktivitet M sustava i kolika je njegova magnetska energija uz struje svitaka $I_1 = 8$ A i $I_2 = 5$ A takve, da se magn. tokovi svitaka podupiru. [0,1 H; 20,4 Ws]

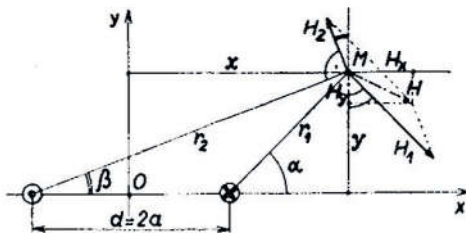
98. Za koje će vrijeme struja u svitku sa $L = 0,4$ H i $R = 10$ Ω postići kod ukapčanja 99% konačnog odn. pasti kod iskapčanja na 1% početnog iznosa. [0,184 s]

99. Kondenzator kapaciteta 500 pF nabijen na napon 1000 V izbija se kroz svitak induktiviteta 203 μ H i otpora 12 Ω ; naći frekvenciju f i dekrement prigušenja δ strujâ izbijanja, te amplitude I_1 i I_2 po sl. 195. [500 kHz; 0,0591; 1,55 i 1,46 A]

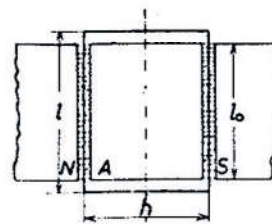
100. Naći »broj titraja« Z i pripadno trajanje izbijanja za titrajni krug iz vj. 99., uz pretpostavku da se izbijanje smatra praktički dovršenim, kad amplituda titranja padne na 1% početne amplitude I_1 . [$Z \approx 4,6/\delta \approx 78$ titraja; 156 μ s]

100.a) Naći iznose komponenata H_x i H_y te rezultante H magn. polja u točki $M(x, y)$ po sl. 196.a) dviju struja iste jakosti I no suprotnog smjera kroz dva beskonačno duga paralelna vodiča za $d = 2a$ udaljena i na ravninu x - y okomita.

$$\left[H_x = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2} \right); H_y = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{x+a}{r_2^2} - \frac{x-a}{r_1^2} \right); H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} \right]$$



Sl. 196.a)



Sl. 196.b)

100.b) Galvanometar po sl. 144. ima svitak od w zavoja duljine l i širine h . Od duljine l dijelovi l_0 leže po sl. 196.b) u pukotinama N-A i A-S s indukcijom B . Elastična pera proizvode direkcionu silu (moment vrtnje pri otklonu I) iznosa D . Naći konstante: dinamičku G (moment vrtnje proizveden strujom I) i strujnu C_0 instrumenta, te struju I_0 punog otklona.

[Za ma koji par I i α vrijedi: $GI = GC_0\alpha = D\alpha$; $G = Bwl_0h$, $C_0 = D/G$, $I_0 = C_0\alpha_0$]

100.c) Kod rasporedaja po sl. 160. uz $l = 60$ cm, $S = 3,5$ cm², $w' = 195$, $w'' = 60$, $R_2 = 1200$ Ω i $C_B = 0,3$ μ As/d.sk. struja I naglo se promijeni od 5 na -5 A, onda od -5 na 0 A i napokon od 0 na 0,4 A. Pri tom G daje balističke otklone 140, -20 i -50 d.sk. Naći H_m , B_m , B_r i H_c željeza probe, grubo povući petlju histereze i iz njene površine zaključiti na ϵ iz (194), i N_h pri primarno primijenjenoj izmjeničnoj struji maksimalnog iznosa 5 A i frekvencije 50 Hz ($\gamma_{Fe} = 7,7$ kg/dm³).

[1625 A/m; 1,2 T; 0,857 T; 130 A/m; 6,3; 7,3 W]

D) STROJEVI ISTOSMJERNE STRUJE

I) OPĆENITO O ISTOSMJERNIM STROJEVIMA

Bitni dijelovi istosmjernih generatora i motora. Zatvoreni armaturni namotaji. Prstenasti namotaji (dvopolni i višepolni). Proizvedeni napon i napon između kefica. Moment vrtnje. Cilindrički dvopolni namotaji. Diametralno i tetivno namatanje. Cilindrički višepolni namotaji. Petljasti namotaji; valoviti namotaji sa serijskim i serijsko-paralelnim spajanjem. Magnetska karakteristika, karakteristika praznog hoda. Poprečno polje opterećenog istosmjernog stroja. Pomak neutralne zone. Reakcija armature. Pojavi komutacije. Pomoćni polovi. Kompenzacioni namotaji. Načini uzbuđivanja istosmjernih strojeva.

1. Već je u C-50. i C-54. bila donesena naprava prema sl. 150. s t. zv. »armaturom dvostruko T«, koja se može uzeti kao primjer primitivnog, no nekoć mnogo susretanog *stroja istosmjerne struje* (kraće: »istosmjernog stroja«), upotrebljivoga, poput svih istosmjernih strojeva, i kao motor i kao generator. U ovom poglavlju razmatrat će se, i to samo općenito, unutar granica određenih okvirom i raspoloživim prostorom ovoga djela, bitno savršeniji istosmjerni strojevi suvremene tehnike, najprije u pogledu sastava i osnovnih pojava u njima, a zatim s obzirom na karakteristična svojstva različitih tipova tih strojeva u funkciji istosmjernih *generatora*, kad oni tjerani mehaničkom snagom snabdjevaju priključene potrošače istosmjernom strujom, te u funkciji istosmjernih *motora*, kad oni hranjeni iz mreže istosmjerne struje daju od sebe korisno upotrebljivi mehanički učin.

2. Nadovezujući na C-50. sjetimo se da bitne dijelove strojeva istosmjerne struje (uz isključenje tek iznimno upotrebljavanih »unipolarnih strojeva«, za koje ćemo u D-36. vidjeti da rade bez kolektora, s »kliznim kolutima«) čine:

a) magneti, odn. sustav koji stvara magnetski tok strojeva s jednim parom polova ili magnetske tokove strojeva s više pari polova;

b) armatura, koja se sastavi redovito u obliku koaksijalno izdubljenog valjka iz željeznih limova, složenih u sloj prema željenoj duljini armature, te snabdije električki pomno izolirano »namotajem« u obliku vodiča, odn. švitaka, uvijek po određenim načelima porazmještenih po armaturi;

c) komutator ili kolektor, koji se vrti zajedno s armaturom i komu se broj međusobno izoliranih lamela i njihovi spojevi s određenim mjestima armaturnog namotaja ravnaju prema tom namotaju.

Karakteristične su za različite istosmjerne strojeve naročito armature, pa ćemo najprije govoriti o njima, odn. o njihovim namotajima, a s time, povezano i o pripadnim komutatorima.

3. Pokušajmo najprije posve općenito postaviti načela namatanja armatura suvremenih istosmjernih strojeva.

U praksi se danas između ostaloga zahtijeva od stroja istosmjerne struje da kao generator daje na keficama prislonjenima na kolektor vremenski što stalniji napon, da bi struja u priključenim potrošačima bila ne samo uvijek ista po smjeru nego da bi i što manje vremenski varirala (pulzirala). Kod motora pak istosmjerne struje treba željeti da proizvedeni moment vrtnje što manje pulzira. Ni jedno ni drugo ne postizava se na pr. upotrebom armature dvostruko T s namotajem od tek jednog svitka, kome su obje »polovice« ili »strane« položene u dva diametralno suprotna žlijeba, nego namotajima porazdjeljenima na *mnogobrojne* svitke jednoliko porazmještene po *cijeloj* armaturi. To bi dalo jedno načelo savršenijih armaturnih namotaja.

Drugo je načelo da namotaji budu *zatvoreni* u tom smislu da se svici namotaja jedan na drugi vodljivo serijski vežu u zatvoreno kolo bez početka i svršetka, dakle da se namotaj ne ostavi »otvoren« kao kod armature dvostruko T (gdje početak i svršetak namotaja nisu jedan s drugim neposredno spojeni, nego su odvedeni na dvije međusobno izolirane lamele kolektora, tako da se vodljivi krug namotaja zatvara tek preko mreže).

Treće je načelo da se kod upotrebe zatvorenih namotaja od svakog spojnog mjesta susjednih svitaka redovito odvedu spojke k lamelama kolektora, iz čega slijedi da će pripadni kolektor morati imati *broj lamela jednak broju svitaka* namotaja.

4. A slijedi dalje i to da uz ovako izvedene spojke, kod *dvopolnih* strojeva i kod prislonjenoga diametralno suprotno na kolektor jednoga para kefica kao u sl. 197., stupaju u akciju u svakom momentu za dovod i odvod struje, crpene iz armature kod generatora i njoj privađane kod motora, očito baš one i jedino one diametralno suprotne spojke između lamela i namotaja, koje pripadaju lamelama upravo ticanima u danom času od kefica.

To ima za posljedicu da, s gledišta ukupne preko kefica prenašane »struje armature«, armaturni namotaj usprkos rotiranja armature izlazi trajno rastavljen u dvije jednake paralelno spojene grane, odn. u jedan *par* grana, iako pojedini svici rotiranjem armature redom i neprestano iza svake polovice okretaja armature prelaze iz sastava jedne grane u sastav druge. (Kasnije ćemo posebno proučavati pod imenom »komutacije« taj prelaz, kod kojega svitak u pitanju dolazi u kratki spoj za vrlo kratko vrijeme dok kefica tiče istodobno one dvije lamele kolektora koje su u spoju s oba kraja svitka; struja se svitka u tom vremenskom intervalu mora obrnuti ili komutirati od one kakva teče u prijašnjoj grani do iste po iznosu ali suprotne po smjeru struje kakva teče u novoj grani).

Kefice će se, naravno, tako postaviti da se u svakoj grani nađu serijski spojeni vodiči, u kojima se induciraju EMS ili proizvode parcijalni momenti vrtnje koji se potpomažu (odn. da ne bude vodiča kojih bi EMS ili momenti vrtnje ma u kojem momentu odmagali djelovanju grane). Same pak paralelne grane kao

cjeline, kako će se na konkretnim primjerima lako vidjeti, djeluju uz navedene odnose prema vani uporedo: svakom teče polovica ukupne armaturne struje i svaka daje polovicu ukupno proizvedenoga momenta vrtnje.

5. Kod *više-polnih* strojeva (strojeva s više nego jednim *parom* polova), dakle četveropolnih s dva para polova kao u sl. 177. iz C-107., pa šesterepolnih s tri para kao u sl. 198., uopće $2p$ -polnih sa p pari polova, pored samo jednoga para grana, na koje se dolazi upotrebom nekih namotaja, mogu se, kako će se još bliže pokazati, s nekim drugim namotajima i s više nego jednim parom prikladno porazmještenih kefica, postići također namotaji rastvoreni u dva, tri, uopće a »pari grana«, uz slično podupiranje vodiča unutar svake pojedine grane i složno djelovanje svih međusobno jednakih grana kao i kod dvopolnog stroja.

6. Prema svemu rečenom kod armatura s jednim parom grana, ako je I_A ukupna struja armature, struja kroz vodiče armature bit će $I_z = I_A/2$. Općenitije kod armatura sa a pari grana, gdje se armaturna struja sastavlja ili dijeli po $2a$ ogranaka, struja kroz vodiče jest:

$$I_z = \frac{I_A}{2a} \quad (231)$$

Ako su l ukupna duljina, q prerez i ρ specifički otpor žice koja čini armaturni namotaj s jednim parom grana, svaka grana, imajući polovicu namotaja žice, predstavljat će otpor $\rho \cdot (l/2) : q = \rho \cdot l/2 q$, a kako kod n jednakih paralelnih grana otpor zamke iznosi n -ti dio otpora jedne grane, otpor armature u ovom slučaju iznosio bi polovicu netom dobivenog iznosa, t. j. bio bi: $R'_A = \rho \cdot l/4 q$.

Općenitije kod a pari grana na svaku granu otpada duljina namotaja $l/2a$, i broj paralelnih grana koje predstavljaju armaturu jest $2a$, pa za otpor armature izlazi formula:

$$R'_A = \rho \cdot \frac{l}{4a^2 q} \quad (232)$$

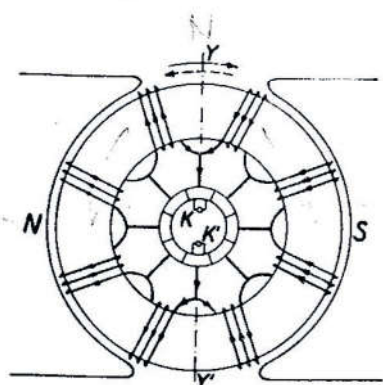
koja se može, ako se ρ zamijeni recipročnim iznosom vodljivosti κ namotajnog materijala i l se izrazi produktom ukupnog broja w i srednje duljine l_1 pojedince uzimanih zavoja, pisati i u obliku:

$$R'_A = \frac{w \cdot l_1}{\kappa \cdot 4a^2 q} \quad (232')$$

Često se kod bakrenih namotaja u (232) stavlja okruglo $\rho = 0,02 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$, čemu bi odgovaralo $\kappa = 50 \text{ S} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$; po B-27. time se pretpostavlja temperatura namotaja oko 60°C . Za temperaturu 75°C , predviđenu u nekim internacionalno upotrebljivanim propisima, trebalo bi čak u (232') uzimati κ samo $46 \text{ S} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$.

7. Dosad iznesenima načelima gradnje armatura potpuno bi udovoljavali već *prstenasti namotaji* po Grammeu i Pacinottiu. Iako su ovakvi namotaji već davno napušteni na korist »cilindričkih« po Hefner-Altenecku, pa ćemo i jedine ove

potonje nešto više razmatrati, ipak donosimo u sl. 197. i 198. i sheme dvaju jednostavnih prstenastih namotaja, jednoga dvopolnog i jednoga šesteropolnog (zbog



Sl. 197.

lakšega crtanja doduše sa samo 8 odn. 18 svitaka, dakle sa samo 4 odn. 3 »svitka po polu«, iako bi se u praksi broj svitaka uzео znatno veći). No činimo to manje iz historijskih obzira i više zato što su odnosi na slikama prstenastih namotaja za početnika pregledniji i što je od njih lagan prelaz na cilindrične namotaje. Specijalno se na obim donesenim slikama odmah razabiru svici sastavljeni od grupâ od više zavoja (u sl. 197. to su grupe od po 3, a u sl. 198. od po 2 zavoja), zatim spojke između spajalištâ svitaka i lamelâ kolektora, jednakost broja

svitaka i lamela kolektora itd., sve prema malo prije općenito izloženomu.

8. Međutim pojave unutar obih grana dvopolnog stroja po sl. 197., kod kefica K i K' smještenih u »neutralnoj zoni« Y-Y' prema polovima N i S, kao i analogne pojave kod višepolnih strojeva, na pr. onoga po slici 198., bit će dobro još posebno razmotriti.

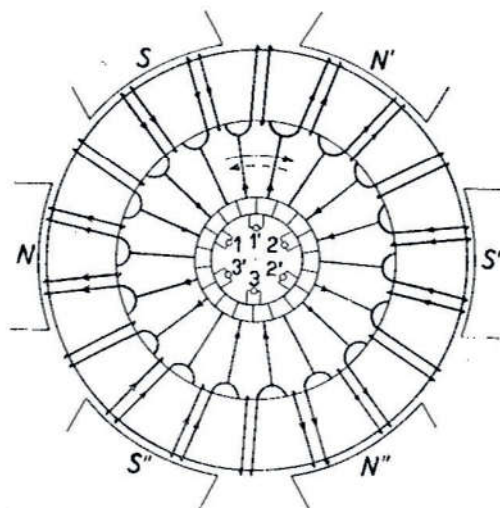
Kod prstenastih se namotaja šuplji valjak armature omota poput kakvoga prstena zavojima otprilike najednako porazdijeljenima po armaturi i grupiranima u svitke. Pri tomu se može uzeti da se svaki zavoj sastoji od dijela na prednjem čelu armature (baš ovi se dijelovi vide ucrtani u slikama), zatim od jednoga duljinom armature određenoga dijela kojim se zavoj nastavlja prema natrag po vanjskom plaštu armature, onda od dijela uz stražnje čelo armature (ovi nisu vidljivi na slikama), te konačno od dijela kojim se zavoj vraća k prednjem čelu armature tekući uzduž nutarnjeg njezinog plašta; nakon toga isto se tako nastavlja idući zavoj, itd. Prema tomu, apstrahirajući od nebitnih čeonih dijelova, svaki zavoj predstavlja dva dijela položena uzduž armature, stručno izraženo: dva »vodiča«, od kojih je kod momentano promatranih prstenastih namotaja jedan na vanjskom i jedan na nutarnjem plaštu armature.

No odlučnima za pojave u armaturi mogu se smatrati samo vodiči na vanjskom plaštu armature, jer samo oni kod rotacije armature prolaze pukotinama između armature i polnih nastavaka, odn. sijeku silnice magnetskog toka stroja. Vodiči na nutarnjem plaštu armature naprotiv su beskorisni, oni kao neki »mrtvi teret« samo povećavaju otpor armature ni ne dolazeći u odnose s magnetskim tokom (jer se ovaj, idući od N-pola prema S-polu, razdvaja tako da prolazi upola gornjim i upola donjim dijelom armature kao na sl. 183. iz C-117., te u šupljini armature, gdje se nalaze vodiči nutarnjega plašta, nema praktički nikakvih magnetskih silnica).

Imajući sad u vidu samo vodiče vanjskog plašta kao jedine djelotvorne lako se razabire, da se EMS inducirane u pojedinim vodičima vanjskog plašta doista

u svakoj od obje grane, u koje se namotaj po sl. 197. rastvara keficama K i K' u zoni Y-Y', međusobno potpomažu, jer na pr. svi vodiči lijeve grane pripadaju istom polnom području, području Y'-N-Y N-pola, i u istom se smislu u njemu kreću, kao što slično vrijedi za vodiče desne grane s područja Y-S-Y' S-pola. Razlika će biti samo u tom što će, zbog istoga smisla kretanja obih grupa vodiča i protivnih polariteta pripadnih polnih područja, EMS inducirane u pojedinim vodičima jedne grane biti sve jednoga smjera, a analogne EMS druge grane će biti sve protivnoga smjera.

Prema tomu sumirat će se u ukupni »proizvedeni napon« E cijele lijeve grane sve u pojedinim vodičima te grane u izvjesnom momentu inducirane EMS (uostalom različito velike za različite vodiče, već prema većoj ili manjoj gustoći silnica na mjestu polnoga područja kojim u tom momentu neki vodič prolazi). Napon istoga ukupnoga iznosa E , samo s gledišta zatvorenoga kruga armaturnog namotaja po smislu protivan, proizvesti će desna grana s područja protivnog pola. Zbog suprotnog smisla očito će oba spomenuta napona E unutar samog namotaja držati jedan drugom ravnotežje ne dopuštajući da namotajem teče beskorisna »struja izjednačenja«, dok će baš obrnuto s gledišta keficâ K i K' obje grane predstavljati dva jednaka paralelna izvora EMS E , ekvivalentna jednom jedinom izvoru EMS (»proizvedenog napona«) E i unutarnjeg otpora predstavljenoga otporom armature R'_A u smislu razmatranja iz D-6. Zbog te EMS E stroj će kao generator podržavati struju u vanjskim potrošačima i svaka će mu grana davati polovicu ukupne armaturne struje I_A crpene na keficama; ako pak stroj radi kao motor, struja I_A privadana armaturi dijelit će se podjednako na obje grane i E će predstavljati protu-EMS motora. Slično između dva jednaka paralelna akumulatora ne će biti struje izjednačenja, ali oni će opskrbljivati priključeni potrošač svaki s polovicom struje; analogiju s motorom dalo bi nabijanje dvaju jednakih paralelnih akumulatora, koji bi razmatrani pojedinačno i kao kombinacija dali istu protu-EMS nabijanja.



Sl. 198.

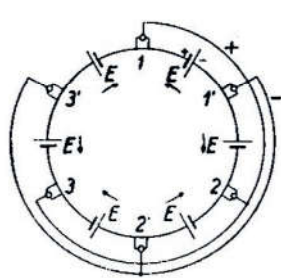
Tako bi specijalno u sl. 197. kod vrtnje armature u smislu izvučene strjelice po g-p-s-pravilu *desne* ruke iz C-55. u vodičima ispred N-pola inducirane EMS bile usmjerene od naprijed prema natrag, a u onima ispred S-pola od natrag prema naprijed. Tim bi kod stroja kao *generatora* s ukupnim naponom E bile u svakoj grani proizvedene struje $I_A/2$ u smislu strjelica ucrtanih u čeonu dijelove zavoja (dakle struje u zavojima grane s područja N-pola *prema* tom polu, u zavojima grane s područja S-pola *od* toga pola), a za cijelu struju I_A kefica K bila bi »pozitivna« i kefica K' »negativna«. Kod stroja kao *motora* po g-p-s-pravilu *lijeve* ruke iz C-40 za vrtnju armature u smislu crtkane strjelice morale bi struje u namotaju teći kao u sl. 197., no inducirani naponi bili bi suprotni onima od malo prije; trebalo bi dakle uz svladavanje

protu-EMS E privoditi izvana armaturi struju I_A na keficu K' kao »pozitivnu« i keficu K kao »negativnu«. Ne smeta što je u dva promatrana slučaja uz jednak tok struja u namotaju prviput kefica K i drugiput kefica K' nazvana pozitivnom, jer je prviput stroj bio promatran kao »izvor« struje, a u tom se slučaju pozitivnom zove stezaljka sa koje struja izlazi, a drugiput se radilo o »potrošaču«, a kod potrošača je običaj pozitivnom zvati stezaljku na koju struja ulazi.

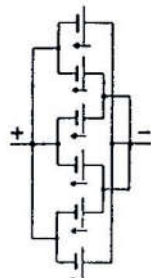
9. Kod višepolnih strojeva (magnetski tokovi idu uz $p > 1$ kao u sl. 177. iz C-107.) odnosi bi po sl. 198. bili slični kao kod dvopolnih: zavoji s područja istoga pola međusobno bi se pomagali; stroj po sl. 198. imao bi tri neutralne zone i u njima tri para kefica 1 i 1', 2 i 2', 3 i 3', od kojih bi, kod rotacije stroja kao generatora u smislu izvučene strjelice, 1, 2 i 3 međusobno spojene dale $+$ pol generatora, odn. 1', 2' i 3' zajedno $-$ pol. Stroj bi imao 6 paralelnih grana, po jednu s područja svakoga pola (ne smeta, što je na sl. 198. predložen moment kad je šest svitaka u komutaciji i time isključeno na čas iz grana, jer se u svicima, kad su u neutralnoj zoni, i onako ne induciraju EMS; čak ni na iznos otpora R'_A ne utječe mnogo ako, kraj velikih brojeva svitaka po grani kakvi dolaze u praktičkim namotajima, trenutno dođu u kratki spoj pojedini svici). Ako bismo napone E proizvedene u pojedinim granama simbolizirali električkim elementima, kod naznačenoga na slici položaja kefica i njihovog spajanja u dvije grupe 1-2-3 i 1'-2'-3', kako je malo prije rečeno, imali bismo rasporedaj kao u sl. 199. a), a taj se očito može nadomjestiti onim po sl. 199. b) s tako poredanim svim elementima da im $+$ polovi svi stoje lijevo i $-$ polovi svi desno, i konačno onim po sl. 199. c). Time se može smatrati detaljno obrazloženim rastvaranje prstenastoga namotaja stroja s tri para polova ($p = 3$) u tri para grana ($a = 3$) kao i to da EMS jedne grane u ovakvim slučajevima predstavlja i ukupnu EMS E cijelog stroja.

Kod upotrebe stroja po sl. 198. kao motora on bi, uz ucrtani tok struja u granama namotaja, rotirao u smislu crtkane strjelice, i kefice bi izmijenile polaritet.

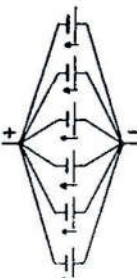
10. Ako je E proizvedeni napon stroja, bit će kod struje armature I_A »napon između kefica« E_A u slučaju generatora *manji* za iznos $I_A R'_A$ trošen na svladavanje



Sl. 199.a)



Sl. 199.b)



Sl. 199.c)

unutarnjeg otpora R'_A armature; kod motora naprotiv keficama izvana narinuti napon svladava protu-EMS E i pokriva gubitak napona $I_A R'_A$. Treba međutim uzeti u obzir da struja I_A osim otpora R'_A samog armaturnog namotaja mora svladavati i druge otpore, poimence otpore R_p i R_k u seriji sa R'_A spojenih »namotaja pomoćnih polova« i »kompenzacionog namotaja«.

s kakvima ćemo se kasnije upoznati kod savršenijih strojeva, a zatim, ne u zadnjoj liniji, i »prelazne otpore« na mjestima kontakta kolektora i obih kefica, odn. obih grupa kefica. Tako se zapravo ne radi samo o gubitku $I_A R'_A$ nego o gubitku $I_A R_A$, gdje veličinom R_A treba zamisliti obuhvaćene pored R'_A još R_p i

R_K , gdje ih ima, te neki otpor R'' koji bi predstavljao prelazne otpore obih kefica ili grupâ kefica (no ovaj R'' bio bi veličina koja varira sa I_A opadajući s porastom od I_A , tako da uglavnom $I_A R''$ ostaje stalno, iznoseći na pr. 0,75 ili 1 V po svakoj grupi kefica, t. j. svega 1,5 ili 2 V, odn. slično). Alternativno će dakle vrijediti relacije:

$$E_A = E - I_A R_A \quad (233)$$

$$E_A = E + I_A R_A \quad (234)$$

i to prva za generatore, a druga za motore.

11. Samu veličinu E lako je izračunati ovim razmatranjem. Zamislimo kod Y' u sl. 197. jedan zavoj i izračunajmo naprije prosječnu vrijednost E'' EMS induciranih u pojedinim momentima u tom zavoju za vrijeme dok zavoj prolazi polnim područjem N-pola, t. j. dok u vremenu t_1 polovice okretaja armature ne dođe u položaj kod Y . Traženi prosječni napon u voltima dobiva se po (180) iz C-64. uzimajući u obzir, da se radi o jednom zavoju i da sa $\Phi^* M$ ili $\Phi = \Phi^* \cdot 10^{-8}$ Vs kao tokom kroz armaturu promatrani zavoj biva u početnom položaju zgađan s jedne svoje strane tokom $+\frac{1}{2}\Phi$, a u završnom s druge svoje strane jednakim po iznosu tokom, t. j. tokom $-\frac{1}{2}\Phi$, tako da se može staviti u Vs:

$$\Phi_0 - \Phi_1 = [(+\frac{1}{2}\Phi) - (-\frac{1}{2}\Phi)] = \Phi$$

A za t_1 , kod stroja koji rotira sa n okretaja na minutu ili $n/60$ okretaja na sekundu, dakle kome okretaj traje $60/n$ i poluokretaj $30/n$ sekunda, vrijedi: $t_1 = 30/n$. Sve to stavljeno u (180) daje: $E'' = 1 \cdot \Phi \cdot n/30$. Znajući prosječni iznos momentanih vrijednosti EMS induciranih u 1 zavoju na njegovu prolazu kroz područje jednoga pola očito ćemo, uz supoziciju da su zavoji praktički jednoliko porazmješteni po armaturi, ukupnu EMS E proizvedenu od svih zavoja cijeloga polnog područja, odn. od pripadne grane armaturnog namotaja, dobiti tako da broj zavoja grane $\frac{1}{2}w$ (ako je w ukupni broj zavoja na armaturi) pomnožimo s prosječnom vrijednošću EMS jednoga zavoja: $E = \frac{1}{2}w \cdot E'' = \Phi \cdot n \cdot w/60 = \Phi^* \cdot n \cdot w \cdot 10^{-8}/60$ volta. To je istodobno ukupni proizvedeni napon stroja, jer je druga grana namotaja paralelna prvoj i proizvodi jednak napon. Konačno ako sa z označimo broj vodiča na vanjskom plaštu armature, i ako se sjetimo da je kod prstenastih namotaja $z = w$, možemo za »proizvedeni napon stroja« u V također pisati (numerički):

$$E = \frac{\Phi \cdot n \cdot z}{60} = \frac{\Phi^* \cdot n \cdot z}{60 \cdot 10^8}$$

12. Promatrani stroj imao je samo jedan par polova i jedan par grana: $p = 1$; $a = 1$. Preudesimo odmah rezultat i na slučajeve višepolnih strojeva sa $p > 1$ i $a \geq 1$, kakve ćemo još mnogo susretati. Neka Φ u Vs odn. Φ^* u M znače korisni tok »po polu«, t. j. neka iz svakog N-pola u armaturu ulazi i u svaki S-pol iz armature izlazi toliki tok. Uzme li se u obzir: a) da sada kod ukupno z vodiča na vanjskom plaštu armature i a pari grana otpada na jedan par grana z/a vodiča i b) da ovi vodiči kod svakog okretaja armature pređu p pari polnih područja mjesto jed-

noga para kao kod dvopolnih strojeva, dakle da određeni broj n okretaja višepolnog stroja vrijedi kao p puta toliko okretaja dvopolnog stroja, vidi se da će se E za višepolne strojeve dobiti zamjenjujući u izrazu za E iz D-11. z sa z/a i n sa $p \cdot n$; to daje nakon uvrštavanja za E u V numeričku relaciju:

$$E = \frac{p}{a} \cdot \frac{\Phi \cdot n \cdot z}{60} \quad (235)$$

odn. numeričku relaciju:

$$E = \frac{p}{a} \cdot \frac{\Phi^* \cdot n \cdot z}{60 \cdot 10^8} \quad (235')$$

Dobiveni dakle izraz za EMS stroja degenerira u formulu za E iz D-11. ne samo za slučaj dvopolnog stroja sa $p = 1$ i $a = 1$ nego i za slučajeve višepolnih ($p > 1$), ako im je namotaj takav da je $p = a$.

Primjer: Stroj po sl. 198. sa $p = a = 3$, no s ukupno $s = 144$ svitka po $w_1 = 3$ zavoja, dakle sa svega $w = s \cdot w_1 = 144 \cdot 3 = 432$ zavoja i s isto tolikim brojem $z = 432$ vodiča na vanjskom plaštu armature, s korisnim tokom po polu $\Phi^* = 2 \cdot 10^6$ M i s brzinom $n = 1500$ okretaja minutno proizvodio bi po (235') EMS:

$$E = \frac{3}{3} \cdot \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1500 \cdot 432}{60 \cdot 10^8} = 216 \text{ V}$$

te bi uz pretpostavku armaturnog otpora $R'_A = 0,1 \Omega$ i gubitka napona $0,75$ V na svakoj grupi kefica zbog svladavanja prelaznog otpora između kolektora i kefica, radeći kao generator kod armaturne struje $I_A = 65$ A davao između kefica napon iznosa $E_A = 216 - 65 \cdot 0,1 - 2 \cdot 0,75 = 208$ V.

13. Još ćemo, razmatrajući *Bil*-sile iz C-40. proizvedene magnetskim poljem stroja na strujom protjecanima vodičima armature, proračunati pripadni ukupno proizvedeni moment vrtnje stroja. Pomislimo kod stroja sa p pari polova i a pari grana na vanjskom plaštu armature duljine l zonu vodiča širine dx . Kod velikoga broja z vodiča porazdijeljenih praktički jednoliko na armaturi otpadat će na spomenutu zonu, ako je r udaljenost vodiča od osi stroja, $z \cdot dx / 2r\pi$ vodiča, jer se širina zone vodiča dx prema opsegu područja prekrivenog svim vodičima odnosi kao dx naprama $2r\pi$. Vodiči zone, protjecani po (231) strujama $I_A / 2a$, dat će dakle na mjestu polja indukcije B ukupno silu $dP = \frac{z \cdot dx}{2r\pi} \cdot B \cdot \frac{I_A}{2a} \cdot l$, sa r kao krakom te sile obzirom na os vrtnje armature. U izrazu za dP dolazi produkt $B \cdot l \cdot dx$, koji nije ništa drugo nego tok $d\Phi$ kroz promatranu zonu. Integracijom po cijelom toku po polu dobit će se dakle ukupna sila po polu $\frac{\Phi \cdot I_A \cdot z}{2a \cdot 2r\pi}$, iz koje se množenjem s brojem polova $2p$ dobiva ukupna sila P na periferiji armature, i dalje množenjem te sile P s pripadnim krakom r veličinska relacija za pripadni ukupni moment vrtnje:

$$M = \frac{p}{a} \cdot \frac{\Phi \cdot I_A \cdot z}{2\pi} \quad (236)$$

Za potrebe prakse ova se formula često preudesi u »numeričku relaciju« sa M u kg^*m , pisano kao $M^{(\text{kg}^*\text{m})}$, sa Φ kao Φ^* u M (i I_A u A). U V-A-s-m-sustavu (i u V-A-s-cm-sustavu) relacija između veličina (236) vrijedila bi bez daljega;

ako bismo sad na pr. umjesto V-A-s-m-jedinicom izražene veličine M stavili $M^{(\text{kg}\cdot\text{m})}/0,102$ (jer je V-A-s-m-jedinica sile 1 N jednaka 0,102-kratniku sile 1 kg*, a jedinica duljine ostaje 1 m i kod upotrebe 1 kg*m), i ako bismo Φ u Vs zamijenili sa $\Phi^* \cdot 10^8$ M, jednakost izrazâ lijevo i desno u (236) ostala bi sačuvana, pa bismo nakon množenja sa 0,102 = 1/9,81 mogli pisati numeričku relaciju:

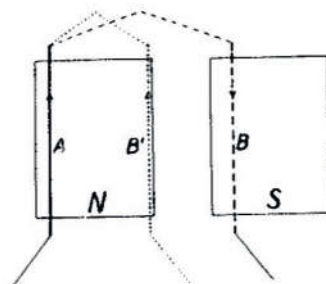
$$M^{(\text{kg}\cdot\text{m})} = \frac{p}{a} \cdot \frac{\Phi^* \cdot I_A \cdot z}{2\pi \cdot 9,81 \cdot 10^8} \quad (236')$$

Kod stroja kao generatora ova veličina predstavlja »protumoment« vrtnje; taj protumoment, a uz njega dakako još i protumomente vrtnje zbog trenja i srodnih gubitaka, treba svladavati mehaničkim pogonom stroja. Kod motora pak dio netom izračunatoga »proizvedenog« momenta vrtnje troši se na svladavanje trenja i srodnih gubitaka, i tek ostatak čini korisno upotrebljivi moment vrtnje.

14. Kod *cilindričkih* armatura, na koje sad prelazimo, zadržana su dosad primjenjivana načela zatvorenih namotaja, i rastvora tih namotaja kod strojeva s jednim parom polova u jedan par grana, odn. kod višepolnih strojeva i u više pari grana, ali je uklonjen osnovni nedostatak prstenastih namotaja da svaki zavoj ovih potonjih ima osim aktivnog vodiča na vanjskom plaštu još i neaktivni vodič na nutarnjem plaštu armature. A uklonjen je time da se kod cilindričkih armatura svi zavoji obim svojim vodičima namataju isključivo na vanjskom plaštu, tako da svi »vodiči« (D-8). mogu kod rotacije armature sjeći magnetske silnice. Kako pri tom svaki zavoj predstavlja dva aktivna vodiča, ukupni broj korisnih vodiča armature postaje dvostruko tolik kao ukupni broj zavoja: $z = 2w$ (dok je naprotiv kod prstenastih namotaja bilo: $z = w$).

Dalje je načelo cilindričkih armatura: da se one praktički izvede samo kao »žlijebne«, t. j. s vodičima električki dovoljno izolirano smještenima unutar žljebova uzduž vanjskog plašta armature (nekoliko takvih ucrtano je u sl. 177. iz C-107.), tako da »glatke« armature bez žljebova, poput onih na 197. i 198., ne ćemo više zamišljati. Redovito se još vodiči, odn. kod namotaja sastavljenih od svitaka s više nego jednim zavojem »strane« svitaka, stavljaju u žljebove »dvoslojno«, tako da u svaki žlijeb gore dode vodič ili strana nekoga svitka s vodičima prema natrag, dok dolje dolaze vodič ili strana nekoga drugog svitka s vodičima prema naprijed.

Pri svemu tomu treba se samo držati načela izbjegavanja suprotnih EMS u serijski spojenim vodičima koji slijede jedan za drugim. U tu svrhu treba kod namatanja uzimati samo zavoje i svitke takve širine da poput zavoja A-B na sl. 200. vodiči zavoja dođu u područja suprotnih polova N i S i u njima inducirane EMS se podupiru, a ne da se mogu, kako bi to bilo kod zavoja A-B', naći ispred istoga pola i dati suprotne EMS. Potrebno je nadalje, kao i kod prstenastih armatura, parove kefica stavljati na ona mjesta kolektora, gdje pripadne lamele stoje



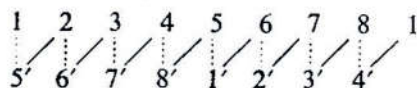
Sl. 200.

u vezi sa spojištima grupâ vodiča s područja suprotnih smjerova EMS, dakle sa spojištima pojedinih grana namotaja.

15. Praktički je međutim po ovim načelima kod višepolnih strojeva moguće realizirati mnogo tipova namotaja, koji se mogu uglavnom grupirati: a) u *petljaste* ili »paralelne«, kod kojih kao i kod višepolnih prstenastih broj pari polova i broj pari grana jedan drugom odgovaraju: $p = a$, b) u obične *valovite* ili »scrijske« sa samo jednim parom: $a = 1$ kraj $p > 1$; ima konačno i c) valovitih »scrijsko-paralelnih« namotaja, kod kojih uz određeno $p > 1$ za a vrijedi: $1 < a < p$. Kod danoga p i danoga a »proizvedeni napon« stroja E će se računati po formuli (235), jer se tom formulom, izvedenom prvobitno za prstenaste namotaje, mogu obuhvatiti i slični odnosi kod cilindričkih namotaja (razlika između obih vrsta namotaja dolazi do izražaja time, što je u formulu uz pretpostavku fiksanog broja w zavoja stavljeni broj korisnih vodiča z kod prstenastih bio jednak w , a kod cilindričkih je jednak $2w$).

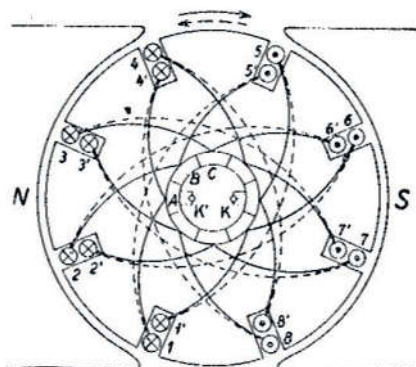
16. Nakon svega rečenoga bit će bez daljega razumljiva shema konkretnog primjera dvopolnog *petljastog* namotaja po sl. 201. I opet je namjerno, zbog veće preglednosti slike, uzet namotaj sa samo $s = 8$ svitaka, ma da će u praksi redovito broj svitaka biti znatno veći. A zbog još veće jednostavnosti pretpostavljeni su i svici sa samo po jednim zavojem ($w_1 = 1$; $w = s \cdot w_1 = 8$; $z = 2w = 16$).

Da bismo se lakše izražavali, numerirajmo žljebove brojevima 1 do 8; a i vodiče prema natrag, položene odozgo u žljebove, označimo oznakama 1 do 8, one pak prema naprijed, smještene odozdo u žljebove, označimo oznakama 1' do 8'. Pomislimo da započnemo namatanje čeonim spojem od lamele A kolektora do vodiča 1. Namotaj bi dalje išao vodičem 1 i od ovoga stražnjim, na sl. 201. crtanim, čeonim spojem do vodiča 5', zatim bi išao ovim vodičem 5' prema naprijed i dalje čeonim prednjim spojem do iduće lamele B kolektora. Kad bi tako bio namotan jedan svitak 1—5' sa stranama 1 i 5', krenulo bi se polazeći od lamele B, prema 2 i nastavljaajući dalje vršilo bi se namatanje drugog i daljih svitaka namotaja, sve dok se sa svršetkom namatanja osmog svitka namotaj ne bi na polaznoj lameli A zatvorio sam u sebe. Cijeli bi namotaj dakle bio prema shemi:

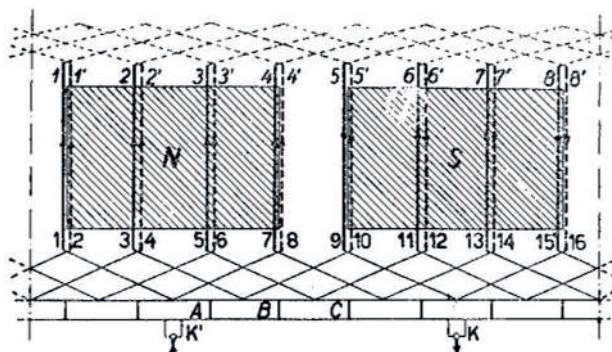


i ispunio bi sve žljebove dvoslojno. Preglednije nego iz sl. 201. razabire se rasporedaj promatranog namotaja iz sl. 202., na kojoj su polne plohe i plašt armature zamišljeni »razmotani« u ravninu. Vodiči, koji su u žljebovima na sl. 201. jedan *ispod* drugoga crtani su na sl. 202. tijesno jedan *do* drugoga, gornji debelo izvučeno, donji debelo crtano. Oznake su iste na obje slike (zasad neka se na sl. 202. uzmu u obzir samo gornje kurzivne brojke uz vodiče). Vidi se lijepo na sl. 202. kako namotaj teče kao A-1-5'-B-2-6'-... u nizu »petlji«, po čemu je i dobio ime.

17. Prateći pomnije na sl. 201. i 202: smjer induciranih EMS u pojedinim vodičima kod rotacije armature u određenom smislu lako bismo vidjeli, da se zatvoreni namotaj promatrane cilindričke armature raspolavlja u dvije skupine svitaka takve, da se EMS inducirane u pojedinim vodičima u svakoj od tih skupina



Sl. 201.



Sl. 202.

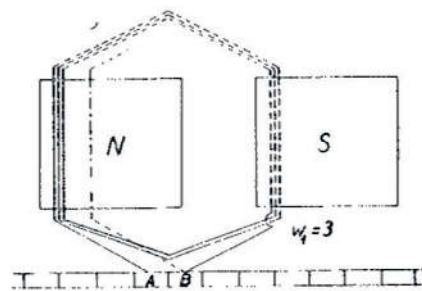
potpomažu, te da se parom kefica K i K' , stavljenih baš u položaj kao na slikama, te dvije skupine mogu učiniti dvjema granama armaturnog namotaja s posve istim odnosima kao kod stroja s prstenastim namotajem po sl. 197.

Specijalno bi na pr. kod upotrebe stroja po sl. 201. i 202. kao generatora i rotacije armature u smislu izvučene strjelice djelovanjem proizvedenoga napona E stroja nastale struje u vodičima, kakve su naznačene na sl. 201. znakovima $\otimes$ i $\odot$ (poznatima već iz C-8.), a na sl. 202. strjelicama na vodičima, i struja I_A bi izlazila iz armature na keficu K . Kod stroja kao motora, uz keficu K' kao onu kojom bi izvana privedena struja I_A ulazila u armaturu, i po tomu uz isti smjer struja u vodičima kao na slikama, vrtnja armature bila bi u smislu crtkane strjelice na sl. 201. Opažamo dakle na konkretnom primjeru odnose cilindričkih armatura posvema korespondentne onima prstenastih, s jedinom razlikom da kod prvih svaki *zavoj* predstavlja dva korisna vodiča, a kod drugih samo jedan (dade se potanje izvesti da se ova korespondencija ne poremećuje, u konačnim konsekvencijama, ni žljebastim smještajem vodiča).

18. Prednost je cilindričkih armatura i u tom da se lako izvode i popravljaju. Tako se svici, osobito kod većih višepolnih strojeva, mogu probitačno unaprijed posve dogotoviti, na pr. šablonama, što fabrikaciju armatura znatno olakšava.

Gotovi svici se onda svojim stranama naprosto utisnu u pripadne žljebove.

Na sl. 201. svaki je svitak imao samo 1 vodič »natrag« i 1 »naprijed«, dakle samo 1 zavoj. Kod strojeva za više napone uzet će se namotaji s više zavoja po svitku. Svi zavoji istog svitka imaju onda isti položaj kao prvi zavoj: njihovi vodiči idu »natrag« gornjim dijelom jednoga žlijeba i vraćaju se »naprijed« donjim dijelom

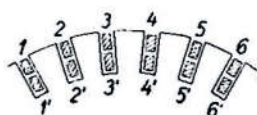


Sl. 203.

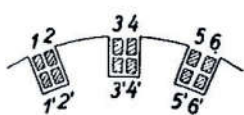
suprotnoga žlijeba. Tek kad je, počinjući po sl. 203. s lamelom kolektora A, svih w_1 zavoja istog svitka namotano, izvede se priključak na iduću lamelu B, i od nje se dalje počinje slično idućim svitakom, i tako redom dalje.

19. U praksi se još, da bi se kod velikog broja svitaka izašlo s manje žljebova, spoji često po više žljebova u po jedan veći. Tako žljebove u sl. 204.b) možemo zamišljati nastale stapanjem žljebova 1 i 2, 3 i 4, itd. iz sl. 204.a), pa oni iz sl. 204.b) prema tomu moraju primiti po četiri »strane« različitih svitaka. Armatura u tom slučaju ima broj ovakvih dvostrukih žljebova jednak polovici broja svitaka ili lamela kolektora. Ako bismo slično po tri žljeba spajali u trostruke žljebove, armatura bi imala broj žljebova jednak trećini broja svitaka ili lamela, dakle imala bi na pr. kraj 87 svitaka i 87 kolektorskih lamela samo 29 žljebova.

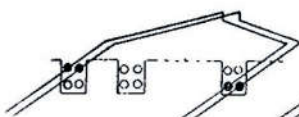
Kod upotrebe ovakvih spojenih žljebova većinom se pazi da se na pr. kod dvostrukih žljebova po sl. 205. uz obje gornje strane dvaju susjednih svitaka u jednom žlijebu i obje donje strane istih svitaka nađu također u jednom žlijebu;



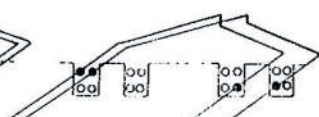
Sl. 204.a)



Sl. 204.b)



Sl.205.

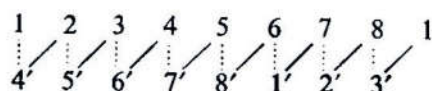


Sl.206.

uz taj uvjet svi svici mogu biti jednaki. No često se namatanje izvodi i »stepeničasto«, tako da na pr. po sl. 206. uz obje gornje strane dvaju susjednih svitaka u istom žlijebu donje strane tih svitaka dođu u susjedne žljebove; u tom slučaju oba su svitka nejednako široka.

20. Udaljenost između obje »strane« nekoga svitka izražena u »žljebnim razmacima« zove se »širina svitka«. Kod stroja po sl. 201. širina svitaka iznosila je 4 žljebna razmaka, t. j. odgovarala je baš opsezima područja N- i S-pola, koji su također bili 4 žljebna razmaka. Ovakvo namatanje zove se *diametralno namatanje* (namatanje u promjer), jer se kod prelaza s prednje na stražnju stranu nekog svitka dolazi kod dvopolnog stroja na diametralno suprotni žlijeb, a kod višepolnog sa p pari polova na žlijeb udaljen za $180/p$ »geometrijskih« ili 180 »električkih« gradi.

No može se širina svitaka uzeti i nešto drukčija. Na pr. kod armature sa 8 žljebova po sl. 201. mogli bi se, uz nešto užu polnu plohu N i S nego na sl. 201. i 202. (uzete toliko sužene da se još ne povrijedi načelo izneseno u vezi sa sl. 200.), uzeti svici široki samo tri žljebna razmaka, pa bismo onda dobili *tetivno namatanje* po shemi:



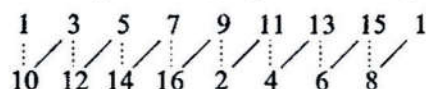
koje se također praktički upotrebljava. Svakako se međutim kod tetivnog namatanja širina svitka ne smije uzeti tako malena, da bi protivno načelu po sl. 200. obje strane istoga svitka mogle doći pred istu polnu plohu.

21. Kod namatanja po sl. 201. pomakli smo se najprije u jednom smislu za 4 žlijebna razmaka i onda u suprotnome za 3 žlijebna razmaka, tako da smo mogli idući svitak započeti u žlijebu susjednom onomu kojim smo počeli. Kod primjera tetivnog namatanja išlo se po 3 žlijebna razmaka u jednom i po 2 u protivnom smislu. Kod petljastih namotaja čine se dakle po svakom svitku dva *koraka*: »korak naprijed« Y_1 , koji se računa pozitivno, i »korak natrag« Y_2 , računat negativno, i to tako da algebarska suma tih dvaju parcijalnih koraka, t. zv. »ukupni korak«:

$$Y = Y_1 + Y_2 \quad (237)$$

iznosi (u žlijebnim razmacima) baš 1. Specijalno je bilo kod uzetog primjera diametralnog namatanja $Y_1 = 4$, $Y_2 = -3$, $Y = 4 - 3 = 1$.

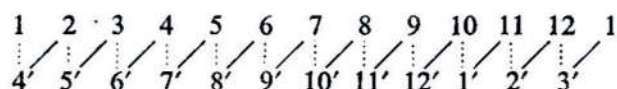
Osim oznaka 1, 2, ... za gornje i 1', 2', ... za donje strane svitaka (v. gornje kose brojke uz vodiče na sl. 202.) mnogo se u literaturi susreću i oznake 1, 3, ... za gornje i 2, 4, ... za donje strane svitaka u pojedinim žljebovima (v. donje uspravne brojke uz vodiče na sl. 202.). S ovim oznakama shema diametralnog namotaja po sl. 202. pisala bi se ovako:



koraci »naprijed«, »natrag« i »ukupni« bili bi: $Y_1' = 9$, $Y_2' = -7$, $Y' = Y_1' + Y_2' = 9 - 7 = 2$. Slično bi se lako transkribirali odnosi gore uzetoga tetivnog i ostalih cilindričkih namotaja na nove oznake, koje međutim ne ćemo dalje voditi.

22. Prelazeći sad na *cilindričke višepolne* namotaje primijetimo odmah da su tu načelno moguća dva suprotna načina postupanja.

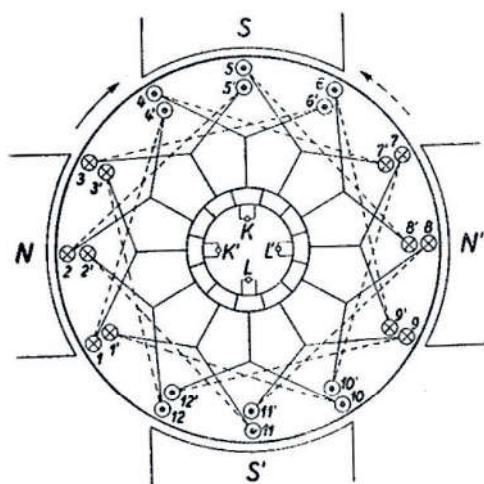
Kod prvog načina iskorišćuje se činjenica da nema zaprekâ izvedbi višepolnih *petljastih* namotaja s prvim korakom Y_1 pozitivnim i drugim Y_2 negativnim, te ispunjenim uvjetom: $Y = Y_1 + Y_2 = 1$. Takav jedan četveropolni petljasti namotaj sa $s = 12$ svitaka i sa $Y_1 = 3$ i $Y_2 = -2$ predložen je na sl. 207.; on ide po shemi:



Pomnija razmatranja induciranih EMS u pojedinim vodičima i drugih odnosa u višepolnim strojevima s petljastim armaturnim namotajima vode na rezultate poput onih sažetih u D-17. za dvopolne strojeve s cilindričkim armaturama, samo s razlikom da se kod strojeva sa p pari polova nailazi na broju p jednaki broj a pari skupina svitaka, koje se s isto toliko prikladno položenih pari kefica dadu iskoristiti kao parovi grana, drugim riječima: da je kod *petljastih* višepolnih namotaja $p = a$, kako je već bilo anticipirano u D-15.

Specijalno kod stroja po sl. 207. kao generatora, rotiranog u smislu izvučene strjelice, struje u vodičima tekle bi kao u slici, kefice K i L bile bi pozitivne i zajedno spojene činile bi »plus-pol« generatora, dok bi negativne kefice K' i L' dale »minus-pol«. Stroj kao motor, uz isti tok strujâ u vodičima i s time u vezi izmijenjene polaritete kefica, rotirao bi u smislu crtkane strjelice.

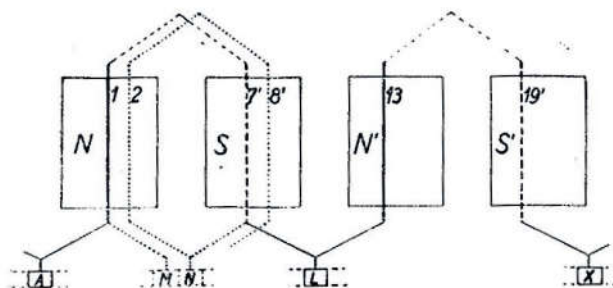
23. Suprotnost petljastim namotajima čine namotaji po drugom načinu, osnovani na činjenici da je osnovnom zahtjevu iz sl. 200. moguće, kod postojanja više nego jednog para polova, udovoljiti i namotajima kod kojih se po sl. 208. nakon



Sl. 207.

prvog koraka Y_1 »naprijed« načini i drugi korak Y_2 »naprijed« (a ne da ovaj potonji bude, kao kod petljastih namotaja, »natrag«); ukupni korak $Y = Y_1 + Y_2$ mora onda odgovarati po prilici širini područja jednoga para polova. Idući ovako uvijek istim smjerom prolazit će se redom područja pojedinih pari polova N i S, N' i S', itd. višepolnog stroja. Tako je na pr. na sl. 208. uzeto $Y_1 = 6$, $Y_2 = 6$, $Y = 6 + 6 = 12$, i sam namotaj teče po shemi A-1-7'-L-13-19'-X-... »valovito«, po čemu se ovakvi namotaji i zovu *valoviti namotaji* (za usporedbu markiran je u sl. 208. i početak petljastog namotaja M-1-7'-N-2-8'...).

Ispravan će međutim biti onaj valoviti namotaj koji se zatvara sam u sebe istom kod svih žljebova dvoslojno ispunjenih, dakle koji se ne zatvara dok još ima žljebova potpuno ili dijelom praznih. A baš takva prerana zatvaranja nastaju uz nezgodno odabran broj svitaka. Tako se na pr. kod četveropolnog stroja ($p = 2$) ne bi dala valovito namotati armatura sa $s = 12$ svitaka, dok smo malo prije vi-



Sl. 208.

djeli da je petljasto namatanje uz te uvjete bilo bez daljega moguće. Ako bi naime valovito namotali sa $Y_1 = 3$ i $Y_2 = 3$, t. j. sa $Y = 3 + 3 = 6$, namatanje bi uz $s = 12$ teklo po shemi 1-4'-7-10'-1 i zatvorilo bi se samo u sebe već nakon jednoga jedinog ophoda obaju pari polova, t. j. nakon što bi bila upotrebljena tek 4 žljeba, i to samo polovično. No kad

bismo uzeli $s = 13$ ili $s = 11$, dakle broj svitaka s za 1 veći ili za 1 manji od produkta $pY = 2 \cdot 6 = 12$, mi ne bismo nakon jednog ophoda cijele armature došli odmah na polazni žljeb, nego bismo došli na žljeb susjedan polaznom, onaj pred polaznim uz s veće za 1 od pY ili onaj iza polaznoga uz s za 1 manje od pY . A lako bismo se uvjerali, nastavljajući namatanje dok se samo u sebe ne zatvori, da se valovitim namatanjem uz ispunjenu relaciju:

$$pY = s \pm 1 \quad (238)$$

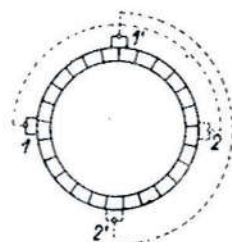
uvijek ispune svi žljebovi višepolne armature dvoslojno.

Tako bi se valoviti namotaj započeo u sl. 208. mogao četveropolno nadopuniti pretpostavljajući 25 žljebova po relaciji $pY = s - 1$ ili $s = pY + 1 = 2 \cdot 12 + 1 = 25$ u shemu:

1 13 25 12 24 11 23 10 22 9 21 8 20 7 19 6 18 5 17 4 16 3 15 2 14 1
7' 19' 6' 18' 5' 17' 4' 16' 3' 15' 2' 14' 1' 13' 25' 12' 24' 11' 23' 10' 22' 9' 21' 8' 20'

koju čitalac neka svakako još ilustrira na način sl. 201. i sl. 202.

24. Kad bi se pomno razmotrili smjerovi induciranih EMS u pojedinim vodičima netom navedenoga četveropolnog valovitog namotaja, i uopće valovitih namotaja po relaciji (238), vidjelo bi se da ovakvi namotaji u zadnjoj liniji daju samo 1 par grana, t.j. da je kod njih uvijek $a = 1$ usprkos $p > 1$, a na kolektoru da bi zapravo bio dovoljan samo jedan par kefica prikladno smještenih na razmaku od 180 «električkih» ili $180/p$ «geometrijskih» gradi. To bi na pr. kod malo prije donesenog četveropolnog valovitog namotaja bio na sl. 209. izvučeno crtani par 1 — 1' kefica prislonjenih pod pravim kutom na pripadni kolektor s 25 lamela.



Sl. 209.

Ma da bi prema tomu principno zapravo bilo dovoljno kod valovitih namotaja po (238) uzimati samo jedan par kefica, smješten na području jednoga para polova, praktički se obično polože i dalji parovi kefica na područjima ostalih pari polova, kako je to na sl. 209. predloženo crtkanim keficama 2 — 2'. A kefice jednakih polariteta, kao točke istoga potencijala, međusobno se spoje. Broj kefica nekog stroja i onako se naime ravna prema jakosti armaturne struje, pa se, vodeći računa o dozvoljenoj gustoći struje na kontaktnim ploham kefica, i onako obično mora uzimati više pari kefica. Da se kolektor ne protegne previše u duljinu, kefice se dakle ipak porazdijele na područja svih pari polova, pa leže na kolektoru kao i kod petljastih namotaja s jednakim brojem pari polova.

Razlika je između petljastih namotaja i dosad promatranih valovitih po relaciji (238) u bitnosti u tomu, što se kod prvih nailazi na broj pari grana a jednak broju pari polova p ($p = a$), a kod drugih izlazi uvijek samo 1 par grana ($a = 1$ uz $p > 1$). Kod petljastih kao onih s najvišim mogućim brojem pari grana govorimo dakle s pravom o «paralelnim», a kod valovitih po relaciji (238) baš protivno o «serijskim» namotajima; prvi će biti prikladniji kod strojeva za relativno niže napone uz relativno jače struje, a drugi kod strojeva za više napone i slabije struje. Kod dvopolnih strojeva zbog $p = a = 1$ svaki namotaj izlazi na petljasti.

25. U praksi se još susreću i namatanja «serijsko-paralelnog» tipa. I tu se radi o valovitim namotajima, ali takvima kod kojih se nakon obilaska svih pari polova ne dolazi, kao kod «običnih» valovitih po relaciji (238), u žlijeb susjedan polaznomu, nego u žlijeb udaljen od polaznog za više nego 1 žlijebni razmak, na pr. udaljen za a razmaka. Onda očito namatanje umjesto po (238) ide po općenitijoj formuli:

$$pY = s \pm a \quad (239)$$

Pobliža razmatranja međutim pokazuju da Y i a moraju biti relativno primbrojevi, ako se želi sigurno izbjeći da nastane nekoliko međusobno neovisnih i samih u sebe zatvorenih namotaja. (Uostalom i ovakvi »mnogostruko zatvoreni« namotaji dolaze katkad u praksi, samo ih u ovom općenitom pregledu ne ćemo razmatrati.)

Svega zajedno namotaji po (239) daju $2a$ paralelnih grana, dakle a pari grana armature, pa se načelno može izići sa a pari kefica. Konkretni primjer jednog ovakvog serijsko-paralelnog namotaja bio bi namotaj sa $p = 4$, $s = 30$, $a = 2$ i $Y = Y_1 + Y_2 = 4 + 3 = 7$ dakle po shemi: $4 \cdot 7 = 30 - 2$ (čitalac neka napiše potpunu shemu poput one iz D-23., te nacrtaj namotaj na način sl. 201. i 202.).

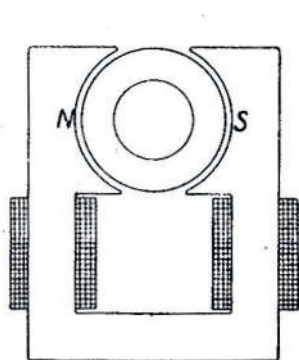
Resumirajući treba dakle, apstrahirajući od naročitih rijetkih namotaja, razlikovati kod višepolnih armatura:

I) petljaste namotaje sa $p = a$,

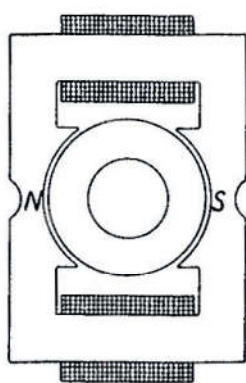
II) valovite namotaje i to a) sa serijskim spajanjem uz $a = 1$, te b) sa serijsko-paralelnim spajanjem uz $a = 2, 3, \dots$ itd. (obično: $a = 2$).

Spomenimo ukratko još *ekvipotencijalne spojke*. Kod višepolnih strojeva može se dogoditi da već male nesimetričnosti proizvedu velike nejednakosti u podjeli opterećenja po pojedinim granama armature, što nepovoljno djeluje na funkcioniranje stroja. Tada je dobro da se izvjesna mjesta, koja stalno imaju da budu na istom potencijalu, međusobno spoje »ekvipotencijalnim spojkama« (»spojkama izjednačenja«).

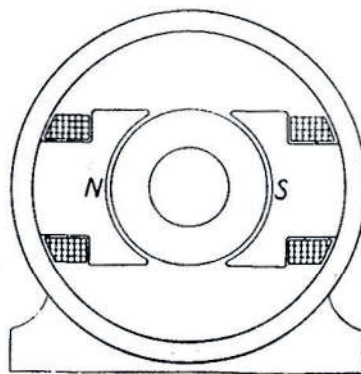
26. Prelazeći sad na magnetske krugove strojeva istosmjerne struje sjetimo se da se potrebni magnetski tokovi Φ Vs ili $\Phi^* M$, što iz pojedinih N-polova prelaze u armaturu i dalje iz ove u pojedine S-polove (po shemi u sl. 216. iz D-29. za dvo-



Sl. 210.



Sl. 211.

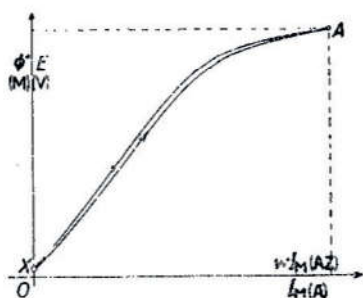


Sl. 212.

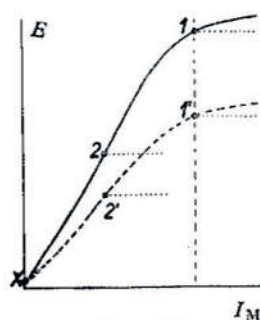
polne i u sl. 177. iz C-107. za višepolne strojeve), redovito proizvode elektromagnetima. Ovi se »uzbuđuju« određenim brojem AZ po polu, t.j. izvjesnim brojem w_M zavoja po svakom polu šalje se »struja uzbuđivanja« I_M A tolike jakosti da se postigne broj $w_M I_M$ AZ potreban kod danog magnetskog kruga za proizvođenje željenoga korisnog ili glavnog toka Φ Vs ili $\Phi^* M$ po polu, i time, uz pretpostavku koeficijenta rasipanja ν iz C-107., ukupnog toka po polu $\nu \cdot \Phi$ Vs odn. $\nu \cdot \Phi^* M$.

Grupe od w_M zavoja, skupljene u »uzbudne svitke«, smjeste se na »polnim jezgrama« pripadnih polova. Kod današnjih strojeva polne jezgre su redovito radijalno poredane na magnetskom kućištu ili jarmu stroja (v. sl. 212. za dvopolni i sl. 177. za četveropolni stroj); taj oblik potječe od Lahmeyera, te se odlikuje simetrijom i malenim rasipanjem (koeficijent rasipanja ν je oko 1,15). Od starijih i danas već istisnutih tipova spomenimo stari »Manchester-tip« po sl. 211. (simetričan, ali s velikim rasipanjem), i još stariji »potkovasti« tip po sl. 210. (nesimetričan, te s velikim rasipanjem, na pr. sa $\nu = 1,35$); ovaj se potonji još i danas susreće na shematskim slikama.

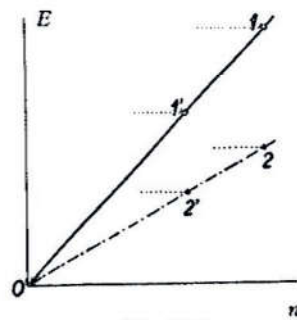
Osim opisanih strojeva s izrazitim polnim jezgrama i na njima smještenima svicima uzbudnog namotaja magneta, te izrazitim polnim nastavcima pričvršćenima na polne jezgre, susreću se i magnetni sistemi bez izrazitih polova, i to kod velikih strojeva koji treba da vrlo brzo rotiraju (na pr. kod velikih generatora direktno spojenih s parnim turbinama, koji brzo rotiraju i zbog toga moraju biti građeni s posebnom pažnjom). Po Déri-u mirujući dio ili stator ovakvih strojeva, sastavljen od limova, snabdije se na nutarnjoj strani sustavom od obično dva sloja žljebova. U jedan sloj »porazdijeljeno« se stave vodiči uzbudnog namotaja, koji nadomještaju magnetne svitke. U drugi sloj žljebova dolaze, također »porazdijeljeno«, vodiči t. zv. kompenzacijonog namotaja, o kojemu će brzo biti govora.



Sl. 213.



Sl. 214.



Sl. 215.

27. Ako su poznate dimenzije i magnetska svojstva materijala pojedinih dijelova magnetskog kruga nekoga stroja, dadu se po teoriji magnetskog kruga, uzimajući u obzir i magnetsko rasipanje, koje uostalom osim o dimenzijama i materijalu magnetskoga kruga ovisi i o pogonskim prilikama stroja, uvijek za praksu dovoljno točno izračunati iznosi AZ potrebni da se postignu različiti iznosi toka kroz armaturu Φ Vs odn. $\Phi^* M$ po polu, t.j. može se uvijek izračunati broj AZ što otpada na održavanje magnetskog toka kroz jaram, broj AZ potrebnih za održavanje toka kroz polne jezgre, broj AZ za polne nastavke, AZ za uzdušnu pukotinu, AZ za zupce, te AZ za ostali dio armature. Jedan problem ove vrsti bio je detaljno razrađen na slučaju 4-polnog stroja u C-107. i C-108.

Ako je sad fiksiran broj w_M zavoja magnetnog namotaja po polu stroja, moguće je, znajući brojeve AZ $w_M I_M$ po polu za određene armaturne tokove Φ odn. Φ^*

po polu, naći i pripadne struje I_M A. Tako se može, na pr. radeći sa Φ^* , nacrtati krivulja $\Phi^* = f(I_M)$, koja veže ordinate Φ^* u M s pripadnim apscisama I_M u A (u drugom mjerilu apscise I_M mogu se uzeti i kao $AZ w_M I_M$). Ta se krivulja zove *magnetska karakteristika* stroja (uopće magnetski krugovi imaju takve »karakteristike«; v. krivulje 1, 2 i 3 na sl. 175. u C-103.). Zbog remanencije i histereze pojedinih dijelova magnetskog kruga stroja krivulja će počinati u točki X na sl. 213. nešto iznad ishodišta O koordinata, i njezin »uzlazni« dio XA uz povećavano I_M bit će malko niži od »silaznoga« AX dobivenog smanjivanjem I_M natrag na nulu; no kraj magnetski mekih materijala u magnetskom krugu mogu se dovoljno točno oba ova dijela nadomjestiti nekom srednjom krivuljom $\Phi^* = f(I_M)$, pa se u tom smislu može govoriti o određenoj »magnetskoj karakteristici« stroja.

28. Ista krivulja prikazuje, samo u drugom mjerilu, također proizvedeni napon stroja E u V kao funkciju uzbuđenja I_M u A uz stroj podržavan na stalnom broju n okretaja na minutu, kako neposredno slijedi iz formule (235) za E . Ovako shvaćena promatrana krivulja zove se *karakteristika praznog hoda*, jer ju je vrlo lako snimiti kod stalnom brzinom tjeranoga stroja kao generatora u »praznom hodu«, t. j. bez uzimanja struje I_A iz armature (praktički: dok je ta struja zanemariva prema struji normalnog opterećenja). Uz $I_A = 0$ naime iščezava $I_A R_A$ iz D-10., ako je na armaturu priključen samo voltmetar zanemarivog potroška struje, pa se voltmetrom pokazani iznosi E_A ne će po (233) razlikovati od iznosâ E , ordinatâ karakteristike praznog hoda. A kako se pripadne apscise I_M mogu očitavati na ampermetru uključenom u tok struje I_M , to se karakteristika praznog hoda nekog stroja doista može snimiti očitavajući spomenuta dva instrumenta kod praznog hoda i odabrane brzine stroja, odakle i ime ovoj krivulji.

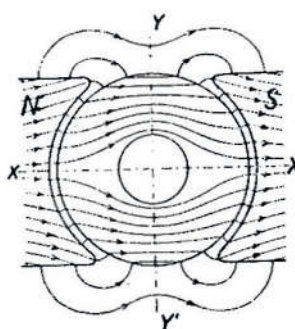
Poraste li brzina stroja od n na $2n$, ili padne li na $n/2$, postat će i iznosi E , uz dano Φ odn. Φ^* , a time i dano I_M , dvostruki, odn. jednaki polovici prvobitnog E . Iz jedne karakteristike praznoga hoda mogu se dakle bez daljega izvoditi i druge za povoljne brzine stroja: izlaze naprosto prvobitne krivulje s korespondentno povećanim ili smanjenim ordinatama. Tako je na sl. 214. crtkana krivulja za brzinu 1000 okr/min izvedena smanjivanjem na dvije trećine ordinatâ izvučene krivulje za brzinu 1500 okr/min. No nije samo lako iz dane karakteristike praznog hoda za jednu brzinu stroja izvesti slične krivulje s promjenljivim I_M kod drugih stalnih brzina n stroja, nego isto tako nema poteškoća ni da se iz spomenutih krivulja obrnuto izvedu krivulje s promjenljivim n uz različite stalne I_M . Postupak kod toga predložen je prelazom s krivulja po sl. 214. na one po sl. 215.; ove potonje su pravci kroz ishodište, jer po (235) odn. (235') uz stalno Φ odn. Φ^* varira E proporcionalno sa n .

Prema izloženomu može se karakteristika praznog hoda smatrati osnovnom karakteristikom stroja, jer iz nje se dađu odrediti naponi E kod svih brzina i svih uzbuđenja stroja.

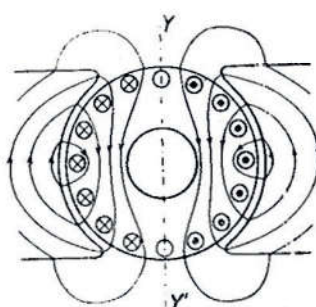
29. Nešto drukčije su prilike kod *opterećenih* strojeva istosmjerne struje. Tu se javlja djelovanje magnetskog polja proizvedenoga strujom armature, odnosno

strujama u vodičima armaturnog namotaja, koje na svoj način djeluju kao uzbudne struje u magnetskom krugu stroja. Zbog njih se magnetske prilike opterećena stroja poremete, a to dolazi do izražaja u različitim neželjenim učincima.

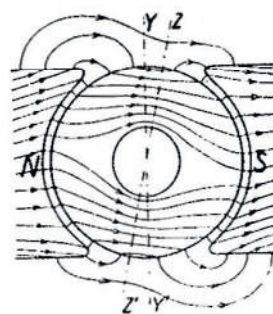
Dok je stroj u praznom hodu, armaturom prolazi samo glavni ili uzdužni tok ili tokovi, na pr. kod dvopolnog stroja, uzdužni tok bi bio tok proizveden poljem uzbudnih struja magneta, t. zv. *uzdužnim poljem*, s osi X-X' po sl. 216. Ako međutim stroj opteretimo, svejedno da li uzimanjem iz armature neke struje I_A kod generatorskog pogona ili privođenjem armaturi takve struje kod motornog pogona, teći će kroz vodiče armature struje I_z određene relacijom (231), i te će struje sa svoje strane dati polje ili polja, koja će nastojati proizvesti korespondentni t. zv.



Sl. 216.



Sl. 217.



Sl. 218.

»armaturni« tok ili tokove. Silnice toga toka za dvopolni stroj, dakle toka stroja kad bi namotaj armature sam djelovao, tekle bi kroz armaturu i zatvarale bi se kroz uzduh i polne nastavke stroja po prilici kao na sl. 217. To je lako razabrati, ako se razmotri kako je porazdijeljena struja po različitim vodičima armature. Na pr. u sl. 217. struje u lijevim vodičima armature teku sve prema natrag i u desnima sve prema naprijed, tako da u zadnjoj liniji sve izlazi na to kao da cijeli namotaj armature na sl. 217. predstavlja jedan svitak s osi Y-Y', pa onda i nastalo polje i pripadni armaturni tok moraju imati istu os Y-Y', okomitu ili poprečnu na os X-X' glavnoga ili uzdužnoga toka stroja, odakle i ime *poprečnoga polja* za ovo polje. U praksi armatura nikad ne djeluje posve sama, nego se njezino polje kombinira s poljem magneta, pa nastaje neko rezultujuće polje i od njega neki rezultujući tok, na pr. za dvopolni stroj iz sl. 216. i 217. tok poput onoga na sl. 218.

30. Kakve konsekvencije ima sad ovako kombinirano djelovanje uzdužnog i poprečnog polja na djelovanje stroja? Ponajprije nastali magnetski tok biva po sl. 218. pojačan u područjima polnih nastavaka lijevo gore i desno dolje, a oslabljen lijevo dolje i desno gore, jer se na prva dva mjesta smjer djelovanja uzdužnog i poprečnog polja podupiru, a na druga dva se međusobno slabe. Posljedica je da nastali kombinacioni tok izlazi u neku ruku zakrenut, i to u slučaju sl. 218. u smislu kazala na uri; time izlazi zakrenuta i neutralna zona stroja iz položaja Y-Y' u neki novi položaj Z-Z'.

Kako međutim položaj kefica mora odgovarati neutralnoj zoni, jedna od posljedica djelovanja poprečnog polja i njime izazvanog *pomaka neutralne zone* mora se manifestirati u potrebi da kefice opterećena stroja treba prema kolektoru pomaknuti za neki kut α' prema njihovu položaju kod praznog hoda stroja, i to, kako se lako razabire, kod generatora u smislu vrtnje, a kod motora nasuprot smislu vrtnje (jer su uz iste struje u vodičima armature smisao vrtnje motora i generatora suprotni).

Ta se potreba pomicanja kefica i praktički manifestira kod stroja na taj način da stroj, ako mu kefice nisu u pravom položaju, više ili manje »iskri« na kolektoru, što između ostalog može imati za posljedicu brzo uništenje kolektora. Neprilično je to pomicanje kefica, jer bi se ono zapravo moralo neprestano prilagođivati svakom mijenjanju opterećenja, a s njime i mijenjanju jakosti poprečnog polja. Kod strojeva za vrlo promjenljiva opterećenja, na pr. onih u izvjesnim motornim pogonima, trebalo bi dakle neprestano udešavati položaj kefica. U praksi se nastoji tomu izbjeći postavljanjem kefica u neki »srednji« položaj, koji onda približno mora zadovoljavati za sva opterećenja. No otkad su uvedeni »pomoćni polovi«, koje ćemo brzo upoznati, postalo je suvišno svako pomicanje kefica kod strojeva s ugrađenim takvim polovima.

31. Dalji je učinak armaturnog polja, da magnetski tok kroz armaturu biva oslabljen, što po (235) dovodi i do slabljenja proizvedenog napona E stroja. Taj se učinak zove *reakcija armature*.

Dva su razloga slabljenju armaturnog toka. Pomislimo najprije da kefice još nismo pomaknuli iz položaja korespondentnog zoni $Y-Y'$, dakle da su kefice još u položaju koji odgovara praznom hodu. U prvi mah moglo bi se pomisliti, da u tom položaju ne će biti slabljenja armaturnog toka, jer bi tko mogao očekivati, da koliko se djelovanjem poprečnog polja na mjestima uzdužnom polju suprotnog djelovanja toga polja gustoća magnetskog toka oslabi, toliko da će se za naknadu na mjestima međusobnog podupiranja uzdužnog i poprečnog polja gustoća magnetskog toka pojačati. No ipak u cjelini armaturni tok nešto oslabi. Magnetski su naime polovi i armatura obično već toliko blizu zasićenju, da na mjestima podupiranja uzdužnog i poprečnog polja nastupi manje pojačanje gustoće magnetskih silnica nego što iznosi umanjenje gustoće silnica na mjestima gdje poprečno polje djeluje nasuprot uzdužnom.

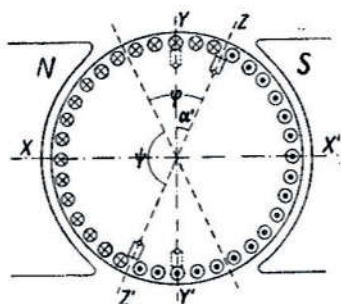
Međutim ima još i drugi razlog slabljenju armaturnog toka. Kad se naime kefice pomaknu za kut α' , tim se prilike u toliko promijene, što sada po sl. 219. armaturno polje, osim poprečne komponente s osi $Y-Y'$ proizvedene vodičima lijevo i desno pod kutom ψ , dobije još i uzdužnu komponentu proizvedenu vodičima gore i dolje pod kutom $\varphi = 2\alpha'$; ova posljednja komponenta ima os $X'-X$, t. j. ona u području armature djeluje baš nasuprot glavnom polju stroja, te ga direktno slabi. A to ima za posljedicu opet smanjenje armaturnog toka.

Lako je naći broj AZ uzdužne komponente armaturnog polja. Neka na pr. dvopolni stroj u sl. 219. ima raspoređeno z vodiča na 360° obodnice armature. Vodiči koji stvaraju uzdužnu komponentu čine dvije grupe, od kojih svaka zauzima širinu φ° obodnice, pa prema tomu na svaku grupu otpada $z \cdot \varphi / 360$ vodiča. Kod

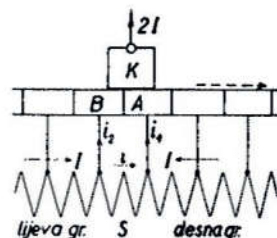
struje $\frac{1}{2} I_A$ u vodičima, uzimajući u obzir da po dva vodiča čine pojedine zavoje, broj AZ koji stvaraju uzdužnu komponentu možemo izraziti sa $\frac{1}{2} I_A \cdot z \cdot \varphi / 360 = z \cdot \varphi \cdot I_A / 720$. Za višepolne strojeve dao bi se izvesti sličan račun.

Ako bismo dakle željeli kompenzirati uzdužnu komponentu, morali bismo pustiti da na magnetima dvopolnog stroja djeluje toliko više AZ po polu, koliko treba da se AZ uzdužnog polja, uzimajući u obzir i rasipanje, kompenziraju. A i za kompenzaciju slabljenja magnetskog polja po onom prvom razlogu trebali bi dodatni AZ na magnetima. Jedni i drugi dodatni AZ dobili bi se pojačavanjem uzbudne struje I_M . Pojačavanje te struje predstavlja u daljoj konsekvenciji i sredstvo da stroj unatoč pojačanog opterećenja stvara nesmanjeni proizvedeni napon E .

32. Prelazeći na pojav *komutacije*, dotaknut već u D-4., razmotrimo posve kratko odnose kod mijenjanja struje u kratko spojenom svitku i uvjete za dobro komutiranje kod istosmjernih strojeva. Pojav komutiranja struje shematski je na sl. 220. predložen za svitak S podržavan u kratkom spoju za vrlo kratko vrijeme,



Sl. 219.

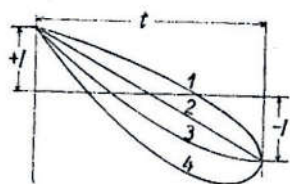


Sl. 220.

dok kefica K tiče istodobno lamele A i B kolektora vezane s oba kraja svitka S. Na slici je uzet slučaj baš tako uske kefice, da ona u isti mah tiče najviše dvije lamele kolektora (u praksi ih često tiče više); tada može doći u kratki spoj uvijek samo po jedan svitak.

Kroz keficu K izlazi van, uz pretpostavku da se radi o generatoru sa a pari grana i da je K pozitivnog polariteta, ponajprije neka struja $2I$ jednaka sumi strujâ $I = I_A / 2a$ iz svake od obih grana namotaja priključenih na K, i to tako da iz lijeve grane pritiče struja I , koja u svicima te grane teče u smislu nadesno, i iz desne struja iste jakosti, ali s gledišta svitaka lijeve grane u smislu nalijevo, dakle struja $-I$, ako pozitivno označimo struje u svicima u smislu nadesno. Ako je svitak S prije komutiranja pripadao lijevoj grani, i ako je po tomu bio protjecan strujom I , nakon komutiranja on će pripadati desnoj grani, i njime će teći struja $-I$. Od časa do časa promjenljiva struja i kratko spojenog svitka S treba dakle da se za vrlo kratko vrijeme kratkog spoja od I smanji na nulu, obrne i promjeni na suprotnu struju $-I$. Kad se ta promjena ne bi dospjela svršiti za vrijeme kratkog spoja, onda bi na koncu kratkog spoja, pri prekidu spoja kefice K s lamelom A i prelaza te kefice potpuno na B, morala nastati vrlo nagla promjena struje u svitku S, koja bi mogla izazvati velike EMS indukcije, i u vezi s time iskre prekidanja između lamele A i kefice K: komutator bi zbog lošega komutiranja »iskrio«.

No za dobro komutiranje važan je i zakon vremenskog mijenjanja struje i kratko spojenog svitka. Nije na pr. isto, da li se ta struja mijenja od iznosa I na iznos $-I$, dakle svega za iznos $2I$, po krivulji 1 u sl. 221. na početku sporije i pri kraju brže, ili ide po krivulji 2 po »linearnom« zakonu, ili se po krivulji 3 komutiranje u glavnom dovrši prije prekida spoja kefice K s lamelom A, ili ide po krivulji 4, kod koje se i najprije mijenja preko $-I$. Očito nisu poželjne krivulje tipa 1 »podlinearne« (u glavnom dijelu komutacionog vremena sporije od linearne) komutacije, a niti one tipa 4 prejakom »nadlinearne« komutacije, nego su po-



Sl. 221.

voljne krivulje kod kojih se pri kraju komutacije i još samo polagano mijenja, dakle krivulje »linearne« komutacije tipa 2 ili slabo »nadlinearne« tipa 3.

33. Linearna bi se komutacija međutim sama sobom uspostavila, kad bi odlučni za struje koje prolaze sa A u K i sa B u K bili jedino otpori prelaznih ploha poput $A|K$ i $B|K$ između lamelâ i kefice, i kad bi u svakom momentu ti prelazni otpori bili obrnuto proporcionalni veličini doticajne plohe pripadne lamele i kefice, dakle kad bi pripadne vodljive vrijednosti bile direktno proporcionalne tim ploham. Ovu je mogućnost vrijedno tim prije razmotriti što će se kod tvrdih ugljenih kefica moći prema spomenutim prelaznim otporima zanemariti otpori lamela A i B, otpor u samoj masi kefice K, te otpori spojki koje vežu krajeve od S sa A i B; a kod namotaja od debele bakrene žice sa samo jednim ili malo zavoja po svitku bit će donekle zanemariv i otpor svitka S, kao i utjecaj njegova samoinduktiviteta na mijenjanje struje i . Uz pretpostavljene odnose struja $i_1 = I + i$, koja po I. Kirchhoffovu zakonu teče sa A u K, i struja $i_2 = I - i$ sa B u K bit će u svakom momentu proporcionalne veličini doticajnih ploha između pripadnih lamela i kefice, odn. gustoća struje na oba prelazna mjesta, kod kefica obično izražavana u A/cm^2 (a ne u A/mm^2 kao kod žica), bit će konstantna. Ona dakle ne će porasti na nedopušteno velik iznos, kod koga bi se kovina kolektora mogla odviše ugrijavati, ili bi se čak talila ili izgarala, tako da bi opet imali »vatra« na kolektoru i uništavanje kolektora. Međutim baš ovi odnosi, s veličinom i_2 u jednolikom porastu i veličinom i_1 u jednolikom opadanju za vrijeme dok se doticajna ploha $A|K$ zbog gibanja kolektora jednoliko smanjuje i u isti mah ploha $B|K$ jednoliko povećava, daju, kako neposredno slijedi iz izrazâ $I + i$ i $I - i$ za i_1 i i_2 , linearno variranje struje i kratko spojenoga svitka od iznosa I na iznos $-I$.

34. Stvarno dakako na zakon variranja struje i utječu i drugi faktori osim prelaznih otpora na $A|K$ i $B|K$. Povrh obično malenog utjecaja neznatnog otpora svitka S djeluje naročito samoinduktivitet toga svitka, i njime uzrokovane EMS inducirane mijenjanjem struje i dolaze do izražaja u tendenciji usporavanja variranja te struje, odn. djeluju nepovoljno na komutaciju, čineći je više ili manje podlinearnom.

Moguće je na i utjecati i umjetnim načinom, nekim vanjskim magnetskim poljem, zbog kojega će u rotirajućem svitku nastati određene EMS indukcije. Ako je sad to polje, t. zv. *komutaciono polje*, zgodnoga smjera i jakosti, uvijek će se dati postići da ono nastoji uglavnom proizvesti EMS indukcije protivne onima EMS koje bi nastojao proizvesti samoinduktivitet svitka S . Prema tomu će se komutacionim poljem moći, u dovoljnoj mjeri za praksu, paralizirati djelovanje koje bi proizvela samoindukcija u svitku S , te time povoljno djelovati na komutiranje struje, štoviše čak i tako utjecati, da komutiranje bude po tipu krivulje 3 u sl. 221. A pokazalo se da se ispravno komutaciono polje bar približno dobiva pomičući kefice opterećena stroja još nešto više nego bi odgovaralo pomaku kefica spomenutom u D-30., koji bi bio potreban poradi utjecaja polja armature na položaj neutralne zone. Taj novi pomak α'' mora kao i pređašnji α' biti kod generatora *u smislu* vrtnje, a kod motora *nasuprot* tom smislu; ukupni bi dakle pomak bio za kut $\alpha = \alpha' + \alpha''$.

35. Kod od časa do časa različitih opterećenja morali bismo iznos kuta α , a po tomu i položaj kefica, dakako neprestano varirati, ili se bar približno zadovoljiti nekim srednjim položajem kefica. Kod motora koji moraju ići u oba smisla taj bi srednji položaj odgovarao položaju neutralne zone $Y-Y'$ na sl. 216., t. j. kefice bi se morale ostaviti u položaju koji odgovara neutralnoj zoni kod praznog hoda. Dakako da se onda ne može računati sa savršenim komutiranjem, i mi u ovakvom slučaju, pa i inače u svakom slučaju, možemo samo dobiti, ako se pobrinemo da iskrenje komutatora i uz nesavršeno komutiranje ne može tako lako nastupiti.

A načinâ kako se pogibelj iskrenja može otkloniti ima više. Prema dosadašnjim razlaganjima oni će biti manje ili više sami po sebi razumljivi. Ponajprije je povoljno da prelazni otpor kefica bude relativno velik, zbog čega se danas općenito upotrebljavaju više ili manje »tvrde« kefice od ugljena (s event. primjesama grafita i bronce), koje su već davno posvema istisnule nekadanje bakrene (osim kod elektrolitičkih strojeva s posve malim naponima). Istom ugljenim »keficama«, koje danas više i nisu kefice, nego masivni blokovi tvrdoga ugljena s primjesama bronce, grafita i sl., s kontaktnim plohamo konkavno zaobljenima prema konveksnosti kolektora, uspjelo je postići da strojevi ne iskre kod promjenljivih opterećenja, a da se kefice ipak ne moraju svaki čas pomicati, nego stoje u nekom srednjem položaju. Tvrde kefice imaju veći prelazni otpor i povoljnije su s gledišta komutacije, no s druge strane kod njih su gubici napona na keficama iz D-10. veći, tako da kefice treba odabrati već prema stroju.

Nadalje je važno da samoinduktivitet pojedinih svitaka namotaja ne bude odviše velik, a to znači da namotaj treba također zbog bolje komutacije rasporediti na mnogo svitaka s malo zavoja, prema čemu i kolektor mora imati mnogo lamela. Isto je tako povoljno da žljebovi armature budu (magnetički) otvoreni.

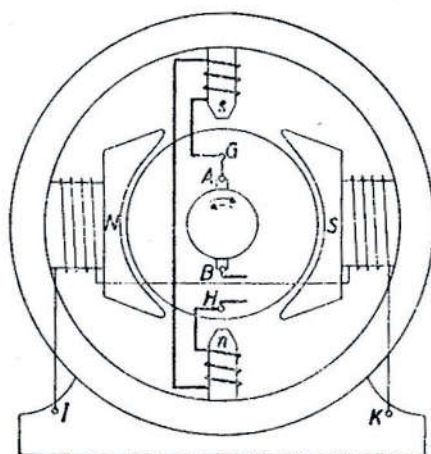
Konačno je povoljno ako vrijeme kratkog spoja traje što dulje, prema čemu će strojevi manje brzine općenito teže iskriti nego brži. Osobite su bile poteškoće kod velikih brzih turbogenerators, istosmjernih generators direktno tjeranih parnim turbinama, koji bi kraj svojih velikih snaga kod velikih brzina, na pr. 3000 ili 1500 okr/min, uopće jedva bili mogući da nisu uvedeni »pomoćni polovi« i »kompenzacioni namotaji«, o kojima će začas biti govora.

Uz osobito nepovoljne prilike komutiranja može se dogoditi da se iskrenje komutatora tako pojača da sav komutator okolo naokolo dođe u plamen i bude brzo potpuno uništen.

Za dobro komutiranje moraju biti ispunjeni i neki mehanički uslovi. Komutator mora na pr. biti dobro tokaren (posve okrugao), da kefice ne odskakuju; kefice iz prikladne vrste ugljena moraju pritiskivati nekim određenim tlakom na kolektor; itd. Ne mora dakle svakom iskrenju biti uzrok »električka« pogreška stroja.

36. Nema ju uopće kolektora ni s njime vezanih poteškoća *unipolarni* istosmjerni strojevi. Kod njih je prikladnim raspoređajem statorskog željeza i uzbuđenog namotaja postignuto da magnetski tok ulazi iz statora »radijalno« u rotirajuću armaturu na cijelom njezinom vanjskom plaštu i da se zatvara s jedne i druge čone strane armature u stator. Prema tomu svaki vodič na armaturi siječe kod vrtnje armature neprestano magnetske silnice na isti način (kao kad bi se kod običnog stroja mogao gibati trajno samo ispred N-pola), i u njemu se po formuli (170) iz C-55. stvara stalan istosmjerni napon. Stroj bi tako kao generator i bez kolektora davao stalnu istosmjernu struju, koja bi se uzimala preko kefica prislonjenih na par jednostavnih »kliznih koluta«, spojenih s krajevima armaturnog vodiča ili više takvih vodiča u paralelnom spoju.

Unipolarni strojevi ne mogu međutim davati napone veće od napona proizvedenog u jednom vodiču, jer ne dopuštaju serijsko spajanje vodiča i sumiranje pripadnih EMS kao kolektorski. Oni su prikladni samo za vrlo niske napone i vrlo jake struje, no ni tu nemaju praktičke važnosti, jer baš uz ove uvjete ni kod kolektorskih strojeva nema komutacionih poteškoća.



Sl. 222.

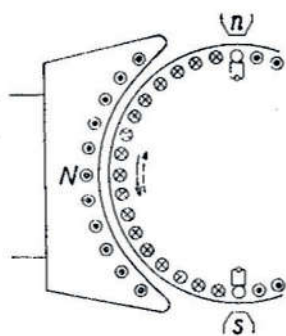
37. Utjecajima armaturne struje na neutralnu zonu, a donekle i ostalim njezinim utjecajima na magnetske prilike kolektorskog stroja, može se izbjeći, a istodobno se može još proizvesti i komutaciono polje prikladne jakosti, ako se po sl. 222. stroj pored redovitih »glavnih« polova N i S snabdi je posebnim manjim *pomoćnim polovima* n i s, pa se tim polovima uzbuđenima armaturnom strujom proizvede prikladno magnetsko polje. Takve je polove predložio Menges prije više od pola stoljeća, ali su tek mnogo kasnije općenito prihvaćeni. Pomoćni polovi leže u neutralnoj zoni i prikladno vođenom strujom armature se uzbu-

duju s takvim polaritetom i u tolikoj mjeri da njihovo polje poništava armaturno poprečno polje i da još daju i potrebno komutaciono polje. Kod jače armaturne struje njihovo uzbuđenje postaje također jače. Kefice prema tomu ne treba kod

strojeva s pomoćnim polovima uopće pomicati (ni za kut α' iz D-30. ni za kut α'' iz D-34.); one ostaju stalno u položaju koji odgovara neutralnoj zoni.

Pamti ovo pravilo (koje je lako verificirati): kod *generatora* slijedi iza glavnog pola u smislu vrtnje pomoćni pol suprotnog polariteta (kod stroja po sl. 222. rotiranog kao generatora u smislu izvučene strjelice iza N dolazi s, iza S pak n). Kod *motora* naprotiv u smislu vrtnje iza svakog glavnog dolazi istoimeni pomoćni pol (v. u sl. 222.: stroj kao motor rotira u smislu crtkane strjelice).

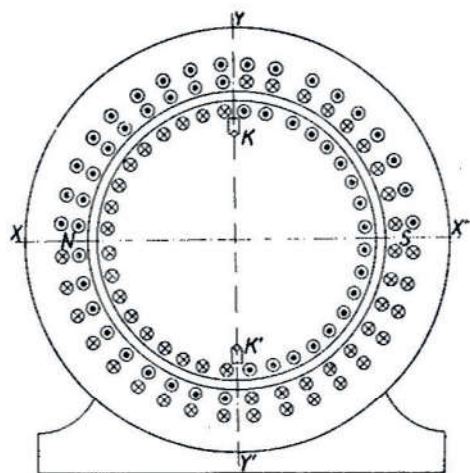
38. Pomoćni polovi kompenziraju posvema utjecaj polja armature uglavnom samo u malenom području, u okolici neutralne zone. Za potpuno kompenziranje



Sl. 223.

polja armature, koje će biti osobito važno kod velikih i brzih strojeva te vrlo promjenljivih opterećenja, treba po sl. 223. ugraditi u žljebove polnih nastavaka glavnih polova *kompenzacioni namotaj*, t. j. izvjesni broj vodiča kroz koje se vodi struja armature, a rasporedaj i smjer struje u tim vodičima je takav da oni nastoje proizvesti baš polje svuda protivno i u glavnom jednako po jakosti onom što ga izvodi armatura. Tako na pr. na sl. 223. teku struje armaturnim vodičima u području N-pola prema natrag, a struje u vodičima kompenzacionog namotaja smještenima na tom polu teku prema naprijed. Posve potpuna kom-

penzacija dobit će se osobito kod strojeva kod kojih je već sustav glavnih magneta izveden po D-26. prema Déri-u s »porazdijeljenim« namotajem, t. j. po sl. 224. u jednom sloju žljebova na statoru sa N-S kao na slici, i po tom s X-X' kao osi magnetnog namotaja, te s osi Y-Y' kao neutralnom zonom, ako se u drugi, armaturi bliži, sloj žljebova statora smjesti kompenzacioni namotaj s osi Y'-Y, koji je vodič po vodič suprotan armaturnom namotaju s osi Y-Y' (na sl. 223. se doista vidi nasuprot svakom vodiču armature vodič kompenzacionog namotaja protječan protivnom strujom). Obično se strojevi s kompenzacionim namotajem snabdiju još i pomoćnim polovima (sl. 223.). Ako pak stroj ima sve namotaje porazdijeljene u žljebove, kao u sl. 224., predvide se barem u statoru u neutralnoj zoni nešto veći zupci, koji onda igraju ulogu pomoćnih polova. To je zato što za posve dobro komutiranje, kako smo vidjeli, nije dovoljno samo poništiti armaturno polje, nego treba proizvesti još i komutaciono polje.



Sl. 224.

Kompenzacioni namotaji dolaziti će dakako u obzir samo kod velikih strojeva s teškim pogonima, osobito kod velikih turbogenerators; manji strojevi grade se obično samo s pomoćnim polovima, a posve mali i bez njih.

39. Razmotrimo sada *načine uzbuđivanja* magnetâ strojeva istosmjerne struje. Treba razlikovati prije svega:

I) strojeve sa *stranim* ili *nezavisnim* uzbuđenjem, koji uzbudnu struju I_M dobivaju iz nekog »stranog« ili »samostalnog« izvora struje, na pr. iz voda istosmjernog napona ili iz baterije akumulatora; te

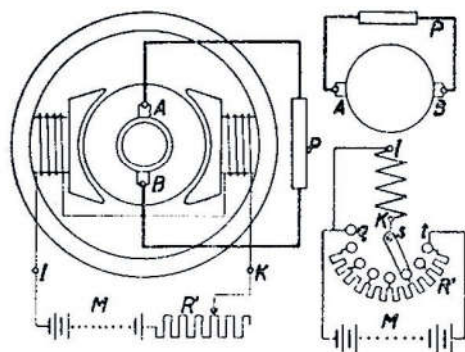
II) strojeve s *vlastitim* uzbuđenjem ili *samouzbudjenjem*, kod kojih je magnetni namotaj posredno ili neposredno priključen na armaturu, pa ova kod generatorske upotrebe stroja hrani pored priključenog potrošača i magnete, dok se kod motorske upotrebe hrane stroju privedenom električkom strujom uz armaturu i magneti.

Prema načinu priključka magnetnog namotaja samouzbudeni strojevi se mogu dalje podijeliti:

a) na *serijske* strojeve s armaturom i magnetnim namotajem ukopčanim u seriju, tako da ukupna struja I stroja predstavlja ujedno struju armature I_A i struju kroz magnetni namotaj I_M , pa vrijedi relacija (jednako kod generatora kao i kod motora):

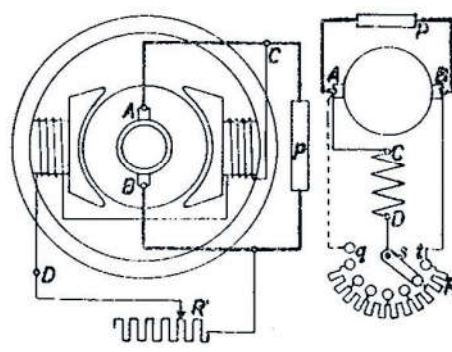
$$I = I_A = I_M \quad (240)$$

b) na *poredne* strojeve s magnetnim namotajem (skupa s otporom za reguliranje) priključenim na kefice armature, dakle uporedo ili paralelno armaturi, tako da se kod stroja kao generatora armaturna struja dijeli na struju I davanu



Sl. 225.

Sl. 226.



Sl. 227.

Sl. 228.

potrošaču i struju I_M magnetnog namotaja, dok se naprotiv kod motora struja I privedena izvana dijeli na struju armature I_A i struju magneta I_M , prema čemu alternativno vrijede relacije:

$$I_A = I + I_M \quad (241)$$

$$I = I_A + I_M \quad (242)$$

i to prva za generatore a druga za motore;

c) na *kompaundne* (mješovite) strojeve s dva magnetna namotaja, jednim ukopčanim serijski i drugim ukopčanim uporedo s armaturom.

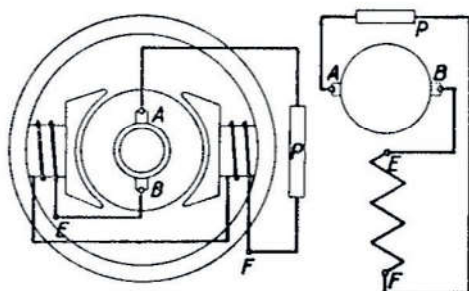
Tako je na sl. 225. i 226. prikazan, shematski i simbolički, dvopolni nezavisno uzbuđen stroj s uzbuđenim namotajem I-K, koji se hrani iz akumulatorske baterije M; struja se regulira promjenljivim otporom R' neovisno o armaturi A-B, koja je sa svoje strane priključena na P (kod generatora je P potrošač, kod motora mreža koja hrani armaturu). Vrijedno je na sl. 226. pripaziti na stezaljke q-s-t regulatora

magnetne struje, t. zv. »magnetnog regulatora«; prelazom ručke na q magneti se kod iskapčanja uzbudne struje kratko spoje u smislu bilješke iz C-130.

Na sl. 227. i 228. donesen je shematski i simbolički poredni stroj s magnetnim namotajem C-D i magnetnim regulatorom s ukopčanim otporom R' u grani paralelnoj armaturi A-B; ostale su pojedinosti kao u prethodnim slikama.

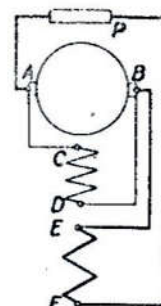
Na sl. 229. i 230. stroj je serijski, s armaturom A-B i magnetnim namotajem E-F serijski priključenima na P.

Konačno na sl. 231. simboliziran je kompaundni stroj s porednim magnetnim namotajem C-D, paralelnim armaturi A-B, i serijskim E-F; to bi bila »kratko shun-



Sl. 229.

Sl. 230.



Sl. 231.

tirana» podvrsta, dok bi u slučaju da se spoj D-B prekine i nadomjesti spojem D-F nastala »dugačko shuntirana» podvrsta kompaundnog stroja sa C-D paralelnim serijskoj kombinaciji A-B-E-F.

40. Moglo bi se samo pitati, kako je moguće da se strojevi s vlastitim uzbuđenjem uopće mogu kao generatori uzбудiti, a da im magneti niti u početku, dok još armatura ne radi, ne hrani neki vanjski izvor struje. Kad željezo nekog generatora ne bi imalo nikakvih ostataka magnetičnosti, ne bi bilo ni magnetskoga toka stroja, pa se ne bi u armaturi proizvodio nikakav napon i ona ne bi mogla davati struju magnetima, tako da bi ovi ostali trajno nemagnetični, i stroj se doista uopće ne bi uzбудio. U prvi mah moglo bi se dakle činiti da bi se kod svakog stroja morali magneti bar prvo vrijeme nezavisno uzбудiti, i tek onda, kad bi jednom armatura počela davati struju, da bismo mogli magnetni namotaj priključiti na armaturu. No na temelju *dinamoelektričkog principa*, poznatog već iz elemenata fizike, nije potrebno ovako postupati, nego se i kod stroja spojena već u početku na samouzbudenje može postići da se stroj sam uzбудi. Pomislimo naime da su magneti već bili magnetični. Onda će oni radi remanencije pokazivati nešto malo magnetičnosti, zbog koje će stroj ipak imati neki mali magnetski tok. Ako dakle armaturu stavimo u gibanje, inducirat će se u njoj neki slabi napon, tek malen postotak normalnog napona. No pomislimo sad da smjer vrtnje armature i spoj magnetnoga namotaja s armaturom međusobno tako korespondiraju da bi struja što bi je onaj slabi napon proizveden u armaturi poslao u magnetni namotaj proizvela pojačanu magnetičnost magneta, odn. pojačani magnetski tok stroja. Taj

pojačani tok proizveo bi pojačani napon u armaturi, što bi opet pojačalo uzbudnu struju stroja. No tim bi se opet pojačao napon proizveden u armaturi, itd. Jedno bi dakle pojačavalo drugo, do izvjesne granice, koja bi odgovarala normalnom djelovanju stroja.

U praksi se mogućnostima samouzbuđivanja općenito služimo. Za razliku od dotad upotrebljivanih generatora s permanentnim magnetima ili »magnetoelektričkih strojeva, generatori sa samouzbuđenjem nazvani su »dinamoelektričkim« strojevima. Za uvođenje dinamoelektričkoga principa zaslužan je osobito Werner Siemens, no spominju se u vezi s tim principom također Wheatstone i drugi.

41. Svaka od kategorija u koje smo strojeve rasporedili prema načinu uzbuđivanja ima svoja karakteristična svojstva u generatorskom i motorskom pogonu, poželjna ili nepoželjna kod pojedinih vrsti praktičkih primjena. O tim svojstvima ovisi, koje će kategorije više odgovarati predviđenoj upotrebi. Tako su u praksi generatori redovito poredni, a katkad i kompaundni, dok su motori serijski ili poredni (a i kompaundni), već prema tipu motorskoga pogona.

Da bismo odnose kod opterećenja pobliže razabrali, razmatrat ćemo pojedine kategorije strojeva najprije kao generatore, a onda kao motore. Njihovo vladanje kod različitih prilika najbolje se vidi iz izvjesnih karakterističnih krivulja: *karakteristikâ*. Kod generatorâ su to osobito »vanjska« i »nutarnja« karakteristika, kod motorâ karakteristike brzine, momenta vrtnje itd.

II) GENERATORI ISTOSMJERNE STRUJE

Istosmjerni generatori u pogonu; karakteristike nezavisno uzbuđenih, serijskih, porednih i kompaundnih generatora. Generatori konstantne struje.

42. Prvi neka bude razmotren *nezavisno uzbuđeni generator*. U praznom hodu uz nepromijenjenu brzinu i varirano uzbuđenje krivulje proizvedenog napona E jesu same karakteristike praznog hoda po sl. 214., a uz stalno uzbuđenje i variranu brzinu krivulje za E su pravci kroz ishodište koordinata po sl. 215.

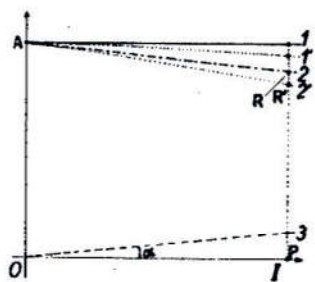
Međutim u praksi će nas zanimati naročito variranje unutar armature proizvedenoga napona E i variranje napona raspoloživoga na stezaljkama generatora za vanjske potrošače U , i to u ovisnosti od struje opterećenja I uz odabrane stalne iznose brzine n i uzbudne struje I_M generatora. Krivulje u iznesenom smislu s ordinatama E i U , te apscisama I zovu se *nutarnja* i *vanjska* karakteristika generatora.

U konkretnom slučaju nezavisno uzbuđenog generatora I će se podudarati sa I_A i U sa $E_A = E - I_A R_A$ u smislu formule (233) iz D-10., te bi kod strojeva s kompenziranom reakcijom armature, t. j. onih s kompenzacionim namotajem i donekle onih snabdjevenih samo s pomoćnim polovima, proizvedeni napon E ostao kod danoga n i danoga I_M isti bez obzira na struju I crpenu iz armature. A kod nekompenzirane reakcije armature tok po polu i s njime EMS E bi polagano opadali na iznose ispod početnih kod porasta struje I . U prvom slučaju nutarnja

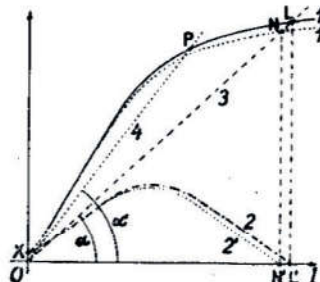
karakteristika, t. j. krivulja za E bila bi horizontalni pravac, a u drugom bi se neznatno spuštala, kako je to na sl. 232. predloženo linijama 1 i 1'.

Za vanjsku karakteristiku, t. j. krivulju za $U = E - I_A R_A$, dovoljno bi bilo od krivulje 1 (ili 1') odbiti iznose $I_A R_A = I R_A$ ordinata pravca 3 s priklonom α prema apscisnoj osi određenim relacijom $\operatorname{tg} \alpha = R_A$ (smatrat ćemo R_A konstantnim) i to bi dalo krivulju 2 (ili 2') kao vanjsku karakteristiku.

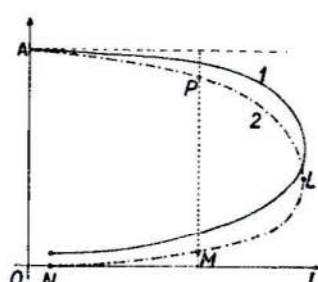
Kako je u praksi R_A redovito vrlo maleno, krivulja 2 dat će kod struje normalnog opterećenja samo malo manji iznos $U = PR$ prema iznosu $U = E = OA$ kod praznog hoda, a kod malene razlike između 1 i 1' ne će ni pripadni iznos PR' na krivulji 2' biti daleko ispod E . Tako je kod primjera iz D-12. napon stezaljki stroja 216 V opterećenjem pao na 208 V, dakle za 8 V, a ako bi zbog utjecaja reakcije armature pao i na recimo 204 V, još uvijek bi pad napona bio samo 12 V. Može se dakle reći da pad napona s opterećenjem kod nezavisno uzbuđenih generatora dosiže i kod jakih opterećenja samo malen postotak napona u praznom hodu, što znači da nezavisno uzbuđeni generatori pokazuju tendenciju skoro stalnog napona



Sl. 232.



Sl. 233.



Sl. 234.

stezaljki kod različitih opterećenja. A kako je ovakvo svojstvo očito poželjno kod generatora, jer potrošači se redovito dimenzioniraju za priključak na dani napon, nezavisno uzbuđeni strojevi daju prikladne generatore, odn. vanjska im je karakteristika za ovakvu upotrebu povoljna.

Opadanje napona stezaljki U s opterećenjem I može se uostalom i potpuno spriječiti time da se kod jačega opterećenja stroja pojača do potrebnog iznosa uzbudna struja I_M (magnetnim regulatorom q-s-t iz sl. 226.), čime se poveća magnetski tok po polu, a time i E , dakle i U .

43. Potpuno drukčije se vlada *serijski generator*. Kod praznog hoda je $I = I_A = I_M$ jednako 0, pa kako prema tomu u praznom hodu nema uzbuđenja, stroj daje tek neznatan proizvedeni napon od magnetskoga toka zaostalog remanencijom. Kad raste opterećenje, a s njime i uzbuđenje, također raste i magnetni tok, a s njime i EMS E . Zbog $I_M = I$ karakteristika praznog hoda $E = f(I_M)$ i nutarnja karakteristika $E = f(I)$ kod serijskih strojeva s kompenziranim utjecajem armaturnog polja će se podudarati, a u slučajevima gdje se reakcija armature mora uzeti u račun, krivulja $E = f(I)$ teći će kod jakih opterećenja nešto

malo ispod karakteristike praznog hoda kakva bi se dobila sa I_M crpenim iz nezavisnog izvora (v. krivulje 1 i 1' na sl. 233.).

Vanjska karakteristika 2, koja predodčuje napon stezaljki U kao funkciju struje $I = I_A = I_M$, dobit će se u ovom slučaju odbijajući od krivulje 1, koja predstavlja $E = f(I)$, ordinate $I(R_A + R_M)$ pravca s priklonom α po relaciji $\operatorname{tg} \alpha = R_A + R_M$, dakle pravca 3 na sl. 233., jer sada struja stroja prolazi redom kroz armaturu (s ev. pomoćnim polovima i dr.) otpora R_A i magnetni namotaj otpora R_M . Nastaje dakle vanjska karakteristika poput 2 ili 2' na sl. 233., koja se, počinjući s nekom neznatnom ordinatom OX , najprije uzdiže do nekog maksimuma, a zatim spušta prema nuli postizavajući nultočku (L' ili N' na sl. 233.) kod onoga opterećenja I kod kojega bi pravac 3 sjekao (u L , odn. u N) nutarnju karakteristiku. Serijski su dakle strojevi posvema neprikladni za generatore, jer ne pokazuju tendenciju stalnoga U : kod porasta opterećenja U najprije jako raste i zatim, kod približavanja kratkom spoju, postepeno sve naglije pada.

44. Zanimljivo je, na pr. uz pretpostavku krivulja 1 i 3 iz sl. 233., razmotriti uvjete da uopće dođe do samouzbudjenja serijskog stroja. Kod odnosâ kao u slici kratko spojeni serijski generator uzбудiti će se do onoga toka koji odgovara iznosu E u točki L krivulje 1. Ako stroj nije kratko spojen, nego je u njegov strujni krug uključen još neki potrošač umjereno velikog otpora R , ulogu pravca 3 preuzet će strmiji pravac 4 s priklonom po relaciji $\operatorname{tg} \alpha' = R_A + R_M + R$ i stroj će se uzбудiti do toka korespondentnog točki P , t. j. još će biti samouzbudjenja. No kod većih R pravac 4 postajao bi sve strmiji, i konačno ne bi više ni sjekao krivulju 1 u njezinom gornjem dijelu, t. j. stroj se ni kod pune brzine više ne bi sam uzбудio. No i s pravcem 3, t. j. uz kratko spojeni generator, može ne doći do samouzbudjenja, ako stroj ima brzinu znatno ispod normalne, jer za sve manje brzine karakteristike praznog hoda teku po sl. 233. sve manje strmo, i kod premalih brzina mogu postati tako malo strme da ih više ni pravac 3 ne siječe u gornjem dijelu.

Prema tomu serijski generator lakše se uzбудuje u kratkom spoju bez vanjskog otpora R , a uz inače fiksirane prilike uzбудuje se istom od izvjesne brzine dalje. Dakako da je za samouzbudjenje potrebno pripaziti da priključak magnetnog namotaja odgovara smislu vrtnje armature i remanenciji, da uopće može doći do pojačavanja magnetskog toka po dinamoelektričkom principu.

45. Kod *porednoga generatora* nije napon stezaljki $U = E_A$ konstantan za različita opterećenja I stroja, pa nije konstantna ni uzbudna struja $I_M = U/R_M$ (sa R_M neka bude uvijek obuhvaćen ne samo otpor samog magnetnog namotaja nego i otpor ukopčanog dijela magnetnog regulatora q-s-t). Nije pak konstantno U , nego opada s rastućim I , jer bi u izrazu $U = E_A = E - I_A R_A$ već zbog reakcije armature, ako se ova ne bi mogla zanemariti, EMS E opadala, a tomu pridolazi da s porastom opterećenja I raste $I_A = I + I_M$ i s njime i $I_A R_A$. Kako pak opada U , opada i $I_M = U/R_M$, što daje manji tok Φ po polu i time pogotovo manji E , dakle i manji U itd., sve dok se ne uspostavi neko stabilno stanje za dano opterećenje.

Prema tomu po sl. 234. kod porednog generatora već nutarnja karakteristika, t. j. krivulja 1 za E , ima silaznu tendenciju (i nije horizontalni pravac kao kod nezavisnog uzbuđenja i kompenzirane ili zanemarive reakcije armature), a vanjska karakteristika, t. j. krivulja 2 za U , opadati će naglije s rastućim opterećenjem nego kod nezavisnog uzbuđenja. A postajući sve strmija kod sve manjih i manjih iznosa otpora R potrošača dosegnut će točku L. Ako bismo sad još više umanjivali R smanjujući ga do nule, struja I ne bi više rasla, nego bi opadala po LMN, dok konačno u točki N kratkog spoja ne bi U postalo jednako nuli. No onda bi bilo i $I_M = 0$, pa ne bi bilo više uzbuđenja. Da magneti nemaju nikakve remanencije, mi bismo čak imali i $E = 0$, pa bi i $I = I_A$ postalo jednako nuli, dok ovako stroj ipak daje po sl. 234. struju $I = ON$ u kratko spojenoj armaturi, proizvedenu samim naponom remanencije OX iz sl. 213.

Poredni se strojevi mogu prema gornjem dobro upotrebiti za generatore, jer im je vanjska karakteristika ipak još dovoljno blizu horizontali. A kako su samouzbuđeni, obično su praktički prikladniji od nezavisno uzbuđenih, koji sami po sebi imaju povoljniju vanjsku karakteristiku. Silazna tendencija u vanjskoj karakteristici nije uostalom tolika smetnja, jer se kod porednih strojeva napon U može držati konstantnim reguliranjem uzbudne struje s pomoću magnetnoga regulatora. To je reguliranje kod porednih generatora više potrebno nego kod nezavisno uzbuđenih. A može se udesiti da bude automatsko, t. j. da određene naprave, t. zv. automatski regulatori, na smanjenja i povećanja napona U pomiču magnetni regulator u smislu pojačavanja i slabljenja struje I_M .

46. Uvjeti samouzbuđivanja kod porednih su generatora baš suprotni onima kod serijskih. Poredni se najbolje uzbuđuju u praznom hodu, t. j. uz još nepriključen otpor R potrošača. Sav proizvedeni napon E troši se u tom slučaju u strujnom krugu armatura-magneti-regulator, pri čemu je R_A redovito zanemarivo prema sumi R_M otpora magnetâ R'_M i otpora R' regulatora. Radna točka stroja dobiva se onda tražeći sjecište karakteristike praznog hoda i pravca s prikonom α određenim relacijom $\operatorname{tg} \alpha = R_A + R_M$.

Poveća li se R_M povećavanjem ukopčanog otpora R' magnetnog regulatora, spomenuti pravac postat će strmiji i sjeći će karakteristiku praznog hoda kod niže ordinate; prestrmi pravac ne bi je uopće sjekao, pa ne bi došlo ni do samouzbuđenja. Kod danog R_M i premalene brzine generatora, a dakako i kod naopako priključena uzbudnog namotaja, može također ne doći do samouzbuđenja.



Sl. 235.

47. Trebaju li da uporedo rade dva generatora različitih karakteristika uzbuđenja na isti potrošački napon U , preuzet će oni po sl. 235. opterećenja I_1 i I_2 prema uvjetu istog napona stezaljki U paralelnih izvora struje. Poželjna će međutim

biti općenito drukčija podjela ukupnog opterećenja $I_1 + I_2$, naime podjela na pojedinačne strojeve u omjeru njihovih nominalnih učina, tako da bi na pr. kod ge-

neratora građenih za jednake učine svaki davao polovicu ukupno crpene struje, a ne jedan manje i drugi više od toga kao u sl. 235. U ovakvim slučajevima dosta je da se generatoru kome treba povećati opterećenje pojačava uzbuđenje i onom drugom smanjuje, dok se željeni omjer $I_1 : I_2$ strujâ opterećenja uz nepromijenjeno U ne postigne.

Rečeno vrijedi za praktički normalne slučajeve paralelnog rada porednih (i nezavisno uzbuđenih) generatora. Kod dva kompaundna generatora, na običan način paralelno spojena, ako bi recimo zbog povećane brzine pripadnog pogonskog stroja prvi generator počeo davati više struje, on bi se i jače uzbudio, pa bi davao još više struje, i slično dalje. Da bi se izbjeglo labilno stanje, spojišta serijskog namotaja i armature u oba stroja kratko se povežu posebno dodanim »vodom izjednačenja«. Za paralelni rad dvaju serijskih generatora primijenilo bi se »unakrsno spajanje« (prvi uzbudni namotaj u seriji s drugom armaturom, drugi uzbudni namotaj u seriji s prvom armaturom).

Zanimljiv je i problem paralelnog rada porednog generatora i akumulatorske baterije, na koji međutim samo upozoravamo (»puferno djelovanje« akumulatorske baterije; »Piranijev uređaj«).

48. Dok serijski generatori imaju vanjsku karakteristiku na prvom njezinom dijelu uzlaznu i dalje silaznu, i po tom nepovoljnu za primjene, a poredni umjereno silaznu mjesto obično željene horizontalne, kod *kompaundnih generatora* mogu se silazna tendencija zbog porednog namotaja i uzlazna zbog serijskog prikladnim dimenzioniranjem obaju namotaja tako kombinirati da kod različitih opterećenja U ostane skoro stalno, dakle da vanjska karakteristika ide uglavnom horizontalno. Moguće je čak postići da U nešto raste s opterećenjem, tako da se suviškom napona U kod jačih opterećenja pokriju i gubici u vodu koji spaja generator s nekim

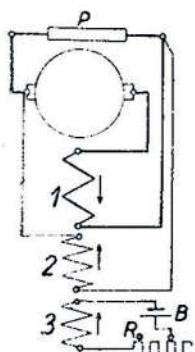
udaljenim potrošačem. Onda ostaje napon stalan na potrošačkoj (ne na generatorskoj) strani. Prema tomu će kompaundni strojevi uz ovakve zahtjeve biti prikladni, pa se i susreću u specijalnim prilikama.

49. Iznimno mogu postojati odnosi gdje su poželjni *generatori konstantne struje* umjesto onih konstantnog napona. Spomenut ćemo dva takva, ne ulazeći u potankosti njihova djelovanja. Prvi, *Kraemerov stroj*, daje približno konstantnu struju i uz

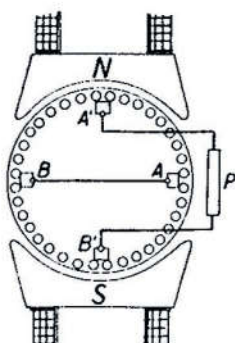
vrlo promjenljiv otpor R potrošača P ; brzina stroja drži se stalna. Kod *Rosenbergova stroja* »s poprečnim poljem« problem je bio postići uglavnom konstantnu struju i uz vrlo promjenljivu brzinu stroja (počevši od neke određene brzine na gore).

Po sl. 236. Kraemerov se stroj može shvatiti kao stroj sa kompaundnom kombinacijom serijskog namotaja 1 i (dugo shuntiranog) porednog 2, no s dodanim još trećim namotajem 3, nezavisno uzbuđivanim iz izvora B preko otpora za reguliranje R_0 . Namotaj 1 djeluje nasuprot namotajima 2 i 3. Stroj služi za uređaje za električka svarivanja i za pogon reflektora.

Rosenbergov stroj ima po sl. 237. dva para kefica. Kefice $A-B$ korespondentne neutralnoj zoni kratko su spojene, a potrošač P (sijalice), njemu paralelni magnetni namotaj i (od stroja nabijani) akumulatori priključeni su na drugi »poprečni« par kefica $A'-B'$. Takav je stroj potreban na pr. na željezničkim vlakovima kao stroj za rasvjetu vagona i nabijanje akumulatora (koji hrane sijalice dok vlak stoji ili ide vrlo sporo).



Sl. 236.



Sl. 237.

III) MOTORI ISTOSMJERNE STRUJE

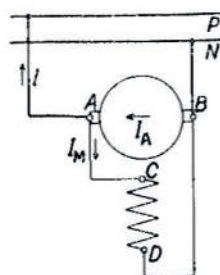
Istosmjerni motori: tri osnovne relacije. Kritična brzina. Serijski, poredni i kompaundni motori. Pokretači uz istosmjerne motore. Reguliranja brzine »naponom« i »poljem«. Leonardov spoj. Električko kočenje.

50. Istosmjerni motori mogu biti poredni, serijski i kompaundni (nezavisno uzbuđeni s magnetnom i armaturnom strujom iz iste mreže izlazili bi na poredne). Prije razmatranja pojedinih tipova načinit ćemo neke općenite primjedbe.

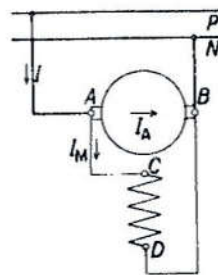
Najprije nešto o smislu vrtnje motora. Ako kroz armaturu nekog istosmjernog stroja, kojega polovi imaju određeni polaritet, teče struja I_A , stroj proizvodi izvjesni ukupni moment vrtnje M , za koji vrijedi formula (236) iz D-13. Kod pogona generatora mora se taj moment vrtnje izvanjskim mehaničkim silama svladavati kao »protumoment«, dok se stroj kao motor baš vrti u smislu njime proizvedenog momenta vrtnje. Odavde vidimo da će se kod istoga smjera protjecanja strujâ u armaturi i magnetima motor vrtiti u suprotnom smislu nego generator (uspor. izvučene i crtkane strjelice na sl. 197., 201. i dr.). Obrtanjem smjera armaturne struje uz nepromijenjen smjer magnetne struje postigla bi se vrtnja motora u suprotnom smislu. Slično bi bilo da se samo magnetna struja obrne i armaturna ostane po smjeru ista. Kad bismo konačno obrnuli istodobno smjer strujâ i u magnetima i u armaturi, smisao vrtnje morao bi se dvaput obrnuti, t. j. ostao bi nepromijenjen.

51. Odavde možemo povući praktički zaključak da će smisao vrtnje nekoga motora, svejedno da li serijskoga ili porednoga, ostati isti priključili mi motor na pozitivni vodič P i negativni N istosmjernoga voda ovako ili onako. Ako bismo dakle željeli obrnuti smisao vrtnje elektromotora, morali bismo izmijeniti spoj samih elektromagneta ne dirajući u spoj armature. Ili, što je običnije, izmijeniti spoj armature ne dirajući u spoj magneta.

Nadalje se iz gornjega lako vidi da će *serijski* stroj, uz netaknut spoj magneta prema armaturi, ići kao motor, priključen na izvjesni istosmjerni vod s vodičima polaritetâ P i N određenih već nekim drugim izvorom, na pr. baterijom akumulatora, protivnim smjerom nego bi išao kao generator koji bi hranio taj vod. Ako bismo pak *poredni* stroj priključili, ostavivši netaknut spoj magneta prema armaturi, na neki vod određenog polariteta jednom kao generator i drugiput kao motor, on će kao motor rotirati kako bi rotirao i kao generator koji bi hranio vod (prema tomu se na pr. ne treba toliko bojati slučaja da pogonski stroj porednog generatora koji nabija bateriju akumulatora prestane raditi; istosmjerni stroj bi onda naprosto dalje rotirao u istom smislu hranjen kao motor akumulatorima). Da kod po-



Sl. 238.



Sl. 239.

rednoga stroja pri prelazu od generatora na motor ne dolazi do obrnuća smisla vrtnje lako je vidjeti usporedbom sl. 238. i 239., od kojih prva prikazuje stroj kao generator i druga kao motor. Kod generatora je $I_A = I + I_M$, a kod motora je $I = I_A + I_M$. Struja I_M ista je u obje slike, naprotiv struje I_A su suprotne. Da su i struje I_M i struje I_A ostale iste, motor bi rotirao suprotno generatoru, a ovako će rotirati u istom smislu kao generator, što smo baš i tvrdili.

52. Razmotrimo sad kvantitativno veze između različitih veličina koje određuju rad motora.

Kod električkih motora pretvara se glavni dio stroju iz mreže napona U u obliku struje I privedenog električkog učina $N' = UI$ u proizvedeni mehanički učin $N = M \cdot \omega$, gdje su M motorom »proizvedeni« moment vrtnje i ω »kutna brzina« motora. S druge strane motor gibajući se proizvodi izvjesnu formulu (235) određenu EMS E , koja se suprotstavlja naponu E_A izvana narinutom armaturi, i poništava se s onim dijelom $E_A - I_A R_A$ toga napona koji se ne troši na pokrivanje gubitaka napona $I_A R_A$ u armaturi, odakle i ime »protu-EMS« za E kod motora. Vrijedi dakle relacija $E = E_A - I_A R_A$, koju smo već u D-10. u malo drugačijem obliku formulu (234) izrazili.

»Proizvedeni« mehanički učin N ni nije drugo nego ekvivalent za električki učin $E I_A$ utrošen kod svladavanja protu-EMS, što je lako time verificirati da se u relaciji $E I_A = N = M \cdot \omega$ nadomjesti E izrazom desno u (235) i zamijeni ω sa $2\pi n/60$. Dobit će se baš formula (236) za M , koja je u D-13. izvedena direktnim načinom, a više se u praksi dosad poznavala u obliku numeričke relacije (236'), sa M u kg^*m i tokom po polu Φ^* u maksvelima.

Na osovini upotrebljivi* ili »korisni« mehanički učin N'' motora i pripadni »korisni« moment vrtnje M'' bit će dakako od »proizvedenih« veličina N i M manji za iznose N_0 i M_0 koji se gube na svladavanje protumomenata vrtnje zbog trenja na osovinama i keficama, trenja (otpora) uzduha, event. vibracija, te kočnog djelovanja od gubitaka histereze i vrtložnih struja u limovima armature. Prema tome mogu se postaviti relacije: $N'' = N - N_0$ i $M'' = M - M_0$. A »stepen djelovanja« motora bio bi omjer $\eta = N''/N'$ (sa N' većim od N uglavnom za iznos $I_A^2 R_A + I_M^2 R_M$ učina utrošenih na stvaranje strujne topline u armaturi i magnetima).

Podsjetimo još 11 su uopće kod strojeva, dakle i onih neelektričkih, mehanički učin, moment vrtnje i kutna brzina vezani formulama $N = M \cdot \omega$ i $N'' = M'' \cdot \omega$, već prema tomu da li se misle proizvedeni ili korisni učin i moment vrtnje. Praktički se obično ove formule upotrebljavaju u obliku numeričkih relacija:

$$N(\text{W}) = 1,028 \cdot M(\text{kg}^*\text{m}) \cdot n(\text{okr/min}) \quad (243)$$

$$N''(\text{W}) = 1,028 \cdot M''(\text{kg}^*\text{m}) \cdot n(\text{okr/min}) \quad (244)$$

koje je lako verificirati uzimajući u obzir relacije: $1 \text{ Ws} = 1:9,81 \text{ kg}^*\text{m}$ i $\omega = 2\pi n/60$. Uz poznate dvije od ove tri veličine moguće je po (243) ili (244) naći treću. Na pr. kod elektromotora sa danim M'' i n može se naći N'' (i preko poznatog η također N').

53. Za kasnija razmatranja sažmimo bitni sadržaj gornjih razlaganja u tri *osnovne relacije* motora, naime u relacije *momenta vrtnje*, *armaturne struje* i *brzine*:

$$M = C' \cdot \Phi \cdot I_A \quad (I) \quad I_A = \frac{E_A - E}{R_A} \quad (II) \quad n = \frac{E}{C'' \cdot \Phi} = \frac{E_A - I_A R_A}{C'' \cdot \Phi} \quad (III)$$

u kojima smo, u skladu sa (236) i (235), oznakama C' i C'' obuhvatili izraze $pz/2a\pi$ i $pz/60a$, dakle konstante, određene samo konstrukcijom danoga motora i neovisne o njegovim pogonskim prilikama.

54. Netom napisane tri relacije omogućuju da se slijedi funkcioniranje motora u najrazličitijim prilikama. Iz njih je na pr. lako razabrati »svojstvo prilagođivanja« elektromotora teretu. Primijenimo neki konstantni napon E_A na armaturu motora, kome neka uzbuđenje bude nezavisno i stalno po jakosti, što znači da će mu i tok uz kompenziranu ili zanemarivu reakciju armature biti konstantan. Dok motor miruje, po relaciji armaturne struje zbog $E = 0$ bit će $I_A = E_A/R_A$, t. j. struja I_A bit će kod redovito neznatnoga R_A vrlo velika. Recimo da motor tu jaku početnu struju izdrži; po relaciji momenta vrtnje bit će i pripadni proizvedeni moment vrtnje vrlo velik. Ako je taj moment veći od momenta vrtnje koji motor treba, da bi upravo mogao svladavati teret i trenje, armatura će se staviti, u ubrzanu vrtnju. No sve bržom vrtnjom proizvodit će motor po (III) sve veće E , zbog kojega će po (II) armaturna struja I_A , a time po (I) i proizvedeni moment M , sve više slabiti. Kod nekog određenog broja n okretaja na minutu konačno će E toliko narasti, da će proizvedeni moment vrtnje biti baš jednak ukupnom protumomentu vrtnje M' , kojim se teret, pa trenja na osovini i keficama, itd., protive rotiranju motora: $M = M'$. Onda ne će više biti ubrzavanja vrtnje i nastupit će »stacionarno« stanje: jednoliko rotiranje motora brzinom n . Motor se dakle automatski nastoji prilagoditi opterećenju koje ima svladavati, on nastoji postići stacionarno stanje, kod kojega proizvodi baš toliko moment vrtnje, koliki je potreban da se protivni moment vrtnje svlada. S porastom mehaničkog opterećenja rasti će dakle uz stalno Φ i armaturna struja I_A , dakle električko opterećenje. Ovo zanimljivo svojstvo pokazuje motor u svim, a ne samo u promatranim prilikama.

Protivni primjer neprilagođivanja opterećenju bio bi recimo ovaj: plinski plamenik troši plina određenog pritiska prema tomu koliko je pipac otvoren, bez obzira na količinu vode koju ima grijati.

55. Pitajmo još, što bi se dogodilo kad bi se motor uz konstantno E_A i Φ mogao gibati posve neopterećeno, dakle kad bi nestalo ne samo korisnog tereta nego i trenja itd. Onda ne bi bilo nikakvoga mehaničkog protumomenta vrtnje, pa bi armatura sve brže rotirala, dok ne bi kod izvjesnog *kritičnog broja okretaja* (»kritične brzine«) n_k protu-EMS E dosegula posvema vrijednost E_A ; tada bi struja I_A potpuno iščezla. Ova je »kritična brzina« granica, koju stroj kao motor nikako ne može uz dano E_A i Φ premašiti (i u praksi joj se čak samo više ili manje odozdo približi, jer i u praznom hodu motor zbog trenja itd. nije mehanički posve rasterećen).

Svakom naponu E_A uz stalno Φ odgovara posve određena kritična brzina n_k , većemu E_A odgovara i veće n_k .

Kad bismo stroj vanjskim mehaničkim silama potjerali brzinom većom od kritične, postalo bi E veće od E_A , dakle $E_A - E$ i I_A negativni, t.j. armatura bi slala struju u vod, mjesto da je prima iz njega. Stroj bi dakle kod brzina iznad kritične radio kao generator, kojega proizvedeni napon nadvladava napon mreže. Kritična je brzina po tomu kao neka granica: ispod nje je pogon motorski, iznad nje generatorski.

56. Pretpostavimo sad da uz konstantno E_A mijenjamo uzбудnu struju I_M , a prema tomu i Φ . Budući da je po (III) E proporcionalno sa n morat će, ako E ima da ostane isto, kod rastućega Φ brzina n opadati; i obrnuto: ako Φ opada, n će rasti. Mijenjajući Φ možemo dakle utjecati na brzinu n motora u smislu povećavanja brzine smanjivanjem magnetnog toka.

U praksi bi se E kod stalnog E_A vrlo malo promijenilo kad bi Φ palo, i zato I_A (kraj istog M) nešto poraslo, jer u izrazu $E = E_A - I_A R_A$ član $I_A R_A$ ostaje uvijek malen (zbog toga što je R_A neznatno). Što je dakle upravo rečeno uz pretpostavku stalnoga E o smanjivanju i povećanju brzine motora pojačavanjem i slabljenjem uzbuđenja vrijedi približno i uz stalno E_A .

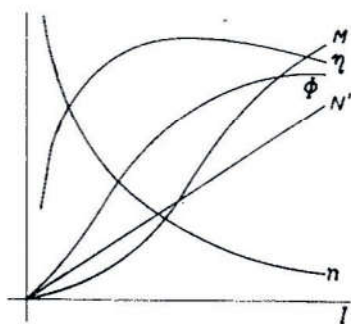
Moglo bi se činiti na prvi pogled malo neobično da slabijem toku, dakle i slabijem polju, odgovara veće n , a jačem manje. No stvar je lako ovako razumjeti: ako neki motor, da bi proizveo izvjesnu protu-EMS E , mora ići određenom brzinom da mu vodiči sijeku potrebni broj silnica sekundno, on će u polju slabije gustoće silnica morati ići brže, da bi mu vodiči ipak sekundno sjekli isti broj silnica.

57. Zanimljiva situacija nastupa, ako se motoru smanjuje opterećenje prema nuli i ako uporedo s time polje slabi. Po relaciji brzine (III) uz stalno $E_A \approx E$ rasti će kritični broj okretaja n_k prema beskonačnom ili bar vanrednom velikom, ako Φ konvergira prema nuli ili bar postaje neznatan. A daleko ispod njega ne će ostajati ni u praznom hodu postignuti broj okretaja na minutu n . U praksi naime motor nije doduše nikad savršeno neopterećen, pogotovo ne kod vanredno velikih brzina (otpor uzduha naglo raste s brzinom!), pa se zato n_k ne će posve dostići; ali postignuti n kod praznog hoda i skoro iščezloga toka bit će svakako također vrlo velik. Neopterećeni motori sa gotovo iščezlim Φ postizavaju dakle vanredno velike brzine, oni *uteknu*. A kad motor utekne, kako se to baš može dogoditi kod serijskih motora bez korisnog opterećenja kod kojih iščezavanje armaturne struje znači i iščezavanje uzbudne struje, nastaje pogibelj da se armatura, a i naprava koja se s njom zajedno vrti, oštete ili čak razlete u komade zbog centrifugalne sile. Prema tomu se serijski motori ne smiju ostavljati neopterećeni, jer postoji pogibelj da »uteknu«.

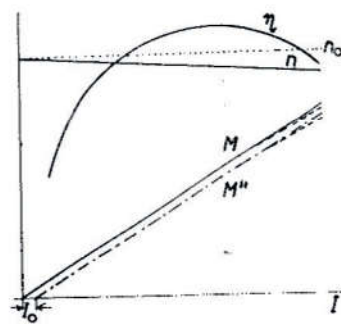
58. Prelazeći sada na svojstva pojedinih vrsta motora svratimo pozornost najprije na *serijski motor*. Tu je $I = I_A = I_M$, pa će kod malenih opterećenja i po tom slabih struja motora magneti biti slabo zasićeni. Zbog uglavnom pravocrtne magnetske karakteristike u tom području rasti će tok Φ približno razmjerno struji I , pa će dvaput, triput itd. jačoj struji odgovarati približno dvaput, triput itd. veći tok. Kako tako svaki od oba faktora produkta $\Phi \cdot I_A$, s kojim je M po relaciji

momenta razmjerno, postane dvostruk, trostruk itd., sam moment vrtnje M postat će četverostruk, deveterostruk itd., t. j. rasti će sa I približno po kvadratičnom zakonu, po zakonu parabole s osi vertikalno gore i tjemenom u ishodištu koordinata kao u sl. 240. Tako stvar stoji u početku kod slabijih struja. Kasnije, kod jačih struja, željezo se približava zasićenosti i magnetska karakteristika stroja, t. j. krivulja za Φ na sl. 240., postaje manje strma, pa se kvadratični zakon porasta momenta vrtnje približava sve više linearnom; konačno kod još jačih struja, ako bi ih motor uopće izdržao, imali bismo sve sporiji porast momenta M sa strujom radi reakcije armature (ako se ova ne bi mogla zanemariti). Krivulja za M prelazit će dakle iz parabole u pravac i kod dalje pojačanog opterećenja bi se čak sagibala na protivnu stranu, dakle od ordinatne osi.

Pored krivulja za Φ i M još će nas zanimati krivulje brzine n u okr/min, primarnog (stroju iz mreže privedenog) učina N' u W, te stepena djelovanja $\eta = N''/N'$, ako je N'' mehanički učin raspoloživ na remenici motora. Za n se po relaciji brzine može staviti: $n = E/C''\Phi$, gdje je $E = U - I(R_A + R_M)$. U praksi je R_A i kod porednih i kod serijskih strojeva vrlo maleno, a kod serijskog motora je i R_M vrlo maleno, tako da se na svladavanje otporâ armature i magneta troši samo malen dio napona stezaljki motora U . No kad je $I(R_A + R_M)$ maleno, E ne će kod različitih



Sl. 240.



Sl. 241.

opterećenja biti daleko ispod U . Ako je dakle U stalno, ne će mnogo sa I varirati ni E , pa će po relaciji $n = E/C''\Phi$ variranje brzine n u prvom redu biti povezano na variranje toka Φ . A kako Φ u početku raste sa I približno proporcionalno, opadati će n uglavnom po zakonu inverzne proporcionalnosti, dakle najprije naglo i zatim sporije; kasnije kad Φ polaganije raste, n još polaganije opada; v. krivulju za n u sl. 240.

Krivulja za N' naprosto je pravac kod serijskog motora priključena na stalan napon U (po relaciji $N' = UI$); v. sl. 240. Krivulja za η u ovisnosti od I u početku je niska, postizava neki maksimum i dalje opet opada. Takvom variranju veličine η , sličnom i kod porednih motora, uzrok je što se kod vrlo slabih opterećenja na gubitke zbog trenja itd. troši znatan dio ukupnog motorom proizvedenog mehaničkog učina, a kod vrlo jakih opterećenja opet dolaze pojačano do izražaja gubici

$I^2(R_A + R_M)$ od strujne topline u namotajima armature i magneta, koji rastu sa I^2 i postaju na pr. kod 5-struke struje 25-struki, itd.

Najkarakterističnije kod serijskog motora jesu variranja momenta vrtnje M i brzine n . Za pogone gdje se ne traži stalna brzina motora ovakva variranja su vrlo povoljna. Naime ako na pr. motor mehanički opteretimo tako da on ima svladavati 9-struki protumoment vrtnje M' , motor će razviti 9-struki vlastiti moment vrtnje M sa samo približno trostrukom strujom I , no zato kod približno 3-struko smanjene brzine. Ova činjenica da serijski motor na povećanje mehaničkog opterećenja odgovara smanjenjem brzine, što baš štedi mrežu, jer struja onda ne mora odviše jako porasti a da se teret ipak svlada, čini serijske motore naročito prikladnima na pr. kod tramvajâ, željeznica, prenosila itd., gdje se oni i upotrebljavaju.

59. Drukčije ponašanje obzirom na brzinu pokazuje *poredni motor*. Kod porednog je motora magnetni namotaj priključen na vod paralelno s armaturom. Prema tomu je napon stezaljki U motora istodobno napon armature i napon magnetske grane. Uz stalno U bit će uzbuđenje $I_M = U/R_M$ stalno, a po tomu će i tok Φ ostati praktički konstantan kod svih opterećenja, kao kad bismo imali magnete uzbuđene iz nekog posebnog izvora struje. Po relaciji momenta vrtnje raslo bi M kraj konstantnog Φ po linearnom zakonu sa I_A , dakle približno linearno sa $I = I_A + I_M$, jer se I i I_A mnogo ne razlikuju; v. izvučenu liniju za M u sl. 241. Kod jačih opterećenja krivulja za M više bi se odvajala od pravca zbog reakcije armature, ako ova ne bi bila zanemariva ili kompenzirana; v. crtkani završetak krivulje za M . Krivulja korisnog momenta vrtnje $M'' = M - M_0$ (D-52.) teče nešto niže od one za M ; v. u sl. 241. krivulju za M'' , koja siječe apscisnu os u točki s apscisom I_0 , gdje je I_0 struja praznog hoda.

Za razliku od serijskog motora brzina porednog motora n pokazuje tendenciju samo polaganog smanjivanja kod rastućega opterećenja I . Naime ovdje vrijedi $n = E/C''\Phi$ uz $E = U - I_A R_A$, pa se n smanjuje uz stalno Φ s rastućim opterećenjem samo tek polagano od iznosa n_0 pri $E = U$; v. na sl. 241. krivulju n . Ovo svojstvo skoro stalnog broja okretaja čini poredni motor baš prikladnim za pogone gdje se i kod promjenljivih opterećenja želi da brzina motora ostane barem uglavnom stalna.

Glede stepena djelovanja vrijedi, iz različitih razloga kao i kod serijskog motora, da je η kod struje praznog hoda $I = I_0$ jednako nuli, kod većih I da je η loše, ali da s povećanjem struje I raste do nekog maksimuma, da bi kod još većih I sve naglije opadalo; v. na sl. 241. krivulju za η . Ponovno bi η postalo jednako nuli kad bismo motor tako jako opteretili da bi stao; no tako jaku struju uz normalni napon motor dakako ne bi izdržao.

60. Kod *kompaundnog motora* dva su slučaja motorskog pogona moguća: a) da su serijski i poredni namotaj tako ukopčani da se u stvaranju magnetskog polja potpomažu, b) da spomenuti namotaji djeluju nasuprot jedan drugomu. U slučaju a) motor ima karakteristiku brzine nekako po sredini između serijskog i po-

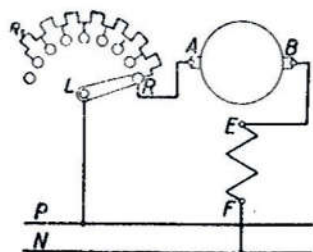
rednog, a približava se svojstvima više jednom ili drugom, već prema tomu koji od oba magnetna namotaja više prevladava. U slučaju b) može se postići da motor dobije, u još jačem stepenu nego poredni, svojstvo da mu brzina pokazuje tendenciju nemijenjanja s opterećenjem, pa čak i da mu brzina raste s opterećenjem.

Praktički je važniji slučaj a), jer u drugom slučaju postoji pogibelj da se motor kod prejakog opterećenja razmagnetizira i prestane raditi.

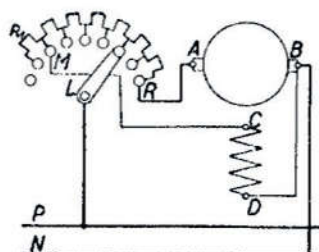
61. Već je u D-54. bilo rečeno da bi motor priključen na puni napon mreže U u momentu pokretanja, dok još nema brzine i ne razvija nikakvu protu-EMS E , uzimao iz mreže vanredno jaku armaturnu struju $I_A = U/R_A$, dakle i vanredno jaku ukupnu struju I , koja je kod serijskih motora identična sa I_A , a kod porednih veća od I_A za neznatni iznos I_M .

Takve vanredno jake struje ne bi mogao podnijeti motor dimenzioniran za normalne struje opterećenja, a i za mrežu nije poželjno da mora davati, ma i samo kratkotrajno, vanredno jake struje. Zato se, od samo nešto većih motora pa na gore, na struju pokretanja utječe naročitim dodatnim napravama, *pokretačima* ili *upuštačima*, koji potrošak struje motora u početku, dok se on pokreće, ograničuju.

Pokretači su obično na stepene raspoređeni kovni otpori, hladjeni uzduhom ili uljem (no ima i »pokretača s tekućinom« kontinuirano promjenljiva otpora). Priključuju se serijski ispred armature. Kovni se pokretači uključe najprije svim stepenima, a zatim se, prema tomu kako se motor idući sve brže približava stacionarnoj brzini, stepen po stepen iskapčaju. Kako pojav upuštanja traje kratko vrijeme



Sl. 242.



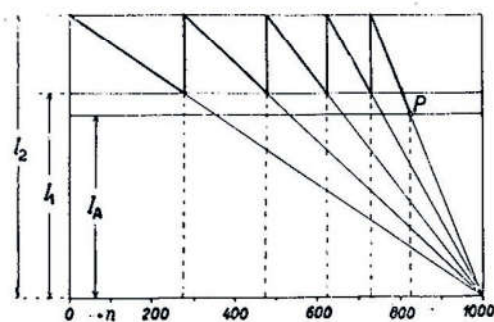
Sl. 243.

i obično se ne ponavlja jako često, dosta je normalne pokretače dimenzionirati samo za kratkotrajna rijetka ukapčanja. Na sl. 242. i 243. vide se pokretači uz serijski i uz poredni motor. Onaj na sl. 242. crtan je s ručkom u položaju nakon dovršenog pokretanja, dok je ručka onoga u sl. 243. predočena u položaju, kad su još ostala ukopčana dva zadnja stepena. Oznake L-R na prvoj i L-M-R na drugoj slici lako je memorirati (L = linija ili vod, M = magneti, R = rotor ili armatura). Po sl. 243. jedan se kraj magnetnog namotaja C-D porednog motora odvede neposredno na armaturu, a drugi se priključi na M otprilike pri početku pokretačkog otpora; time se kod vraćanja ručke pokretača na isklonni položaj nužno iskopčaju armatura i magneti, a magneti već od početka ukapčanja dobivaju uglavnom puni napon mreže. Ovo potonje je važno, jer onda stroj odmah na početku izvodi jaki

magnetski tok i jak moment vrtnje, što olakšava motoru pokretanje pod punim mehaničkim teretom i brzo postizavanje stacionarne brzine.

Neispravno bi bilo u sl. 243. priključiti C na svršetak R otpora pokretača umjesto na M blizu početka, jer bi se kod spajanja C sa R pokretač stavio ne samo ispred armature nego i ispred magneta, pa bi se bez potrebe dobio slabiji tok i slabiji moment vrtnje motora u pokretanju.

62. Odnosi kod pokretanja motora pregledno se mogu pratiti diagramom armaturne struje po sl. 244. Neka se radi o porednom motoru s kritičnom brzinom $n_k = 1000$ okr/min kod danih konstantnih veličina U i I_M . Nominalna armaturna struja puno opterećena motora neka je I_A (ukupna struja motora I bit će veća od I_A samo za maleni iznos I_M). Neka su dalje I_1 i I_2 minimalna i maksimalna armaturna struja kod pokretanja (obično se uzmu prva oko 1,1-put i druga oko 1,5-put



Sl. 244.

tolike kao $I_A \approx I$). U času pomaka ručke pokretača na prvi uklopni položaj bit će $E = 0$ i napon U će morati samo svladavati ukupni otpor $R = R_1 + R_2 + \dots + R_m$ svih m stepena pokretača u seriji sa R_A (»otporom armature« u širem smislu po D-10.), t. j. vrijedit će relacija: $U = I_2(R + R_A)$ iz koje se kod danoga R_A može ukupni otpor pokretača R izračunati. Kako sada pokrenuti motor bude sve brže išao, on će stvarati sve veću protu-EMS i armaturna struja će pa-

dati. Kod postignute brzine n_1 i pripadne protu-EMS E_1 neka dođe do smanjenja armaturne struje na I_1 po relaciji $U - E_1 = I_1(R + R_A)$. Iz te relacije može se izračunati E_1 u času kad pomakom ručke pokretača na idući kontakt treba isključiti otpor R_1 prvog stepena pokretača tolikog iznosa da armaturna struja ponovno skoči na I_2 , pa da vrijedi relacija: $U - E_1 = I_2(R - R_1 + R_A)$, iz koje se može naći R_1 . Sad se motor opet ubrzava do brzine n_2 i korespondentne protu-EMS E_2 , kod koje pri struji I_1 treba iskopčati i drugi stepen R_2 pokretača, itd. Očito bi se ovim načinom postepeno izračunavali i dalji stepeni pokretača. Nakon iskapčanja zadnjeg stepena ugrađenog u pokretač brzina i protu-EMS rasle bi do iznosa n i E normalnog stanja i struja bi sa I_2 pala na (iznosima n i E korespondentnu) struju I_A .

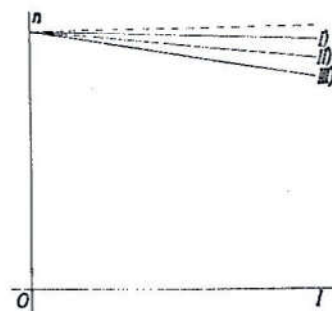
Ima i gotovih formula za proračunavanje pokretačkih stepena. A postoje i »grafički postupci« za određivanje tih stepena (jedan od njih izvodi se iz prikaza po sl. 244.).

63. Važan problem u mnogim pogonima je *reguliranje brzine* motora. Mi smo vidjeli da se brzina motora sama ustali kod danih pogonskih prilika na izvjesni iznos n okr/min, koji se kod serijskih motora više i kod porednih manje smanjuje kod porasta opterećenja. Međutim u praksi će se često željeti da se brzina motora po volji varira i uz stalan protumoment vrtnje. Po formuli $n = (E_A - I_A R_A) / C'' \Phi$ moguće je n varirati prema gore ili dolje: a) varirajući u istom smislu (prema gore odn. dolje) armaturni napon E_A ; b) varirajući u protivnom smislu (prema dolje

odn. gore) magnetski tok Φ , dakle slabeći odn. jačajući magnetsko polje, resp. struju I_M . Ovo potonje izvelo bi se kod porednog motora povećavanjem ili smanjivanjem otpora već iz sl. 226. i 228. poznatog »magnetnog regulatora«, koji u tom slučaju treba (pored pokretača) predvidjeti uz motor. Reguliranje brzine po a) zove se obično *reguliranje naponom*, a ono pod b) *reguliranje poljem* ili (manje spretno) »reguliranje otporima«.

64. Reguliranje *naponom* bilo bi jednostavno i moglo bi se vršiti bez gubitaka, kad bi na raspolaganju stajali različiti naponi. Trebalo bi samo odabrati napon E_A korespondentan željenoj brzini n . Međutim električke mreže daju redovito uglavnom stalan napon, pa, ako se žele dobivati manji naponi E_A nego bi se kod normalnih prilika na armaturi uspostavili, ne preostaje drugo nego dio napona mreže poništiti stavljajući u armaturnu granu, slično kao kod pokretanja, neki promjenljivi »regulacioni otpor« R' . Motor će se onda gibati sporije. Međutim je reguliranje u širim granicama brzine ovim načinom neekonomično, jer se kod njega pretvara u regulacionom otporu u strujnu toplinu učin $I_A^2 R'$, koji može iznositi mnogo postotaka ukupnog učina privedenog elektromotoru, jer je I_A relativno veliko. Kad bismo na pr. htjeli usporiti neki poredni motor na polovicu brzine kod punoga napona voda, trebalo bi da E_A grubo uzeto padne na polovicu napona voda, a to znači da bi se okruglo polovica napona voda morala poništiti u regulacionom otporu, dakle da bi stepen djelovanja motora postao vanredno nepovoljan. A i regulacioni otpori, u kojima bi se trajno poništavali toliki učini, morali bi biti velikih dimenzija i po tome skupe izvedbe. Ne mogu se na pr. za trajno reguliranje naponom uz jača opterećenja upotrebiti pokretači sa slabo dimenzioniranim otporima za rijetka kratkotrajna ukapčanja, nego se moraju uzeti jače dimenzionirani »pokretači-regulatori« prikladni za obje funkcije.

K tomu još dolazi dalja neprilika da se brzina udešena s pomoću reguliranja naponom za određeno mehaničko opterećenje motora više ili manje znatno promijeni u slučaju promjene toga opterećenja, pa brzinu stroja treba naknadno regulirati. Za mnoge svrhe povoljno svojstvo porednog motora bez regulacije naponom, da uglavnom drži brzinu n kod variranja opterećenja, gubi se tako kod reguliranja naponom. Jer ako s opterećenjem poraste I_A , porasti će i napon $I_A R'$ poništen u regulacionom otporu, a to može uz stalno R' znatno umanjiti E_A , što sa svoje strane mora dalje utjecati na brzinu n . Taj je učinak to veći što je veće R' . Na pr. u sl. 245. predložena je krivuljom I) samo malo s opterećenjem promjenljiva brzina porednog motora bez regulacije naponom, dok su krivuljama II) i III) predložena mnogo veća variranja brzine s opterećenjem uz izvjesnu vrijednost R' , osrednju kod krivulje II) i veliku kod III). Prema tomu ćemo se na reguliranje naponom možda lakše odlučiti kod serijskih motora,

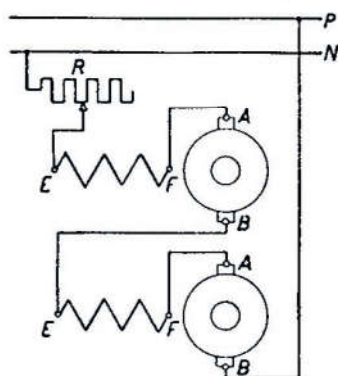


Sl. 245.

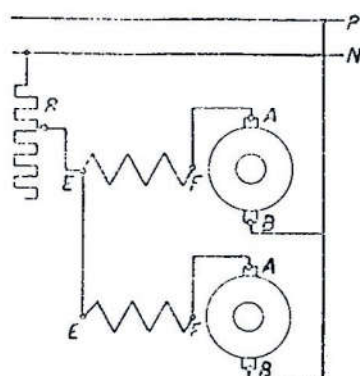
koji i onako nemaju tendenciju stalne brzine; kod njih se ono u praksi najviše i upotrebljava.

Kod serijskih motora postizava se reguliranje katkad i na druge načine. Na pr. stavi se još jedan promjenljivi otpor paralelno armaturi. Nerijetko ima se posla odmah s dva jednaka serijska motora (tramvaji!); onda se razne brzine mogu dobiti prema tomu da li se oba motora priključe na vod paralelno ili serijski; u prvom slučaju svaki motor dobiva puni napon i ide punom brzinom, a u drugom svaki ima polovicu napona i ide sporije. Zgodnim, na stepene promjenljivim otporom R , najprije ispred serijske i onda ispred paralelne kombinacije motora po sl. 246. i 247., mogu se lako postići brzine od nule do punoga iznosa.

65. Kod *reguliranja poljem* dosta je za povisivanje brzine motora slabljenjem polja povećavati ukopčani otpor magnetnog regulatora, koji time poprima funkciju

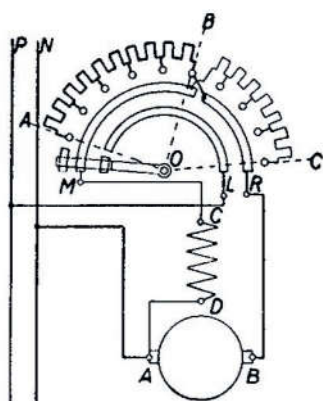


Sl. 246.

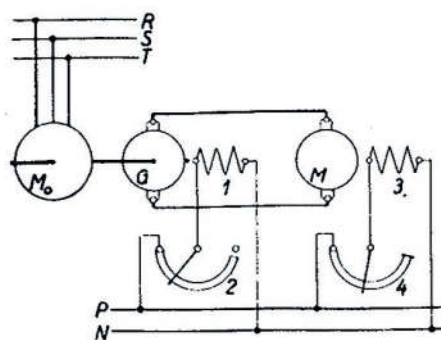


Sl. 247.

»regulatora poljem«. Obrnuti postupak snizivanja brzine jačanjem polja nad normalni iznos nema u praksi mnogo važnosti, jer je stroj kod normalnog pogona obično već magnetski skoro zasićen, pa bi se pojačavanjem polja postizavala tek malena pojačanja magnetskog toka. Reguliranje poljem običajno je i osobito prikla-



Sl. 248.

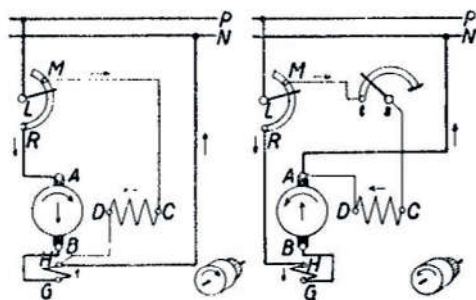


Sl. 249.

dno kod porednih motora, ako brzinu ne treba mijenjati u vrlo širokim granicama. Gubici učina su kod ovoga načina reguliranja vrlo maleni (jer je već magnetna struja kod porednog motora malena prema ukupnoj). Međutim slabljenjem polja proizvedeno smanjenje magnetskog toka ima po relaciji momenta vrtnje za po-

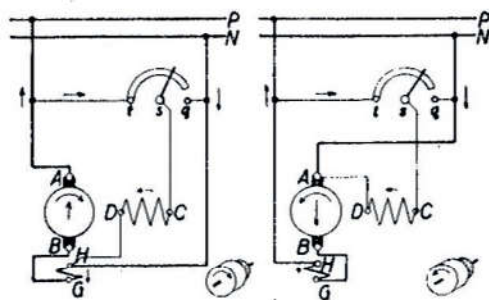
sljedicu da motor slabije »vuče«. Na sl. 248. regulator poljem kombiniran je u isti aparat s pokretačem; dok ručka ide od položaja OA do OB, iskapča se otpor u seriji s armaturom i uređaj djeluje kao pokretač; u položaju OB pokretanje je dovršeno i brzina motora je tolika, koliko odgovara normalnom motoru bez regulacije; konačno zakretanjem ručke od OB do OC ukapča se sve više otpora u magnetnu granu, pa polje slabi i brzina raste. Ako je pokretački dio opisanog aparata dovoljno dimenzioniran za regulaciju naponom, mogu se i kombinirati oba načina reguliranja, upotrebljavajući zakrete od OB do OA za snizivanje i one od OB do OC za povišivanje brzine.

66. Moguća su i reguliranja bez gubitaka i drugih nedostataka reguliranja naponom. U tu svrhu upotrebljavaju se, u pogonima gdje je to potrebno, cijele kombinacije strojeva. Opišimo na pr. *Leonardov spoj* po sl. 249. Na osovinu motora M_0 , tjerana iz mreže R-S-T trofazne izmjenične struje, vezan je neposredno pomoćni istosmjerni generator G s nezavisnim uzбудnim namotajem 1 snabdijevanim preko magnetnog regulatora 2 iz posebnog istosmjernog izvora P-N. Armatura



Sl. 250.

Sl. 251.



Sl. 252.

Sl. 253.

motora M za vrlo promjenljivu brzinu dobiva istosmjernu struju iz G, a uzbudni namotaj 3 motora M hrani se preko regulatora 4 iz P-N. Regulatorom 2 generatora G varira se napon ovoga potonjega i postizava se naponsko reguliranje motora M od neregulirane brzine prema dolje (regulatorom 4 može se na motor M primijeniti i regulacija poljem za brzine iznad neregulirane).

Glede smisla vrtnje generatora i motora vrijedno je znati da je kod strojeva s mnogo upotrebljivanim oznakama stezaljki A-B, C-D, E-F, G-H, itd. (sl. 225. do 231., 222., 242., 243. i dr.) predviđeno da se međusobnim spajanjem stezaljki na određene načine postignu određene vrtnje stroja kao generatora i kao motora, koje se zovu *desna* ili *lijeva*, prema tomu da li su u smislu kazala na uri ili nasuprot tomu smislu, gledajući s one strane stroja gdje *nema* kolektora. Na sl. 250. do 253. predloženi su takvi spojevi porednog stroja s pomoćnim polovima, u prve dvije slike za desni i lijevi hod stroja kao generatora, u druge dvije slično za stroj kao motor.

67. Upozorimo još na probleme *električkog kočenja*. Recimo da smo armaturu nekog motora s uzbuđenjem posve nezavisnim od armature otkopčali od mreže i premostili većim ili manjim otporom R. S otvorenom armaturom stroj bi zbog svoga zaleta još dosta dugo rotirao, dok će se ovako premošten manje više brzo zaustaviti, jer premošten radi kao opterećeni generator koji hrani otpor R strujom I_A , tako da se kinetička energija armature (te također napravâ koje ona tjera, na pr.

kotača zamašnjaka) brzo poništava u strujnu toplinu učina $N_A = I_A^2 \cdot (R_A + R)$. Stroj biva to jače kočen što je R manje i I_A i N_A veće, a naročito bi se brzo zaustavio kod kratko spojene armature, ukoliko bi ona izdržala ogromne struje kočenja. Ove se mogućnosti električkog kočenja i praktički iskorišćuju, na pr. sa serijskim motorima kod tramvaja.

Samo, kod serijskih motora treba, kako je lako razabrati, kod prelaza na kočenje obrnuti i spoj magneta prema armaturi; inače se stroj kao generator ne bi uzbudio (zbog naopake uzbudne struje, koja bi remanentno magnetiziranje, zaostalo od prijašnje motorske struje, slabila a ne jačala). Kod tramvaja se spojevi za različite stepene brzine, te kočni spojevi, izvode posluživanjem naročitih uklopnih naprava, t. zv. »kontrolera«.

IV) STEPEN DJELOVANJA ISTOSMJERNIH STROJEVA

Gubici u bakru, gubici u željezu, mehanički gubici. Izrazi za stepene djelovanja generatora i motora. Mjerenja stepena djelovanja; Hopkinsonova metoda.

68. Gubici učina u nekom istosmjernom stroju mogu se svrstati u tri grupe, naime u: I) *gubitke u bakru*, II) *gubitke u željezu* i III) *gubitke trenja*. Pod gubitke u bakru supsumiraju se: a) gubici učina N_A zbog strujne topline u namotaju armature (uključivši i strujnu toplinu u eventualnim namotajima pomoćnih polova i kompenzacijom, zatim gubitke prelaza struje na keficama, te t. zv. dodatne gubitke zbog komutacije, vrtložnih struja u polnim nastavcima itd.), b) gubici učina N_M od strujne topline u magnetnom namotaju s pripadnim magnetnim regulatorom. Gubici u željezu N_{Fe} predstavljali bi sumu $N_h + N_v$ gubitaka N_h zbog histereze i N_v zbog vrtložnih struja u željezu armature podvrgnutom naglom izmjeničnom magnetiziranju. Gubici trenja N_t dolazili bi od trenja na osovini, od trenja kefica, od trenja ili otpora uzduha, te od eventualnih vibracija stroja.

S gledišta mjerne tehnike prikladnije je razlikovati »gubitke praznog hoda« i »gubitke opterećenja«. Gubici praznog hoda N_0 kod strojeva s porednim magnetnim namotajem (porednih i kompaundnih) bit će praktički jednaki sumi $N_t + N_{Fe} + N_M$, a kod serijskih strojeva sumi $N_t + N_{Fe}$, jer se i kod porednih i kod serijskih motora u praznom hodu može, zbog neznatne armaturene struje, zanemariti strujna toplina i sl. u armaturi, a kod postojanja serijskog magnetnog namotaja, protjecanog armaturnom strujom, također i strujna toplina u serijskom magnetnom namotaju (uzbudni gubici N_M porednog namotaja naprotiv se ne mogu zanemariti, i isti su u praznom hodu kao i kod opterećenja stroja). Gubici opterećenja, rastući s kvadratom armaturene struje, bili bi onda praktički identični s gubicima N_A kod strojeva bez serijskog magnetnog namotaja, a kod strojeva sa serijskim magnetnim namotajem bili bi identični s gubicima N_A uvećanima za gubitke u tom namotaju, također proporcionalne kvadratu armaturene struje. Kod porednih strojeva sami gubici $N_t + N_{Fe}$, dakle gubici praznog hoda umanjeni za uzbudne gubitke $N_M = UI_M$, zovu se katkad posebno »prazni gubici«.

Točnije se gubici opterećenja kod porednih strojeva izražavaju sumom $I_A^2 R_A'' + 2\delta \cdot I_A + N_d$; R_A'' znači sumu $R_A' + R_P + R_K$ u smislu D-10., $2 \cdot \delta \cdot I_A$ su gubici od padova napona δ V po kefici, a N_d bi bili sitni »dodatni gubici« (uglavnom od vrtložnih struja u polnim nastavcima i sl.). Kod serijskih strojeva pridošli bi još uzbudni gubici.

69. Zbog različitih gubitaka nastaje ugrijavanje stroja, koje nije samo zato nepoželjno što predstavlja *gubitak* učina, nego također, i pogotovo, zato što ograničava sposobnost opterećivanja stroja.

Stepen djelovanja η , kao kvocijent strojem dobivenog i stroju privedenog učina, uvijek je zbog gubitaka manji od 1, ali baš kod električkih strojeva, osobito većih, on može biti relativno povoljan. »Stepen djelovanja u postocima« $\eta\%$ je 100-kratnik »stepena djelovanja« η (i uvijek je manji od 100).

Prema gornjem može se kod stroja koji kao generator snabdijeva mrežu napona U strujom I pisati (ako G znači sumu svih gubitaka):

$$\eta = \frac{UI}{UI + N_A + N_M + N_{Fe} + N_t} = \frac{UI}{UI + G} \quad (245)$$

a ako se radi o motoru koji iz mreže napona U uzima struju I :

$$\eta = \frac{UI - N_A - N_M - N_{Fe} - N_t}{UI} = \frac{UI - G}{UI} = 1 - \frac{G}{UI} \quad (246)$$

Slabo opterećeni strojevi imaju maleno η , jer se na gubitke praznog hoda troši relativno velik dio učina privedena stroju. Kod većih opterećenja η se penje i postizava neki slabo izraziti maksimum (u području blizu toga maksimuma obično leži puno ili nominalno opterećenje stroja). Kod još većih opterećenja, koja stroj redovito ne bi trajno ni izdržao, η opet pada, jer sve više preotimaju maha gubici opterećenja, koji rastu praktički s kvadratom struje.

Nedovoljno opterećeni strojevi rade dakle s nepovoljnim stepenom djelovanja. A kraj inače istih prilika veće je strojeve lakše graditi s povoljnijim stepenom djelovanja. Dok na pr. puno opterećeni stroj koji od sebe daje 1 kW učina ima η oko 0,75, oni učina oko 20 kW imaju η već u blizini od 0,90, oni od 100 kW u blizini od 0,93 i oni od 1000 kW čak oko 0,95. Dakako da ovo varira već prema izvedbi, brzini itd. stroja.

70. Posebno područje čine metode *mjerjenja stepena djelovanja*. Principno se kod svih električkih strojeva η može mjerenjem odrediti: a) *direktnim*, b) *indirektnim* postupkom.

Kod direktnog postupka u slučaju generatora izmjerio bi se s jedne strane mehanički učin, što se troši za pogon stroja, a s druge strane odredio bi se električki učin, što ga generator od sebe van daje. Kvocijent ovoga potonjega, koji se uvijek izražava u W, i onoga prvoga, koji također treba izraziti u W, bio bi traženi η . Kod motora bi trebalo izmjeriti mehanički učin, što ga motor korisno od sebe daje, i podijeliti ga s električkim učinkom, što ga motor uzima iz izvora struje. Za električki učin $N = UI$ nema poteškoća, jer je dosta voltmetrom i ampermetrom mjeriti napon U i struju I stroja. Naprotiv se mehanički učin daje mjeriti tek manje udobno i točno: moguće ga je mjeriti neposredno mehaničkim mjer-

nim napravama: kočnim uređajima ili torzionim dinamometrima, ili tek posredno (da se na njega zaključi posredstvom posebno baždarenog pomoćnog stroja iz mjerenog električkog učina toga stroja i njegova stepena djelovanja). Jednostavna je stvar neposrednog određivanja stepena djelovanja samo kod motorgeneratora, gdje su učini obostrano električki, pa se lako mogu neposredno mjeriti.

Kod indirektnog se postupka radi tako da se odrede svi gubici G stroja kod istraživanog opterećenja, pa se uz izmjereno U i I stepen djelovanja η računa po (245) ili (246).

71. Kolikogod direktna metoda izgledala u prvi mah prirodnija i ispravnija, ona je upotrebljiva samo kod manjih strojeva, a za srednje i veće strojeve s već povoljnim η redovito se upotrebljavaju metode indirektnog određivanja.

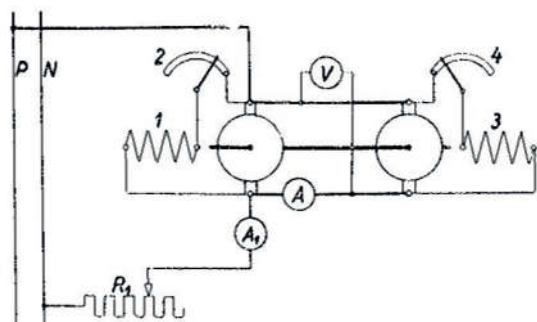
Direktno određivanje neprikladno je kod većih strojeva iz dva razloga. U jednu ruku ono bi bilo spojeno s teškoćama punog opterećivanja strojeva velikih učina i mjerenja takvih učina. S druge strane ono bi bilo i premalo točno. Jer kod povoljnih η korisni učin je samo za malo postotaka niži od privedenoga, pa kod nesigurnosti mjerenja, kakve postoje osobito kod određivanja mehaničkih učina, treba računati s nesigurnostima u rezultatu η , koje bi cijelo mjerenje činilo praktički malo vrijednim. Naprotiv kod indirektnog određivanja gubici G čine malen dio ukupnog učina stroja, pa ako se oni izmjere i procentualno manje pouzdano, to ne dolazi toliko do izražaja u procentima ukupnog učina i u izrazima $\eta = N'/(N' + G)$ i $\eta = (N' - G)/N' = 1 - G/N'$ iz (245) i (246), sa $N' = UI$.

72. Kod najobičnije metode indirektnog određivanja stepena djelovanja nekog generatora ili nekog motora pušta se stroj da rotira kao motor u praznom hodu. Odbijajući od izmjerenog primljenog učina recimo porednog motora uzbudne gubitke $N_M = UI_M$ (i strujnu toplinu armature kod praznog hoda, koja bi međutim zbog male armaturne struje i neznatnoga R_A praktički iščezavala) dobili bismo samo prazne gubitke $N_t + N_{Fe}$, jer u praznom hodu mreža mora još samo njih pokrivati. Ako bismo dakle htjeli odrediti ukupne gubitke G kod opterećenja, trebalo bi sumi gubitaka praznog hoda i (kod porednog motora stalnih) gubitaka UI_M , dakle gubicima praznog hoda $N_t + N_{Fe} + N_M$, dodati samo gubitke opterećenja N_A , a ti su praktički otprilike jednaki $I_A^2 R_A$. Po tomu bi se onda η lako izračunalo za puno opterećenje, i za ostala, na pr. za $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{4}$ punog opterećenja.

Teži bi bio problem »razlučiti« pojedine gubitke, na pr. one trenja od onih u željezu, no to su već specijalni problemi posebne discipline »mjerenja na električkim strojevima«.

73. Relativno jednostavno postaje indirektno određivanje stepena djelovanja ako od istraživanoga tipa stroja predleže dva posve jednaka primjerka, kako će to biti na pr. kod ispitivanja serijski proizvađanih strojeva. U tom slučaju primjenjuje se, naročito kod većih strojeva, *Hopkinsonova metoda*, ilustrirana za poredne strojeve na sl. 254. Oba se stroja spoje da zajedno rotiraju, desni kao generator (s magnetnim namotajem 3 i magnetnim regulatorom 4) i lijevi kao motor (s ma-

gnetnim namotajem 1 i magnetnim regulatorom 2). Mehanički učin motora iskorišćuje se onda za tjeranje generatora, koji opet sa svoje strane hrani motor, pa prema tomu za održanje hoda promatrane kombinacije strojeva treba izvana privoditi samo učin potreban za pokrivanje gubitaka obih strojeva. Na sl. 254. taj se učin privodi *električki* iz mreže istosmjerne struje P-N preko regulacionog otpora R_1 . Ako su U i I napon i struja generatora, očitani na voltmetru V i ampermetru A , i ako I_1 znači struju privedenu iz P-N, očitanu na ampermetru A_1 , kod pretpostavljenoga stepena djelovanja η (koji se može uzeti praktički isti za oba stroja, jer su oni približno u jednakoj mjeri opterećeni) ukupni učin priveden motoru bio bi: $U(I + I_1)$. Od toga učina dio $\eta U(I + I_1)$ prenosi se mehanički na generator, koji opet sa svoje strane daje električki učin $\eta \cdot \eta U(I + I_1)$. No taj učin



Sl. 254.

ujedno je jednak UI . Prema tomu vrijedi relacija: $UI \approx \eta^2 U(I + I_1)$, odn. konačno:

$$\eta \approx \sqrt{\frac{I}{I + I_1}} \quad (247)$$

Lako je preudeliti Hopkinsonovu metodu i na slučaj serijskih strojeva. Postoji osim toga i za poredne i za serijske strojeve Hopkinsonova metoda s nadoknađivanjem gubitaka iz mehaničkog izvora (iz pomoćnog motora s poznatim gubicima). A moguće je Hopkinsonovom metodom uz dva dodatna očitavanja dobiti i pojedinačne η_1 i η_2 obih strojeva (v. vj. 123.).

VJEŽBE UZ POGLAVLJE D):

101. Za 4-polni stroj naznačiti shematski i nacrtati razmotano diametralni petljasti namotaj sa 24 svitka od po 6 prosječno 1 m dugih zavoja iz Cu-žice spec. otpora $0,02 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ i presjeka 4 mm^2 . Naći R_A , te I_A i E_A kod generatorskog pogona stroja pri toku po polu $1,6 \cdot 10^6 \text{ M}$, brzini 1200 okr/min, gustoći struje u vodičima armature 3 A/mm^2 i padu napona 1 V po kefici.

[1-7'-2-8'-3-9'-.....-22-4'-23-5'-24-6'-1; $0,045 \Omega$; 48 A; 88 V]

102. Zadatak po vj. 101., no za 4-polni valoviti namotaj po relaciji (238) sa 23 svitka. [1-7'-13-19'-2-8'-.....-11-17'-23-6'-12-18'-1; $0,1725 \Omega$; 24 A; 170,5 V]

103. Nezavisno uzbuđeni generator sa $R_A = 0,1 \Omega$ daje opterećen sa 0-40-80-120 A napone stezaljki 400-394-386-376 V; koliki je utjecaj reakcije armature u % napona praznog hoda kod 40-80-120 A. [0,5; 1,5 i 3%]

104. Naći E_A neopterećena porednog generatora uz $R_M = 58 \Omega$ kod 1200 i kod 900 okr/min, te uz $R_M = 50 \Omega$ kod 900 okr/min. Smatrati danom karakteristiku praznog hoda za 1200 okr/min. točkama ordinatá 84-165-225-270-300 V kod apscisá 1-2-3-4-5 A; zanemariti R_A prema R_M . [307, 158 i 206 V]

105. Koje će struje davati u mrežu od 240 V dva poredna generatora proizvedenih napona 249,4 i 258,4 V, otporâ magnetnih grana 80 i 120 Ω te otporâ armaturnih grana: a) 0,2 i 0,4 Ω , b) 0,235 i 0,4 Ω . [a) 44 i 44 A; b) 37 i 44 A]

106. Kompaundni dugačko shuntirani generator daje u mrežu napona 220 V struju 56 A; naći mu I_A i E kod 0,2, 0,15 i 55 Ω kao otporâ armaturnog namotaja i obih magnetnih (serijskog i porednog), te gubitka napona po kefici 1 V.

[60 A; 243 V]

107. Generator s dva para polova i petljastim namotajem od 384 vodiča ima $R_A = 0,45 \Omega$; naći mu a) E_A i I_Z kod brzine 800 okr/min, uzbuđenja 48 mVs po polu i armaturne struje 45 A; b) brzinu potrebnu da stroj uz tok iz a) daje napon praznog hoda 308 V; c) tok potreban kod brzine iz a) za napon iz b).

[225,5 V; 11,25 A; 1002 okr/min; 60,2 mVs]

108. Poredni generator sa $R_A = 0,1 \Omega$ i $R_M = 100 \Omega$ daje kod brzine 425 okr/min u mrežu od 440 V učin 100 kW. Ako pogonski remen pukne, kojom će brzinom stroj dalje rotirati kao motor uzimajući iz mreže 10 kW.

[402 okr/min]

109. Nacrtavši za $n = 1000$ okr/min nutarnju karakteristiku serijskog stroja sa $R_A + R_M = 2 \Omega$, približno danu ordinatama 208-242-285-315-344-330 V kod apscisa 6-8-11-14-21-30 A, naći U i I stroja kao generatora koji bi hranio: a) kod 1000 okr/min potrošače 10, 15, odn. 28 Ω , b) kod 800 okr/min potrošač 10 Ω .

[a) 337, 343 i 245 V; 28, 20,2 i 8,2 A; b) 275 V; 23 A]

110. Poredni motor sa $R_A = 0,3 \Omega$ i $R_M = 220 \Omega$ uzima kod 220 V neopterećen 4 A idući sa 1000 okr/min; opterećen uzima 40 A uslijed čega reakcija armature slabi polje za 2%. Kolika će biti brzina opterećena motora, te kolika bi bila da nema reakcije armature.

[970 i 950 okr/min]

111. Koji iznos ne smije premašiti R_A porednog motora sa $R_M = 55 \Omega$ da se motor trošeći 104 A kod 220 V ne uspori za više od 9% prema brzini u praznom hodu.

[0,20 Ω]

112. Kojim bi se otporom motoru s vrijednostima iz vj. 111. smanjila naponskom regulacijom suponirana neregulirana brzina 1000 okr/min na 700 okr/min. Uz $N_t + N_{Fe}$ kod prve brzine 780 W i kod druge 490 W naći η za oba slučaja.

[0,6 Ω ; 0,84 i 0,59]

113. Poredni 4-polni motor sa $R_M = 220 \Omega$ i valovitim namotajem od 540 vodiča otpora 0,5 Ω uzbuđuje se priključen na 440 V na tok po polu $2,4 \cdot 10^6$ M. Naći n , M i N motora kad opterećen troši ukupno 50 A, te N'' i $\eta\%$ uzimajući N_0 sa 4% od N (uračunati i gubitak napona 0,75 V po kefici, zanemariti reakciju armature).

[960 okr/min; 198 Nm (= 20,2 kg*m); 19,9 i 19,1 kW; 87%]

114. S kolikim bi se dodatnim otporom u armaturnoj grani motoru iz vj. 113. smanjila brzina za 20%?

[1,73 Ω]

115. Poredni motor s karakteristikom praznog hoda po vj. 104. ide u praznom hodu hladen uzimajući uzbudnu struju 5 A sa 1200 okr/min, a pogonski vruć sa 1333 okr/min; naći srednju temperaturu vrućeg magnetnog Cu-namotaja, ako je temperatura hladnoga bila 20 °C. [84,1 °C]

116. Porednom motoru za 220 V i 18 A sa R_M i R_A jednakima 183 i 1,3 Ω izračunati pokretač pretpostavljajući armaturne struje pokretanja i prekapčanja 26 i 19 A. [Ukupni otpor: 7,17 Ω; stepeni: 2,29; 1,66; 1,22; 0,89; 0,64 i 0,47 Ω]

117. Poredni motor sa $R'_A = 0,25$ Ω i $R_M = 110$ Ω za 220 V i 80 A uzima u praznom hodu 5 A. Naći mu približno η kod $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$ i $\frac{6}{4}$ nominalne struje (gubitak napona 1 V po kefici); povući i krivulju $\eta = f(I)$. Naći također za koliko će % biti manja brzina motora pri nominalnom opterećenju prema onoj u praznom hodu. [0,724; 0,825; 0,844; 0,842; 0,831; 0,818; 8,63%]

118. Poredni motor sa $R_A = 0,1$ Ω i $R_M = 40$ Ω daje uzimajući 26 kW iz mreže 220 V učin $N'' = 30$ KS; koliki će N'' davati uzimajući iz mreže 15 kW. Naći $\eta\%$ za oba slučaja. [11,98 kW (= 16,3 KS); 85 i 80%]

119. Serijski motor sa $R_A + R_M = 1,2$ Ω uzima 20 A kod 220 V i ide sa 1000 okr/min kočen vrpcom s dva utega od 26,3 i 3 kilograma prebačenom preko remenice promjera 30 cm; naći E , N_{Cu} , N'' , $N_1 + N_{F_0}$ i $\eta\%$. [196 V; 480 W; 3600 W; 320 W; 81,8%]

120. Koji će predotpor serijskom motoru ukupnog otpora 1,2 Ω smanjiti kod 220 V brzinu sa 800 na 500 okr/min uz nepromijenjenu struju motora $I = 15$ A. [5,05 Ω]

121. Serijski motor za 500 V sa $R_A = 0,12$ Ω i $R_M = 0,08$ Ω razvija radeći na nezasićenom praktički pravocrtnom dijelu magnetske karakteristike moment vrtnje $M = 18$ kg*m pri struji $I = 41$ A i brzini $n = 1000$ okr/min; naći a) pripadnu protu-EMS E , te b) struju I_1 , protu-EMS E_1 i brzinu n_1 kad motor razvija moment vrtnje $M_1 = 9$ kg*m.

[a) 491,8 V; b) $I_1 = 41 \sqrt{\frac{9}{18}} = 29$ A; $E_1 = 494,2$ V; $n_1 = n \cdot \frac{I}{I_1} \cdot \frac{E_1}{E} = 1420$ okr/min]

122. Serijski 4-polni motor s valovitim namotajem od 768 vodiča i sa $R_A + R_M = 0,8$ Ω uzimajući 50 A kod 220 V daje korisnih 10 KS kod 325 okr/min; naći Φ , M i M'' . [21,6 mVs; 26,9 i 22,0 kg*m]

123. Kod Hopkinsonova pokusa po sl. 254. očitani su iznosi: $U = 220$ V, $I = 80$ A, $I_1 = 28$ A; naći (istim za oba stroja uzimani) $\eta\%$, te N' i N'' lijevoga stroja. Ako bi se ampermetrima zanemariva otpora uključenima u magnetne grane generatora i motora još izmjerili iznosi 3,5 i 3 A pripadnih uzbudnih struja, koliki bi bili napose $\eta_1\%$ i $\eta_2\%$ prvog i drugog stroja uz $R_A = 0,1$ Ω.

[86,06%; 23,76 i 20,45 kW; 85,72 i 86,41%]

Znak: 147/I-Sv

Izdanje:

Prof. Dr. Josip Lončar

OSNOVI ELEKTROTEHNIKE

Knjiga prva

Četvrto izdanje

Izdavač:

»Tehnička knjiga«

Zagreb, Jurišićeva 10

Za izdavača odgovara:

Kuzman Ražnjević

Urednik:

Ing. Vladislav Šarić

Korigirali:

Ing. Franjo Vešligaj i Antun Magdalenić

Tisak:

Grafički zavod Hrvatske

Tisak dovršen:

koncem 1956.