

Dragan Poljak
Sveučilište u Splitu, FESB
dpoljak@fesb.hr

Mirko Jakić
Sveučilište u Splitu, FFST
mirko.jakic@st.t-com.hr

00-00

MATEMATIČKE ANALOGIJE U MODELIMA KLASIČNE FIZIKE

Sažetak: U radu se razmatraju poveznice između matematičkih apstraktnih pojmova i zakona klasične fizike. Na isti matematički zapis u vidu istog tipa diferencijalnih jednadžbi nailazi se u svim područjima klasične fizike, odnosno analogije su prisutne u mehanici čvrstih tijela, termodinamici, mehanici fluida, mehaničkim i električnim titrajima, akustičnim i elektromagnetskim valovima. U filozofskom smislu postavlja se pitanje postoji li dublja poveznica između apstraktnih matematičkih pojmova i fizikalnih veličina

Ključne riječi: Matematičke analogije, zakoni klasične fizike, povezanost matematičkih operatora i fizikalnih pojmova, filozofski aspekti

Uvodna razmatranja

Čudo pogodnosti jezika matematike u formulaciji zakona fizike je prekrasan dar koji niti razumijemo niti zaslužujemo [1].

Eugene Wigner

Prirodni zakoni u različitim područjima klasične fizike imaju matematički zapis u vidu istih tipova diferencijalnih jednadžbi, Ovakve analogije nemaju samo teorijski značaj već su desettljima i temelj nekih važnih inženjerskih disciplina, primjerice temelj automatske regulacije. U nastavku se ukratko navode neke

analogije u prijenosu topline, mehanici čvrstih tijela, mehanici fluida, akustici i elektromagnetizmu. Jedna od bitnih kategorija podvlači se i kroz filozofiju znanosti kroz poznato pitanje zašto je svijet apstraktnih matematičkih objekata tako efikasno primjenjiv u fizikalnim modelima klasične fizike koji predstavljaju realni svijet [2].

U ovom radu proširena je problematika koja se donekle razmatra u [3]. Prvo se iznose analogni matematički zapisi u područjima prijenosa topline, elektromagnetizmu, mehanici čvrstih tijela i mehanici fluida, titranjima i valovima. Potom se razmatra povezanost između matematičkih operatora i fizikalnih pojmova, nakon čega slijedi analiza filozofskih aspekata dublje povezanosti matematike i fizike. Razmatra se pitanje stvarne egzistencije matematičkih struktura, postavlja se pitanje o svijetu realnosti opisanom matematikom ili o svijetu realnosti koji jest matematika. Konačno, slijede i završna razmatranja.

1. Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu, mehanici čvrstih tijela, hidromehanici, titranjima i valovima

1.1. Prijenos topline

Temelji teorije toplinskih polja nastaju u 19. stoljeću klasičnim radovima Fouriera.

Prijenos topline kroz neku sredinu opisuje se Fourierovim zakonom:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T \quad (1)$$

gdje je $\vec{q}$ gustoća toplinskog toka, T označava temperaturu dok je λ toplinska vodljivost sredine.

Količina topline $\bar{Q}$ koja se prenese kroz infinitezimalni element izotermne plohe $d\vec{S}$ u diferencijalu vremena dt dana je izrazom:

$$\bar{Q} = \int_t \int_S \vec{q} \cdot d\vec{S} dt - \int_t \int_S \lambda \nabla T d\vec{S} dt \quad (2)$$

Pri tome veličina Q predstavlja toplinski tok

$$Q = \int_S \vec{q} \cdot d\vec{S} = - \int_S \lambda \nabla T d\vec{S} \quad (3)$$

Iz općeg zakona održanja difuzijskog prijenosa topline daje se izvesti *Fourierova jednadžba provođenja topline* oblika [4]

$$C_V \rho \frac{\partial T}{\partial t} = Q_i + \nabla(\lambda \nabla T) \quad (4)$$

gdje Q_i predstavlja volumnu gustoću unutarnjih toplinskih izvora, C_V je specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu po jedinici mase, a ρ gustoća tvari.

Jednadžba (4) vrijedi uz pretpostavku homogenog i izotropnog tijela, pri čemu su parametri vremenski konstantni, a promjena volumena u ovisnosti o temperaturi se zanemaruje.

U slučaju razmatranja stacionarnih procesa jednadžba prijenosa topline (4) prelazi u *Poissonovu* jednadžbu oblika:

$$\nabla(\lambda \nabla T) = -Q_i \quad (5)$$

Ukoliko unutar promatranog volumena nema izvora topline *Poissonova jednadžba* prelazi u *Laplaceovu jednadžbu*:

$$\nabla(\lambda \nabla T) = 0 \quad (6)$$

Jednadžba (4) daje se riješiti ukoliko su zadani početni i rubni uvjeti, dok je za rješavanje jednadžbe (5), odnosno (6) nužno poznavati rubne uvjete.

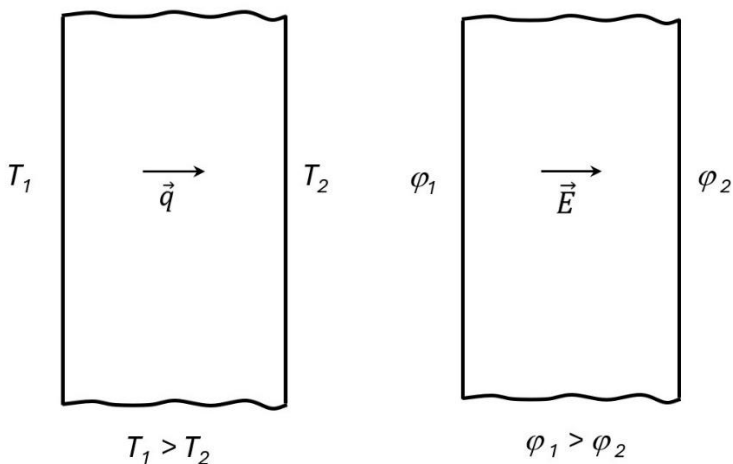
1.2. Elektromagnetizam

Matematički zapis konstitutivne jednadžbe u elektrostatici

$$\vec{D} = -\varepsilon \nabla \varphi \quad (7)$$

gdje je $\vec{D}$ gustoća električnog toka, ε permitivnost, a φ električni skalarni potencijal u potpunosti je analogan gustoći toplinskog toka q u (1).

Dakle gustoća toplinskog toka izražena je gradijentom skalarnog temperaturnog polja dok se gustoća električnog toka izražava preko gradijenta skalarnog električnog potencijala, kako je prikazano na slikama 1a i 1b.



Sl. 1a: Širenje gustoće toplinskog toka

Sl. 1b: Širenje električnog polja

Gustoća toplinskog toka slijedi negativni gradijent temperature, odnosno gustoća toka širi se u smjeru najveće promjene temperature, uvijek od više prema nižoj. Analogno, električno polje, jednako kao i gustoća električnog toka usmjerena je od višeg prema nižem potencijalu, dakle, u smjeru negativnog gradijenta.

Matematička forma ovih zakona je, dakle, identična.

Očita je analogija između gustoće toplinskog i električnog toka izraženih preko gradijenta temperature, odnosno skalarnog električnog potencijala.

Električni tok ψ_{el} je tada definiran plošnim integralom

$$\psi_{el} = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = - \int_S \epsilon \nabla \varphi d\vec{S} \quad (8)$$

dok je Poissonova jednadžba u elektrostatici oblika

$$\nabla(\epsilon \nabla \varphi) = -\rho \quad (9)$$

gdje je ρ gustoća volumnog naboja.

Laplaceova jednadžba za elektrostatsko polje u prostoru bez naboja je oblika

$$\nabla(\epsilon \nabla \varphi) = 0 \quad (10)$$

Očita je analogija među diferencijalnim jednadžbama (5) i (9), kao i među jednadžbama (6) i (10). Kad se razmatra strujno polje, odnosno električno polje naboja u gibanju u vodljivoj sredini, treba istaknuti kako je jedan od temeljnih zakona električnih krugova, Ohmov zakon, povijesno gledano nastao upravo razmatranjem ponašanja temperaturnih polja te povlačenjem određene analogije.

Tako se u svojoj diferencijalnoj formi Ohmov zakon može pisati u obliku

$$\vec{J} = -\sigma \nabla \varphi \quad (11)$$

gdje je $\vec{J}$ gustoća električne struje, σ specifična vodljivost, a φ električni skalarni potencijal.

Električna struja je tada definirana plošnim integralom

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_S \sigma \nabla \varphi d\vec{S} \quad (12)$$

Lako je vidljiva potpuna analogija između relacija (12) i (3).

Integralni oblik Ohmovog zakona (11) uključuje integralne veličine; struju, napon i električni otpor, a Laplaceova jednadžba za stacionarno strujno polje je oblika

$$\nabla(\sigma \nabla \varphi) = 0 \quad (13)$$

Jednadžba (13) analogna je jednadžbi vođenja topline u stacionarnom stanju(6).

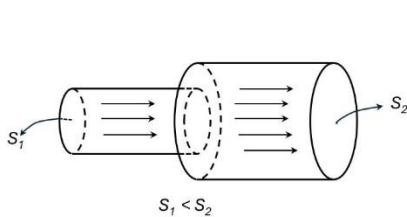
Konačno, vrijedi istaknuti kako je difuzijska jednadžba za magnetski vektorski potencijal A kod kvazistacionarnih polja, koja se koristi za proračun vrtložnih struja, oblika

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \vec{j} \quad (14)$$

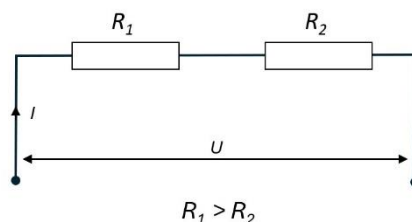
u matematičkom smislu analogna jednadžbi provođenja topline (4).

1.3. Mehanika fluida

Brojne su matematičke poveznice u mehanici fluida i elektromagnetizmu. Naime, početkom 20. stoljeća elektromagnetizam, kao najmlađa disciplina klasične fizike, na sveučilištima širom Europe uglavnom se podučavao primjenom raznih analogija iz mehanike fluida u smislu lakše vizualizacije elektromagnetskih fenomena. Kao jedna od najčešćih analogija koristi se pojam nestlačivosti fluida, odnosno električnog naboja, slika 2, a očita matematička analogija onda je dana u vidu jednadžbe kontinuiteta,.



Sl. 2a: Tok fluida



Sl. 2b: Tok električne struje

Na slici 2a prikazan je tok fluida kroz dvije cijevi različitog poprečnog presjeka. Analogna slika u elektrodinamici svodi se na tok struje kroz dva različita otpornika. Otpornik većeg otpora R_1 sa slike 2b onda odgovara cijevi manjeg poprečnog presjeka na slici 2b.

U mehanici fluida jednadžba kontinuiteta je oblika

$$\nabla(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

gdje je ρ gustoća, a $\vec{v}$ brzina gibanja fluida.
Tok fluida je oblika

$$Q = \int_S \rho\vec{v} \cdot d\vec{S} = - \int_S \nabla\phi d\vec{S} \quad (16)$$

gdje ϕ predstavlja potencijal brzine.

U elektrodinamici pak jednadžba kontinuiteta povezuje izvore elektromagnetskog polja u vidu gustoće volumnog naboja ρ i gustoće struje $\vec{J}$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

Konačno, jakost električne struje I daje se izraziti integralom gustoće struje $\vec{J}$ (12) pa je opet jasno vidljiv analogija u izrazima (12) i (16).

1.4. Gravitacijsko polje

Znanost o elektricitetu kao egzaktna, rigorozna disciplina u smislu matematičkog zapisa uočenih pojava započinje Coulombovim istraživanjima sredinom osamdesetih godina 18. stoljeća.

Sam izraz za Coulombovu električnu silu između dva naboja

$$|\vec{F}_{el}| = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad (18)$$

gdje je K odgovarajuća konstanta proporcionalnosti, q_1 i q_2 dane količine naboja, a r je udaljenost između dva naboja, je analogija na Newtonovu gravitacijsku silu između dva tijela mase m_1 , odnosno m_2

$$|\vec{F}_G| = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (19)$$

pri čemu je G odgovarajuća konstanta proporcionalnosti, a r udaljenost između tijela.

Treba napomenuti da, dok je gravitacijska sila uvijek privlačna, Coulombova sila može biti i privlačna i odbojna, ovisno o polaritetu naboja.

1.5. Konzervativna polja

Nadalje, analogija Newtonove gravitacijske i Coulombove elektrostatske sile očituje se u konzervativnom karakteru ovih sila; tj. rad ovih sila ne ovisi u

putanji već o početnoj i krajnjoj točki.

Tako je gravitacijska sila izražena negativnim gradijentom potencijalne energije

$$\vec{F} = -\nabla W_{pot} = -m\nabla V \quad (20)$$

pri čemu je m masa tijela na nekoj visini z iznad zemlje, a V gravitacijski potencijal

$$V = \frac{W_{pot}}{m} = g \cdot z \quad (21)$$

gdje je g gravitacijska konstanta.

S druge strane, sila na naboj q koji se nalazi u elektrostatskom polju je oblika

$$\vec{F} = -\nabla W_{pot} = -q\nabla\varphi \quad (22)$$

gdje je φ elektrostatski potencijal

$$\varphi = \frac{W_{pot}}{q} \quad (23)$$

Jasno je vidljiva analogija između gravitacijskog i elektrostatskog potencijala te mase i naboja u (21) i (23).

U oba slučaja rad A koji se izvrši pomicanjem mase m , odnosno naboja q od neke točke r_A do točke r_B jednak je razlici energije u krajnjoj i početnoj točki

$$A = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_A}^{r_B} \nabla W_{pot} \cdot d\vec{s} = W_{pot}(r_A) - W_{pot}(r_B) \quad (24)$$

U elektromagnetizmu se može pisati

$$A = \int_{r_A}^{r_B} q\vec{E} \cdot d\vec{s} = -q \int_{r_A}^{r_B} \nabla\varphi \cdot d\vec{s} = q[\varphi(r_A) - \varphi(r_B)] = qU_{AB} \quad (25)$$

gdje je E električno polje, a U_{AB} predstavlja napon između točaka A i B.

Na isti način, kao i u slučaju gustoće toplinskog toka, odnosno električnog polja ponaša se i gravitacijska sila (20) koja djeluje u smjeru najveće promjene te slijedi negativni gradijent.

1.6. Funkcional energije

Jedna od značajnih analogija u mehanici i elektromagnetizmu tiče se pitanja energije u nekom sustavu što vodi na varijacijski račun. Vrijedi napomenuti i da veliki broj numeričkih metoda za rješavanje problema u matematičkoj fizici i inženjerstvu nalazi korijene u varijacijskom računu, odnosno problemu minimizacije funkcionala energije.

Zahtjev ponašanja sustava u skladu s principom minimuma energije prema računu varijacija svodi se na minimizaciju funkcionala

$$F = \int_{t_1}^{t_2} (W_{kin} - W_{pot})dt = \min \quad (26)$$

gdje je W_{kin} i W_{pot} kinetička, odnosno potencijalna energije, odnosno izraza

$$F = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}mv^2 - W_{pot} \right) dt = \min \quad (27)$$

pri čemu je m masa, a W_{pot} odgovarajuća potencijalna energija tijela u određenom položaju.

S druge strane, funkcional elektromagnetske energije F koji odgovara izrazu (26) je oblika

$$F = \int_{t_1}^{t_2} (W_{mag} - W_{el})dt = \min \quad (28)$$

Za slučaj slobodnog prostora, ukoliko područje od interesa ne sadrži izvore, funkcional (28) je oblika

$$F = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H} - \vec{D} \cdot \vec{E}) dV dt = \min \quad (29)$$

Uspoređujući izraze (27) i (29) jasna je analogija potencijalne energije i energije pohranjene u električnom polju, odnosno kinetičke energije i energije pohranjene u magnetskom polju.

Prema računu varijacija funkcionali (27), odnosno (29), poprimaju minimalnu vrijednost kada njegoa varijacija iščezava

$$\delta F = 0 \quad (30)$$

tj. može se pisati:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (31)$$

pri čemu je L odgovarajući lagrangian u mehanici, odnosno u elektromagnetizmu.

Relacija (31) implicira zahtjev za pronalaženjem funkcija koja će integral (27), odnosno (29), tj. pripadni funkcional minimizirati.

1.7. Mehanički i električni titraji

Sljedeća značajna analogija odnosi se na mehaničke i električne titraje. Mehanički titraji mase m obješene o oprugu u slobodnom prostoru, dadu se opisati preko diferencijalne jednadžbe oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (32)$$

gdje je x pomak mase m od ravnotežnog položaja, a ω kružna frekvencija titranja

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (33)$$

pri čemu je k konstanta krutosti opruge.

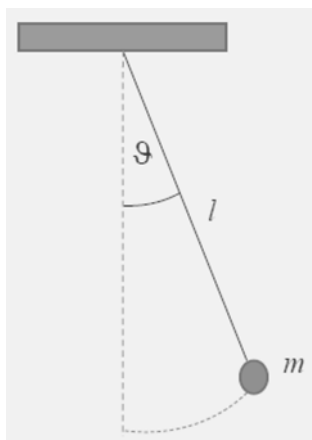
Također, mehanički titraji mase m obješene o nit duljine l , odnosno njihalo, slika 3 mogu se opisati preko diferencijalne jednačbe

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2 \vartheta = 0 \quad (34)$$

gdje je ϑ pomak mase m od ravnotežnog položaja, a ω je tada

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (35)$$

pri čemu je g gravitacijska konstanta.



Sl. 3.: Njhalo

Ukupna energija opruge čije titranje je opisano diferencijalnom jednačbom (32) u svakom trenutku predstavlja sumu potencijalne i kinetičke energije:

$$W_{tot} = W_{pot} + W_{kin} \quad (36)$$

gdje je potencijalna energija opruge oblika:

$$W_{pot} = \frac{1}{2} kx^2 \quad (37)$$

dok je njena kinetička energija:

$$W_{pot} = \frac{1}{2} mv^2 \quad (38)$$

pri čemu je v brzina gibanja.

Električki titraji naboja q u strujnom krugu s kondenzatorom i zavojnicom (idealni titrajni krug bez gubitaka) dadu se opisati preko istog tipa diferencijalne jednačbe

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad (39)$$

gdje je ω vlastita kružna frekvencija titrajnog kruga dana izrazom

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (40)$$

pri čemu je L induktivitet zavojnice, a C kapacitet kondenzatora.

Ukupna energija titrajnog kruga može se pisati:

$$W_{tot} = W_{el} + W_{mag} \quad (41)$$

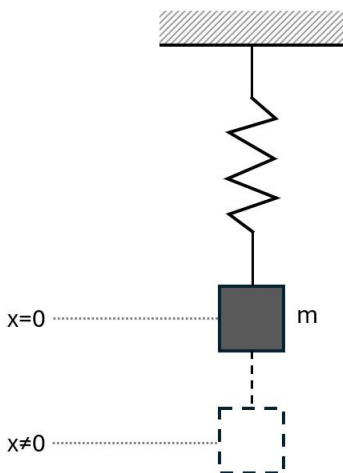
gdje je W_{el} energija pohranjena u električnom polju kondenzatora kapaciteta C nabijenog na naboj q :

$$W_{el} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (42)$$

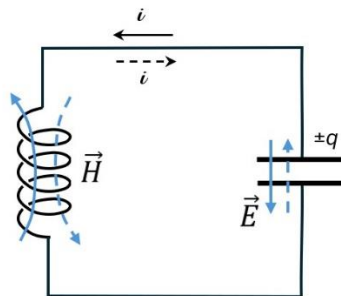
a W_{mag} energija pohranjena u magnetskom polju zavojnice induktiviteta L kojom teče struja i :

$$W_{mag} = \frac{1}{2} Li^2 \quad (43)$$

Razmatrani mehanički i titrajući električni sustav koji titra prikazani su na slici 4a, odnosno 4b.



Sl. 4a.: Masa m okačena o oprugu



Sl. 4b.: Električni titrajni krug

Očite su analogije između mase i naboja, ali isto tako i mase i induktiviteta u smislu mjere tromosti sustava. Nadalje, ponovo je jasno vidljiva analogija između potencijalne energije i energije električnog polja te kinetičke energije i energije magnetskog polja.

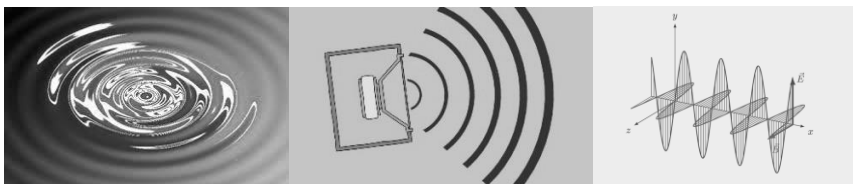
Opruga s okačenom masom m izbačena iz položaja ravnoteže (tako da se opruga rastegne na neku udaljenost od $x=0$) ima potencijalnu energiju dok ju se ne pusti da slobodno titra. Ukoliko nema gubitaka u sustavu potencijalna energija ciklički prelazi u kinetičku i obrnuto. Potpuna analogija postoji u električnom titrajnom krugu. U ovom slučaju analog potencijalne energije je energija pohranjena u električnom polju kondenzatora nabijenog na neki naboj q . Pražnjenjem kondenzatora u krugu teče struja i , a energija električnog polja kondenzatora prelazi u energiju magnetskog pola zavojnice. Ponovo, ukoliko nema gubitaka u sustavu transformacija energije električnog polja u energiju magnetskog polja (i obrnuto) odvija se periodički u beskonačnost.

Vrijedi napomenuti da su općenito u razvoju klasične fizike analogije s pojavama u mehanici išle toliko daleko da se od svake nove grane fizike očekivalo da se u potpunosti uklopi u koncept Newtonove mehanike. Ponekad je ovakav, donekle ipak radikalni pristup, imao i negativne posljedice u vidu odbijanja prihvatanja novih ideja, kao što je to bio slučaj s Faradayevom idejom egzistencije fizičkog polja i odbacivanjem newtonovskog koncepta djelovanja na daljinu.

1.8. Mehanički i elektromagnetski valovi

Val se općenito poima kao prijenos deformacije kroz prostor određenom brzinom, a u fizici se zapravo razlikuju tri vrste valova: mehanički valovi (poput valova zvuka ili valova na vodi, slika 5a i 5b), koji putuju samo unutar medija, elektromagnetski valovi, slika 5c, koji predstavljaju samoodržavajuća titranja u vakuumu i valovi materije, koji također mogu egzistirati u vakuumu, a proučavaju

se u kvantnoj fizici.



Sl. 5a.: Val na vodi

Sl. 5b.: Val zvuka

Sl. 5c.: Elektromagnetski val

Jednadžba akustičnog vala je oblika

$$\nabla^2 p = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (44)$$

gdje je p tlak, a v brzina propagacije vala.

U slobodnom prostoru valna jednadžba za magnetsko polje je oblika

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (45)$$

pri čemu je brzina propagacije vala jednaka brzina svjetlosti c

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (46)$$

Vektorsku jednadžbu (45) moguće je raspisati po komponentama i prikazati preko tri skalarne jednadžbe po obliku analogne relaciji (44).

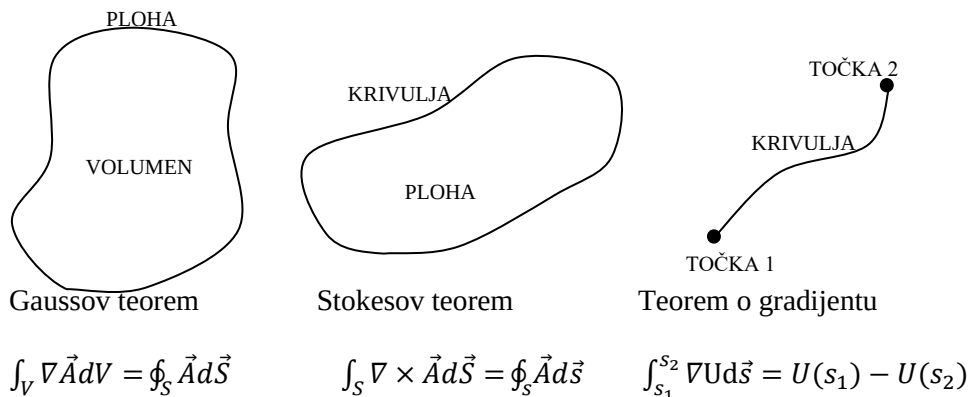
2. Povezanost matematičkih operatora i fizikalnih pojmova

Povijesno gledano jedna od najznačajnijih poveznica matematike i fizike vezana je za Newtonovo i Leibnizovo doba te razvoj diferencijalnog i integralnog računa. Tako je pojam brzine jasno povezan s pojmom derivacije odnosno promjene funkcije u točki dok je pojam integrala vezan za prevaljeni put. Općenito, derivacija predstavlja mjeru za brzinu promjene dakle, daje informaciju koliko se brzo određena veličina mijenja. S druge strane, integral daje informaciju koliko se određena veličina mijenja s vremenom.

Nadalje, može se kazati da je cjeloviti matematički aparat vektorske analize veoma prilagođen pojmovima matematičke fizike, a njihova definicija usko je povezana s fizikalnim pojmovima iz mehanike fluida, mehanike, topline i elektromagnetizma.

Operatori vektorske analize gradijent, divergencija i rotor imaju jasan fizikalni smisao u vidu prirode potencijalnih polja, postojanja monopolnih izvora i

virtložnih polja. Uz operator divergencije, rotora i gradijenta vezana su tri već spomenuta integralna teorema vektorske analize čijom primjenom je moguće sniziti dimenzionalnost problema, što je zorno prikazano na slici 6 [5].



Sl. 6.: Integralni teoremi vektorske analize

Primjenom ovih teorema razmatranje se s domene proračuna pomiče na granicu područja. Tako Gaussov teorem omogućava zamjenu operacija po volumenu s odgovarajućim matematičkim operacijama po površini koja taj volumen zatvara. Stokesovim teoremom operacije po plohi zamjenjuju se odgovarajućim proračunima po krivulji koja tu površinu zatvara. Konačno, teorem o gradijentu integraciju po krivulji zamjenjuje razlikom vrijednosti neke skalarne funkcije u početnoj i krajnjoj točki krivulje. Očito, u sva tri slučaja integral više dimenzionalnosti sadrži određeni operator vektorske analize koji djeluje na vektorsku ili skalarnu funkciju dok je s desne strane izraz niže dimenzionalnosti koji sadrži vektorsku ili skalarnu funkciju bez dotičnog operatora.

Vektorska polja složenija su od skalarnih polja, a jednoznačno su definirana ako su poznati i rotor i divergencija dane vektorske funkcije, što vrlo često stvara probleme u numeričkim postupcima rješavanja.

Analogije su očite, pitanje je samo ima li analogni matematički zapis dublju konotaciju, ili mi različite pojave samo opisujemo istim matematičkim alatima koje smo razvili.

3. Neki filozofski aspekti povezanosti matematike i fizike

Odnos matematike i fizike na fundamentalnom nivou, odnosno dubinska povezanost ove dvije discipline kao ideja nije novijeg datuma i, s različitog stanovišta razmatrali su je brojni filozofi znanosti, fizičari i matematičari. Postavlja se pitanje kako se matematika kao apstraktna, logičko-formalna disciplina koja nema direktnu poveznicu sa stvarnim svijetom može koristiti u svrhu opisivanja i razumijevanja tog svijeta te predikcije prirodnih pojava. Matematika je, naravno, od pomoći jer pojednostavljuje probleme, odnosno složene strukture predstavlja

jednostavnijim modelima što, na neki način, ukazuje na postojanje sličnosti, analogije između matematičkih struktura i stvarnog svijeta. Sasvim općenito, u svjetlu filozofije matematike platonisti tvrde da je svijet brojeva i matematičkih objekata (jedino)stvaran dok nominalisti odbacuju postojanje takvog svijeta. Za nominaliste svijet matematičkih struktura nije stvaran. Ovo pitanje razmatraju i brojni suvremeni teorijski fizičari poput Maxa Tegmarka koji u svojoj knjizi *Mathematical Universe* iz 2014. iznosi prilično radikalnu ideju da realni svijet nije samo opisan matematikom, već da *jest* matematika [6]. Nadalje, teorijski fizičar, Roland Omnès kroz razmišljanja u svojoj knjizi iz 2002. *Converging Realities* [7] iznosi poveznice između prirodnih zakona i matematike te ide ka zajedničkom filozofskom pogledu na fiziku i matematiku. Polazeći od, na prvi pogled, 'čudesne' efikasnosti u primjenjivosti matematike u prirodnim znanostima Omnès zastupa stav da su same matematičke strukture zapravo destilat zakona prirode. Za Emmy Noether, pak, su zakoni sačuvanja u fizici (sačuvanje energije, linearnog i angularnog momenta te sačuvanje naboja) posljedica matematičkih simetrija. Kako bilo, činjenica je da se, za razliku od fizike (u smislu Popperove ili Kuhnove filozofije o razvoju znanosti) zakoni matematike, jednom postavljeni (izumljeni ili otkriveni...?) ne mijenjaju niti nadopunjuju. Brojne su rasprave vezane za pitanje postoje li uopće Kuhnovske revolucije u matematici [8].

U suvremenoj filozofiji matematike vrlo utjecajna teorija naziva se *platonizmom*, a tiče se nepromjenjivog znanja te promjenjivog svijeta realnosti. Nepromjenjivo znanje o promjenjivom svijetu realnosti je matematičko znanje. Svijet realnosti sastoji se od činjenica opažajnoi/ili tehnološki zamjetljive naravi čiji su međusobni odnosi u svom temelju matematički strukturirani. Matematičke strukture stvarne su u onoj istoj mjeri u kojoj su stvarne činjenice opažajne empirije. Uspješnost primjene matematike na fiziku uspješnost je otkrivanja matematički strukturiranih strukturiranih odnosa među empirijskim činjenicama. U suvremenoj platonistički orijentiranoj filozofiji matematičke strukture dio su fizikalno istraženog svijeta realnosti. Ove strukture su stvarne budući da svijet realnosti u svom temelju ima matematički strukturirane fizikalne zakone. Stoga je tvrdnju o matematičkim strukturama kao destilatu zakona prirode moguće nedvojbeno uklopiti u platonistički orijentiranu filozofiju. Tako je tvrdnju o fizikalnim zakonima sačuvanja kao posljedicu matematičkih simetrija također moguće platonistički orijentirati; matematička simetrija sama je bit (*essentia*) fizikalnih zakona sačuvanja. No, u ovoj platonistički harmonično uspostavljenoj ontologiji svijeta realnosti postoje i neka otvorena zagonetna pitanja. Platonistički orijentirana filozofija matematike susreće se s naime s poteškoćom nedvojbenog objašnjenja fizikalne realnosti jednog dijela skupova apstraktnih matematičkih entiteta – skupova koji su neotklonjivo opstojeći u teorijskoj matematici. Neizvjesnost objašnjenja pojavljuje se već na razini razmatranja fizikalne realnosti beskonačnog skupa negativnih brojeva. Zaokruživanje na apsolutne N količinske vrijednosti rezultatnih fizikalnih proračuna ne može otkloniti ovu poteškoću. Pitanje je na što se zapravo u svijetu realnosti nekonvencionalnosti referiraju članovi čisto matematički utemeljenog Z skupa. Istovrsno pitanje vrijedi i za

članove skupa C. Platonizam teško da na ova pitanja ima nedvojbeno neredukcionističke i ujedno referentno izvjesne odgovore. Naime, ako apstraktni matematički entiteti izražavaju samo kvantitet, onda postoji opasnost redukcije matematike na fiziku. Vrijedi, također, i redukcionistički obrat. No ako apstraktni matematički entiteti ne izražavaju samo kvantitet, onda njihova fizikalna entitetna referentnost postaje neizvjesnom.

Mogući prijedlog pomoću kojeg se daje otkloniti neke prethodno spomenute poteškoće na koje nailazi platonizam je onaj o urođenosti matematičkih struktura. Ovu ideju povijesno se može dovesti u vezu s *adequatio intellectus et rei* Tome Akvinskog te s Kantovim *Die Architektonik der reinen Vernunft*. Matematičke strukture su, dakle, obilježje ljudskog uma te su dio naših sposobnosti istraživanja svijeta realnosti. Baveći se matematikom otkrivamo urođene nam strukture (lat. *nostra rationalitate*) iz čega bi proizašlo da je matematika utoliko otkriće. Matematičke strukture su onda konstruktivna potencijalnost uma te su stvarne u istoj mjeri u kojoj je stvarno ljudsko biće kao dio svijeta realnost. Može se kazati da ljudsko biće spoznaje svijet realnosti matematički ga opisujući, no istovremeno spoznaje i vlastiti um, tj. njegov racionalni dio.

Matematika je, dakle, u ontologijsko spoznajnom smislu istovremeno i izum i otkriće. Naime, kao otkriće ona spoznajno uključuje ontologiju živih bića dok kao izum spoznajno uključuje ontologiju univerzuma.

Zaključna razmatranja

Znanost, odnosno ono što danas podrazumijevamo pod znanstvenom metodom, postoji nekih četiri stotine godina. Početak sedamnaestog stoljeća donosi novi pogled na svijet koji karakterizira prijelaz s aristotelovske na galilejevsku fiziku. Naime, s Galileom, Descartesom i Newtonom kristalizira se i hijerarhija koncepata, odnosno javlja se ideja da se opis fizikalnog svijeta daje iskazati preko nekoliko osnovnih pojmova zajedno povezanih kvantitativnim zakonima.

B. d'Espagnat [9]

U radu se analiziraju poveznice između matematičkih apstraktnih pojmova i zakona klasične fizike. Naime, isti matematički zapis u vidu istog tipa diferencijalnih jednadžbi nailazi se u raznim područjima klasične fizike, odnosno postoje analogije koje su zastupljene u prijenosu topline, elektromagnetizmu, mehanici čvrstih tijela, prijenosu topline, mehanici fluida, mehaničkim i električnim titrajima te mehaničkim i elektromagnetskim valovima. Također, u radu se propituje poveznica između operatora i integralnih teorema vektorske analize i fizikalnih pojmova. Konačno, u radu se razmatraju i neka filozofska pitanja postojanja fundamentalnih poveznica između matematičkih i fizikalnih pojmova, odnosno između matematičkog svijeta apstraktnih entiteta i stvarnog svijeta. Dade se ustvrditi kako ideje platonizma i urođenosti matematičkih

struktura nisu sasvim suprotstavljene filozofske ideje, već prije zajednički dijele tvrdnju o spoznajnim mogućnostima intelekta, kao i pitanje o fundamentalnoj poveznici između matematičkih inteligibilnih konstrukata i fizikalno istraženog ustrojstva svijeta.

Literatura

- [1] E. Vigner, E. Wigner, the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13, No. I, Feb. 1960
- [2] D. Poljak, M. Jakić, A Note on the Character of Physical Models Representing Natural Phenomena *Int. Journ. of Design & Nature and Ecodynamics*, Vol. 12, No 2, 2017., pp. 254-263.
- [3] D. Poljak, Ograničenja matematičkih modela u fizici i tehnici s osvrtom na klasični inženjerski elektromagnetizam, *Zbornik radova: 9. simpozija Povijest i filozofija tehnike*, Zagreb, Hrvatska, 2020. str. 509-545.
- [4] D. Poljak, M. Cvetković, *Human Interaction with electromagnetic Fields, Computational Methods in Dosimetry*, Elsevier, Eastbourne, UK, 2019.
- [5] D. Poljak, *Teorija elektromagnetskih polja s primjenama u inženjerstvu*, Školska knjiga, Zagreb 2014.
- [6] M. Tegmark, *Mathematical Universe*, Penguin: New York, 2014.
- [7] R. Omnès, *Converging Realities: Toward a Common Philosophy of Physics and Mathematics*, Princeton University Press, 2004.
- [8] M. Mizarhi (Ed), *The Kuhnian Image of Science: Time for a Decisive Transformation?* Rowman & Littlefield, London, UK, 2018.
- [9] B. d'Espagnat, *On Physics and Philosophy*, Princeton University Press, New York, USA 2006.

MATHEMATICAL ANALOGIES IN MODELS OF CLASSICAL PHYSICS

Abstract: The paper deals with links between mathematical abstract notions and laws of classical physics. One finds the same mathematical description in the form of same type of differential equations in all areas of classical physics, i.e. analogies are present in mechanics of solid bodies, thermodynamics, fluid mechanics,

mechanical and electrical oscillations, acoustic and electromagnetic waves. In philosophical sense there is a question whether there exists a deeper link between abstract mathematical notions and physical quantities.

Keywords: Mathematical analogies, laws of classical physics, link between mathematical operators and physical notions, philosophical aspects

Dragan Poljak Mirko Jakić