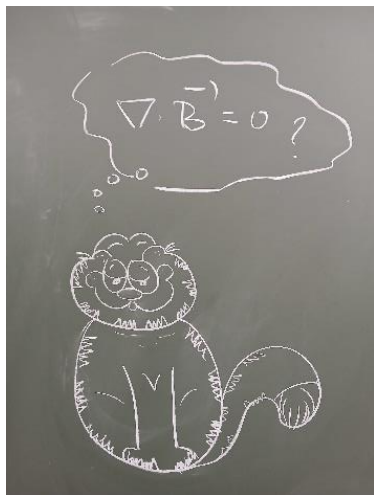




Matematičke analogije u modelima klasične fizike



*Dragan Poljak*¹
Sveučilište u Splitu, FFSB
dpoljak@fesb.hr

Mirko Jakić
Sveučilište u Splitu, FFST
mirko.jakic@st.t-com.hr



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

- Predavanje je dijelom zasnovano na publikacijama:

Dragan Poljak

Ograničenja matematičkih modela u fizici i tehnici s osvrtom na klasični inženjerski elektromagnetizam

Sve što je meni važno je da teorija predviđa rezultate mjerenja.

Stephen W. Hawking

Sažetak: U radu se razmatra karakter matematičkih modela u fizici i tehnici te posljedično njihova ograničenja. Dok se u fizici razmatra priroda i u skladu sa znanstvenom metodom tako dolazi do fizikalnih zakona kojima se opisuju pojave u stvarnom svijetu, uloga tehnike je mijenjanje svijeta u smislu tehnološkog napretka primjenom fizikalnih zakona. Uz eksperimentalne metode, ključnu ulogu u razvoju fizike i tehnike igraju matematički modeli koji uključuju teorijsku podlogu temeljenu na fizikalnim zakonima te matematičku metodu rješavanja jednadžbi modela. Za realistične probleme, pogotovo u tehnici, nužno je približno, odnosno numeričko rješavanje odgovarajućih jednadžbi što implicira implementaciju na računalu. U postupku matematičkog modeliranja nailazi se na ograničenja na nekoliko razina. Temeljna ograničenja leže duboko u osnovi fizikalno-filozofskih postavki promatranja svijeta, a tiču se pitanja granica znanstvene spoznaje o prirodi uopće, na kakve se nailazi u fizici u vidu Heisenbergovih relacija neodređenosti, matematički u formi Gödelova teorema nepotpunosti ili pak u osnovnim postavkama Kantove filozofije o granicama naše spoznaje. Druga klasa ograničenja odnosi se na činjenicu da su modeli pojednostavnjene simulacije razmatranih pojava, odnosno set parametara koje se uzima u obzir uvijek je ograničen. Sljedeći je korak u ograničenjima metoda rješavanja određene operatorske jednadžbe (primjerice diferencijalne jednadžbe), a posljednji je problem implementacija na računalu, tj. pitanje izračunljivosti. Činjenica je da se diferencijalne jednadžbe temelje na kontinuiranim veličinama, a ono što se procesira na računalu jesu konačni skupovi diskretnih podataka.

Propitivanje odnosa filozofije i znanosti s osvrtom na teze Thomasa S. Kuhna

DRAGAN POLJAK
FRANJO SOKOLIĆ
MIRKO JAKIĆ

Uvodna razmatranja:

filozofija i znanost – povijesne poveznice i razmimoilaženja

Znanstvena metoda nedavno je proslavila 400-tu godišnjicu nakon Galilejevih astronomskih otkrića 1609. godine. Znanost svoje korijene vuče direktno iz filozofije, a po svojoj suštini značajno se razlikuje od ostalih ljudskih djelatnosti. Ta tvrdnja daje se ilustrirati na primjeru usporedbe znanosti i umjetnosti. Tako se, primjerice, glazbeno, književno ili likovno djelo rijetko smatra vrednijim ukoliko je nastalo kasnije, odnosno ako je suvremenije, dapače. Za znanstvenim teorijama situacija je potpuno suprotna; Kopernikova heliocentrična slika svemira naprednija je od Aristotelove geocentrične, Einsteinova teorija gravitacije daje potpuniju sliku stvarnosti u odnosu na Newtonovu, a Maxwellova je elektromagnetska teorija potpunija od Weberove. Na prvi pogled, neminovno se nameće zaključak kako je porast ljudskog znanja kumulativan i jasno usmjeren prema objektivnoj istini.

D. Poljak & M. Jakić, Int. J. of Design & Nature and Ecodynamics, Vol. 12, No. 2 (2017) 254-263

Letter to the Editor

A NOTE ON THE CHARACTER OF PHYSICAL MODELS REPRESENTING NATURAL PHENOMENA

DRAGAN POLJAK & MIRKO JAKIĆ
University of Split, Croatia.

ABSTRACT

The present work deals with the character of a physical model and the corresponding mathematical method to solve the problem. The models are characterized to be simplified imaginary simulations of the real-world systems one attempts to understand. However, models include only those properties and relationships required to understand those aspects of real systems one is interested at the moment, i.e. those aspects of real systems one knows, or those one is aware after all. The rest of the details about a real system is simply neglected from a model. This approach in studying natural phenomena is the essence of the reductionistic approach which represents the heart of the modern scientific method. This paper discusses the fundamental science framework necessary to describe physical systems; equations representing physical laws, values of all constants of nature appearing within equations and initial conditions of a system.

Keywords: computational implementation, mathematical method of solution, natural laws, physical model, philosophy of science.

1 INTRODUCTION: SCIENTIFIC METHOD, A DEFINITION, HISTORY, DEVELOPMENT ... ?

Scientists create tools, that's what they do...

C.P. Snow

Science could be considered as the entire set of facts, definitions, theorems, techniques and relationships, and is tested on phenomena in *real, objective, external* world and, itself, has many elements of imagination, logic, creativity, judgement, metaphor and instrumentations.

The essence of science is definitely more in *research method* and specific way of *reasoning*, and less in particular facts and results.

The scientific insight starts with observing a certain phenomenon, then collected observations are organized in sort of hypothesis which is tested on additional observations, and if necessary, modified.

Then, predictions, based on these modified hypotheses are carried out, and some experiments are performed to test the predictions.

When the range of predictions provided by the hypothesis is considered to be satisfactory for the scientific community, the hypothesis is referred to as a *scientific theory* or *natural law*.

This rather successful methodology, today more than four centuries old, is called *science* or the *scientific method*.

cigre

12.
SIMPOZIJ

POVIJEST I FILOZOFIJA TEHNIKE

ZAGREB, FER. 24. i 25. LIPNJA 2025.

Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Čudo pogodnosti jezika matematike u formulaciji zakona fizike je prekrasan dar koji niti razumijemo niti zaslužujemo.

Eugene Wigner

- Prirodni zakoni u različitim područjima fizike imaju isti matematički zapis, u vidu istih tipova diferencijalnih jednažbi.
- Ovakve analogije nemaju samo teorijski značaj već su desetljima i temelj nekih važnih inženjerskih disciplina.
- Analogije postoje u prijenosu topline, mehanici fluida, akustici i elektromagnetizmu.



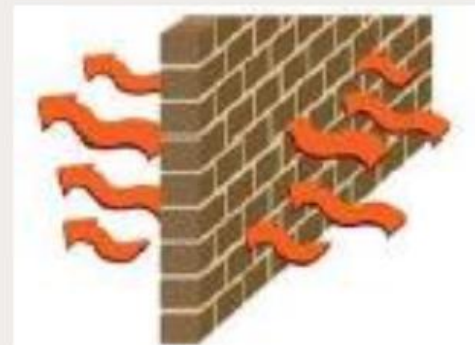
Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

- Temelji teorije toplinskih polja nastaju u 19. stoljeću klasičnim radovima Fouriera.
- Vođenje topline kroz neku sredinu opisuje se Fourierovim zakonom:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T$$

gdje je q gustoća toplinskog toka, T je temperaturno polje a λ toplinska vodljivost sredine.



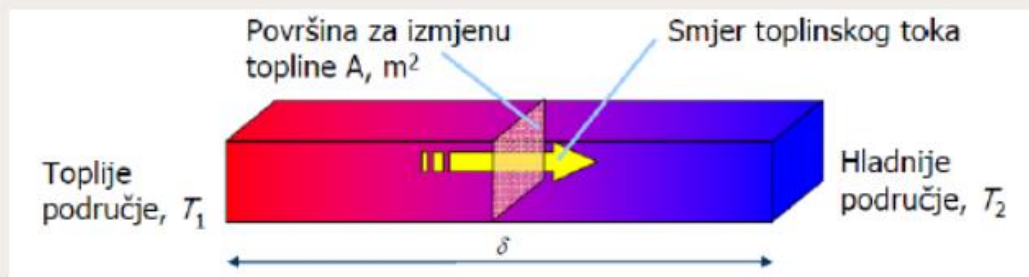
Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

- Količina topline koja se prenese kroz infinitezimalni element izotermne plohe u diferencijalu vremena dt je:

$$\bar{Q} = \int_t \int_S \vec{q} d\vec{S} dt = \int_t \int_S \lambda \nabla T d\vec{S} dt$$

- Toplinski tok je: $Q = \int_S \vec{q} \cdot d\vec{S} = - \int_S \lambda \nabla T d\vec{S}$



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

- Iz općeg zakona održanja difuzijskog prijenosa topline daje se izvesti *Fourierova jednadžba provođenja topline*

$$C_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = Q_i + \nabla(\lambda \nabla T)$$

gdje Q_i predstavlja volumnu gustoću unutarnjih toplinskih izvora, C_v je specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu po jedinici mase, a ρ gustoća tvari.

- Za rješavanje Fourierove jednadžbe nužno je poznavati početne i rubne uviete.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

- Kod stacionarnih procesa jednačba prijenosa topline prelazi u *Poissonovu* jednačbu:

$$\nabla(\lambda \nabla T) = -Q_i$$

- Ukoliko unutar promatranog volumena nema izvora topline *Poissonova* jednačba prelazi u *Laplaceovu* jednačbu:

$$\nabla(\lambda \nabla T) = 0$$

- Za rješavanje Poissonove/Laplaceove jednačbe potrebno poznavati rubne uvjete.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

- Razmatrajući konstitutivnu jednadžbu u elektrostatici

$$\vec{D} = -\varepsilon \nabla \varphi$$

gdje je D gustoća električnog toka, ε permitivnost, a φ električni skalarni potencijal, vidljiva je analogija između gustoće toplinskog i električnog toka izraženih preko gradijenta temperature, odnosno skalarnog električnog potencijala.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

- Električni tok je definiran plošnim integralom

$$\psi_{el} = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = - \int_S \epsilon \nabla \varphi d\vec{S}$$

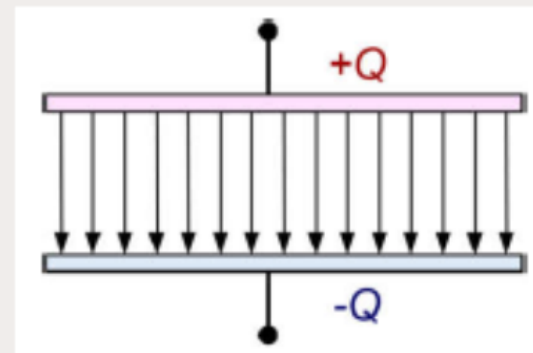
- Poissonova jednačba u elektrostatici je oblika

$$\nabla(\epsilon \nabla \varphi) = -\rho$$

gdje je ρ gustoća volumnog naboja.

dok je Laplaceova jednačba za elektrostatsko polje u prostoru bez naboja

$$\nabla(\epsilon \nabla \varphi) = 0$$



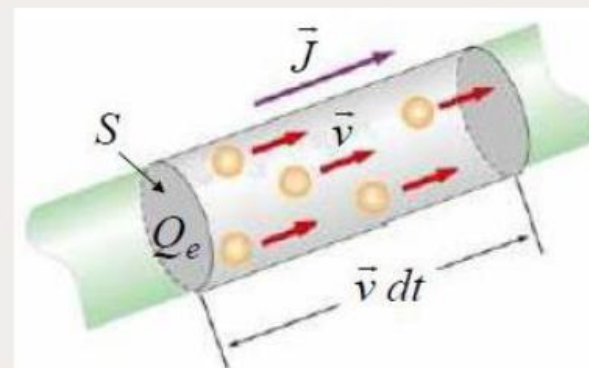
Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

- Ohmov zakon, povijesno gledano nastao je upravo na temelju analogije s toplinskim tokom.
- Tako se u svojoj diferencijalnoj formi zakon se može pisati u obliku

$$\vec{J} = -\sigma \nabla \varphi$$

gdje je J gustoća električne struje, σ specifična vodljivost, a φ električni skalarni potencijal.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

- Električna struja je tada definirana plošnim integralom

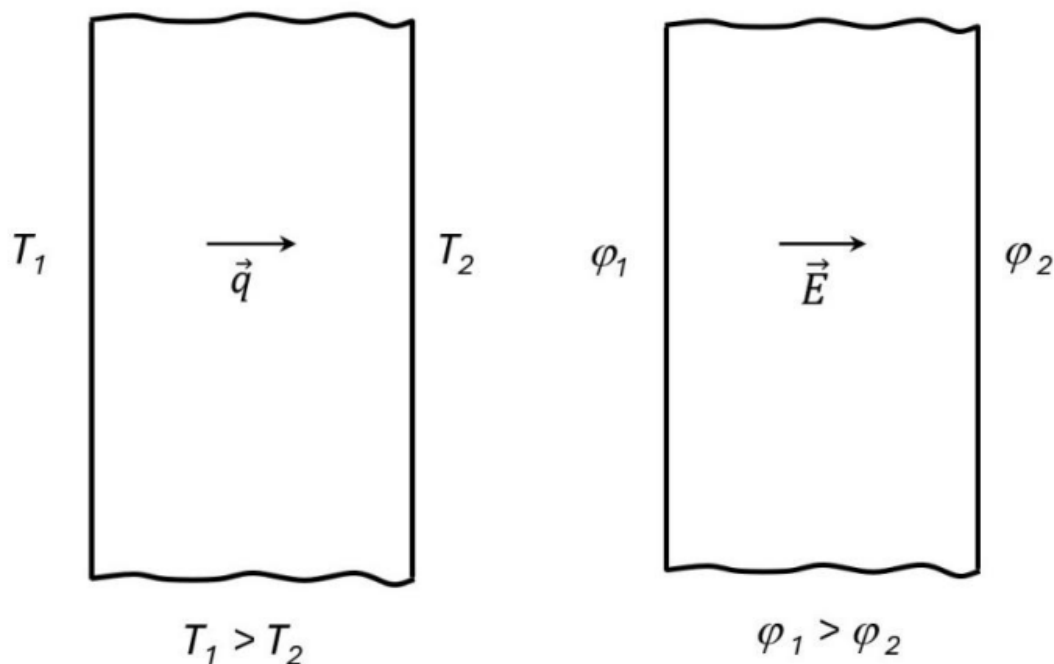
$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_S \sigma \nabla \varphi d\vec{S}$$

- Integralni oblik Ohmovog zakona uključuje integralne veličine; struju, napon i električni otpor, a Laplaceova jednadžba za stacionarno strujno polje je oblika

$$\nabla(\sigma \nabla \varphi) = 0$$



Matematičke analogije u modelima klasične fizike



Sl. 1a: Širenje gustoće toplinskog toka

Sl. 1b: Širenje električnog polja



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

- Difuzijska jednačba za magnetski vektorski potencijal kod kvazistacionarnih polja, koja se koristi za proračun vrtložnih struja, je oblika

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \vec{J}$$

što je u matematičkom smislu analogno jednačbi provođenja topline.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

- Brojne su matematičke poveznice u mehanici fluida i elektromagnetizmu.
- Početkom 20. stoljeća elektromagnetizam, kao najmlađa disciplina klasične fizike, na sveučilištima širom Europe uglavnom se podučavao primjenom analogije iz mehanike fluida u smislu lakše vizualizacije elektromagnetskih fenomena.
- Kao jedna od najčešćih analogija koristi se pojam nestlačivosti fluida, odnosno električnog naboja, a očita matematička analogija onda je dana u vidu jednadžbe kontinuiteta.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

- U mehanici fluida jednačba kontinuiteta je oblika:

$$\nabla(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

gdje je ρ gustoća, a v brzina gibanja fluida.

- U elektrodinamici jednačba kontinuiteta povezuje izvore EM polja u vidu gustoće volumnog naboja ρ i gustoće struje J .

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

- Tok fluida je oblika

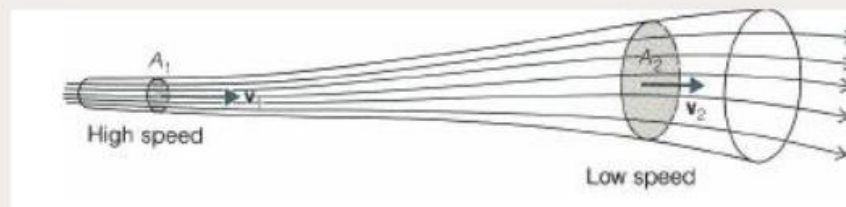
$$Q = \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \int_S \nabla \phi d\vec{S}$$

gdje ϕ predstavlja potencijal brzine.

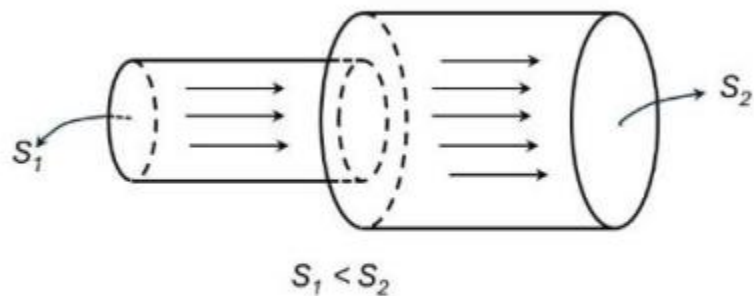
- Dalje se može pisati

$$\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$

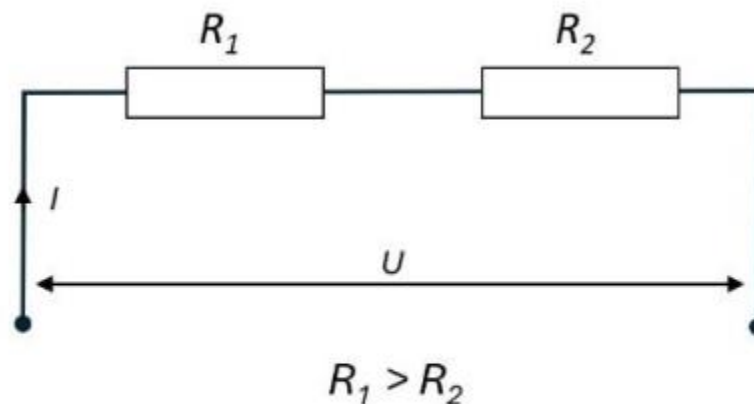
- Očite su analogije u izrazima za toplinski tok, električni tok, električnu struju i tok fluida.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike



Sl. 2a: Tok fluida



Sl. 2b: Tok električne struje



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Znanost o elektricitetu, kao egzaktna disciplina, započinje Coulombovim istraživanjima sredinom 80-tih godina 18. stoljeća koje rezultiraju *Coulombovom silom* između dva naboja

$$\left| \vec{F}_{el} \right| = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

gdje je K odgovarajuća konstanta proporcionalnosti, q_1 i q_2 dane količine naboja, a r je udaljenost između dva naboja.

- Očita je analogija na Newtonovu gravitacijsku silu između dva tijela mase m_1 , odnosno m_2

$$\left| \vec{F}_G \right| = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

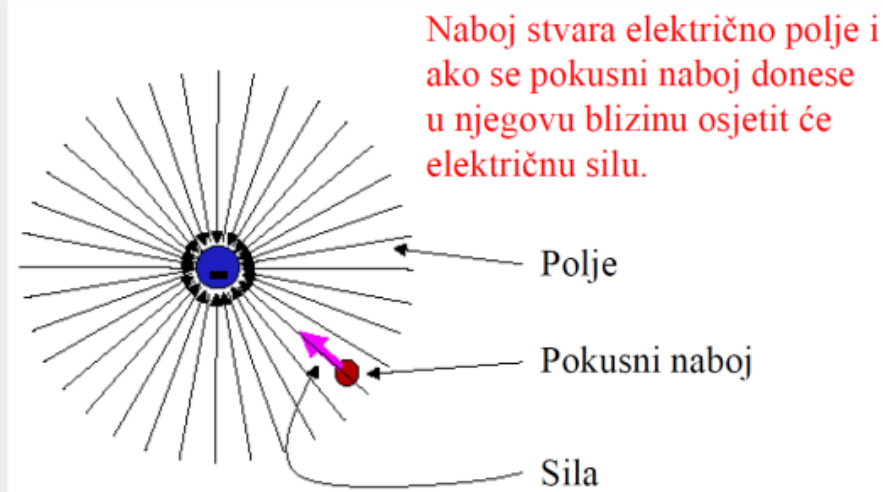
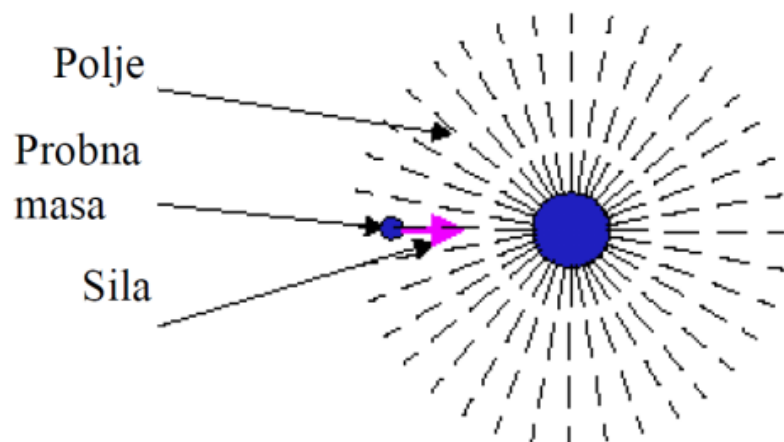
pri čemu je G odgovarajuća konstanta proporcionalnosti, a r udaljenost između dva tijela,



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Masa u gravitacijskom polju
- Naboj (negativni) u električnom polju



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Dok je gravitacijska sila uvijek privlačna, Coulombova sila može biti i privlačna i odbojna.
- Analogija Newtonove gravitacijske i Coulombove elektrostatske sile očituje se u konzervativnom karakteru (rad sile ne ovisi u putanji već o početnoj i krajnjoj točki).
- Gravitacijska sila izražena je negativnim gradijentom potencijalne energije

$$\vec{F} = -\nabla W_{pot} = -m\nabla V$$

pri čemu je m masa tijela na nekoj visini z iznad zemlje, a V gravitacijski potencijal

$$V = \frac{W_{pot}}{m} = g \cdot z$$

gdje je g gravitacijska konstanta.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Sila na naboj q koji se nalazi u elektrostatskom polju je oblika

$$\vec{F} = -\nabla W_{pot} = -q\nabla \varphi$$

- gdje je φ elektrostatski potencijal

$$\varphi = \frac{W_{pot}}{q}$$

- U oba slučaja rad A koji se izvrši pomicanjem mase m , odnosno naboja q od neke točke r_A do točke r_B jednak je razlici energije u krajnjoj i početnoj točki

$$A = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_A}^{r_B} \nabla W_{pot} \cdot d\vec{s} = W_{pot}(r_A) - W_{pot}(r_B)$$



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Prema Newtonovim zakonima klasične mehanike sila mora biti jednaka promjeni količine gibanja (linearnog momenta) materije:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{G}_{meh}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt} \int_V \rho_m \vec{v} dV$$

gdje je G_{meh} , u mehanici količina gibanja ρ_m gustoća mase, a v brzina.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Elektromagnetski moment po analogiji na mehaniku je

$$\vec{G}_{EM} = \int_V (\vec{D} \times \vec{B}) dV = \int_V \left(\frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H} \right) dV$$

pa je onda zakon sačuvanja količine gibanja, koji uključuje *elektromagnetsku količinu gibanja* oblika

$$\frac{d\vec{G}_{meh}}{dt} = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV$$

odnosno, slijedi:

$$\frac{d}{dt} (\vec{G}_{meh} + \vec{G}_{EM}) = 0 \qquad \vec{G}_{meh} + \vec{G}_{EM} = const.$$



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Postojanje naprezanja u elektromagnetskom polju te elektromagnetske količine gibanja ukazuje na fizički realitet elektromagnetskog polja.
- Značajna analogija u mehanici i elektromagnetizmu tiče se energije u sustavu (varijacijski račun).
- Veliki broj numeričkih metoda za rješavanje problema u matematičkoj fizici i inženjerstvu proizlazi iz varijacijskog računa (problem minimizacije funkcionala energije).



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Princip minimuma energije prema računu varijacija svodi se na minimizaciju funkcionala

$$F = \int_{t_1}^{t_2} (W_{kin} - W_{pot}) dt = \min$$

odnosno izraza

$$F = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m v^2 - W_{pot} \right) dt = \min$$

gdje je m masa, a W_{pot} odgovarajuća potencijalna energija tijela u nekom položaju.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike



Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Funkcional elektromagnetske energije F je oblika

$$F = \int_{t_1}^{t_2} (W_{mag} - W_{el}) dt = \min$$

- Za slučaj slobodnog prostora, ukoliko područje od interesa ne sadrži izvore, funkcional je oblika

$$F = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H} - \vec{D} \cdot \vec{E}) dV dt = \min$$

- Jasna je analogija *potencijalne energije* i *energije pohranjene u električnom polju*, odnosno *kinetičke energije* i *energije pohranjene u magnetskom polju*.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Prema računu varijacija funkcionali poprimaju minimalnu vrijednost kada njegova varijacija iščezava

$$\delta F = 0$$

tj. može se pisati:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

pri čemu je L odgovarajući lagrangian u mehanici, odnosno elektromagnetizmu.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike



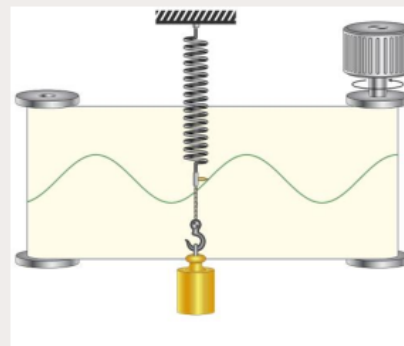
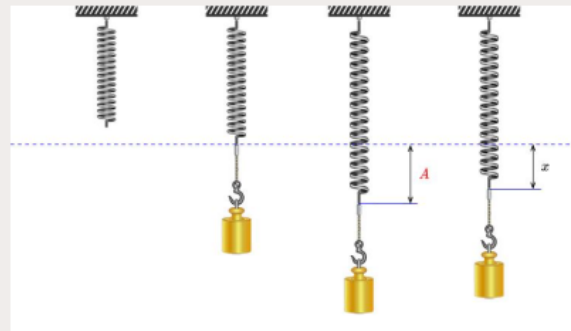
Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Sljedeća značajna analogija odnosi se na mehaničke i električne titraje.
- Mehanički titraji mase m obješene o oprugu dadu se opisati preko diferencijalne jednačbe oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

gdje je x pomak mase m od ravnotežnog položaja, a ω frekvencija titranja

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



<https://edutorij.e-skole.hr/>

Matematičke analogije u modelima klasične fizike



Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

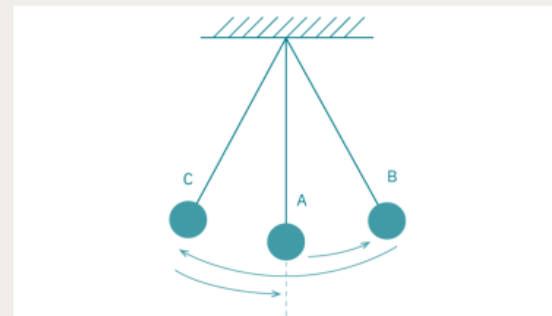
- Daljnja analogija mehaničkih i električnih titraja odnosi se na matematičko njihalo.

- Mehanički titraji mase m obješene o nit duljine l mogu se opisati preko diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2\vartheta = 0$$

gdje je ϑ pomak mase m od ravnotežnog položaja, a ω frekvencija titranja

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

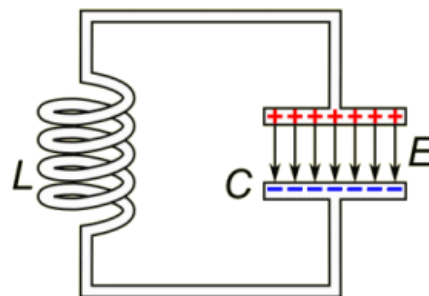
- Električki titraji naboja q u strujnom krugu s kondenzatorom i zavojnicom (idealni titrajni krug) opisuju se istim tipom diferencijalne jednačbe

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

pri čemu je ω kružna frekvencija

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

gdje je L induktivitet zavojnice, a C kapacitet kondenzatora.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Energija opruge:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = W_{tot}$$

Potencijalna
energija

$$W_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$$

Kinetička
energija

$$W_{pot} = \frac{1}{2}mv^2$$

- Energija titrajnog kruga:

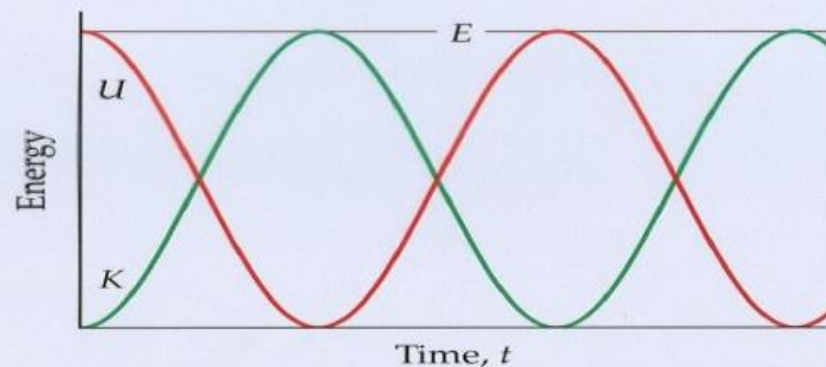
$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = W_{tot}$$

Energija magnetskog
polja

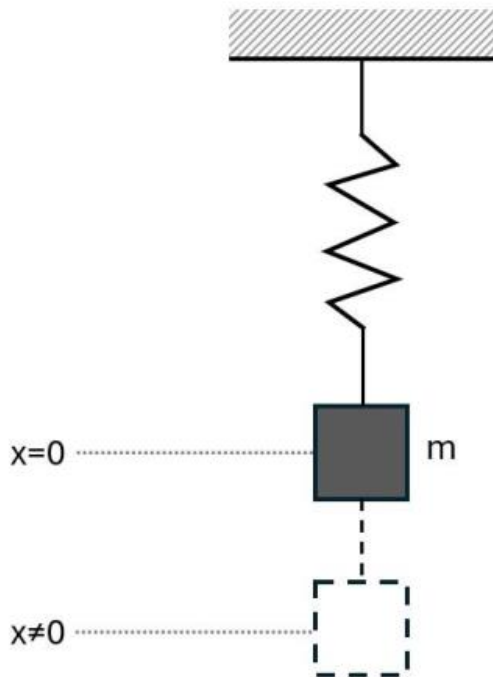
$$W_{mag} = \frac{1}{2}Li^2$$

Energija električnog
polja

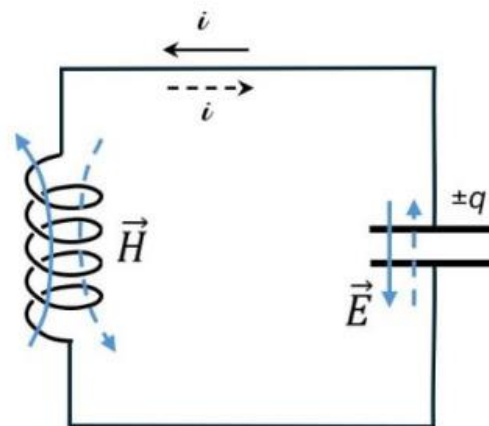
$$W_{el} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$



Matematičke analogije u modelima klasične fizike



Sl. 4a.: Masa m okačena o oprugu



Sl. 4b.: Električni titrajni krug

Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

- Očite su analogije između mase i naboja, ali i mase i induktiviteta u smislu mjere tromosti sustava.
- U razvoju klasične fizike analogije s pojavama u mehanici išle su toliko daleko da se od svake nove grane fizike očekivalo da se uklopi u koncept Newtonove mehanike.
- Ponekad je ovakav pristup, imao i negativne posljedice u prihvatanju novih ideja (Faradayeva ideja egzistencije fizičkog polja i odbacivanjem newtonovskog koncepta djelovanja na daljinu).



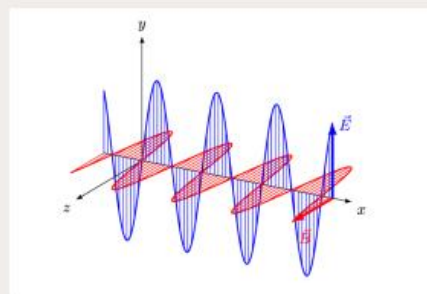
Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u akustici i elektromagnetizmu

- Val je prijenos deformacije kroz prostor određenom brzinom.



- U fizici se razlikuju tri vrste vala:
 - **mehanički valovi** (poput valova zvuka), koji putuju samo unutar medija,
 - **elektromagnetski valovi** koji predstavljaju samoodržavajuća titranja u vakuumu,
 - **valovi materije**, koji također mogu egzistirati u vakuumu, a proučavaju se u kvantnoj fizici.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Analogije u akustici i elektromagnetizmu

- Jednadžba akustičnog vala je oblika

$$\nabla^2 p = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

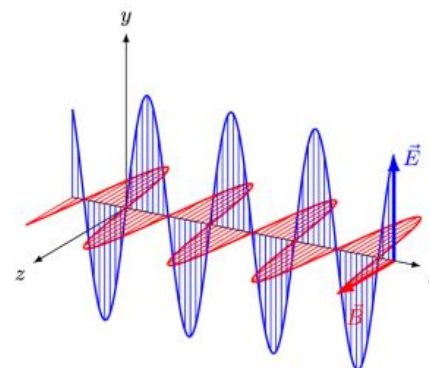
gdje je p tlak, a v brzina propagacije vala.

- U slobodnom prostoru valna jednadžba za magnetsko polje je oblika

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

pri čemu je brzina propagacije vala brzina svjetlosti c

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

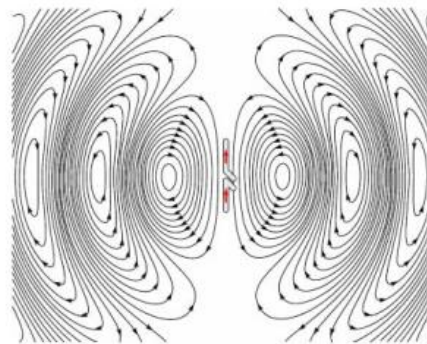
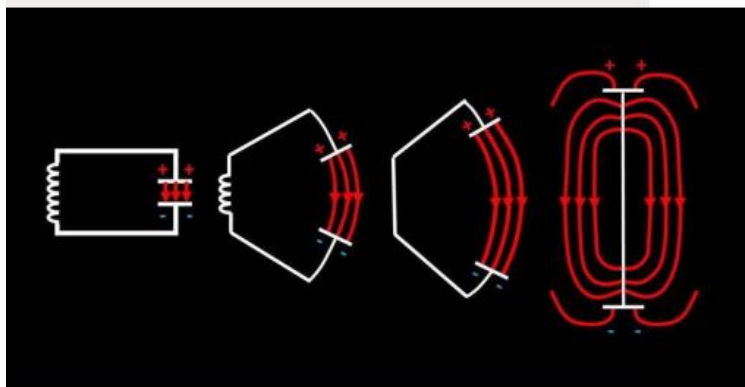


Matematičke analogije u modelima klasične fizike



Analogije u akustici i elektromagnetizmu

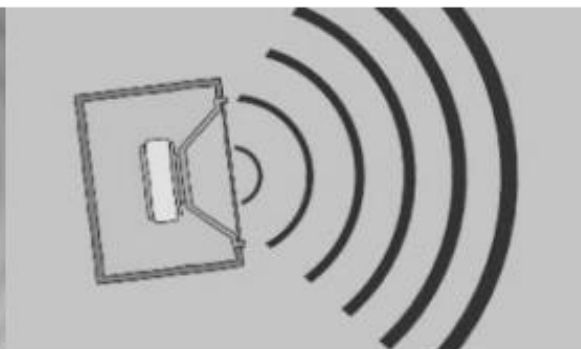
- Izvori valnih gibanja
 - akustični val
 - val na vodi
 - elektromagnetski val



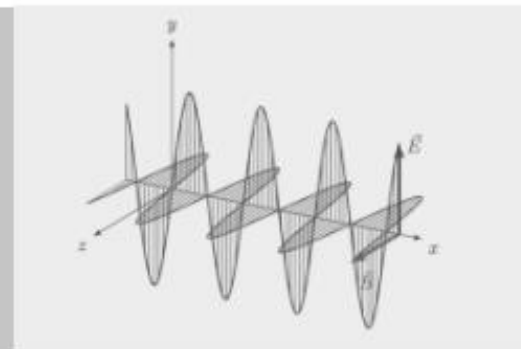
Matematičke analogije u modelima klasične fizike



Sl. 5a.: Val na vodi



Sl. 5b.: Val zvuka



Sl. 5c.: Elektromagnetski val



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Spregnuti matematički modeli u multifizici

- U inženjerstvu i fizici sve više je u uzletu disciplina koja se obično naziva multifizikom (eng. *Multiphysics*) u okviru koje se razmatraju problemi koji uključuju spregnute grane fizike, poput elektromagnetsko-toplinske dozimetrije.
- Naime, multifizikalni procesi uključuju spregu različitih fizikalnih fenomena, odnosno razmatranje različitih vrsta fizičkih makrokopskih polja koja međusobno do neke mjere utječu jedna na druge.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Spregnuti matematički modeli u multifizici

- Ukoliko međudjelovanje ovih polja nije značajnijeg opsega onda se problemi mogu razmatrati odvojeno.
- Ukoliko se međudjelovanja ovih fizičkih polja događaju u okviru iste vremenske skale uz pojavu jake nelinearne sprege, tada je nužno istovremeno simuliranje ovih veličina u realnom vremenu, odnosno oba polja je potrebno računati istovremeno, ili kroz iterativne procedure.
- Tipični problem ovakvog tipa je modeliranje plazme u okviru magnetohidrodinamike kod fuzijskih istraživanja u projektiranju nuklearnog reaktora.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Spregnuti matematički modeli u multifizici

- Primjeri nekih modela koji objedinjuju različita polja fizike:
 - gibanje čestice u elektromagnetskom polju,
 - sačuvanje konfiguracije plazme u magnetohidrodinamici,
 - porast temperature u tkivu slijed elektromagnetskog zračenja (u okviru elektromagnetsko-toplinske dozimetrije).



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Spregnuti matematički modeli u multifizici

- Na nabijenu česticu količine naboja q koja se nalazi u električnom polju djeluje sila:

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

- Prema drugom Newtonovom zakonu gibanje čestice mase m određeno je relacijom

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

- Izjednačavanjem relacija za silu proizlazi

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E}$$



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Spregnuti matematički modeli u multifizici

- Rješenje diferencijalne jednačbe je oblika

$$\vec{r}(t) = \frac{q\vec{E}}{2m}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0$$

- pri čemu je v_0 početna brzina, a r_0 početni položaj čestice.
- Brzina gibanja čestice dana je izrazom:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{v}_0$$



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Spregnuti matematički modeli u multifizici

- Električno polje daje se izraziti preko skalarnog potencijala φ :

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

pa je sila tada

$$\vec{F} = -q \nabla \varphi$$

a izraz postaje

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -q \nabla \varphi$$



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Spregnuti matematički modeli u multifizici

- U pravokutnom koordinatnom sustavu vektorska jednačba se razlaže na 3 skalarne jednačbe:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

- U slučaju da potencijal ovisi o sve 3 prostorne koordinate sustav jednačbi je analitički nerješiv te ga je potrebno riješiti numerički.



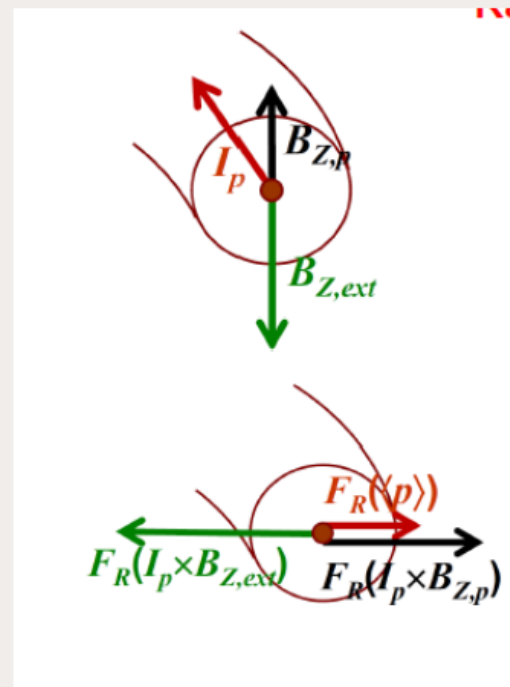
Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Spregnuti matematički modeli u multifizici

- U fizici plazme, u okviru modela magnetohidrodinamike tlak plazme daje se uravnotežiti izjednačavanjem gustoće sile (vektorski produkt gustoće struje i magnetske indukcije) i gradijenta tlaka na plazmu koji proizlazi iz mehanike fluida

$$\vec{J} \times \vec{B} = -\nabla p$$

gdje je J gustoća struje, B magnetska indukcija, a p tlak plazme.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Spregnuti matematički modeli u multifizici

- U elektromagnetsko-toplinskoj dozimetriji porast temperature uslijed izloženosti zračenju daje se izraziti preko Pennesove jednadžbe

$$\nabla(\lambda \nabla T) + Q_b + Q_m + Q_{EM} = C_v \rho \frac{\partial T}{\partial t}$$

gdje je Q_m volumna gustoća toplinskih izvora uslijed metaboličkih procesa, Q_b volumna prokrvljenost tkiva

$$Q_b = W_b C_{pb} (T_a - T)$$

pri čemu je W_b volumetrijski stupanj prokrvljenosti, C_v je specifični stoplinski kapacitet krvi, a T_a je arterijska temperatura.

- Gustoća toplinskih izvora uslijed zračenja tkiva vanjskim poljem Q_{EM} je oblika

$$Q_{EM} = \frac{\sigma}{2} |E|^2 = \rho \cdot SAR$$



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

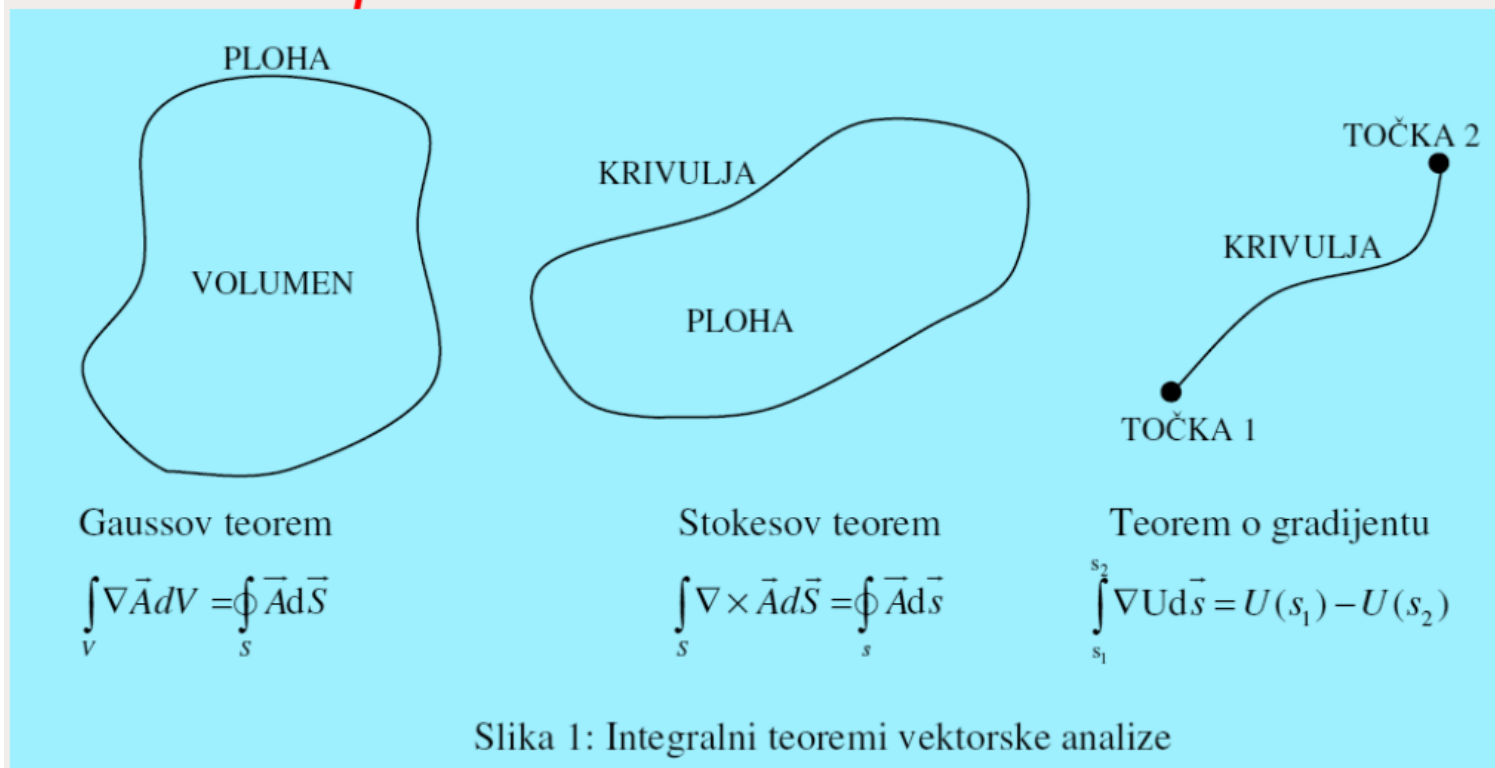
Neke poveznice matematike i fizike

- Cjeloviti matematički aparat vektorske analize prilagođen je pojmovima matematičke fizike, a njihova definicija usko je povezana s fizikalnim pojmovima iz mehanike fluida, mehanike, topline i elektromagnetizma.
- Operatori vektorske analize gradijent, divergencija i rotor imaju jasan fizikalni smisao u vidu prirode potencijalnih polja, postojanja monopolnih izvora i vrtložnih polja.
- Uz operator divergencije, rotora i gradijenta vezana su tri integralna teorema vektorske analize čijom primjenom je moguće sniziti dimenzionalnost problema.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Neke poveznice matematike i fizike



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Neke poveznice matematike i fizike

- Primjenom ovih teorema razmatranje se s domene proračuna pomiče na granicu područja.
- Tako Gaussov teorem omogućava zamjenu operacija po volumenu s odgovarajućim matematičkim operacijama po površini koja taj volumen zatvara.
- Stokesovim teoremom operacije po plohi zamjenjuju se odgovarajućim proračunima po krivulji koja tu površinu zatvara.
- Konačno, teorem o gradijentu integraciju po krivulji zamjenjuje razlikom vrijednosti neke skalarne funkcije u početnoj i krajnjoj točki krivulje.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Neke poveznice matematike i fizike

- U sva tri slučaja integral više dimenzionalnosti sadrži određeni operator vektorske analize koji djeluje na vektorsku ili skalarnu funkciju dok je s desne strane izraz niže dimenzionalnosti koji sadrži vektorsku ili skalarnu funkciju bez dotičnog operatora.
- Vektorska polja složenija su od skalarnih polja, a jednoznačno su definirana ako su poznati i rotor i divergencija dane vektorske funkcije, što vrlo često stvara probleme u numeričkim postupcima rješavanja.
- **Pitanje je samo ima li analogni matematički zapis dublju konotaciju, ili mi različite pojave samo opisujemo istim matematičkim alatima koje smo razvili.**



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Neke poveznice matematike i fizike

- Odnos matematike i fizike na fundamentalnom nivou, odnosno dubinska povezanost ove dvije discipline, kao ideja, nije novijeg datuma i, s različitog stanovišta, razmatrali su je brojni filozofi znanosti, fizičari i matematičari.
- No, ovo pitanje referiraju se i brojni suvremeni teorijski fizičari poput Maxa Tegmarka koji u svojoj knjizi *Mathematical Universe* iz 2014. iznosi prilično radikalnu ideju da realni svijet nije samo opisan matematikom, već da *jest matematika*.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Neke poveznice matematike i fizike

- Roland Omnès kroz razmišljanja u svojoj knjizi iz 2002. *Converging Realities* iznosi poveznice između prirodnih zakona i matematike te ide ka zajedničkom filozofskom pogledu na fiziku i matematiku.
- Polazeći od, na prvi pogled, „čudesne“ efikasnosti u primjenjivosti matematike u prirodnim znanostima Omnès zastupa stav da su same matematičke strukture zapravo destilat zakona prirode.
- Za Emmy Noether, pak, su zakoni sačuvanja posljedica simetrija u prirodi.
- Kako bilo, činjenica je da se, za razliku od fizike (u smislu Popperove ili Kuhnove filozofije o razvoju znanosti) zakoni matematike, jednom postavljeni (izumljeni ili otkriveni...?) ne mijenjaju niti nadopunjuju.



Matematičke analogije u modelima klasične fizike

Umjesto zaključka...

Znanost, odnosno ono što danas podrazumijevamo pod znanstvenom metodom, postoji nekih četiri stotine godina. Početak sedamnaestog stoljeća donosi novi pogled na svijet koji karakterizira prijelaz s aristotelovske na galilejevsku fiziku.

Naime, s Galileom, Descartesom i Newtonom kristalizira se i hijerarhija koncepata, odnosno javlja se ideja da se opis fizikalnog svijeta daje iskazati preko nekoliko osnovnih pojmova zajedno povezanih kvantitativnim zakonima.

B. d'Espagnat, 2006.

B. d'Espagnat: On Physics and Philosophy, Princeton University Press, New York, USA 2006.

Mirko Jakić¹, Franjo Sokolić², Dragan Poljak³

¹ Sveučilište u Splitu, Filozofski fakultet, Sujska 2, HR-21000 Split

² Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Teslina 12, HR-21000 Split

³ Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, R. Boškovića bb, HR-21000 Split
mirko.jakic@tfs.hr, sokolic@pmfst.hr, dpoljak@fesb.hr

Znanstveno-tehnološki razvoj i problem istine

Sažetak

Prirodoslovna znanost nastoji baviti se fizičkom realnošću koja je neovisna o čovjekovom djelovanju, pa čak i njegovom postojanju. Znanstvena teorija poprima oblik matematičke formulacije koja se odnosi na određene tipove događaja, a iz kojih je moguće dedukcijom predviđati specifične događaje. Reduktivna, generalizirajuća tendencija znanosti implicira hod prema suštini prirodnih fenomena, prodiranje ispod tkiva pojavnosti do krajnjih konstituentata stvari, na neki način svodeći biologiju na kemiju, a ovu potom na fiziku. Suvremenim svijetom vlada i ideja o tehnološkom napretku, premda je neizvjesnost u pogledu tehničkih efekata novih tehnologija popraćena s još većom neizvjesnošću u pogledu njenog utjecaja na ljudsko društvo. Na prvi pogled, neminovno se nameće zaključak kako je porast ljudskoga znanja kumulativan i jasno usmjeren prema objektivnoj istini. Dok Popperov falsifikacionizam donekle dopušta postojanje znanstvenog progressa, Kuhnov socijalni relativizam ovoj se ideji u potpunosti suprotstavlja. Neovisno o rezultatima koje je znanost postigla, posebno u vidu tehničkog napretka, pitanje je koliko se ona približava istini. Razvoj suvremene fizike, naročito kroz razvoj kvantne mehanike, doveo je do potpuno novog odnosa prema osnovnim pitanjima filozofije znanosti. Pitanje je nije li nužno napuštanje načela kauzalnosti i lokalnosti. Kauzalnost je napuštena u Kopenhagenskoj interpretaciji, ali je sačuvana u Bohmovo interpretaciji. Pokusi uz pomoć kojih se provjeravaju Bellove nejednakosti pokazuju nemogućnost izbjegavanja nelokalnosti. Bez obzira na odbijanje Einsteina i drugih velikih znanstvenika da prihvate tu ideju, izgleda da ćemo se morati s njom pomiriti. Kakav je to svijet u kojemu ne vrijedi lokalnost? Što o takvom svijetu uopće možemo reći? To bi značilo da je sve povezano i da sve ovisi o svemu, tj. da moramo napustiti ideju fizikalističkog redukcionizma, na kojemu počiva prirodoslovna znanost, i prihvatiti holizam. Stoga je potrebno promotriti središnje teorijsko-spoznajno pitanje o istini s kritičkoga stajališta suvremene filozofije znanosti, a s obzirom na logički pozitivizam, socijalni relativizam i holizam. Kako tehnologija kao posljedica znanstvenog istraživanja ima ogroman utjecaj na suvremenost, potrebno je ukazati i na utjecaj tehnologije na znanstvenu istinu.

Ključne riječi

razvoj znanosti, porast znanja, Popperov falsifikacionizam, Kuhnov socijalni relativizam, objektivna realnost, pojam istine



Hvala na pozornosti!

- Dragan Poljak,
Sveučilište u Splitu,
FESB,
dpoljak@fesb.hr
- Mirko Jakić Sveučilište u
Splitu, FFST,
mirko.jakic@st.t-com.hr

