

*Dragan Poljak*¹
Sveučilište u Splitu, FESB
dpoljak@fesb.hr

Mirko Jakić
Sveučilište u Splitu, FFST
mirko.jakic@st.t-com.hr

00-00

OD KLASIČNOG DO KVANTNOG INŽENJERSKOG ELEKTROMAGNETIZMA

Sažetak: Klasični elektromagnetizam je iznimno značajan i koristan alat u brojnim područjima suvremene tehnologije, poput elektroenergetike, elektronike, projektiranja integriranih krugova i bežičnih komunikacija. Međutim, neke primjene, primjerice detekcija i lociranje svjetla, prepoznavanje slike ili sustavi temeljeni na kvantnoj tehnologiji zahtijevaju uporabu koncepata kvantnog elektromagnetizma. Kvantna fizika je najuspješnija teorija u povijesti znanosti, ali traži dramatično drugačiji način razmišljanja u usporedbi s klasičnim pristupom. U ovom radu dan je prikaz osnovnih jednažbi kvantnog elektromagnetizma također s naglaskom i na neke poveznice s pojmovima u klasičnoj elektromagnetskoj teoriji. Konačno, dana su i neka filozofska razmatranja u okviru usporedbe klasične i kvantne fizike.

Ključne riječi: Maxwellove jednažbe, klasični elektromagnetizam, kvantni elektromagnetizam, Hamiltonian, filozofski aspekti

Uvodna razmatranja

Vrijeme i prostor su modeli kojima mislimo, a ne uvjeti u kojima živimo.

James Gleick

U svijetu klasične fizike opservabilna fizikalna veličina je mjerljiva i predstavlja determinističku varijablu dok u okviru kvantne fizike ova veličina postaje slučajna varijabla predložena pridjeljenim statističkim momentima primjerice očekivanjem i varijancom [1]. Da bi se matematički opisalo kvantne opservable slučajnim svojstvima nužno ih je predložiti kvantnim operatorom uparenim s vektorom stanja [2]. Njihov zapis daje se u onda vidu bekonlačno dimenzionalne matrice i vektora, a kvantni operator ponaša se kao *vektor stanja* koji definira stanje kvantnog sustava.

Principi kvantne fizike i usporedbe s klasičnom fizikom obrađeni su u velikom broju knjiga i znanstvenih radova pisanih uglavnom za fizičare. Tek odnedavno kvantna fizika, a posebno kvantni elektromagnetizam, postaju discipline od sve većeg interesa za inženjere pa se ova problematika obrađuje i sa stajališta inženjerskog elektromagnetizma u prestižnim časopisima iz područja elektrotehnike, primjerice [2-5].

I dalje, međutim, čitavo stoljeće nakon ustoličenja kvantne mehanike postoje značajne dvojbe oko interpretacije kvantne teorije, a i danas je uglavnom dominantna tzv. *kopenhagenska interpretacija* [1].

Stanovište kopenhagenske interpretacije kvantne mehanike, često popularno nazvane: 'Ušuti i računaj!' (*eng.* Shut up and calculate!) je da kvantno stanje sustava nije određeno dok ne nastupi mjerenje. Po Einsteinu je, pak, kvantno stanje određeno prije provedbe mjerenja, a kvantni teorijski okvir, stoga do kraja svog života, smatra nepotpunim.

Meni izgleda izvjesno da je fundamentalno statistički karakter teorije jednostavno posljedica nepotpunosti opisa.

Albert Einstein

U ovom radu razmatra se jednostavan, uvelike intuitivan, prijelaz s klasičnog na kvantni elektromagnetizam po principu homomorfizma Maxwellovih jednažbi [2]. Također, navode se neke usporedbe te filozofski aspekti u pojmovima klasične i kvantne fizike.

1. Usporedbe klasične i kvantne fizike

Iako kvantna fizika daje izrazito upotrebljive rezultate u smislu predviđanja vjerojatnosti određenih događaja, nakon gotovo stoljeća od njenog rađanja, ovaj konstrukt i dalje ne daje pojašnjenja zašto su vjerojatnosti u terminima kojim se kvantna fizika izražava ispravne.

Tako i današnja 'hit metoda' rješavanja brojnih problema - strojno učenje (eng. *Machine Learning* – ML) također pruža predviđanja o događajima nekih fenomena bez da se uopće upušta u iznalaženje fundamentalnih principa [6].

Kvantna fizika, za razliku od klasične, nema čvrsta uporišta u pojmovima *realizma* i *lokalnosti*.

U klasičnoj fizici pod realizmom se podrazumijeva stajalište da čestica ima inherentna svojstva koja se ne mijenjaju uslijed postupka mjerenja ili opservacija. Naime, čestica ima određena svojstva neovisno o tome opažamo li je (provodimo na njoj mjerenja) ili ne. Jednostavno rečeno, svojstva čestice objektivno postoje a da ih se ne mjeri.

Nadalje, *lokalnost* implicira da se bilo kakvo djelovanje ne može ostvariti brzinom većom od brzine svjetlosti.

... ukoliko ste realist, morate vjerovati da je kvantna mehanika pogrešna.

Lee Smolin

Gotovo u maniri Wittgensteina kvantna fizika nam ne omogućava da govorimo o fenomenima koje ne možemo, makar u principu, opažati. Štoviše, otklanja se čak i mogućnost poimanja tih fenomena. Dakle, funkcija ove teorije nije opis realnosti već puko postavljanje statističkih korelacija između opažanja.

Ja sam uvjeren da je teorijska fizika zapravo filozofija.

Max Born

Sa sigurnošću se može kazati da je veliki problem fizičarima i inženjerima, koji su navikli na kategorije klasične fizike, izostanak mogućnosti zornog prikaza fenomena u kvantnoj fizici. Drugim riječima, nema vizualnog modela pojave. Pod modelom se u prirodnim i tehničkim znanostima podrazumijeva mentalna predodžba koja se koristi za opis događaja u stvarnom svijetu. Karakter modela prirodne pojave je kontinuirano tema u filozofiji znanosti, primjerice [7-10]. Različiti modeli, mada različite razine točnosti, uvijek predstavljaju grubi, manjkavi, približni model neke prirodne pojave.

Svi modeli su pogrešni, ali neki su korisni.

George E.P. Box

S obzirom na izostanak zornog prikaza kvantna teorija onda umjesto fizikalne slike koristi matematičku apstrakciju pa bi je se čak moglo okarakterizirati prije kao „kvantnu matematiku“ nego kao kvantnu fiziku.

U kvantnoj fizici stanje kvantnog sustava je neodređeno dok se nad njim ne provede postupak mjerenja.

Kvantno stanje je reprezentacija svega što je moguće znati o nekom kvantnom objektu, a omogućava proračun vjerojatnosti za fundamentalno slučajne ishode u izabranoj shemi mjerenja.

Može se kazati da je kvantni sustav u superpoziciji višestrukih stanja prije provedbe mjerenja. Odgovarajuće mjerenje onda određuje stanje u kojem se kvantni sustav nalazi, tj. postupkom mjerenja superpozicija višestrukih stanja sustava kolabira u jedno stanje, ono koje proizlazi iz mjerenja, odnosno dolazi do *kolapsa valne funkcije*.

Pod valnom funkcijom podrazumijeva se prostorno-vremenska evolucija mogućih kvantnih ishoda povezanih s kvantnom česticom.

Valna funkcija ne predstavlja izravno kvantnu česticu već prije *informaciju* (u vidu mogućih kvantnih događaja) koja se koristi za predviđanja ishoda kvantnih mjerenja provedenih na kvantnoj čestici.

Kvantna čestica kojoj se pridjeljuje odgovarajuća valna funkcija nema određeni položaj u prostoru i može se nalaziti u bilo kojoj točki prostora u kojoj je amplituda valne funkcije različita od nule.

Opservacija po sebi mijenja valnu funkciju na diskontinuirani način, jer se od svih mogućih ishoda izabire jedan. Drugim riječima, prijelaz iz mogućeg u aktualno događa se prilikom opserviranja.

Dakle, za razliku od klasične fizike kod koje je pozicija čestice poznata u svakom trenutku, u kvantnoj je teoriji čestica u linearnoj superpoziciji stanja prije mjerenja. Čin mjerenja uzrokuje *kolaps valne funkcije*, odnosno čestica se trenutno nađe u jednom stanju.

Još jedan bitan pojam kvantne fizike ne postoji u klasičnoj fizici, a naziva se *kvantna spregnutost* ili *kvantna isprepletenost* (engl. quantum entanglement). Primjerice, uslijed zakona sačuvanja momenta dva fotona koje je stvorio isti izvor imaju totalni angularni moment nula, neovisno koliko su međusobno udaljeni. Stanje sustava dva fotona je neodređeno dok se ne provede mjerenje, odnosno kvantni sustav je u linearnoj superpoziciji dva stanja fotona od kojih je jedan desne, a drugi lijeve kružne polarizacije. U trenutku mjerenja obavljenog na jednom od dva fotona polarizacija drugog (koja mora biti obrnuta od prvog) je trenutno poznata, neovisno o međusobnoj udaljenosti dvaju fotona. Ovaj fenomen je ilustracija nelokalnog karaktera kvantne superpozicije.

Za razliku od klasične fizike u kojoj postoji jasna distinkcija između pojma

čestice i vala u kvantnoj fizici govori se o *valno-čestičnom dualizmu*.

Dualnost val-čestica najčešće se ilustrira kod eksperimenta prolaska fotona kroz prepreku s dva proreza. Naime, kvantna čestica ponaša se kao val kad ju se ne opservira, a kao čestica kad ju se promatra, pošto čin opservacije (mjerenja) uzrokuje kolaps valne funkcije u točno određenoj lokaciji.

Ne gledaj: val, gledaj: čestica.

Jim Holt

Što se događa prilikom mjerenja kvantnog sustava? Je li moguće, makar u principu, znati što se događa s česticom kad je se ne promatra?

U kvantnoj fizici govori se o tzv. *problemu mjerenja*, odnosno što se točno podrazumijeva pod mjerenjem. Mjerenjem kvantnog sustava uzrokuje se slučajni kolaps višestrukih mogućih stanja sustava u jedno definitivno stanje. U matematičkom smislu postoji jasna distinkcija između kontinuiranih vremenski simetričnih kvantno-mehaničkih jednadžbi gibanja i diskontinuiranog vremenski-asimetričnog procesa mjerenja.

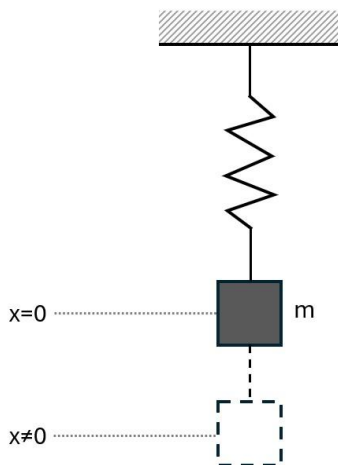
2. Klasične Maxwelllove jednadžbe

Klasične Maxwelllove jednadžbe daju se izvesti iz Hamiltonove teorije, odnosno iz funkcionala elektromagnetske energije.

2.1 Harmonijski oscilator u mehanici

Prilikom prelaska s klasičnog na kvantni elektromagnetizam uputno je koristiti se analogijama koje postoje između klasične mehanike i klasičnog elektromagnetizma.

Tipični harmonijski oscilator u klasičnoj mehanici je sustav žičane opruge konstantne krutosti k i krutog tijela mase m .



Slika 1. Klasični harmonijski oscilator u mehanici – čvrsto tijelo mase obješeno o oprugu krutosti k

Sila naprezanja F opruge prema Hooke-ovom zakonu je:

$$F = -kx \quad (1)$$

gdje je k konstanta krutosti, a x pomak u odnosu na stanje mirovanja opruge.

S obzirom da je sila negativni gradijent potencijalne energije W , za jednodimenzionalni slučaj može se pisati

$$F = -\frac{dW}{dx} \quad (2)$$

pa dalje jednostavno slijedi

$$\frac{dW}{dx} = kx \quad (3)$$

Nadalje, rad A se može dobiti kao razlika potencijalnih energija u početnoj i krajnjoj točki odnosno vrijedi

$$A = -\int_{W_{pot}}^{W_{kon}} dW = W_{pot} - W_{kon} \quad (4)$$

Iz relacije (3) i (4) slijedi

$$A = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2) \quad (5)$$

gdje su x_1 početni položaj opruge i x_2 ravnotežno položaj.

Ako se izabere da je ravnotežni položaj $x_2=0$ onda je općenito potencijalna energija opruge

$$W_{pot} = \frac{k}{2} x^2 \quad (6)$$

Jednadžba gibanja za klasični harmonijski oscilator je oblika

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (7)$$

gdje je kružna frekvencija:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8)$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe uz početni uvjet $x(0)=X_0$ je:

$$x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (9)$$

Umjesto varijable položaja $x(t)$ uobičajeno je uzeti notaciju kanonskog položaja $q(t)$ [3].

Energija klasičnog oscilatora, odnosno Hamiltonian H se može napisati kao suma potencijalne i kinetičke energije; W_{pot} i W_{kin} .

$$H = W_{kin}(x) + W_{pot}(x) \quad (10)$$

gdje je kinetička energija

$$W_{kin}(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (11)$$

a potencijalna energija je dana izrazom (6).

Sada, prelaskom na notaciju preko impulsa (količine gibanja) p i položaja q :

$$p = mv = m\dot{x} = m\dot{q} \quad (12)$$

gdje točka iznad q ukazuje na derivaciju dane veličine po vremenu, slijedi

$$H = \frac{p(t)^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q(t)^2 \quad (13)$$

Nadalje, ukupna energija oscilatora je onda:

$$H = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 \quad (14)$$

pri čemu, u skladu s konceptom klasične fizike, amplituda X_0 može poprimiti proizvoljnu, odnosno kontinuiranu vrijednost.

2.2 Elektromagnetsko polje u rezonatoru

Elektromagnetski ekvivalent mehaničkog harmonijskog oscilatora je elektromagnetsko polje u šupljini (rezonatoru). Ovaj problem daje se opisati skupom, Maxwellovih jednadžbi za područje bez izvora:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (15)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (18)$$

gdje je E električno polje, a B magnetska indukcija.

Za jednodimenzionalnu šupljinu uzduž osi z od $z=0$ do $z=L$ uz idealne električne zidove, pretpostavljena je polarizacija električnog polja E uzduž osi x , a magnetsko polje B je uzduž osi y , tj, vrijedi:

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x \quad (19)$$

$$\vec{B} = B_y \vec{e}_y \quad (20)$$

Rubni uvjeti su dakle:

$$E_x(z=0) = E_x(z=L) = 0 \quad (21)$$

Iz dvije rotorske Maxwellove jednadžbe (15) i (16) lako je dobiti valnu jednadžbu za električno, odnosno magnetsko polje.

Primjenom operatora rotacije na (15) uz kombiniranje s relacijom (16) slijedi

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (22)$$

S obzirom da vrijedi:

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \times \nabla \times \vec{E} \quad (23)$$

uz (17) jednađba (22) postaje:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (24)$$

Za jednodimenzionalni slučaj uz danu polarizaciju električnog polja (19), valna jednađba (24) prelazi u jednostavniji oblik

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (25)$$

Valna jednađba (25) standardno se rješava primjenom separacije varijabli pa se rješenje parcijalne diferencijalne jednađbe (25) dade napisati

$$E_x(z, t) = E(z)p(t) \quad (26)$$

Sada parcijalna diferencijalna jednađba (25) poprima oblik:

$$\frac{1}{E(z)} \frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{1}{p(t)} \frac{\partial^2 p(t)}{\partial t^2} = 0 \quad (27)$$

odnosno razbija se na dvije linearno nezavisne obične diferencijalne jednađbe

$$\frac{1}{E(z)} \frac{d^2 E(z)}{dz^2} = -k^2 \quad (28)$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{1}{p(t)} \frac{d^2 p(t)}{dt^2} = -\beta^2 \quad (29)$$

pri čemu onda vrijedi:

$$-k^2 + \beta^2 = 0 \quad (30)$$

Nadalje, opće rješenje jednodimenzionalne Helmholtzove diferencijalne jednađbe

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + k^2 E(z) = 0 \quad (31)$$

je oblika

$$E(z) = C \sin k z + D \cos k z \quad (32)$$

Rubni uvjeti daju: $D=0$ i $\sin k L = 0$, odnosno slijedi: $kL = m\pi$ pa je

$$E_m(z) = C \sin \frac{m\pi}{L} z \quad (33)$$

Konačno, primjena ortogonalnosti [3]

$$\int_0^L E_m(z) E_n(z) dz = \delta_{mn} \quad (34)$$

gdje je δ_{mn} Kroneckerov simbol, daje

$$C^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi}{L} z \cdot dz = 1 \quad (35)$$

Dalje je

$$C^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{L} z\right) dz = 1 \quad (36)$$

odakle jednostavno slijedi

$$C^2 = \frac{2}{L} \quad (37)$$

pa se konačno dobije:

$$E_k(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin k z, \quad k = k_m = \frac{m\pi}{L} \quad (38)$$

gdje k predstavlja indeks moda pa se onda može pisati [3]

$$E_k(z, t) = -\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0}} p(t) E_k(z) \quad (39)$$

$$B_k(z, t) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0}} q(t) \frac{\partial}{\partial z} E_k(z) \quad (40)$$

pri čemu je

$$p(t) = \dot{q}(t) \quad (41)$$

Odgovarajući Hamiltonia za dani problem je oblika:

$$H_k = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\varepsilon_0 E_k^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_k^2(z, t) \right] \cdot dz = \frac{1}{2} [p_k^2(t) + \omega_k^2 q_k^2(t)] \quad (42)$$

gdje je

$$\omega_k = \frac{k}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (43)$$

Očito je da je mod elektromagnetske šupljine ekvivalentan klasičnom oscilatoru jedinične mase.

3. Kvantne Maxwellove jednadžbe

Kvantne Maxwellove jednadžbe mogu se dobiti postupno. Prvo se provodi kvantizacija harmonijskog oscilatora, a potom se po analogiji na klasične provodi prijelaz na operatorske Maxwellove jednadžbe.

3.1 Kvantizacija harmonijskog oscilatora

U svrhu prelaska s klasičnog na kvantnomehanički Hamiltonian provodi se kanonska kvantizacija, tj. veličine koje se pojavljuju u klasičnim jednadžbama zamjenjuju se kvantno-mehaničkim operatorima.

Dakle, klasični moment $p(t)$ i položaj $q(t)$ postaju operatori za moment $\hat{p}(t)$ i kanonski položaj $\hat{q}(t)$ pa relacija (13) postaje

$$H = \frac{\hat{p}(t)^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{q}(t)(t)^2 \quad (44)$$

Budući da su opservable u kvantnoj fizici opisane operatorima zamjenjivost (komutabilnost) ovih operatora je od iznimnog značaja.

Komutator dva operatora je oblika

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar \hat{I} \quad (45)$$

gdje je $\hbar$ reducirana Planckova konstanta, a $\hat{I}$ operator identiteta.

Nadalje, kvantni operatori električnog i magnetskog polja su [3]:

$$\hat{E}_k(z, t) = -\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0}} \hat{p}(t) E_k(z) \quad (46)$$

$$\hat{B}_k(z, t) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0}} \hat{q}(t) \frac{\partial}{\partial z} E_k(z) \quad (47)$$

Vrijedi istaknuti da su $\hat{p}$ i $\hat{q}$ Hermitski operatori i odgovaraju opservabilnim veličinama.

Dok je energija klasičnog harmonijskog oscilatora kontinuirana veličina u slučaju kvantnog harmoničkog oscilatora svojstvene (vlastite) funkcije energije, koje su Hermiteovi polinomi, i svojstvene vrijednosti energije su diskretne, odnosno vrijedi [3]

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0 \quad (48)$$

Najniža moguća energija je onda stanje vakuuma [3]

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \quad (49)$$

i evidentno je različita od nule što nije slučaj kod klasičnog oscilatora.

Ova energija nulte točke proizlazi iz nekomutativnosti operatora $\hat{p}$ i $\hat{q}$.

Za klasični oscilator u odsutnosti fotona elektromagnetsko polje ima nultu energiju $E_n=0$. Za kvantni slučaj ovakva situacija odgovarala bi stanju $q=0$, $p=0$ koje nije dozvoljeno *principom neodređenosti* koji odgovara nekomutativnim operatorima. Dakle, stanje vakuuma je nužno za očuvanje komutatora i samodosljednosti kvantne fizike.

3.2 Operatorske Maxwellove jednadžbe

Operatorske Maxwellove jednadžbe za područje bez izvora, po principu homomorfizma (analogije) s klasičnim slučajem, su oblika [2]:

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (50)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad (51)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad (52)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (53)$$

U ovoj notaciji klasična polja postaju operatori polja, dakle radi se o kvantnim operatorima koji su definirani u svakoj prostorno-vremenskoj točki. Naravno, u slučajevima kad je valna duljina elektromagnetskog polja puno veća od dimenzija atoma može se koristiti makroskopska (klasična) elektromagnetska teorija.

Uz skup Maxwellovih jednadžbi (50) – (53) potrebno je riješiti i operatorsku Schrödingerovu jednadžbu oblika

$$\hat{H} |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \quad (54)$$

kojom je određena vremenska evolucija *kvantnog stanja* $|\psi\rangle$ potrebna da bi se potpuno karakteriziralo kvantni sustav [2], pri čemu je operator u Hilbertovom prostoru $\hat{H}$ Hamiltonian koji odgovara sustavu Maxwellovih jednadžbi (50) – (53).

Kvantno stanje $|\psi\rangle$ je veličina koja potpuno opisuje stanje kvantnog sustava i predstavlja alternativu valnoj funkciji ψ koja u skladu s prvim postulatom kvantne mehanike potpuno opisuje stanje razmatranog kvantnog sustava.

Rješavanje Schrödingerove jednadžbe osim u fizici od sve većeg je interesa i u

inženjerstvu što se tiče primjena poput fizike čvrstog stanja, fotonaponskih ćelija, optike, nanotehnologije, etc.

Matematičke detalje modeliranja Schrödingerove jednadžbe primjenom analitičkih i numeričkih metoda moguće je pronaći u brojnim knjigama i radovima, primjerice [10-14]. Osvrt na analitičko rješavanje jednodimenzionalne vremenski neovisne Schrödingerove jednadžbe opisane u dodatku A, dan je u dodatku B.

4. Neki filozofski aspekti

Kako je već istaknuto za razliku od klasične fizike, u kojoj figuriraju kontinuirane mjerljive fizikalne veličine kao determinirano opstojeća dimenzionalna dobilježja univerzuma, u kvantnoj fizici se događaju u prostorvremenu pridijeljuje slučajna varijabla predočena statističkim momentima. U kopenhagenskoj interpretaciji figurira superpozicija kvantnog stanja prije postupka mjerenja. Što je s pripadnim filozofskim aspektima? Dobro je poznata teza o o postojanju urođenih prostor -vrijeme formi uma koje omogućuju opservaciju fizikalnih fenomena te zajedno s urođenim nam strukturama (logika, matematika) omogućuju objašnjujuće interpretacije ovih fenomena. Aperceptivno apriorno urođene prostorno-vremenske forme i racionalno apriorno urođene logičko-matematičke strukture postupno se i kumulativno spoznaju u matematičkom smislu. Ova čisto matematička autonomna spoznaja primjenom na osjetilno/artefaktno zamjetljivu fenomenalnost omogućuje stvaranje interpretativnih modela za objašnjenje fizikalnih, uključivo i činjenica vezanih za kvantne fenomene.

Logički aspekti postojanja alternativnih uzročnih teorijskih objašnjenja u kvantnoj fizici svakako ukazuju i na filozofski aspekt problema. Naime, ako je logička uzročno-posljedična sveza dio urođene nam racionalne strukture koju u spoznajnom smislu uspješno primjenjujemo u objašnjenju fenomena u okviru klasične fizike, onda svojevrsna neodlučivost primjene ove sveze na primjene u alternativnim modelima objašnjenja kvantne fizike nužno izaziva filozofsko pitanje o mogućim granicama naše spoznaje [8-10].

Tako nas spoznajna uspješnost logičko-matematičke strukture primjenjene u klasičnoj fizici navodi na misao o odlučivosti o istinitosti pri istraživanju univerzuma, a dvojbenost objašnjenja kvantnih fenomena navodi nas, s druge strane, na misao o spoznajnoj istinosnoj neodlučivosti. Postavlja se pitanje imamo li uopće pravu predodžbu što realni svijet zapravo jest? Filozofski gledano znanost zasigurno ni blizu nije dovršen projekt uma te filozofija svakako ostaje kritička potraga za istinom. No, isto tako je i filozofiji nužna potkrijepa fizikalnih činjenica kako ne bi otklizala u spekulativnost, uključivo i u mogući matematički oblik spekulativnosti.

Naime, u filozofiji matematike postoje dvije dominantne teorijske orijentacije vezane za znanost kao projekt uma. Ove orijentacije se u ontološkom smislu međusobno ne isključuju, ali se u spoznajnom smislu itekako razlikuju.

Kratak osvrt na ove orijentacije dan je u dodatku C.

Zaključna razmatranja

Paradoks je samo sukob između realnosti i našeg osjećaja što bi stvarnost trebala biti.

Richard Feynman

U ovom radu dan je prikaz osnovnih jednadžbi kvantnog elektromagnetizma na temelju analogije s klasičnom elektromagnetskom teorijom dobiven je po analogiji na harmonijski oscilator u mehanici. Razmatra se usporedba klasične i kvantne fizike te neki filozofski aspekti.

Hamiltonian za kvantna elektromagnetska polja i kvantne Maxwellove jednadžbe dani su po analogiji na klasični slučaj zamjenom klasičnih polja s kvantnim operatorima.

Dalje se u radu navodi kako je valna funkcija čestice matematički opis povezan s vjerojatnošću nalaženja čestice na određenom mjestu u određenom vremenu te se ističe kako, za razliku od klasične fizike, kvantna fizika ne omogućava vizualni model događaja.

Također, razmatraju se pitanja valno-čestičnog dualizma, kvantne isprepletenosti te problem mjerenja.

Konačno, u dodacima se daje prikaz jednodimenzionalne vremenski neovisne Schrödingerove jednadžbe kao i njenog odgovarajućeg analitičkog rješenja.

Dodatak A: Vremenski neovisna Schrödingerova jednadžba

Dok je zadaća klasične fizike opisati točan položaj i brzinu čestice te proučavati evoluciju čestice u skladu s Newtonovom mehanikom u kvantnoj fizici čestici se pridružuje specifična valna funkcija dok se evolucija kvantnog sustava odvija u skladu s rješenjima Schrödingerove jednadžbe.

Do Schrödingerove jednadžbe ne dolazi se standardnim izvedom već ju se postulira na temelju prepostavke da je čestica zatočena u konačnom volumenu te da može imati samo diskretne energijske nivoe.

Polazi se od Helmholtzove jednadžbe [1]

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{A.1}$$

gdje je ψ valna funkcija, a k valni broj

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{A.2})$$

Prema de Broglie-u, čestice s energijom E i momentum p također imaju valna svojstva, odnosno valnu duljinu

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{A.3})$$

gdje je impuls val-čestice p oblika

$$p = mv \quad (\text{A.4})$$

Dalje jednostavno slijedi

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{2\pi mv}{h} \quad (\text{A.5})$$

a uvrštavanje (A.5) u (A.1) daje

$$\nabla^2 \psi + \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} \psi = 0 \quad (\text{A.6})$$

Ukupnja energija kvantne čestice daje se izraziti u vidu sume njene kinetičke i potencijalne energije

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V \quad (\text{A.7})$$

što se može pisati i na način

$$\frac{p^2}{2m} + U = E \quad (\text{A.8})$$

pa kombiniranjem (A.6) i (A.7) proizlazi

$$-\frac{h^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (\text{A.9})$$

gdje je $\hbar$ reducirana Planckova konstanta

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (\text{A.10})$$

Izraz (A.9) predstavlja trodimenzionalnu Schrödingeru jednadžbu čija je jednodimenzionalna verzija oblika

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (\text{A.11})$$

i za neke scenarije se može riješiti analitički.

Kvadrat valne funkcije, $|\psi|^2$, je funkcija gustoće vjerojatnosti nalaženja

čestice uzduž x -osi u domeni problema. Točna pozicija nije poznata uslijed Heisenbergovog principa neodređenosti, već se daje opisati vjerojatnost nalaženja čestice unutar intervala koji se razmatra. Naravno, suma svih vjerojatnosti u okviru čitavog rješenja unutar domene mora biti jednaka jedan.

Stoga se valna funkcija može smatrati matematičkim alatom proračuna vjerojatnosti opažanja čestice u nekom položaju, ili jednostavno veličina čiji kvadrat daje vjerojatnost opservacije odgovarajućeg ishoda.

Valna funkcija mora zadovoljavati sljedeće zahtjeve:

- Valna funkcija mora zadovoljavati Schrödingerovu jednadžbu;
- Valna funkcija i njena prva derivacija moraju biti kontinuirane funkcije;
- Valna funkcija mora biti normalizibilna – vrijednosti valne funkcije približavaju se nuli kako x teži u beskonačno.

Dodatak B: Analitičko rješenje jednodimenzionalne vremenski neovisne Schrödingerove jednadžbe

Klasični oblik vremenski neovise Schrödingerove jednadžbe može se napisati na način [14]

$$H\psi = E\psi \quad (\text{B.1})$$

gdje je ψ valna funkcija, E energija kvantne čestice mase m koja se giba u intervalu $(0, L)$, H je Hamiltonian

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (\text{B.2})$$

pri čemu je $V(x)$ odgovarajući potencijal, dok $\hbar$ predstavlja reduciranu Planckovu konstantu

Energijski spektar kvantne čestice može se odrediti rješavanjem Schrödingerove jednadžbe (A.11) ukoliko su propisani rubni uvjeti za valnu funkciju ψ .

Pretpostavlja se da je čestica zatočena unutar potencijalne jame uz $V=0$ i da se ne može nalaziti izvan intervala $(0, L)$ uz rubne uvjete:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Pojednostavljena jednodimenzionalna Schrödingerova jednadžba je onda

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = k^2 \psi \quad (\text{B.4})$$

čije je opće analitičko rješenje dano izrazom

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (\text{B.5})$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta (B.3) proizilazi

$$B = 0 \quad (\text{B.6})$$

a iz uvjeta

$$\sin kL = 0 \quad (\text{B.7})$$

slijedi valni broj k

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad (\text{B.8})$$

pa je tražena valna funkcija onda oblika

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (\text{B.9})$$

Nadalje, pošto je vjerojatnost nalaženja kvantne čestice unutar jame, odnosno unutar intervala promatranja, jednaka jedinici, tj. vrijedi

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (\text{B.10})$$

uvrštavanjem (B.9) u (B.10) dobiva se

$$A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 1 \quad (\text{B.11})$$

iz čega jednostavno slijedi

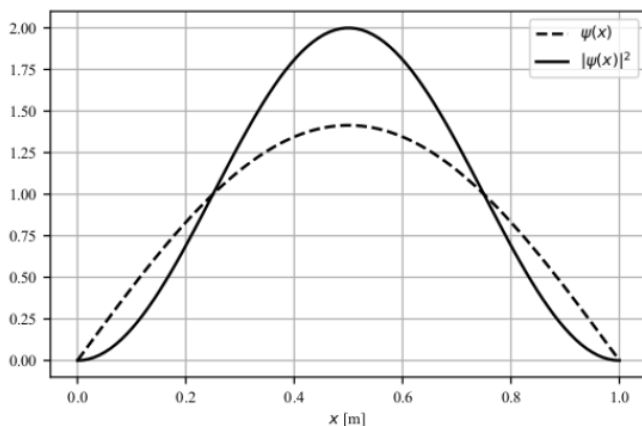
$$A = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (\text{B.12})$$

Konačno, partikularno rješenje Schrödingerove jednačbe (B.1), odnosno (B.4), uz dane rubne uvjete, je oblika:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (\text{B.13})$$

Odgovarajuća prostorno ovisna Schrödingerova jednačba za slučaj trodimenzionalne potencijalne jame može se dobiti primjenom slične procedure.

Na slici B.1 prikazano je analitičko rješenje valne funkcije i njen kvadrat, odnosno funkcija gustoće vjerojatnosti za česticu koja se nalazi unutar beskonačne potencijalne jame.



Slika B.1 Valna funkcija i funkcija gustoće vjerojatnosti za jednodimenzionalni problem čestice unutar potencijalne jame

Maksimum krivulje funkcije gustoće vjerojatnosti predstavlja najvjerojatniji položaj čestice. Faktor $\sqrt{\frac{2}{L}}$ u izrazu (B.13) predstavlja amplitudu valne funkcije.

Dodatak C: Aprioristička i platonistička orijentacija u filozofiji matematike

Aprioristička orijentacija u filozofiji matematike poima apstraktne matematičke entitete kao racionalno čiste konstrukte uma koji autonomno omogućuju uspostavljanje identitetnih matematičkih iskaznih formula. Primjerice, u aposteriornoj realnosti ne postoji veličina koja može biti manja od nule. U okviru kvantitativnog izražavanja neke veličine broj 0 izražava odsustvo dotične veličine, a pripisivanje negativnog broja fizikalnoj veličini je pitanje konvencije poput smjera struje u elektrotehnici koji je obrnut od pretpostavljenog. Stoga, dade se ustvrditi kako su apstraktni matematički konstrukti otkriće, a njihova primjena izum.

Za daljnju uporabu čistih simbolički identitetno iskazanih matematičkih formula u apriorističkoj filozofskoj orijentaciji potrebne su fizikalne činjenice, no platonistička orijentacija u transcendentalnom smislu ide korak dalje.

Naime, otkrićem čistih matematičkih konstrukata uspostavljaju se identitetne matematičke iskazne formule pomoću kojih se neposredno spoznaju odnosi između prostorno-vremenskih opstojećih fizikalnih entiteta. Ovi odnosi uključuju iskazne formule koje sadrže negativne, ali i kompleksne brojeve. Tako ove formule iskazuju i kvalitativnost, a ne samo kvantitativnost, fizikalnih odnosa i dodatan matematički izum nije potreban.

Ni aprioristička ni platonistička orijentacija u filozofiji matematike ne isključuju statističku prirodu kvantnih stanja. Treba naglasiti da su u apriorističkoj

orijentaciji za daljnju spoznajnu (transcendentalnu) uporabu nužne fizikalne činjenice dok je u platonističkoj orijentaciji dovoljna matematička apstrakcija. U konačnici, znanstvena i/ili filozofska teorijska objašnjenja neprekoračivo moraju poštivati barem jedan zahtjev formalne logike, a to je načelo konzistentnosti objašnjenja.

Literatura

- [1] J. Baggot, *The Meaning of Quantum Theory*, Oxford University Press, New York 1992.
- [2] W. C. Chew et al., Quantum Maxwell's Equations Made Simple: Employing Scalar and Vector Potential Formulation, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 63, no. 1, pp. 14-26, Feb. 2021.
- [3] G. W. Hanson, Aspects of Quantum Electrodynamics Compared to the Classical Case: Similarity and Disparity of Quantum and Classical Electromagnetics, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 62, no. 4, pp. 16-26, Aug. 2020.
- [4] T. Xia et al., Casimir Force: Vacuum fluctuation, zero-point energy, and computational electromagnetics, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 63, no. 5, pp. 14-24, Oct. 2021,
- [5] W. E. I. Sha, Z. Lan, M. L. N. Chen, Y. P. Chen and S. Sun, "Spin and Orbital Angular Momenta of Electromagnetic Waves: From Classical to Quantum Forms," in *IEEE Journal on Multiscale and Multiphysics Computational Techniques*, vol. 9, pp. 113-117, 2024.
- [6] S. I. Walker, *Life as No One Knows It: The Physics of Life's Emergence*, Riverhead Books, New York, USA, 2024.
- [7] D. Poljak, M. Jakić, A Note on the Character of Physical Models Representing Natural Phenomena *Int. Journ. of Design & Nature and Ecodynamics*, Vol. 12, No 2, 2017., pp. 254-263.
- [8] D. Poljak, Ograničenja matematičkih modela u fizici i tehnici s osvrtom na klasični inženjerski elektromagnetizam, *Zbornik radova: 9. simpozija Povijest i filozofija tehnike*, Zagreb, Hrvatska, 2020. str. 509-545.
- [9] R. Omnès, *Converging Realities: Toward a Common Philosophy of Physics and Mathematics*, Princeton University Press, 2004.
- [10] B. d'Espagnat, *On Physics and Philosophy*, Princeton University Press, New York, USA 2006.
- [11] A. Udal et al., Comparison of Methods for Solving the Schrödinger equation for Multiquantum Well Heterostructure Applications, *Proc. Estonian Acad. Sci. Eng.*, 2006., Vol. 12, 3-2, 246-261.
- [12] F. Gelbard, K.J. Malloy, Modeling Quantum Structures with the Boundary Element Method, *Journ. Comp. Physics*, 172, 19-39, 2001.
- [13] W. Moy, M. A. Carignano, S. Kais, Finite Element Method for Finite-Size Scaling in Quantum Mechanics, *J. Phys. Chem. A*, 2008, 112, 5448-5452.
- [14] D. Poljak, A Susnjara, *Deterministic and Stochastic Modeling in Computational Electromagnetics: Integral and Differential Equation Approaches*, © 2024 The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.

FROM CLASSICAL TO QUANTUM ENGINEERING ELECTROMAGNETICS

Abstract: Classical electromagnetics is rather important and useful tool in a number of areas in modern technology, such as power engineering, electronics, integrated circuit design and wireless communications. However, some applications, e.g. light detection and ranging, imaging or quantum technology systems require the use of quantum electromagnetics concepts. Quantum physics is the most successful theory in the history of science but possesses a dramatically different point of view when compared to classical approach is necessary. This work deals with derivation of the governing equation of quantum electromagnetics featuring also some connections with notions from classical electromagnetic theory. Some philosophical considerations regarding a comparison of classical with quantum physics are given, as well.

Keywords: Maxwell equations, classical electromagnetics, quantum electromagnetics, Hamiltonian, electromagnetic potentials, philosophical aspects

Dragan Poljak Mirko Jakić