

dr. sc. Ivan Šimatović, dipl. inž. el.
neovisan istraživač/independent researcher
ivan0simatovic@gmail.com

00-00

USPOREDBA VEKTORSKIH I KVATERNIONIJSKIH JEDNADŽBI OSNIH POLJA HIPERDINAMIČKIH VALOVA

Sažetak: Prikazani su kvaternioni u Kartezijevim i cilindričnim koordinatama i načinjena je usporedba vektorskih i kvaternionijskih parcijalnih diferencijalnih jednačbi poprečnog osnog polja hiperdinamičkih mikrovalova. Dokazano je da obje inačice jednačbi polja daju istovjetne parove skalarnih parcijalnih jednačbi i ista rješenja za polje tih valova.

Ključne riječi: kvaternion, vektor, cilindrične koordinate, hiperdinamički mikroval, jednačbe osnog polja, valna impedancija

1. Kvaternioni i njihova algebra

Kvaternione i računanje s njima definirao je 1843. poznati irski matematičar, astronom i fizičar Sir William Rowan Hamilton (1805. – 1865.), slika 1, kao hiperkompleksne četveročlane brojeve. Uz realni dio (skalar a) oni sadrže i tročlani imaginarni dio (vektor $\mathbf{v}$) iskazan komponentama u Kartezijevim koordinatama u imaginarnom 3D prostoru. Opći oblik kvaterniona [1] je linearna kombinacija (zbroj) skalara a i imaginarnog 3D vektora $\mathbf{v}$ predložena izrazom

$$\mathbf{q} = a + \mathbf{v} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

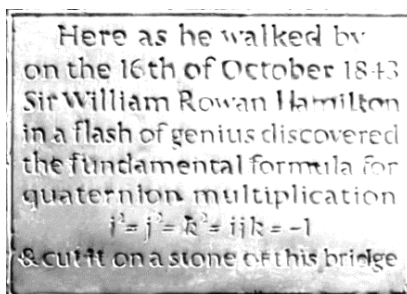
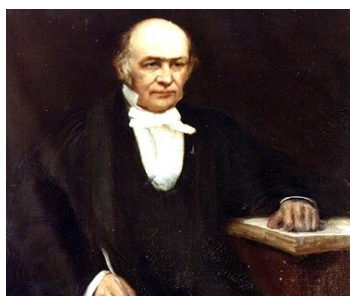
U njemu su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ realni brojevi, a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ su imaginarne jedinice u tri međusobno okomita smjera. One su nekomutativni hiperkompleksni korijeni

iz minus jedan ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} = \sqrt{-1}$), čine desni sustav i okomite su na os skupa $\mathbb{R}$ realnih brojeva pridruženoj osima X,Y,Z imaginarnog Kartezijevog 3D prostora.

Hamiltonovi kvaternioni su poopćenje Cardano-Eulerovih kompleksnih brojeva $c = a + b\mathbf{i}$. Kvaternioni se zbrajaju, oduzimaju i množe kao polinomi s imaginarnim jedinicama $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ za koje vrijede sljedeća pravila množenja:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

Iz njih je očito da je kvaternionska algebra nekomutativna s obzirom na množenje ($\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$) pa stoga pri računanju treba paziti na redoslijed imaginarnih jedinica koje se međusobno množe kao vektori (vektorski produkt za raznoimene jedinice i skalarni produkt za istoimene jedinice).



Sl. 1. – Sir William Rowan Hamilton i kamena ploča na mostu preko Royal kanala kod Dublina postavljena u spomen na njegovo u šetnji nastalo bljeskovito otkriće množenja kvaterniona

Za svaki kvaternion $\mathbf{q} = a + \mathbf{v}$ u kojem je bar jedan od koeficijenata a, b, c, d različit od nule postoji inverzni kvaternion $\mathbf{q}^{-1}$ koji se računa prema izrazu

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{q}} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}}} = \frac{a - \mathbf{v}}{\|\mathbf{q}\|^2} = \frac{a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

U njemu je izraz $\bar{\mathbf{q}} = a - \mathbf{v} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ konjugirani kvaternion od $\mathbf{q} = a + \mathbf{v}$, a $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ je njegova norma (veličina).

U sofisticiranoj Hamiltonovoj 4D kvaternionskoj algebri, s obzirom na iz nje izvedenu te konceptualno jednostavniju intuitivnu Gibbs-Heavisideovu 3D vektorsku algebru, definiran je inverzni kvaternion, što omogućuje dijeljenje kvaterniona $\mathbf{p}$ kvaternionom $\mathbf{q}$ kao lijevi ili desni umnožak kvaterniona $\mathbf{p}$ inverznim kvaternionom $\mathbf{q}^{-1}$ pa vrijedi:

$$\mathbf{p}/\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}^{-1} \cdot \mathbf{p} \quad \text{ili} \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^{-1}$$

Općenito je: $\mathbf{q}^{-1} \cdot \mathbf{p} \neq \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^{-1}$ te $\mathbf{q}^{-1} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^{-1} = 1$

Umnožak kvaterniona $\mathbf{p} = a + \mathbf{v}$ i $\mathbf{q} = b + \mathbf{w}$ određen je općim izrazom:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = (a + \mathbf{v}) \cdot (b + \mathbf{w}) = ab + a\mathbf{w} + b\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

Za umnožak imaginarnih vektora kvaterniona $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ i $\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} + w_z \mathbf{k}$, uz $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$, općenito vrijedi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -\mathbf{v}\mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} = [\mathbf{vw}] + \mathbf{v} \times \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Pritom je $-\mathbf{v}\mathbf{w} = \sum v\mathbf{w} = [\mathbf{vw}]$ njihov skalarni, a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ njihov vektorski umnožak. Umnožak imaginarnih vektora kvaterniona, općenito uzevši, daje cjelovit kvaternion koji sadrži skalar $[\mathbf{vw}]$ i vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. To pravilo množenja imaginarnih vektora u Kartezijevim koordinatama vrijedi i u cilindričnim koordinatama.

U kvaternionskoj analizi može se primjena Hamiltonovog operatora ∇ , kao simboličnog imaginarnog vektora, na proizvoljno vektorsko polje $\mathbf{V}$ u imaginarnom prostoru predočiti kao njihov lijevi umnožak općim izrazom koji, prema pravilu o množenja vektora kvaterniona, ujedno daje divergenciju i rotaciju polja $\mathbf{V}$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \underbrace{-\nabla \mathbf{V}}_{div \mathbf{V}} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{V}}_{rot \mathbf{V}} = div \mathbf{V} + rot \mathbf{V}$$

Za izvorno polje je $div \mathbf{V} \neq 0$ i $rot \mathbf{V} = \mathbf{0}$, za solenoidno polje je $div \mathbf{V} = 0$ i $rot \mathbf{V} \neq \mathbf{0}$, a za mješovito polje je $div \mathbf{V} \neq 0$ i $rot \mathbf{V} \neq \mathbf{0}$. U vektorskoj analizi, zbog zasebnog definiranja skalarnog i vektorskog umnoška operatora ∇ s vektorom $\mathbf{V}$, $\nabla \cdot \mathbf{V} = div \mathbf{V}$ i $\nabla \times \mathbf{V} = rot \mathbf{V}$, su zasebni izrazi. Zbog toga se prvim dvjema glavnim vektorskim jednadžbama (hiper)dinamičkog solenoidnog elektromagnetskog polja pridružuju dvije dodatne skalarne jednadžbe (III. i IV.) za divergenciju: $div \mathbf{E} = 0$ i $div \mathbf{H} = 0$.

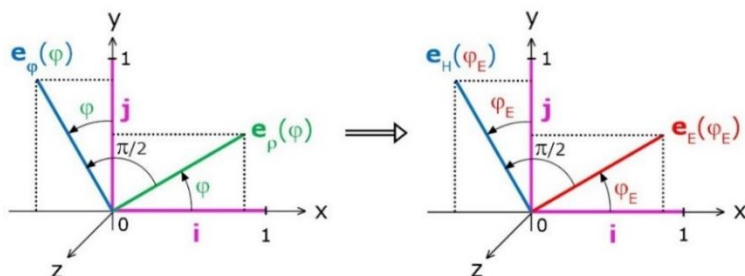
2. Imaginarne jedinice i kvaternioni u cilindričnim koordinatama

Za interpretaciju i analizu osnovog EM polja ravnih hiperdimamičkih mikrovalova [2, 3 i Prilog 2], za iskazivanje vektora električnog polja $\mathbf{E}$ i magnetskog polja $\mathbf{H}$ u promatranoj valnoj fronti, prema Maxwellovom poimanju, najpodesniji su kvaternioni bez skalarnog člana. Za razliku od njihove Maxwellove interpretacije u Kartezijevim koordinatama imaginarnog 3D prostora oni se ovdje iskazuju u za to podesnijim (prirodnim) kružnim cilindričnim koordinatama imaginarnog 3D prostora s međusobno okomitim radijalnim vektorima polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$.

Postave li se u tom prostoru Kartezijeve koordinate tako da se uzdužna os Z podudara s valnom zrakom, a osi X i Y su poprečne, mogu se u njemu međusobno okomite i linearno nezavisne imaginarne jedinice cilindričnih koordinata

$\mathbf{e}_\rho$ i $\mathbf{e}_\varphi$ za proizvoljni polarni kut φ jedinice $\mathbf{e}_\rho$ u poprečnoj XY ravnini (valnoj fronti) prema vodoravnoj XZ ravnini odrediti prema Slici 2. Pritom je, zbog podudarnosti osi Z oba sustava, uzdužna imaginarna jedinica $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$ fiksna.

Opći oblik kvaterniona u cilindričnim koordinatama iskazuje se kao linearna kombinacija skalara a i vektora $\mathbf{v}$ pa vrijedi: $\mathbf{q} = a + \mathbf{v} = a + b\mathbf{e}_\rho + c\mathbf{e}_\varphi + d\mathbf{k}$.



Sl. 2. – Poprečne imaginarne jedinice $\mathbf{e}_\rho$ i $\mathbf{e}_\varphi$ cilindričnih koordinata i njihove inačice $\mathbf{e}_E$ i $\mathbf{e}_H$ prilagođene vektorima osnog EM polja hiperdinamičkih valova

Međusobno okomite imaginarne jedinice $\mathbf{e}_\rho$ i $\mathbf{e}_\varphi$ kružnih cilindričnih koordinata, koje su zavisne o polari φ odnosno φ_E , te fiksne imaginarne jedinice $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$ poprečnih osi X i Y Kartezijevih koordinata (Slika 2) povezuju izrazi:

$$\mathbf{e}_\rho(\varphi, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = \cos \varphi \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi \cdot \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_E(\varphi_E, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = \cos \varphi_E \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi_E \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_\varphi(\varphi, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = -\sin \varphi \cdot \mathbf{i} + \cos \varphi \cdot \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_H(\varphi_E, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = -\sin \varphi_E \cdot \mathbf{i} + \cos \varphi_E \cdot \mathbf{j}$$

Za imaginarne jedinice $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k}$ polarnih koordinata, kao i za njihove inačice $\mathbf{e}_E$, $\mathbf{e}_H$, $\mathbf{k}$ prilagođene poprečnim vektorima jakosti $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ osnog EM polja hiperdinamičkih mikrovalova, vrijede sljedeća pravila množenja:

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\rho = \mathbf{k} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\varphi \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_\rho \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{k} = -1$$

$$\mathbf{e}_E \cdot \mathbf{e}_H = -\mathbf{e}_H \cdot \mathbf{e}_E = \mathbf{k} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_E = \mathbf{e}_H \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_H = -\mathbf{e}_E \quad \mathbf{e}_E \cdot \mathbf{e}_E = \mathbf{e}_H \cdot \mathbf{e}_H = \mathbf{e}_E \cdot \mathbf{e}_H \cdot \mathbf{k} = -1$$

Diferenciranjem fluktuirajućih imaginarnih jedinica $\mathbf{e}_E$ i $\mathbf{e}_H$ cilindričnih koordinata po polarnoj varijabli (priklonom kutu) φ_E kvaterniona $\mathbf{E}$ jakosti električnog polja, kao referentnog, prema vodoravnoj ravnini XZ dobiva se:

$$\frac{d}{d\varphi_E} \mathbf{e}_E(\varphi_E) = \frac{d}{d\varphi_E} (\cos \varphi_E \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi_E \cdot \mathbf{j}) = -\sin \varphi_E \cdot \mathbf{i} + \cos \varphi_E \cdot \mathbf{j} = \mathbf{e}_H(\varphi_E)$$

$$\frac{d}{d\varphi_E} \mathbf{e}_H(\varphi_E) = \frac{d}{d\varphi_E} (-\sin \varphi_E \cdot \mathbf{i} + \cos \varphi_E \cdot \mathbf{j}) = -\cos \varphi_E \cdot \mathbf{i} - \sin \varphi_E \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{e}_E(\varphi_E)$$

Zbog zavisnosti polarne varijable $\varphi_E(z,t)$ o uzdužnoj varijabli z i vremenu t diferenciranje fluktuirajućih imaginarnih jedinica $\mathbf{e}_E[\varphi_E(z,t)]$ i $\mathbf{e}_H[\varphi_E(z,t)]$, kao složenih funkcija po tim varijablama, teče ovako:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_E}{dz} &= \frac{d}{dz} \mathbf{e}_E [\varphi_E(z,t)] = \frac{d\mathbf{e}_E}{d\varphi_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \mathbf{e}_H \\ \frac{d\mathbf{e}_E}{dt} &= \frac{d}{dt} \mathbf{e}_E [\varphi_E(z,t)] = \frac{d\mathbf{e}_E}{d\varphi_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \mathbf{e}_H \\ &= \mathbf{e}_H \\ \frac{d\mathbf{e}_H}{dz} &= \frac{d}{dz} \mathbf{e}_H [\varphi_E(z,t)] = \frac{d\mathbf{e}_H}{d\varphi_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \mathbf{e}_E \\ \frac{d\mathbf{e}_H}{dt} &= \frac{d}{dt} \mathbf{e}_H [\varphi_E(z,t)] = \frac{d\mathbf{e}_H}{d\varphi_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \mathbf{e}_E \\ &= -\mathbf{e}_E\end{aligned}$$

3. Vektori i kvaternioni jakosti EM polja hiperdinamičkih mikrovalova

Vektori jakosti $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ poprečnog osnovog EM polja ravnih hiperdinamičkih mikrovalova u promatranoj valnoj fronti, koji se istovremeno mijenjaju izravno i neizravno (rotacijom ili torzijskim titranjem) u vremenu, mogu se u cilindričnim koordinatama interpretirati kao par jednočlanih vektora, ili par jednočlanih kvaterniona bez skalarnog dijela, od kojih svaki ima samo radijalni vektor zavisao o skalarnim varijablama z i t te pripadnom polarnom kutu $\varphi_E(z,t)$ odnosno $\varphi_H(z,t)$.

Shodno tome u cilindričnim koordinatama opći izrazi vektora i kvaterniona za jakosti EM polja tih valova, uz njima prilagođene jedinične vektore $\bar{\mathbf{e}}_E$ i $\bar{\mathbf{e}}_H$, odnosno imaginarne jedinice $\mathbf{e}_E$ i $\mathbf{e}_H$, izgledaju ovako:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}[\varphi_E(z,t), z, t] &= E_\rho(z,t) \cdot \bar{\mathbf{e}}_E[\varphi_E(z,t)] \rightarrow \text{vektorska inačica} \\ \bar{\mathbf{H}}[\varphi_H(z,t), z, t] &= H_\rho(z,t) \cdot \bar{\mathbf{e}}_H[\varphi_E(z,t)] \quad , \quad \varphi_H(z,t) = \varphi_E(z,t) + \pi/2 \\ \mathbf{E}[\varphi_E(z,t), z, t] &= E_\rho(z,t) \cdot \mathbf{e}_E[\varphi_E(z,t)] \rightarrow \text{kvaternionska inačica} \\ \mathbf{H}[\varphi_H(z,t), z, t] &= H_\rho(z,t) \cdot \mathbf{e}_H[\varphi_E(z,t)] \quad , \quad \varphi_H(z,t) = \varphi_E(z,t) + \pi/2\end{aligned}$$

Na temelju prvih dviju operatorski modificiranih Heaviside-Hertzovih vektorskih jednadžbi elektrodinamike za funkcionalno složeno poprečno osno EM polje ravnih hiperdinamičkih mikrovalova u praznom prostoru bez struja i naboja [2] mogu se napisati njima srodne kvaternionske jednadžbe:

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & \text{Rot } \bar{\mathbf{E}} = \bar{\nabla}_d \times \bar{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{d\bar{\mathbf{H}}}{dt} \quad \rightarrow \quad \nabla_d \cdot \mathbf{E} = -\nabla_d \mathbf{E} + \nabla_d \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{d\mathbf{H}}{dt} \\
\text{II.} & \underbrace{\text{Rot } \bar{\mathbf{H}} = \bar{\nabla}_d \times \bar{\mathbf{H}} = \varepsilon_0 \frac{d\bar{\mathbf{E}}}{dt}}_{\text{Vektorske jednađbe}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\nabla_d \cdot \mathbf{H} = -\nabla_d \mathbf{H} + \nabla_d \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt}}_{\text{Kvaternionske jednađbe}}
\end{array}$$

U njima je, za ravne valove koji putuju duž osi Z, modificirani Hamiltonov operator ∇_d (*nabla*) jednočlan pa se u vektorskoj, odnosno kvaternionskoj, inačici, jednađbi EM polja iskazuje ovako:

$$\bar{\nabla}_d = \bar{\mathbf{k}} \frac{d}{dz} \quad \text{odnosno} \quad \nabla_d = \mathbf{k} \frac{d}{dz}$$

U njemu je, zbog unutarnje funkcionalne zavisnosti poprečnih fluktuirajućih vektora $\bar{\mathbf{e}}_E$ i $\bar{\mathbf{e}}_H$, odnosno imaginarnih jedinica $\mathbf{e}_E$ i $\mathbf{e}_H$, o varijablama z i t , operator parcijalne derivacije $\partial/\partial z$ po uzdužnoj varijabli z zamijenjen operatorom ukupne derivacije d/dz koji zahvaća njihovu unutarnju zavisnost o z .

4. Raščlamba vektorskih jednađbi osnih polja hiperdinamičkih valova

Uvrštenjem u operatorski modificirane vektorske jednađbe elektrodinamike općih izraza vektora jakosti $\bar{\mathbf{E}}$ i $\bar{\mathbf{H}}$ solenoidnog polja hiperdinamičkih valova [2], iskazanim u cilindričnim koordinatama realnog prostora, one poprimaju matematički jednostavniji i zorniji oblik:

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & \text{Rot } \bar{\mathbf{E}} = \bar{\nabla}_d \times \bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{k}} \frac{d}{dz} \times (E_\rho \bar{\mathbf{e}}_E) = -\mu_0 \frac{d}{dt} (H_\rho \bar{\mathbf{e}}_H) \\
\text{II.} & \text{Rot } \bar{\mathbf{H}} = \bar{\nabla}_d \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{k}} \frac{d}{dz} \times (H_\rho \bar{\mathbf{e}}_H) = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} (E_\rho \bar{\mathbf{e}}_E)
\end{array}$$

Diferenciranjem obje strane prve jednađbe dobiva se

$$\bar{\mathbf{k}} \times \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} \bar{\mathbf{e}}_E + E_\rho \frac{d\bar{\mathbf{e}}_E}{d\varphi_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \right) = -\mu_0 \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial t} \bar{\mathbf{e}}_H + H_\rho \frac{d\bar{\mathbf{e}}_H}{d\varphi_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \right)$$

Pritom je: $\frac{d\bar{\mathbf{e}}_E}{d\varphi_E} = \bar{\mathbf{e}}_H$, $\frac{d\bar{\mathbf{e}}_H}{d\varphi_E} = -\bar{\mathbf{e}}_E$, $\bar{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{e}}_E = \bar{\mathbf{e}}_H$, $\bar{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{e}}_H = -\bar{\mathbf{e}}_E$

Nakon sređivanja prva jednađba glasi

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} \bar{\mathbf{e}}_H - E_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \bar{\mathbf{e}}_E = -\mu_0 \frac{\partial H_\rho}{\partial t} \bar{\mathbf{e}}_H + \mu_0 H_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \bar{\mathbf{e}}_E$$

Usporedbom koeficijenata uz istovrsne jedinične vektore na lijevoj i desnoj strani iz nje se dobivaju dvije skalarne parcijalne diferencijalne jednačbe:

$$\text{I.} \rightarrow \frac{\partial E_\rho}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_\rho}{\partial t}, \quad E_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} = -\mu_0 H_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial t}$$

Diferenciranjem obje strane druge jednačbe izlazi

$$\bar{\mathbf{k}} \times \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} \bar{\mathbf{e}}_H + H_\rho \frac{d\bar{\mathbf{e}}_H}{d\varphi_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \right) = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial t} \bar{\mathbf{e}}_E + E_\rho \frac{d\bar{\mathbf{e}}_E}{d\varphi_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \right)$$

Nakon vektorskog množenja na lijevoj strani druga jednačba glasi

$$-\frac{\partial H_\rho}{\partial z} \bar{\mathbf{e}}_E - H_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \bar{\mathbf{e}}_H = \varepsilon_0 \frac{\partial E_\rho}{\partial t} \bar{\mathbf{e}}_E + \varepsilon_0 E_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \bar{\mathbf{e}}_H$$

Usporedbom koeficijenata uz istovrsne jedinične vektore na lijevoj i desnoj strani dobivaju se dvije skalarne parcijalne diferencijalne jednačbe:

$$\text{II.} \rightarrow \frac{\partial H_\rho}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_\rho}{\partial t}, \quad H_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} = -\varepsilon_0 E_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial t}$$

5. Raščlamba kvaternionskih jednačbi osnih polja hiperdinamičkih valova

Uvrštenjem u kvaternionske jednačbe općih izraza kvaterniona $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ jakosti poprečnog solenoidnog polja hiperdinamičkih valova, iskazanim u cilindričnim koordinatama imaginarnog prostora, one zbog iščezavanja skalarne umnožaka: $\nabla_d \mathbf{E} = 0$ i $\nabla_d \mathbf{H} = 0$ prelaze u matematički jednostavniji i zorniji oblik:

$$\text{I.} \quad \nabla_d \cdot \mathbf{E} = -\nabla_d \mathbf{E} + \nabla_d \times \mathbf{E} = \mathbf{k} \frac{d}{dz} \times (E_\rho \mathbf{e}_E) = -\mu_0 \frac{d}{dt} (H_\rho \mathbf{e}_H)$$

$$\text{II.} \quad \nabla_d \cdot \mathbf{H} = -\nabla_d \mathbf{H} + \nabla_d \times \mathbf{H} = \mathbf{k} \frac{d}{dz} \times (H_\rho \mathbf{e}_H) = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} (E_\rho \mathbf{e}_E)$$

Diferenciranjem obje strane prve jednačbe dobiva se

$$\mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} \mathbf{e}_E + E_\rho \frac{d\mathbf{e}_E}{d\varphi_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \right) = -\mu_0 \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial t} \mathbf{e}_H + H_\rho \frac{d\mathbf{e}_H}{d\varphi_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \right)$$

Pritom je: $\frac{d\mathbf{e}_E}{d\varphi_E} = \mathbf{e}_H$, $\frac{d\mathbf{e}_H}{d\varphi_E} = -\mathbf{e}_E$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_E = \mathbf{e}_H$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_H = -\mathbf{e}_E$

Nakon sređivanja prva jednađžba glasi

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} \mathbf{e}_H - E_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \mathbf{e}_E = -\mu_0 \frac{\partial H_\rho}{\partial t} \mathbf{e}_H + \mu_0 H_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \mathbf{e}_E$$

Usporedbom koeficijenata uz istovrsne imaginarne jedinice na lijevoj i desnoj strani dobivaju se dvije skalarne parcijalne diferencijalne jednađžbe:

$$\boxed{\text{I.} \rightarrow \frac{\partial E_\rho}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_\rho}{\partial t} , \quad E_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} = -\mu_0 H_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial t}}$$

Diferenciranjem obje strane druge jednađžbe izlazi

$$\mathbf{k} \times \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} \mathbf{e}_H + H_\rho \frac{d\mathbf{e}_H}{d\varphi_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \right) = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial t} \mathbf{e}_E + E_\rho \frac{d\mathbf{e}_E}{d\varphi_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \right)$$

Nakon vektorskog množenja na lijevoj strani druga jednađžba glasi

$$-\frac{\partial H_\rho}{\partial z} \mathbf{e}_E - H_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \mathbf{e}_H = \varepsilon_0 \frac{\partial E_\rho}{\partial t} \mathbf{e}_E + \varepsilon_0 E_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \mathbf{e}_H$$

Usporedbom koeficijenata uz istovrsne imaginarne jedinice na lijevoj i desnoj strani dobivaju se dvije skalarne parcijalne diferencijalne jednađžbe:

$$\boxed{\text{II.} \rightarrow \frac{\partial H_\rho}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_\rho}{\partial t} , \quad H_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} = -\varepsilon_0 E_\rho \frac{\partial \varphi_E}{\partial t}}$$

Raščlambom prvih dviju jednađžbi elektrodinamike u cilindričnim koordinatama za jakosti osnog polja ravnih hiperdinamičkih valova dobivena su, za njihovu vektorsku i kvaternionsku inačicu, dva istovjetna para skalarne parcijalne diferencijalne jednađžbi, što znači da prikaz i analiza EM polja tih valova pomoću vektorskih odnosno kvaternionskih jednađžbi, uz iste granične uvjete, daje istovjetna partikularna rješenja.

Razlika u te dvije inačice je samo u simbolici – poprečni jedinični vektori $\bar{\mathbf{e}}_E$ i $\bar{\mathbf{e}}_H$, odnosno poprečne imaginarne jedinice $\mathbf{e}_E$ i $\mathbf{e}_H$, cilindričnih koordinata pridružene radijalnim jakostima EM polja $E_\rho(z,t)$ i $H_\rho(z,t)$ u valnoj fronti.

6. Valna impedancija praznog prostora

U klasičnoj elektrodinamici baziranoj na Heaviside-Hertzovim vektorskim jednadžbama EM polja valna impedancija Z_0 praznog prostora (vakuuma) je skalarna veličina koja se definira kao omjer apsolutnih veličina jakosti električnog i magnetskog polja vala u valnoj fronti [4]. To je, uz $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$, fizička konstanta praznog prostora određena izrazom:

$$Z_0 = \frac{|\bar{\mathbf{E}}|}{|\bar{\mathbf{H}}|} = \frac{|E_\rho \bar{\mathbf{e}}_E|}{|H_\rho \bar{\mathbf{e}}_H|} = \frac{E_\rho}{H_\rho} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376,73 \Omega \approx 377 \Omega \text{ ili } 120\pi \Omega$$

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \rightarrow \text{magnetska permeabilnost vakuuma}$$

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \rightarrow \text{dielektričnost vakuuma}$$

Budući da kvaternionska algebra, za razliku od iz nje izvedene jednostavnije vektorske algebre, ima definiran inverzni kvaternion, što omogućuje dijeljenje kvaterniona, može se u njoj valna impedancija praznog prostora egzaktno odrediti na dva jednako valjana načina – kao lijevi ili desni umnožak $\mathbf{E}$ s $\mathbf{H}^{-1}$:

$$\mathbf{Z}_0 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} = \begin{cases} \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{E} = \frac{\bar{\mathbf{H}}}{\mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{H}}} \cdot E_\rho \mathbf{e}_E = -\frac{H_\rho \mathbf{e}_H}{H_\rho^2} \cdot E_\rho \mathbf{e}_E = -\frac{E_\rho}{H_\rho} \mathbf{e}_H \cdot \mathbf{e}_E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{k} = Z_0 \mathbf{k} \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^{-1} = E_\rho \mathbf{e}_E \cdot \frac{\bar{\mathbf{H}}}{\mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{H}}} = E_\rho \mathbf{e}_E \cdot \frac{-H_\rho \mathbf{e}_H}{H_\rho^2} = -\frac{E_\rho}{H_\rho} \mathbf{e}_E \cdot \mathbf{e}_H = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{k} = -Z_0 \mathbf{k} \end{cases}$$

Valna impedancija praznog prostora je konstantna imaginarna veličina, a njezin predznak ovisi o tome računa li se ona kao lijevi ili kao desni umnožak kvaterniona $\mathbf{E}$ inverznim kvaternionom $\mathbf{H}^{-1}$. Obje inačice valne impedancije praznog prostora imaju jednaku normu (veličinu) $|\mathbf{Z}_0| = Z_0 \cong 377 \Omega$.

Kojom od njih valja računati zavisi o formulaciji izraza koji povezuje kvaternione jakosti električnog i magnetskog polja u valnoj fronti s valnom impedancijom $\mathbf{Z}_0$ – njezin lijevi ili desni umnožak s $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Z}_0$ ili $\mathbf{E} = \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{H}$.

$$\mathbf{Z}_0 = \begin{cases} Z_0 \mathbf{k} & \text{vrijedi za } \mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Z}_0 = H_\rho \mathbf{e}_H \cdot Z_0 \mathbf{k} = H_\rho Z_0 \mathbf{e}_E \\ -Z_0 \mathbf{k} & \text{vrijedi za } \mathbf{E} = \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{H} = -Z_0 \mathbf{k} \cdot H_\rho \mathbf{e}_H = H_\rho Z_0 \mathbf{e}_E \end{cases}$$

Inverzna valna impedancija $\mathbf{Z}_0^{-1} = \mathbf{Y}_0 = \pm Y_0 \mathbf{k} \approx \pm 0,00265 \text{ kS}$ je imaginarna valna admitancija praznog prostora.

Iz te analize proizlazi da je u izračunu valne impedancije u očitoj prednosti Maxwelllova matematički naprednija kvaternionska interpretacija jakosti polja elektromagnetskih valova od njihove vektorske interpretacije.

7. Poyntingov vektor

Poyntingov vektor u valnoj fronti hiperdinamičkog vala definiran je u vektorskoj i u kvaternionskoj inačici iskaza EM polja istovjetnim izrazima koji se razlikuju samo u jediničnim veličinama i njihovoj simbolici – jedinični vektori $\bar{\mathbf{e}}_E, \bar{\mathbf{e}}_H, \bar{\mathbf{k}}$, odnosno imaginarne jedinice $\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_H, \mathbf{k}$, pa vrijedi:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}} &= \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}} = E_\rho \bar{\mathbf{e}}_E \times H_\rho \bar{\mathbf{e}}_H = E_\rho H_\rho \bar{\mathbf{e}}_E \times \bar{\mathbf{e}}_H = E_\rho H_\rho \bar{\mathbf{k}} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_\rho \mathbf{e}_E \times H_\rho \mathbf{e}_H = E_\rho H_\rho \mathbf{e}_E \times \mathbf{e}_H = E_\rho H_\rho \mathbf{k} \\ &= 0\end{aligned}$$

U kvaternionskoj inačici skalarni umnožak vektora jakosti EM polja u valnoj fronti iščezava jer su oni međusobno okomito polarizirani.

Zaključak

Prema Hamiltonovim fiksnim imaginarnim jedinicama $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ Kartezijevih koordinata definirane su poprečne fluktuirajuće imaginarne jedinice $\mathbf{e}_\rho$ i $\mathbf{e}_\varphi$ u cilindričnim koordinatama i njihove inačice $\mathbf{e}_E$ i $\mathbf{e}_H$ prilagođene indeksima poprečnom osnom polju hiperdinamičkih mikrovalova [2, 3].

Radi provjere razlikuje li se analiza funkcionalno složenog poprečnog osnog polja hiperdinamičkih valova po prvim dvjema operatorski modificiranim jednadžbama elektrodinamike iskazanim u vektorskoj i u kvaternionskoj simbolici načinjena je za obje inačice raščlamba na skalarne komponente.

I za vektorske i za kvaternionske jednadžbe EM polja dobiveni su istovjetni parovi temeljnih skalarnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, što znači da su za obje interpretacije jednadžbi hiperdinamičkih polja, uz zadane rubne uvjete, njihova rješenja identična. U tim inačicama razlika je samo u simbolici iskazivanja vektora polja - jedinični vektori $\bar{\mathbf{e}}_E$ i $\bar{\mathbf{e}}_H$, odnosno imaginarne jedinice $\mathbf{e}_E$ i $\mathbf{e}_H$.

Jedino u izračunu valne impedancije $\mathbf{Z}_0$ praznog prostora u prednosti je Maxwelllova kvaternionska interpretacija vektora $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ polja elektromagnetskih valova jer ona, kao matematički naprednija od pojednostavnjene Heaviside-Hertzove vektorske interpretacije, daje imaginarnu valnu impedanciju $\mathbf{Z}_0$ u dvije jednakovrijedne inačice: $\mathbf{Z}_0 \mathbf{k}$ odnosno $-\mathbf{Z}_0 \mathbf{k}$.

Literatura

- [1] John Voight, *Quaternion algebras*, v.1.01, 24. July, 2021., pdf izdanje, poveznica: <https://math.dartmouth.edu/~jvoight/quat-book.pdf>
- [2] Ivan Šimatović, *Diferencijalne jednačbe elektrodinamike i njihova modifikacija za hiperdinamička polja*, 10. Simpozij Povijest i filozofija tehnike, FER Zagreb, 2021.
- [3] Ivan Šimatović, *Dvofazni mikrovalovi s rotirajućim i torzijski titrajućim vektorima polja*, 10. Simpozij Povijest i filozofija tehnike, FER Zagreb, 2021.
- [4] Tomo Bosanac, *Teoretska elektrotehnika*, prvi dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.

COMPARISON OF VECTOR AND QUATERNION EQUATIONS OF AXIAL FIELDS OF HYPERDYNAMIC WAVES

Abstract: Quaternions in Cartesian and cylindrical coordinates are presented, and a comparison of vector and quaternion partial differential equations of the transverse axial field of hyperdynamic microwaves is made. It has been proven that both versions of EM field equations give identical pairs of partial scalar equations and same solutions for the field of wave.

Key words: quaternion, vector, cylindrical coordinates, hyperdynamic microwave, equations of axial field, wave impedance

Ivan Šimatović