

Usporedba vektorskih i kvaternionijskih jednažbi osnih polja hiperdinamičkih valova

dr. sc. Ivan Šimatović, dipl. inž. el.
nezavisan istraživač



Što su kvaternioni?

Kvaternione i računanje s njima definirao je 1843. irski matematičar, astronom i fizičar **Sir William Rowan Hamilton** (1805. – 1865.) kao **hiperkompleksne četveročlane brojeve**.

Uz realni dio (skalar a) oni sadrže i tročlani imaginarni dio (vektor $\mathbf{v}$) iskazan u imaginarnom 3D prostoru komponentama u Kartezijevim koordinatama.



Kvaternioni u Kartezijevim koordinatama

Opći oblik kvaterniona je linearna kombinacija skalara a i imaginarnog 3D vektora $\mathbf{v}$ predložena četveročlanim izrazom

$$\mathbf{q} = a + \mathbf{v} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

U njemu su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ realni brojevi, a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} = \sqrt{-1}$ su linearno nezavisne imaginarne jedinice u tri međusobno okomita smjera.



Kvaternionska algebra

Kvaternioni se zbrajaju, oduzimaju i množe kao polinomi s imaginarnim jedinicama **i**, **j**, **k** za koje vrijede sljedeća pravila množenja:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

Kvaternionska algebra je nekomutativna s obzirom na množenje ($\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$) pa stoga pri računanju treba paziti na redoslijed imaginarnih jedinica koje se međusobno množe kao vektori.



Inverzni kvaternion

Za svaki kvaternion $\mathbf{q} = a + \mathbf{v}$ u kojem je barem jedan od koeficijenata a, b, c, d različit od nule postoji inverzni kvaternion $\mathbf{q}^{-1}$ koji se računa prema općem izrazu

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{q}} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}}} = \frac{a - \mathbf{v}}{\|\mathbf{q}\|^2} = \frac{a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\bar{\mathbf{q}} = a - \mathbf{v} \quad , \quad \|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$



Dijeljenje kvaterniona

Postojanje inverznog kvaterniona q^{-1} omogućuje dijeljenje kvaterniona p kvaternionom q kao lijevi ili desni umnožak kvaterniona p inverznim kvaternionom q^{-1} pa vrijedi:

$$p/q = q^{-1} \cdot p \quad \text{ili} \quad p/q = p \cdot q^{-1}$$

$$q^{-1} \cdot p \neq p \cdot q^{-1} \quad \text{i} \quad q^{-1} \cdot q = q \cdot q^{-1} = 1$$



Množenje kvaterniona

Umnožak kvaterniona: $\mathbf{p} = a + \mathbf{v}$ i $\mathbf{q} = b + \mathbf{w}$ određen je općim izrazom:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = (a + \mathbf{v}) \cdot (b + \mathbf{w}) = ab + a\mathbf{w} + b\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

Za umnožak vektora kvaterniona:

$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ i $\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} + w_z \mathbf{k}$, uz $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$, općenito vrijedi:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -\mathbf{vw} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} = [\mathbf{vw}] + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$



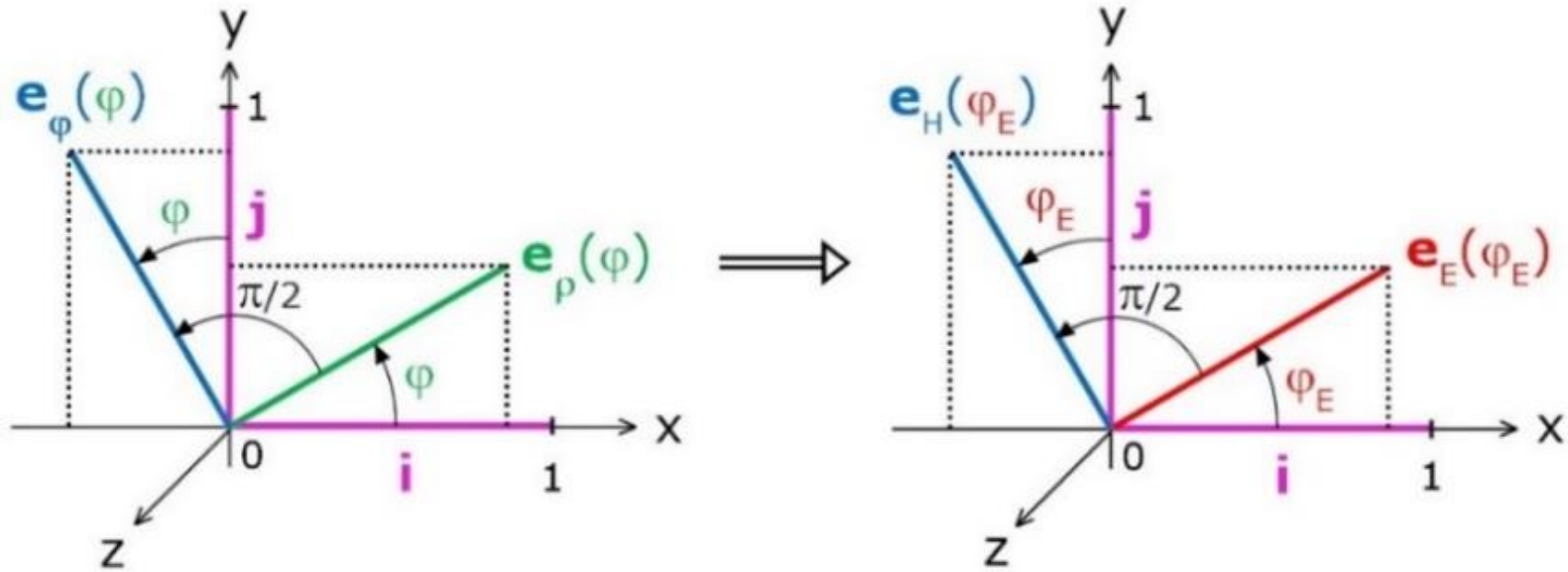
Primjena operatora nabla (∇)

Primjena Hamiltonovog operatora ∇ , kao simboličnog imaginarnog vektora, na proizvoljno vektorsko polje $\mathbf{V}$ u imaginarnom prostoru je njihov lijevi umnožak koji, prema pravilu o množenja vektora kvaterniona, ujedno daje divergenciju i rotaciju polja $\mathbf{V}$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \underbrace{-\nabla \mathbf{V}}_{div \mathbf{V}} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{V}}_{rot \mathbf{V}} = div \mathbf{V} + rot \mathbf{V}$$



Imaginarne jedinice kvaterniona u cilindričnim koordinatama



$$\mathbf{e}_\rho(\varphi, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = \cos \varphi \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi \cdot \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_E(\varphi_E, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = \cos \varphi_E \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi_E \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_\varphi(\varphi, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = -\sin \varphi \cdot \mathbf{i} + \cos \varphi \cdot \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_H(\varphi_E, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = -\sin \varphi_E \cdot \mathbf{i} + \cos \varphi_E \cdot \mathbf{j}$$



Vektori i kvaternioni EM polja u cilindričnim koordinatama

Za iskaz EM polja hiperdinamičkih valova u vektorskoj i kvaternionskoj inačici općenito je:

$$\bar{\mathbf{E}}[\varphi_E(z,t), z, t] = E_\rho(z,t) \cdot \bar{\mathbf{e}}_E[\varphi_E(z,t)] \rightarrow \text{vektorska inačica}$$

$$\bar{\mathbf{H}}[\varphi_H(z,t), z, t] = H_\rho(z,t) \cdot \bar{\mathbf{e}}_H[\varphi_E(z,t)] \quad , \quad \varphi_H(z,t) = \varphi_E(z,t) + \pi/2$$

$$\mathbf{E}[\varphi_E(z,t), z, t] = E_\rho(z,t) \cdot \mathbf{e}_E[\varphi_E(z,t)] \rightarrow \text{kvaternionjska inačica}$$

$$\mathbf{H}[\varphi_H(z,t), z, t] = H_\rho(z,t) \cdot \mathbf{e}_H[\varphi_E(z,t)] \quad , \quad \varphi_H(z,t) = \varphi_E(z,t) + \pi/2$$



Vektorske i kvaternionske jednadžbe EM polja

Za poprečno bezizvorno osno EM polje
ravnih hiperdinamičkih mikrovalova vektorske
i njima srodne kvaternionske jednadžbe jesu:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \text{Rot } \bar{\mathbf{E}} = \bar{\nabla}_d \times \bar{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{d\bar{\mathbf{H}}}{dt} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\nabla_d \cdot \mathbf{E} = -\nabla_d \mathbf{E} + \nabla_d \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{d\mathbf{H}}{dt}}_{=0} \\ \text{II.} & \underbrace{\text{Rot } \bar{\mathbf{H}} = \bar{\nabla}_d \times \bar{\mathbf{H}} = \varepsilon_0 \frac{d\bar{\mathbf{E}}}{dt}}_{\text{Vektorske jednadžbe}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\nabla_d \cdot \mathbf{H} = \underbrace{-\nabla_d \mathbf{H} + \nabla_d \times \mathbf{H}}_{=0} = \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt}}_{\text{Kvaternionske jednadžbe}} \end{array}$$



Raščlamba vektorskih i kvaternionijskih jednažbi

Njihovom raščlambom dobivaju se za obje inačice dva istovjetna para skalarnih parcijalnih diferencijalnih jednažbi:

$$\text{I.} \rightarrow \frac{\partial E_{\rho}}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_{\rho}}{\partial t} \quad , \quad E_{\rho} \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} = -\mu_0 H_{\rho} \frac{\partial \varphi_E}{\partial t}$$

$$\text{II.} \rightarrow \frac{\partial H_{\rho}}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_{\rho}}{\partial t} \quad , \quad H_{\rho} \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} = -\varepsilon_0 E_{\rho} \frac{\partial \varphi_E}{\partial t}$$



Valna impedancija praznog prostora u vektorskoj inačici

Valna impedancija Z_0 praznog prostora je skalarna veličina koja se definira kao omjer apsolutnih veličina jakosti električnog i magnetskog polja vala u valnoj fronti. To je fizička konstanta određena izrazom:

$$Z_0 = \frac{|\vec{\mathbf{E}}|}{|\vec{\mathbf{H}}|} = \frac{|E_\rho \vec{\mathbf{e}}_E|}{|H_\rho \vec{\mathbf{e}}_H|} = \frac{E_\rho}{H_\rho} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega \text{ ili } 120\pi \Omega$$



Valna impedancija praznog prostora u kvaternionskoj inačici

Budući da kvaternionaska algebra, za razliku od jednostavnije vektorske algebre, ima definiran inverzni kvaternion, što omogućuje dijeljenje kvaterniona, može se u njoj valna impedancija praznog prostora egzaktno odrediti na dva jednako valjana načina – kao lijevi ili desni umnožak $\mathbf{E}$ s $\mathbf{H}^{-1}$:



Valna impedancija praznog prostora u kvaternionskoj inačici

$$\mathbf{Z}_0 = \begin{cases} \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{E} = \frac{\overline{\mathbf{H}}}{\mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}}} \cdot E_\rho \mathbf{e}_E = -\frac{H_\rho \mathbf{e}_H}{H_\rho^2} \cdot E_\rho \mathbf{e}_E = -\frac{E_\rho}{H_\rho} \mathbf{e}_H \cdot \mathbf{e}_E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{k} = Z_0 \mathbf{k} \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^{-1} = E_\rho \mathbf{e}_E \cdot \frac{\overline{\mathbf{H}}}{\mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}}} = E_\rho \mathbf{e}_E \cdot \frac{-H_\rho \mathbf{e}_H}{H_\rho^2} = -\frac{E_\rho}{H_\rho} \mathbf{e}_E \cdot \mathbf{e}_H = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{k} = -Z_0 \mathbf{k} \end{cases}$$

Kojom od njih valja računati zavisi o formulaciji izraza koji povezuje kvaternione jakosti električnog i magnetskog polja u valnoj fronti s valnom impedancijom $\mathbf{Z}_0$. To može biti njezin lijevi ili desni umnožak s $\mathbf{H}$: $\mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Z}_0$ ili $\mathbf{E} = \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{H}$.



Poyntigov vektor

Uzdužni Poytingov vektor u valnoj fronti hiperdinamičkog mikrovala definiran je u vektorskoj i u kvaternionskoj inačici iskaza EM polja istovjetnim izrazima koji se razlikuju samo u jediničnim veličinama i njihovoj simbolici – jedinični vektori ili imaginarne jedinice:

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}} = E_{\rho} \vec{\mathbf{e}}_E \times H_{\rho} \vec{\mathbf{e}}_H = E_{\rho} H_{\rho} \vec{\mathbf{e}}_E \times \vec{\mathbf{e}}_H = E_{\rho} H_{\rho} \vec{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \underset{=0}{-\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_{\rho} \mathbf{e}_E \times H_{\rho} \mathbf{e}_H = E_{\rho} H_{\rho} \mathbf{e}_E \times \mathbf{e}_H = E_{\rho} H_{\rho} \mathbf{k}$$



Zaključak

Za vektorske i za kvaternionske
jednadžbe EM polja dobiveni su raščlambom
prvih dviju jednadžbi istovjetni parovi temeljnih
skalarnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi,
što znači da su za obje interpretacije, uz
zadane rubne uvjete, njihova rješenja identična.

Jedino u izračunu valne impedancije Z_0
praznog prostora u prednosti je Maxwellova
kvaternionska interpretacija vektora **E** i **H** polja.



Kontakt podaci autora

dr. sc. Ivan Šimatović, dipl. inž. el.

Nezavisan istraživač

Krapina, Hrvatska

ivan0simatovic@gmail.com

