

Darko Fischer
FERIT, Osijek
dfischer1938@gmail.com

00-00

ANALITIČKA I NUMERIČKA RJEŠENJA KAO PEDAGOŠKI ALATI

Sažetak: Rješenja mnogih jednostavnih problema iz matematike i fizike služe kao pedagoški alat koji pomaže studentima bolje shvaćanje nekih procesa. Mnogi takvi problemi mogu se riješiti i analitički i numerički. Usporedba tih dviju metoda daje vrlo korisne uvide u bit procesa. U radu je prikazano nekoliko razmjerno jednostavnih problema koristeći obje metode.

Ključne riječi: Minimalna udaljenost, Zenonov paradoks, progonitelj i proganjeni, kružno gibanje, kazaljke na satu, polarni krug, programska podrška, računalo, umjetna inteligencija.

Uvod

Analitička rješenja nekih problema mogu biti složena i traže dosta matematičkog znanja. Moderna programska podrška i umjetna inteligencija mogu biti pomoć i pri analitičkom rješavanju problema. Numeričko rješenje istog problema nekada je vrlo jednostavno i zahtijeva samo malo vještine na računalu. Oba načina zahtijevaju od rješavača upoznavanje mnogih pojedinosti i zato je to snažan pedagoški alat i motivacija za učenje. Usporedba dobivenih rješenja potvrđuje ispravnost ili neispravnost metoda. Ako se rezultati ne podudaraju to motivira rješavača na dalja istraživanja. Također se može uočiti, da numeričko rješenje nije uvijek apsolutno točno ali se može postići rezultat uz zadanu dozvoljenu pogrešku.

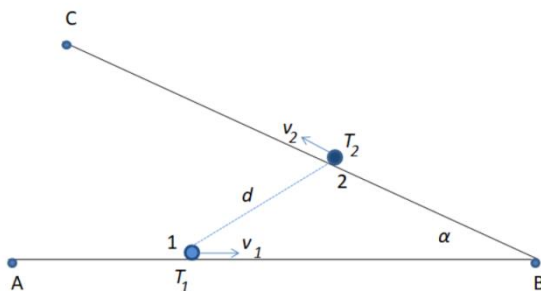
Prikazani jednostavan primjer kretanja dvaju predmeta u suprotnom smjeru po pravcima koji se sijeku pod zadanim kutom zgodan je primjer za analitičko i

numeričko rješenje u kojem je analitičko rješenje dosta složeno, dok je numeričko jednostavno. Zenonov paradoks o Ahilu i kornjači bio je motiv za rješavanje sličnog problema progonitelja i proganjanog uz mogućnosti proširenja zadatka dodatnim parametrima, kada analitičko rješenje nije moguće, dok je numeričko i dalje jednostavno.

Nekoliko primjera kružnog gibanja, kao saonice koje u polarnom krugu slijede svoju sjenu i položaji kazaljki na satu pokazuju, da uz nešto razmišljanja, analitičko rješenje može biti jednostavno.

1. Nalaženje najmanje udaljenosti

1.1 Analitičko rješenje



Sl.: 1. Gibanje dvaju predmeta

Dva predmeta (1 i 2 na slici 1) gibaju se po pravcima. Pravci se sijeku pod zadanim kutom α a predmeti se gibaju u suprotnim smjerovima zadanim brzinama v_1 i v_2 . Njihova početna udaljenost je D . Oba predmeta kreću istovremeno. Slika 1 prikazuje njihove položaje u trenutku t , kada je njihova međusobna udaljenost jednaka d . Točke T_1 i T_2 imaju koordinate

$$T_1(v_1 t, 0) \text{ i } T_2(D - v_2 t \cos \alpha, v_2 t \sin \alpha) \quad (1)$$

Za zadane parametre D , v_1 , v_2 i α udaljenost d jednostavno se dobiva:

$$d = ((v_1 t - (D - v_2 t \cos \alpha))^2 + (v_2 t \sin \alpha)^2)^{1/2} \quad (2)$$

Preglednosti raditi označiti ćemo d s $f(t)$.

Udaljenost d tj. $f(t)$ ovih dvaju predmeta uz zadane parametre D , v_1 , v_2 i α je funkcija vremena t .

Da bi se dobio minimum ove funkcije analitičkim putem, funkciju treba derivirati po t , izraz izjednačiti s nulom i riješiti dobivenu jednadžbu po t .

Deriviranje ove funkcije nije sasvim jednostavno, no korištenjem umjetne inteligencije [1] to se lakše može dobiti nego provesti vlastitu analizu.

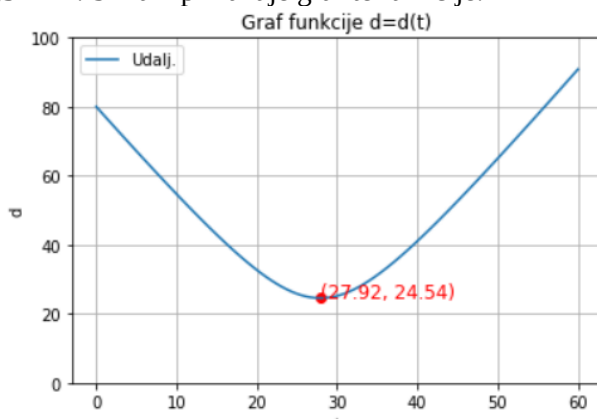
Rezultat derivacije glasi

$$\frac{df}{dt} = \frac{t \cdot (v_1 + v_2 \cdot \cos \alpha)^2 + (v_2 \cdot \cos \alpha)^2 - D \cdot (v_1 + v_2 \cdot \cos \alpha)}{((v_1 + v_2 \cdot \cos \alpha) \cdot t - D^2 + (v_2 \cdot t \cdot \sin \alpha)^2 \cdot t^2)^{1/2}} \quad (3)$$

Iako je ovaj izraz dosta složen, rješenje jednadžbe $df/dt=0$ je vrlo jednostavno, jer je taj izraz jednak nuli kada je brojnik jednak nuli. Iz toga proizlazi, da će se do minimalne udaljenosti doći u vremenu

$$t = (D \cdot (v_1 + v_2 \cdot \cos \alpha) - (v_2 \cdot \cos \alpha)^2) / (v_1 + v_2 \cdot \cos \alpha)^2 \quad (4)$$

To je analitičko rješenje zadanog problema. Uvrštavanjem ovog izraza u (2) dobiva se i minimalna udaljenost. Ako zadamo vrijednosti $v_1=100$ km/h, $v_2=57$ km/h, $D=100$ km i $\alpha=42^\circ$, analitičko rješenje daje vrijednosti $t_{min}=27,92$ minuta i $d_{min}=24,54$ km. Slika 2 prikazuje graf te funkcije.



Sl.: 2. Graf udaljenosti dvaju predmeta

1.2 Numeričko rješenje

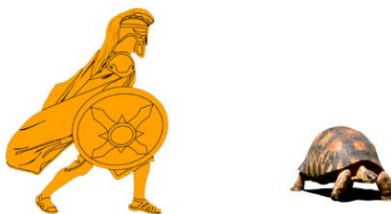
Za razliku od analitičkog, numeričko rješavanje je vrlo jednostavno. Dovoljno je koristiti neki tablični kalkulator (npr. MS Excel). U jednom stupcu treba generirati vremena u intervalu od 0 do nekog očekivanog vremena u kojem će nastupiti minimalna udaljenost, na primjer 60 minuta. Ta vremena treba zadati sa željenim porastom, na primjer od jedne minute. U slijedeće dva stupca treba upisati koordinate točaka T_1 i T_2 prema izrazu (1) a u naredni stupac treba upisati formulu za udaljenosti tih dviju točaka prema izrazu (2). U tom stupcu naći će se vrijednosti udaljenosti ovisne o vremenu. Pregledom tih podataka lako je uočiti najmanju vrijednost za udaljenost. Iz tablice 1, gdje je preglednosti radi prikazano samo nekoliko početnih i konačnih redova proračunske tablice, jasno se vidi da

minimalna udaljenost nastupa nakon 28 minuta i iznosi 24.54 km. To gotovo u potpunosti odgovara analitičkom rješenju. Malo odstupanje proizlazi iz rezolucije od samo jedne minute. To ukazuje na činjenicu da je točnost numeričkog rješenja ovisna o odabranoj dozvoljenoj pogreški.

Tablica 1.: Udaljenost dvaju predmeta

$t[\text{min}]$	$x_1[\text{km}]$	$x_2[\text{km}]$	$y_2[\text{km}]$	$Udalj.[\text{km}]$
0	0.000	80.000	0.000	80.000
1	1.667	79.071	0.836	77.409
2	3.333	78.142	1.673	74.828
3	5.000	77.213	2.509	72.257
4	6.667	76.284	3.346	69.698
24	40.000	57.706	20.074	26.767
25	41.667	56.777	20.910	25.798
26	43.333	55.848	21.747	25.090
27	45.000	54.919	22.583	24.665
28	46.667	53.990	23.420	24.538
29	48.333	53.061	24.256	24.712
30	50.000	52.132	25.092	25.183

2. Ahil i kornjača



Sl.: 3. Ahil i kornjača, izvor Wikipedia

2.1 Zenonov paradoks

Grčki filozof Zenon (Zeno) definirao je paradoks o Ahilu kao brzom progonitelju i kornjači kao sporom bjeguncu. Dok Ahil stigne do mjesta gdje je bila kornjača, ona je već odmakla nešto dalje. Postupak se nastavlja, kornjača uvijek „bježi“ Ahilu tako, da ju on nikada ne može doći. Ovdje se krije logička pogreška. Jasno je, ako se progonitelj kreće brzinom v_p a bjegunac bježi brzinom v_b i ako je njihova početna udaljenost d , onda će vrijeme hvatanja, pod uvjetom $v_p > v_b$ biti

$$t=d/(v_p-v_b) \quad (5)$$

Ovakvi i slični problemi proganjanja česte su i nekada naivne pitalice. Popularna je dječja pitalica koja glasi: „Pas lovi lisicu. Početno je od nje udaljen 50 psjećjih koraka. Dok pas napravi pet svojih koraka, lisica napravi šest lisičjih koraka. No četiri psjećja koraka velika su kao pet lisičjih. Koliko koraka će prevaliti pas da uhvati lisicu?“ Iako se problem čini složenim, on se može riješiti i bez većeg računanja. Brzina psa je $v_p=5$ ili $25/5$ koraka u jedinici vremena. Brzina lisice je $6 \cdot 4/5=24/5$ u istoj toj jedinici vremena („dok pas napravi pet koraka“). Lisica je, dakle, za $1/25$ sporija od psa. Prema izrazu (5) „vrijeme hvatanja“ u psjećjim koracima bit će $50/(1/25)=1250$. Pas će, ako je početno udaljen od lisice 50 koraka, uhvatiti lisicu nakon što pređe 1250 svojih koraka.

Ovo je „analitičko“ rješenje prema izrazu (5). Problem je jedino u preračunavanju brzina u jednake mjerne jedinice i ukazuje, da jedinica za vrijeme može biti zadana kao interval „dok pas napravi pet koraka“. Brzinu lisice samo treba preračunati u tom „psjećjem“ mjerilu i onda je problem jednostavan.

No problem se može napraviti složenijim. Može se definirati, da se pas i lisica umaraju trčeći, pa su brzine v_p i v_b u izrazu (5) funkcije vremena.

2.2 Analitičko rješenje za linearno promjenljive brzine

Analitičko rješenje kada su brzine ovisne o vremenu, tj. funkcije vremena moguće je samo ako su te funkcije jednostavne. Ako su obje funkcije linearne i to oblika:

$$v(t) = k \cdot t + v_0 \quad (6)$$

gdje je k koeficijent promjene brzine a v_0 je početna brzina, tada se izraz (5) svodi na kvadratnu jednadžbu. Kada se uvrste dvije linearne jednadžbe, jedna za psa (progonitelja) a druga za lisicu (bjegunca) dobiva se slijedeća kvadratna jednadžba po vremenu t :

$$(k_p-k_l) \cdot t^2 + (v_{p0}-v_{l0}) \cdot t - d = 0 \quad (7)$$

Ovdje indeksi p i l označavaju vrijednosti za psa odnosno lisicu. Ako se njihove brzine tokom vremena smanjuju, koeficijenti k_p i k_l su negativni. Jednadžba (7) lako je rješiva. Za odabrane vrijednosti: $k_p = -65 \cdot 10^{-5}$, $k_l = -48 \cdot 10^{-5}$, $v_{p0}=5$, $v_{l0}=4,8$ i $d=50$ koji su primjereni stvarnim uvjetima, dobiva se rezultat $t=367$. To znači, da će nakon 367 vremenskih jedinica pas uhvatiti lisicu. Broj koraka koje je napravio pas tu nije vidljiv. Taj broj dobiva se integriranjem izraza (6) od 0 do 367 za „psjećje“ parametre $k_p=-0,00065$ i $v_p=5$. Dobiveni broj koraka psa iznosi

1791. To je, očekivano, veće od broja koraka koje pas mora preći da uhvati lisicu ako se ne umara (1250).

2.3 Numeričko rješenje za linearno promjenljive brzine

Numeričko rješenje je i u ovom slučaju jednostavno. U tabličnom kalkulatoru zadaju se izabrani koeficijenti. U tablici 2, preglednosti radi, prikazano je samo prvih četiri i zadnjih četiri redaka od ukupnog proračuna koji ima 365 redaka. U prvi redak unose se početni podaci. U svaki iduću redak unose se podaci dobiveni iz prethodnog retka uvećani za promjenu u posljednjem kratkom vremenskom razdoblju. Ovi postupci jednostavno se izvode u nekom tabličnom kalkulatoru na računalu kopiranjem samo jednog retka. Zbog toga je cijeli račun razmjerno brz.

Iz redaka tablice 2 vidi se da se brzine psa i lisice smanjuju a njihov se razmak isto smanjuje. Iz zadnjeg, 365. retka, vidi se da je pas uhvatio lisicu nakon 365 vremenskih intervala, odnosno 1738 „psećjih“ koraka. To je neznana razlika u odnosu na analitičko rješenje koje je dalo 367 vremenskih intervala i 1791 korak. Do razlike je došlo zbog nedovoljne točnosti numeričke metode kada nije zadana vrlo visoka rezolucija (vrlo malo vremensko razdoblje u kojem se računa idući podatak).

Tablica 2.: Brzine i udaljenosti psa i lisice

Vrijeme	Brzina	Put	Brzina	Put lisice	Razmak	Lisica
	psa	psa	lisice			uhvaćena
0	5.000	0.000	4.800	0.000	50.000	Ne
5	4.997	24.984	4.798	23.988	49.004	Ne
10	4.994		4.795	47.952	48.017	Ne
15	4.990	74.854	4.793	71.892	47.038	Ne
350	4.772	1670.375	4.632	1621.200	0.825	Ne
355	4.769	1693.084	4.630	1643.508	0.424	Ne
360	4.766	1715.760	4.627	1665.792	0.032	Ne
365	4.763	1738.404	4.625	1688.052	-0.352	Da

Usporedbom sa slučajem kada se pas i lisica ne umaraju, pas je trebao napraviti 1250 koraka da uhvati lisicu, dok u ovom slučaju, kada se i pas i lisica umaraju, pas brže od lisice, psu je potrebno 1738 koraka za hvatanje lisice. Napomenimo, da za slučaj složenije ovisnosti brzine o vremenu (a ne linearne)

analitičko rješenje može postati vrlo složeno ili nemoguće, dok je numeričko rješenje moguće po istim načelima.

Ovaj primjer također pokazuje, da se do rješenja problema, bilo analitički, bilo numerički, dolazi samo uz dobro upoznavanje samog procesa. Rješavanje analitičkom metodom također motivira rješavača za korištenje i stjecanje znanja iz matematike, dok se kroz numerička rješavanja usavršavaju vještine rada na računalu. Zato je edukativna vrijednost rješavanja ovakvih problema na ova dva načina vrlo značajna.

3. Saonice u polarnom krugu

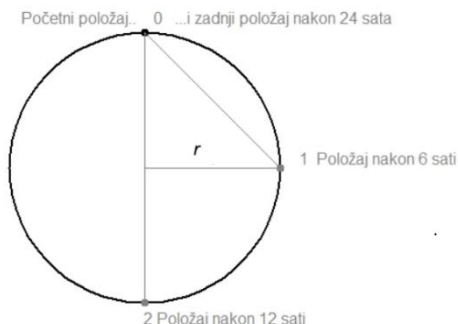
3.1 Opis problema

Zadatak koji rješava gibanje, koje nije pravocrtno, je nalaženje putanje saonice koje se u vrijeme polarnog ljeta gibaju automatski tako da slijede svoju sjenu. U vrijeme ljeta u polarnom krugu sunce uopće ne zalazi, već za promatrača sa Zemlje opisuje po nebu krugove. Pretpostavimo da je vedar dan, da imamo motorne saonice koje imaju jarbol i da su automatski navođene tako, da slijede svoju sjenu. Ako se saonice kreću brzinom v (na primjer 15 km/sat), pita se kako daleko će saonice biti od mjesta odakle su krenule nakon šest, 12 i 24 sata.

3.2 Analitičko rješenje saonice u polarnom krugu

Kako se Sunce u polarnom krugu prividno giba po kružnici, tako će se i saonice koje prate svoju sjenu gibati po kružnici. Kutna brzina prividnog gibanja sunca koje za 24 sata prijeđe cijeli krug je

$$\omega = 2 \cdot \pi / 24 \quad (8)$$



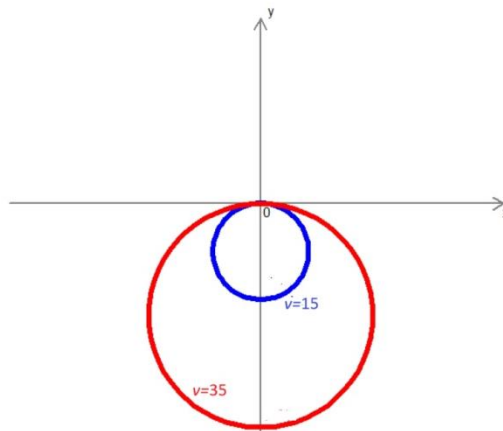
Sl.: 4. Putanja saonice koje slijede svoju sjenu

a zadana linijska brzina je v , te se zbog toga saonice gibaju po kružnici polumjera

$$r = v/\omega \quad (9)$$

Slika 4 prikazuje rješenje. Iz slike 4 se vidi, da su saonice nakon 6 sati, na četvrtini kruga u točki 1 koja je od početne točke udaljena $r \cdot 2^{1/2}$, odnosno $1,414 \cdot r$. Nakon 12 sati saonice su na polovici kružnice pa su od početne točke udaljene $2 \cdot r$, dok su nakon 24 sata saonice u početnoj točki 0.

Treba napomenuti, da će se saonice uvijek gibati po kružnici a polumjer kružnice je to veći, što je linijska brzina saonica veća kao što to pokazuje izraz (9) i slika 5.



Sl.: 5. Putanje saonica ovisno o linijskoj brzini

3.3 Numeričko rješenje saonica u polarnom krugu

Numeričko rješavanje gibanja saonica koje prate svoju sjenu može se napraviti na način, da se u malim intervalima Δt kružno gibanje aproksimira pravocrtnim. Nakon svakog intervala povećava se kut koji određuje pravac gibanja. Povećanje kuta iznosi $\Delta\alpha = \Delta t \cdot \omega$ gdje je ω kutna brzina okretanja Zemlje dana u satima izrazom (8). Zbrajajući povećanje kuta dobiva se kut α pod kojim se saonice pravocrtno gibaju u idućem intervalu Δt . Ako se saonice gibaju zadanom brzinom v , one će u intervalu Δt prijeći put (određen pravokutnim koordinatama x i y)

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \cdot \cos(\alpha) \quad (10)$$

$$\Delta y = v \cdot \Delta t \cdot \sin(\alpha) \quad (11)$$

Zbrajanjem pomaka po x i y osi, dobiva se položaj saonica u trenutku t .

Tablica 3 prikazuje samo dio proračunske tablice i to za vrijednosti na početku i oko traženih rezultata. Račun je proveden za brzinu $v=15$ km/sat pa polumjer kruga r po kojem se saonice kreću iznosi 57, 42 km. Iz drugog dijela tablice se vidi, da je udaljenost nakon 360 minuta (šest sati) jednaka $2^{1/2} \cdot r$ (hipotenuza istokračnog pravokutnog trokuta s katetama r). Nakon 720 minuta (12 sati) ta udaljenost je $2 \cdot r$, dok nakon 24 sata (1440 minuta) su se saonice vratile na početnu točku.

Tablica 3.: Putanja saonica po polarnom krugu

Vrijeme	Kut	Koord.	Koord.	Udaljenost
[min]	[stup]	x[km]	y[km]	[km]
0	0.00	0.000	0.000	0.00
1	0.25	0.250	0.000	0.25
2	0.50	0.500	-0.001	0.50
3	0.75	0.750	-0.003	0.75
358	89.50	57.417	-56.671	80.67
359	89.75	57.420	-56.921	80.85
360	90.00	57.421	-57.171	81.03
361	90.25	57.421	-57.421	81.21
718	179.50	0.750	-114.588	114.59
719	179.75	0.500	-114.590	114.59
720	180.00	0.250	-114.591	114.59
721	180.25	0.000	-114.591	114.59
722	180.50	-0.250	-114.590	114.59
1437	359.25	-0.750	-0.007	0.75
1438	359.50	-0.500	-0.003	0.50
1439	359.75	-0.250	-0.001	0.25

1440	360.00	0.000	0.000	0.00
------	--------	-------	-------	------

U ovom numeričkom računu ima manjih pogrešaka zbog nedovoljno malog intervala uzastopnih aproksimacija. Smanjenje tog intervala pri korištenju tabličnog kalkulatora znatno bi povećalo tablicu i za ovakav način računanja nije prikladno. Programom u nekom programskom jeziku to se može izbjeći.

4. Kazaljke na satu

4.1 Kružno gibanje dvaju tijela po istoj putanji

Gibanje dvaju tijela po istoj kružnoj putanji ali s različitim kutnim brzinama ω može također poslužiti kao izvor nekoliko zadataka koji su rješivi i analitički i numerički. Početno se možemo poslužiti jednostavnom pitalicom namijenjenom mlađim osobama, srednjoškolcima ili studentima. Ta pitalica glasi: „Velika i mala kazaljke na satu poklopljene su u 12 sati kade obje pokazuju na broj 12. Nakon kojeg vremena, izraženo točno racionalnim brojem će se te kazaljke ponovo poklopiti?“ Većina upitanih na to pitanje odgovara, da će to nastupiti nakon nešto više od pet minuta, što je donekle, ali ne sasvim točno i nije rezultat izražen racionalnim brojem. Bez računanja, uz nešto logičkog zaključivanja do odgovora na ovu pitalicu lako se dolazi. U roku od 12 sati kazaljke će se poklopiti 11 puta dok opet ne dođu u početni položaj na broj 12. Ako 11 poklapanje kazaljki traje 12 sati, onda po jedno poklapanje kazaljki nastupa nakon svakih 12/11 sata. To je točan odgovor na postavljenu pitalicu. Izraženo u satima, minutama i sekundama traženo vrijeme je 01:05:27 i 3/11 sekundi (jedan sat 5 minuta i 27 i 3/11 sekundi).

4.2 Analitičko rješenje kružnog gibanja kazaljki sata

Do istog se rezultata dolazi primjenom izraza (5) za bjegunca i progonitelja. Ovdje je „bjegunac“ mala kazaljka a „progonitelj“ velika kazaljka. Njihova početna udaljenost je $2 \cdot \pi$ radijana, kutna brzina „bjegunca“ je $\omega = 2 \cdot \pi$ radijana na sat, brzina „progonitelja“ je 12 puta veća, razlika brzina 11/12 radijana na sat pa se prema izrazu (5) opet se dobiva vrijeme od 12/11 sata.

Napomenimo, da su neki, iako rijetki analogni satovi napravljeni s podjelom od 24 sata, mala kazaljka obiđe puni krug u 24 (a ne 12) sati. Takav jedan sat je na meteorološkom stupu na Zrinjevcu u Zagrebu a jedan je na kuli u Krku (slika 6). Račun je tada istovjetan s računom sata s 12 podjela, samo se umjesto broja 11 (12-1) koristi broj 23 (24-1).



Sl.: 6 Sat s 24 satnom podjelom u Krku (Foto: D. Fischer)

Navedeni zadatak se može poopćiti. Umjesto da se traži vrijeme kada će se kazaljke poklapati, može se tražiti vrijeme t kada će kazaljke zatvarati neki zadani kut α . Također, račun se izvodi ne za slučaj kada su početno kazaljke poklopljene, već kada su one pod nekim zadanim kutom α_k . Dovoljno je uz kut α_k zadati, za ovaj slučaj, početni kut male kazaljke α_{0m} jer kako se kutne brzine male i velike kazaljke odnose kao 1 prema 12, položajem male kazaljke određen je i položaj velike kazaljke α_{0v} po izrazu

$$\alpha_{0v} = 12 \cdot \alpha_{0m} - 2 \cdot k \cdot \pi \quad (12)$$

gdje je $k = 0$ ili cijeli broj od 1 do 11 ovisno o položaju male kazaljke (iza kojeg broja na brojaniku se ona nalazi. Na primjer ako se mala kazaljka nalazi na položaju $\alpha_{0m} = \pi/13 = 0,242$ radijana tada je $k = 0$, $\alpha_{0v} = 2,90$, mala kazaljka je na brojaniku sata na 2,31 minuti a velika kazaljka na 27,69 minuta. Ako se traži vrijeme nakon kojega će kazaljke biti pod zadanim kutom α , tada mora biti zadovoljen uvjet

$$| \alpha_v - \alpha_m | = \alpha \quad (13)$$

gdje su α_v i α_m položaji velike i male kazaljke. Apsolutna vrijednost razlike kutova u gornjem izrazu koristi se zato, jer velika kazaljka može biti ispred i iza male kazaljke kada one zatvaraju zadani kut. Položaji kazaljki α_v i α_m u trenutku t određeni su njihovim početnim položajem i putom koji će kazaljke preći u vremenu t . Vrijedi izraz

$$12 \cdot \alpha_m - \alpha_m = \alpha_{0v} + 12 \cdot \omega \cdot t - (\alpha_{0m} + \omega \cdot t) = \alpha \quad (14)$$

Ovdje je ω kutna brzina male kazaljke i iznosi $2 \cdot \pi / 12 = \pi / 6$ radijana na sat.

Kako je α_{0v} 12 puta veće od α_{0m} , uz pretpostavku da je velika kazaljka ispred male kazaljke, iz ovoga slijedi traženo vrijeme t nakon kojeg će kazaljke biti pod traženim kutom α .

$$t = (\alpha - \alpha_{0v} + \alpha_{0m}) / (11 \cdot \omega) = (\alpha - 11 \cdot \alpha_{0m}) / (11 \cdot \pi / 6) \quad (15)$$

Na primjer, ako je početni položaj male kazaljke na $\alpha_{0m} = \pi / 13$ radijana (oko 2.31 minuta) i traži se vrijeme kada će kazaljke biti pod kutom $\alpha = \pi$, prema izrazu (15) dobiti će se $t = 5,035$ minuta (5 minuta i 21 sekunde).

4.3 Numeričko rješenje kružnog gibanja kazaljki sata

Pri rješavanju općeg slučaja gibanja kazaljki na satu, kada se zadaje početni položaj male kazaljke (α_{0m}) i kut između kazaljki koji će nastupiti nakon vremena t , a traži se to vrijeme, preostale vrijednosti za računanje su poznate. Kutna brzina male kazaljke $\omega = \pi / 6$ radijana na sat ili 0.5 stupnjeva po minuti, dok je početni položaj velike kazaljke α_{0v} 12 puta veći od početnog položaja male kazaljke jer je kutna brzina velike kazaljke 12 puta veća od kutne brzine male kazaljke. Pri računanju treba odabrati jedinice u kojima će se provoditi računanje. Tablica 4 prikazuje račun za kutove u stupnjevima i vrijeme u minutama, pa je kutna brzina dana u stupnjevima u minuti i iznosi $\omega = 0.5$ [stup./min]. Podaci potrebni za račun prikazani su u gornjem dijelu tablice 4.

U donjem dijelu tablice 4, preglednosti radi, prikazano je samo nekoliko redaka stvarnog računa i to početni redci i redci oko postignutog rješenja. U prvi stupac tablice za računanje unosi se vrijeme. Početno, u vremenu $t=0$, kazaljke su na svojim zadanim početnim položajima. U prvom stupcu tablice uneseno je vrijeme koje se povećava za odabrani mali interval Δt . Za ovaj primjer odabrano je $\Delta t = 0,1$ minuta. U drugom stupcu tablice prikazan je trenutni položaj male kazaljke. On se dobiva iz prethodnog položaja uvećanog za kut pređen u kratkom intervalu Δt . U trećem stupcu prikazan je položaj velike kazaljke nakon tog istog intervala dok četvrti stupac prikazuje razliku kutova između kazaljki. U petom stupcu (s „DA“ ili „Ne“) naznačeno je da li je približno dostignut traženi rezultat (razmak kazaljki). Za ovaj primjer odabrana je dozvoljena pogreška od 0,01 minute (vidljivo samo u originalnoj tablici i nije, preglednosti radi, preneseno u ovu skraćenu tablicu).

Tablica 4.: Gibanje kazaljki na satu

<i>Alfa0m</i>	13.84615	[stup.]		
<i>Alfa0v</i>	166.1538	[stup.]		
Traži se	180	[stup.]		
<i>Omega</i>	0.5	[stup./min]		
Vrijeme	<i>Alfam</i>	<i>Alfav</i>	Razlika	Rezul-
[min.]	[stup.]	[stup.]	[stup.]	tat
0.0	13.846	166.152	152.306	Ne
0.1	13.896	166.752	152.856	Ne
0.2	13.946	167.352	153.406	Ne
0.3	13.996	167.952	153.956	Ne
0.4	14.046	168.552	154.506	Ne
0.5	14.096	169.152	155.056	Ne
4.8	16.246	194.954	178.708	Ne
4.9	16.296	195.554	179.258	Ne
5.0	16.346	196.154	179.808	DA
5.1	16.396	196.754	180.358	DA
5.2	16.446	197.354	180.908	Ne
5.3	16.496	197.954	181.458	Ne
5.4	16.546	198.554	182.008	Ne

Iz zadnjeg dijela Tablice 4 vidljivo je, da će traženi kut između kazaljki nastupiti u vremenu između 5,0 i 5,1 minute. To odgovara analitičkom rješenju u kojem je dobiveno vrijeme od 5,03 minute.

Numeričko rješenje može se poboljšati uvođenjem manjih vrijednosti dozvoljene pogreške a račun se provodi u samo nekoliko koraka u vremenima oko već nađenog približnog rješenja.

Treba napomenuti, da numeričko rješenje po ovom načelu, iako vrlo

jednostavno, može dovesti do znatne pogreške ako se pri računanju ne uzimaju brojevi s dovoljnom preciznošću. Upravo zbog toga usporedbe analitičkih i numeričkih rješenja su vrlo korisne i poučne, što se upravo ovakvim primjerima nastojalo pokazati.

Zaključak

Većina fizikalnih procesa ima matematički model iz kojeg se analitičkim putem mogu naći rješenja i podaci o ponašanju procesa pod raznim uvjetima. Analitičko rješenje nekada je jednostavno, no nekada je vrlo složeno. Do rješenja se gotovo uvijek može doći i numeričkom metodom za koju je vrlo često dovoljna i sasvim jednostavna i pristupačna programska podrška. Često je numerička metoda jednostavnija od analitičke. Smatramo, da je korisno pri podučavanju učenika i studenata o fizikalnim procesima motivirati ih da pokušaju naći rješenja na oba načina. Takvi postupci mogu biti zanimljivi i upućivati osobe koje ih proučavaju da bolje shvate suštinu i detalje problema. Ovim člankom htjeli smo ukazati na korisnost ovih dviju usporednih metoda.

Literatura

- [1] chatgpt.com/c/d225c, pristupljeno 14. 9. 2024
- [2] <https://en.wikipedia.org/wiki/Zeno%27s-paradoxes#>, pristupljeno 13. 9. 2024
- [3] Lopašić, *Fizika*, Udžbenik, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, Hrvatska, 1968.

ANALITICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS AS PEDAGOGICAL TOOLS

Summary: Solutions of many simple problems in mathematics and physics serve as a pedagogical tool that helps students to better understand some processes. Many such problems can be solved both analytically and numerically. A comparison of these two methods gives very useful insights into the essence of the process. The paper presents several relatively simple problems using both methods.

Keywords: Minimum distance, Zeno's paradox, pursuer and persecuted, circular motion, clockwise, polar Circle, software, computer, artificial intelligence.

Darko Fischer