

S V E U Č I L I Š T E U S P L I T U

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA
I BRODOGRADNJE U SPLITU

PETAR SLAPNIČAR

ANALIZA ELEKTRIČNIH MREŽA PRIMJENOM RAČUNALA



SPLIT, 1987.

S A D R Ž A J

	Str.
1. UVOD	1
2. ELEMENTI ANALIZE MREŽA METODOM ČVORA	5
2.1. Matrica vodljivosti	6
2.2. Zavisni strujni izvori	12
2.3. Naponski izvori u mreži	14
3. RJEŠAVANJE SUSTAVA ALGEBARSKIH JEDNADŽBI	19
3.1. Gaussova eliminacija	19
3.2. Poboljšanje točnosti rješenja	26
3.3. Inverzna matrica	28
3.4. Primjer programa u Fortranu za Gaussovu eliminaciju	31
3.5. Matrice s malom ispunom	32
4. KOEFICIJENTI OSJETLJIVOSTI LINEARNE MREŽE	40
5. NELINEARNE ISTOSMJERNE MREŽE	44
6. LINEARNE IZMJENIČNE MREŽE	61
7. PRIJELAZNA STANJA NELINEARNIH MREŽA	68
7.1. Prijelazna stanja linearnih mreža	68
7.2. Točnost i stabilnost metoda integracije	79
7.3. Metode integracije mreža s nelinearnim elementima	84
7.4. Postupak proračuna prijelaznih stanja neli- nearnih mreža	92
8. DODATAK	94
9. LITERATURA	111

UVOD

Davna je želja kod analize električnih sklopova bila da se analizom dobije što vjernija slika ponašanja sklopa pri raznim uvjetima rada. Ustvari, sva literatura o električnim sklopovima se u suštini svodi na opis sklopa i opis ponašanja sklopa u različitim situacijama sa svrhom da se razjasni što više pojedinsti u odnosu na veličinu i oblik signala, na prijenos signala kroz sklop, na ponašanje pri povišenoj temperaturi, i tome slično.

Električni sklopovi, koje želimo analizirati, sadrže pasivne elemente - otpore, kondenzatore i induktivitete i aktivne i pasivne nelinearne elemente - tranzistore, elektronske cijevi, diode. Analitičkim putem možemo rješavati samo neke jednostavne sklopove i to uz mnoga pojednostavnjenja i aproksimacije. Pažljivi će čitatelj mnogih analiza doći do zaključka da se problem u početku postavlja veoma široko i sa većim brojem detalja, naročito u modeliranju aktivnih elemenata, ali da je tokom razrade analize postupno uvedeno sve više pojednostavnjenja kako bi se dobio konačan rezultat. Na kraju, korisnik takove analize obično nije u stanju registrirati sve aproksimacije koje su uvedene, i veoma je teško dati ocjenu točnosti konačnog rezultata. Njena vrijednost je, općenito, u ukazivanju na osnovne osobine sklopa, to jest na stvaranje opće slike o pojedinim sklopovima.

Medjutim, takova analiza je nedostatna za konstrukciju uređaja. Zbog toga se uvijek prilazilo izradi samog sklopa, te se ispitivanjem istog različitim mjernim metodama dolazilo do konačne izbedbe koja je zadovoljavala postavljene kriterije. Ovako izvedeni sklop predstavljao je, dakle, ne samo realizaciju proračuna, već je bio i rezultat "tajne zanata" i intuicije konstruktora.

Analiza, koju smo spomenuli, uvijek je tretirala samo linearne mreže, a ukoliko mreža nije bila po svojoj naravi linearna, tada su svi nelinearni elementi morali biti linearizirani da bi

se moglo pristupiti proračunu.

Da bi analizirali električni sklop, primjenjujemo I ili II Kirchhoffov zakon i Ohmov zakon. Poznato je da za linearnu mrežu sa tri ili više čvorova, odnosno petlji, analitičko rješenje postaje složeno jer vodi prema prirodi mreže i vrsti analize na sustav algebarskih, odnosno, diferencijalnih jednačbi sa tri ili više nepoznanica. Pri tome treba uočiti da nelinearna svojstva elemenata uopće nisu uključena u mrežu, jer se čak najjednostavniji sklop sa nelinearnim elementom, serijski spoj naponskog izvora, otpora i diode ne može riješiti eksplicitno.

Zbog svih navedenih ograničenja konvencionalne analitičke analize, prilazimo primjeni numeričke analize potpomognute računskim strojem kao sredstvom realizacije. Čim smo prihvatili računalo kao sredstvo provedbe numeričke analize električnog sklopa, mogućnosti i zahtjevi vrtoglavo rastu, mogli bismo reći za "nekoliko redova veličine". Veličina mreže je preko pet stotina čvorova, (odnosno petlji) a nelinearni elementi su uključeni u mrežu sa svim svojim nelinearnim svojstvima.

Cilj je, dakle, analizom uz primjenu računala dobiti točnu sliku ponašanja složenih sklopova sa najfinijim detaljima u bilo kojem dijelu sklopa bez obzira na vrstu signala, veličinu sklopa i upotrebljene elemente, a sve to sa svrhom da svojstva zadanog sklopa možemo proučiti bez izrade modela u naravi. To znači da je proračun toliko točan da zamjenjuje rezultate koje se inače dobija mjerenjem. Dapače, kod projektiranja integriranih sklopova, modeli izradjeni od diskretnih elemenata bitno su se razlikovali po svojim osobinama od integrirane izvedbe. Proračun s pomoću računala pokazao se bližim izvedenom integriranom sklopu, jer je bilo moguće bolje simulirati sve elemente i parazitne efekte koji se u integriranoj tehnici javljaju.

Pored elementarnih zakona elektrotehnike tri su osnovna numerička postupka potrebna za analizu sklopova s mnogo elemenata:

- rješavanje sustava algebarskih jednačbi s mnogo nepoznanica i malom ispunom;

- iterativni postupak prilagodljiv nelinearnim poluvodičkim elementima vezan uz problem konvergencije;
- numerička integracija kod analize prijelaznih stanja vezana uz problem stabilnosti i točnosti rješenja kod mreža čije se svojstvene vrijednosti znatno razlikuju.

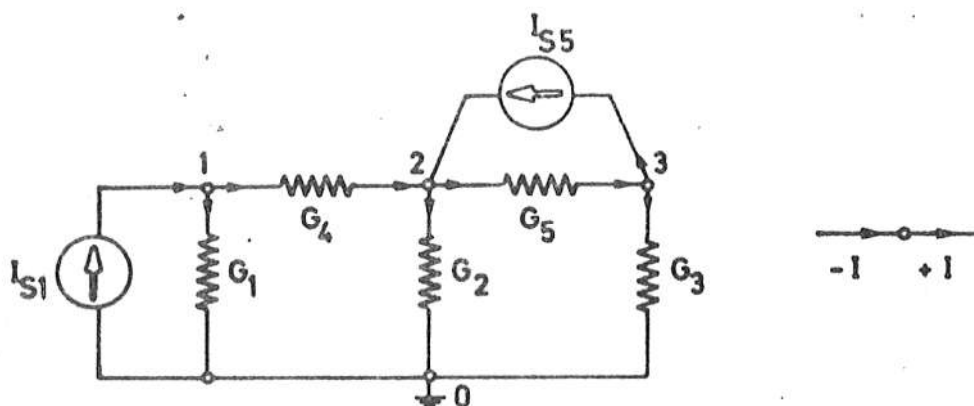
Svako od tri navedena područja bit će razmatrano, a oblici analize električnih mreža, koje se može provesti navedenim numeričkim postupcima, jesu:

- statička analiza pri kojoj se uz zadane istosmjerne napone izračuna stanje svih elemenata sklopa. Pri tome su sve kapacitivnosti u prekidu, a induktivnosti u kratkom spoju. Uz ovu analizu se pridodaje dobijanje istosmjerne prijenosne karakteristike sklopa jednostavnom promjenom ulaznog istosmjernog signala u željenim intervalima;
- analiza pri malom izmjeničnom signalu koja se vrši nakon što je istosmjerno stanje određeno. Svi nelinearni elementi se lineariziraju oko radne točke, a kapacitivnosti i induktivnosti su uključene u mrežu. Mijenjanjem frekvencije ulaznog signala dobija se amplitudna i fazna karakteristika sklopa;
- analiza prijelaznog stanja, odnosno, dinamička analiza vrši se uz bilo kakav ulazni signal u odnosu na amplitudnu i vremensku ovisnost. Svi elementi su uključeni u mrežu sa svim svojim svojstvima. Na izlazu se dobija vremenski odziv sklopa u bilo kojoj točki. Ovoj analizi se može pridodati Fourierova analiza izlaznog signala ukoliko je taj periodičan. Naime, ukoliko je na ulazu narinut veliki sinusni signal, na izlazu se javlja izobličen sinusoidalni signal čije više harmonike je moguće odrediti primjenom Fourierove analize.

Na kraju treba primijetiti da je s obzirom na arhitekturu i veličinu programa, te zauzeće memorije težište na statičkoj analizi. Jednom kada je program za statičku analizu pripremljen,

2. ELEMENTI ANALIZE MREŽE METODOM ČVORA

Analizu mreže možemo izvršiti bilo I bilo II Kirchhoffovim zakonom (I KZ - metoda čvora, II KZ - metoda petlji). Metoda čvora se pokazala prikladnijom, pa ćemo je i ovdje primjeniti. Po-
djimo pri tome od jednostavnog primjera s linearnom otpornom mre-
žom (sl. 1.)



Sl. 1. Orijentirana linearna mreža.

Opis mreže treba učiniti na jednostavan način da nekom dru-
gom, ili računskom stroju bude jednoznačno jasno o kakvoj se mre-
ži radi, a da je ne trebamo nacrtati. Takodjer ne želimo pisati
jednadžbe i time opisati mrežu, jer sebi želimo olakšati trud, a
"pisanje" jednadžbi prepustiti stroju.

Mrežu definiramo tako da označimo sve čvorove i grane iz-
među njih. Jedan čvor je referentni i on se obično označava
s 0.

U navedenom primjeru sa slike 1. mrežu ćemo opisati ovako
(sl. 2.):

R1	1	0	1 k
R2	2	0	2 k
R3	3	0	5 k
R4	1	2	1 k
R5	2	3	1 k
IS1.	0	1	1 A
IS5	3	2	1 A

Sl. 2: Opis mreže i definicija grane mreže.

Navedeni opis daje potpunu sliku mreže, prema kojem opisu se ona daje rekonstruirati, da se postaviti sve potrebne jednadžbe, pa prema tome i dobiti željeno rješenje. Jednostavno rečeno, princip korištenja računala se svodi na to da je naš zadatak završen nakon što smo mrežu prema navedenom načinu opisali. Ostali dio posla obaviti će računski stroj. Očito je da će zbog toga računalo imati dosta posla i da će program biti složen. Programi za automatski proračun električnih mreža sadrže od 5000 - 10000 naredbi (tj. 5000 - 10000 kartica). No jednom napisani i učitani u stroj oni se pohranjuju na magnetskoj traci ili diskovima kako bi se izbjeglo sasvim neekonomično učitavanje kartica, što bi ujedno značilo i veliki gubitak vremena za korisnika. Što više, jednom učitani program u simboličkom jeziku (npr. Fortran) prevede se (kompajlira) na vlastiti - tzv. strojni jezik računala i u tom obliku čuva za korištenje. Na taj način priredjen program omogućava da nakon učitavanja ulaznih podataka (opis mreže) proračun odmah može započeti.

2.1. Matrica vodljivosti

Podjimo još korak dalje u automatskoj obradi električnih mreža. Nakon što smo mrežu opisali na podesan način, pogledajmo kako možemo napisati jednadžbe koje opisuju mrežu. Pri tome ćemo nastojati sve računske operacije prikazati u matričnom obliku, jer je takav oblik vrlo prikladan za matematičku manipulaciju, a

isto tako i za programiranje.

Za mrežu na slici 1. napišimo jednačbe čvora, i Kirchhoffov zakon.

$$\begin{aligned} \text{čvor 1} \quad I_1 + 0 + 0 + I_4 + 0 &= I_{s1} \\ \text{čvor 2} \quad 0 + I_2 + 0 - I_4 + I_5 &= I_{s5} \\ \text{čvor 3} \quad 0 + 0 + I_3 + 0 - I_5 &= -I_{s5} \end{aligned} \quad (1)$$

i dalje

$$\begin{aligned} \text{čvor 1} \quad G_1 V_1 + G_4 (V_1 - V_2) &= I_{s1} \\ \text{čvor 2} \quad -G_4 (V_1 - V_2) + G_2 V_2 + G_5 (V_2 - V_3) &= I_{s5} \\ \text{čvor 3} \quad -G_5 (V_2 - V_3) + G_3 V_3 &= -I_{s5} \end{aligned}$$

i dalje

$$\begin{aligned} \text{čvor 1} \quad (G_1 + G_4) V_1 - G_4 V_2 + 0 &= I_{s1} \\ \text{čvor 2} \quad -G_4 V_1 + (G_2 + G_4 + G_5) V_2 - G_5 V_3 &= I_{s5} \\ \text{čvor 3} \quad 0 - G_5 V_2 + (G_3 + G_5) V_3 &= -I_{s5} \end{aligned} \quad (2)$$

U matričnoj formi izraz (2) glasi:

$$\begin{array}{l} \text{čvor 1} \\ \text{čvor 2} \\ \text{čvor 3} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} G_1 + G_4 & -G_4 & 0 \\ -G_4 & G_2 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_3 + G_5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} I_{s1} \\ I_{s5} \\ -I_{s5} \end{array} \right| \quad (3)$$

čvor 1 čvor 2 čvor 3

ili simbolički

$$\underline{G} \underline{V}_n = \underline{I}_{sn}$$

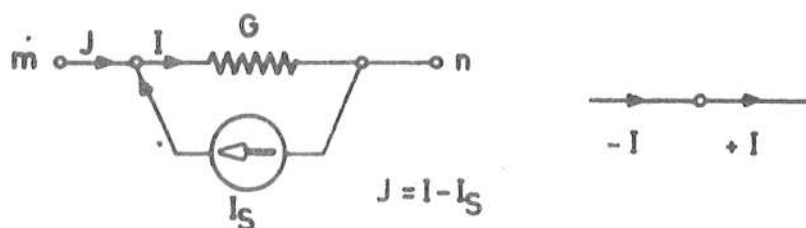
gdje je $\underline{G}$ matrica vodljivosti iz (3), vektor $\underline{V}_n$ je vektor napona čvorova prema referentnom čvoru (čvor nula ili uzemljenje), a s desne strane je vektor strujnih izvora $\underline{I}_{sn}$. Uočimo na ovom mjestu način na koji je složena matrica $\underline{G}$, uspoređujući je sa rasporedom elemenata na slici 3.:

- dijagonalni član ii je suma svih vodljivosti koje su vezane za čvor i ,
- ostali članovi u retku i se nalaze na mjestima ij i to tako da na mjesto ij dolazi ona vodljivost koja vezuje čvor i i čvor j , ali sa negativnim predznakom,
- vodljivosti koje su s čvora i vezane na referentni čvor nalaze se samo u dijagonali.

Vektor strujnih izvora ima na pojedinom mjestu zbroj svih struja strujnih izvora koje ulaze u taj čvor. Ovaj postupak je vrlo prikladan za slaganje matrica iz toploškog opisa mreže koji je dan na slici 2. Medjutim, izraz $\underline{G} \underline{V}_n = \underline{I}_{sn}$ se može dobiti postepeno primjenjujući osnovne zakone kao što su I Kirchhoffov zakon, Ohmov zakon i definiciju pada napona na otporu koji je jednak razlici potencijala na krajevima otpora.

Napišimo sva tri zakona za cijelu mrežu u matričnoj formi.

I Kirchhoffov zakon. Standardnu granu mreže definiramo prema slici 3. Između čvora m i n nalazi se vodljivost G i paralelno njoj strujni izvor I_s .



Sli. 3. Standardna grana mreže.

Ukupna struja grane je $J = I - I_s$. Grana mreže može sadržavati samo vodljivost G , samo strujni izvor I_s ili istovremeno oboje. Uzimajući u obzir ovu definiciju izraz (1) možemo napisati

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{vmatrix} = 0, \text{ tj.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 - I_{s1} \\ I_2 - 0 \\ I_3 - 0 \\ I_4 - 0 \\ I_5 - I_{s5} \end{vmatrix} = 0$$

ili u matričnoj formi

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{J}} &= 0, \\ \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{I}}_s) &= 0 \\ \underline{\underline{A}} \underline{\underline{I}} &= \underline{\underline{A}} \underline{\underline{I}}_s, \quad \text{I K.Z.} \end{aligned} \quad (4)$$

Matrica $\underline{\underline{A}}$ zove se matrica incidencija i može se konstruirati iz topološkog prikaza mreže (vidi slike 1. i 2.). Idući od grane 1 do 5 pišemo 1 na mjestu onog čvora iz kojeg struja grane izlazi, a -1 na mjestu čvora u koji struja ulazi.

Matrica $\underline{\underline{A}}_t$ je ukupna matrica incidencije, koja obuhvaća i referentni čvor. Vidimo da je četvrti redak matrice $\underline{\underline{A}}_t$ suvišan, jer se daje jednoznačno rekonstruirati iz prva tri. Na primjer u prvom stupcu (grana 1) nalazimo samo +1, što znači da se -1 nala-

zi u četvrtom retku, što znači da je prva grana spojena između čvora 1 i referentnog čvora.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 \text{grana} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 \hline
 \text{čvor 1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \text{čvor 2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
 \text{čvor 3} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 \text{-----} & & & & & \\
 \text{čvor 4=0} & -1 & -1 & -1 & 0 & 0
 \end{array} = A_t$$

Isto tako pregledom slike 1. vidimo da mreža ima četiri čvora. No budući da jednom čvoru možemo pridati vrijednost nula, stvarni broj nepoznanica je 3.

Ohmov zakon. Za svaku granu mreže možemo napisati vezu između napona i struje kako slijedi:

$$\begin{array}{lcl}
 G_1 V_{b1} = I_1 \\
 G_2 V_{b2} = I_2 \\
 G_3 V_{b3} = I_3 \\
 G_4 V_{b4} = I_4 \\
 G_5 V_{b5} = I_5
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c|ccccc}
 G_1 & & & & \\
 & G_2 & & 0 & \\
 & & G_3 & & \\
 & 0 & & G_4 & \\
 & & & & G_5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 V_{b1} \\
 V_{b2} \\
 V_{b3} \\
 V_{b4} \\
 V_{b5}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 I_1 \\
 I_2 \\
 I_3 \\
 I_4 \\
 I_5
 \end{array}
 , \text{ ili}$$

$$\underline{G}_D \underline{V}_b = \underline{I} , \quad \text{Ohmov zakon} \quad (5),$$

gdje je $\underline{G}_D$ dijagonalna matrica vodljivosti, vektor $\underline{V}_b$ vektor napona grana, a $\underline{I}$ vektor struje grana.

Definicija pada napona na grani, se dobije odredjivanjem napona grane iz razlike potencijala na krajevima grane,

$$\begin{array}{lcl} v_1 & = & v_{b1} \\ v_2 & = & v_{b2} \\ v_3 & = & v_{b3} \\ v_1 - v_2 & = & v_{b4} \\ v_2 - v_3 & = & v_{b5} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & v_1 & v_{b1} \\ 0 & 1 & 0 & v_2 & v_{b2} \\ 0 & 0 & 1 & v_3 & v_{b3} \\ 1 & -1 & 0 & & v_{b4} \\ 0 & 1 & -1 & & v_{b5} \end{array} , \text{ ili}$$

$$\tilde{A}^t \underline{v}_n = \underline{v}_b . \quad (6)$$

Matrica koja povezuje napone čvorova i grana je transponirana matrica incidencija $\tilde{A}^t$.

Povežimo sada izraze (4), (5) i (6)

$$\begin{aligned} \tilde{A} \underline{I} &= \tilde{A} \underline{I}_s , \\ \tilde{G}_D \underline{v}_b &= \underline{I} , \\ \tilde{A}^t \underline{v}_n &= \underline{v}_b , \end{aligned} \quad (7)$$

gdje jednostavno uvrštavanje daje:

$$\begin{aligned} \tilde{A} \tilde{G}_D \underline{v}_b &= \tilde{A} \underline{I}_s , \\ \tilde{A} \tilde{G}_D \tilde{A}^t \underline{v}_n &= \tilde{A} \underline{I}_s , \\ \tilde{G} \underline{v}_n &= \tilde{A} \underline{I}_s , \end{aligned} \quad (8)$$

gdje je $\tilde{G} = \tilde{A} \tilde{G}_D \tilde{A}^t$. Dakle, matricu vodljivosti dobili smo sada postepeno, koristeći matricu incidencija i dijagonalnu matricu vodljivosti.

Iz izraza (8) izračunaju se naponi čvorova prema

$$\underline{V}_n = \underline{G}^{-1} \underline{A} \underline{I}_s \quad (9)$$

Sve ostale parametre mreže možemo izračunati iz poznatih napona čvorova prema izrazu (7) :

$$\text{naponi grana} \quad \underline{V}_b = \underline{A}^t \underline{V}_n ,$$

$$\text{struje grana} \quad \underline{I} = \underline{G}_D \underline{V}_b = \underline{G}_D \underline{A}^t \underline{V}_n .$$

Izračunajmo matricu $\underline{G} = \underline{A} \underline{G}_D \underline{A}^t$ za mrežu na slici 1.:

$$\underline{A} \underline{G}_D \underline{A}^t = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} G_1 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & -G_4 & G_5 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & -G_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (G_1+G_4) & -G_4 & 0 \\ -G_4 & (G_2+G_4+G_5) & -G_5 \\ 0 & -G_5 & (G_3+G_5) \end{vmatrix} = \underline{G}$$

2.2. Zavisni strujni izvori

U bilo kojoj grani mreže može se nalaziti strujni izvor. Ti strujni izvori mogu biti nezavisni ili zavisni. Nezavisni strujni izvori idu u vektor s desne strane kako je već ranije prikazano. Zavisni strujni izvori se ovako tretiraju (sl. 4.): pretpostavimo da se radi o nazivisnom strujnom izvoru. Takav izvor bi se nalazio

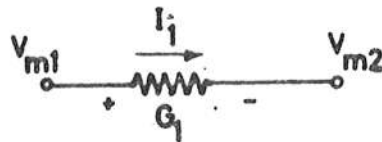
u desnom vektoru. Zatim taj izvor opišemo naponima upravljačkih čvorova i članove s desne strane prebacimo na lijevu stranu.

Struja upravljačke grane je

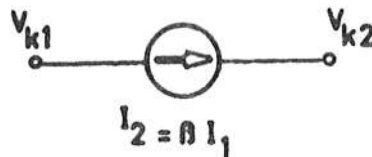
$$I_1 = G_1 (V_{m1} - V_{m2}) ,$$

a zavisna struja je

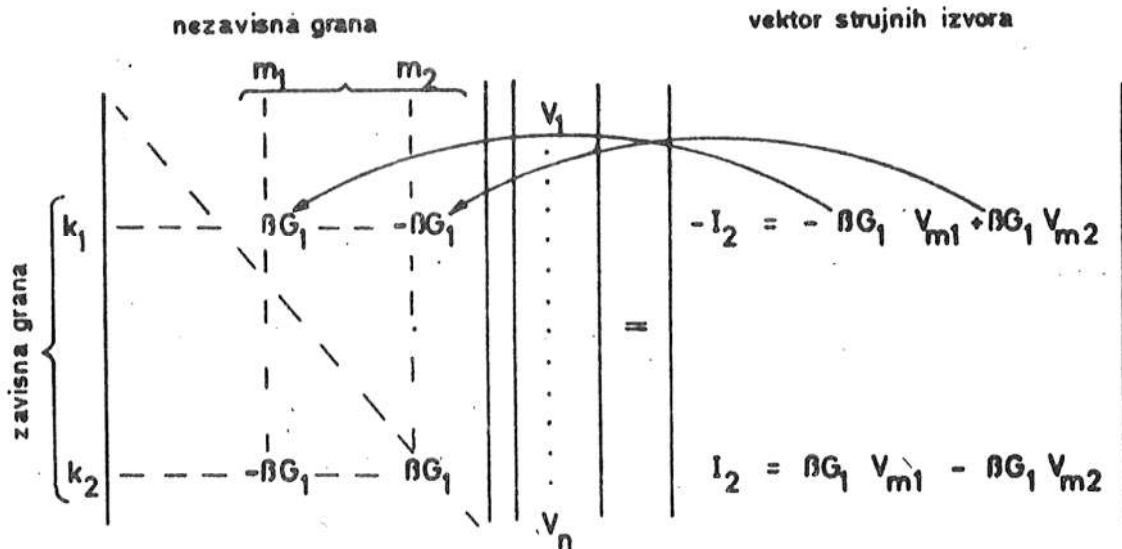
$$I_2 = \beta I_1 = \beta G_1 (V_{m1} - V_{m2}) .$$



upravljačka, nezavisna grana

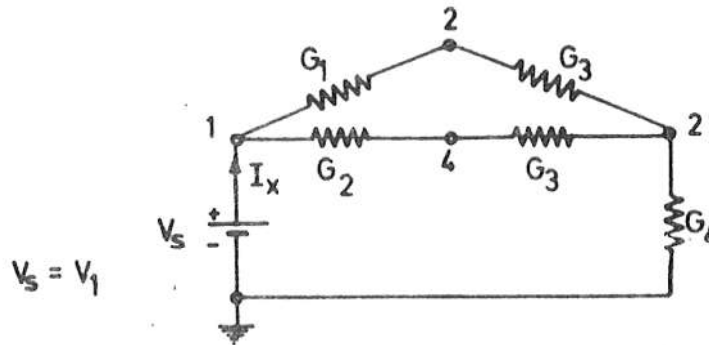


upravljana, zavisna grana



Sl. 4. Prikaz umetanja zavisnog strujnog izvora u $\tilde{G}$ matricu.

kako se takovi izvori mogu uključiti u matrični izraz (8). Podjimo od primjera na slici 5. Opišimo mrežu uz pretpostavku da nam je poznata struja naponskog izvora I_x :



Sl. 5. Mreža sa naponskim izvorom kojemu je jedan pol uzemljen.

$$\begin{vmatrix} G_1+G_2 & -G_1 & 0 & -G_2 \\ -G_1 & G_1+G_3 & -G_3 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_3+G_4+G_5 & -G_5 \\ -G_2 & 0 & -G_5 & G_2+G_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_s \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (10)$$

gdje je $V_1 = V_s$.

Premjestimo sada prvi stupac na desno i prvi redak na dno. Prva operacija znači da mijenjamo raspored nepoznanica V_n : od V_s, V_2, V_3, V_4 dobijemo V_2, V_3, V_4, V_s , tj. nepoznati napon V_s dolazi na dno vektora $\underline{V}_n$. Nakon ove operacije $\underline{G}$ matrica je nesimetrična, a struja I_x je ostala na istom mjestu. Druga operacija znači da prebacujemo cijelu prvu jednadžbu na posljednje mjesto pa s tim mijenjamo raspored strujnog vektora $\underline{I}$: od $I_x, 0, 0, 0$ dobijemo $0, 0, 0, I_x$. Nakon ove operacije $\underline{G}$ matrica je opet simetrična matrica, a nepoznata struja I_x se nalazi na dnu strujnog vektora. Nakon što su obe operacije provedene izraz (10) prelazi u

$$\begin{array}{ccc|ccc|c}
 G_1+G_3 & -G_3 & 0 & -G_1 & V_2 & & 0 \\
 -G_3 & G_3+G_4+G_5 & -G_5 & 0 & V_3 & = & 0 \\
 0 & -G_5 & G_2+G_5 & -G_2 & V_4 & & 0 \\
 \hline
 -G_1 & 0 & G_2 & G_1+G_2 & V_s & & I_x
 \end{array} \quad (11)$$

Ovaj izraz možemo u sažetom obliku napisati kao

$$\begin{array}{cc|c|c}
 G_{nn} & G_{ns} & V_n & I_s \\
 \hline
 G_{sn} & G_{ss} & V_s & I_x
 \end{array} = \quad (12)$$

Iz (12) prema pravilu za matrični račun izlazi:

$$\begin{aligned}
 G_{nn} \underline{V}_n + G_{ns} \underline{V}_s &= \underline{I}_s \\
 G_{sn} \underline{V}_n + G_{ss} \underline{V}_s &= \underline{I}_x
 \end{aligned} \quad (13)$$

Prva jednačba iz (13) nam daje:

$$G_{nn} \underline{V}_n = (\underline{I}_s - G_{ns} \underline{V}_s) , \quad (14)$$

i dalje

$$\underline{V}_n = G_{nn}^{-1} (\underline{I}_s - G_{ns} \underline{V}_s) .$$

Dakle, opisanim postupkom smanjili smo broj nepoznanica sustava i omogućili rad s naponskim izvorima. Druga jednačba iz (13) nakon što smo prema (14) izračunali napone čvorova $\underline{V}_n$, omogućava izračunavanje struja I_x koje teku naponskim izvorima.

Vratimo se opet našem primjeru i sredimo izraz (11) prema (13):

$$\begin{vmatrix} G_1+G_3 & -G_3 & 0 \\ -G_3 & G_3+G_4+G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_2+G_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_1 V_s \\ 0 \\ G_2 V_s \end{vmatrix} \quad i$$

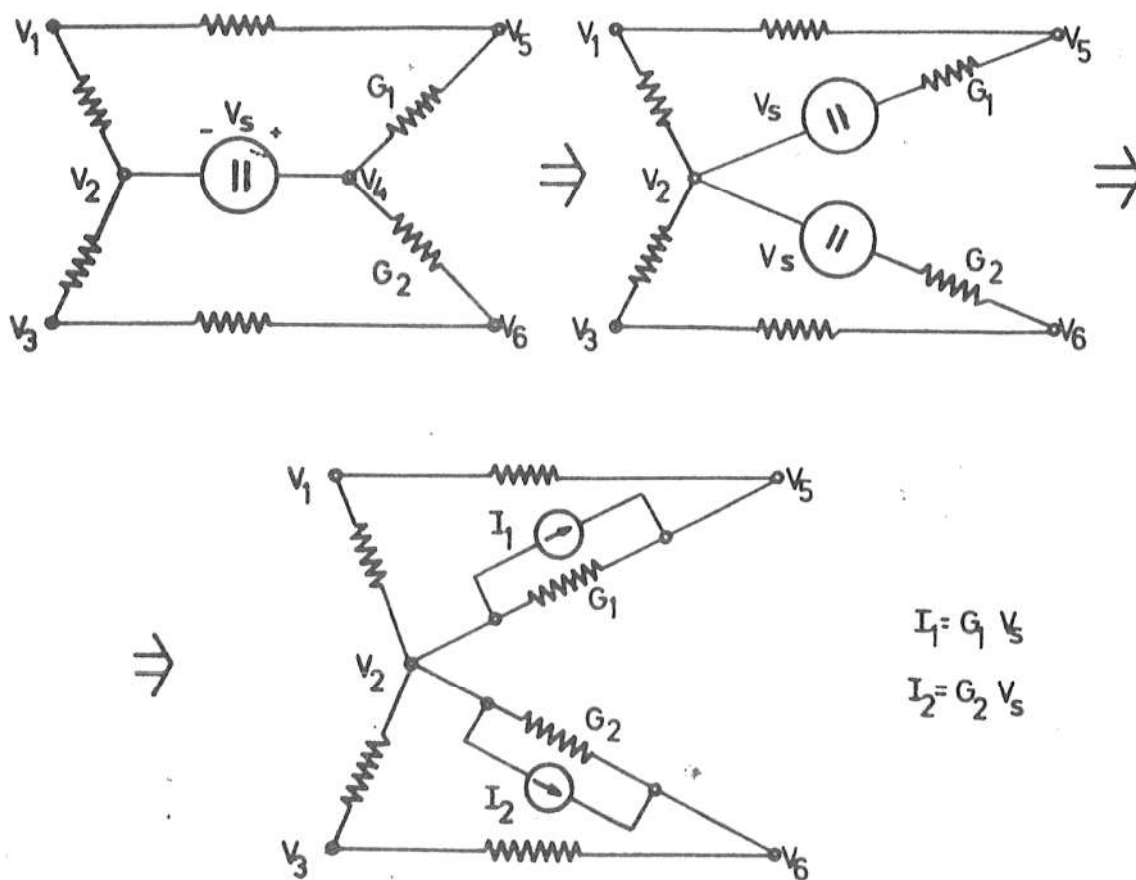
$$I_x = -G_1 V_2 + G_2 V_4 + (G_1+G_2) V_s .$$

Ukoliko u mreži ima više naponskih izvora kojima je jedan pol uzemljen, svi oni se eliminiraju tako da se stupci koji sadrže napone V_s i reci koji sadrže struje I_x prebacuju krajnje desno, odnosno na samo dno matričnog izraza.

b) Naponski izvori spojeni između bilo koja dva čvora

U ovom slučaju procedura je složenija, a primjena se kod analize električnih mreža vrlo rijetko susreće. Zbog toga nećemo dati cijeli algebarski postupak, već ćemo samo načelno opisati kako bi se i takovi naponski izvori mogli uključiti u mrežu i računati metodom čvora. Imamo li naponski izvor u mreži prema slici 6. moguće je mrežu na mjestu gdje se nalazi naponski izvor V_s prikazati kao da se sastoji iz tri posebna naponska izvora V_s . Time smo dobili tri grane V_s, G , a čvor V_4 je iščezao. Nakon toga potreban je još jedan korak, serijski spoj napona i vodljivosti po Nortonovom teoremu zamjenimo sa paralelnim spojem strujnog izvora $G V_s$ i vodljivosti kao što je to prikazano na slici 6.

Time je postupak eliminacije naponskog izvora završen.



Sl. 6. Ilustracija postupka sa naponskim izvorom koji je spojen izmedju bilo koja dva čvora.

3. RJEŠAVANJE SUSTAVA ALGEBARSKIH JEDNADŽBI

3.1. Gaussova eliminacija

U poglavlju 2. smo opisali kako se dobije matrica $\underline{G}$ i vektor $\underline{I}_s$, te je mreža opisana s izrazom $\underline{G} \underline{V}_n = \underline{I}_{sn}$. Rješenje po naponima čvorova pišemo simbolički

$$\underline{V}_n = \underline{G}^{-1} \underline{I}_{sn} \quad (15)$$

gdje je $\underline{G}^{-1}$ inverzna matrica od $\underline{G}$. Postupak dobijanja rješenja objasniti ćemo, kako je to u matematici uobičajeno na primjeru

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b},$$

odakle je

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}. \quad (16)$$

Postupak dobijanja rješenja Cramerovim pravilom zahtjeva $n!$ računskih operacija što je neizvedivo za veće matrice. Spomenimo da je $10! = 3\,628\,800$, a $20! = 2,432 \cdot 10^{18}$.

Zbog toga se sustav jednadžbi rješava metodom Gaussove eliminacije, a taj postupak zahtjeva približno $n^3/3$ računskih operacija. Gaussova eliminacija se sastoji u tome da se iz prve jednadžbe eliminira prva nepoznanica i uvrsti u svih preostalih $(n-1)$ jednadžbi. Opišimo postupak na primjeru s 3 jednadžbe s 3 nepoznane. Primjenit ćemo modificiranu Gaussovu eliminaciju koja se onda zove i redukcija po Crout-u. U čisto Gaussovoj eliminaciji se iz prvog retka izluči x_1 , a po Crout-u se izluči $a_{11} x_1$. Dakle, imamo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix},$$

ili opširnije napisano

$$\begin{aligned}a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1 \\a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= b_2 \\a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= b_3 .\end{aligned}$$

Podijelimo članove prvog stupca sa a_{11} :

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^1 & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| . \quad (17)$$

Iz prve jednačbe izlučimo $a_{11} x_1$:

$$a_{11} x_1 = b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3$$

i to uvrstimo u drugu i treću jednačbu:

$$\begin{aligned}\frac{a_{21}}{a_{11}} (b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3) + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= b_2 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} (b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3) + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= b_3 ,\end{aligned}$$

što nakon sredjivanja daje

$$\begin{aligned}(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}) x_2 + (a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}) x_3 &= b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \\ (a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12}) x_2 + (a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13}) x_3 &= b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_1 .\end{aligned} \quad (18)$$

Skraćeno to pišemo kao

$$a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 = b_2^1$$

$$a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 = b_3^1 .$$

Dakle, opisanim postupkom smo eliminirali nepoznanicu x_1 , tj. reducirali smo red sustava sa n na $(n-1)$. Postupak nastavljamo eliminacijom x_2 :

$$(a_{33}^1 - \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} a_{23}^1) x_3 = b_3^1 - \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} b_2^1 ,$$

ili

$$a_{33}^2 x_3 = b_3^2 .$$

Nakon završenog postupka eliminacije dobijemo ovakvu shemu:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \quad (19.a)$$

$$0 + a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 = b_2^1 \quad (19.b)$$

$$0 + 0 + a_{33}^2 x_3 = b_3^2 \quad (19.c)$$

Iz izraza (19) lako izračunavamo nepoznanice x . Iz jednadžbe (19.c) imamo:

$$x_3 = b_3^2 / a_{33}^2 .$$

Uvrstimo vrijednost x_3 u jednadžbu (19.b) pa dobijemo:

$$x_2 = (b_2^1 - a_{23}^1 x_3) / a_{22}^1$$

i na kraju x_2, x_3 uvrstimo u jednadžbu (19.a) i izračunamo x_1 .

Pokušajmo sada uočiti mehanizam eliminacije na slijedeći način:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
 \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{11} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{array} & \begin{array}{c} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{array} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & = & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \\
 \hline
 \end{array} \quad (20)$$

nakon čega imamo:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 & & b_1 \\
 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & x_2 & = & b_2^1 \\
 0 & a_{32}^1 & a_{33}^1 & x_3 & & b_3^1
 \end{array}$$

Eliminacija se ponavlja sve dok se ne dodje do zadnje nepoznani-
ce.

Važan podatak je broj računskih operacija potreban za dobi-
janje rješenja po Gaussovoj eliminaciji. Uvedimo oznake D - dije-
ljenje, M - množenje, O - oduzimanje.

Prema opisanom postupku trebamo:

ELIMINACIJA	PRVI	REDUCIRANA			VEKTOR		RJEŠENJE		
	STUPAC	MATRICA			B		X		
	D	M	O	M	O	M	O	D	
x_1	(n-1)	(n-1) ²	(n-1) ²	(n-1)	(n-1)	(n-1)	(n-1)	(n-1)	1
x_2	(n-2)	(n-2) ²	(n-2) ²	(n-1)	(n-1)	(n-2)	(n-2)	(n-2)	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x_{n-1}	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x_n	-	-	-	-	-	-	-	-	1
	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n
	$\sum_{i=1}^{n-1}$	$\sum_{i=1}^{n-1} i^2$	$\sum_{i=1}^{n-1} i^2$	$\sum_{i=1}^{n-1} i$	$\sum_{i=1}^{n-1} i$	$\sum_{i=1}^{n-1} i$	$\sum_{i=1}^{n-1} i$	$\sum_{i=1}^{n-1} i$	
PRIBLIŽNO	$n^2/2$	$n^3/3$	$n^3/3$	$n^2/2$	$n^2/2$	$n^2/2$	$n^2/2$	$n^2/2$	0

Broj računskih operacija je, kako vidimo, određen s dva tipa sume prirodnih brojeva $\sum i$ i $\sum i^2$.

$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$, jer je zadana suma aritmetički niz prirodnih brojeva od 1 do $(n-1)$ što daje $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ i što aproksimiramo sa $\frac{n^2}{2}$.

$\sum_{i=1}^{n-1} i^2$ je suma kvadrata prirodnih brojeva i jednaka je

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

što aproksimiramo sa $\frac{n^3}{3}$ 1).

Kod redukcije matrice A trebamo, dakle,

$$\frac{n^3}{3} M + \frac{n^2}{2} D + \frac{n^3}{3} O,$$

gdje obično zadržimo samo prvi član $\frac{n^3}{3} M$, jer zahtjeva najviše operacija i najviše vremena po jednoj operaciji. Sredjivanje vektora b zahtjeva

$$\frac{n^2}{2} M + \frac{n^2}{2} O,$$

gdje zadržavamo prvi član $\frac{n^2}{2} M$. Za dobijanje rješenja treba takodjer približno $n^2/2 M$.

Za primjer uzmimo $n=30$, u kojem slučaju imamo:

$$\frac{n^3}{3} = 9000 \quad \text{i} \quad \frac{n^2}{2} = 450$$

Vidimo da najviše vremena i napora u proračunu zahtijeva $\frac{n^3}{3}$ množenja. Sve druge operacije znatno manje opterećuju proračun.

1) Približni izraz za $\sum_{i=1}^{n-1} i^2$ se može dobiti iz integrala $\int_1^{n-1} i^2 di$.

Numerički primjer za Gaussovu eliminaciju:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & x_1 & & 1 \\ 4 & 5 & 8 & x_2 & = & 2 \\ 6 & 2 & 2 & x_3 & & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & x_1 & & 1 \\ 2 & 1 & 2 & x_2 & = & 0 \\ 3 & -4 & -7 & x_3 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & x_1 & & 1 \\ 2 & 1 & 2 & x_2 & = & 0 \\ 3 & -4 & 1 & x_3 & & 1 \end{array}$$

Rješenje je:

$$x_3 = 1 ,$$

$$x_2 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$x_1 = (1 - 3 \cdot 1 - 2(-2))/2 = 1 .$$

Izvršimo kontrolu uvrštavanjem rješenja u zadane jednadžbe:

$$2 - 4 + 3 = 1$$

$$4 - 10 + 8 = 2$$

$$6 - 4 + 2 = 4 .$$

Prema izrazu (16), $\underline{x} = \underline{\tilde{A}}^{-1} \underline{b}$, ukoliko se promjeni vektor $\underline{b}$, matrica $\underline{\tilde{A}}^{-1}$ se ne mijenja i do rješenja $\underline{x}$ se dolazi jednostavnim postupkom množenja matrice $\underline{\tilde{A}}^{-1}$ s novim vektorom $\underline{b}$. Kod primjene Gaussove eliminacije, umjesto inverzne matrice $\underline{\tilde{A}}^{-1}$ dobijemo izraz (19) iz kojeg izračunamo nepoznati vektor $\underline{x}$. Na prvi pogled promjena vektora $\underline{b}$ bi trebala zahtijevati ponavljanje Gaussove eliminacije u cjelini, tj. približno $n^3/3$ računskih operacija. Vidjet ćemo da to nije potrebno i da je u slučaju kada se mijenja

samo vektor $\underline{b}$, broj računskih operacija znatno manji - n^2 . Naime, očito je da koeficijente a_{ij} ne treba u izrazu (19) ponovo računati, već samo vektor $\underline{b}$ ($b_1, b_2^1, b_3^2, \dots, b_n^{n-1}$), a za obradu vektora $\underline{b}$ se koriste oni članovi u stupcima koji se nalaze ispod dijagonale. Ti članovi u toku eliminacije iščeznu i na njihovom mjestu se pojave nule. Medjutim, ukoliko te članove sačuvamo, onda ponavljanje proračuna zbog promjene vektora $\underline{b}$ zahtijeva $\frac{n^2}{2}$ računskih operacija za sredjivanje vektora $\underline{b}$ i $n^2/2$ operacija za dobijanje rješenja, dakle ukupno n^2 operacija.

Ova dopuna Gaussove eliminacije po kojoj se sačuvaju svi članovi ispod glavne dijagonale vodi na tzv. LU dekompoziciju. Nazovimo matricu prema izrazu (19) gornjom trokutnom matricom $\underline{U}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{vmatrix} = \underline{U}$$

Nazovimo članove koji nastaju tokom eliminacije ispod dijagonale donjom trokutnom matricom $\underline{L}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}^1 & 1 & 0 \\ a_{31}^1 & a_{32}^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix} = \underline{L},$$

gdje smo članovima ispod dijagonale dodali još dijagonalne članove koji su svi jednaki 1.

Može se pokazati da vrijedi:

$$\underline{L} \underline{U} = \underline{A},$$

pa onda slijedi iz

$$\underline{\tilde{A}} \underline{x} = \underline{b} , \quad (21.a)$$

$$\underline{\tilde{L}} \underline{\tilde{U}} \underline{x} = \underline{b} , \quad (21.b)$$

$$\underline{\tilde{U}} \underline{x} = \underline{y} , \quad (21.c)$$

$$\underline{\tilde{L}} \underline{y} = \underline{b} ,$$

odakle je

$$\underline{y} = \underline{\tilde{L}}^{-1} \underline{b} . \quad (21.d)$$

Sada $\underline{y}$ uvrstimo u (21.b) te izračunamo

$$\underline{x} = \underline{\tilde{U}}^{-1} \underline{y} . \quad (21.e)$$

Ukoliko dalje razmotrimo izraze (21) onda vidimo slijedeće: izraz (21.a), tj. matrice $\underline{\tilde{L}}$ i $\underline{\tilde{U}}$ dobijemo uobičajenim postupkom Gaussove eliminacije; izraz (21.d), tj. vektor $\underline{y}$ je u stvari simbolički prikaz sredjivanja vektora $\underline{b}$; izraz (21.3) je simbolički prikaz dobijanja rješenja $\underline{x}$ iz reducirane matrice $\underline{A}$.

3.2. Poboljšanje točnosti rješenja

Ukoliko želimo postići veću točnost proračuna postupamo ovako: dobivena rješenja sustava $\underline{\tilde{A}} \underline{x} = \underline{b}$ označimo sa $\bar{x}_1 - \bar{x}_n$. Uvrštavanjem $\bar{x}_1 - \bar{x}_n$ u originalne jednadžbe imamo:

$$a_{11} \bar{x}_1 + a_{12} \bar{x}_2 + \dots + a_{1n} \bar{x}_n = \bar{b}_1 \neq b_1$$

$$a_{21} \bar{x}_1 + a_{22} \bar{x}_2 + \dots + a_{2n} \bar{x}_n = \bar{b}_2 \neq b_2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$a_{n1} \bar{x}_1 + a_{n2} \bar{x}_2 + \dots + a_{nn} \bar{x}_n = \bar{b}_n \neq b_n$$

Ovim putem se ocjenjuje ispravnost našeg proračuna. Naime, kada bi svi $\bar{x}_1$ do $\bar{x}_n$ bili točno izračunati, tada bi i svi $\bar{b}$

bili jednaki b . Iz razlike $(b_1 - \bar{b}_1)$ do $(b_n - \bar{b}_n)$ zaključujemo na točnost proračuna. Većina programa ima uključenu ovu kontrolu. Međutim ovaj jednostavni postupak kontrole omogućava nam i poboljšanje točnosti traženog rješenja na ovaj način: odbijemo od originalne jednadžbe izračunatu

$$\begin{array}{l} a_{11}(x_1 - \bar{x}_1) + a_{12}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + a_{1n}(x_n - \bar{x}_n) = b_1 - \bar{b}_1 \\ \vdots \\ a_{n1}(x_1 - \bar{x}_1) + a_{n2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + a_{nn}(x_n - \bar{x}_n) = b_n - \bar{b}_n \end{array}$$

ili

$$\begin{array}{l} a_{11} \Delta x_1 + a_{12} \Delta x_2 + \dots + a_{1n} \Delta x_n = \Delta b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} \Delta x_1 + a_{n2} \Delta x_2 + \dots + a_{nn} \Delta x_n = \Delta b_n \end{array}$$

Budući da je A matrica ista, a promijenili su se samo članovi $b_1 \div b_n$ u $\Delta b_1 \div \Delta b_n$ to račun ponovimo uz samo n^2 operacije i izračunamo nepoznanice $\Delta x_1 \div \Delta x_n$. Tada imamo za nove vrijednosti od x :

$$\begin{array}{l} x_1 = \bar{x}_1 + \Delta x_1 \\ \vdots \\ x_n = \bar{x}_n + \Delta x_n \end{array}$$

Ovaj postupak možemo ponoviti više puta kako bi točnost bila što veća.

3.3 Inverzna matrica

Ranije smo spomenuli koliko je složeno dobiti inverznu matricu Cramerovim pravilom. Koristeći na spretan način Gaussovu eliminaciju, možemo dobiti sve koeficijente inverzne matrice uz približno n^3 računskih operacija. Podjimo ovim redom: zadan je sustav $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$, simboličko rješenje je $\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$. Nazovimo elemente inverzne matrice $\underline{A}^{-1} |\alpha_{ij}|$ (za razliku od elemenata (a_{ij}) matrice $\underline{A}$).

Pretpostavimo da nam je matrica $\underline{A}^{-1}$ poznata. Tada možemo napisati:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} b_1 + \alpha_{12} b_2 + \dots + \alpha_{1n} b_n \\ x_2 &= \alpha_{21} b_1 + \alpha_{22} b_2 + \dots + \alpha_{2n} b_n \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_{n1} b_1 + \alpha_{n2} b_2 + \dots + \alpha_{nn} b_n \end{aligned} \quad (22)$$

Ukoliko su svi elementi vektora $\underline{b}$ nula osim prvog koji je $b_1=1$ tada se gornji sustav reducira na:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} \\ x_2 &= \alpha_{21} \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_{n1} \end{aligned} \quad (23)$$

Ukoliko su svi $b_i=0$ osim $b_2=1$ tada imamo:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a_{21} \\
 x_2 &= a_{22} \\
 &\vdots \\
 x_n &= a_{n2} \quad \text{itd.}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Provedimo sada Gaussovu eliminaciju nad sustavom $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$, gdje ćemo za $\underline{b}$ uzeti:

$$\underline{b}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{b}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad \underline{b}_n = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \tag{25}$$

što simbolički možemo napisati kao:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, \dots \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Prvi niz rješenja $x_1 - x_n$ mora biti identičan s jednadžbom (23), drugi niz s jednadžbom (24), itd. Dakle dobivena rješenja ($x_1 \div x_n$) predstavljaju koeficijente inverzne matrice. Broj potrebnih računskih operacija je slijedeći:

- sredjivanje matrice $\underline{A}$, $n^3/3$ operacija
- sredjivanje 1-vog desnog stupca $\underline{b}$, $n^2/2$ operacija
- izračunavanje $x_1 \div x_n$, $n^2/2$ operacija.

Sredjivanje matrice A više nije potrebno, te nastavljamo od drugog stupca dalje na ovaj način:

- sredjivanje 2-gog desnog stupca b , ali s početkom u $b_2=1$, jer je $b_1=0$ pa nemamo što srediti, $(n-1)^2/2$ operacija
- izračunavanje $x_1 \div x_n$, $n^2/2$ operacija
- sredjivanje 3-ćeg desnog stupca b s početkom u $b_3=1$, $(n-2)^2/2$ operacija
- izračunavanja $x_1 \div x_n$, $n^2/2$ operacija, itd.

Dakle, ukupno trebamo:

$$\frac{n^3}{3} + \left(\frac{n^2}{2} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-2)^2}{2} + \dots + \frac{2^2}{2} + \frac{1}{2} \right) + n \frac{n^2}{2}.$$

Srednja suma je jednaka

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{2} \frac{n^3}{3} = \frac{n^3}{6}$$

pa možemo napisati za ukupni broj računskih operacija:

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^3}{6} + \frac{n^3}{2} = n^3.$$

To je samo tri puta više nego li je potrebno za izračunati sustav $A \underline{x} = \underline{b}$.

3.4. Primjer programa u Fortranu za Gaussovu eliminaciju

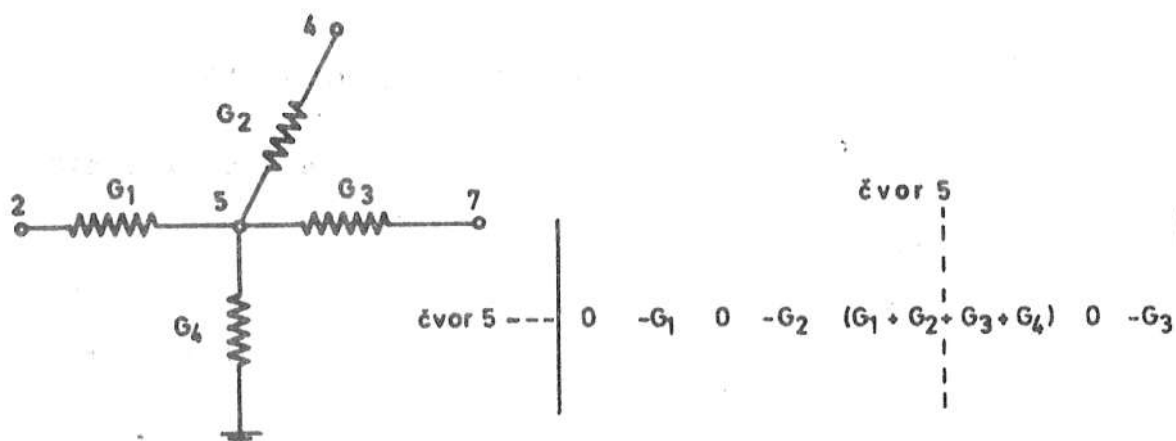
Da bi smo ilustrirali jednostavnost računskog postupka po Gaussovoj eliminaciji navodimo program u FORTRANU za rješavanje sustava od N algebarskih jednažbi.

```

      ARUN
      AFOR, IS
      C
      C      REZERVIRANJE POLJA ZA ELEMENTE MATRICE A,
      C      VEKTOR B I RJESENJA X
      C
      C      DIMENSION A(100,100),B(100),X(100)
      C
      C      UCITAVANJE ELEMENATA MATRICE A I VEKTORA B
      C
      C      READ(5,100) N
      C      READ(5,101) ((A(I,J),I=1,N),J=1,N),(B(I),I=1,N)
100  FORMAT (I5)
101  FORMAT (10F8.1)
      DO 15 J=1,N
      K=J+1
      C
      C      RACUNANJE PRVOG STUPCA MATRICE A I VEKTORA B
      C
      C      DO 16 I=K,N
      C      A(I,J)=A(I,J)/A(U,U)
16   B(I)=B(I)-A(I,J)*B(J)
      C
      C      RACUNANJE PREOSTALOG (N-1)*(N-1) DIJELA A MATRICE
      C
      C      DO 17 L=K,N
      C      DO 18 M=K,N
18   A(L,M)=A(L,M)-A(L,J)*A(J,M)
17   CONTINUE
15   CONTINUE
      C
      C      RACUNANJE NEPOZNATOG VEKTORA X
      C
      C      C=0.
      C      DO 19 J=1,N
      C      L=N-J+1
      C      K=N-J
      C      X(L)=(B(L)-C)/A(L,L)
      C      C=0.
      C      IF(K-1) 1,2,2
2    DO 20 M=L,N
20   C=C+A(K,M)*X(M)
19   CONTINUE
      C
      C      ISPISIVANJE REZULTATA, VRIJEDNOSTI VEKTORA X
      C
      C      1  WRITE(6,102) (X(J),J=1,N)
102  FORMAT(1X,10F12.3,/)
      STOP
      END
```

3.5. Matrice sa malom ispunom

Kod matrice vodljivosti G koja opisuje neku električnu mrežu veoma veliki postotak elemenata matrice je jednak nuli. Ovaj veliki broj nula u matrici treba iskoristiti tako da račun vršimo samo sa elementima koji se razlikuju od nule. Malen broj elemenata različitih od nule je posljedica prirode električnih mreža. Prisjetimo se načina na koji se slaže G matrica (sl. 7).

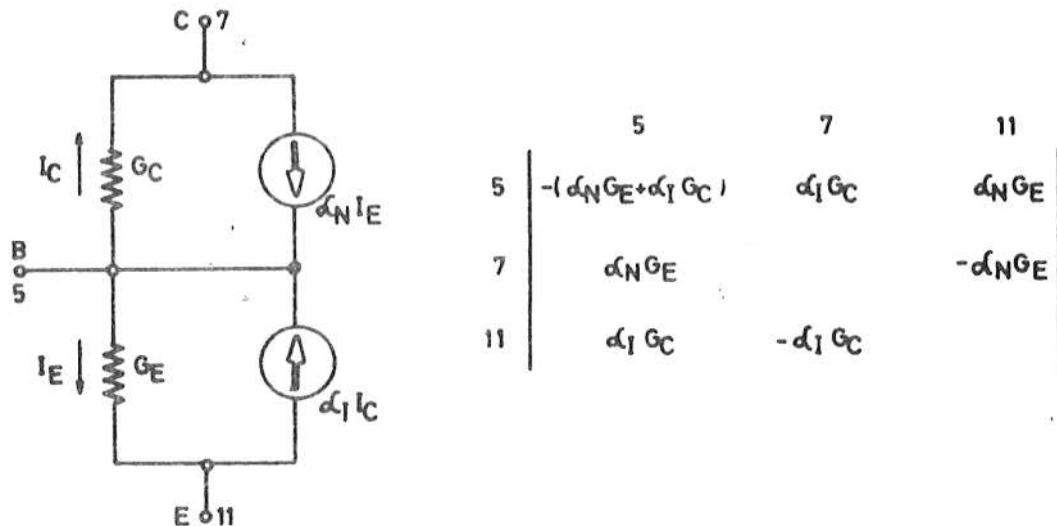


Sl. 7. Primjer formiranja G matrice.

Vidimo da u jednom retku postoji dijagonalni član i još onoliko članova s koliko je drugih čvorova promatrani čvor povezan (veza s referentnim čvorom se ne računa).

U danom primjeru 5-ti redak G matrice koji odgovara 5-tom čvoru, ima $1+3=4$ elementa. Općenito u električnim mrežama imamo na jedan čvor vezano 2 do 10 grana. Pretpostavimo da imamo prosječno 5 elemenata po retku i 50 čvorova. Tada će G matrica imati $50 \cdot 5 = 250$ ne nula, (NZ) elemenata i 2250 nula, (Z) elemenata, tj. ukupno 2500 elemenata bit će 10% NZ i 90% Z. Na prvi pogled je jasno da ovako veliki broj nula elemenata treba iskoristiti u svrhu što racionalnijeg proračuna. Druga konstatacija je, da je G matrica simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu. Ovu konstataciju treba opravdati: ukoliko u mreži nema zavisnih strujnih izvora, matrica G je simetrična po

obliku i po vrijednostima korespodentnih - zrcalnih elemenata. Medjutim, ukoliko u mreži imamo zavisnih strujnih izvora, tada se javljaju nesimetrični elementi. Prikažimo ovo na primjeru strujnih izvora u Ebers-Mollovom modelu tranzistora (sl. 8).



Sl. 8. Ebers-Mollov model tranzistora daje simetričnu strukturu u $\underline{G}$ matrici.

Vidimo, da u zadanom primjeru svaki ovisni izvor daje tri nesimetrična elementa. Sretna je okolnost da grana 5, 7 ovisi od grane 5, 11, ali i grana 5, 11 ovisi od grane 5, 7. U takovom slučaju, kada postoji recipročna ovisnost dviju grana, $\underline{G}$ matrica je simetrična, ali zrcalni elementi nemaju isti iznos. Prema tome, kod razmatranja matrica s velikim brojem nula elemenata, smatrat ćemo da je struktura $\underline{G}$ matrice simetrična.

Dakle, imamo preko 90% nula elemenata, $\underline{G}$ matrica ima simetričnu strukturu, a broj ne-nula elemenata po retku je različit. Postupak Gaussove eliminacije želimo primijeniti na takav način da zauzmemo što manje memorije i da izvršimo što manje računskih operacija. Pri tome treba uočiti slijedeće:

- element matrice g_{ij} podliježe obradi samo onda kada su čelni elementi u retku i , i stupcu j različiti od nu-

le, i to bez obzira da li je sam element $g_{ij} \neq 0$ ili $g_{ij} = 0$. Dapače, u slučaju kada je elemenat $g_{ij} = 0$, nakon obrade postaje element $g_{ij} \neq 0$, dakle, generira se novi ne-nula element.

Ova činjenica, da postupak Gaussove eliminacije generira nove elemente, dovodi do toga da broj elemenata u G matrici sve više raste kako u eliminaciji odmičemo od početka prema kraju. Naš cilj je, zbog toga, srediti stupce i retke matrice tako da se tijekom eliminacije generira što manje elemenata. Time zauzimamo najmanje riječi u memoriji i trebamo izvršiti najmanje računskih operacija.

a) Učitavanje elemenata G matrice

Učitavamo samo ne-nule i to po recima prema slijedećoj shemi:

redak	stupac	iznos			
1	1	x	R(1) = 1	→ C(1) = 1	A(1) = x
	3	x	R(2) = 4	C(2) = 3	A(2) = x
	7	x	R(3) = 8	C(3) = 7	.
2	2	x	.	C(4) = 2	.
	3	x	.	C(5) = 3	.
	7	x	.	C(6) = 7	.
	9	x		C(7) = 9	.
3	5	x		C(8) = 5	A(8) = x
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.

Gore navedena shema znači da se u retku 1 nalaze elementi na mjestu 1, 3 i 7, a u retku 2 elementi se nalaze na mjestu 2, 3, 7 i 9, itd.

Neka je G matrica veličine $n \times n$, a NZ broj ne-nula, tada trebamo:

n riječi za indeks retka, R
NZ riječi za indeks stupca, C
NZ riječi za vrijednost elementa, A,

tj. ukupno $n+2$ NZ riječi. Prema ranije danom primjeru s $n = 50$ trebamo $50 + 250 + 250 = 550$ riječi (umjesto 2500 kada bi pohranjivali i nule).

b) Redoslijed eliminacije kod matrica s malom ispunom

Matrica vodljivosti G , s kojom je električni sklop opisan, ima raspored elemenata po redcima ovisan o numeraciji čvorova, što je slučajan postupak koji ovisi o korisniku programa. Tako dobiveni raspored očito nije optimalan s obzirom na minimalni broj generiranja novih elemenata i minimalan broj računskih operacija. Cilj nam je matricu vodljivosti G i strujni vektor I_s tako srediti da broj novonastalih elemenata bude što manji, što takodjer vodi i na manji broj potrebnih računskih operacija za izvođenje Gaussove eliminacije.

Najjednostavnije načelo, koje se nameće, je raspored redaka po kojem redak sa najmanjim brojem elemenata dolazi na vrh matrice, a zatim dolaze redci s većim brojem elemenata. Promotrimo pojave koje se javljaju pri ovakovom postupku eliminacije, jer su zajedničke i suptilnijim metodama.

Opravdajmo raspored redaka po uzlaznom broju elemenata na slijedećem primjeru. Na slici 9. elementi su označeni sa znakom x . Uvedimo još oznake n - broj elemenata u retku i stupcu, k - broj elemenata u retku (odnosno stupcu) različit od nule, z - broj elemenata jednak nuli. Prema slici 9.a sa $n=5$ i $k=5$ u prvom retku, nakon prvog koraka eliminacije, generirati će se $(k-1)(k-2)=12$ novih elemenata i svi nula elementi će postati različiti od nule. Raspored je, dakle, nepovoljan. Prema slici 9.b koja predstavlja istu matricu kao i slika 9.a, ali sa prvim retkom i prvim stupcem premještenim u zadnji redak i zadnji stupac, tokom cijele eliminacije ne generira se niti jedan novi element. Raspored je, dakle optimalan.

stupac s najmanjim brojem elemenata postavi na prvo mjesto (najmanje obradivano polje). Redak i stupac s najvećim brojem elemenata postavi se na zadnje mjesto. Dakle, napravi se raspored po uzlaznom broju elemenata po recima i stupcima. Govorimo o recima i stupcima, jer redak j i stupac j imaju zbog simetrične strukture G matrice isti broj elemenata. Prema tome, ukoliko premjestimo redak j i stupac j mora biti premješten kako bi se sačuvala simetrija G matrice.

Nakon što je ovaj prvi raspored izvršen, ima nekoliko načina kako nastaviti sa sredjivanjem G matrice. Razmotrimo ovdje slijedeći postupak sredjivanja [6]:

Na vrhu matrice se nalazi redak s minimalnim brojem elemenata, neka je to samo jedan izvandijagonalni element. Takav redak ne generira nove elemente (jer je obradivano polje jednako nula). Prema slici 10. nakon eliminacije prvog retka i stupca redak k će izgubiti jedan elemenat i postati će zbog toga redak sa samo jednim izvan-dijagonalnim elementom. Zbog toga i redak k treba biti prebačen na vrh matrice. Drugim riječima, nakon što je prva nepoznanica eliminirana, ostatak G matrice

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} u_{1k} \\ l_{k1} \end{array}
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 & x & & x \\
 & & x & \\
 & & & x & x \\
 x & & x & x \\
 & & & & x \\
 & & & & & x \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Sl. 10. Redak i stupac s dva elementa ne generiraju novi element.

(tj. $(n-1)(n-1)$ matricu) sredjujemo na slijedeći način: prebrojimo elemente u preostalim $(n-1)$ redaka i redak sa najmanjim brojem elemenata postavimo na vrh matrice, te se izvrši eliminacija druge nepoznanice. Ukoliko se prema prirodi Gaussove elimi-

nacije generiraju novi elementi, oni se moraju pribrojiti odgovarajućim recima. Ista procedura prebrojavanja se ponavlja za $(n-2)(n-2)$ matricu itd. Na kraju se dobija raspored eliminacije redaka koji se pohrani u posebno polje. Ovo polje se koristi kada Gaussovu eliminaciju iste G matrice treba ponoviti više puta.

Opisana procedura daje vrlo dobre rezultate u odnosu na minimalan broj računskih operacija i minimalan broj generiranih elemenata. Kao primjer navodimo matricu sa 24 nepoznanice i prosječno 4 elementa po retku (uključujući i dijagonalni element). Matrica je generirana metodom Monte Carlo (sl. 11.a). Na slici 11.b je prikazan rezultat primjene Gaussove eliminacije na zadanoj matrici bez sredjivanja, u kojem slučaju je potrebno 452 množenja i oduzimanja, 86 dijeljenja, a broj generiranih elemenata je 100. Nakon što je primijenjeno sredjivanje matrice (sl. 11.c) potrebno je samo 131 množenje i oduzimanje, 51 dijeljenje, a broj generiranih elemenata je 30.

Posebno polje u kojem je upisan raspored eliminacije redaka nalazi se u lijevom stupcu slike 11.c; vidimo da se najprije eliminira redak 1, zatim reci 2, 7, 24 itd.

123456789012345678901234	123456789012345678901234	124748230233654681799015
1X.....X.....	1X.....X.....	1X.....X.....
2X.....X.....	2X.....X.....	2X.....X.....
3X.....X.....	3X.....X.....	4X.....X.....
4X.....X.....	4X.....X.....	7X.....X.....
5X.....X.....	5X.....X.....	24.....X.....
6X.....X.....	6X.....X.....	8X.....X.....
7X.....X.....	7X.....X.....	12.....X.....
8X.....X.....	8X.....X.....	13.....X.....
9X.....X.....	9X.....X.....	20.....X.....
10.....X.....	10.....X.....	22.....X.....
11X.....X.....	11X.....X.....	23.....X.....
12X.....X.....	12X.....X.....	3.....X.....
13.....X.....	13.....X.....	6.....X.....
14X.....X.....	14X.....X.....	15.....X.....
15.....X.....	15.....X.....	14X.....X.....
16.....X.....	16.....X.....	16.....X.....
17.....X.....	17.....X.....	18.....X.....
18.....X.....	18.....X.....	21.....X.....
19.....X.....	19.....X.....	17.....X.....
20.....X.....	20.....X.....	9.....X.....
21.....X.....	21.....X.....	19.....X.....
22.....X.....	22.....X.....	10.....X.....
23.....X.....	23.....X.....	11X.....X.....
24.....X.....	24.....X.....	5.....X.....

c)

b)

a)

- Sl. 11. a) Zadana matrica veličine 24×24 sa prosječno 4 elementa po retku,
generirana metodom Monte Carlo,
b) Rezultati Gaussove eliminacije koja je izvršena nad zadanom matricom,
c) Rezultati Gaussove eliminacije nakon sredjivanja.

4. KOEFICIJENTI OSJETLJIVOSTI LINEARNE MREŽE

Nakon što su naponi čvorova određeni, postoji često potreba odrediti koliko je pojedini napon osjetljiv na promjene parametara mreže. Analiza osjetljivosti se obično vrši samo za jedan čvor tj. za izlazni napon. Ovdje opisani postupak se odnosi na linearne mreže i zasniva se na primjeni totalnog diferencijala. Neka je izlazni napon $V_{iz} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, x_i su parametri mreže - otpori i strujni izvori; tada je totalni diferencijal od V_{iz}

$$dV_{iz} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n .$$

Cilj nam je naći diferencijal dV_{iz} ali iz matričnog izraza za mrežu.

Mreža je opisana, kao što nam je poznato izrazom

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}}_D \underline{\underline{A}}^t \underline{\underline{V}}_n = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{I}}_s$$

a totalni diferencijal je jednak

$$\underline{\underline{A}} d\underline{\underline{G}}_D \underline{\underline{A}}^t \underline{\underline{V}}_n + \underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}}_D \underline{\underline{A}}^t d\underline{\underline{V}}_n = \underline{\underline{A}} d\underline{\underline{I}}_s$$

odakle slijedi za $d\underline{\underline{V}}_n$, uz $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}}_D \underline{\underline{A}}^t$:

$$d\underline{\underline{V}}_n = \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{A}} d\underline{\underline{I}}_s - \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{A}} d\underline{\underline{G}}_D \underline{\underline{A}}^t \underline{\underline{V}}_n ,$$

$$d\underline{\underline{V}}_n = [\underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{A}}] [d\underline{\underline{I}}_s - d\underline{\underline{G}}_D \underline{\underline{A}}^t \underline{\underline{V}}_n] . \quad (28)$$

Nazovimo matricu $[\underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{A}}] = \underline{\underline{H}}$ i $\underline{\underline{A}}^t \underline{\underline{V}}_n = \underline{\underline{V}}_b$ pa napišimo gornji izraz opširnije (n je broj čvorova, a b broj grana):

$$\begin{vmatrix} dv_1 \\ \vdots \\ dv_r \\ \vdots \\ dv_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1j} & \dots & h_{1b} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{r1} & \dots & h_{rj} & \dots & h_{rb} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nj} & \dots & h_{nb} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dI_{s1} - v_{b1} dG_1 \\ dI_{sj} - v_{bj} dG_j \\ \vdots \\ dI_{sb} - v_{bb} dG_b \end{vmatrix}$$

Matrica $\underline{H}$ predstavlja matricu koeficijenata osjetljivosti, jer je

$$S_{I_{rj}} = \frac{dv_r}{dI_{sj}} = h_{rj} ,$$

$$S_{G_{rj}} = \frac{dv_r}{dG_j} = -h_{rj} v_{bj} .$$

$S_{I_{rj}}$ je osjetljivost napona r-tog čvora u odnosu na strujni izvor u grani j . $S_{G_{rj}}$ je osjetljivost napona r-tog čvora u odnosu na vodljivost u grani j .

Opišimo sada dobijanje matrice $\underline{H} = \underline{G}^{-1} \underline{A}$. S obzirom da matrice $\underline{G}$ i $\underline{A}$ imamo na raspolaganju, problem je inverzija matrice $\underline{G}$ koja zahtjeva približno n^3 računskih operacija. Množenje matrice $\underline{G}^{-1} \underline{A}$ i ostale računske operacije ne predstavljaju znatno opterećenje u računanju. Budući da smo obično zainteresirani samo za koeficijente osjetljivosti samo izlaznog napona (na primjer napona čvora v_r) to nam nije potrebno računati cijelu matricu koeficijenata $\underline{H}$, već samo njen redak r, jer je:

$$dv_r = h_{r1}(dI_{s1} - v_{b1} dG_1) + h_{r2}(dI_{s2} - v_{b2} dG_2) + \dots + h_{rb}(dI_{sb} - v_{bb} dG_b) .$$

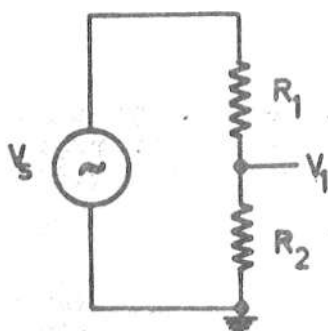
Da bismo dobili gore navedeni r-ti redak $\underline{H}$ matrice, moramo imati r-ti redak $\underline{G}^{-1}$ matrice. Međutim, ranije opisani postupak inverzije matrica pomoću Gaussove eliminacije po jednom koraku inverzije

daje stupac. Da bismo izračunali koeficijente osjetljivosti jednog retka moramo i inverziju matrice $\underline{G}$ vršiti po recima. To je moguće i vrši se uz pomoć slijedeće matrične relacije:

$$(\underline{G}^t)^{-1} = (\underline{G}^{-1})^t$$

Smisao ove relacije je u tome da invertiramo transponiranu matricu $\underline{G}$ uobičajenim postupkom, tj. po stupcima. Nadalje je stupac invertirane matrice $\underline{G}^t$ jednak retku invertirane matrice $\underline{G}$, a to je upravo ono što smo željeli postići. Dakle, koeficijente osjetljivosti napona jednog čvora dobijemo uz $n^3/3$ računskih operacija.

Prikažimo primjenu osjetljivosti kao i vezu s relativnom greškom (tolerancije) na jednom sasvim jednostavnom primjeru (sl. 12).



$$V_s = 10 \text{ V},$$

$$R_1 = 10 \text{ } \Omega \quad G_1 = 0.1 \text{ 1/}\Omega$$

$$R_2 = 5 \text{ } \Omega \quad G_2 = 0.2 \text{ 1/}\Omega$$

tolerancije otpora $\pm 10 \%$.

Sl. 12. Primjer računanja osjetljivosti.

Osjetljivost napona V_1 na parametar G_1 je

$$S_{G_{11}} = \frac{dV_1}{dG_1}.$$

$$V_1 = V_o \frac{G_1}{G_1 + G_2} = 10 \frac{0.1}{0.3} = 3,33 \text{ V}$$

$$S_{G_{11}} = \frac{dV_1}{dG_1} = V_o \frac{G_2}{(G_1 + G_2)^2} = 10 \frac{0.2}{(0.3)^2} = 22,2$$

Neka se otpor R_1 promjeni za +10% , tada se G_1 mijenja s 0.1 na 0.091 pa je $\Delta G_1 = 0.009 \text{ 1}/\Omega$, a prirast izlaznog napona V_1 je

$$\Delta V_1 = S_G \cdot \Delta G_1 = 22,2 \cdot 0,009 = 0,2 \text{ V} .$$

Želimo li raditi samo s relativnim promjenama (odnosno tolerancijama) tada ovako preuredimo izraz za prirast:

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = \frac{S_G}{V_1} \Delta G_1 \frac{G_1}{G_1} = \frac{\Delta G_1}{G_1} \left| S_{G1} \frac{G_1}{V_1} \right|$$

gdje je $\frac{\Delta V_1}{V_1} = P_{V1}$, a $\frac{\Delta G_1}{G_1} = P_{G1}$ pa možemo pisati

$$P_{V1} = \left| S_{G1} \frac{G_1}{V_1} \right| P_{G1} ,$$

što za naš primjer daje

$$P_{V1} = \left| 22,2 \frac{0.1}{3,33} \right| P_{G1} = 0.667 P_{G1}$$

što znači da ako se G_1 promjeni za 10% napon V_1 će se promijeniti za 6,67%, a u apsolutnom iznosu to iznosi $V_1 P_{V1} = 3,33 \cdot 0,0667 = 0,2 \text{ V} .$

Vidimo da prirast promatrane veličine (ΔV_1) i relativnu promjenu (P_{V1}) dobijemo iz istog koeficijenta osjetljivosti, razlika je samo u formi koju želimo dati rezultatu.

5. NELINEARNE ISTOSMJERNE MREŽE

Elektronički sklopovi, koje želimo analizirati, sadrže veliki broj nelinearnih elemenata kao što su diode i tranzistori. Postupak, koji smo do sada opisali, odnosio se na linearne mreže i mi ćemo u ovom poglavlju pokazati da se taj isti postupak, čija je osnovna relacija $\underline{\tilde{G}} \underline{V_n} = \underline{\tilde{A}} \underline{I_s}$, daje primijeniti i u slučaju nelinearnih mreža, naravno uz neke dodatne numeričke postupke koji će ovdje biti detaljno opisani.

Struje grana linearne mreže prema Ohmovom zakonu pišemo prema izrazu (5) u obliku

$$\underline{I} = \underline{\tilde{G}_D} \underline{V_b} ,$$

a za struje grana nelinearne mreže će sasvim općenito vrijediti

$$\underline{I} = g(\underline{V_b}) = g(\underline{\tilde{A}}^t \underline{V_n}) ,$$

što znači da je struja grane funkcija g napona grane $\underline{V_b}$.

Prvi Kirchhoffov zakon poprima oblik

$$\underline{\tilde{A}} \underline{I} = \underline{\tilde{A}} \underline{I_s}$$

$$\underline{\tilde{A}} g(\underline{V_b}) = \underline{\tilde{A}} \underline{I_s}$$

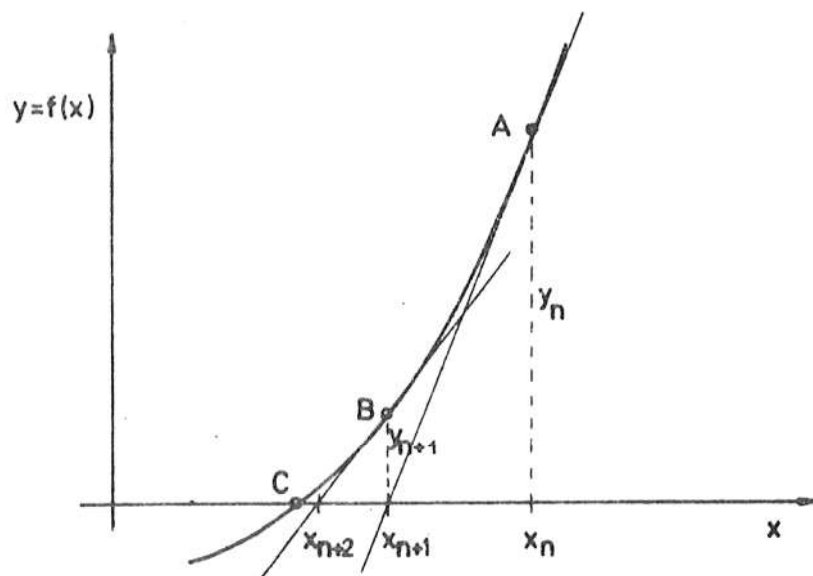
$$\underline{\tilde{A}} g(\underline{\tilde{A}}^t \underline{V_n}) = \underline{\tilde{A}} \underline{I_s} . \quad (29)$$

Konvencionalni oblik pisanja izraza (29) je

$$f(\underline{x}) = \underline{\tilde{A}} g(\underline{\tilde{A}}^t \underline{V_n}) - \underline{\tilde{A}} \underline{I_s} = 0 . \quad (30)$$

Budući da izraz (30) predstavlja sustav nelinearnih algebarskih jednažbi, rješenje je moguće dobiti jedino na način da se pretpostavi niz vrijednosti napona čvorova, tj. za vektor $\underline{V}_n$. Te početne vrijednosti sigurno neće zadovoljiti izraz (30), već daju $f(\underline{x}) \neq 0$, tj. $\underline{y} = f(\underline{x})$. Prikladnim iterativnim postupkom privodi se iznos $\underline{y}$ k nuli i to sve dok ne postane $\underline{y} < \epsilon$, gdje je ϵ unaprijed zadana greška.

Metoda, koja najbrže konvergira, je metoda Newton-Raphsona, tj. metoda tangente, koji postupak ćemo jednostavnosti radi prikazati na jednodimenzionalnom primjeru (sl. 13). Neka je točka $A(x_n, y_n)$ početna vrijednost funkcije $f(x)$, a želimo odrediti x pri kojem je $f(x) = 0$. Tada postavimo kroz točku A tangentu i njeno presjecište sa apscisom je u x_{n+1} ; koordinate x_{n+1} , y_{n+1} odredjuju točku B kroz koju postavimo tangentu te dobijemo apscisu x_{n+2} . Postupak ponavljamo sve dok y



Sl. 13. Primjer za Newton-Raphsonovu metodu.

ne postane po volji malen. Drugi kriterij konvergencije može biti postavljen tako da bude $|x_{n+k} - x_{n+k-1}| < \epsilon$.

Dakle, polazeći od apscise x_n , nova apscisa x_{n+1} je određena sa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_n}} f(x_n) \quad (31)$$

Primijenimo sada izraze (30) i (31) na jednostavnu nelinearnu mrežu koja se sastoji iz serijskog spoja naponskog izvora, otpora i diode prema slici 14.a. Prema izrazu (30) imamo:

$$\begin{aligned} f(V_D) &= g(V_D^1) + G_S V_D^1 - I_S = \\ &= I_S (e^{\frac{V_D^1}{V_T}} - 1) + G_S V_D^1 - G_S V_S \quad *) \end{aligned}$$

a prema izrazu (31) vrijedi:

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(V_D)}{dV_D} \right|_{V_D=V_D^1} &= \frac{I_S}{V_T} e^{\frac{V_D^1}{V_T}} + G_S, \\ V_D^2 &= V_D^1 - \frac{1}{\frac{I_S}{V_T} e^{\frac{V_D^1}{V_T}} + G_S} \left[I_S (e^{\frac{V_D^1}{V_T}} - 1) + G_S V_D^1 - G_S V_S \right]. \end{aligned}$$

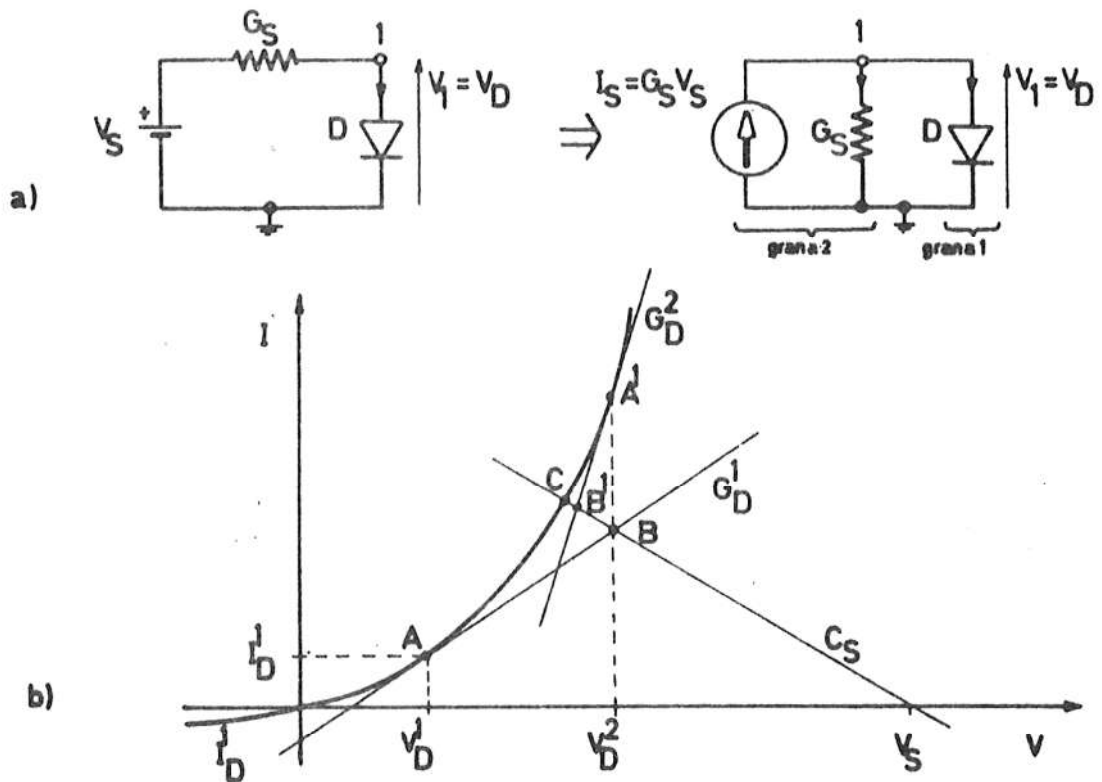
Uvedimo u gornji izraz za napon V_D^2 zamjenu:

$$G_D^1 = \frac{I_S}{V_T} e^{\frac{V_D^1}{V_T}} \quad \text{i} \quad I_D^1 = I_S (e^{\frac{V_D^1}{V_T}} - 1),$$

pa imamo za napon V_D^2

$$V_D^2 = V_D^1 - \frac{1}{G_D^1 + G_S} \left[I_D^1 + G_S V_D^1 - G_S V_S \right] \quad (32)$$

(*) Prema slici 14.a matrica incidencija $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, strujni vektor $\underline{I} = \begin{bmatrix} I_S (e^{\frac{V_D^1}{V_T}} - 1) \\ G_S V_D^1 \end{bmatrix}$ i strujni vektor $\underline{I}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ G_S V_S \end{bmatrix}$, što uvršteno u izraz (29), odnosno (30) daje gore navedeni izraz $f(V_D)$.



Sl. 14. a) Jednostavna nelinearna mreža,
b) Grafički prikaz.

Direktna primjena izraza (30) i (31) nije pogodna za analizu mreža. Zbog toga razmotrimo značenje izraza (32) u smislu grafičkog prikaza sa slike 14.b. Polazeći od točke A, kroz koju prolazi pravac - tangenta na karakteristiku diode - s nagibom G_D^1 , želimo naći presjecište u točki B s drugim pravcem koji predstavlja vodljivost G_S . Jednadžbe pravca su:

$$(I - I_D^1) = (V - V_D^1) G_D^1$$

$$I = -(V - V_S) G_S ,$$

a presjecište je dano u točki B

$$-(V - V_s) G_s - I_D^1 = (V - V_D^1) G_D^1$$

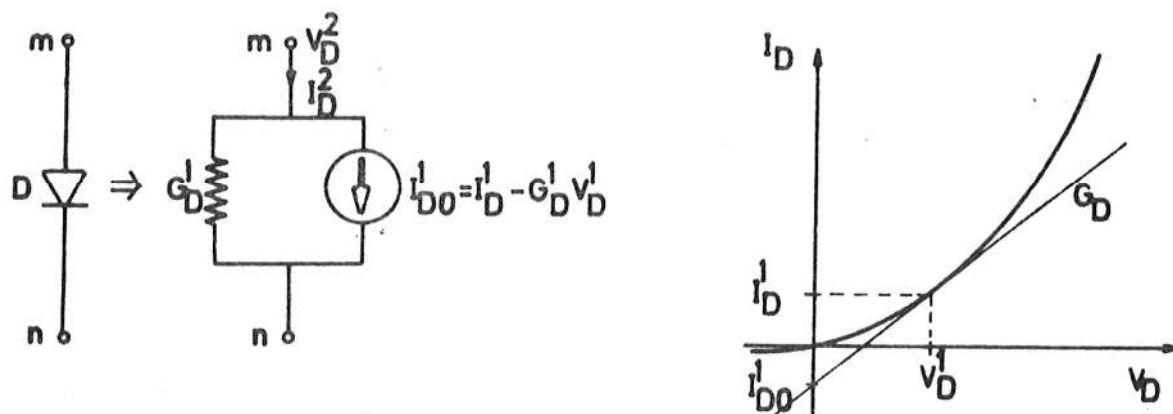
odakle slijedi za napon V (ovdje označen kao druga iteracija napona na diodi oznakom V_D^2)

$$\begin{aligned} V = V_D^2 &= V_D^1 \frac{G_D^1}{G_D^1 + G_s} - I_D^1 \frac{1}{G_D^1 + G_s} + V_s \frac{G_s}{G_D^1 + G_s} \\ &= V_D^1 - V_D^1 \frac{G_s}{G_D^1 + G_s} - I_D^1 \frac{1}{G_D^1 + G_s} + V_s \frac{G_s}{G_D^1 + G_s} \\ &= V_D^1 - \frac{1}{G_D^1 + G_s} (I_D^1 + G_s V_D^1 - G_s V_s) , \end{aligned}$$

dakle, polazeći od nešto drugačije grafičke interpretacije nego-
li je ona sa slike 13. dobili smo ponovo izraz (32), što znači
da su oba pristupa ekvivalentna. Medjutim, ovaj posljednji, ko-
ji polazi od grafičkog prikaza na slici 14.b, za primjenu u nu-
meričkoj analizi je prikladniji, jer izravno vodi na linearizirani
nadomjesni sklop diode (tj. nelinearnog elementa) koji se
dade veoma jednostavno uklopiti u do sada postavljene matrične
izraze za analizu linearnih mreža. Slijedi, naime, da se dioda
dade nadomjestiti sa paralelnom kombinacijom vodljivosti G_D^1
i strujnog izvora I_{D0}^1 (sl. 15).

Odmah uočavamo korist od ovakove zamjene: nelinearni eleme-
nat je lineariziran - što je osnovni princip Newton-Raphsonove
metode - ali na takav način da predstavlja standardnu granu mreže
(sl. 3), pa se prema tome daje uklopiti u postojeću matričnu for-
mu $\underline{GV}_n = \underline{AI}_s$ bez ikakvih poteškoća.

Zadržimo se još malo na linearizaciji diode prema slici 14.
i 15. Polazimo od nekog početnog napona na diodi. V_D^1 s pomoću



Sl. 15. Prikazivanje diode linearnim modelom.

kojeg izračunavamo struje diode prema izrazu $I_D^1 = I_s (e^{\frac{V_D^1}{V_T}} - 1)$. Struja I_s je struja zasićenja diode 10^{-15} A , a napon V_T je zamjena za $\frac{kT}{q}$, gdje je k Boltzmannova konstanta, q naboj elektrona i T apsolutna temperatura. Pri sobnoj temperaturi napon V_T je približno jednak 25 mV .

Nadomjesni sklop sa slike 15. predstavlja tangentu (pravac) kroz zadanu točku I_D^1, V_D^1 . Nagib tangente je vodljivost G_D^1 , a odrezak na ordinati je I_{D0}^1 . Potrebno je, dakle, odrediti parametre pravca G_D^1, I_{D0}^1 :

$$G_D^1 = \left. \frac{dI_D}{dV_D} \right|_{V_D=V_D^1} = \frac{I_s}{V_T} e^{\frac{V_D^1}{V_T}}$$

Odrezak na ordinati I_{D0}^1 se dobije iz jednadžbe pravca kroz zadanu točku I_D^1, V_D^1 :

$$(I_D - I_D^1) = G_D^1 (V_D - V_D^1)$$

odakle je pri naponu $V_D = 0$, $I_D = I_{D0}^1$, te imamo:

$$I_{D0}^1 = I_D^1 - G_D^1 V_D^1 .$$

Da ne bismo dva puta računali vrijednosti $e^{\frac{V_D^1}{V_T}}$ i to jednom u izrazu za G_D^1 , a drugi put u izrazu za I_D^1 koji je potreban za izračunavanje I_{D0}^1 , možemo I_D^1 izraziti sa G_D^1 :

$$I_D^1 = G_D^1 V_T - I_S .$$

Linearizacija diode ima prema tome slijedeću sekvencu:

$$V_D^1 ,$$

$$G_D^1 = \frac{I_S}{V_T} e^{\frac{V_D^1}{V_T}}$$

$$I_{D0}^1 = G_D^1 (V_T - V_D^1) - I_S . \quad (33)$$

Vrijednost vodljivosti G_D^1 upisuje se na četiri mjesta u matricu vodljivosti $\underline{G}$, a struja I_{D0}^1 na dva mjesta u strujni vektor $\underline{I}_{sn}$.

Kada se provede linearizacija svih nelinearnih elemenata mreže, izračuna se sustav $\underline{G}\underline{V}_n = \underline{I}_{sn}$ i iz dobivenih napona čvorova odredi napone na nelinearnim elementima, na primjer V_D^2 (vidi sliku 14.b). Sada se vrši ponovo linearizacija i to

$$V_D^2 ,$$

$$G_D^2 = \frac{I_S}{V_T} e^{\frac{V_D^2}{V_T}}$$

$$I_{D0}^2 = G_D^2 (V_T - V_D^2) - I_S .$$

Na ovaj način se postepeno približavamo rješenju u točki C na slici 14.c. Kao što je već ranije spomenuto, točno rješenje ne možemo postići, već mu se samo dovoljno točno približiti. Naime, približavajući se uzastopno rješenju, napon

$$\Delta V = V_D^2 - V_D^1$$

postaje sve manji i unaprijed odredimo neku grešku ϵ , na primjer $\epsilon = 50 \mu V$, pa kažemo da je iterativni postupak završen ukoliko je $\Delta V < \epsilon$.

Ukoliko je iterativni postupak nestabilan, tj. zbog oscilacija sporo konvergira, pokušava se konvergencija postići smanjivanjem izračunatog prirasta $\Delta V = V_D^2 - V_D^1$. Naime, ovo znači da ćemo umjesto napona V_D^2 (vidi sliku 14.c) kao novi napon nelinearnog elementa (diode) izabrati neki napon koji se nalazi između V_D^2 i V_D^1 , tj. umjesto

$$V_D^2 = V_D^1 + \Delta V$$

uvodimo

$$V_D^{2*} = V_D^1 + \alpha \Delta V$$

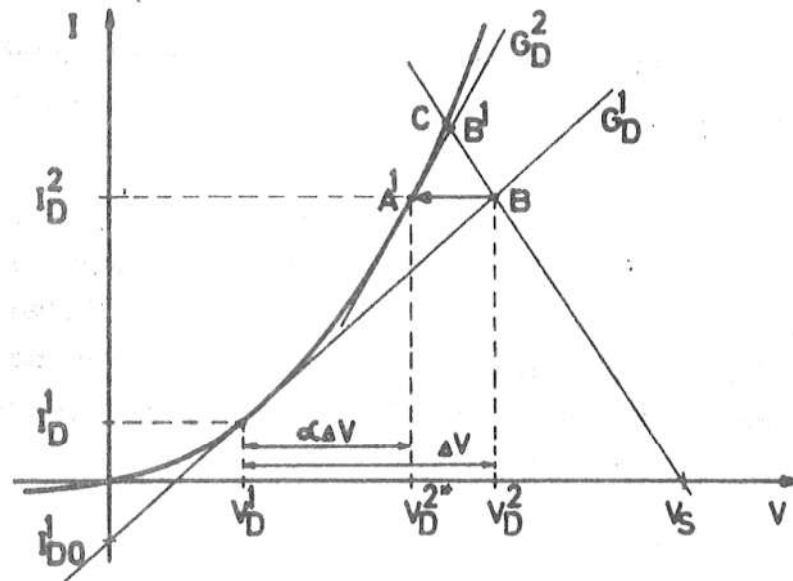
gdje je α manji od 1. Ovaj smanjeni prirast se može odrediti na razne načine, a jedan od njih, koji je veoma jednostavan i daje dobre rezultate, biti će opisan prema slici 16. Nakon što je izračunat napon V_D^2 , iduća iteracija se ne vrši prema naponu već horizontalno - prema struji. Dakle, polazeći od točke A s vrijednostima G_D^1 , I_{D0}^1 , nakon što je izračunat napon V_D^2 slijedi

$$I_D^2 = G_D^1 V_D^2 + I_{D0}^1,$$

$$G_D^2 = (I_D^2 + I_S) / V_T,$$

$$I_{D0}^2 = G_D^2 V_T (1 - \ln(\frac{I_D^2}{I_S} + 1)) - I_S \quad (34)$$

Struju I_{D0}^2 smo dobili iz G_D^2 i V_D^{2*} . Napon $V_D^{2*} = V_T \ln(\frac{I_D^2}{I_S} + 1)$, što uvršteno u izraz za $I_{D0}^2 = G_D^2 (V_T - V_D^2) - I_S$ daje gore navedeni izraz.



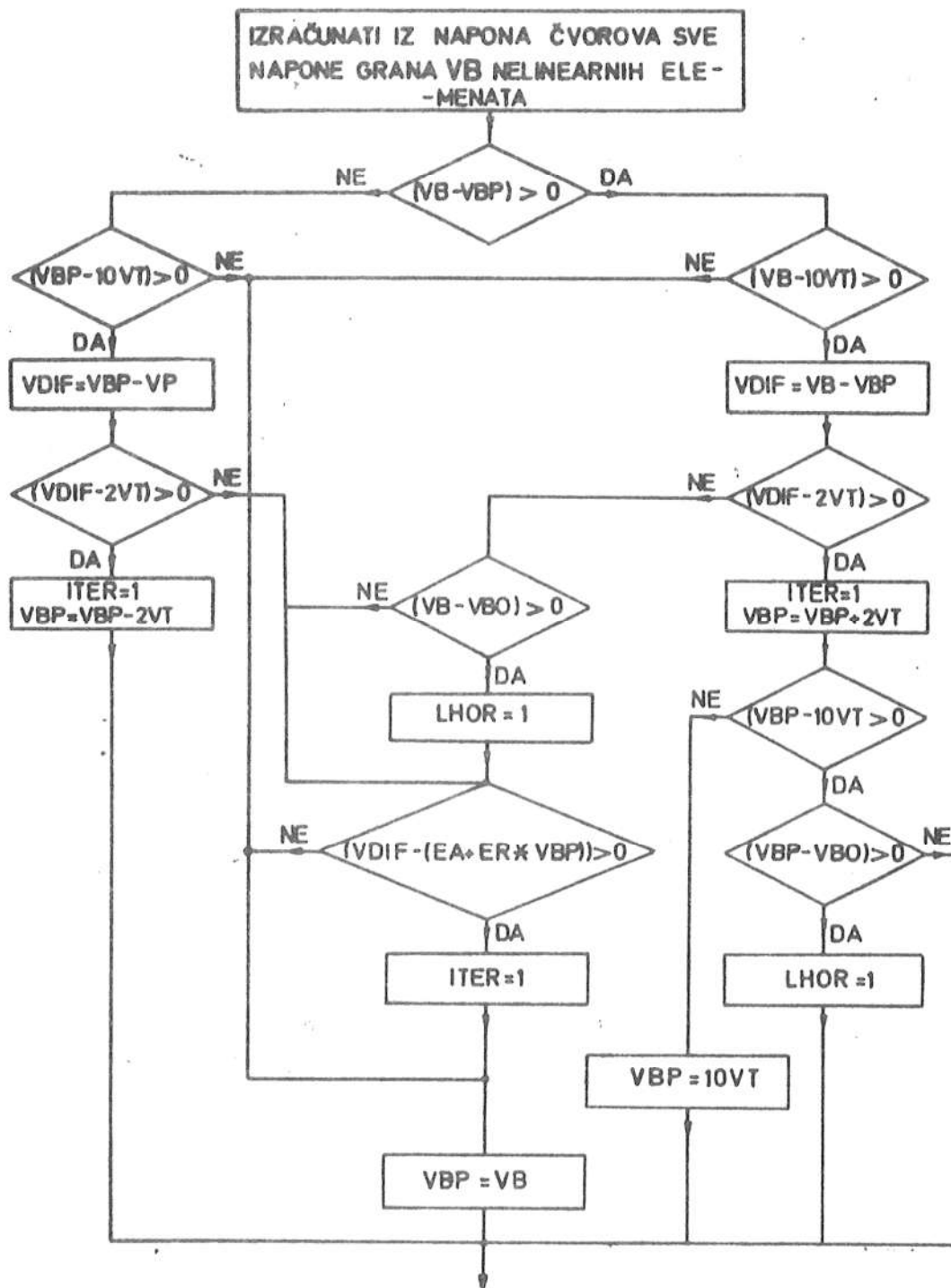
Sl. 16. Primjer iteracije sa smanjenim prirastom $\alpha \Delta V$, tzv. horizontalni postupak (prema struji).

Newton-Raphsonov iterativni postupak, kako smo upravo spomenuli, neće konvergirati ukoliko su početni uvjeti neprikladno odabrani. Što je veći broj nelinearnih elemenata u sklopu to će lakše doći do nepovoljne situacije. Zbog toga se Newton-Raphsonova metoda ne primjenjuje izravno onako kako je opisana, već se dodatnim kriterijima, iz iteracije u iteraciju, upravlja na takav način da se po mogućnosti osigura konvergencija numeričkog postupka. Spomenuto upravljanje prilagođeno je prirodi problema koji se rješava, te će ovdje biti opisan jedan od postupaka upravljanja koji je u široj primjeni kod analize elektroničkih sklopova. S obzirom da elektronički nelinearni elementi imaju u većini slučajeva eksponencijalnu karakteristiku, to su veoma nepovoljni sa stanovišta konvergencije. Dijagram toka upravljanja iteracija-

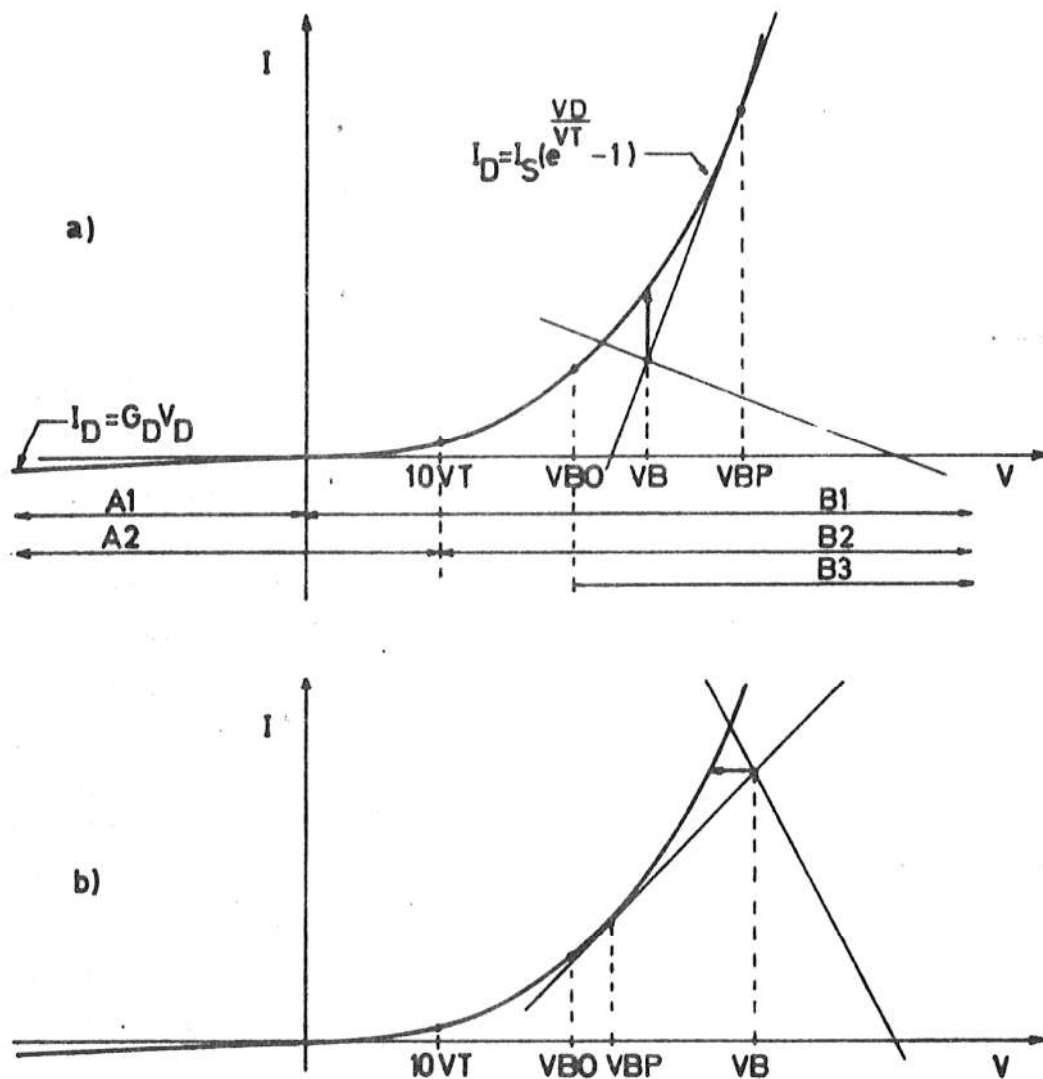
ma prikazuje slika 17., koji postupak nazivamo kontrolirana Newton-Raphsonova metoda (KNR). Oznake na dijagramu toka imaju slijedeće značenje:

- VB - novo izračunati napon barijere diode (VBD), odnosno u Ebers-Mollovom modelu tranzistora naponi barijere baza-emiter (VBE) i barijere baza-kolektor (VBC),
- VBP - prijašnji napon barijere,
- VDIF - napon diferencije između prijašnjeg i novoizračunatog napona barijere,
- VBO - napon najveće zakrivljenosti eksponencijalne karakteristike koji se uzima kao početni napon prilikom proračuna,
- VT - termički napon $\frac{kT}{q} = 25,2 \text{ mV}$,
- EA - apsolutna greška (npr. $20 \text{ } \mu\text{V}$),
- ER - relativna greška (npr. $5 \cdot 10^{-4}$),
- ITER - varijabla koja se postavlja u 1 ukoliko bilo koji od nelinearnih elemenata nije zadovoljio kriterij greške,
- LHOR - varijabla koja se postavlja u 1 kada slijedeću iteraciju treba izvršiti horizontalno na karakteristiku diode (preko struje).

Upravljanje iterativnim postupkom prema opisanom dijagramu toka vrši se po slijedećim kriterijima (sl. 18.a):



Sl. 17. Dijagram toka kontrolirane Newton-Raphsonove metode (pojednostavljeni dijagram).



Sl. 18. Prikaz upravljanja iteracijama po KNR: a) Konvencionalni postupak (prema naponu V_B), b) Horizontalni postupak (prema struji).

Područje A1: Dioda je prikazana pravcem, tj. s običnom vodljivošću G_D iznosa struje zasićenja, $G_D = I_s$. Novo izračunati napon V_B se prihvaća bez ograničenja. Ne vrši se kontrola greške.

Područje B1: Dioda je prikazana svojom eksponencijalnom karakteristikom $I_D = I_S(e^{\frac{V_D}{V_T}} - 1)$. U ovom području se iteracije vrše u pravilu okomito prema naponu V_B , a iznimno prema struji u području B3 i to samo kada je ispunjen uvjet $V_B > V_{BP}$.

Područje A2: Novo izračunati napon V_B se prihvaća bez ograničenja, ne vrši se kontrola greške.

Područje B2: Novo izračunati napon V_B se prihvaća samo ukoliko je $VDIF < 2VT$, u kojem slučaju se takodjer izvrši kontrola greške, $VDIF \geq \epsilon$. Ukoliko je napon $VDIF > 2VT$, prihvaća se kao novo izračunati napon $V_{BP} = V_{BP} \pm 2VT$.

Područje B3: U slučaju kada je napon V_B veći od V_{BP} , vrši se slijedeća iteracija preko struje (sl. 18.b).

Svi navedeni kriteriji upravljanja iteracijama imaju za cilj da početno pretpostavljene radne točke nelinearnih elemenata, koje eventualno puno odstupaju od ravnotežnog položaja, postepeno ispravimo i omogućimo dobijanje željenog rješenja. Bez opisanih ograničenja Newton-Raphsonova metoda bi u nekim slučajevima konvergirala uz manji broj iteracija, ali bi za uzvrat u mnogim drugim slučajevima došlo do numeričkog osciliranja.

Opisani postupci linearizacije odnose se izravno na diodu, dok je tranzistor samo implicitno bio uključen u razmatranje. Cilj nam je, dakle, opisati Ebers-Mollov model npn tranzistora, prikazati način linearizacije tog modela koristeći do sada opisanu linearizaciju dioda i na kraju pokazati kako su elementi lineariziranog modela upisani u sustav jednadžbi $G \underline{V}_n = \underline{I}_{sn}$. Prema slici 19.a model tranzistora se sastoji iz dvije diode, dva ovisna strujna izvora i nelinearnih kapacitivnosti. Ovdje, u istosmjernoj analizi, ne uzimamo u obzir kapacitivnosti baza-kolektor i baza-emiter. Što se tiče linearizacije i iterativnog postupka

svaka dioda u modelu tranzistora se posebno linearizira (sl. 19.b) i za svaku diodu se posebno ispituje da li je zadovoljen kriterij greške. Navedimo primjer linearizacije za uobičajenu Newton-Raphsonovu metodu (prema naponu):

$$V_{BC}^1,$$

$$V_{BE}^1,$$

$$G_C^1 = \frac{I_{CS}}{V_T} e^{\frac{V_{BC}^1}{V_T}},$$

$$G_E^1 = \frac{I_{ES}}{V_T} e^{\frac{V_{BE}^1}{V_T}},$$

$$I_{CO}^1 = G_C^1 (V_T - V_{BC}^1) - I_{CS},$$

$$I_{EO}^1 = G_E^1 (V_T - V_{BE}^1) - I_{ES}.$$

Što se tiče zavisnih strujnih izvora, o njima je bilo riječi u točki 3.5 i slici 8., a ovdje ćemo taj opis nadopuniti i na slici 19.c dati elemente $\underline{G}$ matrice i vektora $\underline{I}_{sn}$ koji opisuju jedan tranzistor.

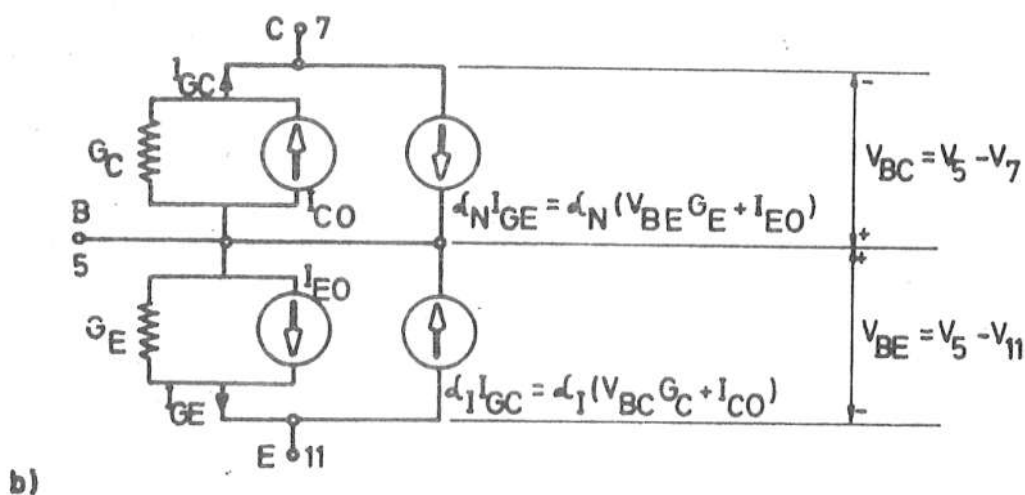
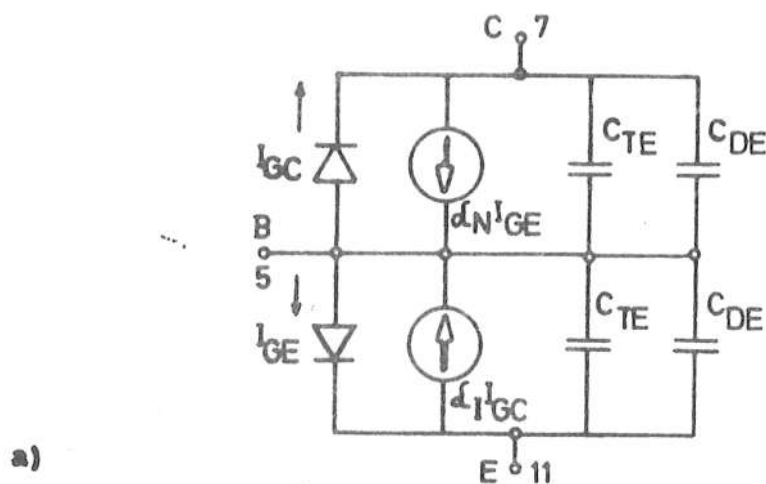
Na kraju treba objasniti način izbora početne radne točke. Početni uvjeti dioda i bipolarnih tranzistora se određuju u odnosu na točku najveće zakrivljenosti eksponencijalne karakteristike. Naime, zakrivljenost krivulje je zadana izrazom

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Nas zanima točka najveće zakrivljenosti funkcije $I = I_S (e^{\frac{V}{V_T}} - 1)$, dakle,

$$k = \frac{I''}{(1 + I'^2)^{3/2}},$$

a najveća zakrivljenost će nastupiti uz uvjet $\frac{dk}{dV} = 0$. Napon pri kojemu karakteristika diode ima najveću zakrivljenost, dobiven iz uvjeta $\frac{dk}{dV} = 0$, dan je izrazom



c)

	5 (B)	7 (C)	11 (E)		
5 (B)	$(G_E + G_C - \alpha_N G_E - \alpha_I G_C)$	$(-G_C + \alpha_I G_C)$	$(-G_E + \alpha_N G_E)$	V_5	$-(1 - \alpha_N) I_{E0} - (1 - \alpha_I) I_{C0}$
7 (C)	$(-G_C + \alpha_N G_E)$	G_C	$-\alpha_N G_E$	V_7	$-\alpha_N I_{E0} + I_{C0}$
11 (E)	$(-G_E + \alpha_I G_C)$	$-\alpha_I G_C$	G_E	V_{11}	$I_{E0} - \alpha_I I_{C0}$

Sl. 19. a) Ebers-Mollov model tranzistora, b) Linearizacija modela, c) Upisivanje lineariziranog modela u sustav $G \underline{V}_n = \underline{I}_{sn}$.

$$V_{BO} = V_T \ln \frac{V_T}{\sqrt{2} I_s} \quad (35.a)$$

Neki autori izraz (35.a) pišu u obliku

$$V_{BO} = V_T \ln \frac{1}{K I_s}$$

gdje je za točku najveće zakrivljenosti konstanta $K = \frac{\sqrt{2}}{V_T} = 55,8$.

Takodjer se navodi da se poželjni K nalazi izmedju 100 i 10.000. U programu koji je napravljen odredjuje se početni napon po volji, a prema izrazu

$$V_{BO} = V_T \ln \frac{V_T}{\sqrt{2} I_s} - A \cdot V_T, \quad (35.b)$$

što uz jednostavnu transformaciju daje $K = e^{A \frac{\sqrt{2}}{V_T}}$. Početna struja diode je uz napon na diodi zadan u obliku izraza (35) jednaka $I_D = \frac{V_T}{\sqrt{2}}$, odnosno $I_D = \frac{V_T}{e^A \sqrt{2}} = \frac{1}{K}$. Dakle, početna struja ne ovisi o struji zasićenja I_s , i jednaka je za sve diode i tranzistore. U Tablici 1. dane su vrijednosti početnih struja u ovisnosti o konstanti A .

Tablica 1.

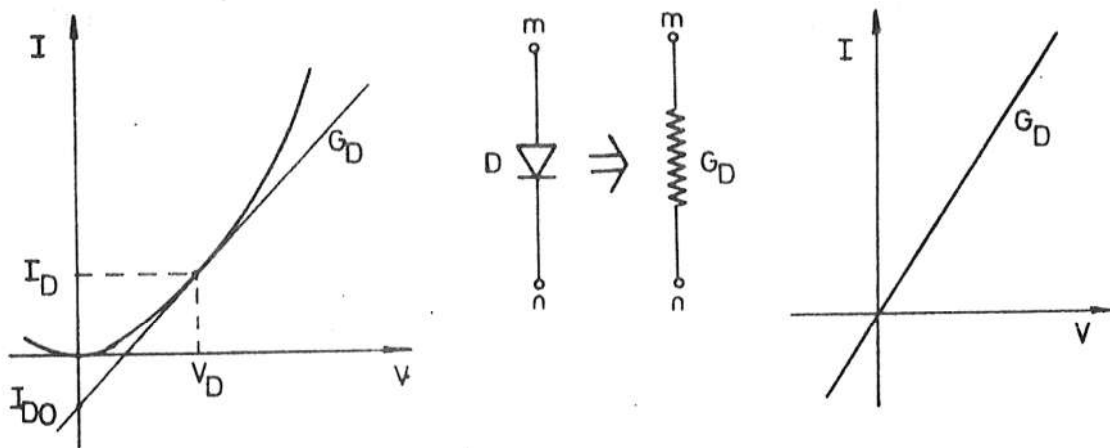
A	K	POČETNA STRUJA I_D	POČETNI NAPON V_{BO} (za $I_s = 10^{-14}$ A)
0	55,9	17,89 mA	712,6 mV
1	152,2	6,58 mA	687,3 mV
2	413,6	2,42 mA	662,1 mV
3	1124,4	890,07 μ A	636,8 mV
4	3056,5	327,67 μ A	611,6 mV
5	8308,4	120,55 μ A	586,3 mV
6	22584,6	44,35 μ A	561,1 mV
7	61392,4	16,31 μ A	535,8 mV

Isto tako poželjno je imati mogućnost da neke diode, odnosno, barijere baza-kolektor kod tranzistora početno postavimo u zaporno područje, tj. $V_D = V_{BC} = 0$. Ova mogućnost kada je ugrađena u program u nekim slučajevima znatno smanjuje broj potrebnih iteracija.

6. LINEARNE IZMJENIČNE MREŽE

Prije nego li predjemo na analizu linearnih izmjeničnih mreža potrebno je objasniti kako se bilo koja nelinearna mreža dađe linearizirati prije nego li se pristupi linearnoj analizi. Općenito su mreže nelinearne, jer se pored R, L, C elemenata sastoji iz aktivnih elemenata - tranzistora i dioda. Kod ovog tipa analize može se nelinearne elemente linearizirati u okolišu radne točke i te vrijednosti uvrstiti u mrežu. Poslužimo se ponovo s primjerom linearizacije diode. U radnoj točki prema slici 20. odredimo tangentu u skladu s već poznatim izrazom:

$$G_D = \frac{dI_D}{dV_D} = \frac{I_S}{V_T} e^{\frac{V_D}{V_T}} = (I_D + I_S)/V_T .$$



Sl. 20. Linearizacija diode u svrhu izmjenične analize.

Za razliku od modela diode koji se koristi kod istosmjerne analize nelinearnih mreža (vidi sl. 15), ovdje je dovoljno zamjeniti diodu samo s vodljivošću G_D . Kod programa za automatsku obradu električnih mreža s kojima se može vršiti istosmjerna i izmjenična analiza, linearizacija nelinearnih elemenata se vrši automatski i nije potrebno izvana unositi linearni model nelinearnih elemenata. Naime, analiza počinje s određivanjem istosmjernog stanja mreže. Nakon što je istosmjerno stanje određeno, svi nelinearni elementi predstavljeni su u G matrici s odgovarajućim vodljivostima G_D i još sa strujnim izvorima I_{D0} . Vodljivosti G_D u mreži zadržimo, a strujne izvore I_{D0} uklonimo iz mreže. Nakon ovog postupka linearna izmjenična analiza može započeti.

U principu koristimo isti izraz kao i za istosmjernu analizu s time da sada umjesto matrice vodljivosti G imamo matricu admitancija Y , a vektori napona $\underline{V}_n$ i strujnih izvora $\underline{I}_s$ su kompleksni. Pišemo, dakle,

$$\underline{Y} \underline{V}_n^* = \underline{I}_{Sn}^* \quad 1) \quad (36)$$

gdje je

$$\underline{Y} = \left[\underline{G}_{ij} + j \underline{B}_{ij} \right] \quad , \quad \underline{V}_n^* = \underline{V}_n + j \underline{\bar{V}}_n \quad ,$$

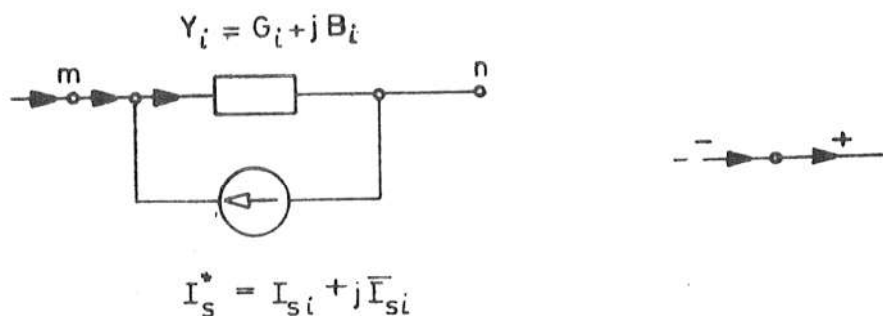
$$\underline{I}_{Sn}^* = \underline{I}_{Sn} + j \underline{\bar{I}}_{Sn} \quad .$$

Gornji izraz mogli bismo izravno koristiti, u kojem slučaju bismo imali opširnije napisano za prvi redak izraza (36):

$$(\underline{G}_{11} + j \underline{B}_{11})(\underline{V}_1 + j \underline{\bar{V}}_1) + (\underline{G}_{12} + j \underline{B}_{12})(\underline{V}_2 + j \underline{\bar{V}}_2) + \dots = \underline{I}_{Sn1} + j \underline{\bar{I}}_{Sn1} \quad . \quad (37)$$

¹⁾ Oznaka $\underline{V}^*$ predstavlja napon koji ima realnu komponentu i imaginarnu komponentu $\underline{\bar{V}}$.

Ovaj oblik nam je neprikladan za rad na računskom stroju, te ga je potrebno preurediti. Prvo definirajmo standardnu granu za izmjenične struje (sl. 21).



Sl. 21. Standardna grana za izmjenične struje.

Dijagonalna matrica admitancija je

$$\underline{Y}_D = \left| \underline{G}_{ii} + j \underline{B}_{ii} \right|$$

i možemo je prikazati kao zbroj $\underline{G}_D$ i $\underline{B}_D$ matrice

$$\underline{Y}_D = \underline{G}_D + j \underline{B}_D .$$

Primjenimo sada postupak za dobijanje matrice admitancija preko dijagonalne matrice admitancija, tj.

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{A} \underline{Y}_D \underline{A}^t = \underline{A} (\underline{G}_D + j \underline{B}_D) \underline{A}^t = \\ &= \underline{A} \underline{G}_D \underline{A}^t + j \underline{A} \underline{B}_D \underline{A}^t = \underline{G} + j \underline{B} . \end{aligned} \quad (38)$$

Ovaj izraz nam kaže da matricu admitancija možemo složiti iz dvije matrice $\underline{G}$ i $\underline{B}$, a svaku od njih izračunavamo neovisno jednu od druge s pomoću matrice incidencija $\underline{A}$. To dalje znači

da $\underline{G}$ matricu konstruiramo po do sada utvrđenom pravilu (vidi točku 2.1) ne vodeći računa o reaktivnim granama mreže. Zatim konstruiramo $\underline{B}$ matricu po istom pravilu ne vodeći računa o otpornim granama mreže. Koristeći ovaj postupak izraz (36) možemo ovako napisati:

$$(\underline{G} + j \underline{B}) (\underline{V}_n + j \underline{\bar{V}}_n) = (\underline{I}_{Sn} + j \underline{\bar{I}}_{Sn}) , \quad (39)$$

što razvijeno daje

$$\underline{G} \underline{V}_n + j \underline{B} \underline{V}_n + j \underline{G} \underline{\bar{V}}_n - \underline{B} \underline{\bar{V}}_n = \underline{I}_{Sn} + j \underline{\bar{I}}_{Sn} . \quad (40)$$

Izjednačimo realni dio s realnim i imaginarnim s imaginarnim:

$$\underline{G} \underline{V}_n - \underline{B} \underline{\bar{V}}_n = \underline{I}_{Sn}$$

$$\underline{B} \underline{V}_n + \underline{G} \underline{\bar{V}}_n = \underline{\bar{I}}_{Sn}$$

odakle slijedi matrični izraz:

$$\begin{vmatrix} \underline{G} & -\underline{B} \\ \underline{B} & \underline{G} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{V}_n \\ \underline{\bar{V}}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{I}_{Sn} \\ \underline{\bar{I}}_{Sn} \end{vmatrix} \quad (41)$$

Gornji izraz izravno koristimo pri rješavanju linearnih izmjeničnih mreža, a prvi redak napisan opširnije glasi:

$$G_{11} V_1 + G_{12} V_2 + \dots + G_{1n} V_n - B_{11} \bar{V}_1 - B_{12} \bar{V}_2 \dots - B_{1n} \bar{V}_n = I_{Sn1}$$

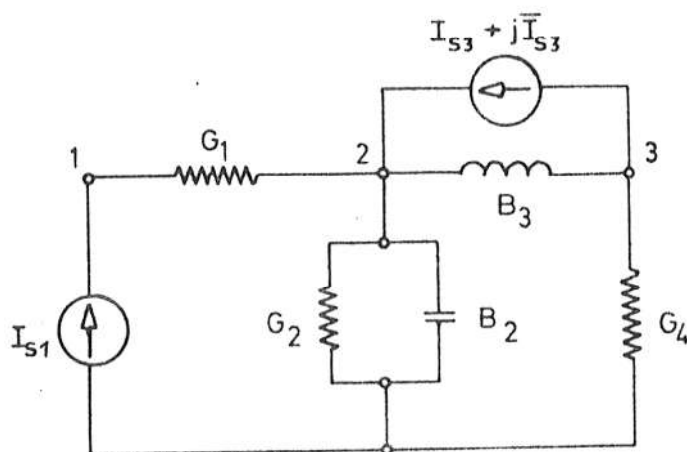
Ovaj oblik je znatno pogodniji od ranije navedenog izraza (28).

Iz izraza (41) treba uočiti da je broj nepoznanica 2 puta veći od broja čvorova zbog činjenice da svi naponi čvorova imaju realnu i imaginarnu komponentu. Matrica $\underline{Y}$ je četiri puta veća od $\underline{G}$ matrice, jer umjesto $(n \times n)$ elemenata sadrži $(2n \times 2n)$

elemenata, pa je i napor u računanju veći.

Opisani postupak primjenimo na mrežu sa sl. 22. Najprije napišimo $\underline{G}$ i $\underline{B}$ matrice

$$\underline{G} = \begin{vmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_4 \end{vmatrix} \quad \underline{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 + B_3 & -B_3 \\ 0 & -B_3 & B_3 \end{vmatrix} .$$



Sl. 22. Primjer linearne izmjenične mreže.

$$B_2 = \omega C_2 , \quad B_3 = \frac{-1}{\omega L_3} ,$$

$$I_{S1} = I_{10} \sin \omega t , \quad I_{S3} = I_{30} \sin (\omega t + \phi) .$$

Potpuni matrični izraz koji opisuje mrežu je:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccccc}
 G_1 & -G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -G_1 & G_1+G_2 & 0 & 0 & -B_2-B_3 & B_3 \\
 0 & 0 & G_4 & 0 & B_3 & -B_3
 \end{array} \right| \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} = \begin{array}{c} I_{S1} \\ I_{S3} \\ -I_{S3} \end{array} \\
 \hline
 \left| \begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & G_1 & -G_1 & 0 \\
 0 & B_2+B_3 & -B_3 & -G_1 & G_1+G_2 & 0 \\
 0 & -B_3 & B_3 & 0 & 0 & G_4
 \end{array} \right| \begin{array}{c} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ \bar{I}_{S3} \\ -\bar{I}_{S3} \end{array}
 \end{array}$$

ili razvijeno za prva dva reda

$$G_1 V_1 - G_1 V_2 = I_{S1}$$

$$-G_1 V_1 + (G_1 + G_2) V_2 - (B_2 + B_3) \bar{V}_2 + B_2 \bar{V}_3 = I_{S3} \quad , \quad \text{itd.}$$

Kod izmjeničnog signala nalizu vršimo pri odabranoj frekvenciji. Mijenjamo li frekvenciju, matrica G ostaje nepromjenjena, dok se matrica B mijenja. Članovi B matrice su oblika ωC , $\frac{1}{\omega L}$ ili njihov zbroj pa se mijenjaju s frekvencijama. Ovo znači da za svaku frekvenciju treba izračunati vrijednosti elemenata matrice B i uvrstiti ih u izraz (41), te izračunati napone čvorova $\underline{V}_n^* = \underline{V}_n + j \bar{\underline{V}}_n$. S obzirom na činjenicu da je promatrano frekven-
cijsko područje obično veliko, to se i frekvencije prikazuju u logaritamskoj skali. Zbog toga se u programu frekvencija također mjenja kao $f_n = 10^{nx} f_0$, gdje se x odredi iz broja promatranih frekvencija po dekadi. Na primjer, želimo imati 4 frekvencije po dekadi u jednakim logaritamskim prirastima. Tada je $4x = 1$
 $x = 0,25$, pa imamo:

$$f_0 = 10^0 f_0 = f_0$$

$$f_1 = 10^{0.25} f_0 = 1.780 f_0$$

$$f_2 = 10^{0.50} f_0 = 3.165 f_0$$

$$f_3 = 10^{0.75} f_0 = 5.630 f_0$$

$$f_4 = 10^1 f_0 = 10.000 f_0 \quad \text{itd.}$$

Ulazni i izlazni naponi, odnosno struje su u kompleksnom obliku $V + j \bar{V}$, $I + j \bar{I}$, koji oblik se u nekim programima može pretvoriti i u oblik $\sqrt{V^2 + \bar{V}^2} \angle \phi$, odnosno $\sqrt{I^2 + \bar{I}^2} \angle \phi$. Dakle, mijenjajući frekvenciju ulaznog signala kao rezultat analize dobijemo amplitudnu i faznu karakteristiku mreže u bilo kojem čvoru.

Što se tiče zavisnih strujnih izvora, te naponskih izvora vrijedi u principu isto ono što je već rečeno za istosmjernu mrežu s time da sada treba voditi računa o njihovoj kompleksnoj prirodi.

7. PRIJELAZNA STANJA NELINEARNIH MREŽA

Cilj nam je u ovom poglavlju opisati postupak za analizu prijelaznih stanja nelinearnih električnih mreža. Takove mreže mogu se sastojati iz linearnih otpornosti, kapacitivnosti i induktivnosti, te nelinearnih otpornih elemenata kao i nelinearnih kapacitivnosti i nelinearnih induktivnosti. Ulazni signal je kod ove analize funkcija vremena. Zbog preglednosti izlaganja najprije će biti opisana analiza prijelaznog stanja linearnih mreža, i u vezi s time će se razmotriti kriterije po kojima se ocjenjuje stabilnost i točnost metoda numeričke integracije. Zatim će biti opisane metode numeričke integracije nelinearnih kapacitivnosti (odnosno induktivnosti). Radi se o lineariziranom nadomjesnom sklopu koji prikladnim iterativnim postupkom slijedi nelinearnu prirodu samog kapacitivnog (odnosno induktivnog) elementa. Postupak linearizacije nelinearnih otpornih elemenata obradjen je u poglavlju 5. te ovdje name potrebe ponovno se osvrutati na taj problem.

7.1. Prijelazna stanja linearnih mreža

Električna mreža, koja sadrži otporne, kapacitivne i induktivne grane, ima struje grana izražene ovim izrazima

$$\begin{aligned} I_G &= G(V_m - V_n) \quad , \\ I_C &= C \frac{d}{dt} (V_m - V_n) \quad , \\ I_L &= \frac{1}{L} \int_0^t (V_m - V_n) dt \quad . \end{aligned} \tag{42}$$

Ravnoteža struje u čvorovima mreže predstavljat će kombinaciju struja I_G , I_C , I_L . Prikažimo takovu situaciju jednostavnim

primjerom prema slici 23. Za čvor 2 I Kirchhoffov zakon glasi:

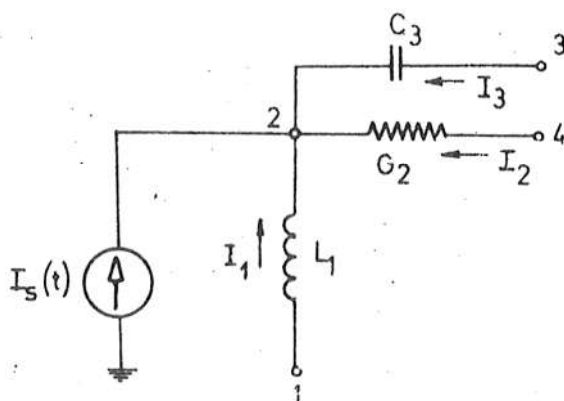
$$I_1 + I_2 + I_3 = -I_s(t)$$

gdje je prema izrazima (42):

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{L_1} \int_0^t (V_1 - V_2) dt, \\ I_2 &= G_2 (V_4 - V_2), \\ I_3 &= C_3 \frac{d(V_3 - V_2)}{dt}, \end{aligned} \quad (43)$$

što uvršteno u jednadžbu ravnoteže struja u čvoru 2 daje:

$$\frac{1}{L_1} \int_0^t (V_1 - V_2) dt + G_2 (V_4 - V_2) + C_3 \frac{d(V_3 - V_2)}{dt} = -I_s(t).$$



S1. 23. Dio linearne mreže.

Ovaj jednostavni primjer nam pokazuje da će dosadašnji algebarski sustav $\underline{G} \underline{V}_n = \underline{A} \underline{I}_s$ prijeći u sustav integralno-diferencijalnih jednadžbi. Računskim strojem ne može se dobiti analitičko rješenje, već samo numeričko, a to znači da integralno-diferencijalnu jednadžbu trebamo pretvoriti u algebarsku. U tijeku daljnjeg izlaganja će se pokazati da se uz relativno malen dodatni napor dađe koristiti isti matematički pristup koji je korišten pri rješavanju linearnih otpornih mreža i pri rješavanju dinamičkih (linearnih i nelinearnih) električnih mreža. Općenito, rješavanje diferencijalnih jednadžbi se naziva integracijom. Ima više metoda numeričke integracije, i mi ćemo ovdje opisati tri metode od kojih se dvije najčešće primjenjuju. Naime, pri izboru metode integracije treba izabrati onu koja je dovoljno jednostavna za primjenu, i pri tome daje dovoljno točno i stabilno rješenje.

Prva od tri metode je Eulerova metoda prema kojoj se napon na kapacitivnosti C u trenutku $t + \Delta t$, $U_C(t + \Delta t)$, određuje iz poznatog napona $U_C(t)$ u trenutku t na slijedeći način:

$$U_C(t + \Delta t) = U_C(t) + \frac{dU_C(t)}{dt} \Delta t, \quad (44)$$

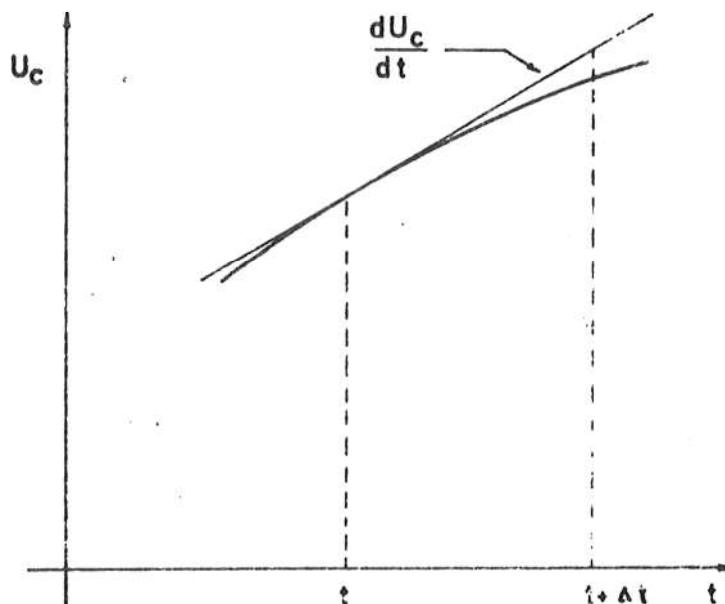
tj. aproksimiramo krivulju $U_C(t)$ sa slike 24. tangentom. Aproksimacija je to bolja što je vremenski interval Δt manji. Grešku, koja nastaje primjenom izraza (44), možemo odrediti usporedbom s Taylorovim redom:

$$U_C(t + \Delta t) = U_C(t) + \Delta t U_C'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} U_C''(t) + \dots \quad (45)$$

Greška je, kako vidimo usporedbom izraza (44) i (45), jednaka:

$$\frac{\Delta t^2}{2!} U_C''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} U_C'''(t) + \dots$$

pa kažemo da je proporcionalna sa $\frac{\Delta t^2}{2!} U_c(t)$.



Sl. 24. Prikaz Eulerove metode.

Za potrebe numeričkog proračuna, u kojem želimo izbjeći formiranje diferencijalnih jednačbi i gdje želimo zadržati matematički pristup koji smo koristili kod otpornih mreža, uvodimo zamjenu

$$\frac{dU_c(t)}{dt} = \frac{I_c(t)}{C},$$

a za vrijeme t uvodimo

$$t = n\Delta t$$

te jednačba (44) prelazi u

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\Delta t}{C} I_n \quad (46)$$

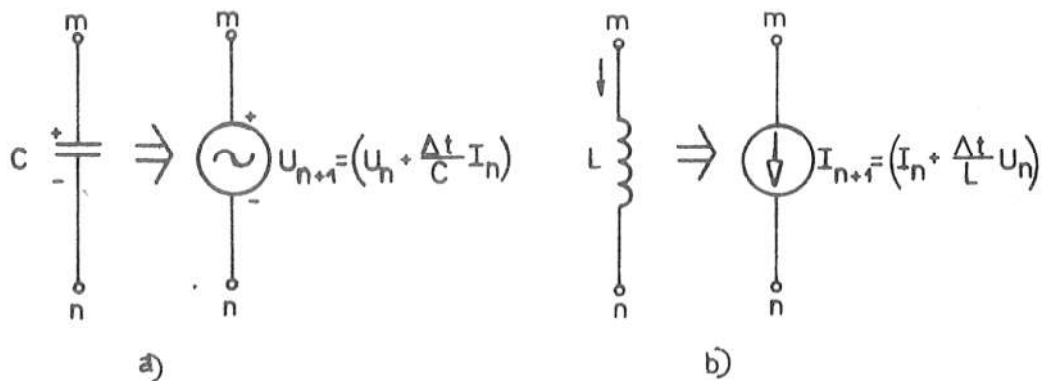
sa oznakama U_n , umjesto $U(t) = U(n\Delta t) = U_n$, kako je to uobičajeno u računu diferencija. Nadomjesni sklop za kapacitivnost C koji slijedi iz jednadžbe (46) je naponski izvor i prikazan je na slici 25.a.

Za induktivnost L vrijedi veza između napona i struje $U_L = L \frac{dI_L}{dt}$, pa će integracija po Euleru dati

$$I_n = I_n + \frac{dI_n}{dt} \Delta t, \quad (47)$$

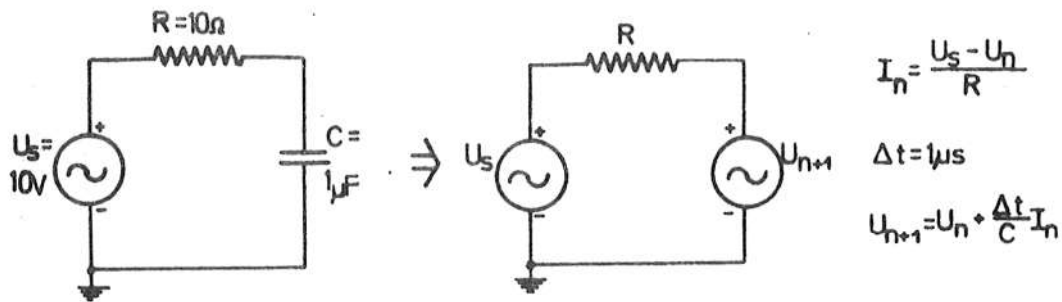
odnosno
$$I_n = I_n + \frac{\Delta t}{L} U_n.$$

Nadomjesni sklop za induktivitet je prema jednadžbi (47) strujni izvor i prikazan je na slici 25.b. Treba napomenuti, da barem što se tiče kapacitivnosti C , opisani postupak nije prikladan za računanje metodom čvora, jer unosi naponske izvore u električnu mrežu.



Sl. 25. a) Nadomjesni sklop za kapacitivnost C i
b) Nadomjesni sklop za induktivnost L prema Eulerovoj metodi.

Primjer proračuna odziva sklopa po Eulerovoj formuli prikazuje slika 26. Radi se o sklopu integratora koji na izlazu daje eksponencijalni porast oblika $U_n = U_s(1 - e^{-\frac{nat}{RC}})$. Početne uvjete moramo zadati isto kao i kod rješavanja diferencijalnih jednačbi; za sklop prema slici, za $t=0$, tj. za $n=0$ imamo $U_n = 0$ i $I_n = \frac{U_s}{R} = 1 \text{ A}$.



$n \Delta t$	$U_n (V)$	$I_n (A)$	$U_{n+1} (V)$
0	0	1	1
1	1	0,9	1,9
2	1,9	0,81	2,71
3	2,71	0,729	3,50
.	.	.	.

S1. 26. Nadomjesni sklop RC mreže.

Vidimo da smo mrežu koja sadrži kapacitivnost C transformirali u mrežu koja se sastoji samo iz naponskih izvora (U_s i U_{n+1}) i otpora (R). U matematičkom smislu to znači da smo diferencijalnu jednačbu transformirali u algebarsku.

Druga metoda integracije je modificirana Eulerova metoda, tzv. Eulerova implicitna metoda koja je prikladnija za primjenu i daje stabilno rješenje diferencijalne jednačbe. Jednačbu (44) sada pišemo

$$U_C(t + \Delta t) = U_C(t) + \Delta t \frac{dU_C(t + \Delta t)}{dt} ,$$

odnosno

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_{n+1}$$

i nakon zamjene $\dot{U}_{n+1} = I_{n+1}/C$ imamo

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\Delta t}{C} I_{n+1} . \quad (48)$$

Ovaj postupak je sasvim opravdan, jer veza između napona U_{n+1} i U_n može ravnopravno biti derivacija u vremenu t_n , isto tako kao i derivacija u vremenu t_{n+1} . Iz izraza (48) slijedi:

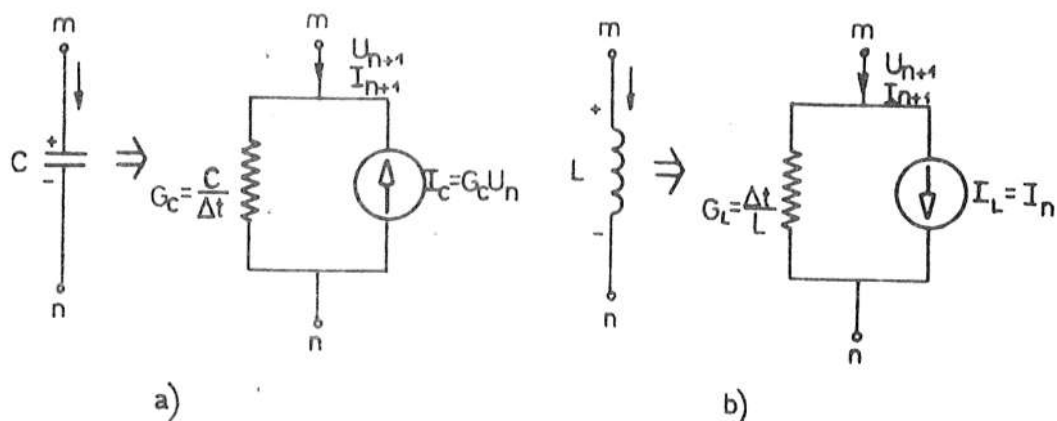
$$I_{n+1} = \frac{C}{\Delta t} U_{n+1} - \frac{C}{\Delta t} U_n . \quad (49)$$

Ovaj izraz vodi na nadomjesni sklop prema slici 27.a. Vidimo da je struja I_{n+1} jednaka zbroju struje kroz vodljivost G_C i struje I_C , koja suma zadovoljava jednačbu (49).

Slično postupamo i s induktivnošću L :

$$I_{n+1} = I_n + \Delta t \dot{I}_{n+1} ,$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{\Delta t}{L} U_{n+1} . \quad (50)$$



Sl. 27. a) Nadomjesni sklop kapacitivnosti C i
b) Nadomjesni sklop induktivnosti L prema
Eulerovoj implicitnoj metodi.

Ovaj izraz daje nadomjesni sklop prema slici 27.b. Vidimo da je primjena modificirane Eulerove formule znatno prikladnija, jer su oba elementa C i L prikazana istom vrstom nadomjesnog sklopa koji ima oblik standardne grane mreže, pa prema tome zadovoljava zahtjeve proračuna mreže metodom čvora. Zbog svojih dobrih osobina ova metoda integracije je primijenjena u mnogim programima za proračun dinamičkih električnih mreža. Što se tiče pogreške, koju unosi ova metoda, ona je ista kao i kod obične Eulerove formule, tj. proporcionalna je sa

$$\frac{\Delta t^2}{2!} U_c(t), \text{ odnosno } \frac{\Delta t^2}{2!} I_L(t).$$

Treća metoda je trapezna metoda integracije. Napon na kapacitivnosti C u vremenu $t + \Delta t$ određujemo po formuli

$$U_c(t + \Delta t) = U_c(t) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{dU_c(t)}{dt} + \frac{dU_c(t + \Delta t)}{dt} \right),$$

odnosno
$$U_{n+1} = U_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{U}_n + \dot{U}_{n+1}) , \quad (51.a)$$

ili koristeći zamjenu

$$\dot{U}_n = \frac{I_n}{C} , \quad \dot{U}_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{C}$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\Delta t}{2C} (I_n + I_{n+1}) . \quad (51.b)$$

Vidimo da ovaj postupak koristi srednju aritmetičku vrijednost derivacije u vremenu t_n i t_{n+1} . Iz izraza (51.b) slijedi

$$I_{n+1} = \frac{2C}{\Delta t} U_{n+1} - \left(\frac{2C}{\Delta t} U_n + I_n \right) . \quad (52)$$

Ovaj izraz daje nadomjesni sklop prema slici 37.a. Struja I_{n+1} jednaka je, dakle, zbroju struje kroz vodljivost G_C i struje I_C , koja suma zadovoljava jednadžbu (52).

Slično ćemo postupiti i s induktivnošću L :

$$I_{n+1} = I_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{I}_n + \dot{I}_{n+1}) ,$$

ili koristeći zamjenu $\dot{I}_n = \frac{U_n}{L} , \quad \dot{I}_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{L}$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{\Delta t}{2L} (U_n + U_{n+1}) ,$$

što nakon razmještanja članova desne strane daje

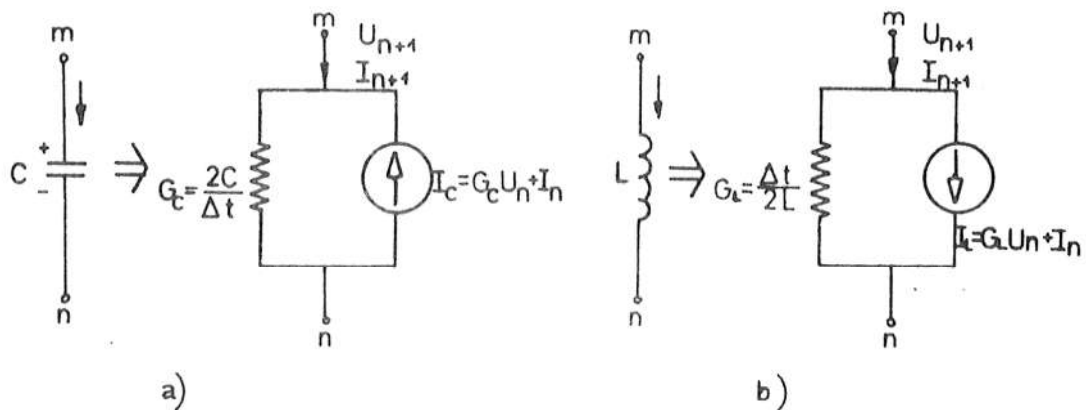
$$I_{n+1} = \frac{\Delta t}{2L} U_{n+1} + \left(\frac{\Delta t}{2L} U_n + I_n \right) . \quad (53)$$

Ovaj izraz daje nadomjesni sklop prema slici 28.b. Struja I_{n+1} jednaka je, dakle, zbroju struje kroz vodljivost G_L i struje I_L , koja suma zadovoljava jednadžbu (53).

Grešku, koja nastaje prema opisanom postupku integracije (izraz 51.a), odredjujemo usporedbom s Taylorovim redom:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{U}_n + \dot{U}_{n+1}) ,$$

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{U}_{n+1} - \dot{U}_n) . \quad (54)$$



Sl. 28. a) Nadomjesni sklop kapacitivnosti C i
b) Nadomjesni sklop induktivnosti L prema
trapeznoj formuli.

Napišimo sada prema Eulerovoj formuli izraz za prvu derivaciju u vremenu t_{n+1}

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \Delta t \ddot{U}_n$$

odakle je $\dot{U}_{n+1} - \dot{U}_n = \Delta t \ddot{U}_n$

i uvrstimo ovo u izraz (54.a) pa imamo:

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_n . \quad (54.b)$$

Ova metoda integracije je točnija od ranije opisanih, jer je funkcija aproksimirana s prva tri člana Taylorovog izraza, tj. uključuje i kvadratni član, te je greška proporcionalna s $\Delta t^3/3! \ddot{U}_n$.

Drugi pristup trapeznoj integraciji, po kojem je i dobila naziv, a daje istu konačnu formulu i nadomjesnu shemu je slijedeći:

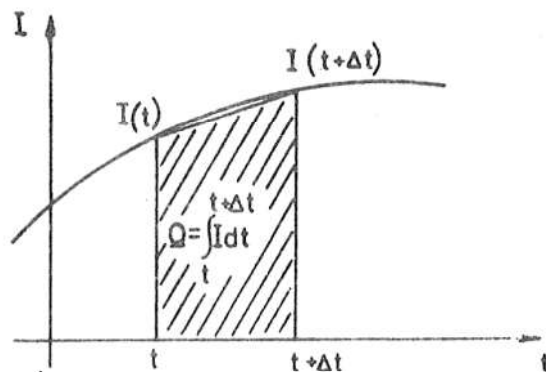
napon na kondenzatoru C u vremenu $t+\Delta t$ je jednak

$$\begin{aligned} U(t+\Delta t) &= U(t) + \frac{1}{C} \int_t^{t+\Delta t} I \, dt = \\ &= U(t) + \frac{1}{C} (I(t+\Delta t) + I(t)) \frac{\Delta t}{2} , \end{aligned}$$

ili jednostavnije napisano

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\Delta t}{2C} (I_n + I_{n+1}) ,$$

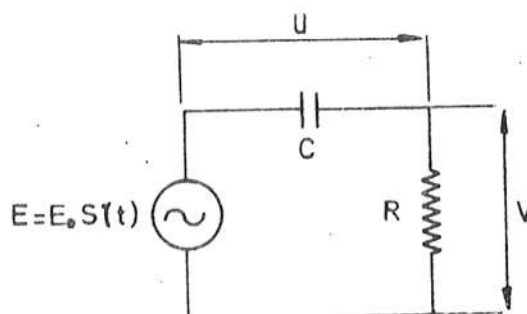
što je već poznati izraz (51.b). Iz slike 29 se vidi da smo kod određivanja prirasta napona na kondenzatoru, struju integrirali prema trapeznoj formuli, pa odatle i naziv metodi.



Sl. 29. Prikaz trapezne integracije.

7.2. Točnost i stabilnost metoda integracije

Točnost i stabilnost triju opisanih metoda integracije bit će sada prikazana na jednostavnom primjeru RC sklopa prema slici 30.



Sl. 30. RC sklop kao primjer metoda integracije.

a) Eulerova metoda (E)

U bilo kojem trenutku t_n i t_{n+1} vrijedi

$$E = U_n + V_n \quad \text{ili} \quad U_n = E - V_n, \quad (55.a)$$

$$E = U_{n+1} + V_{n+1} \quad \text{ili} \quad U_{n+1} = E - V_{n+1}, \quad (55.b)$$

$$I_n = \frac{V_n}{R} \quad \text{i} \quad I_{n+1} = \frac{V_{n+1}}{R}. \quad (55.c)$$

Za napon na kondenzatoru imamo prema izrazu (46)

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\Delta t}{C} I_n.$$

Ako prema izrazima (55) uvrstimo odgovarajuće vrijednosti za U_{n+1} , U_n i I_n u izraz (46) imamo:

$$E - V_{n+1} = E - V_n + \frac{\Delta t}{RC} V_n,$$

$$V_{n+1} = V_n \left(1 - \frac{\Delta t}{RC}\right). \quad (56)$$

Izraz (56) predstavlja jednadžbu diferencija čije je rješenje uz poznate početne uvjete $t=0$, $V_0=E_x$ jednako

$$V_n = E_x \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)^n, \quad (57)$$

gdje je, jednostavnosti radi, uvedena zamjena $\tau = RC$.

Jednadžba diferencija (57) može se na jednostavan način dobiti slijedećim postupkom iz jednadžbe (56):

$$V_1 = V_0 \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) = E_x \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right),$$

jer je za $t=0$, tj. za $n=0$ početni napon V_0 na otporu jednak naponu izvora E_x . Zatim je prema izrazu (56) za $n=1$

$$V_2 = V_1 \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) = E_x \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)^2,$$

pa ukoliko ovaj postupak primjenimo n puta imamo

$$V_n = E_x \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)^n \quad (57)$$

što smo i željeli pokazati.

b) Eulerova implicitna metoda (EIM)

Budući da razmatramo isti sklop sa slike 30. jednadžbe (55) su iste, a za napon na kondenzatoru prema (48) imamo:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\Delta t}{C} I_{n+1},$$

što nakon uvrštavanja daje

$$E - V_{n+1} = E - V_n + \frac{\Delta t}{RC} V_{n+1}, \quad (58)$$

$$V_{n+1} = V_n \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}.$$

Uz iste početne uvjete, rješenje gornje jednadžbe diferencija je

$$V_n = E_x \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta t}{\tau}\right)^n}. \quad (59)$$

c) Trapezna metoda (TR)

Jednadžbe (55) su iste, a za napon na kondenzatoru prema izrazu (51.b) vrijedi:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\Delta t}{2C} (I_n + I_{n+1}) ,$$

što nakon uvrštavanja daje

$$\begin{aligned} E - V_{n+1} &= E - V_n + \frac{\Delta t}{2RC} V_n + \frac{\Delta t}{2RC} V_{n+1} , \\ V_{n+1} &= V_n \frac{1 - \frac{\Delta t}{2}}{1 + \frac{\Delta t}{2}} . \end{aligned} \quad (60)$$

Uz iste početne uvjete rješenje gornje jednadžbe diferencija je

$$V_n = E_x \left| \frac{1 - \frac{\Delta t}{2}}{1 + \frac{\Delta t}{2}} \right|^n . \quad (61)$$

Točno, analitičko, rješenje za razmatrani RC sklop glasi:

$$\begin{aligned} V(t) &= E_x e^{-t/\tau} , \quad \text{odnosno uz zamjenu } t=n\Delta t \\ V_n &= E_x e^{-n \Delta t / \tau} . \end{aligned} \quad (62)$$

Smisao ove analize, čiji su rezultati izraženi izrazima (57), (59) i (61), sastoji se u tome da smo odredili analitičko rješenje koje daje nadomjesni sklop kapacitivnosti C u jednostavnom RC sklopu prema slici 30. Usporedbom analitičkog rješenja jednadžbe diferencija sa analitičkim rješenjem diferencijalne jed-

nadžbe (62) možemo za bilo koji trenutak $t=n\Delta t$ doći do zaključka o svojstvima pojedine metode integracije. Prvo ćemo ocijeniti točnost koju postizemo u slučaju kada se vrijeme poveća za korak Δt . Rezultati za $\Delta t = 0,1\tau$ i $\Delta t = \tau$ su dani u Tablici 2. Iz tablice se vidi da trapezna metoda najbolje aproksimira pravo rješenje, što smo i očekivali s obzirom na činjenicu da je u aproksimaciju uključen i kvadratični član Taylorovog reda.

Tablica 2.

Točnost metoda numeričke integracije za RC sklop

Metoda	E	EIM	TR	Točno
	$(1 - \frac{\Delta t}{\tau})$	$\frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$	$\frac{1 - \frac{\Delta t}{2\tau}}{1 + \frac{\Delta t}{2\tau}}$	$e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}$
$\Delta t = 0,1\tau$	0,90000	0,90909	0,90476	0,90483
$\Delta t = \tau$	0,0	0,5	0,333	0,368

Stabilnost rješenja se može procijeniti povećavajući vremenski korak Δt i promatrajući rezultat uz parni i neparni broj koraka n . Usporedba triju metoda je dana u Tablici 3. Iz tablice se vidi da je Eulerova metoda stabilna kada je vremenski korak $\Delta t < \tau$. Za veoma veliki Δt rješenje oscilira (mijenja predznak) i divergira sve više što je veći n (veće vrijeme $t = n\Delta t$). Ova metoda spada u tzv. eksplicitne metode integracije, koje su općenito stabilne samo uz ispunjen uvjet $\Delta t < \tau$. Ukoliko električna mreža ima više vremenskih konstanti, tada vremenski korak Δt za stabilno rješenje mora biti manji od najmanje vremenske konstante sklopa, $\Delta t < \tau_{\min.}$.

Eulerova implicitna metoda je stabilna za bilo koji vremenski korak Δt , a točnost rješenja znatno opada s porastom kvocijenta $\Delta t/\tau$. Ova metoda spada u tzv. implicitne metode integracije koje su općenito stabilne.

Tablica 3.

Stabilnost metoda numeričke integracije za RC sklop

Metoda	E	EIM	TR
	$\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)^n$	$\frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)^n}$	$\left(\frac{1 - \frac{\Delta t}{2\tau}}{1 + \frac{\Delta t}{2\tau}}\right)^n$
Stabilno za	$0 < \Delta t < \tau$	$0 < \Delta t$	$0 < \Delta t < 2\tau$
Za veoma veliki Δt , $\frac{\Delta t}{\tau} \gg 1$	$\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right)^n$ divergira i oscilira	$\frac{1}{\left(\frac{\Delta t}{\tau}\right)^n}$ stabilno	$(-1)^n$ stabilno ali oscilira

Trapezna metoda je najtočnija i stabilna iako numeričko rješavanje oscilira ukoliko je $\Delta t > 2\tau$. Ova metoda spada također u implicitne metode integracije. Između Eulerove implicitne metode i trapezne metode, prednost ima trapezna iako bi se moglo zaključiti suprotno zbog izrazite stabilnosti Eulerove implicitne metode (stabilna za bilo koji Δt). Prednost je trapezne metode, u tome, što kod nje u isto vrijeme kada metoda počinje gubiti točnost, dolazi i do prigušenih numeričkih oscilacija, a da pri tome rezultat ne divergira. To znači da nas pojava numeričkih oscilacija upozorava i na netočnost rješenja, pa se proračun može ponoviti s manjim vremenskim korakom. Drugim riječima, ukoliko nema numeričkih oscilacija, znači da je i točnost rješenja zadovoljavajuća. Ovako jednostavnu kontrolu, međjutim, ne omogućava Eulerova implicitna metoda.

7.3. Metode integracije mreža s nelinearnim elementima

U dosadašnjem izlaganju o metodama numeričke integracije razmatrane su linearne električne mreže. S obzirom da su u električkim sklopovima mahom sve kapacitivnosti nelinearne potrebno je pronaći postupak njihove linearizacije kako bi se takovi

elementi uklopili u postojeći matrični račun.

Imamo li, dakle, elemenat kod kojega se naboj ne mijenja linearno sa naponom, tj. ne vrijedi $Q = CV$, već vrijedi $Q = f(V)$, radi se o nelinearnom elementu za uskladištenje naboja. Postupak odredjivanja prirasta naboja ΔQ koji je posljedica prirasta napona ΔV kroz vrijeme Δt odredjuje se slično Newton-Raphsonovom iterativnom postupku kod nelinearnih elemenata. No, umjesto Newton-Raphsonove metode, koja koristi tangentu, primijeniti ćemo ovdje metodu regula falsi koja koristi sekantu. Na slici 31. prikazana je grafički ovisnost $Q = f(V)$.

Nelinearni element $Q = f(V)$ lineariziran je u okolišu točke Q_n, V_n sa *)

$$Q_{n+1}^{(0)} = Q_n + \left(\frac{dQ}{dV}\right)_n (V_{n+1}^0 - V_n) \quad (63)$$

Prirast naboja $\Delta Q = Q_{n+1}^{(0)} - Q_n$ jednak je prema $\Delta Q = \int_{t_n}^{t_{n+1}} I dt$ uz primjenu trapezne integracije

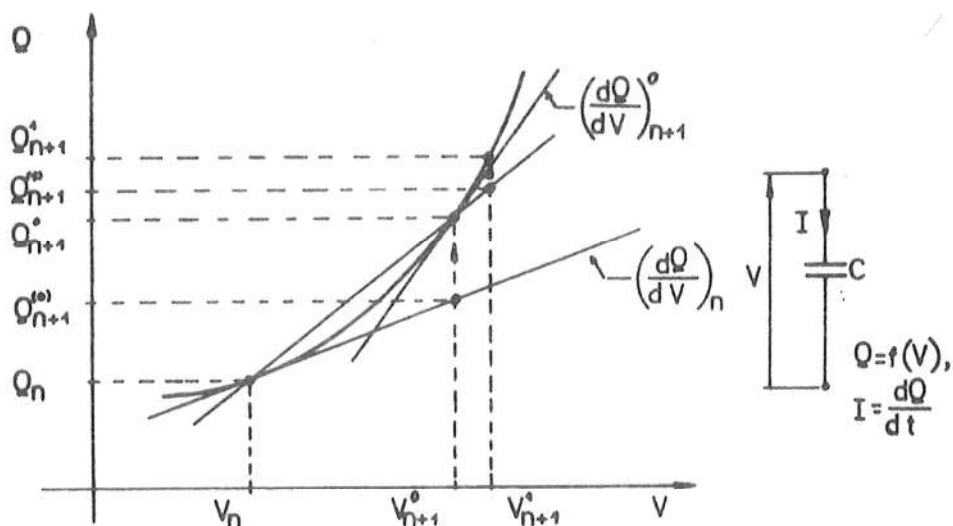
$$Q_{n+1}^{(0)} - Q_n = (I_{n+1}^0 + I_n) \frac{\Delta t}{2} \quad (64)$$

Uvrštavanjem izraza (63) u (64) dobijemo

$$\left(\frac{dQ}{dV}\right)_n (V_{n+1}^0 - V_n) = (I_{n+1}^0 + I_n) \frac{\Delta t}{2} \quad ,$$

$$I_{n+1}^0 = \frac{2}{\Delta t} \left(\frac{dQ}{dt}\right)_n V_{n+1}^0 - \left| \frac{2}{\Delta t} \left(\frac{dQ}{dV}\right)_n V_n + I_n \right| \quad (65.a)$$

*) Naboj $Q_{n+1}^{(0)}$ je dobijen u skladu sa izrazom (63); Q_{n+1}^0 iz izraza (65.b) je dobijen primjenom jednadžbe $Q_{n+1} = f(V_{n+1})$. Isto vrijedi za $Q_{n+1}^{(1)}$ i Q_{n+1}^1 , itd.



Sl. 31. Primjena metode regula falsi na nelinearni element $Q = f(V)$.

Vapon V_{n+1} i struja I_{n+1} predstavljaju vrijednosti koje su dobivene u prvoj iteraciji. Drugi korak linearizacije nelinearnog elementa $Q = f(V)$ u okolišu točke Q_n, V_n daje primjenom metode regula falsi za naboj $Q_{n+1}^{(1)}$ slijedeći izraz:

$$Q_{n+1}^{(1)} = Q_n + \frac{Q_{n+1}^0 - Q_n}{V_{n+1}^0 - V_n} (V_{n+1}^1 - V_n),$$

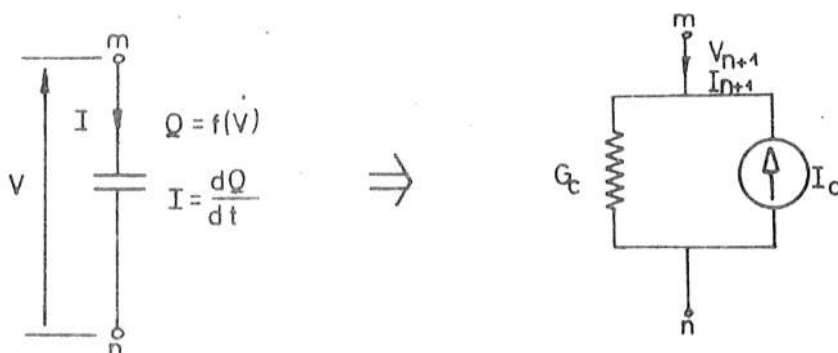
a prirast naboja ΔQ jednak je

$$Q_{n+1}^{(1)} - Q_n = (I_{n+1}^1 + I_n) \frac{\Delta t}{2},$$

odakle dobijemo

$$I_{n+1}^1 = \frac{2}{\Delta t} \frac{Q_{n+1}^0 - Q_n}{V_{n+1}^0 - V_n} V_{n+1}^1 - \left[\frac{2}{\Delta t} \frac{Q_{n+1}^0 - Q_n}{V_{n+1}^0 - V_n} V_n + I_n \right] \quad (65.b)$$

Promatrajući izraze (65) vidimo da je svrha postignuta. Nelinearni element $Q = f(V)$ najprije je lineariziran tangentom, a potom sekantom. Svrha je ovog postupka da početna točka Q_n, V_n ostane referentnom točkom, sve dok se iterativni postupak ne završi zadovoljavanjem unaprijed postavljenog kriterija o veličini dopuštene greške, $\Delta V < |V_{n+1}^i - V_{n+1}^{i-1}|$. Smisao referentne točke se sastoji u slijedećem: stanje mreže u vremenu t_n je poznato i pored ostalog je određeno naponom V_n na kapacitivnosti C ; tijekom iterativnog postupka ne smije se mijenjati to početno stanje, jer je ono jedina referenca s pomoću koje se određuje novo stanje mreže u vremenu t_{n+1} . Nadalje, vidimo, da smo prema izrazima (65) postigli da jedine varijable koje opisuju ponašanje nelinearnog elementa budu napon i struja, te je na taj način moguće uklopiti takav elemenat u postojeći algoritam. Štoviše, nadomjesni sklop ima oblik standardne grane mreže (sl. 32) te je u potpunosti prilagodjen do sada primijenjenom matričnom računu.



Sl. 32. Nadomjesni sklop nelinearnog elementa $Q = f(V)$.

Prema nadomjesnom sklopu vodljivost G_C i struja I_C u nultoj-početnoj iteraciji iznose

$$G_C^0 = \frac{2}{\Delta t} \left(\frac{dQ}{dV} \right)_n, \quad I_C^0 = G_C^0 V_n + I_n,$$

a u daljnjim iteracijama iznose

$$G_C^i = \frac{2}{\Delta t} \frac{Q_{n+1}^{i-1} - Q_n}{V_{n+1}^{i-1} - V_n}, \quad I_C^i = G_C^i V_n + I_n,$$

gdje indeks i ide od 1 do m , a m je iteracija pri kojoj se postiže konvergencija.

U slučaju kapacitivnosti poluvodičkih elemenata, koje su prema prirodi promjene naboja u poluvodičima definirane kao

$$C = \frac{dQ}{dV}, \quad (66)$$

a sama nelinearna kapacitivnost C poznata je u obliku $C = f_C(V)$, postupamo kao i u prijašnjem slučaju. To postizemo tako da odredimo funkciju $Q = f(V)$ prema

$$Q = \int_0^V C dV = \int_0^V f_C(V) dV. \quad (67)$$

Sa ovako odredjenim nabojem postupamo kao što je opisano izrazima (65). U ovom slučaju, kada je kapacitivnost odredjena izrazom (66), zgodno je iskoristiti činjenicu da se nagib sekante

$\frac{Q_{n+1}^0 - Q_n}{V_{n+1}^0 - V_n}$ može odrediti s točnošću drugog stupnja s pomoću

derivacije naboja na mjestima V_n i V_{n+1} kako slijedi:

$$\frac{Q_{n+1}^0 - Q_n}{V_{n+1}^0 - V_n} \approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dQ}{dV} \right)_{n+1}^0 + \left(\frac{dQ}{dV} \right)_n \right] . \quad (68)$$

Odmah se uočava da je derivacija $\left(\frac{dQ}{dV} \right)_n = C_n$, a $\left(\frac{dQ}{dV} \right)_{n+1}^0 = C_{n+1}^0$ pa izravnim uvrštavanjem nelinearnih kapacitivnosti u izraze (65) dobijemo:

$$I_{n+1}^0 = \frac{2C_n}{\Delta t} V_{n+1}^0 - \left[\frac{2C_n}{\Delta t} V_n + I_n \right] \quad (69.a)$$

$$i \quad I_{n+1}^1 = \frac{C_{n+1}^0 + C_n}{\Delta t} V_{n+1}^1 - \left[\frac{C_{n+1}^0 + C_n}{\Delta t} V_n + I_n \right] . \quad (69.b)$$

Ovakav oblik, tj. izrazi (69), nam više odgovaraju, jer nema potrebe za određivanjem integrala prema izrazu (67). U nadomjesnom sklopu vodljivost G_C i struja I_C u početnoj iteraciji iznose

$$G_C^0 = \frac{2C_n}{\Delta t} , \quad I_C^0 = G_C^0 V_n + I_n ,$$

a u daljnjim iteracijama iznose

$$G_C^i = \frac{C_{n+1}^{i-1} + C_n}{\Delta t} \quad , \quad I_C^i = G_C^i V_n + I_n \quad .$$

Na ovom mjestu dajemo i nadomjesni sklop za nelinearni induktivitet, tj. za element gdje umjesto $\phi = LI$ imamo $\phi = f(I)$. Postupamo analogno slučaju za nelinearnu kapacitivnost pa imamo redom:

$$\phi = f(I) \quad ,$$

$$\phi_{n+1}^{(0)} = \phi_n + \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_n (I_{n+1}^0 - I_n) \quad .$$

Za prirast magnetskog toka $\Delta\phi$ imamo uz primjenu trapezne integracije

$$\phi_{n+1}^{(0)} - \phi_n = (V_{n+1}^0 + V_n) \frac{\Delta t}{2} \quad .$$

Eliminacijom toka iz gornjih izraza dobijamo

$$\left(\frac{d\phi}{dI}\right)_n (I_{n+1}^0 - I_n) = (V_{n+1}^0 + V_n) \frac{\Delta t}{2} \quad ,$$

odnosno

$$I_{n+1}^0 = \frac{\Delta t}{2 \left(\frac{d\phi}{dI}\right)_n} V_{n+1}^0 + \left[\frac{\Delta t}{2 \left(\frac{d\phi}{dI}\right)_n} V_n + I_n \right] \quad . \quad (70.a)$$

U drugoj iteraciji za $\phi_{n+1}^{(1)}$ imamo:

$$\phi_{n+1}^{(1)} = \phi_n + \frac{\phi_{n+1}^0 - \phi_n}{I_{n+1}^0 - I_n} (V_{n+1}^1 - V_n) ,$$

odakle je

$$I_{n+1}^1 = \frac{\Delta t}{2 \frac{\phi_{n+1}^0 - \phi_n}{I_{n+1}^0 - I_n}} V_{n+1}^1 + \left[\frac{\Delta t}{2 \frac{\phi_{n+1}^0 - \phi_n}{I_{n+1}^0 - I_n}} V_n + I_n \right] . \quad (70.b)$$

Nadomjesni sklop se prema izrazu (70.a) u početnoj iteraciji sastoji iz vodljivosti G_L i struje I_L kako slijedi:

$$G_L^0 = \frac{\Delta t}{2 \left(\frac{d\psi}{dI} \right)_n} , \quad I_L^0 = G_L^0 V_n + I_n ,$$

a u daljnjim iteracijama imamo

$$G_L^i = \frac{\Delta t}{2 \frac{\phi_{n+1}^{i-1} - \phi_n}{I_{n+1}^{i-1} - I_n}} , \quad I_L^i = G_L^i V_n + I_n ,$$

gdje indeks i ide od 1 do m , a m je iteracija pri kojoj se postiže konvergencija.

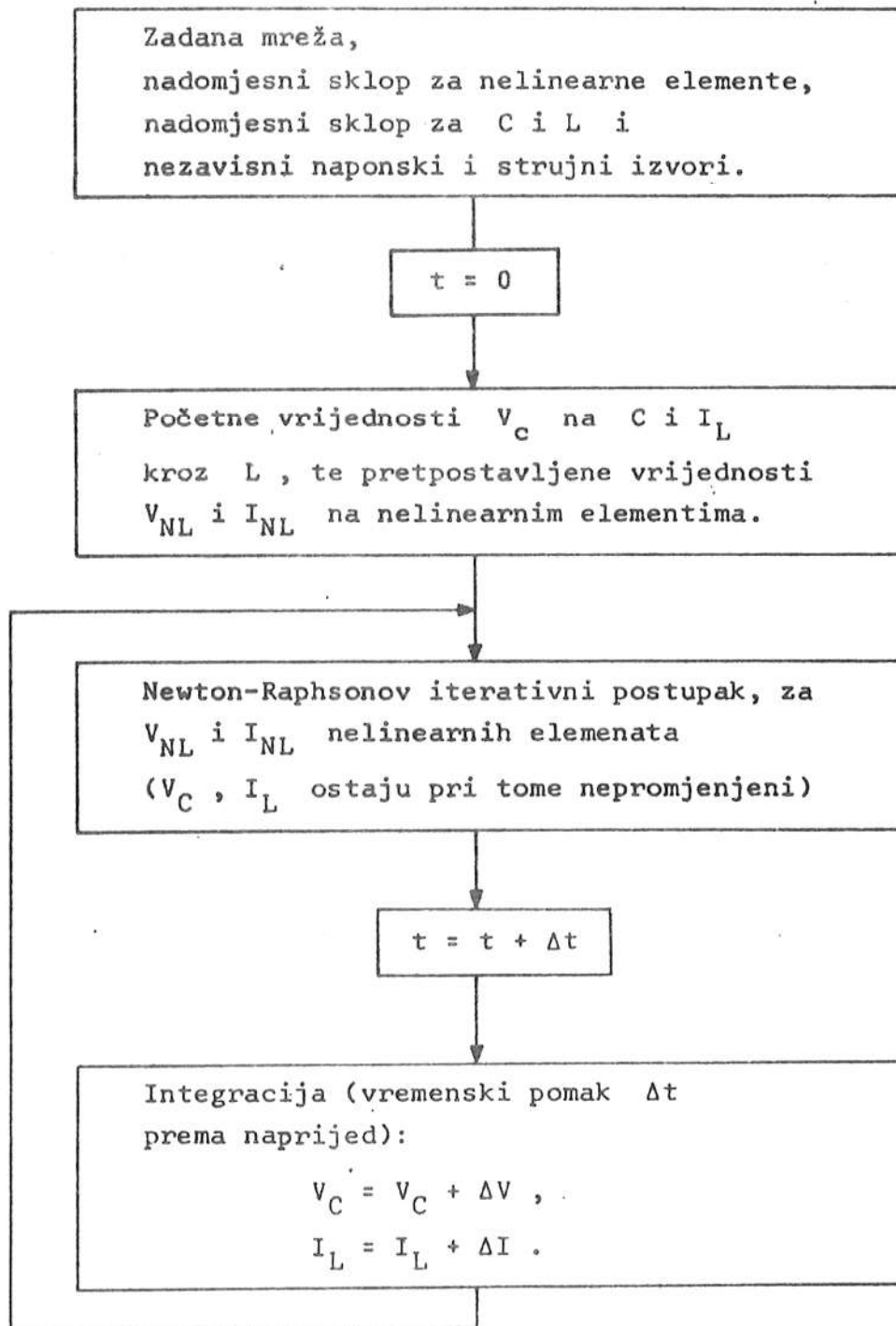
7.4. Postupak proračuna prijelaznih stanja nelinearnih mreža

Na kraju ovog poglavlja možemo predložiti tok numeričkog proračuna prijelaznog stanja mreže prema blok shemi na slici 33. Mreža sadrži linearne i nelinearne otporne elemente, a kondenzatori i induktiviteti su linearni.

Prema slici 33 vidimo slijedeće :

- a) Definiramo mrežu i svaki nelinearni otporni element zamjenimo s linearnim nadomjesnim sklopom (vodljivost G i strujni izvor I), a svaki kondenzator C i induktivitet L također s nadomjesnim sklopom (vodljivost G i strujni izvor I).
- b) Da bi proračun mogao započeti moramo zadati početne napone na kondenzatorima i početne struje kroz induktivitete, a za nelinearne otporne elemente pretpostaviti početne vrijednosti napona na njima.
- c) Sada proračun može započeti. Najprije treba odrediti vrijednosti napona na nelinearnim elementima primjenom Newtonove iteracije, zbog toga, jer smo u točki b) zadali samo pretpostavljene, po volji odabrane napone.
- d) U ovom dijelu proračuna napredujemo s vremenom za iznos Δt . To vršimo primjenom numeričke integracije, pri čemu izračunavamo prirast napona ΔV na kondenzatorima i struje ΔI kroz induktivitete. Nakon toga treba izračunati nove vrijednosti napona na otpornim elementima, što znači da se vraćamo na točku c).

Postupak po točkama c) i d) ponavljamo sve dotle dok ne izračunamo vremenski odziv mreže u cijelom vremenskom intervalu koji je bio unaprijed zadan.



S1. 33. Prikaz toka numeričkog proračuna prijelaznog stanja nelinearne električne mreže.

8. DODATAK

Struktura programa za istosmjernu analizu nelinearnih električnih mreža

Postupci numeričke analize, koji se primjenjuju pri analizi sklopova s mnogo elemenata, pored svoje matematičke prirode zahtijevaju i određenu koncepciju redoslijeda izvršenja pojedinih numeričkih postupaka. Naime, ispravnim rasporedom potprograma omogućavamo brzo i funkcionalno izvršavanje programa. Program, koji povezuje numeričke postupke u cjelinu ima slijedeće sadržaje:

- učitavanje podataka električne mreže,
- obrada i sortiranje učitanih podataka u obliku koji je prikladan za numeričku analizu,
- formiranje matričnog izraza za analizu metodom čvora,
- rješavanje sustava algebarskih jednačbi s n-nepoznanica,
- kontrola rješenja i vođenja iterativnog postupka,
- ispisivanje rješenja.

Opisati ćemo sada поближе funkciju pojedinog dijela programa:

1. Učitavanje podataka potrebnih za jednoznačni opis mreže se vrši na način da korisnik programa s najmanje napora unese podatke u stroj. Tako je dovoljno pojedini dvopolni element opisati s nazivom, između kojih se čvorova nalazi i iznosom:

R1 1 2 10 kOhm

Nelinearne elemente, na primjer tranzistore, opisujemo na sličan način, no umjesto vrijednosti daje se na zadnjem mjestu podatak o tipu tranzistora:

Q1 1 2 4 3

Zatim se definiraju parametri modela tranzistora. Format i ulaznih podataka su fiksni.

2. Nakon što su podaci učitani, treba ih srediti na način da formiranje matričnih izraza potrebnih za analizu teče sa što manje napora. Tako se najprije sortiraju otpori, diode i tranzistori. Ovaj programski dio ujedno vodi računa o formiranju matrice vodljivosti G kako bi otpale neke suvišne operacije u njenom formiranju. Tako su otpori sortirani u tri polja. U prvom polju se nalaze otpori kojima su oba čvora m i n različiti od nule. U drugom polju su otpori koji su spojeni sa polom m na referentni čvor, a u trećem polju su oni otpori čiji je pol n spojen na referentni čvor:

Polje R

N	M
N	O
O	M

Sličan postupak je primijenjen na diode i tranzistore.

3. Formiranje matričnog izraza $\underline{GV}_n = \underline{AI}_s$ vrši se po elementu, a ne po retku. Ovo zbog ekonomičnosti, jer se iz određenog polja pozove element sa odgovarajućim parametrima i zatim upisuje doprinos tog elementa u matrični izraz. Tako se otpori upisuju na slijedeći način:

$$G(N, N) = G(N, N) + G$$

$$G(N, M) = G(N, M) - G$$

$$G(M, N) = G(M, N) - G$$

$$G(M, M) = G(M, M) + G$$

ili samo $G(N,N) = G(N,N) + G$ (pol m uzemljen),

ili samo $G(M,M) = G(M,M) + G$ (pol n uzemljen),

Upisivanje u G matricu i vektor $\underline{AI}_s$ provodi se pri svakoj iteraciji, pa ušteda pri upisu višestruko kompenzira početno sortiranje. Na primjer, kako je već navedeno kod otpora koji su jednim polom vezani na referentni čvor, upisuje se samo jedna vodljivost umjesto 4, a kod tranzistora umjesto 9 vodljivosti i 3 struje, upisuje se samo 4 vodljivosti i 2 struje.

Kod nelinearnih elemenata se prije upisivanja obavi linearizacija u skladu sa odabranim modelom. Svi modeli su kod primjene metode čvora svedeni na paralelni spoj vodljivosti i strujnog izvora, što znači da u postupku linearizacije treba odrediti nadomjesnu vodljivost i nadomjesnu struju. Iznos tih veličina ovisi o odabranom modelu i radnoj točki koja je netom bila izračunata. Kod prve iteracije uzima se unaprijed određena radna točka.

4. Rješavanje sustava sa n nepoznanica se provodi postupkom Gaussove eliminacije.

5. Vodjenje iterativnog postupka se svodi na usporedbu novo dobivenih napona na nelinearnim elementima sa odgovarajućim naponima iz prethodne iteracije. Na temelju napona diferencije za svaki nelinearni element određuje se način linearizacije u slijedećem koraku.

6. Izlazni potprogram ne predstavlja poseban problem i podešava se prema željenim izlaznim podacima. Kao standardni izlaz se dobija napon svih čvorova u odnosu na referentni čvor, ukupan učin stanje svih nelinearnih elemenata.

7. Posebnim potprogramom se može dobiti ispis stanja nelinearnih elemenata za bilo koje područje iterativnog postupka.

Upute za korištenje programa DCA55

Program za istosmjernu analizu nelinearne električne mreže izradjen je na ovom Fakultetu i nazvan je DCA55 . Mreža, koju ovaj program može obraditi, može sadržavati slijedeće elemente: otpore, diode različitih modela, tranzistore NPN i PNP tipa različitih modela, te strujne i naponske izvore. Naponski izvori trebaju biti jednim polom uzemljeni.

Da bi se neka mreža mogla analizirati, potrebno je napraviti opis mreže, tj. zadati ulazne podatke. Opis mreže ćemo odrediti iz sheme mreže čije ćemo čvorove prethodno označiti. Označavanje čvorova započinjemo sa čvorovima na koje su vezani naponski izvori, pa kad se oni izredaju označavanje ostalih čvorova možemo sprovesti po volji.

- Veličina mreže

Polja pojedinih varijabli se mogu mijenjati, a program DCA55 ima slijedeće mogućnosti:

čvorovi	55
otpori	55
diode	20
broj tipova dioda	5
tranzistori	30
broj tipova tranzistora	5
ulazni naponi	10
ulazne struje	5
izlazni naponi	10

- Ulazni podaci

Ulazni podaci se zadaju tako (sl. 34) da se na početku zada ime sklopa i način analize (MODUS) po formatu

28 FORMAT (5A6, I10)

Zatim se zadaju podaci o broju čvorova mreže i broju elemenata mreže po formatu

25 FORMAT (12I5).

U taj format ulaze slijedeće veličine:

NODE - broj čvorova u mreži
L1 - broj otpora
L4 - broj dioda
L5 - broj tranzistora
L6 - broj modela dioda
L7 - broj modela tranzistora
L8 - broj strujnih izvora
L9 - broj naponskih izvora
L10 - broj dioda na kojima postavljamo početni napon 0
L11 - broj tranzistora kojima na kolektorskoj diodi Ebers-Mollova modela postavljamo početni napon 0
L60 - broj napona grana koje želimo izračunati i štampati
KRAJ - dopušteni broj iteracija

Poslije toga treba dati podatke za veličine TEMP (temperatura u $^{\circ}\text{K}$), QQ (naboj elektrona), BK (Boltzmannova konstanta), G1 (pomoćna vodljivost u modelu diode i tranzistora), EA (apsolutna greška), ER (relativna greška) i AA (konstanta koja određuje položaj početne radne točke). Na primjer:

TEMP = $t(^{\circ}\text{C}) + 273,15$
QQ = $1,6021 \times 10^{-19} \text{ As}$
BK = $1,3806 \times 10^{-23} \text{ J } (^{\circ}\text{K})^{-1}$
G1 = 10^{-8} S
EA = 10^{-5} V
ER = 10^{-4}
AA = 2

Ove varijable se zadaju po formatu:

21 FORMAT (5E15.9).

Potom se zadaju podaci za pojedine elemente mreže i to slijedećim redoslijedom i formatima:

OTPORI

103 FORMAT (A6, 2 F10.0, E15.9),

DIODE

105 FORMAT (A6, 3 F10.0),

PARAMETRI MODELA DIODA

106 FORMAT (F10.0, 4 E15.9),

REDNI BROJ DIODA KOJE SU POČETNO

INVERZNO POLARIZIRANE

109 FORMAT (16I5);

TRANZISTORI

110 FORMAT (A6, 5 F10.0),

PARAMETRI MODELA TRANZISTORA

111 FORMAT (5 E15.9),

REDNI BROJ TRANZISTORA KOJI SU

POČETNO INVERZNO POLARIZIRANI

114 FORMAT (16I5);

STRUJNI IZVORI

103 FORMAT (A6, 2 F10.0, E15.9);

NAPONSKI IZVORI

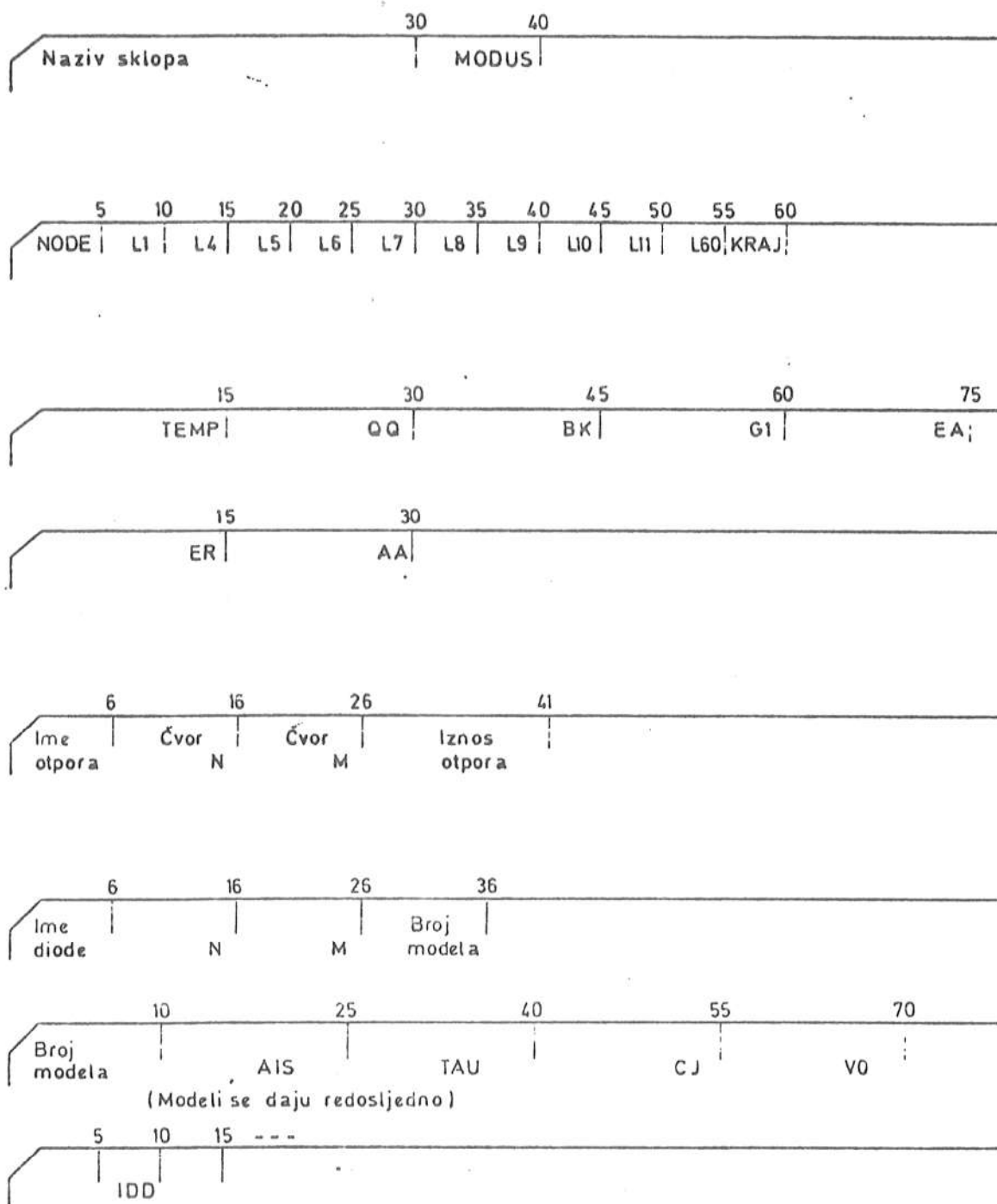
115 FORMAT (A6, 2 F10.0, 3 E15.9);

IZLAZNI NAPONI

117 FORMAT (A6, 2 F10.0).

Na kraju dajemo podatke LP1, LP2 kojima se poziva ispis stanja nelinearnih elemenata od LP1 - iteracije do LP2 - iteracije po formatu:

26 FORMAT (2I10)



Sl. 34. Prikaz ulaznih podataka na karticama.

6	16	26	36	46	56
Ime tran.	N	M	K	Broj modela	NPN ili PNP
15	30	45	60	75	
Broj modela	AISE		AISC	WN	WI
(Modeli se daju redoslijedno)					
Prazna kartica					
Prazna kartica					
5	10	15	---		
IQQ					
6	16	26	41		
Ime strujnog izvora	N	M	Iznos str. izv.		
6	16	26	41	56	71
Ime napon. izvora	N	M	Donja granica	ΔV	Gornja granica
6	16	26			
Ime izlaznog napona	N	M			
10	20				
LP1	LP2				

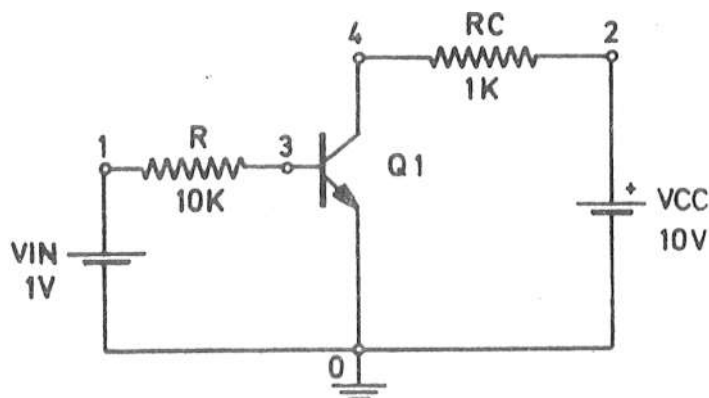
Sl. 34. Prikaz ulaznih podataka na karticama (nastavak).

Ako nekih od navedenih elemenata nema u mreži, oni se jednostavno izostave iz ulaznih podataka.

Za diode i tranzistore, na kojima želimo početni napon nula, VBDO odnosno VBC0 jednako nuli, moramo unijeti u karticu redni broj te diode odnosno tranzistora (npr. ako imamo 5 dioda u mreži i želimo na onoj koju smo dali kao treću u ulaznim podacima postaviti FBDO jednako nuli, onda ćemo u karticu upisati broj 3 i to po formatu 109).

Kartica za naponske izvore u petom i četvrtom području neće ništa sadržavati ako ne želimo prijenosnu karakteristiku. Znači, tada ćemo zadati samo prvu vrijednost napona.

Ilustrirajmo zadavanje ulaznih podataka na jednostavnom primjeru tranzistorske sklopke (sl. 35). Najprije ćemo označiti čvorove mreže, a zatim se zadaju ulazni podaci prema slici 36:



Sl. 35. Primjer označavanja tranzistorske sklopke.

TRANZISTORSKA SKLOPKA									
4	2	0	1	0	1	0	2	0	0
2.9315E+02			1.6021E-19				1.3806E-23		1.E-11
1.E-04			2.E+00						0.10E-04
R	1.		3.				1.E+04		
RC	4.		2.				1.E+03		
Q1	3.		0.				4.	1.	1.
1.00000E 00			1.01250E-14				2.00000 E-14	0.98756E-00	0.50000E 00
1.00000E 02									
VIN	1.		0.				0.E+00		2.E+00
VCC	2.		0.				10.E+00	.1E+00	
VOUT1	1.		3.						
VOUT2	3.		0.						
VOUT3	4.		0.						
VOUT4	4.		3.						
	0		0						

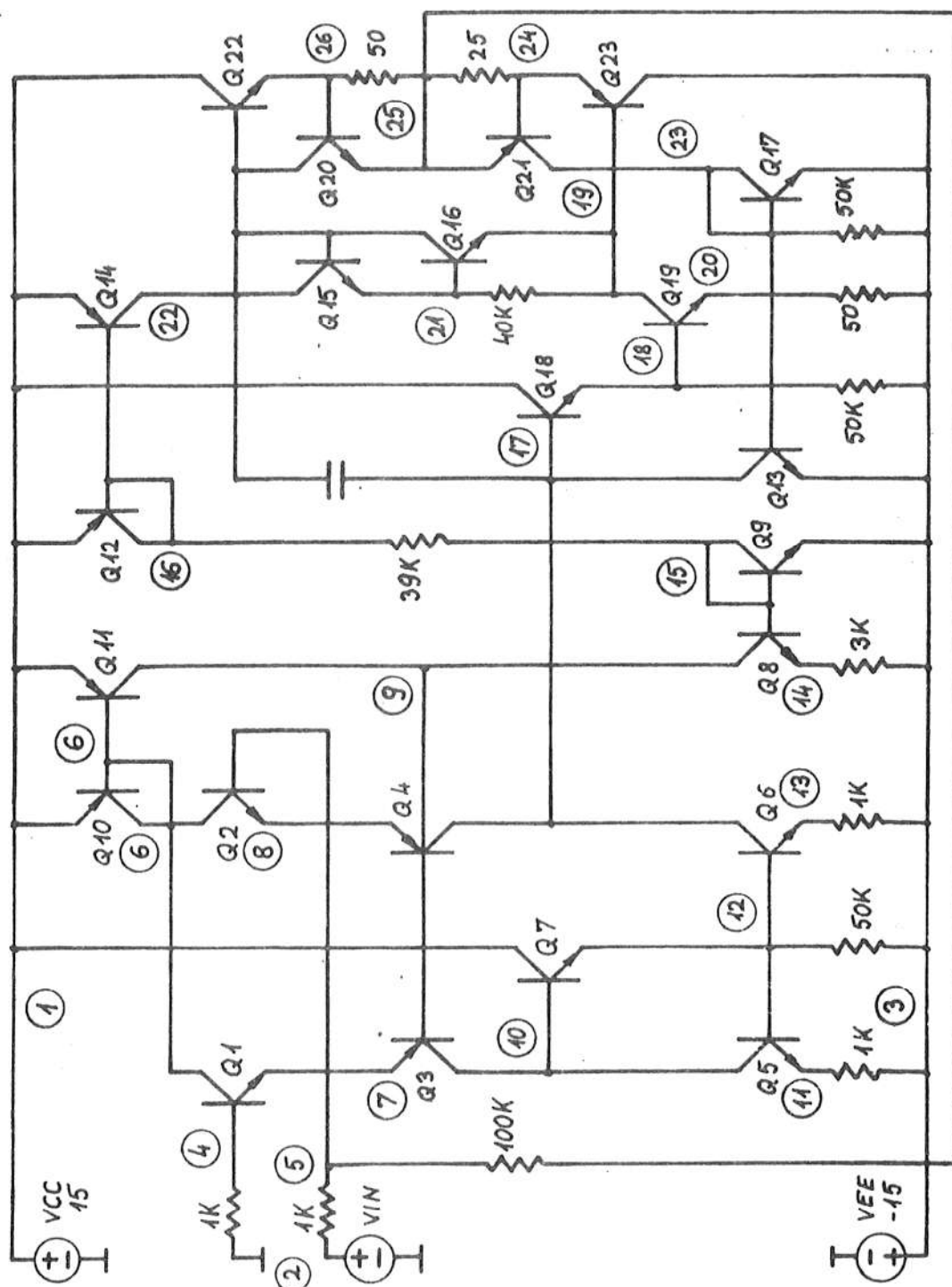
Sl. 36. Ulazni podaci za tranzistorsku sklopku.

Primjer s operacionim pojačalom uA741

Na slici 37. prikazano je operaciono pojačalo uA741 sa oznakama 26 čvorova, 2 napona napajanja, 17 otpora i 23 tranzistora. Stvarni broj čvorova s kojima se računa je 49, jer uz svaki čvor na bazi tranzistora treba dodati po jedan unutrašnji čvor u modelu tranzistora zbog otpora baze, dakle, imamo $26+23 = 49$ čvorova. Zatim dolaze izlazni podaci:

- naponi svih čvorova pri početnom ulaznom naponu ($V_{IN} = -0,15 \text{ V}$),
- ukupni učin koji troši pojačalo,
- stanje svih tranzistora pri početnom ulaznom naponu,
- prijenosna istosmjerna karakteristika pojačala kada se ulazni napon mijenja od $-0,15 \text{ V}$ do $0,15 \text{ V}$ po $0,01 \text{ V}$.

Slika 38. dobivena je iz podataka za prijenosnu istosmjernu karakteristiku. Pojačalo je spojeno tako da je $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 100 \text{ k}\Omega$ što daje kod idealnog operacionog pojačala pojačanje od $A = -\frac{R_6}{R_1} = -100$. Numeričkom kontrolom izlanih podataka vidimo da je pojačanje jednako 99,995 u području ulaznog signala od $-0,145 \text{ V}$ do $0,145 \text{ V}$, odnosno izlaznog signala od $14,5 \text{ V}$ do $-14,5 \text{ V}$. S obzirom na činjenicu da je pojačalo napajano sa $\pm 15 \text{ V}$, to je postignuta linearnost u radu pojačala izvanredna.



Sl. 37. Shema operacionog pojačala uA741.

BCA 55DP1

PRORACUN NELEHARNIH SKLOFOVA

OPERACIONO POJACALO UA V41

25 14 0 23 0 4 0 3 0 23 2 50

.23150002+01 .160210000-18 .13806 .22 .99999996-11 .99999997-05
.100000000-03 .200000000+01

R1	0.	4.	4.
R2	2.	5.	4.
R3	5.	10.	4.
R4	3.	25.	6.
R5	3.	12.	5.
R6	3.	11.	4.
R7	3.	18.	4.
R8	15.	14.	4.
R9	7.	16.	5.
R10	7.	18.	5.
R11	7.	20.	2.
R12	19.	23.	5.
R13	25.	21.	5.
R14	24.	26.	2.
		25.	2.

Q1	7.	6.	1.
Q2	5.	6.	1.
Q3	9.	10.	0.
Q4	9.	17.	3.
Q5	12.	10.	1.
Q6	12.	17.	1.
Q7	10.	1.	1.
Q8	15.	9.	1.
Q9	15.	15.	2.
Q10	6.	6.	3.
Q11	5.	9.	3.
Q12	15.	16.	0.
Q13	23.	17.	1.
Q14	16.	22.	4.
Q15	22.	21.	2.
Q16	21.	19.	1.
Q17	73.	3.	2.
Q18	17.	13.	1.
Q19	18.	20.	1.
Q20	76.	25.	1.
Q21	24.	25.	0.
Q22	22.	26.	2.
Q23	19.	24.	4.

.100000000+01	.101250000-13	.7	1-13	.93756509.	.5	2.	.00
.100000000+03	.000000000	.	.	.	.	.	.
.000000000	.000000000	.	.	.	.	.	.
.000000000	.000000000	.	.	.	.	.	.
.200000000+01	.101250000-13	.7	1-13	.93756509.	.5	2.	.00
.100000000+03	.000000000	.	.	.	.	.	.
.000000000	.000000000	.	.	.	.	.	.
.300000000+01	.110000000-13	.7	1-13	.90000009.	.5	2.	.40
.200000000+02	.000000000	.	.	.	.	.	.

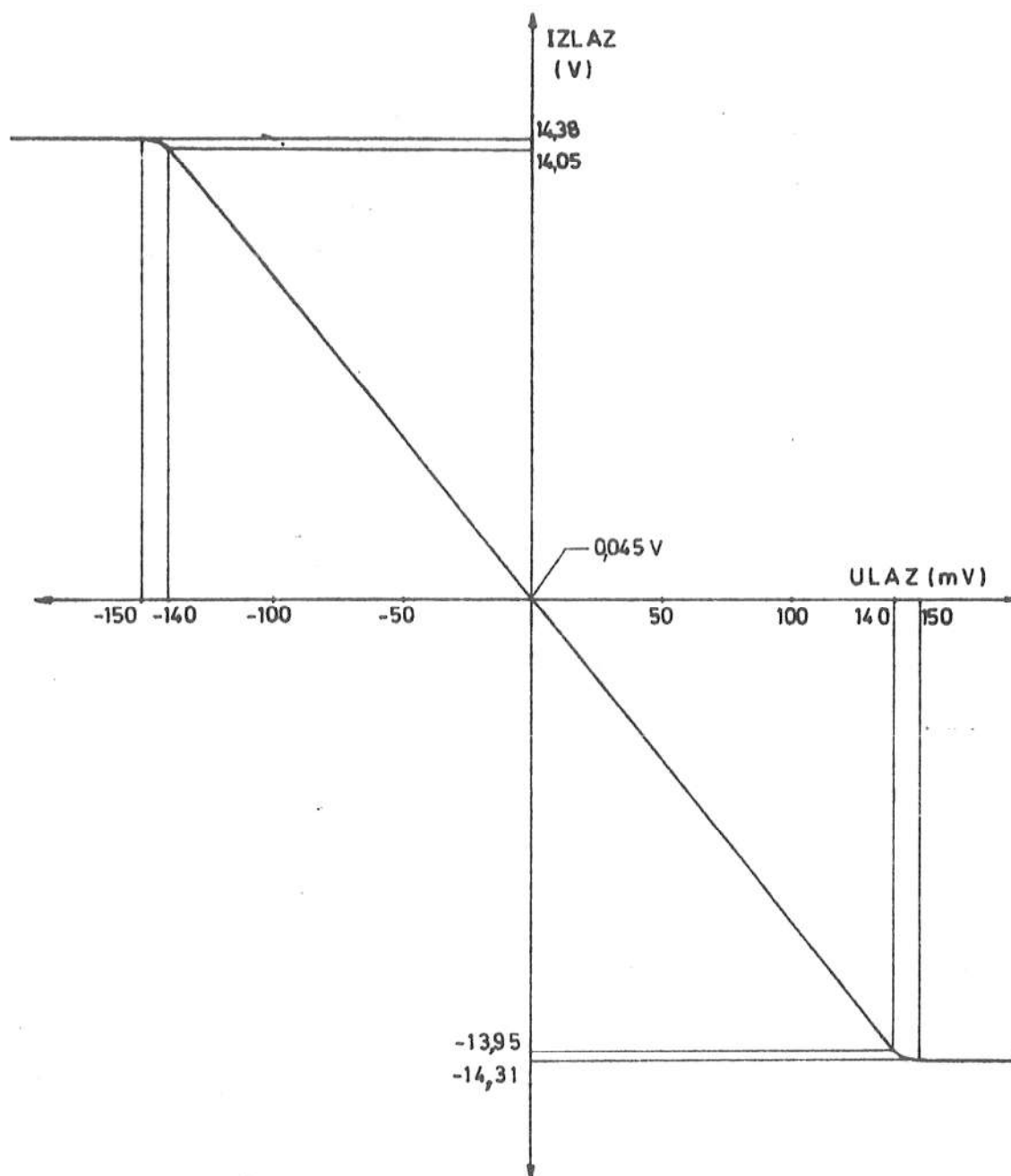
02	.561833	.000320	.200020	.27827-10	.55659-10	.27730-10	.639584	.27731	.27731
03	.561833	.000315	.200015	.59191-17	.58455-17	.73602-19	.639584	.0	.0
04	.561833	.000310	.200010	.57825-12	.37594-12	.29584-12	.639584	.23.915301	.28.915104
05	.561833	.000305	.200005	.29705-17	.59411-12	.29708-12	.639584	.23.705025	.28.705025
06	.561833	.000300	.200000	.29705-17	.59411-12	.29708-12	.639584	.590780	.590780
07	.561833	.000295	.200000	.29384-12	.59763-12	.29384-12	.639584	.23.384274	.28.384274
08	.561833	.000290	.200000	.18394-3	.594217-3	.17394-5	.639584	.017305	.017305
09	.561833	.000285	.200000	.29550-12	.59483-12	.29737-12	.639584	.23.705000	.28.705000

VIN	.153030	.140030	.130030	.120030	.110030	.100030	.090030	.080030	.070030	.060030
YOU117	.14.915331	.13.698493	.12.481655	.11.264817	.10.047979	.08.831141	.07.614303	.06.397465	.05.180627	.04.000000
YOU125	.14.384439	.13.065075	.11.745711	.10.426347	.09.106983	.07.787619	.06.468255	.05.148891	.03.829527	.02.510163

VIN	.153030	.140030	.130030	.120030	.110030	.100030	.090030	.080030	.070030	.060030
YOU117	.13.798377	.12.581539	.11.364701	.10.147863	.08.931025	.07.714187	.06.497349	.05.280511	.04.063673	.03.000000
YOU125	.13.065075	.11.745711	.10.426347	.09.106983	.07.787619	.06.468255	.05.148891	.03.829527	.02.510163	.01.000000

VIN	.153030	.140030	.130030	.120030	.110030	.100030	.090030	.080030	.070030	.060030
YOU117	.13.798377	.12.581539	.11.364701	.10.147863	.08.931025	.07.714187	.06.497349	.05.280511	.04.063673	.03.000000
YOU125	.13.065075	.11.745711	.10.426347	.09.106983	.07.787619	.06.468255	.05.148891	.03.829527	.02.510163	.01.000000

VIN	.153030	.140030	.130030	.120030	.110030	.100030	.090030	.080030	.070030	.060030
YOU117	.13.716228	.12.500000	.11.283772	.10.067544	.08.851316	.07.635088	.06.418860	.05.202632	.04.000000	.03.000000
YOU125	.13.000000	.11.783772	.10.567544	.09.351316	.08.135088	.06.918860	.05.702632	.04.486404	.03.270176	.02.053948



Sl. 38. Istosmjerna prijenosna karakteristika operacionog pojačala uA741 .

9. LITERATURA

1. Donald A. Calahan: "Computer - Aided Network Design", Revised Edition, Mc Graw-Hill, 1972.
2. Dr Stanko Turk, Mr Leo Budin: "Analiza primjenom računala", Elektrotehnički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zavod za elektroniku, Zagreb 1972.
3. F.B. Hildebrand: "Introduction to Numerical Analysis", Mc Graw-Hill, 1956.
4. W.J. Mc Calla and D.O. Pederson: "Elements of Computer-Aided Circuit Analysis", IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, No. 1, January 1971, pp. 14-27.
5. R.D. Berry: "An Optimal Ordering of Electronic Circuit Equations for a Sparse Matrix Solution", IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, No. 1, January 1971, pp. 40-50.
6. H.M. Markowitz: "The Elimination Form of the Inverse and Its Application to Linear Programming", Management Science, Vol. 3, April 1957, pp. 255-269.

Petar Slapničar

Analiza električnih mreža primjenom računala
Split, 1978.

I S P R A V C I

1. str. 4, nedostaje tekst:

dodavanjem nakih kraćih potprograma kao i uzastopnim ponavljanjem postojećeg programa vrši se analiza pri malom izmjeničnom signalu i analiza prijelaznih stanja. Program za statičku analizu pod nazivom DCA55, koji je napravljen na ovom Fakultetu, opisan je u 8. poglavlju.

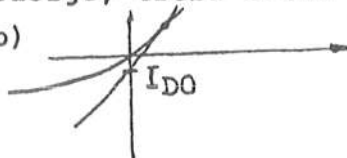
2. str. 15, Sl. 5.



3. str. 22, tablica, stupac "VEKTOR B" u drugom retku treba biti:
(n-2) (n-2)

4. str. 23, 6. red odozgo, treba biti: $\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

5. str. 47, Sl. 14.b)



6. str. 70, jed. (45) $u_c(t+\Delta t) = u_c(t) + \Delta t \dot{u}_c(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{u}_c(t) + \dots$

prvi redak odozdo treba biti: $\frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{u}_c(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} \dddot{u}_c(t) + \dots$

7. str. 71, prvi redak odozdo treba biti $\frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{u}_c(t)$

8. str. 72, jed. 47 s lijeve strane treba biti: $I_{n+1} = \dots$
 $I_{n+1} = \dots$

9. str. 75, 4. redak odozdo treba biti

$$\frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{u}_c(t), \text{ odnosno } \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{I}_L(t).$$

10. str. 76. 8. redak, umjesto sl. 38.a treba biti Sl. 28.a.

11. str. 80,81,82, jed. 57,59,60,62 umjesto E_x treba biti E.

12. str. 82, jed. 62 treba biti:

$$V_n = E e^{-n \Delta t / \tau}.$$