Tugomir Šurina

AUTOMATSKA REGULACIJA

ŠKOLSKA KNJIGA - ZAGREB

1231/23

11,00€
82,88 h

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS



Urednik:
Dr. ŽELIMIR MATUTINOVIĆ

Recenzent:
Prof. dr. BRANKO OSTOJIĆ

Objavljivanje ovog udžbenika odobrio je
Odbor Sveučilišne komisije za izdavačku djelatnost
Sveučilišta u Zagrebu rješenjem br. 02-237/2-1980. od 5. VI 1980.



Tisak: »Birografika« — Subotica

Dr. ing. TUGOMIR ŠURINA
redovni profesor Fakulteta strojarstva i brodogradnje
Sveučilišta u Zagrebu

AUTOMATSKA REGULACIJA

Drugo, prerađeno izdanje

Školska knjiga, Zagreb 1981

AUTOMATSKA OBRADA PODATAKA

Uspomeni moje majke

Predgovor drugom, prepravljenom izdanju

Područje automatske regulacije u neprekidnom je razvoju, pa se nameće pitanje preinaka i dopuna teksta prvog izdanja iz 1974. godine. Tu ponajprije mislim na prodor digitalne tehnike u regulaciju, posebno u vođenje procesa. Međutim, osnovna načela i funkcije regulacije ostaju ista i za analogne i za digitalne signale, a osim toga je cijela dosadašnja regulacijska tehnika analogna. Za onog koji poznaje osnove digitalne tehnike nije teško da ovlada njenom primjenom u regulaciji. Pri tome se uz hardverska pojavljuju i softverska rješenja, što dolazi do izražaja u kompjutorskom vođenju procesa i u izvedbama pomoću mikroprocesora.

Smatram da je izmijenjeni naslov knjige prikladniji jer jezgrovito opisuje karakter teksta koji daje teorijske osnove i opći je uvod u područje regulacije.

Zahvaljujem prof. dr B. Ostojiću s Tehničkog fakulteta u Rijeci na korisnim sugestijama i savjetima pri recenziranju rukopisa. Isto tako, spominjem svoje suradnike dr B. Novakovića, mr V. Kecmana te mr B. Katalinića, koji su pregledali gradivo i konkretnim ukazivanjem pomogli u tekstualnim promjenama i uklanjanju grešaka.

Zagreb, u prosincu 1979. *T. Š.*

Predgovor prvom izdanju

Automatizacija je zapravo zamjena umnoga rada čovjeka u upravljanju procesima. To je područje znanosti i tehnike razmjerno mlado i razvilo se tek nakon drugoga svjetskog rata. Danas se jedva mogu sagledati daljnje mogućnosti automatizacije u razvoju proizvodnih snaga, kao i njezin utjecaj na razvoj društvenih odnosa.

Ova knjiga obrađuje teorijske osnove automatske regulacije. Ona proučava zakonitosti prijenosa i obrade informacija u samoispravljajućim sustavima i obrađuje metode proučavanja. Teorija automatske regulacije sadrži i tako važne metode i područja suvremene znanosti, kao što su teorija sustava, prijelazne pojave, analogne metode i elektronička računala. Ali ta teorija pored matematičkog aparata i tehničkih rješenja sadrži i filozofiju prilaza i način mišljenja.

Specifičnost je ove knjige u tome što istodobno pristupa i procesnoj regulaciji i servomehanizmima. Ta dva područja razvijala su se neovisno, a i danas se ponajčešće neovisno obrađuju. Značajka je procesne regulacije visok stupanj razvoja empiričkih metoda, dok su se u servomehanizama razvile brojne matematičke metode. Međutim, bez obzira radi li se o upravljanju alatnim strojem, o regulaciji parne turbine ili o kontroli pH-vrijednosti otopine, sve se te metode temelje na poznavanju zajedničkih načela sadržanih u teoriji automatske regulacije. Teorija automatske regulacije osnova je za rješavanje regulacijskih problema u proizvodnji: u procesnim postrojenjima, u energetskim postrojenjima, u strojarskoj proizvodnji.

U knjizi ne ulazim potanko u analizu i sintezu regulacijskih sustava. Naprotiv, naglasak je na općem prikazu koji nam omogućuje da na osnovi teorije i općih zakonitosti shvatimo bit tehničkih rješenja. Tako ova građa može poslužiti i onome koji želi samo da upozna osnove automatske regulacije i njezinu terminologiju kao i onome koji se na toj osnovi želi dalje specijalizirati u tom području. Iskustvo je autoru pokazalo da je mnogo lakše shvatiti apstraktne pojmove ako pođemo od konkretnih primjera koji su tipični i na osnovi kojih možemo izvoditi poopćenja. To osobito dolazi do izražaja kada je riječ o novim i nepoznatim pojmovima i sklopovima.

Knjiga je namijenjena prvenstveno studentima strojarstva i brodogradnje, ali se njome mogu bez daljnjega služiti i studenti srodnih fakulteta, elektrotehničkog i tehnološkog. Polovina gradiva pokriva program studija drugog stupnja strojarstva, a preostalo gradivo može korisno poslužiti u studiju trećeg stupnja.

Gradivo knjige podijeljeno je u nekoliko cjelina. Nakon uvodnih razmatranja, četiri iduća poglavlja sadrže matematičke metode dinamičke analize linearnih sustava. Uz klasičan pristup i vremenski odziv, obrađen je mnogo primjenjivani

frekvencijski odziv kao i Laplaceova transformacija koja povezuje vremensko i frekvencijsko područje.

U slijedećoj cjelini obrađeni su sklopovi regulacijskog kruga, i to s funkcionalne i s izvedbene strane. Nakon toga obrađujem primjenu matematičkih metoda i sklopova u analizi i sintezi regulacijskog kruga s kontinuiranim djelovanjem s naglaskom na skupnim značajkama procesne regulacije i servomehanizama. Iako je u tekstu težište na primjeni frekvencijskog odziva, spomenuta je i metoda lokusa korijena s kombiniranim grafičkim i analitičkim pristupom. Ta se metoda primjenjuje u sustavima s jednim ulazom i jednim izlazom, pa je vrlo prikladna za sintezu servomehanizama.

Jedno poglavlje obrađuje analitičku metodu prostora stanja pomoću koje možemo rješavati i nelinearne i multivarijabilne sustave. Iako ta metoda još nije posve prodrla u tehničku praksu, ona ipak usmjeruje razvoj suvremene teorije automatske regulacije. To je poglavlje tek uvod u to opsežno područje, a opseg knjige ne dopušta nam da se razrade i srodna područja optimalnih i adaptivnih sustava kao i primjenu stohastičkih metoda.

U zasebnim poglavljima obrađujem nekonvencionalne sustave, odnosno uglavnom nelinearne probleme. To su sustavi s diskretnim djelovanjem, kao što su relejna regulacija i impulsni sustavi s primjenom z-transformacije. Za nelinearne sustave postoje dvije prikladne metode: analitička metoda opisne funkcije koja je srodna frekvencijskom odzivu i grafička metoda fazne ravnine koja je srodna metodi prostora stanja.

Većina današnjih regulacijskih sklopova i rješenja analognog je karaktera, pa je i veći dio gradiva pripao analognoj tehnici. To se odnosi i na projektiranje regujacijskih sustava pomoću analognih računala. U budućnosti treba očekivati mnogo veći udio digitalne tehnike, osobito u vezi s vođenjem procesa pomoću digitalnih računala. To je u skladu sa suvremenim stremljenjima da se uz pretvorbu, prijenos i primanje informacija sve više razvija i obrada podataka. Tako će digitalna tehnika postati dio opće teorije i praktičnih rješenja.

Na kraju zahvaljujem prof. dr V. Muljeviću i prof. J. Černelču s Elektrotehničkog fakulteta i prof. I. Hruški s Tehnološkog fakulteta na prisnoj i ugodnoj suradnji i podršci pri izlasku ove knjige. Rado se sjećam i brojnih kolega okupljenih u JUREMI, gdje sam uvijek bio na izvoru mnogih novina, ideja i spoznaja. Tokom pripremanja knjige za tisak, vrlo sam ugodno surađivao sa E. Hercigonjom kojem zahvaljujem na korisnim sugestijama, kao i sa dipl. inž. Ž. Cvirnom koji se trudio da izradba slika bude kvalitetna.

U Zagrebu, listopada 1972. *T. Š.*

Sadržaj

Predgovor VI

Oznake XV

1. **Uvodna razmatranja** 1
   1.1. Automatizacija 1
   1.2. Upravljanje i regulacija 2
      1.2.1. Upravljanje 3
      1.2.2. Regulacija 7
      1.2.3. Osnovni zahtjevi pri regulaciji 11
      1.2.4. Primjena regulacije u tehnici 13
   1.3. Analiza i sinteza regulacijskog sustava 14

2. **Matematički pristup dinamičkim sustavima** 16
   2.1. Diferencijalne jednadžbe jednostavnih sustava 17
      2.1.1. Opis sustava 18
      2.1.2. Klasično rješenje 20
   2.2. Linearizacija sustava 27
   2.3. Diferencijalne jednadžbe složenih sustava 31
   2.4. Usporedba metoda dinamičke analize 35

3. **Analiza u vremenskom području** 38
   3.1. Standardne pobudne funkcije 39
   3.2. Prijelazna funkcija 41
   3.3. Vremenski odziv osnovnih sustava 42
   3.4. Integral konvolucije 62

4. **Analiza u području kompleksne varijable** 67
   4.1. Laplaceova transformacija 68
      4.1.1. Transformacija funkcija 70
      4.1.2. Transformacija operacija 74
      4.1.3. Dodatna svojstva Laplaceove transformacije 76
      4.1.4. Obratna transformacija 81
   4.2. Rješavanje diferencijalnih jednadžbi 87
   4.3. Prijenosna funkcija 90
   4.4. Prijenosna funkcija osnovnih sustava 91
   4.5. Analiza složenih sustava 92
      4.5.1. Složeni sustavi bez protudjelovanja 93
      4.5.2. Složeni sustavi s protudjelovanjem 100

5. **Analiza u frekvencijskom području** 103
   5.1. Sinusna prijenosna funkcija 104
   5.2. Grafički prikaz frekvencijskog odziva 108
      5.2.1. Nyquistov dijagram 109
      5.2.2. Bodeovi dijagrami 110
      5.2.3. Nicholsov dijagram 113

5.3. Frekvencijski odziv osnovnih sustava 113
5.4. Grafička analiza složenih sustava 120
5.5. Fazno neminimalni sustavi 126

6. Regulacijski objekti 127
6.1. Pristup proučavanju objekata 129
6.2. Staze bez izjednačenja 132
6.3. Staze s izjednačenjem 138
6.4. Mogućnost regulacije procesa 148

7. Regulacijski uređaji 151
7.1. Vladanje regulacijskih uređaja 153
7.2. Mjerni članovi 162
7.2.1. Mjerno osjetilo 163
7.2.2. Mjerni pretvarač 171
7.2.3. Daljinski prijenos signala 172
7.3. Regulacijski članovi 173
7.3.1. Komparator 174
7.3.2. Regulator 175
7.3.3. Regulacijsko pojačalo 178
7.4. Izvršni članovi 184
7.4.1. Postavni pogon 184
7.4.2. Postavni član 188
7.5. Izbor pomoćne energije u regulacijskom krugu 191

8. Analiza regulacijskog kruga 193
8.1. Regulacijsko djelovanje 195
8.2. Točnost regulacije 198
8.2.1. Tipovi servomehanizama 199
8.2.2. Trajno regulacijsko odstupanje 201
8.3. Stabilnost regulacije 207
8.3.1. Pojam stabilnosti sustava 207
8.3.2. Hurwitzov kriterij stabilnosti 210
8.3.3. Routhov kriterij stabilnosti 213
8.3.4. Nyquistov kriterij stabilnosti 216
8.3.5. Mihajlovljev kriterij stabilnosti 228
8.4. Egzaktan izvod Nyquistova kriterija 231

9. Sinteza regulacijskog kruga 238
9.1. Zahtjevi kod sinteze 240
9.1.1. Zahtjevi u vremenskom području 240
9.1.2. Zahtjevi u frekvencijskom području 242
9.1.3. Optimalizacija 244
9.2. Sinteza servomehanizama izborom pojačanja 247
9.3. Sinteza servomehanizama pomoću kompenzacije 257
9.3.1. Serijska kompenzacija 258
9.3.2. Povratna kompenzacija 273
9.4. Sinteza procesa izborom regulatora 278
9.4.1. Izbor regulatora 278
9.4.2. Metode podešavanja regulatora 282
9.5. Sinteza procesa pomoću dodatnih petlji 285

10. Metoda lokusa korijena 293
10.1. Lokus korijena 293
10.2. Konstrukcija lokusa korijena 297
10.3. Osnovni oblici lokusa korijena 307
10.4. Sinteza pomoću lokusa korijena 312
10.4.1. Zahtjevi u području kompleksne varijable 312
10.4.2. Izbor pojačanja na lokusu korijena 315
10.4.3. Kompenzacija pomoću lokusa korijena 318
10.5. Kontura korijena 325

11. Impulsni sustavi 329
11.1. Impulsni modulator 330
11.2. z-transformacija 334
11.2.1. Direktna transformacija 334
11.2.2. Obratna transformacija 340
11.2.3. Impulsna prijenosna funkcija 342
11.2.4. Algebra blokova 343
11.3. Izgladivanje impulsnog niza 347
11.3.1. Frekvencijski sadržaj impulsnog niza 347
11.3.2. Impulsni formator 348
11.4. Analiza impulsnih regulacijskih sustava 353
11.4.1. Točnost regulacije 353
11.4.2. Stabilnost regulacije 354
11.5. Modificirana z-transformacija 358

12. Metoda prostora stanja 362
12.1. Prostor stanja 363
12.2. Matrični račun 367
12.2.1. Tipovi kvadratnih matrica 369
12.2.2. Algebra matrica 370
12.2.3. Svojstvene vrijednosti matrice 372
12.2.4. Ostale operacije s matricama 374
12.3. Matematički model s varijablama stanja 374
12.3.1. Dinamičke jednadžbe stanja 374
12.3.2. Postavljanje dinamičkih jednadžbi stanja 376
12.3.3. Transformacija na normalni oblik 382
12.4. Rješenje dinamičkih jednadžbi stanja 384
12.4.1. Prijenosna funkcija kao rješenje 384
12.4.2. Matrica prijelaza kao rješenje 386
12.5. Analiza regulacijskih sustava 389
12.5.1. Regulacijski sustav s varijablama stanja 389
12.5.2. Točnost regulacije 392
12.5.3. Stabilnost regulacije 394
12.6. Varijable stanja i prijenosna funkcija 395
12.7. Upravljivost i mjerljivost 396

13. Nelinearni sustavi 399
13.1. Nekontinuirane nelinearnosti 400
13.2. Metoda harmoničke ravnoteže 404
13.2.1. Opisna funkcija 405
13.2.2. Analiza stabilnosti 413
13.2.3. Frekvencijski varijantna opisna funkcija 418
13.3. Metoda fazne ravnine 418
13.3.1. Fazna ravnina 418
13.3.2. Konstrukcija faznih portreta 424
13.3.3. Značajke faznih portreta 429
13.3.4. Analiza nelinearnih regulacijskih krugova 439
13.4. Direktna metoda Ljapunova 443

14. Analogna računala 448
14.1. Fizikalne analogije 449
14.2. Simulator 451
14.3. Diferencijalni analizator 453
14.3.1. Sklopovi za linearne operacije 456
14.3.2. Generatori vremenskih funkcija 462
14.3.3. Programiranje metodom najviše derivacije 464
14.3.4. Programiranje simulacijom prijenosnih funkcija 470
14.3.5. Sklopovi za nelinearne operacije 475
14.3.6. Simulacija nelinearnih sustava 482

15. Prilog — Povezanost vremenskog i frekvencijskog područja 487
15.1. Fourierov rad 488
15.2. Fourierov integral 494
15.3. Laplaceova transformacija 497

Literatura 500

Kazalo pojmova 503

Oznake

Malim slovima se obilježavaju trenutačne vrijednosti kod vremenski promjenljivih veličina, odnosno mala odstupanja od stacionarnih vrijednosti, dok se velikim slovima obilježavaju stacionarne vrijednosti; indeks m označava maksimalne vrijednosti.

a, A	ubrzanje
a_i	koeficijenti diferencijalne jednadžbe
$\mathbf{A}$	matrica koeficijenata
A	površina, presjek
A_i	koeficijenti Fourierova reda
A_r	amplitudna rezerva stabilnosti
A_V	otvor ventila
b_i	koeficijenti diferencijalne jednadžbe
B	magnetska indukcija
$\mathbf{B}$	matrica ulaza
$B(s)$	polinom brojnika prijenosne funkcije
B_i	koeficijenti Fourierova reda
c	specifična toplina
c, C	koncentracija otopine
$\mathbf{C}$	matrica izlaza
C	kapacitivnost
C_i	kompleksni koeficijenti Fourierova reda
C_p	pneumatska kapacitivnost
C_ϑ	toplinska kapacitivnost
d, D	promjer
D	koeficijent viskoznog trenja
$\mathbf{D}$	matrica prijenosa
D_φ	torzijski koeficijent viskoznog trenja
e, E	regulacijsko odstupanje
e_0	trajno regulacijsko odstupanje, statička greška
E	energija
f, F	frekvencija
f, F	sila
$f(t)$	funkcija vremena
$\mathcal{F}$ [ ]	Fourierov transformat
$\mathcal{F}^{-1}$ [ ]	obratni Fourierov transformat
$F(j\omega)$	funkcija frekvencije
$F(s)$	Laplaceov transformat
$F(z)$	z-transformat
g	konstanta gravitacije
$g(t)$	težinska funkcija
G	dobrota regulacije
G	težina
$G(j\omega)$	sinusna prijenosna funkcija
$G(s)$	prijenosna funkcija
h, H	razina, visina
$h(t)$	prijelazna funkcija
H	jakost magnetskog polja
H_i	Hurwitzova subdeterminanta
i, I	struja
$\mathbf{I}$	jedinična matrica
Im [ ]	imaginarni dio kompleksnog broja
j	imaginarna jedinica
J	moment tromosti
k	redni broj tipa servomehanizma
k, K	konstanta, prijenosni omjer, pojačanje
k_V	konstanta ventila
K'	statička osjetljivost, pojačanje
K_a	koeficijent greške ubrzanja
K_d	prijenosni omjer D-sustava
K_i	prijenosni omjer I-sustava
K_p	koeficijent položajne greške
K_v	koeficijent brzinske greške
K_P	prijenosni omjer P-sustava
l, L	duljina
L	induktivnost
$\mathcal{L}$ [ ]	Laplaceov transformat
$\mathcal{L}^{-1}$ [ ]	obratni Laplaceov transformat
m	redni broj parabole
m, M	masa
M	prijenosni omjer zatvorenog kruga
$M(j\omega)$	sinusna prijenosna funkcija zatvorenog kruga
$M(s)$	funkcija Mihajlova
M_p	postotni prebačaj
M_r	rezonantno izdizanje
n	tip servomehanizma
n, N	broj okreta
n_i	nultočke prijenosne funkcije
N	opisna funkcija
N	prijenosni omjer zupčanika
N	tangens faznog kuta zatvorenog kruga
$N(s)$	polinom nazivnika prijenosne funkcije
p	Heavisideov operator
p, P	tlak
p_i	polovi prijenosne funkcije
$\mathcal{P}$	Poincaréov indeks
P	snaga, učinak
P_0	tlak napajanja

r, R polumjer
r, R otpor
R plinska konstanta
R_i Routhovi redovi
R_p opteretni otpor
R_p pneumatski otpor
R_ϑ toplinski otpor
Re [ ] realni dio kompleksnog broja
q naboj
q, Q protok, volumenski
q_m, Q_m protok, maseni
q_ϑ, Q_ϑ toplinski protok
s Laplaceov operator
s_i korijeni karakteristične jednadžbe
S krutost opruge
S strmina krivulje
S_φ torzijska krutost
t vrijeme
t, T zakretni moment
t_p, T_p zakretni moment opterećenja
T period ponavljanja, preklapanja, tastiranja
T vremenski interval
T_d derivacijsko vrijeme
T_i integralno vrijeme
T_i trajanje impulsa
T_p vrijeme prvog maksimuma
T_r vrijeme porasta
T_s vrijeme smirivanja
u, U napon
$\mathbf{u}$, $\mathbf{U}$ ulazni vektor stanja
$u(t)$,$1(t)$ jedinični odskok, Heavisideova funkcija
U_0 napon napajanja
v, V brzina
V funkcija Ljapunova
V obujam, volumen
ω operator ω-transformacije
w, W vodeća, nazivna veličina
$\mathbf{w}$, $\mathbf{W}$ vodeći vektor stanja
x, X položaj
x, X regulirana veličina
$\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$ vektor stanja
x_i, X_i izlazna varijabla, odziv
x_u, X_u ulazna varijabla, pobuda
x_1, x_2 fazna varijabla
X_h raspon histereze
X_m raspon mrtvog pojasa
X_p proporcionalno područje
y, Y postavna veličina
$\mathbf{y}$, $\mathbf{Y}$ izlazni vektor stanja
y_1, y_2 fazna varijabla
Y_p postavno područje
z operator z-transformacije
z, Z poremećajna veličina
z_1, z_2 fazna varijabla
Z impedancija
Z_p impedancija opterećenja
$\mathcal{Z}$ [ ] z-transformat
$\mathcal{Z}^{-1}$ [ ] obratni z-transformat
α amplitudno mjerilo analognog računala
α koeficijent protoka
α kutno ubrzanje
α omjer potenciometra
β faktor strujnog pojačanja tranzistora
β modul stlačljivosti
β vremensko mjerilo analognog računala
γ specifična težina
$\delta(t)$ jedinični impuls, Diracova funkcija
$\delta_T(t)$ jedinični impulsni niz
Δ raspon, diferencijalna veličina
Δ determinanta
ϵ koeficijent ekspanzije
ζ stupanj prigušenja
η dinamička viskoznost
ϑ, Θ temperatura
λ_i korijeni karakteristične jednadžbe, svojstvene vrijednosti matrice
$\mathbf{\Lambda}$ kanonska matrica
μ koeficijent suhog trenja
ν omjer tastiranja
ρ gustoća
ρ_N normalna gustoća
σ faktor prigušenja
τ strojno vrijeme analognog računala
τ vremenska konstanta, vremenski interval
τ' nadomjesna vremenska konstanta
τ_m mrtvo vrijeme
τ'_m nadomjesno mrtvo vrijeme
φ, Φ faza, fazni kut verzora, fazni pomak
φ, Φ kut zakreta
φ_r fazna rezerva stabilnosti
Φ magnetski tok
$\mathbf{\Phi}$ matrica prijelaza
ψ, Ψ faza, fazni kut verzora, fazni pomak
ω, Ω kružna frekvencija
ω, Ω kutna brzina
ω_b širina frekvencijskog pojasa
ω_l lomna frekvencija
ω_n neprigušena vlastita frekvencija
ω_p prigušena vlastita frekvencija
ω_r rezonantna frekvencija
ω_s frekvencija tastiranja
ω_π frekvencija kritične faze
ω_1 frekvencija kritične amplitude

1. Uvodna razmatranja

Tiho, o tiho govori mi jesen:
Šuštanjem lišća i šapatom kiše.
Al' zima srcu govori još tiše.
I kada sniježi, a spušta se tama,
U pahuljama tišina je sama.

D. Cesarić, »Tiho, o tiho govori mi jesen«

1.1. Automatizacija

Svaka se čovjekova korisna djelatnost sastoji od fizičkog i umnog rada. Fizički rad, tj. utrošak energije, mora biti upravljan umnom aktivnošću, tj. korištenjem informacija. Putem živčanog sustava čovječji mozak prima informacije od osjetila i predaje ih mišićima. Prema tome, energija je povezana s informacijama; energija bez informacija predstavlja kaos, a nosilac je informacije energija.

Još od početka civilizacije pojavljuju se razni strojevi i uređaji koji zamjenjuju mukotrpan fizički rad čovjeka. Pri tome treba naglasiti da strojevi mogu preuzeti samo rad koji predstavlja **rutinski slijed operacija.** Do masovne primjene tih tzv. energetskih strojeva dolazi prije oko dva stoljeća, čime otpočinje i **era mehanizacije:** to je prva industrijska revolucija. Eru mehanizacije možemo prikazati kao etapu koju obilježava zamjena ljudskog rada sa svrhom da se poboljša, poveća i pojeftini proizvodnja i olakša rad. Razvoj tehnike omogućen je prvenstveno rješavanjem problema pretvorbe, prijenosa i upotrebe energije.

U 19. stoljeću strojevi nadomještaju fizički rad čovjeka, ali je čovjek ostao nužan u funkciji upravljanja strojevima. Tek u 20. stoljeću, u uvjetima koncentracije i složenosti proizvodnje — a broj promjenljivih veličina koje je čovjek u stanju da poveže veoma je ograničen — došlo je do naglašene potrebe da strojevi nadomjeste umni rad čovjeka, dakako ako se umni rad čovjeka može rutinizirati. Strojevi su počeli upravljati strojevima. To su tzv. informacijski strojevi, čiji je razvoj vezan za elektroničku tehnologiju i osobito za elektronička računala. Široka primjena informacijskih strojeva navijestila je **eru automatizacije:** to je nova industrijska revolucija. Eru automatizacije možemo prema tome nazvati etapom proizvodnje koju obilježava oslobađanje čovjeka funkcije upravljanja proizvodnim procesom. Razvoj automatizacije sadrži problematiku pretvorbe, prijenosa i korištenja informacija.

S automatizacijom je povezan i pojam **automata.** To je tehnički uređaj koji potpuno samostalno obavlja koristan rad prema čovjekovoj zamisli. Iako se prvi automati pojavljuju još u starom vijeku, tek je primjena centrifugalnog regulatora za regulaciju broja okreta parnog stroja što ga je 1784. g. patentirao J. Watt, označila temelje automatizacije. Teorijski pristup prvi put se pojavljuje 1868. g. u raspravi »O regulatorima« J. C. Maxwella. Prava era automatizacije počinje međutim nakon drugoga svjetskog rata, i to masovnom primjenom informacijskih strojeva, u prvom redu elektroničkih računala.

Osnovni razlog za uvođenje mehanizacije i automatizacije svakako je gospodarske prirode. Ali nije i jedini: mnogi su procesi suviše brzi ili složeni a da bi ih čovjek mogao pratiti osjetima, reakcijama ili logičkim odlukama; mnogi su opasni za život

ili štetni za zdravlje; a sve je teže naći radnu snagu za teške, prljave ili monotone poslove.

Kao primjer mehanizacije i automatizacije neka posluži izrada vijaka od metalnih šipki. Kad bi radnik vijke izrađivao ručnim alatom, bio bi to veoma dugotrajan i mukotrpan posao, a gotov vijak bio bi i neprecizan i skup. Mehanizaciju rada predstavlja izrada na tokarskom stroju. Rad je sada kudikamo brži i precizniji, a radnik je praktički oslobođen fizičkog rada, iako mora upravljati procesom proizvodnje. Posao se može automatizirati na tokarskom automatu tako što se najprije izradi program rada u obliku krivuljne ploče; ploča se okreće pomoću odgovarajućih mehanizama i položaj njenog ruba u skladu je sa slijedom operacija tokarenja. Uloga čovjeka svodi se uglavnom na nadzor.

To što su strojevi preuzeli funkciju fizičkog rada kao i funkciju upravljanja procesom proizvodnje još uvijek ne znači da proces teče sređeno i da se stanje reda održava samo od sebe. U procesu proizvodnje pojavljuju se uvijek iznova **poremećaji,** bilo unutrašnji bilo vanjski. Tako npr. na klimatizaciju neke prostorije utječu ne samo istrošenost sustava grijanja nego i promjene vanjske temperature. U održavanju željenih pogonskih uvjeta u nekom procesu čovjeka opet može zamijeniti neki stroj ili uređaj. Kod klimatizacije takav uređaj mjeri temperaturu, uspoređuje je sa željenom vrijednošću, te djeluje na ventil koji propušta toplinsku energiju do grijaćih tijela. Dakle, uređaj ili stroj samostalno nadzire ispravnost procesa, on ima samoispravljajuće djelovanje. Upravo je **automatska regulacija** jedan od najvažnijih zadataka koji se postavljaju u današnjoj etapi razvitka. Njezin je zadatak da pomoću odgovarajućih uređaja održava zadano ili željeno stanje nekog procesa protiv svih unutrašnjih i vanjskih poremećaja.

Kibernetika. Automatska regulacija nije tehnički izum, već prirodni zakon. Ona je prisutna svuda u prirodi gdje postoji stanje reda koje treba održavati i suprotstavlja se tendenciji svih sustava da zbog istrošenosti i starosti stalno pogoršavaju svoja svojstva. Tako je sa živim organizmima koji predstavljaju visok stupanj organiziranosti i gdje se većina životnih funkcija automatski održava u željenom stanju. Kao primjer možemo uzeti tjelesnu temperaturu, količinu šećera u krvi, osjećaj ravnoteže, itd. Slično je i s tehničkim sustavima, osobito kada je riječ o složenijim postrojenjima: dobar dio funkcija mora se sam održavati, a broj zahvata izvana svodi se na minimum. I ekonomski sustavi, kao što je tvornica ili narodna privreda kao cjelina, posjeduju svojstvo da sami sebe reguliraju, npr. mehanizam tržišta automatski regulira ponudu i potražnju robe.

Automatska regulacija jedno je od osnovnih načela na kojima je izgrađena kibernetika — nauka o procesima upravljanja u živim bićima i strojevima. Ona predstavlja sveobuhvatan pristup u traženju općih zakonitosti procesa upravljanja, bez obzira da li u biološkim, tehničkim ili u ekonomskim »sustavima«. Pri tome se služi analogijama koje su, naravno, prisutne u funkcionalnom smislu.

1.2. Upravljanje i regulacija

S obzirom na to da je automatizacija razmjerno mlada znanstvena i tehnička disciplina, još uvijek nedostaje jedinstven pristup, sistematizacija, kao i terminologija. To pogotovu vrijedi za terminologiju na našem jeziku, koja je još veoma manjkava i neizgrađena. Bez obzira na to, u ovom gradivu držimo se podjele područja automatizacije na tri skupine: upravljanje, regulaciju i vođenje procesa.

Upravljanje je proces pri kojem jedna ili više ulaznih veličina u ograničenom sustavu utječu na izlaznu veličinu prema zakonitostima koje su svojstvene tom sustavu. Prema tome, informacija se prenosi u **upravljačkom lancu** ili »otvorenom krugu«. Suprotno tome, pri **regulaciji**[1] izlazna veličina u ograničenom sustavu djeluje povratno na ulaznu veličinu, održavajući zadano ili željeno stanje. Ovdje se informacija prenosi u **regulacijskoj petlji** ili »zatvorenom krugu«. **Vođenje procesa** je kombinacija upravljanja i regulacije kod složenih sustava, uz korištenje elektroničkih računala. To je slijedeći, viši red automatizacije i prelazi okvire ovog gradiva.

Upravljanje je funkcionalno veoma jednostavno, sustav ne može doći u nestabilno stanje, i zato proučavanje dinamičkih pojava nije u prvom planu. Međutim, upravljački je sustav osjetljiv na poremećaje, pa je teško održavati točne odnose između izlaznih i ulaznih veličina. Pri proučavanju upravljanja dovoljno je promatrati **stacionarne uvjete** koji daju odgovor na problem točnosti; u tu svrhu postoje razrađene metode, bogata literatura i dugo iskustvo.

I pri regulaciji postoje problemi točnosti, povezani s pojavama u stacionarnom stanju. Međutim, zbog postojanja povratne veze regulacijski sustav može postati nestabilan, pa je od osnovne važnosti proučavanje stabilnosti u vezi s **dinamičkim uvjetima.** Regulacija je u pravilu složenija i skuplja od upravljanja, ali se pomoću nje može postići visoka točnost izlazne veličine, kao i neovisnost nekog procesa o poremećajima.

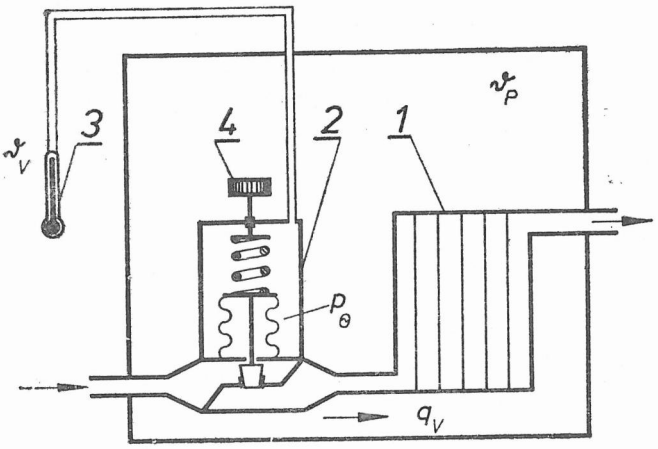
Iako je upravljanje funkcionalno mnogo jednostavnije od regulacije, ono u tehničkoj izvedbi može biti mnogo složenije. Tako je npr. upravljanje transfer-prugom funkcionalno jednostavnije od regulacije temperature u hladnjaku, ali je transfer-pruga u tehničkoj izvedbi kudikamo složenija.

U dosadašnjoj tehničkoj praksi, pri upravljanju i posebno pri regulaciji, prijenos informacija vrši se **analognim signalima,** gdje je prisutna kontinuirana promjena fizikalne veličine. U najnovije vrijeme sve se više susreće prijenos informacija **digitalnim signalima** koji se sastoje od slijeda diskretnih fizikalnih veličina. Digitalna tehnika veoma je prisutna u upravljanju u strojarskoj proizvodnji. Regulacija digitalnim sklopovima sve više zamjenjuje analogne sklopove u procesnoj regulaciji, dok je vođenje procesa vezano za pojavu tzv. procesnih digitalnih računala. Unatoč tome, pristup regulaciji analognim sklopovima opravdan je i zato što se tu radi o pojmovima, teorijskim izvodima i praktičnim rješenjima koji se mogu povezati s digitalnim sklopovima.

1.2.1. Upravljanje

Da bismo se podrobnije upoznali s upravljanjem, polazimo od konkretnog primjera. Na sl. 1-1 shematski je prikazano grijanje prostorije. Budući da temperaturu prostorije moramo održati po mogućnosti konstantnom, ugrađen je ventil 2, kojim utječemo na protok vode u radijator 1. Od vanjskih činilaca na temperaturu pro-

[1] Regulacija (kao i upravljanje) može biti ručna, poluautomatska ili automatska, već prema tome je li i u kojem je stupnju uključen čovjek u regulacijskoj petlji. Ovdje, kao i u daljem gradivu, podrazumijeva se isključivo regulacija bez prisutnosti čovjeka, pa se i pojam »automatska regulacija« skraćeno naziva »regulacija«.



Sl. 1—1. Upravljanje temperaturom prostorije

storije najviše utječe vanjska temperatura ϑ_v, pa pomoću nje možemo upravljati temperaturom prostorije. Pod utjecajem vanjske temperature povećava se obujam tekućine u toplomjeru s tekućinom 3, a on pomiče poklopac mijeha protiv sile elastičnosti mijeha. Ventil koji je kruto povezan s poklopcem mijeha smanjuje protok ugrijane vode. Uz odgovarajuću izvedbu i podešavanje pojedinih sklopova možemo temperaturu prostorije održati gotovo konstantnom i neovisnom o promjenama vanjske temperature.

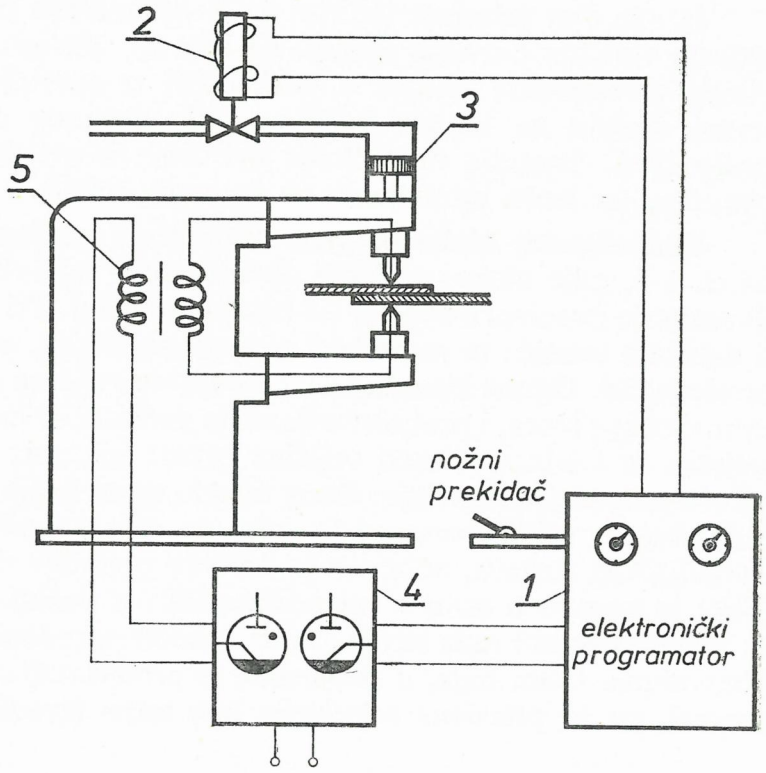
Pri upravljanju — kao i kasnije pri regulaciji — ne zanimaju nas u pravilu konstrukcijski detalji, već je važan funkcionalni prilaz. Uobičajeno je da se izvede apstraktna struktura u obliku funkcionalnog **blok-dijagrama** na kojem se vidi tok signala. **Signal** je fizikalna realizacija informacije. To je vremenska funkcija fizikalne veličine, čiji barem jedan parametar prenosi informaciju. Na sl. 1-2 usmjerene crte prikazuju tok signala, a blokovi predstavljaju funkcionalne odnose između izlazne i ulazne veličine pojedinog sklopa. Tako u toplomjeru postoji određen odnos između vanjske temperature ϑ_v kao ulazne veličine i tlaka p_ϑ kao izlazne veličine; p_ϑ je ujedno ulazna veličina u ventil koji djeluje na protok q_V kao izlaznu veličinu; q_V je ulazna veličina objekta kojeg se varijabla ϑ_P želi kontrolirati.



Sl. 1—2. Blok-dijagram upravljanja temperaturom prostorije

U opisanom primjeru ulazna veličina podliježe slučajnostima. Ulazna veličina može se međutim mijenjati i po nekom unaprijed utvrđenom programu, i to se naziva **programskim upravljanjem.** To je slučaj s agregatom za otporno zavarivanje koji je shematski prikazan na sl. 1-3. U agregat je ugrađen pneumatski cilindar 3 koji pritišće dva lima što ih treba zavariti. Električna struja dovodi se na mjesto zavarivanja preko transformatora 5. Da bi zavarivanje limova bilo kvalitetno, potrebno je točno odrediti količinu električne energije:

$$E = \int_0^t i(\tau)^2 R \, \mathrm{d}\tau = I^2 Rt \qquad (1\text{-}1)$$

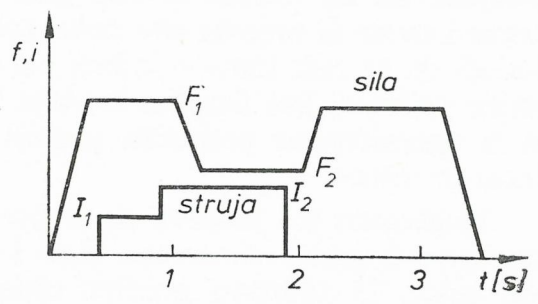


Sl. 1—3. Upravljanje procesom otpornog zavarivanja

na željenom mjestu. To se izvodi mijenjanjem struje I i pritiska na limove što djeluje posredno na otpor R. Čitav proces treba da se završi u što kraćem vremenu kako se toplina ne bi odvodila s mjesta zavara.

Vremenski dijagram na sl. 1-4 prikazuje kako bi vremenski trebao da teče proces točkastog zavarivanja željeznog lima: stezanje limova silom koja je razmjerna tlaku $P_1 \rightarrow$ predgrijavanje strujom $I_1 \rightarrow$ povećanje struje $I_2 \rightarrow$ smanjenje tlaka P_2, tj. sile na limove da bi se povećao električni otpor na mjestu zavara $\rightarrow$ smanjenje struje zavarivanja na nulu uz istodobno povećanje tlaka P_1, tj. sile kojom se kuje materijal u plastičnom stanju $\rightarrow$ smanjenje tlaka na nulu. Promjena tlaka može se zbog praktičnih razloga odvijati postepeno.

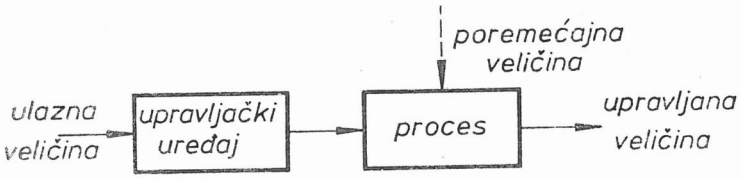
Cijelim procesom zavarivanja upravljamo pomoću tzv. elektroničkog vremenskog programatora. Aktiviranjem programatora 1 (sl. 1-3) pomoću nožne poluge upravlja se vremenskim tokom tlaka p u cilindru 3 preko elektromagnetskog ventila 2. Pri tome se za dva ili više različitih tlakova može upotrijebiti veći broj ventila i cilindara. Isti programator djeluje osim toga i na vremenski tok struje i u transformatoru 5 preko ignitronskog prekidača 4, gdje se upravlja kutom paljenja ignitrona u svakom periodu izmjenične struje. Dakle, programator upravlja vremenskim tokom dviju izlaznih veličina — tlaka i struje.



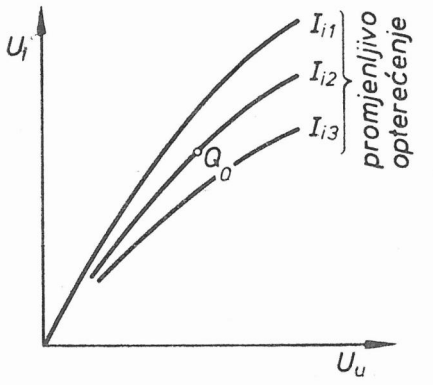
Sl. 1—4. Vremenski dijagram tlaka i struje pri otpornom zavarivanju

Iz ova dva primjera vidimo da je upravljanje proces pri kojem jedna ili više ulaznih veličina pravilno djeluju na izlaznu veličinu. Tu je ostvareno načelo pravilnog povezivanja uzroka i posljedice; u upravljačkom lancu ulazne veličine stalno djeluju na izlazne veličine, dok obratnog djelovanja nema. Upravlja se **unaprijed.** Energija upravljanja pri tome je uvijek manja od energije kojom se upravlja, jer inače upravljanje ne bi imalo smisla.

Funkcionalni blok-dijagram upravljanja možemo najopćenitije prikazati kao na sl. 1-5, gdje ulazna veličina djeluje preko upravljačkog uređaja na tok energije ili materije procesa, odnosno na izlaznu veličinu. Pri tome se pojam »proces« uzima u najširem smislu: to može biti grijanje prostorija, pozicioniranje alata, upravljanje brodom, itd. Odnos između izlazne i ulazne veličine određen je čvrsto parametrima upravljačkog lanca, i pretpostavlja se da poremećaji ne postoje. Ako oni ipak nastupe, mijenja se i odnos izlazne veličine prema ulaznoj; upravljanje ne može reagirati na sve moguće poremećaje. Zbog toga je upravljanje poželjno tamo gdje se ne očekuju česti i veliki poremećaji, tako da nije potrebno stalno mijenjati djelovanje upravljačkog sustava, odnosno podešavati pojedine sklopove u upravljačkom lancu. Tako je upravo u strojarskoj proizvodnji: u većini operacija na strojevima mogu se željeni rezultati rada stroja održati unutar određenih granica u većim vremenskim intervalima. Osim toga, u strojarskoj se proizvodnji susreću pretežno nekontinuirani procesi, pa bi primjena regulacije bila teško izvediva i skupa (mjerenje!).



Sl. 1—5. Poopćeni blok-dijagram upravljanja



Sl. 1—6. Karakteristike generatora istosmjerne struje

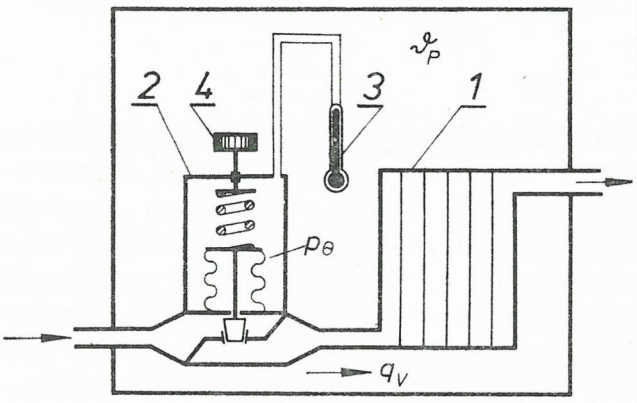
Ponašanje pojedinih sklopova upravljačkog lanca zanimljivo je prvenstveno u stacionarnim uvjetima. To se promatra na izlazno-ulaznim karakteristikama sklopova, kao što je karakteristika na sl. 1—6 za generator istosmjerne struje. Ulazna je veličina uzbudni napon u_u, a izlazna je napon generatora u_i. Među njima postoji čvrst funkcionalni odnos uz izlaznu struju i_i, koja je određena opteretnim otporom priključenim na izlazne izvode generatora. U pravilu se opterećenje generatora, a time i struja i_i, mijenja oko radne točke Q_0, i to predstavlja poremećaje u procesu. Budući da se radi samo o jednoj poremećajnoj veličini, mogu se $U_i - U_u$ karakteristike prikazati kao familija krivulja koje ovise o parametru I_i. Iz krivulja se vidi da u ograničenom području postoji između izlazne i ulazne veličine približno linearan odnos.

Naglasimo još jednom da je ovo područje dobro istraženo, s opsežnom literaturom i bogatim iskustvom. Zato i projektiranje upravljačkih uređaja nije u pravilu teško. U daljnjem gradivu obrađujemo probleme regulacije.

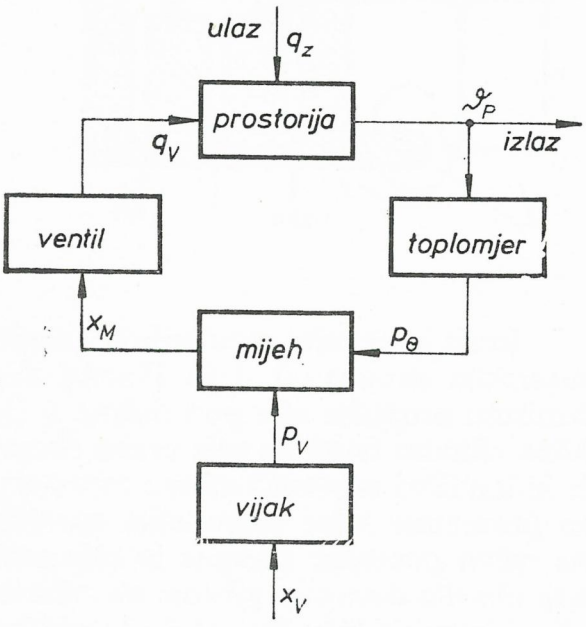
1.2.2. Regulacija

Često se zahtjevi procesa koji treba automatizirati ne mogu riješiti upravljačkim sustavom. Tako npr. tlak plina u mreži gradskog plina treba održati konstantnim iako postoji veoma promjenljiva potrošnja tokom dana, koja se pojavljuje kao poremećaj. Drugi je slučaj kad treba postići veliku točnost izlazne veličine; to je npr. pri strojnoj obradi kopirnom glodalicom, gdje se za duže vrijeme mora osigurati točno slijeđenje položaja noža prema položaju ticala na šabloni. U takvim slučajevima primjenjujemo regulaciju.

Primjer regulacijskog sustava prikazan je na sl. 1-7. To je isti primjer održavanja temperature u prostoriji što smo ga prikazali i pri opisu upravljanja u vezi sa sl. 1-1. Plinski toplomjer mjeri u tom slučaju temperaturu prostorije, i ϑ_P kao izlazna veličina utječe na samu sebe. Vijkom na regulacijskom ventilu 4 namješta se željena vrijednost temperature prostorije. Naime, sila opruge vijka u ravnoteži je sa silom kojom pritišće tekućinu u mijehu, a rezultirajući podizaj ventila propušta upravo toliko ugrijane vode da se temperatura prostorije održi na željenoj vrijednosti. Ako zbog nekog poremećaja, npr. zbog otvaranja vrata, temperatura u prostoriji padne, smanjeni tlak u toplomjeru djeluje na veći protok ugrijane vode. Temperatura prostorije zbog toga raste, otvor ventila se zatvara, i to traje tako dugo dok se ponovno ne uspostavi stacionarno stanje. Temperatura prostorije ustalila se ponovno na vrijednosti koja je dana namještanjem vijka.



Sl. 1—7. Regulacija temperature prostorije

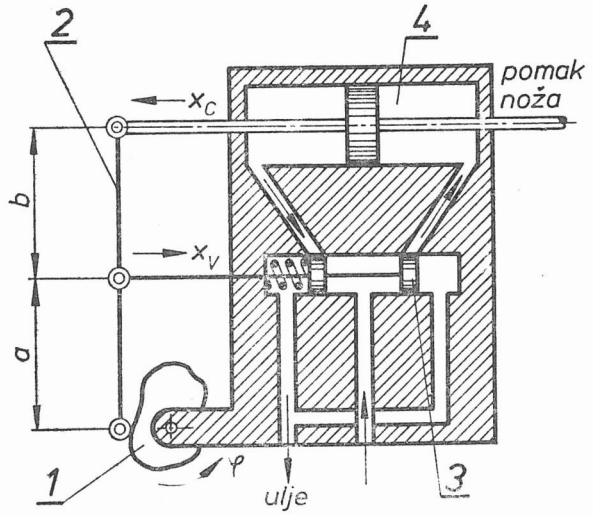


Sl. 1—8. Blok-dijagram regulacije temperature prostorije

Na sl. 1-8 prikazan je funkcionalni blok-dijagram za taj slučaj. Suvišno je kontrolirati izlaznu veličinu ϑ_P jer ona ispravlja samu sebe. Regulacijom su suzbijeni svi utjecaji poremećaja, kao i tendencija sustava da kontinuirano pogoršava svoja unaprijed definirana svojstva. Željena veličina, dana položajem vijka x_V, pretvara se u silu opruge, a ova u tlak na mijehu p_Θ. To je potrebno jer se preko plinskog toplomjera ostvaruje povratna veza pretvaranjem temperature prostorije ϑ_P u

odgovarajući tlak na mijeh p_ϑ, a samo se istovrsne fizikalne veličine mogu uspoređivati. Razlika tlakova ($p_\vartheta - p_V$) djeluje na položaj mijeha x_M, što je ujedno ulaz ventila. Razmjeran mu je protok ventila q_V koji djeluje na temperaturu prostorije.

Kao ulazna veličina u regulacijski sustav djeluje poremećaj prikazan ekvivalentnim protokom q_Z. Izlazna veličina, temperatura prostorije ϑ_P, uspoređuje se s referentnom, konstantnom veličinom, položajem vijka x_V — dakako pomoću pretvorbe p_ϑ, odnosno p_V. Regulacijsko djelovanje ventila svodi se na **suzbijanje poremećaja** koji se događaju **slučajno.** Temperatura prostorije ostaje čvrsta veličina, i odatle i naziv **čvrsta regulacija.** Izlazna se veličina može međutim mijenjati i po nekom unaprijed zadanom **programu,** kao što je npr. temperatura industrijske peći koja se za vrijeme procesa žarenja mijenja više puta. Moramo naglasiti da se pritom proces obično odvija sporo u odnosu prema programiranim promjenama.



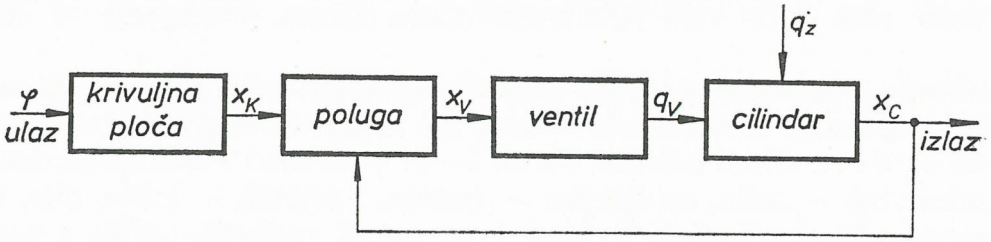
Sl. 1—9. Regulacija hidrauličnog servomehanizma

Idući je primjer regulacije hidraulični servomehanizam koji upravlja kopirnim tokarskim strojem (sl. 1-9). Položaj klipa razvodnika 3 u hidrauličnom servomehanizmu propušta ulje pod tlakom u lijevu ili desnu komoru cilindra 4, a pomak klipa cilindra istiskuje ulje preko druge komore ventila natrag u spremnik. Ovdje je hidraulični servomehanizam zapravo pojačalo, jer se s malim snagama potrebnim za pokretanje klipa razvodnika upravlja velikom snagom koju proizvodi cilindar na račun pomoćne energije iz hidrauličnog spremnika. Klip cilindra pomiče nož koji obavlja dostavno gibanje na tokarskom stroju, pri čemu je potrebna određena sila. Okretanje krivuljne ploče 1 pritišće na polugu 2 tako da se pomiče i klip razvodnika jer je njemu potrebna mnogo manja sila nego klipu cilindra. Ako se npr. klip razvodnika pomakao udesno, klip cilindra pomiče se ulijevo. Svojom silom on pomiče i polugu ulijevo. To pomicanje traje tako dugo dok klip razvodnika ponovno ne zatvori dovod ulja, tj. dok razvodnik ponovno dođe u početni položaj. Klip cilindra zaustavljen je u novom položaju koji je u svakom trenutku razmjeran položaju određenom krivuljnom pločom. Postoji dakle izravna veza između kuta zakreta krivuljne ploče φ, ulaznog položaja x_K, položaja klipa razvodnika x_V, protoka kroz razvodnik q_V i položaja klipa cilindra x_C, što odgovara položaju noža. Preko poluge ostvaruje se međutim mehanička povratna veza, jer izlazna veličina

x_C povratno djeluje na ulaznu veličinu x_V, i to u čvrstom omjeru određenom krakovima poluge:

$$\frac{x_C}{x_V} = \frac{a+b}{a}. \tag{1-2}$$

Na sl. 1—10 prikazan je funkcionalni blok-dijagram hidrauličnog servomehanizma, gdje se svaka promjena izlazne veličine x_C uspoređuje sa zadanom, vremenski promjenljivom ulaznom veličinom x_K. Regulacijsko djelovanje poluge svodi se na to da x_C vjerno **slijedi ulaznu veličinu**; odatle naziv **slijedna regulacija.** Utjecaj poremećaja, prikazanog ekvivalentnim protokom q_Z, u tom slučaju ima sporedno značenje, pa ga u osnovnoj analizi možemo zanemariti.

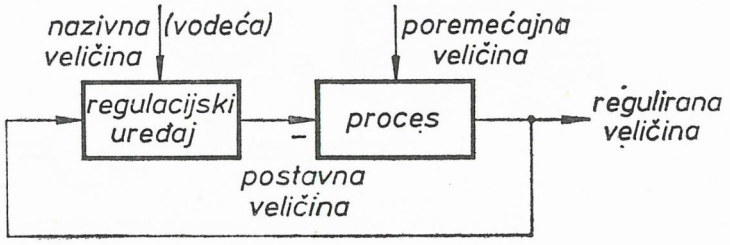


Sl. 1—10. Blok-dijagram regulacije hidrauličnog servomehanizma

U opisanom slučaju hidrauličnog servomehanizma vremenski tok ulazne veličine mijenja se prema unaprijed zadanom **programu** koji je pohranjen u obliku krivuljne ploče: informacija na ulazu ima mehaničko obilježje (mehanička memorija). Međutim, kod slijedne regulacije postoji i mogućnost da se vremenski tok ulazne veličine mijenja u ovisnosti o faktorima koji nam prethodno nisu poznati, tj. **slučajno.** To je npr. upravljanje zrakoplovom: pilot daje ulazne komande u ovisnosti o trenutačnoj situaciji leta, a krilce mora točno slijediti pokrete upravljačke poluge.

Na osnovi ovih primjera lakše ćemo razumjeti definiciju regulacije kao procesa pri kojem se održava zadano ili željeno stanje protiv svih vanjskih i unutrašnjih poremećaja. Karakteristika je regulacijske petlje da ulazne veličine neprestano djeluju na izlazne, i obratno. Ovdje se upravlja **unatrag.**

Funkcionalni blok-dijagram regulacijske petlje u najopćenitijem obliku prikazan je na sl. 1—11 i vrijedi kako za čvrstu tako i za slijednu regulaciju. Uz sam proces vezan je regulacijski uređaj kojemu je — prema izloženim primjerima — osnovni zadatak da mjeri, uspoređuje i pojačava regulacijski signal. **Regulirana veličina** kojom želimo upravljati djeluje na ulaz regulacijskog uređaja, gdje se mjeri i uspoređuje s referentnom veličinom. Referentna veličina kod slijedne regulacije vremenski je promjenljiva, pa je prikladan naziv i **vodeća veličina.** Kod čvrste regulacije ona se ne mijenja, a udomaćio se naziv **nazivna veličina.** Razlika između regulirane i referentne veličine jest **regulacijsko odstupanje** koje se pojačava, i na izlazu iz regulacijskog uređaja naziva se ponekad **postavna**



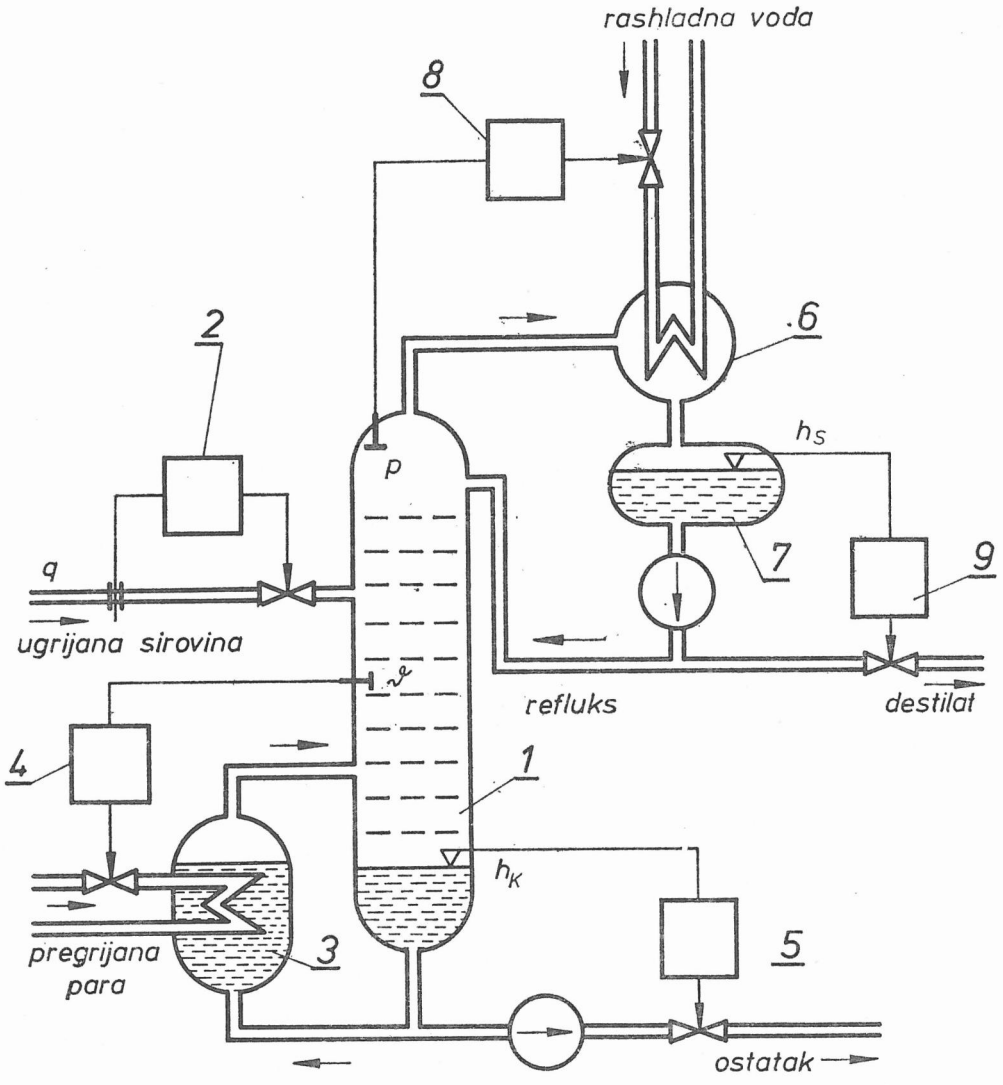
Sl. 1—11. Poopćeni blok-dijagram regulacije

veličina. Ona djeluje na ulaz procesa suprotstavljajući se djelovanju **poremećajne veličine.**

Postavnu veličinu označili smo simbolički predznakom »—«, što znači da postoji **negativna povratna veza;** negdje u regulacijskoj petlji **mora** se postići zakretanje signala za 180°. U protivnom bi pri bilo kakvom poremećaju došlo do uzajamnog potpomaganja djelovanja postavne i poremećajne veličine. Nastupila bi pozitivna povratna veza koja bi dovela do nestabilnosti.

Višestruka regulacija. Dosadašnji primjeri odnosili su se na jednostavni regulacijski krug s jednom petljom i jednom ulaznom i izlaznom veličinom. U suvremenim procesnim postrojenjima pojavljuju se sve više složeni regulacijski krugovi s više međusobno spregnutih petlji i s nekoliko ulaznih i izlaznih veličina. Kao primjer uzet ćemo vrlo pojednostavnjenu shemu postrojenja za destilaciju nafte.

Destilacija je jedna od osnovnih operacija u preradi nafte. To je fizikalno odvajanje molekula pomoću temperature i tlaka, pri čemu se tekuća smjesa razdvaja na kondenzat pare i na tekući ostatak. Na sl. 1—12 prikazano je odvajanje dvokomponentne mješavine — nafte, na destilat — benzin, i ostatak — loživo ulje. Osnovni uređaj predstavlja destilacijska kolona 1 — toranj valjkasta oblika s ugrađenim



Sl. 1—12. Višestruka regulacija postrojenja za destilaciju nafte

»podovima«. Odozgo nailazi tekući kondenzat koji dolazi u dodir s parama što dolaze odozdo. Pritom se izmjenjuju materija i energija, uspostavljaju se ravnotežna stanja pare postaju sve bogatije lakohlapljivim komponentama, a kondenzat teškohlapljivim komponentama. Taj se proces naziva i rektifikacija, i njemu pogoduju izvedbe podova (zvonasti otvori, mreže, itd.) koje povećavaju dodirnu površinu.

Ravnoteža procesa poremećuje se s promjenom sastava sirovine, tlaka pare i toplinske energije. Zato je potrebno regulirati više međusobno ovisnih veličina. Prema sl. 1—12 ugrijana nafta dolazi iz tzv. cijevne peći, te se mjernim pretvaračem mjeri protok, a regulacijski uređaj 2 pomoću ventila regulira unaprijed protok nafte q. Pregrijana para grije pomoću rebojlera 3 tekućinu u dnu kolone, koje se temperatura ϑ drži konstantnom pomoću regulacijskog uređaja 4. Temperatura se mjeri negdje u sredini kolone, gdje je najveći temperaturni gradijent i prema tome najveća osjetljivost. Razina tekućine h_K na dnu održava se konstantnom pomoću regulacijskog uređaja 5 koji regulira odtok ostatka. Plinovi iz kolone kondenziraju se u kondenzatoru 6 rashladnom vodom i ulaze u spremnik 7, a nakon toga se odvajaju kao destilat ili se vraćaju kao tzv. refluks natrag u proces. Regulacijski uređaj 8 održava konstantnim tlak p u vrhu kolone, mjereći ga i djelujući na protok rashladne vode u kondenzator. Na kraju, regulacijski uređaj 9 održava konstantnom razinu destilata h_S u spremniku.

Ispuštajući nebitno, pretpostavimo da veći protok pregrijane pare u rebojleru 3 povisuje temperaturu ϑ, a time i tlak p. Isto tako povećani protok rashladne vode u kondenzator 6 smanjuje i tlak p i temperaturu ϑ. Kako oba ventila utječu u istom smislu na regulirane veličine, dolazi do pozitivne povratne veze, pa se djelovanje obaju regulacijskih uređaja 4 i 8 međusobno poništava.

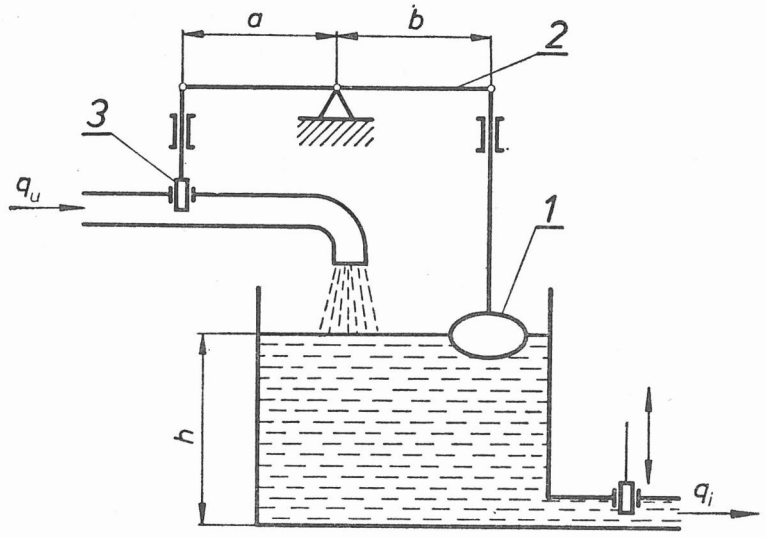
Ovaj pojednostavnjeni primjer poslužio je samo za prikaz problema i poteškoća, a u dvanaestom poglavlju upoznat ćemo mogućnosti i metode matematičke analize multivarijabilnog sustava.

1.2.3. Osnovni zahtjevi pri regulaciji

Budući da regulacija djeluje tek kad se pojave bilo namjerna bilo slučajna odstupanja od stacionarnog stanja, neophodno je da proučimo dinamičke uvjete rada, odnosno problem **stabilnosti.** Stabilnost je i najvažnije svojstvo regulacijskog sustava, jer je to nužan uvjet za tehničku primjenljivost. Međutim, regulacijski procesi su i procesi izjednačavanja između dva stacionarna stanja. Zato se istodobno moraju pratiti i stacionarni uvjeti rada, pri čemu je najvažniji problem **točnosti.** Kao treći zahtjev postavlja se kod regulacija i **brzina odziva** kojom se odigrava proces izjednačavanja. Zapravo, točnost, stabilnost i brzina odziva osnovni su problemi regulacije, pa teorija automatske regulacije treba da ponajprije odgovori na ta pitanja.

Točnost regulacije. Ovaj se problem veoma zorno vidi na primjeru regulacije razine tekućine u spremniku prema sl. 1—13. Regulacijski uređaj ovdje je veoma jednostavan: sastoji se od plovka 1, poluge 2 i zasuna 3. Plovak »mjeri« razinu, i taj se podatak preko poluge kao regulacijskog člana prenosi na zasun koji »zahvaća« na ulaz procesa. Ulazni protok q_u[1] mijenja se tako da razina h ostaje konstantnom. Na prvi pogled ovdje nema funkcije uspoređivanja; ona je ugrađena u cijeli sustav. Parametri regulacijskog uređaja (krakovi poluge, dužine držača plovka i zasuna)

[1] Zbog jednostavnosti u cijelom ćemo tekstu pisati volumenski protok q_v kao q; ako se ne može zanemariti stlačljivost, uzet ćemo maseni protok q_m.



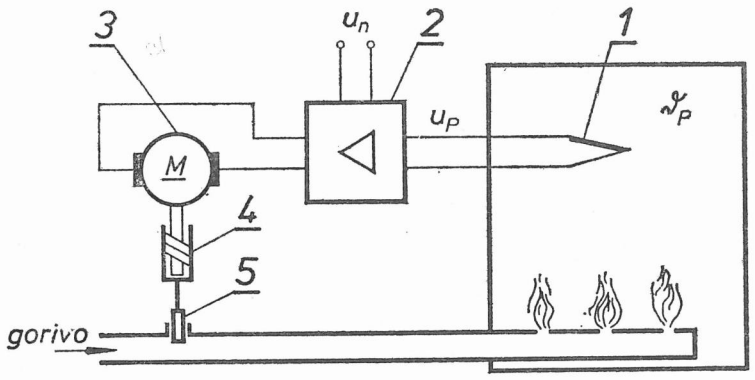
Sl. 1—13. Regulacija razine tekućine u spremniku—primjer za točnost

tako su podešeni da je u stacionarnom stanju ulazni protok q_u jednak izlaznom protoku q_i koji predstavlja opterećenje uz određenu razinu tekućine u spremniku.

Dođe li do nekog poremećaja u procesu, npr. da potrošnja prikazana simbolički zasunom na izlaznoj cijevi padne za Δq_i, razina tekućine počinje se dizati, a zasun 3 odmah se počinje spuštati. Zasun se spušta sve dotle dok se ne uspostavi novo ravnotežno stanje, tj. sve dok se q_u opet ne izjednači sa smanjenim q_i. Zasun 3 mora zbog toga ostati u nešto nižem položaju. Dakle, u novom stanju ravnoteže, koje se uspostavilo nakon poremećaja, preostaje određeno odstupanje regulacijske veličine h.

Točnost regulacije u ovom slučaju ne mora biti kritična. Ako se traži da regulacijsko odstupanje bude u veoma malim granicama, potrebno je veće »pojačanje«[1] u regulacijskom krugu. Na uređaju na sl. 1—13 to se postiže s povećanjem omjera a/b krakova poluge: regulacijsko odstupanje se smanjuje.

Stabilnost regulacije. Kao primjer uzimamo regulaciju temperature industrijske peći prema sl. 1—14. Veoma pojednostavnjeno, regulacijski uređaj sastoji se od termoelementa 1, koji »mjeri« temperaturu i pretvara je u odgovarajući električni signal, a ovaj preko pojačala 2 djeluje na istosmjerni motor 3 koji preko zupčanog prijenosa 4 podiže ili spušta zasun 5 i djeluje na protok goriva. Nazivna je veličina u obliku istosmjernog napona u_n i na ulazu u pojačalo djeluje zajedno s u_P kao regulacijsko odstupanje $(u_P - u_n)$.



Sl. 1—14. Regulacija temperature industrijske peći—primjer za stabilnost

[1] Pri tome se pojačanje uzima u najširem smislu; potrebnu energiju daje u tom slučaju uzgon plovka.

Neka se zbog bilo kojeg razloga, npr. zbog smanjene kalorične vrijednosti goriva, smanji temperatura peći. Termoelement zbog svoje tromosti reagira s **kašnjenjem.** To isto vrijedi i za akciju motora, za protok povećane količine goriva u peć, a naročito za ugrijavanje peći na prvobitnu temperaturu. Zbog električne, hidrauličnе ili toplinske tromosti ne osjeća se neposredno pun učinak ispravljačke akcije; to je bitan faktor u određivanju dinamičkog ponašanja regulacijskog sustava. Zbog tog kašnjenja može i uzrok ispravljačke akcije nestati, a da izvršni član reagira punom snagom, pa će se temperatura peći podići iznad željene vrijednosti. Dolazi do ponovne akcije u regulacijskom krugu, i to u suprotnom smjeru, dakako opet s kašnjenjem: temperatura peći spustit će se ispod željene vrijednosti. Posljedica toga su oscilacije, koje već prema značajkama regulacijskog kruga mogu biti prigušene ili neprigušene. Takvom regulacijom postiže se upravo suprotan učinak: umjesto da je regulirana veličina stalna, ona još više odstupa. Nestabilnost sustava je krajnje nepoželjna i u određenim uvjetima može upropastiti sustav.

Ako se radi povećanja točnosti regulacije signal u povratnoj vezi još više pojača, povećat će se i amplitude oscilacija; one će biti žešće. Odatle proizlazi da su zahtjevi za točnošću i stabilnošću međusobno nespojivi: što je veći zahtjev za točnošću, to manje treba biti regulacijsko odstupanje, odnosno mora se izvršiti veći zahvat u proces, a sve to smanjuje stabilnost.

Ovaj kvalitativni prikaz regulacije trebao je da dade fizikalnu sliku problema. Kasnije ćemo regulacijski krug analizirati egzaktnim metodama, pa ćemo na osnovi toga moći unaprijed kompenzirati kašnjenje i podesiti pojačanje, a to je već sinteza, odnosno projektiranje, što je konačan cilj inženjerskog studija.

1.2.4. Primjena regulacije u tehnici

Spomenuli smo da je regulacija poželjna svuda gdje se očekuju poremećaji, osobito u **procesnim postrojenjima.** Kod njih se upravlja toplinskim veličinama kao što su temperatura ili tlak, odnosno općenito procesnim veličinama, kao što su koncentracija otopine ili sastav plinova. Obično se te veličine moraju održavati konstantnima duže vrijeme, pa se tu najčešće primjenjuje čvrsta regulacija. Sam regulacijski uređaj izvodi se kao kompaktna jedinica koja se naziva **regulator** i priključuje na proces. Namještanjem promjenljivih parametara regulatora postiže se najbolje regulacijsko djelovanje. Tehnika čvrste regulacije u procesima poznata je dugi niz godina, a eksperimentalne metode projektiranja regulacijskog kruga odlično su razrađene.

Velika točnost regulirane veličine kao i brzina reagiranja zahtijeva se kod **servomehanizama.** To su pojačivački uređaji s povratnom vezom kod kojih se reguliraju mehaničke veličine, kao što su položaj, brzina ili ubrzanje. Servomehanizmi se upotrebljavaju prvenstveno pri upravljanju vozilima, brodovima, letjelicama, kao i kod alatnih strojeva; u pravilu je to slijedna regulacija. Regulacijski uređaj izvodi se ovdje kao dio kompletnog servomehanizma; naziva se **kompenzator.** Iako su servomehanizmi poznati duže vrijeme i razvijeni neovisno o procesnim regulatorima, njihova se primjena proširila osobito u toku drugoga svjetskog rata u vezi s navođenjem protuavionske vatre pomoću radara. Od tog vremena snažno se razvila i teorija s opsežno razrađenim matematičkim metodama za projektiranje servoregulacijskog kruga.

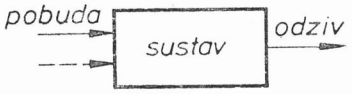
Treću veliku skupinu primjene čini regulacija **električnih postrojenja.** Tu se prvenstveno reguliraju električne veličine, kao što su napon ili struja. Prema funkciji ovdje se može primijeniti čvrsta regulacija (stabilizatori napona) ili slijedna regulacija (servopojačala snage).

Stvarna razlika između čvrste i slijedne regulacije i nije oštro određena: jedan regulacijski sustav može se prikazati dvojako, već prema tome koja je veličina zanimljiva. Tako npr. regulacija temperature industrijske peći ima zadatak i da suzbija poremećaje i da vodi temperaturu prema nekom programu. Obratno, kutni zakret antene radara ne slijedi samo komande, već treba da bude neosjetljiv na izvore poremećaja kao što je vjetar. Na to ćemo se pitanje vratiti u odjeljku 8.1. kod kvantitativne analize regulacijskog kruga.

1.3. Analiza i sinteza regulacijskog sustava

Pomoću automatske regulacije kontroliraju se razne fizikalne i kemijske veličine: temperatura, položaj, slanost, zračenje. Isto tako u prijenosu informacija sudjeluju razni fizikalni mediji: električni, pneumatski, hidraulični, mehanički. Sve nam to govori da je u proučavanju regulacijskih pojava u prvom planu pronalaženje **funkcionalnih ovisnosti** pomoću matematičkih metoda i odgovarajućih simbola, a sama tehnička izvedba, barem u teoriji automatske regulacije, nije toliko zanimljiva.

Kao i u drugim granama znanosti, područje proučavanja treba ograničiti da bi se izvana mogle mjeriti ili odrediti veličine koje daju bitnu sliku pojava u ograničenom području. Tako dolazimo do pojma sustava. **Sustav** je zapravo skup fizikalnih elemenata i sklopova koji su povezani međusobnim djelovanjem. Na takav sustav prema sl. 1—15 narinu se jedna ili više ulaznih veličina ili »pobuda«, a promatra se u pravilu jedna izlazna veličina ili »odziv«, pri čemu parametri sustava određuju funkcionalnu ovisnost izlaznih i ulaznih veličina. To se podudara sa svakodnevnim iskustvom: pobuda je uzrok koji djeluje na situaciju, a odziv je posljedica. U tome je sadržano i načelo kauzalnosti.



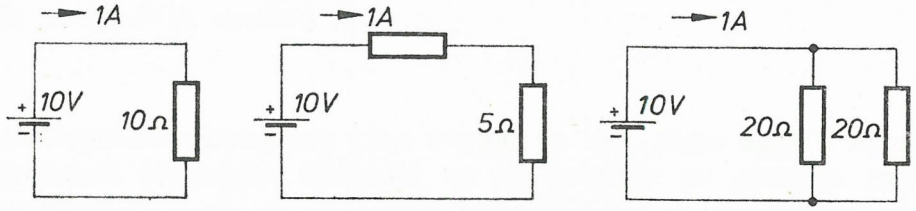
Sl. 1—15. Pobuda koja djeluje na sustav daje odziv

Tako shvaćen sustav ima **determinističko** obilježje jer se karakteristične veličine mijenjaju prema unaprijed određenim zakonitostima, i to uglavnom kontinuirano: izlazna je veličina jednoznačno određena u odnosu prema ulaznoj veličini. Drugu veliku skupinu čine sustavi kojih proučavanje ima **stohastičko** obilježje; kod njih se značajne veličine mijenjaju nepredvidivo i uglavnom diskretno; nema jasne, determinističke povezanosti između izlazne i ulazne veličine. Njihovo se proučavanje temelji na računu vjerojatnosti. U daljem tekstu zadržat ćemo se samo na determinističkim sustavima.

Ako su poznati parametri sustava kao i pobuda, a treba odrediti odziv, riječ je o problemu **analize.** Kod regulacije analiza počinje od zadanih parametara procesa i regulacijskog uređaja. Na toj se osnovi postavlja diferencijalna jednadžba regulacijskog sustava, traži se rješenje koje se ocjenjuje prvenstveno sa stajališta stabilnosti i točnosti.

Neki sustav možemo analizirati sa znanstvenog i inženjerskog stajališta. Znanstvena analiza zahtijeva potpun opis fizikalnog fenomena, dok cilj inženjerske analize nisu točni matematički opisi, odnosno točni odgovori, već je dovoljno da se dobije specifičan odgovor, i to u granicama zadane točnosti, a s najmanjim utroškom rada i vremena.

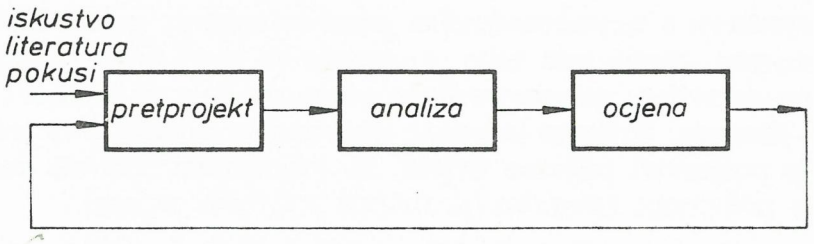
Za razliku od analize, kod **sinteze** je poznata pobuda, a zadan je i odziv koji sustav mora dati; traže se parametri sustava koji je nepoznat. U inženjerskoj praksi to se naziva i projektiranje. Projektirati regulacijski sustav znači odrediti parametre regulacijskog uređaja priključenog na proces, koji će zadovoljiti zadane uvjete rada.



Sl. 1—16. Mogućnosti sinteze električnog kruga

Sustavna sinteza, odnosno projektiranje, može se nažalost provesti u malo područja. Naime, problem sinteze ne može se riješiti jednoznačno, što se vidi i na vrlo jednostavnom primjeru električnog kruga na sl. 1—16. Ovdje je poznat ulazni napon od 10 volta, a traži se da baterija daje struju od 1 ampera. Na slici su prikazane samo tri jednostavne mogućnosti da bi se dobio traženi odziv; očito je da rješenja ima bezbroj. U vezi s projektiranjem postavlja se odmah i pitanje **optimalizacije.** Tako se npr. pri projektiranju električnog kruga na sl. 1—16 može postaviti zahtjev da broj elemenata bude minimalan, ali je najčešći zahtjev svakako da projekt bude što jeftiniji.

Kad se razvija novi sustav, projektant predlaže rješenje problema, i to na osnovi iskustva, literature ili prethodnih pokusa. To je zapravo pogađanje najboljeg rješenja. Nakon toga se rješenje analizira, tj. provjerava se da li predloženi model ispunjava uvjete, pa se pretprojekt ispravlja. Projektiranje se svodi na izmjeničnu analizu, ocjenu i mijenjanje projekta tako dugo dok se ne postigne zadovoljavajući rad regulacijskog sustava. To je simbolički prikazano na sl. 1—17. Prema tome, projektant mora dobro poznavati analizu regulacijskog sustava da bi na osnovi tih analiza pronašao najbolje rješenje. Drugu komponentu pri projektiranju, iskustvo, možemo steći samo dugogodišnjim radom. Zato je u ovom gradivu **težište na analizi** regulacijskih sustava, a sintezom možemo ovladati u tehničkoj praksi.



Sl. 1—17. Shematski prikaz toka projektiranja

Radi cjelovitosti možemo spomenuti da se poznavanje sustava i odziva, a traženje pobude, svodi na **problem instrumenta.** Tako je npr. pri očitavanju temperature poznat sustav, tj. ovisnost između temperature i visine stupca žive, a poznat je i odziv, tj. visina stupca žive. Problem instrumenta nije toliko značajan kao analiza i sinteza.

2. Matematički pristup dinamičkim sustavima

Što je život? Mahnitanje.
Što je život? Puste sanje,
prazna sjena što nas ovi.
O, malen nam dar je dan,
jer sav život — to je san
a san su i sami snovi.

P. Calderón de la Barca, »Život je san«

Regulacija djeluje onda kad se pojave neki poremećaji ravnotežnog stanja u regulacijskom sustavu, sa svrhom da se ponovno uspostavi ravnotežno stanje. Prema tome, svojstveno je regulacijskim pojavama da se u njihovu proučavanju mora uzeti u obzir dinamika odnosno diferencijalne jednadžbe. Zato je u ovom poglavlju težište na opisu sustava diferencijalnim jednadžbama i na njihovu rješavanju. Pri tome moramo stalno imati na umu da je konačan cilj inženjerske analize jasno uočavanje zakonitosti. Treba steći uvid u fizikalni sustav, a matematika je samo pomoćno sredstvo. To vrijedi i za regulacijski sustav, gdje izračunavanje određenih parametara sustava često nije primarno. Mnogo je važnije da pomoću matematičke obrade shvatimo funkcionalne povezanosti u sustavu, osobito utjecaj parametara na djelovanje regulacijskog sustava. Traže se dakle smjernice kako da se regulacijsko postrojenje najjednostavnije izvede i poboljša.

U dinamičkim sustavima regulacijske tehnike uzimamo u obzir takve gdje dolazi do vremenske preraspodjele energije i vrijeme je nezavisna varijabla. Tu se pojavljuju i vremenske derivacije zavisnih varijabla, što je sve obuhvaćeno u diferencijalnoj jednadžbi. Statički su sustavi naprotiv u ravnoteži i kod njih nema promjena u vremenu, pa i jednadžbe koje ih opisuju nemaju članove kao funkciju vremena. Kod jedne prostorne varijable statički se sustavi opisuju algebarskim jednadžbama.

Diferencijalne jednadžbe mogu se podijeliti u dvije velike skupine. **Obične diferencijalne jednadžbe** imaju samo jednu nezavisnu varijablu, a to je kod dinamičkih pojava vrijeme. Tako se npr. mehanički sustav masa-prigušivač-opruga[1] može prikazati običnom diferencijalnom jednadžbom, jer položaj (ili brzina) pojedinih elemenata sustava ovisi samo o vremenu. Ovdje se radi o dinamičkom **sustavu s usredotočenim parametrima,** gdje je masa usredotočena na jednom mjestu, trenje isto tako, a opruga je zamišljena idealno bez mase. Takvi sustavi predstavljaju **preraspodjelu energije** koja se prelijeva iz kinetičke u potencijalnu, i obratno. Vrijeme je jedina nezavisna varijabla, i za jednoznačno rješenje potrebno je poznavati početne uvjete, tj. vrijednosti zavisne varijable i njezinih derivacija u početnom trenutku (problemi početnih uvjeta).

Kod **parcijalnih diferencijalnih jednadžbi** postoje dvije ili više nezavisnih varijabli. To je slučaj kad se pojave događaju u vremenu i u prostoru, pa je, uz vrijeme, i položaj u prostoru nezavisna varijabla. Tako npr. amplituda titranja napete žice ovisi i o vremenu i o položaju. Parcijalne diferencijalne jednadžbe opisuju

[1] Vidi sl. 2—2.

dinamičke **sustave s raspodijeljenim parametrima:** elementi sustava raspodijeljeni su u prostoru, pa je važan položaj fizikalne pojave u prostoru. Tu se radi o pojavi **širenja energije.** Kako su nezavisne varijable vrijeme i položaj, za jednoznačno rješenje problema moraju se uz početne uvjete poznavati i rubni uvjeti, tj. vrijednost zavisne varijable na rubu područja. Tako je npr. amplituda titranja napete žice na rubovima uvijek jednaka nuli (problemi rubnih uvjeta).

Zapravo, ako promatramo **brzinu** širenja energije, onda su sustavi s usredotočenim parametrima samo poseban slučaj sustava s raspodijeljenim parametrima. Poslužimo se primjerom kako se širi val. Ako je valna dužina pojave dovoljno velika u usporedbi s fizikalnim dimenzijama sustava, titranje u čitavom sustavu ima približno istu fazu, pa je amplituda vala samo funkcija vremena, a ne i položaja. Suprotno tome, kod malih valnih dužina amplituda vala znatno se mijenja u kratkom razmaku, pa je amplituda funkcija i vremena i položaja. Kako je prema relaciji $\lambda = v/f$ valna dužina obrnuto razmjerna frekvenciji titranja, proizlazi da su sustavi s usredotočenim parametrima povezani s niskim frekvencijama, a sustavi s raspodijeljenim parametrima s visokim frekvencijama.

To što nastojimo izbjeći sustave s raspodijeljenim parametrima odraz je poteškoća koje imamo pri rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Razlog tome nije samo u složenosti izraza, već i zbog rubnih uvjeta čije postavljanje zahtijeva jednostavne geometrijske oblike sustava. Kako se u regulacijskoj tehnici mnogo susrećemo sa sustavima s raspodijeljenim parametrima, nastojat ćemo ih ili nadomjestiti sustavima s usredotočenim parametrima ili ih razbiti u niz jednostavnijih sustava s usredotočenim parametrima. Prema tome, matematički model imat će ili običnu diferencijalnu jednadžbu, ili sustav običnih diferencijalnih jednadžbi. U daljem ćemo gradivu zato govoriti poglavito o običnim diferencijalnim jednadžbama, o njihovu postavljanju, rješavanju i linearizaciji. Uz opis jednostavnih sustava s jednim ulazom i izlazom prikazat ćemo i metode pri rješavanju sustava s više ulaza i izlaza.

2.1. Diferencijalne jednadžbe jednostavnih sustava

Kod dinamičkih sustava nailazimo na problem kako da postavimo matematički model, tj. diferencijalnu jednadžbu; osim toga, nema opće metode za rješavanje raznih tipova jednadžbi. Postoji međutim jedna vrsta fizikalnih **linearnih sustava s vremenski invarijantnim parametrima koji se opisuju s linearnim diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima** — s poznatim metodama i s egzaktnim rješenjima. Budući da su ti sustavi veoma česti u regulacijskoj tehnici, u daljnjim razmatranjima zadržat ćemo se na njima. Razumijevanje tih sustava omogućuje da se shvate i složeniji sustavi s linearnim, ali vremenski varijantnim parametrima, kao i nelinearni sustavi.

Linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima dana je u općem obliku:

$$a_n \frac{d^n x_i(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_i(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx_i(t)}{dt} + a_0 x_i(t) = b_0 x_u(t), \qquad (2\text{-}1)$$

gdje je ulazna varijabla x_u pobuda, izlazna varijabla x_i odziv, $a_n \ldots a_0$ su konstantni parametri sustava, a b_0 konstantan parametar pridružen pobudi. Kada

djeluje vanjska pobuda, govorimo o **neautonomnom sustavu,** a opisujemo ga **nehomogenom diferencijalnom jednadžbom.** Ako je uz to vanjska pobuda harmoničkog karaktera, odziv sustava su **prisilne oscilacije.**

Kad nema vanjske pobude, to je **autonomni sustav,** i njega opisujemo **homogenom diferencijalnom jednadžbom:**

$$a_n \frac{d^n x_i(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_i(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx_i(t)}{dt} + a_0 x_i(r) = 0. \tag{2-2}$$

I u tom slučaju mogu, pod stanovitim okolnostima, nastupiti tzv. **vlastite oscilacije.** Kad se frekvencije prisilnih i vlastitih oscilacija podudaraju nastupa **rezonancija.**

Da vidimo što razumijevamo pod pojmom linearnosti i vremenske invarijantnosti sustava. Pretpostavimo sasvim općenito da pobuda $x_u(t)$ implicira odziv sustava $x_i(t)$, ili izraženo na slijedeći način:

$$x_u(t) \rightarrow x_i(t). \tag{2-3}$$

Sustav je **linearan** ako će dvije pobude $x_{u1}(t)$ i $x_{u2}(t)$ na ulazu sustava izazvati odzive $x_{i1}(t)$ i $x_{i2}(t)$, pri čemu vrijedi odnos:

$$[ax_{u1}(t) + bx_{u2}(t)] \rightarrow [ax_{i1}(t) + bx_{i2}(t)], \tag{2-4}$$

gdje su a i b konstante. Tu je sadržano **načelo superpozicije:** odziv na zbroj dviju pobuda jednak je zbroju odziva svake pobude zasebno. Sustav je **vremenski invarijantan** ako uz implikaciju:

$$x_u(t) \rightarrow x_i(t) \quad \text{za} \quad -\infty < t < \infty \tag{2-5}$$

vrijedi:

$$x_u(t+a) \rightarrow x_i(t+a) \quad \text{za} \quad -\infty < t < \infty, \; -\infty < a < \infty, \tag{2-6}$$

tj. ako se pobuda pomakne za vremenski interval a, i odziv se pomakne za istu vrijednost.

2.1.1. Opis sustava

Da bismo jasno spoznali zakonitosti u nekom fizikalnom sustavu, moramo njegovo proučavanje po mogućnosti izraziti u matematičkom obliku. Izrazi koji opisuju sustave mogu se naći ako se primijene neki osnovni zakoni fizike. Tako se npr. jednostavni električni krugovi mogu analizirati pomoću Ohmova ili pomoću Kirchhoffovih zakona. U mehanici možemo poći od Newtonova zakona ili D'Alembertova načela, u termodinamici od Fourierova zakona o prijenosu topline ili Newtonova zakona o hlađenju, u hidrodinamici od Darcyjeva ili Hagen-Poiseuilleova zakona o strujanju, itd. U tim slučajevima polazimo od načela koja predstavljaju osnovne zakonitosti u prirodi, kao što su načelo održanja energije (energetska bilanca), načelo održanja materije (zakon kontinuiteta) i načelo održanja impulsa (zakon količine kretanja).

Naša razmatranja započinjemo najjednostavnijim sustavom, kao što je npr. električni sustav na sl. 2—1. On se može prikazati običnom diferencijalnom jednadžbom osnovanom na drugom Kirchhoffovu zakonu $\sum \text{EMS} = \sum_{i=1}^{n} R_i i$, koji kazuje da je u strujnoj petlji zbroj narinutih elektromotornih sila EMS (izvori energije) jednak zbroju padova napona na pojedinim elementima. Možemo pisati:

$$u_R + u_C = R_i + u_C = u(t). \tag{2-7}$$

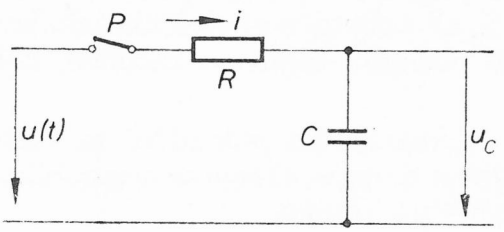
Napon kondenzatora u_C razmjeran je naboju q na njegovim oblozima; kako je struja količina naboja koji u jedinici vremena prođu kroz presjek voda, možemo pisati:

$$\begin{aligned} q &= \int i \, dt = C u_C, \\ \frac{dq}{dt} &= i = C \frac{du_C}{dt}, \end{aligned} \tag{2-8}$$

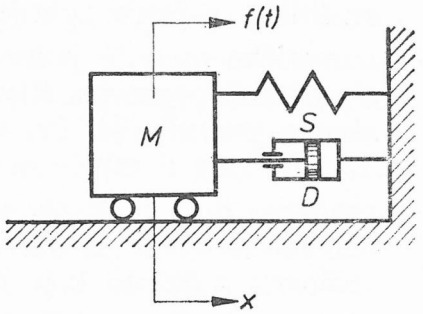
gdje je C konstanta proporcionalnosti koja označava kapacitivnost kondenzatora. Uvrštenjem izraza za struju i u jednadžbu (2-7) dobit ćemo slijedeći izraz:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u(t). \tag{2-9}$$

To je linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima prvoga reda; ona sadrži samo prvu derivaciju. Njome se opisuje linearni sustav prvoga reda s vremenski invarijantnim parametrima koji ima samo **jedan spremnik energije:** to je kondenzator C koji pohranjuje električnu energiju što teče preko **potrošnika energije**[1], otpora R. Ovaj se sustav dalje razrađuje u odjeljku 3.3.



Sl. 2—1. Električni RC sustav



Sl. 2—2. Mehanički MDS sustav

Slijedeći primjer je mehanički sustav s masom M, oprugom S i prigušivačem D, uz narinutu vanjsku silu $f(t)$ (sl. 2—2). Na osnovi D'Alembertova načela $\sum_{i=1}^{n} f_i - M\ddot{x} = 0$, tj. kad je zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na tijelo i sile inercije tog tijela jednak nuli, dobit ćemo jednadžbu:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = f(t) + f_D + f_S = f(t) - D \frac{dx}{dt} - Sx. \tag{2-10}$$

[1] Treba paziti na izraz »potrošnik« energije; električna se energija zapravo pretvara u Jouleovu toplinu i gubi se iz električnog sustava.

Tu je f_D sila trenja prigušivača koja je razmjerna u prvoj aproksimaciji brzini dx/dt, uz D kao koeficijent viskoznog trenja. Sila opruge f_S razmjerna je, prema Hookeovu zakonu, pomaku x, uz S kao krutost opruge. Sile f_D i f_S su s minus predznacima jer djeluju suprotno pobudnoj sili $f(t)$. Sređivanjem gornje jednadžbe dobit ćemo:

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+D\frac{dx}{dt}+Sx=f(t). \tag{2-11}$$

Ta je jednadžba linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima **drugoga reda** jer joj je najviša druga derivacija. Ona opisuje sustav drugog reda koji ima **dva spremnika energije** koji su međusobno nezavisni[1]: masu kao spremnik kinetičke energije i oprugu kao spremnik potencijalne energije. Taj sustav podrobnije opisujemo u slijedećem odjeljku.

Ako u sustavu postoji n međusobno nezavisnih **spremnika energije,** npr. opruga i masa, onda je to sustav n-tog reda i opisujemo ga običnom diferencijalnom jednadžbom s konstantnim koeficijentima **n-tog reda.**

2.1.2. Klasično rješenje

Kad je jednom postavljena diferencijalna jednadžba nekog dinamičkog sustava, ona još uvijek ne kazuje mnogo o tom sustavu jer je odnos između odzivne i pobudne veličine dan u implicitnom obliku $F(x_i^{(n)}, x_i^{(n-1)}, \ldots, x_i', x_i, x_u, t)=0$. Zato se traži rješenje koje taj odnos daje u **eksplicitnom obliku** $x_i=f(x_u, t)$ jer je inženjer naučen razmišljati u stvarnim vremenskim funkcijama. Rješenje je bez derivacijskih članova, i uvršteno u diferencijalnu jednadžbu identički je zadovoljava.

Ima nekoliko načina da bismo dobili rješenje diferencijalne jednadžbe:

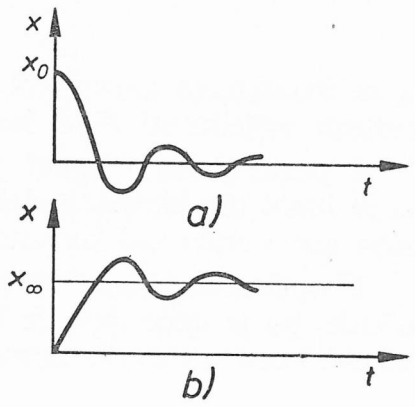
- egzaktne analitičke metode su najtočnije, ali već kod malo složenijih slučajeva analitičko rješenje zahtijeva mukotrpan rad, a često ga i nije moguće naći;
- numeričke metode pomoću kojih se dobije približno rješenje pomoću samo algebarskih operacija. Rješenje je moguće naći, ali veća točnost rješenja zahtijeva mnogo ponavljanja. Pri tome odlično može poslužiti digitalno računalo koje daje rješenje u tabelarnom obliku;
- analogne metode osnivaju se na sličnosti diferencijalnih jednadžbi za razne fizikalne sustave, i njima se mogu dobiti približna rješenja. Ovdje se upotrebljava analogno računalo koje daje rješenje u grafičkom obliku.

Od egzaktnih analitičkih metoda razmotrit ćemo u ovom odjeljku dobivanje tzv. **klasičnog rješenja** i dati njegov fizikalni smisao. Kao primjer uzet ćemo mehanički sustav prema sl. 2—2. Namjerno smo uzeli sustav drugoga reda jer ima ključnu ulogu u regulacijskim problemima u vezi s oscilacijama. Ako shvatimo diferencijalnu jednadžbu drugoga reda, možemo pojmove, metode kao i rješenja lako proširiti na diferencijalne jednadžbe višega reda.

Mehanički sustav može se pokrenuti iz stanja mirovanja bilo pod utjecajem pohranjene energije u sustavu bilo pomoću sile narinute izvan sustava. Zamislimo da u početnom trenutku ne djeluje vanjska sila, već da je u nategnutoj opruzi pohranjena određena potencijalna energija. Oslobađanjem energije opruge dolazi

[1] Općenito govorimo o spremniku energije ili materije, već prema tome da li smo postavili energetsku ili masenu bilancu.

do preraspodjele energije, ali se zbog nužnih gubitaka mehanička energija trenjem troši, pa se sustav nakon izvjesnog vremena smiri. To je prijelazno (tranzijentno) stanje i njega opisuje homogena diferencijalna jednadžba kad je pobuda $f(t)=0$. Opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe se naziva **komplementarna funkcija,** koja ovisi samo o sustavu, a ne i o pobudi.



Sl. 2—3. Vremenski dijagram odzivne funkcije

Komplementarnu funkciju x_{KF} mehaničkog MDS sustava na sl. 2—2 dobit ćemo iz homogene diferencijalne jednadžbe:

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+D\frac{dx}{dt}+Sx=0. \tag{2-12}$$

Ako kao rješenje pretpostavimo eksponencijalnu funkciju $x_{KF}=Ke^{\lambda t}$, dobit ćemo **karakterističnu jednadžbu:**

$$M\lambda^2+D\lambda+S=0. \tag{2-13}$$

Faktor $Ke^{\lambda t}$ kojim je pomnožen lijevi izraz različit je od nule (osim u trivijalnom slučaju), pa relacija (2-13) zadovoljava jednadžbu (2-12). Korijeni su karakteristične jednadžbe:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{D}{2M}\pm\sqrt{\frac{D^2}{4M^2}-\frac{S}{M}}, \tag{2-14}$$

tako da je komplementarna funkcija ili opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe:

$$x_{KF}=K_1e^{\lambda_1 t}+K_2e^{\lambda_2 t}. \tag{2-15}$$

Ona sadrži i dvije zasad nepoznate konstante integracije K_1 i K_2, što se mora i očekivati s obzirom na to da je provedena dvostruka integracija.

Komplementarna funkcija se obično poistovjećuje i s tzv. **prijelaznim rješenjem:** to je dio ukupnog rješenja koje teži nuli kad $t\to\infty$ (sl. 2—3a). Zamjena izraza je točna samo kad je sustav stabilan, tj. kad su korijeni karakteristične jednadžbe manji od nule.

Zamislimo sada da na mehanički sustav djeluje vanjska pobuda, sila $f(t)$, dok je pohranjena energija u sustavu jednaka nuli. Pobuda neprestano opskrbljuje sustav energijom, pa dolazi do trajnog djelovanja na sustav. Nakon izvjesnog vremena uspostavi se ustaljeno (stacionarno) stanje, i njega opisuje posebno rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe koje se naziva **partikularni integral** a ovisi i o pobudnoj funkciji i o sustavu.

Partikularni integral x_{PI} je bilo koje rješenje koje zadovoljava kompletnu jednadžbu (2-11), a nije sadržano u komplementarnoj funkciji. Da bi se on izračunao, potrebno je **poznavati pobudnu funkciju.** Neka je to u slučaju mehaničkog sustava konstantna sila, tj. $f(t)=F_0$. Fizikalno je lako ustanoviti da je pritom:

$$x_{PI}=\frac{F_0}{S}, \tag{2-16}$$

jer se uvrštenjem $x_{PI}=F_0/S$ u jednadžbu (2-11) mogu staviti sve derivacije konstantnih vrijednosti F_0/S jednakima nuli.

I partikularni integral se često naziva jednostavno **stacionarno rješenje** što je inače dio ukupnog rješenja koje **ne teži nuli** kad $t\to\infty$ (sl. 2—3b). I to je točno samo onda kad konstantna ili harmonička pobuda djeluje na stabilan sustav.

U općem slučaju sustav ima i pohranjenu energiju i pod djelovanjem je vanjske pobude, pa je opće rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe zbroj posebnog rješenja i općeg rješenja homogene diferencijalne jednadžbe (načelo superpozicije):

$$x=x_{KF}+x_{PI}=K_1e^{\lambda_1 t}+K_2e^{\lambda_2 t}+\frac{F_0}{S}. \tag{2-17}$$

Za jednoznačni opis sustava potrebno je da se uz pobudu poznaje i trenutačno stanje sustava, ili — matematički govoreći — **početni uvjeti.** Pomoću njih određuju se **konstante integracije** koje fizikalno predstavljaju energiju pohranjenu u spremnicima energije. Kod mehaničkog sustava na sl. 2—2 to znači da u trenutku $t=0$ treba poznavati pohranjenu potencijalnu energiju opruge razmjernu položaju x, kao i pohranjenu kinetičku energiju mase razmjernu brzini $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. To je i razumljivo, jer za rješenje diferencijalne jednadžbe drugoga reda treba provesti dvostruku integraciju, pri čemu se pojavljuju dvije konstante integracije. To bi za slučaj »mrtvog« sustava na sl. 2—2 značilo da je za $t=0$, $x=0$ i $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=0$.

Te se vrijednosti uvrste u opće rješenje:

$$x=\left|K_1e^{\lambda_1 t}+K_2e^{\lambda_2 t}+\frac{F_0}{S}\right|_{t=0}=K_1+K_2+\frac{F_0}{S}=0 \tag{2-18}$$

kao i u njegovu derivaciju:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left|\lambda_1K_1e^{\lambda_1 t}+\lambda_2K_2e^{\lambda_2 t}\right|_{t=0}=\lambda_1K_1+\lambda_2K_2=0. \tag{2-19}$$

Iz te dvije jednadžbe izračunaju se dvije konstante K_1 i K_2:

$$\begin{aligned} K_1&=\frac{F_0}{S}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2},\\ K_2&=-\frac{F_0}{S}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}, \end{aligned} \tag{2-20}$$

koje se uvrste u opće rješenje (2-17):

$$x=\frac{F_0}{S}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t}-\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_2 t}+1\right]. \tag{2-21}$$

Kad je pobuda $f(t) \neq 0$, konstante integracije se moraju odrediti iz općeg rješenja (2-17) jer komplementarna funkcija određuje samo **oblik rješenja.** Vrijednosti konstanti integracije ovise pak o tome koliko se prirodno ponašanje sustava (komplementarna funkcija u početku procesa) razlikuje od karaktera pobude (partikularni integral u daljnjem toku procesa).

Komplementarna funkcija. U općem slučaju komplementarnu funkciju dobit ćemo iz homogene diferencijalne jednadžbe n-tog reda:

$$a_n \frac{d^n x_i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_i}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx_i}{dt} + a_0 x_i = 0, \tag{2-22}$$

gdje je pobuda $x_u = 0$. Opće rješenje oblika $x_i = Ke^{\lambda t}$ je jedina funkcija čije derivacije imaju isti oblik kao i izvorna funkcija pa uz zgodno odabrani λ zadovoljava jednadžbu (2-22). Rješenje uvršteno u jednadžbu (2-22) daje karakterističnu jednadžbu:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \tag{2-23}$$

gdje se član $Ke^{\lambda t}$ kao zajednički faktor mogao kratiti jer je $Ke^{\lambda t} \neq 0$. Karakterističnu jednadžbu možemo pisati i u obliku umnoška faktora:

$$a_n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n) = 0. \tag{2-24}$$

Ovdje su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ korijeni karakteristične jednadžbe (2-23) jer je kod svakog od n korijena jedan faktor nula, pa je jednadžba zadovoljena.

Iz algebre znamo da korijeni jednadžbe mogu biti realni ili kompleksni, te jednostruki ili višestruki, pa se prema tome razlikuju četiri osnovna slučaja. Ako su korijeni realni i različiti: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, komplementarna funkcija ima jednostavan oblik:

$$x_{iKF} = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + K_n e^{\lambda_n t}. \tag{2-25}$$

Ako su korijeni realni, ali višestruki: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$, imamo:

$$x_{iKF} = K_1 e^{\lambda t} + K_2 t e^{\lambda t} + \ldots + K_n t^{n-1} e^{\lambda t}, \tag{2-26}$$

gdje je n broj višestrukih korijena.

Primjer 2.1. Diferencijalna jednadžba trećega reda:

$$\dddot{x}_i - 2\ddot{x}_i - 4\dot{x}_i + 8x_i = 0$$

ima karakterističnu jednadžbu:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

koje su korijeni $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. U tom je slučaju komplementarna funkcija:

$$x_{iKF} = K_1 e^{2t} + K_2 t e^{2t} + K_3 e^{-2t}.$$

Treći slučaj nastupa kad postoje kompleksni korijeni. Oni se moraju pojaviti uvijek u konjugirano kompleksnim parovima $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ da bi koeficijenti jednadžbe (2-22) koja opisuje stvarni fizikalni sustav bili realni. Za svaki par konju-

girano kompleksnih korijena — koje označujemo sa λ_1 i $\bar{\lambda}_1$ — dobit ćemo primjenom Eulerove formule:

$$e^{j\omega t}=\cos \omega t+j \sin \omega t \tag{2-27}$$

rješenje:

$$x_{iKF}=K_1 e^{\lambda_1 t}+\bar{K}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}=e^{\sigma t}(K_1' \sin \omega t+K_1'' \cos \omega t). \tag{2-28}$$

Ovdje su K_1 i $\bar{K}_1$ također konjugirano kompleksne konstante integracije, dok su K_1' i K_1'' realne konstante integracije. Trigonometrijskom pretvorbom možemo dalje izvesti:

$$x_{iKF}=Ke^{\sigma t} \sin (\omega t+\varphi) \tag{2-29}$$

s amplitudom K i faznim pomakom φ kao konstantama integracije.

Primjer 2.2. Diferencijalna jednadžba drugoga reda:

$$\ddot{x}_i-4\dot{x}_i+9x_i=0$$

ima karakterističnu jednadžbu:

$$\lambda^2-4\lambda+9=0$$

s konjugirano kompleksnim korijenima: $\lambda_{1,2}=2\pm j1$. Komplementarna je funkcija:

$$x_{iKF}=K_1 e^{(2+j3)t}+K_2 e^{(2-j3)t},$$

što se pomoću Eulerove formule može sažeti u oblik:

$$x_{iKF}=Ke^{2t} \sin (3t+\varphi).$$

Konačno, može nastupiti slučaj da su korijeni kompleksni i višestruki. Za svaki par konjugirano kompleksnih korijena koji se ponavljaju n puta postoji rješenje oblika:

$$x_{iKF}=K_1 e^{\sigma t} \sin (\omega t+\varphi_1)+K_2 t e^{\sigma t} \sin (\omega t+\varphi_2)+ \ldots$$

$$+K_n t^{n-1} e^{\sigma t} \sin (\omega t+\varphi_n). \tag{2-30}$$

Partikularni integral. Dok za komplementarnu funkciju postoje razrađene metode, tako nije i s partikularnim integralom. Spomenuli smo i razlog tome: partikularni integral ovisi i o pobudnoj funkciji, i uvijek se može naći dovoljno neuobičajenih oblika pobudne funkcije pa da se rješenje ne nađe. Pomoću **metode varijacije konstanata** rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe može se uvijek naći [lit. 34, 39]. Ipak za većinu pobudnih funkcija koje su zanimljive u regulacijskoj tehnici, do rješenja se dolazi mnogo lakše pomoću **metode neodređenih koeficijenata.**

Prema toj metodi preduvjet je da je poznat analitički oblik pobudne funkcije $x_u(t)$. Ta se funkcija uzastopno derivira tako dugo dok ne preostaje jedna od tri mogućnosti:

— nakon određenog reda derivacije sve su više derivacije jednake nuli — primjer je $x_u(t)=t^2$;

— nakon određenog reda derivacije sve više derivacije imaju isti funkcionalni oblik kao neka od derivacija nižega reda — primjer je $x_u(t)=\sin \omega t$;

ponavljanjem derivacije pojavljuju se novi funkcionalni oblici — primjer je $x_u(t)=1/t$.

Za prvi i drugi slučaj može se primijeniti ova metoda. Rješenje se napiše u obliku:

$$x_{iPI}=K_1x_u(t)+K_2x_u'(t)+K_3x_u''(t)+\ldots, \qquad (2\text{-}31)$$

gdje desna strana uključuje sve različite funkcionalne oblike što se pojavljuju kod derivacije. Koeficijenti $K_1, K_2, K_3, \ldots$ lako se nađu uvrštenjem x_{iPI} u diferencijalnu jednadžbu i zahtjevom za identičnošću. One ne ovise o redu diferencijalne jednadžbe već o složenosti pobudne funkcije.

U trećem se slučaju rješenje ne može naći pomoću te metode, pa se moraju tražiti drugi putovi.

Najlakši put do rješenja je **izbor najvažnijih pobudnih funkcija** (tablica 2—1) za koje se odabire partikularni integral x_{iPI} sličnog oblika kao onaj u drugom stupcu tablice. Preduvjet je da vrijednost u trećem stupcu tablice nije jedan od korijena karakteristične jednadžbe.

Tablica 2—1. Izbor oblika partikularnog integrala

Pobuda	Izbor	Korijen
t^n	$K_nt^n+K_{n-1}t^{n-1}+\ldots+K_1t+K_0$	0
e^{at}	Ke^{at}	α
ccs ωt sin ωt	$K_1\cos \omega t+K_2\sin \omega t$	$j\omega$

Primjer 2.3. Za diferencijalnu jednadžbu:

$$\ddot{x}_i-3\dot{x}_i+2x_i=4t+e^{3t}$$

odabire se prema tablici 2—1 partikularno rješenje:

$$x_{iPI}=K_1t+K_0+Ke^{3t}$$

pa se izvede prva i druga derivacija:

$$\dot{x}_{iPI}=K_1+3Ke^{3t},$$

$$\ddot{x}_{iPI}=9Ke^{3t},$$

što se sve uvrsti u diferencijalnu jednadžbu:

$$9Ke^{3t}-3K_1-9Ke^{3t}+2K_1t+2K_0+2Ke^{3t}=4t+e^{3t}.$$

Odatle dobivamo $K_1=2$, $K_0=3$ i $K=0{,}5$. Partikularno je rješenje prema tome:

$$x_{iPI}=2t+3+0{,}5e^{3t}.$$

Ako je bilo koja vrijednost u trećem stupcu korijen karakteristične jednadžbe, znači da pobuda sadrži član istoga oblika kao i komplementarna funkcija. Sustav se pobudi u svom prirodnom ritmu (rezonancija). Možemo očekivati da će odziv sustava biti manje prigušen, pa pretpostavimo rješenje oblika $Kte^{\lambda t}$. Ako se korijen ponavlja m puta, treba rješenje iz drugog stupca pomnožiti sa t^m.

Primjer 2.4. Iz diferencijalne jednadžbe:

$$\ddot{x}_i-2\dot{x}_i+x_i=t+e^t$$

izvedemo najprije karakterističnu jednadžbu:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0,$$

koje su korijeni $\lambda_{1,2}=1$. Na osnovi toga mora se odabrano partikularno rješenje za e^t pomnožiti sa t^2, a odabrano partikularno rješenje za t ostaje nepromijenjeno: K_1t+K_0. Njihov je zbroj:

$$x_{iPI}=K_1t+K_0+Kt^2e^t.$$

Prva i druga derivacija od x_{iPI}:

$$\dot{x}_{iPI}=K_1+2Kte^t+Kt^2e^t,$$

$$\ddot{x}_{iPI}=2Ke^t+4Kte^t+Kt^2e^t$$

uvrsti se u diferencijalnu jednadžbu:

$$2Ke^t+4Kte^t+Kt^2e^t-2K_1-4Kte^t-2Kt^2e^t+K_1t+K_0+$$

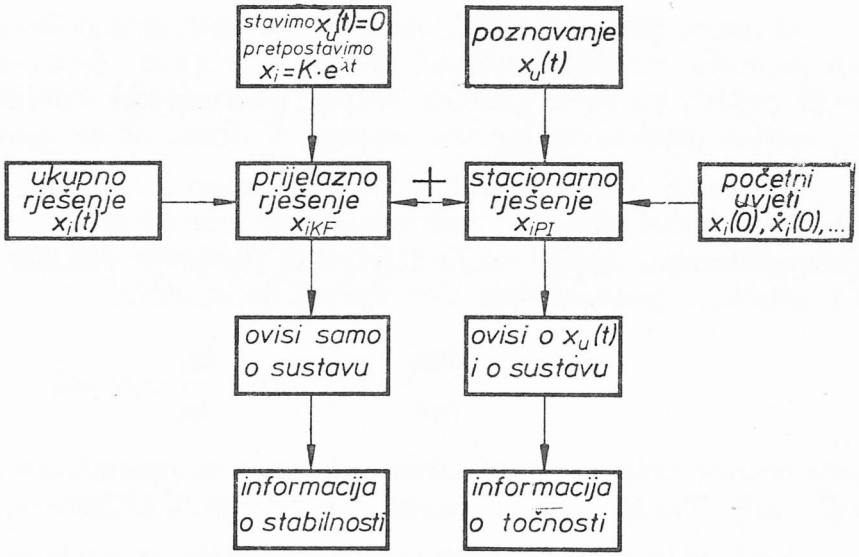
$$+Kt^2e^t=t+e^t.$$

Uspoređivanjem koeficijenata dobivamo $K_1=1$, $K_0=2$, $K=0{,}5$. To daje:

$$x_{iPI}=t+2+0{,}5t^2e^t.$$

Sažeti prikaz klasične metode. Pri rješavanju obične diferencijalne jednadžbe klasičnom metodom služimo se slijedećim postupkom:

- kod prijelaznog rješenja stavimo $x_u(t)=0$ i pretpostavimo $x_{iKF}=Ke^{\lambda t}$; rješenje ovisi samo o sustavu, tj. o pohranjenoj energiji. Ono dolazi do izražaja u početku, kod $t=0$, a kasnije teži nuli;
- stacionarno rješenje nađemo na osnovi poznavanja $x_u(t)$, jer x_{iPI} ovisi i o $x_u(t)$ i o sustavu. Ono djeluje od početnog trenutka ali prevladava kad $t\to\infty$;
- iz n početnih uvjeta dobivamo vrijednosti odzivne funkcije i $(n-1)$ njezinih derivacija, a na osnovi toga izračunamo n konstanti integracije u općem rješenju.



Sl. 2—4. Shematski prikaz toka postupaka u klasičnom rješenju

Na sl. 2—4 shematski je prikazan tok postupka pri klasičnom rješavanju. Kao što ćemo kasnije vidjeti, prijelazno rješenje daje podatke o stabilnosti, a stacionarno rješenje podatke o točnosti regulacijskog sustava.

2.2. Linearizacija sustava

Do sada smo razmatrali linearne vremenski invarijantne sustave što ih opisuju **linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima.** Zahvaljujući mogućnosti da se može primijeniti načelo superpozicije, analiza im je razmjerno jednostavna, a rješenja već dugo poznata.

Srodnu skupinu predstavljaju linearni vremenski varijantni sustavi što ih opisuju **linearne diferencijalne jednadžbe s promjenljivim koeficijentima koji su funkcija nezavisne varijable.** Te se diferencijalne jednadžbe pojavljuju kad se npr. u fizikalnom sustavu parametri mijenjaju s vremenom. Tako se masa rakete smanjuje kako se troši gorivo tokom leta, a u nekoj kemijskoj reakciji gustoća se mijenja u vezi s ugrijavanjem. Kao primjer jednadžbe tog tipa možemo pisati poznatu Mathieuovu jednadžbu:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}+(1+\epsilon\cos t)\,x_i=0, \tag{2-32}$$

gdje koeficijent od x_i ovisi o vremenu t.

Metode analize tih jednadžbi mnogo su teže negoli u linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima, i općenito se ne mogu primijeniti rješenja oblika $Ke^{\lambda t}$, iako vrijedi načelo superpozicije. Opće rješenje za tu vrstu jednadžbi predočava se u obliku redova potencija, što svakako vodi složenim izvodima.

Linearni odnosi među varijablama svakog fizikalnog sustava samo su idealizacija, čak i kad je područje promjena varijabla ograničeno. Najveću skupinu predstavljaju zato nelinearni sustavi. Nelinearnosti mogu pri tome biti **kontinuirane,** kao pri strujanju fluida koje opisuje Bernouillijeva jednadžba: pad pritiska razmjeran je kvadratu protoka. One mogu biti i **nekontinuirane,** kao pri suhom trenju, gdje postoji nekontinuirana ovisnost između sile i brzine.

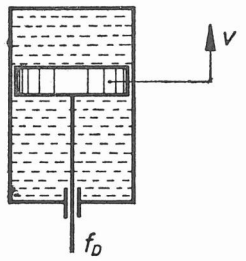
U ovom ćemo odjeljku razmotriti kontinuirane nelinearnosti gdje se uz **mala odstupanja varijabli** odnosi mogu linearizirati. Kod nekontinuiranih nelinearnosti pojavljuju se u pravilu **velika odstupanja varijabli,** pa se primjenjuju i posebne metode nelinearne analize. O tome ćemo govoriti u odjeljku 13.1.

Želimo li točnije sagledati fizikalne pojave u promatranom sustavu, moramo sustave s kontinuiranim nelinearnostima opisati **nelinearnim diferencijalnim jednadžbama, kojih su koeficijenti funkcije zavisne varijable.** To se vidi na primjeru poznate van der Polove jednadžbe:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}-\epsilon(1-x_i^2)\frac{dx_i}{dt}+x_i=0, \tag{2-33}$$

koja opisuje pojave u oscilacijskom krugu s promjenljivim koeficijentom prigušenja $\epsilon(1-x_i^2)$. Taj koeficijent ovisan je o amplitudi titranja x_i, tj. o zavisnoj varijabli.

Kod nelinearnih diferencijalnih jednadžbi ne može se tražiti rješenje u obliku $Ke^{\lambda t}$ jer se eksponencijalni član ne može kratiti: kod njih ne vrijedi načelo superpozicije. Zato je i opis nelinearnih sustava i rješavanje nelinearnih jednadžbi povezano sa znatnim poteškoćama, i ne postoje opće metode rješavanja.



Sl. 2—5. Uljni prigušivač

Kao zoran primjer poteškoća koje izazivaju nelinearnosti neka posluži jednostavan mehanički sustav sa sl. 2—2. Prvo se uzima uljni prigušivač koji je još jednom prikazan na sl. 2—5. Pod utjecajem narinute sile f_D klip se u cilindru napunjenom uljem pomiče, i prilikom prelijevanja ulja mimo rubova klipa dolazi do viskoznog trenja. U jednadžbi (2-10) uzeto je da je sila razmjerna brzini: $f_D=D\dot{x}$. To odgovara malim brzinama klipa, dok je strujanje ulja laminarno. Pri većim brzinama nastupa turbulentno strujanje, pa dolazi do kvadratnog odnosa između sile i brzine: $f_D=D\dot{x}^2$. Osim toga, nakon mnogih pokreta klipa temperatura ulja poraste, što mijenja njegovu viskoznost predstavljenu koeficijentom viskoznog trenja D. Ovaj dakle ovisi i o vremenu, pa bi uljni prigušivač mogao biti opisan jednadžbom:

$$f_D=D(t)\,\dot{x}^2. \tag{2-34}$$

I član $f_S=Sx$ u jednadžbi (2-10), koji opisuje fizikalne pojave kod opruge, linearan je samo u ograničenom području — kod malih rastezanja opruge. Kod većih sila položaj ne slijedi silu linearno (sl. 2—6). Tzv. tvrdu oprugu možemo aproksimirati jednadžbom:

$$f_S=S_1x+S_3\frac{x^3}{3!}+\ldots, \tag{2-35}$$

a meku oprugu jednadžbom:

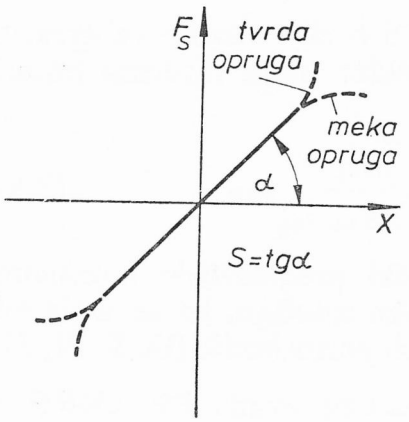
$$f_S = S_1 x - S_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots, \tag{2-36}$$

gdje su koeficijenti S_1 i S_3 veći od nule.

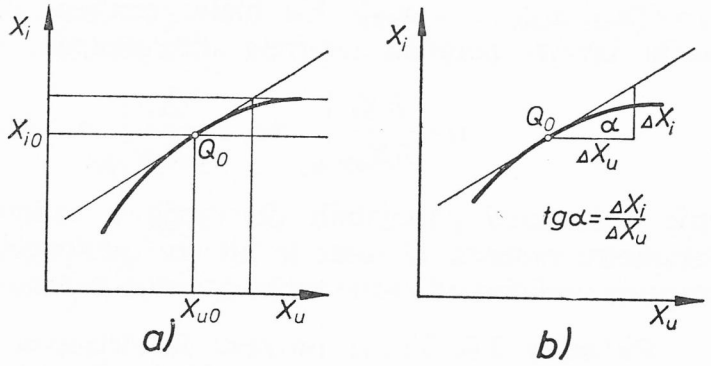
Sa ta dva nelinearna člana diferencijalna jednadžba mehaničkog sustava sa sl. 2—2 glasila bi:

$$M\ddot{x} + D(t)\,\dot{x}^2 + S_1 x \pm S_3 \frac{x^3}{3!} = f(t), \tag{2-37}$$

što je matematički veoma složeno, pri čemu nisu npr. uzeta u obzir i ograničenja položaja opruge i klipa prigušivača.



Sl. 2—6. Karakteristika opruge



Sl. 2—7. Linearizacija karakteristika

Već ovaj primjer pokazuje da je potrebna **linearizacija sa svrhom da se postigne jednostavnost matematičkog izraza.** Moramo uzeti u obzir i točnost rješenja: što se traži točnije rješenje, to su i matematički opis i obrada složeniji. Izbor je matematičkog modela prema tome kompromis između točnosti i složenosti, s jedne strane, te aproksimacije i jednostavnosti, s druge strane. Ovdje nema općih pravila, i ispravno pojednostavnjenje jedan je od najvažnijih zadataka inženjerske analize. Ono mora biti osnovano na jasnom razumijevanju fizikalnih načela, kao i na iskustvu sa stvarnim, mjerenim sustavima. Srećom se u regulacijskoj tehnici linearizacija može provesti često bez većih pogrešaka, jer se regulirana veličina mora podržavati na nekoj nazivnoj vrijednosti sa što manje odstupanja. Čak se i pri većim odstupanjima od nazivne vrijednosti sustav može analizirati u nekoliko točaka krivulje u okolišu kojih se ona linearizira, pa se tako dobivaju podaci o stabilnosti sustava.

Neka je nelinearni sustav opisan jednadžbom $x_i = f(x_u)$ ili grafički krivuljom na sl. 2—7a. U prvom slučaju razvijemo funkciju u Taylorov red u okolišu radne točke:

$$X_i = f(X_u) = f(X_{u0}) + \left.\frac{dX_i}{dX_u}\right|_{Q_0} \frac{(X_u - X_{u0})}{1!} + \left.\frac{d^2X_i}{dX_u^2}\right|_{Q_0} \frac{(X_u - X_{u0})^2}{2!} + \ldots \tag{2-38}$$

Ako zanemarimo članove višega reda i odbijemo jednadžbu između varijabli $X_{i0}=f(X_{u0})$ koja vrijedi u radnoj točki, dobit ćemo:

$$X_i-X_{i0}=\left.\frac{dX_i}{dX_u}\right|_{Q_0}(X_u-X_{u0}). \tag{2-39}$$

Velika slova u dijagramu i jednadžbi označuju stacionarne vrijednosti varijabli. Male promjene oko radne točke, koje predstavljaju dinamičke vrijednosti, označuju se naprotiv malim slovima: $x_i=X_i-X_{i0}$ i $x_u=X_u-X_{u0}$. Linearizirani oblik jednadžbe (2-38) glasi:

$$x_i=\left.\frac{dX_i}{dX_u}\right|_{Q_0}x_u. \tag{2-40}$$

Postoji li samo pokusom snimljena krivulja bez analitičkog izraza, onda se prema sl. 2—7b pravi aproksimacija pravcem s nagibom određenim tangensom kuta α, tzv. koeficijentom smjera.

U općem slučaju odzivna funkcija ovisi o dvije ili o više ulaznih veličina, tj. $x_i=f(x_{u1}, x_{u2}, \ldots, x_{un})$. Uz male promjene oko radne točke možemo linearizaciju izvesti pomoću totalnog diferencijala:

$$x_i=\left.\frac{\partial X_i}{\partial X_{u1}}\right|_{Q_0}x_{u1}+\left.\frac{\partial X_i}{\partial X_{u2}}\right|_{Q_0}x_{u2}+\ldots+\left.\frac{\partial X_i}{\partial X_{un}}\right|_{Q_0}x_{un}, \tag{2-41}$$

gdje vrijednosti parcijalnih derivacija u radnoj točki predstavljaju konstantne parametre sustava. U tome je bit tzv. **perturbacijske analize,** jer se mala odstupanja varijabli od radne točke nazivaju poremećaji ili perturbacije [lit. 9, 34, 51].

Primjer 2.5. Treba provesti linearizaciju jednadžbe stanja $PV=MR\Theta$ za posudu s kisikom. Obujam posude je $V=0{,}5\ \mathrm{m^3}$, tlak $P=10^6$ Pa, temperatura plina $\Theta=0°\mathrm{C}$, a kisik ima plinsku konstantu $R=259{,}81\ \mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$. Uz pretpostavku da masa ostaje konstantna i iznosi:

$$M=\frac{PV}{R\Theta}=\frac{10^6\cdot 0{,}5}{259{,}81\cdot 273{,}15}=7{,}05\ \mathrm{kg},$$

to će mala promjena tlaka u okolišu radne točke Q_0 biti linearna funkcija malih promjena temperature i obujma. Možemo pisati:

$$p=\left.\frac{\partial P}{\partial\Theta}\right|_{Q_0}\vartheta+\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{Q_0}v,$$

pri čemu je brojčana vrijednost parcijalnih derivacija:

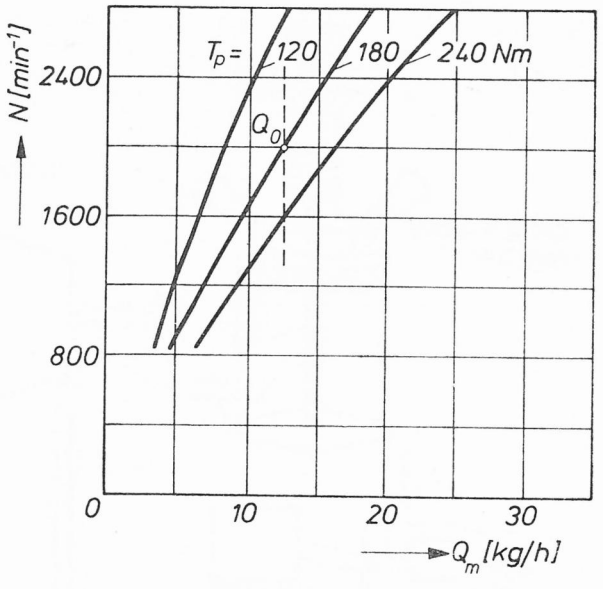
$$\left.\frac{\partial P}{\partial\Theta}\right|_{Q_0}=\frac{\partial}{\partial\Theta}\left[\frac{MR\Theta}{V}\right]_{Q_0}=\left.\frac{MR}{V}\right|_{Q_0}=\frac{7{,}05\cdot 259{,}81}{0{,}5}=3663\ \mathrm{Jm^{-3}K^{-1}},$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{Q_0}=\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{MR\Theta}{V}\right]_{Q_0}=-\left.\frac{MR\Theta}{V^2}\right|_{Q_0}=-\frac{7{,}05\cdot 259{,}81\cdot 273{,}15}{0{,}5^2}=-2.10^6\ \mathrm{Jm^{-6}}.$$

Prema tome jednadžba glasi:

$$p=3663\,\vartheta-2.10^6 v.$$

Primjer 2.6. Neka je poznat samo grafički oblik funkcionalne ovisnosti. Na sl. 2—8 vidi se karakteristika motora: broj okreta N ovisi o protoku goriva Q_m kao i o zakretnom momentu opterećenja na vratilu T_p. Veličina T_p dana je parametarski.



Sl. 2—8. Karakteristika motora — primjer 2.8

Iz funkcionalne ovisnosti $N=f(Q_m, T_p)$ pišemo totalni diferencijal:

$$n=\frac{\partial N}{\partial Q_m}\bigg|_{Q_0} q_m+\frac{\partial N}{\partial T_p}\bigg|_{Q_0} t_p.$$

Uz nazivni broj okreta $N_0=2\,000\ \text{min}^{-1}$ dobijemo izraz $\partial N/\partial Q_m$ na osnovi nagiba krivulje u radnoj točki (parametar T_p je konstantan):

$$\frac{\partial N}{\partial Q_m}\bigg|_{Q_0}=\frac{2\,400-1\,600}{16-9}=116.$$

Pri izračunavanju $\partial N/\partial T_p$ protok goriva Q_m drži se konstantnim, te se pomoću uspravne linije kroz radnu točku dobije omjer:

$$\frac{\partial N}{\partial T_p}\bigg|_{Q_0}=\frac{2\,800-1\,600}{120-240}=-10.$$

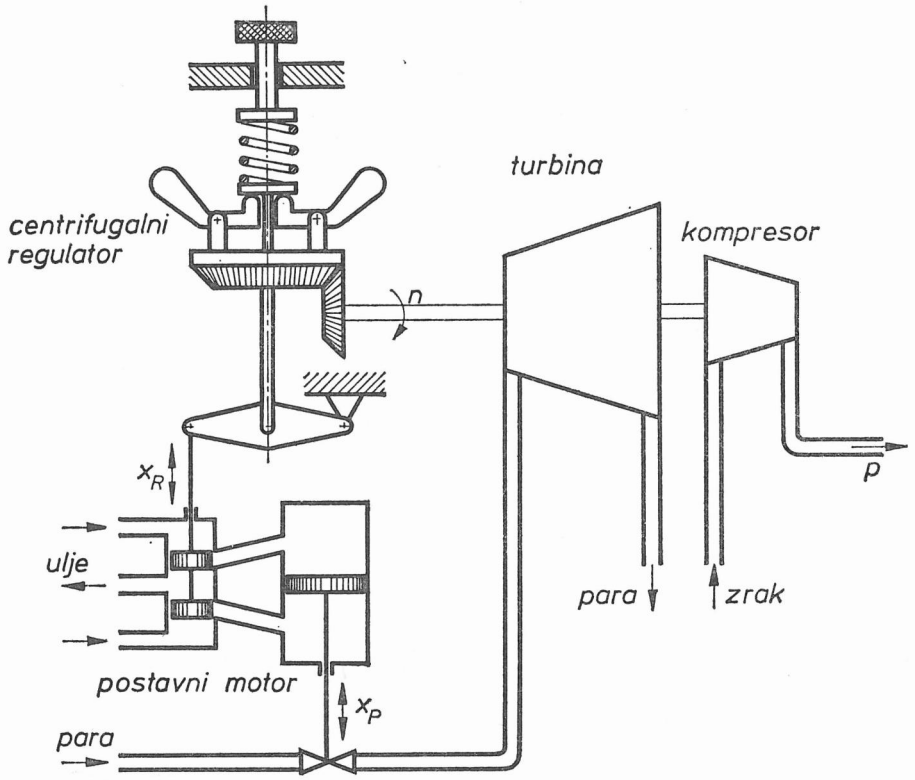
Brojčana je relacija:

$$n=116q_m-10t_p.$$

2.3. Diferencijalne jednadžbe složenih sustava

Do sada smo obrađivali jednostavne sustave s jednim ulazom i izlazom koji su opisani jednom diferencijalnom jednadžbom prvoga ili drugoga reda. Kod složenih sustava s više ulaznih i izlaznih veličina pojavljuju se **simultane dife-**

rencijalne jednadžbe; to su električni sustavi s više petlji, mehanički sustavi s više masa, itd. Takvi sustavi uvijek su prisutni u regulacijskoj tehnici gdje se pojedinačni sustavi, kao što su regulacijski objekti, mjerni članovi, regulatori i izvršni članovi, slažu u kompleksan sustav.



Sl. 2–9. Regulacija broja okreta parne turbine

Kao primjer uzimamo regulaciju broja okreta turbine na sl. 2–9. Regulacijski objekt, turbina, ima kao ulaz položaj ventila x, a izlaz joj je broj okreta n. Broj okreta je ulaz u centrifugalni regulator, gdje se n uspoređuje s nazivnom veličinom — položajem regulacijskog vijka. Ovdje je izlazna veličina položaj poluge x_R koja djeluje kao ulaz na hidraulični postavni motor. Promjena položaja klipa razvodnika izaziva promjenu položaja x_p klipa cilindra koji premješta ventil turbine. Pretpostavivši čvrsto namješten položaj regulacijskog vijka, možemo broj okreta turbine promijeniti pod utjecajem poremećaja u obliku promjene opterećenja turbine koje predstavlja kompresor s izlaznim tlakom $\Delta p = p - P_0$.

Ne ulazeći za sada u podrobniju analizu tog sustava, pišemo samo diferencijalne jednadžbe turbine s kompresorom, centrifugalnog regulatora i hidrauličnog postavnog motora, koji se izvode u šestom i sedmom poglavlju. Na turbinu na ulazu djeluje podizaj ventila x_P kao postavna veličina i razlika tlakova Δp kao poremećajna veličina[1], a a_{1T} a_{0T}, b_{0T} i c_{0T} su konstantni parametri:

$$a_{1T}\dot{n} + a_{0T}n = b_{0T}x_P + c_{0T} + \Delta p. \tag{2-42}$$

Kod centrifugalnog regulatora uzimaju se uz zamašnu masu i sile opruge i trenja:

$$a_{2R}\ddot{x}_R + a_{1R}\dot{x}_R + a_{0R}x_R = b_{0R}n. \tag{2-43}$$

[1] Mala slova varijabli predstavljaju odstupanja od stacionarnih vrijednosti.

Konačno, hidraulični postavni motor ima jednostavan odnos[1]:

$$a_{1P}\,\dot{x}_P = -x_R, \tag{2-44}$$

jer je brzina klipa cilindra $\dot{x}_P$ razmjerna položaju klipa razvodnika x_R na ulazu.

Derivacijom jednadžbe (2-44) uvrste se vrijednosti za x_R, $\dot{x}_R$ i $\ddot{x}_R$ u jednaždbu (2-43) izluči se x_R a ostaju varijable x_P i n:

$$a_{2R}a_{1P}\dddot{x}_P + a_{1R}a_{1P}\ddot{x}_P + a_{0R}a_{1P}\dot{x}_P = -b_{0R}n. \tag{2-45}$$

Na sličan se način derivacijom jednadžbe (2-42) uvrste vrijednosti $\dot{x}_P$, $\ddot{x}_P$ i $\dddot{x}_P$ u jednadžbu (2-45), pri čemu se izluči x_P:

$$\begin{aligned} &a_{2R}a_{1P}\frac{1}{b_{0T}}(a_{1T}\ddddot{n} + a_{0T}\dddot{n} - c_{0T}\Delta\dddot{p}) + \\ &+ a_{1R}a_{1P}\frac{1}{b_{0T}}(a_{1T}\dddot{n} + a_{0T}\ddot{n} - c_{0T}\Delta\ddot{p}) + \\ &+ a_{0R}a_{1P}\frac{1}{b_{0T}}(a_{1T}\ddot{n} + a_{0T}\dot{n} - c_{0T}\Delta\dot{p}) = -b_{0R}n. \end{aligned} \tag{2-46}$$

Sređivanjem se dobije:

$$\begin{aligned} &\frac{a_{2R}a_{1P}a_{1T}}{b_{0T}}\ddddot{n} + \frac{a_{2R}a_{1P}a_{0T} + a_{1R}a_{1P}a_{1T}}{b_{0T}}\dddot{n} + \frac{a_{2R}a_{1P}a_{0T} + a_{0R}a_{1P}a_{1T}}{b_{0T}}\ddot{n} + \\ &+ \frac{a_{0R}a_{1P}a_{0T}}{b_{0T}}\dot{n} + b_{0R}n = \frac{a_{2R}a_{1P}c_{0T}}{b_{0T}}\Delta\dddot{p} + \frac{a_{1R}a_{1P}c_{0T}}{b_{0T}}\Delta\ddot{p} + \frac{a_{0R}a_{1P}c_{0T}}{b_{0T}}\Delta\dot{p}. \end{aligned} \tag{2-47}$$

Na taj način sveden je sustav simultanih diferencijalnih jednadžbi (2-42), (2-43) i (2-44) na jednu diferencijalnu jednadžbu četvrtoga reda (2-47). Ostale su samo dvije zavisne varijable koje nas zanimaju kod tog složenog sustava: razlika tlakova Δp kao ulazna varijabla i broj okreta n kao izlazna varijabla. Napominjemo da su se pri tome izgubile pojedinosti važne u projektiranju, jer su pojedini parametri osnovnih sustava sadržani u kompleksnim izrazima za parametre složenog sustava.

Opći postupak pri dobivanju diferencijalne jednadžbe s jednim ulazom i izlazom iz sustava simultanih diferencijalnih jednadžbi je slijedeći: uzimamo kao primjer dvije diferencijalne jednadžbe drugoga reda, pisane u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} &= f_1\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}, t\right) \\ \frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} &= f_2\left(x_1, x_2, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}, t\right). \end{aligned} \tag{2-48}$$

Kao pomoćne funkcije uvode se prve derivacije brzine:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= x_3 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= x_4 \end{aligned} \tag{2-49}$$

[1] Predznak „—“ je zbog negativne povratne veze.

koje se uvrste u jednadžbe (2-48):

$$\frac{dx_3}{dt}=f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, t) \qquad (2\text{-}50)$$

$$\frac{dx_4}{dt}=f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, t).$$

Četiri jednadžbe (2-49) i (2-50) tvore sustav simultanih diferencijalnih jednadžbi četvrtoga reda u **normalnom obliku** jer se pojavljuju samo derivacije prvoga reda na lijevoj strani jednadžbi. Takav pristup matematičkom modelu sustava primjenjuje se u **metodi prostora stanja** (v. odjeljak 12.1).

Svaki normalan sustav n-tog reda može se svesti na diferencijalnu jednadžbu n-tog reda za jednu izlaznu varijablu. Tako se npr. u sustavu četvrtoga reda:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, t)\\
\frac{dx_2}{dt}&=f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, t)\\
\frac{dx_3}{dt}&=f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, t)\\
\frac{dx_4}{dt}&=f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, t)
\end{aligned} \qquad (2\text{-}51)$$

derivira prva jednadžba po t:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\cdot\frac{dx_3}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial x_4}\cdot\frac{dx_4}{dt}=$$

$$=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}f_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}f_2+\frac{\partial f_1}{\partial x_3}f_3+\frac{\partial f_1}{\partial x_4}f_4, \qquad (2\text{-}52)$$

gdje su parcijalne derivacije konstantni parametri sustava. U poopćenom obliku možemo pisati:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=f_{12}(x_1, x_2, x_3, x_4, t). \qquad (2\text{-}53)$$

Ponovljenim derivacijama dobit ćemo na sličan način:

$$\frac{d^3x_1}{dt^3}=f_{13}(x_1, x_2, x_3, x_4, t) \qquad (2\text{-}54)$$

kao i:

$$\frac{d^4x_1}{dt^4}=f_{14}(x_1, x_2, x_3, x_4, t). \qquad (2\text{-}55)$$

Iz prve jednadžbe (2-51) i jednadžbi (2-53) do (2-55) izlučuju se x_2, x_3 i x_4:

$$\frac{d^4x_1}{dt^4}=f_{14}\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}, \frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^3x_1}{dt^3}, t\right). \qquad (2\text{-}56)$$

Sličnim postupkom mogu se dobiti diferencijalne jednadžbe četvrtoga reda za bilo koju od varijabli x_2, x_3 ili x_4.

Taj je postupak pri rješavanju simultanih diferencijalnih jednadžbi veoma mukotrpan, a često se i ne može izvesti do kraja. Bitno pojednostavnjenje predstavlja uvođenje operatorske metode, koju izlažemo u odjeljku 4.1.

2.4. Usporedba metoda dinamičke analize

Klasičan način za rješavanje diferencijalnih jednadžbi jest analitička metoda koja se prva primjenjivala u teoriji automatske regulacije. Pronalaženje rješenja zahtijeva poznavanje diferencijalne jednadžbe kao i pobudne funkcije sustava koji ispitujemo. Kako je međutim sustav podložan različitim tipovima pobuda, nepraktično je da se izračuna odziv za svaku ulaznu funkciju. Postoji doduše mogućnost da se uz poznavanje tzv. težinske funkcije $g(t)$, koja je karakteristična za sustav, nađe odziv $x_i(t)$ za bilo koju pobudu $x_u(t)$. To je konvolucija:

$$x_i(t) = \int_0^t g(t-\tau)\, x_u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \qquad (2\text{-}57)$$

o kojoj ćemo podrobnije raspravljati u odjeljku 3.4. Taj je integral — kao uostalom i svaku malo složeniju diferencijalnu jednadžbu — teško izračunati.

Dodatni je problem klasičnog načina rješavanja u tome što se pri postavljanju diferencijalne jednadžbe cijelog regulacijskog kruga gubi identitet pojedinih članova kruga. To smo vidjeli na primjeru regulacije broja okreta turbine, gdje su se u jednadžbi (2-47) parametri pojedinih članova sustava »izgubili« u kompletnoj jednadžbi. Kako se pri projektiranju u pravilu moraju odrediti parametri slobodno odabranih članova, klasično rješenje daje malo podataka o mogućnostima biranja parametara prilikom projektiranja. Zbog spomenutih razloga primjenjuju se druge metode analize i sinteze regulacijskih krugova koje se podrobno obrađuju u slijedećim poglavljima.

Vremenski odziv reakcija je ispitivanog sustava na standardnu pobudu, najčešće u obliku odskočne funkcije. To je prvenstveno grafička metoda i rješenje se dobiva pokusom. Njome se međutim ne dobiju točni podaci, ali pomaže pri intuitivnom rješavanju problema. Analitičko rješavanje zahtijeva poznavanje diferencijalne jednadžbe sustava i dolazi u obzir samo za sustave nižega reda. I vremenski odziv daje malo podataka za projektiranje regulacijskog kruga, jer se gubi identitet pojedinih članova kruga.

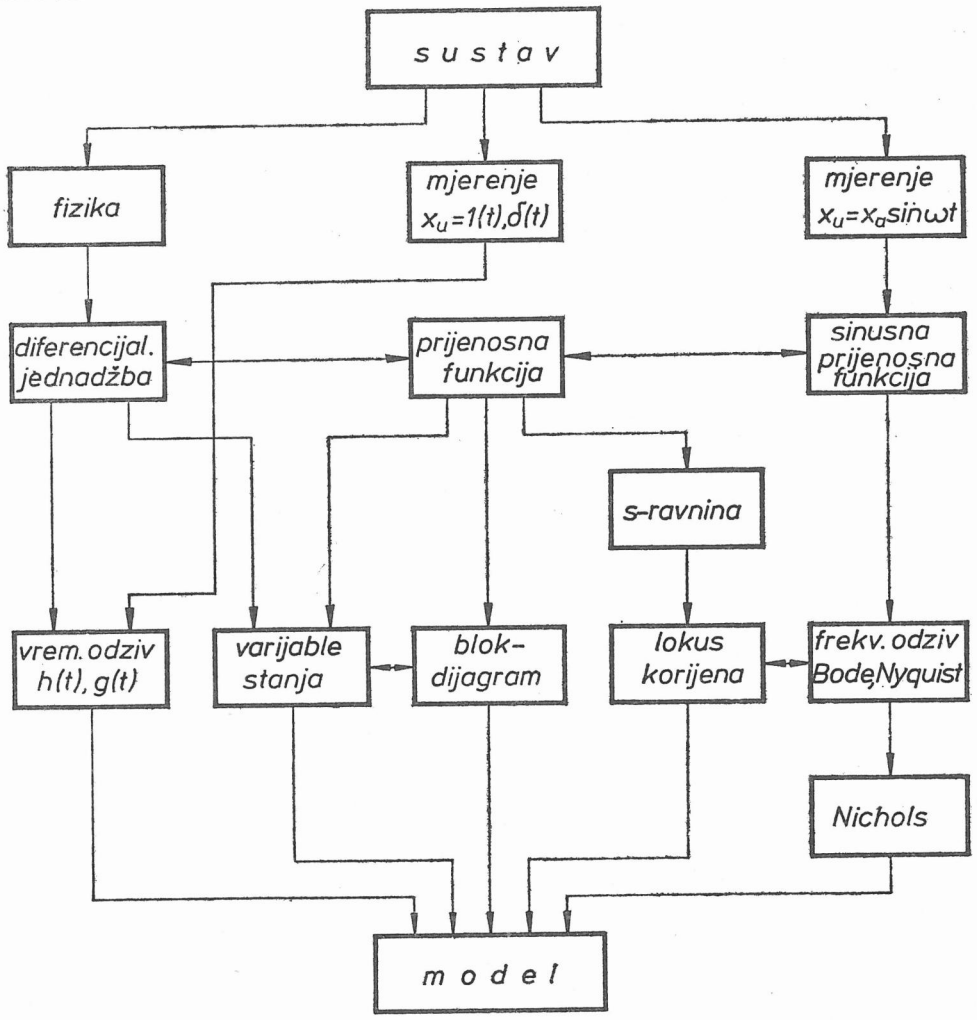
Vremenski odziv najviše se primjenjuje u regulaciji procesnih postrojenja, gdje u pravilu nije moguće postaviti matematički model procesa koji treba regulirati.

Kod **frekvencijskog odziva** promatra se reakcija ispitivanog sustava na pobudu u obliku sinusne funkcije, i to samo stacionarno rješenje. Ta je metoda preuzeta iz teorije izmjeničnih struja. I to je prvenstveno grafička metoda, a podaci se dobiju pokusima. Rezultati se mogu lako matematički tumačiti i povezati s diferencijalnom jednadžbom. Ovdje se može identificirati vladanje svakog pojedinog člana kao i njegov utjecaj na čitav regulacijski sustav, pa je ta metoda mnogo prikladnija u projektiranju.

Frekvencijski odziv ima najširu primjenu u svim granama regulacijske tehnike.

Laplaceova transformacija je operatorska metoda koja povezuje vremenski i frekvencijski odziv. To je analitička metoda gdje se uvođenjem prijenosne funkcije znatno pojednostavnjuje pronalaženje rješenja za ispitivani sustav. Prijenosnom funkcijom može se opisati ponašanje čitava sustava, a da pri tome ostane vidljiv utjecaj svakog pojedinog elementa i sklopa. Pri postavljanju jednadžbe eventualni se početni uvjeti uključuju u rješenje mnogo lakše nego drugim metodama. Jednostavnom zamjenom operatora s sa d/dt može se rješenje sustava prikazati u vremenskom području (zbog zornosti), a zamjenom operatora s s kompleksnom frekvencijom $j\omega$ povezuje se s frekvencijskim područjem (zbog mjerenja). Upravo ta povezanost s metodama u vremenskom i frekvencijskom području čine operatorsku metodu veoma prilagodljivom, pa se ona najšire primjenjuje. Tako se npr. servomehanizmi projektiraju kombinacijom operatorske metode i frekvencijskog odziva čime se postiže mjerljivost, točnost i mogućnost optimalnog projektiranja.

Još jednu zanimljivu mogućnost daje **metoda lokusa korijena** koja se primjenjuje prvenstveno u sintezi servomehanizama. Pomoću te metode proučava se položaj korijena karakteristične jednadžbe u kompleksnoj ravnini i to na osnovi promjene njihova položaja u ovisnosti o promjenama parametara sustava. Grafičkim postupkom dolazimo do podataka koji su potrebni u projektiranju regulacijskog sustava.



Sl. 2—10. Shematski prikaz metoda analize i sinteze u regulaciji

Sve opisane metode analize i sinteze podesne su za jednostavne regulacijske krugove s jednim ulazom i jednim izlazom. U današnje vrijeme problematika regulacije postaje sve kompleksnijom, i rješavanje složenih sustava s više ulaza i izlaza pomoću spomenutih metoda postaje suviše zamršenim. Uspjeh u rješavanju regulacije takvih multivarijabilnih sustava obećava **metoda prostora stanja,** gdje se ne promatra diferencijalna jednadžba, već se ona prevodi u sustav diferencijalnih jednadžbi prvoga reda, a tzv. varijable stanja određuju trajektoriju sustava u prostoru stanja. Metoda prostora stanja osnovni je pravac istraživanja u suvremenoj teoriji automatske regulacije, pogotovu jer se primjenom računala mogu riješiti i složeni nelinearni sustavi.

Na sl. 2—10 shematski su prikazane sve osnovne metode koje se primjenjuju u analizi i sintezi regulacijskih sustava, a te se metode obrađuju i u slijedećim poglavljima.

U rješavanju regulacijskih problema potrebno je poznavati, odnosno primijeniti sve metode. Tako možemo dobiti i kvalitativan fizikalni uvid u vladanje sustava, što je naročito važno u procesnoj tehnici, kao i mogućnost kvantitativnog izračunavanja regulacijskih uređaja, što se traži u servomehanizmima.

3. Analiza u vremenskom području

Uskoro će burni vjetar poljem proći
Sa drveća lišće i plodove trgat',
Po poljima ljupki cvatovi će venut'.
Hoćeš li cvijeća brati, danas beri!
Jer sutra ga možda već tražiš uzalud.

Oošikoči No Mitsune, »Dok nije prekasno«

Klasično rješenje diferencijalne jednadžbe opisuje vremenski tok odzivne funkcije uz proizvoljni tok pobudne funkcije. U stvarnim regulacijskim procesima pobudne su funkcije, tj. poremećajne ili vodeće veličine **slučajnog karaktera,** što otežava matematičku obradu i sagledavanje. Ipak, moguće je ocijeniti regulacijski proces ako se stohastičke varijacije zamijene tzv. **standardnim pobudama.** Na taj je način naime moguće pojedine regulacijske sustave i sklopove međusobno **uspoređivati** na osnovi proučavanja odzivnih funkcija.

Od raznih vremenskih funkcija koje se mogu narinuti na ulaz obično se u analizi primjenjuju odskočna, nagibna, parabolna i impulsna funkcija. Sve su one prikazane na sl. 3—1, a dalje ćemo ih podrobnije opisati. Izabrane su zato što ih je tehnički lako ostvariti za pokusna mjerenja, osim toga daju jednoznačan odziv s mnogo podataka. Pomoću tih funkcija, odnosno njihova zbroja, mogu se aproksimirati pobudne funkcije bilo kojeg oblika, a pomoću načela superpozicije nađe se odzivna funkcija kao zbroj pojedinačnih odziva.

U analizi regulacijskih sustava primjenjuju se sve navedene funkcije, pa se tako npr. odskočna, nagibna i parabolna funkcija primjenjuju pri ispitivanju točnosti servomehanizama (v. odjeljak 8.2). Impulsna funkcija ima osobito važnu ulogu u teorijskim razmatranjima, naročito u definiciji prijenosne funkcije (v. odjeljak 4.3). Ovdje ćemo se međutim koristiti uglavnom odskočnom funkcijom; nju je najlakše simulirati, a odziv joj je vrlo zoran. To je npr. električni prekidač koji uključuje elektromotor, protočni ventil koji propušta vodu u spremnik, gasna papučica koja upravlja automobilom. U svakom od ovih slučajeva promatra se odzivna funkcija: povećanje broja okreta elektromotora, dizanje razine tekućine u spremniku, povećana brzina automobila. Ta je funkcija pogodna za ispitivanje sustava i zato što nagla promjena ulazne veličine stavlja sustav pred velike zahtjeve, pa se lako ocjenjuje vladanje sustava.

Impulsni odziv je odgovarajući naziv analitičke metode ispitivanja sustava pomoću impulsne funkcije na ulazu. Analogni je pojam **odskočni odziv** kad se na ulazu narine odskočna funkcija. I jedna i druga metoda mogu se svrstati pod zajednički naziv vremenski odziv. Međutim, ako to posebno ne naglasimo, u daljem ćemo gradivu pod izrazom **vremenski odziv** razumijevati ispitivanje linearnih, vremenski invarijantnih sustava s pobudom u obliku odskočne funkcije.

Vremenski odziv svodi se dakle na rješenje diferencijalne jednadžbe oblika:

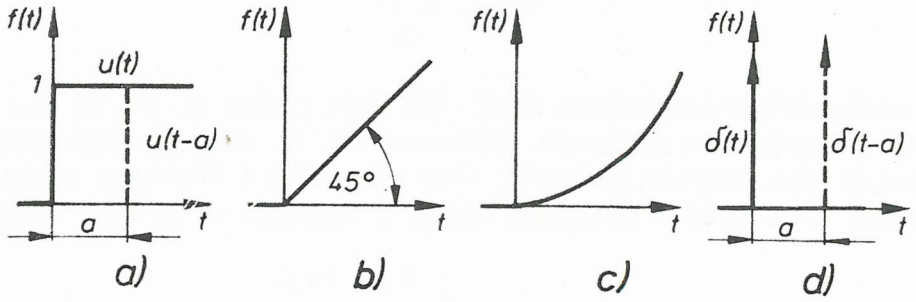
$$a_n \frac{\mathrm{d}^n x_i}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x_i}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} + a_0 x_i = b_0 u(t), \qquad (3\text{-}1)$$

gdje je $u(t)$ jedinični odskok koji ćemo kasnije definirati.

U ovom poglavlju najprije ćemo se zadržati na standardnim pobudnim funkcijama, a nakon toga uvest ćemo prijelaznu funkciju koja je karakteristična za vremenski odziv sustava. To se primjenjuje na osnovne sustave.

3.1. Standardne pobudne funkcije

Iako su standardne pobudne funkcije prikazane na sl. 3—1 nekontinuirane u ishodištu i prema tome nisu analitičke, ipak ćemo s njima izvoditi formalno sve matematičke operacije kao i s analitičkim funkcijama.



Sl. 3—1. Standardne pobudne funkcije

Vrijednost **odskočne funkcije** na sl. 3—1a u trenutku se skokovito mijenja od 0 na 1. Zato se ona naziva i **jedinični odskok** i označuje se sa 1 (t), a u tekstu ćemo ju dalje označivati sa $u(t)$. Drugi joj je naziv i Heavisideova funkcija, prema O. Heavisideu koji ju je prvi široko primijenio. Ako se odskok razlikuje od jedinice, množi se $u(t)$ konstantom. Jedinični odskok definiran je kao:

$$f(t)=u(t)\triangleq\begin{cases}0 & \text{za } t<0.\\ 1 & \text{za } t\geqslant 0.\end{cases} \tag{3-2}$$

Zbog uvijek prisutnih spremnika energije u bilo kojem fizikalnom mediju ovaj se idealni oblik funkcije ne može ostvariti. Kako su međutim u većini slučajeva kašnjenja sustava velika prema trajanju odskoka, možemo tu idealizaciju prihvatiti.

Ako jedinični odskok zaostaje za vremenski interval nakon početka promatranja, što je karakteristično za transportne pojave, označuje se sa $u(t-a)$. To je na sl. 3—1a označeno isprekidano.

Nagibna funkcija ima oblik kao na sl. 3—1b, a opisuje se sa:

$$f(t)\triangleq\begin{cases}0 \text{ za } t<0\\ t \text{ za } t\geqslant 0\end{cases} \tag{3-3}$$

što se može označiti i pojmom **jedinični nagib** $t\,u(t)$. Nagibna se funkcija može predočiti kao integral jediničnog odskoka:

$$f(t)=\int_0 u(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3-4}$$

Parabolna funkcija prema sl. 3—1c predstavlja opet integral nagibne funkcije, u obliku:

$$f(t) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{za } t<0 \\ t^2 & \text{za } t \geqslant 0, \end{cases} \tag{3-5}$$

što se — analogno s prethodnim definicijama — može označiti kao **jedinična parabola** $t^2\, u\,(t)$.

Kako su prethodne tri funkcije međusobno povezane derivacijama, blizu je pomisao da se derivira i odskočna funkcija:

$$f(t)=\frac{du\,(t)}{dt}. \tag{3-6}$$

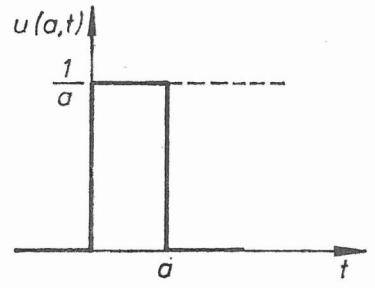
Na taj se način dobije **impulsna funkcija,** koja prema sl. 3—1d ima u trenutku $t=0$ impuls neizmjerne amplitude. Naravno da ta funkcija ima čisto teorijsko značenje jer je nije moguće ostvariti. Ona se naziva i Diracova funkcija, prema P. Diracu koji ju je uveo u teorijsku fiziku, a označuje se sa $\delta\,(t)$. Oblik joj je:

$$f(t)=\delta\,(t) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{za } t<0 \\ \infty & \text{za } t=0 \\ 0 & \text{za } t>0. \end{cases} \tag{3-7}$$

U njezinu definiciju uključen je i podatak da impuls zatvara jediničnu površinu. To se dokazuje integracijom jednadžbe (3-6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\,(t)\,dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} du\,(t) = u\,(t)\,\Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} = 1-0=1. \tag{3-8}$$

Ta se funkcija zbog toga naziva još i **jedinični impuls.**



Sl. 3—2. Uz definiciju jediničnog impulsa

Jedinični impuls može se definirati i na druge načine. Tako se npr. prema sl. 3—2 $u\,(a, t)$ definira kao razlika dviju odskočnih funkcija $\frac{1}{a}\,u\,(t)$ i $\frac{1}{a}\,u\,(t-a)$ koja kasni za vremenski interval a. Ta impulsna funkcija:

$$u\,(a, t)=\frac{1}{a}\,[u\,(t)-u\,(t-a)] \tag{3-9}$$

jedinične površine postaje uz $a \to 0$ jedinični impuls:

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} u(a, t). \tag{3-10}$$

Jedinični impuls $\delta(t)$ koji je kod svih t, osim za $t=a$, jednak nuli, označava se sa $\delta(t-a)$ i isprekidano je označen na sl. 3—1d.

Ovdje ćemo izvesti jedno važno svojstvo jediničnog impulsa. Prema **teoremu izlučivanja** umnožak jediničnog impulsa $\delta(t)$ s kontiuniranom funkcijom $f(t)$, integriran u bilo kojem intervalu koji uključuje ishodište, »izlučuje« vrijednost $f(t)$ u ishodištu:

$$\int_b^c \delta(t) f(t)\, dt = f(0) \tag{3-11}$$

gdje je $b<0<c$. Uvrstimo li izraz (3-10) umjesto $\delta(t)$, dobivamo:

$$\int_b^c \delta(t) f(t)\, dt = \int_b^c \lim_{a \to 0} u(a, t) f(t)\, dt. \tag{3-12}$$

Uz promijenjeni red integracije i granični prijelaz imamo dalje:

$$\int_b^c \delta(t) f(t)\, dt = \lim_{a \to 0} \int_b^c \frac{1}{a} [u(t) - u(t-a)] f(t)\, dt = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \int_0^a f(t)\, dt, \tag{3-13}$$

jer je $[u(t)-u(t-a)]$ jednak jedinici u intervalu $0<t<a$, a izvan njega je jednak nuli. Kako je $f(t)$ kontinuirana funkcija, možemo primijeniti teorem srednje vrijednosti:

$$\int_b^c \delta(t) f(t)\, dt = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} [f(\xi)\, a] \tag{3-14}$$

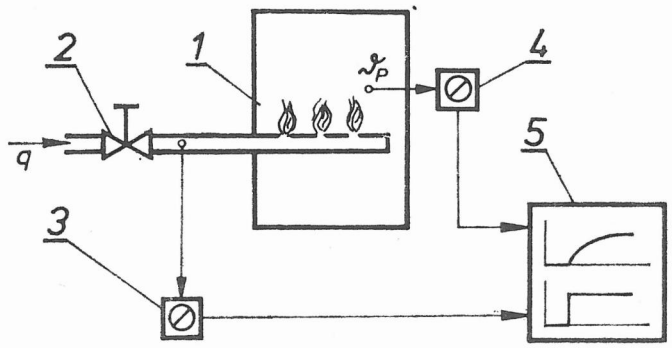
uz $0 \leqslant \xi \leqslant a$. Graničnim prijelazom $a \to 0$ i $\xi \to 0$ pa je jednadžba (3-11) dokazana.

3.2. Prijelazna funkcija

U analitičkom obliku vremenski je odziv rješenje diferencijalne jednadžbe uz skokovitu promjenu pobudne funkcije. U vezi s tim uvodi se omjer:

$$h(t) = \frac{x_i(t)}{X_u\, u(t)} \tag{3-15}$$

pod nazivom **prijelazna funkcija; to je izlazna funkcija svedena na odskočnu funkciju amplitude X_u na ulazu.** Ako je pobuda odskočna funkcija jedinične amplitude (jedinični odskok), onda je odziv ujedno i prijelazna funkcija. Prijelazna funkcija je rješenje diferencijalne jednadžbe u vremenskom području uz odskočnu pobudu.



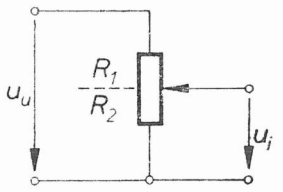
Sl. 3—3. Snimanje vremenskog odziva

Uobičajeno je da se prijelazna funkcija prikazuje u **grafičkom obliku** jer ju je lako izmjeriti i veoma je zorna. Kao primjer uzimamo snimanje vremenskog odziva peći ložene tekućim gorivom prema sl. 3—3. Naglo otvaranje ventila 2 simulira odskočnu funkciju na ulazu u peć 1, a kao izlaz promatra se promjena temperature peći. Pomoću mjernih pretvarača 3 i 4 pretvaraju se protok i temperatura u odgovarajuće električne napone koji pokreću u uspravnom smjeru pisaljke dvokanalnog pisača 5. Pisač bilježi vremenski tok pobudne i odzivne funkcije. Povoljnim izborom mjerila možemo postići da ulazna funkcija ima jedinični odskok, pa je prema tome odzivna funkcija ujedno i prijelazna funkcija.

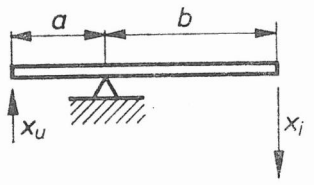
3.3. Vremenski odziv osnovnih sustava

Da bismo olakšali proučavanje regulacijskih sustava, raščlanjujemo ih na niz jednostavnijih sustava. Srećom se ovi potonji svode na svega nekoliko osnovnih članova, i to na proporcionalne članove nultoga, prvoga i drugoga reda, integralne i derivacijske članove te član s mrtvim vremenom.

U ovom se odjeljku ispituje vremenski odziv osnovnih članova, te se izvode njihove prijelazne funkcije u analitičkom i grafičkom obliku. Namjerno prikazujemo razne tehničke sustave s različitim fizikalnim medijima da se istakne značaj funkcionalnog pristupa. Na kraju odjeljka u tablici 3.1 dajemo još jednom pregled vremenskog odziva osnovnih članova.



Sl. 3—4. Električni potenciometar



Sl. 3—5. Mehanička poluga

Proporcionalni član nultoga reda. Ovaj sustav naziva se i P_0-član; električki se on može prikazati običnim potenciometrom prema sl. 3—4. Pomoću Ohmova zakona dobivamo jednostavnu relaciju:

$$u_i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_u = K_P u_u. \tag{3-16}$$

Na sličan način možemo postaviti i jednadžbu za mehanički sustav nultoga reda, koji je predočen polugom (sl. 3—5):

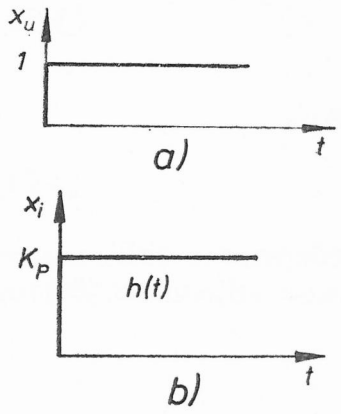
$$x_i = \frac{b}{a} x_u = K_P x_u. \tag{3-17}$$

Ovo je zapravo obična algebarska jednadžba jer, manjkaju derivacijski članovi s lijeve strane, koji opisuju dinamiku sustava.

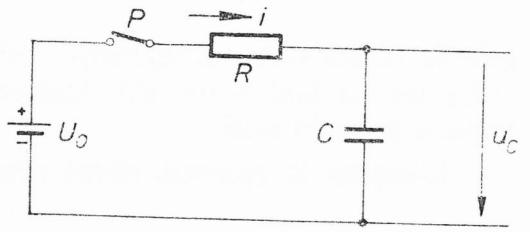
Bez obzira kakav je to fizikalni sustav, za P_0-član postoji opći oblik funkcionalne veze između izlazne i ulazne veličine prikazane prijelaznom funkcijom:

$$h(t) = \frac{x_i(t)}{X_u\, u(t)} = K_P, \tag{3-18}$$

gdje se K_P naziva **prijenosni omjer** (ako izlazna i ulazna veličina imaju različite dimenzije, kao npr. kod termoelementa) ili **pojačanje**[1] (ako izlazna i ulazna veličina imaju iste dimenzije, kao npr. kod potenciometra). Zato se P_0-član ponekad i naziva **pojačivački član.**



Sl. 3—6. Prijelazna funkcija P_0-člana



Sl. 3—7. Električni RC sustav s odskočnom pobudom

Grafički oblik prijelazne funkcije prikazan je na sl. 3—6. Uz jedinični odskok na ulazu $x_u(t) = u(t)$ (sl. 3—6a) dobije se vremenski tok izlazne veličine $x_i(t)$ (sl. 3—6b), što je ujedno i prijelazna funkcija. Kao što se iz opisanih svojstava sustava vidi izlazna veličina kruto slijedi ulaznu veličinu. To je zapravo fizikalna aproksimacija jer se u prirodi nijedan sustav ne može zamisliti bez spremnika energije. Tako npr. poluga na sl. 3—5 ima određenu masu i elastičnost, zbog kojih izlazna veličina $x_i(t)$ ne bi u svakom trenutku bila razmjerna ulaznoj veličini $x_u(t)$. Ipak, u inženjerskom prilazu i masa i elastičnost poluge mogu se često zanemariti.

Primjer 3.1. Termoelement se može uzeti približno kao P_0-član; između temperature ϑ na ulazu i termonapona u_ϑ na izlazu postoji u širokom rasponu linearni odnos:

$$u_\vartheta = K_P \cdot \vartheta = 5{,}37 \cdot 10^{-2},$$

[1] Ovdje se govori o pojačanju u najširem smislu; kod pasivnih članova radi se uvijek o prigušenju, pa je $K_P < 1$.

gdje je dimenzija K_P u [mV/°C]. Prijelazna je funkcija

$$h(t)=\frac{x_t(t)}{x_u\,u(t)}=K_P.$$

Na primjer, uz promjenu $\vartheta=100°C$ termonapon poraste za $K_P\cdot 100=5{,}37$ mV. Uz jedinični odskok na ulazu od $\vartheta=1°C$ prijenosna funkcija je ujedno izlaz, tj. $h(t)=5{,}37\cdot 10^{-2}$ mV/°C.

Proporcionalni član prvoga reda. I ovdje prikaz započinje električnim P_1-članom, i to kombinacijom otpornika R i kondenzatora C prema sl. 3—7. Odskočna funkcija ostvarena je baterijom s naponom U_0 te prekidačem P. Za taj sustav već smo postavili jednadžbu (2-9) koja ga opisuje:

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_0. \tag{3-19}$$

Homogenu diferencijalnu jednadžbu možemo riješiti separacijom varijabli:

$$\frac{du_C}{u_C}=-\frac{dt}{RC}, \tag{3-20}$$

što nakon integracije obje strane daje prijelazno rješenje:

$$u_{CKF}=Ke^{-t/RC}, \tag{3-21}$$

gdje je K konstanta integracije. Stacionarno rješenje ima jednostavan oblik $u_{CPI}=U_0$ jer su kod $t\to\infty$ svi derivacijski članovi za konstantne vrijednosti ulaznog napona jednaki nuli.

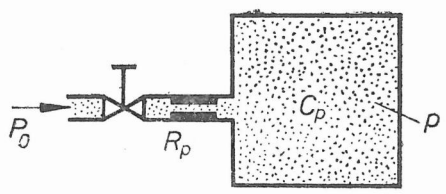
Ukupno je rješenje zbroj obaju parcijalnih rješenja:

$$u_C=U_0+Ke^{-t/RC}. \tag{3-22}$$

Iz ukupnog rješenja određuju se konstanta integracije uz uvrštenje početnih uvjeta: uz $t=0$, $u_C=0$ jer kondenzator nije nabijen. Proizlazi da je $K=-U_0$ tako da je konačno:

$$u_C=U_0(1-e^{-t/\tau}). \tag{3-23}$$

Ovdje umjesto umnoška RC pišemo skraćeno τ. Veličina τ ima dimenziju vremena i naziva se **vremenska konstanta.** Ona je značajna veličina P_1-člana, jer vremenski tok punjenja kondenzatora preko otpornika ovisi samo o njihovu umnošku: dva puta veći kondenzator C puni se na isti napon istom strujom dva puta duže, a dva puta veći otpor R smanjuje struju punjenja na polovicu, tako da se C puni na isti napon opet dva puta duže.



Sl. 3—8. Pneumatski R_pC_p sustav

Pneumatski P_1-član na sl. 3—8 sastoji se od prigušivača R_p i obujma koji smo označili sa C_p. Pretpostavimo da je strujanje kroz prigušivač laminarno; pritom vrijedi Hagen-Poiseuilleov zakon koji kaže da je razlika tlakova Δp na krajevima razmjerna masenom protoku q_m kroz prigušivač:

$$q_m = \frac{\pi D^4 \rho}{128\,\eta\,L}\,\Delta p, \tag{3-24}$$

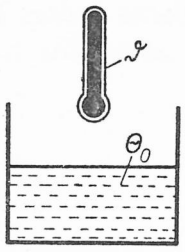
gdje su D i L promjer i duljina cjevastog otvora prigušivača, ρ gustoća, a η je dinamička viskoznost. Kako je tlak u obujmu p razmjeran integralu masenog protoka u obujam $\int q_m \mathrm{d}t$, možemo odmah pisati:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = k\,(P_0 - p), \tag{3-25}$$

gdje je k faktor proporcionalnosti. Ako se ta jednadžba sredi, nalikuje na jednadžbu (3-19). Prema tome se i dobije analogno rješenje:

$$p = P_0\,(1 - e^{-kt}), \tag{3-26}$$

gdje je uz $t=0$, $p=0$. Koeficijent $1/k$ u jednadžbi (3-26) zapravo je vremenska konstanta τ. Tu τ nije bila uvedena kao umnožak pneumatskog otpora R_p i pneumatske kapacitivnosti koja je razmjerna obujmu C_p.



Sl. 3—9. Uranjanje toplomjera u tekućinu kao primjer toplinskog sustava

Još jedan fizikalni sustav prvog reda, i to toplinski, prikazan je na sl. 3—9. Toplomjer koji pokazuje temperaturu ϑ uranja se u trenutku $t=0$ u tekućinu koje je temperatura Θ_0. Tu pojavu opisuje Newtonov zakon hlađenja:

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = k\,(\Theta_0 - \vartheta), \tag{3-27}$$

koji kaže da je brzina promjene temperature u toplomjeru $\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}t$ razmjerna razlici temperatura $(\Theta_0 - \vartheta)$. Rješenje je analogno kao i u prijašnjim slučajevima:

$$\vartheta = \Theta_0\,(1 - e^{-kt}). \tag{3-28}$$

Ako uzmemo kao normalno da toplomjer u početku ima neku konačnu temperaturu ϑ_0, a ne 0°K, onda u početnom uvjetu treba staviti za $\vartheta = \vartheta_0$.

Kao što ćemo vidjeti u odjeljku 6.3, porast temperature u toplomjeru ne slijedi točno jednadžbu (3-28), odnosno krivulju na sl. 3—11b. To je zbog toga što smo u primjeru pretpostavili prolazak topline kroz samo jedan toplinski otpor R_ϑ^1 i toplinsku kapacitivnost C_ϑ. U stvarnosti toplomjer je sustav gdje i staklena stijenka i živa posjeduju određen toplinski otpor i kapacitivnost.

---

[1] Dok kod drugih fizikalnih sustava potrošnik energije pretvara odgovarajući oblik energije u toplinu koja se gubi iz sustava, kod toplinskog sustava potrošnik energije predstavlja gubitak topline iz sustava.

Na osnovi gornjih razmatranja možemo proporcionalni član prvoga reda prikazati jednadžbom:

$$a_1 \frac{dx_i}{dt} + a_0 x_i = b_0 x_u. \tag{3-29}$$

Uobičajeno je da se ta jednadžba krati koeficijentom a_0, tako da x_i ostaje koeficijentom 1. U tom slučaju možemo pisati:

$$\tau \frac{dx_i}{dt} + x_i = K_P x_u, \tag{3-30}$$

gdje je $K_P = b_0/a_0$ prije uvedeni prijenosni omjer, a $\tau = a_1/a_0$ vremenska konstanta. Rješenje jednadžbe i podjela s odskočnom funkcijom amplitude X_u kao ulazom daje opći oblik prijelazne funkcije za P_1-član:

$$h(t) = \frac{x_i(t)}{X_u u(t)} = K_P (1 - e^{-t/\tau}). \tag{3-31}$$

Kako se odzivna veličina aperiodski približava konačnoj vrijednosti, naziva se taj član i **aperiodskim članom.**

Prijelazna funkcija (3-31) prikazana je u grafičkom obliku na sl. 3—10b. Tu veoma važnu krivulju možemo lako konstruirati. Naime, tangenta na krivulju ima u ishodištu nagib koji je dan izrazom:

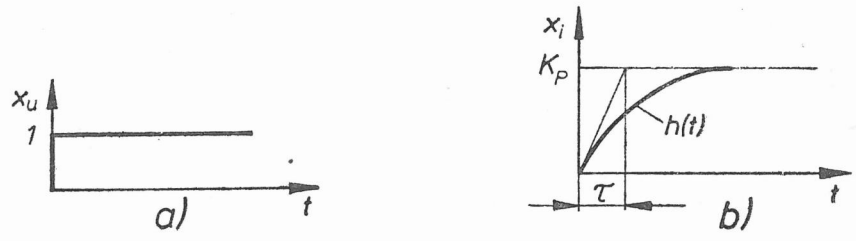
$$\left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}[K_P (1 - e^{-t/\tau})]_{t=0} = \frac{K_P}{\tau}. \tag{3-32}$$

To pokazuje da tangenta odsijeca s pravcem maksimalnog nagiba vremenski interval koji odgovara jednoj vremenskoj konstanti. Na osnovi toga slijedi i definicija **vremenske konstante:** to je interval vremena koji bi protekao dok odzivna funkcija, mijenjajući se maksimalnom brzinom, ne dostigne stacionarnu vrijednost.

Na sl. 3—11. prikazana je još jednom prijelazna funkcija aperiodskog člana. Na ordinati imamo normiranu amplitudu x_i/K_P, dok je na apscisi normirano vrijeme t/τ. Iz slike vidimo da tangenta na krivulju u bilo kojoj točki odsijeca s pravcem maksimalne amplitude uvijek isti vremenski interval od jedne vremenske konstante. Uz krivulju je dano i nekoliko vrijednosti prijelazne funkcije. Korisno je zapamtiti vrijednost funkcije nakon vremenskog intervala od jedne vremenske konstante, tj. kad je $t = \tau$, iznosi:

$$x_i \mid_{t=\tau} = K_P (1 - e^{-t/\tau}) \mid_{t=\tau} = K_P (1 - 0{,}368) = 0{,}632\, K_P. \tag{3-33}$$

Osim toga, možemo zaključiti da je nakon vremenskog intervala od pet vremenskih konstanti prijelazna pojava praktički nestala.



Sl. 3—10. Prijelazna funkcija P_1-člana

Primjer 3.2. Ako se na električni RC sustav prema sl. 3—7 priključi istosmjerni napona 20 V, kolik će biti napon kondenzatora u_C nakon 1 ms? Vrijednosti su $C=0{,}1\ \mu F$, $R=5\ k\Omega$.

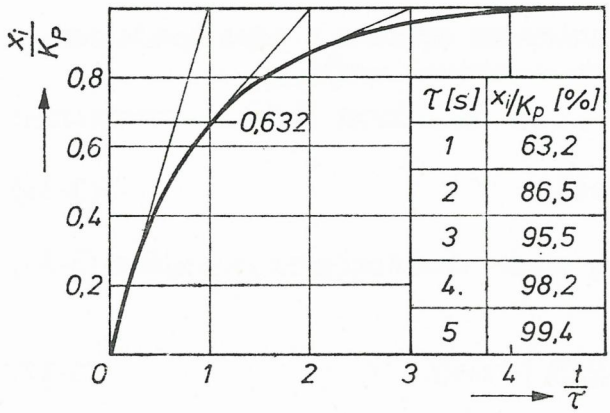
Najprije izračunamo vremensku konstantu:

$$\tau=RC=5\cdot10^3\cdot0{,}1\cdot10^{-6}=0{,}5\ ms.$$

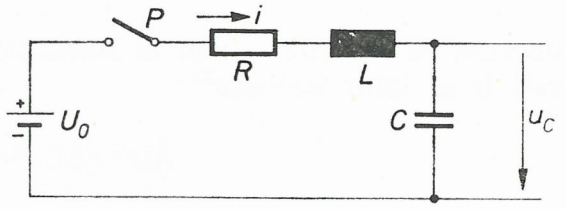
Iz dijagrama na sl. 3-11 očitamo za normirano vrijeme $t/\tau=1/0{,}5=2$ vrijednost $x_t/K_P=0{,}865$. Prema tome će nakon $t=2$ ms napon kondenzatora iznositi:

$$u_C=0{,}865\ U_0=0{,}865\cdot20=17{,}3\ V.$$

Mogućnost izračunavanja vremenske konstante kod drugih fizikalnih medija znatno je otežana. Tako npr. pneumatski otpor i kapacitivnost ovise o veoma mnogo faktora, pa su i računski rezultati veoma nepouzdani. Baš se u takvim slučajevima vidi prednost uvođenja pojma vremenske konstante koja jednoznačno opisuje dinamiku sustava prvoga reda.



Sl. 3—11. Normirani dijagram vremenske konstante



Sl. 3—12. Električni RLC sustav

Proporcionalni član drugoga reda. Električni sustav drugoga reda prikazan je na sl. 3—12: serijski spoj otpornika R, svitka L i kondenzatora C. Budući da postoje dva spremnika energije L i C, kod svake promjene stanja, npr. pri uključivanju ili isključivanju izvora napajanja, dolazi do prijelaznih pojava. One se sastoje u prelijevanju energije iz kondenzatora u svitak, i obratno: to su dobro poznate oscilacijske pojave — prigušeno titranje.

Kad se uključi preklopnik, kondenzator C počinje se nabijati preko otpornika i svitka. Struja raste sporije negoli kad je u strujnom krugu bio samo otpornik. Nakon nekog vremena, koje je u skladu s vremenskom konstantom kruga, kondenzator bi se nabio na vršnu vrijednost narinutog napona i time bi se prijelazno stanje završilo. U svitku se međutim zbog prolaska struje pohranila magnetska energija, i nakon što se narinuta struja smanjuje prema nuli, stvara se protu-EMS (Lenzov zakon). Razgrađivanje magnetskog polja održava struju u istom smjeru, tako da se kondenzator nabije na gotovo dvostruku vrijednost narinutog napona.

To je kontinuirani proces; i dok je u početku svitak priječio porast struje, pri kraju procesa ga potpomaže. Kad je na kondenzatoru dostignut vršni napon približno $2\,U_0$, u strujnom krugu vlada razlika napona na kondenzatoru i napon napajanja $(u_C - U_0)$. Zbog toga se kondenzator počinje izbijati, i struja poteče preko svitka i otpornika u obratnom smjeru. Uloga je svitka da se suprotstavlja promjeni struje. Ipak, napon u obratnom smjeru ne može dostići istu vrijednost kao prije jer se dio električne energije u otporniku pretvorio u toplinu.

Matematički opis dinamičkih pojava u strujnom krugu započinjemo primjenom drugoga Kirchhoffova zakona za petlju:

$$u_L+u_R+u_C=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+\frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t=U_0, \tag{3-34}$$

gdje smo primijenili zakon indukcije s konstantom L koja predstavlja induktivnost svitka. Zamjenom struje i prema jednadžbi (2-8):

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_0 \tag{3-35}$$

dobivamo jednadžbu koja predstavlja funkcionalnu ovisnost napona kondenzatora u_C o narinutom naponu U_0 uz vrijeme kao nezavisnu varijablu.

Stacionarno je rješenje jednostavno jer je vrijednost pobude konstantna:

$$u_{CPI}=U_0. \tag{3-36}$$

Prijelazno se rješenje dobije iz homogenog oblika diferencijalne jednadžbe (3-35) uvrsti li se izraz $u_C=Ke^{\lambda t}$:

$$Ke^{\lambda t}(LC\lambda^2+RC\lambda+1)=0. \tag{3-37}$$

Kako je $Ke^{\lambda t}\neq 0$, izraz u zagradi identičan je s nulom. To je karakteristična jednadžba koje su korijeni:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}. \tag{3-38}$$

Prijelazno je rješenje dakle:

$$u_{CKF}=K_1e^{\lambda_1 t}+K_2e^{\lambda_2 t}, \tag{3-39}$$

gdje su K_1 i K_2 konstante integracije. Njih možemo odrediti iz početnih uvjeta: u trenutku $t=0$, $u_C=0$, te $\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t=i/C=0$, ako ni kondenzator ni svitak ne sadrže pohranjenu energiju. Ti početni uvjeti uvrste se u opće rješenje $u_C=u_{CKF}+u_{CPI}$, kao i u derivaciju od u_C:

$$\begin{aligned} u_C&=K_1e^{\lambda_1 t}+K_2e^{\lambda_2 t}+U_0=0\\ \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}&=\lambda_1K_1e^{\lambda_1 t}+\lambda_2K_2e^{\lambda_2 t}=0. \end{aligned} \tag{3-40}$$

Dobija se:

$$K_1+K_2+U_0=0$$
$$\lambda_1 K_1+\lambda_2 K_2=0 \tag{3-41}$$

i nakon jednostavnih algebarskih operacija:

$$K_1=U_0\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$$
$$K_2=-U_0\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}. \tag{3-42}$$

Te izraze uvrstimo u opće rješenje, koje zatim sredimo:

$$u_C=u_{CKF}+u_{CPI}=U_0\frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t}-\lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}+U_0. \tag{3-43}$$

Kao što je iz teorije poznato, postoje **tri karakteristična slučaja** u rješenju, već prema tome je li izraz pod korijenom u jednadžbi (3-38) veći od nule, jednak nuli ili manji od nule.

Prvi slučaj: $R^2/4L^2<1/LC$ je najzanimljiviji jer se pojavljuju konjugirano kompleksni korijeni:

$$\lambda_{1,2}=-\sigma\pm j\omega_p, \tag{3-44}$$

gdje su uvedene kratice:

$$\sigma=\frac{R}{2L}$$
$$\omega_p=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}. \tag{3-45}$$

Kasnije dajemo fizikalno značenje tih kratica: σ je mjera za prigušenje oscilacija, tzv. **faktor prigušenja,** koji je ujedno razmjeran logaritamskom omjeru dviju uzastopnih maksimalnih amplituda, a ω_p je **prigušena vlastita frekvencija** sustava.

Te izraze za konjugirano kompleksne korijene uvrstimo u jednadžbu (3—43), pa dobivamo:

$$u_C=U_0\left[1+\frac{-\sigma-j\omega_p}{2j\omega_p}e^{-\sigma t}e^{j\omega_p t}-\frac{-\sigma+j\omega_p}{2j\omega_p}e^{-\sigma}\,e^{-j\omega_p t}\right]. \tag{3-46}$$

Primjenom Eulerovih relacija:

$$\sin\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$
$$\cos\omega t=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega}}{2} \tag{3-47}$$

pretvara se eksponencijalni oblik rješenja u trigonometrijski:

$$u_C = U_0\left[1 - e^{-\sigma t}\left(\frac{\sigma}{\omega_p}\sin \omega_p t + \cos \omega_p t.\right)\right]. \tag{3-48}$$

Kao što iz tog izraza vidimo, to je oscilacijski slučaj: nakon poremećaja izlazna se veličina u_C približava novom stacionarnom stanju uz prigušene oscilacije. U graničnom slučaju kad je $R=0$ i faktor je prigušenja $\sigma=0$, pa se pojavljuju oscilacije s **neprigušenom vlastitom frekvencijom** (Thomsonova formula):

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{3-49}$$

Drugi slučaj: $R^2/4L^2 > 1/LC$. Korijeni λ_1 i λ_2 su realni i različiti. Možemo pisati skraćeno:

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm \sigma', \tag{3-50}$$

gdje je:

$$\sigma = \frac{R}{2L}$$
$$\sigma' = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \tag{3-51}$$

Opće je rješenje u tom slučaju:

$$u_C = U_0\left[1 + \frac{-\sigma-\sigma'}{2\sigma'} e^{-\sigma t} e^{\sigma' t} - \frac{-\sigma+\sigma'}{2\sigma'} e^{-\sigma t} e^{-\sigma' t}\right]. \tag{3-52}$$

Taj izraz možemo svesti na pregledniji oblik slično kao i u prethodnom slučaju, samo se umjesto trigonometrijskim koristimo hiperbolnim funkcijama $\mathrm{sh}\sigma' t$ i $\mathrm{ch}\sigma' t$:

$$\mathrm{sh}\sigma' t = \frac{e^{\sigma' t} - e^{-\sigma' t}}{2}$$
$$\mathrm{ch}\sigma' t = \frac{e^{\sigma' t} + e^{-\sigma' t}}{2}. \tag{3-53}$$

To uvrstimo u jednadžbu (3-52) i sredimo:

$$u_C = U_0\left[1 - e^{-\sigma t}\left(\frac{\sigma}{\sigma'}\mathrm{sh}\sigma' t + \mathrm{ch}\sigma' t\right)\right]. \tag{3-54}$$

To je aperiodski slučaj, kad se izlazna funkcija nakon poremećaja monotono približava novoj stacionarnoj vrijednosti.

Treći slučaj: $R^2/4L^2 = 1/LC$. Izraz pod korijenom u jednadžbi (3-45) jednak je nuli, pa se pojavljuje jedan dvostruki korijen:

$$\lambda_{1,2} = -\sigma. \tag{3-55}$$

Budući da i u ovom slučaju moraju postojati dvije konstante integracije, moramo dodati još jedno opće rješenje. To je npr. oblik $K_2te^{\lambda t}$, tako da ukupno rješenje u_C i njegova derivacija du_C/dt glase:

$$u_C=K_1e^{\lambda t}+K_2te^{\lambda t}+U_0,$$
$$\frac{du_C}{dt}=\lambda K_1e^{\lambda t}+\lambda K_2te^{\lambda t}+K_2e^{\lambda t}. \tag{3-56}$$

Uz početne uvjete kao i prije, tj. uz $t=0$, $u_C=du_C/dt=0$, određuju se konstante integracije $K_1=-U_0$, $K_2=\lambda U_0$. Uvrštenjem u prvu jednadžbu (3-56) dobivamo:

$$u_C=U_0\,[1-e^{-\sigma t}\,(1+\sigma t)]. \tag{3-57}$$

To je aperiodski slučaj, kad se izlazna funkcija nakon poremećaja najbrže aperiodski približava novom stacionarnom stanju.

Za aperiodski granični slučaj vrijedi $\sigma=\omega_n$; kod aperiodskog je slučaja $\sigma>\omega_n$, i preteže prigušenje, a kod oscilacijskog je slučaja $\sigma<\omega_n$, te se pojavljuju oscilacije. U vezi s tim možemo na zgodan način primijeniti omjer $\zeta=\sigma/\omega_n$ kao **stupanj prigušenja:**

$\zeta>1$ za aperiodski slučaj,

$\zeta=1$ za granični aperiodski slučaj,

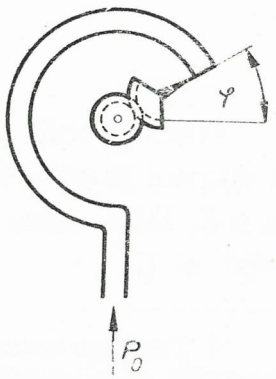
$0<\zeta<1$ za prigušeni oscilacijski slučaj,

$\zeta=0$ za neprigušene oscilacije, i

$\zeta<0$ za raspirene oscilacije.

Kada je $\zeta=0$, u sustavu drugog reda manjka član s prvom derivacijom. Budući da se ne troši energija, upotrebljava se naziv **konzervativni sustav.** Naprotiv, uz $\zeta>0$, troši se energija pa se takav sustav označuje kao **disipativni sustav.**

Mehanički je sustav drugoga reda npr. Bourdonova cijev za mjerenje tlakova (sl. 3—13). Postoji djelovanje tlaka napajanja P_0, elastičnosti cijevi $S_{\varphi\varphi}$ i prigušenja



Sl. 3—13. Bourdonova cijev kao primjer rotacijskog mehaničkog sustava

zbog zupčastog prijenosa gibanja $D_\varphi\dot{\varphi}$[1]; svi ti zakretni momenti suprotstavljaju se momentu sile $J\ddot{\varphi}$, gdje je J moment tromosti. Na taj način dobivamo jednadžbu dinamičke ravnoteže zakretnih momenata oko osi savijanja:

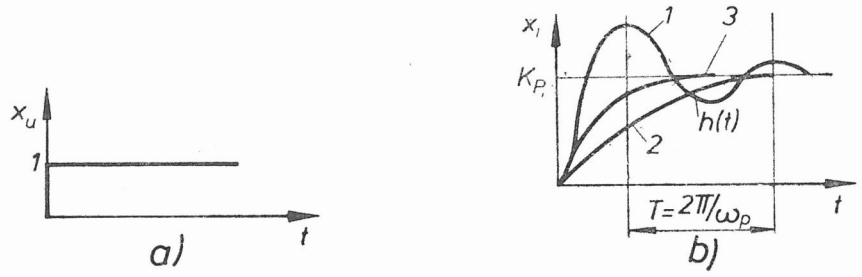
$$J\ddot{\varphi}+D_\varphi\dot{\varphi}+S_\varphi\varphi=KP_0, \tag{3-58}$$

gdje faktor K ovisi o geometriji cijevi. Ta jednadžba odgovara jednadžbi (3-35) za električni RLC sustav. Prema tome je i rješenje te jednadžbe identično s tri slučaja rješenja jednadžbe (3-35), samo treba da uvrstimo odgovarajuće parametre. Tako je faktor prigušenja dan sa $\sigma=D_\varphi/2J$, a neprigušena vlastita frekvencija sa $\omega_n=\sqrt{S_\varphi/J}$.

Rješenje, odnosno prijelazna funkcija za P_2-sustav, glasi prema tome za oscilacijski, aperiodski i granični aperiodski slučaj:

$$h(t)=\frac{x_i(t)}{X_u u(t)}=\begin{cases} K_P\left[1-e^{-\sigma t}\left(\dfrac{\sigma}{\omega_p}\sin\omega_p t+\cos\omega_p t\right)\right] \\ K_P\left[1-e^{-\sigma t}\left(\dfrac{\sigma}{\sigma'}\operatorname{sh}\sigma' t+\operatorname{ch}\sigma' t\right)\right] \\ K_P\left[1-e^{-\sigma t}(1-\sigma t)\right]. \end{cases} \tag{3-59}$$

Najzanimljiviji je oscilacijski slučaj, jer se aperiodski član drugoga reda dobije serijskim spajanjem dvaju aperiodskih članova prvoga reda. Zbog toga se P_2-član naziva i **oscilacijski član.**



Sl. 3—14. Prijelazna funkcija P_2-člana

Grafički oblik prijelazne funkcije za sva tri slučaja vidi se na sl. 3—14b. Kako je stupanj prigušenja ζ pokazatelj za režim prijelaznog stanja, oblik krivulja ovisit će o ζ. Dalje ćemo pokazati da i frekvencija oscilacija člana drugoga reda također ovisi o ζ.

---

[1] Torzijska krutost opruge $S\varphi$ kao i torzijski koeficijent viskoznog trenja $D\varphi$ imaju različite dimenzije od odgovarajućih S i D u translatornom mehaničkom sustavu. Vidi tablicu 14—1.

Budući da je **slučaj prigušenih oscilacija osobito značajan u analizi i sintezi regulacijskih sustava,** izvest ćemo još neke značajne veličine. Uz faktor prigušenja σ i prigušenu vlastitu frekvenciju ω_p koristimo se i stupnjem prigušenja ζ i neprigušenom vlastitom frekvencijom ω_n, koje povezuju relacije

$$\zeta=\frac{\sigma}{\omega_n},$$

$$\omega_p=\sqrt{\omega_n^2-\sigma^2}=\omega_n\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{\omega_n^2}}=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}. \tag{3-60}$$

Faktori ζ i σ međusobno su proporcionalni; uz veći ζ je manja ω_p. Najprije ćemo diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$a_2\frac{d^2x_i}{dt^2}+a_1\frac{dx_i}{dt}+a_0x_i=b_0u\,(t) \tag{3-61}$$

prevesti u oblik koji se obično primjenjuje u teorijskim razmatranjima. U tu svrhu podijelimo navedenu jednadžbu s koeficijentom a_0; dobijemo $b_0/a_0=K_P$ kao prijenosni omjer, dok su $a_2/a_0=1/\omega_n^2$ te $a_1/a_0=2\zeta/\omega_n$ izraženi sa ζ i ω_n. To ima i svoj fizikalni smisao, jer se npr. umjesto LC u jednadžbi (3-35) može staviti $1/\omega_n^2$ prema jednadžbi (3-49). Jednadžba (3-61) sada glasi:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dx_i}{dt}+x_i=K_Pu\,(t). \tag{3-62}$$

Isto tako i rješenje za oscilacijski slučaj iz izraza (3-59) prevedemo u novi oblik:

$$x_i\,(t)=K_P\left[1-e^{-\zeta\omega_nt}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right], \tag{3-63}$$

jer je $\sigma=\zeta\omega_n$. Sustav je sada opisan ζ i ω_n. Sinusni i kosinusni član možemo dalje sažeti, koristeći se trigonometrijskom pretvorbom:

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta). \tag{3-64}$$

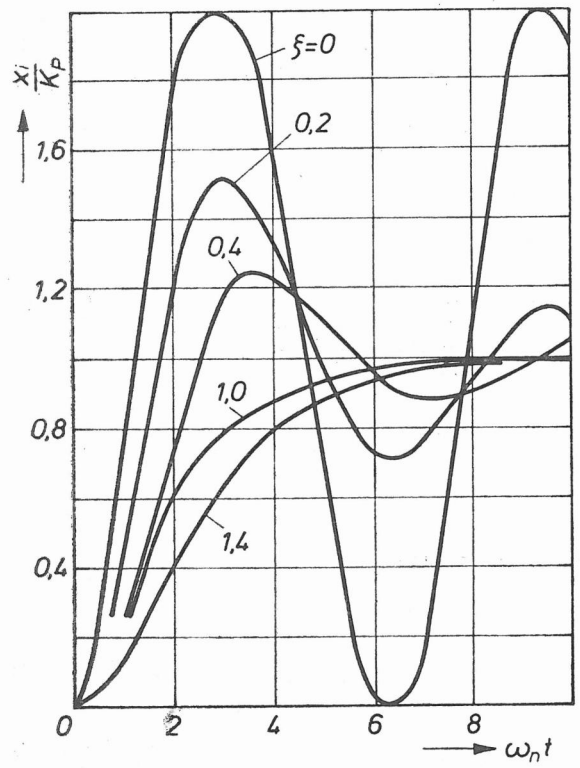
Dobit ćemo:

$$x_i\,(t)=K_P\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_nt}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi)\right], \tag{3-65}$$

gdje je fazni pomak:

$$\varphi=\arccos\zeta. \tag{3-66}$$

Tu funkciju prikazujemo još jednom u povećanom mjerilu na sl. 3—15. Na osi apscisa je normirano vrijeme ω_nt, a na osi ordinata normirana amplituda x_i/K_P. Stupanj prigušenja ζ je parametar koji se mijenja od $\zeta=1$ za aperiodski granični slučaj do $\zeta=0$ za neprigušene oscilacije.



Sl. 3–15. Prijelazna funkcija P_2-člana u povećanom mjerilu

Značajna veličina oscilacijskog člana je prebačaj odzivne veličine iznad stacionarne vrijednosti u prijelaznom stanju. Da bismo taj prebačaj izračunali, deriviramo $x_i(t)$ iz izraza (3-65) po vremenu i izjednačujemo s nulom:

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=K_P\left[\zeta\omega_n\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi)-\right.$$

$$\left.-\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi)\right]=0. \qquad (3\text{-}67)$$

Ovaj ćemo izraz pojednostavniti:

$$\operatorname{tg}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi)=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}. \qquad (3\text{-}68)$$

Ovdje se postavlja zahtjev:

$$\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t=k\pi \text{ za } k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (3\text{-}69)$$

iz kojeg se izračuna vrijeme u kojem se pojavljuju prebačaji:

$$t=\frac{k\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \text{ za } k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (3\text{-}70)$$

Najzanimljiviji je sigurno prvi prebačaj, jer je najveći. Uz $k=1$ određujemo **vrijeme prvog prebačaja** T_p:

$$T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{3-71}$$

To uvrstimo u izraz (3-65) i dobivamo normiranu vršnu vrijednost:

$$\frac{x_i(T_p)}{K_P}=\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n T_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T_p+\arccos\zeta)=\right.$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\arccos\zeta). \tag{3-72}$$

Kako je:

$$\sin(\arccos\zeta)=\sqrt{1-\zeta^2}, \tag{3-73}$$

slijedi:

$$\frac{x_i(T_p)}{K_P}=1+e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{3-74}$$

Odatle možemo izvesti **postotni prebačaj** M_p, tj. razliku između vršne i stacionarne vrijednosti izražene u postocima:

$$M_p=\left[\frac{x_i(T_p)}{K_P}-1\right]100=e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot 100 \tag{3-75}$$

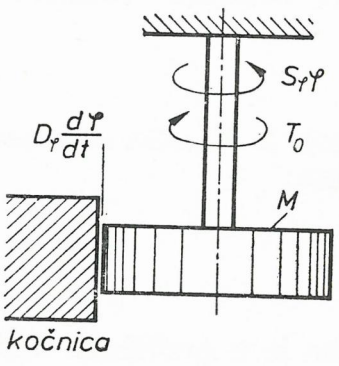
Vidimo da M_p ovisi samo o ζ, a ne i o ω_n. U praksi se dopuštaju vrijednosti za M_p do nekih 35%, što odgovara $\zeta=0{,}3$.

Primjer 3.3. Prema sl. 3—16, rotacijski mehanički sustav ima slijedeće vrijednosti parametara: $J=2\ \mathrm{kgm^2}$, $D_\varphi=3\ \mathrm{kgm^2s^{-1}}$ i $S_\varphi=5\ \mathrm{kgm^2s^{-2}}$. Na sustav djeluje zakretni moment $T_0=0{,}5\ \mathrm{kgm^2s^{-2}}$. Možemo pisati diferencijalnu jednadžbu:

$$J\ddot{\varphi}+D_\varphi\dot{\varphi}+S_\varphi\varphi=T_0$$

odnosno s uvrštenim brojčanim vrijednostima:

$$2\ddot{\varphi}+3\dot{\varphi}+5\varphi=0{,}5.$$



Sl. 3—16. Rotacijski mehanički sustav — primjer 3.3.

Umjesto da je riješimo, koristimo se gotovim izrazima za pojedine značajne veličine:

$$\sigma=\frac{D_\varphi}{2J}=\frac{3}{2\cdot 2}=0{,}75\ \mathrm{s}^{-1};$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{S_\varphi}{J}}=\sqrt{\frac{5}{2}}=1{,}6\ \mathrm{s}^{-1};$$

$$\zeta=\frac{\sigma}{\omega_n}=\frac{0{,}75}{1{,}6}=0{,}47;$$

$$\omega_p=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=1{,}6\sqrt{1-0{,}47^2}=1{,}6\cdot 0{,}88=1{,}41\mathrm{s}^{-1}.$$

Te se vrijednosti mogu uvrstiti neposredno u rješenje prema jednadžbi (3-65):

$$\varphi=\frac{T_0}{S_\varphi}\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\psi\right)\right]=$$

$$=\frac{0{,}5}{1}\left[1-\frac{e^{-1{,}6\cdot 0{,}47t}}{\sqrt{1-0{,}47^2}}\sin\left(1{,}6\sqrt{1-0{,}47^2}\,t+\psi\right)\right],$$

gdje smo fazni pomak označili sa ψ da bismo ga razlikovali od kuta zakreta φ. Konačan je oblik vremenskog odziva:

$$\varphi=0{,}1\ [1-1{,}14e^{-0{,}75t}\sin(1{,}41t+\psi)]$$

s faznim pomakom prema jednadžbi (3-66):

$$\psi=\arccos\zeta=\arccos 0{,}47=28°.$$

Integralni član. Tipičan je integralni član istosmjerni elektromotor, shematski prikazan na sl. 3—17a. Uz konstantnu struju magnetskog polja I_m narinuti je napon armature u_a razmjeran broju okreta n. Koristimo se i poznatim relacijama za kružnu frekvenciju, odnosno kutnu brzinu:

$$\omega=2\pi n$$

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{3-76}$$

pa dobijemo odnose:

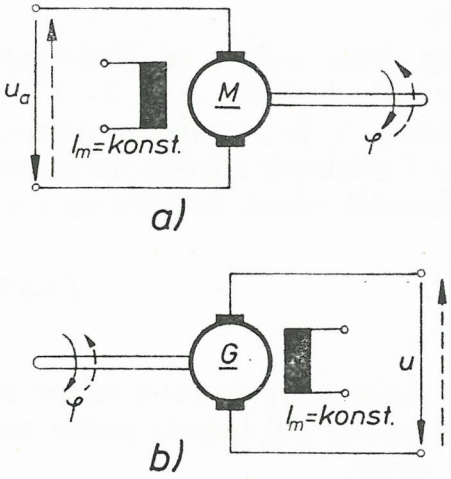
$$\varphi=\int\omega\mathrm{d}t=\int 2\pi n\mathrm{d}t=K_i\int u_a\mathrm{d}t, \tag{3-77}$$

gdje je K_i neka konstanta. Prijelaznu funkciju I_0-člana možemo prema tome pisati kao:

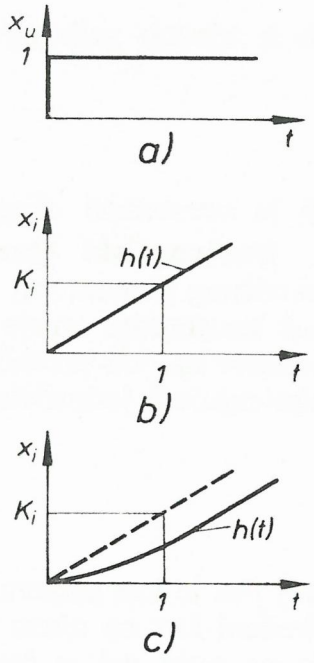
$$h(t)=\frac{x_i(t)}{X_u u(t)}=K_i t, \tag{3-78}$$

što je u grafičkom obliku prikazano na sl. 3—18b.

Elektromotor je prikazan idealno bez kašnjenja. Ako se ta kašnjenja zbog mase, induktivnosti, itd., ne mogu zanemariti, na lijevoj strani jednadžbe (3-77) pojavljuju se dodatni derivacijski članovi. U takvim slučajevima govorimo o I_1-članu, I_2-članu, itd.



Sl. 3—17. Istosmjerni električni motor (a) i istosmjerni električni generator (b)



Sl. 3—18. Prijelazna funkcija I-člana

Da bi našli prijelaznu funkciju I_1-člana, započinjemo od jednadžbe (3-77) koju pišemo u poopćenom obliku i proširujemo članom za kašnjenje:

$$\tau \frac{dx_i}{dt} + x_i = K_i \int x_u dt. \tag{3-79}$$

Početni su uvjeti uz $t=0$, $x_i=0$, $dx_i/dt=0$. Gornji izraz najprije deriviramo:

$$\tau \frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{dx_i}{dt} = K_i x_u, \tag{3-80}$$

a zatim izvršimo zamjenu varijabli $dx_i/dt=z$:

$$\tau \frac{dz}{dt} + z = K_i x_u, \tag{3-81}$$

gdje je početni uvjet uz $t=0$, $z=0$. Uz jedinični odskok na ulazu, rješenje je ove jednadžbe:

$$z = K_i (1 - e^{-t/\tau}). \tag{3-82}$$

Rješenje s izvornom varijablom x_i dobivamo pomoću određenog integrala:

$$x_i = \int_0^t z(\lambda)\,d\lambda = K_i\,[\lambda + \tau e^{-\lambda/\tau}]_0^t = K_i\,(t-\tau) + K_i \tau e^{-t/\tau}. \tag{3-83}$$

To je ujedno prijelazna funkcija I_1-člana:

$$h(t) = \frac{x_i(t)}{X_u\,u(t)} = K_i\,(t-\tau) + K_i \tau e^{-t/\tau} \tag{3-84}$$

čiji je vremenski dijagram prikazan na sl. 3—18c.

Derivacijski član. Kao primjer derivacijskog člana uzima se djelovanje električnog generatora, npr. tahogeneratora kojim se mjeri broj okreta (sl. 3—17b). Kod konstantne struje magnetiziranja I_m broj okreta n je razmjeran naponu armature u_a. Uz promijenjen smjer vrtnje mijenja se i predznak napona na izlazu. Primjenjujući jednadžbu (3-77), postavlja se funkcionalan odnos između u_a i φ:

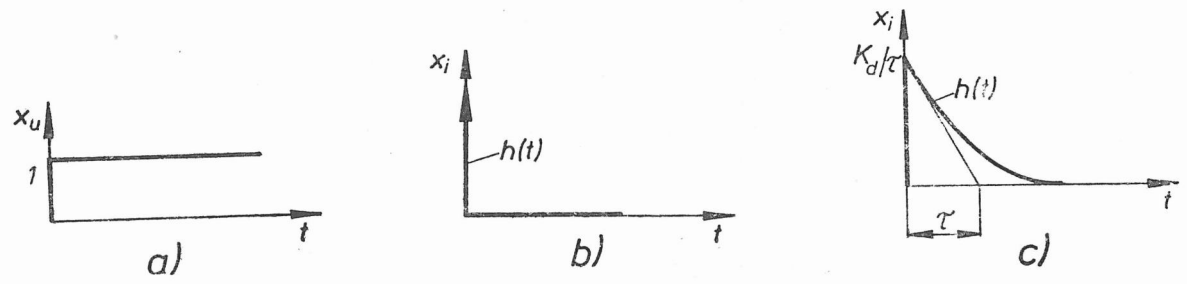
$$u_a = K_d \frac{d\varphi}{dt}. \tag{3-85}$$

Ovaj put je kut zakreta φ pobuda, a napon u_a odziv. Jasno je da skokovit zakret za određeni kut na ulazu uzrokuje naponski impuls na izlazu. Taj impuls padne naglo na nulu nakon što nestane zakret osovine na ulazu.

Prijelazna je funkcija D_0-člana:

$$h(t) = \frac{x_i(t)}{X_u\,u(t)} = K_d\,\vartheta(t) \tag{3-86}$$

što se vidi i na sl. 3—19b. Takav oblik funkcije ne odgovara fizikalnoj stvarnosti jer bi u trenutku $t=0$ odziv trebao da bude neizmjerno velik. Zbog mase armature, induktivnosti namota itd., dolazi do kašnjenja, tako da se ograničuju amplitude odzivne funkcije.



Sl. 3—19. Prijelazna funkcija D-člana

Zbog toga je umjesno da derivacijski član obuhvati i kašnjenje prvoga reda:

$$\tau \frac{dx_i}{dt} + x_i = K_d \frac{dx_u}{dt} \tag{3-87}$$

Izravno rješenje je teško. Idemo posrednim putem i najprije integriramo gornju jednadžbu u granicama od $-\infty$ do t:

$$\tau \int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{d}x_i(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda + \int_{-\infty}^{t} x_i(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = K_d \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{3-88}$$

Integracijsku varijablu označimo sa λ da se ne miješa s gornjom granicom integracije t. Integral na desnoj strani jednak je jedinici. Uvodimo novu varijablu:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} x_i(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = x_i(t). \tag{3-89}$$

Jednadžba (3-88) prelazi uvrštenjem izraza (3-89) u oblik:

$$\tau \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + z = K_d \tag{3-90}$$

s poznatim rješenjem:

$$z(t) = K_d\,(1 - e^{-t/\tau}) \tag{3-91}$$

gdje ćemo varijablu z zamijeniti izvornom varijablom:

$$x_i(t) = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{K_d}{\tau}\, e^{-t/\tau}. \tag{3-92}$$

Dakle prijelazna je funkcija D_1-člana:

$$h(t) = \frac{x_i(t)}{X_u\, u(t)} = \frac{K_d}{\tau}\, e^{-t/\tau}. \tag{3-93}$$

Na sl. 3—19c vidimo vremenski tok te funkcije. Što je manja τ prema trajanju pojave, to će biti izrazitije derivacijsko djelovanje.

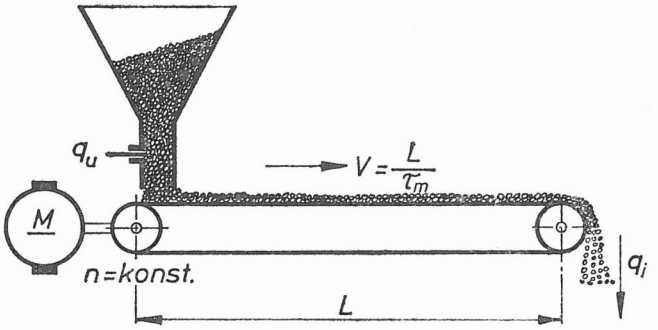
Član s mrtvim vremenom. Do sada obrađeni osnovni članovi mogli su se opisati diferencijalnom jednadžbom. Tako nije s tzv. članom s mrtvim vremenom, koji se često pojavljuje u procesnoj tehnici. Primjer je takvog sustava transportna vrpca za rasuti teret prema sl. 3—20. Nakon otvaranja zasuna na ulazu prolaz pune količine u jedinici vremena ϑ na izlazu primjećuje se tek nakon izvjesnog »mrtvog« vremena τ_m koje je određeno omjerom prijeđenog puta L i brzine V. Mrtvo se vrijeme susreće svuda gdje se neka pojava širi konačnom brzinom koja više nije veoma velika u odnosu prema brzini promjena fizikalnih veličina u procesu.

Takve se pojave općenito opisuju parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, i o tome ćemo opširnije govoriti u odjeljku 6.3. U ovom razmatranju one se mogu izbjeći jer su zanimljive samo dvije prostorno određene veličine, pa nema položaja kao nezavisne varijable. Traži se relacija između izlazne i ulazne veličine u ovisnosti o samo jednoj nezavisnoj varijabli — o vremenu. Polazimo od činjenice da su kod transportne vrpce jednake vrijednosti zavisne varijable na njezinu kraju L kao i na početku 0, samo uz vremenski pomak:

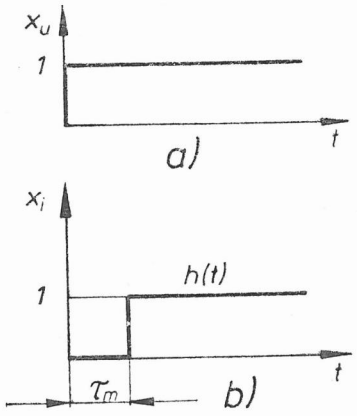
$$x(t, L)=x(t-\tau_m, 0), \tag{3-94}$$

jer ako je u nekom proizvoljnom trenutku t protok na izlazu x, on se pojavio na ulazu u vremenu τ_m ranije, dakle u vremenu $(t-\tau_m)$. Iz izraza (3-94) možemo napisati tzv. jednadžbu diferencija:

$$x_i(t)=x_u(t-\tau_m). \tag{3-95}$$



Sl. 3—20. Transportna vrpca za šljunak



Sl. 3—21. Prijelazna funkcija T_m-člana

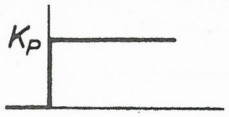
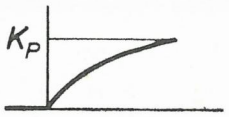
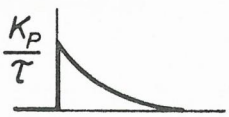
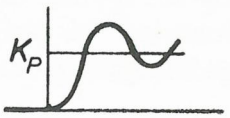
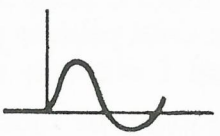
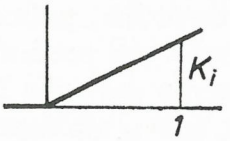
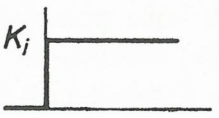
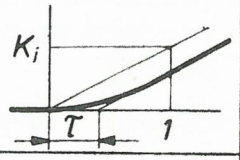
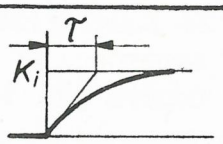
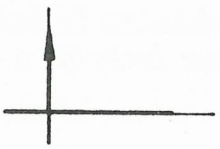
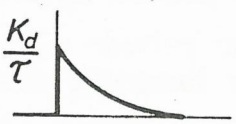
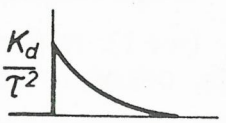
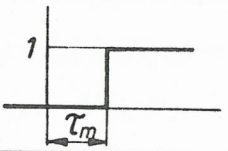
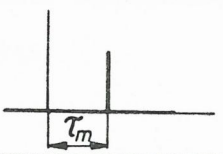
Grafički prikaz ulazne i izlazne varijable sustava s mrtvim vremenom vidi se na sl. 3—21. Na temelju te slike možemo odrediti i prijelaznu funkciju T_m--člana:

$$h(t)=\frac{x_i(t)}{X_u\, u(t)}=\begin{cases}0 \text{ za } t<\tau_m\\ 1 \text{ za } t\geqslant\tau_m.\end{cases} \tag{3-96}$$

Kako je uz odskočnu funkciju na ulazu i izlazna funkcija odskočna, proizlazi da su njezine derivacije neizmjerno velike. Zato se ovaj sustav i ne može opisati običnom diferencijalnom jednadžbom.

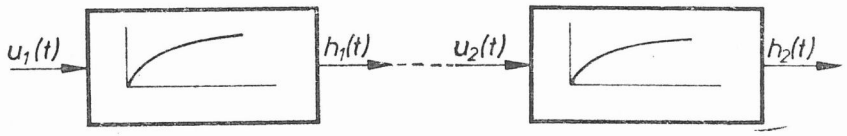
Budući da se sustav s mrtvim vremenom povezuje s problemima gdje se pojavljuje transport energije ili materije, T_m-član se naziva i **transportni član.**

Tablica 3—1. Vremenski odziv osnovnih članova

SUSTAV	DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA	ODSKOČNI ODZIV $h(t)$	IMPULSNI ODZIV $g(t)$
P_0	$x_i = K_P x_u$		
P_1	$\tau \dot{x}_i + x_i = K_P x_u$		
P_2	$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{x}_i + \frac{2\xi}{\omega_n}\dot{x}_i + x_i = K_P x_u$		
I_0	$x_i = K_i \int x_u dt$		
I_1	$\tau \dot{x}_i + x_i = K_i \int x_u dt$		
D_0	$x_i = K_d \dot{x}_u$		
D_1	$\tau \dot{x}_i + x_i = K_d \dot{x}_u$		
T_m			

3.4. Integral konvolucije

U regulacijskim sustavima često se postavlja problem serijskog povezivanja dvaju ili više dinamičkih sklopova kojih su svojstva poznata. Uzmimo kao primjer dva serijski vezana sklopa na sl. 3—22. Ako su nam poznate prijelazne funkcije svakog



Sl. 3—22. Serijski vezani sklopovi s poznatim prijelaznim funkcijama

sklopa $h_1(t)$ i $h_2(t)$, ne možemo odmah naći i ukupnu prijelaznu funkciju $h(t)$, jer na ulazu u drugi sklop ne djeluje odskočna funkcija, već odzivna funkcija prvog sklopa. Ovaj primjer pokazuje kako **prijelazna funkcija nije pogodna za daljnju analizu i sintezu regulacijskog kruga.**

Problem se međutim može riješiti i u vremenskom području pomoću **konvolucije** koju smo već usput spomenuli u odjeljku 2.4. Rješenje se može dobiti za bilo koju pobudnu funkciju; pobuda ne treba da bude racionalna algebarska funkcija; štoviše, ona može biti predočena samo u grafičkom, odnosno tabelarnom obliku. Pobudna se funkcija rastavlja bilo u niz vremenski pomaknutih odskočnih funkcija prema sl. 3—23, bilo u niz vremenski pomaknutih impulsnih funkcija prema sl. 3—24. Kako se radi o prolazu kroz linearni, vremenski invarijantni sustav, vrijedi načelo superpozicije, pa se odzivi na svaki pojedini član niza superponiraju u ukupnom odzivu [lit. 18, 24, 55].

Pođimo od sl. 3—23, gdje smo pobudnu funkciju rastavili u niz odskočnih funkcija od kojih je svaka slijedeća pomaknuta vremenski za $\Delta\tau$. Amplituda je prve odskočne funkcije $x_u(0)$, druge $x'_u(\Delta\tau)\Delta\tau$, gdje je derivacija $x'_u(\Delta\tau)$ nagib pobudne funkcije u točki $\Delta\tau$, itd. Prema tome je odziv:

— prve odskočne pobude $x_u(0)\,h(t)$,

— druge odskočne pobude $x'_u(\Delta\tau)\,\Delta\tau h(t-\Delta\tau)$,

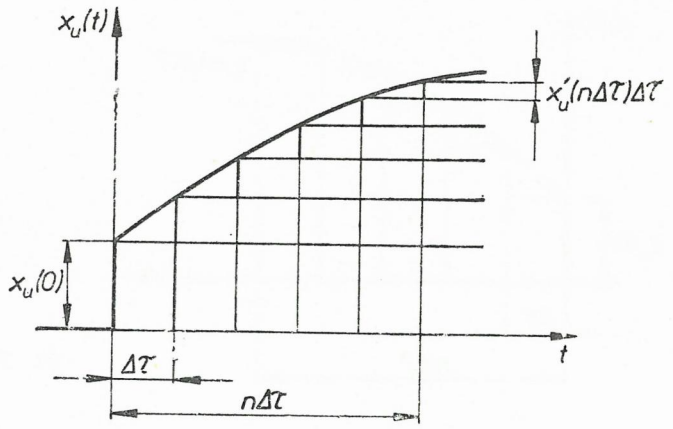
— $(n+1)$. odskočne pobude $x'_u(n\Delta\tau)\,\Delta\tau h(t-n\Delta\tau)$, gdje je $h(t)$ prijelazna funkcija, odnosno odziv linearnog sustava na jedinični odskok $u(t)$.

Ako učinimo granični prijelaz, ukupni odziv $x_i(t)$ u trenutku t dobivamo superponiranjem svih pojedinačnih odziva:

$$x_i(t)=x_u(0)\,h(t)+x'_u(\Delta\tau)\,\Delta\tau h(t-\Delta\tau)+\ldots$$
$$\ldots+x'_u(n\Delta\tau)\,\Delta\tau h(t-n\Delta\tau)+\ldots \qquad (3\text{-}97)$$

Kad $\Delta\tau\to 0$, teži $n\to\infty$, ali je njihov umnožak, označen sa $\tau=n\Delta\tau$, konačne vrijednosti. Možemo pisati:

$$x_i(t)=x_u(0)\,h(t)+\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau=0}^{t}x'_u(\tau)\,\Delta\tau h(t-\tau). \qquad (3\text{-}98)$$



Sl. 3–23. Integral konvolucije: izvod pomoću niza odskočnih funkcija

Pretvarajući zbroj u integral u granicama od 0 do t, dobit ćemo **Duhamelov integral:**

$$x_i(t)=x_u(0)\,h(t)+\int_0^t x'_u(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau. \tag{3-99}$$

Taj integral teško je primijeniti jer se ispod znaka integrala pojavljuje derivacija pobudne funkcije. Zato ćemo izraz (3-99) pretvoriti u pogodniji oblik. Pomoću parcijalne integracije $x'_u(\tau)\,d\tau=du$ i $h(t-\tau)=v$ dobivamo:

$$x_i(t)=x_u(0)\,h(t)+\left|x_u(\tau)\,h(t-\tau)\right|_0^t-\int_0^t h'(t-\tau)\,x_u(\tau)\,d\tau. \tag{3-100}$$

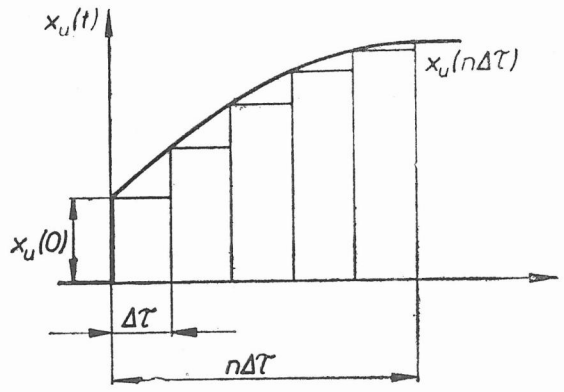
Drugi član na desnoj strani je na gornjoj granici jednak nuli jer je $h(0)=0$, a na donjoj granici je $-x_u(0)\,h(t)$. U trećem članu s desne strane označujemo derivaciju prijelazne funkcije $h'(t-\tau)$ sa $g(t-\tau)$. Dobivamo **integral konvolucije:**

$$x_i(t)=\int_0^t g(t-\tau)\,x_u(\tau)\,d\tau. \tag{3-101}$$

Pomoću jednostavne zamjene varijable $\lambda=t-\tau$, $d\lambda=-d\tau$, lako je dokazati da vrijedi identičnost:

$$x_i(t)=\int_0^t x_u(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=-\int_0^t x_u(t-\lambda)\,g(\lambda)\,d\lambda=\int_0^t x_u(t-\lambda)\,g(\lambda)\,d\lambda. \tag{3-102}$$

Integral konvolucije može se izravno izvesti iz sl. 3–24. I ovdje izvodimo misaoni eksperiment, gdje smo pobudnu funkciju $x_u(t)$ rastavili na niz elementarnih pravokutnih impulsa širine $\Delta\tau$ koji slijede jedan za drugim u razmacima $\Delta\tau$. Ako $\Delta\tau\to 0$, reakcija sustava na elementarni impuls može se približno zamijeniti reakcijom sustava na jedinični impuls $\delta(t)$, kojeg je amplituda jednaka površini elementarnog impulsa $x_u(n\Delta\tau)\,\Delta\tau$.



Sl. 3-24. Integral konvolucije: izvod pomoću niza impulsnih funkcija

Uz analogno razmatranje kao i kod izvoda Duhamelova integrala možemo za svaki elementarni impuls napisati impulsni odziv:

— prva impulsna pobuda $x_u(0)\,\Delta\tau g(t)$,

— druga impulsna pobuda $x_u(\Delta\tau)\,\Delta\tau\, g(t-\Delta\tau)$,

— $(n+1)$ impulsna pobuda $x_u(n\Delta\tau)\,\Delta\tau\, g(t-n\Delta\tau)$.

Superponiranjem se dobije ukupni odziv $x_i(t)$:

$$x_i(t)=x_u(0)\,\Delta\tau\, g(t)+x_u(\Delta\tau)\,\Delta\tau\, g(t-\Delta\tau)+\ldots$$
$$\ldots+x_u(n\Delta\tau)\,\Delta\tau\, g(t-n\Delta\tau)+\ldots \qquad (3\text{-}103)$$

Uz $\Delta\tau\to 0$, $n\to\infty$ i $\tau=n\Delta\tau$, dobivamo:

$$x_i(t)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau=}^{t} x_u(\tau)\,\Delta\tau\, g(t-\tau), \qquad (3\text{-}104)$$

a odatle graničnim prijelazom dobivamo integral konvolucije:

$$x_i(t)=\int_0 g(t-\tau)\,x_u(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (3\text{-}105)$$

Operaciju konvolucije pišemo u skraćenom obliku:

$$x_i(t)=g(t)*x_u(t) \qquad (3\text{-}106)$$

i kažemo da je funkcija $g(t)$ »konvolvirana« funkcijom $x_u(t)$.

Funkcija $g(t)$ naziva se **težinska funkcija** jer određuje »težinu« kojom svaki pojedini impuls pobude pridonosi vrijednosti odziva u nekom kasnijem trenutku. Nju smo spomenuli u odjeljku 2.4 i zapravo je **impulsni odziv** sustava na pobudu u obliku jediničnog impulsa $\delta(t)$. Kao i prijelazna funkcija $h(t)$, težinska funkcija $g(t)$ jednoznačno opisuje sustav. Za sada ćemo se zadovoljiti samo grafičkim prikazom impulsnog odziva $g(t)$ na osnovne sustave u tablici 3—1. U odjeljku 4.3 vidjet ćemo kako se $g(t)$ jednostavno određuje kao obratni Laplaceov transformat tzv. prijenosne funkcije $G(s)$.

Primjer 3.4. Neka sustav ima težinsku funkciju $g(t)=2t$, a na ulaz mu je narinuta funkcija $x_u(t)=\sin 10\pi t$. Zbog lakšeg proračuna odabire se oblik integrala konvolucije (3-98). Dobivamo:

$$x_i(t)=\int_0^t x_u(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t (\sin 10\pi\tau)\,[2(t-\tau)]\,d\tau,$$

i dalje:

$$x_i(t)=2\int_0^t t\sin 10\pi\tau\,d\tau-2\int_0^t \tau\sin 10\pi\tau\,d\tau=$$

$$=2\left[\frac{-t}{10\pi}\cos 10\pi\tau\right]_0^t-2\left[\frac{-\tau}{10\pi}\cos 10\pi\tau+\frac{1}{100\pi^2}\sin 10\pi\tau\right]_0^t,$$

što daje odzivnu funkciju:

$$x_i(t)=\frac{2t}{10\pi}-\frac{2}{100\pi^2}\sin 10\pi t.$$

Ako su funkcije $g(t)$ i $x_u(t)$ poznate samo u grafičkom obliku, možemo provesti grafičku konvoluciju. Na sl. 2—25a prikazana je težinska funkcija $g(\tau)$ koja se u skladu s integralom (3-101) najprije pretvara u $g(-\tau)$ na sl. 3—25b, a zatim se krivulja $g(t_1-\tau)$ još pomiče udesno (sl. 3—25c). Na sl. 3—25d prikazana je pobuda $x_u(\tau)$ u grafičkom obliku. Množenjem $x_u(\tau)\,g(t_1-\tau)$ dobivamo krivulju na sl. 3—25e, gdje je integral iz izraza (3-101) naznačen crtkanom površinom. Crtkana površina odgovara odzivu $x_i(t)$ u trenutku t_1, što se unosi u dijagram na sl. 3—25f. Nakon toga postupak ponavljamo za druge vrijednosti vremena $t_2, t_3, \ldots, t_n$, sve dok ne dobijemo izglađenu krivulju.

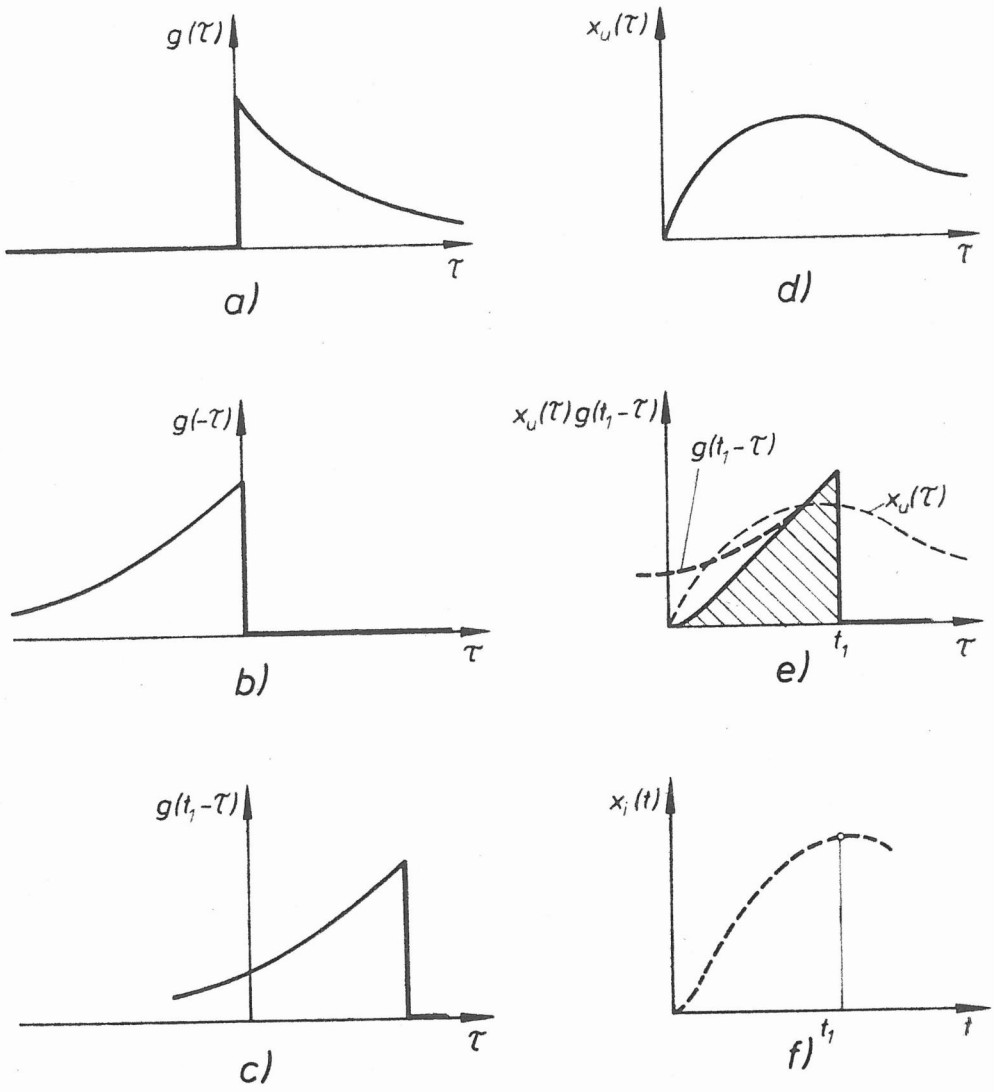
Već ova dva vrlo jednostavna primjera analitičke i grafičke konvolucije ukazuju na mukotrpnost posla. Zato se konvolucija rijetko primjenjuje, a koristi se onda kad Laplaceovi transformati $G(s)$ i $X_u(s)$ (v. odjeljak 4-3) nisu racionalne algebarske funkcije, kad su suviše složeni ili kad su poznati samo u grafičkom ili tabelarnom obliku.

Ovdje možemo ukazati na značenje impulsnog odziva u ocjeni dinamičkih svojstava sustava. Jedinični impuls unosi trenutačno jediničnu količinu energije u sustav, prije nego što je došlo do iole značajne promjene odziva. Nakon toga se sustav sam od sebe vraća u prvobitno ravnotežno stanje, i taj prijelazni proces odražava dinamičko ponašanje sustava. Impulsni odziv ima isti učinak kao pohranjena energija u sustavu (početni uvjeti!). To se može zorno predočiti na primjeru mehaničkog MDS sustava sa sl. 2—2, na kojega djeluje sila impulsnog oblika a veličine A. Diferencijalna je jednadžba:

$$M\ddot{x}+D\dot{x}+Sx=A\,\delta(t). \tag{3-107}$$

Kod rješavanja ove jednadžbe nailazimo na poteškoće jer se za partikularni integral moraju uvrstiti derivacije pobude $A\delta(t)$. Zato ćemo integrirati:

$$\dot{x}(t)-\dot{x}(0)+\frac{D}{M}[x(t)-x(0)]+\frac{S}{M}\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt=\frac{A}{M}\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,dt=\frac{A}{M}. \tag{3-108}$$



Sl. 3—25. Grafičko rješenje integrala konvolucije

Uz početne uvjete $\dot{x}(t)=x(t)=0$, dobijemo:

$$\dot{x}(t)+\frac{D}{M}x(t)+\frac{S}{M}\int_{-\infty}^{t}x(t)\,dt=\frac{A}{M}. \tag{3-109}$$

Kako svaki član ima dimenziju brzine, i A/M ima isti smisao kao da je početna brzina u trenutku $t=0$ jednaka $\dot{x}(0)$. Znači da ukupno rješenje uz pobudu oblika $\delta(t)$ odgovara rješenju homogenog sustava s početnim uvjetima $x(0)=0$ i $\dot{x}(0)=A/M$.

4. Analiza u području kompleksne varijable

Ja vučem čemer magle tvojih gorah,
Očajnost zvijezdah, što nad tobom niču,
U meni jeca sjena tvojih dvorah,
Moj otrcani, kraljski, banski Griču!

A. G. Matoš, »Gnijezdo bez sokola«

Rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi, pogotovu kad je riječ o jednadžbama višega reda ili o simultanim diferencijalnim jednadžbama, može biti veoma složeno; u svakom slučaju zahtijeva mnogo truda. U pokušaju da se postupak pri rješavanju pojednostavni, engleski fizičar O. Heaviside uspješno je primijenio tzv. operatorski račun[1]. On je zamijenio znak za operaciju derivacije $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ operatorom p. Tako se diferencijalna jednadžba:

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n x_i}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x_i}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} + a_0 x_i = b_0 x_u \tag{4-1}$$

pretvara u oblik:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)\, X_i = b_0 X_u. \tag{4-2}$$

Pri rješavanju te jednadžbe sa simbolom p se — uz mala ograničenja — formalno računa kao s faktorom, pa se daljnji postupak svodi na algebarske operacije. Međutim, treba imati na umu da je u rješenju p operator, a ne faktor. **Operator predstavlja preslikavanje funkcije na funkciju, dok je funkcija preslikavanje brojeva na brojeve.**

Ako se prisjetimo rješenja karakteristične jednadžbe $x_i = Ke^{\lambda t}$, možemo pisati:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \lambda K e^{\lambda t} = \lambda x_i. \tag{4-3}$$

Sličnim postupkom dobivamo dalje:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = \lambda^2 K e^{\lambda t} = \lambda^2 x_i, \tag{4-4}$$

kao i:

$$\int x_i \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} K e^{\lambda t} = \frac{1}{\lambda} x_i, \tag{4-5}$$

[1] Heaviside, O., On Operators in Physical Mathematics, Proc. Roy. Soc., A, 52, 1893, str. 504; 54, 1894, str. 105.

čime je operator p formalno izjednačen s korijenom karakteristične jednadžbe λ. Pri operaciji integracije uzimaju se konstante integracije jednakima nuli.

Iako je Heavisideova metoda davala ispravne rezultate, ona se nije temeljila na strogim matematičkim osnovama. Tek su mnogo kasnije T. J. Bromwich i K. W. Wagner pomoću linearne integralne transformacije, koju je P. S. Laplace uveo prije više od stotinjak godina, dokazali osnovanost operatorskog računa. Pod imenom Laplaceova transformacija ta se metoda danas široko primjenjuje pri rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima.

U ovom se poglavlju najprije razrađuje postupak Laplaceove transformacije, a nakon toga primjenjuje se pri rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi. Uvodi se vrlo koristan pojam prijenosne funkcije, koja služi u analizi složenih sustava bez protudjelovanja, dok se analiza složenih sustava s protudjelovanjem provodi izravno.

4.1. Laplaceova transformacija

Da bismo shvatili postupak pri računanju pomoću Laplaceove transformacije, možemo se prisjetiti poznatog postupka pri logaritmiranju. Pri logaritmiranju, operacije množenja i dijeljenja svode se na jednostavnije operacije zbrajanja i oduzimanja. Pri tome se koristimo logaritamskim tablicama, gdje je svakom decimalnom broju pridodan odgovarajući logaritam, tj. eksponent baze 10. Umjesto da se množe ili dijele »originali« brojeva, zbrajaju se ili odbijaju »slike« brojeva; gotov rezultat pretvori se pomoću tablica ponovno u područje »originala«, što je mnogo razumljiviji oblik decimalnog broja.

Na sličan način postoje i kod Laplaceove transformacije »originali« i »slike« funkcija i operacija, koje se nalaze u tablicama. Nakon što se jednadžba prevela iz područja »originala« u područje »slike«, operacije derivacije i integracije zamijenjene su mnogo jednostavnijim operacijama množenja i dijeljenja faktorom. Gotov se rezultat opet pomoću tablica prevodi u područje »originala«.

Kao što pri logaritmiranju nije potrebno poznavati teoriju da bi se moglo ispravno računati, tako je i pri Laplaceovoj transformaciji dovoljno poznavati pravila računanja, odnosno postupak. Unatoč tome, u slijedećim odjeljcima dat ćemo njezine teorijske osnove, jer Laplaceova transformacija povezuje vremenske funkcije iz područja »originala« s frekvencijskim funkcijama iz područja »slike«, pa na taj način dobivamo dublji uvid u područje vremenskog i frekvencijskog odziva.

Laplaceova transformacija vremenske funkcije $f(t)$ dana je nepravim integralom:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\mathrm{d}t. \tag{4-6}$$

Nakon integracije nestaje vrijeme t kao nezavisna varijabla, a izraz je još samo funkcija operatora s. Kao što pokazuje teorija [lit. 10, 19, 55] operator s je kompleksna frekvencija $\sigma+j\omega$, tako da izraz e^{-st} u jednadžbi (4-6) predstavlja prigušenje. Uvjet da se funkcija $f(t)$ može transformirati jest da je nepravi integral u jednadžbi (4-6) apsolutno konvergentan. To će biti u slučaju ako realna vrijednost

operatora zadovoljava uvjet $\sigma > \sigma_a$, gdje je σ_a realna pozitivna vrijednost kod koje je zadovoljena nejednadžba:

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-\sigma_a t} dt < \infty. \tag{4-7}$$

Za većinu stvarno primijenjenih funkcija izraz $F(s)$ je konvergentan[1]. U tome je i smisao množenja funkcije $f(t)$ s prigušnim faktorom e^{-st}. Napomenimo još da je transformacija ograničena na funkcije $f(t)$ koje su za $t<0$ identički jednake nuli. To je zanimljivo u regulacijskoj tehnici gdje se susreću tzv. problemi početnih uvjeta. Za rješenje jednadžbi sustava potrebno je poznavati početne uvjete u trenutku $t=0$, kao i pobudnu funkciju za $t>0$. Operacija transformacije obilježava se simbolički sa:

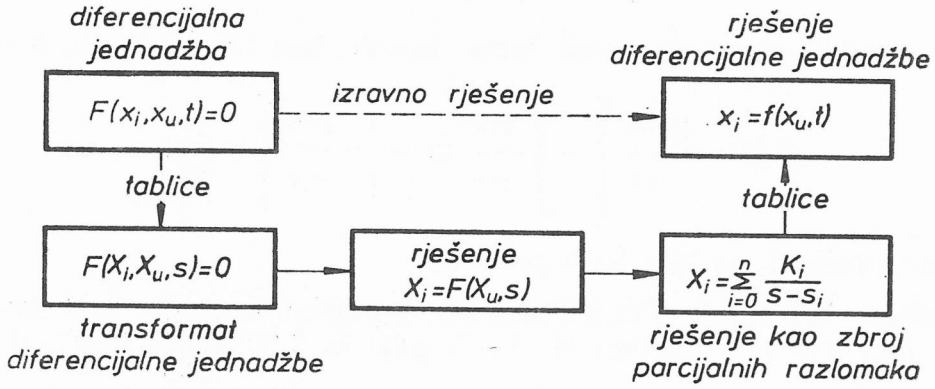
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]. \tag{4-8}$$

Funkcija $F(s)$ pretvara se u vremensku funkciju pomoću obratne Laplaceove transformacije koja je prikazana integralom kompleksne varijable:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds, \tag{4-9}$$

gdje opet mora vrijediti $\sigma > \sigma_a$, tako da je zadovoljen kriterij konvergencije (4-7). Analitička funkcija $F(s)$ integrira se po konturi površine koja leži desno od pravca udaljenog za σ_a usporedno s imaginarnom osi u s-ravnini (vidi sl. 15-5). Taj se pravac naziva i apscisa konvergencije, jer je transformirana funkcija $f(t)$ u području desno od tog pravca apsolutno konvergentna. Operacija obratne transformacije obilježava se simbolički sa:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]. \tag{4-10}$$



Sl. 4—1. Shematski prikaz primjene Laplaceove transformacije pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi

[1] Funkcije koje brže rastu nego što e^{-st} pada s vremenom, ne mogu se transformirati; primjer e^{t^2}.

Praktična korist Laplaceove transformacije svodi se na to da se pomoću jednadžbe (4-7) izračunaju korespondentni parovi $f(t)$ i $F(s)$ za sve najvažnije funkcije, a prikazani su u obliku tablica. Tako se prema dijagramu na sl. 4-1 **izbjegava izravno rješavanje diferencijalne jednadžbe,** pa se pomoću tablica (»rječnik«) nađu transformati i na temelju nekih osnovnih i razmjerno jednostavnih pravila (»gramatika«) rješenje u kompleksnom području. To se rješenje opet pomoću tablica prevodi u vremensko područje.

U odjeljku 15.3. izvodi se postupak Laplaceove transformacije u povezanosti s Fourierovim integralom, odnosno transformacijom.

4.1.1. Transformacija funkcija

Prema jednadžbi (4-6) izračunava se transformacija nekoliko osnovih funkcija.

Odskočna funkcija. Iz jednadžbe (4-6) dobit ćemo izravno:

$$\mathcal{L}[u(t)]=\int_0^\infty u(t)\,e^{-st}\,dt=\int_0^\infty 1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{s}. \tag{4-11}$$

Sličnu transformaciju ima i konstantna veličina K. Ako je uvrstimo umjesto $u(t)$ u jednadžbu (4-6), dobit ćemo kao i u gornjem izvodu K/s.

Nagibna funkcija. Uvrštenjem funkcije $f(t)=t$ u jednadžbu (4-6) dobit ćemo jednadžbu:

$$\mathcal{L}[t]=\int_0^\infty te^{-st}\,dt, \tag{4-12}$$

a njezino rješenje zahtijeva parcijalnu integraciju:

$$\int_0^\infty u\,dv=uv\Big|_0^\infty-\int_0^\infty v\,du. \tag{4-13}$$

Uvrstivši $u=t$ i $dv=e^{-st}\,dt$, dobit ćemo $du=dt$, kao i $v=-e^{-st}/s$, a to daje:

$$\mathcal{L}[t]=\frac{te^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{e^{-st}}{-s}\,dt=\frac{1}{s}\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{s^2}, \tag{4-14}$$

što možemo proširiti na bilo koju potenciju.

Impulsna funkcija. Transformaciju impulsne funkcije $\delta(t)$ izvest ćemo na osnovi definicije $\delta(t)$ prema sl. 3—2, gdje je $\delta(t)=\lim_{a\to 0}u(a,t)$, tj. granična vrijednost razlike dvaju jediničnih odskoka kad $a\to 0$. Dobit ćemo:

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=\int_0^\infty\lim_{a\to 0}u(a,t)\,e^{-st}\,dt=\lim_{a\to 0}\int_0^\infty\frac{1}{a}[u(t)-u(t-a)]e^{-st}\,dt, \tag{4-15}$$

Izraz u uglatoj zagradi možemo nadomjestiti jediničnom amplitudom u granicama od 0 do a. Pišemo dalje:

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\int_0^a 1\cdot e^{-st}dt=\lim_{a\to 0}\frac{1-e^{-sa}}{sa}. \tag{4-16}$$

Primjenjujući L'Hospitalovo pravilo za neodređeni izraz 0/0, dobivamo:

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=\lim_{a\to 0}\frac{\frac{d(1-e^{-sa})}{da}}{\frac{d(sa)}{da}}=\frac{s}{s}=1. \tag{4-17}$$

Važnost te jednostavne transformacije vidjet ćemo u odjeljku 4.3. kod definicije prijenosne funkcije.

Tablica 4—1. Laplaceova transformacija funkcija

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\sin\varphi+\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cos(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+a}$	$1-\cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
$t^{n-1}e^{-\alpha t}$	$\frac{(n-1)!}{(s+\alpha)^n}$	$t\cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$e^{-t/\alpha}$	$\frac{\alpha}{1+\alpha s}$	$\sin^2 \omega t$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$
$t^{n-1}e^{-t/\alpha}$	$\frac{a^n(n-1)!}{(1+\alpha s)^n}$	$\cos^2 \omega t$	$\frac{s^2+2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$
$e^{\alpha t}-e^{-\beta t}$	$\frac{\alpha-\beta}{(s-\alpha)(s-\beta)}$	$e^{-\alpha t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$\alpha e^{\alpha t}-\beta e^{\beta t}$	$\frac{(\alpha-\beta)s}{(s-\alpha)(s-\beta)}$	$e^{-\alpha t}\cos \omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-t/\alpha}-e^{-t/\beta}$	$\frac{\alpha-\beta}{(1+\alpha s)(1+\beta s)}$	$\operatorname{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$
$\alpha e^{-t/\beta}-\beta e^{t/\alpha}$	$\frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)s}{(1+\alpha s)(1+\beta s)}$	$\operatorname{ch} \beta t$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$

Eksponencijalna funkcija. Za prigušenu eksponencijalnu funkciju $e^{-\alpha t}$ transformacija se izračuna također izravno:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t}\,dt = \frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{s+\alpha}. \tag{4-18}$$

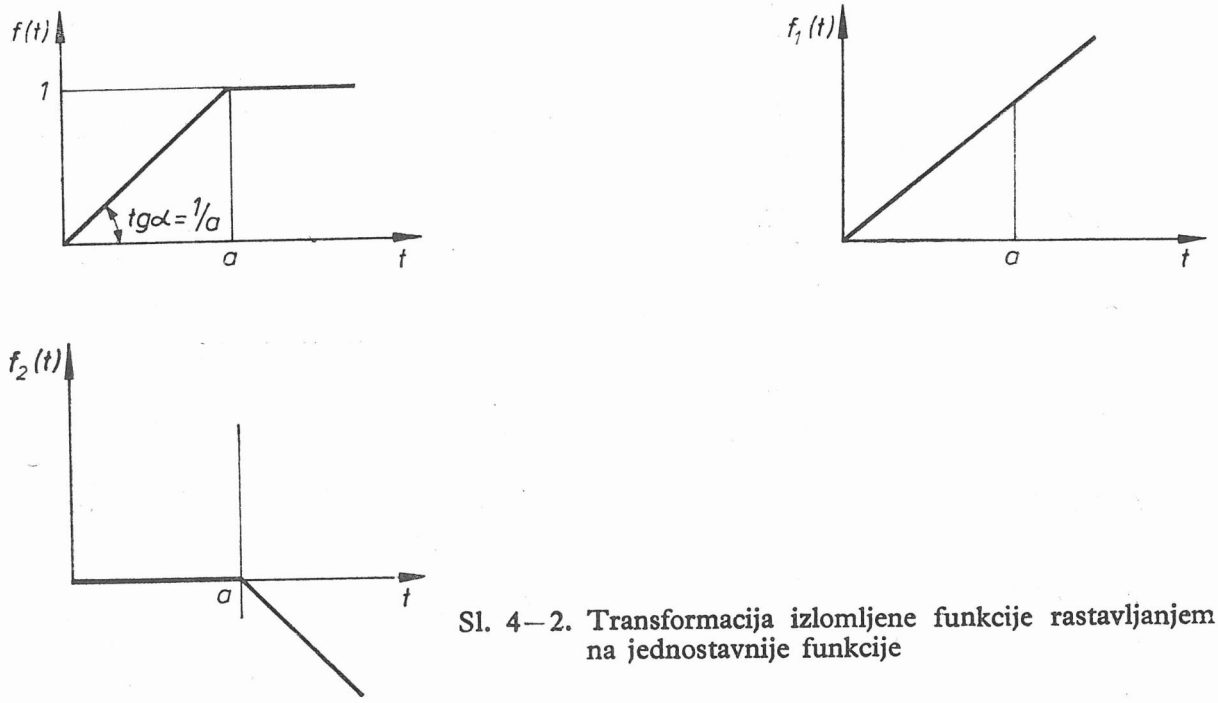
Sinusna funkcija. Umjesto funkcijom $\sin \omega t$ koristimo se njezinim eksponencijalnim oblikom:

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \int_0^\infty \sin \omega t e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot e^{-st}\,dt, \tag{4-19}$$

što dalje daje:

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j}\left[\frac{e^{(s-j\omega)t}}{-s+j\omega} - \frac{e^{-(s-j\omega)t}}{-s-j\omega}\right]_0^\infty = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{4-20}$$

Slično se primjenom jednadžbe (4-6) dobiju i drugi transformirani parovi ili korespondencije. Neki važniji transformati uneseni su u tablicu 4-1. U njoj se nalaze i kombinirane funkcije koje se pojavljuju često, kao npr. $e^{-\alpha t} \sin \omega t$. Tablica se, naravno, može znatno proširiti.



Sl. 4–2. Transformacija izlomljene funkcije rastavljanjem na jednostavnije funkcije

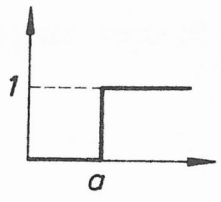
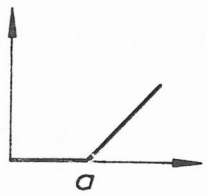
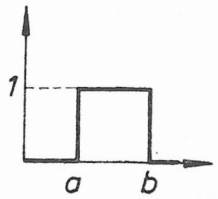
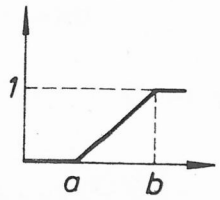
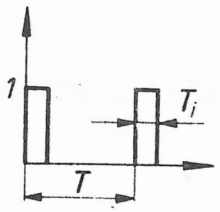
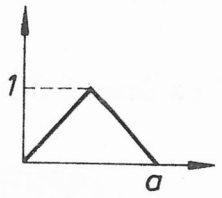
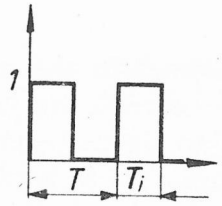
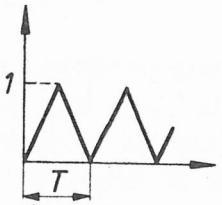
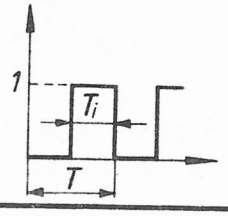
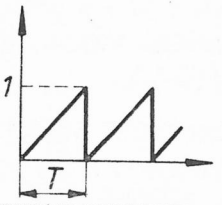
Da bi se još bolje sagledale mogućnosti analize pomoću Laplaceove transformacije, u tablici 4-2 prikazane su korespondencije nekih nekontinuiranih funkcija koje se u regulacijskim sustavima mogu pojaviti kao pobuda. Funkcije su u vremenskom području prikazane samo u grafičkom obliku, a njihov analitički oblik sastoji se od kombinacija odskočne, odnosno nagibne funkcije s pomakom.

Kao primjer transformacije nekontinuiranih funkcija uzimamo funkciju $f(t)$ prema sl. 4—2a. Ta se funkcija rastavlja prema sl. 4—2b i sl. 4—2c na dvije funkcije $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Svaki se član transformira posebno, pa se ukupna funkcija $f(t)$ dobije u jednostavnom operatorskom obliku:

$$F(s)=\frac{1}{as^2}-\frac{1}{as^2}e^{-as}, \tag{4-21}$$

kojeg smo drugi član dobili na osnovi teorema pomaka iz odjeljka 4.1. Vidimo da su i takvi složeni izrazi u području kompleksne varijable donekle jednostavni,

Tablica 4—2. Laplaceova transformacija nekontinuiranih funkcija

f(t)	F(s)	f(t)	F(s)
	$\frac{1}{s}e^{-as}$		$\frac{1}{s^2}e^{-as}$
	$\frac{1}{s}(e^{-as}-e^{-bs})$		$\frac{1}{s^2}(e^{-as}-e^{-bs})$
	$\frac{1-e^{T_i s}}{s(1-e^{-Ts})}$		$\frac{1}{s^2}(1-e^{-as/2})^2$
	$\frac{1}{s(1+e^{-Ts/2})}$ $T=2T_i$		$\frac{1-e^{-Ts/2}}{\frac{Ts}{2}(1+e^{-Ts/2})}$
	$\frac{1}{s(1+e^{-Ts/2})}$ $T=2T_i$		$\frac{Ts+1-e^{-Ts}}{Ts^2(1-e^{-Ts})}$

te se s njima mogu lako vršiti razne algebarske operacije što se pojavljuju pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi. U tablici 4-2 ima i nekoliko periodskih funkcija s periodom ponavljanja T, dok je vrijeme trajanja impulsa T_i.

4.1.2. Transformacija operacija

Za rješavanje diferencijalnih jednadžbi potrebno je poznavati transformaciju operacija derivacija i integracije.

Transformacija derivacije. Ta se transformacija može prikazati jednadžbom:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\,e^{-st}\,\mathrm{d}t, \tag{4-22}$$

gdje je potrebno primijeniti parcijalnu integraciju uz slijedeće zamjene:

$$u=e^{-st},\quad \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t,$$

a odatle

$$\mathrm{d}u=-se^{-st}\,\mathrm{d}t,\quad v=f(t).$$

To uvrstimo u izraz (4-22):

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=f(t)\,e^{-st}\Big|_0^\infty+s\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t. \tag{4-23}$$

Budući da je integral na desnoj strani transformirana funkcija $f(t)$, možemo odmah pisati:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=-f(0+)+s\,F(s). \tag{4-24}$$

Prvi član s desne strane predstavlja vrijednost funkcije u ishodištu ako mu se približava s desne strane. To je infinitezimalno vrijeme kasnije od $t=0$, što je dovoljno da se promijeni vrijednost odskočne funkcije, a nedovoljno da se promijene sve fizikalne veličine koje se mijenjaju u **konačnom vremenu.** To je zanimljivo za rješavanje problema s nekontinuiranošću u ishodištu, kao što je ukapčanje struje u trenutku $t=0$; član $f(0+)$ predstavlja vrijednost funkcije $f(t)$ neposredno iza ukapčanja. To je posebno važno, jer je u transformirani oblik uključena i početna vrijednost funkcije $f(0+)$.

Ovaj postupak možemo lako protegnuti i na više derivacije, samo tada polazimo od prve derivacije $sF(s)-f(0+)$ kao funkcije koju treba transformirati. Rezultati su sažeti u tablici 4-3.

Transformacija integracije. Da bismo proveli transformaciju integrala:

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right]=\int_0^\infty\left[\int f(t)\,dt\right]e^{-st}\,dt \tag{4-25}$$

najprije izvedemo parcijalnu integraciju pomoću zamjena:

$$u=f^{(-1)}(t)=\int f(t)\,dt,\quad dv=e^{-st}\,dt.$$

Operacija integracije skraćeno je označena sa $f^{(-1)}(t)$. Dobivamo:

$$du=f(t)\,dt,\quad v=-\frac{1}{s}e^{-st}.$$

To uvrstimo u jednadžbu (4-13):

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right]=\frac{1}{s}e^{-st}\int f(t)\,dt\Big|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt. \tag{4-26}$$

U toj jednadžbi prvi je član s desne strane jednak nuli na gornjoj granici zbog prigušnog člana $e^{-st}=e^{-\infty}=0$; na donjoj granici je $\lim_{t\to 0}\int f(t)\,dt=f^{(-1)}(0+)$. I ovdje se približavanjem $t\to 0$ pruža mogućnost da se obuhvate problemi s nekontinuiranostima u ishodištu. Integral u drugom članu s desne strane predstavlja upravo transformiranu funkciju $F(s)$. Konačno je:

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right]=\frac{f^{(-1)}(0+)}{s}+\frac{F(s)}{s}. \tag{4-27}$$

Prvi član s desne strane predstavlja konstantu integracije.

Tablica 4—3. Laplaceova transformacija derivacije i integracije

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0+)$	$f^{(-1)}(t)$	$\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0+)}{s}$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0+)-f'(0+)$	$f^{(-2)}(t)$	$\frac{F(s)}{s^2}+\frac{f^{(-1)}(0+)}{s^2}+\frac{f^{(-2)}(0+)}{s}$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{i=1}^{n}f^{(i-1)}(0+)\,s^{n-1}$	$f^{(-n)}(t)$	$\frac{F(s)}{s^n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(-i)}(0+)}{s^{n-i+1}}$

Uzevši transformirani jednostruki integral kao novu funkciju, možemo izvesti transformaciju dvostrukog i višestrukog integrala. I ti su rezultati prikazani u tablici 4-3. U posljednjem redu tablice prikazan je opći oblik transformirane operacije. Transformacija operacija derivacije i integracije zapravo je **množenje i dijeljenje s operatorom** s; pri tome početni uvjeti u transformaciji integracije nemaju gotovo nikakva značenja.

4.1.3. Dodatna svojstva Laplaceove transformacije

Uz upravo opisane transformacije operacija derivacije i integracije postoje još neka zanimljiva svojstva transformacije. To je nekoliko teorema koji omogućuju dublji uvid u bit transformacije i veoma su korisni u rješavanju regulacijskih problema.

Teorem linearnosti. Ako se funkcija $f(t)$ može transformirati u oblik $F(s)$, onda se pomoću jednadžbe (4-6) jednostavno dokazuje da vrijedi:

$$\mathcal{L}[af(t)]=aF(s), \tag{4-28}$$

kao i:

$$\mathcal{L}[f_1(t)\pm f_2(t)]=F_1(s)\pm F_2(s). \tag{4-29}$$

Slično se pomoću jednadžbe (4-10) može dokazati da je za obratnu transformaciju:

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s)]=af(t) \quad \text{za} \quad t\geqslant 0, \tag{4-30}$$

kao i:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)\pm F_2(s)]=f_1(t)\pm f_2(f) \quad \text{za} \quad t\geqslant 0. \tag{4-31}$$

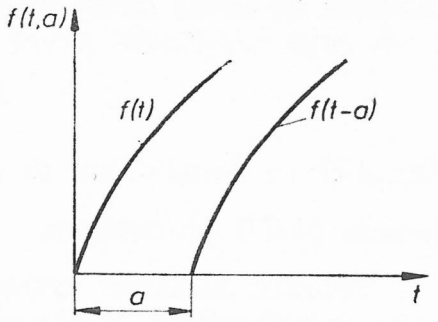
Teorem linearnosti važan je za probleme regulacije, jer se svaki član diferencijalne jednadžbe može zasebno transformirati, a zatim se svi jednostavno zbroje.

Teorem prigušenja. Ako se funkcija $f(t)$ pomnoži članom $e^{-\alpha t}$, gdje je $\alpha>0$, onda je funkcija $f(t)$ prigušena, jer s većim r postaje $e^{-\alpha t}f(t)$ sve manja. Transformacija daje:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)]=\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(t)e^{-st}\,dt=\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}f(t)\,dt=F(s+\alpha) \tag{4-32}$$

Dakle, prigušenju u području originala odgovara pomak ulijevo u području slike. Suprotno tome, raspirivanju u području originala, $\alpha<0$, odgovara pomak udesno u području slike.

Teorem pomaka. Može se postaviti i obratan problem: što se događa s transformiranom funkcijom, ako se funkcija u području originala pomakne, tj. uz $f(t-a)$? To je prikazano na sl. 4-3, gdje $f(t-a)$ ima isti oblik kao i $f(t)$, ali je vremenski pomaknuta za a. Iz slike se vidi da je $f(t)=0$ za $t<0$, a $f(t-a)=0$ za $t<a$.



Sl. 4–3. Izvod teorema pomaka

Zamjenom varijable $\tau=(t-a)$ dobit ćemo:

$$\mathcal{L}\,[f(t-a)]=\int_0^\infty f(t-a)\,e^{-st}\,dt=\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}\,f(\tau)\,d\tau, \tag{4-33}$$

jer je donja granica integracije pomaknuta od 0 na $-a$. Dalje je:

$$\mathcal{L}\,[f(t-a)]=e^{-as}\int_{-a}^{\infty} e^{-st}f(\tau)\,d\tau=e^{-as}\int_0^\infty e^{-st}f(\tau)\,d\tau=e^{-as}F(s), \tag{4-34}$$

gdje otpada integracija od $-a$ do 0, budući da je $f(\tau)=0$ za $\tau<0$.

Važan u regulacijskoj tehnici jest pomak odskočne funkcije $u(t)$ (mrtvo vrijeme!). Transformaciju izvodimo izravno iz jednadžbe (4-34):

$$\mathcal{L}\,[u(t-a)]=e^{-as}F(s)=e^{-as}\frac{1}{s}. \tag{4-35}$$

Jednako je važan i pomak impulsne funkcije $\delta(t)$ kojim se koristimo pri uvođenju z-transformacije u impulsnim sustavima[1]. I ovdje se transformat izvodi izravno iz izraza (4-34):

$$\mathcal{L}\,[\delta(t-a)]=e^{-as}.\ F(s)=e^{-as}. \tag{4-36}$$

Teorem početne vrijednosti. Ako se funkcija $f(t)$ kao i njezina derivacija $f'(t)$ mogu transformirati, onda vrijedi tzv. teorem početne vrijednosti:

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} s\,F(s). \tag{4-37}$$

Da bismo dokazali taj teorem, polazimo od transformacije derivacije, i tražimo graničnu vrijednost uz $s\to\infty$:

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty f'(t)\,e^{-st}dt=\lim_{s\to\infty}[s\,F(s)-f(0+)]. \tag{4-38}$$

Kod lijevog izraza trebalo bi najprije da integriramo, a tek onda pustimo da $s\to\infty$. Kako je međutim s samo parametar, a ne i funkcija od t, i kako je postojanje

[1] Vidi odjeljak 11. 1.

integrala na lijevoj strani sadržano u transformaciji derivacije, možemo pustiti da $s\to\infty$ prije integracije. Jasno je da je pritom lijeva strana jednaka nuli, što daje:

$$0=\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0+)] \tag{4-39}$$

Drugi član s desne strane ne ovisi o s; budući da možemo pisati $\lim_{t\to 0} f(t)=f(0+)$, teorem (4-37) je dokazan.

Teorem konačne vrijednosti. Ako se funkcija $f(t)$ i njezina derivacija $f'(t)$ mogu transformirati, tj. ako postoji konačna vrijednost $f(t)$ kad $t\to\infty$, vrijedi tzv. teorem konačne vrijednosti:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s). \tag{4-40}$$

Dokazivanje tog teorema započinjemo opet transformacijom derivacije, ali ovdje tražimo graničnu vrijednost uz $s\to 0$:

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt=\lim_{s\to 0}[sF(s)-f(0+)]. \tag{4-41}$$

Uz iste argumente kao i kod teorema početne vrijednosti, možemo pustiti da $s\to 0$ prije integracije. Lijeva strana jednadžbe (4-41) dobiva nakon toga oblik:

$$\int_0^\infty f'(t)\,dt=\lim_{t\to\infty}\int_0^t f'(t)\,dt=\lim_{t\to\infty}[f(t)-f(0+)] \tag{4-42}$$

te se može izjednačiti s desnom stranom jednadžbe (4-41). Kako je $f(0+)$ neovisna i o s i o t, možemo $f(0+)$ kratiti s obje strane, čime smo dokazali teorem (4-40).

Oba teorema, i početne i konačne vrijednosti, imaju veliko praktično značenje u rješavanju regulacijskih problema. Pomoću teorema konačne vrijednosti određuje se npr. trajno regulacijsko odstupanje e_0 u s stacionarnim uvjetima rada, a da se ne izvodi obratna transformacija[1].

Primjer 4.1. Uzimamo regulaciju toplinske peći. Transformirani oblik jednadžbe toplinske peći je $G_S(s)=\dfrac{1}{1+900s}e^{-120s}$, a prijenosna funkcija regulatora $G_R(s)=10$. Uz odskočnu promjenu nazivne vrijednosti temperature od 800°C na 1 000°C transformat pobudne funkcije je $W(s)=\dfrac{200}{s}$. Postavlja se pitanje koliko će biti e_0.

Koristimo se izrazom (8-17), kamo uvrstimo $G(s)=G_R(s)\,G_S(s)$:

$$e_0=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_0(s)}W(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+10\cdot\dfrac{1}{1+900s}e^{-120s}}\cdot\frac{200}{s}=18{,}2°\text{C}.$$

To nije relativna vrijednost, već apsolutni iznos. Znači da se uz danu pobudu i poznati sustav dobije trajno regulacijsko odstupanje od 18,2°C od nove nazivne vrijednosti 1 000°C.

[1] Vidi odjeljak 8.2.

Teorem konvolucije. Sve dosadašnje transformacije i teoreme izvodili smo na osnovi definicije Laplaceove transformacije prema jednadžbi (4-6), a odnosili su se na jednu funkciju. Teorem konvolucije, međutim, mnogo je zamršeniji i odnosi se na dvije funkcije. Tim teoremom dokazuje se da postoji funkcionalna ovisnost:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)\,F_2(s)]=\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau, \tag{4-43}$$

ako se mogu izvesti transformacije $F_1(s)$ i $F_2(s)$ originalnih funkcija $f_1(t)$ i $f_2(t)$.

Neka je integral na desnoj strani jednadžbe (4-43) funkcija vremena $f(t)$. Transformat je te funkcije:

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau\right]dt. \tag{4-44}$$

Ako je $f_2(t-\tau)=0$ za negativne vrijednosti argumenta, tj. $(t-\tau)<0$, onda se za $\tau>t$ gornja granica integracije može promijeniti u ∞:

$$\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau=\int_0^\infty f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{4-45}$$

što uvrstimo u jednadžbu (4-44). U njoj možemo promijeniti red integracije:

$$F(s)=\int_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau\int_0^\infty f_2(t-\tau)\,e^{-st}\,dt. \tag{4-46}$$

Zamjenom $\lambda=t-\tau$, $d\lambda=dt$, dobivamo dalje:

$$F(s)=\int_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau\int_{-\tau}^\infty f_2(\lambda)\,e^{-s\tau}e^{-s\lambda}d\lambda \tag{4-47}$$

Donja granica integrala na desnoj strani $-\tau$ može se zamijeniti nulom: budući da je $f_2(t-\tau)=0$ za $(t-\tau)<0$, integrand je $f_2(\lambda)=0$ za $\lambda<0$. Taj izraz preuredimo tako što odijelimo varijable τ i λ:

$$F(s)=\left[\int_0^\infty f_1(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau\right]\left[\int_0^\infty f_2(\lambda)\,e^{-s\lambda}d\lambda\right]=F_1(s)\,F_2(s), \tag{4-48}$$

čime je dokazana jednadžba (4-43).

Budući da poredak funkcija u umnošku $F_1(s)\,F_2(s)$ nije bitan, možemo pisati i drugi oblik teorema konvolucije:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f_2(\tau)\,f_1(t-\tau)\,d\tau, \qquad (4\text{-}49)$$

što izvodimo na analogan način kao i jednadžbu (4-43). Dakle, složena operacija konvolucije vremenskih funkcija $f_1(t)$ i $f_2(t)$ u vremenskom području svodi se na mnogo jednostavniju operaciju množenja njihovih transformata $F_1(s)$ i $F_2(s)$ u području kompleksne varijable.

Primjer 4.2. Uzimamo isti primjer kao i u odjeljku 3.4. Vremenske funkcije $f_1(t)=\sin 10\pi t$ i $f_2(t)=2t$ konvolviraju se u vremenskom području pomoću jednoga od dva izraza:

$$f(t)=\int_0^t(\sin 10\pi\tau)\,[2(t-\tau)]\,d\tau,$$

$$f(t)=\int_0^\infty 2\tau\,[\sin 10\pi(t-\tau)]\,d\tau.$$

Primjenjujući prvi izraz, dobivamo rezultat:

$$f(t)=\int_0^t(\sin 10\pi\tau)\,[2(t-\tau)]\,d\tau=\frac{2t}{10\pi}-\frac{2}{100\pi^2}\sin 10\pi t$$

koji je bio izveden u primjeru 3.3.

Konvoluciju možemo izvesti i jednostavnije: transformacijom u područje kompleksne varijable. Transformati su:

$$\mathcal{L}[\sin 10\pi t]=F_1(s)=\frac{10\pi}{s^2+100\pi^2},$$

$$\mathcal{L}[2t]=F_2(s)=\frac{2}{s^2}.$$

Ako njihov umnožak:

$$F(s)=F_1(s)\,F_2(s)=\frac{10\pi}{s^2+100\pi^2}\cdot\frac{2}{s^2}$$

razložimo metodom parcijalnih razlomaka u zbroj jednostavnih članova[1], i svaki od njih pomoću tablica prenesemo u vremensko područje, rezultat ćemo dobiti jednostavnije.

U tablici 4—4 dan je pregled osnovnih teorema. Iz njih se mogu izvesti nove korespondencije od kojih su neke unesene u tablicu.

---

[1] Vidi odjeljak 4.1.4.

Tablica 4—4. Teoremi Laplaceove transformacije

$f(t)$	$F(s)$
$af(t)$	$aF(s)$
$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$	$a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$
$f(t-a),\ t>a\geq 0$ $0,\quad t<0$	$e^{-as}F(s)$
$f(bt-a),\ t>a/b$ $0\ ,\ t<a/b$ $\Big\}\ a,\ b>0$	$\frac{1}{b}e^{-as/b}F\left(\frac{s}{b}\right)$
$e^{-\alpha t}f(t)$	$F(s+\alpha)$
$e^{\alpha t/\beta}f\left(\frac{t}{\beta}\right),\quad \alpha>0$	$\beta F(\beta s-\alpha)$
$f\left(\frac{t}{\alpha}\right),\quad \alpha>0$	$\alpha F(\alpha s)$
$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} s F(s)$
$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} s F(s)$
$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$	$F_1(s)\,F_2(s)$

4.1.4. Obratna transformacija

Obratna se transformacija prema jednadžbi (4-9) svodi na izračunavanje krivuljnog integrala u kompleksnoj ravnini. Kako je pritom izravni put težak, u obratnoj transformaciji primjenjuju se jednostavnije metode. Tako se kod jednostavnijih funkcija $F(s)$ primjenjuju tablice funkcija, kao što je npr. tablica 4—1. Kod složenijih funkcija $F(s)$ primjenjuje se rastavljanje na zbroj parcijalnih razlomaka; ti su razlomci jednostavni i svaki se pomoću tablica prevodi u vremensko područje. Spomenimo još jednu metodu — Heavisideov teorem razvoja [lit. 10, 55, 66], koji se svodi na zbroj parcijalnih razlomaka.

Metoda parcijalnih razlomaka. Kod regulacijskih problema susreće se transformirana funkcija $F(s)$ u općem obliku:

$$F(s)=\frac{B(s)}{N(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}b^{m-1}+\ldots b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}, \tag{4-50}$$

gdje eksponent nazivnika n mora biti veći od eksponenta brojnika m jer je za većinu stvarnih tehničkih sustava to racionalan razlomak. Osim toga, brojnik i nazivnik jednadžbe podijeljeni su koeficijentom a_n, tako da najviša potencija u nazivniku

ima koeficijent 1. Nazivnik se prema osnovnom teoremu algebre može pisati u obliku umnoška faktora:

$$F(s)=\frac{B(s)}{N(s)}=\frac{B(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\ldots(s+s_i)\ldots(s+s_n)}. \tag{4-51}$$

Ovdje su s_i korijeni nazivnika $N(s)$, tj. vrijednosti od s za koje je $N(s)=0$. Slijedeći je korak rastavljanje razlomka na zbroj parcijalnih razlomaka:

$$F(s)=\frac{B(s)}{N(s)}=\frac{K_1}{s+s_1}+\frac{K_2}{s+s_2}+\ldots+\frac{K_i}{s+s_i}+\ldots+\frac{K_n}{s+s_n}, \tag{4-52}$$

gdje je koeficijent K_i konstanta koju treba izračunati. U teoriji kompleksne varijable nazivaju se takvi koeficijenti **rezidui** funkcije $F(s)$ u odgovarajućim polovima $s=-s_i$.

Korijeni u nazivniku mogu biti realni i različiti, višestruki realni ili konjugirano kompleksni. Zasebno ćemo potražiti rješenje za svaki od ova tri slučaja.

Realni i različiti korijeni. Bilo koji koeficijent u jednadžbi (4-52) naći ćemo množenjem cijele jednadžbe sa $(s+s_i)$:

$$(s+s_i)\frac{B(s)}{N(s)}=K_1\frac{s+s_i}{s+s_1}+K_2\frac{s+s_i}{s+s_2}+\ldots+K_i+\ldots K_n\frac{s+s_i}{s+s_n}. \tag{4-53}$$

Uz $s=-s_i$ dobivamo izravno koeficijent K_i:

$$K_i=[(s+s_i)F(s)]_{s=-s_i}=\frac{B(s)}{(s+s_1)\ldots(s+s_{i-1})(s+s_{i+1})\ldots(s+s_n)}. \tag{4-54}$$

Obratnu transformaciju pojedinog člana naći ćemo iz tablice 4—1:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_i}{s+s_i}\right]=K_ie^{-s_it} \quad \text{za} \quad t\geqslant 0, \tag{4-55}$$

a cijela je obratna transformacija funkcije $F(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=K_1e^{-s_1t}+K_2e^{-s_2t}+\ldots+K_ie^{-s_it}+\ldots+K_ne^{-s_nt} \tag{4-56}$$

Primjer 4.3. Uzmimo jednostavnu funkciju:

$$F(s)=\frac{B(s)}{N(s)}=\frac{3s+7}{s^2-2s+3}=\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}=\frac{K_1}{s-3}+\frac{K_2}{s+1}.$$

Koeficijent K_1 izračunamo iz:

$$K_1=[(s-s_1)F(s)]_{s=-s_1}=\left.\frac{3s+7}{s+1}\right|_{s=3}=\frac{16}{4}=4,$$

a koeficijent K_2 iz:

$$K_2=[(s-s_2)F(s)]_{s=-s_2}=\left.\frac{3s+7}{s-3}\right|_{s=-1}=\frac{4}{-4}=-1,$$

tako da je obratna transformacija funkcije:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s-3}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+1}\right]=4e^{3t}-e^{-t}.$$

Ako je jedan korijen u ishodištu, stavimo $s_i=0$, a inače je cijeli postupak jednak.

Višestruki realni korijeni. Metoda traženja koeficijenata ovdje je nešto složenija. Prikazat ćemo to na primjeru dvostrukog korijena. Rastavljanje se vrši prema obrascu:

$$F(s)=\frac{B(s)}{N(s)}=\frac{1}{(s+s_1)(s+s_2)^2}=\frac{K_1}{s+s_1}+\frac{K_{22}}{(s+s_2)^2}+\frac{K_{21}}{s+s_2}. \tag{4-57}$$

Proširenje u parcijalne razlomke mora sadržavati sve potencije. Koeficijent K_1 izračunava se normalno: pomnožima obje strane jednadžbe sa $(s+s_1)$ i stavimo $s=-s_1$. Na sličan način se izračuna i koeficijent K_{22}; množimo sa $(s+s_2)^2$ i stavimo $s=-s_2$. Na desnoj strani ostaje samo K_{22}:

$$K_{22}=[(s+s_2)^2F(s)]_{s=-s_2}. \tag{4-58}$$

K_{21} se ne može naći na isti način. Pomnožimo li obje strane jednadžbe (4-57) sa $(s+s_2)$ i uvrstimo $s=-s_2$, obje strane postaju ∞, pa je K_{21} neodređen. Zato ćemo jednadžbu (4-57) pomnožiti sa $(s+s_2)^2$ i derivirati po s:

$$\frac{d}{ds}[(s+s_2)^2F(s)]=\frac{d}{ds}\left[K_1\frac{(s+s_2)^2}{s+s_1}+K_{22}+K_{21}(s+s_2)\right]=$$

$$=K_1\frac{2(s+s_2)(s+s_1)-(s+s_2)^2}{(s+s_1)^2}+K_{21}. \tag{4-59}$$

Uz $s=-s_2$ ostaje na desnoj strani jednadžbe samo koeficijent K_{21}, tako da dobivamo:

$$K_{21}=\frac{d}{ds}[(s+s_2)^2F(s)]_{s=-s_2}. \tag{4-60}$$

To se može i poopćiti na koeficijente[1] članova čiji se korijeni n puta ponavljaju. Iz jednadžbe:

$$\frac{1}{(s+s_1)(s+s_i)^n}=\frac{K_1}{s+s_1}+\frac{K_{in}}{(s+s_i)^n}+\ldots+\frac{K_{i(n-1)}}{(s+s_i)^{n-1}}+\ldots+\frac{K_{i1}}{s+s_i} \tag{4-61}$$

dobijemo koeficijente:

$$K_{i,n-k}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{ds^k}[(s+s_i)^nF(s)]_{s=-s_i}\quad\text{za } k=1, 2, \ldots, (n-1). \tag{4-62}$$

[1] Rezidui su koeficijenti pridruženi parcijalnim razlomcima 1. reda; to su u jednadžbi (4-64) samo K_1 i K_{i1}.

Konjugirano kompleksni korijeni. I ovdje ćemo početi primjerom:

$$F(s)=\frac{B(s)}{N(s)}=\frac{1}{[(s+a)^2+b^2]\,(s+s_1)}, \tag{4-63}$$

gdje su u nazivniku konjugirano kompleksni korijeni i običan korijen. To dalje možemo rastaviti u zbroj parcijalnih razlomaka:

$$F(s)=\frac{1}{(s+a-jb)\,(s+a+jb)\,(s+s_1)}+\frac{K_1}{s+s_1}+\frac{K_2}{s+a-jb}+\frac{\bar{K}_2}{s+a+jb}. \tag{4-64}$$

Koeficijent K_1 dobit ćemo jednostavno iz:

$$K_1=[(s+s_1)\cdot F(s)]_{s=-s_1}=\frac{1}{(s_1+a)^2+b^2}. \tag{4-65}$$

Nadalje, izračunaju se koeficijenti K_2:

$$K_2=[(s+a-jb)\,F(s)]_{s=-a+jb}=\frac{1}{j2b\,(s_1-a+jb)}=$$

$$=-j\frac{1}{2b}\cdot\frac{(s_1-a)-jb}{[(s_1-a)+jb]\,[(b_1-a)-jb]}=\frac{-b-j\,(s_1-a)}{2b\,[(s_1-a)^2+b^2]} \tag{4-66}$$

kao i koeficijent $\bar{K}_2$:

$$\bar{K}_2=[(s+a-jb)\,F(s)]_{s=-a-jb}=\frac{1}{(-j2b)\,(-a-jb+s_1)}=$$

$$=j\frac{1}{2b}\cdot\frac{(s_1-a)+jb}{[(s_1-a)-jb]\,[(s_1-a)+jb]}=\frac{-b+j\,(s_1-a)}{2b[(s_1-a)^2+b^2]}. \tag{4-67}$$

Iz navedenih jednadžbi vidimo da su K_2 i $\bar{K}_2$ doista konjugirano kompleksni par, što je već u jednadžbi (4-64) bilo naznačeno.

Obratna je transformacija od $F(s)$:

$$f(t)=K_1e^{-s_1t}+K_2e^{(-a+jb)\,t}+\bar{K}_2e^{(-a-jb)\,t}. \tag{4-68}$$

Zbog jednostavnosti sažimamo zadnja dva člana s desne strane u jedan. Pri tome se koristimo činjenicom da su K_2 i $\bar{K}_2$ konjugirano kompleksni brojevi. Oni imaju jednake amplitude, a fazni pomaci su im suprotnog predznaka. Jednadžbu (4-68) možemo pisati:

$$f(t)=K_1e^{-s_1t}+|K_2|e^{j\varphi}e^{(-a+jb)\,t}+|K_2|e^{-j\varphi}e^{(-a-jb)\,t}. \tag{4-69}$$

Pomoću Eulerove formule možemo gornju jednadžbu preurediti:

$$f(t)=K_1e^{-s_1t}+|K_2|e^{-at}\,[e^{j(bt+\varphi)}+e^{-j(bt+\varphi)}]=$$

$$=K_1e^{-s_1t}+2|K_2|e^{-at}\cos(bt+\varphi), \tag{4-70}$$

gdje se amplituda K_2 i fazni pomak φ određuju iz jednadžbe (4-66):

$$|K_2|=\frac{1}{2b\sqrt{(s_1-a)^2+b^2}}$$
$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{Im}[K_2]}{\operatorname{Re}[K_2]}=\operatorname{arc\,tg}\frac{s_1-a}{b} \qquad (4\text{-}71)$$

Ako dakle u nazivniku funkcije $F(s)$ u jednadžbi (4-64) postoje konjugirano kompleksni korijeni, oni se kod obratne transformacije očituju u harmoničkom članu.

Primjer 4.4. Za obratnu transformaciju s konjugirano kompleksnim korijenima uzimamo jednadžbu:

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)},$$

gdje je realni korijen jednak nuli. Rastavljena na zbroj parcijalnih razlomaka ta jednadžba glasi:

$$F(s)=\frac{K_2}{s+1-j1}+\frac{\overline{K}_2}{s+1+j1}+\frac{K_1}{s}.$$

Koeficijenti se izračunaju prema jednadžbi (4-65):

$$K_1=[s\,F(s)]_{s=0}=\left.\frac{1}{s^2+2s+2}\right|_{s=0}=0{,}5$$

i prema jednadžbi (4-66):

$$K_2=[(s+a-jb)\,F(s)]_{s=-a+jb}=\left.\frac{1}{s(s+1+j1)}\right|_{s=-1+j1}=$$
$$=\frac{1}{(-1+j1)(j2)}=0{,}35\underline{/135°}.$$

Transformirana je vremenska funkcija prema tome:

$$f(t)=0{,}7e^{-t}\cos(t+135°)+0{,}5.$$

Heavisideov teorem razvoja. Polazeći od jednadžbe (4-51), možemo koeficijente K_i izračunati tako da obje strane jednadžbe pomnožimo sa $(s+s_i)$ i da nađemo graničnu vrijednost kad $s\to -s_i$. Pomoću L'Hospitalova pravila dobivamo:

$$K_i=\lim_{s\to -s_i}\frac{B(s)}{N(s)}(s+s_i)=\lim_{s\to -s_i}B(s)\lim_{s\to -s_i}\frac{s+s_i}{N(s)}=$$
$$=B(-s_i)\lim_{s\to -s_i}\frac{1}{N'(s)}=\frac{B(-s_i)}{N'(-s_i)}, \qquad (4\text{-}72)$$

što uvrstimo u jednadžbu (4-51):

$$F(s)=\frac{B(-s_1)}{N'(-s_1)}\cdot\frac{1}{(s+s_1)}+\frac{B(-s_2)}{N'(-s_2)}\cdot\frac{1}{(s+s_2)}+\ldots+$$

$$+\frac{B(-s_i)}{N'(-s_i)}\cdot\frac{1}{(s+s_i)}+\ldots+\frac{B(-s_n)}{N'(-s_n)}\cdot\frac{1}{(s+s_n)}. \tag{4-73}$$

Obratna je transformacija:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B(s)}{N(s)}\right]=\frac{B(-s_1)}{N'(-s_1)}e^{-s_1t}+\frac{B(-s_2)}{N'(-s_2)}e^{-s_2t}+\ldots+$$

$$+\frac{B(-s_i)}{N'(-s_1)}e^{-s_it}+\ldots+\frac{B(-s_n)}{N'(-s_n)}e^{-s_nt}, \tag{4-74}$$

što možemo pisati sažeto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B(s)}{N(s)}\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{B(-s_i)}{N'(-s_i)}e^{-s_it}. \tag{4-75}$$

Primjer 4.5. Neka je funkcija koju treba obratno transformirati:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)]}\right].$$

Nazivnik je:

$$N(s)=(s+1)(s-2)(s-3)=s^3-4s^2+s+6,$$

a njegova derivacija:

$$N'(s)=3s^2-8s+1.$$

Rješenje u vremenskom području dobivamo prema jednadžbi (4-75):

$$f(t)=\frac{B(-1)}{N'(-1)}e^{-t}+\frac{B(2)}{N'(2)}e^{2t}+\frac{B(3)}{N'(3)}e^{3t}=-\frac{2}{12}e^{-t}+\frac{4}{-3}e^{2t}+\frac{14}{4}e^{3t},$$

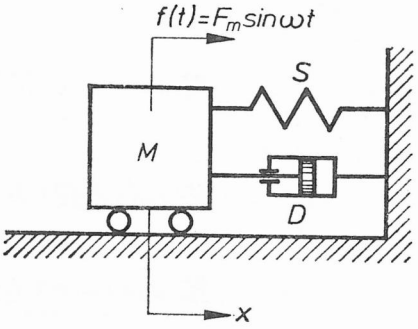
i dalje:

$$f(t)=-\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{7}{2}e^{3t}.$$

4.2. Rješavanje diferencijalnih jednadžbi

Na osnovi izloženih pravila računanja pomoću Laplaceove transformacije, možemo linearnu diferencijalnu jednadžbu riješiti na slijedeći način:
- svaki član diferencijalne jednadžbe transformiramo iz područja »originala« u područje »slike«,
- u tako dobivenoj jednadžbi nađemo pomoću algebarskih operacija rješenje $F(s)$, i u to rješenje uvrstimo vrijednosti za početne uvjete,
- rješenje ima oblik racionalnog razlomka; ako je nazivnik reda višeg od drugoga, $F(s)$ rastavimo u zbroj parcijalnih razlomaka,
- svaki član tako dobivene jednadžbe transformiramo iz područja »slike« u područje »originala«, što predstavlja rješenje $f(t)$.

U regulacijskoj tehnici često je dovoljno da potražimo samo rješenje u području »slike«, jer i transformirana funkcija $F(s)$ daje sve podatke potrebne u analizi i sintezi sustava.



Sl. 4—4. Sinusna pobuda djeluje na mehanički MDS sustav--primjer 4.6

Primjer 4.6. Uzmimo jednostavan mehanički sustav prema sl. 4—4. Sustav ima masu $M=20$ kg, koeficijent viskoznog trenja $D=60$ kgs^{-1}, a krutost je opruge $S=40$kgs^{-2}. Narinuta sila neka je harmoničkog oblika $f(t)=F_m \sin \omega t$ s amplitudom $F_m=20$ N i kružnom frekvencijom $\omega=2$ s^{-1}. U početku promatranja sustava položaj je mase $x(0)=0$, a njezina brzina $\dot{x}(0)=2$ ms^{-1}.

Jednadžbu koja opisuje sustav:

$$M\ddot{x}+D\dot{x}+Sx=F_m \sin \omega t$$

podijelimo sa M:

$$\ddot{x}+\frac{D}{M}\dot{x}+\frac{S}{M}x=\frac{F_m}{M}\sin \omega t$$

i transformiramo svaki član:

$$[s^2X(s)-sx(0+)-\dot{x}(0+)]+\frac{D}{M}[sX(s)-x(0+)]+\frac{S}{M}X(s)=$$

$$=\frac{F_m}{M}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Ta se jednadžba rješava po transformiranoj zavisnoj varijabli $X(s)$:

$$X(s)=\frac{\left[s+\frac{D}{M}\right]x(0+)+\dot{x}(0+)}{s^2+\frac{D}{M}s+\frac{S}{M}}+\frac{\frac{F_m}{M}\omega}{\left[s^2+\frac{D}{M}s+\frac{S}{M}\right](s^2+\omega^2)}.$$

Prvi član odgovara komplementarnoj funkciji i sadrži početne uvjete $x(0)$ i $\dot{x}(0)$, a drugi član odgovara partikularnom integralu i sadrži transformat pobudne funkcije $f(t)$.

U gornju jednadžbu uvrstimo brojčane vrijednosti:

$$X(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}+\frac{2}{(s^2+3s+2)(s^2+4)}=\frac{2(s^2+5)}{(s+2)(s+1)(s^2+4)},$$

što rastavimo u zbroj parcijalnih razlomaka:

$$X(s)=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+j2}+\frac{\overline{K}_3}{s-j2}.$$

Vrijednost je pojedinih koeficijenata:

$$K_1=(s+1)X(s)\Big|_{s=-1}=\frac{2(s^2+5)}{(s+2)(s^2+4)}\Big|_{s=-1}=2{,}4,$$

$$K_2=(s+2)X(s)\Big|_{s=-2}=\frac{2(s^2+5)}{(s+1)(s^2+4)}\Big|_{s=-2}=-2{,}25,$$

$$K_3=(s+j2)X(s)\Big|_{s=-j2}=\frac{2(s^2+5)}{(s+1)(s^2+4)}\Big|_{s=-j2}=\underline{1/63{,}45°},$$

$$\overline{K}_3=\underline{1/-63{,}45°},$$

što uvrstimo u zbroj parcijalnih razlomaka:

$$X(s)=\frac{2{,}4}{s+1}-\frac{2{,}25}{s+2}+\frac{\underline{1/63{,}45°}}{s+j2}+\frac{\underline{1/-63{,}45°}}{s-j2}.$$

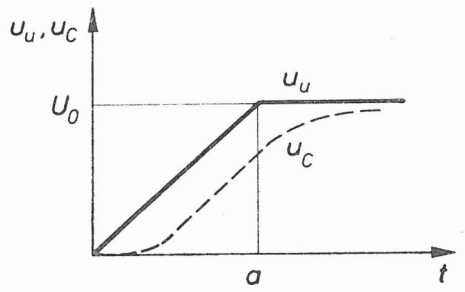
Obratna transformacija navedenog izraza daje rješenje u vremenskom području:

$$x(t)=2{,}4\,e^{-t}-2{,}25\,e^{-2t}+2\cos(2t+63{,}45°).$$

Primjer 4.7. Prednost računanja pomoću Laplaceove transformacije očituje se i kad na sustav djeluje nekontinuirana funkcija na ulazu, kao što je npr. ona na sl. 4—5. Neka ta pobuda ima amplitudu $U_0=12$ V, uz $a=0{,}04$ s, a djeluje na RC-sustav gdje su $R=100$ kΩ i $C=0{,}2$ μF. Kao odziv se traži napon kondenzatora.

Diferencijalna je jednadžba tog sustava:

$$\tau\frac{du_C}{dt}+u_C=u_u(t).$$



Sl. 4—5. Impulsna pobuda djeluje na električni RC-sustav — primjer 4.7

Uz početne uvjete jednake nuli pišemo jednostavan transformirani oblik:

$$U_C(s)=\frac{U_u(s)}{\tau}\cdot\frac{1}{s+1/\tau}.$$

Koristeći se jednadžbom (4—21), možemo za pobudnu funkciju pisati izraz:

$$U_u(s)=\frac{U_0}{as^2}(1-e^{-as}).$$

To uvrstimo u izraz za odzivnu funkciju $U_C(s)$, pa dobijemo:

$$U_C(s)=\frac{U_0}{a\tau s^2}\cdot\frac{1}{s+1/\tau}-\frac{U_0}{a\tau s^2}\cdot\frac{1}{s+1/\tau}e^{-as}.$$

Za $0<t<a$ drugi član s desne strane ne treba uzeti u obzir. Rješenje sa samo prvim članom u tom intervalu dobijemo pomoću metode parcijalnih razlomaka:

$$U_{C1}(s)=\frac{U_0}{as^2}-\frac{U_0\tau}{as}+\frac{U_0\tau}{a(s+1/\tau)}.$$

Obratna transformacija daje vremenski tok odzivne funkcije:

$$u_C(t)=u_{C1}(t)=\frac{U_0 t}{a}-\frac{U_0\tau}{a}+\frac{U_0\tau}{a}e^{-t/\tau}\quad\text{za}\quad 0<t<a.$$

Drugi član s desne strane je zapravo $U_0\,\tau\,u(t)$; $u(t)$ je jedinica za $t>0$. Uvrštenjem brojčanih vrijednosti iz zadatka dobivamo:

$$u_C(t)=u_{C1}(t)=\frac{12\,t}{0{,}04}-\frac{12\cdot 0{,}02}{0{,}04}+\frac{12\cdot 0{,}02}{0{,}04}e^{-t/0{,}02}=$$

$$=300\,t-6+6\,e^{-50t}\quad\text{za}\quad 0<t<0{,}04\ s.$$

Ukupno rješenje vrijedi i za $t>a$, pa moramo uzeti u obzir i drugi član s desne strane od $U_C(s)$. Rastavljanje na parcijalne razlomke daje:

$$U_{C2}(s)=\frac{U_0}{as^2}e^{-as}-\frac{U_0\tau}{as}e^{-as}+\frac{U_0\tau}{as}e^{-as},$$

a obratni je transformat:

$$u_{C2}(t)=\frac{U_0(t-a)}{a}-\frac{U_0\tau}{a}+\frac{U_0\tau}{a}e^{-(t-a)/\tau}.$$

Kako se u rješenje za $t>a$ odziv drugog člana $u_{C2}(t)$ oduzima od odziva prvog člana $u_{C1}(t)$ konačan je rezultat:

$$u_C(t)=u_{C1}(t)-u_{C2}(t)=U_0+\frac{U_0\tau}{a}e^{-t/\tau}(1-e^{a/\tau})\quad\text{za}\quad t>a.$$

Uvrštenjem brojčanih vrijednosti dobijemo:

$$u_C(t)=12+\frac{12\cdot 0{,}02}{0{,}04}e^{-t/0{,}02}(1-e^{0{,}04/0{,}02})=12-38{,}33\cdot e^{-50t}\quad\text{za}\quad t>0{,}04\ s.$$

Na sl. 4—5 isprekidano je prikazana odzivna funkcija P_1-sustava; u točki $t=a$ ona ima kontinuirani karakter.

Iz gornjih su primjera očite prednosti rješavanja diferencijalnih jednadžbi pomoću Laplaceove transformacije. Prisjetimo se da smo kod klasične metode morali najprije naći opće rješenje, tj. komplementarnu funkciju i partikularni integral, a tek smo onda uvrstili početne uvjete. Kod Laplaceove transformacije rješava se umjesto diferencijalne jednadžbe **algebarska jednadžba** u koju su od početka **uključeni i pobudna funkcija i početni uvjeti.** Uključenjem pobudne funkcije rješava se nehomogena diferencijalna jednadžba, što je najčešće u regulacijskoj tehnici. Uključenje pak početnih uvjeta odmah ukazuje na njihov utjecaj. Kako su međutim u regulacijskoj tehnici početni uvjeti obično jednaki nuli, rješavanje jednadžbe postaje naročito jednostavno.

Laplaceova transformacija je naročito pogodna za rješavanje simultanih diferencijalnih jednadžbi gdje klasična metoda može zakazati.

4.3. Prijenosna funkcija

Regulacijski sustavi opisuju se općenito u obliku:

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n x_i(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x_i(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 x_i(t) =$$

$$= b_0 x_u(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}x_u(t)}{\mathrm{d}t} + \ldots + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} x_u(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + b_m \frac{\mathrm{d}^m x_u(t)}{\mathrm{d}t^m}. \qquad (4\text{-}76)$$

Transformirajmo član po član i izlučimo zajednički faktor:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) X_i(s) =$$

$$= (b_0 + b_1 s + \ldots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m) X_u(s), \qquad (4\text{-}77)$$

gdje su sve početne vrijednosti varijabla i njihovih derivacija jednake nuli. Izraz

$$G(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \qquad (4\text{-}78)$$

naziva se **prijenosna funkcija i transformirani je omjer izlazne i ulazne funkcije uz početne uvjete jednake nuli.** Ona je rješenje diferencijalne jednadžbe u operatorskom obliku. Prijenosna funkcija je veoma značajna u teoriji automatske regulacije jer daje sve osnovne informacije o sustavu. Članovi u nazivniku predstavljaju kašnjenja u sustavu, a članovi u brojniku ponašanje sustava s obzirom na pobudnu funkciju. Prijenosna funkcija mora biti razlomljena racionalna funkcija, tj. mora vrijediti $m<n$. Ako nije tako, onda uz $s\to\infty$ prijenosna funkcija $G(s)$ u izrazu (4-78) raste preko svake mjere. To znači da su u matematičkom modelu fizikalnog sustava provedena pojednostavnjenja koja nisu dopustiva.

Izraz (4-78) za prijenosnu funkciju možemo napisati u obliku:

$$G(s) = \frac{B(s)}{N(s)} = K' \frac{(s-n_1)(s-n_2)\ldots(s-n_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} = K' \frac{\prod_{i=1}^{m} (s-n_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s-p_i)}. \qquad (4\text{-}79)$$

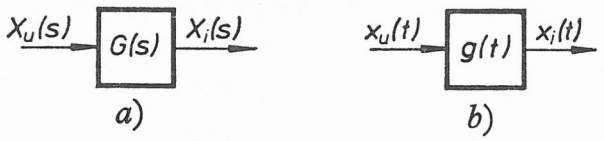
Članovi $(s-n_i)$ faktori su brojnika, a članovi $(s-p_i)$ faktori su nazivnika. Vrijednosti $s=n_i$ za koje je $|G(s)|$ jednak nuli nazivaju se **nultočke** od $G(s)$. Vrijednosti $s=p_i$ za koje je $|G(s)|$ neizmjerno velik nazivaju se **polovi** od $G(s)$[1]. U većini stvarnih sustava i n_i i p_i imaju negativne vrijednosti. Omjer $K'=b_m/a_n$ naziva se — analogno veličini K_P iz odjeljka 3.3 — prijenosni omjer ili pojačanje.

Jednadžbu (4-78) možemo pisati i na ovaj način:

$$X_i(s)=G(s)\,X_u(s), \tag{4-80}$$

tj. umnožak pobudne veličine i prijenosne funkcije sustava daje odzivnu veličinu. To možemo prikazati i u bloku prema sl. 4—6a. Uobičajeno je da se u blok upiše i prijenosna funkcija. Ona se može shvatiti kao linearan operator koji djeluje na pobudnu funkciju da se dobije odziv. Iz jednadžbe (4-80) kao i iz sl. 4—6a vidimo kako **prijenosna funkcija jednostavno povezuje pobudu i odziv.**

Sl. 4—6. Blok-shema prijenosne (a) i težinske funkcije (b)



Ako na ulaz sustava narinemo jedinični impuls $\delta(t)$, kojeg je transformat $\mathcal{L}[\delta(t)]=1$, **prijenosna je funkcija prema jednadžbi (4-80) jednaka Laplaceovu transformatu impulsnog odziva sustava.** I doista, obratna Laplaceova transformacija $G(s)$ prema tome nije ništa drugo već **težinska funkcija:**

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)] \tag{4-81}$$

uvedena u odjeljku 3.4. I težinska funkcija povezuje pobudu i odziv i to konvolucijom koja je bila formalno uvedena jednadžbom (3-103):

$$x_i(t)=g(t)*x_u(t), \tag{4-82}$$

što se — analogno prijenosnoj funkciji — može prikazati blokom na sl. 4—6b. Treba međutim upozoriti da je povezanost između ulazne i izlazne funkcije, $x_u(t)$ i $x_i(t)$, bitno složenija u vremenskom području nego što je u području kompleksne varijable. Zapravo, težinska je funkcija diferencijalna jednadžba. U tome je i osnovna prednost prijenosne funkcije koja dolazi naročito do izražaja pri razlaganju složenog regulacijskog kruga u osnovne članove (analiza), odnosno pri slaganju osnovnih članova u složeni regulacijski krug (sinteza).

4.4. Prijenosna funkcija osnovnih sustava

U odsjeku 3.3 potražili smo prijelazne funkcije za tzv. osnovne članove od kojih se sastoji bilo koji složeni dinamički sustav. Na sličan način ovdje ćemo potražiti prijenosne funkcije za osnovne članove. Posao je olakšan utoliko što smo u odjeljku 3.3 već izveli odgovarajuće diferencijalne jednadžbe, pa se jednostavnom transformacijom jednadžbi i postavljanjem omjera $X_i(s)/X_u(s)$ dobije odmah i prijenosna funkcija. Te smo prijenosne funkcije poredali u tablici 4.5, a izvedene su na osnovi ovih jednadžbi:

[1] Nultočke n_i i polovi p_i mogu dakako biti i kompleksni brojevi koji se pojavljuju u konjugirano kompleksnim parovima.

— P_0-član iz jednadžbe (3-17);
— P_1-član iz jednadžbe (3-30);
— P_2-član iz jednadžbe (3-62);
— I_0-član iz jednadžbe (3-77);
— I_1-član iz jednadžbe (3-79);
— D_0-član iz jednadžbe (3-85);
— D_1-član iz jednadžbe (3-87).

Prijenosnu funkciju T_m-člana dobijemo transformacijom jednadžbe (3-95):

$$X_i(s) = X_u(s)\, e^{-\tau_m s}, \tag{4-83}$$

gdje smo na desnoj strani primijenili teorem pomaka (4-34). Podjelom $X_i(s)$ sa $X_u(s)$ dobije se izravno:

$$G(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)}\, e^{-\tau_m s}. \tag{4-84}$$

Tablica 4—5. Prijenosne funkcije osnovnih članova

Član	Prijenosna funkcija	Član	Prijenosna funkcija
P_0	K_P	I_1	$\frac{K_i}{s(1+\tau s)}$
P_1	$\frac{K_P}{1+\tau s}$	D_0	$K_d s$
P_2	$\frac{K_P}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n} b+\frac{1}{\omega_n^2} s^2}$	D_1	$\frac{K_d s}{1+\tau s}$
I_0	$\frac{K_i}{s}$	T_m	$e^{-\tau_m s}$

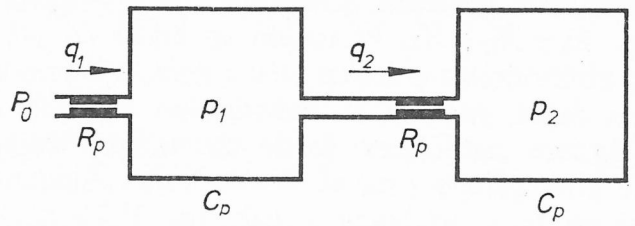
4.5. Analiza složenih sustava

Nakon što smo analizirali osnovne sustave, dolazimo do složenih sustava. Ti su sustavi uobičajeni u regulacijskoj tehnici jer su u regulacijskom krugu povezani jednostavniji članovi. Prisjetimo se npr. regulacije temperature prostorije kao i regulacije položaja hidrauličnog servomehanizma iz odjeljka 1.2. Radi zornije predodžbe složenih sustava služimo se mnogo grafičkim prikazom. Tako smo već u početku na sl. 1—8 i 1—10 regulacijske odnose prikazali tzv. **funkcionalnim blok-dijagramom** koji daju jasan uvid u tok signala kao i funkcionalnu povezanost među blokovima. Ako u blokove još upišemo prijenosne funkcije, tj. matematičke operacije između izlazne i ulazne veličine, a tok signala označimo odgovarajućom varijablom, govorimo o **strukturnom blok-dijagramu.** To je zapravo matematički model regulacijskog kruga. Na osnovi tog modela mogu se postaviti analitički izrazi pogodni za rješavanje složenog sustava.

U prikazu pomoću blok-dijagrama pretpostavlja se da nema **protudjelovanja, tj. da slijedeći blok u seriji ne opterećuje prethodni blok.** To drugim riječima znači da se energija ne predaje slijedećem bloku, pa se ne mijenja ne prijenosni omjer između $X_i(s)$ i $X_u(s)$ prethodnog bloka. Učinak protudjelovanja može se prikazati serijskim vezanjem dvaju pneumatskih aperiodskih članova prema sl. 4—7. Ukupan prijenosni omjer $G(s)$ dobije se jednostavnim množenjem obiju prijenosnih funkcija:

$$G(s)=G_1(s)\,G_2(s)=\frac{P_1(s)}{P_0(s)}\cdot\frac{P_2(s)}{P_1(s)}=\frac{K_{P_1}}{1+\tau_1 s}\cdot\frac{K_{P_2}}{1+\tau_2 s} \tag{4-85}$$

pod uvjetom da protok zraka u drugi R_pC_p član ne opterećuje bitno prvi R_pC_p član. Da nije tako, izlaz iz prvog člana, tj. tlak $p_1(t)$, bio bi znatno smanjen, pa više ne bi vrijedila prijenosna funkcija $G_1(s)$ između ulaznog i izlaznog tlaka prvog člana.



Sl. 4—7. Serijsko vezanje pneumatskih P_1-članova

U prijenosu informacija nosilac signala je energija, pa se pojavljuju dvije varijable različitih dimenzija. Npr. mehanička poluga prenosi silu i pomak, pneumatski vod prenosi tlak i protok, a električni vod prenosi napon i struju. Tako se na ulazu i izlazu bloka pojavljuju po dvije varijable tzv. poprečna i uzdužna varijabla[1], što se kod pneumatskog R_pC_p člana može pisati u obliku matrice:

$$\begin{bmatrix} P_i \\ Q_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_u \\ Q_u \end{bmatrix}, \tag{4-86}$$

a to već vodi do zamršenih proračuna. Srećom se u većini regulacijskih krugova može na ulazu i izlazu iz blokova uzeti u obzir samo ona varijabla koja je zanimljiva. To je kod pneumatskog sustava na sl. 4—6 tlak P_0, p_1 i p_2 a protok je zanemariv.

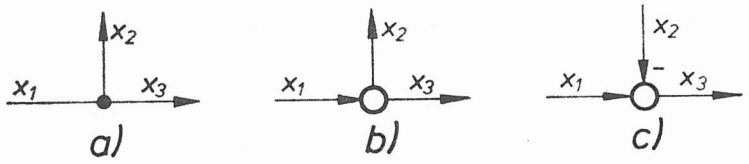
Iz gornjeg razmatranja proizlazi da je stvar **inženjerske ocjene** gdje će se na putu signala zanemariti protudjelovanje. Time se pojednostavnjuje matematički izraz, a analiza se svodi na operacije među blokovima. Ako se protudjelovanje ne može zanemariti, mora se poći od postavljenih simultanih diferencijalnih jednadžbi. Općenito važi postavka da uspješan pristup analizi i sintezi regulacijskog kruga pomoću blok-dijagrama ovisi upravo o inženjerskoj ocjeni kako da se fizikalne komponente slože u sklopove bez protudjelovanja.

4.5.1. Složeni sustavi bez protudjelovanja

Pomoću funkcionalnog blok-dijagrama dobije se jednostavnim algebarskim operacijama rješenje, tj. odnos između izlazne i ulazne veličine složenog sustava. Svrha je analize da se **broj blokova sažima** sve dotle dok se ne dobije jedan jedini blok s jednom ulaznom i jednom izlaznom veličinom. **Algebra blokova** prikladan je izraz za taj postupak.

Prije nego što obradimo mogućnosti sažimanja blokova, treba da odredimo operacije koje se mogu obaviti na putu signala između blokova. Prva je operacija u **točki račvanja** koja se prema sl. 4—8a označava punim kružićem: svaki izlazni signal iz točke račvanja jednak je ulaznom signalu, tj. $X_1=X_2=X_3$. Fizikalno to znači da nema toka energije: u električnom sustavu nema struje, a u pneumatskom sustavu nema protoka. Signal se dakle prenosi ili električnim naponom ili pneumatskim tlakom.

[1] Vidi odjeljak 14.1.



Sl. 4—8. Prikaz operacija na putu signala između blokova

Druga operacija na putu signala je u **točki zbrajanja** koja se prema sl. 4—8b označava praznim kružićem: ulazni signal jednak je zbroju svih izlaznih signala, tj. $X_1=X_2+X_3$. Fizikalno to znači da pri prijenosu signala postoji tok energije: u električnom sustavu teče struja, a u pneumatskom sustavu postoji protok. Signal se, dakle, prenosi ili električnom strujom ili pneumatskim protokom. U blok-dijagramu uobičajeno je da uz točku zbrajanja stavimo i predznake signala. Tako je postupljeno i na sl. 4—8c koja odgovara sl. 4—8b: strelica signala X_2 obratna je ali je i predznak negativan. Tako možemo prikazati i operaciju oduzimanja kao suprotnu zbrajanju: prema sl. 4—8c možemo zato pisati $X_3=X_1-X_2$.

Očigledno je da u stvarnim sustavima ne postoji ni idealno račvanje ni idealno zbrajanje signala. S jedne strane, prijenos signala traži određenu makar i minimalnu energiju, a s druge strane, uvijek postoji i određeno protudjelovanje. Imajući na umu da su blokovi obično pojačala energije, na njihovim ulazima signali su slabi, pa je opravdano staviti točku račvanja; na izlazu iz pojačala signali su obično jaki, pa je opravdano da se uzme u obzir protok energije u točki zbrajanja.

Problem sažimanja blokova može se uvijek svesti na dva susjedna bloka, i to se nastavlja obuhvaćanjem svih blokova jednog za drugim, dok ne preostane samo jedan blok. **Operacije između dva bloka** dijele se prema tome jesu li ta dva bloka vezana u serijskom, paralelnom ili povratnom spoju.

Prije nego što opišemo te operacije, ponovimo i pretpostavke koje vrijede pri spajanju blokova:

- **nema protudjelovanja** unutar bloka, izlazna veličina ne djeluje na ulaznu veličinu, pa promjena opterećenja na izlazu ne djeluje na ulaz,
- ulazne i izlazne veličine povezane su **jednoznačno,** što isključuje takve pojave kao što su histereza ili labavost,
- djelovanje bloka je **jednosmjerno,** promjene ulazne veličine djeluju na izlaznu veličinu, i to u pravilu s nekim kašnjenjem.

Serijski spoj. Kod dva bloka vezana u seriju prema sl. 4—9a postoji jednostavna funkcionalna ovisnost:

$$G(s)=\frac{X_i(s)}{X_u(s)}=\frac{X_{i2}}{X_{u2}}\cdot\frac{X_{i1}}{X_{u1}}=G_1G_2, \tag{4-87}$$

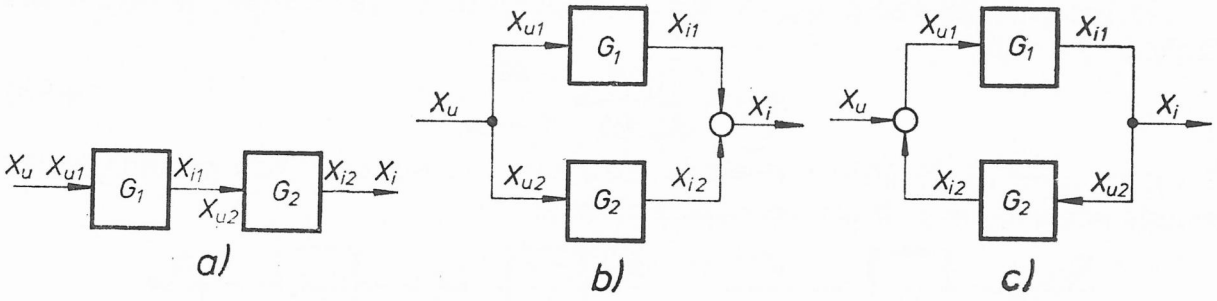
gdje je $G(s)$ prijenosna funkcija sažetog bloka[1]. To vrijedi i za više blokova u seriji:

$$G(s)=G_1\cdot G_2\ldots G_n=\prod_{i=1}^{n}G_i. \tag{4-88}$$

Paralelni spoj. Prema sl. 4—9b, paralelnim spajanjem dvaju blokova dobit ćemu novu prijenosnu funkciju:

$$G(s)=\frac{X_i(s)}{X_u(s)}=\frac{X_{i1}+X_{i2}}{X_u}=\frac{X_{i1}}{X_{u1}}+\frac{X_{i2}}{X_{u2}}=G_1+G_2. \tag{4-89}$$

[1] Zbog jednostavnosti ispuštaju se oznake $G_i(s)$.



Sl. 4—9. Osnovne operacije između dva bloka

Pri tome su uzete u obzir operacija račvanja prije blokova i operacija zbrajanja nakon blokova, što je u skladu s pretpostavkom da se radi o pojačivačkim sklopovima. To vrijedi i za više paralelnih blokova:

$$G(s)=G_1+G_2+\ldots G_n=\sum_{i=1}^{n} G_i. \tag{4-90}$$

Povratni spoj. Na sl. 4—9c ulazni signal X_u prenosi se preko bloka G_1 na izlaz; odatle se preko bloka G_1 vraća i djeluje povratno na ulaz.

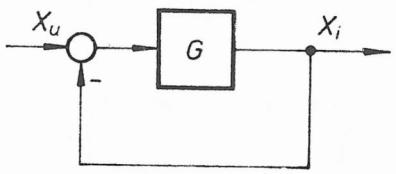
Nova je prijenosna funkcija:

$$G(s)=\frac{X_i(s)}{X_u(s)}=\frac{X_i}{X_{u1}-X_{i2}}=\frac{X_i/X_{u1}}{1-X_{i2}/X_{u1}}=\frac{X_{i1}/X_{u1}}{1-X_{i2}X_{i1}/X_{u2}X_{u1}}=$$

$$=\frac{G_1}{1-G_1G_2}. \tag{4-91}$$

I ovdje treba upozoriti na točku račvanja s desne strane jer je na ulazu G_2 potrebna vrlo mala energija, kao i na točku zbrajanja s lijeve strane jer se na izlazu G_2 pojavljuje u pravilu pojačan signal.

U ovom spoju ostvareno je načelo **povratne veze:** već prema tome da li signal X_{i2} djeluje pozitivno ili negativno u odnosu na ulazni signal X_u (predznak plus ili minus), povratna je veza pozitivna ili negativna. U regulaciji je neophodno da povratna veza bude **negativna,** dok se **pozitivna** povratna veza pojavljuje u oscilatorima.



Sl. 4—10. Jedinična povratna veza

U povratnom spoju značajna su dva zasebna slučaja. Prvi nastupa kad je ukupno pojačanje prvog bloka veliko, tj. kad je $G_1 \gg G_2$, pa se jednadžba (4-91) pojednostavnjuje:

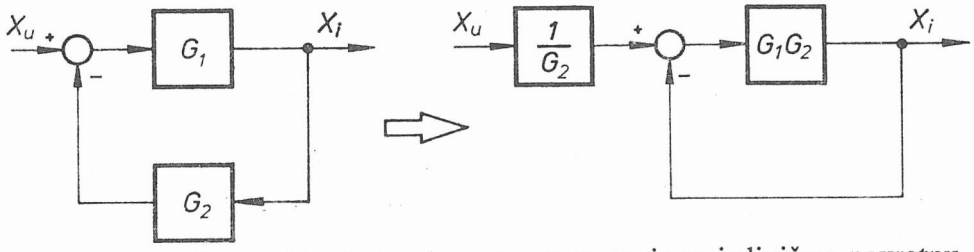
$$G(s)=\frac{X_i(s)}{X_u(s)}=\frac{1}{\frac{1}{G_1}-G_2}\simeq -\frac{1}{G_2}. \tag{4-92}$$

Ukupna prijenosna funkcija G ne ovisi više o prijenosnoj funkciji G_1.

Drugi je slučaj kad je $G_2=1$, što se svodi na sl. 4—10. Ukupna je prijenosna funkcija pri tom:

$$G(s)=\frac{X_i(s)}{X_u(s)}=\frac{G_1}{1+G_1}. \tag{4-93}$$

Tu je ostvarena **jedinična povratna veza** koja se zbog svog jednostavnog oblika mnogo primjenjuje u sintezi servomehanizama.

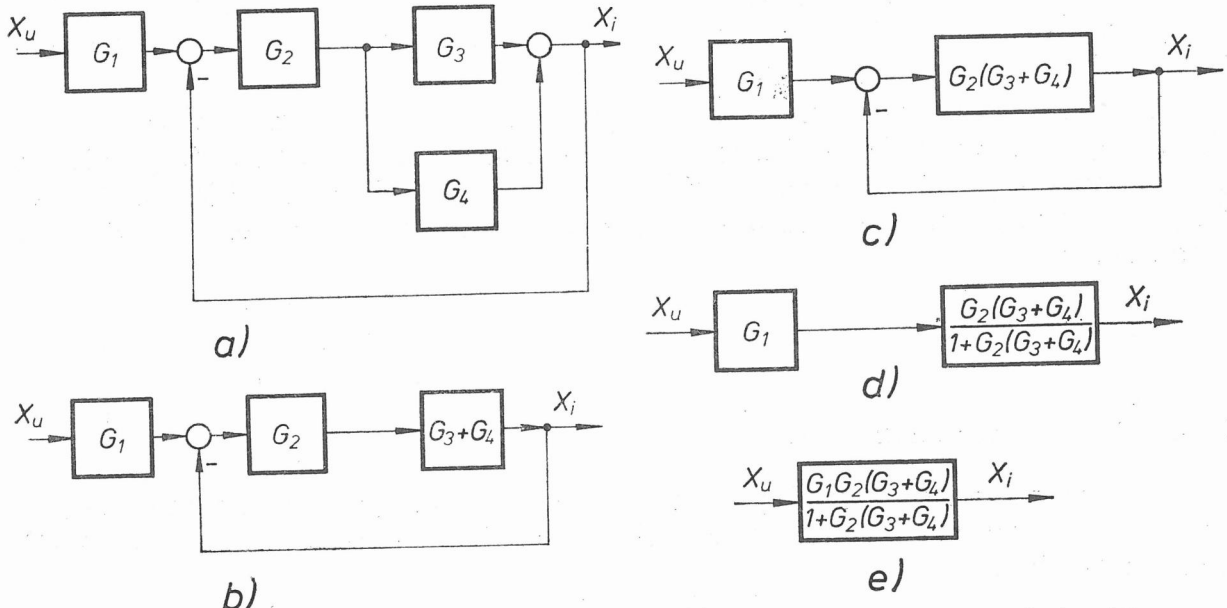


Sl. 4—11. Pretvorba povratnog spoja u jediničnu povratnu vezu

Na sl. 4—11 dokazujemo kako se povratni spoj sa sklopom G_2 u krugu povratne veze (lijevo) može pretvoriti u povratni spoj s jediničnom povratnom vezom (desno). Matematička je operacija jednostavna:

$$G(s)=\frac{X_i(s)}{X_u(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{1}{G_2}\,\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2}. \tag{4-94}$$

Primjer 4.8. Na sl. 4—12 vidimo kako se pomoću algebre blokova jednostavno rješava dinamika nekog složenog sustava. Ako iz fizikalne slike složenog sustava možemo postaviti blok-dijagram prema sl. 4—12a, onda **primjenom** tih pravila sažimamo blok po blok, sve dok na kraju ne dobijemo jedan blok s ukupnom prijenosnom funkcijom kao na sl. 4—12e. Uvrštenjem vrijednosti za $G_1, \ldots, G_4$, te množenjem i zbrajanjem u brojniku i nazivniku, dobivamo oblik G podesan za daljnju analizu i sintezu.

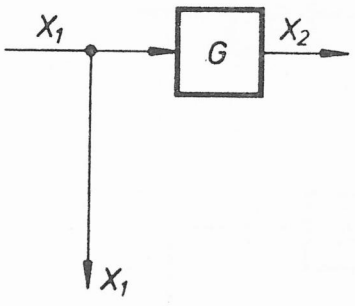
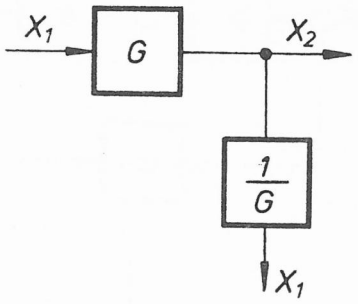
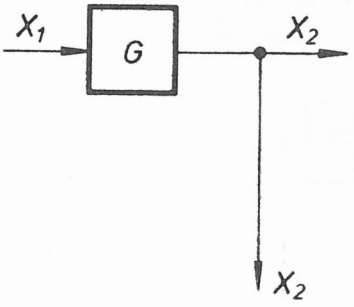
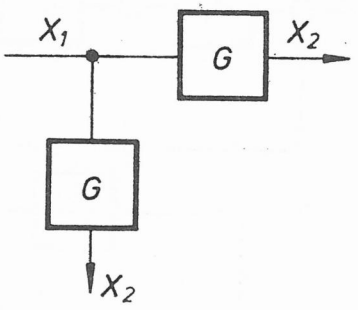
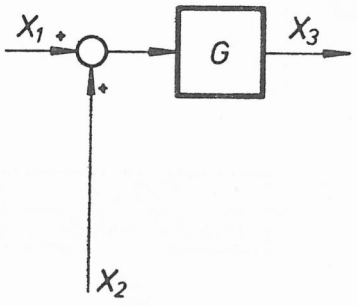
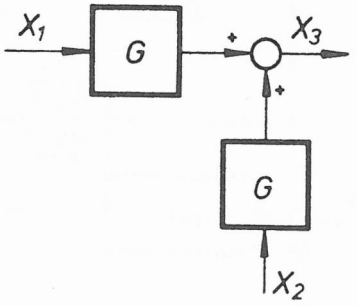
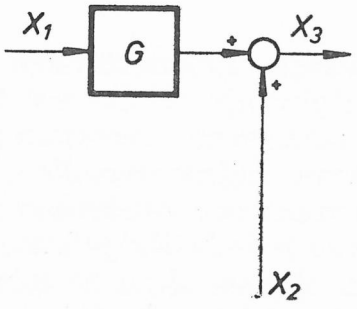
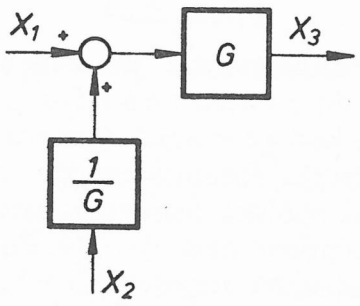


Sl. 4—12. Primjena algebre blokova u rješavanju složenog sustava — primjer 4.8

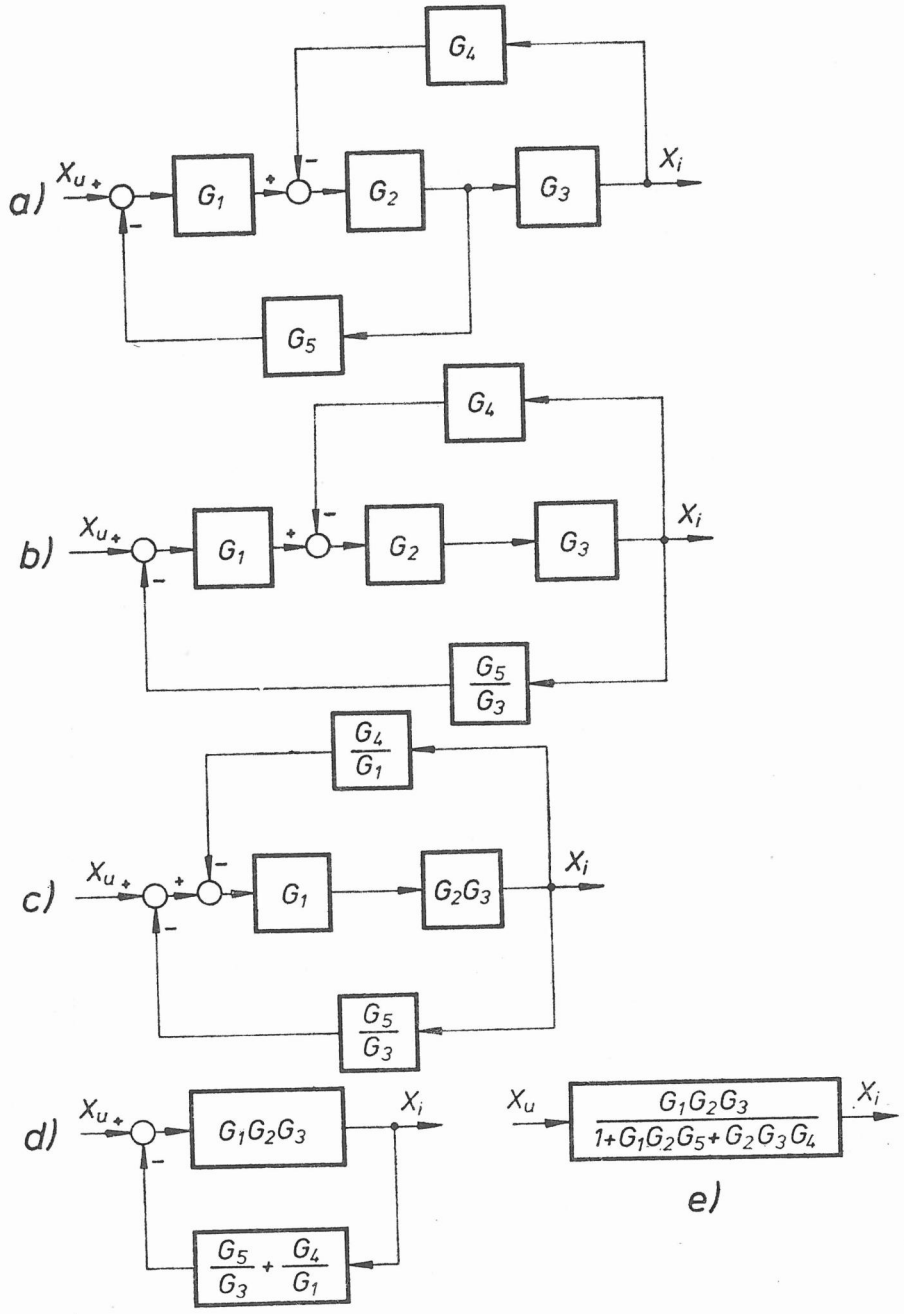
U ovom primjeru mogli smo jednostavno primijeniti pravila sažimanja serijskog, paralelnog i povratnog spoja. Međutim, često mogućnosti sažimanja nisu tako izravno uočljive. Postoje i dodatna pravila, od kojih spominjemo nekoliko

najkorisnijih, prikazanih u tablici 4—6. To su pomaci točke račvanja, odnosno zbrajanja, ispred, odnosno iza bloka. Uz poznata pravila algebre blokova, slike su dovoljno jasne i nema potrebe za dodatnim postupkom dokazivanja. Uz tablicu treba dodatno napomenuti da je smjer signala u smjeru strelica, i to desno; pomak točaka račvanja i zbrajanja može biti udesno ili ulijevo.

Tablica 4—6. Pravila algebre blokova

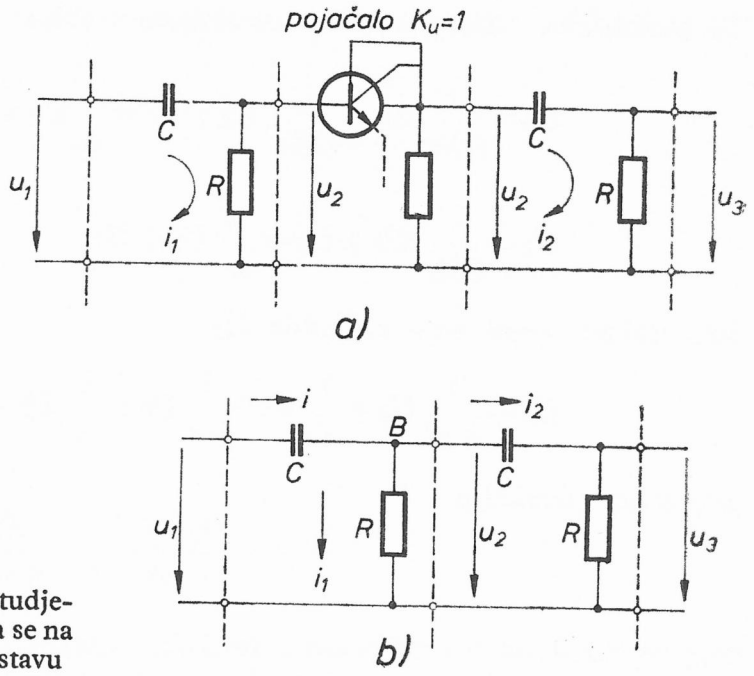
OPERACIJA	PRVOBITNI SKLOP	IZVEDENI SKLOP
točka račvanja u desno $X_2 = GX_1$		
točka račvanja u lijevo $X_2 = GX_1$		
točka zbrajanja u desno $X_3 = G(X_1 + X_2)$		
točka zbrajanja u lijevo $X_3 = GX_1 + X_2$		

Primjer 4.9. Pomoću gornjih pravila možemo riješiti složeni sustav prema blok-dijagramu na sl. 4—13a. I ovdje slike objašnjavaju tok postupka, sve do sl. 4—13e koja daje ukupnu prijenosnu funkciju. Na sl. 4—13b pomaknuta je točka račvanja udesno od bloka G_3, a na sl. 4—13c točka zbrajanja pomaknuta je ulijevo od bloka G_1. Daljnji se postupak svodi na sažimanje povratnog spoja na sl. 4—13d.



Sl. 4—13. Primjena algebre blokova u rješavanju složenog sustava—primjer 4.9

Poništavanje protudjelovanja. Protudjelovanje u složenom sustavu ne samo da otežava postavljanje i rješavanje zadatka već je ono često i nepoželjno, jer se kod povezanih sustava s raznovrsnim spremnicima energije mogu pojaviti i oscilacije. Protudjelovanje možemo najjednostavnije izbjeći tako da između dva serijski spojena osnovna sustava ugradimo **razdvojno pojačalo** (pufer), kao što je to učinjeno na sl. 4—14a. Pojačalo je simbolički prikazano tranzistorskim stupnjem s pojačanjem napona $K_u=1$: na njegovu ulazu ne teče gotovo nikakva struja, a struja na izlazu dovoljna je da hrani izlazni stupanj.



Sl. 4—14. Poništavanje protudjelovanja objašnjava se na elektroničkom sustavu

Jednadžba je lijevog sustava:

$$u_1=\frac{1}{C}\int i_1\,\mathrm{d}t+Ri_1=\frac{1}{C}\int\frac{u_2}{R}\,\mathrm{d}t+u_2=\frac{1}{\tau}\int u_2\,\mathrm{d}t+u_2 \tag{4-95}$$

odnosno u operatorskom obliku:

$$U_1=\frac{1}{\tau s}U_2+U_2. \tag{4-96}$$

Odatle je prijenosna funkcija lijevog sustava:

$$G_1(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{\tau s}{1+\tau s} \tag{4-97}$$

Kako je prijenosna funkcija desnog sustava ista, dobit ćemo ukupnu prijenosnu funkciju sustava bez protudjelovanja:

$$G(s)=\frac{U_3(s)}{U_1(s)}=G_1G_PG_2=\frac{\tau^2 s^2}{1+2\tau s+\tau^2 s^2}. \tag{4-98}$$

Ako sustavi nisu razdvojeni pojačalom, moramo uzeti u obzir da desni sustav strujom i_2 opterećuje lijevi sustav. Ukupna struja i račva se na struju $i_1=u_2/R$ i na struju $i_2=u_3/R$, što je vidljivo iz električne sheme. Ovdje polazimo od sustava simultanih jednadžbi (v. sl. 4—14b):

$$\begin{aligned}u_1&=\frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t+u_2=\frac{1}{C}\int\frac{u_2}{R}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{C}\int\frac{u_3}{R}\,\mathrm{d}t+u_2,\\ u_2&=\frac{1}{C}\int i_2\,\mathrm{d}t+u_3=\frac{1}{C}\int\frac{u_3}{R}\,\mathrm{d}t+u_3.\end{aligned} \tag{4-99}$$

Te jednadžbe napisane u operatorskom obliku:

$$U_1=\frac{1}{CRs}U_2+\frac{1}{CRs}U_3+U_2=\frac{1}{\tau s}U_2+\frac{1}{\tau s}U_3=U_2,$$
$$U_2=\frac{1}{CRs}U_3+U_3=\frac{1}{\tau s}U_3+U_3 \tag{4-100}$$

daju nakon izlučivanja varijable U_2:

$$U_1=\frac{1}{\tau^2 s^2}U_3+\frac{1}{\tau s}U_3+\frac{1}{\tau s}U_3+\frac{1}{\tau s}U_3+U_3 \tag{4-101}$$

prijenosnu funkciju:

$$G(s)=\frac{U_3(s)}{U_1(s)}=\frac{\tau^2 s^2}{1+3\tau s+\tau^2 s^2}, \tag{4-102}$$

koja se razlikuje od prijenosne funkcije sustava bez protudjelovanja u jednadžbi (4-97). Ovdje nismo mogli poći jednostavnijim putem primjenom prijenosnih funkcija osnovnih sustava i pravila algebre blokova, jer smo morali uzeti u obzir protudjelovanje.

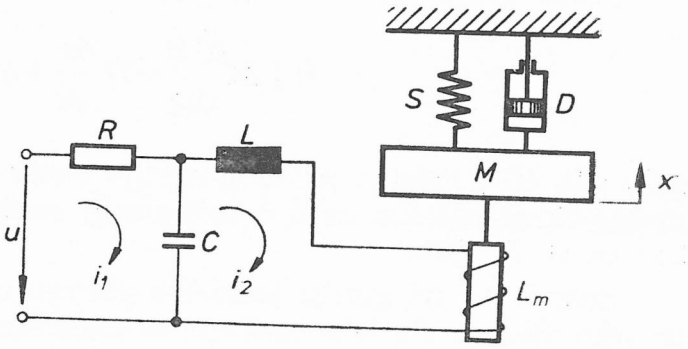
Iz ovog primjera možemo zaključiti da se poništavanjem protudjelovanja olakšava proračun, ali se mijenja i dinamičko ponašanje sustava. Tek ako je τ vrlo veliko, protudjelovanje se može zanemariti.

Ako na električnoj shemi na sl. 4—14 zamislimo da je jedan od kondenzatora zamijenjen svitkom, onda u složenom sustavu postoje raznovrsni spremnici energije. U slučaju na sl. 4—14b može uz određene vrijednosti elemenata doći do izmjene energije, tj. do prigušenih oscilacija; u slučaju s razdvojnim pojačalom na sl. 4—14a izmjena energije pa ni oscilacije nipošto ne mogu nastupiti [lit. 6,38].

4.5.2. Složeni sustavi s protudjelovanjem

Ako protudjelovanje u složenom sustavu ne možemo zanemariti, moramo poći od simultanih diferencijalnih jednadžbi. Izlučivanjem tzv. unutarnjih varijabli dobit ćemo na kraju diferencijalnu jednadžbu između jedne veličine na ulazu i jedne na izlazu. Kako je put kojim smo pošli u odjeljku 3.2 — primjenom klasične metode — neprikladan, odabiremo u pravilu operatorsku metodu. Tom metodom svodimo sustav diferencijalnih jednadžbi na sustav algebarskih jednadžbi. Tim smo putem išli pri rješavanju složenog električnog sustava na sl. 4—14.

Ako je sustav diferencijalnih jednadžbi reda koji je viši od dva, rješenje ćemo naći pomoću determinanata. Cijeli postupak prikazat ćemo još jednom na primjeru matematičkog modela za vibracijski stol (sl. 4—15) koji se upotrebljava pri ispitivanju mehaničkih i električnih montažnih sklopova. Vibracijski stol sastoji se od električnog dijela u kojem se pomoću spremnika energije C i L ostvaruju električne oscilacije koje se zatim elektromagnetski prenose preko svitka s magnetskom jezgrom L_m na mehanički sustav s titrajućom masom stola M. Primjer je prikladan ne samo zato što postoji protudjelovanje između dviju petlji električnog kruga već i zato što postoji i protudjelovanje između električnog i mehaničkog sustava.



Sl. 4—15. Vibracijski stol kao primjer složenog sustava

Da bismo mogli napisati diferencijalne jednadžbe sustava, moramo najprije opisati protudjelovanje između električnog i mehaničkog sustava. Masa M pokreće magnetsku jezgru svitka L_m i inducira napon koji je prema zakonu indukcije razmjeran brzini dx/dt magnetske jezgre svitka:

$$u_{in}+B\cdot l\cdot v=K_v\frac{dx}{dt} \tag{4-103}$$

sa K_v kao konstantom proporcionalnosti.

Međutim, struja i_2 prouzrokuje magnetsko polje koje djeluje na magnetsku jezgru silom:

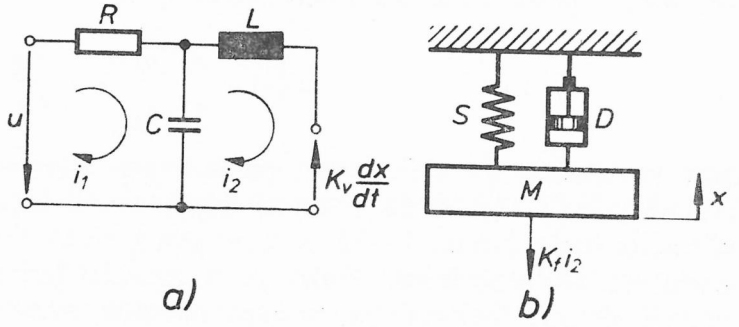
$$f_{el}=B\cdot l\cdot i_2=K_f i_2, \tag{4-104}$$

koja je razmjerna struji i_2.

Na osnovi tih protudjelovanja možemo čitav sustav rastaviti na dva dijela prema sl. 4—16. Električni sustav na sl. 4—16a možemo opisati s dvije simultane jednadžbe za obje petlje:

$$\begin{aligned} u&=Ri_1+\frac{1}{C}\int i_1\,dt-\frac{1}{C}\int i_2\,dt,\\ 0&=L\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C}\int i_2\,dt+K_v\frac{dx}{dt}-\frac{1}{C}\int i_1\,dt \end{aligned} \tag{4-105}$$

gdje napon $K_v dx/dt$ opisuje protudjelovanje mehaničkog sustava.



Sl. 4—16. Električni i mehanički podsustav vibracijskog stola

Jednadžba je mehaničkog sustava:

$$0+M\frac{d^2x}{dt_2}+D\frac{dx}{dt}+Sx+K_f i_2, \tag{4-106}$$

gdje sila $K_f i_2$ opisuje protudjelovanje električnog sustava. Predznak sile $K_f i_2$ u mehaničkom sustavu ovisi o orijentaciji svitka L_m;ovdje je pretpostavljen smjer kao na sl. 4—16b.

Sustav od tri gornje jednažbe pišemo u operatorskom obliku, a jednadžbe su tako složene da lako nađemo determinantu:

$$\begin{aligned}
&\left(R+\frac{1}{Cs}\right) I_1- \quad \frac{1}{Cs} I_2+ \quad (0)\, X=U,\\
&-\frac{1}{Cs}\, I_1+\left(Ls+\frac{1}{Cs}\right) I_2+ \quad K_{vs}\, X=0,\\
&(0)\, I_1- \quad K_f\, I_2+(Ms+Ds+S)\, X=0.
\end{aligned} \tag{4-107}$$

Iz tog sustava jednadžbi treba da nađemo odnos izlazne i ulazne veličine; sam fizikalni sustav kao takav nije više zanimljiv.

Iz sustava jednadžbi (4-107) nađemo najprije determinantu:

$$\Delta=\begin{vmatrix} R+\frac{1}{Cs} & -\frac{1}{Cs} & U \\ -\frac{1}{Cs} & Ls+\frac{1}{Cs} & K_v b \\ 0 & K_f & Ms^2+Ds+S \end{vmatrix} \tag{4-108}$$

Položaj stola dan je izrazom:

$$X=\frac{\begin{vmatrix} R+\frac{1}{Cs} & -\frac{1}{Cs} & U \\ -\frac{1}{Cs} & Ls+\frac{1}{Cs} & 0 \\ 0 & K_f & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\frac{1}{Cs}K_f}{\Delta}\,U \tag{4-109}$$

s determinantom pisanom u skraćenom obliku Δ. Na osnovi te jednadžbe možemo napisati i prijenosnu funkciju sustava:

$$G(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=-\frac{K_f}{Cs}\cdot\frac{1}{\Delta}, \tag{4-110}$$

gdje se uvrštavaju vrijednosti parametara. Prijenosna funkcija može dati tražene podatke: koliko treba da je ulazni napon da se dobiju željena amplituda i frekvencija vibracija stola. Na sl. 4—15 postoje dva sustava drugoga reda od kojih svaki oscilira vlastitom frekvencijom. Kako je u pravilu jedan sustav mnogo manje prigušen nego li drugi, frekvencija prvoga sustava prevladava u cijelom sustavu.

5. Analiza u frekvencijskom području

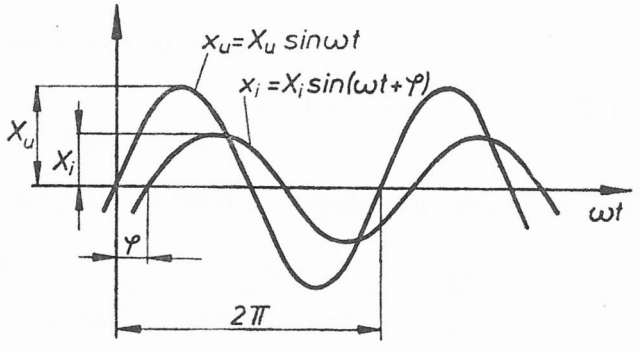
Ainsi, toujours poussés vers de nouveaux rivages,
Dans la nuit éternelle emportés sans retour,
Ne pourrons-nous jamais sur l'océan des âges
Jeter l'ancre un seul jour?

A. de Lamartine, »Le lac«

Uz odskočnu funkciju na ulazu najčešće se za ispitivanje linearnih vremenski invarijantnih sustava primjenjuje pobuda u obliku sinusne funkcije. Ta **metoda prisilnih oscilacija** potječe iz teorije izmjeničnih struja (pojam impedancije), jer harmonička pobuda često više odgovara stvarnoj dinamici regulacijskog sustava. Naime, ulazni je signal najčešće slučajan; njega je u većini slučajeva teško ili nemoguće prikazati u obliku Laplaceova transformata. Naprotiv, **rastavljanje u spektralne komponente daje kod slučajnih signala dobre rezultate.** S druge strane, za mnoge regulacijske sustave nije moguće postaviti odgovarajući matematički model, već smo prisiljeni da do **podataka o sustavu dođemo pokusima.** Do zadovoljavajućih rezultata najlakše dolazimo pomoću harmoničke pobude.

Kako se bilo koja funkcija, pa tako i odskočna, može predočiti kontinuiranim frekvencijskim spektrom pomoću Fourierova integrala, to se poznavanjem frekvencijskog odziva sustava može za sve moguće frekvencije teorijski dobiti jednako vrijedna ocjena sustava kao i s odskočnom funkcijom. Na sreću, pri tome nije potrebno obavljati mukotrpnu Fourierovu transformaciju, jer postoje izravne metode da se protumače frekvencijske krivulje.

Narine li se sinusna funkcija $x_u = X_u \sin \omega t$ na ulaz linearnog vremenski invarijantnog sustava, na izlazu će se — nestankom prijelaznih pojava — pojaviti odziv u obliku sinusne funkcije iste frekvencije, ali različite amplitude i različitog faznog pomaka $x_i = X_i \sin(\omega t + \varphi)$ (sl. 5—1). Upravo je **ispitivanje promjena amplitude i faznog pomaka kod različitih frekvencija sadržaj frekvencijskog odziva.** Frekvencije se pri tome mogu protezati od nule do beskonačno velikih, ali je praktički frekvencijsko područje ograničeno.



Sl. 5—1. Sinusne funkcije na ulazu i na izlazu linearnog sustava

Frekvencijski odziv svodi se dakle na rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$a_n \frac{d^n}{dt^n}[X_i \sin(\omega t+\varphi)]+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[X_i \sin(\omega t+\varphi)]+$$

$$+\ldots+a_0 X_i \sin(\omega_i+\varphi)=b_0 X_u \sin \omega t, \tag{5-1}$$

gdje se u stacionarnom rješenju oblika $X_i \sin(\omega t+\varphi)$ traži amplituda X_i i fazni pomak φ. Kao što ćemo dalje vidjeti, diferencijalna jednadžba (5-1) pretvara se u algebarsku jednadžbu, ali je postupak težak zbog cijelog niza trigonometrijskih pretvorbi. Radi pojednostavnjenja postupka trigonometrijski oblik harmoničkih funkcija zamjenjuje se eksponencijalnim oblikom, te se na jednostavan način dobije rješenje u obliku sinusne prijenosne funkcije, koju uvodimo u slijedećem odjeljku. Međutim, **prava je vrijednost postupka u grafičkom prikazu,** pa se izvode Nyquistov, Bodeovi i Nicholsov dijagram. Sve te metode primijenit ćemo na osnovne i složene sustave.

5.1. Sinusna prijenosna funkcija

Da bismo pokazali postupak pri rješavanju diferencijalne jednadžbe uvođenjem sinusne pobude, stavimo u diferencijalnu jednadžbu prvoga reda:

$$\tau \frac{dx_i}{dt}+x_i=K_P x_u \tag{5-2}$$

pobudu $x_u=X_u \sin \omega t$ i pretpostavljeni odziv $x_i=X_i \sin(\omega t+\varphi)$, pa ćemo dobiti:

$$\omega\tau X_i \cos(\omega t+\varphi)+X_i \sin(\omega t+\varphi)=K_P X_u \sin \omega t, \tag{5-3}$$

jer je $dx_i/dt=\omega X_i \cos(\omega t+\varphi)$. Pomoću trigonometrijskih pretvorbi:

$$\begin{aligned}\cos(\omega t+\varphi)&=\cos \omega t \cos\varphi-\sin \omega t \sin\varphi\\ \sin(\omega t+\varphi)&=\sin \omega t \cos\varphi+\cos \omega t \sin\varphi\end{aligned} \tag{5-4}$$

dobit ćemo jednadžbu:

$$X_i(\cos\varphi-\omega\tau \sin\varphi)\sin \omega t+X_i(\sin\varphi+\omega\tau\cos\varphi)\cos \omega t=$$

$$=K_P X_u \sin \omega t. \tag{5-5}$$

Uspoređivanje koeficijenata od $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$ daje:

$$\begin{aligned}X_i(\sin\varphi+\omega\tau\cos\varphi)&=0,\\ X_i(\cos\varphi-\omega\tau\sin\varphi)&=K_P X_u.\end{aligned} \tag{5-6}$$

Iz prve je jednadžbe (5-6):

$$\operatorname{tg}\varphi=-\omega\tau, \tag{5-7}$$

što se uvrsti u rješenje druge jednadžbe (5-6):

$$\frac{X_i}{X_u}=\frac{K_P}{\cos\varphi-\omega\tau\sin\varphi}=\frac{K_P}{\cos\varphi+\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi}=\frac{K_P}{\cos\varphi(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}. \tag{5-8}$$

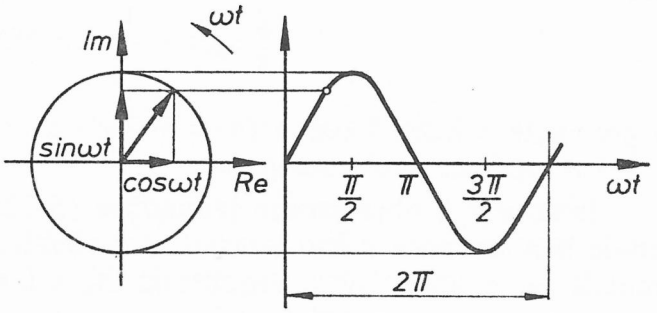
Sređivanjem se pomoću trigonometrijske pretvorbe:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}} \tag{5-9}$$

dobije rješenje:

$$\frac{X_i}{X_u} = \frac{K_P}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}} = \frac{K_P}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}. \tag{5-10}$$

Iz ovog primjera vidimo da kod sustava višega reda rješenje postaje veoma zamršeno. Zato ćemo ići lakšim putem, i to zamjenom trigonometrijskih funkcija eksponencijalnim.

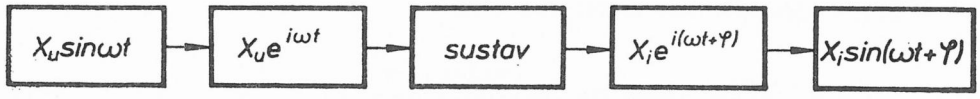


Sl. 5—2. Povezanost trigonometrijskog i eksponencijalnog oblika harmoničkih funkcija

Da bismo sinusnu funkciju prikazali u eksponencijalnom obliku, prisjetimo se konstrukcije sinusoide prema sl. 5—2. Vektor jedinične amplitude vrti se konstantnom kružnom frekvencijom ω. Njegova projekcija na imaginarnoj osi predočuje u svakom trenutku amplitudu sinusne funkcije, prikazane desno na vremenskoj osi. Taj rotirajući vektor ili **verzor**[1] jednostavno se pomoću Eulerove formule povezuje s harmoničkim funkcijama:

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t. \tag{2-27}$$

Prema tome, funkcija sin ωt nadomješta se pri izračunavanju sa $e^{j\omega t}$, a rezultat se može pretvoriti opet u sinusnu funkciju, koja predstavlja fizikalnu stvarnost. Rješenje je dakle imaginarni dio kompleksnog rješenja. Shema postupka prikazana je blok-dijagramom na sl. 5-3, a potvrđena je ispravnim rezultatima.



Sl. 5—3. Shematski prikaz rješavanja diferencijalne jednadžbe korištenjem eksponencijalnog oblika harmoničkih funkcija

[1] Vektor je fizikalna veličina i ima orijentaciju u prostoru, a verzor služi za grafički prikaz harmoničkih funkcija u kompleksnoj ravnini.

Ako pobudu $x_u = X_u e^{j\omega t}$ i odziv $x_i = X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi}$ za sada nepoznate amplitude X_i i faznog kuta φ uvrstimo u diferencijalnu jednadžbu (5—1), dobit ćemo:

$$a_n \frac{d^n}{dt^n}[X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi}] + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi}] + \ldots + a_0 X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi} = b_0 X_u e^{j\omega t}. \quad (5\text{-}11)$$

Uz provedene derivacije jednadžba u sređenom obliku glasi:

$$[a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1 (j\omega) + a_0] X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi} = b_0 X_u e^{j\omega t}, \quad (5\text{-}12)$$

što kazuje da se znak za derivaciju d/dt u diferencijalnoj jednadžbi (5-1) može zamijeniti sa $j\omega$. Operacije:

$$\frac{dx_i}{dt} = j\omega X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi} = j\omega x_i, \quad (5\text{-}13)$$

kao i:

$$\int x_i dt = \frac{1}{j\omega} X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \frac{1}{j\omega} x_i, \quad (5\text{-}14)$$

uspoređene s jednadžbama (4-4) i (4-5) upućuju na sličnost djelovanja operatora s i kompleksne frekvencije $j\omega$.

Izraz $e^{j\omega t}$ s obje strane jednadžbe (5-12) možemo kratiti, tako da jednadžba ostaje bez vremena t kao nezavisne varijable. Kao nezavisna varijabla ostaje frekvencija ω, o kojoj ovise amplituda X_i i fazni kut φ odzivne funkcije.

Iz jednadžbe (5-12) možemo postaviti omjer izlazne i ulazne funkcije u stacionarnom stanju:

$$G(j\omega) = \frac{X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi}}{X_u e^{j\omega t}} = \frac{b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1 (j\omega) + a_0} \quad (5\text{-}15)$$

koji smo označili sa $G(j\omega)$ i nazvali **sinusnom prijenosnom funkcijom.** Ona je, dakle, rješenje diferencijalne jednadžbe u frekvencijskom području, uz sinusnu pobudu i u stacionarnim uvjetima. Možemo dalje pisati:

$$G(j\omega) = \frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)} = \frac{|X_i|}{|X_u|} e^{j\varphi}. \quad (5\text{-}16)$$

Argument je te funkcije apsolutna vrijednost omjera amplituda verzora ili jednostavno amplituda:

$$|G(j\omega)| = \frac{|X_i|}{|X_u|} = \sqrt{|\sum \mathrm{Re}\,[G(j\omega)]|^2 + |\sum \mathrm{Im}\,[G(j\omega)]|^2}. \quad (5\text{-}17)$$

Modul se naziva i fazni pomak ili skraćeno faza:

$$\varphi = \underline{/G(j\omega)} = \mathrm{arc\ tg} \frac{\sum \mathrm{Im}\,[G(j\omega)]}{\sum \mathrm{Re}\,[G(j\omega)]}. \quad (5\text{-}18)$$

Kao što vidimo, i amplituda i faza su još samo funkcije od ω kao nezavisne varijable.

Sinusnu prijenosnu funkciju $G(j\omega)$ možemo smatrati kao poseban slučaj prijenosne funkcije $G(s)$, uvedene u odjeljku 4.3. Ako se naime prisjetimo da je

prema definiciji $s=\delta+j\omega$, možemo promatrati granični slučaj bez prigušnog člana, tj. kad je $\delta=0$.

Kao što ćemo vidjeti u odjeljku 15.3, uvjet $\delta=0$ znači da se varijabla mijenja duž imaginarne osi u ravnini kompleksne varijable. Tu se radi o Fourierovoj transformaciji, i sinusna prijenosna funkcija jednaka je Fourierovu transformatu impulsnog odziva sustava[1].

Jednadžbu (4-78) možemo pisati:

$$G(j\omega)=\frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)}=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_1(j\omega)+b_0}{a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_1(j\omega)+a_0}=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i(j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i(j\omega)^i}. \quad (5\text{-}19)$$

Očigledno je da se sada radi o izrazu koji opisuje neprigušene oscilacije. Naravno, i ovdje vrijedi uvjet da je $m<n$, tj. da je $G(j\omega)$ razlomljena racionalna funkcija, jer bi u protivnom slučaju, uz $\omega\to\infty$ i izlazna veličina rasla preko svake mjere. Znači da matematički model sustava ne bi odgovarao stvarnosti, osobito u području visokih frekvencija.

Uobičajeno je da sinusnu prijenosnu funkciju iz jednadžbe (5-19) pišemo u obliku umnoška faktora:

$$G(j\omega)=\frac{B(j\omega)}{N(j\omega)}=K\frac{(1-j\omega\tau_{b1})(1-j\omega\tau_{b2})\ldots(1-j\omega\tau_{bm})}{(1-j\omega\tau_{n1})(1-j\omega\tau_{n2})\ldots(1-j\omega\tau_{nn})}=$$

$$=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-j\omega\tau_{bi})}{\prod_{i=1}^{n}(1-j\omega\tau_{ni})}. \quad (5\text{-}20)$$

Te su vremenske konstante na jednostavan način povezane s korijenima: $n_i=-1/\tau_{bi}$ i $p_i=-1/\tau_{ni}$. To je i razumljivo, jer su **vremenske konstante u pravilu pozitivni brojevi, a korijeni su negativni brojevi.** Faktor $K=b_0/a_0$ nazvat ćemo opet prijenosni omjer ili pojačanje, ali moramo paziti da se njegova vrijednost razlikuje od K' uvedenog u jednadžbu (4-79). Zapravo, njihov je odnos:

$$K=K'\frac{(-n_1)(-n_2)\ldots(-n_m)}{(-p_1)(-p_2)\ldots(-p_n)}=K'\frac{\prod_{i=1}^{m}(-n_i)}{\prod_{i=1}^{n}(-p_i)}. \quad (5\text{-}21)$$

Na primjeru sustava prvoga reda opisanog diferencijalnom jednadžbom (5-2) prikazat ćemo bitno pojednostavnjenje rješenja, ako umjesto sinusnog oblika stavimo eksponencijalni oblik pobude i odziva. Pobudu $x_u=X_ue^{j\omega t}$ i odziv $x_i=X_ie^{j\omega t}e^{j\varphi}$ uvrstimo u jednadžbu (5-2), pri čemu smo proveli i derivaciju od x_i u prvom članu s lijeve strane:

$$j\omega\tau X_ie^{j\omega t}e^{j\varphi}+X_ie^{j\omega t}e^{j\varphi}=K_PX_ue^{j\omega t}. \quad (5\text{-}22)$$

[1] Vidi odjeljak 15.2.

Kraćenjem člana $e^{j\omega t}$ i preuređenjem dobit ćemo veoma lako stacionarno rješenje u obliku sinusne prijenosne funkcije:

$$G(j\omega)=\frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)}=\frac{K_P}{1+j\omega\tau} \tag{5-23}$$

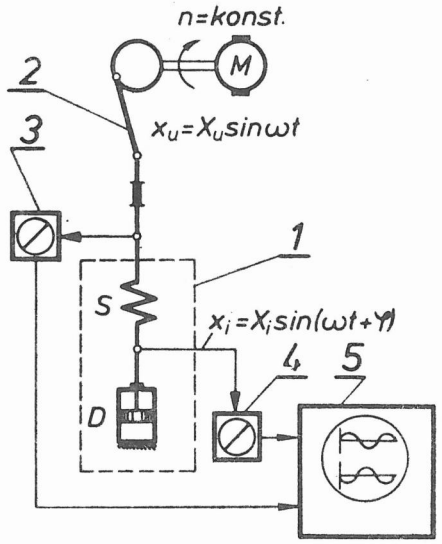
a amplitudom:

$$|G(j\omega)|=\frac{K_P}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \tag{5-24}$$

i fazom:

$$\varphi=-\text{arc tg } \omega\tau. \tag{5-25}$$

Gornje jednadžbe odgovaraju izrazima (5-7) i (5-10).



Sl. 5–4. Snimanje frekvencijskog odziva

Slično kao i vremenski odziv, možemo i frekvencijski odziv odrediti pokusima. Na sl. 5-4 prikazan je sustav opruga-prigušivač 1 koji želimo ispitati. Oprugu pokreće motor preko ojnice 2, i to u ritmu sinusne funkcije koje se frekvencija može mijenjati. Ako promatramo gibanje klipa prigušivača kao odzivnu funkciju sustava, možemo nazrijeti da to gibanje u stacionarnim uvjetima ima istu frekvenciju kao i pobudno gibanje, ali je različite amplitude i različite faze. Preko mjernih pretvarača 3 i 4 pretvaraju se položaji x_u i x_i u odgovarajuće električne signale koje možemo očitati na zaslonu osciloskopa s dva traga 5. Ima međutim i posebnih mjernih uređaja koji izravno pokazuju sinusnu prijenosnu funkciju u ovisnosti o frekvenciji.

5.2. Grafički prikaz frekvencijskog odziva

Osnovna je prednost uvođenja sinusne prijenosne funkcije mogućnost grafičkog prikaza koji se može zgodno primijeniti u analizi i sintezi regulacijskog sustava. Grafički prikaz sastoji se u tome da se amplituda i faza sinusne prijenosne funkcije $G(j\omega)$ prikažu u ovisnosti o frekvenciji ω kao nezavisnoj varijabli.

U praksi se pojavljuju slijedeći grafički postupci:

- **polarni dijagram** u Gaussovoj ravnini, gdje vrh verzora $G(j\omega)$ opisuje krivulju s frekvencijom ω kao parametrom. Zbog praktičnih razloga nazivat ćemo ga u tekstu **Nyquistov dijagram,** jer ga je H. Nyquist primijenio u određivanju stabilnosti sustava;
- **amplitudno-frekvencijski dijagram,** gdje je amplituda od $G(j\omega)$ funkcija frekvencije ω u log-log mjerilu, te **fazno-frekvencijski dijagram,** gdje je faza od $G(j\omega)$ funkcija frekvencije ω u lin-log mjerilu. Ta dva dijagrama nazivat ćemo dalje i **Bodeovi dijagrami,** prema H. W. Bodeu koji ih je prvi primijenio u rješavanju regulacijskih problema;
- **amplitudno-fazni dijagram,** gdje je amplituda od $G(j\omega)$ prikazana kao funkcija faze od $G(j\omega)$ s frekvencijom ω kao parametrom u log-lin mjerilu. I taj ćemo dijagram jednostavnije nazivati **Nicholsov dijagram,** jer je on osnova za tzv. Nicholsovu kartu (v. odjeljak 9.2).

Svaki od ta tri prikaza ima određene prednosti i nedostatke, što ćemo razmotriti u daljnjem gradivu.

5.2.1. Nyquistov dijagram

Grafički prikaz sinusne prijenosne funkcije u Nyquistovu dijagramu objasnit ćemo na jednostavnom sustavu prvoga reda koji je opisan sinusnom prijenosnom funkcijom u jednadžbi (5-23). Uz $\omega=0$:

$$\begin{aligned} |G(j0)| &= K_P, \\ \varphi &= 0°, \end{aligned} \tag{5-26}$$

a uz $\omega\to\infty$:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 0, \\ \varphi &= -90°. \end{aligned} \tag{5-27}$$

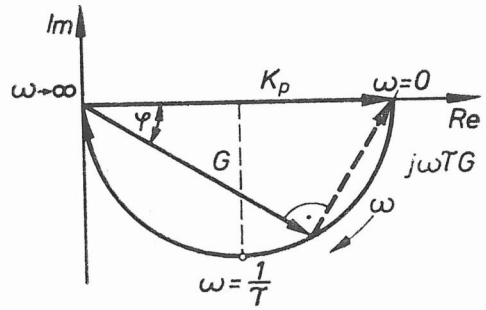
Još je jedna zanimljiva točka uz $\sqrt{1+\omega^2\tau^2}=\sqrt{2}$, odnosno uz $\omega=1/\tau$:

$$\begin{aligned} |G(j1/\tau)| &= \frac{K_P}{\sqrt{2}}. \\ \varphi &= -45°. \end{aligned} \tag{5-28}$$

Uz rastuće frekvencije vrh verzora opisuje tzv. **polarnu krivulju,** koja je kod sustava prvoga reda kružnica (sl. 5—5). To možemo dokazati pomoću jednadžbe (5-22). Dijeljenjem jednadžbe sa $X_u e^{j\omega t}$ dobit ćemo verzor K_P na desnoj strani kao vektorski zbroj članova $j\omega\tau\frac{X_i}{X_u}e^{j\varphi}$ i $\frac{X_i}{X_u}e^{j\varphi}$ na lijevoj strani. Kako derivacija kompleksne funkcije $e^{j\omega t}$ znači množenje sa $j\omega$, odnosno fazni zakret za 90°, oba su člana na lijevoj strani u kvadraturi. Zbog toga je i polarna krivulja na sl. 5—5 kružnica (Thalesov poučak).

Ti se odnosi mogu zorno prikazati i pomoću električnog RC kruga na sl. 2—1, gdje je na ulazu narinut izmjenični napon $U_u \sin \omega t$. Diferencijalna jednadžba tog kruga pretvara se u oblik:

$$j\omega RCU_C e^{j\varphi} + U_C e^{j\varphi} = U_u. \tag{5-29}$$



Sl. 5—5. Nyquistov prikaz P1-člana

Ovdje pobudni sinusni napon amplitude U_u pokriva padove napona na kondenzatoru U_C i na otporniku $U_R = j\omega RCU_C$.

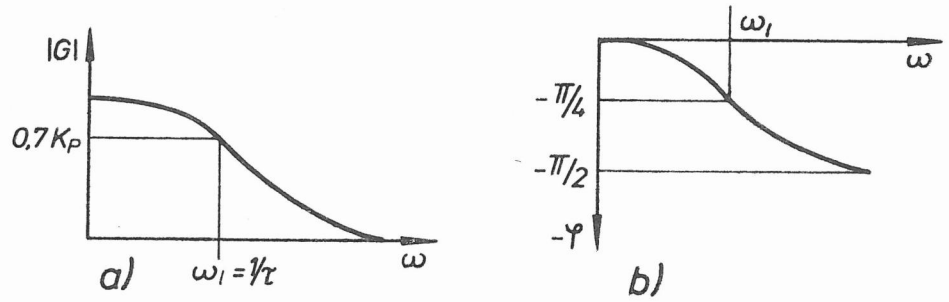
Nedostatak je Nyquistova dijagrama što za crtanje polarne krivulje moramo znati vrijednosti svih frekvencija. Osim toga, kod visokih frekvencija zauzima polarna krivulja vrlo malo područje, pa postaje nepregledna. Baš su poteškoće oko konstrukcije polarne krivulje, osobito u vezi s mijenjanjem parametara pri proučavanju stabilnosti, razlog što smo prešli na Bodeov prikaz. Ipak, za brzu ocjenu sustava dovoljna je i skica na Nyquistovu dijagramu.

Pri sintezi regulacijskih sustava često je povoljno da se u Nyquistov dijagram ocrtaju **inverzne polarne krivulje.** To je slučaj kod tzv. povratne kompenzacije, gdje se pojavljuju inverzne vrijednosti sinusne prijenosne funkcije. Računske operacije s njima mogu se u većini slučajeva svesti na jednostavno grafičko slaganje s odgovarajućim inverznim polarnim krivuljama. Tu ćemo metodu detaljno obraditi u odjeljku 9.3.

5.2.2. Bodeovi dijagrami

Bodeovi dijagrami[1] primjenjivali su se niz godina u dojavnoj tehnici, gdje su bili poznati pod nazivom frekvencijske karakteristike.

Amplituda i faza sinusne prijenosne funkcije prema jednadžbama (5-24) i (5-25) mogu se odjelito prikazati u dijagramima prema sl. 5—6 kao funkcije kružne frekvencije ω. Na sl. 5—6a je tzv. amplitudno-frekvencijska karakteristika: omjer amplituda $|G(j\omega)|$ pada s rastućom frekvencijom monotono od vrijednosti K_p, uz $\omega=0$, do vrijednosti nula, uz $\omega\to\infty$. Fazno-frekvencijska karakteristika na sl. 5—6b prikazuje odgovarajuću promjenu faze od 0° do $-\pi/2$.



Sl. 5—6. Amplituda i faza sinusne prijenosne funkcije prikazane na odijeljenim dijagramima kao funkcije frekvencije

[1] Bode, H. W., Relations between Attenuation and Phase in Feedback Amplifier Design. Bell Syst. Tech. Journ. 19, 1940, str. 421—454.

Značajna je frekvencija kad prijenosni omjer padne na $1/\sqrt{2}$ maksimalne vrijednosti: to se naziva i **lomna frekvencija** ω_l a povezana je s vremenskom konstantom sustava prvoga reda $\omega_l = 1/\tau$.

Obje karakteristike na sl. 5—6 mogu se konstruirati na osnovi Nyquistova dijagrama, prenoseći odgovarajuću amplitudu i fazu za svaku frekvenciju. Ipak se upotrebljava **logaritamsko mjerilo,** jer se znatno pojednostavnjuje konstrukcija, grafičko slaganje i ocjena karakteristika. U vezi s time upotrebljava se i jedinica **decibel** ili skraćeno dB kao logaritamski omjer amplituda. Iako je decibel svojedobno uveden u dojavnu tehniku kao omjer snage izlaznog i ulaznog signala, u regulacijskoj tehnici definira se na slijedeći način:

$$|G(j\omega)|\ \mathrm{dB} = 20 \log |G(j\omega)|. \tag{5-30}$$

Ovdje je $|G(j\omega)| = |X_i/X_u|$ **omjer bilo kojih dviju veličina.** Tako npr. omjeru amplituda 2:1 odgovara:

$$20 \log \frac{|X_i|}{|X_u|} = 20 \log 2 \simeq 6\ \mathrm{dB},$$

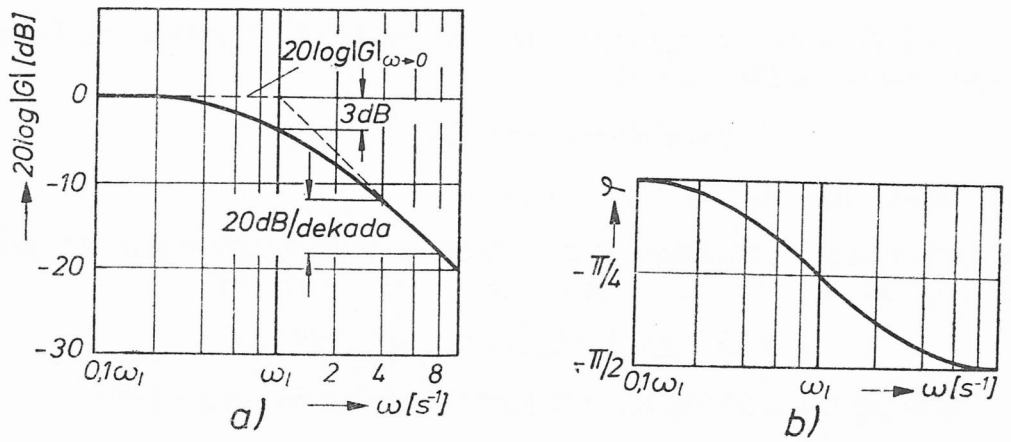
a omjeru 10:1 odgovara:

$$20 \log \frac{|X_i|}{|X_u|} = 20 \log 10 = 20\ \mathrm{dB}.$$

Frekvencije se također nanose u logaritamskom mjerilu. Za omjer frekvencija 2:1 upotrebljava se izraz **oktava,** što je uobičajeni naziv iz akustike. U regulaciji se češće rabi izraz **dekada,** što znači omjer frekvencija 10:1.

Na taj način moguće je u amplitudno-frekvencijskoj karakteristici na sl. 5-7a prikazati i promjene amplitude i promjene frekvencije u velikom području. Drugi je razlog za uvođenje logaritamskog mjerila za amplitude u tome što se u regulacijskoj tehnici veoma često sustavi spajaju serijski, pri čemu se njihove sinusne prijenosne funkcije množe (v. odjeljak 5.4):

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)\, G_2(j\omega) \ldots G_n(j\omega) =$$
$$= |G_1| e^{j\varphi_1} \cdot |G_2| e^{j\varphi_2} \ldots |G_n| e^{j\varphi_n}. \tag{5-31}$$



Sl. 5—7. Bodeov prikaz: P$_1$-člana: amplitudno-frekvencijska (a) i fazno-frekvencijska karakteristika (b). Zbog jednostavnosti uzet je $K_P = 1$.

Logaritmiranjem se dalje dobije:

$$\log | G(j\omega) | = \log | G_1 | + \log | G_2 | + \ldots + \log | G_n | + \tag{5-32}$$
$$+ j \log e (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n).$$

Pri analizi i sintezi regulacijskih krugova odgovarajući logaritmi amplitude pojedinih serijski vezanih članova jednostavno se zbrajaju. Kako se međutim faze prema jednadžbi (5-32) također zbrajaju, faza se unosi u fazno-frekvencijsku karakteristiku u linearnom mjerilu (sl. 5—7b).

Da bi konstrukcija Bodeova dijagrama bila lakša, promatra se amplitudno-frekvencijska karakteristika u području vrlo niskih i vrlo visokih frekvencija. Koristeći se u jednadžbi (5-24) izrazom za amplitudu sustava prvoga reda, logaritmiranjem ćemo dobiti:

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \frac{K_P}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} = 20 \log K_P - 20 \log \sqrt{1+\omega^2\tau^2}. \tag{5-33}$$

To pri vrlo niskim frekvencijama, uz $\omega \to 0$, daje izraz za NF asimptotu:

$$20 \log | G(j\omega) |_{\omega \to 0} \simeq 20 \log K_P, \tag{5-34}$$

a u području vrlo visokih frekvencija, uz $\omega \to \infty$ izraz za VF asimptotu:

$$20 \log | G(j\omega) |_{\omega \to \infty} \simeq 20 \log K_P - 20 \log \sqrt{\omega^2\tau^2} \simeq$$
$$\simeq 20 \log K_P - 20 \log \omega\tau. \tag{5-35}$$

Niskofrekvencijska asimptota usporedna je s osi apscisa, a visokofrekvencijska asimptota je u log-log mjerilu pravac s negativnim nagibom koji se daje u decibelima po dekadi.

Nagib VF asimptote izračuna se na temelju razlike dviju logaritamskih vrijednosti amplituda za određenu razliku frekvencija. Uzimamo dvije frekvencije koje su međusobno udaljene za dekadu, ω_1 i $\omega_2 = 10\,\omega_1$; prema jednadžbi (5-35) amplitude razlikuju se za:

$$20 \log K_P - 20 \log \omega_2\tau - (20 \log K_P - 20 \log \omega_1\tau) =$$
$$= -20 \log \frac{\omega_2}{\omega_1} = -20 \log 10 = -20 \text{ dB/dek.} \tag{5-36}$$

Još je zanimljiva frekvencija kod koje se sijeku NF i VF asimptota. U tu svrhu izjednačimo izraze (5-34) i (5-35):

$$20 \log K_P = 20 \log K_P - 20 \log \omega\tau \tag{5-37}$$

pa je već spomenuta lomna frekvencija $\omega_l = 1/\tau$.

S te dvije asimptote možemo stvarnu karakteristiku veoma dobro aproksimirati. Najveća je greška upravo kod lomne frekvencije, a iznosi:

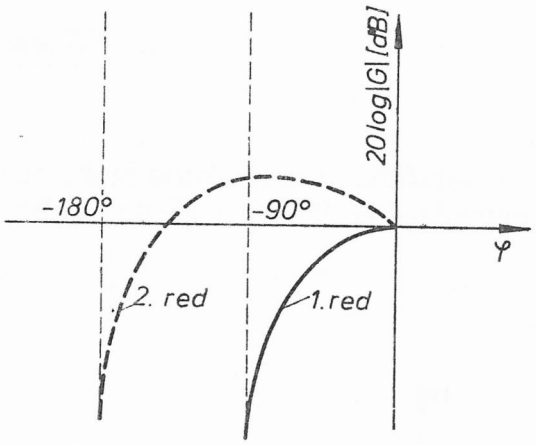
$$20 \log | G(j\omega) |_{\omega \to 0} - 20 \log | G(j\omega) | \simeq$$
$$\simeq 20 \log K_P - (20 \log K_P - 20 \log \sqrt{1+\omega^2\tau^2}) \simeq 20 \log 2 = 3 \text{ dB}. \tag{5-38}$$

Očigledno je da Bodeovi dijagrami mogu dobro poslužiti za prikaz rezultata mjerenja. Snimimo nekoliko točaka pa ćemo pomoću asimptota i njihovih sjecišta

vrlo brzo dobiti podatke za područje frekvencija koje nas zanima. Osim toga, kod serijski spojenih članova vrši se jednostavno grafičko zbrajanje. Zato se pri analizi i sintezi pomoću frekvencijskog odziva obično počinje od Bodeovih dijagrama, iz kojih se eventualno konstruiraju Nyquistovi i Nicholsovi prikazi.

5.2.3. Nicholsov dijagram

Sinusne prijenosne funkcije možemo još grafički prikazati pomoću Nicholsova dijagrama, gdje se logaritamska vrijednost amplitude nanosi u dijagram kao funkcija faze. Frekvencija je pri tome parametar koji je pridodan svakoj točki krivulje. Na sl. 5—8 vidimo tipičnu logaritamsku krivulju za sustav prvoga reda. Ona se uz porast frekvencije $\omega \to \infty$ asimptotski približava negativnoj ordinatnoj osi uz kut približavanja od $-90°$.



Sl. 5—8. Nicholsov prikaz P_1-člana

Nicholsov dijagram zadržao je jednostavno grafičko slaganje kao i Bodeov dijagram. Tako u sintezi namještanje pojačanja, tj. množenje s prijenosnim omjerom K_P, znači jednostavno dizanje i spuštanje krivulje. U kombinaciji s Nicholsovom kartom (v. odjeljak 9.2) možemo pomoću tog dijagrama jednostavno projektirati kompenzaciju zatvorenog regulacijskog kruga s jediničnom povratnom vezom.

5.3. Frekvencijski odziv osnovnih sustava

U dosadašnjem izlaganju o frekvencijskom odzivu uveli smo pojam sinusne prijenosne funkcije, a na primjeru sustava prvoga reda pokazali smo kako se ona može grafički prikazati u Nyquistovu, Bodeovim i Nicholsovu dijagramu. Sada ćemo taj prikaz proširiti i na ostale osnovne sustave. Na kraju odjeljka u tablici 5—1 još jednom dajemo pregled svih osnovnih sustava u analitičkom i grafičkom obliku.

Proporcionalni član drugoga reda. Na sličan način kao i kod proučavanja frekvencijskog odziva sustava prvoga reda, na sustav drugoga reda narine se umjesto odskočne pobudne funkcije sinusna funkcija s mogućnošću promjene frekvencije. Zamjenom d/dt sa $j\omega$ dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu u općem obliku:

$$\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi} + j\omega 2\frac{\zeta}{\omega_n} X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi} + X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi} = K_P X_u e^{j\omega t} \qquad (5\text{-}39)$$

s uvedenim kraticama ζ i ω_n. Iz te jednadžbe možemo jednostavno napisati sinusnu prijenosnu funkciju:

$$G(j\omega)=\frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)}=\frac{K_P}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+j\omega 2\frac{\zeta}{\omega_n}} \tag{5-40}$$

s amplitudom:

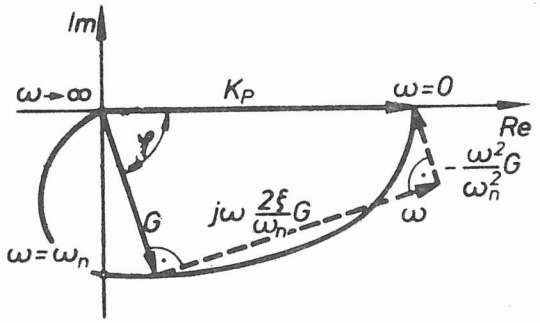
$$|G(j\omega)|=\frac{K_P}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\omega 2\frac{\zeta}{\omega_n}\right)^2}} \tag{5-41}$$

i fazom:

$$\varphi=\underline{/G(j\omega)}=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega 2\frac{\zeta}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}. \tag{5-42}$$

Grafički je ta funkcija prikazana na Nyquistovu dijagramu na sl. 5—9. Prema jednadžbama (5-41) i (5-42) dobit ćemo za frekvenciju $\omega=0$:

$$\begin{aligned} |G(j0)| &= K_P, \\ \varphi &= 0°, \end{aligned} \tag{5-43}$$



Sl. 5—9. Nyquistov prikaz P_2-člana

a za frekvenciju $\omega\to\infty$:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 0, \\ \varphi &= -180°. \end{aligned} \tag{5-44}$$

Još je jedna zanimljiva točka polarne krivulje kod frekvencije $\omega=\omega_n$:

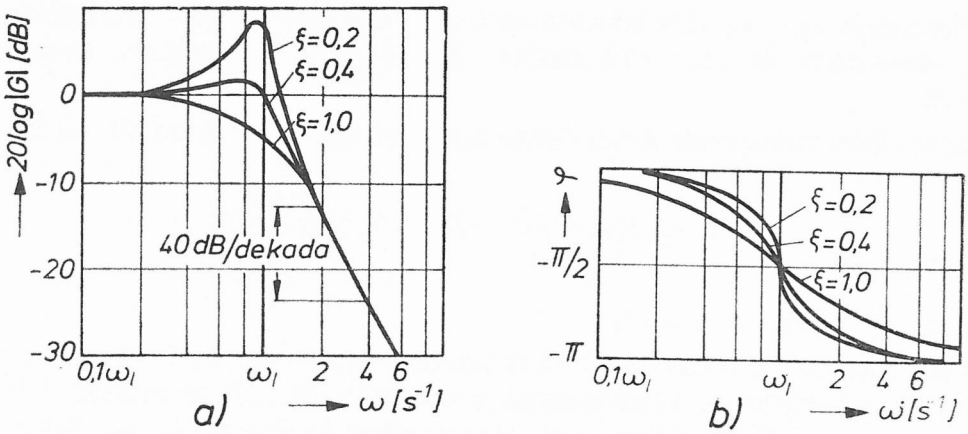
$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{K_P}{2\zeta}, \\ \varphi &= -90°. \end{aligned} \tag{5-45}$$

Podijelimo li jednadžbu (5-39) sa $X_u e^{j\omega t}$, dobit ćemo verzor K_P na desnoj strani jednadžbe, koji predstavlja vektorski zbroj članova:

$$Ge^{j\varphi},\ j\omega 2\frac{\zeta}{\omega_n}Ge^{j\varphi} \quad \text{i} \quad -\frac{\omega^2}{\omega_n^2}Ge^{j\varphi}$$

na lijevoj strani jednadžbe. Uz $\omega=\omega_n$ verzori $Ge^{j\varphi}$ i $-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}Ge^{j\varphi}$ jednake su dužine, a polarna krivulja siječe imaginarnu os.

I ovdje krivulja mjesta počinje u udaljenosti K_P na osi apscise, a završava, uz $\omega\to\infty$, u ishodištu kojemu se približava pod kutom $-180°$. Iz toga možemo zaključiti da se kod diferencijalne jednadžbe n-tog reda polarna krivulja $G(j\omega)$ približava ishodištu pod kutom $-n\frac{\pi}{2}$.



Sl. 5—10. Bodeov prikaz P_2-člana. Zbog jednostavnosti je uzet $K_P=1$.

Radi zorne primjene tog dijagrama možemo opet uzeti električni RLC sustav prema sl. 3—13, kojemu je na ulazu narinut izmjenični napon U_u sin ωt. Sada je diferencijalna jednadžba kruga u obliku:

$$-\omega^2 LCU_C e^{j\varphi}+j\omega RCU_C e^{j\varphi}+U_C e^{j\varphi}=U_u. \tag{5-46}$$

Pobudni napon amplitude U_u pokriva padove napona U_C na kondenzatoru, $U_R=j\omega RCU_C$ na otporniku, te $U_L=-\omega^2 LCU_C$ na svitku.

Bodeovi dijagrami za sustav drugoga reda prikazani su na sl. 5—10. Amplitudno-frekvencijska karakteristika na sl. 5—10a predstavlja grafički oblik jednadžbe:

$$20\log|G(j\omega)|=20\log K_P-20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\omega 2\frac{\zeta}{\omega_n}\right)^2} \tag{5-47}$$

koju smo dobili logaritmiranjem jednadžbe (5-41).

I ta se krivulja može pojednostavnjeno prikazati s dva pravca, i to niskofrekvencijskom asimptotom:

$$20\log|G(j\omega)|_{\omega\to 0}\simeq 20\log K_P \tag{5-48}$$

i visokofrekvencijskom asimptotom:

$$20\log|G(j\omega|_{\omega\to\infty}\simeq 20\log K_P-20\log\frac{\omega^2}{\omega_n^2}. \tag{5-49}$$

Nagib visokofrekvencijske asimptote dobit ćemo na osnovi jednadžbe (5-49). Slično kao i kod člana prvoga reda, izračunamo vrijednosti od $20 \log |G(j\omega)|_{\omega\to\infty}$ kod dvije frekvencije koje se razlikuju za dekadu, tj. uz $\omega_2 = 10\,\omega_1$:

$$20 \log K_P - 20 \log \frac{\omega_2^2}{\omega_n^2} - \left(20 \log K_P - 20 \log \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2}\right) =$$

$$= -20 \log \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = -20 \log 10^2 = -40 \text{ dB/dek}, \qquad (5\text{-}50)$$

jer su frekvencije ω_2 i ω_1 razmaknute za jednu dekadu. Nagib visokofrekvencijske asimptote dvostruko je veći kod sustava drugoga reda u odnosu prema sustavu prvoga reda.

Sjecište obiju asimptota dobit ćemo izjednačivanjem jednadžbi (4-48) i (4-49):

$$20 \log K_P = 20 \log K_P - 20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2}, \qquad (5\text{-}51)$$

pa je lomna frekvencija $\omega = \omega_n$.

Tok karakteristika u okolišu lomne frekvencije ω_l na sl. 5-10a ovisi o stupnju prigušenja ζ; pojavljuje se **rezonantno izdizanje** M_r, ali se mijenja i frekvencija kod koje se ono pojavljuje. Vrijednost **rezonantne frekvencije** ω_r dobit ćemo derivacijom izraza za $|G(j\omega)|$ iz jednadžbe (5-41) po ω[1]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\omega 2\frac{\zeta}{\omega_n}\right)^2}}\right]=0 \qquad (5\text{-}52)$$

i izjednačenjem s nulom. Nakon sređivanja to daje:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \quad \text{za} \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 0{,}7. \qquad (5\text{-}53)$$

Uvrštenjem tog izraza u jednadžbu (5-41), izračunamo rezonantno izdizanje:

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_r^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\omega_r 2\frac{\zeta}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}. \qquad (5\text{-}54)$$

Kod vrijednosti $\zeta = 0{,}7$ nestaje ω_r, što vidimo iz jednadžbe (5-53). Ujedno je prema izrazu (5-54) i $M_r = 1$, zbog $20 \log M_r = 0$. Na sl. 5—10a je amplitudno-frekvencijska karakteristika maksimalno položena. Povećanjem vrijednosti ζ karakteristika se sve više zaobljuje.

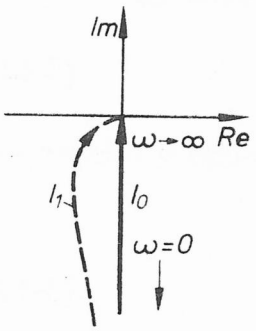
Na fazno-frekvencijskoj karakteristici na sl. 5—10b prikazana je promjena faze u ovisnosti o frekvenciji: kod porasta frekvencije mijenja se φ od 0° do −180°. I te karakteristike ovise o stupnju prigušenja ζ.

[1] Zbog preglednosti izraza zamijenili smo prijenosni omjer jedinicom.

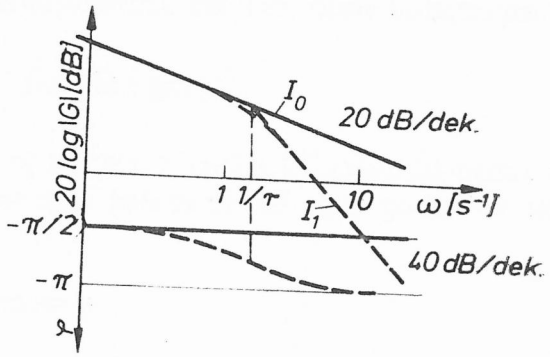
Integralni član. Sinusnu prijenosnu funkciju I_0-člana dobit ćemo na osnovi jednadžbe (3—77). Njezin je opći oblik:

$$G(j\omega)=\frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)}=\frac{K_i}{j\omega}=-j\frac{K_i}{\omega}. \tag{5-55}$$

Amplituda je ovdje obrnuto razmjerna frekvenciji ω, dok je faza φ konstantna i jednaka $-90°$. Polarna krivulja je dakle pravac duž imaginarne osi $-j\infty$ do ishodišta (sl. 5—11).



Sl. 5—11. Nyquistov prikaz I-člana



Sl. 5—12. Bodeov prikaz I-člana

Ako se radi o I_1-članu, njegova je sinusna prijenosna funkcija opterećena jednim članom za kašnjenje:

$$G(j\omega)=\frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)}=\frac{K_i}{j\omega(1+j\omega\tau)}, \tag{5-56}$$

pa polarna krivulja, uz $\omega\to\infty$, dolazi prema ishodištu pod kutom od $-180°$. Ona je na dijagramu prikazana isprekidano.

Na Bodeovim dijagramima na sl. 5—12 amplitudno-frekvencijska karakteristika I_0-člana kosi je pravac koji odgovara jednadžbi:

$$20\log|G(j\omega)|=20\log K_i-20\log\omega. \tag{5-57}$$

Fazni pomak je pravac u konstantnoj udaljenosti $-90°$ od osi apscisa, jer je realni član jednak nuli:

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}. \tag{5-58}$$

Derivacijski član. Sinusnu prijenosnu funkciju D_0-člana dobit ćemo na osnovi jednadžbe (3—85) u poopćenom obliku:

$$G(j\omega)=\frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)}=j\omega K_d. \tag{5-59}$$

Amplituda je sada razmjerna frekvenciji ω, a kako je faza konstantna i iznosi 90°, polarna je krivulja na sl. 5—13 pravac duž imaginarne osi od ishodišta prema $j\infty$.

Kod D_1-člana jednadžba (3-68) ima u nazivniku kašnjenje prvoga reda:

$$G(j\omega)=\frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)}=\frac{j\omega K_d}{1+j\omega\tau}, \tag{5-60}$$

pa je polarna krivulja polukružnica koja završava na osi apscisa u udaljenosti K_d/τ od ishodišta.

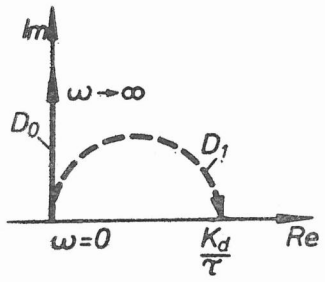
D_0-član kao i D_1-član prikazani su u Bodeovim dijagramima na sl. 5—14. Amplitudno-frekvencijska karakteristika D_0-člana je pravac određen sa:

$$20\log|G(j\omega)|=20\log K_d+20\log\omega, \tag{5-61}$$

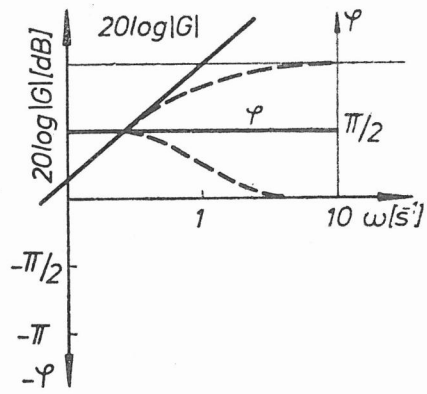
a fazno-frekvencijska karakteristika je pravac usporedan s osi apscisa u udaljenosti od 90° zbog toga što je realni član opet jednak nuli:

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}(\infty)=\frac{\pi}{2}. \tag{5-62}$$

Na osnovi tih izvoda nije teško odrediti i karakteristike za D_1-član koje su na sl. 5—14 naznačene isprekidano.



Sl. 5—13. Nyquistov prikaz D-člana



Sl. 5—14. Bodeov prikaz D-člana

Član s mrtvim vremenom. U vremenskom je području funkcionalni odnos između odzivne i pobudne funkcije člana s mrtvim vremenom:[1]

$$x_i(t)=x_u(t-\tau_m). \tag{5-63}$$

Uvrštenjem pobude $x_u=X_u e^{j\omega t}$ kao i pretpostavljenog odziva $x_i=X_i e^{j\omega t}e^{j\varphi}$:

$$X_i e^{j\omega t}e^{j\varphi}=X_u e^{j\omega(t-\tau_m)}=X_u e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau_m} \tag{5-64}$$

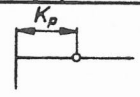
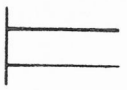
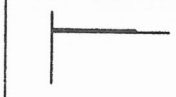
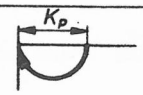
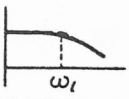
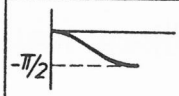
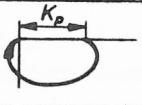
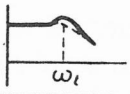
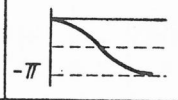
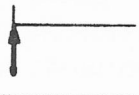
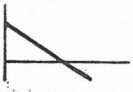
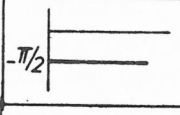
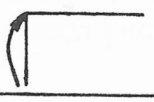
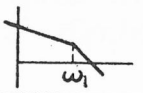
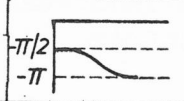
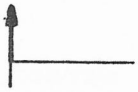
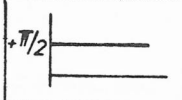
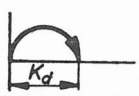
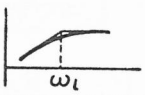
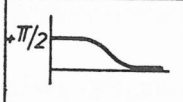
[1] Usporedi jednadžbu (3—92)

dobit ćemo uz $X_i = X_u$ sinusnu prijenosnu funkciju:

$$G(j\omega) = \frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)} = \frac{X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi}}{X_u e^{j\omega t}} = e^{-j\omega\tau_m} \tag{5-65}$$

Iako je ona transcendentna, oblik joj je vrlo jednostavan.

Tablica 5—1. Frekvencijski odziv osnovnih sustava

	SINUSNA PRIJENOSNA FUNKCIJA	FREKVENCIJSKI ODZIV		
		Nyquist	amplitudni Bode	fazni
P_0	K_P			
P_1	$\frac{K_P}{1+j\omega T}$			
P_2	$\frac{K_P}{1+j\omega\frac{2\xi}{\omega_n}-\frac{1}{\omega_n^2}\omega^2}$			
I_0	$\frac{K_i}{j\omega}$			
I_1	$\frac{K_i}{j\omega(1+j\omega T)}$			
D_0	$K_d j\omega$			
D_1	$\frac{K_d j\omega}{1+j\omega T}$			
T_m	$e^{-j\omega\tau_m}$			

Polarna krivulja na Nyquistovu dijagramu je kružnica s polumjerom 1 i s fazom koja se ponavlja svakih -2π (sl. 5—15).

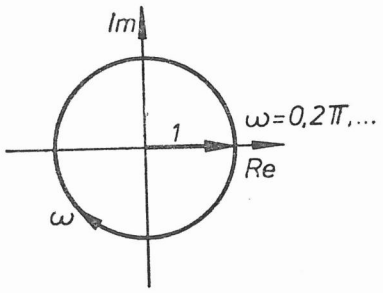
Na Bodeovu dijagramu je zbog odnosa:

$$20 \log | G(j\omega) | = 20 \log 1 = 0 \tag{5-66}$$

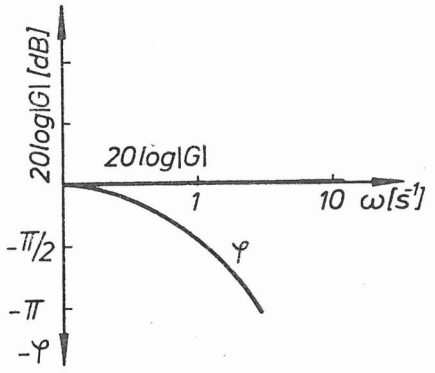
amplitudno-frekvencijska karakteristika pravac, a fazno-frekvencijska karakteristika:

$$\varphi = -\omega\tau_m \tag{5-67}$$

zakrivljena je zbog log-lin mjerila dijagrama prema dolje (sl. 5—16).



Sl. 5—15. Nyquistov prikaz T_m-člana



Sl. 5—16. Bodeov prikaz T_m-člana

5.4. Grafička analiza složenih sustava

U odjeljku 5.2. spomenuli smo kao jednu od osnovnih prednosti frekvencijskog odziva to što se informacije o dinamici sustava mogu dobiti na osnovi podataka snimljenih pokusima. Nadalje, od mogućih grafičkih prikaza najpogodniji su Bodeovi dijagrami, jer i **kod viših frekvencija odnosi ostaju pregledni.** Bodeovi dijagrami imaju još jednu osnovnu prednost: **upotrebom logaritamskog mjerila kod serijski vezanih sklopova,** koji se najčešće pojavljuju u regulacijskim sustavima, množenje pojedinih sinusnih prijenosnih funkcija $G_i\ (j\omega)$ svodi se na



Sl. 5—17. Shematski prikaz pojednostavnjenja proračuna dinamičkih sustava pomoću Bodeovih dijagrama

grafičko zbrajanje. To pojednostavnjeno računanje shematski je prikazano na sl. 5—17, što ćemo odmah vidjeti na primjeru sinusne prijenosne funkcije složenog sustava. Ona se sastoji općenito od nekoliko osnovnih članova:

— pojačivačkog člana s konstantom K,

— aperiodskog člana $(1+j\omega\tau)$,

— oscilacijskog člana $\left(1+j\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega-\frac{1}{\omega_n^2}\omega^2\right)$,

— integralnog člana $j\omega$,

— transportnog člana $e^{-j\omega\tau_m}$.

Množenjem tih članova dobit ćemo:

$$G(j\omega)=\prod_{i=1}^{k}G_i(j\omega)=$$

$$=\frac{K\prod_{i=1}^{l}(1+j\omega\tau_i)\prod_{i=1}^{m}\left(1+j\frac{2\zeta_i}{\omega_{ni}}\omega-\frac{1}{\omega_{ni}^2}\omega^2\right)}{(j\omega)^n\prod_{i=1}^{p}(1+j\omega\tau_i)\prod_{i=1}^{r}\left(1+j\frac{2\zeta_i}{\omega_{ni}}\omega-\frac{1}{\omega_{ni}^2}\omega^2\right)}e^{-j\omega\tau_m}. \tag{5-68}$$

Logaritmiranje sinusne prijenosne funkcije daje:

$$\log G(j\omega)=\sum_{i=1}^{k}\log|G_i(j\omega)|+j\log e\sum_{i=1}^{k}\varphi_i. \tag{5-69}$$

Budući da se u amplitudno-frekvencijskoj karakteristici koristimo decibelima, zbrajanjem amplituda prema jednadžbi (5-68) dobijemo:

$$20\sum_{i=1}^{k}\log|G_i(j\omega)|=20\log K+20\sum_{i=1}^{l}\log|1+j\omega\tau_i|+$$

$$+20\sum_{i=1}^{m}\left|1+j\frac{2\zeta_i}{\omega_{ni}}\omega-\frac{1}{\omega_{ni}^2}\omega^2\right|-20n\log\omega-20\sum_{i=1}^{p}\log|1+j\omega\tau_i|-$$

$$-20\sum_{i=1}^{r}\log\left|1+j\frac{2\zeta_i}{\omega_{ni}}\omega-\frac{1}{\omega_{ni}^2}\omega^2\right|. \tag{5-70}$$

Zbrajanjem faza dobit ćemo u fazno-frekvencijskom dijagramu:

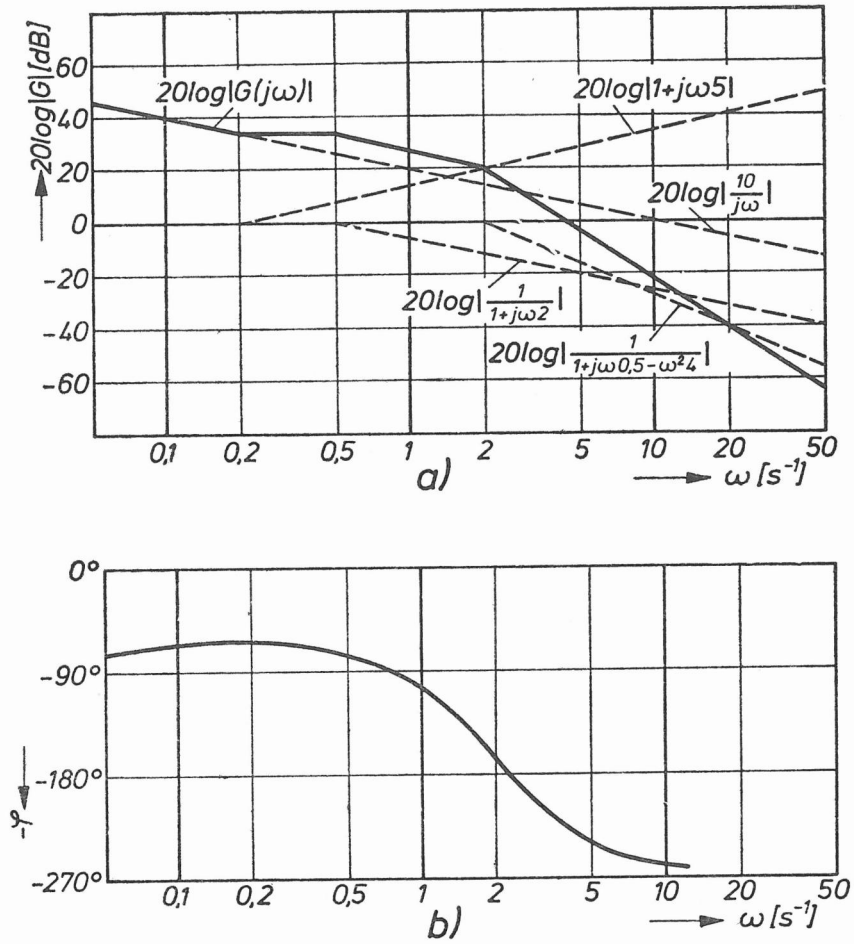
$$\sum_{i=1}^{k}\varphi_i=\sum_{i=1}^{l}\operatorname{arc\,tg}\omega\tau_i+\sum_{i=1}^{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\zeta_i\omega_{ni}\omega}{\omega_{ni}^2-\omega^2}-\omega\tau_m-$$

$$-n\frac{\pi}{2}-\sum_{i=1}^{p}\operatorname{arc\,tg}\omega\tau_i-\sum_{i=1}^{r}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\zeta\omega_{ni}\omega}{\omega_{ni}^2-\omega^2}. \tag{5-71}$$

Prema tome, kod serijski spojenih sustava vrši se samo grafičko zbrajanje, i u tome je veliko značenje Bodeovih dijagrama u analizi i sintezi regulacijskih sustava.

Konstrukciju započinjemo amplitudno-frekvencijskom karakteristikom. Određuje se najprije niskofrekvencijska asimptota kod $\omega\simeq 0$: prema izrazu (5-68) dobit ćemo $20\log K-20\,n\log\omega$, i to unosimo u karakteristiku. Nakon toga se kod svake lomne frekvencije ω_{li} mijenja nagib, i to se nastavlja do posljednje lomne frekvencije kojom je određen nagib složene karakteristike sve do $\omega\to\infty$. Tako ćemo dobiti izlomljenu približnu karakteristiku. U praksi se možemo njome zadovoljiti, naročito kod pretprojekta. Želimo li točnu kontinuiranu karakteristiku,

moramo u određenim frekvencijskim područjima u okolišu lomnih frekvencija odrediti točan tok karakteristike onako kako je to izloženo kod konstrukcije karakteristika za aperiodske i oscilacijske članove. Konstrukciju fazno-frekvencijske karakteristike obično radimo pomoću tablice: za pojedine značajne frekvencije upišemo fazu svakog pojedinog člana i to na kraju zbrojimo.



Sl. 5—18. Konstrukcija sinusne prijenosne funkcije u Bodeovim dijagramima — primjer 5.1

Primjer 5.1. Uzimamo sustav kojeg opisuje sinusna prijenosna funkcija:

$$G(j\omega)=\frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)}=\frac{10\,(1+j\omega 5)}{j\omega\,(1+j\omega 2)\,(1+j\omega\,0{,}5-\omega^2\,0{,}25)}.$$

Na sl. 5-18a nanesene su asimptote za pojedine članove u brojniku i nazivniku. Lomne frekvencije pojedinih članova kao i nagib visokofrekvencijske asimptote prikazani su u tablici 5—2. U oscilacijskom članu možemo lako izračunati stupanj prigušenja ζ. Iz $\omega_n=2s^{-1}$ i odnosa:

$$\frac{2\zeta}{\omega_n}=0{,}5$$

dobit ćemo $\zeta=0{,}5$. Uz tu vrijednost stupnja prigušenja karakteristika ima još neznatno rezonantno izdizanje.

Tablica 5—2. Uz proračun primjera 5.1

Član	Lomna frekvencija [s^{-1}]	Nagib [dB/dek.]
$\frac{10}{j\omega}$	—	−20
$1+j\omega 5$	0,2	+20
$1+j\omega 2$	0,5	−20
$1+j\omega\,0{,}5-\omega^2\,0{,}25$	2	−40

Konstrukciju započinjemo krivuljom za član $10/j\omega$, tj. kad je $\omega\simeq 0$. Nakon toga se kod svake lomne frekvencije pribraja nova visokofrekvencijska asimptota određenog člana, mijenjajući nagib krivulje složenog sustava.

Tablica 5—3. Uz proračun primjera 5.1

Član	0,05	0,1	0,5	1	2	5	10
$\frac{10}{j\omega}$	−90°	−90°	−90°	−90°	−90°	−90°	−90°
$1+j\omega 5$	14°	−26,6°	68,2°	78,7°	84,3°	87,7°	88,8°
$1+j\omega 2$	−5,7°	−11,3°	−45°	−63,4°	−75,9°	−84,3°	−87,2°
$1+j\omega 0{,}5-$ $-\omega^2 0{,}25$	−1,4°	−2,9°	−15°	−33,8°	−90°	−154,7°	−168,3°
$G(j\omega)$	−83,1°	−77,6°	−81,8°	−108,5°	−171,6°	−241,3°	−256,7°

Konstrukcija fazno-frekvencijske karakteristike dana je prema tablici 5—3, gdje su za najvažnije frekvencije izračunate faze pojedinih članova, što je na kraju zbrojeno (sl. 5—18b). Da bismo izbjegli dugotrajno računanje, možemo se koristiti odgovarajućim tablicama i nomogramima [lit. 48, 52].

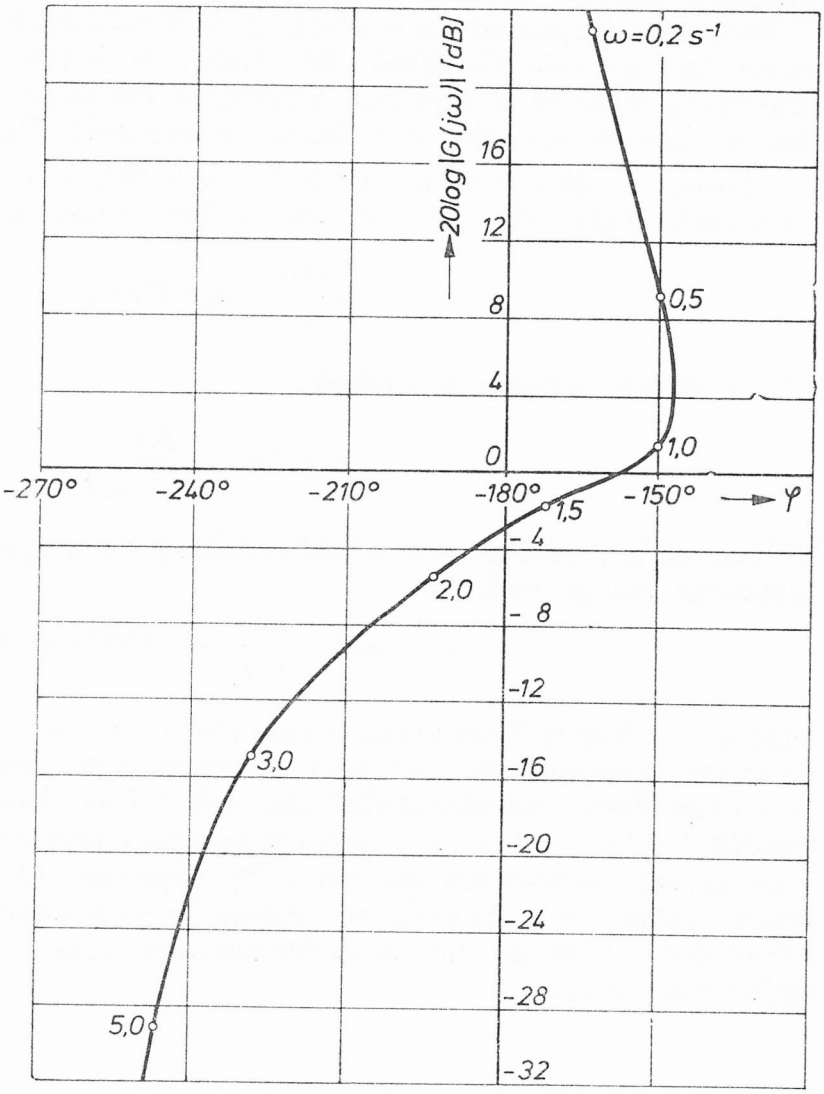
Tablica 5—4. Uz proračun primjera 5.2

Član	0	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	5,0
0,5	−6 db 0°	−6 0°	−6 0°	−6 0°	−6 0°	−6 0°	−6 0°	−6 0°
$\frac{1}{(j\,\omega)^2}$	∞ −180°	28 −180°	12 −180°	0 −180°	−6,8 −180°	−12 −180°	−19 −180°	−28 −180°
$1+j\,\omega\,2$	0 0	0,6 21°	3,0 45°	7,0 63°	10,0 71°	12,3 76°	15,7 81°	20 84°
$\frac{1}{1-(0{,}5\,\omega)^2+j\,\omega\,0{,}5}$	0 0°	0,2 −6°	0,4 −15°	0,7 −34°	1,0 −63°	0 −90°	−6 −130°	−15 −152°
$G(j\,\omega)$	∞ −180°	22,8 −165°	9,4 −150°	1,7 −151°	−1,8 −172°	−5,7 −194°	−15,3 −229°	−29 −248°

U sintezi regulacijskih sustava primjenjuje se mnogo i Nicholsov dijagram. On također posjeduje logaritamsko mjerilo amplituda, a time i jednostavnost grafičkog slaganja. Nicholsov dijagram možemo konstruirati na osnovi Bodeovih karakteristika: kod raznih frekvencija dobit ćemo **očitavanjem** logaritamski omjer amplituda i fazni kut. U Nicholsovu dijagramu te su dvije veličine na koordinatnim osima, a frekvencija je parametar. Naravno, Nicholsov dijagram možemo dobiti i **izračunavanjem** iz poznate sinusne prijenosne funkcije. To ćemo pokazati na primjeru.

Primjer 5.2. Dana je sinusna prijenosna funkcija:

$$G(j\omega)=\frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)}=\frac{0{,}5\,(1+j\omega 2)}{(j\omega)^2\,[1-(0{,}5\omega)^2+j\omega\,0{,}5]}.$$



Sl. 5—19. Konstrukcija sinusne prijenosne funkcije u Nicholsovu dijagramu — primjer 5.2

U tablici 5—4 zadani su svi faktori gornjeg izraza, i to:

$$0{,}5,\quad \frac{1}{(j\omega)^2},\quad 1+j\omega 2,\quad \frac{1}{1-(0{,}5\omega)^2+j\omega\,0{,}5}.$$

Za svaki faktor izračunamo amplitudu u decibelima i fazu, i to za niz frekvencija iz značajnog frekvencijskog područja. Jednostavnim zbrajanjem logaritama amplituda, kao i faza, dobit ćemo vrijednosti sinusne prijenosne funkcije koje unosimo u Nicholsov dijagram na sl. 5—19. O značenju sjecišta krivulje s koordinatnim osima govorit ćemo u odjeljku 8.3.

5.5. Fazno neminimalni članovi

Složeni sustavi koje smo analizirali u prijašnjem odjeljku metodom frekvencijskog odziva imali su stabilne članove. To fizikalno znači da nakon ulaznih promjena izlazna veličina dolazi u novo stacionarno stanje, a matematički da nultočke ili polovi složenih sustava leže u lijevoj polovini s-ravnine. Kod takvih sustava postoji čvrsta korelacija između amplitudno-frekvencijske i fazno-frekvencijske karakteristike. U Bodeovim dijagramima ima sustav prvoga reda nagib VF asimptote 20 dB/dek., sustav drugoga reda 40 dB/dek., itd. Budući da je teže mjeriti fazni pomak nego amplitudu, može se iz mjerenja amplitude zaključiti na pripadni fazni pomak. Stabilni članovi nazivaju se i **fazno minimalni članovi.**

Nasuprot njima postoje i članovi s nultočkama ili polovima u desnoj polovini s-ravnine[1]. Takav član opisuje npr. diferencijalna jednadžba:

$$\tau \frac{dx_i}{dt} - x_i = K_P x_u, \tag{5-72}$$

čija je sinusna prijenosna funkcija:

$$G(j\omega) = \frac{K_P}{-1 + j\omega\tau}. \tag{5-73}$$

Vidimo da je modul isti kao i kod stabilnog člana opisanog izrazom (5-24), ali je argument mnogo veći:

$$\varphi = -\operatorname{arc\,tg} \frac{\omega\tau}{-1} = -180° + \operatorname{arc\,tg}\, \omega\tau \tag{5-74}$$

nego kod stabilnog člana prema izrazu (5-25). To je i značajka nestabilnih članova da su fazni pomaci razmjerno veliki u odnosu prema stabilnim članovima, pa odatle i naziv **fazno neminimalni članovi.** Ti se članovi inače rijetko susreću u tehničkoj praksi. Jedan od primjera je regulacija razine vode u parnom kotlu. Vruća voda prožeta je mjehurićima pare. Pri ulijevanju hladne vode, suprotno očekivanju, razina vode najprije se snizuje jer se kondenziraju mjehurići pare. Tek daljnji dotok odnosno povećanje temperature vode djeluju u smislu povećanja razine vode u kotlu.

---

[1] Polovi na desnoj polovini s-ravnine znače nestabilnost otvorenog kruga; uz pravilan izbor parametara u zatvorenom krugu može cijeli regulacijski krug ipak biti stabilan.

6. Regulacijski objekti

Ah, make the most of what we yet may spend,
Before we too into the Dust descend.
Dust into Dust, and under Dust to lie,
Sans Wine, sans Song, sans Singer, and — sans End!

Omar Khayyam, »Rubáiyát«

Kao što smo spomenuli u odjeljku 1.2, pomoću regulacije jedna se izlazna veličina na regulacijskom objektu drži ili konstantnom ili točno slijedi promjene neke ulazne veličine. U ovom poglavlju razmatrat ćemo samo regulacijske objekte, a analizu cijelog regulacijskog kruga ostavljamo za kasnije. Budući da je regulacijski objekt unaprijed određen, osnovni je zadatak da s tim u vezi **odredimo matematički model regulacijskog objekta.** To znači da nam je zadatak da pronađemo strukturu i parametre sustava.

U načelu se istraživanju objekata može prići teorijski i eksperimentalno. Pri **teorijskom pristupu** polazimo od fizikalnih zakonitosti kao što su zakon o održanju energije, materije ili impulsa, pa postavljamo zavisnosti među pojedinim varijablama. Dobiju se mahom veoma složeni izrazi, za koje se često moraju odrediti koeficijenti tek na temelju eksperimenta. Unatoč tome teorijska analiza daje dublji uvid u strukturu i ponašanje regulacijskih objekata.

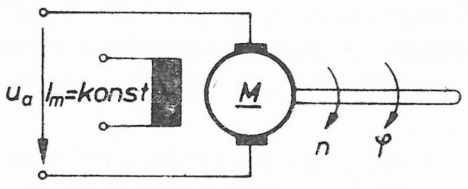
Teorijska analiza olakšava i **eksperimentalni pristup:** mjerenje ulaznih i izlaznih veličina u dinamičkim uvjetima i postavljanje funkcionalne relacije između njih (identifikacija procesa). Pri tome se kao ulaz mogu koristiti standardne pobude i analiza se provodi metodom vremenskog ili frekvencijskog odziva, što je pogodno kad radimo u laboratoriju. Kod stvarnih industrijskih procesa praktičnije je da se koriste postojeći poremećaji koji su stohastičke prirode, pa se do ocjene ponašanja regulacijskih objekata dolazi metodom statističke analize.

Kao primjer regulacijskog objekta uzimamo istosmjerni elektromotor shematski prikazan na sl. 6-1. Struja magnetiziranja I_m koja teče kroz statorske namote konstantne je vrijednosti. Ako se kao ulazna varijabla uzme napon armature u_a, a kao izlazna varijabla broj okreta vratila motora n, onda u stacionarnom stanju postoji linearan odnos između broja okreta n i narinutog napona u_a:

$$n=K_p u_a. \tag{6-1}$$

Uz to pišemo i relaciju između kuta zakreta vratila φ i napona armature u_a izvedenu u odsjeku 3.3:

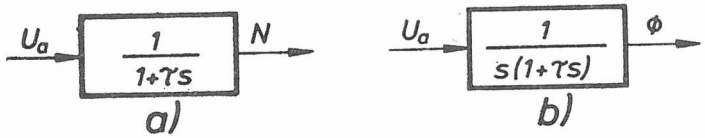
$$\varphi=K_i \int u_a \mathrm{d}t. \tag{3-77}$$



Sl. 6—1. Istosmjerni elektromotor upravljan naponom armature kao regulacijski objekt

U oba slučaja, i u jednadžbi (6-1) i u jednadžbi (6-2), dobiveni su funkcionalni odnosi između izlazne i ulazne veličine. Ovdje možemo govoriti o **regulacijskoj stazi**[1] kao dijelu čitavog objekta u kojem se može utjecati na fizikalnu veličinu koju treba regulirati. Regulacijska staza je dakle **u funkcionalnom smislu** zanimljiva za ocjenu elektromotora kod regulacije. Sam motor **u izvedbenom smislu** naziva se regulacijski objekt, a sa stajališta regulacije zanimljiv samo zato da se izvede matematički model analitički ili eksperimentalno.

Gornji primjer ukazuje na očiglednu činjenicu: regulacijski objekt može sadržati različite regulacijske staze, već prema tome koje se varijable uzimaju kao ulaz, odnosno izlaz. Ako regulacijski objekt ima više veličina koje treba regulirati, onda vladanje pojedinih staza određuju često i isti dijelovi objekta. Tako je kod turboagregata potrebno regulirati izlazni napon i frekvenciju, što dovodi do međusobnih utjecaja.



Sl. 6—2. Prijenosne funkcije elektromotora sa sl. 6—1

Regulacijska staza elektromotora prema jednadžbi (6-1) prikazana je na sl. 6-2a kao prijenosna funkcija u bloku. U nazivniku smo dodali i član prvoga reda, što stvarnije prikazuje stazu koja je opterećena kašnjenjima. To nazivamo i **proporcionalnom stazom,** jer su izlazna i ulazna veličina u stacionarnom stanju razmjerne. Prijenosna funkcija u bloku na sl. 6-2b predstavlja izraz (6-2) tog istog elektromotora. Sada govorimo o **integralnoj stazi,** jer su izlazna i ulazna veličina povezane operacijom integracije.

Proporcionalne i integralne staze osnovni su tipovi staza što ih susrećemo u tehničkoj praksi. Zbog načina kako prelaze u novo stacionarno stanje, proporcionalne staze nazivaju se i **staze s izjednačenjem,** a za integralne staze prikladan je naziv **staze bez izjednačenja.** Tako je grijanje prostorija primjer P-staze, a punjenje spremnika s tekućinom primjer I-staze. Obilježje staze najlakše se ocjenjuje ako se zamisli pobuda u obliku odskočne funkcije; nakon prestanka prijelaznih pojava izlazna se veličina kod P-staze smiri, a kod I-staze monotono i dalje raste sve do zasićenja, odnosno ograničenja.

Postoje i druge mogućnosti podjele staza. Tako se staze mogu podijeliti prema fizikalnom obilježju (električne, hidrauličke, toplinske, itd.) kao i prema broju spremnika energije (prvoga, drugoga, n-toga reda).

U slijedeća dva odjeljka identificirat ćemo proporcionalne i integralne staze, tj. tražit ćemo njihovu diferencijalnu jednadžbu, odnosno prijenosnu funkciju. Matematički model dobiva se na osnovi fizikalnih razmatranja kao u primjeru hidrauličnog motora, na osnovi statičkih karakteristika kao u slučaju parne turbine s kompresorom, te na osnovi eksperimentalno snimljenih krivulja kao u slučaju prijelaza topline. Namjerno su izabrani primjeri s različitim fizikalnim medijima da se naglasi sličnost funkcionalnih oblika.

---

[1] Ovdje postoji preklapanje pojmova staza, proces, objekt. Iako nije najsretniji, izraz »staza« preuzet je iz njemačke terminologije i udomaćio se u nas. Izraz »proces« ima mnogo šire značenje.

6.1. Pristup proučavanju objekata

Prema sl. 6—3, na ulazu u stazu djeluje postavna veličina y, a izlaz je regulirana veličina x. Zanemarajući za sada poremećaje z, mogu se **staze s izjednačenjem** opisati u općem obliku:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y \tag{6-2}$$

sa n kašnjenja. To je promatranje staze **u dinamičkim uvjetima,** a odatle se mogu dobiti sve potrebne informacije za regulaciju objekta. Gornji izraz prevedemo u operatorski oblik:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) X(s) = b_0 Y(s) \tag{6-3}$$

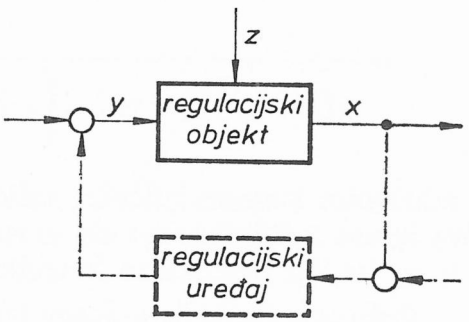
Odatle se dobije prijenosna funkcija:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}. \tag{6-4}$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika sa a_n i rastavljanjem nazivnika u umnožak faktora, dobit ćemo oblik koji je pogodan za proučavanje u području kompleksne varijable:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K'}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} \tag{6-5}$$

Sličan smo oblik prijenosne funkcije imali u jednadžbi (4-79): K' je prijenosni omjer, odnosno pojačanje, a u nazivniku se pojavljuju polovi prijenosne funkcije p_i koji se mogu pojaviti i u konjugirano kompleksnim parovima.



Sl. 6—3. Regulacijski objekt kao dio regulacijskog kruga

Za daljnju analizu i sintezu u frekvencijskom području bolje je da izraz (6-4) podijelimo sa a_0. Nazivnik se opet rastavlja u umnožak faktora, u kojem se mogu pojaviti članovi prvoga i drugoga reda:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\ldots\left(1+2\frac{\zeta_1}{\omega_{n_1}} s + \frac{1}{\omega_{n_1}^2} s^2\right)\left(1+2\frac{\zeta_2}{\omega_{n_2}} s + \frac{1}{\omega_{n_2}^2} s^2\right)\ldots} \tag{6-6}$$

Ovdje je K prijenosni omjer, odnosno pojačanje, ali se razlikuje u vrijednosti od K', τ_i su vremenske konstante članova prvoga reda, a ζ_i i ω_{ni} su stupanj prigušenja i neprigušena vlastita frekvencija članova drugoga reda.

Staze bez izjednačenja opisujemo u općem obliku na sličan način:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_{-1} \int y dt. \tag{6-7}$$

Najprije deriviramo po vremenu:

$$a_n \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} + a_{n-1} \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_0 \frac{dx}{dt} = b_{-1} y, \tag{6-8}$$

a zatim zamijenimo derivacije s operatorom s:

$$(a_n s^{n+1} + a_{n-1} s^n + \ldots + a_1 s_2 + a_0 s) X(s) = b_{-1} Y(s). \tag{6-9}$$

Analognim postupkom kao i u prethodnom slučaju dobit ćemo prijenosnu funkciju:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_{-1}}{s(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0)}, \tag{6-10}$$

koju dalje možemo pisati u obliku umnoška faktora:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K'}{s(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}, \tag{6-11}$$

pri čemu su izlučeni polovi prijenosne funkcije p_i. Drugi je oblik:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} =$$

$$= \frac{K}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\ldots\left(1+2\frac{\zeta_1}{\omega_{n1}}s+\frac{1}{\omega_{n1}^2}s^2\right)\left(1+2\frac{\zeta_2}{\omega_{n2}}s+\frac{1}{\omega_{n2}^2}s^2\right)\ldots} \tag{6-12}$$

s izlučenim karakterističnim veličinama članova prvoga i drugoga reda. Iz posljednja dva izraza zaključujemo da je za staze bez izjednačenja značajno postojanje faktora s u nazivniku prijenosne funkcije (korijen u ishodištu s-ravnine!).

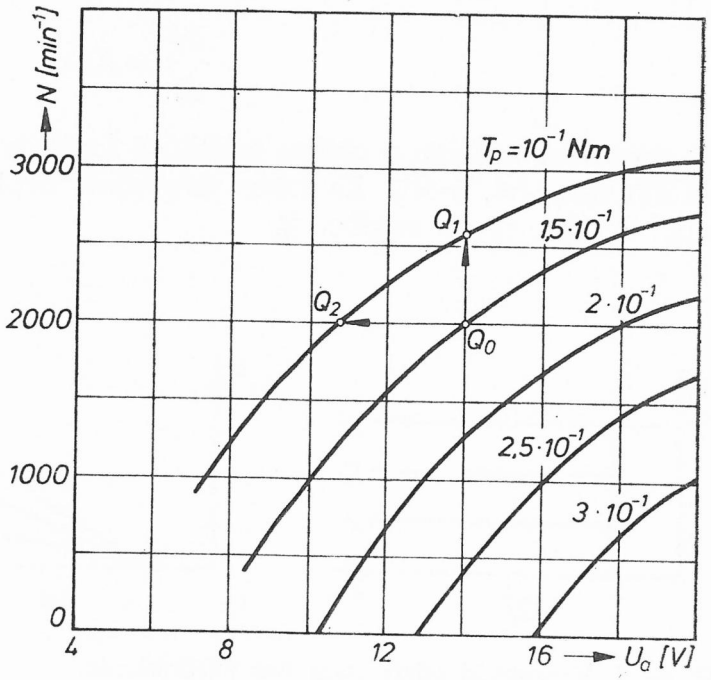
Pobudna funkcija s desne strane diferencijalne jednadžbe (6-2), odnosno (6-7), je postavna veličina y, ali to može biti i jedna ili više poremećajnih veličina z_i. One mogu djelovati na ulazu u stazu, u samoj stazi ili na izlazu staze (v. sl. 8-1). Jednadžbu (6-2) možemo prema tome proširiti:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y + c_0 z. \tag{6-13}$$

Želimo li sustav promatrati samo **u stacionarnim uvjetima,** možemo sve derivacije izjednačiti s nulom jer su sve varijable konstantne vrijednosti:

$$a_0 x = b_0 y + c_0 z. \tag{6-14}$$

U tehničkoj se praksi često promatraju samo stacionarna stanja. Pritom se odnosi između varijabli daju u grafičkom obliku pomoću statičkih karakteristika, gdje su prikazane i sve moguće nelinearnosti. Takva je npr. karakteristika istosmjernog elektromotora prikazan na sl. 6-4, gdje je ulazna ili postavna veličina napon



Sl. 6—4. Karakteristike istosmjernog elektromotora

armature U_a, a izlazna je ili regulirana veličina broj okreta N. Opterećenje na osovini predstavlja još jednu ulaznu veličinu. To je zapravo poremećaj, jer se zakretni moment opterećenja T_p mijenja. Zbog postojanja triju varijabli potrebno je nacrtati familiju karakteristika, gdje je poremećajna veličina unijeta parametarski. Svaka točka karakteristika snimljena je u stacionarnim uvjetima; pri snimanju karakteristike namjeste se vrijednosti ulaznih veličina, a vrijednost izlazne veličine očita se nakon što su se prijelazne pojave smirile.

Područje rada odabire se tako da se postavna veličina mijenja u ograničenom postavnom području oko radne točke Q_0. Da bi analiza bila što lakša, karakteristike se u okolišu radne točke linearizziraju, tako da između varijabli vlada linearan odnos (v. odjeljak 2.2). U tom slučaju prikaz odgovara jednadžbi (6-13), a koeficijenti predstavljaju parcijalne derivacije u radnoj točki.

Iz sl. 6—4 vidimo i osnovni smisao regulacije nekog objekta kao što je elektromotor. Promjene opterećenja T_p pomiču radnu točku, npr. u Q_1; da bi se zadržao konstantan broj okreta N, mora se napon armature U_a smanjiti tako da se novo stacionarno stanje uspostavi u točki Q_2.

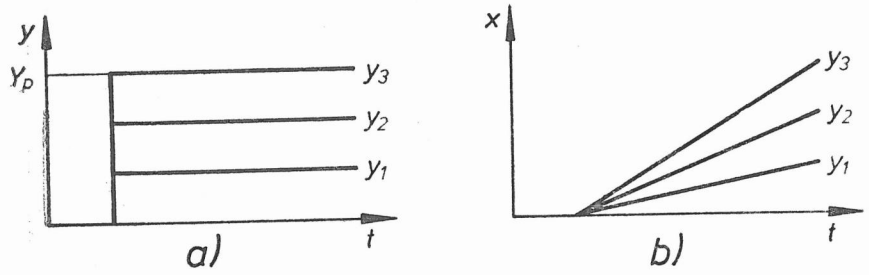
Statička karakteristika daje osnovne informacije potrebne za konstrukciju, odnosno za rad uređaja ili postrojenja. Međutim kad takav objekt treba regulirati, potrebno je poznavati dinamičke uvjete rada, a o tome statička karakteristika daje malo podataka.

6.2. Staze bez izjednačenja

Kod staza bez izjednačenja brzina promjene izlazne veličine nakon poremećaja razmjerna je promjeni ulazne veličine. Uzet ćemo stazu nultoga reda, koja prema jednadžbi (6-7) nema derivacijskih članova. Ako je na ulazu postavna veličina y a na izlazu regulirana veličina x, jednadžba (6-7) se pojednostavnjuje:

$$\frac{dx}{dt} = K_t y. \tag{6-15}$$

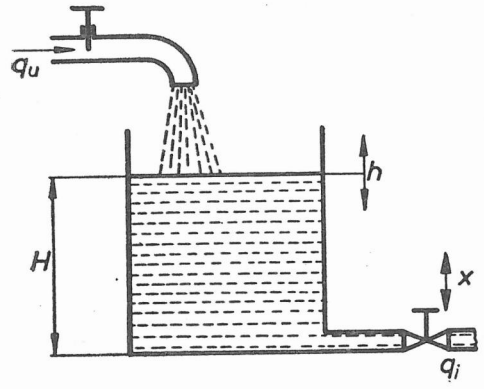
Uz postavnu veličinu u obliku odskočne funkcije (sl. 6-5a) regulirana veličina monotono raste (sl. 6-5b). Za razne amplitude odskoka postavne veličine regulirana veličina ima razne nagibe.



Sl. 6—5. Vremenski odziv staza bez izjednačenja

Naravno da su staze bez izjednačenja nultoga reda samo približne fizikalnoj stvarnosti. Opisat ćemo jednu takvu stazu — razinu tekućine u spremniku. Osim toga, opisat ćemo hidraulični motor i istosmjerni elektromotor kao staze bez izjednačenja opterećene kašnjenjima. Pri tome treba napomenuti da su motori općenito, bez obzira jesu li hidraulični, pneumatski ili električni, tipični predstavnici staza bez izjednačenja.

Razina tekućine u spremniku. Na sl. 6—6 shematski je prikazan spremnik s tekućinom, što je čest slučaj u tehnološkom procesu. Izlazna veličina je razina tekućine koju treba držati konstantnom. Na razinu h utječu ulazni protok q_u, čije



Sl. 6—6. Razina tekućine u spremniku

nepredviđene promjene djeluju kao poremećajna veličina; simbolički je to prikazano zasunom. Uz q_u na razinu utječe i izlazni protok q_i, koji se po želji mijenja podizajem ventila x, pa djeluje kao postavna veličina.

Ako je pritjecanje q_u jednako otjecanju q_i, onda kod jednom podešene razine H nema promjena h oko te vrijednosti. Dogodi li se bilo kakva promjena q_u odnosno q_i, promjena je volumena tekućine u spremniku jednaka razlici volumenskih protoka (A je površina dna spremnika):

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=q_u-q_i. \tag{6-16}$$

Izlazni protok je prema Torricellijevu zakonu nelinearna funkcija visine tekućine H i protočnog otvora ventila A_v:

$$Q_i=\alpha A_v\sqrt{2gH}, \tag{6-17}$$

gdje su α koeficijent protoka, a g konstanta gravitacije. Zamjenom otvora ventila s proporcionalnim podizajem $A_v=KX$, izraz (6-17) postaje:

$$Q_i=\alpha K_v\sqrt{2g}\cdot X\cdot\sqrt{H}. \tag{6-18}$$

Ako taj izraz uvrstimo izravno u jednadžbu (6-16), umjesto q_i dobijemo nelinearnu diferencijalnu jednadžbu koju je veoma teško riješiti. Učinimo li inženjersko pojednostavnjenje i pretpostavimo li da su promjene oko stacionarnog stanja malene, možemo pomoću perturbacijske analize linearizirati izraz (6-18). Za male promjene oko radne točke Q_0 (Q_i, X, H) sačinimo prema jednadžbi (2-41) totalni diferencijal:

$$q_i=\left.\frac{\partial Q_i}{\partial X}\right|_{Q_0}x+\left.\frac{\partial Q_i}{\partial H}\right|_{Q_0}h=\alpha K_v\sqrt{2gH}\,x+\alpha K_v\sqrt{2gX}\frac{1}{2\sqrt{H}}h. \tag{6-19}$$

To uvrstimo u jednadžbu (2-16):

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+\alpha K_v\sqrt{2gX}\frac{1}{2\sqrt{H}}h=q_u-\alpha K_v\sqrt{2gH}\,x, \tag{6-20}$$

pri čemu smo prebacili drugi član na desnoj strani izraza (6-19) na lijevu stranu. Tako smo dobili linearnu diferencijalnu jednadžbu koja opisuje P_1-sustav; razina ovisi i o podizaju ventila x i o pritjecanju q_u. Uz male promjene razine $h\ll H$ drugi se član s lijeve strane jednadžbe (6-19) može zanemariti. Navedena diferencijalna jednadžba opisuje u tom slučaju I_0-član. Na osnovi ove jednadžbe možemo pisati dvije prijenosne funkcije. Ako su promjene $x=0$, dobijemo odnos između $h(t)$ i $q_u(t)$ u operatorskom obliku:

$$G_s(s)=\frac{H(s)}{Q_u(s)}=\frac{1}{As}. \tag{6-21}$$

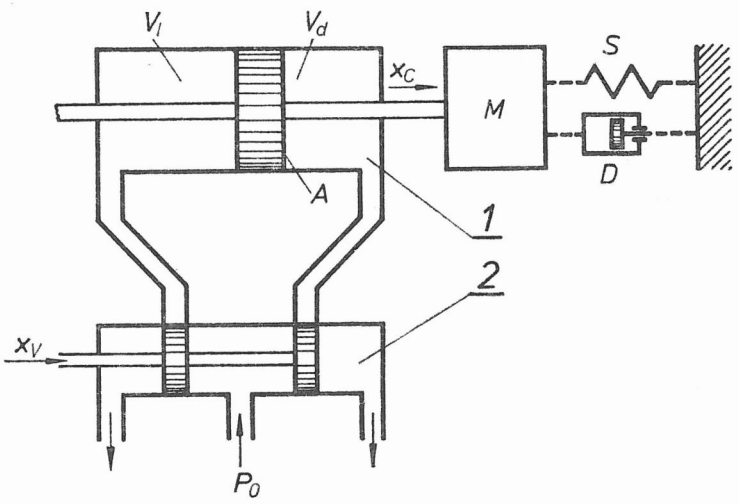
Prijenosna funkcija varijable $h(t)$ u odnosu prema $x(t)$ dobije se uz $q_u=0$:

$$G_s(s)=\frac{H(s)}{X(s)}=-\frac{\alpha K_v\sqrt{2gH}}{As}. \tag{6-22}$$

Hidraulični motor. I ovaj je sustav već opisan u vezi sa sl. 1—9, ali je tamo bila pridodana povratna veza u obliku mehaničke poluge. Ovdje ćemo analizirati sam motor bez povratne veze (sl. 6—7) koji predstavlja tipičnu stazu bez izjednačenja višega reda. Da bi se sagledali bitni odnosi, analiza je pojednostavnjena. Tako se npr. koristan rad cilindra 1 sastoji u pokretanju mase, pri čemu su u pravilu prisutni i trenje i neka elastičnost (na sl. 6—7 naznačeni isprekidano jer ih u analizi ispuštamo).

U neutralnom položaju oba klipa razvodnika 2 zatvaraju prolaz ulja iz izvora napajanja P_0 (pumpa) u obje komore cilindra. Pomakom klipova razvodnika počinje ulje pod tlakom strujiti u desnu komoru, a odgovarajući pomak klipa cilindra istiskuje ulje iz lijeve komore. Pritjecanje kroz otvor razvodnika turbulentno je i ovisi kako o veličini otvora, tako i o razlici tlakova. Nelinearnom odnosu pridonosi i nepravilan otvor ventila kao i stlačivost ulja. Zato je potrebno da se u okolišu radne točke provede linearizacija (v. odjeljak 2.2), pa možemo pisati:

$$q_u \simeq K x_v, \tag{6-23}$$



Sl. 6—7. Hidraulični motor s opterećenjem

gdje je K faktor proporcionalnosti. Ovisnost o razlici tlakova zanemarili smo. Ta jednadžba vrijedi i za pomak u suprotnom smjeru, samo je i pritjecanje u radni cilindar u suprotnom smjeru, tj. negativno. Pritjecanje q_u jednako je zbroju protoka q_k koji ulazi u radni cilindar i obavlja koristan rad, zatim protoka q_g koji predstavlja gubitke ulja zbog nedovoljnog brtvljenja i protoka q_s koji kompenzira stlačivost ulja:

$$q_u = q_k + q_g + q_s. \tag{6-24}$$

Protok q_k pokreće klip cilindra. U jedinici vremena Δt pritječe u jednu komoru cilindra količina ulja $q_k \Delta t$ koja ispuni obujam $A \Delta x_C$; A je radna površina klipa cilindra. Vrijedi dakle:

$$q_k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A \Delta x_C}{\Delta t} = A \frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}. \tag{6-25}$$

Protok q_g koji se gubi u prvoj je aproksimaciji jednak razlici tlakova između dviju komora cilindra $(p_d - p_l)$. Klip naime ne brtvi savršeno, i kroz zračnost između klipa i stijenke razvija se laminarno strujanje, pa možemo pisati:

$$q_g = K_1 (p_d - p_l), \tag{6-26}$$

gdje je K_1 koeficijent gubitaka.

Do izraza za protok q_s zbog stlačivosti ulja dolazimo na osnovi slijedećeg razmatranja. Relativna promjena obujma ulja u jednoj komori i dovodnoj cijevi proporcionalna je promjeni tlaka ulja u toj komori, uz negativan predznak:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta} \Delta p. \tag{6-27}$$

Konstanta proporcionalnosti naziva se i **modul stlačivosti.** Kako je protok q_s jednak promjeni obujma ulja ΔV zbog stlačivosti u jedinici vremena Δt, možemo na osnovi gornje jednadžbe pisati:

$$q_s = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{dV}{dt} = \frac{V}{\beta} \frac{dp}{dt}. \tag{6-28}$$

Uvrštavajući sve izraze za ulazne i za izlazne protoke u jednadžbu (6-24), dobit ćemo za komoru u koju ulazi ulje pod tlakom:

$$A \frac{dx_C}{dt} - K_1 (p_d - p_l) + \frac{V}{\beta} \cdot \frac{dp}{dt} = K x_V. \tag{6-29}$$

Na sličan način možemo postaviti i jednadžbu za zbroj protoka u komori u kojoj klip istiskuje ulje iz cilindra:

$$A \frac{dx_C}{dt} - K_1 (p_l - p_d) + \frac{V}{\beta} \cdot \frac{dp}{dt} = K x_V. \tag{6-30}$$

Da bismo dobili prijenosnu funkciju sustava kao omjer izlazne i ulazne veličine, tj. x_C i x_V, moramo u gornjim jednadžbama izraziti varijable p, odnosno p_d i p_l, kao funkcije od x_C ili x_V. U tu svrhu pretpostavimo da klipovi razvodnika ne prekrivaju potpuno dovodne otvore u komore cilindra, što se u praksi najčešće izvodi. Zato se u neutralnom položaju u obje komore cilindra stvori neki srednji tlak P_s. Promjene tlakova u obje komore p_d i p_l mijenjaju se simetrično u odnosu na P_s:

$$\begin{aligned} p_d &= P_s + p, \\ p_l &= P_s - p, \end{aligned} \tag{6-31}$$

pa je odatle $(p_d - p_l) = 2p$. Tlak u cilindru $(p_d - p_l)$ proizvodi silu $A (p_d - p_l)$ koja mora savladati tromost opteretne mase M, pa se postavi uvjet:

$$A (p_d - p_l) = A\, 2p = M \frac{d^2 x_C}{dt^2} \tag{6-32}$$

koji daje:

$$p=\frac{M}{2A}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x_C}{\mathrm{d}t^2}. \tag{6-33}$$

Uvrstivši izraze za (p_a-p_i) i p iz gornje dvije jednadžbe u izraz (6-29), i sredivši taj izraz, dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{VM}{2A\beta}\cdot\frac{\mathrm{d}^3x_C}{\mathrm{d}t^3}+\frac{K_1M}{A}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x_C}{\mathrm{d}t^2}+A\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}=Kx_V. \tag{6-34}$$

To je funkcionalna ovisnost izlazne veličine x_C o ulaznoj veličini x_V. Ona pokazuje integralan karakter te staze jer na lijevoj strani nedostaje član bez derivacije.

Jednadžbu (6-34) možemo napisati i u obliku prijenosne funkcije:

$$G_S(s)=\frac{X_C(s)}{X_V(s)}=\frac{K}{A}\cdot\frac{1}{s\left[1+\frac{K_1M}{A^2}s+\frac{VM}{2\beta A^2}s^2\right]}. \tag{6-35}$$

Ovdje je prijenosni omjer $K_i=K/A$. Izraz u zagradi upućuje na mogućnost da može doći do eventualnih oscilacija izlazne veličine x_C. Usporedba s općim oblikom prijenosne funkcije drugog reda daje vlastitu frekvenciju:

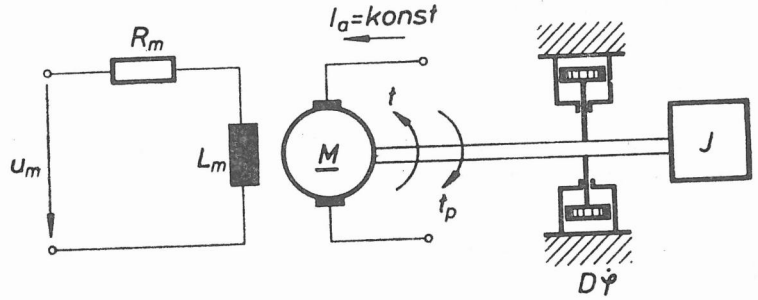
$$\omega_n=\sqrt{\frac{2\beta A^2}{VM}}, \tag{6-36}$$

kao i stupanj prigušenja:

$$\zeta=\frac{\omega_nMK_1}{2A^2}=\frac{K_1}{A}\sqrt{\frac{\beta M}{2V}} \tag{6-37}$$

Oscilacije koje prouzrokuju stlačivost ulja (hidraulična opruga!) kao i masa opterećenja iznose i preko 10 Hz. Uz velik omjer β/V prvi član u zagradi nazivnika u jednadžbi (6-35) može se zanemariti, pa se oscilacije ne pojavljuju [lit. 14, 36, 44].

Istosmjerni elektromotor. Ovaj tip motora veoma se mnogo upotrebljava u regulacijskoj tehnici, i to zato što se lako upravlja brzinom motora. Na sl. 6—1 shematski je prikazan takav elektromotor, i to s konstantnom strujom magnetiziranja I_m i naponom armature u_a kao promjenljivom pobudom. Drugi način da se istosmjerni elektromotor upotrijebi u regulacijskoj tehnici upravo je obratan: struja armature I_a konstantna je, dok je promjenljiva pobuda struje magnetiziranja i_m kroz statorske namote (sl. 6—8). Kod prvog načina, upravljanjem naponom armature



Sl. 6—8. Istosmjerni elektromotor upravljan strujom magnetiziranja s opterećenjem

u_a, pojačalo u ulaznom krugu mora osigurati punu snagu motoru, a sa strujom magnetiziranja nema problema. Kod drugog načina, upravljanjem strujom magnetiziranja i_m, nije potrebna neka veća snaga u ulaznom krugu, ali se prilično snage izgubi u krugu armature.

Sada ćemo postaviti matematički model istosmjernog elektromotora upravljanog strujom magnetiziranja (sl. 6—8). Kao izlaznu veličinu uzimamo kut zakreta; promatramo elektromotor kao stazu bez izjednačenja.

Napon u_m narinut na namote statora, koji su prikazani induktivnošću L_m u seriji s otporom žice R_m, prouzrokuje struju magnetiziranja i_m. Tu ovisnost pišemo:

$$u_m = L_m \frac{di_m}{dt} + R_m i_m. \tag{6-38}$$

Ovdje je zanemarena kapacitivnost među namotima statora.

Nadalje, magnetski tok Φ razmjeran je struji magnetiziranja:

$$\Phi = K_1 i_m, \tag{6-39}$$

tj. ostaje se na linearnom dijelu krivulje magnetiziranja. Faktor K_1 predstavlja nagib krivulje magnetiziranja.

Magnetski tok Φ i struja armature I_a prouzrokuju zakretni moment na armaturi motora t, koji je razmjeran objema veličinama:

$$t = K_2 \Phi I_a. \tag{6-40}$$

Faktor K_2 ovisi o konstrukciji motora, prvenstveno o broju polova, o broju zavoja, itd.

Ako izraz (6-39) uvrstimo u jednadžbu (6-40), a konstantne veličine K_1, K_2 i I_a prikažemo jednim faktorom, dobit ćemo traženi izraz za zakretni moment na armaturi motora:

$$t = K_1 K_2 I_a i_m = K i_m. \tag{6-41}$$

Taj zakretni moment t mora savladati moment tromosti armature J, viskozno trenje predočeno torzijskim koeficijentom trenja $D\varphi$, kao i zakretni moment opterećenja t_p. Dobit ćemo:

$$K i_m = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + D_\varphi \frac{d\varphi}{dt} + t_p, \tag{6-42}$$

gdje je φ kut zakreta vratila armature. Elastičnost vratila je zanemarena.

Simultane diferencijalne jednadžbe (6-38) i (6-42) možemo lako riješiti ako ih napišemo u operatorskom obliku:

$$\begin{aligned} U_m &= (L_m s + R_m)\, I_m, \\ K I_m &= (Js + D\varphi)\, s\Phi + T_p. \end{aligned} \tag{6-43}$$

Uz zanemarenje zakretnog momenta opterećenja T_p možemo izlučivanjem I_m iz gornjih jednadžbi izračunati prijenosnu funkciju elektromotora:

$$G_S(s)=\frac{\Phi(s)}{U_m(s)}=\frac{K}{R_m D_\varphi}\cdot\frac{1}{s\left[1+\frac{L_m}{R_m}s\right]\left[1+\frac{J}{D_\varphi}s\right]}, \tag{6-44}$$

gdje je prijenosni omjer $K_i=K/R_mD\varphi$, vremenska konstanta električnog namota $\tau_E=L_m/K_m$, a vremenska konstanta mehaničkih dijelova $\tau_M=J/D\varphi$. Ovaj izraz predstavlja stazu bez izjednačenja drugog reda.

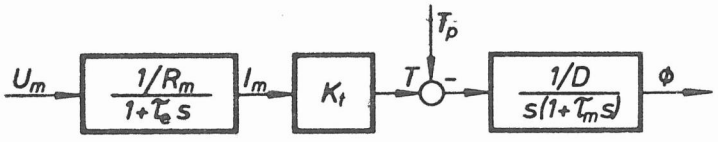
Želimo li isti elektromotor promatrati kao stazu s izjednačenjem, moramo uzeti kutnu brzinu Ω vratila umjesto kuta zakreta Φ. Kutnu brzinu dobijemo derivacijom kuta zakreta po vremenu, odnosno u operatorskom obliku množenjem s operatorom s. Iz jednadžbe (6-44) dobijemo izravno novu prijenosnu funkciju elektromotora:

$$G_S(s)=\frac{\Omega(s)}{U_m(s)}=\frac{K}{R_m D_\varphi}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{L_m}{R_m}s\right]\left[1+\frac{J}{D_\phi}s\right]}. \tag{6-45}$$

Ako uzmemo u obzir opterećenje T_p, iz druge jednadžbe (6-43) dobit ćemo:

$$\Phi=\frac{1}{D_\varphi}\cdot\frac{1}{s\left[1+\frac{J}{D_\varphi}s\right]}\cdot\left[\frac{K}{R_m}\cdot\frac{1}{1+\frac{L_m}{R_m}s}U_m-T_p\right]. \tag{6-46}$$

Ta se jednadžba može prikazati blok-dijagramom kao na sl. 6—9, gdje je U_m postavna veličina, a T_p poremećajna veličina.



Sl. 6—9. Blok-dijagram elektromotora sa sl. 6—8

6.3. Staze s izjednačenjem

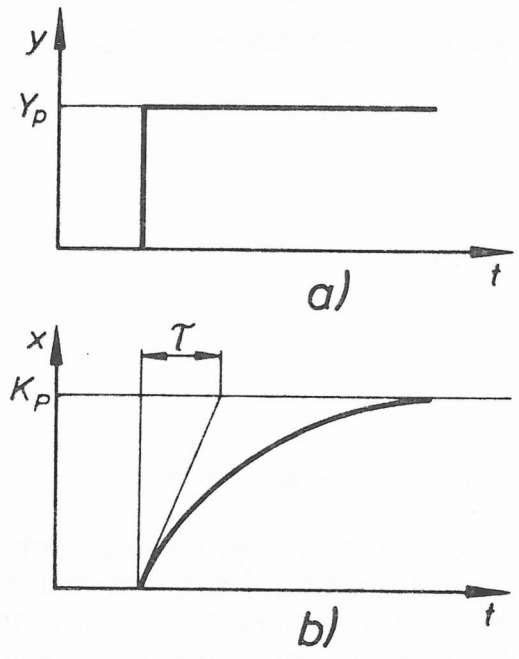
Kod staza s izjednačenjem izlazna se veličina nakon poremećaja ustali na novoj vrijednosti, razmjernoj ulaznoj veličini. Tako se prema sl. 6—10 vidi da bi uz postavnu veličinu u obliku odskočne funkcije staza s izjednačenjem reagirala tako da se regulirana veličina ustali na novoj vrijednosti.

Kao primjer P-staza uzimamo miješanje tekućina, parnu turbinu, a kao primjere staza višega reda obrađujemo peći za žarenje i općenito prijelaz topline; na kraju je valjaonički stan primjer staze s mrtvim vremenom. Toplinski procesi tipični su predstavnici staza s izjednačenjem.

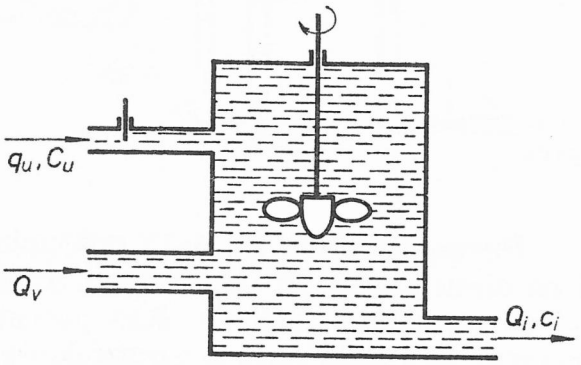
Miješanje tekućina. Na sl. 6—11 prikazana je posuda gdje se miješaju vodena otopina nekog materijala koncentracije C_u koja pritječe brzinom q_u, i čista voda. Pritjecanje otopine možemo mijenjati pomoću ventila, a razmjerno je podizaju ventila:

$$q_u = K x_V, \tag{6-47}$$

gdje je x_V ulazna veličina. Pritjecanje vode Q_v je konstantno.



Sl. 6—10. Vremenski odziv staza s izjednačenjem



Sl. 6—11. Miješanje tekućina u posudi

Kao izlaznu veličinu uzimamo promjenljivu koncentraciju c_i konstantnog protoka Q_i. To je točno samo ako je promjenljivo pritjecanje otopine q_u toliko malo prema konstantnom pritjecanju vode Q_v da ga možemo zanemariti, pa je na osnovi zakona o održanju materije:

$$Q_i = q_u + Q_v \simeq Q_v. \tag{6-48}$$

U vremenu Δt pritječe u posudu količina otopine $C_u q_u \Delta t$ koncentracije C_u a otječe količina otopine $c_i Q_i \Delta t$ nove koncentracije c_i. Količina otopine u posudi promijenila se za $(C_u q_u - c_i Q_i)\,\Delta t$. To je jednako promjeni koncentracije Δc_i u obujmu posude V. Možemo pisati:

$$V \mathrm{d}c_i = (C_u q_u - c_i Q_i)\,\mathrm{d}t, \tag{6-49}$$

ili u sređenom obliku nakon uvrštenja jednadžbe (6-47):

$$\frac{V}{Q_i} \cdot \frac{\mathrm{d}c_i}{\mathrm{d}t} + c_i = \frac{C_u K}{Q_i} x_V, \tag{6-50}$$

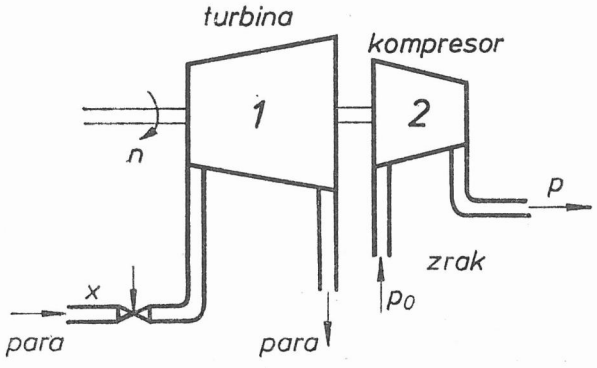
što predstavlja stazu s izjednačenjem prvoga reda.

Ako pretpostavka iz jednadžbe (6-48) nije ispunjena, umjesto jednadžbe (6-50) imat ćemo linearnu diferencijalnu jednadžbu s promjenljivim koeficijentima. Ta se jednadžba može riješiti metodom perturbacijske analize [lit. 9, 34].

Prijenosna je funkcija opisanog procesa:

$$G_S(s)=\frac{C_i(s)}{X_V(s)}=\frac{C_uK}{Q_i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{V}{Q_i}s}, \tag{6-51}$$

gdje je prijenosni omjer $K_P=C_uK/Q_i$, a vremenska konstanta $\tau=V/Q_i$.



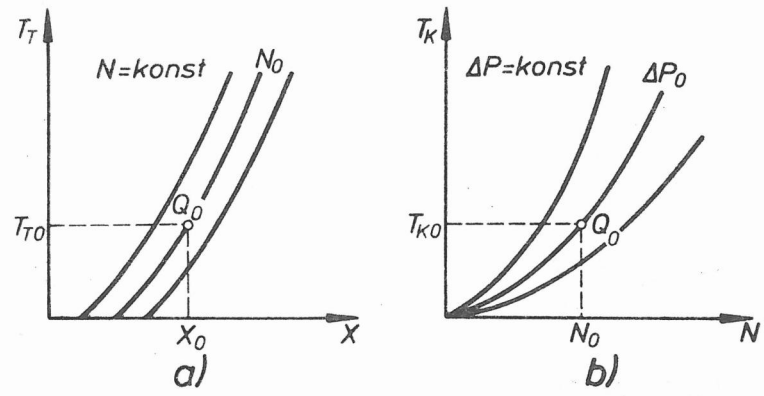
Sl. 6–12. Turbina s kompresorom

Parna turbina. Sl. 6-12 prikazuje regulaciju turbine 1 gdje podizaj ventila x na ulazu djeluje na protok pare, a izlazna je veličina zakretni moment turbine t_T, odnosno broj okreta n. Kao poremećaj pojavljuje se opterećenje, tj. zakretni moment na vratilu turbine prouzrokovan promjenljivom potrošnjom pare s tlakom p kompresora 2. Ako zanemarimo elastičnost i torzijsko trenje vratila, dobit ćemo na osnovi djelovanja zakretnih momenata turbine i kompresora na vratilu:

$$J\frac{d\Omega}{dt}=T_T-T_K, \tag{6-52}$$

gdje je J moment tromosti sviju rotirajućih masa svedenih na vratilo. Ova jednadžba vrijedi i za mala odstupanja od stacionarnih vrijednosti, pa možemo pisati:

$$J\frac{d\omega}{dt}=t_T-t_K. \tag{6-53}$$



Sl. 6–13. Karakteristike turbine (a) i kompresora (b)

Uz pretpostavku da turbina ne pohranjuje veće količine pare, možemo zakretni moment turbine T_T prikazati, prema karakteristikama na sl. 6—13a, kao nelinearnu funkciju podizaja ventila X i broja okreta N. Prema metodi izloženoj u odjeljku 2.1. možemo provesti linearizaciju odnosa između varijabli u okolišu radne točke Q_0 (X_0, T_{T0}).[1] Uz $x=X-X_0$, kao i uz $n=N-N_0$ dobiju se koeficijenti:

$$b_T=\left.\frac{\partial T_T}{\partial X}\right|_{Q_0},$$
$$a_T=\left.\frac{\partial T_T}{\partial N}\right|_{Q_0}. \tag{6-54}$$

kao parcijalne derivacije. Prema tome možemo pisati:

$$t_T=T_T-T_{T0}=a_T n+b_T x. \tag{6-55}$$

Na sličan način možemo provesti i linearizaciju prema karakteristikama kompresora na sl. 6—13b. U okolišu radne točke je $n=N-N_0$, kao i $\Delta p=\Delta P-\Delta P_0$, pa se dobiju koeficijenti:

$$a_K=\left.\frac{\partial T_K}{\partial N}\right|_{Q_0},$$
$$c_K=\left.\frac{\partial T_K}{\partial \Delta P}\right|_{Q_0}. \tag{6-56}$$

Zakretni je moment na vratilu kompresora prema tome:

$$t_K=T_K-T_{K0}=a_K n+c_K \Delta p. \tag{6-57}$$

Izraze u jednadžbama (6-55) i (6-57) uvrstimo u jednadžbu (6-53):

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\alpha_T n+b_T x-a_K n-c_K \Delta p. \tag{6-58}$$

Kako je kutna brzina ω razmjerna broju okreta n, diferencijalnu jednadžbu turbine s kompresorom možemo pisati:

$$2\pi J\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}+(a_K-a_T)n=b_T x-c_K \Delta p. \tag{6-59}$$

Na osnovi te jednadžbe izračunaju se i prijenosne funkcije. Ako se opterećenje ne mijenja, dobije se prijenosna funkcija:

$$G(s)=\left.\frac{N(s)}{X(s)}\right|_{\Delta P=0}=\frac{b_T}{(a_K-a_T)+2\pi J s}=\frac{b_T}{(a_K-a_T)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2\pi J}{(a_K-a_T)}s} \tag{6-60}$$

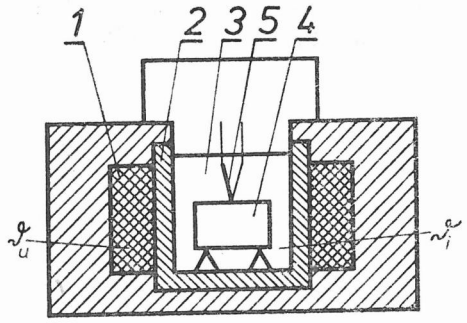
[1] Vidi sl. 2—6

gdje je $K_P=b_T/(a_K-a_T)$, a vremenska konstanta $\tau=2\pi J/(a_K-a_T)$. Prijenosna funkcija za konstantni podizaj ventila glasi:

$$G_S(s)=\left.\frac{N(s)}{\Delta P(s)}\right|_{X=0}=\frac{c_K}{(a_K-a_T v)+2\pi J s}=\frac{c_K}{(a_K-a_T)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2\pi J}{(a_K-a_T)}s}. \quad (6\text{-}61)$$

Ovdje je prijenosni omjer $K_P=c_K/(a_K-a_T)$, a vremenska konstanta ista kao i gore. U vezi s objema prijenosnim funkcijama opažamo da je nazivnik u oba slučaja isti.

Prijelaz topline. Toplinske staze susreću se veoma često u regulacijskoj tehnici: pri grijanju, hlađenju, pri kemijskim reakcijama, u energetskim postrojenjima, itd. Primjere toplinskih staza spominjali smo već u uvodnim izlaganjima. Slijedeći primjer je električna peć za žarenje na sl. 6—14. U otpornom grijalu 1 pretvara se električna energija u toplinu ϑ_u. Preko šamotne stijenke 2 električna



Sl. 6—14. Električna peć za žarenje

energija prelazi u zatvoren prostor 3, gdje se ugrijava obradak 4. Njegova se temperatura mjeri termoelementom 5, kojeg se temperatura ϑ_i, pretvorena u električni napon, može kao izlazna veličina upotrijebiti za regulaciju.

Promotrimo jedan detalj te pojave, npr. prijelaz topline kroz šamotni zid. Poznato je da je parametre toplinskog sustava, toplinsku kapacitivnost C_ϑ i toplinsku vodljivost $1/R_\vartheta$, teško prikazati usredotočene na jednom mjestu. Fizikalna slika mnogo je točnija ako te parametre zamislimo raspodijeljene u prostoru. To nas navodi na zaključak da se prijelaz topline može vjerno opisati parcijalnom diferencijalnom jednadžbom. To je **Fourierova jednadžba:**

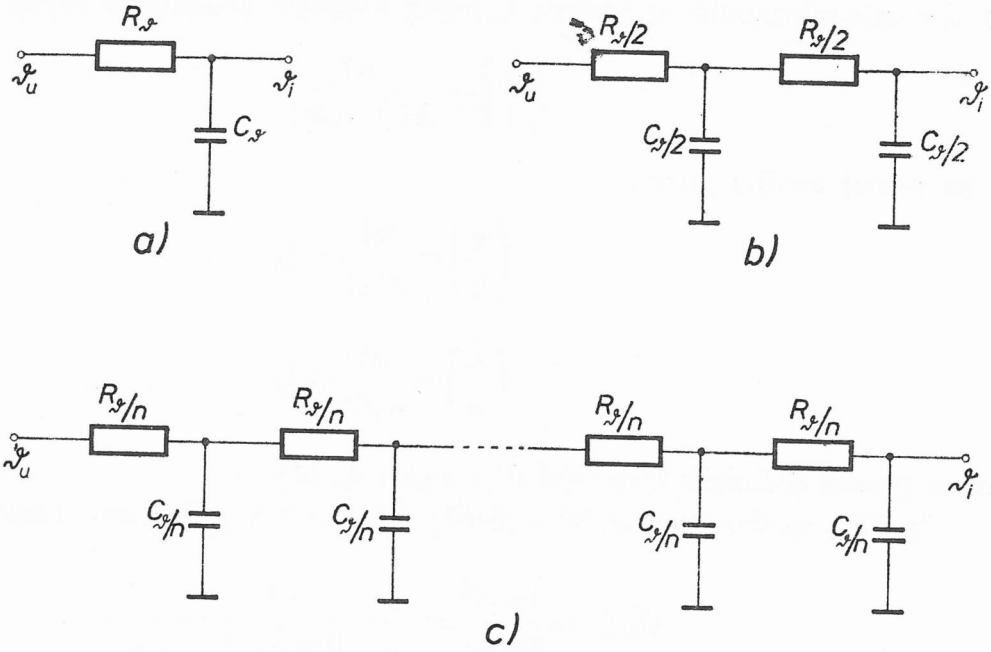
$$\frac{\partial^2\vartheta(t,x)}{\partial x^2}=T_d\frac{\partial\vartheta(t,x)}{\partial t}, \quad (6\text{-}62)$$

gdje je T_d tzv. difuzijska konstanta koja ima dimenziju vremena.

Parcijalne diferencijalne jednadžbe općenito je teško rješavati. Povrh toga, ne zanima nas točno temperatura u svakoj točki šamotnog zida, već prvenstveno temperatura u dvije određene prostorne točke: na početku i na kraju zida. Takvim rasuđivanjem dolazimo do Newtonova zakona hlađenja prema jednadžbi (3-27):

$$\tau\frac{d\vartheta_i}{dt}+\vartheta_i=\vartheta_u. \quad (6\text{-}63)$$

Ta jednadžba opisuje šamotni zid kao sustav prvoga reda s jednim spremnikom i jednim potrošnikom energije, obuhvaćenima u vremenskoj konstanti $\tau = R_\vartheta C_\vartheta$, što je shematski prikazano na sl. 6—15a.



Sl. 6—15. Nadomjesni prikaz prijelaza topline

Već smo u odjeljku 3.3. vidjeli da taj sustav, kojega predstavlja obična diferencijalna jednadžba prvoga reda, ne odgovara fizikalnoj stvarnosti jer su i spremnik i potrošnik energije raspodijeljeni. Sada ćemo dokazati da je **toplinski sustav zapravo granični slučaj serijski spojenih članova prvoga reda s protudjelovanjem** kad broj članova $n \to \infty$, a njihova vremenska konstanta $\tau_n \to 0$. Podijelimo li zid na pola, tako da raspolovimo svaki parametar (sl. 6—15b), dobit ćemo vremensku konstantu svake polovine zida:

$$\tau_2 = \frac{R_\vartheta}{2} \cdot \frac{C_\vartheta}{2} = \frac{\tau}{4}. \tag{6-64}$$

Budući da **moramo uzeti u obzir protudjelovanje,** dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu drugoga reda:

$$\left(\frac{\tau}{4}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2\vartheta_i}{\mathrm{d}t^2} + 3\left(\frac{\tau}{4}\right)\frac{\mathrm{d}\vartheta_i}{\mathrm{d}t} + \vartheta_i = \vartheta_u. \tag{6-65}$$

Matematički model bit će to točniji, što ima više podjela, jer smo se time približili stvarnom stanju s kontinuiranom podjelom parametara. Tako za n podjela (sl. 6—15c) imamo iznos vremenske konstante svakog pojedinog dijela:

$$\tau_n = \frac{R_\vartheta}{n} \cdot \frac{C_\vartheta}{n} = \frac{\tau}{n^2}, \tag{6-66}$$

a odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu n-toga reda dobit ćemo induktivnim putem:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n-i}{i}\left(\frac{\tau}{n^2}\right)^{n-1}\vartheta_i^{(n-i)}=\vartheta_h. \tag{6-67}$$

Ovdje smo okruglom zagradom označili binomni koeficijent kojeg je vrijednost:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{6-68}$$

a za slučaj $k=0$ i $k=n$:

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!n!}=1,$$
$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!0!}=1, \tag{6-69}$$

jer je prema definiciji faktorijel $0!\triangleq 1$ [lit. 4, 34].

Iz diferencijalne jednadžbe (6-67) dobit ćemo prijenosnu funkciju:

$$G_S(s)=\frac{\Theta_i(s)}{\Theta_u(s)}=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n-k}\frac{1}{n^{2k}}(\tau s)^k}, \tag{6-70}$$

gdje smo radi preglednosti uveli $k=n-i$. Uza sve finiju podjelu dolazimo konačno do kontinuirane raspodjele parametara. To je slučaj graničnog prijelaza kad $n\to\infty$:

$$G_S(s)=\frac{\Theta_i(s)}{\Theta_u(s)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n-k}\frac{1}{n^{2k}}(\tau s)^k}. \tag{6-71}$$

Vrijednost je koeficijenata:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n+k}{n-k}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{1}{(2k)!}, \tag{6-72}$$

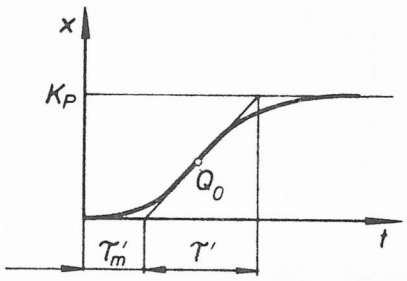
pa se prijenosna funkcija (6-67) pojednostavnjuje:

$$G_S(s)=\frac{\Theta_i(s)}{\Theta_u(s)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!}(\tau s)^k}=\frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\tau s}}. \tag{6-73}$$

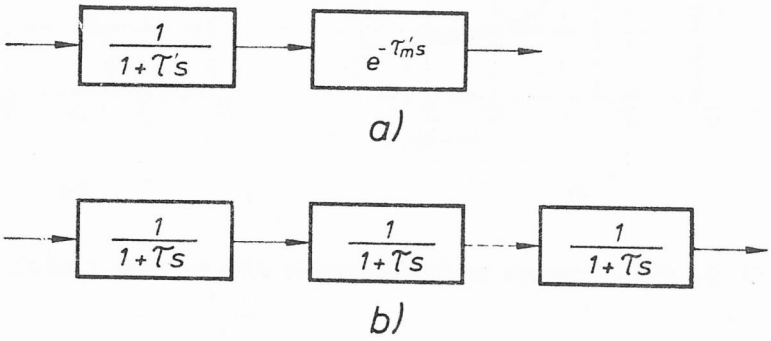
Već ova kratka rasprava o stazama višega reda upućuje na potrebu da se pristup pojednostavni. Taj se pojednostavnjeni pristup osniva na **eksperimentalnom snimanju prijelaznih funkcija.** Tako bi prijelazna funkcija staze na sl. 6—14

imala oblik kao na sl. 6—16. To potvrđuje i iskustvo: uključenjem električne struje, termoelement ne bi, zbog kašnjenja, u toplinskom sustavu u početku pokazivao nikakvu promjenu, zatim bi termonapon počeo rasti najprije polagano, a zatim sve naglije, te bi se konačno asimptotski približavao konačnoj vrijednosti.

Ako se u točki infleksije Q_0 krivulje na sl. 6—16 povuče tangenta, mogu se pomoću sjecišta tangente s osi apscisa i s pravcem K_P odrediti dvije veličine značajne za sustav n-toga reda. To su **nadomjesno mrtvo vrijeme** τ'_m i **nadomjesna vremenska konstanta** τ'. Izraz »nadomjesni« upotrijebili smo zato što se i τ' i τ'_m temelje na drugim fizikalnim pojavama negoli vremenske konstante τ značajne za sustav prvoga reda i mrtvog vremena τ_m značajnog za sustav s mrtvim vremenom.

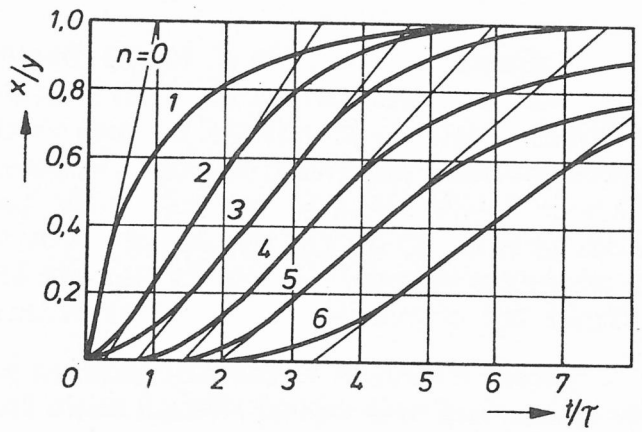


Sl. 6—16. Prijelazna funkcija sustava višeg reda



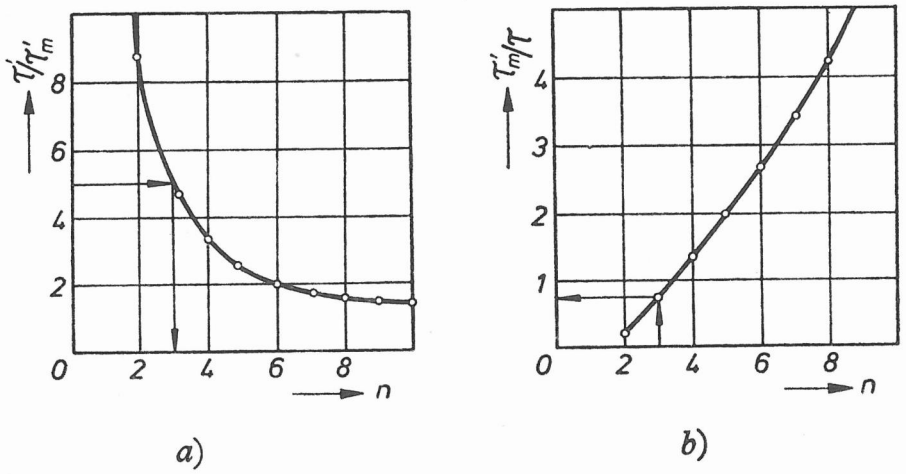
Sl. 6—17. Nadomjesni model aperiodskog sustava s kašnjenjem n-toga reda

Na osnovi tako određenih τ' i τ'_m mogli bismo stvarni sustav prikazati nadomjesnim modelom sa serijski spojenim članom prvoga reda i članom s mrtvim vremenom prema sl. 6—17a. Lakši je međutim put da se nadomjesni model ostvari samo sa članovima prvoga reda prema sl. 6—17b. To možemo uraditi pomoću krivulja na sl. 6—18 koje prikazuju prijelaznu funkciju za n **istih članova prvoga reda bez protudjelovanja vezanih u seriju.** Između tih krivulja možemo uvijek izabrati jednu koja najbolje odgovara eksperimentalno snimljenoj krivulji n-toga reda prema sl. 6—16. Na taj način možemo složenu stazu s nepoznatim matematičkim



Sl. 6—18. Prijelazne funkcije serijski vezanih članova prvoga reda

izrazom nadomjestiti sa stazom koju čini nekoliko u seriju spojenih članova prvoga reda, kojih su svojstva dobro poznata [lit. 5, 38, 58]. Napominjemo da odzivne funkcije na sl. 6—18 koje vrijede za toplinski sustav (protudjelovanje RC-članova!) počinju rasti već kod $t=0$, a da nikad ne dostignu konačnu vrijednost.



Sl. 6—19. Dijagrami za izračunavanje nadomjesnog modela sustava višeg reda

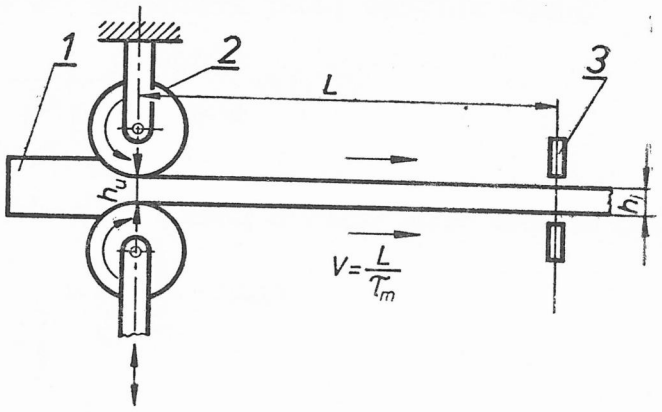
Još je jednostavnije načiniti nadomjesni model pomoću dijagrama na sl. 6—19. Na osnovi omjera τ'/τ'_m eksperimentalno određenih veličina τ' i τ'_m ispitivane staze možemo prema dijagramu 6-19a odrediti broj potrebnih P_1-članova kojima se simulira ispitivana staza, a zatim iz dijagrama na sl. 6—19b određujemo i potrebnu vremensku konstantu za svaki P_1-član. Već s nekoliko P_1-članova bez protudjelovanja možemo s dovoljno točnosti simulirati većinu stvarnih staza u procesnoj tehnici.

Primjer 6.1. Peć za žarenje na sl. 6—14 neka ima $\tau'=5$ min i $\tau'_m=1$ min. Na lijevom dijagramu na sl. 6—19 nađe se za $\tau'/\tau'_m=5$ odgovarajući broj članova $n=3$, a zatim se na desnom dijagramu očita i vremenska konstanta svakog pojedinog člana:

$$\tau=\frac{\tau'_m}{0{,}7}=\frac{1}{0{,}7}\simeq 1{,}4\text{ min.}$$

Valjaonički stan. Na sl. 6—20 shematski je prikazan proces valjanja lima u valjaoničkom stanu. Čelični lim ulazi između dva valjka koji ga valjaju na određenu debljinu. Postavna je veličina te staze pritisak valjaka — što se postiže pomoću elektromotora i zupčanog prijenosa — koja djeluje na razmak h_u. Regulirana veličina je debljina lima h_i. Jasno je da debljinu lima i zbog temperature i zbog prostora ne možemo mjeriti na samom mjestu valjanja. To možemo tek na udaljenosti L od mjesta valjanja. Kako se lim pomiče konačnom brzinom V, mjerenje možemo obaviti tek nakon što prođe mrtvo vrijeme $\tau_m=L/V$.

Sustav s mrtvim vremenom obrađen je u odjeljku 3.3. Tamo smo spomenuli da se egzaktni opis takvog sustava može izvesti pomoću parcijalnih diferencijalnih



Sl. 6—20. Valjaonički stan

jednadžbi, jer se transportna pojava prenosi **konačnom brzinom.** I doista, jednadžba kojom bi se opisala staza s mrtvim vremenom glasi:

$$\frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial t^2}, \tag{6-74}$$

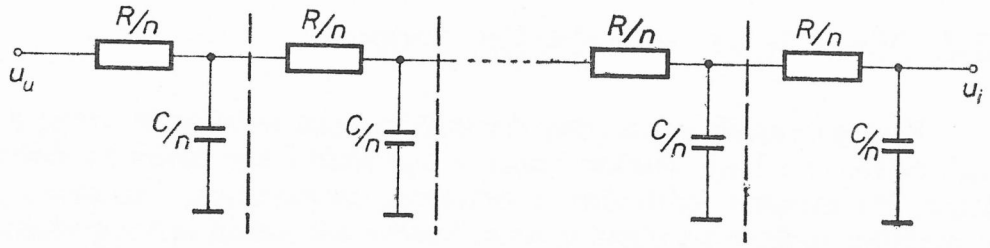
gdje je V brzina širenja pojave. To je poznata **valna jednadžba** koja vrijedi za duge električne vodove uz prisutne refleksije energije s krajeva voda.

Fizikalna veličina, tj. debljina čeličnog lima na sl. 6—20, nije sa stajališta regulacije zanimljiva duž cijelog transportnog puta, već samo na krajevima: na mjestu pritiska i na mjernom mjestu. Na taj način nezavisna varijabla, put x, postaje konstantna veličina samo u dvije točke. Vremenski promjenljiva ulazna veličina $h_u(t)$ promatra se sada u vezi s vremenski promjenljivom izlaznom veličinom $h_i(t)$, a obje su samo funkcije vremena t. Tako smo mogli postaviti i jednadžbu prijelazne funkcije (3-96), odnosno jednadžbu sinusne prijenosne funkcije (5-65).

Sad ćemo dokazati da je **transportni sustav zapravo granični slučaj serijski spojenih članova prvoga reda bez protudjelovanja** kad broj članova $n \to \infty$, a njihova vremenska konstanta $\tau_n \to 0$. Na sl. 6—21 prikazan je takav spoj; crtkano su odijeljeni pojedini RC-članovi, i na tom mjestu treba zamisliti razdvojna pojačala koja isključuju protudjelovanje. Pretpostavimo da je vremenska konstanta τ_n svakog pojedinog RC-člana n-ti dio ukupnog vremena kašnjenja τ. Diferencijalnu jednadžbu takvog voda pišemo skraćeno:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{\tau}{n}\right)^{n-i} u_i^{(n-i)} = u_u, \tag{6-75}$$

gdje smo koeficijente prikazali u obliku faktorijela.



Sl. 6—21. Nadomjesni prikaz transportnog sustava

Odatle možemo pisati prijenosnu funkciju:

$$G_s(s)=\frac{U_i(s)}{U_u(s)}=\frac{1}{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^{n-i}}(\tau s)^{n-i}}. \tag{6-76}$$

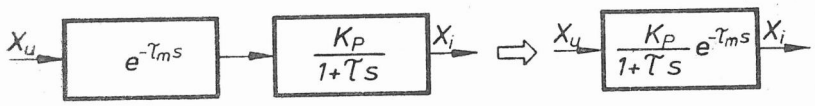
Isti se izraz može pisati u prikladnijem obliku, i to izravno na osnovi sl. 6—21:

$$G_s(s)=\frac{U_i(s)}{U_u(s)}=\frac{1}{\left(1+\frac{\tau s}{n}\right)^n}, \tag{6-77}$$

što je serijski spoj n članova prvoga reda bez protudjelovanja. Kad broj članova $n\to\infty$, dobije se granični prijelaz:

$$G_s(s)=\frac{U_i(s)}{U_u(s)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{\tau s}{n}\right)^n}=e^{-\tau s}, \tag{6-78}$$

koji odgovara izravno dobivenom obliku za sustav s mrtvim vremenom kad ukupno kašnjenje τ zamijenimo sa τ_m [lit. 5, 58]. Za razliku od odzivnih funkcija kod toplinskih sustava, kod transportnih sustava (bez protudjelovanja RC-članova!) odzivna je funkcija jednaka nuli kod $t=0$, a nakon mrtvog vremena τ_m skoči na konačnu vrijednost.



Sl. 6—22. Blok-dijagram procesa miješanja tekućine u posudi s dugim dovodom

Čisto mrtvo vrijeme što smo ga u prethodnim primjerima opisali pojavljuje se vrlo rijetko u idealnom obliku. Mnogo češće mu se pridružuje i kašnjenje prvoga reda. Takav bi slučaj bio npr. s miješanjem tekućina na sl. 6—11, ako bi ventil koji zahvata u pritjecanje otopine bio smješten na određenoj udaljenosti od posude za miješanje tekućina. To možemo opisati prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s)=\frac{C_i(s)}{X_V(s)}=\frac{K_P}{1+\tau s}e^{-\tau_m s} \tag{6-79}$$

ili nadomjesnim blok-dijagramom na sl. 6—22.

6.4. Mogućnost regulacije procesa

Kod procesnih staza mogućnost regulacije ovisi prije svega o veličinama τ' i τ_m', odnosno τ i τ_m. Njihov omjer τ'/τ_m' služi i kao mjera za **dobrotu regulacije** staze, što možemo zaključiti iz slijedećeg razmatranja. Promjena postavne ili poremećajne veličine na ulazu u stazu izaziva tek nakon mrtvog vremena τ_m' odgovarajuću promjenu regulirane veličine koja aktivira regulacijski uređaj. Djelovanje

uređaja, usmjereno na smanjenje regulacijskog odstupanja, postaje djelotvorno na izlazu staze tek nakon ukupno $2\tau_m'$. Dakle, što je veće mrtvo vrijeme staze, to jače se očituje regulacijsko odstupanje. S druge strane, ako je uz dano mrtvo vrijeme τ_m' vremenska konstanta τ' staze mala, onda od trenutka kad regulacijski uređaj počinje djelovati postoji već veliko regulacijsko odstupanje. Iz toga slijedi zaključak da mali omjer τ'/τ_m' povećava regulacijsko odstupanje u prijelaznim uvjetima, odnosno smanjuje mogućnost dobrog regulacijskog zahvata. Iskustvo je pokazalo da se u vezi s omjerom τ'/τ_m' mogu postaviti slijedeći kriteriji za dobrotu regulacije [lit. 38, 41, 58]:

$$G=\frac{\tau'}{\tau_m'} \begin{cases} \geqslant 10, & \text{dobra regulacija;} \\ \simeq 6, & \text{regulacija je zadovoljavajuća;} \\ \leqslant 3, & \text{regulacija je otežana.} \end{cases}$$

Što se tiče fizikalne prirode staza, i one se mogu, baš u vezi s razmatranom dobrotom regulacije s obzirom na probleme koji se pojavljuju pri regulaciji, podijeliti u nekoliko skupina:

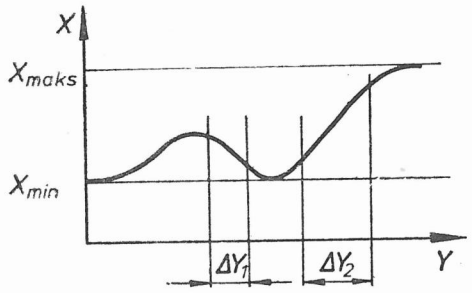
— protok, tlak, razina, broj okreta, električne veličine;
— temperatura, atomske reakcije;
— destilacijske kolone.

Tablica 6—1. Pregled parametara procesnih staza[1]

Regulirana veličina	Staza	τ_m'	τ'
Temperatura	mala laboratorijska peć	0,5 . . . 1 min	5 . . . 15 min
	velika peć	1 . . . 3 min	10 . . . 20 min
	destilacijska kolona	1 . . . 7 min	40 . . . 60 min
	pregrijač pare	2 min	—
	grijanje prostorija	1 . . . 5 min	10 . . . 60 min
Tlak	cijev za dovod plina	—	0,1 s
	parni kotao na mazut	—	150 s
Protok	cijev	0 . . . 5 s	0,2 . . . 10 s
Razina	parni kotao	0,5 . . . 1 min	—
Broj okreta	mali električni pogon	—	0,2 . . . 10 s
	veliki električni pogon	—	5 . . . 40 s
	turbina	—	—
Napon	mali generator	—	1 . . . 5 s
	veliki generator	—	5 . . . 10 s

[1] Prema Oppelt, W.: Kleines Handbuch Technischer Regelvorgänge. Verlag Chemie, Weinheim 1960.

Tablica 6—1 na kraju ovog odjeljka daje usporedni pregled staza koje se najčešće susreću u procesnoj tehnici. Za razne tipove staza daju se tipične vrijednosti značajnih veličina τ' i τ_m'.



Sl. 6—23. Karakteristika staze i mogućnost njene regulacije

U vezi s mogućnošću regulacije možemo napomenuti i činjenicu da karakteristike staze u području regulacije moraju monotono rasti ili padati. Ne možemo regulirati stazu koja ima karakteristiku kao na sl. 6—23, gdje nastupaju maksimumi i minimumi. Tu možemo regulirati samo u izvjesnim područjima, npr. u Δy_1 ili u Δy_2, gdje nagib karakteristike ne mijenja predznak.

7. Regulacijski uređaji

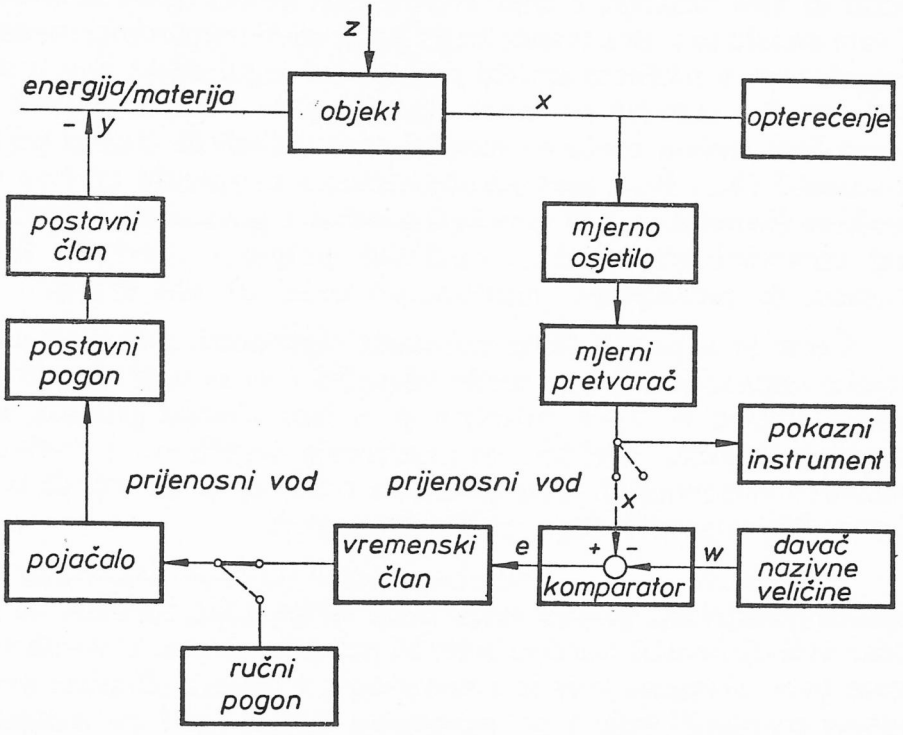
Znam da nema više mosta
do minulog carstva sjena
al' još osta boca dosta
u podrumu uspomena.

G. Krklec, »Spomen na Skadarliju«

Regulacijski uređaj djeluje zajedno s regulacijskim objektom na pravilno odvijanje procesa regulacije. Za razliku od regulacijskog objekta, gdje su struktura i parametri čvrsto zadani, **struktura i parametri regulacijskog uređaja mogu se birati** u svrhu postizanja optimalnog djelovanja. Pod djelovanjem regulacijskog uređaja razumijeva se ponajprije **vremensko preoblikovanje signala povratne veze,** što je i njegova najvažnija funkcija.

Regulacijski uređaj vrši čitav niz funkcija, i u blok-dijagramu na sl. 7—1 prikazane su sve funkcije koje se mogu pojaviti u procesu regulacije, bez obzira radi li se u čvrstoj ili o slijednoj regulaciji.

Regulirana veličina x na izlazu iz staze dolazi najprije do **mjernog člana** koji se sastoji od mjernog osjetila i pretvarača. Mjerno osjetilo ima zadatak da mjeri (osjeti) trenutačnu vrijednost regulirane veličine i da je vodi dalje u prikladnom obliku. Funkcija je pretvarača da dobiveni signal pretvori tako da je i prema signalnom području (npr. tlak od 0 . . . 1 MPa u 0,02 . . . 0,1 MPa i prema fizikalnom mediju (npr. toplinske veličine u električne) i prema vrsti signala (npr. analogne u digitalne) prilagođen za daljnju obradu.



Sl. 7—1. Blok-dijagram regulacijskog kruga

Regulacijski član sastoji se od komparatora, vremenskog člana i regulacijskog pojačala. Regulirana veličina iz mjernog člana ulazi najprije u komparator, gdje se uspoređuje s nazivnikom, odnosno vodećom veličinom w koja dolazi iz davača nazivne veličine. Razlika tih dvaju signala naziva se regulacijsko odstupanje e. Ono djeluje na vremenski član gdje se signal preoblikuje u skladu sa zahtjevima regulacijskog kruga. Tako oblikovan signal treba u pravilu pojačati, jer je i u početku bio male energije, a prolaskom kroz pasivne sklopove i dalje se oslabljuje.

Regulacijski signal vodi se dalje u **izvršni član,** koji se sastoji od postavnog pogona i postavnog člana. Postavni je pogon obično neki motor koji upravlja postavnim članom, obično ventilom. Signal kao postavna veličina y zahvaća na ulaz regulacijske staze i djeluje suprotno poremećajnoj veličini z. Postavni član često se izvodi kao dio regulacijske staze.

Regulacijski član je u mnogim procesnim i energetskim postrojenjima udaljen od mjesta mjerenja i zahvata u stazu. U tom slučaju mora se izvesti tzv. **daljinski prijenos signala,** čime se sprečava da se regulacijski signal suviše izobliči ili priguši.

Na osnovi blok-dijagrama ne smije se izvući pogrešan zaključak da sve funkcije označene blokovima moraju postojati. Tako npr. ponekad nije potreban pretvarač, a davač nazivne veličine može biti sadržan u samoj konstrukcijskoj izvedbi regulacijskog uređaja (primjer regulacije razine u spremniku s tekućinom na sl. 6—6). Ako je mjerni signal vrlo slab, treba ga pojačati odmah u mjernom članu, pa se radi toga uključuje mjerno pojačalo. No, regulacijski član može se izvesti od pasivnih sklopova tako da nema regulacijskog pojačala, ili njegovu funkciju preuzima postavni motor. Vremenski se član također ne mora izvesti zasebno, već njegovo proporcionalno djelovanje može biti sadržano u pojačalu, a integralno djelovanje u postavnom motoru [lit. 6, 17, 21].

Iz toga slijedi da pojedini sklopovi regulacijskog uređaja mogu sadržavati jednu ili više funkcija, a cijeli regulacijski uređaj može se izvesti kao jedna cjelina. U tom smislu se u **procesnoj regulaciji** cijeli regulacijski uređaj naziva jednostavno »**regulator**« u najširem smislu riječi. Ali i regulacijski član u zasebnoj konstrukcijskoj izvedbi također se može tako nazvati. Konačno, pod imenom »regulator« u najužem smislu može se razumijevati najvažniji član u petlji povratne veze — vremenski član. Kod **servomehanizama** vremenski se član naziva »**kompenzacijskim članom**« koji je ponekad povezan s pojačalom, a ponekad je i dio kompletnog servomehanizma. Ako međutim potpuno shvatimo funkciju regulacijskog uređaja, to preklapanje pojmova ne treba da nas smeta.

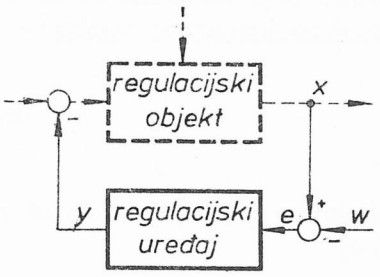
Često je u praksi, zbog pogonske sigurnosti, potrebno da se djelovanje automatske regulacije u krugu može isključiti i da se umjesto nje uključi **ručna regulacija.** Prema sl. 7—1 potreban je u tom slučaju pokazni instrument, a čovjek preuzima logičku funkciju uspoređivanja regulirane i nazivne veličine i donosi odluku o vremenskom toku postavne veličine, tj. na koji će način ručno upravljati postavnim pogonom (npr. ručkom ventila).

I regulacijski uređaji mogu se podijeliti prema fizikalnom značenju prijenosnog signala (električni, pneumatski, itd.). Osim toga, podjela se može izvršiti prema tome je li djelovanje kontinuirano ili nekontinuirano. U ovom poglavlju obrađujemo samo prvu skupinu, koja je i najvažnija. U drugu skupinu pripadaju relejna i impulsna regulacija koje i po osobenom djelovanju i po matematičkoj analizi traže poseban pristup. O njima govorimo u kasnijim poglavljima.

U slijedećim odjeljcima obrađujemo pojedinačno članove regulacijskog uređaja. Izabrani su samo tipični sklopovi, jer bi opisivanje mnoštva fizikalnih načela i izvedbenih rješenja, naročito kad se radi o osjetilima i pretvaračima, prelazilo okvire ovog gradiva. Namjerno su pomiješani električni, pneumatski, hidraulični i mehanički sklopovi, da se istakne kako za prijenos i obradu informacijskog signala u regulacijskom krugu nije važan fizikalni medij, već funkcionalni odnos.

7.1. Vladanje regulacijskih uređaja

Kompletan regulacijski uređaj može se prikazati samo jednim blokom kao na sl. 7—2. Na ulaz će djelovati odstupanje regulirane veličine od nazivne, odnosno od vodeće veličine, tj. $e=x-w$; na izlazu je postavna veličina y. Iako svi članovi utječu na prijenos regulacijskog signala, i to prvenstveno prijenosnim omjerom i kašnjenjem, vremenski član je taj koji bitno utječe na regulacijsko djelovanje. **Pomoću vremenskog člana regulacijski signal vremenski se preoblikuje,** pa govorimo o proporcionalnom, integralnom i o derivacijskom djelovanju.



Sl. 7—2. Regulacijski uređaj kao dio regulacijskog kruga

Kao i kod regulacijskih objekata, i tu možemo postaviti diferencijalnu jednadžbu u općem obliku:

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=b_{-1}\int e\,dt+b_0 e+b_1\frac{de}{dt}+\ldots \qquad (7\text{-}1)$$

s regulacijskim odstupanjem e na ulazu i postavnom veličinom y na izlazu. Članovi s lijeve strane u jednadžbi predstavljaju kašnjenja u regulacijskom uređaju, a članovi s desne strane upravo su integralna, proporcionalna i derivacijska pretvorba signala povratne veze. Ako gornji izraz prevedemo u operatorski oblik:

$$(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0)\,Y(s)=\left(b_{-1}\frac{1}{s}+b_0+b_1 s\right)E(s), \qquad (7\text{-}2)$$

dobit ćemo prijenosnu funkciju regulacijskog uređaja:

$$G_R(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=\frac{b_{-1}\dfrac{1}{s}+b_0+b_1 s}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}. \qquad (7\text{-}3)$$

Dijeljenjem s koeficijentom a_0 dobivamo:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=$$

$$=\frac{K_i\frac{1}{s}+K_P+K_d s}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\ldots\left(1+2\frac{\zeta_1}{\omega_{n1}}s+\frac{1}{\omega_{n1}^2}s^2\right)\left(1+2\frac{\zeta_2}{\omega_{n2}}s+\frac{1}{\omega_{n2}^2}s^2\right)\ldots} \tag{7-4}$$

Kratice K_i, K_P i K_d su prijenosni omjeri, odnosno pojačanja integralnog, proporcionalnog i derivacijskog djelovanja. Osim toga, imamo vremenske konstante τ_i članova prvoga reda, kao i stupanj prigušenja ζ_i i neprigušenu vlastitu frekvenciju ω_{ni} članova drugoga reda.

Iako regulacijski uređaj nikad nije bez vlastitog kašnjenja, ipak se može promatrati idealno — bez kašnjenja. Naime, kašnjenja regulacijskog uređaja u pravilu su zanemariva prema drugim kašnjenjima u regulacijskom krugu, naročito prema onima u procesnih staza. U tom slučaju izraz (7-1) možemo pisati kao jednadžbu kvazistacionarnog stanja:

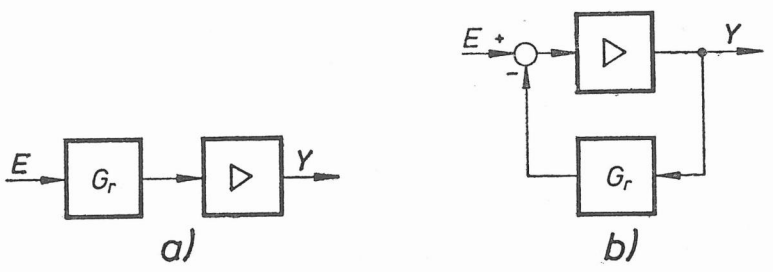
$$a_0 y=b_{-1}\int e\,dt+b_0 e+b_1\frac{de}{dt}+\ldots \tag{7-5}$$

Možemo pisati pojednostavnjeni oblik prijenosne funkcije regulacijskog uređaja (7-4):

$$G_R(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=K_i\frac{1}{s}+K_P+K_d s. \tag{7-6}$$

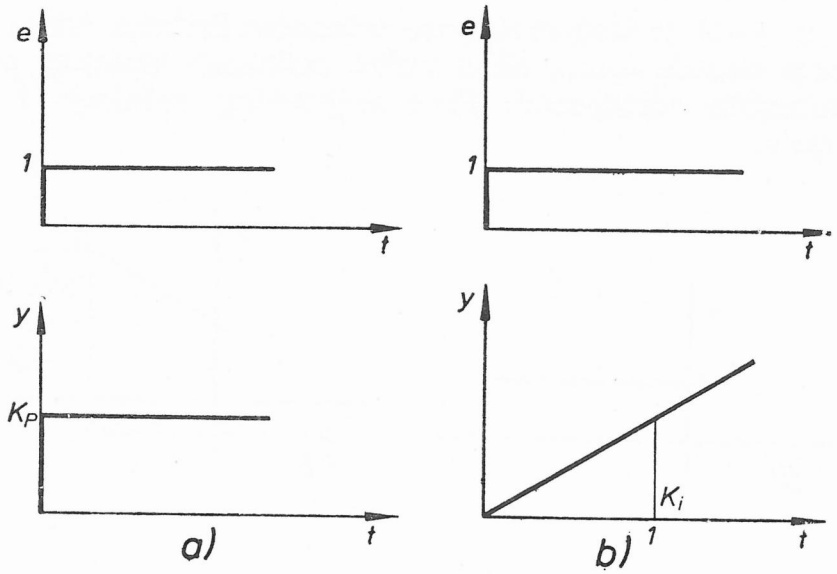
Uz ta zanemarenja oblik prijenosne funkcije u izrazu (7-6) ne odgovara stvarnom stanju, jer je potencija od s u brojniku veća nego ona u nazivniku. Međutim, ukupna prijenosna funkcija regulacijskog sustava, složena od prijenosnih funkcija regulacijske staze i uređaja, bit će vjeran prikaz odnosa.

Vremenski član se u tehničkoj izvedbi u pravilu kombinira s pojačalom, i to na dva moguća načina. Rjeđe se izvodi serijski spoj vremenskog člana i pojačala na putu signala povratne veze, što je načelno prikazano na sl. 7—3a. Druga mogućnost prikazana je na sl. 7—3b, gdje je na putu signala povratne veze pojačalo, a vremenski član se nalazi u povratnoj vezi samog pojačala, pa imamo povratnu vezu u krugu povratne veze. Ova je izvedba zbog određenih prednosti mnogo češća.



Sl. 7—3. Vremenski član u seriji (a) i u povratnoj vezi s pojačalom (b)

Vremenski član u izravnoj vezi. Kao što smo spomenuli, djelovanje vremenskog člana može imati proporcionalno, integralno ili derivacijsko obilježje, a može biti i kombinacija tih triju djelovanja.



Sl. 7—4. Vremenski odziv P-člana (a) i I-člana (b)

P-djelovanje prikazano je jednadžbom:

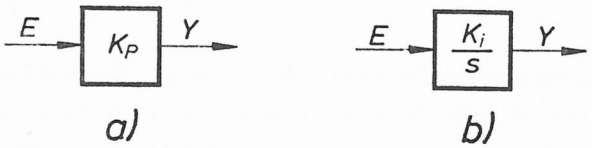
$$y = K_P e, \tag{7-7}$$

a prijelazna funkcija ima oblik odskočne funkcije (sl. 7—4a).

Prijenosna je funkcija:

$$G_R(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = K_P, \tag{7-8}$$

a njezina je blok-shema prikazana na sl. 7—5a. Kao što ćemo u odjeljku 8.1. vidjeti, P-član reagira doduše brzo, ali u mnogim slučajevima ne otklanja trajno regulacijsko odstupanje.



Sl. 7—5. Blok-shema P-člana (a) i I-člana (b)

I-djelovanje također smo obradili u odjeljku 3.3. Radi potpunosti dajemo najprije funkcijski odnos:

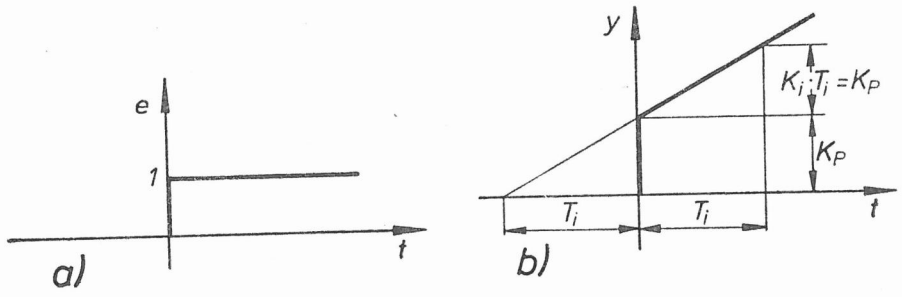
$$y = K_I \int e\,dt, \tag{7-9}$$

kao i prijelaznu funkciju u obliku nagibne funkcije (sl. 7—4b).

Prijelazna je funkcija I-člana:

$$G_R(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=\frac{K_i}{s}. \tag{7-10}$$

Na sl. 7—5b je blok-shema ove prijenosne funkcije. I-član u krugu povratne veze djeluje doduše sporo, ali u većini praktičnih slučajeva potpuno otklanja trajno regulacijsko odstupanje[1]. Zbog svojstvenog kašnjenja I-član djeluje destabilizirajuće.



Sl. 7—6. Vremenski odziv PI-člana

Kako i P- i I-djelovanje imaju svako za sebe određene prednosti, često je poželjno da se sastave u **PI-djelovanje.** Paralelna kombinacija P- i I-člana daje diferencijalnu jednadžbu:

$$y=K_P e+K_i \int e\,dt, \tag{7-11}$$

Da bismo taj izraz sveli na pogodniji oblik, možemo uzeti kao novu veličinu tzv. integralno vrijeme. Ono se određuje pomoću sl. 7—6 koja predstavlja grafički oblik prijelazne funkcije PI-člana. Ako se na ulazu u PI-član pojavi poremećaj u obliku odskočne funkcije, onda prođe **integralno vrijeme ili vremenska konstanta integracije** T_i da se postavna veličina y pod utjecajem I-djelovanja promijeni za onu vrijednost za koju se pod utjecajem P-djelovanja skokovito promijenila. Iz slike proizlazi da mora vrijediti $K_i \cdot T_i = K_P$. Ta se vrijednost za K_i uvrsti u jednadžbu (7-11):

$$y=K_P\left(e+\frac{1}{T_i}\int e\,dt\right). \tag{7-12}$$

Na osnovi sličnosti trokuta na sl. 7—6 možemo zaključiti da PI-djelovanje odgovara I-djelovanju koje je počelo u vremenu T_i ranije.

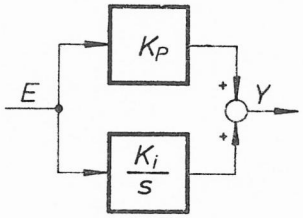
Pretvaranjem izraza (7-12) u operatorski oblik i preuređenjem dobit ćemo prijenosnu funkciju PI-djelovanja:

$$G_R(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=K_P\left(1+\frac{1}{T_i s}\right). \tag{7-13}$$

kojeg je blok-dijagram prikazan na sl. 7—7.

---

[1] Trajno regulacijsko odstupanje ovisi i o pobudnoj funkciji i o sustavu što ga čine regulacijska staza i uređaj — vidi odjeljak 8.2.



Sl. 7—7. Blok-dijagram PI-člana

P-član se može sastaviti sa D-članom u član sa **PD-djelovanjem.** Samo D-djelovanje ne može se primijeniti, jer bi D-član reagirao samo na brze promjene poremećajne veličine. Ako se međutim te promjene odigravaju polako i duže vrijeme, regulacijsko djelovanje D-člana potpuno bi izostalo. D-član se dodaje drugim regulacijskim djelovanjima jer djeluje stabilizirajuće.

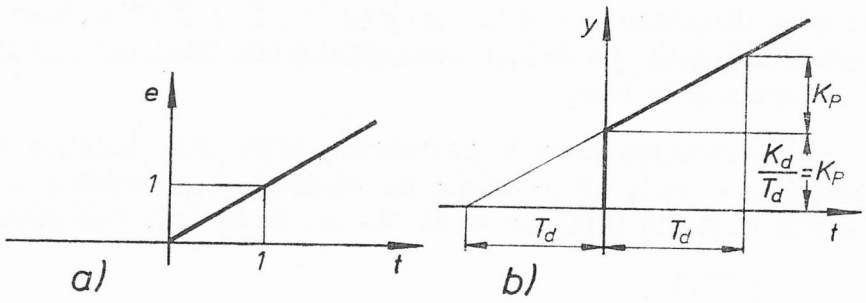
Jednadžbu PD-člana:

$$y=K_P e+K_d \frac{de}{dt} \tag{7-14}$$

možemo svesti na prikladniji oblik uvođenjem pojma derivacijskog vremena prema sl. 7—8. Budući da se radi o derivacijskom djelovanju, pogodno je da se promatra odziv na poremećaj u obliku nagibne funkcije. S nagibnom funkcijom na ulazu treba proći **derivacijsko vrijeme ili vremenska konstanta derivacije** T_d da se pod utjecajem P-djelovanja postavna veličina promijeni za vrijednost za koju se u početku skokovito promijenila pod utjecajem D-djelovanja. Vrijedi dakle $K_d/T_d=K_P$, pa se ta vrijednost za K_d uvrsti u jednadžbu (7-14):

$$y=K_P\left(e+T_d\frac{de}{dt}\right). \tag{7-15}$$

Sličnim razmatranjem kao i u slučaju PI-djelovanja možemo na osnovi sl. 7—8 zaključiti da PD-djelovanje odgovara P-djelovanju koje bi počelo djelovati u vremenu T_d ranije.

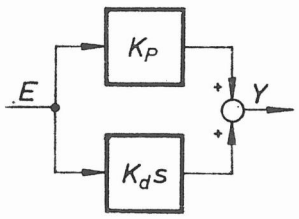


Sl. 7—8. Vremenski odziv PD-člana

Iz jednadžbe (7-15) dobivamo prijenosnu funkciju:

$$G_R(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=K_P(1+T_d s) \tag{7-16}$$

s blok-dijagramom na sl. 7—9.

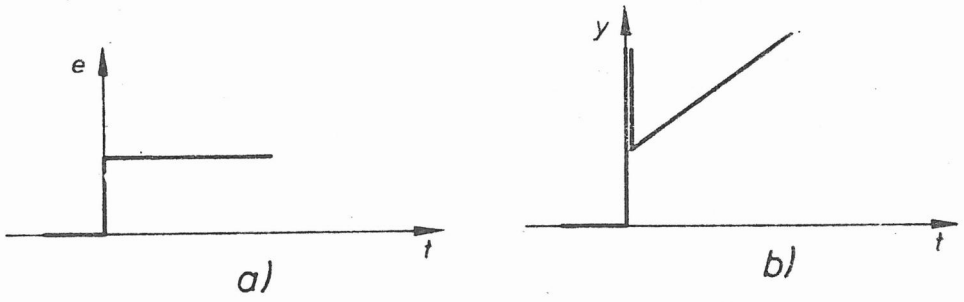


Sl. 7—9. Blok-dijagram PD-člana

Prednost D-člana da jako i odmah reagira na brze promjene izlazne veličine koristi se u članu s **PID-djelovanjem** koje sjedinjuje svojstva svih triju djelovanja. Jednadžba mu je:

$$y=K_P e+K_i\int e\,dt+K_d\frac{de}{dt}=K_P\left(e+\frac{1}{T_i}\int e\,dt+T_d\frac{de}{dt}\right). \qquad (7\text{-}17)$$

Radi cjelovitosti dajemo na sl. 7—10 i prijelaznu funkciju PID-člana.



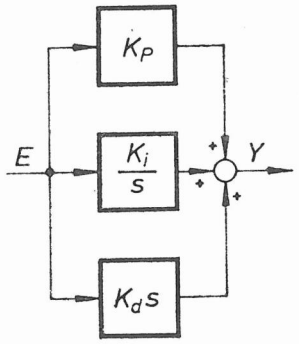
Sl. 7—10. Vremenski odziv PID-člana

Jednadžbu (7-17) možemo pisati i u obliku prijenosne funkcije:

$$G_R(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=K_P\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right) \qquad (7\text{-}18)$$

gdje nema članova koji kašnjenjima opterećuju PID-član. Na sl. 7—11 vidimo u blok-dijagramu paralelno spojene P-, I- i D-član. Kao što ćemo vidjeti, I-član unosi kašnjenje, pa djeluje destabilizirajuće. Naprotiv, D-član djeluje stabilizirajuće na regulacijski krug.

Vremenski član u povratnoj vezi. Kombinacija vremenskog člana s pojačalom — koja bitno utječe na vladanje regulacijskog uređaja — najčešće se ne izvodi na način prikazan na sl. 7—3a, jer između pojedinih članova postoji **protu-**

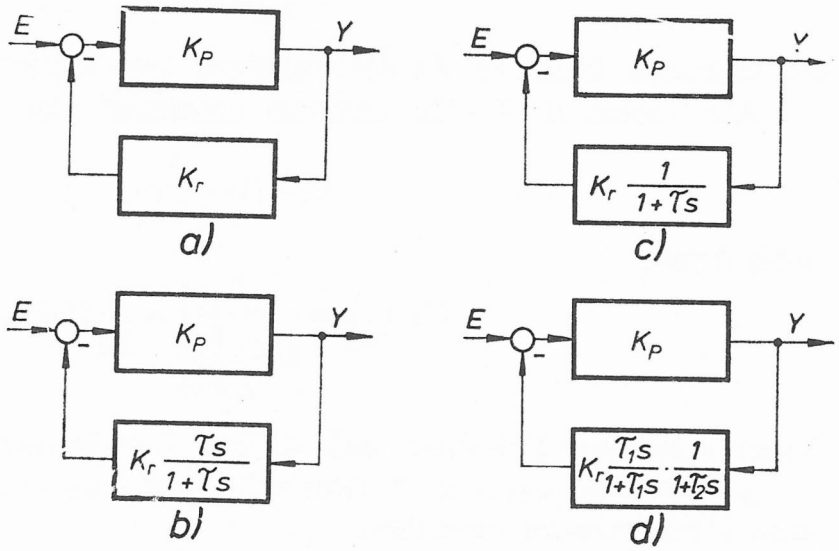


Sl. 7—11. Blok-dijagram PID-člana

djelovanje, pa bi se iza svakog člana moralo spojiti razdvojno pojačalo (v. odjeljak 4.4), što poskupljuje izvedbu. Zato se izvodi kombinacija pojačala s vremenskim članom u povratnoj vezi, prema blok-dijagramu na sl. 7—3b. Ako pojačalo nije opterećeno kašnjenjima i ako mu je pojačanje vrlo veliko, onda prijenosnu funkciju čitavog člana možemo pisati na osnovi jednadžbe (4-87):

$$G_R(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=\frac{G_p}{1+G_rG_p}=\frac{1}{\frac{1}{G_p}+G_r}\simeq\frac{1}{G_r}. \qquad (7\text{-}19)$$

Prijenosna funkcija $G_R(s)$ ovisi dakle samo o vladanju vremenskog člana G_r, a ne i o pojačalu G_p. Zbog toga se taj član i primjenjuje široko: povratna veza stabilizira parametre regulacijskog uređaja. Da bi parametri vremenskog člana bili konstantni, poželjno je da se vremenski član izvede pomoću **pasivnih** elemenata kao što su otpornici, kondenzatori, itd. koji ne mijenjaju osjetno svoja svojstva. Osim toga, u regulacijskom članu mora se istodobno pojačati mala energija mjernog signala da se dobije mnogo veća energija postavnog signala; to se mora izvesti pomoću **aktivnih** elemenata, kao što su tranzistori, pneumatski sustav zaslon-sapnica, itd., koji su veoma podložni promjenama izvora napajanja, starenju i sl. Dakle, prema jednadžbi (7-19), ukupna prijenosna funkcija G_R ovisi samo o vladanju vremenskog člana G_r, izvedenog pasivnim elementima.



Sl. 7—12. Vremenski član u povratnoj vezi pojačala djeluje kao P-član(a), kao PI-član (b), kao PD-član (c) te kao PID-član (d)

Sl. 7—12 prikazuje nekoliko načelnih mogućnosti da se postigne željeno regulacijsko djelovanje s vremenskim članom u krugu povratne veze pojačala. Kao prvi primjer uzimamo, prema sl. 7—12a, vremenski član s P_0-djelovanjem, tj. s običnim prijenosnim omjerom K_r. Prema jednadžbi (7-19) dobit ćemo:

$$G_R\simeq\frac{1}{G_r}=\frac{1}{K_r}. \qquad (7\text{-}20)$$

To je, naravno, čisto **P-djelovanje.**

Primjer 7.1. Neka je P-djelovanje vremenskog člana ostvareno električnim razdjelnikom napona sa $R_1=10\ \mathrm{k}\Omega$ i $R_2=100\ \Omega$. Prijenosna je funkcija P-člana:

$$G_r=\frac{R_2}{R_1+R_2}=\frac{100}{10^4+100}\simeq 0{,}01.$$

Ta vrijednost uvrštena u jednadžbu (6-29) daje prijenosnu funkciju cijelog regulatora:

$$G_R\simeq\frac{1}{G_R}=\frac{1}{0{,}01}=100,$$

kojeg pojačanje ovisi samo o potenciometarskom namještanju u vremenskom članu.

Vremenski član na sl. 7—12b ima D_1-djelovanje:

$$G_r=K_r\frac{\tau s}{1+\tau s}, \tag{7-21}$$

pa je ukupna prijenosna funkcija:

$$G_R\simeq\frac{1}{G_r}=\frac{1}{K_r\dfrac{\tau s}{1+\tau s}}=\frac{1}{K_r}\left(\frac{1}{\tau s}+1\right), \tag{7-22}$$

što odgovara članu sa **PI-djelovanjem** bez kašnjenja.

Ako prema sl. 7—12c uzmemo vremenski član sa P_1-djelovanjem:

$$G_r=K_r\frac{1}{1+\tau s}, \tag{7-23}$$

dobit ćemo:

$$G_R\simeq\frac{1}{G_r}=\frac{1}{K_r\dfrac{1}{1+\tau s}}=\frac{1}{K_r}(1+\tau s). \tag{7-24}$$

Takav sklop ima **PD-djelovanje** također bez kašnjenja.

Konačno se prema sl. 7—12d u krug povratne veze serijski spoje D_1- i P_1--član s prijenosnom funkcijom:

$$G_r=K_r\frac{\tau_1 s}{1+\tau_1 s}\cdot\frac{1}{1+\tau_2 s}. \tag{7-25}$$

Uvrštenjem u jednadžbu (7-17):

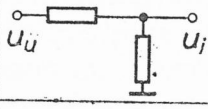
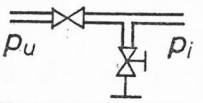
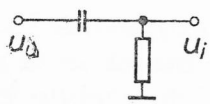
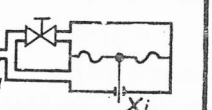
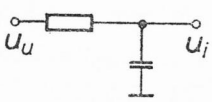
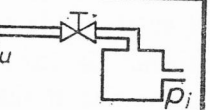
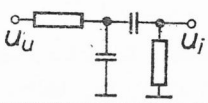
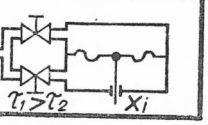
$$G_R\simeq\frac{1}{G_r}=\frac{1}{K_r\dfrac{\tau_1 s}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}}=\frac{1}{K_r}\cdot\frac{1+(\tau_1+\tau_2)s+\tau_1\tau_2 s^2}{\tau_1 s}=$$

$$=\frac{1}{K_r}\left(\frac{1}{\tau_1 s}+\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1}+\tau_2 s\right) \tag{7-26}$$

dobivamo prijenosnu funkciju koja odgovara članu sa **PID-djelovanjem.**

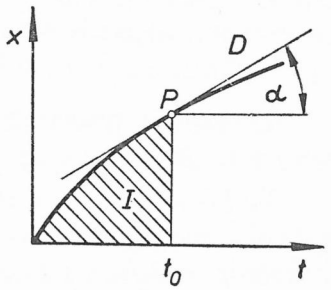
U tablici 7—1 dan je u sažetom obliku pregled osnovnih članova s povratnom vezom. Uz prijenosnu funkciju $G_R(s)$ nalazi se i potrebna prijenosna funkcija člana povratne veze $G_r(s)$, kao i konkretna shema tog člana u električnoj i pneumatskoj izvedbi. Vidimo kako se promjenama električnih otpora ili pneumatskih prigušivača može lako utjecati na značajne veličine K_P, T_i i T_d cijelog vremenskog člana.

Tablica 7—1. Prijenosne funkcije i sheme regulatora s povratnom vezom

	PRIJENOSNA FUNKCIJA	ČLAN POVRATNE VEZE		
	$G_R(s)$	$G_r(s)=\frac{1}{G_R(s)}$	električni	pneumatski
P	K_P	$K_r=\frac{1}{K_P}$		
I	$\frac{K_i}{s}$	$K_r s=\frac{1}{K}s$	—	—
PI	$K_P(1+\frac{1}{T_i s})$	$\frac{K_r s}{1+T_r s}=\frac{\frac{T_i}{K_P}s}{1+T_i s}$		
PD	$K_P(1+T_d s)$	$\frac{K_r}{1+T_r s}=\frac{\frac{1}{K_P}}{1+T_d s}$		
PID	$K_P(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s)$	$\frac{K_r s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}=\frac{\frac{T_i}{K_P}s}{1+T_i s+T_i T_d s^2}$		

U gornjem smo prikazu pretpostavili, radi jednostavnosti, da je pojačanje K_R vrlo veliko. Ako to nije tako, odnosi više nisu tako jednostavni. Moramo poći od punog oblika jednadžbe (7-17), pa će se i vrijednosti odgovarajućih vremenskih konstanti i pojačanja donekle promijeniti. Međutim, u biti ostaju iste značajke pojedinih regulacijskih djelovanja.

Kibernetički prikaz vremenskog djelovanja. PID-djelovanje može se uvijek zamisliti kao zamjena umnom radu čovjeka. Naime, kod ručne regulacije (vidi sl. 7—1) čovjek mora nadgledati i ispravljati reguliranu veličinu. Mijenja li se ona, kao npr. u krivulji na sl. 7-13, čovjekova se reakcija može protumačiti



Sl. 7—13. Regulacijsko djelovanje s kibernetičkog stajališta

analogno PID-djelovanju: čovjek može reagirati »proporcionalno« prema zahtjevima trenutka t_0, »integralno« uzimajući u obzir prošlo iskustvo, i »derivacijski« sagledavajući tendenciju budućih promjena.

7.2. Mjerni članovi

Mjerenje nepoznate veličine znači brojčanu usporedbu s poznatom veličinom; mjerenjem se određuje koliko je jedinica poznate veličine sadržano u nepoznatoj veličini. S mjerenjem se susrećemo svuda u tehnici i općenito se zadovoljavamo očitanjem na pokaznom instrumentu ili aparatu za registriranje. Da bi se mjerna vrijednost mogla očitati, većina mjernih instrumenata radi na **načelu mehaničkog otklona** (voltmetar, manometar). Energija što se uzima s mjernog mjesta prouzrokuje silu ili zakretni moment, koji djeluju suprotno sili opruge. Ako mjerni instrument radi na **načelu kompenzacije,** na mjernom se mjestu ne uzima praktički nikakva energija. Naime, nepoznata mjerna veličina uspoređuje se s namještenom veličinom, a obje su u ravnoteži (npr. u granama Wheatstoneova mosta). Instrumenti koji rade na načelu kompenzacije točniji su, ali i skuplji.

Mjerenja su neophodna i u regulacijskoj tehnici: **ako se neke veličine ne mogu mjeriti, ne mogu se ni regulirati.** Tako bi npr. u prehrambenoj i farmaceutskoj industriji bilo osobito korisno kad bi postojala mogućnost mjerenja okusa ili mirisa, ali se nažalost u takvim slučajevima moramo zadovoljiti ljudskim osjetilima. Za mjerenja u regulacijskoj tehnici značajno je da se mjerni podatak mora pretvoriti u fizikalnu veličinu koja se može dalje prenositi i obraditi.

U tom smislu mjerni član u regulacijskom krugu ima više funkcija. Ponajprije se na mjernom mjestu nalazi **mjerno osjetilo** koje vrši funkciju pretvaranja jedne fizikalne veličine u drugu: npr. pritisak pretvara u otklon, temperaturu u napon. Mjerna veličina djeluje dakle na ulazu u osjetilo koje na izlazu daje signal pogodan za daljnji prijenos i obradu.

Osim što pretvara jednu fizikalnu veličinu u drugu, često je potrebno da mjerni član istu fizikalnu veličinu pretvori u normirano područje vrijednosti kako bi se pojednostavnila obrada u regulacijskom članu. Takav funkcionalni sklop naziva se **pretvarač,** i u toj funkciji ćemo ga opisati. Radi potpunosti spominjemo i potrebu da se analogne veličine ponekad pretvaraju u digitalne, i obratno. Naime, mjerenja su pretežno kontinuiranog karaktera, a obrada se vrši na digitalnim sklopovima; neka su mjerenja diskretnog karaktera (Geiger-Müllerovo brojilo), a obrada se vrši s analognim sklopivima.

Budući da se mjerenjem ne smije mnogo remetiti regulirana veličina na izlazu iz staze, energija mjernog signala treba da bude općenito vrlo mala. Zato se ponekad kao dio mjernog člana ugrađuje i **mjerno pojačalo** koje pojača mjerni signal tako da je iznad utjecaja smetnji. Kako je pojačanje signala značajno za regulacijski krug kao cjelinu, pojačalo obrađujemo zasebno kao dio regulacijskog člana.

U okviru mjernog člana obrađujemo i **daljinski prijenos signala,** i to na primjeru induktivnog daljinskog davača.

Kako je mjerna tehnika zasebna cjelina, u ovom gradivu dajemo samo osnovna rješenja, značajna sa stajališta regulacije. Inače se mjerni članovi odlikuju mnoštvom fizikalnih rješenja i konstrukcijskih izvedbi [lit. 20, 26,].

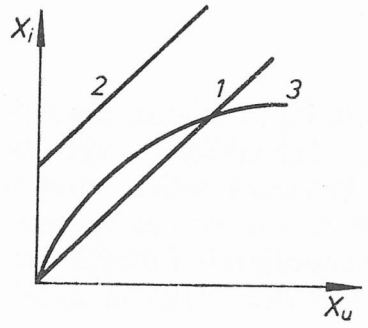
7.2.1. Mjerno osjetilo

Omjer raznih fizikalnih veličina na izlazu i ulazu mjernog osjetila možemo prikazati prema karakteristikama. Tako krivulja 1 na sl. 7—14 prikazuje linearan omjer, pa možemo odrediti **strminu:**

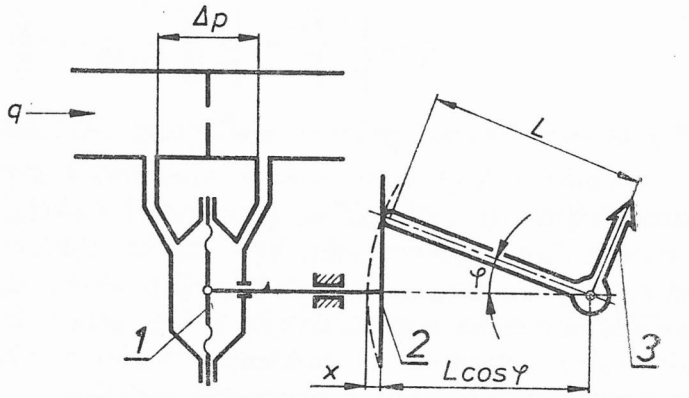
$$S=\frac{\Delta X_i}{\Delta X_u}, \tag{7-27}$$

Primjerice, strmina termoelementa dana je u [V °C^{-1}], a tlakomjera u [rad-Pa^{-1}].

Krivulja 2 vrijedi za mjerno osjetilo s pomakom nultočke, što je npr. potrebno pri prijenosu u normirano područje tlaka koje je dano sa 0,02. . .0,1 MPa. Postoji i mogućnost da je karakteristika u radnom području nelinearna, kao npr. na krivulji 3 koja predstavlja mjerenje protoka pomoću diferencijalnog tlaka. U svakom slučaju te karakteristike ne smiju imati histerezu, jer mjerenja postaju netočna.



Sl. 7—14. Karakteristike mjernog osjetila



Sl. 7—15. Član za radiciranje kod mjerenja protoka pomoću diferencijalnog tlaka

Nelinearan odnos u mjernim članovima nije uvijek poželjan; pri mjerenju protoka pomoću diferencijalnog tlaka odnos ima kvadratno obilježje:

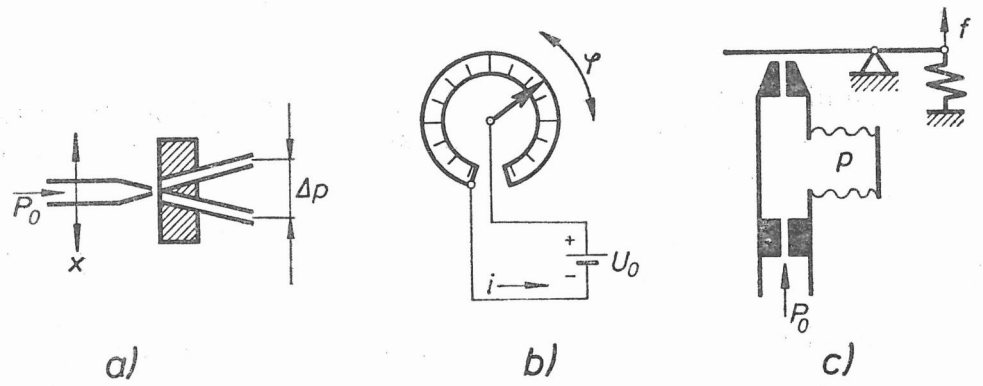
$$x=K_1\Delta p=K_1K_2q^2, \tag{7-28}$$

pa je mjerenje u području niskih protoka netočno. Nelinearnost možemo kompenzirati tako da u seriju s mjernim članom ugradimo član s odgovarajućom karakteristikom. Tako npr. prema sl. 7—15 signal iz mjerila protoka vodimo u **član za radiciranje.** To je tzv. (1 — cos φ)-član prikazan na slici. Membrana 1 slijedi promjene Δp, a njezin se pomak prenosi preko ploče 2 na polugu pokaznog instrumenta 3. Opruga, koja nije ucrtana, pritišće polugu na ploču. Račun daje odnos položaja x i kuta φ:

$$x=L\,(1-\cos\varphi)=L\left[1-\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\ldots\right)\right], \tag{7-29}$$

što za $\varphi<30°$ daje približno:

$$x\simeq\frac{1}{2}L\varphi^2. \tag{7-30}$$



Sl. 7—16. Mjerenje položaja

Iz jednadžbi (7-28) i (7-30) dobivamo linearan odnos između protoka i otklona:

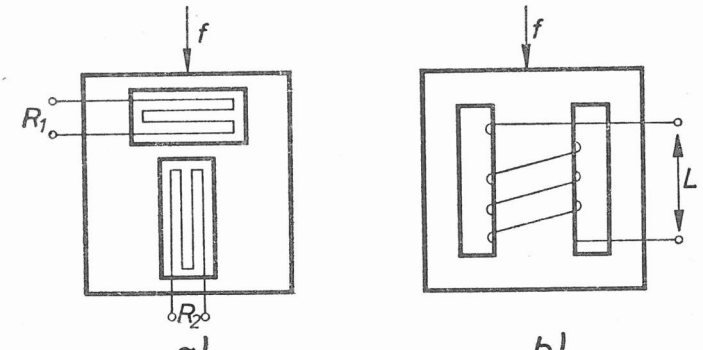
$$\varphi = \sqrt{\frac{2x}{L}} = \sqrt{\frac{2}{L} K_1 \Delta p} = \sqrt{\frac{2}{L} K_1 K_2 q^2} = Kq\,. \qquad (7\text{-}31)$$

To je jednostavan primjer analognog računskog sklopa.

Veličine koje treba mjeriti možemo u regulacijskoj tehnici podijeliti, donekle proizvoljno, u mehaničke, procesne i električne veličine. Mehaničke su veličine položaj, kutni zakret, sila, broj okreta, zakretni moment. Procesne veličine uključuju temperaturu, tlak, protok, razinu, vlažnost, pH-vrijednost, i sl. Pod električnim veličinama se uz napon, struju, snagu, otpor, frekvenciju, razumijevaju i magnetske, akustičke, svjetlosne i nuklearne veličine. Ovdje ćemo obraditi osnovna načela mjerenja mehaničkih i procesnih veličina.

Kod **mehaničkih veličina** prikazat ćemo najprije mjerenje **pomaka,** kuta zakreta i sile, uzimajući za svaki po jedan primjer. Mjerenje pomaka x prikazano je na sl. 7—16a: ovdje se pomoću položaja x klipa ventila djeluje na odgovarajuću razliku tlakova Δp. Pomoću **kutnog zakreta** φ klizala potenciometra na sl. 7—16b dobije se kao izlazni signal električna struja i. Uz ravni potenciometar može se kao ulazni signal upotrijebiti položaj. Na sl. 7—15c najprije se protudjelovanjem opruge **sila pretvara u položaj,** koji dalje djeluje na zaslon sapnice tako da se u komori stvori odgovarajući tlak. To je načelo pneumatskog pojačala, koje obrađujemo u odjeljku 7.3.

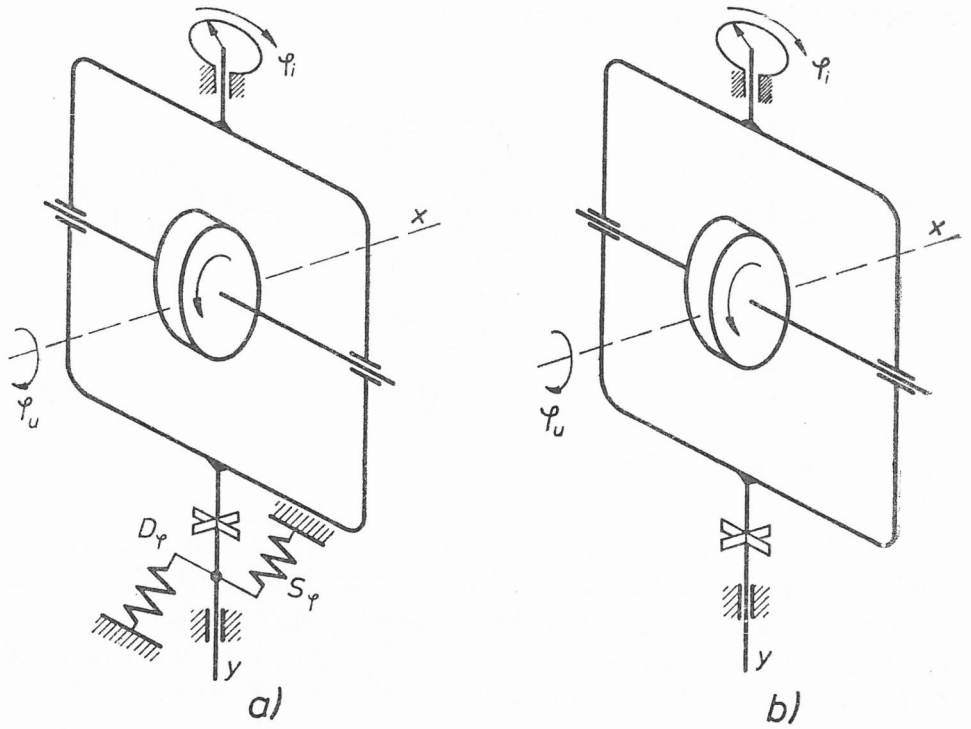
Umjesto da se mjerenje **sile** vrši pretvaranjem u položaj pomoću elastičnog tijela, mogu se primijeniti i novije metode, kao što su mjerenje otpornom trakom



Sl. 7—17. Mjerenje sile

i magnetoelastičnošću. Na sl. 7—17a vidimo konstrukcijsku izvedbu otporne trake: žica iz konstantana nalijepljena je vijugavo na podlogu, i to vodoravno i uspravno. Budući da je žica duga i tanka, njezin je otpor ovisan o silama f koje deformiraju podlogu. Taj je otpor uključen u grani Wheatstoneova mosta, pa se promjene u električnoj struji pojačavaju.

Ako sila djeluje na magnetnoelastičan materijal, kao što je permaloj, njegova se magnetska svojstva mijenjaju. Kroz svitak namotan na jezgri od permaloja, prema sl. 7—17b, teče izmjenična struja, pa sila f mijenja induktivnost svitka. I ovdje je svitak uključen u granu Wheatstoneova mosta, a male promjene struje potrebno je pojačati.



Sl. 7—18. Mjerenje kuta zakreta odnosno kutne brzine pomoću giroskopa

Široku primjenu pri upravljanju servomehanizmima imaju **giroskopi** koji mjere kutni zakret, odnosno kutnu brzinu. Giroskop djeluje na načelu zvrka koji se odupire promjenama položaja osi vrtnje (precesija). Disk je npr. u obliku rotora polifaznog asinhronog motora, a njegovo je vratilo ugrađeno u prstene koji se mogu okretati u sve tri prostorne koordinate. Na sl. 7—18a prikazan je brzinski giroskop sa samo jednim prstenom, pa je on osjetljiv na kutni zakret φ_u oko samo jedne osi. Kutni zakret φ_i na izlazu ograničen je oprugom, a mjeri se potenciometarskim osjetilom. Dinamičke jednadžbe na osnovi kojih se izvodi funkcionalni odnos između kutne brzine $d\varphi_u/dt$ na ulazu i kut zakreta φ_i na izlazu veoma su složene [lit. 19, 56], pa ovdje dajemo samo konačan oblik diferencijalne jednadžbe:

$$J_y \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} + D_\varphi \frac{d\varphi_i}{dt} + S_\varphi \varphi_i = K \frac{d\varphi_u}{dt}, \qquad (7\text{-}32)$$

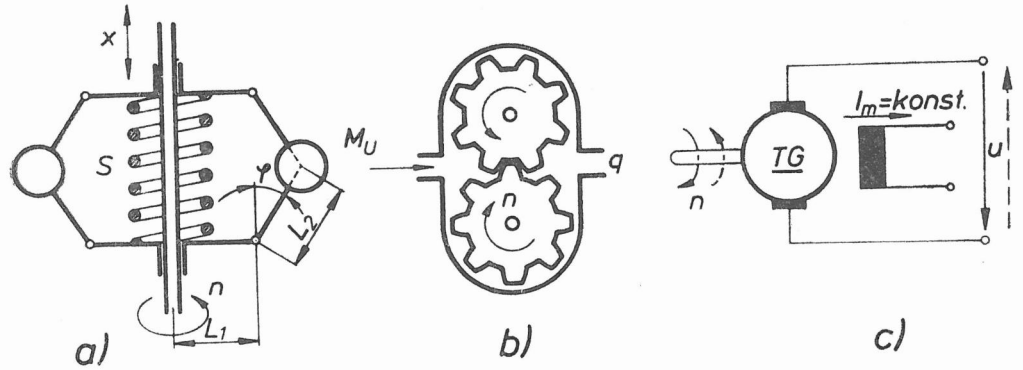
gdje su J_y moment tromosti u odnosu na os y, D_φ torzijski koeficijent viskoznog trenja, S_φ torzijska krutost, a K konstanta. Prilikom poremećaja mogu se pojaviti

oscilacije (nutacija) koje se međutim prigušuju. U stacionarnom je stanju odnos između ulaza $d\varphi_u/dt$ i izlaza φ_i linearan.

Odstrani li se brzinskom giroskopu opruga, dobije se giroskop prema sl. 7—18b koji integrira kutnu brzinu. Na osnovi jednadžbe (7-32) s ispuštenim članom $S_\varphi \varphi_i$ dobivamo slijedeći izraz:

$$J_y \frac{d\varphi_i}{dt} + D_\varphi \varphi_i = K\varphi_u. \tag{7-33}$$

To je sada diferencijalna jednadžba prvoga reda; može se postići da je vremenska konstanta tog sustava $\tau = J_y/D_\varphi$ vrlo mala, pa je kut zakreta φ_i na izlazu približno razmjeran kut zakreta φ_u na ulazu.



Sl. 7—19. Mjerenje broja okreta

Najstarije načelo za mjerenje **broja okreta** temelji se na djelovanju centrifugalne sile na masu koja se vrti s vratilom. Prvobitni Wattov centrifugalni regulator je u modernoj izvedbi izmijenjen utoliko što protutežu centrifugalnoj sili ne drži sila teže, već sila opruge (sl. 7—19a). Uzimajući u obzir ravnotežu sila koje djeluju duž pomičnih štapova što drže utege M_u, dobivamo slijedeći izraz:

$$M_u \omega^2 (L_1 + L_2 \sin\varphi) \frac{1}{\sin\varphi} = \left(M_K \frac{d^2x}{dt^2} + D\frac{dx}{dt} + Sx \right) \frac{1}{\cos\varphi}, \tag{7-34}$$

gdje je na lijevoj strani komponenta centrifugalne sile u smjeru štapa, a na desnoj je strani komponenta svih sila kućišta i opruge u smjeru štapa koje se suprotstavljaju centrifugalnoj sili. To je nelinearna diferencijalna jednadžba ne samo zbog kvadratnog oblika ω^2 već i zbog trigonometrijskih članova s kutom φ. Uz pretpostavku da se kut φ mijenja u malim granicama, mogu se sve funkcije od φ uzeti konstantnima, pa dobivamo linearan oblik prijenosne funkcije:

$$G(s) = \frac{X(s)}{\Omega^2(s)} = \frac{M_u (L_1 + L_2 \sin\varphi)/\mathrm{tg}\varphi}{M_K s^2 + Ds + sS} = \frac{K}{1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}, \tag{7-35}$$

gdje umjesto ulazne funkcije $\Omega(s)$ stoji $\Omega(s)^2$. Ako uzmemo tzv. tvrdu oprugu, onda zakrivljenost njezine karakteristike kompenzira kvadratni član $\Omega(s)^2$, pa dobivamo linearan odnos između $X(s)$ i $\Omega(s)$. Iz nazivnika prijenosne funkcije (7-35) vidimo da je to mehanički sustav drugoga reda, ali s jakim stupnjem prigušenja $\zeta > 1$.

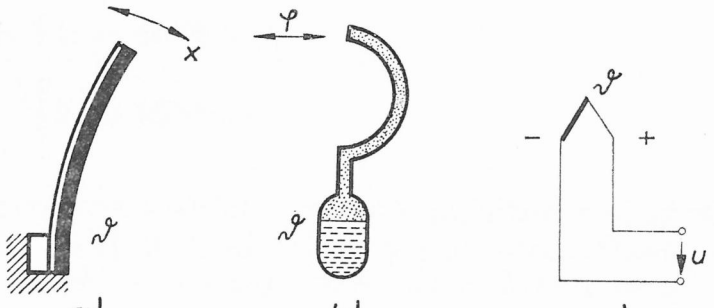
Prema sl. 7—19b, pri mjerenju broja okreta n pomoću zupčane pumpe, mjeri se na izlazu protok q, koji je razmjeran broju okreta.

Na sl. 7—19c prikazan je i tahogenerator, gdje mehanički zakret osovine na ulazu inducira napon na izlazu. Primjenjujući zakon indukcije, možemo za tahogenerator pisati brojčani odnos:

$$u=\frac{p}{a}\cdot\frac{z\Phi}{60}n, \tag{7-36}$$

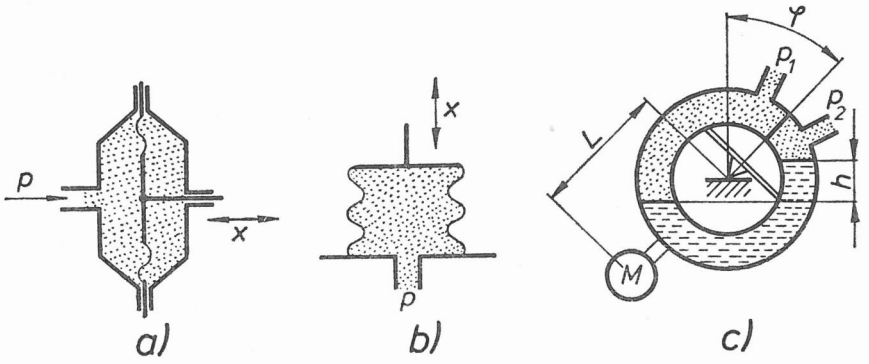
gdje je u EMS-sila u [V], n broj okreta u minuti, Φ magnetski tok u [Wb], p broj polova, z broj vodiča na armaturi, a a broj grana između pozitivne i negativne četkice. Pri tome je struja magnetiziranja I_m konstantna, a istosmjerni napon u ovisi i o smislu vrtnje armature. Tahogenerator je uz žiroskop jedno od najvažnijih mjernih osjetila u servomehanizmima.

Mjerenje tzv. **procesnih veličina** započinjemo mjerenjem **temperature.** Na sl. 7—20 izabrani su tipični predstavnici temperaturnih osjetila, i to za razne fizikalne veličine na izlazu. Tako je na sl. 7—20a prikazan bimetalni toplomjer, gdje promjena temperature savija više ili manje bimetalni štap. Bimetalni toplomjer obično je u kontaktnoj izvedbi, a stanovit otklon bimetala uključuje električnu struju. Slijedeći je primjer plinski toplomjer na sl. 7—20b. Posudica koja se ugrijava kapilarno je povezana s Bourdonovom cijevi (v. sl. 3—14) i potpuno je ispunjena tekućinom ili plinom (vodik). Izlazna je veličina kutni zakret φ elastične cijevi. Konačno, veoma rasprostranjen način mjerenja temperature je mjerenje pomoću termoelementa (sl. 7—19c). Taj se sastoji od dvije žice različita sastava, npr. platina — platinrodij, koje su na jednom kraju čvrsto spojene. Ugrijavanjem spojnog mjesta nastaje termonapon koji je mjera za temperaturu. Termoelement je ugrađen u zaštitnu cijev koja se ili zavari ili uvrne u ispitivani objekt. Za temperature više od 1600°C primjenjuje se pirometrija, gdje se toplina mjeri pomoću radijacije.



Sl. 7—20. Mjerenje temperature

Mjerenje **tlaka** izvodi se pomoću već spomenute Bourdonove cijevi. Na sličnom načelu osniva se i mjerenje tlaka pomoću elastične membrane (sl. 7—21a) ili pomoću elastičnog mijeha (sl. 7—21b). U oba slučaja tlak pretvara u odgovarajući mehanički položaj, odnosno kutni zakret φ. Zbog male mase membrana je neosjetljiva na trešnju i udarce, a može se zaštititi protiv agresivnih medija. Kako su pomaci membrane mali, mora se pomoću poluga i zupčanika osigurati dovoljna osjetljivost. Pomoću tih osjetila mjeri se tlak i do 10^3 MPa. Za sasvim mali tlak, sve do reda veličine 10 Pa, upotrebljava se prstenasta vaga (sl. 7—21c). Savijena cijev ima pregradni zid, a ispunjena je do polovine tekućinom, tako da postoje dvije zračne komore.



Sl. 7—21. Mjerenje tlaka

Razlika tlakova $\Delta p=(p_1-p_2)$ uzrokuje različite razine tekućine u komorama. Lako je izračunati da su oba zakretna momenta što djeluju na vagu jednaka:

$$AR\,(p_1-p_2)=Mg\,L\sin\varphi, \tag{7-37}$$

gdje je A površina presjeka cijevi, R polumjer cijevi, M masa ovješenog utega, a g konstanta gravitacije. Odatle dobivamo kut zakreta kao izlaznu veličinu:

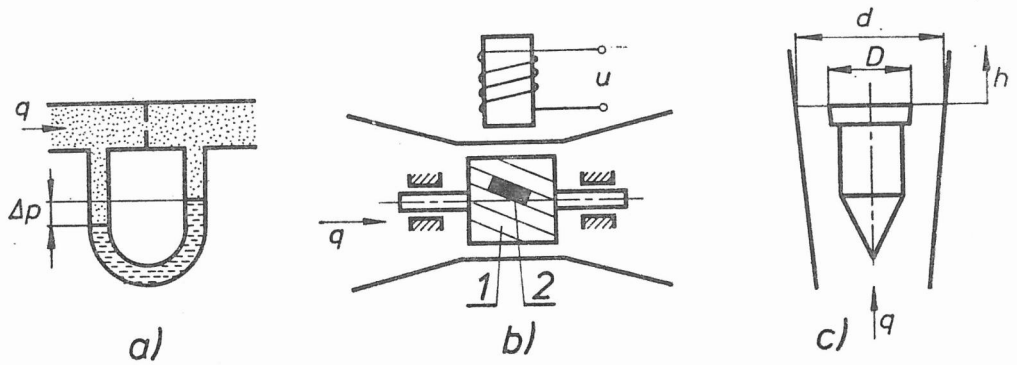
$$\varphi=\arcsin\frac{AR}{Mg\,L}(p_1-p_2)\,. \tag{7-38}$$

Mjerenje **protoka** pripada među najvažnija mjerenja u procesnoj tehnici. Veoma je raširenо mjerenje protoka pomoću diferencijalnog tlaka. Prema sl. 7—22a, u protočnu cijev ugrađena je ili Venturijeva cijev ili mjerni zaslon. Iz Bernouillijeva zakona izvodi se da je razlika tlakova razmjerna kvadratu protoka, što je u brojčanom obliku za maseni protok q_m u [kg h^{-1}] i za volumenski protok q u [m^3 h^{-1}]:

$$q_m=3600\,\alpha\,\epsilon\,A\sqrt{2q}\sqrt{\Delta p}\,,$$

$$q=3600\,\alpha\,\epsilon\,A\sqrt{\frac{2}{q}}\sqrt{\Delta p}\,. \tag{7-39}$$

Ovdje je α koeficijent protoka, ϵ koeficijent ekspanzije, A presjek suženja u [m^2], ρ gustoća medija u [kg m^{-3}]; Δp je u [Pa]. Ako je potrebna linearizacija, može se priključiti član za radiciranje (sl. 7—14).



Sl. 7—22. Mjerenje protoka

Protok možemo mjeriti i pomoću male turbine u protočnoj cijevi. Broj okreta turbinskog rotora razmjeran je protoku, koji se preko zupčanog prijenosa može brojiti na mehaničkom brojilu. Mnogo je povoljniji beskontaktni prijenos prema sl. 7—22b, gdje ugrađeni magnet na lopatici rotora inducira električne impulse izvan cijevi. Turbinsko mjerilo protoka može mjeriti volumenski protok tekućine q_v u rasponu od 0,25 do 600 $m^3\,h^{-1}$, a plinova od $3.10^4 m^3\,h^{-1}$.

Način mjerenja protoka pomoću lebdila prikazan je na sl. 7—22c. Protočna je cijev uspravna i konična. Uzgon protoka podiže lebdilo koje se uzdužno giba, i svakoj visini odgovara drugi presjek prolaza tekućine ili plina. U stanju ravnoteže težina lebdila $V_{L\gamma L}$ jednaka je sili uzgona $V_{L\gamma}$ i sili otpora strujanja F_D:

$$V_{L\gamma L}=V_{L\gamma}+F_D. \tag{7-40}$$

Ovdje je V_L obujam lebdila, γ_L specifična težina lebdila, a γ specifična težina medija. Uz pretpostavku da je strujanje laminarno, sila otpora strujanja razmjerna je brzini strujanja, tj.:

$$F_D=K_1\eta D v \tag{7-41}$$

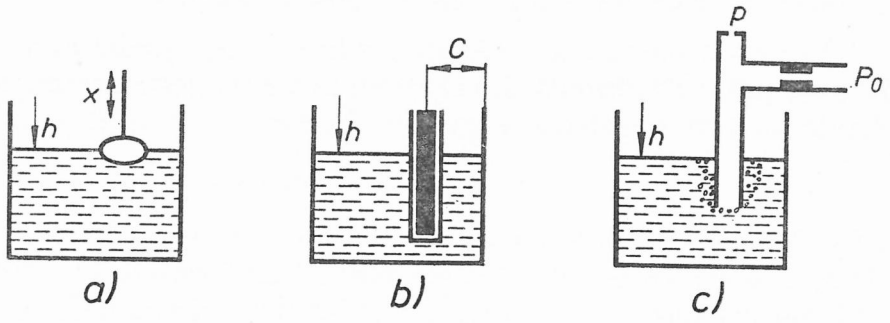
gdje je K_1 konstanta protoka, η dinamička viskoznost, a D najveći promjer lebdila. Kako je brzina jednaka omjeru protoka q i presjeka strujanja A:

$$v=\frac{q}{A}=\frac{4q}{\pi(d^2-D^2)}, \tag{7-42}$$

možemo izlučivanjem v i F_D iz jednadžbi (7-40), (7-41) i (7-42) i sređivanjem dobiti:

$$q=\frac{\pi}{4}\frac{V_L(\gamma_L-\gamma)(d^2-D^2)}{K_1\eta D}=K\frac{(d^2-D^2)\pi}{4}. \tag{7-43}$$

U K su sažete sve veličine tipične za određeni instrument i protočni medij. Uz koničan oblik dobije se linearan odnos između visine lebdila h i protoka q.

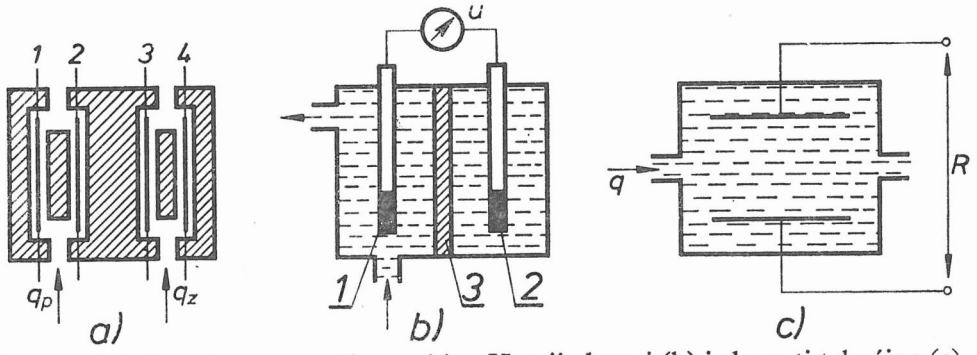


Sl. 7—23. Mjerenje razine tekućine

Neke mogućnosti mjerenja **razine** obuhvaćene su na sl. 7—23. Na lijevoj slici već poznati plovak vrši mehaničku promjenu položaja. Na srednjoj slici razina se mjeri pomoću kapacitivnosti. Jedna je elektroda štap uronjen u tekućinu, a druga stijenka posude. Ako je tekućina vodljiva, štap mora biti izoliran. U oba slučaja kapacitivnost je razmjerna razini tekućine. Uključena u jednoj grani Wheatstoneova mosta, promjena kapacitivnosti remeti ravnotežu izmjeničnih struja u mostu. Na

desnoj slici je u spremnik uronjena cijev koja je preko prigušivača spojena na izvor konstantnog tlaka. Izlaženjem suvišne mase zraka kroz dno cijevi ostvaruje se neprestano ravnoteža između stupca istisnute tekućine u cijevi i tlaka u cijevi, pa je pneumatski signal p razmjeran razini tekućine h.

U kemijskoj industriji najčešće su regulacije protoka i tlaka, a regulacija temperature svodi se na regulaciju protoka toplog i hladnog medija. U raznim procesima treba često mjeriti i razne fizikalne i kemijske veličine. Tako npr. treba analizirati razne tekućine, tj. odrediti komponente mješavine, suspenzije ili otopine: analiza plinova podrazumijeva određivanje koncentracije komponenata u smjesi plinova. Na sl. 7—24 prikazane su neke mjerne metode.



Sl. 7—24. Mjerenje smjese plinova (a), pH-vrijednosti (b) i slanosti tekućine (c)

Na sl. 7—24a shematski je prikazan uređaj za **analizu plinova,** najčešće CO_2, ali i O_2, N_2, H_2, SO_2, CO, itd. Mjerenje se temelji na načelu različite toplinske vodljivosti plinova; ugljični dioksid CO_2 ima npr. gotovo dva puta manju toplinsku vodljivost od zraka. U četiri valjkaste komore razapete su žice od platine koje se nalaze u četiri grane Wheatstoneova mosta. Žice se prolaskom struje ugriju. Protok zraka konstantne temperature i vlažnosti hladi žice u desnim komorama jače negoli protok smjese sa CO_2 koji ima slabu toplinsku vodljivost. Kako je električni otpor žica razmjeran temperaturi žica, struja u dijagonali mosta izravna je mjera za koncentraciju CO_2 u smjesi plinova.

Jedno od najvažnijih mjerenja u kemijskoj i prehrambenoj industriji je **određivanje pH-vrijednosti,** što je mjera za jakost neke kiseline ili baze. pH-vrijednost očituje se kao negativni logaritam koncentracije iona vodika:

$$n\,\mathrm{pH} = \log C_{H+}. \qquad (7\text{-}44)$$

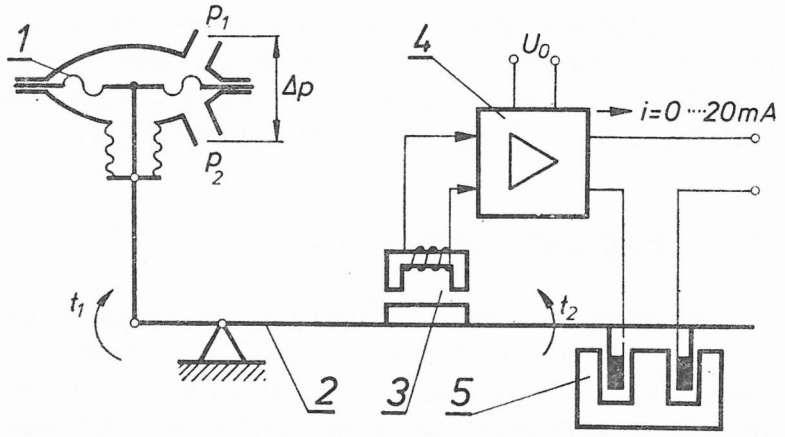
pH-vrijednost 0 odgovara solnoj kiselini normale 1, pH-vrijednost 7 neutralnoj tekućini, a pH-vrijednost 14 natrijevoj lužini normale 1. Prema sl. 7—24b, pH-vrijednost mjeri se prema načelu galvanske ćelije s elektrodama 1 i 2. Ispitivana tekućina odijeljena je pomoću dijafragme 3, kroz koju može teći struja, od tekućine s poznatom koncentracijom iona vodika. Napon je galvanske ćelije mjera za pH-vrijednost.

Konačno, na sl. 7—24c prikazana je posuda kroz koju struji tekućina u kojoj se želi ispitati **sadržaj soli.** Budući da električna vodljivost tekućine izravno ovisi o koncentraciji soli, ona je mjera za slanost tekućine. Mjeri se vodljivost između elektroda uronjenih u tekućinu, a radi bolje osjetljivosti mjerenja vodljiva je staza smještena opet u jednoj grani Wheatstoneova mosta. Kako otpor elektrolita ovisi

o temperaturi, mora se istodobno vršiti i temperaturna kompenzacija. Da se spriječi elektroliza, mosni spoj se napaja izmjeničnom strujom, a elektrode moraju biti otporne prema koroziji. Mjerne veličine daju se u [$\Omega^{-1}m^{-1}$], a 10^{-8} $\Omega^{-1}m^{-1}$ odgovara npr. 0,5 mg NaCl u litri.

7.2.2. Mjerni pretvarač

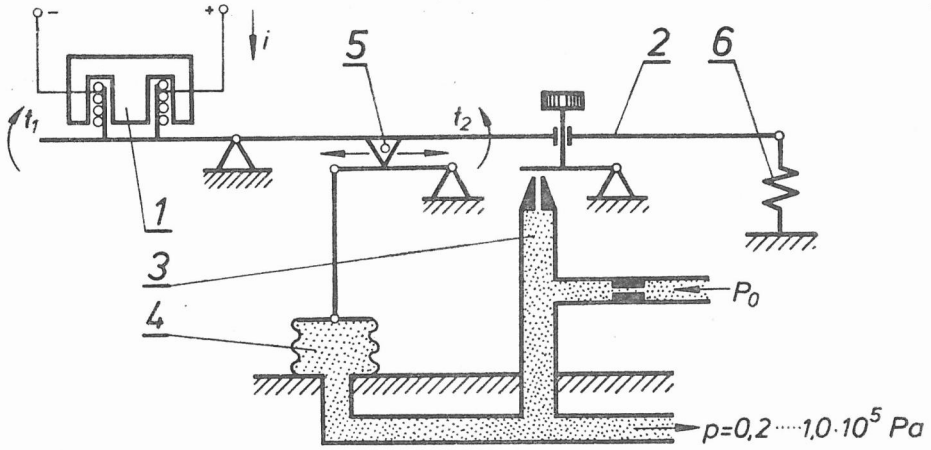
Funkciju mjernog člana da pretvara jednu fizikalnu veličinu u drugu vidjeli smo na primjerima mjernih osjetila. Sada ćemo obraditi sklopove kojih je funkcija da pretvaraju određenu fizikalnu veličinu u istu ili drugu, ali u **normiranom području.** Signal treba da dobijemo u normiranom području vrijednosti radi toga da bi gradnja regulacijskog kruga bila što ekonomičnija, a pojedini se sklopovi pritom slažu po slogovnom sustavu (»Baukasten«). Pri tome oni međusobno moraju biti prilagođeni svojim izlaznim, odnosno ulaznim veličinama; mjerni član predaje signal određenog opsega vrijednosti dalje, itd. Normirana signalna područja, i to za pneumatske signale od 2.10^4 do 10^5 Pa, a za električne signale od 0 do 20 mA uz maksimalno 24 V istosmjernog napona, imaju međunarodnu vrijednost. Područje normiranih pneumatskih signala prilično je jedinstveno, jer se i u SAD pridržavaju odgovarajućeg raspona od 3 do 15 psig, ali u području normiranih električnih signala postoje odstupanja, pa nailazimo i na izvedbe s područjem od 0 do 50 mA, te od 0 do 120 mA.



Sl. 7—25. Pneumatsko-električni mjerni pretvarač

Način konstrukcije takvih pretvarača upoznat ćemo na dva primjera. Prvi primjer prikazan je na sl. 7—25, gdje se pneumatski signal pretvara u normirani električni signal. Diferencijalni tlak Δp na ulazu djeluje preko membrane 1 na položaj ravnotežne poluge 2. Promjena položaja poluge mijenja induktivnost svitka sa željeznom jezgrom 3 koji djeluje na ulazu pojačala 4. Izlazna je struja svitka ujedno i izlazna struja pretvarača i; ona prolazi i kroz svitak pričvršćen na polugu, koji se slobodno miče u polju jakog permanentnog magneta 5. Ovaj zakretni moment t_2 djeluje suprotno zakretnom momentu t_1 koji pomiče polugu, a djeluje suprotno i promjeni induktivnosti svitka sa željezom. Time se vrši kompenzacija sila, a izlazna struja i mijenja se samo ako je potrebno da su sile u ravnoteži.

Obratno djeluje pretvarač na sl. 7—26 koji pretvara električni signal u normirani pneumatski signal. Ulazna struja i teče kroz pomični svitak koji se nalazi u polju jakog permanentnog magneta 1. Elektrodinamička sila pomiče ravnotežnu polugu 2, a ova djeluje na pneumatsko pojačalo sa zaslonom i sapnicom 3 (v. sl. 7—40).



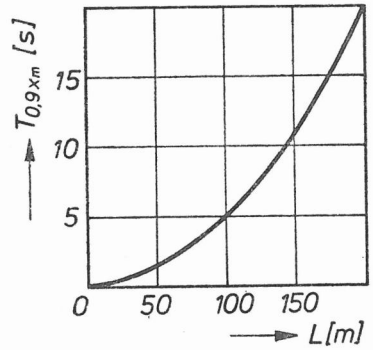
Sl. 7—26. Električno-pneumatski mjerni pretvarač

Izlazni tlak pneumatskog pojačala ujedno je i izlazni signal p cijelog pretvarača. Izlazni tlak dovodi se u elastični mijeh 4 koji izaziva zakretni moment poluge suprotan zakretnom momentu t_1 na ulazu. To je opet načelo kompenzacije sile, a djelovanje sklopa odgovara pojačalu s proporcionalnom povratnom vezom. Time se neutraliziraju promjene parametara pneumatskog pojačala, a točnost pretvaranja je visoka. Pomoću pomičnog oslonca 5 može se namjestiti mjerno područje, a pomoću opruge 6 namješta se nultočka.

U kategoriju pretvarača mogu se ubrojiti i razni djelitelji, kao i pojačala. Djelitelji su pasivni sklopovi koji fizikalnu veličinu na ulazu razmjerno smanjuju; primjer je električni potenciometar ili pneumatski razdjelnik. Pojačala su aktivni sklopovi koji fizikalnu veličinu razmjerno povećavaju.

7.2.3. Daljinski prijenos signala

Prijenos signala na daljinu vrši se u pravilu električnim ili pneumatskim putem. Kod električnog prijenosa gotovo da nema ograničenja ni u pogledu brzine rasprostiranja ni u pogledu gušenja signala, no kod pneumatskog prijenosa gušenje je vodova toliko da se ne mogu premostiti veće udaljenosti od kojih stotinjak metara. Osim toga, kod pneumatskog prijenosa važna je i brzina rasprostiranja, koja je približna brzini zvuka. Sl. 7—27 prikazuje kako duljina voda djeluje na kašnjenje pneumatskog signala: signal poraste na 90% konačne vrijednosti nakon 10 s, ako je vod dugačak 150 m. To je posljedica, kako konačne brzine rasprostiranja (mrtvo vrijeme!) tako i obujma i prigušenja voda (vremenska konstanta!).

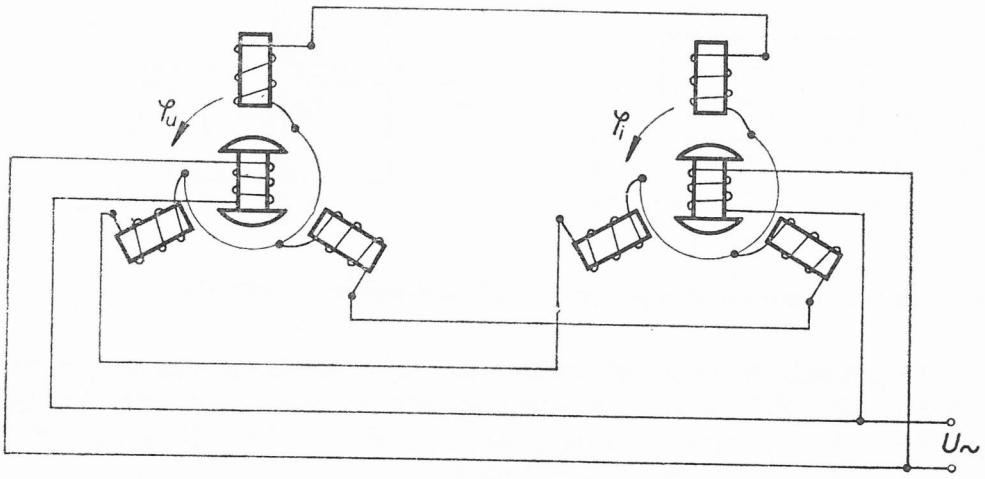


Sl. 7—27. Brzina rasprostiranja pneumatskog signala u vodu

Ima mnogo razvijenih sustava električnog prijenosa signala na daljinu. Ovdje smo odabrali jedan tipičan sustav: **induktivni daljinski davač,** poznat i pod nazivom selsyn, kojim se na daljinu prenosi **kut zakreta.**

Način rada induktivnog daljinskog davača prikazan je na sl. 7—28. Na prijemnoj i predajnoj strani nalaze se dva identična električna stroja izmjenične struje malih dimenzija. Oba statora imaju po tri namota prostorno razmaknuta za 120°; oni su simetrično međusobno spojeni, a preko tri voda spojeni su i s odgovarajućim namotima drugog statora. Namot obiju armatura napaja se iz iste mreže izmjeničnog napona.

U stanju ravnoteže, pri istom kutnom položaju armature, induciraju se u odgovarajućim namotima obaju statora naponi iste amplitude, a protivnog polariteta. Oni se međusobno poništavaju, pa kroz tri spojna voda ne teče struja.



Sl. 7—28. Induktivni daljinski davač kuta zakreta

Zakrene li se armatura na predajnoj strani za neki kut φ_u, ravnoteža napona poremeti se, a prema prijemnoj strani poteče struja. Između namota statora i namota armature na prijemnoj strani pojavi se elektrodinamička sila. Rezultirajući zakretni moment pomiče armaturu na prijemnoj strani sve dotle dok se ona ne zakrene za isti kut φ_i. Time je uspostavljeno novo stanje ravnoteže, pa struje među strojevima prestaju teći. Zakretanje je kontinuirano i može se postići puni zakret od 360°.

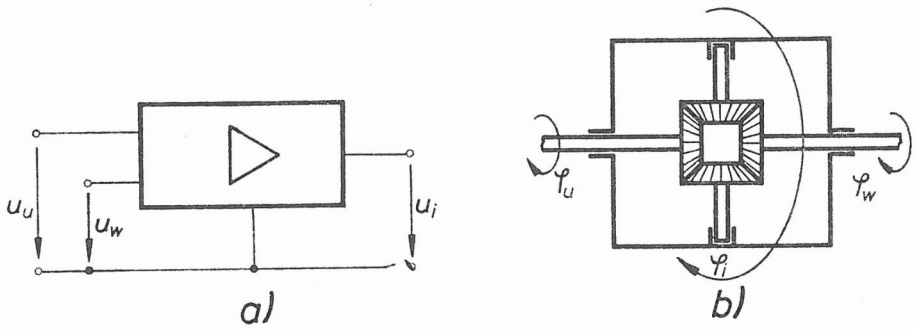
Induktivnim daljinskim davačem postiže se točnost i do 0,58, a na prijemnoj strani mogu se postići zakretni momenti od 0,002 N m po lučnom stupnju.

7.3. Regulacijski članovi

Regulacijski član predstavlja bitnu kariku u djelovanju automatske regulacije, jer se tu mehaniziraju logičke funkcije koje čovjek inače obavlja. Komparator na ulazu u biti je veoma jednostavan sklop; s njim je obično povezan i davač nazivne veličine. Sam regulator obrađujemo najprije u jednostavnoj izvedbi, a zasebno s povratnom vezom. Konačno, pojačala su obično dio regulacijskog člana; obrađujemo ih samo načelno jer čine zasebnu cjelinu u proučavanju.

7.3.1. Komparator

Komparator obavlja logičku funkciju uspoređivanja dviju veličina: regulirane veličine i nazivne ili vodeće veličine. U načelu komparatori su vrlo jednostavne izvedbe i obično su dio većeg sklopa. Na sl. 7—29a prikazan je elektronički komparator. Regulirana i nazivna veličina u obliku istosmjernog napona narinu se na ulaz diferencijalnog pojačala, a njihova pojačana razlika ($u_u - u_w$) pojavljuje se kao regulacijsko odstupanje u_i na izlazu. Mehanički komparator, diferencijal na sl. 7—29b, upotrebljava se kod slijedne regulacije. Kutni zakret regulirane veličine φ_u i vodeće veličine φ_w rezultira u kutnom zakretu koji je jednak polovičnoj razlici $(\varphi_u - \varphi_w)/2$.



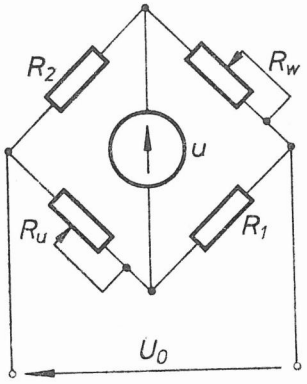
Sl. 7—29. Komparator u električnoj (a) i u mehaničkoj izvedbi (b)

Uspoređivati se mogu samo istovrsne fizikalne veličine, a to su u regulaciji položaj, sila, tlak, napon, struja i magnetski tok. Međutim, izlazna veličina može biti drukčija, kao što pokazuje primjer sa sl. 7—21a, gdje razlika tlakova u dvije komore rezultira pomakom membrane.

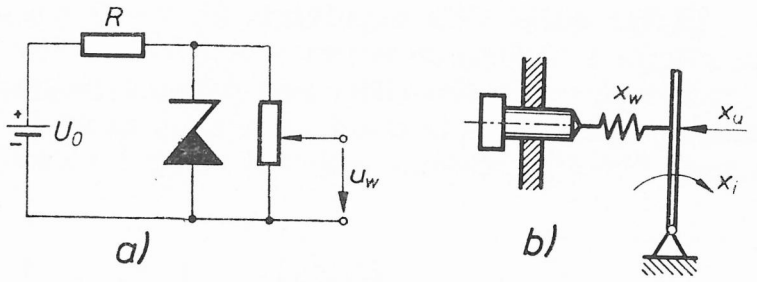
Pri uspoređivanju ne nastaje uvijek jednostavna razlika ($x - w$). Tako se kao komparator često upotrebljava Wheatstoneov most prema sl. 7—30. Pomak klizala na potenciometrima predočuje ulazne veličine R_u i R_w. Uz narinuti konstantni istosmjerni napon U_0 u jednoj dijagonali mosta, napon je u drugoj dijagonali mosta regulacijsko odstupanje u:

$$u = \frac{R_u R_w - R_1 R_2}{(R_u + R_2)(R_w + R_1)} U_0, \tag{7-45}$$

pri čemu je zanemaren unutrašnji otpor izvora napajanja U_0. Regulacijsko odstupanje u nije dakle jednostavna funkcija od R_u i R_w.



Sl. 7—30. Wheatstoneov most kao komparator



Sl. 7—31. Davač nazivne veličine u električnoj (a) i u mehaničkoj izvedbi (b)

Radi usporedbe možemo se koristiti i nelinearnim odnosima (nelinearni električni otpornici, protok-tlak, itd.). To je ponekad poželjno, kako bi se naglasilo djelovanje u nekom ograničenom području regulacijskog signala.

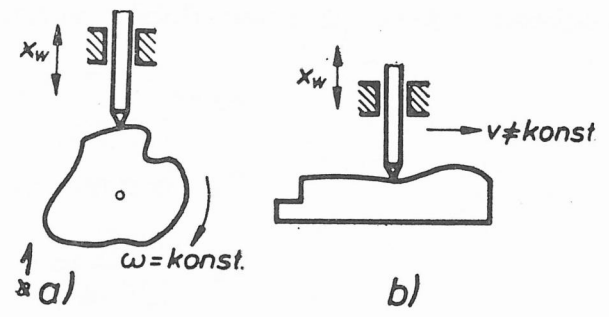
Davač nazivne veličine. Kod tih davača pravi se razlika, već prema tome da li se radi o čvrstoj ili o slijednoj regulaciji. Kod čvrste regulacije nazivna se veličina namješta rukom. Tako je na sl. 7—31 prikazano električno i mehaničko namještanje nazivne veličine. Namješteni napon u_w na električnom davaču na sl. 7—31a mora biti stabiliziran zbog eventualnih promjena napona napajanja U_0. To činimo pomoću tzv. Zenerove diode, na izvodima koje vlada konstantan napon bez obzira kolika je struja koja teče kroz diodu. Promjene napona napajanja U_0 preuzima serijski spojen predotpor R, kroz koji teče promjenljiva struja iz izvora napajanja. Na sl. 7—31b je mehanička izvedba komparatora; nazivna se veličina x_w namješta vijkom.

Kao što smo u uvodu ovog poglavlja napomenuli, kod čvrste regulacije može nazivna veličina biti ugrađena u sam regulacijski sustav. Tako se pri regulaciji razine tekućine pomoću plovka i poluge prema sl. 6—6, u stacionarnim uvjetima uz $Q_u = Q_i$, nazivna veličina može namjestiti pomoću promjenljive dužine štapa kojim je plovak spojen s polugom.

Primjer davača vodeće veličine kod slijedne regulacije alatnih strojeva prikazan je na sl. 7—32. Na slici 7—32a krivuljna se ploča ravnomjerno zakreće, a pomak ticala prenosi se na klizalo potenciometra. To je primjer slijedne regulacije gdje je vodeća veličina funkcija vremena. Međutim, kod slijedne regulacije može vodeća veličina biti i funkcija drugih varijabli. To je npr. kod kopirnih glodalica, gdje ticalo slijedi obris uzorka (sl. 7—32b).

7.3.2. Regulator

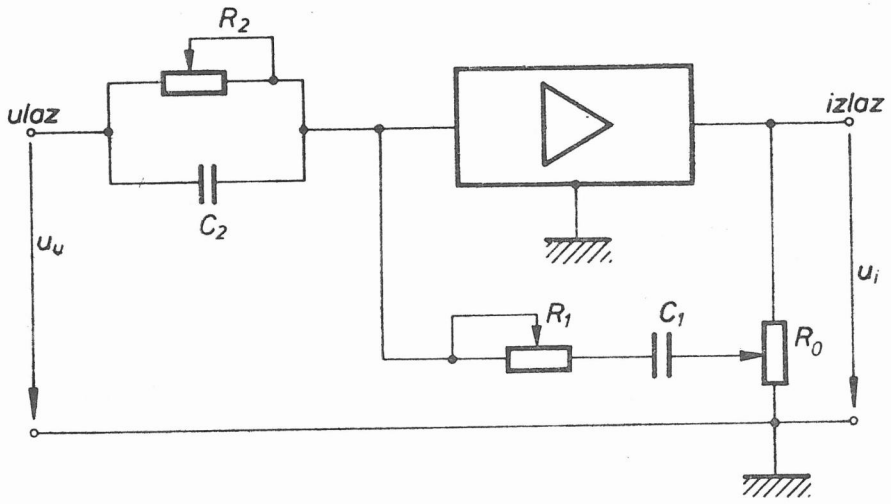
U uvodu odjeljka 7.1. detaljno smo raspravili funkcionalno djelovanje vremenskog člana, koji smo u procesnoj regulaciji nazvali jednostavno regulator, a kod servomehanizama kompenzacijski član. Ovdje ćemo prikazati načelnu izvedbu regulatora, i to kao kombinaciju pojačala s PID-članom u povratnoj vezi.



Sl. 7—32. Davač vodeće veličine u mehaničkoj izvedbi

Elektronički PID-regulator. Sl. 7—33 prikazuje električnu shemu PID-regulatora s povratnom vezom. Pojačalo ima vrlo veliko pojačanje napona K_u, a osim toga i invertira fazu; pod nazivom računsko pojačalo obrađujemo ga u odjeljku 14.3. i bitan je sklop i analognih računala i regulatora. Slično izvedenoj formuli (14-37), možemo omjer izlaznog i ulaznog napona pisati:

$$G(j\omega)=\frac{U_i(j\omega)}{U_u(j\omega)}=-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{Z_r}{Z_u}=-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{R_1+\dfrac{1}{j\omega C_1}}{\dfrac{R_2}{1+j\omega C_2R_2}}. \tag{7-46}$$



Sl. 7—33. Elektronički PID-regulator

Ako zamijenimo $j\omega\to s$, dobit ćemo prijenosnu funkciju:

$$G(s)=\frac{U_i(s)}{U_u(s)}=-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}+R_1C_2s+\frac{1}{R_2C_1s}\right]. \tag{7-47}$$

Zbog jednostavnosti uvodimo kratice u obliku vremenskih konstanti: $\tau_1=R_1C_1$, $\tau_2=R_2C_2$ i $\tau_{12}=R_2C_1$. Nakon sređivanja dobit ćemo:

$$G(s)=\frac{U_i(s)}{U_u(s)}=-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_{12}}\left[1+\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}s+\frac{1}{\tau_1+\tau_2}\cdot\frac{1}{s}\right]. \tag{7-48}$$

Ovdje možemo nazrijeti sličnost s jednadžbom (7-26) za PID-djelovanje. Da se smanji utjecaj međusobnog djelovanja potenciometarskih namještanja, možemo odabrati $\tau_1\gg\tau_2$, pa ćemo dobiti parametre PID-regulatora:

$$\begin{aligned} K_P&=-\frac{\tau_1+\tau_2}{\alpha\tau_{12}}\simeq-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}\right),\\ T_i&=\tau_1+\tau_2\simeq\tau_1,\\ T_d&=\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\simeq\tau_2. \end{aligned} \tag{7-49}$$

Potenciometrom R_0 namješta se K_P, potenciometrom R_1 integralno vrijeme T_i, a potenciometrom R_2 derivacijsko vrijeme T_d.

Pneumatski PID-regulator. U regulaciji procesa vrlo je česta i tipična izvedba pneumatskog regulatora kao na sl. 7—34. Taj se regulator sastoji od pneumatskog pojačala (zaslon-sapnica), mijeha, prigušivača i poluge. Kako ovdje ne možemo na prvi pogled sagledati njegovo djelovanje, izvest ćemo njegovu prijenosnu funkciju.

U ovom izvodu promatraju se male promjene varijabli oko stanja ravnoteže. To je perturbacijska analiza iz odjeljka 2.2, s tom razlikom što su svi funkcionalni odnosi među varijablama linearnog karaktera ili unaprijed linearizirani.

Ulazni pneumatski tlak p_u djeluje suprotno nazivnom tlaku p_n koji se dobije iz davača nazivne vrijednosti tlaka. Njihova je razlika razmjerna položaju:

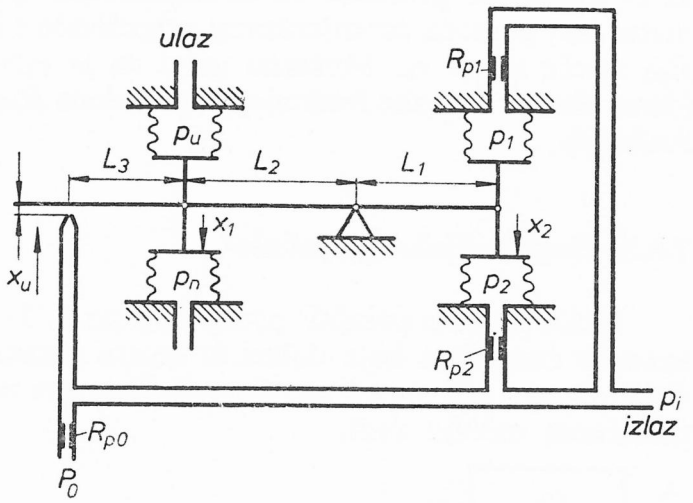
$$p_u - p_n = K_1 x_1, \tag{7-50}$$

gdje je K_1 krutost mjehova.

Pomak poluge djeluje na protok zraka u sustavu zaslon-sapnica, pa se mijenja tlak komore p_i. To djelovanje pneumatskog pojačala odigrava se razmjerno brzo u odnosu na odvijanje drugih procesa u regulatoru, pa možemo staviti da je:

$$p_i = K x_u, \tag{7-51}$$

gdje je K prijenosni omjer pojačala. U slijedećem odjeljku izvest ćemo jednadžbu pneumatskog pojačala, koja upućuje na sustav prvoga reda.



Sl. 7—34. Pneumatski PID-regulator

Promjena tlaka p_i izaziva promjene tlakova u mjehovima p_1 i p_2; njihova je razlika $(p_1 - p_2)$ razmjerna položaju poluge x_2:

$$p_1 - p_2 = K_1 x_2. \tag{7-52}$$

Položaji poluge x_u, x_1 i x_2 međusobno su ovisni. Zanemarujući kutove zakreta oko oslonca, možemo pisati:

$$x_u = -x_1 \frac{L_2 + L_3}{L_2} + x_2 \frac{L_2 + L_3}{L_1}. \tag{7-53}$$

Uvrštenjem jednadžbi (7-50), (7-51) i (7-52) izluče se x_1, x_u i x_2; jednadžbu odmah pišemo u operatorskom obliku:

$$\frac{1}{K}P_i=-\frac{1}{K_1}\cdot\frac{L_2+L_3}{L_2}(P_u-P_n)+\frac{1}{K_1}\cdot\frac{L_2+L_3}{L_1}(P_1-P_2). \tag{7-54}$$

Tlakovi P_1 i P_2 u obujmu mjehova povezani su preko prigušivača R_{p1} i R_{p2} s tlakom P_i pomoću jednadžbe (3-25) koje je operatorski oblik:

$$\begin{aligned}(1+\tau_1 s)P_1&=P_i,\\(1+\tau_2 s)P_2&=P_i.\end{aligned} \tag{7-55}$$

Gornje izraze za tlakove P_1 i P_2 uvrstimo u jednadžbu (7-54), gdje osim toga označimo kraće $P_u-P_n=\Delta P$:

$$\frac{1}{K}P_i=-\frac{1}{K_1}\cdot\frac{L_2+L_3}{L_2}\Delta P+\frac{1}{K_1}\cdot\frac{L_2+L_3}{L_1}\left[\frac{1}{1+\tau_1 s}+\frac{1}{1+\tau_2 s}\right]P_i. \tag{7-56}$$

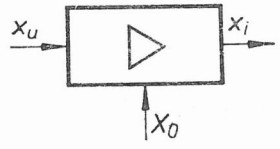
U ovoj su jednadžbi ostale samo varijable P_i i ΔP. Budući da je prijenosni omjer K pneumatskog pojačala velik, član na lijevoj strani jednadžbe možemo zanemariti. Prijenosna je funkcija cijelog pneumatskog regulatora:

$$G(s)=\frac{P_i(s)}{\Delta P(s)}=\frac{L_1}{L_2}\left[\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}s+\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1-\tau_2}-\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\cdot\frac{1}{s}\right]. \tag{7-57}$$

Iz te jednadžbe proizlazi da se mijenjanjem položaja oslonca L_1/L_2 mijenja parametar K_P; pomoću promjenljivog prigušivača s iglom R_{p1} utječe se na τ_1, a pomoću R_{p2} utječe se na τ_2. Možemo uzeti da je $\tau_1>\tau_2$, pa promjena R_{p1} utječe na T_i (desni član prijenosne funkcije), a promjena R_{p2} utječe na T_d (lijevi član prijenosne funkcije).

7.3.3. Regulacijsko pojačalo

Blok-dijagram pojačala prikazan je na sl. 7—35. Ulazni signal x_u neznatne snage upravlja energijom koja dolazi iz izvora pomoćne energije X_0, da bi se na izlazu dobio mnogo jači signal x_i. To vrijedi za sve vrste pojačala, bez obzira o kojem se fizikalnom mediju radi.



Sl. 7—35. Blok-dijagram pojačala

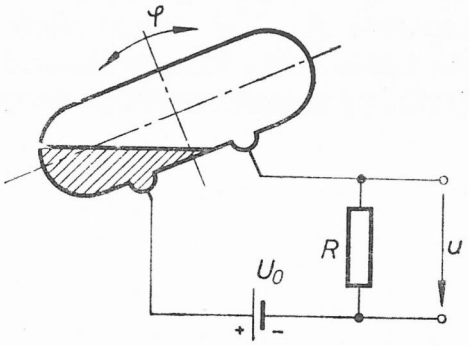
Od pojačala se traži da radi pouzdano, da ima što manju tromost i što veće pojačanje. Ovo posljednje znači da pojačalo treba da bude takvo da što djelotvornije odjeljuje serijski vezane sklopove.

U pojačalu se općenito pojačava snaga. Međutim, pojam **faktora pojačanja ili prijenosnog faktora** zapravo je omjer izlazne i ulazne veličine pojačala. Ako je to npr. u nekom pneumatskom pojačalu pojačanje tlaka, to ne znači da je to i pojačanje snage, jer snaga ovisi još i o pojačanju protoka.

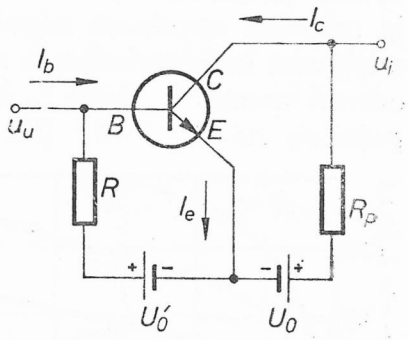
Svako pojačalo može u pravilu raditi kontinuirano i nekontinuirano, već prema tome kakav je izlazni signal. Primjer čistog nekontinuiranog pojačala predstavlja npr. živin prekidač na sl. 7—36. Njemu je potrebna vrlo mala mehanička snaga na ulazu da bi promjena kuta zakreta izazvala skokovitu promjenu mnogo većih električnih snaga na izlazu.

O raznim vrstama pojačala bilo je već mnogo govora u dosadašnjim izlaganjima. Ovdje ćemo obraditi osnovna načela rada elektroničkog, pneumatskog i hidrauličnog pojačala.

Elektroničko pojačalo. Danas u toj tehnici prevladavaju elektronički elementi od poluvodiča. To su prije svega tranzistor i tiristor.



Sl. 7—36. Živin prekidač kao nekontinuirano pojačalo



Sl. 7—37. Tranzistorsko pojačalo

Djelovanje **tranzistora** temelji se na vodljivosti kristalne rešetke četvorovalentnog elementa kao što su silicij ili germanij. Kristalna je rešetka dijamantnog tipa, pa su sva četiri elektrona u vanjskoj ljusci vezana čvrsto u rešetki. Tako je pri sobnoj temperaturi njezina vodljivost zanemariva. Dodatkom malih količina trovalentnog elementa (indij) dobije se tzv. *p*-sloj, gdje postoji suvišak slobodnih pozitivno nabijenih čestica koje nisu čvrsto vezane u rešetki. One prema tome mogu sudjelovati u električnoj struji, pa za takav kristal kažemo da posjeduje *p*-vodljivost. Na sličan način može se dodatkom malih količina petorovalentnog elementa (antimon) dobiti kristal sa suviškom slobodnih negativno nabijenih čestica; on posjeduje tzv. *n*-vodljivost.

Ako tako oblikovan kristal naizmjence spojimo u obliku sendviča, dobit ćemo tranzistor. Simbol jednog takvog *n-p-n* tranzistora prikazan je na sl. 7—37. Izvodi iz pojedinih slojeva su emitor *E*, baza *B* i kolektor *C*. U električnoj shemi na slici emitor je zajednička elektroda za ulazni i izlazni krug, pa je struja emitora I_e zbroj struje baze I_b u ulaznom krugu i struje kolektora I_c u izlaznom krugu. Svojstvo je tranzistora da male promjene struje baze i_b u ulaznom krugu izazivaju mnogo veće promjene struje kolektora i_c u izlaznom krugu na račun izvora pomoćne energije U_0. Taj omjer:

$$\beta = \left.\frac{i_c}{i_b}\right|_{u_{ce}=\text{konst.}} \tag{7-58}$$

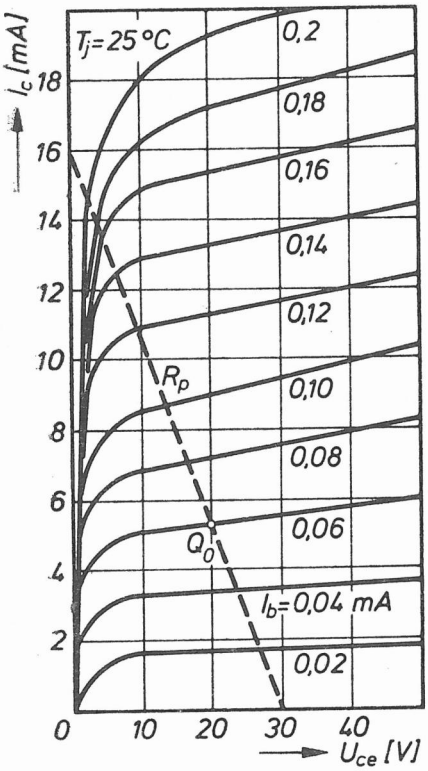
naziva se **faktor strujnog pojačanja** koji je značajna veličina tranzistora. Vrijednost mu je reda veličine 100.

Budući da ulazni otpor tranzistora između izvoda baze i emitora r_{be} iznosi oko 1 kΩ, a priključeni opteretni otpor R_p može biti reda veličine 50 kΩ, to pojačanje napona:

$$K_u = \frac{u_i}{u_u} = \frac{R_p' i_c}{r_{be}' i_b} = \beta \frac{R_p'}{r_{be}'} \tag{7-59}$$

može biti znatno. Pri tome su otpori r_{be} i R_p donekle smanjeni zbog paralelno spojenih otpora R u ulaznom krugu, odnosno zbog unutrašnjeg otpora tranzistora između izvoda kolektora i emitora r_{ce}.

Izlazne karakteristike tranzistora na sl. 7—38 prikazuju stacionarne odnose između struje kolektora I_c i napona između kolektora i emitora U_{ce}, uz struju baze I_b kao parametar. Uz karakteristike je ucrtan i pravac opteretnog otpora R_p koji je određen naponom napajanja U_0 i opteretnim otporom R_p. Taj pravac siječe odabranu karakteristiku u radnoj točki Q_0. U okolišu radne točke vladaju linearni odnosi između varijabli I_c, U_{ce} i I_b. Na taj se način određuju parametri tranzistorskog pojačala na sl. 7—37 [lit. 26, 68].



Sl. 7—38. Izlazne karakteristike tranzistora

Primjer 7.2. Prema karakteristikama na sl. 7—38, pravac opteretnog otpora određen je naponom napajanja U_0=30 V i tangensom kuta nagiba:

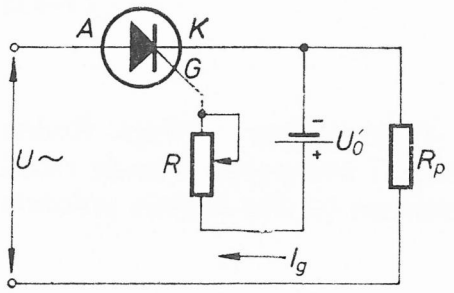
$$R_p = \frac{U_0}{I_c} = \frac{30}{16 \cdot 10^{-3}} = 1{,}87\ \text{k}\Omega.$$

Ujedno je određena i karakteristika koja siječe radnu točku Q_0, i to pomoću napona napajanja baze U_0'=0,15 V i otpora R=2,5 kΩ prema električnoj shemi na sl. 7—37:

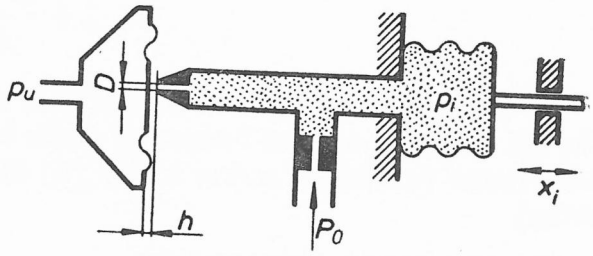
$$I_b = \frac{U_0'}{R} = \frac{0{,}15}{2\,500} = 0{,}06\ \text{mA}.$$

Tranzistor posjeduje i određenu tromost zbog kapacitivnosti među slojevima. To se u regulacijskim problemima može zanemariti, naročito kad je takvo pojačalo vezano u krugu s mehaničkim, pneumatskim i toplinskim sklopovima. To se pojačalo može dakle promatrati kao čisti P_0-član.

Takvo pojačalo može raditi kontinuirano (mali pomaci oko radne točke Q_0) ili nekontinuirano (dvije krajnje vrijednosti na pravcu opteretnog otpora), pa tranzistor vodi ili ne vodi struju.



Sl. 7—39. Tiristor kao nekontinuirano pojačalo



Sl. 7—40. Pneumatsko pojačalo zaslon-sapnica

U regulaciji elektromotornih pogona zanimljiv je poluvodički element **tiristor,** kojega simbol vidimo na sl. 7—39. Tiristor se sastoji od četiri izmjenična sloja *n-p-n-p*, s izvodima anoda A, katoda K i vrata G. Prema električnoj shemi na sl. 7—39 tiristor je spojen između izmjeničnog napona $U_\sim$ i opteretnog otpora R_p. U pomoćnom strujnom krugu možemo naponom U_0' i potenciometrom R namjestiti struju vrata I_g. O njoj ovisi pri kojem pozitivnom naponu između anode A i katode K tiristor »probija«, tj. potpuno propušta struju. Promjenom otpora R možemo kontinuirano mijenjati tzv. »kut palenja« sinusnog napona, odnosno možemo mijenjati istosmjernu snagu na opteretnom otporu.

Svojstva poluvodičkih elemenata znatno ovise o promjenama temperature. To moramo uzeti u obzir i pri konstrukciji elektroničkog sklopa s poluvodičkim elementima, kao i kod njihove primjene u regulaciji.

Pneumatsko pojačalo. U regulacijskoj tehnici široko se primjenjuje pneumatsko pojačalo **zaslon-sapnica,** koje smo već spominjali.

Na sl. 7—40 vidimo načelnu izvedbu pneumatskog pojačala. Iz spremnika konstantnog tlaka P_0 struji zrak preko prigušivača R_p s presjekom strujanja A_1 u komoru i dalje preko sustava zaslon-sapnica u atmosferu. Promjenom prigušenja pomoću pomaka zaslona mijenja se tlak p_i u komori između P_0 i atmosferskog tlaka P_z. Zrak struji kroz sapnicu presjeka $D^2\,\pi/4$ i kroz plašt valjka između sapnice i zaslona $D\pi h$. Da bi zaslon bio djelotvoran, presjek plašta valjka mora biti veći od presjeka sapnice, ili:

$$0<h<\frac{D}{4}. \tag{7-60}$$

Pomoću Bernouillijeva zakona možemo postaviti izraz za kontinuitet strujanja u stacionarnim uvjetima[1]:

$$\alpha_1\epsilon_1 A_1 \sqrt{2\rho\,(P_0-p_i)}=\alpha_2\,\epsilon_2\,D\pi h \sqrt{2\rho\,(p_i-P_z)}. \tag{7-61}$$

[1] Vidi jednadžbu masenog protoka (7—39).

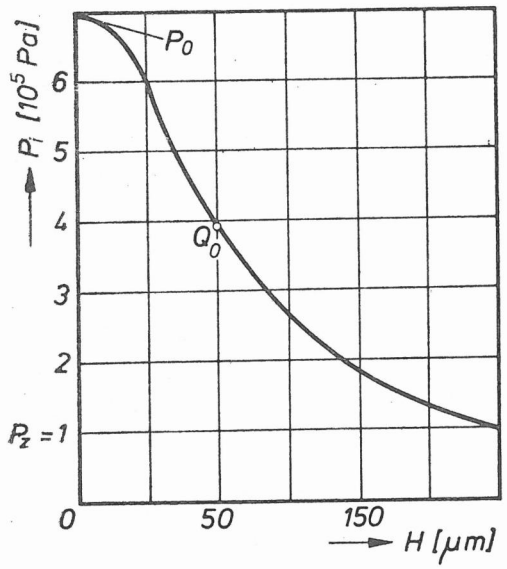
Približno možemo staviti da $\alpha_1\epsilon_1 \simeq \alpha_2\epsilon_2$, tako da dobijemo:

$$\frac{P_0 - p_i}{p_i - P_z} = \frac{(D\pi h)^2}{A_1^2}. \tag{7-62}$$

Mjereći tlakove u odnosu na atmosferski tlak, stavimo $P_z=0$, pa ćemo dobiti konačan oblik $p_i=f(h)$ za stacionarne uvjete:

$$p_i = \frac{P_0}{1+\frac{D^2\pi^2}{A_1^2}h^2}. \tag{7-63}$$

Ta jednadžba odgovara karakteristici na sl. 7—41 za tipično pojačalo. Radna točka Q_0 bira se u sredini linearnog dijela karakteristike. I ovo pojačalo može raditi kontinuirano (u okolišu radne točke Q_0) ili nekontinuirano (u dva krajnja položaja zaslona).



Sl. 7—41. Karakteristika pneumatskog pojačala

Ako pneumatski signal želimo i na ulazu, može prema sl. 7—40 membrana preuzeti ulogu zaslona, pa su ulazni tlak p_u i položaj membrane h razmjerni. Isto tako možemo pomoću mijeha izlazni tlak p_i pretvoriti u razmjeran položaj x_i.

Stacionarni uvjeti rada zanimljivi su za regulaciju ako su procesi spori. Međutim, općenito moramo imati na umu dinamičke uvjete rada. Uz odabranu radnu točku Q_0 promatraju se utjecaji malih promjena (perturbacija) ulaznih veličina na izlaznu veličinu — tlak u komori p_i. Promatrat ćemo dinamiku pritjecanja i otjecanja zraka kao i stanje zraka u komori; te tri veličine podređuju se načelu održanja materije.

Za male promjene masenog protoka q_{mu} na ulazu možemo prema lijevoj strani jednadžbe (7-61) pisati:

$$q_{mu} = \left.\frac{\partial G_u}{\partial P_i}\right|_{Q_0} p_i = -a_1 p_i, \tag{7-64}$$

jer maseni protok na ulazu ovisi o varijabli p_i, a ostale su veličine, A i P_0, konstantne[1].

[1] Kod plinova je uvijek pogodnije uzeti maseni protok, jer se načelo kontinuiteta primjenjuje na materiju u pokretu.

Slično se može pisati za male promjene masenog protoka na izlazu, i to na osnovi desne strane jednadžbe (7-61)

$$q_{mi}=\left.\frac{\partial G_i}{\partial P_i}\right|_{Q_0} p_i+\left.\frac{\partial G_i}{\partial H}\right|_{Q_0} h=a_2 p_i+bh. \tag{7-65}$$

Na izlazu maseni protok q_{mi} ovisi o dvije varijable, i to o tlaku u komori p_i i o razmaku zaslona i sapnice h.

Male promjene tlaka u komori p_i dobiju se na osnovi jednadžbe stanja za idealne plinove: $P_i V=MR\Theta$. Iako se mijeh rasteže neznatno, možemo pretpostaviti da je obujam komore $V\simeq$ konst. Osim toga, u uobičajenom procesu možemo uzeti da je i temperatura komore $\Theta\simeq$konst.; ona je jednaka temperaturi spremnika P_0. Zato p_i ovisi samo o masi m kao nezavisnoj varijabli:

$$p_i=\left.\frac{\partial P_i}{\partial M}\right|_{Q_0} m=\frac{R\Theta_i}{V}m. \tag{7-66}$$

Ta se jednadžba derivira po vremenu:

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=\frac{R\Theta}{V}\cdot\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{R\Theta}{V}(q_{mu}-q_{mi}). \tag{7-67}$$

Brzina promjene mase u komori $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ u drugom izrazu upravo je razlika pritjecanja i otjecanja mase zraka $(q_{mu}-q_{mi})$. Uvrštenjem izraza (7-64) i (7-65) u jednadžbu (7-67), dobit ćemo:

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=\frac{R\Theta}{V}(-a_1p_i-a_2p_i-bh), \tag{7-68}$$

il i u sređenom obliku:

$$\frac{V}{R\Theta}\cdot\frac{1}{(a_1+a_2)}\cdot\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}+p_i=-\frac{b}{a_1+a_2}\cdot h. \tag{7-69}$$

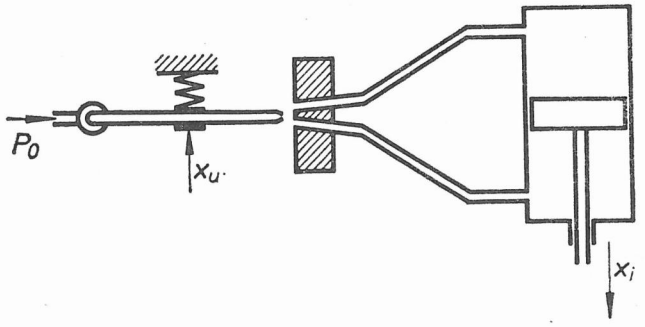
Na osnovi tog izraza dobit ćemo prijenosnu funkciju pneumatskog pojačala:

$$G(s)=\frac{P_i(s)}{H(s)}=\frac{b}{a_1+a_2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{V}{R\Theta}\cdot\dfrac{1}{(a_1+a_2)}s} \tag{7-70}$$

To je poznati oblik za sustav prvoga reda, gdje su prijenosni omjer K_P i vremenska konstanta τ:

$$K_P=-\frac{b}{a_1+a_2},\qquad \tau=\frac{V}{R\Theta}\cdot\frac{1}{(a_1+a_2)}. \tag{7-71}$$

Takvo se rješenje moglo i očekivati, jer u sustavu postoji jedan spremnik energije: obujam komore.



Sl. 7—42. Hidraulično pojačalo s pomičnom mlaznicom

Hidraulično pojačalo. Takve sustave već smo spominjali, kao npr. poznati hidraulični mehanizam s ventilom i cilindrom na sl. 1—9. Ovdje ćemo se ukratko osvrnuti na jedan od najstarijih predstavnika te skupine: hidraulično pojačalo s pomičnom mlaznicom, prema sl. 7—42 (Askania patent). Iako zastarjelo, ono se zbog jednostavne izvedbe i pouzdanosti još i danas primjenjuje. Ulje ulazi pod tlakom u pomičnu mlaznicu sa zglobom. Promjene položaja x_u na ulazu sustava namještaju mlaznicu prema jednom ili prema drugom otvoru u komore cilindra. Za razliku od već opisanih pojačala, ovo pojačalo djeluje **integralno,** pa je brzina klipa cilindra $\dot{x}_i$ razmjerna položaju x_u.

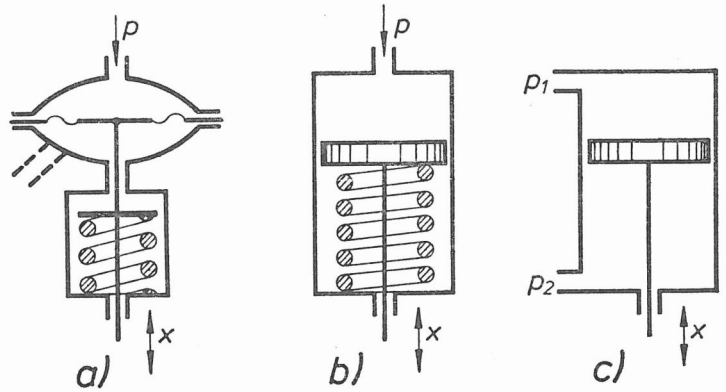
7.4. Izvršni članovi

Na osnovi signala koji dobije od regulacijskog člana, izvršni član zahvaća na ulaz staze, djelujući na tok energije ili materije. Izvršni član se sastoji od postavnog pogona, što je obično neki motor, i od postavnog člana, što je obično neki ventil.

Postavni pogon i postavni član izvedeni su često kao jedan sklop, ali nailazimo i na postavni član izveden kao dio regulacijskog objekta.

7.4.1. Postavni pogon

Postavni pogon može raditi kontinuirano ili nekontinuirano, tj. samo s dva izlazna položaja (otvoren ili zatvoren). Prema vrsti energije razlikujemo električne, pneumatske i hidraulične postavne pogone, ali ima i kombiniranih (elektrohidraulični, pneumohidraulični).



Sl. 7—43. Pneumatski postavni pogon

Od kontinuiranih postavnih pogona ovdje ćemo opisati pneumatske membranske i klipne motore, hidraulične klipne motore i istosmjerni elektromotor, odnosno izmjenični Ferrarisov motor. Od nekontinuiranih postavnih pogona najzanimljiviji su postavni magneti.

Pneumatski postavni pogon. Najčešći tip pneumatskog postavnog pogona je **membranski motor** prema sl. 7—43a. Sila ulaznog tlaka p djeluje suprotno sili opruge, a rezultat je promjena položaja poluge x koja dalje djeluje na ventil. Takav pogon ima određeno kašnjenje zbog obujma komore i elastičnosti opruge. Kod vrlo malih snaga motora može zbog suhog trenja brtvila doći do pojava histereze.

S dodatnim izvodom u komori ispod membrane (na slici označeno crtkano), membranski motor reagira na razliku tlakova Δp.

Drugi osnovni tip pneumatskog postavnog pogona je **klipni motor** ili cilindar na sl. 7—43b. Klip cilindra opterećen je silom opruge, pa su sila koja pokreće klip Acp i sila opruge Sx u ravnoteži. Uz ovaj jednoradni cilindar postoji mogućnost da se izvede i dvoradni cilindar prema sl. 7—43c; bez opruge i s izvodom iz komore ispod klipa ovaj cilindar može obavljati koristan rad u oba smjera.

Pneumatski postavni pogoni osobito su česti u kemijskoj industriji (sigurnost od eksplozija!), i to za sile do 30 kN i uz tlakove do 1 MPa, što daje normalna kompresorska stanica. Membranski motor upotrebljava se za male pomake i velike sile na izlazu, dok se kod klipnog motora postižu veliki pomaci s malim silama na ulazu.

Hidraulični postavni pogon. Membranski i klipni motori mogu se izvesti i kao hidraulični, samo moraju biti preciznije izrađeni, pa su zato i skuplji. U hidrauličnoj izvedbi mnogo se češće primjenjuje **klipni motor.** Budući da je ulje praktički nestlačivo, mogu se pomoću hidrauličnih postavnih pogona postići odzivi bez kašnjenja.

Velika je prednost hidrauličnih klipnih motora u tome što posjeduju visoku **gustoću energije,** tj. snagu na jedinicu obujma. Sa svojim malim dimenzijama daleko premašuju ostale izvedbe, osobito električne motore.

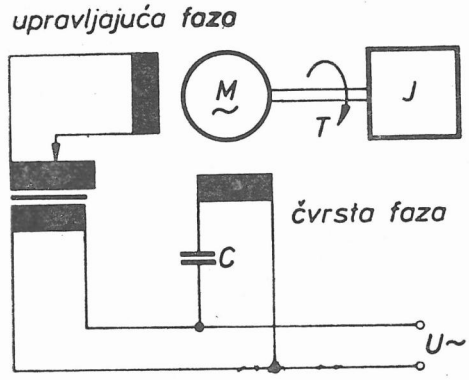
Hidraulični motori upotrebljavaju se u regulacijskoj tehnici za sile iznad 30 kN i za tlakove iznad 1 MPa, bez ograničenja prema gore.

Električni postavni pogon. Elektromotori često djeluju i kao pojačala i kao postavni pogoni. Osnovna im je mana što su zbog mase armature i induktivnosti namota tromi. Zbog male gustoće energije elektromotori ne dolaze u obzir u letjelicama gdje je važna težina uređaja. Kod njih je potrebno smanjiti broj okreta 30 do 3 000 puta, što se sa zupčanim prijenosom postiže bez labavosti (sklonost oscilacijama!) samo za male snage motora do 100 W i za postavne sile do 1 kN.

Od raznih tipova elektromotora u tehnici regulacije dolaze u obzir prije svega **istosmjerni motori,** jer se kod njih može lako upravljati brojem okreta. Oni mogu biti upravljani ili strujom armature uz konstantnu struju magnetiziranja statorskih magneta, ili strujom magnetiziranja uz konstantnu struju armature. O objema izvedbama opširno smo govorili u odjeljku 6.3[1].

Često se izvodi i **dvofazni asinhroni motor,** nazvan još i Ferrarisov motor, kojeg je električna shema prikazana na sl. 7—44. Obje faze napajaju se iz mreže, ali je struja kroz čvrstu fazu zbog velikog kondenzatora C fazno pomaknuta za 90°

[1] Vidi sl. 6—1 i 6—9.



Sl. 7—44. Dvofazni asinhroni motor

prema struji u »upravljačkoj fazi«. Kako su osim toga i oba namota prostorno pomaknuta za 90°, dobije se rotirajuće magnetsko polje. Zbog toga se u armaturi induciraju vrtložne struje, pa se stvara zakretni moment armature. Broj okreta mijenja se tako što se pomoću transformatora mijenja napon na upravljačkoj fazi, čime se poremećuje odnos snage u obje faze, a time i zakretni moment.

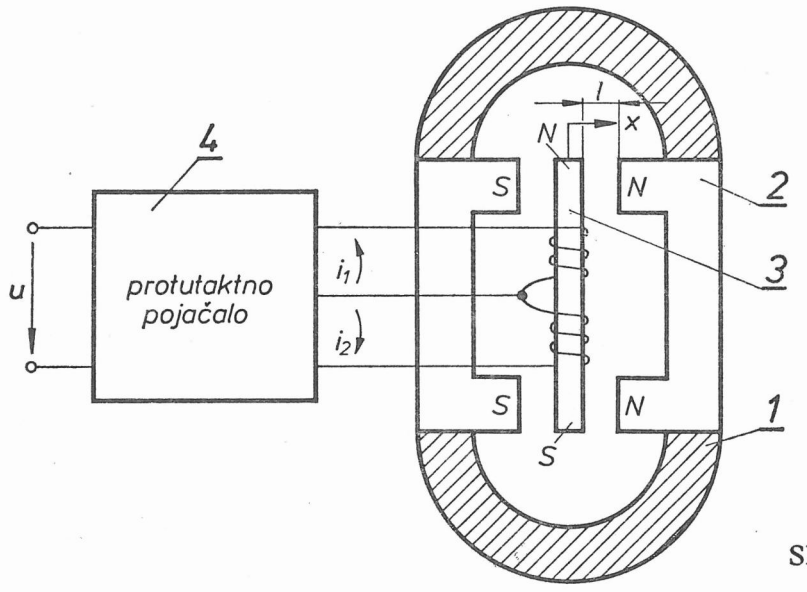
Dvofazni asinhroni motor ima nekoliko prednosti pred istosmjernim motorima. Napajanje je jednostavno pomoću mrežnog napona, nema kontakata, zbog šuplje izvedbe armatura nema velike tromosti, pa se pri kočenju ne ugrijava.

Na sl. 7—45 prikazan je **zakretni motor** koji se najviše upotrebljava kao postavni pogon za pokretanje klipa razvodnika u hidrauličnim servomehanizmima. Permanentni magnet 1 u obliku dvaju poluprstenova ima polne nastavke od mekog željeza 2 s dva para polova N i S. Između polova smještena je kotva od mekog željeza 3 s namotima kroz koje teku struje iz protutaktnog pojačala 4. Struje i_1 i i_2 sastoje se od struje mirovanja pojačala I_0 i struje signala i:

$$i_1 = I_0 + i,$$
$$i_2 = I_0 - i. \tag{7-72}$$

U namotu kotve djeluje njihova razlika:

$$i_1 - i_2 = 2i, \tag{7-73}$$



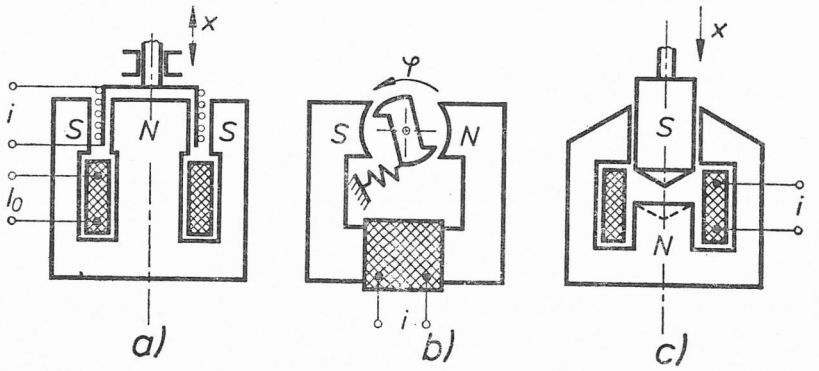
Sl. 7—45. Električni zakretni motor

pa se istosmjerne komponente I_0, koje teku kroz namote u suprotnom smjeru, poništavaju. Razlika struja i prouzrokuje magnetski tok Φ, pa se krajevi kotve polariziraju, što je simbolički označeno sa N i S. Zbog međudjelovanja magnetskog toka Φ_i i magnetskog toka permanentnog magneta Φ_m dolazi do elektrodinamičkih sila koje zakreću kotvu oko središnjeg učvršćenja u smjeru označenom strelicom.

Uz pretpostavku da je pomak kotve x vrlo malen prema srednjoj udaljenosti L_s između kotve i polnog nastavka, kao i da je magnetski tok Φ_i vrlo malen prema magnetskom toku Φ_m, možemo na osnovi zakona magnetskog polja [lit. 40, 44] postaviti linearizirani jednadžbu zakretnog momenta:

$$t=K_1 i+K_2\varphi, \tag{7-74}$$

koji linearno ovisi o razlici struja i i kuta zakreta φ.



Sl. 7—46. Elektromagnet kao nekontinuirani postavni pogon

Prema Newtonovu drugom zakonu, možemo i za ravnotežu mehaničkih sila pisati:

$$t=J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+D_\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+S_\varphi\varphi+t_p, \tag{7-75}$$

gdje je J moment tromosti kotve, D_φ torzijski koeficijent viskoznog trenja, S_φ torzijska krutost opruge koja zadržava zakret kotve, dok je t_p zakretni moment opterećenja kotve. Ako jednadžbe (7-74) i (7-75) prevedemo u operatorski oblik i izlučimo t, dobivamo:

$$Js^2\Phi+D_\varphi s\Phi+(S_\varphi-K_2)\,\Phi+T_p=K_1 I. \tag{7-76}$$

Taj je izraz diferencijalna jednadžba drugoga reda, koja nam govori da u stacionarnom stanju postoji linearan odnos između razlike struja i na ulazu i kuta zakreta φ na izlazu. Magnetska konstanta K_2 pojavljuje se kao ekvivalentna negativna torzijska krutost (magnetska opruga!), a mora biti manja od S_φ da bi sustav bio stabilan.[1]

Na sl. 7—46 prikazano je nekoliko izvedbi **elektromagneta** koji su pogodni kao nekontinuirani postavni pogoni. Prema sl. 7-46a, zbog djelovanja konstantne struje I_0 koja magnetizira jezgru i djelovanja struje i kroz pomični svitak, pojavljuje se elektrodinamička sila. Rezultanta je pomak x koji je razmjeran struji i.

Na sl. 7—46b magnetiziraju se jezgra i kotva strujom i kroz uzbudni svitak. Kotva se zakreće u jednom ili drugom smjeru, već prema polaritetu uzbudnog

[1] Vidi odjeljak 8.3.

napona. Pomoću nelinearne opruge možemo nelinearno djelovanje zakretnog momenta kompenzirati, pa je kut zakreta φ linearno ovisan o uzbudnoj struji. Ovaj jednostavan i robustan sustav upotrebljava se za regulaciju rasvjete u vlaku: promjena napona u električnoj mreži vlaka djeluje na uzbudni namot, a odgovarajući kutni zakret kotve magneta pomiče klizalo predotpora u krugu mreže.

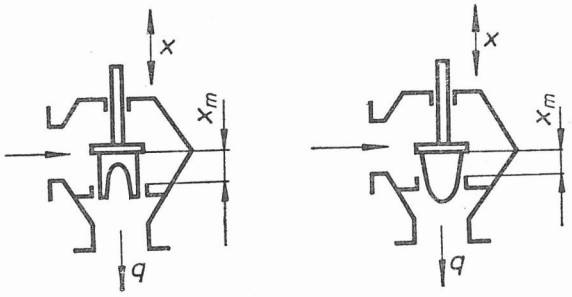
Tipičan nekontinuirani postavni pogon prikazan je na sl. 7—46c. Trostupna jezgra magnetizira se zbog struje i na uzbudnom namotu. Jezgra privuče pomičnu kotvu silom koja je razmjerna kvadratu uzbudne struje. Ovaj elektromagnet upotrebljava se za velike sile i male pomake na izlazu. Zato je ponekad potrebno da pomoću polužja povećamo pomak.

Svi ti elektromagnetski postavni pogoni imaju brz odziv, pouzdani su, jeftini, robusni i ne iskre.

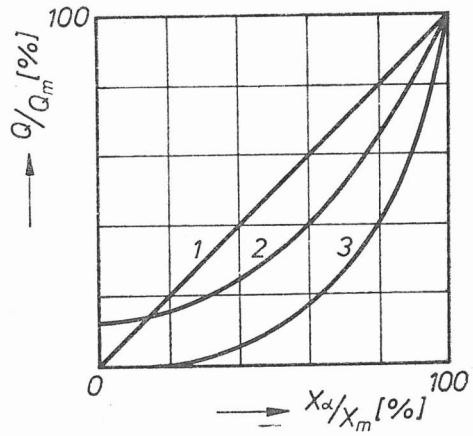
7.4.2. Postavni član

U većini slučajeva postavni je član ventil koji upravlja tokom energije ili tokom materije. Pored mahaničkih ventila koji upravljaju protokom ulja, vode, zraka, itd., postoje i tzv. »električni ventili« koji upravljaju tokom električne struje. Uz ventile nailazimo i na prigušene zaslone, zasune, lopatice, itd. Oni su jednostavne i robustne izvedbe, u pravilu za nazivne promjene veće od ND>200 mm. Kod parne turbine protok pare regulira se pomoću igle koja ulazi u otvor mlaznice; kormilom se podešava smjer gibanja broda ili aviona.

Dalje ćemo opisati osnovne značajke i konstrukciju tipičnog mehaničkog ventila, a od električnih ventila spomenut ćemo tiristore, magnetska pojačala, itd.



Sl. 7—47. Konstrukcija glave ventila



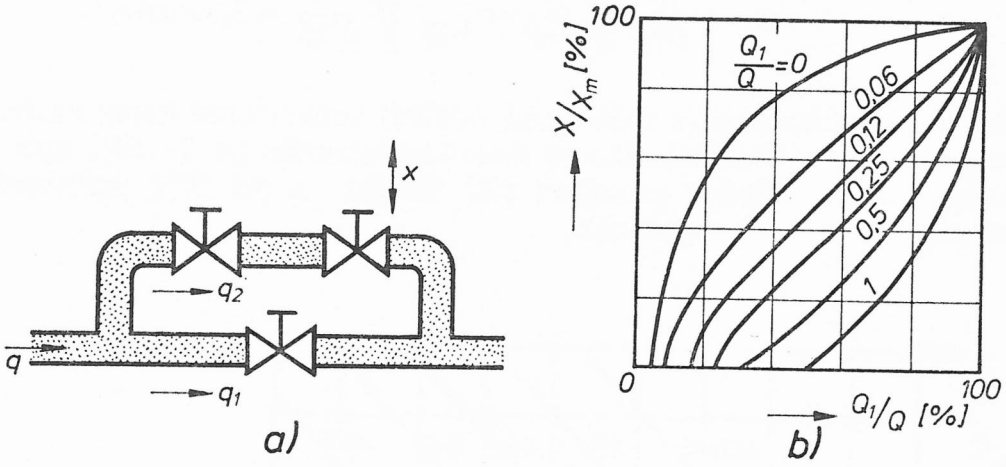
Sl. 7—48. Karakteristike ventila

Regulacijski ventil. Postavnim ventilom regulira se veći ili manji otpor strujanja medija, a otpor ovisi o presjeku dosjeda, tj. o otvoru ventila. Na sl. 7—47 vidimo dvije najčešće izvedbe glave ventila, i to lijevo u obliku izdubljenog klipa, a desno u obliku čunja. Osim toga, glave ventila izvode se i u obliku polukugle i u obliku tanjura.

Geometrijski oblik glave i dosjeda ventila određuje i njegovu karakteristiku, tj. protok u ovisnosti o položaju glave ventila. Karakteristike na sl. 7—48 normirane

su, i to u odnosu prema maksimalnom protoku i u odnosu prema maksimalnom položaju. Ta karakteristika može biti linearna (krivulja 1), logaritamska (krivulja 3) ili logaritamska s pomakom nultočke (krivulja 2). Logaritamska karakteristika ima za iste postotne promjene položaja iste postotne promjene protoka Q/Q_m.

U procesnim se postrojenjima zbog djelotvornije regulacije ugrađuje regulacijski ventil u usporednu cijev (sl. 7—49a), čime se postiže to da određena protočna količina uvijek prolazi u postrojenje, pa je preostalu količinu lakše regulirati. Čvrstim namještanjem pomoćnih ventila možemo izabrati proizvoljnu karakteristiku ventila od gotovo linearne za $Q_1/Q=0{,}12$ do logaritamske za $Q_1/Q=0{,}5$ (sl. 7—49b).



Sl. 7—49. Regulacijski ventil u paralelnoj protočnoj cijevi

Ventili s linearnom karakteristikom upotrebljavaju se prvenstveno pri regulaciji razine tekućine u spremniku, jer je i staza linearna i nikakvo stanje nije posebno naglašeno. Naprotiv, pri regulaciji plina ili pare u spremniku upotrebljavaju se ventili s logaritamskom karakteristikom, jer oni manje ovise o promjenama parametara postrojenja. Tako npr. promjena nekog parametra, kao što je promjena nazivnog otvora ventila za neki postotak, izaziva kod ventila s log-karakteristikom mnogo manju promjenu negoli kod ventila s lin-karakteristikom.

Budući da su ventili općenito važni elementi u regulacijskoj tehnici, oni su temeljito proučeni i standardizirani. Kako ventili imaju promjenljivi presjek strujanja, polazimo od jednadžbe (7-39) za volumenski protok koju preinačimo:

$$k_V = 3600\sqrt{2}\cdot\alpha\epsilon A = Q\sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}}. \qquad (7\text{-}77)$$

Pri tome smo geometrijske značajke ventila saželi u tzv. **konstantu ventila** k_V: to je protok vode u [$m^3 h^{-1}$] uz pad tlaka na ventilu $\Delta P = 10^5$ Pa i kod određenog podizaja ventila. k_V-vrijednosti za razne položaje se unose u karakteristike, kao što su one na sl. 7—50, dobivene od proizvođača za familiju ventila različitog nazivnog promjera. Ako se ne daju podaci u obliku karakteristika, daje se k_V-vrijednost za nominalan položaj i to se posebno označi.

Za tekućine se k_V-vrijednost određuje razmjerno jednostavno, pri čemu se primjenjuje brojčana relacija:

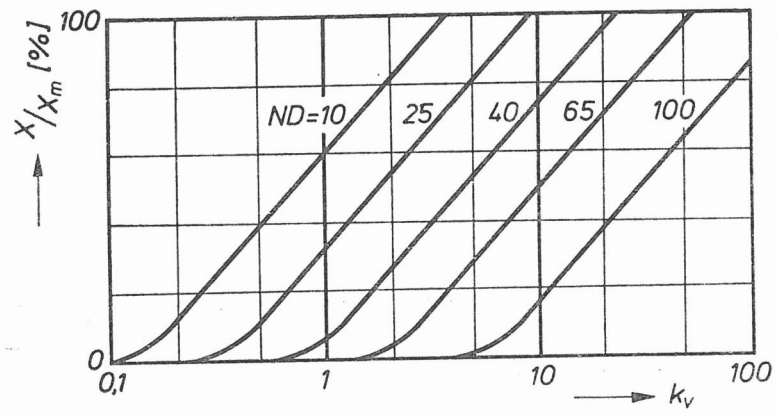
$$k_V = \frac{Q}{100}\sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}} \tag{7-78}$$

gdje su k_V i Q u m^3h^{-1}, gustoća ρ je u kgm^{-3}, a pad tlaka ΔP u MPa.

Primjer 7.3. Pri regulaciji protoka benzina dani su slijedeći podaci: $\Delta P = 2{,}5 \cdot 10^5$ Pa, $Q = 20\ m^3h^{-1}$. Za benzin je $\rho = 70\ kgm^{-3}$, pa je k_V-vrijednost

$$k_V = \frac{Q}{100}\sqrt{\frac{\rho}{\Delta P}} = \frac{20}{100}\sqrt{\frac{70}{0{,}25}} = 3{,}36\ m^3\,h^{-1}.$$

Pomoću tako izračunate vrijednosti odabrat ćemo ventil kojeg nazivna k_V-vrijednost odgovara toj veličini. Ako su dane karakteristike (sl. 7—50), onda za $k_V = 3{,}36$ biramo ventil nazivnog promjera ND 40, jer on pri 50% maksimalnog protoka omogućuje najbolju regulaciju.



Sl. 7—50. Karakteristike familije ventila

Pri regulaciji plinova i para moramo imati na umu promijenjene uvjete strujanja. Tako npr. za plin vrijedi ispravljena brojčana relacija:

$$k_V = \frac{Q_N}{5140}\sqrt{\frac{\rho_N \Theta}{\Delta P \cdot P_2}}. \tag{7-79}$$

Volumenski protok Q_N [m^3h^{-1}] i gustoća ρ [kgm^{-3}] uzimaju se uz normalne atmosferske uvjete: 1,013 bara i 273,15 K. Ostale su veličine pad tlaka na ventilu ΔP [MPa], apsolutni tlak na izlazu ventila P_2 [MPa], i temperatura na ulazu ventila Θ [K].

Gornji izrazi za k_V vrijede za potkritične brzine strujanja, tj. kad je $\Delta P < \frac{P_1}{2} < P_2$ (P_1 je apsolutni tlak ispred ventila).

7.5. Izbor pomoćne energije u regulacijskom krugu

Pri opisivanju članova regulacijskog kruga susretali smo se s mehaničkim, električnim, pneumatskim, hidrauličnim, kao i s kombiniranim sklopovima. Postavlja se pitanje koji je fizikalni medij najsvrsishodniji za prijenos informacija?

Naravno, s funkcionalnog stajališta svejedno je koji ćemo medij primijeniti; pritom je jedini uvjet da se ispune stacionarni i dinamički uvjeti u regulacijskom krugu. Ali postoji čitav niz ostalih zahtjeva, prije svega pogonskih uvjeta, koji utječu na izbor neke vrste pomoćne energije. Takvi su pogonski uvjeti npr. sigurnost od eksplozije, utjecaj temperature i vlažnosti, premošćivanje udaljenosti, mogućnost održavanja, nestanak energije, itd. Zato ćemo u najkraćim crtama opisati značajke najvažnijih informacijskih medija.

Elektrika je svuda dostupna. Odziv električnih sklopova relativno je brz, može se ostvariti prijenos signala na daljinu. Logičke i računske operacije u regulacijskom krugu lako je izvesti pomoću električnih sklopova, a izravno je moguće u rad uključiti procesna računala u svrhu vođenja procesa. Elektronički sklopovi nadalje omogućuju minijaturnu izvedbu, a modulna tehnika s integriranim krugovima omogućuje lako mijenjanje sklopova, odnosno održavanje.

Električni sklopovi međutim predstavljaju potencijalnu opasnost u eksplozivnim atmosferama, a sigurnosno izvođenje jako poskupljuje uređaje. Općenito uzevši, električni sklopovi su najskuplji, naročito kod postavnih pogona.

Osnovni medij u **pneumatici** — zrak svuda je dostupan, ali njegova stlačivost nepovoljno utječe na brzinu i točnost odziva. Signal se može prenijeti na udaljenost do nekoliko stotina metara. Pneumatski uređaji već su dugo razvijeni i usavršeni, tako da su u pogonu sigurni, jeftini, a dostupan je i cjelovit izbor sklopova. U vezi s time razrađen je i normiran sustav za prijenos pneumatskih signala, tako da se pojedini sklopovi različitih proizvođača bez poteškoća povezuju i upotpunjuju.

Pneumatski su uređaji nadasve sigurni od eksplozija, pa je to bitan razlog što se široko primjenjuju u kemijskoj i naftnoj industriji.

Hidraulika dolazi u regulacijskim uređajima manje do izražaja, iako je izvedba I-regulatora dugo poznata i jednostavna. Ulje je praktički nestlačivo, pa odzivi mogu biti vrlo brzi i točni. U postavnim pogonima, gdje dolazi do izražaja postavna snaga, hidraulični su uređaji zbog velike gustoće energije najkompaktniji. To, kao i neosjetljivost na trešnju i udarce, omogućuje njihovu primjenu u zrakoplovima i raketama.

Osnovni su nedostaci hidraulike zapaljivost konvencionalnih ulja i potreba za zatvorenim tokom ulja, tj. za skupom razvodnom mrežom. Kako zahtijevaju preciznu izradu, hidraulični su uređaji relativno skupi.

Općenito možemo reći da izbor nekog energetskog medija naročito ovisi o orijentaciji određenog pogona. Tako npr. jedno termoenergetsko postrojenje obuhvaća niz električnih uređaja i sklopova, a i održavanje je orijentirano na elektriku. No u procesnom i kemijskom postrojenju prevladava pneumatika, što je često uvjetovano sigurnošću od eksplozija, a pogonskom osoblju su pneumatika i mehanika bliže.

Iako je danas regulacijska oprema pretežno pneumatska, udio elektroničke opreme stalno se povećava, pa će se takav razvoj sigurno nastaviti. Možemo očekivati da će i dalje svaki od tih medija ostati na području gdje ima svoje prednosti. Osim toga, kombinirani uređaji (pneumohidraulični, elektrohidraulični) koriste se prednostima svakog od tih medija, čemu pogoduje i razvoj novih i svestranih pretvarača.

8. Analiza regulacijskog kruga

Kad umrem,
Ostav'te mi balkon otvoren.
Dječačić naranče jede.
(Sa svog balkona ga vidim.)
Žetelac pšenicu žanje.
(Sa svog balkona ga čujem.)
Kad umrem,
Ostav'te mi balkon otvoren!

F. G. Lorca, »Oproštaj«

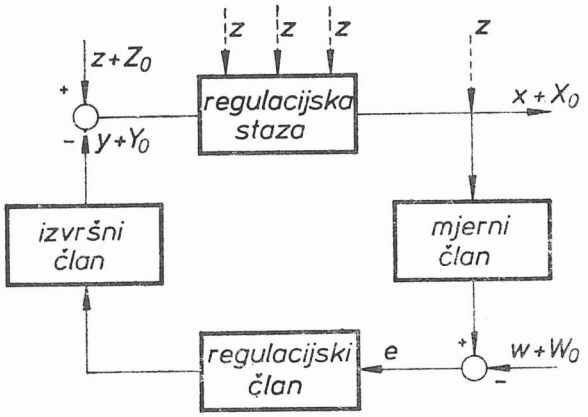
U dosadašnjim razmatranjima uzimali smo pojedinačne elemente i sklopove regulacijskog kruga, nastojeći da matematički opišemo njihovo vladanje. U ovom poglavlju analiziramo regulacijski objekt zajedno s regulacijskim uređajem kao kompletan regulacijski krug. **Analiza je ograničena na sustave s jednim ulazom i jednim izlazom,** dok ćemo sustave s više ulaza i više izlaza analizirati prikladnom metodom prostora stanja u dvanaestom poglavlju.

Prije same analize potrebno je da razjasnimo neke pojmove i da provedemo neka pojednostavnjenja. Na sl. 8—1 ponovno je nacrtan blok-dijagram regulacijskog kruga s osnovnim sklopovima i signalima. U početnom **stacionarnom stanju** postoje konstantne veličine označene velikim slovima. Početne vrijednosti regulirane veličine X_0, vodeće veličine W_0, kao i poremećajne veličine Z_0, međusobno su zavisne, ali tako namještene da u regulacijskom krugu postoji ravnoteža. Kako je naime $X_0 = W_0$, nema regulacijskog odstupanja. U regulaciji je bitno proučavanje **dinamičkog stanja,** kad se pojavljuju vremenski promjenljive veličine; ta odstupanja od stacionarnih vrijednosti označena su malim slovima. Promjena bilo koje ulazne veličine, poremećajne z ili vodeće w, izaziva i odgovarajuću promjenu regulirane veličine x. Pritom se pojavljuje regulacijsko odstupanje e koje se kod prijelaza u novo stacionarno stanje mora odstraniti. Zato ćemo u daljnjem tekstu govoriti samo o vremenski promjenljivim veličinama, tj. o odstupanjima od stacionarnih vrijednosti.

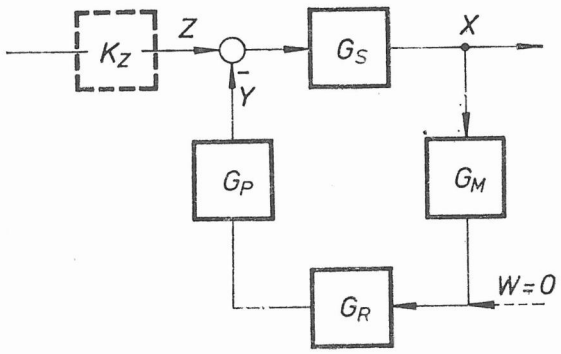
Poremećajna veličina z može na stazu djelovati bilo gdje, što je i označeno s više strelica. Ona može djelovati na ulazu u stazu, kao npr. promjena kalorične vrijednosti goriva na ulazu u industrijsku peć; to je poremećaj napajanja. Ako poremećaj djeluje na izlazu iz staze, kao što je npr. promjenljivo opterećenje turbogeneratora, govorimo o poremećaju opterećenja. Konačno, možemo govoriti i o poremećaju parametara staze zbog starenja, oštećenja, i sl. Analiza se bitno pojednostavnjuje ako se sve poremećajne veličine svedu na jednu koja djeluje na ulazu u stazu, kao što je to prikazano punom strelicom na sl. 8—1.

Postavna veličina y na ulazu u stazu suprotstavlja se djelovanju poremećajne veličine z, što smo simbolički prikazali točkom zbrajanja (v. odjeljak 4.4). **Oba signala koja ulaze u točku zbrajanja moraju imati istu dimenziju.** Ponekad su to iste fizikalne veličine, kao što su to kod spremnika s tekućinom na sl. 1—13 pritjecanje q_u kao postavna veličina i otjecanje q_i kao poremećajna veličina.

Ipak, općenito se radi o različitim fizikalnim veličinama, kao kod regulacije temperature u prostoriji na sl. 1—7, gdje je protok goriva q_u postavna veličina, a temperatura okoline ϑ_0 poremećajna veličina. Tada se y izrazi u jedinicama od z, ili z u jedinicama od y, a konačan izbor ovisi o pogodnijem izrazu. Uzmimo kao primjer membranski ventil, gdje se postavna veličina izražava u [Pa], a poremećajna je veličina volumenski protok u [$m^3\ h^{-1}$]. Uz linearnu karakteristiku protok-tlak ventila, možemo postavnu veličinu izraziti u [$m^3\ h^{-1}$].



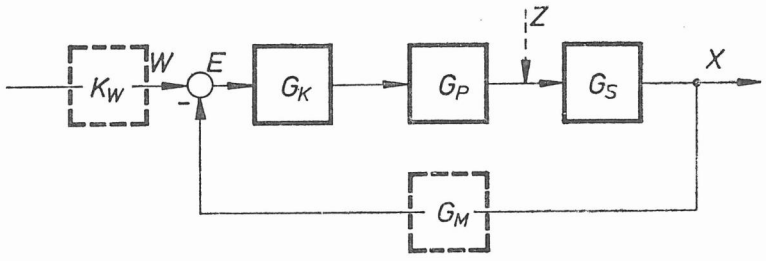
Sl. 8—1. Blok-dijagram regulacijskog kruga



Sl. 8—2. Uobičajeni blok-dijagram kod procesne regulacije

Budući da se i u komparatoru pojavljuje točka zbrajanja, isto razmišljanje vrijedi i za reguliranu veličinu x u odnosu prema vodećoj veličini w. Tako se primjerice može položaj regulacijskog vijka pri regulaciji temperature prostorije na sl. 1—7 umjesto u [m] dati u odgovarajućem linearno ovisnom tlaku u [Pa] na membranu membranskog ventila, gdje se taj tlak uspoređuje s tlakom iz plinskog toplomjera.

Da bi se postigla negativna povratna veza, **treba signal negdje u regulacijskom krugu invertirati;** u načelu je svejedno koje se mjesto odabire. Pri procesnoj regulaciji svrsishodno je da je to ulaz u stazu, kao što je to ucrtano na sl. 8—2, dok se kod servomehanizama točka invertiranja uobičava staviti na mjestu komparatora, kao na sl. 8—3.



Sl. 8—3. Uobičajeni blok-dijagram kod servomehanizama

U daljnjem tekstu analizirat ćemo regulacijsko djelovanje u krugu, i to kako kod čvrste tako i kod slijedne regulacije. Analiza se pritom svodi na određivanje točnosti i stabilnosti regulacijskog kruga. Ostali problemi analize, kao što su stohastički poremećaji, nelinearne pojave, osjetljivost kruga na promjene parametara, pripadaju u posebna područja.

8.1. Regulacijsko djelovanje

Analitičko proučavanje regulacijskih krugova olakšano je primjenom operatorske metode. Diferencijalne jednadžbe za pojedine blokove regulacijskog kruga zamjenjuju se prijenosnim funkcijama, pa se onda pomoću algebre blokova jednostavno pronalazi ukupna prijenosna funkcija regulacijskog kruga kao omjer jedne izlazne veličine prema jednoj ulaznoj (v. odjeljak 4.4). Iz tako dobivene prijenosne funkcije mogu se razaznati sve informacije potrebne u analizi regulacijskog kruga. Zbog jednostavnijeg pregleda, posebno ćemo analizirati najprije čvrstu regulaciju, a zatim i slijednu, iako ćemo na kraju vidjeti da se obje vrste regulacije u konačnom učinku svode na isto.

Ako prema sl. 8—1 pretpostavimo da je $w=0$, tj. da imamo **nazivnu veličinu čvrste vrijednosti,** dobit ćemo blok-dijagram prema sl. 8—2. Osnovni je zadatak regulacijskog djelovanja da se **otklanjaju poremećaji.** Kao ulaz djeluje poremećajna veličina $Z(s)$, koja se eventualno mora pomoću prijenosnog omjera K_z pretvoriti u istu dimenziju kao i postavna veličina $Y(s)$. Prijenosne funkcije mjernog člana G_M i izvršnog člana G_P prikazane su obično u prijenosnim omjerima, odnosno kao faktori pojačanja, jer su im kašnjenja zanemariva prema kašnjenjima staze. Naprotiv, prijenosna funkcija regulacijskog člana G_R sadrži dinamička svojstva. Serijski spojene prijenosne funkcije G_M, G_R i G_P mogu se prema tome sažeti u samo jednu prijenosnu funkciju cijelog regulacijskog uređaja, koju ćemo označiti jednostavno sa G_R.

Uz ova određenja mogu se jednadžbe regulacijskog kruga pisati u operatorskom obliku[1]:

$$\begin{aligned} X &= G_S (Z - Y), \\ Y &= G_R X. \end{aligned} \tag{8-1}$$

Nakon izlučivanja varijable Y lako ćemo dobiti omjer regulirane veličine prema poremećajnoj:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{G_S}{1 + G_R G_S}, \tag{8-2}$$

što je ukupna prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga kod čvrste regulacije. Čvrsta se regulacija primjenjuje najviše u procesnoj regulaciji, gdje se vodeća veličina može doduše mijenjati, ali se te promjene odigravaju duže vrijeme koje je svakako veće od trajanja prijelaznih pojava u procesu.

Ako je **vodeća veličina neka funkcija vremena,** dobije se slijedna regulacija. Sada je bitno da regulirana veličina **slijedi vodeću veličinu,** pa se može zanemariti djelovanje poremećajne veličine, tj. uzimamo da je $z=0$. Uobičajeno je da se pritom blok-dijagram s prijenosnim funkcijama prikazuje nešto drugačije (sl. 8—3). Kao ulaz djeluje ovdje vodeća veličina $W(s)$, koja se eventualno može svesti na dimenziju regulirane veličine $X(s)$, i to pomoću prijenosnog omjera K_w. Razlika $[W(s) - X(s)]$ djeluje kao regulacijsko odstupanje $E(s)$ na ulaz kompenzacijskog člana G_K koji ima istu funkciju i dinamički oblik kao i regulacijski član kod čvrste regulacije. Signal se prenosi dalje na pokretački član G_P koji sadrži pojačalo i postavni pogon, a odatle se djeluje na stazu. Dok se kompenzacijski član sastoji od pasivnih elemenata, pokretački član ima aktivne elemente.

---

[1] Zbog jednostavnosti ispuštamo u daljim izvodima oznaku operatora s.

Ako označimo $G_K G_P$ sa G_R, možemo jednadžbe kruga s jediničnom povratnom vezom pisati u operatorskom obliku:

$$X = G_R G_S E,$$
$$E = W - X, \qquad (8\text{-}3)$$

koje nakon izlučivanja varijable E daju omjer regulirane veličine prema vodećoj:

$$G(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_R G_S}{1 + G_R G_S}, \qquad (8\text{-}4)$$

što je ukupna prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga kod slijedne regulacije. Slijedna se regulacija primjenjuje najviše u servomehanizmima.

Na sl. 8—3 crtkano je prikazan i blok koji predočuje mjerni uređaj s prijenosnom funkcijom G_M. To je kod servomehanizama obično tahogenerator ili brzinski giroskop. Pomoću poznatih pravila algebre blokova, primijenjenih na točku zbrajanja na ulazu, možemo blok G_M u povratnoj vezi prebaciti u izravan put signala, tako da osiguramo pojednostavnjeni proračun s jediničnom povratnom vezom (v. odjeljak 4.4).

U stvarnosti razgraničenje između čvrste i slijedne regulacije nije tako oštro. Tako smo kod procesne regulacije imali slučaj da temperatura industrijske peći mora slijediti vremenski programiranu promjenu vodeće veličine, a ujedno i otklanjati poremećaje. Slično je i kod servomehanizama: radarska antena mora slijediti komande koje djeluju na vodeću veličinu, a na položaj antene ne smiju djelovati ni poremećaji u obliku naleta vjetra. Prema tome, možemo općenito govoriti o regulacijskim krugovima koji više odgovaraju radnim uvjetima kod čvrste ili pak više kod slijedne regulacije. Zapravo, poremećaj na izlazu staze kod čvrste regulacije djeluje i kao promjena vodeće veličine kod slijedne regulacije.

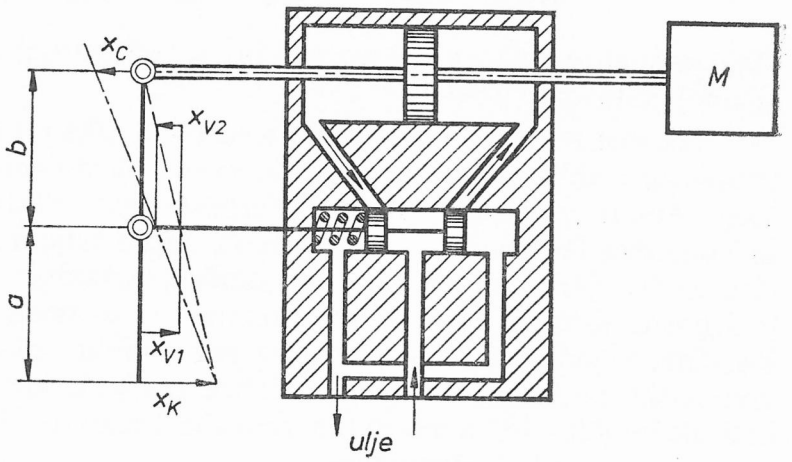
Kod obiju prijenosnih funkcija, i za čvrstu i za slijednu regulaciju, nazivnik je, prema jednadžbama (8-2) i (8-4), isti. Ako je jednak nuli, regulirana veličina poraste preko svake mjere. To je slučaj nestabilnosti, koji ovisi samo o sustavu, tj. umnošku $G_R G_S$, a ne i o ulaznim veličinama Z i W. Dakle, bez obzira radi li se o čvrstoj ili o slijednoj regulaciji, umnožak $G_R G_S$ je mjera za stabilnost regulacijskog sustava. Taj se umnožak naziva **prijenosna funkcija otvorenog kruga,** a označuje se sa G_0. Njime ćemo se koristiti u odjeljku 8.3. jer se na promatranju svojstava otvorenog kruga zasniva tzv. Nyquistov kriterij stabilnosti.

Kao primjer primjene prijenosne funkcije u analizi regulacijskog kruga uzimamo servomehanizam kojim se upravlja kopirnim tokarskim strojem prema sl. 1—9, što je još jednom prikazano na sl. 8—4. U odjeljku 6.2. izvedena je prijenosna funkcija regulacijske staze, tj. omjer između položaja klipa cilindra $X_C(s)$ kao izlazne veličine i položaja klipa razvodnika $X_V(s)$ kao ulazne veličine:

$$G(s) = \frac{X_C(s)}{X_V(s)} = \frac{K}{A} \cdot \frac{1}{s\left[1 + \frac{K_1 M}{A^2} s + \frac{VM}{2BA^2} s^2\right]}. \qquad (6\text{-}35)$$

Da bismo dobili ukupnu prijenosnu funkciju kopirnog uređaja, moramo još izvesti prijenosnu funkciju regulacijskog uređaja. U ovom slučaju to je poluga preko koje se vrši povratna veza od izlaza na ulaz, gdje se regulirana veličina $X_C(s)$ uspoređuje s vodećom veličinom $X_K(s)$.

Neka je u početnom trenutku položaj poluge takav da je servomehanizam u položaju ravnoteže. Ako se sada vodeća veličina odskočno promijeni za dužinu $x_K(t)$ u smjeru označenom strelicom na sl. 8—4, pomaknut će se i klip razvodnika



Sl. 8—4. Hidraulični servomehanizam

za dužinu $X_{V1}(t)$, jer klip cilindra u početnom trenutku ostaje nepomičan. Zbog malih pomaka možemo kutni zakret zanemariti pa dobivamo približan odnos:

$$\frac{x_{V1}(t)}{b}=\frac{x_K(t)}{a+b}. \tag{8-5}$$

Zbog pritjecanja ulja u desnu komoru cilindra vrši se pomak klipa cilindra tako dugo dok se klip razvodnika ponovno ne vrati u neutralan položaj pri kojem nema protoka ulja u cilindar. Budući da je sada položaj vodeće veličine $x_K(t)$ čvrst, položaj klipa cilindra $x_C(t)$ i položaj klipa razvodnika $x_{V2}(t)$ povezani su za vrijeme pomicanja obaju klipova odnosom:

$$\frac{x_{V2}(t)}{a}=\frac{x_C(t)}{a+b}, \tag{8-6}$$

gdje su opet zanemareni mali kutni zakreti.

Položaj klipa razvodnika $x_V(t)$ u svakom trenutku predstavlja regulacijsko odstupanje od neutralnog položaja, a dobijemo ga pomoću gornjih dviju jednadžbi:

$$x_V(t)=x_{V1}(t)-x_{V2}(t)=\frac{b}{a+b}x_K(t)-\frac{a}{a+b}x_C(t) \tag{8-7}$$

Da bismo dobili jednostavnije odnose, pretpostavimo da su krakovi poluge jednaki, tj. da je $a=b$. Odnos (8-7) možemo pisati odmah u operatorskom obliku:

$$X_V(s)=\frac{X_K(s)}{2}-\frac{X_C(s)}{2}. \tag{8-8}$$

Iz jednadžbi (6-35) i (8-8) možemo izlučiti $X_V(s)$, kao unutarnju varijablu, što nakon sređivanja daje ukupnu prijenosnu funkciju servomehanizma:

$$G(s)=\frac{X_C(s)}{X_K(s)}=\frac{1}{1+\frac{2A}{K}s+\frac{2K_1M}{AK}s^2+\frac{VM}{BAK}s^3}. \tag{8-9}$$

To možemo pisati i u obliku diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{VM}{BAK}\cdot\frac{\mathrm{d}^3x_C}{\mathrm{d}t^3}+\frac{2K_1M}{AK}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2A}{K}\cdot\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}+x_C=x_K. \qquad (8\text{-}10)$$

Daljnja analiza sustava osniva se bilo na prijenosnoj funkciji (8-9) bilo na diferencijalnoj jednadžbi (8-10).

Točnost regulacije ovisi kako o sustavu, tako i o pobudnoj funkciji, pa moramo poznavati i oblik pobudne funkcije x_K da bismo mogli izračunati stacionarno rješenje. Ako u opisanom primjeru pretpostavimo odskočnu funkciju na ulazu, vidimo iz jednadžbe (8-10) da u stacionarnom stanju vrijedi $x_C(t)=x_K(t)$, tj. odzivna veličina $x_C(t)$ vjerno slijedi bilo koji odskok pobudne veličine $x_K(t)$. Polazimo li od prijenosne funkcije sustava, do podataka o točnosti dolazimo primjenom teorema konačne vrijednosti[1], jer je trajno regulacijsko odstupanje pojmovno vezano uz vremensko područje. Iz daljnje analize u slijedećem odjeljku vidjet ćemo da će se kod složenijih oblika pobudne funkcije (nagibna ili parabolna funkcija) pojaviti trajno regulacijsko odstupanje.

Ako stabilnost regulacije određujemo na osnovi diferencijalne jednadžbe, moramo poznavati prijelazno rješenje. Korijeni karakteristične jednadžbe ne smiju imati realne dijelove veće od nule. Istu informaciju dobijemo i na osnovi prijenosne funkcije: njezini polovi ne smiju ležati na desnoj polovini s-ravnine. Kod upravo opisanog servomehanizma diferencijalna je jednadžba trećega reda; sustav može biti nestabilan, što ovisi o vrijednostima parametara sustava, odnosno o vrijednostima koeficijenata s lijeve strane jednadžbe.

8.2. Točnost regulacije

U prethodnom odjeljku govorili smo o trajnom odstupanju, odnosno o točnosti regulacije. Iako stacionarno rješenje ovisi osim o sustavu i o pobudnoj funkciji, kod **procesnih postrojenja** dovoljno je da za stacionarno rješenje promatramo **samo pobudnu funkciju u obliku odskočne funkcije.** U procesima se pretežno radi o čvrstoj regulaciji, a odskočna funkcija predstavlja najoštrije uvjete koji se pojavljuju pri poremećaju z kao ulazne veličine. Vrlo se rijetko događa da se promjena pobudne veličine odigrava konstantnom brzinom i to dovoljno dugo da sve prijelazne pojave nestanu.

Drukčiji se pristup zahtijeva kod **servomehanizama.** Izlazna veličina servomehanizma mora što točnije slijediti vodeću veličinu, bez obzira radi li se o alatnom stroju ili o radarskom postolju. Kod slijedne je regulacije nužno da se pored samog sustava uzima u obzir i **nekoliko oblika pobudne funkcije,** i to odskočna funkcija, nagibna funkcija i parabolna funkcija. Što se tiče strukture sustava i njezina utjecaja na stacionarno rješenje, za određivanje trajnog regulacijskog odstupanja mjerodavan je **broj integracijskih članova u sustavu.** To je tako značajna veličina, slijednog sustava da se prema njoj i razvrstavaju tipovi servomehanizama[2].

U daljnjem prikazu najprije ćemo govoriti o tipovima servomehanizama, a zatim i o vrstama pobudnih funkcija, da bismo uočili njihov utjecaj na trajno regulacijsko odstupanje.

---

[1] Vidi jednadžbu (4—39).

[2] To se odnosi ne samo na stacionarno ponašanje već i na dinamičko; vidi odjeljak 9.3.

8.2.1. Tipovi servomehanizama

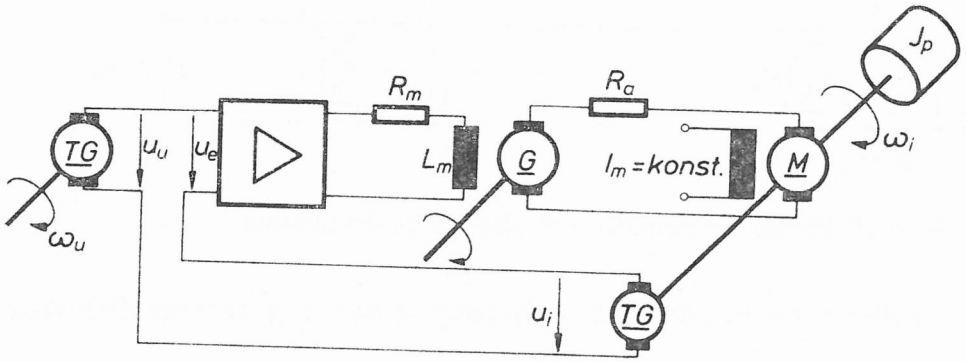
Prijenosna funkcija otvorenog kruga za tipične sklopove snage kakvi se upotrebljavaju u servomehanizmima ima opći oblik:

$$G_0(s)=\frac{K(1+b_1s+b_2s^2+\ldots)}{s^k(1+a_1s+a_2s^2+\ldots)}. \tag{8-11}$$

Tu je K ukupni prijenosni omjer kad je $s=0$, a k kao **potencija od s u nazivniku označava broj integracija u krugu.** Drugi član u nazivniku predstavlja kašnjenja sustava.

Kao servomehanizam tipa 0 označuje se onaj koji nema integraciju, tj. $k=0$, tipa 1 ako ima jedan integracijski član, tj. $k=1$, tipa 2 s dva integracijska člana, tj. $k=2$, itd. Kad govorimo o tipu servomehanizma, moramo paziti da se tip ne miješa s redom; red je jednak potenciji polinoma od s u nazivniku, a tip odgovara potenciji integracijskog člana s u nazivniku.

Razmatrajući regulacijske objekte u odjeljku 6.1 uveli smo pojam staze koja može imati proporcionalno ili integralno ponašanje; ta je podjela pretežno vezana uz procesnu regulaciju. Podjelu koju smo upravo uveli kod servomehanizama, a na temelju prijenosne funkcije otvorenog kruga prema izrazu (8—11), sličnog je značenja: tip 0 ima proporcionalno ponašanje, a tipovi 1, 2 i viši imaju integralno ponašanje.



Sl. 8—5. Električni servomehanizam tipa 0 za regulaciju brzine

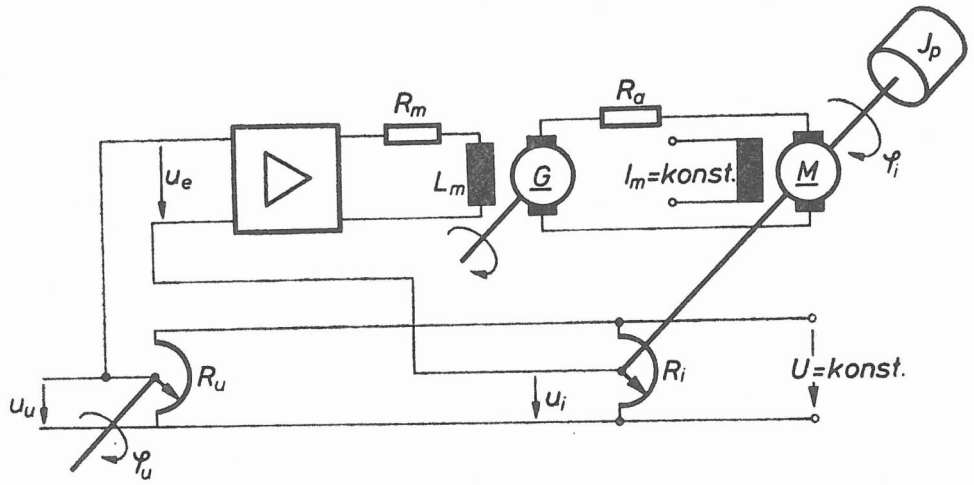
Servomehanizmi tipa 0 upotrebljavaju se za čvrstu regulaciju gdje se ne traži prevelika točnost. Takav je sustav tipa 0 električni servomehanizam za regulaciju brzine, koji je shematski prikazan na sl. 8—5. Ulazna osovina vrti se određenom kutnom brzinom $\omega_u=\mathrm{d}\varphi_u/\mathrm{d}t$, a ulazni tahogenerator daje na izlazu razmjeran napon u_u. Kutna brzina na izlazu $\omega_i=\mathrm{d}\varphi_i/dt$ pretvara se pomoću izlaznog tahogeneratora u razmjeran napon u_i. Iz slike vidimo da izlazna kutna brzina ω_i ne može nikad točno slijediti ulaznu kutnu brzinu ω_u, jer je uz $u_i=u_u$ i ulazno odstupanje $u_e=0$, pa se motor ne bi pokretao. Dakle, uvijek mora postojati neko regulacijsko odstupanje u_e. Napomenimo još da između izlaznog i ulaznog kuta zakreta nema istovjetnosti, jer su i u_i i u_u ovisni o kutnoj brzini, a ne o kutnom zakretu.

Prijenosna je funkcija otvorenog kruga gornjeg servomehanizma:

$$G_0(s)=\frac{\Omega_i(s)}{U_e(s)}=\frac{K}{(1+\tau_G s)(1+\tau_M s)}. \tag{8-12}$$

Ovdje je K ukupni prijenosni omjer otvorenog kruga servomehanizma, τ_G je vremenska konstanta generatora koja ovisi o otporu R_m i induktivnosti L_m uzbudnog kruga generatora, a τ_M je vremenska konstanta motora koja ovisi o otporu armature R_a i o momentu tromosti motora J_m i eventualnog opterećenja J_p.

Servomehanizmi tipa 1 susreću se najčešće. To su razni tipovi motora, kod kojih određena promjena ulazne veličine izaziva određenu brzinu promjene izlazne veličine. Primjer takvog sustava je električni servomehanizam za pozicioniranje (sl. 8—6). Kutni zakret φ_u na ulazu pretvara se preko klizala potenciometra u proporcionalni električni napon u_u, koji djeluje u istom krugu kao i u shemi na sl. 8—5. Razlika je u tome što se ovdje kao izlazna veličina uzima kutni zakret φ_i osovine motora, pa motor prema tome predstavlja integracijski član. Uz bilo kakvo odstupanje na ulazu u_e, motor se okreće tako dugo dok se u_i ne izjednači sa u_u i dok trajno regulacijsko odstupanje u_e ne nestane.



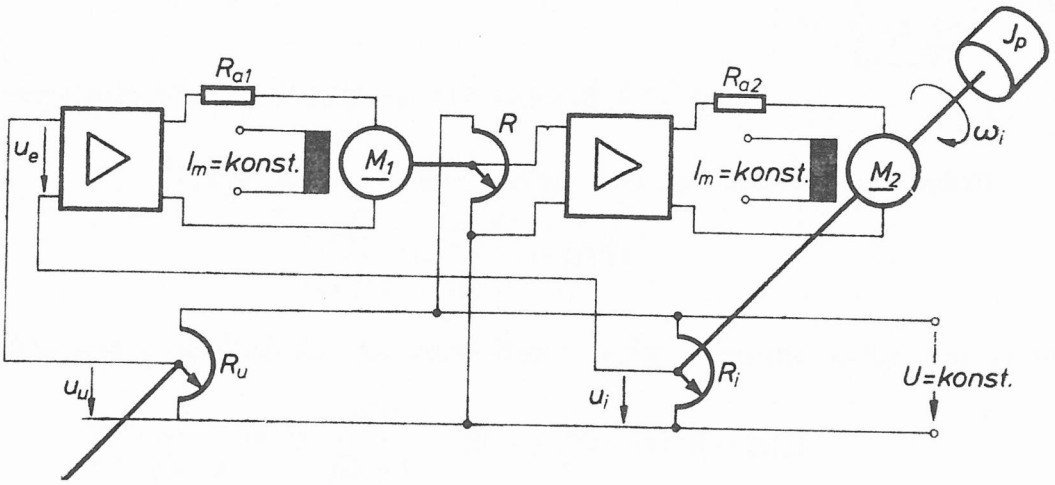
Sl. 8—6. Električni servomehanizam tipa 1 za pozicioniranje

Prijenosna je funkcija otvorenog kruga tog servomehanizma:

$$G_0(s)=\frac{\Phi_i(s)}{U_e(s)}=\frac{K}{s(1+\tau_G s)(1+\tau_M s)}. \qquad (8\text{-}13)$$

Sa K je označen ukupni prijenosni omjer između brzine promjene izlazne veličine Φ_i i ulazne veličine U_e, a τ_G i τ_M su vremenske konstante.

Servomehanizmi tipa 2 rijetko se susreću, pretežno ondje gdje se traži visoka točnost servoregulacije, kao što je to pri upravljanju raketama. Jedan je takav sustav serijski spoj dvaju motora za preciznu regulaciju brzine (sl. 8—7). Ulazna osovina okreće se konstantnom kutnom brzinom $\omega_u=\mathrm{d}\varphi_u/\mathrm{d}t$, a okretanje izlazne osovine $\omega_i=\mathrm{d}\varphi_i/\mathrm{d}t$ točno je slijedi, i to kako po kutnoj brzini ω_i, tako i po kutnom zakretu φ_i. Uz uvjete da je $\varphi_i=\varphi_u$ i $\omega_i=\omega_u$, nema regulacijskog odstupanja u_e; motor M_1 i klizalo potenciometra R miruju; struja armature motora M_2 ne mijenja se, a motor M_2 okreće se konstantnom kutnom brzinom ω_i. Postoji li kutni pomak između φ_i i φ_u, pojavljuje se regulacijsko odstupanje u_e, a motor M_1 tako dugo zakreće klizalo potenciometra R, odnosno mijenja brzinu motora M_2, dok se razlika u kutnom zakretu, odnosno u regulacijskom odstupanju ne odstrani.



Sl. 8—7. Električni servomehanizam tipa 2 za preciznu kontrolu brzine

Oba motora djeluju kao integracijski članovi u seriji, pa je njihova prijenosna funkcija:

$$G_0(s)=\frac{\Phi_i(s)}{U_e(s)}=\frac{K}{s^2(1+\tau_{M1}s)(1+\tau_{M2}s)}. \qquad (8\text{-}14)$$

K je ukupni prijenosni omjer između kutnog ubrzanja izlazne veličine Φ_i i ulazne veličine U_e.

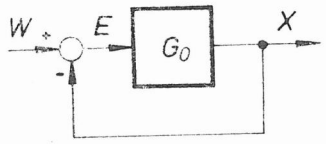
Iz gornjeg izlaganja proizlazi da su sustavi višega tipa još povoljniji za otklanjanje trajnih odstupanja. Oni se međutim ne upotrebljavaju, jer povećan broj integracijskih članova izaziva velike probleme oko stabilnosti takvih servomehanizama. To otežava projektiranje, povećava broj sklopova i općenito znatno poskupljuje uređaj.

U praksi se najviše susrećemo servomehanizmi tipa 1; ako se ne zahtijeva prevelika točnost, uzimaju se servomehanizmi tipa 0, a ako se zahtijeva visoka točnost, primjenjuju se servomehanizmi tipa 2. Tako npr. ako želimo točno prenijeti namještanje neke ulazne mjerne vrijednosti, dovoljno je da uzmemo servomehanizam tipa 1, jer će on pomak prenijeti bez greške. Naprotiv, kod kopirne glodalice treba osigurati da rezna glava slijedi promjene brzine kopirnog ticala bez odstupanja, pa se primjenjuje servomehanizam tipa 2.

U ovom odjeljku govorimo o servomehanizmima kod kojih su slijedne veličine u pravilu mehaničke. Zato i govorimo o reguliranoj veličini kao o položaju, brzini ili ubrzanju. Ovo razmatranje vrijedi međutim i za druge fizikalne veličine, pa se u jednom pneumatskom sustavu može govoriti o brzini promjene tlaka, itd.

8.2.2. Trajno regulacijsko odstupanje

Da bismo mogli analitički izvesti ovisnost trajnog odstupanja regulirane veličine u servomehanizmima i o tipovima servomehanizama i o vrstama pobudne funkcije, poslužit ćemo se blok-dijagramom na sl. 8—8, gdje je $G_0(s)$ prijenosna funkcija otvorenog kruga, a povratna je veza jedinična. Pomoću ovog prikaza najlakše uvodimo pojmove vezane uz trajna regulacijska odstupanja, ali se analiza može poopćiti i za složene sustave.



Sl. 8—8. Regulacijski krug s jediničnom povratnom vezom

Prijenosna je funkcija zatvorenog regulacijskog kruga:

$$G(s)=\frac{X(s)}{W(s)}=\frac{G_0}{1+G_0}. \tag{8-15}$$

Iz te jednadžbe možemo lako izvesti izraz za regulacijsko odstupanje:

$$E(s)=W(s)-X(s)=W-\frac{G_0}{1+G_0}W=\frac{1}{1+G_0}W. \tag{8-16}$$

Regulacijsko je odstupanje u ovoj jednadžbi prikazano kao funkcija operatora s. Kako se **trajno regulacijsko odstupanje** e_0 definira kao razlika između vodeće i regulirane veličine uz $t\to\infty$, tj. **u vremenskom području,** potrebno je izraz (8—16) prebaciti iz područja kompleksne varijable u vremensko područje. To se na jednostavan način postiže pomoću teorema konačne vrijednosti iz odjeljka 4.1:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s). \tag{4-39}$$

Primijenjen na jednadžbu (8-16) daje:

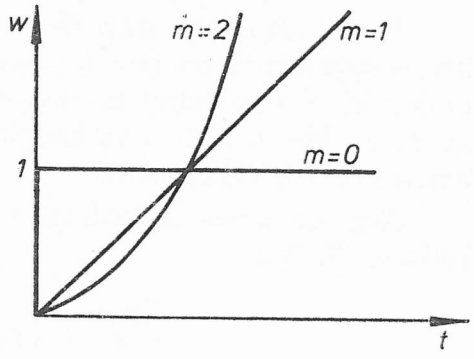
$$e_0=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{W}{1+G_0}. \tag{8-17}$$

Ovaj ćemo izraz upotrijebiti da pronađemo trajno regulacijsko odstupanje e_0 kod raznih tipova servomehanizama izraženih prijenosnom funkcijom otvorenog kruga $G_0(s)$, kao i raznih vrsta pobudnih funkcija izraženih u operatorskom obliku sa $W(s)$. Prema prethodnom izlaganju, uputno je da se promatraju **tri osnovna tipa servomehanizama:** $k=0$, 1 i 2. Što se tiče pobudnih funkcija, njihov je izbor sadržan u jediničnoj paraboli m-toga reda:

$$w(t)=t^m \quad \text{za} \quad m\geqslant 0. \tag{8-18}$$

Za razne redne brojeve parabole m pobudna funkcija može imati konstantnu amplitudu $m=0$ (jedinični odskok), konstantnu brzinu $m=1$ (jedinični nagib), konstantno ubrzanje $m=2$ (jedinična parabola), itd. Te su krivulje prikazane na sl. 8—9. Ograničimo se na izbor samo **prvih triju jediničnih parabolnih funkcija:** $m=0$, 1 i 2:

$$\begin{aligned} w(t)=u(t)&\leftrightarrow W(s)=\frac{1}{s},\\ w(t)=tu(t)&\leftrightarrow W(s)=\frac{1}{s^2},\\ w(t)=t^2u(t)&\leftrightarrow W(s)=\frac{1}{s^3}. \end{aligned} \tag{8-19}$$



Sl. 8—9. Jedinične parabolne funkcije

Uz **jedinični odskok** $W(s)=1/s$ na ulazu, iz izraza (8—17) dobivamo:

$$e_0=\lim_{s\to 0} s\,\frac{1/s}{1+G_0}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} G_0}=\frac{1}{1+K_p}, \tag{8-20}$$

pri čemu se uvodi veličina K_p kao **koeficijent položajne greške:**

$$K_p=\lim_{s\to 0} G_0\,(s), \tag{8-21}$$

koji je lako izračunati. Za razne tipove servomehanizama K_p ćemo dobiti uvrštenjem jednadžbe (8-11), i to za servomehanizam tipa 0:

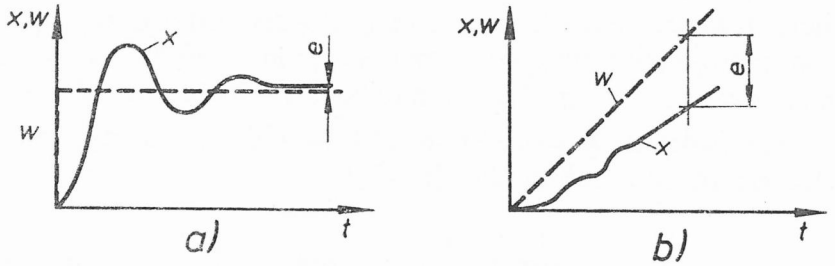
$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{K(1+b_1s+b_2s^2+\ldots)}{s^\circ(1+a_1s+a_2s^2+\ldots)}=K, \tag{8-22}$$

a za servomehanizam tipa 1 i više:

$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{K(1+b_1s+b_2s^2+\ldots)}{s^n(1+a_1s+a_2s^2+\ldots)}=\infty. \tag{8-23}$$

Te vrijednosti za K_p uvrstimo u jednadžbu (8-20), pa dobivamo e_0 za pojedine tipove servomehanizama uz odskočnu funkciju na ulazu:

$$\begin{aligned} e_0&=\frac{1}{1+K} \quad \text{za} \quad k=0,\\ e_0&=0 \qquad\quad \text{za} \quad k=1,\ 2,\ \ldots \end{aligned} \tag{8-24}$$



Sl. 8—10. Vremenski dijagram vodeće i regulirane veličine

Iz tih izraza vidimo da se u slučaju odskočne funkcije na ulazu pojavljuje kod servomehanizma tipa 0 položajna greška; ona je to manja, što je veći prijenosni omjer K. To možemo zorno prikazati i na vremenskom toku regulirane veličine na sl. 8—10a. Uz $k>0$, tj. kad se u regulacijskom krugu nalaze integracijski članovi, nema trajnog odstupanja.

Ako uzmemo **jedinični nagib** $W(s)=1/s^2$ na ulazu, dobit ćemo iz jednadžbe (7-35):

$$e_0=\lim_{s\to 0} s\frac{1/s^2}{1+G_0}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG_0}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sG_0}=\frac{1}{K_v}, \tag{8-25}$$

pri čemu se K_v uvodi kao **koeficijent brzinske greške:**

$$K_v=\lim_{s\to 0} sG_0\,(s). \tag{8-26}$$

Uvrštavajući G_0 iz jednadžbe (8-11) u jednadžbu (8-25), dobivamo za servomehanizam tipa 0:

$$K_v=\lim_{s\to 0} s\frac{K(1+b_1s+b_2s^2+\ldots)}{s^0(1+a_1s+a_2s^2+\ldots)}=0, \tag{8-27}$$

za servomehanizam tipa 1:

$$K_v=\lim_{s\to 0} s\frac{K(1+b_1s+b_2s^2+\ldots)}{s^1(1+a_1s+a_2s^2+\ldots)}=K, \tag{8-28}$$

a za servomehanizam tipa 2 i više:

$$K_v=\lim_{s\to 0} s\frac{K(1+b_1s+b_2s^2+\ldots)}{s^n(1+a_1s+a_2s^2+\ldots)}=\infty. \tag{8-29}$$

Uvrštenjem tih vrijednosti u izraz (8-25), e_0 za pojedine tipove servomehanizama, uz nagibnu funkciju na ulazu, postaje:

$$\begin{aligned} e_0&=\infty \quad \text{za} \quad k=0,\\ e_0&=\frac{1}{K} \quad \text{za} \quad k=1,\\ e_0&=0 \quad \text{za} \quad k=2,\ 3,\ \ldots \end{aligned} \tag{8-30}$$

Iz prvog izraza slijedi da izlazni signal servomehanizma tipa 0 ne može slijediti nagibnu funkciju na ulazu. To vidimo i na sl. 8—10b, i očito je da kod takvog servomehanizma mora nastupiti zasićenje. Izlazni signal servomehanizma tipa 1 slijedi ulaznu nagibnu funkciju s nekim trajnim regulacijskim odstupanjem, obrnuto razmjernim ukupnom prijenosnom omjeru K, a izlazni signali servomehanizama viših tipova slijede nagibnu funkciju na ulazu veoma točno.

Uz **jediničnu parabolu** $W(s)=1/s^3$ na ulazu, opet najprije potražimo opći izraz na osnovi jednadžbe (8-17):

$$e_0=\lim_{s\to 0} s\frac{1/s^3}{1+G_0}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+s^2G_0}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2G_0}=\frac{1}{K_a}, \tag{8-31}$$

gdje je K_a **koeficijent greške ubrzanja:**

$$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\, G_0\,(s). \tag{8-32}$$

Za pojedine tipove servomehanizama možemo izračunati vrijednosti K_a uvrštenjem izraza za $G_0\,(s)$ iz jednadžbe (8-11); za servomehanizam tipa 0 to je:

$$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\,\frac{K\,(1+b_1s+b_2s^2+\ldots)}{s^0\,(1+a_1s+a_2s^2+\ldots)}=0, \tag{8-33}$$

zatim za servomehanizam tipa 1:

$$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\,\frac{K\,(1+b_1s+b_2s^2+\ldots)}{s^1\,(1+a_1s+a_2s^2+\ldots)}=0, \tag{8-34}$$

i konačno za servomehanizam tipa 2:

$$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\,\frac{K\,(1+b_1s+b_2s^2+\ldots)}{s^2\,(1+a_1s+a_2s^2+\ldots)}=K. \tag{8-35}$$

Trajno odstupanje e_0 za pojedine tipove servomehanizama dobivamo uvrštenjem gornjih izraza u jednadžbu (8-31):

$$\begin{aligned} e_0&=\infty \quad \text{za} \quad k=0,\\ e_0&=\infty \quad \text{za} \quad k=1,\\ e_0&=\frac{1}{K} \quad \text{za} \quad k=2. \end{aligned} \tag{8-36}$$

Prema tim rezultatima zaključujemo da izlazni signali servomehanizama tipa 0 ili tipa 1 ne mogu slijediti ulazni signal u obliku parabolne funkcije. Te kod servomehanizama tipa 2 može izlazni signal slijediti parabolnu funkciju na ulazu, i to s nekim trajnim regulacijskim odstupanjem. Kod servomehanizma viših tipova može se postići da slijeđenje signala bude bez trajnog regulacijskog odstupanja.

Gornje izvode možemo izreći u sažetom obliku. Koeficijenti greške mogu, u ovisnosti o tipu servomehanizma, imati različite vrijednosti. Vrijednost nula očigledno ne možemo prihvatiti, jer bi trajno regulacijsko odstupanje bilo neizmjerno veliko. Kad su ti koeficijenti konačne vrijednosti, jednaki su ukupnom prijenosnom omjeru K otvorenog kruga servomehanizma. Ako je pak vrijednost koeficijenata K_p, K_v ili K_a neizmjerno velika, preostalo regulacijsko odstupanje je nula, pa izlazni signal vjerno slijedi ulazni.

Koeficijenti greške kao prijenosni omjeri bili su uvedeni prije trajnog regulacijskog odstupanja kao mjera za točnost regulacije. Oni nam ipak ne daju sve željene podatke o odstupanjima višeg reda.

Primjer 8.1. Prijenosna je funkcija otvorenog kruga:

$$G_0\,(s)=\frac{20}{s^2\,(1+0{,}5\,s)\,(1+0{,}04\,s)}.$$

Budući da je to servomehanizam tipa 2, koeficijenti K_p i K_v imaju vrijednost ∞. Koeficijent greške ubrzanja iznosi:

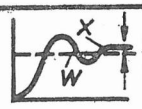
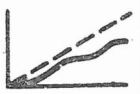
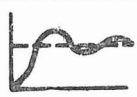
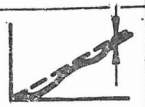
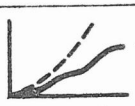
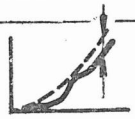
$$K_a=\lim_{s\to 0} s^2 G_0=\lim_{s\to 0} s^2 \frac{20}{s^2\,(1+0{,}5\,s)\,(1+0{,}04\,s)}=20.$$

Na osnovi tih vrijednosti koeficijenata vidimo da izlaz vjerno slijedi ulaz za odskočnu i za nagibnu funkciju, dok je trajno regulacijsko odstupanje za jediničnu parabolnu funkciju:

$$e_0=\frac{1}{K_a}=\frac{1}{20}=0{,}05.$$

Te rezultate dajemo u preglednom obliku u tablici 8—1. Vidimo da pobude u obliku parabola višega reda predstavljaju sve teže uvjete za prevladavanje trajnog regulacijskog odstupanja. Želimo li da odziv vjerno slijedi parabolu m-tog reda, mora tip servomehanizma k biti barem za jedan viši, tj. $k=m+1$. Uz $k=m$ imamo konačnu vrijednost od e_0, a kad je $k<m$ preostalo regulacijsko odstupanje teži ∞. Dakle, servomehanizmi višega tipa sve bolje suzbijaju eventualna odstupanja. Povećan broj integracijskih članova u krugu predstavlja međutim problem sa stajališta stabilnosti. Naime, svaki novi integracijski član unosi u krug dodatno fazno zaostajanje koje pridonosi nestabilnosti[1]. Želimo li ipak — u namjeri da smanjimo e_0 — dodati integracijski član, moramo provesti kompenzaciju. To je već problem sinteze regulacijskog kruga, a o tome ćemo govoriti u odjeljku 9.3.

Tablica 8—1. Trajno regulacijsko odstupanje u ovisnosti o tipu sustava i vrsti pobude

TIP SUSTAVA	VRSTE POBUDE I TRAJNO ODSTUPANJE					
	odskočna	e_0	nagibna	e_0	parabolna	e_0
0		$\frac{1}{1+K_p}$		∞		∞
1		0		$\frac{1}{K_v}$		∞
2		0		0		$\frac{1}{K_a}$

U dosadašnjim razmatranjima uzeli smo značajke vodeće veličine kao uzrok eventualnih trajnih odstupanja. Međutim, u servomehanizmima nastupaju i razne poremećajne veličine koje na sličan način uzrokuju prijelazne pojave i eventualna trajna odstupanja u novom stacionarnom stanju. Tako je i u procesnoj regulaciji, gdje je nazivna veličina konstantna, ali postoje poremećajne veličine. Ako su to poremećaji napajanja ili opterećenja, pristup je u osnovi sličan kao i kod promjena

[1] Vidi Nyquistov kriterij stabilnosti u slijedećem odjeljku.

vodeće veličine, jer je sustav vremenski invarijantan. Drukčije stoje stvari s poremećajima parametara, kad se zbog istrošenosti, starenja itd. mijenjaju parametri sustava. Ovdje imamo posla s linearnim diferencijalnim jednadžbama s promjenljivim koeficijentima, pa se dosadašnje metode ne mogu izravno primijeniti. U tom je slučaju najbolji put da se najprije uvedu odgovarajuće aproksimacije.

Na kraju ovih razmatranja možemo ustvrditi slijedeće: iako je analiza točnosti izvedena na osnovi pojednostavnjenog blok-dijagrama servomehanizma na sl. 8—8, gdje je povratna veza jediničnog karaktera, ipak ta analiza može, zajedno s tablicom 8—1, poslužiti kao dobra osnova za kvalitativnu ocjenu problema.

8.3. Stabilnost regulacije

Zbog same naravi povratne veze, u svakom regulacijskom sustavu postoji opasnost da dođe do nestabilnog rada. Umjesto da regulirana veličina što manje odstupa od neke željene vrijednosti, upravo je obratno. Regulirana veličina raste monotono ili oscilirajući preko svake mjere, pa dolazi ili do zasićenja ili do eventualnog uništenja sustava. Upravo je zato prijeko potrebno da se svaki regulacijski sustav ispita s obzirom na stabilnost.

U idućim odjeljcima obradit ćemo uz opća razmatranja metode za određivanje stabilnosti sustava. Određeni su kriteriji Hurwitza, Routha, Nyquista i Mihajlova.

8.3.1. Pojam stabilnosti sustava

Linearni regulacijski sustav je stabilan ako je na proizvoljno ograničenu pobudu njegov odziv također ograničen. To možemo pisati:

$$\begin{aligned} x_u(t) &< M \quad \text{za} \quad 0 < M < \infty, \\ x_i(t) &< N \quad \text{za} \quad 0 < N < \infty. \end{aligned} \tag{8-37}$$

Prema integralu konvolucije[1], odnos između odziva $x_i(t)$ i pobude $x_u(t)$ možemo izraziti pomoću impulsnog odziva $g(t)$:

$$x_i(t) = \int_0^t x_u(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau. \tag{8-38}$$

Uz uvjet da je $|x_u(t)| < M$ dobivamo:

$$|x_i(t)| < \int_0^t |x(t-\tau)|\, |g(\tau)|\, d\tau < M \int_0^t |g(\tau)|\, d\tau. \tag{8-39}$$

Ako je zatim:

$$\int_0^t |g(\tau)|\, d\tau < P, \tag{8-40}$$

[1] Vidi jednadžbu (3—101)

za svaki t će vrijediti:

$$|x_i(t)|<MP=N. \tag{8-41}$$

Budući da je:

$$\int_0^t |g(\tau)|d\tau<\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau, \tag{8-42}$$

uvjet (8-40) ispunjen je kad je:

$$\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau<\infty. \tag{8-43}$$

Monoton rast izaziva tzv. **statičku nestabilnost** koju ćemo najlakše razjasniti na primjeru. U spremniku s tekućinom podizanje razine djeluje preko plovka, tako da se ulazni ventil zatvara. U tom je i smisao negativne povratne veze. Ako se prijenosna poluga spoji tako da podizanje razine otvara ventil, dolazi do pozitivne povratne veze. Podizanje razine i otvaranje ventila međusobno se potpomažu i dolazi do prelijevanja vode iz spremnika. To je statička nestabilnost koja se bez teškoća može ukloniti, pa nije zanimljiva u proučavanju regulacijskih sustava.

Ako regulacijski sustav ima takve parametre da postoje uvjeti za oscilacije na nekoj određenoj frekvenciji, onda oscilacije nastupaju zbog bilo kojih poremećaja u krugu. Naime, svaka nepravilna funkcija može se pomoću Fourierova integrala rastaviti u niz titranja s neprekinutim frekvencijskim spektrom[1], pa se među njima nađe i vlastita frekvencija regulacijskog kruga. To se naziva **dinamička nestabilnost**, o kojoj ćemo dalje raspravljati.

Ako je poznata diferencijalna jednadžba regulacijskog kruga, onda se problem stabilnosti svodi na rješenje homogene jednadžbe, jer je stabilnost značajka samog sustava, a ne ovisi o pobudnoj funkciji. Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe:

$$a_n\frac{d^n x_i}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dx_i}{dt}+a_0x_i=0, \tag{2-22}$$

odnosno njezine karakteristične jednadžbe:

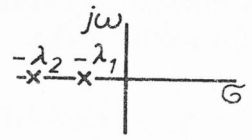
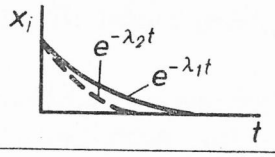
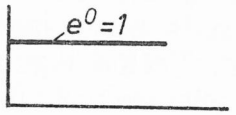
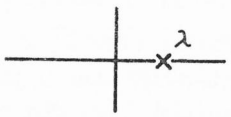
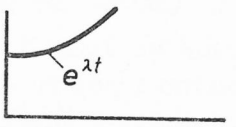
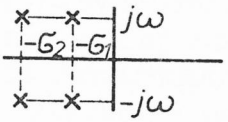
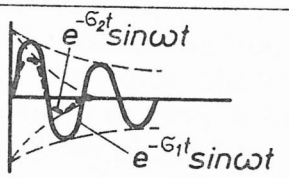
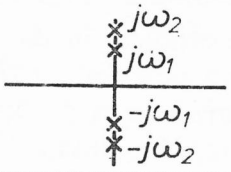
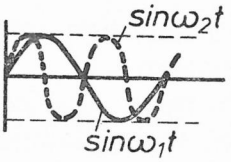
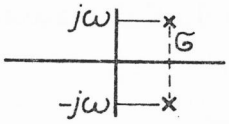
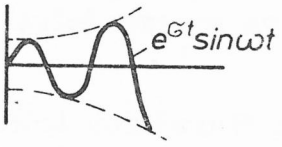
$$a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0, \tag{2-23}$$

jest komplementarna funkcija. Prema odjeljku 2.1, ona se sastoji od zbroja eksponencijalnih članova, gdje je eksponent korijen karakteristične jednadžbe. Eksponencijalni članovi mogu imati četiri različita oblika: prvi oblik dolazi kod realnih korijena koji se ne ponavljaju, drugi kod realnih korijena koji se ponavljaju, treći kod para konjugirano kompleksnih korijena koji se ne ponavljaju, i četvrti kod para konjugirano kompleksnih korijena koji se ponavljaju. Uvjet je stabilnosti da su realni korijeni λ_i ili realni dijelovi konjugirano kompleksnih korijena σ_i manji od nule; u tom slučaju, uz $t\to\infty$, komplementarna funkcija teži nuli, a prijelazne pojave s vremenom potpuno nestaju.

[1] Vidi odjeljak 15.2.

U prethodnom izlaganju utvrdili smo stabilnost nekog sustava prvo pomoću težinske funkcije $g(t)$, a zatim pomoću korijena karakteristične jednadžbe. Jasno je da su to dva prikaza iste pojave, što je pregledno dano u tablici 8—2. Za nekoliko osnovnih sustava dani su impulsni odzivi, kao i odgovarajući položaj korijena karakteristične jednadžbe u s-ravnini.

Tablica 8—2. Ocjena stabilnosti sustava

POLOŽAJ KORIJENA	IMPULSNI ODZIV
	
	
	
	
	
	

Najprije je prikazan slučaj s negativnim realnim korijenom, a odgovarajući prigušeni impulsni odziv kazuje da je sustav stabilan. Kako je vremenska konstanta takvog sustava $\tau_i = -1/\lambda_i$, korijen koji je udaljeniji od imaginarne osi daje jače prigušen odziv (isprekidana krivulja). U slijedećem grafu korijen je u ishodištu, pa u impulsnom odzivu nema prigušenja. Teži je slučaj kad se u ishodištu nalazi dvostruki korijen, jer se impulsni odziv u tom slučaju sastoji od odskočne i nagibne funkcije. Sa stajališta stabilnosti to je svakako nepovoljno, ali se u stvarnim regulacijskim sustavima s povratnom vezom takav slučaj ni ne susreće. Ako

imamo realan pozitivni korijen, dobivamo impulsni odziv u obliku monotono rastuće funkcije. To je već spomenuti slučaj statičke nestabilnosti.

Pojavljuju li se u rješenju konjugirano kompleksni korijeni, opet razlikujemo tri slučaja, i to jesu li njihovi realni dijelovi manji od nule, jednaki nuli ili veći od nule. U prvom slučaju imamo prigušene oscilacije, pa je sustav **relativno stabilan.** Opet su isprekidano prikazane jače prigušene oscilacije za veće apsolutne vrijednosti σ_i. U slijedećem grafu postoji čisto imaginarni par korijena, pa impulsni odziv daje oscilacije bez prigušenja. Isprekidano je prikazan i slučaj kad su korijeni $j\omega_2$ i $-j\omega_2$ udaljeniji od realne osi, pa se povećava frekvencija oscilacija. Konačno, u posljednjem grafu konjugirano kompleksni par korijena ima realne pozitivne dijelove. U impulsnom odzivu pojavljuju se raspirene oscilacije, što je već opisani slučaj dinamičke nestabilnosti. Takav je sustav **apsolutno nestabilan.**

S obzirom na stabilnost sustavi se mogu podijeliti i na strukturno stabilne i na strukturno nestabilne sustave. **Strukturno stabilni** su općenito svi sustavi prvoga reda, odnosno sustavi drugoga reda s prigušenjem. Nasuprot njima, sustav drugoga reda bez prigušenja je **strukturno nestabilan** jer je uvijek apsolutno nestabilan. Većina regulacijskih sustava međutim ne pripada ni u jednu od tih skupina: tako sustavi višega reda mogu — u ovisnosti o vrijednostima parametara — imati različite korijene karakteristične jednadžbe, pa mogu biti i stabilni i nestabilni. U takvim se slučajevima govori o **uvjetno stabilnim** sustavima.

Dosadašnje razmatranje o stabilnosti vrijedi za linearne sustave. Kod nelinearnih sustava pojave su mnogo zamršenije, pa ocjena stabilnosti ovisi o svakom pojedinom slučaju. Stabilnost može ovisiti između ostalog i o pobudnoj funkciji: kod malih vrijednosti pobudne funkcije sustav je nestabilan, a kod većih vrijednosti postaje stabilan. Uz nelinearne sustave vezan je i pojam **graničnog kruga;** raspirivanje amplituda zavisne varijable se kod određene vrijednosti ograničuje, jer sustav počinje djelovati s jakim prigušenjem[1]. Kako međutim kod nelinearnih sustava oscilacije počinju od malih amplituda, dok vrijede linearni odnosi, određivanje stabilnosti metodama linearne analize daje ipak korisne podatke.

U gornjim smo razmatranjima pretpostavili da je poznata diferencijalna jednadžba sustava i njezino rješenje. Nije potrebno isticati trud koji je potreban da se dođe do rješenja, a često se do rješenja i ne može doći. No pronađene su posredne metode da se ispitivanje stabilnosti pojednostavni. Sve te metode, bez obzira da li su analitičke ili grafičke, svode se na to da **svi korijeni karakteristične jednadžbe sustava moraju ležati na lijevoj polovini s-ravnine.**

8.3.2. Hurwitzov kriterij stabilnosti

Hurwitzov kriterij stabilnosti polazi od **karakteristične jednadžbe zatvorenog regulacijskog kruga.** To je analitička metoda, gdje se **pomoću koeficijenata jednadžbe zaključuje o apsolutnoj stabilnosti.** Karakterističnu jednadžbu (2-23) možemo pisati u obliku:

$$a_n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)=0, \qquad (8\text{-}44)$$

[1] Treba upozoriti da pojava ograničenih oscilacija u nelinearnom sustavu nije istovjetna s oscilacijama u linearnom sustavu, iako je vremenski tok zavisne varijable veoma sličan. Vidi odjeljak 13.3.

gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ korijeni jednadžbe. Korijeni s pozitivnim realnim dijelom imaju jedan od oblika:

$$\lambda_{12}=\sigma\pm j\omega,$$
$$\lambda_3=\sigma, \tag{8-45}$$

koji uvršteni u jednadžbu (8-44) daju slijedeće faktore:

$$(\lambda^2-2\sigma\lambda+\sigma^2+\omega^2)$$
$$(\lambda-\sigma). \tag{8-46}$$

Naprotiv, korijeni s negativnim realnim dijelom:

$$\lambda_{12}=-\sigma\pm j\omega,$$
$$\lambda_3=-\sigma, \tag{8-47}$$

daju uvršteni u jednadžbu (8-44) slijedeće faktore:

$$(\lambda^2+2\sigma\lambda+\sigma^2+\omega^2)$$
$$(\lambda+\sigma) \tag{8-48}$$

U prvom se slučaju u karakterističnoj jednadžbi (2-23) pojavljuju negativni koeficijenti, a u drugom su slučaju svi koeficijenti pozitivni. To je npr. i uvjet stabilnosti sustava što ga opisuje diferencijalna jednadžba (2-22).

Može se postaviti još jedan jednostavan uvjet. Naime, na granici stabilnosti prelaze prigušene oscilacije u raspirene, pa se pojavljuju neprigušene oscilacije konstantne amplitude. Ako takve oscilacije označimo eksponencijalnim oblikom $x_i=X_i e^{j\omega t}$ i uvrstimo u diferencijalnu jednadžbu (2-22), dobivamo:

$$\ldots a_4\omega^4-ja_3\omega^3-a_2\omega^2+ja_1\omega+a_0=0. \tag{8-49}$$

Ta je jednadžba identički jednaka nuli, ako su i realni i imaginarni dio jednaki nuli:

$$\ldots +a_4\omega^4-a_2\omega^2+a_0=0,$$
$$\ldots +a_5\omega^4-a_3\omega^2+a_1=0. \tag{8-50}$$

Iz jedne od tih jednadžbi možemo izlučiti ω i uvrstiti u drugu jednadžbu. Tako ćemo dobiti samo odnos između koeficijenata, koji vrijedi u slučaju granične stabilnosti. Iz jednadžbe trećega reda:

$$a_3\frac{\mathrm{d}^3x_i}{\mathrm{d}t^3}+a_2\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}+a_0x_i=0 \tag{8-51}$$

dobit ćemo:

$$-a_2\omega^2+a_0=0,$$
$$-a_3\omega^2+a_1=0, \tag{8-52}$$

i dalje:

$$a_1-a_3\frac{a_0}{a_2}=a_1a_2-a_0a_3=0. \tag{8-53}$$

To vrijedi i za jednadžbe višega reda, pri čemu se služimo omjerima koeficijenata za frekvenciju ω kod jednadžbi nižega reda.

Upravo navedeni uvjeti za stabilnost sustava pokazuju postupak što ga je primijenio A. Hurwitz pri određivanju kriterija stabilnosti[1]. Ako determinante i subdeterminante sustava postavimo prema obrascu:

$$\begin{array}{l|llll|} H_1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \ \cdots \\ H_2 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ H_3 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ H_4 & 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{array} \tag{8-54}$$

onda Hurwitzov kriterij kazuje da je nužan i dovoljan uvjet da svi korijeni karakteristične jednadžbe imaju realne negativne dijelove ako su svi koeficijenti a_i sustava i sve dijagonalne subdeterminante H_i veće od nule.

Tako prve tri subdeterminante imaju slijedeće oblike:

$$H_1=a_{n-1}, \quad H_2=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad H_3=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}. \tag{8-55}$$

Primjer 8.2. Treba ustanoviti da li karakteristična jednadžba:

$$\lambda^3+8\lambda^2+14\lambda+24=0$$

predstavlja stabilan ili nestabilan sustav. Svi koeficijenti jednadžbe veći su od nule, a isto su tako i subdeterminante veće od nule:

$$H_1=8, \quad H_2=\begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{vmatrix}=88, \quad H_3=\begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}=2112.$$

Prema tome, sustav je stabilan.

Primjer 8.3. Kod sustava kojeg karakteristična jednadžba ima oblik:

$$\lambda^2+K\lambda+2K-1=0$$

postavlja se pitanje koliko se može mijenjati vrijednost koeficijenta K da bi sustav bio stabilan? Vrijednost je subdeterminanata:

$$H_1=K, \quad H_2=\begin{vmatrix} K & 0 \\ 1 & 2K-1 \end{vmatrix}=K(2K-1).$$

Budući da H_1 i H_2 moraju biti veće od nule, proizlazi da K mora ležati između 0 i $(2K-1)>0$, odnosno da je $K>0{,}5$.

Prednost je dakle Hurwitzova kriterija u tome što nije potrebno poznavati rješenje diferencijalne jednadžbe da bi se ustanovila apsolutna stabilnost, već treba poznavati samo koeficijente karakteristične jednadžbe.

[1] Hurwitz., A., Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativ reelen Teilen besitzt, Math. Ann. 46, 1895, str. 273–284.

Određivanje stabilnosti sustava pomoću Hurwitzova kriterija ima nekoliko nedostataka:

— mora biti poznata diferencijalna jednadžba, što u procesima često nije moguće;
— određuje se samo apsolutna stabilnost, a o relativnoj stabilnosti nema informacija, iako je ona u projektiranju i te kako važna;
— ne može se odrediti utjecaj pojedinih elemenata i sklopova na stabilnost sustava;
— teško je obraditi sustave s mrtvim vremenom, a oni se često pojavljuju u procesima.

8.3.3. Routhov kriterij stabilnosti

Određivanje stabilnosti pomoću Hurwitzova kriterija nije prikladno za sustave koji su viši od četvrtoga reda jer izračunavanje većih subdeterminanata postaje teško. U takvim slučajevima bolje je upotrijebiti Routhov kriterij, kojeg je analitička metoda u biti slična Hurwitzovu kriteriju, ali sa znatno **pojednostavnjenim proračunima.**

Prema Routhovu postupku[1], najprije razvrstamo u dva reda koeficijente karakteristične jednadžbe (2-22) traženog sustava:

$$\begin{array}{c|cccc} R_n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ R_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ . & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ . & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \end{array} \tag{8-56}$$

Ispod njih pripišemo članove $b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$, koje ćemo dobiti unakrsnim množenjem članova iz dva prethodna reda prema obrascima:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}\,a_{n-2} - a_n\,a_{n-3}}{a_{n-1}}, \qquad b_2 = \frac{a_{n-1}\,a_{n-4} - a_n\,a_{n-5}}{a_{n-1}},$$

$$c_1 = \frac{b_1\,a_{n-3} - a_{n-1}\,b_2}{b_1}, \qquad c_2 = \frac{b_1\,a_{n-5} - a_{n-1}\,b_3}{b_1}, \tag{8-57}$$

što se prema istom obrascu nastavlja i za članove slijedećih redova. Ako koji koeficijent u karakterističnoj jednadžbi manjka, umjesto njega stavimo nulu. U skladu s obrascima (8-57), u svakom slijedećem redu Routhova rasporeda sve je manje članova, a u posljednja dva reda nalazi se samo jedan član. Ako se ispituje diferencijalna jednadžba n-tog reda, Routhov raspored sadrži $(n+1)$ redova.

Prema Routhovu kriteriju nužan je i dovoljan uvjet da svi korijeni karakteristične jednadžbe imaju realne negativne dijelove, ako svi članovi u prvom stupcu Routhova rasporeda imaju isti predznak. Inače je broj korijena s pozitivnim realnim dijelovima jednak broju promjena predznaka.

Ako pri izračunavanju slijednih članova $b_i, c_i, \dots$ razlomci postanu neprikladni za računanje, možemo bilo koji red Routhova rasporeda pomnožiti nekim pozitivnim brojem, a da kriterij ostane zadovoljen.

[1] Routh, E. J., A treatise on the stability of a given state of motion, Adams Price Essay, 1877.

Primjer 8.4. Uzmimo sustav opisan diferencijalnom jednadžbom kojeg je karakteristična jednadžba:

$$\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda+12=0.$$

Prema obrascima (8-57) izračunamo vrijednosti slijedećih članova:

$$b_1=\frac{a_2a_1-a_3a_0}{a_2}=\frac{2\cdot4-1\cdot12}{2}=-2, \quad b_2=0,$$

$$c_1=\frac{b_1a_0-a_2b_2}{b_1}=\frac{(-2)12-2\cdot0}{-2}=12, \quad c_2=0.$$

Iz Routhova rasporeda, kojeg prva dva reda sadrže koeficijente diferencijalne jednadžbe:

R_3	1	4
R_2	2	12
R_1	-2	
R_0	12	

možemo ustanoviti da je sustav nestabilan: budući da su dvije promjene predznaka u prvom stupcu (2 na -2, -2 na 12), postoje dva pozitivna korijena.

U sintezi je često potrebno da neki parametar u karakterističnoj jednadžbi moramo mijenjati kako bismo postigli optimalne uvjete rada. Najčešće se radi o pojačanju K. Na osnovi zahtjeva da svi članovi u prvom stupcu Routhova rasporeda treba da budu veći od nule, dobivamo nejednakosti koje određuju dozvoljeno područje promjene parametra. To ćemo vidjeti u slijedećem primjeru.

Primjer 8.5. Prijenosna je funkcija nekog servomehanizma:

$$G(s)=\frac{K(s+2)}{s(s+4)(s^2+3s+2)+K(s+2)}.$$

Na osnovi karakteristične jednadžbe te prijenosne funkcije:

$$s^4+7s^3+14s^2+(8+K)s+2K=0$$

pravimo Routhov raspored:

R_4	1	14	$2K$
R_3	7	$8+K$	
R_2	$\frac{90-K}{7}$	$\frac{14K}{7}$	
	$90-K$	$14K$	
R_1	$\frac{(90-K)(8+K)-98K}{90-K}$		
	$(90-K)(8+K)-98K$		
R_0	$14K$		

Radi lakšeg proračuna pomnožili smo red R_2 sa 7, a red R_1 sa $(90-K)$. Kako svi koeficijenti u prvom stupcu treba da budu veći od nule, dobit ćemo slijedeće uvjete:

red $R_2: 90-K>0 \rightarrow K<90$

red $R_1: -K^2-16K+720>0 \rightarrow -36<K<20$

red $R_0: 14K>0 \rightarrow K>0.$

Iz tih uvjeta proizlazi da pojačanje servomehanizma mora biti u granicama $0<K<20$ kako bi sustav bio stabilan.

Postoje dva posebna slučaja kod Routhova kriterija koja zahtijevaju da se gornji postupak nešto modificira. Prvi je slučaj kad je jedan član u prvom stupcu jednak nuli, a drugi kad su članovi cijelog reda R_i jednaki nuli. Oba su slučaja više teorijska i rijetko se pojavljuju u praksi. Postupak ćemo objasniti na dva konkretna primjera iz kojih ćemo vidjeti da je u oba slučaja sustav nestabilan.

Primjer 8.6. U karakterističnoj jednadžbi sustava:

$$\lambda^4+3\lambda^2+\lambda+2=0$$

koeficijent člana λ^3 jednak je nuli. Umjesto nule stavimo u Routhov raspored mali pozitivni broj ϵ:

R_4	1	3	2
R_3	ϵ	1	
R_2	$\frac{3\epsilon-1}{\epsilon}$	2	
R_1	1		
R_0	1		

Pustivši da $\epsilon \rightarrow 0$, prvi član u redu R_2 teži $-\infty$, pa se pojavljuju dvije promjene predznaka.

Kada bi se u trećem ili četvrtom retku prvog stupca pojavila nula, to bi značilo posve poseban raspored vrijednosti koeficijenata karakteristične jednadžbe; to je sasvim mala vjerojatnost.

Primjer 8.7. Na osnovi karakteristične jednadžbe:

$$\lambda^4-3\lambda^2-10=0,$$

gdje su koeficijenti članova λ^3 i λ jednaki nuli, postavimo Routhov raspored:

R_4	1	-3	-10
R_3	0	0	

U redu R_3 svi su članovi jednaki nuli. Treba da uzmemo derivaciju polinoma iz reda koji prethodi redu s nulama, što je u ovom primjeru red R_4:

$$\frac{d}{dt}(\lambda^4-3\lambda^2-10)=4\lambda^3-6\lambda,$$

pa na osnovi novih koeficijenata 4 i -6 obrazujemo novi red R_3, a daljnje redove izračunamo po normalnom postupku:

R_4	1	-3	-10
R_3	4	-6	
R_2	$-\frac{3}{2}$	-10	
R_1	$-\frac{98}{3}$		
R_0	-10		

Kako je u prvom stupcu jedna promjena predznaka (4 na $-3/2$), sustav je nestabilan. Zapravo, u ovom jednostavnom primjeru lako ćemo uočiti da rastavljanjem karakteristične jednadžbe na faktore:

$$\lambda^4-3\lambda^2-10=(\lambda^2+2)(\lambda^2-5)=0$$

dobivamo jedan pozitivan realan korijen $\sqrt{5}$. Iz polaznog Routhova rasporeda nadalje vidimo da se nule u drugom retku R_3 pojavljuju onda kad imamo čisto imaginarne korijene. U ovom primjeru to su $\pm j\sqrt{2}$.

I u ovom slučaju možemo ustanoviti da je pojava samih nula u trećem ili četvrtom retku malo vjerojatan raspored vrijednosti koeficijenata karakteristične jednadžbe.

Spomenimo na kraju i povezanost Routhova i Hurwitzova kriterija. Uvjet u Routhovu kriteriju da članovi prvog stupca $b_1, c_1, \ldots$ iz izraza (8-56) moraju biti veći od nule identičan je zahtjevu u Hurwitzovu kriteriju da subdeterminante $H_2, H_3, \ldots$ u izrazu (8-55) moraju biti veće od nule.

Iz gornjeg izlaganja jasno je da za upotrebljivost Routhova kriterija vrijede iste primjedbe kao i za Hurwitzov kriterij.

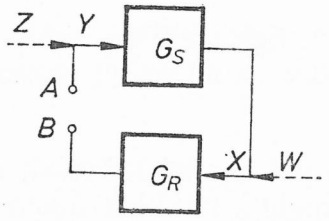
8.3.4. Nyquistov kriterij stabilnosti

Da bi dokazao stabilnost zatvorenog regulacijskog kruga, Nyquistov kriterij stabilnosti polazi od **polarne krivulje otvorenog regulacijskog kruga.** To je prvenstveno grafička metoda koja je naročito prikladna za eksperimentalno snimljene frekvencijske odzive sklopova u regulacijskom krugu. Taj je kriterij H. Nyquist najprije uveo u teoriju povratne veze kod elektroničkih pojačala[1], a kasnije se njegova primjena proširila na regulacijske sustave.

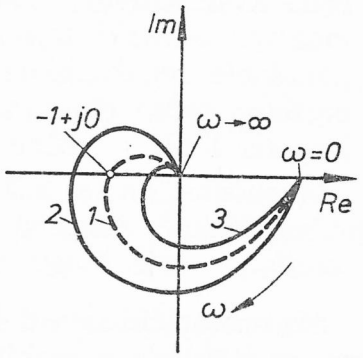
[1] Nyquist, H., Regeneration Theory. Bell Syst. Tech. J., 11 (1932), str. 126–147.

Fizikalni prikaz Nyquistova kriterija. U odjeljku 8.1. definirali smo prijenosnu funkciju otvorenog regulacijskog kruga i spomenuli njezino značenje u određivanju stabilnosti zatvorenog kruga. Na sl. 8—11 nacrtan je »otvoreni« krug s ulazom A i izlazom B (prekinuta veza). Zamislimo u točki A pobudu u obliku sinusne funkcije $A \sin \omega t$; prolaskom kroz serijski spojene blokove G_S i G_R ulazna se funkcija amplitudno i fazno izmijeni. Ako je oblik neke frekvencije u točki B takav da joj je amplituda ista kao na ulazu, dok fazni pomak iznosi $-180°$ — što odgovara točki $(-1+j0)$ na Nyquistovu dijagramu — onda će uz točku invertiranja, koja je prisutna u regulacijskom krugu i koja također zakreće signal za $-180°$, odziv u točki B biti i po amplitudi i po fazi jednak pobudnom signalu u točki A. Uz takve odnose u krugu možemo nadalje zamisliti da su točke A i B spojene (što u stvarnosti i jesu), pa je logičan zaključak da bi u tom slučaju sinusni signal u zatvorenom krugu sam sebe podržavao. Naime, zbog uvijek prisutnih poremećaja koji se prema Fourierovu integralu mogu rastaviti u kontinuirani frekvencijski spektar, naći će se uvijek i frekvencija kod koje u krugu mogu nastupiti spomenuti uvjeti, tako da nastaju oscilacije.

To vidimo i na polarnoj krivulji otvorenog kruga na sl. 8—12 koja predstavlja sustav trećega reda. Polarna krivulja 1 prolazi upravo kroz točku $(-1+j0)$, što znači da je sinusna funkcija prolaskom kroz otvoreni krug ostala s amplitudom 1 i s faznim pomakom od $-180°$. To je granična nestabilnost. Polarna krivulja 2 predstavlja također nestabilan sustav, jer joj je kod faznog pomaka od $-180°$ amplituda čak i veća od kritične granice: to je apsolutna nestabilnost. Obratno, polarna krivulja 3 predstavlja relativno stabilan sustav, jer je uz fazni pomak od $-180°$ amplituda manja od jedan.



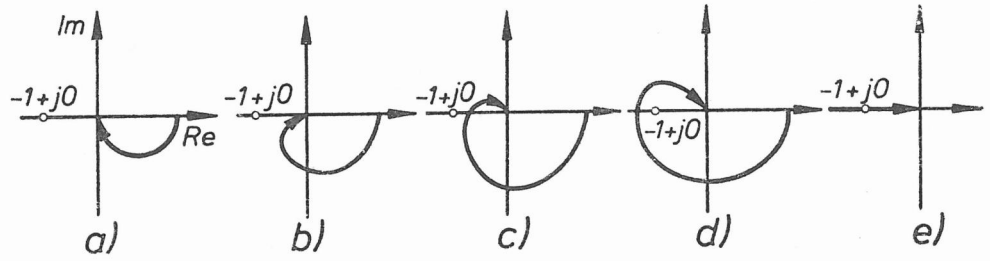
Sl. 8—11. Otvoreni regulacijski krug s prekinutom vezom između točaka A i B.



Sl. 8—12. Polarne krivulje sustava trećega reda u Nyquistovu dijagramu

Na osnovi ovog fizikalnog razmatranja možemo Nyquistov kriterij jednostavno definirati: zatvoreni regulacijski krug stabilan je, ako polarna krivulja otvorenog regulacijskog kruga obilazi u smjeru rastućih frekvencija kritičnu točku $(-1+j0)$ s desne strane. To ćemo najprije vidjeti na nekoliko jednostavnih polarnih krivulja prema sl. 8—13. Na sl. 8—13a i 8—13b prikazana je polarna krivulja P-sustava prvoga i drugoga reda koji su uvijek strukturno stabilni. Na sl. 8—13c i 8—13d vidimo polarne krivulje P-sustava trećega reda, od kojih je prvi relativno stabilan, a drugi apsolutno nestabilan. Konačno, I-sustav s dvije integracije prikazane polarnom krivuljom na sl. 8-13e strukturno je nestabilan, jer krivulja prolazi kroz kritičnu točku.

Kasnije, kod matematičkog opisa Nyquistova kriterija, dat ćemo i općenitu definiciju Nyquistova kriterija; pomoću njega možemo odrediti stabilnost sustava s veoma složenom polarnom krivuljom.



Sl. 8—13. Polarne krivulje stabilnih i nestabilnih sustava

Ponekad se kao kritična točka u Nyquistovu dijagramu uzima $(1+j0)$, pri čemu se u seriju uključuje i točka invertiranja regulacijskog kruga. Očigledno je da i tim pristupom dolazimo do analognih rezultata u pogledu stabilnosti regulacijskog kruga.

Već iz ovog sasvim općenitog fizikalnog prikaza možemo uočiti znatne prednosti Nyquistova kriterija pri određivanju stabilnosti:

- ne moramo poznavati ni diferencijalnu jednadžbu sustava, ni rješenje, već polarne krivulje možemo snimiti pokusom ili konstruirati pomoću poznatih prijenosnih funkcija pojedinih sklopova i elemenata,
- uz apsolutnu stabilnost možemo odrediti i relativnu stabilnost, pa možemo prići kvantitativnoj analizi i projektiranju,
- možemo odrediti utjecaj svakog pojedinog elementa i sklopa na dinamičko ponašanje regulacijskog sustava,
- možemo točno obraditi i sustave s mrtvim vremenom jer im je sinusna prijenosna funkcija točno postavljena.

Mogućnost da se radi s otvorenim krugom koji je uvijek stabilan važna je i u praksi. Naime, pokusom se mogu dobiti potrebni podaci a da nema opasnosti od oscilacija koje mogu ugroziti ispitivani sustav.

Matematički izvod Nyquistova kriterija. Kao i pri analizi točnosti, naša ćemo razmatranja o stabilnosti regulacijskog kruga temeljiti na blok-dijagramu prema sl. 8-8, gdje je $G_0(s)$ prijenosna funkcija otvorenog kruga, a povratna je veza jedinična. Dakako da se analiza stabilnosti može poopćiti i na složene krugove.

Napišimo još jednom ukupnu prijenosnu funkciju zatvorenog kruga:

$$G(s)=\frac{X(s)}{W(s)}=\frac{G_0}{1+G_0}. \tag{8-15}$$

Nyquistov kriterij zasniva se na grafičkom prikazu prijenosne funkcije otvorenog kruga $G_0(s)$. Zato funkciju najprije raščlanjujemo u umnožak faktora:

$$G_0(s)=K'G_0'(s)=K'\frac{(s-n_1')(b-n_2')\ldots(s-n_m')}{(s-p_1')(s-p_2')\ldots(s-p_n')}=K'\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-n_i')}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')}. \tag{8-58}$$

Korijeni brojnika n_i' nazivaju se nultočke, a korijeni nazivnika p_i' polovi od $G_0(s)$. K' je konstanta koja ostaje nakon što je funkcija $G_0'(s)$ dana u obliku faktora polova i nultočaka, $(s+a)$. Tu konstantu nazivamo jednostavno prijenosni omjer ili pojačanje[1]. Moramo se međutim sjetiti da smo tako nazvali i konstantu K koja ostaje nakon što se funkcija $G_0'(s)$ razloži u oblik faktora vremenskih konstanti $(1+\tau s)$, što je uobičajeno u frekvencijskom odzivu.

U jednadžbi (8-15) nazivnik $(1+G_0)$ određuje dinamičko ponašanje sustava. Ako u njega uvrstimo $G_0(s)$ iz izraza (8-58), dobivamo:

$$1+G_0(s)=1+K'\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-n_i')}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')}=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')+K'\prod_{i=1}^{m}(s-n_i')}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')}. \tag{8-59}$$

Kako je u pravilu $n>m$, možemo polinom brojnika prikazati u obliku umnoška faktora:

$$1+G_0(s)=\frac{(s-n_1)(s-n_2)\ldots(s-n_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-n_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}. \tag{8-60}$$

Sada su p_i polovi, a n_i nultočke od $(1+G_0)$. Polovi p_i od $(1+G_0)$ ujedno su i polovi p_i od G_0, a nultočke n_i od $(1+G_0)$ složene su funkcije polova p_i' i nultočaka n_i', kao i pojačanja K' od $G_0(s)$. Karakterističnu jednadžbu zatvorenog kruga možemo pisati i u obliku umnoška faktora korijena:

$$1+G_0(s)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=0. \tag{8-61}$$

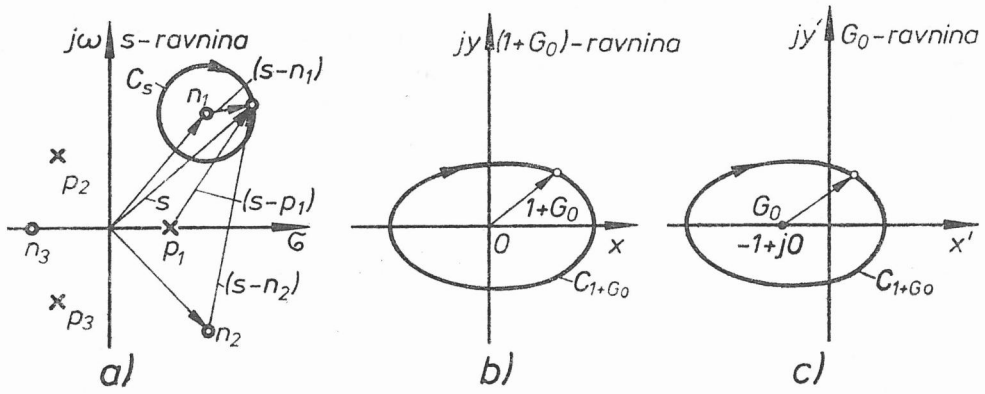
Uspoređenjem jednadžbi (8-60) i (8-61) vidimo da su nultočke n_i ujedno i korijeni λ_i karakteristične jednadžbe sustava.

Bit Nyquistova kriterija sastoji se u tome što se prema obliku polarne krivulje u Nyquistovu dijagramu zaključuje da li postoje nultočke n_i, odnosno polovi p_i, na imaginarnoj osi ili u desnoj polovini s-ravnine. Pri tome su bitne nultočke, a polovi, iako ne pridonose nestabilnosti sustava, ipak mijenjaju oblik polarne krivulje $1+G_0(j\omega)$.

Ispitivanje stabilnosti pomoću Nyquistova kriterija ograničeno je na linearne vremenski invarijantne sustave koji su predstavljeni prijenosnom funkcijom. Osim toga, sklopovi obuhvaćeni u prijenosnoj funkciji otvorenog kruga $G_0(s)$ moraju biti stabilni sami po sebi, što znači da u jednadžbi (8-52) mora vrijediti da je $n>m$.

Pojednostavnjeni matematički izvod Nyquistova kriterija započinjemo promatranjem razmještaja nultočaka i polova od $1+G_0(s)$ u desnoj polovini Gaussove ravnine, koju ćemo prikladnije nazvati i s-ravninom jer su joj koordinatne osi $\mathrm{Re}[s]=\sigma$ i $j\mathrm{Im}[s]=j\omega$. Na sl. 8—14a uneseni su u s-ravninu nultočke n_i i polovi p_i funkcije $1+G(s)$. **Umjesto da proučavamo položaj svake pojedine točke u desnoj polovini ravnine, prikladnije je da proučavamo čitavo područje, odnosno konturu koja ga okružuje.** Zato je uz nultočke i polove

[1] Vidi jednadžbu (3—18) i pripadajući tekst.



Sl. 8—14. Konformno preslikavanje polova i nultočka iz s-ravnine (a) u $(1+G_0)$-ravninu (b) te u G_0-ravninu (c).

ucrtana — za sada proizvoljno odabrana i ograničena — kontura C_s koja okružuje nultočku n_1 u desnoj polovini ravnine, a na toj konturi — također proizvoljno odabrana točka s. Kako su n_i, p_i i s kompleksne veličine, svaka je prikazana verzorom u s-ravnini. Nacrtane su i njihove razlike $(s-n_1)$, $(s-n_2)$ i $(s-p_1)$[1].

Gibanje verzora s po konturi C_s u smislu gibanja kazaljke na satu prouzrokuje i odgovarajuće gibanje verzora $(s-n_1)$, $(s-n_2)$ i $(s-p_1)$. Pri punom zakretu verzora s po konturi C_s verzor $(s-n_1)$ zakrenuo se za kut od 360°, dok su ostala dva verzora izvela samo njihanje, pa je njihov konačan kutni zakret 0°.

Slijedeći je korak **konformno preslikavanje** konture u desnoj polovini s-ravnine u $(1+G_0)$-ravninu na sl. 8—14b, koje su koordinatne osi Re $[1+G_0]=x$ i $j\text{Im}\,[1+G_0]=jy$. To se vrši pomoću relacije (8-60), koju — budući da se radi o kompleksnim veličinama — možemo pisati u polarnom obliku:

$$1+G_0(s)=|1+G_0(s)|e^{j\varphi}. \tag{8-62}$$

To možemo rastaviti u dvije jednadžbe modula i argumenta:

$$|1+G_0(s)|=\frac{|s-n_1|\,|s-n_2|\ldots|s-n_n|}{|s-p_1|\,|s-p_2|\ldots|s-p_n|},$$
$$\varphi=\underline{/\,1+G_0(s)}=\underline{/\,s-n_1}+\underline{/\,s-n_2}+\ldots+\underline{/\,s-n_n}-\underline{/\,s-p_1}- \tag{8-63}$$
$$-\underline{/\,s-p_2}-\ldots-\underline{/\,s-p_n}.$$

Verzor s u s-ravnini preslikava se u verzor $(1+G_0)$ u $(1+G_0)$-ravnini. Zakretanju vrha verzora s po konturi C_s oko nultočke n_1 u s-ravnini odgovara zakretanje vrha verzora $(1+G_0)$ po konturi C_{1+G_0} **oko ishodišta** u $(1+G_0)$-ravnini. Naime, iz jednadžbi (8-63) vidimo da se kod zakretanja od 360° modul verzora $|1+G_0|$ može donekle mijenjati oko početne vrijednosti, ali se njegov argument $\underline{/1+G_0}$ zakrenuo za 360° **u smislu gibanja kazaljke na satu.** Konture C_s i C_{1+G_0} srodne su u toliko što kod konformnog preslikavanja diferencijalne površine ostaju slične time da se razlikuju samo u mjerilu i u kutu zakreta u odnosu prema koordinatnim osima (pravilo o očuvanju kutova).

[1] Treba paziti na smjer verzora; tako je npr. $s=n_1+(s-n_1)$, što jasno ukazuje na smjer od $(s-n_1)$.

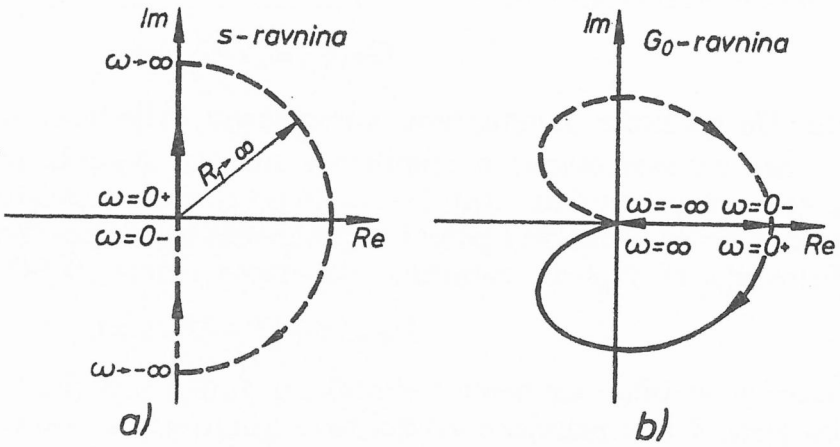
Zamislimo sada da povećavamo konturu C_s u s-ravnini tako da obuhvati još jednu nultočku n_2. Verzor $(1+G_0)$ sada će se zakrenuti za 720°, čemu pridonosi pun zakret i verzora $(s-n_1)$ i verzora $(s-n_2)$. Ako se konturom C_s dodatno obuhvati i jedan pol p_1, njegov se argument $\underline{/s-p_1}=360°$ — prema jednadžbi (8-63) — odbija od ukupnog kutnog zakreta verzora $(1+G_0)$. Znači da postojanje pola unutar konture C_s djeluje tako da se verzor $(1+G_0)$ zakrene za 360° u **suprotnom smislu od gibanja kazaljke na satu.**

Gornja razmatranja možemo matematički formulirati u poopćenom obliku:

$$N=N_n-N_p, \tag{8-64}$$

tj. broj punih zaokruženja N konture C_{1+G_0} u smislu gibanja kazaljke na satu oko ishodišta u $(1+G_0)$-ravnini odgovara razlici broja nultočaka N_n i polova N_p od funkcije $(1+G_0)$ koji su zaokruženi konturom C_s u s-ravnini kad se njome prolazi također u smislu gibanja kazaljke na satu.

Kako obično polazimo od $G_0(s)$, koja je u obliku umnoška faktora, a faktore nultočaka brojnika od $1+G_0(s)$ tek moramo izračunati, mnogo je povoljnije da s-ravninu preslikamo u G_0-ravninu. To vrlo jednostavno postižemo pomakom ishodišta u $(1+G_0)$-ravnini za $+1$. Tako dobivamo G_0-ravninu prema sl. 8—14c, koje su koordinatne osi $\mathrm{Re}\,[G_0]=x'$ i $\mathrm{Im}\,[G_0]=jy'$. Kontura C_{G_0} istog je oblika kao i kontura C_{1+G_0}, ali sada obuhvaća točku $(-1+j0)$.



Sl. 8—15. Konformno preslikavanje desne polovine s-ravnine (a) u površinu omeđenu Nyquistovom konturom u G_0-ravnini (b).

Ako konturu povećamo tako da obuhvati cijelu desnu polovinu s-ravnine, uključujući i $j\omega$-os, ona **obuhvaća sve nultočke i polove s pozitivnim realnim dijelovima,** a naziva se i **Nyquistova kontura.** Prema sl. 8—15a, ona prolazi duž imaginarne osi od $-\infty$ do ∞, a zatim preko polukružnice s polumjerom ∞ zatvara desnu polovinu ravnine. Dio duž imaginarne osi matematički prikazujemo tako što u izrazu za $G_0(s)$ s zamjenjujemo sa $j\omega$, a zatim pustimo da ω uzima sve vrijednosti od $-\infty$ do ∞. Točke duž polukružnice polumjera ∞ ne moramo uzeti u obzir, jer kad $s\to\infty$ kod realnih sustava mora vrijediti $G_0(s)=0$. Prema tome, zakretanje verzora G_0 događa se kad se s giba duž imaginarne osi. **Polarna krivulja u G_0-ravnini preslikana je pozitivna imaginarna os u s-ravnini.** Zbog svojstava konformnog preslikavanja područje desno od imaginarne osi u s-ravnini preslika se **desno od polarne krivulje** u G_0-ravnini.

Na sl. 8—15b preslikana je kontura $G_0(s)$ servomehanizma tipa 0 predočenog izrazom:

$$G_0(s)=\frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}. \tag{8-65}$$

Najprije zamijenimo s sa $j\omega$, pa dobivamo frekvencijski odziv od G_0:

$$G_0(j\omega)=\frac{K}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}. \tag{8-66}$$

Odgovarajuća krivulja za realne frekvencije ω od $0+$ do ∞ na sl. 8—15a i polarna krivulja na sl. 8—15b nacrtane su izvučenom linijom.

Slijedeći je korak da preslikamo polukružnicu $s=R_1e^{j\varphi}$ u s-ravnini, pri čemu se φ mijenja od 90° preko 0° do −90°. To stavimo u izraz (8-66):

$$G_0(s)=\lim_{R_1\to\infty}\frac{K}{(1+\tau_1 Re^{j\varphi})(1+\tau_2 Re^{j\varphi})}\simeq\lim_{R_1\to\infty}\frac{K}{\tau_1\tau_2 R^2e^{j2\varphi}} \tag{8-67}$$

i dobijemo točku u ishodištu G_0-ravnine.

Konačno, isprekidani dio konture duž negativne imaginarne osi na sl. 8—15a, za ω od $-\infty$ do $0-$, zrcalno je preslikana polarna krivulja u odnosu na realnu os na sl. 8-15b, jer vrijedi relacija:

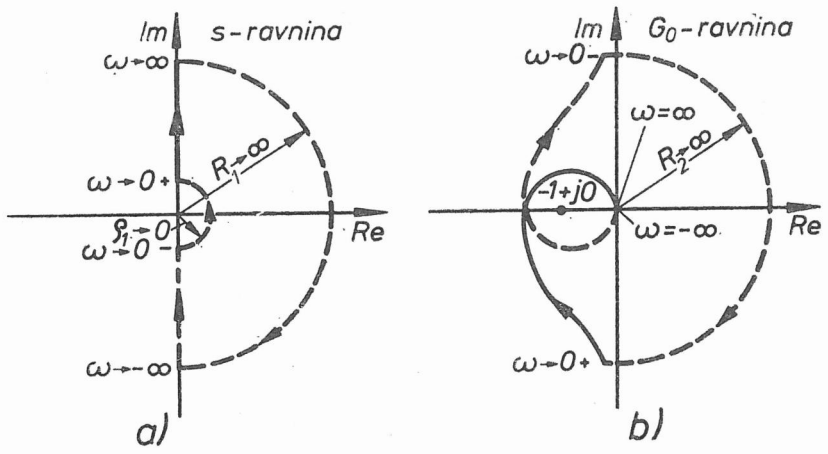
$$G_0(-j\omega)=\bar{G}_0(j\omega), \tag{8-68}$$

gdje $\bar{G}_0$ označuje konjugirano kompleksnu vrijednost od G_0.

Što se tiče ocjene o stabilnosti sustava, Nyquistova kontura u G_0-ravnini ne zaokružuje kritičnu točku $(-1+j0)$ gibajući se u smislu kazaljke na satu. Prema tome je $N=0$. Kako su i polovi od G_0 prema jednadžbi (8-66) s negativnim realnim dijelovima, tj. $N_p=0$, dobivamo na osnovi uvjeta (8-64):

$$N_n=N+N_p=0+0=0. \tag{8-69}$$

Sustav je stabilan jer nema nultočaka u desnoj polovini s-ravnine. To je uostalom bilo jasno i bez primjene Nyquistova kriterija, jer sustavi drugoga reda s prigušenjem ne mogu biti apsolutno nestabilni.



Sl. 8—16. Konformno preslikavanje prijenosne funkcije s polom u ishodištu

Ako prijenosna funkcija otvorenog kruga G_0 sadrži u nazivniku član s^n, pojavljuje se n polova u ishodištu s-ravnine. Budući da pol ne može uzrokovati nestabilnost, nije važno da ga obuhvatimo u Nyquistovoj konturi, pa se kontura duž imaginarne osi promijeni na način prikazan na sl. 8—16a. Oko ishodišta kontura opiše polukružnicu malog promjera r koji teži nuli.

Uzimamo primjer servomehanizma tipa 1 s prijenosnom funkcijom otvorenog kruga G_0:

$$G_0(s)=\frac{K}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}. \tag{8-70}$$

Zamjenom $s\to j\omega$ dobivamo frekvencijski odziv:

$$G_0(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}. \tag{8-71}$$

Za vrijednosti ω od $0+$ do ∞ na sl. 8—16a vrijedi također dio izvučene konture u G_0-ravnini na sl. 8—16b. Za vrijednosti od ω duž polumjera $s=R_1e^{j\varphi}$ u s-ravnini dobivamo na osnovi jednadžbe (8-70):

$$G_0(s)=\lim_{R_1\to\infty}\frac{K}{R_1e^{j\varphi}(1+\tau_1R_1e^{j\varphi})(1+\tau_2Re^{j\varphi})}\simeq\lim_{R_1\to\infty}\frac{K}{\tau_1\tau_2R_1^3e^{j3\varphi}}, \tag{8-72}$$

pa se polukružnica $R_1\to\infty$ u s-ravnini preslikava u ishodište u G_0-ravnini. Dio konture duž negativne imaginarne osi od $-\infty$ do $0-$ u s-ravnini preslikava se u G_0-ravninu zrcalno u odnosu prema polarnoj krivulji G_0, što je isprekidano prikazano. Konačno, ostaje da se iz s-ravnine preslika polukružnica $s=\rho_1e^{j\varkappa}$ pri čemu $\rho_1\to0$. Fazni se kut ψ mijenja od $-90°$ preko $0°$ do $90°$. Iz jednadžbe (8-70):

$$G_0(s)=\lim_{\rho_1\to0}\frac{K}{\rho_1e^{j\varkappa}(1+\tau_1\rho_1e^{j\varkappa})(1+\tau_2\rho_1e^{j\varkappa})}\simeq\lim_{\rho_1\to0}\frac{K}{\rho_1e^{j\varkappa}} \tag{8-73}$$

vidimo da se u G_0-ravninu preslikava polukružnica polumjera $R_2\to\infty$ s kutom koji se zakreće od $90°$ preko $0°$ do $-90°$.

Iz sl. 8—16b proizlazi da kontura dva puta obuhvaća kritičnu točku $(-1+j0)$, pa je broj zaokruženja $N=2$. Kako je pol u ishodištu izvan konture u s-ravnini, a ni druga dva pola ne leže u desnoj polovini s-ravnine, $N_p=0$. Prema tome, na osnovi jednadžbe (8-64) dobivamo:

$$N_n=N+N_p=2+0=2, \tag{8-74}$$

što upućuje na dvije nultočke u desnoj polovini s-ravnine. Dakle, karakteristična jednadžba ima dva korijena s pozitivnim realnim dijelovima.

Na osnovi dosadašnje analize možemo odrediti **postupak za određivanje stabilnosti pomoću Nyquistova kriterija:**

- započinjemo od polarne krivulje otvorenog regulacijskog kruga $G_0(s)$ u Nyquistovu dijagramu, pri čemu se svi polovi na $j\omega$-osi zaobiđu s malim polukružnicama,
- konstruiramo zrcalnu sliku polarne krivulje u odnosu prema realnoj osi za negativne frekvencije,

— odredimo broj punih zaokruženja N oko kritične točke $(-1+j0)$ dok se prolazi duž proširene polarne krivulje u smjeru rastućih frekvencija,
— iz $G_0(s)$ odredimo broj polova N_p u desnoj polovini s-ravnine: ako je $G_0(s)$ u obliku umnoška faktora, onda jednostavnim prebrojavanjem članova oblika $(1-\tau_1 s)$; ako je u obliku polinoma članova, onda pomoću Routhova kriterija koji daje broj korijena p_i u desnoj polovini s-ravnine iz broja promjena predznaka u prvom stupcu.

Na osnovi tog postupka kao i uvjeta da je:

$$N_n = N + N_p, \tag{8-75}$$

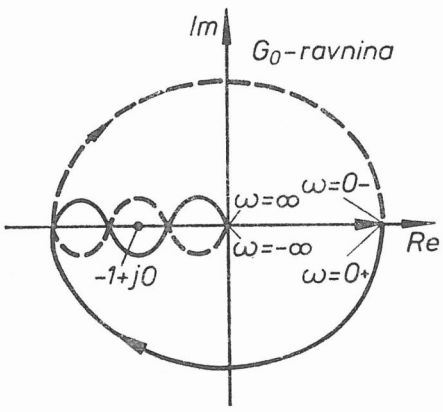
odredimo broj nultočaka N_n u desnoj polovini s-ravnine. Ako je $N_n=0$, zatvoreni regulacijski krug je stabilan, a ako je $N_n \geqslant 1$, on je nestabilan. Dakle, **o stabilnosti zatvorenog regulacijskog kruga zaključujemo na osnovi polarne krivulje otvorenog kruga pomoću Nyquistova kriterija.**

U praksi se uvijek susrećemo sa **stabilnim sklopovima** koji tvore otvoreni regulacijski krug: staza, kompenzator, pojačalo, sami su po sebi stabilni, ali konstruktor osigurava stabilnost i tako što izbjegava povratne veze unutar pojedinih sklopova. To znači da $G_0(s)$ u nazivniku nema članova oblika $(1-\tau_i s)$. Zato u pravilu možemo staviti da je $N_p=0$, pa se Nyquistov uvjet (8-75) pojednostavnjuje na $N_n=N$.

Imajući to na umu, možemo stabilnost sustava jednostavno odrediti iz Nyquistova dijagrama: ako polarna krivulja obilazi kritičnu točku $(-1+j0)$ s lijeve strane u smjeru rastućih frekvencija, sustav je nestabilan. To smo ustanovili već u fizikalnom prikazu na sl. 8—13. To vrijedi samo za jednostavnije polarne krivulje. Ako imamo npr. prijenosnu funkciju otvorenog kruga $G_0(s)$ višega reda:

$$G_0(s) = \frac{K(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{s(1+\tau_3 s)(1+\tau_4 s)(1+\tau_5 s)(1+\tau_6 s)}, \tag{8-76}$$

onda da bismo sagledali stabilnost sustava, moramo nacrtati zrcalnu polarnu krivulju. Na Nyquistovu dijagramu na sl. 8—17 ucrtan je i izvučeni dio polarne krivulje za realne frekvencije kao i isprekidana zrcalna polarna krivulja. Sustav je stabilan, jer polarna krivulja obilazi kritičnu točku $(-1+j0)$ s desne strane. Na ovom primjeru vidimo ujedno da mijenjanjem pojačanja K — čime mijenjamo mjerilo krivulje — možemo postići da sustav postane nestabilan ne samo povećanjem već i smanjenjem K. To je uvjetno stabilan sustav.

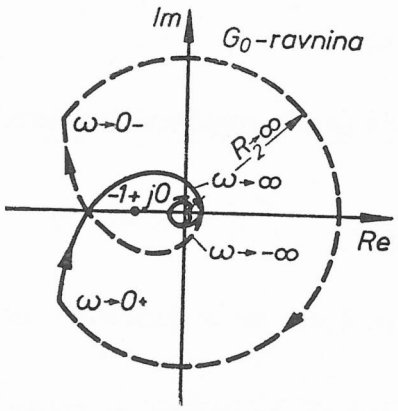


Sl. 8—17. Određivanje stabilnosti u Nyquistovu dijagramu

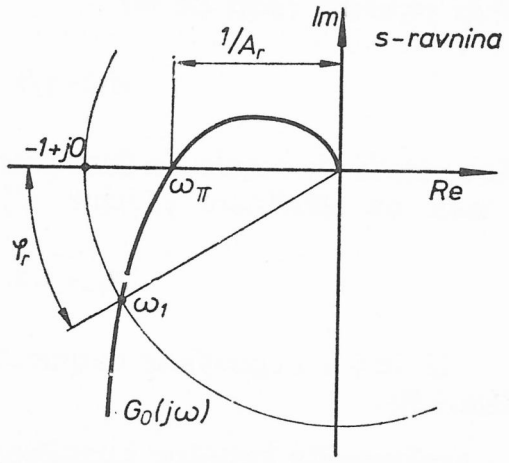
Ovi se izvodi temelje na sustavima koji se mogu opisati algebarskim polinomima oblika (8-62). Iako je to matematički znatno zamršenije, Nyquistov se kriterij može dokazati i za sustave koji imaju prijenosne funkcije transcendentnog oblika, kao što su npr. sustavi s mrtvim vremenom. Tako npr. sustav s mrtvim vremenom i integralnim kašnjenjem drugoga reda ima prijenosnu funkciju:

$$G_0(s)=\frac{Ke^{-\tau_m s}}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}, \tag{8-77}$$

koje je polarna krivulja prikazana na Nyquistovu dijagramu na sl. 8—18. Vidimo karakterističnо približavanje ishodištu kad $\omega\to\infty$ u obliku prigušene spirale. Uspoređujući tu krivulju s polarnom krivuljom servomehanizma tipa 1 prema sl. 8—16, opažamo da se pod utjecajem člana s mrtvim vremenom polarna krivulja zakreće u smislu gibanja kazaljke na satu, tj. u trećem kvadrantu zakreće se još više ulijevo. Sustav postaje nestabilnijim, a to je činjenica koju smo već spomenuli kod sustava s mrtvim vremenom: u krug povratne veze unosi se dodatno kašnjenje.



Sl. 8—18. Određivanje stabilnosti sustava s mrtvim vremenom i kašnjenjem u Nyquistovu dijagramu



Sl. 8—19. Definicija amplitudne i fazne rezerve

Relativna stabilnost. U uvodu ovog odjeljka spomenuli smo da je jedna od osnovnih prednosti Nyquistova kriterija da daje informaciju ne samo o apsolutnoj stabilnosti regulacijskog sustava već i o njegovoj relativnoj stabilnosti. To je osobito važno pri projektiranju takvog sustava.

Na sl. 8—19 prikazana je polarna krivulja relativno stabilnog sustava. Očigledno je da će sustav oscilirati s to manjim prigušenjem, što će se polarna krivulja više približiti kritičnoj točki $(-1+j0)$. Prema tome, razmak polarne krivulje od kritične točke bit će mjera za relativnu stabilnost. U vezi s tim uvodimo pojam amplitudne i fazne rezerve stabilnosti.

Amplitudna rezerva je pojačanje potrebno da polarna krivulja otvorenog kruga $G_0(j\omega)$ kod faze od $-180°$ dostigne kritičnu točku. To možemo izraziti i matematički:

$$A_r=\frac{1}{|G_0(j\omega)|} \quad \text{za} \quad \varphi=-180°, \tag{8-78}$$

tj. kad amplituda $|G_0(j\omega)|$ pomnožena s faktorom A_r daje jedan.

Kao mjera za relativnu stabilnost može služiti i **fazna rezerva** koja prema sl. 8—19 predstavlja fazni kut između negativne realne osi i točke gdje polarna krivulja siječe jediničnu kružnicu. Možemo pisati:

$$\varphi_r = \underline{/G_0(j\omega)} - 180° \quad \text{za} \quad |G_0(j\omega)| = 1. \tag{8-79}$$

Budući da se $\underline{/G_0(j\omega)}$ računa pozitivnim u suprotnom smislu od gibanja kazaljke na satu, φ_r je pozitivan za fazni kut prikazan na sl. 8—19.

Fazna je rezerva obično bolja mjera za relativnu stabilnost negoli amplitudna rezerva. Tako npr. amplitudna rezerva nema smisla kod sustava prvoga ili drugoga reda jer polarna krivulja ne siječe negativnu realnu os (sl. 8—15b). Međutim, ni fazna rezerva ne govori nam ništa kad se radi o uvjetno stabilnim sustavima kod kojih polarna krivulja više puta siječe negativnu realnu os (sl. 8—17).

Često se navode i iskustveni podaci o minimalnim vrijednostima A_r i φ_r, kod kojih se postiže zadovoljavajuće regulacijsko djelovanje. Tako za čvrstu regulaciju (kad poremećaj Z djeluje preko staze na reguliranu veličinu X) orijentacijski možemo uzeti da je:

$$A_r > 1{,}5\ldots3, \quad \varphi_r > 20°\ldots70°.$$

Kod slijedne je regulacije (kad promjena od W djeluje preko regulacijskog uređaja i staze na reguliranu veličinu X):

$$A_r > 1{,}5\ldots3, \quad \varphi_r > 40°\ldots60°.$$

U vezi s pojmovima amplitudne i fazne rezerve često se u literaturi uvode definicije:

— **frekvencije kritične amplitude** ω_1, kada $G_0(j\omega)$ siječe jediničnu kružnicu;

— **frekvencije kritične faze** ω_π, kada $G_0(j\omega)$ siječe negativnu realnu os.

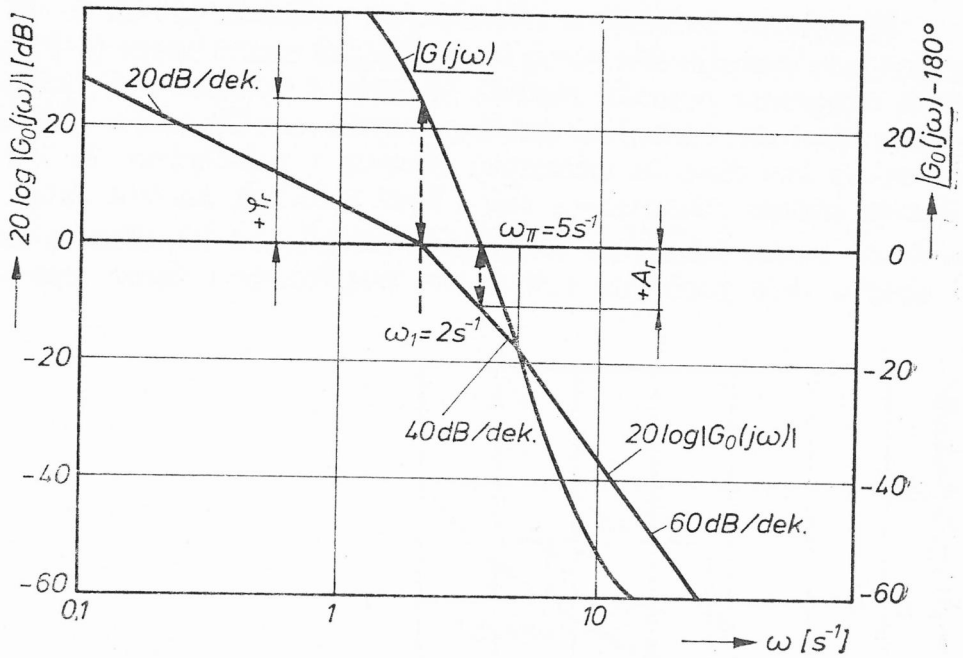
Pomoću tih frekvencija možemo izraziti i kriterij stabilnosti: sustav je stabilan kad je ω_1 manja od ω_π.

Nyquistov kriterij u Bodeovu prikazu. S obzirom na srodnost Nyquistova i Bodeovih dijagrama, možemo očekivati da se Nyquistov kriterij može predočiti i Bodeovim prikazom. To je mnogo zanimljivije sa stajališta analize i sinteze regulacijskog kruga, jer se u praksi Bodeov prikaz zbog lakše konstrukcije mnogo više upotrebljava u konkretnim proračunima.

Uzimamo praktičan primjer regulacijskog sustava kojeg je sinusna prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_0(j\omega) = \frac{K}{j\omega\,(1+j\omega\tau_1)\,(1+j\omega\tau_2)}. \tag{8-80}$$

Prema metodi izloženoj u odjeljku 5.4, na sl. 8—20 nacrtane su odgovarajuće amplitudno-frekvencijske i fazno-frekvencijske karakteristike. Sustav je stabilan ako kod -- 180°, tj. gdje fazno-frekvencijska karakteristika prelazi — 180° (0° na desnoj skali), amplitudno-frekvencijska karakteristika ima pojačanje manje od jedan



Sl. 8—20. Određivanje stabilnosti u Bodeovim dijagramima — primjer 8.8

(0 dB na lijevoj skali). Jer je naime u Bodeovu prikazu pojačanje izraženo u decibelima, daje se i amplitudna rezerva također u decibelima:

$$A_r\,(\mathrm{dB}) = 20\log\frac{1}{|G_0(j\omega)|_{-180^\circ}} = -20\log|G_0(j\omega)|_{-180^\circ}. \tag{8-81}$$

Kako kod stabilnog sustava mora vrijediti $|G_0(j\omega)|_{-180^\circ} < 1$, logaritam tog izraza mora imati negativnu vrijednost, pa je prema tome amplitudna rezerva A_r (dB) na osnovu definicije u izrazu (8-82) pozitivna vrijednost i kao takva je i označena na sl. 8—20. Na istoj je slici ucrtana i fazna rezerva φ_r koja je jednaka ordinati fazno-frekvencijske karakteristike kod frekvencije gdje amplitudno-frekvencijska karakteristika ima vrijednost $20\log|G_0(j\omega)| = 0$ dB. To možemo pisati:

$$\varphi_r = \underline{/G_0(j\omega)}\,|_{20\log|G_0(j\omega)|=0}. \tag{8-82}$$

Na sl. 8—20 je fazna rezerva označena kao pozitivni kut računajući od -180° (0° na desnoj skali).

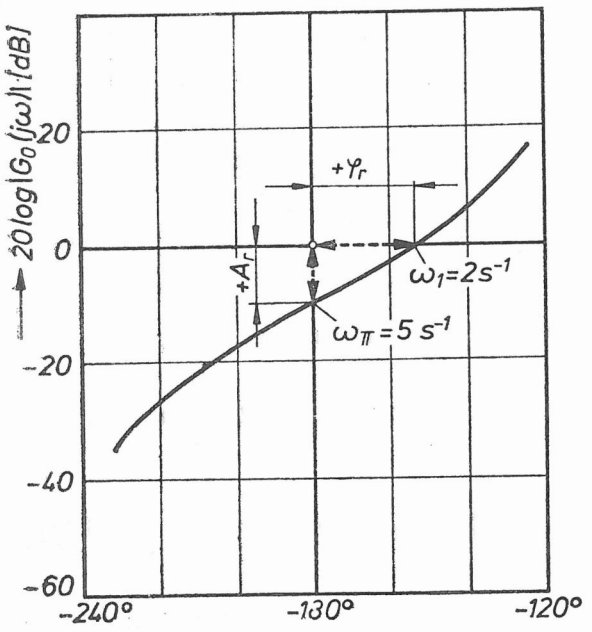
Primjer 8.8. Sinusna je prijenosna funkcija $G_0(j\omega)$ sustava dana sa:

$$G_0(j\omega) = \frac{K}{j\omega\,(1+j\omega\tau_1)\,(1+j\omega\tau_2)} = \frac{2}{j\omega\,(1+j\omega\,0{,}5)\,(1+j\omega\,0{,}2)}.$$

Pomoću metode izložene u odjeljku 5.4 nacrtani su Bodeovi dijagrami na sl. 8—20. Možemo očitati vrijednosti $A_r \simeq 10$ dB i $\varphi_r \simeq 24^\circ$, što je zadovoljavajuće za stabilnost sustava.

Ako sustav posjeduje mrtvo vrijeme, tako da mu je prijenosna funkcija oblika kao u izrazu (8-77), član s mrtvim vremenom uopće ne mijenja amplitudno-frekvencijsku karakteristiku, a fazno-frekvencijskoj karakteristici dodaje se kut od 0 do $-\infty$ u smjeru rastućih frekvencija. Iz konstrukcije karakteristika i ovdje možemo zaključiti da mrtvo vrijeme slabi stabilnost regulacijskog sustava.

Nyguistov kriterij u Nicholsovu prikazu. Na sl. 8—21 vidimo sinusnu prijenosnu funkciju otvorenog kruga $G_0(j\omega)$ prema izrazu (8-81) ucrtanu u Nicholsovu dijagramu pomoću metode izložene u odjeljku 5.4. Odmah opažamo da je pojam apsolutne i relativne stabilnosti ovdje naročito zoran. Kritična točka $(-1+j0)$ je naime ishodište koordinatnog sustava s pojačanjem 20 log $|G_0(j\omega)|=0$ dB i faznim kutom $/G_0(j\omega)=-180°$. Kod stabilnih sustava mora krivulja prolaziti s desne strane ishodišta. Udaljenost krivulje od ishodišta u smjeru osi ordinata i apscisa daje pozitivne vrijednosti amplitudne i fazne rezerve.



Sl. 8—21. Određivanje stabilnosti u Nicholsovu dijagramu — primjer 8.9

Primjer 8.9. Uzet je opet isti sustav kao i u prethodnom primjeru:

$$G_0(j\omega)=\frac{K}{j\omega\,(1+j\omega\tau_1)\,(1+j\omega\tau_2)}=\frac{2}{j\omega\,(1+j\omega\,0{,}5)\,(1+j\omega\,0{,}2)}.$$

Grafički je prikaz u Nicholsovu dijagramu dan na sl. 8—21. Očitanje amplitudne i fazne rezerve je veoma jednostavno: $A_r\simeq 10$ dB i $\varphi_r\simeq 24°$, što je dakako isto kao i u primjeru 8.8.

8.3.5. Mihajlovljev kriterij stabilnosti

Kriterij stabilnosti Mihajlova[1] služi se — kao i Nyquistov kriterij — konformnim preslikavanjem funkcije korijena karakteristične jednadžbe, ali polazi — slično kao i Hurwitzov kriterij — **od karakteristične jednadžbe zatvorenog regulacijskog kruga** pisane u operatorskom obliku:

$$a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0=0. \qquad (8\text{-}83)$$

U literaturi se taj kriterij ponekad naziva i Leonhard-Cremerov kriterij stabilnosti.

[1] Mihajlov, A. V., Metod garmoničeskogo analiza v teoriji regulirovanija. Avtomatika i telemehanika, 3, 1938, str. 29—81.

Jednadžbu (8-82) možemo pisati i u obliku umnoška faktora:

$$a_n (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)=0, \tag{8-84}$$

gdje su λ_i korijeni karakteristične jednadžbe. Oni su u općem slučaju kompleksni, pa ih možemo prikazati u s-ravnini. Na sl. 8—22 postoje dva korijena, λ_1 i λ_2, koje smo prikazali kao verzore. I veličinu s možemo uzeti kao proizvoljni kompleksni broj, pa je povoljno da izvršimo zamjenu $s \to j\omega$. Tako se s prikazuje verzorom smještenim duž imaginarne osi u s-ravnini. Na sl. 8—22 ucrtani su i verzori $(j\omega-\lambda_1)$ i $(j\omega-\lambda_2)$ koji čine vektorsku razliku između $j\omega$ i λ_1, odnosno $j\omega$ i λ_2.

Ako mijenjamo frekvenciju od $-\infty$ do ∞, onda se vrh verzora giba duž imaginarne osi u pozitivnom smjeru. Verzor $(j\omega-\lambda_1)$, koji se oslanja na korijen λ_1 na desnoj polovini s-ravnine, zakrenut će se u tom slučaju za $-180°$ (pozitivan smisao zakretanja faznog kuta suprotan je smislu gibanja kazaljke na satu). Naprotiv, verzor $(j\omega-\lambda_2)$, koji se oslanja na korijen λ_2 na lijevoj polovini s-ravnine, zakrenut će se za 180°.

Vratimo se na jednadžbu (8-82). Lijevu ćemo stranu jednadžbe označiti kao karakterističan polinom, ili jednostavnije kao **funkciju Mihajlova:**

$$M(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0. \tag{8-85}$$

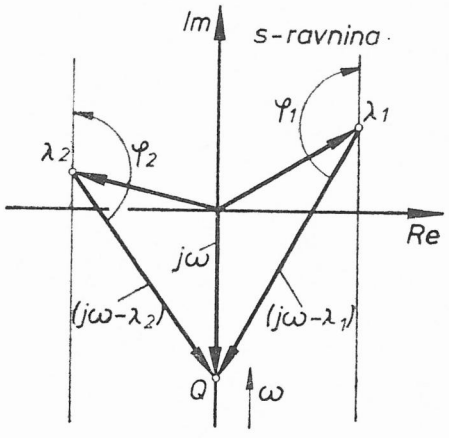
Zamijenivši s sa $j\omega$, dobivamo kompleksnu funkciju:

$$M(j\omega)=a_n (j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_1(j\omega)+a_0, \tag{8-86}$$

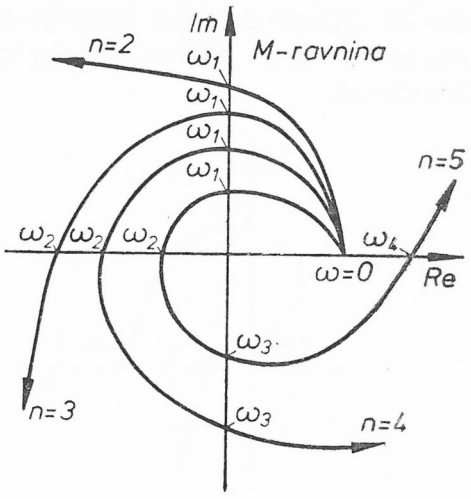
koje je realni, odnosno imaginarni dio:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,[M(j\omega)] &= a_0-a_2\omega^2+a_4\omega^4-\ldots \\ \mathrm{Im}\,[M(j\omega)] &= a_1\omega-a_3\omega^3+a_5\omega^5-\ldots \end{aligned} \tag{8-87}$$

Krivulja za razne redove karakteristične jednadžbe nacrtana je u s-ravnini na sl. 8—23. Tu krivulju konstruiramo tako da za razne vrijednosti ω nađemo realnu i imaginarnu komponentu prema izrazima (8-87).



Sl. 8—22. Vektorski prikaz faktora karakteristične jednadžbe



Sl. 8—23. Krivulje za razne redove karakteristične jednadžbe u M-ravnini

Jednadžbu (8-86) pišemo u obliku umnoška faktora:

$$M(j\omega)=a(j\omega-\lambda_1)(j\omega-\lambda_2)\ldots(j\omega-\lambda_n). \tag{8-88}$$

Mijenjanjem frekvencije ω mijenja se i ukupan fazni pomak funkcije Mihajlova kao zbroj promjena faza verzora $(j\omega-\lambda_i)$:

$$\underline{/M(j\omega)}=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n. \tag{8-89}$$

Ako k korijena od $M(j\omega)$ leži u desnoj polovini s-ravnine, ostaje $(n-k)$ korijena u lijevoj polovini s-ravnine; promjena ω u rasponu od $-\infty$ do ∞ mijenja faza od $M(j\omega)$ za:

$$\underline{/M(j\omega)}=-k\pi+(n-k)\pi=(n-2k)\pi. \tag{8-90}$$

Ako korijeni leže na imaginarnoj osi, promjena faze jednaka je nuli.

Očigledno je da je sustav stabilan ako je $k=0$, pa kutni zakret za promjene ω u rasponu od $-\infty$ do ∞ iznosi:

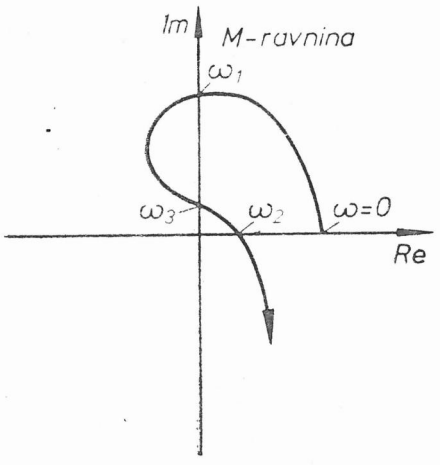
$$\underline{/M(j\omega)}=n\pi. \tag{8-91}$$

Kako je prema jednadžbi (8-68) $M(j\omega)=\overline{M}(-j\omega)$, dovoljno je da promatramo samo fazu za promjene ω od 0 do ∞, jer je konjugirano kompleksna vrijednost $\overline{M}(-j\omega)$ samo zrcalna slika od $M(j\omega)$ u odnosu prema realnoj osi. Zato izraz (8-91) možemo pisati:

$$\underline{/M(j\omega)}=n\frac{\pi}{2}. \tag{8-92}$$

Na osnovi tog izraza definiramo kriterij stabilnosti Mihajlova: nužan je i dovoljan uvjet za stabilnost regulacijskog sustava ako se pri povećanju ω od 0 do ∞ verzor $M(j\omega)$ zakrene u M-ravnini za kut $n\pi/2$, gdje je n red polinoma $M(j\omega)$.

Poznavajući samo krivulju $M(j\omega)$ u M-ravnini, možemo gornji kriterij izraziti i drukčije: regulacijski je sustav stabilan ako krivulja $M(j\omega)$ n-toga reda — promatrajući je u smislu rastućih frekvencija počevši od pozitivne realne osi — prođe po redu kroz n kvadranata u pozitivnom smislu. Na taj način sve krivulje $M(j\omega)$ za sustave od drugoga do petoga reda govore o njihovoj stabilnosti. Na sl. 8—24 vidimo primjer krivulje nestabilnog sustava: krivulja ne prolazi po redu kroz sve kvadrante, već se iz drugoga kvadranta vraća u prvi kvadrant i dalje u četvrti kvadrant.



Sl. 8—24. Određivanje stabilnosti pomoću kriterija Mihajlova

Iako je kriterij stabilnosti Mihajlova izražen u jednostavnom obliku i zanimljiv je s teorijskog stajališta, ipak nije postigao neku širu primjenu. U odnosu na Nyquistov kriterij možemo spomenuti njegove nedostatke:

— analitički izraz konstrukcije krivulje veoma je zamršen za polinome više od četvrtoga reda,

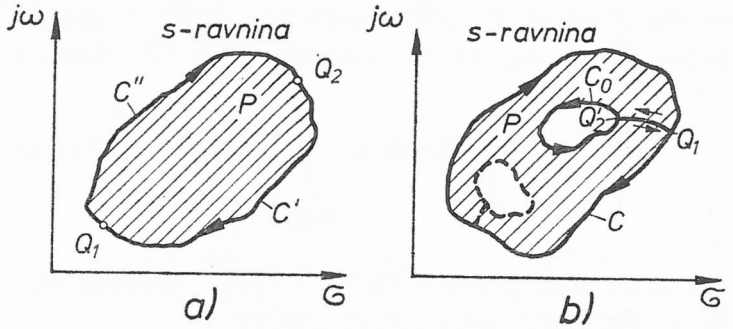
— primjena je ograničena na polinome ili njihovu inverziju, a ne i na prijenosne funkcije općeg oblika $B(s)/N(s)$ s kašnjenjima,

— praktički nije moguće odrediti utjecaj parametara sustava na stabilnost, pa se ne može primijeniti u projektiranju.

8.4. Egzaktan izvod Nyquistova kriterija

Na osnovi pojednostavnjenog izvoda Nyquistova kriterija u prethodnom odjeljku možemo bolje razumjeti njegovu primjenu. Egzaktan izvod Nyquistova kriterija namjerno smo izdvojili jer on zahtijeva dobro poznavanje teorije funkcija kompleksne varijable. Ipak s obzirom na ključnu ulogu koju je imao u razvoju teorije automatske regulacije kao i s obzirom na klasični pristup, poželjno je da ga prouči svatko tko želi produbiti svoja znanja u tom području.

Prije nego što prijeđemo na dokaz Nyquistova kriterija, postavit ćemo nekoliko osnovnih pojmova i teorema iz teorije funkcija kompleksne varijable [lit. 7, 34, 39, 55].



Sl. 8—25. Cauchy-Goursatov teorem: jednostruko (a) i višestruko suvislo područje (b) u s-ravnini

Cauchy-Goursatov teorem. Neka je funkcija kompleksne varijable za sve vrijednosti od s unutar i na rubovima područja P u s-ravnini omeđenog konturom C (sl. 8—25a) jednoznačna i analitička, tj. ima derivacije u svim točkama tog područja. U tom slučaju vrijedi Cauchy-Goursatov teorem:

$$\oint_C F(s)\,\mathrm{d}s = 0 \tag{8-93}$$

koji kazuje da je krivuljni integral funkcije $F(s)$ duž konture C jednak nuli. Taj teorem dokazujemo tako da pođemo od izraza za krivuljni integral:

$$\oint_C F(s)\,\mathrm{d}s = \oint_C (x+jy)(\mathrm{d}\sigma+\mathrm{j}\,\mathrm{d}\omega) = \oint_C x\,\mathrm{d}\sigma - y\,\mathrm{d}\omega + j\oint_C y\,\mathrm{d}\sigma + x\,\mathrm{d}\omega. \tag{8-94}$$

Na realni i imaginarni dio s desne strane primjenjujemo Green-Gaussov teorem:

$$\oint_C (x\,d\sigma - y\,d\omega) = \iint_P \left(-\frac{\partial y}{\partial \sigma} - \frac{\partial x}{\partial \omega}\right) d\sigma\,d\omega,$$
$$\oint_C (y\,d\sigma + x\,d\omega) = \iint_P \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} - \frac{\partial y}{\partial \omega}\right) d\sigma\,d\omega. \tag{8-95}$$

Funkcije u zagradi pod dvostrukim integralom zadovoljavaju Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe, pa su identički jednake nuli. Cauchy-Goursatov teorem izražava činjenicu da je krivuljni integral duž bilo koje krivulje koja spaja dvije točke Q_1 i Q_2 (sl. 8—25a):

$$\int_{C'} F(s)\,ds = \int_{C''} F(s)\,ds \tag{8-96}$$

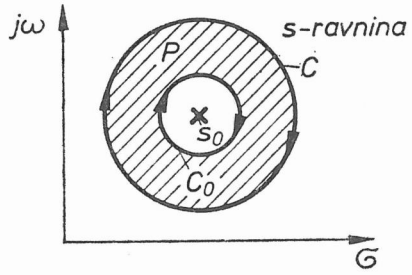
jednak, pa je $G(s)$ funkcija samo od s, a ne ovisi o putu integracije. Kod krivuljnog integrala moramo dakako paziti na smisao obilaženja; prema dogovoru predznak je integrala pozitivan ako je smisao obilaženja suprotan od gibanja kazaljke na satu.

Područje P na sl. 8—25a nazivamo i **jednostruko suvislim.** Cauchy-Goursatov teorem možemo proširiti i na **višestruko suvisla područja.** Takvo je npr. područje P na sl. 8—25b omeđeno s dvije konture C i C_0. Jednim prerezom spojimo točke Q_1 i Q_2, pa iz jednadžbe (8-93) dobivamo:

$$\int_C F(s)\,ds + \int_{\overline{Q_1Q_2}} F(s)\,ds + \int_{C_1} F(s)\,ds + \int_{\overline{Q_2Q_1}} F(s)\,ds = 0. \tag{8-97}$$

Integrali duž prereza $\overline{Q_1Q_2}$ i $\overline{Q_2Q_1}$ ukidaju se; ostaju integrali duž kontura C i C_1 s obratnim smislom kruženja.

Laurentov razvoj. U poopćenom slučaju može funkcija $F(s)$ imati unutar područja ograničenog konturom C **singularnu točku** s_0, gdje $F(s)$ nije analitička funkcija. U teoriji automatske regulacije to su obično polovi funkcije $F(s)$, gdje njezin nazivnik postaje jednak nuli, odnosno gdje $F(s) \to \infty$. Takvu funkciju $F(s)$ koja je analitička i čije su jedine singularne točke u konačnoj ravnini polovi, nazivamo i **meromorfnom.**



Sl. 8—26. Laurentov razvoj: singularna točka nalazi se unutar konture C

Ako singularnu točku s_0 prema sl. 8—26 zaokružimo konturom C_0, onda unutar i na rubovima kružnog prstena omeđenog konturama C i C_0 funkciju $F(s)$ možemo predočiti Laurentovim razvojem:

$$F(s)=a_0+a_1(s-s_0)+a_2(s-s_0)^2+\ldots+\frac{b_1}{s-s_0}+\frac{b_2}{(s-s_0)^2}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s-s_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(s-s_0)^n}, \tag{8-98}$$

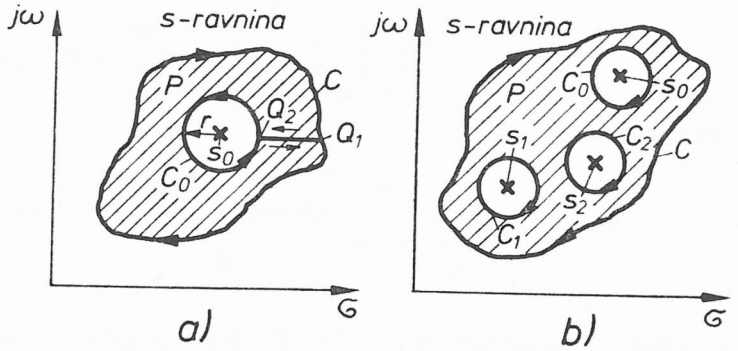
gdje se koeficijenti a_n i b_n izračunaju iz krivuljnih integrala:

$$a_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{F(s)}{(s-s_0)^{n+1}}\,ds \quad \text{za } n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_0}(s-s_0)^{n-1}F(s)\,ds \quad \text{za } n=1,\ 2,\ \ldots \tag{8-99}$$

Laurentov je razvoj red potencija od $(s-s_0)$. Dio reda s negativnim potencijama nazivamo i **glavnim dijelom** funkcije $F(s)$.

Ako glavni dio funkcije u Laurentovu razvoju ima konačan broj članova, n je red pola i označuje njegovu višestrukost. Pol reda $n=1$ nazivamo i **jednostavnim polom.**



Sl. 8—27. Cauchyev teorem o reziduima: kontura C zaokružuje jednu (a) i više singularnih točaka (b) u s-ravnini

Cauchyev teorem o reziduima. Neka je funkcija $F(s)$ analitička svuda u području ograničenom konturom C osim u singularnoj točki s_0. Da bismo izračunali krivuljni integral te funkcije po konturi C, prema sl. 8—27a najprije ćemo ograničiti pol s_0 konturom C_0, a zatim ćemo pomoću prereza Q_1Q_2 dobiti dvostruko suvislo područje koje je označeno crtkano. Unutar tog područja i na njegovim rubovima funkcija $F(s)$ je analitička. Prema Cauchy-Goursatovu teoremu možemo izračunati krivuljni integral funkcije $F(s)$ u tom području tako da polumjer kružne konture r pustimo da teži nuli. Kako se krivuljni integrali duž krivulja $\overline{Q_1Q_2}$ i $\overline{Q_2Q_1}$ ukidaju, na osnovi izraza (8-97) ostaje:

$$\oint_C F(s)\,ds=\oint_{C_0}F(s)\,ds, \tag{8-100}$$

ako je smisao obilaska konture C_0 obratan od smisla obilaska označenog strelicom. Prema tome, da bismo izračunali $\int_C F(s)\,ds$, moramo izračunati samo krivuljni integral od $F(s)$ po konturi C_0 oko singularne točke s_0.

Ovdje će nam pomoći Laurentov razvoj funkcije $F(s)$ u okolišu s_0, koji integriramo:

$$\oint_{C_0} F(s)ds = \oint_{C_0} [a_0+a_1(s-s_0)+a_2(s-s_0)^2+\ldots]\,ds + \oint_{C_0}\left[\frac{b_1}{s-s_0}+\frac{b_2}{(s-s_0)^2}+\ldots\right]ds. \tag{8-101}$$

Da bismo taj izraz lakše izračunali, stavimo umjesto $(s-s_0)$ polarni oblik $re^{j\varphi}$, gdje je r polumjer konture C_0. Puštamo da $r\to 0$: prvi integral s desne strane nestaje, što je i inače jasno jer je podintegralna funkcija analitička i vrijedi Cauchy-Goursatov teorem. Svi sumandi drugog integrala također su jednaki nuli:

$$\oint_{C_0}\frac{b_n}{(s-s_0)^n}\,ds = b_n\int_0^{2\pi}\frac{jre^{j\varphi}\,d\varphi}{r^n e^{jn\varphi}} = jb_n\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{r^{n-1}e^{j(n-1)\varphi}} =$$

$$= \frac{jb_n}{r^{n-1}}\left[\frac{1}{n-1}e^{-j(n-1)\varphi}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{za} \quad n=2,3,\ldots \tag{8-102}$$

osim integrala:

$$\oint_{C_0}\frac{b_1}{s-s_0}\,ds = b_1\int_0^{2\pi}\frac{jre^{j\varphi}\,d\varphi}{re^{j\varphi}} = jb_1\int_0^{2\pi}d\varphi = 2\pi jb_1. \tag{8-103}$$

Od cijelog integriranog reda (8-101) preostaje dakle samo koeficijent člana $(s-s_0)^{-1}$:

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}[F(s)] = b_1 = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_0}F(s)\,ds = \frac{1}{2\pi j}\oint_C F(s)\,ds. \tag{8-104}$$

Nazivamo ga **reziduum** (ostatak!) i označujemo sa Res $[F(s)]$. Prema tome, integral duž zatvorene konture C funkcije $F(s)$ koja je jednoznačna i analitička unutar i na rubu konture jednak je reziduumu od $F(s)$ u polu s_0 pomnoženom sa $2\pi j$.

U tome je bit Cauchyeva teorema o reziduima, koji se može i poopćiti na $b_1, b_2, \ldots, b_k$ rezidua kod jednostavnih polova $s_1, s_2, \ldots, s_k$ (sl. 8-27b). Cauchy-Goursatov teorem može se pomoću prereza proširiti na cijelo crtkano područje; integral preko cijelog područja omeđenog konturom C predstavlja zbroj:

$$\oint_C F(s)\,ds = \oint_{C_1}F(s)\,ds + \oint_{C_2}F(s)\,ds + \ldots + \oint_{C_k}F(s)\,ds. \tag{8-105}$$

Pomoću izraza (8-104) možemo pisati:

$$\oint_C F(s)\,ds = 2\pi j \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{Res}_{s=s_k} [F(s)]. \tag{8-106}$$

Obuhvaćeni su rezidui svih singularnih točaka unutar konture C.

Rezidui funkcije $F(s)$ mogu se jednostavno izračunati na slijedeći način. Uzimamo kao prvi primjer jednostavan pol u točki $s=s_0$ unutar konture C. Laurentov razvoj (8-98) se pojednostavnjuje:

$$F(s) = a_0 + a_1(s-s_0) + a_2(s-s_0)^2 + \ldots + \frac{b_1}{s-s_0}. \tag{8-107}$$

gdje je $b_1 \neq 0$. Pomnožimo obje strane sa $(s-s_0)$:

$$(s-s_0)F(s) = (s-s_0)[a_0 + a_1(s-s_0) + a_2(s-s_0)^2 + \ldots] + b_1, \tag{8-108}$$

Funkcija $(s-s_0)F(s)$ je analitička, a izraz s desne strane zapravo je Taylorov razvoj oko točke s_0. Iz izraza (8-108) lako izračunamo koeficijent b_1:

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0} [F(s)] = b_1 = \lim_{s \to s_0} (s-s_0)F(s). \tag{8-109}$$

Imamo li polove reda n u točki $s=s_0$, Laurentov je razvoj:

$$F(s) = a_0 + a_1(s-s_0) + a_2(s-s_0)^2 + \ldots + \frac{b_1}{s-s_0} + \frac{b_2}{(s-s_0)^2} + \ldots + \frac{b_n}{(s-s_0)^n}, \tag{8-110}$$

gdje je $b_n \neq 0$. Pomnožimo li obje strane sa $(s-s_0)^n$, dobivamo:

$$(s-s_0)^n F(s) = (s-s_0)^n [a_0 + a_1(s-s_0) + a_2(s-s_0)^2 + \ldots] + b_1(s-s_0)^{n-1} + b_2(s-s_0)^{n-2} + \ldots + b_n. \tag{8-111}$$

Reziduum b_1 od $F(s)$ u točki $s=s_0$ u ovom je slučaju koeficijent člana $(s-s_0)^{n-1}$. Zato izraz (8-111) moramo $(n-1)$ puta derivirati po s. Nakon $s \to s_0$ ostaje:

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0} [F(s)] = b_1 = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \to s_0} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [(s-s_0)^n F(s)]. \tag{8-112}$$

Logaritamski reziduum. Do sada smo govorili sasvim općenito o funkciji $F(s)$. Primjenjujući teoriju funkcija kompleksne varijable na regulacijski krug, možemo $F(s)$ **poistovjetiti** sa $1+G_0(s)$ iz jednadžbe (8-60). To je nazivnik ukupne prijenosne funkcije regulacijskog kruga $G(s)$, odnosno karakteristična jednadžba sustava. Područje integracije proširit ćemo na cijelu desnu stranu s-ravnine i tako pokazati povezanost polova i nultočaka funkcije $F(s)$ sa stabilnošću regulacijskog kruga.

Neka funkcija $F(s)$ ima nultočke reda k u singularnoj točki $s=s_0$ na desnoj polovini s-ravnine (v. sl. 8—15a). Funkciju $F(s)$ možemo općenito pisati kao umnožak dvaju faktora:

$$F(s)=(s-s_0)^k H(s), \tag{8-113}$$

gdje je $H(s)$ neka analitička funkcija koja ne sadrži ni nultočke ni polove; k je bilo koji cijeli broj. Izraz (8-113) deriviramo:

$$F'(s)=k(s-s_0)^{k-1} H(s)+(s-s_0)^k H'(s), \tag{8-114}$$

pa podijelimo:

$$\frac{F'(s)}{F(s)}=\frac{k}{s-s_0}+\frac{H'(s)}{H(s)}. \tag{8-115}$$

Na taj razlomak primijenimo Cauchyev teorem o reziduima:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{F'(s)}{F(s)}\,ds=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{k}{s-s_0}\,ds+\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{H'(s)}{H(s)}\,ds=k. \tag{8-116}$$

Prema jednadžbi (8-103) prvi integral s desne strane jednak je reziduumu k, a drugi je integral s desne strane jednak nuli jer je $H'(s)/H(s)$ također analitička funkcija. Integral s lijeve strane nazivamo **logaritamski reziduum funkcije** $F(s)$; on ima pol prvoga reda s reziduumom k, što je red nultočke funkcije $F(s)$.

Ovo razmatranje možemo proširiti i na polove funkcije $F(s)$; u jednadžbi (8-113) eksponent od $(s-s_0)$ postaje negativan, pa će izraz (8-115) glasiti:

$$\frac{F'(s)}{F(s)}=\frac{-k}{s-s_0}+\frac{H'(s)}{H(s)}, \tag{8-117}$$

gdje je $s=s_0$ pol reda k. Ako je dakle k pozitivan cijeli broj, $s=s_0$ je nultočka od $F(s)$ reda k, a logaritamski reziduum za tu nultočku je k; za negativnu vrijednost k, $s=s_0$ je pol od $F(s)$ reda k, a logaritamski reziduum za taj pol je $-|k|$. To možemo poopćiti tako da funkcija $F(s)$ poprima oblik:

$$F(s)=\frac{(s-n_1)^{a_1}(s-n_2)^{a_2}\ldots(s-n_n)^{a_u}}{(s-p_1)^{b_1}(s-p_2)^{b_2}\ldots(s-p_m)^{b_v}}H(s), \tag{8-118}$$

gdje su n_i nultočke, p_i polovi, a eksponenti $a_1, a_2, \ldots, a_u$ i $b_1, b_2, \ldots, b_v$ redovi tih nultočaka i polova. Deriviranjem i podjelom $F'(s)/F(s)$ imamo dalje:

$$\frac{F'(s)}{F(s)}=\left[\frac{a_1}{s-n_1}+\frac{a_2}{s-n_2}+\ldots+\frac{a_u}{s-n_n}\right]-$$

$$-\left[\frac{b_1}{s-p_1}+\frac{b_2}{s-p_2}+\ldots+\frac{b_v}{s-p_m}\right]+\frac{H'(s)}{H(s)}. \tag{8-119}$$

Uzimajući ukupan broj nultočaka N_n i ukupan broj polova N_p[1], dobivamo logaritamski reziduum:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{F'(s)}{F(s)}=N_n-N_p. \tag{8-120}$$

Slijedeći je korak da prikažemo kompleksan broj $F(s)$ u polarnom obliku $Re^{j\varphi}$. To možemo logaritmirati:

$$\ln F(s)=\ln R+j\varphi. \tag{8-121}$$

Derivacija tog logaritma daje upravo razlomak $F'(s)/F(s)$:

$$\frac{\mathrm{d}[\ln F(s)]}{\mathrm{d}s}=\frac{F'(s)}{F(s)}=\frac{\mathrm{d}[\ln R]}{\mathrm{d}s}+j\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}. \tag{8-122}$$

Logaritamski je reziduum toga izraza:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{\mathrm{d}[\ln F(s)]}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{F'(s)}{F(s)}\mathrm{d}s=$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \mathrm{d}[\ln R]+\frac{j}{2\pi j}\oint_C \mathrm{d}\varphi=\frac{j2\pi N}{2\pi j}=N. \tag{8-123}$$

Naime, prvi je integral s desne strane jednak nuli jer je podintegralna funkcija jednoznačna, pa se nakon obilaženja po konturi C vraća na istu vrijednost; drugi integral s desne strane ima $2\pi N$ kruženja funkcije oko ishodišta u F-ravnini[2], dok s izvrši jedno kruženje oko Nyquistove konture, tj. oko desne polovine s-ravnine.

Izjednačujući izraze (8-123) i (8-120), dobivamo uvjet:

$$N=N_n-N_p \tag{8-64}$$

što smo ga postavili već u odjeljku 8.3.

---

[1] Pri tome moramo uzeti u obzir i višestrukost svake nultočke i pola sadržanih u eksponentu.

[2] To je zapravo $(1+G_0)$-ravnina.

9. Sinteza regulacijskog kruga

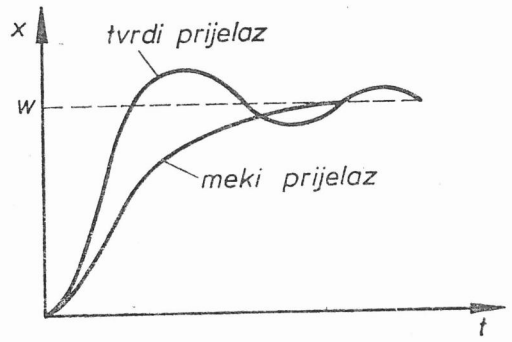
Es fürchte die Götter
Das Menschengeschlecht!
Sie halten die Herrschaft
In ewigen Händen
Und können sie brauchen
Wie's ihnen gefällt.

J. W. Goethe, »Ifigenija na Taurid i«

Prvi i najvažniji zadatak kod projektiranja regulacijskog sustava je ispitivanje njegove stabilnosti odnosno osiguranje apsolutne stabilnosti. Drugi isto tako važan zadatak jest da se postigne zadovoljavajuće regulacijsko djelovanje. Regulacijski uređaj trebamo tako projektirati da **što točnije, što brže i sa što manje oscilacija:**

— kod čvrste regulacije odstranjuje utjecaj poremećajnih veličina na reguliranu veličinu;
— kod slijedne regulacije regulirana veličina slijedi vodeću veličinu.

Pritom se traži kompromis između mnogih, često i proturječnih zahtjeva, osobito između zahtjeva za točnošću i stabilnošću. Taj problem možemo djelomično sagledati i prema sl. 9—1, koja prikazuje vremenski tok regulirane veličine nakon što dođe do skokovite promjene poremećajne ili vodeće veličine. Ako je pojačanje u krugu veliko, regulirana veličina prelazi »tvrdo« na novu vrijednost. Prijelaz je doduše vrlo brz, ali je regulacijsko odstupanje u prijelaznim uvjetima veliko, i krug naginje oscilacijama. U slučaju malog pojačanja, regulirana veličina prelazi »meko« na novu vrijednost, nema opasnosti od oscilacija, ali je prijelaz spor, i u stacionarnim uvjetima mogu se pojaviti značajna trajna odstupanja.



Sl. 9—1. Vremenski dijagram regulirane veličine

Na pitanje kako da se postigne najveća točnost u stacionarnim uvjetima uz što brži odziv i uz najmanje oscilacija u dinamičkim uvjetima, nema — kao i općenito kod sinteze — jednoznačnog odgovora. Ili je statička greška prevelika, ili je proces izjednačivanja prepolagan, ili oscilacije nisu dovoljno prigušene. Ocjena o tome je li projektirani sustav prihvatljiv ili nije, povezana je s izborom **kriterija ponašanja.** Ta su ograničenja, koja se postavljaju na funkcije u regulacijskom krugu, karakteristične za njegovo ponašanje. Kriteriji se mogu postaviti u vremenskom ili u frekvencijskom području, ili pak u području kompleksne varijable. Uvijek moramo polaziti od toga da sustav treba da bude apsolutno stabilan.

Klasičan pristup sintezi temelji se na zadovoljavanju više kriterija, a rješenje je kompromis koji se postiže postupnim poboljšavanjem pretprojekta (v. sl. 1—17). Baš s obzirom na više međusobno oprečnih zahtjeva, ovdje možemo govoriti o **suboptimalnom sustavu.** Ovdje obrađujemo nekoliko metoda, i to uglavnom za regulacijske sustave s jednim ulazom i jednim izlazom. Budući da se struktura regulacijskog kruga odabire unaprijed, sinteza je bitno olakšana time što se svodi na određivanje parametara odabranog regulacijskog uređaja — a to je **parametarska optimalizacija.**

Prednosti su klasičnog pristupa relativno jednostavne matematičke operacije, veliko iskustvo, a značajno je olakšanje u projektiranju upotreba analognog računala pomoću kojeg lako pratimo utjecaj promjena parametara na odziv sustava[1]. Klasičan pristup je još i danas u sveopćoj upotrebi, i u daljnjem tekstu koristit ćemo se samo njime.

U **suvremenom pristupu sintezi** nastoji se postaviti samo jedan kriterij ponašanja koji obuhvaća više značajnih utjecajnih faktora, a naziva se **indeks ponašanja.** S takvom mjerom moguće je tražiti samo jedno rješenje (najmanja potrošnja goriva, najviši domet rakete), pa možemo u pravom smislu riječi govoriti o **optimalnom sustavu.** Koristeći se metodom prostora stanja (v. dvanaesto poglavlje), možemo obrađivati regulacijske sustave s više ulaza i izlaza. Tako možemo projektirati i strukturu regulacijskog kruga — to je **strukturna optimalizacija.**

Za razliku od klasične metode, ovdje su potrebne veoma složene matematičke metode, iako se proračuni mogu bitno olakšati upotrebom digitalnog računala. Projektirani regulacijski sustav tehnički je teško izvesti, a valja spomenuti i njegovu osjetljivost na poremećaje. Suvremeni je pristup još uvijek pretežno u fazi teorijskih istraživanja.

Kod klasične sinteze pristup se servomehanizmima i procesnoj regulaciji razlikuje. Kod **servomehanizama** kao i kod regulacije elektromotornih pogona mogu se parametri staza točno odrediti, jer se najčešće radi o hidrauličnim i električnim veličinama. Optimalno regulacijsko djelovanje traži se matematičkim putem: izračunava se **kompenzator koji je dio servomehanizma,** i to najčešće metodom frekvencijskog odziva, o kojoj raspravljamo u ovom poglavlju. Mnogo se primjenjuje i metoda lokusa korijena, koju ćemo obraditi u desetom poglavlju.

Drukčiji pristup primjenjuje se već dugi niz godina u **procesnoj regulaciji.** Toplinske i kemijske procese općenito je teško matematički opisati, jer se pretežno radi o toplinskim i pneumatskim veličinama. Rješenje se traži pokusom: na objekt se **povezuje kompaktno izveden regulator,** a namještanjem pojačanja, integralnog i derivacijskog vremena traži se prema iskustvenim kriterijima optimalno regulacijsko djelovanje. Treba naglasiti da u biti nema razlike između sinteze servomehanizama i sinteze procesnih postrojenja jer se traže optimalni parametri regulacijskog uređaja.

Na kraju ovog poglavlja spominjemo složene regulacijske procese gdje pomoću dodatnih regulacijskih petlji tražimo optimalno regulacijsko djelovanje. Iako ćemo opisati samo nekoliko u praksi provjerenih, jednostavnijih sustava s poznatim metodama rješavanja, ipak je i tu riječ o parametarskoj optimalizaciji.

---

[1] Analogna računala obrađuju se u četrnaestom poglavlju.

9.1. Zahtjevi kod sinteze

Idealan odgovor na zahtjeve kod sinteze bio bi kad bi se moglo odrediti regulacijsko odstupanje u svakom pojedinom trenutku. To je zbog više razloga veoma otežano. Zato se uvodi nekoliko kriterija ponašanja koji se mogu izraziti u području vremena, frekvencije ili kompleksne varijable. Kriteriji moraju biti tako postavljeni da se mogu fizikalno protumačiti, tj. da projektant može sagledati utjecaj promijenjenih zahtjeva na regulacijsko djelovanje.

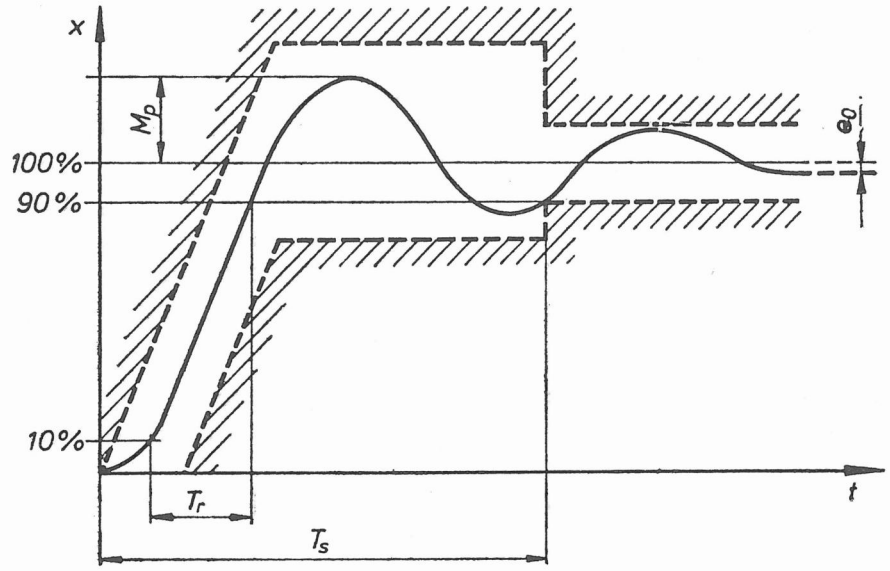
Bez obzira u kojem se području kriteriji izraze, oni moraju obuhvatiti tri osnovna svojstva regulacije:

- stupanj stabilnosti, pri čemu se misli na **relativnu stabilnost,** jer se apsolutna stabilnost mora osigurati u samom početku projektiranja,
- **brzinu odziva,** odnosno brzinu reakcije sustava na promjene pobude, što je također značajka prijelaznog stanja,
- dopušteno trajno regulacijsko odstupanje, odnosno **točnost regulacije** u stacionarnom stanju.

U postavljanju kriterija uvodimo jedno bitno pojednostavnjenje: **zamjenjujemo sustave višega reda sa slabo prigušenim modelom drugoga reda.** Tako uzimamo u obzir samo dva prevladavajuća konjugirano kompleksna korijena koji su najbliži imaginarnoj osi u *s*-ravnini.

9.1.1. Zahtjevi u vremenskom području

Regulacijsko djelovanje u vremenskom području odražava se u prijelaznom i u stacionarnom ponašanju. Bilo bi umjesno da se kao pobuda odabere signal sa stohastičkim svojstvima, jer on najbolje prikazuje stvarne odnose. Zbog složenih matematičkih proračuna i mjerenja to se ne radi, već se **uzimaju pobudne funkcije determinističkog karaktera.** Prijelazno je ponašanje mjera za relativnu stabilnost i brzinu odziva, a promatra se odziv sustava na odskočnu funkciju. Pri tome se sustav *n*-toga reda zamjenjuje sa slabo prigušenim kvadratnim modelom, što je prikazano na sl. 9—2, pa se na osnovi njega uvodi nekoliko pojmova. Stacio-



Sl. 9—2. Definicija zahtjeva u vremenskom području

narno ponašanje je mjera za točnost regulacije; kao pobude uzimaju se odskočna, nagibna i parabolna funkcija, što ovisi o tipu servomehanizma.

Vrijeme porasta T_r najčešće označava vrijeme koje je potrebno da odziv sustava poraste od 10% na 90% konačne vrijednosti. Moramo upozoriti da postoje i druge odrednice vremena porasta, kao npr. vrijeme porasta odziva od 0 do 100% vrijednosti. U svakom je slučaju vrijeme porasta mjera za brzinu odziva.

Vrijeme smirivanja T_s označava vrijeme koje je potrebno da odziv sustava dostigne i da se zadrži unutar zadanog postotka konačne vrijednosti. Na sl. 9—2 to je $\pm 10\%$, a razumne su granice 5%, pa i 2%. Budući da je T_s to kraće, što je prigušivanje oscilacija $e^{-\zeta\omega_n t}$ jače, možemo uzeti približnu formulu da amplituda oscilacija padne ispod 2% konačne vrijednosti. Iz $e^{-\zeta\omega_n T_s}=0{,}02$ izvodimo:

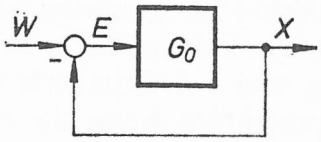
$$T_s \simeq \frac{4}{\zeta\omega_n}. \tag{9-1}$$

Vrijeme smirivanja označava brzinu odziva i upućuje na relativnu stabilnost.

Postotni prebačaj M_p daje maksimalnu amplitudu prigušenih oscilacija u postotku. U odjeljku 3.3. izveli smo ovisnost M_p o stupnju prigušenja ζ:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100, \tag{3-75}$$

što je prikazano grafički na sl. 9—5a. Često nije poželjan ni najmanji prebačaj, npr. kod kopirnog glodanja. Time se međutim znatno smanjuje brzina odziva, što u mnogim primjenama također nije poželjno, pa se M_p uzima i do 35%. I postotni je prebačaj mjera za relativnu stabilnost i brzinu odziva sustava.



Sl. 9—3. Regulacijski krug s jediničnom povratnom vezom

Prigušena vlastita frekvencija ω_p ovisi o prevladavajućim polovima u s-ravnini. Ona je povezana s neprigušenom vlastitom frekvencijom slijedećim izrazom:

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}. \tag{3-60}$$

Grafička ovisnost $\omega_p/\omega_n = f(\zeta)$ vidi se na sl. 9—5b. Povoljno je da ω_p zbog brzine odziva bude što viša, ali treba paziti da se ne nađe u blizini vlastite frekvencije mehaničkih sklopova u sustavu.

Trajno regulacijsko odstupanje e_0 također je veličina koju treba odrediti. Ono ovisi o tipu regulacijskog sustava (broj integralnih članova) i o obliku pobudne funkcije (red parabole), o čemu smo iscrpno govorili u odjeljku 8.2. Ovdje ćemo ukazati samo na povezanost između e_0 i parametara sustava drugoga reda. Ako je prema sl. 9—3 prijenosna funkcija otvorenog kruga $G_0(s)$ sustav drugoga reda, od-

skočna funkcija na ulazu daje $e_0=0$. Ako međutim ulazna funkcija $W(s)$ ima neugodniji oblik, npr. nagibnu funkciju $W(s)=1/s^2$, regulacijsko je odstupanje:

$$E(s)=W(s)-X(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}\cdot\frac{\omega_n^2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}=$$

$$=\frac{s+2\zeta\omega_n}{s\,(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}. \qquad (9\text{-}2)$$

Pomoću teorema konačne vrijednosti odatle dobivamo:

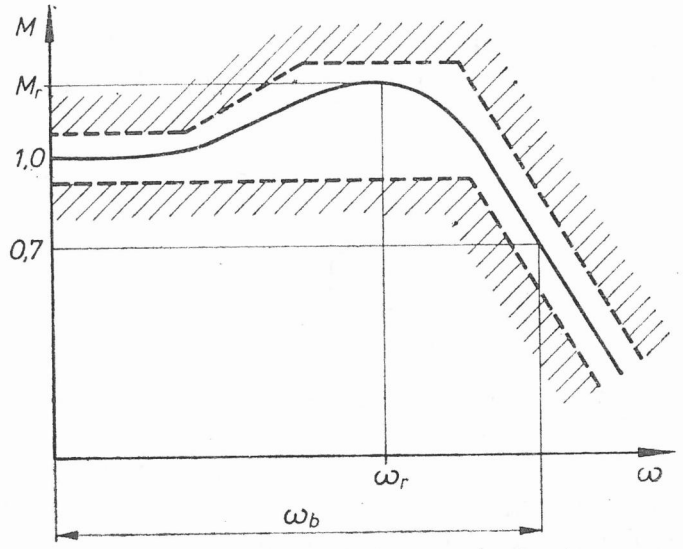
$$e_0=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} s\,E(s)=\frac{2\zeta}{\omega_n}. \qquad (9\text{-}3)$$

Znači da je e_0 to manje što je manji ζ. Veći ζ znači i veću brzinu odziva i veću relativnu stabilnost. Posljedica je da je zahtjev za što manjim trajnim regulacijskim odstupanjem u suprotnosti sa zahtjevima za brzinom odziva i za relativnom stabilnošću.

Kao što ćemo vidjeti, sve su te definicije u korelaciji s odgovarajućim definicijama u frekvencijskom području. Da bi pregled bio potpun, spomenut ćemo još **istosmjerni opteretni otpor** R_p koji može unijeti dodatno prigušenje u regulacijski sustav, a određuje se kad se očekuju veće promjene opterećenja.

9.1.2. Zahtjevi u frekvencijskom području

S obzirom na važnu ulogu koju frekvencijski odziv ima u sintezi sustava, normalno je da se postave zahtjevi i u frekvencijskom području. I ovdje se umjesto sustava n-toga reda uzima slabo prigušeni kvadratni model, što je opravdano jer su više frekvencije prolaskom kroz stvarne sklopove prigušene. Prema frekvencijskoj karakteristici na sl. 9—4, uvodimo više definicija, a dajemo i njihovu korelaciju s definicijama u vremenskom području. To je važno uočiti jer su svi zahtjevi u vezi s definicijama u frekvencijskom području samo orijentacija na osnovi koje projektant treba da stekne predodžbu o vremenskom odzivu sustava.

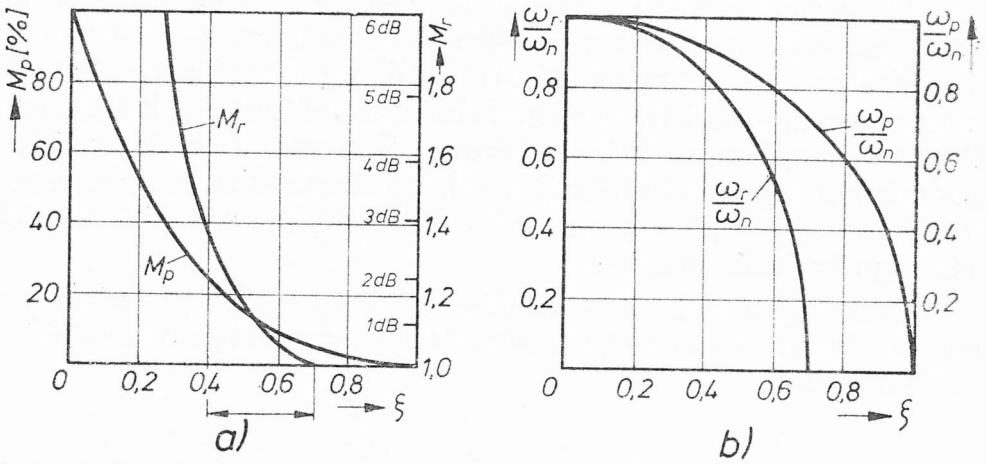


Sl. 9—4. Definicija zahtjeva u frekvencijskom području

Širina pojasa ω_b označava frekvenciju kod koje se prijenosni omjer zatvorenog kruga M smanji faktorom 0,7 od vrijednosti M uz frekvenciju nula. Kako je ω_b propusno područje za signale određenih frekvencija (pojasni filtar), povećanje širine pojasa povoljno utječe na vjeran prijenos signala, a time i na brzinu odziva. To vidimo i iz približne formule koja povezuje širinu pojasa ω_b i vrijeme porasta T_r kad je sustav namješten na oko 20% prebačaja:

$$\frac{\omega_b}{2\pi} \simeq \frac{0{,}45}{T_r} \tag{9-4}$$

Širina pojasa ω_b ima dimenziju frekvencije, tj. $[s^{-1}]$, a dimenzija vremena porasta T_r dana je u $[s]$. Povećanje ω_b ima neželjenu posljedicu da se pritom propuštaju razni šumovi i smetnje kojih uvijek ima kod viših frekvencija. Zbog toga odabiranje širine pojasa treba uskladiti.



Sl. 9–5. Korelacija rezonantnog izdizanja M_r i postotnog prebačaja M_p (a) te prigušene vlastite frekvencije ω_p i rezonantne frekvencije ω_r (b).

Rezonantno izdizanje M_r pojavljuje se kod slabo prigušenih sustava na rezonantnoj frekvenciji ω_r. Rezonantno izdizanje je mjera za relativnu stabilnost zatvorenog kruga. U odjeljku 5.3. izveli smo relaciju između M_r i stupnja prigušenja ζ za sustav drugoga reda:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{za } 0 \leqslant \zeta \leqslant 0{,}7 \tag{5-54}$$

gdje smo radi jednostavnosti ispustili prijenosni omjer K_P. Da bismo uskladili relativnu stabilnost i brzinu odziva, uzimamo za M_r vrijednosti između 1,0 i 1,4. To je izravno povezano s postotnim prebačajem M_p u vremenskom području, što vidimo na sl. 9–5a[1]. U području uobičajenih vrijednosti između 0,4 i 0,7 doista se M_r i M_p približno poklapaju. Za male vrijednosti od M_r, ne može se pouzdano ukazati na odgovarajući M_p.

[1] Treba upozoriti da se prijenosni omjer zatvorenog kruga može definirati ili kao omjer M ili kao logaritamski omjer 20 log M izražen u decibelima, što je označeno i na ordinati na sl. 9–5a. Decibeli se upotrebljavaju u Bodeovu i u Nicholsovu prikazu.

Rezonantna frekvencija ω_r povezana je s neprigušenom vlastitom frekvencijom ω_n relacijom:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \quad \text{za } 0 \leqslant \zeta \leqslant 0{,}7. \tag{5-53}$$

Uz veću rezonantnu frekvenciju, veća je i brzina odziva. Na sl. 9—5b prikazane su ω_r i ω_p kao funkcije od ζ; kod manjih prigušenja postoji korelacija između ω_r u frekvencijskom području i ω_p u vremenskom području.

Kriteriji ponašanja M_r i ω_r imaju važnu ulogu pri ocjeni **zatvorenog kruga.** Kako su oni samo kod sustava drugoga reda izravno povezani s parametrima sustava, sustavi višega reda nadomještaju se kvadratnim modelom,

Opteretnu impedanciju Z_p određujemo kad očekujemo veće promjene opterećenja. Kako je Z_p funkcija frekvencije, određujemo najveću vrijednost koja se može pojaviti kod neke frekvencije. Opteretna impedancija povezana je na određen način s opteretnim otporom R_p, koji je granična vrijednost Z_p kad frekvencija $\omega \to 0$.

Uz gornje pojmove određuju se često i **amplitudna rezerva** A_r i **fazna rezerva** φ_r, koje smo uveli u odjeljku 8.3. kao mjere za relativnu stabilnost sustava, i to kad se radi o analizi **otvorenog kruga.** Umjesto širine pojasa ω_b možemo u tom slučaju zadati frekvenciju kritične amplitude ω_1, koju je lako odrediti prema Bodeovu amplitudno-frekvencijskom dijagramu. Doduše, veličine se ω_b i ω_1 ne podudaraju, ali su u korelaciji, pa ih u inženjerskim proračunima možemo zamijeniti. Zahtjevi sa ω_b i ω_1 mogu zadovoljiti samo kad se radi o projektiranju jednostavnih regulacijskih krugova.

Treba postaviti samo onoliko zahtjeva koliko je nužno potrebno da budu »oštri«. Svako pretjerivanje izaziva dodatne poteškoće u izvedbi i poskupljuje regulacijski sustav.

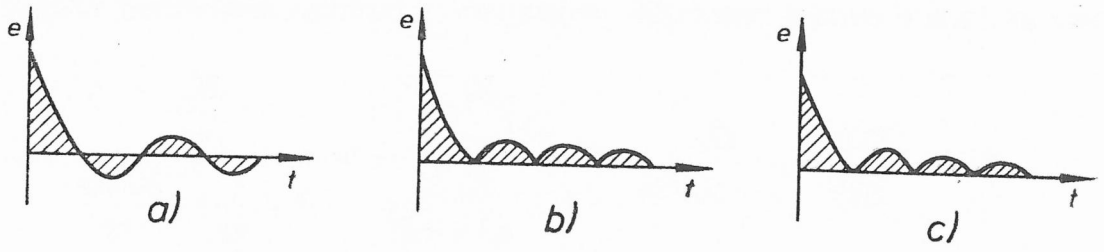
9.1.3. Optimalizacija

Kod dosadašnjih zahtjeva, bilo u vremenskom bilo u frekvencijskom području, postavili smo nekoliko kriterija ponašanja regulacijskog sustava. Rješenje je kompromis što smo ga našli postupnim poboljšavanjem pretprojekta. U suvremenom se pristupu nastoji označiti samo jedan kriterij u vremenskom području nazvan **indeks ponašanja.** On daje jednoznačan odgovor na pitanje kako da se nađe optimalno regulacijsko djelovanje.

Odmah u početku ovog odjeljka spomenuli smo da bi idealan odgovor na zahtjeve kod sinteze bio kad bismo regulacijsko odstupanje mogli zadati u svakom pojedinom trenutku. Umjesto toga možemo izračunati vremenski integral regulacijskog odstupanja kod odskoka vodeće ili poremećajne veličine:

$$\int_0^\infty e(t)\, dt \to \min. \tag{9-5}$$

Integracijska površina predočena je crtkano na sl. 9—6a, a za postizanje optimalnih uvjeta treba da bude što manja. Iako ovaj kriterij izgleda logičan, ipak s malo razmišljanja možemo ustanoviti da je to moguće i u slučaju slabo prigušenih ili čak trajnih oscilacija, jer se pozitivne i negativne integralne površine poništavaju. Zato uz uvjet (9-5) moramo poznavati i stupanj prigušenja ζ regulacijskog kruga.



Sl. 9—6. Integralni kriteriji ponašanja

Nedostatak tog kriterija otklanjamo, ako uzmemo integral apsolutne vrijednosti regulacijskog odstupanja (sl. 9—6b):

$$\int_0^\infty |e(t)|\,dt \to \min. \tag{9-6}$$

Očigledno je da su tim kriterijem jednako potisnuti i brzi oscilacijski sustavi i polagani sustavi s prevelikim prigušenjem.

Ako apsolutnu vrijednost regulacijskog odstupanja pomnožimo s vremenom t, dobivamo tzv. **ITAE-kriterij** (Integral of Time Multiplied by Absolute Value of Error):

$$\int_0^\infty t\,|e(t)|\,dt \to \min, \tag{9-7}$$

koji se prilično mnogo upotrebljava, iako ga je teško analitički primijeniti zbog funkcije apsolutne vrijednosti pod integralom. On jače potiskuje spore sustave, a smanjuje težinu početnog velikog odstupanja.

Iz statističke teorije proizlazi još jedan prihvaćeni kriterij. To je integral kvadrata pogrešaka (sl. 9—6c) koji se naziva i **ISE-kriterij** (Integral of Squared Error):

$$\int_0^\infty e(t)^2\,dt \to \min. \tag{9-8}$$

Izračunavanje svih tih integrala zamršeno je jer se, među ostalim, pojavljuje i integracija u kompleksnom području. Ovdje ćemo na jednom sasvim jednostavnom primjeru prikazati bit postupka.

Regulacijski krug ima I_1-stazu i P_0-regulator s prijenosnim funkcijama:

$$G_S = \frac{K_i}{s(1+\tau_S s)}, \qquad G_R = K_p. \tag{9-9}$$

Kako se radi o čvrstoj regulaciji, prijenosna je funkcija zatvorenog kruga:

$$G(s)=\frac{X(s)}{Z(s)}=\frac{G_S}{1+G_S G_R}=\frac{\dfrac{K_i}{s(1+\tau_S s)}}{1+\dfrac{K_P K_i}{s(1+\tau_S s)}}=\frac{\dfrac{K_i}{\tau_S}}{s^2+\dfrac{1}{\tau_S}s+\dfrac{K_P K_i}{\tau_S}}, \tag{9-10}$$

odakle dobivamo diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{\tau_S}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{K_P K_i}{\tau_S}x=\frac{K_i}{\tau_S}z. \tag{9-11}$$

Prema postupku izloženom u odjeljku 2.3, na osnovi homogene jednadžbe dobiju se korijeni karakteristične jednadžbe:

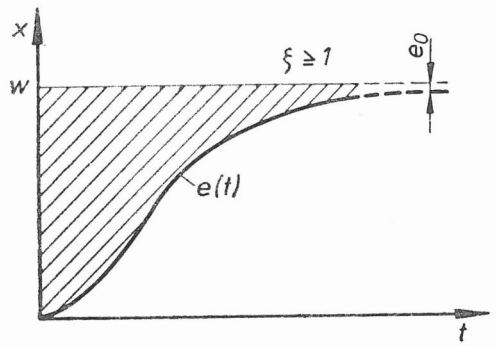
$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2\tau_S}\pm\sqrt{\frac{1}{4\tau_S^2}-\frac{K_P K_i}{\tau_S}}\,. \tag{9-12}$$

Da bismo dobili rješenje, pretpostavimo kao pobudu poremećajnu veličinu u obliku jediničnog odskoka, tj. $z=u(t)$, a početni su uvjeti uz $t=0: x=0$ i $dx/dt=0$. Ukupno je rješenje zbroj partikularnog integrala i komplementarne funkcije:

$$x(t)=x_{PI}+x_{KF}=\frac{K_i}{\tau_S}\left[1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t}-\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_2 t}\right]. \tag{9-13}$$

Vremenski tok odziva $x(t)$ vidimo na sl. 9—7. Budući da je nazivna veličina $w(t)$ konstantne vrijednosti, možemo izjednačiti $e(t)=x(t)$. Na slici je simbolički prikazano i trajno regulacijsko odstupanje e_0, koje postoji zbog P-regulatora u krugu. To možemo provjeriti primjenom teorema konačne vrijednosti na izraz (9-10)[1].

Zbog prisutnosti e_0 bilo koji od integralnih kriterija teži beskonačnom, pa je potrebno od integracijske površine oduzeti površinu koja nastaje zbog trajnog regulacijskog odstupanja e_0.



Sl. 9—7. Regulacijsko odstupanje kao funkcija vremena

[1] Vidi odjeljak 8.2.

Uzimamo indeks ponašanja prema jednadžbi (9-5):

$$\int_0^\infty e(t)\,dt=\int_0^\infty [e_0-x(t)]\,dt=-\frac{K_i}{(\lambda_1-\lambda_2)\,\tau_S}\int_0^\infty(\lambda_2 e^{\lambda_1 t}-\lambda_1 e^{\lambda_2 t})\,dt, \tag{9-14}$$

gdje smo uvrstili vrijednost za $x(t)$ iz jednadžbe (9-13). Dalje dobivamo:

$$\int_0^\infty e(t)\,dt=-\frac{K_i}{(\lambda_1-\lambda_2)\,\tau_S}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}e^{\lambda_1 t}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}e^{\lambda_2 t}\right]_0^\infty=-\frac{K_i}{\lambda_1\lambda_2\,\tau_S}(\lambda_1+\lambda_2)=\frac{1}{K_P\,\tau_S}, \tag{9-15}$$

gdje je na osnovi izraza (9-9) stavljeno $(\lambda_1+\lambda_2)=-1/\tau_S$ i $\lambda_1/\lambda_2=K_P K_i/\tau_S$. Kako su parametri staze zadani, integracijska je površina to manja što je veći K_P. Uz taj uvjet potrebno je još osigurati aperiodski tok odziva, tj. da je $\zeta\geqslant 1$. Uspoređujući homogeni dio diferencijalne jednadžbe (9-11) s normalnim oblikom:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dx}{dt}+\omega_n^2 x=0 \tag{9-16}$$

postižemo da je:

$$\omega_n^2=\frac{K_P K_i}{\tau_S},\qquad 2\zeta\omega_n=\frac{1}{\tau_S}. \tag{9-17}$$

Izlučivanjem ω_n iz tih dviju jednadžbi dobivamo izraz:

$$K_P=\frac{1}{4\zeta^2 K_1\cdot\tau_S}, \tag{9-18}$$

odnosno njegovo ograničenje:

$$K_P\leqslant\frac{1}{4K_i\cdot\tau_S}\quad\text{za}\quad\zeta\geqslant 0. \tag{9-19}$$

Maksimalno dozvoljeni izraz za K_p uvrstimo u jednadžbu integracijske površine (9-15), pa dobivamo indeks ponašanja kao mjeru regulacijskog ponašanja.

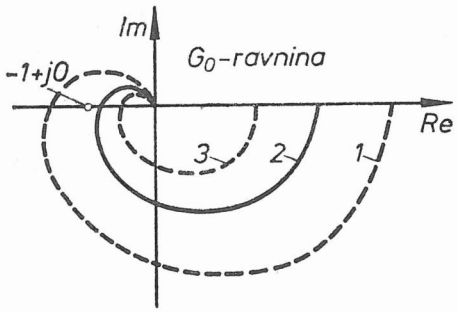
Umjesto integralnih kriterija koji zahtijevaju zamršena izračunavanja, u projektiranju procesne regulacije uobičajili su se iskustveni kriteriji. Optimalne vrijednosti parametara regulatora namještaju se na osnovi jednostavnih tablica.

9.2. Sinteza servomehanizama izborom pojačanja

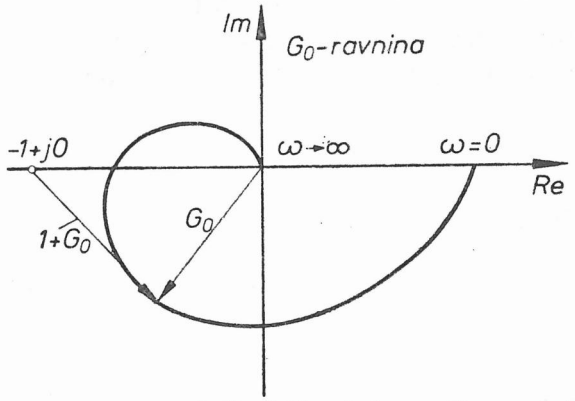
Često je pri projektiranju servomehanizama pojačanje otvorenog kruga jedini parametar koji nam nije poznat. Da bismo dobili optimalno ponašanje sustava, pojačanje treba odabrati tako da nije preveliko, jer dovodi do nestabilnosti, ali ni premaleno, jer izaziva duge prijelazne pojave i nepovoljna trajna odstupanja. Ovaj

problem možemo riješiti i pomoću polarne krivulje otvorenog kruga $G_0(j\omega)$ prema Nyquistovu dijagramu na sl. 9—8. Krivulja 2 neka predstavlja polarnu krivulju trećega reda za servomehanizam tipa 0. Krivulja se nalazi na granici stabilnosti jer prolazi blizu kritične točke $(-1+j0)$ na realnoj osi. Povećati pojačanje znači pomaknuti polarnu krivulju u položaj 1: točnost je doduše veća, ali cijeli sustav postaje apsolutno nestabilan. Obratno, smanjenjem pojačanja dobijemo krivulju 3: sada je zadovoljen kriterij stabilnosti, ali je točnost manja. Promjenom pojačanja mijenja se zapravo samo mjerilo dijagrama: sve su tri krivulje međusobno slične i u odgovarajućim točkama razlikuju se samo za čvrsti faktor.

Namještanje pojačanja u servomehanizmima podudara se s čistim P-djelovanjem u regulacijskom krugu, obrađenom u odjeljku 7.1. Regulacijski signal se prenosi bez ikakve dinamičke promjene, pa je prema tome čisto pojačanje.



Sl. 9—8. Utjecaj pojačanja u regulacijskom krugu na »mjerilo« polarnih krivulja u Nyquistovu dijagramu



Sl. 9—9. Konstrukcija M-kružnica u G_0-ravnini

Pojačanje možemo namjestiti pokusno. Nakon svakog namještanja moramo provjeriti jesu li zadovoljeni postavljeni uvjeti. Mnogo je bolje, i kraći je put, da namještanje pojačanja odredimo unaprijed pomoću metode frekvencijskog odziva ili pomoću metoda lokusa korijena, tako da izbjegnemo suvišno ponavljanje pokusa. **U praksi se više primjenjuje frekvencijski odziv** zbog dva razloga:

— polazna točka je sinusna prijenosna funkcija otvorenog kruga $G_0(j\omega)$ koju je razmjerno lako odrediti pokusom, a mogu se obuhvatiti i transcendentni oblici funkcija,

— pomoću tzv. M- i N-krugova u Nyquistovu i Nicholsovu dijagramu sinusna se prijenosna funkcija otvorenog kruga $G_0(j\omega)$ jednostavno prevodi u onu zatvorenog kruga $M(j\omega)$. To je značajno zato što su zahtjevi obično postavljeni u veličinama M_r i ω_r, koje su povezane s ponašanjem zatvorenog kruga.

Hallova karta. Kao i u analizi točnosti i stabilnosti, sinteza servomehanizma izborom pojačanja temelji se, zbog jednostavnosti, na blok-dijagramu s jediničnom povratnom vezom (sl. 9—3). Naravno, sintezu možemo poopćiti i na regulacijske krugove sa sklopovima u petlji povratne veze, o čemu ćemo govoriti kasnije.

Na sl. 9—9 ucrtana je polarna krivulja otvorenog kruga $G_0(j\omega)$ u G_0-ravnini. **Sinusna prijenosna funkcija zatvorenog kruga** $M(j\omega)$ povezana je sa $G_0(j\omega)$ slijedećom relacijom:

$$M(j\omega)=Me^{j\varphi}=\frac{G_0(j\omega)}{1+G_0(j\omega)}, \tag{9-20}$$

gdje su amplituda:

$$M=\frac{|G_0(j\omega)|}{|1+G_0(j\omega|} \tag{9-21}$$

i faza:

$$\psi=\underline{/M(j\omega)}=\left|\frac{G_0(j\omega)}{\underline{1+G_0(j\omega)}}\right. \tag{9-22}$$

Iz svake točke polarne krivulje na sl. 9—9 možemo konstruirati dva verzora: G_0 i $(1+G_0)$. To je lako provjeriti, jer je G_0 zbroj frekvencijski nezavisnog verzora -1 i $(1+G_0)$. Verzori G_0 i $(1+G_0)$ predstavljaju ujedno brojnik i nazivnik izraza za $M(j\omega)$ u jednadžbi (9-20). Prema tome, uz poznati G_0, možemo odrediti $M(j\omega)=G_0/(1+G_0)$ za svaku točku polarne krivulje.

Postupak je bitno olakšan ako konstruiramo krivulje konstantnih vrijednosti M i ψ u Nyquistovu dijagramu. Kako je $G_0(j\omega)$ kompleksan broj, možemo ga pisati i u obliku:

$$G_0(j\omega)=x+jy, \tag{9-23}$$

što uvrstimo u izraz (9-21):

$$M=\frac{|x+jy|}{|1+x+jy|}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}}. \tag{9-24}$$

Kvadriranjem i množenjem dobivamo:

$$M^2[(1+x)^2+y^2]=x^2+y^2. \tag{9-25}$$

Dijeljenjem jednadžbe sa (M^2-1) i popunjavanjem na kvadratni oblik, dobivamo slijedeći izraz:

$$\left[x+\frac{M^2}{M^2-1}\right]^2+y^2=\frac{M^2}{(M^2-1)^2}. \tag{9-26}$$

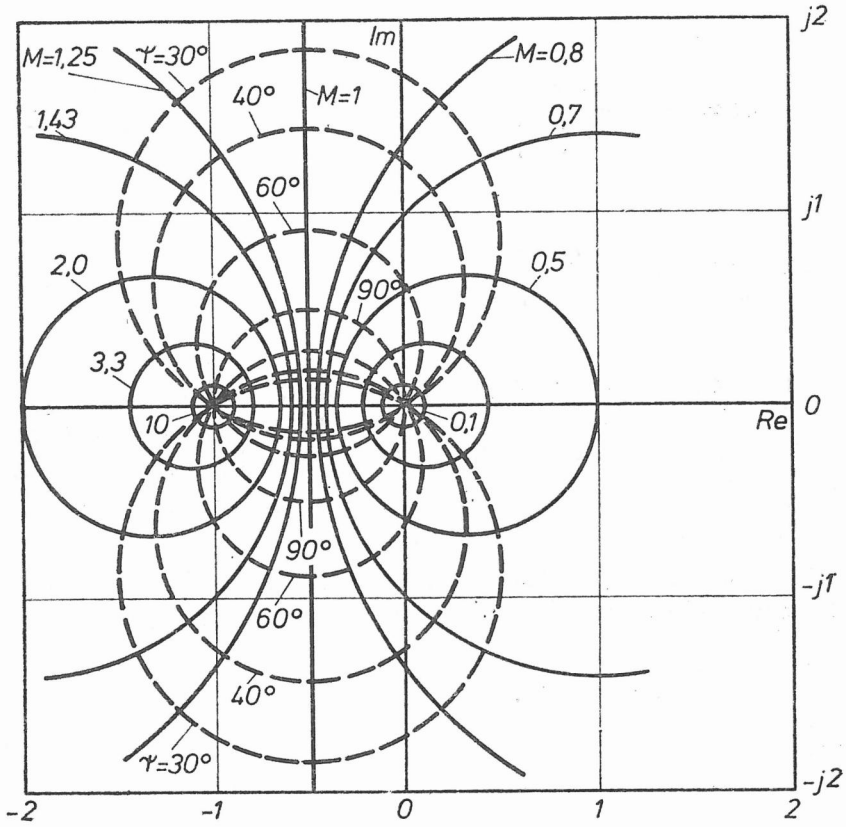
To je jednadžba kružnice čije središte ima koordinate:

$$x=-\frac{M^2}{M^2-1},\qquad y=0, \tag{9-27}$$

te polumjera:

$$r=\left|\frac{M}{M^2-1}\right|. \tag{9-28}$$

Za razne vrijednosti M možemo u G_0-ravnini konstruirati familiju kružnica; one su na sl. 9—10 prikazane izvučeno. U familiju krivulja uključena je i »kružnica« za $M=1$ koje je polumjer neizmjerno velik, a središte joj je u $-\infty$. Taj pravac prolazi kroz koordinatu $x=-0{,}5$. Zanimljive su kružnice za $M>1$; uz $M\to\infty$ kružnice konvergiraju prema kritičnoj točki $(-1+j0)$.



Sl. 9—10. Hallova karta

Na sličan način možemo odrediti i krivulje konstantnog faznog kuta ψ. Racionalizacijom nazivnika izraza (9-24):

$$\psi=\underline{/\frac{x+jy}{1+x+jy}}=\underline{/\frac{x^2+x+y^2+jy}{(1+x)^2+y^2}} \tag{9-29}$$

dobivamo tg ψ kao omjer imaginarne prema realnoj komponenti:

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{y}{x^2+x+y^2}. \tag{9-30}$$

Pišemo skraćeno $N=\operatorname{tg}\psi$, **što je tangens faznog kuta zatvorenog kruga.** Nakon algebarskih pretvorbi dobivamo:

$$x^2+x+y^2-\frac{y}{N}=0. \tag{9-31}$$

Popunjavanjem na kvadratni oblik:

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]^2+\left[y-\frac{1}{2N}\right]^2=\frac{N^2+1}{4N^2} \tag{9-32}$$

proizlaze opet jednadžbe kružnice s koordinatama središta:

$$x=-\frac{1}{2},$$

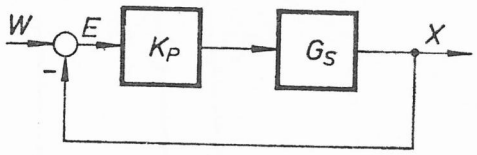
$$y=\frac{1}{2N}, \tag{9-33}$$

i polumjerom:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{N^2}}. \tag{9-34}$$

Familija kružnica sa ψ kao parametrom prikazana je na Nyquistovu dijagramu na sl. 9—10 crtkano. Sve one prolaze kroz točke $(0+j0)$ i $(-1+j0)$ u G_0-ravnini.

Nyquistov dijagram s ucrtanim M- i N-kružnicama naziva se **Hallova karta.** Ako u Hallovu kartu ucrtamo polarnu krivulju otvorenog kruga $G_0(j\omega)$, možemo za svaku točku krivulje naći odgovarajuću vrijednost za M i ψ kao presjecište $G_0(j\omega)$ i određenih kružnica M i N. Nezgodna je strana Hallove karte to što su sadržani iznosi, a ne omjeri, pa se za svaki pojedini slučaj moraju M- i N-kružnice ponovno proračunati.



Sl. 9—11. Blok-dijagram servomehanizma s pojačanjem

Sada ćemo izvesti jednostavan **grafički postupak kojim se uz zadani M_r određuje optimalno pojačanje otvorenog kruga servomehanizma.** Taj se postupak temelji na blok-dijagramu servomehanizma prema sl. 9—11. Servomehanizam ima sinusnu prijenosnu funkciju $G_S(j\omega)$ koja se sastoji od pojačanja K_S i frekvencijski ovisnog dijela $G_S'(j\omega)$:

$$G_S(j\omega)=K_S G_S'(j\omega). \tag{9-35}$$

U seriji s tim blokom spojen je i blok sa čistim pojačanjem K_P, tako da je ukupno pojačanje otvorenog kruga $K=K_P K_S$. U praktičnoj izvedbi servomehanizma to može biti pojačalo s mogućnošću namještanja pojačanja, koje hrani elektromotorni pogon (v. sl. 8—5).

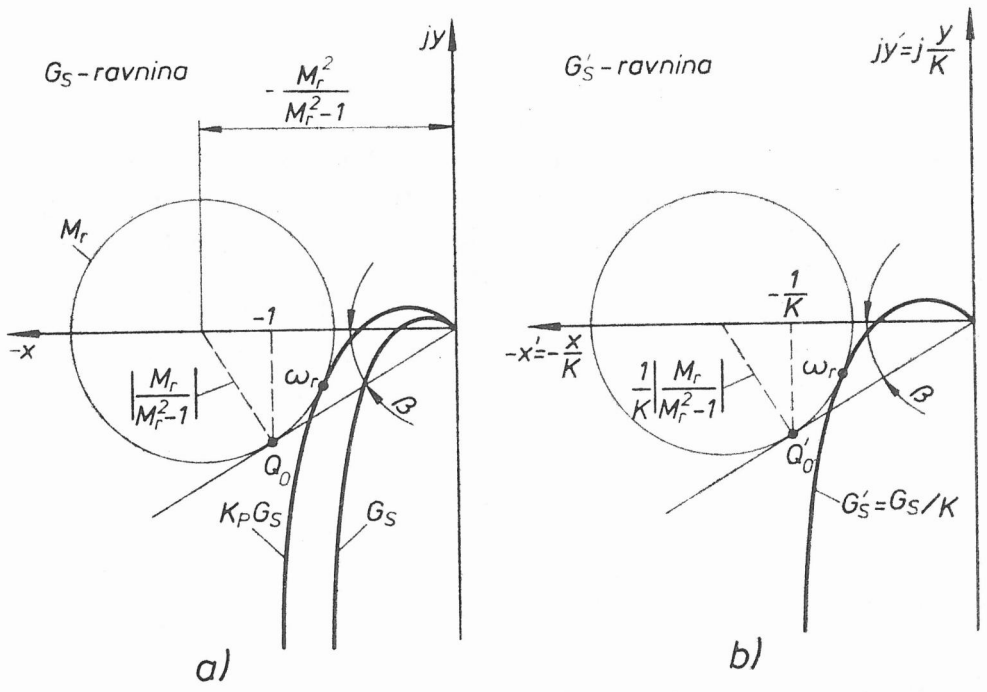
Sinusna prijenosna funkcija servomehanizma $G_S(j\omega)$ ucrtana je u Hallovu kartu na sl. 9—12a. Mijenjajući pojačanje K_P, dobivamo novu polarnu krivulju $K_P G_S(j\omega)$. Pri tome smo K_P tako odabrali da $K_P G_S(j\omega)$ dodiruje M-kružnicu sa zadanim rezonantnim izdizanjem M_r. Dodirna je točka Q_0 upravo kod rezonantne frekvencije ω_r. U dijagram je ucrtana i tangenta na M_r-kružnicu; iz jednadžbi (9-27) i (9-28) slijedi da je kut β koji tangenta zatvara s negativnom realnom osi:

$$\sin\beta=\frac{\dfrac{M_r}{M_r^2-1}}{\dfrac{M_r^2}{M_r^2-1}}=\frac{1}{M_r}. \tag{9-36}$$

Okomica iz dodirne točke Q_0 siječe negativnu realnu os u točki $(-1+j0)$, što je lako dokazati prema sličnosti trokuta.

Umjesto da mijenjanjem K_P prilagođujemo $G_S(j\omega)$ zadanom rezonantnom izdizanju M_r, mnogo je jednostavnije da **mijenjamo mjerilo dijagrama,** što se u biti svodi na isto. Uzimamo frekvencijski ovisan dio $G_S'(j\omega)=G_S(j\omega)/K_S$, pa umjesto koordinata x i y:

$$G_S(j\omega)=K_S G_S'(j\omega)=x+jy, \tag{9-37}$$



Sl. 9—12. Projektiranje servomehanizma izborom pojačanja pomoću Nyquistova dijagrama

radimo s novim koordinatama x' i y':

$$G'_S(j\omega)=\frac{G_S(j\omega)}{K_S}=\frac{x}{K_S}+j\frac{y}{K_S}=x'+jy'. \tag{9-38}$$

Na dijagramu na sl. 9—12b sada imamo polarnu krivulju $G'_S(j\omega)$ umjesto $G_S(j\omega)$; M_r-kružnicu diraju i polarna krivulja $G'_S(j\omega)$ i pravac s kutom nagiba $\beta=\arcsin(1/M_r)$; točka $(-1/K+j0)$ zamijenila je točku $(-1+j0)$; polumjer M_r-kružnice umanjen je za faktor K. Zapravo su koordinate na dijagramu na sl. 9—12b u odnosu prema koordinatama dijagrama na sl. 9—12a podijeljene samo faktorom $1/K$, tj. promijenjeno je mjerilo dijagrama.

Na osnovi te konstrukcije slijedi grafička sinteza:

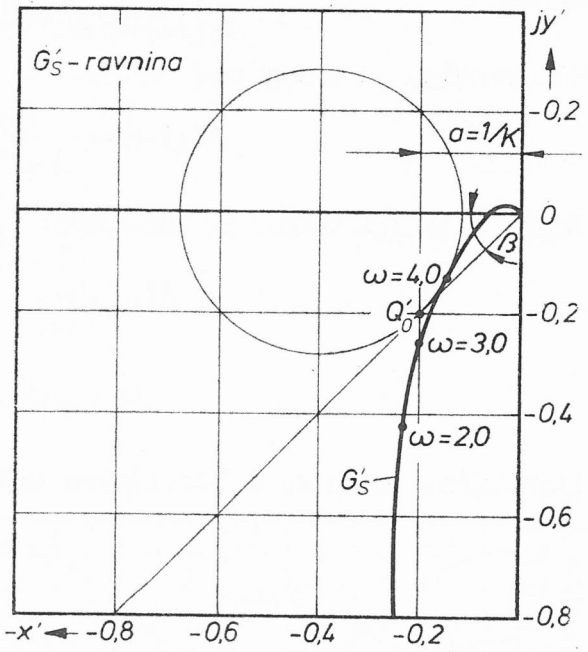
- u Nyquistov dijagram ucrtamo polarnu krivulju $G'_S(j\omega)=G_S(j\omega)/K_S$, gdje je K_S prvobitno pojačanje,
- povučemo pravac s kutom nagiba $\beta=\arcsin(1/M_r)$,
- pronađemo M-kružnicu koja dira pravac $\beta=\arcsin(1/M_r)$ i polarnu krivulju $G'_S(j\omega)$,
- pomoću okomice iz točke Q'_0 očitamo vrijednost a na negativnoj realnoj osi,
- da bi M-kružnica na sl. 9—12b odgovarala zadanoj vrijednosti M_r, moramo koordinate x' i y' pomnožiti s pojačanjem $K=1/a$, tako da točka $(-1/K+j0)$ postane točka $(-1+j0)$,
- kako u servomehanizmu već postoji pojačanje K_S, potrebno je da ga promijenimo u omjeru $K_P=K/K_S$.

Nakon što smo promjenom pojačanja K_P odgovorili zadanom kriteriju M_r (relativna stabilnost), potrebno je da provjerimo jesu li i drugi parametri, osobito rezonantna frekvencija ω_r (brzina odziva) i trajno regulacijsko odstupanje e_0 (točnost regulacije), unutar propisanih granica. Ako nisu, moramo pribjeći kompenzaciji pomoću dodatnih, frekvencijski zavisnih članova.

Primjer 9.1. Neki servomehanizam ima sinusnu prijenosnu funkciju otvorenog kruga:

$$G_S(j\omega)=\frac{3}{j\omega\,(1+j\omega\,0{,}02)\,(1+j\omega\,0{,}04)}.$$

Traži se takav izbor pojačanja da rezonantno izdizanje bude $M_r=1{,}4$.



Sl. 9—13. Projektiranje servomehanizma izborom pojačanja u Nyquistovu dijagramu — primjer 9.1.

U Nyquistov dijagram na sl. 9—13 ucrtamo najprije frekvencijski ovisni dio $G_S(j\omega)$:

$$G'_S(j\omega)=\frac{G_S(j\omega)}{K_S}=\frac{1}{j\omega\,(1+j\omega\,0{,}2)\,(1+j\omega\,0{,}04)},$$

a zatim i tangentu s kutom nagiba β:

$$\beta=\arcsin\frac{1}{M_r}=\arcsin\frac{1}{1{,}4}=45{,}6°.$$

U nekoliko pokušaja možemo naći M-kružnicu koja dira obje krivulje. Povučemo okomicu iz točke Q'_0 i očitamo $a=0{,}2$ na negativnoj realnoj osi. Da bi to odgovaralo točki $(-1+j0)$, potrebno je mjerilo dijagrama promijeniti za:

$$K=\frac{1}{a}=\frac{1}{0{,}2}=5.$$

To je ukupno potrebno pojačanje sinusne prijenosne funcije $G_S(j\omega)$ da bi se postigla dodirna točka s kružnicom $M_r=1{,}4$. Kako već imamo početno pojačanje servomehanizma $K_S=3$, ono se mora promijeniti u omjeru:

$$K_P=\frac{K}{K_S}=\frac{5}{3}=1{,}67.$$

Nicholsova karta. Stvarna je prednost upravo opisane metode u prijelazu na **logaritamski prikaz.** M- i N-kružnice iz Nyquistova dijagrama preslikaju se u Nicholsov dijagram koji kao ordinate ima logaritamske vrijednosti $20 \log |G(j\omega)|$. Krivulje konstantnih vrijednosti M i N nisu više kružnice već su **ovalnog oblika,** što vidimo na sl. 9—14. Njih je moguće konstruirati i izravno, na osnovi slijedećeg izvoda. Primjenjujući Eulerovu formulu, pišemo $G_0(j\omega)$ u trigonometrijskom obliku:

$$G_0(j\omega)=G_0 e^{j\varphi}=G_0(\cos\varphi+j\sin\varphi). \tag{9-39}$$

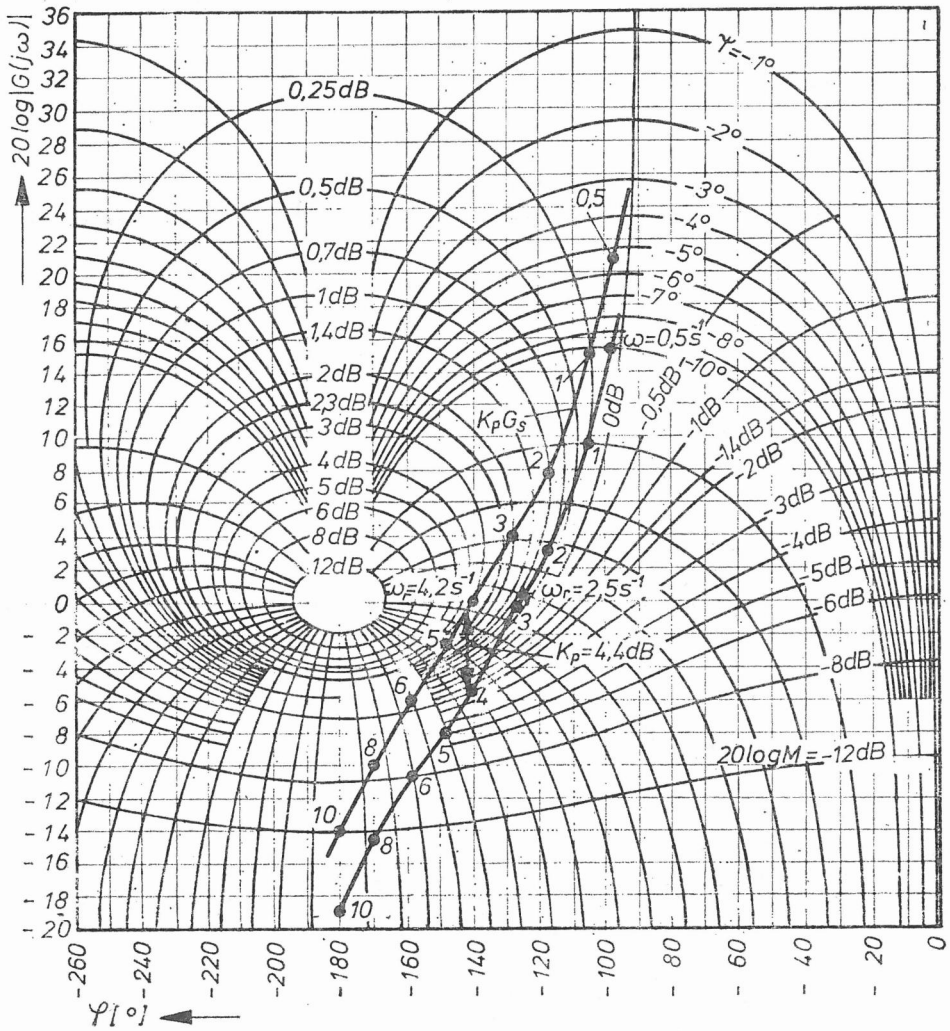
To uvrstimo u jednadžbu (9-20):

$$M(j\omega)=\frac{G_0(\cos\varphi+j\sin\varphi)}{1+G_0(\cos\varphi+j\sin\varphi)}. \tag{9-40}$$

Riješivši gornji verzor po amplitudi i po fazi, dobivamo:

$$M=\frac{G_0}{\sqrt{G_0^2+2G_0\cos\varphi+1}}. \qquad H=\operatorname{tg}\psi=\frac{\sin\varphi}{G_0+\cos\varphi}. \tag{9-41}$$

Uobičajeno je da se u Nicholsovu dijagramu M unosi u decibelima.



Sl. 9—14. Nicholsova karta

Nicholsov dijagram s ucrtanim M- i N-kružnicama naziva se **Nicholsova karta.** Kartu je doduše teško konstruirati, ali kad se jednom izračuna i umnoži, općenito je primjenjiva za bilo koji brojčani primjer jer sadrži omjere. Uz pravokutni koordinatni sustav ona sadrži i »ovalni« pa se ista krivulja može predočiti bilo kao frekvencijski sustav zatvorenoga kruga (ovalni koordinatni sustav), bilo kao frekvencijski odziv otvorenoga kruga (pravokutni koordinatni sustav).

Kombinacijom Bodeovih i Nicholsova prikaza mogu se iskoristiti prednosti logaritamskog mjerila. Započinjemo sinusnom prijenosnom funkcijom otvorenog kruga $G_0(j\omega)$ u Bodeovim dijagramima; ne smijemo se zadovoljiti asimptotskim prikazom amplitudno-frekvencijske karakteristike, već moramo u blizini lomnih frekvencija izvući točan oblik karakteristika. Krivulja $G_0(j\omega)$ prenesena je u Nicholsovu kartu s frekvencijom ω kao parametrom. Odatle možemo očitati vrijednosti sinusne prijenosne funkcije zatvorenog kruga $M(j\omega)$ po amplitudi i po fazi za svaku točku krivulje, što ponovno možemo prenijeti u Bodeove dijagrame. Treba li mijenjati pojačanje, krivulju $G_0(j\omega)$ u Nicholsovoj karti jednostavno pomičemo u okomitom smjeru (prozirni papir s ucrtanom krivuljom!) sve dok ne leži tangencijalno u odnosu na M-oval za zadani M_r. I te vrijednosti možemo prenijeti u Bodeove dijagrame.

Primjer 9.2. Uzimamo isti servomehanizam kao i u primjeru 9.1, sa sinusnom prijenosnom funkcijom otvorenog kruga:

$$G_S(j\omega)=\frac{3}{j\omega\,(1+j\omega\,0{,}2)\,(1+j\omega\,0{,}04)}$$

i zadanim rezonantnim izdizanjem $M_r=1{,}4$.

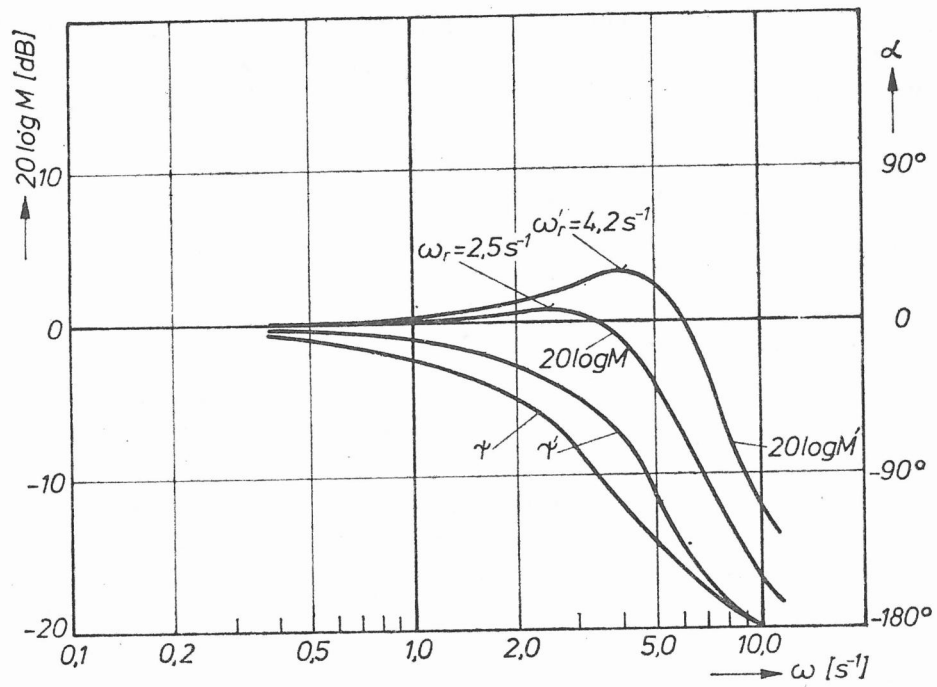
Na osnovi gornjeg izraza načinimo tablicu 9—1 s izračunatim vrijednostima od $20\log|G_S(j\omega)|$ i $\varphi(\omega)$. Te funkcionalne ovisnosti možemo unijeti u Bodeove dijagrame, a možemo ih i izravno ucrtati u Nicholsovu kartu na sl. 9—14. Krivulju otvorenog kruga $G_S(j\omega)$ pomičemo tako dugo u okomitom smjeru dok ne dođe u tangencijalni položaj u odnosu na M_r-oval sa $20\log 1{,}4=3$ dB. Nova je krivulja $K_PG_S(j\omega)$ pomaknuta u okomitom smjeru za $20\log K_P=4{,}4$ dB. To se prilično dobro poklapa s rezultatom iz primjera 9-1, jer je tamo bilo $20\log 1{,}67=4{,}5$ dB. Ipak, rezultat dobiven pomoću Nicholsove karte možemo držati pouzdanijim jer je očitavanje točnije.

Iz Nicholsove karte na sl. 9—14 možemo veoma jednostavno očitati amplitudnu i faznu rezervu. Prvobitno smo imali $A_r=18{,}5$ dB i $\varphi_r=53°$, a nakon uvođenja pojačanja K_P imamo $A_r'=14$ dB i $\varphi_r'=38°$.

U tablici 9—1 izračunate su vrijednosti i za $20\log M$ i za $\psi(\omega)$. To inače nije potrebno, jer smo krivulju $G_S(j\omega)$ iz Nicholsove karte prenijeli u Bodeove dijagrame na sl. 9—15. Vidimo da je bez dodatnog pojačanja $20\log M_r=0{,}7$ dB, uz $\omega_r=2{,}5\ \mathrm{s}^{-1}$. Nova krivulja $K_PG_S(j\omega)$ ima veće rezonantno izdizanje: $20\log M_r'=3$ dB, i to uz višu rezonantnu frekvenciju $\omega_r'=4{,}2\ \mathrm{s}^{-1}$.

Na osnovi tih rezultata možemo još provjeriti brzinu odziva i točnost. Prema sl. 9—5a, vrijednosti $20\log M_r=3$ dB odgovara stupanj prigušenja $\zeta=0{,}38$, a odgovarajući je postotni prebačaj u vremenskom području $M_p=24\%$. Nadalje, iz sl. 9—5b za $\zeta=0{,}38$ očitamo $\omega_r'/\omega_n'=0{,}84$, što daje $\omega_n'=5\ \mathrm{s}^{-1}$. Na osnovi izraza (9-1) možemo naći vrijeme smirivanja T_s kao mjeru za brzinu odziva:

$$T_S\simeq\frac{4}{\zeta\omega_n'}=\frac{4}{0{,}38\cdot 5}=2{,}1\ \mathrm{s}.$$



Sl. 9—15. Krivulje otvorenog i zatvorenog kruga u Bodeovim dijagramima — primjer 9.2.

Budući da se radi o servomehanizmima tipa 1, trajno regulacijsko odstupanje e_0 provjerava se uz nagibnu funkciju na ulazu. Iz definicije koeficijenta brzinske greške dobivamo:

$$K_v = \lim_{s \to 0} s K_P G_S(s) = 1{,}66 \frac{3}{s(1+s\,0{,}2)(1+s\,0{,}04)} = 5,$$

jer je $20 \log 1{,}66 = 4{,}4$ dB. Odatle zaključujemo da su i brzina odziva i točnost povoljniji kod dodatnog pojačanja. Ako su T_s i e_0 u granicama zadanih vrijednosti, držimo da je zadatak sinteze servomehanizma riješen.

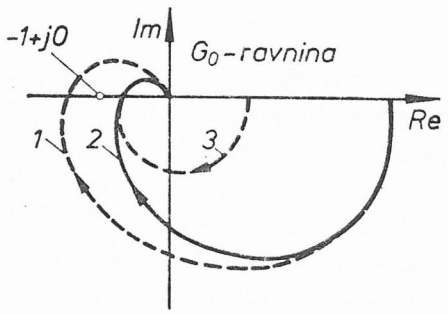
Tablica 9—1. Uz proračun primjera 9.2

ω	$20 \log \lvert G_s(j\omega) \rvert$	$\varphi(\omega)$	$20 \log M$	$\psi(\omega)$
0,5	15,5	— 97,1	0,0	— 9,6
1,0	9,35	—104,2	— 0.26	— 19,8
2,0	2,86	—117,5	0,7	— 43,8
3,0	— 0,5	—119,5	0,5	— 74,6
4,0	— 4,8	—140,0	— 1,3	—106,6
5,0	— 7,8	—149,0	— 4,5	—130,9
6,0	—10,2	—156,9	— 7,4	—147,4
8,0	—14,9	—169,8	—12,8	—167,5
10,0	—18,5	—180,0	—17,1	—180,0

Namještanje pojačanja najjednostavnija je i najjeftinija metoda u sintezi servomehanizama: kompromis između oprečnih zahtjeva traži se u **namještanju samo jednog parametra** — pojačanja. Ako je u regulacijskom krugu ugrađeno elektroničko pojačalo, pojačanje mijenjamo jednostavnim namještanjem potenciometra. Smanjenjem pojačanja ispod kritične granice postižemo kod sustava tipa 0 ili 1 (v. odjeljak 8.2) gotovo uvijek zadovoljavajući rad. To pogotovu vrijedi za sustave tipa 1 koji nemaju položajne greške (brzinska greška ostaje!), pa mijenjanjem pojačanja djelujemo samo na stabilnost. Međutim, kod sustava višega reda koji imaju zamršenu polarnu krivulju samim namještanjem pojačanja ne možemo riješiti sve zahtjeve u regulacijskom krugu. U tom slučaju ugrađujemo dodatne kompenzacijske članove, o čemu ćemo govoriti u slijedećem odjeljku.

9.3. Sinteza servomehanizama pomoću kompenzacije

Kad se zbog bilo kojeg razloga ne može samim mijenjanjem pojačanja postić optimalan rad servomehanizma, pribjegava se ugradnji dodatnih, tzv. kompenzacijskih članova. Oni ovise o frekvenciji i mijenjaju polarnu krivulju **samo na određenom području frekvencija.** Tako se izbjegava kompromis između proturječnih zahtjeva za stabilnošću, točnošću i brzinom odziva. To možemo zornije uočiti iz polarnih krivulja na sl. 9—16. Ako servomehanizam tipa 0 ima polarnu krivulju $G_S(j\,\omega)$ oblika 1, možemo je pomoću frekvencijski ovisnog kompenzacijskog člana »saviti« u području visokih frekvencija koje utječu na stabilnost, tj. u blizini kritične točke $(-1\ +j0)$. Obratan je slučaj krivulja 3: sada je područje visokih frekvencija u redu, dok u području niskih frekvencija, koje utječu na točnost, pojačanje treba znatno povećati. I u jednom i u drugom slučaju optimalan je izbor prijenosne funkcije otvorenog kruga krivulja 2.



Sl. 9—16. Utjecaj kompenzacije u regulacijskom krugu na »savijanje« polarnih krivulja u Nyquistovu dijagramu

Takvo preoblikovanje polarne krivulje servomehanizma odgovara potpuno D- i I-djelovanju u regulacijskom krugu, što smo iscrpno obradili u odjeljku 7.1. Sa stajališta frekvencijskog odziva, kompenzacijski član sa D-djelovanjem unosi **fazno prethođenje** koje kod čistog D-djelovanja iznosi 90°. Fazno prethođenje primjenjuje se za preoblikovanje polarne krivulje servomehanizma u području srednjih i viših frekvencija. Tako možemo utjecati na relativnu stabilnost i brzinu odziva u području kritične točke $(-1\ +j0)$. U teoriji električnih krugova takav je član poznat kao filtar koji propušta visoke frekvencije, a prigušuje niske. Ako kompenzacijski član ima I-djelovanje, on unosi **fazno zaostajanje,** koje za čisto I_0-djelovanje iznosi 90°. Fazno zaostajanje djeluje nepovoljno na stabilnost, pa ga primjenjujemo samo kod najnižih frekvencija, daleko ispod kritične točke $(-1\ +\ +j0)$. Zapravo, prigušenje visokih frekvencija omogućuje povećanje pojačanja,

što utječe na točnost. U teoriji električnih krugova takav je član poznat kao filtar koji propušta niske frekvencije, a prigušuje visoke.

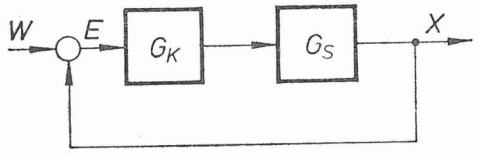
Kompenzacijski članovi mogu se spojiti ili u seriju ili u povratnoj vezi sa servomehanizmom. U načelu su obje metode jednako vrijedne, iako u praksi prednost ima serijska kompenzacija jer se u sintezi servomehanizma mogu primjeniti pregledne metode pomoću Bodeovih i Nicholsovih dijagrama. Logaritamsko mjerilo omogućuje lako zbrajanje amplituda i faza, pa je pronalaženje ispravnih parametara kompenzacijskog člana znatno olakšano. Kod povratne kompenzacije, međutim, ne postavljaju se tako oštri zahtjevi na linearnost i vremensku konstantnost parametara pojačala.

9.3.1. Serijska kompenzacija

Blok-dijagram serijske kompenzacije prikazan je na sl. 9—17: kompenzacijski član spojen je u seriju s glavnim tokom signala. Ako je sinusna prijenosna funkcija servomehanizma $G_S(j\omega)$, a kompenzacijskog člana $G_K(j\omega)$, onda je sinusna prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_0(j\omega)=G_K(j\omega)\,G_S(j\omega) \tag{9-42}$$

umnožak tih dvaju članova. Možemo je dobiti i polugrafičkim putem, slično kao što smo postupili i u odjeljku 5.4 (v. sl. 5—18). U pravilu se kompenzacijski članovi izvode od pasivnih elemenata, dakle s vrijednostima $|G_K(j\omega)|\leqslant 1$, jer su jeftini, a mogu zadovoljiti zahtjeve regulacijskog djelovanja[1].



Sl. 9—17. Blok-dijagram serijske kompenzacije servomehanizma

U tablici 9—2 dan je pregled nekih kompenzacijskih članova, i to u najčešće primjenjivanoj, električnoj izvedbi. U odnosu na druge fizikalne medije električna je izvedba kompaktna i omogućuje jednostavan, točan i pouzdan prijenos signala. Iako ima bezbroj izvedbenih mogućnosti, električni se kompenzatori sastoje od jednostavnih RC-članova. Zavojnice se ispuštaju, jer su skupe i razmjerno velike. Jasno je da su električnoj izvedbi, prikazanoj u tablici 9—2, potpuno ravnopravne u funkcionalnom smislu i odgovarajuća mehanička, pneumatska ili hidraulična izvedba (v. tablicu 7—1).

Uz električnu shemu u tablici je dana i sinusna prijenosna funkcija $G_K(j\omega)$ koja se lako izvodi iz električne sheme. Kako u ovom poglavlju sintezu servomehanizama pomoću kompenzacije provodimo grafičkim metodama frekvencijskog odziva, tablica sadrži i Nyquistov, Bodeov i Nicholsov prikaz.

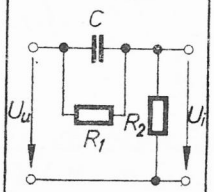
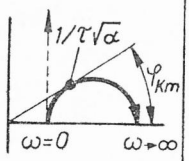
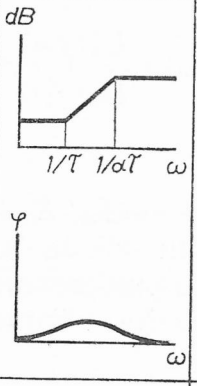
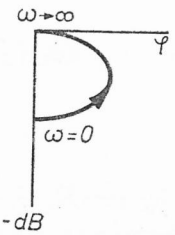
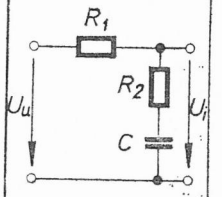
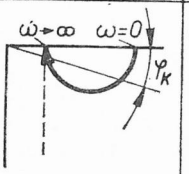
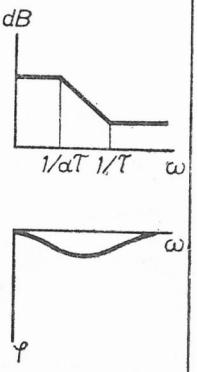
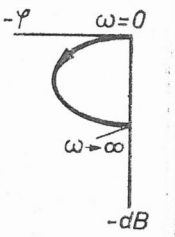
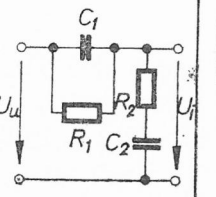
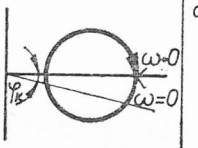
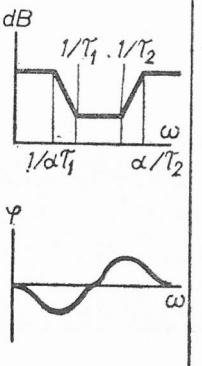
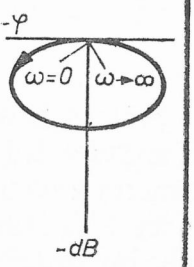
U sintezi pomoću kompenzacije koristimo se za kvalitativnu i brzu ocjenu ponašanja regulacijskog kruga Nyquistovim dijagramom. U kvantitativnoj sintezi razlikujemo dva slučaja. Kod jednostavnih sustava, koji imaju približno $|G_S(j\omega)|=1$ i $\varphi=-180°$, odnosno monotono padajuće amplitudu i fazu, rješavamo optimalno ponašanje pomoću Bodeovih dijagrama sa zadanim A_r ili φ_r. Kod složenih

[1] S pasivnim članovima ne može se doduše izvesti idealno derivacijsko ili integralno djelovanje, ali to u ovom slučaju nije bitno.

sustava, kojima amplituda i faza više puta prelaze vrijednost $|G_S(j\omega)|=1$, odnosno $\varphi=-180°$[1], služimo se Nicholsovim dijagramom, a zadaje se M_r i ω_r.

U prvom redu tablice prikazan je kompenzacijski član sa PD-djelovanjem i kašnjenjem prvoga reda. Iz Nyquistova dijagrama vidimo da kompenzacijski član unosi u regulacijski krug fazno prethođenje, a u području niskih frekvencija približava se idealnom PD-djelovanju $G_K(j\omega)=1+j\omega\tau$ (isprekidana polarna krivulja). To je područje gdje je prigušenje maksimalno, pa se PD-kompenzatori upravo tu i primjenjuju. U drugom je redu kompenzacijski član sa PI-djelovanjem. Iz Nyquistova dijagrama primjećujemo fazno zaostajanje, a približava se idealnom PI-djelovanju $G_K(j\omega)=1+(1/j\omega\tau)$ (isprekidana polarna krivulja) u području

Tablica 9—2. Kompenzatori i njihov frekvencijski odziv

	$G_K(j\omega)$	ELEKTRIČNA SHEMA	NYQUIST	BODE	NICHOLS
PD	$\alpha\frac{1+j\omega T}{1+j\omega\alpha T}$ $T=R_1C$ $\alpha=\frac{R_2}{R_1+R_2}<1$				
PI	$\frac{1+j\omega T}{1+j\omega\alpha T}$ $T=R_2C$ $\alpha=\frac{R_1+R_2}{R_2}>1$				
PID	$\frac{(1+j\omega T_1)\cdot(1+j\omega T_2)}{(1+j\omega\alpha T_1)(1+j\omega T_2/\alpha)}$ $T_1=R_1C_1$ $T_2=R_2C_2$ $\alpha>1$				

[1] Vidi sl. 8—17.

visokih frekvencija. To je upravo područje primjene PI-kompenzatora, jer je ovdje prigušenje najjače. Konačno, u trećem je redu kompenzacijski član sa PID-djelovanjem, koji sjedinjuje svojstva prethodnih članova. Ovaj kompenzacijski član unosi i fazno prethođenje i zaostajanje. Prigušeno je srednje područje frekvencija, obično u blizini rezonantne frekvencije ω_r, odnosno u blizini kritične točke $(-1+j0)$.

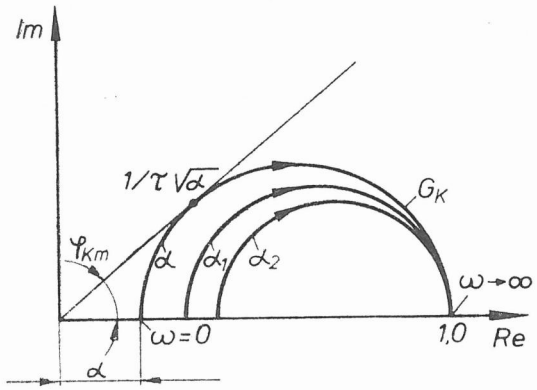
PD-kompenzator. Najprije ćemo izvesti sinusnu prijenosnu funkciju derivacijskog člana (fazno prethođenje). Prema električnoj shemi u prvom redu tablice 9—2 možemo pisati:

$$U_i = R_2 I = R_2 \frac{U_u}{\dfrac{R_1/j\omega C}{R_1+(1/j\omega C)}+R_2} = \frac{R_1+(1/j\omega C)}{R_1/j\omega R_2 C+(R_1+1/j\omega C)}\,U_u, \tag{9-43}$$

što nakon preuređenja daje:

$$G_K(j\omega)=\frac{U_i(j\omega)}{U_u(j\omega)}=\frac{1+j\omega\tau}{1+\dfrac{R_1}{R_2}+j\omega\tau}=\alpha\frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\alpha\tau}=\alpha G'_K(j\omega), \tag{9-44}$$

gdje je $\tau=R_1C$, a $\alpha=R_2/(R_1+R_2)$. Važno je uočiti da je α uvijek manji od jedan a uobičajene su mu vrijednosti $0{,}1\leqslant\alpha\leqslant 0{,}3$. Uz $\alpha>0{,}3$ PD-kompenzator praktički ne djeluje s faznim prethođenjem. Uz $\alpha<0{,}1$ znatno se pojačavaju šumovi i smetnje, koji su uvijek na frekvencijama višim od značajnih frekvencija regulacijskih signala.



Sl. 9—18. Polarne krivulje PD-kompenzatora u Nyquistovu dijagramu

Polarna krivulja $G_K(j\omega)$ na Nyquistovu dijagramu prikazana je na sl. 9—18; to je zapravo krivulja PD-regulatora s kašnjenjem prvoga reda. Prikazan je i utjecaj parametra α na tok polarne krivulje i na najveći fazni pomak φ_{Km}. Budući da u sintezi pomoću PD-kompenzatora tražimo što veću vrijednost φ_K, korisno je da odredimo korelaciju između φ_{Km} i veličina α, τ i ω. U tu svrhu poslužimo se izrazom (9-44) kojem ćemo racionalizirati nazivnik:

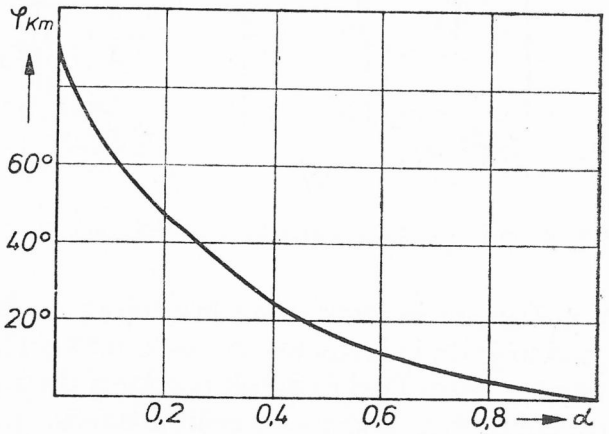
$$G_K(j\omega)=|G_K(j\omega)|e^{j\varphi K}=\alpha\frac{1+\omega^2\alpha\tau^2+j\omega\tau-j\omega\alpha\tau}{1+\omega^2 4x\,\alpha^2\tau^2}. \tag{9-45}$$

Tangens je faznog pomaka:

$$\operatorname{tg}\varphi_K=\frac{\operatorname{Im}[G_K(j\omega)]}{\operatorname{Re}[G_K(j\omega)]}=\frac{\omega\tau(1-\alpha)}{1+\omega^2\alpha\tau^2} \tag{9-46}$$

Da bismo našli vrijednost ω za najveću vrijednost φ_K, dovoljno je da nađemo najveću vrijednost $\operatorname{tg}\varphi_K$, jer je $\varphi_K<90°$. Deriviramo $\operatorname{tg}\varphi_K$ po ω i izjednačimo s nulom:

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{tg}\varphi_K)}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\tau(1-\alpha)(1+\omega^2\alpha\tau^2)-\omega\tau(1-\alpha)2\omega\alpha\tau^2}{(1+\omega^2\alpha\tau^2)^2}=0. \tag{9-47}$$



Sl. 9–19. Ovisnost maksimalnog faznog pomaka φ_{Km} o faktoru α kod PD-kompenzatora

Nakon proračunavanja dobivamo pozitivnu vrijednost frekvencije kod koje dolazi do najveće φ_{Km}:

$$\omega=\frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}. \tag{9-48}$$

Uvrštenjem izraza (9-48) u jednadžbu (9-46) dobivamo željenu korelaciju između φ_{Km} i faktora α:

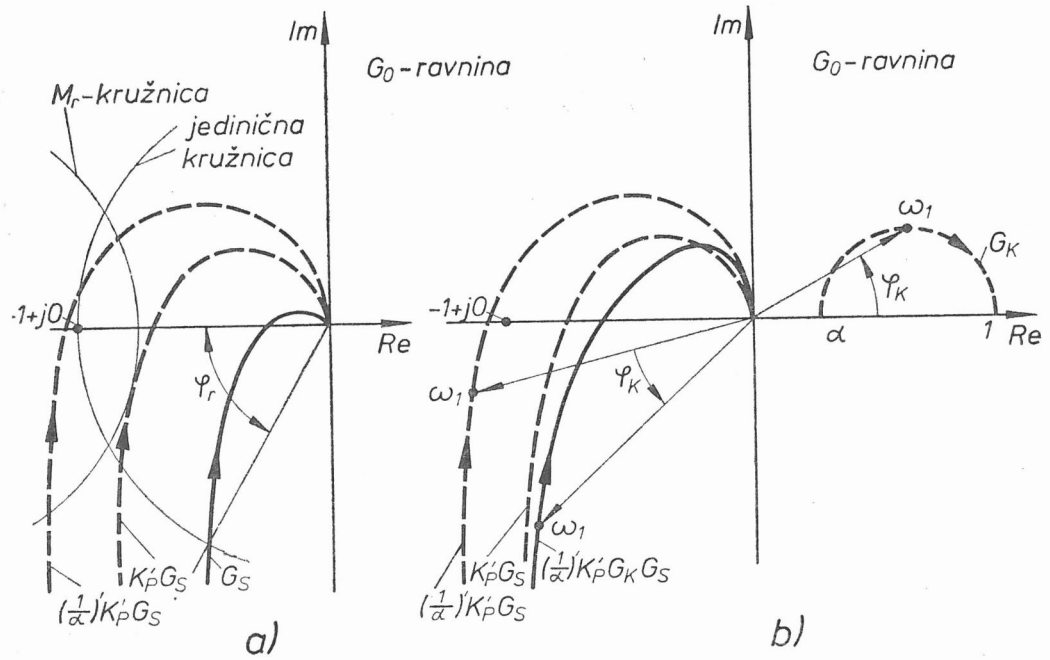
$$\varphi_{Km}=\operatorname{arc\,tg}\frac{(1/\tau\sqrt{\alpha})\tau(1-\alpha)}{1+(1/\tau^2\alpha)\alpha\tau^2}=\operatorname{arc\ tg}\frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}=\operatorname{arc\,sin}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}. \tag{9-49}$$

Kako se ta korelacija mnogo primjenjuje u sintezi pomoću PD-kompenzatora, dajemo je i u grafičkom obliku na sl. 9-19: za svaki željeni φ_{Km} možemo odmah očitati i pripadajući α.

Da bismo podrobnije proučili djelovanje PD-kompenzatora, uzimamo **servomehanizam tipa 1** koji služi za pozicioniranje. Njegova je sinusna prijenosna funkcija[1]:

$$G_S(\omega)=\frac{K_S}{j\omega(1+j\omega\tau_G)(1+j\omega\tau_M)}, \tag{9-50}$$

[1] Vidi sl. 8–6.



Sl. 9—20. Serijska PD-kompenzacija servomehanizma tipa 1 pomoću Nyquistova dijagrama

a prikazana je izvučenom krivuljom na Nyquistovu dijagramu na sl. 9—20a. Očigledno je da je fazna rezerva φ_r u tom slučaju prevelika, pa je **prijelazno ponašanje nepovoljno.** Prvi je korak u sintezi da u skladu s metodom izbora pojačanja prema odjeljku 9.2. nađemo **preliminarno pojačanje** K_P'. Nova je polarna krivulja $K_P'G_S(j\omega)$ u tangencijalnom položaju u odnosu na zadanu M_r-kružnicu.

Time smo zadovoljili zahtjev za relativnom stabilnošću, ali nismo zadovoljili zahtjev za brzinom odziva. U tu svrhu ugradit ćemo serijski PD-kompenzator pomoću kojeg ćemo povećati frekvenciju u točki φ_r, što znači i rezonantnu frekvenciju ω_r. Na taj način PD-kompenzator poboljšava prijelazne uvjete:

— prema izrazu (5-53) veća je i neprigušena vlastita frekvencija ω_n, pa je prema izrazu (9-1) smanjeno vrijeme smirivanja T_s,
— povećava se širina pojasa ω_b, pa je prema izrazu (9-4) smanjeno vrijeme porasta T_r.

Kako je prema izrazu (9-44) pojačanje PD-kompenzatora $\alpha<1$, moramo u seriju sa $G_K(j\omega)$ spojiti i dodatno pojačanje $(1/\alpha)'>1$ koje kod niskih frekvencija približno poništava gubitak zbog α. Nova polarna krivulja $(1/\alpha)'K_P'G_S(j\omega)$ prikazana je crtkano na sl. 9—20a, pa bi i ona — sama po sebi — bila već u području nestabilnosti. Serijsko vezanje PD-kompenzatora daje novu polarnu krivulju $(1/\alpha)'K_P'G_K(j\omega)G_S(j\omega)$ koja je na sl. 9-20b prikazana izvučeno. Nju smo dobili vektorskim množenjem krivulja mjesta $(1/\alpha)'K_P'G_S(j\omega)$ i $G_K(j\omega)$, što je prikazano množenjem verzora na određenoj frekvenciji (kao primjer uzeta je frekvencija ω_1). Vidimo da u području srednjih frekvencija, oko kritične točke $(-1+j0)$, **PD-kompenzator pomiče verzor polarne krivulje u smislu suprotnom od gibanja kazaljke na satu.** Zbog toga se **rezonantna frekvencija** ω_r **povisuje.**

U području veoma visokih frekvencija polarna krivulja:

$$G(j\omega)\Big|_{\omega\gg 1/\tau} \simeq \left[\frac{1}{\alpha}\right]' K_P'\alpha \frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\alpha\tau}\cdot\frac{K_S}{j\omega(1+j\omega\tau_G)(1+j\omega\tau_M)}\Bigg|_{\omega\gg 1/\tau} \qquad (9\text{-}51)$$

stapa se s krivuljom $(1/\alpha)'K'_P G_S(j\omega)$. Kod veoma niskih frekvencija imamo slučaj da polarna krivulja:

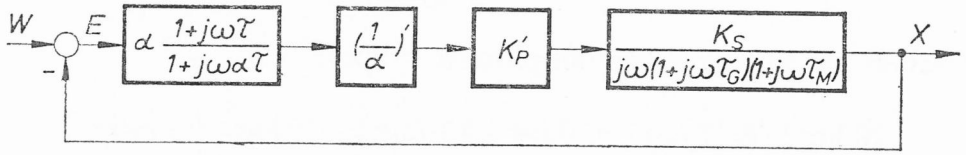
$$G(j\omega)\Big|_{\omega \ll 1/\tau} \simeq \left[\frac{1}{\alpha}\right]' K'_P \alpha \frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\alpha\tau} \cdot \frac{K_S}{j\omega(1+j\omega\tau_G)(1+j\omega\tau_M)}\Bigg|_{\omega \ll 1/\tau} \tag{9-52}$$

prelazi u krivulju $K'_P G_S(j\omega)$. Odatle vidimo zašto smo morali uvesti dodatno pojačanje $(1/\alpha)'$: kod niskih frekvencija PD-kompenzator prigušuje u omjeru α, pa se ne bi mogao ispuniti uvjet za dozvoljeno trajno regulacijsko odstupanje. **PD-kompenzatorom poboljšavaju se donekle stacionarni uvjeti, ali je osnovni zadatak da se poboljšaju dinamički uvjeti.** Glavno mu je područje djelovanja kod srednjih frekvencija u blizini kritične točke $(-1+j0)$; najvećim faznim prethođenjem φ_{Km} u tom se području povećava rezonantna frekvencija ω_r.

Na sl. 9—21 sva su četiri bloka spojena serijski u regulacijskoj petlji. Prva tri bloka možemo svesti u jedan tako što sinusnu prijenosnu funkciju PD-kompenzatora složimo s odabranim pojačanjem:

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right|' K'_P \alpha \frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\alpha\tau} = K_P G'_K(j\omega). \tag{9-53}$$

Dok je stabilnost kod servomehanizama tipa 1 ovisila o pojačanju, kod servomehanizama tipa 2 i viših pojavljuje se strukturna nestabilnost (v. odjeljak 8.3). Ona se nipošto ne može prevladati samo smanjenjem pojačanja, pa je kompenzacija pomoću faznog prethođenja nužna.

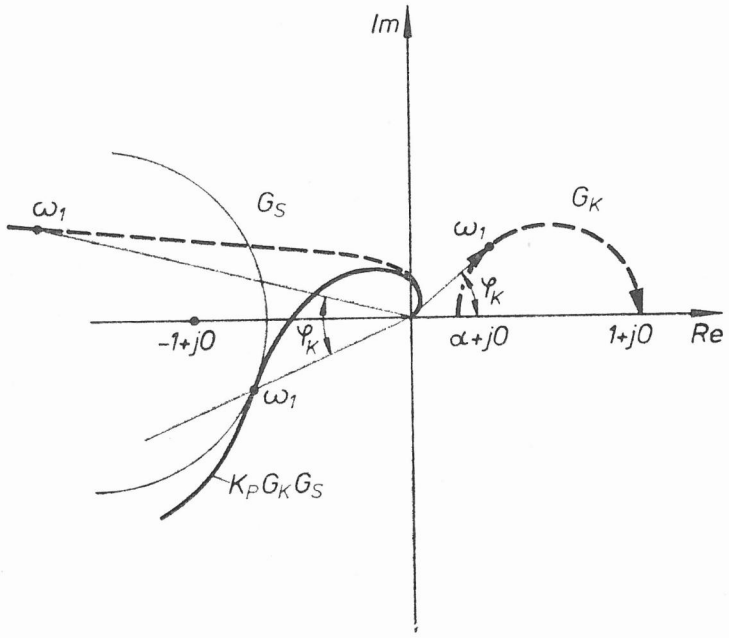


Sl. 9—21. Blok-dijagram serijske PD-kompenzacije

Servomehanizam tipa 2 s dva serijski spojena motora imali smo na sl. 8—7. Njegova sinusna prijenosna funkcija:

$$G_S(j\omega) = \frac{K_S}{(j\omega)^2(1+j\omega\tau_{M1})(1+j\omega\tau_{M2})} \tag{9-54}$$

prikazana je isprekidanom polarnom krivuljom na Nyquistvu dijagramu na sl. 9—22. Serijski spojen PD-kompenzator $K_P G_K(j\omega)$ unosi fazno prethođenje upravo u području kritične točke $(-1+j0)$, pa se taj sustav može tako stabilizirati. Ako pomoću jednostavnog PD-kompenzatora ne možemo postići zadovoljavajući oblik rezultirajuće polarne krivulje $K_P G_K(j\omega) G_S(j\omega)$ u blizini kritične točke $(-1+j0)$, moramo predvidjeti složeno regulacijsko djelovanje, npr. dva serijski vezana PD-kompenzatora.



Sl. 9—22. Serijska PD-kompenzacija servomehanizma tipa 2 pomoću Nyquistova dijagrama

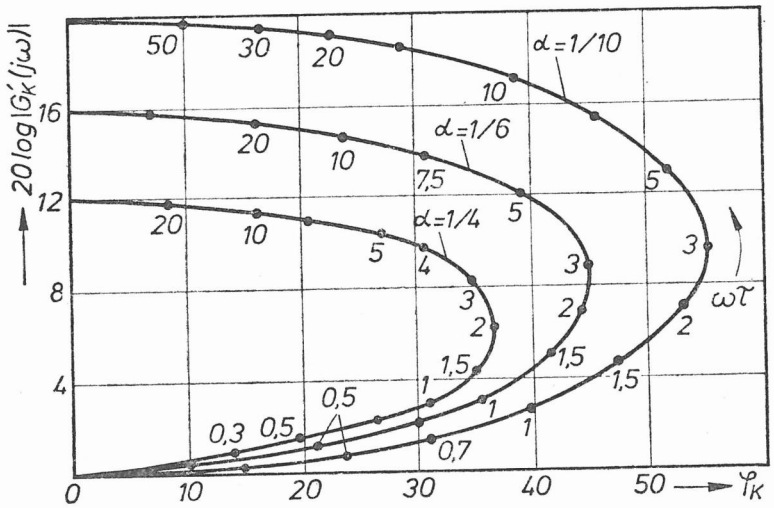
Dok Nyquistov dijagram daje kvalitativan uvid u ponašanje PD-kompenzatora, kvantitativna izračunavanja vrše se obično pomoću Bodeova ili pomoću Nicholsova prikaza. Među raznim frekvencijskim metodama **grafička sinteza pomoću Nicholsove karte najpraktičnija je i najtočnija, pa ćemo se njome koristiti.** Zato na sl. 9—23 dajemo normirane krivulje PD-kompenzatora pomoću Nicholsova dijagrama. Ispuštamo pojačanje α, pa prikazujemo samo frekvencijsko ovisni dio sinusne prijenosne funkcije:

$$G_K'(j\omega)=\frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\alpha\tau} \tag{9-55}$$

koji se podijeli na logaritamsku amplitudu i fazu:

$$20\log|G_K'(j\omega)|=20\log|1+j\omega\tau|-20\log|1+j\omega\alpha\tau|, \tag{9-56}$$

$$\varphi_K=\text{arc tg}\,\omega\tau-\text{arc tg}\,\omega\alpha\tau.$$



Sl. 9—23. Normirane krivulje PD-kompenzatora u Nicholsovu dijagramu

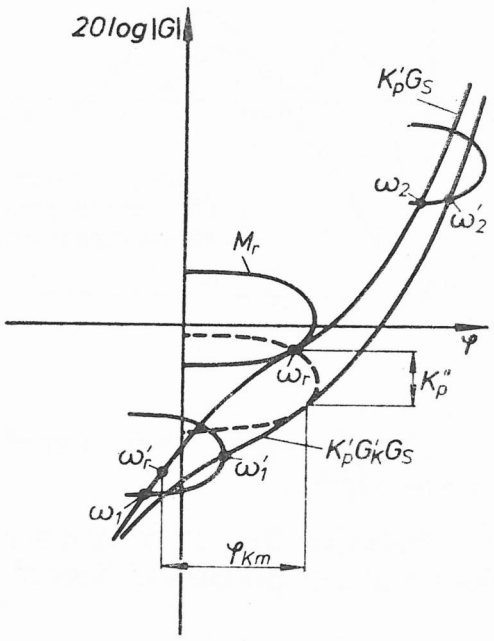
Nicholsov dijagram sadrži normirane frekvencije $\omega\tau$, a nekoliko uobičajenih vrijednosti faktora α služe kao parametar; tako je moguće te krivulje primijeniti za bilo koji PD-kompenzator s vrijednostima τ i α.

Sada ćemo obrazložiti sam postupak grafičke sinteze pomoću Nicholsova dijagrama. Tražimo da se servomehanizam sa sinusnom prijenosnom funkcijom $G_S(j\omega)$ tako projektira da zadovoljava postavljene uvjete M_r i ω_r. Najprije ćemo metodom izbora pojačanja iz prethodnog odjeljka naći preliminarno pojačanje K'_P. Tako dobivena krivulja ucrtana je u Nicholsovu dijagramu na sl. 9—24, gdje dira M-oval sa zadanim M_r. Zatim očitamo i pripadajuću rezonantnu frekvenciju ω_r; PD-kompenzator projektiramo upravo zato što je ω_r premala.

Da bismo odredili parametre PD-kompenzatora, očitamo u dijagramu najveći fazni pomak φ_{Km}, koji treba da unese PD-kompenzator, kako bi se željena rezonantna frekvencija ω_r našla u dodirnoj točki sa M_r-ovalom. Odgovarajuću vrijednost faktora α očitamo prema sl. 9—19. S tom vrijednošću dobivamo na osnovi izraza (9-48) vremensku konstantu:

$$\tau = \frac{1}{\omega_r \sqrt{\alpha}}. \tag{9-57}$$

Na taj način određen je frekvencijsko ovisni dio sinusne prijenosne funkcije PD-kompenzatora $G_K'(j\omega)$.



Sl. 9—24. Projektiranje PD-kompenzacije pomoću Nicholsova dijagrama

Kako je $G'_K(j\omega)$ spojen u seriju sa $K'_PG_S(j\omega)$, u Nicholsovu dijagramu se za svaku frekvenciju pribroje amplitude i faze od $G'_K(j\omega)$ i $K'_PG_S(j\omega)$. Iako to možemo raditi analitički, pogodniji je grafički postupak. Pri tome se koristimo normiranim dijagramom PD-kompenzatora na sl. 9—23. Uz određeni α i τ i uz isto mjerilo apscisa i ordinata prema sl. 9—23 i 9—24, grafičko zbrajanje vršimo pomoću dvije proizvoljno odabrane frekvencije ω_1 i ω_2. Kompenzirana krivulja treba da bude točno određena u blizini frekvencije ω_r. Sada možemo odrediti i treći parametar PD-kompenzatora — pojačanje K''_P: to je okomiti pomak krivulje $K'_PG'_K(j\omega)$-

$G_S(j\omega)$ do tangencijalnog položaja sa M_r-ovalom izražen u decibelima. Time je PD-kompenzator:

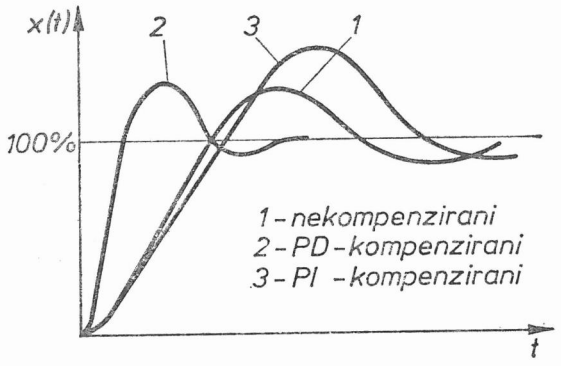
$$K'_P K''_K G'_K(j\omega) = K_P G'_K(j\omega) \tag{9-58}$$

potpuno određen.

Još treba da provjerimo ima li tako kompenzirani servomehanizam zadovoljavajući vremenski odziv. Analitički izraz ćemo naći iz jednadžbe:

$$X(s) = G(s)\, W(s) = \frac{G_0}{1+G_0} \cdot \frac{1}{s}. \tag{9-59}$$

Ovdje je $G(s)$ ukupna prijenosna funkcija zatvorenog kruga koja se izračuna iz prijenosne funkcije otvorenog kruga $G_0(s)$, a $W(s) = 1/s$ je transformat jediničnog odskoka na ulazu u regulacijski sustav. Jednadžba (9-59) se dalje rastavi u zbroj parcijalnih razlomaka i svaki se član obratno transformira u vremensko područje. Njihov zbroj je ustvari vremenski odziv $x(t)$[1]. Na osnovi toga se može nacrtati i krivulja kao što je ona na sl. 9—25. Iz nje se očitaju značajne veličine M_P i T_s koje određuju relativnu stabilnost i brzinu odziva.



Sl. 9—25. Vremenski odziv kompenziranog i nekompenziranog servomehanizma

Naposljetku možemo pomoću teorema konačne vrijednosti provjeriti i koeficijent greške..

Primjer 9.3. Servomehanizam za pozicioniranje prema sl. 8—6 ima slijedeću sinusnu prijenosnu funkciju:

$$G_S(j\omega) = \frac{0{,}25}{j\omega\,(1+j\omega\,1)\,(1+j\omega\,0{,}25)}.$$

Zadamo $M_r = 1{,}25$ dB, što prema sl. 9—5a odgovara $\zeta = 0{,}5$ i $\omega_r = 1{,}4\ s^{-1}$, a prema sl. 9—5b odgovara $\omega_r/\omega_n = 0{,}7$, odnosno vremenu smirivanja:

$$T_s \simeq \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4\cdot 0{,}7}{\zeta\omega_r} = \frac{4\cdot 0{,}7}{0{,}5\cdot 1{,}4} = 4s.$$

[1] Vidi primjer 10.7.

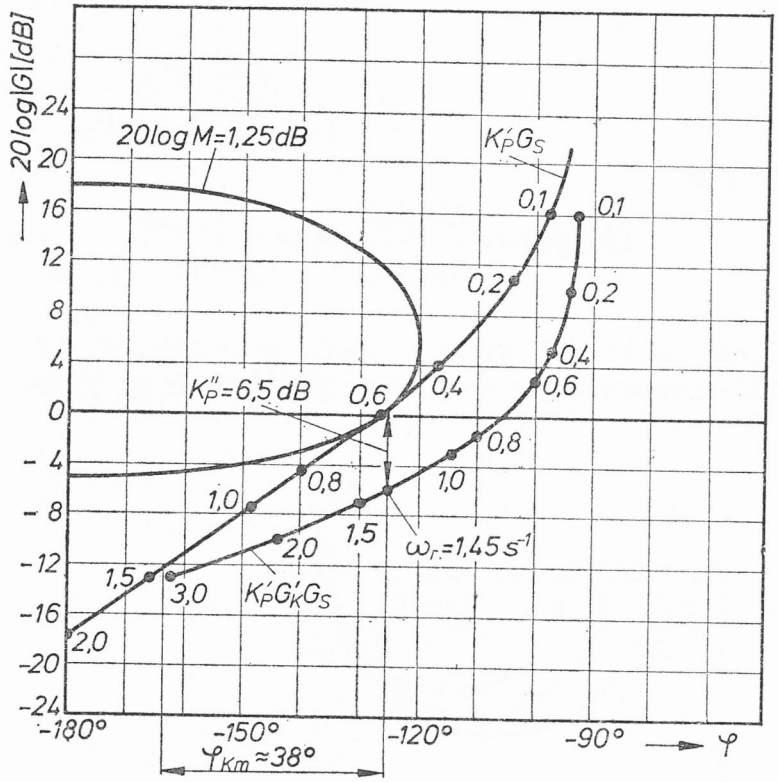
Na osnovi metode iz prethodnog odjeljka, izaberemo preliminarno pojačanje $K_P'=2{,}72$, pa je krivulja $K_P'G_S(j\omega)$ u tangencijalnom položaju u odnosu na M-oval sa $M_r=1{,}25$ dB. No s tim zahvatom brzina odziva ne zadovoljava, jer je prema sl. 9—26 $\omega_r=0{,}58$.

Određivanje parametara PD-kompenzatora započinjemo procjenu faznog pomaka φ_{Km} za koji je potrebno krivulju $K_P'G_S(j\omega)$ na sl. 9—26 pomaknuti da bi u točki $\omega=1{,}4\ s^{-1}$ dodirivala M_r-kružnicu. Očitamo $\varphi_{Km}\simeq 38°$ čemu odgovara $\alpha\simeq 0{,}25$ (sl. 9—19). Nadalje odredimo τ:

$$\tau=\frac{1}{\omega_r\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{1{,}4\sqrt{0{,}25}}=1{,}4\ s.$$

S tim vrijednostima određena je $G_K'(j\omega)$:

$$G_K'(j\omega)=\frac{1+j\omega\,1{,}4}{1+j\omega\,0{,}35}.$$



Sl. 9—26. Projektiranje PD-kompenzacije u Nicholsovu dijagramu — primjer 9.3

Da bismo iz $K_P'G_S(j\omega)$ dobili krivulju $K_P'G_K(j\omega)\,G_S(j\omega)$, koristimo se sl. 9—26. Uzimamo krivulju za $\alpha=0{,}25$, a normirane frekvencije zamijenimo sa $\omega=\omega\tau/1{,}4$. Vrijednosti $G_K'(j\omega)$ za pojedine frekvencije vektorski se pribrajaju krivulji $K_P'G_S(j\omega)$ na sl. 9—26. Udaljenost od točke za $\omega=1{,}4\ s^{-1}$ do dodirne točke sa M-ovalom za $M_r=1{,}25$ dB znači dodatno pojačanje $20\log K_P''=6{,}5$ dB, odnosno $K_P''=2{,}1$. Ukupno je pojačanje PD-kompenzatora $K_P=K_P'K_P''$, što daje:

$$G_K(j\omega)=K_PG_K'(j\omega)=2{,}72\cdot 2{,}1\,\frac{1+j\omega\,1{,}4}{1+j\omega\,0{,}35}=5{,}71\,\frac{1+j\omega 1{,}4}{1+j\omega\,0{,}35}.$$

Provjera vremenskog odziva daje $T_s=4$ s i $M_p=17\%$ (prema sl. 9—5a), što je zadovoljavajuće. Što se tiče stacionarnih uvjeta, koeficijent brzinske greške uz nagibnu funkciju kao pobudu iznosi:

$$K_v=\lim_{s\to 0} s\,G_K(s)\,G_S(s)=\lim_{s\to 0} s\,5{,}71\,\frac{1+1{,}4\,s}{1+0{,}35\,s}\,\frac{0{,}25}{s(1+s)(1+0{,}25s)}=1{,}43.$$

Možemo provjeriti da je prije kompenzacije bio $K_v=0{,}68$. Prema tome je PD-kompenzator donekle poboljšao i stacionarno ponašanje.

PI-kompenzator. To je integracijski član koji unosi fazno zaostajanje, pa moramo biti oprezni u primjeni, jer dodatno kašnjenje može izazvati nestabilnost. Prema električnoj shemi u drugom retku tablice 9—2 možemo izvesti njegovu sinusnu prijenosnu funkciju:

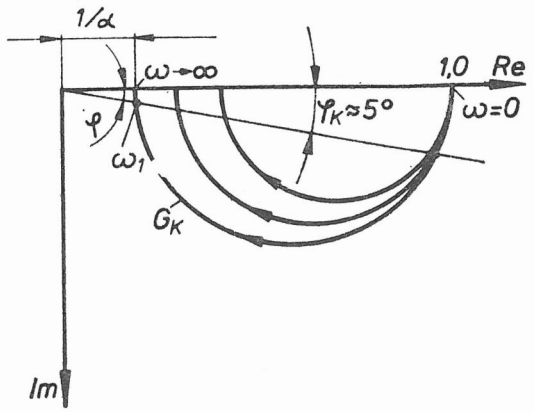
$$U_i=\left(R_2+\frac{1}{j\omega C}\right)I=\left(R_2+\frac{1}{j\omega C}\right)\frac{U_u}{R_1+R_2+(1/j\omega C)}\cdot$$

$$\cdot\frac{1+j\omega R_2C}{1+j\omega R_1C+j\omega R_2C}\,U_u, \qquad (9\text{-}60)$$

i dalje:

$$G_K(j\omega)=\frac{U_i(j\omega)}{U_u(j\omega)}=\frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\tau(1+R_1/R_2)}=\frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\alpha\tau}=G'_K(j\omega) \qquad (9\text{-}61)$$

Uvedene kratice znače $\tau=R_2C$, a $\alpha=(R_1+R_2)/R_2$. Faktor α je — za razliku od PD-kompenzatora — u ovom slučaju veći od jedan, a uobičajene su mu vrijednosti $10\leqslant\alpha\leqslant 3$.



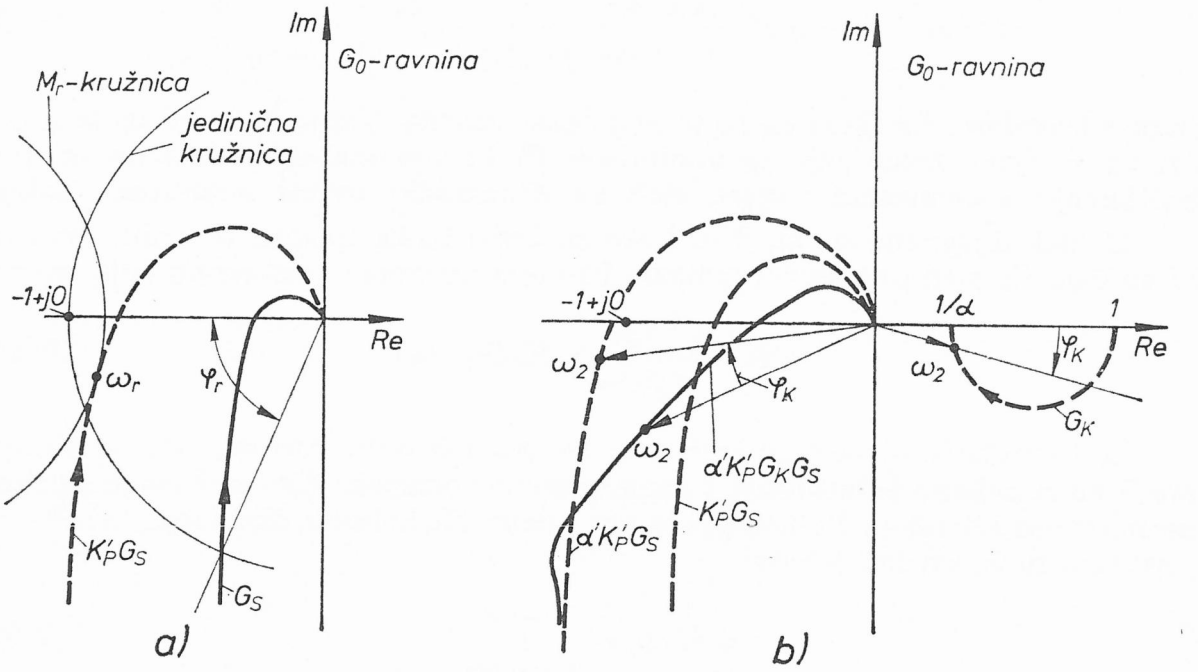
Sl. 9—27. Polarne krivulje PI-kompenzatora u Nyquistovu dijagramu

Na Nyquistovu dijagramu na sl. 9—27 prikazana je polarna krivulja $G_K(j\omega)$ u povećanom mjerilu; to nije ništa drugo nego PI-regulator s kašnjenjem prvoga reda. Za sintezu servomehanizama u ovom slučaju nije važan najveći fazni pomak φ_{Km}, iako je on isti kao i kod PD-kompenzatora. Naprotiv, kod PI-kompenzacije φ_K mora biti što manji zbog lošeg utjecaja na prijelazno ponašanje, o čemu ćemo opširnije govoriti.

I ovdje ćemo djelovanje PI-kompenzatora proučiti na primjeru **servomehanizma tipa 1** koji služi za pozicioniranje:

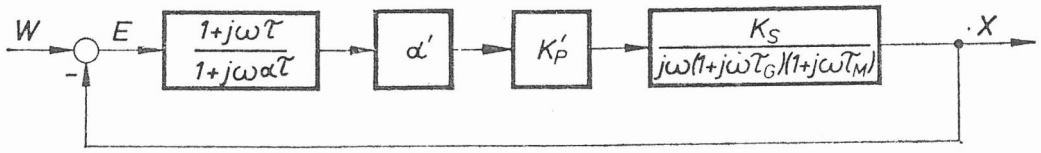
$$G_S(j\omega)=\frac{K_S}{j\omega(1+j\omega\tau_G)(1+j\omega\tau_M)}. \tag{9-51}$$

To je izvučena krivulja na Nyquistovu dijagramu na sl. 9—28a. Kao i kod derivacijske kompenzacije, izborom preliminarnog pojačanja K'_P, dobivamo isprekidanu polarnu krivulju $K'_P G_S(j\omega)$ koja dira zadanu M_r-kružnicu. Time je zadovoljen zahtjev za relativnom stabilnošću. Ako pretpostavimo da je i rezonantna frekvencija ω_r dovoljno visoka, i brzina je odziva u redu.



Sl. 9—28. Serijska PI-kompenzacija servon ehanizma tipa 1 pomoću Nyquistova dijagrama

Ako i unatoč tome trajno regulacijsko odstupanje e_0 ostaje preveliko, dakle **stacionarno ponašanje je nepovoljno,** treba uvesti dodatno pojačanje u području. niskih frekvencija, koje iznosi približno α', tako da imamo $\alpha' K_P G_S(j\omega)$ prema sl. 9—28b. Da se time ne poremeti prijelazno ponašanje u području rezonantne frekvencije ω_r, uvodimo PI-kompenzator. Prema izrazu (9-61), PI-kompenzator ne pria gušuje u području niskih frekvencija, već u području srednjih i viših frekvencija, i to u omjeru $(1/\alpha)$. Grafičko se rješenje prema sl. 9—28b sastoji o množenja verzora $\alpha' K_P G_S(j\omega)$ i $G_K(j\omega)$ na određenoj frekvenciji (kao primjer je uzeta frekvencija ω_2). Vidimo da je u okolišu ω_r polarna krivulja $\alpha' K'_P G'_K(j\omega)\, G_S(j\omega)$ sada toliko prigušena da je prijelazno ponašanje u redu. **PI-kompenzator je pomakao verzor polarnu krivulju u smislu gibanja kazaljke na satu,** pa se rezonantna frekvencija snizila. Kako je to nepovoljno za brzinu odziva, fazni pomak φ_K treba d$_o$ bud e u tom području što manji. U praksi uzimamo da je kod ω_r vrijednost $\varphi_K \simeq 5$.



Sl. 9—29. Blok-dijagram serijske PI-kompenzacije

Ukupna se polarna krivulja:

$$G(j\omega)\Big|_{\omega\ll 1/\tau} = \alpha' K_P' \frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\alpha\tau} \cdot \frac{K_S}{j\omega(1+j\omega\tau_G)(1+j\omega\tau_M)}\Bigg|_{\omega\ll 1/\tau} \tag{9-62}$$

u području veoma niskih frekvencija stapa s krivuljom $\alpha' K_P' G_S(j\omega)$, pa je osigurano dovoljno pojačanje. U području srednjih i visokih frekvencija polarna se krivulja

$$G(j\omega)\Big|_{\omega\gg 1/\tau} = \alpha' K_P' \frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\alpha\tau} \cdot \frac{K_S}{j\omega(1+j\omega\tau_G)(1+j\omega\tau_M)}\Bigg|_{\omega\gg 1/\tau} \tag{9-63}$$

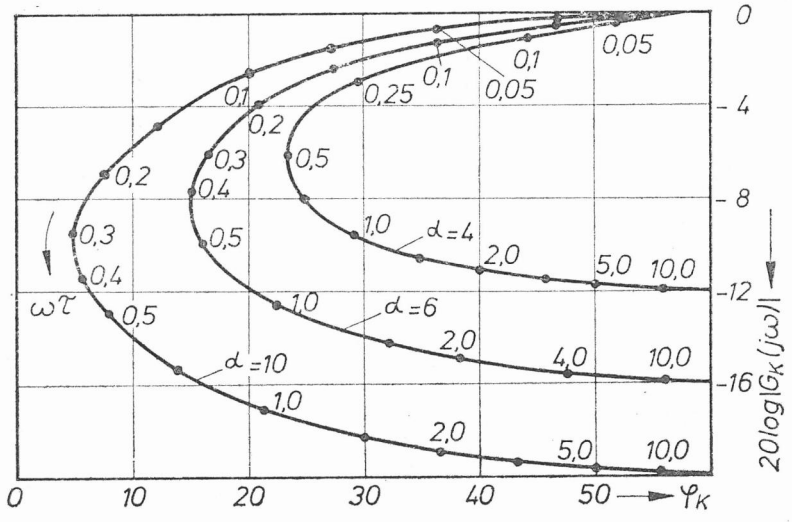
stapa s krivuljom $K_P' G_S(j\omega)$, pa je prigušenje znatno. Važno je uočiti da je u području ω_r fazno zaostajanje φ_K minimalno. **PI-kompenzatorom znatno se poboljšavaju stacionarni uvjeti, dok su dinamički uvjeti neznatno lošiji.**

U blok-dijagramu na sl. 9—29 sva su četiri bloka spojena u seriju. Prva tri bloka daju sinusnu prijenosnu funkciju PI-kompenzatora s odabranim pojačanjem:

$$\alpha' K_P' \frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\alpha\tau} = K_P G_K'(j\omega). \tag{9-64}$$

U kvantitativnoj sintezi koristimo se Nicholsovom kartom, jer se sinteza svodi na razmjerno jednostavan i točan grafički postupak. Zato se i ovdje služimo normiranom krivuljom PI-kompenzatora prema Nicholsovu dijagramu. Sl. 9—30 prikazuje funkcionalan odnos:

$$G_K(j\omega) = \frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\alpha\tau}. \tag{9-65}$$

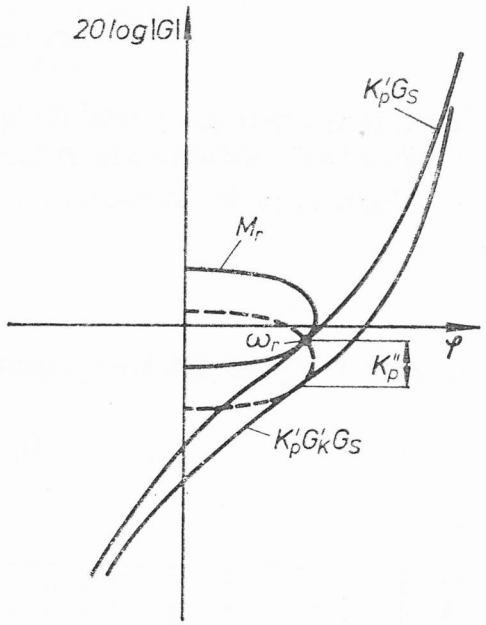


Sl. 9—30. Normirane krivulje PI-kompenzatora u Nicholsovu dijagramu

Graf je dobiven razdvajanjem ovog izraza na logaritamsku amplitudu i fazu:

$$20 \log | G_K(j\omega) | = 20 \log | 1+j\omega\tau | - 20 \log | 1+j\omega\alpha\tau |,$$
$$\varphi_K = \text{arc tg } \omega\tau - \text{arc tg } \omega\alpha\tau. \tag{9-66}$$

Sam grafički postupak sinteze pomoću Nicholsove karte u biti je sličan postupku sa PD-kompenzacijom. Zadaju se M_r, ω_r i koeficijent brzinske greške K_v. Servomehanizmu $G_S(j\omega)$ nađe se preliminarno pojačanje K_P' koje je potrebno da krivulja $K_P'G_S(j\omega)$ u Nicholsovoj karti dira M_r-kružnicu (sl. 9—31). Pri tome je zadovoljen i uvjet da dodirna točka odgovara zadanoj rezonantnoj frekvenciji ω_r. Pomoću teorema konačne vrijednosti provjerimo još koliko je potrebno dodatno pojačanje K_P'' da bi K_v bio u granicama zadane vrijednosti.



Sl. 9—31. Projektiranje PI-kompenzacije pomoću Nicholsova dijagrama

Parametre PI-kompenzatora određujemo nešto drukčije negoli kod PD-kompenzatora. Faktor α uzimamo za 10% do 20% viši od izračunatog dodatnog pojačanja. To proizlazi iz izraza (9-55), jer se kod viših frekvencija član $G_K(j\omega)$ prigušuje u omjeru $(1/\alpha)$, čime se baš kod ω_r kompenzira K_P'. Vremensku konstantu τ nađemo na osnovi zahtjeva da kod ω_r fazni pomak φ_K treba da bude što manji. Iz dijagrama na sl. 9—30 dobit ćemo da je za $\varphi_K \simeq 5°$ vrijednost normirane frekvencije $\omega\tau \simeq 10$, pa je $\tau \simeq 10/\omega_r$.

Tako dobivena sinusna prijenosna funkcija PI-kompenzatora $G_K(j\omega)$ množi se sa $K_P'G_S(j\omega)$ grafičkim putem prema dijagramu na sl. 9—30. Na Nicholsovoj karti na sl. 9—31 prikazana je nova krivulja $K_P'G_K(j\omega)G_S(j\omega)$; očitamo okomiti pomak K_P'' u decibelima koji je potreban da se postigne M_r nekompenziranog sustava.

Nakon toga provjeravamo vremenski odziv na sličan način kao i u slučaju PD-kompenzacije. Iz analitičkog oblika se konstruira i grafički oblik (sl. 9—25). U slučaju da se vrijednosti M_P i T_s ne poklapaju sa zahtjevima, naknadno prilagođujemo parametre PI-kompenzatora.

Primjer 9.4. Uzimamo isti servomehanizam kao u primjeru 9.3:

$$G_S(j\omega)=\frac{0{,}25}{j\omega\,(1+j\omega)\,(1+j\omega\,0{,}25)}.$$

Pojačanje $K_P'=2{,}72$ zadovoljava uvjet $M_r=1{,}25$ dB, a $\omega_r=0{,}58\ s^{-1}$ zadovoljava brzinu odziva. Postavimo još zahtjev da e_0 treba da bude 0,5. Kako je:

$$K_v=\lim_{s\to 0} s\,K_P\,G_S(s)=\lim_{s\to 0} s\,2{,}72\,\frac{0{,}25}{s\,(1+s)\,(1+0{,}25s)}=0{,}68,$$

proizlazi da je stvarno trajno regulacijsko odstupanje uz nagibnu funkciju kao pobudu:

$$e_0=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s\,K_P'\,G_S(s)}=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{0{,}68}=1{,}47.$$

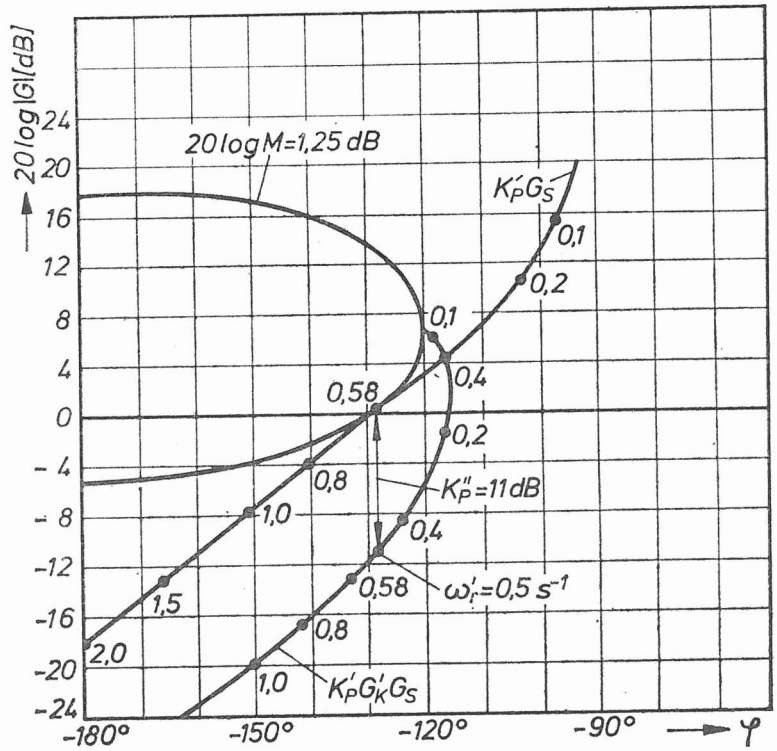
Prema tome, moramo uvesti dodatno pojačanje s preliminarnom vrijednosti $K_P''=$ $=1{,}47/0{,}5=3$. Odabiremo nešto veći $\alpha=4$.

Vremenska je konstanta:

$$\tau=\frac{10}{\omega_r}=\frac{10}{0{,}58}\simeq 17,$$

što daje $G_K'(j\omega)$ PI-kompenzatora:

$$G_K'(j\omega)=\frac{1+j\omega\,17}{1+j\omega\,68}.$$



Sl. 9—32. Projektiranje PI-kompenzacije u Nicholsovu dijagramu — primjer 9.4

U Nicholsovoj karti na sl. 9-32 ucrtana je krivulja $K'_P G_S(j\omega)$ koja dira M-kružnicu sa $M_r=1{,}25$ dB. Pomoću dijagrama na sl. 9-29 možemo izvršiti grafičku sintezu, pa ćemo dobiti krivulju $K'_P G'_K(j\omega)\, G_S(j\omega)$. Treba još da očitamo pojačanje $K''_P=11$ dB koje je potrebno da kompenzirana krivulja dođe u tangencijalan položaj u odnosu na M_r-kružnicu. Budući da 11 dB odgovara pojačanju $K''_P=3{,}5$, dobivamo konačan izraz za PI-kompenzator s pojačanjem:

$$G_K(j\omega)=K_P\, G'_K(j\omega)=2{,}72\cdot 3{,}5\,\frac{1+j\omega\,17}{1+j\omega\,68}=9{,}52\,\frac{1+j\omega\,17}{1+j\omega\,68}.$$

Provjerom vremenskog odziva mogli bi ustanoviti da je brzina odziva nešto manja. To vidimo i na Nicholsovoj karti na sl. 9-32, gdje očitamo $\omega'_r=0{,}5\text{s}^{-1}$. Trajno regulacijsko odstupanje je sa $e_0=0{,}438$ mnogo bolje od zadanog.

PID-kompenzator. Kod sinteze servomehanizama često treba bitno poboljšati i prijelazno i stacionarno ponašanje. U tu svrhu uzimamo PID-kompenzator koji sjedinjuje dobra svojstva i PD-kompenzatora (veliko pojačanje povisuje točnost) i PI-kompenzatora (povećanje ω_r poboljšava brzinu odziva).

Oba kondenzatora možemo u načelu vezati odvojeno u seriju, ali je uobičajena kompaktna izvedba sa sastavljenim članovima. Iz električne sheme u trećem redu tablice 9—2 možemo postaviti slijedeći oblik sinusne prijenosne funkcije PID-kompenzatora:

$$G_K(j\omega)=K_P\,\frac{1+j\omega\,\tau_1}{1+j\omega\alpha\tau_1}\cdot\frac{1+j\omega\tau_2}{1+(j\omega\tau_2/\alpha)}, \qquad (9\text{-}67)$$

gdje prvi razlomak predstavlja PI-kompenzator, a drugi PD-kompenzator.

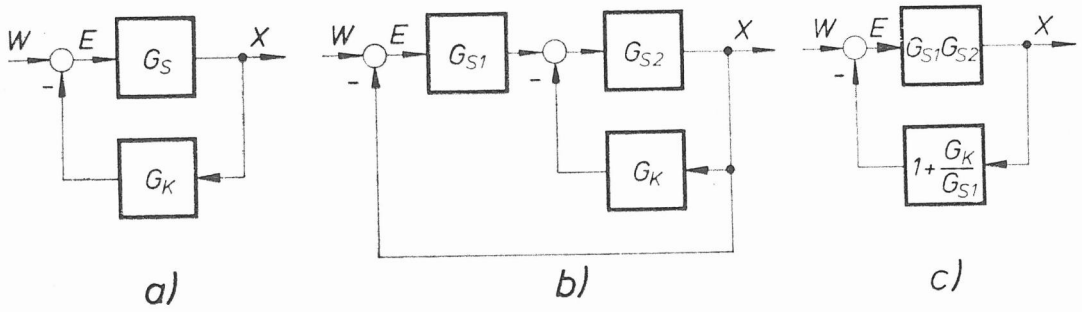
Vremenske su konstante $\tau_1=R_1C_1$ i $\tau_2=R_2C_2$. Faktor α mora radi pojednostavnjene izvedbe imati istu vrijednost za oba člana, iako je to u biti svejedno. Iz Bodeova prikaza u tablici 9—2 možemo zaključiti da je PID-kompenzator zapravo pojasni filtar koji prigušuje srednje područje frekvencija.

Sam postupak sinteze postaje preglednim, ako odvojeno projektiramo najprije PD-kompenzator, a zatim i PI-kompenzator. Započinjemo određivanjem faktora α, tako da dobijemo dobro prijelazno ponašanje. Nakon toga projektiramo PI-član, uzimajući istu vrijednost faktora α. Ako tako ne možemo dobiti zadovoljavajuće stacionarno ponašanje, povećavamo α tako dugo dok se trajno regulacijsko odstupanje dovoljno ne smanji. U cijelom postupku treba da se koristimo Nicholsovom kartom.

9.3.2. Povratna kompenzacija

U praksi se frekvencijski odziv servomehanizma može često mijenjati tako što se kompenzacijski član ugrađuje u povratnu vezu cijelog servomehanizma ili samo nekih njegovih sklopova. Prvo se vidi na sl. 9—33a, a drugo na sl. 9—33b. Ta tzv. povratna kompenzacija ima određene prednosti (jeftinija izvedba, problem smetnji), ali na njezin izbor utječu i drugi razlozi (prikladnost komponenata, modulacija signala).

Pomoću algebre blokova uvijek je moguće da se složena shema svede na jednostavnu, sa samo jednom prijenosnom funkcijom, ali pritom **utjecaj kompenzacijskog člana G_K na ponašanje cijelog sustava nije jasno vidljiv.** U slučaju blok-dijagrama na sl. 9—33b bolje je da ga pretvorimo u blok-dijagram na sl. 9—33c;



Sl. 9—33. Blok-dijagram povratne kompenzacije servomehanizma

desnu točku zbrajanja na sl. 9—33b pomaknemo ulijevo od G_{S1}, a zatim sjedinimo obje paralelne povratne veze. Rezultirajući blok-dijagram na sl. 9—33c identičan je onome na sl. 9—33a. Kompenzacijski član može imati samo funkciju pojačanja, a može se dakako upotrijebiti i PD-, PI- ili PID-kompenzator.

Inverzna polarna krivulja. Za sintezu servomehanizma s povratnom kompenzacijom prikladan je Nyquistov dijagram. Pri tome ne ucrtavamo »izravne« polarne krivulje prijenosnih funkcija, već polarne krivulje inverznih sinusnih prijenosnih funkcija. To omogućuje jednostavnu grafičku sintezu, jer G_K kompenzacijskog člana možemo odrediti vektorskim zbrajanjem.

Kao i kod Hallove karte iz prethodnog odjeljka, započinjemo analizom servomehanizma s jediničnom povratnom vezom. To je blok-dijagram na sl. 9—3. Iz sinusne prijenosne funkcije zatvorenog kruga:

$$M(j\omega)=Me^{j\psi}=\frac{G_0}{1+G_0} \tag{9-68}$$

načinimo inverzni oblik:

$$M^{-1}(j\omega)=\frac{1}{M}e^{-j\psi}=G_0^{-1}+1. \tag{9-69}$$

Vidimo da je $M^{-1}(j\omega)$ vrlo jednostavno povezan s inverznom sinusnom prijenosnom funkcijom otvorenog kruga $G_0^{-1}(j\omega)$. Prikažimo $G_0^{-1}(j\omega)$ u kompleksnom obliku:

$$G_0^{-1}(j\omega)=x+jy \tag{9-70}$$

i uvrstimo je u izraz (9-68):

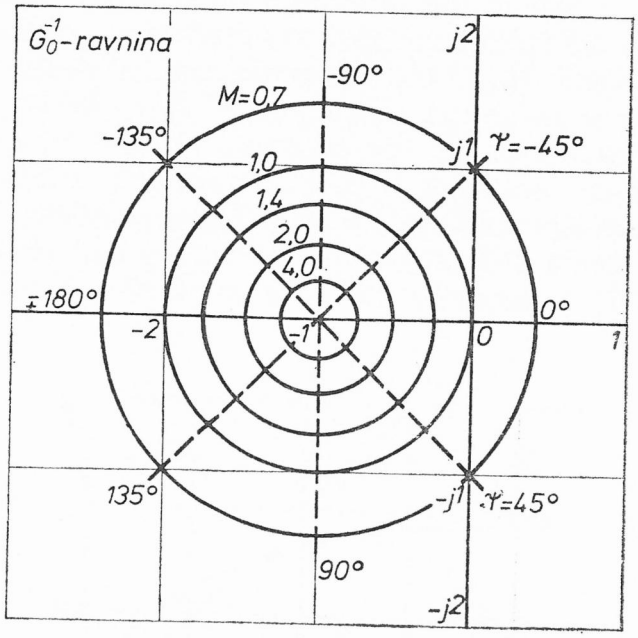
$$M^{-1}(j\omega)=x+1+jy. \tag{9-71}$$

Amplituda je od $M^{-1}(j\omega)$:

$$\frac{1}{M}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}. \tag{9-72}$$

Nakon kvadriranja dobivamo:

$$(x+1)^2+y^2=\frac{1}{M^2}. \tag{9-73}$$



Sl. 9—34. Kružnice konstantne amplitude M i pravci konstantnog faznog pomaka ψ sinusne prijenosne funkcije zatvorenog kruga u G_0^{-1} ravnini

Te krivulje predstavljaju **kružnice u G_0^{-1}-ravnini** (sl. 9—34). Središte im je u točki $(-1+j0)$, a polumjer $1/M$. Kako je recipročna vrijednost od -1 opet -1, točka $(-1+j0)$ ima isto značenje kao i u izravnom dijagramu prema sl. 9—10.

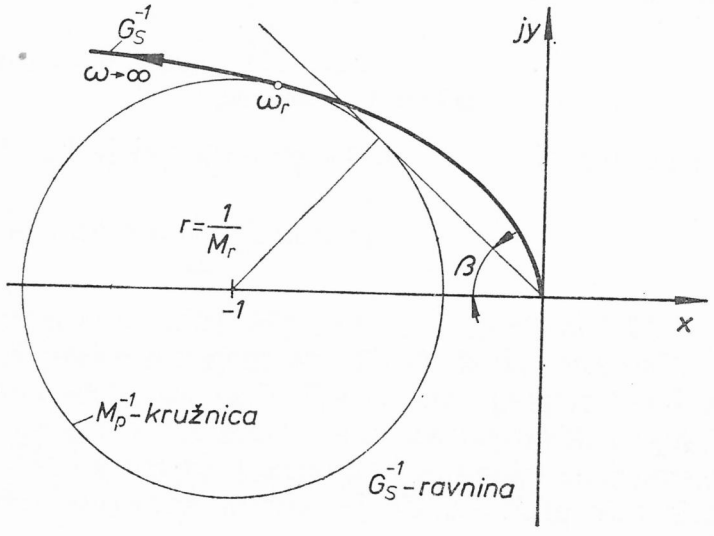
U dijagramu su ucrtani i pravci konstantnog faznog pomaka ψ. Na osnovi jednadžbe (9-71) dobivamo za fazni kut:

$$\operatorname{tg}\psi=-\frac{y}{x+1}. \tag{9-74}$$

To su pravci raznih nagiba kroz središte M^{-1}-kružnica.

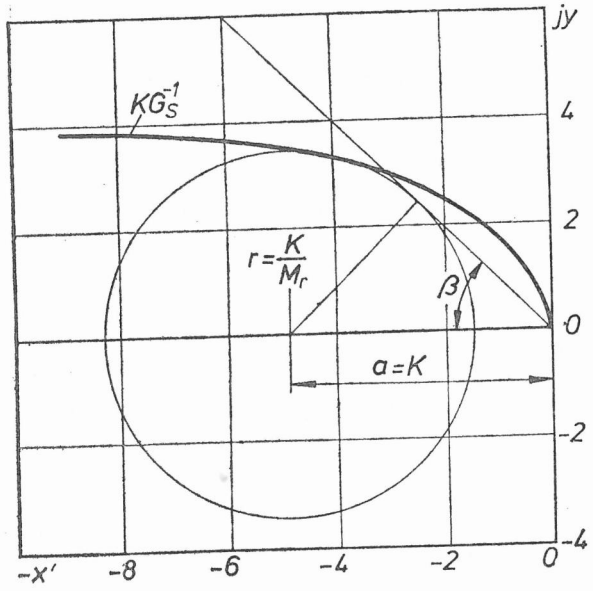
U dijagramu na sl. 9—35 ucrtana je inverzna polarna krivulja servomehanizma $G_S^{-1}(j\omega)$ koja dira M^{-1}-kružnicu s odabranim rezonantnim izdizanjem M_r. Tangenta na tu kružnicu zatvara s negativnom realnom osi kut β koji je vrlo jednostavno povezan sa M_r:

$$\sin\beta=\frac{1/M_r}{|-1|}=\frac{1}{M_r}. \tag{9-75}$$



Sl. 9—35. Određivanje potrebnog pojačanja u G_s^{-1} ravnini

Na osnovi utvrđenih odnosa možemo prema Nyquistovu dijagramu na sl. 9—35 opisati postupak za određivanje pojačanja K_P koje je potrebno da bismo dobili željeni M_r. U biti primjenjujemo isti postupak kao i kod izbora pojačanja u direktnom polarnom dijagramu (Hallova karta), tj. mijenjamo mjerilo dijagrama. Da bismo olakšali razumijevanje sinteze servomehanizma pomoću kompenzacije, taj ćemo postupak opisati na primjeru. Kompenzacija primjenom inverzne polarne krivulje objašnjena je na drugom primjeru. Kao što ćemo vidjeti, dok izborom pojačanja dolazimo izravno do cilja, kod sinteze pomoću kompenzacije potrebno je više uzastopnih pokušaja da dobijemo rezultat.



Sl. 9—36. Projektiranje izborom pojačanja u G_s^{-1}-ravnini — primjer 9.5

Primjer 9.5. Uzimamo isti servomehanizam tipa 1 kao i u primjeru 9.1:

$$G_S(j\omega)=\frac{3}{j\omega(1+j\omega\,0{,}2)(1+j\omega\,0{,}04)},$$

a traži se da je rezonantno izdizanje $M_r=1{,}4$. U Nyquistov dijagram na sl. 9—36 ucrtamo najprije frekvencijski ovisni dio od $G_S(j\omega)$ u inverznom obliku:

$$\frac{1}{G_S'(j\omega)}=\frac{K_S}{G_S(j\omega)}=j\omega(1+j\omega\,0{,}2)(1+j\omega\,0{,}04).$$

Za zadani $M_r=1{,}4$, kut tangente β isti je kao i kod izravne polarne krivulje:

$$\beta=\arcsin\frac{1}{M_r}=\arcsin\frac{1}{1{,}4}=45{.}6°.$$

M^{-1}-kružnicu koja dira obje krivulje nalazimo bez poteškoća. Ona je ucrtana u dijagramu na sl. 9—36, pa možemo očitati koordinatu njezina središta na negativnoj realnoj osi: $\alpha=4{,}9$. Ona odgovara koordinati središta kružnice $(-1+j0)$ na dijagramu na sl. 9—35. Kako su sve koordinate na dijagramu na sl. 9—36 pomnožene faktorom K u odnosu prema koordinatama na dijagramu na sl. 9—35, pojačanje je $K=\alpha$. To je zapravo promjena mjerila.

Budući da pojačanje servomehanizma već iznosi $K_S=3$, treba još samo da ugradimo dodatno pojačanje:

$$K_P=\frac{K}{K_S}=\frac{4{,}9}{3}=1{,}63.$$

Rezultat se donekle razlikuje u odnosu prema primjeru 9-1, ali je u granicama grafičkog očitavanja.

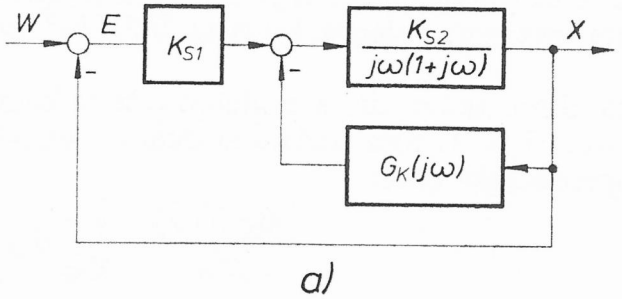
Primjer 9.6. Servomehanizam ima sinusnu prijenosnu funkciju:

$$K_{S1}G_S(j\omega)=K_{S1}K_{S2}G'_S(j\omega)=2{,}5\,\frac{10}{j\omega(1+j\omega\cdot 1)}.$$

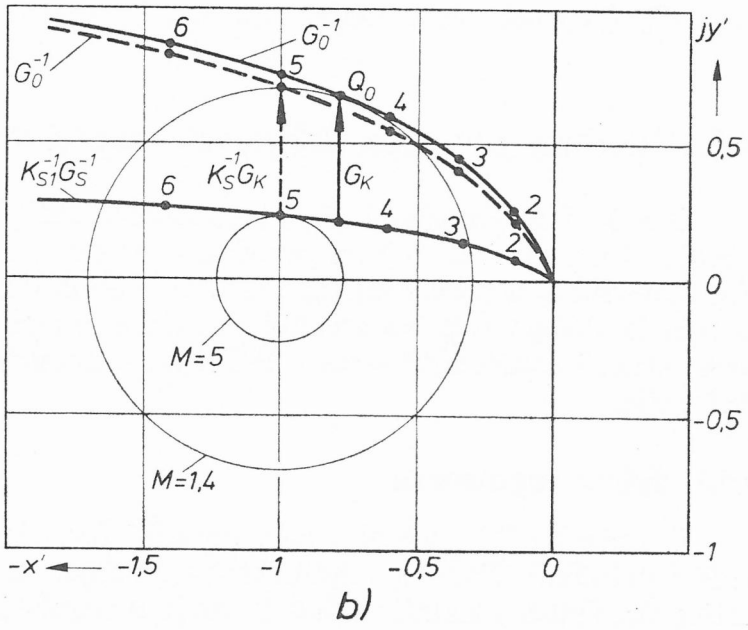
Povratnom kompenzacijom prema blok-dijagramu na sl. 9—37a moramo namjestiti rezonantno izdizanje na $M_r=1{,}4$.

Sinusnu prijenosnu funkciju otvorenog kruga invertiramo:

$$G_0^{-1}(j\omega)=\frac{E(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{1}{K_{S1}}\cdot\frac{1+G_SG_K}{G_S}=\frac{1}{K_{S1}G_S}+\frac{G_K}{K_{S1}}.$$



a)



b)

Sl. 9—37. Projektiranje servomehanizma kompenzacijom u G_s^{-1}-ravnini: blok-dijagram (a) i grafičko rješenje (b)

Prvi je član s desne strane inverzna sinusna prijenosna funkcija servomehanizma $K_{S1}^{-1} G_{S1}^{-1}(j\omega)$. Prikazana je krivuljom na inverznom polarnom dijagramu na sl. 9—37b. Njoj ćemo grafički pribrojiti nepoznati kompenzacijski član $K_{S1}^{-1} G_K(j\omega)$ da bismo dobili rezultirajuću, izvučeno prikazanu krivulju $G_0^{-1}(j\omega)$ koja dira M-kružnicu sa $M_r=1{,}4$.

Prvi je korak da krivulji $K_{S1}^{-1} G_S^{-1}(j\omega)$ pribrojimo vertikalnu komponentu. To znači da moramo pretpostaviti kompenzacijski član čisto imaginarnog oblika, tj. $G_K(j\omega)=jb\omega$. Za $\omega=5\ s^{-1}$ dodamo crtkano označen verzor $K_{S1}^{-1} G_K(j5)$ duljine 0,42 do M-kružnice sa $M_r=1{,}4$. Iz jednakosti:

$$\frac{G_K(j5)}{K_{S1}}=\frac{jb5}{2{,}5}=jb2\equiv j\,0{,}42$$

proizlazi da je $b=0{,}21$. Time je definiran kompenzacijski član $G_K(j\omega)=j\omega\ 0{,}21$, pa možemo konstruirati rezultirajuću, isprekidano prikazanu krivulju $G_0^{-1}(j\omega)$. Ta krivulja zapravo i nije tangenta, pa zato moramo ocijeniti u kojoj se točki M_r-kružnice nalazi dodirna točka Q_0. Iz dijagrama očitamo $\omega=4{,}5\ s^{-1}$, a izvučeno prikazani verzor $K_{S1}^{-1} G_K(j4{,}5)$ ima duljinu 0,42. Na osnovi jednakosti:

$$\frac{G_K(j4{,}5)}{K_{S1}}=\frac{jb\,4{,}5}{2{,}5}=jb1{,}8\equiv j\,0{,}42$$

dobivamo $b=0{,}23$. Prema tome je kompenzacijski član oblika $G_K(j\omega)=j\omega\ 0{,}23$. Zajedno sa servomehanizmom prema blok-dijagramu na sl. 9—37a on daje izvučeno prikazanu inverznu polarnu krivulju $G_0^{-1}(j\omega)$ koja leži tangencijalno na M_r-kružnici.

Ako nismo zadovoljni s brzinom odziva kompenziranog servomehanizma, moramo povećati ω_r. U tom slučaju možemo s nekoliko uzastopnih pokušaja naći izraz za kompenzacijski član:

$$\frac{G_K(j\omega_r')}{K_{S1}}=\frac{\alpha\omega}{K_{S1}}+j\frac{b\omega}{K_{S1}}.$$

Taj član ima dodatnu realnu komponentu $K_{S1}^{-1}\alpha\omega$, pa se inverzna polarna krivulja $G_0^{-1}(j\omega)$ zakreće u smislu gibanja kazaljke na satu.

9.4. Sinteza procesa izborom regulatora

Dok kod servomehanizama i elektromotornih pogona općenito raspolažemo s brojčanim podacima koji su potrebni u projektiranju bilo analitičkim, bilo grafičkim metodama, u procesnoj tehnici je do takvih podataka teško ili nemoguće doći. U tom je slučaju najjednostavniji put da uzastopnim pokusima prilagodimo procesnu stazu i regulacijski uređaj. Pri tome se koristimo praktičnim kriterijima optimalizacije.

9.4.1. Izbor regulatora

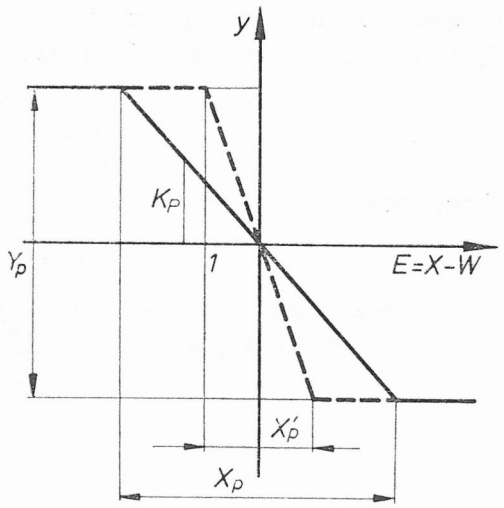
U odjeljku 7.1. potanko smo obradili funkcionalno djelovanje i tehničku izvedbu pojedinih članova regulacijskog uređaja. U pravilu se kompaktna izvedba naziva regulator, a sadrži većinu funkcija u regulacijskom uređaju. Uz komparator,

vremenski član i pojačalo, može biti prisutan i postavni pogon. S obzirom na vremensko djelovanje pojavljuju se u procesnoj regulaciji P-, PD-, PI- i PID-regulatori, pa se namještanjem njihovih parametara K_P, T_d i T_i traže optimalni uvjeti rada. Pri tome moramo naglasiti da regulacijsko djelovanje ne ovisi samo o svojstvim regulacijskog uređaja, već i o svojstvima staze te karakteru poremećajnog signala. Zato se ne može unaprijed reći koji regulator je bolji, već moramo promatrati cijeli regulacijski krug zajedno s poremećajima.

P-regulator. Njegova prijenosna funkcija:

$$G_R(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=K_P \tag{7-6}$$

pokazuje proporcionalnost između regulacijskog odstupanja $E=X-W$ na ulazu i postavne veličine Y na izlazu regulatora. **Proporcionalno područje** X_p je područje koje mora proći regulirana veličina X da bi se postavna veličina Y promijenila za čitavo **postavno područje** Y_p. To je prikazano na karakteristici P-regulatora na sl. 9—38, gdje je nagib u proporcionalnom području negativan zbog uključenja točke inverzije.



Sl. 9—38. Karakteristika P-regulatora

Ako se sjetimo jednostavnog primjera regulacije razine u spremniku s tekućinom prema sl. 1—13, gdje poluga djeluje kao P-regulator, vidimo da je podizaj ventila, tj. **postavno područje ograničeno.** Kako je $K_P=Y_p/X_p$, možemo uz čvrsti Y_p mijenjati prijenosni omjer K_P promjenom X_p. Na sl. 9—38 to je prikazano isprekidanom karakteristikom u smanjenom proporcionalnom području X_p'. I doista, P-regulatori baždareni su u X_p umjesto u K_P. U vezi s tim određuje se i **osjetljivost P-regulatora:** ona je to veća što je uže proporcionalno područje X_p.

Nazivnu veličinu W namjestimo u sredinu proporcionalnog područja kako bi se podjednako dobro otklonilo regulacijsko odstupanje u jednom ili u drugom smjeru.

Primjer 9.7. Temperaturni regulator kod promjene temperature na ulazu od 20°C podiže ventil za 5 mm. Prema tome je:

$$K_P=\frac{\Delta Y}{\Delta X}=\frac{5}{20}=0{,}25\ \mathrm{mmC^{-1}}.$$

Pri maksimalnom podizaju ventila od 50 mm dobivamo:

$$X_p = \frac{Y_p}{K_P} = \frac{50}{0{,}25} = 200°\text{C}.$$

Ako regulator pokriva temperaturno područje od 400 do 1 000°C, onda je najveće proporcionalno područje $X_p = 600°\text{C}$. Tako X_p možemo izraziti u postocima:

$$\frac{X_p}{X_{pm}} \cdot 100 = \frac{200}{600} \cdot 100 = 33\%.$$

Proporcionalno se područje ne smije namjestiti ispod 1%, a ponekad se prelazi i 100%.

P-regulator ima brzo regulacijsko djelovanje, ali mu je kod procesne regulacije uvijek prisutno trajno regulacijsko odstupanje e_0. To vidimo iz jednadžbe (8-17) koja vrijedi i za regulacijski krug sa čvrstom regulacijom:

$$e_0 = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{Z}{1+G_0}. \tag{9-76}$$

Umjesto Z uvrstimo prijenosnu funkciju jediničnog odskoka $1/s$, za P-regulator je $G_R(s) = K_R$, a procesna je staza s izjednačenjem višega reda:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots}. \tag{9-77}$$

Dobivamo:

$$e_0 = \lim_{s\to 0} s\,\frac{\frac{1}{s}}{1 + K_R\,\frac{K_S}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots}} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{s\to 0} K_R\,\frac{K_S}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots}} =$$

$$= \frac{1}{1 + K_R K_S}. \tag{9-78}$$

Uz čvrsti K_S možemo povećanjem K_R smanjiti e_0. S tim međutim ne možemo ići predaleko, jer zbog dinamike regulacijskog kruga dolazi do nestabilnosti. To je naročito prisutno kad su procesne staze s mnogo kašnjenja, pa se zato upotrebljavaju i drugi tipovi regulatora koji poboljšavaju dinamička svojstva regulacijskog kruga.

P-regulator se upotrebljava kod staza bez izjednačenja sa članom $1/s$, kao što je npr. regulacija razine u spremniku s tekućinom, zatim kod procesnih staza s prijenosnom funkcijom oblika:

$$G_S(s) = \frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\ldots(1+\tau_i s)\ldots} \tag{9-79}$$

i kad je jedna vremenska konstanta prevladavajuća, tj. kad je $\tau_1 \gg \tau_i$.

I-regulator. Njegova je prijenosna funkcija:

$$G_R(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \tag{7-10}$$

izvedena u odjeljku 7.1. Tamo smo napomenuli da on djeluje doduše sporo, ali da u većini praktičnih slučajeva potpuno uklanja trajno regulacijsko odstupanje. To možemo lako dokazati pomoću jednadžbe (9-76). Uz proporcionalnu stazu višega reda prema izrazu (9-77) dolazi I-regulator s prijenosnom funkcijom $G_R(s)=K_R/s$. Uvrštenjem tog izraza u jednadžbu (9-76) dobit ćemo:

$$e_0=\lim_{s\to 0} s\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{K_R}{s}\frac{K_S}{1+a_1 s+a_2 s^2+\ldots}}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}\frac{K_R}{s}\frac{K_S}{1+a_1 s+a_2 s^2+\ldots}}=0. \quad (9\text{-}80)$$

Prema tome, ako je poremećajna veličina Z u obliku jediničnog odskoka, tj. ako je $Z(s)=1/s$, e_0 je potpuno otklonjena.

I-regulatori se primjenjuju prvenstveno kod staza s izraženim mrtvim vremenom τ_m, kao i kod staza s izjednačenjem višega reda:

$$G_S(s)=\frac{K_S}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\ldots(1+\tau_i s)\ldots}, \quad (9\text{-}81)$$

gdje su vremenske konstante približno jednake, tj. $\tau_1\simeq\tau_i$. I-regulator se ne smije upotrebljavati kod staza bez izjednačenja zbog izrazite nestabilnosti (strukturno nestabilan sustav).

PI-regulator. Dodavanjem P-regulatoru I-djelovanja dobivamo kombinirano djelovanje:

$$G_R(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=K_P\left[1+\frac{1}{T_i s}\right], \quad (7\text{-}11)$$

gdje do izražaja dolaze prednosti obaju djelovanja. P-djelovanje osigurava brzu reakciju, dok I-djelovanje otklanja sporo ali potpuno trajno regulacijsko odstupanje.

Zbog protudjelovanja koje je uvijek prisutno u sastavljenim regulatorima (v. odjeljak 7.1), smanjenje K_P djeluje i na integralno vrijeme T_i tako što ga donekle povećava. Naprotiv, promjena T_i ne djeluje na K_P. Zato ispravno namještanje parametara sastavljenog regulatora zahtijeva iskustvo, a naročito moramo paziti kod uvjetno stabilnih sustava (v. odjeljak 8.3).

PI-regulator upotrebljavamo kad sa samim P-regulatorom ne možemo dovoljno smanjiti trajno regulacijsko odstupanje, a da ne ugrozimo stabilnost, ili kad bi sam I-regulator uzrokovao nestabilnost, odnosno kad bi odveć polako reagirao. Slično I-regulatoru, i PI-regulator je pogodan za staze s mrtvim vremenom i za staze s izjednačenjem višega reda. Zato od svih tipova regulatora u procesnoj regulaciji najčešće nailazimo upravo na PI-regulator.

PD-regulator. Dodavanjem D-djelovanja P-regulatoru kompenzira se kašnjenje staze. To vidimo na osnovi njegove prijenosne funkcije:

$$G_R(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=K_P(1+T_d s), \quad (7\text{-}14)$$

odnosno na prijenosnoj funkciji otvorenog kruga $G_0 = G_R G_S$. Ako prema sl. 9—39 uzmemo P-stazu prvoga reda u kombinaciji sa PD-regulatorom:

$$G_0(s) = G_R G_S = K_P (1 + T_d s) \frac{K_S}{1 + \tau s}, \tag{9-82}$$

vidimo da je uz povoljan izbor $T_d \simeq \tau$ prijenosna funkcija otvorenog kruga praktički bez kašnjenja. Na taj je način povećana stabilnost, jer je smanjen red karakteristične jednadžbe regulacijskog sustava.



Sl. 9—39. PD-kompenzator poništava kašnjenje staze

Kao i kod PI-regulatora, i kod PD-regulatora se povećanjem proporcionalnog područja X_p smanjuje K_P, a smanjuje se donekle i T_d. Naprotiv, promjena T_d ne utječe na K_P.

PD-regulator uspjehom se primjenjuje kod procesnih staza višega reda koje posjeduju jednu prevladavajuću vremensku konstantu τ, s kojom se izjednači T_d. Naprotiv, kod staza višega reda s približno jednakim vremenskim konstantama, prednosti D-djelovanja ne dolaze do izražaja.

Blizu smo pomisli da se staze s kašnjenjem višega reda reguliraju tako da se u seriju spoje dva ili više PD-članova. To se ipak ne radi, jer višestruka derivacija izaziva razne smetnje, a teško ju je i izvesti.

PID-regulator. To je najopćenitiji tip regulatora kojeg je prijenosna funkcija:

$$G_R(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = K_P \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right]. \tag{7-16}$$

On sjedinjuje dobra svojstva svih triju djelovanja, dodavajući brzini odziva i uklanjanju preostalog regulacijskog odstupanja PI-regulatora i stabilizirajuće D-djelovanje.

I ovdje je prisutno protudjelovanje između sklopova, pa se povećanjem proporcionalnog područja, tj. smanjenjem K_P smanjuje i T_d, a povećava T_i.

Bilo bi logično očekivati da je PID-regulator — unatoč tome što je razmjerno skup — široko primjenljiv pri rješavanju raznovrsnih problema procesne regulacije. To ipak nije tako. Potrebno je naime veliko znanje i iskustvo da se namještanjem triju djelovanja postigne optimalan učinak. Čak se u praksi prethodno namjeste P- i D-djelovanje, a samo se I-djelovanje namješta izravno u regulacijskom krugu. Ipak, pronađene su iskustvene metode pomoću kojih se PID-regulator namješta na optimalan učinak.

9.4.2. Metode podešavanja regulatora

Da bi se izbjegao neplanski pristup pokusnom namještanju parametara regulatora u procesnoj regulaciji, što u pogonskim uvjetima nije poželjno, razrađene su jednostavne metode koje se temelje na teorijskim analizama i praktičkim ispitivanjima. Ovdje dajemo dvije najpoznatije i najčešće primjenjivane metode, i to Ziegler-Nicholsovu i Chien-Hrones-Reswickovu. One su prvenstveno predviđene

za regulaciju staza s izjednačenjem; u načelu je moguće postići zadovoljavajući rad i kod staza bez izjednačenja, ali je namještanje teže, a osim toga ne smije se upotrijebiti regulator s I-djelovanjem.

Ziegler-Nicholsova metoda[1]. Ova se metoda primjenjuje kod staza višega reda koje se mogu prikazati kombinacijom člana s mrtvim vremenom i aperiodskog člana, kojih **vremenski odziv nije poznat.** Postupak namještanja je slijedeći:

— regulator se namjesti kao čisti P-regulator, pa se dugmad za integralno i derivacijsko djelovanje stave na $T_i \to \infty$ i $T_d = 0$,
— pojačanje K_P povećava se tako dugo dok se ne pojave oscilacije, tj. do granice stabilnosti. Tada se određuje kritično proporcionalno područje X_{pkr} kao i kritični period oscilacija $T_{kr} = 2\pi/\omega$,
— na osnovi tih dviju vrijednosti, a pomoću tablice 9—3, namjesti se, već prema tipu regulatora, proporcionalno područje X_p, odnosno u slučaju PI-regulatora i integralno vrijeme T_i, a u slučaju PID-regulatora još i derivacijsko vrijeme T_d.

Tablica 9—3. Metoda Ziegler-Nichols

	X_p	T_i	T_d
P	2,0	—	—
PI	2,2	0,85	—
PID	1,7	0,5	0,12

Tako namješten regulacijski krug treba da ima zadovoljavajuće regulacijsko djelovanje, dakako uz poremećaje u obliku odskočne funkcije. U praksi se može još vršiti i dotjerivanje. Tako npr. svakih nekoliko dana popravljamo vrijednost X_p, a pomoću podataka na registarskom instrumentu uspoređujemo i biramo konačnu vrijednost X_p.

Nedostatak je te metode što se regulacijski krug mora dovesti do granice oscilacija, a to ponekad nije dozvoljeno. Ipak, i to je bolje nego da se pri neplanskom namještanju izazovu žestoke oscilacije.

Primjer 9.8. Kod neke industrijske peći izmjereni su prema Ziegler-Nicholsovoj metodi $X_{pkr} = 80°C$ i $T_{kr} = 6$ min. Na osnovi tih podataka možemo izračunati slijedeće parametre za razne tipove regulatora:

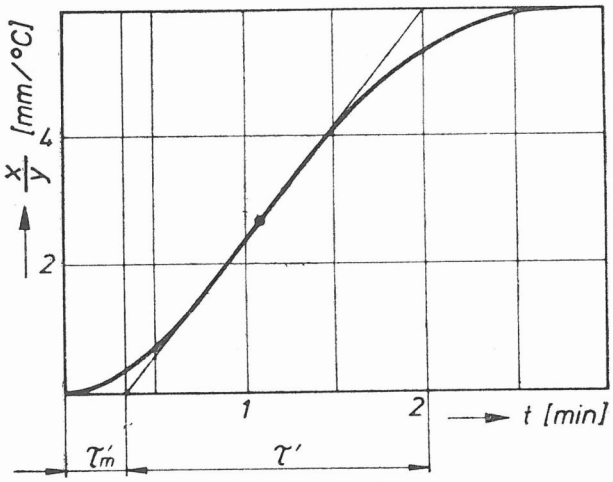
P-regulator: $X_p = 2{,}0\ X_{pkr} = 2{,}0 \cdot 80 = 160°C$

PI-regulator: $X_p = 2{,}2\ X_{pkr} = 2{,}2 \cdot 80 = 176°C$
$T_i = 0{,}85\ T_{kr} = 0{,}85 \cdot 6 = 5{,}1$ min

PID-regulator: $X_p = 1{,}7\ X_{pkr} = 1{,}7 \cdot 80 = 136°C$
$T_i = 0{,}5\ T_{kr} = 0{,}5 \cdot 6 = 3$ min
$T_d = 0{,}12\ T_{kr} = 0{,}12 \cdot 6 = 0{,}72$ min

[1] Ziegler, J. G., Nichols, N. B., Optimum Settings for Automatic Controllers. Trans. ASME 64, 1942, str. 759—768.

Chien-Hrones-Reswickova metoda[1]. Ova se metoda primjenjuje na staze višega reda kojih je vremenski odziv poznat. One se prema odjeljku 6.3. mogu aproksimirati s članom s mrtvim vremenom u seriji s aperiodskim članom. Na sl. 9—40 očitamo nadomjesno mrtvo vrijeme τ_m' i nadomjesnu vremensku konstantu τ', a iz tablice 9—4 odredimo potrebna namještanja parametara K_P, T_i i T_d za razne tipove regulatora. U tablici se razlikuju vrijednosti namještanja za čvrstu i za slijednu regulaciju.



Sl. 9—40. Prijelazna funkcija sustava višega reda — primjer 9.9

Tablica 9—4. Metoda Chien-Hrones-Reswick

		Aperiodski tok najkraćeg trajanja		20% prebačaja uz najkraći period oscilacija	
		Čvrsta regulacija	Slijedna regulacija	Čvrsta regulacija	Slijedna regulacija
P	K_P	$0{,}3\,\frac{\tau'}{\tau_m'}$	$0{,}3\,\frac{\tau'}{\tau_m'}$	$0{,}7\,\frac{\tau'}{\tau_m'}$	$0{,}7\,\frac{\tau'}{\tau_m'}$
PI	K_P	$0{,}6\,\frac{\tau'}{\tau_m'}$	$0{,}35\,\frac{\tau'}{\tau_m'}$	$0{,}7\,\frac{\tau'}{\tau_m'}$	$0{,}6\,\frac{\tau'}{\tau_m'}$
	T_i	$4\,\tau_m'$	$1{,}2\,\tau'$	$2{,}3\,\tau_m'$	τ'
PID	K_P	$0{,}95\,\frac{\tau'}{\tau_m'}$	$0{,}6\,\frac{\tau'}{\tau_m'}$	$1{,}2\,\frac{\tau'}{\tau_m'}$	$0{,}95\,\frac{\tau'}{\tau_m'}$
	T_i	$2{,}4\,\tau_m'$	τ'	$2\,\tau_m'$	$1{,}35\,\tau'$
	T_d	$0{,}42\,\tau_m'$	$0{,}5\,\tau_m'$	$0{,}42\,\tau_m'$	$0{,}47\,\tau_m'$

[1] Chien, K. L., Hrones, J. A., Reswick, J. B., On the Automatic Control of Generalized Passive Systems. Trans. ASME 74, 1952, str. 175—185.

To namještanje daje optimalne rezultate samo tada, ako su poremećajna ili vodeća veličina u obliku odskočne funkcije. Naprotiv, ako su te veličine slučajne, potrebno je drukčije namještanje promjenljivih parametara. To sve upućuje na potrebu da uz razumijevanje regulacijskih pojava posjedujemo i određeno praktično iskustvo.

Primjer 9.9. Mjerenjem prijelazne funkcije na uređaju za sušenje dobivamo da je $\tau'_m=20$ s, $\tau'=2$ min (sl. 9—40). Na osnovi toga izračunamo za odabrani PID-regulator i za aperiodski tok najkraćeg trajanja prijelazne pojave:

$$K_P=0{,}95\frac{\tau'}{\tau'_m}=0{,}95\frac{120}{20}=5{,}7\ \mathrm{m^{-3}\,°C^{-1}},$$

$$T_i=2{,}4\tau'_m=2{,}4\cdot 20=48\ \mathrm{s},$$

$$T_d=0{,}42\tau'_m=0{,}42\cdot 20=8{,}4\ \mathrm{s}.$$

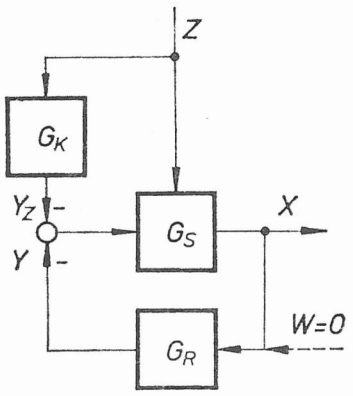
9.5. Sinteza procesa pomoću dodatnih petlji

Regulacijsko djelovanje kod procesne regulacije ne možemo uvijek riješiti na zadovoljavajući način samo izborom određenog regulatora i **mijenjanjem njegovih parametara** (parametarska optimalizacija). Čak i univerzalni PID-regulator zataji ako nastupe veliki poremećaji ili velika kašnjenja staza. Rješenje je u ugradnji dodatnih petlji, odnosno u **mijenjanju strukture regulacijskog kruga** (strukturna optimalizacija). Za takvu sintezu veoma je teško ili gotovo nemoguće dati sustavne i egzaktne metode rješavanja.

U praksi se udomaćilo **nekoliko standardnih izvedbi** koje ćemo ukratko opisati. To je dodatno upravljanje poremećajnom veličinom, gdje se dodatnim petljama mogu neutralizirati poremećaji prije nego što dostignu najveću vrijednost. Uvođenjem pomoćne postavne ili regulirane veličine mogu se regulacijski signali priključiti na pojedina mjesta unutar staze. U svakom slučaju, mora se **skratiti put regulacijskog signala** da bi djelovanje bilo što brže i što djelotvornije. Srodne su izvedbe s više petlji i kaskadna i omjerna regulacija, što ćemo također pokazati primjerima.

Možemo općenito ustvrditi da se stabilnost složenih regulacijskih krugova općenito poboljšava uvođenjem dodatnih petlji jer se negativan utjecaj kašnjenja staze dobrim dijelom neutralizira.

Dodatno upravljanje poremećajnom veličinom. Ovu strukturu regulacijskog kruga primjenjujemo kad nastupe **veliki poremećaji** koje treba otkloniti. Kako obično jedan od tih poremećaja prevladava, blizu smo pomisli da djelovanje takvog poremećaja nastojimo u začetku ublažiti, a ne da čekamo da nastane relativno sporo u regulacijskom krugu. Prema blok-dijagramu na sl. 9—41 to možemo izvesti tako da na poremećajnu veličinu utječemo da djeluje izravno na postavni član. Ne treba dakle da čekamo prolazak kroz stazu i regulator, pa da tek onda počinje regulacijsko djelovanje. Tako kombiniramo upravljanje pomoću poremećajne veličine s normalnim djelovanjem regulacije, a pritom su zahtjevi na regulacijski krug znatno ublaženi. Kod te izvedbe mora dakako biti ispunjen preduvjet da **mjesto poremećaja mora biti utvrđeno i mjerljivo,** što nije uvijek izvedivo.



Sl. 9—41. Blok-dijagram dodatnog upravljanja poremećajnom veličinom

Varijable na blok-dijagramu možemo povezati slijedećim izrazima:

$$X=G_S(-Y_Z-Y)+G_ZZ,$$
$$Y_Z=G_KZ, \tag{9-83}$$
$$Y=G_RX,$$

pri čemu se pretpostavlja čvrsta regulacija, tj. $W=0$. Prijenosna funkcija G_K predstavlja djelovanje poremećajne veličine Z preko upravljačkog člana na postavnu veličinu Y_Z, a prijenosna funkcija G_Z predstavlja izravno djelovanje Z preko staze na reguliranu veličinu X.

Izlučivanjem varijabli Y_Z i Y dobivamo:

$$X=G_S[-G_KZ-G_RX]+G_ZZ, \tag{9-84}$$

pa je prijenosna funkcija sustava:

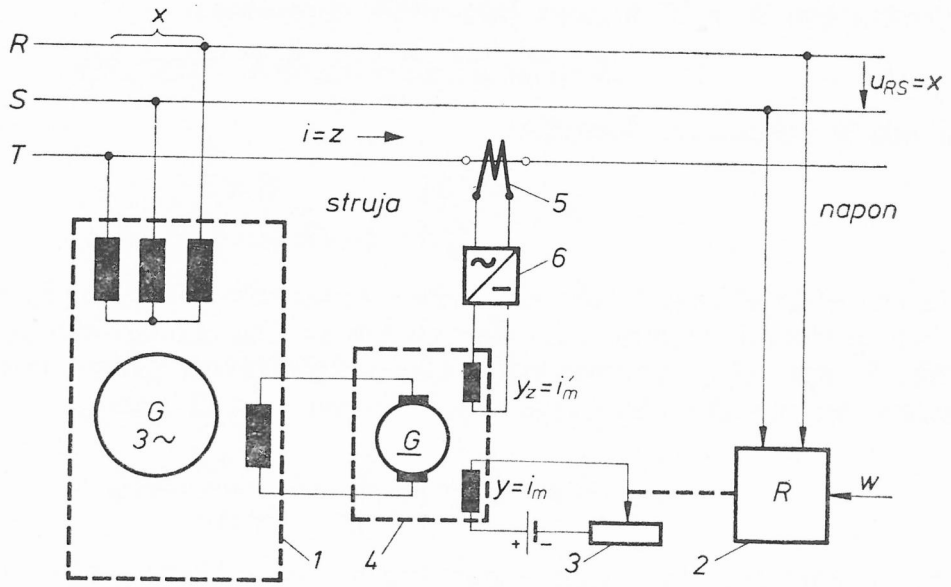
$$G(s)=\frac{X(s)}{Z(s)}=\frac{G_Z-G_KG_S}{1+G_RG_S}. \tag{9-85}$$

Dobrota regulacije ovdje ovisi o tome koliko se poništavaju oba člana u brojniku, i to u dinamičkim uvjetima.

Zahvat upravljačkog člana G_K može imati P- ili D-djelovanje, ali nikako I--djelovanje, jer se postavna veličina nakon prestanka poremećaja mora vratiti u početni položaj.

Bolja stabilnost cijelog regulacijskog sustava s dodatnim upravljanjem poremećajnom veličinom očituje se u tome što su veliki poremećaji odstranjeni u otvorenom upravljačkom krugu, gdje nema opasnosti od oscilacija. Regulacijski krug odstranjuje mala preostala odstupanja, pa nema potrebe za velikim pojačanjem, koje je jedan od glavnih uzroka nestabilnosti.

Kao primjer dodatnog upravljanja poremećajnom veličinom uzimamo regulaciju napona sinhronog generatora prema sl. 9—42. Trofazni sinhroni generator 1 hrani mrežu, a kao glavni poremećaj nastupa opterećenje mreže koje mijenja struju i generatora. Zbog toga se mijenja i napon u između pojedinih faza. Napon u_{RS} vodi se na ulaz regulatora 2 koji je izveden u obliku pomičnog svitka što se uvlači manje ili više između polova magneta. Taj se pomak prenosi na klizalo potenciometra 3, pa se zbog toga mijenja i struja magnetiziranja i_m uzbudnog generatora 4. Ovaj hrani uzbudni namot sinhronog generatora, a djelovanje mu se zbog opterećenja suprotstavlja promjeni napona generatora.



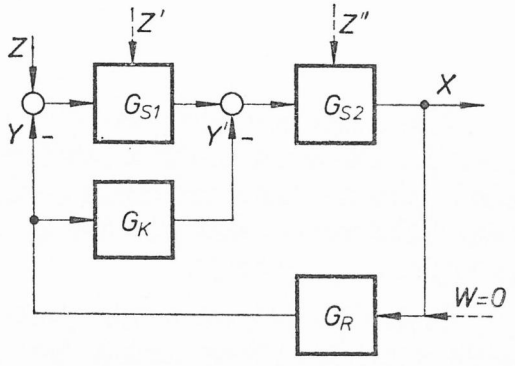
Sl. 9—42. Regulacija napona sinhronog generatora

Budući da je mreža podložna velikim promjenama opterećenja, uvodimo dodatno upravljanje poremećajnom veličinom. Struja opterećenja i mjeri se strujnim transformatorom 5, a preko pretvarača izmjenične u istosmjernu struju 6 pomoćni se pobudni namot uzbudnog generatora hrani strujom magnetiziranja i_m'. I to se djelovanje suporotstavlja promjeni struje opterećenja generatora.

Uvođenje pomoćne postavne veličine. Prema blok-dijagramu na sl. 9—43, regulacijsku stazu podijelimo na dva dijela koja označimo odgovarajućim prijenosnim funkcijama: na G_{S1}, gdje su usredotočena glavna kašnjenja, i na G_{S2}, kojim možemo posebno upravljati. Pretpostavka za takvu podjelu je **mogućnost podjele staze** s obzirom na konstrukcijsku izvedbu. Prevladavajući je poremećaj Z na ulazu u čitavu stazu. Da bi se nakon promjene regulirane veličine X ubrzalo regulacijsko djelovanje, preko kompenzacijskog člana G_K uvodimo pomoćnu postavnu veličinu Y' kojom zaobiđemo dio staze s velikim kašnjenjem G_{S1}.

Na osnovi blok-dijagrama možemo postaviti slijedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned} X &= G_{S2}\,[G_{S1}\,(Z-Y)-Y'], \\ Y &= G_R X, \\ Y' &= G_K Y. \end{aligned} \tag{9-86}$$



Sl. 9—43. Blok-dijagram uvođenja pomoćne postavne veličine

Uvrštenjem Y i Y' u prvu jednadžbu dobivamo:

$$X=G_{S2}\,[G_{S1}Z-G_{S1}G_RX-G_KG_RX], \tag{9-87}$$

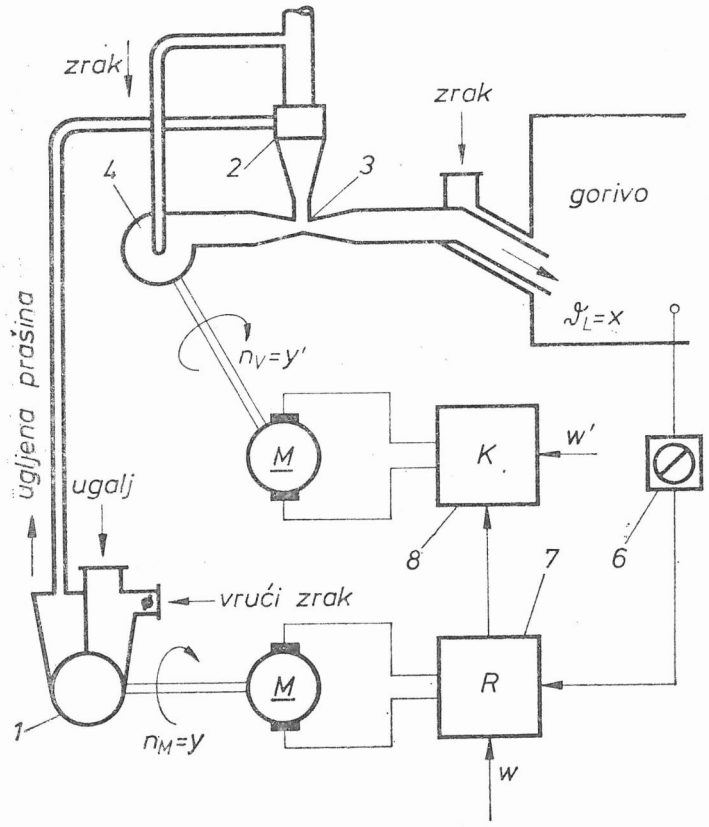
a odatle prijenosnu funkciju:

$$G(s)=\frac{X(s)}{Z(s)}=\frac{G_{S1}G_{S2}}{1+G_RG_{S2}(G_K+G_{S1})} \tag{9-88}$$

Iz nazivnika vidimo da dio staze G_{S1} i kompenzacijski član G_K djeluju usporedno. Ovaj posljednji biramo tako da zajedno sa G_{S1} djeluje kao proporcionalni član. Ako je npr. G_{S1} proporcionalni član s kašnjenjem prvoga reda, onda G_K mora imati derivacijsko djelovanje s kašnjenjem prvoga reda:

$$G_{S1}+G_K=\frac{K_{S1}}{1+\tau_1 s}+\frac{K_{S1}\tau_1 s}{1+\tau_1 s}=K_{S1} \tag{9-89}$$

da bi djelovanje tih dvaju usporedno spojenih članova bilo proporcionalno.



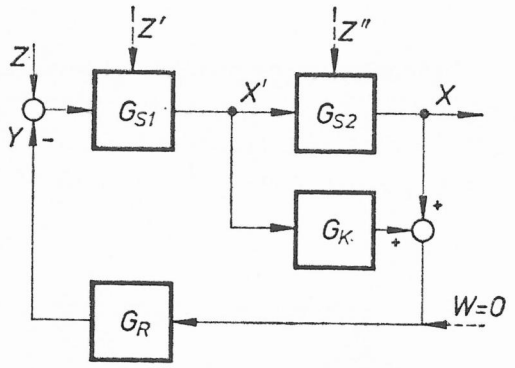
Sl. 9—44. Regulacija dotoka goriva kod parnog kotla

Uvođenje pomoćne postavne veličine naročito je djelotvorno kod slijedne regulacije; promjena vodeće veličine na ulazu u regulator odmah djeluje na čitavoj stazi, iako na ulaznom dijelu staze mogu postojati znatna kašnjenja. Ono je isto tako djelotvorno i kod poremećaja što se pojavljuju pri kraju staze, kao što je npr. promjena opterećenja.

Praktična primjena tog postupka ostvarena je u regulaciji loženja parnog kotla pomoću ugljene prašine prema sl. 9—44. Na ulazu u stazu mijenja se broj

okreta motora n_M koji pokreće mlin za ugljen 1. Ugljena prašina prolazi kroz separator 2, i u suženju 3 usisava je struja zraka koja dolazi iz ventilatora 4. Prođe dakle mnogo vremena dok se promjena u punjenju mlina osjeti u ložištu 5. Temperatura ložišta ϑ_L izlazna je veličina koja se mjeri i preko pretvarača 6 dovodi do regulatora 7. Ovaj djeluje preko uzbudnog namota na broj okreta motora mlina, suprotstavljajući se promjenama regulirane veličine ϑ_L.

Kao pomoćnu postavnu veličinu možemo ovdje uvesti broj okreta motora n_V koji pokreće ventilator, reguliran preko kompenzacijskog člana. 8 Na taj način pri promjeni regulirane veličine dolazi do istodobnog djelovanja i na rad mlina i na rad ventilatora, pa se u ložištu ravnotežno stanje uspostavi mnogo brže.



Sl. 9—45. Blok-dijagram uvođenja pomoćne regulirane veličine

Uvođenje pomoćne regulirane veličine. Umjesto da negdje unutar staze uvedemo pomoćnu postavnu veličinu, možemo unutar staze mjeriti neku pomoćnu reguliranu veličinu. Učinak je u oba slučaja isti, jer dolazi do skraćenja puta regulacijskih signala. Prednost je ove druge metode što je uvođenje još jednog mjernog člana jeftinije od uvođenja izvršnog člana.

Da bismo ostvarili načelo uvođenja pomoćne regulirane veličine, potrebna je takva staza koja se na neki način može podijeliti, a pomoćna regulirana veličina mjeriti. Mjerenje treba da bude što je moguće bliže mjestu poremećaja, ili, u slučaju ravnomjerno raspoređenih poremećaja, duž staze, odnosno negdje u sredini staze.

Poslužimo se opet pojednostavnjenim blok-dijagramom prema sl. 9—45, gdje smo stazu podijelili na dva dijela s prijenosnim funkcijama G_{S1} i G_{S2}. Pretpostavimo da su glavna kašnjenja usredotočena u G_{S2}, a prevladavajući je poremećaj Z na ulazu staze. Uz regulator G_R spojen je paralelno G_{S2} i kompenzacijski član G_K. Mjerenjem pomoćne regulirane veličine X' postižemo preko G_K brže regulacijsko djelovanje.

Iz blok-dijagrama dobivamo slijedeće odnose između pojedinih varijabli:

$$\begin{aligned} X &= G_{S2}X', \\ X' &= G_{S1}(Z-Y), \\ Y &= G_R(X+G_KX'). \end{aligned} \tag{9-90}$$

Izlučivanjem varijabli X' i Y:

$$X=\frac{G_{S1}G_{S2}Z-G_{S1}G_{S2}G_RX}{1+G_{S1}G_RG_K} \tag{9-91}$$

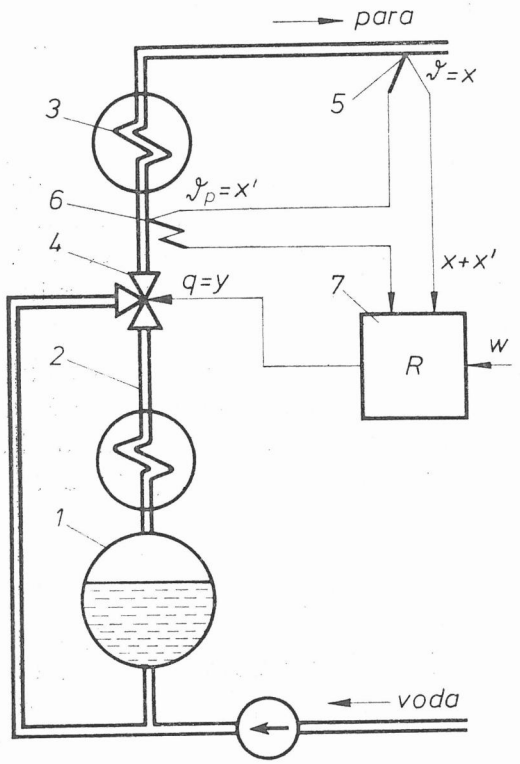
dobivamo prijenosnu funkciju:

$$G(s)=\frac{X(s)}{Z(s)}=\frac{G_{S1}G_{S2}}{1+G_RG_{S1}(G_K+G_{S2})} \tag{9-92}$$

Kao i kod pomoćne postavne veličine, iz nazivnika je uočljivo da se kašnjenja u nazivniku smanjuju ako paralelno spojeni G_{S2} i G_K djeluju kao proporcionalni član. Ako je G_{S2} proporcionalni član s kašnjenjem prvoga reda, G_K mora biti derivacijski član s kašnjenjem prvoga reda:

$$G_{S2}+G_K=\frac{K_{S2}}{1+\tau_2 s}+\frac{K_{S2}\tau_2 s}{1+\tau_2 s}=K_{S2}. \tag{9-93}$$

Uvođenje pomoćne regulirane veličine naročito je djelotvorno kod čvrste regulacije, jer se poremećaj na ulazu u stazu brzo poništava. Kod slijedne se regulacije promjene stanja vrše na izlazu staze, pa djelovanje pomoćne regulirane veličine gotovo ništa ne pridonosi smanjenju kašnjenja.



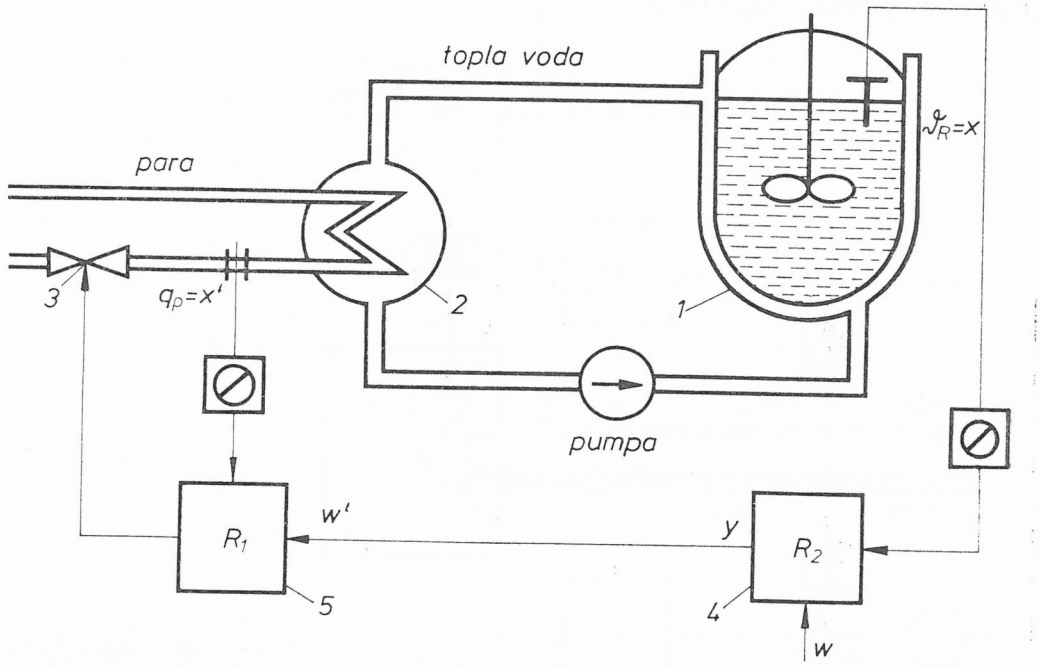
Sl. 9—46. Regulacija temperature zasićene pare parnog kotla

Primjer uvođenja pomoćne regulirane veličine predstavlja regulacija temperature zasićene pare iz parnog kotla prema sl. 9—46. Na izlazu iz parnog kotla 1 prolazi para prvo kroz jedan pregrijač pare 2, a zatim i kroz drugi pregrijač pare 3. Uštrcavanjem pojne vode između oba pregrijača 4 možemo djelovati na temperaturu pare kao reguliranu veličinu x.

Kao poremećajna veličina z djeluje promjenljivi protok pare, a mjerenje temperature pare termoelementom 5 na izlazu iz drugog pregrijača mnogo kasni s obzirom na veliku metalnu masu drugog pregrijača. Mjerenjem pomoćne regulirane veličine

x' termoelementom 6 na izlazu iz prvog pregrijača možemo vrlo brzo smanjiti regulacijsko odstupanje. Naponi koji odgovaraju objema veličinama x i x' zbrajaju se i djeluju preko regulatora 7 na ventil.

Termoelemenat 6 za mjerenje pomoćne regulirane veličine sastoji se od dva suprotno spojena termoelementa, od kojih je jedan trom, a drugi brz, što je na slici prikazano simbolički. Rezultirajući napon odgovara D-djelovanju, jer se odmah nakon promjene temperature pojavljuje razlika napona koja kasnije nestaje. Ovaj tip termoelementa ovdje je neophodan s obzirom na regulacijske zahtjeve.



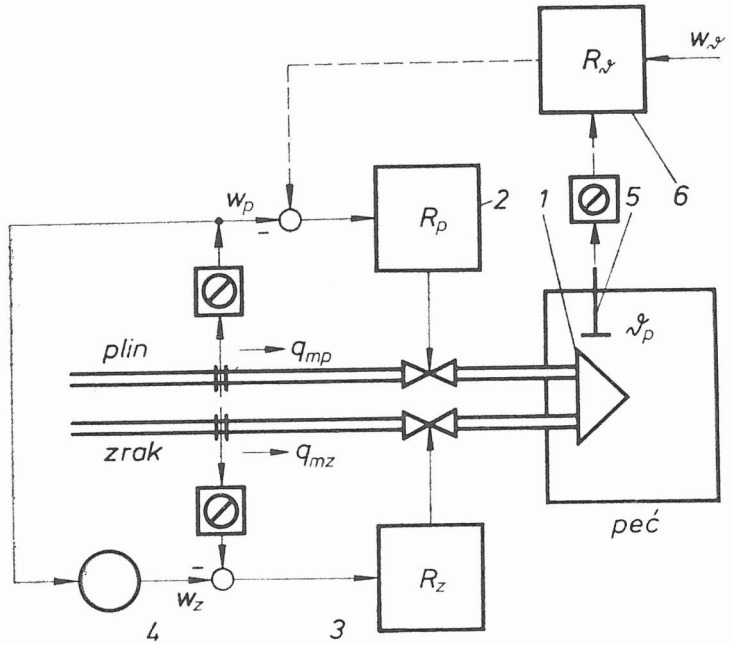
Sl. 9—47. Kaskadna regulacija temperature kemijskog reaktora

Kaskadna regulacija. Ovaj je postupak srodan prije spomenutom, jer se regulacijska staza raščlanjuje, a između G_{S1} i G_{S2} uzima se pomoćna regulirana veličina. Kaskadnu regulaciju proučit ćemo na primjeru regulacije temperature kemijskog reaktora.

Kemijski reaktor 1 na sl. 9—47 ugrijava se toplom vodom koja struji kroz njegov plašt, a topla voda dolazi iz izmjenjivača topline 2 koji se grije parom. Glavni je poremećaj protok pare na ulazu staze. Protok možemo kompenzirati promjenom položaja ventila 3, i tako izlaznu veličinu, temperaturu reaktora ϑ_R, održavamo konstantnom. U stazi su prisutna velika kašnjenja, osobito pri ugrijavanju plašta reaktora, pa je sa samo jednim regulatorom 4 teško postići zadovoljavajuće regulacijsko djelovanje. U tu svrhu ugrađujemo i pomoćni regulacijski krug, gdje na osnovi mjerenja protoka pare pomoćni regulator 5 brzo zahvaća na ulaz staze. Imamo dakle **višerazinsku regulaciju: nadređeni, polagani regulacijski krug** s glavnim, regulatorom 4, kojeg postavna veličina služi kao vodeća veličina za **podređeni brzi regulacijski krug** s pomoćnim regulatorom 5. Kod pomoćnog regulatora zadovoljavamo se P-djelovanjem, dok se kod glavnog regulatora traži PI- ili PID--djelovanje.

Prednost je kaskadne regulacije u odnosu na regulaciju pomoćnom reguliranom veličinom što je tehnički lakše spojiti izlaz jednog regulatora na ulaz w' drugog regulatora negoli zbrojiti dvije fizikalne veličine, x i x'.

Omjerna regulacija. U dosadašnjim primjerima obrađivali smo jednostavne regulacijske krugove s jednom ili više petlji, pri čemu smo trebali regulirati jednu izlaznu veličinu. U praksi se pojavljuje potreba da istovremeno reguliramo više izlaznih veličina. Svaka od njih ima svoj regulacijski krug; kako su regulacijski krugovi povezani funkcionalnim djelovanjem čitavog postrojenja, neki poremećaj djeluje na sve regulacijske veličine. Ovdje nećemo ulaziti u probleme sinteze višestruke regulacije[1], već ćemo se zadržati na razmjerno jednostavnom i čestom primjeru omjerne regulacije.



Sl. 9—48. Omjerna regulacija temperature industrijske peći

Na sl. 9—48 shematski je prikazana regulacija temperature industrijske peći. Gorivo je mješavina plina i zraka, koja dolazi u plamenik 1 peći. Da bi se održala stalna temperatura peći treba regulirati maseni protok plina q_{mp} i zraka q_{mz}. U tu svrhu postoje dva regulacijska kruga: regulator 2 drži konstantnim protok plina a regulator 3 protok zraka. Da bi se postigao optimalan energetski učinak izgaranja, treba međutim održati stalnim i omjer plin-zrak. U tu svrhu mjerna veličina protoka plina djeluje na regulaciju protoka zraka preko omjernog releja 4. U njemu je namještena čvrsta vrijednost omjera plin-zrak, a promjena protoka plina na ulazu u relej mijenja vrijednost potrebnog protoka zraka. Ta izlazna veličina iz releja ujedno je vodeća veličina u krugu regulacije zraka.

Budući da je temperatura peći podložna i drugim poremećajima, možemo izvesti još isprekidano označeni regulacijski krug s termoelementom 5 i temperaturnim regulatorom 6. On daje postavnu veličinu koja je ujedno vodeća veličina za krug regulacije plina. Ovdje opet imamo višerazinsku kaskadnu regulaciju: nadređeni, polagani regulacijski krug s glavnim regulatorom 6 vodi podređeni, brzi regulacijski krug s omjernom regulacijom.

[1] Vidi metodu prostora stanja u dvanaestom poglavlju.

10. Metoda lokusa korijena

Svib cvjeta, dr'jen lista
Šum vrutaka jača.
Sjaj sunčev se blista
Na grani.
Jest, proljet se vraća,
Al' jednaka, ista
Ko lani.

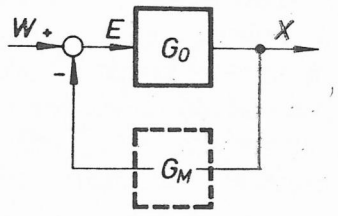
V. Nazor, »Ko lani. . .«

Do sada smo se pretežno bavili proučavanjem regulacijskih sustava metodom vremenskog i frekvencijskog područja. W. Evans uveo je 1948. g. metodu lokusa korijena[1], kojom se **analiza i sinteza regulacijskih sustava vrši u području kompleksne varijable, i to grafičkim postupkom.** Pritom se uzima *s*-ravnina i promatra promjena položaja polova prijenosne funkcije zatvorenog kruga u ovisnosti o polovima i nultočkama kao i o pojačanju prijenosne funkcije otvorenog kruga. Kako su polovi prijenosne funkcije zatvorenog kruga ujedno i korijeni karakteristične jednadžbe sustava, iz krivulja na kojima se nalaze položaji korijena (lokus korijena) dobiju se svi podaci o ponašanju regulacijskog sustava. Tako je i ovom metodom izbjegnuto mukotrpno rješavanje diferencijalne jednadžbe sustava.

Metoda lokusa korijena primjenjuje se u jednostavnim regulacijskim krugovima s jednom petljom. Njome se mogu rješavati linearni vremenski invarijantni sustavi, ali i lagano nelinearni, kao i vremenski varijantni sustavi s umjerenom promjenom vremena. Iako je metoda lokusa korijena povezana i s vremenskim i s frekvencijskim odzivom, namjerno smo je izdvojili i obrađujemo je na kraju konvencionalnih metoda analize i sinteze. Razlog je što je to prvenstveno metoda sinteze [lit. 8, 12, 73].

10.1. Lokus korijena

Da bismo prikazali bit te metode, polazimo opet od regulacijskog kruga s jediničnom povratnom vezom prema sl. 10—1. I ovdje smo mogli poći od blok-dijagrama sa $G_M \neq 1$ ali se ispuštanjem G_M ne gubi ništa na poopćenju, a izvodi su pregledniji (v. sl. 8—3). Prikaz metode ima mnogo sličnosti s izvođenjem Nyquistova kriterija u odjeljku 8.3.



Sl. 10—1. Regulacijski krug s jediničnom povratnom vezom

Uzimamo prijenosnu funkciju zatvorenog kruga:

$$G(s)=\frac{G_0}{1+G_0}. \qquad (10\text{-}1)$$

[1] Evans, W., Graphical Analysis of Control Systems. Trans. AIEE 67, 1948, str. 547—551.

Kako se u daljnjem izvođenju oslanjamo na prijenosnu funkciju otvorenog kruga $G_0(s)$, raščlanit ćemo je najprije na umnožak faktora:

$$G_0(s)=K'G_0'(s)=K'\frac{(s-n_1')(s-n_2')\ldots(s-n_m')}{(s-p_1')(s-p_2')\ldots(s-p_n')}=$$

$$=K'\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-n_i')}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')}. \qquad (10\text{-}2)$$

Ovdje su p_i' polovi, a n_i' nultočke od $G_0(s)$, sadržane u frekvencijski ovisnom dijelu $G_0'(s)$. Konstanta K' ostaje nakon što smo $G_0(s)$ preveli u oblik faktora $(s+a)$, što je uobičajeno kod metode lokusa korijena. Za K' se u vezi s tom metodom upotrebljava naziv **statička osjetljivost.**

Već smo u odjeljku 8.1. napomenuli da nazivnik $(1+G_0)$ izraza (10-1) određuje dinamičko ponašanje sustava. On predstavlja karakterističnu jednadžbu:

$$1+G_0(s)=1+K'\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-n_i')}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')}=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')+K'\prod_{i=1}^{m}(s-n_i')}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')}=0, \qquad (10\text{-}3)$$

u koju smo uvrstili $G_0(s)$ iz jednadžbe (10-2). Karakteristična je jednadžba dakle funkcija od p_i', n_i' i K':

$$1+G_0(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')+K'\prod_{i=1}^{m}(s-n_i')=0. \qquad (10\text{-}4)$$

Tu jednadžbu možemo prikazati u obliku umnoška faktora korijena:

$$1+G_0(s)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=0, \qquad (10\text{-}5)$$

gdje su λ_i korijeni karakteristične jednadžbe koji je čine identički jednakom nuli. **Korijeni λ_i ujedno su i polovi prijenosne funkcije zatvorenog kruga** $G(s)$ iz jednadžbe (10-1). Uspoređivanjem izraza (10-4) i (10-5) zaključujemo da korijeni λ_i ovise o polovima p_i' i nultočkama n_i' kao i o pojačanju K' prijenosne funkcije otvorenog kruga $G_0(s)$. U tome je i bit metode lokusa korijena: kad su u s-ravnini poznati p_i' i n_i', nađu se položaji korijena kod raznih vrijednosti pojačanja K', zapravo kad se K' mijenja od 0 do ∞. Time se vrši sinteza, jer se traži onaj položaj korijena, odnosno pojačanje K' koje odgovara optimalnim uvjetima regulacije.

Sada ćemo pokazati kako se konstruira lokus korijena. Budući da $G_0(s)$ u izrazu (10-2) sadrži kompleksne brojeve, faktori polova $(s-p_i')$ kao i faktori nultočaka $(s-n_i')$ vektorske su veličine, pa $G_0(s)$ možemo pisati u eksponencijalnom obliku:

$$G_0(s)=K'G_0'(s)=K'e^{j\varphi}, \qquad (10\text{-}6)$$

što se raspada u dvije jednadžbe — jednadžbu modula i jednadžbu argumenta:

$$|G_0'(s)| = \frac{|s-n_1'|\,|s-n_2'|\ldots|s-n_m'|}{|s-p_1'|\,|s-p_2'|\ldots|s-p_n'|},$$

$$\varphi = \underline{/G_0(s)} = \underline{/s-n_1'} + \underline{/s-n_2'} + \ldots + \underline{/s-n_m'} - \underline{/s-p_1'} - \underline{/s-p_2'} - \ldots - \underline{/s-p_n'}. \tag{10-7}$$

Kako $G_0(s)$ mora zadovoljiti karakterističnu jednadžbu $1+G_0=0$, dobivamo:

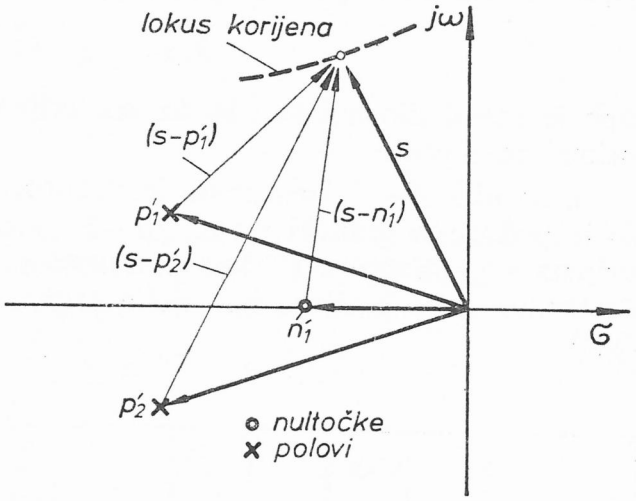
$$G_0(s) = K'G_0'(s) = -1, \tag{10-8}$$

što daje **kriterije modula i argumenta:**

$$|G_0'(s)| = \frac{1}{K'},$$

$$\underline{/G_0'(s)} = \pm(2k+1)\pi \quad \text{za} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{10-9}$$

Sve točke u s-ravnini koje zadovoljavaju ta dva kriterija nalaze se na lokusu korijena.



Sl. 10—2. Lokus korijena u s-ravnini.

Uzet ćemo kao primjer sustav kojeg je prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_0(s) = K' \frac{(s-n_1')}{(s-p_1')(s-p_2')}. \tag{10-10}$$

U s-ravnini na sl. 10—2 označeni su polovi p_1' i p_2' i nultočka n_1' funkcije $G_0(s)$. Udaljenosti od tih čvrsto određenih točaka do neke proizvoljno odabrane točke s predstavljaju verzore prema jednadžbi (10-3). Ako ti verzori zadovoljavaju uvjet (10-7), onda je točka s na lokusu korijena odgovarajućeg pojačanja K'. U načelu bismo uzastopnim ispitivanjem raznih točaka s-ravnine mogli konstruirati lokus korijena za sve vrijednosti pojačanja K' od 0 do ∞. Jasno je da se tako ne radi, jer bi cijela metoda izgubila smisao. U slijedećem odjeljku dat ćemo nekoliko pravila pomoću kojih se mogu jednostavno konstruirati lokusi korijena i za najsloženije slučajeve.

Primjer 10.1. Za prikaz lokusa korijena uzimamo sustav kojeg je prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_0(s)=\frac{K'}{s(s+2)}.$$

Namjerno smo uzeli veoma jednostavnu funkciju, gdje ima smisla da se lokus korijena odredi računski.

Napišimo prijenosnu funkciju zatvorenog kruga:

$$G(s)=\frac{G_0}{1+G_0}=\frac{\frac{K'}{s(s+2)}}{1+\frac{K'}{s(s+2)}}=\frac{K'}{s^2+2s+K'}.$$

Karakteristična jednadžba:

$$\lambda^2+2\lambda+K'=0$$

daje korijene:

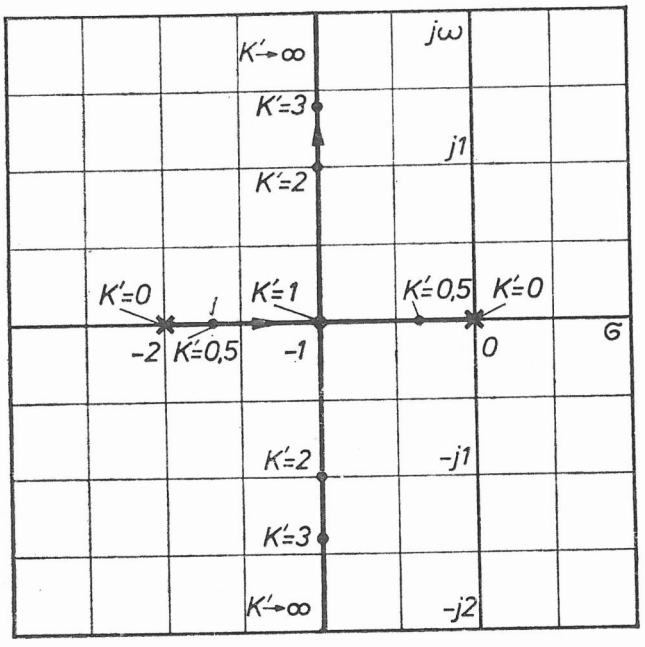
$$\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K'}$$

koji ovise o pojačanju K'. Započinjemo sa $K'=0$ pa dobivamo dva realna i različita korijena $\lambda_1=0$ i $\lambda_2=-2$. Naglašavamo da su to ujedno polovi od $G(s)$. Povećavajući pojačanje od vrijednosti $K'=-1$, dobivamo dvostruki realni korijen $\lambda_{1,2}=-1$. Daljnjim povećanjem dobivamo dva konjugirano kompleksna korijena:

$$\lambda_{1,2}=-1\pm j\sqrt{K'-1}$$

kojih je realni dio konstantan za sve vrijednosti $K'>1$. Uz velike vrijednosti K' korijeni teže prema $\pm\infty$.

U tablici 10—1 izračunato je nekoliko vrijednosti korijena u ovisnosti o K'. To je prikazano grafički na sl. 10—3. Izvučene krivulje prikazuju zapravo lokus korijena s pojačanjem K' kao parametrom. Strelicom je označen smjer rastućih K'. Ovdje lokus korijena ima dvije grane, a svaka započinje kod jednog pola od $G_0(s)$.



Sl. 10—3. Lokus korijena — primjer 10.1

Tablica 10—1. Uz proračun primjera 10.1

K'	λ_1	λ_2
0	$-0+j0$	$-2+j0$
0,5	$-0{,}293+j0$	$-1{,}707-j0$
1,0	$-1{,}0+j0$	$-1{,}0-j0$
2,0	$-1{,}0+j1{,}0$	$-1{,}0-j1{,}0$
3,0	$-1{,}0+j1{,}414$	$-1{,}0-j1{,}414$
∞	$-1{,}0+j\infty$	$-1{,}0-j\infty$

Točka $(-1+j0)$ gdje se obje grane lokusa korijena odvajaju od realne osi naziva se i **točka odvajanja.** Ustvrdimo još da obje grane završavaju u neizmjernosti. Kao što ćemo vidjeti, to je zato što prijenosna funkcija otvorenog kruga $G_0(s)$ nema nultočaka.

10.2. Konstrukcija lokusa korijena

Skup jednostavnih geometrijskih pravila za konstrukciju lokusa korijena temelji se na primjeni kriterija modula i argumenta prema jednadžbama (10-9), odnosno na analizi karakteristične jednadžbe (10-3). Ovdje dajemo pravila kad je $K'>0$, ali se ta pravila bez teškoća mogu protegnuti i na negativne vrijednosti K'. Pomoću tih pravila možemo brzo i jednostavno skicirati lokus korijena. Treba naglasiti da je to kvalitativna slika ponašanja regulacijskog sustava, koja je u većini slučajeva dovoljna. Točan lokus korijena konstruira se eventualno pri kraju projektiranja, a pritom se služimo ili grafičkim pomagalom nazvanim spirula [lit. 8,24] ili programom na digitalnom računalu.

Prelazimo na prikaz osnovnih geometrijskih pravila konstrukcije s dokazima, što ćemo na kraju osvijetliti primjerom.

Prvo pravilo: Lokus korijena ima n grana, gdje je n broj polova prijenosne funkcije otvorenog kruga. Svaka grana čini zaseban dio lokusa korijena za sve vrijednosti od 0 do ∞. To dokazujemo pomoću karakteristične jednadžbe:

$$1+G_0(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')+K'\prod_{i=1}^{m}(s-n_i')}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')}=0. \qquad (10\text{-}3)$$

Kako je taj izraz racionalni razlomak, a $m<n$, postoji n korijena karakteristične jednadžbe $1+G_0(s)=0$, kao i n polova prijenosne funkcije zatvorenog kruga. Tomu odgovara n grana lokusa korijena, a n je ujedno i broj polova prijenosne funkcije otvorenog kruga $G_0(s)$.

Drugo pravilo: Grane lokusa korijena započinju (kad je $K'=0$) u polovima p_i', a završavaju (kad $K'\to\infty$) u nultočkama n_i' prijenosne funkcije otvorenog kruga. To vidimo iz kriterija modula u jednadžbi (10-9):

$$\left|\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-n_i')}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')}\right|=\frac{1}{K'}. \tag{10-11}$$

Uz $K'=0$ vrijedi $s=p_i'$, a kad $K'\to\infty$ mora biti $s=n_i'$. Kako je $m<n$, mora $G_0(s)$ imati $(n-m)$ nultočaka u neizmjernosti, pa toliko grana lokusa korijena završava u neizmjernosti.

Treće pravilo: Grane lokusa korijena simetrične su u odnosu na realnu os. Budući da su koeficijenti od $G_0(s)$ realni, moraju korijeni od $1+G_0(s)=0$ biti ili realni ili konjugirano kompleksni.

Četvrto pravilo: Lokus korijena nalazi se na realnoj osi ako se udesno od njega nalazi neparan broj nultočaka i polova prijenosne funkcije otvorenog kruga. Za svaku nultočku ili pol udesno od točke σ_i na realnoj osi imamo:

$$\underline{/(s-n_i')}=\underline{/(s-p_i')}=180°, \tag{10-12}$$

a lijevo od točke σ_i:

$$\underline{/(s-n_i')}=\underline{/(s-p_i')}=0°. \tag{10-13}$$

To proizlazi iz dogovora o kutu verzora u odnosu prema pozitivnoj realnoj osi. Iz kriterija argumenta u jednadžbi (10-9) dobivamo:

$$\underline{/G_0(s)}=\sum_{i=1}^{m}\underline{/(s-n_i')}-\sum_{i=1}^{n}\underline{/(s-q_i')}, \tag{10-14}$$

pa je lako zaključiti da je ta jednadžba zadovoljena samo ako imamo neparan broj nultočaka i polova s desne strane točke σ_i.

Peto pravilo: Grane lokusa korijena kod velikih vrijednosti s približavaju se asimptotski pravcima kojih su kutovi nagiba:

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad \text{za} \quad k=0, 1, 2, \ldots, (n-m-1), \tag{10-15}$$

gdje su n i m broj konačnih polova i nultočaka od $G_0(s)$. To dokazujemo pomoću karakteristične jednadžbe (10-3), koju ćemo preurediti:

$$G_0(s)=K'\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-n_i')}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')}=-1. \tag{10-16}$$

Uz $s\to\infty$, gornji izraz možemo pojednostavniti:

$$K'\frac{s^m}{s^n}\simeq -1. \tag{10-17}$$

Lijevu stranu jednadžbe možemo pisati u izmijenjenom obliku:

$$K'\frac{s^m}{s^n}=K'\frac{1}{s^{n-m}}=\frac{K'}{|s|^{n-m}}e^{-j(n-m)\varphi}. \tag{10-18}$$

Isto tako i desnu stranu možemo pisati drukčije:

$$-1=e^{j(2k+1)\pi} \quad \text{za} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-m-1). \tag{10-19}$$

Izjednačenjem transformiranih izraza dobivamo:

$$\frac{K'}{|s|^{n-m}}e^{-j(n-m)\varphi}=e^{j(2k+1)\pi} \quad \text{za} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-m-1). \tag{10-20}$$

Kriterij modula zadovoljen je uz veliku vrijednost s, a kriterij argumenta svodi se na izjednačenje kutova, što izravno daje izraz (10-15).

Šesto pravilo: Asimptote za $s\to\infty$ sijeku realnu os u točki:

$$\sigma_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i'-\sum_{i=1}^{m}n_i'}{n-m}. \tag{10-21}$$

Da bismo dokazali to pravilo, služimo se jednadžbom (10-2). Uz $s\to\infty$, možemo uzeti da su konačni polovi i nultočke od $G_0(s)$ u istoj točki. Zbog simetričnog smještaja polova i nultočaka ta točka mora biti na osi apscisa. Kako nultočke poništavaju polove, preostaje suvišak $(n-m)$ polova u nekoj točki σ_c na osi apscisa. Možemo pisati:

$$\lim_{s\to\infty}G_0(s)=\frac{K'}{(s-\sigma_c)^{n-m}}=\frac{K'}{s^{n-m}-(n-m)\sigma_c s^{n-m-1}+\ldots+(-\sigma_c)^{n-m}}. \tag{10-22}$$

Zbog $s\to\infty$ ograničimo sa na prva dva člana polinoma u nazivniku:

$$\lim_{s\to\infty}G_0(s)\simeq\frac{K'}{s^{n-m}-(n-m)\,\sigma_c s^{n-m-1}}. \tag{10-23}$$

Nakon toga poslužimo se jednadžbom (10-2) i pomnožimo faktore s desne strane:

$$G_0(s)=K'\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-n_i')}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i')}= \tag{10-24}$$

$$=K'\frac{s^m-\left[\sum_{i=1}^{m}n_i'\right]s^{m-1}+\ldots+\prod_{i=1}^{m}(-n_i')}{s^n-\left[\sum_{i=1}^{n}p_i'\right]s^{n-1}+\ldots+\prod_{i=1}^{n}(-p_i')}.$$

Dijeljenjem polinoma brojnika i nazivnika s polinomom brojnika, dobivamo slijedeći rezultat:

$$\lim_{s\to\infty} G_0(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K'}{s^{n-m} - \left[\sum_{i=1}^{n} p_i' - \sum_{i=1}^{m} n_i'\right] s^{n-m-1} + \dots} . \tag{10-25}$$

I ovdje se ograničavamo samo na prva dva člana:

$$\lim_{s\to\infty} G_0(s) \simeq \frac{K'}{s^{n-m} - \left[\sum_{i=1}^{n} p_i' - \sum_{i=1}^{m} n_i'\right] s^{n-m-1}} . \tag{10-26}$$

Uspoređivanjem koeficijenata od s^{n-m-1} iz jednadžbi (10-23) i (10-26) dobivamo:

$$(n-m)\,\sigma_c = \sum_{i=1}^{n} p_i' - \sum_{i=1}^{m} n_i', \tag{10-27}$$

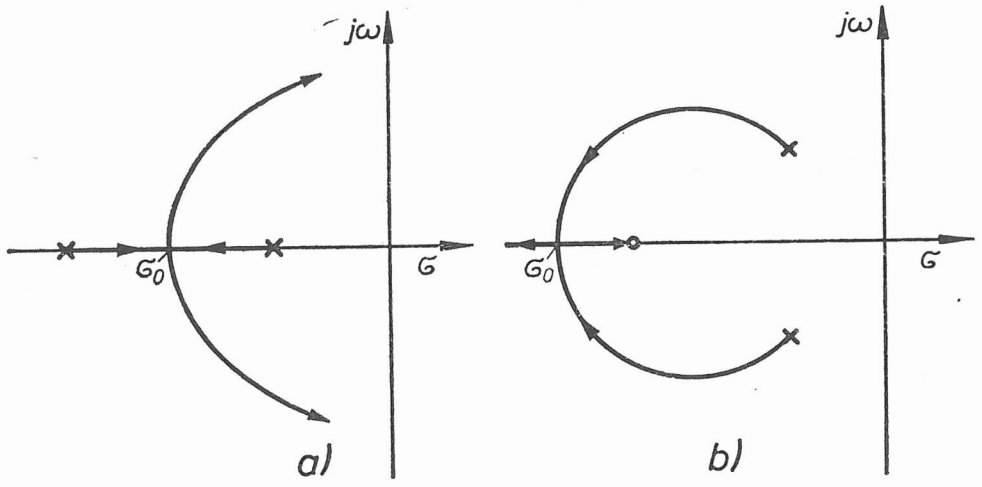
čime dokazujemo ovo pravilo. Točka σ_c naziva se i »težište« korijena: izraz (10-21) nalikuje na izraz za težište masa iz mehanike.

Sedmo pravilo: Točku odvajanja σ_o, gdje se lokus korijena odvaja od realne osi, dobit ćemo rješenjem slijedeće jednadžbe po σ_o:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\sigma_o - p_i')} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(\sigma_o - n_i')} = 0. \tag{10-28}$$

To zahtijeva faktorizaciju polinoma $(n-m-1)$ reda, pa je jasno da rješenje složenijih $G_0(s)$ zahtijeva i složenije postupke, kao što je npr. iterativni postupak [lit. 50, 55].

Jednadžbu (10-26) dokazujemo tako što tražimo ekstremnu vrijednost pojačanja K' s obzirom na varijablu $\sigma = s$. Naime, tražimo najveći K' kad lokus korijena izlazi iz realne osi u smjeru rastućih K' (sl. 10—4a), odnosno tražimo najmanji K' kad lokus korijena ulazi u realnu os u smjeru rastućih K' (sl. 10—4b).



Sl. 10—4. Konstrukcija točke odvajanja Q_0 na lokusu korijena

Polazimo od kriterija modula u jednadžbi (10-9), gdje stavimo σ umjesto s, jer su i brojnik i nazivnik realni:

$$K'=\frac{1}{G_0'(s)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}(\sigma-p_i')}{\prod_{i=1}^{m}(\sigma-n_i')}. \tag{10-29}$$

Taj izraz deriviramo po σ i izjednačimo s nulom:

$$\frac{dK'}{d\sigma}=\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{(\sigma-p_1')(\sigma-p_2')\ldots(\sigma-p_n')}{(\sigma-n_1')(\sigma-n_2')\ldots(\sigma-n_m')}\right]=0. \tag{10-30}$$

Derivacijom po svakom faktoru dobijemo dalje:

$$\frac{dK'}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\sigma-p_i')}\cdot\left[\frac{(\sigma-p_i')(\sigma-p_2')\ldots(\sigma-p_n')}{(\sigma-n_1')(\sigma-p_2')\ldots(\sigma-p_m')}\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(\sigma-n_i')}\left[\frac{(\sigma-p_1')(\sigma-p_2')\ldots(\sigma-p_n')}{(\sigma-n_1')(\sigma-n_2')\ldots(\sigma-n_m')}\right]=0. \tag{10-31}$$

Kraćenjem izraza u zagradi dobivamo izravno uvjet (10-28).

Osmo pravilo: Kad lokus korijena napušta kompleksan pol, **kut odlaska** φ_o iznosi

$$\varphi_o=180°+\underline{/\,G_0'(s)}, \tag{10-32}$$

gdje je $\underline{/G_0'(s)}$ fazni pomak od $G_0(s)$ kod tog kompleksnog pola, ali bez faznog doprinosa tog pola.

Na sličan način definiramo i **kut dolaska** φ_d pod kojim se lokus korijena približava kompleksnoj nultočki:

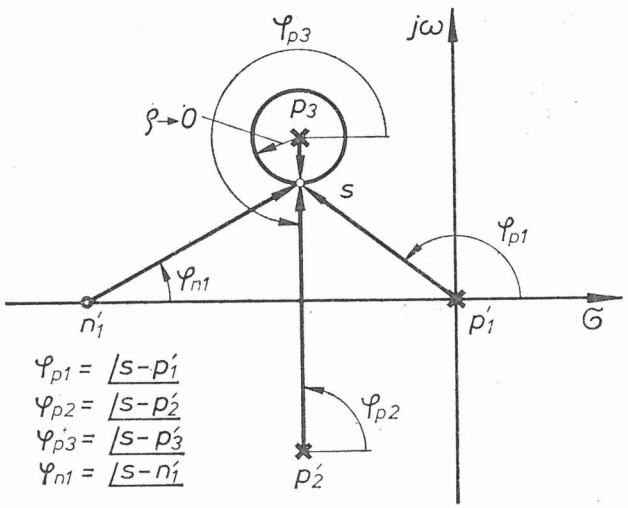
$$\varphi_d=180°-\underline{/\,G_0'(s)}, \tag{10-33}$$

gdje je $\underline{/\,G_0'(s)}$ fazni pomak od $G_0(s)$ kod te kompleksne nultočke, ali bez faznog doprinosa te nultočke.

Ta se dva pravila dokazuju lako prema kriteriju argumenta u jednadžbi (10-9). Da dokažemo ispravnost izraza (10-32) služimo se sl. 10—5. Prikazana je prijenosna funkcija $G_0(s)$ s tri pola: p_1', p_2' i p_3' i jednom nultočkom n_1'. Da bismo odredili kut odlaska φ_o od, primjerice, pola p_3', nacrtamo oko njega infinitezimalni krug polumjera ρ i na njemu točku s. Uz $\rho\to 0$, fazni pomaci verzora $(s-p_1')$, $(s-p_2')$ i $(s-n_1')$ gotovo da se ne mijenjaju kod promjena položaja s u blizini pola p_3'. Uočimo da je verzor konjugirano kompleksnog pola p_2' uvijek pod kutom 90°. Sve su to poznate veličine i njihov zbroj smo označili sa $\underline{/\,G_0'(s)}$. Obratno, verzor ispitivanog pola $(s-p_3')$ može zauzeti bilo koji fazni pomak od 0 do $\pm 180°$. Iz kriterija argumenta:

$$\varphi_{p1}+90°+\varphi_{p3}-\varphi_{n1}=(2k+1)\,\pi \tag{10-34}$$

određujemo φ_{p3} kao jedinu nepoznanicu.



Sl. 10—5. Konstrukcija kuta odlaska φ_o i kuta dolaska φ_a na lokusu korijena

Izraz za kut dolaska (10-33) dokazujemo na identičan način, samo što moramo paziti na fazni pomak verzora u odnosu prema realnoj osi.

Deveto pravilo: Sjecište lokusa korijena s imaginarnom osi možemo odrediti pomoću Routhova kriterija. Vrijednost K' u toj točki je granica između stabilnog i nestabilnog rada.

Pomoću gornjih pravila konstruirat ćemo lokus korijena u dva primjera.

Primjer 10.2. Prijenosna funkcija otvorenog kruga glasi:

$$G_0(s)=\frac{K'}{s(s+1)(s+2)}.$$

Polovi su $p_1'=0$, $p_2'=-1$ i $p_3'=-2$, a nultočaka nema.

1. pravilo: Postoje tri pola, pa lokus korijena ima tri grane.
2. pravilo: Grane lokusa korijena započinju u polovima $s=0$, $s=-1$ i $s=-2$, a završavaju u neizmjernosti jer nema konačnih nultočaka.
4. pravilo: Lokus je korijena na realnoj osi između točaka $-1 \leqslant s \leqslant 0$ i $-\infty < s \leqslant -2$
5. pravilo: Budući da je $(n-m)=3$, kutovi nagiba asimptota svake od triju grana dani su prema izrazu (10-15):

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\frac{180}{3}=60° \quad \text{za} \quad k=0,$$

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\frac{3.180}{3}=180° \quad \text{za} \quad k=1,$$

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\frac{5.180}{3}=300° \quad \text{za} \quad k=2.$$

6. pravilo: Asimptote sijeku realnu os u točki:

$$\sigma_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i' - \sum_{i=1}^{m} n_i'}{n-m} = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

određenoj prema jednadžbi (10-21).

7. pravilo: Točku odvajanja σ_o dobivamo prema jednadžbi (10-28):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\sigma_o - p_i')} = \frac{1}{\sigma_o} + \frac{1}{\sigma_o+1} + \frac{1}{\sigma_o+2} = 0.$$

Odatle dobivamo:

$$(\sigma_o+1)(\sigma_o+2)+\sigma_o(\sigma_o+2)+\sigma_o(\sigma_o+1)=0.$$

Množenjem dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$3\sigma_o^2+6\sigma_o+2=0$$

s dva rješenja:

$$\sigma_{o,1,2,} = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = -1 \pm 0{,}577.$$

Rješenje $\sigma_o = -0{,}423$ je točka odvajanja, jer se nalazi između dva pola, 0 i -1. Naprotiv, rješenje $\sigma_o = -1{,}577$ ne predstavlja točku odvajanja, jer se na tom mjestu ne nalazi lokus korijena.

8. pravilo: Budući da nemamo kompleksnih polova, odnosno nultočaka, ne moramo ga primijeniti.

9. pravilo: Da bismo dobili sjecište s imaginarnom osi, uzimamo karakterističnu jednadžbu na koju primjenjujemo Routhov kriterij. Karakteristična je jednadžba brojnik od:

$$1+G_0(s) = \frac{s^3+3s^2+2s+K'}{s(s+1)(s+2)}.$$

Routhov je raspored:

R_3	1	2
R_2	3	K'
R_1	$\frac{6-K'}{3}$	
R_0	K'	

Da bi sustav bio stabilan, moraju članovi u prvom stupcu biti veći od nule. Na osnovi toga dobije se uvjet $0 \leqslant K' \leqslant 6$. Graničnu vrijednost za $K'=6$ uvrstimo u pomoćnu jednadžbu oblikovanu s koeficijentima reda R_2:

$$3s^2+K'=3s^2+6=0,$$

pa dobivamo

$$s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}.$$

Na osnovi gornjih pravila možemo skicirati lokus korijena za sustav sa zadanom prijenosnom funkcijom otvorenog kruga. To je urađeno na sl. 10—6.

Primjer 10.3. Regulacijski krug s jediničnom povratnom vezom ima prijenosnu funkciju otvorenog kruga:

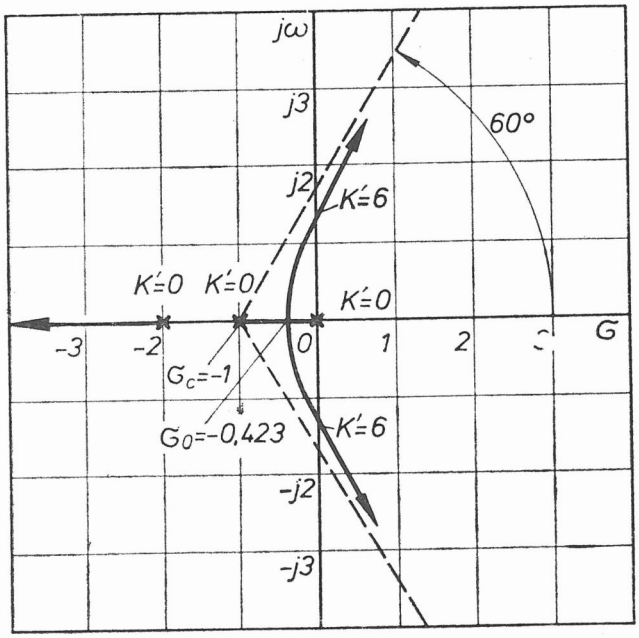
$$G_0(s)=\frac{K'(s+2)}{s^2+2s+2}=\frac{K'(s+2)}{(s+1-j1)(s+1+j1)},$$

tj. ima dva konjugirano kompleksna pola $p_1'=-1+j1$ i $p_2'=-1-j1$, a nultočka je $n_1'=-2$.

1. pravilo: Postoje dva pola i dvije grane lokusa korijena.
2. pravilo: Grane lokusa korijena započinju u polovima $s=-1-j1$ i $s=-1+j1$, a završavaju u nultočki $s=-2$ i u neizmjernosti.
4. pravilo: Lokus korijena smješten je na realnoj osi između $-\infty<s\leqslant-2$.
5. pravilo: Budući da je $(n-m)=1$, asimptota je dana sa:

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\frac{180}{1}=180°,$$

pa jedna grana lokusa korijena ide prema neizmjernosti duž negativne realne osi.



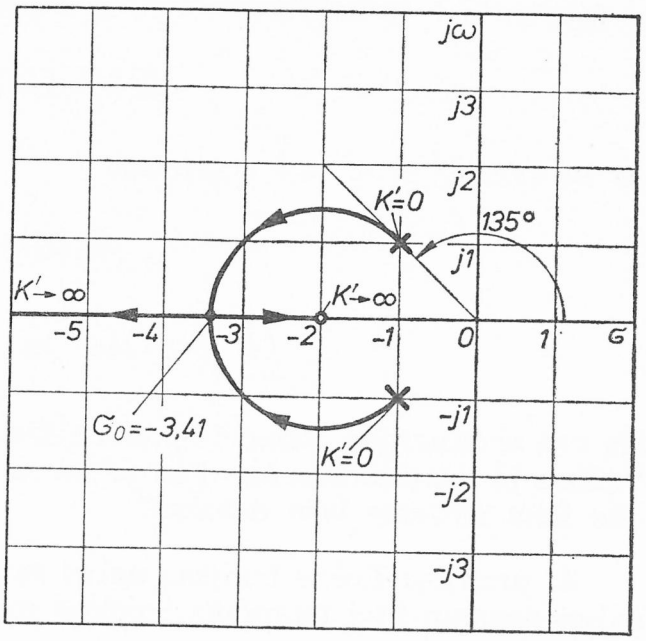
Sl. 10—6. Konstrukcija lokusa korijena | — primjer 10.2

7. pravilo: Točku odvajanja dobivamo iz izraza (10-28):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\sigma_0-p_i')}-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(\sigma_0-n_i')}=\frac{1}{\sigma_0+1-j1}+\frac{1}{\sigma_0+1+j1}-\frac{1}{\sigma_0+2}=0.$$

Dalje je:

$$\sigma_0^2+4\sigma_0+2=0$$



Sl. 10—7. Konstrukcija lokusa korijena — primjer 10.3

s dva rješenja:

$$\sigma_{01,2}=-2\pm\sqrt{4-2}=-2\pm 1{,}41.$$

Samo je rješenje $\sigma_0=-3{,}41$ točka odvajanja, jer drugo rješenje ne leži na lokusu korijena:

8. pravilo: Kut je odlaska od kompleksnog pola p_1':

$$\sigma_o=180°+\underline{/\,G_0'(s)}=180°-90°+45°=135°.$$

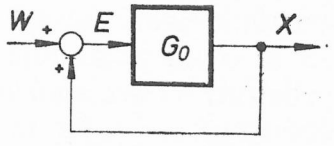
Kut odlaska od konjugirano kompleksnog pola p_2' ne moramo ni računati, jer je zbog simetrije $\sigma_o=-135°$.

9. pravilo: Lokus korijena u ovom primjeru ne prelazi desno od imaginarne osi, pa sustav ne može biti nestabilan. To možemo provjeriti i pomoću Routhova rasporeda, jer se ne pojavljuje vrijednost $K'>0$ koja sve koeficijente u jednom redu čini jednakima nuli.

Na sl. 10—7 skiciran je lokus korijena za tu funkciju.

Konstrukcija lokusa korijena za negativna pojačanja. Do sada smo uzimali u obzir samo takve sustave koji imaju $K'>0$. Kod regulacijskih sustava s više petlji pojavljuje se i slučaj da unutarnja petlja ima pozitivnu povratnu vezu (sl. 10—8). Sada je prijenosna funkcija zatvorenog kruga:

$$G(s)=\frac{G_0}{1-G_0}. \qquad (10\text{-}35)$$



Sl. 10—8. Regulacijski krug s jediničnom povratnom vezom za negativna pojačanja

U usporedbi s jednadžbom (10-8) iz karakteristične jednadžbe dobivamo:

$$G_0(s)=K'G_0(s)=1, \tag{10-36}$$

pa su kriteriji modula i argumenta:

$$|G_0'(s)|=\frac{1}{K'}$$
$$\underline{/\,G_0'(s)}=2k\pi \quad \text{za} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{10-37}$$

Na tim se kriterijima temelji i geometrijska konstrukcija lokusa korijena za $K'<0$. **Većina je pravila ista** kao i za $K'>0$, a ovdje ćemo spomenuti samo neke razlike koje možemo lako dokazati.

4. pravilo: Lokus korijena nalazi se na realnoj osi ako se udesno od njega nalazi neparan broj nultočaka i polova prijenosne funkcije otvorenog kruga.

5. pravilo: Za velike vrijednosti s grane su lokusa korijena asimptote pravcima s kutovima nagiba:

$$\varphi_a=\frac{2k\pi}{n-m} \quad \text{za} \quad k=0,1,2,\ldots(n-m-1). \tag{10-38}$$

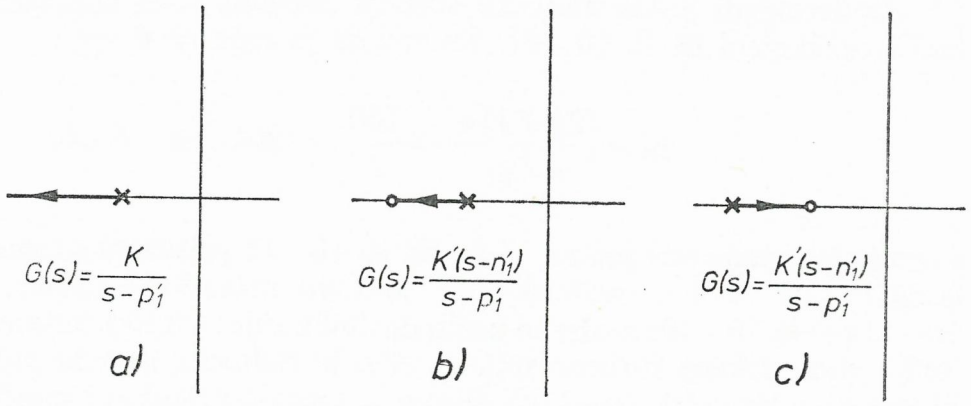
8. pravilo: Kut odlaska φ_o, odnosno kut dolaska φ_d, mora zadovoljiti nešto izmijenjeni kriterij argumenta:

$$\varphi_d=\underline{/G_0'(s)}=\pm 2k\pi \quad \text{za} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{10-39}$$

10.3. Osnovni oblici lokusa korijena

Metoda lokusa korijena omogućuje nam da neposredno i zorno pratimo utjecaj promjena pojačanja K' na položaj korijena karakteristične jednadžbe sustava duž lokusa korijena u s-ravnini. Kao što smo vidjeli u odjeljku 9.3, u sintezi složenijih sustava često je potrebno da mijenjamo i druge parametre sustava. U metodi lokusa korijena mijenjat ćemo nultočke n_i' i polove p_i' od $G_0(s)$, čime utječemo na početak i kraj, odnosno na cijeli oblik lokusa korijena. Upravo broj i međusobni razmještaj nultočaka i polova određuje karakteristične oblike lokusa korijena. Zato je u projektiranju veoma korisno da upoznamo karakteristične oblike lokusa korijena, kako bismo mogli unaprijed znati oblik lokusa korijena zadanog regulacijskog sustava.

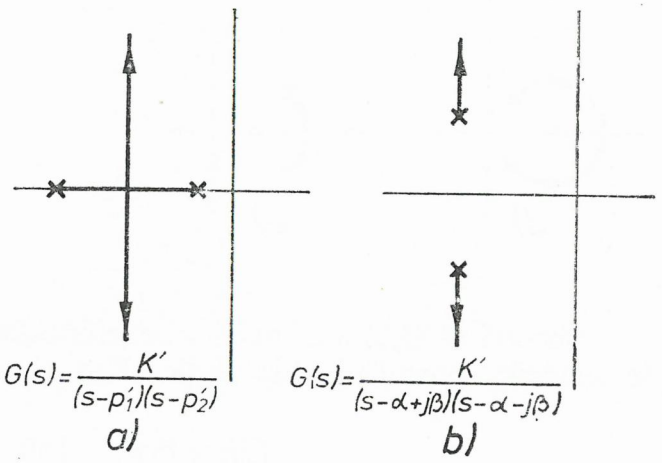
Pojedini autori navode cijeli katalog takvih oblika [lit. 7, 48]. Oni su razvrstani po broju polova i nultočaka, pa se tako npr. sustav sa dva pola i jednom nultočkom označuje jednostavno G [2,1]. Obično se prikazuju sustavi s najviše četiri pola, jer se inače pojavljuje previše kombinacija, pa se gubi preglednost. Ovdje nećemo prikazati ni sve moguće kombinacije koje se pojavljuju kod sustava od prvoga do četvrtoga reda, jer to nije potrebno. Naime, i u tako krnjem obliku osigurana je



Sl. 10—9. Lokus korijena za sustave tipa G [1,0] i G [1,1]

preglednost i sustavnost prilaza, a obuhvaćeni su sustavi koji su zanimljivi u tehničkoj praksi.

Započinjemo sa sustavima prvoga reda. Na sl. 10—9a prikazan je sustav tipa G [1,0] s jednim polom. Sl. 10—9b i 10—9c predstavljaju sustav tipa G [1,1] s jednim polom i jednom nultočkom. Ta se dva sustava razlikuju u vrijednosti pola i nultočke, pa u prvom imamo fazno zaostajanje, a u drugom fazno prethođenje (v. odjeljak 9-3).



Sl. 10—10. Lokus korijena za sustave tipa G ([2,0]

Sustavi drugoga reda mogu imati ili oba pola realna ili konjugirano kompleksna. Lokuse korijena za sustav tipa G [2,0] vidimo na sl. 10—10; onaj sa sl. 10—10a obrađen je u primjeru 10.1. Ovdje upozoravamo na 5. pravilo: kad $\sigma \to \infty$, lokus korijena je pod kutom:

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{180}{2} = 90° \quad \text{za} \quad k=0,$$

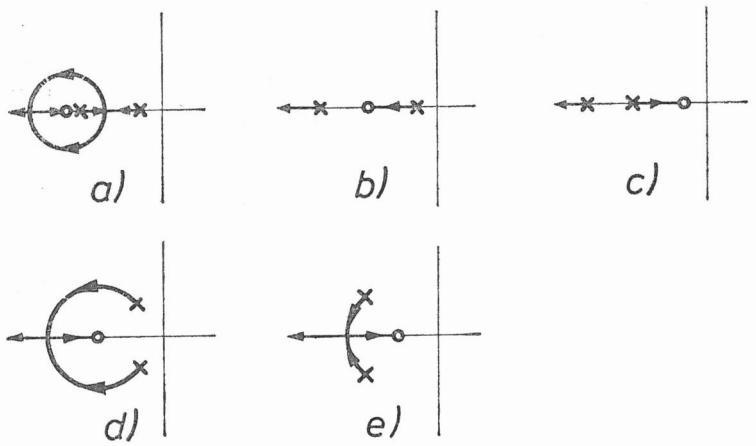
$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{3\cdot 180}{2} = 270° \quad \text{za} \quad k=1, \tag{10-40}$$

tj. $\pm 90°$.

Dodavanjem jedne nultočke sustava drugoga reda dobivamo tipove G [2,1] koji su prikazani na sl. 10—11. Budući da je sada uz $\sigma \to \infty$:

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{180}{1} - 180° \quad \text{za} \quad k=0, \tag{10-41}$$

samo jedna grana teži prema $-\infty$. Na sl. 10—11 prikazani su mogući oblici lokusa korijena, što ovisi o međusobnom položaju nultočke i polova. Usporedbom sl. 10—11a sa sl. 10—10a možemo uočiti da dodavanje nultočke ulijevo od realnih polova savija grane lokusa korijena ulijevo. Ako je nultočka između polova (sl. 10—11b) ili sasvim udesno (sl. 10—11c), sustav je previše prigušen i uopće nema oscilacija. U slučaju kompleksnih polova prema sl. 10—11d i 10—11e, dodavanje nultočke također savija lokus korijena ulijevo. Općenito možemo reći da se pod utjecajem nultočke lokus korijena udaljuje od imaginarne osi, što povoljno utječe na relativnu stabilnost.



Sl. 10—11. Lokus korijena za sustave tipa G [2,1]

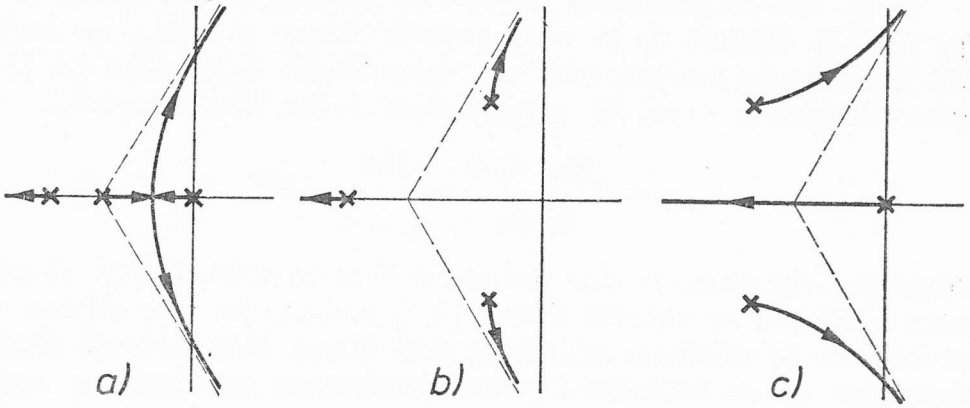
Sustavi G [3,0] s tri pola, a bez nultočke, prikazani su na sl. 10—12, a njihova je značajka postojanje hiperbole. Kutovi su asimptota:

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{180}{3} = 60° \quad \text{za} \quad k=0,$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{3\cdot 180}{3} = 180° \quad \text{za} \quad k=1, \tag{10-42}$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{5\cdot 180}{3} = 300° \quad \text{za} \quad k=2,$$

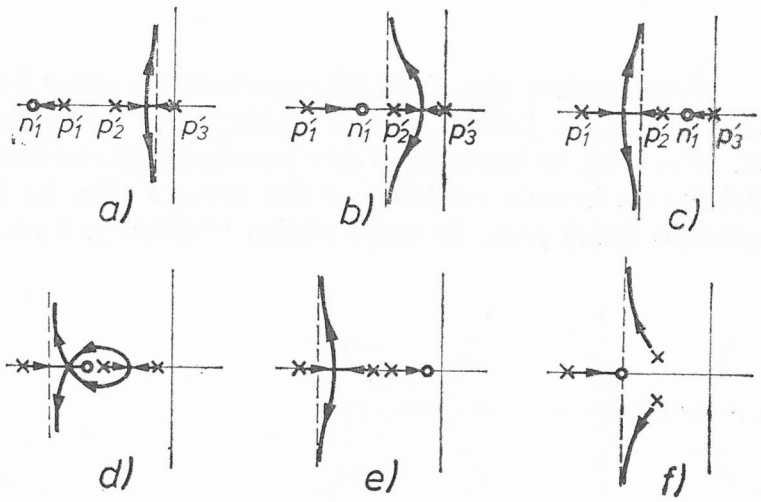
pa jedna grana ide duž negativne realne osi prema $-\infty$, a druge dvije granice idu pod kutovima $\pm 60°$ preko imaginarne osi. Zato ti sustavi pri većim pojačanjima postaju nestabilni. Usporedbom sl. 10—12 sa sl. 10—11 vidimo da dodavanje jednog pola savija grane lokusa korijena udesno.



Sl. 10—12. Lokus korijena za sustave tipa G (3,0]

Dodavanjem jedne nultočke dobiju se sustavi tipa G [3,1], kojih su mogući oblici lokusa korijena prikazani na sl. 10—13. U odnosu prema sustavima tipa G [3,0] na sl. 10—12, kompleksne grane lokusa korijena pomaknute su ovdje ulijevo, što povećava relativnu stabilnost sustava. Njihove su asimptote dane kutovima:

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\,\pi}{n-m} = \frac{180}{2} = 90° \quad \text{za} \quad k=0,$$
$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\,\pi}{n+m} = \frac{3\cdot 180}{2} = 270° \quad \text{za} \quad k=1, \tag{10-43}$$



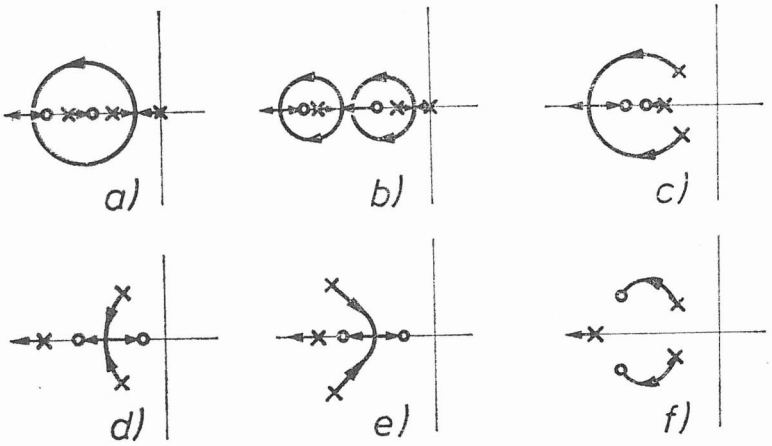
Sl. 10—13. Lokus korijena za sustave tipa G [3,1]

tj. $\pm 90°$. Iz lokusa korijena vidimo: kako nultočku pomičemo udesno, kompleksne grane lokusa korijena sve više se pomiču ulijevo. Na sl. 10—13a možemo uočiti zanimljivu pojedinost oko poništavanja djelovanja nultočke i pola. Budući da su nultočka n_1' i pol p_1' veoma blizu, a udaljeni od drugih polova, lokus korijena u blizini polova p_2' i p_3' ima oblik sustava tipa G [2,0]. Slično možemo ustvrditi za nultočku n_1' i pol p_2' na sl. 10—13b i za nultočku n_1' i pol p_3' na sl. 10—13c. Tu tvrdnju možemo i poopćiti.

Na sl. 10—14 prikazano je nekoliko mogućih oblika lokusa korijena za sustave tipa G [3,2]. Budući da se radi o međusobnom položaju pet nultočaka i polova, broj kombinacija postaje, naravno, veoma velik. Zajedničko im je da samo jedna grana završava u $-\infty$, jer postoji samo jedan kut asimptote:

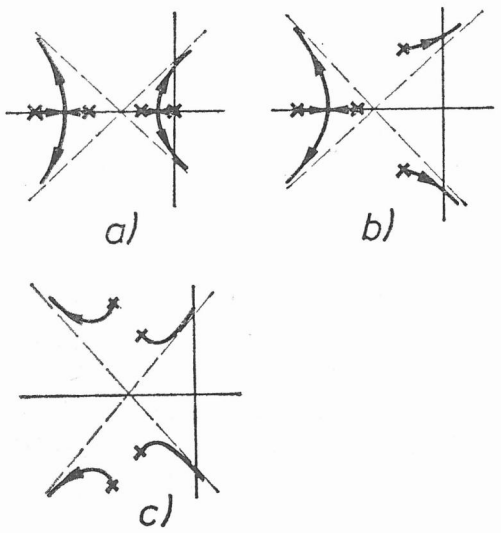
$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{180}{1} = 180° \quad \text{za} \quad k=0. \tag{10-44}$$

Druge su dvije grane ili duž realne osi ili tvore polukružnice. Kako su kompleksne grane u odnosu na sustave tipa G [3,1] savijene još više ulijevo, možemo i ovdje ustvrditi da je relativna stabilnost poboljšana. Kao poseban slučaj spomenimo i mogućnost da su nultočke i polovi izmjenično smješteni na realnoj osi: u tom slučaju se lokus korijena nalazi samo duž realne osi, pa se uopće ne pojavljuju prigušene oscilacije.



Sl. 10—14. Lokus korijena za sustave tipa G [3,2]

Kod sustava tipa G [4,0] pojavljuju se samo kombinacije s realnim polovima (sl. 10—15a), s jednim parom konjugirano kompleksnih polova i dva realna pola (sl. 10—15b), te konačno s dva para konjugirano kompleksnih polova (sl. 10—15c). Dakako da je sada različitih oblika mnogo više, jer je i ovdje riječ o međusobnom položaju četiri pola. Iz sviju oblika vidljiva je i značajka sustava tog tipa: pravci



Sl. 10—15. Lokus korijena za sustave tipa G [4, 0]

asimptota čine pravokutni sustav nagnut za 45° prema koordinatama. Naime, kutovi su asimptota:

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{180}{4} = 45° \quad \text{za} \quad k=0,$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{3\cdot 180}{4} = 135° \quad \text{za} \quad k=1,$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{5\cdot 180}{4} = 225° \quad \text{za} \quad k=2, \tag{10-45}$$

$$\varphi_a = \frac{(2k-1)\pi}{n-m} = \frac{7\cdot 180}{4} = 315° \quad \text{za} \quad k=3.$$

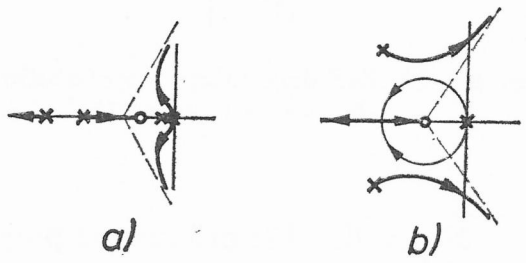
Konačno, na sl. 10—16 vidimo dva lokusa korijena za sustave tipa G [4,1]: u prvom dijagramu postoje četiri realna pola, a u drugom dva pola u ishodištu i par konjugirano kompleksnih polova. Zbog potpunosti spomenimo da je i njihova značajka što su kutovi asimptota $-60°$ i $180°$. To izračunamo iz:

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{180}{3} = 60° \quad \text{za} \quad k=0,$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{3\cdot 180}{3} = 180° \quad \text{za} \quad k=1, \tag{10-46}$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{5\cdot 180}{3} = 300° \quad \text{za} \quad k=2.$$

Na kraju spomenimo i poopćeni zaključak da se dodavanjem pola smanjuje relativna stabilnost sustava, dok se dodavanjem nultočke postiže obratno.



Sl. 10—16. Lokus korijena za sustave tipa G [4,1]

10.4. Sinteza pomoću lokusa korijena

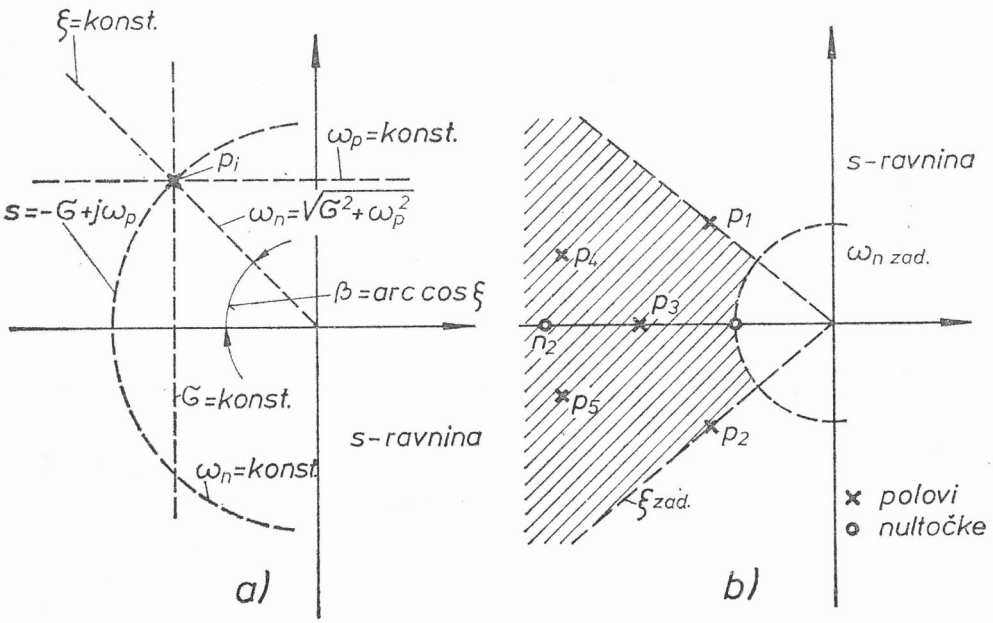
Uz frekvencijski odziv kojim smo se koristili u sintezi servomehanizama u devetom poglavlju, metoda lokusa korijena također je u širokoj upotrebi. Ona je jednostavno povezana s vremenskim odzivom, pa se iz dijagrama lokusa korijena mogu razmjerno lako dobiti sve značajne veličine vremenskog odziva. Kao i kod frekvencijskog odziva, optimalno regulacijsko djelovanje možemo u jednostavnijim

slučajevima postići izborom pojačanja neposredno iz lokusa korijena. Kod složenih slučajeva u regulacijski krug ugrađujemo kompenzator, pa do cilja dolazimo kombinacijom grafičkih i analitičkih postupaka.

10.4.1. Zahtjevi u području kompleksne varijable

Razmatranje započinjemo s jednim polom $s=-\sigma$ koji je smješten na negativnoj realnoj osi s-ravnine. Njemu u vremenskom području odgovara član $Ke^{-\sigma t}$. On će biti to više prigušen što je σ veći, odnosno što je pol udaljeniji od ishodišta.

U slučaju dvaju kompleksnih polova $s_{1,2}=-\sigma\pm j\omega_p$ imamo u vremenskom području prigušeni oscilacijski član $Ke^{-\sigma t}\sin(\omega t+\varphi)$. Pri tome faktor prigušenja σ određuje brzinu eksponencijalnog pada sinusoide, tj. njezinu obvojnicu, a ω_p je prigušena vlastita frekvencija.



Sl. 10—17. Definicija zahtjeva u području kompleksne varijable (a) te određivanje prevladavajućih polova i nultočaka (b)

Na sl. 10—17a prikazan je proizvoljno odabran smještaj jednog pola na lijevoj polovini s-ravnine. Okomica kroz pol određuje σ, a svi polovi koji se nalaze na tom pravcu daju jednako prigušen vremenski odziv. Također će svi polovi smješteni na vodoravnom pravcu što prolazi kroz pol označiti sustave s istom prigušenom vlastitom frekvencijom ω_p. Kod postavljanja zahtjeva u vremenskom području služimo se međutim više neprigušenom vlastitom frekvencijom[1]:

$$\omega_n=\sqrt{\sigma^2+\omega_p^2} \tag{10-47}$$

[1] Vidi odjeljak 3.3.

i stupnjem prigušenja:

$$\zeta=\frac{\sigma}{\omega_n}. \tag{10-48}$$

Iz sl. 10—17a vidimo da se te dvije veličine mogu također izravno očitati iz s-ravnine. Udaljenost od pola do ishodišta daje ω_n, a ζ je određen nagibom spojnice:

$$\beta=\arccos\frac{\sigma}{\omega_n}=\arccos\zeta. \tag{10-49}$$

Prema tome, svi polovi koji leže na radijalnim pravcima iz ishodišta imaju isti stupanj prigušenja ζ; svi polovi koji leže na kružnici sa središtem u ishodištu imaju istu neprigušenu vlastitu frekvenciju ω_n.

Iz svega proizlazi da je u svakoj točki lokusa korijena moguće očitati gornje veličine koje jednoznačno određuju prijelazno ponašanje sustava opisanog tim lokusom korijena.

Prevladavajući polovi i nultočke. Određivanje značajnih veličina regulacijskog sustava pomoću smještaja polova i nultočaka u s-ravnini jasno je postavljeno za sustave prvoga i drugoga reda. Međutim, kod sustava višega reda određivanje vremenskog odziva postaje zamršeno: npr. s dva para kompleksnih polova pojavljuju se i dvije vrijednosti ζ i ω_n. Da bismo taj problem mimoišli, **osnovno je da u sintezi pomoću lokusa korijena odredimo tzv. prevladavajuće polove i nultočke.** Tu se radi o kompleksnom paru polova s eventualno dodatnim realnim polom ili nultočkom, koji se nalaze najbliže imaginarnoj osi u s-ravnini. Naime, realni su dijelovi σ mali, pa će bitno utjecati na oscilacije. Naprotiv, polovi s velikim faktorom prigušenja σ daju veoma prigušene oscilacije kojih je udio u ukupnom odzivu zanemariv. Uz prigušenje je potrebno spomenuti i veličinu reziduuma pojedinog pola, koji određuje relativnu amplitudu odgovarajućih oscilacija.

Primjer 10.4. Prijenosna funkcija zatvorenog kruga nekog servomehanizma dana je izrazom:

$$G(s)=\frac{X(s)}{W(s)}=\frac{5}{(s+1)(s+5)}.$$

Uz narinuti jedinični odskok na ulazu $W(s)=1/s$, možemo uobičajenim postupkom pomoću Laplaceove transformacije dobiti najprije zbroj parcijalnih razlomaka:

$$X(s)=G(s)\,W(s)=\frac{5}{(s+1)(s+5)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1{,}25}{s+1}+\frac{0{,}25}{s+5},$$

a nakon toga obratnom transformacijom svakog pojedinog člana dobivamo vremenski odziv:

$$x(t)=1-1{,}25\,e^{-t}+0{,}25\,e^{-5t}.$$

Član koji odgovara polu $s=-5$ pet puta je prigušeniji negoli drugi član koji odgovara polu $s=-1$. Osim toga, reziduum pola $s=-5$ mali je dio vrijednosti reziduuma

pola $s=-1$. Zanemarivši član kojemu odgovara pol $s=-5$, možemo pisati pojednostavnjenu prijenosnu funkciju:

$$G(s)=\frac{X(s)}{W(s)}\simeq\frac{1}{s+1}.$$

Veličinu brojnika dobili smo uz pretpostavku da i bez člana $(s+5)$ prijenosna funkcija mora dati isto stacionarno pojačanje $X(0)/W(0)=1$. Dakle, vremenski je odziv u ovom pojednostavnjenom slučaju:

$$x(t)\simeq 1-e^{-t}.$$

Iz ovog primjera vidimo kako je — na osnovi smještaja u s-ravnini — lako odrediti prevladavajuće polove i nultočke. Kakve to posljedice ima na sintezu, možemo vidjeti iz sl. 10—17b. Uz poznate polove i nultočke nekog sustava, na osnovi prevladavajućih polova p_1 i p_2 i nultočke n_1, odmah možemo ustanoviti da li dinamičko ponašanje sustava odgovara postavljenim zahtjevima ζ_{zad} i ω_{nzad} (crtkana površina). Prema tome se veličine ζ i ω_n, što smo ih definirali za prigušene sustave drugoga reda, mogu bez poteškoća primijeniti u sintezi sustava viših redova nakon što smo odredili prevladavajuće polove i nultočke takvih sustava.

Dodatna je prednost sinteze u s-ravnini što možemo lako pratiti utjecaj pomicanja polova i nultočaka na ponašanje sustava. Kako se to radi objasnit ćemo na slijedećem primjeru.

Primjer 10.5. Prijenosna funkcija iz prethodnog primjera mijenja se utoliko što joj dodajemo nultočku $s=-0{,}91$ koja se nalazi neposredno uz manje prigušen pol $s=-1$:

$$G(s)=\frac{X(s)}{W(s)}=\frac{5{,}5\,(s+0{,}91)}{(s+1)(s+5)}.$$

Uz jedinični odskok $W(s)=1/s$ na ulazu:

$$X(s)=G(s)\,W(s)=\frac{5{,}5\,(s+0{,}91)}{(s+1)(s+5)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}+\frac{0{,}125}{s+1}+\frac{1{,}125}{s+5},$$

dobivamo vremenski odziv:

$$x(t)=1+0{,}125\,e^{-t}-1{,}125\,e^{-5t}.$$

Zbog neposredne blizine nultočke $s=-0{,}91$ uz pol $s=-1$ dolazi do znatnog smanjenja amplitude člana uz pol $s=-1$, pa je prevladavajuće titranje uz pol $s=-5$. Prema tome, prijenosnu funkciju tog sustava možemo pojednostavniti:

$$G(s)=\frac{X(s)}{W(s)}\simeq\frac{5}{s+5},$$

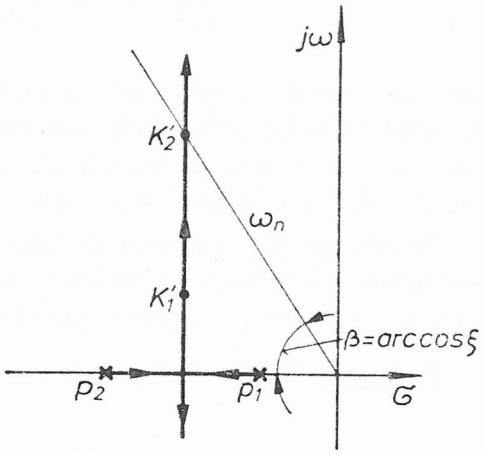
gdje smo opet pretpostavili da je stacionarno pojačanje $X(0)/W(0)=1$, kao i u slučaju kad su pol $s=-1$ i nultočka $s=-0{,}91$ prisutni. Konačno je pojednostavnjeni vremenski odziv:

$$x(t)\simeq 1-e^{-5t}.$$

Iz ovog primjera vidimo kako dodavanjem jedne nultočke u neposrednu blizinu nekog pola možemo poništiti njegov utjecaj na dinamičko ponašanje sustava.

10.4.2. Izbor pojačanja na lokusu korijena

Kod sinteze servomehanizama metodom frekvencijskog odziva spomenuli smo u odjeljku 9.3. da je izbor, odnosno namještanje pojačanja otvorenog kruga prvi i najjednostavniji korak; često je i potpuno dovoljan. Kako se duž lokusa korijena vrijednost pojačanja otvorenog kruga mijenja od 0 do ∞, možemo zaključiti da se pomoću metode lokusa korijena može na zgodan način vršiti sinteza servomehanizama izborom pojačanja. Pri tome se poslužimo pojmom prevladavajućih polova i nultočaka, tj. prijenosnu funkciju otvorenog kruga servomehanizma svedemo na prigušeni oscilacijski sustav drugoga reda. Tako u svakoj točki lokusa korijena možemo jednostavnim grafičkim postupkom odrediti pojačanje u ovisnosti o značajnim veličinama sustava drugoga reda, ζ i ω_n, odnosno u ovisnosti o σ i ω_p.



Sl. 10—18. Projektiranje servomehanizma izborom pojačanja pomoću lokusa korijena

Postupak prikažimo na lokusu korijena na sl. 10—18[1], koja prikazuje servomehanizam s prijenosnom funkcijom $G_S(s)$:

$$G_S(s)=K_S G_s'(s)=K_S\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)} \tag{10-50}$$

i nepoznatim pojačanjem K_P. Prema sl. 9—11 ukupna je prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_0(s)=K_P G_S(s)=K_P K_S G_S'(s)=K' G_S'(s). \tag{10-51}$$

Zahtjevi koji se postavljaju na ponašanje regulacijskog kruga zadaju se u vremenskom području. To mogu biti:

— postotni prebačaj M_p,
— vrijeme porasta T_r, odnosno vrijeme smirivanja T_s,
— trajno regulacijsko odstupanje e_0, odnosno koeficijent položajne greške K_p.

Iz sl. 9—5a nađemo za zadani M_{pzad} odgovarajući ζ. Vrijednost ζ služi za određivanje kuta nagiba $\beta=\arccos\zeta$ prema izrazu (10-49); pravac s tim nagibom ucrta se u s-ravninu. U točki gdje pravac siječe lokus korijena očitamo (ili izmjerimo spirulom) pojačanje K_2'. Kako M_p ne smije prelaziti M_{pzad}, to je **maksimalna**

[1] Kako je lokus korijena simetričan u odnosu na realnu os, dovoljno je da promatramo samo gornji dio lokusa korijena.

vrijednost pojačanja ona koja još zadovoljava dinamičke uvjete. Iz te točke možemo očitati i ω_n (razmak između ishodišta i točke K_2'), kao i σ i ω_p (odsječci na realnoj i imaginarnoj osi). Na osnovi tih parametara nacrtamo vremenski odziv i odredimo T_r, odnosno T_s. Ako je zadano samo vrijeme smirivanja, ω_n možemo naći analitički iz izraza (9-1), gdje približno vrijedi:

$$\omega_n \simeq \frac{4}{\zeta T_s}. \tag{10-52}$$

Nakon što smo odredili dinamičko ponašanje, provjeravamo još i stacionarne uvjete. Na temelju izraza za trajno regulacijsko odstupanje i uz odskočni odziv određujemo za servomehanizam tipa 0 koeficijent položajne greške K_p iz jednadžbe (8-20):

$$K_p = \lim_{s\to 0} G_0(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K_P K_S}{(s-p_1')(s-p_2')} = \frac{K'}{(-p_1')(-p_2')}. \tag{10-53}$$

Kako se zadaje najveća vrijednost trajnoga regulacijskog odstupanja e_0, odnosno najmanja vrijednost koeficijenta položajne greške K_p, iz relacije (10-53) dobivamo najmanju vrijednost pojačanja K' kojom su zadovoljeni stacionarni uvjeti. Neka je to točka K_1' na lokusu korijena prema sl. 10—18.

Pojačanje K' odabiremo tako da leži između K_2' i K_1', tj. da zadovoljava i dinamičke i stacionarne uvjete. Ako su te dvije točke tako smještene da K' ne možemo odabrati, moramo pribjeći kompenzaciji servomehanizma.

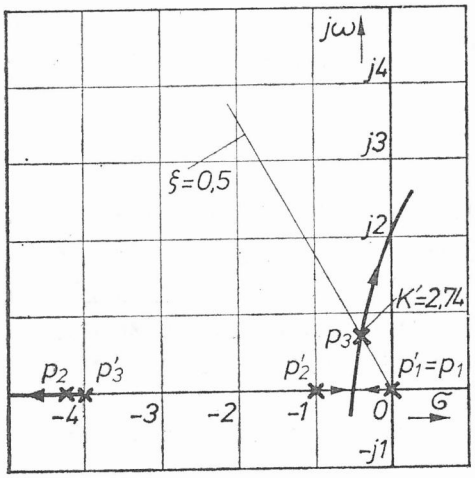
Primjer 10.6. Uzimamo servomehanizam tipa 1 s prijenosnom funkcijom:

$$G_S(s) K_S G_S'(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}.$$

Pretpostavimo da smo zadali najveći postotni prebačaj $M_p = 16\%$, ali trajno regulacijsko odstupanje ne smije prelaziti $e = 1{,}5$.

Lokus korijena konstruiran je na sl. 10—19. Budući da $M_p = 16\%$ odgovara $\zeta = 0{,}5$, ucrtamo i pravac s kutom nagiba:

$$\beta = \arccos \zeta = \arccos 0{,}5 = 60°.$$



Sl. 10—19. Projektiranje servomehanizma izborom pojačanja — primjer 10.6

Njihovo sjecište daje vrijednost $K'=2{,}74$. Budući da je $K_S=1$, to je ujedno i vrijednost dodatnog pojačanja K_P. Imamo dakle:

$$G_0(s)=K'G_S'(s)=\frac{2{,}74}{s(s+1)(s+4)}$$

s polovima $p_1'=0$, $p_2'=-1$ i $p_3'=-4$. Na osnovi toga možemo odrediti polove prijenosne funkcije zatvorenog kruga $G(s)$, odnosno vremenski odziv cijelog sustava. Uz jedinični odskok na ulazu odziv je:

$$X(s)=G(s)\,W(s)=\frac{G_0}{1+G_0}\cdot\frac{1}{s}=\frac{2{,}74}{[s(s+1)(s+4)+2{,}74]}\cdot\frac{1}{s}.$$

Nazivnik možemo srediti, potraživši mu korijene:

$$X(s)=\frac{2{,}74}{s(s^3+5s^2+4s+2{,}74)}=\frac{2{,}74}{s(s+4{,}2)(s+0{,}4-j0{,}7)(s+0{,}4+j0{,}7)}.$$

Dva konjugirano kompleksna pola zatvorenog kruga $p_3=-0{,}4+j0{,}7$ i $p_4=-0{,}4-j0{,}7$ sasvim su blizu imaginarne osi, a treći je korijen $p_2=-4{,}2$ razmjerno daleko. Prema tome, polovi p_3 i p_4 prevladavaju u odzivu. I doista, ako gornji izraz razvijemo u zbroj parcijalnih razlomaka:

$$X(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+0{,}4-j0{,}7}+\frac{K_2}{s+0{,}4+j0{,}7}+\frac{K_3}{s+4{,}2}$$

i potražimo vrijednosti reziduuma K_i, možemo pisati odskočni odziv u vremenskom području:

$$x(t)=1+1{,}35\,e^{-0{,}4t}\cos(0{,}7t-220°)-0{,}044\,e^{-4{,}2t}.$$

Posljednji član na desnoj strani ne samo da je jako prigušen u odnosu na harmonički član već mu je i amplituda zanemarivo mala. Zbog toga možemo primijeniti veličine ζ i ω_n.

Iz poznatog $\zeta\omega_n=0{,}4$ nalazimo još vrijeme smirivanja:

$$T_s\simeq\frac{4}{\zeta\omega_n}=\frac{4}{0{,}4}=10\text{ s}.$$

što je također zanimljivo u dinamičkim uvjetima.

Konačno, provjerimo i stacionarno ponašanje. Potražimo koeficijent brzinske greške K_v iz izraza (8-26):

$$K_v=\lim_{s\to0}sG(s)=\lim_{s\to0}s\,\frac{2{,}74}{s(s+1)(s+4)}=\frac{2{,}74}{4}=0{,}68.$$

Na osnovi toga možemo naći i trajno regulacijsko odstupanje:

$$e_0=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{0{,}68}=1{,}47,$$

koja je unutar zadanih uvjeta.

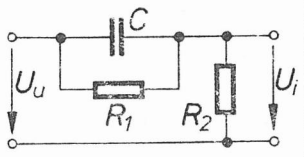
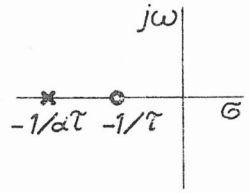
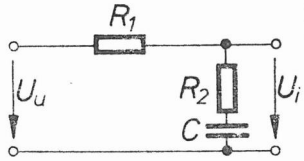
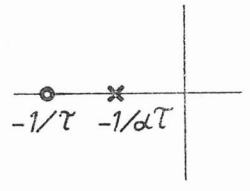
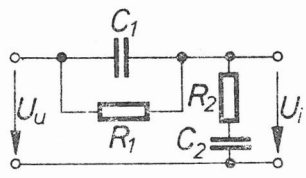
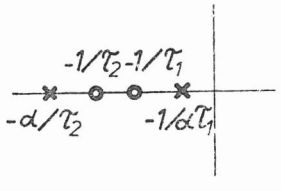
10.4.3. Kompenzacija pomoću lokusa korijena

Izborom pojačanja često ne možemo riješiti optimalan rad regulacijskog sustava, pa moramo ići na kompromis između nespojivih zahtjeva u projektiranju. U tu svrhu moramo mijenjati parametre sustava. Tako smo u sintezi pomoću metode frekvencijskog odziva u odjeljku 9.3. mijenjanjem vremenskih konstanti utjecali na grafički oblik sinusnih prijenosnih funkcija. U metodi lokusa korijena tome odgovara mijenjanje nultočaka i polova prijenosne funkcije otvorenog kruga. Time utječemo na početak i kraj lokusa korijena kao i na razmještaj polova prijenosne funkcije zatvorenog kruga duž lokusa korijena.

Ključna je misao u kompenzaciji pomoću metode lokusa korijena da dodavanjem kompenzatora u regulacijski krug dobijemo prevladavajući par konjugirano kompleksnih polova koji odgovaraju zadanim uvjetima za ζ i ω_n. Nultočke kompenzatora treba naime da ponište nepoželjne polove; kako kompenzator u fizikalnoj izvedbi mora imati jednak ili veći broj polova nego nultočaka, svaki **neželjeni pol sustava zamjenjujemo zapravo željenim polom.**

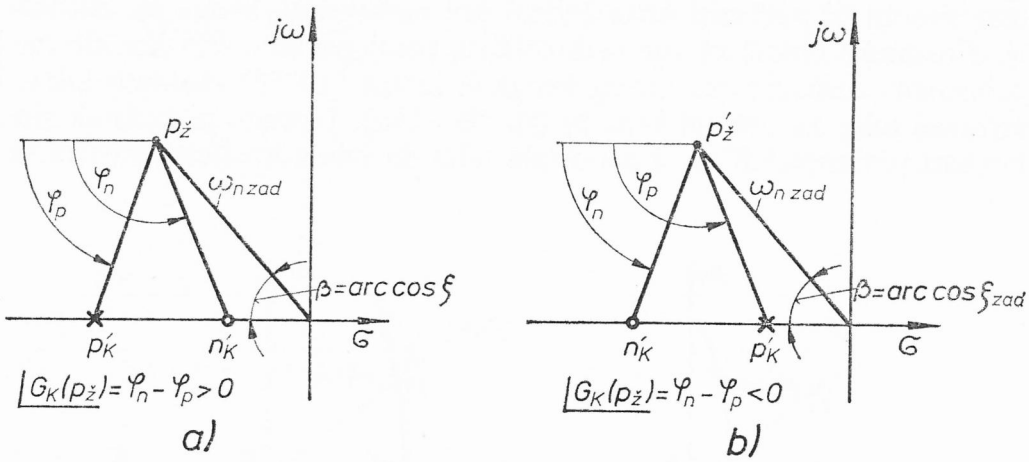
U tablici 10—2 dan je pregled osnovnih kompenzacijskih članova, koji se potpuno podudaraju s otprije uvedenima u tablici 9—2. To su PD-, PI- i PID-kompenzatori; ovaj potonji složen je od PD- i PI- kompenzatora. Uz prijenosnu funkciju nacrtana je i odgovarajuća električna shema, kao i razmještaj nultočaka i polova u s-ravnini. Kako imamo samo pasivne električne sklopove sastavljene od RC-članova, realni polovi i nultočke dolaze u parovima, pa govorimo i o »dipolima«.

Tablica 10—2. Kompenzatori i njihov lokus korijena

	$G_K(s)$	ELEKTRIČNA SHEMA	POLOVI ×-NULTOČKE ○
PD	$\frac{(s+1/\tau)}{(s+1/\alpha\tau)}$ $\tau=R_1C$ $\alpha=\frac{R_2}{R_1+R_2}<1$		
PI	$\frac{1}{\alpha}\frac{(s+1/\tau)}{(s+1/\alpha\tau)}$ $\tau=R_2C$ $\alpha=\frac{R_1+R_2}{R_2}>1$		
PID	$\frac{(s+1/\tau_1)(s+1/\tau_2)}{(s+1/\alpha\tau_1)(s+\alpha/\tau_2)}$ $\tau_1=R_1C_1$ $\tau_2=R_2C_2$ $\alpha>1$		

Metodu lokusa korijena možemo primijeniti i na serijski i na povratni spoj kompenzatora u regulacijskom krugu. Ovdje ćemo se **ograničiti na serijsku kompenzaciju,** i to pomoću PD- i PI-kompenzatora. Sinteza pomoću sastavljenog PID--kompenzatora svodi se na kombinaciju obaju postupaka: PD-članom kompenzira se prijelazno ponašanje, a PI-članom se prilagođuju stacionarni uvjeti.

Na sl. 10—20 još je jednom prikazan razmještaj nultočaka i polova za PD- i PI-kompenzator. U odnosu na neki pol $p_ž$ u s-ravnini PD-kompenzator na sl. 10—20a unosi pozitivan, a PI-kompenzator na sl. 10—20b negativan fazni pomak. Moramo upozoriti da u metodi lokusa korijena pojmovi faznog prethođenja i faznog zaostajanja, uvedeni kod frekvencijskog odziva PD-i PI-kompenzatora, nemaju smisla. Faznom prethođenju odgovara uvođenje prevladavajuće nultočke, a faznom zaostajanju uvođenje prevladavajućeg pola prijenosne funkcije otvorenog kruga.



Sl. 10—20. Odnosi kutova željenog pola $p_ž$ i dipola od PD-kompenzatora (a) i od PI-kompenzatora (b)

PD-kompenzator. Prijenosnu funkciju PD-kompenzatora možemo dobiti preinačenjem izraza (9-44) u oblik prikladan za metodu lokusa korijena:

$$G_K(s)=\frac{U_i(s)}{U_u(s)}=\alpha\,\frac{\tau(s+1/\tau)}{\alpha\tau(s+1/\alpha\tau)}=\frac{s+1/\tau}{s+1/\alpha\tau}, \qquad (10\text{-}54)$$

gdje je $\tau=R_1C$, a $\alpha=R_2/(R_1+R_2)$. Izdvojena je nultočka $n'_K=-1/\tau$ i pol $p'_K=-1/\alpha\tau$, pri čemu je zbog $\alpha<1$ nultočka n'_K bliža ishodištu negoli pol p'_K. Ovaj kompenzator odmah uzimamo s potrebnim, a nepoznatim pojačanjem K_P, spojenim u seriju:

$$K_PG_K(s)=K_P\,\frac{b+1/\tau}{s+1/\alpha\tau}. \qquad (10\text{-}55)$$

Cijeli je sklop zajedno sa servomehanizmom u krugu jedinične povratne veze.

Ako pretpostavimo servomehanizam tipa 1, kojeg sinusnu prijenosnu funkciju iz jednadžbe (9-50) prevedemo u novi oblik s izdvojenim polovima:

$$G_S(s)=\frac{K_S}{\tau_G\tau_M}\cdot\frac{1}{s(s+1/\tau_G)(s+1/\tau_M)}, \qquad (10\text{-}56)$$

dobivamo prijenosnu funkciju otvorenog kruga:

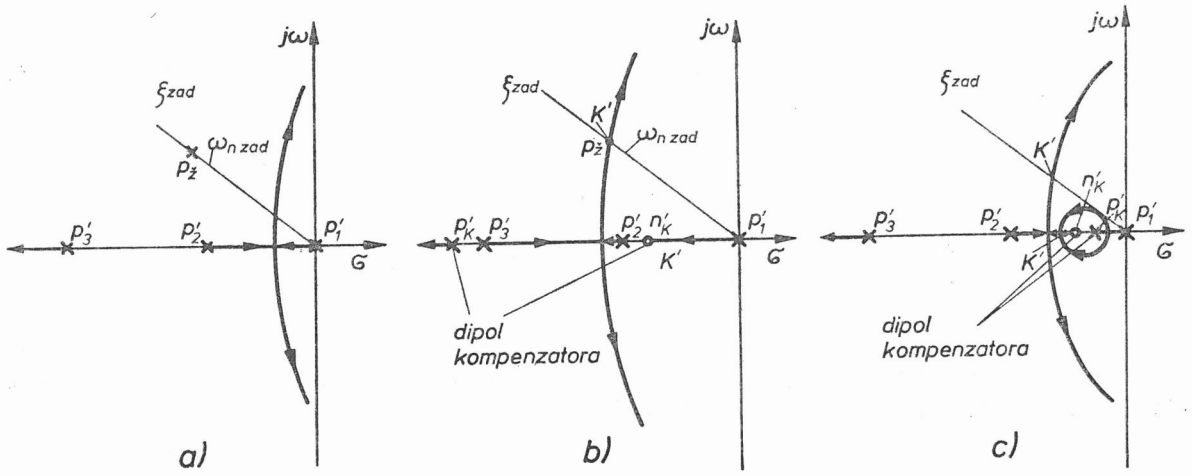
$$G_0(s)=K_P G_K(s)\, G_S(s)=K_P \frac{s+1/\tau}{s+1/\alpha\tau}\cdot\frac{K_S}{\tau_G\tau_M}\cdot\frac{1}{s(s+1/\tau_G)(s+1/\tau_M)}. \quad (10\text{-}57)$$

To možemo dalje pisati:

$$G_0(s)=K'\frac{s+1/\tau}{s+1/\alpha\tau}\cdot\frac{1}{s(s+1/\tau_G)(s+1/\tau_M)}, \quad (10\text{-}58)$$

gdje je pojačanje otvorenog kruga $K'=K_P K_S/\tau_G\tau_M$, a $G_0(s)$ ima nultočku $n'_K=-1/\tau$ i četiri pola $p'_1=0$, $p'_2=-1/\tau_G$, $p'_3=-1/\tau_M$ i $p_K'=-1/\alpha\tau$.

Lokus korijena za nekompenzirani servomehanizam tipa 1 prema izrazu (10-56) prikazan je radi uspoređenja sa sl. 10—21a. Ako su zadani ζ i ω_n, lokus korijena morao bi prolaziti kroz željeni pol zatvorenog kruga $p_ž$. Budući da nije tako, tj. dinamičko ponašanje ne zadovoljava, pribjegavamo PD-kompenzaciji. Na osnovi prijenosne funkcije otvorenog kruga iz izraza (10-58) moramo lokus korijena konstruirati tako da prolazi kroz $p_ž$ (sl. 10—21b). Upravo je zadatak sinteze da se nepoznati parametri K', τ i α odrede tako da lokus korijena prolazi kroz $p_ž$.



Sl. 10—21. Projektiranje PD- i PI-kompenzacije pomoću lokusa korijena

Najprije ćemo razmjestiti nultočku n'_K i pol p'_K PD-kompenzatora prema sl. 10—20a. Ucrtan je i željeni pol zatvorenog kruga $p_ž$; da bi željeni pol bio na novom lokusu korijena, mora biti zadovoljen kriterij argumenta iz izraza (10-9):

$$\underline{/\,G_0(p_ž)}=\pm 180°. \quad (10\text{-}59)$$

Budući da je prema jednadžbi (10-57) potrebno:

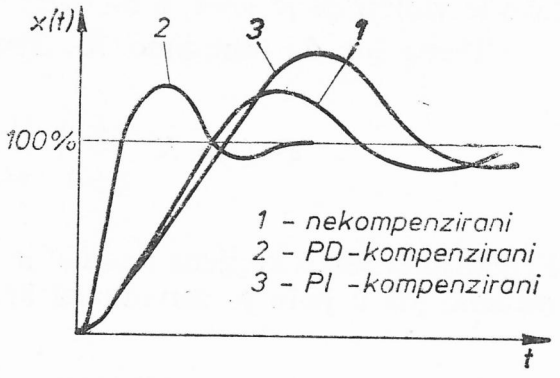
$$\underline{/\,G_0(p_ž)}=\underline{/\,G_K(p_ž)}+\underline{/\,G_S(p_ž)} \quad (10\text{-}60)$$

dobivamo potreban fazni pomak kompenzatora:

$$\underline{/\,G_K(p_ž)}=\pm 180°-\underline{/\,G_S(p_ž)}, \quad (10\text{-}61)$$

i to na osnovi poznatog faznog pomaka servomehanizma $\underline{/G_S(p_ž)}$, što možemo odrediti iz lokusa korijena na sl. 10—21a. Kako je riječ o PD-kompenzatoru, $\underline{/G_K(p_ž)}$ mora biti pozitivan.

Sada još treba da odredimo položaj n'_K i p'_K u s-ravnini. Nultočku n'_K treba smjestiti što bliže prevladavajućem realnom polu, tj. što bliže prvom polu servomehanizma ulijevo od ishodišta. Na sl. 10—21b to je pol p'_2. Pomoću faznog pomaka $\underline{/G_K(p_ž)}$ nalazimo i položaj pola p'_K mnogo dalje ulijevo od ishodišta. Dakle, nultočka PD-kompenzatora poništava utjecaj prevladavajućeg pola servomehanizma, a umjesto njega pojavljuje se beznačajni pol PD-kompenzatora.



Sl. 10—22. Vremenski odziv kompenziranog i nekompenziranog servomehanizma

Na osnovi jednadžbi (10-58), odnosno pomoću spirule na lokusu korijena, odredimo još ukupno pojačanje K', tako da kompenzirani regulacijski krug ima pol u $p_ž$.

Na kraju preračunamo vremenski odziv tako kompenziranog sustava, što ćemo prikazati na slijedećem primjeru. Vremenski odziv se može dati i u grafičkom obliku kao što je na sl. 10—22, pa se očita kako postotni prebačaj M_p, tako i vrijeme smirivanja T_s. Ako postotni prebačaj odnosno brzina odziva ne odgovaraju postavljenim vrijednostima, biramo novu vrijednost nultočke PD-kompenzatora.

Primjer 10.7. Uzimamo isti servomehanizam tipa 1 kao i u primjeru 9.3. kod PD-kompenzacije frekvencijskim metodama, samo umjesto K uvodimo K':

$$G_S(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+4)}.$$

U primjeru 9.3. bilo je zadano $M_p=-1{,}25$ dB, čemu odgovara $\zeta=0{,}5$ i $\omega_r=1{,}4\ \mathrm{s}^{-1}$, čemu odgovara $\omega_n=2\ \mathrm{s}^{-1}$, odnosno $T_S=4$ s.

Željeni je pol $p_ž$:

$$p_ž=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-1+j1{,}73,$$

a ucrtan je u s-ravnini na sl. 10—23.

Nakon toga odredimo fazni pomak PD-kompenzatora. Iz sl. 10—23 možemo odrediti $\underline{/G_S(p_ž)}$:

$$\underline{/G_S(p_ž)}=-\underline{/(p_ž-p'_1)}-\underline{/(p_ž-p'_2)}-\underline{/(p_ž-p'_3)}=-240°.$$

Pomoću te vrijednosti izračunamo i fazni pomak PD-kompenzatora:

$$\underline{/G_K(p_ž)} = +180° - \underline{/G_S(p_ž)} = \pm 180° - (-240°) = 60°.$$

Nultočku n_K' smjestimo u pol p_2' koji je najbliži ishodištu, tj. u točku -1. Pol p_K' određen je $\underline{/G_K(p_ž)} = 60°$ koji je crtkano naznačen u s-ravnini. Tako smo dobili smještaj pola p_K' u točki -4. Na osnovi jednadžbe (10-54):

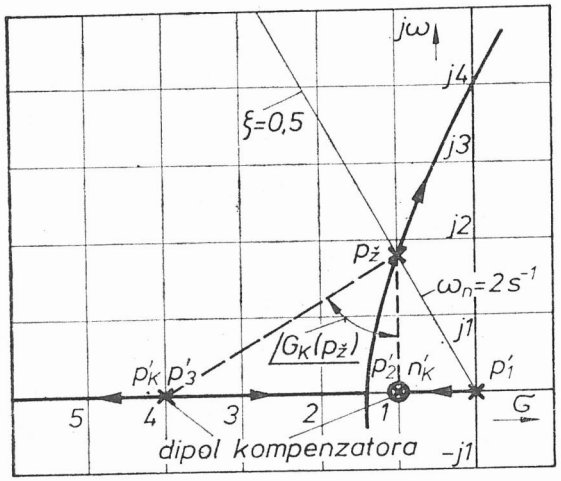
$$G_K(s) = G_K'(s) = \frac{s+1/\tau}{s+1/\alpha\tau} = \frac{s+1}{s+4}$$

lako je vidjeti da je $\tau = 1$, a $\alpha = 0{,}25$.

Treba još da odredimo K'. Prema jednadžbi (10-58) pišemo:

$$G_0(s) = K' \frac{s+1}{s+4} \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+4)} = K' \frac{1}{s(s+4)^2}.$$

Pripadajući lokus korijena nacrtan je na sl. 10—23. Proračunom ili pomoću spirule nađemo još u polu $p_ž$ zatvorenog kruga pojačanje $K' = 25$.



Sl. 10—23. Projektiranje PD-kompenzacije pomoću lokusa korijena — primjer 10.7

Slijedi provjera dinamičkih zahtjeva u vremenskom odzivu. U tu svrhu napisat ćemo odziv zatvorenog sustava $G(s)$ uz jedinični odskok $W(s) = 1/s$ na ulazu:[1]

$$X(s) = G(s)\,W(s) = \frac{G_0}{1+G_0} \cdot \frac{1}{s} = \frac{25}{s(s+4)^2} \cdot \frac{1}{s}.$$

Nazivnik sredimo i rastavimo u umnožak faktora:

$$X(s) = \frac{25}{s(s^3+8s^2+16s+25)} = \frac{25}{s(s+6)(s+1-j1{,}73)(s+1+j1{,}73)}.$$

[1] Vidi jednadžbu (9—59).

To dalje rastavljamo u zbroj parcijalnih razlomaka:

$$X(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1-j1{,}73}+\frac{K_2}{s+1+j1{,}73}+\frac{K_3}{s+6}.$$

Svaki član obratno transformiramo u vremensko područje:

$$x(t)=1+1{,}32e^{-t}\cos(1{,}73t-228°)-0{,}416e^{-6t}.$$

Odzivom prevladavaju dva konjugirano kompleksna pola $p_{3,4}=-1\pm j1{,}73$. Posljednji član na desnoj strani ima amplitudu 0,416 koja je mnogo veća od 0,044 kod nekompenziranog servomehanizma, a pol $p_2=-6$ mnogo je više ulijevo od prethodnog slučaja $p_2=-4{,}2$ (usporedi primjer 10.6), pa je i učinak trećeg pola na ukupan odziv još uvijek zanemariv.

Uspoređujući prijelazno stanje u kompenziranom i nekompenziranom servomehanizmu možemo ustanoviti da je postotni prebačaj $M_p=16\%$ ostao doduše isti, ali se znatno poboljšala brzina odziva. Vrijeme smirivanja je naime sada:

$$T_s\simeq\frac{4}{\zeta\omega_n}=\frac{4}{0{,}5\cdot 2}=4\text{ s}$$

mnogo manje od $T_s=10$ s iz nekompenziranog servomehanizma.

Ako promotrimo stacionarno stanje, onda vidimo da je koeficijent brzinske greške:

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG_0(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{25}{s(s+4)^2}=1{,}56.$$

K_v se više nego udvostručio u odnosu na $K_v=0{,}68$ kod nekompenziranog servomehanizma. Iako je to znatno poboljšanje stacionarnih uvjeta, ipak je kod uvođenja PD-kompenzacije bitno poboljšanje dinamičkih uvjeta.

PI-kompenzator. Prema jednadžbi (9-61) dobit ćemo izraz za PI-kompenzator:

$$G_K(s)=\frac{U_i(s)}{U_u(s)}=\frac{\tau(s+1/\tau)}{\alpha\tau(s+1/\alpha\tau)}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{s+1/\tau}{s+1/\alpha\tau}\qquad(10\text{-}62)$$

sa $\tau=R_2C$ i $\alpha=(R_1+R_2)/R_2$. Zapravo imamo nultočku $n'_K=-1/\tau$ i pol $p'_K=-1/\alpha\tau$. Zbog toga što je $\alpha>1$, p'_K je bliži ishodištu negoli nultočka n'_K. Jednadžbu (10-62) odmah ćemo pisati s ukupnim pridodanim pojačanjem K_P plus frekvencijski ovisni dio:

$$K_PG'_K(s)=K_P\frac{s+1/\tau}{s+1/\alpha\tau}.\qquad(10\text{-}63)$$

Upozorimo da je ovdje $\alpha>1$, a inače je taj izraz potpuno identičan izrazu (10-55) za PD-kompenzator, gdje je $\alpha<1$.

Za obrazloženje postupka kod sinteze uzimamo PI-kompenzaciju servomehanizma tipa 1 s prijenosnom funkcijom:

$$G_S(s)=\frac{K_S}{\tau_G\tau_M}\cdot\frac{1}{s(s+1/\tau_G)(s+1/\tau_M)}.\qquad(10\text{-}56)$$

Kao i kod PD-kompenzacije, dobivamo formalno istu prijenosnu funkciju otvorenog kruga:

$$G_0(s)=K_P G'_K(s)\,G_S(s)=K'\,\frac{s+1/\tau}{s+1/\alpha\tau}\cdot\frac{1}{s\,(s+1/\tau_G)\,(s+1/\tau_M)}. \qquad (10\text{-}58)$$

PI-kompenzacijom služimo se kad su dinamički uvjeti u redu, a želimo poboljšati stacionarno ponašanje. To znači da u dinamičkim uvjetima ne treba ništa mijenjati, pa uz veliki s imamo iz jednadžbe (10-58) da pojačanje K' mora biti približno jednako jedan. U stacionarnim uvjetima, uz $s=0$, kompenzator ima približno pojačanje α koje mora biti jednako faktoru kojim želimo povećati koeficijent greške K_v. Razmještaj nultočke n'_K i pola p'_K u s-ravnini mora biti takav da ne remeti prvobitan oblik lokusa korijena, odnosno nultočka i pol moraju biti veoma blizu jedan drugome i u blizini ishodišta. Na lokusu korijena na sl. 10—21c vidimo kako je dodavanje PD-kompenzatora sa n'_K i p'_K djelovalo na lokus korijena nekompenziranog servomehanizma sa sl. 10—21a.

Prvi je korak u sintezi servomehanizma kojem treba poboljšati samo stacionarna svojstva da odredimo za koliko se mora povećati koeficijent greške K_p, K_v ili K_a, što ovisi o tipu servomehanizma. Biramo α PI-kompenzatora za 10 do 20% viši.

Drugi parametar PI-kompenzatora, τ, biramo na osnovi iskustvenih podataka: $-1/\tau$ mora biti približno na 10% udaljenosti od ishodišta do prve nultočke ili pola na negativnoj realnoj osi.

Posljednji je parametar pojačanje K' koje mora biti takvo da su prevladavajući polovi zatvorenog kruga približno isti kao i u nekompenziranom servomehanizmu.

Slijedi provjera prijelaznog ponašanja, i to konstrukcijom vremenskog odziva (sl. 10—22). Ako veličine kao M_p i T_s nisu u redu, mijenjamo vrijednost pojačanja.

Primjer 10.8. Za isti servomehanizam kao i u primjeru 10.6:

$$G_S(s)=\frac{1}{s\,(s+1)\,(s+4)}$$

pretpostavimo da su dinamički zahtjevi $\zeta=0{,}5$ i $\omega_n=0{,}81$ u redu. Međutim, preostalo regulacijsko odstupanje $e_0=1{,}47$ treba smanjiti na vrijednost $e_0=0{,}5$. To znači da K_v treba povećati za faktor 3.

Najprije odaberemo α koji treba da bude nešto veći od 3 i zaokružimo na vrijednost $\alpha=4$.

Kako je prvi pol od ishodišta u smjeru negativne realne osi $p'_2=-1$ (v. sl. 10—19), uzimamo nultočku n'_K u položaju $s=-0{,}1$. Kako je ujedno $s=-1/\tau$, to znači da je $\tau=10$. Iz izraza (10-63) proizlazi da je pol p'_K smješten u točki $s=-0{,}025$. Tako smo dobili:

$$G'_K(s)=\frac{s+0{,}1}{s+0{,}025}.$$

Uvrstivši vrijednosti od α' i τ u jednadžbu (10-58), imamo prijenosnu funkciju otvorenog kruga:

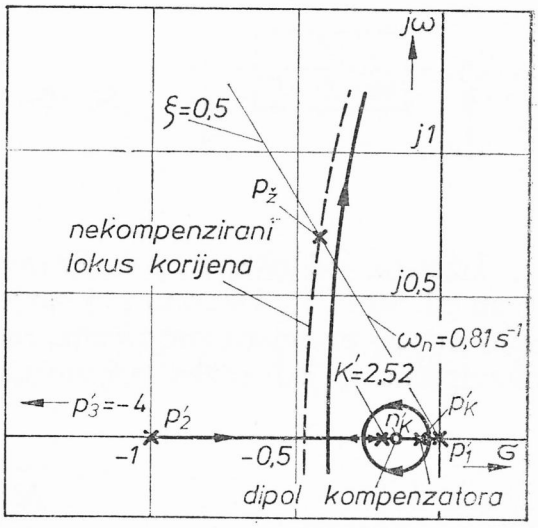
$$G_0(s)=K_P G'_K(s)\,G_S(s)=K'\,\frac{s+0{,}1}{s+0{,}025}\cdot\frac{1}{s\,(s+1)\,(s+4)}.$$

Na sl. 10—24 vidimo lokus korijena kompenziranog servomehanizma. Za usporedbu je crtkano naznačen i lokus korijena u nekompenziranom servomehanizmu (usporedi sl. 10—19). Proračunom ili pomoću spirule odredimo vrijednost pojačanja $K'=2{,}52$ u sjecištu lokusa korijena zatvorenog kruga s pravcem kojeg je nagib određen sa $\zeta=0{,}5$. Budući da je $K_S=1$, proizlazi da je $K'=K_P$, pa su time određeni svi parametri kompenzacije.

Sada možemo naći i novu vrijednost K_v:

$$K_v=\lim_{s\to 0} sG_0(s)=\lim_{s\to 0} s\,2{,}25\,\frac{s+0{,}1}{s+0{,}025}\cdot\frac{1}{s(s+1)(s+4)}=2{,}52.$$

Odgovarajuće preostalo regulacijsko odstupanje $e_0=0{,}39$ zadovoljava postavljeni uvjet.



Sl. 10—24. Projektiranje PI-kompenzacije pomoću lokusa korijena — primjer 10.8

Iz lokusa korijena kompenziranog servomehanizma na sl. 10—24 vidimo da su se grane neznatno pomaknule prema imaginarnoj osi. To znači da se je smanjila neprigušena vlastita frekvencija ω_n, što je izazvalo odgovarajuće povećanje vremena smirivanja T_s. Istu činjenicu mogli bi ustanoviti i na vremenskom odzivu kao što je onaj na sl. 10—22. Uz to, vremenski odziv pokazuje i povećani postotni prebačaj M_p, što je također posljedica PI-kompenzacije. Ako ω_n i M_p nisu u redu, smanjit ćemo pojačanje K'; time ćemo doduše nešto povećati statičku grešku e_0, ali možemo znatno popraviti dinamička svojstva kompenziranog servomehanizma.

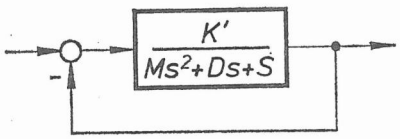
10.5. Kontura korijena

U prethodnim razmatranjima ograničili smo se samo na jednu veličinu — pojačanje K' kao parametar lokusa korijena. To je i opravdano s obzirom da je K' najvažniji parametar regulacijskog kruga, koji neposredno utječe i na njegovo stacionarno i na njegovo dinamičko ponašanje. Međutim, i druge se veličine mogu mijenjati: u projektiranju pomoću kompenzatora zanimljivo je da se vidi i utjecaj promjena parametara α i τ kompenzatora na regulacijsko ponašanje (v. odjeljak 10.4). Da bismo metodu lokusa korijena mogli primijeniti i u tim slučajevima, prisjetimo se da smo metodu lokusa korijena temeljili na nazivniku prijenosne funkcije

zatvorenog kruga prema jednadžbi (10-3). To je ujedno karakteristična jednadžba sustava, koju možemo pisati u sasvim poopćenom obliku:

$$1+G_0(s)=1+A\frac{B(s)}{N(s)}=0, \tag{10-64}$$

gdje je A veličina koja služi kao parametar, a $B(s)$ i $N(s)$ su brojnik i nazivnik frekvencijskog ovisnog dijela. Algebarskim pretvorbama karakteristične jednadžbe možemo zapravo bilo koji parametar izdvojiti kao veličinu A u jednadžbi (10-64), pa će to biti i parametar lokusa korijena. Kako se naziv lokus korijena podrazumijeva sa K' kao parametrom, uobičajeno je da u slučaju parametara različitih od K' govorimo o **konturi korijena.**



Sl. 10–25. Blok-dijagram regulacijskog kruga sa servomehanizmom drugog reda

Uzmimo jednostavan primjer mehaničkog sustava drugoga reda u zatvorenom krugu (sl. 10–25). Ukupno pojačanje K' neka je konstantna veličina, a želimo ispitati utjecaj promjena prigušenja, sadržan u koeficijentu viskoznog trenja D. Karakteristična je jednadžba prijenosne funkcije zatvorenog kruga:

$$1+\frac{K'}{Ms^2+Ds+S}=0. \tag{10-65}$$

Nakon pretvorbi:

$$Ms^2+Ds+S+K'=0 \tag{10-66}$$

i:

$$\frac{Ds}{Ms^2+S+K'}+1=0 \tag{10-67}$$

dobivamo oblik:

$$1+D\frac{s}{Ms^2+S+K'}=0 \tag{10-68}$$

koji odgovara izrazu (10-64). Sada su polovi i nultočke od $s/(Ms^2+S+K')$ početak i kraj grana konture korijena, a D je parametar koji se mijenja od 0 do ∞.

Kod lokusa korijena u pravilu se susrećemo s pozitivnim vrijednostima K'. Kad se radi o drugim parametrima, mogu biti zanimljiva odstupanja i u pozitivnom i u negativnom smislu. U tim slučajevima primjenjuju se pravila za konstrukciju lokusa korijena za negativne parametre prema jednadžbi (10-36), odnosno (10-37).

Primjer 10.9. Uzimamo prijenosnu funkciju otvorenog kruga iz primjera 10.1:

$$G_0(s)=\frac{K'}{s(s+2)}.$$

Prema jednadžbi (10-1), nazivnik prijenosne funkcije zatvorenog kruga ujedno je i karakteristična jednadžba sustava:

$$1+G_0(s)=s(s+2)+K'=s^2+2s+K'=0.$$

Na osnovi te jednadžbe konstruiran je lokus korijena na sl. 10—3 sa K' kao promjenljivom veličinom.

Sada odaberemo čvrstu vrijednost K', npr. $K'=10$. Karakteristična je jednadžba:

$$1+G_0(s)=s^2+2s+10=[s-(-1+j3)]\,[s-(-1-j3)]=0$$

s korijenima $s_{1,2}=-1\pm j3$. Umjesto veličine K' mijenjat ćemo vrijednost imaginarnog dijela korijena. Nadomjestit ćemo 3 sa $(3+\Delta)$; Δ je promjenljivi parametar koji se u ovom slučaju može mijenjati u pozitivnom i negativnom smislu. Imat ćemo karakterističnu jednadžbu:

$$1+G_0(s)=s\,[s+(2+\Delta)]+10=s^2+2s+10+s\Delta=0.$$

To pretvorimo najprije u oblik:

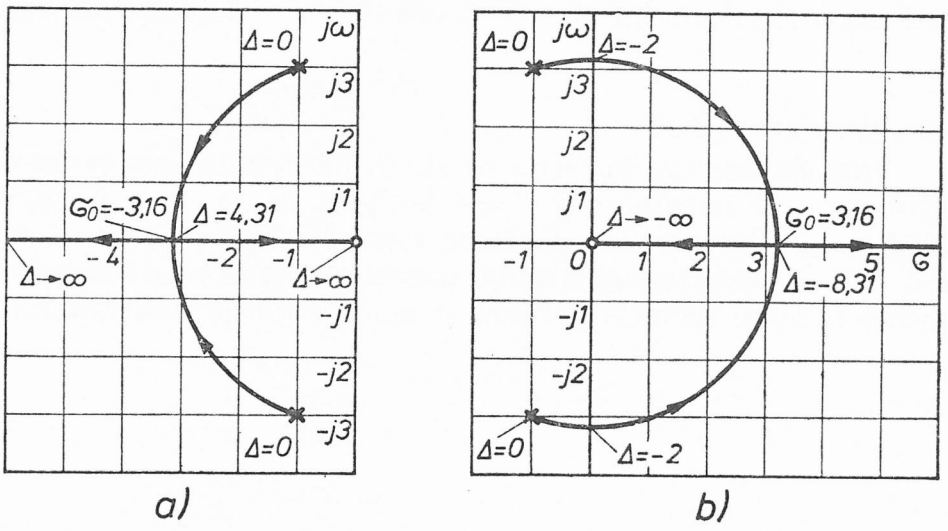
$$\frac{s^2+2s+10}{s}=-\Delta,$$

a zatim u izraz koji odgovara jednadžbi (10-64):

$$1+\Delta\frac{s}{s^2+2s+10}=0.$$

Iz te karakteristične jednadžbe konstruiramo konturu korijena. Za $\Delta>0$ karakteristična jednadžba mora zadovoljavati kriterije iz izraza (10-9), a za $\Delta<0$ vrijede kriteriji iz izraza (10-37).

Na sl. 10—26a vidimo konturu korijena opisanog sustava za $\Delta>0$. Postoje dva pola u točkama $-1\pm j3$ i jedna nultočka u ishodištu. To je oblik konture korijena



Sl. 10—26. Konstrukcija konture korijena — primjer 10.9

s polukružnicama koji odgovara lokusu korijena za sustav tipa G [2, 1] na sl. 10—12e. Konture korijena nalaze se na realnoj osi između $-\infty<s\leqslant 0$. Prema tome, grane konture korijena počinju u polovima za $\Delta=0$, u polukružnici se približavaju realnoj osi, a završavaju u nultočki u ishodištu i u $-\infty$ kod $\Delta\to\infty$. Na osnovi sedmog pravila određujemo još točku odvajanja σ_0. Iz:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\sigma_0-p_i')}-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(\sigma_0-n_i')}=\frac{1}{\sigma_0+1-j3}+\frac{1}{\sigma_0+1+j3}-\frac{1}{\sigma_0}=0$$

dobivamo nakon potrebnih algebarskih pretvorbi:

$$2\sigma_0^2+2\sigma_0=\sigma_0^2+2\sigma_0+10,$$

pa je:

$$\sigma_{01,2}=\pm 3{,}16.$$

Kad je $\Delta>0$ točka je odvajanja $\sigma_{01}=-3{,}16$. Druga vrijednost $\sigma_{02}=3{,}16$ vrijedit će kad je $\Delta<0$.

Na sličan način konstruiramo i konturu korijena za $\Delta<0$ (sl. 10—26b). Grane konture korijena polaze od polova $-1\pm j3$ za $\Delta=0$ i idu u polukružnici od točke odvajanja $\sigma_0=3{,}16$. Odatle se razdvajaju prema nultočki u ishodištu i prema $+\infty$ za $\Delta\to-\infty$. Naime, prema prilagođenom četvrtom pravilu, konture korijena nalaze se na realnoj osi između $0\leqslant s<\infty$.

Na kraju ćemo odrediti i sjecište s imaginarnom osi. U tu svrhu koristimo se karakterističnom jednadžbom i pravimo Routhov raspored:

R_2	1 10
R_1	$2+\Delta$
R_0	10

Uz uvjet da u prvom stupcu nema negativnih članova, mora vrijediti $2+\Delta>0$. Prema tome vrijednost je Δ na imaginarnoj osi $\Delta=-2$. Da bismo dobili vrijednost korijena u sjecištu s imaginarnom osi, oblikujemo pomoćnu jednadžbu iz reda R_2:

$$s^2+10=0,$$

što daje $s_{1,2}=\pm j3{,}16$.

Pomoću konture korijena na sl. 10—26 dobili smo podatak koliko smije biti odstupanje Δ imaginarnog dijela korijena da se uz pojačanje $'=10$ zadovolji uvjet stabilnosti sustava. Možemo uzeti i druge vrijednosti pojačanja, npr. $K'=$ $=2, 5\ldots$, i također konstruirati konture korijena sa Δ kao parametrom. Tako dobijemo familiju kontura korijena pomoću kojih je projektiranje znatno lakše.

11. Impulsni sustavi

Les sanglots longs
Des violons
De l'automne
Blessent mon coeur
D'une langueur
Monotone.

P. Verlaine, „Chant d'automne"

U prethodnoj analizi regulacijskih krugova pretpostavili smo da su signali kontinuirani. Postoji i mogućnost da se bilo gdje u regulacijskom krugu pojave i nekontinuirani signali. Tako ćemo u ovom poglavlju proučiti prijenos signala pomoću impulsnog niza, a u trinaestom poglavlju, kod nelinearnih sustava obraditi ćemo prijenos signala pomoću relejnog preklapanja. Kod impulsnih sustava se bilo gdje u regulacijskom krugu, **signal prenosi u obliku diskretnih impulsa u pravilnim vremenskim razmacima.** Informacijski signal se »uzorkuje« (otipka) pa je impulsni niz amplitudno moduliran. Zato se u dojavnoj tehnici takav prijenos signala i naziva impulsno-amplitudna modulacija (PAM).

Impulsni sustavi imaju široku primjenu, naročito otkad su u regulacijske ustave uvedena digitalna računala. Digitalno računalo ima na ulazu i na izlazu periodski niz diskretnih impulsa, pa njegovo uključivanje u regulacijskom krugu zahtijeva analogno-digitalnu i digitalno-analognu pretvorbu. Period otipkavanja impulsnog sustava odgovara taktu digitalnog računala. Pritom je impulsni prijenos signala **neophodan.**

Jednu od prvih ali velikih primjena čini sustav navođenja pomoću radara, gdje je sustavu **svojstven** impulsni prijenos signala. Položaj nekog objekta »ispita« se jednom kod svakog punog okreta radara, a ta frekvencija određuje i period otipkavanja.

Impulsni se sustavi zatim veoma puno primjenjuju kod mjerenja na daljinu, npr. pri upravljanju letjelicom i u sve većem opsegu u industrijskim procesima. Pri mjerenju raznih veličina koje se moraju neprestano prenositi, bilo bi veoma skupo kad bi svaka mjerena veličina zauzimala po jedan prijenosni kanal. Mnogo je **svrsishodnije** da se veličine koje se polagano mijenjaju s vremenom (temperatura, protok, i sl.) u određenim vremenskim intervalima otipkaju, a zatim slijedom prenose jednim kanalom do nadzornog mjesta (vremenski multipleks). Osim toga, prijenos podataka na daljinu pomoću diskretnih kodiranih signala mnogo je manje podložan smetnjama, nego kad se podaci prenose pomoću kontinuiranih signala.

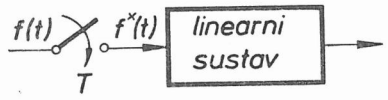
Impulsni sustav regulacije više odgovara predodžbi o zamjeni čovjeka s regulacijskim uređajem negoli kontinuirani sustav regulacije. Naime, čovjek povremeno nadzire izlaznu veličinu nekog procesa, a zatim zahvatom na ulaz procesa namješta željeno stanje.

U analizi impulsnih sustava možemo primijeniti uobičajene metode regulacije, kao što su vremenski i frekvencijski odziv, ali te metode moramo prilagoditi. Laplaceova se transformacija može također izravno primijeniti, ali izrazi postaju ne-

pregledni. Zato je prikladnije da primijenimo srodnu z-transformaciju, čime pojednostavnjujemo analizu[1].

11.1. Impulsni modulator

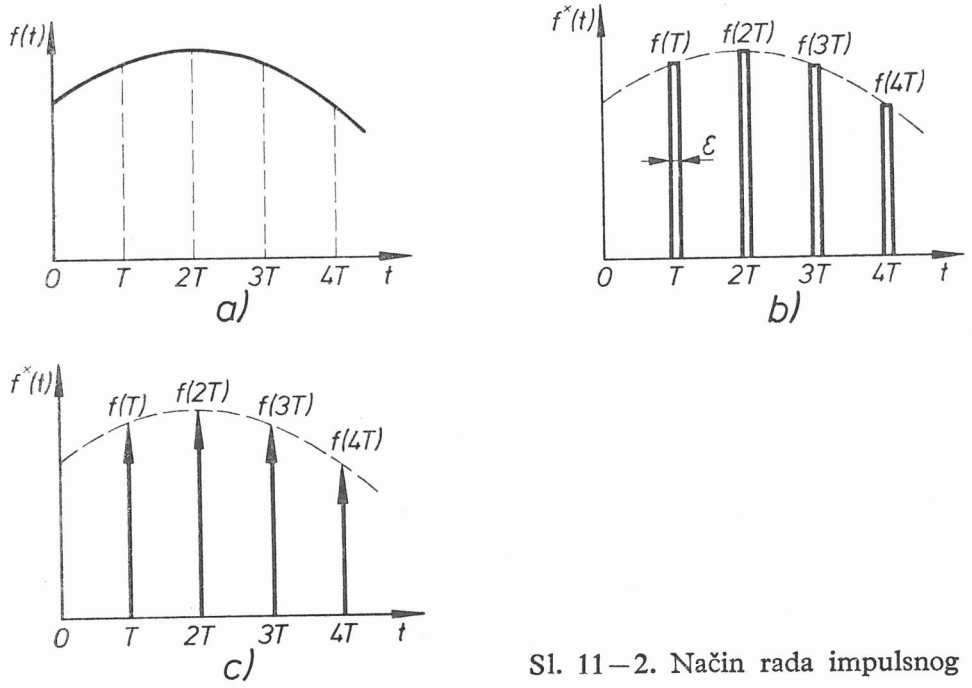
U impulsnom sustavu podaci se prenose i kontinuiranim i diskretnim signalima, pa moraju postojati mjesta gdje se vrši pretvaranje jednih u druge. Dobro je da naša razmatranja o impulsnim sustavima započnemo obradom sklopa koji kontinuirane signale pretvara u impulsne. Tako naime odmah uvodimo sve osnovne pojmove povezane s impulsnim sustavima. Taj se sklop naziva impulsni modulator; u odjeljku 11.3. opisat ćemo i impulsni demodulator ili formator impulsa koji diskretne signale ponovno pretvara u kontinuirane.



Sl. 11—1. Impulsni modulator

Impulsni modulator možemo shematski prikazati kao prekidač na sl. 11—1. Na izlazu prekidača priključen je linearni dio sustava. U impulsnom sustavu prekidač djeluje tako da se zatvara svakih T sekunda i ostaje zatvoren za veoma mali vremenski interval ϵ, pa je $\epsilon \ll T$. Prekidač je u pravilu elektronički, hranjen impulsnim naponom iz digitalnog računala, a njegov simbol označava da se ne radi o običnom već o periodskom prekidaču. **Frekvencija otipkavanja** dana je jednostavnom relacijom:

$$\omega_S = \frac{2\pi}{T}. \tag{11-1}$$



Sl. 11—2. Način rada impulsnog modulatora

[1] Hurewitz, W., Filters and Servo Systems with Pulsed Data. V poglavlje u knjizi James, H. M., Nichols, N. B., Phillips, R. S., Theory of Servomechanisms, McGraw-Hill, New York 1947.

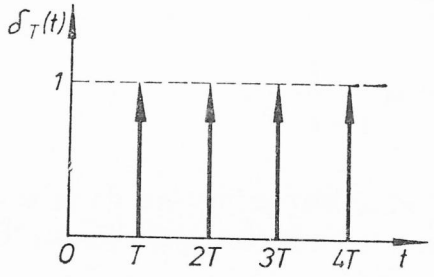
Ako je na ulaz prekidača narinut kontinuirani signal prema sl. 11—2a, prekidač propušta signal samo u malom intervalu ϵ za vrijeme otipkavanja, pa se izlazni signal prema sl. 11—2b sastoji od niza impulsa visine $f(nT)$ i širine ϵ. Da bismo olakšali matematičku analizu, zamijenit ćemo te impulse konačne širine s jediničnim impulsima infinitezimalne širine i beskonačne visine $\delta(t-nT)$ kojih je »jakost« jednaka površini impulsa, tj. amplitudi ulaznog signala $f(nT)$ pomnoženoj sa širinom u odgovarajućim trenucima nT. Kod daljnjih je proračuna povoljnije da konstantnu veličinu ϵ promatramo kao zaseban član koji ulazi kao faktor pojačanja u prijenosnu funkciju linearnog sustava[1]. Na izlazu iz prekidača ostaje dakle impulsni niz:

$$f^*(t)=f(0)\,\delta(t)+f(T)\,\delta(t-T)+f(2T)\,\delta(t-2T)+\ldots=$$

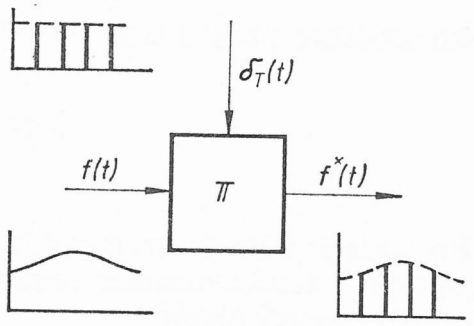
$$=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,\delta(t-nT). \tag{11-2}$$

Zvjezdica uz vremensku funkciju označava da se radi o impulsnim signalima koji se pojavljuju u pravilnim vremenskim intervalima, $\delta(t)$ je jedinični impuls u trenutku $t=0$, a $\delta(t-nT)$ je jedinični impuls u trenucima $(t-nT)$. To je izraz za diskretnu konvoluciju i odgovara integralu konvolucije za kontinuirane funkcije. Funkcija $\delta(t-nT)$ ima svojstvo izlučivanja vrijednosti $f(nT)$ u trenutku otipkavanja, a izvan toga vremena jednaka je nuli. Zato jednadžbu (11-2) možemo pisati:

$$f^*(t)=f(t)\,\delta_T(t), \tag{11-3}$$



Sl. 11—3. Jedinični impulsni niz



Sl. 11—4. Shematski prikaz amplitudne modulacije jediničnog impulsnog niza

gdje je:

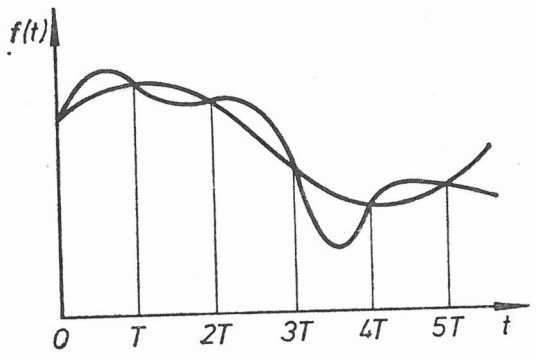
$$\delta_T(t)=\delta(t)+\delta(t-T)+\delta(t-2T)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) \tag{11-4}$$

jedinični impulsni niz predočen na sl. 11—3. Ta je funkcija veoma važna u teoriji impulsnih sustava.

Izraz (11-3) predstavlja **amplitudnu modulaciju** jediničnog impulsnog niza $\delta_T(t)$ sa signalom $f(t)$, što je shematski prikazano u blok-dijagramu na sl. 11—4. Odatle i odgovarajuće ime sklopa: impulsni modulator.

Iz definicije otipkane funkcije $f^*(t)$ proizlazi da ta funkcija ne opisuje kontinuirani signal jednoznačno, jer su vrijednosti tih funkcija istovjetne samo u trenucima otipkavanja. Tako su na sl. 11—5 prikazane dvije kontinuirane funkcije koje daju jednaku otipkanu funkciju; očito je da takvih kontinuiranih funkcija ima bezbroj.

[1] Moramo upozoriti da pritom prijenosna funkcija linearnog sustava mijenja dimenziju: širina impulsa ϵ ima dimenziju vremena.



Sl. 11–5. Dvije različite kontinuirane funkcije imaju istu tastiranu funkciju

O tom ćemo problemu kasnije iscrpnije govoriti, a ovdje spomenimo samo to da je u tom slučaju odabrana frekvencija otipkavanja preniska. Da bismo postigli zadovoljavajuću reprodukciju signala, moramo pri projektiranju takvog sustava odabrati mnogo manji period otipkavanja T.

Kao i kod kontinuiranih funkcija, i ovdje ćemo se radi pojednostavnjenja proračuna poslužiti Laplaceovom transformacijom. Transformacija je jediničnog impulsnog niza iz jednadžbe (11-4):

$$\mathcal{L}\,[\delta_T(t)] = \Delta_T(s) = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs}, \tag{11-5}$$

što možemo pisati i u **zatvorenom obliku:**

$$\mathcal{L}\,[\delta_T(t)] = \Delta_T(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}. \tag{11-6}$$

Pri tome je uvjet konvergencije da je $|e^{-Ts}| < 1$. Napominjemo da se u oba oblika pojavljuje transcendentna funkcija, pa analiza u području kompleksne frekvencije postaje zamršenijom.

Izraz (11-2) možemo transformirati izravno:

$$\mathcal{L}\,[f^*(t)] = F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-nTs}, \tag{11-7}$$

jer smo pretpostavili da su vrijednosti $f(nT)$ u svakom trenutku nT konstantne, a s-transformat je $\mathcal{L}\,[\delta(t-nT)] = e^{-nTs}$.

Izraz (11-2) možemo međutim transformirati i pomoću Fourierova razvoja funkcije $\delta_T(t)$ iz jednadžbe (11-4). Eksponencijalni je oblik Fourierova reda[1]:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jn\omega_s t},$$
$$C_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn\omega_s t}\, dt, \tag{11-8}$$

[1] Vidi odjeljak 15.1.

gdje smo Ω zamijenili sa ω_s. Najprije uvrstimo u drugu jednadžbu $f(t)=\delta_T(t)$, pa se u trenutku $t=0$, izluči samo prvi impuls, jer su granice integracije od $-T/2$ do $T/2$:

$$C_n=\int_{-T/2}^{T/2}\delta_T(t)\,e^{-jn\omega_s\cdot 0}dt=\int_{-T/2}^{T/2}\delta_T(t)\,dt=1. \tag{11-9}$$

Uvrstivši ovu vrijednost za C_n u prvu jednadžbu, dobijemo izraz za $\delta_T(t)$ u eksponencijalnom obliku:

$$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jn\omega_s t}. \tag{11-10}$$

Uvrštenjem gornje jednadžbe u jednadžbu (11-3) i transformacijom dobivamo:

$$F^*(s)=\int_0^{\infty}f^*(t)\,e^{-st}=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}f(t)\,e^{-(s-jn\omega_s)t}dt. \tag{11-11}$$

Dalje je:

$$F^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(s-jn\omega_s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(s+jn\omega_s), \tag{11-12}$$

jer zbog beskonačnog broja pribrojnika možemo uzeti i pozitivan predznak. Gornja relacija upućuje na to da je izraz $F^*(s)$ **periodski,** što možemo dokazati na slijedeći način. Ako je:

$$F^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\,e^{-snT}, \tag{11-13}$$

onda vrijedi također:

$$F^*(s+jm\omega_s)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\,e^{-(s+jm\omega_s)nT}=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\,e^{-snT}e^{-jm\omega_s nT}. \tag{11-14}$$

Budući da je $\omega_s=2\pi/T$, vrijednost je od:

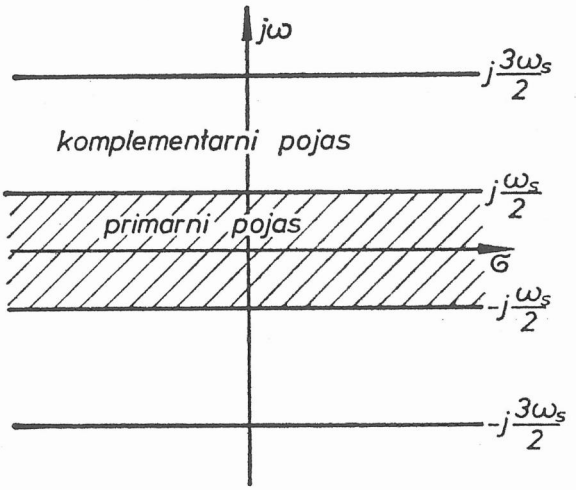
$$e^{-jmn\omega_s T}=e^{-j2\pi m\cdot n}=1. \tag{11-15}$$

Uvrštenjem u jednadžbu (11-14) dobivamo identičnost:

$$F^*(s+jm\omega_s)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\,e^{-snT}=F^*(s). \tag{11-16}$$

Periodičnost te funkcije ukazuje fizikalno na to da impulsni modulator ne može između ulaznih signala razlikovati frekvenciju ω i frekvenciju $(\omega+m\omega_s)$,

gdje je m cijeli broj. Ako funkciju $F^*(s)$ prikažemo u kompleksnoj ravnini prema sl. 11—6, ona se ponavlja u svakom pojasu širine $j\omega_s$. Zato je dovoljno da funkciju promatramo samo u tzv. primarnom pojasu uz os apscisa, koji je ograničen sa $\pm j(\omega_s/2)$. Sve ostale tzv. komplementarne pojase, ispuštamo iz razmatranja.



Sl. 11—6. Transformat moduliranog impulsnog niza prikazan u ravnini kompleksne varijable

Transformat $F^*(s)$ u jednadžbi (11-12) možemo postići i izravno iz jednadžbe (11-3). Umnožak dviju funkcija u vremenskom području daje kompleksnu konvoluciju u području kompleksne varijable iz koje dobijemo jednadžbu (11-12) [lit. 16, 55].

11.2. z-transformacija

Kao što smo vidjeli u prethodnom odjeljku, Laplaceova transformacija impulsnih funkcija ima oblik beskonačnih redova gdje se transcendentni faktori pojavljuju u obliku funkcije e^{Ts} i njezinih potencija. Da bi se izbjegla zamršena analiza, samo se po sebi nameće uvođenje nove varijable $z=e^{Ts}$, pri čemu se vrši jednostavno konformno preslikavanje iz s-ravnine u z-ravninu. Možemo osjetiti da ta operatorska metoda, z-transformacija, **odgovara prirodi periodskih otipkavanja** u impulsnom sustavu.

Iz transformata u jednadžbama (11-7) i (11-2) proizlazi da je impulsni modulator zapravo linearni sklop, pa za operacije pomoću njega možemo primijeniti načelo superpozicije. U tu svrhu uvest ćemo pojam impulsne prijenosne funkcije, a moći ćemo primijeniti jednostavnu metodu algebre blokova.

11.2.1. Direktna transformacija

Uvođenjem nove varijable $z=e^{Ts}$ u izraz (11-7):

$$\mathcal{Z}[f(t)]=F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,z^{-n} \tag{11-17}$$

dobivamo izravno z-transformaciju. U skladu s Laplaceovom transformacijom, i ovdje govorimo o jednostranoj z-transformaciji, jer funkcija $f(t)$ vrijedi za $t\geqslant 0$.

Transformat funkcije ovisi samo o vrijednosti funkcije u trenutku otipkavanja, pa sve funkcije s istim vrijednostima u trenutku otipkavanja imaju iste z-transformate.

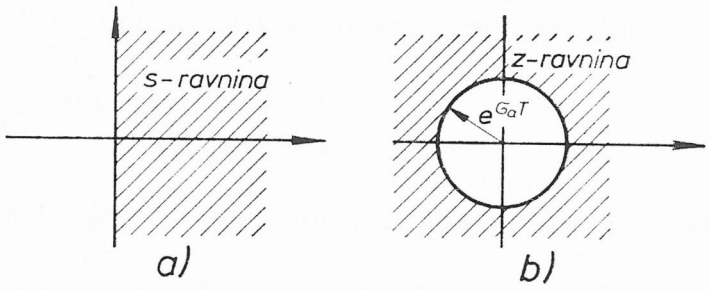
Kod Laplaceove transformacije uvjet je konvergencije $\sigma > \sigma_a$, gdje je σ_a apscisa apsolutne konvergencije (v. sl. 15—3). Budući da je z-transformacija jednostavna promjena varijable, područje konvergencije u z-ravnini dobivamo jednostavnim konformnim preslikavanjem područja konvergencije iz s-ravnine. Postupak je slijedeći:

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z|\, e^{j\varphi}, \tag{11-18}$$

pa su amplituda i faza kompleksne varijable:

$$\begin{aligned} |z| &= e^{\sigma T}, \\ \varphi &= \underline{/z} = \omega T. \end{aligned} \tag{11-19}$$

Okomica $s = \sigma_a$ u s-ravnini preslikava se u kružnicu konstantnog polumjera $|z| = e^{\sigma_a T}$ u z-ravnini (sl. 11—7). Uz $\sigma_a = 0$, područje konvergencije leži u z-ravnini unutar kružnice polumjera $|z| = 1$; to je nužan i dovoljan uvjet za konvergenciju.



Sl. 11—7. Područje konvergencije u z-ravnini

Kao prvi primjer z-transformacije uzmimo jedinični odskok $u(t)$. Budući da je za sve točke tastiranja nT vrijednost funkcije $u(t) = 1$, dobivamo uvrštenjem u jednadžbu (11-17):

$$\mathcal{Z}[u(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}, \tag{11-20}$$

što možemo pisati i u zatvorenom obliku:

$$\mathcal{Z}[u(t)] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad \text{za} \quad |z^{-1}| < 1. \tag{11-21}$$

Iz ovog primjera vidimo da je transformat jediničnog odskoka $u(t)$ identičan transformatu jediničnog impulsnog niza prema jednadžbi (11-6), jer obje funkcije imaju u trenucima otipkavanja jednake vrijednosti.

Slijedeći primjer neka je eksponencijalna funkcija e^{-at}. Na osnovi izraza (11-17) je $f(nT) = e^{-anT}$, što daje z-transformat:

$$\mathcal{Z}[e^{-at}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT} z^{-1})^n, \tag{11-22}$$

što opet možemo pisati u zatvorenom obliku:

$$\mathcal{Z}\,[e^{-at}]=F(z)=\frac{1}{1-e^{-aT}\,z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}} \quad \text{za} \quad |e^{-aT}\,z^{-1}|<1. \tag{11-23}$$

Direktnu transformaciju prema izrazu (11-17) nije moguće uvijek primijeniti. Mnogo je uspješnija **metoda rezidua,** poznata iz teorije funkcija kompleksne varijable. Prema toj metodi, poznavajući s-transformat možemo izravno odrediti i z-transformat [lit. 34, 49, 73]. Pišemo transformacije $f^*(t)$:

$$\mathcal{Z}\,[f^*(t)]=F(z)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_a-j\infty}^{\sigma_a+j\infty}\frac{F(s)\,ds}{1-e^{-Ts}\,z^{-1}}=\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=pi}\left[F(s)\,\frac{1}{1-e^{-Ts}\,z^{-1}}\right], \tag{11-24}$$

tj. integral s lijeve strane odgovara zbroju rezidua funkcije $F(s)/(1-e^{-Ts}\,z^{-1})$ u polovima p_i. Gornja relacija vrijedi kad je polinom brojnika od $F(s)$ manjeg reda od polinoma nazivnika od $F(s)$.

Kad je nazivnik od $F(s)$ oblika $(s-p)$, tako da $F(s)$ ima jedan pol u točki $s=p$, odgovarajući reziduum izračunamo iz:[1)]

$$\operatorname*{Res}_{s=p}\left[\frac{F(s)}{1-e^{-Ts}\,z^{-1}}\right]=\lim_{s\to p}\left[(s-p)\,\frac{F(s)}{1-e^{-Ts}\,z^{-1}}\right]. \tag{11-25}$$

Ako se polovi u točki $s=p$ ponavljaju n puta, izraz postaje složeniji. Reziduum je:

$$\operatorname*{Res}_{s=p}\left[(s-p)^n\,\frac{F(s)}{1-e^{-Ts}\,z^{-1}}\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{s\to p}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[(s-p)^n\,\frac{F(s)}{1-e^{-Ts}\,z^{-1}}\right]. \tag{11-26}$$

Uzimamo kao primjer harmoničku funkciju $f(t)=\sin\omega t$, koju ćemo metodom rezidua prevesti u z-područje. Poći ćemo od Laplaceova transformata te funkcije, kojega ćemo razviti u parcijalne razlomke:

$$F(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{j/2}{s+j\omega}-\frac{j/2}{s-j\omega}. \tag{11-27}$$

Polovi u s-ravnini su $\pm j\omega$, a odgovarajući rezidui $\pm j(1/2)$. To uvrstimo u jednadžbu (11-24):

$$\mathcal{Z}\,[\sin\omega t]=\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=pi}\left[F(s)\cdot\frac{1}{1-e^{-Ts}\,z^{-1}}\right]=$$

$$=\frac{j}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-j\omega T}z^{-1}}-\frac{j}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-j\omega T}z^{-1}}=\frac{j}{2}\left[\frac{-z\,(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T})}{z^2-z\,(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T})+1}\right] \tag{11-28}$$

---

[1] Usporedi izvod za rezidue u s-području u jednadžbama (8—109) i (8—112).

Primjenom Eulerovih relacija izraz (11-28) pojednostavnjujemo:

$$\mathcal{Z}[\sin \omega t]=\frac{z \sin \omega T}{z^2-2z \cos \omega T+1}. \tag{11-29}$$

Kao posljednji primjer uzimamo z-transformaciju nagibne funkcije $f(t)=t$. Njen je Laplaceov transformat $F(s)=1/s^2$, tako da postoji dvostruki pol u ishodištu $s_{1,2}=0$. Primjenjujemo jednadžbu (11-26):

$$\operatorname*{Res}_{s=p}\left[\frac{F(s)}{1-e^{-Ts}z^{-1}}\right]=\lim_{s\to p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s-p)^2\frac{F(s)}{1-e^{-Ts}z^{-1}}\right]=\lim_{s\to p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[s^2\frac{1/s^2}{1-e^{-Ts}z^{-1}}\right]. \tag{11-30}$$

Izračunamo gornji izraz, pa dobivamo:

$$\mathcal{Z}[t]=\lim_{s\to 0}\left[\frac{z^{-1}Te^{-Ts}}{(1-e^{-Ts}z^{-1})^2}\right]=\frac{Tz}{(z-1)^2}, \tag{11-32}$$

što je ujedno i z-transformat nagibne funkcije.

Nastavljajući dalje opisanim postupcima, možemo sastaviti tablicu korespondentnih parova. Ona se primjenjuje jednostavno kao i tablica u Laplaceovoj transformaciji. U tablici 11—1 nanizane su korespondencije za nekoliko osnovnih funkcija. Možemo opaziti da su z-transformati impulsnih funkcija općenito mnogo složeniji od s-transformata kontinuiranih funkcija. Ako se neka funkcija ne nalazi u tablici, njezin se vremenski oblik, odnosno Laplaceov transformat, mora pojednostavniti razlaganjem u red parcijalnih razlomaka.

Primjer 11.1. Treba odrediti z-transformaciju funkcije koje je Laplaceov transformat:

$$F(s)=\frac{2}{s(s+2)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}.$$

Iz tablice 11—1 očitamo odgovarajuće vrijednosti z-transformata, pa dobivamo:

$$F(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-2T}}=\frac{z(1-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})}.$$

Slično kao i Laplaceovu transformaciju, možemo izvesti z-transformacije različitih operacija. Ovdje ćemo izvesti samo nekoliko teorema, a najvažniji se nalaze u tablici 11—2.

Počinjemo s **teoremom linearnosti.** Zbroj dviju vremenskih funkcija $f_1(t)$ i $f_2(t)$ s konstantnim faktorima a_1 i a_2:

$$f(t)=a_1f_1(t)+a_2f_2(t) \tag{11-32}$$

transformiramo:

$$\mathcal{Z}[f(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}[a_1f_1(nT)+a_2f_2(nT)]z^{-n}, \tag{11-33}$$

Tablica 11—1. z-transformacija funkcija

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t-nT)$	e^{-nTs}	$\frac{1}{z^n}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$u(t-nT)$	$\frac{1}{s}[1-e^{-nTs}]$	$\frac{1}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2-2z \cos \omega T+1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-z \cos \omega T}{z^2-2z \cos \omega T+1}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega T+e^{-2aT}}$
$\operatorname{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$	$\frac{z \operatorname{sh} \beta T}{z^2-2z \operatorname{ch} \beta T+1}$
$\operatorname{ch} \beta t$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$	$\frac{z^2-z \operatorname{ch} \beta T}{z^2-2z \operatorname{ch} \beta T+1}$

pa dobivamo

$$\mathcal{Z}[f(t)]=a_1\sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT)\,z^{-n}+a_2\sum_{n=0}^{\infty} f_2(nT)\,z^{-n}=a_1F_1(z)+a_2F_2(z). \tag{11-34}$$

Poseban je slučaj gornjeg teorema množenje s konstantom:

$$\mathcal{Z}[af(t)]=aF(z). \tag{11-35}$$

Teorem pomaka za transformat funkcije dokazujemo polazeći od izraza:

$$\mathcal{Z}[f(t-\mu T)]=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT-\mu T)\,z^{-n}, \tag{11-36}$$

gdje je μT vremensko kašnjenje funkcije. To možemo preurediti:

$$\mathcal{Z}[f(t-\mu T)]=z^{-\mu}\sum_{n=0}^{\infty} f[(n-\mu)\,T]\,z^{-(n-\mu)}. \tag{11-37}$$

Donju granicu zbrajanja možemo promijeniti. Naime, $f[(n-\mu)\,T]=0$ za $n<\mu$, što proizlazi iz postavke da je $f(t)=0$ za $t<0$. To daje:

$$\mathcal{Z}[f(t-\mu T)]=z^{-\mu}\sum_{n=\mu}^{\infty} f[(n-\mu)\,T]\,z^{-(n-\mu)}. \tag{11-38}$$

Promjenom varijable $\lambda=n-\mu$ dobivamo teoreme pomaka:

$$\mathcal{Z}[f(t-\mu T)]=z^{-\mu}\sum_{\lambda=0}^{\infty} f(\lambda T)\,z^{-\lambda}=z^{-\mu}F(z) \tag{11-39}$$

koji vrijedi za $\mu>0$.

Primjer 11.2. Transformat pomaknute odskočne funkcije $u(t-3T)$ uvrštenjem z-transformata jediničnog odskoka prema jednadžbi (11—21) glasi:

$$\mathcal{Z}[u(t-3T)]=z^{-3}\mathcal{Z}[u(t)]=z^{-3}\frac{z}{z-1}=\frac{z^{-2}}{z-1}.$$

Ako se vremenska funkcija $f(t)$ **prigušuje eksponencijalnom funkcijom** e^{-at}, dokaz izvodimo posredno, pomoću Laplaceova transformata:

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)]=F(s+\alpha). \tag{4-31}$$

Kako je $z=e^{Ts}$, onda ćemo zamjenom s sa $(s+\alpha)$ dobiti:

$$e^{(s+\alpha)T}=e^{Ts}\cdot e^{aT}=ze^{aT}. \tag{11-40}$$

z-transformat možemo pisati izravno:

$$\mathcal{Z}[e^{-aT}f(t)]=\mathcal{Z}[F^*(s+\alpha)]=F(ze^{aT}). \tag{11-41}$$

Teorem početne vrijednosti dokazujemo iz jednadžbe (11—17):

$$\mathcal{Z}[f(t)]=F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,z^{-n}=f(0)+f(T)\,z^{-1}+f(2T)\,z^{-2}+\ldots \qquad (11\text{-}42)$$

Uz uvjet da postoji granični prijelaz $\lim_{z\to\infty} F(z)$, na desnoj strani polinoma, uz $z\to\infty$, ostaje samo član $f(0)$ koji je identički jednak $\lim_{t\to 0} f(t)$. Imamo dakle:

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{t\to 0} f^*(t)=\lim_{z\to\infty} F(z). \qquad (11\text{-}43)$$

Nešto je složeniji izvod **teorema konačne vrijednosti.** Dajemo samo konačan rezultat [lit. 24, 55]:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty} f^*(t)=\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})\,F(z)]=\lim_{z\to 1}[(z-1)\,F(z)]. \qquad (11\text{-}44)$$

Tablica 11—2. Teoremi z-transformacije

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$	$a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$	$a_1F_1(z)+a_2F_2(z)$
$f(t-nT)$	$e^{-nTs}F(s)$	$z^{-n}F(z)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+\alpha)$	$F(ze^{aT})$
$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$	$\lim_{z\to\infty} F(z)$
$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$	$\lim_{z\to 1}[(z-1)\,F(z)]$
$\frac{\partial}{\partial a}[f(t,a)]$	$\frac{\partial}{\partial a}[F(s,a)]$	$\frac{\partial}{\partial a}[F(z,a)]$

11.2.2. Obratna transformacija

Obratna transformacija funkcije od z daje funkciju u vremenskom području. Budući da je funkcija $F(z)$ opisana samo u trenucima otipkavanja, **vremenska funkcija predstavlja impulsni niz** $f^*(t)$, a ne kontinuiranu funkciju $f(t)$. Želimo li ipak naći $f(t)$ nekog impulsnog sustava, moramo se koristiti Laplaceovom transformacijom.

Kao i kod Laplaceove transformacije, najjednostavniji postupak pri obratnoj transformaciji jest primjena tablice transformata. Ako su transformati višega reda, postoji nekoliko metoda da pojednostavnimo izraz $F(z)$ koji transformiramo.

Metoda divizije. Tom metodom dobivamo vrlo jednostavno obratni transformat. Pretpostavimo naime da je $F(z)$ u obliku racionalnog razlomka:

$$F(z)=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0}, \tag{11-45}$$

gdje je za fizikalno realne sustave $m<n$. Dijeljenjem polinoma brojnika s polinomom nazivnika dobivamo red potencija od z:

$$F(z)=K_k z^k+K_{k-1}z^{k-1}+\ldots \tag{11-46}$$

Kako je $k=(m-n)\leqslant 0$, red se sastoji od inverznih potencija od z, pa iz tablice 11—1 možemo naći transformate koje uvrstimo u gornji izraz:

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)]=f^*(t)=K_k\delta[t+kT]+K_{k-1}\delta[t+(k-1)T]+\ldots \tag{11-47}$$

To je niz impulsa koji su međusobno pomaknuti za period otipkavanja T. U intervalu između impulsa nema podataka o vremenskom toku funkcije.

Primjer 11.3. Uzet ćemo jednostavan primjer racionalnog razlomka:

$$F(z)=\frac{z}{z-0{,}5},$$

odakle dijeljenjem brojnika s nazivnikom dobivamo:

$$\frac{z}{z-0{,}5}=1+0{,}5z+0{,}25\,z^2+\ldots$$

što obratno transformiramo po članovima:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-0{,}5}\right]=f^*(t)=\delta(t)+0{,}5\,\delta(t-T)+0{,}25\,\delta(t-2T)+\ldots$$

Metoda parcijalnih razlomaka. To je mala preinaka veoma korisne metode u obratnoj Laplaceovoj transformaciji. Racionalni razlomak u području kompleksne varijable razvijen u zbroj parcijalnih razlomaka:

$$F(s)=\frac{K_1}{s+s_1}+\frac{K_2}{s+s_2}+\ldots \tag{11-48}$$

ima vremensku funkciju:

$$f(t)=K_1e^{-s_1t}+K_2e^{-s_2t}+\ldots \tag{11-49}$$

Prema tablici 11—1 z-transformat eksponencijalne funkcije ima oblik $z/(z-e^{-\alpha t})$. Naprotiv, racionalni razlomak u z-području razvijen u zbroj parcijalnih razlomaka ima oblik $1/(z-z_1)$, tako da u brojniku nema z. Zato se $F(s)$ podijeli sa z prije razvijanja u red, a nakon toga red se množi sa z.

Primjer 11.4. Transformat:

$$F(z)=\frac{0{,}5\,z}{(z-1)(z-0{,}5)}$$

podijelimo sa z i razvijemo u red parcijalnih razlomaka:

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}5)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-0{,}5},$$

pa je:

$$F(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-0{,}5}.$$

Obratna z-transformacija daje vremensku funkciju:

$$\mathcal{Z}^{-1}_{t}[F(z)]=f^*(t)=[1-e^{-(0{,}69/T)t}]\,\delta_T(t).$$

Metoda konturne integracije. Na osnovi teorije funkcija kompleksne varijable možemo vrlo jednostavno izračunati krivuljni integral pomoću Cauchyjeva teorema o reziduima [lit. 34, 39, 55]. Pišemo:

$$f(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)\,z^{n-1}\,dz=\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_i}[F(z)\,z^{n-1}] \tag{11-50}$$

gdje je krivuljni integral funkcije $F(z)\,z^{n-1}$ jednak zbroju rezidua u polovima te iste funkcije. Budući da z^{n-1} nema polova, ostaju samo polovi od $F(z)$, obuhvaćeni konturom C. Metoda konturne integracije uvijek daje obratni transformat.

Važan praktičan primjer predstavlja obratna z-transformacija funkcije:

$$F(z)=\frac{z}{z+a}, \tag{11-51}$$

na koju često nailazimo kod proračuna impulsnih sustava. Vrijednosti odgovarajuće vremenske funkcije u trenucima otipkavanja dobijemo korištenjem jednadžbe (11-50):

$$f(nT)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=zi}[F(z)\,z^{n-1}]=\lim_{z\to -a}(z+a)\left[\frac{z}{z+a}\,z^{n-1}\right]=z^n|_{z=-a}=(-a)^n, \tag{11-52}$$

pa se to uvrsti u jednadžbu (11-2):

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)]=f^*(t)=\sum_{n=0}^{n}a^n\delta(t-nT). \tag{11-53}$$

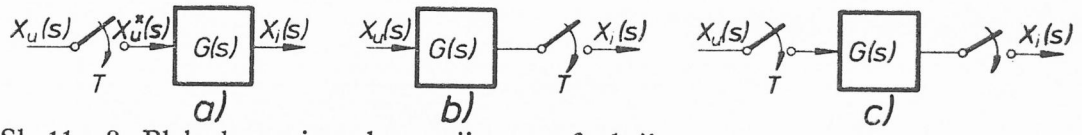
11.2.3. Impulsna prijenosna funkcija

U uvodnim poglavljima vidjeli smo kako smo uvođenjem pojma prijenosne funkcije bitno pojednostavnili rješavanje regulacijskih sustava s kontinuiranim signalima. Kod impulsnih sustava stvar nije tako jednostavna jer se pojavljuju i kontinuirani i diskretni signali. Pogledajmo primjer sa sl. 11—8a, gdje impulsnom modulatoru slijedi sustav s prijenosnom funkcijom $G(s)$. Možemo pisati:

$$X_i(s)=G(s)\,X_u^*(s). \tag{11-54}$$

Taj izraz uvrstimo u jednadžbu (11-2) pa dobivamo:

$$X_i^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_i(s+jn\omega_s)=\frac{1}{T}\sum_{u=-\infty}^{\infty}G(s+jn\omega_s)\,X_u^*(s+jn\omega_s). \tag{11-55}$$



Sl. 11—8. Blok-shema impulsne prijenosne funkcije

Zbog periodskog karaktera funkcije $X^*(s+jn\omega)=X^*(s)$ prema jednadžbi (11-16), možemo izraz (11-55) dalje pisati:

$$X_i^*(s)=X_u^*(s)\left[\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s+jn\,\omega_s)\right]=X_u^*(s)\,G^*(s). \tag{11-56}$$

Zamjenom $z=e^{Ts}$ dobivamo:

$$X_i(z)=G(z)\,X_u(z). \tag{11-57}$$

Pri tome $G(z)=X_i(z)/X_u(z)$ predstavlja omjer transformirane izlazne funkcije prema ulaznoj, pa se zato i naziva **impulsna prijenosna funkcija.** Dalje ćemo vidjeti da $G(z)$ nije tako pogodna za rješavanje složenih impulsnih sustava kao što je to prijenosna funkcija $G(s)$ kod sustava s kontinuiranim signalom.

11.2.4. Algebra blokova

Promotrimo **otvoreni krug** na sl. 11—8b, gdje impulsni modulator slijedi sustav s prijenosnom funkcijom $G(s)$. Sada imamo u s- odnosno u z-području:

$$X_i(s)=[G(s)\,X_u(s)]^* \quad \text{ili} \quad X_i(z)=GX_u(z). \tag{11-58}$$

Taj način pisanja govori nam da funkcije $G(s)$ i $X_u(s)$ moramo pomnožiti prije transformacije, pa z-transformat ulazne funkcije $X_u(z)$ ne možemo posebno izdvojiti. Iz toga slijedi da se omjer $X_i(z)/X_u(z)$ ne može postaviti kao impulsna prijenosna funkcija. Prije nego što tu razliku objasnimo na primjeru, napišimo još izraz za otvoreni krug na sl. 11—8c:

$$X_i(s)=[G(s)\,X_u^*(s)]^*=G^*(s)\,X_u^*(s), \tag{11-59}$$

jer je $X_u^*(s)$ nepromijenjen nakon ponovnog otipkavanja istom frekvencijom. Ako izraz (11-59) napišemo u z-području:

$$X_i(z)=G(z)\,X_u(z) \tag{11-60}$$

i usporedimo ga s izrazom (11—57), vidimo da su oni formalno jednaki, unatoč tome što se blok-dijagrami na sl. 11—8a i 11—8c razlikuju. To dakako vrijedi samo u trenucima otipkavanja; između toga izlazni je signal kontinuiran za slučaj sklopa na sl. 11—8a (zbog izglađujućeg djelovanja sklopa, v. odjeljak 11.3.), a za slučaj sklopa na sl. 11—8c iznosi nula.

Primjer 11.5. Prema sl. 11—9a možemo upotrijebiti z-transformate prijenosnih funkcija:

$$G_1=\frac{1}{s+1},$$

$$G_2=\frac{1}{s+2},$$

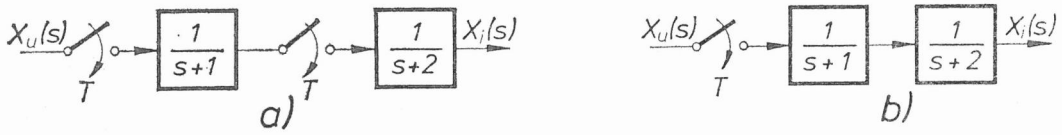
koje dobijemo iz tablice 11—2:

$$G_1(z)=\frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$G_2(z)=\frac{z}{z-e^{-2T}},$$

a oni daju ukupnu impulsnu prijenosnu funkciju:

$$G(z)=G_1(z)\,G_2(z)=\frac{2z^2-z(e^{-T}+e^{-2T})}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}.$$



Sl. 11—9. Primjena algebre blokova u impulsnim sustavima — primjer 11.5

Promijenjeni blok-dijagram na sl. 11—9b zahtijeva da prijenosne funkcije $G_1(s)$ i $G_2(s)$ pomnožimo prije z-transformacije i odmah razvijemo u zbroj parcijalnih razlomaka:

$$G(s)=G_1(s)\,G_2(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}.$$

z-transformacijom i sažimanjem dobivamo izraz:

$$G(z)=G_1\,G_2(z)=\frac{z}{z-e^{-T}}-\frac{z}{z-e^{-2T}}=\frac{z(e^{-T}-e^{-2T})}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})},$$

koji se bitno razlikuje od izraza za blok-dijagram na sl. 11—9a.

Metodu algebre blokova možemo upotrijebiti i za **zatvoreni krug.** Međutim, uz više impulsnih modulatora analiza je znatno zamršenija, pa se blok-dijagrami sažimaju samo kod jednostavnijih sustava. Kao što ćemo odmah vidjeti, izlazna funkcija ovisi i o položaju impulsnog modulatora unutar regulacijske petlje.

Uzmimo kao prvi primjer zatvoreni impulsni sustav na sl. 11—10a, gdje se tastira regulacijsko odstupanje $E(s)$. Možemo napisati slijedeće jednadžbe:

$$X_i(s)=G_1(s)\,E^*(s), \tag{11-61}$$

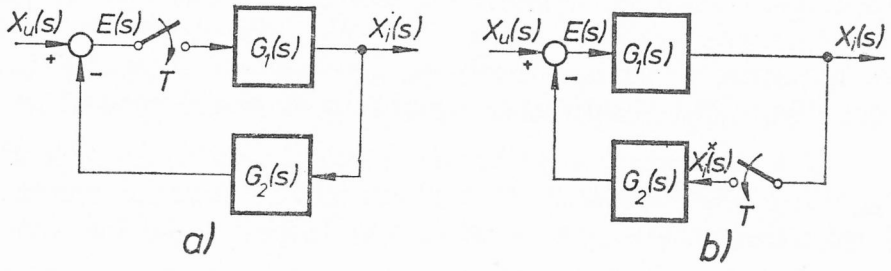
$$E(s)=X_u(s)-G_1(s)\,G_2(s)\,E^*(s).$$

Izlučivanje varijable $E(s)$ nije moguće izravno jer se pojavljuju i oblik $E(s)$ i oblik $E^*(s)$. Zato drugu jednadžbu moramo impulsno transformirati:

$$E^*(s)=X_u^*(s)-[G_1(s)\,G_2(s)]^*\,E^*(s). \tag{11-62}$$

Sada izlučivanjem $E^*(s)$ i sređivanjem možemo dobiti odnos između izlazne i ulazne varijable:

$$X_i(s)=\frac{G_1(s)}{1+[G_1(s)\,G_2(s)]^*}\,X_u^*(s). \tag{11-63}$$



Sl. 11—10. Primjena algebre blokova na zatvoreni impulsni regulacijski sustav

To je izraz za kontinuiranu izlaznu veličinu kao funkciju od $X_u^*(s)$. Želimo li dobiti vrijednosti u trenucima otipkavanja, primijenit ćemo impulsnu transformaciju:

$$X_i^*(s)=\frac{G_1^*(s)}{1+[G_1(s)\,G_2(s)]^*}\,X_u^*(s), \qquad (11\text{-}64)$$

što možemo pisati i u z-području:

$$X_i(z)=\frac{G_1(z)}{1+G_1\,G_2(z)}\,X_u(z) \qquad (11\text{-}65)$$

Napomenimo da u tom slučaju — kad je **impulsni modulator u izravnoj grani** — možemo dobiti impulsnu prijenosnu funkciju.

Drugi je primjer zatvoreni impulsni sustav na sl. 11—10b, gdje se tastira izlazna varijabla $X_i(s)$. Postavljamo slijedeće jednadžbe:

$$X_i(s)=G_1(s)\,E(s), \qquad (11\text{-}66)$$

$$E(s)=X_u(s)-G_2(s)\,X_i^*(s).$$

Ovdje možemo izlučiti $E(s)$:

$$X_i(s)=G_1(s)\,X_u(s)-G_1(s)\,G_2(s)\,X_i^*(s). \qquad (11\text{-}67)$$

Izraz impulsno transformiramo:

$$X_i^*(s)=[G_1(s)\,X_u(s)]^*-[G_1(s)\,G_2(s)]\,X_i^*(s). \qquad (11\text{-}68)$$

i riješimo po $X_i^*(s)$:

$$X_i^*(s)=\frac{[G_1(s)\,X_u(s)]^*}{1+G_1(s)\,G_2(s)]^*}. \qquad (11\text{-}69)$$

To je vrijednost transformirane izlazne funkcije u trenucima otipkavanja. Gornju jednadžbu možemo prikazati i kao funkciju od z:

$$X_i(z)=\frac{G_1\,X_u(z)}{1+G_1\,G_2(z)}. \qquad (11\text{-}70)$$

Želimo li vrijednost kontinuirane izlazne funkcije dobiti u transformiranom obliku, moramo primijeniti Laplaceovu transformaciju. Izraz (11-69) uvrstimo u jednadžbu (11-67):

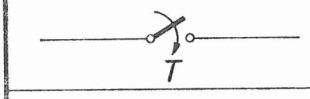
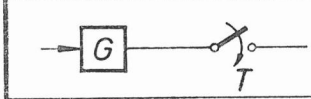
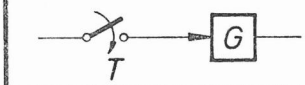
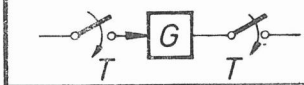
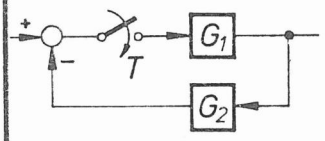
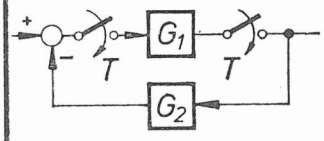
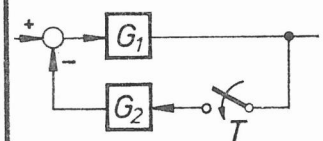
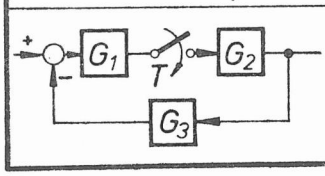
$$X_i(s)=G_1(s)\,X_u(s)-G_1(s)\,G_2(s)\,\frac{[G_1(s)\,X_u(s)]^*}{1+[G_1(s)\,G_2(s)]^*}. \qquad (11\text{-}71)$$

Izraz $X_i(s)$ ovdje se razlikuje od izraza (11—63). Ulaznu funkciju $X_u(s)$, odnosno $X_u(z)$, s desne strane jednadžbe (11—69) ili jednadžbe (11—70) ne možemo odijeliti, pa impulsnu prijenosnu funkciju ne možemo ni postaviti. Primijetimo još da je sada **impulsni modulator smješten u grani povratne veze.**

Ova dva primjera prikazuju metodu sažimanja blok-dijagrama u impulsnim regulacijskim sustavima. U svakom slučaju najprije moramo izvesti jednadžbe s impulsnim varijablama, a tek zatim izvršiti impulsnu transformaciju.

U tablici 11—3 skupljeni su u preglednom obliku neki osnovni blok-dijagrami i odgovarajući s- i z-transformati izlazne varijable. Lako je uočiti u kojim se slučajevima ne mogu dobiti impulsne prijenosne funkcije.

Tablica 11—3. z-transformacija osnovnih impulsnih krugova[1]

SUSTAV	LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA IZLAZA $X_i(s)$ ILI $X_i^*(s)$	Z-TRANSFORMACIJA IZLAZA $X_i(z)$
	$X_u^*(s)$	$X_u(z)$
	$GX_u^*(s)$	$GX_u(z)$
	$G(s)X_u^*(s)$	$G(z)X_u(z)$
	$G^*(s)X_u^*(s)$	$G(z)X_u(z)$
	$\dfrac{G_1(s)X_u^*(s)}{1+G_1G_2^*(s)}$	$\dfrac{G_1(z)X_u(z)}{1+G_1G_2(z)}$
	$\dfrac{G_1^*(s)X_u^*(s)}{1+G_1^*(s)G_2^*(s)}$	$\dfrac{G_1(z)X_u(z)}{1+G_1(z)G_2(z)}$
	$G_1(s)\left[X_u(s)-\dfrac{G_2(s)X_uG_1^*(s)}{1+G_1G_2^*(s)}\right]$	$\dfrac{G_1X_u(z)}{1+G_1G_2(z)}$
	$\dfrac{G_2(s)X_uG_1^*(s)}{1+G_1G_2G_3^*(s)}$	$\dfrac{G_2(z)G_1X_u(z)}{1+G_1G_2G_3(z)}$

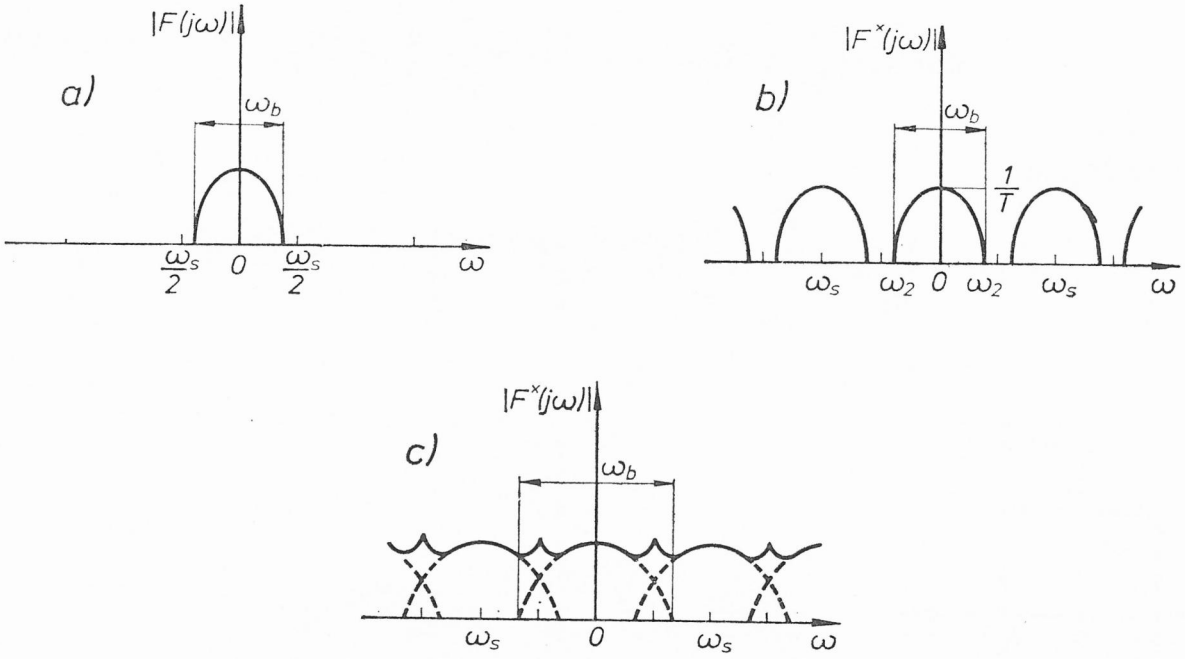
[1] Prema Ragazzini, J. R., Zadeh, L. A.: The Analysis of Sampled-data Systems. Trans. AIEE, Vol. 71, Part II, 1952, str. 225—334.

11.3. Izglađivanje impulsnog niza

U odjeljku 11.1. opisali smo kako se iz kontinuiranog signala pomoću impulsnog modulatora oblikuje impulsni signal. Nije uputno da se takav isprekidani signal pojavi na izlazu i da djeluje na postavni pogon kao što je npr. elektromotor. Može naime doći do impulsnih udara, a mnoštvo viših harmonika unosi dodatne smetnje. Zato se impulsni niz treba da izgladi, tako da ostane samo obvojnica, tj. kontinuirani signal koji je sličan ulaznom kontinuiranom signalu. To je poznato filtarsko djelovanje, gdje se propuštaju samo niske frekvencije sadržane u ulaznom signalu, a prigušuju se svi viši harmonici. Iako mnogi sklopovi u regulacijskom sustavu posjeduju svojstvo niskopropusnih filtara, ipak je djelovanje impulsnog sustava bolje ako dodamo zaseban filtar. Takav sklop zapravo vrši **digitalno-analognu pretvorbu,** i u daljnjem tekstu zvat ćemo ga **impulsni formator.** Da bi razumjeli djelovanje filtara, moramo sagledati i frekvencijski sadržaj impulsnog niza.

11.3.1. Frekvencijski sadržaj impulsnog niza

Iz rasprave u vezi s jednadžbom (11—15) proizlazi da otipkavanje stvara neizmjerno velik broj frekvencijskih pojaseva koji se pojavljuju uz tzv. primarni frekvencijski pojas kontinuirane funkcije. Sl. 11—6 može se prema tome prikazati i u frekvencijskom dijagramu na sl. 11—11. Dok je na sl. 11—11a prikazan frekvencijski pojas ω_b kontinuiranog ulaznog signala $|F(j\omega)|$, kojeg je širina u granicama od $-\omega_2$ do ω_2, dotle se kod tastiranog signala $|F^*(j\omega)|$ ta širina pojasa periodski ponavlja prema sl. 11—11b. Iz jednadžbe (11—11) proizlazi da je sada svaka komponenta izlaznog signala $|F^*(j\omega)|$ samo $1/T$ dio odgovarajuće ulazne komponente. Da bi



Sl. 11—11. Frekvencijski dijagram kontinuiranog signala (a), otipkanog signala uz $\omega_s > 2\omega_2$ (b), te otipkanog signala uz $\omega_s < 2\omega_2$ (c)

se ulazni signal vjerno prenio, potrebno je da filtarski sklop izluči samo frekvencijski pojas širine ω_b, a da se sve više frekvencije potisnu.

Opisano filtarsko djelovanje vrijedi uz pretpostavku da je $\omega_s \geqslant 2\omega_2$, tj. da je frekvencija otipkavanja ω_s veća od dvostruke najviše frekvencijske komponente ω_2 kontinuiranog signala. Ako taj uvjet nije ispunjen, već je $\omega_s < 2\omega_2$, dolazi prema sl. 11—11c do preklapanja frekvencijskih pojaseva koji prenose informaciju: filtarsko djelovanje više ne može vjerno reproducirati prvobitan signal. U tome je i bit jedne od osnovnih postavki iz teorije informacija: **Shannonov teorem** kazuje da se kontinuirana funkcija ograničenog frekvencijskog pojasa $-\omega_2 \leqslant \omega \leqslant \omega_2$ može nakon otipkavanja frekvencijom ω_s ponovno uspostaviti bez izobličenja, ako vrijedi uvjet da je $\omega_s \geqslant 2\omega_2$.

U praksi obično odabiremo mnogo veću frekvenciju otipkavanja ω_s od dvostruko najviše značajne frekvencije prenesenog signala, čime osiguravamo jednostavniju izvedbu filtarskih sklopova. Međutim, kao što ćemo odmah vidjeti, dobro filtarsko djelovanje nepovoljno utječe na stabilnost impulsnog regulacijskog sustava jer unosi veliko fazno zaostajanje u blizini graničnih frekvencija $\pm\omega_s/2$. Zato je projektiranje filtarskog sklopa kompromis između ispravnog filtarskog djelovanja i stabilnog rada impulsnog regulacijskog kruga.

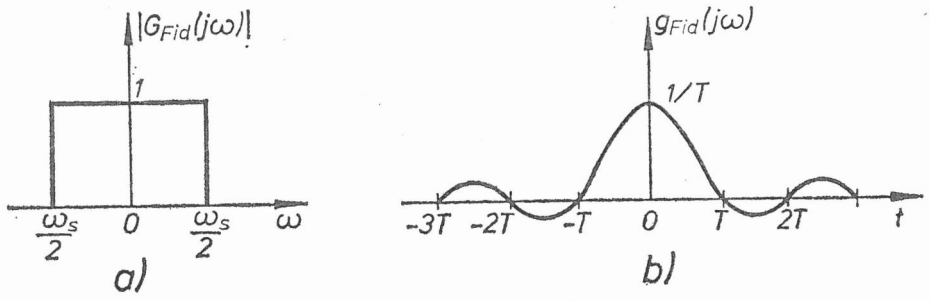
11.3.2. Impulsni formator

Idealan impulsni formator koji bi izlučio frekvencijski pojas bez izobličenja imao bi frekvencijsku karakteristiku $|G_{Fid}(j\omega)|$ kao na sl. 11-12a. Nažalost, takav idealan filtar ne može se fizikalno ostvariti, što vidimo iz slijedećeg izvoda. Obratna Fourierova transformacija funkcije $G_{Fid}(j\omega)$ (v. odjeljak 15.2) daje impulsni vremenski odziv $g_{Fid}(t)$ koji smo u odjeljku 4.3. uveli kao težinsku funkciju:

$$g_{Fid}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{Fid}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{j\omega t}\, d\omega, \qquad (11\text{-}72)$$

što dalje daje:

$$g_{Fid}(t) = \frac{1}{2\pi jt}\, e^{j\omega t}\Big|_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} = \frac{1}{\pi t}\left[\frac{e^{j\omega_s t/2} - e^{-j\omega_s t/2}}{2j}\right] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega_s t/2)}{t}. \qquad (11\text{-}73)$$

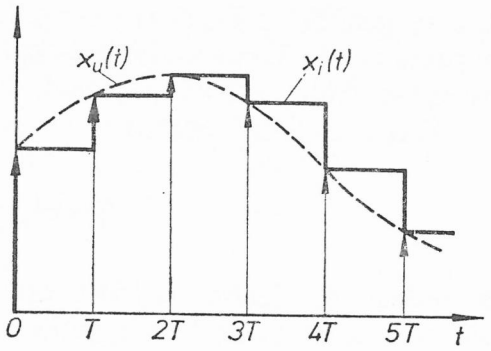


Sl. 11—12. Idealan impulsni formator frekvencijski dijagram (a) i impulsni vremenski odziv (b)

Primjenom relacije $\omega_s=2\pi/T$ u nazivniku, gornji izraz preuređujemo:

$$g_{Fid}(t)=\frac{1}{T}\cdot\frac{\sin(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2}. \tag{11-74}$$

Ovaj impulsni vremenski odziv prikazan je na sl. 11—12b. Vidimo da bi jedinični impuls $\delta(t)$ na ulazu u trenutku $t=0$ izazvao odziv još od trenutka $t=-\infty$, tj. davno prije nego što je bio narinut na ulazu. Zato se idealan filtar i ne može fizikalno ostvariti.



Sl. 11—13. Vremenski dijagram impulsnog formatora nultoga reda

Najčešća praktična izvedba filtra jest **impulsni formator nultoga reda** koji drži, tj. »pamti« amplitudu od jednog trenutka otipkavanja do slijedećeg. Ako su amplitude u točkama otipkavanja $x_u(nT)$, možemo na temelju sl. 11—13 izraziti izlaznu funkciju formatora nultoga reda:

$$x_i(t)=x_u(0)\,[u(t)-u(t-T)]+x_u(T)\,[u(t-T)-u(t-2T)]+\ldots$$
$$\ldots+x_u(2T)\,[u(t-2T)-u(t-3T)]+\ldots \tag{11-75}$$

Kod transformacije u s-područje:

$$X_i(s)=x(0)\frac{1-e^{-Ts}}{s}+x_u(T)\frac{e^{-Ts}-e^{-2Ts}}{s}+\ldots x_u(2T)\frac{e^{-2Ts}-e^{-3Ts}}{s}+\ldots, \tag{11-76}$$

polazimo od činjenice da su vrijednosti $x_u(nT)$ konstantne u trenucima otipkavanja nT. Dalje imamo:

$$X_i(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,[x_u(0)+x_u(T)\,e^{-Ts}+x_u(2T)\,e^{-2Ts}+\ldots]=$$
$$=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,X_u^*(s), \tag{11-77}$$

pri čemu smo — primijenivši izraz (11-7) — polinom u zagradi s desne strane zamijenili transformiranom ulaznom funkcijom impulsnog niza $X_u^*(s)$. Na temelju toga možemo napisati prijenosnu funkciju impulsnog formatora nultoga reda:

$$G_{F0}(s)=\frac{X_i(s)}{X_u^*(s)}=\frac{1}{s}(1-e^{-Ts}). \tag{11-78}$$

Zamjenom s sa $j\omega$ dobivamo odgovarajuću sinusnu prijenosnu funkciju:

$$G_{F0}(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}=\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{j\omega}e^{-j\omega T/2}=T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}e^{-j\omega T/2}. \tag{11-79}$$

Odatle je amplituda frekvencijskog odziva:

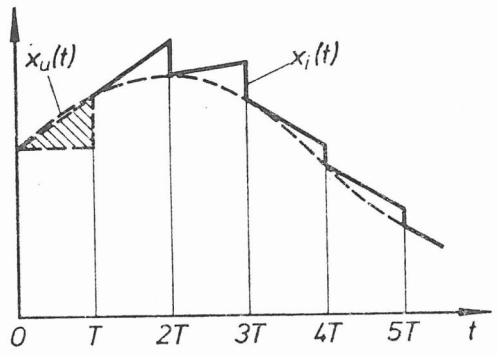
$$|G_{F0}(j\omega)|=T\frac{|\sin(\omega T/2)|}{\omega T/2} \quad \text{za} \quad \omega\geqslant 0, \tag{11-80}$$

koja je grafički prikazana na tablici 11—4. Ovaj formator unosi izobličenje, jer se ne prenose sve frekvencije jednako, a osim toga djelomično se propuštaju i komplementarni frekvencijski pojasevi.

Kako je fazni pomak:

$$\underline{/G_{F0}(j\omega)}=-\frac{\omega T}{2}=-\frac{\pi\omega}{\omega_s}, \tag{11-81}$$

uz $\omega=\omega_s$ on iznosi $-180°$, što pridonosi nestabilnosti pri toj frekvenciji. Uz $\omega_s\gg\omega$— a to je kod polaganih promjena ulaznog kontinuiranog signala—, fazni je pomak mnogo manji, pa su i kašnjenja mnogo manje kritična za stabilan rad sustava.



Sl. 11—14. Vremenski dijagram impulsnog formatora prvoga reda

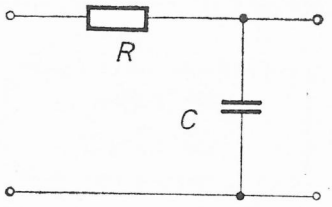
Bolje filtarsko djelovanje ima **impulsni formator prvoga reda.** Prema sl. 11—14, taj filtar »pamti« amplitude dvaju prethodnih impulsa, a pravac koji ih povezuje ekstrapolira do slijedećeg otipkavanja. U području $nT<t<(n+1)\,T$ vrijedi jednadžba pravca:

$$x_i(t)=x_u(nT)+x_u'(nT)(t-nT)=x_u(nT)+$$

$$+\frac{x_u(nT)-x_u[(n-1)\,T]}{T}(t-nT). \tag{11-82}$$

gdje je $x_u'(nT)$ nagib pravca. Nastavljajući analizu kao i kod impulsnog formatora nultoga reda, dobivamo prijenosnu funkciju impulsnog formatora prvoga reda:

$$G_{F1}(s)=\frac{X_i(s)}{X_u^*(s)}=\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}\right](1-e^{-Ts}). \tag{11-83}$$



Sl. 11—15. Električna shema eksponencijalnoga impulsnoga formatora

Amplitudno-frekvencijska karakteristika tog filtra prikazana je također u tablici 11—4. Filtarsko djelovanje je sada bolje, ali iz prijenosne funkcije vidimo da izvedba mora biti mnogo složenija negoli kod impulsnog formatora nultoga reda.

Jedna je od najjednostavnijih izvedbi **eksponencijalni impulsni formator.** Električna mu je shema dana na sl. 11—15. Ako uzmemo mali period preklapanja T, možemo prijenosnu funkciju toga formatora $G_{Fex}(s)$ aproksimirati sa:

$$G_{Fex}(s)=\frac{X_i(s)}{X_u^*(s)}=\frac{1}{s}[1-e^{Ts}]=\frac{1}{s}\left[1-\frac{1}{e^{Ts}}\right]\simeq$$

$$\simeq\frac{1}{s}\left[1-\frac{1}{1+Ts}\right]=\frac{T}{1+Ts}. \qquad (11\text{-}84)$$

Amplitudno-frekvencijska karakteristika tog sklopa prikazana je opet u tablici 11—4. To je eksponencijalni pad u periodu tastiranja, dok u trenutku otipkavanja nastupa skokovita promjena koje je amplituda jednaka amplitudi impulsa, tj. površini impulsa. Takvo djelovanje ima jednostavan električni RC-član; isto djelovanje s kašnjenjem prvoga reda imaju mnogi regulacijski sklopovi.

Uz amplitudno-frekvencijske karakteristike nabrojenih impulsnih formatora, u tablici 11—4 dane su u preglednom obliku i izlazne funkcije svakog pojedinog formatora uz pobudu u obliku proizvoljne funkcije vremena.

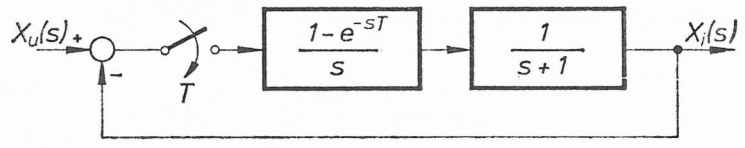
Primjer 11.6. Nakon što smo opisali i analizirali dva osnovna sklopa impulsnog sustava — impulsni modulator i formator — možemo pomoću algebre blokova prići analizi impulsnih regulacijskih krugova. To ćemo pokazati na jednostavnom primjeru impulsnog regulacijskog kruga s jediničnom povratnom vezom prema sl. 11—16. Uz narinuti jediničan odskok na ulazu $u(t)$ traži se vrijednost izlazne funkcije u trenucima otipkavanja 0, T, $2T$, ...

Prema izrazu (11—21), jedinični odskok na ulazu ima z-transformat:

$$\mathcal{Z}[u(t)]=X_u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{z}{z-1},$$

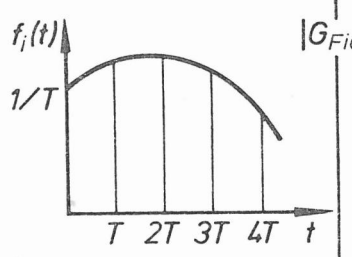
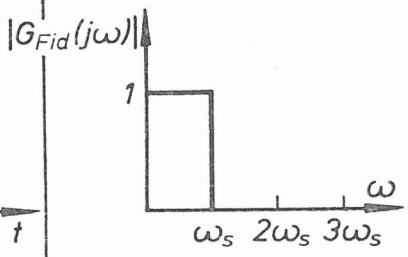
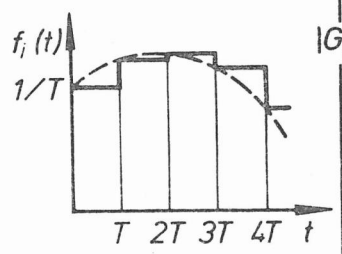
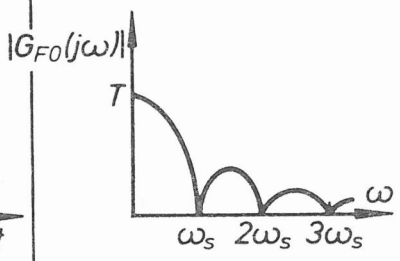
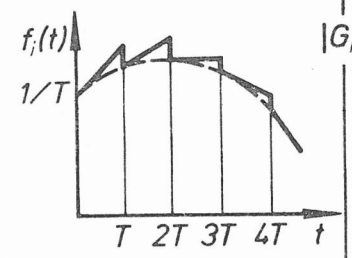
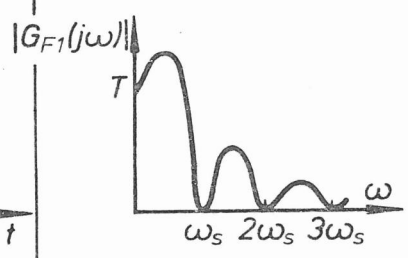
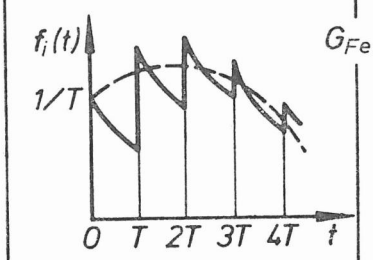
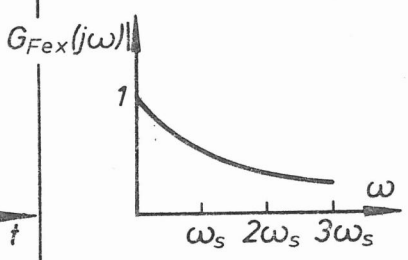
a impulsna je prijenosna funkcija formatora i linearnog člana u izravnoj grani:

$$\mathcal{Z}[G(s)]=G(z)=\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-s}}{s(s+1)}\right]=[1-z^{-1}]\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right],$$



Sl. 11—16. Impulsni regulacijski krug s jediničnom povratnom vezom—primjer 11.6.

Tablica 11—4. Vremenski i frekvencijski odziv impulsnih formatora

IMPULSNI FORMATOR	VREMENSKI ODZIV	AMPLITUDNO-FREKVENCIJSKA KARAKTERISTIKA
idealni		
nultoga reda		
prvoga reda		
eksponencijalni		

što daje brojčanu vrijednost:

$$G(z)=(1-z^{-1})\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-0{,}368}\right]=\frac{0{,}632}{z-0{,}368}.$$

Izlazna je veličina, prema jednadžbi (11-65):

$$X_i(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}\,X_u(z)=\frac{0{,}632z}{(z-1)(z+0{,}264)}.$$

Obratnu z-transformaciju možemo izvesti pomoću bilo koje od triju metoda spomenutih u odjeljku 11.2. Prema metodi divizije dobivamo:

$$X_i(z)=\frac{0{,}632\,z}{z^2-0{,}736z-0{,}264}=0{,}632z^{-1}+0{,}465z^{-2}+0{,}511z^{-3}+\ldots$$

Odatle možemo prema jednadžbi (3-47) naći vrijednosti izlazne vremenske funkcije u trenucima otipkavanja.

$$x_i(0)=0,$$
$$x_i(T)=0{,}632,$$
$$x_i(2T)=0{,}465,$$
$$x_i(3T)=0{,}511.$$

Pomoću metode parcijalnih razlomaka možemo pisati:

$$\frac{x_i(z)}{z}=\frac{0{,}632}{(z-1)(z+0{,}264)}=\frac{0{,}5}{z-1}-\frac{0{,}5}{z+0{,}264},$$

i dalje:

$$X_i(z)=\frac{0{,}5z}{z-1}-\frac{0{,}5z}{z+0{,}264}.$$

Iz tablice 11-1, odnosno pomoću jednadžbe (11-52) dobivamo:

$$x_i(nT)=0{,}5-0{,}5\,(-0{,}264)^n \quad \text{za} \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

što, naravno, daje iste rezultate kao i metoda divizije. Ipak, ta je jednadžba u zatvorenom obliku. Kad $n\to\infty$, poprima $x_i(nT)$ vrijednost od $x_i(\infty)=0{,}5$, što je ujedno i trajno regulacijsko odstupanje u trenucima otipkavanja uz jedinični odskok na ulazu.

11.4. Analiza impulsnih regulacijskih sustava

U analizi i sintezi impulsnih regulacijskih sustava možemo u načelu primijeniti sve metode koje smo primijenili i kod kontinuiranih regulacijskih sustava. Obrađujući problem ispitivanja stabilnosti sustava, opisat ćemo Routhov i Nyquistov kriterij u donekle prilagođenom obliku. Možemo dakako očekivati da će uz već poznate parametre sustava važnu ulogu u određivanju stabilnosti imati frekvencija otipkavanja ω_s.

11.4.1. Točnost regulacije

Kod impulsnih sustava problemu točnosti prilazimo na sličan način kao i kod kontinuiranih sustava (v. odjeljak 8.2), s tim da uvodimo pojam koeficijenata greške. Uzimamo kao primjer jednostavan impulsni regulacijski krug prema sl. 11—10a; regulacijsko je odstupanje dano slijedećom relacijom:

$$E(z)=\frac{X_u(z)}{1+G_1G_2(z)}. \qquad (11\text{-}85)$$

Pomoću teorema konačne vrijednosti iz tablice 11—2 možemo dobiti izraz za trajno regulacijsko odstupanje $e_0^*(t)$. Ako imamo jedinični odskok na ulazu, kojeg je z-transformat $X_u(z)=z/(z-1)$, dobit ćemo:

$$e_0^*(t)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{z/(z-1)}{1+G_1G_2(z)}\right]=\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{1+G_1G_2(z)}\right]. \tag{11-86}$$

Uz ulaznu funkciju u obliku nagibne funkcije $X_u(z)=Tz/(z-1)^2$ imamo:

$$e_0^*(t)=\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{G_1G_2(z)\,(z-1)/T}\right], \tag{11-87}$$

a uz parabolnu funkciju $X_u(z)=Tz\,(z+1)\,/z\,(z-1)^3$ na ulazu:

$$e_0^*(t)=\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{G_1G_2(z)\,(z-1)^2/T}\right]. \tag{11-88}$$

Na temelju te tri jednadžbe možemo postaviti koeficijente položajne greške, brzinske greške i greške ubrzanja:

$$\begin{aligned} K_p&=\lim_{z\to 1}\,[G_1G_2\,(z)],\\ K_v&=\frac{1}{T}\lim_{z\to 1}[(z-1)\,G_1G_2\,(z)],\\ K_a&=\frac{1}{T}\lim_{z\to 1}\,[(z-1)^2\,G_1G_2\,(z)], \end{aligned} \tag{11-89}$$

koji imaju isto značenje kao i kod kontinuiranih sustava.

11.4.2. Stabilnost regulacije

Pri slaganju impulsnih sklopova u zatvoreni regulacijski krug pomoću algebre blokova vidjeli smo da nije uvijek moguće izvesti impulsnu prijenosnu funkciju. Međutim, iz tablice 11—3 proizlazi da je — bez obzira na sustav — nazivnik izlazne funkcije, odnosno karakteristična jednadžba sustava, **uvijek nezavisna od ulazne funkcije.** Prema tome, impulsni su sustavi u biti linearni, pa ispitivanje stabilnosti takvog sustava ovisi samo o sustavu, a ne i pobudnoj funkciji.

Karakteristična jednadžba sustava dana je s jednim od slijedeća dva s- ili z--transformata:

$$\begin{aligned} &1+G_1^*(s)\,G_2^*(s)=0 \text{ ili } 1+G_1(z)\,G_2(z)=0,\\ &1+G_1G_2^*(s)=0 \qquad \text{ili } 1+G_1G_2(z)=0. \end{aligned} \tag{11-90}$$

Karakteristična jednadžba ima dakle oblik:

$$F(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i=0, \tag{11-91}$$

pa su njezini korijeni polovi sustava. Na osnovi izraza $z=e^{Ts}$, i na osnovi preslikavanja iz s- u z-ravninu proizlazi da je uvjet stabilnosti da svi korijeni z-transformirane karakteristične jednadžbe moraju ležati unutar jediničnog kruga u z-ravnini, tj. mora vrijediti $|z_i|<1$. Kao i kod kontinuiranih regulacijskih sustava, i ovdje nastojimo zaobići mukotrpno i složeno izračunavanje korijena.

Routhov kriterij stabilnosti. Izravna primjena svakog analitičkog kriterija nailazi ovdje na osnovnu poteškoću što je karakteristična jednadžba (11—86) transcendentna funkcija od s. Druga je mogućnost da se ispita položaj korijena karakteristične jednadžbe izvan jediničnog kruga u z-ravnini. I doista, E. I. Jury postavio je odgovarajući kriterij koji je analogan Routhovu kriteriju [lit. 24, 55]. Prikladno je rješenje međutim upotreba tzv. **bilinearne transformacije** pomoću koje se unutrašnjost jediničnog kruga u z-ravnini konformno preslikava na lijevu polovinu nove w-ravnine. Nova varijabla w u transformaciji povezana je s varijablom z na slijedeći način:

$$w=\frac{z-1}{z+1}, \qquad z=\frac{1+w}{1-w}. \tag{11-92}$$

Uvrštenjem izraza za z u jednadžbu (11-86) dobivamo:

$$a_n\left[\frac{1+w}{1-w}\right]^n+a_{n-1}\left[\frac{1+w}{1-w}\right]^{n-1}+\ldots+a_1\left[\frac{1+w}{1-w}\right]+a_0=0, \tag{11-93}$$

odnosno u sređenom obliku:

$$a_n w^n+a_{n-1} w^{n-1}+\ldots+a_1 w+a_0=0. \tag{11-94}$$

U w-ravnini možemo Routhov kriterij primijeniti izravno, jer on pokazuje da postoji korijen s desne strane ravnine. I Juryjev kriterij, kao i Routhov, zahtijevaju dugotrajne proračune; možemo ipak upozoriti da se pomoću pogodnih programa na digitalnom računalu to bitno pojednostavnjuje.

Primjer 11.7. Impulsna prijenosna funkcija neka je dana izrazom:

$$G(z)=\frac{B(z)}{N(z)}=\frac{z^2+5z+4}{z^3-2z^2+z+3}.$$

Uvrštenjem u nazivnik izraza za z iz jednadžbe (11-92) dobivamo karakterističnu jednadžbu kao funkciju od w:

$$N(w)=\left[\frac{1+w}{1-w}\right]^3-2\left[\frac{1+w}{1-w}\right]^2+\left[\frac{1+w}{1-w}\right]+3,$$

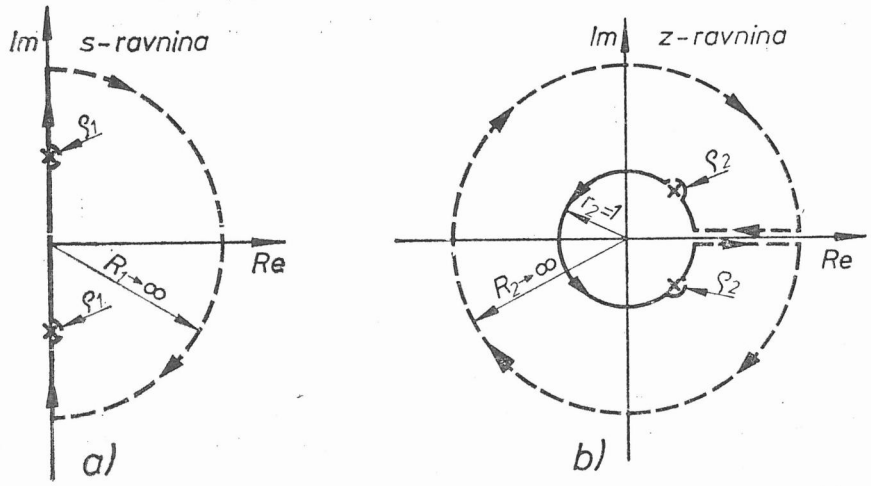
koju pomnožimo i pojednostavnimo:

$$N(\omega)=\frac{\omega^3+13\omega^3-9w+3}{(1-w)^3}.$$

Routhov raspored prema jednadžbi (8—69) glasi:

R_3	1	−9
R_2	13	3
R_1	$-\frac{120}{13}$	
R_0	3	

Dvostruka promjena predznaka u prvom stupcu pokazuje da postoje dva korijena s desne strane imaginarne osi u w-ravnini; sustav je nestabilan.



Sl. 11—17. Konformno preslikavanje desne polovine s-ravnine (a) u površinu izvan jedinične kružnice u z-ravnini (b)

Nyquistov kriterij stabilnosti. Preslikavanjem desne polovine s-ravnine u z-ravninu prema sl. 11—17, dobivamo u z-ravnini površinu omeđenu kružnicama kojih su polumjeri $r_2=1$ i $R_2\to\infty$. Polovi koji se nalaze na imaginarnoj osi u s-ravnini preslikavaju se na jediničnu kružnicu u z-ravnini. U skladu s raspravom u odjeljku 8.3, ti se polovi mogu isključiti iz zatvorene konture desne polovine s-ravnine sa zaobilaznim polukružnicama polumjera $\rho_1\to 0$ prikazanim na sl. 11-17a; to se preslikava u z-ravnini na polukružnicu polumjera ρ_2 koja se nalazi izvan jedinične kružnice na sl. 11—17b.

Dalje postupak teče analogno postupku za kontinuirane sustave, samo što moramo uzeti u obzir da je zbog periodskog karaktera $F^*(s)$ funkcije dovoljno preslikati samo primarni pojas od 0 do $j\omega_s/2$ da bismo provjerili zaokruživanje kritične točke $(-1+j0)$.

Kako se varijabla z mijenja u z-ravnini, tako se ta promjena preslikava na funkciju $G_0(z)$ u $G_0(z)$-ravnini. Svakoj nultočki od $G_0(z)$ koja se nalazi izvan jediničnog kruga u z-ravnini odgovara kutni zakret za 2π u smislu gibanja kazaljke na satu u $G_0(z)$-ravnini. Obratno, svakom polu od $G_0(z)$ u z-ravnini odgovara kutni zakret od -2π u smislu suprotnom od gibanja kazaljke na satu u $G_0(z)$-ravnini.

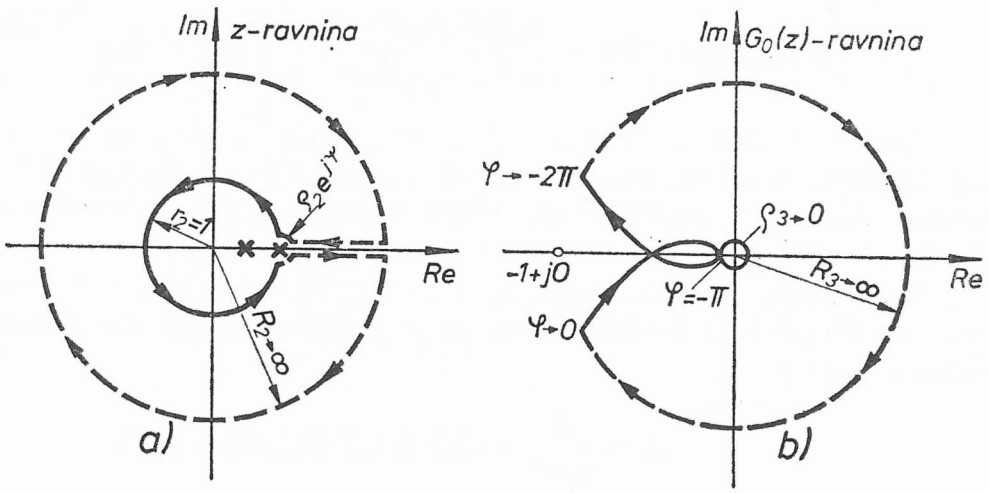
Pomakom ishodišta u točku $(-1+j0)$ u $G_0(z)$-ravnini, dobivamo zakretanje verzora $1+G_0(z)$ oko točke $(-1+j0)$. Opet je to kritična točka! Ako je N_p broj

polova, a N_n broj nultočaka izvan jedinične kružnice sa središtem u $(-1+j0)$ u $G_0(z)$-ravnini, slijedi poznati uvjet stabilnosti:

$$N=N_n-N_p. \tag{11-95}$$

Da bi sustav bio stabilan, mora biti broj nultočaka $N_n=0$. Da bi to saznali, moramo ustanoviti broj punih zaokruženja N kritične točke $(-1+j0)$ kao i broj polova N_p. Ako je $N_p=0$ — kao što je to normalno slučaj — proizlazi iz jednadžbe (11-95) da N_n odgovara N.

Nyquistov kriterij možemo primijeniti izravno i u z-ravnini, samo mijenjamo nezavisnu varijablu z duž jedinične kružnice. To ćemo osvijetliti na konkretnom primjeru.



Sl. 11—18. Određivanje stabilnosti pomoću Nyquistova kriterija za impulsne regulacijske sustave — primjer 11.8

Primjer 11.8. Uzimamo opet jednostavnu impulsnu prijenosnu funkciju otvorenog kruga sa $T=1\text{s}$:

$$G_0(s)=G_1G_2(s)=\frac{2(1-e^{-Ts})}{s^2(s+1)}=\frac{0{,}736(1-e^{-s})}{s^2(s+1)}.$$

z-transformat glasi:

$$G_0(z)=G_1G_2(z)=\frac{0{,}736(z+0{,}716)}{(z-1)(z-0{,}368)}.$$

Budući da polova od $G_0(z)$ nema izvan jediničnog kruga, onda je $N_p=0$. Na sl. 11—18a prikazana je još jednom Nyquistova kontura u z-ravnini, gdje se pomoću male polukružnice na jediničnoj kružnici izbjegava pol $z=1$.

Jediničnu kružnicu ćemo preslikati na taj način da u jednadžbu za $G_0(z)$ uvrstimo $z=r_2e^{j\varphi}=e^{j\varphi}$:

$$G_0(z)=\frac{0{,}736(e^{j\varphi}+0{,}716)}{(e^{j\varphi}-1)(e^{j\varphi}-0{,}368)}$$

i mijenjamo kut φ od 0 do 2π. Dobit ćemo u $G_0(z)$-ravnini na sl. 11—18b preslikanu krivulju prikazanu izvučenom linijom[1].

[1] Točke za $\varphi=0$ i $\varphi=2\pi$ isključene su zbog pola $z=1$.

U okolišu pola $z=1$ možemo staviti $z=1+\rho_2 e^{j\psi}$ pri čemu $\rho_2 \to 0$, pa izlazi:

$$\lim_{\rho_2 \to 0} G_0(z) = \lim_{\rho_2 \to 0} \frac{0{,}736\,(1{,}716+\rho_2 e^{j\psi})}{\rho_2 e^{j\psi}(\rho_2 e^{j\psi}+0{,}632)} \simeq \lim_{\rho_2 \to 0} \frac{0{,}716 \cdot 1{,}736}{0{,}632 \rho_2 e^{j\psi}}.$$

Promjenom kuta ψ od $-\pi/2$ do $\pi/2$ dobivamo na sl. 11—18b preslikanu krivulju s polumjerom $R_3 \to \infty$, prikazanu isprekidanom linijom.

Konačno, dio Nyquistove konture polumjera $R_2 \to \infty$ preslikavamo u $G_0(z)$-ravninu na slijedeći način. Stavimo:

$$z = R_2 e^{j\psi},$$

gdje $R_2 \to \infty$, u jednadžbu za $G_0(z)$:

$$\lim_{R_2 \to \infty} G_0(z) = \lim_{R_2 \to \infty} \frac{0{,}736\,(R_2 e^{j\varphi}+0{,}716)}{(R_2 e^{j\varphi}-1)\,(R_2 e^{j\varphi}-0{,}368)} = \lim_{R_2 \to \infty} \frac{0{,}736 e^{-j\varphi}}{R_2}$$

Promjenom kuta φ od 0 do -2π, verzor $G_0(z)$ opisuje infinitezimalnu kružnicu oko ishodišta u $G_0(z)$-ravnini, odnosno u graničnom slučaju se kružnica s polumjerom $R_2 \to \infty$ u z-ravnini preslikava u jednu točku u ishodištu $G_0(z)$-ravnine na sl. 11—18b.

Kako nema zaokruživanja točke $(-1+j0)$, onda je $N=0$. Nadalje je i $N_p=0$ i za $G_0(z)$ i za $1+G_0(z)=0$, pa je sustav stabilan. Amplitudna rezerva stabilnosti iznosi:

$$A_r = \frac{1}{0{,}45} = 2{,}22 \text{ ili } 6{,}9 \text{ dB za } \varphi = 180°.$$

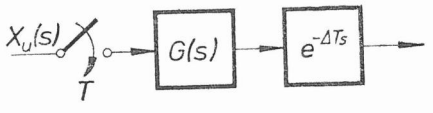
Dodavanjem pojačivačkog sklopa s pojačanjem $K_P=2{,}22$ u impulsni regulacijski krug došli bismo do granice stabilnosti.

Analizu u frekvencijskom području možemo proširiti i na Bodeove prikaze i Nicholsove karte.

11.5. Modificirana z-transformacija

Kao što smo spomenuli u odjeljku 11.2, z-transformacija daje podatke o vrijednosti izlazne funkcije samo u trenucima otipkavanja. Pouzdanost analize zahtijeva da odredimo tok izlaznog signala i između trenutaka otipkavanja, naročito kad je frekvencija otipkavanja ω_s niska. Postoji čak i mogućnost da se pojavljuju prikrivene oscilacije sustava s frekvencijom koja je jednaka frekvenciji otipkavanja, a da tok funkcije u trenucima otipkavanja daje sliku kao da je sustav stabilan.

Da bi se taj nedostatak izbjegao, R. H. Barker uveo je modificiranu z-transformaciju, ili kraće z_m-transformaciju[1]. Prema sl. 11—19, u seriju s impulsnim mo-



Sl. 11—19. Impulsni modulator u seriji sa zamišljenim sklopom za kašnjenje $e^{-\Delta Ts}$

[1] Barker, R. H., The Pulse Transfer Function and its Application to Sampling Servo Systems. Proc. IEE, Vol. 99, Part IV, 1952, str. 202—217.

dulatorom i prijenosnom funkcijom $G(s)$ uključen je zamišljeni sklop s kašnjenjem $e^{-\Delta Ts}$, tako da je izlazna funkcija pomaknuta za vremenski interval ΔT. Mijenjanjem kašnjenja u granicama $0 \leqslant \Delta \leqslant 1$, možemo odrediti vrijednost izlazne funkcije za bilo koji trenutak u intervalu otipkavanja. Umjesto s kašnjenjem $e^{-\Delta Ts}$, prikladnije nam je da radimo s hitanjem $e^{\Delta Ts}$ jer su nam izvodi jednostavniji.

Kao primjer modificirane z-transformacije uzimamo najprije jedinični odskok:

$$f(t)=u(t+\Delta T) \quad \text{za} \quad 0 \leqslant \Delta \leqslant 1 \tag{11-96}$$

koji transformiramo prema jednadžbi (11-17):

$$\mathcal{Z}[u(t-\Delta T)]=\sum_{n=0}^{\infty} u[(n+\Delta)T]\, z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} 1.\ z^{-n}, \tag{11-97}$$

što dalje daje:

$$\mathcal{Z}_m[u(t)]=z[u(t+\Delta T)]=1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots=\frac{1}{z-1}. \tag{11-98}$$

jer je $u[(n+\Delta)T]=1$ za $n \geqslant 0$. Vidimo da se modificirani z-transformat jediničnog odskoka ne razlikuje od z-transformata jediničnog odskoka prema izrazu (11-21) jer nije funkcija od Δ.

Bit modificirane z-transformacije vidi se u izvodu bilo koje druge funkcije, npr. eksponencijalne:

$$f(t)=e^{-a(t+\Delta T)} \quad \text{za} \quad 0 \leqslant \Delta \leqslant 1. \tag{11-99}$$

Transformacijom u z-područje:

$$\mathcal{Z}[e^{-a(t+\Delta T)}]=\sum_{n-0}^{\infty} e^{-a(n+\Delta)T} z^{-n}, \tag{11-100}$$

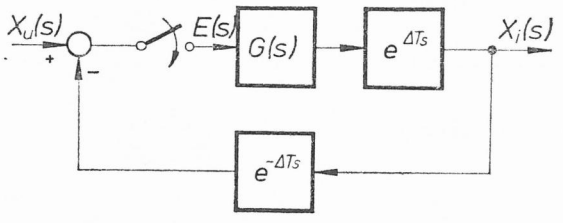
i dalje:

$$\mathcal{Z}_m[e^{-at}]=\mathcal{Z}[e^{-a(t+\Delta T)}]=e^{-a\Delta T}[1+e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}+\ldots]=$$

$$=e^{-a\Delta T}\frac{z}{z-e^{-aT}}. \tag{11-101}$$

Uz $\Delta=0$ prelazi ovaj izraz u jednadžbu (11-23), a uz $\alpha=0$ prelazi u transformat jediničnog odskoka (11-21). Tako je u načelu svaki z_m-transformat funkcija i od z i od Δ.

U tablici 11—5 sakupljene su neke osnovne korespondencije modificirane z-transformacije. Uz $\Delta=0$, ova tablica postaje identična tablica 11—1 (iznimka je dakako, transformat jediničnog odskoka).



S . 11—20. Impulsni regulacijski krug s dva za mišljena sklopa za kašnjenje $e^{\Delta Ts}$ i $e^{-\Delta Ts}$.

Kod impulsnog regulacijskog kruga s povratnom vezom moramo, prema sl. 11—20, u povratnu vezu uključiti zamišljeni sklop s prijenosnom funkcijom $e^{-\Delta Ts}$, tako da poništimo djelovanje isto tako zamišljenog člana $e^{\Delta Ts}$ u izravnoj vezi.

Da bismo dobili impulsnu prijenosnu funkciju čitavog sustava, primijenit ćemo algebru blokova. Prema prikazanim pravilima možemo pisati:

$$X_i(s, \Delta) = G(s, \Delta)\, E^*(s),$$
$$E(s) = X_u(s) - G(s)\, E^*(s), \tag{11-102}$$

Tablica 11—5. Modificirana z-transformacija funkcija

$f(t)$	$F(s)$	$F(z, \Delta)$
$\delta(t)$	1	0
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}[\Delta(z-1)+1]$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z}{2}\left[\frac{\Delta^2}{z-1}+\frac{2\Delta+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}\right]$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$z\frac{e^{-a\Delta T}}{z-e^{-aT}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z^2 \sin \Delta\omega T + z\sin(1-\Delta)\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z^2\cos\Delta\omega T - z\cos(1-\Delta)\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-a\Delta T}\frac{z^2\sin\Delta\omega T + ze^{-aT}\sin(1-\Delta)\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-a\Delta T}\frac{z^2\cos\Delta\omega T - ze^{-aT}\cos(1-\Delta)\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$\mathrm{sh}\,\beta t$	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$	$\frac{z^2\,\mathrm{sh}\,\Delta\beta T + z\,\mathrm{sh}(1-\Delta)\beta T}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\,\beta T+1}$
$\mathrm{ch}\,\beta t$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$	$\frac{z^2\,\mathrm{ch}\,\Delta\beta T - z\,\mathrm{ch}(1-\Delta)\beta T}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\,\beta T+1}$

gdje smo dva bloka u seriji $G(s)$ i $e^{\Delta Ts}$ označili sa $G(s, \Delta)$. To najprije pretvorimo u impulsne funkcije, a zatim transformiramo u z-područje:

$$X_i(z, \Delta)=G(z, \Delta)\,E(z),$$
$$E(z)=X_u(z)-G(z)\,E(z). \tag{11-103}$$

Izlučivanjem $E(z)$ dobivamo konačan rezultat:

$$X_i(z, \Delta)=\frac{G(z, \Delta)}{1+G(z)}X_u(z). \tag{11-104}$$

Povratnom transformacijom funkcije $X_i(z, \Delta)$ u vremensko područje dobivamo $x_i(nT, \Delta)$; odatle mijenjanjem Δ možemo izračunati vrijednosti izlazne funkcije $x_i(nT, \Delta)$ u cijelom intervalu između otipkavanja.

12. Metoda prostora stanja

Šareno cvijeće obasulo je travnjake,
Vrbe miluju granama vodu u carevoj jaruzi
Proljeće, reci putniku iz Lio-yena
Da se vremenu žuri, i da ga neće čekati.

Wang-kia, »Poruka jedne žene«

Dinamička analiza regulacijskih sustava bila je u prvotnoj fazi ograničena na vremensko područje, i to na klasično rješenje diferencijalne jednadžbe, a zatim i na metodu vremenskog odziva pomoću prijelazne funkcije. Nakon toga je teorijski razvoj krenuo u smjeru frekvencijskog područja, i to na proučavanje frekvencijskog odziva sustava u stanju prisilnih oscilacija. Taj prvenstveno grafički pristup upotpunjen je analitičkim metodama u području kompleksne varijable: pomoću operatorske metode došlo se do pojma prijenosne funkcije koja opisuje dinamiku sustava u najjednostavnijem matematičkom obliku. Prijenosna funkcija u kombinaciji s frekvencijskim odzivom još i danas zauzima veoma značajno mjesto u analizi i sintezi regulacijskih sustava, a može se očekivati da će — s obzirom na svoje prednosti — zadržati i u buduće svoje značenje na određenim područjima regulacijske tehnike.

Ovaj pristup postavlja međutim ograničenja daljnjem teorijskom i praktičnom razvoju. Naime, u vezi sa sve većom složenošću moderne tehnologije i upravljanja, u prvi plan proučavanja dolaze tzv. **multivarijabilni sustavi** s mnogo međusobno povezanih ulaznih i izlaznih veličina. Metoda prijenosne funkcije, koja je potpuno zadovoljavala pri proučavanju jednostavnih sustava, pruža kod složenih sustava sve manje mogućnosti. Slično je i sa isto tako zanimljivim područjem **nelinearnih sustava,** jer su i prijenosna funkcija i frekvencijski odziv ograničeni na linearne sustave. Konačno, kod sinteze regulacijskih sustava nije sa svim dosadašnjim metodama na zadovoljavajući način riješeno i pitanje **optimalizacije,** gdje je uvijek prisutno izvjesno iskustveno prilagođavanje.

Ti su razlozi ponovno potakli proučavanje u vremenskom području. Zahvaljujući prvenstveno ruskim znanstvenicima na čelu s A. I. Lurjeom, koji su se koristili radovima A. M. Ljapunova, razvijena je metoda stanja prostora koja se temelji na Lagrangeovim funkcijama stanja iz klasične mehanike. Dok se u dosadašnjem pristupu u vremenskom području polazilo od rješenja diferencijalne jednadžbe — odnosno simultanih diferencijalnih jednadžbi za multivarijabilne sustave — promatrajući stanje fizikalnih veličina, metoda prostora stanja polazi od energetskih stanja u sustavu. Uvođenjem matričnog računa postaju sustavi jednadžbi stanja pregledniji, a dugotrajna izračunavanja olakšana su programiranjem na digitalnom računalu, pri čemu se mogu obuhvatiti i nelinearnosti. Dodatna je prednost metode prostora stanja da se na isti način postavljaju izrazi za sustave kontinuiranog i diskretnog djelovanja.

Ti su razlozi potakli intenzivna proučavanja u tom smjeru, što je dovelo do neslućena razvoja teorije automatske regulacije u posljednjem deceniju. Iako je

metoda prostora stanja još dobrim dijelom u području teorije s malo praktičnih primjena, nema dvojbe da će ona prevladati u budućem razvoju automatske regulacije.

12.1. Prostor stanja

Pojam prostora stanja objasnit ćemo na najjednostavnijem primjeru mahaničkog sustava drugoga reda prema sl. 12—1. Namjerno smo uveli oznake za položaj $y(t)$ i za silu $u(t)$. Diferencijalnu jednadžbu:

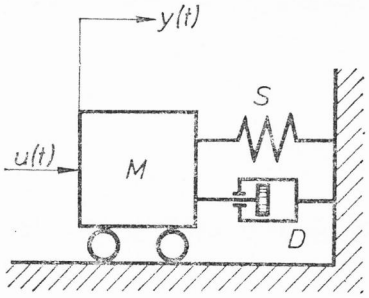
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{D}{M}\cdot\frac{dy(t)}{dt}+\frac{S}{M}y(t)=\frac{1}{M}u(t) \tag{12-1}$$

podijelili smo odmah s koeficijentom najviše derivacije M. Slijedeći je bitan korak uvođenje novih varijabli, i to položaja $y(t)=x_1(t)$ i brzine $\dot{y}(t)=x_2(t)$. Te se varijable nazivaju **varijable stanja** i označavaju se općenito sa $x_i(t)$. Njihovom derivacijom dobivamo:

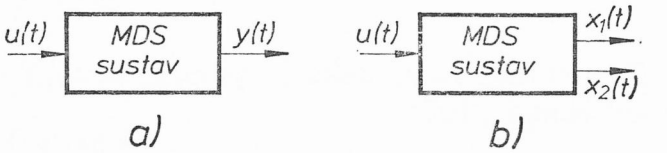
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=\dot{y}(t),\\ \dot{x}_2(t)&=\ddot{y}(t),\end{aligned} \tag{12-2}$$

pa diferencijalnu jednadžbu (12—1) možemo pisati u izmijenjenom obliku:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)&=-\frac{S}{M}\dot{x}_1(t)-\frac{D}{M}x_2(t)+\frac{1}{M}u(t).\end{aligned} \tag{12-3}$$



Sl. 12—1. Mehanički MDS sustav



a) b)

Sl. 12—2. Klasični prikaz sustava (a) i prikaz sustava pomoću varijabli stanja (b)

Na lijevoj su strani prve derivacije svih varijabli stanja, koje su funkcije istih varijabli stanja na desnoj strani jednadžbi. Samo po sebi to nije novost; s tim smo se postupkom susreli u odjeljku 2.3, kad smo sustav simultanih diferencijalnijh jednadžbi prevodili u normalan oblik. Novi je pristup u tome što smo prije promatrali sustav s jednim ulazom i jednim izlazom (sl. 12—2a), a ovdje promatramo više izlaza u obliku varijabla stanja (sl. 12—2b). **Ispitivani sustav je isti, ali je matematički model drukčiji.**

Na prvi pogled izgleda da je ovaj model složeniji, jer predstavlja sustav diferencijalnih jednadžbi kao i u izrazu (12—3). Međutim, ako to **pomoću matričnog prikaza** prevedemo u novi oblik, dobit ćemo sustav jednadžbi (12—3) prikazan

na jednostavan i sažet način. U idućem odjeljku dat ćemo osnove matričnog računa, no to nam ne mora smetati da na tako jednostavnom primjeru izvršimo pretvorbu koja je sama po sebi razumljiva. Sustav jednadžbi (12—3) možemo pisati na slijedeći način:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{S}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t), \tag{12-4}$$

ili sasvim sažeto:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \tag{12-5}$$

gdje je **A** oznaka za matricu koeficijenata, $\mathbf{x}(t)$ i $\dot{\mathbf{x}}(t)$ predstavljaju jednostupčane matrice ili vektore varijabli stanja i njihovih derivacija, a vektor ulaza **b** određuje djelovanje pobudne veličine na stanje sustava. Napomenimo da je $u(t)$ u jednadžbi (12-5) **skalarna veličina.**

Jednadžba (12-5) opisuje **stanje sustava** koje je određeno varijablama stanja $x_1(t)$ i $x_2(t)$. Želimo li poznavati i **izlaz sustava,** moramo postaviti još jednu jednadžbu, gdje je izlazna varijabla $y(t)$ općenito neka linearna funkcija varijabli stanja $\mathbf{x}(t)$ i ulazne varijable $u(t)$:

$$y(t) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}(t) \rangle + du(t). \tag{12-6}$$

Budući da imamo jedan izlaz, $y(t)$ je skalarna veličina; zato **c** mora biti vektorska veličina koja sa $\mathbf{x}(t)$ čini skalarni umnožak, a d je, naravno, skalarna veličina.

U opisanom primjeru radi se o sustavu drugoga reda, pa varijable stanja možemo geometrijski predočiti. To nije ništa drugo nego prikaz u faznoj ravnini (v. odjeljak 13.3). Ako se u trenutku $t=t_1$ masa nalazi u položaju $y=0{,}2$ m, a brzina joj je $\dot{y}=0{,}3\ \mathrm{ms}^{-1}$, vektor je stanja:

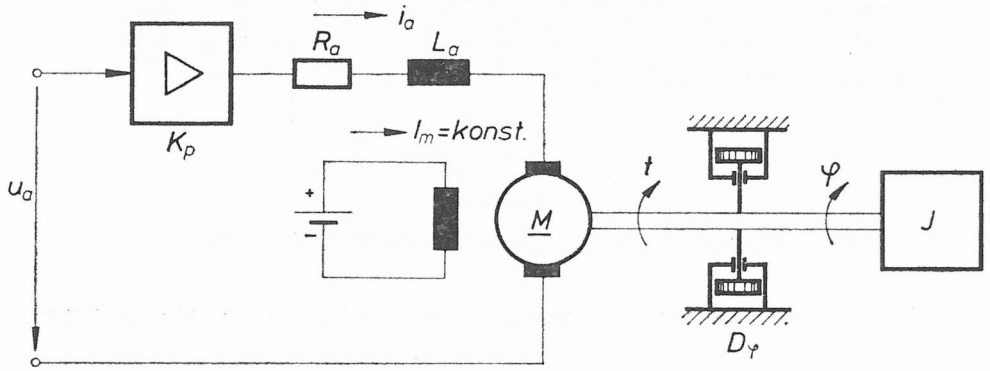
$$\mathbf{x}(t_1) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

U trenutku $t=t_2$ neka je položaj mase $y=-0{,}1$ m, a brzina $\dot{y}=0{,}2\ \mathrm{ms}^{-1}$. Vektor stanja glasi:

$$\mathbf{x}(t_2) = \begin{bmatrix} x_1(t_2) \\ x_2(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

Prijelaz iz točke $\mathbf{x}(t_1)$ u točku $\mathbf{x}(t_2)$ naziva se **trajektorija,** koje je svaka točka vezana uz vrijeme kao parametar. Na osnovi poznate trajektorije možemo kod sustava n-toga reda zaključiti o vladanju sustava.

Opis fizikalnog sustava pomoću varijabli stanja izvedimo na još jednom primjeru. Uzet ćemo istosmjerni elektromotor. Dok smo u odjeljku 6.2. analizirali istosmjerni elektromotor upravljan strujom magnetiziranja i_m uz konstantnu struju armature I_a, na sl. 12—3 prikazan je istosmjerni elektromotor kojim se upravlja naponom armature u_a uz konstantnu struju magnetiziranja I_m. Sam elektromotor je sastavni dio uređaja za pozicioniranje. U lanac je uključeno i pojačalo s faktorom pojačanja K_P; ono treba da osigura nazivnu snagu za pogon motora.



Sl. 12—3. Istosmjerni elektromotor upravljan naponom armature s opterećenjem

Na osnovi toga možemo postaviti jednadžbe za električni krug (2. Kirchhoffov zakon) kao i za mehanički krug (ravnoteža zakretnih momenata):

$$K_P u_a(t)=L_a\frac{di_a(t)}{dt}+R_a i_a(t)+K_e\dot{\varphi}(t),$$
$$K_t i_a(t)=J\ddot{\varphi}(t)+D_\varphi\dot{\varphi}(t). \tag{12-7}$$

Ovdje je K_P pojačanje pojačala, K_e konstanta protu-EMS motora, K_t konstanta zakretnog momenta motora, J moment tromosti mase opterećenja (i u manjoj mjeri motora), a D_φ torzijski koeficijent trenja. Za razliku od motora upravljanog strujom magnetiziranja opisanog jednadžbama (6-43), u ovom se slučaju mora uzeti u obzir protu-EMS, jer opterećenje motora ima jako protudjelovanje na ulazni krug.

Ovdje možemo izbor varijabli stanja izvesti na osnovi fizikalne slike. Ako izaberemo izlaznu veličinu $y(t)$ kao jednu varijablu stanja, što je fizikalno kut zakreta $x_1(t)=\varphi(t)$, onda je logičan izbor slijedeće varijable stanja kutna brzina $x_2(t)=\dot{\varphi}(t)$. Treća je varijabla stanja struja $x_3(t)=i_a(t)$. Odmah naglasimo da je u izboru tzv. **fizikalnih varijabli stanja** potrebno mnogo mašte i da to zapravo nije metoda u strogom smislu riječi.

Na osnovi izbora varijabli dobivamo:

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t) \tag{12-8}$$

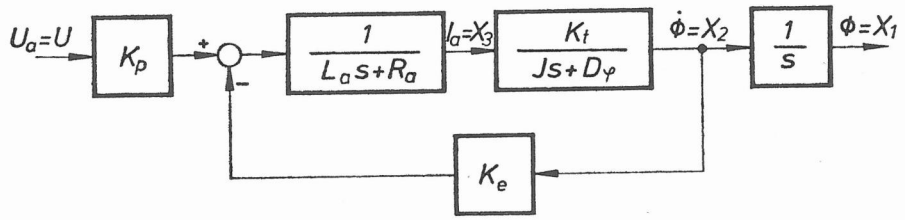
Slijedeće su dvije jednadžbe dobivene iz gore postavljenih izraza:

$$\dot{x}_2(t)=-\frac{D_\varphi}{J}x_2(t)+\frac{K_t}{J}x_3(t),$$
$$\dot{x}_3(t)=-\frac{K_e}{L_a}x_2(t)-\frac{R_a}{L_a}x_3(t)+\frac{K_P}{L_a}u(t) \tag{12-9}$$

gdje je $u(t)=u_a(t)$ ulazna varijabla. Konačno vrijedi:

$$y(t)=x_1(t). \tag{12-10}$$

Sve te jednadžbe tvore matematički model prikazan na blok-dijagramu na sl. 12—4, gdje blokovi predstavljaju prijenosne funkcije pojedinih sklopova.



Sl. 12—4. Blok-dijagram istosmjernog elektromotora sa sl. 12—3

Gornje četiri jednadžbe možemo pisati kao vektorske diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{D_\varphi}{J} & \frac{K_t}{J}\\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{K_P}{L_a}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[1\ 0\ 0]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}. \tag{12-11}$$

Iz ovog izraza ne vidimo ni izbor metode varijabli stanja ni jednostavnost kojom dolazimo do matričnog oblika. To nam za sada nije ni bio cilj, jer ćemo u daljnjem tekstu iscrpno obraditi cijeli postupak pomoću varijabli stanja.

Prikaz takvog jednostavnog sustava možemo naravno poopćiti na sustav n-toga reda sa n varijabli stanja. Pritom se vektor stanja $x(t)$ proširuje na n komponenata, a matrica **A** je n-toga reda. Jasno je da pritom više nema jasne geometrijske predodžbe koja je bila moguća sa sustavima drugoga i trećega reda. To međutim nije bitno, jer je metoda prostora stanja — za razliku od metode fazne ravnine — analitička metoda, pa varijable stanja ne moraju imati geometrijske predodžbe.

Ovdje treba upozoriti na oznake. Budući da se metoda prostora stanja razvijala dugo godina gotovo nezavisno od klasičnih metoda automatske regulacije, razvio se i različit sustav oznaka, koji je općenito prihvaćen u većini udžbenika i rasprava. Tako se za varijablu stanja upotrebljava oznaka $x(t)$, za ulaznu veličinu $u(t)$, a za izlaznu veličinu $y(t)$. I ovdje smo prihvatili te oznake; držimo da je svaki stručnjak ionako suočen sa činjenicom da se mora prilagoditi mijenjanju oznaka i proizvoljnosti njihova izbora.

Uz upotrebu tih oznaka, jednadžba stanja (12-5) i jednadžba izlaza (12-6) za **sustav s jednim ulazom i jednim izlazom** glase u općem obliku:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t),\\ y(t)&=\langle\mathbf{c},\mathbf{x}(t)\rangle+du(t).\end{aligned} \tag{12-12}$$

Ako se radi o **sustavu s više ulaza i više izlaza,** ulazna i izlazna varijabla postaju također vektori, a, b, c i d pretvaraju se u matrice. Jednadžbe (12-7) prelaze u oblik:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t),\\ \mathbf{y}(t)&=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t).\end{aligned} \tag{12-13}$$

Iz gornjeg prikaza uočljiva je prednost upotrebe matrice: jednadžbe (12-12), odnosno (12-13), vrlo su sažete i mogu opisati inače vrlo nepregledne sustave, što omogućuje bolji uvid u fizikalno stanje sustava. Ako uz to kao varijable stanja odaberemo stvarne fizikalne veličine unutar sustava, doći ćemo do mnogo više podataka o samom sustavu, a time i do bogatijeg izbora povoljnijeg regulacijskog djelovanja nego što je to bilo kod prijenosne funkcije, gdje smo bili ograničeni na ulazne i izlazne varijable.

12.2. Matrični račun

U ovom odjeljku uvest ćemo osnovne pojmove iz teorije matrica, jer je matrični račun u povezanosti s linearnim prostorima i numeričkom analizom osnova moderne teorije automatske regulacije. Naime, složeni sustavi opisuju se općenito sustavima jednadžbi:

$$\begin{aligned} &a_{11}\,x_1+x_{12}\,x_2+\ldots+a_{1n}\,x_n=u_1,\\ &a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\ldots+a_{2n}\,x_n=u_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+\ldots+a_{mn}\,x_n=u_m, \end{aligned} \tag{12-14}$$

gdje su dani sustav varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linearno transformira u neki novi sustav varijabli $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Transformacija je jednoznačno određena konstantnim koeficijentima.

Gornji sustav možemo pisati i u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_m\,a_{m2}\ldots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ \ldots\\ u_m \end{bmatrix}. \tag{12-15}$$

Ovdje je u uglatoj zagradi napisana matrica sastavljena od pravokutnog rasporeda koeficijenata:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1j}\ldots a_{1n}\\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2j}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{i1}\,a_{i2}\ldots a_{ij}\ldots a_{in}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}\,a_{m2}\ldots a_{mj}\ldots a_{mn} \end{bmatrix} \tag{12-16}$$

To možemo pisati i skraćeno s velikim masnim slovom **A**. Matrica je zapravo samo sažeto i pregledno pisan sustav elemenata a_{ij} koji su složeni u m **redaka** i n **stupaca**, pa govorimo o $m\times n$ matrici. Drugi je način pisanja matrice $[a_{ij}]$ s općim elementom u zagradi; prvi indeks uvijek označuje redak, a drugi stupac elementa u matrici. Ako je u pravokutnoj matrici $m=n$, onda govorimo o **kvadratnoj matrici n-toga reda.** Taj se oblik najviše pojavljuje u proračunima, i ako nije drukčije naglašeno, pod matricama ćemo u daljnjem tekstu razumijevati matrice kvadratnog oblika.

Ako se matrica prema rasporedu u jednadžbi (12-16) sastoji samo od jednog stupca, govorimo o **stupčanoj matrici ili vektoru:**

$$\mathbf{a}=[a_{i1}]=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \tag{12-17}$$

a pišemo je malim masnim slovom, kao i u vektorskoj algebri. Slično i matricu od jednog retka:

$$a=[a_{1j}]=[a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}] \tag{12-18}$$

nazivamo **redna matrica ili vektor.**

S uvedenim skraćenim oznakama za matrice i vektore možemo sustav jednadžbi (12-15) pisati u jednostavnom obliku:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{u}. \tag{12-19}$$

U ovom izrazu sustav je prikazan matricom koeficijenata **A,** a varijable su prikazane vektorima **x** i **u.** Ako se vektori sastoje od dvije ili tri komponente, možemo ih zorno predočiti; ako je veći broj komponenata, možemo ih pomoću analogije zamisliti u n-dimenzionalnom prostoru. Iako matrice nemaju brojčane vrijednosti, njima možemo operirati po nekim jednostavnim pravilima, a rješenje jednadžbi sastoji se pritom u određivanju »duljine« i »kuta« vektora. **Analiza kompleksnog sustava u prostoru stanja znači prema tome proučavanje matrica i njihovih transformacija,** pa je R. E. Bellman teoriju matrica s pravom nazvao »aritmetikom više matematike« [lit. 4, 34, 39, 55].

Sama **matrica nema brojčane vrijednosti,** ali je ona izvor determinanata različitih redova koje posjeduju brojčanu vrijednost. **Determinanta** je kvadratnog oblika i označuje se sa det **A** ili rasporedom elemenata kao u matrici, samo između dviju okomica:

$$\Delta=\det \mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1j}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2j}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{ij}\ \dots\ a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nj}\ \dots\ a_{nn} \end{vmatrix} \tag{12-20}$$

Ispuštanjem i-tog retka i j-tog stupca u determinanti, dobivamo novu determinantu s jednim retkom i stupcom manje. To je tzv. **subdeterminanta** označena sa $\Delta_{ij}=\det_{ij}\mathbf{A}$ jer odgovara elementu a_{ij}. Množenjem subdeterminante Δ_{ij} s predznakom $(-1)^{(i+j)}$ dobivamo **kofaktor** ili algebarski komplement A_{ij} elementa a_{ij}:

$$A_{ij}=\mathrm{cof}_{ij}\mathbf{A}=(-1)^{i+j}\det_{ij} A. \tag{12-21}$$

Pomoću kofaktora dobivamo i vrijednost determinante (12-20) kao zbroja umnožaka elemenata bilo kojeg retka ili stupca s odgovarajućim kofaktorom:

$$\begin{aligned} \Delta&=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in} \quad \text{za } i=1,\ 2,\ \dots,\ n \\ \Delta&=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj} \quad \text{za } j=1,\ 2,\ \dots,\ n \end{aligned} \tag{12-22}$$

Vrijednost determinante Δ dana je pomoću n subdeterminanata $(n-1)$-reda koje se opet mogu izračunati pomoću $(n-1)$ subdeterminanata $(n-2)$-reda, itd. sve do subdeterminante drugoga reda. Determinante i kofaktori su **skalarne veličine.**

12.2.1. Tipovi kvadratnih matrica

Kod **dijagonalne matrice** svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki su nuli. Primjer je:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poseban slučaj dijagonalne matrice jest **jedinična matrica,** gdje su svi elementi duž dijagonale jednaki jedinici:

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svi elementi **nul-matrice** jednaki su nuli. Radi potpunosti spomenimo još i **trokutnu matricu,** gdje su elementi iznad ili ispod glavne dijagonale jednaki nuli:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Transponirana matrica dobije se zamjenom redaka i stupaca zadane matrice $\mathbf{A}=[a_{ij}]$, a označuje se sa $\mathbf{A}^T=[a_{ji}]$. Možemo pisati:

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}^T \quad \text{za} \quad b_{ij}=a_{ji}. \tag{12-23}$$

Primjer je transponirane matrice:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & -8 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & -8 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Transpozicija često služi da se pojednostavni pisanje stupčanog vektora.

Simetrična matrica ima elemente $a_{ij}=a_{ji}$, tj. $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$. Kao primjer može se uzeti:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 7 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Adjungirana matrica je transponirana matrica kod koje je svaki element zamijenjen svojim kofaktorom, a označuje se sa adj **A.** Ako su kod matrice **A** elementi a_{ij}, a njihovi kofaktori A_{ij}, onda vrijedi adj $\mathbf{A}=[A_{ji}]$. Možemo staviti:

$$\mathbf{B}=\text{adj}\,\mathbf{A} \quad \text{za} \quad b_{ij}=A_{ji}. \tag{12-24}$$

Oblik adjungirane matrice najbolje se vidi iz slijedećeg izvoda:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 3\end{bmatrix}: \quad [A_{ij}]=\begin{bmatrix}9 & -16 & 10\\ 3 & 7 & -9\\ 1 & 10 & 3\end{bmatrix}.$$

Tako su npr. kofaktori prvog i drugog i trećeg elementa u prvom retku:

$$A_{11}=1\cdot 3-(-2)\,3=9,$$

$$A_{12}=-[4\cdot 3-(-2)\,2]=-16,$$

$$A_{13}=4\cdot 3-2\cdot 1=10.$$

Rezultat je:

$$\text{adj } \mathbf{A}=[A_{ji}]=\begin{bmatrix}9 & 3 & 1\\ -16 & 7 & 10\\ 10 & -9 & 3\end{bmatrix}.$$

Adjungiranu matricu možemo oblikovati i obrnutim redoslijedom: izvornu matricu prvo transponiramo, a zatim tražimo kofaktore.

Singularna matrica postoji onda ako joj je vrijednost determinante det $\mathbf{A}=0$.

12.2.2. Algebra matrica

Zbrajanje i oduzimanje dviju $m\times n$ matrica $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ i $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ s istim brojem redaka i stupaca daje:

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\pm\mathbf{B} \quad \text{za} \quad c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij} \tag{12-25}$$

Primjer:

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 6\\ 2 & 0 & 3\\ 5 & 4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ -3 & 5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 5\\ 2 & 4 & 5\\ 2 & 9 & 2\end{bmatrix}.$$

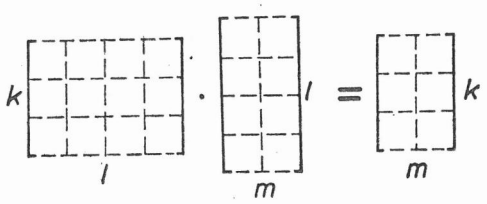
Množenjem matrice $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ sa skalarom b dobije se matrica:

$$\mathbf{C}=b\mathbf{A}=\mathbf{A}b \quad \text{za} \quad c_{ij}=ba_{ij}. \tag{12-26}$$

Množenje matrica A B postoji samo ako je broj stupaca od A jednak broju redaka od B. Ako je $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ $k\times l$ matrica, a $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ $l\times m$ matrica, umnožak $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ formata $k\times m$ s odgovarajućim vrijednostima elemenata glasi:

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB} \quad \text{za} \quad c_{ij}=\sum_{n=1}^{l} a_{in}b_{nj}. \tag{12-27}$$

To se može prikazati i simbolički:



Primjer:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 4+(-1)(-2) & 3\cdot 2+(-1)\cdot 3 \\ 4\cdot 4+0\,(-2) & 4\cdot 2+0\cdot 3 \\ 2\cdot 4+2\,(-2) & 2\cdot 2+2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 16 & 8 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Budući da je bitan redoslijed članova umnoška, općenito ne vrijedi zakon komutacije. Zato kod umnoška **A B** kažemo da je **B premultipliciran** od **A**, odnosno **A postmultipliciran** od **B**. Iznimno vrijedi zakon komutacije za množenje s jediničnom matricom, jer je **I A**=**AI**.

U posebnom slučaju kada matrice degeneriraju u redne i stupčane vektore postoje dvije mogućnosti množenja. Ako redni vektor **a** množimo stupčanim vektorom **b**, dobijemo tzv. **skalarni produkt:**

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{a}. \tag{12-28}$$

Iz primjera:

$$[2 \quad 4 \quad -2]\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} = [2\cdot 3+4\,(-1)+(-2)\,(-5)] = 12$$

vidimo da je umnožak skalar.

Ako je u umnošku prvi član stupčani vektor **a** formata $m\times 1$, a drugi član redni vektor **b** formata $1\times n$, njihov je umnožak matrica formata $m\times n$. To je tzv. **vektorski produkt:**

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T. \tag{12-29}$$

Primjer:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}[2 \quad 4 \quad -2] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 \\ -2 & -4 & -2 \\ -10 & -20 & 10 \end{bmatrix}.$$

Množenje matrice **A** s jediničnom matricom **I** — bez obzira da li se premultiplicira ili postmultiplicira — daje važan rezultat:

$$\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}, \tag{12-30}$$

što možemo lako dokazati.

Dijeljenjem matrica se ne služimo, već se u tu svrhu koristimo množenjem **inverznim matricama**, koje imaju osobito važnu ulogu u teoriji prostora stanja. Izvod inverzne matrice dobit ćemo iz matrične jednadžbe:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{u}, \tag{12-19}$$

gdje su **x** i **u** n-stupčani vektori, a **A** je kvadratna matrica n-tog reda. Uz $\mathbf{u}\neq 0$, jednadžbu (12-19) možemo promatrati kao nehomogeni sustav n linearnih jednadžbi

[1] Pazi na $a^Tb \neq ab^T$.

sa n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sustav ima jedinstveno rješenje samo ako je $\Delta = \det \mathbf{A} \neq 0$. Prema Kramerovu pravilu dobivamo:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$
$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad (12\text{-}31)$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Determinante Δ_i dobiju se zamjenom i-tog stupca od Δ sa stupcem $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Brojnik Δ_i možemo u svakom rješenju razviti u red po stupcima:

$$x_1 = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + \ldots + A_{n1}u_n)$$
$$x_1 = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + \ldots + A_{n2}u_n) \qquad (12\text{-}32)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(A_{1n}u_1 + A_{2n}u_2 + \ldots + A_{nn}u_n)$$

gdje su A_{ij} kofaktori od a_{ij} u det **A**. Prema definiciji množenja matrica, to možemo dalje pisati:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11}A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12}A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}A_{2n} \ldots A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{bmatrix} = \frac{\operatorname{adj} \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} \mathbf{u}. \qquad (12\text{-}33)$$

Kvadratna matrica na desnoj strani je adjungirana matrica. Izraz:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj} \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} \qquad (12\text{-}34)$$

označava se sa $\mathbf{A}^{-1}$ i predstavlja inverznu matricu od **A**. Napominjemo da se invertirati može samo nesingularna matrica kojoj je det $\mathbf{A} \neq 0$.

Lako je pomoću izraza za matrice **A** i $\mathbf{A}^{-1}$ pokazati da umnožak:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \qquad (12\text{-}35)$$

bez obzira na redoslijed matrica, daje jediničnu matricu. To svojstvo i opravdava naziv »inverzna matrica«.

Prikažimo operaciju invertiranja matrice na jednostavnom primjeru:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj} \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

12.2.3. Svojstvene vrijednosti matrice

U teoriji prostora stanja osobito važnu ulogu ima činjenica da matrica posjeduje tzv. svojstvene vrijednosti λ_i. Naime, možemo postaviti jednadžbu sastavljenu od matrice **A**, vektora **x** i skalara λ:

$$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}, \tag{12-36}$$

a tražimo takvu vrijednost λ za koju postoji netrivijalno rješenje jednadžbe. Da bismo to rješenje našli, obje strane izraza (12-36) premultipliciramo s jediničnom matricom:

$$\mathbf{IAx}=\lambda\,\mathbf{Ix}. \tag{12-37}$$

Budući da je λ skalar, možemo ga staviti pred matricu. Iz izraza (12-30) imamo nadalje $\mathbf{IA}=\mathbf{A}$, pa gornju jednadžbu možemo preoblikovati:

$$[\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}]\,\mathbf{x}=[\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}]\,\mathbf{x}=0. \tag{12-38}$$

Da bi postojalo netrivijalno rješenje $\mathbf{x}\neq 0$, mora biti determinanta $|\,\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}\,|$ jednaka nuli:

$$|\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n}\\ -a_{21}\lambda & -a_{22} & \dots & -a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0. \tag{12-39}$$

Determinantu $|\,\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}\,|$ razvijemo u polinom n-toga reda:

$$F(\lambda)=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0, \tag{12-40}$$

što nazivamo i **karakteristični polinom** koji je funkcija od λ. Uvrštenjem u izraz (12-39) dobivamo karakterističnu jednadžbu:

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0=0. \tag{12-41}$$

Odavle se dobije n korijena karakteristične jednadžbe $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, što se nazivaju i **svojstvene vrijednosti matrice A.** Svakoj svojstvenoj vrijednosti pripada i odgovarajuće rješenje $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n$ koje se zove i **svojstveni vektor.**

Kao primjer uzimamo matricu:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 0 & -5\end{bmatrix}$$

koje je karakteristični polinom:

$$[\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 0 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+2 & 4\\ 0 & \lambda+5\end{bmatrix},$$

i dalje:

$$F(\lambda)=|\,\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}\,|=(\lambda+2)\,(\lambda+5).$$

Imamo dakle karakterističnu jednadžbu:

$$\lambda^2+7\lambda+10=0$$

s dva realna i različita korijena $\lambda_1=-2$ i $\lambda_2=-5$.

12.2.4. Ostale operacije s matricama

Derivacija matrica može se izvesti, ako se elementi matrice mogu derivirati po skalarnoj varijabli t. Tada je derivacija matrice jednaka matrici derivacije njezinih elemenata:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)=\dot{\mathbf{A}}(t)=\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}a_{11}(t)}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{12}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{1n}(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}a_{21}(t)}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{22}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{2n}(t)}{\mathrm{d}t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\mathrm{d}a_{n1}(t)}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{n2}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{nn}(t)}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}. \tag{12-42}$$

Tako je i **integracija matrice** jednaka matrici integrala njezinih elemenata:

$$\int \mathbf{A}(t)\,\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} \int a_{11}(t)\,\mathrm{d}t & \int a_{12}(t)\,\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{1n}(t)\,\mathrm{d}t \\ \int a_{21}(t)\,\mathrm{d}t & \int a_{22}(t)\,\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{2n}(t)\,\mathrm{d}t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int a_{n1}(t)\,\mathrm{d}t & \int a_{n2}(t)\,\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{nn}(t)\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}. \tag{12-43}$$

Granice integracije primjenjuju se na uobičajen način.

Laplaceova transformacija matrice $\mathbf{A}(t)$ pretpostavlja da za svaki element postoji transformirani oblik. Rezultat je matrica sastavljena od transformiranih elemenata od $\mathbf{A}(t)$:

$$\mathcal{L}[\mathbf{A}(t)]=\mathbf{A}(s)=\begin{bmatrix} \mathcal{L}[a_{11}(t)] & \mathcal{L}[a_{12}(t)] & \cdots & \mathcal{L}[a_{1n}(t)] \\ \mathcal{L}[a_{21}(t)] & \mathcal{L}[a_{22}(t)] & \cdots & \mathcal{L}[a_{2n}(t)] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{L}[a_{n1}(t)] & \mathcal{L}[a_{n2}(t)] & \cdots & \mathcal{L}[a_{nn}(t)] \end{bmatrix}. \tag{12-44}$$

12.3. Matematički model s varijablama stanja

U ovom odjeljku postavit ćemo analitički oblik jednadžbi s varijablama stanja. Nakon toga potražit ćemo metode kako da dobijemo taj matematički model s varijablama stanja, i to kako iz diferencijalne jednadžbe, tako i iz prijenosne funkcije. Na kraju ćemo razmotriti mogućnost transformacije jednog modela u drugi.

12.3.1. Dinamičke jednadžbe

Za sustave s više ulaza i više izlaza uveli smo u odjeljku 12.1. matematički opis pomoću jednadžbe stanja i jednadžbe izlaza:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t)&=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t). \end{aligned} \tag{12-13}$$

Nazvat ćemo ih dinamičke jednadžbe stanja. Varijable su:

$\mathbf{u}(t)$ $m\times 1$ **vektor ulaza** sa m komponenata,
$\mathbf{x}(t)$ $n\times 1$ **vektor stanja** sa n komponenata i
$\mathbf{y}(t)$ $p\times 1$ **vektor izlaza** sa p komponenata.

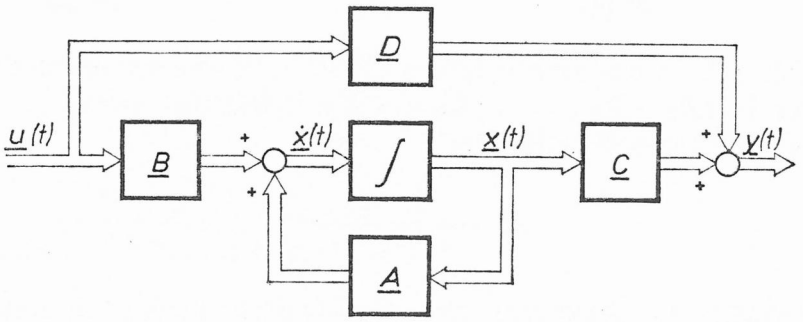
Nazivi i formati matrica su:

$\mathbf{A}$ $n\times n$ **matrica koeficijenata,**
$\mathbf{B}$ $n\times m$ **matrica ulaza** koja povezuje varijable ulaza i stanja,
$\mathbf{C}$ $p\times n$ **matrica izlaza** koja povezuje varijable stanja i izlaza,
$\mathbf{D}$ $p\times m$ **matrica prijenosa.**

Ova posljednja matrica predstavlja izravnu vezu između varijabla ulaza i izlaza, U regulacijskim sustavima to nije uobičajeno jer se zahtijeva pojačanje snage s povratnom vezom. Zato $\mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$ možemo u pravilu ispustiti, pa dobivamo dinamičke jednadžbe stanja u normalno upotrebljavanom obliku za sustave s više ulaza i više izlaza:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t),\\ \mathbf{y}(t)&=\mathbf{C}\mathbf{x}(t).\end{aligned}\tag{12-45}$$

Na sl. 12—5 prikazan je matrični blok-dijagram dinamičkih jednadžbi stanja[1]. Izmijenjen je način crtanja: blokovi sadrže matrice umjesto prijenosnih funkcija, a signalni putovi sadrže vektorske varijable umjesto jedne skalarne varijable. U sredini postoji petlja povratne veze, a ucrtani znak integrala simbolički označuje da se ovdje zbiva jedina vremenska operacija, jer svi drugi blokovi označuju čiste algebarske povezanosti.



Sl. 12—5. Matrični blok-dijagram dinamičkih jednadžbi stanja

Želimo li povezati metodu prostora stanja s metodom prijenosne funkcije koja je podešena za sustave s jednim ulazom i jednim izlazom, dinamičke jednadžbe stanja pišemo u prilagođenom obliku:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t),\\ y(t)&=\mathbf{c}^T\mathbf{x}(t).\end{aligned}\tag{12-46}$$

Sada su ulaz $u(t)$ i izlaz $y(t)$ skalarne varijable, $\mathbf{b}$ je $m\times 1$ vektor ulaza, a $\mathbf{c}^T n\times 1$ transponirani vektor izlaza. Jednadžbe (12-46) služit će nam za dobivanje matematičkog modela s varijablama stanja iz prijenosne funkcije.

Iz postupka kako se dolazi do dinamičkih jednadžbi stanja vidjet ćemo da se mogu uzeti samo linearni i vremenski invarijantni sustavi; pri tome isključujemo sustave s mrtvim vremenom jer se oni ne mogu opisati diferencijalnom jednadžbom.

[1] Treba paziti da je pri očitavanju funkcionalnih odnosa u matričnom blok-dijagramu slijed faktora kod množenja matrica suprotan toku signala.

12.3.2. Postavljanje dinamičkih jednadžbi stanja

Najjednostavniji je put za dobivanje dinamičkih jednadžbi stanja ako se pođe od prijenosne funkcije sustava; do nje možemo doći analitički putem diferencijalne jednadžbe ili eksperimentalno putem sinusne prijenosne funkcije. Dalje ćemo prikazati dvije metode za dobivanje matematičkog modela s varijablama stanja, a nazvat ćemo ih direktnim i paralelnim postupkom zbog sličnosti s metodama dobivanja fizikalnog modela na analognom računalu.

Direktni postupak. Uzimamo prijenosnu funkciju sustava:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0} \quad \text{za } m<n, \tag{12-47}$$

gdje smo stavili $a_n=1$ a da ništa nismo izgubili na poopćenju, a pretpostavljamo realne i različite polove. U ovom slučaju imamo u brojniku uz b_0 i druge koeficijente odnosno potencije od s, pa govorimo o **dinamici brojnika.** Prijenosnu funkciju pišemo u nešto izmijenjenom obliku:

$$Y(s)=b_m\frac{s^m}{N(s)}U(s)+b_{m-1}\frac{s^{m-1}}{N(s)}U(s)+\ldots+b_1\frac{s}{N(s)}U(s)+b_0\frac{1}{N(s)}U(s). \tag{12-48}$$

označivši nazivnik skraćeno sa $N(s)$. Odabiremo ove varijable stanja:

$$X_1=\frac{1}{N(s)}U,\quad X_2=\frac{s}{N(s)}U,\ldots,X_{n-1}=\frac{s^{n-1}}{N(s)}U,\quad X_n=\frac{s^n}{N(s)}U. \tag{12-49}$$

Očito je iz navedenih izraza da su varijable stanja međusobno vezane derivacijama, jer je $sX_1=X_2,\ldots,sX_{n-1}=X_n$, odnosno $x_1=x_2,\ldots,x_{n-1}=x_n$. Varijablu stanja X_1 možemo izraziti kao:

$$X_1=\frac{1}{N(s)}U=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n+1}+\ldots+a_1 s+a_0}U. \tag{12-50}$$

Odatle se obratnom transformacijom dobije diferencijalna jednadžba:

$$X_1^{(n)}+a_{n-1}X_1^{(n-1)}+\ldots+a_1\dot{x}_1+a_0X_1=U. \tag{12-51}$$

Primjenom varijable stanja kao sukcesivne derivacije, iz jednadžbe (12-51) dobiju se jednadžbe stanja:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1=x_2,\\
&\dot{x}_2=x_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\dot{x}_{n-1}=x_n,\\
&\dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-\ldots-a_{n-1}x_n+U.
\end{aligned} \tag{12-52}$$

Jednadžba izlaza dobije se iz jednadžbe (12-48), kamo uvrstimo varijable stanja iz izraza (12-49):

$$Y(s)=b_mX_{m+1}+b_{m-1}X_m+\ldots+b_1X_2+b_0X_1. \tag{12-53}$$

Taj izraz obratno transformiramo:

$$y=b_m x_{m+1}+b_{m-1}x_m+\ldots+b_1x_2+b_0x_1. \tag{12-54}$$

Jednadžbe stanja (12-52) i jednadžbu izlaza (12-54) možemo pisati kao vektorske diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \ldots\\ \ldots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & a_2 & \ldots & -a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ \ldots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \ldots\\ \ldots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u,$$

$$y=[b_0\, b_1 \ldots b_m\, 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ \ldots\\ x_n\end{bmatrix}, \tag{12-55}$$

gdje množenje rednog i stupčanog vektora u drugoj jednadžbi daje kao rezultat upravo izraz (12-54).

S oblikom matrice i vektora kao u izrazima (12-55) postiže se tzv. **standardni oblik dinamičkih jednadžbi stanja:**

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t),\\ y(t)&=\mathbf{c}^T\mathbf{x}(t).\end{aligned} \tag{12-46}$$

Standardnim oblikom se zadovoljavamo ako su nepoznati polovi ili ih ne želimo naći.

Matrica **A** se naziva i **Frobeniusova matrica.** Ona ima u prvih $(n-1)$ redova jedinice iznad glavne dijagonale, a drugi elementi su nule; koeficijenti nazivnika prijenosne funkcije su u posljednjem retku. Vektor **b** ima obično u posljednjem retku jedinicu; vektor **c** sadrži koeficijente brojnika od $\mathbf{b}_0$ do $\mathbf{b}_m$, a ostali članovi su nule. Dakle, nultočke prijenosne funkcije djeluju samo na izlaz, a ne i na cijeli sustav. Takve varijable stanja gdje matrica **A** ima elemente Frobeniusove matrice, a izlaznu varijablu i njezinih $(n-1)$ derivacija uvodimo kao varijable stanja nazivamo **faznim varijablama stanja.**

Primjer 12.2. Prijenosna je funkcija nekog sustava:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{6s+18}{s^3+7s^2+14s+8},$$

a njezin preinačeni oblik:

$$y(s)=6\,\frac{s}{N(s)}\,U+18\,\frac{1}{N(s)}\,U.$$

Varijable su stanja:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_3,$$
$$\dot{x}_3 = -8x_1 - 14x_2 - 7x_3 + u,$$

dok je izlazna veličina:

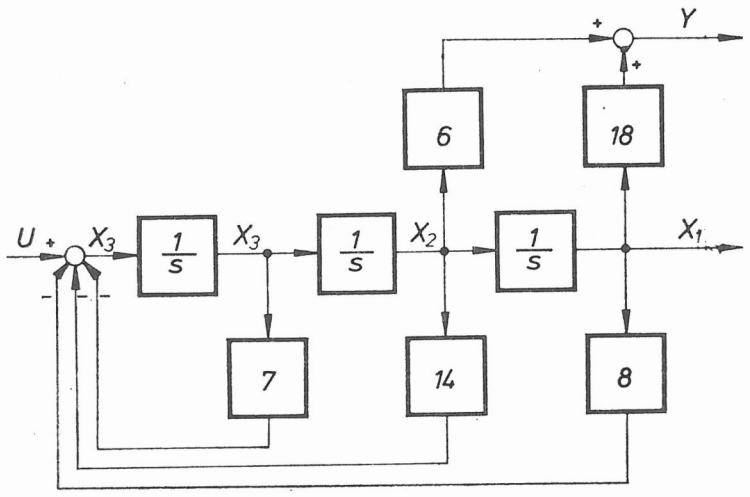
$$y = 6\dot{x}_1 + 18x_1 = 6x_2 + 18x_1.$$

Vektorske su diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [18 \quad 6 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Te su jednadžbe prikazane blok-dijagramom na sl. 12—6. Ovaj je model veoma prikladan za modeliranje na analognom računalu. Zapravo, postupak odgovara **direktnom programiranju** (metoda najviše derivacije) iz odjeljka 14.3. Izvedeni model možemo lako poopćiti i na prijenosne funkcije višeg reda.



Sl. 12—6. Blok-dijagram direktnog programiranja prijenosne funkcije pomoću varijabli stanja — primjer 12.2

Postupak za dobivanje dinamičkog modela znatno se pojednostavnjuje kada u brojniku prijenosne funkcije postoji samo koeficijent b_0:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}. \tag{12-56}$$

U tom slučaju brojnik je bez dinamike i govorimo o **dinamici nazivnika.** Prijenosnu funkciju pretvorimo u diferencijalnu jednadžbu, a izlaznu varijablu y i njenih $(n-1)$ derivacija uzimamo kao varijable stanja. Postupak ćemo prikazati na slijedećem primjeru.

Primjer 12.3. Neka je prijenosna funkcija:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8},$$

odnosno njezina diferencijalna jednadžba:

$$\dddot{y}+7\ddot{y}+14\dot{y}+8y=6u.$$

Izravnim izborom fazne varijable $y=x_1$ i njezinih derivacija:

$$\dot{x}_1=x_2,$$

$$\dot{x}_2=x_3,$$

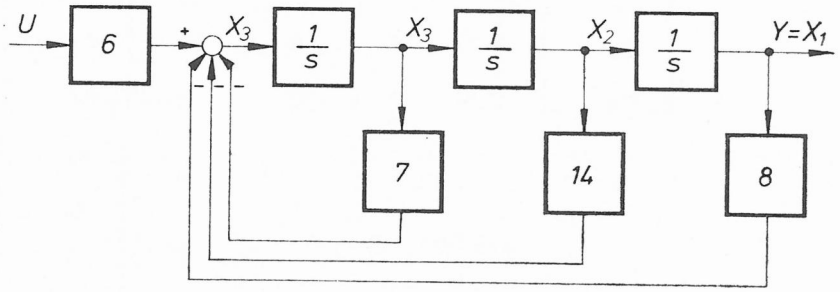
$$\dot{x}_3=-8x_1-14x_2-7x_3+6u,$$

dobivamo dinamičke jednadžbe:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -14 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 6\end{bmatrix}u,$$

$$y=[1\ 0\ 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}.$$

Primjećujemo da je matrica koeficijenata ista kao prije, tj. Frobeniusova matrica. Blok-dijagram koji odgovara navedenim relacijama vidi se na sl. 12—7.



Sl. 12—7. Blok-dijagram direktnog programiranja prijenosne funkcije pomoću varijabli stanja — primjer 12.3

Paralelni postupak. Kad imamo prijenosnu funkciju s poznatim polovima, što je slučaj kod mnogih procesnih staza sa serijski vezanim članovima prvoga reda, može se dobiti mnogo preglednji oblik dinamičkih jednadžbi stanja. To se postiže razdvajanjem prijenosne funkcije u parcijalne razlomke:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K_1}{s-\lambda_1}+\frac{K_2}{s-\lambda_2}+\ldots+\frac{K_n}{s-\lambda_n}, \tag{12-57}$$

i dalje:

$$Y(s)=\frac{K_1}{s-\lambda_1}U(s)+\frac{K_2}{s-\lambda_2}U(s)+\ldots+\frac{K_n}{s-\lambda_n}U(s). \tag{12-58}$$

Opet su polovi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ realni i različiti, a pripadni rezidui $K_1, \ldots, K_n$ mogu se lako naći prema postupku opisanom u odjeljku 4.1.

Biramo varijable stanja:

$$X_i(s)=\frac{U(s)}{s-\lambda_i} \quad \text{za } i=1, 2, \ldots, n, \tag{12-59}$$

odakle dobivamo:

$$sX_i(s)=\lambda_i X_i(s)+U(s) \quad \text{za } i=1, 2, \ldots, n. \tag{12-60}$$

Obratnom transformacijom dobivamo niz diferencijalnih jednadžbi:

$$\dot{x}_i=\lambda_i x_i+u \quad \text{za } i=1, 2, \ldots, n. \tag{12-61}$$

Svaka od n jednadžbi stanja sadrži samo jednu varijablu stanja, pa se svaka jednadžba rješava za sebe. To je veoma značajna činjenica, jer podsustavi koje opisuju pojedine diferencijalne jednadžbe prvog reda nisu međusobno spregnuti. Jednadžbu izlaza (12-58):

$$Y(s)=K_1X_1(s)+K_2X_2(s)+\ldots+K_nX_n(s) \tag{12-62}$$

obratno transformiramo:

$$y=K_1x_1+K_2x_2+\ldots+K_nx_n. \tag{12-63}$$

Jednadžbe (12-61) i (12-63) ćemo opet pisati kao vektorske diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \ldots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \ldots\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u, \tag{12-64}$$

$$y=[K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}K_n]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}.$$

I ove jednadžbe možemo pisati skraćeno u matričnom obliku, što nazivamo i **normalnim oblikom dinamičkih jednadžbi stanja:**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=\Lambda\mathbf{x}(t)+\hat{\mathbf{b}}(t)\,u(t),\\ y(t)&=\hat{\mathbf{c}}^T(t)\,\mathbf{x}(t).\end{aligned} \tag{12-65}$$

Matrica Λ naziva se **dijagonalna matrica:** u dijagonali su korijeni karakteristične jednadžbe, odnosno svojstvene vrijednosti matrice, a svi su ostali elementi nule. Vektor ulaza $\hat{\mathbf{b}}$ sadrži jedinice, a vektor izlaza $\hat{\mathbf{c}}$ rezidue K_i odgovarajućih polova prijenosne funkcije. Upravo dijagonalni oblik matrice Λ odgovara činjenici da pojedine diferencijalne jednadžbe nisu međusobno spregnute; time se znatno pojednostavnjuju matrični proračuni. Varijable stanja koje su tako odabrane da dobijemo najjednostavniju dijagonalnu matricu, zovu se **kanonske varijable stanja.**

Primjer 12.4. Prijenosnu funkciju iz primjera 12.2. razvijemo u red parcijalnih razlomaka:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{6}{s^3+7s^2+14s+8}=\frac{2}{s+1}+\frac{-3}{s+2}+\frac{1}{s+4}.$$

Izlazna je funkcija:

$$Y(s)=\frac{2}{s+1}U(s)+\frac{-3}{s+2}U(s)+\frac{1}{s+4}U(s),$$

odakle su varijable stanja u transformiranom obliku:

$$X_1(s)=\frac{1}{s+1}U(s),$$

$$X_2(s)=\frac{1}{s+2}U(s),$$

$$X_3(s)=\frac{1}{s+4}U(s).$$

što daje diferencijalne jednadžbe:

$$\dot{x}_1=-x_1+u,$$

$$\dot{x}_2=-2x_2+u,$$

$$\dot{x}_3=-4x_3+u,$$

kao i:

$$y=2x_1-3x_2+x_3.$$

Napominjemo da u svakoj diferencijalnoj jednadžbi prvoga reda dolazi samo po jedna varijabla stanja.

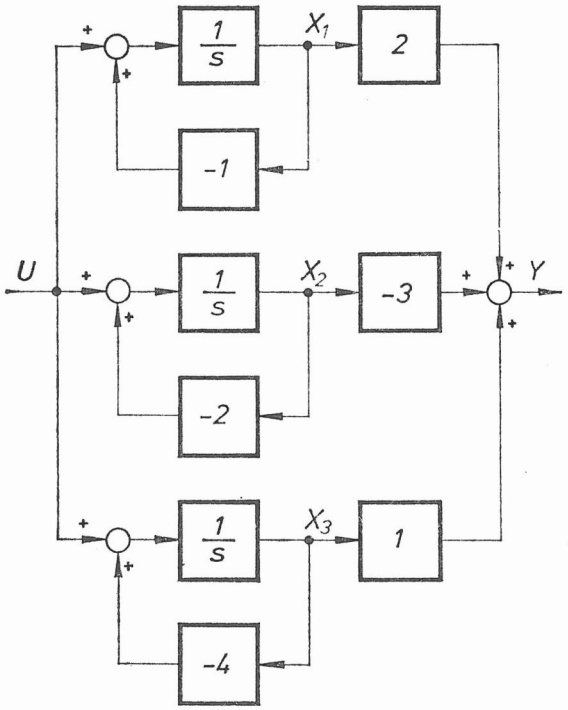
Iz gornjih jednadžbi dobivamo dinamičke jednadžbe stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u,$$

$$y=[2\ -3\ \ 1]\,\mathbf{x}.$$

Te su jednadžbe prikazane blok-dijagramom na sl. 12—8. Blokovi u povratnoj vezi identični su korijenima karakteristične jednadžbe, odnosno polovima prijenosne funkcije, a blokovi u izravnoj vezi sadrže koeficijente parcijalnih razlomaka, odnosno rezidue u polovima od $G(s)$. Postupak je sličan tzv. **paralelnom programiranju** pomoću simulacije prijenosne funkcije kod analognih računala. Spomenuli smo da su polovi prijenosne funkcije, odnosno svojstvene vrijednosti matrice $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ realni i različiti, što je u tehničkoj praksi opravdano u pretežnom broju slučajeva. Čak i kad postoje dvostruki i višestruki korijeni, mogu se oni

zamijeniti malo razmaknutim vrijednostima, što je opravdano s konstrukcijskog ili tehnološkog stajališta, a i zbog eksperimentalnog snimanja. Ako postoje višestruki korijeni, matrica se svodi na **Jordanovu normalnu matricu,** što dovodi do veoma složenih izraza [lit. 7, 51, 55].



Sl. 12—8. Blok-dijagram paralelnog programiranja prijenosne funkcije pomoću varijabli stanja — primjer 12.4

Normalni oblik dinamičkih jednadžbi stanja ima veliko značenje: sustav što ga opisuje diferencijalna jednadžba n-toga reda i ima složenu regulaciju može se nadomjestiti sa n međusobno nezavisnih sustava prvoga reda s jednostavnom regulacijom u međusobno odvojenim kanalima. To je bit tzv. **modalne regulacije**[1].

12.3.4. Transformacija u normalni oblik

U opisanim primjerima isti se sustav opisuje pomoću direktnog odnosno paralelnog postupka s dvije različite dinamičke jednadžbe stanja. Osim faznih i kanonskih varijabli stanja, u odjeljku 12.1 upoznali smo i fizikalne varijable stanja. Kao što vidimo, izbor varijabli stanja je mnogoznačan. Naš je cilj da umjesto standardnog oblika uvedemo normalan oblik dinamičkih jednadžbi stanja, odnosno umjesto faznih varijabli kanonske varijable. Spomenimo da su fazne varijable često fizikalno prisutne i mjerljive, a kanonske su varijable u pravilu apstraktne matematičke veličine.

Da bismo pretvorili fazni vektor stanja $\mathbf{x}$ u kanonski vektor stanja $\mathbf{z}$, poslužimo se matricom transformacije $\mathbf{P}$. Ona mora biti nesingularna da bi postojala inverzna matrica $\mathbf{P}^{-1}$ potrebna u daljim operacijama.

---

[1] Treba napomenuti da je praktička izvedba n nezavisnih regulacijskih krugova vrlo otežana različitim brojem ulaznih, izlaznih i varijabli stanja.

Možemo pisati:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \dots p_{1n} \\ p_{21} \dots p_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ p_{n1} \dots p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix} = [p_1, p_2, \dots, p_n] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix}. \tag{12-66}$$

Ova relacija $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{z}$ može se derivirati jer su elementi matrice $\mathbf{P}$ konstantni: $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}}$. To uvrstimo u dinamičke jednadžbe stanja (12-46):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{P}\mathbf{z}, \end{aligned} \tag{12-67}$$

gdje smo istovremeno premultiplicirali prvu jednadžbu sa $\mathbf{P}^{-1}$. Želimo li da $\mathbf{z}$ bude zaista kanonski vektor stanja, matricu $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ izjednačimo s dijagonalnom matricom Λ iz normalnog oblika jednadžbe stanja (12-65):

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\Lambda \tag{12-68}$$

Najprije ćemo gornju jednadžbu premultiplicirati sa $\mathbf{P}$; rezultat $\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{P}\Lambda$ napisat ćemo u nešto drugačijem obliku:

$$\mathbf{A}[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2, \dots \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{12-69}$$

pri čemu smo stupce matrice $\mathbf{P}$ označili kao vektore $\mathbf{p}_i$. Služeći se matričnim računom navedeni izraz pišemo dalje:

$$[\mathbf{A}\mathbf{p}_1\mathbf{A}\mathbf{p}_2 \dots \mathbf{A}\mathbf{p}_n] = [\lambda_1\mathbf{p}_1\lambda_2\mathbf{p}_2 \dots \lambda_n\mathbf{p}_n]. \tag{12-70}$$

Matrice su jednake ako su svi elementi jednaki; uspoređivanjem se dobije:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{p}_i = \lambda\,\mathbf{p}_i = 0 \qquad \text{za} \qquad i=1,2\dots,n, \tag{12-71}$$

i dalje:

$$[\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}]\,\mathbf{p}_i = 0 \qquad \text{za} \qquad i=1,2,\dots,n. \tag{12-72}$$

Iz tog niza homogenih jednadžbi mogu se izračunati vektori $\mathbf{p}_i$ matrice transformacije $\mathbf{P}$. Budući da je $\mathbf{P}$ nesingularna matrica, determinanta izraza u zagradi mora biti jednaka nuli:

$$\det[\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}]=0. \tag{12-73}$$

To je karakteristična jednadžba i korijeni λ_i svojstvene su vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. Svakom λ_i pripada i odgovarajući svojstveni vektor $\mathbf{p}_i$ matrice $\mathbf{P}$. Budući da je jednadžba (12-73) homogena, rješenje je i $k_i\mathbf{p}_i$, gdje je k_i bilo koja skalarna veličina.

Preko matrice transformacije povezali smo Frobeniusovu i dijagonalnu matricu $\mathbf{A}$ odnosno Λ. Prema definiciji su matrice $\mathbf{A}$ i Λ slične ako postoji nesingularna konstantna matrica $\mathbf{P}$ tako da je zadovoljena jednadžba (12-68). Matrica $\mathbf{A}$ nema

višestrukih korijena. Značajka transformacije po sličnosti jest u tome što su svojstvene vrijednosti matrica **A** i **Λ** invarijantne. Da bismo to dokazali, polazimo od determinante:

$$\det[\lambda \mathbf{I}-\mathbf{\Lambda}]=\det[\lambda \mathbf{I}-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}]=0. \tag{12-74}$$

Premultiplikacija i postmultiplikacija prvog člana sa $\mathbf{P}^{-1}$ odnosno $\mathbf{P}$ daje:

$$\begin{aligned}&\det[\lambda \mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P}-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}]=\det[\mathbf{P}^{-1}(\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{P}]=\\&\det[\mathbf{P}^{-1}]\det[\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}]\cdot\det[\mathbf{P}]=0\end{aligned} \tag{12-75}$$

jer se množenje determinanata provodi na isti način kao i matrica. Zbog $\mathbf{P}\neq 0$ ova je jednadžba ispunjena samo onda kada je $\det[\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}]=0$. Time smo dokazali da su svojstvene vrijednosti matrice **A** ujedno i svojstvene vrijednosti matrice **Λ**.

Primjer 12.5. Uzimamo jednostavnu Frobeniusovu matricu:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

koju prevodimo u kanonski oblik. Određujemo najprije svojstvene vrijednosti:

$$\det[\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}]=\det\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{bmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2=0,$$

odakle je $\lambda=-1$ i $\lambda_2=-2$.

Da bismo našli matricu transformacije **P**, poslužimo se jednadžbom (12-72). Najprije nađemo svojstveni vektor $\mathbf{p}_1$ koji pripada korijenu $\lambda_1=-1$:

$$\begin{bmatrix}-\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{bmatrix}\mathbf{p}_1=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{12}\end{bmatrix}=0.$$

Odavde je $p_{11}=-p_{12}$, pa možemo birati npr. $p_{11}=1$ i $p_{12}=-1$. Tako je vektor p_1:

$$\mathbf{p}_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}.$$

Sada je na redu svojstveni vektor p_2, koji pripada korijenu $\lambda_2=-2$:

$$\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{bmatrix}\mathbf{p}_2=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{21}\\ p_{22}\end{bmatrix}=0.$$

Dobijemo $p_{21}=\frac{1}{2}\cdot p_{22}$, pa opet biramo npr. $p_{21}=-1$ i $p_{22}=2$. S vektorom p_2:

$$\mathbf{p}_2=\begin{bmatrix}p_{21}\\ p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

određeni su svi elementi matrice transformacije **P**:

$$\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2]=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{21}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Inverzna je matrica $\mathbf{P}^{-1}$:

$$\mathbf{P}^{-1}=\frac{\operatorname{adj}\mathbf{P}}{\det\mathbf{P}}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

S ovim je vrijednostima zadovoljena matrična jednadžba $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\Lambda$:

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}.$$

12.4. Rješenje dinamičkih jednadžbi stanja

Dok smo u prethodnom odjeljku postavili kao problem dobivanje dinamičkih jednadžbi stanja iz diferencijalne jednadžbe ili iz prijenosne funkcije, u ovom odjeljku idemo donekle obratnim putem: tražimo rješenje dinamičkih jednadžbi stanja bilo u obliku prijenosne funkcije, tj. u području kompleksne varijable, bilo u vremenskom području. U prvom slučaju polazimo od Laplaceove transformacije, a u drugom slučaju rješenje ćemo dobiti razvijanjem vektora stanja u Taylorov red. Obje metode omogućuju dublji uvid u proučavanje sustava pomoću varijabli stanja.

12.4.1. Prijenosna funkcija kao rješenje

Polazimo opet od dinamičkih jednadžbi stanja za sustav s jednim ulazom i s jednim izlazom:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t),\\ y(t)&=\mathbf{c}^T\mathbf{x}(t).\end{aligned}\tag{12-46}$$

Te jednadžbe transformiramo u s-područje:

$$\begin{aligned}s\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}(0)&=\mathbf{A}\mathbf{X}(s)+\mathbf{b}U(s),\\ Y(s)&=\mathbf{c}^T\mathbf{X}(s),\end{aligned}\tag{12-76}$$

gdje je $\mathbf{x}(0)$ vektor početnih uvjeta pojedinih komponenata $\mathbf{x}(t)$. Najprije ćemo riješiti prvu jednadžbu po $X(s)$:

$$[s\,\mathbf{I}-\mathbf{A}]\,\mathbf{X}(s)=\mathbf{x}(0)+\mathbf{b}\,U(s).\tag{12-77}$$

Kako s nije matrica, morali smo je u svrhu daljnjih izvoda s matričnom jednadžbom nadomjestiti sa $s\,\mathbf{I}$, gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica.[1] Uz pretpostavku da postoji inverzna matrica $[s\,\mathbf{I}-\mathbf{A}]$, možemo dalje pisati:

$$\mathbf{X}(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{x}(0)+[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{b}U(s).\tag{12-78}$$

Iz ovog izvoda vidimo da je vektor stanja sustava ovisan o početnim uvjetima sadržanim u $\mathbf{x}(0)$, kao i o ulaznoj varijabli $U(s)$.

Uvrštenjem izraza za $\mathbf{X}(s)$ iz jednadžbe (12-78) u jednadžbu izlaza (12-76) dobivamo:

$$Y(s)=\mathbf{c}^T\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{x}(0)+\mathbf{c}^T\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{b}U(s).\tag{12-79}$$

[1] Vidi jednadžbu (12-23).

Odatle je, prema definiciji, prijenosna funkcija omjer izlazne i ulazne funkcije uz početne uvjete $\mathbf{x}(0)=0$:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\mathbf{c}^T\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{b}=\frac{\mathbf{c}^T\,\mathrm{adj}\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]\,\mathbf{b}}{\det\,|\,s\mathbf{I}-\mathbf{A}\,|}. \tag{12-80}$$

Budući da je redni vektor $\mathbf{c}^T$ $1\times n$, matrica $[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}$ $n\times n$, a stupčani vektor $\mathbf{b}$ $n\times 1$, prijenosna je funkcija $G(s)$ skalarna funkcija od s.

Iz izraza za prijenosnu funkciju vidimo da su korijeni karakteristične jednadžbe:

$$\det\,|\,s\mathbf{I}-\mathbf{A}\,|=0 \tag{12-81}$$

ujedno i polovi sustava. Međutim, korijeni karakteristične jednadžbe također su i svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Primjer 12.6. Uzimamo sustav predočen varijablama stanja:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 6\end{bmatrix}u,$$

$$y=x_1.$$

Izračunamo najprije:

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 6 & s+5\end{bmatrix},$$

a zatim:

$$\mathrm{adj}\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -6 & s\end{bmatrix},$$

$$\det\,|\,s\mathbf{I}-\mathbf{A}\,|=\begin{bmatrix}s & -1\\ 6 & s+5\end{bmatrix}=s^2+5s+6=(s+2)\,(s+3),$$

kao i:

$$\mathbf{c}^T\,\mathrm{adj}\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]\,\mathbf{b}=[1\;\;0]\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -6 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 6\end{bmatrix}=6.$$

Prijenosna je funkcija sustava:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\mathbf{c}^T\,\mathrm{adj}\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]\,\mathbf{b}}{\det\,|\,s\mathbf{I}-\mathbf{A}\,|}=\frac{6}{(s+2)\,(s+3)}.$$

12.4.2. Matrica prijelaza kao rješenje

Započinjemo razvojem u red homogene jednadžbe stanja, što je najpreglednije i daje izravno matricu prijelaza. Poopćeno rješenje nehomogene jednadžbe stanja možemo izvesti tek pomoću izvoda nekih svojstava matrice prijelaza.

Rješenje homogene jednadžbe stanja razvijanjem u red. Promotrimo najprije homogenu jednadžbu stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{12-82}$$

Razvijmo vektor $\mathbf{x}(t)$ u Taylorov red u okolišu točke $t=0$:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(0)+\dot{\mathbf{x}}(0)\,t+\ddot{\mathbf{x}}(0)\frac{t^2}{2!}+\ldots+\mathbf{x}^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}+\ldots, \tag{12-83}$$

gdje je:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}(t)|_{t=0},\\&\dot{\mathbf{x}}(0)=\dot{\mathbf{x}}(t)|_{t=0},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\mathbf{x}^{(n)}(0)=\mathbf{x}^{(n)}(t)|_{t=0}.\end{aligned}\tag{12-84}$$

Vektor stanja $\mathbf{x}(t)$ izražen je kao funkcija početnog vektora stanja $\mathbf{x}(0)$ i reda potencija od t, gdje je $t\geqslant 0$. Da bismo rješenje dobili u prikladnom obliku, izrazit ćemo konstantne koeficijente $\mathbf{x}^{(i)}(0)$ pomoću matrice koeficijenata $\mathbf{A}$ i vektora početnog stanja $\mathbf{x}(0)$. Budući da je matrica $\mathbf{A}$ konstantna, derivacijom jednadžbe (12-82) dobivamo:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\mathbf{x}(t)=\mathbf{A}^2\mathbf{x}(t).\tag{12-85}$$

To možemo poopćiti za n-tu derivaciju:

$$\mathbf{x}^{(i)}(t)=\mathbf{A}^i\mathbf{x}(t).\tag{12-86}$$

Kako je $t\geqslant 0$, vrijedi dalje:

$$\mathbf{x}^{(i)}(0)=\mathbf{A}^i\mathbf{x}(0)\quad\text{za}\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n,\tag{12-87}$$

gdje je $\mathbf{A}^0=\mathbf{I}$. Uvrštenjem konstantnih koeficijenata iz izraza (12-87) u jednadžbu (12-83), dobivamo rješenje:

$$\mathbf{x}(t)=\left[\mathbf{I}+t\mathbf{A}+\frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n\mathbf{A}^n}{n!}+\ldots\right]\mathbf{x}(0).\tag{12-88}$$

Red potencija u zagradi možemo pisati u eksponencijalnom obliku:

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)\quad\text{za}\quad t\geqslant 0.\tag{12-89}$$

Uvrštenjem izraza (12-88), odnosno (12-89), u homogenu jednadžbu (12-82) dokazujemo da je to zaista rješenje jednadžbe stanja. To rješenje podsjeća na rješenje u skalarnom obliku.

Ako su nam poznati početno stanje sustava $\mathbf{x}(0)$ i matrica $e^{\mathbf{A}t}$, možemo odrediti stanje sustava u bilo kojem kasnijem trenutku $\mathbf{x}(t)$. Množenjem sa $e^{\mathbf{A}t}$, autonomni sustav iz stanja kod $t=0$ prelazi u stanje u trenutku t, pa $e^{\mathbf{A}t}$ nazivamo i **matrica prijelaza:**

$$\Phi(t)=e^{\mathbf{A}(t)}=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{\mathbf{A}^nt^n}{n!}+\ldots\tag{12-90}$$

U matematici se upotrebljava i naziv **fundamentalna matrica.**

Ako bismo umjesto u točki $t=0$ vektor $\mathbf{x}(t)$ razvili u Taylorov red u okolišu točke $\tau\neq 0$, dobili bismo analogno gornjem izvodu:

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{x}(\tau)=\Phi(t-\tau)\,\mathbf{x}(\tau).\tag{12-91}$$

Svojstva matrice prijelaza. Očito je da matrica prijelaza ima veoma važnu ulogu u analizi prostora stanja. Zato ćemo prije nego što potražimo rješenje nehomogene jednadžbe stanja upozoriti na nekoliko svojstava matrice prijelaza.

Matrica $\Phi(t)$ nije nikad singularna, tj.

$$\det\Phi(t)\neq 0\quad\text{za sve}\quad t.\tag{12-92}$$

Iduće svojstvo slijedi neizravno, korištenjem definicije (12-90):

$$\Phi(t_1)\Phi(t_2)=e^{At_1}\cdot e^{At_2}=\left[\mathbf{I}+\mathbf{A}t_1+\frac{\mathbf{A}^2t_1^2}{2!}+\ldots\right]\left[\mathbf{I}+\mathbf{A}t_2+\frac{\mathbf{A}^2t_2^2}{2!}+\ldots\right]=$$

$$=\mathbf{I}+\mathbf{A}(t_1+t_2)+\frac{\mathbf{A}^2(t_1+t_2)^2}{2!}+\ldots=e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)}=\Phi(t_1+t_2). \tag{12-93}$$

Uz $t_1=t_2=t$ dobije se dalje:

$$\Phi(t)\,\Phi(-t)=e^{\mathbf{A}t}\cdot e^{-\mathbf{A}t}=\mathbf{I}, \tag{12-94}$$

pa je $\Phi(-t)$ inverzna matrica od $\Phi(t)$.

Derivacija matrice prijelaza proizlazi također iz definicije (12-90):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{\mathbf{A}^nt^n}{n!}+\ldots\right]= \tag{12-95}$$

$$=\mathbf{A}\left[\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{\mathbf{A}^nt^n}{n!}+\ldots\right]=\mathbf{A}\Phi(t).$$

Spomenimo na kraju da je matrica prijelaza dobila praktičko značenje u proračunima tek primjenom digitalnih računala.

Rješenje nehomogene jednadžbe stanja razvijanjem u red. Prelazimo na rješenje nehomogene jednadžbe stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t). \tag{12-96}$$

Pretpostavimo rješenje oblika:

$$\mathbf{x}(t)=\Phi(t)\,\mathbf{z}(t), \tag{12-97}$$

gdje je $\mathbf{z}(t)$ neki vektor stanja. Gornji izraz uvrstimo u jednadžbu (12-96):

$$\dot{\Phi}(t)\,\mathbf{z}(t)+\Phi(t)\,\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{A}\,\Phi(t)\,\mathbf{z}(t)+\mathbf{b}u(t). \tag{12-98}$$

Primjenom derivacije (12-95) na gornju jednadžbu:

$$\mathbf{A}\,\Phi(t)\,\mathbf{z}(t)+\Phi(t)\,\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{A}\,\Phi(t)\,\mathbf{z}(t)+\mathbf{b}u(t) \tag{12-99}$$

dobivamo izravno:

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=\Phi^{-1}(t)\,\mathbf{b}u(t). \tag{12-100}$$

Pomoću svojstva (12-94) imamo dalje:

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=\Phi(-t)\,\mathbf{b}u(t). \tag{12-101}$$

Integriramo gornju jednadžbu u granicama od 0 do t:

$$\mathbf{z}(t)=\mathbf{z}(0)+\int_0^t\Phi(-\tau)\,\mathbf{b}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{12-102}$$

gdje τ predstavlja samo varijablu integracije.

Iz jednadžbe (12-97) proizlazi da je $\mathbf{x}(0)=\mathbf{z}(0)$, jer je $\Phi(0)=\mathbf{I}$; to uvrstimo u izraz (12-102) koji zatim premultipliciramo sa $\Phi(t)$. Dobit ćemo:

$$\mathbf{x}(t)=\Phi(t)\,\mathbf{z}(t)=\Phi(t)\,\mathbf{x}(0)+\Phi(t)\int_0^t\Phi(-\tau)\,\mathbf{b}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{12-103}$$

Matrica prijelaza $\Phi(t)$ ne ovisi o integraciji, pa je možemo staviti pod znak integrala; nadalje, prema svojstvu (12-93) vidimo da je $\Phi(t)\,\Phi(-\tau)=\Phi(t-\tau)$. S tim promjenama rješenje (12-103) postaje:

$$\mathbf{x}(t)=\Phi(t)\,\mathbf{x}(0)+\int_0^t \Phi(t-\tau)\,\mathbf{b}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{12-104}$$

Ovaj se izraz naziva i **jednadžba kretanja.** Prvi član desno je zapravo odziv na početne uvjete $\mathbf{x}(0)$ i predstavlja **vlastito kretanje sustava** uvjetovano početnim stanjem $\mathbf{x}(0)$, a izračunali smo ga iz jednadžbe (12-89). Drugi član desno je integral konvolucije u matričnom obliku; to je odziv na pobudu $u(t)$ i predstavlja **prisiljeno kretanje sustava.** Uspoređujući izraz (12-104) s izrazom (12-78) koji je rješenje u s-području, možemo pisati važne relacije:

$$\mathcal{L}^{-1}\{[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\}=\Phi(t),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{b}U(s)\}=\int_0^t \Phi(t-\tau)\,\mathbf{b}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{12-105}$$

Primjer 12.7. Uzimamo sustav iz primjera 12.6, kojeg su dinamičke jednadžbe:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 6\end{bmatrix}u,$$

$$y=x_1.$$

Koristeći se izračunatim izrazima adj $[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ i det $|\,s\mathbf{I}-\mathbf{A}\,|$, dobivamo:

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\frac{\operatorname{adj}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]}{\det[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]}=\frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -6 & s\end{bmatrix},$$

i dalje:

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)}\\[2ex] \dfrac{-6}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}.$$

Obratnom transformacijom dobivamo:

$$\Phi(t)=\mathcal{L}^{-1}\{[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\}=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t}\\ -6e^{-2t}+6e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}.$$

To uvrstimo u jednadžbu (12-104), pa sa zadanim početnim uvjetima $\mathbf{x}(0)$ i pobudom $u(t)$ možemo naći rješenje $\mathbf{x}(t)$.

12.5. Analiza regulacijskih sustava

Dosadašnja razmatranja svodili su se na prikaz poopćenog sustava metodom varijabli stanja. Često je poželjno da same varijable stanja $\mathbf{x}(t)$ u povratnoj vezi djeluju na ulaz sustava. To nazivamo regulacijski sustav s varijablama stanja, pa ćemo ga opisati. Osim toga, problem točnosti i stabilnosti sustava koji je prikazan varijablama stanja postavit ćemo sasvim općenito.

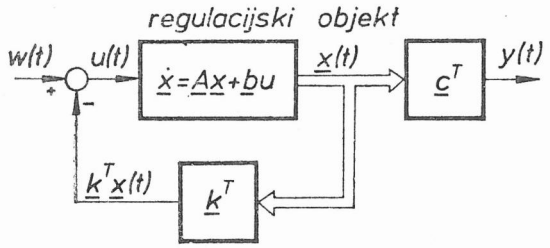
12.5.1. Regulacijski sustav s varijablama stanja

Matrična blok-shema regulacijskog sustava prikazana je na sl. 12—9. Regulacijski objekt sastoji se od bloka $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}u$ u koji je uključena petlja povratne veze (dinamika objekta) te bloka $\mathbf{c}^T$. Drugom, pravom petljom povratne veze vraćaju se varijable stanja $\mathbf{x}(t)$ iz objekta preko člana s parametrima $\mathbf{k}^T$ na ulaz objekta, kuda se dovodi i vodeća veličina $w(t)$. Povratni je signal skalar:

$$\mathbf{k}^T\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n} k_i x_i(t), \tag{12-106}$$

gdje su $k_1, k_2, \ldots, k_n$ skalarne komponente. Pretpostavlja se da postoji jedan ulaz i jedan izlaz, tako da su ulazna i izlazna veličina $u(t)$, odnosno $y(t)$ skalari. Prema tome, uzimamo jednadžbe:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t),\\ y(t)&=\mathbf{c}^T\mathbf{x}(t).\end{aligned} \tag{12-46}$$



Sl. 12—9. Matrični blok-dijagram regulacijskog sustava s varijablama stanja

Iz blok-dijagrama vidimo da vrijedi:

$$u(t)=w(t)-\mathbf{k}^T\mathbf{x}(t), \tag{12-107}$$

gdje je $w(t)$ vodeća veličina koja predstavlja skalarni ulaz u cijeli regulacijski sustav. Uvrštenjem izraza za $u(t)$ u jednadžbu sustava (12-46) dobivamo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=[\mathbf{A}-\mathbf{b}\mathbf{k}^T]\,\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}w(t),\\ \mathrm{y}(t)&=\mathbf{c}^T\mathbf{x}(t).\end{aligned} \tag{12-108}$$

Taj matematički oblik **regulacijskog sustava s varijablama stanja** nalik je jednadžbama (12-46) ako zamijenimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&\rightarrow[\mathbf{A}-\mathbf{b}\mathbf{k}^T],\\ u(t)&\rightarrow w(t),\end{aligned}$$

pa možemo primijeniti dosadašnje rezultate analize sustava s varijablama stanja.

Tako npr. prijenosnu funkciju dobivamo jednostavnom transformacijom jednadžbi (12-108):

$$G(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=\mathbf{c}^T[s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T]^{-1}\,\mathbf{b}, \tag{12-109}$$

što odgovara prijenosnoj funkciji $G(s)$ iz jednadžbe (12-80). Još jedan oblik prijenosne funkcije možemo dobiti ako izravno transformiramo jednadžbe (12-46) i (12-107):

$$\begin{aligned}s\mathbf{X}(s)&=\mathbf{A}\mathbf{X}(s)+\mathbf{b}U(s),\\ Y(s)&=\mathbf{c}^T\mathbf{X}(s),\\ U(s)&=W(s)-\mathbf{k}^T\mathbf{X}(s),\end{aligned} \tag{12-110}$$

pri čemu smo u gornjoj jednadžbi stavili vektor početnih uvjeta $\mathbf{x}(0)=0$. Iz prve jednadžbe na već poznati način izlučimo $\mathbf{X}(s)$:

$$\mathbf{X}(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{b}U(s), \tag{12-111}$$

u što uvrstimo izraz za $U(s)$ iz treće jednadžbe (12-110) i sredimo:

$$\mathbf{X}(s)=\frac{[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{b}W(s)}{1+\mathbf{k}^T[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{b}}. \tag{12-112}$$

Uvrštenjem $\mathbf{X}(s)$ u drugu jednadžbu (12-110) dobit ćemo odnos između izlazne i ulazne varijable:

$$Y(s)=\frac{\mathbf{c}^T[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{b}W(s)}{1+\mathbf{k}^T[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{b}}, \tag{12-113}$$

pa možemo napisati prijenosnu funkciju u preinačenom obliku:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{\mathbf{c}^T[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{b}}{1+\mathbf{k}^T[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{b}}. \tag{12-114}$$

Iz tog oblika prijenosne funkcije lako je uočiti da uz uvjet:

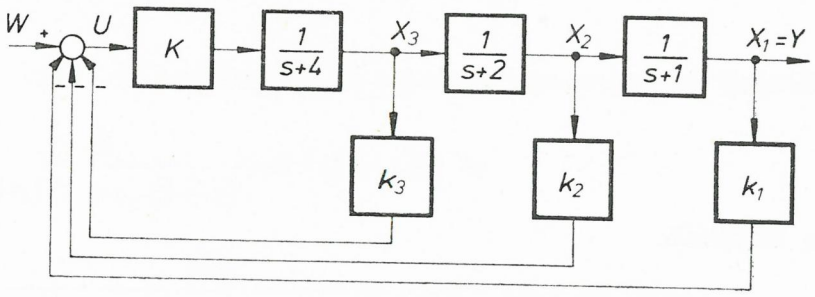
$$\mathbf{k}=\mathbf{c} \tag{12-115}$$

možemo dobiti važan slučaj regulacijskog sustava s varijablama stanja uz **jediničnu povratnu vezu.**

Primjer 12.8. Uzimamo regulacijsku stazu koje je prijenosna funkcija:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+4)}.$$

Pogodno je da varijable stanja izaberemo prema sl. 12-10, gdje su konstante u povratnoj vezi k_1, k_2 i k_3, a pojačanje K namjerno smo ostavili u općem obliku.



Sl. 12–10. Regulacijski sustav s varijablama stanja – primjer 12.8

Imamo:

$$Y(s)=X_1(s),$$

kao i:

$$X_1(s)=\frac{1}{s+1}X_2(s),$$

$$X_2(s)=\frac{1}{s+2}X_3(s),$$

$$X_3(s)=\frac{1}{s+4}KU(s).$$

Preuređenjem dobivamo sustav jednadžbi:

$$s\,X_1(s) = -X_1(s) + X_2(s),$$
$$s\,X_2(s) = -2X_2(s) + X_3(s),$$
$$s\,X_3(s) = -4X_3(s) + KU(s),$$
$$Y(s) = X_1(s),$$

što možemo pisati u obliku dinamičkih jednadžbi stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u,$$
$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\,\mathbf{x}.$$

Dodatna je jednadžba:

$$u(t) = w(t) - [k_1\ k_2\ k_3]\,\mathbf{x}.$$

Cilj je da dobijemo prijenosnu funkciju (12-114). U tu ćemo svrhu pomoću matrice koeficijenata **A** izračunati:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -1 \\ 0 & 0 & s+4 \end{bmatrix},$$

i dalje:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{(s+2)(s+4)} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{s+4} \end{bmatrix}.$$

Brojnik je prijenosne funkcije iz jednadžbe (12-114):

$$\mathbf{c}^T [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+4)},$$

a nazivnik:

$$1 + \mathbf{k}^T [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} = 1 + \frac{Kk_1}{(s+1)(s+2)(s+4)} + \frac{Kk_2}{(s+2)(s+4)} + \frac{Kk_3}{s+4},$$

koji sredimo:

$$1 + \mathbf{k}^T [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} =$$
$$= \frac{s^3 + (7 + Kk_3)\,s^2 + (14 + Kk_2 + 3Kk_3)\,s + 8 + Kk_1 + Kk_2 + 2Kk_3}{(s+1)(s+2)(s+4)}.$$

Konačno je prijenosna funkcija regulacijskog sustava s varijablama stanja:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K}{s^3 + (7 + Kk_3)\,s^2 + (14 + Kk_2 + 3Kk_3)\,s + 8 + Kk_1 + Kk_2 + 2Kk_3}.$$

Iz tog izraza možemo zaključiti, prvo, da smo metodski došli do izraza za ukupnu prijenosnu funkciju za sustav s više petlji povratne veze, i drugo, da imamo na raspolaganju dodatne veličine k_1, k_2 i k_3 pomoću kojih možemo izvršiti uspješnu sintezu.

12.5.2. Točnost regulacije

U odjeljku 8.2. definirali smo regulacijsko odstupanje kao razliku između izlazne i ulazne veličine. Primjenjujući to na regulacijski sustav s varijablama stanja na sl. 12—9, možemo postaviti slijedeći odnos:

$$e(t)=w(t)-y(t), \tag{12-116}$$

gdje uzimamo ulaznu i izlaznu veličinu, $w(t)$, odnosno $y(t)$. Točnost regulacije procjenjujemo regulacijskim odstupanjem u stacionarnom stanju, tj. prema trajnom regulacijskom odstupanju:

$$e_0=\lim_{t\to\infty} e(t). \tag{12-117}$$

Da bismo izveli izraz za e_0, najjednostavnije je da izraz transformiramo u s-područje, pa da primijenimo teorem konačne vrijednosti na sličan način kao što smo postupili u odjeljku 8.2. Transformirana je jednadžba (12-116):

$$E(s)=W(s)-Y(s)=W(s)\left[1-\frac{Y(s)}{W(s)}\right]=W(s)\,[1-G(s)]. \tag{12-118}$$

Uvrštenjem prijenosne funkcije (12-109) dobivamo:

$$E(s)=W(s)\,[1-\mathbf{c}^T\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T]^{-1}\,\mathbf{b}]. \tag{12-119}$$

Uz pretpostavku da taj izraz ne sadrži polove na imaginarnoj osi, odnosno u desnoj polovini s-ravnine, možemo primijeniti teorem konačne vrijednosti:

$$e_0=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} sW(s)\,\{1-\mathbf{c}^T\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T]^{-1}\,\mathbf{b}\}. \tag{12-120}$$

Za određivanje trajnoga regulacijskog odstupanja moramo poznavati i pobudnu funkciju; između mnogih mogućnosti biramo odskočnu, nagibnu i parabolnu funkciju.

Položajna greška uvodi se uz odskočnu funkciju na ulazu. Kao što smo u jednadžbi (8-20) uvrstili transformat odskočne funkcije $W(s)=1/s$, učinit ćemo isto i u jednadžbi (12-120):

$$e_0=\frac{1}{1+K_p}=\lim_{s\to 0}\{1-\mathbf{c}^T\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T]^{-1}\,\mathbf{b}\}. \tag{12-121}$$

Odatle možemo izračunati **koeficijent položajne greške** K_p.

Brzinska se greška određuje uz narinutu nagibnu funkciju. Njezin transformat $W(s)=1/s^2$ opet uvrštavamo u jednadžbu (12-120), kao što smo uradili i u jednadžbi (8-25):

$$e_0=\frac{1}{K_v}=\lim_{s\to 0}\frac{\{1-\mathbf{c}^T\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T]^{-1}\,\mathbf{b}\}}{s}, \tag{12-122}$$

pri K_v označava **koeficijent brzinske greške.** Uz $s=0$, jedina mogućnost da $e_0 \neq 0$ jest da je izraz u zagradi:

$$\lim_{s\to 0} \{1-\mathbf{c}^T [s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T]^{-1} \mathbf{b}\}=1-\mathbf{c}^T [-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T]^{-1} \mathbf{b}=0 \tag{12-123}$$

pa dobivamo neodređen izraz 0/0. Primjenom L'Hospitalova pravila dobit ćemo:

$$e_0=\frac{1}{K_v}=-\lim_{s\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathbf{c}^T [s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T]^{-1} \mathbf{b}, \tag{12-124}$$

što deriviramo:

$$e_0=\frac{1}{K_v}=\lim_{s\to 0} \mathbf{c}^T [s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T]^{-2} \mathbf{b}. \tag{12-125}$$

Konačno, uz narinutu parabolnu funkciju na ulazu dobivamo grešku ubrzanja. U jednadžbi (8-31) uveli smo **koeficijent greške ubrzanja** K_a uz narinutu $W(s)=1/s^3$, transformat parabolne funkcije uvrstimo u jednadžbu (12-120), pa dobivamo:

$$e_0=\frac{1}{K_a}=\lim_{s\to 0} \frac{\{1-\mathbf{c}^T [s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T]^{-1} \mathbf{b}\}}{s^2}. \tag{12-126}$$

Uz $s=0$ mora brojnik imati dvostruku nultočku da $e_0 \neq \infty$. Uz tu pretpostavku, primjenom L'Hospitalova pravila, dobivamo:

$$e_0=\frac{1}{K_a}=-\lim_{s\to 0} \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \mathbf{c}^T [s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T]^{-1} \mathbf{b}, \tag{12-127}$$

odnosno nakon dvostruke derivacije:

$$e_0=\frac{1}{K_a}=-\lim_{s\to 0} \mathbf{c}^T [s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T]^{-3} \mathbf{b}. \tag{12-128}$$

Treba napomenuti da za izračunavanje koeficijenata greške položaja, brzine i ubrzanja gornji izrazi nisu najprikladniji, i to zbog inverzne matrice.

12.5.3. Stabilnost regulacije

Kod linearnih sustava opisanih dinamičkim jednadžbama stanja:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t), \\ y(t)&=\mathbf{c}^T\mathbf{x}(t), \end{aligned} \tag{12-46}$$

stabilnost ovisi samo o dijelu $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, a ulazna funkcija $u(t)$ nema utjecaja. To isto vrijedi i za regulacijske sustave s varijablama stanja kojih su dinamičke jednadžbe stanja:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t)&=[\mathbf{A}-\mathbf{b}\mathbf{k}^T]\,\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}w(t), \\ y(t)&=\mathbf{c}^T\,\mathbf{x}(t), \end{aligned} \tag{12-108}$$

gdje uzimamo izraz $\dot{\mathbf{x}}(t)=[\mathbf{A}-\mathbf{b}\mathbf{k}^T]\,\mathbf{x}(t)$.

Promatrajući odnose u s-području, možemo poći od prijenosne funkcije:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\mathbf{c}^T [s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b}=\frac{\mathbf{c}^T \operatorname{adj} [s\mathbf{I}-\mathbf{A}]\,\mathbf{b}}{\det |s\mathbf{I}-\mathbf{A}|}. \tag{12-83}$$

Nazivnik $\det|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ predstavlja karakteristični polinom. Iz njega dobivamo karakterističnu jednadžbu $\det|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$, koje su korijeni polovi prijenosne funkcije. Sustav je stabilan ako su svi polovi prijenosne funkcije $G(s)$, a to su ujedno i svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata $\mathbf{A}$, smješteni na lijevoj polovini s-ravnine.

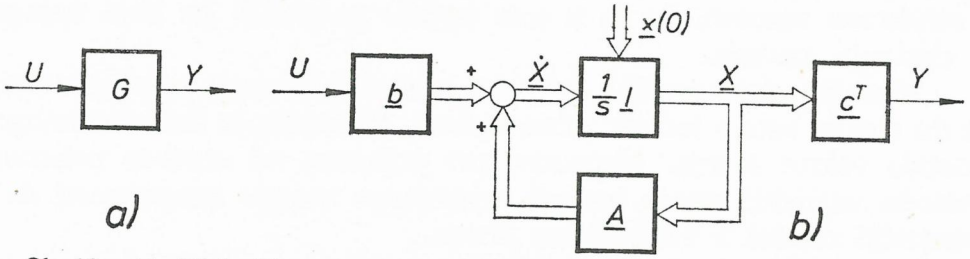
Poznavajući matricu koeficijenata $\mathbf{A}$, možemo izračunati karakteristični polinom $\det|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|$, odnosno karakterističnu jednadžbu. Nakon toga ćemo primijeniti jedan od analitičkih kriterija stabilnosti da bismo odredili je li sustav stabilan ili ne[1].

12.6. Varijable stanja i prijenosna funkcija

Nakon što smo upoznali značajke prikaza sustava pomoću varijabli stanja, uputno je da ga usporedimo s prikazom sustava pomoću prijenosne funkcije, odnosno da izvršimo kratki sažetak.

Za sustav s jednom ulaznom i jednom izlaznom veličinom prijenosna je funkcija dana u blok-dijagramu na sl. 12—11a, a njezin je poznati izraz:

$$Y(s)=G(s)\,U(s). \tag{12-129}$$



Sl. 12—11. Blok-dijagram sustava s jednim ulazom i jednim izlazom prikazan s prijenosnom funkcijom (a) i s varijablama stanja (b)

Isti sustav s jednim ulazom i jednim izlazom možemo prikazati pomoću varijabli stanja u matričnom blok-dijagramu na sl. 12—11b. Analitički je izraz transformirana jednadžba (12-46):

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}(0)&=\mathbf{A}\mathbf{X}(s)+\mathbf{b}U(s),\\ Y(s)&=\mathbf{c}^T\mathbf{X}(s) \end{aligned} \tag{12-76}$$

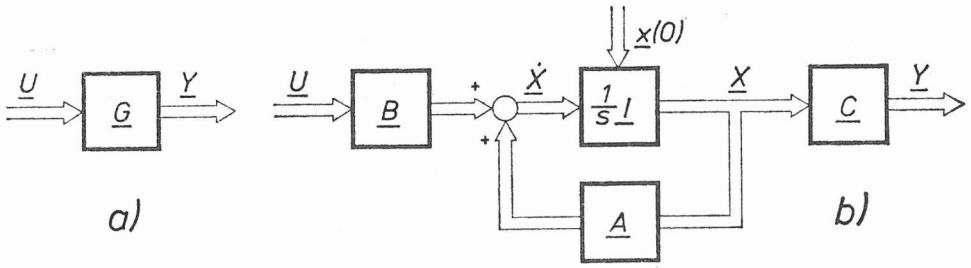
Za sustav s više ulaza i više izlaza možemo izraz (12-129) poopćiti. Prema matričnom blok-dijagramu na sl. 12—12a dobivamo:

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{G}(s)\,\mathbf{U}(s), \tag{12-130}$$

gdje prijenosna funkcija $\mathbf{G}(s)$ ima oblik matrice. Sustav s više ulaza i više izlaza u prikazu s varijablama stanja glasi prema transformiranoj jednadžbi (12-45):

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}(0)&=\mathbf{A}\mathbf{X}(s)+\mathbf{B}\mathbf{U}(s),\\ \mathbf{Y}(s)&=\mathbf{C}\mathbf{X}(s), \end{aligned} \tag{12-131}$$

[1] Vidi direktnu metodu Ljapunova u odjeljku 13.4.



Sl. 12--12. Blok-dijagram sustava s više ulaza i više izlaza prikazan s prijenosnom funkcijom (a) i s varijablama stanja (b)

i prikazan je matričnim blok-dijagramom na sl. 12—12b. Izravna veza **D** između izlaza i ulaza izostavljena je.

Prijenosna funkcija ili pripadajuća diferencijalna jednadžba izvode se izravno za sustave prvog i drugog reda iz osnovnih jednadžbi fizike. Za sustave višeg reda to u pravilu nije moguće, već se radi neizravno preko sustava prvog i drugog reda metodom algebre blokova, odnosno eliminacijom varijabli. Prema tome se nameće pomisao da je metoda prostora stanja prikladnija za strukturni opis sustava negoli prijenosna funkcija.

Osnovna je svrha prijenosne funkcije da se pomoću algebre blokova sustav svede na veoma jednostavan odnos između izlaza i ulaza. Time smo međutim izgubili podatke o strukturi sustava. Prikaz pomoću varijabi stanja opisuje naprotiv i strukturu sustava, pa je u tom smislu potpuniji jer daje mnogo više podataka o vladanju sustava.

Nadalje, ako se vrši pretvorba iz varijabli stanja u prijenosnu funkciju, jasno je da sustav ostaje jednoznačno opisan. Podataka je doduše mnogo manje, jer nedostaje vektor stanja. Naprotiv, pri prijelazu od metode prijenosne funkcije na metodu varijabli stanja postoji neizmjerno mnogo mogućnosti da izaberemo matematički model s varijablama stanja.

Spomenimo na kraju i dodatnu prednost metode prostora stanja u odnosu na metodu prijenosne funkcije. Prema definiciji prijenosne funkcije, početni uvjeti uzimaju se jednakima nuli, pa se sustav promatra s ishodištem kao polaznom točkom. Kod metode prostora stanja obuhvaćeni su i početni uvjeti, pa se promatra dinamika sustava s bilo kojom polaznom točkom u prostoru stanja.

12.7. Upravljivost i mjerljivost

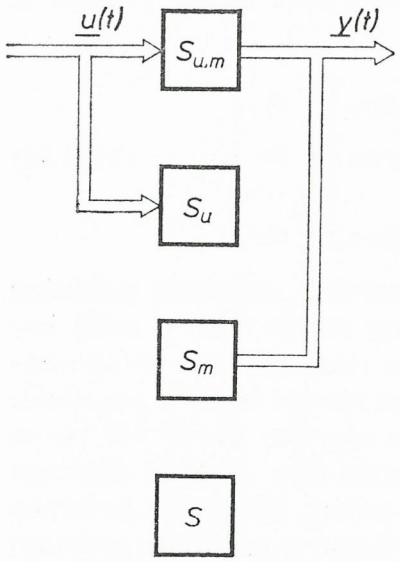
Pri mjerenju i optimalizaciji regulacijskih sustava od osnovne su važnosti pojmovi upravljivosti (engl. controllability) i mjerljivosti (eng. observability) koje je uveo R. E. Kalman[1]. Kao što ćemo odmah vidjeti, kod prikaza prijenosnom funkcijom mora postojati i upravljivost i mjerljivost sustava, pa se zato ti pojmovi i ne **mogu** sagledati. U ovom odjeljku dat ćemo samo osnovno fizikalno tumačenje obaju pojmova.

Za sustav se kaže da je **upravljiv** ako se pomoću kontrolne, odnosno pobudne funkcije $\mathbf{u}(t)$, sustav može prevesti iz bilo kojeg početnog stanja $\mathbf{x}(0)$ u neko konačno stanje $\mathbf{x}(t_f)$ u konačnom vremenu $t_f \geqslant 0$. Drugim riječima, ulazna veličina $\mathbf{u}(t)$ »kontrolira« u svakom trenutku stanje sustava $\mathbf{x}(t)$.

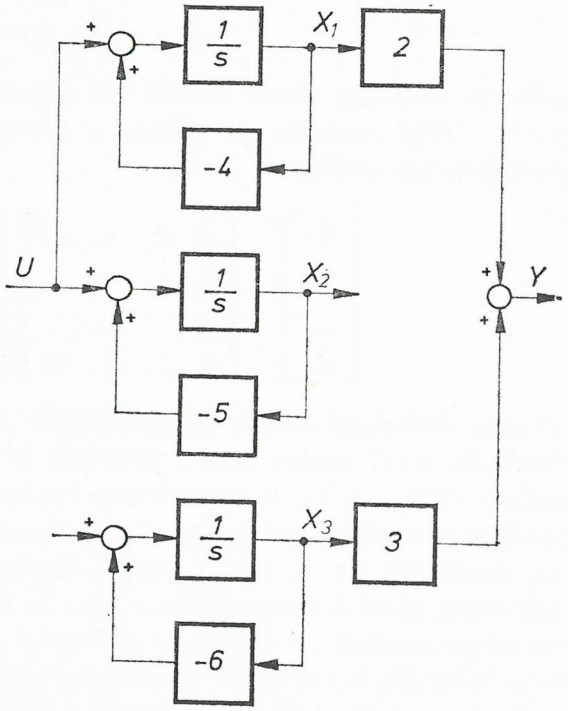
[1] Kalman, R. E., On the general Theory of Control Systems. Proc. IFAC, vol. 1, s. 481-492, Butterworth, Washington 1960.

Za sustav se kaže da je **mjerljiv** ako se početno stanje sustava $\mathbf{x}(0)$ može točno odrediti pomoću mjerenja izlazne funkcije $\mathbf{y}(t)$ u konačnom intervalu vremena $0 \leqslant t \leqslant t_f$. Drugim riječima, svako stanje $\mathbf{x}(t)$ utječe na izlaznu veličinu $\mathbf{y}(t)$. Naglasimo da je veoma važna praktična činjenica što se pomoću mjerenja izlazne veličine može odrediti stanje sustava.

Pojam upravljivosti i mjerljivosti lako je shvatiti na osnovi matričnog blok-dijagrama na sl. 12—13, prema kojem je neki fizikalni sustav rastavljen na četiri moguća podsustava. Prisutnost ulazne funkcije $\mathbf{u}(t)$ ukazuje da je podsustav upravljiv, a povezanost s izlaznom funkcijom $\mathbf{y}(t)$ znači da je sustav mjerljiv. Tako je npr. najgornji podsustav $S_{u,m}$ i upravljiv i mjerljiv, a najdonji podsustav S nije ni upravljiv ni mjerljiv. Iz slike proizlazi da se samo podsustav $S_{u,m}$ može opisati prijenosnom funkcijom $G(s) = Y(s)/U(s)$, dok se za ostale slučajeve ona ne može



Sl. 12—13. Podjela sustava obzirom na upravljivost i mjerljivost



Sl. 12—14. Blok-dijagram sustava iz kojeg se vidi upravljivost i mjerljivost podsustava — primjer 12.8

ni postaviti. Većina regulacijskih sustava u praksi je i upravljiva i mjerljiva. Želimo li neki sustav podijeliti u podsustave prema sl. 12—13, postupak je veoma jednostavan ako je matrica sustava $\mathbf{A}$ u kanonskom obliku Λ:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \Lambda\mathbf{x} + \hat{\mathbf{b}}u, \\ y &= \hat{\mathbf{c}}^T\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{12-65}$$

što ćemo odmah vidjeti na primjeru.

Primjer 12.9. Neki sustav opisuju dinamičke jednadžbe stanja u normalnom obliku:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u,$$

$$\mathbf{y} = [2 \quad 0 \quad 3]\,\mathbf{x}.$$

Zbog toga što već imamo normalan oblik, primijenimo paralelno programiranje, jer je svaka jednadžba funkcija samo jedne varijable stanja. Iz blok-dijagrama tog sustava na sl. 12—14 možemo lako uočiti koji su podsustavi upravljivi odnosno mjerljivi. Jedino je najgornji podsustav i upravljiv i mjerljiv, pa prijenosnu funkciju možemo napisati samo za njega:

$$G(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{2}{s+4}.$$

Na kraju ćemo se ukratko osvrnuti na definiciju i uvjete upravljivosti i mjerljivosti. Poslužit ćemo se normalnim oblikom dinamičkih jednadžbi stanja s više ulaza i izlaza; one su najpogodnije da se postave uvjeti za upravljivost i mjerljivost:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}&=\mathbf{\Lambda z}+\mathbf{Gu},\\ \mathbf{y}&=\mathbf{Hz},\end{aligned}\qquad (12\text{-}132)$$

gdje je matrica ulaza $\mathbf{G}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$ formata $n\times m$, a matrica izlaza $\mathbf{H}=\mathbf{CP}$ formata $p\times n$. Obje matrice su dakle u normalnom obliku. Jednadžbu stanja pišemo u proširenom obliku:

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dots\\ \dot{z}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ \dots\\ z_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}g_{11} & \dots & g_{1m}\\ g_{21} & \dots & g_{2m}\\ \dots & \dots & \dots\\ g_{n1} & \dots & g_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \dots\\ u_n\end{bmatrix}. \qquad (12\text{-}133)$$

Prema definiciji sustav je **upravljiv** ako se pomoću kontrolne, odnosno pobudne funkcije $\mathbf{u}(t)$ sustav može prevesti iz bilo kojeg početnog stanja $\mathbf{z}(0)$ u neko konačno stanje $\mathbf{z}(t_f)$ u konačnom vremenu $t_f\geqslant 0$. Drugim riječima, ulaz $\mathbf{u}(t)$ »kontrolira« u svakom trenutku stanje sustava $\mathbf{x}(t)$. Kako nema sprege između pojedinih z_i, proizlazi da je nužan uvjet upravljivosti sustava da matrice $\mathbf{G}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$ nema nijednog reda s elementima nula. U protivnom slučaju neki ulaz u_i ne bi djelovao na odgovarajući z_i. Može se pokazati da je to i dovoljan uvjet[1]. Nezgodna je strana toga kriterija što se mora izračunati matrica $\mathbf{G}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$, pri čemu je potrebno potpuno rješenje svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Uvjet za mjerljivost sustava dobijemo iz jednadžbe izlaza (12-132) koju pišemo u proširenom obliku:

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \dots\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_{11} & \dots & h_{1n}\\ h_{21} & \dots & h_{2n}\\ \dots & \dots & \dots\\ h_{p1} & \dots & h_{pn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ \dots\\ z_n\end{bmatrix}. \qquad (12\text{-}134)$$

Za sustav se kaže da je **mjerljiv** ako se početno stanje sustava $\mathbf{z}(0)$ može točno odrediti pomoću mjerenja izlazne funkcije $\mathbf{y}(t)$ u konačnom intervalu vremena $0\leqslant t\leqslant t_f$. Drugim riječima, svako stanje sustava $\mathbf{z}(t)$ utječe na izlaz $\mathbf{y}(t)$. Možemo i ovdje zaključiti da je nužan uvjet za mjerljivost sustava ako nijedan od stupaca matrice $\mathbf{H}=\mathbf{CP}$ nema same nule. U tom slučaju će bilo koji z_i utjecati na bilo koji odgovarajući y_i. Bez dokaza navodimo da je to i dovoljan uvjet.

---

[1] Gilbert, E. G., Controllability and Observability in Multivariable Control Systems. J. Control (SIAM), 1, 1963, str. 128—151.

13. Nelinearni sustavi

U prozore i vratnice
lupa bura tmurnih ura;
dršću male dvokatnice.
Bura. Bura. Bura. Bura.

T. Ujević, »Bura na Braču«

Linearni vremenski invarijantni sustavi opisuju se linearnim diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima. Do sada smo pretežno govorili o takvim sustavima. Teorija tih sustava veoma je razrađena, a karakteristična je po sasvim poopćenim postupcima. Prema načelu superpozicije uvedena je prijenosna funkcija pomoću koje možemo identificirati pojedine sklopove kao i cijeli sustav neovisno o amplitudi i obliku ulaznog signala.

Kod linearnih vremenski varijantnih sustava imamo linearne diferencijalne jednadžbe s promjenljivim koeficijentima koji su **funkcije vremena.** Kod njih također vrijedi načelo superpozicije, jer ne dolazi do međudjelovanja dvaju nezavisnih pobudnih signala. Međutim, ti se sustavi bitno razlikuju od linearnih vremenski invarijantnih sustava: odzivna funkcija ovisi o vremenskom toku pobudne funkcije, npr. o vremenu kada se narine ulazni signal. Ako se parametri sustava polako mijenjaju, može se i ovdje primijeniti linearna analiza.

Sve sustave koji se ne mogu opisati linearnim diferencijalnim jednadžbama nazivamo nelinearnim sustavima, a prisutni su svuda u regulacijskoj tehnici. Pojedini sklopovi nelinearnih sustava imaju nelinearne statičke, odnosno dinamičke karakteristike, ili se pojavljuju multiplikativni članovi. Koeficijenti odgovarajuće nelinearne diferencijalne jednadžbe jesu **funkcije amplitude** signala u nekoj točki sustava. Zbog toga prijelazna stanja ovise, osim o sustavu, i o obliku i o amplitudi ulaznih signala, pa pri rješavanju nelinearnih diferencijalnih jednadžbi ne možemo primijeniti načelo superpozicije. Tu nema opće metode, pa se rješenja razlikuju od slučaja do slučaja. Možemo općenito reći da postoje metode za analizu nelinearnih oscilacijskih sustava drugoga reda, ali se o sustavima višega reda malo zna. Zato se kvalitativna ocjena nelinearnih sustava višega reda svodi na to da se oni zamijene jednostavnijim sustavom drugoga reda s prevladavajućim oscilacijama.

Među najvažnije praktične slučajeve nelinearnih regulacijskih krugova ubrajamo relejne sustave. U njima se bilo gdje u regulacijskom krugu s kontinuiranim signalima pojavljuje element preklopničkih svojstava. To je obično relejni regulator koji na izlazu daje **nekontinuirani signal u nepravilnim vremenskim razmacima.** Primjer za to je regulacija hladnjaka s bimetalnim prekidačem kao regulatorom.

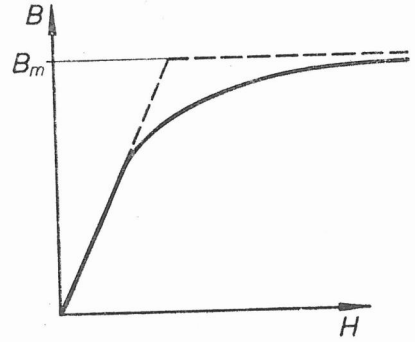
Nelinearne pojave u regulacijskim sustavima općenito su nepoželjne jer unose dodatna kašnjenja u sustav, a zbog poteškoća oko analitičkog izraza teško je ili gotovo nemoguće predvidjeti vladanje sustava kod raznih pobudnih signala. Tako je npr. sigurno da su pojave mrtvog pojasa ili histereze nepoželjne. Međutim, u nekim slučajevima može nelinearna pojava predstavljati i prednost: mali motor,

kod kojeg se ponekad pojavljuje zasićenje, ima manju tromost i reagira brže nego veliki motor koji doduše ne dolazi u zasićenje ali je tromiji; drugi je primjer relejni regulator kojim ne možemo postići veliku točnost, ali se zbog jeftinoće široko primjenjuje kod toplinskih staza gdje točnost nije kritična.

U odjeljku 2.3. upoznali smo se s analitičkom i grafičkom metodom linearizacije sustava uz **mala odstupanja** varijabli od stacionarnih vrijednosti. U ovom poglavlju obrađujemo metode linearizacije sustava uz **znatna odstupanja** varijabli od stacionarnih vrijednosti, naročito u vezi sa skokovitim promjenama stanja u regulacijskom krugu. Najprije ćemo opisati metodu harmoničke ravnoteže koja se najšire primjenjuje, a zatim i grafičku metodu fazne ravnine. Na kraju uvodimo i direktnu metodu Ljapunova za ispitivanje stabilnosti nelinearnih regulacijskih krugova. U svakom slučaju, poznavanje teorije linearnih sustava preduvjet je za primjenu svih tih postupaka.

13.1. Nekontinuirane nelinearnosti

Analizu nelinearnih sustava obavit ćemo najbolje ako najprije uočimo sve nelinearnosti koje se najčešće pojavljuju u regulacijskom krugu, i to kako u objektu, tako i u uređaju. To su prije svega **kontinuirane nelinearnosti** kakve pokazuju npr. statičke karakteristike motora, pojačala, ventila, itd. Ako postoje velika odstupanja od linearnih odnosa i ako linearizacija nije fizikalno prihvatljiva (v. odjeljak 2.2), najpogodnije je da zakrivljene karakteristike **aproksimiramo pomoću izlomljenih pravaca.** Taj smo postupak načelno prikazali na sl. 13.1, koja predstavlja krivulju magnetiziranja, pa se sustavan prikaz svodi na **nekontinuirane nelinearnosti,** gdje su obuhvaćeni i nadasve važni sklopovi s relejnom karakteristikom.



Sl. 13—1. Linearizacija karakteristika pomoću izlomljenih pravaca

Najjednostavnija je karakteristika **dvopoložajnog releja.** Prema sl. 13—2a vrijedi:

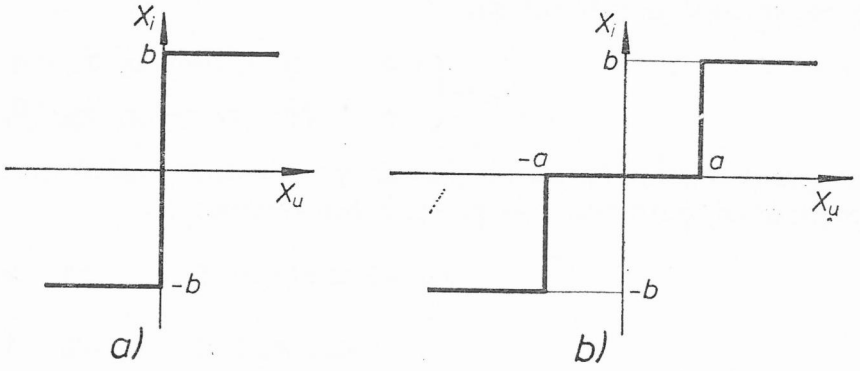
$$x_i = \begin{cases} b & \text{za} \quad x_u > 0, \\ -b & \text{za} \quad x_u < 0, \end{cases} \tag{13-1}$$

a za $x_u = 0$ vrijednost x_i nije određena. To možemo izraziti skraćeno pomoću **signum-funkcije** koja je prema definiciji:

$$\operatorname{sgn} x_u \triangleq \begin{cases} +1 & \text{za} \quad x_u > 0, \\ -1 & \text{za} \quad x_u < 0, \end{cases} \tag{13-2}$$

jer daje predznak varijabli x_u. Možemo dakle za relejni regulator pisati:

$$x_i = b \operatorname{sgn} x_u. \tag{13-3}$$



Sl. 13—2. Karakteristike dvopoložajnog (a) i tropoložajnog releja (b)

Karakteristika tropoložajnog releja prikazana je na sl. 13—2b. Analitički je izraz za tu krivulju:

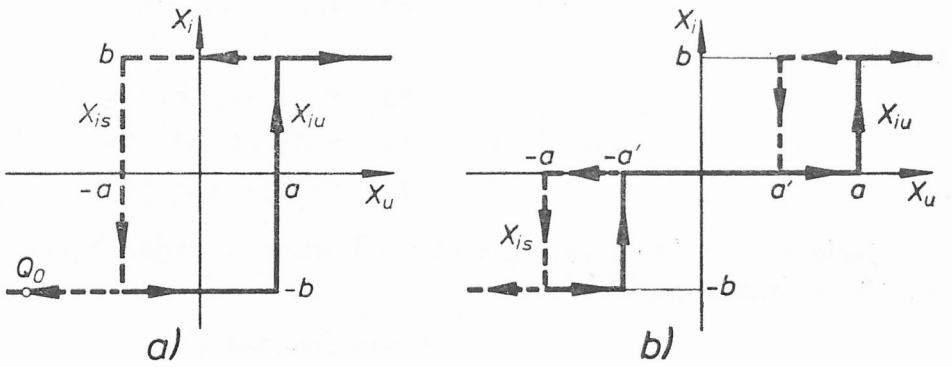
$$x_i = \begin{cases} -b & \text{za} \quad x_u < -a, \\ 0 & \text{za} \quad -a < x_u < a, \\ b & \text{za} \quad x_u > a. \end{cases} \tag{13-4}$$

Izlazna veličina mijenja se tek kad ulazna veličina prijeđe neku vrijednost $|x_u| > a$.

Releji mogu posjedovati i **histerezu** (naziv potječe od poznate pojave u magnetizmu). Kod promjena ulazne veličine x_u, izlazna veličina može imati dvije različite vrijednosti.

Karakteristika **dvopoložajnog releja s histerezom** prikazana je na sl. 13—3a. Područje između $-a$ i a nazivamo i **raspon histereze** i označujemo sa $X_h = 2a$. Pretpostavimo da je relej u položaju označenom radnom točkom Q_0. Pri povećanju vrijednosti ulazne funkcije x_u iznad nultočke dolazi do preklapanja releja tek kod $x_u = a$ (izvučena linija). U točki preklapanja vrijedi $x_u > 0$ i $\dot{x}_u > 0$. Pri smanjenju vrijednosti x_u ispod nultočke, dolazi kod $x_u = -a$ do obratnog preklapanja (isprekidana linija). Ovdje za ulaznu funkciju vrijedi $x_u < 0$ i $\dot{x}_u < 0$. Analitički je izraz za uzlaznu granu od x_i:

$$x_{iu} = \begin{cases} -b & \text{za} \quad x_u < a, \ \dot{x}_u > 0, \\ b & \text{za} \quad x_u > a, \ \dot{x}_u > 0, \end{cases} \tag{13-5}$$



Sl. 13—3. Karakteristike dvopoložajnog (a) i tropoložajnog releja s histerezom (b)

a za silaznu granu od x_i:

$$x_{is}=\begin{cases}-b & \text{za} \quad x_u<-a, \ \dot{x}_u<0, \\ b & \text{za} \quad x_u>-a, \ \dot{x}_u<0,\end{cases} \tag{13-6}$$

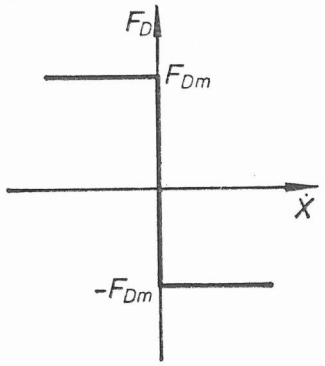
uz pretpostavku da $\dot{x}_u$ ne mijenja predznak u pojasu $|x_u|<a$. Te izraze možemo pomoću signum-funkcije pisati jednostavnije:

$$\begin{aligned} x_{iu}&=b \operatorname{sgn}(x_u-a) \qquad \text{za} \quad \dot{x}_u>0, \\ x_{is}&=b \operatorname{sgn}(x_u+a) \qquad \text{za} \quad \dot{x}_u<0, \end{aligned} \tag{13-7}$$

što dalje sažimamo u relaciju:

$$x_i=b \operatorname{sgn}[x_u-a \operatorname{sgn} \dot{x}_u]. \tag{13-8}$$

Kad se, dakle, radi o histerezi, odnosno o dvoznačnoj karakteristici, izlazna veličina x_i zavisi kako od x_u tako i od njezine derivacije $\dot{x}_u$ koja se pojavljuje pod znakom signum-funkcije.



Sl. 13—4. Karakteristika suhog trenja

Na sl. 13—3b vidimo karakteristiku **tropoložajnog releja s histerezom.** Bez komentara možemo pomoću jednadžbe (13—4) pisati:

$$x_{iu}=\begin{cases}-b & \text{za} \quad x_u<-a', \ \dot{x}_u>0, \\ 0 & \text{za} \quad -a'<x_u<a, \ \dot{x}_u>0, \\ b & \text{za} \quad x_u>a, \ \dot{x}_u>0,\end{cases} \tag{13-9}$$

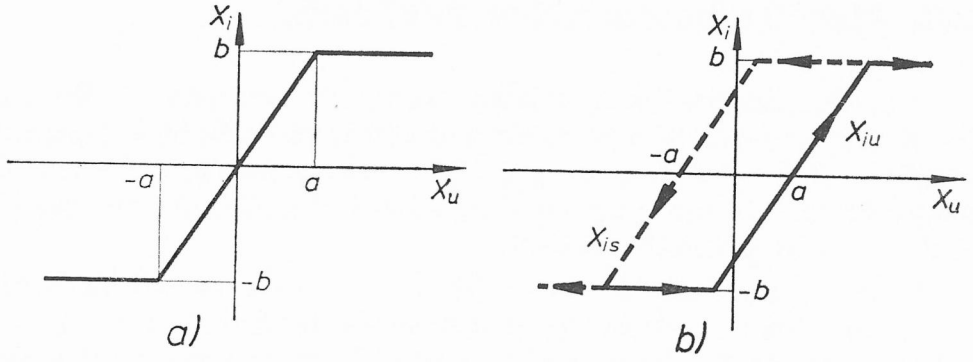
kao i:

$$x_{is}=\begin{cases}-b & \text{za} \quad x_u<-a, \ \dot{x}_u<0, \\ 0 & \text{za} \quad -a<x_u<a', \ \dot{x}_u<0, \\ b & \text{za} \quad x_u>a', \ \dot{x}_u<0.\end{cases} \tag{13-10}$$

Relejnu karakteristiku posjeduje i **suho trenje.** Njegova karakteristika na sl. 13—4 ima analitički izraz:

$$F_D=-F_{Dm} \operatorname{sgn} \dot{x}. \tag{13-11}$$

Sila suhog trenja uvijek je suprotnog predznaka od sile tromosti, pa je za $\dot{x}>0$ sila jednaka $-F_{Dm}$, a za $\dot{x}<0$ sila je F_{Dm}.



Sl. 13—5. Karakteristike zasićenja (a) i zasićenja s histerezom (b)

Zasićenje u elektrici ili **ograničenje** u mehanici ubrajamo među najvažnije nelinearne pojave u regulacijskoj tehnici, a očituju se **kod velikih vrijednosti varijabli.** Prema aproksimaciji pomoću izlomljenih linija na sl. 13—5a možemo napisati analitički izraz:

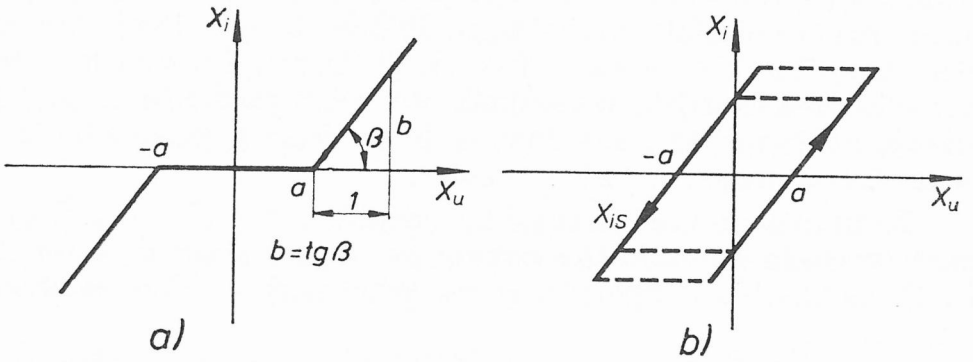
$$x_i = \begin{cases} -b & \text{za} \quad x_u \leqslant -a, \\ \dfrac{b}{a} x_u & \text{za} \quad -a < x_u < a, \\ b & \text{za} \quad x_u \geqslant a. \end{cases} \tag{13-12}$$

Na sl. 13—5b karakteristika je zasićenja kombiniranog s histerezom, koje analitički izraz $x_i = f(x_u, \operatorname{sgn} \dot{x}_u)$ nije teško odrediti ako izraze za ulaznu i silaznu granu karakteristike promatramo odijeljeno.

Mrtvi pojas na sl. 13—6a pojavljuje se **kod malih vrijednosti varijabli u blizini nultočke. Raspon mrtvog pojasa** $X_m = 2a$ je područje neosjetljivosti između točaka $-a$ i a. Tako npr. kod mjernih instrumenata x_u mora prijeći određenu vrijednost $|x_u| > a$ prije nego što instrument reagira; prikladan naziv za tu pojavu je i **prag osjetljivosti.** Funkcionalna ovisnost predočena je izrazom:

$$x_i = \begin{cases} b(x_u + a) & \text{za} \quad x_u \leqslant -a, \\ 0 & \text{za} \quad -a < x_u < a, \\ b(x_u - a) & \text{za} \quad x_u \geqslant a. \end{cases} \tag{13-13}$$

Kod zupčanih prijenosa mrtvi hod se pojavljuje kao **labavost:** pogonski zupčanik mora izvršiti određen zakret prije nego što se pokrene labavo vezani prihvatni zupčanik. Karakteristika labavosti prikazana je na sl. 13—6b.



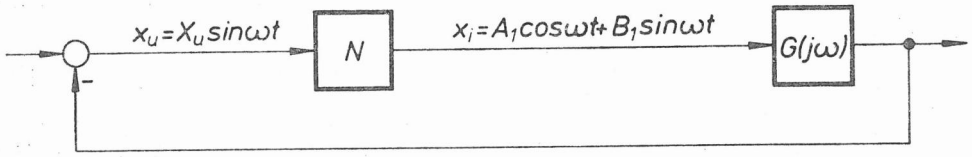
Sl. 13—6. Karakteristike mrtvog pojasa (a) i labavosti (b)

13.2. Metoda harmoničke ravnoteže

Metoda frekvencijskog odziva veoma je proširena u linearnim sustavima. Naime, ta se metoda lako povezuje s analizom pomoću blok-dijagrama i prijenosnih funkcija, a daje i jednostavne grafičke odnose pomoću Bodeovih dijagrama i Nicholsove karte. To nas je upravo i potaklo da i nelinearne sustave pokušamo analizirati u stanju prisilnih oscilacija.

Uzmimo regulacijski sustav (sl. 13—7) gdje su svi linearni članovi sažeti u jednom bloku s ukupnom prijenosnom funkcijom $G(j\omega)$, a **pretpostavlja se jedna nekontinuirana nelinearnost** koju smo prikazali u bloku s oznakom $N(X_u, \omega)$. Narinemo li na ulaz nelinearnog člana sinusnu funkciju, na izlazu se pojavljuju titranja koja prema Fourierovu razvoju možemo raščlaniti u osnovnu frekvenciju i više harmonike. U daljnjem razmatranju polazimo od pretpostavke da su **amplitude viših harmonika u odnosu prema amplitudi osnovnog titranja tako male da ih možemo zanemariti.** To odgovara stvarnim situacijama kad vrijede slijedeći uvjeti:

— linearni član je obično niskopropusni filtar, a on će više harmonike prigušivati to više što je više članova s kašnjenjem u nazivniku sinusne prijenosne funkcije $G(j\omega)$;
— frekvencija prisilnih titranja leži u području lomne frekvencije ω_l;
— nelinearni član ima statičku karakteristiku koja je simetrična u odnosu na ishodište, što vrijedi za većinu nekontinuiranih nelinearnosti.



Sl. 13—7. — Blok-dijagram regulacijskog sustava s nelinearnošću

Uz gornje uvjete vraća se na ulaz nelinearnog člana sinusni signal iste frekvencije prisilnih titranja, ali fazno zakrenut za 180°. Tako nelinearni član možemo prikazati »linearizirani« sinusnom prijenosnom funkcijom kao omjerom izlaznog signala osnovne frekvencije i ulaznog signala. Tu funkciju nazivamo i **opisna funkcija,** a u općem slučaju ovisi — kao što ćemo vidjeti — i o amplitudi X_u i o frekvenciji ω ulaznog signala. To je **frekvencijski varijantna opisna funkcija** $N(X_u, \omega)$, kad nelinearni član djeluje kao spremnik energije pa postoji derivacijski odnos među pojedinim varijablama. Primjer je ograničenje brzine motora gdje je sila tromosti motora ovisna o frekvenciji. U praksi je mnogo važnije ako možemo postaviti **frekvencijski invarijantnu opisnu funkciju** $N(X_u)$ koju bez velikih teškoća možemo izračunati. Primjer je zasićenje pojačala gdje je osnovna komponenta izlaza uvijek u fazi s ulazom.

Za tu metodu uveli su ruski matematičari N. Krilov i N. Bogoljubov prikladan naziv **metoda harmoničke ravnoteže,** a prvi cjeloviti prikaz te metode dao je L. C. Goldfarb[1]. U upotrebi je još jedan naziv — **harmonička linearizacija.**

[1] Goldfarb, L. C., O nekatorih nelineinostjah v sistemah regulirovanija, Avtomatika i telemehanika 8, 1947, str. 349—383.

Zamjena linearnog člana u regulacijskom krugu kvazilinearnim elementom s opisnom funkcijom kao linearnim operatorom znatno pojednostavnjuje analizu takvih sustava. Pomoću tablica opisnih funkcija za tipične nelinearnosti možemo metodu harmoničke ravnoteže bez mnogo računanja primijeniti u praksi da bismo stekli osnovni uvid u vladanje sustava. Unatoč tome što je to približna metoda, ograničena na proučavanje stabilnosti, ali ne i na optimalizaciju nelinearnih sustava, i unatoč spomenutim ograničenjima, metoda harmoničke ravnoteže ipak se najviše primjenjuje u analizi nelinearnih sustava.

13.2.1. Opisna funkcija

Ako je prema sl. 13—7 na ulaz nelinearnog člana narinuta pobuda:

$$x_u(t)=X_u \sin \omega t, \tag{13-14}$$

odzivna je funkcija:

$$x_i(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos n\omega t+B_n \sin n\omega t). \tag{13-15}$$

Na izlazu praktički ostaju samo članovi osnovne frekvencije:

$$x_{i1}(t)=A_1 \cos \omega t+B_1 \sin \omega t, \tag{13-16}$$

gdje su vrijednosti koeficijenata[1]:

$$\begin{aligned} A_1&=\frac{2}{T}\int_0^T x_i(t)\cos \omega t\, dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x_i(\alpha)\cos \alpha\, d\alpha,\\ B_1&=\frac{2}{T}\int_0^T x_i(t)\sin \omega t\, dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x_i(\alpha)\sin \alpha\, d\alpha. \end{aligned} \tag{13-17}$$

Napisani su integralni izrazi za varijablu t kao i za novu varijablu — fazni kut $\alpha=\omega t$. Ispuštena je istosmjerna komponenta A_0 koja se pojavljuje kod nesimetričnih nelinearnosti i koja prouzrokuje pomak radne točke.

Izraz (13-16) preinačimo tako da dobijemo sažeti oblik

$$x_{i1}(t)=X_{i1}\sin \varphi_1 \cos \omega t+X_{i1}\cos \varphi_1 \sin \omega t=X_{i1}\sin(\omega t+\varphi_1) \tag{13-18}$$

gdje je $A_1=X_{i1}\sin \varphi_1$ i $B_1=X_{i1}\cos \varphi_1$, ili amplituda i faza:

$$\begin{aligned} X_{i1}&=\sqrt{A_1^2+B_1^2},\\ \varphi_1&=\operatorname{arc\,tg}\frac{A_1}{B_1}. \end{aligned} \tag{13-19}$$

Radi jednostavnijeg izvoda opisne funkcije, izraze (13-14) i (13-18) pretvaramo u eksponencijalni oblik:

$$\begin{aligned} x_u(t)&=X_u e^{j\omega t},\\ x_{i1}(t)&=X_{i1}e^{j\omega t}e^{j\varphi_1}. \end{aligned} \tag{13-20}$$

[1] Usporedi jednadžbe (15-8) i (15-9).

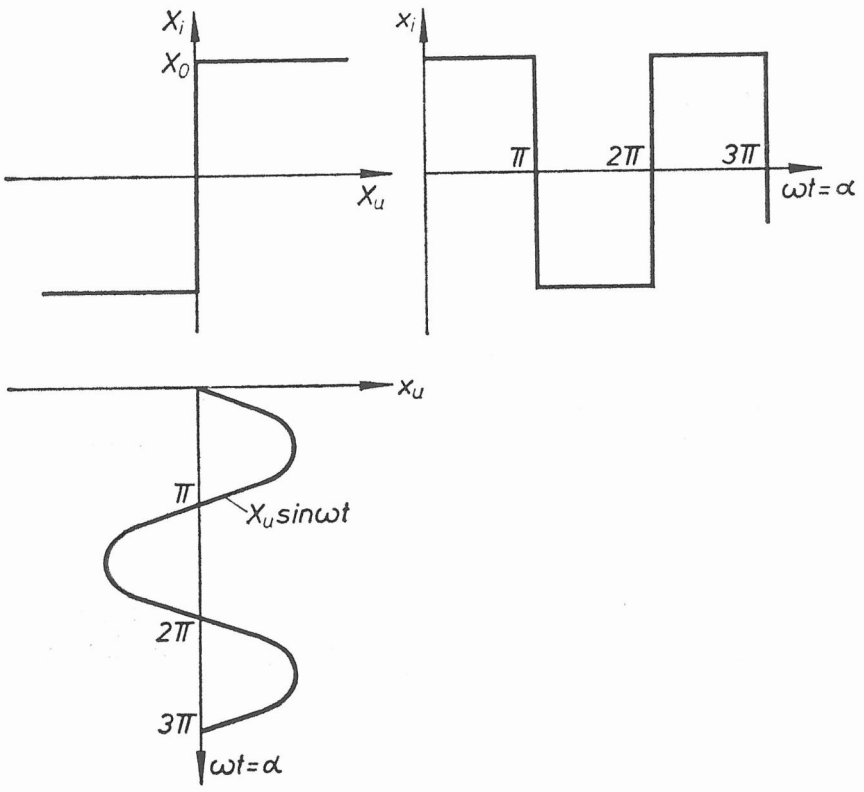
U izrazu za x_{i1} koristimo se najprije Eulerovom relacijom $e^{j\varphi_1}=\cos\varphi_1+j\sin\varphi_1$ i zatim zamijenimo izraze za A_1 i B_1:

$$x_{i1}=X_{i1}e^{j\omega t}\cos\varphi_1+jX_{i1}e^{j\omega t}\sin\varphi_1=B_1e^{j\omega t}+jA_1e^{j\omega t}. \qquad (13\text{-}21)$$

Dijeljenjem x_{i1} iz jednadžbe (13-21) sa x_u iz jednadžbe (13-20) dobijemo **opisnu funkciju** u kompleksnom obliku:

$$N(X_u)=\frac{x_{i1}(t)}{x_u(t)}=\frac{B_1}{X_u}+j\frac{A_1}{X_u}. \qquad (13\text{-}22)$$

Ovaj izraz vrijedi kod dvoznačne nelinearnosti (histereza), odnosno kad nelinearni član diferencijalne jednadžbe sadrži i spremnik energije (derivacija!). U slučaju simetrične i jednoznačne nelinearnosti (mrtvi pojas), nema faznog pomaka φ_1, pa otpada i imaginarni član u jednadžbi (13-22).



Sl. 13—8. Izvod opisne funkcije dvopolo žajnog releja

Kao primjer izračunat ćemo **opisnu funkciju dvopoložajnog releja** prema sl. 13—8. Jasno je da ulazna sinusna funkcija daje odrazom na statičkoj karakteristici releja pravokutni impulsni niz. Kako je to liha funkcija, otpadaju kosinusni članovi, pa ostaje osnovni sinusni član. Uzimamo izraz (13-17) kao koeficijent B_1, s tim da zbog preglednosti uvodimo novu neovisnu varijablu — fazni kut $\alpha=\omega t$. Dobivamo:

$$B_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x_{i1}(t)\sin\alpha\,d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}X_0\sin\alpha\,d\alpha=-\frac{2X_0}{\pi}[\cos\alpha]_0^{\pi}=\frac{4X_0}{\pi}, \qquad (13\text{-}23)$$

pa je prema tome opisna funkcija dvopoložajnog releja:

$$N(X_u)=\frac{X_{i1}}{X_u}=\frac{4X_0}{\pi}\sin\omega t\frac{1}{X_u\sin\omega t}=\frac{4X_0}{\pi X_u}. \tag{3-24}$$

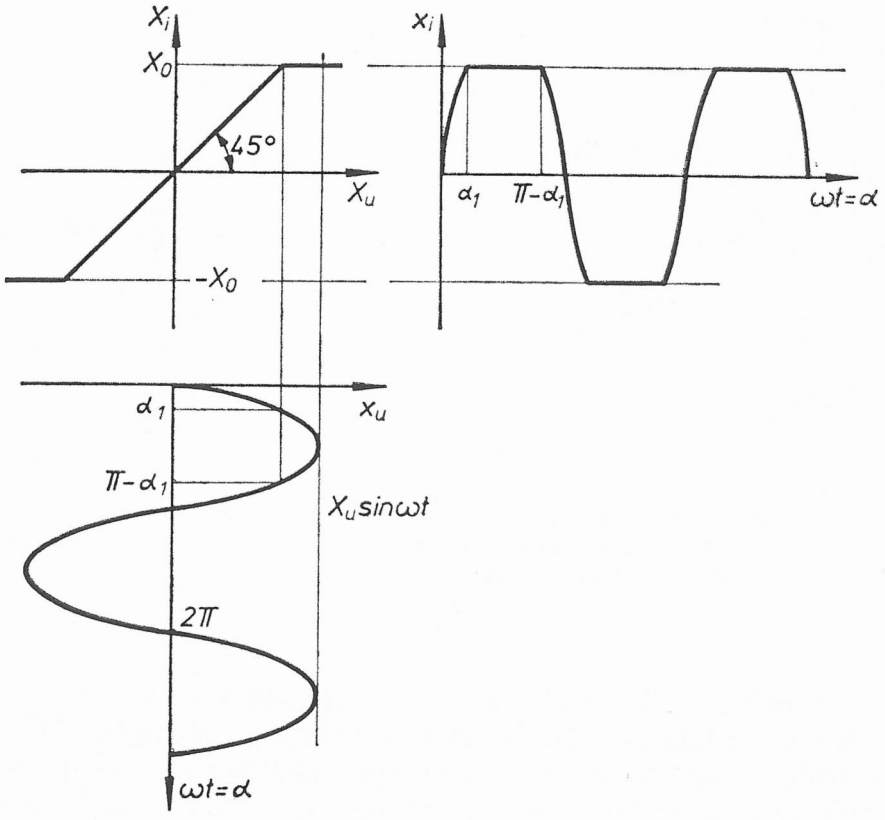
Kao slijedeći primjer uzimamo **opisnu funkciju zasićenja** prema sl. 13—9. Izlaz prikazujemo kao funkciju nove varijable α:

$$x_i(\alpha)=\begin{cases} X_u\sin\alpha & \text{za } 0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1,\\ X_0 & \text{za } \alpha_1<\alpha<(\pi-\alpha_1),\\ X_u\sin\alpha & \text{za } (\pi-\alpha_1)\leqslant\alpha\leqslant\pi. \end{cases} \tag{13-25}$$

Budući da je karakteristika simetrična s obzirom na ishodište, izračunamo samo koeficijent B_1 prema jednadžbi (13-17):

$$B_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha_1}X_u\sin^2\alpha\,d\alpha+\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_1}^{(\pi-\alpha_1)}X_0\sin\alpha\,d\alpha+\frac{2}{\pi}\int_{(\pi-\alpha_1)}^{\pi}X_u\sin^2\alpha\,d\alpha=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[2\int_0^{\alpha_1}X_u\sin^2\alpha\,d\alpha+\int_{\alpha_1}^{(\pi-\alpha_1)}X_0\sin\alpha\,d\alpha\right], \tag{13-26}$$



Sl. 13—9. Izvod opisne funkcije zasićenja

pa nakon preračunavanja imamo:

$$B_1=\frac{2}{\pi}X_u\left[\alpha_1-\sin\alpha_1\cos\alpha_1+2\frac{X_0}{X_u}\cos\alpha_1\right]. \tag{13-27}$$

Iz sl. 13—9 proizlazi odnos:

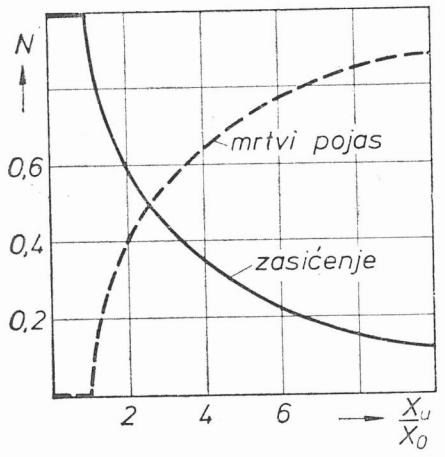
$$\frac{X_0}{X_u}=\sin\alpha_1 \tag{13-28}$$

koji uvrstimo u jednadžbu (13-27):

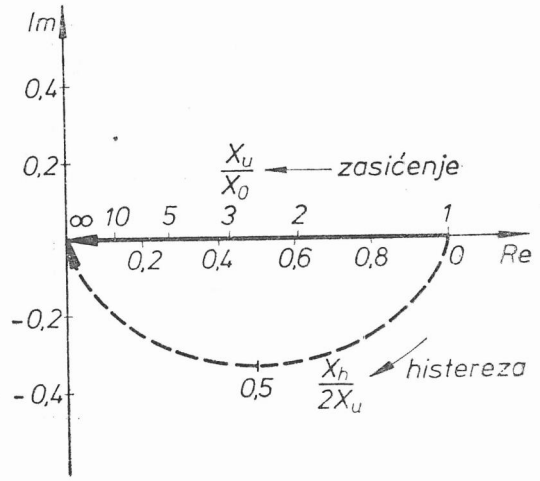
$$B_1=\frac{2}{\pi}X_u\left[\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_1\right]. \tag{13-29}$$

Prema tome, opisna je funkcija zasićenja:

$$N(X_u)=\frac{X_{t1}}{X_u}=\begin{cases}1 & \text{za } X_u\leqslant X_0,\\ \dfrac{2}{\pi}\left[\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_1\right] & \text{za } X_u>X_0.\end{cases} \tag{13-30}$$



Sl. 13—10. Opisna funkcija zasićenja i mrtvog pojasa u ovisnosti o omjeru X_u/X_0

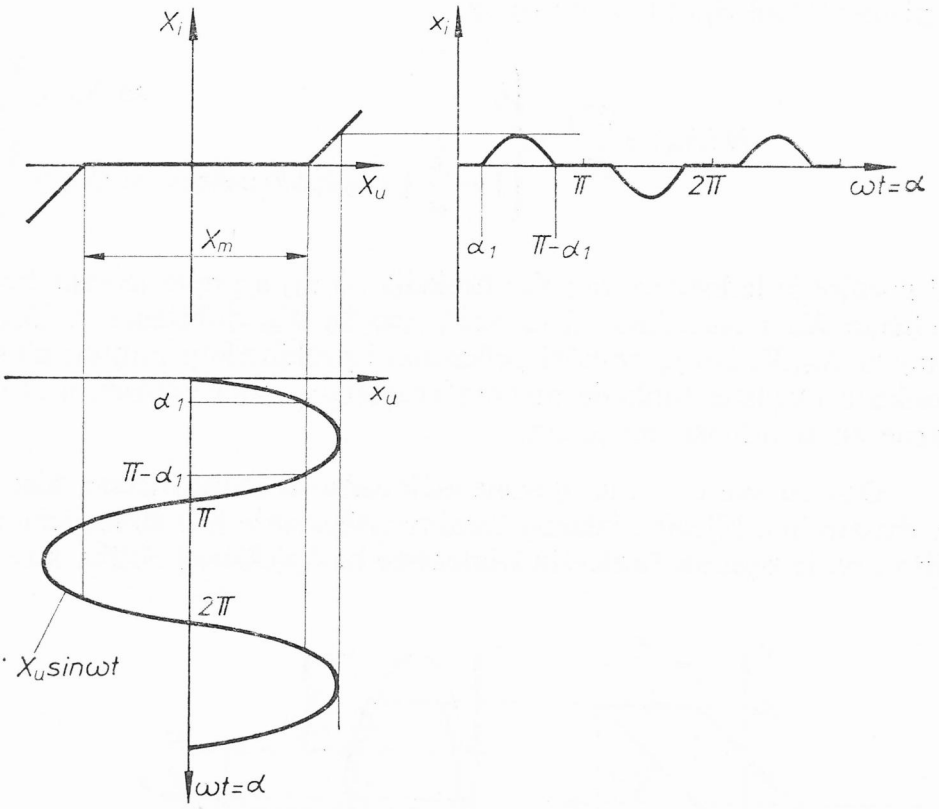


Sl. 13—11. Polarna krivulja opisne funkcije zasićenja i histereze

Grafički prikaz ove opisne funkcije dan je na sl. 13—10. Na apscisi imamo vrijednosti omjera X_u/X_0, budući da prema jednažbi (13-28) α_1 ovisi o tom omjeru. Postoji i druga mogućnost grafičkog prikaza, i to u Gaussovoj ravnini jer je opisna funkcija N u općem slučaju kompleksna oblika. Tako je na sl. 13—11 nacrtana polarna krivulja opisne funkcije zasićenja s označenim vrijednostima X_u/X_0 kao parametrom.

Opisnu funkciju mrtvog pojasa određujemo prema sl. 13—12. Za $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ vrijedi:

$$x_i(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1, \\ X_u \sin\alpha - \dfrac{X_m}{2} & \text{za } \alpha_1 < \alpha < (\pi - \alpha_1) \\ 0 & \text{za } (\pi - \alpha_1) \leqslant \alpha \leqslant \pi. \end{cases} \tag{13-31}$$



Sl. 13—12. Izvod opisne funkcije mrtvog pojasa

Budući da se radi o lihoj funkciji, uzimamo izraz za B_1:

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{(\pi-\alpha_1)} \left[X_u \sin\alpha - \frac{X_m}{2} \right] \sin\alpha \, d\alpha =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi/2} X_u \sin^2\alpha \, d\alpha - \frac{4}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi/2} \frac{X_m}{2} \sin\alpha \, d\alpha. \tag{13-32}$$

Kako je prema sl. 13—12:

$$\frac{X_m}{2} = X_u \sin\alpha_1, \tag{13-33}$$

daljnjim izračunavanjem i uvrštenjem izraza (13-33) dobivamo:

$$B_1=\frac{4}{\pi}\left[\frac{X_u}{2}\int_{\alpha_1}^{\pi/2}(1-\cos 2\alpha)\,d\alpha-X_u\sin\alpha_1\int_{\alpha_1}^{\pi/2}\sin\alpha\,d\alpha\right]=$$

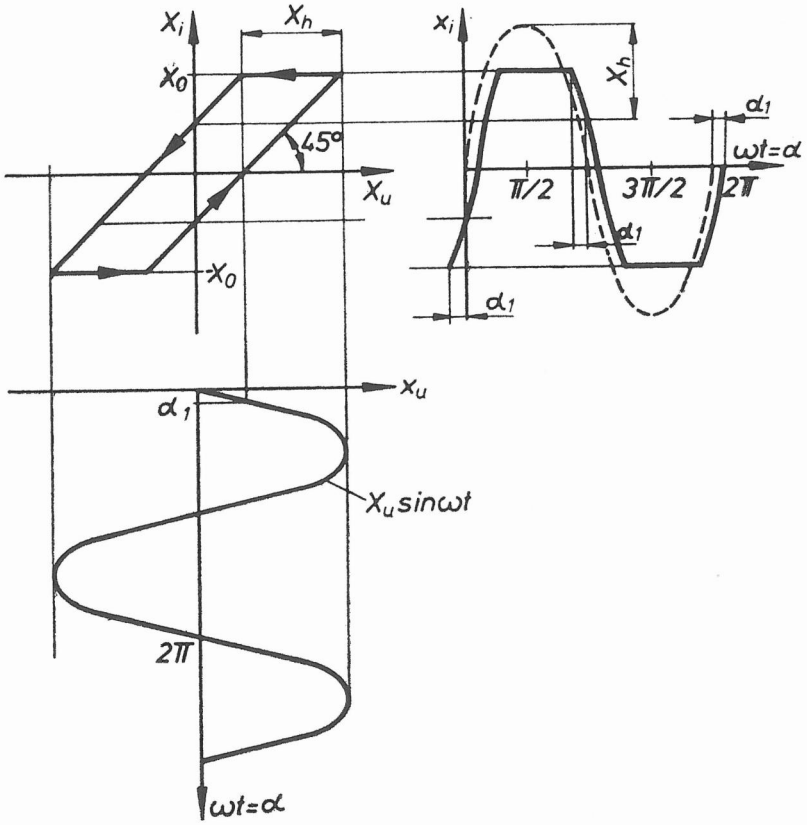
$$=X_u\left[1-\frac{2\alpha_1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sin\alpha_1\cos\alpha_1\right]. \tag{13-34}$$

Opisna je funkcija mrtvog pojasa:

$$N(X_u)=\frac{X_{i1}}{X_u}=\begin{cases}0 & \text{za } X_u\leqslant\dfrac{X_m}{2},\\ 1-\dfrac{2}{\pi}[\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_1] & \text{za } X_u>\dfrac{X_m}{2}.\end{cases} \tag{13-35}$$

U gornjoj je jednadžbi $N(X_u)$ funkcija od α_1, a preko jednadžbe (13-33) i funkcija veličina X_u i X_m. Ako $X_m/2$ označimo sa X_0, dobijemo $N(X_u)$ kao funkciju od omjera X_u/X_0 što je grafički prikazano isprekidanom linijom na sl. 13—10. Gornja funkcija i opisna funkcija mrtvog vremena prema jednadžbi (13-30), komplementarne su u odnosu na jedan.

Dok su sve do sada opisane nelinearnosti jednoznačne, histereza na sl. 13—13 je dvoznačna. Njezina izlazna karakteristika neće biti simetrična u odnosu na ishodište, pa je **opisna funkcija histereze** kompleksnog oblika kao u izrazu (13-22).



Sl. 13—13. Izvod opisne funkcije histereze

Zbog pojednostavnjenja uzimamo nagib nelinearne karakteristike pod kutom od 45°, a područje integracije biramo od $-\alpha_1$ do $(2\pi-\alpha_1)$. Funkcionalna je zavisnost:

$$x_i(\alpha)=\begin{cases} X_u \sin\alpha-\dfrac{X_h}{2} & \text{za } -\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ X_u-\dfrac{X_h}{2} & \text{za } \dfrac{\pi}{2}<\alpha<(\pi-\alpha_1), \\ X_u \sin\alpha+\dfrac{X_h}{2} & \text{za } (\pi-\alpha_1)<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi, \\ -X_u+\dfrac{X_h}{2} & \text{za } \dfrac{3}{2}\pi\leqslant\alpha\leqslant(2\pi-\alpha_1). \end{cases} \tag{13-36}$$

Kako je funkcija $x_i(\alpha)\sin\alpha$ jednaka u područjima $-\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant(\pi-\alpha_1)$ i $(\pi-\alpha_1)\leqslant\leqslant\alpha\leqslant(2\pi-\alpha_1)$, možemo integrirati samo u jednom od tih područja, time da integral pomnožimo sa 2. Prvo postavimo izraz za B_1:

$$B_1=\frac{2}{\pi}\int_{-\alpha_1}^{\pi/2}\left[X_u\sin\alpha-\frac{X_h}{2}\right]\sin\alpha\,d\alpha+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{(\pi-\alpha_1)}\left[X_u-\frac{X_h}{2}\right]\sin\alpha\,d\alpha. \tag{13-37}$$

Da bi taj integral riješili, uvodimo pomoćni izraz. Iz sl. 13—13 se može očitati da je $X_u-X_h=X_u\sin\alpha_1$, pa dobivamo:

$$\sin\alpha_1=1-\frac{X_h}{X_u}. \tag{13-38}$$

Koristeći gornji izraz, postižemo rješenje integrala u jednadžbi (13-37) u preglednom obliku:

$$B_1=\frac{X_u}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_1\right]. \tag{13-39}$$

Koeficijent A_1 dobivamo analognim postupkom kao i koeficijent B_1:

$$A_1=\frac{2}{\pi}\int_{-\alpha_1}^{\pi/2}\left[X_u\sin\alpha-\frac{X_h}{\pi}\right]\cos\alpha\,d\alpha+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{(\pi-\alpha_1)}\left[X_u-\frac{X_h}{2}\right]\cos\alpha\,d\alpha. \tag{13-40}$$

Nakon proračuna određenih integrala, uvrštenja izraza (13-38) i trigonometrijskih pretvorbi dobivamo:

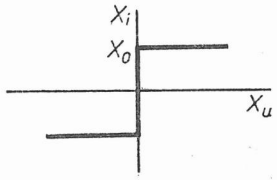
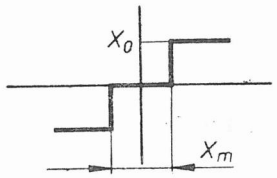
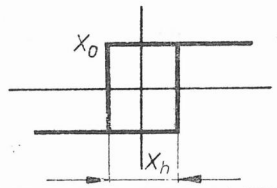
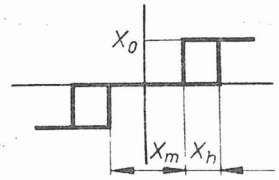
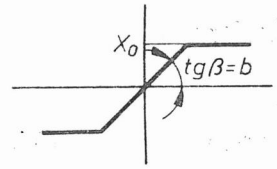
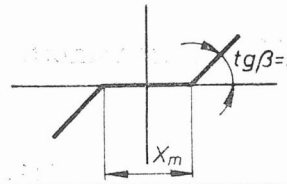
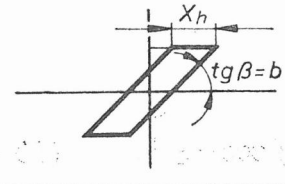
$$A_1=-\frac{X_u}{\pi}\cos^2\alpha_1. \tag{13-41}$$

Opisna je funkcija histereze:

$$N(X_u)=\frac{X_{i1}}{X_u}=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_1\right)-j\cos^2\alpha_1\right]. \tag{13-42}$$

Kao kompleksan broj možemo je predočiti u Gaussovoj ravnini, i to kao funkciju omjera $X_h/2X_u$ (sl. 13—11). Dok je u prethodnim slučajevima jednoznačnih karakteristika polarna krivulja bila duž realne osi, verzor opisne funkcije histereze (isprekidana krivulja) ima i imaginarnu komponentu.

Tablica 13—1. Opisne funkcije nekontinuiranih nelinearnosti

KARAKTERISTIKA	OPISNA FUNKCIJA $N=\frac{B_1}{X_u}+j\frac{A_1}{X_u}$
	$B_1=\frac{4X_0}{\pi}$ $A_1=0$
	$B_1=\frac{4X_0}{\pi}\cos\alpha_1$ $\quad \sin\alpha_1=\frac{X_m}{2X_u}$ $A_1=0$
	$B_1=\frac{4X_0}{\pi}\cos\alpha_1$ $\quad \sin\alpha_1=\frac{X_h}{2X_u}$ $A_1=-\frac{4X_0}{\pi}\sin\alpha_1$
	$B_1=\frac{2X_0}{\pi}(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)$ $\quad \sin\alpha_1=\frac{X_m}{2X_u}+\frac{X_h}{X_u}$ $A_1=-\frac{2X_0}{\pi}(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)$ $\quad \sin\alpha_2=\frac{X_m}{2X_u}$
	$B_1=\frac{2bX_u}{\pi}(\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_1)$ $\quad \sin\alpha_1=\frac{X_0}{X_u}$ $A_1=0$
	$B_1=bX_u[1-\frac{2}{\pi}(\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_1)]$ $\quad \sin\alpha_1=\frac{X_m}{2X_u}$ $A_1=0$
	$B_1=\frac{bX_u}{\pi}[\frac{\pi}{2}+\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_1]$ $\quad \sin\alpha_1=1-\frac{X_h}{X_u}$ $A_1=-\frac{bX_u}{\pi}\cos^2\alpha_1$

U tablici 13—1 dan je pregled opisnih funkcija za nekoliko tipičnih nelinearnosti. Za razliku od sl. 13—2 do 13—6, u karakteristikama smo označili maksimalnu vrijednost izlazne veličine sa X_0 umjesto sa b, raspon histereze sa X_h, a raspon mrtvog hoda sa X_m. Osim toga, konačan nagib karakteristika nije više 45°, već je označen kao promjenljiva veličina $\operatorname{tg}\beta = b$ [lit. 16, 21, 69].

S obzirom na to da harmonička analiza pomoću opisne funkcije odnosno njezina definicija podsjećaju na sinusnu prijenosnu funkciju, treba ovdje istaknuti bitne razlike. Sinusna prijenosna funkcija nekog linearnog sustava **ovisi samo o frekvenciji,** a ne i o amplitudi: u tome je upravo i bit načela superpozicije. Obratno je kod opisne funkcije koja **ovisi samo o amplitudi ulaznog signala,** a ne i o njegovoj frekvenciji. Tako i mora biti, jer se u opisnoj funkciji koja ovisi o amplitudi ulaznog signala odražava nelinearnost sustava. To što opisna funkcija ne ovisi o frekvenciji ulaznog signala nije u razmatranju bitno, jer smo pošli od pretpostavke da su svi linearni članovi regulacijskog kruga odijeljeni od nelinearnog člana.

Druga je bitna razlika između sinusne prijenosne funkcije i opisne funkcije u tome što je prva povezana s prijenosnom funkcijom: zapravo, sinusna prijenosna funkcija samo je poseban slučaj prijenosne funkcije — kad je kompleksna varijabla s bez prigušnog člana σ. Znamo da prijenosna funkcija može služiti za jednoznačan opis sustava kod **svih mogućih pobudnih funkcija.** Naprotiv, opisna je funkcija ograničena na opis stanja harmoničke ravnoteže, i to uz određene uvjete. Pretpostavlja se uvijek **samo sinusna pobudna funkcija,** pa se npr. ne može opisati sustav uz odskočnu pobudu.

13.2.2. Analiza stabilnosti

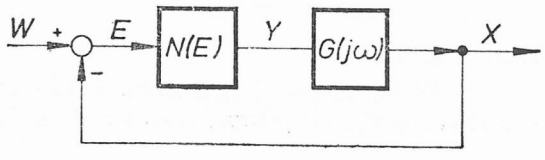
Svi do sada spominjani kriteriji stabilnosti odnose se na linearne sustave i ne mogu se neposredno primijeniti kod nelinearnosti. Postoji ipak mogućnost da se stabilnost nelinearnog regulacijskog kruga približno utvrdi postupkom koji je analogan Nyquistovu kriteriju. To je, prema W. Oppeltu, **metoda dviju polarnih krivulja.**

U odjeljku 7.1. opisali smo regulacijski krug pomoću prijenosnih funkcija regulacijskih objekata i uređaja. Ustanovili smo da stabilnost sustava ovisi u svakom slučaju o nazivniku $[1+G_R(j\omega)\,G_S(j\omega)]$. Ako je nazivnik jednak nuli, možemo pisati:

$$G_S(j\omega) = -\frac{1}{G_R(j\omega)}, \tag{13-43}$$

pa je to uvjet za stabilnost regulacijskog kruga. To možemo prikazati jednostavno i u grafičkom obliku ako u Nyquistov dijagram ucrtamo obje polarne krivulje $G_S(j\omega)$ i $-G_R^{-1}(j\omega)$; njihovo sjecište daje parametre kod kojih nastupa nestabilnost.

Na sličan način možemo postupiti i kod nelinearnog kruga, koji je ponovno prikazan općim blok-dijagramom na sl. 13—14. Linearni član $G(j\omega)$ ovisi samo o



Sl. 13—14. Blok-dijagram regulacijskog sustava s prijenosnom i opisnom funkcijom

frekvenciji, a nelinearni član $N(E)$[1] ovisi samo o ulaznoj amplitudi. Ako to **shvatimo kao promjenljivo pojačanje** onda možemo pisati sinusnu prijenosnu funkciju kvazilinearnog kruga s jediničnom povratnom vezom:

$$G_{uk}(j\omega)=\frac{X(j\omega)}{W(j\omega)}=\frac{N(E)\,G(j\omega)}{1+N(E)\,G(j\omega)}. \tag{13-44}$$

Regulacijski krug je nestabilan kad je nazivnik $[1+N(E)\,G(j\omega)]$ jednak nuli:

$$1+N(E)\,G(j\omega)=0. \tag{13-45}$$

Taj izraz nazivamo **jednadžba harmoničke ravnoteže.** Možemo je pisati i u obliku:

$$N(E)=-\frac{1}{G(j\omega)}. \tag{13-46}$$

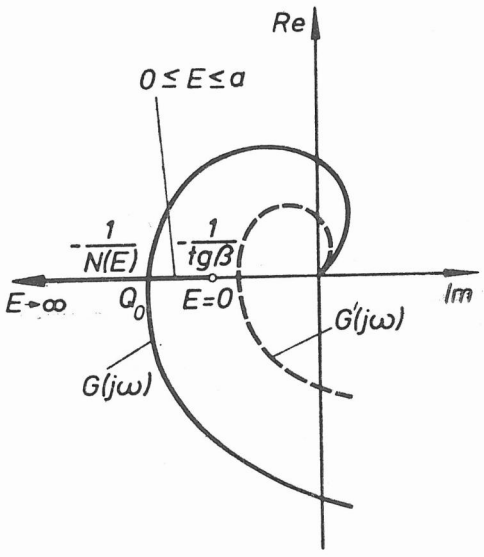
Obično je $G(j\omega)$ racionalan razlomak, pa je $-G^{-1}(j\omega)$ polinom od $j\omega$, što pojednostavnjuje proračun. Jednadžba (13-46) raspada se u dvije jednadžbe s realnim i imaginarnim dijelom:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,[N(E)]&=\mathrm{Re}\,[-G^{-1}(j\omega)],\\ \mathrm{Im}\,[N(E)]&=\mathrm{Im}\,[-G^{-1}(j\omega)],\end{aligned} \tag{13-47}$$

odakle možemo izračunati nepoznanice: amplitudu E kod koje dolazi do vlastitih oscilacija i frekvenciju ω.

U složenijim slučajevima $G(j\omega)$ poznat je samo u grafičkom obliku iz pokusnog snimanja. Sada je bolje da pođemo od jednadžbe:

$$G(j\omega)=-\frac{1}{N(E)}, \tag{13-48}$$



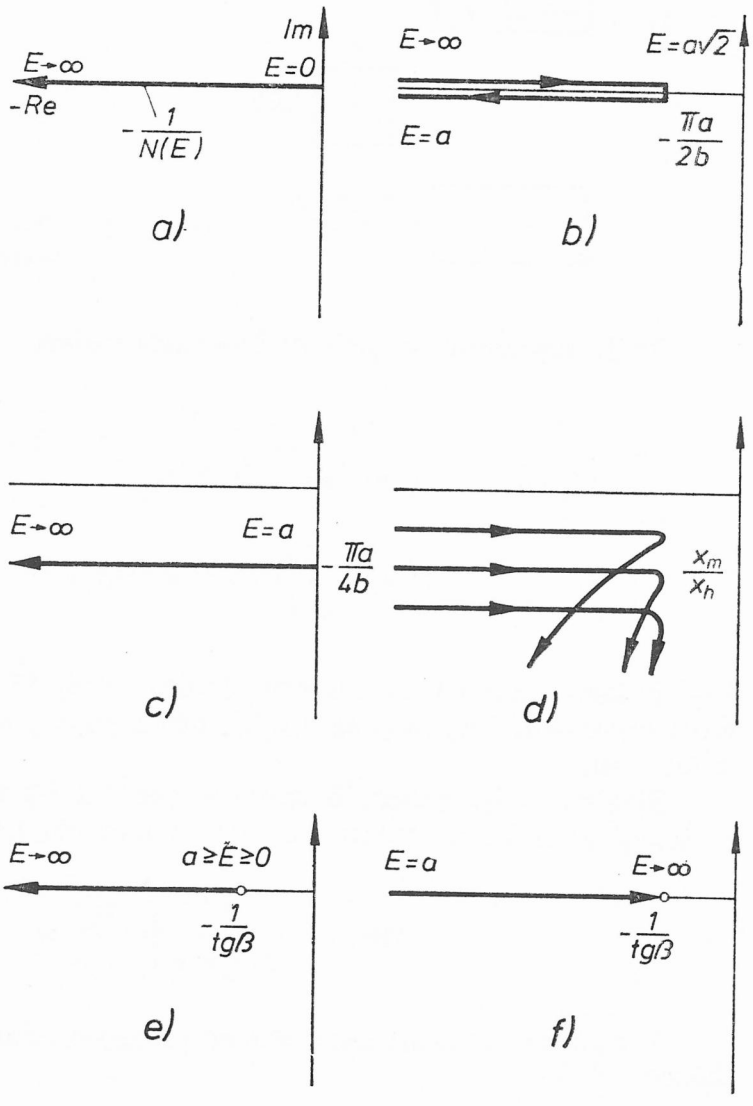
Sl. 13—15. Određivanje stabilnosti metodom dviju polarnih krivulja

[1] Treba upozoriti da smo na sl. 13—14 amplitudu ulaznog signala označili sa E, a ne sa X_u; kod izlaznog signala pišemo također Y umjesto X_i.

koja odgovara izrazu (13-46). U Gaussovoj ravnini nacrtamo najprije polarnu krivulju $G(j\omega)$, a zatim i **negativnu inverznu polarnu krivulju** $-N^{-1}(E)$ s promjenljivom amplitudom kao parametrom. Sjecište »linearne« i »nelinearne« polarne krivulje predstavlja grafičko rješenje jednadžbe harmoničke ravnoteže (13—45), jer se mogu očitati amplituda E i frekvencija ω vlastitih oscilacija.

Kao primjer uzimamo regulacijski objekt s kašnjenjem četvrtoga reda, što je prikazano izvučenom linijom $G(j\omega)$ na sl. 13—15. Ucrtana je i negativna inverzna polarna krivulja zasićenja $-N^{-1}(E)$: ona je za sve vrijednosti $0 \leqslant E \leqslant a$ sadržana u točki $-1/\mathrm{tg}\,\beta$, gdje je $\mathrm{tg}\,\beta$ nagib krivulje zasićenja prema tablici 13—1, a za sve vrijednosti $E > a$ proteže se duž negativne realne osi od točke $-1/\mathrm{tg}\,\beta$ prema $-\infty$. Sjecište krivulja ukazuje na prisutnost oscilacija kod svake vrijednosti E koja je veća od vrijednosti u sjecištu Q_0. Ovdje govorimo o relativnoj stabilnosti, koja međutim nije isto što i relativna stabilnost linearnih sustava postavljena u odsjeku 8.4. Smanjenjem pojačanja sustava četvrtoga reda dobili bismo polarnu krivulju $G'(j\omega)$ koja više ne siječe negativnu inverznu polarnu krivulju $-N^{-1}(E)$, pa bismo imali stabilan rad.

Kao što smo iz analitičkog izraza za opisnu funkciju zasićenja $N(E)$ našli njen negativni inverzni oblik odnosno polarnu krivulju $-N^{-1}(E)$, možemo to učiniti i za ostale nelinearnosti, kojih je $N(E)$ poznat. Tako su na sl. 13—16 prikazane ne-



Sl. 13—16. Negativne inverzne polarne krivulje dvopoložajnog (a) i tropoložajnog releja (b), zatim dvopoložajnog (c) i tropoložajnog releja s histerezom (d), te konačno zasićenja (e) i mrtvog pojasa (f)

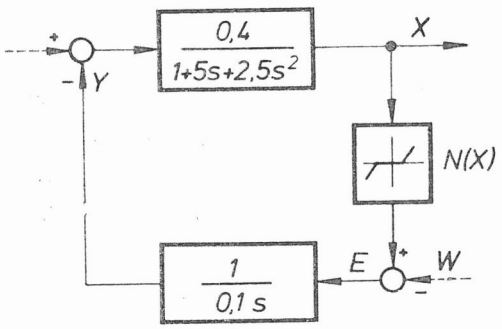
gativne inverzne polarne krivulje $-N^{-1}(E)$ za najvažnije nelinearnosti i to po redu za dvopoložajni i tropoložajni relej (13—16a i 13—16b), za dvopoložajni i tropoložajni relej s histerezom (sl. 13—16c i 13—16d), te za zasićenje i mrtvi pojas (sl. 13—16e i 13—16f). Kada je prisutna histereza, negativne inverzne polarne krivulje $-N^{-1}(E)$ imaju i imaginarnu komponentu, koja kod tropoložajnog releja s histerezom prema sl. 13—16d ovisi o omjeru X_m/X_h [lit. 16].

Primjer 13.1. Na sl. 13—17 prikazan je blok-dijagram regulacijskog kruga gdje regulacijska staza i uređaj imaju prijenosne funkcije:

$$G_S(s)=\frac{K_S}{1+a_1 s+a_2 s^2}=\frac{0{,}4}{1+5s+2{,}5 s^2},$$

$$G_R(s)=\frac{1}{T_i s}=\frac{1}{0{,}1 s}.$$

Moramo uzeti u obzir i nelinearnost mjernog osjetila, odnosno prag osjetljivosti s karakteristikom naznačenom u bloku $N(X)$[1].



Sl. 13—17. Blok-dijagram regulacijskog kruga s nelinearnim mjernim osjetilom

Ovdje uzimamo negativnu inverznu polarnu krivulju linearnog člana:

$$-\frac{1}{G(j\omega)}=-\frac{1}{G_R(j\omega)}\cdot\frac{1}{G_S(j\omega)}=-0{,}1 j\omega\,\frac{1+5j\omega+2{,}5(j\omega)^2}{0{,}4}=$$

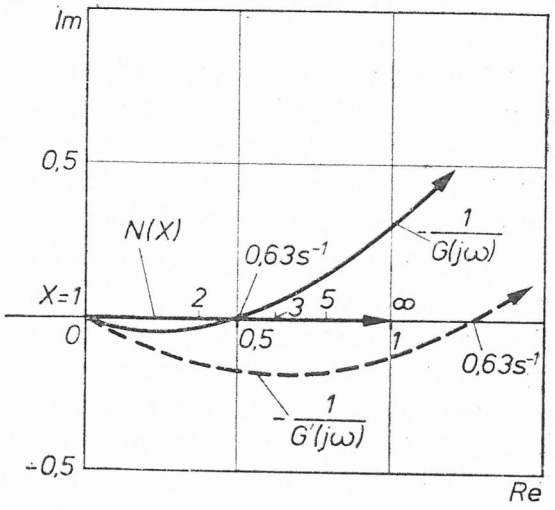
$$=-\frac{1}{0{,}4}(j\,0{,}1\,\omega-0{,}5\,\omega^2-j\,0{,}25\,\omega^3),$$

koju je lako ucrtati u Gaussovoj ravnini na sl. 13—18. Ucrtana je i nelinearna polarna krivulja $N(X)$ za prag osjetljivosti mjernog osjetila, a proteže se duž pozitivne realne osi.

Sjecište obiju polarnih krivulja predstavlja rješenje jednadžbi (13-47). Kako je imaginarna komponenta od $N(X)$ jednaka nuli, dobivamo:

$$\mathrm{Im}\left[-\frac{1}{G(j\omega)}\right]=\frac{0{,}1}{0{,}4}\omega-\frac{0{,}25}{0{,}4}\omega^3=0,$$

[1] Na sl. 13—17 je nelinearni član tako smješten da mu je amplituda ulaznog signala X, pa dišemo: $N(X)$.



Sl. 13—18. Određivanje stabilnosti metodom dviju polarnih krivulja — primjer 13.1

a odatle frekvenciju:

$$\omega = \sqrt{\frac{0,1}{0,25}} = 0,63\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Tu vrijednost uvrstimo u jednadžbu realnog dijela od $-G^{-1}(j\omega)$. Dobit ćemo izravno amplitudu kod koje nastupaju vlastite oscilacije:

$$\mathrm{Re}\,[N(X)] = \mathrm{Re}\left[-\frac{1}{G(j\omega)}\right] = \frac{0,5\,\omega^2}{0,4} = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,4} = 0,5.$$

Regulacijski krug relativno je stabilan za amplitude manje od 0,5. Međutim, postoji uvijek opasnost da se zbog nekog poremećaja amplituda ulaznog signala povisi preko 0,5 pa dolazi do raspirivanja oscilacija.

Da bismo postigli apsolutnu stabilnost, trebali bismo negativnu inverznu polarnu krivulju $-G^{-1}(j\omega)$ tako proračunati da se uopće ne siječe s nelinearnom polarnom krivuljom $N(X)$ (sl. 13—18). To možemo postići uz uvjet da je:

$$\mathrm{Re}\left[-\frac{1}{G(j\omega)}\right] = \frac{T_i a_1 \omega^2}{K_S} > 1.$$

Kako frekvencija $\omega = 0,63\ s^{-1}$ ovisi samo o a_2, u gornjoj se jednadžbi integralno vrijeme regulatora T_i može mijenjati. Potrebno je odabrati:

$$T_i > \frac{K_S}{a_1 \omega^2} = \frac{0,4}{5 \cdot 0,4} = 0,2\ \mathrm{s},$$

npr. $T_i = 0,25$ s. To je isprekidano prikazana negativna inverzna polarna krivulja $-\dfrac{1}{G'(j\omega)}$ na sl. 13—18.

Kao i Nyquistov dijagram, i metoda dviju polarnih krivulja u Gaussovoj ravnini prikladna je za dobivanje kvalitativne slike. Za dobivanje kvantitativnih rezultata treba ili izračunati jednadžbe, kao što smo uradili u gornjem primjeru, ili proširiti grafičku analizu na Bodeov prikaz. Inače se, nakon linearizacije problema uvođenjem opisne funkcije, mogu primijeniti svi kompenzacijski postupci iz linearnog frekvencijskog odziva.

13.2.3. Frekvencijski varijantna opisna funkcija

U uvodu smo napomenuli da je u općem slučaju opisna funkcija $N(X_u, \omega)$ ovisna i o amplitudi i o frekvenciji ulaznog signala. Međutim, u praksi se nelinearnost može posve odijeliti od linearnog dijela, pa opisna funkcija ovisi samo o amplitudi, što nam omogućuje da metodom dviju polarnih krivulja na relativno jednostavan način ispitamo stabilnost nelinearnog regulacijskog kruga.

Ipak ima i slučajeva kad nelinearnost nije moguće odijeliti od frekvencijski zavisnih dijelova. Tipičan je primjer nelinearna diferencijalna jednadžba, gdje je nelinearnost povezana s prvom ili drugom derivacijom ovisne varijable. U praktičnim regulacijskim krugovima to su slučajevi ograničenja brzine i akceleracije: tako npr. zbog zaštite ležajeva ne dopuštamo da se električni postavni motor u servomehanizmu okreće kutnom brzinom većom od dopuštene. U tu svrhu ugradimo u motor lokalni povratni krug s nelinearnošću koja djeluje kao zasićenje i koja ograničava broj okreta motora. Takav bi se slučaj morao opisati frekvencijski varijantnom opisnom funkcijom. To vrijedi i za dvopoložajne i tropoložajne releje s histerezom; opisali smo ih u odjeljku 13.1. pomoću nelinearne signum-funkcije koja ovisi i o ulaznoj varijabli i o njezinoj derivaciji.

Iako se u jednostavnijim slučajevima može provesti matematička analiza [lit. 50, 71], takvi se slučajevi ipak najbolje rješavaju pomoću analognih računala.[1]

13.3. Metoda fazne ravnine

Znameniti francuski matematičar H. Poincaré postavio je još 1881. g. teoriju o ravnoteži fizikalnih sustava s jednim stupnjem slobode. To je prvenstveno grafička metoda ograničena na sustave drugoga reda, koju u teoriji automatske regulacije primjenjujemo pod nazivom »metoda fazne ravnine«. To i nije ništa drugo nego pojam prostora stanja ograničen na ravninu stanja, dakle na dvije varijable stanja.

Metoda fazne ravnine prikladna je za rješavanje autonomnih sustava što ih opisuju nelinearne diferencijalne jednadžbe prvoga ili drugoga reda, pri čemu nelinearnosti mogu biti kontinuirane ili nekontinuirane. Unatoč tim ograničenjima, metoda fazne ravnine omogućuje dubok uvid u oscilacijske pojave.

13.4.1. Fazna ravnina

Pojam fazne ravnine razmotrit ćemo na jednostavnom primjeru mehaničkog sustava drugoga reda s masom M, prigušivačem D i oprugom S. Da bismo uveli osnovne pojmove koje do sada nismo susretali, pretpostavimo najprije da imamo **linearni autonomni sustav:**

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+D\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+Sx=0. \tag{13-49}$$

Osnova je postupka **uvođenje nove varijable,** i to derivacije zavisne varijable x:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v, \tag{13-50}$$

[1] Vidi odjeljak 14.3

što fizikalno predstavlja brzinu. Uvrštenjem v u jednadžbu (13-49) dobivamo uz malo preuređenje:

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{D}{M}v-\frac{S}{M}x. \tag{13-51}$$

Umjesto jedne diferencijalne jednadžbe drugoga reda (13-49) koja opisuje sustav, dobili smo dvije diferencijalne jednadžbe prvoga reda (13-50) i (13-51) koje također potpuno opisuju sustav. S tim smo se postupkom susreli u odjeljku 2.3, a nazvali smo ga svođenjem na **normalan oblik.**

Osnovna je svrha ove metode da na osnovi gornjih analitičkih izraza izvedemo **grafičko rješenje.** U tu svrhu pretpostavimo jednostavan slučaj da je mehanički sustav linearan i bez prigušenja, tj. da je u jednadžbi (13-49) $D=0$. Najprije pišemo:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dv}{dx}=v\frac{dv}{dx} \tag{13-52}$$

i to uvrstimo u jednadžbu (13-49) bez prigušenja:

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+Sx=Mv\frac{dv}{dx}+Sx=0. \tag{13-53}$$

Separacijom varijabli dobivamo:

$$\frac{M}{S}\int v\,dv=-\int x\,dx, \tag{13-54}$$

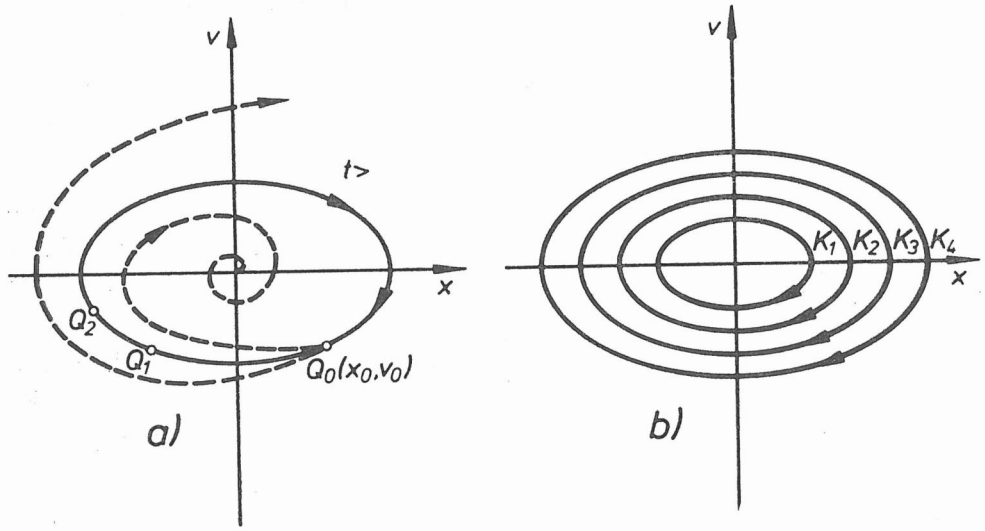
i dalje:

$$\frac{M}{S}v^2+x^2=\frac{1}{\omega_n^2}v^2+x^2=K. \tag{13-55}$$

Ovdje je ω_n neprigušena vlastita frekvencija, a K je konstanta integracije koju izračunamo iz početnih uvjeta. Uz $t=0$, odredimo x_0 i v_0, pa dobivamo:

$$K=\frac{M}{S}v_0^2+x_0^2. \tag{13-56}$$

U koordinatnom sustavu $v-x$ izraz (13-55) predstavlja elipsu, što je izvučeno prikazano na sl. 13—19a. Takav koordinatni sustav nazivamo **fazna ravnina.** Elipsa povezuje sve odgovarajuće točke od x i v koje uz dane početne uvjete x_0 i v_0 zadovoljavaju jednadžbu (13-55). Fizikalno je jasno da krivulja koja predstavlja konzervativan sustav, tj. bez gubitka energije kada je $D=0$, mora biti zatvorena oblika: neprestano se vrši preraspodjela energije iz kinetičke ($x=0$) u potencijalnu ($v=0$), i obratno. Kad bismo uzeli u obzir i prigušenje, tj. da je $D>0$, imali bismo disipativan sustav; krivulja ne bi bila zatvorena elipsa, već crtkano prikazana prigušena spirala koja ide od početne točke (x_0, v_0) prema ishodištu (0, 0), kad se sustav smiri. Obratno, kod negativnog prigušnog člana $D<0$ (pojačalo u sustavu!) spirala bi porastom t težila beskonačnosti. Takve krivulje nazivamo i **fazna trajektorija** ili jednostavno trajektorija sustava. Već na osnovi ovog jednostavnog primjera vidimo da se iz oblika fazne trajektorije može zaključiti o stabilnosti promatranog sustava.



Sl. 13—19. Fazne trajektorije disipativnog i konzervativnog sustava drugog reda

Iz jednadžbe (13-55) vidimo da uz različite početne uvjete konstanta integracije K može poprimiti bilo koje vrijednosti. To je prikazano familijom trajektorija na sl. 13—19b, gdje svaka trajektorija vrijedi uz određenu konstantu integracije K_i. Familiju trajektorija nazivamo **fazni portret.** U vezi s time moramo naglasiti da se nelinearne diferencijalne jednadžbe općenito ne mogu tako jednostavno riješiti analitički, jer separaciju varijabli, odnosno integraciju nije moguće izvesti.

Fazni portret postaje bitno preglednijim ako provedemo **normalizaciju vremena.** Pišemo:

$$\tau = \omega_n t; \tag{13-57}$$

$$\mathrm{d}\tau = \omega_n \mathrm{d}t,$$

što daje novu varijablu brzine:

$$v' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\omega_n} v, \tag{13-58}$$

koju unosimo kao novu koordinatu u faznoj ravnini. Tako se elipse prema sl. 13—19b pretvaraju u kružnice.

Vrijeme kao nezavisna varijabla izlučeno je iz jednadžbe (13-55), ali se pojavljuje kao parametar trajektorije, pa ga možemo i izračunati. Ako npr. treba saznati vrijeme potrebno da radna točka prijeđe put od Q_1 do Q_2 na sl. 13—19a, koristimo se izrazom:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v}, \tag{13-59}$$

odnosno krivuljnim integralom:

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{S}{M}(K - x^2)}}. \tag{13-60}$$

Ako je podintegralna funkcija složena, možemo za male vremenske intervale Δt izraz (13-60) zamijeniti linearnom aproksimacijom:

$$\Delta t \simeq \frac{\Delta x}{v_{sr}}, \tag{13-61}$$

gdje je v_{sr} srednja vrijednost brzine u intervalu Δx.

Smjer gibanja radne točke Q u vezi s porastom vremena t na gornjoj polovini fazne ravnine uvijek je udesno, a na donjoj polovini ulijevo. To možemo zaključiti iz preinačene jednadžbe (13-50):

$$x = \int v \mathrm{d}t, \tag{13-62}$$

koja kazuje da x uz $v>0$ raste zajedno s porastom t, a da je uz $v<0$ obratno.

Preinačena jednadžba (13-52) otkriva još jednu značajku trajektorije:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}. \tag{13-63}$$

Uz $v=0$ nagib je trajektorije ∞, pa ona siječe apscisu uvijek pod pravim kutom.

U dosadašnjoj analizi pretpostavili smo samo autonomne sustave gdje se postavlja tzv. »problem početnih uvjeta«; vidjeli smo kako se iz oblika fazne trajektorije može zaključiti o stabilnosti sustava, odnosno o pojavi vlastitih oscilacija. Metodu fazne ravnine općenito ne možemo primijeniti u analizi **neautonomnih sustava.** Isto tako u razmatranje ne možemo uključiti pobude stohastičkog ili harmoničkog karaktera, gdje ove posljednje dovode do prisilnih oscilacija. **Poseban su slučaj odskočne i nagibne funkcije na ulazu koje se mogu uključiti u početne uvjete.** U tu se svrhu primjenjuje transformacija koordinata, što se svodi na supstituciju faznih varijabli.

Uzmimo najprije neautonomni sustav drugoga reda s odskočnom funkcijom na ulazu:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = K, \tag{13-64}$$

a početni su uvjeti u trenutku $t=0$: $x=0$, $\dot{x}=0$. Supstitucijom varijable:

$$y = x - \frac{K}{a_0} \tag{13-65}$$

dobivamo homogenu jednadžbu:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = 0, \tag{13-66}$$

gdje je konstantna pobuda K uključena u početne uvjete uz $t=0$: $y=-K/a_0$, $\dot{y}=0$.

Na sličan način možemo zamijeniti i pobudu u obliku nagibne funkcije. Neka je jednadžba:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=Kt \tag{13-67}$$

s početnim uvjetima uz $t=0: x=0$, $\dot{x}=0$. Uvođenjem nove varijable:

$$y=x-\frac{Kt}{a_0}+\frac{Ka_1}{a_0^2} \tag{13-68}$$

dobivamo:

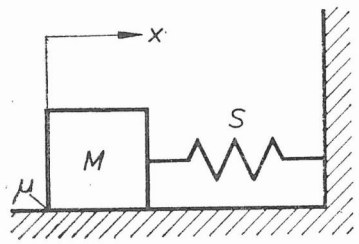
$$\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=0. \tag{13-69}$$

Sada je uz $t=0: y=Ka_1/a_0^2$, $\dot{y}=-K/a_0$.

Linearni mehanički sustav drugoga reda dobar je primjer da pomoću analitičkog izraza sagledamo mogućnosti grafičke analize, odnosno da lako shvatimo pojmove fazne ravnine, fazne trajektorije i faznog portreta. Slijedeći je korak da se faznom ravninom obuhvate i **nelinearni sustavi,** kao što je npr. mehanički sustav drugoga reda, gdje veličine D i S nisu više konstantne, već su funkcije zavisne varijable x i njezine derivacije $\dot{x}$:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+D(\dot{x})\frac{dx}{dt}+S(x)x=0. \tag{13-70}$$

Upravo je **grafičko određivanje faznih portreta nelinearnih sustava drugoga reda i njihova analiza bit metode fazne ravnine.** U vezi s tim moramo naglasiti da se nelinearne diferencijalne jednadžbe općenito ne mogu jednostavno, ili nikako riješiti analitički, jer nije moguće izvesti separaciju varijabli, odnosno integraciju.



Sl. 13–20. Mehanički MS sustav sa suhim trenjem – primjer 13.2

Primjer 13.2. Da bismo prikazali rješavanje nelinearnih problema pomoću fazne ravnine, uzimamo vrlo jednostavan primjer mehaničkog sustava masa-opruga prema sl. 13–20, gdje na masu djeluje suho trenje s koeficijentom suhog trenja μ. Kako je sila suhog trenja konstantne vrijednosti, a zbog tromosti tijela suprotstavlja se brzini mase tijela, dobivamo:

$$M\ddot{x}+\mu gM\,\operatorname{sgn}\dot{x}+Sx=0,$$

što ćemo radije pisati kao dvije jednadžbe:

$$M\ddot{x}+Sx=-\mu gM \quad \text{za } \dot{x}>0,$$

$$M\ddot{x}+Sx=\mu gM \quad \text{za } \dot{x}<0.$$

Da bismo dobili homogene jednadžbe, izvršimo supstituciju fazne varijable x:

$$y=x+\mu g\frac{M}{S}=x+\frac{\mu g}{\omega_n^2} \quad \text{za } \dot{x}>0,$$

$$y=x-\mu g\frac{M}{S}=x-\frac{\mu g}{\omega_n^2} \quad \text{az } \dot{x}<0,$$

pa dobivamo:

$$M\ddot{y}+Sy=0.$$

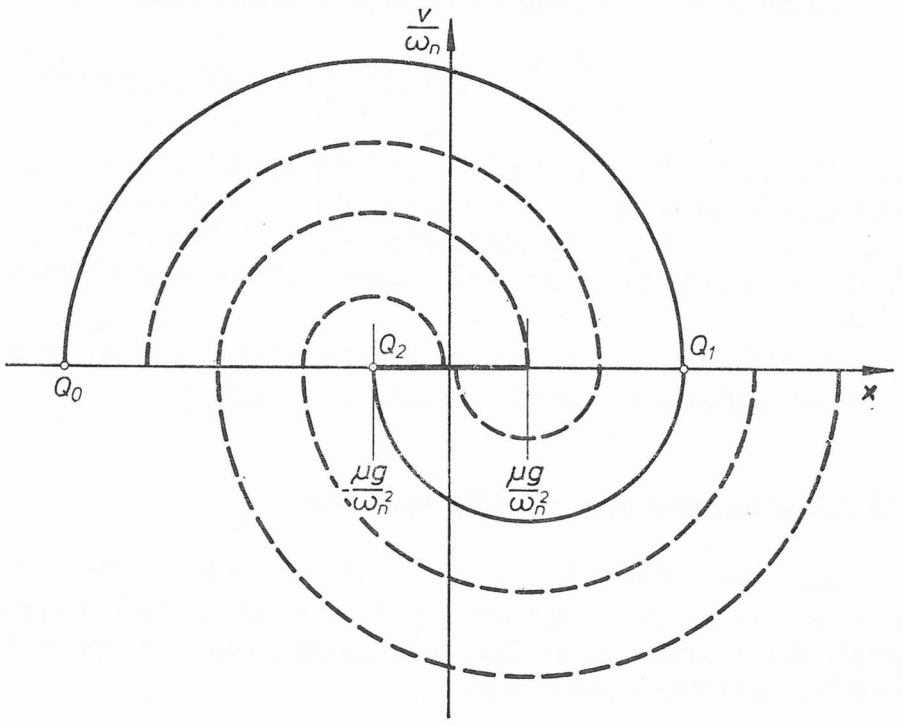
To je isti oblik kao i u jednadžbi (13-53) koja vrijedi za mehanički sustav masa-opruga bez prigušenja. Rješenje je jednadžba (13-55) koju prepisujemo u dva oblika, već prema tome je li $\dot{x}$ veće ili manje od nule:

$$\frac{1}{\omega_n^2}v^2+\left[x+\frac{\mu g}{\omega_n^2}\right]^2=K_g \quad \text{za } \dot{x}>0$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}v^2+\left[x-\frac{\mu g}{\omega_n^2}\right]^2=K_d \quad \text{za } \dot{x}<0.$$

To su jednadžbe poluelipsa na gornjoj i donjoj strani fazne ravnine. Jednadžba se normalizira uvođenjem nove fazne varijable brzine, što se unosi kao nova koordinata v/ω_n u faznoj ravnini. Tako nastaju prema sl. 13—21 familije polukružnica kojih su središta pomaknuta za $\pm\mu g/\omega_n^2$ od ishodišta koordinatnog sustava.

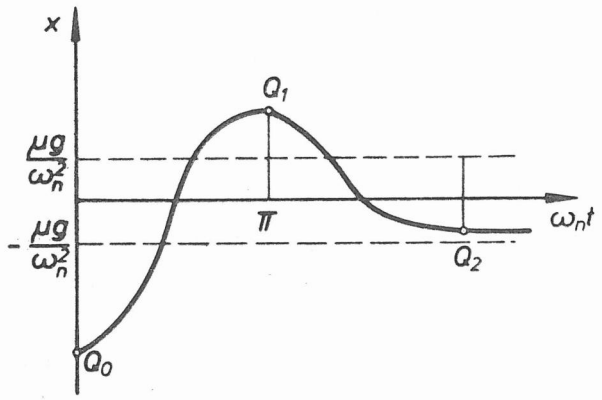
Na osnovi tako konstruiranog faznog portreta možemo pri analizi sustava izvesti zanimljive zaključke. Birajući početne uvjete x_0 i v_0 dobivamo faznu trajektoriju. Tako je na sl. 13—21 debelo izvučena trajektorija koja počinje u točki Q_0 kad



Sl. 13—21. Fazni portret sustava sa sl. 13—20 — primjer 13.2

je masa pomaknuta iz položaja mirovanja za pomak $x=x_0$, a brzina je $v_0=0$. Trajektorija završava u točki Q_2, tj. čim se nađe između položaja $\pm\mu g/\omega_n^2$. To je zato što uz $x<|\,\mu g/\omega_n^2\,|$ sila opruge Sx postaje manja od sile suhog trenja μgM, pa se masa zaustavi već u točki Q_2, a ne u ishodištu.

Na osnovi fazne trajektorije možemo konstruirati vremenski tok pomaka mase x prema sl. 13—22. Masa titra frekvencijom $\omega_n=\sqrt{S/M}$, gdje slijedni maksimumi i minimumi tvore **aritmetičku progresiju** s razlikom $2\,\mu g/\omega_n^2$. To je značajka suhog trenja, jer se pri viskoznom trenju pojavljuje eksponencijalni pad amplituda, pa slijedni maksimumi i minimumi tvore **geometrijsku progresiju.** Gibanje se zaustavi u točki Q_2 čim vremenski tok od x dođe unutar intervala $\pm\mu g/\omega_n$, pa preostaje statička greška.



Sl. 13—22. Vremenski dijagram položaja mase sustava sa sl. 13—20

Jednadžbu (13-70) možemo poopćiti za bilo koji nelinearni sustav drugoga reda:

$$\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}+a_1(x_1,x_2)\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+a_0(x_1,x_2)\,x_1=0. \qquad (13\text{-}71)$$

Ovdje smo uveli oznake x_1 za zavisnu varijablu i $x_2=\dot{x}_1$ za njezinu derivaciju, i to zato što se fazne varijable x_1 i x_2 mogu poistovjetiti s varijablama stanja x_1 i x_2 koje smo uveli u prethodnom poglavlju kod metode prostora stanja. Jasno je da je fazna ravnina samo grafički prikaz prostora stanja ograničenog na dvije koordinate.

Metoda fazne ravnine se ne primjenjuje na vremenski varijantne sustave gdje su parametri funkcije nezavisne varijable t.

13.4.2. Konstrukcija faznih portreta

Za većinu linearnih kao i za nelinearne diferencijalne jednadžbe, integracijski proces se najbolje vrši grafičkim putem. Ovdje će biti prikazane veoma jednostavne **grafičke metode** koje dalje razrađuju metodu fazne ravnine. To su metoda izoklina, Pellova i delta metoda.

Metoda izoklina. Ova se metoda najviše primjenjuje, a sastoji se u tome da se iz jednadžbe sustava dobiju lokusi konstantnog nagiba.

Polazeći od opće diferencijalne jednadžbe drugoga reda (13-71), zamjenom $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2$ i sređivanjem dobivamo:

$$\frac{dx_2}{dt} = -a_1(x_1, x_2)\, x_2 - a_0(x_1, x_2)\, x_1. \tag{13-72}$$

Tu jednadžbu podijelimo sa $\dot{x}_1 = x_2$:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -a_1(x_1, x_2) - a_0(x_1, x_2)\frac{x_1}{x_2}. \tag{13-73}$$

Ovdje je dx_2/dx_1 nagib trajektorija u faznoj ravnini. Uzimamo li nagib konstantnim, jednadžba (13-73) predstavlja čvrstu vezu između veličina x_1 i x_2. Tom jednadžbom dana je krivulja nazvana **izoklina,** koja je lokus svih točaka u faznoj ravnini, gdje fazne trajektorije imaju isti nagib α:

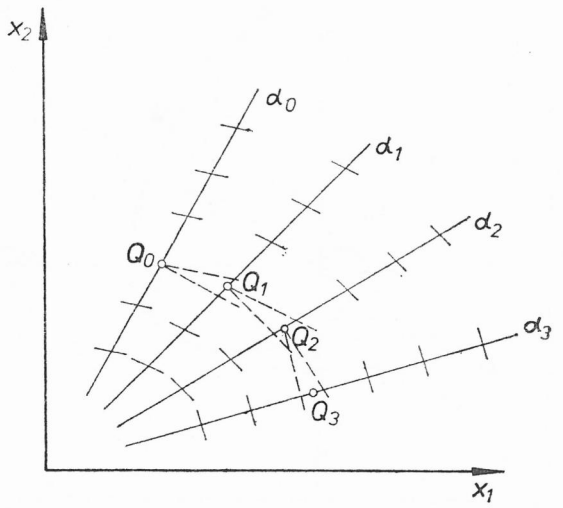
$$-a_1(x_1, x_2) - a_0(x_1, x_2)\frac{x_1}{x_2} = \alpha. \tag{13-74}$$

Ako ucrtamo više izoklina, možemo osjetiti fazni portret. To znači da i nije bilo potrebno riješiti diferencijalnu već samo algebarsku jednadžbu (13-74).

U faznoj ravnini možemo s izoklinama odrediti faznu trajektoriju počevši od bilo koje točke koja predstavlja početne uvjete. Grafički postupak shematski je prikazan na sl. 13—23 gdje su svakoj izoklini pridodane strelice s istim nagibom α_i. Ako naši početni uvjeti daju polaznu točku Q_0, iz nje se nacrtaju dva pravca s nagibima α_0 i α_1. Kako tražena trajektorija mora sjeći izoklinu s točkom Q_0 pod nagibom α_0, a slijedeću izoklinu pod nagibom α_1, presjecište trajektorije i izokline Q_1 biramo na polovini segmenta između dvije konstrukcijske linije. To nastavljamo kako bismo odredili slijedeće točke Q_2, Q_3, ... trajektorije. Iako je sam postupak aproksimacija, uz dovoljan broj izoklina možemo postići zadovoljavajuću točnost.

Primjer 13.3. Radi razjašnjenja metode izoklina uzimamo linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = 0,$$



Sl. 13—23. Konstrukcija faznih portreta — metoda izoklina

gdje smo uveli kratice ζ i ω_n. Da bismo dobili pregledan fazni portret, provodimo normalizaciju vremena:

$$\tau=\omega_n t,$$

$$\mathrm{d}\tau=\omega_n \mathrm{d}t,$$

pa je pojednostavnjeni oblik jednadžbe:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}+2\zeta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}+x=0.$$

Primjenjujući opisani postupak, izvršimo pretvorbu $x_1=x$, $x_2=\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}\tau$:

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\tau}+2\zeta x_2+x_1=0,$$

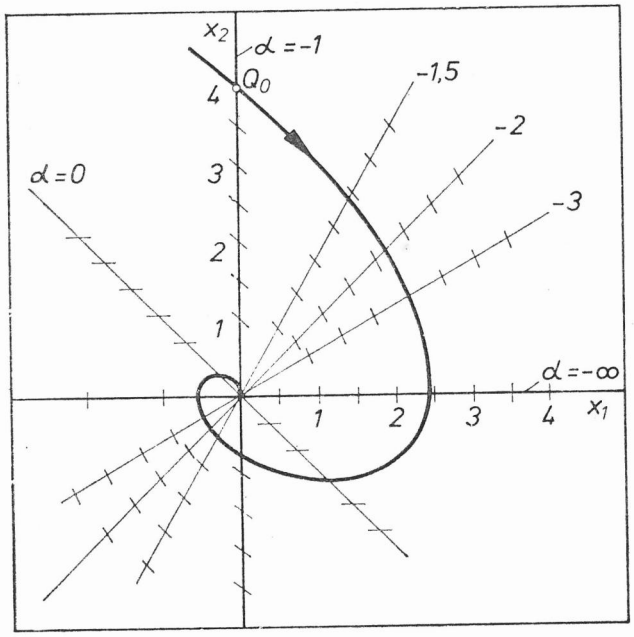
i dalje:

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=-\frac{-2\zeta x_2-x_1}{x_2}.$$

Odatle dobivamo oblik pogodan za izračunavanje izoklina:

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{-1}{2\zeta+\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1}.$$

Uzimamo neki određeni stupanj prigušenja, npr. $\zeta=0{,}5$. Uz tu vrijednost sastavimo tablicu 13—2. Odgovarajući parovi vrijednosti $\alpha=\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1$ i $-1/(1+\alpha)$ predstavljaju izokline: to su u ovom slučaju pravci kroz ishodište prema sl. 13—24. Primjera radi ucrtana je i trajektorija koja polazi iz točke Q_0 s početnim uvjetima $x_1=0$, $x_2=4$.



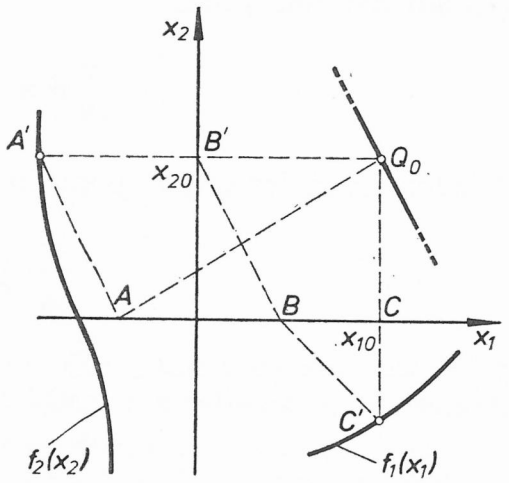
Sl. 13—24. Metoda izoklina — primjer 13.3

Tablica 13—2. Uz proračun primjera 13.3

α	$\frac{-1}{1+\alpha}$
0	−1
−1	∞
−1,5	2
−2	1
−3	0,5
−∞	0

Pellova metoda. Ova se metoda može primijeniti za nelinearne diferencijalne jednadžbe drugoga reda kojih je oblik:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f_2\left[\frac{dx}{dt}\right]+f_1(x)=0. \tag{13-75}$$



Sl. 13—25. Konstrukcija faznih portreta — Pellova metoda

Uz uobičajene pretvorbe dobivamo oblik:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{-f_2(x_2)-f_1(x_1)}{x_2}. \tag{13-76}$$

Najprije se u faznoj ravnini konstruira krivulja $f_2(x_2)$ kao funkcija od x_2, a zatim $f_1(x_1)$ kao funkcija od x_1 (sl. 13—25). Iz točke $Q_0(x_{10}, x_{20})$, u kojoj želimo odrediti tangentu na trajektoriju, spustimo okomicu na apscisu; dobit ćemo odsječak $\overline{CC'}$ koji nanesemo kao dužinu $\overline{BC}$ na apscisu. Nakon toga spustimo iz točke $Q_0(x_{10}, x_{20})$ okomicu na ordinatu; odsječak $\overline{A'B'}$ prenesemo kao dužinu $\overline{AB}$ u nastavku dužine $\overline{BC}$ na apscisi. Nagib hipotenuze $\overline{AQ_0}$:

$$\frac{\overline{Q_0C}}{\overline{AB}+\overline{BC}}=\frac{x_{20}}{f_1(x_{10})+f_2(x_{20})}, \tag{13-77}$$

je prema teoremu analitičke giometrije, negativni recipročni nagib okomice na hipotenuzu; to je ujedno i traženi nagib u jednadžbi (13-76). Pravac kroz Q_0 s tim nagibom je tangenta na traženoj trajektoriji:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{-f_2(x_{20})-f(x_{10})}{x_{20}}. \tag{13-78}$$

Slično možemo naći i tangente na trajektorije u drugim točkama fazne ravnine.

Delta metoda. Ova je metoda pogodna za tipove jednadžbi koje imaju oblik:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f\left[x,\frac{dx}{dt}\right]+\omega_n^2x=0 \tag{13-79}$$

a možemo je prevesti u oblik:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{-[\omega_n^2x_1+f(x_1,x_2)]}{x_2}. \tag{13-80}$$

Bit te metode sastoji se u tome što se pretpostavlja da je složeni član $f(x_1, x_2)$ u blizini ispitivane točke konstantan. Izraz $f(x_1, x_2)$ označujemo sa $\omega_n^2\,\delta$, pa jednadžbu (13-80) možemo pisati:

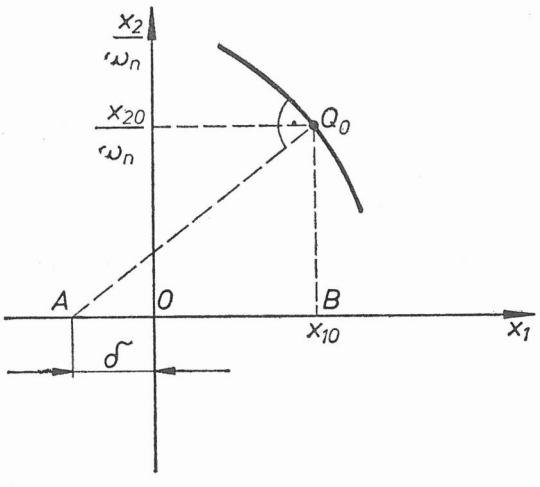
$$\frac{x_2}{\omega_n^2}\,dx_2+(x_1+\delta)\,dx_1=0 \tag{13-81}$$

i jednostavno integrirati pomoću separacije varijabli. Rješenje je:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\,x_2^2+(x_1+\delta)^2=R^2, \tag{13-82}$$

gdje smo konstantu integracije označili sa R^2. Vidimo da je rješenje kružnica polumjera R sa središtem u točki $x_1=-\delta$, $x_2=0$.

To je rješenje predočeno na sl. 13—26, koja ujedno prikazuje i grafičku konstrukciju trajektorije. Iz točke $Q_0\,(x_{10}, x_{20})$ spustimo okomicu na os apscisa, pa dužina $\overline{Q_0B}$ predstavlja x_{20}/ω_n. Odsječak $\overline{OB}$ predstavlja x_{10}, a on zajedno s veličinom



Sl. 13—26. Konstrukcija faznih portreta — delta metoda

δ, izračunatom za vrijednosti x_{10} i x_{20}, čini drugu katetu trokuta kojeg je hipotenuza R. Na taj način dio luka kroz točku Q_0, i to u neposrednoj blizini Q_0, simulira stvarnu trajektoriju. Napominjemo da je središte A uvijek smješteno na osi apscisa, a da δ može biti pozitivno ili negativno.

Na konstruiranom dijelu luka uvijek možemo provjeriti vrijednost δ, pa izborom novih točaka konstruiramo faznu trajektoriju koja prolazi kroz odabranu točku s početnim uvjetima.

13.3.3. Značajke faznih portreta

Nakon što smo razradili fazni portret ispitivanog sustava drugoga reda, možemo na njemu uočiti neke topološke značajke. One se pretežno odnose na tzv. singularne točke, pa se konfiguracija faznog portreta u okolišu singularne točke pojavljuje u obliku čvora, sedla, žarišta i vrtloga. Uz singularne točke obradit ćemo i separatrise i granične cikluse.

Singularna točka. Napišimo diferencijalnu jednadžbu drugoga reda u normalnom obliku:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{13-83}$$

Izjednačivši $f_1(x_1, x_2)$ i $f_2(x_1, x_2)$ s nulom, kao simultano rješenje obiju jednadžbi:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \tag{13-84}$$

dobivamo jednu točku u faznoj ravnini kao sjecište pravaca $f_1(x_1, x_2)=0$ i $f_2(x_1, x_2)=0$. U toj točki funkcija nije analitička. To je tzv. **singularna točka** u kojoj nagib fazne trajektorije nije određen:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}. \tag{13-85}$$

Značenje je singularne točke u tome što su brzine koordinata stanja $\dot{x}_1$ i $\dot{x}_2$ u toj točki jednake nuli, pa je singularna točka ujedno i potencijalna točka ravnoteže. Naime, stabilni će se sustav eventualno smiriti u toj točki, dok će se kod nestabilnih sustava fazne trajektorije udaljivati od te točke.

U linearnih i homogenih diferencijalnih jednadžbi drugoga reda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \tag{13-86}$$

s nagibom trajektorija:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-a_0 x_1 - a_1 x_2}{x_2} \tag{13-87}$$

postoji samo jedna singularna točka, i to u ishodištu: $x_1=0$, $x_2=0$. Ako je diferencijalna jednadžba linearna, a nehomogena, s pobudom u obliku odskočne funkcije:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=K, \tag{13-88}$$

nagib je trajektorija:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{K-a_1x_2-a_0x_1}{x_2} \tag{13-89}$$

pa je singularna točka u $x_1=K/a_0$, $x_2=0$. Na sličan način možemo i za linearnu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu s pobudom u obliku nagibne funkcije:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=Kt \tag{13-90}$$

njezinom pretvorbom:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{Kt-a_1x_2-a_0x_1}{x_2} \tag{13-91}$$

odrediti singularnu točku u $x_1=Kt/a_0$, $x_2=0$. U oba slučaja možemo supstitucijom faznih varijabli sustav pomaknuti u ishodište. U nelinearnih sustava imamo općenito više singularnih točaka, što ćemo objasniti u daljnjem tekstu.

Analizu nastavljamo promatranjem topološke konfiguracije faznih trajektorija, pri čemu je, zbog jednostavnosti, singularna točka u ishodištu fazne ravnine. Analizirat ćemo **linearne sustave drugoga reda,** što ćemo kasnije proširiti na nelinearne sustave drugoga reda.

Ako je fizikalni sustav drugoga reda **linearan,** možemo diferencijalne jednadžbe u normalnom obliku u izrazu (13-83) napisati na slijedeći način:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\\ \dot{x}_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2,\end{aligned} \tag{13-92}$$

gdje su a_{11}, a_{12}, a_{21} i a_{22} konstante ovisne o sustavu. Da bismo dobili **naročito pregledan fazni portret,** izvršit ćemo **transformaciju varijabli u kanonski oblik:**

$$\begin{aligned}\dot{y}_1&=K_1y_1+0,\\ \dot{y}_2&=0+K_2y_2.\end{aligned} \tag{13-93}$$

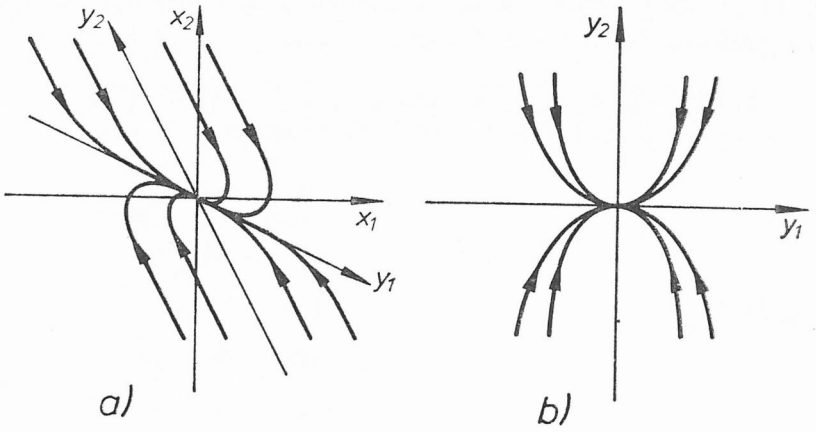
Prema odjeljku 12.3, nove kanonske varijable y_1 i y_2 povezane su s faznim varijablama x_1 i x_2 linearnom relacijom[1]:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{P}\mathbf{y}(t), \tag{13-94}$$

gdje je **P** kvadratna matrica drugoga reda. Ovo je zapravo **linearna transformacija koordinatnog sustava** iz općeg oblika u kanonski oblik. Kako su u izrazu (13-93) kanonske varijable međusobno nezavisne, fazni portret u kanonskim koordinatama

[1] Vidi jednadžbu (12-66).

bitno je jednostavniji od faznog portreta u općim koordinatama. To zorno vidimo na sl. 13—27 koja prikazuje fazni portret istog fizikalnog sustava najprije u općim, a onda u kanonskim koordinatama.



Sl. 13—27. Linearna transformacija fazne ravnine

U jednadžbama (13-93) matrica koeficijenata **A** ima kanonski oblik **Λ**, a koeficijenti K_1 i K_2 ujedno su i svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 matrice koeficijenata:

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0. \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{13-95}$$

Budući da su kod linearne transformacije svojstvene vrijednosti λ_i invarijantne, možemo ih izračunati iz karakteristične jednadžbe:

$$|\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}|=0, \tag{12-75}$$

koje korijeni λ_i odgovaraju svojstvenim vrijednostima matrice **A**. Imamo:

$$|\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda-a_{22} \end{vmatrix} \tag{13-96}$$

i dalje:

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{12})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0. \tag{13-97}$$

Odatle ćemo dobiti oba korijena:

$$\lambda_{1,2}=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4\,(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})} \tag{13-98}$$

Odnosi postaju naročito pregledni ako uvedemo poznate kratice za sustav drugoga reda — faktor prigušenja σ i neprigušenu vlastitu frekvenciju ω_n[1]:

$$\begin{aligned} \sigma&=-\frac{a_{11}+a_{22}}{2}, \\ \omega_n^2&=a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21}, \end{aligned} \tag{13-99}$$

[1] Vidi odjeljak 3.3.

tako da su korijeni u izrazu (13-98):

$$\lambda_{1,2}=-\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-\omega_n^2}. \tag{13-100}$$

Korijeni mogu biti realni i različiti, mogu biti dvostruki, a mogu biti i konjugirano kompleksni. U vezi s time izvršena je podjela prema tablici 13—3.

1. slučaj: $\sigma>\omega_n$, korijeni λ_1 i λ_2 realni su i različiti. Dijeljenjem izraza za $\dot{y}_1$ i $\dot{y}_2$ iz jednadžbi (13-93) dobivamo:

$$\frac{dy_2}{dy_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{y_2}{y_1}, \tag{13-101}$$

i dalje:

$$\frac{dy_2}{y_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{dy_1}{y_1}, \tag{13-102}$$

što daje rješenje:

$$\frac{y_2}{y_1}=Ke^{\lambda_2/\lambda_1}, \tag{13-103}$$

gdje je K konstanta integracije.

Već prema vrijednostima σ i ω_n dobivamo fazni portret stabilnog ili nestabilnog **čvora,** kao i uvijek nestabilnog **sedla.**

2. slučaj: $\sigma=\omega_n$, korijeni λ_1 i λ_2 su dvostruki. I ovdje dobivamo **čvor** koji može biti stabilan ili nestabilan.

3. slučaj: $\sigma<\omega_n$, korijeni su λ_1 i λ_2 konjugirano kompleksni. Budući da se u diferencijalnim jednadžbama (13-93) pojavljuju kompleksni koeficijenti, jednadžbe se ne mogu jednostavno prikazati u faznoj ravnini. To rješavamo dodatnom linearnom transformacijom, pa umjesto y_1 i y_2 uvodimo nove varijable z_1 i z_2:

$$\begin{aligned} y_1&=z_1+jz_2,\\ y_2&=z_1-jz_2, \end{aligned} \tag{13-104}$$

gdje su z_1 i z_2 realni i imaginarni dio od y_1 i y_2. Dalje je:

$$\begin{aligned} z_1&=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\\ z_2&=\frac{1}{2}(y_1-y_2). \end{aligned} \tag{13-105}$$

Sada su z_1 i z_2 realne koordinate u sustavu koji leži koso prema pravokutnom sustavu, ali imaju zajedničko ishodište. U diferencijalne jednadžbe (13-93) umjesto koeficijenata K_1 i K_2 uvrstimo korijene:

$$\lambda_{1,2}=-\sigma\pm j\omega_p \tag{13-106}$$

gdje je ω_p prigušena vlastita frekvencija, pa dobivamo:

$$\dot{y}_1=\lambda_1 y_1=(-\sigma+j\omega_p)\,y_1,$$
$$\dot{y}_2=\lambda_2 y_2=(-\sigma-j\omega_p)\,y_2. \tag{13-107}$$

Uvođenjem novih varijabli z_1 i z_2 iz izraza (13-104) dobivamo:

$$\dot{z}_1+j\dot{z}_2=(-\sigma+j\omega_p)\,(z_1+jz_2)=(-\sigma z_1-\omega_p z_2)+$$
$$+j\,(\omega_p z_1-\sigma z_2),$$
$$\dot{z}_1-j\dot{z}_2=(-\sigma-j\omega_p)\,(z_1-jz_2)=(-\sigma z_1-\omega_p z_2)+ \tag{13-108}$$
$$+j\,(-\omega_p z_1+\sigma z_2).$$

Ako te dvije jednadžbe najprije zbrojimo, a zatim oduzmemo, imamo:

$$\dot{z}_1=-\sigma z_1-\omega_p z_2,$$
$$\dot{z}_2=\omega_p z_1-\sigma z_2. \tag{13-109}$$

Dijeljenjem tih jednadžbi dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}z_1}=\frac{\omega_p z_1-\sigma z_2}{-\sigma z_1-\omega_p z_2}. \tag{13-110}$$

Rješenje ćemo dobiti uvođenjem polarnih koordinata:

$$z_1=r\cos\varphi,$$
$$z_2=r\sin\varphi. \tag{13-111}$$

Sačinit ćemo totalni diferencijal:

$$\mathrm{d}z_1=\mathrm{d}r\cos\varphi-r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$
$$\mathrm{d}z_2=\mathrm{d}r\sin\varphi+r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \tag{13-112}$$

Uvrštenjem u jednadžbu (13-110) dobivamo:

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi}=\frac{\omega_p\cos\varphi-\sigma\sin\varphi}{-\sigma\cos\varphi-\omega_p\sin\varphi}. \tag{13-113}$$

Množenjem, trigonometrijskim pretvorbama i kraćenjem dobivamo jednostavnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\omega_p\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=-r\sigma. \tag{13-114}$$

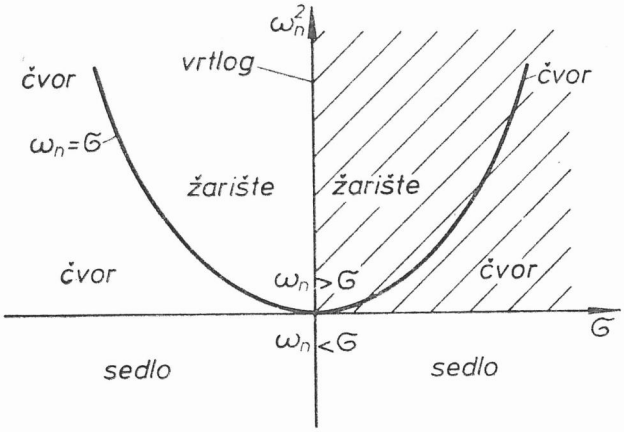
Nakon separacije varijabli:

$$\frac{\mathrm{d}r}{r}=-\frac{\sigma}{\omega_p}\,\mathrm{d}\varphi \tag{13-115}$$

možemo lako naći rješenje:

$$r = Re^{-\frac{\sigma}{\omega_p}\varphi} \tag{13-116}$$

Već prema tome da li je omjer σ/ω_p veći ili manji od nule, fazni je portret u obliku stabilnog ili nestabilnog **žarišta;** ako je $\sigma=0$, dobivamo **vrtlog** s kružnicama polumjera R_i oko ishodišta. Sam vrtlog je asimptotski stabilan u smislu Ljapunova[1], što znači da su oscilacije, iako se pojavljuju, ograničene, a fazne varijable ne teže beskonačnome.



Sl. 13–28. Dijagram prikazuje područja različitih singularnih točaka

Iz tablice 13–3 vidimo da postoji stabilnost sustava kad su korijeni λ_1 i λ_2 na lijevoj strani Gaussove ravnine. To uočavamo i iz zgodno odabranog dijagrama na sl. 13–28 s koordinatnim osima σ i ω_n^2. Koordinatne osi i parabola za $\omega_n=\sigma$ dijele ravninu na sektore koji sadržavaju pojedine singularne točke. Crtkano naznačen prvi kvadrant označuje područje stabilnosti. Kako su σ i ω_n^2 prema izrazima (13-99) povezani s koeficijentima sustava a_{11}, a_{12}, a_{21} i a_{22}, možemo iz vrijednosti σ i ω_n^2 izravno uočiti singularne točke kao i topografiju faznih portreta u njihovu okolišu.

Od tih singularnih točaka naročito su zanimljivi čvor i žarište, jer se često pojavljuju u regulacijskoj tehnici. Sedlo se ne pojavljuje često, a vrtlog se praktički ne pojavljuje (konzervativni sustav!).

Dosadašnja analiza singularnih točaka odnosila se na linearne sustave. Tu analizu možemo proširiti na **nelinearne sustave** ako promatramo topološke konfiguracije faznih trajektorija u **okolišu singularne točke.** Fazne brzine prema izrazima (13-83) možemo naime razviti u Taylorov red:

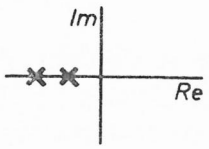
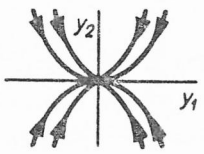
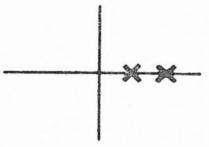
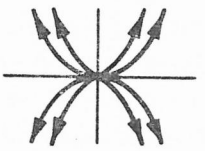
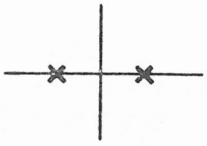
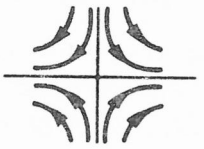
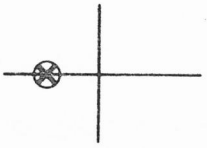
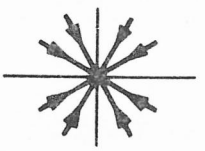
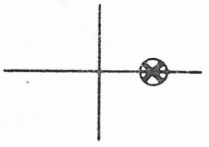
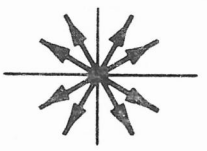
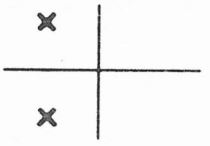
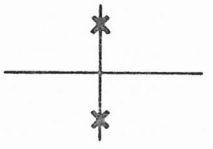
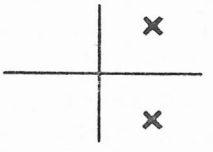
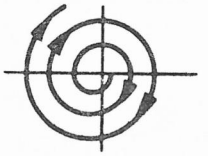
$$f_1(x_1, x_2) = x_{1s} + x_{2s} + (x_1 - x_{1s})\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{Qs} + (x_2 - x_{2s})\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{Qs} + \ldots \tag{13-117}$$

Slično vrijedi i za $f_2(x_1, x_2)$:

$$f_2(x_1, x_2) = x_{1s} + x_{2s} + (x_1 - x_{1s})\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{Qs} + (x_2 - x_{2s})\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{Qs} + \ldots \tag{13-118}$$

[1] Vidi odjeljak 13.4.

Tablica 13—3. Fazni portreti singularnih točaka

TIP	σ, ω_n	KORIJENI	FAZNI PORTRET
čvor stabilan	$\omega_n < \sigma$ $\sigma > 0$ $\omega_n > 0$		
čvor nestabilan	$\omega_n < \sigma$ $\sigma < 0$ $\omega_n > 0$		
sedlo nestabilno	$\omega_n < \sigma$ $\sigma \gtrless 0$ $\omega_n < 0$		
čvor stabilan	$\omega_n = \sigma$ $\sigma > 0$ $\omega_n > 0$		
čvor nestabilan	$\omega_n = \sigma$ $\sigma < 0$ $\omega_n < 0$		
žarište stabilno	$\omega_n > \sigma$ $\sigma > 0$ $\omega_n > 0$		
vrtlog asimptotski stabilan	$\omega_n > \sigma$ $\sigma = 0$ $\omega_n > 0$		
žarište nestabilno	$\omega_n > \sigma$ $\sigma < 0$ $\omega_n > 0$		

U okolišu singularne točke $Q_s\,(x_{1s}, x_{2s})$ možemo provesti **linearizaciju** tako da odbacimo sve članove višega reda. Osim toga, stavimo $x_{1s}=0$, $x_{2s}=0$, jer se transformacijom varijabli singularna točka može prebaciti u ishodište. Kako parcijalne

derivacije predstavljaju konstantne nagibe, možemo sustav jednadžbi pisati identično onome kod linearnih sustava:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \tag{13-92}$$

Uvođenje linearizacije u okolišu singularne točke ima veliko praktično značenje, jer se na osnovi jednadžbe (13-92) može zaključiti o **stabilnosti nelinearnih sustava.** To je zapravo **perturbacijska analiza** — kad se promatra vladanje nelinearnog sustava u okolišu radne točke — koju smo uveli u odjeljku 2.2. Takav prilaz analizi stabilnosti ubrajamo u **prvu metodu Ljapunova** koja obuhvaća sve metode što se temelje na eksplicitnom rješenju diferencijalne jednadžbe, pri čemu se rješenje često traži u obliku redova. Dokaz prve metode Ljapunova sadržan je u sveobuhvatnoj **drugoj metodi Ljapunova,** o kojoj ćemo govoriti u slijedećem odjeljku [lit. 16, 21, 42].

Separatrisa. Uz pojavu sedla vezana je i tipična krivulja koju nazivamo separatrisa. Ona prolazi kroz sedlo i — kao što i ime kaže — odjeljuje faznu ravninu u nekoliko sektora s različitim topološkim konfiguracijama.

Kao primjer uzimamo diferencijalnu jednadžbu koja opisuje neprigušeno njihalo:

$$\ddot{\varphi} + \omega_n^2 \sin \varphi = 0. \tag{13-119}$$

Fazne su varijable kut $x_1 = \varphi$ i kutna brzina $x_2 = \dot{\varphi}$. Dobivamo normalan oblik diferencijalne jednadžbe (13-114):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_n^2 \sin x_1. \end{aligned} \tag{13-120}$$

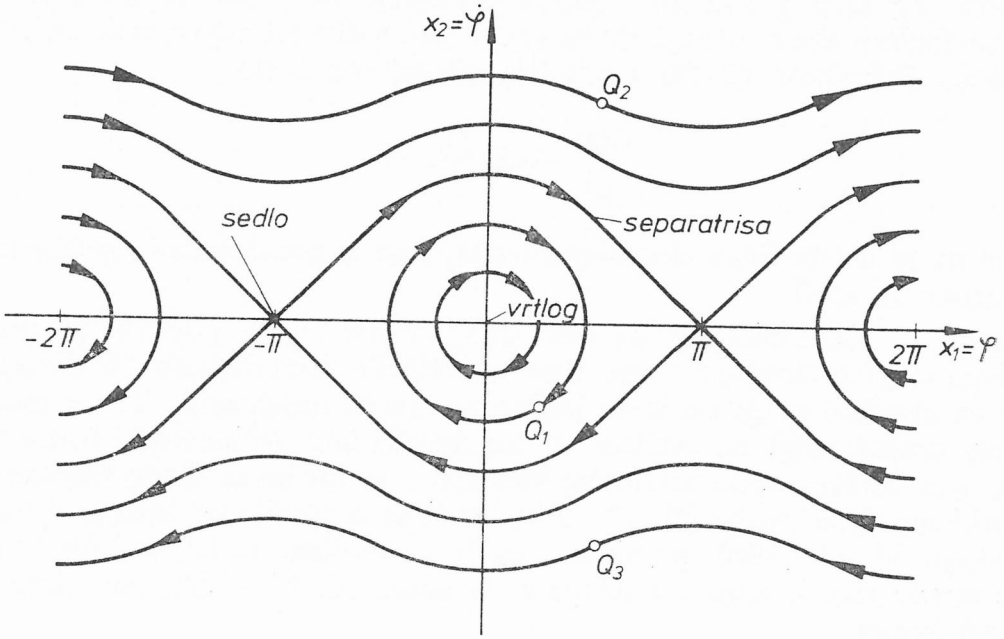
Da bismo dobili singularne točke, moramo desne strane izjednačiti s nulom:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ \sin x_1 &= 0, \end{aligned} \tag{13-121}$$

odakle dobivamo singularne točke: $x_2 = 0$, $x_1 = \pm n\pi$. Ako funkciju $\dot{x}_2 = -\omega_n^2 \sin x_1$ razvijemo u okolišu singularnih točaka u Taylorov red, lako ćemo ustanoviti da se kod parnih n pojavljuju vrtlozi, a kod neparnih n sedla. Koristeći se metodom izoklina, možemo fazni portret dinamike njihala prikazati kao na sl. 13—29.

Fazni portret ima jasno fizikalno tumačenje. Postoje dvije točke ravnoteže njihala: vrtlog odgovara mirovanju njihala u donjoj stabilnoj točki, a sedlo predstavlja teorijski slučaj kad bi se njihalo zaustavilo u gornjoj labilnoj točki. Kad se njihalo giba neprigušeno, ali se ne prebacuje preko gornje točke, početna točka Q_1 određuje elipsu kao faznu trajektoriju njihanja. Ucrtane separatrise odjeljuju njihanje od okretanja kad se njihalo prebacuje preko gornje točke, a nema prigušenja. Tako početna točka Q_2 određuje faznu trajektoriju kad se njihalo okreće u pozitivnom smjeru: kut φ monotono raste, a kutna brzina $\dot{\varphi}$ oscilira između najveće vrijednosti u donjoj točki i najmanje vrijednosti u gornjoj točki. Uz početnu točku Q_3 njihalo se okreće u suprotnom smjeru.

Jednadžba separatrisa u praksi se ne traži, iako ju je obično moguće odrediti.



Sl. 13–29. Fazni portret njihala s prikazom separatrise

Granični krug. Dok se singularne točke pojavljuju u linearnim disipativnim i konzervativnim sustavima, **granični krug je svojstven nelinearnim disipativnim sustavima.** Pomoću graničnog kruga opisuju se oscilacije u nelinearnim sustavima (otkucaji srca, elektronički oscilator, satni mehanizam). Možemo reći da je jedna od osnovnih svrha nelinearne analize baš utvrđivanje postojanja graničnih krugova i njihova smještaja u faznoj ravnini.

Kao klasičan primjer takvog sustava uzimamo elektronički oscilator. Uz male amplitude faktor je prigušenja $\sigma<0$, pa se oscilacije raspiruju; uz velike amplitude postaje $\sigma>0$, pa se oscilacije prigušuju. Posljedica je da se oscilacije stabiliziraju na određenoj amplitudi bez obzira na početne uvjete. Takve oscilacije opisuje van der Polova jednadžba što smo je uveli u odjeljku 2.2:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}-\epsilon(1-x_i^2)\frac{dx_i}{dt}+x_i=0, \tag{2-33}$$

gdje prigušni član ispred $\dot{x}$ ovisi o amplitudi. Uvodimo normalan oblik jednadžbe (2-33) uz $x_1=x_i$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=\epsilon(1-x_1^2)\,x_2-x_1.\end{aligned} \tag{13-122}$$

Derivacija udaljenosti od ishodišta iznosi:

$$\frac{d(r^2)}{dt}=\frac{d}{dt}(x_1^2+x_2^2)=2x_1\,\dot{x}_1+2x_2\,\dot{x}_2, \tag{13-123}$$

a u nju uvrstimo izraze (13-122):

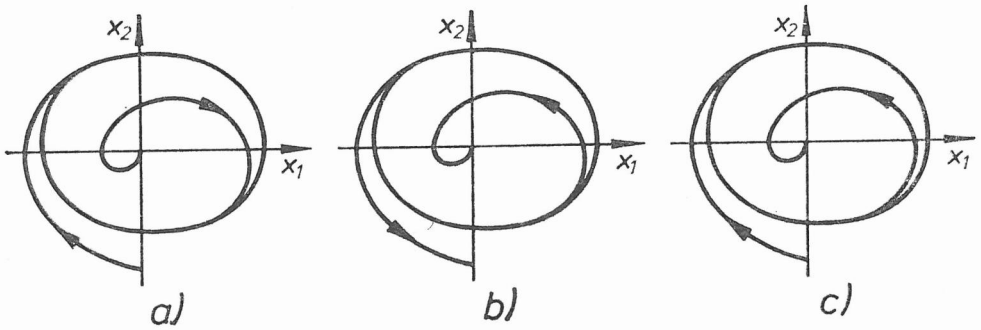
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d(r^2)}{dt}=\epsilon x_2^2(1-x_1^2). \tag{13-124}$$

Prolaskom $|x_1|$ kroz jediničnu udaljenost mijenja se predznak od $\mathrm{d}(r^2)/\mathrm{d}t$. Uz $\epsilon>0$ fazne trajektorije konvergiraju za velike $|x_1|$, a divergiraju za male $|x_1|$. Nadalje, linearizacija jednadžbe (2-33) u okolišu singularne točke:

$$\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}-\epsilon\dot{x}_i+x_i=0 \qquad (13\text{-}125)$$

pokazuje da je u ishodištu singularna točka, i to nestabilan čvor, odnosno nestabilno žarište za $\epsilon>0$.

Na sl. 13—30 prikazane su neke mogućnosti faznih portreta za nelinearne disipativne sustave drugoga reda. Sve trajektorije konvergiraju ili divergiraju u odnosu na granični krug, pa je on jedina zatvorena trajektorija. Tu se radi o **singularnoj trajektoriji** za razliku od trajektorija kod nelinearnih konzervativnih sustava, gdje imamo samo zatvorene krivulje. Ako susjedne fazne trajektorije teže trajektoriji granična kruga (sl. 13—30a), radi se o stabilnom krugu, a ako se od nje udaljuju (sl. 13—30b), granični krug je nestabilan. Konačno, ako trajektorije s jedne strane teže k njoj, a s druge se udaljuju (sl. 13—30c), govorimo o polustabilnom krugu.



Sl. 13—30. Fazni portreti nelinearnih disipativnih sustava s prikazom graničnih krugova

Postoje dva tipa samouzbude u nelinearnim sustavima. Ako se prema sl. 13—30a nelinearan sustav u početku nalazi u položaju ravnoteže u ishodištu, najmanji poremećaj prebacuje sustav u trajektoriju graničnog kruga, pa je stanje sustava stabilno. To je tzv. **meka samouzbuda** tipična za oscilatore. Postoji međutim, i druga mogućnost da je u blizini početnog stanja ravnoteže sustav stabilan, pa se uz male poremećaje uspostavlja prvobitno stanje. Tako bi za nelinearan sustav prema sl. 13—30c trebao jaki poremećaj koji bi radnu točku prebacio u putanju izvan graničnog kruga, pa da se trajne oscilacije ustale. To je tzv. **tvrda samouzbuda** koja ovisi o početnim uvjetima. Primjer za to je satni mehanizam gdje je potreban početni impuls određene amplitude da nadvlada prag osjetljivosti [lit. 42, 71].

Postojanje graničnog kruga možemo ustanoviti na faznom portretu, ali je to mukotrpan posao. Analitičke metode sastoje se u dokazivanju konvergentnih svojstava trajektorija izvan graničnog kruga, a divergentnih unutar njega. H. Poincaré, koji je uveo pojam graničnog kruga, dokazao je postojanje graničnog kruga pomoću krivuljnog integrala koji omeđuje ispitivano područje fazne ravnine [lit. 20,42]. **Poincaréov indeks** $\mathcal{P}$ kazuje da postoji granični krug ako je ukupan

broj singularnih točaka unutar područja nula, gdje je indeks za sedlo -1, a za sve druge singularne točke $+1$. To je doduše nužan, ali ne i dovoljan uvjet za postojanje graničnog kruga.

T. Bendixson je išao korak dalje pa je izveo dokaz o nepostojanju graničnog kruga unutar ispitivanog kruga. U izvodu polazimo od normalnog oblika nelinearne diferencijalne jednadžbe (13-83), odnosno od njezina transformiranog izraza:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}. \tag{13-85}$$

Možemo dalje pisati:

$$f_1(x_1, x_2)\, dx_2 = f_2(x_1, x_2)\, dx_1. \tag{13-126}$$

Ta jednadžba vrijedi za bilo koju trajektoriju u faznoj ravnini. Primijenivši za taj izraz Green-Gaussov teorem:

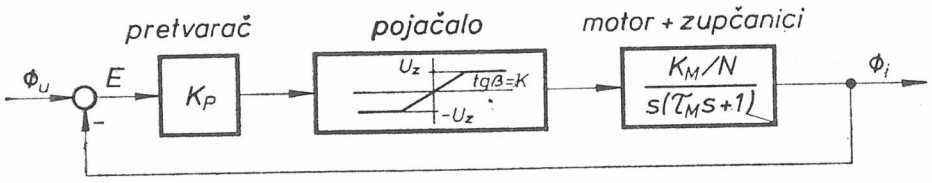
$$\oint_C (f_1\, dx_2 - f_2\, dx_1) = \int\int_P \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right] dx_1\, dx_2 \tag{13-127}$$

dobivamo da je krivuljni integral duž zatvorene krivulje C jednak površinskom i ntegralu u području P omeđenom tom krivuljom. Ako pretpostavimo da je krivulja C zapravo granični krug koji zatvara područje P, krivuljni integral na lijevoj strani duž te krivulje jednak je nuli. Prema tome je i desna strana jednaka nuli, pa izraz $[\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2]$ mora mijenjati predznak u području P. Odatle izvodimo **Bendixsonov negativni kriterij:** ako izraz $[\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2]$ ima čvrst predznak unutar ispitivanog područja, granični krug ne postoji [lit. 42, 71].

13.3.4. Analiza nelinearnih regulacijskih krugova

Metodu fazne ravnine i njezine prednosti pri rješavanju jednostavnih nelinearnih regulacijskih krugova prikazat ćemo na nekoliko primjera. U svakom primjeru uzimamo nelinearni regulacijski krug gdje smo linearni sustav drugoga reda odijelili od nelinearnosti. Te su realne pretpostavke: u servomehanizme ubrajamo npr. električne ili hidraulične motore kojih se djelovanje, uz zanemarenje članova višega reda, može svesti na diferencijalnu jednadžbu drugoga reda. U njih su uvijek prisutne nelinearnosti kao što su zasićenje, mrtvi pojas ili histereza. Te su **nelinearnosti svojstvene sustavu,** pa je npr. u elektroničkom pojačalu prisutno zasićenje napona, u hidrauličnom motoru ograničenje hoda, u otklonu mjernog instrumenta i pretvarača prisutan je mrtvi pojas, u kutnom zakretu reduktorskog zupčanika motora prisutna je labavost. Postoje međutim i **namjerno ugrađene nelinearnosti,** kao što je nadasve važna skupina tzv. relejnih regulatora koji se zbog jednostavnosti i jeftinoće mnogo primjenjuju u regulacijskoj tehnici. Tu možemo ubrojiti i tarne spojke i magnetske ventile. U svakom slučaju, u analizi metodom fazne ravnine uzimamo samo prevladavajuću nelinearnost.

Kao prvi primjer promatramo instrumentalni servomehanizam prema blok-dijagramu na sl. 13—31. Mjerni pretvarač predstavlja čisti prijenosni omjer K_P bez prisutnih kašnjenja. Njemu slijedi elektroničko pojačalo s pojačanjem $K = \operatorname{tg}\beta$, ali i sa zasićenjem napona, što je prikazano s ucrtanom karakteristikom. Napon pojačala upravlja elektromotorom koji ima integralno djelovanje i kašnjenje prvog reda, a osim toga i prijenosni omjer zupčanika N.



Sl. 13–31. Blok-dijagram servomehanizma sa zasićenjem

U **linearnom području** pojačala vrijede slijedeće jednadžbe:

$$\frac{\Phi_i}{E}=\frac{K_P K K_M/N}{s(1+\tau_M s)}, \qquad (13\text{-}128)$$

$$E=\Phi_u-\Phi_i.$$

Izlučivanjem Φ_i dobivamo odnos:

$$\frac{E}{\Phi_u}=\frac{\tau_M s^2+s}{\tau_M s^2+s+K_P K K_M/N}, \qquad (13\text{-}129)$$

što se odražava u diferencijalnoj jednadžbi gdje je regulacijsko odstupanje e zavisna varijabla:

$$\ddot{e}+\frac{1}{\tau_M}\dot{e}+\frac{K_P K K_M}{\tau_M N}e=\ddot{\varphi}_u+\frac{1}{\tau_M}\dot{\varphi}_u. \qquad (13\text{-}130)$$

Ako je pobudna funkcija φ_u konstantna ili postoje samo početni uvjeti, prelazi ta jednadžba u homogeni oblik:

$$\ddot{e}+\frac{1}{\tau_M}\dot{e}+\frac{K_P K K_M}{\tau_M N}e=0 \quad \text{za} \quad -E_z<e<E_z, \qquad (13\text{-}131)$$

gdje je E_z regulacijsko odstupanje pri kojem nastupa zasićenje napona pojačala $U_z=K_P K E_z$.

U **području zasićenja** polazimo od jednadžbe:

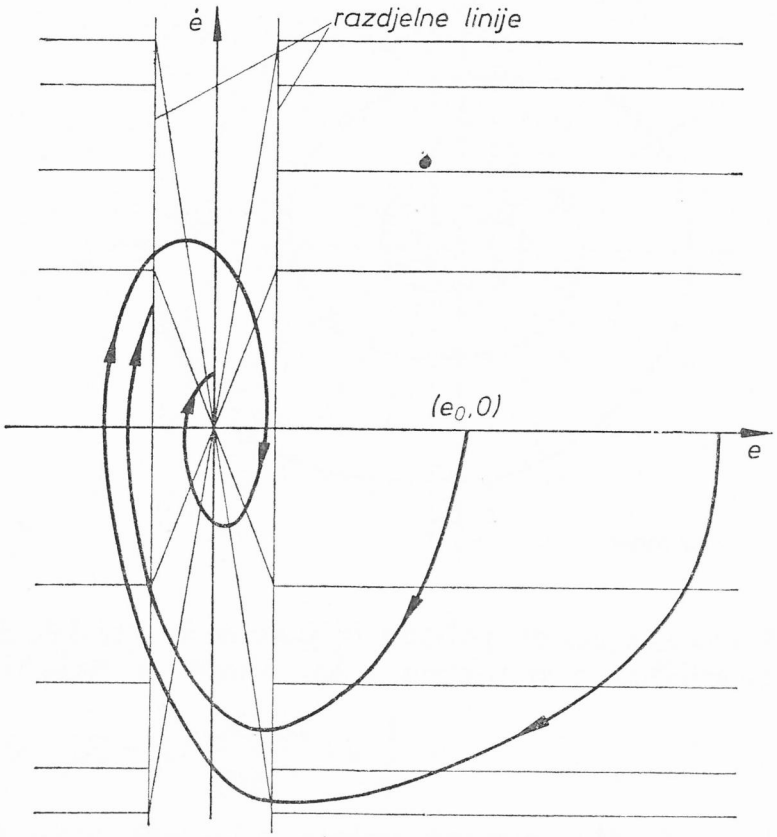
$$\Phi_i=\Phi_u-E=\pm K_P K E_z\frac{K_M/N}{s(1+\tau_M s)}. \qquad (13\text{-}132)$$

Iz nje izvodimo diferencijalnu jednadžbu:

$$\ddot{e}+\frac{1}{\tau_M}\dot{e}=\mp\frac{K_P K K_M}{\tau_M N}E_z+\ddot{\varphi}_u+\frac{1}{\tau_M}\dot{\varphi}_u \qquad (13\text{-}133)$$

Opet je uz φ_u=konst. odnosno $\varphi_u=0$ i $\ddot{\varphi}_u=\dot{\varphi}=0$, pa dobijemo:

$$\begin{aligned}\ddot{e}+\frac{1}{\tau_M}\dot{e}&=-\frac{K_P K K_M}{\tau_M N}E_z \quad \text{za} \quad e>E_z,\\ \ddot{e}+\frac{1}{\tau_M}\dot{e}&=\frac{K_P K K_M}{\tau_M N}E_z \quad \text{za} \quad e<-E_z.\end{aligned} \qquad (13\text{-}134)$$

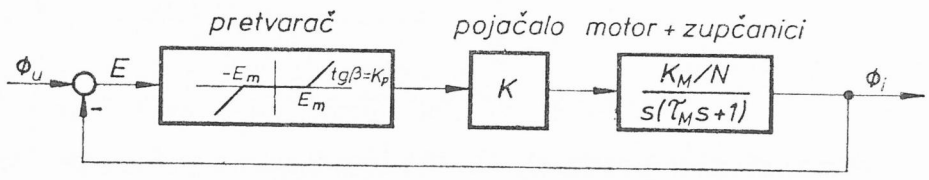


Sl. 13—32. Fazni portret sustava sa sl. 13—31

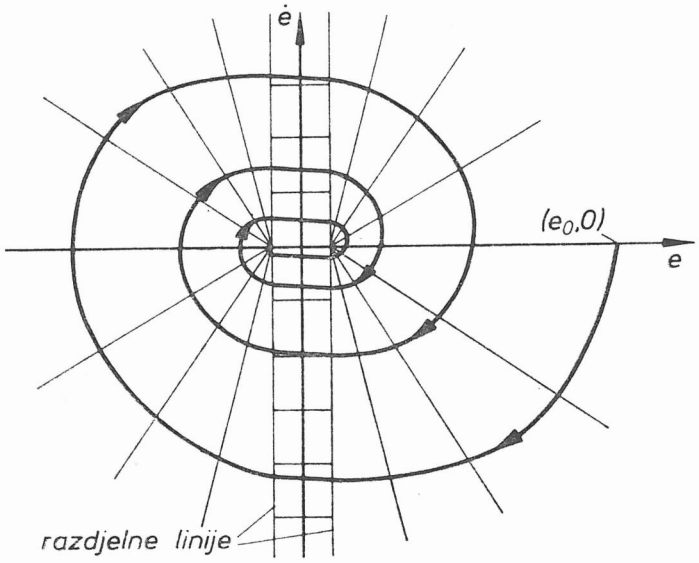
Za svako područje izvodimo iz jednadžbi (13-131) i (13-134) normalan oblik i na osnovi prethodno izloženih metoda odredimo izokline u faznoj ravnini (sl. 13—32). U središnjem linearnom dijelu, između $-E_z$ i E_z, izokline su radijalni pravci iz žarišta u ishodištu; sa svake strane prostire se područje zasićenja s horizontalnim izoklinama. Ucrtane su — dakako kvalitativno — i dvije fazne trajektorije koje počinju na osi apscisa, gdje se u početnom trenutku pojavi odskok regulacijskog odstupanja. Na **razdjelnim linijama** među područjima prikazane su fazne trajektorije kao kontinuirane krivulje, što odgovara i fizikalnoj slici, jer je u stvarnosti karakteristika zasićenja pojačala kontinuirana. Izlomljena karakteristika bila bi u tom slučaju aproksimacija.

Slijedeći je primjer servomehanizam prema blok-dijagramu na sl. 13—33, gdje je istaknut prag osjetljivosti mjernog pretvarača. Raspon je mrtvog pojasa $X_m=2E_m$, a izvan tog područja prijenosni je omjer K_P konstantan. Na osnovi sličnih razmatranja kao i u prethodnom primjeru, dobivamo za **područje izvan mrtvog pojasa:**

$$\Phi_i=\Phi_u-E=\frac{K_PKK_M/N}{s\,(1+\tau_M s)}\,(E-E_m), \qquad (13\text{-}135)$$



Sl. 13—33. Blok-dijagram servomehanizma s mrtvim pojasom



Sl. 13—34 Fazni portret sustava sa sl. 13—33

što uz konstantnu pobudu ili početne uvjete daje diferencijalnu jednadžbu s regulacijskim odstupanjem e kao zavisnom varijablom:

$$\ddot{e}+\frac{1}{\tau_M}\dot{e}+\frac{K_P K K_M}{\tau_M N}(e-E_m)=0 \text{ za } |e|>E_m. \tag{13-136}$$

U **području mrtvog pojasa** prijenosni omjer $K_P=0$, pa jednadžbu (13-136) možemo pojednostavniti:

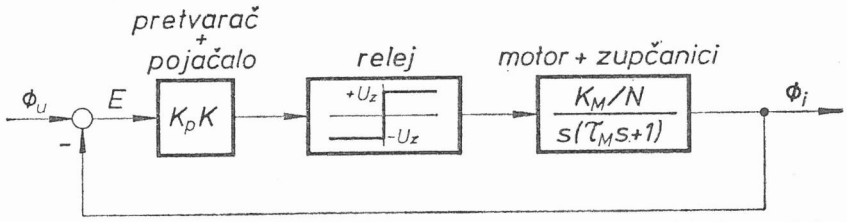
$$\ddot{e}+\frac{1}{\tau_M}\dot{e}=0 \quad \text{za} \quad |e|<E_m. \tag{13-137}$$

Sl. 13—34 prikazuje fazni portret, i to s kvalitativno ucrtanim izoklinama koje su vodoravne u području mrtvog pojasa, a radijalne izvan njega sa središtem na razdjelnim linijama. Fazna trajektorija počinje odskokom regulacijskog odstupanja u točki (e_0, 0), a svršava u ishodištu gdje je stabilno žarište faznog portreta.

Budući da je karakteristika mrtvog pojasa u mjernom instrumentu kontinuirana, i trajektorija na sl. 13—34 nema prelomne točke na razdjelnim linijama.

Servomehanizam na sl. 13—35 ima ugrađen dvopoložajni relejni regulator bez histereze. Na osnovi prethodnih razmatranja nije teško postaviti diferencijalnu jednadžbu s regulacijskim odstupanjem kao zavisnom varijablom:

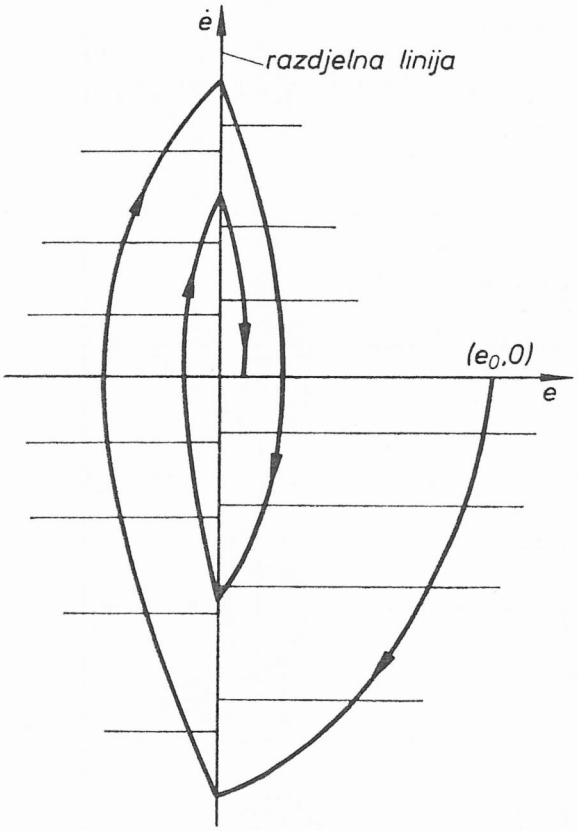
$$\ddot{e}+\frac{1}{\tau_M}\dot{e}+K_M U_z \operatorname{sgn} e=0. \tag{13-138}$$



Sl. 13—35. Blok-dijagram servomehanizma s dvopoložajnim relejom

Fazna ravnina prema sl. 13—36 ima ucrtane vodoravne izokline kojih razmaci simbolično označuju da su vrijednosti s obje strane osi apscisa različite. To je

ujedno i razdjelna linija koju ponekad prikladno nazivamo i »preklopna linija«. Za razliku od prethodnih primjera, kod releja u ovom primjeru postoji stvarno nekontinuirani prijelaz, pa je i trajektorija na sl. 13—36 razlomljena na razdjelnoj liniji. Trajektorija počinje u točki (e_0, 0), a završava u stabilnom žarištu u ishodištu.



Sl. 13—36. Fazni portret sustava sa sl. 13—35.

Ne ulazeći u daljnje izvode, u tablici 13—4 dajemo slučajeve kad se u servomehanizam prema sl. 13—35 ugrađuju relejni regulatori raznih karakteristika, i to kako dvopoložajni tako i tropoložajni, bez histereze i s histerezom. Odgovarajući fazni portreti s ucrtanim razdjelnim linijama daju kvalitativnu sliku ponašanja regulacijskog kruga.

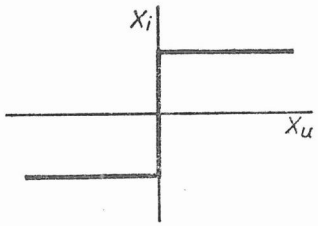
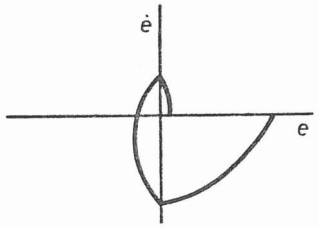
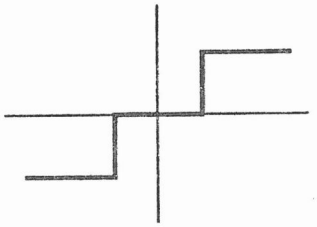
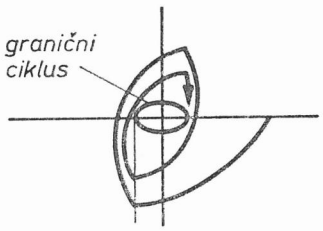
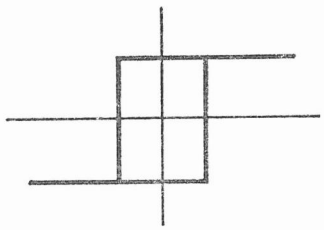
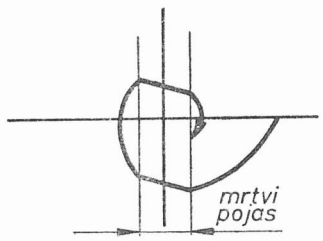
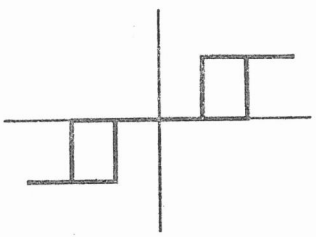
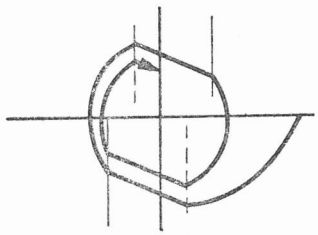
13.4. Direktna metoda Ljapunova

U prethodnom smo odjeljku uveli prvu metodu Ljapunova kao skup svih postupaka u kojima pomoću rješenja diferencijalne jednadžbe nalazimo odgovor na pitanje o stabilnosti nelinearnog sustava. U ovom odjeljku uvodimo drugu metodu Ljapunova, pomoću koje direktno — ne rješavajući diferencijalnu jednadžbu — dolazimo do zaključaka o stabilnosti nelinearnog sustava. Odatle i naziv **direktna metoda Ljapunova**[1]. Nešto slično imali smo i pri ispitivanju stabilnosti linearnih sustava pomoću Routhova, odnosno Hurwitzova kriterija.

U linearnih sustava dokazivali smo stabilnost tako što smo zahtijevali da korijeni karakteristične jednadžbe, odnosno polovi prijenosne funkcije imaju negativan

[1] Ljapunov, A. M., Obščaja zadača ob ustojčivosti dviženija. Doktorska disertacija, Harkov, 1892.

Tablica 13—4. Fazni portreti nekontinuiranih regulatora

TIP REGULATORA	KARAKTERISTIKA	FAZNI PORTRET
dvopoložajni regulator bez histereze		
tropoložajni regulator bez histereze		
dvopoložajni regulator s histerezom		
tropoložajni regulator s histerezom		

realni dio. U nelinearnih sustava ta metoda nema smisla. Ljapunov je pošao drugim putem, pa je poopćio **energetski pristup klasične mehanike.** Naime, mehanički je sustav stabilan ako se s porastom vremena ukupna energija disipativnog sustava, tj. zbroj potencijalne i kinetičke energije, kontinuirano smanjuje prema nuli.

Metodu ćemo objasniti na nelinearnom disipativnom sustavu drugoga reda, gdje je sila tvrde opruge nelinearna funkcija položaja (v. sl. 2—6). U tome je slučaju diferencijalna jednadžba sustava:

$$M\ddot{x}+D\dot{x}+S_1x+S_3x^3=0. \tag{13-139}$$

Uvodimo fazne varijable $x_1=x$ i $x_2=\dot{x}$, pa dobivamo normalan oblik diferencijalne jednadžbe (13-139):

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-\frac{D}{M}x_2-\frac{S_1}{M}x_1-\frac{S_3}{M}x_1^3. \tag{13-140}$$

Ravnotežni je položaj očigledno $\dot{x}_1=0$, $\dot{x}_2=0$, a odatle slijedi i $x_1=0$ te $x_2=0$.

Ukupna energija E sustava sastoji se od kinetičke energije:

$$E_k=\frac{1}{2}M\dot{x}^2=\frac{1}{2}Mx_2^2 \tag{13-141}$$

i potencijalne energije jednake sili opruge koja prevodi masu iz položaja $x=x_1$ u mirovanje $x=0$:

$$E_p=\int_{x_1}^{0}(-S_1x-S_3x^3)\,dx=\int_{0}^{x_1}(S_1x+S_3x^3)\,dx=\frac{1}{2}S_1x_1^2+\frac{1}{4}S_3x_1^4. \tag{13-142}$$

Kako su i E_k i E_p uvijek veće ili jednake nuli, i ukupna je energija također veća od nule ili jednaka nuli:

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}Mx_2^2+\frac{1}{2}\left(S_1x_1^2+\frac{1}{2}S_3x_1^4\right)\geqslant 0. \tag{13-143}$$

Energija E je funkcija faznih varijabli. Za takvu funkciju koja je uvijek veća od nule kažemo da je **pozitivno definitna.**

Ako su početni uvjeti takvi da je sustav izvan položaja ravnoteže, korisno je da utvrdimo kako se mijenja ukupna energija s vremenom. Izračunajmo derivaciju od E:

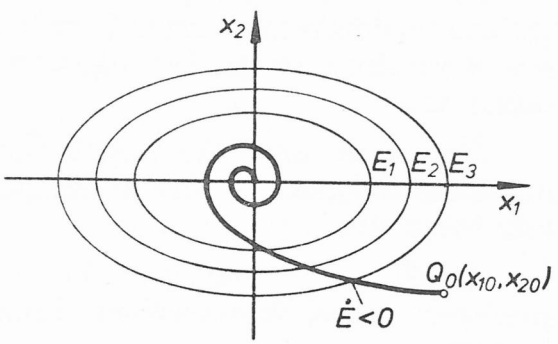
$$\dot{E}=Mx_2\dot{x}_2+S_1x_1\dot{x}_1+S_3x_1^3\dot{x}_1, \tag{13-144}$$

i dalje:

$$\dot{E}=Mx_2\left[-\frac{D}{M}x_2-\frac{S_1}{M}x_1-\frac{S_3}{M}x_1^3\right]+S_1x_1x_2+S_3x_1^3x_2=-Dx_2^2\leqslant 0, \tag{13-145}$$

pa je $\dot{E}$ također funkcija faznih varijabli. Ona je uvijek manja od nule ili jednaka nuli. Kako međutim ona može biti jednaka nuli za bilo koju vrijednost x_1, tj. bilo gdje na osi apscise u faznoj ravnini, kažemo za nju da je **negativno semidefinitna.**

U faznoj ravnini na sl. 13—37 elipse predočavaju energetske razine E_1, E_2, ... kojih se energija smanjuje prema ishodištu. Kako se energija sustava s vremenom smanjuje, fazna trajektorija svršava u položaju ravnoteže bez obzira odakle je krenula.



Sl. 13—37. Fazna trajektorija globalno asimptotski stabilnog sustava

Takav je sustav **globalno asimptotski stabilan.** Dakle, poznavajući predznak analitičkog izraza za $\dot{E}$ u jednadžbi (13-144), mogli smo zaključiti o stabilnosti sustava ne poznavajući fazne trajektorije.

Direktna je metoda Ljapunova **poopćenje energetskog pristupa u faznoj ravnini na nelinearne sustave višega reda pomoću varijabli prostora stanja.** Spomenimo još da direktnom metodom Ljapunova određujemo stabilnost autonomnog sustava uz početne uvjete, dok smo kod klasičnih metoda određivali stabilnost neautonomnog sustava uz standardne pobude.

U svrhu ispitivanja stabilnosti sustava višega reda Ljapunov je uveo poopćenu energetsku funkciju $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ koja je analogna, ali ne i jednaka, pohranjenoj energiji u sustavu. I to je skalarna funkcija koja ovisi o varijablama stanja, a prikladan joj je naziv **funkcija Ljapunova.** Prije nego što nastavimo s dokazivanjem stabilnosti pomoću funkcije Ljapunova, istaknimo neke značajke te funkcije.

Funkcija V je **pozitivno definitna** (ili negativno definitna) u nekom području u okolišu ishodišta ako je u svim točkama tog područja kontinuirana i ima pozitivan (ili negativan) predznak, a samo joj je u ishodištu vrijednost nula. Takva je npr. funkcija $V=x_2^1+x_2^2$ za dvodimenzionalni prostor.

Ako se područje ispitivanja proteže za sve vrijednosti od $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kažemo da je funkcija **globalno pozitivno definitna.**

Funkcija V je **pozitivno semidefinitna** (ili negativno semidefinitna) u nekom području u okolišu ishodišta ako je u svim točkama tog područja kontinuirana i veća od nule ili jednaka nuli (ili manja od nule ili jednaka nuli), a samo joj je u ishodištu vrijednost nula. Takav je npr. funkcija $V=x_1^2$ za dvodimenzionalni prostor.

Funkcija V je **nedefinitna** ako u okolišu ishodišta ima i pozitivne i negativne vrijednosti. Takva je npr. funkcija $V=x_1x_2$.

Uzmimo sada sustav koji može sadržavati nelinearnosti, a opisan je u normalnom obliku.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n.
\end{aligned} \qquad (13\text{-}146)$$

Svaki poremećaj izaziva promjenu derivacija s lijeve strane, a to znači da odziv sustava ovisi o varijablama stanja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i eventualno o vremenu t. Stabilnost takvog sustava određujemo s **tri teorema stabilnosti Ljapunova:**

Prvi teorem: ako postoji funkcija V koja je pozitivno definitna, a $\dot{V}$ je negativno semidefinitna, sustav je stabilan. Trajektorije se gibaju po zatvorenoj površini u prostoru stanja, što odgovara zatvorenoj krivulji — graničnom krugu u faznoj ravnini.

Drugi teorem: ako postoji funkcija V koja je pozitivno definitna, a $\dot{V}$ je negativno definitna, sustav je asimptotski stabilan. Trajektorije u prostoru stanja teže ishodištu.

Treći teorem: ako postojeća funkcija V i njezina derivacija $\dot{V}$ imaju isti predznak, sustav je nestabilan. Trajektorije u prostoru stanja udaljuju se od ishodišta.

U prvi teorem uključeni su i nelinearni oscilatori jer je u graničnom krugu $\dot{V}=0$, pa se energetska razina ne mijenja. Prema tome, nelinearni oscilatori stabilni su u smislu Ljapunova jer je porast faznih varijabli s vremenom ograničen. Linearni regulacijski krugovi moraju uvijek biti asimptotski stabilni jer se sustav mora nakon početnog poremećaja vratiti u ravnotežno stanje.

Ako je $\dot{V}$ nedefinitna, ne možemo ništa zaključiti o stabilnosti sustava. U tom slučaju moramo pokušati s novom funkcijom Ljapunova. Kad jednom pronađemo V koja pokazuje je li sustav stabilan ili nestabilan, onda smo sigurni u rezultat bez obzira na mnoštvo mogućih funkcija Ljapunova.

Poteškoća s direktnom metodom Ljapunova jest upravo pomanjkanje metodskog pronalaženja funkcije Ljapunova. U linearnih sustava nameće se doduše jednostavna pozitivno definitna funkcija:

$$V=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \tag{13-147}$$

koju možemo poopćiti u kvadratni oblik:

$$V=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j. \tag{13-148}$$

Ovdje mora vrijediti $a_{ij}=a_{ji}$. Nažalost, u nelinearnih sustava funkciju Ljapunova možemo eventualno naći samo pojedinačnim pokušajima.

14. Analogna računala

Dovrši svoju posljednju pjesmu, da se rastanemo.
Zaboravi ovu noć, kada zora svane.
Zagrlio bi rukama, ali koga? Snovi se ne mogu uhvatiti.
Moje ruke pustoš pritiskuju na srce, i grudi mi se toče . . .

R. Tagore, iz »Vrtlara«

Istraživanja sustava što ih opisuju linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima nižega reda možemo bez većih poteškoća obaviti analitički, pomoću vremenskog ili frekvencijskog odziva. Međutim u sustava što ih opisuju linearne diferencijalne jednadžbe višega reda dolazi do dugotrajnih i složenih proračuna. To je još uočljivije pri proučavanju sustava što ih opisuju linearne diferencijalne jednadžbe s promjenljivim koeficijentima ili nelinearne diferencijalne jednadžbe. U svim tim slučajevima mogu se primijeniti analogne metode tako da se ispitivani sustav nadomjesti modelom. Na modelu obavljamo mjerenja koja zatim prevodimo u uvjete ispitivanog sustava. Obično se na modelu lako vrše promjene parametara, a odgovarajuće promjene fizikalnih varijabli mogu se brzo ocijeniti; takvi se modeli postavljaju na analognim računalima i odlično služe u sintezi i optimalizaciji regulacijskih krugova. Dodatna im je prednost što u svakom trenutku zorno prikazuju fizikalna zbivanja i time pridonose povezivanju fizikalne stvarnosti i matematičke simbolike.

Analogna računala dijelimo na dvije osnovne skupine: direktna i indirektna. U **direktnih analognih računala** elementi modela slični su ispitivanom sustavu; električni otpornik sličan je pneumatskom prigušivaču, a električni kondenzator mehaničkoj opruzi. Elementi modela na određen način simuliraju elemente ispitivanog sustava, pa direktna analogna računala nazivamo i **simulatorima.** U njih nije nužno potrebno da poznajemo matematički izraz za ispitivani sustav, jer na fizikalnom modelu možemo ostvariti funkcionalne ovisnosti koje omogućuju dobivanje rješenja i njegovu ocjenu.

U **indirektnih analognih računala** ne polazimo od direktne fizikalne analogije između ispitivanog sustava i modela, već preko matematičkog izraza kojim opisujemo ispitivani sustav. Na indirektno analogno računalo postavljamo analogni **matematički model.** Matematički model je zapravo međusobno povezivanje sklopova pomoću kojih izvodimo računske operacije. Na taj način rješenje dobijemo indirektno. Budući da su indirektna analogna računala veoma pogodna za rješavanje diferencijalnih jednadžbi, nazivamo ih i **diferencijalnim analizatorima.**

Analogna računala možemo nadalje podijeliti prema namjeni. Ona mogu imati opću namjenu, pa pomoću njih rješavamo sve moguće probleme koji se mogu matematički opisati. U tom je slučaju analogno računalo u pravilu električno. Naime, električne sustave lako gradimo sa standardnim elementima, imamo točno definirane mjerne jedinice i širok izbor instrumenata. Osim toga, električnim se analogijama mogu opisati sve druge fizikalne pojave. Tako nije npr. s mehaničkim sustavima, gdje je uvijek prisutno djelovanje gravitacije na masu, ili s toplinskim sustavima, gdje nema pojave toplinske tromosti.

Analognim računalima specijalne namjene nazivaju se svi sklopovi i uređaji koji vrše računske operacije kao dijelovi stroja ili procesa. Među njih ubrajamo i sve regulatore s kojima smo se susretali; tako jedan I-regulator vrši operaciju integracije. Ta računala često susrećemo u mehaničkoj ili pneumatskoj izvedbi.

U daljnjem tekstu najprije ćemo govoriti o fizikalnim analogijama na kojima se temelji primjena analognih računala. Zatim ćemo dati kratak opis pneumatskog simulatora koji se uspješno primjenjuje u procesnoj regulaciji a opširnije ćemo opisati elektronički diferencijalni analizator pomoću kojeg šire prilazimo problemima regulacije. Na računalu se s lakoćom mijenjaju sklopovi i namještaju parametri regulatora, pa je samim tim analogno računalo najvažnije pomagalo pri sintezi i optimalizaciji regulacijskih krugova.

14.1. Fizikalne analogije

U odjeljku 3.3. u analizi osnovnih fizikalnih sustava spomenuli smo mogućnost njihove usporedbe s obzirom da su diferencijalne jednadžbe imale sličan oblik. Uspoređujući npr. mehanički MDS sustav s električnim LRC sustavom, došli smo do istih diferencijalnih jednadžbi drugoga reda. Ta sličnost matematičkih izraza temelji se na sličnosti ponašanja pojedinih elemenata oba sustava. Iz jednadžbi:

$$\begin{gathered} M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=f_M \leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=u_L, \\ Dv=f_D \leftrightarrow Ri=u_R, \\ S\int v\mathrm{d}t=f_S \leftrightarrow \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t=u_C \end{gathered} \tag{14-1}$$

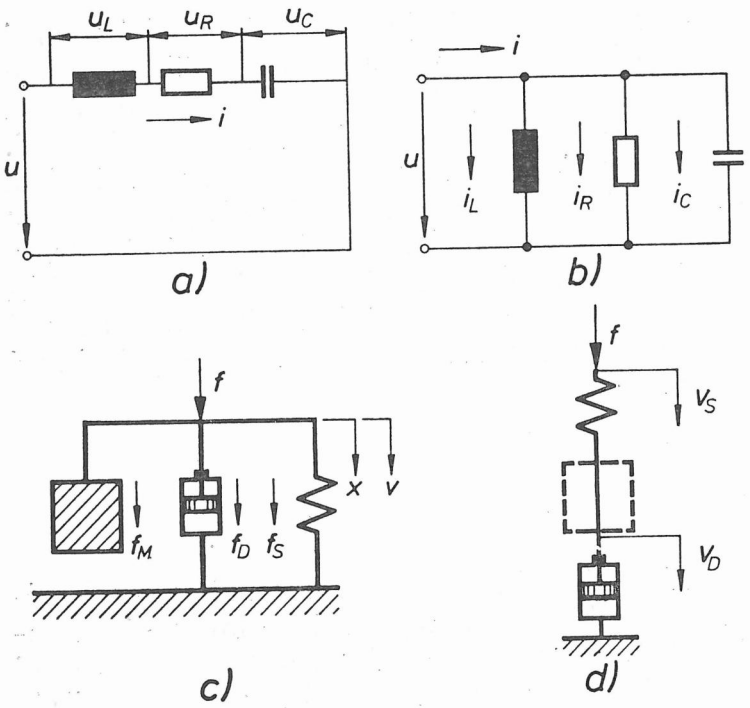
možemo zaključivati o analogiji između sile f i napona u, kao i između brzine v i struje i. I pojedini elementi imaju slične značajke: masa je spremnik kinetičke energije — induktivnost je spremnik elektromagnetske energije; prigušivač troši, tj. pretvara u toplinu mehaničku energiju — otpornik troši, tj. pretvara u toplinu električnu energiju; opruga je spremnik potencijalne energije — kondenzator je spremnik elektrostatske energije. Ako mehanički sustav promatramo kao ispitivani sustav, onda pokusima na električnom sustavu kao modelu možemo zaključivati i o svojstvima ispitivanog sustava.

Ovako postavljenu analogiju između mehaničkog i električnog sustava možemo i proširiti, pri čemu ćemo se koristiti sl. 14—1. Na sl. 14—1a prikazan je **serijski električni sustav:** napon u pokriva padove napona u_L, u_R i u_C i predstavlja tzv. **poprečnu varijablu,** a struja i zajednička je za sve elemente i predstavlja tzv. **uzdužnu varijablu.** Jednadžba je sustava:

$$u=u_L+u_R+u_C=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t. \tag{14-2}$$

Paralelni električni sustav na sl. 14—1b ima kao poprečnu varijablu struju i koja se račva na struje i_L, i_R i i_C, a uzdužna je varijabla napon u koji djeluje na sve elemente. Možemo pisati:

$$i=i_L+i_R+i_C=\frac{1}{L}\int u\mathrm{d}t+\frac{1}{R}u+C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}. \tag{14-3}$$



Sl. 14—1. Analogije električnog mehaničkog sustava: serijski električni sustav (a), paralelni električni sustav (b), serijski mehanički sustav (c) i paralelni mehanički sustav (d)

Serijski mehanički sustav prema sl. 14—1c ima silu f kao poprečnu varijablu, koja svladava sve sile što joj se protive: f_M, f_D i f_S. Pomak x, odnosno brzina v, kao uzdužna varijabla zajednička je svim elementima, a uzima se u odnosu prema osloncu (zemlji). Jednadžba:

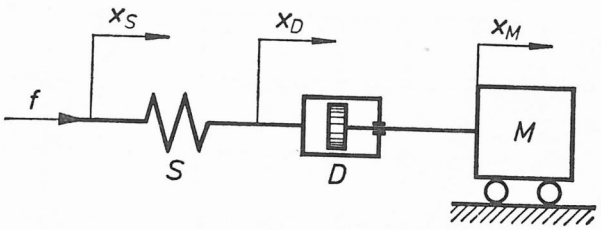
$$f=f_M+f_D+f_S=M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+Dv+S\int v\,\mathrm{d}t \tag{14-4}$$

opisuje taj krug. Uspoređivanjem serijskih električnih i mehaničkih sustava na sl. 14—1a i 14—1c, odnosno jednadžbi (14-2) i (14-4), dolazimo do analogije **sila-napon;** to je tzv. **naponska analogija.** Možemo međutim usporediti i paralelni električni sustav na sl. 14—1b sa serijskim mehaničkim sustavom na sl. 14—1c; naravno, analogiju postižemo pomoću jednadžbi (14-3) i (14-4). U tom je slučaju analogija **sila-struja;** to je tzv. **strujna analogija.**

Kao četvrtu kombinaciju možemo uzeti **paralelni mehanički sustav** na sl. 14—1d. Poprečna je varijabla pomak x (odnosno brzina v) hvatišta sile, što je zbroj promjena pomaka x_D i x_S. Masa je ovdje crtkano prikazana, jer ne zadovoljava uvjet da je sila f kao uzdužna varijabla jednaka za sve elemente. Naime, sila f ne može biti jednaka na oba kraja mase, već je potrebna neka — makar i mala — dodatna sila Δf da se masa ubrza. Samo ako je masa posljednji element bez oslonca (sl. 14—2), vrijedi analogija mase s induktivnošću. Jednadžba »okrnjenog« sustava glasi:

$$v=v_D+v_S=\frac{f}{D}+\frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}. \tag{14-5}$$

Budući da su analogije uvedene na osnovi sličnih matematičkih izraza za različite sustave, oba su pristupa ravnopravna. U tome se očituje dvojnost metode analogija [lit. 18, 47, 56]. S obzirom na povezivanje elemenata strujna je analogija prema sl. 14—1b i 14—1c jasnija, ali je s obzirom na fizikalno ponašanje elemenata naponska analogija prema sl. 14—1a i 14—1c u prednosti. Zato općenito, a i ovdje, upotrebljavamo naponsku analogiju.



Sl. 14—2. Paralelni mehanički sustav s masom kao posljednjim elementom

Analogije možemo proširiti i na ostale fizikalne sustave. U tablici 14—1 prikazane su analogne veličine za nekoliko osnovnih fizikalnih sustava.

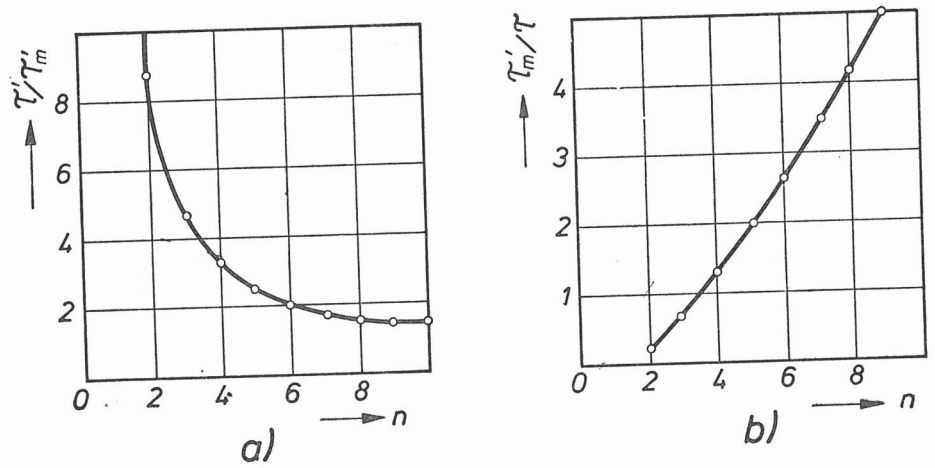
Tablica 14—1. Usporedba raznih fizikalnih sustava

Veličina	*Električna*	*Mehanička*	*Rotacijska mehanička*	*Pneumatska*	*Toplinska*
Količina	Naboj Q [As]	Pomak X [m]	Kut zakreta Φ [rad]	Obujam V [m^3]	Količina topline Q [J]
Potencijal	Napon U [V]	Sila F [N]	Zakretni moment T [N m]	Tlak P [Pa]	Temperatura Θ [K]
Strujanje	Jakost struje I [A]	Brzina V [m s^{-1}]	Kutna brzina Ω [rad s^{-1}]	Protok Q [m^3 s^{-1}]	Toplinski tok tok I [J s^{-1}]
Kapacitivnost	Kapacitivnost C [F]	Recipročna krutost $\frac{1}{S}$ [kg^{-1} s^2]	Recipročna torzijska krutost $\frac{1}{S_\varphi}$ [kg^{-1}m^{-2}s^2]	Pneumatska kapacitivnost C_p[kg^{-1}m^{4}s^2]	Toplinska kapacitivnost C_ϑ [J K^{-1}]
Otpornost	Otpor R [Ω]	Konstanta trenja D [kg s^{-1}]	Torzijska konstanta trenja D_φ [kg m^2 s^{-1}]	Pneumatski otpor R_p[kg m^{-4}s^{-1}]	Toplinski otpor R_ϑ [J^{-1} K s]
Tromost	Induktivnost L [H]	Masa M [kg]	Moment tromosti J [kg m^2]	Pneumatska induktivnost L_p [kg m^{-4}]	—

U vezi s upotrebom analognih metoda treba upozoriti na nekritičku primjenu tih analogija. Naime, ako su jednadžbe iz kojih se izvode analogije pojednostavnjene, može se dogoditi da analogija dovede do pogrešnih rezultata. Zato treba ponovno naglasiti dobro poznavanje fizikalnih zakonitosti.

14.2. Simulator

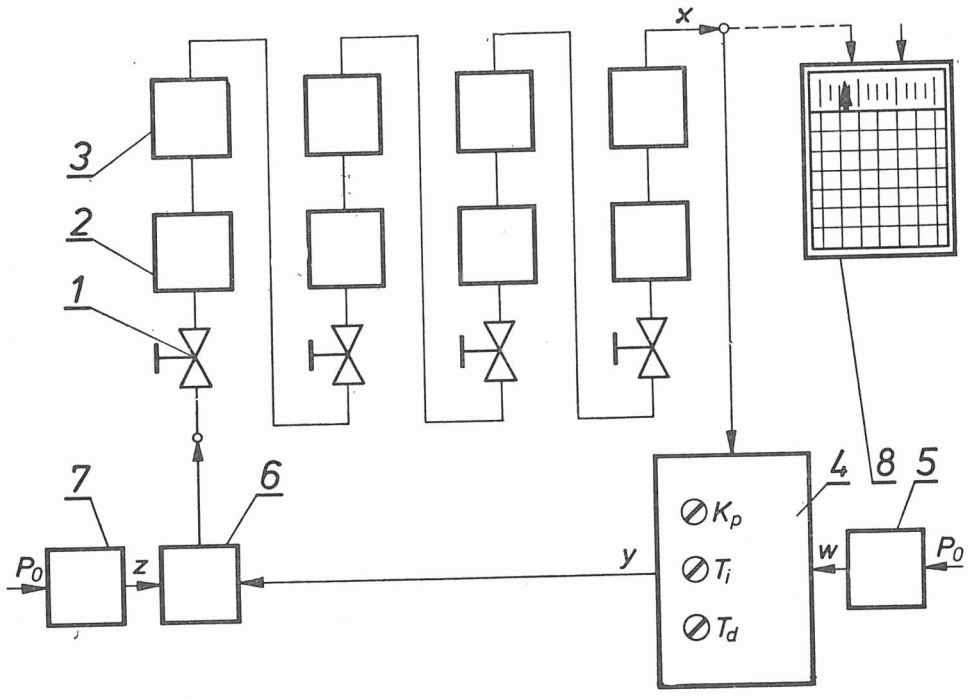
Direktna analogna računala zasnivaju se na upravo opisanim analogijama. Tako npr. silnice i gradijenti električnog polja u elektrolitskoj kadi mogu predstavljati silnice i gradijente potencijalnog polja, jer se takva polja općenito opisuju Laplaceovom, odnosno Poissonovom parcijalnom diferencijalnom jednadžbom. U regulacijskoj tehnici u pravilu se susreću obične diferencijalne jednadžbe. U njihovu rješavanju nalaze ograničenu, ali korisnu primjenu **modelni regulacijski krugovi.**



Sl. 14—3. Dijagrami za izračunavanje nadomjesnog modela sustava višeg reda

Modelnim regulacijskim krugom ispitujemo ili projektiramo regulacijski krug. S regulacijskim uređajem pri tome nema problema, jer pretvarače, regulatore, itd., možemo ispitati u laboratoriju. Poteškoća je s regulacijskim stazama, jer su kotlovi, autoklavi, destilacijske kolone, itd., teško pristupačni za ispitivanje, a i ometa se proizvodni proces. U tu svrhu korisno je da regulacijsku stazu simuliramo u modelnom regulacijskom krugu, a da na to priključimo regulacijski uređaj u izvornoj izvedbi [lit. 38, 58].

Simulaciju većine procesnih staza možemo lako izvesti pomoću serijski spojenih članova s kašnjenjem prvoga reda (v. odjeljak 6.3). Ako je u procesne staze višega reda poznata nadomjesna vremenska konstanta τ' kao i nadomjesno mrtvo vrijeme τ'_m takve staze, onda pomoću dijagrama 14—3a i iz omjera τ'/τ'_m nađemo broj potrebnih P_1-članova, a pomoću dijagrama 14—3b i iz omjera τ'_m/τ vremensku konstantu svakog pojedinog P_1-člana. Slog serijski spojenih n P_1-članova s vremenskom konstantom τ ponaša se isto kao i staza višega reda s nadomjesnom vremenskom konstantom τ' nadomjesnim mrtvim vremenom τ'_m.



Sl. 14—4. Pneumatski modelni regulacijski krug

Na sl. 14—4 shematski je prikazan modelni regulacijski krug u pneumatskoj izvedbi. Svaki se pojedini P_1-član sastoji od prigušivača s regulacijom 1 i obujma 2; ako je regulacijski krug u električnoj izvedbi, to su potenciometar i kondenzator. Dugmetom mijenjamo prigušenje, odnosno otpor, i tako namještamo vremensku konstantu τ svakog P_1-člana. Svaki slog ima ugrađeno i razdvojno pojačalo 3 da se izbjegne protudjelovanje između susjednih članova. Obično imamo četiri ili šest P_1-članova, pa možemo s dovoljno točnosti simulirati većinu procesnih staza.

Modelni regulacijski krug ima zatim PID-regulator 4 s mogućnošću namještanja pojačanja K_P, integralnog vremena T_i i derivacijskog vremena T_d. Signal nazivne veličine w možemo dovesti izvana preko zapornog ventila 5. Da bismo mogli snimati vremenski odziv, mora postojati i mogućnost da narinemo i poremećajnu veličinu z u obliku odskočne funkcije. To simuliramo sklopom 6 koji se sastoji od finog regulatora tlaka gdje se namješta amplituda odskoka i magnetskog ventila s preklopnikom. Poremećajnu veličinu uvodimo u regulacijski krug preko sklopa 7 koji simulira točku zbrajanja. Sklop 7 sadrži tzv. relej za miješanje, fini regulator tlaka i magnetski ventil s preklopnikom. Konačno, u modelnom regulacijskom krugu ugrađeno je i više tlakomjera kao pokaznih instrumenata i višekanalni pneumatski pisač 8 koji ulazne i izlazne signale zapisuje na vrpci.

Modelni regulacijski krug može biti u pneumatskoj ili u električnoj izvedbi ili kombinirano. U pneumatskoj izvedbi može se u model uključiti i pravi regulacijski ventil, kojeg utjecaj na regulacijski krug dolazi također do izražaja. Ako je izvedba kombinirana, onda su potrebni i električno-pneumatski, odnosno pneumatsko-električni pretvarači.

Cijela izvedba počiva na slogovnom načelu: na postolju ili u kutiji pričvršćeni su svi sklopovi, a svaki od njih ima ulazne i izlazne utičnice. Sklopovi se povezuju plastičnim cjevčicama, odnosno električnim vodovima, što omogućuje različite kombinacije regulacijskog kruga. Modelnim regulacijskim krugom mogu se simulirati i složeni regulacijski krugovi, npr. kaskadna regulacija.

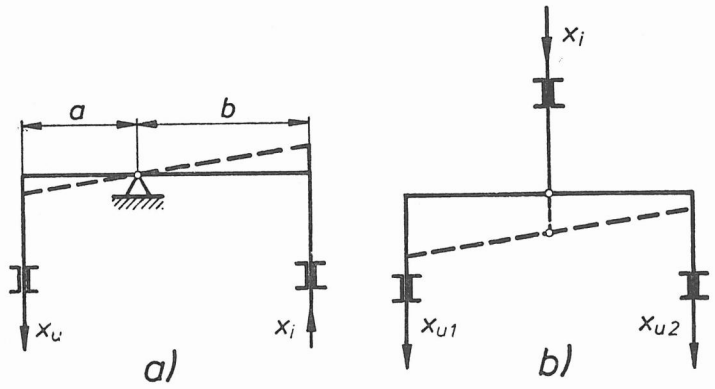
Da bi se model regulacijske staze mogao kombinirati sa stvarnim regulacijskim uređajem, moraju se signalna područja podudarati. U tu svrhu upotrebljavaju se normirana signalna područja, i to kod električnih signala za struju od 0 do 20 mA, a kod pneumatskih signala za tlak od 0,02 do 0,1 MPa odnosno od 0 do 10^3 Pa.

14.3. Diferencijalni analizator

Način kako radi diferencijalni analizator najbolje je da objasnimo na jednom primjeru. Uzimamo opet jednostavan i poznati primjer mehaničkog sustava drugoga reda sa sl. 14—1a. Jednadžbu tog sustava moramo najprije napisati u obliku:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F_0}{M} - \frac{D}{M}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{S}{M}x, \tag{14-6}$$

gdje je na lijevoj strani ostala samo **najviša derivacija.** Za strojno rješenje te diferencijalne jednadžbe potrebni su računski sklopovi koji izvode slijedeće operacije: derivaciju ili integraciju, zbrajanje, množenje konstantom i generaciju funkcija nezavisne varijable. Ti sklopovi mogu biti mehanički, pneumatski ili elektro-



Sl. 14—5. Mehanički multiplikator konstantom (a) i mehanički sumator (b)

nički. Radi lakšeg sagledavanja uzimamo prvo mehaničke računske sklopove, što je opravdano s obzirom na to da je mehaničko analogno računalo prethodilo elektroničkom[1].

Mehanički multiplikator konstantom je prema sl. 14—5a najobičnija poluga, i operacija mu je:

$$x_i = -\frac{b}{a} x_u = k\, x_u. \tag{14-7}$$

Mijenjanjem položaja oslonca mijenja se i vrijednost konstante k.

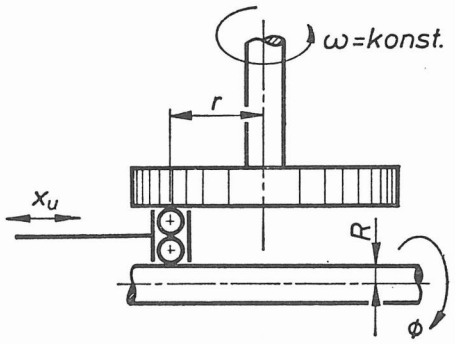
Slično je pomoću poluga izveden i mehanički sumator. Prema sl. 14—5b možemo izvesti:

$$x_i = 0{,}5\,(x_{u1} + x_{u2}). \tag{14-8}$$

Mehanički je integrator sklop koji se još i danas upotrebljava u posebnim namjenama. Shematski je prikazan na sl. 14—6. Okrugla ploča s gornje strane vrti se konstantnom kutnom brzinom $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$. To se gibanje na udaljenosti r od osi vrtnje prenosi preko dvije kuglice (nema klizanja!) na donju osovinu polumjera R. Promjenom pomaka x_u poluge može se mijenjati mjesto dodira kuglica s okruglom pločom i osovinom.

Kako su zakreti okrugle ploče i osovine jednaki, možemo pisati:

$$r\,\mathrm{d}\varphi = R\,\mathrm{d}\Phi, \tag{14-9}$$



Sl. 14—6. Mehanički integrator disk — kuglica

[1] Bush, V., The Differential Analyser. Jour. of Franklin Inst. 212, 1931, str. 447—488.

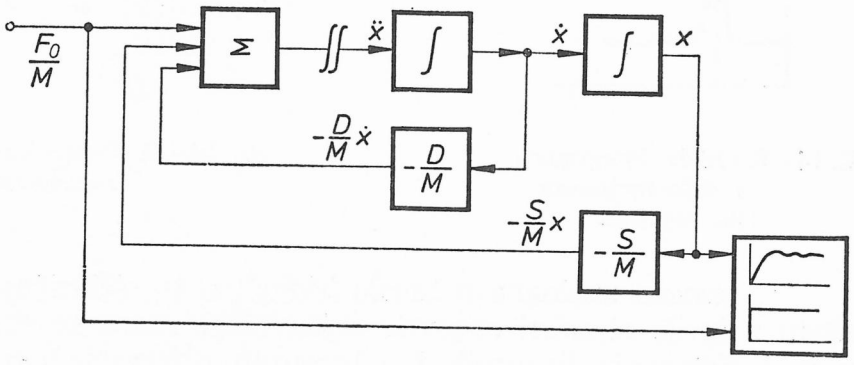
ili u preinačenu obliku:

$$\Phi=\frac{1}{R}\int r\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\omega}{R}\int r\,\mathrm{d}t. \tag{14-10}$$

Varijablu Φ možemo pužnim prijenosom pretvoriti u translatorno gibanje, pa ćemo prema gornjoj jednadžbi dobiti izlaznu veličinu x_i kao integral ulazne veličine x_u.

S upravo prikazanim računskim sklopovima možemo jednadžbu (14-6) mehanizirati na način prikazan na sl. 14—7. Sumator, dva integratora i dva multiplikatora konstantom povezani su na shemi međusobno linijama koje prenose mehaničke promjene položaja: u konstrukcijskoj izvedbi linije predstavljaju kruto polužje.

Zamislimo da pomak polužja ispred lijevog integratora odgovara po vrijednosti upravo drugoj derivaciji od x. Udesno od lijevog integratora dobit ćemo položaj koji odgovara vrijednosti prve derivacije od x, a na izlazu desnog integratora pojavljuje se pomak koji odgovara vrijednosti od x. Množenjem $\dot{x}$ sa $-D/M$ kao i x sa $-S/M$ dobit ćemo položaje koji odgovaraju dvama članovima na desnoj strani jednadžbe (14-5). Uz njih se na ulazu sumatora pojavljuje i položaj koji odgovara pobudi F_0/M. Izlaz sumatora daje dakle pomak koji odgovara zbroju članova s desne strane jednadžbe (14-5), a to je upravo jednako $\ddot{x}$. Zato se i prekinuta veza može spojiti.



Sl. 14—7. Shema mehanizacije diferencijalne jednadžbe

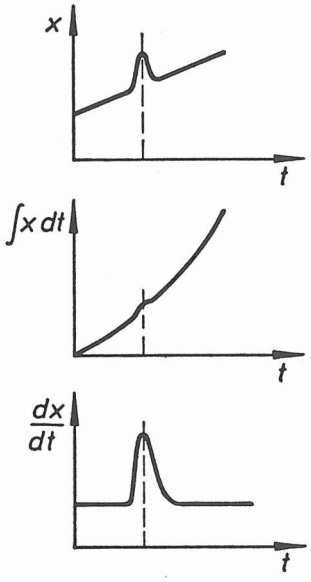
Ako želimo dobiti rješenje diferencijalne jednadžbe (14-5), onda u trenutku $t=0$ narinemo odskočnu pobudu F_0/M koja izazove lančanu reakciju polužja, pa se varijable $\ddot{x}$, $\dot{x}$ i x mijenjaju. Vremenski tok odzivne funkcije x i pobudne funkcije F_0/M možemo zabilježiti na dvokanalnom pisaču, pa tako dobivamo **specifično rješenje u grafičkom obliku.** Iz tog vidimo da analognim računalom ne možemo postići opće rješenje u analitičkom obliku.

Ako nema vanjske pobude, sustav možemo pokrenuti u trenutku $t=0$ samo ako su početni uvjeti različiti od nule. Na stroju to znači da na izlazu iz integratora moramo izvršiti početnu promjenu koja odgovara vrijednosti od x i $\dot{x}$ u trenutku $t=0$.

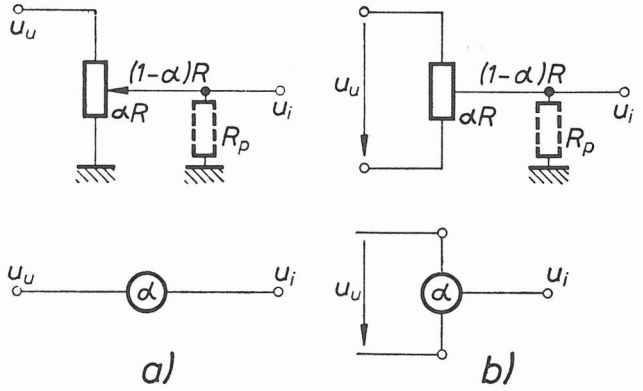
Ovdje možemo postaviti pitanje koliko ima smisla mehaničke sustave simulirati pomoću mehaničkog računala. Međutim, bez obzira na to što smo tim primjerom prikazali samo načelo, činjenica je da smo matematičkim modelom izvedenim

na računalu prikazali razne mehaničke veličine (pomak, brzinu, ubrzanje) isključivo **pomakom** i njegovim derivacijama.

Iako je u načelu svejedno da li se u analognom računalu upotrebljava diferencijator ili integrator, u praksi se susrećemo isključivo s integratorima, i to zato što uvijek prisutne smetnje (mehaničke trešnje, električni šumovi) integrator »izgladuje«, a diferencijator ih »oštri«. To možemo vidjeti i na sl. 14—8. Ako neka varijabla ima oblik s kratkotrajnom smetnjom (sl. 14—8a), prolaskom kroz integrator ta će smetnja gotovo nestati (sl. 14—8b), dok će prolaskom kroz diferencijator biti pojačana (sl. 14—8c).



Sl. 14—8. Odziv integratora i diferencijatora na smetnju



Sl. 14—9. Potenciometar s uzemljenjem (a) i bez uzemljenja (b)

Suvremena analogna računala isključivo su električna. Zato ćemo u daljnjem tekstu najprije obraditi osnovne elektroničke računske sklopove, zatim programiranje i rješavanje linearnih i nelinearnih diferencijalnih jednadžbi.

14.3.1. Sklopovi za linearne operacije

Pomoću potenciometra i računskog pojačala možemo izgraditi razne računske sklopove kao što su invertor, multiplikator konstantom, sumator i integrator. Ti su sklopovi, uz generator funkcija nezavisne varijable t, potrebni za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima.

Potenciometar. Prema električnoj shemi na sl. 14—9a možemo neopterećeni potenciometar (kad je $R_p=0$) upotrijebiti kao multiplikator konstantom:

$$u_i = \alpha\, u_u \tag{14-11}$$

za vrijednosti omjera potenciometra $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Na sl. 14—9a dolje vidimo i simbol kojim u blok-dijagramima računala označujemo potenciometar; uzemljeni se izvodi na ulazu i na izlazu ne označuju.

Ako slijedeći priključeni stupanj troši određenu energiju, može se on prikazati otporom R_p koji je paralelno priključen izrazu. Primjenom osnovnih električnih zakona za taj slučaj dobivamo izlazni napon:

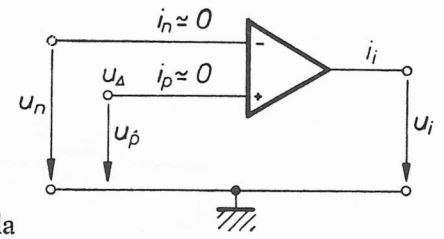
$$u_i = \frac{\alpha}{1+(1-\alpha)\frac{\alpha R}{R_p}} u_u \qquad (14\text{-}12)$$

koji se razlikuje od jednostavnog slučaja neopterećenog potenciometra. Promjena položaja klizala ne daje više potpuno linearan odnos između u_i i α. Radi točnog namještanja vrijednosti svako je računalo opremljeno neopterećenim preciznim potenciometrom, pa mjerenjem i uspoređivanjem napona u_i možemo namjestiti točnu vrijednost α.

Na sl. 14—9b prikazan je i potenciometar bez uzemljenja i njegov simbol. Taj potenciometar upotrebljava se u nekim računskim sklopovima.

Računsko pojačalo je središnji sklop svakog analognog računala. Na sl. 14—10 prikazan mu je simbol. Između ulaznih i izlaznih izvoda nalazi se nekoliko tranzistoriziranih stupnjeva pojačanja istosmjernog napona, pa taj sklop ima **visoko naponsko pojačanje** K_p reda veličine 10^5 . Ono pojačava razliku napona $u_\Delta = u_p - u_n$. Ako je $u_n = 0$, imamo $u_i = K_p u_p$ pa je izlazni napon u fazi s ulaznim naponom. U računskom pojačalu se u pravilu »+« izvod na ulazu veže za uzemljenje, dakle je $u_p = 0$; ostaje $u_i = -\ _p\ u_n$, pa je **izlazni napon invertiran u fazi.** Nadalje je tipično za računsko pojačalo da ima visok ulazni otpor pa na ulazu teku zanemarive struje.

Koristeći se s dva osnovna svojstva — velikim naponskim pojačanjem i promjenom predznaka signala — računskim pojačalom možemo u kombinaciji s drugim elementima ostvariti razne računske operacije; odatle mu i ime operacijsko pojačalo. To ćemo vidjeti na primjerima.

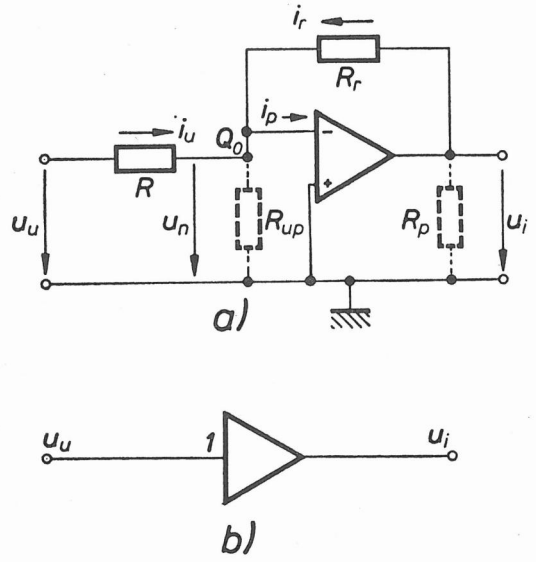


Sl. 14—10. Električna shema računskog pojačala

Invertor. Računsko pojačalo spojimo prema sl. 14—11a s otporom R na ulazu i s otporom R_r u krugu povratne veze. Ako primijenimo prvi Kirchhoffov zakon u točki Q_0, dobit ćemo:

$$i_r + i_u = \frac{u_i - u_n}{R_r} + \frac{u_u - u_n}{R} \simeq 0. \qquad (14\text{-}13)$$

Kako je izlazni napon reda veličine volta, a pojačanje K_p je vrlo veliko, napon u_n na ulazu u pojačalo jest reda veličine milivolta, što znači da je ulaz praktički na uzemljenju (virtualno uzemljenje).



Sl. 14–11. Električna shema invertora

Uz ta zanemarenja možemo jednadžbu (14-13) pisati u preuređenom obliku:

$$\frac{u_i}{R_r} \simeq -\frac{u_u}{R}. \tag{14-14}$$

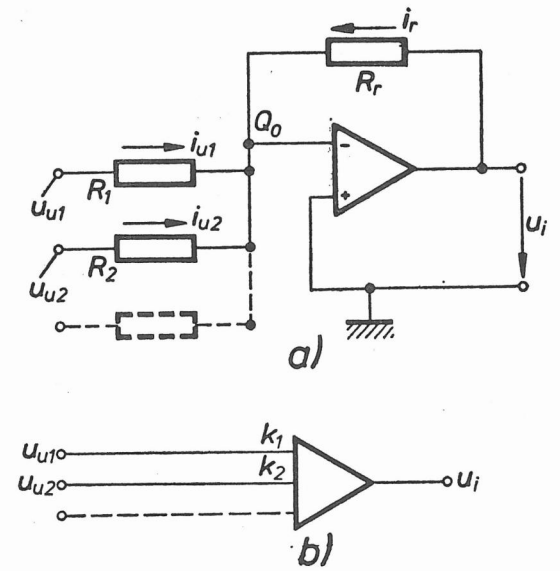
Ako je $R=R_r$, dobivamo invertor:

$$u_i \simeq -u_u. \tag{14-15}$$

Pojednostavnjeni simbol invertora prikazan je na sl. 14–11b.

Sumator. Električna shema na sl. 14–12a nalik je spoju invertora na sl. 14–11, samo što je ovdje spojeno više ulaza s naponima u_{u1}, u_{u2}, . . . između odgovarajućeg izvoda i uzemljenja. U točki Q_0 vrijedi:

$$i_r \simeq -(i_{u1}+i_{u2}+\ldots). \tag{14-16}$$



Sl. 14–12. Električna shema sumatora

Budući da je $i_{u1}=u_{u1}/R_1$, $i_{u2}=u_{u2}/R_2$, . . . , itd., možemo jednadžbu (14-16) pisati:

$$\frac{u_i}{R_r} \simeq -\left[\frac{u_{u1}}{R_1}+\frac{u_{u2}}{R_2}+\ldots\right], \tag{14-17}$$

i dalje:

$$u_1 \simeq -(k_1 u_{u1}+k_2 u_{u2}+\ldots), \tag{14-18}$$

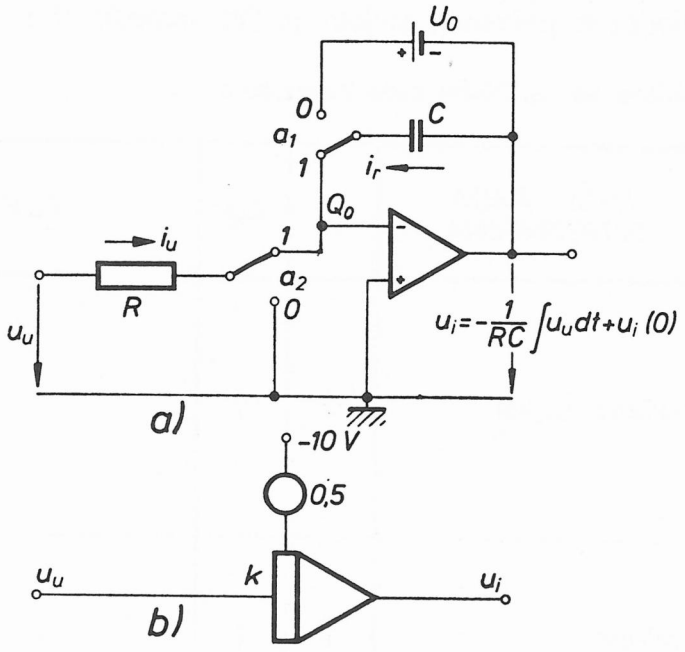
gdje su k_i omjeri otpora R_r/R_i koji odgovaraju prijenosnom omjeru. To možemo skratiti:

$$u_i=-\sum_{i=1}^{n} k_i u_{ui}. \tag{14-19}$$

Na sl. 14—12b vidimo i simbol za sumator. Ako stavimo $R_p=R_1=R_2=\ldots$, jednadžba (14-17) se pojednostavnjuje:

$$u_i=-(u_{u1}+u_{u2}+\ldots)=-\sum_{i=1}^{n} u_{ui}, \tag{14-20}$$

tj. izlazni napon jednak je invertiranom zbroju svih ulaznih napona.



Sl. 14—13. Električna shema integratora

Integrator. Operaciju integracije izvodimo pomoću električne sheme na sl. 14—13a, gdje se u krugu povratne veze nalazi kondenzator C umjesto otpornika R_r. Neka su kontakti releja a_1 i a_2 u položajima kako su ucrtani na slici. Za odnos struja i_r i i_u u točki Q_0 stavimo:

$$C\frac{du_i}{dt} \simeq -\frac{u_u}{R}. \tag{14-21}$$

Iz te jednadžbe preuređenjem dobivamo:

$$u_i = -\frac{1}{RC}\int u_u \, dt, \tag{14-22}$$

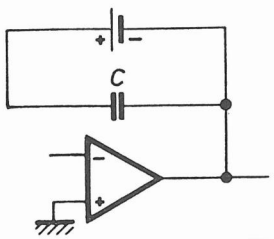
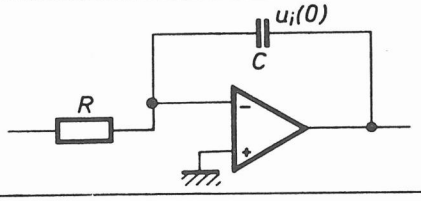
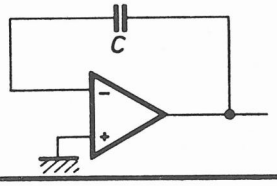
gdje je u trenutku $t=0$, $u_i=0$, tj. kondenzator C nema naboja. Faktor RC je **vremenska konstanta integracije.** Uz povoljno odabrane vrijednosti R i C, npr. $R=1M\Omega$ i $C=1\ \mu F$, postižemo da je $RC=1$, pa jednadžbu (14-22) možemo pojednostavniti:

$$u_i = -\int u_u dt. \tag{14-23}$$

Izlazni je napon dakle integral ulaznog napona. Ovdje moramo naglasiti da potpuno točnu integraciju postižemo samo upotrebom računskog pojačala, a da sa samo pasivnim članovima možemo dobiti tek približan rezultat.

Kod svakog integratora treba da postoji mogućnost da se namjeste **početni uvjeti.** Zato na izlazu integratora na sl. 14—13a u trenutku $t=0$ treba već da postoji napon $u_i(0)$ koji odgovara početnim uvjetima. To postižemo tako da prije početka rada kontakte releja a_1 i a_2 namjestimo na položaj 0. Integrator je dakle namješten na »početne uvjete« (RESET). Kondenzator C nabije se na punu vrijednost napona napajanja U_0, i to s polaritetom prikazanim na slici. Ugradnjom promjenljivog potenciometra u krug izvora napajanja možemo po želji namjestiti vrijednost početnog uvjeta $u_i(0)$ između 0 i $-U_0$[1].

Tablica 14—2. Način rada integratora

NAČIN RADA INTEGRATORA	a_1	a_2	ELEKTRIČNA SHEMA
početni uvjeti	0	0	
računa	1	1	
pamti	1	0	

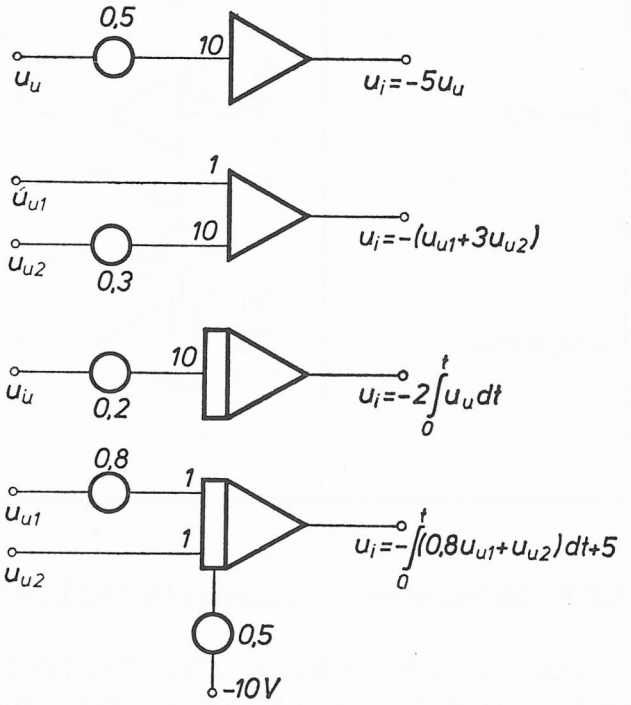
[1] Dakako da polaritet napona napajanja U_0 možemo i promijeniti; kondenzator C će se sada nabiti na bilo koju vrijednost početnog uvjeta $u_i(0)$ između 0 i U_0.

Na početku rada uz $t=0$ kontakti releja preklope se u položaj prikazan na sl. 14—13a: oba su kontakta releja a_1 i a_2 u položaju 1. Integrator je namješten da »računa« (OPERATE). Kondenzator C izbija se preko izlaznih izvoda, uzemljenja i ulaznih izvoda. To znači da u početku integracije na izlazu već postoji napon $u_i(0)$ kojim su namješteni početni uvjeti.

Konačno, kontaktom releja a_1 u položaju 1 i kontaktom releja a_2 u položaju 0 integrator je namješten u položaj da »pamti« (HOLD). Rješenje je »zaleđeno«: naboj kondenzatora C se ne mijenja i u bilo kojem trenutku možemo promatrati trenutačne vrijednosti rješenja.

Zbog preglednosti smo još jednom u tablici 14—2 označili položaj kontakata releja a_1 i a_2 za različite načine rada integratora.

Na sl. 14—13b je i uobičajeni simbol integratora zajedno s namještenom vrijednosti izlaznog napona za početne uvjete. Oznaka k na ulazu u integrator znači naponsko pojačanje, a odgovara vrijednosti $1/RC$.



Sl. 14—14. Operacije raznih računskih sklopova

Na sl. 14—14 prikazujemo nekoliko jednostavnih operacija koje izvode spomenuti računski sklopovi. Na ulaz u invertor, sumator i integrator obično se namještaju dekadske vrijednosti k.

Želimo li dobiti bilo koju vrijednost pojačanja, pred ulazu u računski sklop stavljamo potenciometar kojim možemo namjestiti vrijednosti α u području između 0 i 1. Tako je npr. na prvoj električnoj shemi vrijednost izlaznog napona:

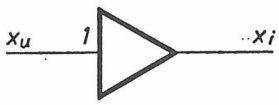
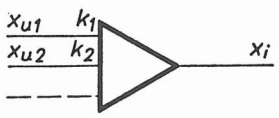
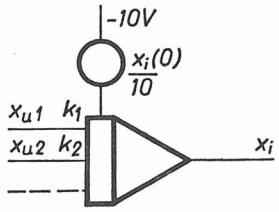
$$u_i=-\alpha\, k\, u_u=-0{,}5\cdot 10u_u=-5u_u \qquad (14\text{-}24)$$

umnožak smanjenja napona na potenciometru i pojačanja invertora.

Na slijedećoj shemi slično je učinjeno pri zbrajanju dvaju napona, a na trećoj shemi i pri integraciji napona. Integrator možemo snabdjeti i s dva ili više ulaza, pa tako **kombiniramo integraciju sa zbrajanjem.** To je prikazano na četvrtoj shemi.

U tablici 14—3 sakupljeni su u preglednom obliku simboli i odgovarajuće jednadžbe osnovnih računskih sklopova s kojima se vrše linearne operacije.

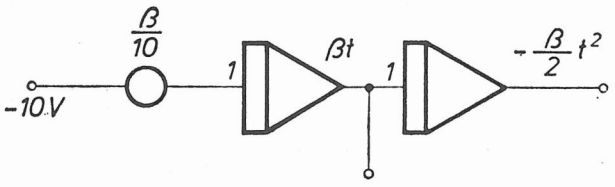
Tablica 14—3. Simboli i jednadžbe linearnih računskih sklopova

ELEMENT	SIMBOL	JEDNADŽBA
potenciometar		$x_i = k x_u$
invertor		$x_i = -x_u$
sumator		$x_i = -\sum_{i=1}^{n} k_i x_{ui}$
integrator		$x_i = -\int \sum_{i=1}^{n} k_i x_{ui} dt + x_i(0)$

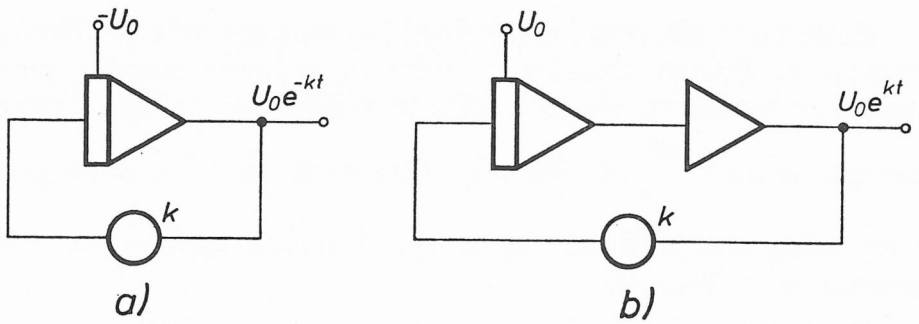
14.3.2. Generatori vremenskih funkcija

Rješenje diferencijalne jednadžbe poput jednadžbe (14-6) zahtijeva prisutnost pobude, pa je zato potreban i generator funkcije nezavisne varijable, tj. vremena. Ako je pobudna funkcija u obliku **odskočne funkcije,** onda u seriju jednostavno spojimo izvoz napajanja U_0 s prekidačem koji uključimo u trenutku $t=0$.

Za dobivanje **nagibne funkcije** možemo prema sl. 14—15 uzeti u seriju integrator, pa na izlazu imamo nagibnu funkciju $\mu_i = \beta U_0 t$. Nagib β se pri tome potenciometrom namješta ispred integratora. Serijskim vezanjem još jednog integratora dobivamo na izlazu parabolu, itd.



Sl. 14—15. Električna shema generatora nagibne i parabolne funkcije



Sl. 14—16. Električna shema generatora eksponencijalne funkcije

Na sl. 14—16a prikazan je generator **eksponencijalne funkcije** $ui = U_0 e^{-kt}$. Deriviranjem tog izraza dobivamo:

$$\frac{du_i}{dt} = -k\, U_0 e^{-kt} = -k u_i. \tag{14-25}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe uz početni uvjet $u_i = U_0$ kod $t = 0$. Na sličan način možemo generirati i funkciju $u_i = U_0\, e^{kt}$. Sada vrijedi:

$$\frac{du_i}{dt} = k\, U_0\, e^{kt} = k u_i, \tag{14-26}$$

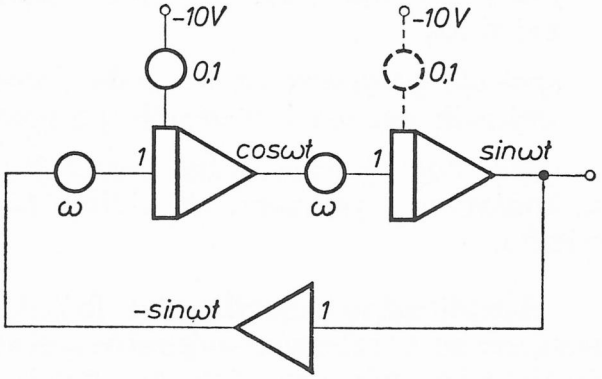
pa u seriju s integratorom na sl. 14—16b treba vezati i invertor koji mijenja predznak. Usporedbom slika vidimo da u prvom slučaju djeluje negativna povratna veza, pa se početna vrijednost eksponencijalno prigušuje, a u drugom slučaju postoji pozitivna povratna veza koja početnu vrijednost U_0 eksponencijalno raspiruje.

Generator **sinusne funkcije** nešto je složeniji (sl. 14—17). Naime $u_i = U_0 \sin \omega t$, odnosno $u_i = U_0 \cos \omega t$, predstavljaju rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} + \omega^2 u_i = 0, \tag{14-27}$$

ili u obliku pogodnom za strojno rješenje:

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = -\omega^2 u_i. \tag{14-28}$$



Sl. 14—17. Električna shema generatora sinusne funkcije

I doista je:

$$\frac{d^2}{dt^2}(U_0 \sin \omega t) = -\omega^2 U_0 \sin \omega t. \tag{14-29}$$

Rješenje te diferencijalne jednadžbe drugoga reda zahtijeva dva serijski spojena integratora. Izlazni signal $u_i = U_0 \sin \omega t$ najprije mijenja predznak u invertoru, a zatim se množi sa ω^2. Tek tada se priključuje na ulaz prvog integratora, jer je identički jednak $\frac{d^2}{dt^2}(U_0 \sin \omega t)$. Množenje sa ω^2 vrši se jednostavnije tako da se po jedan potenciometar spoji ispred svakog integratora, a na svakome od njih namjesti se vrijednost ω.

Da bismo izlazni signal $u_i = U_0 \sin \omega t$ generirali, moramo tom zatvorenom krugu privesti neku energiju. Budući da nema strane pobude, narinemo napon koji odgovara početnim uvjetima. Uz početni uvjet $0{,}1 \cdot (-10) = -1\,\mathrm{V}$ narinut na lijevi integrator (izvučena linija) uz $t=0$ dobivamo: $\dot{u}_i = U_0$ i $u_i = 0$. Na izlazu se pojavi sinusna funkcija. Ako iste početne uvjete narinemo na desni integrator (isprekidana linija), uz $t=0$ dobivamo: $\dot{u}_i = 0$ i $u_i = U_0$. Na izlazu je sada kosinusna funkcija.

14.3.3. Programiranje metodom najviše derivacije

Programiranje na analognom računalu znači namještanje i međusobno povezivanje odgovarajućih računskih sklopova tako da se simulira postavljena diferencijalna jednadžba. Svi računski sklopovi pričvršćeni su na postolju, pa se odgovarajući izvodi računskih sklopova međusobno povezuju utaknutim vodovima. Na postolju se nalaze i sve komande potrebne za puštanje u rad i prekidanje rada računala, kao i instrumenti za provjeru i očitavanje.

Slijed je postupaka pri programiranju:

- opis ispitivanog regulacijskog sustava diferencijalnim jednadžbama,
- pretvorba diferencijalne jednadžbe u oblik pogodan za računalo,
- izrada pojednostavnjenog blok-dijagrama s osnovnim tokovima signala,
- određivanje amplitudnog i vremenskog mjerila u prvobitnoj jednadžbi,
- izrada konačnog strojnog blok-dijagrama,
- provjera strojnog blok-dijagrama pomoću proračuna i mjerenja u stacionarnim uvjetima,
- spajanje programa na računalu pomoću vodova, priključenje potrebnih istosmjernih napona i stavljanje u pogon računala.

Prije nego što prikažemo postupak programiranja metodom najviše derivacije na konkretnom primjeru, da vidimo kako se određuje amplitudno i vremensko mjerilo.

Amplitudno mjerilo. Sve fizikalne varijable u ispitivanom sustavu predstavljene su u računalu **naponima.** Kako je zbog jednostavnosti cijelo računalo napajano istosmjernim naponom od primjerice ± 10 V, amplitudno mjerilo biramo tako da ni u jednom sklopu ne smije prijeći 10 V:

$$[\text{najveća vrijednost fizikalne varijable}]\,\alpha \leqslant 10\ \mathrm{V}, \qquad (14\text{-}30)$$

gdje je α **faktor amplitudnog mjerila.** Drugi je prikaz:

$$\alpha \leqslant \frac{10}{[\text{najveća vrijednost fizikalne varijable}]}. \tag{14-31}$$

Faktor amplitudnog mjerila mora biti što veći da dobijemo zadovoljavajuću osjetljivost. Povoljno je da najveće vrijednosti izlaznog napona iz pojedinog sklopa budu oko 7 do 8 V.

Ako se npr. u mehaničkom sustavu na sl. 14-1c očekuje najveća promjena položaja 3 cm, onda je faktor α:

$$\alpha \leqslant \frac{10}{0{,}03} = 333\ \mathrm{Vm^{-1}},$$

pa možemo odabrati $\alpha = 300$.

Slično je i s brzinom: ako se očekuje najveća vrijednost brzine 0,2 cm $\mathrm{s^{-1}}$, faktor α iznosi:

$$\alpha \leqslant \frac{10}{0{,}002} = 5\,000\ \mathrm{Vm^{-1}\,s},$$

pa tu zaokruženu vrijednost možemo zadržati.

Iz toga vidimo kako se ne može uvijek sa sigurnošću predvidjeti da sve vrijednosti napona na sklopovima računala ostanu unutar granica 10 V i kako može doći do zasićenja i netočnih razultata. Zato se pri programiranju moraju očekivati naknadni ispravci (»cut-and-try« postupak).

Vremensko mjerilo. Rješenje problema na analognom računalu obično se bilježi pisačem. Ulazne izvode pisača za okomiti otklon priključimo na vodove na kojima vlada napon za odgovarajuću fizikalnu varijablu koje vremenski tok želimo ispitati. Najpovoljnije je da pisač bilježi vremenski tok ispitivane varijable u vremenu od kojih desetak sekundi. Prijelazne pojave u mnogim procesima traju međutim i mnogo duže (toplinski procesi), a mnoge su pojave veoma kratke (električni procesi). Zato je često svrsishodno da se neki fizikalni proces umjesto u stvarnom vremenu odvija u tzv. **strojnom vremenu** τ:

$$\tau = \beta t, \tag{14-32}$$

gdje je β **faktor vremenskog mjerila.** Očigledno je: ako se stvarno vrijeme želi **ubrzati,** onda je $\beta < 1$; obratno, želi li se stvarno vrijeme **usporiti,** onda je $\beta > 1$.

Kako sve derivacije u diferencijalnoj jednadžbi ovise o vremenu, moraju se kod vremenskog mjerila i one preurediti. Tako prvu derivaciju moramo zamijeniti sa:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \beta\frac{dx_i}{d\tau}, \tag{14-33}$$

a drugu sa:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx_i}{dt}\right] = \frac{d\tau}{dt}\cdot\frac{d}{d\tau}\left[\beta\frac{dx_i}{d\tau}\right] = \beta^2\frac{d^2x_i}{d\tau^2}, \tag{14-34}$$

što možemo primijeniti i na sve više derivacije.

Integraciju bismo zamijenili odgovarajućom pretvorbom:

$$\int x_i \mathrm{d}t = \frac{1}{\beta} \int x_i \mathrm{d}\tau. \tag{14-35}$$

U načelu strojnu jednadžbu možemo preurediti tako da u skladu s izrazima (14-33) i (14-34) derivacije množimo sa β, odnosno sa β^2: strojna jednadžba bila bi ovisna o strojnom vremenu τ. To je **mijenjanje vremenskog mjerila u diferencijalnoj jednadžbi.** Uobičajeno je međutim da se vremensko mjerilo unese izravno u strojni blok-dijagram. U skladu s izrazom (14-35), ispred svakog integratora u blok-dijagramu namjestimo potenciometrom vrijednost $1/\beta$, što daje isti učinak. Naime, pojačanje integratora je prema izrazu:

$$u_i(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_u(t)\,\mathrm{d}t + u_i(0) \tag{14-36}$$

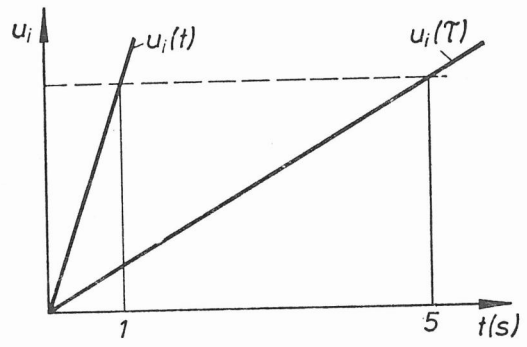
recipročno vremenskoj konstanti integratora $1/RC$, što je ujedno i vrijednost $1/\beta$. Kao zorni primjer uzimamo odskočnu funkciju na ulazu sa $u(t) = -10$ V, neka je $RC = 1$ s, a $u_i(0) = 0$ V. Izlazna je funkcija u stvarnom vremenu ($\beta = 1$):

$$u_i(t) = -\frac{1}{\beta} \int_0^t [-10]\,\mathrm{d}t = 10t,$$

što pokazuje strmiji pravac na sl. 14–18. Uz $\beta = 5$, proces integracije odvija se sporije, u strojnom vremenu

$$u_i(\tau) = -\frac{1}{\beta} \int_0^t [-10]\,\mathrm{d}t = \frac{10}{5} t = 2t,$$

pa tek nakon $\beta t = 5$ s poraste izlazni napon (položeniji pravac) na onu vrijednost koja se u stvarnom vremenu postigne nakon $t = 1$ s. To je **mijenjanje vremenskog mjerila na analognom računalu.**



Sl. 14–18. Vremensko mjerilo namješta se pomoću vremenske konstante integratora

Primjer 14.1. Neka mehanički sustav na sl. 14-1c posluži za prikaz slijeda postupaka pri programiranju. Parametri su sustava $M = 2$ kg, $D = 3$ kg s^{-1}, $S = 1\,200$ kg s^{-2}; na sustav ne djeluje nikakva vanjska pobuda, a početni je pomak mase iz položaja ravnoteže $x(0) = 0{,}05$ m.

Nakon uvrštenja brojčanih vrijednosti jednadžba sustava glasi:

$$2\ddot{x} + 3\dot{x} + 1\,200x = 0.$$

Iz nje najprije izvodimo polaznu jednadžbu pogodnu za strojno programiranje:

$$\ddot{x} = -\frac{3}{2}\dot{x} - \frac{1\,200}{2}x.$$

Blok-dijagram s osnovnim tokovima signala prikazan je već na sl. 14—7, pa ga nećemo još jednom crtati. Napomenimo samo da se na blok-dijagramu na sl. 14—7 ispušta pobuda F_0/M.

Amplitudno mjerilo položaja je jednostavno:

$$\alpha_x \leqslant \frac{10}{|x_{max}|} = \frac{10}{0{,}05} \rightarrow \alpha_x = 200\ \mathrm{Vm^{-1}},$$

jer ne očekujemo veću promjenu položaja od $x_{max} = 5$ cm.

Da bismo ocijenili najveću moguću brzinu $\dot{x}_{max}$ i najveće moguće ubrzanje $\ddot{x}_{max}$ polazimo od slijedećeg razmatranja: neprigušena vlastita frekvencija sustava iznosi:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{S}{M}} = \sqrt{\frac{1\,200}{2}} = \sqrt{600} = 24{,}5\ \mathrm{s^{-1}}.$$

Pritom je rješenje oblika $x = 0{,}05 \sin \omega_n t$, pa je brzina:

$$\dot{x} = \omega_n\, 0{,}05 \cos \omega_n t = 1{,}22 \cos \omega_n t,$$

a ubrzanje:

$$\ddot{x} = -\omega_n^2\, 0{,}05 \sin \omega_n t = -30 \sin \omega_n t.$$

Dakle, najveće su vrijednosti $\dot{x}_{max} = 1{,}22\ \mathrm{ms^{-1}}$ i $\ddot{x}_{max} = 30\ \mathrm{ms^{-2}}$, jer uz prigušenje koje je u sustavu prisutno te vrijednosti mogu biti samo manje. Amplitudno je mjerilo brzine prema tome:

$$\alpha_v \leqslant \frac{10}{|\dot{x}_{max}|} = \frac{10}{1{,}22} \rightarrow \alpha_v = 5\ \mathrm{Vm^{-1}\,s},$$

a amplitudno mjerilo ubrzanja:

$$\alpha_a \leqslant \frac{10}{|\ddot{x}_{max}|} = \frac{10}{30} \rightarrow \alpha_a = 0{,}2\ \mathrm{Vm^{-1}\,s^2}.$$

Izabrane su nešto manje, zaokružene vrijednosti.

Sada treba da napišemo jednadžbu s unesenim mjerilima, kako bismo mogli izraditi strojni blok-dijagram. U tu svrhu u jednadžbu unesemo nove, tzv. strojne varijable $[200x]$, $[5\dot{x}]$ i $[0{,}2\ddot{x}]$. Te se varijable ostavljaju u uglatoj zagradi i imaju dimenziju napona. Da bismo međutim zadržali identičnost s polaznom jednadžbom, moramo svaki član preurediti. Tako pišemo:

$$\frac{1}{0{,}2}[0{,}2\ddot{x}] = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}[5\dot{x}] - \frac{1\,200}{2}\cdot\frac{1}{200}[200\,x].$$

Množenjem i dijeljenjem svakog člana jednadžbe s istim faktorom ta jednadžba ostaje identična polaznoj jednadžbi. To pišemo dalje u obliku:

$$[0{,}2\,\ddot{x}] = -\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{0{,}2}{5}\right)[5\,\dot{x}] - \left(\frac{1\,200}{2}\cdot\frac{0{,}2}{200}\right)[200\,x].$$

Kao što vidimo, ova jednadžba sa strojnim varijablama ima drukčije koeficijente negoli polazna jednadžba sa stvarnim varijablama. Da bismo dobili pojačanje integratora napišemo relaciju $\dot{x}=f(\ddot{x})$ i $x=f(\dot{x})$, a zatim to pretvorimo u relacije $[5\dot{x}]=f[0{,}2\ddot{x}]$ i $[200x]=f[5\dot{x}]$. Za prvi integrator imamo:

$$\dot{x}=\int_0^t \ddot{x}\,dt+\dot{x}(0).$$

Uvodimo strojnu varijablu:

$$\frac{1}{5}[5\,\dot{x}]=\int_0^t \frac{1}{0{,}2}[0{,}2\,\ddot{x}]\,dt+\frac{1}{5}[5\dot{x}(0)],$$

što daje pojačanje integratora $(5/0{,}2)=25$:

$$[5\dot{x}]=\frac{5}{0{,}2}\int_0^t [0{,}2\,\ddot{x}]\,dt+[5\dot{x}(0)].$$

Slično je za drugi integrator:

$$x=\int_0^t \dot{x}\,dt+x(0),$$

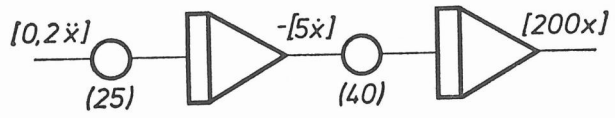
i dalje:

$$\frac{1}{200}[200\,x]=\int_0^t \frac{1}{5}[5\,\dot{x}]\,dt+\frac{1}{200}[200\,x(0)].$$

Sada je pojačanje $(200/5)=40$:

$$[200\,x]=\frac{200}{5}\int_0^t [5\,\dot{x}]\,dt+[200\,x(0)].$$

Na osnovi toga postavljamo najprije liniju integratora prema sl. 14—19 koja je drukčija nego li u slučaju stvarnih fizikalnih varijabli x, $\dot{x}$ i $\ddot{x}$. Označene su vrijednosti strojnih varijabli $[200\,x]$, $[5\,\dot{x}]$ te $[0{,}2\,\ddot{x}]$, kao i vrijednosti pojačanja 25 odnosno 40 koje treba da namjestimo s potenciometrima i pojačalima.

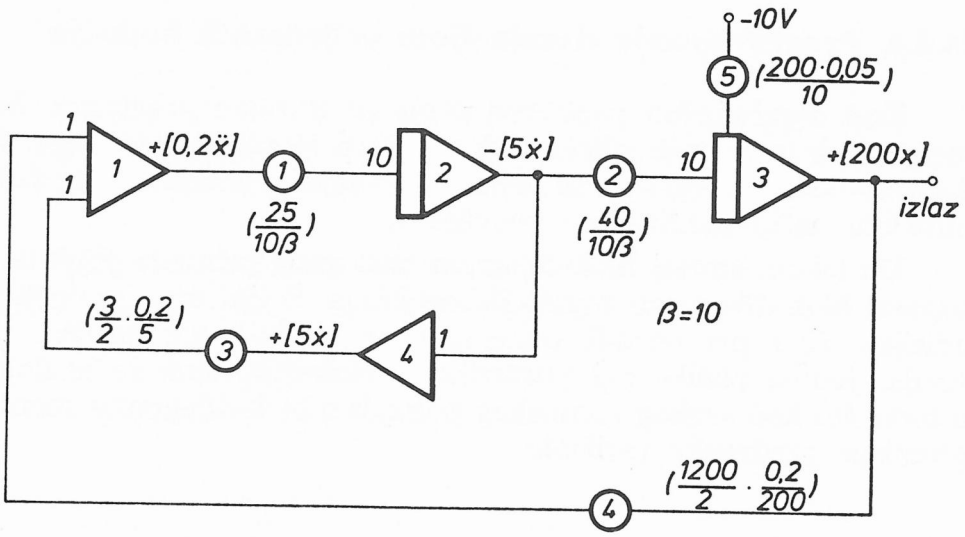


Sl. 14—19. Linija integratora MDS sustava — primjer 14.1

Do sada nismo ništa rekli o vremenskom mjerilu. Pri njegovu izboru povoljno je da proces donekle usporimo kako bismo mogli bolje pratiti oscilacije na pisaču. Uz frekvenciju od oko:

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{24{,}5}{2\pi}\simeq 4\ \text{Hz}$$

možemo uzeti $\beta=10$. Na potrebu da se proces na računalu uspori, upućuju i velike vrijednosti na potenciometrima, koje inače imaju dimenziju $[s^{-1}]$.



Sl 14—20. Strojni blok-dijagram MDS sustava — primjer 14.1

Cijeli strojni blok-dijagram na sl. 14—20 nalik je na načelni blok-dijagram na sl. 14—7, a sadrži dva integratora, jedan invertor, jedan sumator i pet potenciometara. Svaki računski sklop na blok-dijagramu označujemo oznakama kojima smo označili računske sklopove na računalu, čime omogućujemo preglednost pri ožičenju na računalu. U uglatim su zagradama označene nove varijable na odgovarajućim linijama, a u okruglim su zagradama vrijednosti koeficijenata što se namještaju na potenciometrima.

Na potenciometrima 1 i 2 namješteno je uz pojačanje 25, odnosno 40, i vremensko mjerilo $1/\beta$. Vrijednosti na potenciometrima ovdje su veće od jedan, tj. $25/\beta=2{,}5$ i $40/\beta=4$. Kako se potenciometri mogu namjestiti do vrijednosti 1, potrebno je obje vrijednosti podijeliti sa 10, a ujedno se na ulazu u integratore namjesti pojačanje na 10. Zbog promjene amplitudnog mjerila pojačanja 25 i 40 kompenziraju se u petljama povratne veze: ukupno pojačanje u svakoj pojedinoj petlji daje odgovarajući koeficijent u izvornoj jednadžbi[1].

Na kraju moramo još namjestiti početne uvjete. Vrijednosti $x(0)=0{,}05$ m odgovara strojni napon od $[200\cdot 0{,}05]$ V. Uz priključak na napon napajanja od -10 V mora se ta vrijednost smanjiti faktorom 1/10 (vidi sl. 14—13).

Priključenjem napona na integratoru 3 koji odgovara početnom uvjetu u trenutku $t=0$ počinje rad računala. Izlazni napon pokreće okomiti otklon pisača.

[1] Uvođenje amplitudnog mjerila djeluje na električni model tako da se pojačanja u petljama preraspodjele, pa pojačala ne dolaze u zasićeno stanje.

Vodoravnim otklonom pisača upravlja monotono rastući napon iz neovisno spojenog integratora (v. sl. 14—15); ispred integratora namjestimo potenciometrom vrijednost $\beta/10=1$, pa ćemo na izlazu iz integratora dobiti strojno vrijeme $\tau=\beta t$.

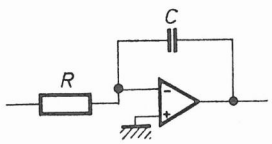
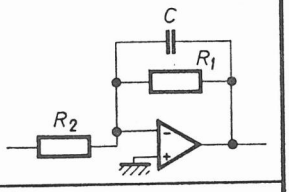
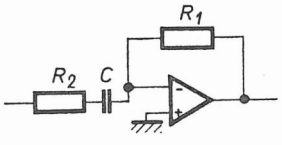
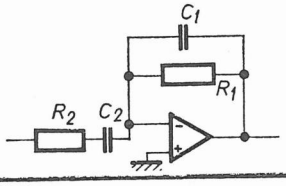
Metodu s odjeljivanjem najviše derivacije nazivamo i **direktno programiranje.** O tome smo već govorili u odjeljku 12.3, gdje smo na sličan način izveli model s varijablama stanja. Po jedna varijabla stanja pridruži se naime izlazu iz svakog integratora. I doista, strojni blok-dijagram na analognom računalu prema sl. 14—20 odgovara direktnom postupku s varijablama stanja prema sl. 12—6.

14.3.4. Programiranje simulacijom prijenosnih funkcija

Kod regulacijskih problema često su poznate prijenosne funkcije pojedinih međusobno povezanih dijelova ili sklopova regulacijskog kruga. U takvim je slučajevima jednostavnije da se prijenosne funkcije simuliraju na računalu i da ih na određeni način međusobno povežemo.

Uostalom, strojni blok-dijagram analognog računala potpuno odgovara strukturnom blok-dijagramu regulacijskog kruga. S tim smo se postupkom upoznali u odjeljku 12.3 pri obradi matematičkog modeliranja sustava pomoću varijabli stanja. Jedina razlika pri postavljanju blok-dijagrama za analogno računalo jest u tome što kod svakog računskog pojačala u blok-dijagramu moramo uzeti u obzir promjene predznaka varijable.

Tablica 14—4. Simulacija osnovnih sustava pomoću računskog pojačala

SUSTAV	Z_r/Z_u	$G(s)$	SHEMA
I_0-sustav	$\dfrac{\frac{1}{j\omega C}}{R}$	$-\dfrac{1}{RCs}$	
P_1-sustav	$\dfrac{\frac{1}{1/R_1+j\omega C}}{R_2}$	$-\dfrac{R_1}{R_2}\dfrac{1}{1+RCs}$	
D_1-sustav	$\dfrac{R_1}{R_2+\frac{1}{j\omega C}}$	$-\dfrac{R_1Cs}{1+R_2Cs}$	
D_2-sustav	$\dfrac{\frac{1}{1/R_1+j\omega C_1}}{R_2+\frac{1}{j\omega C_2}}$	$-\dfrac{R_1C_2s}{(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)}$	

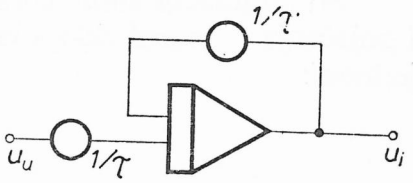
Simuliranje prijenosnih funkcija moguće je ili pomoću pasivnih električnih elemenata ili pomoću računskog pojačala i pasivnih elemenata (otpornici i kondenzatori) ili pak samo pomoću računskih pojačala i potenciometara.

Pogledajmo drugi postupak. Ako na električnoj shemi računskog pojačala na sl. 14—11a umjesto otpora na ulazu R i otpora u krugu povratne veze R_r, uzmemo općenito neke impedancije Z, odnosno Z_r, možemo odnos između izlazne i ulazne veličine izraziti sa:

$$G(j\omega)=\frac{U_i(j\omega)}{U_u(j\omega)}=\frac{Z_r}{Z} \tag{14-37}$$

Tu jednadžbu izvodimo potpuno jednako kao i jednadžbu (14-14), samo što se ovdje radi o kompleksnim veličinama Z i Z_r. Kako se kompleksna frekvencija $j\omega$ može zamijeniti s operatorom s, možemo omjer $G(j\omega)$ u jednadžbi (14-36) pisati i kao prijenosnu funkciju $G(s)$ [lit. 28, 51].

U tablici 14—4 prikazana je simulacija nekih jednostavnih prijenosnih funkcija.



Sl. 14—21. Simulacija prijenosnih funkcija

Kao primjer kako teče postupak uzimamo D_1-sustav u trećem redu. Budući da je u kompleksnom obliku $Z_r=R_1$, a $Z=R_2+(1/j\omega C_2)$, možemo sinusnu prijenosnu funkciju za pojednostavnjenu električnu shemu u tećem redu tablice pisati:

$$G(j\omega)=\frac{U_i(j\omega)}{U_u(j\omega)}=\frac{R_1}{R_2+\dfrac{1}{j\omega C_2}}=\frac{j\omega R_1C}{1+j\omega R_2C_2}. \tag{14-38}$$

Zamjenom $j\omega$ sa s dobivamo i prijenosnu funkciju.

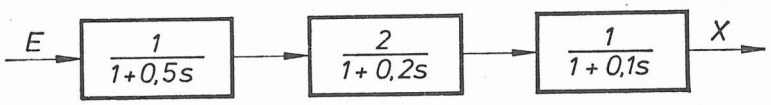
Treći postupak prikazat ćemo na simulaciji sustava prvoga reda kojeg je prijenosna funkcija:

$$G(s)=\frac{U_i(s)}{U_u(s)}=-\frac{1}{1+\tau s}. \tag{14-39}$$

Množenjem i sređivanjem dobit ćemo oblik transformirane jednadžbe:

$$s\,U_i=-\frac{U_u}{\tau}-\frac{U_i}{\tau}, \tag{14-40}$$

koji je pogodan za simulaciju jer je najviša derivacija na lijevoj strani. Električna shema prikazana je na sl. 14—21.



Sl. 14—22. Blok-dijagram regulacijske staze — primjer 14.2

Primjer 14.2. Regulacijska staza ima tri aperiodska člana s vremenskim konstantama $\tau_1=0{,}5$ s, $\tau_2=0{,}2$ s, $\tau_3=0{,}1$ s i s pojačanjem $K_S=2$ (sl. 14—22). Na stazu je priključen PI-regulator s promjenljivim vrijednostima $0\leqslant K_R\leqslant 10$ i $0\leqslant 1/T_i\leqslant 3\ \mathrm{s}^{-1}$.

Na osnovi prijenosnih funkcija staze:

$$G_S(s)=\frac{K_S}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}=\frac{2}{(1+0{,}5\,s)(1+0{,}2\,s)(1+0{,}1\,s)}$$

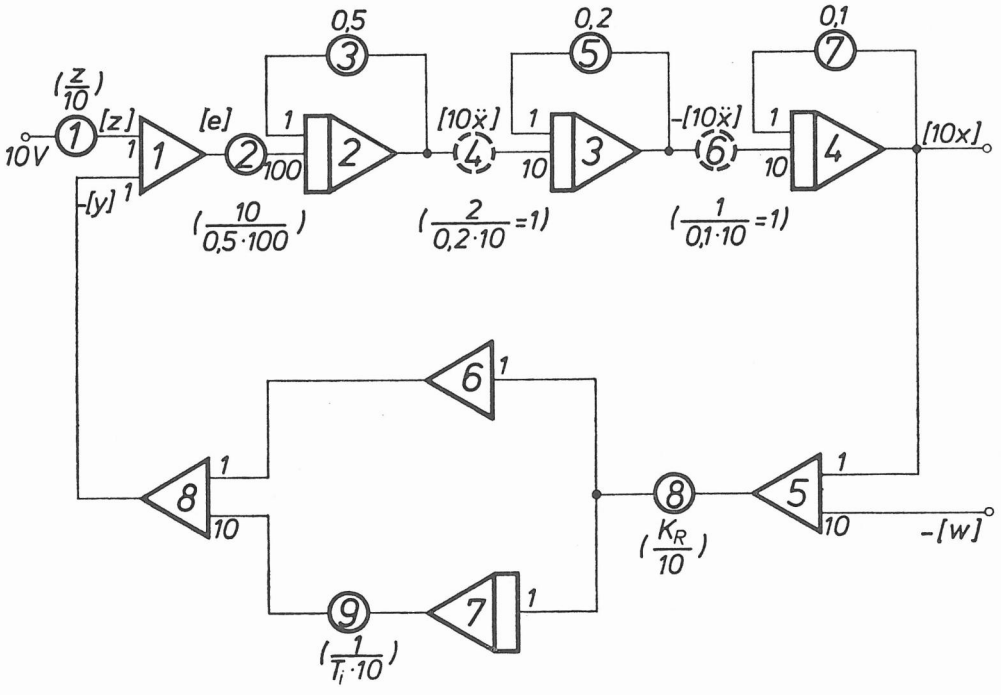
i PI-regulatora:

$$G_R(s)=K_R\left[1+\frac{1}{T_i s}\right]$$

načinimo strojni blok-dijagram na sl. 14—23.

Pri simulaciji staze koristili smo se mogućnošću promjene redoslijeda blokova i pojačanja (linearni sklopovi!). Tako smo ispustili potenciometar 4, jer mu je vrijednost:

$$\frac{K_S\,\alpha}{\tau_2}=\frac{2\dfrac{1}{10}}{0{,}2}=1.$$



Sl. 14—23. Strojni blok-dijagram regulacijskog sustava — primjer 14.2

Slično je i s potenciometrom 6:

$$\frac{\alpha}{\tau_3}=\frac{\frac{1}{10}}{0{,}1}=1.$$

U oba slučaja smo smanjenje vrijednosti potenciometra za faktor $\alpha=1/10$ nadoknadili s pojačanjem na ulazu u slijedeće računsko pojačalo, $k=10$. Budući da postoji opasnost da postavni signal na ulazu u stazu preoptereti računska pojačala, povećamo K_S za faktor 10, što namjestimo na potenciometru 2:

$$\frac{10\alpha}{\tau_1}=\frac{10\,\frac{1}{100}}{0{,}1}=0{,}5.$$

I ovdje smo smanjenje vrijednosti potenciometra za faktor $\alpha=1/100$ nadoknadili na ulazu u računsko pojačalo 2 sa $k=100$.

Budući da smo zbog preopterećenja računskih pojačala uveli pojačanje 10, moramo bilo gdje u petlji za tu vrijednost prigušiti signal. To je izvedeno na ulazu u PI-regulator na potenciometru 8, kojeg je promjenljiva vrijednost $K_R/10$. To je vrlo povoljno jer se K_R mijenja od 0 do 10, pa je maksimalna vrijednost na potenciometru upravo jedan. Kako se $1/T_i$ mijenja od 0 do 3, potrebno je na potenciometru 9 smanjiti vrijednost za faktor $\alpha=1/10$, a toliko povećati ulaz u računsko pojačalo 8, tj. $k=10$.

Računska pojačala 5 i 1 simuliraju točke zbrajanja. Na ulazu u pojačalo 1 potenciometrom 1 namjestimo konstantnu vrijednost odskoka poremećajne veličine z, koja se pojavljuje i na ulazu u integrator 2. Uključivanjem integratora započinje rad. Snimanje prijelazne funkcije na izlazu ponavlja se tako dugo dok vrijednosti promjenljivih parametara K_R i T_i ne zadovolje postavljene uvjete.

Iz gornjeg primjera vidimo da smo pri simulaciji na analognom računalu upotrijebili više računskih pojačala negoli pri direktnom programiranju. Zauzvrat smo zadržali strukturnu analogiju, a time i preglednost. To je važno pri projektiranju složenih blok-dijagrama jer se promjenljivi parametri namještaju odijeljenim potenciometrima.

Metodu programiranja što smo je upravo opisali, a koja se temelji na rastavljanju ukupne prijenosne funkcije u umnožak faktora koji simuliraju pojedine prijenosne funkcije, nazivamo **iterativno programiranje.** Pri tome se prijenosne funkcije pojedinih sklopova serijski povezuju. Još jednu metodu simulacije prijenosnih funkcija predstavlja **paralelno programiranje,** o čemu smo govorili u odjeljku 12.3. Kod ove metode se ukupna prijenosna funkcija rastavi u zbroj parcijalnih razlomaka, pa se prijenosne funkcije svakog parcijalnog razlomka simuliraju i sve zajedno zbroje. To odgovara paralelnom povezivanju prijenosnih funkcija parcijalnih razlomaka, što je prikazano na sl. 12—8.

Simulacija sustava s mrtvim vremenom. Na analognom računalu mogu se prikazati samo racionalne funkcije, pa za simulaciju mrtvog vremena nema prikladnog sklopa. Kako T_m-sustav često susrećemo u regulacijskoj tehnici, simulaciju izvodimo ili pomoću magnetske vrpce ili aproksimacijom prijenosne funkcije $G(s)=e^{-\tau_m s}$. Budući da je magnetofonski uređaj razmjerno skup, zadržat ćemo se samo na češće primjenjivanoj metodi aproksimacije $G(s)$ pomoću standardnih sklopova na računalu.

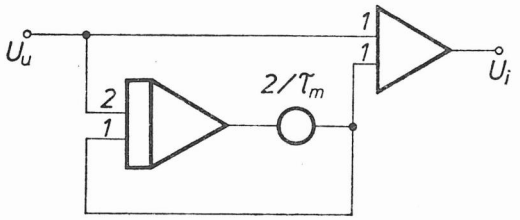
Eksponencijalnu funkciju $e^{-\tau_m s}$ razvijemo u red potencija:

$$e^{-\tau_m s} = 1 - \tau_m s + \frac{\tau_m^2 s^2}{2} - \frac{\tau_m^3 s^3}{6} + \ldots \qquad (14\text{-}41)$$

Aproksimaciju tog reda dobit ćemo pomoću razlomka:

$$G(s) = \frac{U_i(s)}{U_u(s)} = \frac{1 - 0{,}5\tau_m s}{1 + 0{,}5\tau_m s} = 1 - \tau_m s + \frac{\tau_m^2 s^2}{2} - \frac{\tau_m^3 s^3}{4} + \ldots \qquad (14\text{-}42)$$

koji možemo simulirati prema blok-dijagramu na sl. 14—24. Problem je te aproksimacije spora konvergencija reda, pa fazno-frekvencijska karakteristika te sheme bitno odstupa od linearnosti. Tako je npr. uz $\omega\tau_m = 0{,}6$ rad i uz frekvenciju $\omega = 6{,}28\ s^{-1}$ fazna greška još manja od 1°.



Sl. 14—24. Simulacija sustava s mrtvim vremenom

Mnogo vjerniji model dobit ćemo primjenom **Padéove aproksimacije.** Ona se svodi na to da se funkcija $e^{-\tau_m s}$ aproksimira pomoću racionalnog razlomka:

$$P(m,s) = \frac{1 + b_1 s + \ldots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{1 + a_1 s + \ldots + a_{m-1} s^{m-1} + a_m s^m}. \qquad (14\text{-}43)$$

Dijeljenjem brojnika s nazivnikom dobivamo red potencija od s, kojih se članovi uspoređuju s odgovarajućim članovima reda $e^{-\tau_m s}$ u jednadžbi (14-41). Ako želimo dobiti $(m+m) = 2m$ koeficijenata, moramo imati isto toliko jednadžbi. Sam proračun prilično je zamoran.

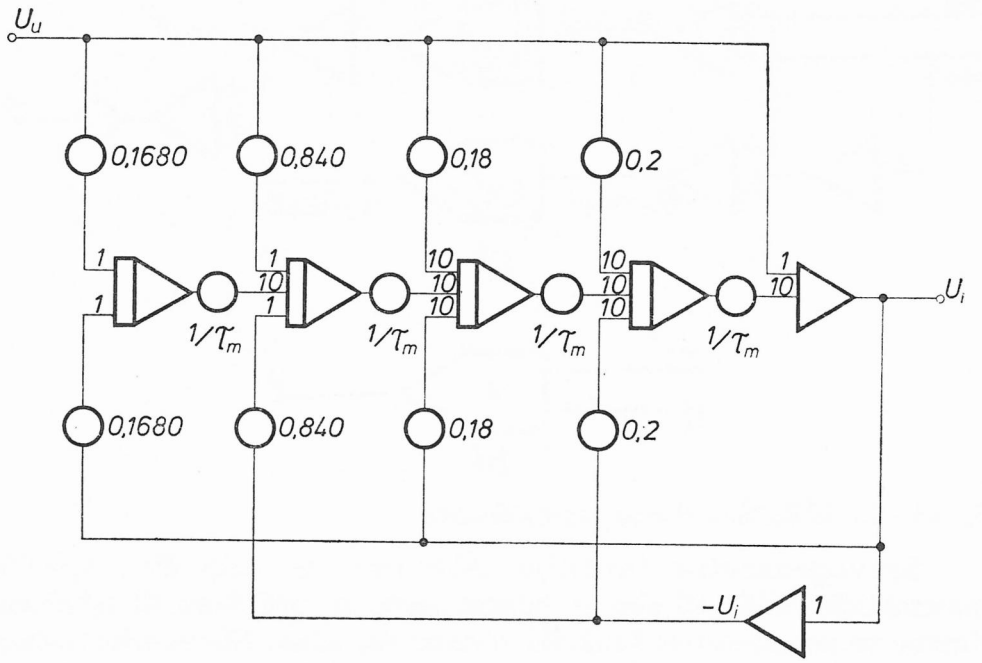
Ako prekinemo red u brojniku i nazivniku izraza (14-43) iza prvog člana b_1, odnosno a_1, dobit ćemo Padéovu aproksimaciju prvoga reda koja zapravo odgovara jednadžbi (14-42). Točnije modele dobivamo korištenjem više koeficijenata. Tako ćemo npr. Padéovu aproksimaciju četvrtoga reda dobiti izračunavanjem koeficijenata $b_1, \ldots, b_4$, $a_1, \ldots, a_4$ iz osam algebarskih identiteta. Konačan je rezultat:

$$e^{-\tau_m s} \simeq \frac{1 - 0{,}5\,\tau_m s + 0{,}107\,\tau_m^2 s^2 - 0{,}0119\,\tau_m^3 s^3 + 5{,}95 \cdot 10^{-4}\,\tau_m^4 s^4}{1 + 0{,}5\,\tau_m s + 0{,}107\,\tau_m^2 s^2 + 0{,}0119\,\tau_m^3 s^3 + 5{,}95 \cdot 10^{-4}\,\tau_m^4 s^4} \qquad (14\text{-}44)$$

ili dijeljenjem s koeficijentom člana s najvišom potencijom $\tau_m^4 s^4$:

$$G(s) = \frac{U_i(s)}{U_u(s)} = \frac{1680 - 840\,\tau_m s + 180\,\tau_m^2 s^2 - 20\,\tau_m^3 s^3 + \tau_m^4 s^4}{1680 + 840\,\tau_m s + 180\,\tau_m^2 s^2 + 20\,\tau_m^3 s^3 + \tau_m^4 s^4}. \qquad (14\text{-}45)$$

Ta je funkcija modelirana pomoću strojnog blok-dijagrama na sl. 14—25. S tim modelom možemo dobiti zadovoljavajuće rezultate za probleme koji nastupaju u procesnoj regulaciji u vezi s protocima tekućina ili plinova. Pritom se radi o niskim frekvencijama, pa nije ugrožena stabilnost modela.



Sl. 14—25. Strojni blok-dijagram Padéove aproksimacije četvrtoga reda sustava s mrtvim vremenom

Moglo bi se pomisliti da ćemo smanjenjem faktora vremenskog mjerila β, tj. ubrzanjem procesa na računalu, smanjiti u odgovarajućoj mjeri i mrtvo vrijeme τ_m. Time međutim povećavamo frekvenciju ω, pa se maksimalno prihvatljiva fazna greška $\varphi = \omega\tau_m$ ne mijenja.

14.3.5. Sklopovi za nelinearne operacije

Pomoću elektroničkih sklopova možemo simulirati sve moguće kontinuirane i nekontinuirane nelinearnosti što se pojavljuju u regulaciji. Takvi nelinearni računski sklopovi uključeni su u analognom računalu, pa se njime možemo jednostavno koristiti pri rješavanju nelinearnih regulacijskih problema.

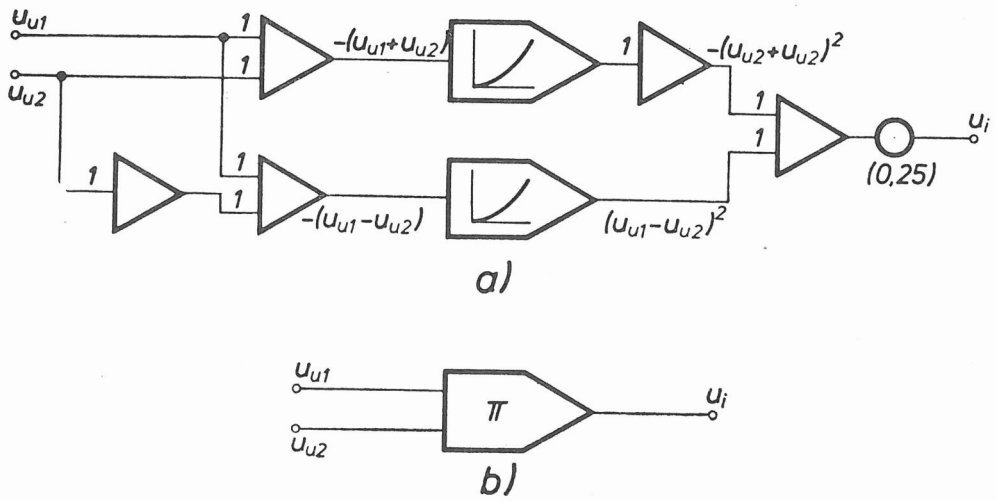
U daljnjem tekstu obrađujemo osnovne nelinearne sklopove kojih je značajka da daju **funkcionalne odnose između zavisnih varijabli.**

Multiplikator. Elektronički multiplikator obično programiramo pomoću jednadžbe:

$$u_i = u_{u1}\,u_{u2} = \frac{1}{4}\left[(u_{u1}+u_{u2})^2 - (u_{u1}-u_{u2})^2\right]. \qquad (14\text{-}46)$$

U blok-dijagramu na sl. 14—26a potrebna su tri sumatora, jedan invertor i dva diodna generatora funkcija. O njima ćemo govoriti kasnije, a ovdje je dovoljno da uočimo njihov simbol kao i kvadratni odnos između izlazne i ulazne varijable. Uz poznavanje osnovnih računskih sklopova kao i postupka pri programiranju možemo lako dokazati da sklop na sl. 14—26a doista simulira operaciju množenja prema jednadžbi (14-50). Točnost tog multiplikatora ovisi o točnosti parabolne aproksimacije.

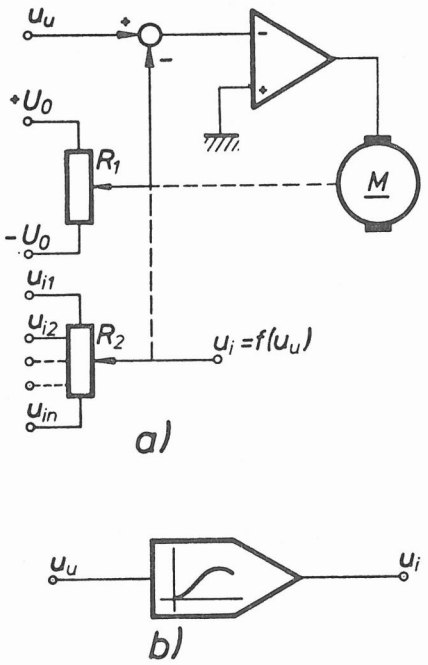
Na sl. 14-26b prikazan je simbol multiplikatora.



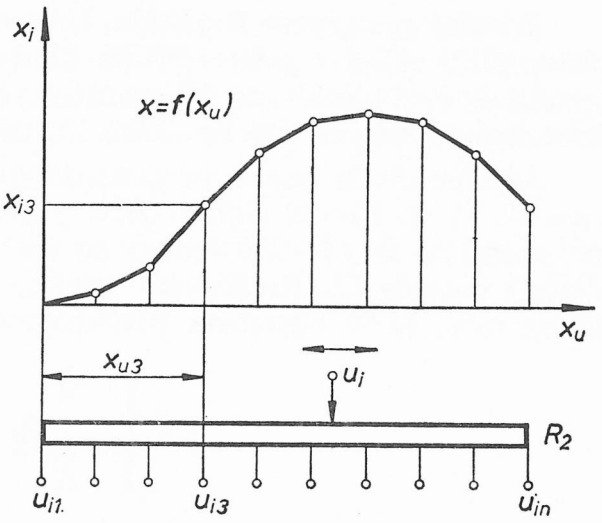
Sl. 14—26. Električna shema multiplikatora

Servogenerator funkcija. Ako izraz za neki član $u_i=f(u_u)$ ima složen matematički oblik, ili ako je poznat samo u grafičkom ili tabelarnom obliku, koristimo se generatorom funkcija zavisne varijable. Shematska izvedba elektromehaničkog generatora funkcija vidi se na sl. 14—27a. On se sastoji od malog servomotora M na čiju osovinu su pričvršćena klizala potenciometara R_1 i R_2. Na krajeve potenciometra R_1 narinuti su naponi napajanja od 10 V i —10 V. Potenciometar R_2 prikazali smo još jednom na sl. 14—28 dolje jer se pomoću narinutih napona na odvojcima simulira funkcijska veza. Naime krivulju $x_i=f(x_u)$ koju želimo simulirati (sl. 14—28 gore) podijelimo na n jednakih segmenata što odgovara $(n-1)$ odvojaka na potenciometru R_2. Na te odvojke priključimo napone u_{i1}, u_{i2}, . . . , u_{in} koji su razmjerni vrijednostima x_i u odgovarajućoj točki krivulje. Vrijednosti razlike napona interpoliraju se između odvojaka.

Ulazni napon u_u dolazi na točku zbrajanja zajedno s naponom klizala potenciometra R_1 (sl. 14—27a). Ako se ti naponi razlikuju, rezultantni napon pojačan u računskom pojačalu pokreće servomotor sve dotle dok se naponi u točki zbrajanja



Sl. 14—27. Električna shema elektromehaničkog generatora funkcija zavisne varijable

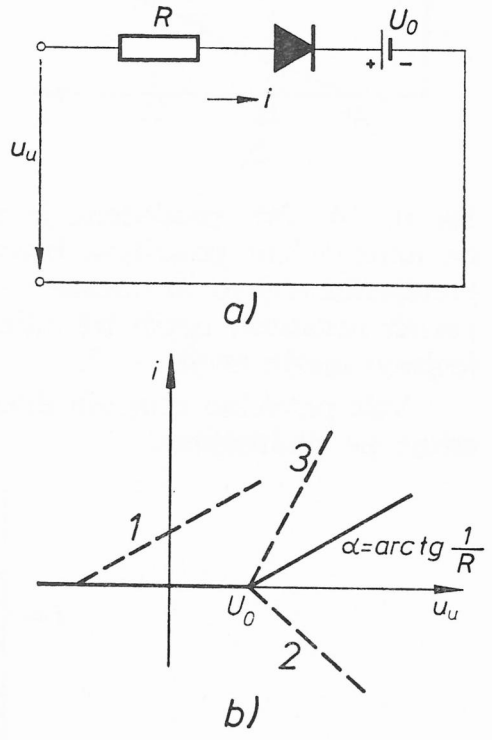


Sl. 14—28. Namještanje kontinuirane karakteristike potenciometarskim odvojcima

ne izjednače. Prema tome, svakoj vrijednosti **ulaznog napona** u_u **odgovara određeni položaj klizala potenciometra** R_1. Ako se ulazni napon u_u mijenja u negativnom smjeru u odnosu na —10 V, servomotor se okreće u obratnom smislu, a klizalo se giba prema dolje.

Kako je klizalo potenciometra R_2 također čvrsto vezano na vratilo servomotora, i njegov je položaj razmjeran ulaznom naponu u_u. Tom **položaju klizala potenciometra** R_2 **odgovara određena vrijednost izlaznog napona** u_i. Na sl. 14—28 označen je napon koji odgovara ulaznom naponu u_{u3}. Postoji dakle linearan odnos: ulazni napon u_u — položaj klizala potenciometra R_1 — položaj klizala potenciometra R_2. Ovaj potonji parametar u nelinearnom je funkcionalnom odnosu s izlaznim naponom u_i.

Na sl. 14—27b prikazan je simbol koji vrijedi općenito za sve generatore funkcija zavisne varijable.

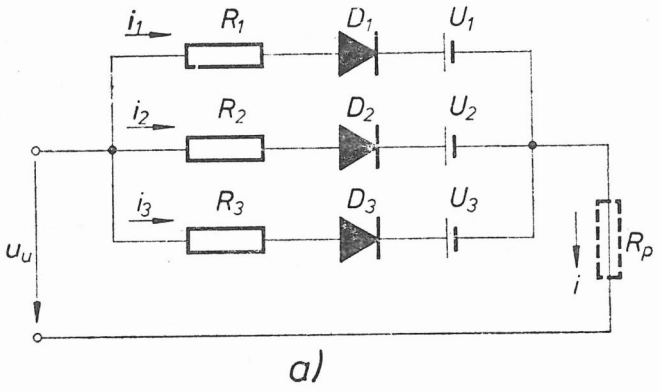


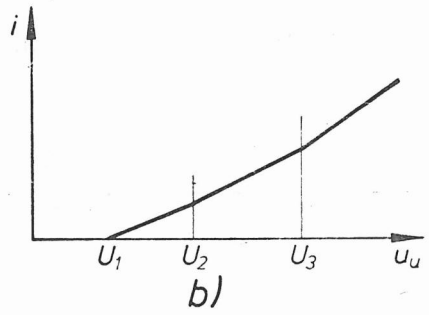
Sl. 14—29. Električna shema diodnog generatora funkcija zavisne varijable (a) i karakteristike (b)

Diodni generator funkcija. Umjesto servogeneratora funkcija možemo uzeti elektronički sklop s poluvodičkim diodama. Pomoću takvih sklopova se odlično simuliraju nekontinuirane nelinearnosti; i kontinuiranu nelinearnost aproksimiramo izlomljenom linijom što se zatim simulira također s diodama.

Idealna dioda ima u propusnom smjeru otpor $r_D=0$, a u zapornom smjeru $r_D=\infty$. Na sl. 14—29 vidimo kako se primjenjuje to njezino svojstvo. Na električnoj shemi na sl. 14—29a spojeni su u seriju s narinutim naponom u_u otpornik R, dioda i baterija U_0. Razlika napona (u_u-U_0) utječe na vodljivost diode, pa struja ili ne teče, ili je određena Kirchhoffovim zakonom:

$$i=\begin{cases} 0 & \text{za } u_u < U_0, \\ \dfrac{u_u-U_0}{R} & \text{za } u_u > U_0. \end{cases} \tag{14-47}$$





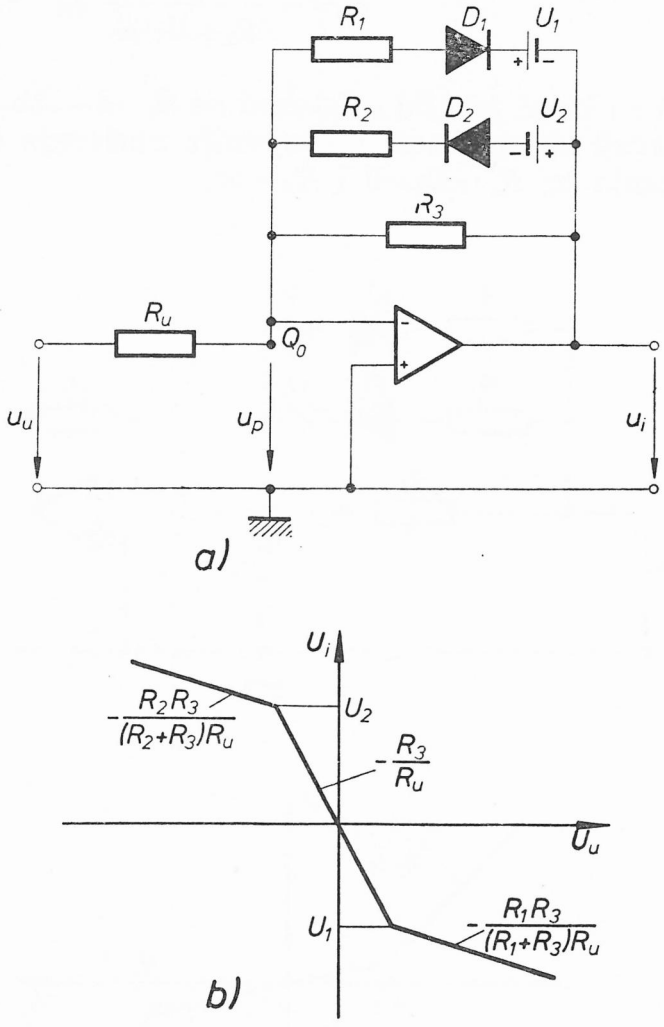
Sl. 14—30. Diodni generator funkcija (a) i karakteristike (b)

Na sl. 14—29b predočena je izlomljena *I-U* karakteristika. Lako je zaključiti da mijenjanjem polariteta baterije U_0 možemo prijelomnu točku karakteristike premjestiti ulijevo ili udesno — 1; spajanjem diode u obratnom smjeru možemo postići negativan nagib izlomljene karakteristike — 2; mijenjanjem otpora R mijenjamo njezin nagib — 3.

Više paralelno spojenih dioda s prednaponom prema sl. 14—30a daje različite struje po područjima:

$$i=\begin{cases} \dfrac{u_u-U_1}{R_1} & \text{za } u_u > U_1, \\ \dfrac{u_u-U_2}{R_2} & \text{za } u_u > U_2, \\ \dfrac{u_u-U_3}{R_3} & \text{za } u_u > U_3, \end{cases} \tag{14-48}$$

što za $U_1<U_2<U_3$ daje I-U karakteristiku kao na sl. 14—30b. Tako možemo aproksimirati kontinuiranu krivulju, pa i parabolu o kojoj je bilo riječi u obradi multiplikatora.



Sl. 14—31. Diodni sklop u grani povratne veze računskog pojačala (a) i karakteristika (b)

Na izlazu struja prolazi opteretnim otporom R_p koji je na sl. 14—30a prikazan crtkano. Kako svaka promjena potrošača R_p utječe i na struju, odnosno mijenja karakteristiku na sl. 14—30b, pomažemo se računskim pojačalom koje poništava taj utjecaj. Prema električnoj shemi na sl. 14—31a, u **granu povratne veze** računskog pojačala spojena su dva diodna sklopa. Uz $U_2>u_i>-U_1$ obje su diode polarizirane u zapornom smjeru, pa imamo:

$$u_i=-\frac{R_3}{R_u}u_u \quad \text{za} \quad U_2>u_i>-U_1. \tag{14-49}$$

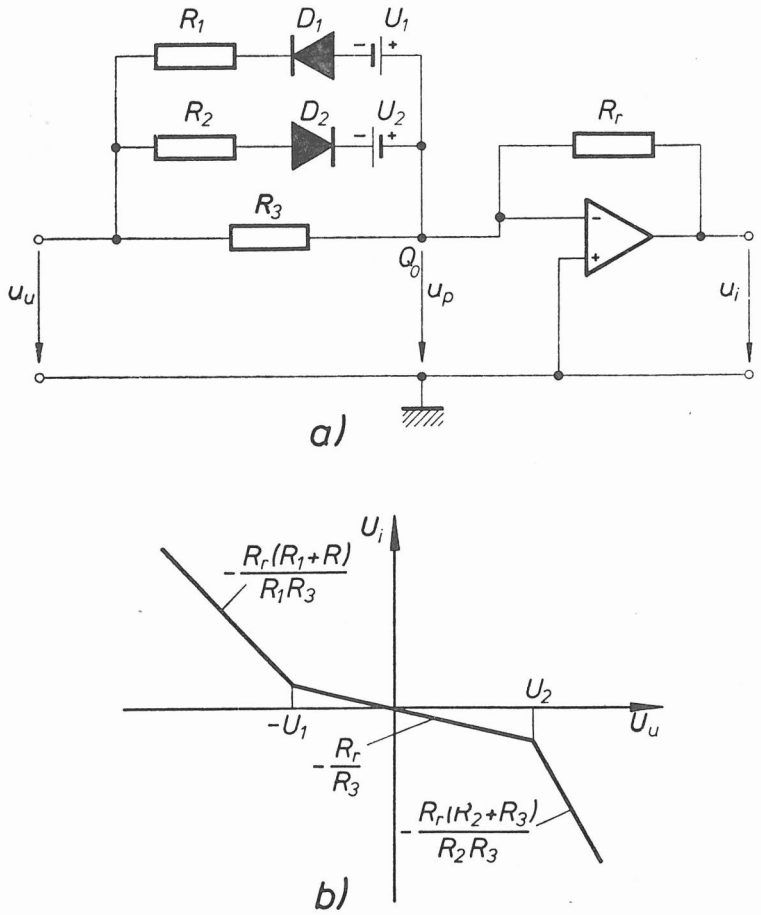
Uz $u_i>U_2$ dioda D_2 vodi, pa je ukupan otpor u povratnoj grani paralelni spoj R_2 i R_3:

$$u_i=-\frac{R_2R_3}{(R_2+R_3)R_u}u_u \quad \text{za} \quad u_i>U_2. \tag{14-50}$$

Promjenom polariteta od u_u mijenja se i u_i. Uz $-u_i > U_1$ dioda D_1 vodi, a u povratnom su vodu sada paralelni otpornici R_1 i R_3:

$$u_i = -\frac{R_1 R_3}{(R_1+R_3)R_u} u_u \quad \text{za} \quad -u_i > U_1. \tag{14-51}$$

Ti su izrazi grafički predočeni na sl. 14—31b. Između mnoštva kombinacija spomenuli bismo simulaciju **krivulje zasićenja** uz $R_1=R_2=0$, ili simulaciju **suhog trenja** uz $R_1=R_2=0$ i $R_3=\infty$.



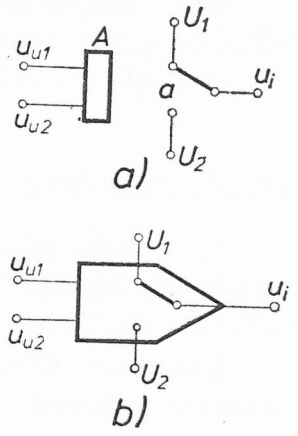
Sl. 14—32. Diodni sklop u ulaznoj grani računskog pojačala (a) i karakteristika (b)

Ako paralelno spojene diodne sklopove vežemo u **ulaznu granu** računskog pojačala prema sl. 14—32a, dobivamo sličnim razmatranjem jednadžbu:

$$u_i = -\frac{R_r}{R_3} u_u \quad \text{za} \quad U_2 > u_u > -U_1. \tag{14-52}$$

Za područje $u_u > U_2$ dioda D_2 vodi, pa su u ulaznom krugu prisutni paralelni otpornici R_2 i R_3:

$$u_i = -\frac{R_r\,(R_2+R_3)}{R_2 R_3} U_u \quad \text{za} \quad u_u > U_2. \tag{14-53}$$



Sl. 14—33. Shematski prikaz relejnog komparatora

Konačno, uz suprotan polaritet od $-u_u > U_1$ dioda D_1 vodi, pa R_1 i R_3 leže paralelno:

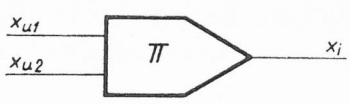
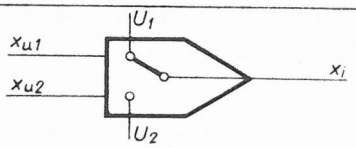
$$u_i = -\frac{R_r(R_1+R_3)}{R_1R_3}u_u \qquad \text{za } -u_u > U_1. \tag{14-54}$$

Na karakteristici tog sklopa na sl. 14—32b ucrtani su pravci s odgovarajućim nagibima u tri područja. Opet upozoravamo na poseban slučaj kad je $R_3=\infty$: to je krivulja **mrtvog pojasa.**

Relejni komparator. U svakom analognom računalu nalazi se i ovaj važan sklop koji izvodi logičku operaciju uspoređivanja. Ako je u elektromehaničkoj izvedbi, zove se diferencijalni relej. Na sl. 14—33a prikazana je načelna izvedba: već prema tome koji je od ulaznih napona u_{u1} i u_{u2} na namotu kotve A veći, kontakt a se preklopi i spoji izlaz na jedan od dva napona U_1 ili U_2. Time se ostvaruje funkcionalna ovisnost:

$$u_i = \begin{cases} U_1 & \text{za } u_{u1} > u_{u2}, \\ U_2 & \text{za } u_{u1} < u_{u2}. \end{cases} \tag{14-55}$$

Tablica 14—5. Simboli i jednadžbe nelinearnih računskih sklopova

ELEMENT	SIMBOL	JEDNADŽBA
multiplikator		$x_i = x_{u1} \cdot x_{u2}$
generator funkcija		$x_i = f(x_u)$
komparator		$x_i = \begin{cases} U_1, x_{u1} > x_{u2} \\ U_2, x_{u1} \leq x_{u2} \end{cases}$

Iako relejni komparator ima histerezu, a nagib mu je u ishodištu konačan, njime se dobro simulira signum-funkcija. Simbol mu je prikazan na sl. 14-33b.

U tablici 14—5 dani su simboli nelinearnih sklopova.

14.3.6. Simulacija nelinearnih sustava

U uvodu smo naglasili da je **simulacija nelinearnih sustava osnovna prednost analognih računala.** U ovom odjeljku prikazat ćemo na nekoliko primjera simulaciju kontinuiranih i nekontinuiranih nelinearnosti.

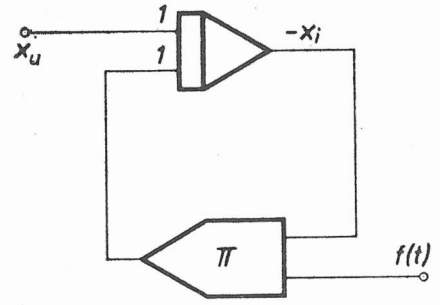
Linearne diferencijalne jednadžbe s promjenljivim koeficijentima možemo rješavati pomoću multiplikatora. Vrlo jednostavan oblik takve jednadžbe jest:

$$\dot{x}_i + f(t)\, x_i = x_u. \tag{14-56}$$

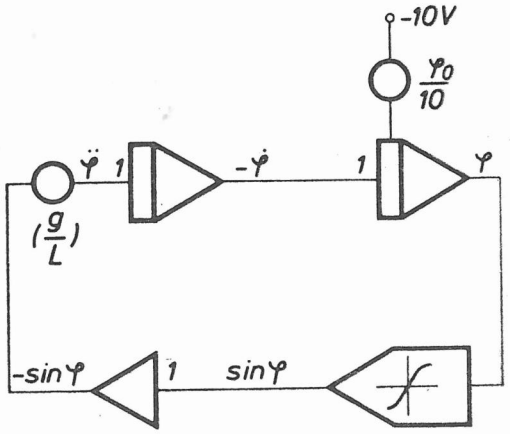
Taj izraz pretvorimo u oblik pogodan za programiranje:

$$\dot{x}_i = x_u - f(t)\, x_i. \tag{14-57}$$

Prema toj jednadžbi vrlo je jednostavno konstruirati blok-dijagram na sl. 14—34 Inače se cijeli postupak programiranja u biti ne razlikuje od već prikazanih postupaka.



Sl. 14—34. Blok-dijagram za simulaciju linearnog vremenski varijatnog sustava



Sl. 14—35. Blok-dijagram za simulaciju nelinearnog sustava

Mnoge nelinearne diferencijalne jednadžbe možemo riješiti pomoću generatora funkcija zavisne varijable. Kao primjer uzmimo poznatu jednadžbu njihala koja predstavlja konzervativni sustav drugoga reda:

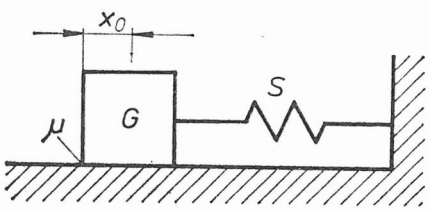
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \sin\varphi = 0, \tag{14-58}$$

gdje je g konstanta gravitacije a L dužina njihala. U obliku pogodnom za strojno programiranje ta jednadžba glasi:

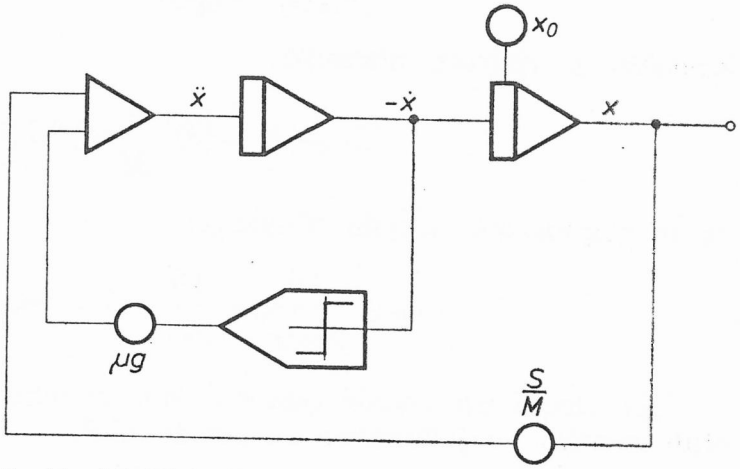
$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \sin\varphi. \tag{14-59}$$

Na sl. 14—35 vidimo strojni blok-dijagram koji predočava tu jednadžbu. Na slici je na izlaz desnog integratora narinut napon φ (0) koji odgovara položaju u trenutku $t=0$; njegovim uključivanjem počinje vremenska promjena φ, $\dot{\varphi}$ i $\ddot{\varphi}$. Svaku promjenu φ generator funkcija odmah pretvara u funkciju sin φ.

Primjer 14.3. Uzmimo sustav masa-opruga prema sl. 14—36. Vrijednost su parametara: masa utega $M=1$ kg, krutost opruge $S=40$ kg s^{-2}, koeficijent suhog trenja $\mu=0{,}2$. Početni je pomak utega iz položaja ravnoteže x (0)$=0{,}1$ m.



Sl. 14—36. Mehanički MS sustav sa suhim trenjem — primjer 14.3



Sl. 14—37. Blok-dijagram MS sustava sa suhim trenjem — primjer 14.3

Ravnoteža sila za taj nelinearni sustav glasi:

$$M\ddot{x}=-\mu gM \operatorname{sgn} \dot{x}-Sx,$$

što preuređujemo za strojno programiranje:

$$\ddot{x}=-\mu g \operatorname{sgn} \dot{x}-\frac{S}{M}x.$$

Uz uvrštene vrijednosti jednadžba glasi:

$$\ddot{x}=-0{,}2\cdot 9{,}81 \operatorname{sgn} \dot{x}-\frac{40}{1}x.$$

Ta je jednadžba predočena blok-dijagramom na sl. 14—37. Od trenutka $t=0$ uteg će prigušeno titrati jer je sila opruge u početku Sx (0) veća od sile suhog trenja μGM:

$$40\cdot 0{,}1>0{,}2\cdot 9{,}81.$$

Prema predlošku u primjeru 14.1. amplitudna mjerila pojedinih veličina biramo s obzirom na najveća odstupanja koja se očekuju. Kako je najveći pomak $x(0)=0{,}1$ m, amplitudno je mjerilo položaja:

$$a_x\leqslant\frac{10}{|x_{max}|}=\frac{10}{|0{,}1|}=100\ \mathrm{Vm^{-1}}.$$

Najveću brzinu dobit ćemo pomoću relacije:

$$|\dot{x}_{max}| \leqslant |x(0)| \sqrt{\frac{S}{M}} = |0{,}1| \sqrt{\frac{40}{1}} \simeq |0{,}63|,$$

odakle je amplitudno mjerilo brzine:

$$a_v \leqslant \frac{10}{|\dot{x}_{max}|} = \frac{10}{|0{,}63|} \simeq 16 \rightarrow a_v = 10\,\mathrm{Vm^{-1}s}.$$

Konačno je najveće ubrzanje:

$$|\ddot{x}_{max}| \leqslant |x(0)| \frac{S}{M} = |0{,}1| \frac{4}{1} = |4|,$$

pa je amplitudno mjerilo ubrzanja:

$$a_a \leqslant \frac{10}{|\ddot{x}_{max}|} = \frac{10}{|4|} \simeq 2{,}5 \rightarrow a_a = 2\,\mathrm{Vm^{-1}s^2}.$$

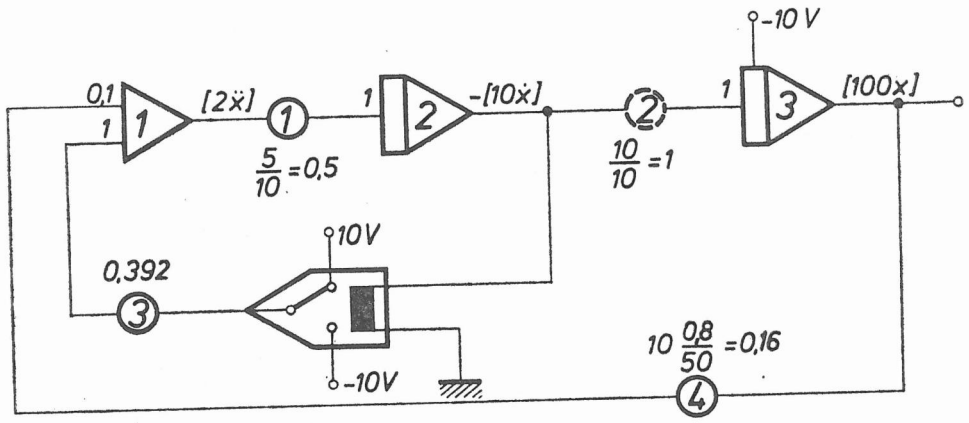
Na osnovi tih izvoda odabrali smo strojne veličine $[100\,x]$, $[10\,\dot{x}]$ i $[2\,\ddot{x}]$. Njih uvrstimo u jednadžbu ravnoteže sila[1]:

$$\frac{1}{2}[2\ddot{x}] = -1{,}96\,\mathrm{sgn}\,[10\dot{x}] - \frac{40}{100}[100x],$$

iz koje dobivamo konačnu strojnu jednadžbu:

$$[2\,\ddot{x}] = -3{,}92\,\mathrm{sgn}\,[10\,\dot{x}] - 0{,}8\,[100\,x].$$

Pomoću te jednadžbe postavljamo strojni blok-dijagram prema sl. 14—38. Ispred integratora 2 moramo ugraditi pojačanje 5, a ispred integratora 3 pojačanje 10; to je potrebno zato da bismo usaglasili strojne varijable $[2\,\ddot{x}]$, $[10\,\dot{x}]$ i $[100\,x]$ s



Sl. 14—38. Strojni blok-dijagram MS sustava sa suhim trenjem — primjer 14.3

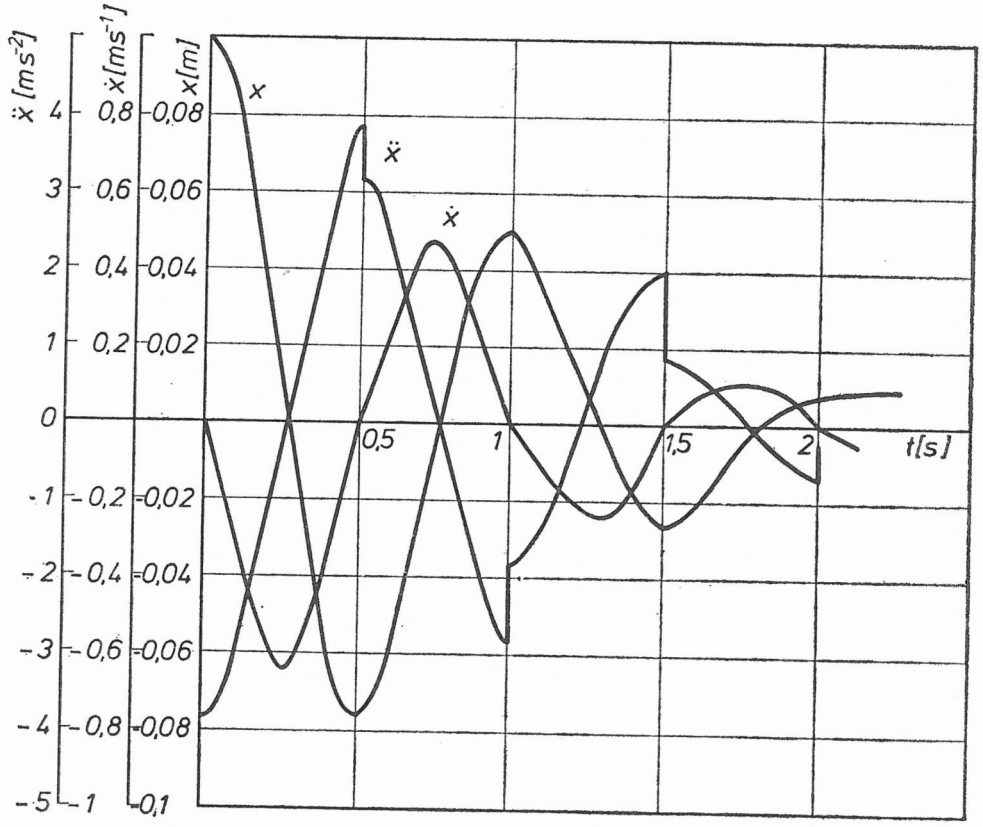
[1] Prvi član s desne strane strojne jednadžbe nije potrebno podijeliti sa 10 jer je $[10x]$ argument signum-funkcije, a vrijednost mu je ± 1.

fizikalnim varijablama $\ddot{x}$, $\dot{x}$ i x. Kako je ulaz u komparator u manjoj petlji povratne veze, nije potrebno smanjiti pojačanje za 1/5, ali je zato u većoj petlji povratne veze potrebno smanjiti pojačanje za 1/50. Pogodno je da 0,016 pomnožimo sa 10, a da na ulazu u pojačalo 1 namjestimo pojačanje 0,1. Tako ćemo na potenciometru 4 namjestiti vrijednost:

$$10 \cdot \frac{0{,}8}{50} = 0{,}16.$$

Kao komparator služi elektromehanički relej: ulazni se napon $-[10\,\dot{x}]$ uspoređuje s nul-naponom (uzemljenje), pa promjena smjera struje kroz namot releja prebacuje njegov kontakt na 10 V, odnosno na -10 V, čime se simulira signum-funkcija. Množenjem izlazne veličine komparatora s vrijednošću 0,392 na potenciometru 3 dobivamo koeficijent signum-funkcije:

$$|10|\,0{,}392 = 3{,}92.$$



Sl. 14—39. Grafičko rješenje dinamike mehaničkog MS sustava sa suhim trenjem — primjer 14.3

Kako su vrijednosti na potenciometrima 1 i 2 mnogo veće od jedan, pogodno je da se ne radi u stvarnom vremenu, već se proces mora usporiti. Zato se odabire $\beta = 10$, pa tako otpada potenciometar 2 koji je namješten na jedan.

Na kraju dajemo i grafičko rješenje (sl. 14—39) dobiveno na analognom računalu TR-20 (Electronic Associates, Inc.). Početne uvjete namjestimo na vrijednost $[100\,x]=[100\cdot 0{,}1]=10$ V. Vidimo da je krivulja za $\ddot{x}$ izrazito nelinearna; uzastopnim integracijama te se nelinearnosti sve više izglađuju. Krivulje za $\dot{x}$ i x sastoje se od polusinusoida, pa se može primijetiti izlomljen tok krivulja. To smo obradili u odjeljku 13.4 (v. sl. 13—22). Konačno, na krivulji od x preostaje statička greška: gibanje se smiri kad sila opruge $|\,Sx\,|$ postane manja od sile suhog trenja $|\,\mu gM\,|$.

15. Prilog—Povezanost vremenskog i frekvencijskog područja

Should auld acquaintance be forgot,
And never brought to min'?
Should auld acquaintance be forgot,
And auld lang syne?

R. Burns, »Auld lang syne«

U uvodnim poglavljima razmatrali smo dinamičke sustave i u vremenskom i u frekvencijskom području, a ukazali smo i na to kako su ta dva pristupa povezana pomoću Laplaceove transformacije. U ovom poglavlju želimo ukazati na dublji smisao transformacije vremenskih funkcija u funkcije kompleksne frekvencije, odnosno na povezanost metoda u vremenskom i u frekvencijskom području.

Većina se modernih metoda u teoriji automatske regulacije razvila u okviru elektrotehnike, pa je tako W. Steinmetz uveo u teoriju izmjeničnih struja pojam impedancije. Proučavanje frekvencijskih funkcija u sustavima sa sinusnom pobudom proširilo se kasnije u dojavnoj tehnici i na sve periodske pojave, jer se te pojave mogu pomoću Fourierove analize prikazati nizom sinusnih funkcija s osnovnom frekvencijom i višim harmonicima, tj. sa spektrom diskretnih frekvencija.

U novije se vrijeme u dojavnoj tehnici pojavila potreba za proučavanjem aperiodskih pojava u kojima se pojavljuju funkcije impulsnog obilježja. U teoriji automatske regulacije bilo je uvijek tako, jer je proučavanje prijelaznih pojava s aperiodskim funkcijama osobito važno za ocjenu stabilnosti sustava. Prijelazne su se pojave od početka proučavale u vremenskom području, ali je problem postavljanja i rješavanja diferencijalnih jednadžbi ograničavao daljnju razradu metoda u vremenskom području.

Srećom se pristup u frekvencijskom području može pomoću Fourierova integrala proširiti i na aperiodske funkcije — promatrajući aperiodsku funkciju kao granični slučaj periodske funkcije kad period ponavljanja teži beskonačnom. Tako aperiodsku funkciju možemo prikazati nizom harmonika kontinuiranog spektra frekvencija od $-\infty$ do ∞. Međutim, ograničenost je te tzv. Fourierove transformacije u tome što se neke funkcije — najzanimljivije u tehničkoj praksi — ne mogu transformirati (konvergencija!). Osim toga, vladanje sustava promatramo od trenutka $t=-\infty$, pa ne možemo uzeti u obzir prijelazne pojave koje nastaju u nekom početnom trenutku $t=0$ nakon poremećaja.

Taj problem rješavamo pomoću Laplaceove transformacije koja je srodna Fourierovoj transformaciji. Laplaceovom transformacijom svaka se vremenska funkcija prilikom transformacije u frekvencijsku funkciju prigušuje, čime je osigurana konvergencija. Osim toga, i pored integracije vremenske funkcije uzimamo od trenutka $t=0$, pri čemu je prethodno vladanje sustava zamijenjeno početnim uvjetima. To je osobito važno u regulacijskim sustavima u kojima se proučavaju **problemi početnih uvjeta** što se odigravaju od trenutka $t=0$ kad nastupi poremećaj.

Prema tome, logičan put do dubljeg razumijevanja povezanosti vremenskog i frekvencijskog pristupa pomoću Laplaceove transformacije počinje od Fourierove analize preko Fourierova integrala. Oni se mogu fizikalno objasniti, dok je Laplaceova transformacija čista matematička metoda koja nema fizikalno značenje.

15.1. Fourierov red

Ovo izlaganje započinjemo Fourierovim redom koji ima zorno fizikalno značenje, a već nam je poznat. U osnovnim crtama prikazat ćemo trigonometrijski i eksponencijalni oblik Fourierova reda.

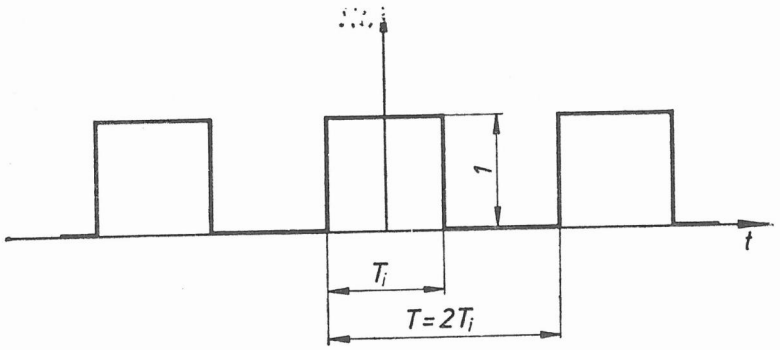
Uzmimo kao primjer bilo koju periodsku funkciju, kao što je pravokutni impulsni niz prema sl. 15—1 koji se najčešće susreće. Period ponavljanja niza označavamo sa T, a trajanje impulsa sa T_i. Prema Fourierovoj analizi, svaku periodsku funkciju, pa tako i ovu, možemo rastaviti u red sinusnih i kosinusnih članova[1]:

$$f(t)=A_0+A_1\cos\Omega t+A_2\cos 2\Omega t+\ldots+$$
$$+B_1\sin\Omega t+B_2\sin 2\Omega t+\ldots \qquad (15\text{-}1)$$

Red ima neizmjerno mnogo članova sinusa i kosinusa, a frekvencije su mu višekratnici osnovne frekvencije $\Omega/2\pi$. Izraz (15-1) možemo pisati i skraćeno:

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\Omega t+B_n\sin n\Omega t). \qquad (15\text{-}2)$$

Koeficijenti A_0, A_n i B_n predstavljaju amplitude pojedinih titranja, i **osnovni je zadatak Fourierove analize da se oni izračunaju.**



Sl. 15—1. Pravokutni impulsni niz

Da bismo odredili A_0 moramo svaki član jednadžbe (15-1) integrirati preko perioda ponavljanja T koji je s osnovnom frekvencijom povezan relacijom $T=2\pi/\Omega$. Kako je:

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos n\Omega t\,dt=0,$$
$$\int_{-T/2}^{T/2}\sin n\Omega t\,dt=0, \qquad (15\text{-}3)$$

[1] U ovoj i u slijedećim jednadžbama kružna je frekvencija osnovna frekvencija periodske funkcije $f(t)$. Ona je konstantne veličine i zato je označavamo velikim slovom Ω. Kasnije će, prilikom prijelaza na Fourierov integral, kružna frekvencija biti promjenljiva veličina, pa ćemo je označiti malim slovom ω.

svi članovi reda s desne strane nestaju, osim prvoga, pa je:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} A_0 dt = A_0 T, \tag{15-4}$$

i dalje:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt. \tag{15-5}$$

Veličina A_0 predstavlja srednju vrijednost funkcije $f(t)$ u periodu T, što se moglo i očekivati, jer je to istosmjerna komponenta. Period integracije uzimamo od $-T/2$ do $T/2$ kako bismo pojednostavnili kasnije izvode.

Da bismo izračunali A_n, moramo najprije sve članove jednadžbe (15-1) pomnožiti sa $\cos m\Omega t$ i integrirati preko perioda T. Budući da je:

$$\begin{aligned}
&\int_{-T/2}^{T/2} \cos m\Omega t dt = 0,\\
&\int_{-T/2}^{T/2} \cos n\Omega t \cos m\Omega t dt = 0 \quad \text{za } m \neq n,\\
&\int_{-T/2}^{T/2} \sin n\Omega t \cos m\Omega t dt = 0,
\end{aligned} \tag{15-6}$$

opet otpadaju svi članovi s desne strane u jednadžbi (15-1) osim člana:

$$\int_{-T/2}^{T/2} A_n \cos n\Omega t \cos m\Omega t\,dt = A_n \frac{T}{2} \quad \text{za } m=n, \tag{15-7}$$

što je i bila svrha, prvo, množenja sa $\cos m\Omega t$ i drugo, integracije. Član A_n dobit ćemo jednostavno iz preostala dva člana:

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\Omega t\,dt \quad \text{za } n=1, 2, \ldots \tag{15-8}$$

Na sličan način množimo jednadžbu (15-1) sa $\sin m\Omega t$ i integriramo preko perioda T, pa dobivamo izraz za B_n:

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\Omega t\,dt \quad \text{za } n=1, 2, \ldots \tag{15-9}$$

Primjer 15.1. Uzimamo pravokutni impulsni niz prema sl. 15—1, gdje je trajanje impulsa $T_i = T/2$. Amplituda impulsa neka je jednaka jedan u granicama

između $-T_i/2$ i $T_i/2$, a izvan tog područja neka je jednaka nuli. Primjenom gornjih izraza izračunamo koeficijente:

$$A_0=\frac{1}{T}\int_{-T_i/2}^{T_i/2} f(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} 1\cdot dt=\frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2}=\frac{1}{2},$$

$$A_n=\frac{2}{T}\int_{-T_i/2}^{T_i/2} f(t)\cos n\Omega t\,dt=\frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} 1\cdot\cos n\Omega t\,dt=$$

$$=\frac{2}{T}\cdot\frac{1}{n\Omega}\left|\sin n\Omega t\right|_{-T/4}^{T/4}=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Budući da je $f(t)$ taka funkcija, svi koeficijenti B_n jednaki su nuli. Uvrštenjem A_0 i A_n u jednadžbu (15-2) dobit ćemo konačan izraz:

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\cos\Omega t-\frac{1}{3}\cos 3\Omega t+\frac{1}{5}\cos 5\Omega t-\ldots\right].$$

U tablici 15—1 razvili smo u Fourierov red nekoliko jednostavnih periodskih funkcija koje su zanimljive i u regulacijskoj tehnici. Uz svaki periodski niz uveden je i **omjer otipkavanja** $v=T/T_i$.

Jednadžbe (15-1), (15-5), (15-8) i (15-9) predstavljaju **trigonometrijski oblik Fourierova reda.** Radi pojednostavljenja daljnjih izvoda pogodniji je **eksponencijalni oblik** koji ćemo dobiti ako sinus i kosinus izrazimo pomoću Eulerovih relacija. Eksponencijalni je oblik inače nepraktičan, jer se uvode hipotetske negativne frekvencije.

Pretvorbu izraza:

$$A_n\cos n\Omega t=\frac{A_n}{2}\left[e^{jn\Omega t}+e^{-jn\Omega t}\right]$$

$$B_n\sin n\Omega t=\frac{B_n}{2j}\left[e^{jn\Omega t}-e^{-jn\Omega t}\right] \qquad (15\text{-}10)$$

uvrstimo u jednadžbu (15-2):

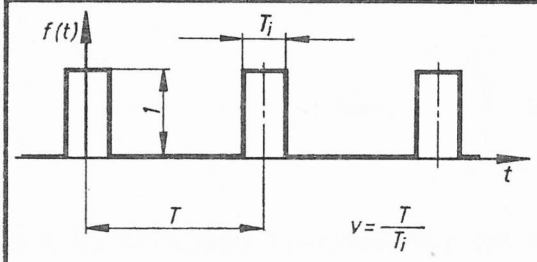
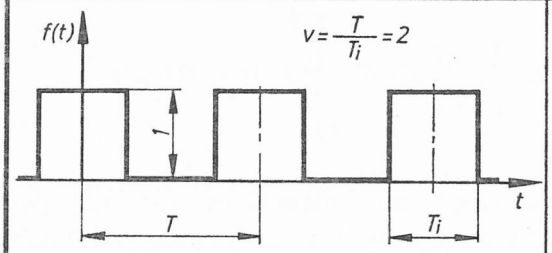
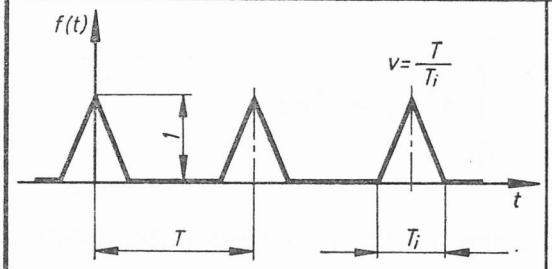
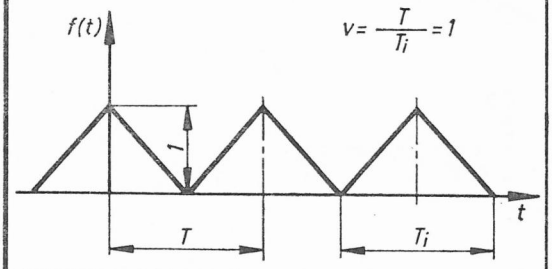
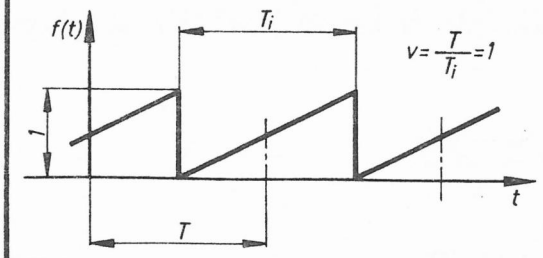
$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_n-jB_n}{2}\,e^{jn\Omega t}+\frac{A_n+jB_n}{2}\,e^{-jn\Omega t}\right]. \qquad (15\text{-}11)$$

Isto tako i članove A_n i B_n pišemo, prema jednadžbama (15-8) i (15-9), u eksponencijalnom obliku, i to njihovu poloviču razliku i zbroj:

$$\frac{A_n-jB_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,(\cos n\Omega t-j\sin n\Omega t)\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-jn\Omega t}\,dt,$$

$$\frac{A_n+jB_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,(\cos n\Omega t+j\sin n\Omega t)\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{jn\Omega t}\,dt. \qquad (15\text{-}12)$$

Tablica 15—1. Fourierov razvoj impulsnih nizova

GRAFIČKI PRIKAZ	FOURIEROV RAZVOJ
	$f(t) = \frac{1}{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin\frac{\pi n}{v} \cos n\omega t$
	$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \dots\right)$
	$f(t) = \frac{1}{2v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(1 - \cos\frac{\pi n}{v}\right)\cos n\omega t$
	$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\omega t - \frac{1}{3^2}\cos 3\omega t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t - \dots\right)$
	$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\sin\omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t - \dots\right)$

To uvrstimo u jednadžbu (15-11):

$$f(t)=A_0+\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}e^{jn\Omega t}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,e^{-jn\Omega t}\,dt+$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-jn\Omega t}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,e^{jn\Omega t}\,dt. \tag{15-13}$$

U gornjem se izrazu ništa ne mijenja ako promijenimo predznak od n u trećem članu s desne strane:

$$f(t)=A_0+\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}e^{jn\Omega t}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,e^{-jn\Omega t}\,dt+\frac{1}{T}\sum_{n=-1}^{-\infty}e^{jn\Omega t}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,e^{-jn\Omega t}\,dt. \tag{15-14}$$

Ovaj jednostavan postupak omogućuje nam da jednadžbu (15-13) predočimo kao zbroj članova s indeksom od $-\infty$ do ∞ jer se član A_0 prema jednadžbi (15-5) uklapa u vrijednost indeksa $n=0$:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{jn\Omega t}}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,e^{-jn\Omega t}\,dt. \tag{15-15}$$

To je **eksponencijalni oblik Fourierova reda,** a možemo ga pisati na slijedeći način:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\Omega t}$$

$$C_n(j\Omega)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,e^{-jn\Omega t}\,dt. \tag{15-16}$$

Veličina $C_n(j\,\Omega)$ ima određeno značenje jer predstavlja **spektralnu amplitudu** pojedinih članova reda. Uspoređujući $C_n(j\Omega)$ iz izraza (15-16) s izrazima (15-12) dobivamo jednostavnu povezanost:

$$C_n=\frac{A_n-jB_n}{2},$$

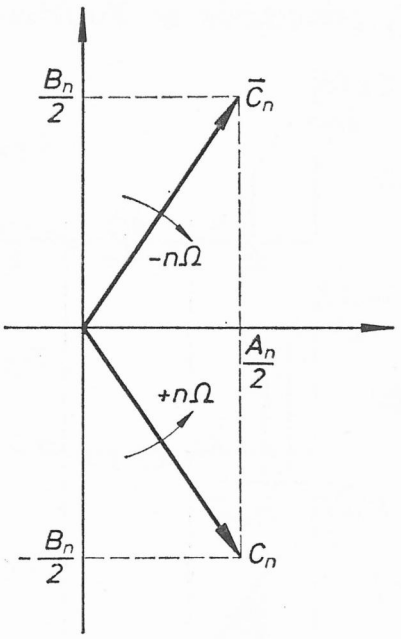
$$\overline{C}_n=\frac{A_n+jB_n}{2}, \tag{15-17}$$

gdje je sa $\overline{C}_n$ označena konjugirano kompleksna vrijednost C_n.

Ako izraz za $f(t)$ u jednadžbi (15-16) razvijemo po rastućim frekvencijama, dobivamo sasvim formalno:

$$f(t)=C_0+C_1e^{j\Omega t}+\bar{C}_1e^{-j\Omega t}+C_2e^{j2\Omega t}+\bar{C}_2e^{-j2\Omega t}+\ldots, \qquad (15\text{-}18)$$

gdje C_1 i $\bar{C}_1$ predstavljaju amplitude prvog para harmonika, C_2 i $\bar{C}_2$ amplitude drugog para harmonika, itd. Te parove možemo prikazati i u Gaussovoj ravnini kao verzore (sl. 15—2). Par verzora iste kružne frekvencije $n\Omega$ giba se u obratnom smislu: $C_ne^{jn\Omega t}$ u smislu suprotnom od gibanja kazaljke na satu, a $\bar{C}_ne^{-jn\Omega t}$ u smislu gibanja kazaljke na satu.



Sl. 15—2. Verzori konjugirano kompleksnih koeficijenata

Amplitudu $C_n(j\Omega)$ možemo zorno prikazati i na dijagramu kao funkciju kružne frekvencije. Takva jednostavna funkcija prikazana je na sl. 15—1. Ako je integriramo preko perioda T, funkcija $f(t)$ ima vrijednost $f(t)=1$ u granicama između $-T_i/2$ i $T_i/2$, a izvan tih granica vrijednost je $f(t)=0$. Integrirajući izraz za C_n u jednadžbi (15-16), dobivamo:

$$C_n(j\Omega)=\frac{1}{T}\int_{-T_i/2}^{T_i/2}e^{-jn\Omega t}\,dt=\frac{1}{T}\left[-\frac{1}{jn\Omega}\right]\left[e^{-jn\Omega T_i/2}-e^{-jn\Omega T_i/2}\right]=$$

$$=\frac{T_i}{T}\cdot\frac{\sin n\Omega T_i/2}{n\Omega T_i/2}. \qquad (15\text{-}19)$$

Udaljenost dvaju susjednih harmonika označimo sa $\Delta\Omega$. Ako je izračunamo:

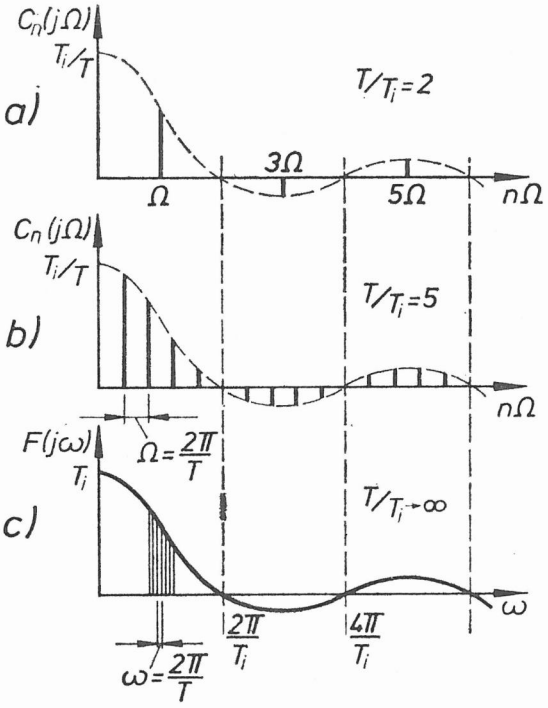
$$\Delta\Omega=\Omega_{n+1}-\Omega_n=\frac{2\pi(n+1)}{T}-\frac{2\pi n}{T}=\frac{2\pi}{T}, \qquad (15\text{-}20)$$

vidimo da je $\Delta\Omega$ jednaka osnovnoj kružnoj frekvenciji Ω. Iako je to trivijalan zaključak, važno je da ga zapamtimo zbog izvoda Fourierova integrala.

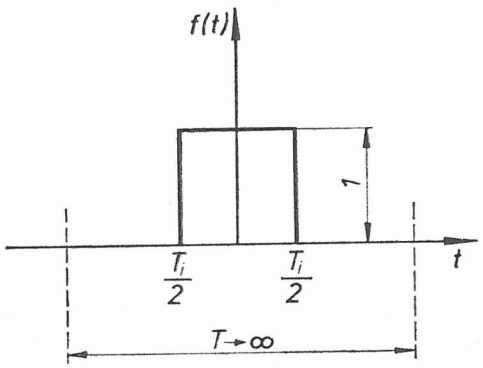
Na dijagramu na sl. 15—3 prikazan je frekvencijski spektar od $C_n(j\Omega)$, i to na sl. 15—3a za omjer $T/T_i=2$ i na sl. 15—3b za omjer $T/T_i=5$. Isprekidano je naznačena obvojnica spektralnih amplituda $C_n(j\Omega)$. Zrcalno na ordinatu preslikava se frekvencijski spektar za negativne frekvencije.

15.2. Fourierov integral

Pomoću Fourierova reda opisana je periodska funkcija, npr. pravokutni impulsni niz na sl. 15—1 s periodom ponavljanja T. U **aperiodske funkcije,** npr. pravokutnog impulsa na sl. 15—4, koja ima neizmjerno velik period ponavljanja T, primjenjuje se **Fourierov integral.**



Sl. 15—3. Frekvencijski spektar pravokutnog impulsnog niza



Sl. 15—4. Pravokutni impuls

Ako povećavamo period ponavljanja T, onda iz jednadžbe (15-20) proizlazi da se razmak frekvencija $\Delta\Omega=\Omega$ smanjuje; uz $T\to\infty$, $\Delta\Omega\to 0$ pa imamo dvostruki granični prijelaz. Prema tome moramo biti veoma oprezni ako želimo granični prijelaz za aperiodsku funkciju $f(t)$ izračunati pomoću izraza:

$$f(t)=\lim_{T\to\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{jn\Omega t}}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,e^{-jn\Omega t}\,dt\right]. \tag{15-21}$$

Budući da prema jednadžbi (15-16) $C_n(j\Omega)\to 0$ kad $T\to\infty$, i pojam spektralne amplitude $C_n(j\Omega)$ gubi smisao. Zato ćemo umjesto $C_n(j\Omega)$ uvesti pojam **spektralne gustoće** kao omjera:

$$F'=\frac{C_n}{\Delta\Omega}. \tag{15-22}$$

Iz jednadžbe (15-16) za $C_n(j\Omega)$ i izraza (15-20) za $\Delta\Omega$ lako je uočiti da njihov omjer F' ima konačnu vrijednost jer se T krati.

Potražit ćemo granični prijelaz za $f(t)$ prema jednadžbi (15-16) koju smo i u brojniku i u nazivniku pomnožili sa $\Delta\Omega$:

$$f(t)=\lim_{\substack{\Delta\Omega\to 0\\ T\to\infty}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{C_n}{\Delta\Omega}e^{jn\Omega t}\Delta\Omega. \tag{15-23}$$

Kod graničnog prijelaza $\Delta\Omega\to 0$, a $n\to\infty$, ali umnožak $n\Delta\Omega=n\Omega$ koji se javlja u gornjem izrazu ima konačnu vrijednost; on postaje kontinuirana varijabla $\omega=n\Omega$ koju pišemo malim slovom. Uvrštenjem ω u jednadžbu (15-23) dobivamo:

$$f(t)=\lim_{\Delta\Omega\to 0}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}F'(j\omega)\,e^{j\omega t}\Delta\Omega. \tag{15-24}$$

Na graničnom prijelazu udaljenost između dviju susjednih harmonika $\Delta\Omega$ teži diferencijalnoj veličini $\mathrm{d}\omega$, tj. $\Delta\Omega\to\mathrm{d}\omega$:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F'(j\omega)\,e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega. \tag{15-25}$$

To je **Fourierov integral.** Ostaje da još odredimo $F'(j\omega)$, i to na slijedeći način:

$$F'(j\omega)=\lim_{\substack{\Delta\Omega\to 0\\ T\to\infty}}\frac{C_n}{\Delta\Omega}=\lim_{\substack{\Delta\Omega\to 0\\ T\to\infty}}\frac{1}{T\Delta\Omega}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,e^{-jn\Omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{15-26}$$

Zamjenom $T\Delta\Omega=2\pi$ iz jednadžbe (15-20) dobit ćemo dalje:

$$F'(j\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{15-27}$$

Jednadžbe (15-25) i (15-27) čine zajedno **Fourierovu transformaciju;** zamjenom $F(j\omega)=2\pi F'(j\omega)$ dobivamo uobičajeni oblik Fourierove transformacije:

$$\begin{aligned} F(j\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t,\\ f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega. \end{aligned} \tag{15-28}$$

Izraz »transformacija« prikladan je jer izraz (15-28) transformira funkciju vremena $f(t)$ pomoću nepravog integrala u funkciju frekvencije $F(j\omega)$. To je »direktna transformacija«, i označavamo je sa:

$$F(j\omega)=\mathcal{F}[f(t)]. \tag{15-29}$$

Donji dio izraza (15-28) transformira funkciju frekvencije $F(j\omega)$ pomoću nepravog integrala u funkciju vremena $f(t)$. To je »obratna transformacija«, i označavamo je sa:

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]. \tag{15-30}$$

Uvjet za postojanje nepravog integrala od $F(j\omega)$ u jednadžbi (15-28) jest da je zadovoljena nejednadžba:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt<\infty. \tag{15-31}$$

Spektralnu gustoću $F(j\omega)$ kao funkciju kontinuirane kružne frekvencije možemo prikazati i na dijagramu. Uzmimo kao primjer funkciju na sl. 15—4, pa nađimo $F(j\omega)$:

$$F(j\omega)=\int_{-T_i/2}^{T_i/2} e^{-j\omega t}\,dt=-\frac{1}{j\omega}[e^{-j\omega T_i/2}-e^{j\omega T_i/2}]=T_i\frac{\sin\omega T_i/2}{\omega T_i/2}. \tag{15-32}$$

Taj je izraz formalno nalik izrazu (15-19), što se moglo i očekivati, jer smo kod pravokutnog impulsnog niza povećavali samo period ponavljanja T. Prema tome je i dijagram na sl. 15—3c nalik prethodnim dijagramima; suvišno je spominjati da smo prije imali diskretne frekvencije $n\Omega$, a ovdje se radi o kontinuiranoj varijabli ω. Kompleksnoj diskretnoj spektralnoj amplitudi $C_n(j\Omega)$ periodske funkcije odgovara kompleksna kontinuirana spektralna gustoća $F(j\omega)$ aperiodske funkcije.

Sinusna prijenosna funkcija. Fourierova transformacija je teorijska podloga za metodu prisilnih oscilacija, odnosno — što je isto — za frekvencijski odziv. To ćemo vidjeti pomoću integrala konvolucije (v. odjeljak 3.4) koji glasi:

$$x_i(t)=\int_0^t g(t-\tau)\,x_u(\tau)\,d\tau, \tag{3-101}$$

gdje je $x_u(t)$ ulazna veličina, $x_i(t)$ izlazna veličina, a $g(t)$ težinska funkcija sustava. Primjenom Fourierove transformacije na izraz (3-101) dobivamo:

$$\mathcal{F}[x_i(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\,dt\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\,x_u(\tau)\,d\tau\right]. \tag{15-33}$$

Granice integracije u integralu konvolucije proširili smo od $-\infty$ do ∞, jer težinska funkcija $g(t-\tau)$ ionako izlučuje[1] vrijednost $x_u(t)$ u trenutku $t=\tau$. Zamjenom varijable $\lambda=(t-\tau)$ i promjenom redoslijeda integracije dobit ćemo:

$$\mathcal{F}[x_i(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_u(t-\lambda)\, e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\lambda=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_u(\tau)\, e^{-j\omega(\lambda-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\lambda. \qquad (15\text{-}34)$$

Odjeljivanjem varijabli λ i τ:

$$X_i(j\omega)=\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e^{-j\omega\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_u(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]=G(j\omega)\,X_u(j\omega) \qquad (15\text{-}35)$$

dobivamo **sinusnu prijenosnu funkciju sustava kao Fourierov transformat impulsnog odziva sustava.** $G(j\omega)$ je ujedno omjer Fourierova transformata izlazne i ulazne sinusne funkcije, što je i bila prvobitna postavka prema jednadžbi (5-19).

Nedostatak je Fourierove transformacije što se ona ne može primijeniti na mnoge funkcije koje su zanimljive u tehničkoj praksi. Naime, transformirati se mogu samo funkcije kojih nepravi integrali konvergiraju, dakle imaju konačne vrijednosti.

Drugi je nedostatak ove transformacije u tome što se integracija provodi u vremenu od $-\infty$ do ∞, pa su početni uvjeti vrijedili uz $t=-\infty$, a otada je svaka prijelazna pojava nestala. Možemo prema tome obrađivati samo probleme »opuštenih« sustava; u spremnicima tih sustava nema pohranjene energije koja bi se odjednom oslobodila. Drugim riječima, početni uvjeti ne mogu se uzeti u obzir.

15.3. Laplaceova transformacija

Fourierovoj transformaciji srodna je Laplaceova transformacija. I s jednom i s drugom postižemo transformaciju vremenskih funkcija u frekvencijske, i obratno. U praksi je međutim značajnije svojstvo i jedne i druge transformacije da operacije derivacije i integracije pretvaraju u algebarske operacije množenja i dijeljenja operatorom.

Laplaceova transformacija otklanja nedostatke koje smo spomenuli u Fourierove transformacije. Naime, funkcija $f(t)$ **množi se s prigušnim članom** $e^{-\sigma t}$ prije transformacije, gdje je $\sigma>0$. Fourierova transformacija tako prigušene funkcije daje izraz:

$$\mathcal{F}[f(t)\, e^{-\sigma t}]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} (t)\, e^{-(\sigma+j\omega)\,t}\,\mathrm{d}t=F(\sigma+j\omega). \qquad (15\text{-}36)$$

[1] V. teorem izlučivanja (3-11).

Transformat je dakle funkcija kompleksne frekvencije $(\sigma+j\omega)$. Ako izraz:

$$s=\sigma+j\omega \tag{15-37}$$

označimo kao novu nezavisnu varijablu, postigli smo to da se mnoge funkcije — kojih nepravi integrali nisu konvergentni — mogu transformirati.

Fourierova transformacija prema jednadžbama (15-28) je »dvostrana« jer obje granice integracije teže beskonačnom. Kad koristimo Laplaceovu transformaciju u regulacijskim problemima, uobičajeno je da se služimo »jednostranom« transformacijom gdje se **donja granica integracije pomiče na nulu**[1]. Naime poznavanjem početnih uvjeta u trenutku $t=0$ kao i pobudne funkcije za $t>0$, može se ocijeniti ponašanje regulacijskog sustava bez poznavanja toka funkcije za $-\infty<t<0$. To spada u »probleme početnih uvjeta«.

Primijenjujući gornje postavke, dobivamo direktnu transformaciju:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt \tag{15-38}$$

koju označavamo sa:

$$F(s)=\mathcal{L}\,[f(t)]. \tag{15-39}$$

Kod obratne transformacije potrebno je da u izraz za $f(t)$ u jednadžbi (15-28) umjesto $d\omega$ uvrstimo ds/j, jer je:

$$ds=d\,(\sigma+j\omega)=j\,d\omega. \tag{15-40}$$

Osim toga, granice integracije mijenjaju se od $\sigma-j\infty$ do $\sigma+j\infty$. Tim promjenama dobivamo obratnu transformaciju:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\,e^{st}\,ds, \tag{15-41}$$

odnosno simbolički:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\,[F(s)]. \tag{15-42}$$

I ovdje je uvjet za postojanje nepravog integrala u jednadžbi (15-38) da je zadovoljena nejednadžba:

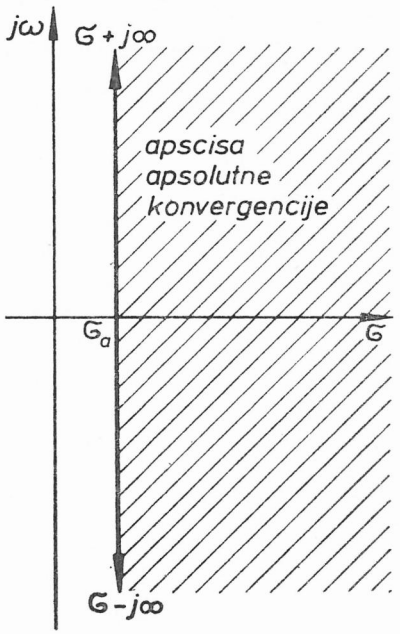
$$\int_0^\infty |f(t)|\,e^{-\sigma t}\,dt<\infty, \tag{15-43}$$

gdje $\sigma>\sigma_a$. U ravnini kompleksne varijable na sl. 15—5 σ_a predstavlja tzv. **apscisu konvergencije.** To je najmanja vrijednost σ za koju je Laplaceov transformat $F(s)$ apsolutno konvergentan, pa crtkano područje desno od apscise σ_a nazivamo i poluravnina konvergencije.

---

[1] Dvostrana Laplaceova transformacija povoljnija je kod primjene stohastičkih metoda u regulacijskim problemima.

Poseban je slučaj Laplaceove transformacije kad se s mijenja samo duž okomice: $s=\sigma+j\omega$, gdje je σ čvrsta vrijednost. Ako je $\sigma=0$, pa se s mijenja samo duž imaginarne osi, dobivamo Fourierovu transformaciju.



Sl. 15—5. Područje konvergencije u ravnini kompleksne varijable

Prijenosna funkcija. Primjenom Laplaceove transformacije na integral konvolucije prema jednadžbi (3-101):

$$\mathcal{L}\,[x_i\,(t)]=\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t\int_0^t x_u\,(\tau)\,g\,(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad (15\text{-}44)$$

dobivamo postupkom koji teče kao i kod izvoda teorema konvolucije u odjeljku 4.1., izraz:

$$X_i\,(s)=G\,(s)\,X_u\,(s). \qquad (15\text{-}45)$$

Prijenosna funkcija sustava $G\,(s)$ je Laplaceov transformat impulsnog odziva sustava. Ona ujedno predstavlja omjer Laplaceova transformata izlazne i ulazne funkcije, pa smo je kao takvu postavili u jednadžbi (4-78).

Literatura

Abecednim redom navedeni su autori i naslovi knjiga koje se spominju u tekstu, odnosno koje predstavljaju standardna djela iz područja automatske regulacije u svijetu. Nazivi poznatih izdavača napisani su skraćeno.

1. Ammon, W.: Schaltungen der Analogrechentechnik. R. Oldenbourg, München, 1966.
2. Andersen, B. W.: The Analysis and Design of Pneumatic Systems. J. Wiley, New York, 1967.
3. Ayres, F.: Theory and Problems of Differential Equations. Schaum, New York, 1972.
4. Blanuša, D.: Viša matematika I i II. Tehnička knjiga, Zagreb, 1963, 1965, 1969.
5. Bleisteiner, G., von Mangoldt, W.: Handbuch der Regelungstechnik. Springer-Verlag, Berlin, 1961.
6. Chestnut, H., Mayer, R.: Servomechanisms and Regulating System Design. J. Wiley, New York, 1955.
7. D'Azzo, J. J., Houpis, G. H.: Feedback Control System Analysis and Design. McGraw-Hill, New York, 1966.
8. De Russo, P. M., Roy, R. J., Close, C. M.: State Variables for Engineers. J. Wiley, New York, 1965.
9. Doebelin, E. O.: Dynamic Analysis and Feedback Control. McGraw-Hill, New York, 1962.
10. Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. R. Oldenbourg, München, 1962.
11. Egorov, K. B.: Osnovi teoriji avtomatičeskogo regulirovanija. Energija, Moskva, 1967.
12. Elgerd, O. I.: Control System Theory. McGraw-Hill, New York, 1967.
13. Eljsgolc, L. E.: Diferencijalnije uravnenija. GITTL, Moskva, 1957.
14. Faisandier, J.: Mécanismes hydrauliques et électrohydrauliques. Dunod, Paris, 1970.
15. Feljdbaum, A. A., i dr.: Teoretičeskije osnovi svjazi i upravljenija. GIFML, Moskva, 1963.
16. Föllinger, O.: Nichtlineare Regelungen. R. Oldenbourg, München, 1969.
17. Föllinger, O.: Regelungstechnik, Elitera-Verlag, Berlin, 1972.
18. Fraunberger, F.: Regelungstechnik. B. G. Teubner, Stuttgart, 1967.
19. Gardner, M. F., Barnes, J. L.: Transients in Linear Systems. J. Wiley, New York, 1942.
20. Gibson, J. E., Tuteur, F. B.: Control System Components. McGraw-Hill, New York, 1958.
21. Gibson, J. E.: Nonlinear Automatic Control. McGraw-Hill, New York, 1963.
22. Gille, J. C., Pelegrin, M., Decaulne, P.: Théorie et Technique des Asservissements. Dunod, Paris, 1958.
23. Guillon, M.: Etude et Determination des Systemes Hydrauliques. Dunod, Paris, 1961.
24. Gupta, S. C., Hassdorff, L.: Fundamentals of Automatic Control. J. Wiley, New York, 1970.
25. Guzenko, A. I.: Osnovi teoriji avtomatičeskogo regulirovanija. Višaja škola, Moskva, 1967.
26. Haug, A.: Elektronisches Messen mechanischer Grössen. C. Hanser, München, 1969.
27. Healey, M.: Principles of Automatic Control. The English Universities Press, London, 1967.
28. Hyndman, D. E.: Analog and Hybrid Computing. Pergamon Press, Oxford, 1970.
29. James, M. M., Nichols, R., Phillips, R. S.: Theory of Servomechanisms. McGraw-Hill, New York, 1947.
30. Johnson, C. L.: Analog Computer Techniques. McGraw-Hill, New York, 1963.
31. Karplus, W. J., Soroka, W. W.: Analog Methods. McGraw-Hill, New York, 1959.
32. Krasov, I. M.: Gidravličeskije elementi v sistemah upravljenija. Mašinostrojenije, Moskva, 1967.

33. Kuzovkov, N. T.: Dinamika sistem avtomatičeskogo upravljenija. Mašinostrojenije, Moskva, 1968.
34. Kreyszig, E.: Advanced Engineering Mathematics. J. Wiley, New York, 1968.
35. Leonhard, A.: Die selbsttätige Regelung. Springer-Verlag, Berlin, 1962.
36. Leščenko, V. A., i dr.: Gidravličeskiji sledjaščiji privod. Mašinostrojenije, Moskva, 1968.
37. Lindner, H.: Physik für Ingenieure. F. Vieweg, Braunschweig, 1968.
38. Mann, H., Schiffelgen, H.: Einführung in die Regelungstechnik. C. Hanser, München, 1972.
39. Marković, Ž.: Uvod u višu analizu. Školska knjiga. Zagreb, 1962.
40. Merritt, H. E.: Hydraulic Control Systems. J. Wiley, New York, 1967.
41. Merz, L.: Grundkurs der Regelungstechnik. R. Oldenbourg, München, 1967.
42. Minorsky, N.: Nonlinear Oscillations. D. van Nostrand, Princeton, 1962.
43. Molle, R.: Les composants hydrauliques et pneumatiques de l'automatique. Dunod, Paris, 1967.
44. Morse, A. C.: Electrohydraulic Servomechanisms. McGraw-Hill, New York, 1963.
45. Oppelt, W.: Kleines Handbuch Technischer Regelvorgänge. Verlag Chemie, Weinheim, 1960.
46. Pashkis, V., Ryder, F. L.: Direct Analog Computers. J. Wiley, New York, 1968.
47. Pestel, E., Kollmann, E.: Grundlagen der Regelungstechnik. F. Vieweg Braunschweig, 1968.
48. Pugačev, V. S., i dr.: Osnovi avtomatičeskogo upravljenija. Nauka, Moskva, 1968.
49. Regazzini, J. R., Franklin, G. F.: Sampled Data Control Systems. McGraw-Hill, New York, 1958.
50. Raven, F.: Automatic Control Engineering. McGraw-Hill, New York, 1968.
51. Reinisch, K.: Kybernetische Grundlagen und Beschreibung kontinuierlicher Systeme. VEB Verlag Technik, Berlin, 1974.
52. Reuter, M.: Regelungstechnik für Ingenieure, F. Vieweg, Braunschweig, 1972.
53. Rogers, A. E., Connoly, T. W.: Analog Computation in Engineering Design. McGraw-Hill, New York, 1960.
54. Rörentrop, K.: Entwicklung der modernen Regelungstechnik. R. Oldenbourg, München, 1971.
55. Saucedo, R., Schiring, E. E.: Introduction to Continuous and Digital Control Systems. McGraw-Hill, New York, 1968.
56. Savant, C. J.: Control System Design. McGraw-Hill, New York, 1964.
57. Schäfer, O.: Osnovi automatske regulacije, prijevod. Tehnička knjiga, Zagreb, 1961.
58. Schink, H.: Fibel der Verfahrens-Regelungstechnik. R. Oldenbourg, München, 1971.
59. Schink, H.: Projektierung der Regelanlagen. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1970.
60. Schultz, D. G., Melsa, J. L.: State Functions and Linear Control Systems. McGraw-Hill, New York, 1967.
61. Sears, F. W.: Mehanika, talasno kretanje i toplota, prijevod. Naučna knjiga, Beograd, 1962.
62. Sears, F. W.: Elektricitet i magnetizam, prijevod. Naučna knjiga, Beograd, 1963.
63. Sekulić, M.: Osnovi teorije automatskog upravljanja. Naučna knjiga, Beograd, 1969.
64. Simić, D.: Elektronski analogni računar. Tehnička knjiga, Beograd, 1970.
65. Solodovnikov, V. V.: Teorija avtomatičeskogo regulirovanija. Mašinostrojenije, Moskva, 1967.
66. Spiegel, M. R.: Theory and Problems of Laplace Transforms. Schaum, New York, 1965.
67. Šurina, T.: Impulsne pojave i sklopovi. Školska knjiga, Zagreb, 1977.
68. Šurina, T.: Tranzistorska tehnika. Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.
69. Thaler, G. J., Pastel, M. P.: Analysis and Design of Nonlinear Feedback Control Systems. McGraw-Hill, New York, 1962.
70. Tomović, R.: Uvod u nelinearne sisteme automatskog upravljanja. Građevinska knjiga, Beograd, 1964.
71. Truxal, J. G.: Control Engineering Handbook. McGraw-Hill, New York, 1958.
72. Turičin, A. M.: Električeskije izmerenija neelektričeskih veličin. Energija, Moskva, 1965.
73. Watkins, B. O.: Introduction to Control Systems. McMillan, New York, 1969.
74. Wilts, C. H.: Principles of Feedback Control. Addison-Wesley, Reading, 1960.

Kazalo pojmova

Agregat za otporno zavarivanje 4
algebarski komplement v. kofaktor
algebra blokova 93, 343
—, paralelni spoj 94
—, povratni spoj 95
—, serijski spoj 94
amplituda verzora 106, 295
amplitudna modulacija 331
amplitudna rezerva 225, 227, 228, 244
amplitudno mjerilo na analognom računalu 464
amplitudno-fazni dijagram v. Nicholsov dijagram
amplitudno-frekvencijski dijagram v. Bodeovi dijagrami
analiza 14, 91
analogija, naponska 450
—, strujna 450
analogno računalo 448
—, direktno 448, 451
—, indirektno 448, 453
aperiodski član v. proporcionalni član prvoga reda
apscisa konvergencije 69, 498
argument verzora v. amplituda verzora
asimptote u Bodeovim dijagramima 112, 115
— kod lokusa korijena 299
automat 1
automatizacija 1
automatska regulacija 2
autonomni sustav 18

Barker, R. H. 358
Bendixson, T. 439
Bendixsonov negativni kriterij 439
Bernouillijeva jednadžba 26, 168, 186
bilinearna transformacija 355
bimetalni toplomjer 167
binarni koeficijent 144
blok-dijagram, funkcionalni 4, 92
—, strukturni 92
Bode, H. W. 109
Bodeovi dijagrami 109, 110, 226, 255, 258
Bogoljubov, N. 404
Bourdonova cijev 52, 167
Bromwich, T. J. 68
brzina odziva 240, 257

Cauchyjev teorem o reziduima 233, 342
Cauchy-Goursatov teorem 231
Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe 232
Chien-Hrones-Reswickova metoda 282, 284
centrifugalni regulator 1, 32, 166

Član s mrtvim vremenom 59, 118
član za radiciranje 163
čvor u faznoj ravnini 432
čvrsta regulacija 8, 195

D'Alembertovo načelo 18, 19, 46
daljinski prijenos signala 152, 162, 172
Darcyjev zakon 18
davač nazivne veličine 152, 175
D-djelovanje v. derivacijsko djelovanje
decibel 111
dekada 111
delta metoda 428
derivacijski član 58, 117, 260
derivacijsko djelovanje 153, 257
derivacijsko vrijeme 157, 282
destilacijska kolona 11
determinanta 100, 368
diferencijal 174
diferencijalna jednadžba 16
—, homogena 18
—, linearna 17
—, linearna s promjenljivim koeficijentima 27, 399, 482
—, nehomogena 18
—, nelinearna 28, 399, 482
—, obična 16
—, parcijalna 16, 142, 147
—, vektorska 366, 377, 380
diferencijalni analizator v. indirektno analogno računalo
diferencijalni relej 481
diferencijalni tlak 168

difuzijska konstanta 142
dinamička nestabilnost 208
dinamička viskoznost 45, 169
dinamičke jednadžbe stanja 374
dinamički sustav 16
diodni generator funkcija 478
Dirac, P. 40
Diracova funkcija v. jedinični impuls
direktna metoda Ljapunova v. Druga metoda Ljapunova
direktno programiranje na analognom računalu 470
disipativni sustav 52, 420, 444
dobrota regulacije 148
druga metoda Ljapunova 436, 443
Duhamelov integral 63
dvofazni asinhroni motor 185

Eksponencijalna funkcija 24, 50
električna peć za žarenje 142
električni RC sustav 19, 43, 109
električni RLC sustav 48, 115, 449
elektromehanički relej 485
elektronički oscilator 437
Eulerove formule 24, 50
Evans, W. 293

Faktor amplitudnog mjerila 465
faktor pojačanja v. pojačanje
faktor prigušenja 50, 312, 431
faktor strujnog pojačanja tranzistora 179
faktor vremenskog mjerila 465
fazna ravnina 418
fazna rezerva stabilnosti 226, 227, 228, 244
fazna trajektorija 419
fazni pomak verzora 106, 260, 275
fazni protret 420, 424, 429, 435
fazno-frekvencijska karakteristika v. Bodeovi dijagrami
fazno minimalni sustav 121
fazno neminimalni sustav 121
fazno prethođenje 121, 257
fazno zaostajanje 121, 257
Ferrarisov motor v. dvofazni asinhroni motor
filtar 257, 347
—, pojasni 243
Fourierov integral 494
Fourierov red 332, 488
— eksponencijalni oblik 490
— trigonometrijski oblik 490
Fourierova jednadžba 142
Fourierova transformacija 348, 495
frekvencija kritične amplitude 226
— kritične faze 226
—, lomna 111, 116
—, neprigušena vlastita 50, 130, 154, 241, 312
— otipkavanja 330
—, prigušena vlastita 50, 54, 130, 154, 241, 312
—, rezonantna 116
frekvencijski odziv 35, 103

fundamentalna matrica v. matrica prijelaza
funkcija, eksponencijalna 72, 463
—, impulsna 38, 70
— Ljapunova 446
—, meromorfna 232
— Mihajlova 229
—, nagibna 38, 70, 462
—, odskočna 38, 70, 462
—, parabolna 38
—, prijelazna 41
—, prijenosna 36, 90, 106, 377, 384, 395, 499
—, sinusna 103, 463
—, sinusna prijenosna 104, 106, 413, 496

Gaussova ravnina 109
Geiger-Müllerovo brojilo 162
generator funkcija nezavisne varijable 462
— vremenskih funkcija v. generator funkcija nezavisne varijable
generator funkcija zavisne varijable 477, 482
globalno asimptotski stabilan sustav 446
giroskop 165, 196
—, mutacija 166
—, precesija 165
Goldfarb, L. C. 404
grafička konvolucija 65
granični krug 210, 437
Green-Gaussov teorem 232, 439
grijanje prostorije 3, 7
gustoća energije 185

Hagen-Poiseuilleov zakon 18, 44
Hallova karta 248
harmonička linearizacija v. metoda harmoničke ravnoteže
Heaviside, O. 39, 67,
Heavisideov teorem razvoja 86
Heavisideova funkcija v. jedinični odskok
hidraulični motor 33, 143
hidraulični servomehanizam 8, 196
histereza 401, 406, 410
homogena diferencijalna jednadžba 18
Hookeov zakon 20
Hurewitz, W. 329
Hurwitz, A. 212
Hurwitzov kriterij stabilnosti 210
Hurwitzova subdeterminanta 212

I-djelovanje v. integralno djelovanje
impulsna funkcija 38, 40, 70
impulsna prijenosna funkcija 342
impulsni filtar v. impulsni formator
impulsni formator 347, 348
—, eksponencijalni 351
—, idealan 348
— nultoga reda 349
— prvoga reda 350
impulsni modulator 330, 345, 346
impulsni niz 331

—, jedinični 331
—, frekvencijski spektar 347
impulsni odziv 38, 497, 499
impulsno-amplitudna modulacija 329
indeks ponašanja 239, 244
induktivni daljinski davač 173
industrijska peć 12, 184, 292
integral konvolucije 35, 61, 63, 91, 207, 331, 388, 496
integralna staza v. staza bez izjednačenja
integralni član 57, 117
integralno djelovanje 152, 155, 257
integralno vrijeme 156, 281
integrator, elektronički 459
—, mehanički 454
invertor 457
inverzna sinusna prijenosna funkcija otvorenog kruga 274
I-regulator 280
ISE-kriterij 245
ispitivanje sadržaja soli 170
istosmjerni generator 57
istosmjerni elektromotor 57, 127, 136, 185, 365
—, karakteristike 131
—, upravljanje naponom armature 127
—, upravljanje strujom magnetiziranja 136, 364
ITAE-kriterij 245
iterativni postupak 387
iterativno programiranje 473
izoklina 425
izvršni član 32, 152, 184

Jedinična parabola, 40, 202, 204
jedinična povratna veza 95, 201, 241, 274, 293
jedinične parabolne funkcije 202
jedinični impuls 40
jedinični impulsni niz 331
jedinični nagib 39, 202, 204
jedinični odskok 38, 39, 202, 203
jednadžba diferencija 60
jednadžba harmoničke ravnoteže 414
jednadžba izlaza 364, 366
jednadžba stanja 364, 366
jednostruko suvislo područje 232
Jordanova normalna matrica 382
Jury, E. I. 355
Juryjev kriterij stabilnosti 355

Kalman, R. E. 396
karakteristična jednadžba 21, 23, 49, 210, 228, 294, 354
karakteristični polinom 373
kaskadna regulacija 291
kašnjenje 13, 358
kemijski reaktor 291
kibernetika 2
koeficijent brzinske greške 204, 317, 354, 393
— ekspanzije 168
— greške ubrzanja 205, 354, 394
— položajne greške 203, 316, 354, 393
— protoka 168
— viskoznog trenja 20, 28
kofaktor 368
komparator 152, 174
kompenzacija 257, 318
—, serijska 258, 318
—, povratna 110, 258, 273
kompenzacijski član v. kompenzator
kompenzator 13, 152, 175, 239, 257, 273
komplementarna funkcija 21, 23
kompresor 32, 141
—, karakteristike 140
koncentracija tekućine 139
konformno preslikavanje 220, 356
konstanta integracije 22, 23, 44, 49, 59
— ventila 139, 189
kontura korijena 325
konvolucija v. integral konvolucije
konzervativni sustav 52, 419, 434
korijen karakteristične jednadžbe 23, 82, 107, 211, 219, 294, 373
Kramerovo pravilo 371
Krilov, N. 404
kriterij argumenta 295
— modula 295
kriterij stabilnosti Hurwitza 219
— Juryja 355
— Mihajlova 228
— Nyquista 216, 219, 226, 231, 356
— Routha 213, 302, 355
kut dolaska lokusa korijena 301
— odlaska lokusa korijena 301
k_v-vrijednost v. konstanta ventila

Labavost 403
Lagrangeove funkcije stanja 362
Laplace, P. S. 68
Laplaceova transformacija 36, 68, 332, 497
— funkcija 70
— matrica 374
—, obratna 69, 81
— operacija 74
Laurentov razvoj 232
—, glavni dio 233
lebdilo 169
Lenzov zakon 48
Leonhard-Cremerov kriterij stabilnosti v. Mihajlovljev kriterij stabilnosti
L'Hospitalovo pravilo 71, 393
linearizacija karakteristika 29
— sustava 2, 133, 141
linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima 17, 26
— s promjenljivim koeficijentima 26, 482
linearna transformacija koordinatnog sustava 383, 430
Ljapunov A. M. 362, 443
logaritamski reziduum 235
lokus korijena 293
Lurje, A. I. 362

Magnetoelastičnost 164
Mathieuova diferencijalna jednadžba 26
matrica 92, 366
–, adjungirana 369
–, dijagonalna 369, 382
Frobeniusova 377
–, inverzna 371
– izlaza 375
– koeficijenata 375, 431
–, kvadratna 367
– prijelaza 386, 387
– prijenosa 375
–, redna 368
–, simetrična 369
–, singularna 370
–, stupčana 368
–, transponirana 369
– ulaza 375
matrični račun 367
Maxwell, J. C. 1
mehanički DS sustav 108
– integrator 454
– MDS sustav 19, 21, 363, 418, 449
– multiplikator konstantom 454
– sumator 454
meromorfna funkcija 232
metoda, Chien-Hrones-Reswickova 282, 284
– divizije 341
– dviju polarnih krivulja 413
– fazne ravnine 418
– harmoničke ravnoteže 404
– izoklina 424
– konturne integracije 342
– lokusa korijena 36, 293
– neodređenih koeficijenata 24
– parcijalnih razlomaka 81, 341
– prisilnih oscilacija 103
– prostora stanja 34, 37, 362
– varijacije parametara 24
–, Ziegler-Nicholsova 282, 283
Mihajlov, A. V. 228
Mihajlovljev kriterij stabilnosti 228
miješanje tekućina u posudi 139
mjerenje broja okreta 166
– brzine 166
– kuta zakreta 165
– mehaničkih veličina 164
– položaja 164
– procesnih veličina 164, 167
– protoka 168
– razine 169
– sile 164
– temperature 167
– tlaka 167
mjerilo na analognom računalu, amplitudno 464
–, vremensko 465
mjerljivost 396
mjerni član 32, 151, 162
mjerno osjetilo 151, 162, 163
–, karakteristike 163
M-kružnica 251, 254
modalna regulacija 382
modelni regulacijski krug 451
modificirana z-transformacija v. z_m-transformacija 358
moment tromosti 52, 137, 365
motor, karakteristike 31
modul stlačivosti 135
– verzora v. fazni kut verzora
mrtvi pojas 403, 409, 441, 481
mrtvo vrijeme 60, 118, 146, 474
multiplikator, elektronički 475
–, mehanički 454
multivarijabilni sustavi 11, 362

Načelo superpozicije 18, 27
nadomjesna vremenska konstanta 145, 284, 452
nadomjesno mrtvo vrijeme 145, 284, 452
nagibna funkcija 38, 39, 70
nazivna veličina 9, 195
neautonomni sustav 18
nelinearni sustav 362, 399, 422
nelinearnost 62
–, kontinuirana 26, 400
–, nekontinuirana 26, 400, 404
neprigušena vlastita frekvencija 50, 130, 154, 241, 247, 312, 431
nestabilnost, apsolutna 210
–, dinamička 208
–, statička 208
–, strukturna 208
Newtonov zakon 18, 45, 142
Nichols, B. B. 283
Nicholsov dijagram 109, 113, 228, 254, 258
Nicholsova karta 109, 255, 264, 271
njihalo 482
N-kružnica 251, 254
normalizacija vremena 420
normalna gustoća 30
normalni oblik dinamičkih jednadžbi stanja 382
normalni oblik sustava simultanih diferencijalnih jednadžbi 34
normirano područje signala 171
nultočka prijenosne funkcije 91, 219, 294
–, prevladavajuća 213
nul-matrica 369
nutacija giroskopa 166
Nyquist, H. 216
Nyquistov dijagram 109, 217, 248, 258
Nyquistov kriterij stabilnosti 216, 219, 226, 231, 356
Nyquistova kontura 221

Obična diferencijalna jednadžba 16
obratna Laplaceova transformacija 69, 81
određivanje pH-vrijednosti 170
odskočna funkcija 38, 39, 70
odskočni odziv 38
ograničenje 403

oktava 111
omjer otipkavanja 490
omjerna regulacija 292
operacijsko pojačalo v. računsko pojačalo
operator 67, 107
operatorska metoda 36, 100
operatorski račun 67
opisna funkcija 404
—, frekvencijski invarijantna 404
—, frekvencijski varijantna 404, 418
Oppelt, W. 149, 413
opruga, karakteristika 29
—, hidraulična 136
—, magnetska 187
opteretna impedancija 244
optimalizacija 15
—, parametarska 239, 285
—, strukturna 239, 285
oscilacije, vlastite 18
—, prisilne 18
oscilacijski član v. proporcionalni član drugoga reda
osjetljivost P-regulatora 279
otipkavanje 329
otporna traka 164

Padéova aproksimacija 474
paralelno programiranje na analognom računalu 381, 473
parametarska optimalizacija 239, 285
parcijalna diferencijalna jednadžba, 16, 142 147
parna turbina 32, 140
—, karakteristike 140
parni kotao 290
—, loženje 288
partikularni integral 21, 24, 25
P-djelovanje v. proporcionalno djelovanje
PD-djelovanje 157, 160, 259
PD-kompenzator 259, 260, 273, 318, 319
PD-regulator 260, 279, 281, 283
Pellova metoda 427
period ponavljanja 74
— otipkavanja 329
perturbacijska analiza 30, 133, 182, 436
pH-vrijednost 170
PID-djelovanje 158, 160, 161, 260
PI-djelovanje 156, 160, 259
PID-kompenzator 273, 318
PID-regulator 176, 279, 282, 283
PI-kompenzator 260, 268, 318, 323, 373
PI-regulator 279, 281, 283
plinska konstanta 30
plinski toplomjer 167
pneumatska kapacitivnost 45
pneumatski otpor 45
pneumatski R_pC_p sustav 44, 92
pneumatsko pojačalo 164, 181
—, karakteristika 182
početni uvjeti 15, 17, 22, 460
Poincaréov indeks 438
pojačalo, diferencijalno 174
—, elektroničko 179
—, hidraulično 181
—, mjerno 152, 162
—, pneumatsko 164, 181
—, razdvojno 98, 147
—, regulacijsko 152, 178
pojačanje 43, 107, 130, 154, 178, 219, 294
pojačivački član v. proporcionalni član nultoga reda
pol prijenosne funkcije 91, 219, 294
—, prevladavajući 313
polarna krivulja 109
—, inverzna 110, 274
—, otvorenog kruga 216, 257
polarni dijagram v. Nyquistov dijagram
poprečna varijabla 92, 449
poremećaj 2
poremećajna veličina 10, 152, 193, 285
postavna veličina 10, 152, 193, 287
postavni član 152, 188
postavni pogon 152, 184
—, električni 185
—, hidraulični 185
—, pneumatski 185
postavno područje P-regulatora 279
postotni prebačaj 55, 241
potenciometar 456
potrošnik energije 19
povratna kompenzacija 110, 258, 273
povratna veza, negativna 10, 95
—, pozitivna 95
prag osjetljivosti 403
precesija giroskopa 165
P-regulator 279
pretvarač 151, 162, 171
prigušena vlastita frekvencija 50, 54, 130, 154, 241, 312, 433
prijelaz topline 142
prijelazna funkcija 41
prijelazno rješenje v. komplementarna funkcija
prijenosna funkcija 36, 90, 106, 384, 377, 395, 499
—, impulsna 342
— otvorenog kruga 196, 218, 293
— zatvorenog kruga 195, 293
prijenosni omjer v. pojačanje
prisilne oscilacije 18
problem instrumenta 15
programiranje, direktno 470
—, iterativno 473
— metodom najviše derivacije 378, 464
—, paralelno 381, 473
— simulacijom prijenosnih funkcija 470
programsko upravljanje 4
proporcionalna staza v. staza s izjednačenjem
proporcionalni član drugoga reda 48, 113
— nultoga reda 42
— prvoga reda 43, 109
proporcionalno djelovanje 153, 155, 159
— područje P-regulatora 279
protok, maseni 11, 45, 168
—, volumenski 11, 168, 189

protudjelovanje 92, 98, 143, 159
prstenasta vaga 167
prva metoda Ljapunova 436

Računsko pojačalo 174, 176, 457, 479, 480
Ragazzini, J. R. 346
raspon histereze 401
— mrtvog pojasa 403
ravnina kompleksne varijable 107, 498
razdvojno pojačalo 98, 147
razina tekućine u spremniku 11, 137
RC član 43, 95, 258, 318, 351
refluks 11
regulacija 3, 7
—, automatska 2, 3
—, čvrsta 8, 195
—, poluautomatska 3
—, ručna 3, 152
—, slijedna 9, 195
—, višerazinska 291
—, višestruka 10, 292
regulacijska petlja 3
regulacijska staza 128
regulacijska veličina 9, 152, 193, 289
regulacijski član 152, 173
regulacijski objekt 32, 127
regulacijski sustav 7
regulacijski uređaj 9, 151, 153
regulacijski ventil 188
—, karakteristike 188, 190
—, konstanta 139, 189
regulacijsko odstupanje 10, 152, 193, 440
regulator 13, 32, 152, 175, 239, 278
rektifikacija 11
relativna stabilnost sustava 210, 225, 240
relej, dvopoložajni 401, 406, 442
— s histerezom 401
relej, tropoložajni 401
— s histerezom 401, 402
relejni komparator 481
reziduum 82, 234, 317, 336
rezonancija 26
rezonantna frekvencija 116, 244, 260
rezonantno izdizanje 116, 243
Routh, E. J. 213
Routhov kriterij stabilnosti 213, 302, 355
Routhov raspored 214
rubni uvjeti 17

Samouzbuda, meka 438
—, tvrda 438
Schwartz, L. 66
sedlo u faznoj ravnini 429
selsyn v. induktivni daljinski davač
separatrisa 436
serijska kompenzacija 258, 318
servogenerator funkcija 476
servomehanizam, električni 13, 199
—, hidraulični 8, 196
— sa zasićenjem 440
— s dvopoložajnim relejom 442
— s mrtvim pojasom 441
Shannonov teorem 348
signal 4
signum-funkcija 400, 482
simulator v. direktno analogno računalo
simultane diferencijalne jednadžbe 31, 92
singularna točka 232, 429
sinhroni generator 286
sinteza 15, 91
sinusna funkcija 72
sinusna prijenosna funkcija 104, 106, 413, 496
— otvorenog kruga 248, 258
— zatvorenog kruga 248, 274
skalarni produkt 371
slijedna regulacija 9, 195
spektralna amplituda 492
spektralna gustoća 494
spirula 297, 325
spremnik energije 19
s-ravnina 210, 220, 294, 312, 334
stabilnost regulacije 11, 12, 26, 207, 257, 354, 394, 413, 436
stacionarno rješenje v. partikularni integral
standardni oblik dinamičkih jednadžbi stanja 379
standardne pobudne funkcije 38
statička greška v. trajno regulacijsko odstupanje
statički sustav 16
staza bez izjednačenja 129, 130, 132
— s izjednačenjem 128, 129, 138
Steinmetz W. 487
strmina 163
strukturna optimalizacija 239, 285
strukturno nestabilan sustav 281, 210
strukturno stabilan sustav 210
stupanj prigušenja 52, 130, 154, 241, 247, 313
subdeterminanta 212, 368
suho trenje 402, 422, 480
sumator, elektronički 458
—, mehanički 454
sustav, apsolutno nestabilan 210
—, autonoman 18
—, dinamički 16
—, disipativni 52, 420, 444
—, konzervativni 52, 434
—, linearan 18
—, neautonoman 17
—, relativno stabilan 210, 225, 240
— s raspodijeljenim parametrima 16
— s usredotočenim parametrima 16
—, statički 16
—, strukturno nestabilan 210
—, strukturno stabilan 210
—, uvjetno stabilan 210
—, vremenski invarijantan 18
svojstvena vrijednost matrice 372
svojstveni vektor 373

Širina pojasa 243

Tahogenerator 58, 167
tangens faznog kuta zatvorenog kruga 250
Taylorov red 29, 119, 386, 434
tekućina u spremniku 133
teorem izlučivanja 41
— konačne vrijednosti 78, 202, 340
— konvolucije 78
— linearnosti 76, 337
— početne vrijednosti 77, 340
— pomaka 76, 339
— prigušenja 76
— stabilnosti Ljapunova 440
— rezidua 342
teorija distribucija 66
termoelement 167
termonapon 167
težinska funkcija 35, 64, 91, 496
Thalesova kružnica 109
Thomsonova formula 50
tip servomehanizma 198, 199, 261
tiristor 180
točka odvajanja lokusa korijena 297
— račvanja 93
— zbrajanja 93
točnost regulacije 11, 26, 198, 240, 257, 353, 392
toplinska kapacitivnost 45, 142
toplinska vodljivost 142
toplinski otpor 45
toplomjer, plinski 167
—, bimetalni 167
— s tekućinom 4
Torricellijev zakon 133
torzijska krutost 52
torzijski koeficijent viskoznog trenja 52
trajektorija 364
—, singularna 438
trajno regulacijsko odstupanje 201, 202, 241, 280, 316, 354, 393
transformacija varijabli stanja 382
tranzistor 179
—, izlazne karakteristike 180
transportni član v. član s mrtvim vremenom
turbina, mjerna 169

Uljni prigušivač 28
upravljački lanac 3
upravljanje 3, 396
—, programsko 4
uvjetna stabilnost sustava 210
uzdužna varijabla 92, 449

Valjaonički stan 146
valna jednadžba 147
van der Polova jednadžba 28, 437
varijable stanja 363, 376
—, fazne 377, 430
—, fizikalne 365
—, kanonske 382, 430
vektor izlaza 375
—, redni v. radna matrica
— stanja 375
—, stupčani v. stupčana matrica
— ulaza 375
vektorska diferencijalna jednadžba 366, 377, 380
vektorski produkt 371
Venturijeva cijev 168
verzor 105, 493
vibracijski stol 100
vlastita frekvencija, neprigušena 50, 130, 154, 241, 312
—, prigušena 50, 54, 130, 154, 241, 312
vlastite oscilacije 18
viskoznost, dinamička 45
višestruko suvislo područje 352
vodeća veličina 9, 193, 195
vođenje procesa 3
vremenska konstanta 44, 47, 107, 130, 154
—, derivacijska 157
—, integralna 156, 460
vremenski član 152
— u povratnoj vezi 158
vremenski invarijantni sustav 18
vremenski multipleks 329
vremenski odziv 35, 38, 42
vremensko mjerilo na analognom računalu 465
vrijeme porasta 241, 243
— prvog prebačaja 55
— smirivanja 241
— trajanja impulsa 74
vrtlog u faznoj ravnini 434

Wagner, W. 68
Watt, J. 1
Wheatstoneov most 165, 169, 174
w-ravnina 355
w-transformacija 355

Zadeh, L. A. 346
zakretni moment 52, 137, 365
—, opterećenja 31, 131, 137
zakretni motor 186
zasićenje 403, 407, 440, 480
zaslon-sapnica 181
Zenerova dioda 175
z-ravnina 334, 355
z-transformacija 329, 334
—, modificirana v. z_m-transformacija
—, obratna 340
z_m-transformacija 358
Ziegler, J. G. 283
Ziegler-Nicholsova metoda 282, 283

Žarište u faznoj ravnini 434
živin prekidač 179

Izdavačka radna organizacija
»ŠKOLSKA KNJIGA«
Zagreb, Masarykova 28

Za izdavača
JOSIP MALIĆ

Crteže izradio
ŽELJKO CVIRN

Lektor
BRANKO PERICA

Grafički urednik
ŽELJKO TOMLJANOVIĆ

Korektori
MIRJANA ŠAH
MARIJA DETONI

Tiskanje dovršeno u svibnju 1981.

U–130/2 30612