
Branko Kovač
Schneider Electric
branko.kovac@se.com

PRIMJENA TEORIJE MREŽA U MEHANICI FLUIDA I TERMODINAMICI

Sažetak: Članak opisuje način na koji se teorija mreža može primijeniti ne samo u elektro inženjerstvu, nego i u drugim u inženjerskim disciplinama. Prikazan je način postavljanja jednačbi i ukazano je ne neke probleme kod rješavanja sustava nelinearnih jednačbi koje opisuju mrežu. Nadalje pokazana je definicija i metoda popunjavanja Jacobian-ove matrice za elemente koji su tipični u mrežama koje se javljaju u mehanici fluida i termodinamici. Pokazano je kako se ovi elementi mogu koristiti da opisu dijelove postrojenja kao sto su pumpe, ventilatori, stupnjevi turbine i kompresora, ventili te kako se može tretirati volumen sa stlačivim fluidom. Na koncu su pokazani dijelovi mreža koje opisuju fizikalne procese u turbini.

Ključne riječi: mehanika fluida, termodinamika, teorija mreža, modeliranje, Jacobian

Uvod

Moj rad sa teorijom mreža se odvijao tokom dva desetljeća. Prvo desetljeće od 1977 do 1987 sam radio u Končaru u Elektrotehničkom institutu. Radio sam u Zavodu za Energetsku Elektroniku koji je vodio tada mladi magistar Benčić. Tokom tog razdoblja razvijao sam programe za analizu sklopova energetske elektronike. Nakon dolaska u Australiju našao sam posao u Techcom-u, maloj firmi koja je radila simulatore za treniranje operatora u termoelektranama. Tu firmu je kasnije kupila Yokogawa. U toj firmi sam proveo drugo desetljeće vezan uz analizu mreža od 1989 do 1999. Radeći sa kolegama iz raznih krajeva svijeta Australije, Njemačke, Kine, Indije, Indonezije, Malezije, Bangladeša, Iraka i drugih zemalja, koji su imali dobro obrazovanje, neki su imali i doktorate, shvatio sam da im nedostaje inženjerski alat koji se zove teorija mreža. Moji kolege su uglavnom imali obrazovanje u mehaničkom ili kemijskom inženjerstvu. Oni su radili simulatore i prije moga dolaska, ali su radili matematičke modele koji su bili „hard coded“ za određeni problem. Sa iskustvom koje sam ponio iz Končara mogao sam uočiti pravila koja su se ponavljala u modelima i poopćiti modele tako da ih je bilo lakše održavati i mijenjati po potrebi. Razvio sam rutine za rješavanje mreža koje se i danas koriste. Teoriju koju sam pri tome koristio kao i neke od čudnih elemenata mreža, za jednog elektroinženjera, opisat ću u ovom članku. Ovaj članak možda pomogne nekom strojarskom ili kemijskom inženjeru vidjeti pravila i tehniku rješavanja problema iz njihove prakse primjenom teorije mreža, a elektroinženjerima dade uvid u mogućnosti primjene teorije mreža u drugim inženjerskim disciplinama.

Problemi prijenosa mase i energije u cijevima, zračnim kanalima, nepravilnim metalnim dijelovima su česti u termoelektranama, rafinerijama, vodovodnim sistemima, šećeranama i sličnim postrojenjima. Analitičko rješavanje problema prijenosa mase i energije je ograničeno na jednostavne ili pojednostavljene slučajeve. Rješavanje problema korištenjem metoda računalne dinamike fluida je složeno i optimalno je za slučajeve kad gibanje fluida nije ograničeno cijevima ili zračnim kanalima i kad se razmatra ponašanje kritičnih

komponenti sistema. Metode rješavanja problema iz mehanike fluida i termodinamike primjenom teorije mreža omogućavaju numeričku analizu industrijskih postrojenja sastavljenih od niza komponenti na efikasan način.

Korištenjem zakona o održanju mase za probleme prijenosa mase ili zakona o održanju energije za probleme prijenosa energije mogu se postaviti jednačbe koje matematički opisuju probleme iz mehanike fluida i termodinamike. Tok mase koji ulazi u neki prostor jednak je toku mase koja izlazi iz tog prostora i akumulaciji mase u samom prostoru. Na osnovu zakona o održanju energije, tok energije koja ulazi u neki prostor je jednak toku energije koja izlazi iz tog prostora i akumulaciji energije u samom prostoru. Cijeli prostor u kojem se razmatra ravnoteža mase ili energije može se razdijeliti u manje prostore ili ćelije. Ćelije su međusobno povezane granama koje prenose masu ili energiju. Za svaku ćeliju možemo postaviti jednačbe održanja mase ili energije.

$$\sum m = 0 \quad (1a)$$

$$\sum q = 0 \quad (1b)$$

Gdje je

- m – tok mase u granama mreže
- q – tok energije u granama mreže

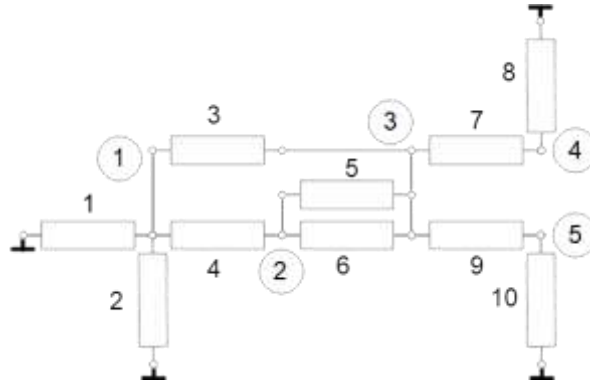
U ovom članku koristit će se malo slovo „ m “ za tok mase u grani, a veliko slovo „ M “ za količinu mase u nekom volumenu. Slično tako „ q “ će se koristiti za tok energije a „ Q “ za količinu energije. Kada koristimo teoriju mreža za rješavanje problema u mehanici fluida ili termodinamici pritisak, temperatura ili entalpija koji su varijable stanja za taj ograničeni prostor ili ćeliju možemo predstaviti pritiskom, temperaturom ili entalpijom u čvoru mreže. Elemente koji povezuju ćelije možemo nadomjestiti granama mreže. Fizikalna svojstva ograničenog prostora kao što su stlačivost, toplinski kapacitet i druga mogu se predstaviti granama mreže. Protok mase granom koja povezuje dvije ćelije određen je razlikom pritisaka i parametrima cijevi, lakta, pumpe ili neke druge komponente koja je nadomještena granom. Protok energije između dvije ćelije određen je razlikom temperatura ili entalpija i parametara komponente koja povezuje dvije ćelije. Jednačbe održanja mase i energije možemo napisati kao sustav jednačbi gdje je pritisak, temperatura ili entalpija varijabla stanja u svakoj ćeliji. Da se pojednostavi izlaganje o načinu postavljanja jednačbi i opisu rješavanja tih jednačbi ograničit ćemo se na jednačbe tokova mase. Nakon što se prikaže način rješavanja jednačbi na primjeru jednačbi tokova mase rezultat se može proširiti na jednačbe tokova energije primjenom zakona o održanju energije. Ukoliko se razmatraju pojave gdje se prijenos mase i energije mora razmatrati simultano, moguće je postaviti jednačbe sa miješanim varijablama stanja. Za n ćelija možemo napisati n jednačbi za održanje mase u obliku

$$\begin{aligned} \sum m_1(P) &= 0 \\ \sum m_2(P) &= 0 \\ &\dots \end{aligned} \quad (2)$$

Gdje je

- $\sum m_n$ – suma tokova mase koji izlaze iz n -te ćelije ili n -tog čvora mreže
- P – vektor pritisaka u čvorovima mreže

Sl. 1. prikazuje mrežu sa pet čvorova i deset grana. Čvorovi su označeni brojem u krugu a grane brojem bez kruga. Grane prenose masu između dva čvora. Nekoliko grana može završavati ili počinjati u jednom čvoru.

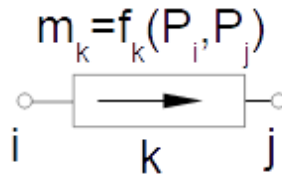


Sl. 1 Primjer mreže za prijenos mase sa pet čvorova i deset grana

Problem koji trebamo riješiti je pronaći n pritisaka za n čvorova koji će rezultirati ravnotežom tokova mase u svim čvorovima.

1 Računanje ravnoteže tokova masa

Grana mreže prikazana na Sl. 2 će se koristiti da bi se pojasnilo računanje ravnoteže tokova masa.



Sl. 2. Grana mreže „ k “ koja povezuje čvorove „ i “ i „ j “

Orijentacija grane je od čvora „ i “ do čvora „ j “. Tok mase je pozitivan kada je smjer strujanja mase istovjetan sa orijentacijom grane. Po zakonu o održanju mase tok mase koji ulazi u granu mreže na jednom čvoru mora biti jednak toku mase koji izlazi iz grane na drugom čvoru. Tok mase u grani „ k “ se može računati nekom funkcijom f koja ovisi o pritiscima u čvorovima „ i “ i „ j “.

$$m_{k;i,j} = f_k(P_i, P_j) \quad (3)$$

Ravnoteža tokova mase u bilo kojem čvoru mreže „ i “ nalazi se kao suma tokova mase u granama koje počinju u čvoru „ i “ minus suma tokova mase koje završavaju u čvoru „ i “. Grane koje nisu povezane sa čvorom „ i “ nemaju doprinos kada se računa ravnoteža masa u čvoru „ i “.

$$\sum m_i = \sum m_{k; i,x} - \sum m_{k; x,i} \quad (4)$$

Pogledajmo kako mala promjena pritiska utiče na tok mase u jednoj grani. Utjecaj promjene pritiska na tok mase za jednu granu određen je parcijalnim derivacijama jednačbe (3) po pritisku u čvorovima „ i “ i „ j “.

$$\frac{\partial m_k}{\partial P_i} = \frac{\partial f_k(P_i, P_j)}{\partial P_i} \quad (5a)$$

$$\frac{\partial m_k}{\partial P_j} = \frac{\partial f_k(P_i, P_j)}{\partial P_j} \quad (5b)$$

Koristeći (4) i (5) za čvor „ i “ i „ j “ možemo doprinos grane „ k “ neravnoteži tokova mase kod male promjene pritiska računati kao

$$\frac{\partial f_k(P_i, P_j)}{\partial P_i} \cdot \Delta P_i + \frac{\partial f_k(P_i, P_j)}{\partial P_j} \cdot \Delta P_j = \Delta m_{k,i} \quad (6a)$$

$$-\frac{\partial f_k(P_i, P_j)}{\partial P_i} \cdot \Delta P_i - \frac{\partial f_k(P_i, P_j)}{\partial P_j} \cdot \Delta P_j = \Delta m_{k,j} \quad (6b)$$

Koristeći izraze (6) za sve grane mreže možemo postaviti matricu koja povezuje promjenu pritiska sa neravnotežom masa za sve čvorove. Elementi matrice koja povezuje promjenu pritiska i neravnoteže tokova masa nalaze se kao zbroj doprinosa svih grana mreže

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial m_i}{\partial P_i} & \frac{\partial m_i}{\partial P_j} & \dots \\ \frac{\partial m_j}{\partial P_i} & \frac{\partial m_j}{\partial P_j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta P_j \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta m_i \\ \Delta m_j \\ \dots \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ova jednadžba predstavlja procjenu neravnoteže tokova masa koju ćemo dobiti ako na ravnotežni vektor pritisaka dodamo devijaciju pritisaka ΔP . Ako znamo neravnotežu tokova masa iz (7) možemo naći procjenu devijacije pritisaka koji uzrokuju neravnotežu tokova masa u mreži kao

$$\begin{bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta P_j \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_i}{\partial P_i} & \frac{\partial m_i}{\partial P_j} & \dots \\ \frac{\partial m_j}{\partial P_i} & \frac{\partial m_j}{\partial P_j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta m_i \\ \Delta m_j \\ \dots \end{bmatrix} \quad (8)$$

U iterativnom procesu početnu procjenu pritisaka popraviti ćemo ako od nje oduzmemo devijaciju pritisaka koji uzrokuju neravnotežu tokova masa.

$$\begin{bmatrix} P_{1,n} \\ P_{2,n} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,n-1} \\ P_{2,n-1} \\ \dots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta P_{1,n-1} \\ \Delta P_{2,n-1} \\ \dots \end{bmatrix} \quad (9)$$

Jednadžba (9) je poznata kao Newton-ova iterativna metoda, a matrica parcijalnih derivacija se naziva Jacobian. Oni koji su upoznati sa teorijom mreža prepoznat će metodu postavljanja jednadžbi mreža kao metodu čvorova. Vektor pritisaka u mreži se nalazi iterativnim procesom koji počnemo sa procjenom pritisaka te tu procjenu poboljšavamo tako da ona smanjuje neravnotežu masa u svakom koraku iteracije. Kada se radi o simulaciji u vremenskoj domeni početna procjena vektora pritisaka u n-tom koraku simulacije može biti vektor rješenja iz n-1-vog koraka simulacije. U (9) prvi broj u indeksu se odnosi na broj čvora a drugi se odnosi na korak u Newton-ovoj metodi iteracije. Značenje simbola u (9) je:

- $P_{1,n}$ – pritisak u prvom čvoru u n-tom koraku iteracije
- $P_{1,n-1}$ – pritisak u prvom čvoru u n-1-vom koraku iteracije
- $\Delta P_{1,n}$ – popravka pritiska u prvom čvoru u n-tom koraku iteracije

Newton-ova iterativna metoda je stabilna u slučajevima kada se parcijalne derivacije oko točke rješenja malo mijenjaju i početna procjena je relativno blizu rješenja. Ako je početna procjena daleko od rješenja i parcijalne derivacije se značajno mijenjaju oko točke rješenja, puni korak Newton-ove metode može dovesti do nestabilnosti. Da bi se kontroliralo stabilnost Newton-ove metode tokom rješavanja jednadžbi potrebno je kontrolirati pogrešku računa. Pogreška se može definirati kao suma kvadrata neravnoteže tokova masa. Stabilnost iterativnog procesa se povećava ako popravak pritisaka pomnožimo sa faktorom relaksacije α koji se bira tako da smanjuje pogrešku računa u svakom koraku iteracije. Modifikacija Newton-ove metode se može napisati kao

$$\begin{bmatrix} P_{1,n} \\ P_{2,n} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,n-1} \\ P_{2,n-1} \\ \dots \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \Delta P_{1,n-1} \\ \Delta P_{2,n-1} \\ \dots \end{bmatrix} \quad (10)$$

Postoje razne metode za određivanje faktora relaksacije α . Neki algoritmi koriste dijeljenje sa dva punog koraka Newton-ove metode u slučaju da puni korak povećava pogrešku računa. Neki algoritmi koriste aproksimaciju pogreške računa polinomom drugog reda i minimiziraju taj polinom. Algoritmi koji koriste minimizaciju pogreške računa mogu izabrati faktor relaksacije manji od jedan u slučaju da je područje oko točke rješenja nestabilno i veći od jedan u slučajevima kada je konvergencija spora. Metode koje koriste kontrolu pogreške računa će povećati vrijeme potrebno za računanje ali nije potrebno računati Jacobian i njegovu inverznu matricu tokom minimiziranja pogreške računa.

Primjenom modificirane Newton-ove iterativne metode (10) može se naći pritisak u svakom čvoru mreže. Na sličan način se mogu rješavati mreže za prijenos topline. Potrebno je samo pritiske zamijeniti sa temperaturom ili entalpijom, a tok mase sa tokom energije.

2 Jednadžbe prijenosa mase i energije za različite elemente mreže

Da bi se dobio osjećaj za jednadžbe koje opisuju grane mreže, prikazat će se nekoliko elemenata koji su tipični za mreže koje prenose masu ili energiju. Parametri elemenata mreže mogu se računati na razne načine. Parametri elemenata mreže se mogu odrediti pomoću literature, tabela i dijagrama koji povezuju tok mase i pritiske ili tok energije i temperature ili entalpije u mreži. Često je parametre elemenata mreže jednostavnije računati iz poznatih tokova i varijabli stanja pod nazivnim uvjetima i to koristiti da bi se dobila rješenja jednadžbi stanja kod nepoznatih uvjeta. U ovom članku nećemo se fokusirati na način kako se računaju parametri nadomjesne mreže nego na način kako se postavljaju i rješavaju jednadžbe mreža.

2.1 Turbulentni tok mase u cijevi

Strujanje fluida u cijevi je najčešće turbulentno jer se nastoji smanjiti troškove izgradnje postrojenja a time i dimenzije cijevi. Tok mase u cijevi, u kojoj je strujanje fluida turbulentno, je određen Darcy-Weisbach-ovom jednadžbom [1] koja povezuje pad pritiska i brzinu strujanja fluida. Jednadžba koja povezuje tok mase i pritisak, kako je to specificirano u jednadžbi (3), se može napisati za turbulentno strujanje u obliku

$$m = A\sqrt{P_i - P_j} \quad \text{za} \quad P_i - P_j \geq 0 \quad (11a)$$

$$m = -A\sqrt{P_j - P_i} \quad \text{za} \quad P_i - P_j < 0 \quad (11b)$$

Gdje je

- m – tok mase
- P_i – pritisak na ulazu u cijev
- P_j – pritisak na izlazu iz cijevi
- A – admitancija cijevi koja ovisi o konstruktivnim parametrima: površina presjeka cijevi, dužina cijevi, gustoća fluida, koeficijent trenja, Reynolds-ov broj i druge fizikalne konstante

Jednadžbe za derivacije toka mase po pritisku, kako je to specificirano u jednadžbi (5), u čvoru i su

$$\frac{\partial m}{\partial P_i} = \frac{A}{2\sqrt{P_i - P_j}} \quad \text{za} \quad P_i - P_j \geq 0 \quad (12a)$$

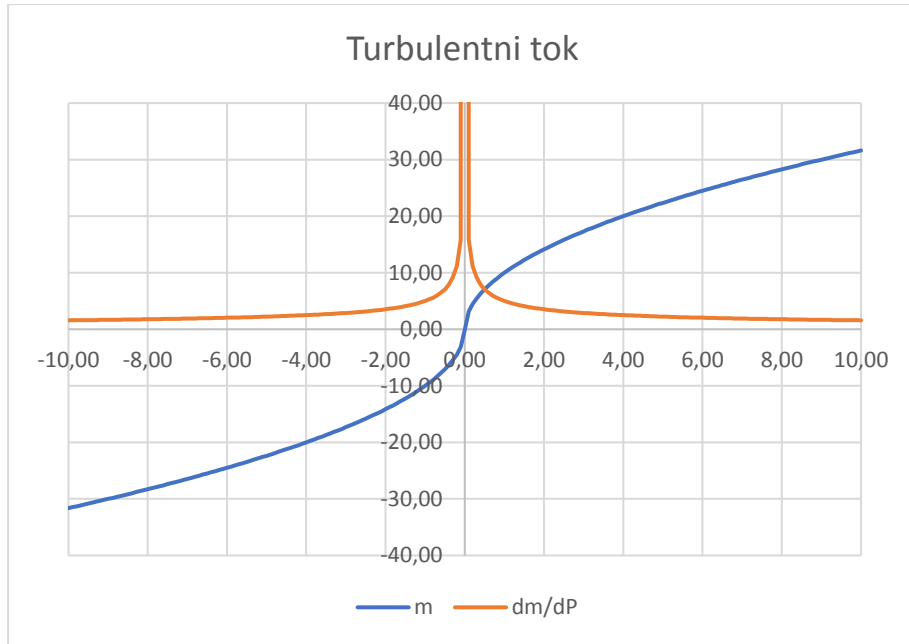
$$\frac{\partial m}{\partial P_j} = -\frac{A}{2\sqrt{P_i - P_j}} \quad \text{za} \quad P_i - P_j \geq 0 \quad (12b)$$

Parcijalna derivacija toka mase po pritisku u čvoru „j“ imat će isti iznos kao i parcijalne derivacije za čvor „i“ samo će biti sa suprotnim predznakom. Elementi Jacobian-ove matrice kako je to specificirano u jednadžbi (6) za turbulentni tok u cijevi su

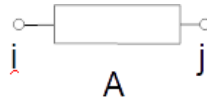
$$\frac{A}{2\sqrt{P_i - P_j}} \cdot \Delta P_i - \frac{A}{2\sqrt{P_i - P_j}} \Delta P_j = \Delta m_{k,i} \quad \text{za} \quad P_i - P_j \geq 0 \quad (13a)$$

$$-\frac{A}{2\sqrt{P_i - P_j}} \cdot \Delta P_i + \frac{A}{2\sqrt{P_i - P_j}} \Delta P_j = \Delta m_{k,j} \quad \text{za} \quad P_i - P_j \geq 0 \quad (13b)$$

Vidimo da je derivacija toka mase singularna oko nule. Kada je pritisak na ulazu u cijev jednak pritisku na izlazu iz cijevi derivacija toka mase postaje beskonačna. Da bi se ograničila derivacija oko nule na neku konačnu vrijednost potrebno je aproksimirati tok mase oko nule polinomom trećeg reda. Uvjeti koje polinom treba zadovoljiti su da vrijednost polinoma i prve derivacije budu jednake u točki prijelaza sa polinoma na vrijednosti računate Darcy-Weisbach-ovom jednadžbom.



Sl. 3 Krivulja toka mase i derivacija toka po pritisku za turbulentni tok



Sl. 4 Grafički simbol za admitanciju

2.2 Nepovratni ventil

Nepovratni ventil je ventil koji dopušta protok mase samo u jednom smjeru. U suprotnom smjeru tok mase je nula. Jednadžbe koje opisuju nepovratni ventil su

$$m = A\sqrt{P_i - P_j} \quad \text{za} \quad P_i - P_j \geq 0 \quad (14a)$$

$$m = 0 \quad \text{za} \quad P_i - P_j < 0 \quad (14b)$$

Jednadžbe za derivacije toka mase su

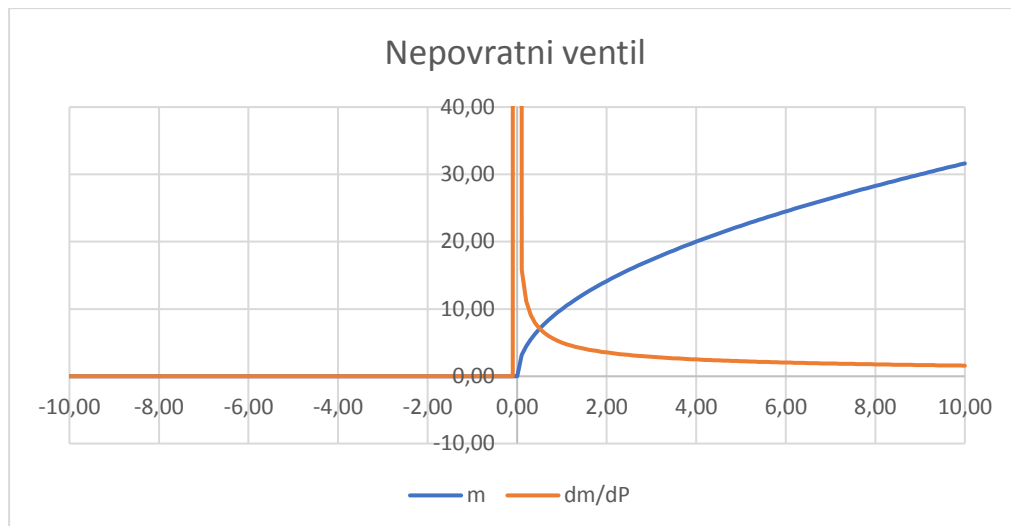
$$\frac{\partial m}{\partial P_i} = \frac{A}{2\sqrt{P_i - P_j}} \quad \text{za} \quad P_i - P_j \geq 0 \quad (15a)$$

$$\frac{\partial m}{\partial P_i} = 0 \quad \text{za} \quad P_i - P_j < 0 \quad (15b)$$

Parcijalna derivacija toka po pritisku u čvoru „j“ imat će suprotan predznak. Slično kao kod turbulentnog toka vidimo da je derivacija toka mase u nepovratnom ventilu singularna oko nule. Zbog toga se tok mase oko nule nadomješta polinomom trećeg reda. Uvjeti koje polinom treba zadovoljiti su da vrijednost polinoma i prve derivacije budu jednake u točki prijelaza sa polinoma na vrijednosti računate korištenjem (14a) i (15a), a u nuli da vrijednost polinoma i prve derivacije budu nula. Elementi Jacobian-ove matrice za nepovratni ventil kod pritiska na ulazu koji je veći od pritiska na izlazu iz grane su

$$\frac{A}{2\sqrt{P_i - P_j}} \cdot \Delta P_i - \frac{A}{2\sqrt{P_i - P_j}} \Delta P_j = \Delta m_{k,i} \quad \text{za} \quad P_i - P_j \geq 0 \quad (16a)$$

$$-\frac{A}{2\sqrt{P_i - P_j}} \cdot \Delta P_i + \frac{A}{2\sqrt{P_i - P_j}} \Delta P_j = \Delta m_{k,j} \quad \text{za} \quad P_i - P_j \geq 0 \quad (16b)$$



Sl. 5 Krivulja toka mase i derivacija toka po pritisku za nepovratni ventil



Sl. 6 Grafički simbol za nepovratni ventil

2.3 Linearni tok

Ako je cijev dovoljno velika ili tok fluida dovoljno mali, tok fluida u cijevi će biti laminaran. Kod laminarnog toka, tok fluida u cijevi je linearno proporcionalan padu pritiska prema Hagen-Poiseuille jednačbi [2]. Jednačba se može pisati u obliku

$$m = B(P_i - P_j) \quad (17)$$

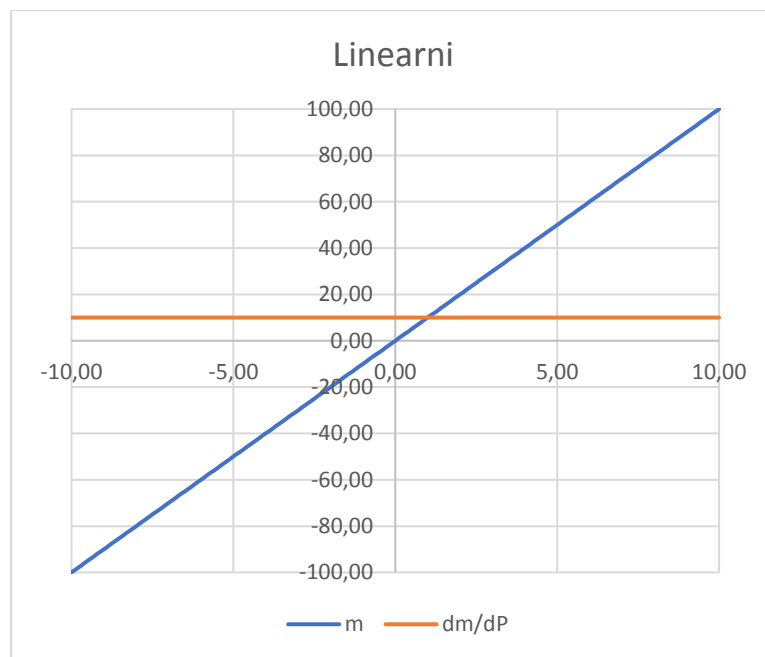
Gdje je:

- m – tok mase
- P_i – pritisak na ulazu u cijev
- P_j – pritisak na izlazu iz cijevi
- B – vodljivost cijevi koja ovisi o konstruktivnim parametrima: površina presjeka cijevi, dužina cijevi, dinamička viskoznost i druge fizikalne konstante

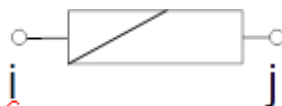
Ovisnost toka energije o temperaturi kod konvektivnog i konduktivnog prijenosa topline je isto tako linearna. Kod linearne ovisnosti toka o pritisku parcijalna derivacija mase po pritisku je jednostavno vodljivost cijevi B . Elementi Jacobian-ove matrice su

$$B \cdot \Delta P_i - B \cdot \Delta P_j = \Delta m_{k,i} \quad \text{za} \quad P_i - P_j \geq 0 \quad (18a)$$

$$-B \cdot \Delta P_i + B \cdot \Delta P_j = \Delta m_{k,j} \quad \text{za} \quad P_i - P_j \leq 0 \quad (18b)$$



Sl. 7 Krivulja toka mase i derivacija toka po pritisku za linearni tok



Sl. 8 Grafički simbol za linearni element

2.4 Kapacitet

Kada je fluid za koji računamo tokove mase stlačiv tada će akumulacija mase u volumenu ćelije uzrokovati promjenu pritiska. Mrežni element koji predstavlja volumen ćelije sa stlačivim fluidom je kapacitet. Jednadžba koja opisuje tok mase u kapacitetu je

$$m = C \frac{dP}{dt} \quad (19)$$

Simbol koji se koristi za prikazivanje kapaciteta u mreži je pokazan na slijedećoj slici



Sl. 9 Grafički simbol za kapacitet

2.5 Nezavisni izvor toka

Idealne crpke za potiskivanje imaju konstantan tok mase bez obzira na pritisak na izlazu iz crpke. Takove crpke se predstavljaju tokom mase koji je neovisan o pritisku. Jednadžba koja opisuje crpku za potiskivanje je

$$m = K \quad (20)$$

Parcijalna derivacija nezavisnog izvora toka po pritisku je nula. Simbol koji se koristi za prikazivanje nezavisnog izvora toka u mreži je pokazan na slijedećoj slici



Sl. 10 Grafički simbol za nezavisni izvor toka

2.6 Radijacija topline

Tok energije zbog radijacije je proporcionalan četvrtoj potenciji apsolutne temperature kako je prikazano slijedećom jednažbom

$$q_n = k \left[(T_i + T_0)^4 - (T_j + T_0)^4 \right] \quad (21)$$

Gdje je

- q_n – tok topline u n-toj grani
- k – koeficijent radijacije
- T_i – temperatura u i -tom čvoru mreže
- T_0 – ofset od apsolutne nule
- T_j – temperatura u j -tom čvoru mreže

Parcijalne derivacije toka energije po temperaturi i -tom i j -tom čvoru su

$$\frac{\partial q_n}{\partial T_i} = 4k(T_i + T_0)^3 \quad (22a)$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial T_j} = -4k(T_j + T_0)^3 \quad (22b)$$

Parcijalne derivacije toka energije po temperaturi u i -tom i j -tom čvoru nisu jednake. To čini Jacobian nesimetričnim i dijagonalni element ne mora uvijek biti dominantan u redu ili stupcu matrice.



Sl. 11 Grafički simbol za radijacijski element

2.7 Advekcija topline - Prijenos energije transportom mase

Kada masa fluida prelazi iz i -te ćelije u j -tu ćeliju ona nosi sa sobom energiju iz i -te ćelije. Temperatura u j -toj ćeliji ne utiče na tok energije. Tok energije transportom mase iz čvora i može se prikazati jednažbom

$$q_n = mcT_i \quad \text{za} \quad m \geq 0 \quad (23a)$$

$$q_n = mcT_j \quad \text{za} \quad m < 0 \quad (23b)$$

Gdje je

- q_n – tok topline u n-toj grani
- m – tok mase
- c – specifična toplota fluida
- T_i – temperatura u početnom čvoru grane
- T_j – temperatura u završnom čvoru grane

Ako je varijabla stanja za prijenos topline entalpija što je najčešće slučaj kod mreža za simulaciju pare tada je prijenos topline transportom mase određen jednažbom

$$q_n = mh_i \quad \text{za} \quad m \geq 0 \quad (24a)$$

$$q_n = mh_j \quad \text{za} \quad m \leq 0 \quad (24b)$$

Gdje je

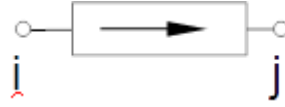
- h_i – entalpija u početnom čvoru grane,
- h_j – entalpija u završnom čvoru grane.

Parcijalne derivacije advektivnog prijenosa topline u čvorovima „ i “ i „ j “ kod pozitivnog strujanja mase kad je temperatura varijabla stanja su

$$\frac{\partial q_n}{\partial T_i} = mc \quad (25a)$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial T_j} = 0 \quad (25b)$$

Vidimo da parcijalna derivacija toka topline po temperaturi ili entalpiji ima vrijednost različitu od nule samo u čvoru iz kojeg tok mase polazi. To čini Jacobian nesimetričnim. Prijenos energije transportom mase je dominantan efekt za mreže kojima se simulira prijenos energije u pari ili u plinovima na izlasku iz peći.



Sl. 12 Grafički simbol za advekciju

3 Modeliranje dijelova postrojenja elementima mreža

3.1 Modeliranje centrifugalne pumpe i ventila

Krivulja ovisnosti pritiska o toku mase kod centrifugalne pumpe dana je krivuljama A i B na Sl. 4. Vidimo da pad pritiska na izlazu iz pumpe može da se nadomjesti kvadratnom funkcijom koja ovisi o toku mase. Drugim riječima tok mase ovisi o kvadratnom korijenu pada pritiska. To je ista funkcija koji opisuje turbulentni tok mase u cijevi. Iako je turbulentni tok mase u cijevi fizikalno različit od procesa toka mase u centrifugalnoj pumpi, oba ova procesa se mogu opisati istom jednažbom.

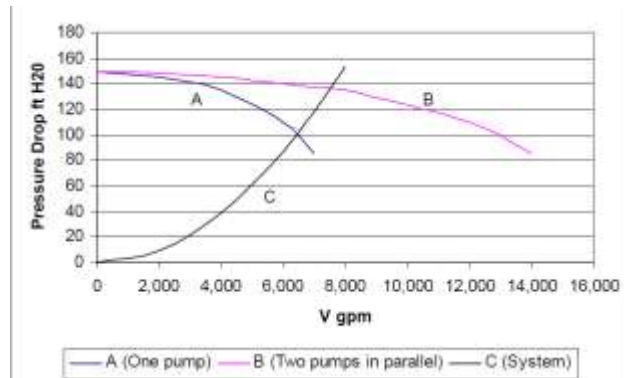
$$m = A\sqrt{P_0 + P_i - P_j} \quad (26)$$

Parametar P_0 je iznos idealnog izvora pritiska.

Parametri A i P_0 se mogu naći ako očitamo dvije vrijednosti na krivulji pumpe (m_1, P_1) i (m_2, P_2) te uvrstimo te vrijednosti u (12). Račun se pojednostavljuje ako uzmemo P_i jednak nuli i P_j jednak očitanoj pritisku. Nadomjesni parametri su

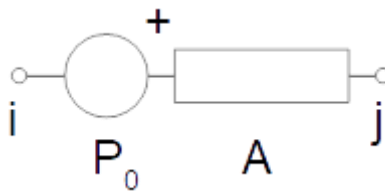
$$P_0 = \frac{m_1^2 P_2 - m_2^2 P_1}{m_1^2 - m_2^2} \quad (27a)$$

$$A = \frac{m_1}{\sqrt{P_0 - P_1}} \quad (27b)$$



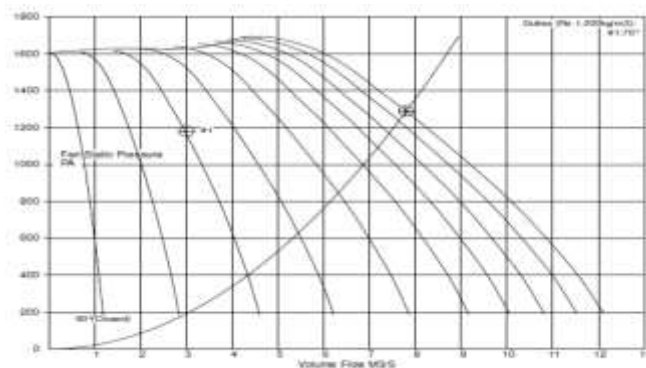
Sl. 13 Ovisnost pritiska i toka centrifugalne pumpe

Sa krivulje B na Sl. 3 možemo očitati $m_1=6000$, $P_1=140$; $m_2=12000$, $P_2=110$. Nadomjesni pritisak za krivulju B je $P_0=150$ a admitancija je $A=1897$.



Sl. 14 Nadomjesni elementi centrifugalne pumpe

Ventilatori se mogu nadomjestiti istim nadomjesnim elementima kao i centrifugalna pumpa. U nekim postrojenjima protok zraka se regulira zakretanjem krilca ventilatora koja su pokretna ili zakretanjem krilaca na ulazu u ventilator. U tom slučaju nadomjesni pritisak P_0 i nadomjesna admitancija A će biti funkcije kuta zakreta krilaca.

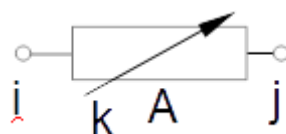


Sl. 15 Ovisnost pritiska i toka za ventilator

Kontrolni ventil se modelira promjenjivom admitancijom koja je funkcija položaja kontrolnog elementa.

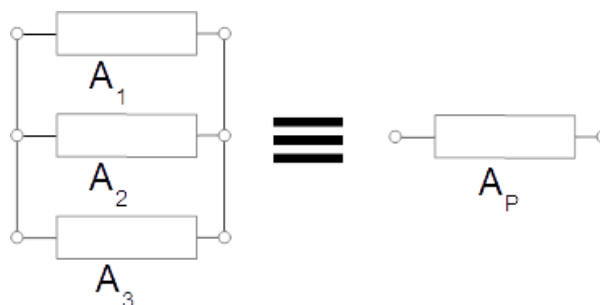
$$A_v = kA \quad (28)$$

Gdje je k funkcija položaja ventila. k ima vrijednost 0 za zatvoreni ventil i vrijednost 1 za potpuno otvoreni ventil. Simbol koji se koristi za grafički prikaz kontrolnog ventila je pokazan na sljedećoj slici



Sl. 16 Grafički prikaz kontrolnog ventila

Ako imamo mreže koje su sastavljene isključivo od admitancija opisanih jednačbom (11), u jednostavnim slučajevima možemo naći analitičko rješenje problema. Kod paralelnog spoja admitancija, nadomjesna admitancija je jednostavno suma pojedinačnih admitancija.



Sl. 17 Paralelni spoj admitancija

$$A_p = A_1 + A_2 + A_3 \dots \quad (29)$$

Kod serijskog spoja admitancija, recipročna vrijednost kvadrata nadomjesne admitancije cijele serije je jednaka sumi recipročnih vrijednosti kvadrata pojedinačnih admitancija



Sl. 18 Serijski spoj admitancija

$$\frac{1}{A_s^2} = \frac{1}{A_1^2} + \frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} \dots \quad (30)$$

3.2 Modeliranje volumena sa stlačivim fluidom

Mreže koje prenose paru, zrak ili neki drugi stlačivi plin trebaju uzeti u obzir činjenicu da je fluid stlačiv i da se masa fluida u samom volumenu mijenja tokom vremena. To uzrokuje neravnotežu u tokovima masa koje izlaze i ulaze u volumen. Da bi zakon o održanju mase vrijedio i u takovim slučajevima mi nadomještamo volumen sa stlačivim fluidom elementima mreže koji modeliraju efekte akumuliranja mase stlačivog fluida u

volumenu. Postrojenja sa stlačivim fluidom možemo podijeliti na ćelije koje imaju konstantan volumen. Masa stlačivog fluida u volumenu ćelije je određena specifičnim volumenom fluida kao

$$M_{(P,T)} = \frac{V}{v(P,T)} \quad (31)$$

Gdje je

- M – masa fluida u volumenu
- V – volumen ćelije
- v – specifični volumen fluida koji ovisi o pritisku i temperaturi. Kod mreža koje prenose paru specifični volumen može ovisiti o pritisku i entalpiji

Promjena mase fluida u volumenu ćelije može biti uzrokovana promjenom pritiska i promjenom temperature fluida. Promjena mase u nekom volumenu je opisana jednačinom

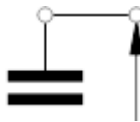
$$\frac{dM}{dt} = -\frac{V}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial v}{\partial P} \frac{dP}{dt} \right) \quad (32)$$

Ova jednačina se u mreži nadomješta sa dvije grane: izvorom mase i kapacitetom. Parametri grana su:

$$m = -\frac{V}{v^2} \frac{\partial v}{\partial T} \frac{dT}{dt} \quad (33a)$$

$$C = -\frac{V}{v^2} \frac{\partial v}{\partial P} \quad (33b)$$

Nadomjesna mreža za ravnotežu masa u stlačivom volumenu je prikazana na sljedećoj slici



Sl. 19 Nadomjesna mreža za ravnotežu masa u stlačivom prostoru

Slična nadomjesna mreža može se napraviti i za akumulaciju topline u prostoru sa stlačivim fluidom. Količina toplinske energije u nekom volumenu koji je ispunjen stlačivim fluidom mase M može se napisati kao funkcija temperature ili entalpije kao

$$Q = cMT \quad (34a)$$

$$Q = Mh \quad (34b)$$

Gdje je

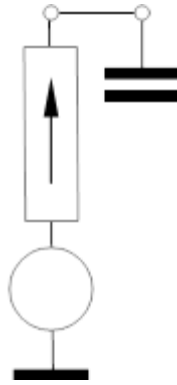
- M – masa fluida u volumenu
- Q – toplinska energija u volumenu
- c – specifična toplina fluida
- T – temperatura fluida
- h – entalpija fluida

Vremenska promjena energije u volumenu uz pretpostavku da je specifična toplina fluida konstantna može se napisati kao

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial M} \frac{dM}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial T} \frac{dT}{dt} = cTm + cM \frac{dT}{dt} \quad (35a)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial M} \frac{dM}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial h} \frac{dh}{dt} = hm + M \frac{dh}{dt} \quad (35b)$$

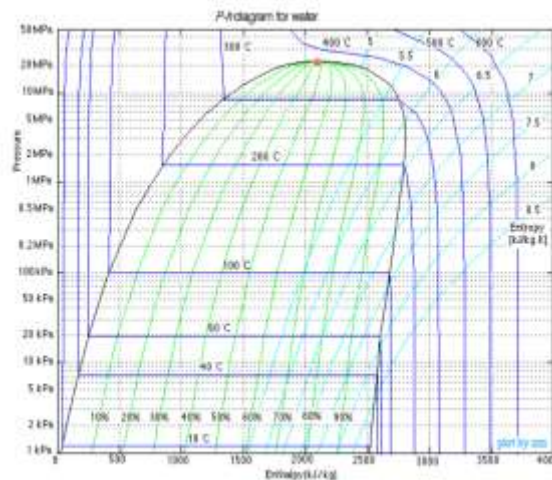
Nadomjesna mreža za ravnotežu energije u volumenu sa stlačivim fluidom može se predstaviti sa dvije grane. Grana koja predstavlja sumu toka mase u volumen zbog promjene temperature i pritiska te toplinski kapacitet samog fluida. Pri sumiranju toka mase u volumen treba obratiti pažnju na smjer u granama koje u mreži za ravnotežu masa predstavljaju članove jednačine za promjenu mase zbog promjene pritiska i temperature.



Sl. 20 Nadomjesna mreža za ravnotežu energije u stlačivom prostoru

3.3 Modeliranje turbine i kompresora

Turbina pretvara potencijalnu energiju sadržanu u pari ili plinu u mehaničku energiju dok kompresor pretvara mehaničku energiju u potencijalnu energiju plina. Kada se razmatra ravnoteža energije u plinu, turbina ili stupanj turbine koji pretvara potencijalnu energiju pare ili plina u mehaničku energiju se nadomješta nezavisnim izvorom topline koji smanjuje energiju plina. Kompresor se slično tako nadomješta nezavisnim izvorom topline koji povećava energiju plina. Parametar nadomjesne mreže se računa pomoću idealnih procesa ekspanzije ili kompresije sa faktorom iskoristivosti tog idealnog procesa.



Sl. 21 Dijagram toplinskih svojstava vode

$$q = \eta m(h_1 - h_2) \quad (36)$$

Gdje je:

q -tok energije iz fluida na rotor

m – tok mase fluida

h_1 – entalpija na ulazu u stupanj turbine

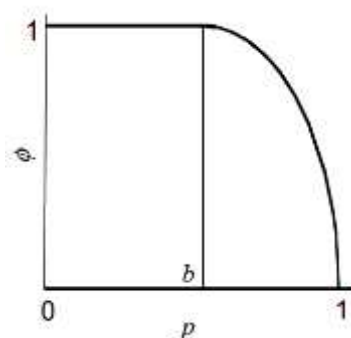
h_2 – entalpija na izlazu iz stupnja turbine za idealni proces ekspanzije

η - stupanj iskorištenja ekspanzije koji je nešto malo manji od 1

Entalpija na ulazu u stupanj turbine h_1 je poznata vrijednost a entalpija na izlasku iz stupnja turbine se računa pomoću idealnog procesa ekspanzije. Stupanj iskorištenja η je za dobru konstrukciju turbine vrlo blizu jedan.

Tok mase kroz stupnjeve turbine, koji predstavlja ekspanziju ili kompresiju idealnog plina ili pare može se računati pomoću Bendemann-ove [3] ili Stodoline [4] aproksimacije izentropne ekspanzije. Pri modeliranju mora se obratiti pažnja da se ne napravi nadomjesna mreža sistema koja nema rješenja. Prigušeni tok mase kroz stupanj turbine je ograničen ulaznim pritiskom i fizikalnim parametrima stupnja, kao što su presjek,

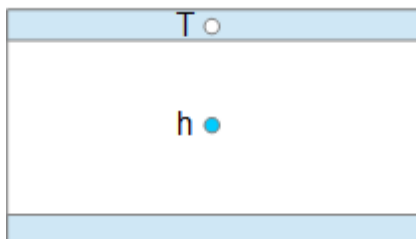
svojstva fluida i drugi. Prigušeni tok ne ovisi o izlaznom pritisku. Ako pokušamo napraviti mrežu koja iz turbine nastoji izvući tok veći od maksimalnog, takova mreža neće imati rješenja.



Sl. 22 Funkcija za aproksimaciju prigušenog toka

3.4 Povezivanje sistema sa različitim varijablama stanja

Tok topline kod konvektivnog prijenosa se računa kao linearna funkcija razlike temperatura dvaju tijela i fizikalnih parametara (površine, koeficijent prijenosa topline, ...). Prijenos topline od stjenke metala na paru u cijevima grijača se tretira kao konvektivni prijenos topline. Kod razmatranja termodinamike pare u grijačima obično se bira entalpija kao varijabla stanja za paru i temperatura za metal cijevi. Da bi se računao prijenos topline sa metala na paru potrebno je povezati dva sistema sa različitim varijablama stanja. Ako se prijenos topline u metalu i pari razmatra sa dvije mreže povezane rubnim uvjetima korištenje toka topline za rubni uvjet može dovesti do nestabilnosti u rješavanju mreže. Problem stabilnosti je posebno izražen kod malih tokova mase. Zbog toga se za ćelije sa parom entalpija i temperatura povezuju linearno ovisnom funkcijom



Sl. 23 Dijagram metala i pare u grijaču

$$h = cT \quad (37)$$

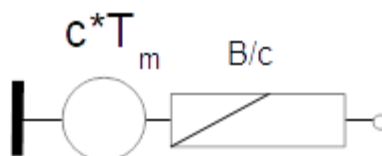
Gornja jednačba je definicija specifične topline. Tok topline sa stjenke metala na paru tada se može predstaviti jednačbom

$$q = B(T_m - T_p) = \frac{B}{c}(cT_m - h_p) \quad (38)$$

Gdje je

- q – tok topline
- T_m – temperatura metala u ćeliji koja je u kontaktu sa parom
- T_p – temperatura pare u ćeliji
- B – konstanta koja sadrži površinu prijenosa topline i koeficijent konvektivnog prijenosa
- h_p – specifična entalpija pare u ćeliji
- c – specifična toplina fluida

Produkt cT_m se može interpretirati kao “entalpija metala” koja je rubni uvjet u mreži za računanje prijenosa topline u pari. Prijenos topline u izmjenjivaču topline između metala i pare se može rješavati sa dvije neovisne mreže koje su povezane rubnim uvjetima.



Sl. 24 Nadomjesna mreža za prijenos topline sa metala na paru

3.5 Efekti tokom startanja turbine ili grijača pare

Dok je cijelo postrojenje termoelektrane hladno, grijači pare i turbina su ispunjeni zrakom koji ima temperaturu okoline. Da bi se moglo realistički modelirati postrojenje u svim pogonskim stanjima potrebno je uzeti u obzir različite kemijske komponente koje ispunjavaju dani volumen. I tu za proračun parcijalnih pritisaka pare u volumenu možemo primijeniti teoriju mreža. Prijenos kemijskih komponenti iz jednog volumena u drugi predstavljamo advekcijom. Količina zraka u fluidu koji ispunjava neki volumen može se računati na sličan način kao i količina topline u fluidu

$$Q_z = Mk_z \quad (39)$$

Gdje je

- Q_z – količina zraka
- M – ukupna masa fluida
- k_z – koncentracija zraka

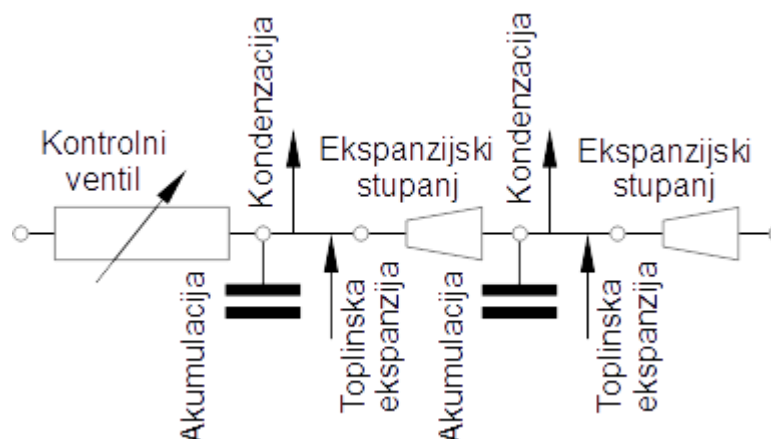
Nadomjesna mreža za vremensku promjenu koncentracije zraka u volumenu sa stlačivim fluidom ista je kao nadomjesna mreža za vremensku promjenu energije u takovom volumenu.

Tokom zagrijavanja postrojenja dolazi do kondenzacije pare na površini cijevi. Kondenzacijom pare gubi se masa iz mješavine zraka i pare a generira se masa kondenzata. Tako kad razmatramo ravnotežu mase u mješavini zraka i pare imamo nezavisni izvor mase koji ide iz mreže u okolinu a kod kondenzata imamo izvor koji donosi masu kondenzata u ćeliju. Pri evaporaciji kondenzata imamo obrnuti proces imamo nezavisni izvor mase koji smanjuje količinu kondenzata u ćeliji a povećava količinu pare.

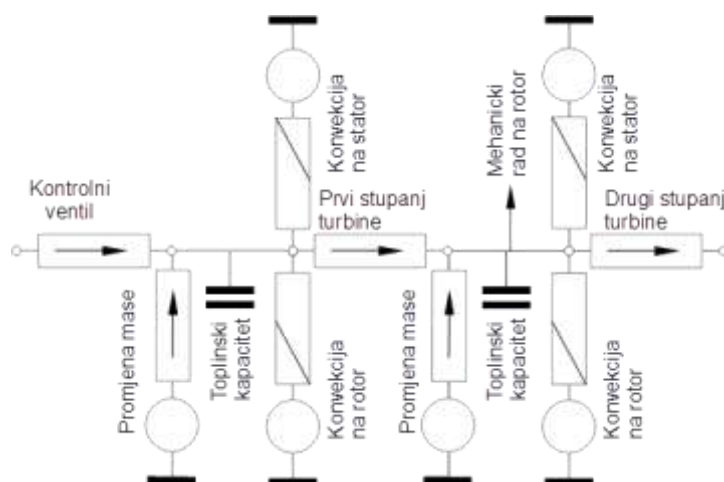
Pri startanju turbine dolazi do nejednolikog zagrijavanja unutrašnjosti i površine rotora i statora i do termičkih naprezanja u metalu. Temperature metala lako se računaju primjenom teorije mreža a kad su poznate temperature i naprezanja je moguće izračunati. Isto tako nejednoliko se zagrijavaju rotor i stator turbine te dolazi do neravnomjernog širenja rotora i statora što se naziva diferencijalnom ekspanzijom. Diferencijalna ekspanzija se može računati ako znamo profil temperature u metalu koje je moguće računati primjenom teorije mreža.

4 Nadomjesne mreže turbine za prijenos mase, energije i zraka

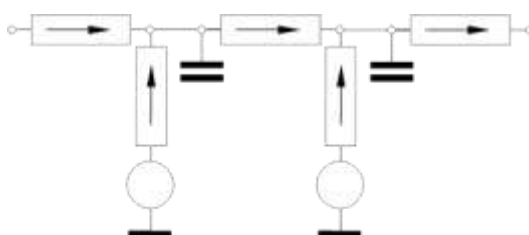
Primjena do sada izložene teorije bit će prikazana na primjeru nadomjesnih mreža za tok mase, energije i kemijskih elemenata u parnom postrojenju.



Sl. 25 Dio nadomjesne mreže za prijenos mase u turbini



Sl. 26 Dio nadomjesne mreže za prijenos energije u turbini

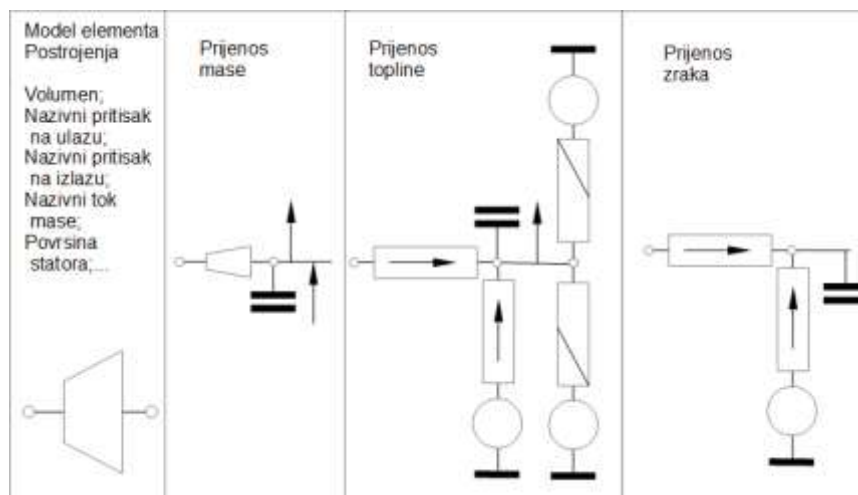


Sl. 27 Dio nadomjesne mreže za prijenos koncentracije zraka u turbini

Kod simulatora termoelektrana točnost koja se zahtjeva prilikom modeliranja postrojenja je propisana. Tipično se zahtjeva da u stacionarnom stanju simulirane vrijednosti glavnih parametara postrojenja kao što su pritisci i temperature pare u grijačima i oko turbina budu unutar 1% od mjerenih vrijednosti, a ostali parametri kao što su temperatura namota motora uljne pumpe budu unutar 5% od mjerenih vrijednosti. Stacionarna stanja se tipično definiraju na 40%, 60%, 80% i 100% nazivne snage. Za dinamičke promjene zahtjeva se da vremenske konstante i tok varijabli budu unutar 10% od mjerenih vrijednosti. Tako da je procjena parametara za modeliranje vrlo zahtjevna.

5 Integracija elemenata mreže

Koristeći grane mreža opisane u članku mogu se napraviti modeli sa višim nivoom integracije tako da inženjer ne treba da specificira svaku granu mreže nego se specificira cijela dio postrojenja kao što je stupanj turbine, stupanj kompresora, pumpa, stupanj grijača pare ili drugi elementi postrojenja. Računalni programi proračunavaju elemente grana mreže iz podataka o ćeliji i definiraju matematičke parametre grana mreže. Ćelija tada predstavlja fizikalni element i posjeduje svojstva fluida tako da ne možemo spajati ćelije sa svojstvima zraka sa ćelijama sa svojstvima ulja. Ovaj proces je sličan procesu definiranja modela elektroničkog sklopa koji se koristi u programima kao SPICE.



Sl. 28 Primjer ćelije za stupanj turbine

Zaključak

Primjenom teorije mreža postupak nalaženja profila pritisaka, temperatura ili koncentracija u ograničenom prostoru se bitno pojednostavnjuje. Moguće je napraviti kompjuterske rutine koje rješavaju probleme u općenitoj mreži. Time se inženjerski proces usmjerava na definiranje komponenti i određivanju parametara sistema, a inženjer se oslobađa rješavanja sustava jednačbi. Kada se jednom nacrtava nadomjesna shema sistema diskusija o tom sistemu postane jednostavnija jer se elementi koji utiču na ponašanje sistema lako identificiraju i mogu se vizualno predočiti. Ako neki efekti koji su važni u sistemu nisu obuhvaćeni modelom to je lakše za uočiti na nadomjesnoj shemi nego u kompliciranim matematičkim izrazima.

Teorija mreža je alat koji je na raspolaganju inženjerima pri rješavanju složenih problema. U ovom članku se prikazalo kako ta teorija može biti korištena u rješavanje problema vezanih uz simulaciju toplinskih postrojenja sa parom. Primjena teorije mreža nije ograničena na sisteme sa parom. Iste metode mogu se koristiti za proračune toka vode u cijevima, toka zraka i plinova u zračnim kanalima, ventilacije zgrada, tokove ulja u hidrauličkim sistemima i drugdje.

Literatura:

- [1] G. O. Brown: „The History of the Darcy-Weisbach Equation for Pipe Flow Resistance “ October 2002
- [2] C. Loudon, K. McCulloch: „Application of the Hagen--Poiseuille Equation to Fluid Feeding through Short Tubes “ January 1999
- [3] E. Urata, C. Youn, T. Kagawa: „Approximate Expressions for Characteristics of Gas-Flow Through Orifices“ Proceedings of the 9th JFPS International Symposium on Fluid Power, Matsue, 2014
- [4] C.S. Bresolin, P.S. Schneider, H.A. Vielmo and F.H.R.França; „Application of Steam Turbines Simulation Models in Power Generation Systems“ Engenharia Térmica (Thermal Engineering), Vol. 5 - Nº 01 - July 2006

APPLICATION OF NETWORK THEORY IN FLUID MECHANICS AND THERMODYNAMICS

Abstract: The article describes the application of network theory to the solution of engineering problems found not only in electrical engineering but in other engineering disciplines as well. Formulation of network equations is presented together with methods for avoiding some pitfalls that are encountered when solving nonlinear network equations. The description of typical network elements and method of creating a Jacobian matrix for networks

that are common in fluid mechanics and thermodynamics is given. Presented is the application of these elements to treat parts of physical plants like pumps, fans, turbine and compressor stages, valves, compressible volume. In the end, parts of networks to treat physical processes in the turbine are shown.

Keywords: fluid mechanics, thermodynamics, network theory, modelling, Jacobian

Branko Kovač