



Zvonimir Jakobović

Brojevi i brojke



KIKLOS

Zvonimir Jakobović

BROJEVI I BROJKE

Zagreb, 2016.

Naslovnica: Reprodukcijska bakroreza Melankolija I. Albrechta Dürera iz 1514. godine i izdvojeni magični brojčani kvadrat (Metropolitanska knjižnica Zagrebačke nadbiskupije, Valvazorova grafička zbirka, XV, 47). Autor i nakladnik zahvaljuju Nadbiskupskom duhovnom stolu Zagrebačke nadbiskupije na dopuštenju objavljivanja reprodukcije.

Sadržaj

Predgovor.....	1
1. Uvod.....	3
2. Osnovni pojmovi.....	5
2.1. Broj.....	5
2.1.1. Broj i brojnost.....	5
2.1.2. Vrste brojeva.....	7
2.2. Brojenje.....	9
2.3. Nazivi brojeva.....	13
2.4. Brojevni sustavi.....	18
2.4.1. Osnove brojevnih sustava.....	18
2.4.2. Tvorba elemenata brojevnog sustava.....	20
2.4.3. Brojevni skupovi.....	21
2.5. Brojevi kao oznake svojstava i kodiranja.....	22
2.5.1. Oznake svojstava.....	22
2.5.2. Oznake kodiranja.....	23
2.6. Gramatički brojevi.....	24
2.7. Računanje i matematika.....	25
2.7.1. Računanje.....	25
2.7.2. Matematičko mišljenje.....	27
3. Zapisivanje brojeva.....	29
3.1. Znakovi i zrnca.....	29
3.2. Slovne brojke.....	33
3.2.1. Grčke slovne brojke.....	33
3.2.2. Glagoljične slovne brojke.....	35
3.2.3. Čirilične slovne brojke.....	37
3.3. Brojke.....	38
3.3.1. Babilonske brojke.....	39
3.3.2. Staroegipatske hijeroglifske brojke.....	41
3.3.3. Staroegipatske hijeratske brojke.....	43
3.3.4. Grčke brojke.....	44
3.4. Usporedba zapisivanja nekim drevnim brojka.....	45

4. Rimske brojke	47
4.1. Etrušćanske brojke	47
4.2. Rimske brojke	48
4.2.1. Stare rimske brojke	49
4.2.2. Pisanje podataka rimskim brojkama.....	53
4.2.3. Suvremene rimske brojke	56
4.2.4. Pisanje posebnih i rednih brojeva rimskim brojkama	58
5. Arapske brojke	63
5.1. Indijsko-arapske brojke	63
5.1.1. Stare indijske brojke	63
5.1.2. Izum ničice	64
5.1.3. Indijsko-arapske brojke u Europi	65
5.2. Suvremene arapske brojke	69
5.2.1. Nazivi i vrijednosti arapskih brojki.....	69
5.2.2. Pisanje posebnih i rednih brojeva arapskim brojkama	70
6. Posebna svojstva i uporaba brojki i brojeva	73
6.1. Čudesni brojevi	74
6.2. Iznimni brojevi	78
6.3. Brojevi u drevnim tekstovima	82
6.3.1. Uporaba brojeva u drevnim tekstovima	82
6.3.2. Tajne velikih brojeva	83
6.4. Zagonetni brojevi	84
6.4.1. Broj Zvijeri.....	84
6.5. Magične sheme brojeva	85
6.5.1. Mnogokutni brojevi	85
6.5.2. Pascalov brojčani trokut	87
6.5.3. Magični brojčani kvadrati.....	89
6.5.4. Trobrojčani magični kvadrat.....	91
6.5.5. Dürerov magični kvadrat	93
6.5.6. Promijenjeni magični kvadrati.....	101
6.6. Nizovi brojeva	103
6.6.1. Nizovi i redovi brojeva.....	103
6.6.2. Fibonaccijev niz	103
6.7. Neobične primjene brojeva	106
6.7.1. Poigravanje brojevima	106
6.7.2. Primjene brojeva u okultizmu	108
7. Dodatak	109
7.1. Pojmovnik.....	109
7.2. Hrvatsko-engleski rječnik i kazalo	113
7.3. English-Croatian glossary and index	117
7.4. Neke norme o pisanju bojeva	121
7.5. Kratice i znakovi	122
7.6. Literatura	123

Predgovor

Dojam o brojnosti stvari oko nas jedna je od naših prvih spoznaja svijeta, vjerojatno starija od jezika u današnjem smislu, koji je postao i ostao osnovnim načinom sporazumijevanja i prenošenja informacija među ljudima. I u najprimitivnijim civilizacijama ljudi na neki način broje i tako, slikovito rečeno, *opipavaju* svijet oko sebe i stvaraju spoznaju o tome svijetu.

Od pamtivijeka stariji ljudi uče djecu brojiti te kao znak buđenja svijesti uz govor ponosno utvrđuju kako im djeca znaju brojiti “do tri”, “do pet”, “do deset” itd. Shvaćajući brojenje kao “nešto prirodno”, uče potom djecu računati. Stoga poimanje brojnosti i broja kojim se brojnost opisuje ostaje u počecima našeg razmišljanja kao nešto što je samo po sebi razumljivo i dovršeno.

Vraćajući se na ta početna pitanja shvaćanja i poimanja svijeta, nastala je ova povijesno-kulturna priča o *brojevima* kojima spoznajemo i opisujemo svijet, o *nazivima brojeva* kojima opisujemo brojeve i postupke s njima, te o *brojkama* nastalim iz potrebe za jednostavnim i pouzdanim zapisivanjem brojeva u svim njihovim primjenama. Opisat će se brojeve na nešto drugačiji način nego što smo ih shvaćali kad su nas, ponajprije u školi, učili brojiti, računati i matematički misliti, a spoznaja brojki na nešto drugačiji način nego onda kad su nas učili čitati i pisati. Prikazat će se nastanak i razvoj brojenja i zapisivanja brojeva te njihove posljedice na naše mišljenje.

Svako nas spominjanje brojeva i brojki vodi na pomisli o računanju i matematici. Ova knjižica ne govori o tome, ostavljajući vještini računanja i matematičko poimanje pripadnim školskim predmetima, studentskim kolegijima i znanstvenim disciplinama. U knjižici će se na jednostavan način pokazati povijesne, civilizacijske i kulturne činjenice o brojevima i brojkama te neke neobične primjene brojeva i brojki.

Zahvaljujem prof. dr. sc. Zvonku Benčiću koji je kao recenzent, urednik i nakladnik znatno pridonio izlasku knjige. Zahvaljujem također recenzentu prof. dr. sc. Ljubi Maranguniću te lektorici mr. sc. Andrei Pavlić, koji su korisnim primjedbama poboljšali tekst.

U Samoboru, ožujka 2015.

Z. J.

1. Uvod

Ako je riječ o matematici, čini se da je ipak najprirodnije da njezine prve začetke vidimo u brojenju, u stvaranju pojma "apstraktnog prirodnog broja" — kako bismo to danas rekli — u stvaranju naziva i znakova za brojeve

[Devidé, 1979]

Brojenje je jedna od osnovnih pojavnosti naše svijesti, a možda i podsvijesti, jedan je od osnovnih postupaka spoznavanja svijeta oko nas, a na neki način i u znatno manjoj mjeri svojstveno je i drugim živim bićima. Zapisivanje brojeva i "igranje" brojevima samo je ljudska osobina, koja se tijekom odgoja razvija i usavršava, tako da je teško razlučiti što je u početcima naše svijesti, a što je na neki način naučeno.

Kao što je zapisivanje riječi pismom kao sredstvom osnovni postupak prostornog i vremenskog širenja i očuvanja ljudske misli, tako je zapisivanje brojeva, ponajprije brojka, osnovni postupak prostornog i vremenskog širenja i očuvanja brojčanih vrijednosti kao mjerila svijeta oko nas.

Stoga će se pokazati kako je nastalo zapisivanje brojeva brojka, kako su od navika nastajali običaji zapisivanja brojeva, te na kraju, današnja pravila ujednačenog i normiranog zapisivanja brojeva.

Ljudi su od pamtivijeka osim brojčanih podataka u brojevima tražili i druga, skrivena značenja, od onih koja imaju razumnu podlogu, do mnogih izmišljenih, mističnih, magičnih i okultnih značenja.

Bit će zato prikazana neka od brojevima pridruženih značenja, koja nisu predmet niti vještine računanja, niti matematike kao znanstvene discipline, nego su dijelom naslijeđe prošlosti, a dijelom i današnjih poigravanja značenjima brojeva.

I na kraju, obradba brojeva koja nije samo puko računanje, postala je zadnjih stotinjak godina osnova umjetne inteligencije. To je svijet naših elektroničkih računala i računalne informatike, bez kojih nam je samo u zadnja tri desetljeća postao nezamisliv ne samo stručni, nego čak i obični, tzv. *svakodnevni život*.

Za razumijevanje razvoja uporabe brojeva i brojki valja makar malo pogledati u prošlost i razumjeti kako je sve nastalo i razvijalo se do današnje uporabe. Mnogi su od tih postupaka uporabe brojeva i brojki osnova opće ljudske civilizacije i kulture, utopljeni su u mnoge naše postupke za koje nam se na prvi pogled čini kako nemaju veze s brojenjem i brojkama. Uranjanje u dubinu tih postupaka osvjetljava drugačijim svjetlom mnoga naša ponašanja i mnoge naše navike i postupke.

Broj je počelo *matematike*, znanstvene discipline nastale iz brojenja, koju je vrlo teško jednostavno i jednoznačno definirati. Ovdje možda najbolje stoji ona šaljiva izreka *kako će dva stručnjaka dati tri mišljenja!* Osnovno je svojstvo matematike da je do krajnosti pravilna, pa je od drevnih do današnjih filozofa i matematičara ostala trajna dvojba: je li *logika* kao vještina mišljenja i prosuđivanja osnova matematike, ili je, obratno, *matematika* osnova logike?

U ovoj ćemo se knjizi pozabaviti osnovama brojenja i zapisivanja brojeva, a nadgradnju matematike ćemo ostaviti za neka druga razmatranja.

32	BR	
	<i>navis navigabilis</i> , <i>minimi navigabilis</i> .	
	Brodivina, Brodarina. (Sel.) navao;	
	<i>Nauticus</i> , li. <i>Portorianus</i> .	
	Brojacz. v. Broitel.	
	Brojen, na, no. Zbrojen. <i>Numeratus</i> , a;	
	<i>num</i> . 2. Brojen z-ozfaleam. <i>Adnumeratus</i> , a, um. 3. Drugoči brojčen, <i>Iterum numeratus</i> . 4. v. Rachunan.	
	Brojenice. v. Chifzio.	
	Brojenyc. <i>Numeratio</i> , oris. <i>Resensus</i> , it.	
	A ovakve broi.	
Jedén.	<i>Unus</i> .	1.
Dva.	<i> Duo</i> .	2.
Tri.	<i>Tri</i> .	3.
Chetiri.	<i>Quatuor</i> .	4.
Pét.	<i>Quingus</i> .	5.
Sešzt.	<i>Six</i> .	6.
Szedém.	<i>Septem</i> .	7.
Ošádm.	<i>Octo</i> .	8.
Devet.	<i>Novem</i> .	9.
Desztet.	<i>Decem</i> .	10.
Trádesztet.	<i>Viginti</i> .	20.
Trádesztet.	<i>Viginti</i> .	30.
Cheterdesztet.	<i>Quadragesima</i> .	40.
Petdesztet.	<i>Quingagesima</i> .	50.
Sešztadesztet.	<i>Sexagesima</i> .	60.
Szedemdesztet.	<i>Septuagesima</i> .	70.
Ofzemdesztet.	<i>Octuagesima</i> .	80.
Devetdesztet.	<i>Nonagesima</i> .	90.
Szto.	<i>Centum</i> .	100.
Petšto.	<i>Quingenti</i> .	500.
Jezeró.	<i>Mille</i> .	1000.
Pet jezer.	<i>Quingue milia</i> .	5000.
Desztet jezer.	<i>Decem milia</i> .	10000.
Petdesztet jezer.	<i>Quingagesima milia</i> .	50000.
Szto jezer.	<i>Centum milia</i> .	100000.

Po listari pak nachin ovak :

Jedén.	I.	<i>Unus</i> .
Pét.	V.	<i>Quingus</i> .
Devet.	IX.	<i>Novem</i> .
Desztet.	X.	<i>Decem</i> .
Petdesztet.	L.	<i>Quingagesima</i> .
Szto.	C.	<i>Centum</i> .
Petšto.	ICL.	<i>Quingenti</i> .
Jezeró.	CL.	<i>Mille</i> .
Pet jezer.	ICL.	<i>Quingue milia</i> .

BR	
Desztet jezer.	CCCC. <i>Decem milia</i> .
Petdesztet jezer.	CCCC. <i>Quingagesima milia</i> .
Szto jezer.	CCCC. <i>Centum milia</i> .
2. Brojenje, Precobrojenje. <i>Iterata numeratio</i> .	
Broin-iti, zbrajam-iti. <i>Numero</i> , <i>disnumeratio</i> , ar, ar. 2. broim razloge, ili račun zmečem, r. j. Razbrajam, računam, (Sel.) Hečzapim, <i>Computo</i> , <i>suputo</i> , at, <i>recensio</i> , et. 3. broim z-ozfaleam, škupa broim, (D.) uzbroim, <i>connumeratio</i> , at, <i>acensus</i> . 4. broim drugoh, prebrajam, <i>Iterum numero</i> . 5. v. Pobrajamšce.	
Broitel. (D. it.) brojacz, brojecchi, cha. Foem. broitelica. <i>Numerator</i> , oris, <i>numrans</i> , tis. 2. broitel razlogov, ili razlošeny, razlošnik, razbroynik, r. j. koi račune děla. <i>calculator supulator</i> , oris. Foem. <i>Computatrix</i> , tis.	
Broškvá. v. Kupšfc.	
Bröy. <i>Numerus</i> , ri. 2. broj dvojí, [D.] Dvojica, <i>Numerus binarius</i> . troí, troí-ća. <i>ternarius</i> , &c. 3. broj nejednak, <i>numerus impar</i> . 4. broj jednak, (D.) broj tak, <i>numerus par</i> . 5. broj jediní, jedinék, jedno zlamenujuchi, <i>numerus singularis</i> . 6. broj vekúne, vech zlamenujuchi, ili vnošim, <i>numerus pluralis</i> , <i>multitudinis</i> . 7. broj neizbroyni, na, no, <i>numerus incupabilis</i> . 8. broj izpraviljam vkup, (D.) kupim. (škupici bröy, <i>subleco numerum conficio sumam</i> .	

V. kupzebranye vřzega broja, (Sel.) hečzapenyc, *summa*, a. Broyni, na, no. z-broyni. *Numerabilis*, le. 2. v. Broyn. n. 7. Broynica, imenik. j. knjiga, list, &c. vu kojegašce imena, y pridouki zapišuju. *Catalogus*, gl. brúncr. Kúšter. *Capram*, pri, ar, aris. a. *oprim*. Brúnda. *Sistrum*, tri, *Crepitaculum*, *crem-balum*, trájma, tr.

Brúndica. *Crepitaculum*, li.

Brúšfc.

Belostenčav *Gazofilacij*, najstariji opsežni hrvatsko-latinski rječnik iz 1740. godine riječi *broj*, njezinim izvedenicama i nazivima brojeva posvećuje cijelu stranicu

2. Osnovni pojmovi

2.1. Broj

“... broj je više 'jednih' i nekakvo 'koliko'.....”

Aristotel, *Fizika*. 207b 7

2.1.1. Broj i brojnost

*Broj*¹ (lat. *numerus*, engl. *number*, *numeral*)², osnovni je matematički pojam. Podrijetlo je riječi indoeuropska osnova *bhrēi*: *bri-*, od toga *bher*: urezivati; prijevoj je dao riječ *brôj*; stariji hrvatski naziv je i *číslo* (otud se zadržao naziv *číslo* za krunicu). Staroslavenski glagol *čísti* (danas kažemo *brojiti*) dao je u hrvatskome *štiti* (u suvremenom obliku *čitati*), izvorno je značio *brojiti (slova)*, a *štioc* je stariji i stilski obilježen naziv za *čitatelja*.

Riječ *broj* u hrvatskom, pa i u drugim jezicima, ima i druga, nematematička značenja, na primjer, naziv je za jedinicu periodične publikacije (*broj časopisa*), za glazbenu jedinicu (*glazbeni broj*), za svojstvo nekih oblika riječi (*gramatički brojevi*). U filozofiji, religijama i mistici brojevi osim matematičkog značenja imaju i mnoga nematematička, znakovita, religijska i mistična značenja (→ 6.2. *Iznimni brojevi*).

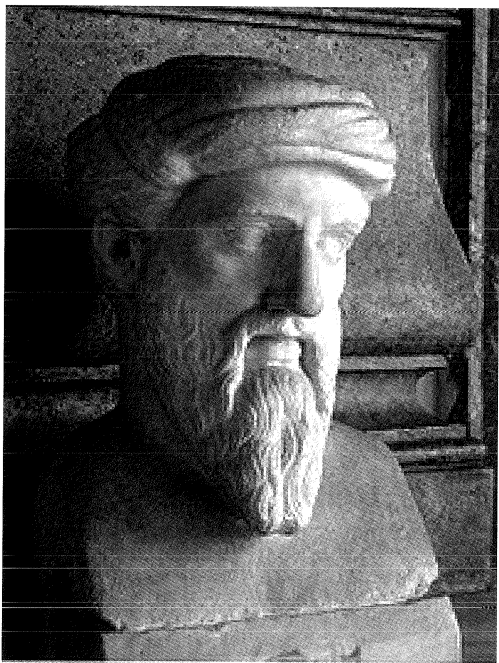
Broj je *zamišljeni* (apstraktni) matematički pojam koji opisuje *količinu* nekog skupa, dakle njegovo svojstvo *brojnosti*, tj. da se elementi (sastavnice, članovi, objekti; engl. *elements*, *members*, *objects*) tog skupa mogu brojiti, u načelu bez obzira na njihova svojstva i međusobne odnose. U ljudskoj svijesti broj je *iskustveni pojam* jer ga imaju svi ljudi, bez

¹ Već prvi hrvatski rječnik: *Rječnik pet najuglednijih europskih jezika* ima riječ *broy* (današnjim zapisom *broj*). [Vrančić, 1595]

² U ovoj se knjizi nazivima glavnih pojmova donosi i podrijetlo, a radi pouzdanog pretraživanja literature i interneta dodani su i nazivi na engleskom jeziku.

obzira na civilizacijsku razinu, kulturu i naobrazbu.³ Još su najprimitivnije civilizacije imale određeni pojam *broja* i *brojnosti*, kao odgovor na pitanje *koliko nečega ima*, u rasponu od *ništa*, preko *malo*, *dovoljno* do *mного*. Svi ljudi još u djetinjstvu buđenjem svijesti stječu dojam o *brojnosti nečega*, postupno ga proširuju te uče nazivanje i primjenu tog pojma.

Pojam broja jedan je od najdubljih pojmova u ljudskom mišljenju. Postupanje s brojevima u brojenju i računanju, oslanjanjem na tvarna pomagala (kamenčiće, zrnca, štapiće, prste, razne računaljke, danas elektroničke kalkulatorne) znatno je



Pitagora iz Samosa, prvi matematičar u današnjem smislu (Kapitolijski muzej u Rimu)

lakše nego razumijevanje i tumačenje pojma *što je to broj*. Stoga su još drevni mislioci pridavali brojevima mistična, religijska, pa i magična svojstva, kao što je to činio Pitagora⁴ i njegovi sljedbenici. Još je Filolaj⁵ smatrao kako je broj “... veliko, svemoćno, samodovoljno, prvo načelo i vođa u životu bogova, neba, ljudi. Bez toga je sve bez granica, tamno, nerazlučivo. Priroda je broja da je mjera oslonca, vodstva i upute u svakoj sumnji i teškoći. ... Vi možete opažati koju moć broj ima ne samo u poslovima bogova i demonu, nego u djelima i mislima ljudi, u svem obrtništvu i glazbi.” [Supek, 1995]

³ Promatranje ponašanja životinja upućuje na to da i one imaju nekakav osjećaj za broj elemenata skupa koji im je životno važan (svoje skupine, hrane, plijena, neprijatelja i sl.). [Devidé, 1979]

⁴ Pitagora iz Samosa (grč. Πυθαγόρας, engl. Pythagoras; otok Samos ~ 570. – Metapont ~ 495. pr. Krista), grčki filozof, matematičar, glazbenik i svećenik. Većinu je života proveo u antičkom gradu Krotonu (grč. Κρότων) u današnjoj Kalabriji (južna Italija), u kojem je osnovao religijski pokret *pitagorizam* i zajednicu istomišljenika koja je istraživala religijsku osnovu filozofije, matematike i glazbe te su došli do važnih spoznaja o brojevima. Do danas je najpoznatiji po dokazu geometrijskog pravila pravokutnog trokuta (koje je iskustveno bilo poznato već tisuću godina prije), koje se po njemu naziva *Pitagorinim poučkom*.

⁵ Filolaj (grč. Φιλόλαος, engl. Philolaus; ~ 470. – ~ 385. pr. Krista), grčki filozof, pitagorejac, djelovao u južnoj Italiji, posebno proučavao pojam broja.

2.1.2. Vrste brojeva

Tijekom razvoja ljudske misli, postupaka računanja i matematike, ustanovljen je niz vrsta brojeva koji omogućuju većinu računa i prikaz njihovih rezultata. U matematičkom poimanju te vrste tvore određene *skupove brojeva*. Postoje brojni skupovi brojeva s raznovrsnim svojstvima. Ovdje se navode samo nazivi i definicije glavnih skupova brojeva, a njihova detaljnija svojstva mogu se naći u matematičkoj literaturi. Neki su posebni skupovi opisani u zadnjem poglavlju ($\rightarrow$ 6. *Posebna svojstva i uporaba brojeva i brojki*).

Prirodni brojevi (engl. *natural numbers*) posljedica su *brojenja* nečega, oni opisuju brojnost bilo kakvih elemenata (jedan, dva, tri ...). To su cijeli brojevi veći od ništa. Stoga se pod *brojem* ponajprije misli na takve brojeve ($\rightarrow$ 2.2. *Brojenje*).

Ostale skupine brojeva matematički su pojmovi nastali proširenjem tog osnovnog pojma.

Racionalni brojevi (prema lat. *ratio*: omjer; engl. *rational numbers*) opisuju dijeljenje nekih cjelina koje se može konačno izraziti, bilo kao razlomak, bilo u decimalnom prikazu koji je konačan. Ukoliko je decimalni prikaz racionalnog broja beskonačan, taj je prikaz periodičan.

Iracionalni brojevi (engl. *irrational numbers*) dijelovi su cjelina koji se ne mogu konačno izraziti, dakle ne mogu se prikazati kao razlomci, a decimalni prikaz im je beskonačan i neperiodičan.

Prirodni, racionalni i iracionalni brojevi mogu se zorno geometrijski prikazati na brojevnom polupravcu.

Negativni brojevi (engl. *negative numbers*) zrcalna su slika prirodnih, racionalnih i iracionalnih brojeva u istoj dimenziji (protegnuću), koji uvijek omogućuju oduzimanje. Zorno se mogu geometrijski prikazati na brojevnom polupravcu u suprotnom smjeru od prirodnih, racionalnih i iracionalnih brojeva.

Cijeli brojevi (prema lat. *integer*: cijel, pun; engl. *integers*) skup su prirodnih i njihovih negativnih brojeva, uključujući i broj ništa.

Parni brojevi (engl. *even*) cijeli su brojevi cjelobrojno djeljivi brojem 2, a *neparni brojevi* (engl. *odd*) to nisu. To se svojstvo cijelih brojeva naziva *parnost* (engl. *parity*).

Realni brojevi (prema lat. *realitas*: stvarnost; engl. *real numbers*) skup su prirodnih, racionalnih, iracionalnih i negativnih brojeva, uključujući i broj ništa, a zorno se mogu se prikazati na cjelovitom brojevnom pravcu.

Imaginarni brojevi (prema lat. *imago*: slika; engl. *imaginary numbers*) zakrenuta su slika realnih brojeva u drugoj dimenziji. Geometrijska im je predodžba na brojevnom pravcu okomitom na brojevni pravac realnih brojeva. Nastaju množenjem realnih brojeva tzv. *imaginarnom jedinicom* $i = \sqrt{-1}$.

Kompleksni brojevi (prema lat. *complexus*: obuhvat, obujam; engl. *complex numbers*) parovi su realnih i imaginarnih brojeva kojih je geometrijska predodžba u ravnini, dakle dvodimenzijska.

Brojeva osnova određuje način zapisivanja brojeva, pa su tako, na primjer *decimalni*, *desetni* ili *dekadski brojevi* (engl. *decimal numbers*), koje najčešće rabimo, zapisani u brojevnom sustavu s osnovom deset ($\rightarrow$ 2.4.1. *Osnove brojevnih sustava*).

Razlomci (prema lat. *fractus*: razlomljen; engl. *fractions*) brojevi su zapisani na poseban način s pomoću dvaju brojeva odijeljenih horizontalnom ili kosom razlomačkom crtom, na primjer $\frac{1}{2}$ ili $1/2$; $\frac{3}{4}$ ili $3/4$, gdje donji broj, tzv. *nazivnik*, opisuje dijelove cjeline (polovine, trećine, četvrtine i dr.), a gornji broj, tzv. *brojnik*, daje broj tih dijelova.

Redni brojevi (engl. *ordinal numbers*) uređen su skup cijelih brojeva poredanih po vrijednostima pa opisuju redosljed elemenata (prvi, drugi, treći, ...).

U višoj se matematici skupovima brojeva pridružuju svojstva koja su bez matematičkog predznanja teže razumljiva: konačnost i beskonačnost, prebrojivost i neprebrojivost i dr. Jedna je od posljedica takvih razmatranja i razvrstavanje brojeva na *algebarske brojeve* (engl. *algebraic numbers*) koji su rješenja algebarskih jednadžbi s cjelobrojnim koeficijentima i *transcendentne brojeve* (prema lat. *transcendere*: premašiti; engl. *transcendental numbers*) koji su realni i nisu algebarski. Transcendentni su, na primjer broj π , broj e^a (gdje je a algebarski broj osim ništa, pa je za $a = 1$ transcendentan i sam broj e), e^π , broj a^b (gdje su a i b algebarski brojevi, te $a \neq 0$ i $a \neq 1$), i neki drugi.

S obzirom na stalnost ili promjenjivost vrijednosti razlikuju se *posebni* i *opći brojevi* koji se drugačije zapisuju.

Posebni brojevi (engl. *special numbers*) imaju nazive i stalnu vrijednost, a većinom se zapisuju brojkama (na primjer 1, 2, 3 itd.). Iznimno se samo neki *određeni posebni brojevi* zapisuju slovima. Na primjer, omjer opsega i promjera kružnice, tzv. *Ludolfov broj*, zapisuje se uspravnim grčkim kurentnim slovom π (pi), osnova prirodnih logaritama zapisuje se uspravnim latiničnim kurentnim slovom e , itd.

Opći brojevi (engl. *general numbers*) mogu poprimiti različite vrijednosti, a zapisuju se kurzivnim, većinom kurentnim slovima latinične abecede ili grčkog alfabeta ($a, b, x, y, \beta, \varphi$ i dr.). Takvo je zapisivanje proizvoljnih općih brojeva slovima u Europi prvi primijenio u 13. stoljeću ugledni matematičar Nemorarius⁶.

2.2. Brojenje

“1) Jedinica je ono s pomoću čega se svaki predmet koji postoji naziva jedan.

2) Broj je množina sastavljena od jedinica.”

Euklid⁷, *Elementi*.

(prve dvije aritmetičke definicije)

*Brojenje*⁸ (engl. *count, counting, numeration*) osnovni je postupak spoznavanja pojma broja i njegove primjene. Ostvaruje se *jednoznačnim pridruživanjem* elemenata promatranog *brojenog skupa* elementima drugog, *usporedbenog skupa*.

Ljudi broje od pamtivijeka, svaki čovjek svaki dan nešto broji, sve u svojim mislima i stvarnom svijetu oko sebe brojimo, brojimo u svojim zanimanjima, poslovima i mislima, brojimo osobe, biljke i životinje, predmete, dobra i novce, brojimo trenutke, dane i godine, brojimo u sreći i nesreći. Brojimo od svakodnevnih stvari oko sebe, sve od sastavnica mikrosvijeta do zvijezda. Sva je znanstvena, kulturna, umjetnička i misaona baština čovječanstva ispunjena brojenjem. U književnosti je mnogo opisa brojenja, od prvih mitova, preko Biblije i ljetopisa sve do suvremenih opisa tvarnih, društvenih, misaonih i duhovnih spoznaja. Broje djeca

⁶ *Jordanus Nemorarius* ili *Jordan de Nemore* (1225. – 1260.), veliki srednjovjekovni matematičar, neki ga poistovjećuju s dominikancem sv. Jordanom Saksonskim (~ 1200. – 1237.; spomendan 13. veljače). Napisao nekoliko matematičkih knjiga, među njima i sveučilišni udžbenik u četiri sveska *Liber de numeris datis*, u kojima obrađuje linearnu algebru i kvadratne jednačbe.

⁷ Euklid (grč. *Εὐκλείδης*, *Eukleides*, engl., *Euclid*; 330. – 275. pr. Krista), znameniti grčki matematičar, nazivan *ocem geometrije*. Većinu je radnog vijeka proveo u Aleksandriji u Egiptu, gdje je osnovao školu. Najvažnije mu je djelo *Elementi* u 13 knjiga (grč. *Στοιχεῖα*, *Stoicheia*: počela, elementi), koje se kao udžbenik geometrije rabio od antike sve do 18. stoljeća. *Elementi* su objavljeni u više od 1700 izdanja, bili su poslije Biblije najviše puta objavljena knjiga! U njoj je polazna definicija geometrije: “Točka je ono što nema dijelova!”

⁸ U *Gazofilaciju* stoji *brojenye* (lat. *numeratio*) [Belostenec, 1740], a u *Rječniku znanstvenoga nazivlja* stoji *brojenje* (njem. *Zählung*). [Šulek, 1874/75]

i odrasli, mladi i stari, pismeni i nepismeni, učeni i neuki. Brojenje je nakon govora vjerojatno najčešći redovito primjenjivan postupak u našim životima.⁹

Stoga je osobito vrijedno upoznati nastanak i postupke brojenja. Brojenje je nastalo, a i danas se u mnogim primjenama odvija, pridruživanjem elemenata brojenog skupa elementima jednog od *triju vrsta* usporedbenih skupova s određenim svojstvima: nekom *neuređenom skupu*, nekom *uređenom skupu* ili *brojevima*. U matematičkim modelima brojenja to se pridruživanje može opisivati i na druge, temeljitije i opsežnije načine!

Brojeni skup, skup koji se *broji*, sadrži neke elemente, ali može biti i *prazan skup* ili imati *prazno mjesto* ili *prazninu* bez elementa. Ljudima su trebale tisuće godina za jasno shvaćanje kako može biti da u promatranom skupu ili njegovu dijelu *nema ničega*, tj. za shvaćanje pojma da je i *ništa* broj.

Usporedbeni skup, skup s kojim se *uspoređuje*, s obzirom na svoje elemente može imati svojstvo *uređenosti* (može biti uređen, tj. elementi imaju određen raspored u skupu, ili neuređen), *omeđenosti* (može biti omeđen ili neomeđen) i *stalnosti* (može biti stalan ili promjenjiv). Za brojenje skupova s mnogo elemenata, usporedbeni skup treba biti neomeđen ili gotovo neomeđen, pa se osim opisa takva skupa kao *mnogo*, *bez-broj*, *neprebrojivo* i sl., razgovorno rabe gotovo pjesnički izrazi: *more nečega*, *kao pijeska u moru*, *kao zvijezda na nebu* i dr. (→ 2.3. Nazivi brojeva)

Pridruživanje neuređenom skupu događa se kad se elementi promatranog skupa pridružuju elementima usporedbenog skupa, koji nije uređen niti mora biti omeđen, ali ima svojstva da je na neki način sugovornicima *razumljiv* te da je *prenosiv*, *uporabiv*, *trajan* itd. Takvo je vjerojatno bilo *prvotno brojenje*, kad je čovjek u dubini povijesti, opažajući tri jelena na proplanku, za svakog jelena uzео u šaku po jedan kamenčić, sjemenku, štapić ili nešto slično te taj *brojčani podatak*¹⁰ ostvaren jednakim brojem elemenata nekog drugog skupa odnio drugim članovima plemena kao brojčani podatak: "Evo, toliko je jelena." Iako takav postupak izgleda vrlo jednostavno, u biti je veliki skok u mišljenju. Pri takvom se brojenju svojstvo jednog skupa (brojnost jelena) preslikalo

⁹ *Opsjednutost brojenjem* patološko je brojenje svega i svačega u okruženju, jedna je od pojavnosti duševne bolesti koja se naziva *opsesivno-kompulzivnim poremećajem* (OKP, poremećaj prisilnom obuzetosti; engl. *obsessive-compulsive disorder*, OCD).

¹⁰ U knjizi se pridjev *brojevni* odnosi na ono što je u vezi s brojevima općenito (npr. *brojevni sustav*), a *brojčani* na ono što je u vezi s brojevima izraženim brojka (npr. *brojčana vrijednost*).

na istovrsno svojstvo drugog skupa (brojnost kamenčića). Time se svojstvo *brojnosti* “izdignulo” iznad svojstava elemenata skupova, postalo je *primišljeno* ili *apstraktno* jer nitko “razuman” pritom ne shvaća da kamenčić ima neko stvarno svojstvo jelena!

Valja uočiti kako su pri takvom brojenju za prijenos podatka potrebni *svi članovi usporedbenog skupa*, na primjer, svi kamenčići, jer je usporedbeni skup *brojevna slika* promatranog skupa, ali takav skup ne treba biti uređen (nevažan je redoslijed kamenčića).

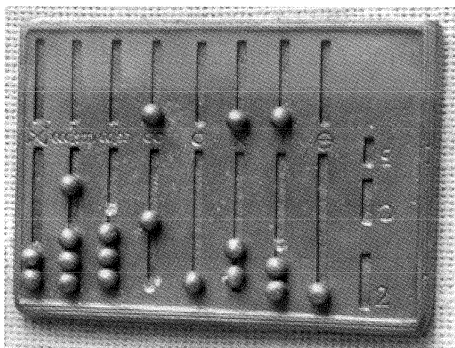
Pridruživanje uređenom skupu događa se kad se elementi promatranog skupa pridružuju elementima usporedbenog skupa koji je na neki način uređen, a obično i omeđen. Takvo je *brojenje na prste*, kad se elementi promatranog skupa preslikavaju na skup prstiju, većinom obiju šaka (a po potrebi i nogu!). Pritom se preslikavanje odvija obično *po redu prstiju*, pa se, osim o broju elemenata, u rezultatu takva brojenja nalaze skrivena još dva podatka: okupljanje podataka u podskupove (prsti jedne ruke, prsti dviju ruku itd.), te se uz ustaljen redoslijed preslikavanja može utvrditi i redoslijed podataka, dakle *redni broj*. Brojenje na prste primjenjuju ljudi od davnina do danas, ne samo kao prvo, tzv. *školsko brojenje*, nego i kao vrlo pouzdan način brojenja u svakodnevnom životu.

Brojenje na prste nastavilo se brojenjem s pomoću uređenih i konačnih skupova i podskupova, ostvarenih poredanim određenim brojem elemenata, kao što su kamenčići, štapići, plodovi, zrnca i sl., nanizanih u nekom žlijebu, na nekoj uzici ili sl. Takva pomagala za brojenje omogućuju i zorno postupanje s brojevima, dakle osnovna računanja zbrajanja i oduzimanja pa su se ubrzo razvila u *računaljke*, jednostavna pomagala za računanje. Najviše su se rabile računaljke s kuglicama poredanim u žlijebovima na nekoj ploči, tzv. *abak* (grč. *ἄβακος*, *abakos*, lat. *abacus*: ~ daska; engl. *abacus*), ploča premazana voskom ili prahom, predviđena za pisanje, crtanje ili računanje, a potom s kuglicama nanizanim na žice ili uzice, kakve se rabe do naših dana. Od Rusije (rus. *абак, счёты*) do Japana, računanje s pomoću abaka i danas se uči, a tamošnji ljudi vrlo vješto i brzo obavljaju složeno računanje zbrajanja i oduzimanja, a tek ih nakon tisuća godina uporabe potiskuju suvremeni elektronički *kalkulatori* (engl. *calculator*)¹¹, uređaji s programima za obavljanje niza računskih operacija.

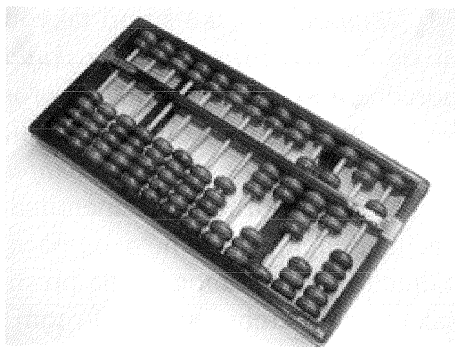
Složenije mehaničko pomagalo za računanje, osnovano na pomičnim letvicama s ljestvicama brojeva, logaritama brojeva i dr., bilo je

¹¹ Naziv *kalkulator* (prema lat. *calculus*: kamičak, oblutak) upravo potječe od računaljke s oblim kamenčićima u žlijebovima.

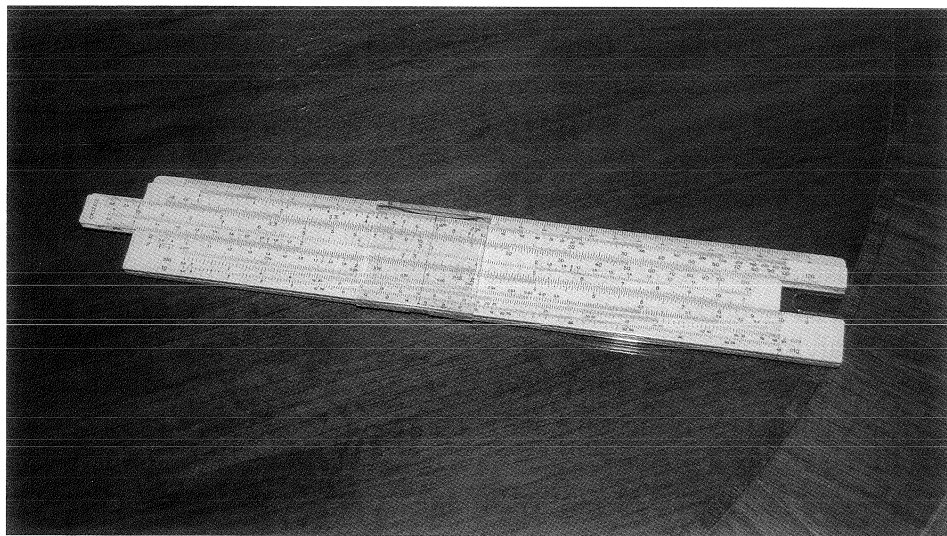
logaritamsko računalo, razgovorno *logaritmar* ili *šiber* (prema njem. *Sc-hieber*: pomicaljka). Rabilo se do 1970-ih godina te je gotovo tri stoljeća bilo osnovno inženjersko pomagalo.



Antički rimski abak s kuglicama u žlijebovima (Muzej u Mainzu – rekonstrukcija)



Suvremeni abak kakav se i danas rabi od Rusije do Japana



Logaritamsko računalo, mehaničko pomagalo za računanje

Pridruživanje brojevima događa se kad se elementi promatranog skupa pridružuju elementima usporedbenog skupa koji se sastoji od niza *uređenih naziva* ili *uređenih znakova brojeva*. Elementi brojenog skupa pridružuju se *po redu* elementima usporedbenog skupa. Stoga pri takvom brojenju zadnji upotrijebljeni broj u nizu nosi *puni podatak*, pa je

nepotrebno navoditi sve elemente niza koji su dotad upotrijebljeni. Ako se pri brojenju dođe do broja *tri*, tad je *tri* potpun podatak, nije potrebno, kao kod onih kamenčića u šaci, navoditi sva tri broja: *jedan, dva i tri*. Dapače, podatak izražen s pomoću svih dotad upotrijebljenih brojeva (da ima *jedan, dva, tri jelena*) mogao bi se krivo razumjeti kako ima *jedan i dva i tri jelena*, dakle ukupno šest jelena! Brojenje pridruživanjem uređenim brojevima u uporabi je tisućama godina, najčešći je način brojenja, pa smo ga skloni smatrati gotovo *prirodnim načinom brojenja*.

2.3. Nazivi brojeva

Nazivi brojeva (engl. *number names, numerals*), stariji, gotovo zaboravljeni hrvatski nazivi su *brojnici*¹² ili *brojnice*,¹³ u prirodnim su jezicima brojevima *jednoznačno* pridružene riječi. Nazivi osnovnih brojeva nastali su vrlo rano, pa spadaju u tzv. *prariječi*, koje su i danas, nakon tisuća godina, slične u jezicima koji potječu iz istog korijena kao što su to indoeuropski jezici. U tablici su navedeni nazivi prvih deset brojeva na nekoliko indoeuropskih jezika, iz koje se vidi kako su većinom zvukovno slični nazivima na prajeziku sanskrtu, a po tome i međusobno.

Velika je sličnozvučnost većine naziva pojedinih brojeva stoga što su nastali prije pismenosti. To se ponajprije može pripisati *pranazivima brojeva*, a potom i preuzimanju naziva brojeva pri kulturnim, trgovačkim i drugim dodirima među narodima.

Nazivi brojeva zbog svoje važnosti spadaju među najstabilnije riječi u nekom jeziku, riječi koje su se tijekom vremena malo mijenjale. Tako se i nazivi brojeva u hrvatskom jeziku od prvih pisanih dokumenata, te od prvih rječnika, kroz stoljeća do danas gotovo nisu promijenili. To se vidi u tablici Habledićeva *Dikcionara*, isusovačkog školskog rječnika koji je bio u uporabi cijelo stoljeće, u kojem su nazivi brojeva gotovo jednaki današnjim, uz neznatnu pravopisnu razliku, a takvi su nazivi i u *Gazofilaciju*, prvoj hrvatskoj *Aritmetici* i drugim izvorima. [Habledić, 1670], [Belostenec, 1740], [Šilobod, 1758].

¹²Naziv *brojnik* (lat. *numerales*, njem. *Zahlwort*) ima još *Rječnik znanstvenoga nazivlja* [Šulek, 1874/75], koji je potom uzet za naziv dijela razlomka.

¹³*Brojnicu* za naziv broja ima *Računica* s kraja 19. st., ali suvremeni je hrvatski rječnici niti ne bilježe. [Cuvaj, 1890/1908]. U *Gazofilaciju* je *brojnicza* istoznačnica za *imenik* (lat. *catalogus*). [Belostenec, 1740]]

Nazivi prvih deset prirodnih brojeva na nekoliko indoeuropskih jezika

<i>Sanskrt</i>	<i>Hrvatski</i>	<i>Staroslavenski</i>	<i>Starogrčki</i>	<i>Latinski</i>	<i>Talijanski</i>	<i>Francuski</i>	<i>Njemački</i>	<i>Engleski</i>	<i>Ruski</i>	<i>Albanski</i>
eka	jedan	једънь*	εις (eis)**	unus	uno	un	eins	one	один (odin)**	një
dva	dva	дѣва	δυο (dyo)	duo	due	deux	zwei, zwo	two	два (dva)	dy
trajas	tri	трије, tri	τρεῖς, τρία, (treis, tria)	tres	tre	trois	drei	three	три (tri)	tre
čatur	četiri	četyre	τετταρεῖς, τετταρα (tettarēs, tettara)	quattuor	quatro	quatre	vier	four	четыре (četirje)	katër
panča	pet	petь	πεντε (pente)	quinque	cinque	cinq	fünf	five	пять (pjat)	pesë
šša	šest	šestь	ἑξ (heks)	sex	sei	six	sechs	six	шесть (šest)	gjahstë
sapta	sedam	sedmь	επτα (hepta)	septem	sette	sept	sieben	seven	сем (sjem)	shtatë
ašta	osam	osmь	οκτώ (okto)	octo	otto	huit	acht	eight	восемь (vosjem)	tetë
nava	devet	devetь	εννεα (ennea)	novem	nove	neuf	neun	nine	девять (devjat)	nëntë
dša	deset	desetь	δέκα (deka)	decem	dieci	dix	zehn	ten	десять (desjat)	dhjetë

* Ъ и Ѣ su znakovi za reducirane samoglasnike *jer* i *jor*

** U zagradama su nazivi transliterirani na latinicu.

Tabula Broja Szlovenszkoga, i Diachkoga.

1. Jeden. *Unu.* I.
2. Dva. *Duo.* II.
3. Tri. *Tres.* III..
4. Četiri. *Quatuor.* IIII. vel IV.
5. Pet. *Quinque.* V.
6. Šest. *Sex.* VI.
7. Sedem. *Septem.* VII.
8. Oštem. *Octo.* VIII.
9. Devet. *Novem.* IX.
10. Deset. *Decem.* X.
11. Jedenašest. *Undecim.* XI.
12. Dvanašest. *Duodecim.* XII.
13. Trinašest. *Tredecim.* XIII.
14. Četirinašest. *Quatuordecim.* XIII. vel XIV.
15. Petnašest. *Quindecim.* XV.
16. Šestnašest. *Sedecim.* XVI.
17. Sedemnašest. *Septemdecim.* XVII.
18. Ošternašest. *Octodecim.* XVIII.
19. Devetnašest. *Novemdecim.* XIX.
20. Dvadeset. *Viginti.* XX.
21. Dvadeset jedan. *Viginti unu.* XXI.
22. Dvadeset dva. *Viginti duo.* XXII.
23. Dvadeset tri. *Viginti tres.* XXIII.
24. Dvadeset četiri. *Viginti quatuor.* XXIV.
25. Dvadeset pet. *Viginti quinque.* XXV.
26. Dvadeset šest. *Viginti sex.* XXVI.
27. Dvadeset sedem. *Viginti septem.* XXVII.
28. Dvadeset oštem. *Viginti octo.* XXVIII.
29. Dvadeset devet. *Viginti novem.* XXIX.
30. Trideset. *Triginta.* XXX.
31. Trideset jedan. *Triginta unu.* XXXI.
32. Trideset dva. *Triginta duo.* XXXII.

Et 4

Et

Tablica brojeva s nazivima na *slovenskom* (tj. hrvatskom) uz koje su arapske brojke, te na *dijačkom* (tj. latinskom) jeziku¹⁴ uz koje su rimske brojke (Habdelićev *Dikcionar* iz 1670. godine; početak tablice)

U hrvatskom jeziku postoji 21 *osnovni naziv* prirodnih brojeva: *jedan, dva, tri,, devetnaest, stotina* (ili *sto*) i *tisuća*¹⁵ (zadnja su dva po smislu nazivi brojeva, a zapravo su imenice). Tomu valja dodati i naziv *ništa* za pojam koji je tek u novije vrijeme shvaćen kao broj.

¹⁴Nazivi jezika sve su do prve polovine 19. st. bili drugačiji nego danas, pa se hrvatski jezik nazivao *horvatskim, slovjanskim, slovenskim, dalmatinskim, ilirskim*, na hrvatskom se latinski jezik, pošto je bio jezik školstva, često nazivao *dačkim*, a talijanski se, pošto su Hrvati Talijane nazivali *Latinima*, nazivao *latinskim*. [Katičić, 2013]

¹⁵Hrvatski *tisuća*, prema praslavenskom *tysoŭti*: mnogo, deset stotina; s malim inačicama gotovo je sveslavenska riječ (npr. rus. i ukr. *тисяча*). U hrvatskoj se kajkavštini za *tisuću* rabi naziv *jezero*, a za toliku novčanicu *jezerača*, što se obično tumači kao posuđenica iz mađarskog (mađ. *ezer*: tisuća). Ipak, i ta je riječ vjerojatno iz praslavenskoga, a možda i starija, gdje je riječ *jezero* (jednako kao još i danas *more*) prvotno označavala *obilno, mnogo*, a tek je naknadno dobila značenje određenog velikog broja. Stoga i poznati kajkavski stih “jezero kaplic, jezero let” valja shvatiti kao “obilno kapljica, mnogo godina”, a ne upravo *tisuću*!

Preostali su nazivi brojeva posuđenice stranog podrijetla: *nula*, *hiljada*¹⁶, *milijun*¹⁷, *milijarda*, *bilijun* itd. Pravilima slaganja osnovnih naziva brojeva omogućeno je neograničeno jednoznačno nazivanje brojeva, na primjer, *dvadeset* = *dva* (puta) *deset*, *dvadeset* i *jedan* itd. Od osnovnih naziva prirodnih brojeva tvore se nazivi dijelova (*trećina*, *četvrtina* itd.), a od njih nazivi razlomaka (na primjer *jedna trećina*, *dvije petine* itd.), te većina naziva rednih brojeva (na primjer, *treći*, *četvrti*, *peti* itd.). Postoje i iznimke od sustava, hrvatski nazivi koji **nisu** tvoreni od osnovnih naziva brojeva, kao što su nazivi: *pola* (nije tvoren od *dva*), *prvi* (nije tvoren od *jedan*), *drugi* (nije tvoren od *dva*). Nazivanje i pisanje brojeva određuju rječnici i pravopisi, a slaganje tih naziva gramatike, sve na osnovi ustaljenih jezičnih običaja.

Izbori naziva brojeva i pravila njihova slaganja različiti su u pojedinim jezicima. U nekim jezicima uz suvremene sustavne nazive i tvorbe postoje i tragovi drugačijih načina nazivanja brojeva. U francuskom se, na primjer, broj 60 sustavno naziva *soixante*, ali je 70 *soixante-dix*: šezdeset-deset, kao trag starog sustava s osnovom šezdeset, dok se broj 80 nesustavno naziva *quatre-vingts*: četiri-dvadeset, kao trag starog sustava s osnovom dvadeset (u švicarskom francuskom to je ipak sustavno *octante*: osamdeset). Na ruskom se, na primjer, broj 30 sustavno naziva *mpy̆ȕamь*, *tridcat*, ali se 40 nesustavno naziva *copok*, *sorok* (naziv stare brojčane jedinice krznjenih koža), riječju jednakog podrijetla kao hrvatska riječ *struk*, *stručak*.

Osobito valja obratiti pozornost na nazive brojeva većih od milijuna koji su u engleskom različiti od većine drugih jezika. Na primjer, tisuću milijuna (10^9) na hrvatskom se i u većini europskih jezika naziva *milijarda* (ali je to u engl. *billion*); milijun milijuna (10^{12}) naziva se *bilijun* (engl. *trillion*); milijun milijardi (10^{15}) naziva se *bilijarda* (engl. *quadrillion*), itd. [Jakobović, 2008]

Nazivi brojeva kao nazivi poopćenih pojmova u nekom jeziku trebali bi biti neovisni o skupu ili elementima tog skupa, dakle jednaki za sve vrste elemenata. Ipak, u prirodnim jezicima postoje tragovi različitog nazivanja brojeva različitih elemenata. Tako neki nazivi brojeva imaju

¹⁶Posuđenica *hiljada* je prema grč. *χίλις*, *khiliás*: mnogo, tisuća, a u nekim je starim hrvatskim izvorima to bio naziv za *tisuću tisuća*, dakle za *milijun*!

¹⁷Podrijetlo posuđenice *milijun* neki vide u talijanskom nazivu *milione* za *veliku tisuću*, *tisućetinu*. Drugi podrijetlo vide u imenu svjetskog putnika Marka Emilija Pola i njegovu pretjerivanju brojevima u pričama o dalekim krajevima, pa su se veliki brojevi slikovito počeli nazivati *emilioni*-ma. U *Gazofilaciju I.* navodi se oblik *milion* za lat. *millio*. [Belostenec, 1740]

gramatički rod (na primjer u hrvatskom *jedan, jedna, jedno* itd.). Razliku oblika pojedinih naziva brojeva osjete tek govornici ili dobri znalci nekog jezika. Na primjer, u hrvatskom se za *dva čovjeka* može reći i *dvojica* (ali *ljudi*), za *tri čovjeka* može se reći *trojica* (*ljudi*) itd. Zato se iskaz *tri biciklista*, može reći i *trojica biciklista*, ali bi umjesto *tri bicikla* neobično, pa i smiješno zvučalo *trojica bicikla*! U mnogim su jezicima nazivi brojeva za različite elemente prilično različiti, pa su, na primjer, u japanskom različiti za dugoljaste uske predmete, za plosnate i tanke predmete, za kompaktne predmete, za ljude, za neke životinje, za ptice itd. Stranac koji to ne razlikuje može pri kupovini na lošem japanskom zatražiti nešto neobično, kao kad bi na hrvatskom zatražio *trojicu peciva*, ili *dvojicu ulaznica* [Devidé, 1979].

Nerazvijeni prirodni jezici imaju malo naziva brojeva, neki samo nazive za *jedan* i *dva*, najviše i *tri*, a sve ostalo je *mного*.

Nazivi se brojeva u jezikoslovlju smatraju posebnom skupinom riječi, iako su oni u pojmovnom smislu dijelom imenice (jer su nazivi pojmova), a dijelom pridjevi (jer opisuju neko svojstvo skupa).

Nazivi skupa određene brojčane vrijednosti u nekim se jezicima smatraju imenicama, a ne nazivima brojeva. Tako se, na primjer, u njemačkom nazivi brojeva pišu kurentnim početnim slovom (*eins, zwei, drei* itd.), nazivi se većih brojeva mogu pisati i kao imenice, *sto* i *tisuću* su *hundert* i *tausend* kao nazivi brojeva, a *das Hundert* i *das Tausend* kao imenice, ali se nazivi tih *brojki* razlikuju u rodu: *die Hundert* i *die Tausend*, dok su *milijun, milijarda* itd. samo imenice: *die Million, die Milliarde* itd.

U prirodnim jezicima postoje mnoge sustavne ali i nesustavne inačice pridruživanja riječi pojedinim nazivima brojeva. Tragovi su to razvoja jezika, utjecaja drugih jezika i mnogih drugih okolnosti. Tu gotovo nema pravila, znaju ih govornici tih jezika, a pri učenju jezika strancima često čine veliku poteškoću. Tako se, na primjer, u suvremenom hrvatskom jeziku imenovanim brojevima od jedan do četiri pridružuje riječ *čovjek*, a od pet na dalje riječ *ljudi* (*jedan čovjek, dva čovjeka, tri čovjeka, četiri čovjeka*, ali *pet ljudi, šest ljudi* itd.). (→ 2.5. Gramatički brojevi)

Osim naziva brojeva već prvi hrvatski rječnici bilježe mnoge nazive izvedene od riječi *broj*. Tako se u *Gazofilaciji*, pisanom gotovo stoljeće prije objavljivanja¹⁸, nalaze riječi (ovdje napisane suvremenom hrvat-

¹⁸ Ivan Belostenec, pavlin i leksikograf, preminuo je 1675. godine, a njegov je *Gazofilacij* objavljen tek 1740. godine.

skom grafijom): *broj, brojač, brojnice, brojeći, brojen, brojenje, brojitelj, brojiti, brojni, brojnica, nabroj, neizbrojni, zbrojen*, kao i mnogi nazivi u vezi s računanjem. [Belostenec, 1740]

U tvorbi mnogih riječi sudjeluju kao morfemi *broj* i njegove izvedenice (*brojenje, brojnost* i dr.), te *nazivi brojeva*, tvoreći posebne nazive brojeva, brojevne imenice, brojevne pridjeve i dr.

Znakovi brojeva obrađeni su u sljedećim poglavljima o brojkama (→ 3. *Zapisivanje brojeva*, → 4. *Rimske brojke*, → 5. *Arapske brojke*).

2.4. Brojevni sustavi

Sasvim praktični razlozi pri prebrojavanju elemenata nekih skupova i računanju s njima upućuju na okupljanje brojeva u određene skupine. Brojenje na prste upućuje na okupljanje brojeva u skupine od po pet elemenata (prsti jedne šake) ili deset elemenata (prsti obje šake), a jednostavna računanja, na primjer dijeljenje neke cjeline, upućuje na praktičnost cjeline od dvanaest elemenata, jer se ona lako dijeli na dva, tri, četiri ili šest dijelova. Okupljanje brojeva u skupine postupno je postajalo sustavno što je dovelo do pojma *brojevnog sustava* (engl. *number system*).

Brojevni sustavi razlikuju se po dvama svojstvima, po broju sastavnica koje su *osnova skupa* ili *baza skupa*, te po *načinu zapisivanja* brojeva.

2.4.1. Osnove brojevnih sustava

Od mnogih će se mogućih osnova brojevnih sustava spomenut one koje su se rabile kroz povijest te su uvelike utjecale na naš suvremeni način, ne samo nazivanja i zapisivanja brojeva te računanja, nego i mišljenja. Neke osnove brojevnih sustava i danas imaju veću primjenu nego što se to obično misli.

Brojevni sustav s osnovom jedan (*jedinični* ili *unarni brojevni sustav*) služi za zapisivanje brojeva potezima (→ 3.1. *Potezi*). Rabi se i danas pri zapisivanju bodova u društvenim igrama, kartanju, glasovanju, prebrojavanju dobara, dana i sl.

Brojevni sustav s osnovom dva (*binarni* ili *dijadni sustav*) možda je bio prvi, jer u nekim najprimitivnijim jezicima postoje nazivi samo za *jedan* i

dva, sve ostalo je *mnogo*. Čini nam se najjednostavnijim za računanje, ali je poslije jediničnog najsloženiji za zapisivanje brojeva te se donedavno gotovo nije rabio. Njegova je šira uporaba počela tek u drugoj polovini 19. stoljeća razvojem matematičke formalne logike, ponajprije *prosudbene logike* ili *logike sudova* (engl. *propositional calculus*), unutar koje su moguća samo *dva* ishoda (*istina – neistina, da – ne, ima – nema* itd.). Ta je logika ostvarena u *logičkim sklopovima*, koji su osnova suvremenih elektroničkih računala. Brojevni sustav s osnovom *dva* otvorio je neočekivane mogućnosti strojnog računanja i suvremene *računalne informatike*.

Brojevni sustav s osnovom pet (*kvinkualni sustav*) osniva se na brojenju prstima jedne ruke. Potvrda je tomu što u nekim jezicima nazivi za broj *pet* i *šaku* imaju jednake korijene. Tako i hrvatski naziv broja *pet* potječe od drevnoga naziva *pest*: pesnica, šaka.

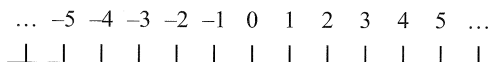
Rabi se pri brojenju na prste, čuje se u izreci kako se nešto može izbrojiti “na prste jedne ruke”, te se primjenjuje pri zapisivanju skupine s četiri poteza precrtana petim, na primjer pri zapisivanju bodova u društvenim igrama, kartanju, glasovanju i sl.

Brojevni sustav s osnovom deset (*desetni, desetični, decimalni* ili *dekadski sustav*) osniva se na brojenju na prste obje ruku. To je najviše rabljen brojevni sustav, toliko uobičajen da nam se čini kako je to neka-ko *prirodni brojevni sustav*. Rabio se od davnina, osobito u drevnom Rimu, odakle je dopro do nas. To potvrđuju i nazivi brojeva u mnogim jezicima i brojke za prvih deset brojeva. Proširio se i ustalio krajem 19. stoljeća, nakon uvođenja Metarskog sustava mjernih jedinica, uz koji je uvedena i primjena decimalnih nižekratnika i višekratnika jedinica. Danas se svi broježani podatci zapisuju u tom sustavu, a ako se rabe drugi sustavi, to se mora jasno naglasiti. Osim njegove *prirodnosti* prema broju prstiju na rukama, on zadovoljava i uvjete da je dovoljno velik za učinkovito zapisivanje brojeva, a dovoljno malen za lako računanje. Glavni mu je nedostatak što ima samo tri cjelobrojna dijela: *jedan, dva i pet*.

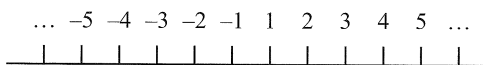
Brojevni sustav s osnovom dvanaest (*dvanaestni* ili *duodecimalni sustav*) rabi se još od drevne Mezopotamije. Njegov je trag taj što se u nekim jezicima nazivi brojeva *jedanaest* i *dvanaest* još tvore na poseban način, a tek se od *trinaest* tvore kao u decimalnom sustavu. U engleskom su to *eleven* i *twelve*, iza kojih slijede sustavni nazivi *thirteen, fourteen* itd., a u njemačkom *elf, zwölf*, iza kojih slijede sustavni nazivi *dreizehn, vierzehn* itd. Uz prednosti po veličini, slično kao decimalni, dvanaestni je sustav bogat cjelobrojnima dijelovima: *jedan, dva, tri, četiri i šest*. Zato

brojenju, ili proširen negativnim brojevima pri brojenju kalendarskih godina (jer u našem, gregorijanskom kalendaru nema *nulte godine!*). Poteškoće nastupe ako se pomiješaju brojenje i računanje u tim dvama skupovima.

a)



b)



Brojevni pravci s pozitivnim i negativnim brojevima: a) s uključenim ništa
i b) bez uključenog ništa (takav je niz kalendarskih godina)

Uvođenje brojevnog sustava s *ništa* kao brojem i brojke *ništica* omogućilo je razvoj vještine računanja, dakle aritmetike kakvu danas primjenjujemo ($\rightarrow$ 5.1.2. *Izum ništice*).

2.5. Brojevi kao oznake svojstava i kodiranja

2.5.1. Oznake svojstava

Brojevima se od davnina označuju mnoga svojstva ljudi, životinja i dobara. Sustavi takvih brojeva potječu od nekog razvrstavanja ili poretka (prvi, drugi, treći,...) ili od nekih izmjera. Mnoge su se od tih osnova zaboravile i u prošlosti zagubile, ali su ostali brojevi kao svima poznate oznake. Tako, na primjer, većina ljudi zna konfekcijske brojeve svoje odjeće ili obuće, ali ne zna što ti brojevi uistinu znače.

U svakodnevnom životu rabimo mnoge takve brojeve koji nemaju nikakvo računsko ili matematičko značenje pa se s pomoću njih ništa ne može računati, niti se iz njih može saznati neki redoslijed. To su brojevi kao oznake nekih svojstava ili dobara. Tradicijske su navike takvih označivanja toliko uvriježene da niti ne očekujemo brojčano značenje takvih brojeva!

Oznake stupnjeva znanja ili uspjeha u školstvu, stupnjeva kakvoće dobara i usluga, izvrsnosti i sl. u rasponu nedovoljan do izvrstan, od davnina se označuju brojevima u ljestvicama od 1 do 5 ili od 1 do 7 ili drugačije, a ponegdje je taj redoslijed obratan, pa je ljestvica od 5 do 1 ili od 7 do 1 i dr. Tako i u našim izrekama, na primjer *to je za pet*, ta ocjena nema nikakve veze s matematičkim pojmom broja *pet*, nego sa stupnjevanjem izvrsnosti.

Oznake izmjere zrna sipkih tvari (namirnica, građevinskih sastavnica, kemikalija i dr.) potječu od starih mjernih jedinica, od rednih brojeva sita za razredbu ili od nekog sustava razvrstavanja.

Oznake veličine odjeće i obuće nastale su od nekih izmjera u starim mjernim sustavima. Osnova su takvih brojeva raspon ramena za gornje dijelove odjeće, opseg struka ili duljina donjeg dijela odjeće, duljina stopala za obuću i sl. Ti se brojevi razlikuju od zemlje do zemlje, pa iako postoje određene industrijske norme, uza svu međunarodnu trgovinu nije postignuto ujednačenje jer se proizvođači i trgovci prilagođuju navikama kupaca u pojedinim dijelovima svijeta. Na primjer, obuću s europskim brojem 43 valja u drugim dijelovima svijeta tražiti pod nekim drugim brojem ili oznakom.

Oznake prometnih linija u gradskom i prigradskom prometu, iako su ponekad potjecale od redoslijeda uvođenja, većinom samo služe za razlikovanje linija ili pravaca prijevoza pa se u svakom gradu mora saznati značenje broja koji im je pridružen.

Oznake pojedinaca ili skupina (na primjer sportaša, vojnih postrojbi i dr.) većinom su izabrane na mah te nemaju nikakvo značenje vrijednosti ili redoslijeda.

2.5.2. Oznake kodiranja

Brojevima se tvore mnoge oznake, kodovi i šifre predmeta, osoba, stanja i stupnjevanja pojava. Pritom brojevi samo dijelom mogu imati smisao rednog broja, a većinom nemaju nikakvu računsku vrijednost nego su određeni po nekim drugim značenjima, pravilima, "ključevima" i sl. S pomoću takvih se brojeva ne može ništa računati, ali su pouzdan podatak o određenom predmetu opisivanja.

Stupnjevi ljestvica označuju se brojevima (kao što su ljestvice potresa, vjetra ili stanja mora, areometarskih gustoća i dr.).

Računanje čine mnoge moguće *igre brojevima*, u kojima se upornim i trajnim vježbanjem stječe umijeće, jednako kao što su i druga ljudska umijeća, na primjer, u sportu, glazbi i drugim djelovanjima. Umijeća se postižu samo upornim, većinom i napornim vježbanjem. Pijanist, koji glatko prelazi prstima preko klavijature, stotinama je puta to ponovio vježbajući kako bi na nastupu postignuto umijeće mogao pretvoriti u umjetničko ostvarenje.

Ljudi su se radi što pouzdanijeg i lakšeg računanja služili mnogim pomagalicama odnosno dosjetkama, ali zadnjih su desetljeća, s pojavom elektroničkih kalkulatora i računala, mnoga tisućljetna umijeća i dosjetke zaboravljeni.

Jedna je od najjednostavnijih dosjetki svođenje računanja na jednostavniji postupak brojenja. Ako kupite peciva za 18 kuna i pružite prodavaču novčanicu od 50 kuna, vratit će vam novac tako da broji: 18 (mислеći na vrijednost peciva) i 2 (vadeći kovanicu od 2 kune) su 20, a 10 i 20 (vadeći novčanice od toliko kuna) je 50 (mислеći na vrijednost novčanice koju ste mu dali)! To je zornije, a nematematičar je tako sigurniji nego da se upušta u računsku operaciju $50 - 18 = 32$, pa vam tek tad odbrojava novčanice vrijednosti $20 + 10 + 2 = 32$.

Valja reći kako, za razliku od većine drugih ljudskih umijeća, u računanju postoje i neki *prečaci*, do kojih dolazimo matematičkim razmišljanjem. Kao ilustraciju prečaca u računanju navode se dva zanimljiva pravila do kojih se dolazi razmišljanjem.

Pokušajmo zbrojiti neparne brojeve, počevši od 1 pa do nekog zadnog broja n . Djelomični rezultati izgledaju ovako: za prva dva neparna broja $1 + 3 = 4$, za prva tri neparna broja $1 + 3 + 5 = 9$, za prva četiri neparna broja $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, itd. Mogli bismo nastaviti tako mukotrpno i dalje, ali ubrzo ćemo uvidjeti da taj zbroj iznosi za prva *dva* neparna broja 2^2 , za prva *tri* neparna broja 3^2 , za prva *četiri* neparna broja 4^2 , itd. Znači, ustanovili smo jednostavnu zakonitost da zbroj od 1 do n neparnih brojeva iznosi n^2 . To pravilo možemo jednostavno primijeniti na kako god velik broj, na primjer zbroj je prvih 1000 neparnih brojeva $1000^2 = 1\,000\,000$. Nitko pametan ne bi išao zbrajati milijun brojeva, kad svako dijete može uz to pravilo *prečacem* izračunati njihov zbroj.

Drugi je primjer anegdota koja govori kako je učitelj u osnovnoj školi htio imati malo mira pa je učenicima zadao da izračunaju zbroj svih prirodnih brojeva od 1 do 100. Učenici su marljivo pristupili poslu postupcima: $1 + 2 = 3$; $3 + 3 = 6$; $6 + 4 = 10$, itd. No, prije nego što je većina učenika došla do broja 10, jedan je učenik ustao i učitelju donio na pločici napisan rezultat: 5050. Začudoeni učitelj, koji ni sam nije

napamet znao taj rezultat, prvo je učenika upitao je li siguran u taj rezultat, a kad je on to potvrdio, upitao ga je kako je tako brzo izračunao. “Jednostavno,” rekao je desetogodišnjak, “zbroy je rubnih brojeva $1 + 100 = 101$, potom $2 + 99 = 101$, pa $3 + 98 = 101$ i tako dalje, zbroj preostalih parova rubnih brojeva uvijek je 101. Kako u stotini ima 50 takvih parova, njihov je zbroj $50 \times 101 = 5050$.” Zadivljeni je učitelj počeo dječaku davati dodatnu pouku iz računanja, ali ga uskoro nije više imao čemu naučiti jer ga je učenik prestigao. Učenik se zvao Carl Friedrich Gauss (1777. – 1855.), koji je postao jedan od najvećih, ne samo njemačkih, nego i svjetskih matematičara.

2.7.2. Matematičko mišljenje

Matematika (engl. *mathematics*, *mathematic*) proizišla je iz brojenja, računanja i mjerenja, apstrahiranjem i logičkim zaključivanjem. Vrlo je teško jednostavno i jednoznačno definirati što je matematika jer je to složena i slojevita disciplina. Ipak, pokušajmo reći, uz ogradu kako je ta definicija nepotpuna, da je matematika umijeće otkrivanja, izvođenja i izražavanja korisnih pravila za pouzdano računanje, mjerenje i oblikovanje rješenja.

U matematici se nastoji doći do jednoznačne *istine* o odnosima matematičkih elemenata (brojeva, skupova, funkcija i dr.), a pritom nema drugih istina i drukčijih odnosa. Slikovito rečeno, u elementarnoj matematici su, na primjer, 1 i 2 uvijek, i dosadno uvijek, samo 3, i nikako drukčije!

Moglo bi se očekivati kako ta jednoznačnost u svijetu matematike olakšava zdravorazumsko razmišljanje te osigurava najjednostavnije postupanje s matematičkim elementima, a time i najjednostavnije rješavanje problema. Ipak, možda je upravo ta jednoznačnost zbunjujuća jer ne ostavlja prostor za bilo kakva druga rješenja.

Matematičko mišljenje poseban je način uređenog mišljenja o određenim pravilnostima odnosa u svijetu matematičkih elemenata. Takvo mišljenje utvrđuje neka pravila, tzv. *matematičke zakonitosti*, koja su potom primjenjiva za rješavanje znatno većih zadataka i problema. Vrhunac je takva razmišljanja *matematička logika* (engl. *mathematical logic*), osnovana i uobličena na određenim jednostavnim, ali jasnim načelima. Zato je nastala dvojba: je li matematika izgrađena na logici ili je logika izgrađena na matematici? Na načelima matematičke logike rade i do danas najsavršenija ljudska pomagala, elektronička računala. S druge strane, elektronička su računala omogućila doskora nezamislivo brza i opsežna računanja.



Elektroničko računalo, tehničko ostvarenje matematičke logike, omogućuje goleme brzine računanja i rješavanje složenih matematičkih zadaća

Matematički su elementi pravilni i jednoliki, na primjer, svi su prirodni brojevi po kvaliteti jednaki (razlikuju se samo po vrijednostima), pravila rada s njima su jednoznačna, pa ipak je broj mogućih kombinacija elemenata i pravila gotovo neizmjeran. Matematika je kao i umjetnost, nesputana u izražavanju matematičkih istina, pa je stoga i smatramo *umjetnošću logičkog mišljenja*.

Na kraju se postavlja pitanje čemu nam matematika zapravo služi. Zaljubljenicima u matematiku ona je područje beskrajnih istraživanja. Većini ljudi matematika je oruđe koje olakšava mnoge poslove i pomaže u rješavanju mnogih zadaća. Pritom je jedino potrebno probleme iz stvarnog svijeta preslikati u svijet matematičkih pojmova, a nakon rješavanja problema njihova rješenja vratiti u stvarni svijet. To je među prvim uočio genijalni mislilac Galileo Galilei (1564. – 1642.), koji je računanje i matematički način razmišljanja uveo u *prirodnu filozofiju*, te tako pokrenuo suvremenu *fiziku* i druge egzaktne znanosti. One su, uz tehničku primjenu postignutih spoznaja u zadnja četiri stoljeća, nezamislivo promijenile naš svijet, omogućujući čovjeku ovladavanje mnogim prirodnim pojavama i dajući kroz izume mnoge korisne primjene, od strojeva i motora do telekomunikacija, medicinskih pomagala, elektroničkih računala i svemirskih letjelica.

3. Zapisivanje brojeva

Većina brojki nastala je pojednostavnjenjem crteža.

[Kulundžić, 1957]

Brojevi se mogu zapisivati na nekoliko načina: *nazivima brojeva* na pojedinim jezicima, nacrtanim raznim *znakovima* ili nanizanim *zrnima*, napisanim *slovima*, tzv. *slovnim brojkama* kojima su pridane brojčane vrijednosti, te napisanim posebnim grafemima tzv. *brojkama*²².

Zapisivanje nazivima brojeva (na hrvatskom: *jedan, dva, tri* itd.) primjenjuje se ograničeno samo unutar teksta, te još iznimno kad se želi onemogućiti preinaka brojeva, na primjer krivotvorenje na nekim novčanim dokumentima, kao što su novčanice, čekovi, mjenice, potvrde, obrasci, ugovori i sl. Za zapisivanje nazivima brojeva potrebni su znanje određenog jezika i pismenost. Računanje je s tako zapisanim složenijim brojevima nepregledno i teško čitljivo pa se gotovo i ne primjenjuje. → 2.3. *Nazivi brojeva*

3.1. Znakovi i zrnca

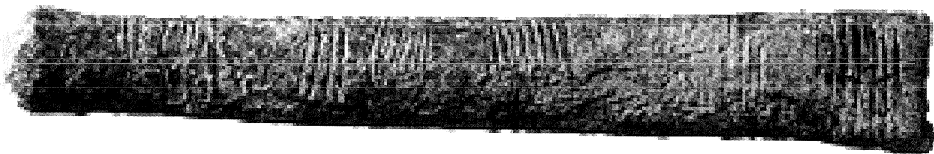
Brojevi se najjednostavnije zapisuju na nekoj podlozi crtanjem ili urezivanjem jednostavnih znakova, kao što su potezi, kružići, zvjezdice, cvjetići i sl., okupljanjem zrnaca ili vezanjem čvorova na nekoj uzici, pri čemu znakovi, zrnca ili čvorovi predaju brojene elemente promatranog skupa. Zapisivanje je broja znakovima, zrnima ili čvorovima znatno starije od pisma, a primjenjuju ga i danas, ne samo pismeni nego i nepismeni ljudi.

²²Naziv *brojka* (njem. *Ziffer*, tal. *cifra*) ima još *Rječnik znanstvenoga nazivlja* [Šulek, 1874/75]

Zapisivanje poteza ili glifa na neku podlogu (kamen, drvo, kost, keramika i dr.) možda je najjednostavniji način zapisivanja brojeva. Pritom je znak brojne jedinice crta, potez ili urez, tzv. glif. [Jakobović, 2013] Na primjer, znak | za broj jedan mora se za prikaz broja n uzastopno primijeniti n puta. Broj jedan prikazan je jednim potezom |, broj dva dvama potezima ||, ..., broj pet petorim potezima ||||| itd.

Zapisivanje brojeva potezima i danas se rabi, na primjer, pri društvenim igrama (kartanju), pri ručnom prebrojavanju glasova na glasačkim listićima, pri prebrojavanju dobara i sl.

Primjer je primjene zapisivanja broja urezima rovaš ili raboš (stsl. *rov*: zarez, urez + mađ. dometak *aš*; engl. *tally*, *tally stick*), štap na koji se urezuju potezi kao znakovi broja određenih sastavnica (dana, ljudi, plodova, proizvedenih predmeta, stoke, uskladištenih ili prodanih cjelina kao što su komadi, košare, boce, vjedra, naramci, snopovi i sl.). Pri zaduživanju u trgovini ili nekoj drugoj razmjeni rabio se *par rovaša* za dvije stranke (izvornik i kopija, tzv. *kokoš* i *pile*), jedan za prodavača, drugi za kupca, na koji su se istodobno i usporedno urezivali znakovi²³.



Kost iz Ishanga – dvije strane rovaša starog više od 20 tisuća godina

Najstariji je poznati rovaš tzv. *vučja kost* s urezima koji označuju neko brojenje, pronađena 1937. godine u Moravskoj (u današnjoj Republici Češkoj), procijenjene starosti na oko 30 tisuća godina, potom *babunova kost iz Ishanga* s urezanim znakovima, pronađena 1960. godine u Belgijskom Kongu (današnja Demokratska Republika Kongo), procijenjene starosti na više od 20 tisuća godina, a pohranjena u belgijskom

²³ Da su se na rovašima urezivali zaduženja i obveze, upućuje još danas zadržano negativno značenje riječi *rovaš* u izrazima *biti na rovašu*, *imati ga na rovašu*, *upisan na rovašu* i dr.

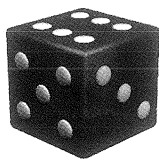
Muzeju prirodnih znanosti u Bruxellesu. Za zapise se pretpostavlja da su rezultat nekog brojenja, a možda predstavljaju i Mjesečev kalendar.

Najstariji rovaši upućuju kako je zapisivanje brojeva urezima kao najstarijim *brojkama* staro najmanje tridesetak tisuća godina! Rovaši za urezivanje u različitim oblicima, potom uzice s čvorovima ili nanizanim zncima za zapisivanje brojčanih podataka ili kao podsjetnici rabili su se kroz svu povijest, sve do u 20. stoljeće.

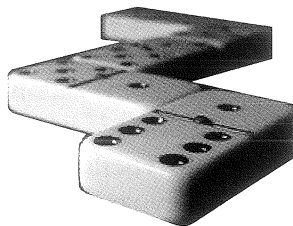
Razna ravnala, potom ravna ili kružna računala i slične naprave koje su se do pojave elektroničkih računala često rabile za brzo računanje u raznim tehničkim strukama, topništvu, pomorstvu i drugdje, također su određeni složeni *geometrijski rovaši*.

Zapisivanje jednakim jednostavnim znakovima rabi se za prikaz malih brojeva od davnina pa do danas. Pritom zapis obično ima određenu geometrijsku pravilnost pa je odmah slikovno prepoznatljiv i bez brojenja znakova.

Kružići (•), cvjetići (♣), zvjezdice (*) ili slični znakovi primjenjuju se za zapisivanje broja na igraćim *kockama* (kocka za bacanje), *pločicama* (u igri *domino*), *kartama*, za označavanje *čina* na vojničkim i drugim odorama, za označavanje *kategorije* hotela i dr.



Igraća kocka s pravilno raspoređenim kružićima koji označuju brojeve od 1 do 6



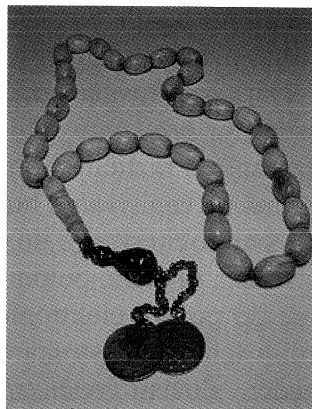
Pločice za igru domina s označenim brojevima od 1 do 6

Molitvene niske ili *brojanice*,²⁴ na uzici nanizana *zrnca*, *kuglice* ili *čvorovi*, koji se prebire među prstima i tako broje molitve ili zazivi. Rabe ih vjernici u mnogim religijama pod raznovrsnim nazivima: u katoličanstvu *krunice*, *rožariji*, *čisla*, *patrice*, *očenaši* i dr. (lat. *rosarium*, engl. *rosary*, njem. *Rosenkranz*), u pravoslavlju *brojanice* (grč. *κομποσκοίνι*: *komposkoini*, rus. *чѣмок*, *čjotok* ili *вервѹца*, *vervica*), u islamu *tespih* (arap. *tasbih*, *misbaha* ili *sibha*), u hinduizmu *mala* ili *japamala* i dr., a služe kao pomagala za nizanje molitava, zaziva, pobožnih izreka i sl. U katoličanstvu krunicu obješenu o pojas nose redovnici i redovnice nekih

²⁴ Još *Gazofilacij* ima *chislo*, *krunicza*, *broyenicze*, *otecz naffi* ... [Belostenec, 1740]



Katolička krunica



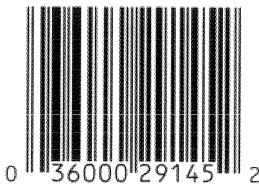
Muslimanski tespih

redova kao dio habita. Svima je njima podrijetlo u indijskim niskama za redanje molitava.²⁵

Posebnim znakovima brojevi se zapisuju u posebnim sustavima, kao što su znakovi raznih telegrafija (što je danas već povijest), Brailleovim pismom, prsnom abecedom i dr.

Bar-kodom (crtičnim ili linearnim kodom te matričnim, dvodimenzij-skim ili 2D-kodom) zadnjih se desetljeća zapisuju brojevi za označivanje, kodiranje i šifriranje predmeta (ponajprije robe i pakovina u prodavaonici), potom vozila, dokumenata (putovnica, iskaznica, voznih karata, prijava u prijevozu) i dr. Takvi se kodovi zapisuju i očitavaju posebnim optoelektroničkim uređajima. Podatak je sadržan u rasporedu i debljini znakova i praznina, te iako je vidljiv, nije čitljiv okom.

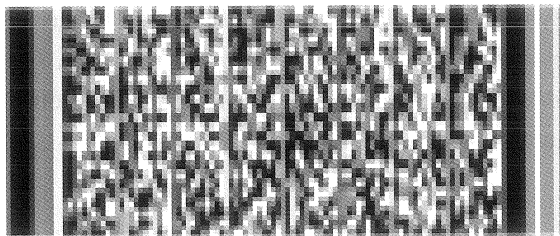
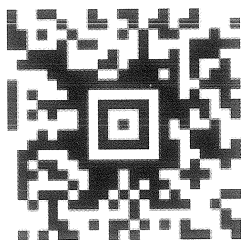
Danas je bez bar-kodova nezamisliva obradba robe, od izlaska iz proizvodnje, pakiranja, prijevoza i skladištenja sa svim podacima o njezinu



Crtični ili linearni bar-kod

²⁵ Sličan je *komboloi* (grč. *κομπολόι*; starogrč. *κόμβος*: čvor, i *λόγιο*: skup), niska od dvadesetak pomičnih zrna, koja u Grčkoj i na Cipru služi za igru prebiranjem među prstima, čime se proizvode posebni zvuci, ovisni o materijalu i razmaku između zrnaca, ali nema nikakvu vjersku namjenu.

putu, sve do blagajne u prodavaonici, porezni nadzor uplata u trgovini, novčarsko poslovanje, poštansko poslovanje ili putovanje, osobito zračnim prijevozom, prelaženje državnih granica (gdje ih još ima) i dr.



Neke izvedbe matričnog ili dvodimenzijskog bar-koda

3.2. Slovne brojke

U nekim starim pismima nije bilo posebnih brojki, nego se pojedinim slovima tog pisma pridruživala određena brojčana vrijednost u prirodnim brojevima. Da bi se znalo da to slovo ne označuje glas, nego broj, uz njega se stavljao neki znak, čime je slovo postalo *slovna brojka*. Takvo zapisivanje brojeva omogućuje zapisivanje tek najjednostavnijih brojeva i računskih operacija te je neuporabivo za imalo složenije matematičko zapisivanje ili sheme računanja.

Od pisama koja se danas susreću brojčane su vrijednosti bile pridružene grčkim, glagoljičnim i ćiriličnim slovima, prema njihovu ustaljenom redoslijedu u alfabetu. Slovne se brojke rabe i u drugim pismima: hebrejskom, arapskom, turskom i dr. Takve se brojke danas više ne rabe, osim što ih treba znati pri čitanju starih dokumenata. U latinici se brojčane vrijednosti pridružuju grafemima znatno složenije, u tzv. *rimskim brojka-ma*. → 4. *Rimske brojke*

3.2.1. Grčke slovne brojke

Najstariji alfabetski sustav za zapisivanje brojeva su tzv. *atičke*, *herodijanske*²⁶ ili *akrofoničke*²⁷ brojke (engl. *attic numerals*, *Herodianic*

²⁶Nazvane po *Herodijanu Aleksandrijskom* ili *Antiohijskom* (grč. *Αἴλιος Ἡρωδιανός*; ~ 170. – ~ 240.), rimskom povjesničaru, koji je te brojke opisao u 2. stoljeću.

²⁷Stoga što su odabrana početna slova naziva brojeva.

numerals, acrophonic numerals). Iz tog su se sustava posredno razvile *rimске brojke* koje se još i danas rabe. Atičke slovne brojke su se rabile već u 6. stoljeću pa do 2. stoljeća pr. Krista. Počivale su na šest verzalnih slova grčkog alfabeta, koja su početna slova naziva tih brojeva na grčkom jeziku: I (ἴος, *ios*: jedan) Π (πέντε, *pente*: pet), koji je ubrzo prerastao u slovo Γ, potom Δ (δέκα, *deka*: deset), Η (ἐκατόν, *hekatón*: stotinu), Χ (χίλιοι, *kilioi*: tisuću), Μ (μύριον, *myrioy*: deset tisuća).

Grčke atičke (herodijanske ili akrofoničke) brojke

Atička brojka	Vrijednost	Atička brojka	Vrijednost	Atička brojka	Vrijednost
I	1	ΔΙ	11	Ϟ	500
II	2	itd.		itd.	
III	3	ΔΓ	15	X	1000
IIII	4	itd.		itd.	
Π ili Γ	5	ΔΔ	20	Ϡ	5000
ΓΙ	6	itd.		itd.	
ΓΙΙ	7	Ϡ	50	M	10 000
ΓΙΙΙ	8	itd.		itd.	
ΓΙΙΙΙ	9	H	100	Ϟ	50 000
Δ	10	itd.		itd.	

Grčke slovne brojke nastale su pridruživanjem brojčanih cjelobrojnih vrijednosti pojedinim slovima grčkog alfabeta. Kako je grčki alfabet tad imao 24 slova, njima su prvotno pridružene vrijednosti od 1 do 24, što je bilo vrlo nepraktično. Potom su se pridružile vrijednosti po decimalnom sustavu, ali kako je za pokrivanje brojeva od 1 do 900 trebalo 27 slova, alfabetu su dodana tri zastarjela slova: *digama* Ϟ (ili *krajnja sigma* ζ, a u modernom grčkom στ) za 6, *kopa* Ϡ za 90, i *sampi* Ϟ za 900. Da bi se znalo da slova označuju brojke, slovima je s desne strane dodavana podignuta crtica (grč. κεραία, *keraia*: ~ rošćić).

Grčke slovne brojke

Grčka slovna brojka	Vrijednost	Grčka slovna brojka	Vrijednost	Grčka slovna brojka	Vrijednost
α'	1	ι'	10	ρ'	100
β'	2	κ'	20	σ'	200
γ'	3	λ'	30	τ'	300
δ'	4	μ'	40	υ'	400
ε'	5	ν'	50	φ'	500
ϛ' (ζ', στ')	6	ξ'	60	χ'	600
ζ'	7	ο'	70	ψ'	700
η'	8	π'	80	ω'	800
θ'	9	Ϛ'	90	ϛ'	900

Potom je dodan još i znak & za broj *tisuću*. Tisuće su se označivale dodavanjem spuštene crtice ispred slova, pa je tako, na primjer, δ' = 4, ali je ,δ = 4000.

Veći su se brojevi pisali posuđivanjem znaka M (od *mirijada*) za 10 tisuća iz antičkih brojki, a broj mirijadi označivao se brojem iznad znaka, na primjer:

$$\overset{\kappa' \varepsilon'}{M} = 25 \times 10\,000 = 250\,000.$$

Bilo je još nekoliko sustava pisanja grčkih slovnih brojki, ali se oni, osim u pojedinostima nisu bitno razlikovali.

I danas se pod nazivom *grčke brojke* u Grčkoj rabe verzalna slova grčkog alfabeta za pisanje rednih brojeva, slično kao što se pišu rimskim brojkama u zemljama zapadne kulture (→ 4. *Rimske brojke*).

3.2.2. Glagoljične slovne brojke

U glagoljici su se pojedinim slovima pridruživale brojčane vrijednosti. Kad se slovo rabilo kao *slovna brojka*, iznad njega se pisala vijuga, tzv. *titlo* (grč. *τίτλος*, *titlos*: naslov), jednako kao i na kraticama, ili se oko

njega pisalo točke u sredini retka, a ponekad i oboje. [Bratulić, 1995], [Nazor, 2008].

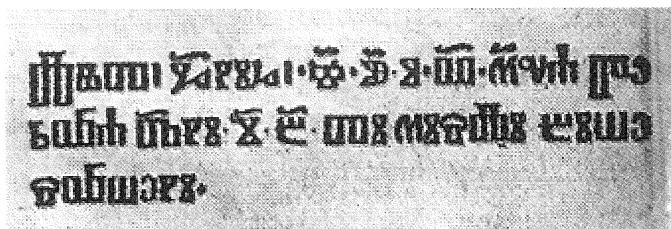
Hrvatska glagoljica s imenima, značenjima i brojčanim vrijednostima slova prema hrvatskom glagoljašu Jurju Slovincu (1355./60. – 1416.), profesoru na pariškoj Sorbonnei, prikazana je u tablici koja je napisana krajem 1390-ih godina, a završava glagoljicom napisanom riječi *amen*. Uz tablicu je Slovinac dodao latinski *Istud alphabetum est chrawaticum*: ovo pismo je hrvatsko²⁸. [Žubrinčić, 2004]

								
az a 1	buki b 2	vidi v 3	glagole g 4	dobro d 5	(j)est e 6	živite ž 7	zelo z 8	zemlja z 9
								
iže i 10	i i 20	je j d 30	kako k 40	ljudi l 50	mislite m 60	naš n 70	on o 80	pokoj p 90
								
reci r 100	slovo s 200	tvrdo t 300	uk u 400	firt f 500	hiri h 600	ot o 700	šća ć, šć 800	ci c 900
								
črv č 1000	ša š 2000	jer poluglas	jat ja, i(je)	jus ju 5000	jest – je			

Brojčane vrijednosti pojedinih slova hrvatske glagoljice

²⁸Tablicu je uredio Filip Cvitić prema naputcima prof. dr. sc. Darka Žubrinčića. Objavljuje se u svakom broju *Bašćine*, časopisa Društva prijatelja glagoljice.

Brojevi od 11 do 19 pišu se redom prvo *jedinica* a potom *desetica*, pa stoga zapis •**Б**•**Д**•**Д**• valja čitati²⁹ kao $2 + 10 = 12$. Pisanje tih brojeva vrijedi i u većim brojevima, na primjer većim od stotinu, pa zapis broja •**М**•**Д**•**Д**•**Д**• valja čitati kao $300 + (7 + 10) = 317$. Dakle, valja čitati vrijednosti slovnihi brojki bez obzira na nama neobičan redosljed, pa te vrijednosti **zbrojiti** da se dobije vrijednost zapisanog broja.



Kolofon (završna napomena) hrvatskog prvotiska, glagoljičnog Misala, s upisanom 1483. godinom; s dvostrukim načinom označivanja slovnihi brojki: vijugama i točkama, s jednom od rijetkih nedosljednosti jer na slovu on **В** (= 80) nedostaje vijuga

Općenito, slovne brojke valja čitati vrlo pomno jer je njihovo pisanje nastalo znatno prije našeg današnjeg načina pisanja te je, kao u svemu kroz povijest, bilo i nedosljednosti.

3.2.3. Ćirilične slovne brojke

Ćiriličnim su slovima pripisane brojčane vrijednosti, a kad se slovo rabilo kao slovna brojka, iznad slova stavljala se vijuga. Vijuga se u staroslavenskoj ćirilici rabila i iznad kratica pa ta slova valja vrlo pažljivo čitati! Takva se slova mogu vidjeti na kršćanskim ikonama i freskama istočnog obreda.

Tisuće su se označivale posebnim znakom **Ѡ** prije slovne brojke pa na primjer zapis **ѠГ** valja čitati kao $1000 \times 3 = 3000$.

Donedavno su se iznimno pod nazivom *ćirilične rimske brojke* pri pisanju pisaćim strojevima rabila verzalna slova ćirilice za pisanje rednih brojeva, slično kao što se pišu rimskim brojkama uz latinicu (→ 4.2.3. *Suvremene rimske brojke; Ćirilične rimske brojke*).

²⁹ Zato se u hrvatskom crkvenoslavenskom taj broj nazivao *dva na destе*: dva (dodano) na deset.

Ćirilичne slovne brojke (stara ćirilica³⁰)

Slovo	Vrijednost	Slovo	Vrijednost	Slovo	Vrijednost
A	1	I	10	P	100
B	2	K	20	C	200
Г	3	Л	30	T	300
Д	4	М	40	У	400
Є	5	N	50	Φ	500
S	6	Ѕ	60	X	600
З	7	O	70	Ψ	700
И	8	Π	80	III	800
Θ	9	Ч	90	Ц	900

3.3. Brojke

Brojke, znamenke,³¹ razgovorno i *cifre*³² (njem. *Ziffer*; engl. *numeral*, *numeral sign*, *figure*), stariji naziv *čislice*,³³ posebni su grafemi za zapisivanje *brojeva*, osnovnih matematičkih pojmova. Brojka je *ideogram*, tj. označuje pojam koji će svatko na svojem jeziku drugačije nazivati. Tako, na primjer, arapska brojka 1 označuje matematički pojam koji se na hrvatskom naziva *jedan*, na latinskom *unus*, na njemačkom *eins*, na engleskom *one*, na francuskom *un*, na ruskom *один* itd.

Zapisivanje brojeva brojkama povezano je s pismom. Pritom ostaje neriješeno pitanje jesu li brojke starije od slova, ili obratno, ili su se brojke i slova pojavili istodobno. Kako su nalazi najjednostavnijeg zapisivanja brojeva potezima oko četiri puta stariji od nalaza prvih pisama, vjerojatnije je kako su se brojke u nekim oblicima rabile i prije slova. Brojke se ponajviše rabe zajedno sa slovima i drugim znakovima za

³⁰Rukopisna slova stare ćirilice često se prilično razlikuju od suvremenih tipografskih pisama (fontova).

³¹U ovoj se knjizi radije rabi jednoznačni naziv *brojka*, jer je *znamenka* sličnozvučnica općeg naziva *znak*, *znamen*; veliki znalac razvoja pisama u svojoj knjizi (Kulundžić, 1957], jasno kaže: "...brojke – ističem: grafički znaci za zapisivanje brojeva – ...", str. 712 i dr.

³²Naziv *cifra* arapskog je podrijetla. (→ 5.1.2. *Izum ništice*)

³³Naziv *čislica* je prema *čislo*: broj.

pisanje, tipografski se oblikuju jednako kao i slova, a pojam *pismenost* uključuje pisanje i čitanje slova i brojki. Valja uočiti kako u pismenom okruženju i nepismeni ljudi većinom poznaju brojke te znaju čitati brojeve na novčanicama, računima, cjenicima, istaknute cijene dobara i sl.

Povijesno, uređene su brojke nastale već u prvim kulturama Bliskog istoka, a otad su nezamjenjiva sastavnica ljudskog života.

3.3.1. Babilonske brojke

U kulturama Mezopotamije i Male Azije³⁴ u četvrtom tisućljeću pr. Krista smišljeno je zapisivanje brojeva na glinenim pločicama u tehnici tzv. *klinastog pisma*. Zapisivanje se osnivalo na nekoliko načela:

– Zapisivalo se samo dvjema brojkama, što je olakšavalo učenje i zapisivanje. Prva je brojka bio *šiljasti znak* utiskivan pisaljkom u vlažnu glinu, koji je označavao broj *jedan*, a druga je brojka bio *tupi znak*, prvotno utiskivan okruglim drugim krajem pisaljke, a poslije dvama šiljcima pod tupim kutom koji je označavao broj *deset*.

Vrijednosti babilonskih brojki

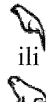
Babilonska brojka	Vrijednost
𐎶	jedan
•	deset (prvotni znak)
<	deset

– Zapisivalo se u položajnom brojevnom sustavu s osnovom šezdeset. Broj se na svakom položaju zapisivao dvama brojkama na *zbrajajući* način, brojevima od *jedan* do *pedeset i devet*.

< 𐎶𐎶
< 𐎶𐎶

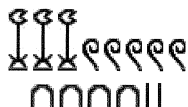
Broj *dvadeset i pet* zapisan babilonskim brojkama, kao 2×10 i 5×1

³⁴ Pojednostavnjeno se rabi naziv *babilonska kultura* kao najdulja od nekoliko drevnih kultura (Sumerana, Kaldejaca, Akadana, Babilonaca, Hetita), koje su se kroz gotovo tri tisućljeća na tom prostoru ispreplitale i nasljeđivale.

					 ili 	
potez	potkova	mjerno uže	lopoč	prst	punoglavac ili žaba	čovjek s uzdignutim rukama
1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000 ili ∞

Staroegipatske hijeroglifske brojke, njihova značenja i vrijednosti

Brojevi su se pisali u zbrajajućem sustavu, tako da se okupilo onoliko brojki da njihov zbroj daje navedeni broj, od većih prema manjim, ali bez nekog posebnog reda.



Broj zapisan hijeroglifima, redom: $(3 \times 1000) + (5 \times 100) + (4 \times 10) + (2 \times 1) = 3542$

Drevni su Egipćani znali pisati i razlomke, točnije *dijelove od jedan*, s pomoću hijeroglifa koji je sličan ustima, a mogao bi se nazivati *dio*. Uz njega su pisani brojevi koji su značili nazivnik razlomka. Složenije razlomke pisali su zbrajanjem ili oduzimanjem dijelova jedinice.

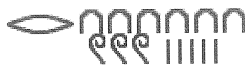
					
1/3	1/4	itd.	1/10	1/20	itd.

Sustavno pisanje razlomaka (dijelova jedinice)

Jedino su za $1/2$ imali poseban hijeroglif. Bili su i na tragu pisanja složenijih razlomaka jer su kao iznimke imali posebne hijeroglife za $2/3$ i rijetko za $3/4$.

		
1/2	2/3	3/4

Iznimke u pisanju razlomaka



Razlomak 1/365 zapisan hijeroglifima

Zanimljivo je kako su imali i hijerogliffe za zbrajanje i oduzimanje  i . Međutim, kako nisu imali ustaljen smjer pisanja (pisali su i ulijevo i udesno), svaki je od tih hijeroglifa imao dva značenja. Za stopala hijeroglifa u smjeru pisanja hijeroglif je značio zbrajanje, a suprotno od smjera pisanja značio je oduzimanje!

Prema tome, pri pisanju slijeva udesno računska je operacija zbrajanja napisana:

$$\begin{array}{c} \text{1000} + \text{100} = \text{1100} \\ \text{(1000 + 100 = 1100)} \end{array}$$

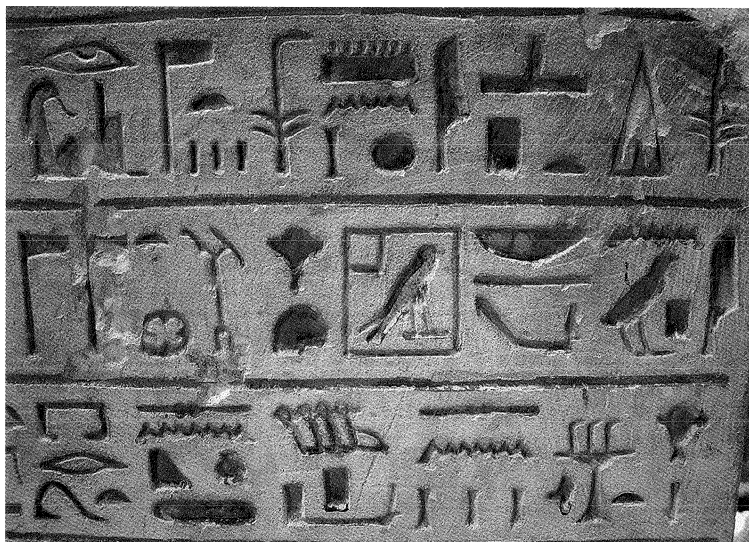
odnosno oduzimanja:

$$\begin{array}{c} \text{1000} - \text{100} = \text{900} \\ \text{(1000 - 100 = 900)} \end{array}$$

Hijeroglifske brojke bile su jednostavne za učenje i zapisivanje, ali prilično nespretne za opisivanje računskih operacija. Budući da su brojevi bili zapisani u decimalnom zbrajajućem sustavu, nama su i danas lako čitljivi.

3.3.3. Staroegipatske hijeratske brojke

Pojednostavnjenjem hijeroglifa nastalo je u drugom tisućljeću pr. Krista u drevnom Egiptu *hijeratsko pismo* (prema grč. *γράμματα ἱερατικά*, *grammata hieratika*: sveto pisanje), a s njim i *hijeratske brojke*. Izbor je brojki bio proširen, tako što su načinjene brojke za sve jedinice, desetice i stotice. Učenje je takvih brojki bilo teže, ali je zapisivanje bilo olakšano primjenom manje brojki nego u hijeroglifskom zapisivanju.



Drevni egipatski hijeroglifski tekstovi sadržavaju znakova slova, slogova, cijelih riječi, i brojki

Iz usporedbenog se zapisivanja broja vidi kako su se osim različitih brojki rabili i potpuno različiti načini zapisivanja. Još je veća razlika u zapisivanju brojeva u starim azijskim kulturama (hebrejskoj, arapskoj, kineskoj, japanskoj i dr.), koje se u knjizi ne opisuje jer nisu izravno utjecali na naš današnji način zapisivanja brojeva.

U sljedećim se poglavljima opisuje povijesno zapisivanje brojeva koje je izravno utjecalo na naš današnji način zapisivanja brojeva.

4. Rimske brojke

*Godina bijaše kad Mjesec ispuni deset krugova;
Taj broj bijaše tada u velikoj časti, jer toliko
prstiju imamo kojima običavamo brojiti.*

Ovidije,³⁷ *Fasti*, III. 121
(tumačenje prirodnosti brojčane osnove deset)

Pisanje brojeva slovним brojkama, tj. slovima kojima su pridane određene brojčane vrijednosti, već se stoljećima ne primjenjuje zbog nespretnosti prikazivanja računskih operacija takvim brojkama. U uporabi su ostale jedino *rimske brojke*, ponajviše za pisanje rednih brojeva u nekim posebnim primjenama, ali i u te svrhe sve rjeđe. Te su brojke kao i latinično pismo drevni Rimljani preuzeli od Etruščana te ih neznatno izmijenjene proširili zajedno s latinskim jezikom po cijelom Carstvu. Stoga bi i današnje *rimske brojke* valjalo nazivati *etruščanskim* ili makar *etruščansko-rimskim brojkama*. Iznimno su u Grčkoj u uporabi odgovarajuće *grčke brojke* (→ 3.2.1. *Grčke slovne brojke*).

4.1. Etruščanske brojke

Etruščani i drugi italjski narodi su, vjerojatno pod utjecajem grčkih kolonizatora i trgovaca, zapisivali brojeve pojedinim slovima, jednako kao tzv. *atičkim grčkim brojkama*, samo su umjesto grčkog pisma za to rabili latinicu. Brojeve su pisali zdesna ulijevo. Brojke prvih brojeva (jedan, dva, tri) potvrđuju da su se i etruščanske brojke razvile iz

³⁷Publije Ovidije Nazon (lat. *Publius Ovidius Naso*; 43. pr. Kr. – 17. ili 18. po. Kr.), znameniti rimski pjesnik. Glavna su mu djela *Ljubavne pjesme (Amores)* i druge ljubavne elegije, *Metamorfoze* (grčke i rimske legende u 15 knjiga) i *Fasti* (pjesnički opis rimskog kalendara).

prvotnog zapisivanja brojeva *potezima* (urezima, glifima) na rovašima i sličnim zapisima, jer slovo **I** nema osnove u nazivu broja *jedan* u latin-skom (*unus*: jedan), niti u drugim italiskim jezicima, nego je uzeto prema sličnosti s jednim potezom (→ 3.1. *Znakovi i zrnca*).

Prvotno su neke etrušćanske brojke bili posebni grafemi nešto drugačiji nego slova, ali su ubrzo zamijenjeni njima najbližijim slovima latinične abecede.

Etrušćanske brojke i način pisanja brojeva

<i>Brojka</i>	<i>Vrijednost</i>
I	1
II	2
III	3
III, AI	4
Λ	5
IA	6
X	10
↑	50
C	100

Bilo je i inačica tih znakova, što se mora uzeti u obzir pri čitanju starih tekstova. Iz zapisa brojeva *četiri* i *šest* vidi se da se primjenjivao zbrajajuće-oduzimajući način pisanja brojeva, ovisno o položaju manje brojke *desno* i *lijevo* od veće brojke, što se poslije primijenilo na pisanje rimskih brojeva.

4.2. Rimske brojke

Drevni su Rimljani, preuzimajući latinicu, od Etrušćana preuzeli i brojke te način pisanja brojeva. Uveli su način pisanja u redcima, pišući slijeva udesno, nižući retke odozgor prema dolje. Nekim su grafemima pridružene brojčane vrijednosti.

Grafemi brojki izabrani su tako da potezima (glifima) predstavljaju broj (I = jedan, II = dva itd.), da su nalik na šaku s odvojenim palcem

(V = 5) ili dvjema šakama (X = 10), ili su to početna slova naziva broja na latinskom jeziku (C = *centum*: stotina, M = *mille*: tisuća), ili su jednostavno dogovoreni.

Postoje razne teorije o nastanku znakova koji nemaju podrijetlo u latinskom nazivu broja. Oni su vjerojatno nastali preslikavanjem prvotnih znakova na najsličnije latinično slovo. Tako se za zapisivanje broja *pedeset* prvotno rabilo slovo V ili U (u tadašnjoj su latinici to samo inačice istog slova) s okomitom crtom u sredini, što je sličilo grčkom slovu Ψ (psi). To je pojednostavnjeno pisano znakom **⌚**, a na kraju je izjednačeno (polovina znaka) s najsličnijim latiničnim slovom L, kojim se nastavilo zapisivati broj 50. Tako je, pretpostavlja se, znak za pet stotina nastao polovljenjem starog znaka za tisuću **CIƆ**, ili ligaturno **ƆD**, od čega je polovina **IO** najsličnija latiničnom slovu D, kojim se nastavilo zapisivati broj 500.

4.2.1. Stare rimske brojke

Od doba drevnog Rima, tijekom cijelog srednjeg vijeka, pa sve do 17. stoljeća, rabile su se za pisanje tzv. *stare rimske brojke*, od kojih neke danas samo poneki znaju pročitati.

Stare rimske brojke³⁸

<i>Rimska brojka</i>	<i>Vrijednost</i>
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
CIƆ	500
ƆD	1000
IOƆ	5000
CCIOƆ	10 000
IOƆƆ	50 000
CCCIOƆƆ	100 000

³⁸ Prema *Gazofilaciju*, pisanom polovinom 17. st., gotovo stoljeće prije objavljivanja [Belostenec, 1740], dok ih *Dikcionar* u drugoj polovini 17. st. više ne donosi. [Habelić, 1670]

Brojke većih vrijednosti pisale su se posebnim znakovima, crtom ili crtama iznad brojke ili stavljanjem brojki u zagrade, što se danas rijetko primjenjuje.

Stare rimske brojke velikih vrijednosti

<i>Brojka</i>	<i>Vrijednost</i>
$\overline{\text{I}}$, (I)	1000
$\overline{\text{V}}$, (V)	5000
$\overline{\text{X}}$, (X)	10 000
$\overline{\text{L}}$, (L)	50 000
$\overline{\text{C}}$, (C)	100 000
$\overline{\text{D}}$, (D)	500 000
$\overline{\text{M}}$, (M)	1 000 000
$\overline{\overline{\text{I}}}$	1 000 000
$\overline{\overline{\text{V}}}$	5 000 000
$\overline{\overline{\text{X}}}$	10 000 000
$\overline{\overline{\text{L}}}$	50 000 000
$\overline{\overline{\text{C}}}$	100 000 000
$\overline{\overline{\text{D}}}$	500 000 000
$\overline{\overline{\text{M}}}$	1 000 000 000

Za pisanje velikih brojeva rabile su se i oznake s nekoliko crta iznad brojki ili skupine brojki, stavljane su brojke u okvire i dr. Na takve se načine pisanja nailazi uglavnom u starim tekstovima. Okvir iznad broja značio je množenje sa stotinu tisuća (tj. s 10^5), na primjer, brojevi 3 ili 20 ili 100 napisani rimskim brojkama u okviru znače redom:

$$\boxed{\text{III}} = 3 \times 100\,000 = 300\,000$$

$$\boxed{\text{XX}} = 20 \times 100\,000 = 2\,000\,000$$

$$\boxed{\text{C}} = 100 \times 100\,000 = 10\,000\,000$$

Ako se u starim izvorima uz rimsku brojku nađe neki poseban znak, preporučljivo je posavjetovati se sa stručnjacima ili naći u stručnoj literaturi detaljne upute o čitanju takvih brojeva.

Nakon izuma tiska, u prvim su tiskarama od 15. do 17. stoljeća za rimske brojke gravirani posebni znakovi, koje današnjem čitatelju i nije jednostavno čitati.

Posebno je teško čitati rukopisne rimske brojke u starim dokumentima (poveljama, darovnicama, zapisnicima, kronikama, izvješćima, popisima i dr.). Zlatko Herkov, veliki znalac u čitanju starih dokumenata, dao je u svojoj knjizi zanimljiv i vrlo vrijedan prilog *Rimski brojevi u našim izvorima u 15. stoljeću do polovice 17. stoljeća*. [Herkov, 1973]

1/2	ⅈ ⅈ ⅈ ⅈ	30	XXX III IIII IIII IIII IIII
1	I I I I	40	IIII IIII IIII IIII IIII XL XL
1 1/2	ⅈ ⅈ ⅈ	50	L L L L
2	ⅈ ⅈ ⅈ ⅈ ⅈ ⅈ	60	L L L L L L L L L L
2 1/2	ⅈ ⅈ ⅈ	70	L L L L L L L L L L
3	ⅈ ⅈ ⅈ ⅈ	80	L L L L L L L L L L
3 1/2	ⅈ ⅈ ⅈ ⅈ ⅈ ⅈ	90	L L L L L L L L L L
4	ⅈ ⅈ ⅈ ⅈ	100	L L L L L L L L L L
4 1/2	ⅈ ⅈ ⅈ ⅈ ⅈ ⅈ	150	L L L L L L L L L L
5	V V V V V V	200	L L L L L L L L L L
5 1/2	V V V V V V	300	L L L L L L L L L L
6	VI VI VI VI	400	L L L L L L L L L L
7	VII VII VII VII	500	L L L L L L L L L L
8	VIII VIII VIII VIII	600	L L L L L L L L L L
9	IX IX IX IX IX IX	700	L L L L L L L L L L
10	X X X X X X	1000	L L L L L L L L L L
11	XI XI XI XI XI XI	2000	L L L L L L L L L L
11 1/2	XI 1/2 XI 1/2 XI 1/2 XI 1/2 XI 1/2	4500	L L L L L L L L L L
12	XII XII XII XII XII XII	5000	L L L L L L L L L L
13	XIII XIII XIII XIII XIII XIII		
14	XIV XIV XIV XIV XIV XIV		
15	XV XV XV XV XV XV		
20	XX XX XX XX XX XX		
20 1/2	XX 1/2 XX 1/2 XX 1/2 XX 1/2 XX 1/2		
21	XXI XXI XXI XXI XXI XXI		
22	XXII XXII XXII XXII XXII XXII		

Numeri Romani originarii.

Notæ primævæ I, V, X, L, C, D, I—I—I

Celerius scriptæ I, V, X, L, C, D, C—C

Multo celerius I, V, X, L, C, D, C—D

Celerrimè I, V, X, L, C, D, C—C

Ex quibus

Ortæ hodiernæ I, V, X, L, C, D, M.

His septem figuris omnem numerum consignabat populus Romanus sua adhuc ruditate felix, quibus ingeniosa posteritas alias quasdam adjecit, quarum nonnullas ex Arithmetica Cl. Poëtii excerptas damus.

Signum ∞ vel ∞ , aut $\diamond\diamond$ usurpatum est loco numeri 1000.

Signum, ⌒ vel ⌒ , aut ⌒ significabat numerum: 10000.

Geminata ⌒⌒ vel ⌒⌒ , designabant bis 10000, seu 20000.

Si signum millenarii (∞) anteponatur, Ex. gr. $\infty \text{⌒⌒}$, subtrahendum intelligitur, id est: 19000.

Signum XX vel XX significat 20, & XXX tenotat 30. quibus usu posteriore accesserunt signa ab Authoribus ætatis etiam aureæ passim usurpata equentia.

⌒ , ⌒ , ⌒ , ⌒ , ⌒ , ⌒ .
I, V, X, L, C, M.
1000, 5000, 10000, 50000, 100000, 1000000.

Prikaz starih rimskih brojki u knjizi Maximiliana Hella, *Elementa arithmeticae numericae, et literalis seu algebrae...* Viennae ³1761. [Herkov, 1973]

Drevni su Rimljani za pisanje brojki rabili samo verzalna slova. U srednjem su se vijeku rabila i kurentna slova³⁹, pa se, na primjer, broj *tri* pisao III ili iii. Bio je i običaj da se zadnja jedinica piše slovom j, pa se,

³⁹Takav je još i danas običaj pisanja u američkim publikacijama, na primjer, brojeva stranica u početnom arku knjige i sl.

na primjer, broj *tri* pisalo **iiij**. Također se nađu primjeri da produljena crta ne znači brojku 1 nego brojku 2, pa, na primjer, **XI** treba čitati kao 11, a s produljenom crtom **XI** treba čitati kao 12.

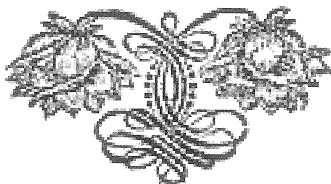
Stare su rimske brojke nestale iz uporabe tijekom 17. stoljeća, ujednačivanjem pisanja i razvojem tipografije.

4.2.2. Pisanje podataka rimskim brojkama

Osim pisanja cjelovitih brojčanih podataka rimskim brojkama, za neke se posebne namjene rabe i slova koja su sastavni dio nekog teksta, u nekim posebnim natpisima kao što su nadgrobni natpisi, spomenički natpisi, posvete i sl.

Kronogram ili *kronografikon* (prema grč. *χρόνος*, *kronos*: vrijeme + *γράμμα*, *gramma*: crtež, slovo; engl. *chronogram*) brojčani su podatci, osobito o godini, koji su zapisani unutar teksta posebno istaknutim

C A B A L A
D E L U S U L O T T O ,
E T
V A R I A F O R T U N A
Q U A M
E C C L E S I Æ S S . T R I N I T A T I S
S U B C A S T R O O K I C H F U N D A T Æ
P A R O C H U S .
M I C H A Æ L Š I L L O B O D
X P O S V I T .



Z A G R A B I E ,
In Censu Regakelarii per Austriam juxta Regem.

Naslovnica Šilobodove *Kabale*

slovnim brojkama primijenjenog pisma. Rabio se od vremena drevnog Rima, osobito u doba renesanse, pa do novovjekovlja. U našim su krajevima to latinski natpisi u crkvama, samostanima, na spomenicima, slikama ili u knjigama.⁴⁰ Ta slova pripadaju osnovnom tekstu, ali su na neki način istaknuta, bilo da su veća ili su u drugoj boji, na primjer, crvena slova unutar crnog osnovnog teksta. U *prirodnom kronogramu* broj je pravilno napisan, a u *običnom kronogramu* zbroj vrijednosti svih **pojedinih brojki** daje podatak o godini. Evo nekoliko primjera.

– Na naslovnici Šilobodove *Kabale* na latinskom jeziku stoji njegovo ime, prezime i pridjevak, koji su kronogram, jer sadrže godinu izdanja.

Ime i prezime autora i pridjevak su napisani⁴¹:

MIChaeL sILLoboD
eXposVIt

Rimske su brojke u tome kronogramu redom:

MICL ILLD XVI,

a poredano po padajućim vrijednostima:

M D C L L L X V I I I,

daju godinu izdanja knjige koju bi, zbog $L + L = C$, sažeto napisali:

M DCC LX VIII.

Napisano arapskim brojkama i zbrojeno to je:

$$1000 + (500 + 100 + 100) + (50 + 10) + (5 + 1 + 1 + 1) = 1768.$$

– U lauretanskoj je kapeli franjevačke crkve u Samoboru na oltaru kartuša s razmjerno kasnim (19. st.) latinskim natpisom o darovateljima.

⁴⁰ U BiH se iz osmanskog doba nađe na starim zgradama ili spomenicima *tarih* (kronogram) na turskom ili arapskom jeziku i pismu.

⁴¹ Hrv.: Izložio Mihalj Šilobod.



Kartuša na oltaru u lauretanskoj kapeli franjevačke crkve u Samoboru

Natpis u kartuši glasi⁴²:

obLatIone CoMIItssae aVersperg
popVLIqVe DeCore eXornata eXto

Rimske su brojke napisane redom kao u prethodnom primjeru:

LI CMII V VLI VDC X X,

a poredane po padajućim vrijednostima:

M DCCLL XXVV VIII,

daju godinu postavljanja oltara, koju bi sažeto napisali:

M DCCC XXX IX.

Napisano arapskim brojkama i zbrojeno daje:

$$1000 + (500 + 100 + 100 + 100) + (10 + 10 + 10) + (-1 + 10) = 1839.$$

Kao što se vidi, čitanje brojčanih podataka pisanih rimskim brojkama na starim dokumentima nije jednostavno te ga valja pomno i oprezno provesti, odgonetavajući domišljatost i dosjetke zapisivača.

⁴² Hrv.: Prinosom grofice Auersperg i puka stojim okićena ukrasima; – jer je grofica Alojzija Auersperg iz Mokrica darovala franjevačkom samostanu u Samoboru stari oltar sa svetačkim kipovima iz svoje kapelice.

4.2.4. Pisanje posebnih i rednih brojeva rimskim brojkama

Brojevi napisani rimskim brojkama zapisuju se u zbrajajuće-oduzimajućem (aditivno-suptraktivnom), tzv. *rimskom brojevnom sustavu*, kojemu je glavna osnova *deset*, a pomoćna osnova *pet*. U tom brojevnom sustavu nema broja *ništa* (nule), pa nema niti brojke *ništice* (nule) koja je potrebna u položajnim sustavima. Brojevi u rimskom brojevnom sustavu, tzv. *rimski brojevi* (engl. *Roman numbers*), pišu se rimskim brojkama ili njihovim slogovima, uz neka osnovna pravila:⁴³

1. Brojke se pišu s lijeva udesno.
2. Jedna se glavna brojka (**I**, **X**, **C** ili **M**) uzastopno može upotrijebiti najviše tri puta (na primjer, danas se ne piše **IIII** = 4, nego **IV** = 4).
3. Jednake se pomoćne brojke (**V**, **L** i **D**) ne rabe uzastopno.
4. Vrijednosti se uzastopno napisanih jednakih brojki zbrajaju (na primjer, **III** = **I** + **I** + **I** = 3).
5. Vrijednost **jedne manje brojke** s lijeve strane veće brojke oduzima se od vrijednosti veće brojke (na primjer, **IV** = - 1 + 5 = 4), s tim da manja brojka može biti samo **najbliža** manja glavna brojka. Stoga se, na primjer, broj 99 ne piše **IC** = - 1 + 100 (jer **I** nije najbliža manja brojka od **C**), nego se piše **XCIX**, što treba čitati kao **XC** + **IX** = (- 10 + 100) + (- 1 + 10) = 90 + 9 = 99.
6. Vrijednosti **najviše triju** jednakih manjih brojki s desne strane veće brojke pribrajaju se njezinoj vrijednosti (na primjer, **VI** = 5 + 1 = 6, ili **VIII** = 5 + 1 + 1 + 1 = 8).

Ta su pravila za pisanje rimskih brojeva ustanovljena razmjerno nedavno, a u starijim se zapisima nalaze i drugačiji načini pisanja. Tako se, na primjer, broj *stotinu* pisao brojkom **C**, ali se u starim dokumentima može naći napisano i zbrajajuće-množeće (aditivno-multiplikativno) **IC**. To **nije** broj *devedeset i devet* (jer **I** nije najbliža manja glavna brojka od **C**), nego je to *jedan puta stotinu*, tj. $1 \times 100 = 100$. Broj *dvije tisuće*, koji po navedenim pravilima treba pisati **MM** (tj. $1000 + 1000 = 2000$), može se u starim dokumentima⁴⁴ naći napisano i kao **IIM** (tj. $2 \times 1000 = 2000$).

U zapisanim rimskim brojevima, koji su se u Europi gotovo isključivo rabili dulje od jednog i pol tisućljeća, nalazi se i mnogo iznimaka. Tako se broj *četiri* piše **IV**, ali se nalazi napisan i **IIII** (osobito na

⁴³Na žalost, ta se pravila često navode previše pojednostavnjena, a time i netočna!

⁴⁴Takav se dvostruki način pisanja nalazi, na primjer, u Habelićevu *Dikcionaru* iz 1670. godine.



Naslovnica Habeličeva *Dikcionara* s godinom izdanja napisanom rimskim brojkama; u podatku o godini pojedini su brojevi odvojeni točkama

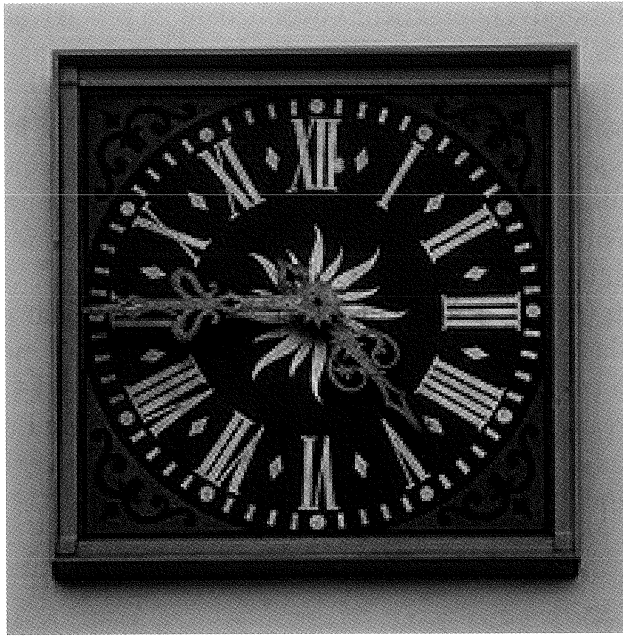
brojčanicima satova), među ostalim i stoga što je **IV** bila kratica imena glavnog rimskog boga (lat. **IVPPITER**: Jupiter), pa se smatralo kako je tu kraticu neprimjereno rabiti u svjetovne svrhe.

Drevni su Rimljani računali razlomcima s osnovom (nazivnikom) 12. Stoga je *jedan* istodobno bio i pojam za 1/12, *šest* za 1/2 itd. Mi bismo to čitali kao da se odnosi na *tuce*, dakle 1/12 tuceta = *jedan*, 1/2 tuceta = *šest* itd.

ADMODUM REVERENDI PATRIS
 J O A N N I S
 BÉLLOSZTÉNÉCZ,
 E SACRA D. PAULI PRIMI EREMITÆ RELIGIONE
 GAZOPHYLACIUM.
 S E U
 LATINO-ILLYRICORUM ONOMATUM
 ÆRARIUM,
 SELECTIORIBUS SYNONIMIS,
 PHRASEOLOGIS, VERBORUM CON-
 STRUCTIONIBUS METAPHORIS, ADAGIIS,
 ABUNDANTISSIME LOCUPLETATUM,
 ITEM
 PLURIMIS AUTHORUM IN HOC OPERE
 ADDUCTORUM SENTENTIIS IDIOMATE ILLY-
 RICO DELICATIS ILLUSTRATUM.
 Penultimarum duntaxat Syllabarum Quantitatibus, litteris *p. c. i. e.*
 penultima correpta, & *p. p. i. e.* penultima producta, ubique denotatis,
 signatum. Residuis ex Epitome in Profodia speciales Regulas, Pantaleonis
 Barcolonæ Raverini, in Calce Libri appposito, colligendis
 ATQUE HACTENUS INTERCLUSUM.
 Et nunc primum peculiariter Illyriorum commodo
 A P E R T U M.
 Z A G R A B I Æ.
 Typis Joannis Baptistæ Weirz, Inclyti Regni Croatia Typographi.
 In Anno Domini M.DCC XL.

Naslovnica Belostenčeva *Gazofilacija* s godinom izdanja napisnom rimskim brojkama; pojedini su brojevi odvojeni točkama ili razmacima

Nekad se rimske brojeve (ne pojedine brojke!) odvajalo točkama u dnu (kako je to, na primjer, napisano na naslovnici *Dikcionarq: M. DC. LXX.*, tj. 1670.), ili razmacima odnosno mješovito (kako je napisano na naslovnici *Gazofilacija: M.DCC XL.*, tj. 1740.).



Satni brojčanik s rimskim brojkama – broj 4 je napisan IIII

Kad se rimski brojevi rabe kao redni brojevi, po hrvatskom se pravopisu iza broja stavlja točka u dnu retka, jednako kao iza arapskih brojki, dakle **I.** (1., prvi), **II.** (2., drugi), **V.** (5., peti) itd. U nekim drugim jezicima, na primjer u njemačkom i engleskom, redni se brojevi pišu bez točke!



Igraće karte označene rimskim brojevima – broj 4 je napisan IIII

Rimski su brojevi nepraktični i nepouzdati za prikazivanje računskih operacija. U zapisivanju brojčanih podataka, računskom zapisivanju i sl. potisnuli su ih od 16. st. zapisi tzv. *arapskim brojkama* (→ 5. *Arapske brojke*). Danas se rimski brojevi tradicijski rabe još samo kao *redni brojevi* (mjeseca u godini, kalendarske godine, stoljeća, godine izdanja publikacije, godišta periodične publikacije, poglavlja u knjizi i sl.), te u nekim oblikovnim rješenjima, kao što su, na primjer, brojčanici na analognim satovima, igraće karte i dr.

Rimski su brojevi pri pisanju teksta na elektroničkom računalu potpuno nepouzdati jer se pri pretraživanju naredbom *Traži* mogu razumjeti kao inicijali (na primjer, pretraživanje po rimskoj brojki **I.** dat će redni broj *prvi*, ali i inicijale imena *Ivan, Ivana, Ignacije, Igor* i dr.).

Stoga će, vjeruje se, uz sve poštivanje uloge koju su imali u više od dvije tisuće godina, rimske brojke uskoro otići u povijest.

5. Arapske brojke

Feničani su svijet naučili pismenosti,⁴⁵ a Arapi su ga naučili pisanju indijskim, po njima nazvanim arapskim brojkama.

Brojke kojima danas piše gotovo cijeli svijet nastale su na Indijskom potkontinentu pa bi ih valjalo nazivati *indijskim brojkama*. Međutim, kako su u Europu dospjele posredovanjem Arapa⁴⁶, nazivaju se *arapskim brojkama* (engl. *Arabic numerals*), iako bi točniji naziv bio *indijsko-arapske brojke* (engl. *Hindu-Arabic numerals*).

5.1. Indijsko-arapske brojke

5.1.1. Stare indijske brojke

Najstarije su poznate brojke na Indijskom potkontinentu bile tzv. *brahmanske brojke* (engl. *Brahmi numerals*), koje su se uz istoimeno pismo pojavile u 3. stoljeću pr. Krista. Očito je kako su se brojke razvile iz zapisivanja potezima na rovašima. Rabile su se za pojedinačno zapisivanje brojeva na zbrojevni način te stoga nisu imale mjesnu vrijednost u nekom položajnom sustavu niti su imale ničicu.

Brahmanske brojke (u gornjem su redu njihove vrijednosti napisane današnjim arapskim brojkama)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	+	h	୯	୭	୫	୩

⁴⁵ Charles Seignobos, *Historie de la Civilisation*. Paris 1902.

⁴⁶ Arapi su još u 9. stoljeću te brojke nazivali *indijskim brojkama*, a u 12. stoljeću pod tim su nazivom došle u Europu.

Iz njih su se razvile mnoge slične brojke drugih kultura na Indijskom potkontinentu. U tim su se kulturama, neovisno o brojkama, razvila dva važna načela pisanja brojeva: *položajni sustav* i *uporaba ništice*.

5.1.2. Izum ništice

U položajnom se brojevnom sustavu pojavljuje pojam *ništa* na nekom položaju između upotrijebljenih položaja koji je *prazan*. Babilonci su na takvom mjestu ostavljali povećan razmak koji bi se mogao nazvati *prazninom* (→ 3.3.1. *Babilonske brojke*).

Taj su pojam upotrijebili helenistički astronomi u seksagezimalnom brojevnom sustavu, ali ne za cijele brojeve nego samo pri pisanju dijelova cjeline. Označivali su ga nekim posebnim znakom. Takav je način pisanja brojeva primjenjivao Hiparh u 2. stoljeću pr. Krista i Ptolemej u 2. stoljeću. Znak je te, danas nazivane *helenističke ništice*, prvotno bio kružić iznad kojeg je bila duga crta, poslije skraćivana na širinu kružića, te konačno potpuno izostavljena. Taj je kružić podsjećao na grčko kurentno ("malo") slovo *o* (grč. *ó μικρον*, *o mikron*: malo *o*), pa su mu poslije pridavali značenje grčke riječi *οὐδέν*, *oyd-en*: nijedan, ništa.

Tek su Indijci, procjenjuje se u 5. stoljeću, potpuno primijenili pojam *ništa* ili *prazno* kao prazan položaj u decimalnom položajnom sustavu. Znak je *ništice* prvo nastao praznim mjestom u broju čije su brojke upisivane u pojedine kućice mreže. Kad je ta mreža izostavljena, morala se ostaviti kućica na praznom položaju. Stoga je ona prvo bila gotovo pravokutna, a tek je poslije zbog jednostavnijeg pisanja zaokružena. Tako je nastao znak za *ništa* koje su matematičari tek poslije razumjeli kao poseban broj.

Indijci su ništicu nazivali *prazno*, što su Arapi preveli kao *al-sifr* (doslovno *prazno*). Riječ je preuzeta u europske jezike na dva načina, kao *zero*⁴⁷, što je u nekim jezicima dalo naziv za *ništicu* (engl. *zero*, franc. *zéro*, tal. *zero*, španj. *ceró* itd.), te kao *cifra*, koja je tek poslije poprimila značenje *brojke*. U drugim je jezicima na osnovi latinskog nastao naziv *nula* (lat. *nullus*, nijedan), a u hrvatskom se rabe oba naziva: *ništica* i *nula* (koja je dvoznačna, jer znači broj *ništa* i brojku *ništicu*).

Pretpostavljeni nastanak ništice u primjeru broja 2049 (smjer razvoja odozgo prema dolje):

⁴⁷ U nas se ponekad rabi naziv koji nam je došao preko turskog, *zera*: ~ neznatno, gotovo ništa.

Broj napisan indijskim brojkama
u kućicama mreže

२		४	९
---	--	---	---

Broj napisan indijskim brojkama
s prazninom

२		४	९
---	--	---	---

Broj napisan indijskim brojkama
u ništicom

२	०	४	९
---	---	---	---

Broj napisan istočnoarapskim
brojkama s ništicom

٢	٠	٤	٩
---	---	---	---

Broj napisan današnjim
arapskim brojkama

2	0	4	9
---	---	---	---

Položajna vrijednost

$$\times 10^3 \quad \times 10^2 \quad \times 10^1 \quad \times 10^0$$

5.1.3. Indijsko-arapske brojke u Europi

Arapski je svijet doznao za indijske brojke 772./773. godine, kad je indijsko poslanstvo donijelo u Bagdad nekoliko knjiga o astronomiji na sanskrtu, u kojima su podaci bili zapisani indijskim brojkama, u položajnom sustavu s osnovom deset te uporabom ništice. Arapi su odmah počeli rabiti te brojke pa je 825. znameniti arapski matematičar Al-Hvarizmi⁴⁸ napisao knjigu *Računanje s indijskim brojevima* (transliterirano arap. *Hisab hindu*), u kojoj je matematičarima i trgovcima preporučio indijske brojke zbog jednostavnosti njihova pisanja i računanja s njima.

Ta je knjiga 1130. godine prevedena na latinski, pod naslovom *Liber algoritmi de numero indorum* (*Knjiga računanja s indijskim brojevima*)⁴⁹, preko koje je Europa upoznata s indijskim brojkama, ali ih je počela nazivati *arapskim brojkama*.

⁴⁸ Abu Abdallah Muhamad ibn Musa-al-Hvarizmi (~ 780. – 850.) rođen u Horezmu, današnjem Hiviju u Uzbekistanu, perzijski matematičar, astronom i geograf. Napisao kapitalno matematičko djelo *Skraćena knjiga računanja postupkom uspostavljanja i suprostavljanja* (arap. *Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa'l-muqābala*, kraće *Hisab al-jabr w'al-muqabala*), u kojoj je upotrijebio arapske brojke. Po nazivu *al-jabr* u njezinu arapskom naslovu grana matematike nazvana je *algebr*om. Neke druge riječi s početkom *al*, koje se danas rabe u mnogim jezicima, podsjećaju na arapsko podrijetlo, na primjer, *algoritam*, *alkemija*, *alkohol*.

⁴⁹ U *Gazofilaciju* (pisan sredinom 17. stoljeća) riječ *rachunaria* prevodi se na latinski kao *algorismus*, a *algarista* i *algorista* prevodi na hrvatski kao *rachunar*, *skolnik*, *koi rachune vuchi*. [Belostenec, 1740]



Natpis iznad prozora na tornju crkve u Zajezdi **AD M535** (tj. 1535. godina), na kojem je tisuća napisana rimskom brojkom, a ostalo arapskim brojkama (foto: Z. Benčić)

Mješoviti javni natpis rimskim i arapskim brojkama danas vidimo i na dubrovačkom gradskom zvoniku sa satom, na istočnoj strani Straduna, izgrađenom 1444. godine. Brojčani pokaznik sata (postavljen najvjerojatnije pri obnovi zvonika 1929. godine) čine dva četvrtasta otvora u zidu tornja, u visini prvog kata. Na pomičnim pločama u lijevom se otvoru



Dubrovački gradski toranj sa satom i otvorima za brojčani pokaznik

sati pokazuju rimskim brojkama (od I. do XII.), a u desnom minute arapskim brojkama (u koracima od pet minuta). Na primjer, 11:05 pokazuje se kao **XI i 5**.

Već prvi hrvatski rječnik, Vrančićev *Dictionarium quinque nobilissimarum Europæ linguarum*, na naslovnici ima godinu objavljivanja 1595., napisanu arapskim brojkama.

5.2. Suvremene arapske brojke

Arapske su brojke grafemi za zapisivanje posebnih brojeva, nastali znatno nakon slova, različiti od slova nekog alfabeta. Prvotno je bilo devet grafema, naknadno je dodana *ništica* (nula), pa ih je danas deset. Na putu iz Indije do Europe, tijekom više od jednog tisućljeća, pismovnim su inačicama poprimile današnji izgled, a od 15. stoljeća sve više potiskuju rimske brojke. Danas se arapske brojke rabe u cijelom svijetu i uz gotovo sve današnje alfabete, pa često i u drugim pismima (u kineskom, japanskom i dr.).

5.2.1. Nazivi i vrijednosti arapskih brojki

Arapske brojke imaju jednake vrijednosti i jednake grafeme u svim današnjim alfabetima i pismima. U tipografskim su pismima likovno izvedene slično slovima, s tim da su u nekim pismima u dvjema inačicama, kao *normalne* (uobičajene) *brojke* i kao *medijevalne* (srednjovjekovne) ili *renesansne brojke*.

a) 1234567890

b) 1234567890

Primjer brojki u pismu *antikva*: a) normalne brojke i
b) medijevalne ili renesansne brojke

Za matematički tekst, tablice, tehničke crteže i sl. rabe se samo normalne brojke.

Brojke u pojedinim jezicima imaju posebne nazive koji se ponajprije odnose na arapske brojke.

Hrvatski nazivi arapskih brojki i njihove vrijednosti

<i>Brojka</i>	<i>Hrvatski naziv</i>	<i>Osnovna vrijednost</i>
0	ništica, nula	ništa, nula
1	jedinica	jedan
2	dvica*	dva
3	trica	tri
4	četvrtica	četiri
5	petica	pet
6	šestica	šest
7	sedmica	sedam
8	osmica	osam
9	devetica	devet

* Nazivi *dvojka*, *trojka* itd. nepouzdati su jer su ponekad više-značni, pa mogu značiti brojku, ali i skup s toliko sastavnica (*dvojci*: blizanci, *trojka*: tropreg itd.).

Ti se nazivi pridružuju i brojevima, pa i onim većim od devet (desetica, jedanaestica itd.), potom osobama ili objektima koji nose takve brojeve, na primjer igračima u sportu, kartama, vozilima i dr.

Za pisanje brojeva arapskim brojkama postoje posebna pravila, ovisna o brojevnom sustavu. Neka su od pravila za pisanje brojčanih podataka (vrijednosti mjernih veličina, nadnevci, vrijeme, doba dana i dr.) preporučena posebnim međunarodnim i nacionalnim normama. [Jakobović, 2013]

5.2.2. Pisanje posebnih i rednih brojeva arapskim brojkama

Posebni i redni brojevi napisani arapskim brojkama pišu se u tzv. *položajnom brojevnom sustavu* (engl. *positional number system*), u shemi u kojoj brojka ima vrijednost ovisno o *položaju* ili *mjestu* u shemi. Veliko je dostignuće bilo kad se u takvoj shemi prazno mjesto počelo označivati okvirom pa je tako nastao deseti grafem: *ništica* ili *nula* (0) za *ništa*.

Različiti brojevni sustavi s osnovama 6, 10, 12, 60 i dr., rabili su se kroz povijest na različite načine i u različite svrhe. Brojevne sustave s različitim osnovama rabimo i danas, više nego što se misli. U našim je računalima glavni *binarni* ili *dijadni sustav* (osnova 2), pa podatke, na

primjer, o kapacitetima računalnih spremnika, izražavamo u binarnim višekratnicima *kibibajtima* (binarnim kilobajtima), *mebibajtima* (binarnim megabajtima) itd. Binarni je sustav i u srži prosudbene logike (*istina – neistina, da – ne, 1 – 0* i dr.).

Dan tradicijski dijelimo na sate u *dvanaestnom* ili *duodecimalnom sustavu* (obdanica i noć oko ravnodnevnice su po 12 sati, što daje dijeljenje dana na 24 sata). Mjerne jedinice kuta i vremena rabimo u *šezdesetnom* ili *seksagezimalnom sustavu* (osnova $5 \times 12 = 60$)⁵², dijeleći *puni okretaj* na $6 \times 60 = 360$ stupnjeva (što je samo za $\sim 1,4$ % različito od broja dana u godini), *stupnjeve* i *sate* na po 60 minuta, a *minute* na 60 sekunda. Kalendarsku godinu dijelimo na 12 mjeseci, koji sadržavaju prosječno $60 : 2 = 30$ dana (što je samo $\sim 3,5$ % različito od ciklusa Mjesečevih mijena). [Jakobović 2008], [Jakobović, 2009], [Vuković, Jakobović, 2013] Dvanaestni sustav i njegove inačice bili su česti u starim mjernim sustavima, a i danas se rabe u angloameričkom sustavu mjernih jedinica. U matematici i fizici rabe se i sustavi s drugim osnovama.

Decimalni sustav (*desetični, desetni* ili *dekadski sustav*; engl. *decimal system*) s osnovom 10 danas najviše rabimo za svakodnevno brojenje i računanje. U decimalnom sustavu brojevi se zapisuju s padajućim vrijednostima u smjeru slijeva udesno, jednako kao i slova u riječima. U hrvatskom se čitaju u istom smjeru i padajućim vrijednostima, a u nekim se drugim jezicima čitaju i mješovito, dijelom padajućim, a dijelom rastućim vrijednostima (na primjer, u slovenskom i njemačkom).

Shema pisanja decimalnog broja

itd. ←	tisuće	stotine	jedinice	decimalni znak	desetinke	stotinke	tisućinke	itd. →
-----------	--------	---------	----------	---------------------------	-----------	----------	-----------	-----------

Na pojedinim mjestima sheme, zdesna ulijevo, brojevi imaju po deset puta veću vrijednost. Vrijednosti manje od jedinica (desetinke, stotinke itd.) odvajaju se *decimalnim znakom* (engl. *decimal sign*) i pišu desno od znaka. Danas je prema preporukama međunarodnih i hrvatskih norma decimalni znak *zarez* (,)⁵³. Unutar broja prazna se mjesta označuju ničicom, a jednako tako i mjesto jedinica pri pisanju brojeva manjih od jedan.

⁵² Postoje opsežni prijedlozi za veću primjenu seksagezimalnog sustava.

⁵³ U engleskom je govornom području tradicijski decimalni znak točka (.), engl. *point*, ali međunarodne norme i na engleskom jeziku, na primjer ISO 80 000, imaju zarez kao decimalni znak.

Primjer

Broj dvije tisuće, četiri stotine, trideset i šest, dvije desetinke, ništa stotinki i pet tisućinki sastoji se od pojedinih brojeva, a piše kao njihov zbroj:

dvije tisuće	2000
četiri stotine	400
trideset	30
šest	6
dvije desetinke	0,2
ništa stotinki	0,00
pet tisućinki	0,005
potpun broj	2436,205

Nišnice se izvan broja pišu iznimno rijetko (samo u tzv. *formatiziranim brojevima* ili za označivanje točnosti broja).

Primjeri

a) Nadnevak *5. travnja 2014.* potpuno brojčano se piše:

5.4.2014.

što je za većinu primjena potpuno dovoljno, a samo se iznimno piše *formatizirano*:

05.04.2014.

b) Broj *pet desetinki* piše se 0,5, a ako se želi izraziti kako je to točno *pet stotina tisućinki*, piše se 0,500.

Prema hrvatskom pravopisu i hrvatskim normama pisanje se posebnih i rednih brojeva razlikuje u tome što se redni brojevi pišu samo kao cijeli brojevi u decimalnom brojnom sustavu, a iza rednog broja piše se točka u dnu retka.

Na primjer, *posebni cijeli brojevi* se pišu: **1** (*jedan*), **2** (*dva*) **3** (*tri*) ... **12** (*dvanaest*) itd., a *posebni razlomljeni brojevi* se pišu, na primjer: **0,3** (*nula cijelih tri ili nula zarez tri*), **1,5** (*jedno cijelo pet ili jedan zarez pet*), **3,2** (*tri cijelih dva ili tri zarez dva*) itd. *Redni brojevi* se pišu: **1.** (*prvi*), **2.** (*drugi*), **3.** (*treći*) **12.** (*dvanaesti*), pa i kada su složeni, npr. 1.3.5. itd.⁵⁴

⁵⁴U nekim se jezicima (u engleskom, njemačkom) redni brojevi pišu i drugačije.

6. Posebna svojstva i uporaba brojeva i brojki

I danas još ima dosta matematičara koji smatraju da broj nije samo povijesni početak matematike, već i najdublja osnova.

[Devidé, 1979]

Ljudi su od davnina zapažali određena svojstva nekih prirodnih brojeva (nadalje samo *brojeva*), njihovih slogova i brojki kojima su zapisani. Potom su osim računskih i matematičkih svojstava tražili njihova možebitna druga, skrivena filozofska, religijska, magična, magijska, pa na kraju i okultna svojstva. Nekim su se brojevima pridruživali čudesnost, nekim savršenstvo, nekim prijateljstvo, a nekim se pridavalo značenje sreće, nekim nesreće, nekim uspjeha, nekim neuspjeha itd.

Ovdje će biti opisane dvije skupine brojeva, oni brojevi koji sami ili u slogovima imaju neka posebna računska ili matematička svojstva, te oni kojima su tijekom povijesti u raznim kulturama pridana neka posebna nematematička svojstva, od kojih neka tradicijom i danas uzimamo u obzir, što svjesno, što nesvjesno.

Tako će, na primjer, i matematički obrazovan čovjek poštivati prastari običaj da se kao dar donosi buket s *neparnim* brojem cvjetova, dok se buket s *parnim* brojem cvjetova nosi “samo na groblje”. Pritom ćemo reći kako nismo praznovjerni, ali ipak strahujemo kako će nas okolina smatrati nekulturnim ako tako ne postupimo! Postoje i mnogi drugi običaji i druga “pravila” o uporabi parnih i neparnih brojeva, o uporabi pojedinih određenih brojeva, njihovu slaganju i dr.

6.1. Čudesni brojevi

Još od antike među prirodnim su brojevima ustanovljavani određeni odnosi, pa su utvrđeni brojevi kojima su pridana svojstva *čudesnosti*, *prijateljstva*, *savršenstva* i dr. Ovdje će biti navedeni samo najpoznatiji čudesni brojevi, a u matematičkoj se literaturi mogu naći još mnogi brojevi s vrlo zanimljivim posebnim svojstvima. [Higgins, 2014]

Jednostavan broj, *prost*⁵⁵ broj, *primarni broj*, *prim-broj* (engl. *prime number*), prirodni je broj djeljiv, osim brojem jedan, samo sa samim sobom⁵⁶. Jednostavni su brojevi, na primjer, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31..., a ima ih beskonačno mnogo, što je znao još Euklid.

Složeni broj (engl. *composite number*), prirodni je broj koji je umnožak dvaju prirodnih brojeva većih od jedan. Složeni su brojevi 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 itd., a ima ih također beskonačno mnogo.

Broj jedan (engl. *number one*) nije ni jednostavan, ni složen, stoga u antici (Aristotel, Pitagora) nije smatran brojem, nego tek *počelom* ($\rightarrow$ 2.4.3. *Brojevni skupovi*).

Broj prijatelj (engl. *friendly number*) takav je prirodni broj n za koji se može naći prirodni broj m , različit od n , takav da su im jednaki tzv. *gusti omjeri* (engl. *abundancy ratio*) $\sigma(n)/n = \sigma(m)/m$, gdje je općenito $\sigma(k)$ zbroj svih cjelobrojnih djelitelja od k . Takvi brojevi n i m čine *prijateljski par*, a s brojeva s istim gustim omjerom čine *prijateljski s-terac*.

Najmanji broj prijatelj je broj 6, kojem je u paru, na primjer, broj 28, jer je gusti omjer broja 6:

$$\sigma(6) : 6 = (1 + 2 + 3 + 6) : 6 = 12 : 6 = 2,$$

⁵⁵ U matematičkom je nazivlju pridjev *prost* rijedak primjer zadržavanja prvotnog značenja: *jednostavan*, koji se rabio do u 19. stoljeće. Primjer su i znameniti stihovi Dimitrije Demetra: *Prosto zrakom ptica leti, prosto gore zvijer prolazi ...* (1842. god.), koji su danas mladim naraštajima neobični ("Što je tu prosto?"). Tijekom 20. stoljeća pridjev *prost* i izvedenice zadržali su samo pogrdno značenje: *sirov*, *neuljuden*, *nepristojan* itd. Rječnici i jezični savjetnici suvremenog hrvatskog jezika za pridjev *prost* navode značenje: zastarjelo *jednostavan*, *slobodan*, te mahom upućuju na pridjev *jednostavan* i njegove izvedenice.

⁵⁶ Tu "osamljenost" jednostavnih brojeva upotrijebio je talijanski pisac Paolo Giordano za naslov svoje uspješnice *La solitudine dei numeri primi* (2008.), prevedene na brojne jezike; hrvatski prijevod *Samoća primarnih brojeva* (2009.), po kojoj je Saverio Costanzo snimio film (2010.).

a toliki je i gusti omjer broja 28:

$$\sigma(28) : 28 = (1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28) : 28 = 56 : 28 = 2.$$

Primjer su *prijateljskog 5-terca* brojevi 30, 140, 2 480, 6 200, 40 640 jer je gusti omjer broja 30:

$$\sigma(30) : 30 = (1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30) = 72 : 30 = 12/5,$$

a toliki su i gusti omjeri ostalih četiriju brojeva.

Osamljeni broj ili *osamljenik* (engl. *solitary number*) broj je koji nema broja prijatelja. Osamljeni su brojevi, na primjer, prvih pet prirodnih brojeva (1, 2, 3, 4 i 5), te svi jednostavni brojevi i njihove potencije. Mali prirodni osamljeni brojevi imaju neka zanimljiva svojstva: *broj dva* jedini je parni jednostavan broj, *broj tri* jedini je broj koji je zbroj prethodnih brojeva ($1 + 2 = 3$). Do danas nije poznato je li skup osamljenih brojeva konačan ili beskonačan.

Ne postoji općenit algoritam kojim se može odrediti je li neki broj prijateljski ili osamljenik. Najmanji broj kojemu do 2009. godine nije bilo utvrđeno razvrstavanje u tome smislu je broj 10.

Združeni brojevi (engl. *amicable numbers*)⁵⁷ par su brojeva, u kojem je *zbroj* pravih djelitelja prvog broja jednak drugom broju, i obratno, *zbroj* pravih djelitelja drugog broja jednak prvom. Te je brojeve prilično teško izračunati.

Najmanji par združenih brojeva su 220 i 284 jer su cjelobrojni djelitelji broja 220 redom 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, a njihov zbroj je 284, i obratno djelitelji broja 284 su 1, 2, 4, 71, 142, a njihov zbroj je 220. Taj je par združenih brojeva bio poznat još Pitagori, a sljedeći je par 17 296 i 18 416 izračunao tek u 17. stoljeću P. de Fermat⁵⁸. U 18. stoljeću bilo je poznato trideset parova, a tek je 1866. godine N. Paganini⁵⁹ kao 16-godišnji učenik otkrio drugi najmanji par 1184 i 1210. Danas je poznato više od 12 milijuna parova združenih brojeva.

⁵⁷ Ponekad se i *združeni brojevi* nazivaju *sprijateljenim brojevima* ili *prijateljskim brojevima* [Gusić, 1995], a postoje razlike u nazivima na pojedinim jezicima, na primjer: njem. *befreundeten Zahlen*, *quasibefreundeten Zahlen*, *geselligen Zahlen*, franc. *nombre amical*, rus. *дружественные числа* i dr.

⁵⁸ Pierre de Fermat (1607. – 1665.), francuski matematičar i pravnik

⁵⁹ B. Nicolò I. Paganini, talijanski matematičar amater

Združeni su brojevi većinom parni, samo iznimno neparni, a nije pronađen par u kojem je jedan član parni, a drugi neparni broj.

Postupak pronalaženja združenih brojeva predložio je još u 9. stoljeću Tabit ibn Kora⁶⁰, a poopćio L. Euler⁶¹.

Brojevi blizanci (engl. *twin primes*), jednostavni su brojevi koji se razlikuju za broj 2. Na primjer, blizanci su parovi (3, 5), (5, 7), (11, 13) itd. Ne zna se ima li ih konačno ili beskonačno mnogo.

Savršeni brojevi (engl. *perfect numbers*) prirodni su brojevi koji su zbroj svojih pravih djelitelja (osim samog sebe). *Najmanji savršeni broj* je broj *šest* jer je djeljiv s 1, 2 i 3, ali je istodobno i njihov zbroj ($1 + 2 + 3 = 6$) i umnožak ($1 \times 2 \times 3 = 6$). Nije stoga čudno što su ga kao savršen broj cijenili još pitagorejci!

Savršeni su brojevi: 6, 28, 496, 8128, 33 550 336, ...⁶². Savršeni brojevi moraju imati oblik $2^{n-1} \times (2^n - 1)$, gdje su n i $(2^n - 1)$ Mersenneovi jednostavni brojevi ($\rightarrow$ *Mersenneovi brojevi*). Dosad je poznato 48 savršenih brojeva, od kojih najveći ima u decimalnom zapisu više od 34 milijuna brojki, a svi su parni. Svi savršeni brojevi završavaju sa 6 ili 28.

Neki *višekratnici najmanjeg savršenog broja*, tj. broja *šest*, posebno su cijenjeni:

– *dvostruki broj šest*, tj. $2 \times 6 = 12$, osnova je dvanaestnog brojevnog sustava

– *deseterostruki broj šest*, tj. $10 \times 6 = 60$, zbog mnogo nižekratnika i veličine prikladna je osnova seksadecimalnog brojevnog sustava

– *šezdesetostruki broj šest*, tj. $60 \times 6 = 360$, zbog mnogo nižekratnika, veličine i sličnosti s brojem dana u godini prikladan je za podjelu kružnice na stupnjeve.

Obilni brojevi (engl. *abundant numbers, excessive numbers*) prirodni su brojevi za koje je zbroj njihovih pravih djelitelja veći od tog broja. *Najmanji obilan broj* je broj *dvanaest* jer je djeljiv s brojevima 1, 2, 3, 4 i 6, a njihov zbroj je $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$. Razlika zbroja i broja (za broj 12 to je 4) naziva se *obilnošću broja*. Sljedeći su obilni brojevi 18, 20, 24, 30 itd.

⁶⁰Tabit ibn Kora (826. – 901.), arapski matematičar

⁶¹Leonhard Euler (1707. – 1783.), švicarski matematičar i fizičar

⁶²Prva su dva savršena broja znali još pitagorejci, treći je otkrio Euklid, a četvrti je otkriven tek 1480. godine.

$$\begin{array}{rcl}
0 \times 9 + 1 & = & 1 \\
01 \times 9 + 2 & = & 11 \\
012 \times 9 + 3 & = & 111 \\
0123 \times 9 + 4 & = & 1111 \\
01\ 234 \times 9 + 5 & = & 11\ 111 \\
012\ 345 \times 9 + 6 & = & 111\ 111 \\
0\ 123\ 456 \times 9 + 7 & = & 1\ 111\ 111 \\
01\ 234\ 567 \times 9 + 8 & = & 11\ 111\ 111 \\
012\ 345\ 678 \times 9 + 9 & = & 111\ 111\ 111 \\
0\ 123\ 456\ 789 \times 9 + 10 & = & 1\ 111\ 111\ 111
\end{array}$$

Nanizani brojevi su niz brojeva koji, ovisno o množitelju, daju brojeve koji se pišu nizom jednakih brojki:

$$\begin{array}{l} 12\ 345\ 679 \times 9 = 111\ 111\ 111 \\ 12\ 345\ 679 \times 18 = 222\ 222\ 222 \\ 12\ 345\ 679 \times 27 = 333\ 333\ 333 \\ 12\ 345\ 679 \times 36 = 444\ 444\ 444 \\ 12\ 345\ 679 \times 45 = 555\ 555\ 555 \\ 12\ 345\ 679 \times 54 = 666\ 666\ 666 \\ 12\ 345\ 679 \times 63 = 777\ 777\ 777 \\ 12\ 345\ 679 \times 72 = 888\ 888\ 888 \\ 12\ 345\ 679 \times 81 = 999\ 999\ 999. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12\ 345\ 679 \times (\mathbf{1} \times 9) = 111\ 111\ 111 \\ 12\ 345\ 679 \times (\mathbf{2} \times 9) = 222\ 222\ 222 \\ 12\ 345\ 679 \times (\mathbf{3} \times 9) = 333\ 333\ 333 \\ \dots\dots\dots \\ 12\ 345\ 679 \times (\mathbf{9} \times 9) = 999\ 999\ 999. \end{array}$$

⁶³ Jasno je, obično se ne piše 0 ispred brojki, ali je ovdje radi uočavanja zakonitosti to učinjeno.

Mersenneovi brojevi⁶⁴ (engl. *Mersenne numbers*) posebni su brojevi s nekim određenim svojstvima. Najjednostavniji su *Mersenneovi jednostavni brojevi* oblika $N_M = 2^n - 1$, gdje je $n > 1$ i *jednostavan broj*, dakle 2, 3, 5, 7, 11 itd. Prvi su Mersenneovi jednostavni brojevi N_M :

n	2	3	5	7	11	...
N_M	3	7	31	127	2 047	...

Dosad je poznato pedesetak takvih brojeva, a najveći pronađen do 2013. godine piše se s gotovo 17,5 milijuna brojki!

6.2. Iznimni brojevi

Iznimni brojevi su brojevi kojima su od pamtivijeka osim matematičkih pridavana i određena nematematička i neračunska obilježja, koja mogu biti različita od matematičkih svojstava. Tako je, na primjer, broj 6 u matematičkom smislu savršen, a u nematematičkom smislu nesavršen broj!

Jedan je broj samosvojnosti, iznimnosti i isključivosti. Osnovna je postavka jednobožačkih religija (*Samo je jedan Bog*), mnogih filozofskih postavki (*Samo je jedna istina*) i matematičkih iskaza (*jedan i samo jedan*), totalitarnih režima (*jedan narod, jedno carstvo, jedan vođa, jedna vjera ili ideologija*), sve do poezije (*Samo jednom se ljubi*) i sportskih natjecanja (*u Alki je samo jedan slavodobitnik*) itd. U antičkoj je filozofiji jedan smatran *počelom*, a ne brojem. (→ 2.4.3. *Brojevni skupovi*)

Dva je broj mnogih dvojnosti, kao što su pojavnost čovjeka i mnogih drugih živih bića (muško – žensko, zdravlje – bolest, život – smrt), uparene sastavnice (plesni par, ljubavni par, bračni par, par u mnogim sportskim igrama itd.), mnogi organi ili dijelovi ljudskog odnosno životinjskog tijela (udovi, oči, uši, bubrezi itd.), filozofska načela (dobro – zlo, jing – jang⁶⁵, istina – neistina, pravedno – nepravedno, prošlost – buduć-

⁶⁴ Marin Mersenne, Marin Mersennus ili Père Mersenne (1588. – 1648.), francuski teolog, filozof i matematičar, istraživao u području teorije glazbe.

⁶⁵ *Jing* i *jang*, osnovni pojmovi kineske filozofije, proizašli iz načela dvojnosti mnogih pojava u prirodi.

nost, sreća – nesreća itd.), matematičke i fizikalne pojavnosti (svjetlo – tama, plus – minus, da – ne, desno – lijevo, sjever – jug itd.), kao i mnogih drugih dvojnosti.

Tri je broj punine, cjelovitosti, zaokruženosti, savršenstva, religijski je to *božanski broj* (u kršćanstvu to je broj božanskih osoba u jednom Bogu (*Presveto Trojstvo*)), čest je u postupcima i izrekama: “treća – sreća”, “treći put i Bog pomaže”, “trostruka prisega”, u raznim natjecanjima nagrađuju se *tri prva mjesta*, potom se primjenjuje u *grboslovlju* (heraldici) i *zastavoslovlju* ili *stjegoslovlju* (veksilologiji) gdje se na jednom elementu (grbu, zastavi) često rabe *tri boje* itd.

Četiri je broj stabilnosti, ravnoteže, pa po tome i broj svijeta. Obzor je podijeljen u četiri strane svijeta, zamišljano je svojedobno kako se Zemlja oslanja na četiri nosača (stoga je smatran *brojem Zemlje*), mnogi se sisavci oslanjaju na četiri noge, zgrade se većinom oslanjaju na četiri ugla, namještaj se većinom oslanja na četiri potpornja, većina vozila ima po četiri kotača, broj stranica knjige treba biti djeljiv s 4 itd.

Pet je broj prstiju na rukama i nogama, nema neka iznimna nematematička značenja, ali je česta osnova usporedbe brojenjem: “može se nabrojiti na prste jedne ruke” ili je vrhunac stupnjevanja i ocjenjivanja: “to je za pet” i sl.

Gesta “Daj mi pet!”, koja se kao znak čestitanja ili podrške, a sve više i pozdrava među mladima, proširila iz sportskih krugova SAD-a (engl. *high five* ili *give me five*) po cijelom svijetu, nema nikakvo brojčano značenje, nego označuje šake (pet prstiju) kojima se pljeskaju sugovornici!

Šest je u nematematičkom značenju dvostruko nesavršen broj, jer je to za jedan umanjen broj savršenstva *sedam* ($6 = 7 - 1$), te je samo polovina broja savršenstva *dvanaest* ($6 = 12/2$). Stoga je to broj pridružen *čovjeku* kao nesavršenom biću, jer koliko god se puta ponavlja (6, 6, 6; ili 666; ili 6 i 6 i 6), ostaje *šest* i ne postiže savršeni broj *sedam*. (→ 6.4.1. *Broj Zvijeri*)

Sedam je broj savršenstva, ukupnosti i cjelovitosti, izniman je broj jer nema cjelobrojnog djelitelja većega od 1, zbroj je božanskog i

zemaljskog ($7 = 3 + 4$), pa je imao značenje *svetog broja*. Broj je krakova židovskog svijećnjaka *menore*, sva su *humanistička znanja* još u srednjem vijeku bila razvrstana i smještena u *sedam slobodnih umijeća* (lat. *septem artes liberales*; gramatika, retorika, logika, aritmetika, geometrija, astronomija i glazba), a mnoge su stvari okupljene u skupinama po sedam, na primjer, *sedam dana u tjednu*, *sedam svjetskih čuda*, *sedam patuljaka* i dr.⁶⁶

Kao redni broj *sedam* se rabi u složenici *sedmi dan*, koji je prema Bibliji dan počinka nakon stvaranja svijeta, po čemu je nastao sedmodnevni *tjedan* kao umjetna sastavnica kalendara, u glazbenoj ljestvici je sedam tonova. Ponavljanje broja *sedam* je znak beskrajnosti (Isus odgovara koliko puta treba oprostiti: "Ne kažem ti do sedam puta, nego do sedamdeset i sedam puta"⁶⁷). U Ivanovu je *Otkrivenju*⁶⁸ znakovito po *sedam pečata* (znakova posjedovanja), *sedam truba*, *sedam svijećnjaka*, *sedam crkava*, *sedam posljednjih zala*, *sedam zvijezda*, *sedam zuba*, *sedam Duhova božjih* i dr., sve kao znak savršenstva, ukupnosti i cjelovitosti. Polovina broja sedam (tj. $3,5 = 7/2$) smatrana je znakom ograničenosti.

Osam je broj dovršenosti ($8 = 7 + 1$) jer je broju cjelovitosti 7 dodan broj isključivosti 1, stoga je osam broj *vječnog blaženstva*.

Oktava ili *osmina* (prema lat. *octo*: osam) skup je od osam elemenata pa se mnoge stvari razvrstavaju u oktave: glazbeni tonovi, područja frekvencija i dr.

Deset je broj uređenosti, zbroj je savršenstva i punine ($7 + 3 = 10$). U Bibliji je *Deset Božjih zapovjedi*, a mnoge se stvari razvrstavaju u desetine: vojnici, radnici, roba u paketima i sl.

Dekada ili *desetina* (prema lat. *decem*: deset) skup je od deset elemenata, pa se mnoge stvari razvrstavaju u dekade: kalendarski dani, područja frekvencija i dr.

⁶⁶ Naziv *sedma sila* nema veze sa značenjem broja. Prvotno je Napoleon Bonaparte *petom europskom silom* nazvao novinstvo kao važan društveni čimbenik, nakon četiri europske snažne zemlje (Francuske, Velike Britanije, Austrije i Rusije). Krajem 19. stoljeća, kad je u Europi bilo šest snažnih zemalja (nastale su Njemačka i Italija), novinstvo je nazvano *sedmom europskom silom*, naziv koji je danas u značenju *javnih sredstava priopćavanja*.

⁶⁷ Matej, 18, 22. [Biblija] – Ovdje *sedamdeset* i *sedam* ne znači određeni broj, nego ponavljanje broja sedam (7 i 7), tj. *bez kraja*.

⁶⁸ Ivanovo *Otkrivenje* ili *Apokalipsa* (grč. *Ἀποκάλυψις*, *Apokálipsis*: otkrivanje, podizanje vela) obiluje znakovitim brojevima. [Biblija]

Decimalni se sustav, iako nam danas zbog $5 + 5$ prstiju izgleda prirodnim, naveliko rabi tek nakon uvođenja Metarskog sustava mjer-nih jedinica i njihovih decimalnih višekratnika i nižekratnika u 19. stoljeću.

Dvanaest je poseban broj *savršenstva* jer je umnožak božanskog i zemaljskog broja (tj. $12 = 3 \times 4$). Ima niz višekratnika, pa je prikladan za računanje, stoga je osnova dvanaestnog brojevnog sustava ($\rightarrow$ 2.4. *Brojevni sustavi*). Često je rabljen još od starog vijeka kao znak cjelovitosti i punine, u astronomiji i astrologiji broj je zviježđa Zodijaka⁶⁹, broj je mjeseci u godini, broj je plemena Izabranog naroda, a čest je broj u religijskim tekstovima, broj je Isusovih apostola, broj Crkve. Dvostruki broj ($2 \times 12 = 24$) znak je punine savršenstva, a kvadrat ($12^2 = 144$) znak je množine i mnoštva⁷⁰. U Ivanovu su *Otkrivenju* znakovito 24 prijestolja i 24 starca kao znak punine, te na više mjesta 144 tisuće osoba kao znak nepreglednog mnoštva.

Trinaest je broj poremećaja savršenstva ($13 = 12 + 1$), stoga se od davnina smatra *nesretnim brojem*. Na *Posljednjoj večeri* nazočni su bili Isus i dvanaest apostola pa se Juda prikazuje kao trinaesti. I danas ljudi izbjegavaju broj trinaest i kao obični i kao redni broj. Nastojalo ga se i nastoji izbjeći kao broj kuće, broj sobe, broj kata, broj kabine na brodu, broj reda ili mjesta u zrakoplovu, broj vojne postrojbe i dr.⁷¹

Stotina osim brojčane vrijednosti znači i opisno *mnogo*, što se često i razgovorno rabi. Stoga se oveća vojna postrojba, koja ne mora imati upravo stotinu vojnika, naziva *satnijom*⁷² (prema stsl. *sъto*: sto; dvoji-na *sъta*: stotina; lat. *centuria*), a njezin zapovjednik *satnikom*⁷³ (stsl. *сѣтъникъ*), *stotnikom* ili *centurijonom* (lat. *centurio*).

⁶⁹ Sadrži dvanaest klasičnih (horoskopskih) zviježđa, kojima se obično dodaje i trinaesto – *Zmijonosac*.

⁷⁰ Zanimljivo je da Stube Bartola Felbingera u Zagrebu, koje vode od Tkalčičeve do Radićeve ulice, imaju 142 drvene i 2 betonske, ukupno 144 stube! Ne zna se je li to namjerno ili slučajno.

⁷¹ Na primjer, među trkaćim automobilima nema nikad broja 13, a u Italiji ni broja 17 (izjava u filmu Claudea Leloucha *Un homme et une femme* (1966.), hrvatski prijevod *Jedan muškarac i jedna žena*).

⁷² *Satnija* samo zvukovno podsjeća na riječ *sat*, s kojim nema nikakve veze.

⁷³ Časnički čin u Oružanim snagama Republike Hrvatske.

Hebrejska riječ *'elef* znači *tisuća*, ali i *rod* ili *klan*, a riječ *'aluf* znači rodovskog *čelnika*, *vođu* vojne skupine (*tisućnika*), ali i potpuno *opremljenog vojnika*. Kako su se prvotno zapisivali samo suglasnici, obje su riječi zapisivane kao *lf*. Nije teško razumjeti kako je pri prepisivanju i čitanju dolazilo do pogrešnog razumijevanja i miješanja značenja.

Tako se u Davidovu popisu stanovništva nalaze podatci o broju Izraelaca, koji su prvotno vjerojatno glasili *80 lf* (tj. tisuća) ljudi i *30 lf* (tj. čelnika). U sljedećim se prepisivanjima “iz promidžbenih razloga” povećalo te brojeve deset puta, a potom su zbrajana oba podatka, razumijevajući da *lf* uvijek znači tisuću. Tako je nastao podatak o 800 tisuća i 300 tisuća, dakle ukupno 1 100 000 “ljudi vičnih maču” (1. Ljet., 21, 5), dok je na drugom mjestu (2. Sam., 24, 9) taj podatak “samo” 800 tisuća “ratnika vičnih maču” jer je podatak o 300 tisuća pripisan Judejcima. Tolika je brojnost za to doba i na tom zemljištu teško vjerojatna! [Alexander, 1989]

6.4. Zagonetni brojevi

Mnogo je brojeva i brojčanih podataka koji su od pamtivijeka zagonetni i koji i danas zaokupljaju i potiču ljude na traženja njihovih “skrivenih značenja”.

6.4.1. Broj Zvijeri

Gotovo dva tisućljeća ljude zaokuplja *broj Zvijeri* (engl. *Number of the Beast*) u Ivanovu *Otkrivenju*, izrečen zagonetkom: “Tko je prodoran neka odgoneta značenje broja Zvijeri. To je uistinu broj čovjeka: njegov je broj šesto šezdeset i šest.”⁷⁴ Teološka tumačenja vode na to da Zvijer predočuje Antikrista.

U prvim prijepisima na grčkom taj je broj napisan grčkim slovima brojka $\chi\zeta''$ (koje znače $600 + 60 + 6 = 666$), ili grčkim nazivima $\text{ἑξακόσιοι ἑξήκοντα ἕξ}$, *hexakósioi hexēkonta héx*, tj. šest stotina šezdeset i šest (u nekim prijepisima iz prvih stoljeća nalazi se i inačica tog broja kao 616). Iako se broj 666 nalazi i na drugim mjestima u *Bibliji*, na primjer o blagu kralja Salamona⁷⁵, odgonetavanja značenja tog broja, ni

⁷⁴ *Otkrivenje*, 13. 17-18 [Biblija].

⁷⁵ *Prva knjiga o kraljevima*, 10-14, i *Druga knjiga ljetopisa*, 9-13 [Biblija]

teološka, ni matematička, ni numerološka, ni ina, do danas nisu dala zadovoljavajuće rezultate.⁷⁶

Decimalni brojevni sustav i pisanje brojeva arapskim brojkama, kako mi danas postupamo, došli su u uporabu tek **više od tisućljeća** nakon što je *Otkrivenje* napisano. Stoga promatranje i odgonetavanje tog broja napisanog na današnji način arapskim brojkama 666 (ili inačicom 616) nema osnove, a tek nema osnove njihovo okretanje (999). Neosnovani su i pokušaji gematrijskog tumačenja, koji vode na *zloduhe*, kakvim se smatralo progonitelje kršćana, kao što je bio rimski car Neron (njegovo ime na aramejskom, kojim se u to doba govorilo u Palestini, slovnim brojkama upravo daje 666, a na hebrejskom se *car Neron* piše slovima čiji je zbroj 666), a slično je s Atilom, Napoleonom ili Hitlerom. (→ 6.7. *Neobične primjene brojeva*)

Možda je najbolje tumačenje *broja Zvijeri* da je to izriječ u kojem se tri puta ponavlja broj šest: ne kao *šest stotina šezdeset i šest*, nego **tri puta po šest** (stoga bi ga valjalo čitati: **6 i 6 i 6**), tj. kao *tri* (tj. punina) puta po *šest* (tj. nesavršenost), dakle *punina nesavršenosti* ili *potpuna bespomoćnost* Zvijeri, tj. Antikrista. [Biblija]

6.5. Magične sheme brojeva

Prirodni brojevi napisani brojkama ili zorno predloženi nekim sastavnicama (npr. točkicama, kuglama, kuglastim plodovima i sl.) koji se mogu složiti u mreže određenih geometrijskih plošnih likova ili prostornih oblikovina (figure) ponekad se nazivaju *figurativnim brojevima*. Od takvih slogova najpoznatiji su *mnogokutni brojevi*, *Pascalov trokut* i *magični brojčani kvadrati*. Nekad se u sve te brojeve uključuje i *ništa* (0).

6.5.1. Mnogokutni brojevi

Još se od antike brojeve zorno slagalo u neke mnogokutne sheme, pa se brojevi ili brojevi sastavnica od kojih se mogu izgrađivati neki mnogokuti i nazivaju *mnogokutnim brojevima*. Takvi se slogovi brojeva zbog svojih često iznimnih svojstava nazivaju i *magičnim slogovima*.

⁷⁶O *broju Zvijeri* raspravljao je i Mihalj Šilobod u svojoj *Kabali* iz 1768. godine (v. 89. podrubnu bilješku).

- brojevi n -tog retka, shvaćeni kao brojke novog broja, daju $(n - 1)$ potenciju broja 11:

u prvom retku: $1 = 11^0$

u drugom retku: 1 i 1 daju broj $11 = 11^1$

u trećem retku: 1 i 2 i 1 daju broj $121 = 11^2$

u četvrtom retku: 1 i 3 i 3 i 1 daju broj $1331 = 11^3$

u petom retku: 1 i 4 i 6 i 4 i 1 daju broj $14\ 641 = 11^4$
itd.

Poslije šestog retka, kad se pojavljuju brojevi napisani s više brojki, valja te brojeve nešto drugačije čitati, pa opet vrijedi jednako pravilo.

Pascalov trokut sadrži tzv. *binomne koeficijente*⁷⁸, prirodne brojeve ovisne o dvama parametrima: prirodnom broju n i prirodnom broju k .

Središnji brojevi po visini Pascalova trokuta u svakom su drugom retku redom 1, 2, 6, 20 itd. Ako se središnji brojevi uzastopno podijele prirodnim brojevima 1, 2, 3, 4 itd., nastaje niz brojeva 1, 1, 2, 5 itd. Ti se brojevi nazivaju *Catalanovim brojevima* (engl. *Catalan's numbers*)⁷⁹, a mogu se povezati s binomnim koeficijentima. Imaju mnoge zanimljive primjene, na primjer, s pomoću njih može se izračunati broj trokuta na koji se može podijeliti pravilan mnogokut i riješiti neki drugi matematički problemi.

Zbrajanjem brojeva u dijagonali Pascalova trokuta nastaju brojevi koji se uklapaju u $\rightarrow$ *Fibonaccijev niz*.

Određenim se konstrukcijama (tzv. *Sierpinskijev trokut* ili *trokut Sierpinskog*; engl. *Sierpinski triangle*⁸⁰) u Pascalovu trokutu mogu izdvojiti parni i neparni brojevi.

Navedena i još neka druga svojstva čine Pascalov trokut uistinu *magičnim trokutom*.

⁷⁸ Binomni koeficijenti, brojevi koji se pojavljuju uz potencije od x kad se izračuna potencija binoma $(1 + x)^n$, gdje je n prirodni broj. Označuju se $\binom{n}{k}$, (čita se “*en* povrh *ka*”), gdje je k pripadna potencija od x , tj. $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Imaju mnoga za matematiku zanimljiva svojstva, ponajprije u kombinatorici. Prvi ih je definirao B. Pascal 1665. godine, iako su neke primjene matematičarima bile poznate još prije.

⁷⁹ Eugène Charles Catalan (1814. – 1894.), francusko-belgijski matematičar, bavio se teorijom brojeva, kombinatorikom, verižnim razlomcima i dr.

⁸⁰ Wacław Franciszek Sierpiński (1882. – 1969.), poljski matematičar, bavio se teorijom skupova, teorijom brojeva, topologijom i dr.

6.5.3. Magični brojčani kvadrati

Magični brojčani kvadrati, kraće *magični kvadrati* (engl. *magic square*)⁸¹ kvadratične su sheme brojeva koji u redcima, stupcima, dijagonalama ili pojedinim dijelovima zadovoljavaju određene matematičke uvjete. Slaganje magičnih kvadrata od davnina je služilo za igranje brojevima, ali i za magiju, gatanje i proricanje.

Magični je kvadrat shema prirodnih brojeva u kojoj su zbrojevi brojeva ponajprije u pojedinim redcima, stupcima i dijagonalama, a kod nekih i u drugim dijelovima sheme, uvijek stalni i jednaki tzv. *magičnoj konstanti*:

$$M = \frac{1}{2}n(n^2 + 1) = \frac{n^3 + n}{2},$$

gdje je n broj brojeva (tj. broj polja) u stranici magičnog kvadrata, koji se naziva *redom* ili *dimenzijom magičnog kvadrata*. Uvjet je da je $n > 2$, jer bi broj 0 i broj 1 dali matematički besmislena rješenja, a za broj 2 ne ispunjava osnovni uvjet magičnosti. [Debelec, Gračan, 2004]

Za niz vrijednosti n cjelobrojne su vrijednosti magične konstante M :

n	3	4	5	6	...
M	15	34	65	111	...

Svojstva magičnih kvadrata. Magični kvadrati imaju niz posebnih svojstava: simetričnost, komplementarnost, ultramagičnost, savršenost i dr. Spomenut će se samo glavna.

Normalni ili *klasični magični kvadrat* sadrži prirodne brojeve od 1 do n^2 .

Opći magični kvadrat sadrži bilo koje prirodne brojeve, a njihova se magična konstanta računa nešto drugačije.

Simetričan magični kvadrat ima središnje simetrične elemente, a zbroj simetričnog para takvih elemenata je $n^2 + 1$. Pritom je središte simetrije za kvadrata s parnim redom središnje polje, a za kvadrata s neparnim redom središnja točka.

Komplement magičnog kvadrata ima članove koji nastaju oduzimanjem broja u pojedinom polju od $n^2 + 1$.

⁸¹ Postoje i *slovni magični kvadrati*, ali nisu predmet ovog prikaza.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Lo-Shu magični kvadrat napisan arapskim brojkama

Iz tog kvadrata slijedi *osam jednadžbi* (za tri retka, tri stupca i dvije dijagonale):

$$4 + 9 + 2 = 15$$

$$3 + 5 + 7 = 15$$

$$8 + 1 + 6 = 15$$

$$4 + 3 + 8 = 15$$

$$9 + 5 + 1 = 15$$

$$2 + 7 + 6 = 15$$

$$4 + 5 + 6 = 15$$

$$8 + 5 + 2 = 15$$

Taj je magični kvadrat u astrologiji pridružen *Saturnu* i *Kronosu*. Smatra se kako ga je J. W. von Goethe⁸² u svojem znamenitom *Faustu* uzeo kao osnovu vješticina čaranja⁸³:

Drži u glavi!

Od jedan deset pravi,

a dva izostavi,

izjednači tri,

i bogat si ti.

Četiri gubi!

A od pet i šest –

Čuj vještice vijest! –

nek' sedam, osam stvori se,

i svršeno je sve:

devet je jedan,

deset nijedan.

Vještčin to je jedanput jedan!

⁸² Johann Wolfgang von Goethe (1749. – 1832.), njemački mislilac i književnik, predstavnik klasičnog romantizma.

⁸³ *Vještčin jedanput jedan* (njem. *das Hexeneinmaleins*), stihovi 2540-2552. (Prema: Johann Wolfgang Goethe, *Faust*. Prijevod: Tito Strozzi, Zora – Matica hrvatska, Zagreb 1970.)

Sastavljanje magičnog kvadrata po Goetheovu napatku nije jednostavno, ali mnogi su se matematičari trudili da ga odgonetnu. Matematička tumačenja mogu se naći u stručnoj literaturi i na internetu.

6.5.5. Dürerov magični kvadrat

Od mnogih magičnih kvadrata s po četiri broja u redcima i stupcima (tzv. *brojčani kvadrat* 4×4 ili *četverobrojčani kvadrat*), višestruko je zanimljiv onaj koji je A. Dürer⁸⁴ prikazao 1514. godine na znamenitom bakrorezu *Melankolija I.*, alegorijskoj slici matematičko-tehničkih istraživanja.



Dürerov autoportret (oko 1500. god.)

⁸⁴Albrecht Dürer (1471. – 1528.), njemački renesansni slikar, matematičar i teoretičar umjetnosti, izrađivao je znamenite gravure, kao što je dojmlija predodžba jahača Apokalipse te trojac tzv. *majstorskih gravura*, među kojima je bakrorez *Melankolija I.* pun simbola, alegorija, pa i nepoznanica. U nazivu je Dürer stavio broj I. jer je mislio na prvu od triju vrsta melankolija, koja se tad pridruživala umjetnicima. U tom je “duhovnom autoportretu” očitovao i svoje matematičko znanje, prikazom niza geometrijskih likova i magičnog brojčanog kvadrata koji je prikazan vjerojatno stoga što se smatralo da kao talisman pomaže poboljšanju raspoloženja. Dürerova *Melankolija I.* već je pet stoljeća predmet istraživanja, kritičkih rasprava i mnogih pisanih dijela. Prvotni su otisci *Melankolije I.* pohranjeni u nekoliko svjetskih muzeja, u Hrvatskoj u Valvasorovoj grafičkoj zbirci Zagrebačke nadbiskupije (u sastavu Metropolitanske knjižnice, koju je od Johanna Weickhardta Valvasora 1690. godine kupio biskup Aleksandar Mikulić), potom u zbirci Cabinet des Estampes et des Dessins (Kabinet grafike) u Strasbourgu i dr. Dürer je istraživao primjenu geometrije u likovnim umjetnostima, osobito u razmjerima ljudskog tijela i u perspektivi, o čemu je objavio nekoliko knjiga. Bavio se i arhitekturom, a po njegovim je zamislima izgrađena 1563. – 1575. dojmlija tvrđava *Munot* u središtu švicarskog Schaffhausena.

Dürer je taj magični kvadrat složio izvorno, vjerojatno pod utjecajem Heinricha Corneliusa Agrippe von Nettesheima (1486. – 1535.), njemačkog filozofa, teologa, okultista, alkemičara i astrologa, koji je u rukopisu *De occulta Philosophia* pridružio magični kvadrat s jednim poljem ($n = 1$) i s upisanim brojem 1, kojemu je i magična konstanta $M = 1$, jedinom Bogu. Nadalje, svakom je tad poznatom planetu (u što su bili uključeni Sunce i Mjesec) pridružio po jedan magični kvadrat s drugačijim brojem polja.

Dürer je četverobrojčani magični kvadrat, koji je bio pridružen planetu Jupiteru, preuredio, čuvajući njegova “magična svojstva” tako da u donjem retku sadrži godinu graviranja.



Dürerova *Melankolija I.* s magičnim kvadratom na zidu tornja u gornjem desnom kutu slike (izmjere: 186 mm × 260 mm). Izvor: *Metropolitanska knjižnica Zagrebačke nadbiskupije, Valvazorova grafička zbirka, XV, 47*

Tako je nastao četverobrojčani magični kvadrat, s brojevima od 1 do 16, magičnom konstantom $M = 34$ i zbrojem svih brojeva 136, koji je ucrtao

u svoju *Melankoliju I.*, pa se često i naziva *Dürerovim magičnim kvadratom*. Taj je magični kvadrat povijesno najpoznatiji. Ima brojna matematička svojstva, a pridružuju mu se mnoga nematematička, pa i mistična svojstva.

Stoga će ovdje biti prikazan Dürerov magični kvadrat sa svojim matematičkim i nematematičkim, pa i dvojbenim svojstvima, kao primjer kako se razmatraju raznorodna svojstva magičnih shema brojeva.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Dürerov magični kvadrat s istaknutim brojevima koji daju godinu nastanka *Melankolije I.*

Matematička svojstva Dürerova magičnog kvadrata. Osim što su zbrojevi brojeva u redcima, stupcima i dijagonalama jednaki magičnoj konstanti $M = 34$, tj. daju 10 jednakžbi, unutar kvadrata mogu se uočiti *čtvorke* kojih zbroj elemenata također daje magičnu konstantu, na primjer četvorka vršnih polja, tzv. *vanjski kvadrat*, $16 + 13 + 4 + 1 = 34$, potom *središnji kvadrat* $10 + 11 + 6 + 7 = 34$ itd. Ukupno se može unutar kvadrata uočiti 30 takvih četvorki koje daju 30 jednakžbi (v. sljedeće sheme).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Vanjski i središnji kvadrat (lijevo) i unutarnja četiri kvadrata (desno; istaknut je samo prvi unutarnji kvadrat) Dürerova magičnog kvadrata (ukupno šest četvorki)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Križne brojke u Dürerovu magičnom kvadratu (dvije od četiri moguće četvorke)

Iz Dürerova magičnog kvadrata slijedi 40 jednakžbi koje daju broj $M = 34$:

- 4 jednakžbe redaka ($16 + 3 + 2 + 13 = 34$ itd.),
- 4 jednakžbe stupaca ($16 + 5 + 9 + 4 = 34$ itd.),
- 2 jednakžbe dijagonala ($4 + 6 + 11 + 13 = 34$ itd.),
- 6 jednakžbi vanjskog i središnjeg kvadrata te unutarnjih kvadrata ($16 + 13 + 4 + 1 = 34$ itd.),
- 4 jednakžbe zakrenutih unutarnjih kvadrata i rombova oko dijagonale ($5 + 2 + 15 + 12 = 34$ itd.),
- 2 jednakžbe iz zakrenutih pravokutnika (*konjićev skok*) ($9 + 2 + 8 + 15 = 34$ i $3 + 5 + 12 + 14 = 34$),
- 2 jednakžbe simetričnih parova brojeva ($3 + 2 + 15 + 14 = 34$ i $5 + 8 + 9 + 12 = 34$),
- 8 jednakžbi iz asimetričnih parova ($16 + 3 + 14 + 1 = 34$, $2 + 13 + 4 + 15 = 34$ itd.),
- 4 jednakžbe iz trobrojčanih unutarnjih kvadrata ($16 + 2 + 9 + 7 = 34$ itd.),
- 4 jednakžbe križnih brojeva ($3 + 5 + 11 + 15 = 34$ itd.).

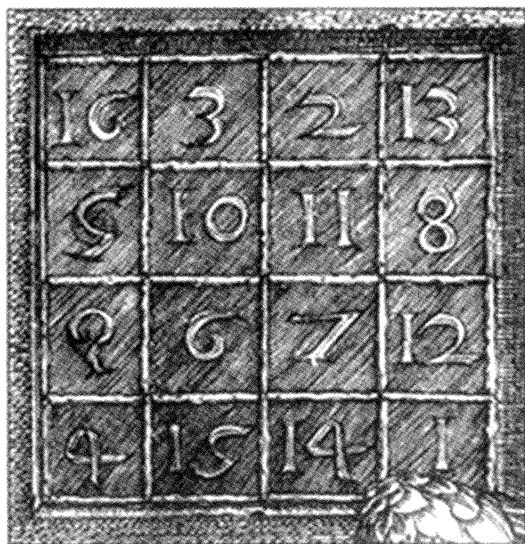
Nadalje, mogu se složiti parovi simetričnih brojeva kojih je zbroj jednak polovini magične konstante, dakle 17.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Parovi nekih simetričnih brojeva u Dürerovu magičnom kvadratu

Moguće je postaviti osam “polovičnih jednakžbi” zbroja po dva simetrična broja (iako su one sadržane u prethodnim jednakžbama), koji je uvijek $M/2 = 17$. To su $16 + 1 = 17$, $3 + 14 = 17$ itd.



Dürerov magični kvadrat u *Melankoliji I*. Brojke 5 i 9 neobično su napisane, a anđelovo krilo djelomično pokriva donje desno polje pa je brojka 1 malo podignuta

Dürerov magični kvadrat daje dakle 40 jednakžbi i 8 polovičnih jednakžbi, a možda su još neke skrivene. To obilje jednakžbi svakako potvrđuje njegovu *magičnost*.

Pisanje brojki u Dürerovu magičnom kvadratu. Nekoliko je brojki u magičnom kvadratu *Melankolije I*. neobično napisano. Brojka **5** na-

Tom je promjenom postignuto da je magična konstanta $M = 33$ jednaka broju godina Isusova ovozemaljskog života. U usporedbi s Dürerovim magičnim kvadratom, promjenom su neka magična svojstva očuvana u potpunosti, neka djelomično, a neka nisu očuvana.

U potpunosti su očuvani:

- zbrojevi u redcima ($1 + 14 + 14 + 4 = 33$ itd.), stupcima ($1 + 11 + 8 + 13 = 33$ itd.) i dijagonalama ($1 + 7 + 10 + 15 = 33$ itd.),
- četvorke vanjskog ($1 + 4 + 13 + 15 = 33$) i središnjeg kvadrata ($7 + 6 + 10 + 10 = 33$),
- četvorke četiriju unutarnjih kvadrata ($1 + 14 + 1 + 7 = 33$ itd.),
- zakrenuti pravokutnici ili *konjičev skok* ($14 + 9 + 8 + 2 = 33$, $11 + 14 + 3 + 5 = 33$),
- kvadrati simetričnih parova brojeva ($14 + 14 + 2 + 3 = 33$, $11 + 8 + 9 + 5 = 33$),
- trobrojčani kvadrati ($1 + 14 + 8 + 10 = 33$ itd.).

Djelomično su očuvani:

- kvadrati asimetričnih parova brojeva ($1 + 14 + 3 + 15 = 33$, ali $14 + 6 + 10 + 2 = 32 \neq 33$ itd.),
- križne brojke ($14 + 11 + 6 + 2 = 33$, ali $14 + 10 + 5 + 3 = 32 \neq 33$ itd.).

Nisu očuvani:

- zakrenuti unutarnji kvadrati ($14 + 11 + 5 + 2 = 32 \neq 33$, $14 + 9 + 8 + 3 = 34 \neq 33$),
- rombovi oko dijagonala ($1 + 10 + 6 + 15 = 32 \neq 33$, $4 + 7 + 10 + 13 = 34 \neq 33$),
- parovi simetričnih brojeva ($1 + 15 = 16 \neq 0,5 \times 33$, $14 + 3 = 17 \neq 0,5 \times 33$ itd.).

Kao što se vidi, promijenjeni je magični kvadrat u kojem se donekle odstupilo od pravila tvorbe i nadalje magičan, ali s umanjenim svojstvima prema polaznom magičnom kvadratu.

6.6. Nizovi brojeva

6.6.1. Nizovi i redovi brojeva

Brojevni niz, *niz brojeva* ili *sljeda* (engl. *sequence*) brojeva uređeni je skup realnih brojeva koji su po nekom pravilu pridruženi prirodnim brojevima 1, 2, 3 itd.

Brojevni red, *red brojeva* (engl. *series*) pridružen je nizu brojeva, s time da su članovi niza povezani operacijom zbrajanja. Izvršene operacije od početnog do n -tog člana čine parcijalni zbroj od n članova.

U klasičnoj se matematici najviše primjenjuju:

– *Niz prirodnih brojeva* $\mathbb{N}$, tj.: 1, 2, 3,...; njegovi su podnizovi *niz parnih* (2, 4, 6,...) i *niz neparnih* (1, 3, 5,...) prirodnih brojeva.

– *Aritmetički niz*, niz kojem se susjedni članovi a_n i a_{n+1} razlikuju za stalnu razliku d , tj.: $a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \dots, a_n = a_1 + (n - 1)d, \dots$. Niz prirodnih brojeva poseban je aritmetički niz s prvim članom $a_1 = 1$ i razlikom $d = 1$. Svaki član aritmetičkog niza koji ima prethodnika i sljednika aritmetička je sredina tih članova, tj. $a_n = (a_{n-1} + a_{n+1})/2$.

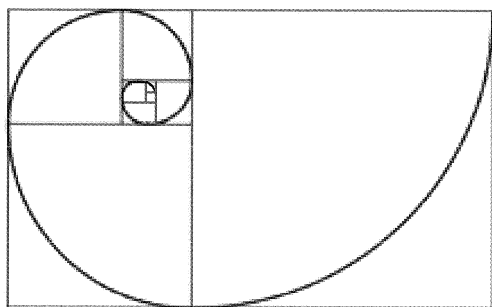
– *Geometrijski niz*, niz kojemu se susjedni članovi a_n i a_{n+1} razlikuju za stalni faktor q , tj.: $a_1, a_2 = q \cdot a_1, a_3 = q \cdot a_2 = q^2 \cdot a_1, \dots, a_n = q^{n-1} \cdot a_1, \dots$. Svaki član geometrijskog niza koji ima oba susjeda geometrijska je sredina tih članova, tj. $a_n = (a_{n-1} \cdot a_{n+1})^{1/2}$.

– *Harmonijski niz*, niz recipročnih vrijednosti (lat. *recipere*: vratiti) prirodnih brojeva, tj.: $1/1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$. Svaki član harmonijskog niza koji ima oba susjeda harmonijska je sredina tih članova, tj. $a_n = 2 / \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right)$.

6.6.2. Fibonaccijev niz

Srednjovjekovni je talijanski matematičar Fibonacci⁸⁶ u svojoj knjizi *Liber Abaci* iz 1202. godine preporučio uporabu sustava *modus Indorum*: postupka Indijaca, tj. položajnog sustava brojeva te arapske brojke, uključujući i ničitsu.

⁸⁶Leonardo Pisano Bogollo (~ 1170. – ~ 1250.), nazivan *Fibonacci* (prema lat. *Fillius Bonacii*: sin Bonacija), talijanski matematičar, smatra se najvećim srednjovjekovnim matematičarem zapadnog svijeta.



Fibonaccijeva ili zlatna spirala, konstruirana od kružnica koje spajaju suprotne vrhove kvadrata na prethodnoj slici

6.7. Neobične primjene brojeva

6.7.1. Poigravanje brojevima

Od pamtivijeka su se poznavatelji nekih svojstava brojeva i postupanja s njima poigrali i tako pokretali zanimljive društvene igre. Pritom se primjenjuju prikrivene doskočice i trikovi, većinom ispravni, ali sudionicima igara obično nepoznati, kao što su skriveni brojitelji ili djelitelji, neke “nedopuštene” računske operacije, kao što je množenje ili dijeljenje s ništa i dr. Tako su, na primjer, tijekom 17. i 18. stoljeća u zabavama europskog plemstva, osobito u pariškim salonima, bili cijenjeni matematičari koji su zabavljali društvo poigravanjem s brojevima, magičnim mnogokutima i drugim računskim dosjetkama.

Gotovo je neizmjereno mnogo takvih dosjetki i zagonetki koje se mogu naći razasute u popularnoj matematičkoj literaturi. Na ovom će se mjestu pokazati samo jedan jednostavan primjer računanja sa “skrivenim brojevima” koji voditelju igre nisu poznati, a ipak on unaprijed pretkazuje rezultate. Predviđanje rezultata, jasno, kod suigrača izaziva nevjericu!

Od suigrača se zatraži da skriveno napiše bilo koji broj s trima brojkama (od 0 do 9). Pretkaže mu se kako će, bez obzira na to koji je broj zamislio, u tri koraka kao rezultat dobiti *savršenstvo*:

- prvi je korak da skrivenom zamišljenom broju dopiše taj isti broj,
- drugi je korak da se nastali broj sa šest brojki podijeli “čarobnim brojem” **143**,
- treći je korak da se rezultat podijeli početno zamišljenim brojem s trima brojkama.

Rezultat će uvijek biti broj 7, dakle broj *savršenstva*! Račun je vrlo jednostavan:

- pomicanje zamišljenog broja za tri mjesta ulijevo jednako je množenju brojem 1000, a upisivanje zamišljenog broja na tri ispražnjena mjesta jednako je množenju brojem 1001; dakle, ako je zamišljen broj s tri brojke *abc*, tako nastaje broj sa šest brojki $abc\ abc = 1001 \times abc$; pritom treba znati da je broj 1001 umnožak dvaju cjelobrojnih čimbenika: $1001 = 7 \times 143$,

- dijeljenje broja $1001 \times abc$ “čarobnim brojem” 143 daje uvijek rezultat $7 \times abc$,

- dijeljenje tog rezultata zamišljenim brojem *abc* uklanja ga iz računanja (što suigrač obično ne uočava), pa je potpuno nevažno koji je to broj bio zamišljen; ostaje samo množitelj 7, dakle broj *savršenstva*!

Jednak postupak sa zamišljenim brojem od četiri brojke *abcd* daje rezultat s najmanje tri značenja: *savršenu puninu*, *pozdrav* i *zbroj arapskih brojki u Dürerovu magičnom kvadratu*! Treće je značenje suigračima obično jako dojmljivo!

Pomicanje zamišljenog broja za četiri mjesta ulijevo odgovara njegovom množenju s 10 000, a dopisivanje zamišljenog broja na četiri ispražnjena mjesta odgovara u konačnici množenju zamišljenog broja brojem 10 001; taj je broj umnožak dvaju cjelobrojnih čimbenika $10\ 001 = 73 \times 137$, “čarobni broj”⁸⁹ je 137, a rezultat je uvijek broj 73.

Taj se rezultat može tumačiti najmanje na tri načina (a ima i neka druga značenja⁹⁰):

1) kao 7 i 3, dakle *savršena punina*;

2) kao *pozdrav* jer je u starom telegrafskom kodu broj 73 bio kratica za *pozdrav*; i danas u cijelom svijetu radioamateri se međusobno pozdravljaju napisanim ili telegrafski “otkucanim” brojem 73 (ili engleski izgovorenim *seventy three*), u značenju *najljepši pozdravi*!;

3) kao zbroj brojki u Dürerovu magičnom kvadratu koji iznosi 73. (→ 6.5.5. *Dürerov magični kvadrat*).

⁸⁹ Zanimljiva je slučajnost da je broj 137 približno recipročna vrijednost vrlo važne prirodne konstante, tzv. *konstante fine strukture* $\alpha \approx 1/137\ 035\ 999 \dots$, koja opisuje međudjelovanje naelektriziranih subatomske čestice i fotona, a određuje finu strukturu u atomskim spektrima. Nobelovac Leon Lederman u knjizi *The God Particle: If the Universe Is the Answer, What Is the Question?* (1993.), hrvatski prijevod *Božja čestica – Ako je Svemir odgovor, što je pitanje?* (2000.), opisao je broj 137 kao vrlo “tajanstven”.

⁹⁰ Vidi: *Wikipedia*.

brojevi, kompleksni

Parovi realnih i imaginarnih brojeva, geometrijska im je predodžba u ravnini.

brojevi, mnogokutni

Brojevi poslagani u sheme kojima su osnove neki mnogokuti.

brojevi, negativni

Zrcalna slika prirodnih brojeva koji omogućuju oduzimanje prirodnih brojeva.

brojevi, neparni

Cijeli brojevi koji nisu cjelobrojno djeljivi brojem 2.

brojevi, obilni

Prirodni brojevi za koje je zbroj njihovih cjelobrojnih djelitelja (osim samog sebe) veći od tog broja.

brojevi, opći

Brojevi koji mogu poprimiti različite vrijednosti, većinom su zapisani slovima.

brojevi, parni

Cijeli brojevi cjelobrojno djeljivi brojem 2.

brojevi, posebni

Brojevi sa stalnim vrijednostima, većinom se zapisuju brojkama.

brojevi, prirodni

Brojevi koji opisuju brojnost bilo kakvih elemenata nekog skupa počevši od jedan.

brojevi, racionalni

Brojevi koji opisuju dijeljenje nekih cjelina.

brojevi, realni

Skup prirodnih, negativnih, racionalnih i iracionalnih brojeva, geometrijska im je predodžba na pravcu.

brojevi, redni

Uređen skup cijelih brojeva poredanih po vrijednostima.

brojevi, rimski

Brojevi napisani rimskim brojkama po određenim pravilima pisanja.

brojevi, transcendentni

Realni brojevi koji nisu algebarski.

brojevi, zagonetni

Brojevi koji sadržavaju neke zagonetke i od davnina zaokupljaju ljude u traženju njihova tumačenja.

brojka, znamenka, cifra

Poseban grafem za zapisivanje brojeva.

brojke, arapske

Posebni grafemi za zapisivanje brojeva; prije devet stoljeća posredovanjem Arapa preneseni su iz Indije u Europu, danas gotovo jedini grafemi za zapisivanje posebnih brojeva.

brojke, rimske

Nekoliko latiničnih slova kojima su jednoznačno pridružene brojčane vrijednosti.

brojke, slovne

Slova nekog alfabeta kojima su pridružene brojčane vrijednosti u prirodnim brojevima.

brojnice→ *nazivi brojeva***brojnost**

Svojstvo nekog skupa da se njegovi elementi mogu brojiti.

cifra→ *brojka***čisla**→ *niske, molitvene***Dürerov magični kvadrat**

Četverobrojan magični kvadrat koji je 1514. godine prikazao renesansni slikar i matematičar Albrecht Dürer u svojoj znamenitoj alegorijskoj gravuri *Melankolija I.*, s mnogim neobičnim matematičkim svojstvima, a pridaju mu se i mnoga nematematička svojstva.

Fibonaccijev niz

Niz brojeva koji su svaki zbroj dvaju prethodnih članova niza stoga pravilo vrijedi tek od trećeg člana; nazvan po srednjovjekovnom talijanskom matematičaru Fibonacciju.

gematrija

Sustav uporabe brojčanih vrijednosti neke riječi ili izreke s osloncem na slovne brojke, prvotno hebrejskog alfabeta.

glifi→ *potezi***kabala**

Mistična židovska tradicija, prerasla je u magiju brojeva i igru proricanja.

kalkulator

Općenito računaljka, posebno naziv za elektronički uređaj s programima za obavljanje niza računskih operacija.

kronogram

Brojčani podatci, osobito o godini, zapisani unutar teksta posebno istaknutim slovima brojkama primijenjenog pisma.

krunice→ *niske, molitvene***kvadrat, magični**

Kvadratična shema u kojoj su poslagani brojevi po određenim pravilima, imaju mnoga neobična matematička svojstva, a pridaju im se i mnoga nematematička svojstva; prema broju brojeva u stupcima i redcima razlikuju se trobrojčani, četverobrojčani i dr. magični kvadrati.

magične sheme brojeva

Sheme u kojima su poslagani brojevi, kojih kombinacije imaju mnoga neobična matematička svojstva, a pridaju im se i mnoga nematematička svojstva.

mišljenje, matematičko

Način uređenog mišljenja o određenim pravilnostima odnosa u svijetu matematičkih elemenata.

nazivi brojeva, brojnice

Riječi nekog jezika jednoznačno pridružene posebnim brojevima.

<i>Hrvatski</i>	<i>Engleski</i>	<i>Mjesta</i>
broj, realni	number, real	2.1.
broj, redni	number, ordinal	2.1.
broj, složen	number, composite	6.1.
broj, transcendentni	number, transcendental	2.1.2.
brojenje	count; counting; numeration	2.2.
brojevi blizanci	primes, twin	6.1.
brojevi, čudesni	numbers, wonderful	6.1.
brojevi, posebni	numbers, special	2.1.
brojevi, rimski	numbers, Roman	4.2.4.
brojevi, savršeni	numbers, perfect	6.1.
brojevi, združeni	numbers, amicable	6.1.
brojevni skup	number set	2.4.3.
brojevni sustav	number system	2.4.
brojevni sustav, položajni	number system, positional	5.2.2.
brojka; znamenka; cifra	figure; numeral; sign, numeral	3.3.
brojke, akrofoničke	numerals, acrophonic	3.2.1.
brojke, arapske	numerals, Arabic	5.
brojke, atičke	numerals, attic	3.2.1.
brojke, Brahmanske	numeral, Brahmi	5.1.1.
brojke, egejske	numerals, Aegean	3.3.4.
brojke, herodijanske	numerals, Herodianic	3.2.1.
brojke, indijsko-arapske	numerals, Hindu-Arabic	5.
brojke, rimske	numerals, Roman; figure, Roman	4.2.3.
Catalanovi brojevi	Catalan's numbers	6.5.2.
cifra → brojka		
číslo → krunica		
element (skupa)	element; member; object	2.1.1.
Fibonaccijev niz	Fibonacci series; Fibonacci numbers; Fibonacci sequence	6.6.2.

<i>Hrvatski</i>	<i>Engleski</i>	<i>Mjesta</i>
kalkulator	calculator	2.2.
kronogram; kronografikon	chronogram	4.2.2.
krunica; rožarij; čislo; patrice; očenaši	rosary	3.1.
kvadrat, magični	square, magic	6.5.3.
logika sudova → prosudbena logika		
logika, matematička	logic, mathematical	2.4.1.
logika, prosudbena; logika sudova	calculus, propositional	2.4.1.
matematika	mathematics, mathematic	2.7.2.
Mersenneovi brojevi	Mersenne numbers	6.1.
milijarda	billion	2.3.
nazivi brojeva	names, number; numerals	2.3.
ništica; nula	zero	5.1.2.
niz, brojevni; slijed	sequence	6.6.1.
nula → ništica		
očenaši → krunica		
omjer, gusti	ratio, abundancy	6.1.
omjer, zlatni → rez, zlatni		
parnost	parity	2.1.2.
Pascalov trokut	Pascal's triangle	6.5.2.
patrice → krunica		
primarni broj → broj, jednostavni		
prim-broj → broj jednostavani		
računanje	calculation; computation	2.7.1.
razlomak	fraction	2.1.2.
red	series	6.6.1.
rez, zlatni; omjer, zlatni	cut, golden; ratio, golden	6.6.2.
rožarij → krunica		
Sierpinskijev trokut	Sierpinski triangle	6.5.2.

<i>English</i>	<i>Croatian</i>	<i>Passages</i>
number one	broj jedan	6.1.
number set	brojevni skup	2.4.3.
number system	brojevni sustav	2.4.
number system, positional	brojevni sustav, položajni	5.2.2.
number, abundant; number, excessive	broj, obilan	6.1.
number, algebraic	broj, algebarski	2.1.2.
number, complex	broj, kompleksni	2.1.
number, composite	broj, složen	6.1.
number, decimal	broj, decimalni; broj, desetni	2.1.
number, excessive → number, abundant		
number, friendly	broj prijatelj	6.1.
number, general	broj, opći	2.1.
number, grammatical	broj, gramatički	2.6.
number, imaginary	broj, imaginarni	2.1.
number, irrational	broj, iracionalni	2.1.
number, natural	broj, prirodni	2.1.
number, negative	broj, negativni	2.1.
number, numeral	broj	2.1.
number, ordinal	broj, redni	2.1.
number, prime	broj, jednostavan; broj, prost; broj, primarni; prim-broj	6.1.
number, rational	broj, racionalni	2.1.
number, real	broj, realni	2.1.
number, solitary	broj, osamljeni	6.1.
number, transcendental	broj, transcendentni	2.1.2.
numbers, amicable	brojevi, združeni	6.1.
numbers, perfect	brojevi, savršeni	6.1.

<i>English</i>	<i>Croatian</i>	<i>Passages</i>
numbers, Roman	brojevi, rimski	4.2.4.
numbers, special	brojevi, posebni	2.1.
numbers, wonderful	brojevi, čudesni	6.1.
numerals, acrophonic	brojke, akrofoničke	3.2.1.
numerals, Aegean	brojke, egejske	3.3.4.
numerals, Arabic	brojke, arapske	5.
numerals, attic	brojke, atičke	3.2.1.
numerals, Brahmi	brojke, Brahmanske	5.1.1.
numerals, Herodianic	brojke, herodijanske	3.2.1.
numerals, Hindu-Arabic	brojke, indijsko-arapske	5.
numerals, Roman; figure, Roman	brojke, rimske	4.2.3.
numeration → count		
odd	broj, neparni	2.1.2.
parity	parnost	2.1.2.
Pascal's triangle	Pascalov trokut	6.5.2.
primes, twin	brojevi blizanci	6.1.
quadrillion	bilijarda	2.3.
ratio, abundancy	omjer, gusti	6.1.
ratio, golden → cut, golden		
rosary	krunica; rožarij; čislo; patrice; očenaši	3.1.
sequence	niz, brojevni; slijed	6.6.1.
series	red	6.6.1.
Sierpinski triangle	Sierpinskijev trokut	6.5.2.
sign, decimal	znak, decimalni	5.2.2.
sign, numeral → numeral		
square, magic	kvadrat, magični	6.5.3.

7.5. Kratice i znakovi

engl.	engleski
franc.	francuski
grč.	grčki
hrv.	hrvatski
kat.	katalonski
lat.	latinski
mađ.	mađarski
njem.	njemački
rus.	ruski
stsl.	staroslavenski
ukr.	ukrajinski
→	vidi
~	oko, slično, odgovara
≈	približno jednako

7.6. Literatura

- [Vrančić, 1595]: Verantius, Faustus, *Dictionarium quinque nobilissimarum Europæ linguarum, Latinæ, Italicæ, Germanicæ, Dalmatiæ & Ungaricæ* Venetiis, 1595. {Vrančić, Faust, *Rječnik pet najuglednijih europskih jezika, latinskoga, talijanskoga, njemačkoga, hrvatskoga i mađarskoga* Venecija, 1595}⁹⁰ (Pretisak: Liber, Zagreb 1971.; Novi Liber, Zagreb 1992.)⁹¹
- [Habdelić, 1670]: Habelich, Juraj, *Dictionar, ili Réchi Szlovenfzke zvexega ukup zebra-ne, u red postauylene, i Dijachkemi zlahkotene*. Nemski Gradecz 1670. {Habdelić, Juraj, *Dikcionar, ili Reči slovenske z vekšega v kup zebra-ne, u red postavljene i dijačkemi zlahkotene*. Grac}. (Pretisak: Kršćanska sadašnjost, Zagreb 1989.)
- [Belostenec, 1740]: Bēllosztēncz, Joannis, *Gazophylacium seu latino-illyricorum onomatium ærarium i ... illirico-latinum ... Zagrabia, 1740*. {Belostenec, Ivan, *Riznica latinsko-hrvatskih riječi i ... hrvatsko-latinskih ... Zagreb*}. (Pretisak: Liber i Mladost, Zagreb 1972.; Stari Grad, Zagreb 1998.)
- [Šilobod, 1758]: Sillobod Bolssich, Mihaly, *Arithmetika horvatszka*. Antoni Reiner, Zagrabia 1758. {Šilobod Bolšić, Mihaj, *Aritmetika hrvatska*. Antoni Reiner, Zagreb 1758}. (Pretisak s pogovorom: Samoborski muzej, Samobor 2008.)
- [Šulek, 1874/75]: Šulek, Bogoslav, *Hrvatsko-njemačko-talijanski rječnik znanstvenog nazivlja, osobito za srednja učilišta – Deutsch-kroatische wissenschaftliche Terminologie. / Terminologia scientifica italiano-croata*. Zagreb 1874 – 1875. (Pretisak pod naslovom: *Hrvatsko-njemačko-talijanski rječnik znanstvenog nazivlja*. Globus, Zagreb 1990.)
- [Cuvaj, 1890/1908]: Cuvaj, Antun, *Računica za opetovnice i produžne škole*. Lav. Hartman (St. Kugli), Zagreb 1890, ⁵1908.
- [Kulundžić, 1957]: Kulundžić, Zvonimir, *Knjiga o knjizi*. I. tom: *Historija pisama*. NIP, Zagreb ²1957.
- [Biblija]: Npr. *Biblija – Stari i Novi zavjet*. Stvarnost, Zagreb 1969.
- [Borzan i dr., 1971]: Borzan, Ana i dr., *Razgovor o matematici*. Školska knjiga, Zagreb 1971.
- [Herkov, 1973]: Herkov, Zlatko, *Naše stare mjere i utezi*. Školska knjiga, Zagreb 1973.
- [Hogben, 1977]: Hogben, Lancelot, *Sve o matematici*. Mladost. Zagreb ²1977.
- [Russell, 1977]: Russell, Bertrand, *Mudrost Zapada*. Mladost, Zagreb ²1977.
- [Devidé, 1979]: Devidé, Vladimir, *Matematika kroz kulture i epohe*. Školska knjiga, Zagreb 1979.
- [Dadić, 1980]: Dadić, Žarko, *Matematika, povijesni razvoj*. Tehnička enciklopedija JLZ, 9. sv., Zagreb 1980., str. 693–698
- [Aristotel, 1985]: Aristotel, *Metafizika*. Prijevod: Tomislav Ladan. Sveučilišna naklada Liber, Zagreb 1985.
- [Aristotel, 1987]: Aristotel, *Fizika*. Prijevod: Tomislav Ladan. Sveučilišna naklada Liber, Zagreb 1987.

⁹⁰ U vitičastim su zagradama prijevodi na hrvatski jezik ili prijenos na današnju grafiju.

⁹¹ U oblim su zagradama podatci u pretiscima.

- [Alexander, 1989]: Alexander, David i Pat, *Biblijski priručnik*. Duhovna stvarnost, Zagreb 1989.
- [Dadić, 1992]: Dadić, Žarko, *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*. Školska knjiga, Zagreb 1992.
- [Gluhak, 1993]: Gluhak, Alemko, *Hrvatski etimološki rječnik*. August Cesarec, Zagreb 1993.
- [Bratulić, 1995]: Bratulić, Josip, *Leksikon hrvatske glagoljice*. Minerva, Zagreb 1995.
- [Gusić, 1995]: Gusić, Ivica, *Matematički rječnik*. Element, Zagreb 1995.
- [Simonyi, 1995]: Simonyi, Károly, *Kulturgeschichte der Physik*. Verlag Harri Deutsch, Thun/Frankfurt am Main 1995.
- [Supek, 1995]: Supek, Ivan, *Filozofija, znanost i humanizam*. Hrvatska akademija znanosti i umjetnosti, Školska knjiga, Zagreb ²1995.
- [Debelec, Gračan, 2004]: Debelec, Tanja; Gračan Sandra, *Magični kvadrati – čarolija u brojevima*. Matematika i škola, VI (2004) 26, str. 33–39
- [Žubrinčić, 2004]: Žubrinčić, Darko, *Mala enciklopedija hrvatske glagoljice*. <http://www.croatianhistory.net/etf/lex.html>
- [Pauše, 2007]: Pauše, Željko, *Matematika i zdrav razum*. Školska knjiga, Zagreb 2007.
- [Jembrih, 2009]: Jembrih, Alojz, ur., *Mihalj Šilobod i njegovo djelo*. Samoborski muzej, Samobor 2009.
- [Jakobović, 2013]: Jakobović, Zvonimir, *Pisanje i uređivanje stručnih i znanstvenih publikacija*. Kiklos, Zagreb 2013.
- [Katičić, 2013]: Katičić, Radoslav, *Hrvatski jezik*. Školska knjiga, Zagreb 2013.
- [Vuković, Jakobović, 2013]: Vuković, Mirko; Jakobović, Zvonimir, *Povijest zapadnoga kalendara (1)*. Svijet po mjeri br. 1, travanj 2013, str. 89–98, (2). br. 2, lipanj 2013., str. 91–98
- [Higgins, 2014]: Higgins, Peter M., *Brojevi: kratki uvod*. Mala matematička biblioteka 10. Element, Zagreb 2014.