

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – SPLIT

Prof. dr. MILOJKO ČIŠIĆ

OSNOVI ELEKTROTEHNIKE

I i II DIO

— 1969 —

Dr Miloško Čišić

OSNOVI ELEKTROTEHNIKE

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET
SPLIT

1968.



60,340
DCH 1182/2016

P R E D G O V O R

Ova skripta nastala su na osnovu bilježaka za predavanja koja držim iz Osnova elektrotehnike na Elektrotehničkom fakultetu u Splitu. Pri pisanju sam koristio više udžbenika iz ove oblasti kao i neka poglavlja iz specijaliziranih djela (vidi popis na kraju knjige). Skripta su namjenjena studentima elektrotehnike a uz neka manja ispuštanja, mogu se koristiti i na drugim visokim školama i fakultetima koja imaju sličan program u ovoj oblasti. Predviđa se da oijeli kurs pređe u toku dva semestra sa četiri sata predavanja sedmično, uz odgovarajuće auditorne i laboratorijske vježbe.

Želim izraziti zahvalnost svima koji su pomogli kod izdavanja djela, u prvom redu asistentu Stanku Milunu, dipl. ing. koji je pročitao i srediо čitav tekst, višem laborantu Dušanu Petrošiću za organizaciju tehničkih priprema, demonstratoru Stanku Županoviću, stud.IV godine za veliki trud oko organizacije radova za crteže koje su izradili studenti Branislav Jajac, Damir Kralik, Mate Smajo, Vladimir Srzentić, Igor Ujdurović i Stipe Vrdoljak, te Hristini Kostiov koja je sa velikom pažnjom obavila daktilografski posao. Posebno zahvaljujem kolektivu Hidrografskog instituta JRM i načelniku kap. b.b. Radi Stjelji za veliku susretljivost pri tehničkim pripremama i štampanju djela, a Vojno pomorskom školskom centru u Divuljama za materijalnu pomoć.

Nadam se da će ova skripta popuniti prazninu koja je postojala i pomoći studentima da bolje prate nastavu i lakše savladaju ovu za njih toliko važnu materiju bez koje se dalji uspješan tok studija elektrotehnike ne može zamisliti.

U Splitu, decembra 1968.

Dr Milojko Ćišić

1. ATOMISTIČKA STRUKTURA ELEKTRICITETA

a) Orbitalni elektroni

Današnja fizika stoji na stanovištu da je elektricitet atomske strukture. Najmanji kvantum elektriciteta je elektron ($e = -4,803 \cdot 10^{-10}$ ESJ, $= -1,602 \cdot 10^{-19}$ As; $m = 9,108 \cdot 10^{-28}$ g) (Millikan, 1911). 1 ESJ je količina naboja koja u udaljenosti od 1 cm vrši na jednaku količinu naboja silu od 1 dina. Tehnička jedinica je kulon (Coulomb) $C = 3 \cdot 10^9$ ESJ $= 1$ As $= 6,25 \cdot 10^{18}$ elektrona.

Dualistička teorija elektriciteta zahtjeva postojanje suprotne čestice (antičestice). Ona je otkrivena 1932. (Anderson). Ima isti naboj kao i elektron, ali suprotnog predznaka i zove se pozitron. Dualistička priroda elektriciteta je fundamentalna osobina prirode.

Važan je odnos naboja i mase elektrona $e/m = 5,273 \cdot 10^{-17}$ elektrostatskih jedina ESJ/gram (Thomson 1899). Iz već spomenute veličine elementarnog naboja $-4,803 \cdot 10^{-10}$ elektrostatskih jedinica dobija se masa elektrona $m = 9,108 \cdot 10^{-28}$ /gram.

$$e/m = 1,76 \cdot 10^8 \text{ As/gram} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ As/kg.}$$

Usporedjeno sa masom vodikovog atoma $m_H = 1,673 \cdot 10^{-24}$ gram, masa elektrona je 1837 puta manja od mase vodika.

Masa elektrona je elektromagnetske prirode i zavisi od njegove brzine kretanja.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (\text{Lorentz 1908.})$$

Spomenuta masa $m_0 = 9,108 \cdot 10^{-28}$ gram je "mirujuća masa". Već kod $\frac{v}{c} = 0,5$ je $m = 1,16 m_0$, a kod $\frac{v}{c} = 0,99$ je $m = 6,9 m_0$. U modernim sinhrotromima se postigla tolika brzina elektrona da se dobio odnos $m = 2.000 m_0$.

Pojam mase elektrona se može ovako shvatiti: tijelo ima masu ili inerciju kad se mora upotrebiti rad (energija) da se to tijelo stavi u pokret. Ako treba energija da se tijelo pokrene, onda to znači, prema definiciji, da tijelo ima masu, u najopćenitijem smislu. Pokretni električni naboj, bez obzira na svoju prirodu, stvara magnetsko polje u svojoj blizini. Kako za stvaranje takvog polja treba energija, to znači da treba upotrebiti energiju za stavljanje toga naboja u pokret. Dakle, naboju treba "pridružiti" masu ili, barem nešto što se ponaša slično masi, pa se stoga ne može razlikovati od mase. Za takvu "masu" se kaže da je elektromagnetska.

Kako elektron nosi električni naboj i ustvari proizvodi magnetsko polje kad je u pokretu, onda mora imati barem elektromagnetsku masu. Ako se uzme da je masa elektrona elektromagnetska, onda se može izračunati radius elektrona, prema relaciji

$$r_0 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m c^2} = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

Polazeći pak od Thomson-ove relacije

$$r = \frac{2 e^2}{3 m}$$

uz uvjet da se elektron ne kreće brzo, izlazi za $r = 2 \cdot 10^{-13}$ cm. Ovo važi pod dva uvjeta:

1. naboj je jednoliko razdjeljen po sferičnoj površini
2. mirujuća masa je elektromagnetska.

Rezultat se ne može smatrati vrlo egzaktnim jer je sumnjivo da li je jednačba primjenjiva na tako male čestice kao elektron.

Većina atoma imaju radius oko $2 \cdot 10^{-8}$ cm pa je radius elektrona 10^{-5} od radiusa atoma. Ako bi lopta $r = 16$ cm bila uvećana do dimenzija zemljine kugle, elektron bi bio još uvijek tako malen da bi jedva bio vidljiv dobrim optičkim mikroskopom.

Elektron je univerzalan sastavni dio materije, stabilan sastavni dio atoma ili slobodna čestica.

Pozitron je veoma kratkog života (oko 10^{-9} sec) i nastaje interakcijom zračenja visoke energije sa materijom. Minimalni prag energije za stvaranje para elektron-pozitron je 1,02 MeV. Kad se pozitron i elektron ujedine, međusobno se ponište (anihilacija) i ostave energiju (dva kvanta od po 0,511 MeV u suprotnim pravcima sličnim γ -zracima).

Elektron je sastavni dio atoma. Današnja fizika shvata atom kao sistem pozitivno naelektrizirane jezgre i oblaka elektrona koji kruže oko jezgra.

Naboj jezgre je Ze , gdje je Z redni broj dotičnog elementa. Najjednostavniji sistem je vodik sa $Z = 1$ i sadrži česticu pozitivnog naboja $+1,602 \cdot 10^{-19}$ As koja se zove proton. Oko toga jezgra kruži jedan elektron.

Uobičajeno je da se u atomskoj fizici jedinica mase mjeri sa masom izotopa O^{16} koja ima 16 jedinica atomske mase (JAM). U tim jedinicama je onda masa protona $m_p = 1,00760$ JAM=

$= 1,6724 \cdot 10^{-24}$ g. a mirujuća masa elektrona $m_e = 0,00055$ JAM pa cijeli vodikov atom iznosi $m_H = 1,00815$ JAM.

Postoji i formacija sa jezgrom dvostruko težom od jezgre običnog vodika: to je teški vodik - deuterij. Njegova jezgra se sastoji od protona i neutrona. Ova fundamentalna čestica (neutron) nema električnog naboja, a masa joj je veoma blizu masi protona $m_n = 1,008986$ JAM. Teški vodik ima masu dvostruko veću od mase običnog vodika, pa se to označava oznakom $A = 2$ (maseni broj). I obični i teški vodik imaju $Z = 1$, pa su stoga izotopi.

H	He	Li	Be	B	C
A=1	A=4	A=7	A=9	A=11	A=12
Z=1	Z=2	Z=3	Z=4	Z=5	Z=6

Broj neutrona se izražava sa $A-Z$. Vodik ima još jedan izotop sa $A=3$ (tritium).

Orbitalni elektroni obilaze oko svoje jezgre zadržavajući se normalno u izvjesnim daljinama od jezgre, koje su tek ograničeno promenljive. Ove elektronske staze ili "ljuske" označavaju se slovima K, L, M, N, ... Q. Najbliža jezgri je ljuska K. U tom području se kreće elektron vodika i dva elektrona helija. Tim se ova ljuska popunjava, pa se ostali elektroni daljih elemenata nalaze u L ljusci (daljih 8 elektrona do zaključno $Z = 10$, neon). Sa $Z = 11$ - natrij, počinje se popunjavati M ljuska do zaključno $Z = 18$ - argon, sa ukupno 8 daljnjih elektrona. Od $Z = 19$ - kalij, počinje se puniti N ljuska koja sadrži daljnjih 14 elektrona.

Prema kvantnoj mehanici, elektroni se mogu gibati na raznim kvantnim stazama. Najbliže jezgri su takve kvantne staze po kojima se gibaju elektroni u osnovnom, neuzbudjenom stanju atoma. Iza ovih slijede druge, udaljenije kvantne staze.

Svakoj od tih staza treba pripisati izvjesan nivo energije koji je viši što je staza udaljenija. Da bi se jedan elektron podigao sa p staze na q-stazu, potrebno je privesti energiju $E_q - E_p$ (razliku nivo energija). Ta se ista količina energije oslobadja kad elektron "padne" sa labilnijeg stanja u višoj stazi na stabilnije stanje u nižoj stazi. Tada se pojavljuje energija u obliku optičke ili rentgenske radijacije sasvim određene frekvencije f (emisija određene "spektralne linije" dužine vala $\lambda = c/f$), po relaciji

$$h f = E_q - E_p$$

gdje je h - Planck-ova konstanta $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Ws}^2 = 6,626 \cdot 10^{-27} \text{ ergs}$.

Za potpuno razumjevanje ovih pojava su uvedeni novi pojmovi - kvantni brojevi koji vode računa o relativističkim utjecajima na masu, o djelovanju vanjskih polja, pa se pojedini elektronima (pa i onima unutar iste ljuske) pridaju različita pripadna kvantna stanja energije. Uvijek jedan i samo jedan elektron može biti u jednom određenom kvantnom stanju, prema Pauli-jevom principu isključivosti. (Pauli: u svakom energetsom nivou smije se nalaziti samo jedan elektron).

Osim glavnog kvantnog broja n , imamo orbitalni kvantni broj l (od 1 do $n-1$) koji vodi računa o kutnom momentu brzine u kretanju oko jezgre. Staze mogu biti kružne ili eliptične. Magnetski kvantni broj m vodi računa o raznim orijentacijama u prostoru kružnih ili eliptičnih staza elektrona. m može imati vrijednosti od $-l$ preko 0 do $+l$ za dati kvantni broj l (za $l = 3$, m može biti $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$).

Konačno četvrti kvantni broj, s vodi računa o spinu elektrona. Pretpostavlja se da elektroni rotiraju oko vlastite osi i da imaju vlastiti impuls vrtnje ili "spin". Uslijed

toga nastaje i magnetsko djelovanje takvog spina, pa se govori o "magnetskom momentu" elektrona. Moguće su samo dvije vrijednosti kvantnog broja s i to desna vrtnja (+) i lijeva vrtnja (-). Čudno je da pri svim cjelobrojnim vrijednostima drugih kvantnih brojeva, spin ima uvijek vrijednost od $1/2$ ($+ 1/2$ ili $- 1/2$).

Dakle, starijoj oznaci ljusaka K, L, M ... odgovara moderna oznaka glavnog kvantnog broja n za razne cjelobrojne vrijednosti: $n = 1$ (K); $n = 2$ (L); itd.

	l=0	1	2	3	4	maksm.ukup.br.elektr.
$n = 1$	2	-	-	-	-	$2 = (2.1^2)$
$n = 2$	2	6	-	-	-	$8 = (2.2^2)$
$n = 3$	2	6	10	-	-	$18 = (2.3^2)$
$n = 4$	2	6	10	14	-	$32 = (2.4^2)$
$n = 5$	2	6	10	14	18	$50 = (2.5^2)$

Važno je naglasiti da je potrebna određena energija da se elektron podigne sa prve kvantne staze do kontinuuma (izvan svog atoma). To se zove "ionizaciona energija". Za vodik u osnovnom stanju, ona iznosi $2,170 \text{ Ws} = 13,56 \text{ eV}$, a istog reda veličine su i energije za druge atome.

U osnovnom stanju su vanjske ljuske (nezasićene ljuske) najmanje stabilne, pa atomi relativno lako gube elektrone iz takvih ljusaka ili primaju vanjske elektrone u takve ljuske (ionizacija, pozitivni ioni - sa gubitkom jednog ili više elektrona; negativni ion sa dobitkom jednog ili više elektrona).

Energija se često izražava u eV (elektron Volt) - energija koju zadobije elektron kad ga ubrza napon od 1 V. Važi relacija

$$1 \text{ eV} = 0,160 \cdot 10^{-18} \text{ Ws}$$

b) Slobodni elektroni u metalima

Neobično je važno za elektrotehniku razmatranje o tzv. slobodnim elektronima u metalnim vodičima.

Metale (kao i druga čvrsta tijela) karakterizira pravilan raspored atoma (kristali) ili atomskih grupa. Kristalna simetrija ima dalekosežne posljedice za gibanje elektrona. Na pojedini elektron djeluje privlačna sila atomskih jezgra i odbojna sila ostalih elektrona. To djelovanje se opisuje sumarno električnim potencijalom u kom se kreću elektroni.

Uzima se da se slobodni elektroni gibaju u relativno vrlo prostranim međuprostorima unutar, grubo uzeto, krutog skeleta metala. Elektroni se stalno sudaraju međusobno i sa atomima kristalnog (metalnog) skeleta metala - donekle analogno česticama plina po kinetičkoj teoriji topline. Stoga se simbolično govori o "elektronskom plinu" u metalu.

Na osnovu kvantne teorije (Fermi 1936.) nadjeno je da slobodni elektroni u metalima imaju povišene energije gibanja, pa i blizu apsolutne nule imaju još onakve energije kakve bi po klasičnim zakonima za plinove, imali tek kod vrlo visokih temperatura.

U normalnim prilikama su slobodni elektroni u metalu, uzeto statistički, podjednako porazdjeljeni među atomima metala pa se metal kao cjelina čini svugdje neelektričan. Djelovanjem vanjskih električnih polja nastanu još i usmjerena gibanja koja se superponiraju prvobitno uglavnom nepravilnim gibanjima razdjeljenim na sve moguće smjerove. Ovakva usmjerena gibanja mjestimično izazivaju nestašice a mjestimično suviške gustoće naboja elektrona prema gustoći pozitivnih naboja jezgra metalnog skeleta. To daje izgled pozitivni odnosno negativnih naboja na prvobitno neutralnim mjestima, dakle pomanjkanje odnosno suvišak elektrona prema normalnom stanju (a ne pojava

negativnog ili pozitivnog elektriciteta.)

Električne pojave u metalima su isključivo rezultat stanja i gibanja slobodnih elektrona.

Ako neki linearni vodič čini "zatvoreni krug" električne struje, slobodni elektroni će u njemu trajno cirkulirati pod utjecajem uzdužnih komponenata električnog polja koje podržavamo u krugu. Tako nastaju provodne struje.

Gustoća ove struje proporcionalna je električnom polju koje djeluje u metalu

$$G = \alpha E = \frac{1}{\rho} E$$

(konstanta α je specifična vodljivost metala a recipročna konstanta ρ specifični otpor). Specifična vodljivost se može proračunati iz slobodnog puta elektrona u metalu. Kao slobodni put definirana je u kinetičkoj teoriji prosječna dužina puta između dva sudara. Ovdje će se slobodni put definirati dužinom, na kojoj elektron prolazi kroz metal, promjeni potpuno smjer svojeg gibanja.

Zamislimo da na metal djeluje neko električno polje. Promena impulsa u jedinici vremena jednaka je sili

$$\frac{dp}{dt} = eE$$

Impuls elektrona raste u smjeru električnog polja toliko dugo dok elektron prevali od prilike slobodni put s . Nakon toga, zbog sudara sa kristalnom rešetkom, elektron rasprši dobiveni impuls. U smjeru polja raste impuls za vrijeme jednako s/v , gdje je v prosječna brzina elektrona. Električno polje daje elektronima u svom smjeru prosječno impuls

$$\overline{\Delta p} = eE \frac{1}{2} \frac{s}{v}$$

Tom prirastu impulsa odgovara prosječno gibanje elektrona u smjeru električnog polja

$$\bar{v}_E = \frac{\overline{\Delta p}}{m} = \frac{eE s}{2 m v}$$

Elektroni jure s velikom prosečnom brzinom u svim smjerovima. Ako nema električnog polja, prosječna komponenta brzine u bilo kojem smjeru iščezava. Zbog djelovanja električnog polja, pretežu nešto brzine u smjeru polja. Prosječna vrijednost brzine u smjeru polja određuje električnu struju. Gustoća struje jednaka je naboju u cm^3 , pomnoženom brzinom kretanja:

$$G = Ne \bar{v}_E = \frac{Ne^2 s}{2 m v} E$$

Rezultat je poznat pod imenom Ohm-ovog zakona u elementarnom obliku. Specifična vodljivost metala jednaka je

$$\kappa = \frac{Ne^2 s}{2 m v}$$

Visoka električna vodljivost metala (Cu, Ag) uslovljena je velikom gustoćom slobodnih elektrona a ne velikom pokretljivošću ovih elektrona. Vodljivost jako zavisi o temperaturi. Za čiste metale je beskonačno velika na apsolutnoj nuli. To znači da se slobodni put jako povećava kad temperatura pada. Za neke metale iščezava otpor i prije postignuća apsolutne nule - fenomen supravodljivosti. U tom stanju supravodljivosti metali su apsolutno diamagnetični - magnetsko polje ne prodire u njihovu unutrašnjost.

Kvantna mehanika daje objašnjenje ovih pojava. Elektroni imaju kod konačnih temperatura ograničene brzine. Mehaniizam koji sprečava da brzine elektrona rastu preko određene granice su titranja kristalne rešetke. Titranjem nastaju u kristalu izmjenično gušća i redja mjesta. Elastični val se širi krista-

lom. U takvom nehomogenom sredstvu šire se elektronski valovi (De Broglie). Djelovanjem električnog polja na metal brzina elektrona ne može stalno rasti, jer elektroni zbog titranja kristalne rešetke mijenjaju svoje brzine i smjerove. Električni otpor iščezava samo kod apsolutne nule, jer tada prestaju titranja kristalne rešetke.

Brzine elektrona u električnom polju su pod utjecajem dvaju suprotnih djelovanja: električne sile i raspršivanje titranjem kristalne rešetke. Električno polje nastoji elektronske brzine upraviti u svom smjeru, a titranjem mreže raspršuju brzine nepravilno na sve strane. Kao stanje ravnoteže između tih dvaju djelovanja stvara se stanje kod kojeg pretežu brzine elektrona u smjeru električnog polja, ali ne rastu više (Bloch, 1930).

Otpor iščezava prema apsolutnoj nuli kao T^5 , a kod visokih temperatura raste kao T . Što kristalna mreža više titra, otpor je veći.

Pri ukopčavanju napona u nekom krugu, naponski impuls prodje velikom brzinom kroz metal (red veličine $3 \cdot 10^{10}$ cm/s). Međutim prosječne brzine samih elektrona u smjeru električnog polja su veoma malene. Izračunato je da se u bakrenom vodiču 1 cm^2 presjeka i kod struje od 600 A elektroni kreću brzinom manjom od 1 mm/sec. Za jačinu polja $E = 0,1 \text{ V/m}$ i gustoću struje $G = 6 \text{ A/mm}^2$ ta brzina iznosi od prilike $v = 0,3 \text{ mm/sec}$. (Pohl - Einführung in die Elektrizitätslehre).

Zbog privlačenja pozitivnih iona ili jezgre, slobodni elektroni su spriječeni da izađu iz metala u vanjski prostor. Te električne sile privlačenja su osobito jake uz površinu metala. Da se elektron oslobodi metala, treba savladati te sile, odnosno izvršiti određenu energiju. To je izlazni rad (u Ws ili eV). Taj rad mogu dati na račun svoje vlastite ki-

netičke energije samo oni elektroni koji imaju dovoljno veliku komponentu brzine u smjeru okomito na površinu, a nalaze se u blizinu površine.

Ako se energija privede spolja (zagrijavanjem, obasjavanjem i sl.) onda se može pospješiti izlaz slobodnih elektrona (užarene katode, radio cjevi, fotoemisija iz metala, emisija zbog vanredno jakog električnog polja u vakuumu itd.).

2. MEHANIZAM PROVODNIH STRUJA

Za uspostavljanje toka slobodnih elektrona nekom linearnom vodiču (električna struja) potrebna su dva bitna uslova:

1. postojanje izvora struje - kao izvora struje koja stavlja elektrone u pokret,
2. zatvoreni "strujni krug" - metalni put za slobodne elektrone.

Struja elektrona (kratko - struja) teče iz izvora kroz zatvoreni strujni krug natrag u izvor, zatim kroz njega ponovno u strujni krug itd. Struja u strujnom krugu može biti preobražena u neki drugi vid energije: toplinu, svijetlost, mehanički rad itd. Ovakva kružna strujanja su česta pojava u prirodi (kruženje vode: oblak - rijeka - more - isparivanje - oblak). Stoga je umjesno uvođenje analogije hidrauličnih strujanja (barem za približno kvalitativno opisivanje istosmjernih tokova - struja).

U elektrotehnici svaki strujni krug jednostavan ili složen u principu ima tri osnovna elementa:

1. izvor (e) - (aktivni dvopol)
2. vodiče
3. potrošač (e) - (pasivni dvopol)

Izvori mogu biti raznih vrsta: kemijski, strojni, termoelementi itd. Najvažniji su za tehničku praksu strojni izvori - generatori, o kojima će kasnije biti opširno govora.

Treba naglasiti da se u izvorima elektroni niti proizvode niti troše (uništavaju). Oni se već nalaze u atomima ili između njih. Elektroni imaju težnju da se međusobno odbijaju ali to nije dovoljan razlog da se elektroni stave u pokret u određenom smjeru. Zato je potrebno da izvor posjeduje silu koja ima to svojstvo da elektrone stavi u pokret. Ovu silu nazivamo elektromotorna sila (EMS) - simbol E . Ova sila u izvoru vrši neku vrstu "pritiska" na elektrone pa se svi elektroni istovremeno stave u pokret. Ako je strujni krug zatvoren onda nastaje strujni tok. Pri tome se troši, umanjuje, taj pritisak na pojedinim djelovima vodiča pa se ta razlika pritiska između dvije tačke vodiča zove "naponska razlika" ili kratko napon - simbol U . Elektromotorna sila je sveukupni napon koji djeluje u strujnom krugu i koji se nalazi u izvoru. Dio od EMS, koji preostaje između dvije tačke (napr. stezaljke izvora) je napon U .

Impuls koji elektronima, daje EMS, prostori je se kroz vodič skoro brzinom svijetla ($3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$) pa se elektronska struja smatra "nestišljivom" (nema nagomilavanja - struja je svuda u vodiču ista).

Ako strujni krug nije zatvoren, nego otvoren, elektroni ne mogu putovati. Medjutim, sve dok EMS djeluje, elektroni stoje pod njenim utjecajem i mogu odmah započeti kretanje čim se neki put otvori. Kaže se da je vodič "pod naponom".

O jedinici za napon će kasnije biti više rečeno. Za sada se može reći da je to volt. Industrija je normirala napon, pa zato postoje međunarodni propisi (IEC): 2, 4, 6, 12, 24, 48, 60, 110, 220, 380, 440 itd. volti, 6, 10, 15, 30, 60, 110, 220, 380 kV.

Važno je spomenuti da elektroni u pokretu vrše i rad, koji se pretvara u toplinu. Taj rad je direktno proporcionalan EMS (ili naponu U) i količini elektriciteta koja teče Q

$$A = EQ = EIt$$

odnosno za napon između dvije tačke U

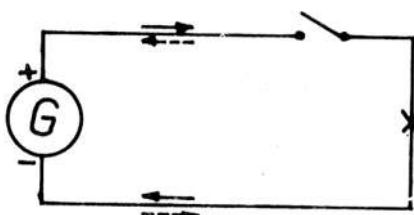
$$A = UIt$$

Napon, dakle, određuje "radnu sposobnost" električnog strujnog kruga.

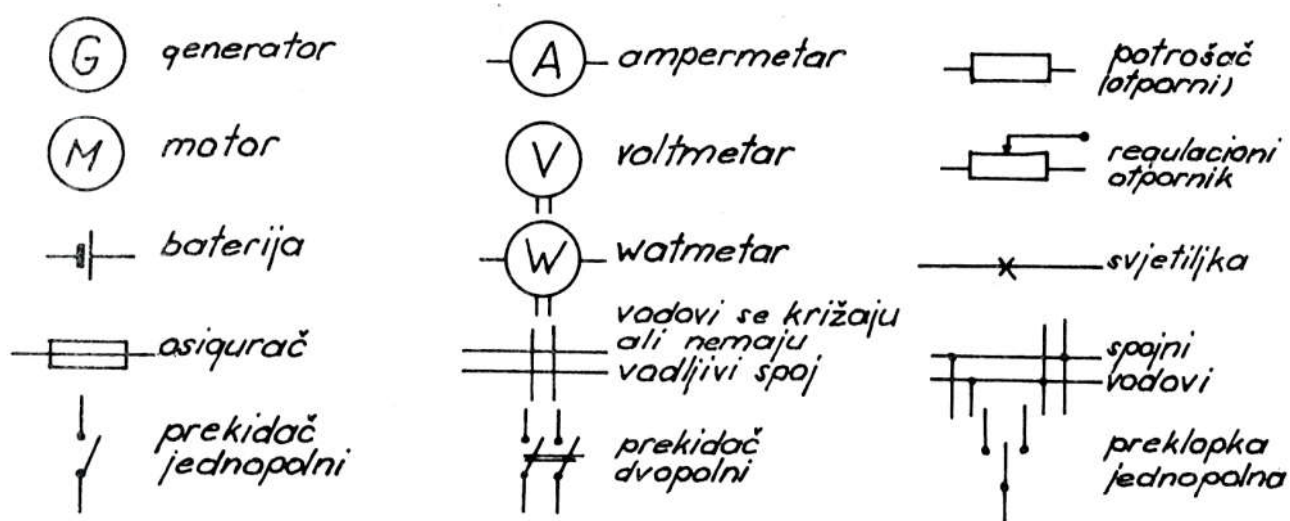
Drugi element strujnog kruga su vodiči - metalni provodnici, malog otpora koji omogućuju prolaz električnoj struji bez većih gubitaka. O svojstvima vodiča će kasnije biti opširnije govora.

Treći element služi za pretvaranje električne energije u neki drugi oblik. Prema takvim zahtjevima se upotrebljavaju i razne vrste potrošača: otporni, induktivni, kapacitivni. Zajedničko svim vrstama potrošača je da se u njima vrši neka transformacija električne energije. Za predočavanje strujnih krugova služe konvencionalni grafički znakovi od kojih su neki ovdje prikazani (pobliže vidi JUS standardi

Najjednostavniji sklop se može simbolički ovako prikazati:



— konvencionalni smjer struje
---- stvarno kretanje elektrona



U praktičnoj elektrotehničkoj literaturi je uobičajen konvencionalni smjer, iako je to ustvari (fizikalno) obratno.

Sama električna struja se normalnim osjetilima ne može direktno opažati. Njeno postojanje opažamo indirektno, preko vanjskih manifestacija - djelovanja struje. Tehnički najvažnija djelovanja električne struje su:

1. magnetsko djelovanje
2. toplinsko djelovanje
3. kemijsko djelovanje
4. fiziološko djelovanje

S obzirom na lokaciju ovih pojava, magnetsko djelovanje se događa izvan vodiča, zapravo u okolini vodiča kroz koga protječe struja. To se djelovanje manifestira silama koje djeluju na okolišne (željezne) feromagnetične materijale ili druge vodiče kroz koje protječe struja. Osim toga, pomoću ovih sila se mogu, pod određenim uslovima proizvesti nova kretanja elektrona (indukcija). U području ovih magnetskih sila se pokreće vodič kroz koji protječe struja, ako je sam vodič tako mehanički podešen da nema zapreka takvom kretanju (pretvaranje električne energije u mehanički rad).

Ostala tri djelovanja su vezana neposredno za sam put struje, dakle za vodič (u širem smislu - metal, elektrolit, živi organizam itd.).

Toplinsko djelovanje općenito se opaža u svim vodičima i izolatorima. Nastaje uslijed jednog procesa koji je donekle sličan trenju pri kretanju elektrona. Ove pojave "trenja" su predmet proučavanja atomske fizike i u zadnje vrijeme su data zadovoljavajuća objašnjenja pomoću kvantne mehanike. Kao jedna od posljedica toplinskog djelovanja nastaje i svijetlost (žarulje sa žarnom niti).

Kemijsko djelovanje nastaje kao posljedica razlaganja molekula (atoma) na ione (sa viškom ili manjkom orbitalnih elektrona) koji se onda kreću u smjeru ili protiv smjera struje i tako nastaju kemijska razlaganja (elektroliza). U ovu grupu djelovanja spada donekle i pojava ionizacije plinova, prilikom prolaza struje kroz razrijeđene plinove (tinjavo izbijanje, pojave svijetla itd. - fluorescentne sijalice).

Fiziološko djelovanje se zasniva na kemijskom djelovanju na žive organizme. Pri tome nastaju određene mišićne i nervne reakcije (grčevi), a kod jačih struja i razaranje tkiva te smrt (letalna struja - 10 do 100 mA). Otpor organizma varira od 100 do 100.000 oma. Prosjek je oko 2.000 oma.

Treba naglasiti da su životni procesi u suštini elektrokemijske prirode: mozak emitira elektromagnetske valove, akcione struje srca i mišića itd. Prolaz strane struje kroz živi organizam poremećuje ove vlastite električne funkcije i tako nastaju pomenuta fiziološka djelovanja koja mogu biti korisna ili štetna po živi organizam, ovisno o jačini ove struje.

Sva ova djelovanja su djelomično ovisna a djelomično neovisna o smjeru struje. Toplinsko djelovanje je potpuno neovisno o smjeru struje pa nastupaju uvijek iste pojave bez obzira kojim smjerom struja teče. Kemijsko djelovanje je ovisno o kretanju struje pa o tome ovisi i kretanje produkata razlaganja u elektrolitima i konačan produkt elektrolize.

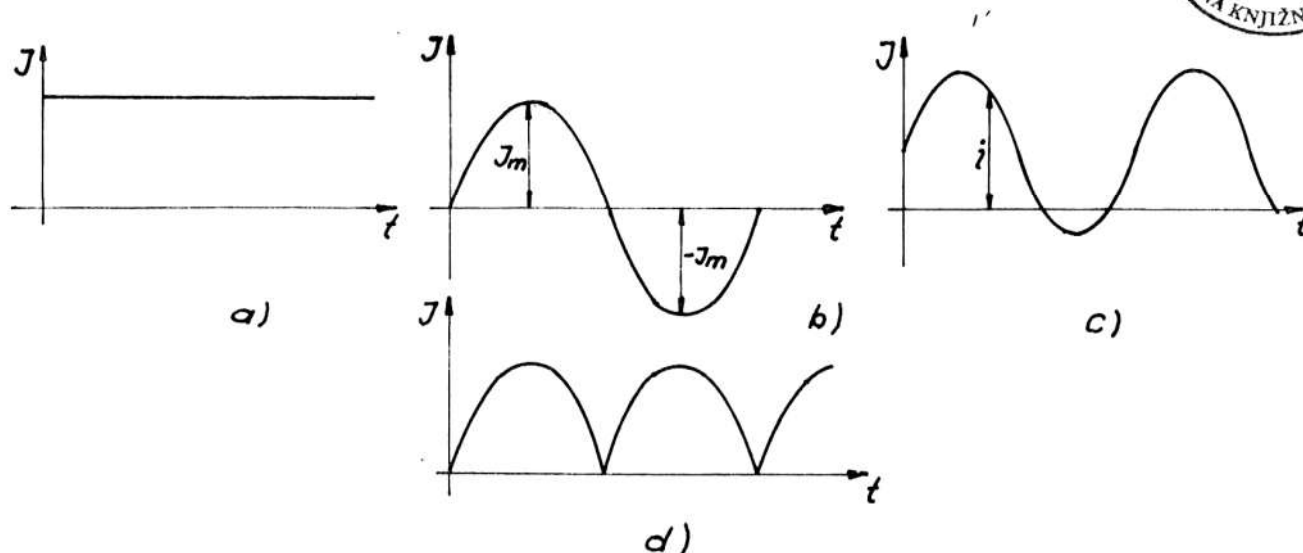
Magnetska djelovanja su djelomično zavisna a djelomično nezavisna o smjeru kretanja struje (otklon magnetske igle - polaritet je ovisan o smjeru struje, dok je djelovanje sila između određenih struja ili između struje i nemagnetičnog željeza nezavisno o smjeru struje).

Vrsta djelovanja	Magnetsko	Toplinsko	Kemijsko	Fiziološko
Lokacija djelovanja	izvan vodiča	unutar vodiča	unutar vodiča	unutar vodiča
Ovisnost djelovanja o smjeru struje	za silu <u>neovisno</u> za polaritet ovisno	neovisno	ovisno	neovisno

Vrste struja

S obzirom na smjer toka struje u vodiču, razlikujemo dvije vrste struje: istosmjernu, sa stalnim smjerom struje i izmjeničnu sa promjenljivim smjerom struje.

Ako se istosmjerna struja predstavi grafički gdje je apscisa vrijeme t a ordinata jačina struje konstantnog iznosa, onda se dobije pravac



Ako se struja periodički mijenja po smjeru i po veličini, onda je to izmjenična struja. Ona može da slijedi neku periodičnu funkciju (najvažnija je sinusna funkcija $i = I_m \sin \omega t$, graf b ili bilo kakvu drugu funkciju, graf c). Ako se tok struje ponaša kao na sl. d) onda se govori o pulzirajućoj ili intermitirajućoj struji.

Jedinice, mjere, veličinske jednadžbe

Struje u vodičima mogu imati raznu jačinu - broj slobodnih elektrona koji u jedinici vremena prolaze kroz presjek vodiča:

$$I = \frac{dQ}{dt} ; \quad dQ = I dt$$

Za ovo razmatranje je važno pretpostaviti da je struja elektrona jednoliko razdjeljena po presjeku vodiča. Smatra se da se elektroni kreću od prilike paralelno sa osom vodiča, tako da su zamišljene "strujnice" paralelne - laminarno strujanje. Ovo je uvijek slučaj ako je presjek vodiča malen u upoređenju sa velikom dužinom vodiča. Ako se, međjutim, radi o pločastim ili masivnim vodičima, onda ova pretpostavka ne važi pa se govori o "vrtložnim" strujama i data relacija ne važi.

Osnovna međunarodna jedinica za količinu elektriciteta je kulon (po Coulombu, 1806). Kulon je $6,25 \cdot 10^{18}$ elektrona (elementarnih naboja). Ako ova količina elektriciteta proteče kroz vodič u jednoj sekundi, onda kažemo da je struja jačine 1 amper (Ampère 1814). Ovako definiranu jedinicu možemo praktički realizirati na više načina. Stariji način (London IEC 1908) koristi elektrolitičko djelovanje struje i definira jačinu struje od 1 A: količina elektriciteta koja iz otopine AgNO_3 izluči 1,11815 mg srebra u jednoj sekundi (internacionalni amper).

Najnovija definicija apsolutnog ampera polazi od sile koja se javlja između dvaju vodiča kroz koje proteče struja: stalna struja kroz svaki od dva tanka, beskonačno duga, paralelna i jedan metar razmaknuta vodiča u vakuumu, pri kojoj djeluje sila između obih vodiča $0,2 \cdot 10^{-6}$ N po metru dužine sistema vodiča.

Ipak postoji neznatna razlika internacionalnog i apsolutnog ampera važi ova relacija:

$$1 \text{ int A} = 0,99985 \text{ abs A.}$$

Ovo je osnovna praktična jedinica u elektrotehnici. Da bi se i druge elektrotehničke veličine mogle obuhvatiti, potrebno je formirati mjerni sistem.

Internacionalno je prihvaćen (1948) Giorgi-ev sistem, nazvan MKSA - m - kg - s - A - prema osnovnim dimenzijama. U principu, mjerni sistem je sastavljen od određenog broja osnovnih jedinica i od proizvoljno mnogo izvedenih jedinica (iz osnovnih jedinica).

Sistem	Dužina l	Vrijeme t	Masa M	Sila F
MKS	m	s	kg	izvedena

Jednadžba za prelaz sa mase na silu je osnovna jednadžba dinamike:

$$F = m a$$

Kako a (ubrzanje) ima dimenziju lt^{-2} , izlazi za silu F dimenzija Mlt^{-2} . Jedinica za silu je Newton - N (njutn): sila koja masu od 1 kg daje ubrzanje $1 m/s^2$.

Veza sa starim sistemom ($a = g = 9,81 m/s^2$ - zemljina teža:

$$1 \text{ kp (kilopond)} = 1 \text{ kg } 9,81 \frac{m}{s^2}$$

$$1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N}$$

$$1 \text{ N} = 0,102 \text{ kp}$$

U elektrotehnici se najčešće upotrebljava MIE-ov sistem VAMS

$$1 \text{ VAs} = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kg } m^2/s^2$$

a iz ovoga

$$V = \frac{kg \cdot m^2}{As^3} ; \quad kg = \frac{VAs^3}{m^2}$$

Multiplikatori ovih osnovnih jedinica su:

$$T - \text{Tera} = 10^{12}$$

$$G - \text{Giga} = 10^9$$

$$M - \text{mega} = 10^6$$

$$k - \text{kilo} = 10^3$$

$$h - \text{hekta} = 10^2$$

$$da - \text{deka} = 10^1$$

$$d - \text{deci} = 10^{-1}$$

$$c - \text{centi} = 10^{-2}$$

$$m - \text{mili} = 10^{-3}$$

$$u - \text{mikro} = 10^{-6}$$

$$n - \text{nano} = 10^{-9}$$

$$p - \text{piko} = 10^{-12}$$

$$f - \text{femto} = 10^{-15}$$

$$a - \text{atto} = 10^{-18}$$

Mjera	Jedinica	Definicija
		Prvobitna: $1 \cdot 10^{-7}$ dio četvrtine eridijana koji prolazi kroz Barcelonu i Dunkirk.
Dužina	metar (m)	Sadašnja: 1.650 763,73 valnih dužina što ih u vakuumu imaju radijacije Kriptona 86 kad atomi tog plina prelaze sa energetske razine $2p_{10}$ na energetski nivo $5d_5$ (pri $- 210^{\circ}\text{C}$)
		Prvobitna: Masa kubičnog decimetra vode pri $+ 4^{\circ}\text{C}$.
Masa	kilogram (kg)	Sadašnja: Masa prototipa kilograma br.1 koji se čuva u internacionalnom birou za mjere i težine u Sèvres-u kod Pariza
		Prvobitna: 86400-ti dio srednjeg sunčanog dana.
Vrijeme	sekunda (s)	Sadašnja: Trajanje 9,192.631.770 perioda radijacije koja odgovara prelazu između dva hiperfina nivoa osnovnog stanja atoma Cezija 133.
		Prvobitna: 100-ti dio intervala između tačke leđišta (0°C) i tačke vrelišta (100°C).
Temperatura	stupanj Celsius ($^{\circ}\text{C}$)	Sadašnja: 273,16-ti dio termodinamičke temperature trojne tačke vode ($0,01^{\circ}\text{C}$)

Ovako su formulirane četiri osnovne jedinice Giorgievog sistema. Ostale jedinice se izvode iz definicija ih jednadžbi pomoću četiri osnovne jedinice.

Rad i energija. Dimenzija je ista - definiciona jednadžba

$$A = E = F l$$

Odgovarajuća jedinica je

$$1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$$

dakle njutn-metar ili Joule (džul).

Veza sa starim sistemom l

$$1 \text{ kpm} = 9,81 \text{ Nm} = 9,81 \text{ J}$$

Snaga. Prema definiciji je

$$P = \frac{A}{t}$$

Odgovarajuća jedinica je

$$\frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W (wat)}$$

Iz ovoga izlazi veoma važna relacija

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws (vat - sekunda)}$$

kao veoma važna jedinica za rad i energiju u elektrotehnici.

Veća jedinica je 1 kWh - kilovat sat.

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W } 3600 \text{ sec} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ W s (J)}$$

Za praktične potrebe elektrotehnike je mnogo prikladniji sistem VAsm jer se u njemu mogu elektrotehničke veličine veoma dobro izraziti. Pored već spomenute definicije za kulon i amper, važe i ove jedinice:

Napon. Definiciona jednažba za energiju odnosno rad je

$$A = E = UI t$$

pa se dobije za napon U

$$U = \frac{E}{It} \frac{J}{As} (=) \frac{J}{C}$$

Praktična jedinica je Volt - V.

Ova jedinica je praktično definirana tako da elektromotorna sila "Westonovog internacionalnog normalnog elementa" u normalnim prilikama iznosi 1,01865 V.

Volt se takodjer može definirati ovako: 1 volt je napon na krajevima vodiča koji pri struji od 1 A troši snagu od 1 W.

Iz gornje relacije se dobije veoma važna veza

$$J = V C = VAs$$

džul = volt-amper-sekunda.

Ovo je veoma važna relacija za energiju u elektrotehnici.

Električni otpor. Definiciona jednačba

$$R = \frac{U}{I}$$

pa se dobije

$$R (=) \frac{V}{A} = 1 \Omega \quad (\text{OHM})$$

Može se definirati: vodič ima otpor od 1 om ako uz napon od 1 volt na krajevima vodiča u njemu teče struja od 1 amper.

Praktično se otpor od 1 oma realizira kao otpor stupca žive od 14,4453 grama, dužine 106,25 cm i svagdje jednakog presjeka, kod 0°C (taj presjek je 1 mm² za ovu masu žive).

Specifični otpor. Definiciona jednačba

$$R = \varrho \frac{l}{S}$$

odakle

$$\varrho = \frac{SR}{l} = \frac{1^2 R}{1} = 1R$$

Odgovarajuća jedinica je Ω m (om-metar).

Kapacitet: Definicijska jednačina

$$Q = C U$$

odakle

$$C = \frac{Q}{U} \frac{\text{kulon}}{\text{volt}} = \frac{C}{V} = \frac{As}{V}$$

Jedinica se zove farad - F

$$F = \frac{C}{V} = \frac{As}{V}$$

Električno polje. Definicija jačine električnog polja

$$E = \frac{U}{l} = - \frac{dU}{dn}$$

odakle odgovarajuća jedinica volt/metar - V/m.

Za potrebe praktičnog računanja najbolje je upotrebljavati tzv. "veliĉinske jednaĉbe" (Grössengleichungen), što znaĉi da u svakoj jednaĉbi svako slovo (znak) predstavlja jednu fizikalnu veliĉinu - dakle svaki znak (slovo) je proizvod od brojne vrijednosti i dotiĉne jedinice. Tim se ne izraĉunavaju samo brojevi nego i jedinice. Pri tome treba (i mora!) da se sa jedinicama raĉuna taĉno isto tako kao i sa brojevima.

Na primjer ako imamo $Q = I t$ pa je $I = 3 \text{ A}$, a $t = 60 \text{ s}$, onda treba uvrstiti $Q = I t = 3 \text{ A } 60 \text{ s} = 180 \text{ As}$.

Dakle, koliĉina elektriciteta je dobivena u As što je isto kao i kulon. Praktiĉna prednost upotrebe veliĉinskih jednaĉbi je u tome da nisu potrebni nikakvi posebni propisi za izbor jedinica i da svaka jednaĉba veĉ sama po sebi daje ispravnu jedinicu u kojoj se pojavi i rezultat. Tako smo mogli odmah napisati u gornjem primjeru

$$Q = 3 \text{ A } \frac{1}{60} \text{ h} = 0,05 \text{ Ah (amper sati)}$$

U jednostavnim slučajevima se u jednadžbama ne moraju upisati i jedinice, ali kod dužih izračunavanja je potrebno pisati jedinice. Pri tome se jedinice mogu skratiti isto kao i slova (brojevi).

O ostalim izvedenim jedinicama će biti govora kad se ukaže zato potreba.

3. RAZMATRANJA O ELEKTRIČNOJ STRUJI

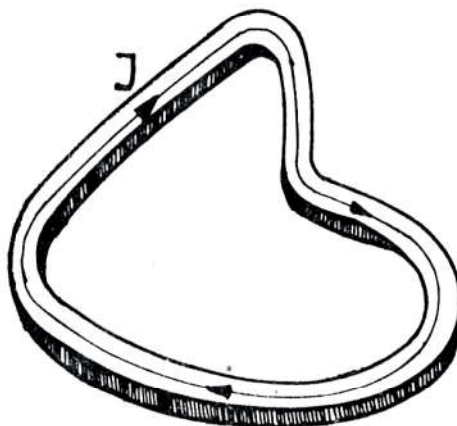
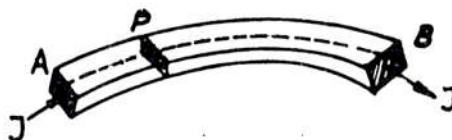
Po definiciji, $I = \frac{dQ}{dt}$ jačina struje ima dimenziju naboj/vrijeme (=) C/s = kulon/sec. Q nije bilo koja količina elektriciteta nego je to ona količina koja pripada promatranom vremenu strujanja. Veličina presjeka ne igra nikakvu ulogu.

Pri istoj jačini struje u debelom vodiču struja teče sporije nego u tankom vodiču sa istom jačinom struje. Nerazgranata struja ima na svakom presjeku jednaku jačinu. Struja se ponaša kao nestišljiva tekućina. Struja je u sebe zatvorena pojava, to je krug (kolo) bez početka i kraja i ima u svakom (ukupnom) presjeku jednaku (ukupnu) jačinu

$$I_{(A)} = I_{(B)} = I_{(P)}$$

Gustoća struje

$$G = \frac{I}{S} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$$



4. RAZMATRANJA O ELEKTRIČNOM NAPONU

Napon je tendencija, težnja za kretanje nosioca električnog naboja. Ovaj uzrok kretanja naboja djeluje i kroz prazan prostor.

Za karakterizaciju promjene mjesta (za kretanje) postoje dvije veličine: sila i energija. Sila (vektorska veličina) znači pogon, uzrok kretanja u jednoj tački. Energija (skalarna veličina) znači pogon, uzrok kretanja između dvije tačke (A i B) i to preko rada kojeg vrši naboj (elektron) samo zbog kretanja od A prema B. Ovaj rad mora biti jednak gubitku na onoj energiji koja prouzrokuje promjenu mjesta. U mehanici je analogon pokretanje mase zbog gravitacije. Potencijalna energija je nezavisna od puta. U svijetu elektrike ova nezavisnost od puta važi u skoro svim slučajevima (ima iznimka: u magnetizmu, kod vremenski promjenljivog magnetskog polja, javlja se novi, inducirani napon $e = - \frac{d\phi}{dt}$, dakle ovisnost o putu između A i B).

Napon je pogon (uzrok kretanja) za naboje preko promjene pogonske energije.

Naponski izvor (izvor napona) je mjesto gdje se nabojima podjeljuje pogon. Naponski izvor daje energiju nabojima koji kroz njega prolaze. Otuda izraz da naponski izvor ima elektromotornu silu - EMS - pod tim se misli na energiju koju izvor predaje nosiocima naboja. Naponski izvor ima tendenciju da svoju energiju umanjuje i da je predaje nabojima i time je razdijeli na cijeli strujni krug. Svaki naponski izvor stvara težnju za cirkulacijom naboja.

Napon je dio EMS koja djeluje na jednom odsjeku strujnog kruga (A-B). Prolazom kroz dio strujnog kruga A-B, naboji gube pogonsku energiju.

Naboj na izlazu iz izvora ima veću energiju nego na ulazu u izvor, ali na ulazu u jedan dio strujnog kruga ima veću energiju nego na izlazu iz tog dijela strujnog kruga (pad napona!). Nakon tačno jednog obilaska kruga naboj ponovo dolazi u izvor i dobije opet novu energiju (jer naboj ne skuplja energiju).

Nosilac naboja prolazom kroz izvor napona dobije energiju u obliku pogonske energije i onda ovu energiju predaje za vrijeme prolaza kroz strujni krug na razne dijelove kruga (pad napona).

Električni napon se manifestira preko dvije pojave:

1. pogon struje: napon na krajevima jednog vodiča tjera električnu struju kroz vodič. Nema struje bez napona (jedinu izuzetak je supravodljivost, gdje za održavanje strujnog toka ne treba napon).
2. mehaničke sile: vodiči pod naponom se privlače kad je među njima izolator. Ove mehaničke sile su veoma malene.

Definicije EMS i napona

Na dijelu strujnog kruga A-B se vrši razmjena energije (pogonska energija - neka druga energija). Razmjena energije raste sa brojem nosioca naboja a također raste i sa naponom. Gubitak na pogonskoj energiji na putu A-B W_{AB} jednog naboja Q , podjeljena sa nabojem Q daje veličinu pada napona na putu A-B

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q}$$

dakle gubitak energije naboja Q na putu A-B.

Zbroj svih padova napona u strujnom krugu (za jedan obilazak!) je jednak ukupnom obilaznom naponu U_0 . Po zakonu akcije i reakcije pišemo

$$E = U_0$$

a energetski shvaćeno je

$$U_0 = \frac{W_0}{Q}$$

gdje je W_0 ukupni gubitak pogonske energije naboja Q za tačno jedan obilazak strujnog kruga. Ovu pogonsku energiju naboji dobiju od izvora. Jedan naboj dobije pri svakom prolazu kroz izvor bez obzira na oblik i vrstu strujnog kruga, energiju

$$W_E = QE$$

Ovu dobijenu energiju naboj potroši prolazom kroz strujni krug:

$$W_E = W_0.$$

Nosioci naboja ne vrše međusobno jednu na druge nikakav uticaj. Izvor dodjeli svakom pojedinačnom naboju određenu energiju W_0 , bez obzira da li je taj naboj sam ili sa milijardama drugih naboja u strujnom krugu. Osnovno je: EMS (izvor napona) ne pokazuje pojave zasićenja kao kemijske sile valencije.

Smjer EMS je određen smjerom u kome naboji dobivaju pogon. To je smjer prolaza kroz izvor napona pri čemu pozitivni nosilac naboja povisi svoju energiju. Smjer napona je određen smjerom u kome pozitivni nosilac naboja umanjuje svoju energiju u prolazu kroz strujni krug.

Aktivni dio strujnog kruga: izvor napona, sjedište EMS.

Pasivni dio strujnog kruga: mjesto pada napona, promjena pogonske energije u neku drugu energiju.

5. ZAKONI STRUJANJA U JEDNOSTAVNOM STRUJNOM KRUGU

Struja i napon u strujnom krugu mogu imati razne vrijednosti. Napon je uzrok za kretanje elektrona. Ovo kretanje je u toliko veće što je napon viši. Broj elektrona koji u jedinici vremena prolaze kroz presjek vodiča predstavlja u stvari jačinu struje pa je struja u toliko jača što je napon viši. Eksperimentalno se može potvrditi da je ovaj odnos linearan (direktno proporcionalan). Taj odnos se piše:

$$I = G U$$

G je faktor proporcionalnosti koji čisto brojčano određuje koliku struju prouzrokuje neki dati napon. Eksperimentalno se može pokazati da isti napon može prouzrokovati razne struje. Jačina struje nije zavisna samo o naponu nego i o vrsti strujnog kruga, tj. o tome kako strujni krug vodi struju, s kakvom provodljivošću se elektroni mogu kretati. Faktor G izražava ovu sposobnost provođenja strujnog kruga. Što vodiči strujnog kruga bolje vode, u toliko je jača struja koju prouzrokuje napon. Ovo svojstvo vodiča se zove "vodljivost" - simbol G.

U praksi se mnogo češće računa sa recipročnom vrijednošću

$$R = \frac{1}{G}$$

koja se naziva "otpor" i označava iznos kojim se vodič strujnog kruga suprostavlja nastajanju strujnog toka. Sa gornjom relacijom imamo

$$I = \frac{U}{R}$$

Ovo je opći oblik Ohm-ovog zakona: jačina struje raste sa povišenjem napona i u toliko je veća koliko je otpor manji.

Ovaj zakon je prvi i najvažniji odnos za električna strujanja u vodičima.

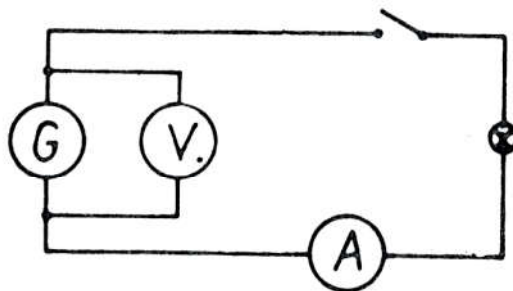
Ohmov zakon je samo u posebnom obliku izraženi opšti prirodni zakon akcije i reakcije. Po ovom zakonu je neko djelovanje (u našem slučaju struja) uvijek izazvano nekim uzrokom (u našem slučaju napon) koji omogućuje djelovanje, pri čemu razni otpori utječu na veličinu djelovanja i suprostavljaju mu se.

Ranije je u pregledu jedinica data i jedinica za otpor - om - simbol Ω kao i njena definicija.

Za vodljivost se upotrebljava jedinica Siemens - simbol S.

Ohmov zakon određuje veličinu jačine struje koja nastaje u nekom strujnom krugu kod datog napona i datog otpora strujnog kruga. Stoga je uobičajeno da se (obično) samo zadaje napon a ostalo onda slijedi. Najjača struja u nekom strujnom krugu može nastati u slučaju "kratkog spoja" - krug ima najmanji otpor jer su vodiči neposredno spojeni. Nastupaju velika toplinska opterećenja i jake sile što dovodi do velikih oštećenja. Upotrebljavaju se razni zaštitni uređaji - topivi osigurači, termo-releji i sl.

Za mjerenje struje i napona primjenjuje se Ohmov zakon. Struja kroz instrument ovisi pri konstantnom naponu samo o unutarnjem otporu instrumenta. Ako je otpor instrumenta poznat onda se skala instrumenta može baždariti neposredno u voltima.



Električni otpor zavisi od geometrijskih i materijalnih svojstava vodiča. Može se eksperimentalno pokazati da važi relacija

$$R = \varrho \frac{l}{S} = \frac{l}{\chi S}$$

gdje je ϱ - specifični otpor a χ - specifična vodljivost. Dimenzionalno je

$$\chi = \frac{l}{R} \frac{1}{S} = \left[\frac{1}{\Omega \text{ m}} = \frac{\text{Simens}}{\text{m}} \right]$$

$$\varrho = \frac{R S}{l} = \left[\frac{\Omega \text{ m}^2}{\text{m}} = \Omega \text{ m} \right]$$

Vrijednosti su date tabelarno u literaturi.

Električni otpor zavisi o temperaturi. Porast otpora za temperaturnu razliku od 1°C zove se temperaturni koeficijent α i pritom je prirast otpora αR_1 , a za porast $t_2 - t_1$ imamo

$$R_2 = R_1 + \alpha R_1 (t_2 - t_1) = R_1 \left[1 + \alpha (t_2 - t_1) \right]$$

Tabelarno su date vrijednosti α za temperaturu $t_1 = 20^{\circ}\text{C}$. Otpor kod neke druge temperature je

$$R = R_{20} \left[1 + \alpha_{20} (t - 20) \right]$$

α je u većini slučajeva pozitivno, tj. otpor raste s temperaturom. Neki materijali imaju α negativno (ugljen). Za većinu metala je α oko 0,004, tj. otpor raste po 1°C za 0,4%. Neke legure (konstantan) imaju veoma malu promjenu otpora s temperaturom (primjena: precizioni i regulacioni otpornici).

Gornje jednačbe daju dobre praktične rezultate za temperature do 200°C . Za više temperature važi tačnija relacija

$$R_2 = R_1 \left[1 + \alpha (t_2 - t_1) + \beta (t_2 - t_1)^2 \right]$$

Za $t_1 = 20^\circ\text{C}$, α ima istu vrijednost kao i ranije, dok je β tako malen da se $\beta (t_2 - t_1)^2$ može zanemariti. β je za bakar $6 \cdot 10^{-6}$, a za aluminium $\beta = 1,3 \cdot 10^{-5}$.

Mjerenje temperature.

Ako nije poznat otpor kod 20°C , onda se ipak gornja relacija može upotrebiti za određivanje temperature, ako su poznata mjerenja otpora na nekoj hladnijoj i nekoj toplijoj temperaturi

$$R_{\text{toplo}} = R_{20} \left[1 + \alpha_{20} (t_t - 20) \right]$$

$$R_{\text{hladno}} = R_{20} \left[1 + \alpha_{20} (t_h - 20) \right]$$

Ako podijelimo obe jednačbe onda imamo

$$\frac{R_{\text{toplo}}}{R_{\text{hladno}}} = \frac{1 + \alpha_{20} (t_t - 20)}{1 + \alpha_{20} (t_h - 20)}$$

Ako još podijelimo sve sa α_{20} i uz kraticu

$$\tau = \frac{1}{\alpha_{20}} - 20$$

dobijemo

$$\frac{R_{\text{toplo}}}{R_{\text{hladno}}} = \frac{\tau + t_t}{\tau + t_h}$$

Supstitucijom $\mathcal{J} = t_t - t_h$ izlazi za

$$\mathcal{J} = \frac{R_t - R_h}{R_h} (235 + t_h); \quad t_t = \mathcal{J} + t_h$$

odakle se može izračunati jedan otpor ako je poznat drugi i obje temperature t_t i t_h . Za običan bakar je $\tau = 235$ ($\alpha = 0,00393$).

Razdioba napona u strujnom krugu

U jednostavnom strujnom krugu - serijski spoj - teče svuda ista jačina struje. U svakom dijelu kruga nastaju gubici - padovi napona. Pad napona nastaje čak i u samom izvoru - unutarnji pad napona. Ako promatramo strujni krug (skica), onda možemo pisati

$$E = U_i + U_{BC} + U_R + U_{DA}$$

E - je sveukupni napon koji djeluje u strujnom krugu.

U - je općenito, razlika između dvije tačke - naponska razlika - napon - dio EMS koji preostaje između dvije tačke strujnog kruga.

U_i je unutarnji pad napona, a ostali članovi su vanjski pad napona. Napon na stezaljkama izvora je onda

$$U_k = U_{BC} + U_R + U_{DA}$$

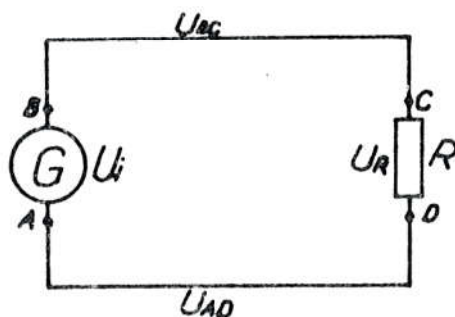
odnosno

$$U_k = E - U_i$$

Napon u mreži - "mrežni napon" je napon stezaljki umanjen za sve padove napona do onog mjesta gdje je potrošač priključen na mreži.

Ohmov zakon se može poopćiti za svaki strujni krug, gdje stoji na raspolaganju napon U , dakle

$$U = I R$$



Može se napisati da je

$$E = IR_i + IR_{BC} + IR_R + IR_{DA} = I (R_i + R_{BC} + R_R + R_{DA})$$

Izraz u zagradi je serijski otpor R_g , pa je

$$R_g = \sum R$$

a otuda

$$I = \frac{U}{R_g}$$

Ako ima više potrošača, postupa se kao i ranije, tj. zbroj svih djelomičnih otpora daje ukupni otpor, na osnovu koga se onda može izračunati struja koja teče sistemom). Zbog svuda iste struje može se pisati (za više otpora R_1, R_2, R_3)

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_3}{R_3} = \dots$$

Tako za dva otpora u seriji R_1 i R_2 i njihove pripadajuće padove napona važi

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Padovi napona U se odnose kao otpori R (djelitelj napona).

Diskusija odnosa u jednostavnom strujnom krugu

Jednostavni strujni krug se sastoji od aktivnog dipola, vodova i pasivnog dipola. Pasivni dipol je sklop sa dvije priključne stezaljke - tačke i ne sadrži izvor EMS. Aktivni dipol sadrži EMS

Treba razmotriti odnose struje i napona pri zadatoj E , R_i , R_a . R_a se može učiniti promenljivim da bi se međusobni odnosi bolje upoznali. Polazi se od formule

$$U_i = IR_i \text{ (pad napona u izvoru)}$$

$$U = IR_a \text{ (napon u vanjskom krugu)}$$

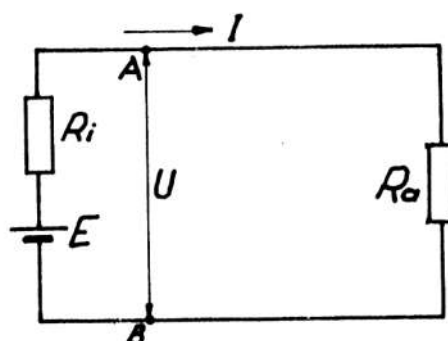
$$E = U_i + U = I (R_i + R_a)$$

Iz ovoga slijedi

$$I = \frac{E}{R_i + R_a} = \frac{E}{R_g}$$

odnosno

$$U = E \frac{R_a}{R_i + R_a}$$



Ovo su osnovni odnosi struje i napona u jednostavnom strujnom krugu.

Diskusija: Što je R_a manji, to je veća struja. Za $R_a = 0$ je struja maksimalna - kratki spoj. Napon međjutim raste sa rastućim R_a i kod $R_a = \infty$ postiže najveću vrijednost - prazni hod - napon praznog hoda U_p (izvor napona).

Teoretski kratki spoj

$$R_a = 0; \quad I = I_{\max} = I_k = \frac{E}{R_i}; \quad U = U_{\min} = 0$$

Teoretski prazni hod

$$R_a = \infty; \quad I = I_{\min} = 0; \quad U = U_{\max} = U_p = E$$

Interesantan je slučaj kad je $R_a = R_i$. Tada važi

$$I = \frac{I_k}{2}; \quad U = \frac{U_p}{2}$$

gdje je

$$I_k = \frac{E}{R_i} ; \quad U_p = E ; \quad R_i = \frac{U_p}{I_k}$$

Ovakav slučaj se naziva prilagodjenje.

Kod neopterećenog izvora, napon stezaljki se istodobno EMS. (Mogućnost da se odredi EMS).

Praktički se idealni kratki spoj i prazni hod ne mogu egzaktno realizirati. (Već i mali komad žice ima neki otpor). Mogu se postići rezultati sa nekom malom korekturom ΔI_k odnosno ΔU_p . To se može izračunati ako se osnovne relacije napišu u obliku:

$$I = \frac{E}{R_i} \frac{1}{1 + \frac{R_a}{R_i}} = I_k \frac{1}{1 + \frac{R_a}{R_i}} ; \quad I = I_k - \Delta I_k$$

$$U = E \frac{1}{1 + \frac{R_a}{R_i}} = U_p \frac{1}{1 + \frac{R_a}{R_i}}$$

Ovdje nije važan apsolutni iznos R_a nego je samo odnos R_a/R_i mjerodavan. Otuda imamo:

Praktični kratki spoj:

$$R_a \ll R_i \quad I = I_k - \Delta I_k \quad U \approx I_k R_a \ll U_p$$

pri čemu je

$$\frac{\Delta I_k}{I_k} \approx \frac{R_a}{R_i}$$

(Izvod:

$$I = I_k - \Delta I_k$$
$$I = I_k \left(1 - \frac{\Delta I_k}{I_k} \right) = I_k \frac{1}{1 + \frac{R_a}{R_i}} ;$$

Ako se binomni red $(1 + \frac{R_a}{R_i})^{-1}$ razvije u red potencija, može se za male vrijednosti

$\frac{R_a}{R_i}$ uzeti da je

$$(1 + \frac{R_a}{R_i})^{-1} \approx 1 - \frac{R_a}{R_i}$$

pa izjednačenjem

$$I_k - \Delta I_k = I_k (1 - \frac{R_a}{R_i})$$

dobijemo

$$\frac{R_a}{R_i} = \frac{\Delta I_k}{I_k}$$

Praktični prazni hod:

$$R_a \gg R_i, I \approx \frac{U_p}{R_a} \ll I_k, U = U_p - \Delta U_p$$

kod čega je

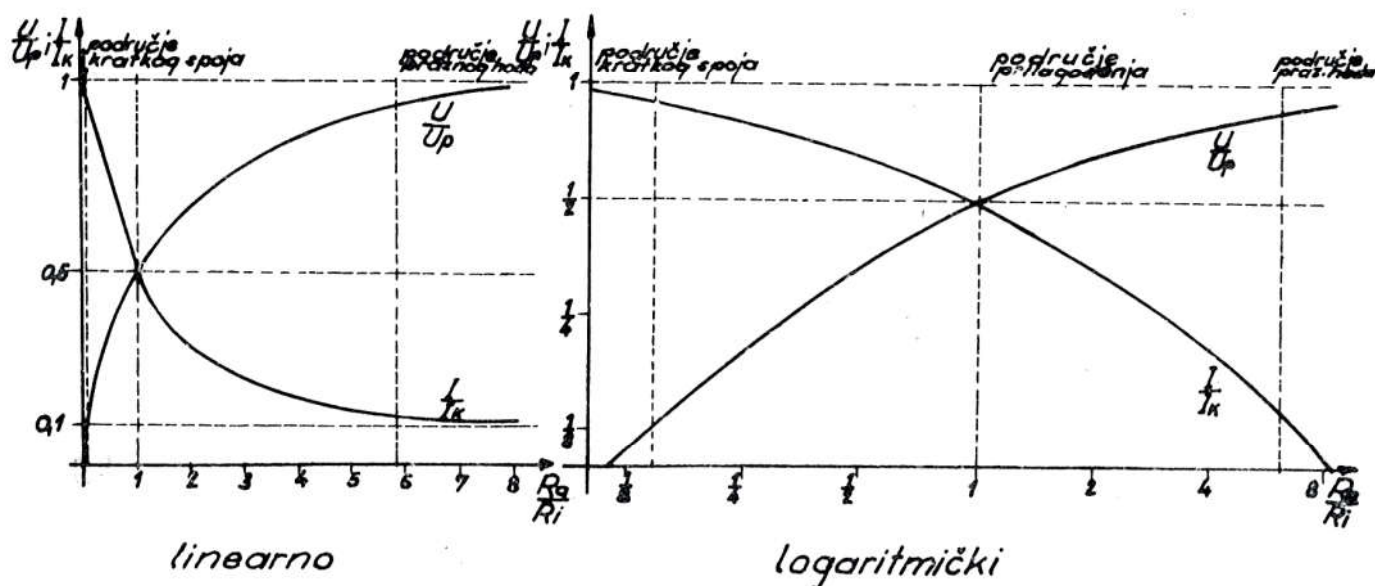
$$\frac{\Delta U_p}{U_p} \approx \frac{R_i}{R_a}$$

[Ako se hoće izmjeriti napon praznog hoda naponskog izvora sa

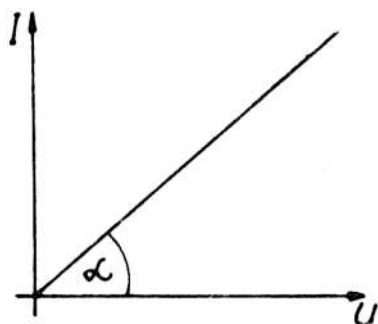
$R_i = 50 \text{ m}\Omega$ sa tačnošću od najmanje 1%, onda (zbog

$\Delta U_p / U_p < 0,01$) otpor instrumenta mora biti $R_a > 100 R_i$, tj. $> 5\Omega$]

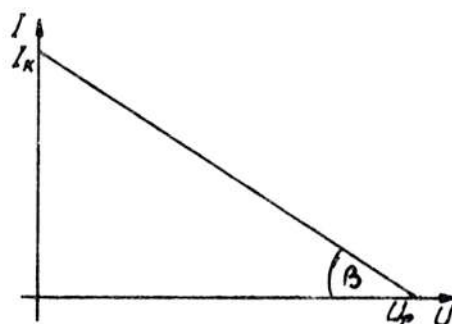
Grafički se to može ovako prikazati:



Još treba istražiti međusobne odnose struje i napona za aktivni i pasivni dvopol. Za pasivni dvopol R_a važi odnos $U = I R_a$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{R_a}$$



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{R_i}$$

Za aktivni dvopol napon je najveći kad se ne oduzima nikakva struja, a pada kad struja raste

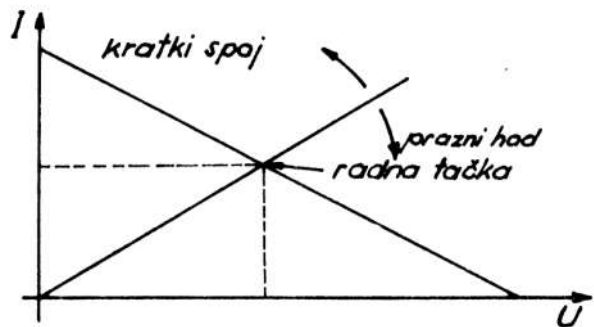
$$U = U_p - U_i = U_p - I R_i$$

Napon stezaljki je manji od EMS za unutarnji pad napona $I R_i$.

Kad se spoje generator i potrošač uspostavi se onaj par vrijednosti koji odgovara objema krivuljama tj. njihovom sjecištu.

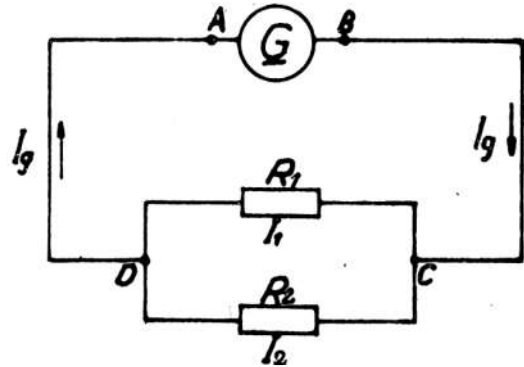
Promjena potrošača:

R_a znači da se krivulja potrošača okreće (mijenja nagib) oko koordinatnog ishodišta.



6. ZAKON STRUJANJA U RAZGRANATOM STRUJNOM KRUGU

Ako se potrošači spoje-
ni u paralelnom spoju, onda kroz
njih teku djelomične struje na-
kon granjanja u čvorištu C, da
se kasnije u čvorištu D opet
spoje u zajedničku struju I_g .
Elektroni i nakon granjanja sto-

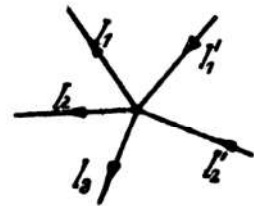


je pod djelovanjem istog napona. Nema sakupljanja (nagomila-
vanja) elektrona u tački C. Suma struja I_1 i I_2 jednaka je
struji I_g . Ovo važi i za tačku D. Važi s toga

$$I_g = I_1 + I_2 ,$$

odnosno općenito

$$I_g = \sum I$$



U slučaju više dolazećih i odlazećih struja važi

$$\sum I' = \sum I$$

odnosno općenito za svako čvorište

$$\underline{\sum I = 0}$$

To je prvi Kirchhoff-ov zakon i glasi: U svakom čvorištu je
suma svih dolazećih i odlazećih struja jednaka 0.

Dolazeće struje se označavaju pozitivno a odlazeće
negativno. Promjena jačine struje nastaje samo u čvorištu.
Između dva čvorišta teče uvijek ista struja.

Kako su svi paralelno spojeni potrošači uvijek pod istim naponom, mogu se priključivati na mrežu razna trošila sve dok se ne dostigne dozvoljena vrijednost ukupne struje (zbog opterećenja mreže - vodiča). Uslov je samo da je svaki potrošač dimenzioniran za napon mreže - tzv. nazivni napon (naznačen na aparatima, žaruljama itd.). Generatori i centrale stvaraju toliku EMS da nakon odbitaka svih padova napona, na mjestu potrošnje stoji na raspolaganju približno npr. 220 V.

Na tačkama čvorišta stoji na raspolaganju napon U_k koji je dobijen nakon što su od EMS oduzeti padovi napona U_1 u samom generatoru, a zatim padovi napona u spojnim vodovima BC i DA. Ovaj napon U_k tjera obje djelomične struje, tako da se napon U_k troši u svakoj od paralelnih grana. Zbog toga moraju pojedini padovi napona $I_1 R_1$, $I_2 R_2$ biti jednaki naponu na stezaljkama U_k između tačaka C i D:

$$U_k = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3 = \dots$$

Padovi napona u paralelnim granama su međusobno jednaki. Za dvije grane se može pisati

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Djelomične struje se odnose obrnuto proporcionalno prema otporima (djelitelj struje). Kroz veći otpor teče manja struja i obrnuto.

U zamršenijim slučajevima se moraju računati nadomjesni otpor da bi se moglo doći do ukupne struje u strujnom krugu. Za proračun nadomjesnog otpora polazi se od prvog Kirchhoffovog zakona

$$\frac{U}{R_g} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \text{itd.}$$

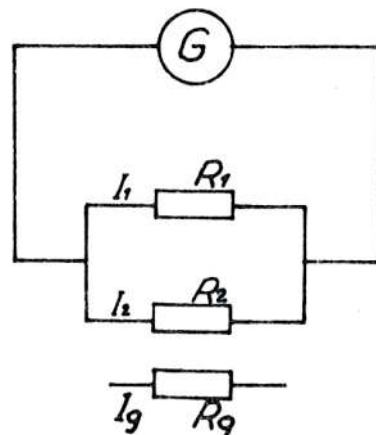
Ako se skрати sa U , onda je

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

Za slučaj dva otpora R_1 i R_2 imamo

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$R_g = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

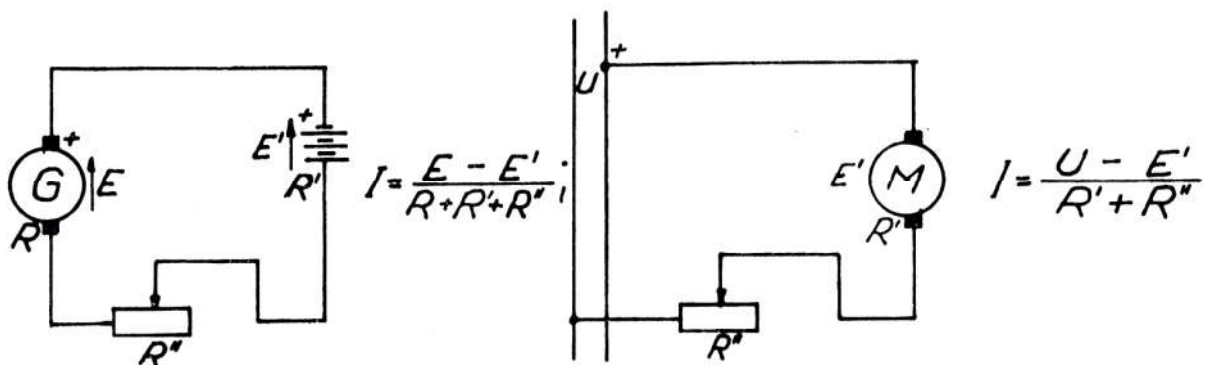


Ako su otpori jednaki, onda je za n otpora

$$R_g = \frac{R}{n}$$

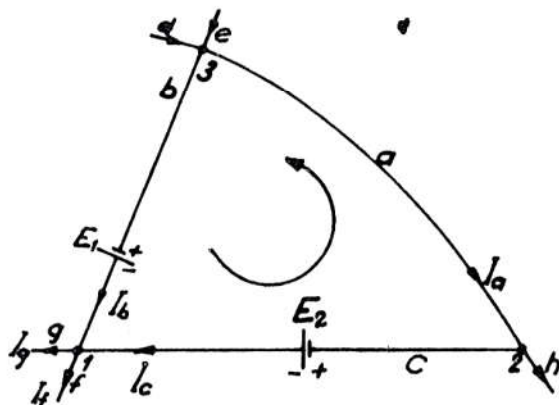
Valja napomenuti da je nadomjesni otpor R_g uvijek manji od najmanjeg pojedinačnog otpora.

Drugi Kirchhoff-ov zakon. U jednostavnom strujnom krugu treba uzeti u obzir i unutarnji otpor samog izvora struje, pa obično relaciju $I = E/R$ treba pisati $I = E/(R_i + R_v)$, gdje je R_i unutarnji otpor izvora a R_v zbroj svih ostalih otpora. Ako u krugu ima više elektromotornih sila (baterije u seriji, punjenje baterije generatorom, motor u krugu sa generatorom i sl.), onda E znači algebarsku sumu svih EMS. Pozitivne se računaju one elektromotorne sile koje bi same za sebe proizvele struju u smjeru struje I , a negativne su one koje djeluju suprotno (protu-EMS).



Ako imamo linearnu mrežu (kombinacija linearnih vodiča stalnog otpora) sa eventualnim izvodima EMS u nekim granama, onda za ovakvu mrežu važi I Kirchhoff-ov zakon; za svako čvorište $\sum I = 0$. Osim toga, svaka zatvorena petlja (zamka) predstavlja jedan strujni krug za koga važi Ohmov zakon. Potencijali na razgraništima su V_1, V_2, V_3 .

Naponi između krajeva grana a, b i c su U_a, U_b i U_c . Ako uzmemo neki proizvoljni smjer obilaženja petlje, onda možemo napisati ovakvu relaciju:



$$U_a = V_2 - V_3$$

$$U_b = V_3 - V_1$$

$$U_c = V_1 - V_2$$

Ako se ove relacije broje dobije se

$$U_a + U_b + U_c = 0$$

Obilazni napon neke zatvorene petlje jednak je nuli.

Za svaku granu uzetu za sebe, mora vrijediti Ohmov zakon, napr. za granu "a"

$$U_a = - I_a R_a$$

gdje je struja I_a uzeta negativno jer je nasuprot smjera obilaženja petlje.

U granama "b" i "c" osim otpora su EMS sa označenim polaritetom. Smisao djelovanja EMS je takav da njen napon mora savladati (kao da iz + izlazi struja), pa se može pisati:

$$U_b = + I_b R_b - E_1$$

$$U_c = - I_c R_c + E_2$$

Ako se ovo uvrsti u $U_a + U_b + U_c = 0$, dobije se

$$- E_1 + E_2 = - I_a R_a + I_b R_b - I_c R_c$$

Općenito se može pisati

$$\underline{\sum E = \sum I R}$$

i to je drugi Kirchhoff-ov zakon: U svakom zatvorenom krugu i svakoj petlji je suma svih napona jednaka nuli; ili drukčije formulirano: u svakoj zatvorenoj petlji algebarska suma EMS jednaka je algebarskoj sumi padova napona.

Pad napona dat je relacijom

$$\delta = I R_k$$

Radi toga je napon stezaljki nekog izvora manji za δ od EMS:

$$U_k < E$$

$$U_k = E - I R_i$$

gdje je R_i unutarnji otpor izvora. Napon stezaljki jednak je EMS samo u slučaju $R_a = \infty$, - "otvoreni" izvor. Napon stezaljki neopterećenih izvora jednak je njegovoj EMS. Primjena: mjerenje napona generatora sa voltmetrom velikog unutarnjeg otpora.

Dalja primjena: proširivanje mjernih opsega voltmetra i ampermetra.

Za mjerenje istosmjernih struja i napona upotrebljavaju se instrumenti sa pomičnim svitkom i permanentnim magnetom. Ampermetri su uključeni u tok, a voltmetri paralelno sa tokom struje. Voltmetar ne pokazuje direktno napon nego struju koja teče kroz instrument $I_g = U/R_g$, pa je onda napon $U = I_g R_g$; to je naznačeno na skali instrumenta.

Instrumenti (galvanometri) su veoma osjetljivi. Običan sistem je tako gradjen da ima puni otklon napr. kod struje $I_g = 3 \text{ mA}$, a ima otpor $R_g = 20 \text{ oma}$, onda može služiti samo kao ampermetar do $0,003 \text{ A}$, a kao voltmetar do $0,003 \cdot 20 = 0,06 \text{ V}$.

Ako voltmetru dodamo u seriju neki otpor (predotpor) X , a ampermetru spojimo poredni otpor (shunt), možemo proširiti mjerna područja tih instrumenata.

Predotpor: instrument otpora R_g mjeri napon U ; struja punog otpora je I_g , a X je predotpor pa važi relacija

$$U = I_g (R_g + X)$$

$$X = \frac{U - I_g R_g}{I_g}$$

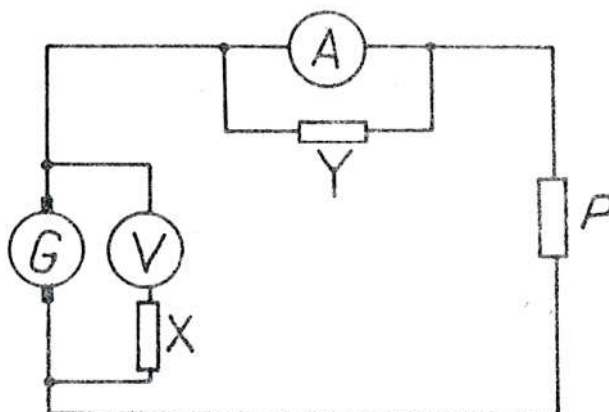
Kod porednih otpora je ovakav postupak: Ako se R_g ukapča u tok struje I kombiniran sa porednim otporom Y onda kod struje punog otklona I_g mora kroz poredni otpor teći ostatak struje $I = I_g$, dakle mora važiti razmjer

$$I_g : (I - I_g) = Y : R_g$$

iz čega se izvodi

$$Y = \frac{I_g R_g}{I - I_g} = \frac{\delta_g}{I - I_g}$$

gdje je δ_g - potrošak instrumenta.



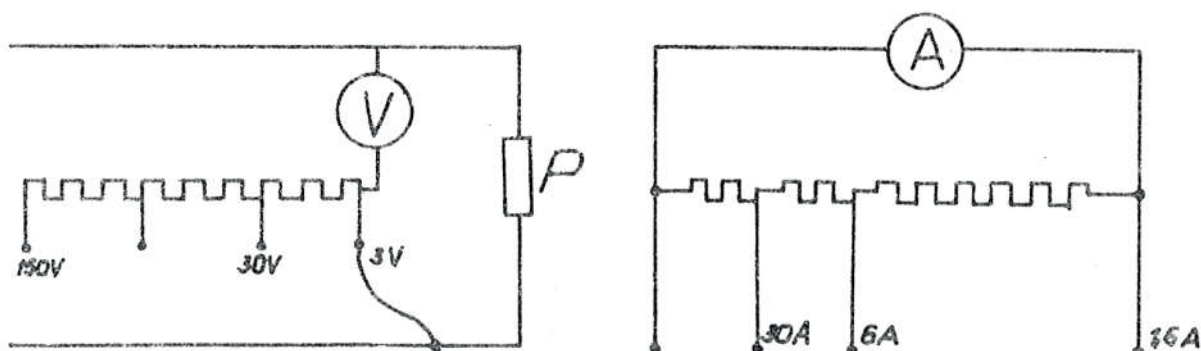
Voltmetar treba da ima što veći unutarnji otpor a ampermetar što manji jer onda mjerenje ne poremećuje odnose u strujnom krugu, a vlastiti potrošak instrumenta je neznatan.

Ekvivalentni otpor

$$\text{ampermetar } r_A = \frac{R_g Y}{R_g + Y}$$

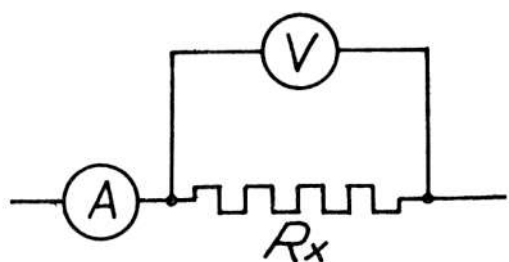
$$\text{voltmetar } r_V = R_g + X$$

Na sličan način se mogu kombinirati otpori za više "mjernih opsega" (višestruki instrumenti).



Daljnju značajnu primjenu zakona razgranjavanja u mjernoj tehnici predstavljaju razne metode za mjerenje otpora.

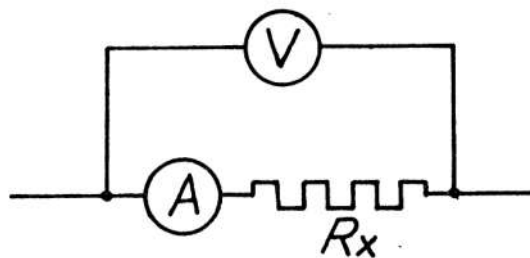
U - I - metoda. Otpor se izračuna iz očitanih iznosa napona i struje po formuli $R_x = U/I$



R_x - malen

Upotreba: za mjerenje manjih otpora.

Zanemariva struja kroz voltmetar.



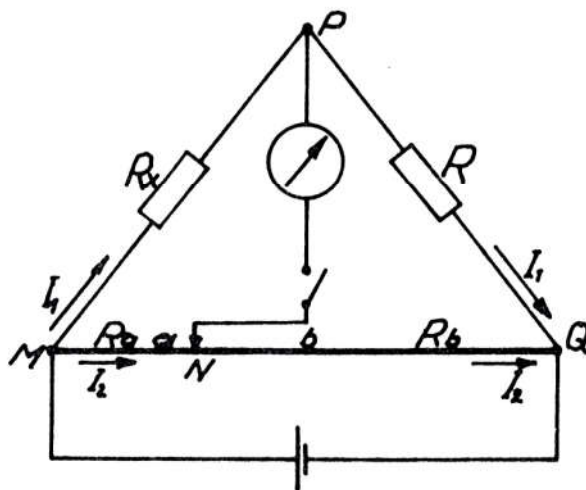
R_x - velik

Upotreba: za mjerenje većih otpora

Zanemariv pad napona na ampermetru

Wheatstone-ov most. Upotrebljava se za mjerenje otpora srednje veličine. Zahtjeva da se ima na raspolaganju otpor za usporedbu i "nul-instrument". Klizna žica je također otpornik, razdjeljen kliznim kontaktom u dva dijela. Kad se kliznim kontaktom uspostavi ravnoteža mosta (kroz nul-instrument ne teče struja), onda su tačke P i N na istom potencijalu, pa su i naponi između M i P te M i N jednaki, a također i naponi između P i Q te N i Q.

Stoga važi relacija (II. K. Z.):



$$I_X R_X = I_2 R_a$$

$$I_1 R = I_2 R_b$$

ako podijelimo ove jednadžbe, imamo

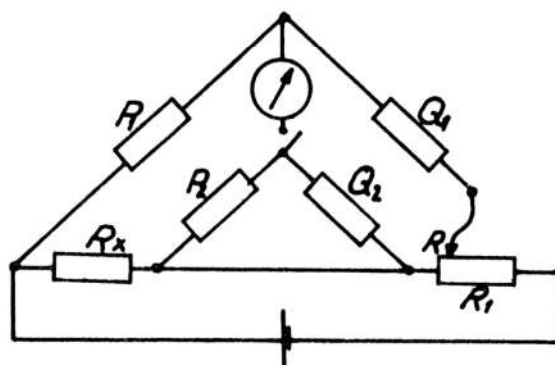
$$\frac{R_x}{R} = \frac{R_a}{R_b}$$

što predstavlja uvjet ravnoteže mosta.

Thomson-ov dvostruki most

P_1 i P_2 su međusobno jednaki. Q_1 i Q_2 su također međusobno jednaki. Ako je $P_1/Q_1 = P_2/Q_2 = n$, onda se nepoznati otpor R_x odnosi prema poznatom otporu R (dio otpora R_1) kao $n:1$, pa važi za ravnotežu mosta

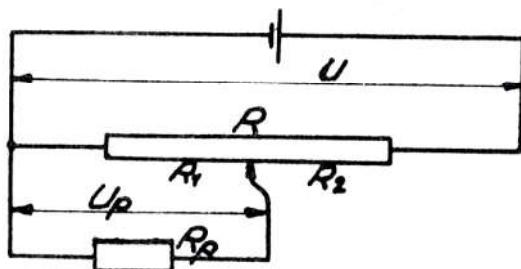
$$R_x = n R = R \frac{P_1}{Q_1} = R \frac{P_2}{Q_2}$$



Ovaj most se upotrebljava za mjerenje sasvim malih otpora.

Metoda kompenzacije. Upotrebljava se za mjerenje napona i EMS upoređivanjem neke nepoznate EMS E_x sa poznatom E . I ovdje se radi o nul-metodi.

Najprije ćemo pokazati odnose kod tzv. potencijometra (djelitelja napona) koji služi da bi se od nekog postojećeg napona U mogli oduzeti određeni manji dijelovi



Otpor cijele kombinacije na slici je

$$R_g = \frac{R_1 R_p}{R_1 + R_p} + R_2$$

gdje je R_p otpor potrošača. Traži se veličina napona U_p na potrošaču, za slučaj da je $R_p \gg R_1$. U tom slučaju se u nazivniku može zanemariti R_1 i sakriti R_p pa ostaje

$$R_g \approx R_1 + R_2$$

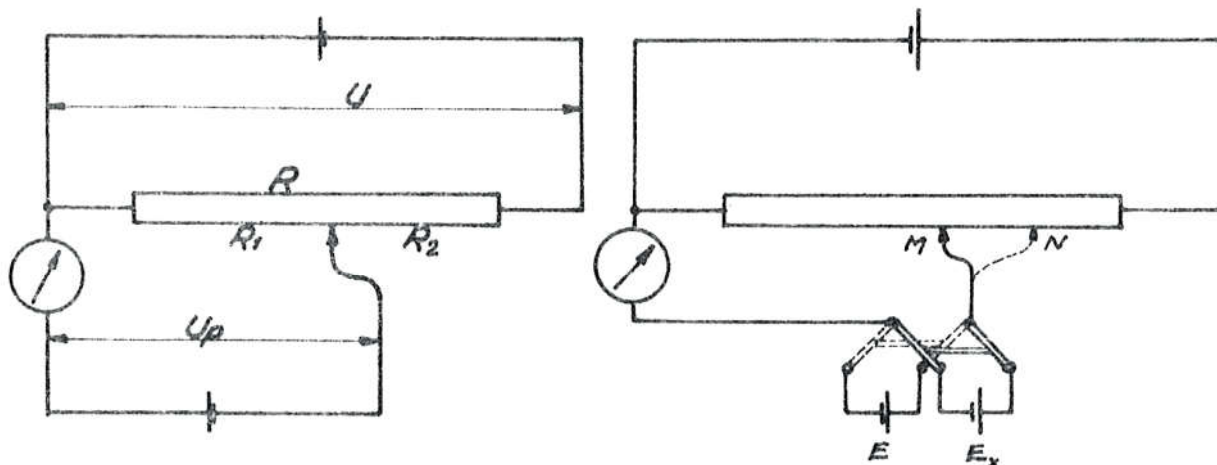
sada važi odnos (jer imamo serijski spoj):

$$U_p : U = R_1 : (R_1 + R_2) \text{ ili}$$

$$U_p \approx U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Naponi su upravo proporcionalni otporima. Primjena potencio- metra ima smisla samo kad su u pitanju veoma male struje, jer treba mijenjati napon u veoma širokim granicama.

Ako se sada umjesto R_p uključi izvor EMS takvog smje- ra da se upravo poništi U_p , onda kroz ovu granu ne teče struja (nul-metoda). Ovakav spoj se zove kompensacioni spoj, a meto- da mjerenja metoda kompenzacije.



U ovom slučaju važi egzaktno odnos

$$U_p = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Kako su u momentu ravnoteže obje grane bez struje, to je ovakvo mjerenje upravo sasvim korektno za mjerenje EMS, jer izvori nisu uopće opterećeni.

Za uporedjenje i mjerenje EMS služi više spoj prema desnoj slici. Nakon uspostavljenе ravnoteže sa izvorom E u tački M, priključi se izvor E_x i uspostavi se nova ravnoteža u tački N. Pad napona između tačaka M i N je ustvari iznos nepoznate elektromotorne sile E_x .

Spajanje većeg broja izvora u baterije

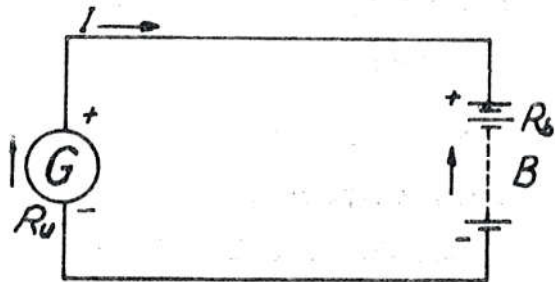
a) Generator puni baterije (serijski spoj).

Ukupni otpor $R_g = R_u + R_b$ (unutarnji otpori generatora i baterije). Generator i baterija su u protuspoju, pa je po drugom K.Z. :

$$E = E_g - E_b = I R_g$$

pa imamo

$$E_g = I R_g + E_b$$



što predstavlja generatorski napon. Napon na stezaljkama generatora je

$$U_k = E_g - I R_u$$

Razlika $E_g - U_k$ je vlastiti pad napona u generatoru, a $I R_g - (E_g - U_k)$ je napon koji treba baterija za savladavanje svog unutarnjeg otpora.

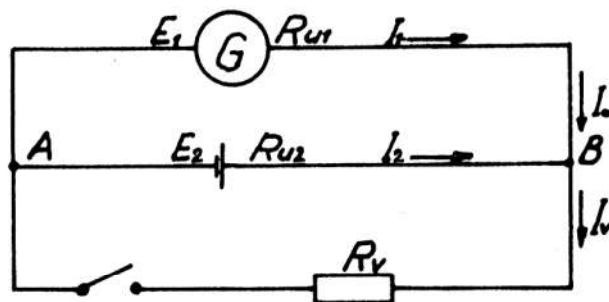
U generatoru, gdje je smjer EMS i struje isti, EMS je veća od napona na stezaljkama. U bateriji gdje struja punjenja teče na suprot EMS bateriji, veći je napon na stezaljkama nego je EMS baterije.

b) Paralelni izvori. Dva paralelno spojena izvora sa EMS E_1 i E_2 i unutarnjim otporima R_{u1} i R_{u2} . Napon u tačkama A i B je jednak naponima stezaljki oba izvora: $U_{k1} = U_{k2}$. Kad je strujni vanjski krug otvoren, onda u slučaju različitih EMS teče struja izjednačenja I_o . Za E_1 E_2 imamo:

$$U_k = E_1 - I_o R_{u1} = E_2 + I_o R_{u2}$$

$$I_o = \frac{E_1 - E_2}{R_{u1} + R_{u2}}$$

Izvor sa manjom EMS vodi struju koja je suprotnog smjera u odnosu na smjer njegove vlastite



EMS. Da se izbjegnu ovakvi gubitci, trebaju paralelno spojeni izvori u praznom hodu imati jednake EMS.

Kad se sistem optereti sa vanjskim otporom R_v (zatvoren prekidač), mogu nastupiti struje izjednačenja kad je R_v veliki. Između tačaka A i B može postojati samo jedan napon U_k , tako da važe jednačbe:

$$U_k = E_1 - I_1 R_{u1} = E_2 - I_2 R_{u2} = I_v R_v$$

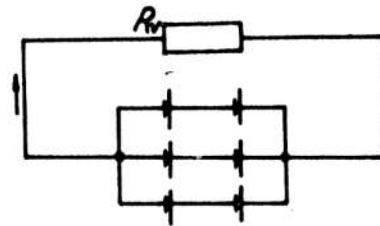
Ako su poznate obje EMS, sva tri otpora, onda se mogu izračunati sve tri struje, ako se uzme u obzir da je $I_v = I_1 + I_2$, pa imamo:

$$I_1 = \frac{E_1 - I_v R_v}{R_{u1}} ; \quad I_2 = \frac{E_2 - I_v R_v}{R_{u2}} ; \quad I_v = \frac{E_1 R_{u2} + E_2 R_{u1}}{R_{u1} R_{u2} + R_{u2} R_v + R_{u1} R_v}$$

Dok je struja I_V uvijek pozitivna, može struja u jednom od dva izvora postati negativna (struja izjednačenja). U centralama se EMS - e tako podešavaju da generatori budu opterećeni srazmerno njihovim nominalnim strujama. Izuzetak je akumulatorski pogon (automobilska instalacija). Kad je vanjski prekidač otvoren ($R_V = \infty$) onda generator puni bateriju. Ako otpor R_V varira u nekim granicama, onda možemo imati stanje punjenja ili pražnjenja, već prema tome koliki je R_V .

c) Prilagodjenje paralelnih izvora na potrošač. Ako imamo grupu izvora koje treba spojiti u bateriju postavlja se pitanje - u kom slučaju kroz potrošač R_V teče maksimalna struja? Ako je baterija sastavljena

od n elemenata, spojenih u y paralelnih grupa po x serijski spojenih elemenata pojedinačne EMS E_1 i unutarnjeg otpora R_1 , onda



će struja kroz R_V iznositi: (uz $y = n/x$; $R_u = xR_1/y$)

$$I = \frac{E}{R_u + R_V} = \frac{x E_1}{xR_1/y + R_V}$$

$$I = \frac{E_1}{R_1 x/n + R_V/x}$$

i bit će najjača kad nazivnik bude najmanji tj. prva derivacija po x mora biti jednaka nuli. Dakle,

$$\frac{R_1}{n} - \frac{R_V}{x^2} = 0$$

odakle imamo uvjet za maksimalnu struju:

$$R_V = R_1 \frac{x^2}{n} = R_u = \frac{R_1 x}{y}$$

dakle unutarnji otpor jednak je vanjskom (prilagodjenje). Primjena: samo u tehnici slabih struja, za što jači signal bez obzira na slab stupanj djelovanja. U tehnici jake struje pravilo $R_u = R_v$ nema praktične važnosti.

Pomoćni teoremi pri rješavanju linearnih mreža

Osim već navedene primjene prvog i drugog Kirchhoff-ovog zakona za rješavanje linearnih mreža, mogu se primijeniti još i dva druga teorema, pomoću kojih se također rješavaju linearne mreže.

1. Zakon superpozicije (po Helmholtzu) kaže da su struje i naponi u pojedinim granama mreže jednaki algebarskoj sumi djelomičnih struja odnosno napona koje proizvode pojedine EMS. Kod proračuna, sve se EMS u pojedinim granama stave jednako nuli osim jedne EMS pa se računaju djelomične struje u svim granama, prouzrokovane ovom EMS. Pri tome se ništa ne mijenja u rasporedu otpora, pa ni unutarnjih otpora izvora. Na isti način se računaju djelomične struje za ostale EMS (za svaku EMS pojedinačno). Stvarna struja u svakoj grani se dobije zbrajanjem - superpozicijom - algebarskom sumom svih ovih djelomičnih struja (vodeći računa o smjeru pojedinih struja).

Zakon superpozicije se može također primijeniti i na cijele petlje. Pretpostavi se za svaku petlju mreže jedna struja koja teče kroz sve grane, pa se superponiraju u pojedinim granama ove struje petlji (zamki).

Kao primjer izradjen je problem paralelnih izvora.

2. Theveninov teorem služi također za računanje linearnih mreža i glasi: struja u ma kojoj grani (A) neke linearne mreže može se računati, zamišljajući u toj grani neku fiktivnu EMS E_A (pri ugašenim stvarnim EMS mreže). Ta fiktivna EMS jed-

naka je naponu što bi se pojavilo pri prekidu grane A između mjesta prekida kad stvarne EMS mreže djeluju.

Ovaj se teorem zasniva na principu superpozicije (koji pretpostavlja da se radi o jednom te istom sklopu). Međutim, iskapčanje (prekidanje) sklopke mijenja suvislost sklopa. Ne može se superponirati stanje uz iskopčanu sklopku sa stanjem uz ukopčanu sklopku.

Dokaz ovog teorema je moguće provesti uz pomoć Laplace-ove transformacije.

3. Transfiguracija mreža. Ako su otpori u nekoj mreži složeni u formaciji koje su u stvari poligon, onda se može transfiguracijom poligona u zvijezdu često olakšati računanje. Važi također i obrnuta transfiguracija zvijezde u poligonu.

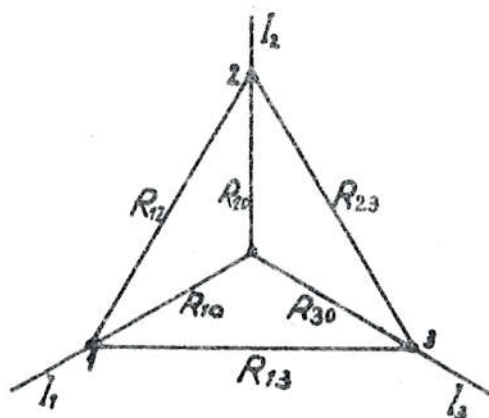
Kao primjer se računa transfiguracija trokuta otpora u zvijezdu otpora.

Obilazni otpor trokuta:

$$R = R_{12} + R_{23} + R_{13}$$

vodljivost zvijezde:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{20}} + \frac{1}{R_{30}}$$



Pri računanju polazimo od činje-

nice da potencijali tačaka 1, 2, 3 (V_1 , V_2 , V_3) moraju ostati nepromijenjeni a isto tako i struje I_1 , I_2 , I_3 . Struje se računaju pozitivno ako su ulazne, a negativno ako su izlazne.

$$V_1 - V_2 = I_{12} R_{12} \quad V_2 - V_3 = I_{23} R_{23} \quad V_3 - V_1 = I_{31} R_{13}$$

$$I_{23} = I_{12} + I_2 ; \quad I_{31} = I_{12} - I_1 ;$$

$$I_{12} = \frac{I_1 R_{13} - I_2 R_{23}}{R}$$

a iz toga supstitucijom I_{12} u $V_1 - V_2 = I_{12} R_{12}$

$$V_1 - V_2 = \frac{R_{12} (I_1 R_{13} - I_2 R_{23})}{R}$$

S druge strane, u zvijezdi (V_0 je potencijal zvjezdišta)

$$V_1 - V_0 = I_1 R_{10}; \quad V_2 - V_0 = I_2 R_{20}; \quad V_3 - V_0 = I_3 R_{30}$$

pa se odbijanjem prvih dviju jednačbe dobije

$$V_1 - V_2 = I_1 R_{10} - I_2 R_{20}$$

Ako razlike potencijala za oba oblika moraju biti identične, onda vrijedi

$$\frac{R_{12} (I_1 R_{13} - I_2 R_{23})}{R} = I_1 R_{10} - I_2 R_{20}$$

iz čega izlazi ekvivalentni otpori zvijezde

$$R_{10} = \frac{R_{12} R_{13}}{R}; \quad R_{20} = \frac{R_{12} R_{23}}{R}; \quad R_{30} = \frac{R_{13} R_{23}}{R}$$

Za prelaz sa zvijezde na trokut, važe ove relacije:

$$R_{12} = \frac{R_{10} R_{20}}{R_0}; \quad R_{23} = \frac{R_{20} R_{30}}{R_0}; \quad R_{13} = \frac{R_{10} R_{30}}{R_0}$$

Općenito uzevši, n - kraka zvijezda se uvijek može transfigurirati u n - kut (i dijagonale su stranice!); otpor grane između vrhova p i g je

$$R_{pg} = \frac{R_{po} R_{go}}{R_0}$$

Obrnuto, transfiguracija n - kuta u n - kraku zvijezdu se ne može provesti, jer je problem "preodredjen" (ima više relacija nego treba: za n nepoznanica od R_{10} do R_{n0} postoji $\frac{n(n-1)}{2}$ relacija za R_{pg} . Samo kod $n=3$ je $n(n-1)/2 = 3$, pa je uvijek moguć prelaz sa trokuta u zvijezdu).

7. ENERGIJA ELEKTRIČNE STRUJE

Energija u jednom odsjeku strujnog kruga u kome vlada napon U iznosi

$$W = U I t$$

jedinica je VAs, a za istosmjernu struju Ws ili J (Joule).

Snaga je energija u jedinici vremena

$$P = \frac{W}{t} = U I$$

Jedinica je VA a za istosmjernu struju W (vat). Za neka računanja je pogodniji izraz (zbog $I = U/R$)

$$P = I^2 R ; \quad P = \frac{U^2}{R}$$

a iz toga električna energija

$$W = UI t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t$$

Ako se mijenja vremenski U ili I za vrijeme t onda se mora integrirati

$$W = \int_0^t P \, dt = \int_0^t UI \, dt$$

Ovaj izraz je od naročite važnosti za izmjenične struje.

Pretvaranje električne energije. U kakvu će se energiju električna energija pretvoriti, zavisi od vrste potrošača. Ako električna struja teče kroz otpornik onda se pretvara u toplinsku energiju. Nadjene su slijedeće relacije (Joule-ov zakon):

$$E = W_t = 0,239 \frac{\text{cal}}{W_s} \quad W = 0,239 \frac{\text{cal}}{W_s} U I t = 0,239 \frac{\text{cal}}{W_s} I^2 R t$$

Ako se uzmu kcal onda važi

$$W_t = 0,239 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kcal}}{W_s} U I t = 0,239 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kcal}}{W_s} I^2 R t$$

Iz toga slijedi da je

$$1 \text{ kWh} = 860 \text{ kcal}$$

Ako postoji neka EMS čiji smjer je suprotan smjeru toka električne struje, onda nastaju druge forme energije. Elektromotor ima tzv. "protu-EMS" čiji se rad pretvara u mehanički rad. Takođe i u elektrolitima postoji "protu-EMS" koja omogućuje pretvaranje u kemijsku energiju.

U otpornicima se električna energija pretvara u toplinsku u nepovratnom procesu (ireverzibilni proces).

U izvorima gdje je smjer napona i struje isti, nestaje neka druga (ne-električna) energija, a nastaje električna (generator). Ako međjutim struja teče nasuprot naponu, onda se tu električna energija pretvara u neki drugi oblik energije (motor). Tu imamo primjer povratnog (reverzibilnog) pretvaranja.

mehanička energija	$\rightleftharpoons$	električna energija	generator motor	
hemijska energija	$\rightleftharpoons$	električna energija	akumulator se	prazni puni
elektromagnetska energija zračenja	$\rightarrow$ $\leftarrow$	električna energija	antena	prima predaje
$U I$	$=$	$E_{\text{protu}} I$	$+$	$I^2 R$
na AB predana ukupna elektr.energija		reverzibilna električna energija		ireverzibilna električna ener.(toplina)



Odnosi snaga u osnovnom strujnom krugu

Bilans energije slijedi iz jednadžbi napona vodeći računa o unutarnjem otporu izvora i vanjskom otporu (potrošač)

$$E = IR_i + IR_a$$

$$EI = I^2 R_i + I^2 R_a$$

$$P_E = P_i + P_a$$

gdje je

P_E - proizvedena električna snaga

P_i - unutarnji potrošak snage

P_a - predana vanjska snaga

Iz gornjih jednadžbi slijedi:

$$\frac{P_i}{P_a} = \frac{R_i}{R_a}$$

bilans snage osnovnog strujnog kruga. Iskorištena snaga je snaga P_a . Iz toga izlazi pojam stepena iskoristivosti (korisnosti) strujnog kruga:

$$\eta = \frac{P_a}{P_E} = \frac{\text{iskorištena snaga}}{\text{proizvedena snaga}}$$

η je uvijek manji od jedinice $\eta < 1$ radi neizbježnih gubitaka u izvorima i vodovima. U tehnici jake struje teži se najvećem mogućem stepenu iskoristivosti tj.

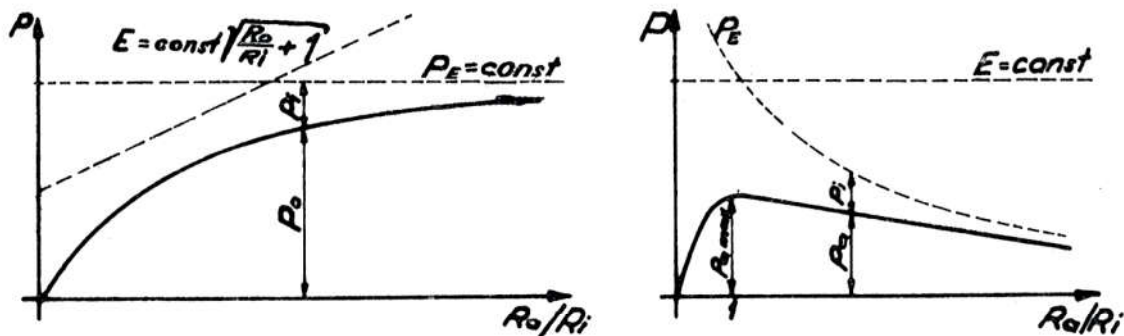
$$\frac{P_a}{P_E} = \eta_k \rightarrow \max$$

Stoga se u području jake struje radi u praktičnom praznom hodu $R_a \gg R_i$. Radi toga je napon na stezaljkama $U \approx U_p$ i neovisan o opterećenju.

U tehnici slabe struje teži se najveće mogućem apsolutnom iznosu primljene snage tj.

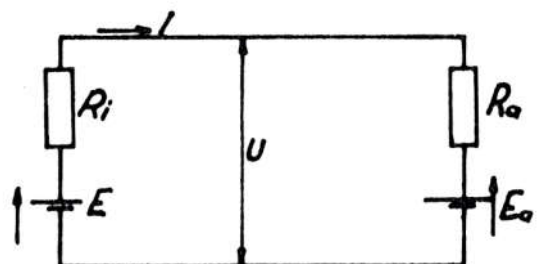
$$P_a \rightarrow \max$$

Stoga je $E = \text{konst.}$ Radi se u području prilagodjenja $R_a = R_i$; zbog toga $U = E/2$, $I = I_k/2$



Važan je još slučaj određivanja veličine stepena iskoristivosti za strujni krug u kome je potrošač sa protu-EMS (napr. motor, akumulator itd.). Kako je već rečeno, u E_a nastaje pretvaranje električne energije u neku drugu vrstu (mehanička, kemijska). Bilans energije izgleda ovako:

$$E = IR_i + E_a + IR_a$$



$$EI = I^2 R_i + IE_a + I^2 R_a$$

$$P_E = P_i + P_{a \text{ korisno}} + P_{a \text{ toplina}}$$

$$P_E = P_i + P_a; \quad P_a = P_{\text{kor.}} + P_{\text{gub.}}$$

Uvodi se novi stepen iskoristivosti

$\frac{P_{a \text{ korisno}}}{P_a} = \eta_p$ koji predstavlja stepen iskoristivosti samog P_a potrošača.

U tehnici jake struje se teži da $P_{a \text{ kor.}}$ bude što veći u odnosu na P_E (proizvedena snaga). Zbog

$$\frac{P_{a \text{ kor}}}{P_E} = \frac{P_{a \text{ kor}}}{P_a} \frac{P_a}{P_E} = \eta_p \eta_k$$

izlazi

$$\frac{P_{a \text{ kor}}}{P_E} = \eta_p \eta_k \rightarrow \max$$

Cilj kome teži tehnika jake struje kod reverzibilnih pretvaranja energije (motor i sl.) jeste da gornji odnos bude što veći.

Kod slabe struje se hoće apsolutno najveći iznos snage kod konstantne EMS i datih E_a i R_i

$$P_{a \text{ kor}} = E_a I = \frac{E - E_a}{R_i + R_a} E_a$$

Ako se potraži maksimum ovog izraza dobije se

$$\frac{dP_{a \text{ kor}}}{dE_a} = \frac{E - 2E_a}{R_i + R_a} = 0; \quad E_a = \frac{E}{2}$$

To je cilj kome teži tehnika slabe struje kod reverzibilnih pretvaranja električne energije. Maksimalna energija koja bi se uopće mogla dati je

$$(P_{a \text{ kor}})_{\max} = \frac{E^2}{4(R_i + R_a)}$$

pa je korisno R_a držati malenim. ali se ne isplati ići znatno ispod R_i .

Instrumenti za mjerenje snaga i rada. Vatmetri

Da bismo dali što plastičniji uvid u veličini električnih jedinica za energiju (rad) usporedit ćemo 1 kWh sa mehaničkim radom

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \cdot 10,2 \text{ kp cm} \approx 25,15 \text{ kp km}$$

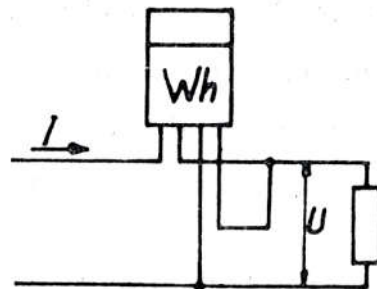
Dakle to je rad koji bismo morali potrošiti da težinu od, odprilike, 25 kp dignemo na visinu od 15 km. Ako bismo je dizali brzinom od 1 m/s trebalo bi nam za to 4 sata. Za ovaj rad zaračunava distributivno poduzeće 18 para. Da bi 1 litar vode proključao (dakle da bi mu se povisila temperatura za oko 80°C) treba odprilike 0,1 kWh.

Električni rad se mjeri vatsatnim brojilom. Ono mjeri integral $\int UI \, dt$ putem okretnog sistema čija je kutna brzina okretanja $\frac{d\alpha}{dt}$ proporcionalna produktu UI

$$\frac{d\alpha}{dt} = C \cdot UI$$

iz toga proizilazi

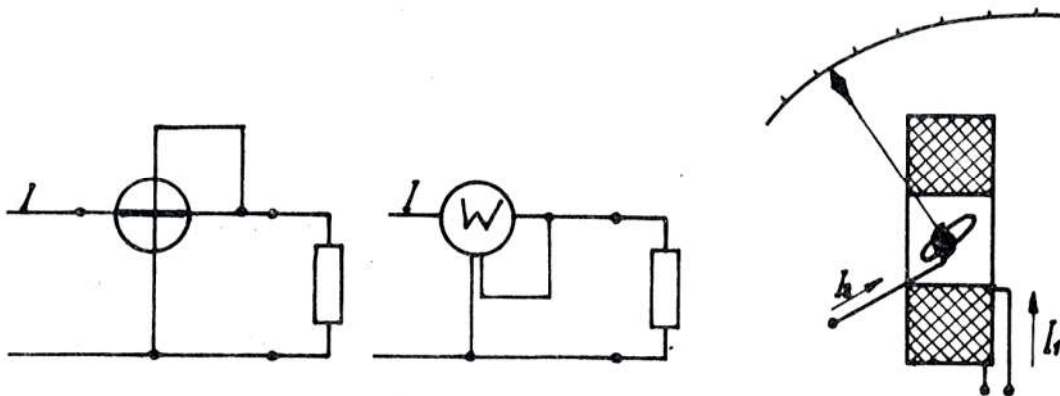
$$W = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{C} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{C} = \text{konst} (\alpha_2 - \alpha_1)$$



Energija je dakle proporcionalna ukupnom kutu okretanja (broj okretaja). Watmetri i watsatni brojači imaju strujnu i naponsku granu i spojeni su kao na slici.

Mjerenje snage. Ako 25 kp dignemo 1 metar visoko za 1 sec, onda se tim razvija snaga $\frac{25 \text{ kp } 1 \text{ m}}{1 \text{ s}} \approx 250 \text{ W} = 0,25 \text{ kW}$. Ovakvo naprezanje čovjek ne može izdržati duže vrijeme. Čovjek može maksimalno (satima dugo) davati snagu od 70 W (normalno hodanje).

Snaga se može mjeriti indirektno mjerenjem struje i napona, a postoje i posebni instrumenti - vatmetri, koji mjere produkt UI direktno. Imaju dva svitka - strujni i naponski.

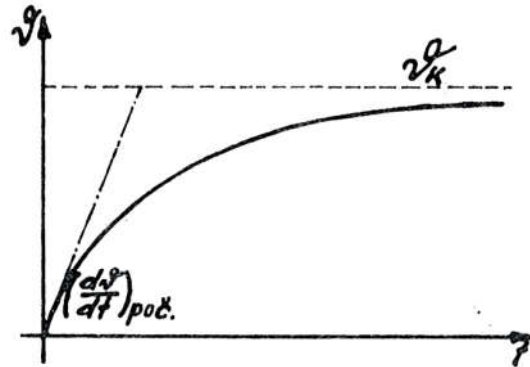


$$\alpha = c UI f(\alpha) = c Pf(\alpha); \quad P = c g(\alpha)$$

Toplinski gubici. U svakom vodu se stvara toplina kao posljedica prolaza struje. To je u potrošačima ponekad poželjno, ali u spojnim vodovima je nepoželjno. Toplina u vodovima se naziva "toplinski gubitci". Nastaje takodjer i u unutrašnjosti generatora i motora zbog unutarnjeg otpora.

Primjena toplinske energije. Ovaj fenomen koristi se za otporno grijanje. Vodiči visokospecifičnog otpora, namotani na tijela od porcelana ili sličnih toplinskih izolatora, protjecani strujom zagrijavaju se. Da bi se tijelo na određenu temperaturu ϑ , zagrijalo

mora krajnja temperatura tijela biti u svakom slučaju $\vartheta_k > \vartheta$, dakle mora prekoračiti jednu minimalnu granicu za P_{el} (dovedenu snagu). Da bi se postigla jedna određena konstantna krajnja temperatura ϑ_k , treba uzeti u obzir, osim prelaznog koeficijenta topline, još i površinsko opterećenje P_{el}/S . Kod kuhala je to 4-5 W/cm² a kod ekspresne ploče 7 W/cm².



Za slučaj topline u vodovima - gubitci u vodovima - treba nastojati da se održi što manjom ova veličina. Da bi se poboljšalo odvodjenje neželjene topline primjenjuje se razne mjere:

povećanje površine (radijatori i rebra kod transformatora i motora), pribjegava se dodatnom hladjenju ventilatorima, vanjske površine se boje u crno (zbog boljeg odvodjenja topline radijacijom) itd.

Da bi se spriječilo pretjerano zagrijavanje vodova mora se gustoća struje u vodičima držati unutar propisanih granica. Za vodiče izolirane gumom i položene u cijevima važe ove maksimalno dopustive vrijednosti za struju.

Presjek		1,0	1,5	2,5	4,	6	10	16	25 mm ²
I_{max}	Cu	12	16	21	27	35	48	66	90 A
I_{max}	Al			17	22	28	38	53	72 A

Za krajnju nadtemperaturu $\vartheta_k = 20^{\circ}\text{C}$.

Za dimenzioniranje vodova uzimaju se u obzir normirane vrijednosti iz tablice koja sadrži nominalne vrijednosti struja za radne presjeke normiranih vodiča, za trajni pogon. Tablice takodjer sadrže i nominalne struje osigurača za odgovarajuće presjeke vodova. Kod izvora se vodi računa koji najmanji presjek odgovara s obzirom na zagrijavanje.

Što se tiče osigurača, oni su tako gradjeni da se napr. osigurač od 6 A ne rastopi ako kroz njega teče 1,5 nominalna struja kroz 1 sat, ali se mora rastopiti ako kroz 1 sat teče 2,1 nominalna struja. Medjutim, struje koje nastaju pri kvarovima (kratki spoj i sl.) su znatno više pa se osigurač trenutno rastopi.

Kratki vodovi se proračunavaju na zagrijavanju (tablica-norme), ali se dugi vodovi moraju proračunavati s obzirom na gubitak snage odnosno pad napona

$$\Delta P = I^2 R = I^2 \frac{2l}{\chi_s}$$

Zahtjev da se na kraju voda preda snaga $P_v = U_v I$ (P_v - snaga potrošača); ako se to uvrsti u gornju jednadžbu onda je

$$\Delta P = \frac{2l}{\chi_s} \frac{P_v^2}{U_v^2}$$

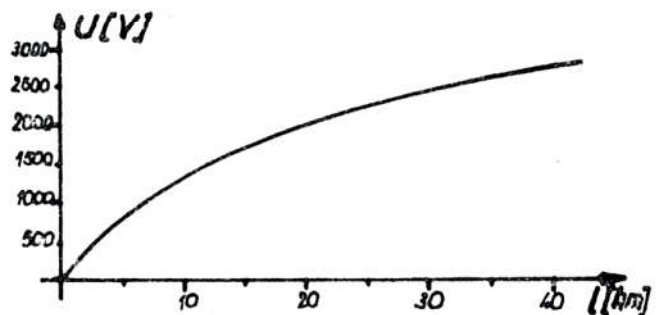
ili predešeno

$$S = \frac{200 l P_v}{\chi_p U_v^2} \left[\text{mm}^2 \right], p = \frac{\Delta P}{P_v} \cdot 100\%$$

gdje je l [m], P_v [W], $\chi \left[\text{s} \frac{\text{m}}{\text{mm}^2} \right]$, p [%], U_v [V]

Primjer: Treba prenjeti 100 kW kod 440 V bakrenim vodom dužine 1,2 km sa 5% gubitaka snage. Izlazi da pod daljnjim uvjetima presjek mora iznositi $S = 443 \text{ mm}^2$; odabiramo prvi veći $S = 500 \text{ mm}^2$. Po tablici opterećenja na zagrijavanju bi za istu snagu (struja 227 A) trebao presjek od samo 120 mm^2 .

Prenosni napon. Za prenos većih snaga bi se mogao povećavati presjek, ali to je veoma skupo (kod dalekovoda maksimalno 150 mm^2). S toga se povećava napon jer on ulazi u jednadžbu sa kvadratom vrijednosti. U grafu se vidi kako raste napon uz povećanje dužine voda, uz konstantni gubitak snage od $p = 5\%$, za $P_v = 100 \text{ kW}$ kod napona 440 V. Važi jednadžba



$$U_v = \sqrt{\frac{200 \ell P_v}{\alpha S p}} = \sqrt{\frac{200 \cdot 100 \cdot 000 \cdot i}{56 \cdot 500 \cdot 5}} = 0,378 \sqrt{\ell} \quad [\text{u kV}]$$

Radi ilustracije: prenos od 100 000 kW na 100 km zahtjeva napon od 100 kV. Ovo se može postići samo upotrebom izmjeničnih struja (transformacija napona).

8. MAGNETSKO DJELOVANJE ELEKTRIČNE STRUJE

Općenito. Suština magnetizma nije u potpunosti istražena.

Prema najnovijim istraživanjima (laboratorij General Motors, siječanj 1961.), došlo se do zaključka da najveći dio magnetiziranja ima uzrok u spinu elektrona, dok sasvim mali preostali dio (teoretski važan) ima uzrok u orbitalnom kretanju elektrona.

Mjerenja su vršena na osnovu Einstein-de Haas-ovog efekta: u prostoru bez magnetskog polja obješeni feromagnetski štap se magnetizira i mjeri se koliko se štap zaokrene kad se to poznato magnetiziranje obrne (reverzira).

Laboratorij je tako udešen da je jačina zemno-magnetskog polja smanjena na 10^{-4} dio normalne jačine (u našim geografskim širinama $0,2 \text{ gaussa} = 0,2 \cdot 10^{-4} \text{ Tesla}$).

Rezultati mjerenja su dati u tabeli:

	A	B
Željezo	1,92	1,90
Kobalt	1,85	1,83
Nikel	1,84	1,83
Supermalloy	1,91	1,91

A - giromagnetski odnos

B - feromagnetska rezonancija

(Permalloy: Fe 21,5%, Ni 78,5%,

Supermalloy: Fe 15,7%,

Ni 79 %,

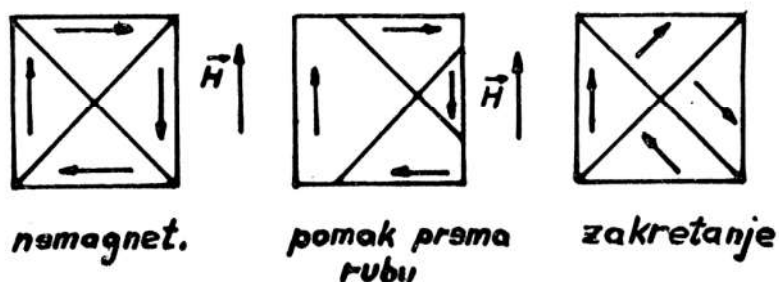
Mo 5 %, Mg 0,5%)

U tablici je dato uporedjenje giromagnetskog odnosa (A) sa odgovarajućim mjerenjima feromagnetske rezonancije.

Ovaj odnos bi bio jednak 2 kad bi spin bio isključivi uzrok magnetizacije. Odnos bi bio jednak 1 kad bi orbitalno kretanje elektrona bilo isključivi uzrok magnetizma.

Iz ovih mjerenja je proizašla tvrdnja da je glavni uzrok magnetizma spin elektrona. Ostaje još da se istraži stvarni utjecaj orbitalnog kretanja elektrona u cilju da bi se na kraju dobilo što bolje razumjevanje složenog fenomena feromagnetizma. Pojave feromagnetizma se pokušavaju objasniti preko tzv. Weiss-ovih područja (domena). Ta teorija pretpostavlja da se unutar feromagnetske materije nalaze sasvim mala područja koja međusobno graniče. Unutar područja svi elektroni imaju istu orijentaciju. Pretpostavlja se da ova područja obuhvataju grupu od oko 10^6 atoma ili molekula i tako predstavljaju jedan elementarni zasićeni magnet (sve dok zbog visoke temperature - oko 770°C željezo ne izgubi svoje feromagnetsko svojstvo). U nemagnetičkom stanju svi ovi elementarni magneti su u međusobnom neredu pa se djelovanja međusobno poništavaju.

Već kod malog magnetiziranja elementarni magneti se počinju izravnavati u smjeru magnetskog polja. Ova Weiss-ova područja čiji smjer magnetiziranja leži pod malim kutem prema vanjskom magnetskom polju, rastu naglo na račun ovih područja čiji kut prema vanjskom polju je velik - pomak prema rubu



Ako se sad pojača vanjsko polje, onda počnu magnetske orijentacije cijelih Weiss-ovih područja skokovito zauzimati orijentaciju onih kristala koji imaju po mogućnosti najmanji kut sa vanjskim poljem (riječ je o kristalnoj strukturi feromagnetskog materijala). Ova faza je prikazana strmim djelom krivulje magnetiziranja. Ako se još više pojača vanjsko polje H onda se zakreću pojedina Weiss-ova područja u smjer polja (ovo je "zasićenje" - dio krivulje koji se približava horizontali). Kod ekstremno jakog magnetiziranja, svi elementarni magneti leže u smjeru vanjskog polja. Dostignuta je "polarizacija zasićenja".

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + I ; \quad I = \chi \mu_0 \vec{H}$$

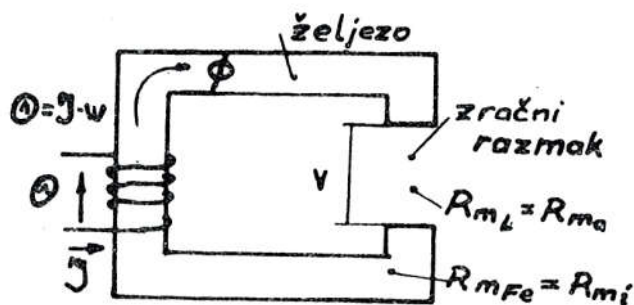
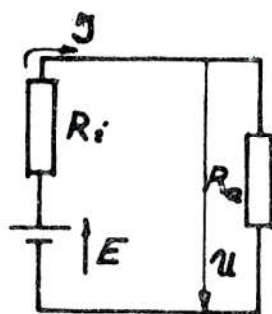
$$\vec{B} = (1 + \chi) \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} ; \quad \mu_r = 1 + \chi$$

gdje je χ - faktor proporcionalnosti i naziva se susceptibilitet.

Elektromagnetske pojave

1. Električnu struju prati uvijek magnetsko polje (zakon protjecanja).
2. Promjenu magnetskog toka prate uvijek električni naponi (zakon indukcije).

Radi lakšeg obuhvatanja pojava, magnetske pojave se opisuju pomoću električnih veličina. Strujni tok se uzima u prenesenom smislu kao magnetski tok, jer je i magnetski tok u sebe zatvoren kao i strujni krug, te je u svakom presjeku iste jačine. Slično je i sa naponom, gdje se pod magnetskim naponom podrazumjeva gubitak dijela uzročne sile na izvjesnom odsjeku magnetskog kruga. Otuda veoma značajna analogija iako samo formalne prirode.



Električni krug:

jačina struje I
 napon - EMS E
 pad napona U
 otpor $R = \frac{U}{I}$

Magnetski krug:

jačina magnetskog toka Φ
 magnetomotorna sila
 (protjecanje) Θ
 magnetski pad napona
 magnetski otpor $R = \frac{v}{\Phi}$

Osnovni zakoni

E tjera struju I
 zatvoren krug svuda
 ista jačina struje I

$$R = \oint \frac{1}{S} = \frac{l}{\kappa S}$$

Θ tjera mag.tok Φ
 zatvoren krug svuda
 ista jačina toka Φ

$$R_m = \frac{l}{\mu S}$$

U nerazgranatom krugu

$$I = \frac{E}{R_{uk}}$$

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_{m uk}}$$

Općenito

čvorište $\sum I = 0$

$\sum \Phi = 0$

zamka $\sum E = \sum U$

$\sum \Theta = \sum V$

Ovdje valja naglasiti samo formalnu narav ove analogije, jer ne postoje slobodni magnetski naboji pa prema tome ni-
 ti neka magnetska struja. Zbog toga nema magnetskih vodiča u
 strogo fizikalnom smislu.

Može se međjutim dopustiti objašnjenje da su svi materijali magnetski propustljivi pa se, u formalnoj analogiji sa električnim pojavama, može govoriti o dobrim vodičima magnetizma (željezo) i lošim vodičima (zrak).

Pojedinačna razmatranja

- a) Magnetski tok. To je magnetska pojava koja se javlja kao posljedica "magnetskog napona" i ima jednaku jačinu u svakom ukupnom presjeku (dakle ima karakter struje u dubljem smislu, iako ovdje ne struji ništa).

Izravne jedinice za magnetski tok nema nego se upotrebljava izvedena jedinica, preko relacije zakona indukcije $e = - d\phi/dt$, dakle $\phi = 1$ Weber (Wb) = 1 Volt sekunda

Pozitivni smjer magnetskog toka (fluksa) se računa u smjeru koordinantne osi odabranog koordinantnog sistema.

- b) Magnetski napon. To je pojava koja prouzrokuje magnetski tok. Razlikuju se dvije vrste: trajni magneti i električna struja. Pri tome djeluju svi zavoji jedne zavojnice kao izvor magnetskog napona. Stoga se djelovanje pojedinih zavoja zbraja

$$\theta_{uk} = \sum \theta_j$$

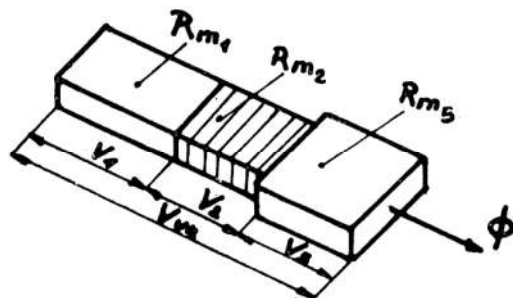
Važi takodjer i zakon superpozicije - algebarsko zbrajanje protjecanja.

Pad magnetskog napona se računa (analogno sa električnim) za jedan odredjeni dio magnetskog kruga

$$V_{uk} = \sum V_j$$

Ako isti tok ϕ prolazi kroz razne otpore onda vrijedi

$$V_1 : V_2 : V_3 = R_{m1} : R_{m2} : R_{m3}$$



Dakle: magnetski napon (magnetomotorna sila - EMS) je jednaka sumi svih magnetskih padova napona u magnetskom krugu

$$\Theta = \sum V_j = \oint R_{uk}$$

Kao što je električni napon definiran pomoću energije, tako je i magnetski napon definiran pomoću magnetske energije. U zavojnici se električna energija pretvara u magnetsku koja se onda razdjeli na cjeli magnetski krug. Energetske promjene u magnetskom krugu nastupaju samo onda kad se mijenja jačina magnetskog toka. Ovdje nema analogije sa strujnim krugom jer se radi o energetske odnosima.

Postoji proporcionalnost između energije W i magnetskog napona V te magnetskog toka

$$V = \frac{dW}{d\Phi}; \quad dW = V d\Phi$$

Smjer magnetskog napona se računa kao smjer magnetskog toka. U jednom magnetskom otporu imaju magnetski pad napona i jačina toka isti predznak.

Iz ovoga slijedi dimenzija magnetskog napona (jedinice su električne)

$$1 \text{ Ws} : 1 \text{ Vs} = 1 \text{ A}$$

dakle jedinica magnetskog napona je 1 amper (1 A).

c) Magnetski otpor (reluktancija). Svako tijelo ima svojstvo da se opire prolazu magnetskog toka. Prema analogiji sa električnim otporom možemo pisati za ovaj (magnetski) otpor

$$R_m = \frac{V}{\Phi}$$

a odavde dimenzija

$$1 \frac{\text{A}}{\text{Vs}} = \frac{1}{\Omega_s} = \frac{1}{\text{H}} \left[\frac{1}{\text{Henry}} \right]$$

$$1 \text{ H} = 1 \text{ Henry} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

Magnetski otpor zavisi o geometrijskim dimenzijama i o materijalu. Za linijski magnetski vodič dužine l i presjeka S važi (prema analogiji za električni otpor $R = l/\chi S$).

$$R_m = \frac{l}{\chi S} \quad (\text{definiciona jednačba za permeabilitet})$$

$$\Lambda = \frac{\mu S}{l} \quad \text{magnetska vodljivost}$$

Ovo je definiciona jednačba za permeabilitet μ . Permeabilitet je materijalna veličina (odgovara električnoj voljivosti χ) te karakterizira magnetsku propustljivost. Osnovna vrijednost se odnosi na vakuum i iznosi

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} \left[\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \right]$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

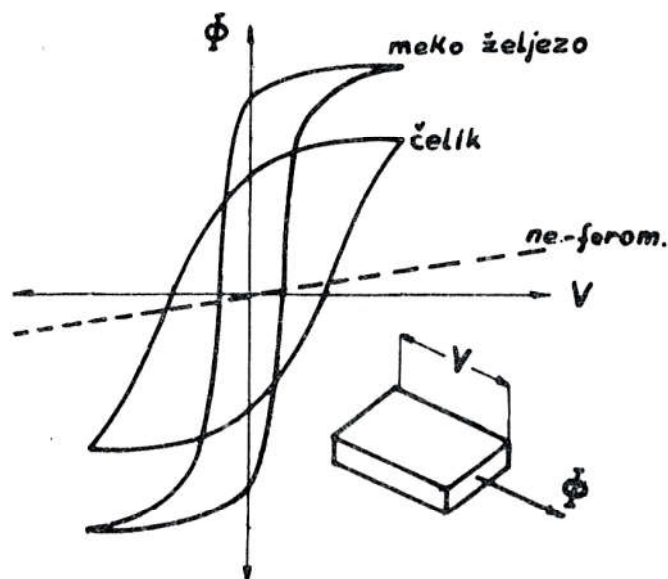
μ - apsolutni permeabilitet

μ_r - relativni permeabilitet (neimenovani broj)

μ_0 - permeabilitet za vakuum

U elektrotehnici su važne dvije vrste materijala:

1. Ne-feromagnetici - svi materijali osim feromagnetika (vakuum, zrak, voda, bakar, drvo itd.). Za njih je karakteristično $\mu_{\text{rel}} = \text{konst.} = 1$ (eventualno odstupanje u četvrtoj decimali). Za ovakve materijale magnetski otpor R_m je konstantan a karakteristika magnetski tok - magnetski napon je pravac kroz ishodište.



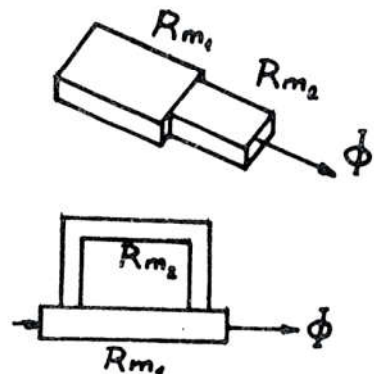
2. Feromagnetici (željezo, nikel, kobalt, neke njihove legure). Za ove materijale je karakteristično $\mu_{\text{rel}} \neq \text{konst.} > 1$. Karakteristika magnetski tok - magnetski napon je jedna krivulja - krivulja histereze. Magnetski otpor R_m je mnogo manji nego kod materijala pod 1., al je ovisan o magnetskom toku i magnetskom naponu. Zbog velike magnetske propustljivosti imaju feromagnetici veliku primjenu u elektrotehnici.

Za kombinacije magnetskih otpora važi isti zakon kao i za kombinacije električnih otpora:

za serijski spoj: $R_m = \sum R_{m_i}$

za paralelni spoj: $\frac{1}{R_m} = \sum \frac{1}{R_{m_i}}$

Ako magnetski krug ima zračni raspor onda je



$$R_{m \text{ uk}} = R_{m \text{ Fe}} + R_{m \text{ zrak}} = \frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{Fe}} S} + \frac{l_{\text{zr}}}{\mu_{\text{zr}} S} = \frac{1}{\mu_0 S} \left(\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{rel Fe}}} + l_{\text{zr}} \right)$$

gdje je $\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{rel Fe}}}$ tzv. ekvivalentni zračni put.

Za $\mu_{\text{rel Fe}} = 1000$, djeluje jedan metar puta u željezu kao jedan milimetar puta u zraku; dakle već sasvim mali zračni raspori izvanredno povećavaju magnetski otpor.

Magnetske pojave u prostoru.

Magnetske pojave u prostoru opisuju se kao magnetska polja (kao da se sastoje od mnoštva linija polja, strujnih cijevi). I ovdje važe formalne analogije sa električnim pojavama (ali ne važe energetske analogije!). Osnovne veličine:

Električno polje u vodiču

Magnetsko polje u prostoru

Gustoća strujanja $\vec{G}$

Gustoća toka - indukcija $\vec{B}$

Jačina elektr.polja $\vec{E}$

Jačina magnet.polja $\vec{H}$

$$\vec{G} = \kappa \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

a) Magnetska indukcija. To je veličina strujnog karaktera koja karakterizira magnetsko polje. Svaka tačka magnetskog polja ima pripadajuću vektorsku veličinu B . Iznos vektora B je

$$\vec{B} = \frac{d\phi}{dS}$$

Smjer vektora $\vec{B}$ je smjer pripadnog toka $d\phi$. Iz definicije slijedi jedinica za indukciju $\vec{B}$

$$1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Tesla} = 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

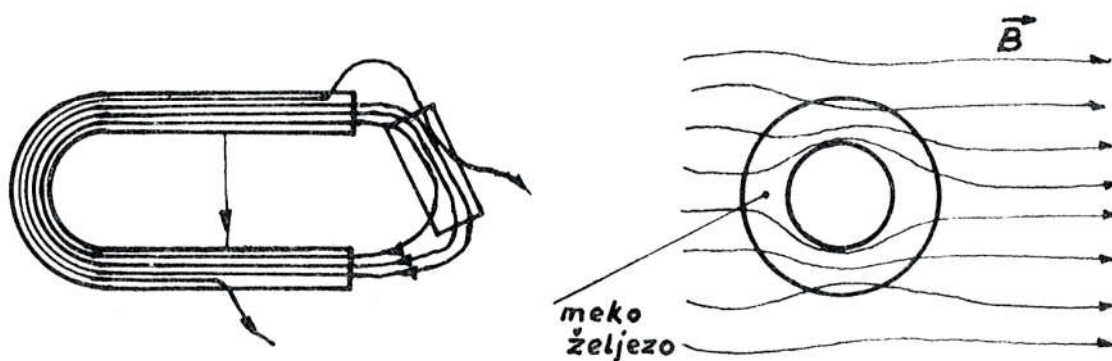
Takodje je veoma važna i raširena stara jedinica

$$1 \text{ Gaus} = 1 \text{ G} = 10^{-8} \frac{\text{Vs}}{\text{cm}^2} = 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

U električnim mašinama je u zračnom rasporu $B = 10$ do 20 T . Horizontalna komponenta zemljinog magnetskog polja je u našim geografskim širinama $0,2 \cdot 10^{-4} \text{ T}$.

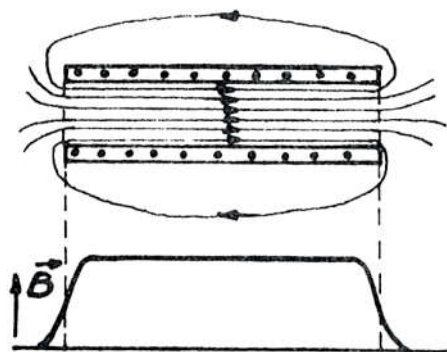
Za predstavljanje magnetskog polja služe linije gustoće strujanja - silnice - B linije. Smjer indukcije B je tangenta na pripadnu B - liniju. U odabranom mjerilu je gustoća B - linija proporcionalna pripadnoj gustoći magnetskog polja.

B linije su uvijek u sebe zatvorene, bez početka i kraja. Izvan magnetskog izvora imaju tok od N-pola prema S-polu.



B - linije idu uvijek putem najmanjeg otpora. Otud mogućnost da se željeznim prstenom stvori "magnetsko zakriljenje" u prostoru unutar prstena (kugle). Jedan dio B - linija obrazuje rasipno polje - ne slijedi put u željezu.

U dugom svitku kroz koga protječe struja vlada konstantna i homogena gustoća $B = \phi/S$ gdje je S površina presjeka svitka



b) Jačina magnetskog polja

Jačina magnetskog polja $\vec{H}$ je naponska veličina magnetskog polja (veličina koja tjera magnetski tok). Analogno sa električnim pojavama, definira se kao magnetski pad napona u smjeru najvećeg pada napona (Δn) i ima vektorske osobine

$$\vec{H} = - \frac{dV}{dn}$$

dn - linijski element u smjeru najveće promjene napona.

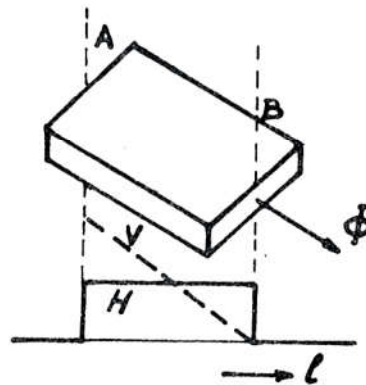
Vektor jačine magnetskog polja $\vec{H}$ ima smjer u smjeru najvećeg opadanja magnetskog napona.

U linijskom vodiču konstantnog presjeka i magnetskog napona V_{AB} između A i B, u svakoj tački vlada ista jačina polja

$$H = \frac{V_{AB}}{l}$$

(homogeno magnetsko polje)

Jedinica za magnetsko polje H je 1 A/m. Linije polja H idu u smjeru polja. Kod odabranog mjerila, gustoća linija je proporcionalna jačini polja H .



U istom mediju (koji se ne mijenja), H - linije nemaju ni izvora ni ponora i ponašaju se kao B -linije. Na granici između raznih medija (zračni raspor) je drukčije: B -linije idu dalje u istom broju, dok se broj H -linija povećava srazmjerno sa najvećim padom magnetskog napona u zračnom rasponu. Magnetski napon dat je slijedećim relacijama: (uz datu jačinu polja)

$$V_{AB} = \int_A^B H dn$$



ako je $H = \text{konst}$, $V_{AB} = H n_{AB}$. A i B su tačke iste H-linije

$$V_{AB} = \int_A^B H \cos \alpha \, ds = \int_A^B \vec{H} d\vec{s}$$

A i B su proizvoljne tačke. ds - element puta

Stoga: magnetski napon je jednak linijskom integralu jačine magnetskog polja.

Uz ranije rečeno da je protjecanje sila koja tjera magnetski tok, eksperimentom se može utvrditi da je $\Theta = NI$, gdje je N broj zavoja vodiča struje koja izaziva magnetsko polje. Iz toga je onda moguće izvesti da je

$$H = \frac{NI}{l}$$

gdje je I -jačina struje

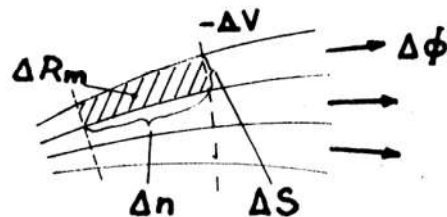
l -dužina proizvedenog magnetskog polja.

Osnovni zakoni magnetizma

U izotropnim medijima, vektori $\vec{B}$ i $\vec{H}$ su kolinearni (imaju isti smjer). Ako se iz strujnog polja isječe jedan isječak toka dužine dn i presjeka dS onda je

$$d\phi = \frac{-dV}{dR_m} = \frac{-dV}{\mu dn} ;$$

$$\frac{d\phi}{dS} = B = \mu \frac{-dV}{dn} = \mu H$$



Iz toga slijedi osnovni zakon magnetizma

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Mjerodavna strujna veličina B i naponska veličina H međusobno su vezane materijalnom veličinom permeabilitetom μ . Kad je $\mu = \text{konst.}$, onda je B proporcionalno H .

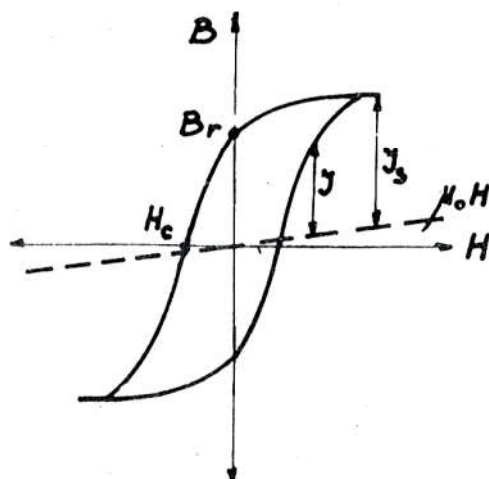
Za feromagnetike μ nije konstanta pa važe razne krivulje "histereze": uske krivulje - meko željezo (dobar vodič magnetskog toka) i široke krivulje - čelik (pogodan za permanentne magnete).

B_r - remanencija

H_c - koercitivna jačina polja

I - magnetska polarizacija

I_s - magnetska polarizacija zasićenja

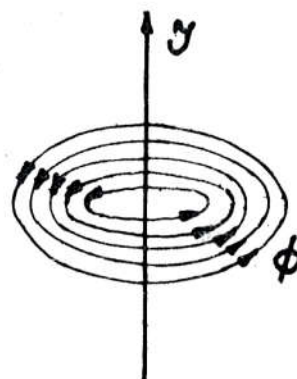


Proračun magnetskih polja

A) veza električnih i magnetskih veličina

Svaku struju (bez iznimke) prati magnetsko polje. Ukupna pojava je električna struja + magnetsko polje. Oba dijela su ravnopravni partneri ^u pojavama.

Između električne struje i magnetskog toka ne postoji nikakva direktna ovisnost radi toga jer μ ovisi o raznim medijima, ali zato postoji direktna ovisnost struje i magnetskog napona (MMS) koji prouzrokuje magnetski tok. Magnetski napon tjera magnetski tok ne po bilo kakvim putanjima nego samo po onima koje obuhva-



taju električnu struju. Prostor u kome djeluje MMS-karakteriziran je magnetskim naponom Θ uzduž bilo koje zatvorenog puta

$$\Theta = V_o ; \quad \text{obilazni magnetski napon}$$

odnosno

$$V_o = \oint H dn$$

ako se element puta dn poklapa sa linijom polja. Za neki proizvoljan put element puta dS važi

$$V_o = \oint \vec{H} d\vec{s}$$

Konačno se može napisati

$$\underline{V_o = \oint \vec{H} d\vec{s} = \Theta}$$

Ova relacija nam daje zakon protjecanja koji glasi: Magnetski napon duž zatvorene linije magnetskog polja jednak je protjecanju $\Theta = NI$ koje prolazi kroz površinu koju obuhvata ova zatvorena linija.

Iznos V_o je strogo proporcionalan s brojem obuhvaćenih struja koje stvaraju magnetsko polje, pa struje treba sumirati algebarski

$$V_o = \text{konst} \sum I ; \text{konst} = 1$$

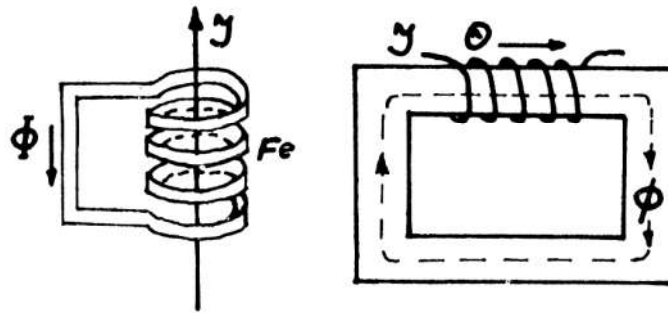
Smjer polja se bira po pravilu desnog vijka. Iz ovoga konačno izlazi

$$\underline{\oint H dn = \sum I,}$$

Integracija, općenito uzevši nije jednostavna pa se uzimaju za primjer nekoliko tehnički češćih i jednostavnijih primjera. Treba dodati i to da je računanje moguće uz dva uvjeta:

- a) da je poznat oblik polja
- b) da je poznata razdioba jačine polja uzduž linija polja

Ako oko strujnog vodiča postoji n zavoja magnetskog



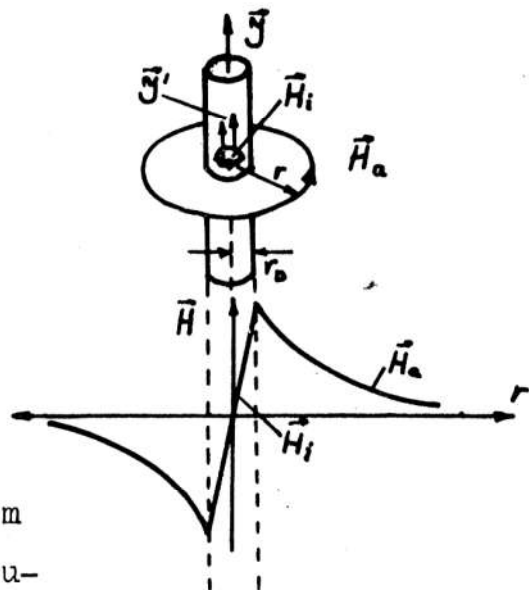
puta onda se u svakom zavoju stvara magnetski napon $\theta = I$, a u n zavoja ukupni magnetski napon $\theta_{uk} = \sum \theta = n I$.

Ako teče struja I kroz N zavoja oko magnetskog puta, onda magnetski napon iznosi $\theta = \sum I_j = I N$ (otuda naziv amper-zavoji).

Magnetska polja važnijih sklopova

a) Ravni vodiči

Linije polja su krugovi oko vodiča. Jačina polja u svim tačkama kruga je ista. Razlikuju se dva područja: područje izvan vodiča i područje unutar vodiča.



1) Polje izvan vodiča. $r > r_D$ ovom silnicom obuhvaćena je cijela struja I . Dakle važi

$$\theta_a = I = \oint H_a \, dn = H_a \, 2 \pi r$$

$$H_a = \frac{I}{2 \pi r}$$

2) Polje unutar vodiča.

$$r < r_D ;$$

ovom silnicom obuhvaćena je struja I' ; važi odnos

$$I' : I = r^2 \pi : r_D^2 \pi$$

dakle je

$$\Theta = I' = I \frac{r^2}{r_D^2} = \oint H_i \, dn = H_i \, 2 \pi \, r$$

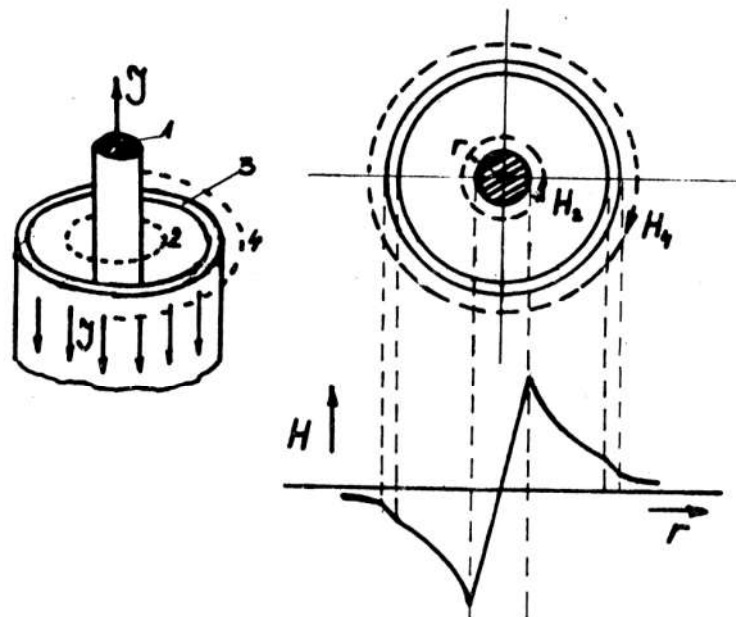
$$H_i = \frac{I \, r}{2 \pi r_D^2}$$

Dakle vidimo da je polje u centru vodiča $H = 0$, zatim se linearno povećava sa r , dostiže najveću vrijednost na površini vodiča, a izvan vodiča hiperbolički opada sa r .

b) Koncentrični vodiči

Dat je koncentrični vodič prema slici sa naznačenim smjerom struje u unutarnjem odnosno vanjskom vodiču. Razlikuju se četiri područja, označena na slici brojevima 1, 2, 3 i 4. Za područje 1, 2, i 3. važe slična razmatranja kao kod ravnog vodiča. Za četvrto područje - oko vanjskog vodiča je obuhvaćena struja $\sum I = +I + (-I) = 0$. Odatle slijedi $H_4 = 0$. Polje je prema vani zakriljeno.

U prostoru unutar povratnog vodiča polje pada na vrijednost nula.

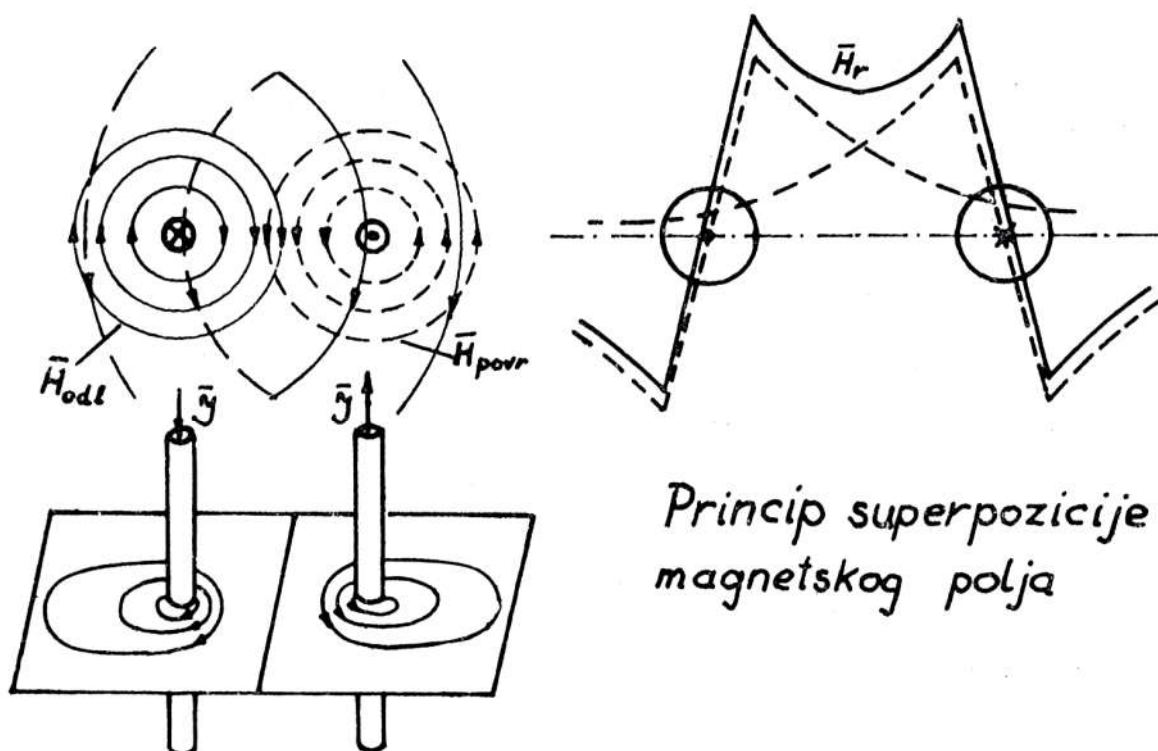


c) Paralelni ravni vodovi

Jačina polja u svakoj tački je vektorska suma jačina polja proizvedenih od svakog vodiča (računato kao pod a))

$$H = H_{odl} + H_{povr}$$

U međuprostoru medju vodičima polje se pojačava. Izvan vodiča se jačina polja smanjuje.



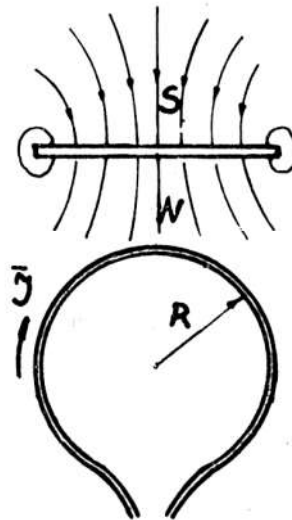
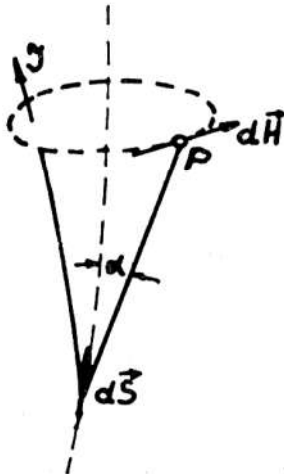
H-linije su ekscentrični krugovi oko oba vodiča. Što su vodiči međusobno bliži, u toliko se pojedinačna polja u vanjskom prostoru više poništavaju. Ako se oba vodiča upletu, onda je vanjsko-magnetsko polje praktički poništeno.

d) Kružni vodič

Za rješavanje polja ovakvog vodiča primjenjuje se Biot-Savart-ov zakon

$$d\vec{H} = \frac{I ds \sin\alpha}{4\pi r^2}$$

dH - element magnetskog polja okomit na ravninu kroz $I ds$ i P , ima smjer desnog vijka.



Ukupni tok prolazi kroz zavoj i razilazi se nakon prolaza. Kružni vodič se ponaša kao magnetska ploča. U ravni-
ni kruga sve djelimične jačine polja imaju isti smjer, pa
vektorsko zbrajanje prelazi u algebarsko. U središtu kružnog
vodiča je

$$H = \int_0 dH = \oint \frac{I ds \sin 90^\circ}{4\pi R^2} = \frac{I 2\pi R}{4\pi R^2} = \frac{I}{2R}$$

e) Dugi uski svitak sa N zavoja

Tu se superponiraju pojedinačna polja pojedinih za-
voja. U sredini se poništavaju komponente koje su okomite na
zid svitka a koje potječu od po jednog para zavoja simetrično
postavljenih prema sredini. Krajevi (rubovi) imaju distorziju
polja, ali utoliko manje utječu na cijelo stanje u koliko je
svitak už i duži. Praktično sve linije polja idu kroz unutraš-
njost svitka. Kako je poznato prostiranje linija polja i raz-

dioba jačine magnetskog polja, važi

$$B_a \ll B_i ; \quad H_a \ll H_i$$

$$V_o = IN = \oint H \, dn = \int H_i \, dn + \int H_a \, dn \approx \int H_i \, dn = H_i \, l$$

$$H_i \approx \frac{IN}{l}$$

Vidimo da u usporedbi sa ravnim vodičem svitak predstavlja znatno pojačanje polja, zbog svojih N zavoja. Otuda je svitak najvažniji elektromagnetski element za elektrotehničku praksu.

f) Kružni svitak sa N zavoja (torus)

Iz razloga simetrije i prema Biot-Savart-ovom zakonu su H -linije koncentrični krugovi (osim u neposrednoj blizini pojedinih zavoja)

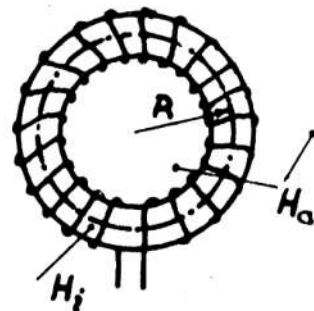
U prostoru izvan svitka: $\sum I_j = 0$

$$H_a = 0$$

U prostoru unutar svitka:

$$\sum I_j = IN = \oint H_i \, dn = H_i \, 2\pi R$$

$$H_i = \frac{IN}{2\pi R}$$



U kružnom svitku je moguće postići visoke jačine polja praktički bez rasipanja.

Prelaz magnetskog polja iz željeza u zrak

1) Prelamanje linija polja.

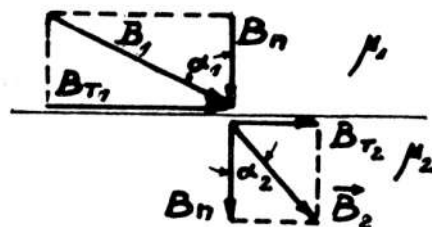
Ako magnetski tok ulazi koso na neku graničnu površinu između dva medija sa raznim permeabilitetom, onda si mijenja veličina i smjer indukcije i jačine polja. B-linije rastavljaju-

ne su u normalne komponente B_n i tangencijalne komponente B_t .

Komponenta B_n prolazi nepromjenjena jer tok Φ u magnetskom krugu mora istati konstantan.

Kako je presjek isti, onda važi

$$B_n = \Phi / S.$$



Tangencijalne komponente se ponašaju tako kao da je dio magnetskog toka u tom smjeru paralelno spojen za oba medija. Radi toga moraju se obje strane granične površine biti jednake jačine polja H_t jer jačina polja zavisi samo od protjecanja Θ i puta s , koji su jednaki sa obje strane granične površine. Zbog toga je

$$H_{t1} = H_{t2} \quad \text{ili} \quad \frac{B_{t1}}{\mu_1 \mu_0} = \frac{B_{t2}}{\mu_2 \mu_0}$$

gdje su μ_1 i μ_2 relativne permeabilnosti odnosnih medija.

Stoga se tangencijalne komponente indukcije B_{t1} i B_{t2} u oba medija odnose kao pripadajuće permeabilnosti

$$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Skica pokazuje takvo stanje za $\mu_1 : \mu_2 = 3:1$. S tim su utvrđeni B_n i B_{t2} , pa se B_2 može odrediti po veličini i smjeru. Za oba kuta α_1 i α_2 se može izvesti jednostavan odnos (iz pravokutnog trokuta)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{t1}}{B_n}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B_{t2}}{B_n}$$

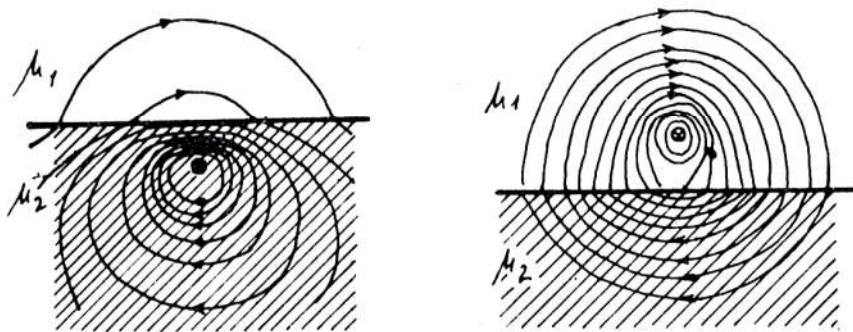
Diobom obih jednadžbi dobije se

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

odnosno

$$\frac{B_2}{B_1} = \sqrt{1 - \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1^2} \sin^2 \alpha_1}$$

Ako je μ_1 veliko (željezo), a μ_2 maleno (zrak), onda će i kut α_1 biti mnogo veći od kuta α_2 . Kako željezo ima 100 do 1000 puta veću permeabilnost od zraka, to je uvijek α_2 veoma malen, tj. linije polja prelaze praktički okomito u zrak.

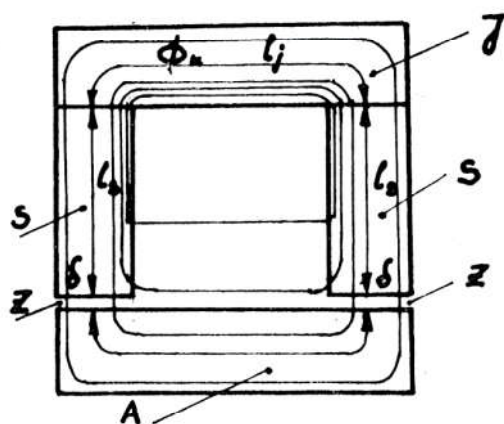


Proračun magnetskog kruga u željezu

U pravilu, samo jedan dio magnetskog toka ide kroz željezo. Taj dio je obično i "korisni tok". Jedan dio toka se zatvara izvan željeznog puta i izvan predviđenog zračnog raspora. Taj dio toka se zove "rasipni tok". Tačno računanje udjela korisnog i rasipnog toka je nemoguće. Za tehničku praksu se uzimaju iskustvene vrijednosti. Već prema odnosima međumagnetskim otporima, iznosi rasipni tok općenito oko 10-30 % ukupnog toka.

Šema jednog magnetskog kruga

- A - anker
- J - jaram
- S - stup
- ϕ_k - korisni tok
- ϕ_r - rasipni tok
- δ - dužina zračnog raspora
- Z - zračni raspor



U općem slučaju je proračun nehomogenih polja veoma težak i često ga je nemoguće izvesti. Razlog za to je da protjecanje određuje samo linijski integral magnetskog napona ali ne određuje i jačinu polja i indukciju na proizvoljnom mestu. Već mala promjena protjecanja ima, u pravilu, kao posledicu i promjenu veličina polja dok je razdioba smjerova polja općenito određena općim rasporedom medija kroz koje polje prolazi (željezo, zrak). Zbog velikog permeabiliteta željeza, u većini tehničkih važnih sklopova, magnetski tok najvećim dijelom ide kroz željezo. Otuda se prikladnim oblikovanjem željeznih dijelova može utjecati na put magnetskog toka.

Magnetski krug se općenito sastoji od željeznih dijelova koji su, iz raznih razloga odvojeni zračnim rasporima. Unutar svakog pojedinog dijela, može se magnetski tok smatrati približno homogenim pa se može neposredno računati.

Za magnetski krug prikazan na skici važi jednačina protjecanja za srednju liniju polja

$$H_a l_a + 2H_z \delta + 2H_s l_s + H_j l_j = \theta = NI$$

gdje je l dužina puta u pojedinom dijelu kruga, a δ zračni raspor. Iznosi B i l su pisani u skalarom obliku jer imaju

isti smjer (u jednadžbi $\theta = H l \cos \alpha$ je $\alpha = 0$). Protjecanje je kao jedna zavojnica od N zavoja smještena na jednom stupu u blizini zračnog raspora, radi smanjenja rasipanja.

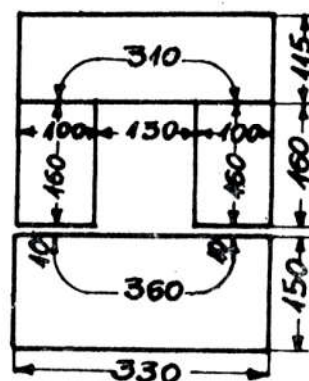
Proračun se može izvesti za dva slučaja:

1. traži se protjecanje za jedan protekli tok
2. traži se tok iz poznatog protjecanja.

Drugi slučaj je manje važan i može se provesti samo približno uz pretpostavku da je $\mu = \text{konst}$ ili interpolacijom.

Najčešći u tehničkoj praksi je prvi slučaj, gdje se računa magnetski tok iz poznate ili potrebne indukcije na nekom poznatom mjestu (najčešće u zračnom rasporu). Iz toka proizlaze onda odgovarajući presjeci S_a , S_s , S_j na osnovu jednadžbe $\Phi = B S$. Iz krivulje magnetiziranja dobiju se potrebne jačine polja H (u A/cm) u željezu, a za zrak se uzima $\mu = 1$. Nakon svega se na osnovu zakona protjecanja izračuna broj amper zavoja $N I$ za srednju liniju polja svakog dijela. magnetskog kruga. Suma svih djelomičnih protjecanja daje traženo ukupno protjecanje. Ovaj se proračun radi obično u obliku tablice.

Primjer: magnetski krug ima nacrtne dimenzije u mm. Željezo je debelo 80 mm. Traži se potrebno protjecanje da bi se u zračnom rasporu dobila indukcija $B = 0,9$ T. Rasipanje se uzima 15%.



Iz zahtjevane indukcije $0,9 \text{ T} = 0,9 \text{ Vs/m}^2$ u zračnom rasporu dimenzija $100.80 = 8.000 \text{ mm}^2 = 8.10^{-3} \text{ m}^2$, dobije se tok $\phi = 7,2.10^{-3} \text{ Vs}$. Zbog rasipanja od 15% u jarmu i stupovima mora biti tok veći

$$\phi' = \frac{7,2.10^{-3}}{0,85} = 8,5.10^{-3} \text{ Vs} \quad [\text{Wb}]$$

Sad se ovi podaci unose u tablicu gdje su već unesene geometrijske vrijednosti magnetskog kruga

D i o	Materijal	Tok, Vs	Presjek m^2	B Vs/m^2
1 Anker	ljev.želj.	$7,2 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	0,6
2 Zrač.rasp	zrak	$7,2 \cdot 10^{-3}$	$0,8 \cdot 10^{-2}$	0,9
3 Stup	čelik	$8,5 \cdot 10^{-3}$	$0,8 \cdot 10^{-2}$	1,06
4 Jaram	čelik	$8,5 \cdot 10^{-3}$	$0,92 \cdot 10^{-2}$	0,925

D i o	H A/m	Duž puta l m	Protjec. NI A
1.	2200	0,36	790
2.	720000	2 x 0,01	14400
3.	350	2 x 0,16	110
4.	260	0,31	80

$$\Sigma \text{ NI} = 15380 \text{ A}$$

Rezultirajuće protjecanje iznosi $\Theta = 15380 \text{ A}$. Tehnički ostvarenje je moguće pomoću odgovarajućeg svitka (namotaja).

Proračun ovog "uzbudnog namotaja" zavisi od dozvoljenog strujnog opterećenja žice i izolacije (zagrijavanje) kao i o slobodnom prostoru koji stoji na raspolaganje za smještaj uzbudnog namotaja.

Uzmimo da je napon za napajanje uzbudnog namotaja U i da kroz namotaj teče struja I sa električnim otporom R . Po Ohmo-ovom zakonu $U = I R$, a otpor sačinjava dužina žice uzbudnog namotaja koji se sastoji od proizvoda broja zavoja i srednje dužine zavoja l_m

$$U = \frac{IN l_m}{\chi S}$$

Iz toga izlazi potrební presjek žice

$$S = \frac{(NI) l_m}{\chi U}$$

pri čemu l_m , χ i U moraju biti poznati. Proizvod NI se tako kombinira da se ne predje dozvoljeno zagrijavanje žice, što je određeno gustoćom struje

$$G = \frac{I}{S}$$

Za gustoću struje važe iskustvene vrijednosti, koje ovise o okolnostima hladjenja. Obično, gustoće struje se kreću oko 1-6 A/mm².

Radi zagrijavanja treba računati sa pogonskom temperaturom od oko 80°C, čemu odgovara $\chi = 45 \text{ S } \frac{\text{m}}{\text{mm}^2}$ za bakar. U našem slučaju, $l_m = 0,45 \text{ m}$, pa za $U = 220 \text{ V}$, imamo

$$S = \frac{15400 \text{ A } 0,45 \text{ m}}{45 \text{ S } \frac{\text{m}}{\text{mm}^2} 220 \text{ V}} = 0,70 \text{ mm}^2$$

Ovome presjeku odgovara promjer žice $d = 0,948$ mm, pa biramo $d = 0,95$ mm. Ako odaberemo gustoću struje $G = 2$ A/mm², onda će biti potrebna struja $I = 0,70 \cdot 2 = 1,4$ A. Onda je broj zavoja

$$N = \frac{15400}{1,4} = 11000 \text{ zavoja}$$

Raspodjeljujemo ih na oba stupa po 5500 na svaki. Trebalo bi još provesti kontrolu da li ovakav namotaj može stati u "prozor" i računati zagrijavanje namotaja.

Zbog sigurnosti (i regulacije) se često uzima veće protjecanje nego li je izračunato.

Djelovanje magnetskog polja

Magnetsko polje ima svoj veliki značaj zbog dviju vrsta djelovanja:

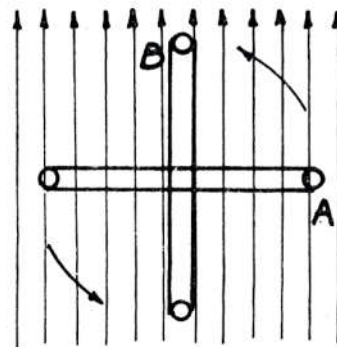
- a) dobijanje električnog napona i
- b) dobijanje mehaničkih sila.

Na pojavi induciranih napona osniva se tehnika transformatora i generatora, primjena elektromagnetskih valova (u radio-tehnici) i sl. Na pojavi mehaničkih sila osniva se tehnika elektromotora i elektromagneta.

A. Dobijanje električnih napona.

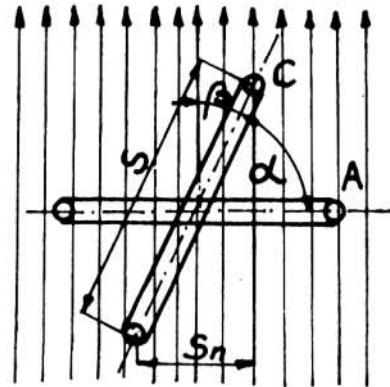
- a) Napon kretanja.

Ako se zatvoreni vodič okreće u magnetskom polju, onda se u vodiču inducira neki napon. Veličina napona ovisi o položaju zavoja: u položaju A je napon najmanji (magnetski tok najveći) a u položaju B je napon najveći (magnetski tok najmanji). Mjerodavna je dakle brzina "rezanja" magnetskih linija.



b) Napon transformacije.

Ako se zatvoreni zavoј nala-
zi nepomično u magnetskom polju čija
se jačina vremenski mijenja, onda se
u zavoju inducira napon koji ovisi o
brzini, promjeni magnetskog toka i o
samom položaju zavoja: maksimalni
napon se inducira u položaju A (naj-
veći obuhvaćeni magnetski tok), a
najmanji u položaju kad je kut $\alpha = 0$.



Obuhvaćeni magnetski tok dat je izrazom

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} \text{ ili } \phi = B S \cos \alpha$$

gdje je $S \cos \alpha = S_n$ projekcija ravnine zavoja na normalu na
smjer polja.

Općenito: u svim slučajevima je za inducirani napon
mjerodavna promjena magnetskog toka. Ako se jačina magnetskog
toka kroz jednu površinu vremenski mijenja, a taj tok je obuh-
vaćen jednim zatvorenim putem, onda duž toga puta nastaje
(inducira se) napon.

Zakon indukcije u općem obliku

Obilazni napon duž zatvorenog puta koji obuhvaća pro-
mjenljivi magnetski tok dat je izrazom :

$$\begin{aligned} U_0 = E &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} && \text{za općeniti put} \\ U_0 = E &= \oint E \, dn && \text{za put duž linije polja} \\ &&& (\text{duž vodiča}) \end{aligned}$$

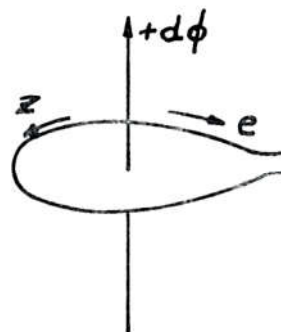
Iznos U_0 je strogo proporcionalan sa brzinom promjene obuhva-
ćenog toka, dakle

$$|U_0| = \text{konst} \left| \frac{d\phi}{dt} \right|$$

U VAMS - sistemu -, ova konstanta je jedinica

$$|U_0| = \left| \frac{d\phi}{dt} \right|$$

Za odredjivanje predznaka inducirano napona, uzećemo da pozitivni predznak znači porast toka, a negativni predznak opadanje toka. Ako se pozitivni porast toka i pozitivni smjer obilaženja označe kao na slici, onda izlazi da se inducirani napon proizvodi u negativnom smjeru (suprotno pozitivnom smjeru obilaženja).



Ako se zavoj zatvori, onda napon potjera struju koja je istog smjera. Ova struja, po pravilu desnog vijka, stvara jedan magnetski tok koji je suprotan postojećem toku odnosno porastu toga toka $d\phi$. Struja, prouzrokovana indiciranim naponom, nastoji da spriječi promjenu magnetskog toka.

Na isti način, kod smanjenja toka ($-d\phi$) dobija se pozitivni inducirani napon i struja koja stvara magnetski tok istog smjera kao i postojeći tok, odnosno nastoji da spriječi opadanje magnetskog toka.

Proizvedeni napon je tako usmjeren da struja koju on proizvodi nastoji da spriječi promjene magnetskog toka (Lenz-ov zakon). Ova pojava ima svoju mehaničku analogiju u pojavi inercije (zakon inercije). Na osnovu svega rečenog, zakon indukcije za jedan zavoj glasi:

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

U svakom zavoju se inducira EMS čiji iznos je jednak vremenskom opadanju obuhvaćenog magnetskog toka.

Ako više zavoja leže blizu jedan drugom onda inducira-
rani napon iznosi

$$e = - N \frac{d\phi}{dt}$$

Ako se magnetski tokovi pojedinih zavoja jako razlikuju onda
treba zbrojiti sve pojedinačne tokove

$$\Psi = \sum_{N=1}^N \phi_N$$

Otuda

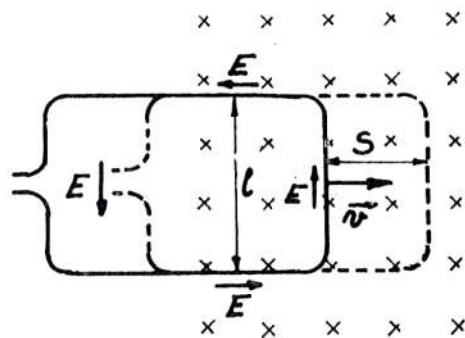
$$e = - \frac{d\Psi}{dt}$$

opći i najjednostavniji oblik zakona indukcije.

Kretanje ravnog vodiča u polju

Za praktična računanja mora biti poznata vremenska
promjena toka, Ako se tok jednoliko mijenja, onda se kvocijent
diferencija može zamjeniti kvocijentom konačnih diferencija.

Ako se zavoj kreće pod pravim
kutem prema linijama polja (u
homogenom polju) onda se tok
koga obuhvata površina $S = s l$
poveća za iznos $\Delta\phi = B S = B s l$,



ako je B indukcija homogenog polja koje ima smjer okomit na
ravninu crteža, ulazeći u crtež. U zavoju nastaje konstantan
napon, bez obzira na predznak jednačbe za indukciju

$$e = \left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \frac{\Delta\phi}{t} = B l \frac{s}{t} = B l v$$

gdje je v brzina kretanja zavoja. Smjer elektromotorne sile

odredjen je na osnovu Lenz-ovog zakona. Linije polja idu prema dolje i predstavljaju porast toka koji ulazi u crtež. Pozitivni obilazni smjer u zavoju ide u smjeru pozitivne promjene toka, dakle u smjeru kazaljke na satu. Radi toga smjer inducirane EMS je suprotan kazaljki na satu. Otuda pravilo desne ruke: ako se ispružena desna ruka drži tako da linije polja ulaze u dlan, a ispruženi palac pokazuje relativno kretanje vodiča, onda ispruženi prsti pokazuju smjer EMS.

Drugi način:

$$\begin{array}{ccc} \vec{v} & \vec{B} & \vec{l} = \vec{E} \\ \text{palac} & \text{kažiprst} & \text{srednji prst} \end{array}$$

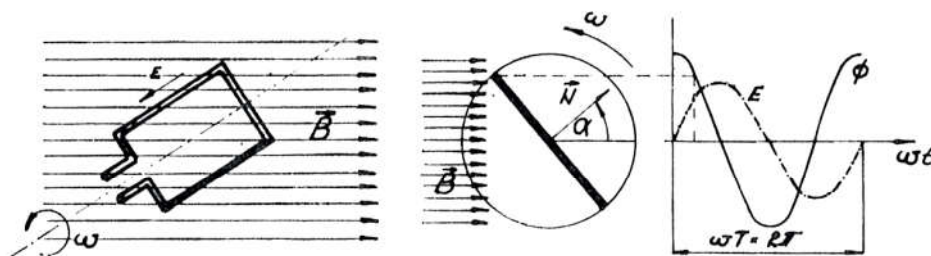
Za slučaj da smjerovi polja, kretanja i vodiča nisu okomiti jedan na drugog, onda važi vektorski produkt

$$\vec{E} = (\vec{B} \times \vec{v}) l$$

Primjene pojava indukcije:

Generatori

a) homogeno paralelno magnetsko polje.



Vodič se vrsti konstantnom kutnom brzinom ω . Os vrtnje leži okomito na B.

$$E = - \frac{d\phi}{dt} = BS \omega \sin \omega t$$

Za slučaj N zavoja

$$E = BS N \omega \sin \omega t \quad (\text{sinusni napon})$$

T - trajanje perioda, $\omega T = 2\pi$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$

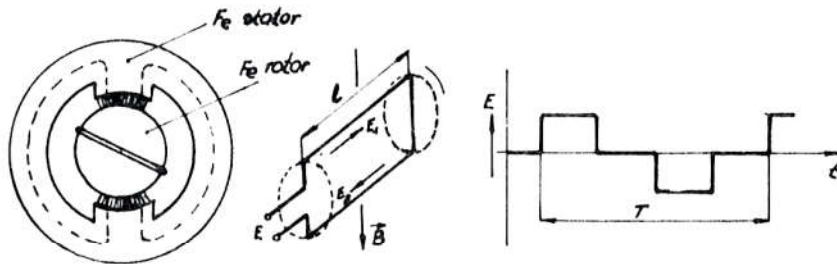
f - frekvencija - broj perioda u jedinici vremena

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} ; \text{ jedinica Hz (Hertz) } (=) 1 \text{ s}^{-1}$$

n - broj okretaja u jedinici vremena.

b) Homogeno radijalno magnetsko polje.

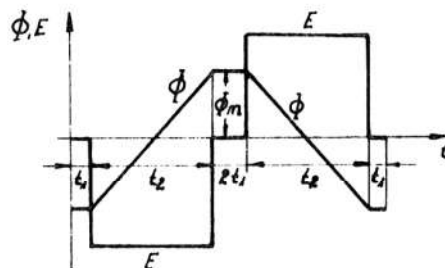
Ovaj oblik polja javlja se u zračnom rasporu, ako linije polja u rasporu idu radijalno prema centru vrtnje i od njega. Ako se u ovakvom polju vrti vodič sa konstantnom brzinom, dobije se napon koji ima oblik pravokutnika



$$E = E_1 + E_2 = 2E_1 = 2 v B l = 2 \omega r B l = \omega B S$$

Za slučaj N zavoja $E = \omega B S N$

Kod nekih generatora istosmjernne struje, pogodnim rasporedom željeznih djelova proizvodi se magnetsko polje takvog oblika da se u svakom zavoju dobije približno trapezni oblik promjene polja. Inducirana EMS ima onda pravokutan oblik.



Samoindukcija

Pojava samoindukcije se osniva na međusobnom djelovanju električnih i magnetskih utjecaja.

Prelaz električnih veličina u magnetske $I \rightarrow \theta \rightarrow \phi$

Prelaz magnetskih veličina u električne $\frac{d\phi}{dt} \rightarrow E_{ind}$

Napon se inducira samo ako ima promjene magnetskog toka.

Stalna struja stvara stalni magnetski tok

$$\phi = \frac{\theta}{R_m} = \frac{IN}{R_m}$$

Promjenljiva struja stvara promjenljiv magnetski tok

$$\frac{dI}{dt} \rightarrow \frac{d\phi}{dt} \rightarrow E_{ind}$$

Na taj način postoji međusobna sprega samo kod promjenljivih struja:

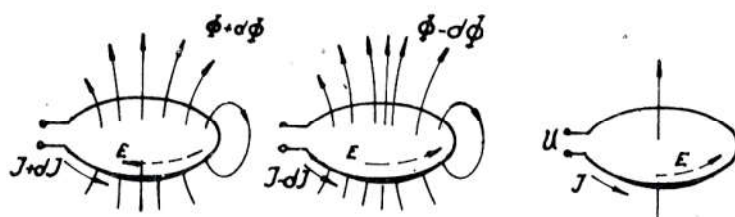
$$\frac{dI}{dt} \rightarrow \frac{d\phi}{dt} \rightarrow E_{ind}$$

Magnetsko polje koje prati promjenu struje je posrednik, dakle struja se uzima kao primarna, a inducirani napon kao sekundarna pojava.

Mogu nastati dvije vrste ovih pojava:

Samoindukcija - promjenljiva struja dI/dt u elementu sklopa ima prateću promjenu toka $\frac{d\phi}{dt}$. Ova promjena toka inducira u istom elementu napon E_{ind} .

Medjuindukcija - promjena struje $\frac{dI_1}{dt}$ u jednom elementu sklopa izaziva promjenu toka $\frac{d\phi_1}{dt}$. Ova promjena toka inducira u drugom elementu sklopa napon $E_{ind 2}$. Na grafu se vidi kako se vremenski mijenja inducirani napon u ovisnosti o datoj promjeni struje i povratnog magnetskog toka.

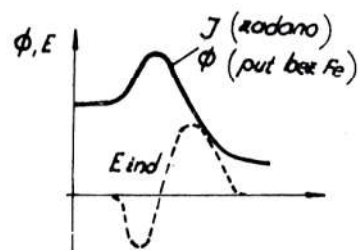


Imamo $E_{ind} = - N \frac{d\Phi}{dt}$

S druge strane

$$\Phi = \frac{\theta}{R_m} = \frac{IN}{R_m}; \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{N}{R_m} \frac{dI}{dt}$$

$$E_{ind} = - \frac{N^2}{R_m} \frac{dI}{dt} = - L \frac{dI}{dt}; \quad L = \frac{N^2}{R_m}$$



$$L = N^2 \Lambda = N^2 \frac{\mu_o \mu_r S}{l}; \quad \text{faktor indukcije - induktivitet}$$

$$L = N^2 \frac{\Phi}{IN} = N \frac{\Phi}{I}$$

Inducirani napon je proporcionalan brzini promjene struje

E_{ind} je uvijek takvog smjera da se protivi uzroku (promjeni struje): kod porasta struje je protivnog smjera (djeluje kao energetska potrošač), a kod opadanja struje istog smjera kao struja (djeluje kao izvor energije). (Analogija sa pojavom inercije u dinamici).

Induktivitet ovisi samo o geometrijskim odnosima magnetskog kruga.

Kad struja raste treba savladavati djelovanje inducirane elektromotorne sile E_{ind} , dakle potreban je pad napona na induktivitetu L

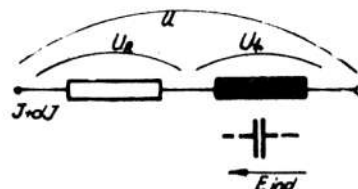
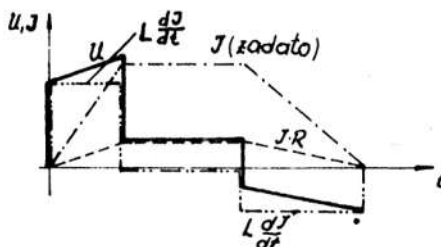
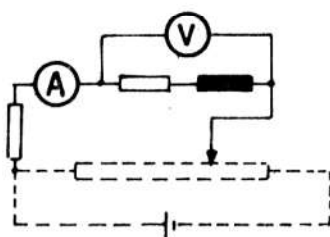
$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

Jednadžba važi i za opadanje struje, kao i bilo kakvu vremensku promjenu struje.

Stvarni elementi sklopova imaju i omski otpor pa valja zbrojiti padove napona $U_R + U_L$

$$U = IR + L \frac{dI}{dt}$$

Primjer:



Induktivitet

Iz definicione jednadžbe $E = - L \frac{dI}{dt}$, slijedi jedinica za induktivitet L

$$L = \frac{E_{ind}}{\frac{dI}{dt}} (=) \frac{Vs}{A} (=) 1 \text{ Herny } H (\Omega \text{ sec})$$

U tehnici jake struje i niskih frekvencija je 10-100 H veliki induktivitet. U visokofrekventnoj tehnici (napr. radio-aparati) je reda veličine 10^{-3} H.

Veličine nekih induktiviteta

Dugi cilindrični svitak u zraku

$$R_m \approx \frac{1}{\mu_0 S} ; \quad L \approx \frac{N^2 \mu_0 S}{l}$$

Kružni svitak sa željeznom jezgrom

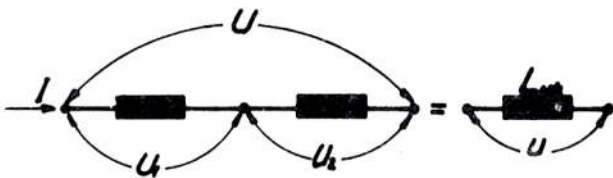
$$R_m \approx \frac{2 \pi R}{\mu S} ; \quad L \approx \frac{N^2 \mu S}{2 \pi R}$$

Nerazgranato željezno jezgro sa zračnim rasponom

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 S} \left(\frac{l_{Fe}}{\mu_{rel}} + l_z \right) ; \quad L = \frac{N^2 \mu_0 S}{\frac{l_{Fe}}{\mu_{rel}} + l_z}$$

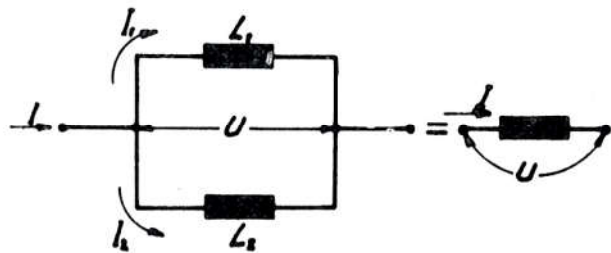
Za kombinacije induktiviteta važe iste zakonitosti kao i za kombinacije otpora

$$U = U_1 + U_2 = L_1 \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} = L_{uk} \frac{dI}{dt}$$



$$L_{uk} = L_1 + L_2$$

$$I = I_1 + I_2$$



$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = \frac{U}{L_1} + \frac{U}{L_2} = \frac{U}{L_{uk}}$$

$$\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \frac{1}{L_{uk}}$$

Strujni krug sa induktivitetom

Jačina struje I je vezana za brzinu nosioca naboja, a promjena jačine struje $\frac{dI}{dt}$ je vezana sa njihovim ubrzanjem. Jednadžba $E_{ind} = -L dI/dt$ znači ustvari da pri promjeni jačine struje inducirani napon u induktivitetu E_{ind} djeluje nasuprot ubrzanja nosioca naboja. Kako opiranje ubrzanju ima karakter inertne mase, to onda znači da induktivitet daje struji svojstva inercije.

Jačina struje u induktivitetu se ne može naglo mijenjati (jer bi E_{ind} postalo beskonačno).

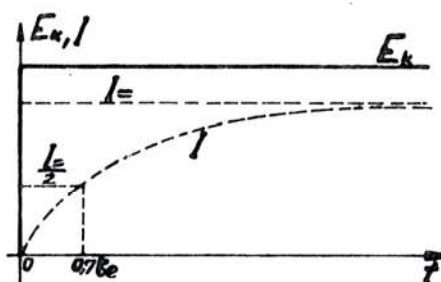
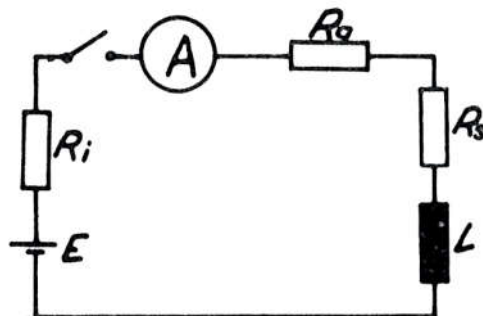
Primjer:

Ukapčanje strujnog kruga sa induktivitetom

Ukupni otpor kruga je $R_{uk} = R_s + R_i + R_a$. Nakon ukapčanja napon E djeluje na sve elemente

$$\begin{aligned} E &= IR_i + IR_a + IR_s + L \frac{dI}{dt} = \\ &= IR_{uk} + L \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

Struja se ne mijenja skokovito (jer bi $\frac{dI}{dt} \rightarrow \infty$ zahtjevalo $U = \infty$), nego postepeno. U početku ($I=0$) je porast struje najbrži, a onda sve sporije dok struja ne postane konstantna.



Preuredjenjem gornje jednadžbe i diobom sa R_{uk} dobije se

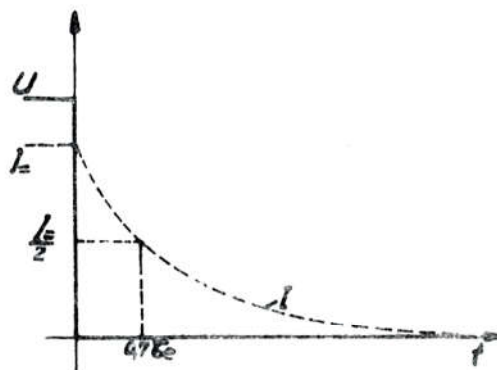
$$\frac{E}{R_{uk}} - I = \frac{L}{R_{uk}} \frac{dI}{dt}$$

a zatim separacijom variabli

$$\frac{dI}{I - \frac{E}{R_{uk}}} = - \frac{R_{uk}}{L} dt$$

Integral ove jednadžbe je

$$\ln \left(I - \frac{E}{R_{uk}} \right) = - \frac{R}{L} t + \ln C$$



$$I - \frac{E}{R_{uk}} = C e^{-\frac{R_{uk}}{L} t}$$

Integraciona konstanta se dobije iz početnih uvjeta

$$t = 0 ; \quad I = 0 ; \quad C = - \frac{E}{R_{uk}}$$

Dobija se konačno

$$I = \frac{E}{R_{uk}} (L - e^{-\frac{R}{L} t})$$

Ako uvedemo supstitucije $\frac{E}{R_{uk}} = I_0$; $\frac{L}{R_{uk}} = \tau$ (vremenska konstanta)

onda je

$$I = I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Porast struje ide po zakonu e-funkcije. Nakon poluvremena $t_H = 0,693\tau \approx 0,7\tau$ struja naraste na $I = I_0/2$; nakon vremena $t = 3\tau$, struja je postigla već vrijednost od 95% konačne vrijednosti.

Kod prekidanja struje (koja je već dostigla svoju konačnu vrijednost), u momentu $t = 0$, $I = I_0$ pa je

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

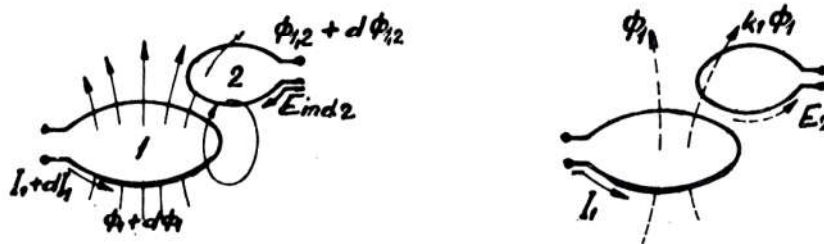
Struja opada po zakonu e-funkcije. Nakon $0,7\tau$ je jačina struje polovina početne struje, a nakon 3τ struja je praktički pala na nulu, (iako teoretski to postiže tek nakon vremena $t = \infty$).

Vremenska konstanta (konstanta relaksacije) svitaka je obično mali dio sekunde. Kod velikih elektromotora i drugih velikih induktivnih tereta dostiže i više sekunda.

Pri iskapčanju nastaje dosta visok inducirani napon $E_{ind} = - L \frac{dI}{dt}$. Napr. svitak napajan sa 2 V, a pri iskapčanju može nastati napon i do 500 V.

Medjuindukcija

To je pojava induciranja napona u nekom drugom svitku ili zavoju, pri promjeni struje u prvom.



Od ukupnog toka Φ_1 koji prati struju I_1 , samo jedan dio prolazi kroz drugi zavoj

$$\Phi_{12} = K_1 \Phi_1$$

K - faktor sprege

Φ_1 - tok proizveden u prvom zavoju

Φ_{12} - dio toka proizvedenog u prvom zavoju, a obuhvaćenog drugim

Razlika $\Phi_1 - \Phi_{12}$ prolazi pored zavoja i naziva se rasipni tok. Korisni tok Φ_{12} inducira u drugom zavoju napon $E_{ind 2}$.

Zbog pojednostavljenja uzima se da cijeli tok Φ_1 prolazi kroz sve zavojne svitke 1, a tok Φ_{12} prolazi kroz sve zavojne svitke 2. Induktiviteti obaju elemenata su konstantni.

Inducirani napon u elementu 2 sa N_2 zavoja, kad se mijenja struja kroz element 1 sa N_1 zavoja je

$$E_{ind 2} = - N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} ; \Phi_{12} = K_1 \frac{I_1 N_1}{R_{m1}}$$

$$E_{\text{ind } 2} = - \frac{K_1 N_1 N_2}{R_{m1}} \frac{dI_1}{dt} = - M_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

Ako se zamjene uloge pa sad u elementu 2 teče vremenski promjenljiva struja I_2 , onda je inducirani napon u elementu 1 rezultat samo jednog djela toka ϕ_2 , tj. $\phi_{21} = K_2 \phi_2$, pa imamo :

$$E_{\text{ind } 1} = - N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt} ; \phi_{21} = K_2 \frac{I_2 N_2}{R_{m2}}$$

$$E_{\text{ind } 1} = - \frac{K_2 N_1 N_2}{R_{m2}} \frac{dI_2}{dt} = - M_{21} \frac{dI_2}{dt}$$

Može se dokazati da postoji samo jedan medjuinduktivitet $M_{12} = M_{21} = M$, pa je onda

$$E_{\text{ind } 2} = - M \frac{dI_1}{dt} ; E_{\text{ind } 1} = - M \frac{dI_2}{dt}$$

$$M = \frac{K_1 N_1 N_2}{R_{m1}} = \frac{K_2 N_1 N_2}{R_{m2}}$$

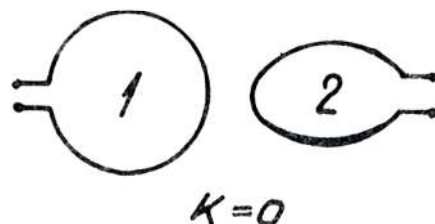
Veličina induciranih napona ovisi o brzini promjene struje $\frac{dI}{dt}$. Faktor proporcionalnosti je M i zove se medjuinduktivitet.

Napon E_{ind} je uvijek tako usmjeren da nastoji potjerati struju koja svojim magnetskim poljem djeluje nasuprot uzroku, tj. promjeni polja u suprotnom elementu.

Medjuinduktivitet

Iz definicione jednadžbe

$$E_{\text{ind}} = - M \frac{dI}{dt}$$



izlazi jedinica za medjuinduktivitet

$$M (=) \frac{Vs}{A} (=) 1 \text{ Henry } (=) 1H.$$

Faktor sprege K može se ovako odrediti: promjenom magnetske sprege medju elementima 1 i 2, moguće je M mjenjati izmedju dvije granične vrijednosti:

$$\text{Nema sprege: } K_1 = K_2 = 0; \quad M = M_{\min} = 0$$

Ovo se može postići udaljavanjem svitaka, magnetskim zakri-
ljenjem pomoću feromagnetskog oklopa ili postavljanjem mag-
netskih osi svitaka 1 i 2 okomito jedna prema drugoj.

$$\text{Puna sprega: } K_1 = K_2 = 1; \quad M = M_{\max}$$

Ukupni tok je zajednički za prvi i drugi **svitak**. Dakle,

$$R_{m1} = R_{m2} = R_m$$

$$M = M_{\max} = \frac{N_1 N_2}{R_m} = \sqrt{\frac{N_1^2}{R_{m1}} \frac{N_2^2}{R_{m2}}} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Maksimalna vrijednost medjuinduktiviteta M je zavisna o poje-
dinim elementima sklopa; jednaka je geometrijskoj srednjoj
vrijednosti oba samoinduktiviteta.

Opći slučaj leži izmedju obje granične vrijednosti:

$$M = K M_{\max} = K \sqrt{L_1 L_2}$$

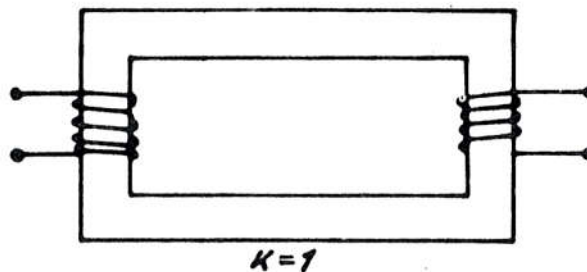
Ovim je definiran faktor sprege K . Izračunava se iz faktora
 K_1 i K_2 koji su odredjeni geometrijom magnetskog kruga.

$$M = \sqrt{\frac{K_1 N_1 N_2}{R_{m1}} \frac{K_2 N_1 N_2}{R_{m2}}} = \sqrt{K_1 K_2} \sqrt{L_1 L_2}$$

dakle

$$K = \sqrt{K_1 K_2}$$

Kao primjer medjuinduktiviteta sa promjenljivom spregom navodimo variometar, a kao primjer medjuinduktiviteta sa fiksnom spregom (preko puta u željezu): transformator.



9. ENERGIJA I SILE U MAGNETSKOM POLJU

Po ranijoj definiciji magnetskog napona može se pisati:

$$dW_m = V d\phi$$

što je u skladu sa ranijim analogijama. Gornja jednažba znači da je u magnetskom pasivnom dvopolu energija vezana na promjene magnetskog toka a ne na magnetski napon i tok.

Ako pri izgradnji polja raste jačina toka, onda dvopol uzima energiju ($+ dW_m$), a pri razgradnji polja jačina toka opada i dvopol predaje energiju ($- dW_m$).

Ako se promatra prostor homogeno magnetiziran ($\vec{B}$ i $\vec{H}$ jednaki u svim tačkama polja) napr. linijski vodič dužine l i istog presjeka S , onda se može pisati:

Pad magnetskog napona $V_o = V_{AB} = H l$

Jačina magnetskog toka $\phi = BS; d\phi = dB S$

Volumen $V = S l$

Promjena energije $dW_m = V_o d\phi = H dB V$

Prema tome energija koju treba dovesti volumenu V da bi se u njemu promijenilo magnetsko stanje od $B = 0$ do B_1 iznosi

$$W_m = V \int_{B=0}^{B_1} \vec{H} d\vec{B}$$

Ako imamo prostor u kojem vlada nehomogeno magnetsko polje onda ga možemo razbiti na elementarne djelove dV u kojima uzeti svaki zase vlada homogeno polje. Energija takvog jednog elementarnog dijela onda je

$$dW_m = dV \int_0^B \vec{H} d\vec{B}$$

odnosno zbog $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

$$dW_m = dV \int_0^B \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_0} d\vec{B} = \frac{B^2}{2\mu_r \mu_0} dV$$

Ako se uzme opet u obzir gornja relacija izmedju H i B onda je

$$W_m = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV$$

Ova relacija važi za svaki prostor u kome vlada magnetsko polje bez obzira na njegovo porijeklo. Sasvim je svejedno da li je to polje nastalo zbog protjecanja struje svitkom ili djelovanjem permanentnih magneta ili pak kombinacijom oba ova djelovanja.

Energetsko stanje ne-feromagnetika

Za ne-feromagnetike ($\mu_r = 1$) važi $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, što u koordinatnom sistemu B, H predstavlja pravac. Gustoća energije

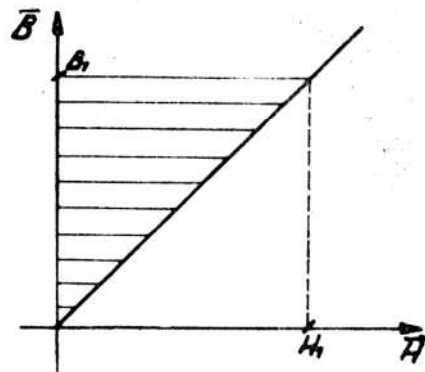
$$\frac{W_m}{V} = \int H dB$$

je jednaka šrafiranoj površini na slici. Dakle

$$W_m = V \int_0^{B_1} H \, dB = V \frac{B_1 H_1}{2}$$

kod magnetiziranja, a

$$W_m = V \int_{B_1}^0 H \, dB = - V \frac{B_1 H_1}{2}$$



kod razmagnetiziranja.

Pri razmagnetiziranju se iz volumena prostora V dobije ista energija koja se pri namagnetiziranju preda tome volumenu. U međuvremenu se energija nalazi u magnetskom polju kao magnetska energija W_m . Magnetsko polje je rezervoar energije. Ako pri tom u volumenu vladaju svuda isto B i H onda važi

$$W_m = \frac{BH}{2} V = \frac{B^2}{2 \mu_0} V = \frac{\mu_0 H^2}{2} V = \frac{\Phi^2}{2}$$

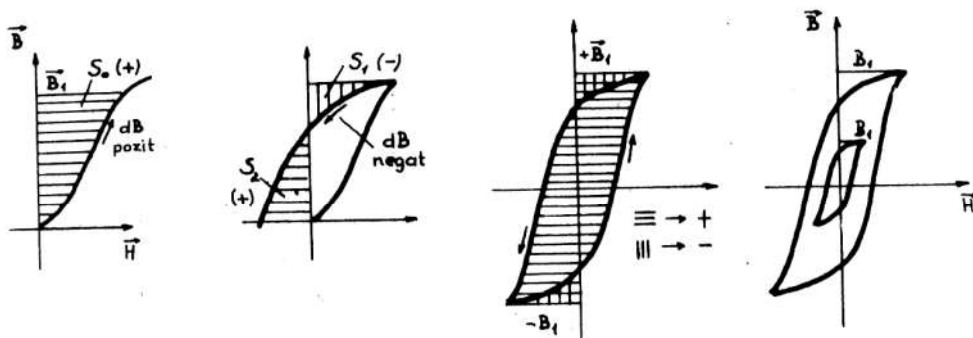
Gustoća magnetske energije za razna mjesta sa promjenljivim magnetskim poljem je

$$\frac{d W_m}{d V} = \frac{B H}{2} = \frac{B^2}{2 \mu_0} = \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

Mjerodavne veličine su dakle - strujna B i naponska H podjednaki **partneri** u gustoći energije.

Energetsko stanje feromagnetika

Krivulja magnetiziranja je krivulja histereze oblika prema slici. Kod magnetiziranja ($B = 0 \rightarrow B_1$) duž početne linije magnetiziranja predaje se energija feromagnetiku



$$W_{mn} = V S_0$$

gdje je S_0 površina koja pripada $\int H dB$ na dijagramu $B - H$. Kod razmagnetiziranja ($B = B_1 \rightarrow 0$), oduzima se energija $V S_1$ (dB negativno, H pozitivno), na slici površina okomito šrafi-rana. Dovodi se energija $V S_2$ (dB negativno, H negativno). Konačna bilansa dobijene energije

$$W_{mr} = V (S_1 - S_2)$$

Pri razmagnetiziranju se dobije manja energija nego što je uložena. Razlika se zove "rad histereze" i utroši se za okre-tanje magnetskih "područja" (domeni) te se pretvara u toplin-ske gubitke:

$$W_{hyst} = |W_{mn}| - |W_{mr}|$$

Važno je za elektrotehniku naći gubitke histereze za cijelu petlju ($0 \rightarrow + B_1 \rightarrow - B_1 \rightarrow 0$). To je upravo površina koju **obuhvata petlja histereze**

$$W_{hyst} = V \int_{\mathcal{L}} H dB = V S_{\mathcal{L}}$$

Ovo je "rad histereze" za obilazak oko petlje. Snaga ovog magnetiziranja i razmagnetiziranja pri frekvenciji $f = 1/T$

$$P_{hyst} = \frac{W_{hyst}}{T} = f W_{hyst}$$

Radi što manjih gubitaka biraju se materijali sa što užom petljom histereze.

Radi uštede teškog posla oko izračunavanja gubitaka histereze, nadjene su empiričke zakonitosti između W_{hyst} i B_1

$$W_{\text{hyst}} = \varepsilon' m B_1^2$$

(Važi za sadašnje feromagnetike)

m = masa

$$\varepsilon' = (2, \dots, 5) 10^{-10} \frac{\text{Ws}}{\text{kg G}^2}$$

Energetski odnosi u magnetskom krugu

Jednadžbu $dW_m = V_0 d\phi$ možemo pisati u obliku

$$- dW_m = \theta d\phi$$

ako protjecanje θ smatramo negativnim padom magnetskog napona. Kod izgradnje polja ($+ d\phi$) predaje izvor magnetskog napona (zavojnica) energiju u magnetski krug. Kod razgradnje polja ($- d\phi$) izvor magnetskog napona uzima energiju iz magnetskog kruga. Kako magnetski napon nastaje djelovanjem električne struje, to izvor magnetskog napona (zavojnica) predstavlja mjesto sprege između magnetskog i električnog kruga. To je u stvari mjesto prolaza energije odnosno pretvaranja električne energije u energiju magnetskog kruga i obrnuto.

Zbog toga što promjene polja nastaju samo pri promjenama jačine struje i pošto su u električnom krugu induktivitet i međui induktivitet sjedište (izvor) magnetskog napona, slijedi da se pri povećanju struje zbog induktiviteta (ili analogno međui induktiviteta) - izgradnja polja - električna

energija predaje magnetskom polju. Tu se energija "uskladišti" (izuzevši dio koji materijali sa histerezom odaju okolini kao toplinu) i opet pretvara u električnu energiju u induktivitetu pri sniženju struje (razgradnje polja).

Dakle, električni vodič je mjesto pretvaranja električne energije u drugi oblik energije (mjesto prolaza energije). Iz magnetskog vodiča energija ne može otići (izuzev gubitaka histereze) nego se tu "uskladišti" i opet razgradjuje.

Energija magnetskog polja i električne veličine

Za izgradnju magnetskog polja pri povišenju struje na jednom induktivitetu potrebna je električna energija i toplinski gubici ($dW_{el,m}$), dakle promjena energije $dW_m = V_o d\phi$. Postoje veze magnetskih energetskeih partnera V_o i $d\phi$ sa električnim veličinama.

Stav o energiji $dW_{el,m} = dW_m = V_o d\phi$

Zakon protjecanja $V_o = \sum I_v = IN$

Zakon indukcije $N \frac{d\phi}{dt} = - E_{ind} = U_L$

Otuda onda

$$dW_{el,m} = IU_L dt$$

jer kod promjene polja (dakle i struje) uvijek mora nastati i dodatni napon U_L . Kako je

$$U_L = L \frac{dI}{dt}, \quad \text{to je onda}$$

$$dW_{el,m} = IL dI \quad \text{pa je}$$

$$W_{el,m} = \int_{I_1}^{I_2} IL dI$$

to je dodatna energija kod promjene struje od I_1 na I_2 kroz jedan induktivitet.

Ako elementi sklopova imaju konstantan L (ne-feromagnetici ili feromagnetici sa zračnim rasporom) onda je

$$W_{el,m} = L \frac{I^2}{2} \quad \text{izgradnja polja, struja } 0 \rightarrow I$$

$$W_{el,m} = L \frac{I^2}{2} \quad \text{razgradnja polja, struja } I \rightarrow 0$$

U elementu sklopa se, dakle nalazi "uskladištena" energija magnetskog polja

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

Na prvi pogled se uočava velika sličnost sa izrazom za kinetičku energiju

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Vidimo da se induktivitet L ponaša kao troma masa u mehanici.

Primjer: $L = 10 \text{ H}$, $I = 50 \text{ A}$, $W_m = \frac{1}{2} 10 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}^2 = 12500 \text{ Js}$

Sa magnetskim poljima se mogu postići veoma velika djelovanja. Induktivitet djeluje čas kao potrošač energije, a čas kao proizvođač energije.

U ovom svjetlu, pojave ukapčanja i iskapčanja strujnih krugova znače da za izgradnju i razgradnju magnetskih polja treba izvjesno vrijeme. Teorija relativnosti kaže da je svaka energija ekvivalent neke mase, pa prema tome ima i svojstva inercije. Otuda zakašnjenja porasta odnosno opadanja jačine struje u pojavama ukapčanja i iskapčanja. Kod iskapčanja je naponski udar mnogo viši nego narinuti napon u ukopčanom stanju jer je vrijeme razgradnje polja mnogo kraće nego vri-

jeme izgradnje polja, a struja se u oba slučaja kreće između istih vrijednosti, dok je energija jednaka umnošku struje, napona i vremena.

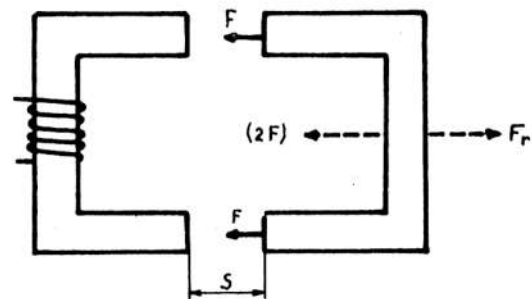
Sile u magnetskom polju

Postoje tri vrste djelovanja sila u magnetskom polju

1. Sile koje djeluju na graničnim površinama između materijala sa raznim permeabilitetima (napr. željezo - zrak).
2. Sile na električne struje u magnetskom polju i
3. Sile koje djeluju između dvije struje preko pratećeg magnetskog polja.

1. Sile u magnetskom polju na graničnim površinama između feromagnetika i neferomagnetika

Polje u zračnom rasporu se može uzeti kao homogeno. Postoji tendencija da se linije polja skrate i rašire. Ovo je jedno opće svojstvo svih vrsta polja i ta pojava regulira raspored linija polja.



Zbog tendencije da se magnetske linije polja skrate i rašire, nastaje na graničnoj površini sila između dva medija sa raznim μ , jedna sila koja stoji uvijek okomito na graničnim površinama i usmjerena je prema mediju sa manjim μ .

U slučaju elektromagneta sa dva zračna raspora, djelovanje skraćanja linija polja dolazi jedino do izražaja. Dva zračna raspora s imaju pojedinačne granične površine S sa kotvom i na njima djeluju sile F . Ukupnoj sili od $2 F$ drži ravnotežu neka vanjska sila (protusila) F_r . Na ovaj slučaj se može primjeniti princip virtuelnih pomaka. Virtuelni pomak

δs je zamišljeni, veoma mali i od vremena nezavisni (čisto geometrijski) pomak sistema, koji njegove veze dopuštaju. Nezavisnost od vremena je izražena notacijom δs (umjesto ds).

Princip virtuelnih radova dat je općim oblikom

$$\sum \delta A = 0$$

Za sistem u ravnoteži je za svaki virtuelni pomak sistema suma virtuelnih radova jednaka nuli.

Promatramo energetske odnose uzimajući u obzir samo sile ravnoteže. Zamišljamo infinitezimalno povećanje $F_r = 2 (F + dF)$ koje nastoji promijeniti raspor za δs . Da se ne bi moralo voditi računa o daljoj razmeni energije sa uzбудnim krugom uzimamo takav slučaj da $W_{el,m} = 0$. Radi toga po zakonu indukcije mora biti $U_L = 0$, pa je i $d\phi/dt$, odnosno tok ϕ je konstantan. Struja uzbude se naknadno regulira za održavanje konstantnog toka. Odavde slijedi i $B = \text{Con}$., dakle energija u magnetskom krugu ostaje konstantna.

Ako je $F_r \delta s$ energija koja je predana magnetskom krugu onda je povećanje energije radi magnetiziranja dva dodatna volumena $2\delta V$

$$dW_m = \frac{B^2}{2 \mu_0} 2\delta V = 2 \frac{B^2}{2 \mu_0} S \delta s$$

Energetska ravnoteža zahtjeva

$$F_r \delta s = \delta W_m$$

$$F_r \delta s = 2 (F + dF) \delta s$$

U slučaju ravnoteže $dF = 0$ pa je

$$F_r \delta s = 2 F \delta s$$

Otuda je sila koja vuče feromagnetičnu površinu prema neferomagnetičnu

$$F = \frac{B^2}{2 \mu_0} S = \frac{B H}{2} S = \frac{\mu_0 H^2}{2} S = \frac{\phi^2}{2 \mu_0 S}$$

Vrijednosti za B i H su date za neferomagnetski prostor. Sila F je proporcionalna sa B^2 odnosno ϕ^2 i bez obzira na smjer toka, uvijek je privlačna. Strujna magnetska veličina B i naponska magnetska veličina H su podjednaki partneri za određivanje sile.

Treba naglasiti sličnost izraza za silu i energiju

$$F = \frac{1}{2} B H S; \quad W_m = \frac{1}{2} B H V$$

Dimenzija za silu se dobije iz izraza $F = \frac{B^2}{2 \mu_0} S$

$$F(=) \frac{V^2 s^2}{m^4} \frac{m^2}{\frac{Vs}{Am}} = \frac{VsA}{m} = \frac{Ws}{m} = \frac{Nm}{m} = N$$

dakle njutn. Za praktična računanja se može pretvoriti

$$1 N = 0,102 \text{ kp}$$

Konačno se može reći da sile na graničnim površinama u magnetskom polju nastoje uspostaviti takvo kretanje da bi rezultat toga bilo stanje najmanjeg magnetskog otpora. Izraženo na

drugi način, sile nastoje uspostaviti kretanje da bi tim nastalo stanje najvećeg induktiviteta uzbudnog svitka (za magnet-sko polje koje nastaje električnom uzбудom prema relaciji $L = N^2/R_m$).

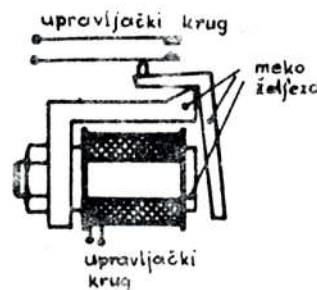
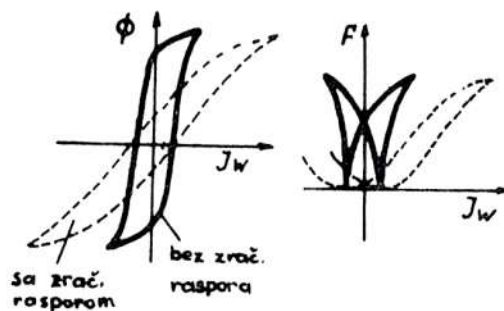
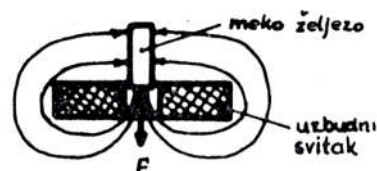
Kod elektromagneta je krivulja $F - IN$ jedna čašolika figura koja se dobije iz krivulje histereze $- IN$, na osnovu $F \sim \phi^2$, kvadriranjem ordinate.

Sile su uvijek pozitivne (privlačne) i nezavisne od smjera struje. Dok krivulja histereze teče skoro pravolinijski, krivulja sile raste parabolično sa I . Što je manji zračni raspor u toli-ko je manje potrebno amper zavoja za određenu silu F ali u toliko

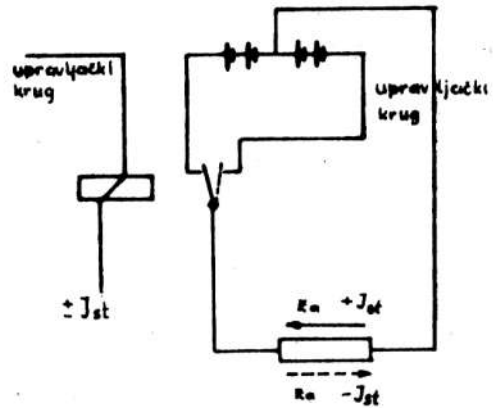
se jače osjećaju osobine histereze. Osim toga mali put kotve znači i manju sigurnost ukapčanja eventualnih kontakta (ako kotva nosi takve kontakte). Rješenje je u kompromisu takvih dvaju zahtjeva.

Primjene:

Nepolarizirani relej (primjena u telegrafiji i telefoniji) sa radnim ili mirujućim kontaktom. Primjer: birač sistema korak po korak, obični telegraf i sl.



Polarizirani relej. Kod pozitivne struje upravljanja imaju jedan smjer privlačenja, kod negativne struje upravljanja imaju suprotan smjer privlačenja. Ovdje se radi o superpoziciji malog upravljačkog toka ϕ_u i velikog toka jednakog iznosu $\phi =$ koji se proizvodi ili permanentnim magnetom ili istosmjernom strujom. Polarizirane sile se dobiju upotrebom "predmagnetiziranja". Sile proizvedene sa $I = I_{st}$ su uvijek privlačne sile, ali su kod $+ I_{st}$ veće, a kod $- I_{st}$ manje od srednje vrijednosti koju proizvodi struja predmagnetiziranja I_{st} . Povećanje sile zbog predmagnetiziranja iznosi $2 I_{st} / I_{st}$, a sila je

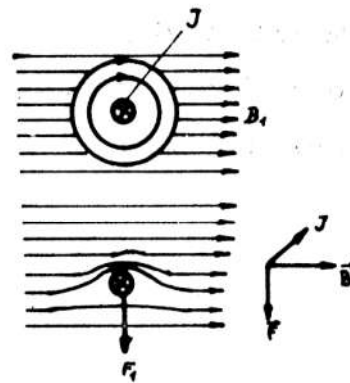


$$F = K \phi^2 \approx K (I_{st} + I_{st})^2 = K(I_{st}^2 + 2 I_{st} I_{st} + I_{st}^2)$$

gdje je $K I_{st}^2$ konstantna sila, $2 I_{st} I_{st}$ je proporcionalna sa željenom silom koja se mijenja u ritmu upravljačke struje, a I_{st}^2 je proporcionalna nepoželjnoj sili i nastupila bi sama, bez predmagnetiziranja.

2. Sile na električne struje u magnetskom polju

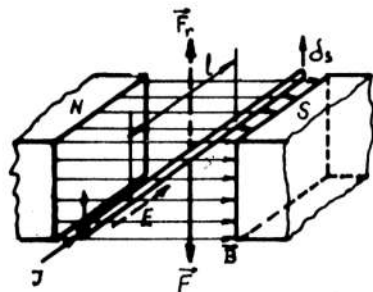
Homogeno polje B i vrtložno polje vodiča sa strujom I (okomito na ravninu crteža) se vektorski superponiraju i rezultat je s jedne strane vodiča jače polje nego homogeno, a s druge strane slabije. Zbog opće tendencije da se linije polja prošire i



to u toliko snažnije što je veća njihova gustoća, nastaje sila F - elektrodinamska sila usmjerena prema slabijem polju. Sile nema ako je B paralelno sa I , a najveća je kad je B okomito na I . Sila je uvijek okomita na ravninu B - I . U općem slučaju važi vektorski produkt

$$\vec{F} = (\vec{B} \times \vec{l}) I.$$

Ovaj odnos se može izvesti na osnovu energetskog razmatranja i virtuelnog pomaka. Kroz ravni vodič prolazi struja, a vodič se dužinom l nalazi okomito u magnetskom polju gustoće B . Elektrodinamičkoj sili F drži ravnotežu neka vanjska sila F_r . Ako zamislimo infinitezimalni virtuelni pomak δs u smjeru F_r , onda će se u žici inducirati EMS iznosa $E = B l \delta s / dt$ u smjeru struje, pri čemu neka struja ima vrijednost I .



Komad žice dužine l preda strujnom krugu rad

$$I E dt = I \delta s B l$$

Vanjska sila na žici vrši rad

$$F_r \delta s = (F + dF) \delta s$$

Ova dodatna sila dF otpada u ravnotežnom stanju, ona predstavlja silu inercijeⁱ trenja. Stoga u ravnotežnom stanju $dF = 0$.

Energetska ravnoteža zahtjeva dakle da bude

$$F \delta s = I B l \delta s$$

Uvaživši smjerove kao kod zakona indukcije imamo

$$\begin{matrix} I & B & l = & F \\ \text{palac} & \text{kažiprst} & & \text{srednji prst} \end{matrix}$$

tj. smjer sile odredjujemo i ovdje po pravilu desne ruke što možemo izraziti vektorskim produktom

$$\vec{F} = (\vec{B} \times \vec{l}) I.$$

Gornji izraz nam daje zakon elektrodinamičke sile. Sila je strogo proporcionalna jačini struje (dakle magnetskoj naponskoj veličini) i gustoći magnetskog toka (dakle magnetskoj strujnoj veličini).

Ako žica stoji u magnetskom polju pod nekim proizvoljnim kutem a ne okomito na polje onda je

$$E = \frac{\delta S}{\delta t} \sin(\widehat{I, B}) B l$$

odnosno

$$F = B I l \sin(\widehat{I, B}) \text{ ili } \vec{F} = (\vec{B} \times \vec{l}) I$$

Ovdje se pod B misli na gustoću vanjskog polja (kao da je struja u vodiču $I = 0$), a ne na gustoću polja nastalog superpozicijom polja struje I. Elektrodinamičke sile su veoma znatne, naročito kad se višestruko pojačaju upotrebom mnogo zavoja pa stoga imaju najveći tehnički značaj.

Obrtni moment na vodič protjecan strujom u magnetskom polju

Kazali smo da u tehničkoj praksi nalazimo dva vrlo važna slučaja raspodjele magnetskog polja:

- a) homogeno paralelno polje
- b) homogeno radijalno polje

a) U homogenom paralelnom polju imamo dvije sile na dva štapa koji leže okomito na smjer polja:

sila na štap 1 $F = IBl$

sila na štap 2 $F = IBl$

Ove dvije sile tvore spreg sila.

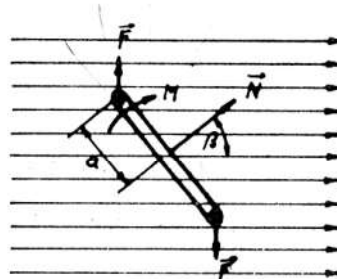
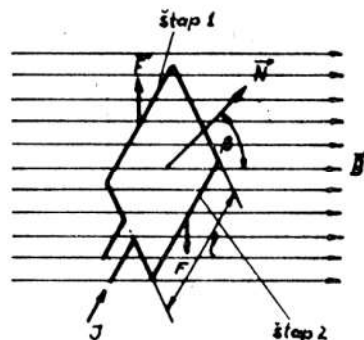
Obrtni moment ovog sprega je

$$M = 2 F a \sin \beta = IBl \ 2a \sin \beta = IB S \sin \beta$$

gdje je $S = l a$ površina zavoja koji se okreće u magnetskom polju.

Za N zavoja imamo

$$M = IBN S \sin \beta$$



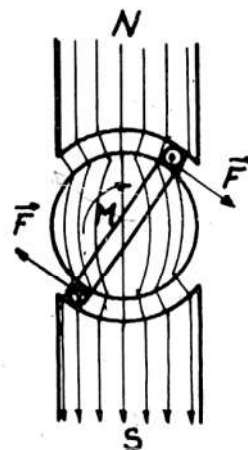
Obrtni moment je zavisan od puta položaja i nastoji da (svitak) zavoj postavi u poprečni položaj prema smjeru magnetskog polja.

b) U homogenom radijalnom polju je položaj zavoja takav da je $\beta = 90^\circ$. Otuda je obrtni moment

$$M = IBN S$$

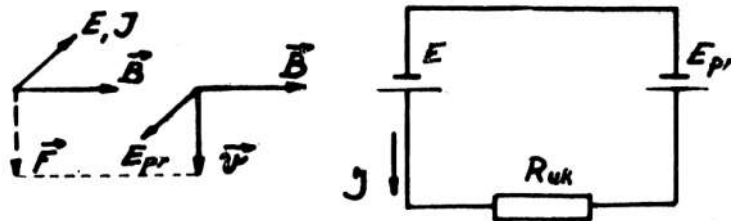
na zavoj kroz koga teče struja I u radijalnom polju.

Primjene: Primjena elektrođinamičke sile može se svesti na dva glavna vida
a) pogonska sila, b) kočna sila.



a) Pogonska sila . Vanjski izvor napona E tjera struju I na koju magnetsko polje B djeluje silom F . Zbog toga nastaje kretanje (motorno djelovanje) i prema zakonu indukcije se u strujnom svitku inducira EMS (generatorsko djelovanje) koja je prema pravilu za smjer - uvijek usmjerena nasuprot vanjskom izvoru napona E . Ova inducirana elektromotorna sila se naziva

protu - EMS , E_{pr} . Ova pojava je ustvari reakcija mehaničkih svojstava pokretnog vodiča u magnetskom polju na njegovo



električno ponašanje. Na pokretnom svitku je uvijek spregnuto motorno djelovanje sa generatorskim djelovanjem. Struja u vodiču, koji je u magnetskom polju pokretan elektromagnetskom silom, mijenja svoju jačinu u zavisnosti o brzini kretanja. Na nadomjesnoj šemi je prikazano djelovanje protu-EMS.

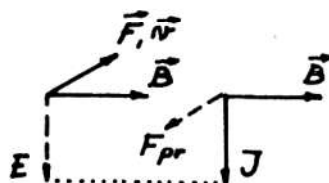
$$E \longrightarrow I \longrightarrow F \longrightarrow v \longrightarrow E_{pr}.$$

$$I = \frac{E - E_{pr}}{R_{uk}} ; F = IBl, \quad \begin{array}{l} \text{mehanički} \\ \text{zakoni} \end{array} \quad E_{pr} = v Bl$$

Rezultirajuće kretanje može biti translatorno ili rotaciono (sila kao pogon ili moment kao pogon). Kao primjer prvog možemo uzeti zvučnik, a kao primjer drugog motor.

b) Kočna sila. Vanjska mehanička sila F pokreće vodič brzinom v u magnetskom polju B , zbog čega se u vodiču inducira napon E (generatorsko djelovanje). Zbog zatvorenog strujnog kruga poteče struja I i izazove u magnetskom polju silu F (motorno djelovanje) koje je prema pravilima za određivanje smjera uvijek usmjereno nasuprot vanjskoj sili. Ova protusila F_{pr} nastoji smanjiti relativnu brzinu između vodiča i magnetskog polja. Ova pojava je ustvari reakcija električnih svojstava vodiča koji se kreće u magnetskom polju na mehanič-

ko ponašanje toga vodiča. Otuda shema kočne sile:



$$F \longrightarrow v \longrightarrow E \longrightarrow I \longrightarrow F_{pr}$$

$$F - F_{pr} \rightarrow v; \quad E = vBl; \quad I = \frac{E}{R_{uk}}; \quad F_{pr} = IBl$$

Protusila je strogo proporcionalna sa brzinom v i to je, ustvari idealna kočna sila:

$$F_{pr} = IBl = v \frac{B^2 l^2}{R_{uk}}$$

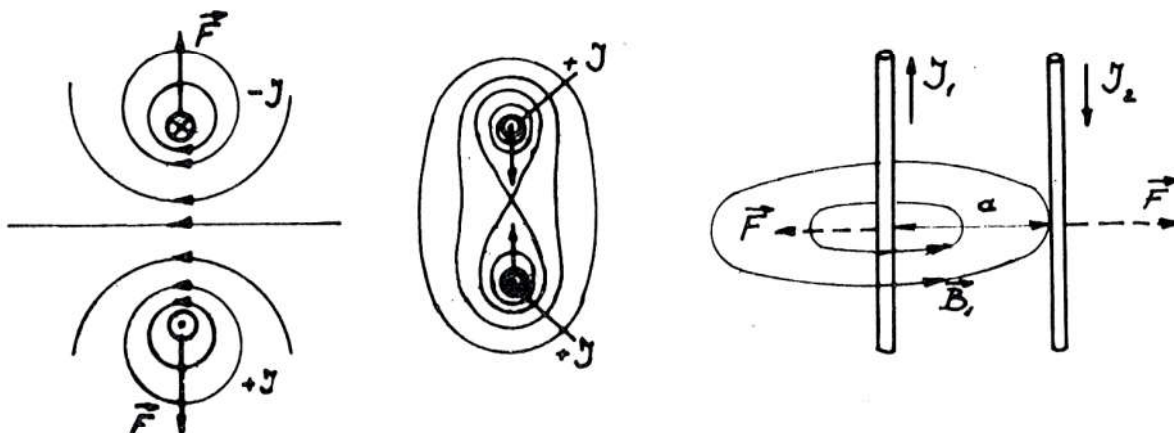
Kočna sila raste sa kvadratom indukcije B i u toliko je jača što je manji otpor strujnog kruga. Vodič, koji je dio zatvorenog strujnog kruga, a kreće se u magnetskom polju, će biti kočen kao da se kreće u nekom žilavom mediju. Kočenje će biti utoliko jače što je veća struja I .

Ako rukom okrećemo generator koji je zatvoren preko vanjskog strujnog kruga djeluje kočna sila, utoliko jača što je manji vanjski otpor. Kočno djelovanje počiva na energetskej ravnoteži: proizvedena električna snaga $E I$ zahtjeva dovodjenje ekvivalentne mehaničke snage.

3. Medjusobno djelovanje vodiča protjecanih strujom

Ako više vodiča leže u blizini, onda se polja prouzrokovana njihovim strujama superponiraju i mogu nastati dva razna slučaja: struje imaju isti smjer ili struje imaju suprotan

smjer. Zanimljiv je slučaj dvaju vodiča:



U slučaju da struje imaju razne pravce, onda se linije polja nastoje raširiti, pa iz toga rezultira sila odbijanja. Ako struje imaju iste pravce, onda se linije polja nastoje skratiti, pa iz toga rezultira sila privlačenja.

Račun se izvodi tako da se jedna struja (I_2) promatra u magnetskom polju druge struje (I_1) i traži se elektrodinamička sila. Gustoća toka B_1 se uzima na mjestu struje I_2 ne uzimajući u obzir njeno vlastito magnetsko polje.

Na udaljenosti a struja I_1 proizvodi polje

$$B_1 = \mu H_1 = \frac{\mu_1 I_1}{2 \pi a}$$

U polju B_1 djeluje na struju I_2 sila

$$F = I_2 B_1 l$$

Otuda izlazi nakon analognog računanja za vodič I_2 :

$$F = \frac{\mu I_1 I_2 l}{2 \pi a}$$

μ ovisi o vrsti medija, a smjer sile je određen smjerom obaju struja. Ove sile su male: dvije struje od po 10 A na

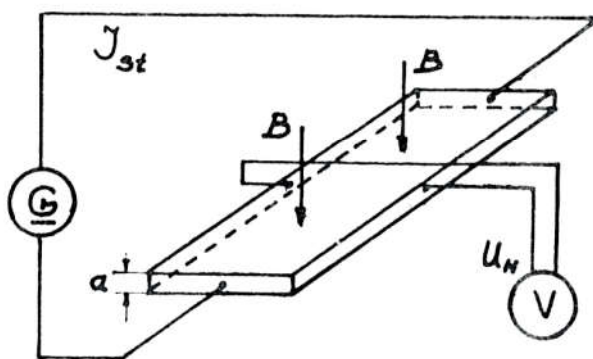
udaljenosti od 1 cm i u dužini od 1 m djeluju silom od 0,2 grama. Njihovo djelovanje dolazi do izražaja tek kod veoma velikih struja kratkog spoja (struje reda veličine kA).

Primjena: dinamometarski mjerni instrument:

Takodje u svakom zavoju zavojnice nastaje sile koje nastoje razmaknuti zavoje. Otuda svaki zavoj nastoji da poprimi kružni oblik, koji pri datoj dužini žice predstavlja najveću prolaznu površinu za magnetski tok (najmanja gustoća polja i najmanja energija!). Stoga pravokutni svitci u transformatorima i mašinama (radi konstruktivnih razloga) teže, pod utjecajem jakih struja, ka deformacijama pa se to sprječava potporama i ukrućenjima. Slično važi za sabirnice, koje u slučaju kratkog spoja veoma jako opterećuju potporne izolatore.

HALL-efekt

Pod tim nazivom se podrazumjeva djelovanje magnetskog polja na električnu struju. Tzv. "Hall"-pločica se smjesti u magnetsko polje B i po dužini pločice se propusti upravljačka struja I_{st} . Tačno okomito na smjer upravljačke struje, priključeni voltmetar pokazuje istosmjerni napon U_H - Hall-ov napon.



Uzrok Hall-ovom naponu leži u istiskivanju strujnih linija pod utjecajem magnetskog polja.

Veličina Hall-ovog napona je

$$U_H = R_H \frac{I_{st} B}{d}$$

gdje je d debljina Hall-pločice a R_H je Hall-konstanta. Vrijednost R_H je data sa

$$R_H = \frac{3}{8} \frac{1}{ne}$$

gdje je ne količina elektrona koju sadrži 1 cm^3 metala.

Za čiste metale kao Cu ili Ag, R_H iznosi reda veličine $10^{-4} \frac{\text{cm}^3}{\text{As}}$. To daje veoma male Hall-napone oko jedva $1 \mu\text{V}$ po Amperu upravljačke struje i $0,1 \text{ T}$ indukcije. Sa indijumovim spojevima (indium-arsenid i indium-antimonid) postižu se Hall-naponi od oko $0,1 \text{ V}$ po amperu i $0,1 \text{ T}$.

Primjena je najčešće za mjerenje jakih magnetskih polja u zračnim rasponima električnih strojeva kao i za mjerenje veoma velikih istosmjernih struja (za koje se ne može upotrebiti metoda shunta). Osim toga, može se primjeniti i tamo gdje neka veličina ovisi o produktu jedne električne i jedne magnetske veličine.

10. POLJA STRUJANJA I PROSTORNI VODIČI

Prostorni vodiči su takvi vodiči kod kojih je strujanje određeno trima prostornim koordinatama. Strujna staza nije unaprijed propisana kao kod linijskih vodiča. Ovakvi oblici provodjenja nastaju kad struja prolazi kroz zemlju (uzemljenje generatora, povratni vod kroz zemlju i sl.).

Prostorna raspodjela struje i napona opisuje se naponskim i strujnim poljima (poljima strujanja).

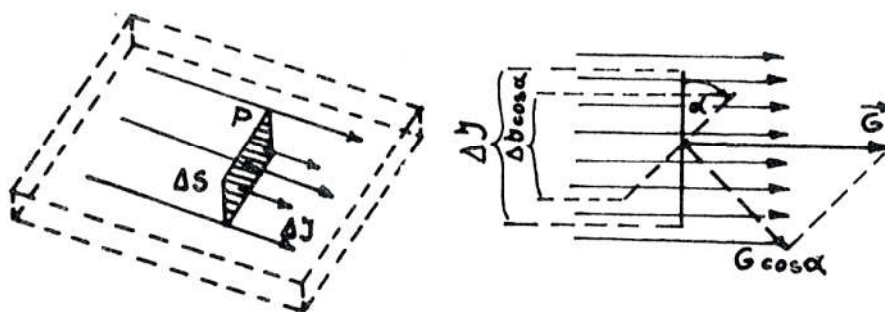
Polje strujanja. Pri prolazu kroz prostorni vodič, struja se ne ograničava na neku određenu stazu nego prolazi kroz sva područja vodiča. To se opisuje tim da se kaže da u vodiču postoje polja strujanja, čime se karakterizira prostorna razdioba struje.

Za kvantitativno označavanje polja strujanja, potrebno je označiti u svakoj tački strujanja intenzitet i smjer.

Najpogodniji izraz za to je pojam "gustoće struje": Ako se u nekom vodiču odredi jedna tačka P i kroz nju zamisli element površine ΔS okomit na smjer struje, onda je dio struje ΔI koji prolazi kroz taj element površine ΔS dat izrazom

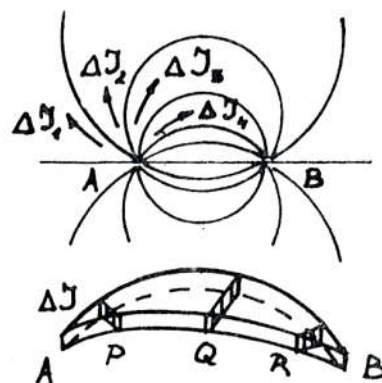
$$\vec{G} = \frac{dI}{dS}$$

gdje je dS okomito na smjer struje



Gustoća struje je vektorska veličina. Smjer vektora je smjer struje u dotičnoj tački. Gustoća struje ima u prostornim vodičima istu ulogu kao i jačina struje u linijskim vodičima.

Polje strujanja se grafički prikazuje "linijama struje". One nastaju idući od tačke do tačke u fiksiranom trenutku u smjeru odgovarajućih vektora gustoće struje. Linija struje ima beskonačno mnogo ali se one ne ukrštavaju jer u svakoj tački strujanja ima samo jedan smjer.



Svi naboji izvire u tački A i poniru u tački B linije struje u svakoj svojoj tangenti pokazuju smjer vektora gustoće struje.

Ako se iz polja strujanja isječe dio polja u obliku cijevi čije su granične površine strujne linije, onda naboji koji se kreću u ovakvoj cijevi ne izlaze iz nje ali niti (drugi) naboji iz drugih cijevi ne ulaze. Otuda zaključak: kroz svaki presjek jedne strujne cijevi teče u istom trenutku jednako jaka djelomična struja

$$(\Delta I)_p = (\Delta I)_q = (\Delta I)_R = \Delta I$$

Za grafičko predočavanje polja strujanja se uzimaju samo neke linije struje, tzv. izabrane linije. One se dobiju ako se cjelokupno polje strujanja razloži u n strujnih cijevi pravokutnog presjeka, u kojima teče ista djelomična struja ΔI . Za izabrane linije struje važi

$$\Delta I_1 = \Delta I_2 = \Delta I_n = \Delta I$$

pri čemu je

$$I = n \Delta I$$

Polje strujanja je jako gdje izabrane linije idu gusto jedna pored druge (oko izvora) a slabo gdje su linije daleko jedna od druge. Ako se indeksom o označi veličina strujnog polja na nekom odredjenom mjestu, a bez indeksa na bilo kojem mjestu, te ako je d debljina prostornog vodiča a recipročna vrijednost iznosa Δb (širine strujne cijevi) predstavlja mjerilo gustoće strujnih linija ($\frac{1}{\Delta b}$), onda važi :

$$\Delta I_o = G_o \Delta b_o d ;$$

$$\Delta I = G \Delta b d$$

$$\Delta I_o = \Delta I \frac{G_o}{G} \frac{\frac{1}{\Delta b}}{\frac{1}{\Delta b_o}}$$

Strujno polje se predstavlja kvantitativno pomoću izabranih linija. Smjer vektora gustoće struje na svakom mjestu je jednak smjeru tangente odgovarajuće (interpolirane) strujne linije.

U slučaju plosnog vodiča, iznos strujnog polja je proporcionalan gustoći $\frac{1}{\Delta b}$ strujnih linija. Za slučaj prostornog vodiča, potrebna su dva rastojanja duž odabranih smjerova strujanja. Ovako otvorena predodžba strujnog polja je od-

redjena samo geometrijskim podacima polja i ne mijenja se sa jačinom struje, jer odnosi ostaju isti.

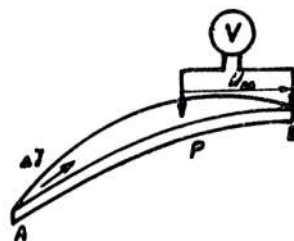
Polja u vezi sa naponom

Razlikuju se dva polja

- a) potencijalno polje - polje potencijala
- b) električno polje

Polje potencijala

Svaka tačka vodiča ima neki napon prema odabranoj referentnoj tački (npr. B na slici). Napon je raspoređen kroz prostorno naponsko polje, Odgovarajući napon jedne tačke P prema jednoj referentnoj (i zajedničkoj za cijelo polje) tački, zove se potencijal u dotičnoj tački. Potencijal karakterizira naponsko polje.



$$U_{AB} = U_{AO} - U_{BO} = U_A - U_B$$

gdje je sa O označena zajednička referentna tačka.

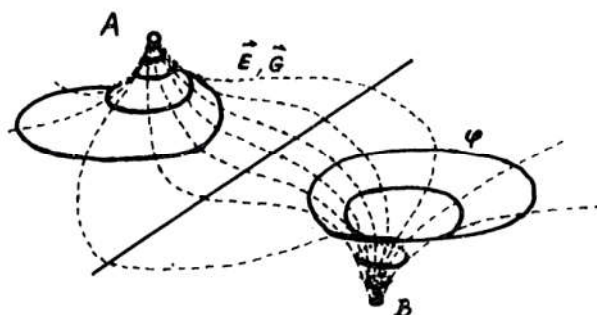
Potencijal se piše oznakom φ

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

Za predočavanje naponskog polja se upotrebljavaju "naponske linije" - ekvipotencijalne linije. To su linije koje povezuju tačke istog potencijala.

Naročito pregledno se može naponsko polje predočiti ako se napon u jednoj tački zamisli kao visina i predstavi okomito iznad druge tačke. U tom slučaju razdioba napona

formira "naponski reljef".
Na ovakvom reljefu je A
izvor a B je ponor napon-
skog polja. Ekvipotencijal-
ne plohe su prikazane kao
izohipse na reljefu.



b) Električno polje

Svakoj tački polja je pridjeljena odgovarajuća jačina polja koja karakterizira opadanje potencijala u okolini posmatrane tačke. Jačina polja je razna za razne smjerove.

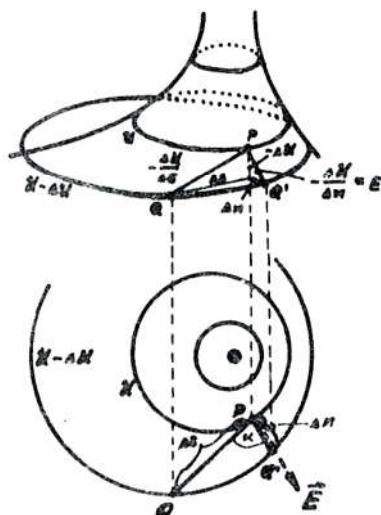
Ako se podje od neke tačke P sa potencijalom U_p prema susjednim tačkama Q koje sve imaju potencijale za ΔU manje ($U_p - \Delta U$), onda treba za razne smjerove preći razne puteve Δs . U smjeru normale (okomito na liniji napona) je Δs najma-
nje (zato taj put obilježavamo sa Δn). U tom smjeru je strmi-
na naponskog reljefa veća, a mjera za to je promjena napona u
odnosu na mjesto $\frac{\Delta U}{\Delta s}$. Otuda se može izvesti definicija: jačina
polja je pad napona u smjeru najvećeg naponskog smanjenja.

$$\vec{E} = - \frac{dU}{dn}$$

gdje je dn element puta u smjeru najveće mjesne promjene na-
pona.

Iz geometrijskih odnosa naponskog reljefa se može iz-
vesti da mjesno opadanje napona $-\frac{dU}{ds}$ ima iznos koji ovisi o
kutu α izmedju odgovarajućeg pada napona i smjera jačine po-
lja E

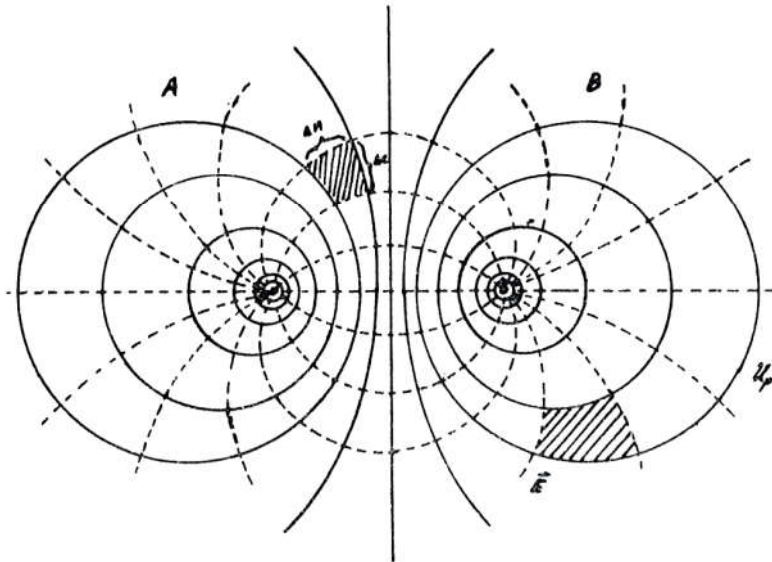
$$-\frac{dU}{dn} = -\frac{dU}{ds} \cos \alpha$$



Dakle smjer vektora $\vec{E}$ je u smjeru najvećeg pada napona u odnosu na mjesto. Otuda je vektor jačine polja uvijek pozitivan (promjena napona ΔU je negativna pa je otuda $-\Delta U$ pozitivno).

Jedinica jačine polja je $\frac{V}{m}$ ili $\frac{V}{cm}$

Grafički se jačina električnog polja predstavlja linijama jačine polja. One su definirane time da u svakoj tački smjer tangente na liniji predstavlja smjer jačine polja. Na reljefnom prikazu linije polja prikazuju linije pada i sjeku pod pravim kutom naponske linije. Gdje su naponske linije blizu jedna drugoj (Δn maleno za isto ΔU), tu je iznos jačine polja velik $|E| = \left| \frac{dU}{dn} \right|$ pa su i linije polja guste a njihov međusobni razmak Δc je malen. Pri pogodnom mjerilu, mreža izabranih linija napona i jačine polja (za plosni vodič) se svodi na kvadratima slične figure. U mreži ovakvih linija, na svakom mjestu je za jačinu polja $|E| \approx \text{konstanta}_1 \frac{1}{\Delta c}$, a za napon $|\Delta U| \approx \text{konstanta}_2$. Pošto je $|E| \approx \left| \frac{\Delta U}{\Delta n} \right|$ a sa druge strane konstanta₁ $\frac{1}{\Delta c} \approx \frac{\text{konst}}{\Delta n}$ onda je $\frac{\Delta n}{\Delta c} \approx \text{konst}$, i to u toli-ko tačnije što je manji Δn i Δc . Kod prikladnog mjerila je $\Delta n \approx \Delta c$ nezavisno od mjesta.

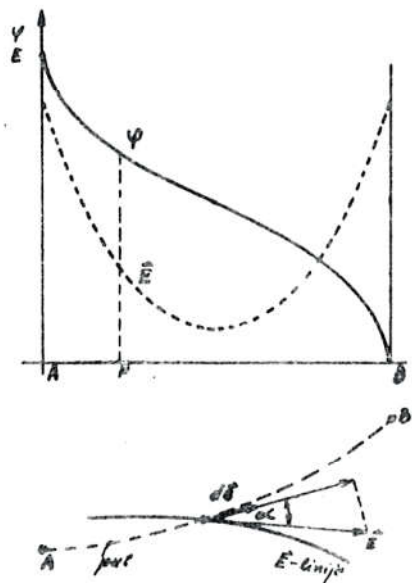


Teorija pokazuje da za tačkasti izvor i ponor A i B koji su dosta udaljeni, linije jačine polja su djelovi krugova kroz A i B. Naponske linije su takodjer krugovi, koji su kod malih promjera koncentrični oko A i B a kod većih promjera se razmiču.

Računanje napona iz jačine polja

Na osnovu jednačbe $E = - \frac{dU}{dn}$ moguće je izračunati jačinu polja iz razdiobe napona. Inverzni problem se rješava ovako:

Specijalni slučaj: put AB je linija jačine polja (mjesna koordinata n duž puta). Ako je potencijal uzet u odnosu na tačku B, onda je jačina polja negativni diferencijalni kvocijent ove krivulje. Otuda se dobije napon iz linije jačine polja integracijom. Preko svakog elementa puta dn po liniji jačine polja postoji napon $- dU = E dn$, a preko cjelog



puta od P do B je onda

$$U_{PB} = \int_P^B E \, dn ; \quad \text{ako je } E = \text{konst onda je } U_{PB} = E n_{PB}$$

To je pad napona između dvije tačke jedne linije jačine polja. Ako je $U_{PB} = \varphi_P - \varphi_B$ pozitivno onda je φ_P više (u reljefu) od φ_B za U_{PB} . Reljef dakle opada prema B.

Opći slučaj. Ako tačke P i B ne leže na nekoj liniji jačine polja, onda se put mora razložiti u elemente ds . Duž svakog elementa puta ne djeluje sad cjelokupna jačina polja nego samo komponenta jačina polja koja pada u smjer puta: $E \cos \alpha$, pri čemu je α kut između vektora $\vec{E}$ i elementa puta $d\vec{s}$. Radi toga će biti djelomični pad napona duž puta ds :

$$- dU = E \cos \alpha \, ds \quad \text{ili}$$

$$- dU = \vec{E} \, d\vec{s}$$

$$\text{pa imamo: } U_{PB} = \int_P^B E \cos \alpha \, ds = \int_P^B \vec{E} \, d\vec{s}$$

Napon je jednak linijskom integralu jačine električnog polja. Ovaj je integral neovisan od puta između P i B (ali ne uvijek). Postoji izuzetak: kod vremenskih promjenljivog magnetskog polja, tj. kad se pri promjeni puta između A i B vremenski mijenja ukupni magnetski tok koji je obuhvaćen strujnom stazom. Tada se javljaju drugi naponi!.

Medjusobne ovisnosti strujnog i naponskog polja

Između gustoće struje $\vec{G}$ (mjerodavna strujna veličina za prostorne vodiče) i jačine električnog polja $\vec{E}$ (mjerodavna naponska veličina za prostorne vodiče), postoji uska veza.

Opća tendencija kod nosioca potencijalne energije je kretanje u smjeru najjače izmjene energije (zakon pada). Smjer djelovanja napona kao uzroka kretanja na elektrone je smjer najvećeg mjesnog pada napona, dakle smjer jačine električnog polja. Otuda zaključak: gustoća struje i jačina električnog polja imaju u svakoj tački polja isti smjer.

Ako se iz polja izdvoji uski element presjeka ΔS cilindričnog oblika sa djelomičnom strujom ΔI dužine Δn , na čijem početku vlada napon U , a na kraju $U - \Delta U$, onda je otpor ove cijevi (uz $\Delta n \rightarrow dn$ i $\Delta S \rightarrow dS$):

$$dR = \rho \frac{dn}{dS} ;$$

zbog

$$- dU = dI \, dR$$

$$- dU = dI \, \rho \frac{dn}{dS} ; \quad - \frac{dU}{dn} = \rho \frac{dI}{dS}$$

$$\vec{E} = \rho \vec{G} \quad \text{ili} \quad \vec{E} = \frac{1}{\kappa} \vec{G}$$

$$\vec{G} = \kappa \vec{E} \quad \vec{G} = \frac{\vec{E}}{\rho}$$

Ovo je Ohm-ov zakon u elementarnom obliku. U običnim vodljivim materijalima (κ konstantno) G i E su strogo proporcionalne, a faktor proporcionalnosti je vodljivost κ . Tamo gdje je jačina polja (u odnosu na neku referentnu tačku) dvostruka, tu je i gustoća struje u istom materijalu dvostruka.

Takodjer se može i I Kirchhoff-ov zakon izraziti u elementarnom obliku.

Tok vektora gustoće struje G kroz zatvorenu plohu S je

$$\oint \vec{G} \, d\vec{S}$$

i za bilo koju zatvorenu plohu mora važiti $\sum I = 0$, dakle

$$\sum G_n \, dS = 0 \quad \text{ili}$$

$$\oint G_n dS = \oint \vec{G} d\vec{S} = 0$$

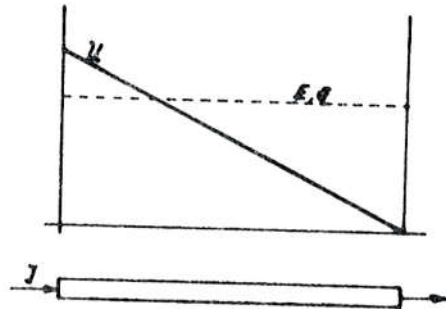
Ovim matematičkim izrazom je rečeno da je strujno polje bez izvora i ponora.

U bakrenom vodiči, sa gustoćom struje 6 A/mm^2 ,
 $\rho = 0,0175 \cdot 10^{-4} \Omega \text{ cm}$ imamo (uz $G = 600 \text{ A/cm}^2$)

$$E = 0,175 \cdot 10^{-4} \cdot 600 = 0,00105 = \sim 0,001 \text{ V/cm}$$

to je red veličine za jačinu električnog polja u bakrenim vodičima.

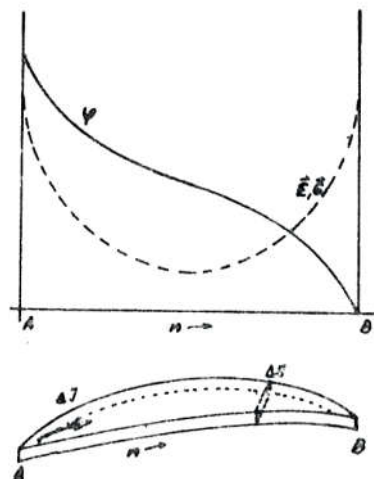
U slučaju prostornog vodiča, vladaju ranije spomenuti odnosi. Gustoća struje se mijenja preko strujnog puta (cijev) $G \approx \frac{\Delta I}{\Delta n}$ približno kao $G \approx \frac{1}{\Delta S}$ dakle na krajevima je jako velika, u skladu sa diferencijalnim kvocijentom - dU/dn .



U prikazu polja, tamo gdje linije gustoće struje i jačine polja idu gusto, tu su i naponske linije guste. U realnijem prikazu, ta područja su jako strma, a naponske linije leže tjesno jedna uz drugu.

Rubni uvjeti

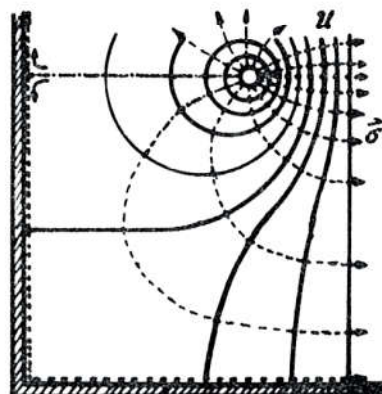
Granica površine vodiča utječe na razdiobu strujnih i naponskih veličina polja. Granica tzv. rubne uvjete. Postoje dva ekstremna slučaja.



a) Rub je savršeni izolator

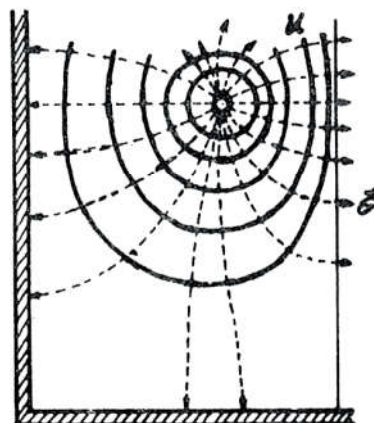
Strujanje ne može prodrijeti kroz rub i stoga može teći samo uzduž ruba: rub je linija strujanja.

Naponske linije dolaze na rub okomito. Ovakvu razdiobu imamo praktički u slučaju kad je rub znatno slabiji vodič u odnosu na prostorni vodič struje. (Plosnati površinski vodič).



b) Rub je savršen vodič

Na rubu ne mogu nastati nikakve razlike napona pa samo rub mora biti jedna linija napona. Linije gustoće struje dolaze okomito na rub. Ovakva razdioba polja nastaje praktički u slučaju kad je rub znatno bolji vodič nego prostorni (površinski) vodič struje.



Općenito se može reći za plosne vodiče, da (pri pogodnom mjerilu) izabrane linije strujanja i linije napona razdjeljuju ravan crtanja na mrežu figura sličnih kvadratima. Ako se pri tom crtanju uzmu u obzir još i rubni uvjeti onda se prilike za pojedina polja mogu prikazati veoma tačno.

Kad su vektori $\vec{G}$ i $\vec{E}$ okomiti na graničnu plohu, tj. kad tangencijalna komponenta iščezne onda se može pisati

$$\chi_1 E_1 = \chi_2 E_2 \quad \text{ili}$$

$$E_1 : E_2 = \alpha_2 : \alpha_1$$

Analognim zaključivanjem za slučaj da $\vec{G}$ i $\vec{E}$ dolaze pod kutem α na graničnu plohu, može se izvesti zakon loma vektora gustoće struje $\vec{G}$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \alpha_1 : \alpha_2$$

11. ELEKTRIČNE POJAVE U NEVODIČIMA

U nevodičima nema pokretnih nosioca naboja, ali ipak u njima postoje električne pojave – radio-valovi se prostiru kroz zrak, u vakuumu elektronskih cijevi kreću se elektroni.

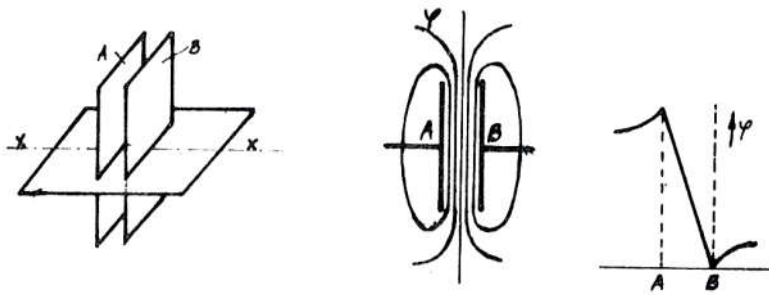
Osnovni element za proučavanje ovakvih pojava je kondenzator. U njemu su spregnuti vodič i nevodič : kondenzator je dvopol. Elektrode služe za dovodjenje napona i okružene su nevodičem. Nevodič u kondenzatoru je prostor pa za pojave važe pojmovi koji su obradjeni u poglavlju o prostornim vodičima. Pojave u nevodičima opisuju se poljima.

Polja u kondenzatoru

1. Polja vezana naponom.

I u slučaju kondenzatora razlikujemo dva polja: polje potencijala (napona) i električno polje (jačina električnog polja).

a) Polje napona. U svakoj tački nevodiča postoji napon (u odnosu na neku referentnu tačku) ako se na elektrode kondenzatora narine napon. U nevodiču postoji naponsko polje. U svim tačkama elektroda ima isti potencijal, a površina elektrode je naponska ploha (ekvipotencijalna ploha). Naponske linije (plohe) u nevodiču obuhvataju jednu i drugu elektrodu i vode napone između obje krajnje vrijednosti.



Naponsko polje uskog pločastog kondenzatora je prikazano na slici. Naponske plohe idu paralelno sa pločama A i B, podjednako razmaknute jedna od druge. Unutar elektroda postoji linearan pad napona (što ne važi za prostor izvan elektroda).

b) Električno polje. Po ranijoj definiciji, linije električnog polja teže od tačaka višeg potencijala prema tačkama nižeg potencijala i presjecaju naponske linije pod pravim kutem. Veličine električnog polja iznose često oko reda veličine 10 kV/cm.

Probojni napon U_d je onaj napon kod koga nastupi proboj dielektrika.

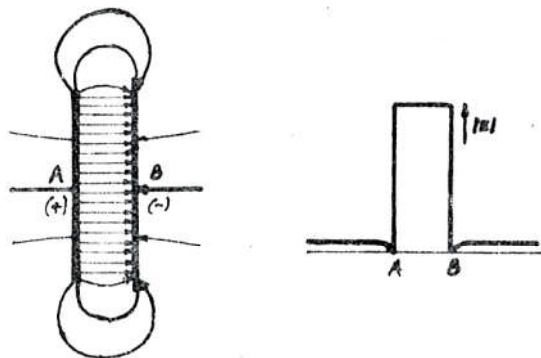
Električna probojna čvrstoća E_d je kvocijent probojnog napona U_d i najmanje debljine dielektrika, pri jednolikom električnom polju

$$E_d = \frac{U_d}{d} \left[\frac{V}{cm} \right]$$

Probojna čvrstoća nije specifično svojstvo materijala i može zavisiti i o dužini trajanja naprezanja.

U slučaju uskog pločastog kondenzatora vlada električno polje jednake jačine (zbog konstantnog pada napona: $E=U/d$,

gdje je d razmak ploča kondenzatora). Izvan kondenzatora je električno polje veoma maleno. Unutar elektroda linije polja teku paralelno. Uski pločasti kondenzator ima svoj an ogon u linijskom vodiču (konstantna jačina električnog polja).

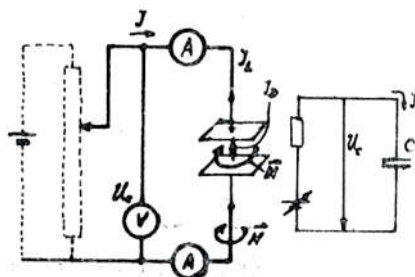


2. Polja vezama strujanjem.

U nevodičima postoje dva strujna polja: polje dielektrične struje i polje toka pomaka.

a) Dielektrična struja (struja pomaka). Nastaje pri vremenskim promjenama napona narinutog na elektrode (ukapćanje, iskapćanje, promjene potenciometra).

Na elektrodama nastaje višak odnosno manjak naboja, ali se unutar nevodiča (dielektrika) javlja magnetsko polje za vrijeme trajanja prelazne pojave. Postojanje magnetskog polja H daje do znanja da unutar dielektrika postoji dielektrična struja I_D . Jačina magnetskog polja H je ista oko spojnog vodiča kao i u dielektriku.



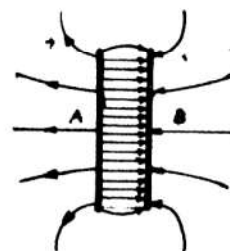
Ovim je proširen pojam struje: ne samo kretanje slobodnih elektrona u metalnom vodiču nego i dielektrična struja znači pojavu sličnu struji. Zajednička karakteristika je

popratno magnetsko polje (Maxwell, 1831 - 1879).

Dielektrična struja je u nevodiču prostorno raspoređena (polje strujanja). Stoga se uvodi vektorska veličina: gustoća dielektrične struje

$$\vec{G}_D = \frac{d I_D}{dS}$$

Polje dielektrične struje pločastog kondenzatora je prikazano na slici: strujne linije idu sa jedne elektrode okomito i završavaju na drugoj. Unutar dielektrike ne nastaje niti nestaje ni jedna strujna linija. Unutar dielektrika pločastog kondenzatora približno je



$G_D = I_D/S = \text{konst}$, gdje je $S = a b = \text{površina ploče}$.

b) Polje toka pomaka. Kondenzator pod naponom (može biti i istosmjerni napon) se razlikuje od istog takvog bez napona u dva vida:

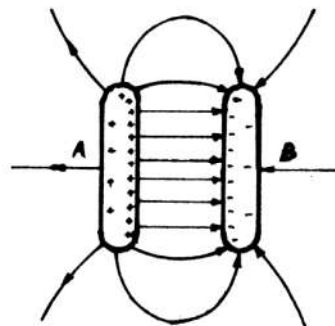
1. na elektrodama nastaju naboji
2. dielektrik je prožet tokom pomaka.

Naboji

Zbog povišenja napona od 0 na U_{AB} , struja koja je protekla donijela je na jednu elektrodu višak naboja, dok druga elektroda ima manjak naboja; dakle: $(Q_C)_A = (Q_C)_B = Q_C$. Na elektrodama kondenzatora pod naponom nalazi se par naboja $\pm Q_C$. Kondenzator je "nabijen" nabojem Q_C . Zbog opće tendencije naboja da se što više razmaknu, naboji se nalaze na površini elektroda. Naboj Q_C je površinski naboj. Mjera za razdi-

obu tih naboja je površinska gustoća koja daje dio naboja koji otpada na element površine

$$\sigma = \frac{dQ_c}{dS}$$



kod uskog pločastog kondenzatora skoro sveukupni naboj se nalazi na unutarnjoj površini elektrode, pa se može približno napisati

$$\sigma = \frac{Q_c}{S}$$

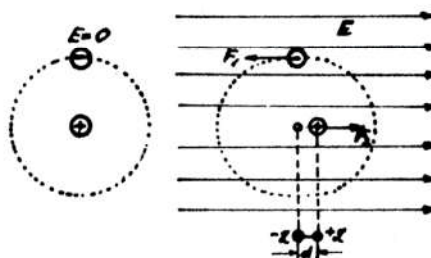
Razdioba površinskih naboja je općenito određena poljem strujanja. Na mjestima površine elektrode gdje je vladala velika gustoća struje, nalazi se odgovarajuće mnogo naboja.

✕ Tok pomaka ✕

U dielektriku koji je pod naponom nastupaju pojave pomicanja naboja u materijalu koji se unese u prostor medju elektrodama: u vodiču dodje do razdvajanje naboja, a u ne vodiču dodje do "polarizacije" - elastični pomak molekularnih naboja koji su vezani za svoje mjesto

$p = qd$ - električni moment dipola

$M = F d = E qd = E p$ - mehanički obrtni moment



Električni moment p induciranog dipola je proporcionalan

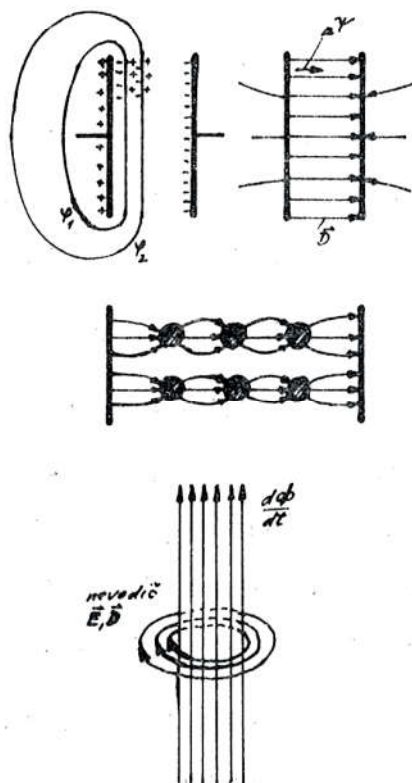
jačini električnog polja $p = \alpha E$. α je veličina polarizacije za dotičnu materiju i karakteristična je za gradnju elektronske ljuske atoma.

Ova pojava prožima cijeli prostor dielektrika (Faraday-eva teorija bliskog djelovanja), i nije neposredno vezana sa naponom (i ako je napon može proizvesti) jer pri istom naponskom polju ali u raznim medijima su pomicanja naboja razna.

U svakom presjeku dielektrika, ukupna pojava pomicanja naboja ima istu jačinu, pa zbog toga pojavi dajemo karakter strujanja. Pojava u dielektriku, koja sve presjeke prožima istom jačinom (čak i ako se dielektrik sastoji od raznih medija) zove se tok pomaka.

Tok pomaka polazi sa naboja i završava na nabojima, a između toga ima djelomično strujni karakter.

Međutim, tok pomaka može nastati i bez ikakvih naboja, kao sama u sebe zatvorena pojava bez početka i kraja. Ako se nevodič nalazi u promjenljivom magnetskom polju, onda promjene magnetskog toka prati pojava toka pomaka: nastaje struja pomaka



$$\frac{d\phi}{dt} \xrightarrow{\text{zakon ind.}} \oint E dn \xrightarrow{D = \epsilon E} (D \xrightarrow{G_D = dD/dt} G_D)$$

Ovakve dielektrične struje se zapažaju tek kod veoma brzih promjena magnetskog polja (visoka frekvencija).

Iz ovoga izlazi da tok pomaka može postojati sam za sebe (prošireni pojam struje).

Nasuprot ovome, iz naboja koji se nalazi u nekom dielektriku, izlazi neki tok pomaka (odnosno završava na naboju): naboj u dielektriku ne može postojati bez toka pomaka.

Tok pomaka karakterizira materijalni proces koji se odvija u vakuumu prilikom uspostavljanja električnog polja, iako tom procesu ne možemo dati očiglednu interpretaciju pri sadašnjem stanju nauke.

Tok pomaka je određen dvjema veličinama:

- a) jačina toka pomaka
- b) gustoća toka pomaka.

Tok pomaka se ne može svesti na neku drugu veličinu koja o njemu ovisi. Stoga se za određivanje smjera i jedinice uzima pojam jačina toka pomaka Ψ . Kao smjer jačine toka pomaka uzima se smjer pomaka pozitivnih naboja u dielektriku, a to je smjer najvećeg pada napona dakle okomito na naponske plohe.

Za jedinicu koristi se numerički odnos između veličina toka Ψ i naboja Q .

Jačina toka pomaka $\Delta\Psi$ je strogo proporcionalna naboju (paru naboja) čiji je pomak prouzrokovan $\pm \Delta Q$:

$$\Delta\Psi = \text{konst} \Delta Q$$

uzima se da je konst = 1 pa je

$$\Delta\Psi = \Delta Q$$

$$\Delta\Psi [As]$$

Treba imati u vidu da je karakter jačine toka pomaka sasvim drugačiji nego li to jedinice prikazuju (As - dakle naboj!)

jer tok pomaka može postojati i bez naboja.

Za opisivanje prostorne razdiobe toka pomaka služi veličina D : gustoća toka pomaka (sasvim analogno gustoći struje!). Veličina D ima vektorski karakter i definirana je odnosom

$$\vec{D} = \frac{d\psi}{dS} = \frac{d \cdot Q}{dS} = \epsilon$$

Ovim je prikazana veza između vektora $\vec{D}$ i površinske gustoće naboja ϵ . Prostorna razdioba vektora $\vec{D}$ se može prosuditi prema razdiobi površinske gustoće naboja

Odnos između naboja i toka pomaka

Odnos između toka pomaka i naboja iz koga ovaj tok proizlazi može se ovako formulirati: sa naboja $+Q$ izlazi tok pomaka jačine $\psi = Q$ i utiče (završava) na naboju protivnog predznaka $-Q$. Svakom naboju pripada protunaboj, a oba povezuje tok pomaka. Na početku i na kraju jedne takve "cijevi toka pomaka" nalazi se jednaki par djelomičnog naboja $\pm Q$.

Za svaku tačku površine elektrode važi

$$D_0 = \epsilon \quad - \text{gustoća toka pomaka na površini elektrode}$$

Postoje dakle dvije grupe strujnih veličina

- | | | |
|-------------------------------------|--------|-------------------------------|
| - Vezane na struju | I_D | G_D (gustoća diel.str. |
| - Vezane na naboje: na kondenzatoru | Q_C | ϵ površ.gustoća nab. |
| u dielektriku | ψ | D gustoća toka pomaka |

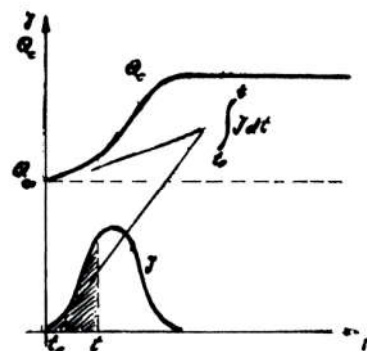
Strujne veličine nastaju iz veličina vezanih na naboje derivacijom po vremenu.

Struja i naboj. Ako struja jačine I teče u jednom strujnom krugu sa kondenzatorom, onda se u vremenu t poveća

količina elektriciteta $+ Q_c$ na elektrodi na koju struja dolazi, a isto toliko se smanji $- Q_c$ na elektrodi sa koje struja otiče. U istom vremenskom intervalu kroz svaki presjek vodiča teče ista količina elektriciteta pa prema definiciji za jačinu struje važi

$$I = \frac{dQ_c}{dt}$$

Donja krivulja je nastala diferenciranjem iz gornje. Što se brže naboj mijenja u nekom trenutku, u to liko će trenutna jačina struje biti veća. Ako je naboj konstantan, onda ne teče nikakva struja.



Obrnuto, iz poznate struje se integracijom može dobiti količina elektriciteta. Ako je u trenutku $t = t_0$ bio naboj kondenzatora Q_{c0} , onda je u vremenu t porastao na Q_c

$$Q_c - Q_{c0} = \int_{t_0}^t I dt$$

Promjena naboja je jednaka površini ispod krivulje struje.

Gustoća struje i gustoća naboja. Ako se jednadžba $I = dQ_c/dt$ primjeni na jedan element površine elektrode dS (na mjestu o) onda se ima:

$$\Delta I_o = \frac{d}{dt} (\Delta Q_c); \quad \left(\frac{\Delta I}{\Delta S}\right)_o = \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta S}\right) \quad \text{dakle}$$

$$(G)_o = \frac{d\sigma}{dt}$$

To je odnos gustoće struje na površini elektrode i površinske gustoće naboja.

Dielektrična gustoća struje i gustoća toka pomaka

Jednadžba $I = \frac{dQ_c}{dt}$ primjenjena na dielektrik daje (imajući u vidu da tok pomaka ide od + Q na (-Q)):

$$I_D = \frac{d\psi}{dt}$$

Ako se ova relacija napiše za površinske veličine (G_D , D) i ima u vidu da dielektrična struja i tok pomaka imaju isti smjer, onda se ima

$$\vec{G}_D = \frac{d\vec{D}}{dt}$$

To znači: dielektrična struja (dakle vrtlog magnetskog polja) nastaje samo onda kad se tok pomaka vremenski mijenja. Pri porastu toka pomaka, tok pomaka i dielektrična struja imaju isti smjer, a pri opadanju toka pomaka suprotan smjer. Što se brže na nekom mjestu mijenja tok pomaka, u toliko je tu veća gustoća struje.

Medjusobna veza između strujnih i naponskih polja

Nakon svih ovih razmatranja treba naći medjusobnu zavisnost naponskih veličina nevodiča (U, E) i strujnih veličina nevodiča (G_D, D).

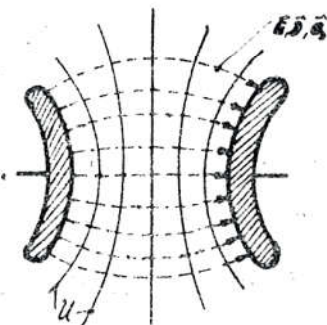
Smjer. Vektori $\vec{E}$, $\vec{G}_D$, $\vec{D}$ odnosno linije koje predaju polja tih vektora imaju isti smjer. Stoje okomito na naponske linije (plohe), izlaze iz elektroda okomito i ulaze u elektrode okomito.

Vremenska ovisnost. Ako je U vremenski konstantno, onda je i $\vec{E}$ konstantno, a $\vec{G}_D = 0$ pa je zato $\vec{D} = \text{konst.}$

Odnos $\vec{D}$ i $\vec{E}$. Ovi vektori ovise o materijalu dielektrika. Analogno odnosu za vodiče ($\vec{G}_L = \chi \vec{E}$) može se pisati

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Jednadžba prikazuje odnos strujne veličine $\vec{D}$ i naponske veličine $\vec{E}$ u nevodičima i od izvanredne je važnosti jer je faktor proporcionalnosti ϵ praktično nezavisan od $\vec{E}$ (za sve nevodiče), dakle ϵ je materijalna konstanta. Ova jednadžba se može primjeniti na tačke površine elektrode



$$G = \epsilon (E)_0$$

gdje je na površini elektroda velika jačina električnog polja, velika je i gustoća naboja. Otuda velika gustoća i jačina električnog polja na oštrim bridovima, na šiljcima i sl.

Odnos G_D i E . Iz jednadžbe $G_D = \frac{dD}{dt}$ preko jednadžbe $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ dobije je:

$$\vec{G}_D = \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt}$$

Oдавде se vidi da gustoća dielektrične struje ovisi o vremenskoj promjeni električnog polja što je upravo suprotno za isti odnos u vodičima ($\vec{G}_L = \chi \vec{E}$). Dielektrična struja nastaje samo kad nastaju promjene jačine električnog polja.

Dielektrična konstanta

Faktor proporcionalnosti ϵ je materijalna konstanta za nevodiče, kao što je χ za vodiče. ϵ je mjera za gustoću pomaka $\vec{D}$ kod zadane jačine električnog polja $\vec{E}$. Jedinica i dimen-

zija je

$$\epsilon = \frac{D}{E} (=) \frac{As/m^2}{V/m} (=) \frac{As}{Vm} (=) \frac{F}{m}$$

Ne postoji materijal sa $\epsilon = 0$, ali ima veoma mnogo materija sa $\chi \approx 0$ (svi nevodiči). Otuda slijedi veoma važan zaključak: ne može se spriječiti poljima pomaka prolaz kroz dielektrik.

Ako u dielektriku vlada neka jačina električnog polja, onda nastaje tok pomaka.

Za vakuum je $\epsilon =$ vrijednost najmanja pa se uzima kao referentna (ϵ_0)

$$\epsilon_0 = 0,8854 \cdot 10^{-11} \frac{As}{Vm} = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{As}{Vm}$$

Dalje važi: $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{rel}$ gdje je

ϵ - apsolutna dielektrična konstanta

ϵ_0 - dielektrična konstanta za vakuum (influenciona konstanta ili konstanta pomaka)

ϵ_r - relativna dielektrična konstanta (broj koji pokazuje koliko je puta D veća za neki materijal nego u vakuumu, uz isti E.)

Brojne vrijednosti ovih veličina su date u tablicama.

Za zrak se može staviti (zbog $\epsilon_r = 1,0006$) da je $\epsilon_0 \approx \epsilon$

Na elektrodi u zraku, uz $E = 30 \text{ kV/cm}$ vlada gustoća naboja:

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} = 0,0886 \cdot 10^{-12} \frac{As}{V \text{ cm}} \cdot 3 \cdot 10^4 \frac{V}{\text{cm}} = 2,66 \cdot 10^{-9} \frac{As}{\text{cm}^2}$$

Kad bi umjesto zraka bio mikanit ($\epsilon_r = 5 \dots 10$) bila bi gustoća naboja σ 5 do 10 puta veća.

ϵ = vrijednosti u pravilu se međusobno malo razlikuju u redu veličine, pa se stoga dielektrične struje ne mogu tako lako usmjeravati po željenim putevima kao što je to moguće sa provodnim strujama u vodičima.

Kapacitet

Kapacitet je karakteristična veličina za kondenzator isto kao što je otpor ili vodljivost za vodički dvopol. Kapacitet je definiran odnosom naboja Q_c na kondenzatoru i napona U_c ili, govoreći pojmovima prostornih vodiča, odnosom jačine toka pomaka Ψ između elektroda prema narinutom naponu. Definiciona jednadžba

$$Q_c = C U_c$$
$$C = \frac{Q_c}{U_c} = \frac{\Psi}{U_c} \quad (\text{dakle } \frac{\text{strujna veličina}}{\text{naponska veličina}})$$

što predstavlja analogon sa vodljivošću $G = I/U$. Jedinica je $As/V = 1 F$ (Farad).

Jačina toka pomaka, koja je izazvana narinutim naponom U_c , ovisna je o granicama elektroda i o propustljivosti medija (dielektrika), pa prema tome kapacitet ovisi o geometrijskim dimenzijama kondenzatora i dielektričnoj konstanti dielektrika. Naročita karakteristika kapaciteta se vidi u tome što je on nezavisan od napona, zbog $\epsilon = \text{konstanta}$; dakle kapacitet je konstanta sklopa (Schaltungs-konstante): Q_c i U_c su u pravilu, strogo proporcionalni.

Za uski, pločasti kondenzator, sa zanemarivo malim vanjskim tokom pomaka je

$$C = \frac{Q_c}{U_c} = \frac{S(D)}{Ed} = \frac{S(D)_0}{Ed} = \frac{\epsilon S}{d}$$

gdje je d - razmak između ploča.

Kapacitet je veći što su veće i ploče i manji međuprostor te što je medijum dielektrički propustljiviji (analogija kod vodiča: vodljivost $G = \kappa S/l$).

U idealnom slučaju, nabijeni kondenzator ostaje nabijen i kad narinuti napon prestane djelovati: kondenzator je rezervoar količine elektriciteta.

Što je veći kapacitet C , to se kod datog napona mogu nagomilati veće količine elektriciteta Q_c . (Sličnost sa akumulatorom, s tim da je napon proporcionalan količini elektriciteta Q_c).

Veza struje i napona na kondenzatoru

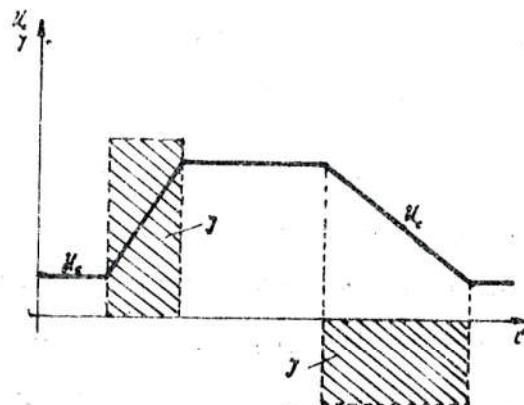
Ako se jednačba $Q_c = C U_c$ diferencira po vremenu i uzme u obzir relacija za jačinu struje $I = d Q_c / dt$ onda je

$$\frac{dQ_c}{dt} = C \frac{dU_c}{dt}$$

$$I = C \frac{dU_c}{dt}$$

Ako se mijenja napon u vremenu onda samo u tim intervalima teče struja kroz kondenzator. Dielektrična struja je istog smjera

kao i napon kod punjenja kondenzatora, a suprotnog smjera kod pražnjenja kondenzatora.



Kapacitet kao veličina u sklopovima igra neku ulogu samo pri izmjeničnoj struji ili u prelaznim pojavama.

Medjusobni spojevi

Spajanje više kondenzatora u jedan vrši se po slijedećim pravilima:

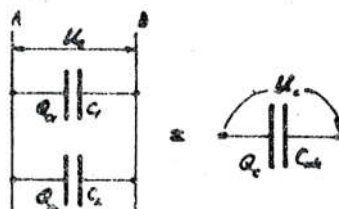
Paralelni spoj: $Q_c = Q_c$

$$Q_c = Q_{c1} + Q_{c2}$$

$$U_c = U_{c1} = U_{c2}$$

$$\frac{Q_c}{U_c} = \frac{Q_{c1}}{U_c} + \frac{Q_{c2}}{U_c} = \frac{Q_{c1}}{U_{c1}} + \frac{Q_{c2}}{U_{c2}}$$

$$\underline{C_{uk} = C_1 + C_2}$$



Serijski spoj: $Q_c = Q_{c1} = Q_{c2}$

$$U_c = U_{c1} + U_{c2}$$

$$Q_c = Q_{c1} = Q_{c2}$$

$$\frac{U_c}{Q_c} = \frac{U_{c1}}{Q_c} + \frac{U_{c2}}{Q_c} = \frac{U_{c1}}{Q_{c1}} + \frac{U_{c2}}{Q_{c2}}$$

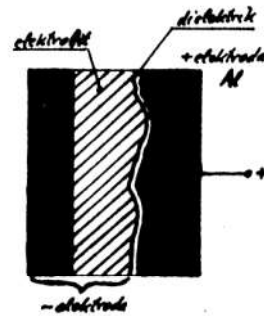
$$\underline{\frac{1}{C_{uk}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$



Analogija sa vodljivostima: paralelnim spojem se kapacitet uvijek poveća, a serijski smanjen.

Tehnički, kondenzatori se izvedu kao stalni ($C=\text{konst}$) i promjenljivi ($C = \text{varijabilno}$), a pri tome mogu imati razne dielektrike.

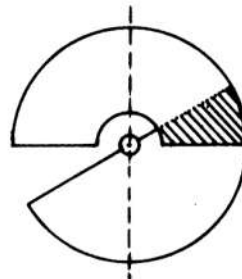
U stalnim kondenzatorima kao dielektrik se upotrebljava mikanit, keramika, papir u ulju, itd. Elektrolitski kondenzatori sa dielektrikom od aluminijevog oksida veoma male debljine (10^{-3} mm) je takodjer stalni kondenzator. Elektrolit je smjesa glicerina, vode i boraksa. Anoda je uvijek od aluminija da ne bi došlo do razgradjivanja aluminijevog oksida. Elektrolitički kondenzator može se izgraditi do vrlo velikih kapaciteta (oko 1.000 μF) ali za manje napone (do 700 V).



Promjenljivi kondenzator se izvodi u obliku višeslojnih ploča koje okretanjem mogu mijenjati aktivnu površinu. Dielektrik je najčešće zrak ali i ulje. Ako imamo n ploča onda je kapacitet

$$C = n \frac{\epsilon S}{d}$$

Najveći kapaciteti ovakvih kondenzatora kreću se od 50 pF do 1000 pF.



12. ENERGIJA I SILE U NEVODIČIMA

1. Energija. Kondenzator je za vrijeme nabijanja potrošač energije. Pri promjeni napona od 0 do U'_c važi:

$$W_{el} = \int_{t=0}^t U_c I dt = \int U_c C \frac{dU_c}{dt} = C \int U_c dU_c = \frac{C U_c^2}{2}$$

(u magnetizmu smo imali analogno $W_m = L \frac{I^2}{2}$)

Kod pražnjenja ($U'_c \rightarrow 0$) dobije se ista vrijednost ali negativna! Dakle kondenzator je rezervoar energije

$$W = C \frac{U_c^2}{2} = \frac{Q_c U_c}{2} = \frac{Q_c^2}{2C}$$

Električna energija je sadržana u dielektriku, a električno polje je nosioc te energije. Otuda oznaka dielektrička energija.

(Faktor 1/2 se objašnjava tim da je količina elektriciteta Q_c tekla pri promenljivom naponu od 0 do U_c , pa je srednja vrijednost napona $U_c/2$).

Promjene dielektrične energije se općenito mogu prikazati sa

$$dW_D = U_c dQ \text{ ili } dW_D = U_c d\psi$$

(Analogno u magnetizmu $dW_m = \Theta d\phi$).

Ovaj proces je povratni: električna energija $\rightleftharpoons$ dielektrična energija. Analogija sa akumulatorom mora biti korigirana: kod kondenzatora U nije konstantno, a I se također mijenja po zakonu $I = C dE_c/dt$ i male energije se mogu sakupiti.

Kao element sklopa, kapacitet C prikazuje sasvim druga svojstva u odnosu na otpor R vodiča. Energetski gledano, za kondenzator važi $dW_D = U dQ$ a za otpor $dW = UI dt$. Otpor pretvara električnu energiju u toplinu za vrijeme dok struja teče, neovisno o tome da li je jačina struje I konstantna ili se mijenja.

U kapacitetu se događaju energetske promjene samo onda ako se mijenja jačina toka pomaka (energiju prima sa porastom toka, energiju daje opadanjem toka pomaka). Idealni kondenzator ne dopušta odlazak energije iz strujnog kruga u okolinu: on djeluje kao rezervoar energije, koju opet vraća u strujni krug.

Nagomilana energija je obično malena: za $C = 50 \mu F$; $U_c = 2 \text{ kV}$, $W = 100 \text{ Js}$. Akumulator od 100 Ah ; 2 V ; $W = 7,2 \cdot 10^5 \text{ Js}$.

Interesantan je volumenski sadržaj energije kondenzator: uski, pločasti kondenzator ima volumen $V = Sd$, a na njemu je energija

$$W_D = \frac{Q_c U_c}{2} = \frac{D S E d}{2}$$

pa je onda

$$\frac{dW_D}{dV} = \frac{E D}{2} = \frac{\epsilon E^2}{2}$$

Analogan izraz u magnetizmu je

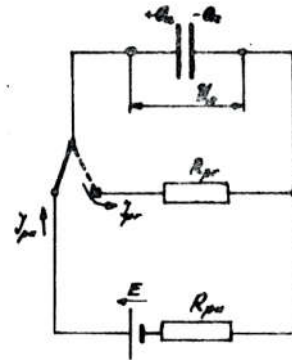
$$\frac{dW_m}{dV} = \frac{B H}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

Gornji izraz predstavlja gustoću dielektrične energije u prostoru u kojem vladaju $\vec{E}$ i $\vec{D}$. Mjerodavna naponska veličina $\vec{E}$ i strujna veličina $\vec{D}$ su podjednaki partneri u gustoći energije.

Prelazne pojave na kondenzatoru

Kondenzator punimo iz baterije.

Otpor strujnog kruga pri punjenju je R_{pu} . Kondenzator se prazni preko otpora R_{pr} . Iz dosadašnjih naponskih i strujnih odnosa i energetskih razmatranja proizlazi da se napon U_c na kondenzatoru ne može skokovito mijenjati, nego samo kontinuirano. Ako



bi u vremenu dt napon naglo skočio na puni iznos onda bi struja I morala biti beskonačno velika (prema $I = C dU/dt$). Sa druge strane prema

$$W_D = \frac{CU_0^2}{2}$$

morala bi se energija sa kondenzatora kretati na neko drugo mjesto strujnog kruga bez vremenskog trajanja, što takodje nije moguće jer se energija ponaša kao troma masa.

Punjenje kondenzatora. Elektromotorna sila baterije E tjera struju punjenja I_{pu} i na kondenzatoru raste naboj Q_c . Time nastaje na kondenzatoru protu-EMS koja je proporcionalna sa Q_c

$$E_{c \text{ protu}} = \frac{Q_c}{C} = U_c$$

U trenutku ukapčanja ima struja svoju najveću vrijednost ($E_c \text{ protu} = 0$) a kasnije djeluje $E - E_c \text{ protu}$, pa struja opada postepeno na vrijednost 0. Napon kondenzatora raste od $U_c = E_c \text{ protu} = 0$ do vrijednosti E , ali je porast sve sporiji radi

$$I = C \frac{dU_c}{dt} \quad \text{sve dok ne nestane pogonski napon.}$$

$$I_{pu} = \frac{E - E_c \text{ protu}}{R_{pu}} = \frac{E - U_c}{R_{pu}} = C \frac{dU_c}{dt}$$

Početak $U_c = 0$; $I_{pu} = I_{max} = \frac{E}{R_{pu}}$

Kraj $I_{pu} = 0$; $U_c = E$

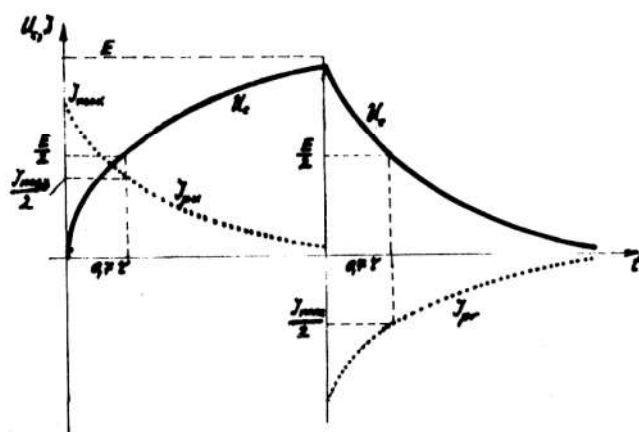
Ako se provede račun, onda se dobije

$$I_{pu} = \frac{E}{R_{pu}} e^{-\frac{t}{\tau}} ; \quad U_c = E (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

gdje je $\tau_{pu} = C R_{pu}$ - vremenska konstanta punjenja.

I_{pu} i U_c se mijenjaju po zakonu e - funkcije. Vremenska konstanta je mjera za brzinu odvijanja pojave. Nakon poluvremena $t_H = 0,693 \tau_{pu} = 0,7 \tau_{pu}$, struja i napon su dostigli polovinu svojih ekstremnih vrijednosti. Nakon $t = 3\tau$ struja je opala na 5% svoje početne vrijednosti a napon se popeo na 95% svoje konačne vrijednosti.

Pražnjenje kondenzatora. EMS kondenzator $E_c = U_c$ (kao izvor energije) tjera struju pražnjenja kroz otpor R_{pr} . Zbog toga se smanjuje naboj kondenzatora Q_c pa opada E_c : struja i napon teže k nuli.



$$I_{pr} = \frac{E_c}{R_{pr}} = \frac{U_c}{R_{pr}} = -C \frac{dU_c}{dt}$$

Početak:

$$U_c = E ; \quad I_{pr} = I_{max} = \frac{E}{R_{pr}}$$

Kraj:

$$I_{pr} = 0 ; \quad U_c = 0$$

Račun daje za $t = 0$

$$I_{pr} = \frac{E}{R_{pr}} e^{-\frac{t}{\tau}} ; \quad U_c = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

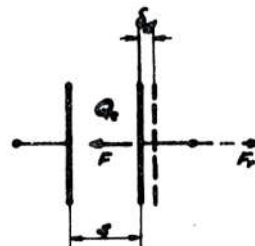
Nakon vremena $t = 0,7 \tau_{pr}$, struja i napon imaju polovinu svoje vrijednosti.

2. Sila. Između djelova koji su pod naponom postoje sile. Ako je kondenzator nabijen sa količinom elektriciteta $Q_c =$ konstanta (nakon iskapčanja izvora), pa razmaknemo ploče, onda se povisi napon U_c . Tim raste energija $1/2 Q_c U_c$. Razmicanjem ploča - produženjem linija polja predana je energija kondenzatoru. Pri tome je trebalo savladati sile koje su se protivile razmicanju ploča.

D-linije i E-linije imaju težnju da se skrate i rašire. Pri tome se izazivaju privlačne sile između površine, među kojima teku D i E-linije (Maxwell). Ovo razmatranje vrijedi općenito, pa i za granične površine dvaju nevodiča.

Veličina privlačne sile između elektroda se određuje pomoću metode virtuelnih pomaka.

Privlačnoj sili F neka drži ravnotežu jednaka protusila F_r . Za statičke kondenzatora $Q_c = \text{konstanta}$, računamo virtuelni pomak δs jedne ploče kondenzatora izazvan povećanjem protusile $F_r = F + dF$.



Iz energetske razmatranja sistema (uz uvjet $\sum \delta A = 0$) izvešćemo izraz za veličinu sile F .

Energija u kondenzatoru kod razmaka ploča s

$$W = \frac{Q_c^2}{2C} = \frac{Q_c^2 s}{2\epsilon S}$$

Povećanje energije u kondenzatoru zbog razmicanja ploča za δs i djelovanje F_r

$$\delta W = \frac{Q_c^2 \delta s}{2 \epsilon S}$$

Energetski odnos zahtjeva (izvršeni rad je):

$$F_r \delta s = \frac{Q_c^2 \delta s}{2 \epsilon S}$$

Iz uvjeta ravnoteže izlazi

$$F_r \delta s = (F + dF) \delta s \rightarrow F \delta s \quad \text{pa je}$$

$$F = \frac{Q_c^2}{2\epsilon S} = \frac{D^2}{2\epsilon} S = \frac{DE}{2} S = \frac{\epsilon E^2}{2} S$$

Isti rezultat dobijemo ako podjemo od izraza za dielektričnu energiju u nehomogenom polju

$$W_{el} = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

Deriviranjem izraza po putu s dobije se

$$F = \frac{dW}{ds} = \frac{DE}{2} \frac{dV}{ds} = \frac{DE}{2} S$$

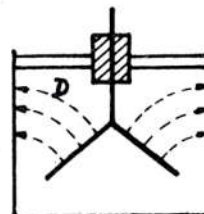
$$(U magnetizmu je analogno $F_m = \frac{BH}{2} S$)$$

To je veličina sile na površinu S ispod koje djeluje polje D i E. Veličine D i E su podjednaki partneri. Sila je proporcionalna sa E^2 , što znači da je sila uvijek privlačna bez obzira na smjer polja, jer se linije polja žele skratiti u svakom slučaju.

Postojeće polje na vanjskim stranama ploča nastoji razmaknuti ploče, ali zbog toga što je na vanjskoj strani ploče $(D_0) = \epsilon$ i E uvijek manje nego na unutarnjoj strani ploča, to preovladjuje sila koja privlači ploče.

Ove su sile veoma malene. Za kondenzator sa zrakom kao dielektrikom, uz $E = 30 \text{ kV/cm}$ ta sila je $0,4 \text{ p/cm}^2$ (dakle djelovi grama).

Primjena: elektroskop - listići se razmaknu radi tendencije skraćivanja D-linija između listića i kućišta elektroskopa.



Dielektrični gubici. Medijum u prostoru između elektroda je dielektrički polariziran. Medjutim svaki "izolator" je ustvari manje ili više "loš vodič". Kroz dielektrik ipak uvijek teče neka veoma mala struja. Ova mala struja I_R zavisi od tzv. otpora izolacije, pa se narinutim naponom U stvara "snaga gubitaka" $P_R = U I_R$, koja kod loših izolatora dovodi do priličnog zagrijavanja izolatora.

Preko površine izolatora (dielektrika) takodjer teče neka mala struja I_S uvjetovana tzv. "površinskim otporom" R_S . Ako je površina izolatora prljava ili vlažna, ova struja I_S može zadobiti značajne vrijednosti. Gubitak se računa $P_S = I_S^2 R_S = I_S U$, gdje je U narinuti napon.

Ako na dielektrik djeluje narinuti izmjenični napon, onda to dovodi do stalne repolarizacije elementarnih djelića dielektrika. Zbog toga se energija pretvara u toplinu. Ovakvi gubici se nazivaju dielektrični gubici i ovisni su o frekvenciji napona, kao i o tzv. faktoru gubitaka, $\text{tg } \delta$, gdje je δ tzv. "kut gubitaka" (o čemu će kasnije biti više govora).

Gubici iznose (u W)

$$P_d = 2 \pi f C U^2 \text{tg } \delta$$

$\text{tg } \delta$ se jako mjenja u ovisnosti o frekvenciji. Npr.

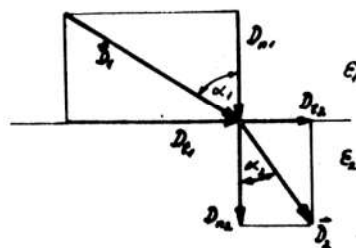
	kod 50 Hz	1 kHz	1 MHz
impregnirani papir	$5 \cdot 10^{-2}$	$10 \cdot 10^{-3}$	$30 \dots 60 \cdot 10^{-3}$
kondenza, kerafar	-	$30 \dots 50 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \dots 0,5 \cdot 10^{-3}$

Kerafar je specijalan materijal za male gubitke kod visokih frekvencija.

Lom električnih linija polja. Ovdje važe isti zakoni kao kod magnetskih polja. Zbog konstantnosti dielektričnog toka pomaka moraju normalne komponente gustoće pomaka D biti jednake, a zbog konstantnog napona U duž granične površine moraju tangencijalne komponente jačine polja E biti jednake. Otuda:

$$E_{t1} = E_{t2} ; \frac{D_{t1}}{\epsilon_1 \epsilon_0} = \frac{D_{t2}}{\epsilon_2 \epsilon_0} ; \frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{t1}}{D_n} ; \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{t2}}{D_n} ; \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$



Dalje je zbog $D_{n1} = D_{n2} = D_n$

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$$

odnosno, u koliko je polje okomito na graničnu površinu

$$\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 ; \frac{E_1}{E_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

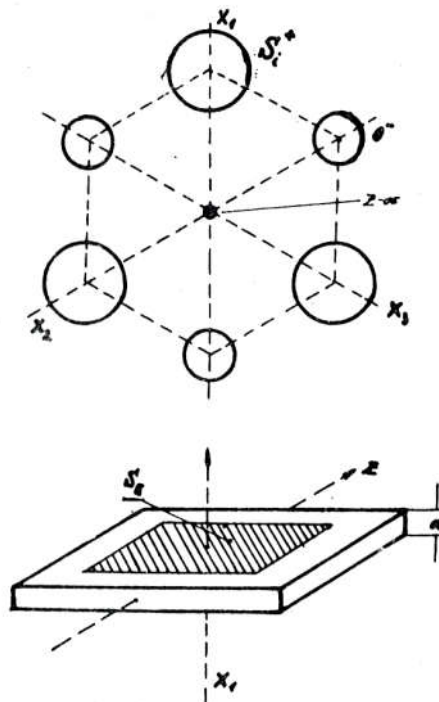
Kako vidimo polje E (ukoliko pada okomito na graničnu plohu što je vrlo čest slučaj) veće je u mediju sa manjom dielektričnom konstantom i obrnuto manje je u mediju sa većom dielektričnom konstantom.

Zbog toga što se ϵ_r ne razlikuju mnogo za većinu izolatora, ne dolazi do okomitog izlaza E i D linija kad je kut velik. Odnosi na slici važe od prilike za $\epsilon_1 = 3$ i $\epsilon_2 = 1$.

Piezo - elektricitet

Piezo - električni efekt nastupa kod kristala (kvarc, turmalin, Seignett-soli) koji imaju nesimetričnu strukturu (kvarc: Si^+ i O_2^- ioni). Ako se isječe pločica okomito na

polarnu os i na nju stave elektrode Se, onda se pritiskom u smjeru osi na elektrodama pojavi par naboja $\pm Q_c$ zbog pomaka ionske mreže kristala. Rastezanjem kristala pojavi se naboj sa suprotnim predznakom (P.Curie-direktni longitudinalni piezo - električni efekt).



Obrnuto, ako se na elektrode naerine napon, u kristalu nastaju sile, koje ga nastoje rastegnuti ili pritisnuti već prema smjeru napona (recipročni piezo-električni efekt).

Površinska gustoća naboja σ na kristalu proporcionalna je relativnoj promjeni debljine pločice $\frac{\Delta d}{d}$

$$\sigma = c \frac{\Delta d}{d}$$

Prema Hooke-ovom zakonu za elastične deformacije, ako djeluje sila F na pritisnutu površinu S_D , važi

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_D}, \text{ gdje je } E \text{ modul elastičnosti.}$$

Ako površinu elektroda označimo sa S_E , a naboj elektrode sa $Q_E = \sigma S$, imamo

$$Q_c = \delta \frac{S_E}{S_D} F$$

gdje je $\delta = \frac{c}{E}$ piezo - električni modul.

Za kvarc (longitudinalni efekt) piezo-električni modul $\delta = 2,1 \cdot 10^{-11} \frac{\text{As}}{\text{kp}}$

Ako se uzme da kristal ima kapacitet C_k , a ostali sklop C_s , ukupno 10 pF, pri sili od 1 kp pritiska nastupa napon

$$U_c = \frac{Q_c}{C_s + C_k} = \frac{F}{C_s + C_k} = 2,1 \cdot 10^{-11} \frac{\text{As}}{\text{kp}} \frac{1 \text{ kp V}}{10^{-11} \text{ As}} = 2,1 \text{ Volt}$$

Primjena: mjerenje pritiska (cilindri eksplozivnih motora, mjerenje vibracija mehaničkih sklopova). Dalje: tonske glave kod gramofona, piezo električni mikrofoni itd.

Recipročni piezo-efekt se primjenjuje za ultrazvučne dubinomjere i za održavanje veoma konstantne frekvencije (kvarcni sat, oscilatori). Za ovu svrhu se kristal uzbudi rezonantnom frekvencijom koja se određuje iz njegovih geometrijskih dimenzija (mehanička, veoma oštro izražena frekvencija).

Influencija

Iz svega što je do sada rečeno o ponašanju nevodiča u električnom polju, mogu se izvesti slijedeći uvjeti za pojavu influencije:

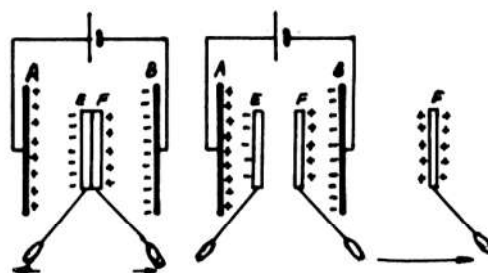
1. Sa jednog naboja ide tok pomaka i završava na jednako velikom naboju suprotnog predznaka.
2. Linije pomaka su podvrgnute zakonu skraćivanja i proširenja (opća tendencija svih linija polja).
3. U vodičima su naboji pokretni.

Sa svim ovim u vidu, može se definirati pojava influencije:

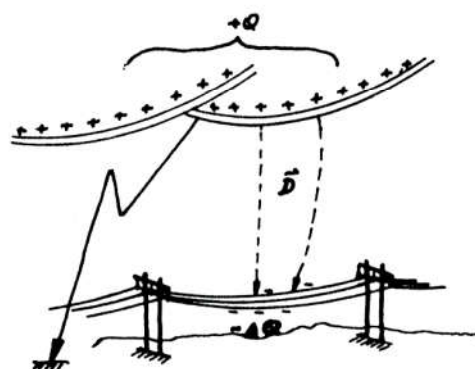
- Pod influencijom se podrazumjeva nastajanje naboja u vodičima koji se nalaze u električnom polju. Ovi naboji ne pripadaju naponskom izvoru na koga su elektrode priključene. -

Pojava se koristi za razdvajanje naboja i neke druge primjene.

Ako se dvije metalne ploče unesu u nabijeni kondenzator, onda se zbog influencije na njima razdvajaju naboji i rasporede na obje strane ploča. Ako se ploče razdvoje i pažljivo izvuku izvan djelovanja polja (bez dodira sa A ili B), onda su na ploči E negativni naboji, a na ploči F pozitivni naboji. Izvršeno je razdvajanje naboja influencijom. Ovaj se proces može proizvoljno mnogo puta ponoviti, a da se ništa ne mjenja na pločama kondenzatora (njihov naboj Q_c ostaje konstantan), radi toga ^{jer} se ovdje radi samo o razdvajanju naboja.



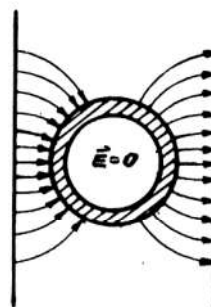
Ovakva pojava se opaža u djelovanju jako naelektriziranog oblaka koji prolazi iznad nekog dalekovoda i influencira u žicama naboje. Naboj oblaka $+Q$, a u žicama voda je influenciran dio naboja $-Q$, ostatak influenciranog naboja je na zemlji. Ako se udarom groma u zemlju (ne u dalekovod) oblak isprazni, onda se oslobodi djelomični naboj $-Q$ (koji je bio do tada vezan) i pojuri na obje strane: pojava



"putujućeg vala" - veoma nepoželjna i opasna, izaziva štete na uređajima.

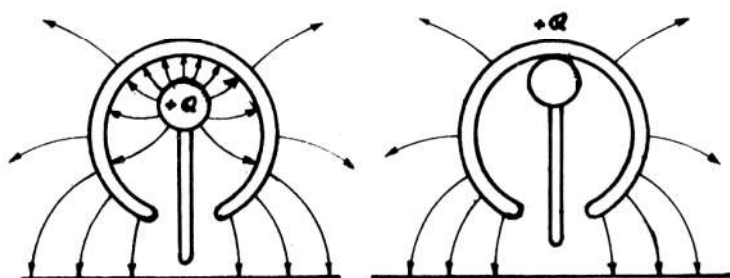
U unutrašnjosti šupljeg vodiča je jačina električnog polja nula iako izvan vodiča vlada neko električno polje: između bilo kojih tačaka unutarnje zida ne postoji naponska razlika.

Primjena: zaštita instrumenata i osoba u visokonaponskim laboratorijama, Faraday-ev kavez, oklopljeni kabeli i sl.



Nabijanje šupljih tijela i elektrostatsko proizvodjenje najviših napona

Ako se u šuplju metalnu sferu (izolirano smještenu) unese izoliranim transporterom količina naboja $+Q$, onda su na unutarnjoj površini sfere vezani naboji ukupnog iznosa $-Q$ (zanemarujući utjecaj vanjskog polja kroz otvor). Stoga na vanjskoj površini sfere nastaje naboj $+Q$ čije linije toka

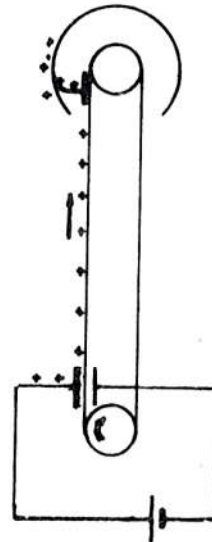


pomaka završavaju na $-Q$ nabojima okoline sfere. Kad transporter dodirne unutarnju površinu sfere izjednače se $+$ naboji transportera sa $-$ nabojima unutarnje površine: transporter predaje svoj naboj! Unutarnji prostor ostaje bez polja jer

ne mogu postojati nikakve naponske razlike, uključivši i transporter u dodiru. Sad se transporter može izvući bez naboja i opet upotrebi za unošenje novog naboja. Tako se povećava ukupni naboj na vanjskoj površini sfere. Ako se unese n naboja iznosa Q , onda će sfera imati ukupni napon prema svojoj okolini

$$U = \frac{nQ}{C}$$

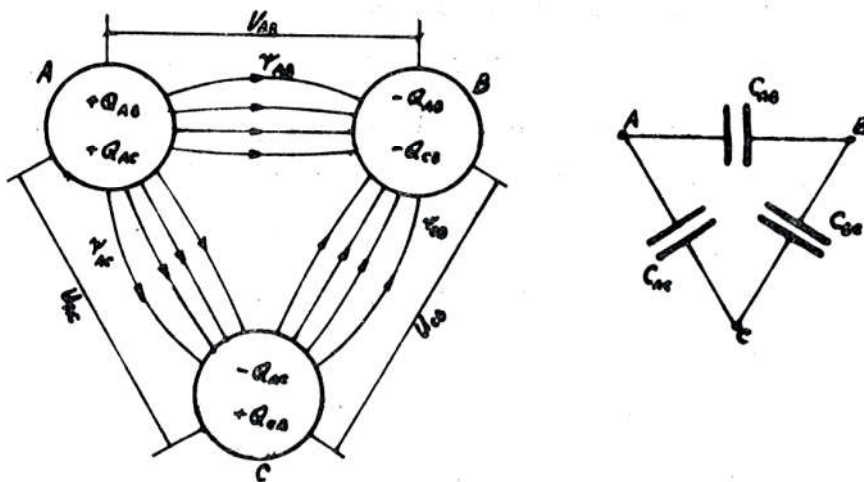
gdje je C kapacitet između sfere i okoline. Na ovom principu izgrađen je Van de Graaff-ov generator visokog napona. Beskrajni transporter donosi nove naboje tako da sfera postigne i do nekoliko miliona volti. Sfera ima veliki promjer (do nekoliko metara) ili se nalazi u komori pod tlakom nekog plina (freon, dušik).



Djelomični kapaciteti

Ako imamo tri nabijena vodiča, onda se njihov međusobni utjecaj opisuje pojmom djelomičnih kapaciteta (Maxwell). Tok pomaka ne ide samo od A prema B nego ide djelomično i preko C.

Vodič C u naponskom polju između A i B dobije jedan određeni napon U_{AC} . Kao djelomični kapacitet između A i C definira se odnos između dijela toka pomaka Ψ_{AC} između A i C (dakle dijela naboja $+Q_{AC}$ koji je njime vezan) prema pripadnom djelomičnom naponu U_{AC}



$$\underline{Q_{AC} = C_{AC} U_{AC}}$$

To je definicijska jednačica za djelomični kapacitet C_{AC} .

Djelomičnih kapaciteta ima toliko koliko ima djelomičnih tokova: C_{AB} , C_{AC} , C_{BC} . Ukupni kapacitet između A i B (odnos ukupnog naboja Q prema naponu U_{AB}) računa se iz djelomičnih kapaciteta na ovaj način:

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} ; \quad Q = Q_{AB} + Q_{AC} ; \quad Q_{AC} = Q_{CB}$$

$$\begin{aligned} U_{AB} &= U_{AC} + U_{CB} = \frac{Q_{AC}}{C_{AC}} + \frac{Q_{CB}}{C_{BC}} = Q_{AC} \left(\frac{1}{C_{AC}} + \frac{1}{C_{BC}} \right) = \\ &= (Q - Q_{AB}) \left(\frac{1}{C_{AC}} + \frac{1}{C_{BC}} \right) = U_{AB} C - U_{AB} C_{AB} \left(\frac{1}{C_{AC}} + \frac{1}{C_{BC}} \right) \end{aligned}$$

Otuda

$$\underline{C = C_{AB} + \frac{C_{AC} C_{BC}}{C_{AC} + C_{BC}}}$$

dakle paralelni spoj C_{AB} sa serijom C_{AC} i C_{BC} .

Polje između dvaju vodiča se mijenja ako se treći vodič pomiče. Otuda važi pravilo za djelomične kapacitete:

- Djelomični kapacitet između dva vodiča ne ovisi samo o obliku i položaju ovih obaju vodiča nego također i o obliku i položaju svih ostalih vodiča sistema (sklopa). -

Oдавде je vidljivo kako je važan pojam djelomičnih kapaciteta, ali je jasno da je proračun moguć samo u malo slučajeva gdje su odnosi pravilni. Za ostale slučajeve služe metode približnog računanja.

Koliki napon U_1 vlada u tački 1 ako je napon u tački 2 U_2 . Traži se razdioba napona U_2 na oba kondenzatora C_3 i C_4 pri čemu još sudjeluju i C_1 i C_2 .

Kapacitet tačke 1 prema zemlji

$$C_{g1} = C_1 + C_3$$

Kako C_2 leži neposredno na U_2 , on ne utječe na razdiobu napona. Serijski spoj C_{g1} i C_4 ima isti naboj

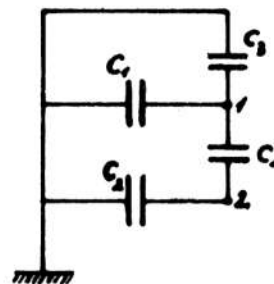
$$Q = C_{g1} U_1 = C_4 (U_2 - U_1)$$

Naponi se odnose obrnuto proporcionalno prema kapacitetima

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{C_{g1} C_4}{C_{g1} + C_4}}{C_{g1}} = \frac{C_4}{C_{g1} + C_4}$$

Sa ovim je traženi napon U_1

$$U_1 = \frac{C_4}{C_{g1} + C_4} U_2$$



Ako su $C_1 = C_2 = 200 \text{ pF}$ a $C_3 = C_4 = 500 \text{ pF}$ te $U_2 = 20 \text{ kV}$
(prema zemlji), onda je $C_{g1} = 700 \text{ pF}$, a $U_1 = 8,33 \text{ kV}$. Iako su
 C_3 i C_4 jednaki, ipak C_4 mora izdržati viši napon $11,4 \text{ kV}$.

13. ELEKTRIČNE POJAVE U TEKUĆINAMA

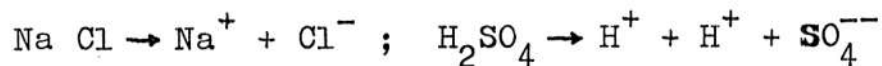
Ove pojave se zasnivaju na energetskom pretvaranju električne energije u kemijsku, pri čemu dolazi do pregrupiranja materijala koji učestvuju u procesu. Kao vodič električnosti djeluje elektrolit (tekućina sa ionima) u koji su uro-
njene dvije elektrode - pozitivna anoda i negativna katoda.

U elektrolitu postoji ravnoteža između koncentracije iona i još neraspadnutih molekula (zavisi o materiji, temperaturi i sl.). Raspadanje molekula naziva se disocijacija. Dijelovi molekula imaju jednake, ali suprotne naboje. Važi pravilo predznaka: metali i ioni vodika imaju pozitivan naboj sve ostalo ima negativan naboj.

Naboj iona je cjelobrojni multipl elementarnog naboja e

$$Q_{ion} = \pm v e$$

gdje je v - valencija atoma



Dok u metalnim vodičima postoje samo pokretljivi negativni naboj, u elektrolitima ima i pozitivnih naboja, pa se struja sastoji od dvije djelomične struje suprotnih smjerova

$$I = \frac{|Q^+|}{t} + \frac{|Q^-|}{t}$$

Za čisti elektrolitički vodič važi Ohm-ov zakon $R_E = \frac{U}{I}$, pri čemu je R_E otporelektrolita. Također važi $R_E = \rho_E \frac{l}{S}$, gdje je

ρ_E specifični otpor elektrolita, ali je $\rho_E > 10^6 \rho_{\text{metal}}$.
Temperaturni koeficijent je pozitivan $\alpha_E \approx + 2\%/^{\circ}\text{C}$.

Prolazom struje, stvara se i toplinska energija

$$U I = I^2 R_E$$

Izlučivanje materije na graničnoj površini elektroda-elektrolit

Pri prolazu struje kroz elektrolit okreću se ioni i talože se na elektrode predajući pri tome svoj naboj. Mogu nastati tri mogućnosti reakcija na graničnoj površini:

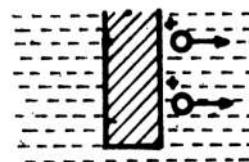
1. Izlučeni djelovi atoma talože se na elektrodi (slučaj kod metala - metalično vezivanje). Elektroda postaje deblja.
2. Izlučeni djelovi atoma stvaraju sa istovrsnim već ranije izlučenim ionima nove molekule: $\text{H} + \text{H} \rightarrow \text{H}_2$ (slučaj kod plinova). Plinoviti molekuli odlaze u atmosferu, elektroda ostaje nepromjenjena.
3. Izlučeni djelovi atoma kemijski reagiraju sa materijalom elektrode koji se radi toga otapa. Elektroda postaje tanja.

Svaka granična površina između elektrode i elektrolita je izvor napona ($E_{E1}, E_{E2} \dots$). U elektrolitičkoj kupki djeluje prema vani rezultanta oba napona $E_E = \sum E_{Ev}$.

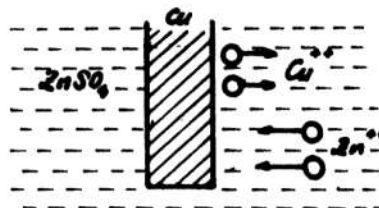
Ovi naponi nastaju izmjeničnim djelovanjem tlaka otopine (težnja elektrode da svoje čestice utisne u elektrolit kao ioni) i osmotičkog tlaka (težnja elektrolita da svoje ione utisne u elektrodu).

Kao primjer mogu se navesti dva slučaja:

- 1) Metal u čistoj vodi (bez iona). Postoji samo tlak otopine, pozitivni ioni metala nastoje da prodru u vodu sve dok se ne uspostavi ravnotežno stanje. Stoga se metal nabije negativno u odnosu na vodu.



- 2) Bakrena elektroda u cink-sulfatu. Osmotički tlak cinkovih iona je veći nego tlak otopine bakarnih iona. Stoga se bakar nabije pozitivno u odnosu na elektrolit Zn SO_4 .



Smjer i visina ovih napona ovisi o vrsti elektrode, vrsti elektrolita i njegovoj koncentraciji. Ukoliko je metal manje plemenit, u toliko je veći njegov tlak otopine, utoliko je jača njegova težnja da se nabije negativno. Red veličine ovih napona je $E_{E_0} = \pm 0,1 \dots 1V$.

Faraday-evi zakoni (1833)

Količina materije G koja je izlučena iz elektrolita **proporcionalna je količini elektriciteta**

$$G = cQ = cIt$$

Ova relacija naziva se 1. Faraday-ev zakon.

Faktor proporcionalnosti c naziva se elektrokemijski ekvivalent. Za pojedine elemente ima razne vrijednosti a određuje se iz 2. Faraday-evog zakona koji glasi:

- količine materije izlučene od istih količina elektriciteta, odnose se kao kemijske ekvivalentne težine. -

Pod ekvivalentnom težinom podrazumjeva se kvocijent iz atomske težine A i valencije v . Na taj način, elektrokemijski ekvivalent je dat izrazom

$$\frac{G}{Q} = c = \frac{1}{96.500} \frac{A}{v}$$

gdje je 96.500 As/g eksperimentalno određena vrijednost. Za vodik $A = 1$, $v = 1$, pa za izlučivanje 1 g vodika treba upravo 96.500 As. Kako 1 g vodika sadrži $6,02 \cdot 10^{23}$ atoma, onda jedan atom vodika sadrži količinu elektriciteta

$$e = \frac{96.500 \frac{\text{As}}{\text{g}}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ g}^{-1}} = 0,160 \cdot 10^{-18} \text{ As}$$

a to je elementarni naboj elektrona. Iz toga proizlazi da 1 kulon elektriciteta sadrži $1/0,16 \cdot 10^{-18} = 6,24 \cdot 10^{18}$ elektrona.

Ako se elektrokemijski ekvivalent uvrsti u prvi Faradayev zakon, onda je

$$G = \frac{A}{96.500 v} I t \quad [g]$$

Struja od 1 A u s izluči srebra ($a=107,9$, $v=1$) 0,001118 g (stara definicija internacionalnog ampera).

Za elektrolizu su potrebne jake struje i dugo vremena. Da bi se npr. izlučio 1 kg bakra iz Cu SO_4 pri struji od 100 A treba:

$$t = \frac{96.500 \frac{\text{As}}{\text{g}} G v}{AI} = \frac{96.500 \frac{\text{As}}{\text{g}} 1000 \text{ g } 2}{63,6 \cdot 100 \text{ A}} = 30.400 \text{ s} = 8,42 \text{ h}$$

Za elektrolizu aluminija iz glinice (Al_2O_3) u kriolitu (Na_3AlF_6) (radi sniženja tačke topljenja glinice) potrebne su struje reda veličine 10.000 A, a temperatura u kupki naraste i do 950°C . Za proizvodjenje jedne tone aluminija potrebno je oko 30.000 kWh.

Polarizacija.

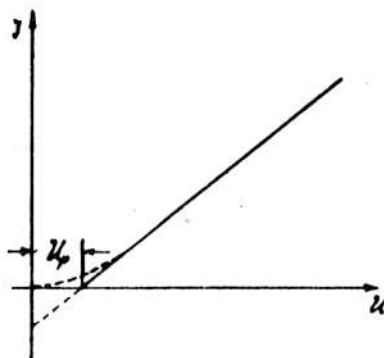
Pri elektrolitičkom procesu razlaže se materija i dobiju se proizvodi koji imaju višu kemijsku energiju nego polazne materije prije elektrolize. Osim toplinske energije I^2R , potrebno je uložiti još energiju P_p koja se pretvara u kemijsku energiju

$$P = I^2 R + P_p$$

P_p - energija polarizacije. Energiji polarizacije P_p odgovara pripadajući napon polarizacije U_p , pa važi jednačina:

$$U = \frac{P}{I} = IR + \frac{P_p}{I} = IR + U_p$$

Napon polarizacije U_p je nezavisan od struje I , pa je stoga karakteristika U - I pomaknuta prema koordinatnom početku te Ohm-ov zakon ne važi striktno.



Energetski proces pri elektrolizi može se prikazati relacija

UIt	$=$	$U_p Q$	$+$	$I^2 R_W t$
predana el. energija		povišenje kem. energije		dovod topline u elektrolit

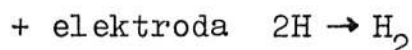
Nastoji se da odnos $\eta = \frac{U_p Q}{UI t}$ bude što veći, odnosno da proizvedena toplinska energija bude što manja: $IR_E \ll U_p$ (red veličine 0,1...1 V). Otuda su naponi pri elektrolizama niski (nekoliko volti), a struje vrlo velike (1...50 kA)

Pretvaranje kemijske energije u električnu

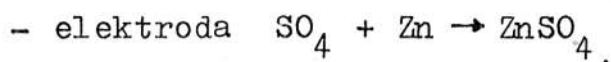
Galvanski elementi. Dvije razne elektrode u istom elektrolitu (napr. bakar i cink u razblaženoj sumpornoj kiselini) nalaze se na različitim potencijalima pa između njih vlada neka potencijalna razlika E. Cink npr. ima veći tlak otopine nego bakar pa je stoga Zn - elektroda negativno nabijena, a Cu - elektroda pozitivna. Bilans energije prema tome je

EQ	=	UI t	+	I ² R _i t
proizvedena el.energija		energija preda- na potrošaču		toplinski gubici u elektrolitu

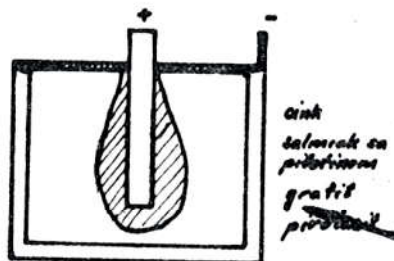
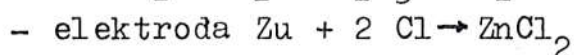
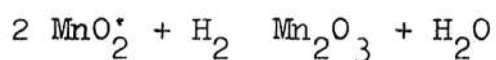
Proizvedena električna energija dobija se iz kemijske energije, a preostale supstance u elektrolitu imaju kemijski nižu energetska vrijednost nego početne supstance. U navedenom primjeru oko pozitivne elektrode (bakar) skuplja se vodik



a na negativnu elektrodu (cink) dolazi ionska grupa SO₄ te reagira sa metalom elektrode i otapa ga



Leclanché element



piroluzit uzima vodik i dobija se voda, a elektroda od cinka se topi. Napon po ćeliji iznosi $E = 1,5 \text{ V}$

Akumulatori

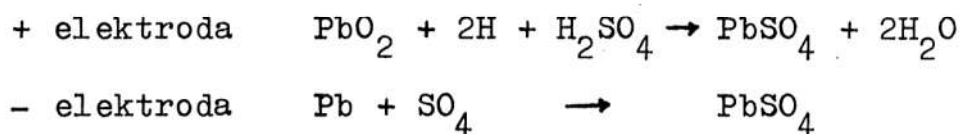
Proces može teći u oba smjera: kao elektroliza (pretvaranje električne energije u kemijsku) i kao kod galvanskih elemenata (pretvaranje kemijske energije u električnu).

Postoje dva tipa akumulatora koji se primjenjuju

- a) sa olovnim pločama i sumpornom kiselinom
- b) sa čeličnim pločama i kalijevom lužinom.

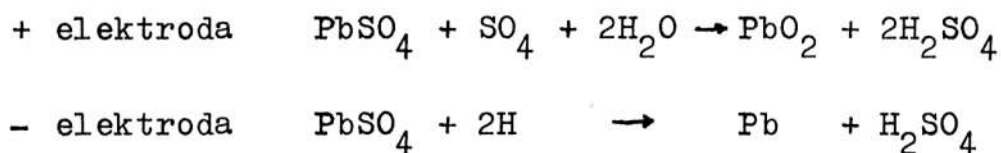
Olovni akumulator. Negativna elektroda je olovo a pozitivna elektroda olovni superoksid PbO_2 . Elektrolit je razblažena sumporna kiselina.

Proces pražnjenja:



Obje elektrode postaju iste (obje se pretvaraju u olovni sulfat), napon teži k nuli. Sumporna kiselina se troši, nastaje voda, koncentracija elektrolita opada.

Proces punjenja:



Ploče su opet došle u prvobitno stanje, voda se troši, nastaje sumporna kiselina, povećava se koncentracija elektrolita.

Napon na stezaljkama $E \approx 2,03 \text{ V}$. Mogućnost "akumuliranja" električne energije iskazuje se u Ah (od 20 Ah za male baterije do 1000 Ah za velike). Stupanj iskorištenja

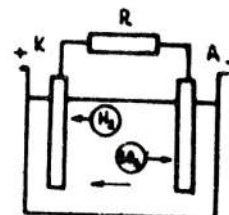
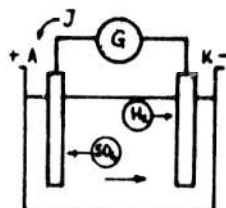
$$\eta = \frac{Q_{pr}}{Q_{pu}} \approx 0,9$$

Čelični akumulator. Pozitivna elektroda je Ni (OH)_3 , a negativna Fe. Elektrolit je 20% otopina kalijeve lužine KOH. Napon kod ovoga akumulatora $E \approx 1,45 \text{ V}$; stepen iskorišćenja $\eta \approx 0,7$. Lakši je od olovnog akumulatora. Prednosti su mu: mehanička i električna neosjetljivost, dobro podnosi kratke spojeve i brza punjenja, ima dug život, prikladan za robustan pogon. Nedostatak: skuplji od olovnog akumulatora istog kapaciteta. Takodjer se upotrebljava izvedba Ni - Cd (nikel-kadmij) elektroda uz kalijevu lužinu KOH kao elektrolit.

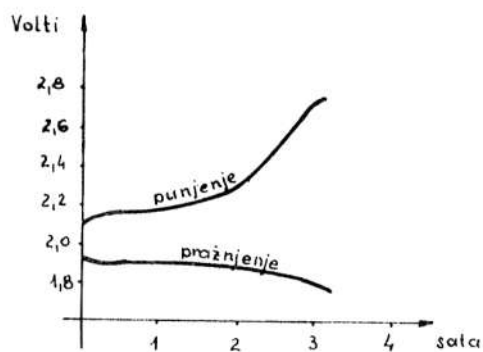
Smjer struje i
iona

Punjenje

Pražnjenje



	Punjenje na		Pražnjenje na	
	Anodi +	Katodi -	Katodi -	Anodi +
Početno stanje ploča	Pb SO ₄	Pb SO ₄	Pb O ₂	Pb
uz to ion	+ SO ₄	+ H ₂	+ H ₂	+ SO ₄
i potrošak	+ 2H ₂ O		+ H ₂ SO ₄	
Krajnje stanje ploča	= Pb O ₂	= Pb	= Pb SO ₄	= Pb SO ₄
i nastajanje	+ 2H ₂ SO ₄	+ H ₂ SO ₄	+ 2H ₂ O	
U elektrolitu	kod punjenja		kod pražnjenja	
Utrošeno	- 1H ₂ SO ₄	- 2H ₂ O	- 2H ₂ SO ₄	
Stvoreno	+ 3H ₂ SO ₄			+ 2H ₂ O
Dakle promjena	+ 2H ₂ SO ₄	- 2H ₂ O	- 2H ₂ SO ₄	+ 2H ₂ O



14. ELEKTRIČNE POJAVE U VAKUUMU I PLINOVIMA

Slobodni naboji

Elektroni i ioni se mogu kretati i slobodno, izvan materije koja ih neposredno okružuje: slobodni naboji.

Elektron: naboj $Q = -e$; masa $m = 9,108 \cdot 10^{-28} \text{ g}$

Ion: naboj $Q = \pm v e$; masa $m = A \cdot 1,672 \cdot 10^{-24}$

e - elementarni kvantum elektriciteta = $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$

A - atomska težina (broj)

v - valencija

m_p - masa protona = $1,672 \cdot 10^{-24} \text{ g}$

Za računanja u ovom poglavlju važna su pretvaranja (gram-masa)

$$\text{kg} = \frac{V \text{As}^3}{\text{m}^2} ; \quad V = \frac{\text{kg m}^2}{\text{As}^3} ; \quad 1 \text{ g} = 10^{-7} \frac{\text{Ws}^3}{\text{cm}^2}$$

Dobijanje slobodnih naboja

Najčešći način dobijanja slobodnih elektrona je termo-emisija iz užarenog metala. Proces je donekle sličan isparavanju tekućina. Broj elektrona, s obzirom na površinu koja emitira i na vrijeme - dakle s obzirom na površinsku gustoću struje elektrona - zavisi o metalu, a naročito o njegovom površinskom sloju. Tanki sloj barijevog ili celzijevog oksida olakšava izlaz elektrona. Osim toga, broj emitiranih elektrona

rapidno raste sa temperaturom.

Osim termoemisije važan način dobivanja slobodnih elektrona je foto-emisija: izbacivanje elektrona svjetlosnim kvantima. Osobito su osjetljivi alkalni metali: kalij (K), natrij (Na), rubidij (Rb), cezij (Cs) nataloženi u tankom sloju u evakuiranoj posudi. Izbačene elektrone hvata anoda pod pozitivnim naponom iz baterije, (oko 100 V). Broj emitiranih elektrona u jedinici vremena je strogo proporcionalan sa svjetlosnim tokom.

Sekundarna emisija: izbacivanje elektrona iz metala bombardiranjem elektronima (u vakuumu). Važna primjena za elektronske multiplikatore.

Emisija pomoću polja: izbacivanje elektrona pomoću jakog električnog polja ($E > 10^7$ V/cm). Ova emisija se postiže već pri umjerenim naponima na oštrim bridovima i šiljcima i ograničava izolaciju u vakuumu.

Najvažniji način dobivanja iona je udarna ionizacija: dovoljno jakim bombardiranjem elektronima (ili svjetlosnim kvantima) atom ili molekula plina se cijepa u pozitivni ion i elektron odnosno elektrone. Pri tome često nastaju svjetlosne pojave. Pri normalnim uvjetima, u zraku postoji oko 1000 pozitivnih i 1000 negativnih nosioca naboja po 1 cm³ zraka.

Slobodni naboji u naponskom polju

U naponskom polju je napon neovisan o putu (a pogonska energija postaje potencijalna), pa svaki slobodni naboj u svakoj tački polja ima određenu potencijalnu energiju. Opća je i prirodna tendencija da se potencijalna energija umanji, pa stoga naboj + Q teži od tačke više prema tački

nižeg naboja, a naboj - Q od tačke nižeg prema tački višeg napona. U naponskom reljefu prikazuje se to kao pad. Kad naboj prodje naponsku razliku $U = U_1 - U_2$ (sa jedne naponske plohe na drugu) onda naboj umanja svoju potencijalnu energiju za iznos

$$W_{\text{pot}} = QU$$

pri čemu nastaje isto toliki iznos energije u nekoj drugoj formi (jedinica elektron-volt: $eV = 1,60^{-19} \text{ Ws}$).

Ako je put slobodan (bez zapreka), onda se potencijalna energija potpuno pretvori u kinetičku - naboj nosi sobom energiju i transportira je. Ako je početna brzina bila nula, onda će naboj doći na naponsku plohu za U nižu nego početni napon brzinom

$$QU = m \frac{v^2}{2} ; \quad v = \sqrt{\frac{2Q}{m} U}$$

Brzina čestice raste dakle s korjenom iz napora. Za brzinu elektrona ($Q = -e$) je

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2e}{m} U} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}{9,11 \cdot 10^{-35} \frac{\text{Ws}^3}{\text{cm}^2}} U} = \\ &= 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{U \frac{\text{cm}^2}{\text{s}^2 \text{ Volt}}} = \sim 600 \sqrt{U} \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right] \end{aligned}$$

Elektroni se radi male mase kreću veoma brzo i ponašaju se praktički bez inercije, što je presudno važno za tehničke primjene. U radio-elektronkama sa $U = 100 \text{ V}$ imaju elektroni

na kraju svog puta brzinu od oko 6000 km/s, dakle 1/50 brzine svjetlosti.

Prekoračenje brzine svjetlosti se u principu ne može postići jer se, prema teoriji relativnosti, masa povećava sa brzinom

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gdje je m_0 - "mirujuća masa" elektrona.

Pri brzini jednakoj brzini svjetlosti masa elektrona bi postala beskonačno velika.

Struje slobodnih elektrona - konvekcione struje

Slobodni naboji u pokretu predstavljaju prema definiciji struje, takodjer jednu vrstu struje: konvekcionu struju. Ovoj struji nedostaje neutralizirajuća okolina (koja postoji u slučaju provodnih struja). Konvekciona struja je treća (i posljednja) vrsta struje (pored provodne i dielektrične).

Prostorna gustoća naboja se definira (analogno površinskoj gustoći σ) kao kvocijent naboja i volumena V u okolini promatrane tačke

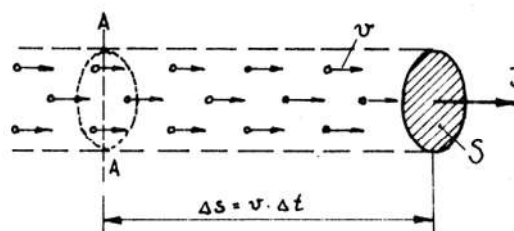
$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

ρ je tako definirano kao da je ukupni naboj prostorno kontinuirano razdjeljen.

Sa N nosioca naboja sa pojedinačnim nabojem Q' , u 1 cm^3 jednoliko razdjeljeni, svuda je prostorna gustoća $\rho = NQ' \frac{1}{\text{cm}^3}$

Ako zamislimo jedan snop elektrona ili iona istog presjeka S koji struji kroz mjesto A-A u vremenu Δt , onda je uku-

pan broj naboja ΔQ kroz
cilindar baze S i dužine
 $\Delta s = v \cdot \Delta t$ (predjeni put
elektrona za vrijeme Δt).



$$\Delta Q = \rho \cdot S v \Delta t$$

Oдавде jačina struje

$$I_{\text{konv}} = \frac{dQ}{dt} = \rho v S$$

Gustoća konvekcione struje je одredjena sa

$$G_{\text{konv}} = \rho \cdot v$$

ili pisano vektorski, jer gustoća struje i brzina naboja imaju isti smjer

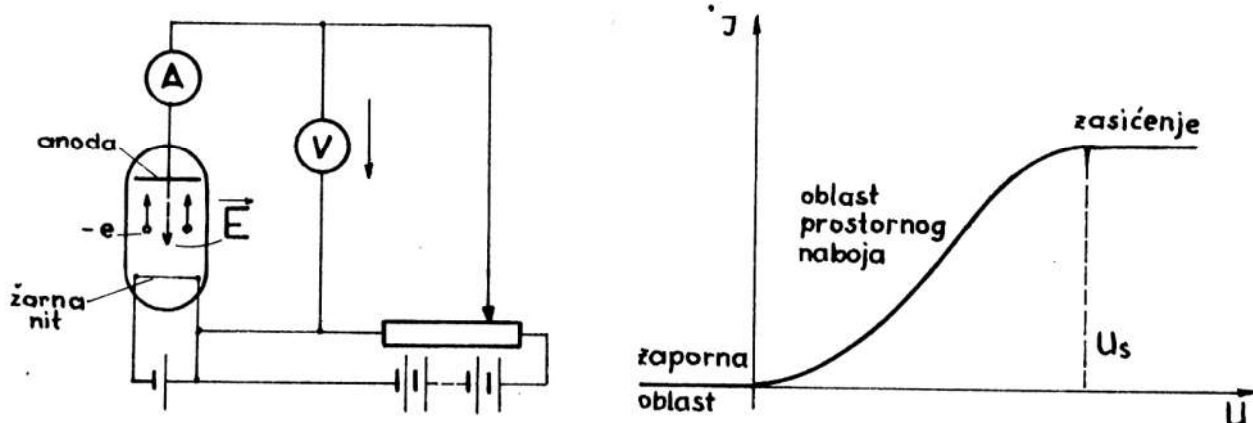
$$\vec{G}_{\text{konv}} = \rho \vec{v}$$

Struje u visokom vakuumu

Nosioci naboja su najčešće elektroni. Elektronska cijev (elektronka) se sastoji u najjednostavnijem slučaju od dvije elektrode pod naponom (kondenzator). Jedna je užarena metalna nit - emiter elektrona. Žarenje se vrši strujom iz vanjskog izvora. Cijeli sistem je smješten u evakuiranom balonu (tlak ispod 10^{-6} Torr). Elektroni ($-e$) se kreću samo od užarene katode ako druga elektroda (anoda) ima pozitivan napon (ili ako je katoda pod negativnim naponom).

Struja je prikazana $U - I$ diagramom. Vide se tri područja

Zaporno područje: Anodni napon je negativan prema katodi. Emitirani elektroni se vraćaju u izvor, $I = 0$.



Područje prostornog naboja: $U < U_s$ pa radi toga oko katoda postoji "elektronski oblak" - "negativno prostorno punjenje" koje spriječava jednom dijelu elektrona izlaz iz katode. Struja I je ovisna o naponu ali ovisnost nije linearna:

$$I_a = k U_a^{3/2} \quad \text{Langmuir-ova formula}$$

(dakle ne vrijedi Ohm-ov zakon linearnog odnosa)

Područje zasićenja: $U > U_s$, anodni napon viši od napona zasićenja U_s . Svi elektroni dolaze na anodu, pa nema više elektrona na raspolaganju. Struja je konstantna uprkos povišenja anodnog napona.

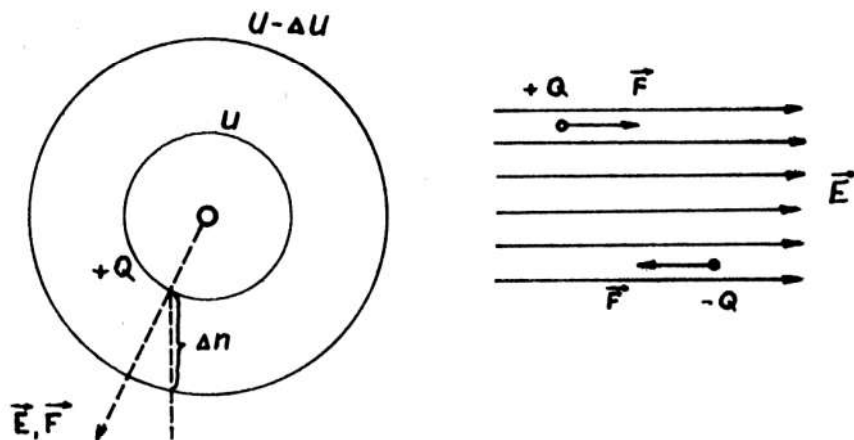
Obične elektronke daju struje reda veličine $I = 1 \dots 100 \text{ mA}$. pri anodnim naponima $U = 100 \dots 1000 \text{ V}$.

Primjena: elektronke sa više elektroda za pojačala, oscilatore i ispravljanje. Katodna cijev, osciloskop, televizija (elektronski snop udarom u ekran cijevi daje svjetlu m-rlju). Röntgen cijevi, elektronski mikroskop.

Slobodni naboji u električnom polju:

Naboj Q u naponskom polju zadobije pogon u smjeru najvećeg pada napona, dakle u smjeru vektora jačine električnog polja $\vec{E}$. Na putu u tom smjeru do susjedne tačke sa umanjenim

naponom ($-dU$), vrši rad na putu dn



$$F \, dn = - Q dU \quad \text{ili} \quad F = - Q \frac{dU}{dn}$$

$$\vec{F} = Q\vec{E}; \quad \text{za elektron} \quad \vec{F} = e\vec{E}$$

Nosilac naboja dobije u električnom polju narinutu pogonsku silu. Za pozitivne naboje sila djeluje u smjeru polja, a za negativne protiv smjera polja.

Kad nema zapreke na putu naboj dobije ubrzanje

$$F = ma \quad ; \quad a = \frac{Q}{m} E$$

$$\text{Za elektron: } a = \frac{eE}{m} = 1,75 \cdot 10^{15} \frac{E}{V/cm} \frac{cm}{s^2}$$

Za malu jačinu polja $E = 1 \, V/cm$, ubrzanje elektrona je $a = 1,75 \cdot 10^{15} \, cm/s^2$ dakle mnogostruko veće nego ubrzanje gravitacije $g = 981 \, cm/s^2$. Izraz za ubrzanje elektrona se može i ovako napisati:

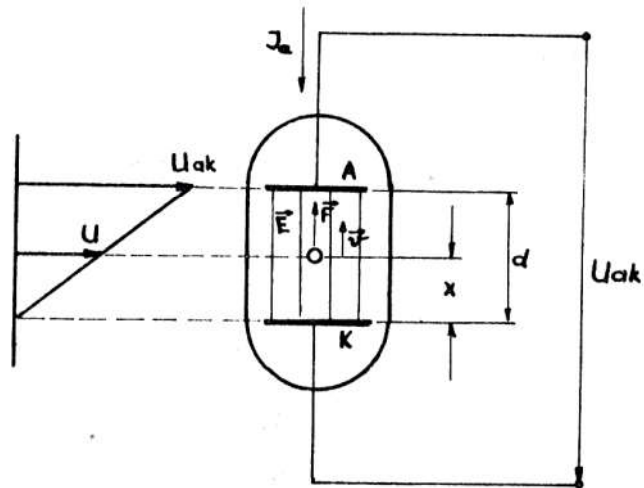
$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F}{m} = \frac{e}{m} \cdot \frac{U_{ak}}{d}$$

Integriranjem se ima

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{e}{m} \frac{U_{ak}}{d} (t - t_1)$$

gdje je t_1 početno vrijeme a t opažano vrijeme. Za $x=0$, može se uzeti da je $v=0$, pa još jedna integracija daje

$$x = \frac{e}{m} \cdot \frac{U_{ak}}{d} \cdot \frac{(t-t_1)^2}{2}$$



Za $x=d$, izraz $t-t_1$ je ustvari vrijeme prolaza elektrona između katode i anode, pa se može napisati

$$d = a \frac{\tau^2}{2}$$

Važi isti zakon kao i za gravitaciono polje ($h=g \frac{t^2}{2}$). Vrijeme prolaza elektrona kroz vakuum τ dobije se

$$\tau = d \sqrt{\frac{2m}{e U_{ak}}}$$

a kad se uvrste konstante i brojne vrijednosti

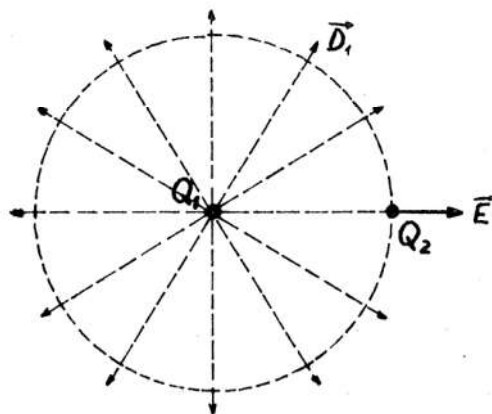
$$\tau = 3,4 \cdot 10^{-8} \frac{d}{U_{ak}} [s]$$

uz d u cm i U_{ak} u V. Za $d=5$ mm; $U_{ak} = 250$ V, $\tau = 1,07 \cdot 10^{-9}$ s. Prolaz elektrona je praktično bez inercije.

Ako se istosmjernom anodnom naponu narine jedan izmjenični napon čiji period odgovara vremenu prolaza elektrona, onda se pojava ne može smatrati bez inercije - efekt putujućeg vala - pojava koja ima presudno značenje u UHF tehnici (mikrovalna tehnika).

Coulomb-ov zakon. Dva naboja Q_1 i Q_2 na udaljenosti r djeluju jedan na drugog silom F jer se jedan nalazi u električnom

polju drugoga. Ako je Q_1 pozitivno, onda je tok pomaka i jačina polja kojom djeluje Q_1 na mjestu Q_2 usmjerena od Q_1 - pozitivni naboj Q će biti odbijen, a negativni privučen.



Uz jednadžbu $\vec{F} = Q \vec{E}$, zamislimo najprije Q_2 odstranjeno pa računamo jačinu polja E koju tu stvara naboj Q_1 . Radijalni tok pomaka od Q_1 ima jačinu Q_1 , a gustoća toka pomaka D_1 je na razmaku r od centra izvora toka:

$$D_1 = \frac{Q_1}{4 \pi r^2} ; \quad E_1 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon r^2}$$

Uzima se u račun kuglasti prostor radijusa r oko izvora toka. Tok prolazi jednoliko kroz cijelu kuglinu površinu. Ukupni presjek toka $S=4 \pi r^2$, a $D_1 = Q_1/S$.

Sila na naboj Q_2 je jednaka kao sila na Q_1 (radi zakona akcije i reakcije) i iznosi $F = Q_2 E_1$, pa je stoga

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon r^2}$$

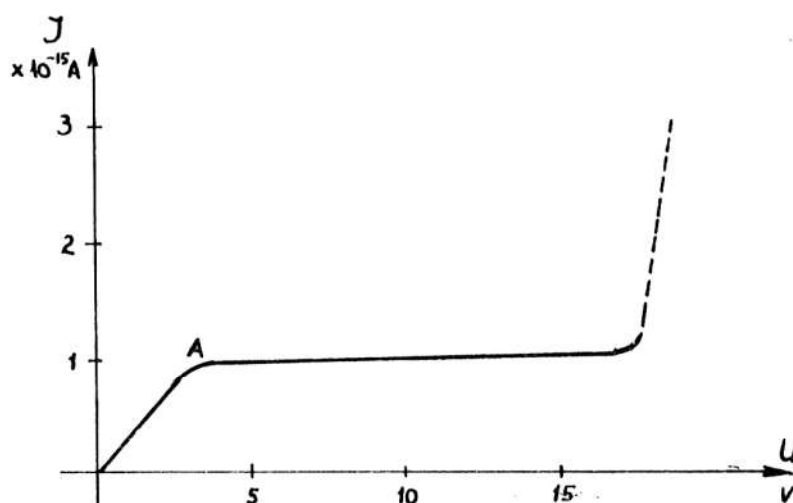
Sile opadaju sa kvadratom udaljenosti.

Struja elektrona i iona u plinovima:

Prolaz struje kroz plin naziva se "plinsko izbijanje", a odgovarajući uređaji u kojima je plin zatvoren u neku posudu "cijev za plinsko izbijanje". Prolaz struje se zasniva na udarnoj ionizaciji. U plinu postoje već nosioci naboja (ovaj slučaj se naziva "samostalno vodjenje" ionizacione struje) ili

su naknadno uneseni (nesamostalno vodjenje). Narinutim naponom se nosioci naboja ubrzavaju i pri dovoljno velikoj kinetičkoj energiji cijepaju plinske molekule u pozitivne ione i elektrone.

U početku procesa (pri malom naponu) broj parova nosilaca naboja naknadjuju potršci nosilaca zbog održavanja struje i zbog "rekombinacije" (ponovno sjedinjavanje iona u neutralne molekule). Na dijelu krivulje do A primjenljiv je Ohm-ov zakon.

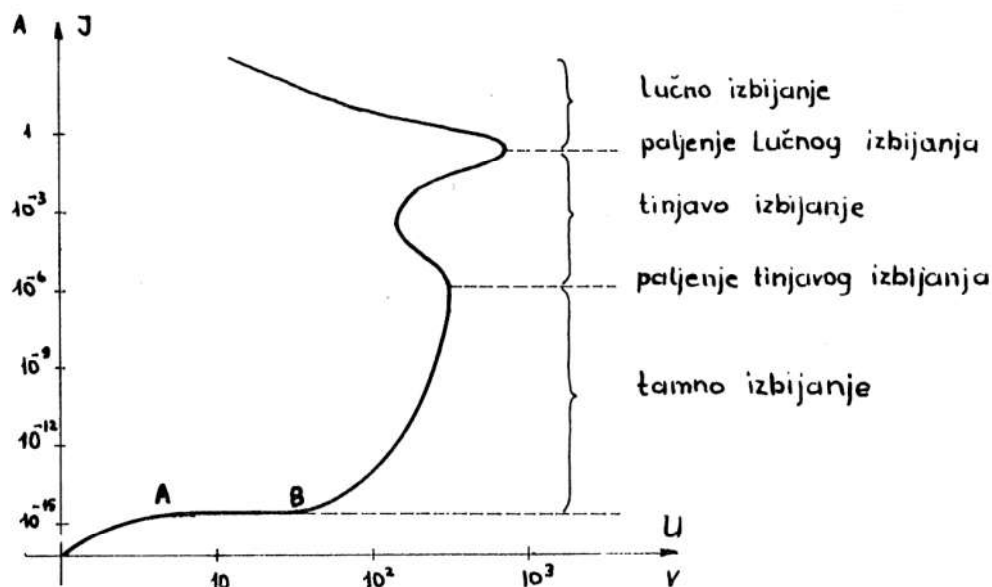


Kod daljeg povišenja napona, toliko porastu brzine nosilaca naboja da se svi proizvedeni nosioci utroše na održavanje struje I , pa struja postiže stalan iznos I_s (struja zasićenja). Ohm-ov zakon više ne vrijedi.

Na katodu brže dospjevaju elektroni i negativni ioni, a nešto sporije pozitivni ioni, radi njihove veće mase i dimenzija.

Radi "udarne ionizacije" su izbijanja u plinu redovito praćena pojavama svjetla.

Kad se napon još povisi, ioni dobiju tako velike brzine da i oni sami mogu cijepati molekule sa kojima se sudare. Ovako stvoreni ioni postizavaju pod utjecajem polja također



velike brzine i stvaraju sudarom s novim molekulama dalje parove iona. Tako se stvori veoma mnogo nosilaca naboja i jačina struje I može zadobiti velike iznose. Ni u ovom području ne važi Ohm-ov zakon.

Pri daljem razvoju procesa izbijanja nastaju veoma raznolike pojave popraćene svjetlosnim pojavama, ovisno o vrsti i gustoći plina, o vrsti i geometrijskim odnosima elektro - da itd.

Odnosi struje i napona su veoma komplicirani pa može porastu struje odgovarati smanjenje napona (lučno izbijanje).

Oblici izbijanja:

Paljenje: svaka cijev za plinsko izbijanje (ili put na kom se može vršiti plinsko izbijanje) bez umjetno unesenih nosioca naboja vodi veoma male struje (ispod 10^{-12} A) ispod "napona paljenja" U_z . Razlog je slaba udarna ionizacija. Svjetlosnih popratnih pojava još ima.

Prekoračenjem napona paljenja U_z nastaje veoma naglo jako izbijanje (reda veličine 1...1000 A). Napon paljenja dijeli (razdvaja) praktično ponašanje plina kao nevodica i kao

vodiča.

Probojna jačina električnog polja za zrak pri normalnom tlaku, kod ne premalениh razmaka je $E \approx 23 \text{ kV/cm}$.

Probojne napone se može pomaknuti na više pomoću većih razmaka elektroda, izbjegavanjem oštarih bridova i šiljaka na elektrodama, promjenom tlaka (bilo povišenjem bilo stvaranjem osobito visokog vakuuma). U slučaju povišenja tlaka, čestim sudarima, nosioci naboja gube kinetičku energiju već nakon veoma malog predjenog puta kroz plin. Često se upotrebljavaju plinovi koji se teže ioniziraju nego zrak, ugljični dioksid, freon i sl.

Korona: na dalekovodima visokog napona jačina električnog polja naglo opada sa udaljenošću od vodiča (elektrode). Ovo izbijanje je ustvari udarna ionizacija ograničena samo na neposrednu okolinu vodiča. Pojavljuje se tinjavo svjetlucanje.

Tinjavo izbijanje: nastaje kad je struja naročitim sklopom (prigušnicom, predotporom ili sl.) tako ograničena da katoda ostane hladna. Svijetlo se pojavljuje u tinjavom obliku oko katode (ako je dužina puta izbijanja veoma kratka: negativno tinjavo svjetlo). Primjena: lampe tinjalice za signalizaciju i sl. Pri naponu od 110 V uzimaju struju od 1...5 mA. Predotpor je obično ugrađen u podnožju lampe.

Lučno izbijanje: struja I postaje veoma velika (od 1 A do nekoliko 10.000 A), a katoda postiže visoke temperature i troši mnogo elektrona. Naponi su obično niski: manji od 50 V.

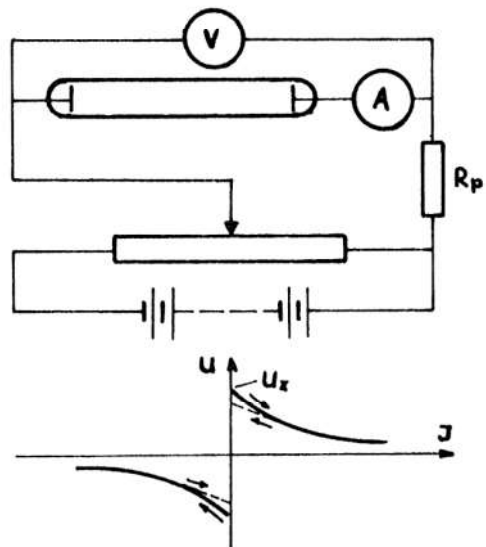
Grom je lučno izbijanje sa veoma velikim strujama (50.000 A i više).

U-I karakteristika tinjavog i lučnog izbijanja

Za napon $U < U_z$ struje su malene. Nakon što nastane

paljenje, plin je ioniziran veoma jako pa sa porastom struje je potreban sve manji napon: padajuća karakteristika.

Da bi se spriječilo opasni porast struje, potrebna je naprava za ograničavanje struje (predotpor, prigušnica i sl.). Pri porastu i opadanju struje, karakteristična krivulja ima nejednak tok, radi različitog zagrijavanja u procesu koji je prethodio promatranom stanju.



Lučno izbijanje je strujom najjače, a naponom najslabije plinsko izbijanje.

Primjene su izvanredno mnogobrojne. Za $U < U_z$: pojačalo struje - plinom punjene fotoćelije. Za $U > U_z$: tinjalice, tinjavi stabilizatori napona (kad je put kroz plin kratak i sve dok se katoda potpuno ne prekrije tinjavim izbijanjem, pri promjenljivoj struji je napon U približno konstantan), lampe sa plinskim izbijanjem, lučne lampe, luk za zavarivanje i topljenje ($I = 100 \dots 10.000 \text{ A}$), ispravljači sa živinom parom itd.

Odnos veličina ϵ_0 i μ_0

Ove dvije veličine odredjuju električnost i magnetičnost prostora (vakuum). Ovdje će biti razmotren njihov međusobni odnos.

Iz relacije za Coulomb-ovu silu

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon r^2} \quad \text{može se izvesti}$$

$$\epsilon_0 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi F r^2} \quad \text{ili dimenzionalno}$$

$$\epsilon_0 (=) \frac{Q^2}{F l^2} (=) \frac{A^2 s^2}{N m^2} = \frac{A^2 s^2}{J m} = \frac{\text{Farad}}{m} (=) \frac{A s}{V m}$$

S druge strane, ako se podje od relacije za magnetsku indukciju (gustoću magnetskog toka) strujnog ravnog vodiča

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{a}$$

gdje je a razmak tačke u kojoj vlada indukcija B od vodiča. Odavde slijedi

$$\mu_0 = \frac{B 4\pi a}{2I} \quad \text{ili dimenzionalno}$$

$$\mu_0 (=) \frac{B l}{I} (=) \frac{F l}{I l} \frac{1}{I} (=)$$

$$(\Rightarrow) \frac{U I t}{l I^2} (\Rightarrow) \frac{V A s}{mA^2} = \frac{L}{m} = \frac{\text{Henry}}{m} = \frac{Vs}{Am}$$

Ako se **sa**d dimenzionalno pomnoži

$$\epsilon_0 \mu_0 (=) \frac{As}{Vm} \frac{Vs}{Am} = \frac{s^2}{m^2} = \frac{1}{v^2}$$

dakle recipročna vrijednost kvadrata brzine. Treba pokazati o kojoj se brzini radi. Ako se uzmu od ranije već poznate i izračunate vrijednosti ϵ_0 i μ_0 , onda je

$$\epsilon_0 = 0,88542 \cdot 10^{-11} \frac{As}{Vm}$$

$$\mu_0 = 1,256637 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$$

pa množenje daje

$$\epsilon_0 \mu_0 = 1,1126515 \cdot 10^{-17} \left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \right]$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{0,11126515 \cdot 10^{-16}} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right]$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = 8,98754 \cdot 10^{16} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right]$$

$$\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,99792 \cdot 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

=====

a to je brzina svjetlosti u vakuumu, odnosno brzina prostiranja elektromagnetskih valova u vakuumu. Izraženo na drugi način, može se pisati

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Dakle brzina svjetlosti se može dobiti iz dvaju električnih mjerenja.

(U mehanici je poznato da se brzina elastičnih valova u nekom mediju može izračunati iz dvaju mjerenja; npr. brzina zvuka iz koeficijenta rastezanja α i gustoće ρ : $v = \frac{1}{\sqrt{\alpha \rho}}$)

Veličine $\epsilon_0 \mu_0$ također su važne kod loma elektromagnetskih valova pri prelazu iz jedne sredine u drugu. Ako imamo jedan medij sa ϵ i μ , onda je indeks loma

$$n = \frac{v(\text{vakuum})}{v(\text{medij})} = \frac{(\epsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}}{(\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0)^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\epsilon \mu}$$

Izuzev feromagnetskih materijala, permeabilitet je praktično uvijek jednak jedinici, pa gornja opća relacija postaje jednostavna

$$n = \sqrt{\epsilon}$$

(Maxwell-ova relacija za lom svjetla i dokaz da je svjetlo elektromagnetske prirode).

15. POLUVODIČI

Podjela materijala prema specifičnom otporu

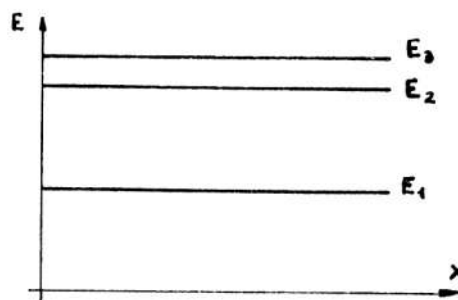
- dobri vodiči $\rho < 10^{-6} \Omega m$
- poluvodiči od 10^{-4} do $10^8 \Omega m$
- izolatori iznad $10^8 \Omega m$, sve do $10^{17} \Omega m$ (polistiren)

Raspon od 23 reda veličine - najveći poznati raspon vrijednosti u fizici.

Tehnički značajni poluvodički materijali su: germanij Ge (broj elektrona u pojedinim ljuskama 2,8,18,4), silicij Si (broj elektrona u pojedinim ljuskama 2,8,4). U periodnom sistemu oba se nalaze u IV b grupi, dakle su četvorovalentni. Važan poluvodič je i selen Se koji se nalazi u VI b grupi, dakle šestorovalentan (broj elektrona u pojedinim ljuskama 2,8,18,6). Silicij kristalizira u kubnom sistemu (dijamantna kristalna rešetka) pa svaki atom ima četiri susjedna s kojima je vezan. Eksperimenti pokazuju da je vodljivost ovih poluvodiča uzrokovana elektronima kao nosiocima naboja (iako ima i takvih poluvodiča gdje su ioni nosioci naboja!).

Na osnovu Bohr-ove teorije gradje atoma, svaki elektron kruži (dakle ima neku kinetičku energiju) na sasvim određenoj stazi oko jezgre. Udaljenost od jezgre predstavlja potencijalnu energiju, pa svaki elektron ima sasvim određenu ukupnu energiju. Stoga je moguće da se ove energije prikažu diagramom - modelom jer svakoj stazi se pripisuje određeni nivo energije. Kako postoji diskontinuirani skup elektronskih

staza, to ne postoje medjuvrijednosti. Stoga je: $E_3 > E_2 > E_1$; x predstavlja prostor u jednodimenzionalnom prikazu.



Kako svaki sistem teži stanju energetskeg minimuma, elektroni nastoje da zauzmu po mogućnosti neku unutarnju stazu, pa su stoga unutarnje staze sa nižom energijom, popunjene. Broj mjesta za svaku stazu raste sa korjenom energije odgovarajućeg nivoa, pa na stazama sa većom udaljenosti ima više mogućih mjesta nego na stazama koje su bliže jezgru.

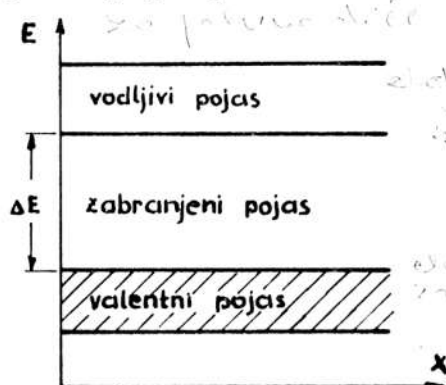
Elektroni u vanjskoj stazi zovu se valentni elektroni i oni su najlabavije vezani za svoj sistem. Ovo važi kad je atom daleko od susjednih. U čvrstom tijelu atomi su u pravilnim razmacima tako gusto rasporedjeni da se elektroni u vanjskim stazama prekrivaju pa se tako vanjski elektron jednog atoma nalazi bliže jezgri susjednog atoma nego vlastitoj jezgri. Otuda dolazi do pojave da se neki vanjski elektroni svakog atoma kreću unutar rešetke ostalih atoma i pozitivni atomskih ostataka: slobodni elektroni. Njihov broj je mjera za vodljivost (ima ih oko 10^{23} u cm^3 za metale). Pri veoma niskim temperaturama, atomi čvrstog tijela miruju, pri sobnoj temperaturi titraju oko ravnotežnog položaja što olakšava oslobađanje valentnih elektrona. Kod metala su skoro svi valentni elektroni oslobodjeni (na ovoj temperaturi) pa je nemoguće dalje povećavanje nosilaca naboja i stoga vodljivost opada sa daljim temperaturnim porastom.

Pozitivni atomi koji se nalaze u čvorištima prostorne rešetke stvaraju u svojoj okolini električno polje pa kretanje slobodnih elektrona stoji pod utjecajem elektrostatskih sila ovih iona. Zbog ovih unutarnjih potencijalnih polja imaju

elektroni donekle različna energetska stanja. Pojedini energetske nivoi leže ipak tako blizu jedan drugom da tvore relativno široke dozvoljene energetske pojase (ne više linije - kako je to pokazano za samo jedan **atom!**). Preostali međuprospektori između dozvoljenih nivoa nazivaju se zabranjeni pojasi i oni ne sadržavaju elektrone stacionarnih energija. Za objašnjenje vodljivosti važni su samo valentni elektroni - oni pripadaju valentnom pojasu (ostali pojasi se mogu zanemariti za ovu svrhu).

Kod vodiča (metali) valentni pojas poklapa se sa dozvoljenim energetske pojaskom što znači kao da je za elektron proširen energetske pojas.

Poluvodič, koji se sasvim postupno malo razlikuje od izolatora, ima na apsolutnoj nuli potpuno popunjen valentni pojas pa tu nema kretanja elektrona i nema raspoloživih elektrona za proces vodljivosti. Iznad ovog pojasa leži zabranjeni pojas u kome nema elektrona sa takvim energijama. Slijedeći pojas je kod idealnog izolatora potpuno prazan jer nema uopće slobodnih elektrona. U taj pojas mogu dospjeti samo oni elektroni koji bi dobili iz-vana relativno veliku energiju $\Delta E \approx 3 \text{ eV}$ i tako se podigli u ovaj pojas. Kako zbog okolišne topline neki elektroni stvarno dobiju tu energiju, oni dospiju u taj dozvoljeni pojas koji je skoro prazan: to su kvazi-slobodni elektroni. Izolator postaje vodljiv i gubi svoja osnovna svojstva. Otuda je ovaj pojas nazvan vodljivi pojas. Idealni izolator bi morao imati beskonačno široki zabranjeni pojas, ali u praksi termička energija dovodi do razaranja kristalne strukture već i prije energetske nivoa ΔE .



Objašnjenje zabranjenih pojasa moguće je samo ako se elektron ne smatra česticom nego ekvivalentnim materijalnim valom (de Broglie: čestici mase m i brzine v treba pridružiti val valne dužine $\lambda = \frac{h}{mv}$; za elektron uz $v = c$, (brzina svjetlosti) je $\lambda = 2,4262 \cdot 10^{-12}$ m. Planck-ova konstanta $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Ws²), jer se elektron stalno kreće u mješovitoj ionskoj rešetki kroz potencijalni reljef (polje) atomskih dimenzija, pri čemu na svakoj strmini potencijalnog brijega nastaje refleksija elektrona. Valno mehanički shvaćeno to znači da nastaju smetnje interferencije (interferentne smetnje). Stoga nastaju područja u kojima elektron ne može postojati kao čestica, a to se događa uvijek na tom mjestu gdje je razmak dvaju potencijalnih brijegova upravo cjelobrojni multipl polovine valne dužine

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 mE}}$$

gdje je h Planck-ova konstanta, a E ukupna energija elektrona,

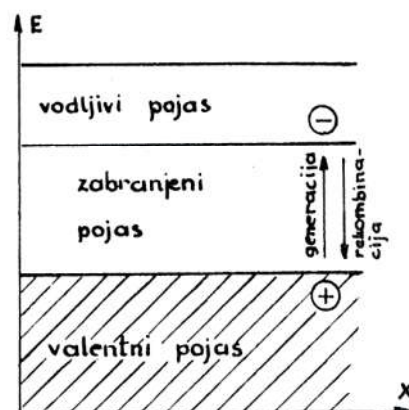
Mehanizam vodljivosti u poluvodičima

Ako se pretpostavi potpuno čisti poluvodič, onda je jedina razlika prema izolatoru u manjoj diferenciji energije za prelaz iz valentnog u vodljivi pojas (ΔE za silicij je 1,12 eV, za germanij 0,72 eV, a za selen 3,20 eV), pa stoga već pri normalnoj temperaturi dosta elektrona predju u vodljivi pojas - nastaje vlastito vodjenje (na apsolutnoj nuli poluvodič je potpuni izolator!), Medjutim pri tom, kako u kristalnoj rešetki/tako i u valentnom pojasu, ostaje prazno mjesto - nazvano šupljina - pa tu može uskočiti neki drugi valentni elektron, ali uvijek ostaje "šupljina" koja se miče pa se može smatrati da se kreće "defekt-elektron" ili "pozitivni naboj". Uvijek ima podjednako mnogo elektrona u vodljivom poja-

su i defekt elektrona u valentnom pojasu; ovi parovi podjednako doprinose procesu vodljivosti. Cijela pojava naziva se generacija. (Defekt-elektron ili šupljina ne postoji kao čestica!).

Brzina nosilaca naboja u poluvodiču je proporcionalna jačini polja a faktor proporcionalnosti se naziva pokretljivost i daje brzinu nosioca naboja (cm/s) za jediničnu jačinu polja (1 V/cm). Jedinica pokretljivosti je onda $\frac{\text{cm/s}}{\text{V/cm}} = \text{cm}^2/\text{Vs} (=) \text{m}^2/\text{Vs}$. Za germanij iznosi pokretljivost (pri sobnoj temperaturi) oko $3.800 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ za elektrone, a $1.800 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ za šupljine. Za silicij 1.800 odnosno $400 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. Za indium-antimonid (In Sb) čak $80.000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. Za čiste metale (bakar npr.) pokretljivost je samo $30 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. Međutim, u poluvodiču stoji na raspolaganju veoma mali broj parova nosilaca naboja u usporedbi sa brojem slobodnih elektrona u metalu ($1:10^{10}$), pa stoga teku znatno manje struje nego u vodičima. Električna vodljivost germanija je 10^{-2} S/cm , dok za bakar $0,5 \cdot 10^6 \text{ S/cm}$. Sa porastom temperature sve više valentnih elektrona postaju slobodni, pa je stoga vodljivost poluvodiča jako ovisna o temperaturi.

Sa porastom temperature raste i broj rekombinacija tj. spajanje elektrona sa šupljinama u kristalnoj rešetki. Pri rekombinaciji uvijek nestaje istovremeno jedan slobodni elektron i jedna šupljina. U modelu to se prikazuje kao povratak slobodnog elektrona iz vodljivog pojasa na slobodno mjesto u valentnom pojasu. Generacija i rekombinacija se događaju uvijek istovremeno i pri svakoj temperaturi uspostavlja se ravnoteža. Stvaranje parova u jedinici vremena raste sa apsolutnom



temperaturom. Broj parova nosilaca naboja na 1 cm^3 čistog poluvodiča naziva se intrinzični broj (intrinsic number) ili inverzična gustoća. Označava se sa n_i (broj elektrona i šupljina). Za germanij iznosi $n_i = 2,24 \cdot 10^{13} / \text{cm}^3$.

Dok je stvaranje parova elektron-šupljina nezavisno od koncentracije elektrona, rekombinacija je veoma ovisna o koncentraciji. Za gustoću elektrona n_- i šupljina n_+ uspostavlja se ravnoteža pri uvjetu

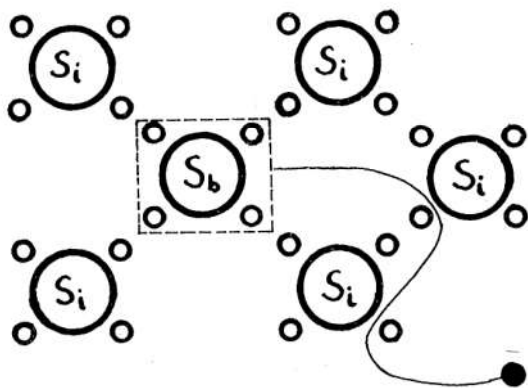
$$n_- n_+ = n_i^2$$

Vodljivost pomoću dotiranja

Vodljivost poluvodiča se može bitno poboljšati dodavanjem veoma malih količina stranih atoma - dotiranje. Bitno je kod toga da dotirani materijal ima višak ili manjak elektrona prema samom poluvodiču. (Shockley, Bardeen, Brattain, 1948; Nobelova nagrada 1956.).

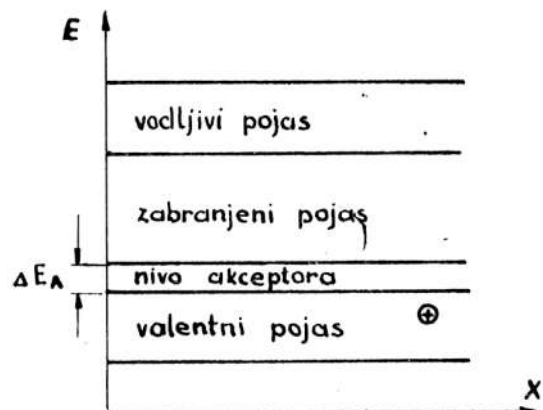
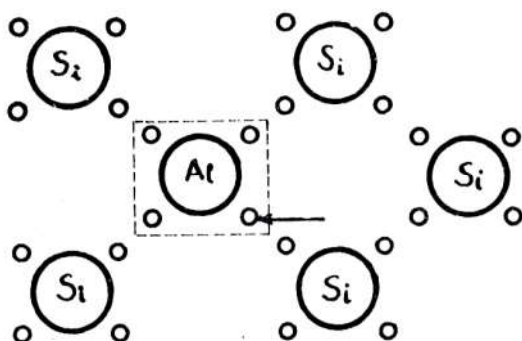
Ako se čistom siliciju, koji je 4-valentan, dodaju 5-valentni atomi arsena, antimona ili fosfora, onda se mogu vezati samo 4-valentna elektrona sa susjednim silicijevim atomima a peti elektron ostaje nevezan i može kao kvazi-slobodan doprinijeti vodljivosti. Strani atom ostaje pozitivno nabijen - joniziran. Ovdje se radi o dodavanju donatora, n-vodljivost. Sad broj pozitivnih i negativnih nosilaca naboja nije jednak: negativnih ima više, pa se vodljivost povećava za više redova veličine.

U modelu, prikazano je stanje energija: strani atomi izazivaju smetnje u periodičnom rasporedu potencijala rešetke (kristala) pa za njih ne važi zabranjeni pojas elektrona čistog poluvodiča. Kvazi-slobodni elektroni koji potječu od donatora leže u gornjem dijelu zabranjenog pojasa sasvim blizu



vodljivom pojasu. Za germanij je taj razmak $\Delta E_D = 0,02 \text{ eV}$, dakle donatorski elektroni trebaju samo $1/36$ dio energije vezanih elektrona pa da se dignu u vodljivi pojas. U vodljivom pojasu mogu se onda slobodno kretati pod djelovanjem električnog polja.

Iste pojave nastaju ako se npr. siliciju dodaju strani atomi sa 3-valentna elektrona (galiij, indij, aluminiј, bor). Sad u kristalu nedostaje jedan elektron, što se može prikazati kao šupljina koja nastoji da uhvati elektron, koji može doći samo iz drugih potpunih grupa, pa onda šupljina nastaje na nekom drugom mjestu. Strani atom pri tome postaje negativan. Nastala šupljina putuje kroz kristalnu rešetku (pod djelovanjem polja): p-vodljivost. Trovalentni strani atomi nazivaju se akceptori. Sada su "pozitivni" nosioci naboja u većini, a vodljivost raste za više redova veličine (za germanij do 10^2 S/cm).



U modelu, vidi se položaj nivoa akceptora u blizini iznad valentnog pojasa. Za germanij je $\Delta E_A = 0,02$ eV. Uvodjenjem 3-valentnog stranog atoma je akceptorski nivo najprije nezauzet. Male termičke energije su dovoljne da izbace elektron iz valentnog pojasa i da ovaj elektron zauzme akceptorski nivo, pri čemu ostaje šupljina u valentnom pojasu.

Prije dodavanja stranih atoma, poluvodič mora biti savršeno čist: 10^9 do 10^{10} atoma poluvodiča na 1 atom primjese (inače nastaju obostrane smetnje nosilaca naboja). U praksi poluvodiči sadrže uvijek istovremeno donatore i akceptore, pa prema vani djeluje samo razlika: vodljivost zavisi od viška nosilaca naboja jedne vrste (majoritetni nosioci) nad nosiocima druge vrste (minoritetni nosioci).

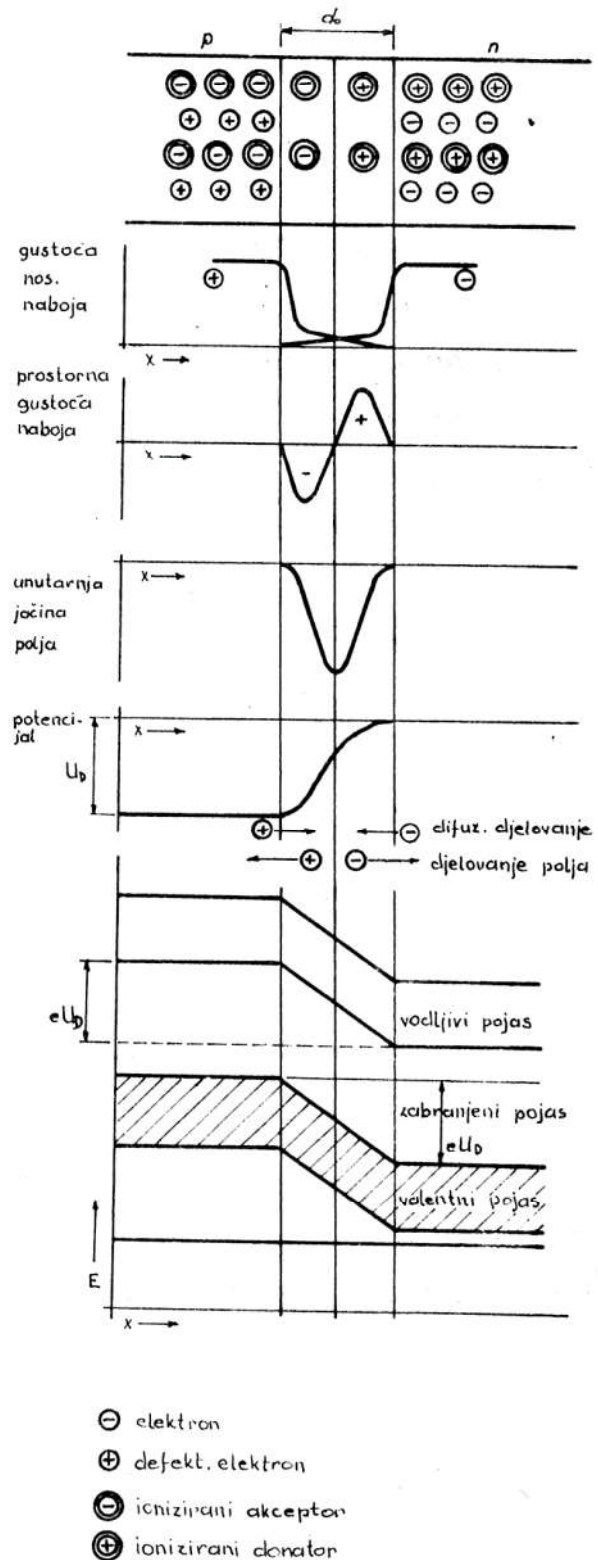
Za vodljivost poluvodiča je bitno to da je potreban određeni prag energije da bi se postiglo termičko oslobađanje elektrona (da se savladaју veze između atoma u kristalnoj rešetki). U tom je i razlika u odnosu na metale, kod kojih je već i temperatura okoline dovoljna da se valentni elektroni otrgnu od atoma.

Prelaz između dva poluvodiča raznog tipa

Ako se međusobno dodiruju dvije poluvodičke zone razno dotiranog tipa, onda se govori o području prelaza ili pn-prelazu. Strane mogu biti jednako dotirane (po količini stranih atoma) – simetrični prelaz. Na slici lijeva strana dotirana akceptorima p-vodljiva, desna strana dotirana donatorima n-vodljiva. Na graničnom prelaznom sloju razne koncentracije nosilaca naboja nastoje da se izjednače difuzijom: elektroni n-sloja žele da udju u p-sloj (u kojem ima manje elektrona), a defekt-elektroni nastoje da udju u n-sloj. Difuzija ovisi o jačini koncentracije, pokretljivosti nosilaca naboja

i o apsolutnoj temperaturi: pojava se naziva difuziona struja.

U okolini dodirnog mjesta nastaju slobodni nosioci naboja - formira se granična oblast vanredno visokog otpora: zaporni sloj debljine d_0 (potencijalna barijera). Izvan zapornog sloja u p-kao i u n - oblasti vlada električna neutralnost, ali u zapornom sloju zbog joniziranih akceptora i donatora nastaje prostorni naboj i s njim vezano električno polje (rubno polje); na slici crtamo potencijal u odnosu na n-oblast. Zbog kretanja naboja, p-vodič se u zoni dodira nabije negativno dok se n-vodič nabije pozitivno, pa se stoga na p-n prelazu stvori (bez vanjskog narinutog napona) potencijalna razlika nazvana difuzioni napon U_D . Ovom naponu proporcionalno električno polje je tako usmjereno da stvara silu na slobodne nosioce naboja koja ima suprotan smjer prema smjeru difuzije.



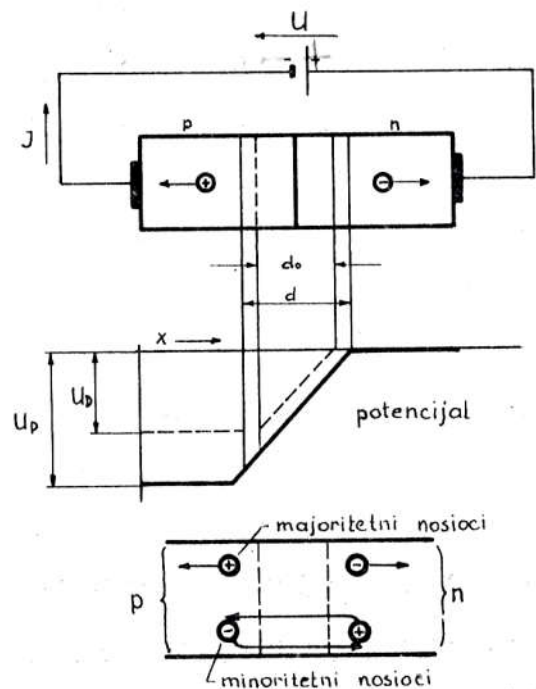
Djeluju stalno suprotne sile difuzije i električnog polja, pa se tako u stacionarnom stanju uspostavlja ravnotežno stanje: Difuziona struja i njoj suprotna struja zbog djelovanja polja su jednake: u stacionarnom stanju kroz p-n prelaz ne teče nikakva struja.

Napon difuzije iznosi npr. za germanij 0,3 V i ograničava proces rekombinacije na svega 10^{-3} mm tanku zonu, pa uz obično dotiranje (10^{15} cm^{-3} do 10^{16} cm^{-3}) proces difuzije biva kompenziran pri unutarnjem električnom polju od 1000 V/cm i više. U modelu: u odnosu na negativni difuzioni napon U_D u p-oblasti pojasi u p-oblasti su podignuti za iznos energije eU_D , ali nema preklapanja pojasa.

Poluvodička dioda - ispravljač

Ako se p-n spoj priključi na vanjski napon tako da plus pol dodje na n-dotirani kraj, tada će se povećati jačina električnog polja koje je suprotno djelovanju difuzije. Radi toga će se pokrenuti elektroni i defekt-elektroni i proširit će se zona zapornog sloja i povećati otpor p-n prelaza. Prostorni naboj se pri tome rastegne tako da osim već postojećeg difuzionog napo-

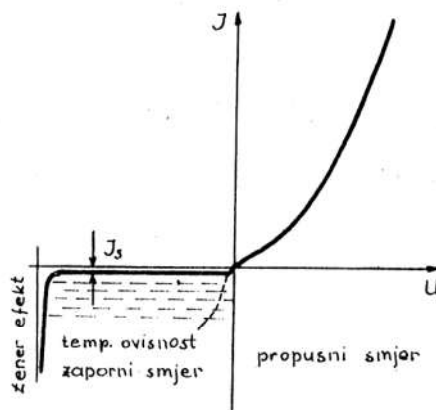
na U_D može još primiti priključeni napon, pa se potencijalna razlika poveća: $U_p > U_D$. U ovom slučaju p-n prelaz slični na pločasti kondenzator, čiji razmak ploča odgovara širini sloja prostornog naboja. Sa porastom vanjskog napona ovaj sloj biva sve manji, pa time opada i kapacitet (u praksi primjena za



tzv. kapacitetne diode: regulira se kapacitet naponom; primjenjuje se u mjerne svrhe, parametarska pojačala itd.).

Od posebnog značaja je mala struja koja teče kroz zaporni sloj.

Kroz ovaj sloje ne može teći struja majoritetnih nosilaca (elektroni iz n-sloja ne mogu ići u p-sloj, a defekt-elektroni iz p-sloja u n-sloj). Međutim potencijalna razlika ne spriječava struju minoritetnih nosilaca (elektroni iz

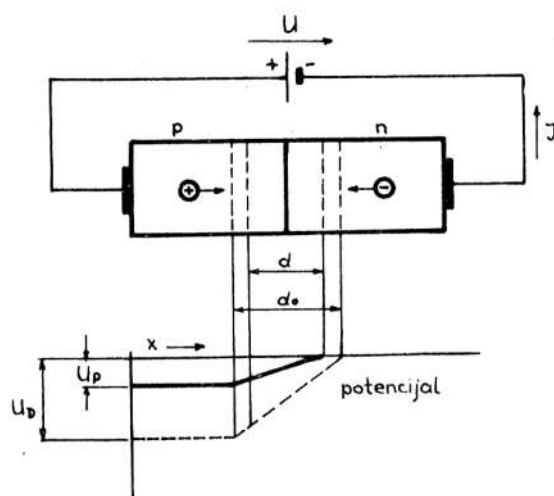


p-sloja u n-sloj i defekt-elektro-

ni iz n-sloja u p-sloj). Ova struja se naziva zaporna struja (reverzna struja, struja zasićenja). Na slici je za zaporni smjer povećano mjerilo. Zaporna struja je veoma malena (kod germanija $0,2 \text{ mA/cm}^2$, kod silicija manja od $0,002 \text{ mA/cm}^2$), i nezavisna je od priključenog napona (ima karakter zasićenosti), zbog toga što minoritetni nosioci dolaze difuzijom iz termičke "proizvodnje". Otuda je zaporna struja veoma ovisna o temperaturi i raste sa temperaturom. Stoga germanijeva dioda radi samo do 85°C i ima zapornu struju oko 10^{-6} A , dok silicijeva dioda radi do 200°C i ima zapornu struju 10^{-9} A . Priključeni napon ne smije preći neku granicu, jer inače nastaje preveliko električno polje koje neposredno trga elektrone iz kristalne rešetke i tako se razara zaporni sloj. Nastaje tzv. efekt lavine kao i Zener-ov efekt unutarnje emisije električnim poljem. Zener-ov efekt izaziva električni proboj zapornog sloja, ali je pojava načelno reverzibilna: ako se napon smanji ispod probojnog napona, prelazna zona postaje opet siromašna nosiocima naboja i opet se uspostavlja zaporni sloj (ukoliko nije dioda toplinski oštećena ni uništena jakom strujom!).

Ako se, međutim, p-sloj spoji sa pozitivnim polom, a n-sloj sa negativnim polom, majoritetni nosioci mogu bez smetnje sa obje strane ulaziti u prelaznu zonu. U zapornom sloju se poveća koncentracija slobodnih naboja: debljina sloja se smanjuje, a otpor pada za više redova veličine - dioda sada vodi struju. Zbog smanjenja prostornog naboja, pada i potencijalna razlika u unutrašnjosti poluvodiča: $U_p < U_D$.

Ovdje veliku ulogu igra pojava injekcije nosilaca naboja: majoritetni nosioci difuzijom stižu na drugu stranu i tako povećaju gustoću već postojećih minoritetnih nosilaca. Rekombinacijom sa suprotnim nosiocima stvara se strujno djelovanje tako da koncentracija



minoritetnih nosilaca difuzione oblasti eksponencijalno opada sa udaljenošću od p-n prelaza. Pojava ide u oba pravca. Važno je to da već malo povećanje propusnog napona veoma povećava gradijent koncentracije na p-n prelazu: električna struja je direktno proporcionalna promjeni koncentracije naboja, a da difuziona struja pri tome može imati proizvoljno veliku gustoću. Tehničke granice leže za germanij oko 250 A/cm^2 , a za silicij oko 600 A/cm^2 pri naponu od nekoliko volti. Injekcijom minoritetnih nosilaca može se znatno sniziti specifični otpor poluvodiča (primjena kod tranzistora!). Za ocjenu dobrote poluvodiča, uzima se veličina difuzione oblasti i mjeri se difuziona dužina L (srednji put minoritetnih nosilaca kod koga koncentracija minoritetnih nosilaca padne eksponencijalno na $1/e$ tj. na oko 37%). Za germanij iznosi $L_n = 2 \text{ mm}$, $L_p = 1,4 \text{ mm}$

(za elektrone odnosno defekt elektrone). Ponekad se umjesto difuzione dužine uzima životna dob τ nosioca naboja (između 0,4 ms do iznad 1,0 ms). Nastoji se poboljšanim pročišćavanjem materijala postići veću životnu dob. Kod debljine zapornog sloja od 10^{-3} mm i dužine difuzije od 1,5 mm, u zapornom sloju ne dolazi do rekombinacije pa važi jednačba za struju (W. Shockley)

$$I = I_S e^{\left(\frac{eU}{kT} - 1\right)}$$

gdje je I_S struja zasićenja (zaporna struja), U je priključeni napon, $K = 13,8 \cdot 10^{-24}$ Ws $^\circ\text{K}^{-1}$ Boltzmann-ova konstanta, T apsolutna temperatura u $^\circ\text{K}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ As naboj elektrona. Izraz $\frac{kT}{e}$ označava se kao temperaturni napon U_T i iznosi za 300°K (27°C) oko 26 mV, kod 77°C oko 30 mV. Maksimalni zaporni naponi: selen 35 V, germanij 200 V, silicij 1000 V.

Ako se u jednačbu uvrsti negativan napon, onda razlomak u eksponentu ostaje malen i zanemaruje se, pa struja I postaje jednaka $-I_S$.

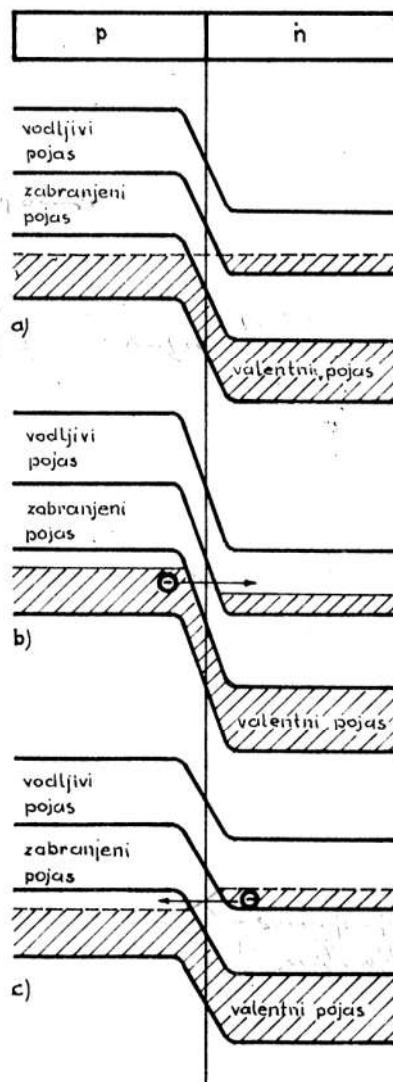
Tunel-dioda

Ako se dotiranje jako poveća (od uobičajenog 10^{16} cm^{-3} na 10^{20} cm^{-3}), onda se svojstva diode mijenjaju: i bez priključenog vanjskog napona, na veoma tankom zapornom sloju od 10^{-5} mm javlja se veliki difuzioni napon i jako električno polje. Ovo dovodi do veoma jakog pomicanja valentnog pojasa prema vodljivom pojasu pa nastaje preklapanje pojasa (prema normalno dotiranom p-n prelazu) pa valentni pojas leži sad iznad nivoa vodljivog pojasa. Elektroni mogu bez promjene energije preći iz valentnog pojasa p-oblasti u vodljivi pojas n-oblasti. Ovakav visoko dotirani p-n prelaz ima svojstva koja sliče

metalima jer ovdje nastupa umjesto vertikalnog prelaza elektrona horizontalni prelaz kroz zabranjeni pojas. Ova se pojava tumači valno-mehaničkim tunnel-efektom. Ako se elektron (promatran kao čestica) kreće protiv prostorno uskog ali veoma visokog potencijalnog zida (barijere), on ga energetski ne može savladati i biva reflektiran. Ako se međjutim, elektron promatra kao val, onda se može smatrati da će kod spomenute refleksije jedan dio vala prodrijeti u potencijalni zid i biti jako eksponencijalno prigušen, ali zbog veoma tankog potencijalnog zida ipak će postojati i nakon izlaska te će opet postati čestica (tunnel-efekt): nabijena čestica može sa nekom izvjesnom vjerovatnoćom, bez promjene svoje potencijalne energije, prodrijeti u dovoljno tanki potencijalni zid. Vjerovatnoća tunnel-efekta

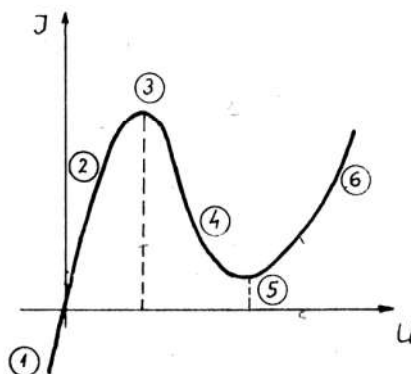
odgovara približno amplitudi vala koji se može utvrditi (pokazati) iza potencijalnog zida. Pojava se događa praktično brzinom svijetla.

Visokim n-dotiranjem osigurava se da u vodljivom pojasu ima dovoljno elektrona, a visokim p-dotiranjem osigurava se dovoljno slobodnih mjesta u valentnom pojasu.



Bez priključenog vanjskog napona, ne teče nikakva struja kroz diodu. Ako se priključi napon u zapornom smjeru, onda se još više spusti vodljivi pojas n-područja pa se elektroni iz vodljivog pojasa n-sloja tuneliraju u valentni pojas p-sloja. Sa porastom napona raste i struja - nema zapornog djelovanja, pojava je veoma slična kao kod metalnih vodiča (dio krivulje (1)).

Ako se priključi napon u propusnom smjeru, smanjuje se razlika potencijala između p i n-oblasti i sa porastom napona raste i struja (dio krivulje (2)). U modelu vodljivog pojasa je dignut iznad valentnog pojasa tako da elektroni iz vodljivog pojasa n-sloja se tuneliraju u valentni pojas p-sloja (slika c). Sa daljim porastom napona (dalje podizanje vodljivog pojasa n-sloja) sve više elektrona stoje nasuprot zabranjenog pojasa n-sloja, pa tunnel-efekt prestaje: sa porastom napona struja kroz prelaz p-n postaje manja. Nakon maksimuma (3), dolazi do opadajuće karakteristike (što odgovara negativnom diferencijalnom otporu $r = \frac{dU}{dI}$). Daljnim porastom napona dolazi se do minimuma struje (5), a dalje struja opet eksponencijalno raste (6). Nastaje normalni p-n prelaz, struja teče bez tunnel-efekta, vertikalnim dizanjem elektrona iz valentnog pojasa u vodljivi pojas (difuziona struja).



Za Ge i Si tunnel-diode, struja I_3 nastupa pri naponima između 35 mV i 70 mV, a struja I_5 pri naponima 200 mV do 430 mV. Struja I_3 može narasti do 10 A (kod germanija). Jačina ove struje ovisi o vjerojatnosti tuneliranja i površini p-n prelaza. Negativni diferencijalni otpor je oko $-r_{\min} = 100 \text{ oma}$.

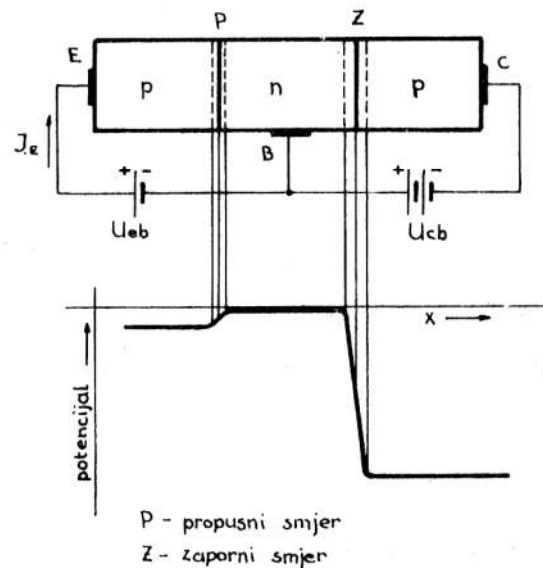
Tunel diode se upotrebljavaju kao omski kompenzacioni element, kao pojačalo i oscilator, te kao bistabilni element u računskim strojevima.

Tunel-efekt se osniva na kretanju majoritetnih nosilaca i znatno je brži od difuzionog kretanja minoritetnih nosilaca, i stoga je tunel-dioda upotrebljiva do područja frekvencije reda veličine 10^9 Hz.

Tranzistor

Naziv dolazi od "transient resistor" i predstavlja upravljivi p-n prelaz.

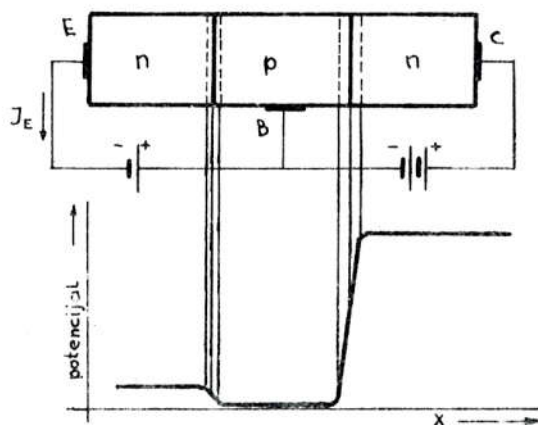
Procesom injiciranja može se vodljivost p-n prelaza regulirati unošenjem nosilaca naboja u zaporni sloj. Tehnički to se izvodi pomoću dva plosna p-n prelaza koji su u veoma malom razmaku postavljeni, pa se može imati p-n-p ili n-p-n redosljed zona: poluvodička trioda. Srednja zona je ekstremno tanka. Zajednička elektroda zove se baza, E je emiter, a C kolektor. U principu se pruga emiter-baza spaja u propusni spoj, a pruga baza-kolektor u nepropusni spoj. Između baze i kolektora je p-n prelaz u nepropusnom smjeru i u prelaznoj zoni ima veoma malo nosilaca naboja, dok tu vlada veliki pad napona, zaporna struja je zanemarlivo malena. S druge strane, u propusnom smjeru spojena p-n zona je prepuna nosilaca naboja. Ako se n i p-slojevi dotiraju tako da se ovi nosioci sastoje praktično samo od defekt-elektrona iz p-oblasti koji su difundirali u n-oblast, onda je



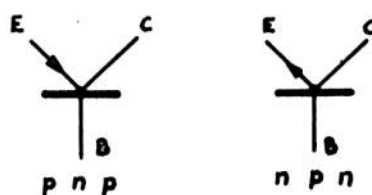
struja elektrona iz baze u p-oblast veoma malena. Ako je debljina srednjeg n-sloja manja od difuzione dužine nosilaca naboja, onda mogu defekt-elektroni prodrjeti kroz prelaz. Odnos ove struje defekt-elektrona prema ukupnoj struji naziva se stepen djelovanja emitera. Zbog pada napona koji vlada na prelazu, putuje defekt-elektroni dalje kroz p-sloj prema kolektoru: oni "padaju" u kolektorski prostor. Kolektor sakuplja defekt-elektrone koji dolaze iz p-sloja priključenog na emiter. Struja baze je malena jer veoma mali broj defekt-elektrona otječe prema bazi. Iz ovog izlazi da se kolektorska struja I_C može regulirati propusnom strujom prvog p-n prelaza: strujom emitera I_E .

U ovakvom spoju nema pojačanja struje $\alpha = I_C/I_E$. Spoj se naziva bazni spoj jer je baza zajednička elektroda obiju diodnih pruga. Pojačanje snage nastupa kod $I_B \ll I_C$, kad struja emitera i struja kolektora imaju skoro istu vrijednost ($I_E = I_C$), a u strujnom krugu kolektora je uključen otpor koji je veći nego otpor u krugu emitera. Ako se redosljed zona izmjeni dobije se n-p-n tranzistor, kod kojeg emiter mora biti negativan prema bazi, a kolektor pozitivan prema bazi jer pruga emiter-baza mora raditi u propusnom smjeru, a baza - kolektor u nepropusnom smjeru. Struja I_E teče u obrnutom smjeru nego kod tipa p-n-p tranzistora.

n-zona mora biti mnogo jače dotirana prema slabom dotiranoj p-bazi. Zbog nesimetrije u dotiranju nastaje struja baze koja se sastoji od veoma malog broja defekt-elektrona (koji

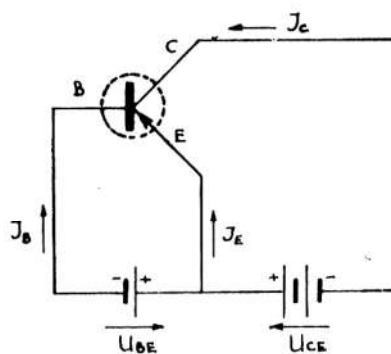


dolaze od nosilaca iz p-baze) i veoma velikog broja elektrona iz lijeve n-zone (emitera). Struja kolektora je 10 do 100 puta veća od struje baze.

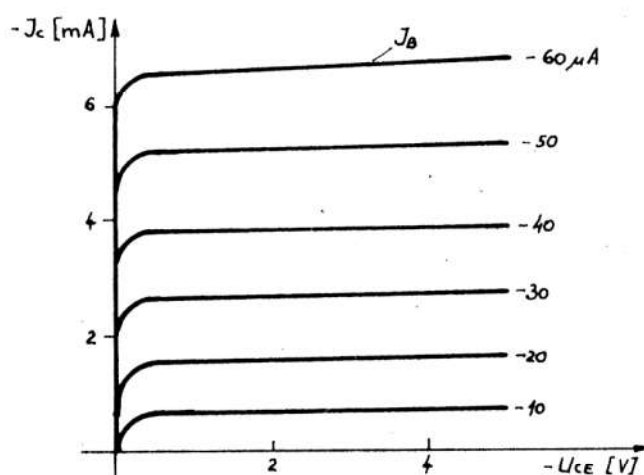


Kako je $I_B = I_E - I_C$, i iznosi samo mali dio struje emitera, tranzistor se obično upravlja pomoću ove male struje baze I_B . To se vrši u tzv. emitterskom spoju, u kome je emiter zajednički za oba diodna dijela (analogija sa triodom: emiter odgovara katodi, baza rešetki a kolektor anodi). Spoj se upotrebljava pretežno kao pojačalo i može se postići pojačanje struje $\alpha' = I_C/I_B$ do 200 puta.

Svojstva tranzistora se prikazuju karakteristikom gdje je kolektorska struja I_C prikazana kao funkcija napona U_{CE} , a kao parametar uzeta je struja baze I_B . (Slika za p-n-p tranzistor). Praktično svi injicirani defekt-elektroni dodju na kolektor nezavisno o potencijalnoj razlici na zapor-
nom sloju, pa je kolektor-
ska struja neovisna o kolektorskom naponu.



Za regulaciju tranzistora mora uvijek teći struja injiciranja potrebnih nosilaca naboja. Ulazni otpor je izmedju $0,5 \text{ k}\Omega$ i $10 \text{ k}\Omega$. Karakteristike



ovise o temperaturi, a regulacija nije bez zakašnjenja jer

naglo povećanje struje se može postići tek nakon što su njom izazvani injicirani nosioci naboja difundirali kroz zonu baze i dostigli kolektor. Ova "inercija" je uzrok za ograničenje gornje granice frekvencije za upotrebu tranzistora. Otuda se nastoji da baza bude što tanja, a brzina difuzije što veća. Stoga se unutar baze mijenja dotiranje na takav način da se stvori jedno dodatno unutarnje električno polje pomoću koje se ubrzavaju nosioci naboja koji dolaze iz emitera (to je princip drift-tranzistora).

16, MAXWELL-OVE JEDNADŽBE

Podjela vektorskih polja

Razna vektorska polja mogu imati razne vrijednosti rotora i divergencije. Po ovom kriteriju polja se mogu podijeliti na četiri vrste:

- 1) bezvrtložno polje - potencijalno polje
- 2) bezizvorno polje - solenoidno polje
- 3) Laplace-ovo polje
- 4) složeno polje - polje općeg oblika

Glavna svojstva ovih polja su:

- 1) bezvrtložno polje - rotor u svim tačkama polja ima vrijednost nula, divergencija je bar u nekim tačkama različita od nule

$$\text{rot } \vec{v} = 0$$

$$\text{div } \vec{v} \neq 0$$

Ako je divergencija različita od nule, znači da polje ima izvore i ponore (ako je $\text{div } \vec{v} = 0$, onda to znači da je vektor i njegov tok konstantan). Stoga funkcija koja karakterizira polje predstavlja u takvom polju (zbog $\text{rot } \vec{v} = 0$) gradijent nekog skalara φ kojeg nazivamo potencijal jer je onda identički

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot grad } \varphi = 0$$

pa to opravdava naziv "potencijalno polje". Nekad se ovo polje naziva i lamelarno polje jer nema vrtloga.

2) bezizvorno - solenoidno polje, divergencija je svuda nula, a rotor je bar u nekim tačkama različit od nule

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} \neq 0$$

Divergencija prikazuje izdašnost nekog izvora ili nekog volumena (ulaz ili izlaz fluida u jedinici vremena) dok rotor prikazuje brzinu fluida kao dvostruke kutne brzine, dakle vrtlog.

3) Laplace-ovo polje nema ni izvora ni ponora, niti vrtloga. Važi identički

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Iz prve jednadžbe izlazi da je karakteristični vektor polja gradijent nekog skalarnog potencijala

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$$

Kako je i divergencija jednaka nuli

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

ili

$$\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = 0$$

Ovo je Laplace-ova jednadžba za skalarnu funkciju. U analitičkom obliku glasi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Pregled polja

Kad se u električnom polju pod djelovanjem jačine električnog polja kreću količine elektriciteta, to se kretanje označava kao "električna struja". Nasuprot tome, nije

moguća "magnetska struja" jer ne postoje količine (čestice) magnetizma. Ovo je fundamentalna i bitna razlika između električnih i magnetskih pojava, iako postoje mnoge formalne i pojmovne analogije.

U slučaju magnetskog polja, važni su zakoni koji određuju djelovanja tog polja. U slučaju elektrostatskih polja, u izolatorima (ne vodičima) važna je veličina jačine električnog polja $\vec{E}$ jer ona određuje kad će nastati proboj pri višim naponima. U slučaju stacionarnih polja u vodičima mnogo su važnije pojave strujanja nego električno polje koje je to strujanje izazvalo. Veza između strujnih pojava i električnog polja je data naponom koji vlada u tom električnom polju $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{n}$. Elektroni koji se nalaze u polju podliježu silima koje izaziva jačina električnog polja. U slučaju da se vodič nalazi pod utjecajem električnog polja, elektroni se pokreću i nastaje struja, čija je gustoća određena izrazom $\vec{G} = \chi \vec{E}$.

Iz velikog mnoštva raznih međusobnih zavisnosti električnih i magnetskih veličina, treba izdvojiti dvije jednačbe koje predstavljaju fundamentalnu vezu između električnih i magnetskih veličina. Te dvije jednačbe pored Ohm-ovog zakona predstavljaju najvažnije odnose u elektrotehnici. To su:

1) zakon protjecanja

$$\Theta = V_0 = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Sigma I,$$

2) zakon indukcije

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Ako se obje jednačbe još diferenciraju po površini presjeka polja S i ako se ima u vidu pored jačine struje I i gustoće struje G još i gustoća dielektrične struje $G_D = \frac{dD}{dt}$, dobije se

uzimajući u obzir da je $G_L = \frac{dI}{dS}$ i da je

$$e = \oint \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\oint \vec{H} d\vec{s} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial S} = \vec{G}_L + \frac{d\vec{D}}{dt} = \chi \vec{E} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

ili prema Stokes-ovu teoremu (Stokes-ov teorem:

$$\int_C \vec{v} d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{v} d\vec{S}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \chi \vec{E} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

Gornji izraz predstavlja 1. Maxwell-ovu jednadžbu u diferencijalnom obliku.

Diferenciranjem drugog osnovnog zakona po površini polja, dobije se

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\oint \vec{E} d\vec{s} \right) = - \frac{\partial}{\partial S \partial t} \left(\int \vec{B} d\vec{S} \right) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

odnosno

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

a to je 2. Maxwell-ova jednadžba u diferencijalnom obliku.

Prva Maxwell-ova jednadžba pokazuje da promjenljivo magnetsko polje proizvodi električno polje (odnosno struju): vrtlog jačine magnetskog polja na svakom mjestu prostora jednak je stvarnoj gustoći struje na tom mjestu.

Druga Maxwell-ova jednadžba pokazuje da promjenljivo električno polje proizvodi magnetsko polje: vrtlog jačine električnog polja u svakom mjestu prostora jednak je brzini opadanja gustoće magnetskog toka.

Smjer vrtloga jačine električnog polja $\vec{E}$ je isti kao i smjer magnetskih linija. Otuda smjer $\vec{E}$ -linija stoji svuda i uvijek okomito na smjer $\vec{B}$ -linija.

Primjenom operacije divergencije na prvu jednadžbu zbog

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$$

dobije se

$$\operatorname{div} \vec{G} = 0$$

ili pisana, uz $Q = \int \varrho \, dV$, gdje je ϱ gustoća elektriciteta u jedinici volumena, i upotrebivši jednadžbu kontinuiteta

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{d\vec{D}}{dt} = 0; \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{G}_D = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$$

što predstavlja 3. Maxwell-ovu jednadžbu.

Linije stvarne struje su uvijek u sebe zatvorene. Ako neka provodna struja završava na graničnoj površini između vodiča i nevodiča (kondenzator) onda sa tog mjesta teče u nevodič struja pomaka jednake jačine.

Ako se operacija divergencije primjeni na drugu Maxwell-ovu jednadžbu dobije se

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

slijedi

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

a to je 4. Maxwell-ova jednadžba. Magnetske linije su uvijek u sebe zatvorene.

Ovo su fundamentalne jednadžbe koje medjusobno povezuju električno i magnetsko polje kao i pojave u vodičima, nevodičima i magnetske pojave (pojave strujnih, naponskih i magnetskih polja)

Ako se tome još dodaju poznati odnosi

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{G} = \kappa \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

onda se dobije sistem jednađbi koji omogućuje najraznovrsnija računanja u teoriji polja.

Radi lakšeg pamćenja, mogu se glavni zakoni i odnosi prikazati grafički. Lijeva strana prikaza sadrži magnetske a desna električne veličine i zakone. Jednađbe su tako napisane da spojne linije spajaju iste veličine u susjednim jednađbama. Ostao je samo nespomenut dielektrični pomak u nevodičima.

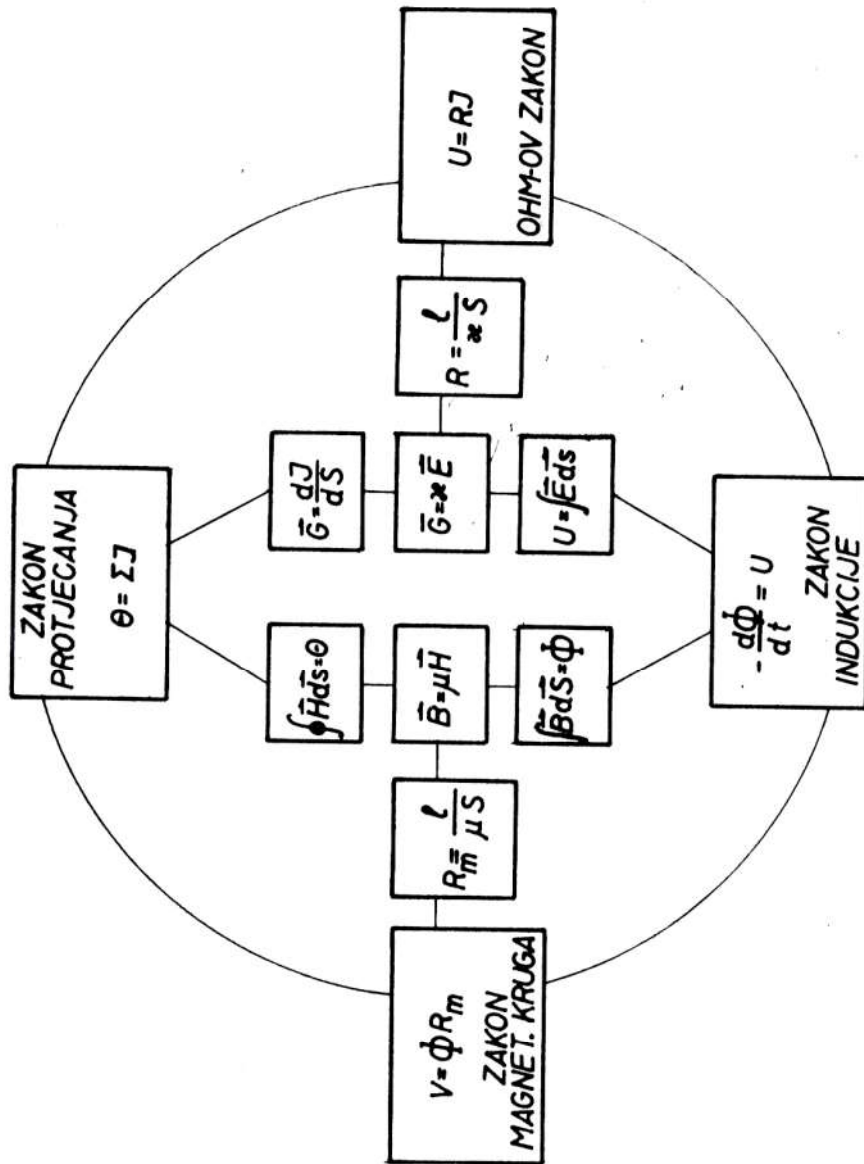
Vide se pored glavnog još četiri kruga koji povezuju ove veličine;

lijevo gore: $\Theta, R_m, \mu, H, V(\Theta)$

lijevo dole : Φ, R_m, μ, B, ϕ

desno gore: I, R, κ, G, U

desno dole: U, R, κ, E, U



17. TEORIJA IZMJENIČNIH STRUJA

U obradjenim poglavljima obuhvaćene su sve važnije zakonitosti po kojima se vladaju električne i magnetske pojave.

U ovom poglavlju se ne radi o novim zakonima nego o primjeni poznatih zakona na jedno područje primjene: na izmjenične struje u "utitranom" stanju. Ovo poglavlje ima izvanrednu vrijednost za tehničku praksu.

Dosadašnji odnosi koji pokazuju vremenski promjenljive veličine, navedeni su u općem obliku: $\frac{dI}{dt}$, $\frac{dU}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, ne vodeći računa po kojoj vremenskoj zakonitosti se vrše te promjene.

Teorija izmjeničnih struja je osnovana na primjeni sinusne zakonitosti vremenskih promjena. Posebni razlozi postoje za uvođenje sinusne vremenske funkcije:

1. sinusna vremenska funkcija je najjednostavnija od svih vremenskih funkcija. Ona u ovom području izmjeničnih struja ima ulogu temeljnog zakona.

2. Promatrano matematički, svaka vremenska funkcija se može razložiti u sumu sinusnih vremenskih funkcija uz pomoć Fourier-ove analize. Sama sinusna funkcija se dalje ne može razlagati.

3. Operacija diferenciranja ili integriranja ne mijenja sinusnu funkciju: radi se o pretvaranju u cosinusnu funkciju ili obrnuto što se ustvari svodi na vremenski pomak iste funkcije.

4. Promatrano fizikalno: sinusni zvučni val je čisti ton, sinusni elektromagnetski val je čista boja. Obje se ne mogu dalje razlagati.

5. Napon (ili EMS) sinusnog oblika proizvodi u najkompliciranijoj mreži linearnih pasivnih dvopola svuda sinusne struje i sinusne napone. Za slučaj nelinearnih dvopola, sinusni oblik se ne može više sačuvati.

Izmjenična struja je širi pojam: takva struja (napon) nema općenito sinusni oblik, ali se može svesti na takav oblik.

Za tehničku praksu, međjutim, od najveće važnosti su dakle izmjenične struje koje se vladaju po sinusnom vremenskom zakonu.

Najvažniji zakoni kojima podliježe teorija izmjeničnih struja su:

- Ohm-ov zakon: $I = U/R$
- Zakon odnosa struje i napona $i = C \frac{du}{dt}$
na kondenzatoru
- Kirchhoff-ovi zakoni $\sum I = 0, \sum e = \sum iR$
- Zakon odnosa struje i napona $u = L \frac{di}{dt}$
na zavojnici
- "Ohm-ov zakon" magnetskog kruga ... $\phi = \frac{iN}{R_m}$
- Zakon indukcije $e = - \frac{d\phi}{dt}$
- Joule-ov zakon za snagu $P = u \cdot i$
- Sinusni vremenski zakon $a = a_{\max} \sin \omega t$

Pomoću ovih zakona mogu se riješavati skoro svi problemi izmjeničnih struja.

Proizvodnja sinusnih napona

Za proizvodjenje sinusnih napona postoje principijelno razne mogućnosti:

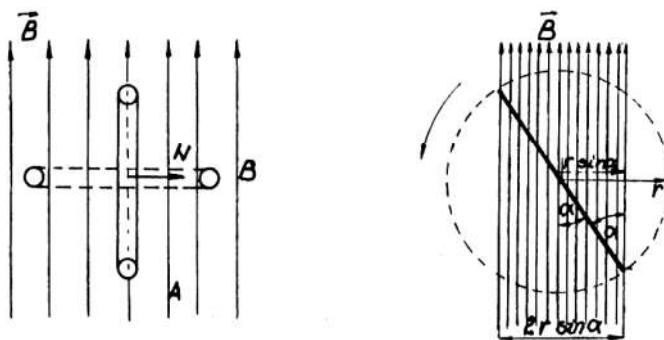
- a) u električnim oscilatornim krugovima
- b) u elektroakustičnim pretvaračima (mikrofon)
- c) u generatorima izmjeničnog napona.

O ovim načinima će biti kasnije više govora. Ovdje, za sada treba spomenuti da je krivo mišljenje i zaključak da se u generatorima izmjeničnog napona u svakom slučaju i obavezno stvara sinusni napon. Taj zaključak bi važio kad bi se u stvarnom generatoru zavoji stvarno vrtili u homogenom magnetskom polju. Međutim, to nije slučaj nego se moraju poduzeti posebne konstruktivne mjere da bi se što više približilo zahtjevu za dobijanje sinusnog napona. (Prema propisima za gradnju električnog generatora, naponska krivulja ne smije odstupati za više od 5% maksimalne vrijednosti sinusne naponske krivulje). Proizvodjenje sinusnih napona u generatorima je veoma teška zadaća.

Načini proizvodnje navedenih pod a) i b) daju uvijek sinusne napone, ali je značaj takvih "generatora" mnogo manji, naročito u energetske smislu. Oba spomenuta načina su važna u elektronici i tamo imaju veoma značajnu ulogu.

Sinusni napon u zavojnici

Treba odrediti magnetski tok u zavoju za vrijeme jednog okretaja zavoja u homogenom magnetskom polju (idealizirani slučaj generatorskog dobijanja sinusnog napona). Kao smjer okretanja, **uzima** se okretanje protiv smjera kazaljke na satu (uobičajeno je u matematici da se ovaj smjer uzima kao pozitivan). Pozitivni smjer magnetskog toka se uzima onda ako je okomica N na zavoj usmjerena kao i smjer B-linija.



Ako je aksijalna dužina zavoja l i radijus okretanja r , onda je maksimalna vrijednost obuhvaćenog magnetskog toka kad zavoj stoji okomito na smjer polja (B-linija). Ako je površina zavoja $S = l \cdot 2r$ onda je maksimalna vrijednost (tjemena vrijednost) magnetskog toka

$$\phi_m = B S = B (l \cdot 2r)$$

Važna i mjerodavna je projekcija površine S u smjer okomit na smjer B-linija. Obuhvaćeni tok je

$$\phi_\alpha = B (l \cdot 2r \sin \alpha) = B S \sin \alpha = \phi_m \sin \alpha$$

Ako se kao početni položaj odabere položaj B, onda je u tom položaju obuhvaćeni tok maksimalan, pa je, analogno

$$\phi_\alpha = B (l \cdot 2r \cos \alpha) = B S \cos \alpha = \phi_m \cos \alpha$$

Cosinus funkcija se pretvara u sinus funkciju pomoću relacije $\cos \alpha = \sin (\alpha + 90^\circ)$, pa je

$$\phi_\alpha = \phi_m \sin (\alpha + 90^\circ)$$

Zbog zakona indukcije $e = - \frac{d\phi}{dt}$ (dakle derivacija toka po vremenu), povoljno je da se umjesto kuta okretanja uvede pripadno vrijeme potrebno za okretaj. Ako je T vrijeme potrebno za puni okretaj, onda važi, uz pretpostavku konstantne brzine okretanja

$$\alpha : t = 2\pi : T$$

(kutevi su uzeti u lučnoj mjeri tj. u radijanima) pa je

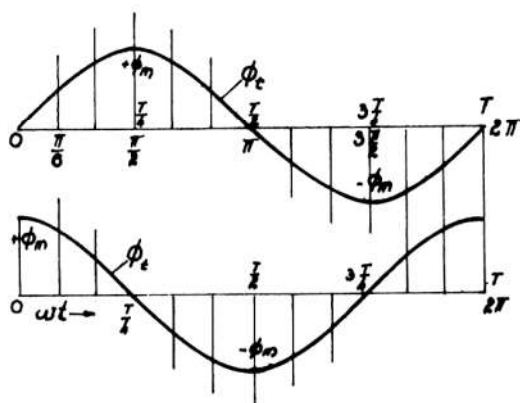
$$\alpha = \frac{2\pi}{T} t = \omega t$$

Faktor proporcionalnosti $\omega = \frac{2\pi}{T}$ zove se "kutna brzina" zavoja.

S ovom oznakom, imamo obuhvaćeni tok:

- za početni položaj A: $\phi_t = \phi_m \sin \omega t$
- za početni položaj B: $\phi_t = \phi_m \cos \omega t = \phi_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$

Grafički se ovi odnosi mogu prikazati u pravokutnom koordinatnom sistemu kao linijski dijagrami. Vidi se da cos-linija nije ništa drugo nego sin-linija pomaknuta unatrag (na lijevo) za $\pi/2$.



Sve vrijednosti nastupaju kod cos-linije za $T/4$ ranije nego kod sin-linije.

Karakteristične (opisne) veličine sinusne funkcije (sinusnog vala)

Sinusna funkcija je periodična funkcija oblika $\sin \alpha = \sin (\alpha + 2\pi n)$, gdje je n cijeli broj i u našem slučaju znači broj okretaja zavoja u magnetskom polju. Vrijeme T za puni sinusni val zove se period.

Sinusni val ima dva poluvala sa istom maksimalnom vrednošću ali protivnog predznaka: to je amplituda ili tjemena vrijednost sinusnog vala.

Trajanje periode u tehnici jake struje je $1/50$ s, a u VF tehnici $10^{-5} \dots 10^{-7}$ s.

Umjesto perioda trajanja T , upotrebljava se mnogo češće recipročna vrijednost $1/T = f$, a to je frekvencija periodično promjenljive veličine: brojna vrijednost frekvencije pokazuje koliko se perioda izvrši za vrijeme od 1 s. Praktična jedinica za frekvenciju je Herz: $1 \text{ Hz} = 1$ period u sec. U tehnici jake struje frekvencija je 50 Hz, u telefoniji oko 5000 Hz, radio valovi 10 ... 30 MHz, u UKV tehnici frekvencija je 30 do 300 MHz.

Broj perioda u 2π sec zove se kružna frekvencija

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Za rotirajući svitak, kružna frekvencija je identična sa kutnom brzinom.

Rezimirajući sve što je do sada rečeno, može se napisati opći oblik sinusne vremenske funkcije

$$a = a_m \sin(\omega t + \varphi)$$

gdje je

a - trenutna vrijednost neke veličine u bilo kojem trenutku

a_m - tjemena vrijednost

φ - kut početne tačke ili multi/fazni kut, koji postoji u vremenu $t=0$

$(\omega t + \varphi)$ - fazni kut za vrijeme t

S tim glasi konačna jednađžba za obuhvaćeni magnetski tok svitka za bilo koji početni položaj

$$\underline{\phi_t = \phi_m \sin (\omega t \pm \varphi) .}$$

Za $\varphi = 0$ dobije se prirodna sinusoida, čija trenutna vrijednost nula pada na početak perioda. Ovakva se sinusoida naziva referentna sinusoida pa su druge sinusoida $\phi_t = \phi_m \sin (\omega t \pm \varphi)$ prema njoj "pomaknute u fazi" (naprijed ili natrag). Fazni pomak može sasvim općenito, biti i između dviju proizvoljnih sinusoida (struja, napon) i ima u tehnici izmjeničnih struja izvanredno važnu ulogu. Pozitivno φ znači pomak u pozitivnom smjeru okretanja - dakle protiv brojanja vremena, ili "prethodjenje" vala, tako da određene vrijednosti nastupaju ranije nego na referentnoj sinusoidi.

Negativno φ znači pomak u smjeru brojanja vremena - dakle "zaostajanje" vala; sve vrijednosti nastupaju kasnije nego na referentnoj sinusoidi.

a) referentna sinusoida

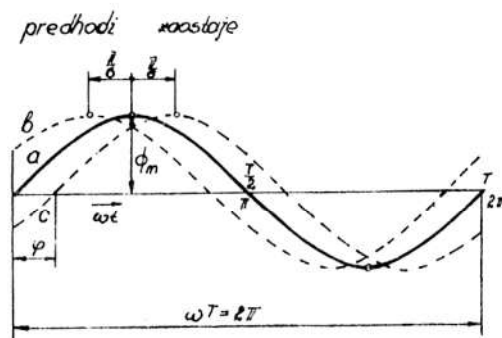
$$\phi_t = \phi_m \sin \omega t$$

b) sinusoida prethodi za $\frac{\pi}{6}$

$$\phi_t = \phi_m \sin (\omega t + \varphi)$$

c) sinusoida zaostaje za $\frac{\pi}{6}$

$$\phi_t = \phi_m \sin (\omega t - \varphi)$$



U specijalnom slučaju: $\varphi = \pm \pi/2$, pa je

$\phi_t = \phi_m \sin (\omega t \pm \pi/2)$, dakle dobiju se dve sinusne linije koje su prema referentnoj sinusoidi "fazno pomaknute" za 90° .

Srednje i efektivne vrijednosti sinusnog vala

Aritmetička srednja vrijednost za sinusoidu je jednaka nuli, a kod nesinusoidnih periodičnih funkcija može imati vrijednost veću od nule. Srednje vrijednosti se pišu sa crtom iznad simbola, npr.

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt$$

Aritmetička srednja vrijednost ima značaja za tzv. "ispravljene struje". Račun pokazuje za sinusnu ispravljenu struju

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt \text{ gdje je}$$

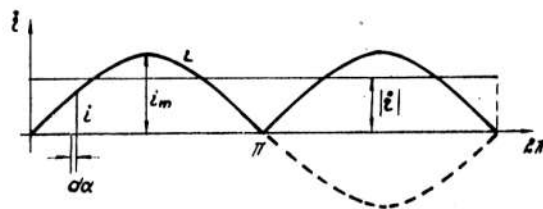
$|i|$ vrijednost struje bez obzira na predznak. Za sinusnu struju $i = i_m \sin \omega t$ dobije se:

$$|\bar{i}| = \frac{1}{T} \int_0^T i_m \sin(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} i_m$$

$$\bar{i} = 0,637 i_m$$

dakle vrijednost od 63,7% tjeme-
ne vrijednosti. Aritmetička sred-
nja vrijednost se upotrebljava
za računanje količine elektrici-
teta (u Ah) i za sve elektro-
litičke procese (otuda ponekad

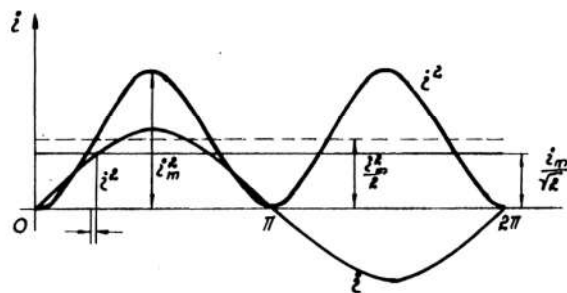
naziv "elektrolitička" srednja vrijednost). Također se upo-
trebljava za računanje prostorno rasporedjene magnetske in-
dukcije iznad polova generatora izmjeničnog napona.



Efektivna srednja vrijednost (kvadratna srednja vri-
jednost) je tehnički veoma važna veličina, jer je vezana na
odnose snage: $P = I^2 R = U^2 / R$. Za računanje efektivne vrijed-
nosti sinusoidalnih veličina račun je jednostavan. Navesti

ćemo kao primjer računanje
efektivne vrijednosti sinus-
ne struje $i = i_m \sin \omega t$.

Ako je kvadriramo tačku po
tačku, dobijena linija i^2
leži potpuno u pozitivnom
području i predstavlja cos-



liniju dvostruke frekvencije. Srednju vrijednost ove i^2 lini-
je dobijemo integracijom za vrijeme perioda T ili kuta 2π ,
a varijabla je $\alpha = \omega t$. Srednja vrijednost ove veličine je
onda

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (i_m \sin \alpha)^2 d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i_m^2 \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{i_m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \end{aligned}$$

Trigonometrijskom transformacijom

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

se dobije dalje

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\alpha d\alpha = \\ &= \left| \frac{1}{2} \alpha \right|_0^{2\pi} - \frac{1}{4} \left| \sin 2\alpha \right|_0^{2\pi} = \pi \end{aligned}$$

Ako se ovo uvede u gornji integral, onda je

$$I^2 = \frac{i_m^2}{2\pi} \pi = \frac{i_m^2}{2} = \left(\frac{i_m}{\sqrt{2}} \right)^2$$

ili

$$I = \frac{i_m}{\sqrt{2}} = 0,707 i_m$$

Ovo je veoma važna relacija za računanje svih toplinskih pojava u izmjeničnim strujama, obrtnih momenata motora, i svih veličina koje se pojavljuju sa kvadratom vrijednosti.

Faktor $\sqrt{2}$ važi samo za sinusoidni oblik krivulje i drukčiji je za druge oblike. Praktično značenje: izmjenična struja efektivne vrijednosti $I = 10 \text{ A}$, dakle tjemene vrijednosti $\sqrt{2} I = 14,1 \text{ A}$ proizvodi u otporu toplinu $P = I^2 R t$. Ova energija je jednaka energiji što bi je proizvela istosmjerna struja iste jačine od 10 A .

Mnogo jednostavniji izvod se može dobiti ovako:

$$I = \sqrt{\bar{i}^2} = \sqrt{I_m^2 \sin^2 (\omega t + \varphi)} = I_m \sqrt{\frac{1 - \cos 2(\omega t + \varphi)}{2}} =$$

$$= I_m \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$$

jer je srednja vrijednost od $\cos 2(\omega t + \varphi)$ jednaka nuli.

U svim dijagramima i računima sa izmjeničnim veličinama obično se unose efektivne vrijednosti.

Često se vidi u upotrebi formula za efektivnu vrijednost inducirano napona

$$E = \frac{e_m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \phi_m N = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \phi_m$$

$$\underline{E = 4,44 f N \phi_m}$$

Tjemeni faktor i faktor oblika

Tjemeni faktor je odnos tjemene vrijednosti (maksimalne vrijednosti) prema efektivnoj vrijednosti. Za sinusni oblik taj faktor je $\sqrt{2} = 1,41$. Tjemeni faktor se upotrebljava tamo gdje dolaze do izražaja maksimalne vrijednosti, npr. probojna

čvrstoća izolatora i sl.

Faktor oblika je odnos efektivne vrijednosti prema aritmetičkoj (elektrolitičkoj) vrijednosti za sinusni oblik je

$$\frac{E}{\bar{e}} = \frac{\frac{e_m}{\sqrt{2}}}{e_m \frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

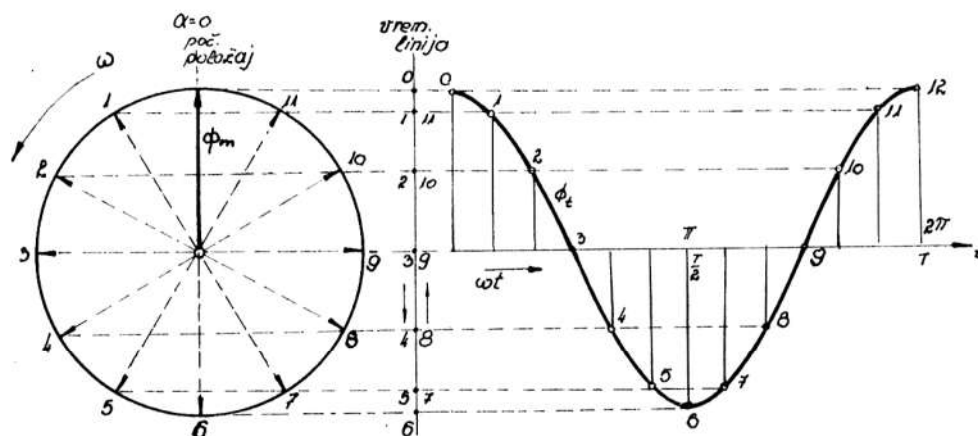
Faktor oblika služi za procjenu oblika krivulje kod nesinusoidalnih izmjeničnih struja.

Oblika vala

	sinusoida	pravokutnik	polukrug	trokut
Faktor oblika	1,11	1,00	1,04	1,15
Tjemeni faktor	1,414	1,00	1,22	1,732

Prikazivanje i slaganje sinusoidnih veličina

Veličine koje se mjenjaju po sinusnom vremenskom zakonu mogu se prikazati pomoću versora (fazora, vektora, kazaljke /Zeiger/). Ovo je naročito podesna metoda za prikazivanje više sinusnih veličina koje su pomaknute u fazi.



Metoda se sastoji od

- 1) versora - on je prikazan tjemenom vrijednosti dotične veličine (ponekad i efektivnom vrijednosti, ali se tada ne prikazuje pripadna sinusoida)
- 2) kutna brzina ω - odgovara vremenu T za jednu periodu
- 3) smjera okretanja - pozitivni smjer je smjer protiv kazaljki na satu
- 4) vremenske linije - linija na koju se vrši projekcija versora.

Kao primjer prikazivanja veličine dat je magnetski tok

$$\phi_{\alpha} = \phi_m \cos \alpha ; \text{ odnosno } \phi_t = \phi_m \cos \omega t$$

Rezultat daje kosinusoidu magnetskog toka u zavoju.

Inducirana EMS jednog zavoja

Ako se relacija $e = - \frac{d\phi}{dt}$ prikaže pokazanom metodom, i ima u vidu da je

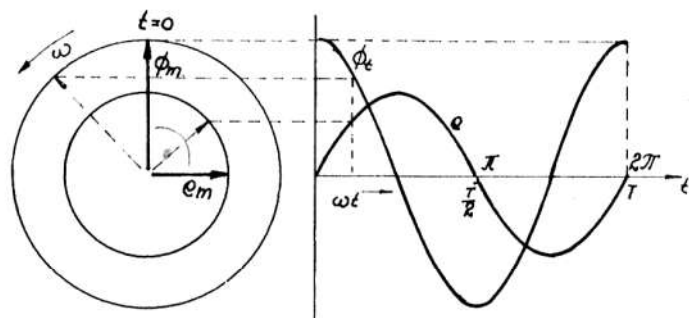
$$e = - \frac{d[\phi_m \cos(\omega t)]}{dt} = \omega \phi_m \sin(\omega t)$$

onda se grafički to može prikazati kao na slici:

Magnetski tok koji se sinusoidalno mijenja inducira u zavoju sinusoidalnu EMS koja zaostaje za tokom za 90° .

Za N zavoja je
EMS

$$e = \omega N \phi_m \sin(\omega t)$$



pa se onda jednačba toka može napisati i kao

$$\phi_t = \phi_m \cos(\omega t) = \phi_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

a tjemena vrijednost EMS je

$$e_m = \omega N \phi_m$$

pa je konačno

$$e = e_m \sin(\omega t)$$

Versor e_m zaostaje za 90° iza magnetskog toka ϕ_m . Opadanje toka izaziva pozitivnu EMS, dok porast toka izaziva negativnu EMS (Lenz-ov zakon).

Slaganje sinusoidalnih valova EMS

U raznim svitcima mogu nastati razne EMS pa se postavlja pitanje njihovog slaganja. EMS jednog svitka je

$$e_I = e_{mI} \sin(\omega t)$$

dok je druga EMS drugog svitka pomaknuta vremenski (prethodi prvoj)

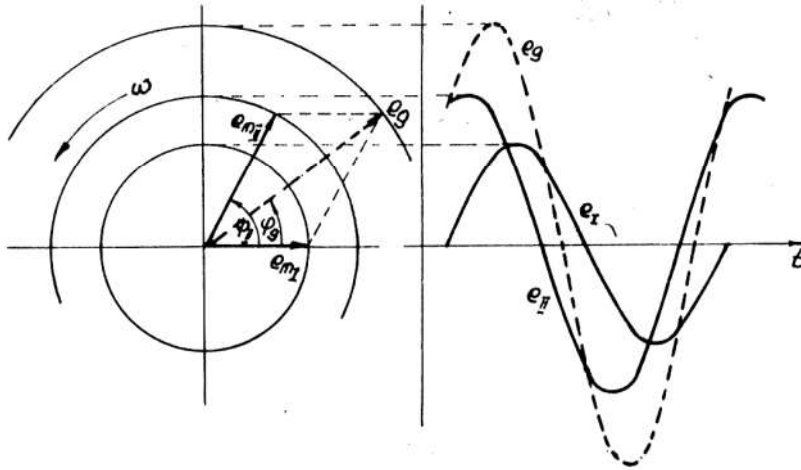
$$e_{II} = e_{mII} \sin(\omega t + \varphi)$$

Slaganje se može izvesti u serijskom spoju, (kraj jednog svitka sa početkom drugog) ili protuspoju (krajevi oba svitka međusobno spojeni).

$$\text{za serijski spoj važi : } e_g = e_I + e_{II}$$

$$\text{za protuspoj } e_g = e_I - e_{II}$$

Trenutne vrijednosti se algebarski zbrajaju odnosno oduzimaju. Rezultirajuća vrijednost je opet sinusna funkcija iste frekvencije i ima fazni pomak ^{prema} polazne vrijednosti.



Dijagram je crtan, uzimajući sinusoidu e_I kao referentnu liniju. Dijagram versora sadrži obje tjemene vrijednosti e_{mI} i e_{mII} u istom mjerilu i faznom putu

Algebarska suma iznosi:

$$e_g = e_{mI} \sin(\omega t) + e_{mII} \sin(\omega t + \varphi_{II})$$

odnosno

$$\begin{aligned} e_g &= e_{mI} \sin(\omega t) + e_{mII} \sin(\omega t) \cos \varphi_{II} + \\ &+ e_{mII} \cos(\omega t) \sin \varphi_{II} = [e_{mI} + e_{mII} \cos \varphi_{II}] \sin(\omega t) + \\ &+ [e_{mII} \sin \varphi_{II}] \sin \varphi_{II} \cos(\omega t). \end{aligned}$$

a to se može drukčije pisati kao

$$e_g = e_{mg} \sin(\omega t + \varphi_g)$$

gdje je

$$e_{mg} = \sqrt{e_{mI}^2 + 2 e_{mI} e_{mII} \cos \varphi_{II} + e_{mII}^2}$$

a

$$\operatorname{tg} \varphi_g = \frac{e_{mII} \sin \varphi_{II}}{e_{mI} + e_{mII} \cos \varphi_{II}}$$

Isti rezultat dobije se ako se versori e_{mI} i e_{mII} geometrijski zbroje. Iz toga slijedi: dvije izmjenične veličine pomaknute u fazi zbrajaju se tako da se njihovi versori geometrijski zbroje.

Sličan je postupak za serijski protuspoj s tim da tu treba izvršiti oduzimanje

$$\begin{aligned} e_g &= e_I - e_{II} = e_{mI} \sin(\omega t) - e_{mII} \sin(\omega t + \varphi_{II}) = \\ &= e_{mI} \sin(\omega t) - e_{mII} \sin(\omega t) \cos \varphi_{II} - e_{mII} \cos(\omega t) \sin \varphi_{II} \\ e_g &= [e_{mI} - e_{mII} \cos \varphi_{II}] \sin(\omega t) + [-e_{mII} \sin \varphi_{II}] \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Versor e_{mg} je hipotenuza kateta koje su prikazane u uglastim zagrada. Iznos se dobije

$$e_{mg} = \sqrt{e_{mI}^2 + e_{mII}^2 - 2e_{mI} e_{mII} \cos \varphi_{II}}$$

a fazni kut pomaka je

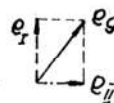
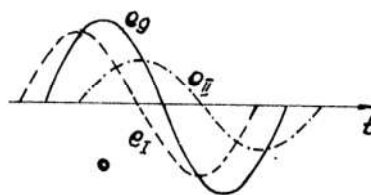
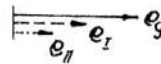
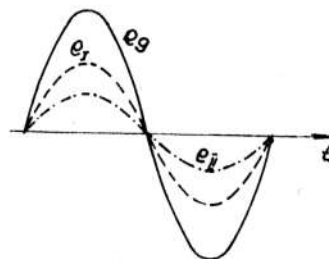
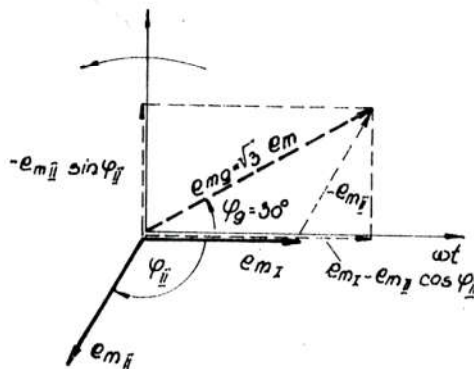
$$\operatorname{tg} \varphi_g = \frac{-e_{mII} \sin \varphi_{II}}{e_{mI} - e_{mII} \cos \varphi_{II}}$$

Specijalni slučajevi:

e_I je u fazi sa e_{II} : $e_g = e_I + e_{II}$

e_{II} za 90° pomaknuto prema e_I

$$e_g = \sqrt{e_I^2 + e_{II}^2}$$



EMS u mirujućoj zavojnici

Ako kroz zavojnicu koja miruje teče sinusna struja, onda se zbog samoindukcije (uslijed vlastitog polja) inducira u zavojnici sinusna EMS samoindukcija.

Izmjenični tokovi induciraju i u susjednim zavojnicama EMS međjuindukcije. Ove EMS i napone zovemo "naponima transformacije". Napon transformacije zaostaje za 90° iza vala magnetskog toka.

EMS mirovanja i kretanja u zavojnici

Naponi dobijeni kretanjem zavojnice u magnetskom polju i naponi transformacije se mogu superponirati u istoj zavojnici. Ovo ima velikog praktičnog značaja u elektromotorima izmjenične struje.

EMS transformacije je

$$e_t = - \frac{d\phi_t}{dt}$$

S druge strane, može se izmjenični magnetski tok smatrati vremenski konstantnim, pa imamo "napon kretanja"

$$e_k = - \frac{d\phi_x}{dt} = - \frac{d\phi_x}{dx} \frac{dx}{dt} = - \frac{d\phi_x}{dx} v$$

Superpozicijom ovih dvaju napona dobijemo

$$e = e_t + e_k = - \frac{d\phi_t}{dt} - \frac{d\phi_x}{dx} v$$

pri čemu je promjena magnetskog toka određena prostorno i vremenski sa

$$d = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx$$

Ako se ova jednađžba podijeli sa dt i pomnoži (-1) , onda se dobije konačno

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} = - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} v = e_t + e_k$$

Ovo je najopćenitiji izraz za EMS u zavojnici.

18. POTROŠAČ U KRUGU IZMJENIČNE STRUJE

Ako se u strujni krug ukopča neki potrošač postavlja se pitanje šta je sa strujom koju potjera narinuti sinusni napon.

Ranije izvedeni zakoni za istosmjernu struju važe i dalje ali za momentalne vrijednosti izmjenične struje.

Otpor vodiča (omski otpor) ne mijenja svoju vrijednost u krugu izmjenične struje niske frekvencije. Pri visokim frekvencijama mijenja se ovaj otpor.

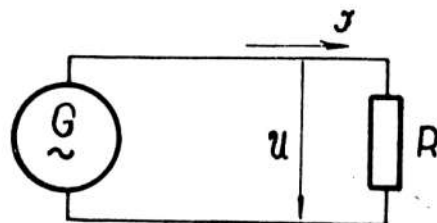
Zavojnica (induktivni otpor) predstavlja otpor u krugu izmjenične struje radi promjenljivog magnetskog polja. Induktivni otpor raste sa frekvencijom.

Kondenzator predstavlja takodjer otpor (kapacitivni otpor) i u toliko je manji u koliko je frekvencija veća.

1) Omski otpor

Na otporu R narinut je sinusni napon $u = U_m \sin \omega t$.
Prema Ohm-ovom zakonu je

$$i = \frac{u}{R} = \frac{u_m \sin \omega t}{R}$$



Struja u otporu je, kako se vidi, u fazi sa narinutim naponom.

Prema 2. Kirchhoff-ovom zakonu je

$$u = i R$$

$$\underline{u - iR = 0}$$

Zbog proporcionalnosti napona u i struje postoji fazna jednakost.

Umjesto trenutne, mogu se pisati i maksimalne vrijednosti

$$u_m = i_m R$$

ali je uobičajeno da se pišu samo efektivne vrijednosti, jer su one u velikoj većini slučajeva u tehničkoj praksi jedino važne.

$$\frac{u_m}{\sqrt{2}} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} R$$

ili prema usvojenoj notaciji $U = IR$

2) Induktivni otpor

Ako se uzme svitak bez željeza sa zanemarivo malim omskim otporom, onda važi za magnetski tok induciran promjenljivom strujom:

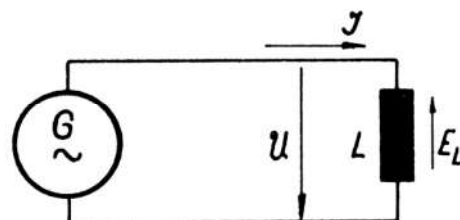
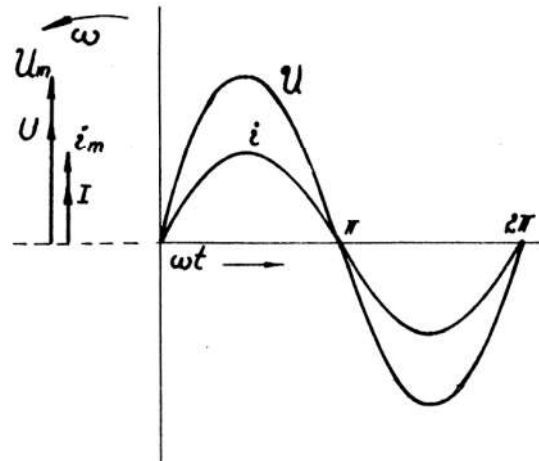
$$\phi_t = \frac{L i}{N}$$

Zbog induktiviteta nastaje protunapon (protivnog smjera prema struji i)

$$e_L = - N \frac{d\phi}{dt} = - L \frac{di}{dt}$$

Otuda se može za stezaljke zavojnice L napisati po drugom Kirchhoff-ovom zakonu

$$u + e_L = 0 \quad \text{ili} \quad u = - e_L$$



$$u + (-L \frac{di}{dt}) = 0 \text{ ili } u = L \frac{di}{dt}$$

Zbog toga što struja ima sinusni oblik $i = i_m \sin \omega t$, napon samoindukcije je

$$e_L = L \frac{di}{dt} = -L i_m \frac{d(\sin \omega t)}{dt} = -i_m (\omega L) \cos \omega t$$

Dakle je

$$u = -e_L = i_m (\omega L) \cos \omega t$$

Ako se uvede $+\cos \omega t = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$, a $-\cos \omega t = \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$

onda je

$$e_L = i_m (\omega L) \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$u = i_m (\omega L) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Nastaje protunapon e_L koji prema struji i zaostaje za 90° (cosinusni val). Za vrijeme $t=0$ je $\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = 1$ pa je $U = i_m \omega L$.

Ako se strujni val uzme kao referentan, onda protunapon e_L zaostaje za 90° , a napon u prethodi za 90° . Uzimajući efektivne vrijednosti umjesto momentalnih, imamo

$$U = I (\omega L)$$

Vrijednost za protunapon E_L je ista ali suprotno usmjerena.

Zbog $\omega L = \frac{U}{I}$ mora veličina ωL imati karakter otpora i dimenziju $\frac{V}{A} = \Omega$. Isti bi rezultat dobili i uvrštavanjem jedinica za ω i L

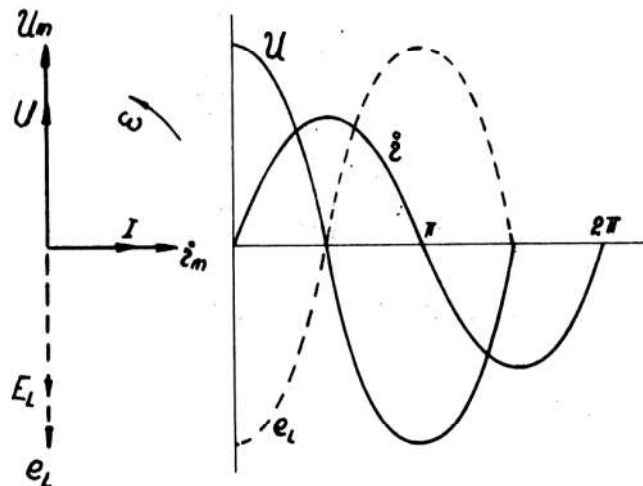
$$\frac{1}{s} \frac{Vs}{A} = \frac{V}{A} = \Omega$$

Veličina ωL se naziva induktivni otpor ili reaktancija i raste sa frekvencijom.

Struja $I = U/\omega L$ je u toliko manja što je frekvencija veća. Kod visokih frekvencija svitak (zavojnica) "prigušuje" struju - prigušnica.

Uobičajena oznaka za induktivni otpor je

$$\underline{X = \omega L}$$



Rezimirajući, može se reći: čisto induktivni otpor izaziva fazni pomak između struje i napona za 90° : struja zaostaje za 90° iza narinutog napona.

Induktivni otpor se javlja svagdje: na vodovima, u električnim strojevima itd.

3) Kapacitivni otpor

Ako se u strujni krug uključi kondenzator kapaciteta C , onda on biva stalno punjen i pražnjen: u dielektriku se stvara pomaćna struja, i strujni krug je zatvoren. Instrument registrira da kroz krug teče struja.

$$\text{Zbog } Q = C U \text{ i } u = u_m \sin \omega t \text{ i } dq = i dt$$

važi:

$$dq = i dt = C du, \text{ pa je}$$

$$i = C \frac{du}{dt}, \text{ otuda}$$

$$i = C \frac{d}{dt} u_m \sin \omega t = \omega C u_m \cos \omega t = \frac{u_m}{\frac{1}{\omega C}} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

za $t = 0$ je $\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = 1$ pa je maksimalna vrijednost struje punjenja kondenzatora

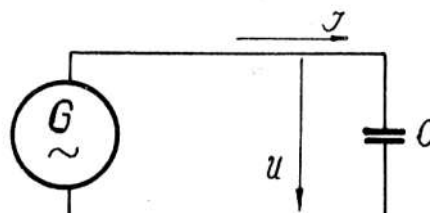
$$i_m = \frac{u_m}{\frac{1}{\omega C}} \text{ ili djelenjem sa } \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{U}{I}$$

Veličina $\frac{1}{\omega C}$ ima karakter otpora

$$\frac{V}{A} = \Omega \text{ ili}$$

$$\frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{\frac{As}{V}}} = \frac{V}{A} = \Omega$$



i zove se kapacitivni otpor a označava se također sa

$$X = \frac{1}{\omega C}$$

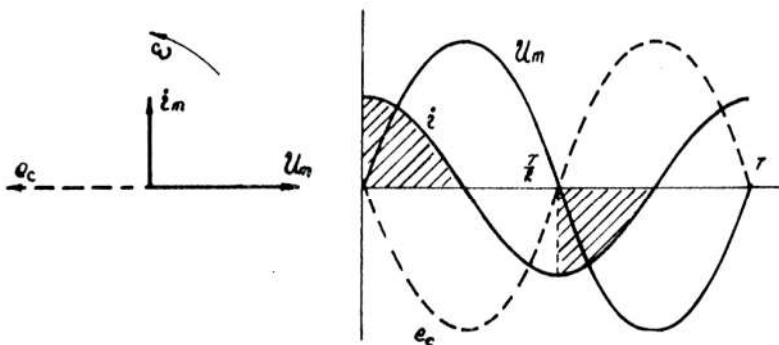
Za jačinu struje kroz kondenzator je onda potreban narinut napon

$$U = I \frac{1}{\omega C}$$

Kapacitivni otpor prouzrokuje da je strujni val za 90° ispred naponskog vala (prethodi naponskom valu).

Trenutna vrijednost napona na kondenzatoru

$$U = \frac{1}{C} \int i \, dt$$



Protunapon kondenzatora e_c raste suprotno

$$e_c = -u = -\frac{1}{C} \int i \, dt$$

Punjenje traje dok traje porast napona (šrafirana površina) a nakon toga kondenzator predaje strujnom krugu energiju natrag.

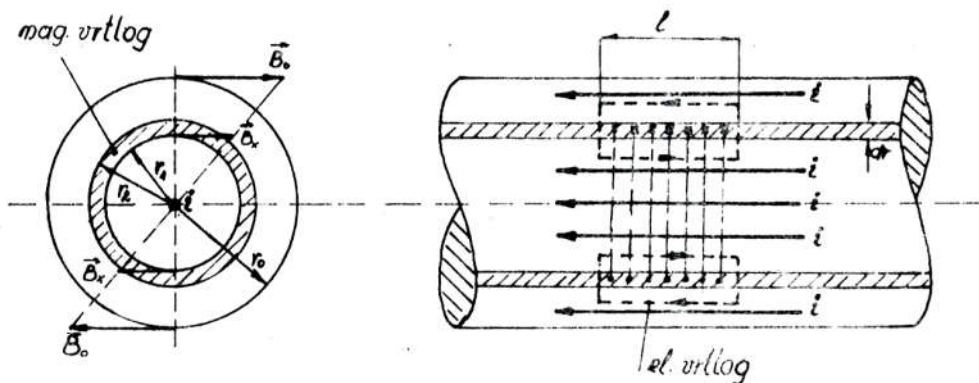
Kapacitivni otpor opada sa porastom frekvencije pa kod veoma velikih frekvencija kondenzator djeluje praktično kao kratki spoj, pod uslovom da se zanemari omski otpor u strujnom krugu.

4. Skin efekt

Već ranije je rečeno da svako promjenljivo magnetsko polje izaziva zatvorene linije električnog polja oko promjenljivog toka a električni napon je jednak linijskom integralu jačine električnog polja

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \oint \vec{E} \, d\vec{s}$$

Unutar vodiča vlada magnetsko polje čiji je porast linearan sve do površine vodiča. Kad kroz vodič teče izmjenična struja, onda u vodiču pulsira izmjenični magnetski tok



Za neku trenutnu vrijednost struje i kroz vodič, i pripadajuće razdiobe polja unutar vodiča, iznos magnetskog toka je (za šrafiranu površinu):

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} B_x l \, dr = \mu_r \mu_0 l \int_{r_1}^{r_2} H \, dr$$

Električni napon vrtloga koji obuhvata taj tok dat je sa:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \mu_r \mu_0 l \frac{d}{dt} \int_{r_1}^{r_2} H \, dr$$

Bliže osi vodiča je smjer struje i prouzrokovanog vrtloga električnog napona suprotan, a dalje - prema površini vodiča - smjerovi se podudaraju. Zbog toga se oslabljuje struja u blizini osi vodiča a pojačava se bliže površini vodiča. Time se kontinuirana raspodjela struje poremećuje i stvara se "potiskivanje" struje prema površini. Presjek vodiča nije potpuno iskorišten - nastaje povišenje otpora: Skin efekt (površinski efekt).

Potiskivanje struje je jače što je viši vrtložni napon

$$E = k f \Phi$$

koji raste sa porastom frekvencije i zamjećuje se tek kod visoke frekvencije (upotreba upletenih vodiča od više tankih žica, upotreba cijevi umjesto punih vodova).

Za približno tačne račune, zadovoljava relacija:

$$R_e = k R_0$$

gdje je R_0 - omski otpor a k je faktor porasta otpora dat izrazom

$$k = 1 + \frac{1}{3} x^4 \quad (\text{za } x < 1)$$

$$k = x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} \quad (\text{za } x > 1)$$

gdje je x dato izrazom:

$$x = \frac{r_0}{2} \sqrt{\pi f x \mu_r \mu_0}$$

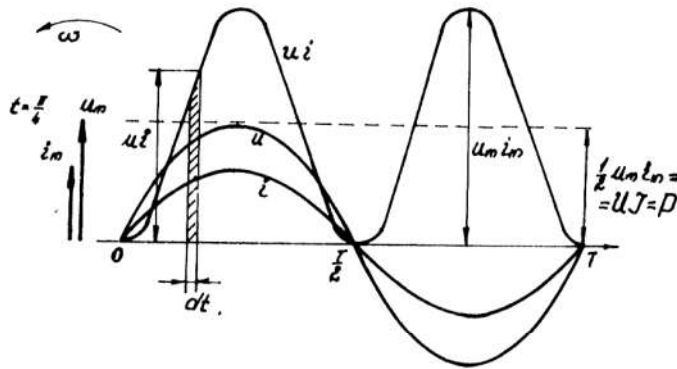
r_0 - radijus vodiča

x - vodljivost vodiča

19. ENERGIJA IZMJENIČNE STRUJE

Snaga sa omskim otporom

Struja i napon su u fazi, a proizvod njihovih trenutnih vrijednosti daje snagu $P_t = ui$ u jednom trenutku. Grafički prikaz daje momentalnu snagu kao sinusoidu dvostruke frekvencije prema struji i naponu.



Potrošači kao sijalice, kuhala i grijala imaju pretežno omski otpor. Električni rad je prikazan šrafiranom površinom osnovice dt i visine $u i$

$$dW = u i dt$$

pa je W suma za jednu periodu

$$W = \int_0^T u i dt$$

Ako se stavi za $u = u_m \sin \omega t$ a za $i = i_m \sin \omega t$, onda je

$$W = \int_0^T u_m \sin \omega t i_m \sin \omega t dt = u_m i_m \frac{T}{2}$$

(jer je $\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2}\right) dt = \frac{T}{2}$)

Konačno je srednja snaga za vrijeme jedne periode:

$$P = \frac{W}{T} = \frac{u_m i_m T}{2 T} = \frac{u_m}{\sqrt{2}} \frac{i_m}{\sqrt{2}} = UI$$

$$P_a = UI_a$$

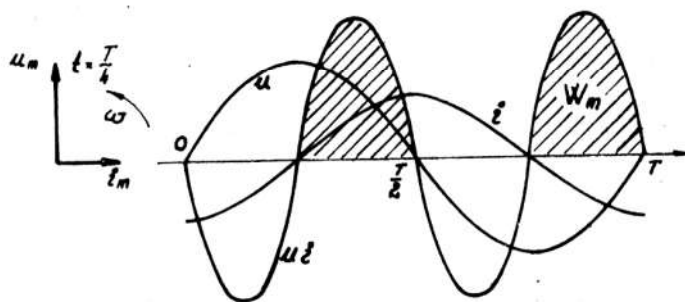
i zove se aktivna snaga.

Srednja aktivna snaga je proizvod efektivnih vrijednosti struje i napona. Obzirom na snagu, struja i napon djeluju svojim efektivnim vrijednostima. Snaga se u obliku topline predaje izvan strujnog kruga (u okolinu).

Snaga sa induktivnim otporom

Struja zaostaje za naponom za 90° . U 2. i 4. četvrtini periode je trenutna snaga pozitivna, a u 1. i 3. četvrtini periode negativna. Snaga oscilira sa dvostrukom frekvencijom ali tako da se energija "njiše" izmedju generatora i induktivnog potrošača.

U zavojnici induktiviteta L je nagomilana energija $W_m = \frac{1}{2} L i^2$. Kad struja opada tada se energija vraća natrag u generator. U ovom procesu teče energija (teoretski) bez gubitaka izmedju generatora i induktivnog potrošača, tamo i natrag.



Ova snaga se naziva reaktivna (jalova) snaga

$$P_r = UI_r$$

i računa se iz proizvoda efektivnih vrijednosti napona U i reaktivne struje I_r na induktivnom otporu ωL . Ne postoji fizikalno značenje pojma reaktivne snage. Reaktivna znači samo toliko da se ne odaje nikakva snaga izvan strujnog kruga (nego ostaje u krugu) dok se kod aktivne snage ta snaga u obliku topline na otporu R predaje okolini. Aktivna snaga se mjeri u vatima a reaktivna u Volt-amperima sa naznakom "reaktivni" - VAR (od "reaktanca" = induktivni otpor).

Ako reaktivna snaga u nekom krugu djeluje u vremenu, onda se govori o reaktivnom radu

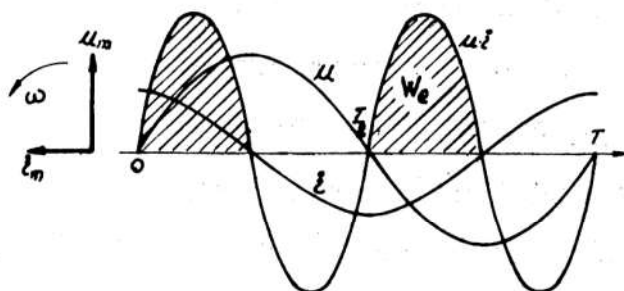
$$W_r = UI_r t$$

a jedinica je kVarh. Spojni vodovi moraju biti dimenzionirani na ukupnu struju bez obzira na to da li je "reaktivna" ili radna. Centrale nastoje da proizvode što manje reaktivne snage a potrošači često moraju posebno kupovati (plaćati) ovu snagu ako je potrebno (za magnetiziranje svojih aparata sa induktivnim otporom). Za to postoje posebna brojila reaktivne snage i rada.

Snaga sa kapacitivnim otporom

Ovdje struja prethodi naponu za 90° . Kad napon raste, kondenzator se nabija (uzima energiju) a kad napon opada onda kondenzator vraća energiju generatoru. Snaga oscilira sa dvostrukom frekvencijom, a energija se njiše između generatora i kondenzatora. Trenutna energija je:

$$dW_c = C \int_0^{u_m} u \, du = \frac{1}{2} C U_m^2$$



I ovdje se radi o reaktivnoj energiji (snazi) a u izrazu

$$P_r = UI_r$$

se u ovom slučaju govori o "kapacitivnoj struji". Važe iste jedinice kao i za induktivnu struju i reaktivnu snagu.

Aktivna snaga je ona snaga koja se iz električne pretvara u neku drugu (toplina, mehanička, kemijska) i odvodi iz strujnog kruga.

Reaktivna snaga služi za stvaranje magnetskih i električnih polja i vraća se u generator kad ta polja nestaju (kad se razgrađuju).

Prividna snaga i faktor snage

Ako su struja i napon medjusobno pomaknuti u fazi za neki proizvoljan put izmedju 0° i 90° onda je snaga data općim izrazom

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt$$

Ako se za napon stavi $u = u_m \sin \omega t$ a za struju $i = i_m \sin(\omega t - \varphi)$, onda je :

$$P = \frac{u_m i_m}{T} \int_0^T \sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) \, dt$$

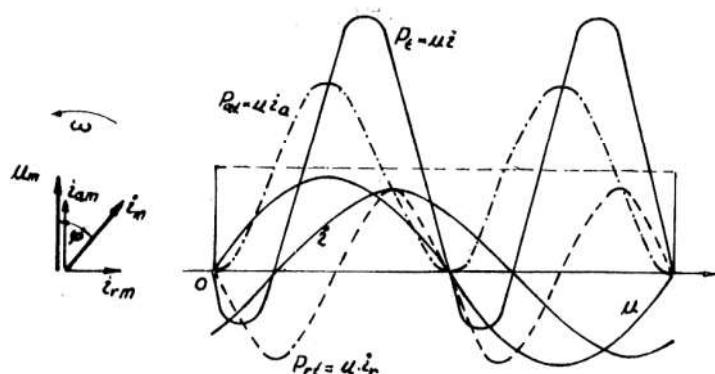
Snaga oscilira sa dvostrukom frekvencijom, ima aktivno i reaktivno područje, a odnos ovisi o kutu faznog pomaka

Pomoću trigonometrijskih formula može se riješiti izraz za snagu P:

$$\sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos (2 \omega t - \varphi)]$$

Odatle imamo integrale:

$$\int_0^T \cos \varphi \, dt = T \cos \varphi$$



$$\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt = \cos \varphi \int_0^T \cos 2\omega t dt + \sin \varphi \int_0^T \sin 2\omega t dt$$

Tada je

$$\int_0^T \cos 2\omega t dt = \frac{1}{2\omega} \left| \sin 2\omega t \right|_0^T = \frac{1}{2\omega} (\sin 2\frac{2\pi}{T} T - \sin 0) = 0$$

a drugi integral

$$\int_0^T \sin 2\omega t dt = -\frac{1}{2\omega} \left| \cos 2\omega t \right|_0^T = -\frac{1}{2\omega} (1 - 1) = 0$$

Na koncu se uvrsti u glavni izraz

$$P = \frac{u_m i_m}{T} \frac{T}{2} \cos \varphi = \frac{u_m i_m}{2} \cos \varphi = \frac{u_m}{\sqrt{2}} \frac{i_m}{\sqrt{2}} \cos \varphi$$

odnosno

$$\underline{P_a = UI \cos \varphi}$$

To je aktivna snaga izmjenične struje kod proizvoljnog pomaka u fazi između napona i struje.

Isti rezultat bi se dobio i za $i = i_m \sin(t + \varphi)$, dakle kad struja prethodi naponu.

Ako je $\varphi = 0$ imamo slučaj omskog otpora: napon i struja su u fazi, $P_a = UI$, jer je $\cos \frac{\pi}{2} = 1$.

Ako je $\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, onda je $P_a = 0$, jer je $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ pa imamo slučaj sa čistim reaktivnim otporom.

Posebno značenje i ime ima produkt struje i napona

$$P = UI$$

to je "prividna snaga" (jedinica VA).

Prividna snaga je čisto matematički pojam i nema ni-
kakvo fizikalno značenje (za slučaj nesinusoidalnih veličina).
Ipak, ova veličina služi kod električnog i magnetskog dimenzio-
niranja električnih strojeva jer presjeci bakrenih vodiča ovise
o jačini struje I a presjeci željeznih djelova magnetskog kruga
ovise o naponu U .

Snaga

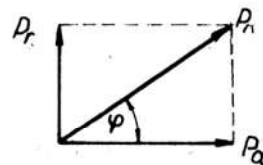
$$P_a = UI_a = UI \cos \varphi$$

je srednja aktivna snaga koja se odaje van strujnog kruga
(toplina). Kad se u tehnici izmjeničnih struja govori o "sna-
zi" onda se misli na aktivnu snagu.

Odnosi prividne, aktivne i reaktivne snage se mogu
prikazati u dijagramu.

Reaktivna snaga je prema
dijagramu data izrazom:

$$P_r = UI \sin \varphi$$



U vektorskom prikazu, aktivna snaga je unutarnji
(skalarni) proizvod vektora struje i napona

$$P_a = \vec{U} \cdot \vec{I} = UI \cos \varphi \quad (\text{skalar})$$

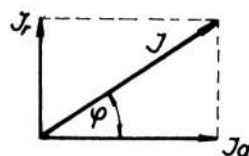
dok je reaktivna snaga vanjski (vektorski) proizvod vektora
struje i napona

$$P_r = \vec{U} \times \vec{I} = UI \sin \varphi \quad (\text{vektor})$$

Treba naglasiti da je za dimenzioniranje vodiča (presjeka) važna i mjerodavna struja I a ne možda aktivna struja I_a (u fazi sa naponom) zbog toga što struja I proizvodi u omskim otporima (dakle i u vodičima) strujnu toplinu koja je proporcionalna sa $I^2 R$.

Veliku važnost ima i izraz

$$\cos \varphi = \frac{P_a}{P} = \frac{P_a}{UI}$$



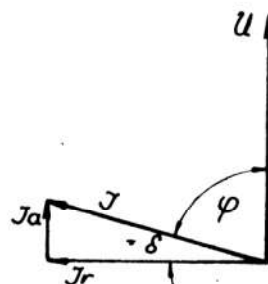
i zove se "faktor snage". To je odnos aktivne snage prema prividnoj snazi jednog strujnog kruga.

Iz već ranije navedenih odnosa, može se izvesti i ova relacija:

$$P_a = UI \cos \varphi ; P_r = UI \sin \varphi$$

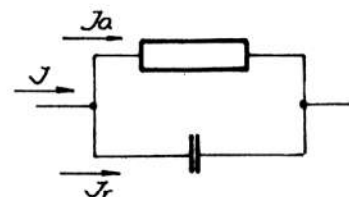
pa je

$$P = \sqrt{P_a^2 + P_r^2}$$



Ranije spomenuti kut dobitaka u nevodičima $\tan \delta$ je u stvari odnos aktivne i reaktivne snage

$$\frac{P_a}{P_r} = \cotg \varphi = \tan (90 - \varphi) = \tan \delta$$



i predstavlja dio energije koja se u nevodičima pretvara u toplinu (u dielektriku kondenzatora) i ne vraća se u strujni krug.

20. SIMBOLIČNA METODA RAČUNANJA IZMJENIČNIH VELIČINA

Problemi izmjenične struje mogu se rješavati vektorskim metodama. Tu algebarskim sumiranjima momentalnih vrijednosti odgovaraju geometrijska sumiranja pripadnih vektora (versora). Međutim, takve konstrukcije se mogu izvesti samo za neke jednostavnije slučajeve a tačnost rezultata ovisi o tačnosti crtanja. Stoga se općeniti problemi teško rješavaju na ovaj način.

Simbolička metoda omogućuje općenita i specijalna rješenja problema izmjenične struje neovisno o vektorskim slikama. Rezultati se formalno podudaraju sa analognim rezultatima za istosmjernu struju tako da se razmatranja izvedena za istosmjernu struju mogu bez daljnjega "transkribirati" na odgovarajuće probleme izmjenične struje.

Metodu je prvi upotrebio Steinmetz za rješenja problema telekomunikacija, služeći se već poznatim sredstvima matematike (Gauss, Euler).

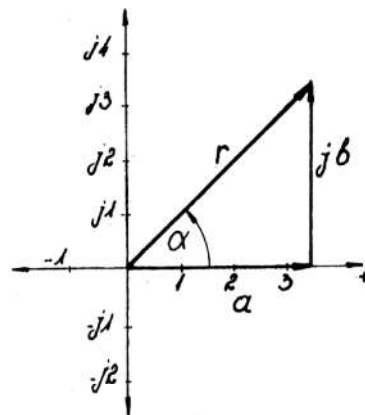
Kod metode versora, zamišljamo rotirajući versor i projiciramo ga na vremensku liniju, tj. fiksiramo momentalne vrijednosti. Ako se rotirajući versor zaustavi, onda se na ovakav mirujući versor može primjeniti metoda kompleksnog računanja (kompleksni brojevi). Linijski i versorski dijagrami daju vrlo pregledne odnose veličina ali se s njima ne može računati. Simbolična metoda otklanja taj veliki nedostatak i omogućuje računanje s izmjeničnim veličinama upotrebljavajući algebarske metode.

Kompleksne veličine

Grafički prikaz kompleksne veličine se može dati u Gauss-ovoj ravnini: versor $\vec{r}$ se može razložiti u dvije međusobno okomite komponente a i jb . a je referentna os a kut se računa od osi kao pozitivan u smjeru protiv kazaljke na satu

$$\vec{r} = a + jb$$

To je simbolična jednadžba koja ima značenje geometrijskog sastavljanja dvaju versora. Na slici je prikazan $\vec{r} = 2,5 + j3$ (kompleksni broj).



U teoriji kompleksnih brojeva se još može i drugačije pisati (zbog pravokutnog trokuta):

$$\vec{r} = a + jb = r \cos \alpha + j r \sin \alpha = r (\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

Veličina versora je (dužina versora):

$$|\vec{r}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a kut α versora prema referentnoj osi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Ovo nam omogućava da pomoću kompleksnog računa predložimo veličinu (iznos) versora i njegov fazni kut.

Ako je $\vec{r} = a$, $b = 0$, onda nema vertikalne komponente i $\vec{r}$ leži na referentnoj osi.

Ako je $\vec{r} = jb$, $a = 0$, onda nema horizontalne komponente i $\vec{r}$ leži okomito na referentnu os.

Ovi specijalni slučajevi imaju veliku primjenu u izmjeničnoj struji.

Okretanje versora

Ako versor $\vec{r}_1 = 2 + j3$ pomnožimo sa j (dakle sa $\sqrt{-1}$), dobije se $\vec{r}_2 = -3 + j2$ (voditi računa o tome da je $j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$)

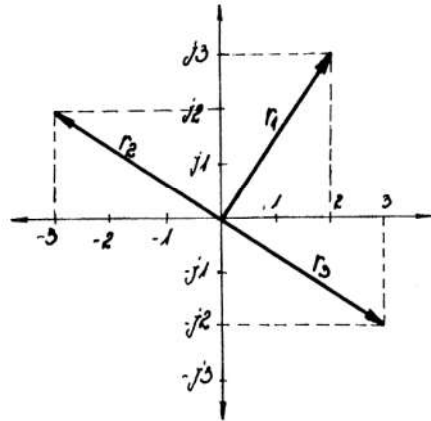
Dakle:

$$\vec{r}_2 = j\vec{r}_1 = j(2+j3) = -3 + j2$$

Množenje kompleksnog broja sa $+j$ znači okretanje versora za $+\frac{\pi}{2}$ (u pozitivnom smjeru).

Slično, množenjem sa $-j$ dobije se okretanje versora za $-\frac{\pi}{2}$ (u negativnom smjeru)

$$\vec{r}_3 = -j\vec{r}_1 = -j(2+j3) = 3 - j2$$



Zbrajanje i oduzimanje

$$\vec{r}_1 = a_1 + j b_1$$

$$\vec{r}_2 = a_2 + j b_2$$

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (a_1 + j b_1) + (a_2 + j b_2) = (a_1 + a_2) + j (b_1 + b_2)$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (a_1 + j b_1) - (a_2 + j b_2) = (a_1 - a_2) + j (b_1 - b_2)$$

Realni i imaginarni djelovi se zbrajaju odnosno oduzimaju

Eksponencijalno prikazivanje kompleksnog broja

Polazi se od poznatih razvoja u redove:

$$\sin \alpha = \frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

$$e^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots$$

pa se izraz $\cos \alpha + j \sin \alpha$ može transformirati:

$$\cos \alpha + j \sin \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots + j \frac{\alpha}{1!} - j \frac{\alpha^3}{3!} + j \frac{\alpha^5}{5!}$$

Treba znati:

$$j = \sqrt{-1}; j^2 = -1; j^3 = -j; j^4 = +1; j^5 = +j \\ - j^2 = +1$$

$$\text{pa je s tim } \cos \alpha + j \sin \alpha = 1 + \frac{j\alpha}{1!} + \frac{(j\alpha)^2}{2!} + \frac{(j\alpha)^3}{3!} + \dots = e^{j\alpha}$$

Tim se trigonometrijski oblik može transformirati u eksponencijalni

$$\underline{\vec{r} = r (\cos \alpha + j \sin \alpha) = r e^{j\alpha}}$$

(Euler-ova formula).

r - iznos vektora (dužina)

α - kut za koji je vektor okrenut prema referentnoj osi.

Faktor $e^{j\alpha}$ daje smjer versora u koji treba versor zaokrenuti u odnosu na referentnu osu. Stoga neki autori faktor $e^{j\alpha}$ zovu "fazor" ili rotor. Faktor $e^{j\alpha}$ nema nikakvog utjecaja na dužinu versora.

Najvažnije su veličine faktora $e^{j\alpha}$

$$\alpha = 0^\circ \quad e^{j0} = \cos 0^\circ + j \sin 0^\circ = 1$$

$$\alpha = 90^\circ \quad e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = + j$$

$$\alpha = -90^\circ \quad e^{j(-90^\circ)} = \cos (-90^\circ) + j \sin (-90^\circ) = - j$$

Množenje i djeljenje

$$\vec{r}_1 = r_1 e^{j\alpha_1} ; \quad \vec{r}_2 = r_2 e^{j\alpha_2}$$

$$\vec{r}_1 \vec{r}_2 = r_1 e^{j\alpha_1} r_2 e^{j\alpha_2} = r_1 r_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Dva versora se množe ako se njihove apsolutne vrijednosti pomnože a kutevi smjera zbroje.

Analogno važi za djeljenje

$$\frac{\vec{r}_1}{\vec{r}_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

Dva se versora dijele ako se njihovi apsolutni iznosi podjele a kutevi smjera oduzmu.

Stepenovanje i korjenovanje

Poopćenjem pravila za množenje versora, dobije se pravilo za potenciranje versora

$$\vec{r}^n = (a+jb)^n = (r e^{j\alpha})^n = r^n e^{jn\alpha}$$

Kompleksni broj se potencira tako da se potencira apsolutni iznos a kut smjera α se pomnoži sa eksponentom n .

Analogno se dobije za korjenovanje

$$\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{a + jb} = \sqrt[n]{r e^{j\alpha}} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{j\alpha}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{j\alpha}{n}}$$

Kompleksni broj se korjenuje ako se korjenuje apsolutni iznos a kut smjera se podijeli sa eksponentom n .

Diferenciranje i integriranje

$$\vec{r} = r e^{j\alpha}$$

pa je diferenciranjem po α

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} r e^{j\alpha} = j r e^{j\alpha} = j \vec{r} = r e^{j(\alpha + 90^\circ)}$$

Diferenciranjem se vektor zakreće naprijed za 90° .

Analogno

$$\int \vec{r} d\alpha = \int r e^{j\alpha} d\alpha = \frac{1}{j} r e^{j\alpha} = -j \vec{r} = r e^{j(\alpha - 90^\circ)}$$

Integracijom se vektor zaokreće nazad za 90° .

Odstranjivanje kompleksnog broja iz nazivnika

Ako je dat izraz

$$r = \frac{a + jb}{c + jd}$$

pa se nazivnik pomnoži konjugirano kompleksnim brojem $c - jd$,
onda je (krajnje tačke konjugiranih vektora leže zrcalno prema realnoj osi)

$$\begin{aligned} r &= \frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{ac+jbc - jad - j^2bd}{c^2+jcd - jcd - j^2d^2} = \\ &= \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Voditi računa o $j^2 = -1$; $-j^2 = +1$; $\frac{1}{j} = -j$

21. PRIMJENA SIMBOLIČNE METODE

1. Jednostavni krug izmjenične struje

Pravilo računa

Simbolična metoda računanja u tehnici izmjenične struje primjenjuje se najčešće na tri sinusno promjenljive veličine - napon, struja i magnetski tok. Kao simboli se upotrebljavaju velika slova sa crtom iznad slova.

$$\bar{U} \quad \text{za} \quad u = u_m \sin \omega t; \quad \bar{I} \quad \text{za} \quad i = i_m \sin \omega t$$

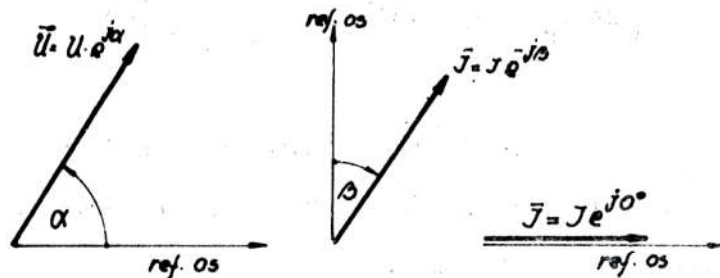
$$\bar{\phi} \quad \text{za} \quad \phi_t = \phi_m \sin \omega t$$

Ovi se simboli grafički predstavljaju kao i versori i simboliziraju rotirajuće versore za sinusni val.

U eksponencijalnom obliku, za $\alpha = \omega t$ glasi simboličbi oblik versora:

$$\bar{U} = U e^{j\omega t}; \quad \bar{I} = I e^{j\omega t}; \quad \bar{\phi} = \phi e^{j\omega t}$$

Uzimaju se efektivne vrijednosti a izraz $e^{j\omega t}$ znači položaj u kome se rotirajući versor "zaustavljen" u trenutku t . Za jednoznačno određivanje položaja versora potrebna je referentna os.



Za prikazane slučajeve važi ($\alpha = \omega t$; $\beta = \omega t$)

$$\bar{U} = U e^{j\alpha} ; \quad \bar{I} = I e^{-j\beta}$$

Važno je da se u slučaju više versora upotrebi uvijek ISTA referentna os, da bi se mogao vidjeti međusobni fazni položaj pojedinih versora.

U zakonima izmjenične struje često dolazi diferenciranje i integriranje

$$e = - N \frac{d\phi}{dt} ; \quad u = L \frac{di}{dt} ; \quad i = C \frac{du}{dt} ; \quad U = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

Diferenciranje primjenjujemo na sinusnu funkciju (ili njen versor), znači promjenu kuta za $+ 90^\circ$ i produženje versora puta. Integracija daje, naprotiv promjenu kuta za $- 90^\circ$ i skraćuje versor - puta.

Diferenciranjem se dobije

$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

odnosno

$$\frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$$

a integriranjem

$$\int \sin \omega t \, dt = \frac{1}{\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

odnosno

$$\int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} = -j \frac{1}{\omega} e^{j\omega t}$$

Otuda u analitičkim jednadžbama sadržani matematički znakovi d/dt odnosno $\int dt$ se u simboličkim jednadžbama nadomještaju množenjem sa $j\omega$ odnosno $1/\omega$.

Zakon indukcije u simboličkom prikazu

$$\phi_t = \phi_m \sin \omega t$$

$$e = -N \frac{d\phi_t}{dt} = -N \frac{d}{dt} \phi_m \sin \omega t = \omega N \phi_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Prelaz na simbolični oblik

$$\bar{E} = -j \omega N \phi = \omega N \phi e^{-j90^\circ}$$

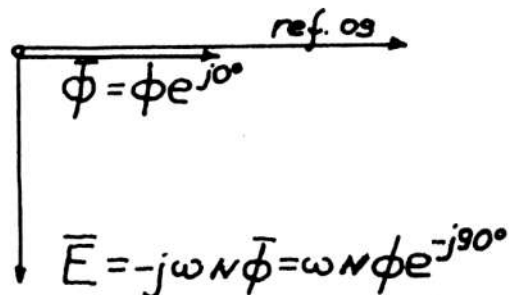
Iznos

$$E = N \frac{\phi_m}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \phi_m = 4,44 f N \phi_m$$

Kod pretvaranja iz analitičkog oblika u simboličkim bilo je zamjenjeno:

$$e \text{ sa } \bar{E}; \phi_t \text{ sa } \bar{\phi}; \frac{d}{dt} \text{ sa } j\omega; -\frac{d}{dt} \text{ sa } (-j\omega)$$

Grafički je prikazano ono što je simbolički izračunato. Razlika prema ranijem prikazivanju versora je u tome što se versor zamišlja da rotira kutnom brzinom a simbolički ver-



sori su zamišljeni da miruju u Gauss-ovoj ravnini. Jedan od versora se uzme kao referentni (referentna os) a drugi versor (ili više njih) se onda crtaju i računaju u odnosu na odabrani referentni versor.

Ohm-ov zakon u simboličnom obliku

Upotrebljeni su otpori R , ωL , $1/\omega C$. Kao referentna os je upotrebljena struja $\bar{I}$. Traži se napon $\bar{U}$.

Omski otpor R

$$i = i_m \sin \omega t = \bar{I}$$

Analitička jednačba za trenutnu vrijednost

$$u_R = i R$$

Simbolički prikazano

$$\bar{U}_R = \bar{I} R$$

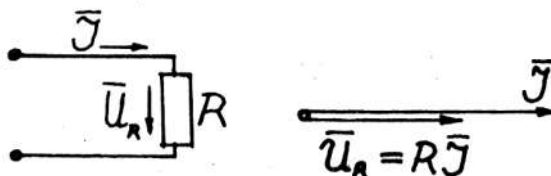
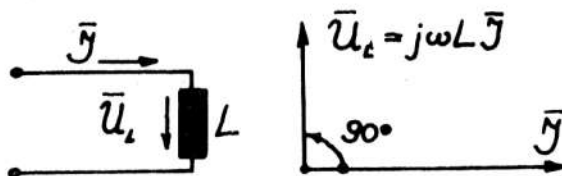


Diagram pokazuje da su napon $\bar{U}_R$ i struja $\bar{I}$ u fazi.

Induktivni otpor ωL

Analitička jednačba

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$



Simbolično prikazan induktivni napon svitku

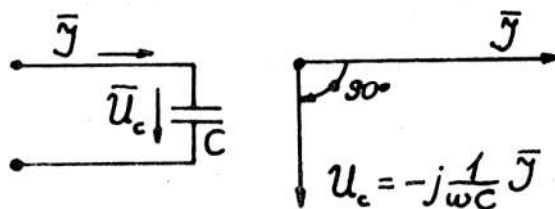
$$\bar{U}_L = j \omega L I = I \omega L e^{j90^\circ}$$

Diagram pokazuje da $\bar{U}_L$ prethodi za 90° prema referentnoj struji $\bar{I}$.

Kapacitivni otpor $1/\omega C$

Analitička jednačba

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt$$



Simbolički prikaz kondenzatorskog napona na stezaljkama

$$\bar{U}_c = \frac{1}{j\omega C} \bar{I} = -j \frac{1}{\omega C} \bar{I} = I \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ}$$

Napon $\bar{U}_c$ zaostaje za 90° prema referentnoj struji.

Iz prikazanih primjera se vidi da u simboličkoj metodi faktor je j predstavlja smjer. Također se faktor j može shvatiti kao versor dužine 1 (jedan): dakle jedinični versor.

Iz simboličkih jednažbi se dobiju efektivne vrijednosti (iznosi)

$$U_R = IR ; \quad U_L = I\omega L ; \quad U_C = I \frac{1}{\omega C}$$

a pri tome se zanemari smjer.

Tako dobijeni naponi su naponi na stezaljkama potrošača pri jednom obrtaju versora.

Operatori otpora i vodljivosti

Ako se od simbola U i I obrazuje količnik onda se takav količnik općenito naziva "operator otpora" ili "prividni otpor" - impedancija označava se slovom Z .

U posebnim slučajevima, operatori otpora imaju i posebne nazive.

Operator induktivnog otpora

$$X_L = \frac{\bar{U}_L}{I} = j\omega L = X_L e^{j90^\circ}$$

Ovaj otpor se naziva reaktancija.

Operator kapacitivnog otpora

$$X_C = \frac{\bar{U}_C}{I} = \frac{1}{j\omega C} = X_C e^{-j90^\circ}$$

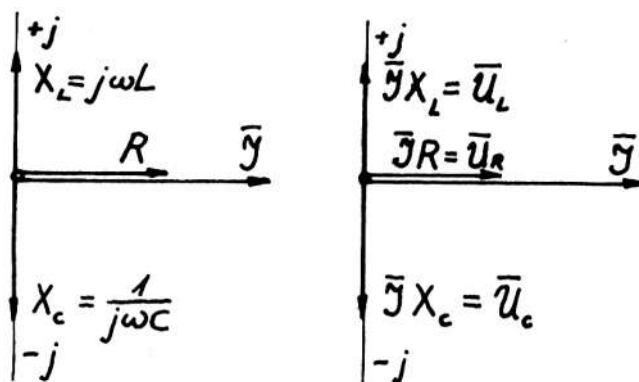
U općenitom slučaju, impedancija ima oblik

$$\bar{Z} = \frac{U}{I} = Z e^{j\varphi}$$

za odgovarajući fazni pomak φ .

Grafički se ovi operatori i pripadni naponi mogu prikazati, uzimajući kao referentnu os struju $\bar{I}$.

Operatori $\bar{Z} = ze^{\pm j\varphi}$ su kompleksne veličine (sa $Z = R, X_L, X_C$) pa se mogu, kao i struja i napon, prikazati u Gauss-ovoj ravnini.



Operatori su nacrtani prema struji kao referentnoj osi. Ako se operator otpora pomnoži sa strujom $\bar{I}$, onda se iz toga dobije odgovarajući naponski vektor (treba paziti na mjerilo crtanja). Osobito je važno za kompleksna računanja da se brojne vrijednosti $R, \omega L, \frac{1}{\omega C}$ uvijek uvrste pozitivno. Stoga treba oblike operatora otpora birati da budu pozitivni: $R, j\omega L, \frac{1}{j\omega C}$ (a nikako $-j\frac{1}{\omega C}$), jer inače nastaju greške.

Poopćenjem jednađžbi za operatore otpora može se napisati Ohm-ov zakon u simboličkom obliku

$$\bar{U} = \bar{I}\bar{Z}$$

gdje je sačuvana formalna analogija sa istim zakonom za istosmjernu struju. Iz općeg oblika Ohm-ova zakona se dobije

$$\bar{I} = \bar{U} \frac{1}{\bar{Z}} = \bar{U}\bar{Y}$$

a otuda

$$\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{U}}$$

to je recipročna vrijednost operatora otpora i naziva se "prividna vodljivost", "operator vodljivosti" ili admitancija.

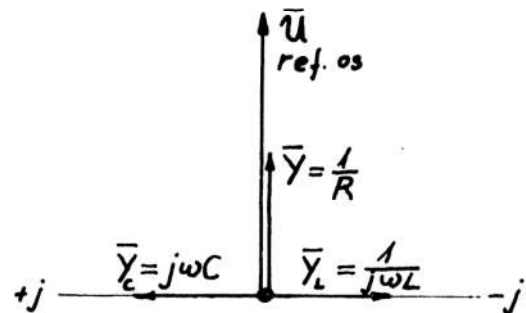
Ranije spomenutim operatorima otpora odgovaraju operatori vodljivosti.

Omski otpor vodljivosti

$$\bar{Y}_R = \frac{1}{R} \quad \text{sa iznosom } G = \frac{1}{R}$$

Induktivni operator vodljivosti

$$\bar{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} \quad \text{sa iznosom } B_L = \frac{1}{\omega L}$$



Kapacitivni operator vodljivosti $\bar{Y}_C = j\omega C$ sa iznosom $B_C = \omega C$

Za grafičko prikazivanje operatora vodljivosti se uzima U kao referentna os jer samo množenje operatora vodljivosti sa naponom ima fizikalnog smisla:

$$\bar{Y}_R = \frac{1}{R} e^{j0^\circ} \quad \text{leži u smjeru versora } \bar{U}$$

$$\bar{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = -jB_L = B_L e^{-j90^\circ} \quad \text{zaostaje za } 90^\circ \text{ iza } \bar{U}$$

$$\bar{Y}_C = j\omega C = jB_C = B_C e^{+j90^\circ}$$

Uobičajeno je da se u ovakvim slučajevima -gdje se upotrebljavaju operatori vodljivosti - realna referentna os U postavlja okomito. Također valja i ovdje napomenuti da brojne vrijednosti vodljivosti treba uvijek uvrstiti pozitivno.

Operatori $\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = Z e^{+j\varphi}$ odnosno $\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{U}} = Y e^{-j\varphi}$ pokazuju tačan položaj faze između $\bar{U}$ i $\bar{I}$. Ako se kao referentna os uzme napon $\bar{U}$, faktor smjera $e^{j\varphi}$ za Z i I ima različit predznak dok je za I i Y isti predznak.

$$\text{Primjer: } \bar{U} = 10 \text{ V } e^{j0^\circ}, \quad \bar{Z} = jX_L = 2 \Omega e^{+j90^\circ}$$

otuda je

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{Z} = 5 \text{ A } e^{-j90^\circ}; \quad \bar{Y} = \frac{1}{2} \text{ S } e^{-j90^\circ}$$

Na jednom primjeru ćemo pokazati upotrebu simboličke metode:

U odnosu na jednu proizvoljno odabranu referentnu os, napon U ima faznu kut od $\varphi = +30^\circ$. Iznos napona je $U = 60 \text{ V}$ (efektivna vrijednost), frekvencija $f = 1500 \text{ Hz}$. Priključen je induktivitet $L = 5 \text{ mH}$. Omski otpor je zanemarljivo malen.

a) napisati napon u eksponencijalnom obliku i odrediti realnu i imaginarnu komponentu

$$\bar{U} = 60 \text{ V } e^{j30^\circ} \text{ a komponente}$$

$$a = U \cos \alpha = 60 \text{ V } \cos 30^\circ = 60 \text{ V } 0,866 = 52 \text{ V}$$

$$b = U \sin \alpha = 60 \text{ V } \sin 30^\circ = 60 \text{ V } 0,50 = 30 \text{ V}$$

Napon je

$$\bar{U} = 52 \text{ V} + j 30 \text{ V}$$

b) kolika je struja u induktivitetu po iznosu i faznom kutu?

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{Z} = \frac{\bar{U}}{j\omega L} = \frac{60 \text{ V } e^{j30^\circ}}{j2\pi 1500 \text{ s}^{-1} 5 \cdot 10^{-3} \text{ H}} = 1,27 \text{ A } \frac{e^{j30^\circ}}{j}$$

Djeljenje sa j (odnosno množenje sa $-j$ znači okretanje vektora u negativnom smjeru za 90° . Dakle:

$$\frac{e^{j30^\circ}}{j} = e^{j(30^\circ - 90^\circ)} = e^{-j60^\circ}$$

Struja zaostaje prema referentnoj osi za 60° a za naponom za 90° . Konačni izraz za struju je

$$I = 1,27 \text{ A } e^{-j60^\circ}$$

2. Složeni krug izmjenične struje

Serijski spojevi

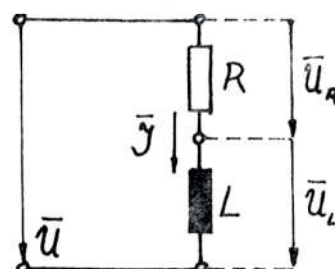
Serijski spoj omskog induktivnog otpora

Na serijski spoj otpora R i induktiviteta L je narinut sinusni napon, pa kroz sistem teče opet sinusna struja $i = i_m \sin \omega t$. Važi, uz primjenu 2. K.Z.

$$U = iR + L \frac{di}{dt} = u_R + u_L$$

pa je stoga

$$u = R i_m \sin \omega t + \omega L i_m \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$



Ako se strujni val uzme kao referentna linija onda se vidi da se sistem sastoji od naponskog vala $u_R = R i_m \sin \omega t$, koji je u fazi sa strujnim valom i drugog naponskog vala

$$u_L = \omega L i_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

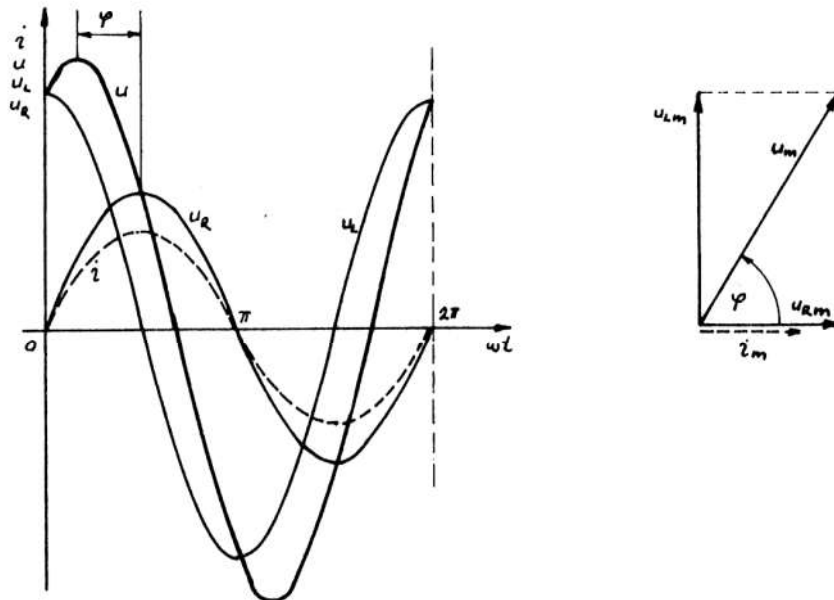
koji prethodi strujnom valu za 90° . Rezultanta ovih dvaju valova daju rezultirajući val iste frekvencije i općenitog oblika

$$u = u_m \sin(\omega t + \varphi)$$

gdje je kut φ fazni pomak rezultirajućeg napona prema referentnoj struji.

Grafički je to prikazano na slici, gdje su nacrtane momentalne vrijednosti (val) i versori maksimalne vrijednosti. Omski napon i induktivni napon su pod kutom od 90° a rezultanta se dobije geometrijskim sabiranjem versora. Valja napomenuti

ti da su u linijskom dijagramu algebarski zbrojene momentalne vrijednosti.



Iz geometrijskih odnosa versorskog dijagrama izlazi:

$$u_m = \sqrt{u_{Rm}^2 + u_{Lm}^2} = \sqrt{(i_m R)^2 + (i_m \omega L)^2} = i_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Efektivne vrijednosti se dobiju djeljenjem sa 2,

$$U = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Operator otpora

$$\frac{U}{I} = Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Treba napomenuti da se i otpori, kao i naponi, zbrajaju geometrijski (pravokutni trokut).

Fazni kut se dobije iz odnosa omskog i induktivnog otpora

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u_{Lm}}{u_{Rm}} = \frac{i_m \omega L}{i_m R} = \frac{\omega L}{R}$$

Simbolički se ovo sve može ovako prikazati:

$$u = iR + L \frac{di}{dt}$$

ako se sad u zamjeni sa $\bar{U}$, i sa I , $\frac{d}{dt}$ sa $j\omega$ dobija se simbolična jednažba:

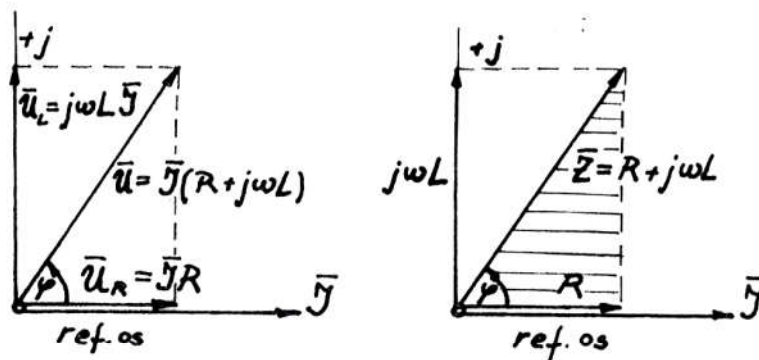
$$\bar{U} = IR + j\omega LI = I (R + j\omega L)$$

Kompleksni operator otpora je

$$\bar{Z} = R + j\omega L$$

a njegov iznos je

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$



Šrafirani trokut omedjen sa $Z_R = R$; $X_L = j\omega L$ i $\bar{Z} = R + j\omega L$ zove se trokut otpora. Fazni kut je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} ; \quad \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L}{R}$$

S ovim se dobije operator otpora u eksponencijalnom obliku

$$\bar{Z} = Z e^{j\varphi} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L}{R}}$$

Primjer: $R = 30 \Omega$; $X_L = 75,4 \Omega$ su spojeni u seriji. Komponente kompleksnog otpora su

$$\bar{Z} = R + j \omega L = (30 + j 75,4)$$

$$\begin{aligned} \bar{Z} = R e^{j\varphi} &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctan \frac{\omega L}{R}} = \\ &= \sqrt{30^2 + 75,4^2} e^{j \arctan \frac{75,4}{30}} = 8,2 e^{j 68^\circ} \end{aligned}$$

Predznak j je pozitivan. Napon $\bar{U} = \bar{I} \bar{Z}$ prethodi referentnoj struji I za 68°

Serijski spoj omskog i kapacitivnog otpora

Na osnovu onoga što je rečeno u prethodnom poglavlju analogno se može izvesti i za ovaj slučaj:

$$u = u_R + u_C = iR + \frac{1}{C} \int i \, dt$$

Pretpostavlja se da je $i = i_m \sin \omega t$, pa simbolička jednač-
ba glasi:

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_C = IR + \frac{1}{j\omega C} \bar{I} = IR - j \frac{1}{\omega C} I = I (R - j \frac{1}{\omega C})$$

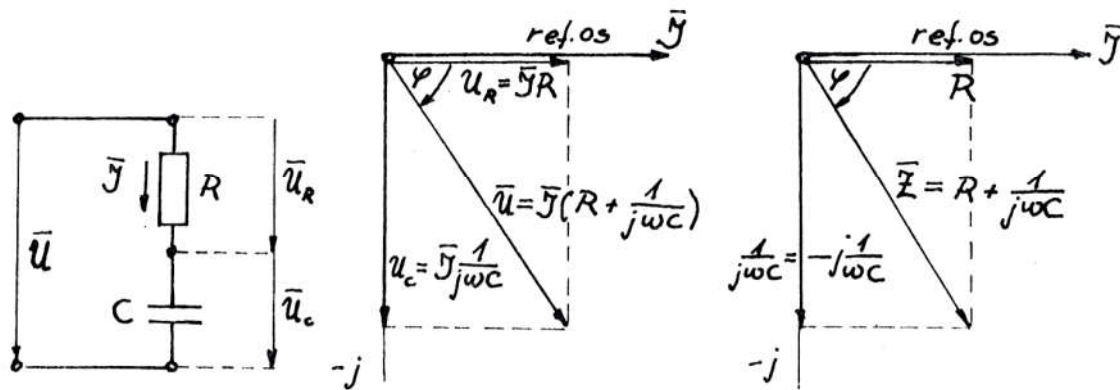
Kompleksni prividni otpor

$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \bar{Z} = R - j \frac{1}{\omega C} = Z e^{-j\varphi}$$

Iznosi su:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} ; \quad U = I \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2} ;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{1}{\omega CR}$$



Grafički su prikazani odnosi napona i otpora za ovaj slučaj.

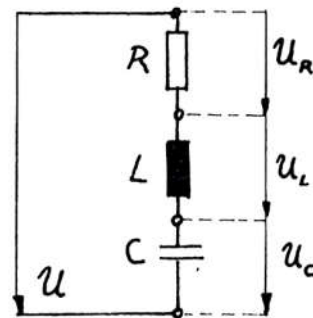
Napon zaostaje za referentnom strujom za kut

Serijski spoj omskog, induktivnog i kapacitivnog otpora

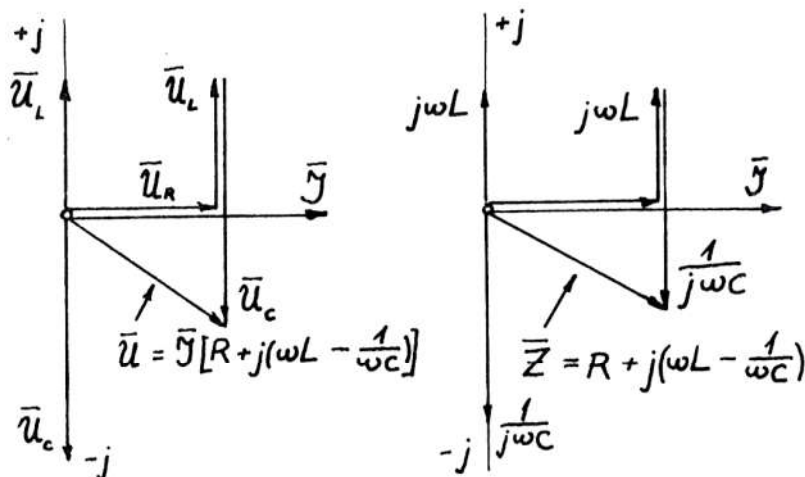
Važi jednađba za momentalne vrijednosti:

$$u = u_R + u_L + u_C = iR \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

uz $i = i_m \sin \omega t$, dobijemo simboličku jednađbu:



$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C = \bar{I}R + j\omega L \bar{I} + \frac{1}{j\omega C} \bar{I} = \bar{I} \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right]$$



Operator kompleksnog prividnog otpora (impedancija)

$$\frac{\bar{U}}{I} = \bar{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = Z e^{j\varphi}$$

Faktor j i fazni kut φ postaju negativni ako je $\omega L < \frac{1}{\omega C}$

Iznosi pojedinih veličina su:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} ; \quad U = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Izraz

$$\bar{U} = I \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

predstavlja Ohm-ov zakon za izmjeničnu struju u najopćenitijem obliku, za slučaj kad su sve tri vrste otpora u seriji.

Ako nema jednog od otpora, onda je njegova vrijednost nula. Pri tome treba pripaziti na kondenzator "koga nema" da odgovara kapacitetu u njegovoj formuli $C = \infty$.

Serijski spoj proizvoljno mnogo potrošača

Ako je nekoliko potrošača sa operatorima otpora Z_1, Z_2, Z_3 itd. spojeno u seriju, ovi potrošači imaju istu struju - stoga se struja bira kao referentni versor - a svi naponi imaju smjer u odnosu na versor struje I .

Kompleksni oblik zadatih operatora neka je:

$$\bar{Z}_1 = R_1 + j\omega L ; \quad Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C} ; \quad Z_3 = R_3 + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}$$

Ako se radi/jednostavnosti stavi da je $X_L = \omega L$, $X_C = 1/\omega C$ a $X = \omega L - 1/\omega C$, onda je

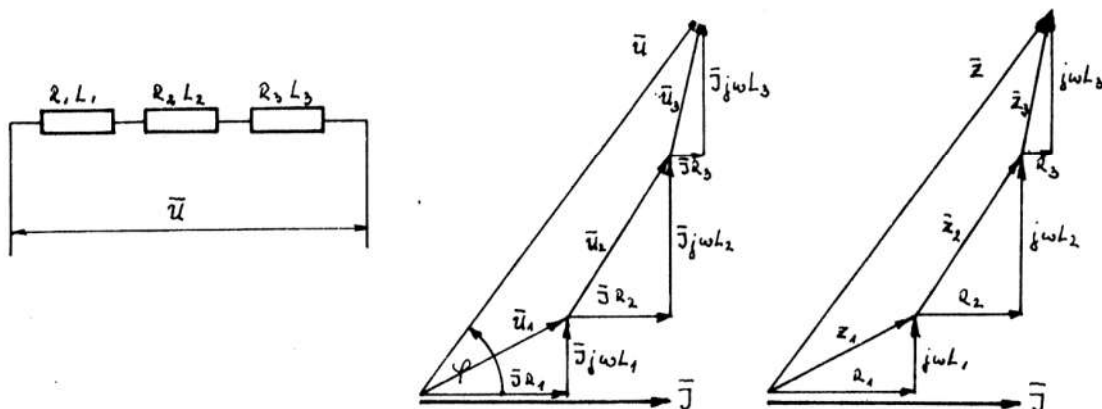
$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \dots = (R_1 + jX_1) + (R_2 + jX_2) + (R_3 + jX_3) + \dots$$

Kod kapacitivnog otpora $X_C = 1/\omega C$ smjer je utvrđen pomoću $1/j = -j$ u odnosu na versor struje I .

Ukupni napon serijskog spoja je rezultanta geometrijske sume padova napona na svim pojedinim potrošačima:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 + \dots = \bar{I}Z_1 + \bar{I}Z_2 + \bar{I}Z_3 + \dots = \\ &= \bar{I} \left[(R_1 + jX_1) + (R_2 + jX_2) + (R_3 + jX_3) + \dots \right] = \\ &= I \left[(R_1 + R_2 + R_3 + \dots) + j(X_1 + X_2 + X_3 + \dots) \right] \\ \bar{U} &= \bar{I} \left[\sum R + j \sum X \right] = \bar{I}\bar{Z} \end{aligned}$$

Na dijagramu je dat primjer za napone i operatore otpora serijskog spoja induktivnih prividnih otpora $Z = R + jX$.



Paralelni spojevi potrošača

Iz ranijih izlaganja se vidjelo da se u izmjeničnoj struji javlja pomak u fazi između strujnog i naponskog vala zbog magnetskih i električnih izmjeničnih polja i pojave induktivnih i kapacitivnih reaktancija (otpora).

Već prema tome koja veličina se uzima za referentnu liniju, mogu teoretski nastati dva načina prikazivanja.

1/ Ako se uzme struja za referentnu liniju, onda se napon razlaže na jednu komponentu koja je u fazi sa strujom

$$U_a = U \cos \varphi$$

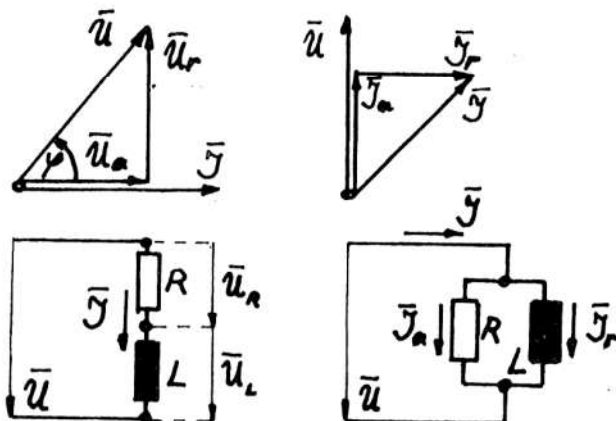
(označava se kao "aktivni" napon) i na drugu komponentu koja stoji okomito prema struji i ima iznos

$$U_r = U \sin \varphi$$

i naziva se "reaktivni" napon.

Ovaj način se upotrebljava za slučaj serijskog spoja omskih i induktivnih odnosno kapacitivnih otpora kao i za slučajeve koji se mogu preko "nadmjesne sheme" (Ersatzschaltung) svesti na serijski spoj.

2/ Ako se uzme napon za referentnu liniju, onda se struja razlaže na komponentu koja je u fazi sa naponom



$$I_a = I \cos \varphi$$

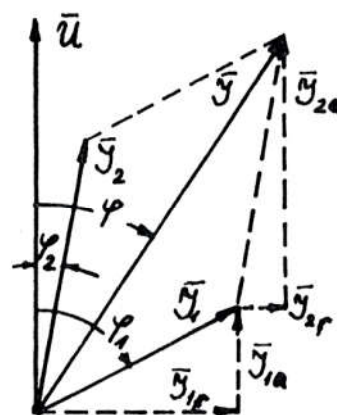
i naziva se "aktivna struja" i na komponentu koja je okomita prema naponu

$$I_r = I \sin \varphi$$

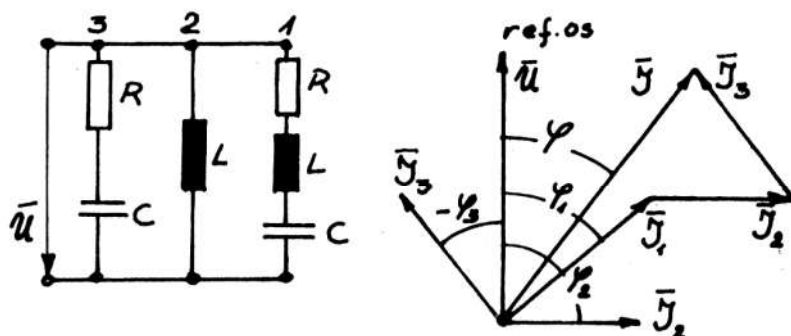
i naziva se "reaktivna struja".

U oba slučaja vrši se geometrijsko zbrajanje za ukupni napon odnosno struju. Drugi način se upotrebljava za slučaj da imamo paralelni spoj omskog i induktivnog otpora ili za slučajeve koji se mogu svesti preko "nadomjesne sheme" na paralelni spoj.

Ukupna struja se najzgodnije može odrediti versorskim dijagramom. Ako imamo, npr., dvije induktivne struje sa faznim kutovima pomaka φ_1 , i φ_2 , onda se vrši geometrijsko zbrajanje. Pokazano je takodjer i razlaganje na aktivnu i reaktivnu komponentu za pojedine struje. Ukupna struja ima fazni kut



Na drugom dijagramu je prikazan odnos struja za slučaj paralelnog spoja prema shemi - gdje je u grani 1, pretežno induktivna struja, u grani 2. skoro čisto induktivna struja a u grani 3. pretežno kapacitivna struja. Kutevi pomaka se računaju od referentnog pravca. Struja I zaostaje za naponom a pomak φ je nasuprot pozitivnom smjeru okretanja



Primjena operatora vodljivosti

Prednost primjene vodljivosti za proračune paralelnih spojeva se već vidjela kod istosmjerne struje, jer umjesto računski nezgodnih recipročnih vrijednosti otpora dolazi vodljivost $G = 1/R$.

Kod izmjenične struje ove prednosti se još više ističu. Operatori otpora $\bar{Z}_{R,L} = R + j\omega L$ kao i $\bar{Z}_{R,C} = R - j\frac{1}{\omega C}$ se lako mogu predstaviti kao operatori vodljivosti

$$\bar{Y}_{RL} = \frac{1}{\bar{Z}_{RL}} = \frac{1}{R + j\omega L}$$

odnosno

$$\bar{Y}_{RC} = \frac{1}{\bar{Z}_{RC}} = \frac{1}{R - j\frac{1}{\omega C}}$$

Ovi operatori vodljivosti se prikladnim transformacijama mogu također prikazati kao kompleksni brojevi $a + jb$, pri čemu "a" predstavlja aktivnu vodljivost a "b" već prema predznaku $+j$ ili $-j$ reaktivnu kapacitivnu ili induktivnu vodljivost. Nakon toga je moguće složiti u grupe aktivne i reaktivne vodljivosti i dalje računati kao kod istosmjerne struje. Ovim načinom je omogućeno čisto računski odrediti aktivnu i reaktivnu struju kao i fazni pomak prema naponu jedne grupe potrošača u paralelnom spoju, a bez upotrebe versorskog dijagrama.

Proračun prividnih vodljivosti

Prividne vodljivosti su date sa

$$\bar{Y}_{RL} = \frac{1}{R+j\omega L} \quad \text{i} \quad \bar{Y}_{RC} = \frac{1}{R-j\frac{1}{\omega C}}$$

Neka je najprije dat serijski spoj R i ωL odnosno R i $\frac{1}{\omega C}$.
Prividni otpori su

$$\bar{Z}_{RL} = R + j\omega L \quad \text{i} \quad \bar{Z}_{RC} = R - j\frac{1}{\omega C}$$

$$\bar{Y}_{RL} = \frac{1}{\bar{Z}_{RL}} = \frac{1}{R+j\omega L} = \frac{R-j\omega L}{(R+j\omega L)(R-j\omega L)} = \frac{R-j\omega L}{R^2+(\omega L)^2}$$

Konačan kompleksni oblik operatora vodljivosti je

$$\bar{Y}_{RL} = \frac{R}{R^2+(\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}$$

Analogno prema ranijim relacijama, može se pisati

$$\text{iznos aktivne vodljivosti} \quad G_{RL} = \frac{R}{R^2+(\omega L)^2}$$

iznos induktivne reaktivne
vodljivosti

$$B_{RL} = \frac{L}{R^2+(\omega L)^2}$$

Iz toga induktivna prividna vodljivost je

$$\bar{Y}_{RL} = G_{RL} - jB_{RL}$$

sa iznosom

$$\bar{Y}_{RL} = \sqrt{G_{RL}^2 + B_{RL}^2}$$

i faznim pomakom

$$\varphi = \arctg \frac{B_{RL}}{G_{RL}}$$

Prividna vodljivost za serijski R - C spoj

$$\bar{Y}_{RC} = \frac{1}{Z_{RC}} = \frac{1}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{R + j \frac{1}{\omega C}}{(R - j \frac{1}{\omega C})(R + j \frac{1}{\omega C})} = \frac{R + j \frac{1}{\omega C}}{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\bar{Y}_{RC} = \frac{R}{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} + j \frac{\frac{1}{C}}{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$

pa je dalje

$$\text{aktivna vodljivost } G_{RC} = \frac{R}{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} = \frac{\omega^2 C^2 R}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

reaktivna vidljivost

$$B_{RC} = \frac{\frac{1}{C}}{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} = \frac{\omega C}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

Na taj način je simbolični oblik prividne kapacitivne vodljivosti:

$$\bar{Y}_{RC} = G_{RC} + j B_{RC}$$

sa iznosom

$$\bar{Y}_{RC} = \sqrt{G_{RC}^2 + B_{RC}^2}$$

i faznim kutem

$$\varphi = \arctg \frac{B_{RC}}{G_{RC}}$$

Fazni pomak prividnih vodljivosti računa se od naponske linije kao referentne osi. Prema tome B_{RL} pomnožen sa $(-j)$ znači da induktivna prividna vodljivost zaostaje u fazi za narinutim naponom, dok B_{RC} pomnožen sa $(+j)$ prethodi narinutom naponu U .

Opća simbolična jednačba prividne vodljivosti je

$$\underline{\bar{Y}} = G + j B$$

sa iznosom

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

Treba još naći opće izraze za komponente vodljivosti.

Prividni otpor $\bar{Z} = R + jX$ i prividna vodljivost $Y = G + jB$ vezani su jednačbama:

$$\bar{Z} = \frac{1}{Y} \quad \text{odnosno} \quad \bar{Y} = \frac{1}{Z}$$

Iz toga se ima (npr. za induktivnu admintanciju)

$$\bar{Y} = \frac{1}{R+jX} = \frac{R-jX}{R^2+X^2} = G - jB$$

pa je

$$G = \frac{R}{R^2+X^2} \quad \text{i} \quad B = \frac{X}{R^2+X^2}$$

Obrnuto važi i ovaj odnos:

$$Z = \frac{1}{G-jB} = \frac{G+jB}{G^2+B^2} = R + jX$$

pa je

$$R = \frac{G}{G^2+B^2} \quad \text{i} \quad X = \frac{B}{G^2+B^2}$$

Naglašava se da su $\bar{Z}$ i $\bar{Y}$ recipročni ali R i G odnosno X i B nisu recipročni nego treba da se preračunaju po upravo datim relacijama (samo za $X = 0$ i $B = 0$ važi $G = \frac{1}{R}$, dakle isti smjer sa strujom). Takodjer je jako važno da se imaginarni članovi uzimaju uvijek pozitivno, dakle ne $(-j \frac{1}{\omega C})$ nego $(\frac{1}{j\omega C})$

Konačno, množenjem prividne vodljivosti sa naponom imamo jednadžbu za računanje struje I

$$\bar{I} = \bar{U}\bar{Y} = \bar{U} (G + jB) = \bar{U}G + j \bar{U}B = I_a + j I_r = \bar{I}_a + j \bar{I}_r$$

Pripadni iznosi su:

ukupna struja $I = U \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{I_a^2 + I_r^2}$

aktivna struja $I_a = UG$

reaktivna struja $I_r = UB$

fazni pomak $\varphi = \arctg \frac{+B}{G}$

predznak (+) znači da struja prethodi referentnom naponu a predznak (-) da struja zaostaje za naponom.

Proračun komponenata struje pomoću vodljivosti (umjesto otpora) ima prednost onda kad se radi o većem broju paralelno spojenih prividnih otpora pa se postavlja zadatak da se za ove grupe čisto računskim putem izračuna ukupna struja i obje komponente. Formule su, doduše, ponešto nezgodne ali vode brzo i sigurno do rezultata.

Paralelni spoj proizvoljno mnogo potrošača

Postupak je, u principu, sličan kao za slučaj serijskog spoja više potrošača, s tim da se ovdje uzimaju u račun vodljivosti umjesto otpora i vodljivosti pojedinih paralelnih grana se zbrajaju. Postupa se ovako; ako se ima više paralelnih spojeva čije grane mogu imati opet više serijskih potrošača; najprije se računaju vodljivosti pojedinih grana

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad \text{i} \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

zatim se vodljivosti zbroje. Potrebno je razlikovati induktivne i kapacitivne vodljivosti (njih treba oduzimati radi različitih predznaka $X = j\omega L$ i $X = -j \frac{1}{\omega C}$). Konačno se dobije suma vodljivosti

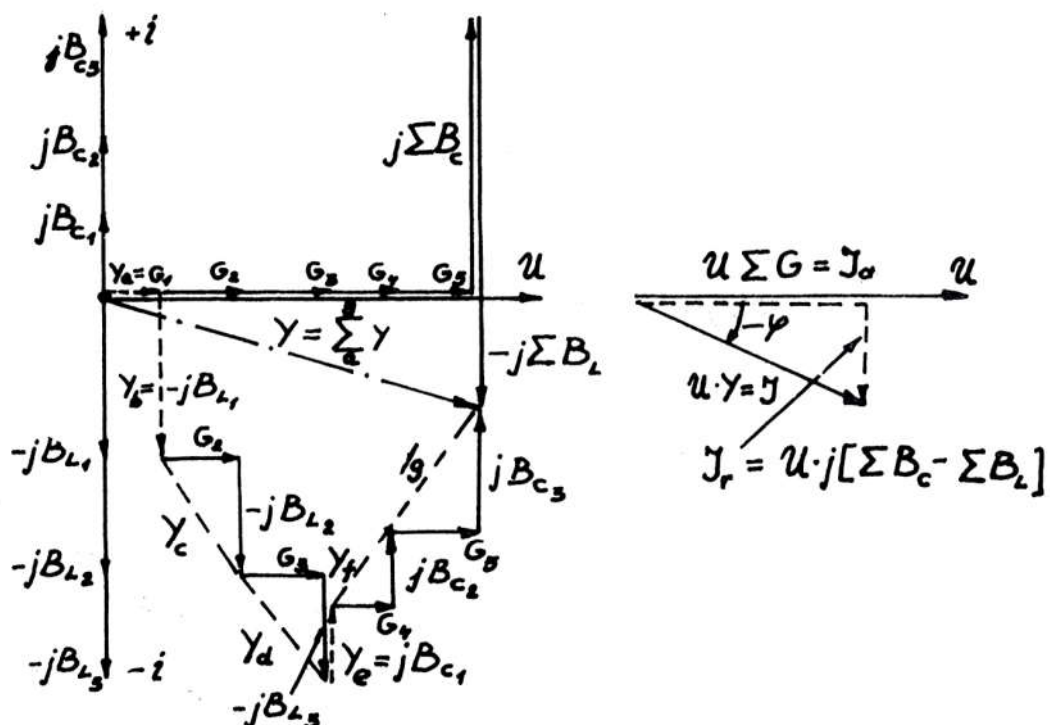
$$\Sigma G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$$

$$\Sigma B_L = B_{L1} + B_{L2} + B_{L3} + \dots$$

$$\Sigma B_C = B_{C1} + B_{C2} + B_{C3} + \dots$$

$$\Sigma B = \Sigma B_C - \Sigma B_L$$

Grafički se to može prikazati za jedan proizvoljan slučaj. Induktivne reaktivne vodljivosti su unesene sa negativnim predznakom. Treba upozoriti na to da su kod otpora kapacitivni otpori negativni a kod vodljivosti su induktivne vodljivosti negativne.



Iz suma aktivnih i reaktivnih vodljivosti, računate su, množenjem sa naponom U , aktivna i reaktivna struja i fazni pomak:

aktivna struja

$$I_a = U \Sigma G$$

induktivna reaktivna struja

$$I_{rL} = U \Sigma B_L$$

kapacitivna reaktivna struja

$$I_{rC} = U \Sigma B_C$$

ukupna struja

$$I = U \sqrt{(\Sigma G)^2 + (\Sigma B)^2} = UY$$

kut pomaka

$$\pm \varphi = \arctg \frac{\Sigma B}{\Sigma G}$$

U odnosu na napon

prethodi za $\Sigma B = \Sigma B_C$ ili $\Sigma B_C > \Sigma B_L$

zaostaje za $\Sigma B = \Sigma B_L$ ili $\Sigma B_C < \Sigma B_L$

konačan oblik $\bar{I} = Ie^{+j\varphi}$ sa $I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2}$

Ove jednadžbe imaju općenito značenje za proizvoljne vrste otpora (vodljivosti) u paralelnom spoju.

Preračunavanje paralelnih pojava u nadomjesne serijske spojeve

Ako imamo nizove paralelnih spojeva, onda se mora poduzeti jedna transformacija da bi se omogućilo računanje ukupnog otpora cijelog niza paralelnih potrošača. Ovim se jako olakšava računanje.

Za svaki paralelni spoj odredi se najprije rezultantna vodljivost Y obaju paralelno spojenih potrošača, nakon što su izračunate i zbrojene vodljivosti oba potrošača. Nakon toga se izračuna rezultirajući prividni otpor paralelnog spoja $Z = \frac{1}{Y}$. Ovaj prividni otpor se naziva također i "operator nadomjesnog otpora paralelnog spoja". Ovaj nadomjesni otpor je veoma važan faktor pri izračunavanju rezultirajućih otpora složenih spojeva.

Općeniti izraz - jednačba za nadomjesni otpor (za npr. dva paralelno spojena prividna otpora glasi:

$$Y_g = Y_1 + Y_2 \quad \text{odnosno} \quad \frac{1}{Z_g} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

pa iz toga izlazi nadomjesni operator

$$Z_g = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

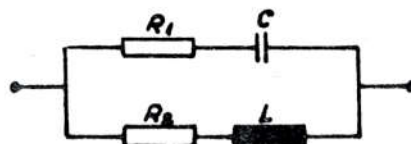
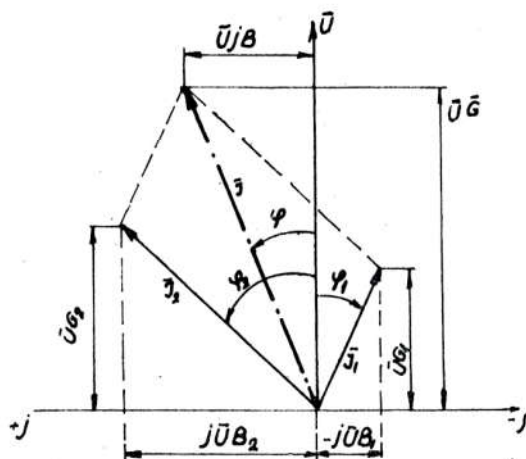
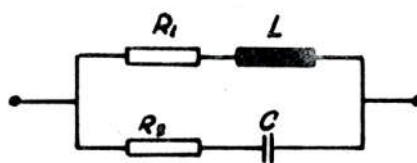
Vidi se da je to formalno isti oblik (s kompleksnim veličinama) kao i za istosmjernu struju.

Polazeći od ove opće jednačbe, mogu se izvesti i posebni izrazi za razne kombinacije omskih, induktivnih i kapacitivnih otpora u paralelnom polju odnosno za njihove operatore nadomjesnog otpora.

Za primjer su prikazani tabelarno razni sklopovi u paralelnom i serijsko-paralelnom spoju i odgovarajuće simboličke jednačbe za impedancije takvih sklopova.

Kao primjer ćemo prikazati računanje spoja kao na slici. Na osnovu jednačbe

$$Y = G + jB$$



možemo pisati:

$$G = G_1 + G_2 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L_1)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + (\frac{1}{\omega C_2})^2}$$

$$B = B_2 - B_1 = \frac{1/\omega C_2}{R_2^2 + (\frac{1}{\omega C_2})^2} - \frac{\omega L_1}{R_1^2 + (\omega L_1)^2}$$

Ovi odnosi su pokazani na versorskom dijagramu. Ako se za kapacitivnu granu uzme da je $Z_1 = 6 - j6$ a za induktivnu granu $Z_2 = 4 + j4$, i da je cijeli sklop priključen na napon $U = 200$ V i $f = 50$ Hz onda se sklop može riješiti ovako:

1.) Preko nadomjesnog otpora, pretvarajući paralelni spoj u serijski:

$$Z_1 = 6 - j6 ; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-6}{6} = -1 ; \quad \varphi_1 = -45^\circ$$

$$Z_1 = \sqrt{6^2 + 6^2} e^{-j45^\circ} = 8,48 e^{-j45^\circ}$$

$$Z_2 = 4 + j4 ; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{4}{4} = 1 ; \quad \varphi_2 = 45^\circ$$

$$Z_2 = \sqrt{4^2 + 4^2} e^{j45^\circ} = 5,66 e^{j45^\circ}$$

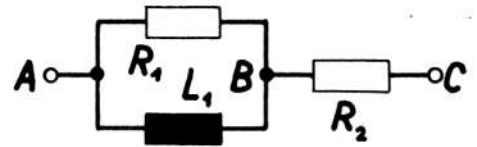
$$\bar{Z} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{8,48 e^{-j45^\circ} 5,66 e^{j45^\circ}}{(6 - j6) + (4 + j4)} = \frac{48 e^{j0^\circ}}{10 - j2} = \frac{48(10 + j2)}{10^2 + 2^2} ;$$

$$Z = \frac{48 \cdot 10}{104} + j \frac{48 \cdot 2}{104} = 4,62 + j 0,92 ;$$

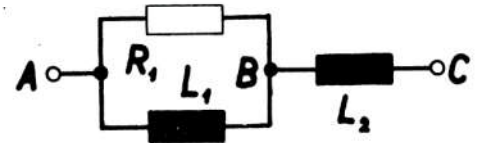
$$Z = \sqrt{4,62^2 + 0,92^2} = 4,7 \Omega ; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{0,92}{4,62} = 0,2 ; \quad \varphi = 11^\circ 20'$$

u odnosu na struju I (referentna os je struja I)

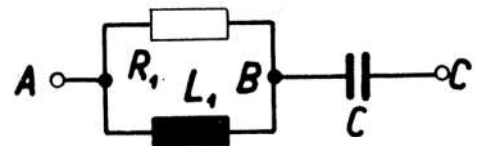
$$\bar{Z} = \left[R_2 + \frac{R_1(\omega L_1)^2}{R_1^2 + (\omega L_1)^2} \right] + j \frac{R_1^2(\omega L_1)}{R_1^2 + (\omega L_1)^2}$$



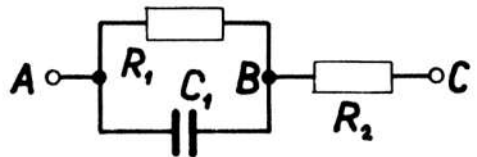
$$\bar{Z} = \frac{R_1(\omega L_1)^2}{R_1^2 + (\omega L_1)^2} + j \left[\frac{R_1^2(\omega L_1)}{R_1^2 + (\omega L_1)^2} + \omega L_2 \right]$$



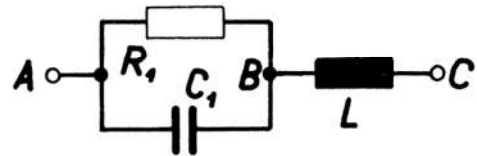
$$\bar{Z} = \frac{R_1(\omega L_1)^2}{R_1^2 + (\omega L_1)^2} + j \left[\frac{R_1^2(\omega L_1)}{R_1^2 + (\omega L_1)^2} - \frac{1}{\omega C} \right]$$



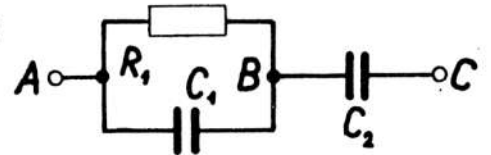
$$\bar{Z} = \left[R_2 + \frac{R_1}{1 + (R_1\omega C_1)^2} \right] - j \frac{R_1^2\omega C_1}{1 + (R_1\omega C_1)^2}$$



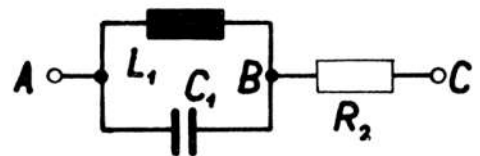
$$\bar{Z} = \frac{R_1}{1 + (R_1\omega C_1)^2} + j \left[\omega L - \frac{R_1^2\omega C_1}{1 + (R_1\omega C_1)^2} \right]$$



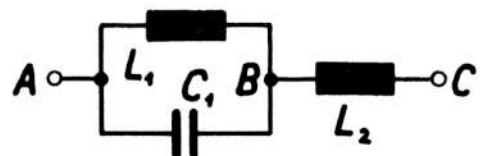
$$\bar{Z} = \frac{R_1}{1 + (R_1\omega C_1)^2} - j \left[\frac{R_1^2\omega C_1}{1 + (R_1\omega C_1)^2} + \frac{1}{\omega C_2} \right]$$



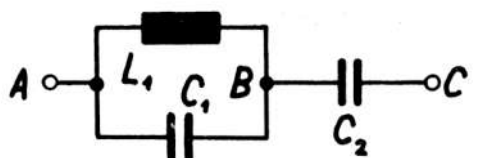
$$\bar{Z} = R_2 + j \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1}$$



$$\bar{Z} = j \left[\frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} + \omega L_2 \right]$$



$$\bar{Z} = j \left[\frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} - \frac{1}{\omega C_2} \right]$$



Iznos struje I (rezultirajuća struja)

$$I = \frac{200 \text{ V}}{4,7} = 42,6 \text{ A}$$

Ova rezultantna struja zaostaje za referentnim naponom za $\varphi = 11^\circ 20'$

2) Preko admitancija G i B:

$$\text{Za } Z_1 = 6-j6 \text{ važi } R_1 = 6 \Omega ; X_C = \frac{1}{\omega C_1} = 6 \Omega$$

$$Z_2 = 4+j4 \text{ važi } R_2 = 4 \Omega ; X_L = \omega L_2 = 4 \Omega$$

$$G = G_1 + G_2 = \frac{4}{4^2+4^2} + \frac{6}{6^2+6^2} = \frac{5}{24} \text{ S}$$

$$B = B_C - B_L = \frac{6}{6^2+6^2} - \frac{4}{4^2+4^2} = -\frac{1}{24} \text{ S}$$

Iz ovoga se odredjuje vodljivost

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{24}\right)^2 + \left(-\frac{1}{24}\right)^2} = \frac{1}{24} \sqrt{26} = 0,213 \text{ S}$$

a iz toga struja

$$I = UY = 200 \text{ V } 0,213 \text{ S} = 42,6 \text{ A}$$

impedancija (iznos) je:

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{0,213 \text{ S}} = 4,7 \Omega$$

a fazni pomak

$$\text{tg } \varphi = \frac{B}{G} = \frac{-\frac{1}{24}}{\frac{5}{24} \text{ S}} = -\frac{1}{5} = -0,2 ; \varphi = -11^\circ 20'$$

u odnosu na referentni napon U.

U ranijem načinu pod 1) je struja bila referentna os pa je kut φ bio pozitivan.

3) Problem se takodjer može riješiti na taj način da se izračunaju pojedine struje I_1 i I_2 (u kompleksnom obliku) pa se onda izračuna rezultantna struja (u kompleksnom obliku). Realni dio je aktivna struja a imaginarni dio reaktivna struja.

$$Z_1 = 6 - j6 \Omega ; \quad Z_2 = 4 + j4 \Omega$$

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{200}{6-j6} = \frac{200(6+j6)}{(6-j6)(6+j6)} = 16,67 + j 16,67 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{200}{4+j4} = \frac{200(4-j4)}{(4+j4)(4-j4)} = 25 - j25 \text{ A}$$

$$I = I_1 + I_2 = (16,67 + j16,67) + (25 - j25) = 41,6 - j8,33 \text{ A}$$

Referentna os je napon U.

Iznos struje I je

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2} = \sqrt{41,6^2 + 8,33^2} = 42,6 \text{ A}$$

Impedancija iznosi

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{200 \text{ V}}{42,6 \text{ A}} = 4,7 \Omega$$

a fazni pomak

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-8,33}{41,6} = -0,2 ; \quad \varphi = -11^\circ 20'$$

Dakle struja zaostaje za referentnim naponom za kut $\varphi = 11^\circ 20'$.

22. ČETVEROPOLI

U elektrotehnici je uobičajena oznaka sklopova prema broju pristupačnih stezaljki preko kojih se priključuje na napon ili vrše električna mjerenja. Otuda naziv "dvopol" (aktivni i pasivni) i "četveropol".

Primjer za to je pojam "napon na stezaljkama" jer se samo na stezaljkama može napon nekog izvora mjeriti. Unutarnja EMS se samo može indirektno izvesti ali se ne može direktno mjeriti. U slučaju kad izvod ne daje struju, takodje mjerimo samo napon na stezaljkama koji često odgovara unutarnjoj EMS. Slično je i sa dvopolnim potrošačima, čije su električne osobine mogu izvesti iz mjerenja struje i napona na njihovim stezaljkama. Tako se, npr. određuje otpor nekog potrošača.

Posebnu ulogu imaju sklopovi koji se nazivaju "četveropoli", jer imaju četiri stezaljke. Dvije su "ulazne" a dvije "izlazne" stezaljke. Ako četveropol ne sadrži izvor energije, naziva se pasivni (napr. dvožični vod).

Kod četveropola, interesira nas međusobna ovisnost ulaznih i izlaznih veličina, koje opet ovise o elementima koji se nalaze unutar četveropola. Pri tome nije potrebno da znamo pojedinosti o pojedinim elementima unutar četveropola. Važan je samo njihov utjecaj na međusobnu ovisnost između ulaza i izlaza. Npr. kod jednog pojačala, važna je linearna proporcionalnost između ulaznog i izlaznog napona, unutar nekog određenog područja frekvencije, da bi se postigla vjerna reprodukcija signala. Slično je kod "filtera" za pojedine frekvencije u telegrafiji - i foniji i sl.

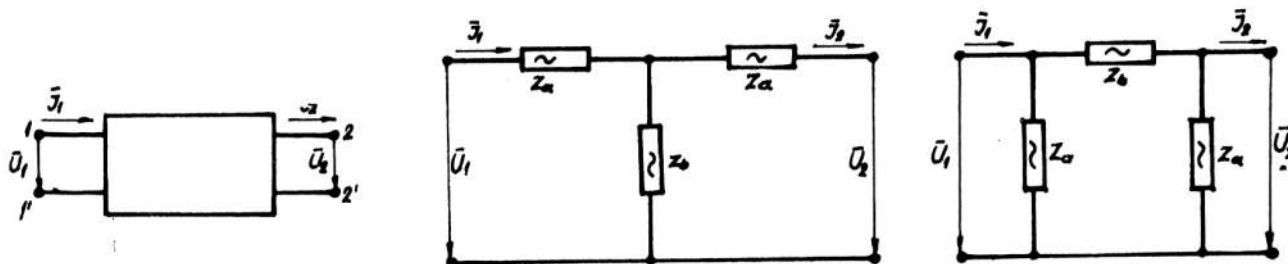
Konstante četveropola

Četveropol je "linearan" ako sadrži samo linearne elemente (koji imaju konstantan otpor i nezavisnu amplitudu - vađenje Ohm-ova zakona). Ovdje će biti riječi samo o nekim osnovnim relacijama nauke o četveropolima.

Ulazne i izlazne veličine očigledno ovise međusobno preko unutarnjih otpora:

$$\bar{U}_1 = A_{11} \bar{U}_2 + A_{12} \bar{I}_2 \quad \bar{I}'_1 = - \bar{I}_1$$

$$\bar{I}_1 = A_{21} \bar{U}_2 + A_{22} \bar{I}_2 \quad \bar{I}'_2 = - \bar{I}_2$$



Ovdje znače A_{11} , A_{22} , A_{12} i A_{21} konstante četveropola.

A_{11} je odnos napona kad je izlazna struja $I_2 = 0$, četveropol je u "praznom hodu". A_{11} se naziva često "odnos praznog hoda" četveropola.

A_{22} je odnos (kvocijent) obaju struja, kad je izlazna strana kratko spojena, $U_2 = 0$, dakle kad je četveropol u "kratkom spoju". A_{22} se naziva "odnos kratkog spoja" četveropola.

A_{12} je odnos (kvocijent) $U_1 : I_2$ u slučaju kratkog spoja (dakle ovo je otpor)

A_{21} je odnos (kvocijent) $I_1 : U_2$ u slučaju praznog hoda (dakle ovo je vodljivost).

Sve četiri konstante četveropola vezane su uvjetnom jednadžbom

$$A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1$$

Osobine jednog četveropola su jednoznačno određene pomoću tri njegove konstante.

Vanjski parametri (konstante)

$$A_{11} = \frac{U_1}{U_2} \quad \text{za } I_2 = 0 \quad (\text{prazni hod})$$

$$A_{22} = \frac{I_1}{I_2} \quad \text{za } U_2 = 0 \quad (\text{kratki spoj})$$

Unutarnji parametri:

$$A_{12} = \frac{U_1}{I_2} \quad \text{za } U_2 = 0 \quad (\text{kratki spoj})$$

$$A_{21} = \frac{I_1}{U_2} \quad \text{za } I_2 = 0 \quad (\text{prazni hod})$$

Konstante A_{11} i A_{21} dobiju se iz pokusa praznog hoda.

Konstante A_{22} i A_{12} dobiju se iz pokusa kratkog spoja.

Oba pokusa daju konstante bez obzira na kompliciranost samog sklopa.

Otpor $R_2 = U_2/I_2$ na izlazu, uvrštenjem u uvjetnu jednadžbu daje otpor na ulazu:

$$R_1 = \frac{A_{11} R_2 + A_{12}}{A_{21} R_2 + A_{22}}$$

otpor opterećenja na ulazu.

Naponska transformacija

$$\frac{U_1}{U_2} = A_{11} + \frac{A_{12}}{R_2}$$

Strujna transformacija

$$\frac{I_1}{I_2} = A_{22} + A_{21} R_2$$

Kad se okrene smjer prolaza kroz četveropol, tj. kad se promatra sa stezaljki 2 i 2', dobije se

$$\bar{U}_2 = A_{22} \bar{U}_1 - A_{12} \bar{I}_1$$

$$\bar{I}_2 = -A_{21} \bar{U}_1 + A_{11} \bar{I}_1$$

U uporedjenju sa jednadžbom za U_1 i I_1 vidi se da vanjski parametri zamjenjuju mjesta a unutarnji parametri ostaju na svojim mjestima.

Takodjer se uvode i otpori praznog hoda

$$R_{01} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{U_1}{I_1} \quad \text{kad je } I_2 = 0$$

$$R_{02} = \frac{A_{22}}{A_{21}} = -\frac{U_2}{I_2} \quad \text{kad je } I_1 = 0$$

s tim dobijemo "unutarnji otpor"

$$\frac{1}{A_{21}} = \frac{R_{01}}{A_{11}} = \frac{R_{02}}{A_{22}}$$

Ako je četveropol simetričan (ponašanje mu se ne mijenja zamjenom ulaza i izlaza), onda važi

$$A_{11} = A_{22} = \sqrt{1 + A_{12} A_{21}}$$

Takodje je važan i "valni otpor" ;

$$Z = \sqrt{\frac{A_{11}^2 - 1}{A_{21}^2}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

i ako je vod bez gubitaka onda je $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Simetrični četveropol

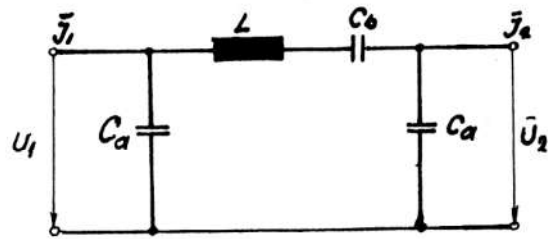
Četveropol je označen kao "simetričan" kad su mu prenosna svojstva jednaka u oba smjera, dakle kad mu se konstante ne mijenjaju ako mu se ulaz i izlaz zamjene. Najjednostavniji sklopovi ove vrste su T-spoj i Π - spoj na koje se mogu svesti svi bilo kakvi spojevi. Kod T-spoja su oba uzdužna člana jednaka a kod Π - spoja su oba poprečna člana jednaka. Dalje, oba spoja se transformacijom mogu prevesti jedan u drugoga (transformacija trokuta u zvijezdu i obratno).

Filter

Četveropoli se često upotrebljavaju kao elementi prenosa signala da bi se postigle određene karakteristike (određeni odnos napona i struje i sl.).

Veoma često se zahtjeva da prividni otpor - impedancija četveropola bude zavisna o frekvenciji na jedan sasvim određen način. Tako se dobiju tzv. filter koji imaju propusnu moć za neka određena područja frekvencija. Radi poboljšanja filterskog djelovanja, često se spajaju u seriji ("lanac") više ovakvih istih četveropola. Kao primjer će biti prikazan

filter u Π - spoju prema slici, koji sadrži čiste reaktancije. Treba odrediti naponski odnos u praznom hodu $U_1:U_2$ u ovisnosti o frekvenciji. Brojni podaci:



$L=40$ mH, $C_a=10^6$ pF, $C_b=10^4$ pF. Traži se koeficijent A_{11} - odnos praznog hoda uz zadani napon U_1 (i uz serijski spoj $L-C_b-C_a$). C_a koji leži poprečno na ulaznoj strani bez značenja je za ovaj slučaj.

Za serijski spoj:

$$\frac{\bar{U}_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C_a}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C_b} + \frac{1}{j\omega C_a}} = \frac{\frac{1}{\omega C_a}}{-\omega L + \frac{1}{\omega C_b} + \frac{1}{\omega C_a}}$$

Ako se razlomak proširi sa $\omega C_a C_b$ dobije se:

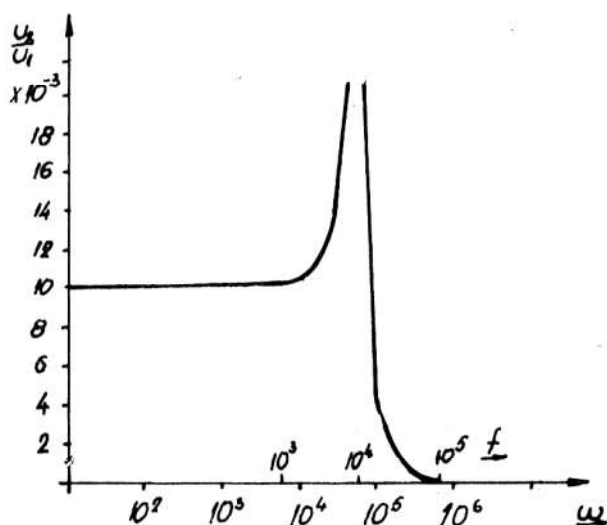
$$\frac{\bar{U}_2}{U_1} = \frac{C_b}{C_a + C_b - \omega^2 L C_a C_b}$$

Zbog realnog nazivnika izlazi da su oba napona u fazi (ili kad je nazivnik negativan, da su za 180° pomaknuti u fazi - u opoziciji). Ako se sad uvrste brojne vrijednosti ima se

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \frac{10^{-8} \text{ F}}{10^{-6} \text{ F} + 10^{-8} \text{ F} - \omega^2 0,04 \text{ H } 10^{-6} \text{ F } 10^{-8} \text{ F}}$$

$$= \frac{10^{-2}}{1,01 - \omega^2 4 \cdot 10^{-10}}$$

U ovisnosti o frekvenciji je do 1000 Hz napon praznog hoda na izlazu konstantan, četveropol se ponaša linearno. Između nekoliko hiljada i oko 10000 Hz, napon U_2 naglo raste i naglo pada, četveropol "reže" više frekvencije.



Imamo slučaj "dubokog filtera" koji propušta niske frekvencije do oko 10 kHz, U području naglog porasta leži maksimum kod $\omega = 50\,000\text{ s}^{-1}$. U teoretskom slučaju (kad su omski otpori zanemareni) ova vrijednost je beskonačna (slučaj rezonancije). Upotrebom više ovakvih članova u seriji postiže se još "strmije" djelovanje - oštrije ograničenje frekvencije.

Ovakav četveropol se ponaša kao djelitelj napona koji je ovisan o frekvenciji. Primjena: u VF-tehnici za uzdizanje ili potiskivanje frekventnih područja.

23. REZONANCIJA

Prividni otpori i struje u složenim krugovima ovise o reaktancijama ωL i $1/\omega C$ pa prema tome i o frekvenciji f odnosno ω . Ako su potrebne obje vrste reaktancije, može nastupiti specijalan slučaj da se njihovo djelovanje međusobno poništava i da jačina struje i napon postanu jednaki u fazi. Spoj u takvom slučaju djeluje kao čisti omski otpor, a struja i napon su u fazi. Ovakav slučaj se naziva "rezonancija".

Prema tome da li su ωL i $1/\omega C$ u seriji ili paralelno spojeni, govori se o "naponskoj" (serijskoj) rezonanciji ili o "strujnoj" (paralelnoj) rezonanciji.

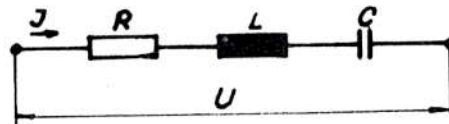
Naponska rezonancija

Za serijski spoj R , L i C glasi Ohm-ov zakon

$$U = I \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

a fazni kut se računa iz:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



U rezonanciji su napon i struja u fazi. Otuda važi uvjetna jednadžba

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = 0 \quad \text{ili} \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Kad ukupna reaktancija $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ bude jednaka nuli struja sklopa postaje rezonantna struja

$$I_r = \frac{U}{R}$$

Rezonantna struja je utoliko veća što je manji R (pri konstantnom naponu). Velika rezonantna struja može prouzrokovati veoma štetne napone na namotajima ($I_r \omega L$) i na kondenzatorima ($I_r \frac{1}{\omega C}$) i ugroziti izolaciju uređaja.

Ako se za neki R, L, C sklop mijenja frekvencija (uz konstantan napon U) onda nastupa rezonancija kod neke određene "rezonantne frekvencije" ω_r . Ta se frekvencija računa iz uvjetne jednadžbe

$$\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0$$

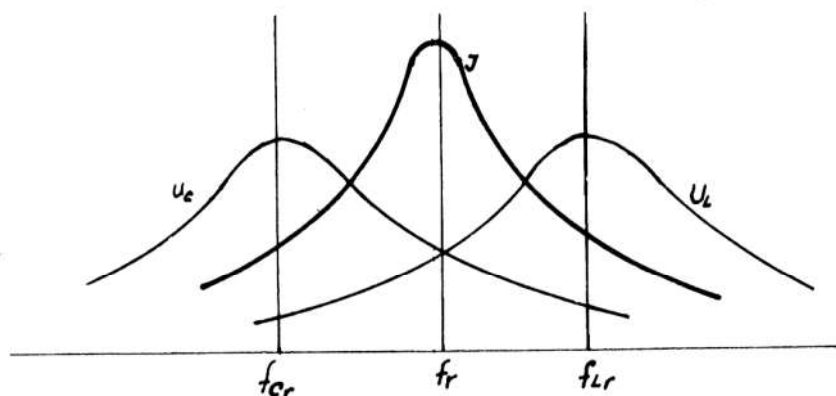
pa se dobije

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC}$$

odnosno

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{ili} \quad f_r = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Može se zamisliti krug sa L i C bez omskog otpora. U takvom teoretskom slučaju f_r se naziva "vlastita frekvencija" kruga LC .



Za male vrijednosti od R , nastupaju tjemene vrijednosti za I , U_L i U_C istovremeno. Za veće vrijednosti R , tjemene vrijednosti se pomiču. Rezonantne frekvencije za pojedine napone se računaju iz

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

a s ovom strujom su naponi na svitku odnosno kondenzatoru:

$$U_L = I\omega L = U \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} ; \quad U_C = I \frac{1}{\omega C} = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Maksimum nastupa kad je zadovoljen uvjet

$$\frac{dU_L}{d\omega} = 0 \quad \text{odnosno} \quad \frac{dU_C}{d\omega} = 0$$

Diferenciranje jednadžbi za U_L i U_C daje uvjetne jednadžbe za f_{Lr} i f_{Cr}

$$f_{Lr} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}} \quad \text{i} \quad f_{Cr} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

Prigušenje

Za mnoge primjene rezonantnih krugova, veoma je važna "oštrina" rezonancije, odnosno strmina porasta struje u blizini rezonancije.

Mjera za strminu je odnos struje I kod neke frekvencije f prema rezonantnoj struji I_r kod rezonantne frekvencije f_r , dakle I/I_r u ovisnosti o f/f_r . Imamo slijedeće jednadžbe:

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\bar{I}_r R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} =$$

$$= \frac{\bar{I}_r R \sqrt{\frac{C}{L}}}{R \sqrt{\frac{C}{L}} + j\omega L \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{1}{j\omega C} \sqrt{\frac{C}{L}}} =$$

$$= \frac{I_r R \sqrt{\frac{C}{L}}}{R \sqrt{\frac{C}{L}} + j\omega \sqrt{LC} + \frac{1}{j\omega} \frac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{I_r R \sqrt{\frac{C}{L}}}{R \sqrt{\frac{C}{L}} + j \frac{\omega}{\omega_r} + \frac{1}{j} \frac{\omega_r}{\omega}}$$

Radi pojednostavljenja pišemo

$$\frac{\omega}{\omega_r} = p ; \quad \frac{\bar{I}}{I_r} = q ; \quad R \sqrt{\frac{C}{L}} = d$$

Ako se sad desna strana jednačbe pomnoži sa $\frac{p}{p}$, dobije se

$$\bar{q} = \frac{\bar{I}}{I_r} = \frac{pd}{pd + jp^2 - j} = \frac{pd}{pd + j(p^2 - 1)}$$

$$d = R \sqrt{\frac{C}{L}} \left[\frac{V}{A} \sqrt{\frac{A_S}{V}} \frac{A}{V_S} \right]$$

je bez dimenzije - broj - "faktor gubitaka", "faktor prigušenja". Kad R i d rastu, onda je krivulja rezonancije sve plosnatiya a strmina sve manja.

Ako se stavi da je $pd = a$ i $p^2 - 1 = b$ dobije se jednostavniji oblik

$$q = \frac{I}{I_r} = \frac{a}{a + jb}$$

gdje je q "porast rezonancije" sa iznosom

$$\bar{q} = \frac{I}{I_r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{pd}{\sqrt{(pd)^2 + (p^2 - 1)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{\omega}{\omega_r} R \sqrt{\frac{C}{L}}}{\left(\frac{\omega}{\omega_r} R \sqrt{\frac{C}{L}}\right)^2 + \left[\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2 - 1\right]^2}$$

U tehnici telekomunikacija se upotrebljava kao mjera odstupanja neke frekvencije ω od rezonantne frekvencije ω_r , tzv. "razglašenje".

$$v = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega \omega_r}$$

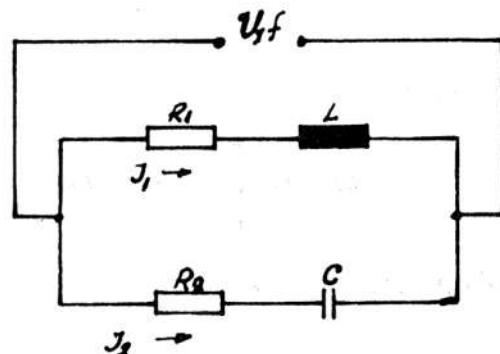
Faktor "dobrote" nekog rezonantnog kruga označen je recipročnom vrijednošću faktora prigušenja

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{bez dimenzija})$$

Neki rezonantni krug ima utoliko višu "dobrotu" u koliko je manje prigušenje (posebni mjerni instrument: Q-metar, za mjerenje dobrote oscilatornog kruga).

Strujna rezonancija

Ako su struja i napon u fazi, onda je postignuta rezonancija za strujni krug kao na slici. Struja I je u stvari suma dvaju paralelnih struja I_1 i I_2 i dobije se geometrijskim zbrajanjem parcijalnih struja.



Kako detaljna ispitivanja pokazuju, rezonantna struja leži u blizini strujnog minimuma. Za strujne krugove sa malim omskim otporom R je strujni minimum skoro već rezonantna struja: $\varphi = 0$; $I_r \approx I_{\min}$.

Za spoj kao na slici, važe ova razmatranja:

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \bar{I}_a + \bar{I}_r = \bar{U} (G + jB) = \\ &= U \left[\left(\frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} \right) + j \left(\frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} - \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} \right) \right]\end{aligned}$$

U slučaju rezonancije, kroz paralelni spoj teče samo aktivna struja $\bar{I}_a = \bar{U}G$ a reaktivna struja $\bar{I}_r = \bar{U}jB = 0$. Ovo nastupa kad je $B = 0$. Uvjetna jednačba strujne rezonancije je:

$$B = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} - \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = 0$$

Ako se jednačba svede na isti nazivnik i ako je brojnik nula (da bi cijela vrijednost razlomka bila nula), onda je

$$\frac{1}{\omega C} \left[R_1^2 + (\omega L)^2 \right] - \omega L \left[R_2^2 + (\frac{1}{\omega C})^2 \right] = 0$$

Odavde se uzima i računa ona vrijednost koju treba mijenjati za postizanje rezonancije. Najčešće je to frekvencija ω_r , uz zadate R , L i C . Ako se jednačba riješi po $\omega = \omega_r$ i proširi sa $(\omega_r C)^2$ dobije se

$$\omega_r C \left[R_1^2 + (\omega_r L)^2 \right] - \omega_r L \left[\omega_r^2 C^2 R_2^2 + 1 \right] = 0$$

kraćenjem sa ω_r dobije se kvadratna jednačba

$$\omega_r^2 L^2 C - \omega_r^2 LC^2 R_2^2 + CR_1^2 - L = 0$$

Odavde rezonantna frekvencija f_r za paralelni spoj je:

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L - CR_1^2}{CL(L - CR_2^2)}}$$

Ako se uzmu u obzir oba omska otpora, odnosno $\bar{Z}_1 = R_1 + j \omega L$ i $\bar{Z}_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C}$ onda su za slučaj rezonancije napon i struja u fazi pa je član jB u jednađbi (1) jednak nuli, i izraz za rezonantnu struju je

$$I_r = U \left[\frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} \right]$$

Ako se izraz

$$\frac{1}{R_2^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$

zamjeni sa

$$\omega^2 LC \frac{1}{R_1^2 + (\omega L)^2}$$

(iz uvjetne jednađbe za rezonanciju, rješenjem po

$$\frac{1}{R_2^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$

dobija se rezonantna struja

$$I_r = U \left[\frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \omega^2 LC \frac{1}{R_1^2 + (\omega L)^2} R_2 \right] = U \frac{R_1 + R_2 \omega^2 LC}{R_1^2 + (\omega L)^2}$$

Interesantan je slučaj kad se omski otpori zanemare, tj. kad je $R_1 \ll \omega L$ a R_2 praktično jednak nuli (kondenzator bez gubitaka).

Rezonantna frekvencija je

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

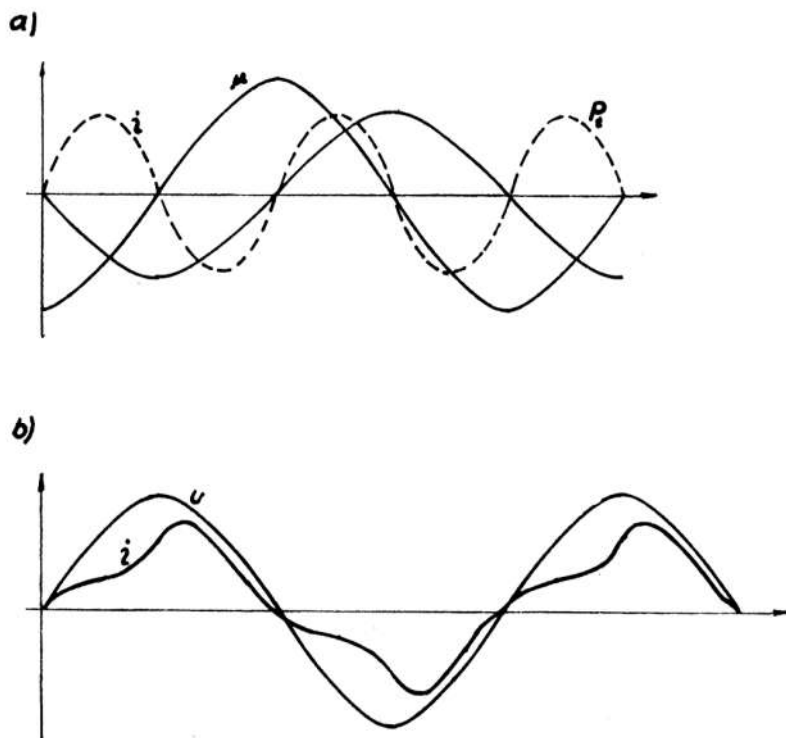
dakle ista kao i kod serijske rezonancije. Odavde se dobije rezonantna struja

$$I_r = U \frac{R_1}{(\omega L)^2} = U \frac{R_1}{(\omega L) \left(\frac{1}{\omega C}\right)} = U \frac{CR_1}{L}$$

Faktor $\frac{CR_1}{L}$ je radna vodljivost G a otpor $R_s = \frac{1}{G} = \frac{L}{CR_1}$ naziva se "rezonantni zaporni otpor" (jer je dimenzija $\frac{L}{CR_1} [\Omega]$).

24. PRIGUŠNICE I TRANSFORMATORI

Svitci bez željeza ili sa željeznom jezgrom, kao samostalni aparati veoma često se primjenjuju u elektrotehnici i elektronici zbog njihovog induktivnog otpora $\omega L = 2\pi fL$ koji je ovisan o frekvenciji. Ako se na svitak bez željeza narine sinusni napon, onda on izaziva sinusnu struju (a). Kod svitka sa željezom, sinusni napon izaziva "izobličenu struju" koja manje ili više odstupa od sinusnog oblika. Uzrok leži u pojavama magnetskog zasićenja željeza i histereze.



Kad se svitak priključi na izmjenični napon, onda kroz njega teče izmjenična struja koja opet izaziva izmjenični magnetski tok. Da bi se odredilo kakav vremenski razvoj ima izmjenični magnetski tok, treba uzeti u obzir da izmjenični tok inducira u svitku EMS samoindukcije

$$e_L = - N \frac{d\phi_t}{dt}$$

Ako se zanemari omski otpor R svitka, onda se e_L suprostavlja samo narinutom naponu U . Po 2. K.Z. za "električnu ravnotežu" treba da je: $u + e_L = 0$. Ako je $u = u_m \sin \omega t$ a

$$e_L = - N \frac{d\phi_t}{dt}, \quad \text{onda je}$$

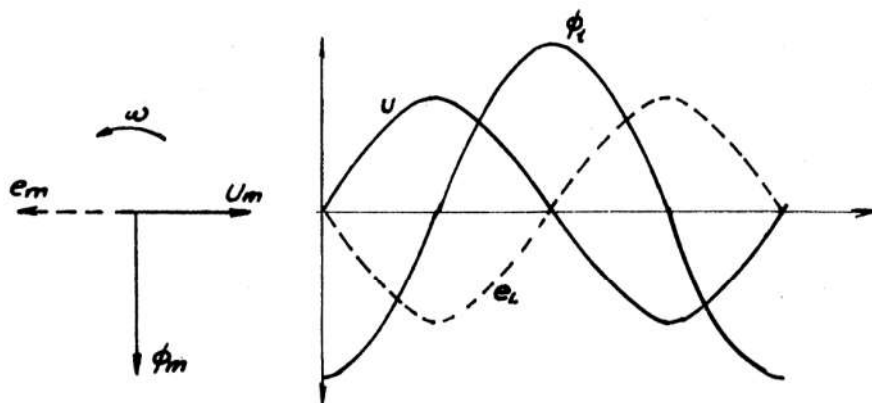
$$u_m \sin \omega t = N \frac{d\phi_t}{dt}$$

Odavde je

$$d\phi_t = \frac{u_m}{N} \sin \omega t dt$$

pa se integracijom dobije

$$\phi_t = \frac{u_m}{N} \int \sin \omega t dt = \frac{u_m}{N\omega} (-\cos \omega t) = \frac{u_m}{N} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$



Magnetski tok u svitku (kod narinutog sinusnog napona) ima takodjer sissusni oblik i zaostaje za 90° iza naponskog vala.

Oblik strujnog vala

Struja i izaziva magnetski tok ϕ . Treba ispitati kakvu struju treba zavojnica (svitak) za vrijeme jednog perioda za svaku trenutnu vrijednost magnetskog toka ϕ_t . Ove se strujne veličine mogu naći iz krivulje magnetiziranja $\phi = f(i)$ odnosno $B = f(i)$ kao i iz krivulja histereze.

Razlikuju se tri slučaja:

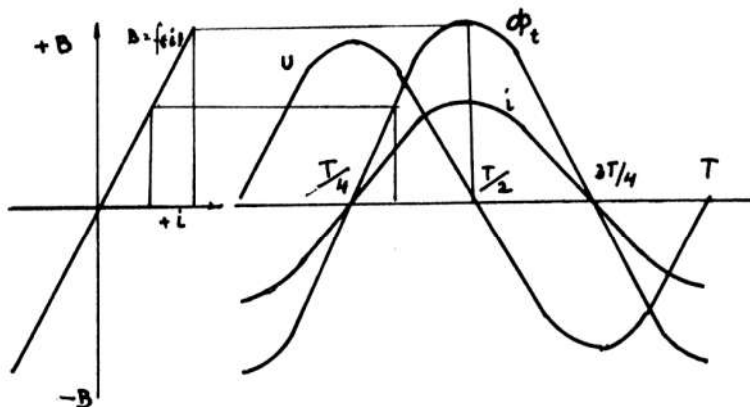
1) svitak bez željeza - sa pravolinijskom magnetskom karakteristikom ili svitak sa željezom sa magnetskom karakteristikom bez zakrivljenosti.

2) svitak sa željezom, sa jakim zasićenjima ali sa zanemarivim gubicima u željezu.

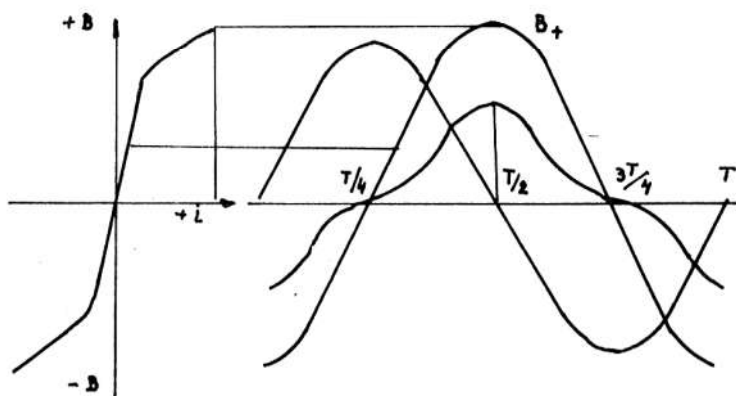
3) svitak sa željezom, sa jakim zasićenjem i znatnim gubicima (histereza, vrtložne struje).

Na dijagramu se traže za određene tačke B_t - vala potrebne i-vrijednosti na krivulji magnetiziranja i unose u dijagram pa se tako dobiju ordinate i-krivulje.

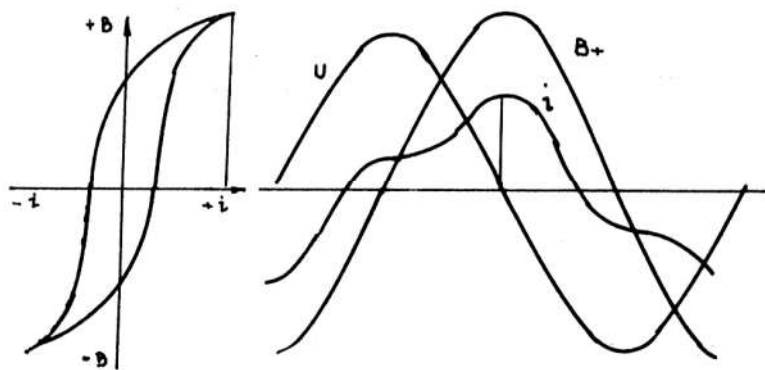
Za prvi slučaj važi ovaj diagram: struja je takodjer sinusnog oblika, u fazi sa magnetskim tokom, a zaostaje za 90° iza napona.



Za drugi slučaj važi ovaj dijagram: oblik strujnog vala



odstupa od sinusoide, ali je simetričan za četvrtinu periode i u fazi sa B_t valom.

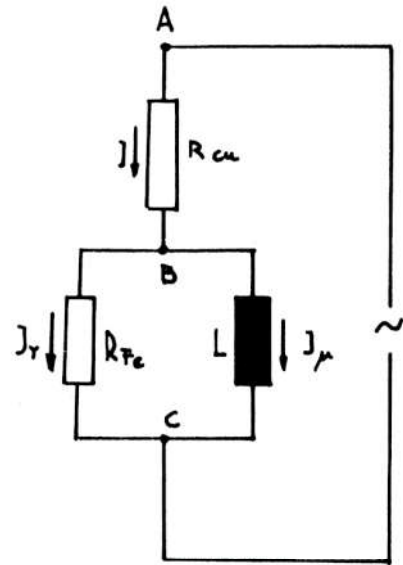


Za treći slučaj važi ovaj dijagram: oblik struje još jače odstupa od sinusnog oblika i pomaknut je u fazi za B_t -valom. Krivulja struje nije simetrična u četvrt perioda nego je još samo simetrična (kao u zrcalu) u poluvalu.

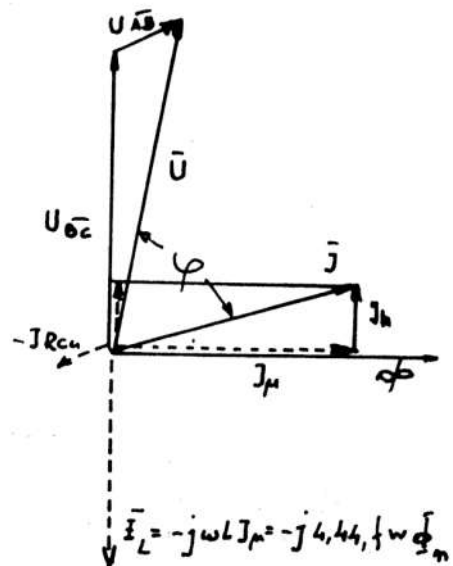
Treba napomenuti da već kod malog zračnog raspora u željeznoj jezgri prigušnice (između jarma i kotve), izobličenje strujnog vala skoro sasvim nestaje i dolazi do skoro sasvim sinusnog vala. Zračni raspor "čisti" strujnu krivulju od jakih izobličenja.

Nadomjesna shema prigušnice

Ako se uzme u obzir omski otpor namotaja R_{Cu} i induktivni otpor ωL prigušnice, onda je nadomjesna shema ovakva: R_{Fe} predstavlja gubitke topline u željezu ($I_r R_{Fe}$) a $\omega L I_\mu$ gubitke na magnetiziranje željeza.



Na versorskom dijagramu je prikazana medjusobna ovisnost svih napona i struja. Napon U_{BC} izmedju tačaka BC nadomjesne sheme, povećava se geometrijskim zbrajanjem sa naponom U_{AB} koji je u fazi (paralelno nacrtan) sa versorom struje I . Ukupni narinuti napon na prigušnici U se razlaže na djelomične napone $U_{AB} = I R_{Cu}$ (gubici u bakru) i $U_{BC} = I_r R_{Fe}$ (gubici u željezu) odnosno $U_{BC} = j \omega L I_\mu$ (gubici za magnetiziranje) kao protuvrijednost za



EMS samoindukcije prigušnice, tj. $E_L = - j \omega L I_\mu$. Ako se stavi

$$L I_\mu = \frac{N \phi_m}{\sqrt{2}}$$

onda je

$$E_L = - j \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \phi_m$$

sa poznatim iznosom

$$E_L = 4,44 \text{ fN } \phi_m$$

Gubici u željezu

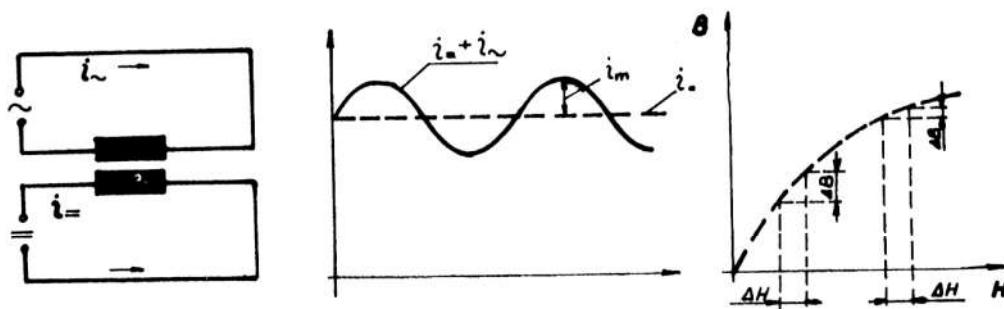
Gubici u željezu ovise o frekvenciji i magnetskoj indukciji. Važi približna relacija

$$v \approx v_{10} \left(\frac{B_m}{10000} \right)^2 K \quad [B - \text{u Gauss-ima}]$$

v_{10} su standardni gubici za $B = 10\,000$ G. Faktor K se uzima iz grafa ili tablice, a takodje i cjelokupni v . Za legirane limove 0,35 mm debljine i $B = 10\,000$ G, $v = 1,5$ W/kg.

Predmagnetiziranje istosmjernom strujom

Naročiti efekti se mogu postići ako se uz svitak prigušnice koji vodi izmjeničnu struju, postavi na isto željezno jezgro još i drugi svitak kroz koga se pušta istosmjerna struja. Ova protjecanja se superponiraju i nastaje jedna mješovita struja.



Odnosi izmjenične i istosmjerne struje se uzimaju tako da je izmjenična komponenta znatno manja od istosmjerne. Mješovita struja oscilira sa amplitudom i_m oko srednje vrijednosti $i_{=}$. Najveća razlika između maksimalne i minimalne trenutne vrijednosti $2 i_m$ naziva se "kolebanje" (njihanje). Na krivulji magnetiziranja se vidi da će na odgovarajući način i jačina mag-

netaskog polja kolebati, a tome onda pripada i odgovarajuće kolebanje indukcije B.

Već prema tome da li je udio ustosmjerne struje $i_{\text{=}}$ relativno malen ili velik pripada kolebanju ΔH veće ili manje kolebanje ΔB . Za odnos, u graničnom slučaju diferencijalnih prirasta dB/dH mjerodavno je zasićenje željeza. Za napon na zavojnici koja se napaja izmjeničnom strujom, mjerodavna je EMS samoindukcije $I \omega L$. Prema zakonu indukcije ona iznosi

$$e_L = - N \frac{d\Phi}{dt} = - N \frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt}$$

gdje je

$$L = N \frac{d\Phi}{di}$$

induktivitet zavojnice kroz koji teče izmjenična struja. Zbog toga što je $\Phi = B S$, a $i = H l$ važi

$$L \approx \frac{dB}{dH}$$

pa zbog toga induktivitet na mjestu kolebanja ovisi o kvocijentu dB/dH odnosno $\Delta B / \Delta H$.

Na ovaj način dobija se mogućnost da se može mjenjati induktivitet L zavojnice kroz koju teče izmjenična struja tako da se podešava predmagnetiziranje istosmjernom strujom. Ovim se postiže promjena induktiviteta L jednostavnom promjenom jačine struje predmagnetiziranja $i_{\text{=}}$.

Najvažnija primjena ove pojave je za "magnetska pojačala". Ona se zasnivaju na tome da se malom promjenom istosmjerne struje predmagnetiziranja postiže velika promjena izmjenične struje. Daljnu primjenu nalazi ova pojava u regulacijskim magnetskim pojačalima - transduktorima.

Transformator

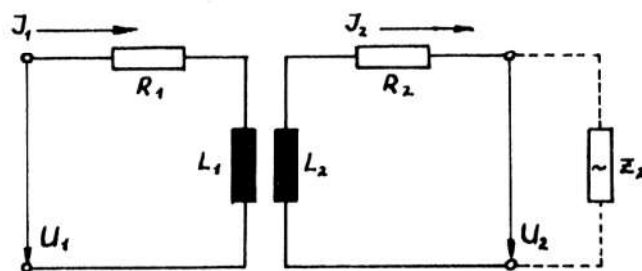
Transformator se sastoji od dvije električno odjeljene grupe zavojnica koje su namotane u istom smjeru oko jezgra od željeza (ili uopće bez jezgre). Zavojnice se nazivaju primarna i sekundarna. U energetici dolaze isključivo transformatori sa željeznom jezgrom, dok u elektronici dolaze i oni bez željezne jezgre (zračni transformatori).

Ako izmjenični napon U_1 treba biti transformiran na neki drugi iznos, onda se taj napon narine na transformatorsku primarnu zavojnicu koja ima N_1 zavoja. U ovoj zavojnici nastaje izmjenični magnetski tok ϕ_1 i time izmjenična EMS E_1 sa efektivnom vrijednosti

$$E_1 = 4,44 f N \phi_1$$

Ova EMS drži ravnotežu sa narinutim primarnim naponom, tako da se, u prvom približenju, može pisati

$$U_1 \approx E_1$$



Izmjenični tok ϕ_1 koji nastaje u primarnoj zavojnici obuhvaćen je samo djelomično od druge zavojnice N_2 : ϕ_{12} . U slučaju transformatora sa željezom, praktično je $\phi_1 = \phi_2$ jer skoro sav tok ϕ_1 ide željeznom jezgrom i biva obuhvaćen od zavojnice N_2 .

U sekundarnoj zavojnici N_2 ovaj djelomični tok ϕ_{12} izaziva odgovarajući EMS suprotne indukcije

$$e_2 = - N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt}$$

sa efektivnom vrijednosti

$$E_2 = 4,44 f N_2 \phi_{12}$$

Oдавде imamo odnos primarne i sekundarne EMS

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{4,44 f N_1 \phi_1}{4,44 f N_2 \phi_{12}} = \frac{N_1 \phi_1}{N_2 \phi_{12}}$$

Ako je rasipanje maleno (kao kod transformatora sa željeznom jezgrom), odnose se primarni i sekundarni napon transformatora približno kao brojevi zavoja obje zavojnice.

$$\frac{E_1}{E_2} \approx \frac{N_1}{N_2}$$

Dovedenu snagu $P_1 = U_1 I_1$ bi trebalo bez gubitaka prenijeti na neki drugi napon U_2 tako da ostane

$$P_1 = P_2 \quad \text{ili} \quad U_1 I_1 = U_2 I_2$$

Zbog $\frac{U_1}{U_2} \approx \frac{N_1}{N_2}$ izlazi da je

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{U_2}{U_1} \approx \frac{N_2}{N_1}$$

odnosno da se struje odnose obrnuto proporcionalno prema broju zavoja.

Sekundarna zavojnica radi sa svojim induciranim naponom $E_2 \approx U_2$ na neki potrošač impedancije Z_2 i kroz nju teče struja

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_2}$$

Ova sekundarna struja stvara sama na sekundarnoj zavojnici jedan magnetski tok ϕ_2 koji sa svoje strane prolazi kroz primarnu zavojnicu sa djelomičnim tokom ϕ_{12} i djeluje na suprot toku ϕ_1 . Pri opterećenom transformatoru nastaje međusobna obostrana izmjenična indukcija primarne i sekundarne zavojnice. Magnetski tok koji je zajednički objema zavojnicama određuje se iz superpozicije obiju struja I_1 i I_2 odnosno iz odgovarajućih protjecanja $N_1 I_1$ i $N_2 I_2$. Pri tome su obje struje približno u protufazi.

Već prema tome da li je transformator sa željeznom jezgrom ili bez nje, može se govoriti o faktoru sprege K (vidi poglavlje o medjuindukciji): to je mjera za koliko se proizvedeni tokovi ϕ_1 i ϕ_2 razlikuju od iskorištenog toka ϕ_{12} odnosno ϕ_{21} . Ta su dva faktora sprege definirana kao

$$K_1 = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} ; \quad K_2 = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

pa je ukupni faktor sprege K izražen sa

$$K = \sqrt{K_1 K_2} = \sqrt{\frac{\phi_{12}}{\phi_1} \frac{\phi_{21}}{\phi_2}}$$

ili koristeći izraz za koeficijent medjuindukcije

$$\phi_{12} = \frac{M_{12} i_1}{N_2} ; \quad \phi_{21} = \frac{M_{21} i_2}{N_1} ; \quad \phi_1 = \frac{L_1 i_1}{N_1} ; \quad \phi_2 = \frac{L_2 i_2}{N_2}$$

možemo napisati

$$K = \sqrt{\frac{M_{12} M_{21}}{L_1 L_2}}$$

i uz pretpostavku da je $M_{12} = M_{21} = M$, glasi jednađba za faktor sprege

$$K = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Za transformator bez rasipanja, gdje važi $\phi_{12} = \phi_1$ i $\phi_{21} = \phi_2$ faktor sprege je $K = 1$. Ovo je skoro sasvim postignuto kod transformatora sa željeznom jezgrom.

Rasipni tokovi transformatora

Da bi se računski moglo obuhvatiti rasipne tokove u transformatoru, definiran je pojam rasipnog koeficijenta -- "koeficijent rasipanja"

$$\sigma = \frac{\phi_1 \phi_2 - \phi_{12} \phi_{21}}{\phi_1 \phi_2}$$

Ovo je samo jedna od mnogih definicionih jednadžbi za koeficijent rasipanja.

Za idealan transformator bez rasipanja, gdje je $\phi_1 = \phi_{12}$ i $\phi_2 = \phi_{21}$, gornji izraz je takodje nula, gdje je ϕ_{10} i ϕ_{20} ravno nuli.

Sa upotrebom faktora sprege, postoji veza izmedju faktora sprege i koeficijenta rasipanja

$$\sigma = \frac{\phi_1 \phi_2}{\phi_1 \phi_2} - \frac{\phi_{12} \phi_{21}}{\phi_1 \phi_2} = 1 - K^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

Rasipni induktiviteti

Obje protu-induktivno spregnute zavojnice imaju dakle korisne i rasipne tokove i njima pripadajuća polja. Ovim poljima se mogu pripisati odgovarajući magnetski otpori R_m odnosno magnetske vodljivosti Λ . Kako su djelomični tokovi u paralelnom spoju, bolje je upotrebiti vodljivosti koje se

moгу jednostavno zbraјati. Tokovi imaju ove vodljivosti:

Ukupni tokovi	ϕ_1, ϕ_2	vodljivosti	Λ_1, Λ_2
Korisni tokovi	ϕ_{12}, ϕ_{21}	"	$\Lambda_{12}, \Lambda_{21}$
Rasipni tokovi	ϕ_{10}, ϕ_{20}	"	$\Lambda_{10}, \Lambda_{20}$

Sa ovim oznakama, mogu se stvoriti odgovarajući induktiviteti.

"Rasipni induktivitet" L_{10} definiran je

$$L_{10} = N_1^2 \Lambda_{10} \quad \text{i} \quad L_{20} = N_2^2 \Lambda_{20}$$

Iz zbroја vodljivosti

$$\Lambda_{10} = \Lambda_1 - \Lambda_{12} \quad \text{i} \quad \Lambda_{20} = \Lambda_2 - \Lambda_{21}$$

dobije se

$$L_{10} = N_1^2 \Lambda_{10} = N_1^2 \Lambda_1 - N_1^2 \Lambda_{12} = L_1 - M_{12} \frac{N_1}{N_2}$$

i odgovarajuća tome

$$L_{20} = L_2 - M_{21} \frac{N_2}{N_1}$$

Rasipni induktiviteti se veoma korisno upotrebljavaju pri proračunavanju strojeva izmjenične struje.

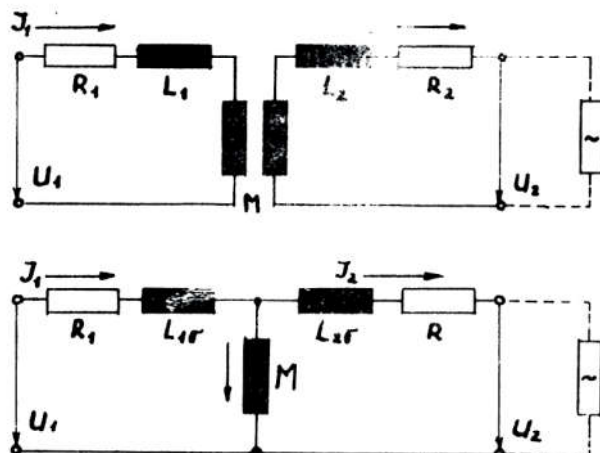
Nadomjesni spoj (shema) transformatora bez željeza

Svrha svakog nadomjesnog spoја je da se јasno i vјerno obuhvate odnosi napona i struje u nekom sklopu, pri promjenama opterećenја ili pri promјeni pojedinih članova sklopa, te da se postavе јednostavne јednadžbe za napon i struju koje su pogodne za računanje.

Ovdje će biti pokazan nadomjesni spoj za transformator bez željeza kod koga su induktiviteti konstantni (što

nije slučaj za transformator sa željeznom jezgrom (induktiviteti promjenljivi).

Na shemi a) je prikazano koji sve otpori sudjeluju na primarnoj i sekundarnoj strani: zbog podjele toka na korisni i rasipni tok, izvršena je i podjela otpora na ωL_{σ} i ωM . Na shemi b) se vidi nadomjesni spoj transformatora bez



željeza, koji se svodi na teoriju četveropola, i to za dati slučaj, na simetrični T-spoj.

Možemo odmah postaviti jednačbe, uzimajući u obzir induktivne otpore ωL_{σ} i ωM . Ovdje će biti pokazane jednačbe napona i odnosi između podataka nadomjesnog spoja i stvarnog spoja. Radi jednostavnijeg računanja, uzima se da je "prenosni odnos" N_1/N_2 za ovaj slučaj jedinica: $N_1/N_2 = 1$. Kao smjer obilaženja petlje uzet je smjer desnog vijka, pa radi toga možemo postaviti ove jednačbe:

$$- \bar{U}_1 + R_1 \bar{I}_1 + j \omega L_1 \bar{I}_1 - j \omega M \bar{I}_2 = 0$$

$$+ U_2 + R_2 \bar{I}_2 + j \omega L_2 \bar{I}_2 - j \omega M \bar{I}_1 = 0$$

U ovim jednačbama samoinduktivno djelovanje struja I_1 i I_2 na induktivitetima L_1 odnosno L_2 dolaze do izražaja u faktorima $j \omega L_1 I_1$ odnosno $j \omega L_2 I_2$. Ako se uzme u obzir još da je

$$L_{1\sigma} = L_1 - M_{12} \frac{N_1}{N_2} \quad \text{i} \quad L_{2\sigma} = L_2 - M_{21} \frac{N_2}{N_1}; \quad \frac{N_1}{N_2} = 1,$$

onda se može pisati:

$$- \bar{U}_1 + R_1 \bar{I}_1 + j\omega (L_{1\sigma} + M) \bar{I}_1 - j\omega M \bar{I}_2 = 0$$

$$+ \bar{U}_2 + R_2 \bar{I}_2 + j\omega (L_{2\sigma} + M) \bar{I}_2 - j\omega M \bar{I}_1 = 0$$

Ako se sa M dobije se:

$$- \bar{U}_1 + (R_1 + j\omega L_1) \bar{I}_1 + j\omega M (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) = 0$$

$$+ \bar{U}_2 + (R_2 + j\omega L_2) \bar{I}_2 + j\omega M (\bar{I}_2 - \bar{I}_1) = 0$$

To su jednačbe četveropola na shemi b).

Diagram napona opterećenog transformatora

Veoma pregledan prikaz odnosa u transformatoru se dobije ako se versorski prikažu pojedini naponi i struje i njihova medjusobna ovisnost. Već na primjeru prigušnice je bio prikazan takav versorski dijagram. Ovdje ćemo pokazati dijagram napona opterećenog transformatora sa željeznom jezgrom.

Pri crtanju versorskog dijagrama, pretpostavlja se da je $N_1/N_2 = 1$ pa je onda $E_2 = E_1$ i dijagram postaje jednostavniji i jasniji a ne mijenja se ništa rad samog transformatora. Prenosni faktor za struje je N_2/N_1 a za sekundarni omski i induktivni otpor je taj faktor

$$\frac{N_1}{N_2} : \frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

dok se medjuinduktivitet reducira sa $\frac{N_1}{N_2}$

EMS sekundara E_2 koju inducira tok u sekundaru je u fazi sa E_1 jer obje inducira isti tok. Kut faznog pomaka φ_2 između struje sekundara I_2 i napona U_2 na krajevima sekundara određen je svojstvima potrošača i vanjskog strujnog kruga.

Potrebna komponenta EMS $E_2 (I_1 R_2)$ za savladjivanje omskog otpora sekundarnog namotaja u fazi je sa strujom I_2 , a potrebna komponenta $E_2 (I_2 \omega L_2)$ za savladjivanje induktivnog otpora uslijed rasipanja sekundarnog namotaja, prethodi ispred struje za 90° .

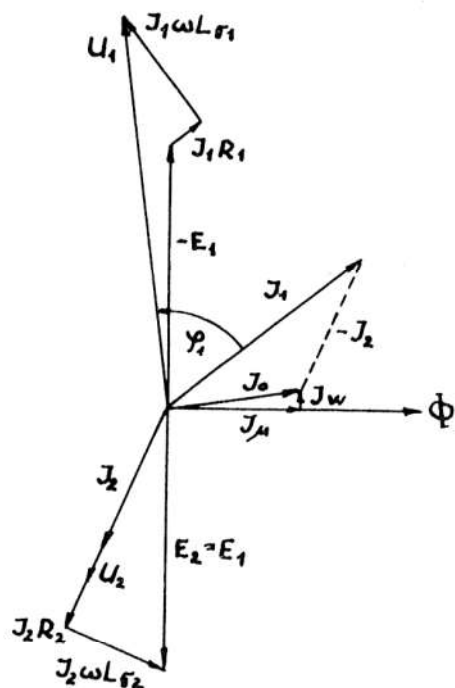
Diagram se počinje crtati od sekundarne struje I_2 . Ovdje će biti prikazana dva diagrama: za omsko opterećenje i za induktivno opterećenje transformatora.

a) Diagram za omsko opterećenje

Prvo nanesimo struju sekundara I_2 na dole. Fazni pomak između I_2 i U_2 je nula pa je U_2 istog smjera kao i I_2 . Na U_2 se doda pad napona $I_2 R_2$ u fazi a na to induktivni pad napona $I_2 \omega L_2$ okomito na I_2 (prethodi za 90°). Tako se dobije E_2

koji inducira glavni magnetski tok Φ u namotaju sekundara. U istom smjeru sa E_2 leži i E_1 . Magnetski tok stoji okomito na E_1 odnosno na E_2 i prethodi za 90° . Struja magnetiziranja se dijeli u dvije

komponente: I_μ i I_w . I_μ je u fazi sa tokom (komponenta magnetskih gubitaka) a I_w je okomito na I_μ (prethodi za 90°) i predstavlja toplinske gubitke. Suma ovih obaju struja daje ukupnu struju magnetiziranja I_0 (geometrijsko zbrajanje). Zatim, geometrijskim zbrajanjem I_0 sa $(-I_2)$ dobijemo struju u primarnom namotaju I_1 .



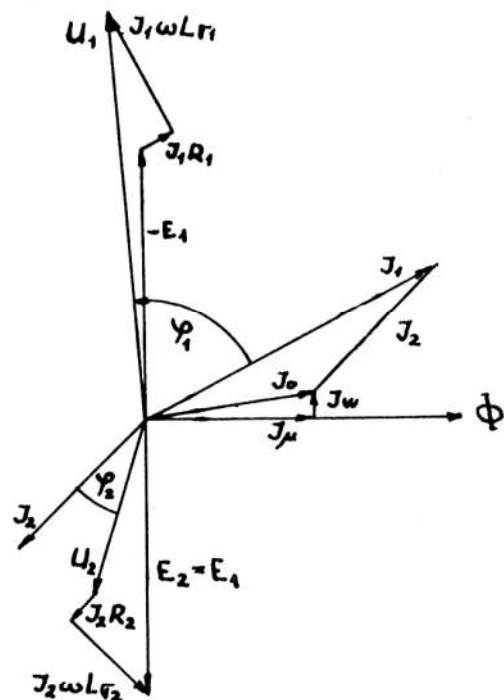
Okomito na ϕ (prema gore) nanosimo EMS primarnog namotaja ($E_2 = E_1$): to je dio napona koji je potreban za savladjivanje E_1 . Tome se dodaje omski pad napona u primaru (u fazi sa strujom primara I_1) a na to se dodaje induktivni pad napona uslijed rasipanja primara $I_1 \omega L_1$ (okomito na I_1 - prethodi struji za 90°). Tako se geometrijskim zbrajanjem dobije napon primarnog namotaja U_1 . Fazni kut pomaka izmedju struje I_1 i napona U_2 primara je φ_1 , tako da struja I_1 zaostaje za φ_1 iza napona.

Interesantno je da i pored fazne jednakosti struje i napona na sekundarnoj strani, nastupa fazni pomak izmedju struje i napona na primarnoj strani i to radi struje magnetiziranja i rasipnih tokova na oba namotaja.

b) Diagram za induktivno opterećenje

Ovaj diagram važi za slučaj kad je sekundarni namotaj opterećen vanjskim potrošačem koji ima pretežno induktivan karakter. U takvom slučaju struja u sekundaru I_2 zaostaje za naponom U_2 za kut φ_2 . Ukoliko je ovaj fazni pomak u sekundaru veći, u toliko je veći i fazni pomak φ_1 u primarnom namotaju izmedju primarne struje I_1 i primarnog napona U_1 .

Diagram se crta na sasvim isti način kao i za slučaj omskog opterećenja. Razlika je samo u položaju omskog pada napona u sekundaru $I_2 R_2$ koji je u fazi sa strujom I_2 i mora se nanjeti paralelno sa



I_2 . Induktivni pad napona rasipnog toka u sekundaru $I_2 \omega L_2$ se nanese na $I_2 R_2$ okomito. Geometrijska suma daje EMS E_2 .

Ostalo je kao i na prethodnom diagramu. Diagram se može uprostiti ako se sekundarni dio

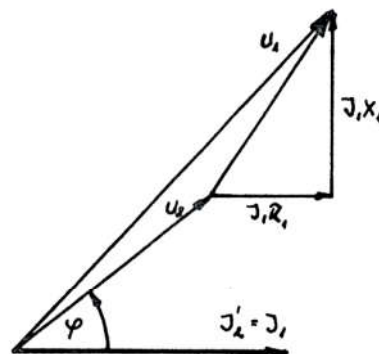
diagrama preklopi preko primarnog,

za slučaj nominalno opterećenog

transformatora. U tom slučaju

struje I_1 i I_2 padaju skupa,

a $\varphi_2 \approx \varphi_1$



Ovaj tip diagrama postaje osobito

prikladan za predstavljanje reži-

ma kratkog spoja transformatora.

Smatra se da je sekundar spojen u kratko a na primaru se

postepeno podiže napon sve dok kroz kratkospojeni sekundar

teče nominalna struja. Visina takvog primarnog napona naziva

se "napon kratkog spoja" U_k .

U tom slučaju, $U_2 = 0$ pa se diagram reducira na jednostavan trokut $I_1 R - I_1 X, - U_k$.

U tom slučaju važe relacije:

$$U_{1k} = I_1 Z_k ; U_{1k} = I_1 (R + jX) = U ; Z_k = \frac{U_k (\%) U_1}{100 \sqrt{3} I_1}$$

a napon kratkog spoja se obično izražava u procentima nominalnog napona

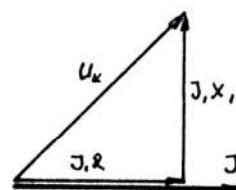
$$U_k = \frac{U_{1k}}{U_1} 100 [\%]$$

Ovaj podatak je od osobite važnosti za

konstrukciju transformatora i iznosi oko

4,5% za manje transformatore (do 500 kVA)

dok se kod velikih transformatora (reda



veličine 100 MVA) penje do 15% te predstavlja jedan od osnovnih parametara za paralelni rad transformatora

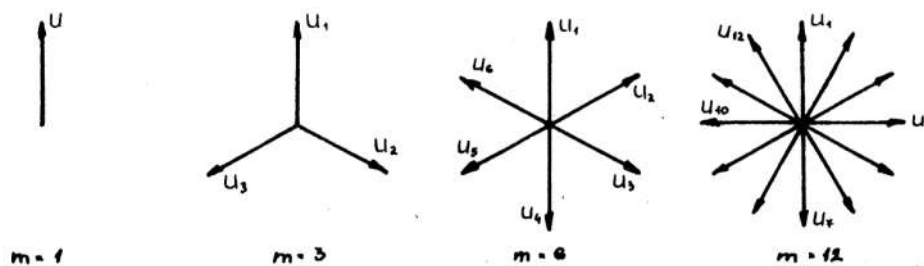
25. VIŠEFAZNE IZMJENIČNE STRUJE

Simetrični višefazni sistemi

Danas se skoro isključivo upotrebljava izmjenična struja za distribuciju i prenos električne energije radi sposobnosti transformacije napona. Međutim, jedan energetska sistem je moguće ostvariti i kombinacijom više izmjeničnih struja čiji su naponi međusobno pomaknuti u fazi. Osobitu karakteristiku imaju ovakve struje ako se posmatra rezultirajuće magnetsko polje ovih spregnutih struja - okretno magnetsko polje. O tome će kasnije biti riječi.

Fazni pomak medju izmjeničnim strujama se postiže na taj način da se namotaji u generatoru koji proizvode napon prostorno rasporede po opsegu generatora na neki odredjeni način. Ako su ovako dobijeni naponi međusobno pomaknuti za isti kut, onda se ovakav sistem naziva "simetričan".

U principu je moguć sistem sa bilo kojim brojem napona ili tzv. "faza". Praktično značenje imaju danas samo sistemi čiji je broj faza djeljiv sa tri.



Naponski diagrami pokazuju razne sisteme. Jednostavni sistem sa $m=1$ naziva se "jednofazni". Najvažniji je trofazni sistem ($m=3$).

Namotaji generatora (a i motora i potrošača) mogu biti međusobno spojeni na razne načine. Najvažnija su dva načina: spoj u poligon (prsten) i spoj u zvjezdu.

Trofazni sistem

Namotaj je jednolično rasporedjen po opsegu generatora i međusobno razmaknut (kod dvopolnog stroja) za $360^\circ/3 = 120^\circ = 2\pi/3$.

Vektorski zbroj momentalnih vrijednosti jednak je nuli.

U eksponencijalnom obliku glasi operator sistema:

$$a = e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ ; \text{ pa je}$$

$$a = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$a^2 = e^{j240^\circ} = -\frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

iznosi su: $|a| = 1 ; |a^2| = 1$ pa je

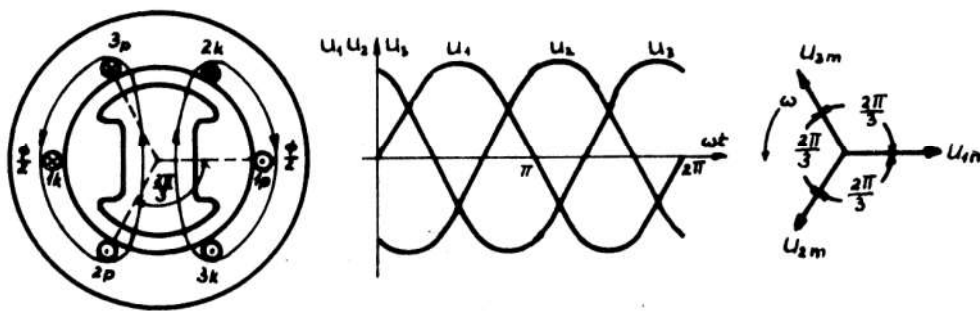
$$1 + a + a^2 = 0$$

U simetričnom sistemu važi:

$$\bar{U}_R = a \bar{U}_S = a^2 \bar{U}_T$$

$$\bar{U}_{RS} = a \bar{U}_{ST} = a^2 \bar{U}_{TR}$$

U svakom namotaju - "fazi" inducira se "fazni napon" i na linijskom diagramu se vidi njihov međusobni položaj valova napona:

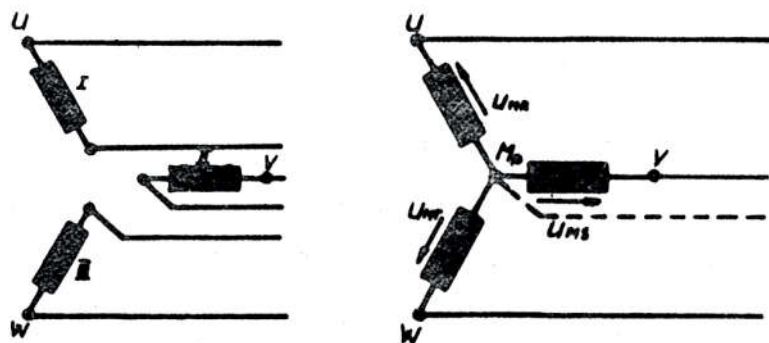


$$u_1 = u_{1m} \sin(\omega t) ; \quad u_2 = u_{2m} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) ;$$

$$u_3 = u_{3m} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Prostornom pomaku namotaja odgovara isti pomak mjereno električnim stupnjevima ($^{\circ}\text{el}$) za vremenski fazni pomak naponskih valova. Uobičajeno je da se šematski trofazni sistemi prikazuju aksijalno namotanim svitcima čije su osi namatanja međusobno pomaknute za 120° . Početci svitaka se označuju sa U, V, W a krajevi X, Y, Z.

Moguće je spojiti namotaje nezavisno ali je moguće i udružiti ih na taj način da se spoje u serijski protu-spoj: ovdje su sva tri kraja namotaja spojena u jedno čvorište - zvijezdište, ili neutralnu tačku, nul tačku - oznaka M_p .

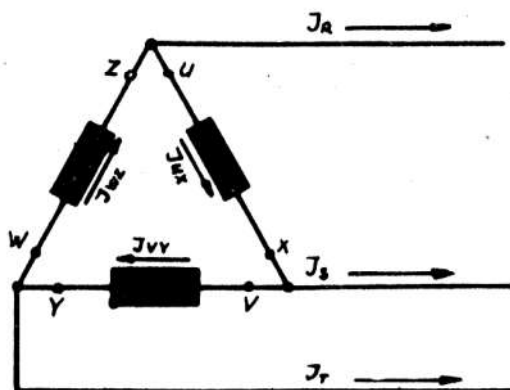


Ovakav spoj se naziva spoj "u zvijezdu". Takodje je moguć spoj u seriji svih triju namotaja: kraj prvog namotaja se spoji sa početkom drugog, kraj ovog sa

početkom trećeg a kraj ovog sa početkom prvog. Tako nastaje zatvoreni poligon - trokut. A

Ako su fazni naponi sinusnog oblika onda u spoju "u trokut"

ne može nastati kratki spoj jer je rezultirajući napon triju faznih napona jednak nuli. Trofazni sistem spregnut u zvijezdu ili u trokut stvara jedno okretno magnet-



sko polje ako se u sistem namotaja pošalju sinusne struje sa međusobnim vremenskim pomakom od 120° (primjena kod asinhronih motora, najjednostavnije gradjen, robustan i jeftin - najvažnija primjena trofaznog sistema - Tesla 1889).

Kao što se spoj u trokut i zvijezdu može izvesti kod generatora tako je to moguće izvesti i kod potrošača.

Kod spoja u zvijezdu, razlikuju se fazni naponi (između R, S, T sa jedne strane i M_p sa druge) i linijski naponi (između R i S, S i T, T i R). Kod spoja u trokutu, naprotiv razlikuju se fazne struje i linijske struje (dok su fazni i linijski naponi jednaki).

Simetrično opterećenje trofaznog sistema

Po simetričnim opterećenjem se podrazumjeva spoj (u zvijezdu ili trokut) triju jednakih otpora po iznosu i fazi.

Standardne oznake za fazne napone U i fazne struje I su slijedeće: U_{UX} , U_{VY} , U_{WZ} , I_{UX} , I_{VY} , I_{WZ} , φ je fazni kut između U i I .

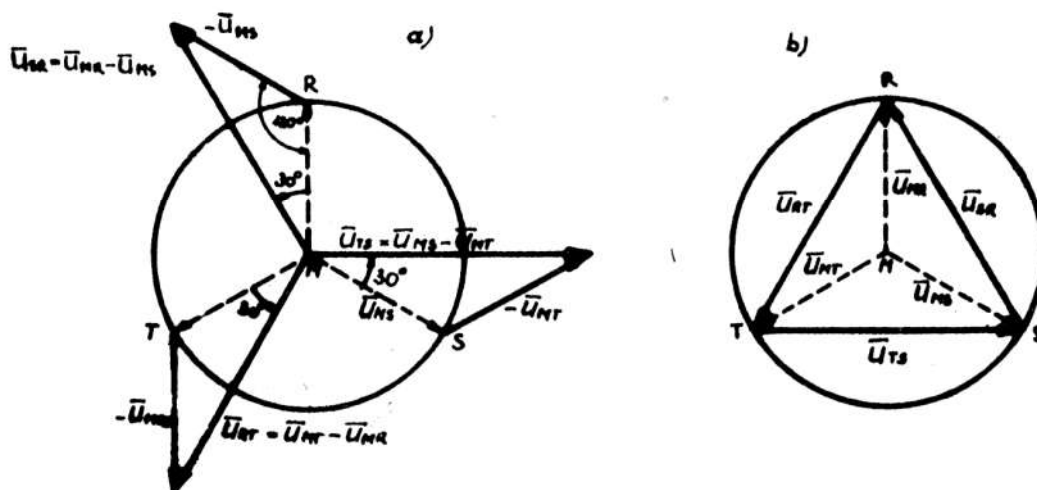
Za spoj u zvijezdu se uvode specijalne oznake. Za napone između linije i nul tačke: U_{MR} , U_{MS} , U_{MT} .

Kod spoja u zvijezdu, fazna struja i struja u priključnom vanjskomvodu (liniji) su jednake, ali zbog serijskog protuspoja napon između vanjskih linija je jednak geometrijskoj razlici faznih napona. Napon između vanjskih linija naziva se linijski napon U_L ili posebno U_{SR} , U_{RT} , U_{TS} .

Kod spoja u trokutu je napon između dviju vanjskih linija jednak faznom naponu, ali je struja u vanjskoj liniji (po l.K.Z.) rezultanta od geometrijske razlike struje dolaze i odlaze od jednog čvorišta trokuta: u vanjskoj liniji teče rezultirajuća struja I_L ili posebno I_R , I_S , I_T .

Naponski diagram spoja u zvijezdu

Polazi se od kompleksne jednadžbe $U_{MS} = U_{MR} e^{-j120^\circ}$ i $U_{MT} = U_{MS} e^{-j120^\circ}$ i U_{MR} . Iz ovih napona se sastoji naponska zvijezda. Ako se posmatra put počevši od vanjske linije S preko faze II, kroz nul-tačku pa preko faze I na vanjsku liniju R, onda treba proći fazu I u pozitivnom smjeru a fazu II u negativnom smjeru.



Otuda je napon među vanjskim linijama R i S, tj. $U_{RS} = U_{MR} - U_{MS}$, dakle geometrijsko oduzimanje vektora U_{MS} od referentnog vektora U_{MR} . Isto važi i za ostale napone:

$$\bar{U}_{TS} = \bar{U}_{MS} - \bar{U}_{MT} \quad \text{i} \quad \bar{U}_{RT} = \bar{U}_{MT} - \bar{U}_{MR}$$

Sva tri linijska napona U_{SR} , U_{TS} i U_{RT} su međusobno jednaki i svaki je pomaknut za 30° - prethodi - prema svom referentnom naponu.

Ako se općenito vanjski linijski napon označi U_L onda je:

$$U_L = 2 U \cos 30^\circ = 2 U \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} U$$

gdje je $U = U_{MR} = U_{MS} = U_{MT}$

Otuda je vanjski linijski napon zvijezde u simetričnom sistemu $\sqrt{3}$ puta veći od pripadnog faznog napona. Skica b) predstavlja pojednostavljeni naponski diagram.

Strujni diagram spoja u trokut

Pri simetričnom opterećenju su strujni versori $\bar{I}_{UX}$, $\bar{I}_{UY}$, $\bar{I}_{WZ}$ međusobno pomaknuti za 180° , pa se može pisati simbolične jednadžbe: referent-

na struja I_{UX}

$$I_{VY} = I_{UX} e^{-j120^\circ};$$

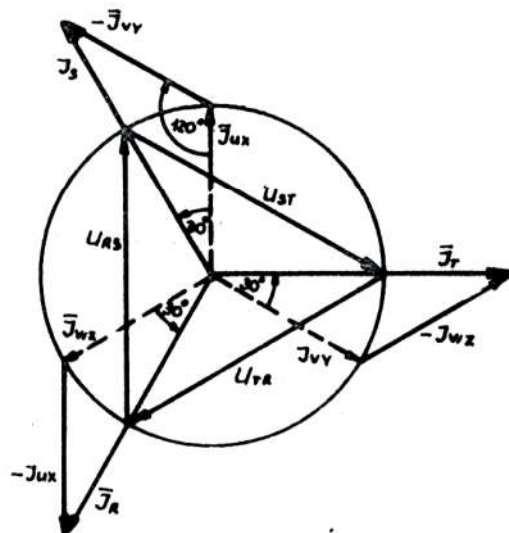
$$I_{WZ} = I_{VY} e^{-j120^\circ}$$

Otuda struja u liniji R je rezultanta odnosno geometrijska razlika:

$$\bar{I}_R = \bar{I}_{WZ} - \bar{I}_{UX} \quad (\text{po l.K.Z.})$$

Takodje važi analogno:

$$\bar{I}_S = \bar{I}_{UX} \quad \bar{I}_{VY} \quad \text{i} \quad \bar{I}_T = \bar{I}_{VY} - \bar{I}_{WZ}.$$



Linijske struje I_R , I_S i I_T su međusobno jednake i fazno pomaknute za 30° - prethode - prema referentnom versoru fazne struje.

Ako se linijska struja označi $I_R = I_S = I_T = I_L$ a odgovarajuća fazna struja sa I , onda važi:

$$I_L = 2 I \cos 30^\circ = 2 I \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} I$$

Struja u vanjskoj liniji kod spoja u trokut u simetričnom sistemu je veća $\sqrt{3}$ puta od pripadne fazne struje.

Pripadni linijski napon U_{RS} , U_{ST} i U_{TR} su u gornjem dijagramu nacrtani za slučaj čistog omskog opterećenja, dakle ($I_{UX} \parallel U_{RS}$) dakle gdje su struja I_{UX} i napon U_{RS} u fazi. Otu-
da se na ovom dijagramu naponi U_{RS} , U_{ST} i U_{TR} zatvaraju na desno (kao kazaljka na satu) suprotno u odnosu na smjer kod spoja u zvijezdu. Već prema odabranom smjeru pojedinih napona treba odabrati i redosljed indeksa R, S, T.

Nesimetrično opterećenje

U ovakvom slučaju opterećenje može biti proizvoljno po veličini i vrsti i faznom pomaku pojedinih potrošača.

Kod spoja u trokut, jednaki narinuti linijski naponi U_{RS} , U_{ST} i U_{TR} izazivaju u priključnim otporima Z_{RS} , Z_{ST} i Z_{TR} razne struje

$$I_{RS} = \frac{U_{RS}}{Z_{RS}} ; \quad I_{ST} = \frac{U_{ST}}{Z_{ST}} ; \quad I_{TR} = \frac{U_{TR}}{Z_{TR}}$$

koje mogu imati razni fazni pomak i veličinu. Linijske struje se dobiju geometrijskim zbrajanjem faznih struja

$$\bar{I}_S = \bar{I}_{RS} - \bar{I}_{ST} ; \quad \bar{I}_T = \bar{I}_{ST} - \bar{I}_{TR} ; \quad \bar{I}_R = \bar{I}_{TR} - \bar{I}_{RS}$$

i mogu biti razne jačine i drugačijih faznih pomaka od 120° (u slučaju simetričnog opterećenja). Ovakav način "krivog" pogona znači smetnje u radu takvog sistema. Ako se radi o nesimetričnom trokutu - potrošaču sa impedancijama Z_a , Z_b , Z_c , koji je priključen na linijske napone E_1 , E_2 i E_3 (bez obzira da li naponi dolaze iz izvora u spoju trokut ili zvijezda), fazne struje I_a , I_b , I_c se računaju prema relacijama

$$I_a = \frac{E_1}{Z_a} ; \quad I_b = \frac{E_2}{Z_b} ; \quad I_c = \frac{E_3}{Z_c}$$

Linijske struje su geometrijske diferencije vektora faznih struja. Ako se račun sprovede, dobivene struje odgovaraju relaciji:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Takodjer je moguće rješavati problem nesimetričnog trokuta pomoću transfiguracije u nesimetričnu zvijezdu i onda primjeniti relaciju za E_0 nesimetrične zvijezde, uzimajući u obzir da je u ovom slučaju $1/Z_0 = Y_0 = 0$.

Kod spoja u zvijezdu za slučaj nesimetričnog opterećenja nastaju znatne teškoće i smetnje. Otpori (potrošači) nisu priključeni neposredno na linijske napone nego se napon djeli zbog serijskog spoja dvaju otpora. Kod simetričnog spoja to ima za posljedicu diobu na tri napona koja su jednaka po iznosu a pomaknuta za 120° . Ako se međjutim linijski naponi dijele na nejednakim otporima, onda će većim otporima pripadati i veći napon (iz približno jednake struje). Otuda izlazi veoma važna posljedica:

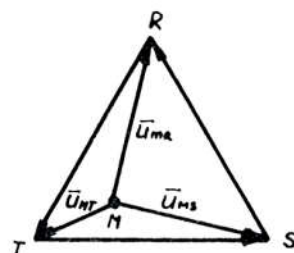
Kod nesimetričnog opterećenja u zvijezdi ne dobije svaki potrošač onakav napon za koji je gradjen nego napon koji

je određen ostalim otporima sistema. Nastaje nesimetričan sistem sa pomaknutom nul-tačkom.

Da bi se ovako teške posljedice odstranile, treba iz generatora prenjeti ne samo linijske napone U_{RS} , U_{ST} i U_{TR} (odnosno U_{SR} , U_{RT} , U_{TS}) nego i fazne napone U_{MR} , U_{MS} i U_{MT} . To se vrši na taj način da se nul-tačka generatora veže sa nul-tačkom sistema potrošača: nastaje trofazni četverovodni sistem, sa dodatnim vodom koji se naziva nul-vod. Taj vod kod nesimetričnog opterećenja vodi struju izjednačenja i prema l.K.Z. za nul-tačku M_p može se pisati

$$I_{MR} + I_{MS} + I_{MT} + I_{mp} = 0$$

gdje je I_{M_p} struja izjednačenja u nul-vodu.



Ovakav sistem se upotrebljava za nisko-naponske razdjelne mreže, jer pored ostalih prednosti ima i mogućnost dobijanja dvaju napona: faznog napona U između vanjskih vodiča - linija - i nul-tačke (napr. $U=220$ V) i linijskog napona $U_L = \sqrt{3} U = 380$ V. Ako su zadani linijski naponi, onda OO' predstavlja napon nul-tački potrošača u nesimetriji.

Iz geometrijskih odnosa izlazi

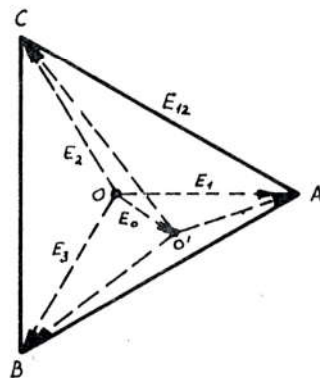
$$O'A = \bar{E}_1 - \bar{E}_0; O'B = \bar{E}_2 - \bar{E}_0; O'C = \bar{E}_3 - \bar{E}_0$$

gdje je $E_0 = OO'$, a E_1, E_2 i E_3

fazni naponi. Fazne struje su:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_0}{Z_1} = (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \bar{Y}_1$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_0}{Z_2} = (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) \bar{Y}_2$$



$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_0}{Z_3} = (\bar{E}_3 - \bar{E}_0) Y_3$$

a struja kroz nul-vodič

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{E}_0}{Z_0} = \bar{E}_0 \bar{Y}_0$$

i prema $\sum I = 0$ imamo za zvezdište 0'

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 - \bar{I}_0 = 0$$

a iz toga

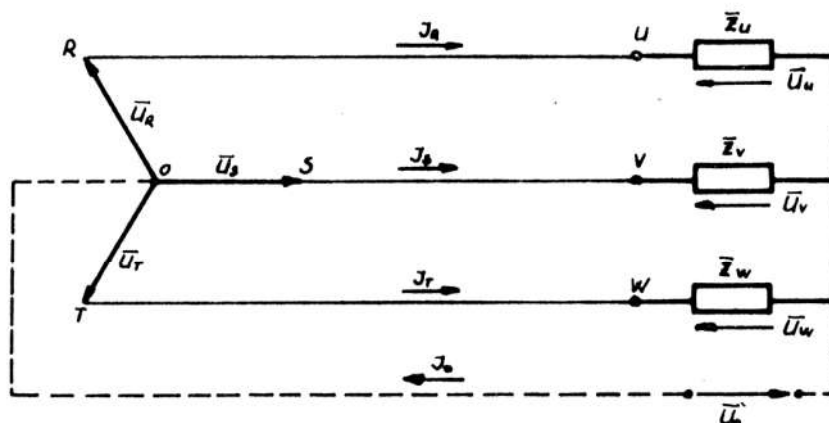
$$\frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_0}{Z_1} + \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_0}{Z_2} + \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_0}{Z_3} - \frac{\bar{E}_0}{Z_0} = 0$$

odnosno

$$\bar{E}_0 = \frac{\frac{\bar{E}_1}{Z_1} + \frac{\bar{E}_2}{Z_2} + \frac{\bar{E}_3}{Z_3}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = \frac{\bar{E}_1 Y_1 + \bar{E}_2 Y_2 + \bar{E}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0}$$

Ova relacija važi općenito za sve slučajeve nesimetrije u spoju u zvezdu.

Ako se generatorski napon smatra kao konstantan iako nema nul-voda, onda se mogu pisati jednačbe za pojedine petlje:



$$U_{SR} - I_R Z_U + I_S Z_V = 0$$

$$U_{TS} - I_S Z_V + I_T Z_W = 0$$

$$I_R + I_S + I_T = 0$$

iz toga

$$I_T = \frac{U_{SR} - I_R (Z_U + Z_V)}{Z_V} ; \quad I_R = \frac{U_{TS} + I_T (Z_V + Z_W)}{Z_W}$$

$$I_R = \frac{U_{TS} Z_V + U_{SR} (Z_V + Z_W)}{Z_V^2 - (Z_U + Z_V)(Z_V + Z_W)}$$

ili sa vodljivostima

$$U_U = I_R Z_U = \frac{U_{SR} Y_V + U_{TR} Y_W}{Y_U + Y_V + Y_W}$$

$$U_V = I_S Z_V = \frac{U_{RS} Y_U + U_{TS} Y_W}{Y_U + Y_V + Y_W}$$

$$U_W = I_T Z_W = \frac{U_{RT} Y_U + U_{ST} Y_V}{Y_U + Y_V + Y_W}$$

Pomak nul-tačke prema generatoru se dobije iz

$$U_o = U_R - U_U ; \quad U_o = U_S - U_V ; \quad U_o = U_T - U_W$$

pa se zbrajanjem dobije

$$U_o = -\frac{1}{3} (U_U + U_V + U_W)$$

U nul-tački se dobije stoga jednačba:

$$I_R + I_S + I_T + I_o = 0$$

gdje je I_o struja izjednačenja.

Kod simetričnog opterećenja je $Z_U = Z_V = Z_W = Z$ i radi toga $U_U = U_R$; $U_V = U_S$; $U_W = U_T$ i $U_0 = 0$

Ako postoji nul-vod, onda kod nesimetričnog opterećenja se nul-tačka potrošača razlikuje od nul-tačke generatora samo za mali pad napona u nul-vodu. Zbog toga rasvjeta (sijalice) se spajaju uvijek između linijskog voda i nul-voda.

Snaga trofazne struje

Radna snaga trofazne struje je data izrazom:

$$P = U_{UX} I_{UX} \cos \varphi_{UX} + U_{VY} I_{VY} \cos \varphi_{VY} + U_{WZ} I_{WZ} \cos \varphi_{WZ}$$

dakle jednaka je sumi snaga pojedinih faza. Ova jednadžba važi općenito za generator i za potrošače i za proizvoljne veličine struja i faznog kuta, dakle važi i za nesimetrično opterećenje.

Ako imamo simetrično opterećenje pa su U , I i φ jednaki za sve tri faze, onda su snage pojedinih faza $U I \cos \varphi$ pa je ukupna snaga

$$P = 3 U I \cos \varphi$$

Ova jednadžba se može preurediti za spoj u zvijezdu i trokut (pri čemu je linijski napon U_L a linijska struja I_L).

Spoj u zvijezdu (Y)

$$U_L = \sqrt{3} U ; \quad U = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$$

$$I_L = I$$

$$P = 3 U I \cos \varphi = 3 \frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \varphi$$

$$P = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi$$

Spoj u trokut (Δ)

$$U_L = U$$

$$I_L = \sqrt{3} I ; \quad I = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

$$P = 3 U I \cos \varphi = 3 U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \varphi$$

$$P = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi$$

Ako su poznati linijski napon U_L i linijska struja I_L onda se snaga trofaznog sistema računa na isti način, bez obzira da li je sistem spojen u zvijezdu ili trokut. Važno je naglasiti da se kut faznog pomaka φ odnosi na kut između faznog napona U i fazne struje I .

Simetrične komponente nesimetričnog sistema (trofaznog)

Za neki trofazni sistem sa veličinama R, S i T se može, uvodeći operator a , napisati

$$R = a \quad S = a^2 \quad T$$

$$S = a^2 \quad R = a \quad T$$

$$T = a \quad R = a^2 \quad S$$

$$R = S = T$$

Ovakav sistem je simetričan, ali čim ovi uvjeti nisu ispunjeni nastaje kutna ili amplitudna asimetrija ili obje asimetrije zajedno.

Otuda se zaključuje da se svaki simetrični sistem S može shvatiti kao suma triju simetričnih sistema:

- 1) direktni sistem S_1
- 2) inverzni sistem S_2
- 3) nulti sistem S_0

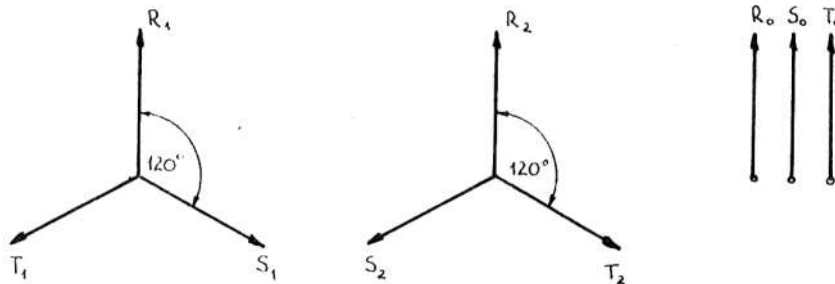
pri čemu važi

$$S = S_1 + S_2 + S_0$$

Direktni sistem S_1 je normalni simetrični sistem, sa normalnim redoslijedom faza $R_1 S_1 T_1$.

Inverzni sistem S_2 je simetričan sistem koji prema normalnom sistemu ima obrnuti redoslijed faza $R_2 T_2 S_2$.

Nulti sistem S_0 sastoji se od tri jednake veličine po iznosu i fazi (sistem simetričan po amplitudi) i koji se, strogo uzevši, ne može računati kao simetričan u istom smislu kao S_1 i S_2 .



Za neki općeniti trofazni sistem važi:

$$R = R_0 + R_1 + R_2$$

$$S = S_0 + S_1 + S_2$$

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

pri čemu pojedini sistemi glase:

direktni sistem S_1

$$R_1 = a S_1 = a^2 T_1$$

$$S_1 = a^2 R_1 = a T_1$$

$$T_1 = a R_1 = a^2 S_1$$

inverzni sistem S_2

$$R_2 = a^2 S_2 = a T_2$$

$$S_2 = a R_2 = a^2 T_2$$

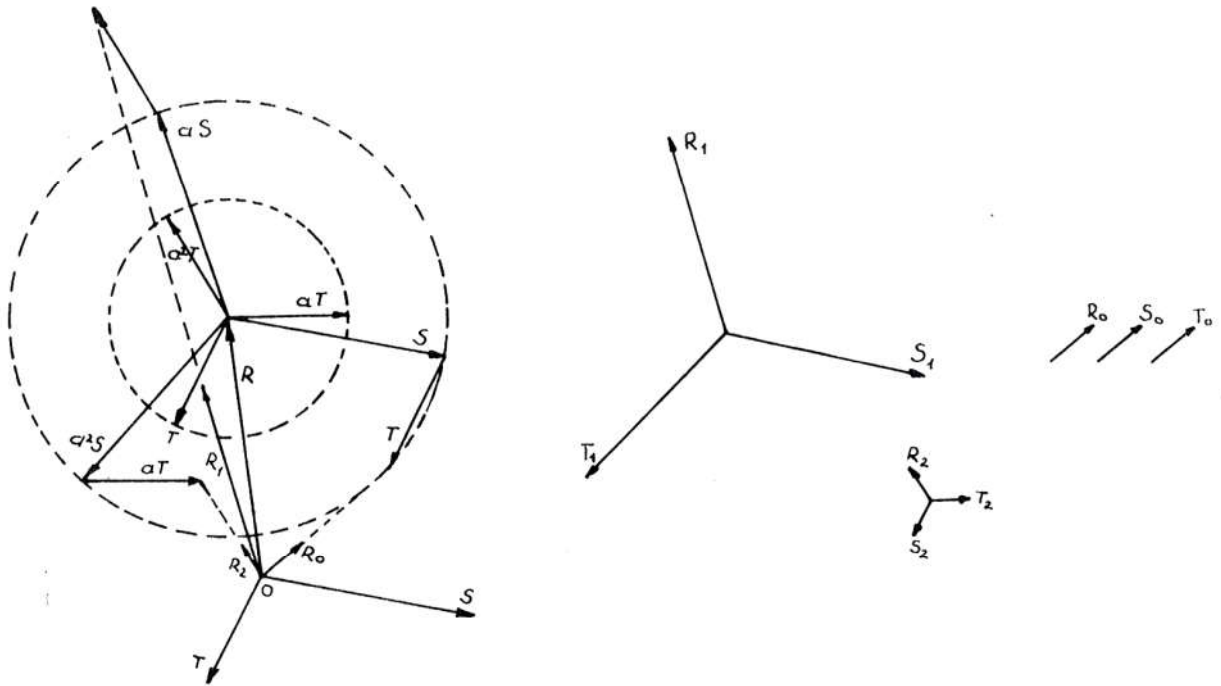
$$T_2 = a^2 R_2 = a S_2$$

nulti sistem S_0 $R_0 = S_0 = T_0$

pri čemu je

$$|R_1| = |S_1| = |T_1| \quad \text{i} \quad |R_2| = |S_2| = |T_2|$$

Grafički se to može prikazati ovako: razlaganje simetričnog sistema u simetrične komponente



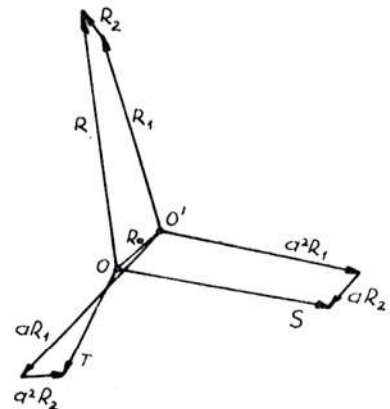
Slaganje jednog nesimetričnog sistema iz njegovih simetričnih komponentata:

Iz navedenih jednažbi se mogu dobiti veličine prvobitnog nesimetričnog sistema:

$$R = R_0 + R_1 + R_2$$

$$S = R_0 + a^2 R_1 + a R_2$$

$$T = R_0 + a R_1 + a^2 R_2$$



Simetrične komponente se dobijaju zbrajanjem (i množenjem operatorom a odnosno a^2), vodeći računa o jednađbama:

$$R_0 = \frac{1}{3} (R + S + T)$$

$$R_1 = \frac{1}{3} (R + aS + a^2 T)$$

$$R_2 = \frac{1}{3} (R + a^2 S + a T)$$

U općem slučaju postoje sva tri sistema, za struje i napone. Nulti sistem se ponaša kao gornji harmonik 3. reda pa je stoga nemoguće postojanje nulte struje u spoju trokuta potrošača (u dovodnim vodovima). Međutim, struje unutar samog trokuta nemaju ograničenja. Za nulti sistem važi i

$$i_{oR} + i_{oS} + i_{oT} = 3 i_o$$

Otuda izlazi da unutar trokuta nulte struje mogu teći samo kao kružne struje. Iz istog razloga može doći do nulte struje u ^{ap} oju zvijezda samo ako postoji nulti vod.

Ako je generatorski sistem simetričan i krut onda su naponi konstantni pa nema inverzne komponente u naponu, dok može biti naponske nul-komponente u spoju zvijezda bez nulvoda, ali u slučaju da vod postoji onda nema nul-komponente napona. Kod simetričnog opterećenja nestaje inverzni i nulti sistem. Položaj nul-tačke djeluje samo na nul-komponentu. Direktna i inverzna komponenta su potpuno određene veličinama trokuta i nezavisne su od položaja nul -tačke.

S obzirom na snagu sistema (ako se uzme da je naponski sistem simetričan) važe ovi zaključci:

- 1) Direktni sistem ima snagu sa konstantnim iznosom
- 2) Inverzni sistem daje pulsirajuću snagu sa srednjom vrednošću nula

- 3) Nulti sistem nema uopće snage, pa niti kao trenutnu vrijednost.

Otuda važi opće pravilo:

Struje i naponi raznih sistema ne vrše ustvari nikakvu razmjenu snage.

Energetski gledano, nul-sistem nema smisla i u energetskim razmatranjima se može zanemariti.

Rotaciono (okretno) magnetsko polje trofazne struje

Ako se trofazna izmjenična struja dovede u jedan motor koji ima takodjer trofazni namotaj (tako da svakoj fazi odgovara njen namotaj motora) onda će se unutar statora stvoriti rezultirajuće magnetsko polje svih triju faza.

Ako svaki pojedini fazni namotaj proizvodi za sebe maksimalnu magnetsku indukciju B_m , onda u simetričnom trofaznom sistemu prostorni i vremenski raspored magnetske indukcije je dat izrazom

$$B = \frac{3}{2} B_m \cos(\omega t) = \text{konst.}$$

Ukupna magnetska indukcija se vremenski ne mijenja nego se samo okreće sa kutnom brzinom duž periferije statora. Ukupni magnetski tok je raspoređen prostorno prema sinusnom zakonu.

Mirujući trofazni namotaj proizvodi okretno magnetsko polje.

Otkriće okretnog magnetskog polja predstavlja jedan od vrhunaca elektrotehnike (Tesla, 1888).

Jačina ukupne magnetske indukcije trofaznog sistema je za 50% veća od indukcije jedne faze.

Na diagramu je prikazan trofazni namotaj razvijen u ravninu. Osi triju namotaja i istodobno osi triju faznih magnetskih tokova su prikazani desno. Udaljene su za po 120°

jedan od drugoga (dvopolni namotaj). Važi sinusna razdioba gustoće magnetskog toka na obodu statora. Na prvoj slici se vidi trenutak kad struja u fazi 1 ima maksimum, a vremenska linija ima smjer toka ϕ_1 . Projekcija drugih dvaju tokova ϕ_2 i ϕ_3 na vremensku liniju daje trenutne jačine ovih tokova. Oba su jednaka i negativna sa polovinom tjemene vrijednosti. Tako nastaju tri sinusoide koje predstavljaju prostornu razdiobu triju faznih tokova po obodu statora. Ukupni tok je jednostavno suma triju pojedinih tokova. Dobiće se sinusoida rezultirajućeg toka - okretnog magnetskog polja - sa tjemenom vrijednosti za polovinu većom od faznog toka, a os je na mjestu najveće jačine stojećeg faznog magnetskog toka ϕ_1 .

U daljnim trenutcima (po 1/6 perioda) se vidi kako se prostorna razdioba ukupnog toka ne mijenja ali je pomaknuta za po šestinu opsega statora: rezultirajući magnetski tok slijedi os onog faznog toka gdje upravo vlada maksimalna jačina.

Rezimirajući može se reći:

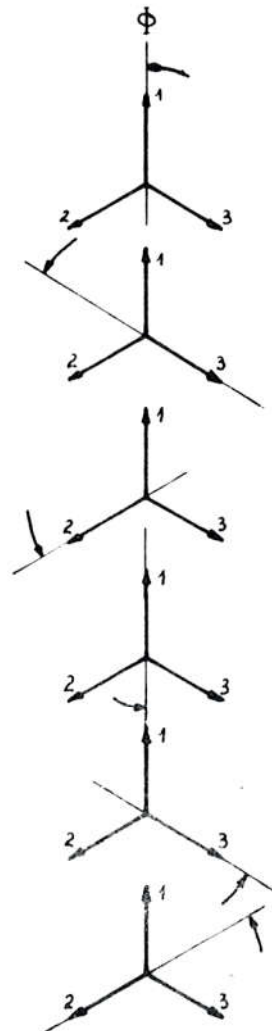
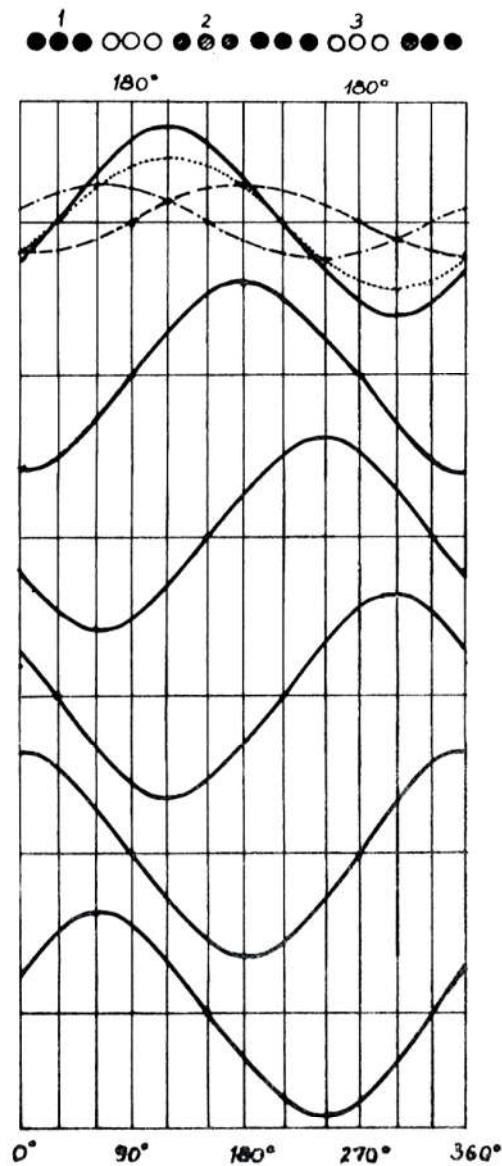
1. amplituda rezultirajućeg magnetskog polja nezavisna je od vremenske faze struja u tri fazna namotaja i jednaka je 1,5 - strukoj vrijednosti amplitude pojedinačnog polja.
2. os resultantnog polja pomiče se duž namotaja tako da se uvijek nalazi iznad onog faznog namotaja u kome je struja u maksimumu. Pošto je namotaj postavljen na cilindričnu površinu, resultantno polje se okreće. Takvo polje se naziva obrtno magnetsko polje.

Broj okretaja ovog polja je srazmeran frekvenciji struje. Vrijeme koje je potrebno da u ma kojem faznom namotaju nastanu dvije uzastopne amplitude struje odgovara jednom

periodu struje. Za ovo vrijeme obrtno polje predje dvostruki razmak magnetskih polova. Punom obrtu obrtnog polja odgovara p perioda izmjenične struje.

Za izmjeničnu struju od f perioda u sekundi, obrtno polje ima broj okretaja u minuti:

$$n = \frac{60 f}{p}$$



gdje je p - broj pari magnetskih polova statora. Magnetsko obrtno polje je dakle, okarakterizirano valom koji napreduje konstantnom brzinom a čija je amplituda nepromjenljiva.

Ovo važi ne samo za trofazni sistem nego i za bilo koji simetrični m -fazni sistem: amplituda obrtnog polja m -faznog sistema je uvijek jednaka $m/2$ - puta amplitudi jednog faznog izmjeničnog polja.

Primjena: asinhroni motor (Tesla 1889).

IZMJENIČNA I OKRETNA POLJA

Ako se sinusni napon narine na namotaj (iako se namotaj smatra bez gubitaka) onda je i magnetski tok sinusnog oblika

$$u = - e = N \frac{d\phi}{dt}$$

Zračni raspori električnih strojeva se tako oblikuju a namotaji tako izrade da se može postići sinusna prostorna razdioba magnetskog toka.

Ako se razmak između sredine jednog do sredine drugog pola označi sa τ_p (polni korak), onda se može napisati jednažba za vremenski oblik izmjeničnog magnetskog toka (polja) na nekom proizvoljnom mestu x :

$$\phi_{izm} = \phi_m \sin \omega t \cos \frac{\pi}{\tau_p} x$$

Izmjenično polje ima nepomičnu os u prostoru ali se amplituda mijenja sinusni u vremenu.

Jednažba izmjeničnog toka može se napisati i preurediti ovako:

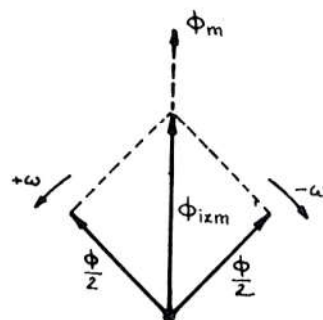
$$\phi_{izm} = \frac{1}{2} \phi_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{\tau_p} x \right) + \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{\tau_p} x \right)$$

ili u kompleksnom obliku

$$\phi_{izm} = \frac{1}{2} \phi_m e^{j(\omega t - \frac{\pi}{\tau_p} x)} + \frac{1}{2} \phi_m e^{j(\omega t + \frac{\pi}{\tau_p} x)}$$

Ovo znači da postoje dva okretna polja (jedno desno a drugo lijevo okretno) koja se okreću kutnom brzinom ω , sa polovinom amplitude. Otuda je moguće svako izmjenično magnetsko polje

predstaviti kao da je razloženo u dva magnetska polja polovine amplitude, koja rotiraju u suprotnim smjerovima, istom brzinom ω . Ova polja su kružna polja.



S tim se može napisati jednažba okretnog polja

$$\phi_{okr} = \phi_m \sin \left(\omega t \mp \frac{\pi}{\tau_p} x \right) = \phi_m e^{j \left(\omega t \mp \frac{\pi}{\tau_p} x \right)}$$

(negativni predznak - desno okretno polje
pozitivni predznak - lijevo okretno polje)

Kod potpunog okretnog polja je amplituda polja konstantna i okreće se jednoliko u prostoru. Da bi se ovo postiglo potrebni su slijedeći uvjeti:

- 1) jednaka brzina okretaja
- 2) konstantna amplituda polja
- 3) u svakom trenutku mora razdioba polja imati sinusni oblik.

Kružno obrtno polje se može također smatrati kao rotirajuće istosmjerno polje.

Ako umjesto jednog para polova postoji p pari polova, onda jednom punom okretaju odgovara p punih perioda. Brzina okretanja polja je određena sa

$$n = \frac{f}{p}$$

Eliptično pokretno polje

Ako postoje okretna polja iste frekvencije ali nejednako smjera okretanja, onda se mogu složiti u obliku versorskog dijagrama, zbrajajući trenutne veličine.

Dva obrtna polja jednake amplitude ($\phi_{d1} = \phi_{d2}$) ali nejednakih smjerova okretanja, daju izmjenično polje sa sinusno promjenljivom amplitudom:

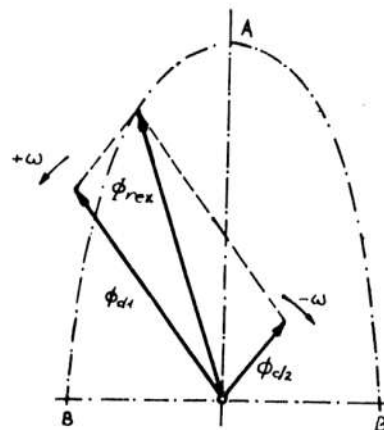
$$\phi_{\max} = 2 \phi_{d\max}$$

Medjutim, dva obrtna polja nejednake amplitude i nejednakih smjerova okretanja daju, kao rezultatnu, jedno eliptično polje.

Velika poluos iznosi

$|\phi_{md1}| + |\phi_{md2}|$ i leži u smjeru simetrane kuta obaju okretnih polja. Mala poluos iznosi $|\phi_{md1}| - |\phi_{md2}|$ i leži okomito na veliku os. Amplituda oscilira između $|\phi_{md1}| + |\phi_{md2}|$ i $|\phi_{md1}| - |\phi_{md2}|$.

Otuda se može formulirati:



Dva (ili više) vremenski i prostorno u fazi pomaknuta izmjenična polja daju uvijek okretno polje.

Kao primjer, može se izvesti jednadžba za okretno polje koje proizvode tri sinusna toka, pomaknuta simetrično u fazi za $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

$$\begin{aligned} \phi_R &= \phi_m \sin \omega t \cos \frac{\pi}{\tau_p} x = \\ &= \frac{\phi_m}{2} \left[\sin \left(\omega t + \frac{\pi}{\tau_p} x \right) + \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{\tau_p} x \right) \right] \\ \phi_S &= \phi_m \sin (\omega t - 120^\circ) \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - 120^\circ \right) = \\ &= \frac{\phi_m}{2} \left[\sin \left(\omega t + \frac{\pi}{\tau_p} x - 240^\circ \right) + \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{\tau_p} x \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_T &= \phi_m \sin(\omega t + 120^\circ) \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} x + 120^\circ\right) = \\ &= \frac{\phi_m}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{\tau_p} x + 240^\circ\right) + \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau_p} x\right)\end{aligned}$$

Konačno imamo

$$\phi_d = \phi_R + \phi_S + \phi_T$$

odnosno

$$\phi_d = \frac{3}{2} \phi_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau_p} x\right)$$

ili u kompleksnom obliku

$$\phi_d = \frac{3}{2} \phi e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau_p} x\right)}$$

Općenito sistem od m sinusnih tokova proizvodi okretno simetrično polje

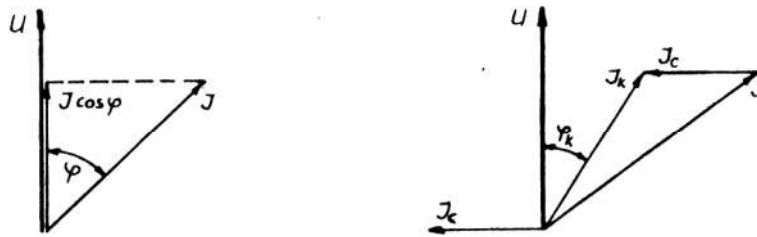
$$\underline{\phi_d = \frac{m}{2} \phi e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau_p} x\right)}}$$

Fazna kompenzacija

Prenosni vodovi moraju prenositi pored aktivne snage još i reaktivnu snagu jer to traže potrošači (induktivni i kapacitivni). Zbog toga postaje veća ukupna struja koju vod prenosi od stvarne aktivne struje koja bi bila potrebna radi same aktivne snage.

Otuda se vodovi moraju dimenzionirati jače ili računati sa većim gubitcima.

Glavni uzrok većeg faznog pomaka su asinhroni motori naročito kad nisu opterećeni. Diagram pokazuje (jednofazno) struju i napon pri dosta velikom kutu faznog pomaka φ . Za aktivnu snagu bi trebala samo struja $I \cos \varphi$.



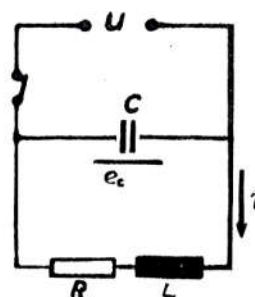
Prenesena struja u vodu se može osjetno smanjiti da se induktivnom potrošaču (motoru) doda još jedan kapacitivni potrošač (kondenzator). To se radi za male i srednje snage a za velike snage se upotrebljavaju posebni "generatori reaktivne snage". Ova tzv. fazna kompenzacija se vrši u stvari tako da se kapacitivni potrošač ukopča paralelno sa induktivnim potrošačem (da bi napon bio konstantan).

Nastoji se kompenzirati na oko $\cos \varphi = 0,8$ a ne $\cos \varphi = 1$ jer kondenzatori mnogo koštaju pa se najpovoljniji ekonomski odnosi izmedju nabavne cijene kondenzatora i boljeg iskorištenja prenosnog voda postižu kod $\cos \varphi = 0,8$ (odprilike).

26. SLOBODNI TITRAJNI KRUG

Slobodni titrajni (oscilatorni) krug se sastoji od serijskog spoja kondenzatora C , induktiviteta L i omskog otpora R . Prije nego se uspostavi serijski spoj, kondenzator C treba zamisliti da je nabijen iz nekog stranog izvora. Kad se krug zatvori onda se kondenzator može isprazniti preko L i R .

Prilikom izbijanja kondenzatora teče struja kroz zavojnicu i u njoj stvara (izaziva) magnetsko polje. Nakon nekog vremena se kondenzatorski naboj izjednačio i struja bi morala da prestane teći ali to nije moguće jer postoji magnetsko polje zavojnice a postojanje polja je vezano sa postojanjem struje. Stoga nakon izbijanja kondenzatora mora da se razgradi i magnetsko polje. Pri tome nastaje EMS samoindukcije e_L koja po Lenzovom zakonu, nastoji da zadrži postojeće stanje (da sačuva jačinu i smjer struje koja je nastala kad se kondenzator praznio).



Kako je kondenzator na početku razgradnje magnetskog polja bio upravo izbijen, to struja koja potječe od razgradnje magnetskog polja nabija kondenzator ali u suprotnom smjeru nego ranije.

Zbog postojanja otpora R , nastaju gubitci u ovakvom "slobodnom" titrajnom krugu, pa će novi naboj kondenzatora zavisiti o veličini otpora R .

Nakon ponovnog nabijanja kondenzatora, pojava se ponavlja: količina elektriciteta u kondenzatoru titra tamo - amo. Otuda naziv ovakvog sklopa: titrajni krug.

Diferencijalna jednačba titrajnog kruga

Nakon nabijanja (kondenzatora) sa količinom elektriciteta $q = \int i \, dt$, ima kondenzator svoj unutarnji napon $e_c = -1/c \int i \, dt$. Ovaj napon, nakon zatvaranja strujnog kruga djeluje kao generatorski napon i tjera struju i .

Zbog struje i nastaju padovi napona na omskom otporu iR i na induktivnom otporu $L \frac{di}{dt}$ pa se može napisati naponska jednačba:

$$-e_c + iR + L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{1}{C} \int i \, dt + iR + L \frac{di}{dt} = 0$$

Ova jednačba nastaje iz ranije izvedene jednačbe za serijski spoj RLC

$$u = u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt$$

ako se narinuti napon $u = u_m \sin \omega t$ stavi da je jednak nuli.

S tim imamo:

$$q = \int i \, dt = u_c C ; \quad \frac{dq}{dt} = i = C \frac{du_c}{dt} ; \quad \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_c}{dt^2}$$

pa se jednačba može pretvoriti preko struje i i naboja q u diferencijalnu jednačbu kondenzatorskog napona u_c :

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = 0$$

Ovo je diferencijalna jednačba drugog reda sa konstantama R/L i $1/LC$. O veličini konstante R/L ovisi utrošak energije za vrijeme titranja: dakle to je "prigušenje". Konstanta $1/LC$ je, ustvari kvadrat frekvencije titranja, tzv. "vlastita frekvencija"

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{ili} \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ako se još prigušenje označi sa $R/L = 2\delta$ gdje je δ "konstanta opadanja", onda jednačba titranja glasi:

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\delta \frac{du_c}{dt} + \omega_o^2 u_c = 0$$

Rješenje ove diferencijalne jednačbe se može naći za dva slučaja: za neprigušeno titranje i za prigušeno titranje.

1) Neprigušeno titranje

Ako se stavi konstanta opadanja $\delta = R/2L = 0$, ako se dakle zanemari otpor R kruga, onda se jednačba pojednostavi

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_o^2 u_c = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{d^2 u_c}{dt^2} = -\omega_o^2 u_c$$

Rješenje ove diferencijalne jednačbe glasi:

$$u_c = A \sin \omega_o t + B \cos \omega_o t$$

gdje su A i B integracione konstante.

Može se pokazati da je

$$\frac{du_c}{dt} = \omega_o A \cos \omega_o t - \omega_o B \sin \omega_o t$$

i dalje

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_c}{dt^2} &= - \omega_0^2 A \sin \omega_0 t - \omega_0^2 B \cos \omega_0 t = \\ &= - \omega_0^2 (A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t) = - \omega_0^2 u_c\end{aligned}$$

što iskazuje, ustvari, i sama jednadžba.

Integracione konstante se računaju iz početnih uvjeta: u_c i $i = C du_c/dt$ za vrijeme $t = 0$. Za $t = 0$ uzima se trenutak zatvaranja strujnog kruga dakle za $t = 0$ napon na kondenzatoru je $u_c = U_0$ a $i = C du_c/dt = 0$. Dalje je: za $t = 0$, $\sin \omega_0 t = 0$ a $\cos \omega_0 t = 1$, pa rješenje jednadžbe glasi (kad se uvrste gornje vrijednosti

$$u_c = U_0 = A \cdot 0 + B \cdot 1$$

dakle konstanta $B = U_0$

Konstanta A se računa iz početnog uvjeta

$$\frac{i}{C} = 0 = \frac{du_c}{dt} = \omega_0 A \cdot 1 - \omega_0 B \cdot 0 \quad \text{pa je} \quad A = 0$$

Sa tako dobivenim integracionim konstantama se dobije vremenska promjena kondenzatorskog napona u_c

$$u_c = U_0 \cos \omega_0 t$$

gdje je $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ pa je frekvencija titranja

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

a trajanje periode $T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{LC}$.

Može se zaključiti: kondenzatorski napon ne pada jednostavno na nulu nego na kondenzatoru nastaje izmjenični napon. Nakon

pražnjenja, nabija se ponovo na suprotni puni napon - U_0 (krug je bez prigušenja). Naboj Q se naizmjenično kreće od jednog obloga kondenzatora preko zavojnice na drugi oblog.

Mehanička analogija je njihalo. Ovakvo titranje koje se vlada po vremenskom zakonu sinusa se naziva "harmoničko titranje".

Vremenski tok struje pražnjenja je određen jednačinom

$$i = -C \frac{du_c}{dt} = -C \frac{d}{dt} U_0 \cos \omega_0 t = + (\omega_0 C) U_0 \sin \omega_0 t$$

ako se $(\omega_0 C) U_0$ zamjeni sa I_0 , onda je konačno

$$\underline{i = I_0 \sin (\omega_0 t)}$$

gdje je $I_0 = \omega_0 C U_0$.

Ovdje treba istaknuti da kondenzatorski napon

$$u_c = U_0 \cos \omega_0 t = U_0 \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right)$$

kao generatorski napon (napon izbijanja) prethodi struji (moglo bi se očekivati da zaostaje) $i = I_0 \sin \omega_0 t$, za vrijeme dok struja i stvara protunapon e_L na samoindukciji L .

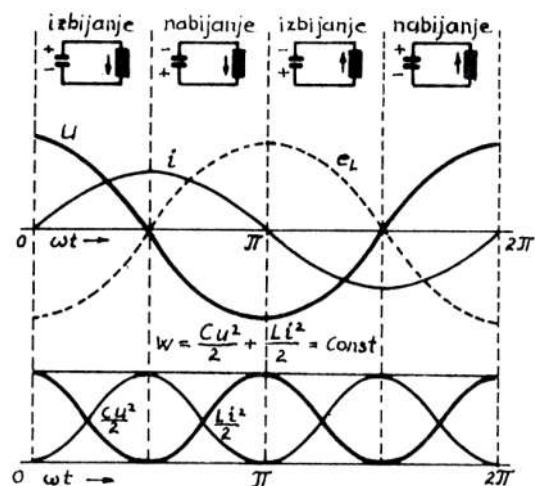
$$e_L = -L \frac{di}{dt} = \omega_0 L I_0 \sin \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Na diagramu su prikazani međusobni odnosi kondenzatorskog napona U_c , EMS samoindukcije e_L i struje i .

Energija titrajnog kruga bez gušenja

Za vrijeme pražnjenja kondenzator se vlada kao generator, a zavojnica kao potrošač, dok se za vrijeme punjenja zavojnica vlada kao generator a kondenzator kao potrošač.

Ovdje titra, ustvari, jedna količina energije: pri maksimalnom naponu na kondenzatoru, ovaj sadrži energiju $W = \frac{1}{2} C u_m^2$, a pri maksimalnoj struji na zavojnici, ova sadrži magnetsku energiju $W = \frac{1}{2} L i_m^2$.



Zbog pretpostavke $R=0$, nema gubitaka energije pa iznosi reaktivne energije moraju biti jednaki

$$W = \frac{1}{2} C u_m^2 = \frac{1}{2} L i_m^2$$

a u međuvremenu energija prelazi iz jednog oblika u drugi. U svakom trenutku važi onda

$$W = \frac{1}{2} C u^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \text{const.}$$

Prigušeni titrajni krug

Zbog toga što u stvarnosti uvijek postoji neki otpor R , zatim zbog zračenja (napr. radio-odašiljačka antena) i zbog drugih razloga, titrajni krug uvijek odaje energiju, pa treba uvijek računati sa konstantom opadanja $\delta = \frac{R}{2L}$ i sa gubicima.

Jednačba

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2 \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$$

ima općenito rješenje $u_c = A e^{mt}$, pa je

$$\frac{du_c}{dt} = m A e^{mt} \quad \text{i} \quad \frac{d^2 u_c}{dt^2} = m^2 A e^{mt}$$

pa se dobije

$$m^2 A e^{mt} + m^2 \delta A e^{mt} + \omega_0^2 A e^{mt} = 0 \quad \text{ili}$$

$$A e^{mt} (m^2 + m^2 \delta + \omega_0^2) = 0$$

Ova jednađžba je zadovoljena ako je izraz u zagradi jednak nuli, a rješenje tog izraza je

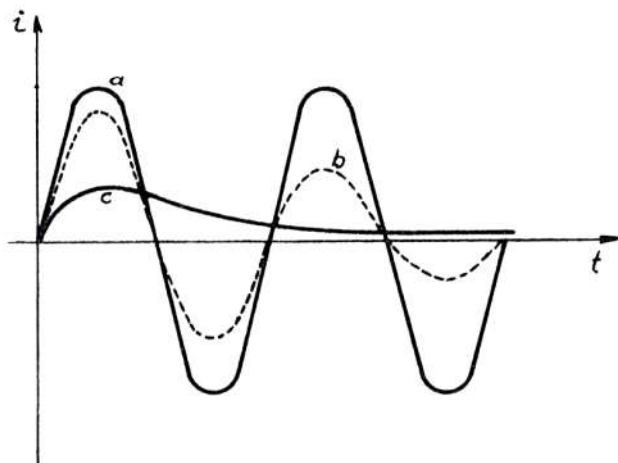
$$m_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$m_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Već prema odnosu $\delta^2 \gtrless \omega_0^2$ i za $\delta^2 = 0$, dobiju se razna rješenja za u_c i i , što se vidi iz diagrama. Za $\delta^2 = 0$, dobije se krivulja neprigušenog titranja (a).

Za slučaj $\delta^2 \geq \omega_0^2$, kad je dakle R veoma veliko, dobije se krivulja (c) - aperiodično izbijanje.

Za slučaj $\delta^2 < \omega_0^2$ dobije se krivulja (b), - prigušeno titranje, što predstavlja tehnički najvažniji i najčešći slučaj.



Za $\delta^2 < \omega_0^2$, odnosno za $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, postaje $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ imaginarno. Ako se realni dio od

$$\pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

označi sa $\pm \omega$, onda se imaginarni korjen $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ može pisati sa $j\omega$, pa imamo konjugirano - kompleksne korjene jednađžbe $m^2 + 2\delta m + \omega_0^2 = 0$

$$p_1 = -\delta + j\omega, \quad p_2 = -\delta - j\omega$$

Ovi korjени se nazivaju "kompleksna frekvencija". Ovdje važi zamjena $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Konačno se rješenje diferencijalne jednačbe

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\delta \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$$

može izraziti (uz $u_c = Ae^{mt}$), pri uslovu $\delta^2 < \omega_0^2$ kao

$$u_c = A_1 e^{(-\delta + j\omega)t} + A_2 e^{(-\delta - j\omega)t} = e^{-\delta t} (A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t})$$

Ako se (po Euleru) stavi da je $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$ onda je

$$\begin{aligned} u_c &= e^{-\delta t} \left[(A_1 + A_2) \cos \omega t + j (A_1 - A_2) \sin \omega t \right] = \\ &= e^{-\delta t} (M \cos \omega t + N \sin \omega t) \end{aligned} \quad (1)$$

gdje su integracione konstante $M = A_1 + A_2$, $N = j (A_1 - A_2)$.

$$\text{Za početne uvjete } t=0, u_c = U_0, \quad i = -C \frac{du_c}{dt} = 0$$

integracione konstante imaju vrijednost

$$M = U_0; \quad \frac{du_c}{dt} = 0 = -\delta U_0 + \omega N, \quad \text{pa je}$$

$$N = \frac{\delta}{\omega} U_0 = \frac{R}{2L\omega} U_0$$

Ako se ovo uvrsti u jednačbi (1), dobije se

$$\underline{U_c = U_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right)} \quad (2)$$

gdje je δ konstanta opadanja, a ω kružna frekvencija vlastitog titranja

$$\delta = \frac{R}{2L} ; \quad \omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Vremenski tok struje pražnjenja dobije se iz jednačbe
 $i = -C \frac{du_c}{dt}$ diferenciranjem jednačbe (2):

$$\begin{aligned} \frac{du_c}{dt} = & -\delta U_0 e^{-\delta t} (\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t) + U_0 e^{-\delta t} (-\omega \sin \omega t + \\ & + \frac{\delta}{\omega} \cos \omega t) = (-U_0 e^{-\delta t} \sin \omega t) (\frac{\delta^2}{\omega} + \omega) \end{aligned}$$

Možemo transformirati izraz

$$\frac{\delta^2}{\omega} + \omega = \frac{\delta^2 + \omega^2}{\omega} = \frac{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{1}{\omega LC} = \frac{1}{\omega LC}$$

pa je s tim

$$\frac{du_c}{dt} = -\frac{1}{\omega LC} U_0 e^{-\delta t} \sin \omega t$$

a onda je struja pražnjenja

$$i = -C \frac{du_c}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{-\delta t} \sin \omega t = I_0 e^{-\delta t} \sin \omega t$$

Veoma često je $\delta^2 = \frac{R^2}{4L^2}$ veoma maleno prema $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$
 pa se može pisati približno

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} \approx \omega_0 , \quad \frac{\delta}{\omega} = 0$$

pa se jednačba onda pojednostavni

$$u_c = U_0 e^{-\delta t} \cos \omega_0 t$$

gdje je $\delta = \frac{R}{2L}$, a $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$

i dalje za struju pražnjenja

$$i = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t = \underline{I_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t}$$

Dakle: napon u_c i struja i , odnosno njihove amplitude U_0 i I_0 se priguše na nulu faktorom $e^{-\frac{R}{2L} t}$

Primjer: Titrajni krug se sastoji od otpora $R = 50 \Omega$, induktiviteta $L = 0,5 \text{ H}$ i kapaciteta $C = 20 \mu\text{F}$ koji je nabijen na 1000 V. Naći vremenski tok struje i .

Vlastita frekvencija je

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{0,5 \text{ Vs/A} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \text{ As/V}} = 10^5 \frac{1}{\text{s}^2}$$

Faktor opadanja

$$\delta^2 = \frac{R^2}{4L^2} = \frac{50^2 \text{ V}^2/\text{A}^2}{4 \cdot 0,5^2 \text{ V}^2 \text{ s}^2/\text{A}^2} = 2500 \frac{1}{\text{s}^2} \ll \frac{1}{LC}$$

pa se može upotrebiti pojednostavljeni oblik jednadžbe

$$i = I_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{10^5 \frac{1}{\text{s}^2}} = 316 \frac{1}{\text{s}}; \quad \delta = \frac{R}{2L} = \sqrt{2500 \frac{1}{\text{s}^2}} = 50 \frac{1}{\text{s}}$$

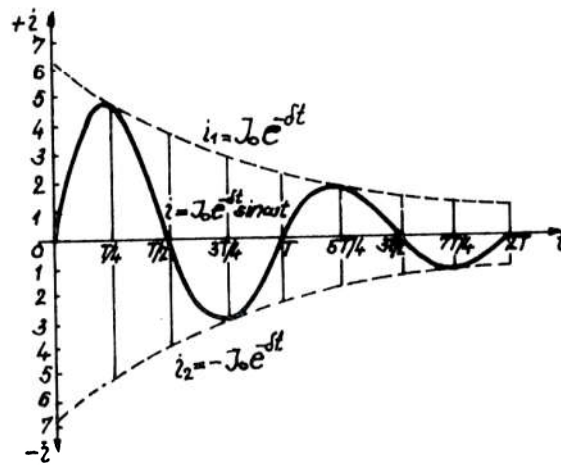
$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0,5 \text{ Vs/A}}{20 \cdot 10^{-6} \text{ As/V}}} = 10^3 \sqrt{\frac{1}{40} \frac{\text{V}^2}{\text{A}^2}} = 158 \Omega$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{1000 \text{ V}}{158} = 6,33 \text{ A}$$

Faktor $\sin \omega t$ oscilira izmedju tjemnih vrijednosti ± 1 , a krivulja struje $i = I_0 e^{-\delta t} \sin \omega t$ titra izmedju krivulja predstavljenih jednađbama

$$i_1 = I_0 e^{-\delta t} \quad i$$

$$i_2 = - I_0 e^{-\delta t}$$

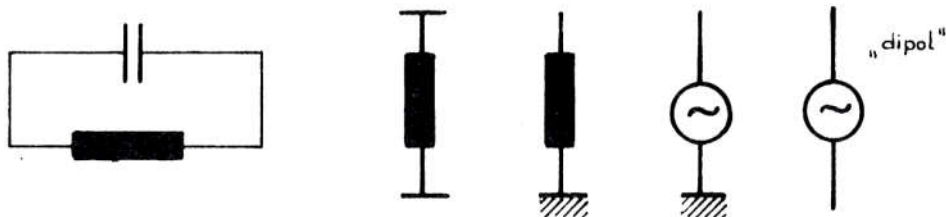


27. ELEKTROMAGNETSKI VALOVI

Oscilatorni krug je karakterističan po kruženju energije između kondenzatora i zavojnice, električna energija se pretvara u magnetsku, ova tjera struju koja nabija kondenzator itd. Ove pojave se odvijaju teoretski bez gubitaka (ako je gušenje $\delta = 0$). Međutim za to je potreban još jedan uvjet - da se ova pojava događa sporo. Ako krug oscilira brzo, onda neizbježno jedan dio energije odlazi iz kruga u obliku elektromagnetskog zračenja. Otuda svaki oscilatorni krug predstavlja izvor elektromagnetskih valova. Općenito govoreći - energija se emitira u obliku zračenja kad god se ubrzava naboj.

Kako je već rečeno, elektromagnetski valovi se prostiru brzinom $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3,10^8 \text{ ms}^{-1}$, a to je brzina svjetla.

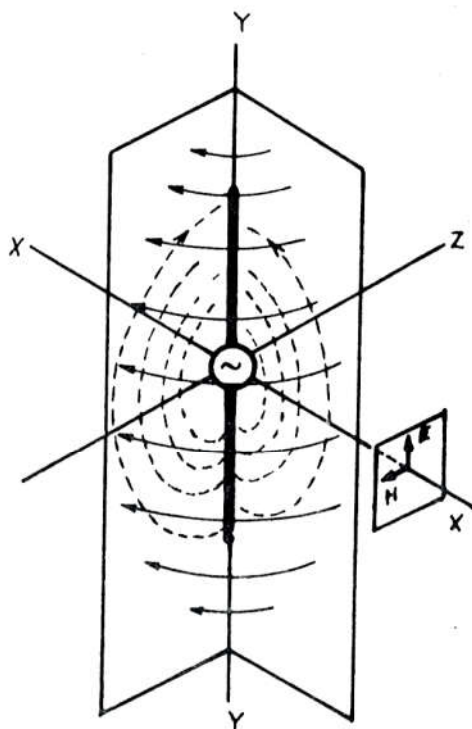
Odnos frekvencije titranja vala i njegove dužine dat je poznatom relacijom $c = f \lambda$ gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu. Sposobnost nekog oscilatornog kruga da emitira elektromagnetske valove veoma ovisi o njegovim geometrijskim odnosima. Ako je polje lokalizirano između ploča kondenzatora na malom razmaku, onda je količina energije koja se zrači mala. Povećanjem razmaka među pločama polje postiže velike vrijednosti u velikom volumenu a tim raste i emisijska sposobnost oscilatornog kruga. Granični slučaj nastaje kad se oscilatorni krug svede na ravan vodič sa nekom vrstom izvora izmjenične struje u sredini.



Dvije polovine vodiča formiraju "ploče" kondenzatora pri čemu električno polje ima oblik isprekidanih linija na crtežu. Kako se polaritet izvora mjenja, tako i ovo polje mjenja smjer. Prilikom svake promjene teče struja duž vodiča pa je vodič okružen magnetskim poljem (puni krugovi na crtežu) - koncentrični krugovi sa vodičem.

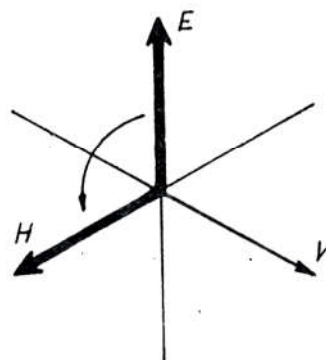
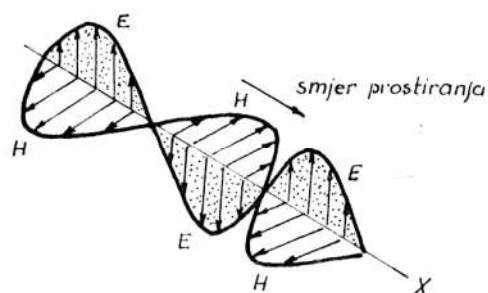
I magnetsko polje mjenja smjer sa promjenom smjera struje.

Ako se vodič promatra duž X - ose, električno i magnetsko polje bit će međusobno okomiti. E-linije su paralelne sa Y-osi ili okomite na nju, a H-linije paralelne sa Z-osom. Blizu vodiča, ova polja su pomaknuta u fazi za 180° , jer kad je kondenzator nabijen, onda je struja nula. Dalje od vodiča, radi veoma složenih razloga, fazni odnosi se mjenjaju i polja se nalaze u istoj fazi. Međutim, njihovi prostorni odnosi ostaju isti, E-polje paralelno sa vodičem, a H-polje okomito na njega.



Front vala. To je ravnina u čijim se tačkama E-ili H-vektor nalaze u istoj fazi. Pravac koji pokazuje prostiranje vala naziva se zraka. U dovoljnoj udaljenosti od vodiča front vala

se može smatrati da je ravnina. Valovi napreduju u desnom smjeru duž X-ose. Promjene polja (predstavljene sinusoidama E i H) napreduju brzinom svijetla. Relativni smjerovi vektora E, H i vektora brzine prostiranja vala v su povezani kao na slici (napredovanje desnog vijka). E se okreće tako da želi doći u položaj H.



Svjetlosni valovi su reda $5 \cdot 10^{-5}$ cm, dakle mnogo manji od optičkih aparata. Radio stanice emitiraju valove reda 100 m dakle mnogo veći od aparata. U najnovije vrijeme mogu se proizvoditi elektromagnetski valovi dužine nekoliko cm (radarski valovi) pa je time otvoreno veliko polje istraživanja (mikrovalna tehnika). Kod ovako visokih frekvencija (reda 9000 MHz) vodiči se upotrebljavaju za prenos energije sa jednog mjesta na drugo, ali se smatraju samo kao vodovi za valove, a ne za struju (valovodi).

Jednadžba kojom se definiraju odnosi E i H-vektora data je izrazom

$$\frac{dE}{dx} = -\mu \frac{dH}{dt} \quad \text{odnosno} \quad \frac{dH}{dx} = -\epsilon \frac{dE}{dt}$$

Ako se diferencira najprije po x, a onda po t, dobije se

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = -\epsilon \frac{d}{dx} \left(\frac{dE}{dt} \right) \quad \text{odnosno} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dE}{dx} \right) = -\mu \frac{d^2 H}{dt^2}$$

Medjutim, važi jednakost

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dE}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dE}{dx} \right) \text{ pa imamo}$$

$$\frac{d^2 H}{dt^2} = \frac{1}{\mu \epsilon} \frac{d^2 H}{dx^2} \quad \text{odnosno} \quad \frac{d^2 E}{dt^2} = \frac{1}{\mu \epsilon} \frac{d^2 E}{dx^2}$$

Ove jednačbe predstavljaju jednačbe putujućeg transverzalnog elektromagnetskog vala (zbog toga što su E i H okomiti na smjer prostiranja). Ovakav val se naziva ravni polarizirani val jer u svim tačkama i svim trenutcima vremena vektori H ostaju paralelni sa odredjenom ravninom dok su vektori E paralelni sa drugom ravninom koja je okomita na prvu. Može se reći da se val "samoodržava" jer nišu potrebni nikakvi drugi "izvori" električnih i magnetskih polja osim samog vala. Promjenljivo magnetsko polje održava električno polje.

Koeficijent $1/\mu\epsilon$ predstavlja kvadrat brzine prostiranja vala.

Izmedju jačina električnog i magnetskog polja elektromagnetskog vala postoji odnos $E = E_m \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$, odnosno $H = H_m \sin \omega \left(t - \frac{y}{v} \right)$ gdje je v brzina prostiranja vala. Imajući u vidu da je $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ dobijemo odnos

$$\sqrt{\mu} H_m = \sqrt{\epsilon} E_m ; \sqrt{\mu_0} H_m = \sqrt{\epsilon_0} E_m \text{ za vakuum}$$

Prenos energije pomoću elektromagnetskog vala

Kao i svaki drugi val, i elektromagnetski val prenosi energiju. Može se pokazati da je trenutna brzina prenosa energije elektromagnetskim valom po jedinici površine okomite na pravac prostiranja jednaka

$$S = EH$$

gdje su E i H trenutne vrijednosti električnog i magnetskog polja. Dimenzionalno je

$$S \left[\frac{V}{m} \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2} \right]$$

Kako su E i H međusobno okomiti, to se S može smatrati kao vektor u smjeru prostiranja vala. Ovaj vektor se naziva Poynting-ov vektor.

Gustoća energije u električnom polju data je sa $W_e = \epsilon \frac{E^2}{2}$, a u magnetskom polju sa $W_m = \mu \frac{H^2}{2}$. U elementu prostora je onda sadržana energija

$$dS \, v \, dt \left(\epsilon \frac{E^2}{2} + \mu \frac{H^2}{2} \right)$$

Val putuje brzinom v u pravcu okomitom na dS . Ako energija putuje istom brzinom, onda će sva ta energija proći kroz presjek dS u vremenskom intervalu dt .

Otuda prolaz energije kroz jedinicu površine u jedinici vremena

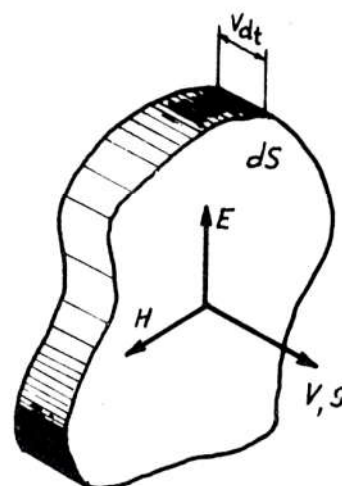
$$S = \frac{v}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

Radi odnosa $\epsilon E^2 = \mu H^2$, može se pisati

$$S = v \epsilon E^2 = v \mu H^2 = EH$$

Jednadžba daje trenutnu brzinu prenošenja energije po jedinici površine. Vremenski prosječna brzina prenosa jednaka je

$$v \epsilon \bar{E}^2 \quad (\text{prosječna vrijednost za } E) \text{ ili} \\ v \mu \bar{H}^2$$



Ako je val sinusoidalalan, onda je prosječna vrijednost E i H jednaka $\frac{1}{2} E_m$ odnosno $\frac{1}{2} H_m$ (maksimalna vrijednost). Otu-
da za prosječnu veličinu vektora S imamo

$$S_{\text{pros.}} = \frac{1}{2} v \epsilon E_m^2 = \frac{1}{2} v \mu H_m^2 = \frac{1}{2} E_m H_m$$

a u vakuumu

$$U_{\text{pros.}} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_m^2 = \frac{1}{2} c \mu H_m^2 = \frac{1}{2} E_m H_m$$

Opći oblik Pointyng-ovog vektora glasi

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

iz čega se vide očigledno relativni pravci i smjerovi ovih
triju vektora.

Važan je odnos $\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0 = 376,73 \Omega$ nazvan "valni otpor"
praznog prostora. S tim imamo

$$|S| = |E| \cdot |H| = \frac{1}{Z_0} |E|^2$$

Ovaj odnos $\frac{E}{H}$ važi u svakoj tački prostora i u svakom trenutku.
Dalje važi

$$H_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{Z_0}$$

što znači da je zračenje najjače okomito na dipol, a u smjeru
dipola je zračenje nula.

28. VIŠEVALNE STRUJE

Ako strujni ili naponski val nisu sinusoidalni nego izobličeni (kao kod struje magnetiziranja), onda se proučavanje takvih pojava svodi na općenito proizvoljne periodične funkcije $y = f(t)$ sa trajanjem perioda T , odnosno sa $f = 1/T$.

Takve izobličene periodičke funkcije se mogu Fourier-ovom analizom razložiti u red sinusnih valova sa frekvencijom kao osnovna funkcija i cjelobrojnim multiplima osnovne frekvencije. Sinusni val sa frekvencijom osnovne krivulje naziva se "osnovni val", a sinusni val sa kraćim periodom od osnovnog, dakle sa većom frekvencijom od osnovne, nazivaju se "gornji ili viši valovi" ili "viši harmonički članovi" (na pr. drugi harmonički član sa dvostrukom frekvencijom itd.).

U općenitom slučaju, pojedini članovi Fourier-ovog reda mogu imati različite tjemene vrijednosti i različite fazne kuteve.

Ako sa C_0 označimo neki konstantni član a sa $C_1, C_2, C_3 \dots$ i $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ tjemene vrijednosti i fazne kuteve članova 1, 2, 3 ranga Fourier-ovog reda, onda imamo beskonačni red sinusa

$$y = f(t) = f(t+kT) = C_0 + C_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + C_2 \sin(2\omega t - \varphi_2) + \dots$$

Ovaj se red može napisati i u obliku beskonačnog reda sinusa i kosinusa

$$y = C_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2 \omega t + \dots + \\ + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2 \omega t + \dots$$

a veza izmedju C_n i φ_n reda sinusa i tjemenih vrijednosti A_n i B_n članova sinusa i kosinusa je data sa:

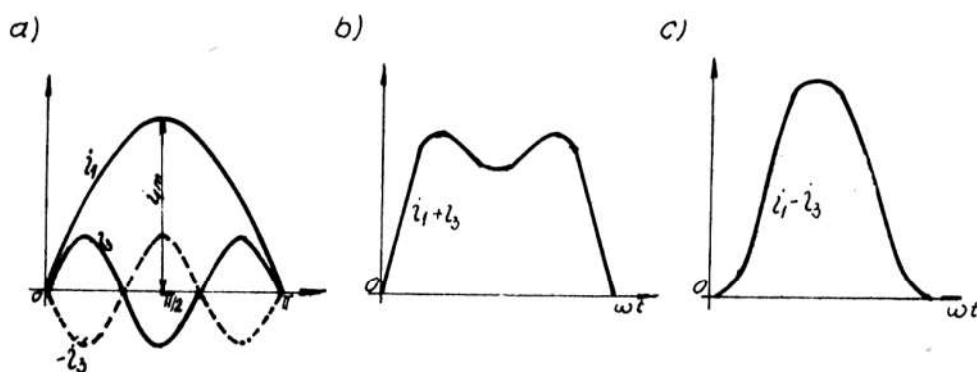
$$A_n = C_n \cos \varphi_n ; \quad B_n = - C_n \sin \varphi_n$$

$$C_n^2 = A_n^2 + B_n^2 ; \quad \operatorname{tg} \varphi_n = - \frac{B_n}{A_n}$$

U elektrotehnici se sreću, međjutim, mnogo jednostavniji oblici: sa malim brojem članova (ostali jednaki nuli), bez parnih članova sinusa i kosinusa, bez svih članova kosinusa, i bez svih članova kosinusa i parnih članova sinusa.

Ovdje će biti razmotreni neki slučajevi važni za elektrotehničku praksu.

Električni strojevi (generatori) daju napone i struje koji sadrže samo neparne članove (3, 5 ...) Krivulja struje na slici b) i c) se može shvatiti kao suma odnosno razlika osnovne i viših frekvencija



$$i_1 + i_3 = i_{1m} \sin \omega t + i_{3m} \sin 3 \omega t$$

$$i_1 - i_3 = i_{1m} \sin \omega t - i_{3m} \sin 3 \omega t$$

Krivulja c) sliči veoma na krivulju magnetiziranja. Pokazaćemo nekoliko rješениh primjera harmoničke analize.

1) Ako je negativni poluval zrcalna slika pozitivnog poluvala s obzirom na apscisu, onda takva krivulja sadrži samo valove neparnog reda 1,3,5,7 ... i sastoji se od neparnih sinusnih i kosinusnih članova.

2) Ako postoji poluvalna simetrija a uz to još postoji simetrija obaju četvrtina vala, onda krivulja sadrži samo još sinusne članove neparnog reda (kosinusni članovi sasvim otpadaju).

Upotrebom poznatih integrala mogu se izračunati koeficijenti Fourier-ova reda:

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt ; \quad A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n \omega t dt ;$$
$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n \omega t dt$$

Ako se ova pravila primjene na neke slučajeve onda se može dobiti dosta dobra aproksimacija za tehničku praksu.

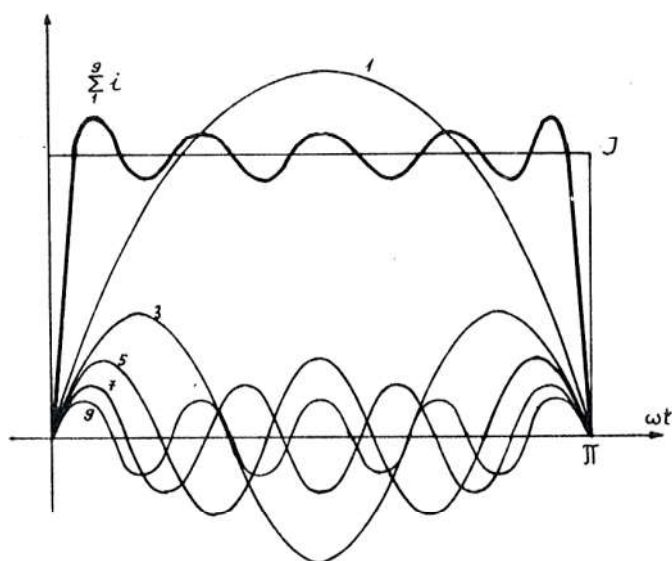
U rotoru generatora istosmjernje struje teče izmjenična struja pravokutnog oblika. Ova se krivulja može ovako prikazati:

$$i = \frac{4I}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots \right)$$

Teoretski je broj gornjih članova beskonačan, ali tjemene vrijednosti opadaju sa porastom rednog broja.

Nacrtano je devet sinusoida od kojih je osobito izražena treća (a to je u praksi veoma nepoželjno).

Takodje je u tehničkoj praksi važna krivulja u obliku trapeza i javlja se na obodu rotora električnih strojeva, kad je namotaj na 2/3 oboda a 1/3 ostaje nenamotana. (jednofazni namotaji!).



Ako se sa β označi električni kut u odnosu na osnovni val, onda je jednačba struje za istokračni trapez visine I

$$i = \frac{4I}{\pi\beta} \left(\sin \beta \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\beta \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\beta \sin 5\omega t + \dots \right)$$

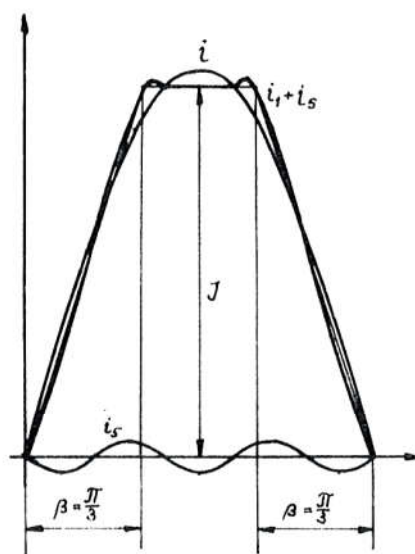
Od osobite je važnosti trapez kod koga je $\beta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

Ako se u jednačbu uvrsti $\beta = \frac{\pi}{3}$, onda je $\sin 3\beta = 0$ a $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 5\beta = +\sin 7\beta$ itd. a izraz $\frac{4I}{\pi\beta} \sin \beta$ postaje

$$\frac{4I}{\pi \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} I,$$

pa jednačba postaje

$$i = \frac{6\sqrt{3}}{2} I \left(\sin \omega t - \frac{1}{25} \sin 5\omega t + \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right)$$



Kako se vidi, trećeg harmoničnog člana uopće nema, a prvi slijedeći član (peti član) je samo 4% od osnovnog vala, dok se sedmi član može zanemariti.

Ako se za β stavi $\beta = \pi/2 = 90^\circ$, onda trapez postaje istokračan trokut. Jednadžba glasi

$$i = \frac{8I}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3 \omega t + \frac{1}{25} \sin 5 \omega t - \dots \right)$$

Dakle, javlja se treći harmonični član pa se stoga oblik trokutnog napona izbjegava.

Nesimetrični valovi u četvrtini perioda

Često se javljaju naponi i struje koji su nesimetrični u četvrtini perioda. Ovakvi valovi sadrže neparne sinusne kao i neparne kosinusne članove.

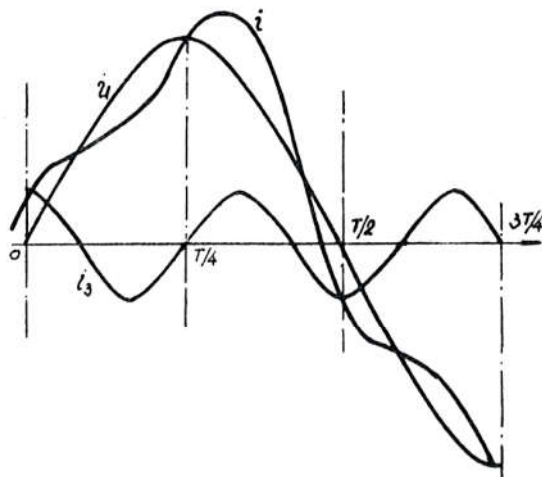
Ako se općenito označi amplitude sinusnog vala sa $A_{1m}, A_{3m}, A_{5m} \dots$ amplitude kosinusnog vala sa $B_{1m}, B_{3m}, B_{5m} \dots$, onda glasi Fourier-ova jednadžba

$$i = A_{1m} \sin \omega t + A_{3m} \sin 3 \omega t + A_{5m} \sin 5 \omega t + \dots \\ + B_{1m} \cos \omega t + B_{3m} \cos 3 \omega t + B_{5m} \cos 5 \omega t + \dots$$

Kao primjer pokazana je krivulja magnetiziranja transformatora sa željezom. Tu se vidi djelovanje kosinusnog člana na oblik rezultirajuće krivulje.

Za dati slučaj važi jednadžba

$$i = i_{1m} \sin \omega t + i_{3m} \cos 3 \omega t$$



Ova krivulja se već mnogo približava krivulji magnetiziranja. Utjecaj trećeg harmoničnog člana je značajan i ima neugodne posljedice.

Efektivna vrijednost i snaga viševalnih struja

Ako neka viševalna struja radi preko nekog omskog otpora R , u njemu stvara toplinske gubitke $I^2 R$. Ako se pretpostavi da je R nepromjenljiv (dopušteno za slučaj niskih frekvencija), onda se može utvrditi da osnovni val i svaki drugi viši član vrši svoj udio u toplinskom gubitku: $I_1^2 R$, $I_2^2 R$, $I_3^2 R$, $I_4^2 R$ itd. pri čemu nije važno da li se radi o sinusnom ili kosinusnom valu. Ako su I_1 , I_2 ... efektivne vrijednosti pojedinih gornjih valova, onda je ukupni gubitak

$$P_v = I_1^2 R + I_2^2 R + I_3^2 R + \dots = R(I_1^2 + I_2^2 + \dots)$$

Ukupni gubitak se može pisati kao $I^2 R$, jer struja I ima isto djelovanje kao odgovarajuća istosmjerna struja koja po toplinskom djelovanju odgovara toj viševalnoj struji - efektivnoj vrijednosti

$$I^2 R = (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots) R$$

iz čega se može izvesti jednadžba efektivne vrijednosti viševalne struje

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}$$

Takodje važi slično i za efektivnu vrijednost napona viševalnog oblika:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}$$

Efektivna vrijednost je korjen iz sume kvadrata efektivnih vrijednosti osnovnog vala i svih gornjih članova iz kojih se

izobličeni val sastoji.

Snaga viševalnih struja

Već ranije je pokazano da izmjenični napon $u = u_m \sin \omega t$ i izmjenična struja $i = i_m \sin (\omega t \pm \varphi)$ iste frekvencije daju snagu

$$P = \frac{u_m i_m}{T} \int_0^T \sin \omega t \sin (\omega t \pm \varphi) dt = \frac{u_m i_m}{T} \int_0^T [\cos \varphi - \cos (2 \omega t \pm \varphi)] dt = U I \cos \varphi$$

Ako su, međutim struja i napon razne frekvencije $u_1 = u_{1m} \sin \omega t$ i $i_3 = i_{3m} \sin (3 \omega t \pm \varphi)$, onda je trenutna snaga

$$P_t = u_1 i_3 = u_{1m} \sin \omega t i_{3m} \sin (3 \omega t \pm \varphi)$$

Može se pokazati da je

$$\int \sin \omega t \sin (3 \omega t \pm \varphi) dt = \int (\sin \omega t \sin 3 \omega t) \cos \varphi \pm (\sin \omega t \cos 3 \omega t) \sin \varphi dt = 0$$

Ako su μ i ν dva razna broja gornjih članova ($\mu = 1, \nu = 3$), onda je

$$\int_0^T \sin \mu \omega t \sin \nu \omega t dt = 0 ; \int_0^T \sin \mu \omega t \cos \nu \omega t dt = 0$$

Otuda je srednja snaga za vrijeme jednog perioda:

$$P = \frac{1}{T} u_{1m} i_{3m} \int_0^T \sin \omega t \sin (3 \omega t \pm \varphi) dt = 0$$

Naponi i struja gornjih članova razne frekvencije ne daju nikakvu snagu za vrijeme jednog perioda.

Ako je međutim $\mu = \nu$, dakle gornji članovi istog reda, struja i napon rade skupa, onda važe općenito:

$$P_v = \frac{1}{T} \int_0^T u_v i_v dt = \frac{U_v I_v}{T} \int_0^T \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) dt = \frac{U_v I_v}{T} \left(\frac{T}{2} \cos \varphi \right)$$

ili drugačije:

$$P = U_v I_v \cos \varphi$$

Strujni i naponski gornji valovi iste frekvencije daju, kao i osnovni val, srednju snagu za vrijeme jednog perioda.

Snagu sačinjava produkt od naponskih i strujnih efektivnih vrijednosti gornjih valova iste frekvencije i kosinusa kuta između oba vala.

Konačno se može općenito zaključiti:

Ako viševalni napon i viševalna struja sa efektivnim vrijednostima (kako su definirane ranije) I i U djeluju skupa, onda odaju ukupnu snagu

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots$$

Ukupna snaga viševalne struje i napona sastoji se od sume pojedinih snaga osnovnog vala i gornjih valova iste frekvencije.

Za karakteriziranje viševalnih veličina, upotrebljavaju se još i ovi faktori:

Faktor sadržaja osnovnog titranja U_1/U dakle odnos efektivne vrijednosti osnovnog vala prema efektivnoj vrijednosti cijele veličine.

Faktor zvrčanja (Klirr-faktor)

$$K = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + I_5^2}}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2}}$$

Faktor snage viševalnih struja

Ako se sa P označi prividna snaga kao produkt već ranije definiranih efektivnih veličina U i I viševalnog napona i struje, onda je

$$P = U I$$

Odnos između aktivne snage P_a (kako je ranije definirano i prividne snage P naziva se (analogno ranije uvedenom pojmu za čiste sinusne veličine) "faktor snage" λ , pa važi

$$\lambda = \frac{P_a}{P}$$

Ovaj faktor snage, međjutim, nije nikakva funkcija kuta (kao kod sinusnih veličina) nego je to čisti brojni odnos.

Utjecaj raznih vrsta otpora

U slučaju omskog otpora, $i = u/R$, predstavlja veličina $1/R$ konstantu, pa narinuti viševalni napon i rezultirajuća struja ostaju nepromjenjeni i sačuvaju prvobitni viševalni oblik.

U slučaju induktivnog otpora nastaje povećanje otpora kod viših frekvencija radi odnosa $X_L = \omega L$

$$u = L \frac{di}{dt} \text{ odnosno } i = \frac{1}{L} \int u \, dt$$

Ako se stavi, npr. napon

$$u = u_{1m} \sin \omega t + u_{3m} \sin 3 \omega t + u_{5m} \cos 5 \omega t$$

onda je struja

$$i = - \frac{u_{1m}}{\omega L} \cos \omega t - \frac{u_{3m}}{3\omega L} \cos 3 \omega t + \frac{u_{5m}}{5\omega L} \sin 5 \omega t$$

Ako se u ovu jednadžbu uvrste tjemene vrijednosti za 1., 3., 5. gornji val izobličene struje

$$\frac{u_{1m}}{\omega L} = i_{1m} ; \quad \frac{u_{3m}}{3\omega L} = i_{3m} ; \quad \frac{u_{5m}}{5\omega L} = i_{5m}$$

dobije se konačno

$$i = - i_{1m} \cos \omega t - i_{3m} \cos 3\omega t + i_{5m} \sin 5\omega t$$

Kako se vidi iz jednadžbe struje, induktivni otpor raste proporcionalno sa rednim brojem gornjeg vala, dakle ωL , $3\omega L$, $5\omega L$ itd., tako da su strujni gornji valovi jako prigušeni. Otuda strujna krivulja izgleda manje izobličena: induktivni otpor je "čisti" od deformacije. Ova pojava se koristi i ako se želi "izgladiti" neka izobličena struja. U strujni krug se uključuje induktivni otpor (otuda naziv "prigušnica") koji "izgladi" izobličenu krivulju struje tako da poprimi skoro sinusni oblik. Naponska krivulja ostaje nepromjenjena.

U slučaju kapacitivnog otpora nastaje smanjenje otpora kod viših frekvencija radi odnosa $X_C = 1/\omega C$.

Ako se na neki kapacitivni otpor narine napon npr.

$$u = u_{1m} \sin \omega t + u_{3m} \sin 3\omega t - u_{5m} \cos 5\omega t$$

onda je zbog $i = C \frac{du}{dt}$

$$\begin{aligned} i &= \omega C u_{1m} \cos \omega t + 3\omega C u_{3m} \cos 3\omega t + 5\omega C u_{5m} \sin 5\omega t = \\ &= i_{1m} \cos \omega t + i_{3m} \cos 3\omega t + i_{5m} \sin 5\omega t \end{aligned}$$

Vidi se da rastu kapacitivne vodljivosti ωC , $3\omega C$, $5\omega C$, (dakle opadaju kapacitivni otpori i s tim rastu jačine strujnih gornjih harmoničnih članova.

Kapacitivni otpor pojačava djelovanje viših harmoničnih članova strujnog vala pa izobličenost strujnog vala još više dolazi do izražaja u odnosu na naponski val. Ova pojava se koristi ako se želi provjeriti neki naponski val u kome ima gornjih harmoničnih članova ali koji nisu osobito izraženi. Takav naponski val se narine na kapacitivni otpor pa se na katodnom osciloskopu vide izražene deformacije strujnog vala iz čega se može zaključiti o deformacijama u gornjim valovima naponskog vala.

29. RAVNI I KRUŽNI DIAGRAMI

Ako se niz vrijednosti, npr. $\bar{Z}$, $\bar{Y}$, $\bar{U}$, ili $\bar{I}$ nanese u Gaussovoj ravnini, pri čemu se ove vrijednosti mijenjaju u zavisnosti o nekoj drugoj veličini (npr. variranjem frekvencije), pa se onda vrhove versora međusobno spoji - dobiće se geometrijsko mjesto tačaka - diagram.

Svrha ovakvih diagrama je da se dobije dobra preglednost o zakonitosti promjene neke veličine.

Razlikuju se dvije vrste ovakvih diagrama

- a) naponski diagrami i diagrami otpora
- b) strujni diagrami i diagrami vodljivosti

Ako se podje od općeg oblika Ohm-ovog zakona $\bar{U} = \bar{I} \cdot \bar{Z}$, onda se može struja smatrati konstantom a tražiti pripadni napon za promjenljive otpore: dobije se sa krajevima versora napona naponski diagram.

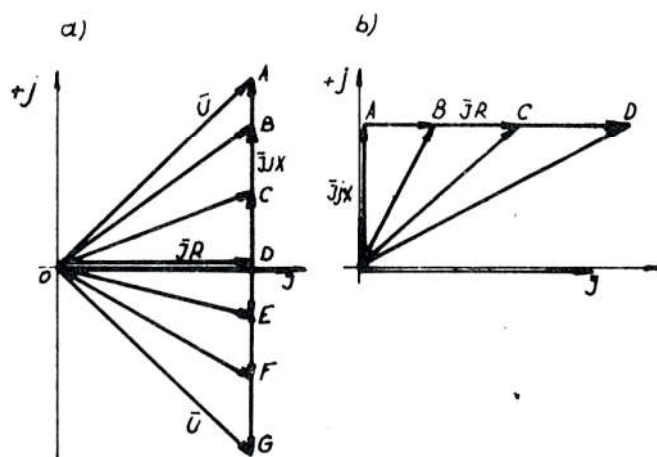
Ako se napon smatra konstantnim, pa se za promjenljive otpore traži pripadna struja uz promjenljive otpore: dobije se sa krajevima versora struje strujni diagram.

Naponski diagrami

Imamo serijski R, L, C pa se jednom mijenja reaktancija a drugi put omski otpor. Važi jednadžba:

$$\bar{U} = \bar{I} (R + jX) = \bar{I}R + \bar{I}jX$$

gdje je $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$



Pretpostavlja se konstantna struja i traži se diagram napona.

Na oba diagrama je struja I stavljena u realnu os.

Kad je otpor R konstantan a X promjenljiv, dobije se naponski diagram prema slici a). Radni napon IR leži u realnoj osi, jer je u fazi sa I .

Odavde se nanose okomito promjenljivi reaktivni naponi $\bar{I}jX$, već prema predznaku (ωL ili $1/\omega C$) i predstavljaju se odsječcima DA , DB , DC , DE , DG itd. Krajnja tačka naponskog versora U putuje po pravcu AG , koji je okomit na realnu os. Pravac AG je geometrijsko mjesto tačaka jednačbe $\bar{U} = \bar{I}jX$ za konstantnu struju I i promjenljivi reaktivni otpor X .

Na isti način se dobije naponski diagram za razne omske otpore R , pri konstantnom reaktivnom otporu jX . Dobije se pravac paralelan sa realnom osi.

Ako se istovremeno proporcionalno mijenjaju R i X onda se dobije pravac kroz koordinantni početak koji je koso položen. Ako nema proporcionalnosti između R i X , dobije se za diagram neka zakrivljena linija, čiji oblik ovisi o zajedničkom parametru.

Svi naponski diagrami se mogu lako pretvoriti u diagrame otpora ako se veličine podjele sa I . Otuda važi:

diagrami napona U odgovaraju diagramima impedancija Z .

Strujni diagrami

Ako se uzme da je napon U konstantan, a da se mijenja reaktancija, onda se diagram može razviti na osnovu slijedeće jednačbe:

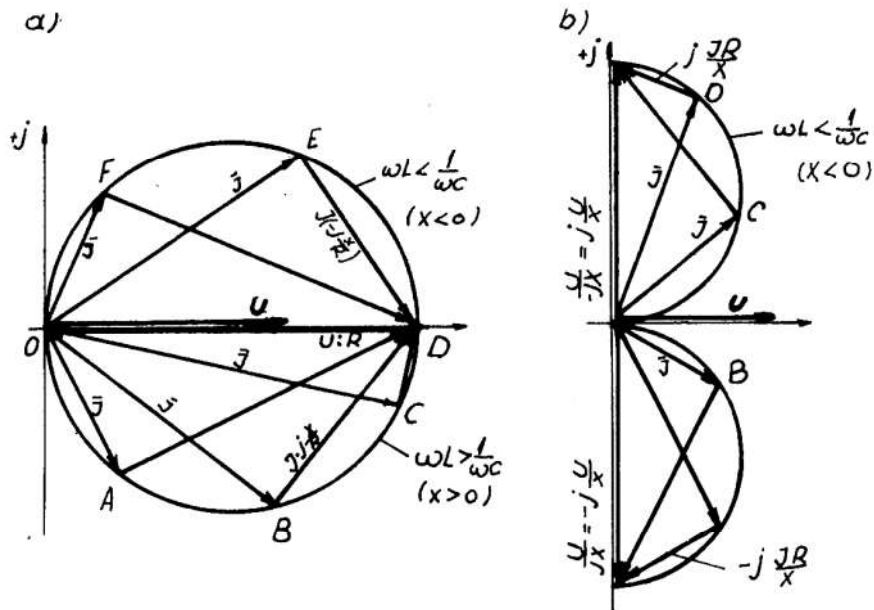
$$\frac{U}{R} = \bar{I} + \bar{I}j \frac{X}{R}$$

U kompleksnoj ravnini se referentni versor U i s njim u fazi versor U/R (zapravo je i ovo struja) postavlja u realnu os. Versor U/R kao i $Ij X/R$ su strujni versori. Versori I i $Ij X/R$ stoje okomito jedan na drugoga i slažu se (dopunjuju) sa konstantnim versorom U/R , jer se pretpostavilo da su U i R konstantni.

Za promjenljive vrijednosti reaktancije X dobije se prema veličini i smjeru pripadni versori I i $Ij X/R$ koji stoje međusobno uvijek pod pravim kutem na krugu gdje se sjeku ova dva versora. Diametar ovog kruga je $I = U/R$. Pri tome dužine $OA \dots OF$ predstavljaju neposredno struje (prema jednačbi $U/R = I + Ij X/R$) prema veličini i fazi, tako da krug predstavlja diagram struja pri konstantnom naponu. U donjem dijelu diagrama vlada pretežno induktivni otpor pa struje, predstavljene versorima $OA, OB \dots$ zaostaju za narinutim naponom.

U gornjem dijelu diagrama vlada pretežno kapacitivni otpor, pa versori struje prethode narinutom naponu.

Versor OD prikazuje struju za $X = 0$, dakle $I = U/R$. Ako se hoće dobiti odgovarajući strujni diagram za promjenljivo R uz konstantno X , podjeli se osnovna jednačba sa jX , pa se ima:



$$U = IR + IjX$$

$$\frac{\bar{U}}{jX} = -j \frac{\bar{U}}{X} = \bar{I} - \bar{I}j \frac{R}{X}$$

Za pozitivno X (pretežno induktivno opterećenje) vektor $-j U/X$ ima smjer negativne $-j$ -osi, a dva okomita vektora se sastaju u tački koja leži na polukrugu sa diametrom $-j U/X$. Struje I zaostaju iza napona.

Za negativno X (pretežno kapacitivno opterećenje) vektor

$$\frac{U}{-jX} = +j \frac{U}{X}$$

postaje pozitivan i leži u smjeru pozitivne j -osi, a sjecišta sa pripadnim vektorom I leže na polukrugu iznad realne ose. Struje I prethode narinutom naponu U .

Inverzija

Impedancija u najopćenitijem obliku ima kompleksni izraz

$$\bar{Z} = \frac{U}{I} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

a u eksponencijalnom obliku

$$\bar{Z} = Z e^{j\varphi}$$

a iznosi pojedinih veličina su

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

i fazni pomak

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Ako se napravi recipročna vrijednost operatora Z dobije se kompleksni operator vodljivosti

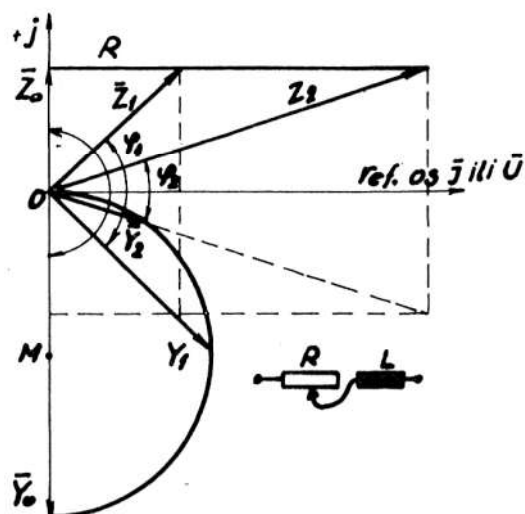
$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{Z e^{j\varphi}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi}$$

Operator $\bar{Y}$ se naziva "inverzni operator" prema operatoru $\bar{Z}$.

Pod nazivom "inverzija" podrazumjeva se postupak za računsko i crtačko odredjivanje operatora Y iz pripadnog operatora Z u Gauss-ovoj ravnini. Prednost praktične primjene inverzije je u tome da se mogu uštediti opsežna računanja kad se za veći broj Z -operatora traži diagram Y -operatora.

Ako se operatori Z i Y (u eksponencijalnom obliku) prikažu u Gauss-ovoj ravnini, onda se vidi da u odnosu na referentnu os, smjer operatora Y leži kao slika u ogledalu prema operatoru Z a fazni kutevi imaju suprotan predznak.

U smjeru referentne osi leži onaj versor struje I ili napona U prema kojem Z ili Y operator trebaju biti dovedeni u smjer sa svojim faznim položajem. U tom slučaju svakom Z -operatoru pripada jedan U -versor: $\bar{U} = \bar{I} \bar{Z}$ a isto tako svakom Y -operatoru pripada jedan I -versor: $\bar{I} = \bar{U} \bar{Y}$.



Na diagramu se vidi da paraleli $\bar{Z} = R + jX$ sa referentnom osi, odgovara polukrug

$$\bar{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+jX}$$

za slučaj promjenljivog omskog otpora. Zajednički koordinatni početak za Z i Y - operatore se naziva centar inverzije.

Uzevši u obzir da je $Y = 1/Z$ može se opaziti da produkti $Z_1 Y_1$, $Z_2 Y_2$, $Z_3 Y_3$ (mjereni na crtežu u cm) imaju istu vrijednost K koja se naziva potencija (eksponent) inverzije. Potencija inverzije daje mogućnost da se odmah (bez međuračunanja) mogu iz cm-očitavanja Z -osi očitati iznosi $Y = 1/Z$.

Iz prednjeg razmatranja proizlazi da pravcu kao diagramu kompleksnog otpora Z odgovara krug kao diagram kompleksne vodljivosti Y .

Ako se cijeli diagram Z preslika simetrično, onda središte kruga vodljivosti M leži na okomici koja je iz koordinatnog početka povučena na preslikani pravac Z .

Rezimirajući može se ovako zaključiti o diagramima.

- 1) Operatori otpora $Z = R_p \pm jX$ ili $Z = R \pm jX_p$ (promjenljivo) imaju za diagram pravac paralelno ili okomito na referentnu os I (struja).

- 2) Operatori vodljivosti

$$Y = \frac{1}{R_p \pm jX} \quad \text{ili} \quad Y = \frac{1}{R \pm jX_p}$$

imaju za diagram polukrug, koji dodiruje centar inverzije 0 a čije središte leži na realnoj osi ili j-osi.

- 3) Operatori otpora imaju struju I kao referentnu os. Ako se Z-operatori pomnože sa nekom konstantnom strujom I, onda se iz diagrama otpora dobiju naponski diagram.
- 4) Operatori vodljivosti imaju napon U kao referentnu os. Ako se Y operatori pomnože sa nekim konstantnim naponom U, onda se iz diagrama vodljivosti dobije diagram struje.
- 5) Pomoću inverzije se mogu od strujnih diagrama (struja) dobiti naponski diagrami (naponi).

S A D R Ź A J

1. Atomistička struktura elektriciteta	1
2. Mehanizam provodnih struja	11
3. Razmatranje o električnoj struji	24
4. Razmatranje o električnom naponu	25
5. Zakoni strujanja u jednostavnom strujnom krugu ..	28
6. Zakoni strujanja u razgranatom strujnom krugu	39
7. Energija električne struje	56
8. Magnetsko djelovanje električne struje	66
9. Energija i sile u magnetskom polju	107
10. Polja strujanja i prostorni vodiči	127
11. Električne pojave u nevodičima	139
12. Energija i sile u nevodičima	155
13. Električne pojave u tekućinama	172
14. Električne pojave u vakuumu i plinovima	181
15. Poluvodiči	197
16. Maxwell-ove jednačbe	216
17. Teorija izmjeničnih struja	223
18. Potrošač u krugu izmjenične struje	240
19. Energija izmjenične struje	248
20. Simbolična metoda računanja izmjeničnih veličina .	255
21. Primjena simbolične metode	261
22. Četveropoli	290
23. Rezonancija	297
24. Prigušnice i transformatori	305
25. Višefazne izmjenične struje	323
26. Slobodni titrajni krug	348
27. Elektromagnetski valovi	359
28. Viševalne struje	365
29. Ravni i kružni diagrami	376

Korištena literatura:

1. Pohl: Elektrizitätslehre, Springer Berlin, 1960
2. Möller: Grundlagen der Elektrotechnik, B.G. Teubner, Stuttgart, 1963.
3. Schönfeld: Die wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik, Springer, Berlin, 1960.
4. Lončar: Osnovi elektrotehnike I, II, Tehnička knjiga, Zagreb, 1960.
5. Ranojević: Osnovi elektrotehnike I, II, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1964.
6. Supek: Moderna fizika i struktura materije, Tehnička knjiga, Beograd, 1960.
7. Ivanović: Teorija naizmjeničnih struja, Naučna knjiga, Beograd, 1949.
8. Küpfmüller: Einführung in die theoretische Elektrotechnik, Springer Berlin, 1965.
9. Glasstone: Sourcebook on atomic energy, Van Nostrand New York, 1958.
10. Ivanović: Vektorska analiza, Naučna knjiga, Beograd, 1960.

