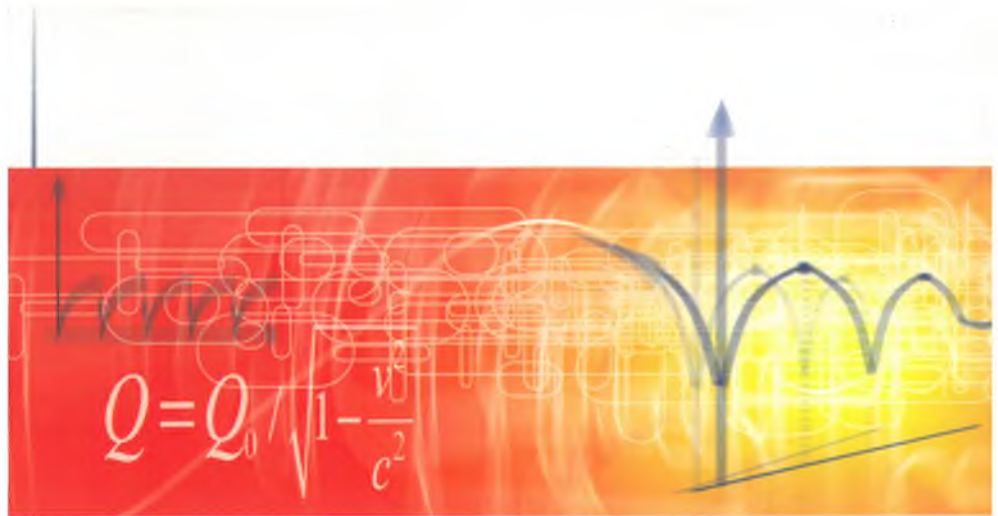


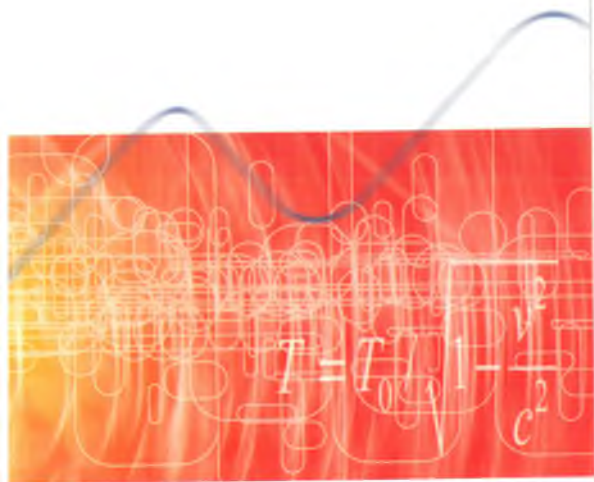
The top section of the cover features a vibrant orange and red background. It is filled with faint, glowing mathematical symbols and graphs. On the left, there's a graph with a vertical axis and a curve. In the center, the Lorentz factor formula is displayed. On the right, another graph shows a periodic wave. The overall aesthetic is scientific and dynamic.
$$Q = Q_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

DANILO
BLANUŠA

odabrana predavanja iz
matematičnih
metoda fizike



školska knjiga



Znameniti Blanušin graf (*Blanuša's snark*)
 ovjekovječen na poštanskoj marki Hrvatskih
 pošta 2000. godine, u povodu Svjetske godine
 matematike.

Daniilo Blanuša

Odabrana predavanja iz
Matematičkih metoda fizike

Darbo
od
Ivana
14. 12. 05.



Ovim djelom, *Školska knjiga* se
priključuje proslavi 2005, Svjetskoj
godini fizike (UNESCO) povodom
100. obljetnice Einsteinovih
fundamentalnih otkrića u 1905.

Urednice

BRANIMIRA VALIĆ

ŠTEFICA DUMANČIĆ POLJSKI

Recenzenti

akademik VLADIMIR DEVIDE

prof. dr. sc. VLADIS VUJNOVIĆ

Lektorica

ZLATA BABIĆ

Grafički urednik

DRAŽEN HRLIĆ

Naslovnicu izradila

ANA BARIČEVIĆ

Korektorica

SONJA BABIĆ

Slog i prijelom

KLIK-D.T. d.o.o., Zagreb

© ŠKOLSKA KNJIGA, d.d., Zagreb, 2005.

Nijedan dio ove knjige ne smije se umnožavati, fotokopirati ni na bilo koji način reproducirati bez nakladnikova pismenog dopuštenja.

CIP – Katalogizacija u publikaciji

Nacionalna i sveučilišna knjižnica – Zagreb

UDK 51:53>(075.8)

BLANUŠA, Danilo

Odabrana predavanja iz Matematičkih metoda

fizike / Danilo Blanuša ; priredio Ivan

Ivanšić. - Zagreb : Školska knjiga, 2005.

ISBN 953-0-61427-6

I. Matematičke metode u fizici – Udžbenik

450321078

ISBN 953-0-61427-6

Tisak: Grafički zavod Hrvatske, d.o.o., Zagreb

Danilo Blanuša

Odabrana predavanja iz
Matematičkih metoda fizike

priredio
prof. dr. sc. Ivan Ivanšić

 **školska knjiga**

Zagreb, 2005.

Sadržaj

Predgovor priređivača	7
Odabrana predavanja iz Matematičkih metoda fizike	11
Teorija distribucija	11
Zbrajanje distribucija	16
Operacije nad funkcionalima	18
Linearna nezavisnost	22
Skraćene diferencijalne jednačbe s konstantnim koeficijentima	25
Teorem egzistencije rješenja diferencijalne jednačbe	
$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$	34
Neskrraćena diferencijalna jednačba n -tog reda $L(y) = \varphi(x)$	44
Fourierovi redovi	51
Trigonometrijski red	56
Kompleksni oblik Fourierova reda	61
Fourierov red po općem ortogonalnom sustavu funkcija	64
Sjećanja na akademika Danila Blanušu, V. Devidé	75



Danilo Blanuša

Predgovor priređivača

Svi se s poštovanjem sjećamo svojih učitelja i profesora i svih onih od kojih smo nešto naučili, čuli ili vidjeli. Ali kada se spomene ime profesora Blanuše, onda od svih koji su bili njegovi studenti ili su ga poznavali čujete: *Ah, u vrijeme mogega studija nije bilo ravnoga njemu. Tog profesora ne mogu zaboraviti.* Suvišno se pitati za Blanušinu tajnu kako je to postizao, jer odgovor je jednostavan i nedvojbjen – imao je prirodenu sposobnost prenošenja znanja na druge. Ako je to znanje još i bogato, kao što je bilo njegovo, onda nema čuđenja što je u svojem djelovanju bio vjerojatno najpoznatiji, a sigurno najobljubljeniji sveučilišni profesor matematike. Sami studenti prepoznavali su kvalitetu njegovih predavanja, pa je u poratnim godinama, koje nisu bile lake za aktivne profesore u ratnom razdoblju, primio priznanje za svoj nastavni rad. Riječ je o novčanoj nagradi od 25 000 tadašnjih dinara koju mu je u prosincu 1949. godine dodijelio Komitet za sveučilišta i visoke škole.

O našem velikanu znanosti pisano je više puta. Ovdje ćemo vrlo kratko navesti nekoliko osnovnih podataka.

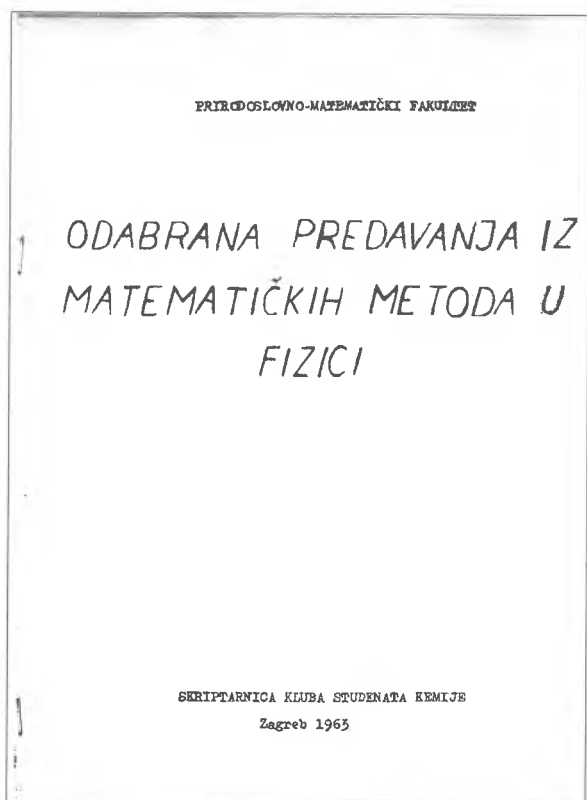
Danilo Franjo Đuro Blanuša rodio se 7. prosinca 1903. u Osijeku, a umro 8. kolovoza 1987. u Stubičkim Toplicama. Studij elektrotehnike započeo je u Zagrebu, a nakon jedne školske godine nastavio u Beču. Osim programa elektrotehnike, slušao je niz neobveznih teorijskih predmeta iz matematike i fizike na Tehničkom i Filozofskom fakultetu Bečkog sveučilišta.

Devet godina radio je u Gradskoj električnoj centrali u Zagrebu. Slobodno vrijeme posvećivao je svojoj ljubavi – matematici, i izradio opsežnu disertaciju iz područja specijalnih funkcija, konkretno, Besselovih funkcija. Nakon obrane disertacije *Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija* 1943. godine postavljen je početkom 1944. god. za izvanrednog profesora na Tehničkom fakultetu u Zagrebu. Od tada je stalno djelovao na Sveučilištu u Zagrebu kao znanstvenik i nastavnik. Ostavio je značajan trag u matematici, fizici i elektrotehnici. Uspomena na njegov znanstveni rad ovjekovječena je u logotipu Hrvatskoga matematičkog društva i na prigodnoj marki Hrvatskih pošta iz 2000. god., izdane u povodu Svjetske matematičke godine. Na oba mjesta prikazan je Blanušin graf.

Predavao je matematičke predmete na Tehničkom, Prirodoslovno-matematičkom, a od 1966. godine na Elektrotehničkom fakultetu. Stoga ga se sjećaju mnogi matematičari, fizičari, inženjeri arhitekture, brodogradnje, elektrotehnike, geodezije, građevinarstva, kemije i strojarstva.

U godinama poslije Drugoga svjetskog rata vladala je oskudica, trebalo je učiti, a pomagala nije bilo. Studenti su za neke predmete organizirali umnožavanje bilježaka s predavanja pojedinih profesora. Tadašnja tehnologija umnožavanja izgledala je ovako: na predavanjima su se rukom pisale bilješke, zatim su se pisaćim strojem (nije bilo električnih) prepisale na matrice, nakon čega su se na matricu rukom unosili posebni znakovi (npr. znak integrala, grčka slova itd.), a onda se to s matrica umnožavalo na šapirografu, spajalo spajalicama i eto pisanog teksta (skripata).

Ovo što predstavljamo čitatelju upravo su jedna takva skripta. Studenti fizike I. Andrić, V. Paar i K. Šaub bilježili su predavanja kolegija *Matematičke metode fizike* profesora Blanuše i dio tih bilježaka umnožili. Evo kako je izgledala naslovna stranica tih skripata.



Srećom, sačuvao se primjerak toga studentskog izdanja, pa ponovnim objavljivanjem trajno čuvamo uspomenu na izvanrednu Blanušinu nastavnu sposobnost. Oni koji su ga slušali mogu ga „ponovno čuti” čitanjem ovog teksta. Mogu se ponovno vratiti u studentske klupe i oživjeti sjećanja i ugođaj Blanušina predavanja.

Pogledamo li samo prvo predavanje, vidimo da treba usvojiti pojam distribucije. Iza tog termina krije se za studenta neobičan matematički objekt koji se neobično i strano ponaša u usporedbi s do sada usvojenim pojmovima. Blanuša ga jednostavno stavlja na ploču, a potom postupno približava putem nekoliko kratkih jednostavnih dokaza svojstava toga nepoznatog objekta. Zatim, na posebnom slučaju linearnog funkcionala, koji danoj realnoj funkciji pridružuje vrijednost funkcije u ishodištu, dokazuje da funkcional nije realiziran pomoću lokalno integrabilne funkcije, pa nas time uvjerava da raspravljamo o novom pojmu s kojim se do sada nismo sreli i s kojim, eto, možemo računati, a računi su zasnovani na pojmovima koje poznajemo. Nakon toga se osjećamo kao da apstraktno shvaćamo što je to i o čemu je riječ. Pojam je usvojen, njime baratamo kao s brojevima ili realnim funkcijama. Mislim da nam to ilustrira Blanušinu vještinu prenošenja znanja na studente.

Zagreb, 6. srpnja 2004.

Ivan Ivanšić

Odabrana predavanja iz *Matematičkih metoda fizike*

Prema predavanjima prof. dr. Danila Blanuše
u zimskom semestru 1963. godine skriptu sastavili:
Ivan Andrić, Vladimir Paar i Krešimir Šaub.

Teorija distribucija

Teoriju distribucija postavio je francuski matematičar Laurent Schwartz¹ da opravda formalne postupke s „pseudofunkcijama” (npr. δ -funkcijom²), time što je poopćen pojam funkcije. (Zato se u ruskoj literaturi koristi pojam poopćena funkcija.) Naime, sama definicija δ -funkcije:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \int_{-a}^a \delta(x) dx = 1 \quad (a > 0)$$

(svugdje jednaka nuli osim u jednoj točki) u sebi je proturječna jer bi po definiciji integrala taj integral morao biti 0 ili nedefiniran. No, s druge strane, izvjesne formalne operacije s tom „funkcijom” i njezinim „derivacijama” daju ispravne rezultate. Ipak, δ -funkcija ne može biti krajnji rezultat nekog računa već se pojavljuje u podintegralnim izrazima uz neku funkciju F i izračun tog integrala daje broj. Time smo funkciji F pridružili broj, konkretno u slučaju δ -funkcije broj $F(0)$, tj. vrijednost funkcije u ishodištu. Pokazat će se kasnije da takvo pridruženje ne možemo izvesti s običnim funkcijama.

¹ Laurent Schwartz (1915–2002), istaknuti francuski matematičar židovskog porijekla, dobitnik Fildsove medalje. Prva publikacija u kojoj je predstavio svoje ideje pojavila se 1948. god. pod naslovom *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques*. Izazov mu je bio Diracov formalni račun s delta-funkcijama.

² Paul Dirac (1902–1984), britanski fizičar, jedan od osnivača kvantne mehanike. Služio se svojim formalnim računom, tzv. delta-funkcijom. Za njih je znao da nemaju smisla u tada postojećim matematičkim pojmovima, ali je formalni račun davao ispravne rezultate.

U tom je smislu Schwartz definirao *funkcional* kao pridruženje kojim funkciji $\varphi(x)$ pridružujemo broj ili, simbolički

$$\varphi(x) \doteq (f, \varphi)$$

gdje je $\doteq$ oznaka za pridruženje, a f oznaka za funkcional, dok je (f, φ) pridruženi broj.

Na funkcije $\varphi(x)$ postavljaju se ovi uvjeti:

1. da su svugdje beskonačno derivabilne ili kraće, klase C^∞ ;
2. funkcije $\varphi(x)$ iščezavaju na rubovima i izvan konačnih intervala $[a, b]$, $\varphi(x) = 0$ za $x \notin (a, b)$.

Funkcije $\varphi(x)$ nisu analitičke (tj. ne daju se u svakoj točki razviti Taylorovim razvojem u red potencija). Primjer je neanalitičke funkcije

$$y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

koja je neprekinuta, beskonačno derivabilna (tj. klase C^∞), čije sve derivacije u ishodištu iščezavaju, $(\forall i) (y^{(i)}(0) = 0)$, pa Maclaurinova formula daje 0 umjesto $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Funkcije koje zadovoljavaju Schwartzove uvjete čine skup K (ili prostor K) pa za funkcije koje zadovoljavaju te uvjete uobičajeno pišemo $\varphi \in K$ (φ iz K).

Definicija pridruženja $\varphi(x) \doteq (f, \varphi)$ vrlo je široka pa na funkcional f postavljamo još neke zahtjeve:

1. linearnost funkcionala: $(f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f, \varphi_1) + \beta(f, \varphi_2)$;
2. neprekinutost funkcionala; ako postoji zajednički interval izvan kojega su funkcije $\varphi_i = 0$, pa ako φ_i teži jednoliko k nuli unutar tog intervala, onda (f, φ_i) teži također k nuli, tj.

$$\varphi_i \rightarrow 0 \Rightarrow (f, \varphi_i) \rightarrow 0.$$

Pod jednolikom se konvergencijom podrazumijeva

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0) (\forall x \in [a, b]) (n > n_0 \Rightarrow |\varphi_n(x)| < \varepsilon),$$

za razliku od obične konvergencije

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall x \in [a, b]) (\exists n_0) (n > n_0 \Rightarrow |\varphi_n(x)| < \varepsilon).$$

Takav se funkcional, prema Schwartzu, naziva *distribucijom*. Za distribucije vrijedi

$$\varphi_i \rightarrow \varphi \Rightarrow (f, \varphi_i) \rightarrow (f, \varphi).$$

Dokaz se osniva na 1. i 2.: $\varphi_i - \varphi \rightarrow 0 \Rightarrow (f, \varphi_i - \varphi) \rightarrow 0$ posljedica je neprekinutosti funkcionala i dalje, zbog linearnosti je $(f, \varphi_i - \varphi) = (f, \varphi_i) - (f, \varphi)$, dakle

$$\varphi_i - \varphi \rightarrow 0 \Rightarrow (f, \varphi_i) - (f, \varphi) \rightarrow 0,$$

što je ekvivalentno tvrdnji.

Sada ćemo promatrati jedno konkretno pridruženje zadano analitičkim izrazom. Neka je $\varphi \in K$, a za f pretpostavimo da je lokalno integrabilna

funkcija (znači da egzistira $\int_a^b |f(x)| dx$ za $\forall [a, b]$, tj. apsolutno je integrabilna u svim konačnim intervalima). To je slab zahtjev jer $f(x)$ ne treba biti ni svugdje neprekidna ni derivabilna, pa smo sigurni da je to široka klasa funkcija. Definiramo:

$$\varphi(x) \doteq (f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

To je integralna transformacija gdje originalu φ kao sliku pridružujemo broj (f, φ) . Kako je $\varphi \in K$, to je $\varphi = 0$ izvan konačnih intervala pa integral sigurno konvergira. Tako definiran funkcional zadovoljava:

1. linearnost:

$$(f, \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f [\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2] dx = \alpha (f, \varphi_1) + \beta (f, \varphi_2);$$

2. taj je funkcional neprekinut (dokaz u L. Schwartz, *Théorie des Distributions, I, II*, Herman et Cie, Paris, 1957).

Ako sad uzmemo kao specijalni slučaj da funkciji $\varphi(x) \in K$ na gore definiran način pridružimo vrijednost u ishodištu $\varphi(0)$

$$\varphi \doteq (\delta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0)$$

pokazat će se da se taj funkcional ne može dovesti u vezu s lokalno integrabilnom funkcijom. Dokaz je indirektan i zasnovan na specijalnom slučaju funkcije $\varphi \in K$. Ako je

$$\varphi(x, a) = e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}},$$

tada mora vrijediti $[(\delta, \varphi(x, a))] = \varphi(0, a) = e^{-1}$ za $|x| < a$ i $\varphi(x, a) = 0$ za $|x| > a$. No, da je (δ, φ) predočivo pomoću lokalno integrabilne funkcije $f(x)$, bilo bi

$$|[(\delta, \varphi(x, a))]| = \left| \int_{-a}^a \varphi(x, a) f(x) dx \right| = \int_{-a}^a |f(x)| e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx < e^{-1} \int_{-a}^a |f(x)| dx,$$

pa ako pustimo a težiti k nuli, dobijemo $\lim_{a \rightarrow 0} |[(\delta, \varphi(x, a))]| = 0$ (jer se interval integracije sužava), a to je u suprotnosti sa $(\delta, \varphi(x, a)) = e^{-1}$.

Pokazali smo da se δ -funkcional ne može dovesti u vezu s lokalno integrabilnom funkcijom. Zato konstruiramo distribucije koje su matematički opravdane. Sada oznaka x uz funkcional, tj. oznaka $f(x)$ više ne predstavlja vrijednost funkcije u točki x . Već smo rekli da funkcionali dolaze kao faktori u podintegralnim izrazima pa shodno tome $f(x-h)$ označava funkcional pomaknut udesno u odnosu prema prvotnome. Kako će se vidjeti, time će biti definiran novi funkcional. Operacije obavljene nad funkcionalom mogu se nadomjestiti operacijama nad funkcijom, tj. operacija nad prvotnim funkcionalom daje funkcional koji pridružuje funkciji $\varphi(x)$ jedan broj koji bi po prvotnom funkcionalu bio pridružen funkciji dobivenoj iz $\varphi(x)$ primjenom neke odgovarajuće operacije. Tu ćemo činjenicu ilustrirati primjerom. Ako je funkcional predočen pomoću lokalno integrabilne funkcije $f(x)$, onda pomakom te funkcije udesno

dobijemo novi funkcional $f(x-h)$

$$(f(x-h), \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-h) \varphi(x) dx,$$

pa supstitucijom $x-h = \xi$, $dx = d\xi$ imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \varphi(\xi+h) d\xi = (f, \varphi(\xi+h)).$$

Udesno pomaknuti funkcional pridružuje, dakle, funkciji $\varphi(x)$ ono što bi prvotni funkcional pridružio ulijevo pomaknutoj funkciji $\varphi(x)$. Taj rezultat proširujemo na sve distribucije, dakle i na one koje nisu predočive pomoću lokalno integrabilnih funkcija. Za δ -funkciju to u novoj simbolici izgleda ovako: $(\delta(x-h), \varphi) = (\delta, \varphi(x+h)) = \varphi(h)$, vrlo je jednostavan konstantni funkcional $f = c$:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} c \varphi dx = c(1, \varphi).$$

Zbrajanje distribucija

Ako je $(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f \varphi dx$ i $(g, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g \varphi dx$, onda se zbrajanje distribucija definira da bude u dobroj analogiji s običnim funkcijama:

$$(f + g, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (f + g) \varphi dx = (f, \varphi) + (g, \varphi).$$

Nul funkcional. Uvodimo ga analogno kao nul funkciju. Za obične je funkcije

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

u intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ jedino ako je $f = 0$, dok je $\varphi(x) \neq 0$ unutar $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Definiramo da je funkcional f jednak nuli u okolini točke x ako je $(f, \varphi) = 0$ za sve funkcije φ , koje su nula izvan te okoline. Ako je $f = 0$ u nekoj okolini svake točke otvorenog intervala, onda kažemo da je f nula u tom intervalu.

Jednakost funkcionala. Ako je $f - g$ nula u nekom intervalu onda kažemo da je $f = g$ u tom intervalu.

Regularnost. Funkcional f je regularan u nekom intervalu, ako je u njemu jednak funkcionalu koji odgovara običnoj funkciji.

Granični prijelaz definira se ovako:

$$f_i \rightarrow f \Leftrightarrow (\forall \varphi) \{ (f_i, \varphi) \rightarrow (f, \varphi) \}.$$

Suma reda funkcionala definira se kao limes parcijalnih suma.

Funkcional kao limes običnih funkcija. Prikazat ćemo δ -funkciju kao limes derivacija približno jediničnih funkcija F'_ε . Konstruirajmo regularni funkcional

$$(F'_\varepsilon, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} F'_\varepsilon(x) \varphi(x) dx$$

koji ćemo procijeniti. Očito je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'_\varepsilon \varphi_{\min} dx \leq (F'_\varepsilon, \varphi) \leq \int_{-\infty}^{\infty} F'_\varepsilon \varphi_{\max} dx$$

i zbog $\int_{-\infty}^{\infty} F'_\varepsilon dx = 1$ je

$$\varphi_{\min} \leq (F'_\varepsilon, \varphi) \leq \varphi_{\max}.$$

Stezanjem intervala $(-\varepsilon, \varepsilon)$ na nulu približuju se $\varphi_{\min}$ i $\varphi_{\max}$ vrijednosti funkcije u nuli $\varphi(0)$, pa je $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F'_\varepsilon, \varphi) = \varphi(0)$; $F'_\varepsilon \rightarrow \delta$.

Treba napomenuti da se limes-procesom funkcija funkcional može dobiti na više načina.

Operacije nad funkcionalima

Općenito smo o tome govorili pri pomaku funkcionala.

Množenje funkcionala funkcijom. Ako iz prvotnog funkcionala koji je predodređen kao integral pomoću lokalno integrabilne funkcije konstruiramo novi, množimo ga običnom funkcijom $\psi(x)$ klase C^∞

$$(\psi f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi \cdot f \varphi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \psi \varphi \, dx = (f, \psi \varphi).$$

Time smo funkciji φ pridružili ono što bi prvotni funkcional pridružio funkciji $\psi \varphi$. To proširujemo na sve distribucije. Pretpostavka da je ψ klase C^∞ bila je potrebna da bi $\psi \varphi$ opet bila iz prostora K .

Derivacija funkcionala. Zadatak se svodi na nalaženje odgovarajuće operacije nad funkcijom $\varphi(x)$, kao što je već prije naglašeno. Na raspolaganju su dva puta.

a) Preko analitičke definicije funkcionala ako je f obična funkcija $f(x)$:

$$\begin{aligned}(f', \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) \, dx = [f(x) \varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) \, dx = \\ &= (f, -\varphi').\end{aligned}$$

Izraz u uglatoj zagradi iščezava jer je $\varphi \in K$, tj. $\varphi = 0$ izvan konačnog intervala.

b) Koristeći se svojstvima funkcionala (linearnost i neprekinutost) te definicije derivacije limes-procesom. Oznaka $f(x + \Delta x)$ oznaka je za pomaknuti funkcional.

$$\begin{aligned}
(f', \varphi) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \varphi(x) \right) = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\left(f(x + \Delta x), \frac{\varphi(x)}{\Delta x} \right) - \left(f(x), \frac{\varphi(x)}{\Delta x} \right) \right) = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\left(f(x), \frac{\varphi(x - \Delta x)}{\Delta x} \right) - \left(f(x), \frac{\varphi(x)}{\Delta x} \right) \right) = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(f(x), \frac{\varphi(x - \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \right) = \\
&= (f(x), -\varphi'(x)) = (f, -\varphi').
\end{aligned}$$

Došli smo do istog rezultata na dva različita načina, ali je način b) općenitiji i u duhu teorije distribucije. Derivirani prvotni funkcional pridružuje funkciji φ ono što prvotni pridružuje derivaciji funkcije $-\varphi$. Derivacija $(\psi f)'$ prethodno konstruiranoga funkcionala ψf jednaka je

$$((\psi f)', \varphi) = ((\psi f), -\varphi') = (f, -\psi \varphi')$$

i pridružuje funkciji φ ono što f pridružuje funkciji $-\psi \varphi'$.

Ovdje se možemo pitati postoji li neki funkcional koji daje isti učinak na φ kao $(\psi f)'$.

Formalnom primjenom pravila za derivaciju produkata naslućujemo $(\psi f)' = \psi f' + \psi' f$. To treba dokazati:

$$\begin{aligned}
((\psi f)', \varphi) &= (\psi f, -\varphi') = (f, -\psi \varphi') = \\
&= (f, (-\psi \varphi)' + \psi' \varphi) = \\
&= (f, -(\psi \varphi)') + (f, \psi' \varphi) = \\
&= (f', \psi \varphi) + (\psi' f, \varphi) = \\
&= ((\psi f' + \psi' f), \varphi).
\end{aligned}$$

Usporedba s početkom daje $(\psi f)' = \psi' f + \psi f'$. Općenito, u tom smislu treba gledati na jednakost među funkcionalima. Lijeva i desna strana daju iste rezultate ako se uzmu kao faktori u podintegralnim izrazima.

Na primjer, za δ -funkciju vrijedi

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

$$\delta'(x) = -\delta'(-x)$$

$$x \delta(x) = 0 \quad \text{množenje sa } \psi(x) = x$$

$$x \delta'(x) = -\delta(x) \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\delta(ax) = |a|^{-1} \delta(x) \quad \text{u smislu koji slijedi.}$$

Za „argument“ δ -funkcije možemo uzeti običnu funkciju ψ . Tada možemo naći

$$\int_a^b F(x) \delta(\psi(x)) dx, \quad \text{uz pretpostavke} \quad \begin{cases} a < b; \psi(a) < 0; \psi(b) > 0; \\ x_0 \in (a, b); \\ \psi(x_0) = 0; \psi'(x_0) > 0. \end{cases}$$

Smjenom varijabli $\psi(x) = t \Rightarrow x = \psi^{-1}(t)$ (ψ^{-1} je oznaka za inverznu funkciju od ψ)

$$\frac{dt}{dx} = \psi'(x) = \psi'(\psi^{-1}(t))$$

integral poprima oblik

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) \delta(\psi(x)) dx &= \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} F(\psi^{-1}(t)) \delta(t) \frac{dt}{\psi'(\psi^{-1}(t))} = \\ &= F(\psi^{-1}(0)) \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(0))} = \\ &= \frac{F(x_0)}{\psi'(x_0)}. \end{aligned}$$

Ako je pak $\psi'(x_0) < 0 \Rightarrow \psi(a) > \psi(b)$ pa u integralu mijenjamo granice

$$-\int_{\psi(b)}^{\psi(a)} F(\psi^{-1}(t)) \delta(t) \frac{dt}{\psi'(\psi^{-1}(t))} = -\frac{F(x_0)}{\psi'(x_0)}$$

te, jer je $\psi'(x_0) < 0$, dobivamo $\frac{F(x_0)}{|\psi'(x_0)|}$.

Sad možemo skinuti ograničenje na predznak od $\psi'(x_0)$ pa smo općenito dobili

$$\int_a^b F(x) \delta(\psi(x)) dx = \frac{F(x_0)}{|\psi'(x_0)|} \quad \text{za} \quad \begin{cases} x_0 \in (a, b) \\ \psi'(x_0) \neq 0 \end{cases}.$$

Ako je $F(x) = \varphi(x) \in K$ (tj. ako zadovoljava Schwartzove uvjete), onda imamo

$$(\delta(\psi(x)), \varphi(x)) = (\delta(x - x_0), \frac{\varphi(x)}{|\psi'(x)|}).$$

Linearna nezavisnost

Neka je u intervalu $[a, b]$ definirano n funkcija:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x).$$

Te su funkcije linearno nezavisne ako zahtjev

$$\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda_n \varphi_n(x) = 0 \quad (1)$$

(gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ konstante) povlači za sobom činjenicu $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ za svaki x iz $[a, b]$.

S druge strane, funkcije su linearno zavisne ako postoji n konstanta $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, od kojih nisu sve jednake nuli, pa je ispunjena činjenica (1) za svaki $x \in [a, b]$. Neka je na primjer $\lambda_2 \neq 0$.

Imamo:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \varphi_1(x) - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \varphi_3(x) - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_2} \varphi_n(x) = \\ &= \mu_1 \varphi_1(x) + \mu_3 \varphi_3(x) + \dots + \mu_n \varphi_n(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Linearna zavisnost znači da se bar jedna funkcija može prikazati kao linearna kombinacija ostalih. Vrijedi i obratno: ako se jedna funkcija dade izraziti kao linearna kombinacija ostalih, tada su one linearno zavisne, jer se činjenica (2) može napisati kao:

$$-\mu_1 \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \mu_3 \varphi_3(x) - \dots - \mu_n \varphi_n(x) = 0,$$

a to znači da su funkcije linearno zavisne.

Pretpostavimo sada da su funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ linearno zavisne i da su klase C^{n-1} , što znači da imaju neprekinute derivacije do uključivo reda $n-1$ u intervalu $[a, b]$ u kojemu smo ih definirali. Linearna zavisnost zahtijeva:

$$\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda_n \varphi_n(x) = 0,$$

gdje je barem jedna $\lambda_i \neq 0$. Derivirajmo tu jednadžbu $n-1$ puta, što možemo zahvaljujući pretpostavci, i dobit ćemo daljnjih $n-1$ jednadžbi

$$\begin{aligned} \lambda_1 \varphi_1'(x) + \lambda_2 \varphi_2'(x) + \cdots + \lambda_n \varphi_n'(x) &= 0 \\ \vdots & \\ \lambda_1 \varphi_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 \varphi_2^{(n-1)}(x) + \cdots + \lambda_n \varphi_n^{(n-1)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Taj sustav jednadžbi shvaćamo kao sustav od n linearnih jednadžbi s nepoznicama $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Da bi sustav imao netrivialno rješenje (što mora biti ispunjeno jer smo pretpostavili da su funkcije linearno zavisne), determinanta sustava, koju zovemo *determinantom Wronskoga*, mora biti jednaka nuli:

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Dakle, linearna zavisnost povlači $W = 0$, ali obrat ne mora vrijediti, što ćemo pokazati na primjeru. Definiramo funkcije:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0] \\ x^2 & x \in [0, 1] \end{cases}; \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [-1, 0] \\ 0 & x \in [0, 1] \end{cases}.$$

Deriviramo ih:

$$\varphi_1'(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0] \\ 2x & x \in [0, 1] \end{cases}; \quad \varphi_2'(x) = \begin{cases} 2x & x \in [-1, 0] \\ 0 & x \in [0, 1] \end{cases}.$$

Imamo dakle

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0 & x \in [-1, 0] \\ \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0 & x \in [0, 1] \end{cases} .$$

Postavljamo uvjet $\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) = 0$ i pitamo se kada će biti ispunjen. Imamo

$$x \in [-1, 0] \quad \lambda_2 x^2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$$x \in [0, 1] \quad \lambda_1 x^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 .$$

Dakle, funkcije su linearno nezavisne iako je $W = 0$. To je dakle nužan, ali nije dovoljan uvjet za linearnu zavisnost.

Skraćene diferencijalne jednačbe s konstantnim koeficijentima

Kada deriviramo funkciju y , pišemo $y' = \frac{dy}{dx}$, što možemo pisati i kao

$y' = \frac{d}{dx} y$. Desnu stranu možemo shvatiti kao formalni produkt dvaju

faktora $\frac{d}{dx}$ i y . "Faktor" $\frac{d}{dx}$ zovemo diferencijalnim operatorom, a njegovo formalno množenje nekom funkcijom, i to tako da funkcija stoji zdesna, zovemo djelovanjem na tu funkciju. Diferencijalni operator djeluje na funkciju slijeva. Operator deriviranja je linearan, što znači:

$$\frac{d}{dx}(y_1 + y_2) = \frac{d}{dx} y_1 + \frac{d}{dx} y_2$$

i

$$\frac{d}{dx}(\alpha y) = \alpha \frac{d}{dx} y.$$

Operator se ponaša kao običan broj pri zakonu distribucije. Pri drugom deriviranju pišemo

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} y = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \right) y.$$

Time imamo diferencijalni operator drugog reda $\frac{d^2}{dx^2}$ koji možemo shvatiti kao formalno množenje operatora $\frac{d}{dx}$ samim sobom, tj.

$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} = \left(\frac{d}{dx} \right)^2$. Općenito, primijeniti diferencijalni operator n -tog

reda na neku funkciju znači primijeniti n puta operator $\frac{d}{dx}$.

Distribucija vrijedi i u slučaju:

$$\left(\alpha \frac{d^n}{dx^n} + \beta \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + r\right)y = \alpha \frac{d^n y}{dx^n} + \beta \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + ry.$$

Primijenivši operator na y , dobivamo obično množenje.

Promotrimo sada slučaj

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} - r_2\right)\left(\frac{d}{dx} y - r_1 y\right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} y - r_1 y\right) - r_2 \left(\frac{d}{dx} y - r_1 y\right) = \\ &= \frac{d^2}{dx^2} y - \frac{d}{dx} (r_1 y) - r_2 \frac{d}{dx} y + r_1 r_2 y = \\ &= \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^2 - (r_1 + r_2) \frac{d}{dx} + r_1 r_2\right)y = \\ &= y'' - (r_1 + r_2) y' + r_1 r_2 y. \end{aligned}$$

Dobili smo isti rezultat kao da smo jednostavno izmnožili operatore

$\frac{d}{dx} - r_1$ i $\frac{d}{dx} - r_2$ i rezultatom djelovali na funkciju y . Produkt tih dvaju operatora je komutativan ukoliko su r_1 i r_2 konstante, što ne bi bilo ispunjeno kad bi bili funkcije varijable x .

Uočimo diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + a_1 y' + a_2 = 0$$

koju možemo pisati i ovako

$$\left(\frac{d}{dx} - r_1\right)\left(\frac{d}{dx} - r_2\right)y = 0,$$

gdje su r_1 i r_2 korijeni karakteristične jednadžbe $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$.

Uvedemo li supstituciju

$$\left(\frac{d}{dx} - r_2\right)y = z,$$

imamo

$$\left(\frac{d}{dx} - r_1\right)z = 0.$$

Dobili smo skraćenu linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda čije je rješenje

$$z = C e^{r_1 x}.$$

Dalje je

$$\left(\frac{d}{dx} - r_2\right)y = C e^{r_1 x}.$$

Sada smo dobili također linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda, ali neskraćenu. Kao konačno rješenje po y dobivamo

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$

gdje su c_1 i c_2 proizvoljne konstante. Promotrimo sada linearnu diferencijalnu jednadžbu n -tog reda, i to skraćenu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$

čija je karakteristična jednadžba

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0,$$

ili

$$(r - r_1)^{\mu_1} (r - r_2)^{\mu_2} \dots (r - r_k)^{\mu_k} = 0,$$

gdje je μ_i broj višekratnosti korijena r_i itd. Lijevu stranu naše diferencijalne jednadžbe možemo predstaviti kao djelovanje operatora

$$H = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

na funkciju y .

Diferencijalnu jednadžbu pišemo kratko, $Hy = 0$. Operator H možemo napisati i u obliku

$$H = \left(\frac{d}{dx} - r_1\right)^{\mu_1} \left(\frac{d}{dx} - r_2\right)^{\mu_2} \dots \left(\frac{d}{dx} - r_k\right)^{\mu_k},$$

gdje među pojedinim faktorima vrijedi komutativnost jer su $r_i, i = 1, \dots, k$ konstante. Uzmimo najprije da je $k = 1$.

Tada imamo diferencijalnu jednadžbu

$$\left(\frac{d}{dx} - r_1\right)^{\mu_1} y = 0.$$

Ta jednadžba ima partikularno rješenje $y_0 = e^{r_1 x}$. Opće rješenje postaviti ćemo u obliku

$$y = u(x) e^{r_1 x}.$$

Budući da su y i $e^{r_1 x}$ funkcije od x , to i njihov kvocijent mora također biti funkcija od x . Taj smo kvocijent nazvali $u(x)$. Slijedi da se opće rješenje sigurno može napisati u obliku $u(x) e^{r_1 x}$. Uvrštavamo to u zadanu

diferencijalnu jednadžbu, djelujući postupno operatorom $\frac{d}{dx} - r_1$ jedan po jedan put:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} - r_1\right)(u e^{r_1 x}) &= \frac{d}{dx}(u e^{r_1 x}) - r_1 u e^{r_1 x} = \\ &= u' e^{r_1 x} + r_1 u e^{r_1 x} - r_1 u e^{r_1 x} = \\ &= u' e^{r_1 x}. \end{aligned}$$

Kad bismo djelovali dalje istim operatorom $\mu_1 - 1$ puta, ponovilo bi se isto, pa imamo

$$\left(\frac{d}{dx} - r_1\right)^{\mu_1} (u e^{r_1 x}) = u^{(\mu_1)} e^{r_1 x} = 0.$$

Kako je $e^{r_1 x}$ uvijek pozitivno, imamo

$$u^{(\mu_1)} = 0,$$

iz čega integriranjem slijedi:

$$u(x) = P_{\mu_1-1}(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{\mu_1-1}x^{\mu_1-1}$$

$$y_0 = P_{\mu_1-1}(x)e^{r_1x}.$$

Pretpostavimo za neki k opće rješenje u obliku

$$y_0 = P_{\mu_1-1}(x)e^{r_1x} + P_{\mu_2-1}(x)e^{r_2x} + \dots + P_{\mu_k-1}(x)e^{r_kx}.$$

Pokazali smo da vrijedi za $k = 1$, pa ako iz pretpostavke da vrijedi za k dokažemo da vrijedi i za $k + 1$, dokazali smo to općenito.

Za $k + 1$ diferencijalna jednadžba glasi

$$\left(\frac{d}{dx} - r_1\right)^{\mu_1} \cdot \left(\frac{d}{dx} - r_2\right)^{\mu_2} \dots \left(\frac{d}{dx} - r_k\right)^{\mu_k} \cdot \left(\frac{d}{dx} - r_{k+1}\right)^{\mu_{k+1}} \cdot y = 0$$

Uvodimo supstituciju $z = \left(\frac{d}{dx} - r_{k+1}\right)^{\mu_{k+1}} \cdot y$. Jednadžbu $(k + 1)$ -og reda sveli smo na jednadžbu k -tog reda po z , čije opće rješenje po pretpostavci za k faktora glasi

$$z_0 = P_{\mu_1-1}(x)e^{r_1x} + P_{\mu_2-1}(x)e^{r_2x} + \dots + P_{\mu_k-1}(x)e^{r_kx}.$$

Prema provedenoj supstituciji imamo

$$\left(\frac{d}{dx} - r_{k+1}\right)^{\mu_{k+1}} y = P_{\mu_1-1}(x)e^{r_1x} + P_{\mu_2-1}(x)e^{r_2x} + \dots + P_{\mu_k-1}(x)e^{r_kx}.$$

Opće rješenje te jednadžbe možemo opet postaviti u obliku $y = ue^{r_{k+1}x}$. Uvrštavanje daje

$$\left(\frac{d}{dx} - r_{k+1}\right)^{\mu_{k+1}} \left(ue^{r_{k+1}x}\right) = u^{(\mu_{k+1})} e^{r_{k+1}x} = \sum_{i=1}^k P_{\mu_i-1}(x)e^{r_ix},$$

pa dijeljenjem sa $e^{r_{k+1}x}$ dobivamo

$$u^{(\mu_{k+1})}(x) = P_{\mu_1-1}(x)e^{(r_1-r_{k+1})x} + P_{\mu_2-1}(x)e^{(r_2-r_{k+1})x} + \dots + P_{\mu_k-1}(x)e^{(r_k-r_{k+1})x}.$$

Funkciju u dobivamo običnim integriranjem μ_{k+1} puta. Razmotrimo prije svega općenito jedno takvo integriranje. Uzastopnom parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned}
 \int P_n(x) e^{rx} dx &= \frac{1}{r} \cdot e^{rx} P_n(x) - \frac{1}{r} \int P'_n(x) e^{rx} dx = \\
 &= \frac{1}{r} P_n(x) e^{rx} - \frac{1}{r^2} P'_n(x) e^{rx} + \frac{1}{r^2} \int P''_n(x) e^{rx} dx = \dots = \\
 &= \frac{1}{r} P_n(x) e^{rx} - \frac{1}{r^2} P'_n(x) e^{rx} + \frac{1}{r^3} P''_n(x) e^{rx} + \dots \\
 &\quad \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{r^n} P_n^{(n-1)}(x) e^{rx} + (-1)^n \frac{1}{r^n} \int P_n^{(n)}(x) e^{rx} dx = \\
 &= \frac{1}{r} P_n(x) e^{rx} - \frac{1}{r^2} P'_n(x) e^{rx} + \dots + (-1)^n \frac{1}{r^n} P_n^{(n)}(x) e^{rx} + C = \\
 &= Q_n(x) e^{rx} + C.
 \end{aligned}$$

Još jednim integriranjem dobivamo:

$$\iint P_n(x) e^{rx} (dx)^2 = R_n(x) e^{rx} + Cx + C_1$$

a integriranjem m puta:

$$\int \dots \int_m P_n(x) e^{rx} (dx)^m = Q_n(x) e^{rx} + R_{m-1}(x).$$

Integriramo li μ_{k+1} puta gornji izraz za $u^{(\mu_{k+1})}(x)$, dobivamo $u(x)$:

$$\begin{aligned}
 u(x) &= Q_{\mu_1-1}(x) e^{(r_1-r_{k+1})x} + Q_{\mu_2-1}(x) e^{(r_2-r_{k+1})x} + \dots + \\
 &\quad + Q_{\mu_k-1}(x) e^{(r_k-r_{k+1})x} + Q_{\mu_{k+1}-1}(x).
 \end{aligned}$$

Konačno, množenjem sa $e^{r_{k+1}x}$ dobivamo y

$$y(x) = Q_{\mu_1-1}(x)e^{r_1x} + Q_{\mu_2-1}(x)e^{r_2x} + \dots + Q_{\mu_k-1}(x)e^{r_kx} + \\ + Q_{\mu_{k+1}-1}(x)e^{r_{k+1}x}.$$

Dobili smo isti oblik rješenja i za $k+1$, čime smo potpunom indukcijom dokazali da je to oblik rješenja zadane diferencijalne jednadžbe.

Opće rješenje je linearna kombinacija linearno nezavisnih partikularnih rješenja. Činjenicu da su ta partikularna rješenja nezavisna treba dokazati. Potražimo najveću zajedničku mjeru dvaju cijelih brojeva a i b . U tu svrhu dijelimo većega od njih, recimo a , manjim b , pri čemu dobivamo ostatak r_1 . Ako je taj ostatak nula, tada je već b tražena zajednička mjera, a ako nije, tada je zajednička mjera on sam, ako je sadržan u b cijeli broj puta. Ako nije ni to ispunjeno, dijelimo b sa r_1 i čitav proces nastavljamo do nekog ostatka r_n koji je zajednička mjera. Imamo postupno:

$$a = bq_1 + r_1 \quad r_1 < b$$

$$b = r_1q_2 + r_2 \quad r_2 < r_1$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$r_{n-4} = r_{n-3}q_{n-2} + r_{n-2}$$

$$r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0.$$

Ostatak r_n najveća je zajednička mjera brojeva a i b , što pišemo:

$$r_n = (a|b).$$

Iz pretposljednje jednadžbe vidimo da je r_n linearna kombinacija od r_{n-1} i r_{n-2} , r_{n-1} je linearna kombinacija od r_{n-2} i r_{n-3} , r_{n-2} je linearna kombinacija od r_{n-3} i r_{n-4} , iz čega slijedi da je r_n linearna kombinacija od r_{n-3} i r_{n-4} .

Daljim razmatranjima zaključujemo da je r_n linearna kombinacija od a i b . Dakle

$$r_n = pa + qb.$$

Ako su a i b relativno prosti brojevi, tada se mogu naći p i q da bude $pa + qb = 1$.

Čitavo to razmatranje vrijedi i za polinome, pa ako su dva polinoma P_m i P_n relativno prosta, mogu se naći dva polinoma P_p i P_q da bude:

$$P_p P_m + P_q P_n = 1.$$

Tu ćemo činjenicu upotrijebiti u našem dokazu. Budući da dokazujemo da je dobiveno rješenje diferencijalne jednadžbe linearna kombinacija linearno nezavisnih partikularnih rješenja, moramo dokazati da je činjenica

$$y = P_{\mu_1-1} e^{r_1 x} + \dots + P_{\mu_k-1} e^{r_k x} = 0$$

ispunjena onda i samo onda ako su svi koeficijenti jednaki nuli. Pretpostavimo da je ta činjenica ispunjena i djelujmo na lijevu stranu identiteta operatorom

$$H_1 = \left(\frac{d}{dx} - r_2\right)^{\mu_2} \cdot \left(\frac{d}{dx} - r_3\right)^{\mu_3} \dots \left(\frac{d}{dx} - r_k\right)^{\mu_k}.$$

Dobivamo $H_1 y = 0$. S druge je strane $H_1 y = H_1 (P_{\mu_1-1} e^{r_1 x})$, jer se djelovanjem operatora H_1 na y poništavaju svi članovi osim ovoga. Taj

član poništava $\left(\frac{d}{dx} - r_1\right)^{\mu_1}$, tj. vrijedi

$$\left(\frac{d}{dx} - r_1\right)^{\mu_1} (P_{\mu_1-1} e^{r_1 x}) = 0.$$

Dakle, vrijedi $H_1 (P_{\mu_1-1} e^{r_1 x}) = 0$. Operatori H_1 i $\left(\frac{d}{dx} - r_1\right)^{\mu_1}$ relativno su

prosti polinomi u $\frac{d}{dx}$ pa moraju postojati polinomi M i N u $\frac{d}{dx}$ da bude ispunjeno

$$M\left(\frac{d}{dx} - r_1\right)^{\mu_1}(P_{\mu_1-1}e^{r_1x}) + NH_1(P_{\mu_1-1}e^{r_1x}) = 1 \cdot P_{\mu_1-1}e^{r_1x}.$$

Oba izraza na lijevoj strani jednaka su nuli, pa je i

$$P_{\mu_1-1}e^{r_1x} = 0,$$

iz čega dijeljenjem sa e^{r_1x} slijedi

$$P_{\mu_1-1} = 0.$$

Analognim razmatranjem dobili bismo isto i za ostale koeficijente, čime je tvrdnja dokazana.

Teorem egzistencije rješenja diferencijalne

$$\text{jednadžbe } y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Teorem egzistencije lakše je formulirati za sustav diferencijalnih jednadžbi oblika

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\&\vdots \\y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}$$

nego za zadanu diferencijalnu jednadžbu n -tog reda, pa ćemo zato zadanu diferencijalnu jednadžbu transformirati na takav sustav i onda formulirati teorem egzistencije. Formulirajmo najprije teorem egzistencije za sustav, i to radi jednostavnosti za slučaj $n=2$, uz zamjenu $y_1 = y, y_2 = z$. Sustav glasi

$$\begin{aligned}y' &= f_1(x, y, z) \\z' &= f_2(x, y, z).\end{aligned}$$

Pretpostavimo da su funkcije f_1 i f_2 u zatvorenom području (x, y, z) -prostora neprekinute i ograđene i da vrijedi Lipschitzov uvjet koji glasi: Postoje brojevi M i N takvi da za dovoljno male h i k vrijedi:

$$\begin{aligned}\left| \frac{f_i(x, y+h, z) - f_i(x, y, z)}{h} \right| &< M \\ \left| \frac{f_i(x, y, z+k) - f_i(x, y, z)}{k} \right| &< N\end{aligned} \quad i=1,2.$$

Uz te pretpostavke teorem egzistencije glasi: Kroz točku (x_0, y_0, z_0) prolazi jedno i samo jedno rješenje (ukoliko se točka nalazi unutar područja za koje vrijedi pretpostavka)

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

uz početne uvjete

$$y_0 = y(x_0), \quad z_0 = z(x_0).$$

Za diferencijalnu jednadžbu n -tog reda to izgleda sasvim analogno. Našu diferencijalnu jednadžbu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

supstitucijom $y_1 = y$, $y_{k+1} = y^{(k)}$, svodimo na gornji sustav specijalnoga oblika

$$y'_1 = y_2$$

$$y'_2 = y_3$$

$$y'_3 = y_4$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y'_{n-1} = y_n$$

$$y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Uz pretpostavku da za funkciju f vrijede navedene pretpostavke, posebno Lipschitzov uvjet (što je za funkcije y_i trivijalno), lako je formulirati teorem egzistencije.

Linearna skraćena diferencijalna jednadžba n -toga reda kojoj su koeficijenti funkcije glasi:

$$L(y) = y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + f_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0,$$

gdje je L operator

$$\frac{d^n}{dx^n} + f_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + f_1(x)\frac{d}{dx} + f_0(x).$$

Spomenuto je da je diferencijalni operator linearan. To znači:

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2.$$

Verificirajmo tu činjenicu. Poznato nam je da vrijedi

$$\begin{aligned} f_r(x) \frac{d^r}{dx^r} (\alpha y_1 + \beta y_2) &= \alpha f_r(x) \frac{d^r}{dx^r} y_1 + \beta f_r(x) \frac{d^r}{dx^r} y_2 = \\ &= f_r(x) [\alpha y_1^{(r)}(x) + \beta y_2^{(r)}(x)]. \end{aligned}$$

To vrijedi za sve sumande operatora L pa vrijedi i za L .

Općenito o linearnosti

Funkcije oblika $y = ax$,

$$y = ax + by,$$

$$y = ax + by + cz,$$

linearne su. Lako je pokazati da funkcija $f(x, y, z) = ax + by + cz$ ima svojstvo

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2).$$

To možemo kraće pisati

$$f(\alpha \bar{r}_1 + \beta \bar{r}_2) = \alpha f(\bar{r}_1) + \beta f(\bar{r}_2).$$

Vrijedi i obrnuto. Ako funkcija zadovoljava taj zahtjev, tada je oblika $ax + by + cz$. Pretpostavimo da zadovoljava i promatrajmo

$$\begin{aligned} f(\alpha \bar{r}_1 + \beta \bar{r}_2 + \gamma \bar{r}_3) &= f(\alpha \bar{r}_1 + \bar{r}_4) && \text{(slijedi prema} \\ &= \alpha f(\bar{r}_1) + f(\bar{r}_4) && \text{pretpostavci)} \\ &= \alpha f(\bar{r}_1) + f(\beta \bar{r}_2 + \gamma \bar{r}_3) && \text{(prema} \\ &= \alpha f(\bar{r}_1) + \beta f(\bar{r}_2) + \gamma f(\bar{r}_3). && \text{pretpostavci)} \end{aligned}$$

Izveli smo zaključak da je svojstvo ispunjeno i s tri vektora ako je ispunjeno s dva. Opširnije pisano

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3, \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3) &= \\ = \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2) + \gamma f(x_3, y_3, z_3). \end{aligned}$$

Stavljamo:

$$\alpha \dots x \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

$$\beta \dots y \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 0$$

$$\gamma \dots z \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 1.$$

Slijedi

$$f(x, y, z) = x f(1, 0, 0) + y f(0, 1, 0) + z f(0, 0, 1) = ax + by + cz$$

i tvrdnja je dokazana.

Linearnost operatora L opisana je uvjetom

$$\text{I.} \quad L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2).$$

Pokazat ćemo da je taj uvjet ekvivalentan sljedećim dvama uvjetima:

$$\text{II.a)} \quad L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2);$$

$$\text{II.b)} \quad L(ay) = aL(y).$$

Uvjet II.a) slijedi iz I. u specijalnom slučaju kad je $\alpha = \beta = 1$, a II.b) za $\alpha = a, \beta = 0$. Obrnuto, iz donjih uvjeta slijedi gornji

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) \stackrel{\text{II.a)}}{=} L(\alpha y_1) + L(\beta y_2) \stackrel{\text{II.b)}}{=} \alpha L(y_1) + \beta L(y_2).$$

To vrijedi i za proizvoljno mnogo članova

$$L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L(y_i).$$

Pretpostavimo da imamo n funkcija $y_1, y_2, \dots, y_n$ koje zadovoljavaju zadanu diferencijalnu jednadžbu. Zbog toga vrijedi

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2) + \dots + \alpha_n L(y_n) = 0,$$

jer su prema pretpostavci svi pojedini sumandi jednaki 0. Dakle, svaka je funkcija oblika

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$$

rješenje diferencijalne jednačbe. Po teoremu egzistencije uz sve odgovarajuće pretpostavke za neki interval $[a, b]$, postoji jedno i samo jedno rješenje naše diferencijalne jednačbe koje zadovoljava početne uvjete.

Naše rješenje $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ jest n -parametarska porodica krivulja. Iz te porodice izabiremo krivulju sa specijalnim početnim uvjetima, tj. odabiremo neka specijalna rješenja $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ s početnim uvjetima:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 1, & y_1'(x_0) &= y_1''(x_0) = \dots = y_1^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) &= 1, & y_2(x_0) &= y_2''(x_0) = \dots = y_2^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ y_3''(x_0) &= 1, & y_3(x_0) &= y_3'(x_0) = \dots = y_3^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ &\vdots & &\vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) &= 1, & y_n(x_0) &= y_n'(x_0) = \dots = y_n^{(n-2)}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Tvrdimo da je tih n rješenja linearno nezavisno i dokazujemo to. Pretpostavimo da su funkcije linearno zavisne. Mora biti:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$$

gdje C_i nisu sve 0, a također i:

$$\begin{aligned} C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n' &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} &= 0. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta, tj. $x = x_0$, dobivamo:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + \dots + C_n \cdot 0 &= 0 \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \dots + C_n \cdot 0 &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + \dots + C_n \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

iz čega slijedi $C_1 = 0, C_2 = 0, \dots, C_n = 0$.

Pretpostavka nas je dovela u kontradikciju iz čega zaključujemo da su funkcije linearno nezavisne (zahtjev iščezavanja linearne kombinacije ispunjen je onda i samo onda ako su sve konstante jednake 0).

Pokazali smo prije da je linearna kombinacija rješenja također rješenje (izraz $L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n)$ iščezavao je zbog linearnosti), a sada smo izgradili sustav od n linearno nezavisnih funkcija, koje su rješenja. Njihova linearna kombinacija također je rješenje, a sada tvrdimo: *svako je rješenje linearna kombinacija tih rješenja*. Odaberimo jedno rješenje $y(x)$ koje u točki x_0 zadovoljava

$$y(x_0) = \alpha_1, y'(x_0) = \alpha_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n.$$

Konstruirajmo sada rješenje:

$$\bar{y} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n,$$

gdje je $y_1, y_2, \dots, y_n$ prije izgrađeni sustav rješenja. To se rješenje u točki x_0 slaže s odabranim rješenjem $y(x)$ jer je

$$\bar{y}(x_0) = \alpha_1, \bar{y}'(x_0) = \alpha_2, \dots, \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n.$$

Po teoremu egzistencije rješenje s početnim uvjetima jednoznačno je određeno pa se dva rješenja „poklapaju” u svim točkama ako se „poklapaju” u početnoj. Slijedi da je $\bar{y}(x) = y(x)$, čime je tvrdnja dokazana.

Promatrajmo općenito n rješenja $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$. Kao što smo dokazali, ona se mogu prikazati kao linearne kombinacije gornjih specijalnih rješenja $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \dots + a_{1n}y_n(x) \\ Y_2(x) &= a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \dots + a_{2n}y_n(x) \\ &\vdots \\ Y_n(x) &= a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \dots + a_{nn}y_n(x). \end{aligned}$$

Zanima nas linearna nezavisnost funkcija Y_i . Pretpostavimo da su linearno zavisne. Tada je ispunjeno

$$\begin{aligned} C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n = & (a_{11} C_1 + a_{21} C_2 + \dots + a_{n1} C_n) y_1(x) + \\ & + (a_{12} C_1 + a_{22} C_2 + \dots + a_{n2} C_n) y_2(x) + \\ & + \dots + (a_{1n} C_1 + a_{2n} C_2 + \dots + a_{nn} C_n) y_n(x) = 0 \end{aligned}$$

tako da ne budu svi $C_i = 0$. Budući da su y_i linearno nezavisne, moraju svi koeficijenti uz njih iščezavati. Dobivamo sustav linearnih jednačbi po C_i , i to homogen

$$\begin{aligned} a_{11} C_1 + a_{21} C_2 + \dots + a_{n1} C_n &= 0 \\ a_{12} C_1 + a_{22} C_2 + \dots + a_{n2} C_n &= 0 \\ \vdots & \\ a_{1n} C_1 + a_{2n} C_2 + \dots + a_{nn} C_n &= 0. \end{aligned}$$

Taj sustav prema pretpostavci mora imati netrivialno rješenje (pretpostavili smo da su Y_i linearno zavisne, tj. da svi C -ovi ne iščezavaju) pa determinanta sustava mora biti jednaka 0, $|a_{ik}| = 0^*$. To je dakle nužan uvjet za postojanje brojeva $C_1, C_2, \dots, C_n$ od kojih nisu svi 0. Da bi sustav rješenja $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ bio linearno nezavisan, ta determinanta mora biti različita od 0. Taj se sustav zove, uz pretpostavku da je linearno nezavisan, *glavnim sustavom*.

Dakle sustav $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ glavni je sustav onda i samo onda ako je $|a_{ik}| \neq 0$. Tada možemo naša specijalna rješenja $y_1, y_2, \dots, y_n$ izraziti kao linearnu kombinaciju rješenja Y_i iz glavnog sustava. Linearna kombinacija rješenja iz glavnog sustava sigurno je rješenje diferencijalne jednačbe, a s druge strane svako se rješenje može izraziti kao linearna kombinacija rješenja iz glavnog sustava, jer se može izraziti kao linearna kombinacija specijalnih rješenja $y_1, y_2, \dots, y_n$ (što smo dokazali), a ta se pak specijalna rješenja daju prikazati kao linearne kombinacije rješenja iz glavnog sustava. Iz ovog razmatranja slijedi da je linearna kombinacija rješenja iz glavnog sustava opće rješenje zadane diferencijalne jednačbe.

* $|a_{ik}|$ označava determinantu promatranog sustava jednačbi čiji su članovi koeficijenti a_{ik} .

Sustav $y_1, y_2, \dots, y_n$ rješenja diferencijalne jednačbe n -toga reda koja su linearno nezavisna zove se *glavni sustav rješenja*.

Za glavni sustav rješenja determinanta Wronskog različita je od nule, $W \neq 0$. Dokazat ćemo tvrdnju za jednu točku x_0 iz intervala u kojemu je zadovoljen teorem egzistencije. Promatramo sustav jednačbi

$$\sum_{i=1}^n C_i Y_i^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Pretpostavimo da je determinanta sustava $W = 0$. Tada egzistira slog $C_1, C_2, \dots, C_n$ u kojemu svi C_i nisu 0. Sad konstruiramo funkciju

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n C_i Y_i(x).$$

Ta funkcija:

1. rješenje je dane diferencijalne jednačbe,
2. u točki x_0 zadovoljava uvjete $Y^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1,$

no to su početni uvjeti za funkciju $Y(x) = 0$, pa zbog jednoznačnosti

rješenja u cijelom intervalu slijedi $\sum_{i=1}^n C_i Y_i = 0$, gdje C_i nisu svi 0, a Y_i su

linearno nezavisne funkcije.

Dakle, polazeći od pretpostavke da je determinanta $W(x_0) = 0$, došli smo u kontradikciju, što znači da je determinanta $W(x_0) \neq 0$. To možemo pokazati za bilo koji x_0 iz danoga intervala. Obratno, ako imamo n funkcija klase C^n koje u $[a, b]$ imaju determinantu $W \neq 0$, onda one čine glavni sustav rješenja diferencijalnih jednačbi n -toga reda.

Glavnim sustavom rješenja diferencijalna je jednačba jednoznačno određena.

Neka je dan glavni sustav rješenja (GSR) $y_1, y_2, \dots, y_n$. Pretpostavimo da postoje dvije diferencijalne jednačbe s ovim GSR

$$L_1(y) = y^{(n)} + \sum_{i=n-1}^0 f_i(x)y^{(i)} = 0$$

$$L_2(y) = y^{(n)} + \sum_{i=n-1}^0 \bar{f}_i(x)y^{(i)} = 0.$$

Ako su f_{n-1} i $\bar{f}_{n-1}$ različite barem u jednoj točki, jer su neprekinute, one su različite i u jednom intervalu, pa je u njemu jednačba

$$\sum_{i=n-1}^0 (f_i(x) - \bar{f}_i(x))y^{(i)} = 0$$

diferencijalna jednačba $(n-1)$ -reda, koja ne može imati n linearno nezavisnih rješenja. Došli smo, dakle, u kontradikciju. Analogno vrijedi i za ostale odgovarajuće funkcije f_i .

Neka je $y_1, y_2, \dots, y_n$ glavni sustav rješenja.

Diferencijalna jednačba čija su to rješenja glasi

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

To je diferencijalna jednačba jer razvoj determinante po $(n+1)$ -om stupcu daje

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} y^{(i)} W_i = 0, \quad \text{gdje je} \quad W_n \neq 0, \quad (1)$$

što jest diferencijalna jednačba n -toga reda. Uvrštenjem redom svake funkcije iz GSR u determinantu dobiju se dva jednaka stupca, dakle to je diferencijalna jednačba koja ima zadani GSR.

Dijelimo li diferencijalnu jednadžbu (1) sa $W_n \neq 0$, izlazi

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} y^{(i)} \frac{W_i}{W_n} = 0,$$

odakle je

$$f_{n-1}(x) = -\frac{W_{n-1}(x)}{W_n(x)},$$

a derivacija determinante $W_n(x)$ upravo je jednaka $W_{n-1}(x)$. Iz toga imamo

$$\frac{W'_n(x)}{W_n(x)} = -f_{n-1}(x)$$

pa integracijom dobijemo

$$\int_{x_0}^x f_{n-1}(x) dx = [-\ln W_n]_{x_0}^x$$

odnosno,

$$W_n(x) = W_n(x_0) e^{-\int_{x_0}^x f_{n-1}(x) dx}.$$

Dakle, poznavajući $f_{n-1}(x)$ možemo naći determinantu $W_n(x)$. Množenjem GSR prikladnim konstantama može se normirati $W_n(x_0)$.

Neskrraćena diferencijalna jednačba n -tog reda $L(y) = \varphi(x)$

Neka je y_{pn} jedno partikularno rješenje (PR) neskrćene diferencijalne jednačbe (NDJ). Opće rješenje (OR) NDJ može se, ne smanjivši općenitost, postaviti u obliku zbroja PR NDJ i nepoznate funkcije $u(x)$

$$y_{on} = y_{pn} + u(x),$$

gdje je $L(y_{pn}) = \varphi(x)$.

Dalje, zbog linearnosti operatora L

$$L(y_{on}) = L(y_{pn} + u) = L(y_{pn}) + L(u) = \varphi(x)$$

slijedi

$$L(u) = 0$$

s općim rješenjem $u = y_{os}$. Dakle, OR NDJ dano je kao zbroj OR SDJ (skrćene DJ) i jednog PR NDJ.

Ako imamo OR SDJ, možemo naći OR NDJ metodom varijacije konstanta. Neka je dano OR SDJ

$$y_{os} = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x).$$

Kao postavku za OR NDJ uzmemo analogan oblik

$$y_{on} = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i(x),$$

gdje su sada koeficijenti C_i funkcije od x koje treba odrediti. No postavka je preopćenita jer imamo samo jednu DJ, a n nepoznatih funkcija, dakle smijemo po volji propisati još $n - 1$ uvjeta a da se zadrži općenitost. Nađimo prvih $n - 1$ derivacija

$$y_{on}^{(k)} = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i^{(k)}(x) \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$y_{on}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \left(C_i(x) y_i^{(n)}(x) + C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) \right),$$

gdje je postupno uvedeno sljedećih $n - 1$ uvjeta

$$\sum_{i=0}^n C'_i(x) y_i^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

dok će n -ti uvjet dati sama DJ. Uvrštenjem derivacija u DJ dobijemo

$$L(y_{on}) = \sum_{i=1}^n C_i(x) L(y_i) + \sum_{i=1}^n C'_i(x) y_i^{(n-1)}(x) = \varphi(x),$$

gdje je $L(y_i) = 0$, dakle DJ daje uvjet

$$\sum_{i=1}^n C'_i(x) y_i^{(n-1)}(x) = \varphi(x).$$

Dobili smo sustav n linearnih jednadžbi za derivacije koeficijenata

$$\sum_{i=1}^n C'_i(x) y_i^{(k)} = \varphi(x) \delta_{k,n-1},$$

gdje je $\delta_{k,n-1}$ Kroneckerov simbol, a $k = 0, 1, \dots, n-1$. Simbol δ_{ij} definiran je ovako

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{za } i \neq j \\ 1 & \text{za } i = j. \end{cases}$$

Determinanta sustava je $W_n \neq 0$, pa Cramerovo pravilo daje rješenja

$$C'_r(x) = \frac{V_r(x)}{W_n(x)}, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

gdje je V_r dobiveno tako da je u determinanti Wronskoga r -ti stupac zamijenjen desnom stranom sustava. Integracijom, uzevši u obzir

$$W_n(x) = W_n(x_0) e^{-\int_{x_0}^x f_{n-1}(x) dx},$$

dobijemo

$$C_r(x) = \frac{1}{W_n(x_0)} \int V_r(x) e^{\int_{x_0}^x f_{n-1}(x) dx} dx + D_r,$$

pa je OR NDJ

$$y_{on} = \frac{1}{W_n(x_0)} \sum_{i=1}^n y_i(x) \int_{V_r(x)}^x V_r(x) e^{\int_{x_0}^x f_{n-1}(x) dx} dx + \sum_{i=1}^n D_i y_i,$$

gdje je prvi član jedno PR NDJ, a drugi član OR SDJ.

Razmotrimo DJ specijalno odabranih koeficijenata tako da su potencije od x , uz derivaciju istog stupnja kao red derivacije

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0. \quad (1)$$

Uvedimo supstituciju:

$$x = e^t \quad (x > 0),$$

$$x = -e^t \quad (x < 0).$$

Sada derivacije y po x treba izraziti derivacijama y po t .

Za $x > 0$ imamo

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} = \frac{1}{x} \frac{d}{dt} = e^{-t} \frac{d}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} &= (e^{-t} \frac{d}{dt}) (e^{-t} \frac{d}{dt}) = e^{-t} (-e^{-t} \frac{d}{dt} + e^{-t} \frac{d^2}{dt^2}) = \\ &= e^{-2t} (-\frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2}) \end{aligned}$$

.....

$$\frac{d^n}{dx^n} = (e^{-t} \frac{d}{dt})^n = e^{-nt} \sum_{i=1}^n a_{ni} \frac{d^i}{dt^i}.$$

Povećajmo red derivacije za 1

$$(e^{-t} \frac{d}{dt})^{n+1} = e^{-(n+1)t} \sum_{i=1}^{n+1} a_{(n+1)i} \frac{d^i}{dt^i}. \quad (2)$$

Izračunajmo i ovaj izraz:

$$\begin{aligned}
 \left(e^{-t} \frac{d}{dt}\right)^{n+1} &= \left(e^{-t} \frac{d}{dt}\right) \left(e^{-t} \frac{d}{dt}\right)^n = \\
 &= e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-nt} \sum_{i=1}^n a_{ni} \frac{d^i}{dt^i}\right) = \\
 &= e^{-(n+1)t} \left[-n a_{n1} \frac{d}{dt} + \sum_{i=2}^n (a_{n(i-1)} - n a_{ni}) \frac{d^i}{dt^i} + a_{nn} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \right]. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Uspoređivanjem odgovarajućih koeficijenata u (2) i (3) dobijemo formulu rekurzije za koeficijente

$$\begin{aligned}
 a_{n+1,1} &= -n a_{n,1} \\
 a_{n+1,i} &= a_{n,i-1} - n a_{n,i} \quad i = 2, 3, \dots, n \\
 a_{n+1,n+1} &= a_{nn},
 \end{aligned}$$

gdje polazimo od $a_{11} = 1$, pa rekurzija omogućuje sukcesivno izračunavanje koeficijenata. Supstitucijom u zadanu DJ (1) eksponencijalna funkcija nestaje i dobijemo DJ s konstantnim koeficijentima

$$\left(\frac{d^n}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 \right) y = 0.$$

No mi ćemo izravno doći do rješenja zadane DJ (1), uvrstimo $y = x^r$, jer je postavka za gornju DJ $y = e^{rt}$, a znamo $e^t = x$, pa dobivamo uvjet za r

$$r(r-1) \dots (r-n) + a_{n-1} r(r-1) \dots (r-n+1) + \dots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Neka je r_i s_i -struki korijen te karakteristične jednadžbe, tada je i -ti dio rješenja

$$P_{s_i-1}(t) e^{r_i t} = P_{s_i-1}(\ln x) x^{r_i}$$

pa je rješenje DJ

$$y(x) = \sum_{i=1}^k P_{s_i-1}(\ln x) x^{r_i}, \quad \sum_{i=1}^k s_i = n.$$

Razmotrit ćemo slučaj kad je funkcija smetnje specijalnog oblika

$$\varphi(x) = P_k(x)e^{px},$$

za diferencijalne jednačbe s konstantnim koeficijentima

$$H(y) = P_k(x)e^{px}.$$

Imamo dva slučaja:

(1) p nije korijen karakteristične jednačbe

Na DJ djelujemo operatorom $(\frac{d}{dx} - p)^{k+1}$ pa će desna strana DJ iščezavati

$$(\frac{d}{dx} - p)^{k+1} Hy = (\frac{d}{dx} - p)^{k+1} (P_k(x) e^{px}) = 0,$$

jer je

$$(\frac{d}{dx} - p)^{k+1} (P_k(x) e^{px}) = P_k^{(k+1)}(x) e^{px} = 0.$$

No dobili smo skraćenu DJ $(n + k + 1)$ -vog reda s konstantnim koeficijentima, čija su rješenja

$$y_0 = u(x) + Q_k(x) e^{px}$$

gdje je $u(x)$ opće rješenje DJ $H(y) = 0$.

No deriviranjem skup rješenja postaje širi. Uvrštenjem u polaznu DJ

$$\begin{aligned} H(u(x) + Q_k(x) e^{px}) &= H u(x) + H(Q_k(x) e^{px}) \\ &= H(Q_k(x) e^{px}) = P_k(x) e^{px}. \end{aligned}$$

Dakle, sam $Q_k(x)e^{px}$ mora biti rješenje NDJ da bi $u(x) + Q_k(x)e^{px}$ bilo rješenje neskrraćene DJ.

Dakle, postavka za PR NDJ je

$$y_r(x) = Q_k(x) e^{px}.$$

(2) p je s -struki korijen karakteristične jednadžbe

Operator H je oblika $(\frac{d}{dx} - p)^s K$, gdje je K operator u čijem se sustavu više ne pojavljuje p .

Djelovanjem operatora $(\frac{d}{dx} - p)^{k+1}$ na $H(y) = P_k(x)e^{px}$ desna strana iščezava pa izlazi

$$(\frac{d}{dx} - p)^{k+1} H(y) = (\frac{d}{dx} - p)^{s+k+1} K(y) = 0.$$

Rješenje te skraćene LDJ $(n + k + 1)$ -vog reda s konstantnim koeficijentima jest

$$y(x) = u(x) + Q_{s+k}(x)e^{px},$$

gdje je $u(x)$ opće rješenje DJ $K(y) = 0$. No možemo pisati

$$Q_{s+k}(x) = \sum_{i=0}^{s-1} C_i x^i + x^s \sum_{j=0}^k C_{s+j} x^j = R_{s-1}(x) + x^s S_k(x).$$

Ali ta jednadžba ima širu klasu rješenja, pa njezino opće rješenje uvrštavamo u polaznu DJ

$$\begin{aligned} H(y) &= H(u(x) + R_{s-1}(x)e^{px} + x^s S_k(x)e^{px}) = \\ &= H(u(x) + R_{s-1}(x)e^{px}) + H(x^s S_k(x)e^{px}) = \\ &= P_k(x)e^{px}, \end{aligned}$$

a da bi to bilo rješenje NDJ, mora biti

$$H(x^s S_k(x)e^{px}) = P_k(x)e^{px}$$

jer je

$$H(u(x) + R_{s-1}(x)e^{px}) = 0.$$

Postavka za partikularno rješenje glasi

$$y_p(x) = x^s S_k(x) e^{px}.$$

Za navedeni slučaj DJ $H(y) = \varphi(x)$ svest ćemo i postavku na partikularno rješenje NDJ koja ima funkciju smetnje oblika

$$\varphi(x) = P_k(x) e^{px} \cos px$$

da ju dopunimo sa

$$\psi(x) = i P_k(x) e^{px} \sin px$$

pa dobivamo kompleksnu funkciju smetnje

$$\varphi(x) + i\psi(x) = P_k(x)(\cos px + i \sin px) = P_k(x) e^{(p+ip)x},$$

čime je problem sveden na prijašnji slučaj.

No dobiveno PR NDJ bit će PR DJ s kompleksnom funkcijom smetnje, pa ćemo uzeti realni dio tog PR koji će biti rješenje, što se lako pokaže. Ako je zadana DJ

$$H(y) = \varphi + i\psi,$$

a y_p je jedno partikularno rješenje,

$$y_p = u + i v$$

tada je zbog linearnosti operatora H

$$H(u + i v) = H(u) + i H(v) = \varphi + i\psi,$$

gdje su $H(u)$ i $H(v)$ realni ako su koeficijenti u i H realni, a dva su kompleksna broja jednaka onda i samo onda ako su njihovi realni dijelovi jednaki i imaginarni dijelovi jednaki, dakle:

$$H(u) = \varphi$$

$$H(v) = \psi$$

čime je tvrdnja dokazana.

Fourierovi redovi

O periodičnim funkcijama. Funkcija $f(x)$ periodična je s periodom P ako je za svaki x iz područja definicije funkcije ispunjeno

$$f(x + P) = f(x), \quad P > 0.$$

Pisana simbolima matematičke logike, definicija izgleda ovako

$$(\exists P > 0)(\forall x)(f(x + P) = f(x)).$$

Vidimo, dalje, da je $f(x) = f(x - P + P) = f(x - P)$. Ako i $x - P$ pripada području definicije, onda možemo lako pokazati da je:

$$f(x + nP) = f(x) \quad \text{i} \quad f(x - nP) = f(x).$$

Redovno ćemo kao područje definicije uzeti sve realne brojeve. Ako funkcija ima jedan period, ima ih beskonačno mnogo. Među svim periodima može egzistirati jedan najmanji. Kažemo da je to *primitivni* ili *temeljni period*. Postavlja se pitanje mora li on postojati. Promatrajući neke funkcije u kojih se period ne pojavljuje, dobivamo negativni odgovor. Na primjer, funkcija $f(x) = C$ ima svaki pozitivni broj za period pa prema tome nema temeljni period jer ne postoji najmanji pozitivni broj. Razmatramo Dirichletovu funkciju definiranu:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{za racionalan } x \\ 0 & \text{za iracionalan } x \end{cases}$$

i tvrdimo da je ona periodična sa svakim racionalnim brojem kao periodom, a svaki iracionalan broj je neperiod. Za neperiod vrijedi

$$\text{non } (\forall x)(f(x + p) = f(x)).$$

Promatramo svaki slučaj zasebno.

1. P je racionalan.

a) x je racionalan, slijedi da je $x + P$ također racionalan

$$\Rightarrow f(x + P) = f(x) = 1 \quad \text{prema definiciji funkcije;}$$

b) x je iracionalan, slijedi da je $x + P$ također iracionalan
 $\Rightarrow f(x + P) = f(x) = 0$ prema definiciji funkcije.

2. P je iracionalan.

Dovoljno je naći barem jednu vrijednost za x za koju je funkcionalna jednadžba neispunjena. Uzmimo da je x racionalan. Tada je $x + P$ iracionalan i imamo

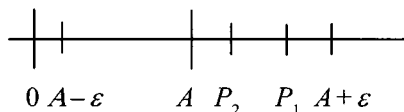
$$f(x) = 1, f(x + P) = 0,$$

$\Rightarrow$ iracionalni P sigurno je neperiod jer sada može i ne mora biti ispunjena funkcionalna jednadžba koja definira periodičnost. Može biti ispunjena zato što za iracionalni x , $x + P$ može biti racionalan, ali i iracionalan, pa se u takvom slučaju može dogoditi da funkcionalna jednadžba bude ispunjena, ali P tada nije period jer nije ispunjen uvjet da to mora biti za svaki x . Tvrdimo, dalje,

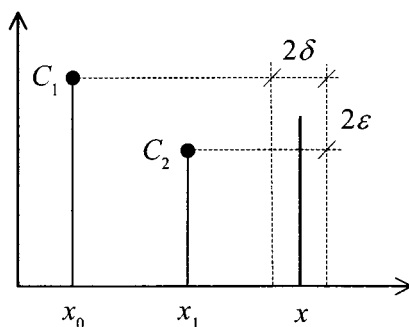
da periodična funkcija koja nije konstantna i nema temeljnog perioda mora biti svugdje prekinuta ($\forall x$).

Dokazujemo tu tvrdnju. Prema pretpostavkama, periodi čine skup S od beskonačno mnogo elemenata među kojima nema najmanjega, ali taj je skup ograničen odozdo jer smo period definirali kao pozitivan broj. Među donjim ogradaama postoji najveća A .

Za donju ogradu A skupa S vrijedi općenito $A \leq a$, $a \in S$ i pišemo $A = \inf S$. U intervalu $[A, A + \varepsilon]$ mora postojati neki period P_1 naše funkcije jer bi inače $A + \varepsilon$ bio donja ograda od S , pa A ne bi bio $\inf S$. U tom istom intervalu mora postojati period $P_2 < P_1$, jer bi u protivnome P_1 bio temeljni period. Za period $P_1 - P_2$ također vrijedi $P_1 - P_2 < \varepsilon$.



Dobivamo period koji je lijevo od A , tj. od donje ograde skupa kojem pripada, iz čega slijedi da A ne može biti veći od 0 $\Rightarrow \inf S = 0$.



Uočimo sada neke točke iz područja definicije naše funkcije, i to: x_0 , u kojoj funkcija poprima vrijednost C_1 , x_1 , u kojoj funkcija poprima vri-

jednost C_2 i neku općenitu točku x . Odaberimo $\varepsilon < \frac{1}{2}(C_1 - C_2)$. Ako je

funkcija neprekidna u točki x , onda postoji tako mali $\delta > 0$ da se funkcijske vrijednosti koje odgovaraju točkama intervala $[x - \delta, x + \delta]$ nalaze unutar intervala $[f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]$, tj. razlikuju se od $f(x)$ za manje od ε . Dvije funkcijske vrijednosti koje odgovaraju dvjema točkama iz intervala $[x - \delta, x + \delta]$ razlikuju se stoga za manje od 2ε , tj. za manje od $(C_1 - C_2)$.

Odaberimo sada period naše funkcije za koji je ispunjeno $P_1 < \delta$. Nanosimo ga na apscisu počevši od točke x_0 tako dugo dok ne dođemo u interval $[x - \delta, x + \delta]$. Odgovarajuća vrijednost funkcije u dobivenoj točki mora bit jednaka C_1 . Na isti način zaključujemo da se unutar našega intervala nalazi barem jedna točka s ordinatom C_2 . No budući da je $C_1 - C_2 > 2\varepsilon$, zahtjev neprekidnosti nije ispunjen, pa je funkcija prekinuta u točki x , koju smo odabrali općenito, što znači da to vrijedi za sve točke iz područja definicije.

Pratimo dvije periodične funkcije, $f_1(x)$ s periodom P_1 i $f_2(x)$ s periodom P_2 i pitamo se je li funkcija $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ također periodična.

Tvrdimo da jest ako su P_1 i P_2 komenzurabilni, tj. ako je: $P_3 = n_1 P_1 = n_2 P_2$, gdje su n_1 i n_2 relativno prosti brojevi. Broj P_3 u tom je slučaju period funkcije φ . I zaista je:

$$\begin{aligned}\varphi(x + P_3) &= f_1(x + P_3) + f_2(x + P_3) \\ &= f_1(x + n_1 P_1) + f_2(x + n_2 P_2) \\ &= f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x).\end{aligned}$$

Ako su P_1 i P_2 temeljni periodi funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$, tada $P_3 = [P_1, P_2]$ može, ali ne mora biti temeljni period funkcije $\varphi = f_1 + f_2$. Sa $[P_1, P_2]$ označavamo najmanji zajednički višekratnik od P_1 i P_2 . Kao temeljni period funkcije φ može se pojaviti $\frac{P_3}{c}$, gdje je c ma koji cijeli broj relativno prost prema $n_1 n_2$ (ili prema oba, što je ekvivalentno).

Ako egzistira temeljni period, tada su svi periodi višekratnici temeljnog perioda.

Uzmimo P_0 za temeljni i P_1 za neki drugi period i pretpostavimo da P_1 nije višekratnik od P_0 . Imamo

$$P_1 = n P_0 + \eta, \quad P_0 > \eta.$$

Ali i $\eta = P_1 - n P_0$ mora također biti period, no kako je manji od temeljnog perioda P_0 , pretpostavka nas dovodi u kontradikciju odakle zaključujemo da je naša tvrdnja istinita.

Ako imamo dvije funkcije s inkomenzurabilnim periodima, njihova suma je *neperiodična* funkcija, ako je barem jedna od njih neprekinuta u nekom intervalu (koji može biti bilo kako malen; ona onda sigurno ima temeljni period), a druga ima temeljni period (a ne mora postojati interval u kojemu je svugdje neprekinuta).

Ako je periodična funkcija derivabilna, imamo $f'(x) = f'(x + P)$. Dakle, i derivacija je periodična funkcija s istim periodom.

Primitivna funkcija periodične funkcije ne mora biti periodična.

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx = \int_0^x f(x) dx - \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_0^P f(x) dx = A.$$

Za $x = nP + \eta$, slijedi

$$F(x) = \int_0^{nP} f(x) dx - \int_0^a f(x) dx + \int_{nP}^{nP+\eta} f(x) dx = nA - B + \int_0^{\eta} f(x) dx$$

tako da vrijedi

$$F(x + P) = (n+1)A - B + \int_0^{\eta} f(x) dx = F(x) + A \neq F(x), \quad \eta < P.$$

Slijedi da $F(x)$ nije periodična funkcija ako je $A \neq 0$. Međutim, funkcija

$G(x) = F(x) - \frac{A}{P}x$ periodična je jer je:

$$\begin{aligned} G(x + P) &= F(x + P) - \frac{A}{P}(x + P) \\ &= F(x) + A - \frac{A}{P}(x + P) \\ &= F(x) - \frac{A}{P}x \\ &= G(x). \end{aligned}$$

Uočimo da je $G(x)$ primitivna funkcija periodične funkcije

$$g(x) = f(x) - \frac{A}{P}.$$

Trigonometrijski red

Donoseći neke pretpostavke, prikazujemo neku općenitiju periodičnu funkciju $f(x)$ beskonačnim trigonometrijskim redom kojemu dodajemo konstantu. Red je oblika

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{2\pi kx}{P} + B_k \sin \frac{2\pi kx}{P} \right).$$

Postoje dokazi da je to moguće uz neke uvjete, no mi tu mogućnost uzimamo kao gotovu činjenicu. Potrebno je odrediti konstante A_k i B_k . U tu svrhu iskorištavamo svojstvo ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija koje je izraženo relacijama:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+P} \sin \frac{2\pi rx}{P} \sin \frac{2\pi sx}{P} dx &= \int_a^{a+P} \cos \frac{2\pi rx}{P} \cos \frac{2\pi sx}{P} dx = \\ &= \frac{P}{2} \delta_{rs} = \begin{cases} \frac{P}{2} & r = s \\ 0 & r \neq s, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\int_a^{a+P} \sin \frac{2\pi rx}{P} \cos \frac{2\pi sx}{P} dx = 0.$$

Vrijede i relacije

$$\int_a^{a+P} \cos \frac{2\pi kx}{P} dx = \int_a^{a+P} \sin \frac{2\pi kx}{P} dx = 0.$$

Sljedeća pretpostavka koju uvodimo jest da je naš beskonačni red uniformno konvergentan, pa se stoga da integrirati član po član. Integrirajući naš red po dužini perioda član po član, dobivamo da svi članovi iščezavaju osim člana dobivenog integracijom konstante, pa imamo

$$\int_a^{a+P} f(x) dx = \frac{A_0}{2} P,$$

odnosno

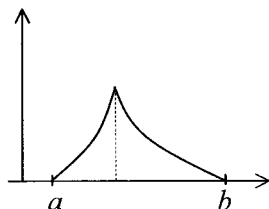
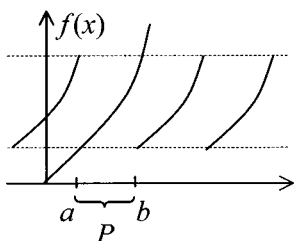
$$A_0 = \frac{2}{P} \int_a^{a+P} f(x) dx.$$

Množeći redom razvoj slijeva i zdesna sa $\cos \frac{2\pi nx}{P}$, odnosno $\sin \frac{2\pi nx}{P}$, i u oba slučaja integrirajući po dužini perioda P , nakon proširenja i sređivanja dobivamo

$$A_n = \frac{2}{P} \int_a^{a+P} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{P} dx,$$

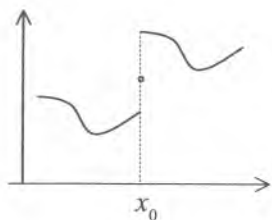
$$B_n = \frac{2}{P} \int_a^{a+P} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{P} dx.$$

Lako je pokazati da je točka a proizvoljna. Obično se odabire tako da uočeni interval bude simetričan prema ishodištu. Ako je funkcija parna, vidimo da iščezavaju članovi B_k jer pod integralom imamo neparnu funkciju koju integriramo preko simetričnog intervala. Ako je $f(x)$ neparna funkcija, iščezavaju članovi A_k .



Uočimo sada neku općenitu funkciju $f(x)$, recimo eksponencijalnu, i neki interval $[a, b]$ na apscisi čiju dužinu označimo sa P . Ako sada izračunamo po gornjem propisu Fourierove koeficijente pomoću naše funkcije $f(x)$ i intervala P , te formiramo trigonometrijski red dobivamo analitički izraz za periodičnu funkciju, koja se u intervalu $[a, b]$ podudara sa zadanom funkcijom, a izvan intervala je formirana periodičnim ponavljanjem tako zadane funkcije iz intervala $[a, b]$.

Možemo zadati neku općenitiju funkcijsku zavisnost u kojoj je funkcija u različitim intervalima definirana raznim analitičkim



izrazima. Ona može biti čak i prekinuta na konačno mnogo mjesta. Zahtijeva se da bude po odsječcima derivabilna da bi egzistirao Fourierov red. Ako takvu funkciju (kao što je recimo na slici) razvijemo u Fourierov red u intervalu $[a, b]$ dobivamo jedan analitički izraz za funkciju koja je inače definirana sa dva (ili više) izraza. Izvan $[a, b]$ funkcija se periodično ponavlja.

Ako je funkcija $f(x)$ u nekoj x_0 prekinuta (vidi sliku), tada je Fourierov red u toj točki jednak

$$f_r = \frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)],$$

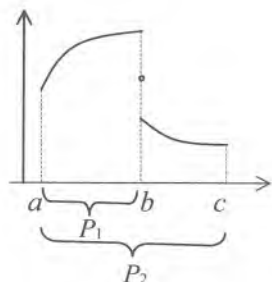
gdje je

$$f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{zdesna}}} f(x), \quad f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{slijeva}}} f(x).$$

Razmotrimo opet funkciju $f(x)$ u intervalu $[a, b]$ i razvijmo je u tom intervalu u trigonometrijski red. Ako je interval dug P_1 , dobiveni je analitički izraz beskonačni red funkcija kosinusa i sinusa s periodima

$P_1, \frac{P_1}{2}, \frac{P_1}{3}, \dots$. Proširimo sada interval $[a, b]$ na interval $[a, c]$, i to tako da

u intervalu $[b, c]$ definiramo neku novu funkcijsku zavisnost.



U intervalu $[a, c]$ čiju dužinu označavamo sa P_2 definirana je sada jedna funkcija dvama različitim analitičkim izrazima, a razvijamo je u trigonometrijski red u tom intervalu. Dobivamo beskonačni red si-

nusa i kosinusa s periodima $P_2, \frac{P_2}{2}, \frac{P_2}{3}, \dots$

(sada ćemo pri računanju koeficijenata integraciju razbiti na dva dijela jer imamo dva analitička izraza).

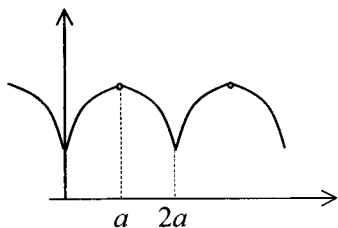
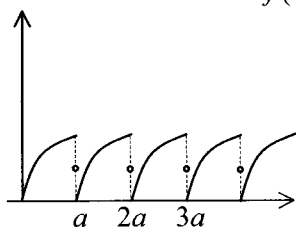
Stari i novi red podudarati će se u intervalu $[a, b]$, dok se izvan njega neće podudarati. Dakle, ako nas interesira razvoj neke funkcije unutar nekoga zadanog intervala, možemo izvan tog intervala zadati po volji neku drugu funkciju koja se nadovezuje na prvu proširujući time interval. To možemo iskoristiti da nam u nekim razvojemima iščezavaju kosinusi odnosno sinusi. Neka nam je u intervalu $[0, a]$ zadana neka funkcija i mi je želimo u tom intervalu razviti. Ako to učinimo uobičajeno, bez produljavanja intervala, dobivamo:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{2\pi kx}{a} + B_k \sin \frac{2\pi kx}{a} \right),$$

gdje je

$$A_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{2\pi kx}{a} dx,$$

$$B_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{2\pi kx}{a} dx.$$



Ta je situacija prikazana na gornjoj slici. No ako želimo da iz reda iščezavaju sinusi, produžujemo interval tako da funkcija u novom intervalu postane parna, pa da u tom slučaju iščezavaju svi B'_k . Interval produžujemo simetrično prema osi y .

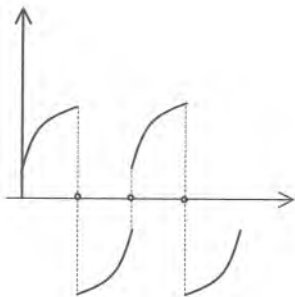
Sada imamo novu funkciju definiranu u intervalu $[-a, a]$, prikazanu na donjoj slici, za koju vrijedi $B'_k = 0$, pa slijedi

$$f(x) = \frac{A'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A'_k \cos \frac{2\pi kx}{2a} = \frac{A'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A'_k \cos \frac{\pi kx}{a},$$

gdje je

$$A'_k = \frac{4}{2a} \int_0^a f(x) \cos \frac{2\pi kx}{2a} dx = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{\pi kx}{a} dx.$$

Ako u redu želimo imati samo sinuse, produžit ćemo interval $[0, a]$ također na interval $[-a, a]$, ali definirajući funkciju tako da u $[-a, a]$ dobijemo neparnu funkciju. Sada će iščezavati koeficijenti A_k'' i A_0'' , pa ćemo imati



$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k'' \sin \frac{\pi k x}{a},$$

$$B_k'' = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{\pi k x}{a} dx.$$

Sva tri razvoja podudaraju se unutar intervala $[0, a]$, a ne na krajevima i izvan njega.

Kompleksni oblik Fourierova reda

Upotrebom poznatih relacija

$$\cos \xi = \frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi}}{2} \quad \text{i} \quad \sin \xi = \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i}$$

za naš razvoj dobivamo:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (A_k - iB_k) e^{\frac{i2\pi kx}{P}} + \frac{1}{2} (A_k + iB_k) e^{\frac{-i2\pi kx}{P}} \right].$$

Uvodeći oznake

$$C_0 = \frac{A_0}{2}, \quad C_k = \frac{1}{2} (A_k - iB_k), \quad C_{-k} = \frac{1}{2} (A_k + iB_k),$$

dobijemo sažetiji izraz

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\frac{i2\pi kx}{P}},$$

gdje je

$$C_k = \frac{1}{P} \int_a^{a+P} f(x) e^{-\frac{i2\pi kx}{P}} dx.$$

Koeficijente C_k možemo dobiti iz svojstva ortogonalnosti eksponencijalnih funkcija. Definiramo ortogonalnost u kompleksnom području. Sustav kompleksnih funkcija $f_1(z), f_2(z), \dots$ *ortogonalan* je u $[a, b]$ ako je

$$\int_a^b \overline{f_i(z)} f_j(z) dx = A \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

U promatranom je slučaju

$$\int_a^{a+P} e^{\frac{i2\pi rx}{P}} e^{-\frac{i2\pi sx}{P}} dx = \int_a^{a+P} e^{i2\pi \frac{(r-s)x}{P}} dx = \delta_{rs} P.$$

Red

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i \frac{2\pi kx}{P}}$$

množimo sa $e^{-i \frac{2\pi nx}{P}}$, a zatim integriramo u granicama od a do $a + P$.

Imamo

$$\int_a^{a+P} f(x) e^{-i \frac{2\pi nx}{P}} dx = C_n P,$$

iz čega slijedi

$$C_n = \frac{1}{P} \int_a^{a+P} f(x) e^{-i \frac{2\pi nx}{P}} dx.$$

Definirajmo pojam periodičnosti funkcije dviju nezavisnih varijabli. Slučaj više varijabli tretirali bismo potpuno analogno. Sada imamo dvije funkcionalne jednačbe koje definiraju periodičnost. Dakle, funkcija $f(x,y)$ periodična je ako je

$$\begin{aligned} f(x + P_1, y) &= f(x, y) \\ f(x, y + P_2) &= f(x, y) \end{aligned} \quad (\forall x) \& (\forall y).$$

Problem razvoja u Fourierov red tretiramo odmah u kompleksnom području:

$$f(x, y) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_r(y) e^{i \frac{2\pi rx}{P_1}},$$

gdje je

$$C_r(y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_{rs} e^{i \frac{2\pi sx}{P_2}},$$

pa je

$$f(x, y) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_{rs} e^{i2\pi \left(\frac{rx}{P_1} + \frac{sy}{P_2} \right)},$$

odnosno

$$C_{rs} = \frac{1}{P_1 P_2} \int_a^{a+P_1} \int_b^{b+P_2} f(x, y) e^{-i2\pi \left(\frac{rx}{P_1} + \frac{sy}{P_2} \right)} dy dx.$$

Do tih rezultata dolazimo analogno kao u slučaju jedne varijable.

Fourierov red po općem ortogonalnom sustavu funkcija

Neka je zadan niz funkcija varijable x u intervalu $[a, b]$:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \dots$$

Taj je sustav *ortogonalan* ako vrijedi

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad \text{za} \quad i \neq k.$$

Pojam ortogonalnosti u vezi je s istim pojmom u vektorskoj algebri. Razmatrajući običan trodimenzionalni prostor i u njemu dva vektora, $\vec{A}$ i $\vec{B}$, kazali smo da su oni *ortogonalni* ili *okomiti*, ako je skalarni produkt jednak nuli, tj.:

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0.$$

Kvadrat dužine vektora $\vec{A}$ bio je dan izrazom $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$.

Pojam vektora možemo proširiti na višedimenzionalni prostor pa i na prostor od beskonačno mnogo dimenzija u kojemu su točke kvadratno konvergentni nizovi $(\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 < \infty)$. Takav prostor zovemo *Hilbertovim prostorom*. U tom je prostoru kvadrat dužine vektora $\vec{A}$ jednak $\vec{A}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$, a skalarni produkt vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$ glasi $\vec{A}\vec{B} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k$. Ako ta suma iščezava, vektori su ortogonalni.

Prelazimo na složeniji vektorski prostor – funkcionalni prostor u kojemu je svaka funkcija $f(x)$ varijable x shvaćena kao vektor čije su komponente njezine vrijednosti u pojedinim točkama intervala u kojemu je zadana. Takav je prostor kontinuirano beskonačno mnogo dimenzionalan i u njemu je skalarni produkt između dva vektora $f(x)$ i $g(x)$ dan integralom

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

a kvadrat dužine vektora sa

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x) dx = N^2(f),$$

gdje broj $N(f) = \sqrt{(f, f)} = \|f\|$ zovemo *normom* funkcije $f(x)$. Norma, dakle, po analogiji odgovara dužini vektora.

U slučaju $\|f_k\| = 1$ funkcija $\varphi_k(x)$ je normirana. Kad funkciju podijelimo njezinom normom, kažemo da smo je normirali jer smo time dobili normiranu funkciju budući da je:

$$\|\varphi\|^2 = \int_a^b \frac{f^2(x)}{\|f\|^2} dx = \frac{1}{\|f\|^2} \int_a^b f^2(x) dx = \frac{1}{\|f\|^2} \|f\|^2 = 1.$$

Ako je sustav $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ ortogonalan i normiran, zovemo ga *ortonormiranim*. Tada je:

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = (\varphi_i(x), \varphi_k(x)) = \delta_{ik}.$$

Želimo prikazati neku zadanu funkciju $f(x)$ beskonačnim redom takvih ortonormiranih funkcija:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x).$$

Ulogu jediničnih vektora tu imaju φ_k .

Relaciju množimo skalarno sa $\varphi_n(x)$, uz pretpostavku da je red uniformno konvergentan:

$$(f, \varphi_n) = a_1(\varphi_1, \varphi_n) + a_2(\varphi_2, \varphi_n) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_n) + \dots = a_n$$

zbog ortonormiranosti sustava. Za poopćeni Fourierov koeficijent dobivamo

$$a_n = (f, \varphi_n) = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx.$$

Vrijede i relacije

$$\begin{aligned}(\varphi_k, \varphi_m) &= (\varphi_m, \varphi_k) \\(\alpha \varphi_k, \varphi_m) &= \alpha (\varphi_k, \varphi_m) = (\varphi_k, \alpha \varphi_m) \\(\varphi_k, \varphi_m + \varphi_n) &= (\varphi_k, \varphi_m) + (\varphi_k, \varphi_n).\end{aligned}$$

Dokazujemo Schwartzovu nejednakost $(f, g)^2 \leq (f, f)(g, g)$ ili, opširnije pisano,

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

Dokaz provodimo kako slijedi.

Za $\forall \lambda$ vrijedi

$$\begin{aligned}(\lambda f + g, \lambda f + g) &= \int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx = \\&= \lambda^2 (f, f) + 2\lambda (f, g) + (g, g) \geq 0.\end{aligned}$$

Općenito je $ax^2 + 2bx + c \geq 0$ onda i samo onda ako je $\frac{b^2 - ac}{a^2}$ i

$a > 0$. Odatle slijedi $b^2 - ac \leq 0$ ili $b^2 \leq ac$. Iz dobivenoga slijedi Schwartzova nejednakost

$$(f, g) \leq (f, f)(g, g)$$

jer (f, g) ima ulogu koeficijenta b , (f, f) koeficijenta a , a (g, g) koeficijenta c . Za ortonormirani sustav vrijedi:

$$\left(\sum_{k=1}^n \varphi_k, \sum_{l=1}^n \varphi_l \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\varphi_k, \varphi_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \delta_{kl} = n.$$

Specijalno

$$(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3, \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = 3.$$

I dalje

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \sum_{l=1}^n \alpha_l \varphi_l \right) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\alpha_k \varphi_k, \alpha_l \varphi_l) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_k \alpha_l (\varphi_k, \varphi_l) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_k \alpha_l \delta_{kl} = \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k^2. \end{aligned}$$

Specijalno

$$(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

Uzmimo osnovni dani sustav od n funkcija: $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ i gradimo linearnu kombinaciju:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(x).$$

Tražimo takve koeficijente α_k da funkcija $\phi(x)$ što bolje aproksimira zadanu funkciju $f(x)$. Zahtjev što boljeg aproksimiranja sadržan je u

$$\int_a^b (f(x) - \phi(x))^2 dx = \text{minimum}.$$

To je aproksimacija u smislu sredine. Izračunajmo integral kvadrata razlike:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)]^2 dx &= (f, f) - 2(f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k) + \\ &+ (\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \\
&= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k + \sum_{k=1}^n a_k^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \\
&= (f, f) - \sum_{k=1}^n (\alpha_k - a_k)^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2,
\end{aligned}$$

gdje su a_k Fourierovi koeficijenti. Prema našem zahtjevu, taj izraz mora biti minimalan, a to će biti samo onda ako je

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_1 \\
&\vdots \\
\alpha_n &= a_n.
\end{aligned}$$

Dakle, najbolju aproksimaciju imat ćemo ako za koeficijente α_k uzmemo upravo Fourierove koeficijente. Imamo

$$\begin{aligned}
(f - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k) &= (f, f) - 2(f, \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k) + \sum_{k=1}^n a_k^2 = \\
&= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^n a_k^2 \geq 0
\end{aligned}$$

zbog toga što je na lijevoj strani kvadrat norme koji je sigurno veći ili jednak nuli. Prelaskom na limes dobivamo Besselovu nejednakost

$$(f, f) \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

(niz parcijalnih suma uzlazan je i ograđen pa prema tome i konvergentan).

Ako vrijedi znak jednakosti, imamo relaciju potpunosti: $(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

Ako relacija potpunosti vrijedi za svaku funkciju f , sustav funkcija ortvektora $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ potpun je. Opet nam se nameće analogija s poznatim vektorskim prostorom, recimo trodimenzionalnim.

Ako kao ortvektore odaberemo $\vec{i}$ i $\vec{j}$, tada taj sustav nije potpun, jer za neki vektor $\vec{A}$ u prostoru vrijedi $A_x^2 + A_y^2 \leq A^2$. Znak jednakosti vrijedi samo za vektore koji leže u (x,y) -ravnini, i za te je vektore sustav potpun. No za vektor postavljen proizvoljno u prostoru vrijedi samo znak $<$, i sustav nije potpun. U tom slučaju potpuni je sustav $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ pa imamo relaciju potpunosti, $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$.

Imamo dalje

$$(f+g, f+g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g)$$

zbog distributivnosti. Pretpostavimo da je sustav $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$,... potpun i da vrijedi

$$(f, \varphi_k) = a_k, \quad (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

$$(g, \varphi_k) = b_k, \quad (g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

$$(f+g, \varphi_k) = (f, \varphi_k) + (g, \varphi_k) = a_k + b_k.$$

Tada prema pretpostavci:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2 &= (f+g, f+g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2, \end{aligned}$$

pa slijedi

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k.$$

Dobivena relacija zove se *Parsevalova* i posljedica je relacije potpunosti.

Proširujemo iste pojmove na kompleksno područje. Sada su $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... kompleksne i za njih definiramo skalarni produkt:

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \int_a^b \overline{\varphi_i(x)} \varphi_k(x) dx.$$

Naša je definicija takva da norma bude realni broj. Uistinu,

$$\|\varphi_k\|^2 = \int_a^b \overline{\varphi_k(x)} \varphi_k(x) dx = \int_a^b |\varphi_k(x)|^2 dx \quad \text{realan je broj.}$$

Imamo dalje:

$$(\alpha \varphi_i, \varphi_k) = \int_a^b \overline{\alpha \varphi_i(x)} \varphi_k(x) dx = \overline{\alpha} \int_a^b \overline{\varphi_i(x)} \varphi_k(x) dx = \overline{\alpha} (\varphi_i, \varphi_k)$$

$$(\varphi_i, \alpha \varphi_k) = \int_a^b \overline{\varphi_i(x)} \alpha \varphi_k(x) dx = \alpha \int_a^b \overline{\varphi_i(x)} \varphi_k(x) dx = \alpha (\varphi_i, \varphi_k)$$

$$(\varphi_k, \varphi_i) = \int_a^b \overline{\varphi_k(x)} \varphi_i(x) dx = \overline{\int_a^b \overline{\varphi_i(x)} \varphi_k(x) dx} = \overline{(\varphi_i, \varphi_k)}.$$

Dokazujemo opet Schwartzovu nejednakost

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

Za realan broj λ vrijedi

$$\begin{aligned} (\lambda f + g, \lambda f + g) &= \lambda^2 (f, f) + \lambda (f, g) + \lambda (g, f) + (g, g) = \\ &= \lambda^2 (f, f) + 2\lambda \frac{(f, g) + (g, f)}{2} + (g, g) \geq 0. \end{aligned}$$

Sada (f, g) nije komutativan. Poznatim načinom dobivamo:

$$\left(\frac{(f, g) + (g, f)}{2} \right)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

Dokazali smo slabiju tvrdnju od zadane, pa se služimo trikom i pišemo:

$$(f, g) = r e^{i\phi} \quad \text{gdje je} \quad r = |(f, g)|.$$

Naime, (f, g) je neki kompleksni broj i kao takvog smo ga prikazali u eksponencijalnom obliku pomoću poznate Eulerove relacije

$$\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}.$$

Umjesto f uvodimo funkciju $f e^{i\phi}$, što smijemo jer dokazana relacija mora vrijediti za svaku funkciju, pa prema tomu i za ovu uvedenu. Nakon uvrštavanja imamo:

$$\left(\frac{(f e^{i\phi}, g) + (g, f e^{i\phi})}{2} \right)^2 \leq (f e^{i\phi}, f e^{i\phi}) \cdot (g, g)$$

$$(f e^{i\phi}, g) = e^{-i\phi} (f, g) = e^{-i\phi} r e^{i\phi} = r$$

$$(g, f e^{i\phi}) = \overline{(f e^{i\phi}, g)} = \bar{r} = r$$

$$\left(\frac{(f e^{i\phi}, g) + (g, f e^{i\phi})}{2} \right)^2 = \left(\frac{2r}{2} \right)^2 = r^2 = |(f, g)|^2$$

$$(f e^{i\phi}, f e^{i\phi}) = e^{-i\phi} e^{i\phi} (f, f) = (f, f)$$

pa slijedi

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

Sustav $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x), \dots$ ortonormiran je ako je $(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} (a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3, a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3) &= \\ &= (a_1 \varphi_1, a_1 \varphi_1) + (a_2 \varphi_2, a_2 \varphi_2) + (a_3 \varphi_3, a_3 \varphi_3) = \\ &= \bar{a}_1 a_1 (\varphi_1, \varphi_1) + \bar{a}_2 a_2 (\varphi_2, \varphi_2) + \bar{a}_3 a_3 (\varphi_3, \varphi_3) = \\ &= |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2. \end{aligned}$$

Postupak aproksimacije u smislu sredine analogan je. Zahtijevamo minimalnu vrijednost izraza:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| f(x) - \sum_1^n \alpha_r \varphi_r(x) \right|^2 dx &= \int_a^b \overline{\left(f(x) - \sum_1^n \alpha_r \varphi_r(x) \right)} \left(f(x) - \sum_1^n \alpha_r \varphi_r(x) \right) dx = \\ &= \left(f - \sum_1^n \alpha_r \varphi_r, f - \sum_1^n \alpha_r \varphi_r \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (f, f) - (f, \sum_1^n \alpha_r \varphi_r) - (\sum_1^n \alpha_r \varphi_r, f) + (\sum_1^n \alpha_r \varphi_r, \sum_1^n \alpha_r \varphi_r) = \\
&\quad \text{(izrazi ne komutiraju)} \\
&= (f, f) - \sum_1^n (f, \alpha_r \varphi_r) - \sum_1^n (\alpha_r \varphi_r, f) + \sum_1^n \overline{\alpha_r} \alpha_r = \\
&= (f, f) - \sum_1^n \alpha_r (f, \varphi_r) - \sum_1^n \overline{\alpha_r} (\varphi_r, f) + \sum_1^n \overline{\alpha_r} \alpha_r = \\
&= (f, f) - \sum_1^n \alpha_r \overline{a_r} - \sum_1^n \overline{\alpha_r} a_r + \sum_1^n \overline{\alpha_r} \alpha_r = \\
&= (f, f) + \sum_1^n (a_r - \alpha_r)(\overline{a_r} - \overline{\alpha_r}) - \sum_1^n \overline{a_r} a_r = \\
&= (f, f) + \sum_1^n (a_r - \alpha_r)^2 - \sum_1^n |a_r|^2
\end{aligned}$$

gdje smo umjesto

$$(\varphi_r, f) = \int_a^b \overline{\varphi_r(x)} f(x) dx$$

uveli oznaku za Fourierov koeficijent a_r .

Naš će izraz postići minimum u slučaju $(a_r - \alpha_r) = 0$, iz čega izlazi da je a_r upravo jednak $\alpha_r = \alpha_r$, tj. ako za koeficijente α_r uzmemo njihove koeficijente Fourierova razvoja.

Dobivamo

$$(f, f) \geq \sum_1^n |a_r|^2.$$

Pri $n \rightarrow \infty$ dobivamo Besselovu nejednakost:

$$(f, f) \geq \sum_1^\infty |a_r|^2.$$

Ako vrijedi znak jednakosti, imamo opet relaciju potpunosti.

Izvodimo opet Parsevalovu relaciju uz pretpostavku da je sustav $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... potpun. Imamo

$$\begin{aligned}(f+g, f+g) &= (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{a_k} + \overline{b_k}) \cdot (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\overline{a_k} a_k}_{(f, f)} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\overline{b_k} b_k}_{(g, g)} + (f, g) + (g, f)\end{aligned}$$

opet zbog relacije potpunosti. S druge je strane to jednako

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{a_k} b_k + \overline{b_k} a_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k} b_k + (f, g) + (g, f),$$

pa slijedi

$$(f, g) + (g, f) = \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{a_k} b_k + \overline{b_k} a_k) \quad (1)$$

Funkciju f nadomještamo sa if , jer to mora vrijediti za svaku funkciju. Time i a_k nadomještamo sa ia_k . Dobivena relacija (1) sada glasi:

$$(if, g) + (g, if) = \sum_{k=1}^{\infty} (i\overline{a_k} b_k + i\overline{b_k} a_k).$$

Slijedi

$$-i(f, g) + i(g, f) = \sum_{k=1}^{\infty} (-i\overline{a_k} b_k + i\overline{b_k} a_k)$$

pa dijeljenjem sa i dobivamo

$$-(f, g) + (g, f) = \sum_{k=1}^{\infty} (-\overline{a_k} b_k + \overline{b_k} a_k). \quad (2)$$

Relacije (1) i (2) množimo sa $\frac{1}{2}$ i oduzimamo, što daje

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} b_k.$$

Dobili smo Parsevalovu relaciju u kompleksnom području.



SJEĆANJA NA AKADEMIKA DANILA BLANUŠU

Izabrani dijelovi članka iz publikacije

Danilo Blanuša (1903. – 1987.)

HAZU, Zagreb 2003.

Vjerujem da će se svaki matematičar „treće životne dobi”, baci li pogled unatrag na tijek svojega života, sjetiti nekih svojih učitelja naše znanosti kojima duguje posebnu zahvalnost za sve ono što je od njih čuo i spoznao i kao od matematičara i kao od ljudi. Za vrijeme srednje škole i studija na tadašnjem Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, imao sam priliku slušati predavanja iz matematike kakvih petnaestak profesora i jedne profesorice – a i pratiti njihove postupke, poglede, djelovanja i ponašanja općenito. Gotovo su mi svi oni ostali u lijepoj i ugodnoj uspomeni, tako da ih se i danas, nakon više od pol stoljeća, rado sjećam i spominjem u razgovoru s prijateljima, kolegama iz škole i sa studija, a i s drugima. Među svim tim matematičarima dvojica su bila posebno istaknuta, izvanredna, nadahnuta, simpatična i u svakom pogledu uzorna nastavnika: na srednjoj školi to mi je bio profesor Stjepan Škreblin, a na fakultetu akademik prof. dr. sc. dipl. ing. Danilo Blanuša. Profesora sam Blanušu po prvi put sreo još kao srednjoškolac. Za vrijeme Drugoga svjetskog rata, 1944. godine, u Bogovićevoj je ulici bila najbolja znanstvena knjižara u Zagrebu, kojoj je vlasnik bio gospodin Štefinović, polubrat profesora Blanuše. Jednoga je dana u izlogu te knjižare osvanula čitava gomila izvanrednih matematičkih publikacija, među njima i dvije knjige *Grundlagen der Mathematik (Osnove matematike)* od Davida Hilberta i Paula Bernaysa. Kad sam ih opazio odjurio sam kući i pokupio svu ušteđevinu kako bih ih mogao kupiti. Tada, već duboko u ratu, vladala je nestašica svega i svačega, pa i knjiga. Stoga mi te knjige nisu htjeli prodati tek tako, nego su tražili da donesem preporuku profesora Blanuše da su mi one zaista potrebne. Blanuša mi je tada napisao lijepu preporuku na osnovi koje mi je onda njegov polubrat izvadio iz izloga dva *Hilbert-Bernaysa* i prodao mi ih.

To je, eto, bio moj prvi susret s profesorom Blanušom – a kasnije ih je bilo na tisuće. Niz godina sam gotovo svakoga radnog dana, na povratku s fakulteta, pratio Blanušu kući; on je stanovao u Hercegovačkoj a ja u Vinogradskoj. Bio sam profesoru Blanuši suradnikom na njegovu *Zavodu za primijenjenu matematiku* a i kasnije, kad sam prešao na drugi fakultet, svega više od četrdeset godina, do pred kraj njegova života.

U sjećanju na profesora Blanušu opširnije bih se osvrnuo na okolnosti Blanušina predavanja kojima je Planckove formule relativističke fenomenološke termodinamike podvrgnuo radikalnoj reviziji. Za srijedu, 17. prosinca 1947. godine (Blanuši su tada bile 44 godine) najavljen je u Društvu matematičara, fizičara i astronoma Hrvatske kolokvij prof. dr. Blanuše s naslovom *O paradoksimu pojma energije*. Prisustvovao sam tom predavanju i ono mi je zauvijek ostalo u živom sjećanju kao jedno od najznačajnijih koje sam ikada čuo. Dvorana u kojoj se kolokviji održavaju bila je dupkom puna i pored postojećih klupa uz desni rub dvorane bio je postavljen još i red stolica; na jednoj od njih sjedio je i naš termodinamičar svjetskoga glasa, prof. dr. ing. Fran Bošnjaković. Posljednji pristigli slušatelji morali su stajati. Glavni se dio Blanušina predavanja sastojao u kritici Planckovih formula za količinu topline i za apsolutnu temperaturu kako ih je Planck bio postavio za relativističku fenomenološku termodinamiku:

$$Q = Q_0 a, \quad T = T_0 a,$$

gdje su Q_0 i T_0 bile odgovarajuće klasične vrijednosti, a a oznaka za $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Blanuša je obrazlagao zašto to nije prihvatljivo i argumentirao kako one zapravo trebaju glasiti:

$$Q = Q_0/a, \quad T = T_0/a.$$

Taj je rezultat Blanuša izveo čak na dva načina: jednom, korigirajući u Planckovu izvodu njegovu interpretaciju prirasta impulsa što ulazi u izraz za radnju vanjskih sila, a drugi put preko modifikacije jednog razmatranja M. von Lauea o Carnotovu ciklusu. Put je tih Blanušinih izlaganja bio – kao i sva njegova predavanja – čist, jasan, siguran i, treba reći, lijep. Na kraju Blanuša je istaknuo kako uz svo nužno poštovanje *autoriteta*, konačna i definitivna odluka može i mora pripasti jedino *znanstvenoj istini*. Vjerujem da je svatko od nas koji smo tada bili u onom auditoriju osjećao kako je ovdje riječ o velikim stvarima: i, posebno, što se tiče relacija koje su bile u pitanju, a i načelno. U diskusiji nakon predavanja za riječ se javio prof. Bošnjaković. Istaknuo je kako on nije teoretičar – bavio se najviše tehničkom termodinamikom – ali da smatra kako je u pravu prof. Blanuša a ne Planck, poduprijevši to obrazloženjem iz kojih mu se razloga čini nužnim da relativističke vrijednosti za količinu topline i za apsolutnu temperaturu moraju biti veće od klasičnih kao što izlazi i iz Blanušinih formula – a ne manje – kako bi to bilo prema Planckovim izrazima.

Još 1948. godine Blanuša je o tome korespondirao s W. Paulijem iz Züricha i njegovim suradnikom R. Schlawfthom. U kapitalnom djelu od 700 stranica, H. Arzeliés, *Thermodynamique relativiste et quantique*, (Paris

1968), kao i u kratkoj monografiji C. Mollner, *Relativistic Thermodynamics – A strange Incident in the History of Physics*, (Kopenhagen, 1967) navode se kao ispravne Blanušine formule, ali se one pripisuju H. Ottu koji je do istih rezultata došao 1960. godine, 13 godina nakon Blanuše. Osobno sam profesoru Blanuši pokušavao sugerirati da se u tom smjeru poduzmu potrebni koraci, no on to nije prihvatio rekavši da je „važno kako je on bio u pravu, a nije bitno kome će za to pripasti slava”.

Inače, Blanuša se teorijom relativnosti bavio već od svojih studentskih dana. Karakterističan je njegov rad *Osnove relativističke kinematike* objavljen u *Glasniku mat.-fiz. i astr.* 6 (1951). Blanuša u njemu izvodi Lorentzove transformacije iz sljedećih pet pretpostavki: 1. Postojanje inercijalnih sustava; 2. Izotropnost prostora; 3. Prvi Newtonov aksiom; 4. Homogenost vremena; 5. Načelo relativnosti. Na drugoj stranici toga rada Blanuša navodi da ga je Vladimir Glaser (tada student) upozorio na to kako se iz izotropnosti prostora može zaključiti da se slobodna čestica, koja ne miruje, mora gibati po pravcu (jer bi inače binormala na putanju bila istaknuti smjer). Taj je Blanušin rad uzor elegancije i strogosti prezentacije jedne fundamentalne fizikalne teorije. Mislim da se može ustvrditi kako su njegove konstrukcije i izvođenja, rekao bih *arhitektura* toga rada, savršeno izbrušeni dragulj, pri čemu se Blanuša ne zaboravlja zahvaliti jednome svojem studentu.

Gledajući znanstveni rad akademika Blanuše kao cjelinu, što je čini nekoliko različitih područja njegova matematičkog interesa, najznačajniji i najbogatiji dio toga svakako je bio čitav niz radova o izometričkom smještavanju jednih u druge prostora različite topološke povezanosti. Za razliku od njegova rada na korekciji Planckovih formula relativističke fenomenološke termodinamike, ti su njegovi rezultati imali značajne i brojne odjeke u svijetu, pa je o njima, pored ostalog, održavan i semestralni seminar na moskovskom univerzitetu Lomonosova. Prema njima, Blanuša je ušao i u autoritativnu japansku matematičku enciklopediju *Sugaku jiten* što ju je izdalo Društvo japanskih matematičara uz suradnju njihovih 250 najeminentnijih članova. U tom se djelu u izdanju *Iwanami shoten*, (Tokyo 1962) na str. 612., govori o Blanušinu izometričkom smještenju klase C^∞ ravnine Lobačevskoga u šesterodimenzionalni euklidski prostor i općenitije H^n u E^{6n-5} . Matematičar koji pomno čita te Blanušine radove o izometričkom smještavanju bit će često zadivljen, pa i – rekao bih – upravo zapanjen virtuožnošću kojom Blanuša konstruira višestruko složene funkcije kojima će ostvariti željeno smještenje, s nizom svojstava kojima nije lako prozreti međuovisnost, međuuvjetovanost i kompatibilnost potrebne za postizanje uzajamno jednoznačnih preslikavanja u pitanju, dakle, recimo, bez samoprodiranja i sličnih odgovarajućih geometrijskih tvorevina. Za svakoga koji je za to imao priliku i mogućnost bilo je posebno zanimljivo, pravi užitek

„matematičke estetike”, pratiti kako je akademik Blanuša, hvatajući se ukoštac sa sve novijim i sve težim problemima iz toga područja, iz dana u dan i iz tjedna u tjedan brusio, polirao i uljepšavao transformacijske relacije kojima će postići traženo smještenje. U tim Blanušinih konstrukcijama, koje su sjajni primjeri kako matematika nije samo znanost nego i umjetnost u najužem kreativnom smislu te riječi, vidi se i stalno osjeća sretna okolnost sjedinjenosti u osobi akademika Blanuše suptilnog i strogog logičara, maštovitog inženjera i briljantnog kombinatoričara. Blanuša mi je svaki od tih radova prije tiskanja davao na kontrolno čitanje jer su često uključivali pomalo mukotrpne provjere tehničkog izračunavanja vrlo kompliciranih derivacija. Te su provjere bile, metaforički rečeno, prave matematičke poslastice, jer se redovito tek putem njih mogao dobiti uvid u heurističke ideje koje su dovele do konačnih konstrukcija.

Akademik Blanuša bio je veliki matematičar ne samo po tome što je kao matematičar bio velik, nego i po tome što *nije* bio *samo* matematičar. Imamo li još matematičara koji bi, poput njega, na glasoviru svirali Chopina ili naizust recitirali duge odlomke iz Goetheova *Fausta* ili Nietzscheova *Zaratustre*? Bio je velik i po svemu onome o čemu se s njim moglo razgovarati i kad *nije* bila riječ o matematici. Po tomu ga se također sjećaju tisuće i tisuće njegovih studenata i deseci njegovih suradnika.

V. Devidé

ŠKOLSKA KNJIGA, d.d.
Zagreb, Masarykova 28

Za izdavača
ANTE ŽUŽUL, prof.

Tisak dovršen u travnju 2005.

ŠKOLSKA KNJIGA, d.d.
Zagreb, Masarykova 28

Za izdavača
ANTE ŽUŽUL, prof.

Tisak dovršen u travnju 2005.



Danilo Blanuša (7. 12. 1903. – ~~7. 12.~~ 1987.)

jedan je od najvećih hrvatskih matematičara i fizičara 20. stoljeća koji je živio i stvarao u svojoj domovini. Rođen je u Osijeku, a školovao se u Zagrebu, Osijeku, Beču i Strejru, mjestima službe svojega oca. Studij elektrotehnike započeo je na Tehničkoj visokoj školi u Zagrebu, a nastavio na Technische Hochschule u Beču. Doktorirao je 1943. na Tehničkom fakultetu u Zagrebu disertacijom *Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija*. Predavao je različite matematičke predmete na dodiplomskoj i poslijediplomskoj nastavi i obnašao mnoge dužnosti, pa i dužnost dekana Elektrotehničkog fakulteta i tajnika II. razreda JAZU. S poštovanjem sjećaju ga se mnogi matematičari, fizičari, inženjeri arhitekture, brodogradnje, elektrotehnike, geodezije, građevinarstva, kemije i strojarstva. Pedagoški je oplemenjivao nastavu i znanost u temeljnim područjima matematike, fizike i elektrotehnike, potičući moderne pravce u njihovu razvoju. Objavio je oko stotinu stručnih i znanstvenih radova, skripta, prijevode i četiri sveska *Više matematike*. Znanstveno je istraživao u fizici teoriju relativnosti, u teoriji specijalnih funkcija Besselove funkcije, a u području diferencijalne geometrije bavio se euklidskim prostorima i Riemannovim prostorom. Značajan trag u matematici ostavio je radom *Problem četiriju boja*, konstruiravši znameniti graf, u engleskoj literaturi poznat kao *Blanuša's snark*. Svestrano obrazovan, govorio je nekoliko jezika, volio glazbu i svirao glasovir. Bio je vjerojatno najpoznatiji i sigurno najomiljeniji sveučilišni profesor matematike koji je svojim ljudskim postupcima i ponašanjem neizmjereno zračio i još za života postao gotovo legendom.

ISBN 953-0-61427-6



9 789530 614277

Briljantan predavač akademik Danilo Blanuša predavao je i matematičke metode fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Premda tek dijelom sačuvani zapisi s predavanja, sada prvi put objavljeni, reprezentativan su izbor tema u maestralnoj autorskoj izvedbi i predavačkoj vještini. Danas su jednako aktualni i živi kao i u vrijeme njihova nastajanja i – sačuvani od zaborava.