

Darko Fischer¹
FERIT, Osijek
dfischer1938@gmail.com

00-00

RJEŠENJA APOLONIJEVIH PROBLEMA RAČUNALOM

Sažetak: Apolonijevi konstruktivni problemi, umjesto šestarom i ravnalom, mogu se na zanimljiv način riješiti digitalno pomoću računala te rezultate prikazati grafički. Python programski jezik, koji se može koristiti i na pametnim telefonima, pogodan je za to. Opisane su metode kojima se može riješiti svih deset problema koje je definirao grčki matematičar. Pokazano je pojednostavljenje tih rješenja jer se numeričkom metodom točke mogu aproksimirati kružnicama malenog polumjera pa se početnih deset problema svodi na samo četiri.

Ključne riječi: Apolonijev problem, pametni telefon, Python programski jezik, digitalno rješenje, numeričke metode.

Uvod

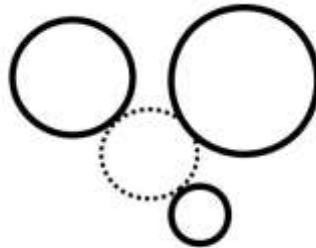
Na 9. PIFT-u 2020. A. Šonc [1] prikazao je rješenje Apolonijevih problema pomoću ravnala i šestara, pribora s kojim su raspolagali stari grčki matematičari. Originalna Apolonijeva rješenja nisu nađena pa su matematičari stoljećima nalazili manje ili više jednostavna rješenja za svih 10 konstruktivnih problema kako ih je definirao Apolonije u 3. stoljeću prije nove ere. Prateći izlaganje A. Šonca preko pametnog telefona, navelo me to na pomisao, kako bi, da je u ono vrijeme bilo pametnih telefona, grčki matematičari umjesto da svoje krugove i ostale crteže crtaju štapom po pijesku, koristili računalnu grafiku iz pametnog telefona. Arhimed bi uzviknuo „Noli turbare circulos meos“, kada bi mu rimski legionar, osvajač Sirakuze, pokušao iz ruke oteti pametni telefon (slika 1).

¹ umirovljenik; Elektrotehnički fakultet Osijek, današnji FERIT



Sl. 1.: Arhimed: “Noli turbare circulos meos“

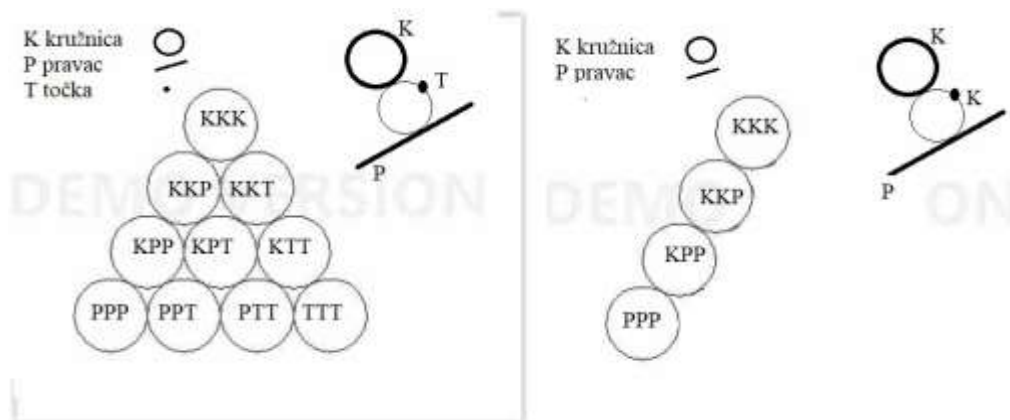
Zahvaljujući moćnom sklopovlju i pristupačnoj i sveobuhvatnoj programskoj podršci moguće je čak i na pametnom telefonu napraviti numeričke metode i grafičke prikaze rješenja konstruktivnih problema kakvi su Apolonijevi problemi.



Sl. 2.: Problem s tri kružnice

Apolonije iz Perge je oko 200. godine prije nove ere definirao svoje konstruktivne probleme: treba konstruirati kružnicu koja će dodirivati tri zadana geometrijska objekta koji su točka, pravac ili kružnica i koji se, osim u slučaju dva ili tri pravca, međusobno ne dodiruju. Slika 2 prikazuje slučaj kada su sva tri objekta kružnice (crtkana kružnica je rješenje). Kako objekti mogu biti točke, pravci i kružnice, to ukupno ima deset problema što se shematski obično prikazuje kao na slici 3a.

Kako se u numeričkim metodama točka može aproksimirati kružnicom malenog polumjera, onda se shema sa slike 3a reducira na svega četiri problema, kao što je to shematski prikazano na slici 3b.



Sl. 3.: a) Kružnice, pravci i točke

b:) Kružnice i pravci

Kroz mnoga stoljeće matematičari su rješavali i nalazili konstruktivna rješenja za svih deset Apolonijevih problema i o tome postoji brojna literatura [2] [3]. Pored toga i u novije vrijeme su ovi problemi matematičarima zanimljivi, pa se mogu naći i neki noviji radovi na ovu temu [4, 5, 6, 7]. Postoji i prikaz algebarskog rješenja tog problema [6]. Čini se da numerička rješenja matematičarima nisu zanimljiva i na takva rješenja nisam naišao pregledavajući dostupnu literaturu.

1. Numeričke metode

1.1. Osobine korištenih metoda

Numeričke metode koje sam koristio za rješavanje Apolonijevih problema u određenoj mjeri koriste i algebarske izraze. Na temelju tih izraza poznate su koordinate točaka koje zadovoljavaju određene uvjete, najčešće jednakost udaljenosti od dva objekta. Nakon toga se numeričkom metodom provjerava dodatni uvjet, udaljenost do trećeg objekta, i nalazi rješenje.

U većini slučajeva se algebarskim izrazom nalazi krivulja (ili pravac) koja je geometrijsko mjesto središta (GMS) kružnica koje dodiruju dva objekta [4].

1.2. Metode za slučaj tri pravca ili dva pravca i kružnice

Ako se traže rješenja za slučaj kada su zadana tri pravca (oznaka PPP na slici 3.b), od kojih samo dva mogu biti međusobno paralelna, algebarskim izrazom odredi se pravac na kojem su točke jednako udaljene od dva pravca. Ako su ta dva pravca paralelna, njihova simetrala je pravac paralelan s njima i jednako udaljen od njih. Ako se ti pravci sijeku, oni tvore trokut i točke jednakih udaljenosti od njih su na simetralama kuta tih pravcu. Na tim se simetralama tada

numeričkom metodom nalazi točka T jednake udaljenosti od trećeg pravca.

Ako se traže rješenja za slučaj kada su zadana dva pravca i kružnica (PPK sa slike 3.b) postupak je vrlo sličan. Numeričkom metodom se provjeravaju točke na simetrali i nalazi ona točka T koja je jednako udaljena od zadane kružnice K . Nađena točka je središte tražene kružnice a njen polumjer jednak je udaljenosti te točke od pravaca odnosno od zadane kružnice K .

1.3. Metode za slučaj jednog pravca i dvije kružnice ili tri kružnice

Numerička metoda kada se traži GMS tj. krivulja na kojoj su središta kružnica koje dodiruju dvije zadane kružnice je vrlo slična prethodnoj samo uključuje i preračunavanje koordinata. Ako neka točka T zadovoljava uvjet da dodiruje kružnice $K1(x1,y1,r1)$ i $K2(x2,y2,r2)$ (Slika 4), tada vrijedi:

$$\overline{TS1} = r1 + d \quad (1)$$

$$\overline{TS2} = r2 + d \quad (2)$$

gdje je d udaljenost točke T od obje kružnice.

Zbog toga za točku T i udaljenosti $\overline{TS1}$ i $\overline{TS2}$ vrijedi

$$\overline{TS1} - \overline{TS2} = r1 - r2 \quad (3)$$

Razlika udaljenosti svih točaka T koje su središta dodirnih kružnica je konstantna i jednaka $r1 - r2$. To je upravo svojstvo hiperbole s parametrom

$$a = (r1 - r2) / 2 \quad (4)$$

i udaljenošću vrhova hiperbole

$$e = \overline{S1S2} / 2 \quad (5)$$

Kako je parametar b hiperbole jednak izrazu

$$b = \sqrt{e^2 - a^2} \quad (6)$$

tako središta i polumjeri kružnica $K1$ i $K2$ određuju hiperbolu H :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7).$$

Za numeričko računanje koordinata točaka hiperbole pogodniji je izraz

(7) u obliku

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + 1} \quad (8)$$

gdje je apscisa x definirana za svaku vrijednost ordinate y .

Međutim, izraz (7) odnosno (8) vrijedi za hiperbolu čija os leži na x osi koordinatnog sustava koji nazivamo izvornim koordinatnim sustavom. Kružnice $K1$ i $K2$ mogu biti proizvoljno zadane u osnovnom koordinatnom sustavu, te će hiperbola zadana u izvornom koordinatnom sustavu po izrazu (7) biti u općem slučaju pomaknuta i zaokrenuta u odnosu na osnovni koordinatni sustav. Prema Slici 4, os hiperbole leži na pravcu koji prolazi kroz središta kružnica $K1$ i $K2$, a ishodište izvornog koordinatnog sustava (u kojem vrijedi izraz (7)) je na polovini dužine $S1 S2$. Zato je izvorni koordinatni sustav u kojem je definirana hiperbola H pomaknut u odnosu na osnovni koordinatni sustav u kojem su definirane kružnice po x i y osima za vrijednosti

$$Dx = (x1 + x2)/2 ; \quad Dy = (y1 + y2)/2 \quad (9)$$

gdje su $(x1, y1)$ i $(x2, y2)$ koordinate središta zadanih kružnica. Također je koordinatni sustav u kojem je definirana hiperbola zaokrenut u odnosu na osnovni koordinatni sustav za kut φ određen izrazom

$$\varphi = \arctg((y2 - y1)/(x2 - x1)) \quad (10)$$

Da bi se mogla provesti numerička metoda, potrebno je poznavati koordinate točaka na hiperboli, ali u osnovnom koordinatnom sustavu x, y u kojem su poznate jednadžbe odnosno koordinate točaka kružnica. Zbog toga, a to je i suština ove numeričke metode, potrebno je transformirati koordinate točaka hiperbole iz sustava x', y' u koordinate osnovnog koordinatnog sustava. To se obavlja po izrazima

$$x = x' \cdot \cos(\varphi) - y' \cdot \sin(\varphi) + Dx \quad (11)$$

$$y = y' \cdot \cos(\varphi) + x' \cdot \sin(\varphi) + Dy \quad (12)$$

Numeričkom metodom se odabire određeni broj točaka $T(x, y)$ na hiperboli i za sve te odabrane točke provjerava se dodatni uvjet udaljenosti od trećeg objekta.

O broju odabranih točaka ovisit će postignuta točnost numeričke metode.

Treba napomenuti, da se numeričkom metodom ne može sasvim točno provjeravati jednakost dviju vrijednosti uvjetom „jednako“ (obično logički operator `==` u programskom jeziku) već je točnije tražiti minimum apsolutne

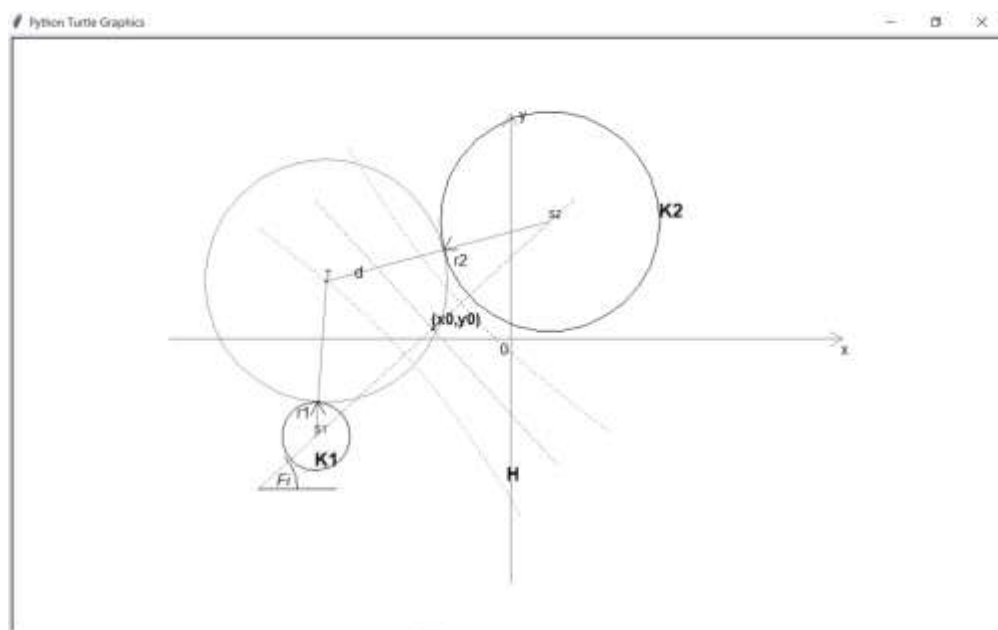
vrijednosti razlika dviju dužina. Tako umjesto uvjeta

$$d == d_i \quad ; i = 1..n \quad (6)$$

gdje je n broj točaka koji se ispituje na GMS krivulji i koji se procjenjuje ili empirički podesi na temelju dozvoljene pogreške numeričke metode, treba naći minimum razlika tj.

$$\Delta d = \min(|d - d_i|); i = 1..n \quad (7)$$

U provedenim proračunima pokazalo se da izbor broja n reda veličine 10^3 daje grešku manju od 10^{-2} .



Sl. 4.: Kružnica sa središtem T na hiperboli H dira kružnice K1 i K2

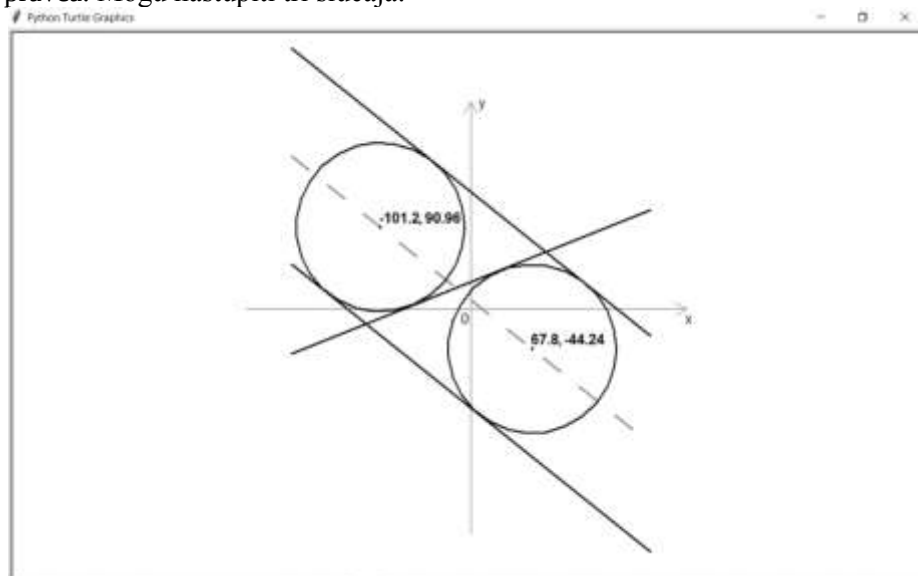
2. Rješenja primjera

U naredna četiri dijela detaljnije su opisane metode dobivanja rješenja Apolonijevih problema prema shemi sa slike 3b i to počevši od jednostavnijeg slučaja tri pravca (dno na slici 3b) i završavajući s problemom tri zadane kružnice (vrh na slici 3b). Za svaki od mogućih slučajeva izabran je tipičan primjer,

proveden račun na računalu i rezultati prikazani grafički.

2.1. Problem s tri pravca (slike 5 i 6)

Zadana su tri pravca p_1 , p_2 i p_3 . Traže se kružnice koje dodiruju sva tri pravca. Mogu nastupiti tri slučaja:



Sl. 5.: Tri pravca, dva su paralelna

a) *pravci su međusobno paralelni*. U tom slučaju nema rješenja jer ne može postojati kružnica koja dodiruje sva tri paralelna pravca.

b) *dva pravca (npr. p_2 i p_3) su paralelni*. Tada postoje dva rješenja, postoje dvije kružnice koje dodiruju sva tri pravca. Slika 5 prikazuje takav slučaj zajedno s rješenjem koje je dobiveno ovdje opisanom numeričkom metodom.

U prikazanom primjeru paralelni pravci p_2 i p_3 zadani su izrazima:

$$p_1: y = -0.8 \cdot x - 110 \quad p_2: y = -0.8 \cdot x + 130 \quad (8)$$

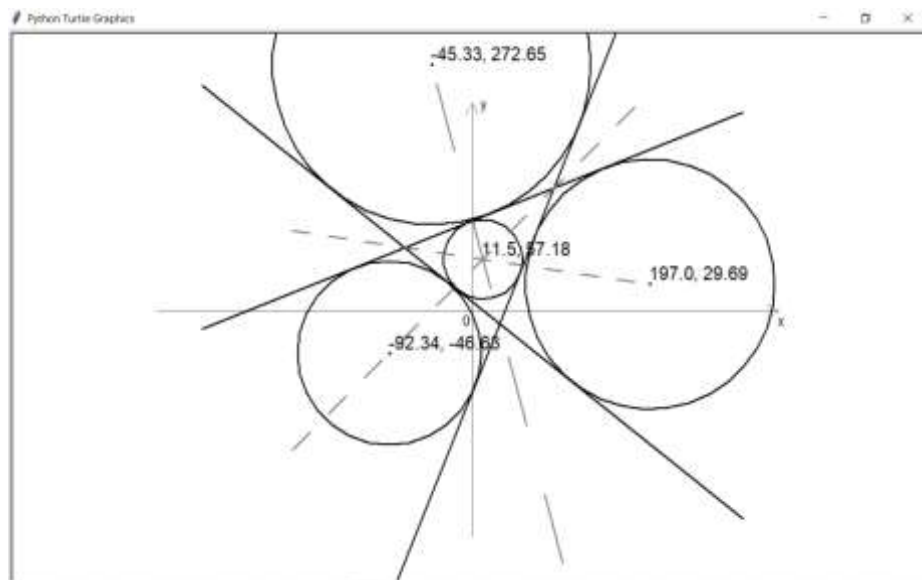
dok pravac p_3 koji ih siječe je

$$p_3: y = 0.4 \cdot x + 30 \quad (9)$$

Rješenja su kružnice: $K_1(67.80, -44.24, r=93.70)$ i $K_2(-101.20, 90.96, r=93.70)$

c) *pravci se sijeku* (slika 6). Pravci tvore trokut, pa je jedno rješenje

kružnica upisana u taj trokut. Postoje još tri rješenja, a to su kružnice na simetralama kutova ali sa središtima van trokuta.



Slika 6: Tri pravca koji se sijeku

Slika 6 prikazuje rješenja za slučaj da su zadani pravci:

$$p1: y = 0.4 \cdot x + 110 \quad p2: y = -0.8 \cdot x + 10 \quad p3: y = 2.5 \cdot x - 90 \quad (10)$$

a pripadna rješenja su:

K0(11.50, 57.18, 24, r=44.03),
 K1(197.00, 29.69, r=138.44),
 K2(-92.34, -46.63, r=101.85)
 i K3(-45.33, 272.65, r=176.78).

2.2. Problem s dva pravca i kružnicom (slike 8a, 8b, 8c i 8d)

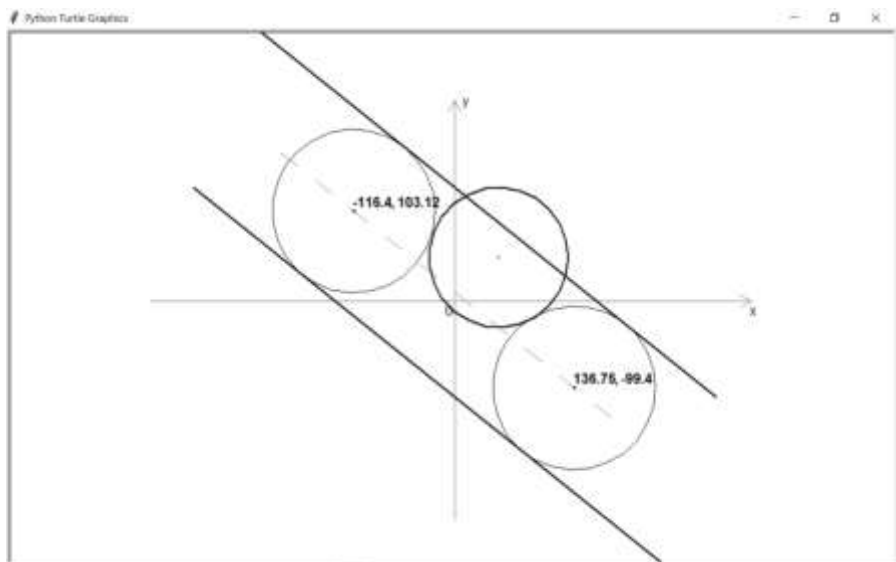
Treba naći kružnice koje dodiruju dva zadana pravca i zadanu kružnicu. Ovdje isto ima nekoliko slučajeva.

Ako su zadani pravci paralelni a zadana kružnica nije niti jednim svojim dijelom između ta dva pravca, tada rješenja nema. Ako je dio ili cijela kružnica između zadana dva paralelna pravca onda postoje dva rješenja. Rješenja se dobivaju na sličan način kao za slučaj tri pravca od kojih su dva paralelna. GMS kružnica koje dodiruju oba pravca je opet pravac, to je pravac paralelan sa zadanim pravcima i jednako udaljen od oba ta pravca. Na toj se simetrali numeričkom metodom traže dvije točke čija udaljenost od pravaca je jednaka udaljenosti do zadane kružnice.

Algoritam po kojem je napravljen program za ovakvo rješenje načelno je prikazan slijedećim pseudo kodom.

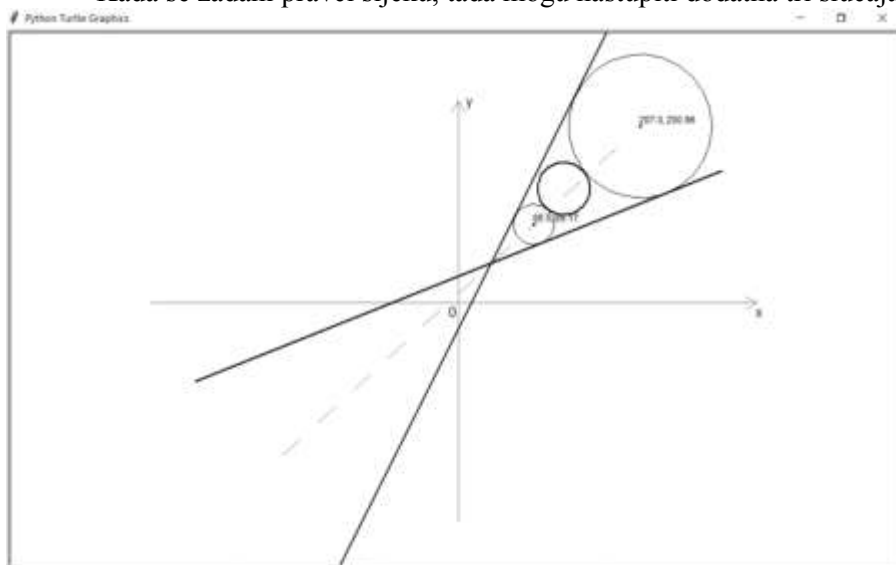
Definirati pravac $p1$ s parametrima $a1$ i $b1$
Naći $\varphi1 = \text{atg}(a1)$
Definirati pravac $p2$ s parametrima $a2$ i $b2$
Naći $\varphi2 = \text{atg}(a2)$
Definirati kružnicu $K(X0, Y0, r0)$
Nacrtati zadane objekte
Naći sjecište pravaca $p1$ i $p2$ numeričkom metodom: naći nultočku (xs, ys) funkcije $fp(x) = a1 \cdot x + b1 - (a2 \cdot x + b2)$; dobiveni xs i dobiveni $ys = a1 \cdot xs + b1$ su koordinate sjecišta pravaca $p1$ i $p2$
Naći jednadžbu simetrale $y = asim \cdot x + bsim$ na kojoj će biti središte tražene kružnice na slijedeći način:
Izračunati kut nagiba pravca koji spaja sjecište pravaca sa središtem kružnice K , $\varphi0 = \text{atg}((Y0 - ys)/(X0 - xs))$.
Ako je $\varphi0 > \varphi1$ i $\varphi0 < \varphi2$ postaviti $\varphi s = (\varphi1 + \varphi2)/2$
U suprotnom postaviti $\varphi s = (\varphi1 + \varphi2)/2 + \pi/2$
Postaviti $asim = \text{tg}(\varphi s)$ i $bsim = ys - asim \cdot xs$
Nacrtati simetralu $y = asim \cdot x + bsim$
Odrediti područje pretraživanja $[xmin, xmax]$ točaka na simetrali i korak pretraživanja Dxx
Za svaku točku (x, y) na simetrali u području $[xmin, xmax]$ s korakom Dxx naći udaljenost te točke od kružnice. Naći točku Rx, Ry jednako udaljenu od zadanog pravca i zadane kružnice i označiti tu udaljenost kao R
Nacrtati rješenje, kružnicu $Kr(Rx, Ry, R)$

Slika 7a prikazuje takav slučaj i rješenje tog primjera.



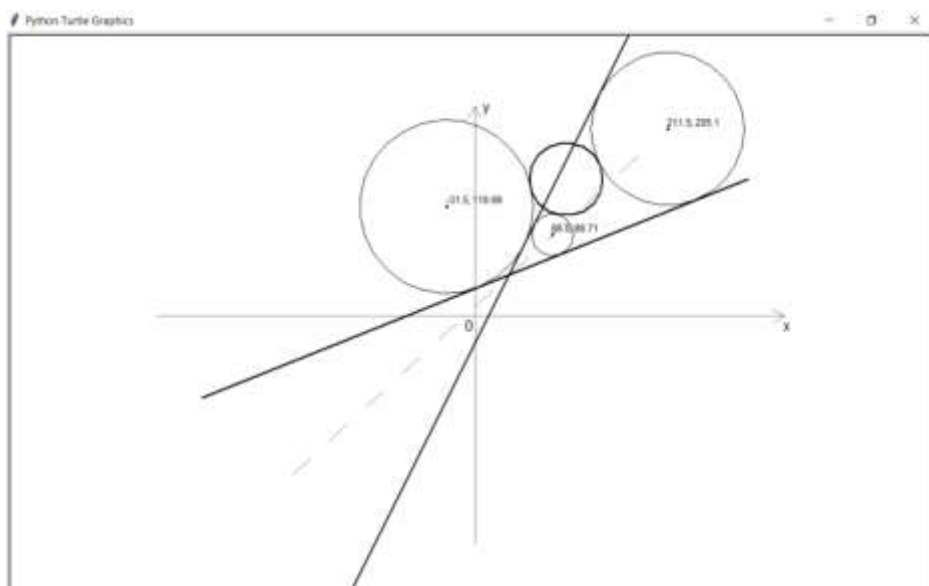
Sl. 7a.: Dva paralelna pravca i kružnica

Kada se zadani pravci sijeku, tada mogu nastupiti dodatna tri slučaja.

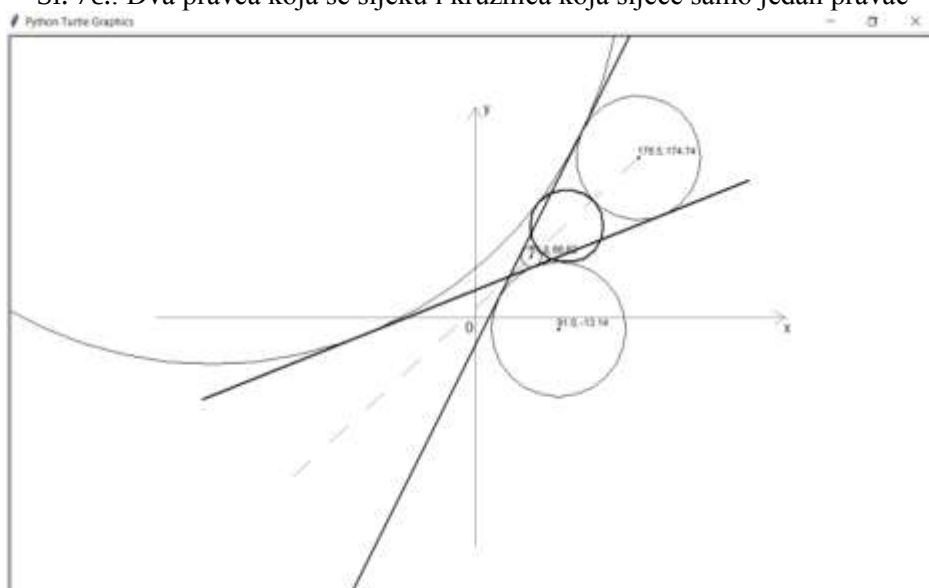


Sl. 7b.: Dva pravca koja se sijeku i kružnica koja ne siječe niti jedan pravac

Ako zadana kružnica ne siječe niti jedan od pravaca, onda postoje dva rješenja (Slika 7b). Ako kružnica siječe samo jedan od pravaca, tada postoje tri rješenja (Slika 7c), a ako kružnica siječe oba zadana pravca, tada postoje četiri rješenja (Slika 7d).



Sl. 7c.: Dva pravca koja se sijeku i kružnica koja siječe samo jedan pravac



Sl. 7.d: Dva pravca koji se sijeku i kružnica koja siječe oba pravca

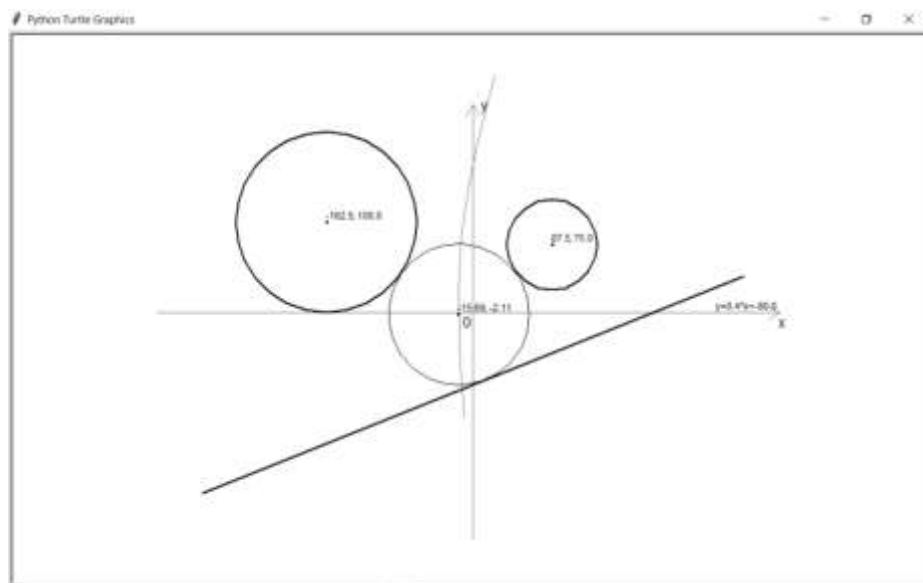
2.3. Problem s jednim pravcem i dvije kružnice

Ovisno o položaju pravca i kružnica, mogu nastupiti tri slučaja. Ako pravac ne siječe niti jednu kružnicu, ali siječe dužinu koja spaja središta kružnica,

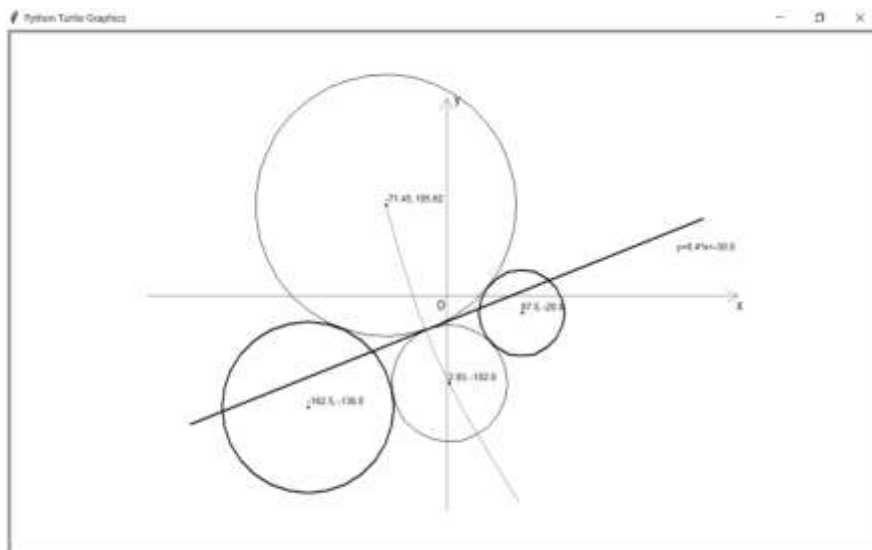
tada nema rješenja.

Drugi slučaj prikazan je na slici 8a. Pravac ne siječe niti jednu kružnici i ne siječe dužinu koja spaja središta kružnica. Tada postoji jedno rješenje koje prikazuje slika 8a. Također postoji samo jedno rješenje kada pravac siječe samo jednu kružnicu.

Treći slučaj, kada pravac siječe obje kružnice prikazan je na slici 8b. Tada postoje dva rješenja.



Sl. 8.a: Dvije kružnice i pravac; pravac ne siječe kružnice



Sl. 8.b: Dvije kružnice i pravac, pravac siječe kružnice

2.4. Problem s tri kružnice

Rješenje ovog slučaja smatra se najzahtjevnijim pri konstruktivnom traženju rješenja šestarom i ravnalom. Zato postoje brojni radovi koji pokazuju razne načine po kojima se dolazi do rješenja ovog slučaja.

Numeričkim načinom se dolazi do rješenja u načelu na isti način kao i kod slučajeva s jednom ili dvije kružnice. Geometrijsko mjesto središta (GMS) kružnica koje dodiruju dvije kružnice, na primjer K1 i K2 je hiperbola, kao što je to opisano ranije u općem opisu numeričke metode. Na tako određenoj hiperboli sve točke su jednako udaljene od kružnica K1 i K2. Na hiperboli treba naći točku T čija udaljenost od treće kružnice K3 je jednaka udaljenosti od kružnica K1 i K2.

Opet ima nekoliko slučajeva. Razmještaj zadanih kružnica i njihovi polumjeri mogu biti takovi, da nema rješenja. Na primjer, ako sve tri kružnice imaju isti polumjer a središta su im na zajedničkom pravcu, tada umjesto kružnica postoje dva pravca koji dodiruju zadane tri jednake kružnice. Slika 9a prikazuje slučaj kada postoji samo jedno rješenje. Slika 9b prikazuje slučaj kada postoje dva rješenja

Kriteriji za postojanje jednog ili dva rješenja ili kriterij za nepostojanje rješenja problema triju kružnica u ovom radu nisu razmatrani.

Algoritam po kojem je napravljen program u kojem se traži kružnica koja dodiruje tri zadane kružnice načelno je sličan gore navedenom algoritmu za problem s dva pravca i kružnicom. Razlika je u tome, što se najprije moraju transformirati koordinate točaka na hiperboli da bi vrijedile u osnovnom koordinatnom sustavu a zatim se, umjesto na pravcu, na hiperboli traži točka koja

je središte tražene kružnice.

Algoritam po kojem je napravljen program za rješenje problema s tri kružnice, koristeći izraze (4) do (10) u načelu izgleda na slijedeći način:

*Definirat kružnice $K1(x1,y1,r1)$, $K2(x2,y2,r2)$ i $K3(x3,y3,r3)$
Naći parametre a i b hiperbole H na kojoj je središte svih kružnica koje dodiruju zadane kružnice $K1$ i $K2$ (izrazi (4), (5) i (6))
Naći pomak Dx i Dy izvornog koordinatnog sustava hiperbole H u odnosu na osnovni koordinatni sustav u kojem su definirane kružnice $K1$, $K2$ i $K3$ (izraz(9))
Naći kut zakreta φ osi hiperbole H (izraz (10))
Odrediti područje pretraživanja $[xmin,xmax]$ točaka na hiperboli i korak pretraživanja Dxx
Za svaku točku (x,y) na hiperboli u području $[xmin,xmax]$ s korakom Dxx ,
Preračunati koordinate točke (x,y) na hiperboli iz izvornog u točke (x',y') u osnovnom koordinatnom sustavu (izraz(11) i (12))
Naći udaljenost svake te točke od kružnice $K3$.
Naći točku Rx , Ry jednako udaljenu od kružnice $K3$ i kružnica $K1$ i $K2$ i označiti tu udaljenost kao R
Nacrtati rješenje, kružnicu $Kr(Rx,Ry,R)$*

Zaključak

Konstruktivni problemi koji se mogu riješiti „C.a.R“ metodom, metodom šestara i ravnala, mogu se, naravno, riješiti i numeričkim metodama uz upotrebu algebarskih izraza. Pri rješavanju Apolonijevih problema triju objekata numerička se metoda može svesti na razmjerno jednostavan i uopćen algoritam. Suština toga algoritma je nalaženje geometrijskog mjesta središta (GMS) kružnica koje dodiruju dva objekta, a zatim se među tako dobivenim točkama nalazi točka ili točke, koje imaju jednaku udaljenost i do trećeg objekta. Iako je u načelu takav algoritam razmjerno jednostavan, potrebno je poznavanje i nešto složenijih numeričkih metoda da bi se došlo do traženih rješenja.

Zanimljiva i povoljna strana numeričkih metoda je u tome, da se s jednom napravljenim algoritmom mogu ispitivati razni razmještaji zadanih objekata. Tako se mogu proučavati razni slučajevi koji tom prilikom nastaju. Povoljno je koristiti programsku podršku koja omogućava neposredan grafički prikaz. Python je programski jezik koji je pogodan za ova rješenja pa se i na pametnim telefonima mogu napraviti modeli koji daju efektne grafičke prikaze.

Literatura:

- [1] Z. Bobič Šonc: Optimalni solverumi Apolloniosovih problema šestarom i ravnalom, *PIFT 2020, Povijest i filozofija tehnike*, Zagreb, Hrvatska, 2020.
- [2] E. W. Weisstein,. Apollonius Circle. *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/ApolloniusCircle.html>
- [3] <https://www.youtube.com/watch?v=8KDpGn0bUP8&feature=youtu.be>
- [4] A. Guberina, N. Koceić Bilan: Generalizirani Apolonijev problem; *Acta mathematica spalatensia, Series didactica*, Vol.2 ,2019, 67–91
- [5]M. Jukić: Apolonijev problem, *Osječka matematička škola*, 2, 2002, 81-90
- [6] D. Bošnjak, : *Inverzija*, Diplomski rad, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, Hrvatska, 2011.
- [7]<https://ff.unze.ba/nabokov/euklidska2/ljeto2013/05%20Apolonijev%20problem.pdf>

Abstract: Problems of Apollonius, supposed to be solved with compass and ruler (C.a.R. technique) can be solved and graphically presented using a computer. Python programming language is suitable for this and can be used even on smartphones. Methods for solving all ten problems defined by this Greek geometer are presented. Approximations can be made with numeric methods to represent points with circles of small radii. So, initial ten problems can be reduced to only four.

Keywords: Problems of Apollonius, Smartphone, Python programming language, digital solution, numeric methods.

Darko Fischer