

MAXWELLOVA TEORIJA ELEKTRICITETI.

PIŠAL:

LADISLAV BTJEPANEK.

NAJPREJE VSKAŽENA OD MATEMATIČNEGA FAKULTETA
V DR. STANISLAVU PRANJE NHOVA I V LACKEH

PROFESORJE V JAVNOGA PISARJA: EDUARD. PRANJE I

LACKEH

TRINER PUBLISHED
1911

Maxwellova teorija o elektriciteti.

Od vijeka nastoji ljudski duh, da istraži prirodu, da protumači, da shvati njezine pojave, koje ga prate na svakom koraku kroz cijeli život. Istina je do duše, da se nemamo nadati, da ćemo ikada proniknuti u bit pojava, ta već na prvo pitanje, koje nam se nameće, što je na ime materija, ne znamo odgovoriti, a pojave opet ne možemo odvojiti od pojma materije; gdje je na ime neka pojava, ondje je i neka materija kao nosilac pojave. No ljudski duh nije kod ove zapreke stao, nego je u svom istraživanju samo drugi put odabrao, put indukcije. Neumorno skuplja čovjek činjenice u prirodi, i iz ovih činjenica — na prvi pogled bez ikakva reda i saveza — sagradio je duh ljudski ustrajnim radom velebnu zgradu, sagradio je fiziku.

Premda pitanje, što je bit pojedinih pojava, ne pripada u fiziku, nego u metafiziku, ipak moramo i u fizici s tim nepoznanicama računati, pa su poradi toga fizici pokušali u interesu jedinstva fizike ove nepoznanice reducirati na minimum. Najjednostavnija i najshvatljivija nam je pojava, gibanja, i poradi toga nastoje fizici oko toga, ne bi li se sve pojave dale shvatiti kao različne modifikacije gibanja. Tako je postala mehanika temeljem cijele fizike; sve pojave nastojimo po zakonima mehanike protumačiti, za sve pojave nastojimo postaviti mehaničke teorije. Ali ni ondje, gdje nam to polazi za rukom, ne smijemo ipak misliti, da smo tim u samu bit pojave proniknuli, jer postoji li za neku pojavu jedna mehanička teorija, postoji ih beskonačno mnogo, kako se to matematički dade dokazati.¹⁾ Mi možemo samo reći, koja je od ovakvih teorija za tumačenje one pojave zgodnija, a ne, koja je od njih prava, zbiljska, a kad bismo to i mogli, još bi ostao neriješen problem gibanja.

Jedan ovaki vrlo duhovit pokušaj mehaničkoga tumačenja pojava električkih jest *Maxwellova teorija o elektriciteti*. Da postoji jedinstvo u svim prirodnim pojavama, o tom nema sumnje, sve su prirodne pojave samo različni oblici neke energije, koja vlada cijelom prirodom. U čem stoji to jedinstvo, toga duh ljudski ne može da dokuči, ali nas za to veseli svaka teorija, koja nam bar sjenku toga jedinstva u prirodnim pojavama nekakom za nas

¹⁾ H. Poincaré: „Electricité et Optique“. Préface.

shvatljivom analogijom otkriva. Baš poradi toga moramo Maxwellovu teoriju o elektriciteti uzdići nad druge, ona nam veže optičke pojave s električkim i magnetskim.

Teorija neposrednoga djelovanja u daljinu (Fernwirkungs-theorie) tumači nam električke pojave s pomoću hipotetičkih fluida, koji su uzrok ponderomotornim silama po zakonu potpuno analognom Newtonovu zakonu za gravitaciju. Već u polovini 18. stoljeća pojavio se dvije takove teorije, Franklinova i Symmerova. Ovu drugu prihvatili su najznatniji fizičari te su na njejoj osnovi dotjerali nauku o elektriciteti do velikoga savršenstva. Weberov zakon bio je za ovu teoriju vanredan napredak. Kraj svega toga podigao se Faraday protiv te teorije te je oborio njezinu diktaturu u nauci o elektriciteti. S Faradayevim nazorom, da se djelovanje električko ne zbiva neposredno u daljinu, nego da se širi kroz dielektrikum od čestice do čestice, nijesu se s početka fizičari slagali. Uzrok je tomu bio, što je s jedne strane teorija, osnovana na neposrednom djelovanju električkih fluida, tada jako napredovala, a s druge strane što Faraday nije umio svoje nazore jasno matematički formulirati. Ovo je pošlo za rukom njegovu učeniku J. C. Maxwellu u radnjama o elektriciteti i o magnetizmu, koje je izdao god. 1865. Od toga vremena nastao je velik preokret u istraživanju na polju elektricitete i magnetizma.¹⁾

Faradayev je nazor u glavnom taj, da elektriziranjem ne dolazi samo konduktor, nego i izolator oko njega u neko osobito stanje. U izolatoru, koji je pravo dielektričko sredstvo, nastaje neka trešnja, sad elektrostatička, sad elektromagnetička, i ova se širi od čestice do čestice kroz taj dielektrikum. Tom trešnjom porodi se neka napetost u dielektrikumu, i djelovanje električnih tjelesa učinak je ove napetosti. Što se tiče prenosioca ovoga električkoga i magnetskoga djelovanja, izjavio je Faraday, da s obzirom na električko djelovanje kroz prazni prostor nije nevjerovatno, da je eter, koji prenosi titraje kod svjetlosti, također prenosilac električkoga i magnetskoga djelovanja. Maxwell, potaknut nekim pokusima elektrooptičkim i rezultatom svoje teorije, da je brzina električkoga djelovanja jednaka brzini svjetlosti, izrekao je, da je eter to sredstvo, koje svojom napetošću širi djelovanje električko i magnetsko.

Da za električko djelovanje treba vremena, to su već i drugi neki fizičari držali, kao n. pr. Gauss (Werke V. List Weberu 1845.), Riemann (Pogg. Ann. 1867.), Lorentz, Betti, Edlund i dr., ali oni nijesu polagali važnosti na sredstvo, koje bi to djelovanje imalo prenositi.

¹⁾ Vidi također H. Classena: „Geschichtliche Entwicklung der Anschauungen über das Wesen der elektrischen Wirkungen“ (Dr. F. Poske: Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht 1894—1895. str. 251.).

Kako Maxwell sam veli, on je obradio nazore Faradayeve, a cijela se teorija ipak zove pravom Maxwelllova, jer je on te nazore matematički jasno formulirao, raširio ih i u jednu cjelinu, u teoriju, sastavio. Maxwell je pokazao, kako možemo iz općenih principa mehanike izvesti električke zakone, a najsajjniji je trijumf njegove teorije *elektromagnetička teorija svjetlosti*, po kojoj su valoviti titraji kod svjetlosti iste one trešnje u ravnotežju etera, koje dobivamo kod elektromagnetičkih oscilacija, samo im je perioda mnogo kraća. Ta je teorija dovela do rezultata, da je brzina širenja električkoga djelovanja jednaka brzini svjetlosti, i da je dielektrična konstanta u jednostavnom odnošaju spram indeksa lomljenja za svjetlost, a to su pokusi prilično dobro i potvrdili. Pravu eksperimentalnu potvrdu dobila je Maxwelllova teorija tek u novije doba u znamenitim pokusima H. Hertza. Hertzu je pošlo za rukom izvesti vrlo kratke električke valove i pokazati, da za elektromagnetičke valove u dielektrikumu vrijede isti zakoni, kao i za valovito gibanje kod zvuka i svjetlosti. On je eksperimentalno dokazao širenje elektromagnetičkih valova u pravcu, refleksiju, refrakciju, interferenciju i polarizaciju elektromagnetičkih valova. Lodgeu i Howardu pošlo je za rukom eksperimentalno dokazati lomljenje i koncentraciju elektromagnetičkih zraka s velikim lećama.

Matematički poučci i definicije.

1. Pod imenom „vektor“ razumijevamo veličinu, kojoj pripada određeni smjer u prostoru, dok veličinu bez ikakova smjera zovemo „skalar“. Vektor je n. pr. brzina, akceleracija, sila i t. d., a skalar je masa, radnja, potencijal i t. d. Najjednostavniji je skalar čisti broj, a najjednostavniji vektor dužina s određenim smjerom; sve skalarne veličine izražavamo poradi toga brojevima, a sve vektore dužinama određenoga smjera. Apsolutna veličina nekoga vektora bez obzira na njegov smjer zove se „*tensor*“ toga vektora. Tensor je skalarna veličina, koju bilježimo istim slovom, kao i vektor, komu pripada. Rotaciju označujemo nekom dužinom u osovini rotacije; veličina te dužine označuje nam veličinu rotacije. Smjer te dužine odabiremo tako, da nam se rotacija prikazuje kao okretanje kazala na uri, ako gledamo u tom smjeru. Ovakovu veličinu zovemo „*rotor*“.

Skalarne veličine označene su latinskim, a vektori gotičkim slovima, za vektor uzimamo dakle gotičko, a za njegov tensor isto, ali latinsko slovo. Mi ne ćemo za pravo upotrebljavati račun vektorâ, nego samo oznaku vektorâ, jer su vektori vrlo zgodni za kratko i jasno formuliranje zakona.

2. Ako je $\mathfrak{A}$ neki vektor, bilježimo komponente njegove u smjeru osovina koordinata s A_x, A_y, A_z *) a komponentu u smjeru nekom S sa A . Komponente vektora ne bilježimo kao vektore, premda su vektori, s razloga, što to kod njih nije potrebno; smjer im je na ime već a priori nesumnjivo pridružen. Sa $\text{div } \mathfrak{A}$ — divergencija vektora $\mathfrak{A}$ — označujemo sumu njegovih prvih derivacija:

$$\text{div } \mathfrak{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{I.})$$

po Heavisideu.

Znači li nam $\mathfrak{A}$ brzinu neke tekućine na onom mjestu u prostoru, na koje se $\mathfrak{A}$ odnosi, onda je $\text{div } \mathfrak{A}$ množina tekućine, proračunana na jedinicu obujma, za koju nam množinu više tekućine u jedinici vremena iz elementarnoga paralelepipedu na tom mjestu isteče, nego li u paralelepiped uđe. Jednadžba

$$\text{div } \mathfrak{A} = 0$$

poznata je jednadžba iz hidrodinamike, koja kazuje nestlačljivost te tekućine. Ako je $\text{div } \mathfrak{A}$ različna od nule, onda moramo uzeti stlačljivost tekućine ili pak u elementarnom paralelepipedu neki izvor, ako je $\text{div } \mathfrak{A}$ pozitivna, neki ponor, ako je negativna. *Divergencija je vektora skalar.*

Ovakovo razmatranje možemo nadovezati na svaki vektor, koji je po nekom stalnom zakonu u prostoru porazdijeljen. Mi velimo onda, da smo taj vektor hidrodinamički konstruirali. Ovakom hidrodinamičkom konstrukcijom ne diramo ništa u narav pojava, ona je samo zgodno sredstvo, da se zornije možemo izražavati. U tom smislu i upotrebljavamo „*tok sile*“ po Faradayu.

Znači li A skalarnu veličinu, onda bilježimo sa ΔA vektor, koji ima komponente

$$\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z},$$

a sumu drugih derivacija te veličine A označujemo sa

$$\Delta^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

Upotrijebimo li ovu operaciju na skalar, dobijemo skalarnu veličinu, upotrijebimo li je na vektor, dobijemo vektor:

$$\Delta^2 \mathfrak{A} = \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial z^2} \quad (\text{II.})$$

*) Električke i magnetske vektore označio sam u ovoj radnji u glavnom onako, kako ih je Maxwell sam označio. No komponente tih vektora kod Maxwella su drukčije označene, jer ih je on bilježio različitim slovima. Ja nijesam za komponente upotrebljavao različitih slova za to, što bi tim uveo više oznaka, nego li je potrebno, a i samu oznaku vektora ne bih onda konsekvntno proveo.

Ako je $\mathfrak{A}$ vektor s komponentama A_x, A_y, A_z , onda označujemo vektor $\mathfrak{B}$, komu su komponente

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.})$$

ovako po Maxwellu

$$\mathfrak{B} = \text{curl } \mathfrak{A}$$

t. j. vektor $\mathfrak{B}$ je *rotacija, vrtlog* (*Kräuselung*) vektora $\mathfrak{A}$.

Ako uzmemo, da nam $\mathfrak{A}$ opet znači brzinu neke tekućine na onom mjestu u prostoru, na koje se $\mathfrak{A}$ odnosi, onda nam curl $\mathfrak{A}$ mjeri rotaciju (vrtlog) na dotičnom mjestu u tekućini. Jednadžba

$$\text{curl } \mathfrak{A} = 0$$

važna je jednadžba hidrodinamike, koja kaže, da se tekućina giba bez vrtloga. Brzina tekućine na tom mjestu daće se onda izraziti nekim potencijalom brzine (*Geschwindigkeitspotential*).

Iz jednadžbi (III.) izlazi, da je curl $\mathfrak{A}$ opet *vektor*. U specijalnom slučaju, da vektor $\mathfrak{A}$ ima isti smjer u cijelom prostoru, curl $\mathfrak{A}$ je okomit na njemu. Treba da okrenemo samo osovinu X u taj smjer, pa je $A_y = A_z = 0$ i poradi toga $B_x = 0$ prema (III.). No općeno to ne vrijedi, curl $\mathfrak{A}$ može u opće prema $\mathfrak{A}$ imati najrazličniji smjer.

Ako je $\mathfrak{B} = \Delta A$, onda je

$$V_x = \frac{\partial A}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial A}{\partial z}$$

dakle po (III.)

$$\text{curl } \Delta A = 0 \quad (\text{IV.})$$

Prema (I.) je

$$\text{div } \mathfrak{B} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z};$$

ako je sad $\mathfrak{B} = \text{curl } \mathfrak{A}$, dobijemo poradi (III.)

$$\text{div curl } \mathfrak{A} = 0. \quad (\text{V.})$$

Uzmemo li

$$\mathfrak{B} = \text{curl } \mathfrak{B},$$

dobijemo po (III.)

$$V_x = \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \text{ i t. d.}$$

a stavimo li sad

$$\mathfrak{B} = \text{curl } \mathfrak{A},$$

izlazi opet po (III.)

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \mathfrak{A}) - \Delta^2 A_x \\ V_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\text{div } \mathfrak{A}) - \Delta^2 A_y \\ V_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\text{div } \mathfrak{A}) - \Delta^2 A_z \end{aligned}$$

$$\mathfrak{B} = \text{curl} (\text{curl } \mathfrak{A}) = \Delta \text{div } \mathfrak{A} - \Delta^2 \mathfrak{A} \quad (\text{VI.})$$

Da su sve ove operacije nezavisne o izboru sustava koordinata, lako se možemo uvjeriti transformacijom koordinatnoga sustava.

3. **Greenov poučak.** Imamo zatvorenu plohu Ω , koja omeđuje prostor (Ω) . Mi ćemo transformirati integral

$$\int_{(\Omega)} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\tau,$$

gdje je $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ elementarni paralelepiped našega prostora, u plošni integral po plohi Ω , kojom je taj prostor omeđen. U tu svrhu razdijelimo cijeli prostor (Ω) u same niti $\mathfrak{F}$, paralelne s osovinom X prereza $dy \cdot dz$ (sl. 1.), onda je integral po prostoru (Ω) svakako jednak sumi integrala po onima nitima t. j.

$$\int_{(\Omega)} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\tau = \Sigma \int_{\mathfrak{F}} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\tau$$

Ako označimo s x_0 i x_1 apscise krajeva jedne od tih niti, sa $d\omega_0$ i $d\omega_1$ plošne elemente plohe Ω , što ih ova nit na njoj izreže, sa l_0 , m_0 , n_0 i l_1 , m_1 , n_1 smjernice (cosinuse smjera) izvanje normale na element $d\omega_0$ i $d\omega_1$, sa ϕ_0 i ϕ_1 vrijednosti funkcije ϕ na mjestu, gdje se nalazi $d\omega_0$ i $d\omega_1$, onda dobijemo

$$\int_{\mathfrak{F}} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\tau = dy \, dz \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = dy \, dz (\phi_1 - \phi_0),$$

ali poradi relacija

$dy dz = d\omega_1 \cos(d\omega_1 / YZ) = d\omega_1 \cos(N_1 / +X) = l_1 d\omega_1$
 $dy dz = d\omega_0 \cos(d\omega_0 / YZ) = d\omega_0 \cos(N_0 / -X) = -l_0 d\omega_0$
 smijemo tu vrijednost pisati ovako:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} d\tau = l_1 \psi_1 d\omega_1 + l_0 \psi_0 d\omega_0.$$

Sve niti izrežu sve elemente plohe Ω , dakle

$$\int_{(\Omega)} \frac{\partial \psi}{\partial x} d\tau = \int_{\Omega} l \psi d\omega.$$

Ako sada stavimo $\psi = N \cdot R$, dobijemo

$$\int_{(\Omega)} \left(N \frac{\partial R}{\partial x} + R \frac{\partial N}{\partial x} \right) d\tau = \int_{\Omega} l N R d\omega,$$

a odatle

$$\int_{(\Omega)} N \frac{\partial R}{\partial x} d\tau = - \int_{(\Omega)} R \frac{\partial N}{\partial x} d\tau + \int_{\Omega} l N R d\omega;$$

isto tako

$$\begin{aligned} \int_{(\Omega)} P \frac{\partial S}{\partial y} d\tau &= - \int_{(\Omega)} S \frac{\partial P}{\partial y} d\tau + \int_{\Omega} m P S d\omega \\ \int_{(\Omega)} Q \frac{\partial T}{\partial z} d\tau &= - \int_{(\Omega)} T \frac{\partial Q}{\partial z} d\tau + \int_{\Omega} n Q T d\omega. \end{aligned}$$

Adiramo li ove tri jednadžbe, bude

$$\begin{aligned} \int_{(\Omega)} \left(N \frac{\partial R}{\partial x} + P \frac{\partial S}{\partial y} + Q \frac{\partial T}{\partial z} \right) d\tau &= \\ &= - \int_{(\Omega)} \left(R \frac{\partial N}{\partial x} + S \frac{\partial P}{\partial y} + T \frac{\partial Q}{\partial z} \right) d\tau + \\ &+ \int_{\Omega} (l \cdot NR + m \cdot PS + n \cdot QT) d\omega. \end{aligned} \quad (\text{VII.})$$

Greenov je poučak samo specijalni slučaj ove formule za

$$N = P = Q = U \text{ i } R = \frac{\partial V}{\partial x}, S = \frac{\partial V}{\partial y}, T = \frac{\partial V}{\partial z};$$

on glasi:

$$\int_{(\Omega)} U \Delta^2 V \, d\tau = - \int_{(\Omega)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau + \int_{\Omega} U \frac{\partial V}{\partial \nu} \, d\omega, \quad (\text{VII}')$$

gdje nam $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ znači diferencijalni omjer funkcije V u smjeru izvanje normale na plohu Ω .

Uzmemo li u (VII.)

$$N = P = Q = 1 \text{ i } R = A_x, S = A_y, T = A_z,$$

dobijemo

$$\int_{(\Omega')} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) d\tau = \int_{\Omega} (l A_x + m A_y + n A_z) \, d\omega.$$

Ako su A_x, A_y, A_z komponente vektora $\mathfrak{A}$, onda je

$$l A_x + m A_y + n A_z = A_\nu$$

komponenta od $\mathfrak{A}$ u smjeru normale na našu plohu, dakle

$$\int_{\Omega} A_\nu \, d\omega = \int_{(\Omega)} \operatorname{div} \mathfrak{A} \, d\tau \quad (\text{VIII})$$

Ploha Ω može biti makar kako svinuta, ona ne treba da bude ni jedinstvena. U tom slučaju sijeku doduše mnoge niti $\oint$ plohu više nego dva puta (svakako taki broj puta), ali je uvijek suma svih plošnih elemenata, što ih sve niti iz plohe izrežu, jednaka cijeloj plohi.

Green¹⁾ je prvi istaknuo osobitu važnost jednadžbe (VII'), ali su tu transformaciju prostornoga integrala prije njega upotrebljavali već Fourier i Poisson, kako to tvrdi Mathieu.²⁾

4. Stokesov poučak. Imamo neku zatvorenu krivku S , a po toj krivki treba uzeti integral

$$I = \int_S A_\nu \, ds = \int_S (A_x \, dx + A_y \, dy + A_z \, dz),$$

¹⁾ Green: „Essay on the application of mathematical analysis on the theories of electricity and magnetism“. (Nottingham 1828.).

²⁾ Mathieu: „Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme“ p. 14.

gdje nam A_x znači komponentu vektora $\mathfrak{A}$ u smjeru elementa krivke ds (ds u smjeru integracije). Da je i u drugom napisanom integralu zadan taj isti integral, izlazi iz toga, što je projekcija resultante u neki smjer jednaka sumi projekcija sviju komponenta u taj smjer. Naša je zadaća, da taj integral transformiramo u plošni integral po kakovoj god plohi položenoj kroz tu krivku. Uzmimo najprije, da se krivka S nalazi u ravnini XY , onda je $dz = 0$ i

$$I = \int_S (A_x dx + A_y dy).$$

Cijelu plohu, što ju krivka S omeđuje, razdijelimo paralelama prema osovinu X i Y u same elementarne paralelograme (sl. 2.). Oko svakoga ovoga paralelograma uzmimo naš integral u istom smislu, u kom imamo integrirati po krivki S . Svaki elemenat dx paralele s osovinom X i svaki elemenat dy paralele s osovinom Y dolazi dva puta kao put integracije, i to u protivnom smjeru, jer je svako dx i svako dy stranicom u dva susjedna elementarna paralelograma. Ono dakle, što prvom integracijom po takovu elementu dobijemo, uništi se drugom integracijom, te ostane samo integracija po konturi S . Naš dakle integral I jednak je sumi sviju integrala po konturama plošnih elemenata, u koje smo plohu krivke S razdijelili.

Uzmemo li u obzir, da je uzduž MN i PQ $dy = 0$, a uzduž NP i QM $dx = 0$, dobijemo

$$\begin{aligned} I(MNPQ) &= I(MN) + I(NP) + I(PQ) + I(QM) \\ &= A_x dx + \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x} dx \right) \cdot dy + \\ &\quad + \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \right) \cdot (-dx) + A_y (-dy) \\ &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Integral I po konturi S jednak je sumi ovakovih elementarnih integrala za sve plošne elemente plohe kroz krivku S , dakle je

$$\int_S (A_x dx + A_y dy) = \int \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (\text{IX.})$$

Uzmimo sada integral

$$I = \int_{MNPQ} (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

po konturi trokuta MNP (sl. 3.). Taj integral možemo ovako pisati

$$I(MNPM) = I(MN) + I(NP) + I(PM) + \\ + I(OM) + I(ON) + I(MO) + \\ + I(NO) + I(PO) + I(OP),$$

jer je $I(OM) + I(MO) = 0$ i t. d.

Ali budući da je

$$I(MN) + I(NO) + I(OM) = I(MNOM) \text{ i t. d.,}$$

izlazi napokon:

$$I(MNPM) = I(MNOM) + I(NPON) + I(PMOP) \\ \int_{MNPM} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int_{MNOM} (A_x dx + A_y dy) + \\ + \int_{NPON} (A_y dy + A_z dz) + \int_{PMOP} (A_z dz + A_x dx).$$

Po (IX.) dobijemo odavle

$$\int_{MNPM} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int_{MNOM} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy + \\ + \int_{NPON} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz + \int_{PMOP} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz dx.$$

Uzmemo li, da je trokut MNP beskonačno malen, onda se izrazi pod znacima integrala na desnoj strani jednačžbe ne mijenjaju na cijelom tetraedru $O(MNP)$, te ih smijemo izlučiti pred integral, pa dobijemo:

$$\int_{MNPM} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cdot l d\omega + \\ + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cdot m d\omega + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cdot n d\omega,$$

gdje je $d\omega$ ploština trokuta MNP , a l , m , n su smjernice normale na lijevoj strani plohe trokuta MNP . Lijevom stranom plohe, oko koje po konturi integriramo, zovemo onu stranu, na koju pokazuje palac desne ruke, ako je pružimo u smjer integracije s dlanom okrenutim k unutrašnjosti plohe.

Neka bude sada krivka S kakova god; kroz ovu krivku položimo kakovu god plohu, koju razdijelimo u same takove elementarne trokute, kao što je MNP . Integral po toj krivki S

jednak je sumi integrala po svim onim elementarnim trokutima, jer uzduž svake stranice svakoga trokuta, koja ne pripada konturi S , integriramo dva puta u protivnim smjerovima, te ove stranice ne daju ništa k sumi, a ostaje samo kontura S . Dakle je

$$\int_S (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int \left[l \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] d\omega. \quad (X.)$$

Integral na lijevoj strani dobivene jednadžbe odnosi se na krivku S , a onaj na desnoj strani na neku plohu omeđenu krivkom S ; l, m, n su smjernice normale na lijevoj strani te plohe. Komponente A_x, A_y, A_z , kao i njihove derivacije, moraju biti na cijeloj toj plohi neprekidne funkcije.

Označimo li

$$\text{curl } \mathfrak{A} = \mathfrak{B},$$

onda možemo pisati

$$\int_S A_s ds = \int B_v d\omega, \quad (X')$$

gdje je B_v komponenta od $\mathfrak{B}$ u smjeru normale na lijevoj strani plohe kroz S .

U slučaju, da je

$$\text{curl } \mathfrak{A} = 0$$

t. j. da vektor $\mathfrak{A}$ ima potencijal, dobijemo za svaku zatvorenu krivku S

$$\int_S A_s ds = 0. \quad (XI.)$$

Poučak (X.) zove se obično Stokesov¹⁾ poučak. Mnogo prije, nego li je Stokes do njega došao, upotrebljavao je Ampère²⁾ specijalne poučke, koji su s ovim u tijesnom savezu.

Elektrostatika.

5. Elektrostatičko polje. Po teoriji neposrednoga djelovanja u daljinu (Fernwirkungstheorie) pokazuje se električnost

¹⁾ Smith's Prize paper for 1854. (Cambridge University Calendar 1854.)

²⁾ Ampère: „Mém. sur la théorie math. des phénomènes électrodynamiques etc.“ (Mém. de l'acad. des sc. 1827.)

neke čestice samo tako, da ona djeluje na drugu električnu česticu s nekom ponderomotornom silom, a ova izvodi relativnu promjenu njihova položaja, ako su čestice slobodne. U prostoru dakle s jednom električnom česticom ne bi se po toj teoriji osobito stanje te čestice ni u čem pokazalo, jer nema tu druge električne čestice, na kojoj bi ona prva svoju električnost mogla očitovati. Po toj teoriji ne postoji nikakvo pravo električko polje. Faraday i Maxwell nijesu se s tim nazorom slagali, oni su rekli, da električna čestica u prostoru oko sebe izvodi uvijek neke promjene, ona na ime izvede eter iz *normalnoga položaja ravnotežja* u tom prostoru u *prisiljeni (équilibre contraint, Zwangszustand)*. U eteru se pojavi elastična sila poradi pomicanja, i ona drži onda ravnotežje onoj *poremelnoj sili (force pèrturbatrice)*, koja ima svoj uzrok u električkom stanju čestice. „*Električko polje nekoga električkog tijela onaj je prostor oko toga tijela, u kom je normalni položaj etera djelovanjem tijela osjetljivo poremećen*“. Po Maxwellovoj je dakle teoriji električko polje nešto realno, a elastična napetost etera u tom je polju onaj faktor, koji je u njemu uzrok ponderomotornim silama; po toj teoriji nema neposrednoga djelovanja, djelovanje se zbiva posredno preko etera.

6. Coulombov zakon, električka sila polja. Iz iskustva znamo, da postoje dvije vrste električkoga stanja ili, kako obično kažemo, dvije vrste elektricitete. Ove dvije vrste elektricitete pokazuju posve protivna svojstva, slično kao pozitivne i negativne veličine u algebri, za to i zovemo te dvije vrste elektricitete *pozitivna i negativna elektriciteta*. Električko stanje može još biti i različite veličine, a po njegovu djelovanju možemo tu veličinu i mjeriti. Mjera za veličinu električkoga stanja jest izraz, koji se obično zove „*množina elektricitete*“. Izrazu tomu pridajemo još i predznak + ili — prema tomu, u koju vrstu to električko stanje ide.

Iz iskustva znamo dalje, da dvije električne čestice (dva električna tijela s vrlo malenim dimenzijama prema njihovu razmaku) djeluju jedna na drugu sa silom

$$F = \frac{f}{K} \cdot \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2} \quad (1.)$$

u smjeru sastavnice r . Veličine e_1 i e_2 jesu množine elektricitete tih čestica, r je njihov razmak, a K je konstanta, koja zavisi o naravi sredstva, u kojem su te dvije čestice. Za vacuum i uz neznatnu pogriješku i za uzduh uzimljemo $K = 1$, tako te za uzduh možemo pisati

$$F = f \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

U ovom je obliku Coulomb svoj zakon i postavio. Uzmemo li

konstantu $f = 1$, definirali smo odmah jedinicu množine elektricitete kao onu množinu elektricitete, koja na isto toliku množinu djeluje u udaljenosti od 1 cm sa silom od 1 dyna, i to u vacuumu. Ova jedinica množine elektricitete zove se „elektrostatička jedinica“; ona nam je ishodištem za elektrostatički sustav mjerenja. Konstantu K zovemo „dielektričnom konstantom“ ili „specifičkom induktivnom kapacitetom“ onoga sredstva, u kojem su električne čestice. Za vacuum je $K = 1$, inače $K > 1$.

„Intensitetom“ električkoga polja ili „električkom silom“ polja na nekom mjestu zovemo onu silu, kojom djeluje polje na jedinicu pozitivne elektricitete, što je na to mjesto u polje uvedemo. Pomišljamo dakako, da ta jedinica elektricitete u polju ne mijenja elektricitetu onih tjelesa, koja izvođe polje. Ovako definirana električka sila polja mjerom je poremećenju etera na dotičnom mjestu. Označimo li tu silu sa $\mathcal{E}$, komponente njezine sa E'_x, E'_y, E'_z , možemo pisati

$$E'_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad E'_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad E'_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (2.)$$

$$\mathcal{E} = -\Delta\phi,$$

gdje je ϕ „elektrostatički potencijal“¹⁾

$$\phi = \frac{1}{K} \int \frac{de}{r}. \quad (3.)$$

Ovo vrijedi dakako za izotropno sredstvo, gdje se K ne mijenja. Integriramo po cijelom prostoru, gdje se nalaze naša električna tjelesa.

7. Tok sile. Uzmimo u prostoru jedan plošni elemenat $d\omega$, električka sila u smjeru normale na taj elemenat jest

$$E'_v = -\frac{d\phi}{dv}$$

ako je dv elemenat te normale. „Tokom sile“ kroz taj elemenat $d\omega$ u smjeru normale zovemo umnožak

$$E'_v d\omega = -\frac{d\phi}{dv} d\omega.$$

Hidrodinamički znači nam taj tok sile množinu tekućine, koja kroz taj elemenat u smjeru normale u jedinici vremena prođe s brzinom $\mathcal{E}$.

Imamo li zatvorenu plohu Ω (sl. 4.), onda velimo, da je

¹⁾ Laplacea ide zasluga, da je uveo predodžbu komponenata vektora sa prvim derivacijama određene funkcije skalarne. (Méc. cél. liv. III.) Ime „potencijal“ za tu funkciju potječe od Greena.

$$\int_{\Omega} E'_{\nu} d\omega = - \int_{\Omega} \frac{d\psi}{dv} d\omega$$

tok sile (*Kraftfluss, flux de force*) kroz tu zatvorenu plohu, i to tok sile iz plohe ili u plohu prema tomu, da li je dv elemenat izvanje ili unutrašnje normale na plohu. Uzmemo li u obzir vrijednost od ψ , dobijemo

$$\int_{\Omega} E'_{\nu} d\omega = \frac{1}{K} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{de}{r^2} \cdot \frac{dr}{dv} d\omega = \frac{1}{K} \int_{\Omega} de \int_{\Omega} \frac{d\omega}{r^2} \cos \varepsilon.$$

Za svako de , koje je unutar plohe Ω , izlazi

$$\int_{\Omega} \frac{d\omega}{r^2} \cos \varepsilon = 4\pi,$$

dok je za svako de izvan plohe Ω

$$\int_{\Omega} \frac{d\omega}{r^2} \cos \varepsilon = 0.$$

U gornjem dakle integralu za tok sile treba prvu integraciju izvršiti samo za električna tjelesa, koja su unutar plohe Ω , jer je za svako de izvan te plohe funkcija pod znakom integrala $= 0$. Dakle je tok sile kroz zatvorenu plohu Ω u vanjski prostor

$$\int_{\Omega} E'_{\nu} d\omega = 4\pi \frac{e}{K} \quad (4.)$$

To je Gaussova¹⁾ jednadžba za tok sile, koja nam kaže, da je tok sile kroz neku zatvorenu plohu u vanjski prostor proporcionalan s množinom elektricitete zakriliene tom plohom.

Električka je sila $\mathcal{E}$ vektor, koji za svako mjesto polja ima određenu veličinu i određen smjer. Faraday je razdiobu ovoga vektora u prostoru zorno tako predočio, da je pomisljao u cijelom prostoru povučene crte, koje nam na svakom mjestu daju smjer vektora $\mathcal{E}$. Ove crte zovemo „silnice“ (*Kraftlinien, lignes de force*). Da nam silnice daju i veličinu vektora $\mathcal{E}$ za svako mjesto, odaberemo broj silnica, koje nam ondje okomito sijeku 1 cm^2 , jednak tensoru E' . Imamo li u nekoj točki množinu elektricitete e , na površini kugle oko ove točke s polumjerom r bit će po Coulombovu zakonu električka sila

$$E' = \frac{1}{K} \frac{e}{r^2}.$$

¹⁾ Gauss: „Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum etc.“ (Werke V. p. 9.)

Silnice idu radijalno od te točke te sijeku okomito plohu kugle, i to na 1 cm^2 dolazi E' silnica, a na cijelu plohu kugle

$$4\pi r^2 \pi E' = 4\pi \frac{e}{K}$$

silnica. Isporedimo li ovo s jednadžbom (4.), možemo reći, da je *tok sile kroz neku plohu u smjeru izvanje normale jednak broju silnica, koje tu plohu sijeku u smjeru ove normale*. Silnice u protivnom smjeru računamo pri tom negativno. Ako nam ploha Ω zakriljuje isto toliko pozitivne koliko i negativne elektricitete, onda je tok sile $= 0$, silnice prelaze od pozitivno električnih tjelesa na negativno električna. Poslužimo li se hidrodinamičkom slikom, možemo pozitivnu elektricitetu zvati „izvorom“, a negativnu „ponorom“ (*Sinkstelle*) za silnice.

Iz (2.) izlazi

$$\text{curl } \mathcal{E}' = 0, \quad (5.)$$

a to znači, — ako se sjetimo Stokesova poučka — da je radnja elektrostatičke sile na svakom zatvorenom putu $= 0$. Takova zatvorena puta, gdje bi radnja elektrostatičke sile bila različita od nule, nema, dakle elektrostatička sila ne daje nikakove zatvorene silnice. Silnice se elektrostatičke sile ne vraćaju u se, one izlaze na pozitivno, a svršuju se na negativno električnom tijelu, matematički je uvjet za to jednadžba (5.).

Ima do duše slučajeva, gdje se silnice same u se vraćaju; u tom slučaju ne možemo električku silu izvesti od nekoga potencijala, jer je onda njezin curl različan od nule, taj slučaj ne pripada ovamo, nego u indukciju.

Jednadžba (4.) za površinu elementarnoga paralelepipeda $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ glasi

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x} + \frac{\partial E'_y}{\partial y} + \frac{\partial E'_z}{\partial z} = 4\pi \cdot \frac{\rho}{K} \quad (6.)$$

$$\text{div } \mathcal{E}' = 4\pi \frac{\rho}{K},$$

gdje je ρ gustoća elektricitete na tom mjestu u prostoru. Istu jednadžbu možemo i ovako pisati

$$K \Delta^2 \phi = -4\pi \rho, \quad (7.)$$

a to je Laplace-Poissonova jednadžba.

Gaussov je poučak za pravo specijalni slučaj Greenova, on je izražen u jednadžbi (VIII.).

8. Maxwelllova hipoteza o gibanju etera, nestlačljivost etera. U elektrostatičkom polju — točnije: u sredstvu, gdje se nalaze električna tjelesa, — nalazi se eter u prisiljenom stanju ravnotežja te se s toga u njem pojave napetosti. Iz normalnoga stanja dolazi eter u prisiljeno stanje ravnotežja tako, da

se svaka čestica etera pomakne sa svoga normalnoga mjesta. Ovaj razmještaj (*electrical displacement*), mi ćemo ga zvat¹i „*dielektričkim razmještajem*“, na svakom je mjestu u prostoru vektor, koji je svakako u stalnom odnošaju spram električne sile izazvane na tom mjestu tim razmještajem. Maxwell uziljme, da je taj odnošaj linearan, tako da imamo za izotropna tjelesa¹)

$$D_x = \frac{K}{4\pi} E'_x, \quad D_y = \frac{K}{4\pi} E'_y, \quad D_z = \frac{K}{4\pi} E'_z \quad (8.)$$

$$\mathfrak{D} = \frac{K}{4\pi} \mathfrak{E}'$$

$\mathfrak{D}$ je dielektrički razmještaj, a D_x, D_y, D_z njegove su komponente. S ovim relacijama suponiramo, da u izotropnom tijelu dielektrički razmještaj pada u smjer električne sile. Da to za izotropna tjelesa mora biti, izlazi već poradi simetrije. Relacija je (8.) *temeljna hipoteza* Maxwellove teorije.

Jednadžbu (4.) možemo sad ovako pisati:

$$\int_{\Omega} \frac{K}{4\pi} E'_v d\omega = e \quad \text{ili}$$

$$\int_{\Omega} D_v d\omega = e \quad (9.)$$

Ova nam jednadžba kaže, da je *ukupna množina elektricitete, što je u plohu Ω uvodimo, jednaka množini etera, koji kod toga iz te plohe izađe*. Ako hoćemo to hidrodinamički da izrazimo, reći ćemo: *eter i električki fluid ponašaju se kao dva nestlačljiva fluida*.

S obzirom na relacije (8.) možemo Poissonovu jednadžbu (6.) ovako pisati:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho,$$

$$\text{div } \mathfrak{D} = \rho$$

ili, kad je za svako mjesto u sredstvu oko električnih tjelesa (izuzevši neke iznimne slučaje, kojima se ovdje ne bavimo) $\rho = 0$

$$\text{div } \mathfrak{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (10.)$$

Ova nas jednadžba sjeća osnovne jednadžbe hidrodinamike za nestlačljivost tekućina. Poslužimo li se hidrodinamičkom slikom

¹) Maxwell: „*Treatise on Electricity and Magnetism*.“ (Njemački prijevod od Weinsteina) I. 62., 101e.

dielektričkoga razmještaja, možemo reći, da se *eter giba kao nestlačljiv fluid*. Ova je jednadžba vrlo važna za Maxwellovu teoriju, ona je upravo ekvivalentna relacijama (8.), jer ih iz nje možemo izvesti uz pomoć jednadžbe (6.).

9. Konduktori i izolatori. Da protumači električko djelovanje kao posredno, morao je Maxwell uzeti, da je cijeli svemir, dakle i vacuum, ispunjen nekim sredstvom, koje to djelovanje prenosi. Za tako sredstvo uzeo je Maxwell¹⁾ eter. Po Maxwellu nastane u nekom prostoru električko polje poradi razmještaja etera iz njegova normalnoga stanja ravnotežja. Ali iz iskustva znamo, da se pri tom konduktor u tom prostoru posve drugačije ponaša nego li izolator. U izolatoru pojave se napetosti, dok konduktor postane influencijom električan. U izolatorima ima dakle eter elastična svojstva, on stvara kod razmještaja napetost, dok eter u konduktorima toga svojstva nema, ondje se ne stvara napetost, nego električnost. U konduktoru se razmještaj etera ne može uzdržati, prisiljeno stanje ravnotežja i s njim spojena napetost odmah se raspadne, a hoćemo li, da ovo sve uzdržimo, moramo trošiti neku radnju na neprestano stvaranje napetosti, a kod toga dobijemo iz ove radnje toplinu, koja se poradi neprestanoga raspadanja napetosti u konduktoru pojavi. Taj proces imamo kod električke struje.

Pomislmo u izolatoru n. pr. u uzduhu supljij konduktor. U ovaj izolator dovedimo neko električno tijelo, tada će eter u izolatoru dobiti razmještaj iz svoga normalnoga stanja, pojaviti će se napetosti i one će se u izolatoru sve do konduktora raširiti. Konduktor će tim postati influencijom električan, ali u izolator unutar konduktora ove napetosti ne će doprijeti, jer eter u konduktoru nije elastičan. To nam potvrđuje i iskustvo (Faradayev pokus). Poradi toga, što je izolator kadar provoditi napetost etera i električko djelovanje, zovemo ga „*dielektrikum*“, dok je konduktor „*adielektrikum*“.

Po Mossottiju²⁾ je dielektrikum potpun izolator, u kojem se nalazi razasuta nebrojena množina malih zrnaca, konduktora. Ovo je za pravo Poissonov domišljaj, i on ga je prvi upotrijebio na konstituciju magneta. Ako namjestimo ovakov dielektrikum među ploče kondensatora, pojavi se u dielektrikumu „*električka polarizacija*“, sva ona tjelešca u izolatoru postanu influencijom električna, pozitivna se elektriciteta nakupi u svakom tjelešcu prema negativnoj ploči kondensatora, a negativna prema pozitivnoj ploči. U dielektrikumu se samom elektriciteta na ovim tjelešcima među sobom veže, učinak se njihov na izvanjij prostor uništi, samo na površini dielektrikuma slobodna je elektriciteta

¹⁾ Maxwell: „Treatise etc.“ II. 781.

²⁾ Mossotti: „Discussione analitica sull' influenza che l' azioni di un mezzo dielettrico etc.“ Modena 1850.

tih tjelešća. Ova elektricitet na površini veže neku množinu elektricitete na pločama kondensatora, a za to se kapaciteta kondensatora uveća. Omjer kapacitete kondensatora za dielektrikum među njegovim pločama prema kapacitetu za uzduh (vacuum) među njima jest dielektrična konstanta toga dielektrikuma.

Mnogi fiziци zovu vektor $\mathbf{D}$ *električkom polarizacijom* t. j. razumijevaju pod tim onaj časoviti razmještaj elektricitete, koji se u svakom od onih Mossottijevih tjelešća u izolatoru pojavljuje. U ovom smislu znači jednačba (9.), da je množina elektricitete, što je u neku zatvorenu plohu uvodimo, jednaka onoj množini elektricitete, koja poradi električke polarizacije u dielektrikumu kod toga iz te plohe izađe, ili da je *ukupna množina elektricitete u nekoj zatvorenoj plohi konstantna* $= 0$.

Uvedemo li konduktor s množinom elektricitete e u neki dielektrikum, onda se u ovom dogodi električka polarizacija, koja se sastoji u strujanju pozitivne elektricitete u jednom, a negativne u protivnom smjeru u svakom od spomenutih tjelešća. Na međi između električnoga konduktora i dielektrikuma pojavi se neka množina $-e$ protivne elektricitete, koja veže množinu $+e$ elektricitete konduktora. tako da sada prema množini e u vacuumu djeluje samo množina $e - e$ u ovom dielektrikumu. Da je međusobno djelovanje električnih čestica u dielektrikumu slabije nego li u vacuumu, izraženo je i u formuli (1.); po njoj je sila, kojom djeluje množina elektricitete $+e$ na množinu $+1$

u vacuumu $\frac{e}{r^2}$, a u dielektrikumu dielektrične konstante K samo

$\frac{1}{K} \cdot \frac{e}{r^2}$. Veličinu e zovu mnogi fiziци po Hertzu „pravom

elektricitetom“, a $\frac{e}{K}$ „slobodnom elektricitetom“. U vacuumu je

prava elektriciteta ujedno i slobodna, jer je za vacuum $K = 1$.

Iz jednačbi (4.) i (9.) razbiramo, da nas plošni integral električke sile vodi na slobodnu, a plošni integral dielektričkoga razmještaja na pravu elektricitetu. Silnice električke sile izviru i poniru na slobodnoj, a silnice dielektričkoga razmještaja na pravoj elektriciteti. Tok sile za električnu silu određuje slobodnu elektricitetu, a za dielektrički razmještaj pravu elektricitetu. Potencijal smo u (3.) također uzeli za slobodnu elektricitetu.

10. Napetosti u elektrostatičkom polju. Ako namjestimo električna tjelesa u neki prostor, izvest će ona u tom prostoru neko električko polje potencijala ϕ . Imamo li u nekom prostornom elementu $d\tau$ toga polja množinu elektricitete $\rho d\tau$, onda će polje djelovati na taj element sa silom $\mathbf{E}' \cdot \rho d\tau$, kojoj su komponente

$$\rho d\tau E'_x, \rho d\tau E'_y, \rho d\tau E'_z$$

Ova je sila po Maxwellu resultanta, kojom napetosti u polju na elementu $d\tau$ djeluju; dakle mora izvanja sila s komponentama

$$-\rho d\tau \cdot E'_x, -\rho d\tau \cdot E'_y, -\rho d\tau \cdot E'_z$$

držati ravnotežje tim napetostima. Dade li se dakle električka sila našega polja zbilja svesti na napetosti u tom polju, onda moraju po teoriji elasticitete vrijediti ove jednadžbe:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \rho E'_x = 0$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \rho E'_y = 0$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \rho E'_z = 0$$

X_x, Y_y, Z_z jesu normalne, a $Z_y = Y_z, X_z = Z_x, Y_x = X_y$ jesu tangencijalne napetosti na elementu $d\tau$. Ovdje dakle imamo za šest nepoznatih funkcija samo tri diferencijalne jednadžbe, i poradi toga moraju ove jednadžbe imati bezbroj rješenja. Do rješidbe Maxwellove¹⁾ dolazimo lako na ovaj način.

Po Poissonovoj je jednadžbi (6.) za izotropna tjelesa.

$$\rho E'_x = \frac{K}{4\pi} E'_x \left(\frac{\partial E'_x}{\partial x} + \frac{\partial E'_y}{\partial y} + \frac{\partial E'_z}{\partial z} \right)$$

ili, ako uzmemo u obzir relacije

$$E'_x \cdot \frac{\partial E'_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (E'_x)^2}{\partial x}$$

$$E'_x \cdot \frac{\partial E'_y}{\partial y} = \frac{\partial (E'_x E'_y)}{\partial y} - E'_y \cdot \frac{\partial E'_x}{\partial y} = \frac{\partial (E'_x E'_y)}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial (E'_y)^2}{\partial x}$$

$$E'_x \cdot \frac{\partial E'_z}{\partial z} = \frac{\partial (E'_x E'_z)}{\partial z} - E'_z \cdot \frac{\partial E'_x}{\partial z} = \frac{\partial (E'_x E'_z)}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial (E'_z)^2}{\partial x},$$

dobijemo:

$$\rho E'_x = \frac{K}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [(E'_x)^2 - (E'_y)^2 - (E'_z)^2] + \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (E'_x E'_y) + \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (E'_x E'_z);$$

¹⁾ Maxwell: „On electromagnetic field“. Phil. Mag. 1861—62. „Treatise etc.“ I. 105.

isto tako:

$$\begin{aligned} \rho E'_y &= \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (E'_y E'_x) + \frac{K}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial y} [(E'_y)^2 - (E'_x)^2 - \\ &\quad - (E'_z)^2] + \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (E'_y E'_z) \\ \rho E'_z &= \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (E'_z E'_x) + \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (E'_z E'_y) + \\ &\quad + \frac{K}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} [(E'_z)^2 - (E'_x)^2 - (E'_y)^2] \end{aligned}$$

Isporedimo li ove jednadžbe s napisanim jednadžbama za ravnotežje elastičnoga tijela, vidimo, da se električne sile u električkom polju dadu svesti na ove elastične napetosti:

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{K}{8\pi} \cdot [2(E'_x)^2 - (E')^2], & Z_y &= Y_z = \frac{K}{4\pi} E'_z E'_y, \\ Y_y &= \frac{K}{8\pi} \cdot [2(E'_y)^2 - (E')^2], & X_z &= Z_x = \frac{K}{4\pi} E'_x E'_z, \\ Z_z &= \frac{K}{8\pi} \cdot [2(E'_z)^2 - (E')^2], & Y_x &= X_y = \frac{K}{4\pi} E'_y E'_x. \end{aligned}$$

Glavne napetosti dobijemo, ako uzmemo n. pr. za osovinu X smjer električne sile $\mathcal{E}'$, ako dakle uzmemo, da je

$$E_x = E', E_y = E_z = 0;$$

sve tangencijalne napetosti iščezavaju, a za normalne napetosti dobijemo izraze

$$X_x = \frac{K}{8\pi} \cdot (E)^2, \quad Y_y = Z_z = -\frac{K}{8\pi} (E)^2 \quad (11.)$$

U smjeru električne sile djeluje dakle na elemenat $d\tau$ teg u električkom polju, a u svakom smjeru okomitom na električku silu djeluje na $d\tau$ tomu tegu po veličini jednak tlak. Utjecanjem toga tega nastoji se elemenat $d\tau$ skratiti u smjeru sile, a rastegnuti u smjeru okomitom na taj smjer ili, kako je Faraday¹⁾ rekao, *silnice nastoje, da se skrate i što više razmaknu*. Ako elastično tijelo natežemo, i ono nastoji, da se skрати, ako ga stiskujemo, nastoji, da se raširi.

11. Elasticiteta etera. Razumijeva se, da će ovdje biti govora samo o eteru u dielektrikumu, kad eter u konduktoru u opće nema elasticitete. Izvedemo li eter iz njegova normalnoga stanja ravnotežja razmještajem $\mathcal{D}$, onda se u dielektrikumu pojave elastične sile poradi elasticitete etera. Formule (11.) daju nam izraze za napetosti u električkom polju, i s pomoću ovih

¹⁾ Faraday: „Experimental Researches in Electricity“ XI 1297.

napetosti možemo protumačiti ponderomotorne sile u polju. Ali elasticiteta izražena u formulama (11.) u očitu je protivurjeću s elasticitetom svih tjelesa, pače i s elasticitetom onoga sredstva etera, koje prenosi svjetlost. Kod ovih su na ime elastične napetosti linearne funkcije razmještaja, dok ovdje u jednadžbama (11.) imamo kvadratičke funkcije. Za to i većina pristaša Maxwellove teorije drži ove napetosti nevjerovatnima, pa ih uzima samo kao lijep primjer mehaničkoga shvaćanja za djelovanje elektrostatičkoga polja.

Elastična sila, koja djeluje na jedinicu obujma u elektrostatičkom polju, proporcionalna je dielektričkomu razmještaju, kako se to vidi iz relacija (8.). Kod plinova i kod etera u optici zavisi potencijalna energija samo o konfiguraciji, o relativnom položaju čestica bez obzira na položaj i apsolutno gibanje u prostoru. Pomičemo li plin u prostoru bez deformacije, ne mijenjamo mu tim potencijalne energije. Drugačije je kod etera u elektrostatičkom polju. Čestice etera imaju u normalnom stanju ravnotežja stalno mjesto u prostoru; ako ih s toga mjesta maknemo tim, što uvedemo električno tijelo u taj prostor, pojavi se elastična sila, koja je proporcionalna tomu razmještaju. Ovdje se dakle čini, da na svaku česticu iza razmještaja djeluje elastična sila, koja kao da potječe od one matematične točke, u kojoj je čestica bila u normalnom stanju ravnotežja. Svaka matematična točka kao da privlači k sebi onu česticu etera, koja joj u normalnom stanju ravnotežja pripada. Kad u vacuumu ne bi moglo biti elektrostatičkoga polja, onda bismo mogli reći, da materijalne čestice dielektrikuma privlače čestice etera. Ovakvih elastičnih sila doista ne možemo da shvatimo. Na ovu je poteškoću upozorio Poincaré.¹⁾

Te napetosti u elektrostatičkom polju proučavali su mnogi fizičari, kao Brillouin (*Essai sur les lois d'élasticité d'un milieu etc. Ann. de l'éc. norm. sup. 1887. T. 4.*), Beltrami (*Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell. Mem. della acc. di Bologna, 1886.*), Duhem (*Leçons sur l'électricité et le magnétisme. T. 2. p. 476.*) i drugi.

12. Energija elektrostatičkoga sustava. Po Coulombovu je zakonu radnja, što je izvedu električka sila među česticama de i de' kod beskonačno malenoga relativnog razmještaja tih čestica,

$$\delta W = \frac{1}{K} \cdot \frac{de \cdot de'}{r^2} \delta r = - \delta \left(\frac{1}{K} \cdot \frac{de \cdot de'}{r} \right).$$

U makar kakovu je dakle sastavu radnja, što je izvedu električke sile kod beskonačno malene promjene u položaju toga sustava:

¹⁾ Poincaré: „Electricité et Optique“ I. p. 32.

$$\delta W = - \delta \left(\frac{1}{2} \int \int \frac{1}{K} \cdot \frac{de \cdot de'}{r} \right).$$

Faktor $\frac{1}{2}$ metnuli smo pred integral, jer svaki par čestica dolazi kod integracije dva puta. Oba integrala odnose se na naš sustav električnih tjelesa. S obzirom na formulu (3.) možemo pisati:

$$\delta W = - \delta \left(\frac{1}{2} \int \phi \, de \right).$$

Ako sa E označimo energiju našega sustava, a mjesto de pišemo $\rho \, d\tau$, dobijemo:

$$E = \frac{1}{2} \int \phi \, \rho \, d\tau.$$

ϕ je potencijal na onom mjestu u prostoru, gdje se nalazi element $d\tau$ s gustoćom elektricitete ρ . Integral obuhvaća sva električna tjelesa našega sustava. Električna tjelesa izvan našega sustava ne uzimamo u račun ili pak jednostavno uzimamo, da izvan našega sustava nema električnih tjelesa. Uz taj uvjet smijemo integraciju protegnuti na cijeli prostor. S pomoću Poissonove jednadžbe (7.) dobijemo sada:

$$E = - \frac{K}{8\pi} \int \phi \, \Delta^2 \phi \, d\tau$$

Po Greenovu stavku (VII.) izlazi iz toga

$$E = \frac{K}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

jer potencijal ϕ iščezava za sve točke na plohi, koja omeđuje naš prostor integracije. Dakle je¹⁾

$$E = \frac{K}{8\pi} \int (E')^2 \, d\tau = \frac{2\pi}{K} \int D^2 \, d\tau = \frac{1}{2} \int E' D \, d\tau, \quad (12.)$$

gdje integracija obuhvaća cijeli prostor ili samo onaj prostor, što ga zaprema elektrostatičko polje našega sustava, jer izvan njega uzimamo i onako, da je $E' = D = 0$.

Veličina je D razmještaj etera, koji je uzrok elektrostatičkomu polju, stvorivši napetosti u eteru. No mi znamo, da samo eter u dielektrikumu ima elastična svojstva, dakle u slučaju ravnotežja (elektrostatike) može ovaj razmještaj biti samo u dielektrikumu, a ne u konduktoru. Naša nam formula kaže dakle, da *energija elektrostatičkoga sustava ima svoje sjedište samo u dielektrikumu, ona je „potencijalna energija“ etera*, a eter u konduktoru ne može imati potencijalne energije, jer on u konduktoru nema elastičnih svojstava. Ovu potencijalnu energiju etera u elektrostatičkom polju možemo vrlo zgodno isporučiti s energijom napetoga pera. Djeluje li na elastično pero neka sila, dolazi ono iz nor-

¹⁾ Maxwell: „Treatise etc.“ II. 631.

malnoga stanja ravnotežja u prisiljeno stanje ravnotežja, ono dobije neki razmještaj i u njemu se pojave elastične sile, koje izvanjoj sili drže ravnotežje. Pero ima u tom slučaju neku potencijalnu energiju, koja se daje izraziti formulom posve analognom posljednjoj među formulama (12.).

Magnetizam.

13. Magnetičko polje. Coulombov zakon. Isto tako kao kod elektricitete suponiramo i ovdje, da magnetična tjelesa ne djeluju jedno na drugo neposredno u daljinu, nego da magnetično tijelo izvodi neke promjene u prostoru, u kojem jest, dovodi eter u neko prisiljeno stanje ravnotežja, koje je dakako različito od onoga prisiljenoga stanja, što ga budi električno tijelo u eteru. „*Magnetičko polje*“ nekoga magnetičkoga tijela onaj je prostor oko toga tijela, u kojem je položaj etera njegovim djelovanjem osjetljivo poremećen. Kao što je napetost etera u električnom polju uzrok električkim silama, tako su magnetičke sile učinak napetosti etera u magnetičkom polju.

Na koliko god komada raskinemo magnet, svaki komad ostaje isto tako magnetom, kao što je bio i cijeli magnet. Ako ove komade sastavimo, dobijemo opet jedan magnet. To nas vodi do zaključka, da možemo cijeli magnet pomisliti sastavljen od samih elementarnih, molekularnih, magneta. Ovi elementarni magneti imaju jednake množine pozitivnoga (sjevernoga) i negativnoga (južnoga) magnetizma, a tako je i u cijelom magnetu. Tim, što ne možemo izolirati jednu vrstu magnetizma od druge, znatno se razlikuju pojave električne od magnetičnih, makar da i za magnetičke pojave vrijedi zakon Coulombov

$$F = f \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Ovdje su m_1 i m_2 dvije magnetičke čestice u uzduhu (vacuumu), a r je njihov razmak. Stavimo li za konstantu $f = 1$, odredili smo tim „*elektromagnetičku jedinicu*“ za množinu magnetizma i dobili ishodište za „*elektromagnetički sustav mjerenja*“.

Poradi toga, što i za magnetizam vrijedi Coulombov zakon, možemo kao i kod elektricitete prema formuli (3.) sile u magnetičkom polju izraziti s pomoću potencijala

$$V = \int \frac{dm}{r}, \quad (13.)$$

gdje nam dm znači slobodni magnetizam analogno slobodnoj

elektriciteti $\frac{de}{K}$ u formuli (3.). Bilježimo li magnetsku silu polja sa $\mathfrak{H}$, komponente njezine sa H_x, H_y, H_z , onda je

$$H_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad H_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (14.)$$

$$\mathfrak{H} = -\Delta V$$

Prema jednadžbi (4.) dobijemo za tok magnetske sile kroz zatvorenu plohu Ω izraz

$$\int_{\Omega} H_v d\omega = 4\pi m. \quad (15.)$$

Uzimamo, da nam ploha Ω ne siječe nijedno magnetsko tijelo, da sva prolazi kroz uzduh. U tom je slučaju ukupni slobodni magnetizam u plohi $= 0$, jer je u svakom magnetu isto toliko pozitivnoga, koliko i negativnoga magnetizma, dakle tok sile

$$\int H_v d\omega = 0. \quad (16.)$$

Razdiobu vektora $\mathfrak{H}$ u magnetskom polju predočujemo zorno „magnetičkim silnicama“ baš tako, kako smo razdiobu vektora $\mathfrak{E}$ u električnom polju predočili električnim silnicama. Magnetičke silnice idu od pozitivnoga magnetizma prema negativnomu. Svaku zatvorenu plohu, koja ne prolazi kroz magnet, siječe isti broj silnica izvana unutra, kao i iznutra van, suma je dakle $= 0$. To smo mogli i po jednadžbi (16.) zaključiti, jer je tok sile kroz zatvorenu plohu u smjeru izvanje normale jednak broju magnetskih silnica, koje tu plohu sijeku u smjeru te normale. Kao što električne, tako se nastoje i magnetske silnice skratiti i što više raširiti.

14. Potencijal magneta. Da izračunamo potencijal magneta, naći ćemo najprije potencijal jednoga elementarnoga magneta u njemu. Neka bude BA (sl. 5.) osovina toga elementarnoga magneta, $+m$ i $-m$ neka budu množine magnetizma njegovih polova, a $d\tau$ volumen. U točki P , udaljenoj za r_1 i r_2 od polova, bit će vrijednost potencijala toga elementarnoga magneta

$$dV = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2} = m \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Osovina $BA = da$ našega magneta beskonačno je malena, dok je r konačno, kut kod P je beskonačno malen, i poradi toga je luk AC iz točke P s polumjerom r okomit na PB , a onda je i

$$BC = r_2 - r_1 = da \cdot \cos \epsilon$$

uz pogriješku beskonačno malenu spram BC . S e označili smo kut $(r|BA)$.

Prema tomu je

$$dV = m da \frac{\cos \varepsilon}{r^2}. \quad (17.)$$

Mjesto r_1, r_2 pišemo r^2 uz pogriješku beskonačno malenu spram r . Do iste formule možemo doći i tako, da razvijemo potencijal po prostornim sfernim funkcijama.

Koordinate točke P izvan magneta neka budu ξ, η, ζ , a točke O u magnetu x, y, z . Produkt $m \cdot da$ zovemo „momentom“ našega elementarnoga magneta; taj je jednak produktu $I \cdot d\tau$ od veličine momenta magnetiziranja I s obujmom magneta $d\tau$. „Moment magnetiziranja“ I jest vektor sa smjerom BA i komponentama I_x, I_y, I_z . Iz formule (17.) izlazi

$$dV = I d\tau \frac{\cos \varepsilon}{r^2} = \frac{I_r}{r^2} d\tau.$$

Projekcija resultante jednaka je sumi projekcija svih komponenta, dakle:

$$\begin{aligned} I_r &= I_x \cdot \frac{\xi - x}{r} + I_y \cdot \frac{\eta - y}{r} + I_z \cdot \frac{\zeta - z}{r} \\ &= - \left(I_x \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + I_y \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + I_z \cdot \frac{\partial r}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

a sada

$$dV = \left(I_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + I_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + I_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) d\tau.$$

Potencijal cijeloga magneta jednak je sumi potencijala svih elementarnih magneta t. j.

$$V = \int \left(I_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + I_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + I_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) d\tau, \quad (18.)$$

gdje se integracija proteže na obujam cijeloga magneta.

Po poučku (VII.) dobijemo odatle:

$$\begin{aligned} V &= - \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z} \right) d\tau + \\ &\quad + \int \frac{1}{r} (lI_x + mI_y + nI_z) d\omega; \end{aligned}$$

prva se integracija proteže na obujam, a druga na oploštje magneta, l, m, n jesu smjernice izvanje normale na elementa $d\omega$ toga oplošja. Tu jednadžbu možemo i ovako pisati

$$V = - \int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{F}}{r} d\tau + \int \frac{I_v}{r} d\omega, \quad (19.)$$

gdje je I_v komponenta vektora $\mathfrak{F}$ u smjeru izvanje normale na $d\omega$.

Iz ove formule razbiramo, da je potencijal magneta baš takov, kao da je u unutrašnjosti magneta slobodan magnetizam gustoće

$$\rho = - \operatorname{div} \mathfrak{F}, \quad (20.)$$

a na površju slobodan magnetizam s gustoćom

$$\sigma = I_v \quad (21.)$$

15. Potencijal magnetskoga lista. Pod „*magnetičkim listom*“ razumijevamo magnetsku plohu, i to ne matematičnu plohu, nego plohu beskonačno malene debljine dn . Jedna je strana te plohe pozitivno magnetska, a druga negativno, ali tako, da je gustoća magnetizma u suprotnim točkama s obje strane plohe jednaka t. j. da smjer momenta magnetiziranja pada u smjer normale na tu plohu, i da je osim toga produkt plošne gustoće magnetizma i debljine lista na svakom mjestu isti. Produkt

$$\sigma \cdot dn = \Phi,$$

koji mora da bude na cijelom listu konstantan, zovemo „*momentom magnetskoga lista*“.

Da nađemo potencijal magnetskoga lista, razrežimo cijeli list u beskonačno malene listiće ploštine $d\omega$. Potencijal je jednoga ovakovoga listića po formuli (17.):

$$dV = \sigma d\omega \cdot dn \cdot \frac{\cos \varepsilon}{r^2} = \Phi \cdot \frac{\cos \varepsilon}{r^2} \cdot d\omega,$$

jer je $m = \sigma d\omega$, $da = dn$ a $\sigma \cdot dn = \Phi$.

Označimo li sa $d\varphi$ tjelesni kut, pod kojim se $d\omega$ iz točke P vidi, onda je $r^2 d\varphi$ — budući da je $d\varphi$ beskonačno maleno — normalna sjekotina stošca, koja pripada tjelesnomu kutu $d\varphi$, i to sjekotina na mjestu, gdje je listić $d\omega$. No ta je sjekotina jednaka projekciji plošnoga elementa $d\omega$ na ravninu okomitu na r . U slučaju dakle, da se iz točke P vidi pozitivna strana magnetskoga listića $d\omega$, imamo

$$r^2 d\varphi = d\omega \cos \varepsilon \quad \text{i}$$

$$dV = \Phi d\varphi.$$

Potencijal cijeloga lista u točki P dobijemo, ako adiramo potencijale svih onih listića, u koje smo naš magnetski list razrezali, dakle je:

$$V = \int \Phi d\varphi = \Phi \int d\varphi \quad \text{i} \\ V = \Phi \cdot \varphi \quad (22.)$$

Ovu je formulu našao Gauss.

Potencijal magnetskog lista u jednoj točki izvan njega jednak je dakle produktu njegova momenta s tjelesnim kutom, pod kojim se list iz te točke vidi. Tjelesni kut φ računamo pozitivno, ako se iz točke P vidi pozitivna strana lista, negativno, ako se vidi negativna strana.

U slučaju na ime, da je negativna strana od $d\omega$ okrenuta točki P , magnetska bi osovina imala protivan smjer, kut ϵ bio bi tup kut, pa bismo imali

$$\begin{aligned} r^2 d\varphi &= d\omega \cos(\pi - \epsilon) = -d\omega \cos \epsilon, \\ dV &= -\Phi d\varphi, \\ V &= -\Phi \cdot \varphi \end{aligned}$$

16. Magnetska indukcija. Imamo li magnetsko polje magnetske sile Φ , onda dolazi na svaki cm^2 , okomit na silnice, H silnica. Kod toga smo mučke do sada uzimali, da je u magnetskom polju samo uzduh (vacuum). No ako je u magnetskom polju željezo ili koje drugo sredstvo magnetskih svojstava, onda se moramo obazirati i na to, da se u takovu sredstvu po radi magnetske sile polja dogodi neka „polarizacija magnetska“, da to sredstvo postane influencijom magnetsko. Pomislimo, da je u našem magnetskom polju komad željeza. Da odredimo broj silnica na cm^2 u tom željezu, uzet ćemo izvanredno usku pukotinu u željezu, pomislimo n. pr., da je između molekula na jednom mjestu u tom željezu ostao izvanredno malen razmak. Kako smo spomenuli, postane taj komad željeza influencijom magnetske, jedna će strana pukotine poradi toga biti pozitivno, a druga negativno magnetska; na jednoj je strani pukotine gustoća magnetizma $\sigma = I_v$, a na drugoj $-I_v$ prema (21.). Na plohu $d\omega$ između stijena pukotine dolazi ponajprije $H_v d\omega$ silnica, kao i na svaki takov elemenat izvan toga komada željeza. Osim toga premostit će pukotinu kroz elemenat $d\omega$ po formuli (15.) broj silnica:

$$4\pi \cdot dm = 4\pi \sigma \cdot d\omega = 4\pi I_v \cdot d\omega$$

poradi magnetizma na stijenama pukotine. Ukupni broj silnica, koje prođu kroz taj plošni elemenat $d\omega$, bit će dakle:

$$(H_v + 4\pi I_v) d\omega.$$

Moment magnetiziranja $\mathfrak{J}$ za izotropna je tjelesa vektor istoga smjera, kao i magnetska sila Φ . Uzmemo li dakle pukotinu okomit na smjer magnetske sile Φ , dolazi na taj elemenat $d\omega$ broj silnica t. j. tok sile:

$$(H + 4\pi I) d\omega,$$

a na 1 cm^2 tok sile:

$$B = H + 4\pi I.$$

Kroz tijelo magnetskih svojstava dolazi na svaki cm^2 broj silnica B spram broja H u vacuumu. Tok sile B kroz svaki cm^2 pripada vektoru $\mathfrak{B}$ s komponentama B_x, B_y, B_z .

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{I} \quad (23.)$$

$$B_x = H_x + 4\pi I_x, B_y = H_y + 4\pi I_y, B_z = H_z + 4\pi I_z.$$

Taj vektor $\mathfrak{B}$ ima u izotropnom tijelu isti smjer, kao i $\mathfrak{H}$ i $\mathfrak{I}$, a zovemo ga „magnetičkom indukcijom“.¹⁾

Po Poissonovu je poučku

$$\text{div } \mathfrak{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 4\pi \rho,$$

a po jednadžbi (20.)

$$\text{div } \mathfrak{I} = \frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z} = -\rho;$$

dakle je

$$\text{div } \mathfrak{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (24.)$$

Vektor je $\mathfrak{B}$ za magnetsko stanje od velike važnosti, jer se svako sredstvo da bar minimalno magnetizirati. Za uzduh možemo uzeti $I = 0$, tu odlučuje samo magnetska sila $\mathfrak{H}$.

U magnetskom se dakle polju obično pojavi magnetiziranje i često se može uzeti, da je momenat magnetiziranja linearno zavisao o magnetskoj sili polja, pa se za izotropna tjelesa može pisati:

$$\mathfrak{I} = \kappa \mathfrak{H}.$$

Ovaj omjer κ između momenta magnetiziranja i magnetske sile polja zove Maxwell „magnetičkom susceptibilitetom“. Uvrstimo li ovaj izraz za $\mathfrak{I}$ u (23.), dobijemo

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad (25.)$$

gdje je $\mu = 1 + 4\pi \kappa$. Za vacuum je $\mu = 1$. Omjer μ između magnetske indukcije i sile zovemo po Maxwellu „magnetičkom permeabilitetom“ (magnetičkom propustljivošću).

Što je veće μ za neko sredstvo, to bolje skuplja to sredstvo silnice u magnetskom polju. Tjelesa, kroz koja magnetske silnice lakše prolaze nego li kroz vacuum, zovu se „paramagnetična“; takova tjelesa skupljaju silnice u vacuumu, čije sile postaju tu prema njima sve uže, i za to se igla od takovoga tijela među polovima jakoga magneta postavi polarno (teg u magnetskim silnicama). Za paramagnetično je sredstvo $\mu > 1$. Tje-

¹⁾ Maxwell: „Treatise etc.“ II. 399.

lesa, koja teže propuštaju magnetske silnice nego li vacuum, zovu se „*dijamagnetična*“; silnice im se tu uklanjaju, cijevi se sile prema njima raširuju, i za to se igla od takova tijela među polovima jakoga magneta postavi ekvatorijalno (tlak među magnetskim silnicama). Za *dijamagnetično* je sredstvo $\mu < 1$.

17. **Tok sile.** Imamo li zatvorenu plohu Ω , koja obuhvaća makar koliko magnetskih tjelesa, ali ne siječe ni jedno t. j. sva je u sredstvu permeabilite $\mu = 1$, onda je tok magnetske sile

$$\int_{\Omega} H_v d\omega = 0,$$

jer je u svakom magnetu isto toliko negativnoga kao i pozitivnoga slobodnoga magnetizma. Ova jednadžba ne vrijedi više, ako ploha Ω prolazi negdje kroz sredstvo permeabilite različite od 1, ako dakle siječe koje magnetsko tijelo. U tom slučaju nije ukupni slobodni magnetizam u plohi $= 0$, jer onda može jedan pol magneta biti unutar plohe, a drugi je izvan nje; tu je tok magnetske sile izražen jednadžbom (15.):

$$\int_{\Omega} H_v d\omega = 4\pi \int_{(\Omega)} \rho d\tau$$

Uvrstimo li u prostorni integral na desnoj strani ove jednadžbe mjesto ρ vrijednost iz (20.), pa upotrijebimo li poučak (VIII.), dobijemo

$$\int_{(\Omega)} \rho d\tau = - \int_{(\Omega)} \operatorname{div} \mathfrak{B} d\tau = - \int_{\Omega} I_v d\omega,$$

dakle

$$\int_{\Omega} H_v d\omega = - 4\pi \int_{\Omega} I_v d\omega,$$

a odatle

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (H_v + 4\pi I_v) d\omega &= 0, \\ \int_{\Omega} B_v d\omega &= 0. \end{aligned} \quad (26.)$$

Do iste relacije možemo i tako doći, da jednadžbu

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

integriramo po prostoru (Ω), pa taj integral transformiramo po poučku (VIII.)

Relacija (26.) posve je analogna relaciji (9.) za elektricitetu, te nam kaže, da je u svakoj zatvorenoj plohi *ukupna množina pravoga magnetizma* $= 0$. Za magnetizam nema konduktora, kao za elektricitetu, pravoga magnetizma u prirodi nema, a *magnetičke silnice vraćaju se kroz magnet same u se*.

Između električkih i magnetičkih veličina opažamo veoma veliku analogiju. Većini pojava električkih odgovaraju u magnetizmu posve slične pojave. Isti reciprocitet opažamo i u formulama. Električnoj sili odgovara magnetična, dielektričkomu razmještau magnetička indukcija, konstanti dielektričnoj (pomnoženoj sa $\frac{1}{4\pi}$) magnetička permeabiliteta, napetosti u električkom polju posve su analogne onima u magnetičkom polju i t. d. No kraj svega toga postoji i jedna važna razlika između tih pojava: za magnetizam nema na ime u prirodi konduktora. *Sva se tjelesa prema magnetizmu tako ponašaju, kao dielektrika prema elektriciteti*. Pravoga magnetizma nema, tok magnetičke indukcije jednak je nuli za svaku zatvorenu plohu Ω . Dok su silnice za magnetičku indukciju zatvorene krivke, silnice za dielektrički razmještaj ne moraju biti zatvorene. Dielektrična se konstanta za jedno isto sredstvo gotovo ništa ne mijenja, a magnetička je permeabiliteta veličina, koja se za jedno isto sredstvo prema prilikama znatno mijenja.

18. Energija magnetičkoga sustava. Na isti način, kako smo izračunali energiju elektrostatičkoga sustava, dobijemo za energiju magnetičkoga sustava izraz

$$E = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 d\tau = \frac{1}{8\pi\mu} \int B^2 d\tau = \frac{1}{8\pi} \int H B d\tau, \quad (27.)$$

gdje se integracija proteže na cijeli prostor ili samo na onaj prostor, što ga zaprema magnetičko polje našega sustava.

Kod elektrostatičkoga smo polja rekli, da je sjedište energije samo dielektrikum, ovdje moramo reći, da je *cijelo magnetičko polje sjedište magnetičke energije*, jer se sva tjelesa ponašaju prema magnetizmu tako, kao dielektrika prema elektriciteti.

Elektromagnetizam.

19. Električna struja. Obično se veli, da je kod elektrostatičke pojave elektriciteta u ravnotežju, a kod pojave električne struje u gibanju, odatle ime „*električna struja*“. Budući da

se elektriciteta može samo u konduktoru gibati, izlazi po običnoj teoriji, da možemo dobiti struju samo u konduktoru. Ponajčešće nastaje električna struja poradi neke razlike potencijala*) među krajevima konduktora, a ta je razlika integral elektrostatičke sile $\mathcal{E}$ po krivki konduktora (žice).

Po Maxwellovoj se teoriji održi napetost u elektrostatičkom polju samo u dielektrikumu, dok se ona u konduktoru u isti čas raspadne, kako se stvori. Hoćemo li dakle, da se ova napetost u konduktoru održi, moramo imati nekakovu silu, elektromotornu silu, koja će tu napetost u konduktoru neprestano na novo stvarati. Ovdje dakle dobivamo neprestano stvaranje i raspadanje napetosti, a kod toga raspadanja napetosti pretvara se potencijalna energija u toplinu, koju opažamo u konduktoru uvijek uz električku struju. Sve takove električne pojave, kod kojih se u dielektrikumu električna sila i dielektrični razmještaj ne mijenja, a u konduktoru se ne događa nikakovo pretvaranje energije, idu u elektrostatičku. Sad ćemo se baviti takovim električnim pojavama, kod kojih se u konduktoru događa pretvaranje energije, a u dielektrikumu se s vremenom mijenja električka sila i dielektrički razmještaj.

Obična teorija poznaje samo jednu vrstu električnih struja, i to provodne struje u konduktorima. Ovakova struja može biti zatvorena ili otvorena, zatvorena je obično trajna, a otvorena je časovita. Po Maxwellsu nema u opće otvorenih struja. Spojimo li ploče kondensatora s polovima galvanskoga elementa, opažamo, da ploče postanu električne, jedna pozitivno, a druga negativno električna. Obično kažemo, da je tu nastala otvorena struja. No po Maxwellsu mora se pri tom u izolatoru među pločama dogoditi gibanje etera, kako već izlazi iz jednadžbe (8.). Tu se dogodi dielektrički razmještaj u smjeru električne sile tako, da je cijela struja ipak zatvorena s pomoću ove struje u dielektrikumu, a nju možemo zvati „razmještajnom strujom“ (*Verschiebungsstrom, courant de déplacement*). Razmještajne struje postaju uvijek u smjeru silnica, jer i dielektrički razmještaj ima smjer sile u izotropnom sredstvu.

Po Maxwellsu imamo dakle provodne struje, struje djelomice provodne djelomice razmještajne i napokon zatvorene razmještajne struje. Za razmještajne je struje Maxwell postavio tu hipotezu, da za njih vrijedi zakon indukcije, ali ne zakon Ohmov i Jouleov, jer za razmještajne struje ne postoji nikakvi otpor u dielektrikumu.

Kod pojave, koju zovemo električnom strujom, u istinu ne mislimo na kakovo pravo strujanje. Električna je struja takova

*) Toj se razlici potencijala često pripisuje karakter sile (elektromotorna sila), a to nije pravo, jer nam ta razlika znači radnju, a ne silu. Kod indukcije dobijemo n. pr. struju, dakle i neku elektromotornu silu bez razlike potencijala.

električna pojava, kod koje se energija (obično kemička) pretvara u toplinu. Budući da ovo pretvaranje može biti različite intenzitete, koju možemo prosuditi po učincima kaloričkim u samom konduktoru ili po elektromagnetičkim učincima blizu konduktora, velimo, da i električna struja može biti različite intenzitete. „*Intenzitetu električne struje*“ ili „*jakost struje*“ bilježimo slovom i , u hidrodinamičkoj je slici to množina elektricitete, koja prođe kroz prerez našega vodiča u jedinici vremena. Ako vodič nije linearan, onda razumijevamo pod jakošću struje množinu elektricitete, koja prođe u jedinici vremena na tom mjestu kroz jedinicu plohe okomite na smjer elektromotorne sile. Ova je intenziteta struje uvijek omjerna krivocrtnomu integralu električne sile. Taj je integral po krivki homogenoga linearnoga vodiča, u kojem je temperatura na svakom mjestu ista i koji nije izvrnut učincima indukcije, jednak razlici potencijala među krajevima toga linearnoga vodiča, jer je

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 E'_s ds$$

Općeno možemo dakle pisati

$$Ri = \phi_1 - \phi_2 + \int E'_s ds, \quad (28.)$$

ako je E'' električna sila u našem vodiču, koja potječe od indukcije. Elektromotornu silu od kakovoga drugoga uzroka, osim razlike potencijala i indukcije, isključujemo iz našega istraživanja. Konstanta omjernosti R zavisi samo o vodiču, o materijalu, veličini, obliku, temperaturi vodiča. Tu konstantu R zovemo „*otporom*“ vodiča, jer njezin je prirastak uzrok padanju intenzitete struje i uz stalnu elektromotornu silu. Kako nas iskustvo uči, ovaj je otpor upravo omjeran dužini, a obrnuto omjeran prerezu vodiča, dakle je za linearni vodič dužine l i prereza $d\omega$

$$R = \frac{l}{c \cdot d\omega},$$

gdje se c zove *vodljivost* materijala, od kojega je vodič. Ova se vodljivost mijenja s temperaturom. Jednadžbu (28.) možemo sada ovako pisati:

$$\frac{l}{c} \cdot \frac{i}{d\omega} = \phi_1 - \phi_2 + \int E''_s ds. \quad (29.)$$

Za beskonačno malen dio našega linearnoga vodiča imamo:

$$l = dx, \quad \phi_1 - \phi_2 = \phi - \left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right) = - \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = E'_x dx$$

$$\int E''_s ds = E''_x dx, \quad \frac{i}{d\omega} = u_x,$$

ako uzmemo smjer vodiča na tom mjestu za osovinu X , pa sa E'_x označimo električku silu od indukcije, a sa u_x jakost struje na tom mjestu proračunanu na jedinicu prereza, a to je brzina elektricitete na tom mjestu vodiča, ako govorimo hidrodinamički. Prema tomu dobijemo iz (29.)

$$\frac{d\omega}{c} \cdot u_x = E'_x d\omega + E''_x d\omega$$

$$\frac{u_x}{c} = E'_x + E''_x.$$

Ovo je drugi oblik Ohmova zakona, mogli bismo reći diferencijalni oblik. Ovaj smo zakon izveli ovdje za linearne struje, no u istinu nemamo linearnih struja t. j. vodiči, kroz koje — kako velimo — ide struja, nijesu beskonačno malenoga, nego konačnoga prereza. No ako je konduktor izotropan, onda smijemo silu struje u pomisliti rastavljenu u tri komponente u_x , u_y , u_z paralelno s osovinama koordinata, te dobijemo:

$$\frac{u_x}{c} = E'_x + E''_x$$

$$\frac{u_y}{c} = E'_y + E''_y$$

$$\frac{u_z}{c} = E'_z + E''_z$$

ili

$$u_x = c E_x, u_y = c E_y, u_z = c E_z, \quad (30.)$$

$$u = c \mathfrak{E},$$

ako sa $\mathfrak{E}$ označimo cjelokupnu električku silu na tom mjestu, a sa E_x , E_y , E_z njezine komponente. Ovdje smo silu struje uzeli za jedinicu prereza, to je dakle *vektor* u , koji zovemo brzinom elektricitete na tom mjestu, ako govorimo hidrodinamički.

20. Magnetičko polje električke struje. Iz iskustva znamo, da električka struja djeluje na magnet, električka struja stvara dakle magnetičko polje. Da dobijemo jasnu predodžbu o tom polju, moramo istražiti smjer magnetičkih silnica. Eksperimentalno se može pokazati, da su te silnice krugovi, a smjer je struje okomit na ravninama tih krugova u njihovu središtu. Smjer silnica dobijemo po Ampèreovu pravilu ili po definiciji pozitivnoga smjera rotora t. j. ako gledamo u smjeru struje, kruže silnice oko toga smjera kao kazalo na uri.

Iz pojava, da se ravnina polarizacije ravno polarizirane svjetlosti zaokrene, ako zraku te svjetlosti pošaljemo kroz magnetičko polje uzduž magnetičke silnice, zaključio je Thomson (Lord Kelvin), da *uzduž magnetičkih silnica mora da postoji stanje*

analogno rotaciji u kinematici. Da magnetičke silnice imaju *karakter aksijalan*, kako je zgodno kazao Koláček, zaključujemo i iz toga, što one ne dopuštaju zrcaljenja (Spiegelung), ako ih odrazimo kao vektore. Pomislimo zatvorenu struju, koja teče u smjeru kazala na uri, ako je gledamo odozgo. Magnetička sila ima onda smjer odozgo kroz okrug struje prema dolje. Uzmemo li sad sliku polja struje s obzirom na zrcalnu ravninu MN paralelnu s okrugom struje, vidjet ćemo, da će struja u slici zadržati svoj smjer, dok će slika silnice biti izvrtačena, ako je uzmemo kao vektor (sl. 6. a.). Uzmemo li pak ravninu zrcalnu MN okomito na ravninu struje (sl. 6. b.), onda će biti smjer struje u slici izvrtačen, a silnica će, ako je uzmemo za vektor, zadržati svoj smjer i u slici. U zrcalu se dakle polje protivi zakonu Ampèrovu, ako uzmemo, da silnice imaju karakter vektora. Toga protivurječja nema u slici, ako uzmemo, da silnice imaju karakter rotora. U tom slučaju ostaje smjer struje i smjer magnetičkih silnica i u slici isti za zrcalnu ravninu paralelnu s ravninom struje (sl. 6. c.), a oba se smjera izvrtače za zrcalnu ravninu okomitu na ravninu struje (sl. 6. d.). Curie veli: „*magnetičke silnice nemaju simetriju vektora, nego rotora*“. Svojstva simetrije, koja pokazuje uzrok, moraju se naći i u svojstvima simetrije učinka, a to nalazimo kod struje i njezina polja samo onda, ako magnetičkim silnicama pridružimo karakter rotora.

Oko svake magnetičke silnice pomišljamo dakle nekakvu neprekidnu rotaciju, i ova rotacija ima, ako gledamo u smjeru silnice, smjer kazala na uri po definiciji pozitivnoga smjera rotora. Kada oko svake silnice pomišljamo ovakovu rotaciju, a silnice možemo uzeti jednu do druge u polju kontinuirano složene, moramo supponirati, da između ovih rotacija nema trenja, jer magnetičko polje može duže vremena ostati neoslabljeno bez ikake izvanje pomoći. Ovakovo gibanje zove Helmholtz „*trajnim gibanjem*“ (*Dauerbewegung*). Do sada se još nije dalo dokazati ovo elementarno gibanje, mi ga moramo za to brojiti u „*sakrivena gibanja*“ (*verborgene Bewegung* po Helmholtzu). Akoprem se ova gibanja u magnetičkom polju neprekidno događaju, u cjelini ne opažamo nikakove promjene u polju, jer na mjesto svake čestice (etera) dolazi isto takova u istom smjeru i s istom brzinom; poradi toga zovemo ovo gibanje također „*cikličkim gibanjem*“. Po novim teorijama moramo dakle u magnetičkom polju oko magnetičkih silnica pomišljati sama vrtložna molekularna gibanja. U istom smislu, u kojem kruže silnice oko nosioca struje, događaju se i vrtlozi oko silnica.

Poradi spomenute rotacije oko magnetičkih silnica nastoji se svaki elemenat u silnici stegnuti u smjeru silnice, a raširiti okomito na taj smjer (obruč na centrifugalnom stroju). Svaki elemenat priječe u tom stezanju i raširivanju susjedni elementi;

za to velimo, da je u smjeru silnica u magnetskom polju teg, a okomito na silnice tlak.

U samom polju struje nema za cikličko (vrtložno) gibanje nikakova trenja, ali u osi polja, gdje se nalazi vodič, daje ovaj vrtložnomu gibanju neko trenje. Poradi toga trenja gubi se energija cikličkoga gibanja, te se pretvara u Jouleovu toplinu. Vodiču se najbliže cijevi sile unište, poradi trenja izgube tlak na stranu, susjedne se cijevi sile stegnu i natisnu na njihovo mjesto, poradi trenja u vodiču se unište i ove cijevi sile i. t. d. Poradi ovoga pretvaranja vrtložne energije u toplinu mora se trošiti neka energija (kemička, mehanička ili kalorička) na uzdržavanje električke struje. „Die bewegten Teile, soweit sie im Stromleiter liegen, erfahren eine Bremsung im Stromleiter tritt fortwährend eine Degradierung, eine Verwüstung von Feldenergie (zur Wärme) ein“, kaže zgodno Ebert.¹⁾

21. Elektromagnetički potencijal električke struje.

Zakon za elektromagnetičko djelovanje električke struje postavio je Ampère.²⁾ On je došao do zaključka, da je djelovanje beskonačno malene zatvorene električke struje u ravnini — za daljinu, koju možemo spram dimenzija struje zvati velikom, — isto, kao da potječe od nekoga magnetskoga lista u okviru okruge struje. Taj magnetski list ima za konturu okrug električke struje, momentat mu je jednak jakosti struje, a smjer je momenta smjer palca desne ruke, ako je položimo u smjer struje okrenuvši dlan prema unutrašnjosti okruge struje t. j. smjer normale na lijevoj strani okruge struje.

Imamo li električku struju konačnih dimenzija, konstruirajmo kroz okrug te struje kakovu god plohu, koja ne ide kroz točku P i ne siječe sama sebe. Okrug je struje kontura te plohe. Ovako omeđenu našu plohu razdijelimo s dva sustava crta u plošne elemente, tako da svaki od tih elemenata plohe možemo uzeti za ravninu. Oko svakoga plošnoga elementa neka teče struja jednake jakosti i istoga smjera sa zadanom strujom. Djelovanje svih ovih elementarnih struja skupa bit će u točki P isto, kao i djelovanje zadane konačne struje. Kroz svaki na ime elemenat svake od onih crta, kojima smo našu plohu u plošne elemente razdijelili, idu prema supoziciji dvije struje jednake jakosti, ali protivnoga smjera, jer svaki takov komadić pripada dvjema plošnim susjednim elementima. Poradi toga iščezava djelovanje svakoga ovoga komadića crte, dakle i djelovanje svih crta unutar plohe, ostaje samo djelovanje konture naše plohe — jer se uzduž nje ne dotiču po dva plošna elementa, kao u unutrašnjosti plohe. — ostaje

¹⁾ Ebert: „Magnetische Kraftfelder“ p. 328. 329.

²⁾ Ampère: „Mémoire sur la théorie mathématique de phénomènes électrodynamiques etc.“ (Mém. de l'acad. des sciences 1827.)

dakle samo djelovanje prvobitno zadane struje. Ako je za magnetsko djelovanje u točki P naša struja iste vrijednosti kao skup svih elementarnih struja, a svaka opet elementarna struja po Ampèreu iste vrijednosti kao magnetski list omeđen njezinim okrugom, to je onda i cijela struja iste vrijednosti kao jedan cjelovit magnetski list, kojemu je kontura okrug zadane struje, jer sve elementarne struje imaju istu jakost i isti smisao sa zadanom strujom. Za magnetsko je dakle djelovanje u točki P električka struja iste vrijednosti s magnetskim listom omeđenim okrugom struje; momentat je toga magnetskoga lista jednak jakosti struje, a pozitivna strana (strana sa sjevernim magnetizmom) lijeva je strana struje. Magnetski list moramo tako proložiti, da ne prolazi kroz točku P , a to možemo svagda polučiti.

Ako smotamo nosioca struje u okrug, onda stisnemo cijevi sile u taj okrug, a silnice idu baš tako, kao da dolaze od magnetskoga lista u okviru toga okruga. Pozitivna strana lista bila bi ondje, gdje silnice izlaze t. j. na lijevoj strani plohe te struje.

Potencijal naše struje u točki P bit će jednak potencijalu magnetskoga lista iste vrijednosti t. j. po formuli (22.) za neku je točku P elektromagnetski potencijal struje

$$V = i \varphi,$$

gdje je φ tjelesni kut, pod kojim se okrug struje vidi iz točke P . Taj je tjelesni kut pozitivan, ako se iz P vidi lijeva strana struje, negativan, ako se vidi desna strana.

Magnetske sile električne struje i magnetskoga lista iste su vrijednosti za točke, koje leže izvan same struje, uz uvjet dakako, da se ona točka ne nalazi u unutrašnjosti magnetskoga lista, a taj uvjet možemo uvijek zadovoljiti. No ipak postoji velika razlika između potencijala električne struje i potencijala magnetskoga lista iste vrijednosti, makar da su im magnetske sile iste. Dok je potencijal magnetskoga lista funkcija jednoznačna za cijeli prostor, elektromagnetski je potencijal električne struje mnogoznačan. Kod magnetskoga je lista radnja na svakoj zatvorenoj crti $= 0$, dok je kod električne struje radnja magnetske sile na svakom zatvorenom putu, koji okružuje struju, različna od nule.

Pomislmo električku struju jakosti i ; oko ove struje pomičimo iz točke A (sl. 7.), gdje je elektromagnetski potencijal V , jedinicu pozitivnoga magnetizma po putu ABA u smjeru strjelice. Radnja je elektromagnetske sile na svakom elementu toga puta jednaka negativnoj promjeni potencijala. Ako je dakle radnja elektromagnetske sile na tom zatvorenom putu $= 0$, onda je potencijal jednoznačna funkcija mjesta; kad se vratimo u točku A natrag, dobije on istu vrijednost, koju je na početku u toj točki imao; nije li ta radnja $= 0$, potencijal je mnogoznačan.

Na mjestu struje neka se nalazi magnetski list iste vrijednosti; taj siječe zatvorenu crtu ABA između A i B . Magnetska sila električne struje istovjetna je sa silom magnetskoga lista za sve točke izvan lista, radnja je dakle magnetskih sila na putu AB izvan lista i kod električne struje

$$-(V_B - V_A),$$

gdje su V_B i V_A vrijednosti potencijala magnetskoga lista u točkama A i B . Ako je točka A kraj pozitivne strane lista, a točka B kraj negativne, onda je kod A tjelesni kut φ_1 , a kod B je kut $-\varphi_2$, i s toga po (22.)

$$-(V_B - V_A) = i(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Magnetska je sila struje svakako na cijelom putu konačna, s toga je radnja te sile na beskonačno malenom putu beskonačno malena, dakle je radnja na putu BA beskonačno malena, jer je debljina lista beskonačno malena.

Poradi toga je radnja W elektromagnetske sile električne struje na zatvorenom putu ABA u smjeru strjelice za beskonačno malo različna od radnje na putu AB t. j. uz beskonačno malenu pogrešku, koju smijemo zanemariti, jest

$$W = i(\varphi_1 + \varphi_2).$$

No $\varphi_1 + \varphi_2 = 4\pi$, jer je BA beskonačno maleno, dakle

$$W = 4\pi i$$

Idemo li p puta oko struje u tom istom smislu, dobijemo $W = 4\pi p i$, idemo li u protivnom smislu $W = -4\pi p i$. Elektromagnetski je dakle potencijal električne struje općeno zadan formulom

$$V = i\varphi \pm 4\pi p i. \quad (31.)$$

To je mnogoznačna funkcija s modulom periodičtete i . Premda je elektromagnetski potencijal električne struje različan od potencijala magnetskoga lista iste vrijednosti, magnetska je sila ipak ista, jer je

$$d(4\pi p i) = 0$$

Ako hidrodinamički govorimo, onda kažemo, da je jakost struje i množina elektricitete, koja prođe kroz neki prerez u jedinici vremena. Radnja dakle, što je daje magnetska sila struje na nekom zatvorenom putu S , jednaka je umnošku od 4π s množinom elektricitete, koja prođe u jedinici vremena kroz plohu položenu kroz S u smjeru normale na lijevoj strani te plohe. Ako je smjer struje protivan toj normali, onda je ta množina elektricitete negativna, s toga je i radnja negativna, kako to i mora da bude.

Neka su l , m , n smjernice normale na elemenat $d\omega$ plohe položene kroz krivku S na lijevoj strani te plohe, u_x , u_y , u_z komponente strujanja t. j. brzine elektricitete kroz taj elemenat $d\omega$, onda je

$$u_y = l u_x + m u_y + n u_z$$

brzina elektricitete kroz $d\omega$ u smjeru te normale, a

$$u_y d\omega = (l u_x + m u_y + n u_z) d\omega$$

množina elektricitete, koja prođe u jedinici vremena kroz plošni elemenat $d\omega$ u smjeru rečene normale. Radnja je dakle magnetske sile na zatvorenom putu S

$$W = 4\pi \int (l u_x + m u_y + n u_z) d\omega,$$

gdje se integracija proteže na plohu položenu kroz krivku S . Ista je radnja zadana i s ovim integralom

$$W = \int_S (H_x dx + H_y dy + H_z dz),$$

dakle je

$$\int_S (H_x dx + H_y dy + H_z dz) = 4\pi \int (l u_x + m u_y + n u_z) d\omega$$

Prvi se integral tiče krivke S , a drugi plohe položene kroz tu krivku.

22. Maxwellove jednadžbe za električku struju.

Transformiramo li lijevu stranu posljednje jednadžbe po Stokesovu poučku (X.), dobijemo

$$\int \left[l \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \right] d\omega = 4\pi \int (l u_x + m u_y + n u_z) d\omega.$$

Ova jednadžba mora vrijediti za svaku plohu položenu kroz makar koju krivku S , ona vrijedi dakle za svako l , m , n , i s toga je, jer se oba integrala tiču istih elemenata,

$$\begin{aligned} 4\pi u_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ 4\pi u_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ 4\pi u_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ 4\pi \mathbf{u} &= \text{curl } \mathbf{H} \end{aligned} \quad (32)$$

Ove jednadžbe vrijede i za razmještajne struje, jer je našem računu bio ishodištem Ampèreov zakon, koji po Maxwellu vrijedi i za razmještajne struje, a o Ohmovu i Jouleovu zakonu nije bilo ni govora u cijelom računu. Ove je jednadžbe prvi postavio Maxwell¹⁾. Iz njih razbiramo, da magnetičke sile sustava struja imaju potencijal u svakoj točki izvan sustava.

Kako smo već spomenuli, nastaje razmještajna struja u dielektrikumu onda, ako se dielektrički razmještaj mijenja s vremenom. Mjera za intenzitetu razmještajne struje bit će dakle:

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{d\mathfrak{E}}{dt}$$

Po Maxwellu se u svakom elementu obujma u polju, pače i u konduktoru može uzbuditi ovakova struja. Ako je stanje promjenljivo, pojavi se i u konduktoru razmještajna struja, jer se kod promjenljivoga stanja mijenja električka sila. Ova se razmještajna struja složi uvijek s provodnom strujom u „totalnu struju“. Intenziteta totalne struje bit će dakle poradi jednadžbe (30.):

$$\mathfrak{C} = c \mathfrak{E} + \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{d\mathfrak{E}}{dt}$$

Ovo daje, uvršteno u jednadžbu (32.), *općenu jednadžbu elektromagnetičkoga polja za električku struju*

$$4\pi \left(c \mathfrak{E} + \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{d\mathfrak{E}}{dt} \right) = \text{curl } \mathfrak{H} \quad (33.)$$

23 Magnetička struja. Rekli smo, da u prirodi nema konduktora za magnetizam, da nema ni pravoga magnetizma; poradi toga otpadaju kod magnetizma provodne struje. Sva se tjelesa prema magnetizmu ponašaju tako, kao dielektrika prema elektriciteti. Za dielektrika smo rekli, da se u njima rode razmještajne struje svagda, kad se mijenja dielektrički razmještaj s vremenom. Analogno s ovim kažemo sada, da u magnetičkom polju postaju *razmještajne magnetičke struje* onda, kada se magnetička indukcija u njemu mijenja s vremenom. Rekli smo, da nam intenzitetu razmještajne električke struje mjeri diferencijalni omjer

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt};$$

prema tomu treba za intenzitetu magnetičke razmještajne struje metnuti

$$v = \frac{d\mathfrak{B}}{dt}. \quad (34.)$$

¹⁾ Maxwell: „Treatise etc.“ II. 607.

Razdiobu magnetičke indukcije u prostoru predočujemo s magnetičkim silnicama tako, da uzmemo broj silnica, koje sijeku jedinicu plohe okomite na silnice, na svakom mjestu polja jednak tensoru od $\mathfrak{B}$. Broj tih magnetičkih silnica zovemo također „*tokom magnetičke indukcije*“ kroz tu plohu. Tok magnetičke indukcije proračunan na jedinicu plohe, okomite na silnice, jednak je dakle tensoru B magnetičke indukcije, a tok kroz kakovu god plohu zadan je integralom

$$N = \int B_v d\omega; \quad (35.)$$

integracija se proteže na cijelu plohu, $d\omega$ je elemenat te plohe, a B_v komponenta magnetičke indukcije u smjeru normale na taj elemenat plohe. Ako je ploha zatvorena, onda znamo, da je taj tok magnetičke indukcije = 0 prema jednadžbi (26.).

24. Jednadžbe za magnetičku struju. Promjene dielektričkoga razmještaja t. j. razmještajnu struju prate po Maxwellu uvijek i neke magnetičke pojave, razmještajna struja uzrokuje uvijek neko magnetičko polje, a to je u jednadžbama (32.) i (33.) matematički izraženo. Isto tako prate svaku promjenu magnetičke indukcije ili magnetičkoga toka sile — dakle magnetičku struju — električke pojave. *Magnetička struja uzrokuje neko električko polje.* Nalazi li se u polju zatvoren konduktor, opazimo, da svaku promjenu toka magnetičke indukcije kroz okrug toga konduktora prati neka električka struja. Ovu pojavu opazio je prvi Faraday, a zovemo je električkom induciranom strujom. Po poznatom je zakonu za indukciju intenziteta inducirane struje u okruhu konduktora omjerna promjeni broja silnica — magnetičkoj struji — kroz okrug konduktora t. j. diferencijalnomu omjeru

$$\frac{dN}{dt}.$$

Znamo, da prirast silnica kroz krug konduktora uzrokuje struju inversnu (Maxwellovo pravilo), to jest protivnu onoj, koja bi dala silnice istoga smjera sa silnicama našega magnetičkoga polja. Baš poradi toga i jest ekstrastruja kod sklapanja protivna zadanoj struji. Prirastu broja silnica odgovara dakle inducirana elektromotorna sila suprotna prvobitno zadanoj (koja se odnosi po Ampèreovu pravilu prema magnetičkomu polju), i poradi toga velimo, da je mjera za integral inducirane električke sile

$$- \frac{dN}{dt}, \text{ a ne } + \frac{dN}{dt}.$$

Magnetička struja uzrokuje dakle neku razdiobu električkoga vektora $\mathfrak{E}'$ u prostoru, a taj vektor $\mathfrak{E}''$ opet neku elektromotornu silu u konduktoru, koja je zadana integralom

$$\int E''_s ds$$

po cijelom okrugu našega konduktora; ds je elemenat toga okruga, a E''_s je komponenta električkoga vektora $\mathcal{E}''$, koja pada u smjer elementa ds .

Razdioba vektora $\mathcal{E}''$ u prostoru obično traje samo jedan tren, jer je i magnetska struja samo časovita. Kad bi bilo provodnih magnetskih struja, onda bismo dobili stalnu razdiobu električkoga vektora $\mathcal{E}''$ oko te struje isto tako, kako nam provodna električka struja daje u prostoru stalnu razdiobu magnetskoga vektora. Smjer tih električkih silnica oko magnetske provodne struje bio bi suprotan smjeru magnetskih silnica, što ih daje električka struja istoga smjera s magnetskom provodnom strujom.

Ovaj električki vektor $\mathcal{E}''$ uzrokuje u zatvorenom konduktoru induciranu električku struju, a u dielektrikumu inducirane zatvorene razmještajne struje, kao što električki vektor $\mathcal{E}'$ uzrokuje električku influenciju u konduktoru i dielektrički razmještaj u dielektrikumu. Vektor $\mathcal{E}'$ ne može dati zatvorene provodne ili zatvorene razmještajne struje za to, što on ne daje zatvorenih silnica kao $\mathcal{E}''$.

Bio naš put integracije po zatvorenom konduktoru ili po nekoj zatvorenoj crti S kroz dielektrikum, vrijedi jednadžba

$$\int_S E''_s ds = - \frac{dN}{dt} \quad (36.)$$

ili prema jednadžbama (35.) i (34.)

$$\int_S (E''_x dx + E''_y dy + E''_z dz) = - \int v_y d\omega.$$

Prvi se integral proteže na krivku S , a drugi na neku plohu položenu kroz tu krivku. Lijevu stranu ove jednadžbe transformirajmo po Stokesovu poučku, a na desnoj izrazimo magnetsku struju v_y u smjeru normale na $d\omega$ s komponentama v_x , v_y , v_z , pa dobijemo

$$\int \left[l \left(\frac{\partial E''_z}{\partial y} - \frac{\partial E''_y}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial E''_x}{\partial z} - \frac{\partial E''_z}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial E''_y}{\partial x} - \frac{\partial E''_x}{\partial y} \right) \right] d\omega = - \int (lv_x + mv_y + nv_z) d\omega;$$

l , m , n su smjernice normale na $d\omega$.

Oba se integrala odnose na iste elemente $d\omega$ plohe položene kroz okrug S , a ova jednadžba mora vrijediti za svaku plohu položenu kroz makar koju krivku S , ona vrijedi dakle za svako l , m , n , i s toga je:

$$\begin{aligned}
 v_x &= - \left(\frac{\partial E''_z}{\partial y} - \frac{\partial E''_y}{\partial z} \right) \\
 v_y &= - \left(\frac{\partial E''_x}{\partial z} - \frac{\partial E''_z}{\partial x} \right) \\
 v_z &= - \left(\frac{\partial E''_y}{\partial x} - \frac{\partial E''_x}{\partial y} \right) \\
 v &= - \text{curl } \mathfrak{E}''.
 \end{aligned}$$

Budući da električki vektor $\mathfrak{E}'$ ima potencijal t. j.

$$\text{curl } \mathfrak{E}' = 0,$$

to možemo pisati:

$$\begin{aligned}
 v_x &= - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right), \\
 v_y &= - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \\
 v_z &= - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \\
 v &= - \text{curl } \mathfrak{E},
 \end{aligned} \tag{37.}$$

gdje je $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}''$ totalna električka sila. No prema (34.) jest

$$v = \frac{d\mathfrak{B}}{dt},$$

jer za magnetizam postoje samo razmještajne struje, dakle je:

$$\begin{aligned}
 \frac{dB_x}{dt} &= \mu \cdot \frac{dH_x}{dt} = - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right), \\
 \frac{dB_y}{dt} &= \mu \cdot \frac{dH_y}{dt} = - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \\
 \frac{dB_z}{dt} &= \mu \cdot \frac{dH_z}{dt} = - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \\
 \frac{d\mathfrak{B}}{dt} &= \mu \cdot \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = - \text{curl } \mathfrak{E}.
 \end{aligned} \tag{38.}$$

Ova jednadžba za magnetsku struju odgovara jednadžbi (33.) za električku struju, a obje skupa jesu jezgra Maxwellove teorije elektricite. Jednadžba (38.) jest *općena jednadžba za indukciju u elektromagnetičkom polju.*

Maxwellove nazore u elektrodinamici i indukciji priopćit ću drugi put.

L. Stjepanek.

svrsi, čini mu se, najbolje može da služi tečaj o tuđim književnostima. Pored književnosti tuđih naroda prikazuje pjesnik svojim slušaocima vjerske i moralne težnje onih naroda. Osim spomen-dana Budina slave se dani Konfucija, Sokrata, Krista, Muhameda i drugih velikana, kada se prikazuje rad onih, koji su kušali, da povedu čovječanstvo k većoj dobroti i plemenitosti. U školi se slave i prirodne svetkovine, napose jesenja (jesen je najljepše godišnje doba u Bengalu), dan svijetla i dr. O uspjehu škole svjedoči činjenica, da svi novi profesori, koji se javljaju u službu u Tagorinoj školi, jesu bivši njegovi daci.*

O toj je školi sam pjesnik, kad je g. 1921. putovao Evropom, priopćio u švajcarskom listu »L' Educateur« (Odgajač) nekoliko zanimljivih podataka. Kad je prije 20 godina otvarao školu, nije imao ni nastavne metode ni iskustva. Iz svoga je školovanja stekao samo negativno iskustvo, t. j. on je znao, kako ne valja postupati s djecom. Njegova je odgoja u mladosti bila odvojena od života. Svakoga dana, kad je stupao u razred, morao je da u sebi ušutika vatrenu težnju za životom, za prirodom. Za drvenom katedrom sjedio učitelj i predavao kao kakav živi fonograf. U toj je školi naučio gramatiku, račun i mnoge stvari, koje je kasnije sasvim zaboravio, ali je ujedno naučio i to, kako ne treba predavati. Kad je u svojoj 40. godini odlučio, da uči i odgaja djecu, primio je najprije pet dječaka, s kojima se je trsio da živi u životu. Nastava bila mu je sporedna stvar. Na prvo je mjesto dolazio zajednički život daka i učitelja, njihovo drugarstvo. Po njegovu sudu dijete do dvanaeste godine živi mnogo više podsvijesnim životom nego jasnom svijesću, i za vrijeme njegovih prvih godina važno je to, da se njegovo pamćenje ne napuni znanjima, koja će proniknuti u njegov duh, nego da se njegova podsvijest prožme ljepotom pri dodiru s prirodom. U svojoj školi nije nikad predavao ništa drugo nego jezike i književnost. Njegovi su mu učenici rekli, da je bio najbolji učitelj jezika, koga su ikad imali. To dolazi od toga, što je on zaljubljen u riječi. Riječ je za nj živa kao cvijet ili leptir. Svaka riječ ima svoje preljevanje, svoj sjaj, svoju suptilnu draž. To mu dopušta, da predaje dobro sve jezike, koje zna. Čovjek može predavati samo ono, što voli. Bolje je šutjeti, ako čovjek ne voli ono, što predaje. Isto tako treba predavati samo ono, što ima za učitelja izvjesnu tajnu, što ima za nj poezije. I matematici će dobro predavati tablicu množenja samo ako je vole. Kad predajem nešto, ja to činim s ljubavlju — veli Tagore u tom članku —

* V. ref. Em. Lipperta o članku gđe. Reynierové u 3.—4. svesku »Pedagogické Rozhledy«, Prag 1822.