

Ing. ĐURO ŠVARC

ELEKTRIČNI TITRAJNI KRUGOVI

I. DIO



TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB 1959

MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGREBIAE
UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

Ing. ĐURO ŠVARC

ELEKTRIČNI TITRAJNI KRUGOVI

I. DIO

TEHNIČKA KNJIGA

ZAGREB 1959

*Odobreno rješenjem Komisije za udžbenike i skripta
Sveučilišta u Zagrebu broj 3. od 7. II. 1957.*

PREDGOVOR

Ova knjiga, I. dio Električnih titrajnih krugova, čini zaokruženu cjelinu, a namijenjena je u prvom redu studentima elektrotehnike.

Kod pisanja nastojao sam, da mi izlaganja budu što potpunija i jasnija. Radi toga sam i matematička izvodenja unio u tekst nešto opširnije, neostavljajući ništa neobjašnjeno. Student se na taj način priučava na egzaktan rad. Takav način izlaganja usvaja se sve više i postaje gotovo standardan u novijoj didaktičkoj literaturi, a osim toga, na taj način knjiga postaje pristupačna i za interesiranom visokokvalificiranom stručnjaku iz prakse.

Paralelno s matematičkim izvodenjem, nastojao sam istaknuti i fizikalni sadržaj formula. U tom smislu sam naročito pokušao objasniti bitnu razliku između raznih vrsta vezanja, te su stoga ta poglavlja kod neprigušenih vezanih krugova — gdje se ta razlika može najbolje uočiti — šire obrađena, nego što se to inače susreće kod drugih autora. Isto su tako, između ostalog, nešto šire obrađena poglavlja o treptaju, o krugu s dva paralelna ogranka i o vezanim krugovima pri narinutom sinusovom naponu.

Pri označivanju veličina vezanih krugova primijenio sam simboliku, za koju mislim da je logična, i da se iz nje razabire međusobna organska povezanost cjelokupne materije.

Navodim važniju literaturu, kojom sam se uz ostalo služio, složenu po abecednom redu prezimena autora. Kod tih knjiga naveo sam godine onih izdanja, kojima sam raspolagao, iako je više navedenih djela izašlo i u novijim izdanjima.

1. Асеев Б. П., Колебательные цепи, Государственное издательство литературы по вопросам связи и радио, Москва 1955.
2. Barkhausen H., Einführung in die Schwingungslehre nebst Anwendungen auf mechanische und elektrische Schwingungen, Verlag S. Hirzel, Leipzig 1932.
3. Black S. Harold, Modulation Theory, Bell Laboratories series, D. van Nostrand Company, Inc., New York 3, 1953.
4. Cuccia C. Louis, Harmonics, Sidebands, and Transients in Communication Engineering, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1952.
5. Grossmann E., Martin H., Schmidt H., Schwingungs- und Wellenlehre, Ultraschallwellen, Handbuch der Experimentalphysik Band 17, 1. Teil, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1934.
6. Guillemin A. Ernst, Communication Networks, Vol. I, John Wiley & Sons Inc., New York 1952.

7. Hecht Heinrich, Schaltschemata und Differentialgleichungen elektrischer und mechanischer Schwingungsgebilde. Verlag Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1939.
8. Hort Wilhelm, Technische Schwingungslehre, II. Auflage, Verlag von Julius Springer, Berlin 1922.
9. Kammerloher J., Hochfrequenztechnik I, Elektromagnetische Schwingungskreise, II. Auflage, C. F. Wintersche Verlagshandlung, Leipzig 1938.
10. Massachusetts Institute of Technology, Electric Circuits, John Wiley & Sons, Inc., New York 1949.
11. Ollendorff Franz, Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik, Eine Einführung in die Theorie, Verlag von Julius Springer, Berlin 1926.
12. Wagner Karl Willy, Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen, II. Auflage, Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1947.

Na koncu mi je ugodna dužnost, da se zahvalim svom honorarnom asistentu Ing. Hrvoju Babiću, koji je sudjelovao pri obradi poglavlja B-7 i izračunao primjer u poglavlju C-11.

D. Š.

A. UVOD

U prirodi vrlo često opažamo gibanja, koja nazivamo titraji. Takva gibanja igraju vrlo važnu ulogu u fizici i tehnici. Kod titranja energija prelazi u izvjesnom ritmu iz jedne forme u drugu. Osim takvog načina prelaženja energije, nailazimo u prirodi i na slučajeve, kad se to ne zbiva ritmički. Na pr. kod ispražnjivanja kondenzatora kroz omski otpor, električna energija pretvara se u toplinsku energiju kontinuirano, bez ritma. Postoji i energija, koja uopće ne mijenja svoju formu, na pr. potencijalna energija kamena, koji na izvjesnom nivou miruje.

Između neizmjereno mnogo primjera titranja navest ćemo nekoliko. Klasičan primjer titranja je gibanje njihala. Titranje je i treperenje lišća na vjetru, ritmičko kucanje srca, kao i gibanje zračnih čestica, koje prouzrokuje izvor zvuka. Nadalje, i svijetlo je objašnjeno kao titranje elektromagnetskog polja.

U širem smislu, kao titranje možemo shvatiti uopće svaku ritmičku promjenu stanja bilo koje fizikalne veličine, dakle, prema tome bi se u titranje ubrajala i ritmička promjena temperature, barometričkog tlaka i t. d.

Gotovo sve pojave titranja mogu se dovoljno točno predočiti jednostavnim sinusovim ili harmoničkim titranjem. Štoviše, najvažniji titraji u prirodi odgovaraju vrlo točno toj slici, na pr. zvuk jednostavnih tonova, jednoboje zrake svjetlosti, koje dobivamo iz prizme i t. d. Konačno, po Fourieru, sve periodičke pojave dadu se rastaviti i prikazati kao kombinacije harmoničkih titraja, naravno ukoliko vrijedi zakon superpozicije.

Tokom proučavanja, saznat ćemo, da svaki sistem, koji sadrži energiju, a prepušten je sam sebi, živi svojim zasebnim, posve točno određenim „slobodnim ritmom“. Međusobno vezani i sebi prepušteni sistemi, žive upravo s toliko „vezanih ritama“ od koliko se jednostavnih sistema sastoji, ali su pri tome ti pojedini „vezani ritmi“ različiti od onih „slobodnih ritama“, koje bi ti jednostavni sistemi imali, da nisu vezani, nego da postoje sami za sebe. Ti „vezani ritmi“ ipak se međutim baziraju na onim ritmima, koje bi imali njihovi jednostavni komponentni sistemi, da se razvežu, da postanu slobodni, a stepen toga baziranja ovisi o stepenu povezanosti pojedinih sistema.

Promatrajući prirodu upravo s toga stanovišta, razabrat ćemo, da razlog, što se neki sistemi nazivaju organizmima, leži u tim zajedničkim vezanim pulsovima ili ritmima. Sistemi zajedno nagomilani u nekom prostoru, ali nepovezani, ne bi imali zajedničke pulseve i ne bi činili organizam. Tek zajedno povezani, sačinjavaju organizam, jer dobivaju zajedničke životne ritme, pulseve.

Stvar je sada naučnog razmatranja, da se pronađe optimalni stepen povezanosti tih pojedinačnih sistema, bili oni pod utjecajem vanjske sile ili ne, da bi organizam bio najefikasniji, t. j. da bi titrajno prelaženje izvjesnih fizikalnih veličina iz sistema u sistem — na pr. energije, struje ili napona — odgovaralo postavljenim ciljevima.

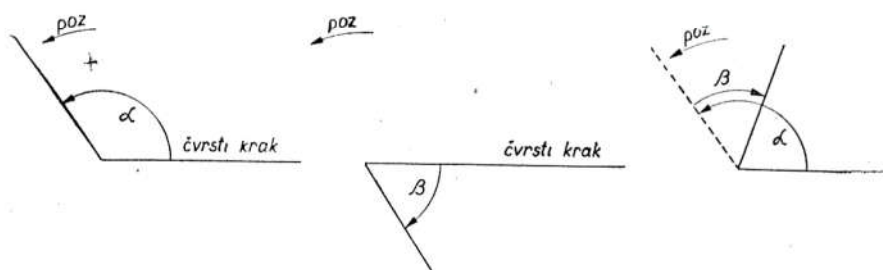
Razumije se samo po sebi, da je prema naprijed navedenom promatranje pulsa organizama od ogromnog značenja ne samo u fizici, nego još više u biologiji, te da će se samo na tom putu moći potpuno otkriti povezanost između „mrtve“ i „žive“ prirode.

B. MATEMATIČKI IZRAZ ZA POJAV TITRAJA

1. GAUSSOVA RAVNINA I PRAVAC TITRANJA. HARMONIČKI TITRAJ I NJEMU PRIDRUŽENI VERZOR.

Prije svega potrebno je malo pobliže objasniti kako ćemo označivati kut.

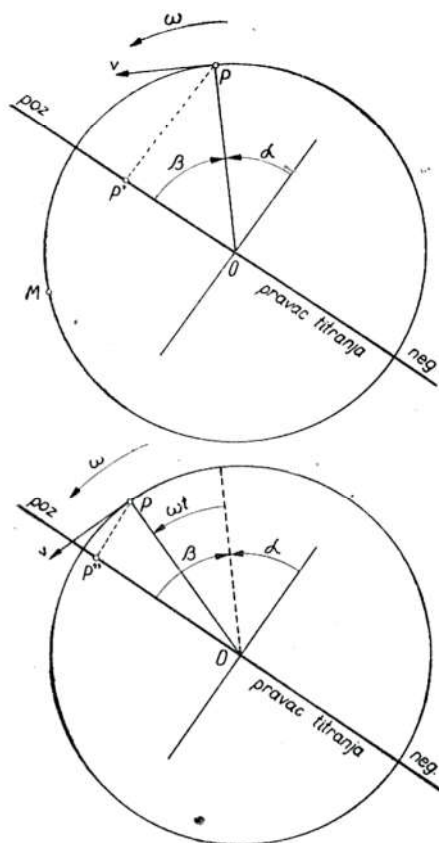
Vrijednost kuta izražava se u radijanima, t. j. $1 \triangleq 57,3^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$, $1,57 \triangleq 90^\circ$, $3,14 \triangleq 180^\circ$, $6,28 \triangleq 360^\circ$ i t. d. (Znak $\triangleq$ znači „odgovara“). Pri crtanju kut se označuje s dva kraka i lukom, te strelicom na jednom kraju luka, već prema tome na koju se stranu luk otvara. Obzirom na izabrani pozitivni smjer bit će



Sl. 1.

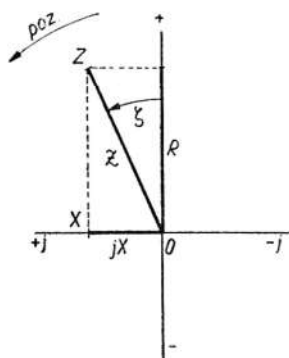
kut pozitivan ili negativan. Na sl. 1. kao pozitivni izabrali smo smjer s desna na lijevo, ali se razumije, da smo mogli izabrati i protivni smjer, t. j. s lijeva na desno. Kut α je pozitivan, a kut β je negativan. Isto tako je u našem slučaju i kut $(\alpha + \beta)$ pozitivan. Vidi se, da se kutovi zbrajaju tako, da se na šiljku luka prvoga kuta nastavlja početak luka drugoga kuta.

U uvodu smo već spomenuli, da je najvažnije titranje harmoničko titranje, kojemu uz odabrani pozitivni smjer okretanja možemo pridružiti jednoliko kružno gibanje točke P prema sl. 2. gore. Samo titranje zbiva se fizikalno na „pravcu titranja“. Točka O je središte titranja, a titraj je u jednom smjeru pozitivan, a u drugom negativan. Momentana vrijednost titraja je $\overline{OP'}$. Titraj možemo izraziti sinusom ili cosinusom, t. j. $\overline{OP'} = \overline{OP} \sin \alpha = \overline{OP} \cos \beta$. Prema nacrtanom položaju kraka OP na navedenoj slici kut α je pozitivan, a kut β negativan, ali mogu biti oba pozitivna, na pr. kad bi se točka P eventualno nalazila u položaju označenom s M .

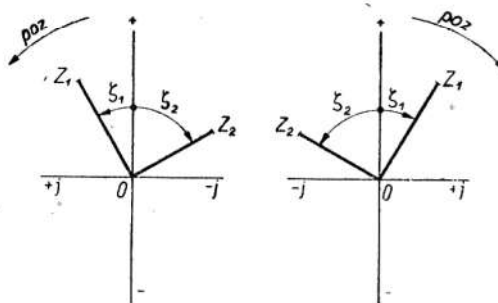


Slika 2.

pisanim slovom u sredini dužine, koja ih predodčuje, ili štampanim slovom uz vrh, što onda označuje njihovu apsolutnu vrijednost. Ako se radi o statičkoj veličini, vrh ćemo označiti poprečnom crticom. Kompleksnom ravninom



Slika 3.



Slika 4.

i njenom metodikom možemo se uspješno poslužiti, da označimo položaj verzora, kojeg ćemo vrh označiti strelicom, za razliku od statičkih kompleksnih veličina. Verzor je samo geometrijsko kinematička veličina bez daljnjeg fizikalnog

*) To se piše još jednostavnije Z/ζ .

Ako se je u početku razmatranja krak OP nalazio u nacrtanom položaju, onda će nakon vremena t krak ili verzor OP prijeći kut ωt i novo stanje titraja prema sl. 2. dolje bit će $\overline{OP''} = \overline{OP} \sin(\alpha + \omega t) = \overline{OP} \cos(\beta + \omega t)$.

Sada ćemo izraziti važnu činjenicu, kojom smo se do sada čitke poslužili, t. j. uz odabrani pozitivni smjer okretanja verzora, kod sinusovog titranja mjeri se pređeni kut od položaja verzora, koji odgovara središtu titranja i pozitivnoj tendenciji porasta titraja, a pri cosinusovom titranju od položaja verzora u pozitivnom maksimumu titraja.

Kao što se vidi, stvar je sasvim slobodnog izbora, da li ćemo neki titraj tretirati kao sinusov titraj ili kao cosinusov titraj.

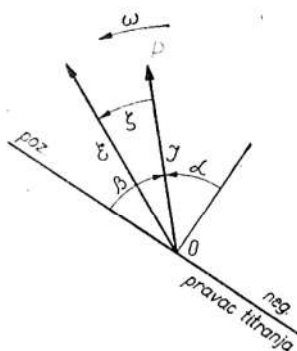
Najveća apsolutna vrijednost titraja naziva se amplituda, te je tolika i dužina pridruženog verzora. Za određivanje momentanog položaja verzora prema pravcu titranja potrebna su četiri podatka i to 1.) amplituda, 2.) momentana vrijednost titraja, 3.) tendencija porasta ili pada vrijednosti titraja i 4.) pozitivni smjer okretanja.

Kao što je poznato, pri predodčivanju kompleksnih matematičkih izraza služimo se Gaussovom kompleksnom ravninom. Na sl. 3.

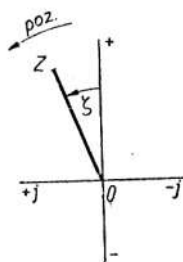
nacrtan je izraz $R + jX = Z = Ze^{j\phi}$.*) Kompleksne veličine označivat ćemo na crtežima

pisanim slovom u sredini dužine, koja ih predodčuje, ili štampanim slovom uz vrh, što onda označuje njihovu apsolutnu vrijednost. Ako se radi o statičkoj veličini, vrh ćemo označiti poprečnom crticom. Kompleksnom ravninom

značenja. Kako je $e^{j\left(+\frac{\pi}{2}\right)} = j$, to znači, da će veličina, koja se nalazi u pozitivnom smjeru realne osi zaokrenuta za $+\frac{\pi}{2}$, pasti u pozitivni smjer imaginarne osi. Prema tome, pozitivni smjer okretanja Gaussove ravnine je onaj, kojim se za $+\frac{\pi}{2}$ iz pozitivnog smjera realne osi dolazi u pozitivni smjer imaginarne osi.



Slika 5.



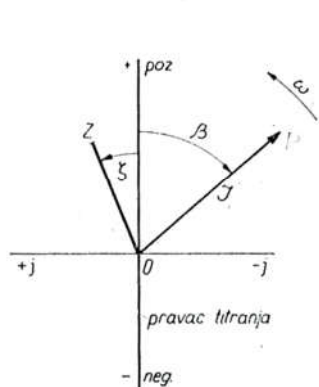
Slika 6.

Prema tome i ovdje bi prema slici 4., kao i kod prije spomenutog verzora, postojale obje mogućnosti, t. j. da se za pozitivni smjer Gaussove ravnine uzima smjer protivan kretanju kazaljke na satu ili smjer kretanja kazaljke na satu. Kut se mjeri od pozitivnog smjera realne osi te je ζ_1 pozitivan, a ζ_2 negativan kut. Množenje verzora s „j“ znači samo njegovo zaokretanje za $+\frac{\pi}{2}$ i ništa više. To nipošto ne znači neko prelaženje iz fizikalne „realnosti“ u „imaginarnost“.

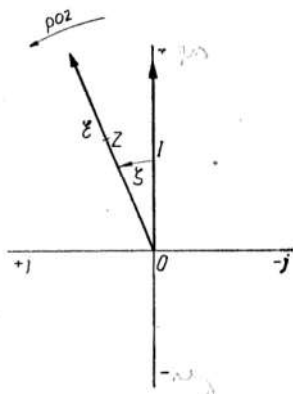
Neka je našem verzoru pridruženo titranje struje. Radi toga smo na sl. 5. prijašnji verzor OP označili sa $\mathcal{I}$. Ako želimo naći verzor napona $\mathcal{E}$, morat ćemo izvršiti operaciju $\mathcal{I} \cdot \mathcal{Z} = \mathcal{E}$ t. j. zaokrenuti verzor za kut ζ i pomnožiti $I \cdot Z = E$. Pri tome smo iz Gaussove ravnine na istoj slici desno, saznali vrijednosti ζ odnosno Z . Takva manipulacija je prostorno prilično nezgodna, no ništa nas ne priječi, da ta dva crteža međusobno prekrijemo. Glavni je preduvjet za to, da je na obim crtežima smjer okretanja isti. Nadalje se prilikom prekrivanja moraju pokriti oni dijelovi, od kojih se broje kutovi, jer bi inače postojale dvije vrste kutova. Ako smo naš titraj shvatili kao sinusov titraj, Gaussovu ravninu superponirat ćemo prema sl. 6., t. j. pozitivni dio realne osi i srednji položaj verzora, od kojega se broji kut α , moraju pasti zajedno. Kao posljedica toga, imaginarna os i pravac titranja pali su u zajednički pravac. Od sada nikako ne smijemo zaboraviti dvojako značenje toga pravca. Služeći se, naime, metodikom kompleksne ravnine, uz titrajne vrijednosti, kad s njima izvodimo računske operacije, stavit ćemo faktor „j“, budući da su te vrijednosti „imaginarne“.

Međutim, obzirom na pravac titranja, koji je pokriven imaginarnom osi, te su veličine za nas i dalje fizikalno realne i moći ćemo ih izraziti — odbacivši kompleksnu ravninu, dakle faktor „j“ — kao obične sinusove komponente verzora. To ćemo shodno učiniti ovako: $\mathcal{I}_m(jB) = B$. O tome ćemo još govoriti.

Da smo naš titraj shvatili kao cosinusov titraj, kompleksnu ravninu morali bismo superponirati prema sl. 7. t. j. pozitivni dio realne osi i pozitivni dio pravca titranja moraju pasti zajedno, jer se od njih broje kutovi. Sada imamo tu prednost, da su nam fizikalno realne vrijednosti titraja na pravcu titranja ujedno realne i obzirom na Gaussovu ravninu, dakle unutrašnji sklad prikazivanja bolji je nego prije. Usprkos te očevide prednosti, mi ćemo titraj shvatiti kao sinusovu funkciju, kod čega se imaginarna os i pravac titranja pokrivaju, jer je sinusov titraj kod nas više udomaćen, iako se, naročito u



Slika 7.



Slika 8.

novijoj anglo-američkoj literaturi, sve više pojavljuje cosinusov titraj. Međutim, budući da nam je unutrašnja povezanost imaginarne osi i pravca titranja postala jasna, ne ćemo imati nikakvih poteškoća. U američkoj literaturi, dvojako značenje one osi Gaussove ravnine, koja je ujedno i pravac titranja, označuje se na taj način, da joj se dodaju još slova P.A. t. j. Projection Axis.

Ako imamo neki kompleksni izraz $(A + jB)$, kod čega se, naravno, umjesto A i B , u danom slučaju u izrazu mogu nalaziti i vremenski promjenljive veličine, t. j. $A(t)$ i $B(t)$, onda na taj izraz možemo primijeniti operatore $\mathcal{R}e$ i $\mathcal{I}m$, te će njihovo značenje, shodno dogovoru, biti:

$$\mathcal{R}e(A + jB) = A$$

$$\mathcal{I}m(A + jB) = B \text{ (dakle ne } jB\text{!)}$$

Ukoliko nije naročito određeno, prema sl. 8. obično ćemo verzor struje stavljati u realnu os, jer je tada smjer od $\mathcal{Z}$ ujedno i smjer verzora $\mathcal{G}$. Pritom ćemo taj položaj strujnog verzora označiti s I , iako to nipošto ne znači — kako već znamo — da je ta veličina sada fizikalno realna, a da inače nije, nego znači samo to, da je početni kut verzora nula, shodno jedna-džbi $Ie^{j0} = I$.

Realnu os Gaussove ravnine crtati ćemo vertikalno, a imaginarnu os, prema tome, horizontalno. To činimo s toga razloga, jer se u inatematici, u Cartesiusovom sistemu, titranje realnih harmoničkih funkcija, na pr. $y = \sin x$ i t. d., već u srednjoj školi obično predložuje tako, da se ono zbiva u ovisnosti od x u vertikalnom smjeru.

Da bismo zadržali didaktično jedinstvo, to ćemo i mi smatrati, da se realni titraji događaju u vertikalnom smjeru, a „imaginarni“ u horizontalnom smjeru, iako je to, naročito u anglo-američkoj literaturi, upravo obrnuto.

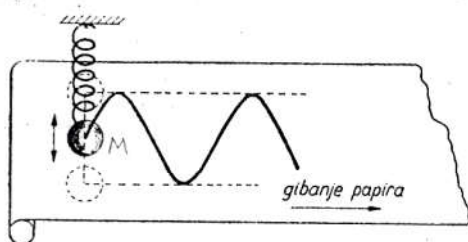
Sl. 9. prikazuje način, kojim bismo eksperimentalno dobili sinusoidu, t. j. ako bismo ispod mase M , koja titra približno harmoničkim titrajem i nosi pisaljku, povlačili jednolikom brzinom papirnatu traku. Kod crtanja harmoničke funkcije, na pr. cosinusoide, ne treba zaboraviti, da je prema sl. 10. momentana vrijednost kod $\frac{\pi}{3}$ upravo jednaka polovici amplitude.

Trajanje jedne periode je vrijeme, potrebno, da verzor opiše kut 2π , t. j.

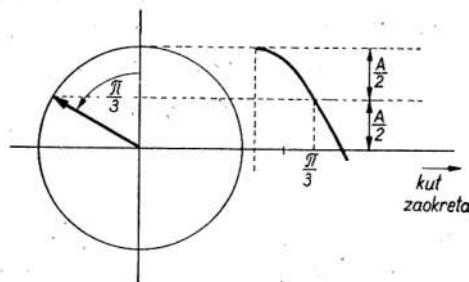
$$(\omega t_2 + \alpha) - (\omega t_1 + \alpha) = 2\pi$$

$$t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega} = T \text{ sec.}$$

$\frac{1}{T} = f$ je „numerička frekvencija“, t. j. broj titraja u sec. Broj titraja u 2π se-



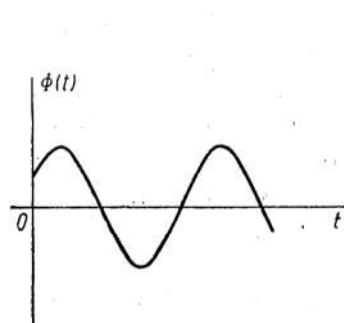
Slika 9.



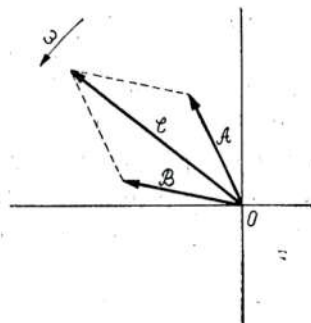
Slika 10.

kundi, t. j. $2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \omega$ naziva se „kružna frekvencija“ i ima također dimenziju sec^{-1} . „Kružna frekvencija“ označuje i kutnu brzinu verzora u radijanima na sec.

Osim nacrtanim verzorom u Gaussovoj ravnini, koji se kadšto naziva i radij-vektorom, za razliku od pravih vektora, harmonički titraj možemo predložiti još na tri načina i to: 1.) u Cartesiusovom koordinatnom sistemu (o čemu smo već govorili) prema slici 11., 2.) analitički, t. j. $y = A \sin(\omega t + \varphi)$



Slika 11.



Slika 12.

i 3.) simbolički, t. j. $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{poč} e^{j\omega t}$ odnosno jer je početni $\mathcal{A}_{poč} = A e^{j\varphi}$, to će biti $\mathcal{A}_t = A e^{j(\omega t + \varphi)}$. Kako je $A e^{j(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + j A \sin(\omega t + \varphi)$, to simbolički način sadrži u sebi, jednako kao i njegova geometrijska interpretacija, t. j. nacrtani verzor, i cosinsov i sinosov titraj, od kojih vrijedi samo jedan. Simbolički izraz, jednako kao i verzor u Gaussovoj ravnini, igra prema tome ulogu „totum pro parte“ (lat. sve umjesto dijela).

Dva harmonička titraja jednakih frekvencija daju rezultatni harmonički titraj iste frekvencije. Na sl. 12. vidi se zbrajanje njihovih pridruženih verzora $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ u rezultatni verzor $\mathcal{C}$.

Promotrit ćemo još i analitički izraz.

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin \varphi \cos \omega t + A \cos \varphi \sin \omega t = C \cos \omega t + S \sin \omega t.$$

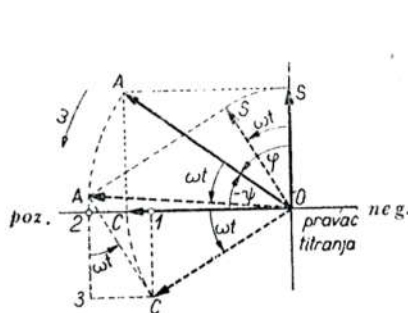
$$A \sin \varphi = C$$

$$A \cos \varphi = S$$

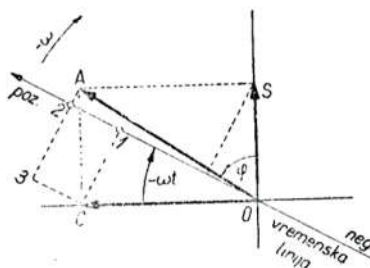
$$\sqrt{C^2 + S^2} = A$$

$$\operatorname{arctg} \frac{C}{S} = \varphi$$

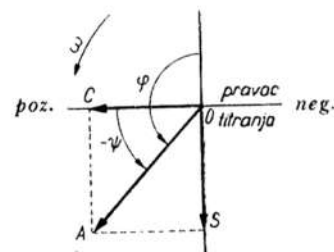
Na sl. 13. nacrtan je početni položaj vektora amplitude A i komponentnih vektora amplitude C , odnosno S , te položaj nakon njihovog zaokreta za kut ωt . Vidi se, da je $\overline{O2} = \overline{O1} + \overline{12} = \overline{O1} + \overline{C3}$, gdje je $\overline{O1} = \overline{OC} \cos \omega t$, a $\overline{C3} = \overline{AC} \sin \omega t$, odnosno $\overline{O1} = C \cos \omega t$, a $\overline{C3} = S \sin \omega t$.



Slika 13.



Slika 14.



Slika 15.

Razumije se, da ćemo kinematski dobiti isti rezultat, ako vektori „miruju“, dok se pravac titranja, koji se tada naziva i „vremenska linija“, okreće s $-\omega$. U vremenu t okrenula se je vremenska linija za $-\omega t$, te vidimo, da su odnosi na sl. 14. potpuno jednaki odnosima na predašnjoj slici, jer se sva tri vektora nalaze u istom nagibu prema momentanom položaju vremenske linije kao prije prema pravcu titranja. Vremenska linija providena je na jednom svom vrhu strelicom, te će sve projekcije „mirnih“ vektora, koji u nekom času t za vrijeme njene vrtnje padnu na tu stranu, dati pozitivne vrijednosti titraja, a one, koje padnu na stranu bez strelice, dat će negativne vrijednosti titraja.

Izraz $A \sin(\omega t + \varphi)$ može se shvatiti i kao

$$A \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = A \cos(\omega t - \psi) = A \cos \psi \cos \omega t + A \sin \psi \sin \omega t = C \cos \omega t + S \sin \omega t.$$

$$\operatorname{Kut}(-\psi) = \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ili} \quad \frac{\pi}{2} = (\psi + \varphi).$$

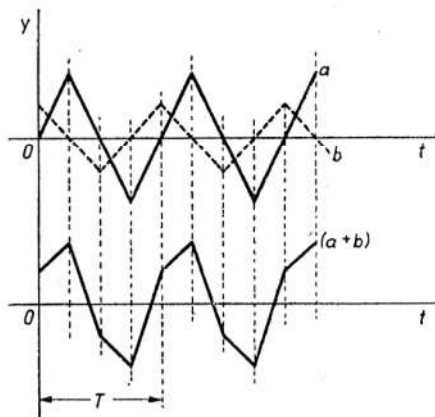
Na našoj slici 13. φ je manji od $\frac{\pi}{2}$, te je radi toga ψ pozitivan, a $(-\psi)$ negativan.

$$C = A \cos \psi$$

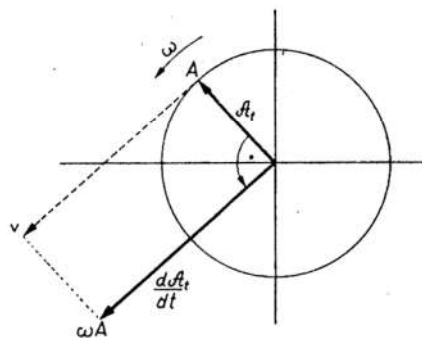
$$S = A \sin \psi$$

$$\operatorname{arctg} \frac{S}{C} = \psi$$

Na naprijed navedenoj slici S i C uzeti su kao pozitivni, ali, naravno, oni mogu imati i negativni predznak. Na sl. 15., na pr., ima C pozitivni, a S negativni predznak. Stoga će $\frac{C}{S}$, kao i $\frac{S}{C}$, biti negativni. Opet će momentana vrijednost titraja biti $A \sin(\omega t + \varphi)$, gdje je $\pi > \varphi > \frac{\pi}{2}$ ili $A \cos(\omega t - \psi)$. Sada je $\psi = \arctg \frac{S}{C}$ negativan kut, jer je komplementan kutu φ , koji je veći od $\frac{\pi}{2}$ i prema tome je $-\psi$ pozitivan kut.



Slika 16.



Slika 17.

Za razliku od harmoničkih titraja, dva periodička, ali neharmonička titraja jednake frekvencije i oblika, ne će dati rezultantu istog oblika, nego će taj oblik biti različit od njihovog. Frekvencija rezultante bit će, međutim, ista kao i frekvencija obiju komponenata. To se vidi na sl. 16., gdje su zbrojene dvije trokutaste funkcije jednake frekvencije.

Ako diferenciramo $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{\text{poc}} e^{j\omega t} = A e^{j(\omega t + \varphi)}$ po vremenu, to će biti:

$$\frac{d\mathcal{A}_t}{dt} = j\omega A e^{j(\omega t + \varphi)} = \omega A e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}.$$

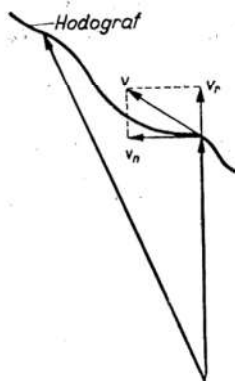
Diferencijalni kvocijent harmoničkog verzora po vremenu je, dakle, prema sl. 17. brzina, kojom vrh verzora kruži po obodu kružnice, koja predstavlja hodograf harmoničkog verzora. Pri povoljnom neharmoničkom, vremenski promjenljivom verzoru (prema sl. 18.), čiji je hodograf neka krivulja, diferencijalni kvocijent po vremenu bila bi brzina v vrška promjenljivog verzora, dakle tangencijalno na hodograf, te bi osim normalne komponente v_n , imala još i radijalnu v_r , t. j. u smjeru samog verzora.

Ako izraz za $\mathcal{A}_t$ integriramo, t. j. $\int \mathcal{A}_t dt = \int A e^{j(\omega t + \varphi)} dt$, dobivamo odbacivši konstantu*) $\frac{1}{j\omega} A e^{j(\omega t + \varphi)}$. Kako je $\frac{1}{j} = e^{j(-\frac{\pi}{2})}$ to je prema sl. 19.

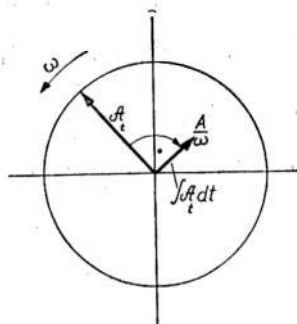
$$\int \mathcal{A}_t dt = \frac{A}{\omega} e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})}.$$

Vidi se, da je integriranje inverzna operacija od diferenciranja, jer se primijenjene uzastopno međusobno ukidaju.

*) Kod izmjeničnog napona u krugovima, konstanta stacionarnog naboja kao integrala struje, jednaka je nuli.



Slika 18.



Slika 19.

Napomena: Razumije se, da kod neharmoničkih veličina, kao što su prelazne struje i naponi, navedene operacije ne bismo mogli izvršiti jednostavnim množenjem ili dijeljenjem s $j\omega$. Ako se radi samo o stacionarnom stanju kod harmoničkog napona $\mathcal{E}e^{j\omega t}$ i harmoničke struje $\mathcal{I}e^{j\omega t}$, može se, u vezi navedenoga, na pr. jednadžba

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$

pisati i ovako:

$$\mathcal{E}e^{j\omega t} = R \mathcal{I}e^{j\omega t} + Lj\omega \mathcal{I}e^{j\omega t} + \frac{1}{C} \frac{1}{j\omega} \mathcal{I}e^{j\omega t}$$

U času $t = 0$ ta jednadžba poprima oblik:

$$\mathcal{E} = R \mathcal{I} + Lj\omega \mathcal{I} + \frac{1}{C} \frac{1}{j\omega} \mathcal{I}$$

i onda, ona interpretirana u Gaussovoj ravnini, predstavlja „verzorski prikaz“, koji prikazuje verzore u času $t = 0$.*)

2. TREPTAJ I NJEGOV DIFERENCIJALNI KVOCIJENT PO VREMENU. DEGENERIRANI TREPTAJ

Treptaj je zbroj dvaju sinusovih titraja različitih frekvencija, te je naročito dobro izražen, ako se obje frekvencije ω_1 i ω_2 vrlo malo međusobno razlikuju. Međutim, to nije nikakav uvjet, nego se općenito svaki zbroj dvaju sinusovih titraja različitih frekvencija — dapače i onda, kad im je odnos $\omega_1:\omega_2 = 1:n$, gdje je n cijeli broj — smije smatrati treptajem. Tada se, naravno, može govoriti o degeneraciji treptaja, analogno kao kod slučajeva, koje ćemo kasnije navesti, t. j. kad je na pr. $(\omega_2 - \omega_1)$ prema ω_1 vrlo veliko.

Najprije ćemo proučiti uvjete pod kojima je treptaj periodičan. Izraz za treptaj glasi

$$a = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Ako postoji periodičnost u vremenu T_t onda to znači, da se je u tom vremenu svaki kut uvećao za multiplum od 2π . Mora biti

$$a = a_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \omega_1 T_t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \omega_2 T_t + \varphi_2)$$

*) Početnik, zaveden crtežom, kadšto zaboravlja, da je u verzorskom prikazu odnos fizikalnih veličina postao „geometrijski“ zato, što smo kao pomagalo uveli verzore, koji služe kao „totum pro parte“, a da je pravi odnos tih veličina algebarski. Tada u njegovoj svijesti nastaje neka čudna „geometrijska“ elektrotehnika, kao da na pr. fizikalni naponi djeluju međusobno okomito i t. d.

kod čega mu je $\omega_1 T_t = \alpha 2\pi$ te $\omega_2 T_t = \beta 2\pi$, iz čega slijedi $\omega_1 : \omega_2 = \alpha : \beta$. Brojevi α i β su cijeli brojevi, koji nemaju zajedničke mjere.

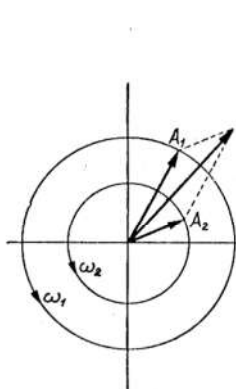
Perioda treptaja iznosi

$$T_t = \frac{\alpha 2\pi}{\omega_1} = \frac{\alpha 2\pi}{\frac{2\pi}{T_1}} = \alpha T_1$$

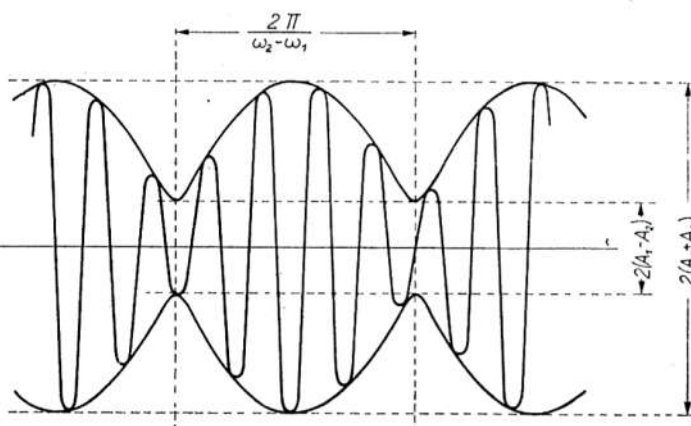
ili

$$T_t = \frac{\beta 2\pi}{\omega_2} = \frac{\beta 2\pi}{\frac{2\pi}{T_2}} = \beta T_2$$

Budući da su općenito α odnosno β veći od 1, znači, da je perioda treptaja veća od jedne i druge periode komponenata. Ako je odnos $\omega_1 : \omega_2$ takav, da se ne može izraziti racionalnim brojem, na pr. ako taj odnos iznosi $\sqrt{2}$ ili π , ne mogu se naći dva cijela broja α i β , te je onda treptaj neperiodičan, pa se duž čitavog svog vremenskog zbivanja pojav nikad ne ponavlja.



Slika 20.



Slika 21.

Ako prema sl. 20. zamislimo, da sjedimo na verzoru s amplitudom A_1 , drugi verzor okretat će se prema nama kutnom brzinom $\omega_2 - \omega_1$. Ako bismo sjeli na verzor s amplitudom A_2 , prvi verzor okretat će se prema nama kutnom brzinom $\omega_1 - \omega_2$. Ako je $\omega_2 > \omega_1$ *) i ako su se u početku oba verzora pokrivale, to ćemo do ponovnog pokrivanja u prvom slučaju, kad je vrtnja verzora A_2 prema nama pozitivna, trebati vrijeme $T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$, a u drugom slučaju, naravno, isto vrijeme $T = \frac{-2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$. Kod pokrivanja zbroj verzora bit će maksimalan i iznositi će $A_1 + A_2$, a u opoziciji će biti minimalan i iznositi će $A_1 - A_2$. To se vidi na sl. 21. Vrijeme T je vrijeme trajanja periode dodirnice treptaja, za razliku od T_t t. j. periode samog treptaja.

Proučit ćemo sada treptaj analitički.

$$a = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

*) Ta nejednadžba će vrijediti tokom čitave dedukcije.

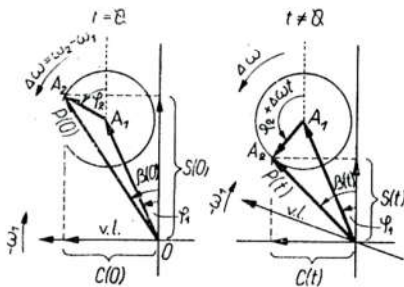
Ako stavimo $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$, iz čega je $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$, kao i $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$, iz čega je $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$, pisat ćemo da je

$$\begin{aligned}
 a &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin[(\omega_1 + \Delta\omega)t + \varphi_1 + \Delta\varphi] = A_1 \sin \omega_1 t \cos \varphi_1 + \\
 &\quad + A_1 \cos \omega_1 t \sin \varphi_1 + A_2 \sin(\omega_1 + \Delta\omega)t \cos(\varphi_1 + \Delta\varphi) + A_2 \cos(\omega_1 + \\
 &\quad + \Delta\omega)t \sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) = \\
 &= A_1 \sin \omega_1 t \cos \varphi_1 + A_1 \cos \omega_1 t \sin \varphi_1 + [A_2 \cos(\varphi_1 + \Delta\varphi)] [\sin \omega_1 t \cos \Delta\omega t + \\
 &\quad + \cos \omega_1 t \sin \Delta\omega t] + [A_2 \sin(\varphi_1 + \Delta\varphi)] [\cos \omega_1 t \cos \Delta\omega t - \\
 &\quad - \sin \omega_1 t \sin \Delta\omega t] = \\
 &= \sin \omega_1 t [A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos(\varphi_1 + \Delta\varphi) \cos \Delta\omega t - A_2 \sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) \sin \Delta\omega t] + \\
 &\quad \text{Ovaj izraz nazvat ćemo } S(t) \\
 &\quad + \cos \omega_1 t [A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \cos(\varphi_1 + \Delta\varphi) \sin \Delta\omega t + A_2 \sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) \cos \Delta\omega t] \\
 &\quad \text{Ovaj izraz nazvat ćemo } C(t)
 \end{aligned}$$

Prema tome je:

$$S(t) = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos[(\varphi_1 + \Delta\varphi) + \Delta\omega t] = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos(\varphi_2 + \Delta\omega t)$$

$$C(t) = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin[(\varphi_1 + \Delta\varphi) + \Delta\omega t] = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin(\varphi_2 + \Delta\omega t)$$



Slika 22.

Slika 23.

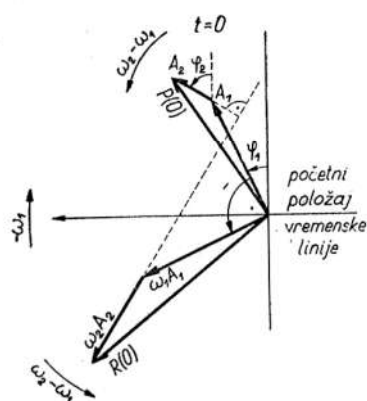
Znači, da su izrazi $S(t)$ i $C(t)$ promjenljivi s vremenom, i da su u svakom času sinusova odnosno cosinusova projekcija zbroja početnog položaja „mirnog“ vektora amplitude A_1 , oko čijeg vrška kruži još vektor amplitude A_2 kutnom brzinom $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Razumljivo je, da prema vremenskoj liniji ni vektor amplitude A_1 nije miran, nego da se prema njoj okreće svojom kutnom brzinom ω_1 .

Izraz za treptaj $[\sin \omega_1 t S(t) + \cos \omega_1 t C(t)]$ mogli bismo pisati kao $P(t) \sin[\omega_1 t + \beta(t)]$, gdje je $P(t)$ promjenljiva amplituda vektora, a

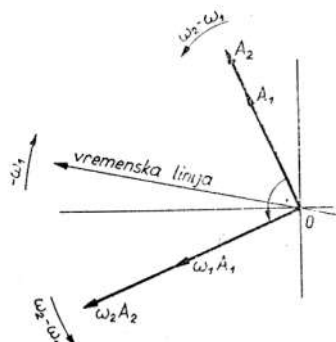
$\beta(t)$ njegova promjenljiva faza. To bi, dakle, bio titraj s amplitudnom i faznom promjenom (ili „modulacijom“), odnosno ukoliko bi zamislili, da je početni kut $\beta(0)$ i dalje čvrst, a da se frekvencija mijenja, onda s amplitudnom i frekventnom modulacijom. O tome ćemo još govoriti. Budući da je svejedno da li se vektor okreće s ω_1 , a vremenska linija miruje, ili da se vremenska linija vrti s $-\omega_1$, a „vektor“ da miruje, to ćemo, radi lakšeg promatranja, izabrati ovo potonje, t. j., da se vremenska linija, koju smo na slikama 22. i 23. označili s v. l., vrti s $-\omega_1$. Njen pozitivni dio providjeli smo strelicom i projekcija vrška vektora amplitude A_2 na taj dio vremenske linije znači pozitivnu vrijednost titraja. Na sl. 24. nacrtan je diferencijalni kvocijent treptaja po vremenu s amplitudom $R(t)$ odnosno u $t = 0$ s amplitudom $R(0)$. Vidi se, da je i taj diferencijalni kvocijent, koji smo dobili zbrajanjem diferencijalnih kvocijenata obih vektora samog treptaja, također treptaj, te da uzevši općenito, njegov promjenljivi vektor amplitude $R(t)$ nije okomit na promjenljivom vektoru amplitude $P(t)$. To je slučaj samo onda, kad su oba harmonička komponentna vektora prvog treptaja (a prema tome i njegovog diferencijalnog kvocijenta) u istom pravcu.

— Točke treptaja u tom času odgovaraju harmoničkim funkcijama. Ako uzmemo na pr. položaj prema sl. 25., luk, koji opisuje vršak verzora amplitude A_2 , bit će $A_2(\omega_2 - \omega_1)\Delta t$. Budući da u taj čas možemo shvatiti, da je taj luk opisao verzor amplitude $(A_1 + A_2)$ znači, da mu je kutna brzina $\frac{A_2(\omega_2 - \omega_1)\Delta t}{(A_1 + A_2)\Delta t}$. K toj brzini prema vremenskoj liniji pridolazi još ω_1 , t. j.

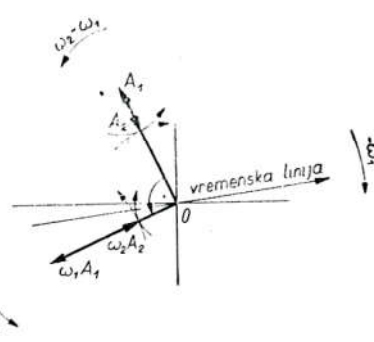
$$\frac{A_2(\omega_2 - \omega_1)}{A_1 + A_2} + \omega_1 = \frac{A_2\omega_2 + A_1\omega_1}{A_1 + A_2}.$$



Slika 24.



Slika 25.



Slika 26.

Amplituda diferencijalnog kvocijenta jednaka je umnošku amplitude prvotnog verzora i njegove kutne brzine, t. j.

$$(A_1 + A_2) \frac{A_2\omega_2 + A_1\omega_1}{A_1 + A_2} = A_2\omega_2 + A_1\omega_1.$$

U položaju najmanje amplitude $(A_1 - A_2)$, prema sl. 26., verzor amplitude A_2 opisao bi kao i prije luk $A_2(\omega_2 - \omega_1)\Delta t$. Ako shvatimo, da je to opisao verzor amplitude $(A_1 - A_2)$, njegova kutna brzina je negativna, t. j. s lijeva na desno, jer se on u taj čas tako okreće, dakle $\frac{-A_2(\omega_2 - \omega_1)\Delta t}{(A_1 - A_2)\Delta t}$. Prema vremenskoj liniji bila bi kutna brzina analogno kao i prije

$$\frac{-A_2(\omega_2 - \omega_1)}{A_1 - A_2} + \omega_1 = \frac{A_1\omega_1 - A_2\omega_2}{A_1 - A_2},$$

a amplituda diferencijalnog kvocijenta $A_1\omega_1 - A_2\omega_2$. Te harmoničke točke nastupit će u času najvećeg i najmanjeg $P(t)$, dakle, za vrijeme periode dodirnice samo dva puta.

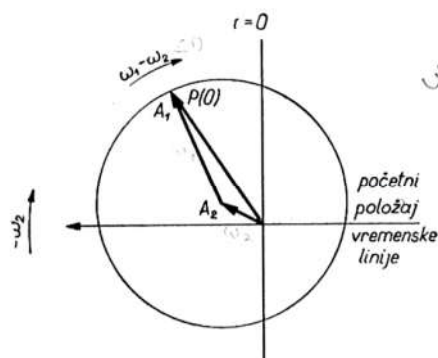
Do sada smo uzeli, da je veći verzor „miran“ i dobili smo verzor promjenljive amplitude $P(t)$, koji se njiše oko svog srednjeg položaja. Ako izmijenimo uloge harmoničnim verzorima prema sl. 27., izmijenit će, naravno, svoje uloge i obje kutne brzine ω_1 i ω_2 , te ćemo dobiti verzor amplitude $P(t)$, koji se više ne njiše, nego se progresivno vrti, a kutna brzina vremenske linije sada je $-\omega_2$. Razumije se, da su obje predodžbe adekvatne. Osim ovih predodžbi, treptaj možemo predočiti i kao projekcije točaka cikloidnih krivulja na pravac titranja, koje krivulje opisuje vršak verzora amplitude A_2 odnosno A_1 prema

sl. 28., i to valjanjem jedne kružnice po drugoj, koja miruje. Na sl. 28. lijevo, okretanje se zbiva tako, da se spojnica središta kružnica, t. j. vektor amplitude A_1 , vrti s ω_1 . Ako je polumjer mirne kružnice r_v , a one, koja se giba, R_v , onda vrijedi

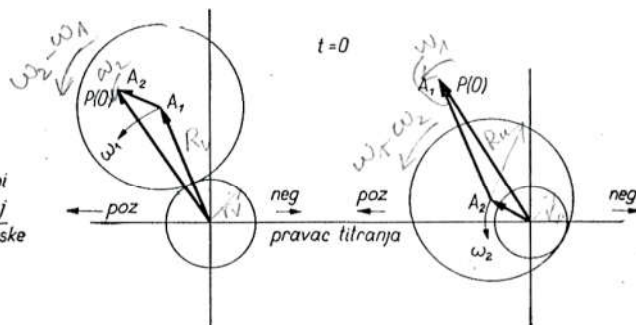
$$r_v + R_v = A_1$$

te još

$$r_v \omega_1 = R_v |\omega_2 - \omega_1|.$$



Slika 27.



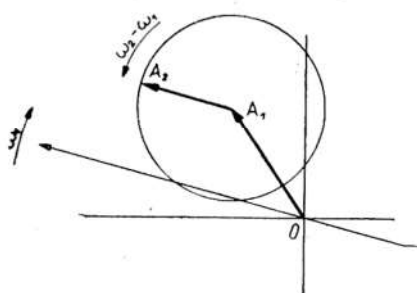
Slika 28.

Na sl. 28. desno, okretanje se zbiva tako, da se spojnica središta, t. j. vektor amplitude A_2 , vrti s ω_2 . Ako polumjer mirne kružnice označimo s r_u , a one, koja se giba, s R_u , onda vrijedi

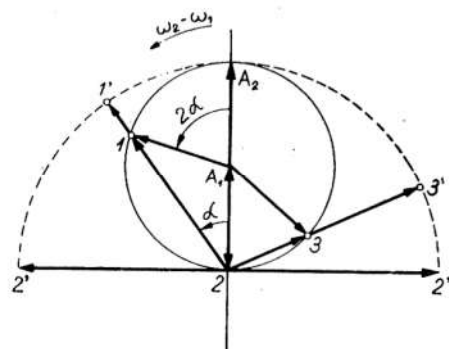
$$R_u - r_u = A_2$$

te još

$$r_u \omega_2 = R_u |\omega_1 - \omega_2|.$$



Slika 29.



Slika 30.

Naveli smo, da je kod odnosa $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\alpha}{\beta}$ perioda treptaja $\alpha T_1 = \beta T_2$. To ćemo najbolje vidjeti i na našoj verzorskoj sl. 29. Neka su vremenska linija i vektor, koji kruži, paralelni. Nakon vremena αT_1 vremenska linija okrenut će se za kut

$$-\alpha T_1 \omega_1 = -\alpha 2\pi.$$

Verzor, koji kruži, okrenut će se za kut

$$(\omega_2 - \omega_1) \alpha T_1 = \left(\omega_1 \frac{\beta}{\alpha} - \omega_1 \right) \alpha T_1 = (\beta - \alpha) 2\pi.$$

Budući da su α i β cijeli brojevi, znači, da će i vremenska linija i verzor biti opet paralelni i u istom međusobnom položaju kao i prije. Budući da α i β nemaju zajedničke mjere, neko kraće vrijeme, na pr. $\frac{\alpha}{m} T_1$ (kod čega neka je $\frac{\alpha}{m}$ cijeli broj) dalo bi u izrazu $-\frac{\alpha}{m} T_1 \omega_1 = -\frac{\alpha}{m} 2\pi$ multiplum od 2π , ali to ne bi dalo i u izrazu

$$(\omega_2 - \omega_1) \frac{\alpha}{m} T_1 = \left(\omega_1 \frac{\beta}{\alpha} - \omega_1 \right) \frac{\alpha}{m} T_1 = \left(\frac{\beta}{m} - \frac{\alpha}{m} \right) 2\pi.$$

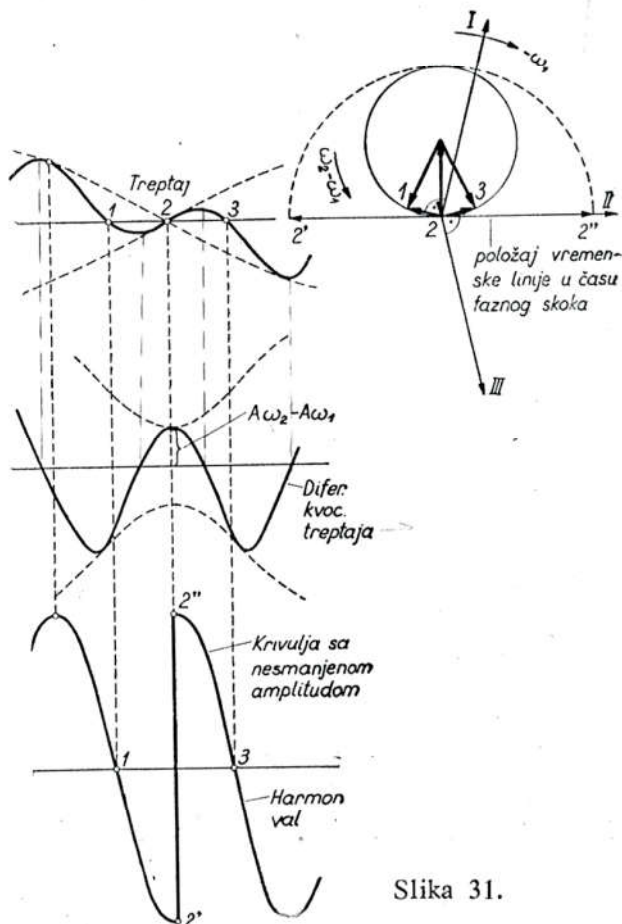
Gornja i donja dodirna krivulja treptaja dobiju se, ako se momentane vrijednosti promjenljivog verzora, uzete pozitivno i negativno, ucrtaju kao ordinate u ovisnosti od vremena. Prema tome, jednadžba obiju dodirnih krivulja glasit će prema cosinusovom poučku

$$y = \pm \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta\omega t)]} = \\ = \pm \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta\omega t)}.$$

Zajedničke točke treptaja i dodirnice odgovarat će času pokrivanja vremenske linije i verzora amplitude $P(t)$, a točke, u kojima treptaj ima vrijednost nula, t. j. prolazi kroz apscisnu os, odgovarat će času, kad je vremenska linija okomita na verzor amplitude $P(t)$.

Ako su oba verzora iste dužine, jedamput za vrijeme jedne periode dodirnice nastupa „fazni skok“. O čemu se tu radi? Neka je početni položaj obaju verzora, prema sl. 30., u vertikalnom smjeru. Kod okretanja verzora amplitude A_2 rezultatni verzor amplitude $P(t)$, postaje sve manji, na pr. $\overline{OI}$.*) Ako zamislamo, da postoji neki verzor, koji bi se uvijek pokrивao s verzorom amplitude $P(t)$, dakle, koji bi uvijek prevaljivao isti kut, ali bi imao nesmanjenu maksimalnu amplitudu ($A_1 + A_2$), onda bi taj verzor bio u položaju OI' . Kod

$$(\omega_2 - \omega_1) \frac{T}{2} = \pi \text{ verzor amplitude}$$



Slika 31.

*) Na ovom crtežu i na onima, što slijede, nije ishodište posebno označeno s O.

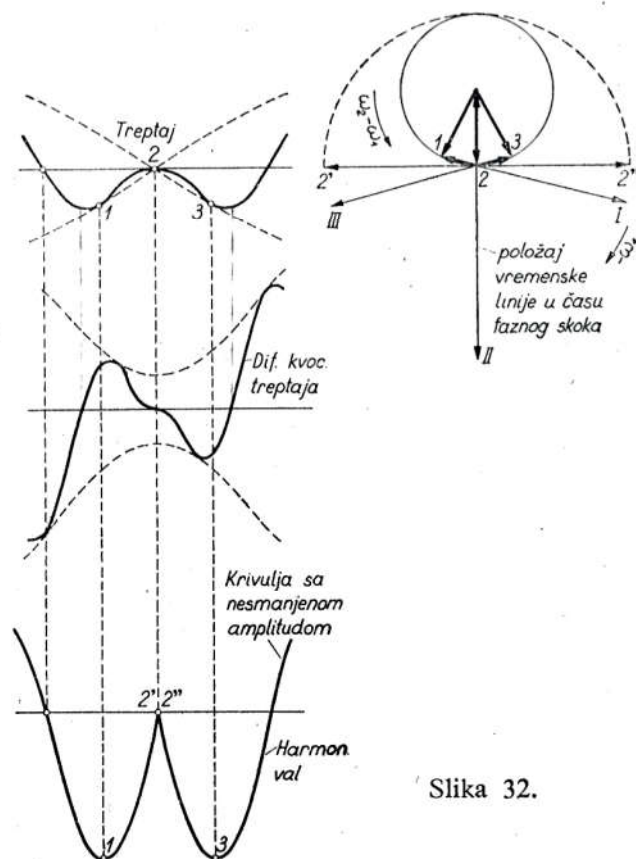
$P(t)$ imao bi amplitudu jednako nuli, a njemu pridruženi nesmanjeni verzor bio bi u položaju $O2'$ s time, da istog trenutka pređe u položaj $O2''$ t. j. da „skoči“ za π . Analogno tome, možemo shvatiti, da je i verzor amplitude $P(t)$ „skočio“ za π , iako uistinu toga trena i sâm ne postoji, budući da sâm prolazi kroz nulu, ali je u okolini toga mjesta vrlo mali verzor amplitude $P(t)$ promijenio svoj smjer gotovo za π . Dok je kod $A_1 \neq A_2$ frekvencija verzora amplitude $P(t)$ prema mirnom verzoru nepravilna — spomenuli smo frekventnu modulaciju — ona će, naprotiv, u slučaju $A_1 = A_2$ biti između dva fazna skoka konstantna, t. j. $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ i to radi toga, što su označeni kut α i kut 2α , koji raste

jednoliko, pridruženi obodni i središnji kutovi. Znači, dakle, da će na vremenskoj liniji, zamišljeni nesmanjeni verzor amplitude $(A_1 + A_2)$ dati harmoničku funkciju, kod koje će na mjestu „faznog skoka“ postojati uistinu diskontinuitet za π .*) Naravno, da kod samog treptaja ne će biti diskontinuiteta, jer se skok zbiva s amplitudom nula, te će titraj verzora s amplitudom nula uvijek imati vrijednost nula bez obzira na „smjer“ takvog verzora. Međutim, obzirom na diferencijalni kvocijent, nije svejedno pod kakvim se okolnostima događa taj „fazni skok“.

Na sl. 31. neka je u položaju verzora amplitude $P(t)$ označenim na vršku s I, vremenska linija u položaju, označenim s I t. j. okomita na verzor. Znači, da sam treptaj prolazi kroz nulu. Dotična točka označena je lijevo na treptaju, također s I. Njegov diferencijalni kvocijent u toj točki je negativan. U času „faznog skoka“ nalazi se vremenska linija u položaju II, t. j. u istom pravcu s verzorom amplitude $P(t)$, koji je tada jednak nuli. Titraj zamišljenog amplitudno nesmanjenog verzora, koji, naravno, također leži u tom pravcu, prelazi iz svoje minimalne vrijednosti u maksimalnu. Verzor diferencijalnog kvocijenta, koji se u tom času također pokriva sa smjerom vremenske linije, ima uz $A_1 = A_2 = A$ amplitudu $\omega_2 A - \omega_1 A$.

Drugi ekstremni slučaj nastaje prema sl. 32., t. j. kad je u času „faznog skoka“ vremenska linija okomita na verzor amplitude $P(t)$, koji prolazi kroz nulu, kao i na zamišljeni neskraćeni verzor, te na verzor diferencijalnog kvocijenta. Znači, dakle, da tada prolazi kroz nulu ne samo treptaj, nego i njegov diferencijalni kvocijent.

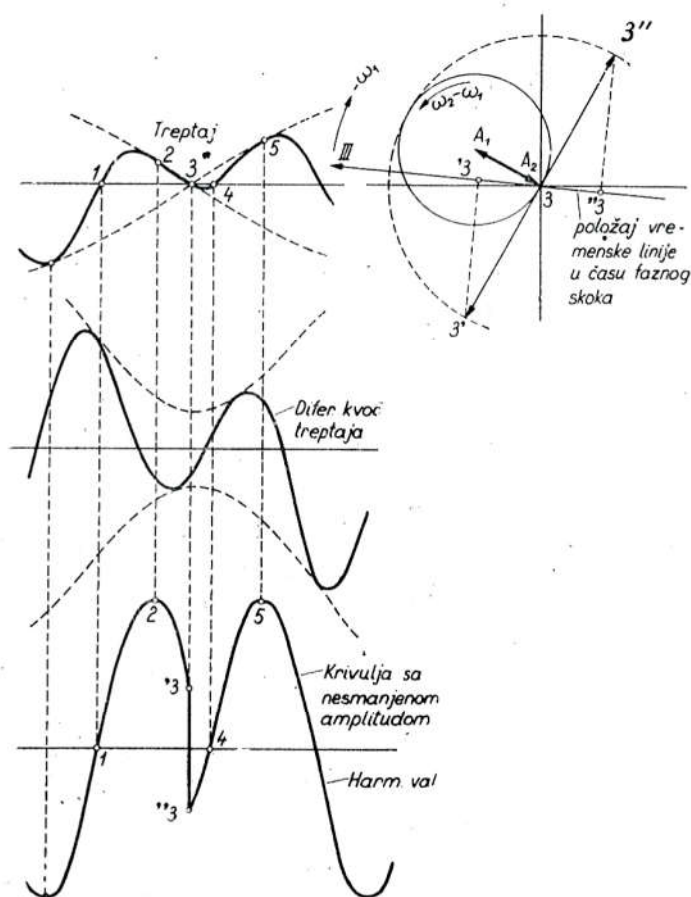
*) Kod $A_1 \neq A_2$ ne nastupa nikad fazni skok, ali je — kako smo naprijed spomenuli — frekvencija verzora amplitude $P(t)$ nepravilna, te popratna krivulja s nesmanjenom amplitudom nije harmoničan val, kod kojega prolazi kroz nulu i ekstremi slijede u jednakim vremenskim intervalima, nego je slična valu na sl. 112., dolje.



Slika 32.

Ako imamo na pr. dva simetrična vezana neprigušena električna kruga bez prisutnosti vanjskog napona, množina elektricitete, a prema tome i struja kao njena vremenska derivacija, u svakom krugu, bit će predstavljena treptajem. U prvom navedenom slučaju za vrijeme faznog skoka ne će u dotičnom krugu biti električne energije, ali će biti magnetske, dok u drugom slučaju ne će biti ni jedne ni druge i krug će biti potpuno prazan t. j. bez energije. To će na pr. biti u slučaju t. zv. potpune izmjene energije, dakle kad sva energija prelazi naizmjenice iz kruga u krug.

Osim ova dva ekstremna slučaja, postoje još slučajevi, kad se prema sl. 33. u času „faznog skoka“ vremenska linija nalazi u nekom općenitom položaju, t. j. pod nekim kutom prema verzoru amplitude $P(t)$, koji upravo prolazi kroz nulu. Naravno, da u tom slučaju diferencijalni kvocijent ne može biti jednak nuli, jer mu verzor leži u istom pravcu kao i verzor amplitude $P(t)$.



Slika 33.

Naveli smo, da je treptaj općenito tim bolje izražen, što je $(\omega_2 - \omega_1)$ manje prema ω_1 , odnosno ω_2 , jer će u tom slučaju za vrijeme jedne periode dodirnice biti mnogo bregova i dolova.

Ako bi bilo na pr. $A_1 \gg A_2$, te $(\omega_2 - \omega_1)$ što veće od ω_1 , odnosno što bliže ω_2 , vremenska linija u svakom periodu dodirnice ne bi se pokrivala s verzorom amplitude $P(t)$ odnosno ne bi na nj bila okomita. To znači, da treptaj ne bi u svakoj periodi dodirnice dodirivao dodirnicu ili prolazio kroz

Koliko je valova, t. j. bregova i dolova između dva uzastopna fazna skoka? Verzor amplitude $P(t)$ okreće se prema mirnom verzoru kutnom brzinom $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$, a prema vremenskoj liniji pridolazi još ω_1 , dakle

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} + \omega_1 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}.$$

Vrijeme između dva fazna skoka je $\frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$ t. j. kad komponentni verzor, koji se okreće, opiše čitavu kružnicu. Kroz to vrijeme verzor amplitude $P(t)$ opiše prema vremenskoj liniji kut

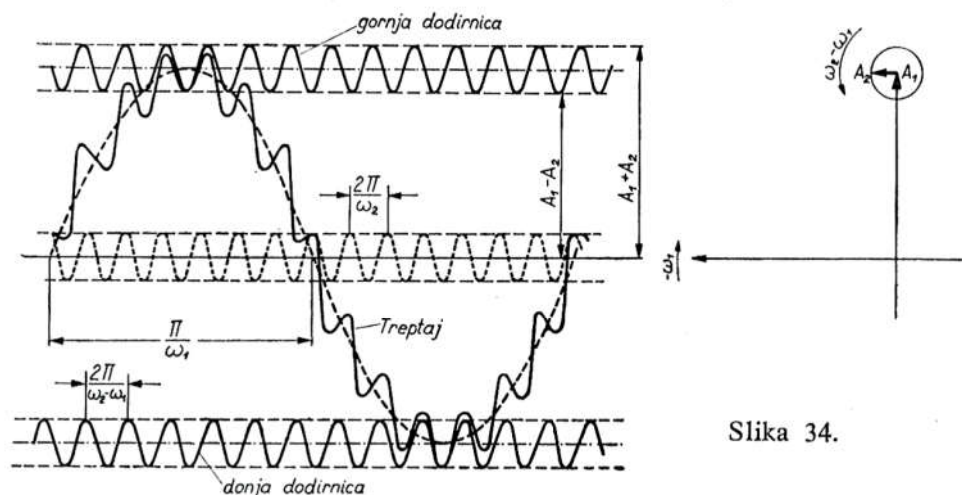
$$\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Ako taj kut podijelimo s 2π koliko odgovara jednom cijelom valu, dobit ćemo broj

$$\text{valova t. j. } \frac{\omega_2 + \omega_1}{2(\omega_2 - \omega_1)}.$$

nulu — on bi prema sl. 34. degenerirao. Uz $A_1 \ll A_2$ u tom slučaju za vrijeme periode dodirnice praktično bismo dobili samo jedan val.

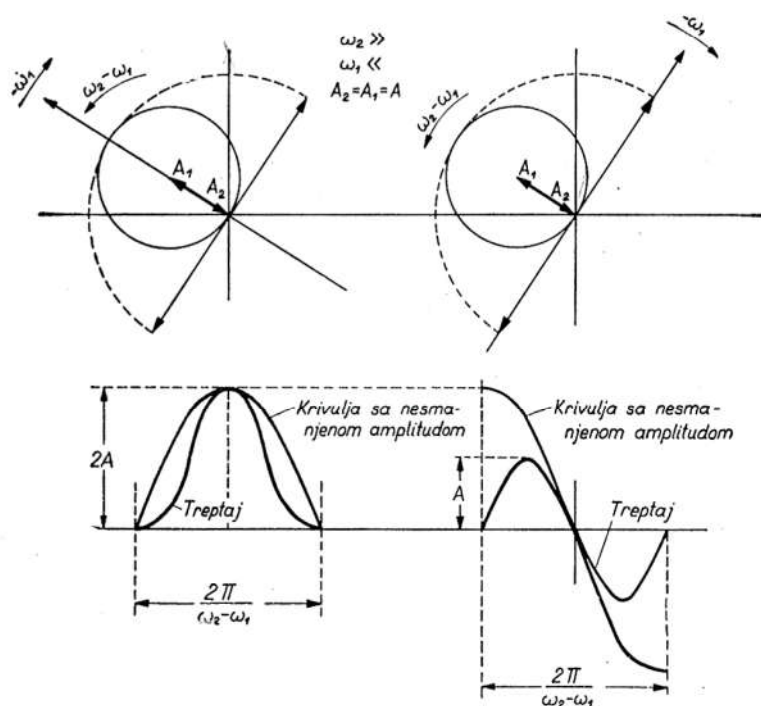
Kod $A_1 = A_2 = A$ razmotrit ćemo dva granična slučaja, i to između dva fazna skoka. U prvom slučaju, prema sl. 35. lijevo, neka se vremenska linija po-



Slika 34.

kriva sa smjerom mirnog verzora amplitude $A_1 = A_2 = A$. Neka $\omega_1 \rightarrow 0$, tako, da možemo smatrati, da vremenska linija gotovo miruje. Nacrtan je sâm treptaj i njemu pripadni harmonički poluval amplitude $2A$, koji bi nastao pri nesma-

njenoj amplitudi. Sâm treptaj je kombinacija harmoničkog cijelog vala amplitude A i konstante A . U drugom slučaju, prema sl. 35. desno, neka je vremenska linija okomita na smjer mirnog verzora. Sada bi treptaj bio harmonički cijeli val amplitude A , dok bi pri nesmanjenoj amplitudi nastao harmonički poluval amplitude $2A$. Između dva fazna skoka, nastao je, dakle, treptaj, koji ima izgled cijelog harmoničkog vala, odnosno kombinacije cijelog vala i konstante, ali je uistinu adekvatan samo jednom poluvalu, što se vidi i iz



Slika 35.

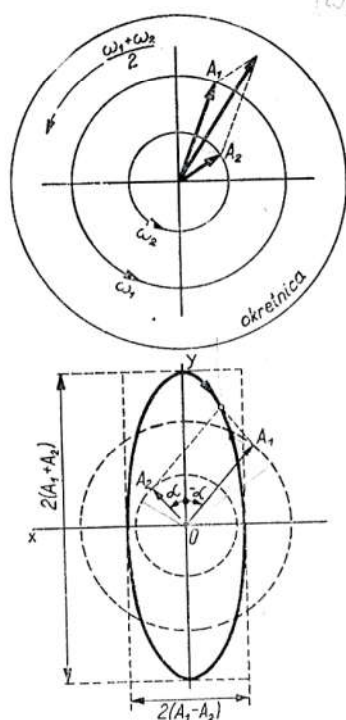
krivulje s nesmanjenom amplitudom. To je u skladu s prije navedenom formulom o broju valova između dva fazna skoka $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2(\omega_2 - \omega_1)}$, koja kod $\omega_1 \rightarrow 0$ prima vrijednost $\frac{1}{2}$.

Zamislamo, prema sl. 36., da se nalazimo na okretnici, koja rotira stalnom kutnom brzinom $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Tada će jedan verzor rotirati relativno prema nama s

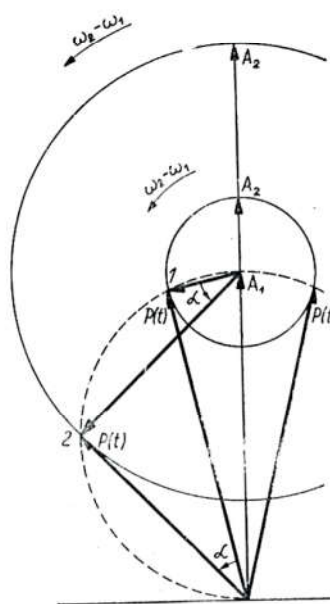
$$\omega_2 - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2},$$

a drugi s

$$\omega_1 - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = -\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}.$$



Slika 36.



Slika 37.

Ako je $\omega_2 > \omega_1$ rotirat će A_2 nalijevo, a A_1 nadesno. U početku neka se oba verzora pokrivaju. Vršak rezultante opisat će na okretnici krivulju s ovim koordinatama:

$$y = A_1 \cos(-\alpha) + A_2 \cos \alpha$$

$$x = A_1 \sin(-\alpha) + A_2 \sin \alpha$$

$$y^2 = (A_1 + A_2)^2 \cos^2 \alpha$$

$$x^2 = (A_2 - A_1)^2 \sin^2 \alpha = (A_1 - A_2)^2 \sin^2 \alpha$$

$$\frac{y^2}{(A_1 + A_2)^2} + \frac{x^2}{(A_1 - A_2)^2} = 1.$$

To je elipsa s velikom osi $2(A_1 + A_2)$ i malom osi $2(A_1 - A_2)$.

Ako je $A_1 > A_2$ onda se elipsa opisuje s lijeva na desno, a ako je $A_1 < A_2$ onda s desna na lijevo. Kod $A_1 = A_2 = A$ elipsa degenerira u pravac i tada ćemo imati — što nam je već poznato — verzor konstantne brzine t. j. $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, naime brzine okretnice, ali promjenljive amplitude, koja će iznositi

$$2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t.$$

To je isto kao i kod prijašnjeg verzorskog prikaza, gdje je promjenljivi verzor jednak u ovom slučaju

$$\begin{aligned} \sqrt{2A^2 + 2A^2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t} &= A \sqrt{2 + 2\cos(\omega_2 - \omega_1)t} = \\ &= A \sqrt{2 \sin^2 \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} + 2 \cos^2 \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} + 2 \left[\cos^2 \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} - \sin^2 \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \right]} = \\ &= 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t. \end{aligned}$$

Ovdje vrlo dobro vidimo, kako verzor kod prolaza kroz nulu mijenja svoj smjer, t. j. nastupa fazni skok.

Pola elipse bit će opisano za vrijeme $\frac{\pi}{\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$, što zna-

mo, da je perioda dodirnice. Čitava elipsa odgovara dakle dvjema periodama dodirnice.

Prema sl. 37. promotrit ćemo odnose kod kojih nastupa najveća fazna promjena verzora amplitude $P(t)$, ako amplituda verzora A_2 raste počevši od vrlo malene vrijednosti do veličine amplitude A_1 . Neka je kod toga

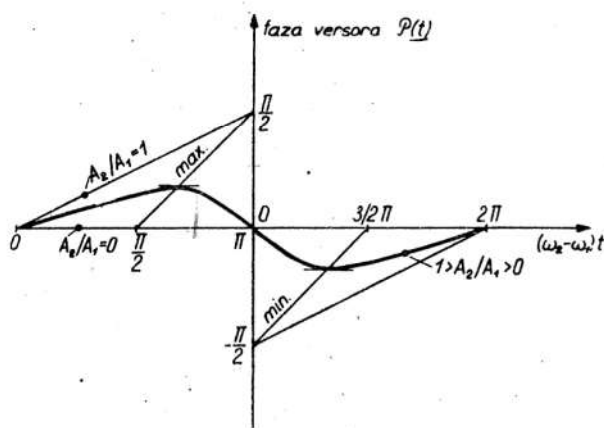
$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

Kod vrlo malenog A_2 , koji ide prema nuli, upravo kod

$$(\omega_2 - \omega_1)t = \frac{\pi}{2}$$

nastala bi najveća promjena faze, koja bi također išla prema nuli. Što amplituda A_2 jače raste, tim će kasnije doći do najveće promjene faze. Tangenta na kružnicu s dotičnim radiusom A_2 je drugi krak kuta najveće fazne promjene. Sva dirališta tih tangenata leže na polukružnici promjera A_1 t. j. gdje ta polukružnica siječe

kružnice dotičnih radiusa A_2 , budući da je polukružnica geometrijsko mjesto svih pravih kutova, kojih krakovi prolaze krajevima verzora amplitude A_1 . Kako se vidi, oba kuta označena s α kao obodni kutovi nad istim lukom, međusobno



Slika 38.

su jednaki. To znači, da ako verzor amplitude A_2 poraste tako, da mu se amplituda poveća od $A_1 1$ do $A_1 2$, on će do svog novog položaja u kojem nastaje maksimum fazne promjene, morati opisati upravo toliki dodatni kut α za koliko je porastao i taj maksimum, odnosno, da se u pripadnom dijagramu prema sl. 38., svi maksimumi i minimumi nalaze na pravcima nagnutim pod kutom od 45° . Znamo, da kod $A_1 = A_2$ promjenljivi verzor kruži konstantnom kutnom brzinom $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ i da mu se prema tome, naravno, i faza mijenja linearno sve do svoje maksimalne promjene $\frac{\pi}{2}$, kad nastaje fazni skok od $\frac{\pi}{2}$ do $-\frac{\pi}{2}$, i to kod $(\omega_2 - \omega_1)t = \pi$.

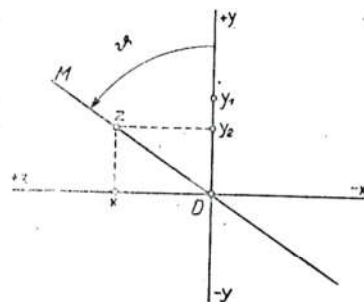
3. DVA MEĐUSOBNO OKOMITA TITRAJA I NJIHOV FAZNI POMAK

Ako, prema sl. 39., neka točka D izvodi titraj u smjeru y t. j. $y_1 = y(\omega t)$, a u isti čas neka čitava ravnina izvodi titranje istom frekvencijom u smjeru M t. j. $z = z(\omega t)$, uvijek ćemo ta dva titraja moći svesti na dva međusobno okomita titraja na taj način, što ćemo z rastaviti na komponente $y_2' = z \cos \vartheta$ i $x = z \sin \vartheta$. Sada ćemo y_2' pribrojiti k y_1 budući da su to titraji iste frekvencije u istom pravcu titranja. Dobit ćemo dva međusobno okomita titraja iste frekvencije.

Prema tome, ako smo odabrali pogodan početak brojenja $t = 0$, imat ćemo na pr.

$$x = A \sin \omega t$$

$$y = B \sin(\omega t + \varphi)$$



Slika 39.

Amplitude A i B su općenito različite, dok je kut φ uvjetovan međusobno nezavisnim fazama obaju komponentnih titraja $y(\omega t)$ te $z(\omega t)$. Prema tome, uz $\sin \omega t = \frac{x}{A}$ slijedi:

$$y = B(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) = B\left(\frac{x}{A} \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi\right).$$

$$\cos \omega t = \frac{y}{B \sin \varphi} - \frac{x}{A} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

$$\left(\frac{y}{B \sin \varphi} - \frac{x}{A} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1.$$

$$\frac{x^2}{A^2} \left(1 + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\right) + \frac{y^2}{B^2 \sin^2 \varphi} - \frac{2xy \cos \varphi}{AB \sin^2 \varphi} = 1.$$

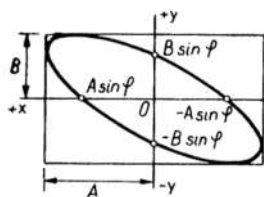
Budući da je

$$\left(1 + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\right) = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

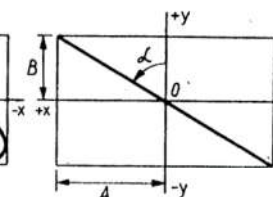
to će biti

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy \cos \varphi}{AB} = \sin^2 \varphi.$$

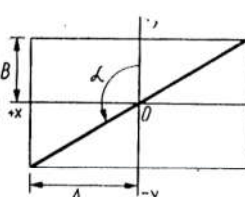
To je jednačba elipse prema sl. 40., čije su osi kose prema osima koordinatnog sistema x , odnosno y . Elipsa je smještena u pravokutniku sa stranicama $2A$ i $2B$, jer su A i B najveće vrijednosti pojedinog titraja. Kod $y = 0$ bit će $x = \pm A \sin \varphi$, a kod $x = 0$ bit će $y = \pm B \sin \varphi$. Na temelju oscilograma



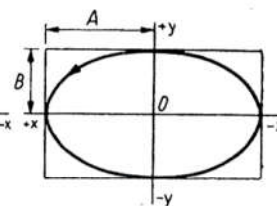
Slika 40.



Slika 41.



Slika 42.



Slika 43.

takvih dvaju okomitih titraja t. j. navedene elipse, iz izmjerenih dužina $A \sin \varphi$ odnosno $B \sin \varphi$ možemo lako pronaći kut φ . Na pr. u električnim krugovima fazni pomak i odnos amplituda dvaju izmjeničnih napona možemo odrediti tako, da ih dovedemo na okomite otklonske sisteme jednog osciloskopa. Ukoliko su ti naponi izazvani istom strujom u serijskom spoju poznatog otpora R_1 i impedancije $R_2 + j\omega L$ ili $R_2 + \frac{1}{j\omega C}$ možemo pronaći parametre impedancije.

Specijalni slučajevi:

$\alpha.$) $\varphi = 0$. Znači, da je $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$.

Prema tome je

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = 0.$$

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \quad \text{ili} \quad y = \frac{B}{A}x$$

Vidi sl. 41., gdje je

$$\tan \alpha = \frac{A}{B}$$

$\beta.$) $\varphi = \pi$. Znači, da je $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = -1$

Prema tome je

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2xy}{AB} = 0$$

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \quad \text{ili} \quad y = -\frac{B}{A}x$$

Vidi sl. 42., gdje je

$$\tan \alpha = -\frac{A}{B}$$

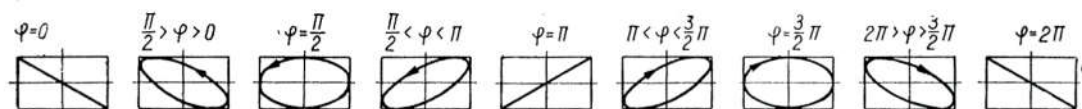
γ.) $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Znači, da je $\sin \varphi = 1$, $\cos \varphi = 0$.

Prema tome je

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Vidi sl. 43. Kako je $x = A \sin \omega t$, to će kod porasta kuta ωt od 0 do $\frac{\pi}{2}$ iznos za x rasti od 0 do A , dok će $y = B \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ padati od B do 0; prema tome će smjer, kojim se elipsa opisuje, biti s desna na lijevo.

δ.) $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Sada bi dobili istu elipsu kao kod γ.) samo opisanu u obratnom smjeru, budući da će se kod porasta x od 0 do A iznos y mijenjati od $-B$ do 0.

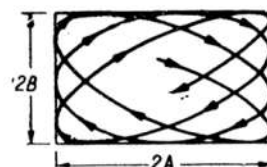


Slika 44.

Na sl. 44. nacrtane su razne forme za sve moguće fazne pomake. Ako je $A = B$, onda namjesto elipse dobivamo kružnicu.

Do sada smo promatrali slučajeve, kad oba titraja imaju iste frekvencije, a sada ćemo preći na slučajeve, kad im se frekvencije razlikuju.

Ako se frekvencije ne odnose kao cijeli brojevi, ne ćemo dobiti krivulju čvrstog oblika, kako se to vidi na sl. 45. Zatvorene ili otvorene krivulje stalnog oblika, koje ne mijenjaju neprestano svoju formu, dobit ćemo pri dvjema frekvencijama, koje se odnose kao cijeli brojevi. Po učenjaku, koji ih je opisao, nazivamo ih „Lissajous-ovim figurama“.



Slika 45.

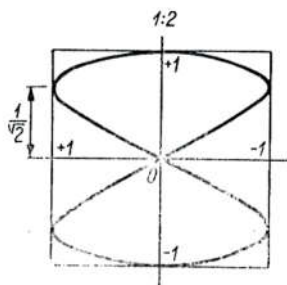
Na pr. $y = \sin \omega t$, $x = \sin 2\omega t = 2 \sin \omega t \cos \omega t = 2y \sqrt{1-y^2}$. To je prema sl. 46. dvostruka petlja. Budući da su obje amplitude jednake jedinici, a sinus ekstremno može biti ± 1 , to znači, da će se petlja nalaziti unutar nacrtanog kvadrata sa stranicama jednako 2. Omjer frekvencija je 1:2, te vidimo, da petlja dira vertikalnu stranicu kvadrata dva puta, a horizontalnu jedamput. To je stoga, što u vremenu, kad titraj y izvede jednu svoju periodu (dakle dosegne dva ekstrema $+1$ i -1), titraj x izvede dvije svoje periode (t. j. dosegne četiri ekstrema $+1$, -1 , $+1$ i -1).

Uzet ćemo slijedeći primjer:

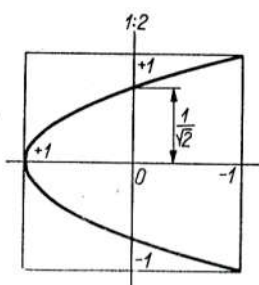
$$y = \sin \omega t$$

$$x = \sin\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t = 1 - 2\sin^2 \omega t = 1 - 2y^2$$

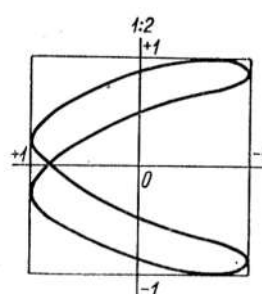
Ovdje je, prema sl. 47. lijevo, nastala jedna otvorena krivulja, koja se ima ipak shvatiti kao zatvorena s time, da se povratni dio krivulje potpuno pokriva s polaznim dijelom. Kad bi na pr. bilo $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ dobili bismo krivulju prema sl. 47. desno. Vidimo, da su sada nastala dva dirališta s verti-



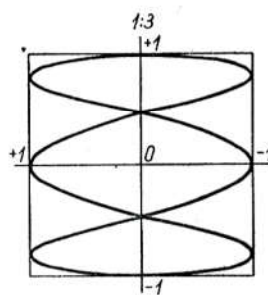
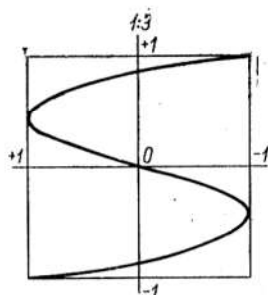
Slika 46.



Slika 47.



kalnom stranicom, a jedno s horizontalnom, shodno omjeru frekvencija 1:2. Kod $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ova krivulja prelazi u naprijed navedenu krivulju. Prema tome kod



Slika 48.

„otvorene“ krivulje završna točka ima se smatrati kao jedno diralište, a točka unutar „otvorene“ krivulje, koja dira stranicu, kao dva dirališta.

Imamo slijedeće titraje u omjeru frekvencija 1:3

$$y = \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} x &= \sin 3 \omega t = \sin(2 \omega t + \omega t) = \sin 2 \omega t \cos \omega t + \cos 2 \omega t \sin \omega t = \\ &= 2 \sin \omega t \cos^2 \omega t + \cos^2 \omega t \sin \omega t - \sin^2 \omega t \sin \omega t = \\ &= 3 \sin \omega t \cos^2 \omega t - \sin^3 \omega t = 3 \sin \omega t (1 - \sin^2 \omega t) - \sin^3 \omega t = \\ &= 3y(1 - y^2) - y^3 = 3y - 4y^3. \text{ Vidi sl. 48 lijevo.} \end{aligned}$$

Neka je kod istoga omjera 1:3

$$y = \cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}$$

odnosno iz toga

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{1-y^2}$$

te nadalje

$$x = \sin 3 \omega t$$

što je prema prijašnjem

$$x = 3 \sin \omega t - 4 \sin^3 \omega t$$

ili

$$x = 3 (\pm \sqrt{1-y^2}) - 4 (\pm \sqrt{1-y^2}) (1-y^2) = \pm \sqrt{1-y^2} (3-4+4y^2)$$

$$x^2 = (1-y^2)(4y^2-1)^2$$

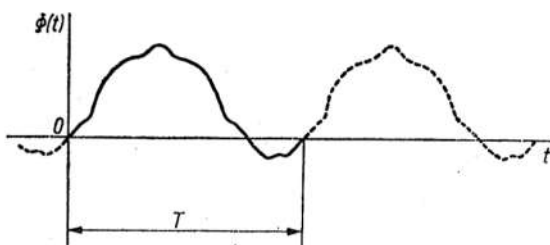
Vidi sl. 48. desno.

4. FOURIEROV RED PERIODIČKE FUNKCIJE

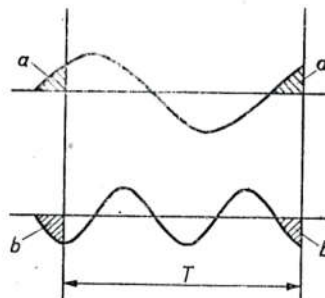
a) Matematički izvod. Praktični dokaz za Fourierov red

Prema sl. 49. zadana je periodička funkcija $\Phi(t)$ s periodom $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Funkcija se prostire od $t = -\infty$ do $t = +\infty$. Pozitivni smjer apscisne osi Cartesiusovog koordinatnog sistema uzeli smo, kao što je to uobičajeno, na desno, što međutim, ne treba zamijeniti s pozitivnim smjerom pravca titranja, koji je zbog izabranog pozitivnog smjera okretanja verzora, išao na lijevo.



Slika 49

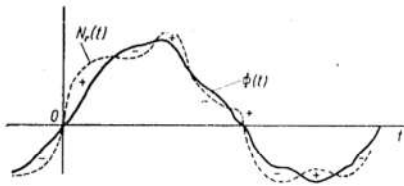


Slika 50.

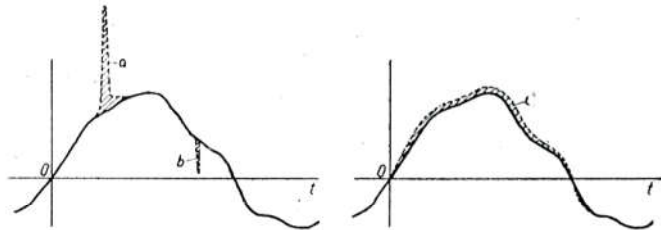
Proučit ćemo uz koje uvjete se ta funkcija može nadomjestiti adicijom kombinacijom niza harmoničkih valova i jednog konstantnog člana. Budući da su odnosi unutar svih perioda isti, proučavat ćemo samo jednu periodu. Pređočit ćemo na pr. funkciju sinusovom kombinacijom s time, da će „osnovni“ sinusov val imati „osnovnu“ frekvenciju, koja je jednaka frekvenciji same funkcije t. j. $\omega = \frac{2\pi}{T}$, a svi ostali sinusovi nadvalovi imat će više frekvencije, koje su multiplumi osnovne frekvencije t. j. $2\omega, 3\omega, 4\omega$ i t. d. Osnovna frekvencija je, dakle, najmanja frekvencija niza. Radi toga je razumljivo, da će se unutar jedne periode nalaziti jedan cijeli brijeg i jedan cijeli dol osnovnog vala, dva cijela brijega i dva cijela dola drugog nadvala, tri cijela brijega i tri cijela dola trećeg nadvala i t. d. Kod toga je na pr. u pogledu površine, naravno, svejedno

da li ti valovi istovremeno s funkcijom $\Phi(t)$ prolaze kroz nulu odn., da li imaju prema njoj neki fazni pomak, budući da se prema sl. 50. eventualni „manjak“ u početku nadoknađuje pri koncu periode. Kod svakog se vala, u vremenu, koje odgovara trajanju nekog cijelog broja njegovih perioda, moraju pojaviti sve vrijednosti cijele periode, i to upravo toliko puta, koliko je to vrijeme multiplum trajanja jedne njegove periode.

Iz ovoga slijedi, da je integral svih komponentnih sinusovih valova, protegnut na vrijeme jedne periode T , jednak nuli. S druge strane, naravno, integral naše zadane funkcije $\Phi(t)$, protegnut na jednu svoju periodu, ne će općenito imati vrijednost jednako nuli, nego jednako nekoj čvrstoj vrijednosti. Ako tu vrijednost podijelimo s trajanjem periode T , dobit ćemo već spomenuti konstantni član K_0 . Da bismo, međutim, originalnu funkciju mogli uistinu nadomjestiti adicijom kombinacijom konstante K_0 i niza sinusovih valova, mora se ta kombinacija u svakoj točki što bolje prilagoditi funkciji $\Phi(t)$, za što, naravno, još nedostaje već ispunjeni uvjet jednakosti obaju integrala protegnutih na T . Daljnji i konačni uvjet za što bolje prilagođenje, ispunit



Slika 51.



Slika 52.

ćemo pomoću jedine još otvorene mogućnosti t. j. u tu svrhu pronaći ćemo shodne amplitude sinusovih valova. Razumljivo bi bilo pitanje, da li se adekvatnost originalne funkcije i niza izvjesnih jednostavnijih funkcija ne postizava i drugačijim načinom, a ne upravo Fourierovom metodom t. j. adiranjem konstante i sinusovih valova. Uistinu to je moguće, ali je matematički dokazano, da je Fourierova kombinacija takoreći prirodna, jer kod r članova daje najbolje moguće prilagođenje, i jer kod povećanja broja članova na $(r + 1)$ članova, prijašnji r članovi ostaju nepromijenjeni, a prilagođenje uslijed novopridošlog člana postaje bolje.

Prema tome, naš nadomjesni niz glasi:

$$N_r(t) = K_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$

$$K_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(t) dt.$$

Kako ćemo pronaći najbolje prilagođenje $N_r(t)$ i $\Phi(t)$? Na prvi pogled reklo bi se, da će to biti onda, kad prosjek pogrešaka, uzetih s predznakom

kroz jednu periodu (prema sl. 51.), bude što manji t. j.

$$\frac{1}{T} \int_0^T [\Phi(t) - N_r(t)] dt \rightarrow 0.$$

Međutim, odmah je jasno, da to nije tako, jer bi u tom slučaju, na pr. prilagođenje neke harmoničke funkcije i apscisne osi, bilo apsolutno, budući da je zbroj njihovih diferencija kroz periodu, uzetih s pripadnim predznakom, jednak nuli.

Bolje bi bilo, kad bismo uzeli apsolutnu vrijednost pogrešaka, t. j. bez obzira na predznak, dakle,

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\Phi(t) - N_r(t)| dt \rightarrow 0$$

No tim načinom ne bismo još uzeli u obzir eventualnu neravnomjernu raspodjelu pogrešaka, jer bi na pr. prema sl. 52., uz $(a+b)=c$, gdje smo sve površine uzeli kao pozitivne, oba prilagođenja bila ocijenjena kao istovrijedna. Jača odstupanja od originalne funkcije treba, dakle, u našem zahtjevu i jače naglasiti. To ćemo postići izrazom:

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T [\Phi(t) - N_r(t)]^2 dt \rightarrow 0$$

Kao što već znamo, možemo pisati

$$N_r(t) = K_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + \dots + C_r \cos r\omega t + \\ + S_1 \sin \omega t + S_2 \sin 2\omega t + \dots + S_r \sin r\omega t,$$

gdje je $C_1 = A_1 \sin \varphi_1$ te $S_1 = A_1 \cos \varphi_1$. Prema tome je

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T [\Phi(t) - K_0 - C_1 \cos \omega t - S_1 \sin \omega t - \dots - C_r \cos r\omega t - S_r \sin r\omega t]^2 dt$$

Kvadrat polinoma je zbroj kvadrata svakog pojedinog člana plus zbroj svih dvostrukih umnožaka svakog člana sa svakim od ostalih članova. Kod tih dvostrukih umnožaka dvaju članova nailazimo na slijedeće integrale:

$$2 \int_0^T K_0 C_n \cos n\omega t dt = 0 \quad \text{za } n = 1, 2, 3, \dots, r$$

budući da je

$$\left(\sin n\omega \frac{2\pi}{\omega} - \sin n\omega \cdot 0 \right) = 0$$

Analogno je

$$2 \int_0^T K_0 S_n \sin n\omega t dt = 0 \quad \text{za } n = 1, 2, 3, \dots, r$$

budući da je

$$-\left(\cos n\omega \frac{2\pi}{\omega} - \cos n\omega \cdot 0\right) = 0$$

Nadalje je

$$2 \int_0^T C_\mu \cos \mu \omega t S_\nu \sin \nu \omega t dt = 0$$

za sve vrijednosti cijelih brojeva μ i ν od 1 do r . Integral se izračunava na pr. parcijalnom integracijom upotrebljenom dva puta ili nadomještavanjem izraza

$$2 \cos \mu \omega t \sin \nu \omega t = \sin(\mu \omega t + \nu \omega t) - \sin(\mu \omega t - \nu \omega t).$$

Dalje imamo

$$2 \int_0^T C_\mu \cos \mu \omega t C_\nu \cos \nu \omega t dt = 0$$

za sve vrijednosti cijelih brojeva $\mu \neq \nu$. Integral se izračunava parcijalnom integracijom ili nadomještavanjem izraza

$$2 \cos \mu \omega t \cos \nu \omega t = \cos(\mu \omega t + \nu \omega t) + \cos(\mu \omega t - \nu \omega t).$$

Analogno je

$$2 \int_0^T S_\mu \sin \mu \omega t S_\nu \sin \nu \omega t dt = 0$$

za sve vrijednosti cijelih brojeva $\mu \neq \nu$. I tu dolazimo do cilja parcijalnom integracijom odnosno nadomještavanjem izraza

$$2 \sin \mu \omega t \sin \nu \omega t = \cos(\mu \omega t - \nu \omega t) - \cos(\mu \omega t + \nu \omega t).$$

Prema tome, preostali su svi kvadrati, kao i svi dvostruki umnošci, u kojima je jedan od faktora $\Phi(t)$, jer nam ta funkcija nije pobliže definirana, pa integrale u kojima dolazi ne možemo izračunati.

Sada imamo:

$$\begin{aligned} h = & \frac{1}{T} \int_0^T [\Phi^2(t) + K_0^2 + C_1^2 \cos^2 \omega t + S_1^2 \sin^2 \omega t + \dots + C_r^2 \cos^2 r \omega t + \\ & + S_r^2 \sin^2 r \omega t - 2\Phi(t)K_0 - 2\Phi(t)C_1 \cos \omega t - 2\Phi(t)S_1 \sin \omega t - \dots - \\ & - 2\Phi(t)C_r \cos r \omega t - 2\Phi(t)S_r \sin r \omega t] dt \end{aligned}$$

Od ovih integrala dadu se izračunati još neki.

$$\frac{1}{T} \int_0^T C_r^2 \cos^2 r \omega t dt = \frac{C_r^2}{2}.$$

Integral se izračuna na pr. parcijalnom integracijom ili supstitucijom

$$\cos^2 r \omega t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2r \omega t).$$

Analogno je

$$\frac{1}{T_0} \int_0^T S_r^2 \sin^2 r \omega t dt = \frac{S_r^2}{2}.$$

Parcijalna integracija, odnosno supstitucija

$$\sin^2 r \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2 r \omega t).$$

Nadalje je

$$-\frac{1}{T_0} \int_0^T 2 \Phi(t) K_0 dt = -2 K_0 \frac{1}{T_0} \int_0^T \Phi(t) dt = -2 K_0^2$$

Konačno dobivamo

$$\begin{aligned} h = & \frac{1}{T_0} \int_0^T \Phi^2(t) dt + K_0^2 + \frac{C_1^2}{2} + \frac{S_1^2}{2} + \dots + \frac{C_r^2}{2} + \frac{S_r^2}{2} - 2 K_0^2 - \\ & - \frac{2 C_1}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \cos \omega t dt - \frac{2 S_1}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \sin \omega t dt - \dots - \frac{2 C_r}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \cos r \omega t dt - \\ & - \frac{2 S_r}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \sin r \omega t dt. \end{aligned}$$

Taj izraz će kod prilagođenja biti minimum. Radi toga potražiti ćemo ekstreme t. j.

$$\frac{\partial h}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial S_1} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial C_r} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial S_r} = 0.$$

Prema tome slijedi

$$\frac{2 C_1}{2} - \frac{2}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \cos \omega t dt = 0$$

ili

$$\begin{aligned} C_1 = \frac{2}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \cos \omega t dt &= \frac{2}{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Phi(t) \cos \omega t dt = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Psi'(\omega t) \cos(\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi'(x) \cos x dx. \end{aligned}$$

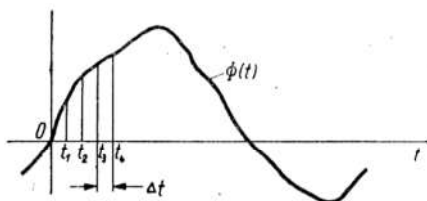
Analogno je

$$S_1 = \frac{2}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \sin \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi'(x) \sin x dx$$

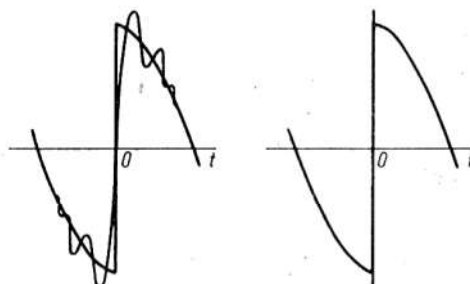
$$C_r = \frac{2}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \cos r \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi'(x) \cos r x dx$$

$$S_r = \frac{2}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \sin r \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi'(x) \sin r x dx.$$

Izrazi $C_1, S_1, \dots, C_r$, te S_r nazivaju se Fourierovi koeficijenti. Funkcija, $\Psi(\omega t) = \Psi(x)$ je naravno općenitija, nego $\Phi(t)$, jer je zajednički izraz za neizmjerne niz funkcija, od kojih svaka unutar svoje periode sadrži iste vrijednosti kao i ostale unutar njihovih perioda i u istom međusobnom odnosu. Prema tome je $\Psi(x)$ zajednička funkcija vremenski „rastegnutih“ i „suženih“ ali inače istih funkcija.



Slika 53.



Slika 54.

Kod eksperimentalno dobivenih periodičkih krivulja možemo Fourierove koeficijente odrediti tako, da diferencijale prema sl. 53. zamijenimo diferencijama t. j. da trajanje periode podijelimo na r jednakih dijelova (na pr. 20 ili 24). Tada je

$$C_n = \frac{2}{T} \int_0^T \Phi(t) \cos n \omega t dt = \frac{2}{T} [\Phi(t_1) \cos n \omega t_1 + \Phi(t_2) \cos n \omega t_2 + \dots + \Phi(t_r) \cos n \omega t_r] \Delta t.$$

Analogno bismo izračunali i S_n . Na tome se temelji t. zv. harmonička analiza.

Prema dobivenim rezultatima možemo sada pisati

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi^2(t) dt - K_0^2 + \frac{C_1^2}{2} + \frac{S_1^2}{2} + \dots + \frac{C_r^2}{2} + \frac{S_r^2}{2} - C_1 C_1 - S_1 S_1 - \dots - C_r C_r - S_r S_r = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi^2(t) dt - K_0^2 - \frac{C_1^2}{2} - \frac{S_1^2}{2} - \dots - \frac{C_r^2}{2} - \frac{S_r^2}{2}.$$

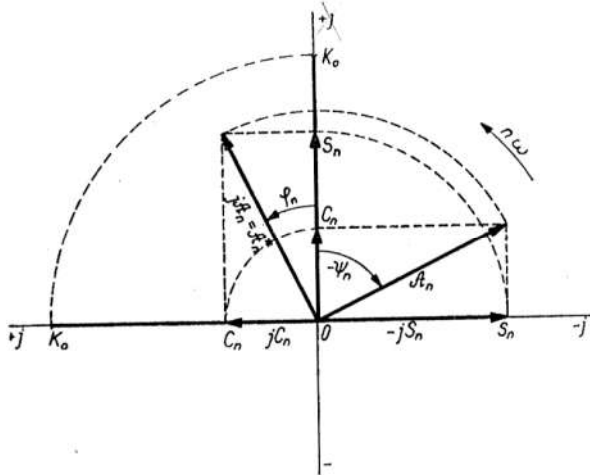
Pronašli smo Fourierove koeficijente t. j. amplitude komponentnih cosinusovih i sinusovih valova iz jednadžbi, koje uvjetuju ekstrem vrijednosti h . Sada treba dokazati, da se kod tog ekstrema zaista radi o minimumu. Da to dokažemo pretpostaviti ćemo, da bi minimum bio povoljniji, dakle bliže nuli, kad bismo u jednadžbu za vrijednost h umjesto dobivenih Fourierovih koeficijenata $C_1, S_1, \dots, C_r$ te S_r uveli neke vrijednosti $C_1^* = (C_1 + c_1)$, $S_1^* = (S_1 + s_1)$, $\dots$, $C_r^* = (C_r + c_r)$ te $S_r^* = (S_r + s_r)$. Kod toga zasada nismo ništa pobliže

odredili, da li su ti dodaci $c_1, s_1, \dots, c_r$ te s_r pozitivni ili negativni. Umjesto h sada ćemo dobiti neku vrijednost h^* t. j.

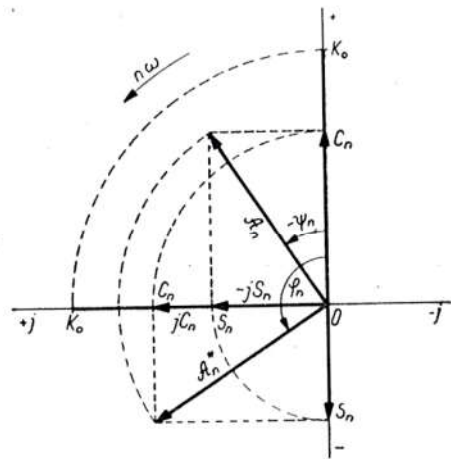
$$\begin{aligned}
 h^* &= \frac{1}{T_0} \int_0^T \Phi^2(t) dt - K_0^2 + \frac{(C_1 + c_1)^2}{2} + \frac{(S_1 + s_1)^2}{2} + \dots + \frac{(C_r + c_r)^2}{2} + \\
 &+ \frac{(S_r + s_r)^2}{2} - (C_1 + c_1) \frac{2}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \cos \omega t dt - (S_1 + s_1) \frac{2}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \sin \omega t dt - \dots - \\
 &- (C_r + c_r) \frac{2}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \cos r \omega t dt - (S_r + s_r) \frac{2}{T_0} \int_0^T \Phi(t) \sin r \omega t dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^T \Phi^2(t) dt - K_0^2 + \frac{C_1^2}{2} + C_1 c_1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{S_1^2}{2} + S_1 s_1 + \frac{s_1^2}{2} + \dots + \\
 &+ \frac{C_r^2}{2} + C_r c_r + \frac{c_r^2}{2} + \frac{S_r^2}{2} + S_r s_r + \frac{s_r^2}{2} - (C_1 + c_1) C_1 - (S_1 + s_1) S_1 - \dots - \\
 &- (C_r + c_r) C_r - (S_r + s_r) S_r = \frac{1}{T_0} \int_0^T \Phi^2(t) dt - K_0^2 - \frac{C_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{2} - \frac{S_1^2}{2} + \frac{s_1^2}{2} - \\
 &- \dots - \frac{C_r^2}{2} + \frac{c_r^2}{2} - \frac{S_r^2}{2} + \frac{s_r^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Prema tome je

$$h^* = h + \frac{c_1^2}{2} + \frac{s_1^2}{2} + \dots + \frac{c_r^2}{2} + \frac{s_r^2}{2}.$$



Slika 55.



Slika 56.

Izraz za h kao integral kvadrata diferencije je pozitivan, a isto tako su pozitivni $\frac{c_1^2}{2}, \frac{s_1^2}{2}, \dots, \frac{c_r^2}{2}$, te $\frac{s_r^2}{2}$, bez obzira na predznak od $c_1, s_1, \dots, c_r$, te s_r , i prema tome je $h^* > h$. Iz toga slijedi, da bilo koji drugi uvedeni izrazi, osim Fourierovih koeficijenata, povećavaju h , koji je kod upotrebe Fourierovih koeficijenata minimalan, dakle, tada je prilagođenje najbolje.

Ako nam je zadana neka periodička funkcija, koja ima unutar periode konačan broj konačnih skokova, a inače je svagdje glatka i konačna, na mjestima diskontinuiteta nastat će t. zv. Gibbsov pojav. Na sl. 54. lijevo nacrtana je originalna funkcija i funkcija, koja nastaje, ako se zbroji samo nekoliko prvih članova Fourierovog niza. U blizini mjesta diskontinuiteta — kao što se vidi — nastaju oscilacije toga nadomjesnog zbroja oko same funkcije. Ako povećamo broj članova, te će se oscilacije sve gušće zbijati u horizontalnom smjeru prema tom mjestu, ali u vertikalnom smjeru se ne će smanjivati, nego će zadržati izvjesnu vrijednost tako, da bismo konačno dobili sl. 54. desno.

Fourierov red možemo predložiti pomoću verzora u Gaussovoj ravlini. Tada događaj možemo dvojako interpretirati t. j. kao da se zbiva na realnoj ili na imaginarnoj osi. Ako se zbiva na realnoj osi, prema sl. 55., tada će biti

$$\Phi(t) = K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \psi_n) = K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \psi_n \cos n\omega t + A_n \sin \psi_n \sin n\omega t) = K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\omega t + S_n \sin n\omega t),$$

gdje je

$$C_n = A_n \cos \psi_n, \quad S_n = A_n \sin \psi_n, \quad \psi_n = \arctg \frac{S_n}{C_n}$$

Kod pozitivnih S_n i C_n biti će ψ_n pozitivno, a $-\psi_n$ negativno. Prema tome će biti

$$\Phi(t) = \mathcal{R}e[K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n e^{jn\omega t}]$$

gdje je

$$\mathcal{A}_n = C_n - jS_n = \frac{2}{T} \int_0^T [\Phi(t) \cos n\omega t - j\Phi(t) \sin n\omega t] dt = \frac{2}{T} \int_0^T \Phi(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

Ako se titraj zbiva na imaginarnoj osi bit će:

$$j\Phi(t) = j \left[K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left(n\omega t - \psi_n + \frac{\pi}{2} \right) \right] = j \left[K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \right]$$

gdje je $\frac{\pi}{2} = \varphi_n + \psi_n$. Dalje je

$$\begin{aligned} j\Phi(t) &= j \left[K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos \varphi_n \sin n\omega t) \right] = \\ &= j \left[K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\omega t + S_n \sin n\omega t) \right] \end{aligned}$$

pri čemu je

$$C_n = A_n \sin \varphi_n, \quad S_n = A_n \cos \varphi_n, \quad \varphi_n = \arctg \frac{C_n}{S_n}.$$

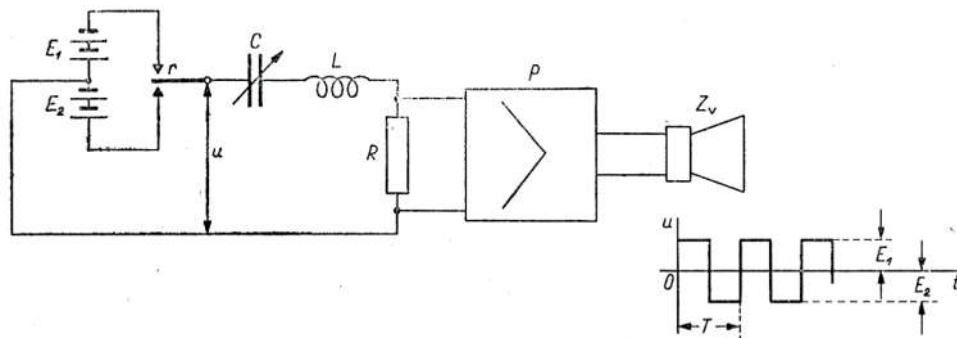
Stoga će biti

$$\Phi(t) = \mathcal{I}m[jK_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n^* e^{jn\omega t}]$$

gdje je

$$\mathcal{A}_n^* = j\mathcal{A}_n = j[C_n - jS_n] = jC_n + S_n.$$

Na sl. 55. prepostavili smo pozitivni C_n i S_n . Ako bi, međutim, C_n bilo na pr. pozitivno, a S_n negativno, onda bi prema sl. 56. C_n odnosno jC_n nanijeli kao i prije, dok bi negativni S_n trebalo nanijeti na negativnu stranu realne osi, i zatim $-jS_n$, koje bi bilo pozitivno, na pozitivnu stranu imaginarnarne osi. Kut $\psi_n = \frac{\pi}{2} - \varphi_n$ bio bi negativan, a $-\psi_n$ pozitivan. Ovdje bi upozorili na jednu malu nedosljednost. U načelu velikim latinskim slovima označujemo amplitude i one verzore, koji imaju fazu nula, dakle, koji u $t = 0$ leže u pozi-



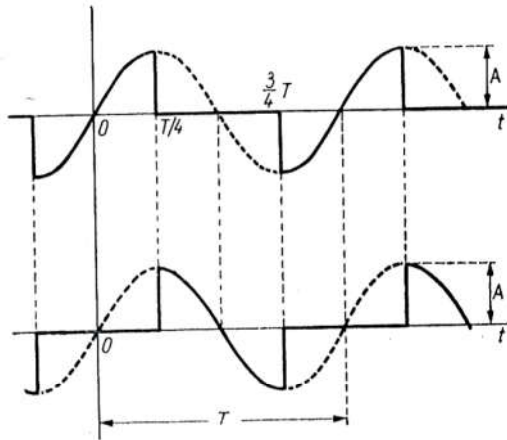
Slika 57.

tivnom dijelu realne osi. Međutim, na isti način kako se vidi, obilježili smo i S_n , koji je imao fazu π t. j. negativni predznak. To smo učinili zbog toga, da zadržimo jedinstvo s prijašnjim analitičkim dedukcijama, gdje S_n i C_n znače obične pozitivne ili negativne koeficijente i nemaju attribute verzora, koje oni zadobivaju tek u kompleksnoj ravni.

Praktično bismo mogli dokazati pojedine članove Fourierovog reda uređajem, koji je u principu nacrtan na sl. 57. Sa P je označeno pojačalo, a sa Z_v zvučnik.

Relej r uključuje istosmjerne napone E_1 i E_2 . Na taj način serijski titrajni krug uključen je na napon u , koji ima pravokutan oblik, kako je to nacrtano desno dolje. Taj napon u ima osnovnu harmoničku $\omega = \frac{2\pi}{T}$ i više harmoničke, kojih su frekvencije multiplumi od ω . Amplituda osnovne harmoničke napona neka je A_1 , druge harmoničke A_2 , treće A_3 i t. d. U titrajnom krugu poteći će struja iste periode T , a njena osnovna harmonička imat će naravno frekvenciju ω , dok će više harmoničke imati iste frekvencije kao i više harmoničke napona. Međutim, serijski titrajni krug ima — kako ćemo to kasnije proučavati — to svojstvo, da naročito dobro propušta t. zv. rezonantnu frekvenciju $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, a ostale da potiskuje. To će biti izraženo tim jače, što je omski otpor R , koji možemo udesiti po volji, manji, odnosno što je — kako se to kaže — rezonancija „oštrija“. Mijenjajući kontinuirano kapacitet kondenzatora C , mijenjamo, naravno, neprestano i rezonantnu frekvenciju titrajnog kruga, pa kad kod toga nađemo na osnovnu harmoničku ili na više harmoničke napona, poteći će u tom času praktično uzevši čista sinusova struja upravo te frekvencije i amplitude $\frac{A_1}{R}$, odnosno $\frac{A_2}{R}$, $\frac{A_3}{R}$ i t. d. — već prema

tome o kojoj se harmoničkoj radi. Ostale frekvencije — iako naravno postoje — bit će praktično radi „oštre“ rezonancije neprimjetljive, t. j. njihove amplitude bit će vrlo malene. U zvučniku Zv začut ćemo dotični sinusov ton. Frekvencije tih tonova bit će ω , odnosno multiplumi te osnovne frekvencije. U međupoložajima promjenljivog kapaciteta C , kad se dakle rezonantna frekvencija titrajnog kruga ne bi podudarala ni s jednom frekvencijom naših harmoničkih, ne bi čuli jaki sinusov ton, nego slabi šum, jer titrajni krug ne bi jako istaknuo ni jednu frekvenciju, te bi se istovremeno slabo čulo nekoliko frekvencija.



Slika 58.

b) Izračunati primjeri

Treba pronaći Fourierov red zadane periodičke funkcije prema sl. 58. gore, koja je nastala, ako se vrijednosti sinusa u intervalu od $\frac{T}{4}$ do $\frac{3T}{4}$ zamijene s vrijednosti nula.

$$C_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} A \sin \omega t \cos n \omega t dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{3T}{4}}^T A \sin \omega t \cos n \omega t dt = 0.$$

U intervalu od $\frac{T}{4}$ do $\frac{3T}{4}$ integral ima vrijednost nula, jer je tada funkcija jednaka nuli.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} A \sin \omega t \sin n \omega t dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{3T}{4}}^T A \sin \omega t \sin n \omega t dt = \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} [\cos(1-n)\omega t - \cos(1+n)\omega t] dt + \frac{A}{T} \int_{\frac{3T}{4}}^T [\cos(1-n)\omega t - \cos(1+n)\omega t] dt = \\ &= \frac{A}{T(1-n)\omega} \sin(1-n)\omega t \Big|_0^{\frac{T}{4}} - \frac{A}{T(1+n)\omega} \sin(1+n)\omega t \Big|_0^{\frac{T}{4}} + \\ &+ \frac{A}{T(1-n)\omega} \sin(1-n)\omega t \Big|_{\frac{3T}{4}}^T - \frac{A}{T(1+n)\omega} \sin(1+n)\omega t \Big|_{\frac{3T}{4}}^T = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\pi(1-n)} \sin(1-n)\omega \frac{2\pi}{4\omega} - \frac{A}{2\pi(1-n)} \sin(1-n)\omega \cdot 0 - \\
&- \frac{A}{2\pi(1+n)} \sin(1+n)\omega \frac{2\pi}{4\omega} + \frac{A}{2\pi(1+n)} \sin(1+n)\omega \cdot 0 + \\
&+ \frac{A}{2\pi(1-n)} \sin(1-n)\omega \frac{2\pi}{\omega} - \frac{A}{2\pi(1-n)} \sin(1-n)\omega \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega} - \\
&- \frac{A}{2\pi(1+n)} \sin(1+n)\omega \frac{2\pi}{\omega} + \frac{A}{2\pi(1+n)} \sin(1+n)\omega \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega} = \\
&= \frac{A}{2\pi(1-n)} \left[\sin(1-n) \frac{\pi}{2} - \sin(1-n)\omega \cdot 0 + \sin(1-n) 2\pi - \right. \\
&- \left. \sin(1-n) \frac{3}{2} \pi \right] - \frac{A}{2\pi(1+n)} \left[\sin(1+n) \frac{\pi}{2} - \sin(1+n)\omega \cdot 0 + \right. \\
&+ \left. \sin(1+n) 2\pi - \sin(1+n) \frac{3}{2} \pi \right].
\end{aligned}$$

Za lihe n bit će izraz jednak nuli, izuzevši $n=1$, kad prvi adend zadobiva oblik $\frac{0}{0}$. Radi toga je prema L'Hospitalu

$$\begin{aligned}
&\lim_{(1-n) \rightarrow 0} \frac{A \sin(1-n) \frac{\pi}{2} + \sin(1-n) 2\pi - \sin(1-n) \frac{3}{2} \pi}{2\pi(1-n)} = \\
&= \frac{A}{2\pi} \lim_{(1-n) \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} \cos(1-n) \frac{\pi}{2} + 2\pi \cos(1-n) 2\pi - \frac{3}{2} \pi \cos(1-n) \frac{3}{2} \pi}{1} = \\
&= \frac{A}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi - \frac{3}{2} \pi \right) = \frac{A}{2}.
\end{aligned}$$

Za $n=2$ bit će

$$S_2 = -\frac{A}{2\pi} [-1-1] - \frac{A}{2\pi \cdot 3} [-1-1] = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{3\pi} = \frac{4A}{3\pi}$$

Za $n=4$ bit će

$$S_4 = -\frac{A}{2\pi \cdot 3} [1-1] - \frac{A}{2\pi \cdot 5} [1-1] = -\frac{A}{3\pi} - \frac{A}{5\pi} = -\frac{8A}{15\pi}$$

Za $n=6$ bit će

$$S_6 = \frac{A}{5\pi} + \frac{A}{7\pi} = \frac{12A}{35\pi}$$

i t. d.

Red glasi

$$A \left[\frac{\sin \omega t}{2} + \frac{4 \sin 2 \omega t}{3 \pi} - \frac{8 \sin 4 \omega t}{15 \pi} + \frac{12 \sin 6 \omega t}{35 \pi} - \frac{16 \sin 8 \omega t}{63 \pi} + \dots \right]$$

Za funkciju prema sl. 58. dolje bilo bi

$$C_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} A \sin \omega t \cos n \omega t dt = 0$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} A \sin \omega t \sin n \omega t dt = \frac{A}{T(1-n)\omega} \sin(1-n)\omega t \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} - \\ &- \frac{A}{T(1+n)\omega} \sin(1+n)\omega t \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} = \frac{A}{2\pi(1-n)} \left[\sin(1-n) \frac{3}{2} \pi - \sin(1-n) \frac{\pi}{2} \right] - \\ &- \frac{A}{2\pi(1+n)} \left[\sin(1+n) \frac{3}{2} \pi - \sin(1+n) \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Za lihe n je izraz jednak nuli osim za $n=1$, kad prvi adend zadobiva neodređeni oblik $\frac{0}{0}$. Radi toga je prema L'Hospitalu

$$\begin{aligned} \lim_{(1-n) \rightarrow 0} \frac{A \sin(1-n) \frac{3}{2} \pi - \sin(1-n) \frac{\pi}{2}}{2\pi(1-n)} &= \\ = \lim_{(1-n) \rightarrow 0} \frac{A \frac{3}{2} \pi \cos(1-n) \frac{3}{2} \pi - \frac{\pi}{2} \cos(1-n) \frac{\pi}{2}}{2\pi} &= \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Za $n=2$ bit će $S_2 = -\frac{4A}{3\pi}$, za $n=4$ bit će $S_4 = \frac{8A}{15\pi}$ i t. d.

Prema tome red glasi

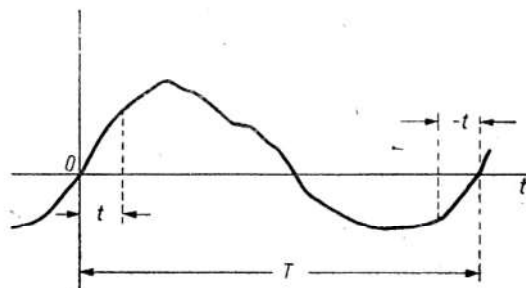
$$A \left[\frac{\sin \omega t}{2} - \frac{4 \sin 2 \omega t}{3 \pi} + \frac{8 \sin 4 \omega t}{15 \pi} - \frac{12 \sin 6 \omega t}{35 \pi} + \frac{16 \sin 8 \omega t}{63 \pi} - \dots \right]$$

Ako zbrojimo oba reda, dobivamo $A \sin \omega t$, t. j. sinusoidu kroz čitavu periodu T .

c) Metoda preklapanja periodičke funkcije

Među periodičkim funkcijama nailazimo na takve funkcije, koje su simetrične obzirom na ordinatnu os, kao i na takve, koje su centralno simetrične obzirom na ishodište. One, koje su simetrične obzirom na ordinatnu os, zovu se take (ili parne) funkcije i kod njih je $\tau(-t) = \tau(+t)$. One, koje su centralno simetrične obzirom na ishodište, zovu se lihe (ili neparne) funkcije i kod njih je $\lambda(-t) = -\lambda(+t)$. Take funkcije mogu se sastojati samo od cosinusovih članova, jer je cosinus taka funkcija, a lihe samo od sinusovih članova, jer je sinus liha funkcija. Tom spoznajom ćemo se ubuduće poslužiti.

Kod izračunavanja Fourierovih koeficijenata, zbog bržeg postupka, mnogo puta možemo korisno upotrebiti t. zv. preklapanje funkcije oko njene vrijednosti u polovini integracionog puta.



Slika 59.

Prije toga ćemo se sjetiti, da je

$$\cos n \omega t = \cos n \omega (T - t) = \cos n \omega \left(\frac{2\pi}{\omega} - t \right) = \cos (n 2\pi - n \omega t).$$

Dalje je

$$\sin n \omega t = -\sin n \omega (T - t) = -\sin n \omega \left(\frac{2\pi}{\omega} - t \right) = -\sin (n 2\pi - n \omega t).$$

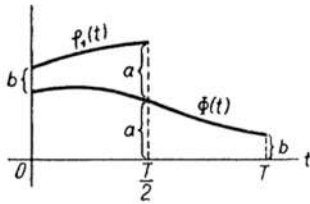
Sada ćemo pristupiti izračunavanju naših koeficijenata pomoću prvog preklapanja te ćemo izraz za C_n pronaći integriranjem samo od 0 do $\frac{T}{2}$. Najprije ćemo izračunati C_n pribiranjem diferencijalnih paralelograma, napredujući pritom vremenski podjednako s oba kraja funkcije, tako, da u isti čas dođemo do vremenske sredine prema sl. 59. Smjer pribiranja označili smo strelicom.

$$C_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \Phi(t) \cos n \omega t dt + \frac{2}{T} \int_T^{\frac{T}{2}} \Phi(T-t) \cos n \omega (T-t) \cdot -dt$$

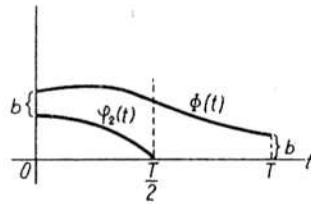
Ispred diferencijala je u drugom adendu minus, jer je smjer pribiranja takav, da se t umanjuje napredovanjem od donje granice prema gornjoj. Sada ćemo drugi integral preklopiti oko $\frac{T}{2}$. Donja granica preklapljenog integrala postat će 0, a gornja će ostati $\frac{T}{2}$, dok će diferencijal, radi sad preokrenutog smjera pribiranja, postati pozitivan.

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \Phi(t) \cos n \omega t dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \Phi(T-t) \cos n \omega (T-t) dt = \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \Phi(t) \cos n \omega t dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \Phi(T-t) \cos n \omega t dt = \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} [\Phi(t) + \Phi(T-t)] \cos n \omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi_1(t) \cos n \omega t dt
\end{aligned}$$

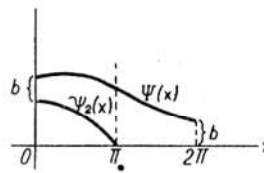
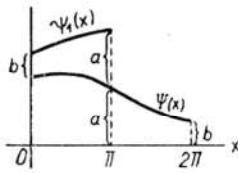
Funkcija $\varphi_1(t)$, koja se dobiva zbrajanjem preklapljenih polovina funkcije $\Phi(T-t)$ s nepromijenjenom prvom polovinom te funkcije, vidi se na sl. 60. gore.



Slika 60.



Slika 61.



Slika 62.

Da nam je umjesto funkcije $\Phi(t)$ zadana funkcija $\Psi(x)$, dobili bismo na isti način pribiranjem od 0 do π , te od 2π do π uz

$$\cos nx = \cos(n2\pi - nx)$$

prema sl. 60. dolje

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\Psi(x) + \Psi(2\pi - x)] \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi_1(x) \cos nx dx.$$

Za S_n postupili bismo analogno, t. j.

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \Phi(t) \sin n \omega t dt + \frac{2}{T} \int_T^{\frac{T}{2}} \Phi(T-t) \sin n \omega (T-t) dt = \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \Phi(t) \sin n \omega t dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \Phi(T-t) \sin n \omega (T-t) dt = \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} [\Phi(t) - \Phi(T-t)] \sin n \omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi_2(t) \sin n \omega t dt.
\end{aligned}$$

Radi dobivanja funkcije $\varphi_2(t)$ vidi sl. 61. gore.

Na temelju funkcije $\Psi(x)$ uz

$$\sin nx = -\sin(n2\pi - nx)$$

došli bismo na isti način do izraza

$$S_n = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\pi [\Psi(x) - \Psi(2\pi - x)] \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\pi \psi_2(x) \sin nx \, dx.$$

Na sl. 61. dolje vidi se kako smo došli do funkcije $\psi_2(x)$.

Skraćivanje integracionog puta možemo i dalje nastaviti pomoću daljnjih preklapanja. Proučit ćemo još drugo preklapanje, gdje ćemo integrirati od 0 do $\frac{T}{4}$, odnosno od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Razumije se, da se ovo preklapanje ne će više odnositi na početne funkcije $\Phi(t)$ odnosno $\Psi(x)$, nego na funkcije $\varphi_1(t)$, odnosno $\varphi_2(t)$, te na $\psi_1(x)$ i $\psi_2(x)$. Prije toga ćemo se još sjetiti, da je

$$\cos n\omega t = \cos n\omega \left(\frac{T}{2} - t \right) = \cos n\omega \left(\frac{2\pi}{2\omega} - t \right) = \cos(n\pi - n\omega t),$$

ako je n tako,

$$\cos n\omega t = -\cos n\omega \left(\frac{T}{2} - t \right) = -\cos n\omega \left(\frac{2\pi}{2\omega} - t \right) = -\cos(n\pi - n\omega t),$$

ako je n liho,

$$\sin n\omega t = -\sin n\omega \left(\frac{T}{2} - t \right) = -\sin n\omega \left(\frac{2\pi}{2\omega} - t \right) = -\sin(n\pi - n\omega t),$$

ako je n tako,

$$\sin n\omega t = \sin n\omega \left(\frac{T}{2} - t \right) = \sin n\omega \left(\frac{2\pi}{2\omega} - t \right) = \sin(n\pi - n\omega t),$$

ako je n liho.

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi_1(t) \cos n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \varphi_1(t) \cos n\omega t \, dt + \\ &+ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{4}} \varphi_1\left(\frac{T}{2} - t\right) \cos n\omega \left(\frac{T}{2} - t\right) \cdot -dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \varphi_1(t) \cos n\omega t \, dt + \\ &+ \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \varphi_1\left(\frac{T}{2} - t\right) \cos n\omega \left(\frac{T}{2} - t\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \left[\varphi_1(t) + (-1)^n \varphi_1\left(\frac{T}{2} - t\right) \right] \cos n\omega t \, dt. \end{aligned}$$

Prema tome znači, da će se preklopljeni integral kod takih n pribrajati, a kod lihih n odbijati od integrala nepreklopljenog dijela funkcije.

Da nam je polazni izraz bio

$$C_n = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\pi \psi_1(x) \cos nx \, dx$$

upotreбили bismo jednakžbe $\cos nx = \cos n(\pi - x)$ kod takih n , odnosno $\cos nx = -\cos n(\pi - x)$ kod lihih n , te bismo na isti način došli do izraza

$$C_n = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\psi_1(x) + (-1)^n \psi_1(\pi - x)] \cos nx \, dx.$$

Analogno je

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi_2(t) \sin n \omega t \, dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T}{4}} \varphi_2(t) \sin n \omega t \, dt + \\ &+ \frac{2}{T_0} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{4}} \varphi_2\left(\frac{T}{2} - t\right) \sin n \omega \left(\frac{T}{2} - t\right) \cdot -dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T}{4}} \varphi_2(t) \sin n \omega t \, dt + \\ &+ \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T}{4}} \varphi_2\left(\frac{T}{2} - t\right) \sin n \omega \left(\frac{T}{2} - t\right) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T}{4}} \left[\varphi_2(t) - (-1)^n \varphi_2\left(\frac{T}{2} - t\right) \right] \sin n \omega t \, dt \end{aligned}$$

Ovdje će se preklapljeni integral kod takog n odbijati, a kod lihog pribrajati nepreklopljenom integralu.

Kod polaznog izraza

$$S_n = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\pi} \psi_2(x) \sin nx \, dx$$

upotreбили bismo jednakžbe

$$\sin nx = -\sin n(\pi - x)$$

kod takih n , te

$$\sin nx = \sin n(\pi - x)$$

kod lihih n . Tada bi bilo:

$$S_n = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\psi_2(x) - (-1)^n \psi_2(\pi - x)] \sin nx \, dx.$$

d) Primjeri izračunati metodom preklapanja

Zadan je pravokutni titraj prema sl. 62. Treba naći Fourierov red pomoću preklapanja funkcije. Prvo preklapanje daje $\psi_1(x) = 0$. Prema tome je $C_n = 0$, dakle red ne sadrži cosinuse, što je i razumljivo, jer je funkcija liha. Ima samo sinusove članove.

$$\psi_2(x) = [\Psi(x) - \Psi(2\pi - x)] = 2H$$

za sve vrijednosti od 0 do π . Radi toga je:

$$S_n = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\pi} 2H \sin nx \, dx = -\frac{2H}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi}.$$

Za take n bilo bi to

$$-\frac{2H}{n\pi} [1 - 1] = 0,$$

dakle funkcija ne sadrži sinuse takih multipluma od x . Za liho n bilo bi

$$-\frac{2H}{n\pi} [-1 - 1] = \frac{4H}{n\pi}.$$

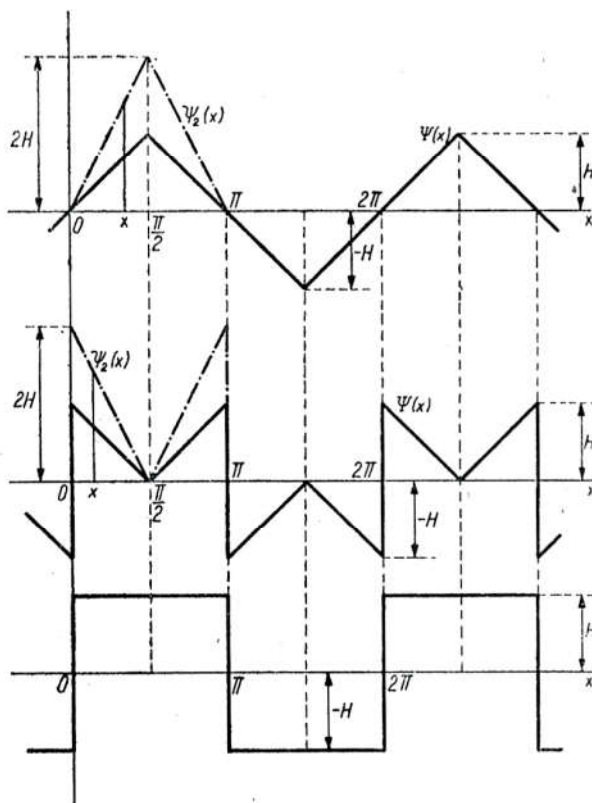
Radi toga red glasi

$$\Psi(x) = \frac{4H}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right],$$

odnosno uvrštavanjem $x = \omega t$

$$\Phi(t) = \frac{4H}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right].$$

Međutim, treba paziti, da kod deriviranja ne bismo eventualno derivirali $\frac{d\Psi(x)}{dx}$ i tada u rezultatu nadomjestili $x = \omega t$, budući da to, naravno, ne bi bilo $\frac{d\Phi(t)}{dt}$.



Slika 63.

Mogli smo dobiti rezultat i pomoću drugog preklapanja t. j.

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\psi_2(x) - (-1)^n \psi_2(\pi - x)] \sin nx \, dx$$

Za take n će to biti jednako nuli, budući da je u uglatoj zagradi $[2H - 2H]$.
Za lihe n imat ćemo

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4H \sin nx \, dx = -\frac{4H}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4H}{n\pi} [0 - 1] = \frac{4H}{n\pi},$$

dakle, isto kao i prije.

Treba pronaći Fourierov red funkcije prema sl. 63. gore pomoću prvog preklapanja. Vidimo, da je $\psi_1(x) = 0$ i radi toga $C_n = 0$. Između 0 i $\frac{\pi}{2}$ zbog sličnosti trokuta vrijedi, da je

$$\psi_2(x) : x = 2H : \frac{\pi}{2}$$

iz čega je

$$\psi_2(x) = \frac{4Hx}{\pi}.$$

Između $\frac{\pi}{2}$ i π zbog sličnosti trokuta bit će

$$\psi_2(x) : (\pi - x) = 2H : \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right),$$

iz čega je

$$\psi_2(x) = \frac{2H(\pi - x)}{\frac{\pi}{2}} = 4H - \frac{4Hx}{\pi}.$$

Prema tome slijedi:

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4Hx}{\pi} \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4H \sin nx \, dx - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{4Hx}{\pi} \sin nx \, dx.$$

Parcijalnom integracijom bit će

$$\int x \sin nx \, dx = -\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx.$$

Radi toga je:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{4H}{\pi^2} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4H}{\pi n} [-\cos nx]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &\quad - \frac{4H}{\pi^2} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{2H}{\pi n} \cos n \frac{\pi}{2} + \frac{4H}{\pi^2 n^2} \sin n \frac{\pi}{2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4H}{\pi n} \cos n\pi + \frac{4H}{\pi n} \cos n \frac{\pi}{2} + \frac{4H}{\pi n} \cos n\pi - \frac{2H}{\pi n} \cos n \frac{\pi}{2} + \\
& + \frac{4H}{\pi^2 n^2} \sin n \frac{\pi}{2} = \frac{8H}{\pi^2 n^2} \sin n \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ako je n tako, onda je $S_n = 0$. Stoga je

$$\Psi'(x) = \frac{8H}{\pi^2} \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{9} + \frac{\sin 5x}{25} - \dots \right).$$

Kod funkcije prema sl. 63. sredina, bit će $\psi_1(x) = 0$. Između 0 i $\frac{\pi}{2}$ zbog sličnosti trokuta vrijedi, da je

$$\psi_2(x) : \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 2H : \frac{\pi}{2}, \quad \text{ili} \quad \psi_2(x) = 2H - \frac{4Hx}{\pi}.$$

Između $\frac{\pi}{2}$ i π vrijedi:

$$\psi_2(x) : \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 2H : \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{ili} \quad \psi_2(x) = \frac{4Hx}{\pi} - 2H.$$

Prema tome je

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2H \sin nx \, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4Hx}{\pi} \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{4Hx}{\pi} \sin nx \, dx - \\
& - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2H \sin nx \, dx = \frac{2H}{\pi n} \left[-\cos nx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4H}{\pi^2} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \\
& + \frac{4H}{\pi^2} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{2H}{\pi n} \left[-\cos nx \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{2H}{\pi n} \cos n \frac{\pi}{2} + \frac{2H}{\pi n} + \\
& + \frac{2H}{\pi n} \cos n \frac{\pi}{2} - \frac{4H}{\pi^2 n^2} \sin n \frac{\pi}{2} - \frac{4H}{\pi n} \cos n \pi + \frac{4H}{\pi^2 n^2} \sin n \pi + \frac{2H}{\pi n} \cos n \frac{\pi}{2} - \\
& - \frac{4H}{\pi^2 n^2} \sin n \frac{\pi}{2} + \frac{2H}{\pi n} \cos n \pi - \frac{2H}{\pi n} \cos n \frac{\pi}{2} = -\frac{8H}{\pi^2 n^2} \sin n \frac{\pi}{2} - \frac{2H}{\pi n} \cos n \pi + \\
& + \frac{4H}{\pi^2 n^2} \sin n \pi + \frac{2H}{\pi n}.
\end{aligned}$$

Ako je n tako, onda je $S_n = 0$. Radi toga vrijedi samo liho n , te je tada

$$S_n = \frac{4H}{\pi n} - \frac{8H}{\pi^2 n^2} \sin n \frac{\pi}{2}.$$

Red glasi

$$\Psi(x) = \frac{4H}{\pi} \left[\sin x - \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{2}{\pi} \frac{\sin 3x}{9} + \frac{\sin 5x}{5} - \frac{2}{\pi} \frac{\sin 5x}{25} + \dots \right].$$

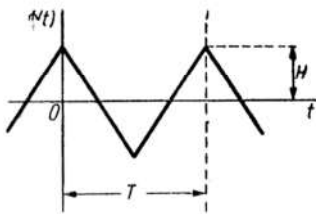
Zbrojeni Fourierovi redovi funkcija iz sl. 63. gore i u sredini daju izraz

$$\frac{4H}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right]$$

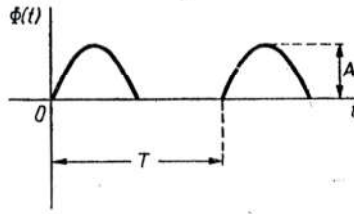
t. j. pravokutni titraj, kako se to vidi u navedenoj slici dolje.

e) Fourierovi redovi još nekih periodičkih funkcija

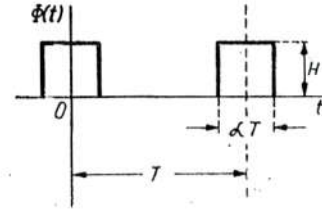
Navest ćemo Fourierove redove za slijedeće periodičke funkcije uz $\omega = \frac{2\pi}{T}$:



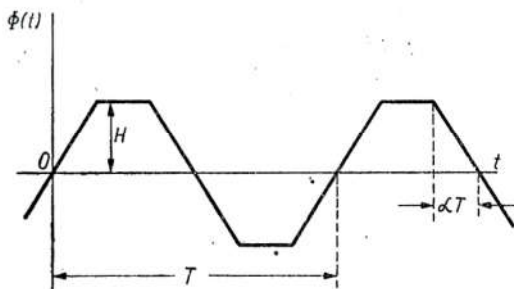
Slika 64.



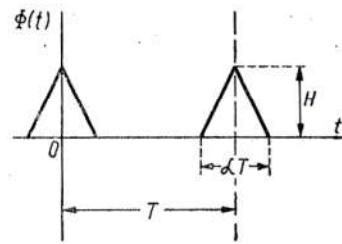
Slika 65.



Slika 66.



Slika 67.



Slika 68.

Trokutasti titraj prema sl. 64.

$$\Phi(T) = \frac{8H}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{9} + \frac{\cos 5\omega t}{25} + \dots \right)$$

Jednostavno usmjereni sinusov titraj prema sl. 65.

$$\Phi(t) = \frac{A}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \omega t - \frac{2}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t - \frac{2}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

Niz pravokutnih impulsa prema sl. 66.

$$\Phi(t) = \frac{2H}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \alpha + \sin \pi \alpha \cos \omega t + \frac{1}{2} \sin 2 \pi \alpha \cos 2 \omega t + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \sin 3 \pi \alpha \cos 3 \omega t + \dots \right)$$

Trapezni titraj prema sl. 67.

$$\Phi(t) = \frac{2H}{\pi^2 \alpha} \left(\frac{1}{1^2} \sin 2 \pi \alpha \sin \omega t + \frac{1}{3^2} \sin 6 \pi \alpha \sin 3 \omega t + \frac{1}{5^2} \sin 10 \pi \alpha \sin 5 \omega t + \dots \right)$$

Niz trokutastih impulsa prema sl. 68.

$$\Phi(t) = \frac{2H}{\pi} \left(\alpha \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi \alpha} \sin^2 \frac{\pi \alpha}{2} \cos \omega t + \frac{2}{2^2 \pi \alpha} \sin^2 2 \frac{\pi \alpha}{2} \cos 2 \omega t + \right. \\ \left. + \frac{2}{3^2 \pi \alpha} \sin^2 3 \frac{\pi \alpha}{2} \cos 3 \omega t + \dots \right).$$

f) Fourierov red u kompleksnom obliku*)

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos n \omega t + S_n \sin n \omega t] = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \frac{2}{T} \int_0^T \Phi(t) \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} dt + \right. \\ &+ \left. \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \frac{2}{T} \int_0^T \Phi(t) \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2T} \left[e^{jn\omega t} \int_0^T \Phi(t) e^{jn\omega t} dt + e^{jn\omega t} \int_0^T \Phi(t) e^{-jn\omega t} dt + \right. \right. \\ &+ e^{-jn\omega t} \int_0^T \Phi(t) e^{jn\omega t} dt + e^{-jn\omega t} \int_0^T \Phi(t) e^{-jn\omega t} dt \Big] - \\ &- \frac{1}{2T} \left[e^{jn\omega t} \int_0^T \Phi(t) e^{jn\omega t} dt - e^{jn\omega t} \int_0^T \Phi(t) e^{-jn\omega t} dt - \right. \\ &- e^{-jn\omega t} \int_0^T \Phi(t) e^{jn\omega t} dt + e^{-jn\omega t} \int_0^T \Phi(t) e^{-jn\omega t} dt \Big] \Big\} = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2T} \left[2 e^{jn\omega t} \int_0^T \Phi(t) e^{-jn\omega t} dt + 2 e^{-jn\omega t} \int_0^T \Phi(t) e^{jn\omega t} dt \right] \right\}. \end{aligned}$$

*) Ovaj naziv — iako uobičajen — nije dovoljno specifičan, jer je i simbolički oblik Fourierovog reda, koji smo prije naveli, podjednako kompleksan.

Vidimo, da su prvi adendi u izrazu pod znakom sumacije verzori, koji se okreću s $n\omega$, a drugi adendi verzori, koji se okreću s $-n\omega$. Prema tome sada frekvencije idu od $-\infty$ do $+\infty$. Radi toga je:

$$\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{A}_n}{2} e^{jn\omega t},$$

gdje je

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}_n}{2} &= \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_0^T \Phi(t) \cos(-n\omega t) dt + \right. \\ &\quad \left. + j \frac{2}{T} \int_0^T \Phi(t) \sin(-n\omega t) dt \right]. \end{aligned}$$

Za pozitivno n bit će

$$\frac{\mathcal{A}_n}{2} = \frac{1}{2} [C_n - jS_n],$$

a za negativno n bit će*

$$\frac{\mathcal{A}_n}{2} = \frac{1}{2} [C_n + jS_n].$$

Za $n = 0$ bit će

$$\frac{\mathcal{A}_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(t) dt,$$

te taj „verzor“ miruje i jednak je K_0 .

Međutim, u prednjem izvodu pošli smo od pretpostavke, da je $\Phi(t)$ realno. Radi toga se sada $\Phi(t)$ mora pokazati kao cosinusove projekcije verzora na realnoj osi, od čijeg se pozitivnog smjera — kako znamo — broje kutovi. Za povoljnu frekvenciju $n\omega$ i njoj pridruženu $-n\omega$ vrijednost titraja u času t bit će:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} [C_n - jS_n] e^{jn\omega t} + \frac{1}{2} [C_n + jS_n] e^{-jn\omega t} = \\ &= C_n \cos n\omega t + S_n \sin n\omega t = C_n \cos n\omega t + S_n \cos \left(n\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Ovaj posljednji izraz, kod kojega se kutovi uistinu broje od pozitivnog dijela realne osi, pokazuje potpuno u skladu s našim sl. 55. i 56., koje smo već proučavali, da se radi o zbroju cosinusovih titraja verzora C_n s fazom nula i verzora S_n s fazom $-\frac{\pi}{2}$, koji se okreću samo s pozitivnim $n\omega$.

Znači, dakle, da je sadašnja kompozicija od četiri verzora t. j. $\frac{1}{2} C_n$ s fazom nula, te $\frac{1}{2} S_n$ s fazom $-\frac{\pi}{2}$, koji se okreću s $n\omega$, zatim verzora $\frac{1}{2} C_n$ s fazom nula, te $\frac{1}{2} S_n$ s fazom $\frac{\pi}{2}$, koji se okreću s $-n\omega$, adekvatna cosinusovim

projekcijama od dva prije navedena verzora. Međutim, prikaz s četiri verzora polovične amplitude ipak je egzaktniji od prikaza sa samo dva verzora cijele amplitude, jer se kod četiri verzora projekcije u jednoj osi same međusobno poništavaju, dok kod dva verzora, koji služe kao „totum pro parte“, moramo tek dogovorom utvrditi u kojoj osi njihove projekcije ne vrijede.

C_n i S_n mogu biti — kako znamo — pozitivni ili negativni, te onda početne položaje verzora C_n odnosno $\pm jS_n$ treba shodno nanijeti na pozitivne ili negativne strane dotičnih osi Gaussove ravnine.

Ako se događaj zbiva na imaginarnoj osi, tada ćemo u formulu za $\Phi(t)$ umjesto $\frac{\mathcal{A}_n}{2}$ uvrstiti $\frac{\mathcal{A}_n^*}{2} = j \frac{\mathcal{A}_n}{2}$ t. j. sve ćemo zaokrenuti za $\frac{\pi}{2}$. U tom slučaju bit će

$$j\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_n^*}{2} e^{jn\omega t},$$

gdje je

$$\frac{\mathcal{A}_n^*}{2} = j \frac{1}{2} [C_n - jS_n] = \frac{1}{2} [jC_n + S_n]$$

za pozitivno n , te

$$j \frac{1}{2} [C_n + jS_n] = \frac{1}{2} [jC_n - S_n]$$

za negativno n . Nadalje je $\frac{\mathcal{A}_0^*}{2} = jK_0$.

Kod povoljnih frekvencija $n\omega$, te $-n\omega$, u času t vrijednost titraja bit će:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [jC_n + S_n] e^{jn\omega t} + \frac{1}{2} [jC_n - S_n] e^{-jn\omega t} &= j[C_n \cos n\omega t + S_n \sin n\omega t] = \\ &= j \left[C_n \sin \left(n\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + S_n \sin n\omega t \right]. \end{aligned}$$

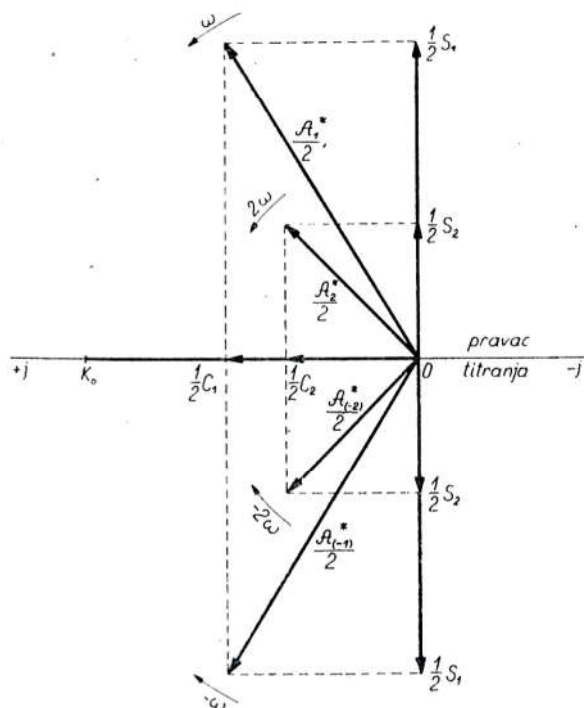
Znači, dakle, da je sada titraj uistinu na imaginarnoj osi i da predstavlja zbroj sinusovih komponenata dvaju verzora, kojih se kutovi, naravno, broje od pozitivnog dijela realne osi t. j. C_n s fazom $\frac{\pi}{2}$, te verzora S_n s fazom nula. Sl. 69. prikazuje na pr. pridružene verzore neke funkcije, koja se sastoji od konstantnog člana, prve i druge harmoničke i koja se zbiva na imaginarnoj osi.

Ako je zadana funkcija $\Psi(x)$, koja neka se zbiva na realnoj osi, onda bi Fourierov red u kompleksnom obliku imao za svoj izraz

$$\Psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{A}_n}{2} e^{jnx},$$

kod čega je

$$\frac{\mathcal{A}_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \Psi(x) e^{-jnx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(x) e^{-jnx} dx.$$



Slika 69.

Vrijednost ovog izraza je, naravno, ista kao i ona za $\Phi(t)$. Ako bi se događaj zbivao na imaginarnoj osi analogno prijašnjem bilo bi

$$\frac{\mathcal{A}_n^*}{2} = j \frac{\mathcal{A}_n}{2}.$$

g) Primjer pravokutne i pilaste funkcije u kompleksnom obliku

Zadana je pravokutna funkcija sa sl. 62.

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}_n}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi H e^{-jn x} dx + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} (-H) e^{-jn x} dx = \frac{H}{-j 2\pi n} e^{-jn x} \Big|_0^\pi + \\ &+ \frac{H}{j 2\pi n} e^{-jn x} \Big|_\pi^{2\pi} = j \frac{H}{2\pi n} [e^{-jn \pi} - 1] - j \frac{H}{2\pi n} [e^{-jn 2\pi} - e^{-jn \pi}] = \\ &= -j \frac{H}{2\pi n} + j \frac{H}{\pi n} e^{-jn \pi} - j \frac{H}{2\pi n} e^{-jn 2\pi} = -j \frac{H}{2\pi n} + j \frac{H}{\pi n} [\cos(-n\pi) + \\ &+ j \sin(-n\pi)] - j \frac{H}{2\pi n} [\cos(-2n\pi) + j \sin(-2n\pi)]. \end{aligned}$$

Ako je n pozitivno ili negativno, ali tako, onda je

$$\frac{\mathcal{A}_n}{2} = -j \frac{H}{2\pi n} + j \frac{H}{\pi n} - j \frac{H}{2\pi n} = 0.$$

Prema tome, n može biti samo liho, i to ili pozitivno ili negativno, i tada dobivamo:

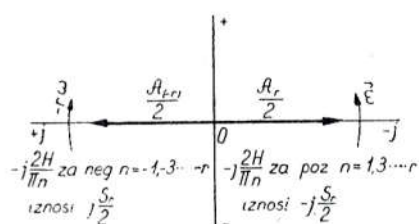
$$\frac{\mathcal{A}_n}{2} = -j \frac{H}{2\pi n} - j \frac{H}{\pi n} - j \frac{H}{2\pi n} = -j \frac{2H}{\pi n} \text{ odnosno } \frac{\mathcal{A}_n^*}{2} = \frac{2H}{\pi n}.$$

Konstanta kod $n=0$ je $K_0=0$. Sada možemo pisati Fourierov red u kompleksnom obliku s time, da se funkcija pojavljuje na realnoj osi

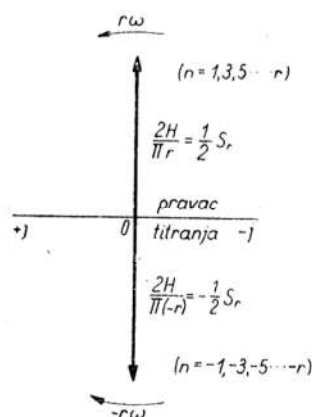
$$\Psi(x) = \sum_{n=\dots-3,-1,1,3,\dots} -j \frac{2H}{\pi n} e^{jn x}$$

odnosno

$$\Phi(t) = \sum_{n=\dots-3,-1,1,3,\dots} -j \frac{2H}{\pi n} e^{jn \omega t}.$$



Slika 70.



Slika 71.

To bi za $n = \pm r$ dalo par verzora prema sl. 70. Ako se funkcija pojavljuje na imaginarnoj osi, bit će

$$j \Psi(x) = \sum_{n=\dots-3,-1,1,3,\dots} \frac{2H}{\pi n} e^{jn x}$$

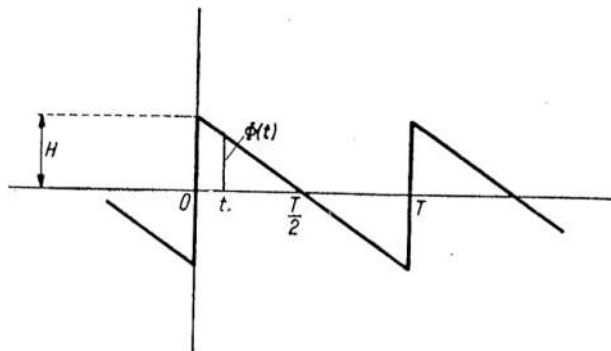
odnosno

$$j \Phi(t) = \sum_{n=\dots-3,-1,1,3,\dots} \frac{2H}{\pi n} e^{jn \omega t}.$$

To za $n = \pm r$ daje par verzora prikazanih na sl. 71. Rezultat se potpuno poklapa s prije dobivenim redom, budući da su kod običnog verzorskog prikaza amplitude dvostruke t. j. $\frac{4H}{\pi n}$, a kako su verzori okomiti na pravac titranja, to mogu postojati samo sinusovi valovi.

Zadana je funkcija prema sl. 72. t. j.

$$\Phi(t) = \frac{H\left(\frac{T}{2} - t\right)}{\frac{T}{2}} = H\left(1 - \frac{2t}{T}\right).$$



Tada je

Slika 72.

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}_n}{2} &= \frac{1}{T} \int_0^T H\left(1 - \frac{2t}{T}\right) e^{-jn\omega t} dt = \frac{H}{T} \int_0^T e^{-jn\omega t} dt - \frac{2H}{T^2} \int_0^T t e^{-jn\omega t} dt = \\ &= \frac{H}{-jn\omega T} \int_0^T e^{-jn\omega t} d(-jn\omega t) - \frac{2H}{-jn\omega T^2} \int_0^T t e^{-jn\omega t} d(-jn\omega t). \end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom drugog adenda bit će:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}_n}{2} &= j \frac{H}{n2\pi} e^{-jn\omega t} \Big|_0^T - j \frac{2H\omega}{4\pi^2 n} \left[t e^{-jn\omega t} \Big|_0^T - \int_0^T e^{-jn\omega t} dt \right] = \\ &= j \frac{H}{n2\pi} e^{-jn2\pi} - j \frac{H}{n2\pi} - j \frac{2H\omega}{4\pi^2 n} \left[t e^{-jn\omega t} - \frac{1}{-jn\omega} e^{-jn\omega t} \right]_0^T = \\ &= j \frac{H}{n2\pi} e^{-jn2\pi} - j \frac{H}{n2\pi} - j \frac{H\omega}{2\pi^2 n} \left[\frac{2\pi}{\omega} e^{-jn2\pi} + \frac{1}{jn\omega} e^{-jn2\pi} - \frac{1}{jn\omega} \right]. \end{aligned}$$

Budući da je $e^{-jn2\pi} = 1$, to slijedi, da je:

$$\frac{\mathcal{A}_n}{2} = -j \frac{H}{\pi n}.$$

Prema tome, ako se događaj zbiva na realnoj osi, Fourierov red glasi:

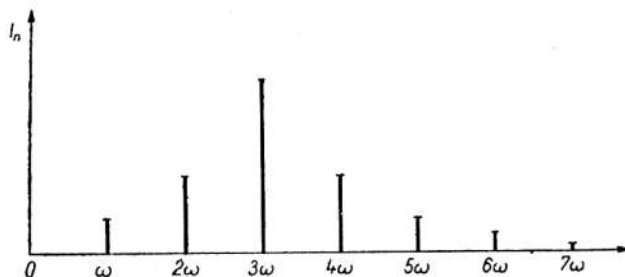
$$\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-j \frac{H}{\pi n}\right) e^{jn\omega t}$$

h) Neke primjedbe o Fourierovom redu. Linijski spektar

Fourierov red u kompleksnom obliku pogodan je za dobivanje harmoničkih komponenata neke stacionarne periodičke struje. Ako imamo neki periodički neharmonički napon narinut na jedan električni krug, koji napon smo rastavili u Fourierov red u kompleksnom obliku, to za svaku komponentu

napona $\frac{\mathcal{A}_n}{2} e^{jn\omega t}$, odnosno za $j \frac{\mathcal{A}_n}{2} e^{jn\omega t}$ lako možemo naći verzor pripadne stacionarne struje (ukoliko vrijedi zakon superpozicije) t. j.

$$\frac{\mathcal{I}_n}{2} = \frac{\frac{\mathcal{A}_n}{2}}{R + j\left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)} \quad \text{odnosno} \quad j \frac{\mathcal{I}_n}{2} = \frac{j \frac{\mathcal{A}_n}{2}}{R + j\left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)}.$$



Slika 73.

Kako po dva verzora, koji se okreću u protivnim smjerovima, daju titraj struje, to će amplituda te struje biti

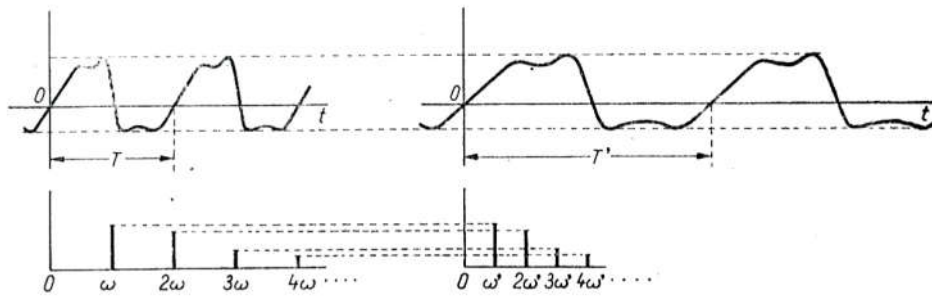
$$I_n = \frac{A_n}{\sqrt{R^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}}$$

Te stacionarne amplitude ucrtane su na sl. 73., koja bi — kad bi još pripisali i faze — predstavljala verzorski prikaz komponenata. Niz na sl. 73. naziva se i „linijski spektar“ (za razliku od pravog spektra, o čemu će kasnije biti riječ), što je ovdje kod Fourierovog reda, gdje se radi o periodičkim funkcijama, koje se ponavljaju od $t = -\infty$ do $t = +\infty$, i opravdano.*)

Na navedenoj slici treća frekvencija je dominantna i krug je vjerojatno udešen tako, da rezonira na nju. Međutim, ne mora dominantna komponenta nužno biti i rezonantna, jer njena veličina ne zavisi samo o nazivniku, koji je u rezonanciji najmanji t. j. R , nego i o brojniku, koji je uvjetovan formom naponske krivulje. Ako je na pr. izvjesna komponenta naponske krivulje vrlo malena, to struja uslijed te komponente, unatoč eventualne rezonancije, ne mora biti i najveća komponentna struja. Pri običnom Fourierovom redu morali bismo — da dobijemo amplitudu neke komponentne stacionarne struje — najprije izračunati amplitudu dotičnog sinusovog i cosinusovog vala i te amplitude geometrijski zbrojiti. Daljnja je prednost Fourierovog reda u kompleksnom obliku u tome, što se može lako naći diferencijalni kvocijent funkcije po vremenu (ukoliko nemamo slučaj Gibbsovog pojava, kad funkcija i njen red nemaju isti diferencijalni kvocijent), odnosno njen vremenski integral jednostavnim verzorskim zbrajanjem diferencijalnih kvocijenata, odnosno vremenskih integrala pojedinih komponenata.

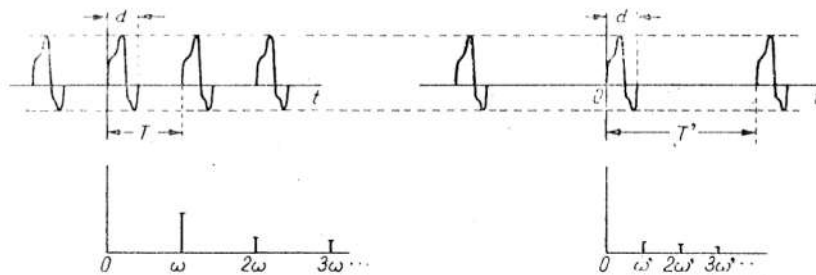
*) Kadšto se u knjigama linijskim spektrom naziva i niz verzora, koji počinju u $t = 0$. Međutim, kasnije ćemo saznati, da to nije — strogo uzevši — točno, jer samo verzor, koji traje od $t = -\infty$ do $t = +\infty$, ima za spektar jednu jedinu frekvenciju, dok onaj, koji počinje u $t = 0$, ima za spektar cijeli niz frekvencija.

Sl. 74. prikazuje neku periodičku krivulju s trajanjem periode T , a ispod nje su ucrtane amplitude njenih Fourierovih komponenata sa svojim frekvencijama. Ako se čitav tok krivulje uspori, ali odnosi unutar njene periode ostanu isti, onda će se, naravno, uvećati trajanje njene periode na T' , dok će amplitude komponenata ostati iste kao i prije, ali njihove frekvencije će se smanjiti u istom omjeru koliko se je perioda povećala. Na sl. 75. lijevo prikazana je pe-



Slika 74.

riodička krivulja, koja se sastoji od niza impulsa, a ispod krivulje su amplitude njenih komponenata s pripadnim frekvencijama. Ako se prema istoj slici desno, razmak između pojedinih impulsa uveća, onda će se frekvencije kao i prije umanjiti, ali amplitude ne će ostati iste kao i prije, jer se je odnos vrijednosti krivulje unutar periode promijenio.



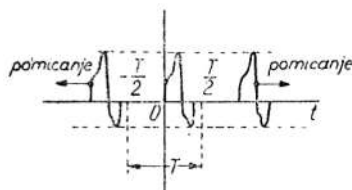
Slika 75.

Ako u odabranom koordinatnom sistemu nacrtamo neku periodičku krivulju i funkciju, koju ona predstavlja, rastavimo u Fourierov red, dobit ćemo, naravno, niz cosinusovih i sinusovih valova. Ako svaki cosinusov val zbrojimo s njegovim pripadnim sinusovim valom, dobit ćemo kao rezultante fazno pomaknute harmoničke valove. Njihov zbroj na svakom mjestu dat će, naravno, originalnu krivulju. Ako ishodište — ostavljajući crtež krivulje netaknut — pomaknemo na apscisnoj osi, za netaknutu krivulju dobili smo drugu funkciju, koja će, naravno, imati drugačiji Fourierov red. Sastavimo li kao i prvi puta cosinusove valove te nove funkcije s pripadnim sinusovim valovima, dobit ćemo iste, nepromijenjene, otprije nacrtane fazno pomaknute harmoničke valove. Pri istodobnom pomicanju ishodišta ne samo u horizontalnom, nego i u vertikalnom smjeru, dobili bismo opet jednake fazno pomaknute harmoničke valove kao i prije, a promijenio bi se samo konstantni član.

5. RASTAVLJANJE NEPERIODIČKE FUNKCIJE U HARMONIČKE KOMPONENTE

a) Dobivanje izraza za spektar funkcije

Promotrit ćemo neperiodičku vremensku funkciju. Ona počinje u $t = -\infty$ i završava u $t = +\infty$. Nadalje, neka je mjestimično glatka, u svakom konačnom području neka ima konačni broj skokova konačne visine, a integrali, koji



Slika 76.

se pojavljuju, neka konvergiraju konačnim vrijednostima. Razumije se, da funkcija može imati povremene vrijednosti nula. Kod prijelaza periodičke funkcije u neperiodičku, ne ćemo, kao dosada, brojiti vrijeme prve periode od ishodišta t. j. od $t=0$ do T , nego prema sl. 76. od ishodišta na jednu stranu do $\frac{T}{2}$, a na drugu stranu do $-\frac{T}{2}$ i obostrano povećavati razmake impulsa t. j. periodu, koja će se konačno protezati s jedne strane prema $-\infty$, a s druge strane prema $+\infty$.

Naša periodička funkcija od vremena tada će glasiti:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin n\omega t = \\ &= K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega t \cdot \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi(a) \cos n\omega a da + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\omega t \cdot \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi(a) \sin n\omega a da.\end{aligned}$$

Kod toga smo pod integralom dosadašnju varijablu t zamijenili varijablom a , što je dozvoljeno, jer se radi o određenim integralima s nepromijenjenim granicama. To smo uradili zato, da vidljivo odijelimo izraze pod integralom, koji sadrže t , od onih pred integralom, koji također sadrže tu varijablu, a na koje se integral ne odnosi. Kako je $T = \frac{2\pi}{\omega}$, bit će:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos n\omega t \cdot \omega \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi(a) \cos n\omega a da + \right. \\ &\quad \left. + \sin n\omega t \cdot \omega \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi(a) \sin n\omega a da \right].\end{aligned}$$

odnosno sinusovih valova

$$du \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a) \sin ua \, da.$$

Izraze

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a) \cos ua \, da = C(u)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a) \sin ua \, da = S(u)$$

zovemo Fourierovim integralima, odnosno spektralnim funkcijama zadane funkcije $\Phi(t)$ i oni, nacrtani u koordinatnom sistemu u ovisnosti od u , daju spektar, odnosno sliku relativnih vrijednosti amplituda frekvencija od 0 do ∞ . Prema tome je izrazom

$$\Phi(t) = K_0 + \int_0^{\infty} [C(u) \cos ut + S(u) \sin ut] \, du$$

zadana funkcija izražena u spektralnom obliku. Ako se prema sl. 77. titraj zbiva u realnoj osi Gaussove ravnine, bit će:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= K_0 + \int_0^{\infty} \{A(u) \cos[ut - \psi(u)]\} \, du = \\ &= K_0 + \int_0^{\infty} \{A(u) \cos \psi(u) \cos ut + A(u) \sin \psi(u) \sin ut\} \, du \end{aligned}$$

te je stoga

$$A(u) \cos \psi(u) = C(u)$$

$$A(u) \sin \psi(u) = S(u)$$

$$\psi(u) = \arctg \frac{S(u)}{C(u)}$$

$$A(u) \, du = \sqrt{[C(u)]^2 + [S(u)]^2} \, du$$

U simboličkom obliku bilo bi

$$\Phi(t) = \Re e \left\{ K_0 + \int_0^{\infty} A(u) e^{j[ut - \psi(u)]} \, du \right\} = \Re e [K_0 + \int_0^{\infty} \mathcal{A}(u) e^{jut} \, du].$$

Dalje je

$$\mathcal{A}(u) = C(u) - jS(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(a) \cos ua - j\Phi(a) \sin ua] \, da = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a) e^{-jua} \, da.$$

Na sl. 77. nije predložen verzor frekvencije u , budući da on glasi $\mathcal{A}(u)du$, dakle bi bio neizmjereno malen, nego navedeni „relativni verzor“ $\mathcal{A}(u)$, koji se po dimenziji za s^{-1} razlikuje od pravog verzora.

Ako se događaj zbiva na imaginarnoj osi prema istoj slici, bit će:

$$\Phi(t) = \mathcal{I}_m[jK_0 + \int_0^\infty \mathcal{A}^*(u) e^{jut} du],$$

gdje je:

$$\mathcal{A}^*(u) = j\mathcal{A}(u) = j[C(u) - jS(u)] = A(u) e^{j[-\psi(u) + \frac{\pi}{2}]} = A(u) e^{j\varphi(u)}.$$

Nadalje je

$$j\Phi(t) = j \left\{ K_0 + \int_0^\infty \{A(u) \sin[ut + \varphi(u)]\} du \right\}.$$

Za titraj na imaginarnoj osi pomoću verzora, kojima su pridruženi verzori protivnog smjera vrtnje t. j. kad vrijede i cosinusi i sinusi titraji, ali se cosinusi titraji sami poništavaju, bilo bi:

$$j\Phi(t) = jK_0 + \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathcal{A}^*(u)}{2} e^{jut} du,$$

gdje je

$$\frac{\mathcal{A}^*(u)}{2} = \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \Phi(a) e^{-jua} da$$

odnosno je za pozitivni u izraz za

$$\frac{\mathcal{A}^*(u)}{2} = j \left[\frac{C(u)}{2} - \frac{jS(u)}{2} \right]$$

te za negativni u izraz za

$$\frac{\mathcal{A}^*(u)}{2} = j \left[\frac{C(u)}{2} + \frac{jS(u)}{2} \right]$$

kod čega $C(u)$ i $S(u)$ mogu biti pozitivni ili negativni.*

Izraz

$$\int_0^\infty C(u) \cos ut du$$

bit će, obzirom na t , taka (parna) funkcija $\tau(t)$, dok će izraz

$$\int_0^\infty S(u) \sin ut du$$

biti liha (neparna) funkcija $\lambda(t)$. Prema tome bit će:

$$\Phi(t) - K_0 = \tau(t) + \lambda(t)$$

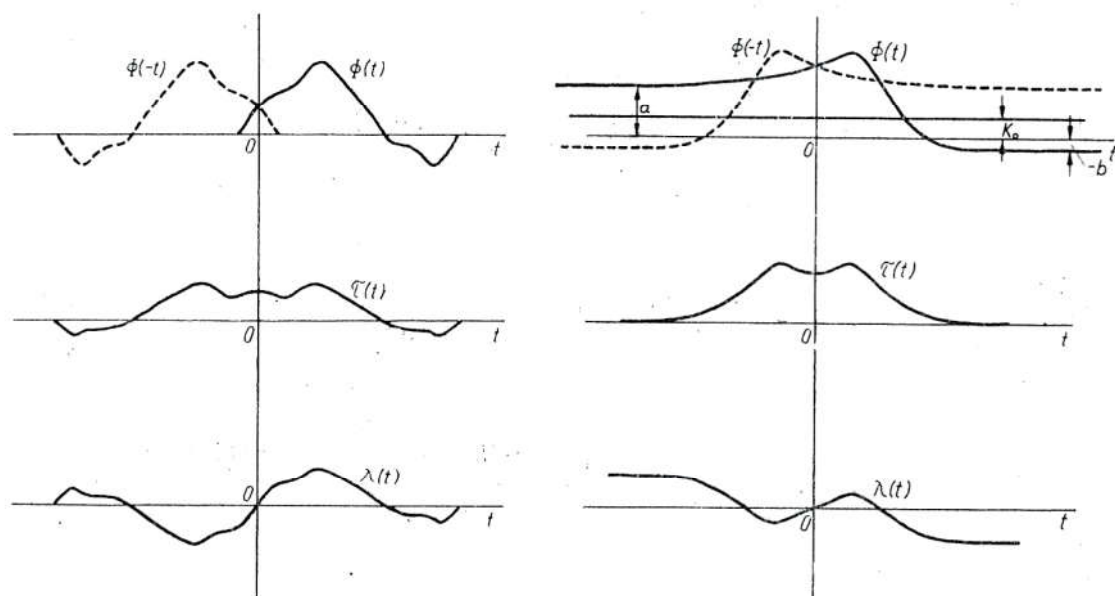
odnosno

$$\Phi(-t) - K_0 = \tau(-t) + \lambda(-t) = \tau(t) - \lambda(t).$$

Iz ovog slijedi:

$$\frac{1}{2} [\Phi(t) + \Phi(-t) - 2K_0] = \tau(t) \quad \frac{1}{2} [\Phi(t) - \Phi(-t)] = \lambda(t)$$

*) Kod toga smo učinili „pogrešku“, jer smo raspolovili i verzor frekvencije nula, koji nema para. Međutim, raspolovivši tu diskretnu vrijednost, nismo promijenili i vrijednost integrala.



Slika 78.

Na sl. 78. lijevo vidi se gornji postupak s funkcijom, koja nema konstantni član, a na istoj slici desno postupak s funkcijom, čiji konstantni član iznosi $K_0 = \frac{a + (-b)}{2}$. Lijeva funkcija nema konstantni član, budući da je trajanje njene periode $T = \infty$, a ona se razlikuje od nule samo u konačnom intervalu.

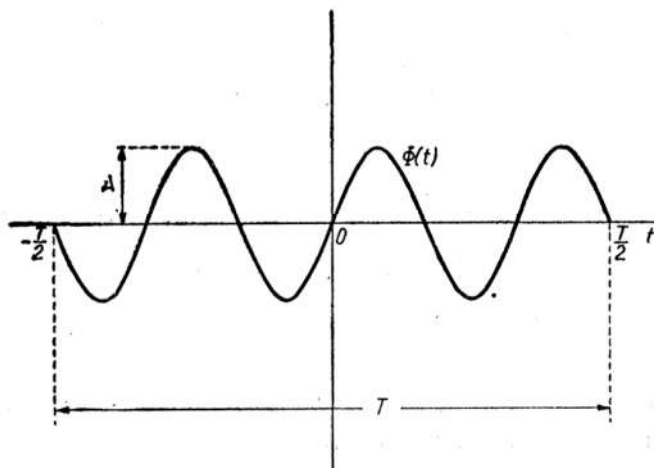
b) Spektar funkcije, koja se obostrano od ishodišta sastoji od istog broja sinusovih valova

Proučit ćemo spektar funkcije prikazane na sl. 79., koja je u granicama $-\frac{T}{2}$ do $\frac{T}{2}$ sinusoida $A \sin \Omega t$, a inače je svagdje jednaka nuli.

$$\begin{aligned}
 C(u) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a) \cos ua \, da = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \sin \Omega t \cos ut \, dt = \\
 &= \frac{A}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} [\sin(\Omega + u)t + \sin(\Omega - u)t] \, dt = \frac{A}{2\pi(\Omega + u)} [-\cos(\Omega + u)t]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \\
 &\quad + \frac{A}{2\pi(\Omega - u)} [-\cos(\Omega - u)t]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0.
 \end{aligned}$$

Taj rezultat je razumljiv, jer je funkcija liha (neparna).

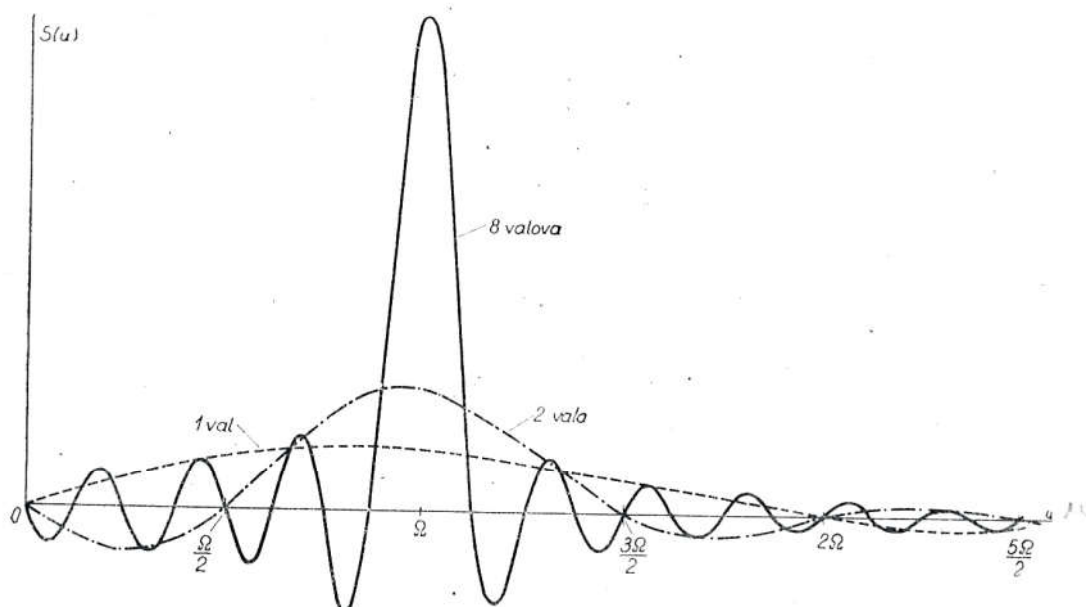
$$\begin{aligned}
 S(u) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a) \sin ua \, da = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \sin \Omega t \sin ut \, dt = \\
 &= \frac{A}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} [\cos(\Omega - u)t - \cos(\Omega + u)t] \, dt = \frac{A}{2\pi(\Omega - u)} \sin(\Omega - u)t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \\
 &- \frac{A}{2\pi(\Omega + u)} \sin(\Omega + u)t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A}{\pi} \left[\frac{\sin(\Omega - u)\frac{T}{2}}{\Omega - u} - \frac{\sin(\Omega + u)\frac{T}{2}}{\Omega + u} \right]
 \end{aligned}$$



Slika 79.

Sl. 80. prikazuje spektar $S(u)$. Vrijednost prvog adenda za $u = \Omega$ našli smo prema L'Hospitalu.

Ako je $\Omega \frac{T}{2} = \pi$, dakle, ako se funkcija sastoji samo od jednog sinusovog titraja, onda je spektar — kao što se vidi — širok, i u području između 0 i 2Ω gotovo sve frekvencije osim onih oko 0 i 2Ω , zastupane su skoro istom jačinom. Ako je $\Omega \frac{T}{2} = 2\pi$, dakle, ako se funkcija sastoji od dva sinusova titraja, udio frekvencija oko Ω postaje jači, što se na pr. kod $\Omega \frac{T}{2} = 8\pi$, dakle, kad se funkcija sastoji od osam titraja, već naročito ističe. Što funkciji obostrano od ishodišta pridolazi više titraja, tim se spektar oko Ω ističe sve jače, a kod drugih frekvencija postaje sve slabiji. Kod proširenja funkcije prema neizmjernosti s obje strane



Slika 80.

spektar bi se konačno suzio samo u jednu frekvenciju, t. j. Ω , a $S(u)$ postalo bi neizmjereno veliko. Izraz

$$\int_0^{\infty} S(u) \sin u t \, du$$

zadobio bi vrijednost $A \sin \Omega t$, i amplituda A , nacrtana kod frekvencije Ω , predstavljala bi linijski spektar. Analogno i kod cosinusa, pri povećanju broja valova u oba smjera u neizmjernost, spektar bi se suzio u frekvenciju Ω i postao neizmjereno velik.

c) Spektar prigušne funkcije

Zadana je prigušna funkcija

$$\Phi(t) = h e^{-\delta t}$$

prema sl. 81. Ma da se funkcija uistinu proteže od $-\infty$ do $+\infty$, u integralima možemo staviti kao donju granicu $t = 0$, jer prije toga vremena funkcija ima vrijednost nula. Radi toga će biti:

$$K_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \Phi(t) \, dt = \frac{1}{\infty} \int_0^{\infty} h e^{-\delta a} \, da = 0.$$

Kod toga smo, u skladu s prijašnjim, kod određenog integrala zamijenili varijablu t sa a .

Nadalje slijedi:

$$C(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} h e^{-\delta a} \cos ua \, da$$

$$S(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} h e^{-\delta a} \sin ua \, da$$

Ove spektralne funkcije naći ćemo najlakše, ako napišemo izraz za relativni rezultatni vektor, t. j.

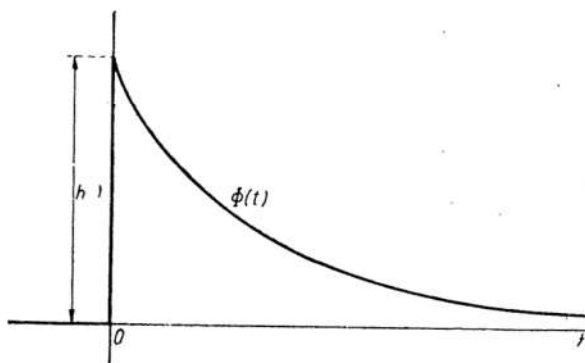
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u) &= C(u) - j S(u) = \\ &= \frac{h}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\delta a} (\cos ua - j \sin ua) \, da = \frac{h}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\delta a} e^{-j u a} \, da = \\ &= \frac{h}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(\delta + j u) a} \, da = - \frac{h}{\pi(\delta + j u)} e^{-(\delta + j u) a} \Big|_0^{\infty} = \frac{h}{\pi(\delta + j u)} = \\ &= \frac{h}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + u^2} - j \frac{h}{\pi} \frac{u}{\delta^2 + u^2} \end{aligned}$$

Prema tome je

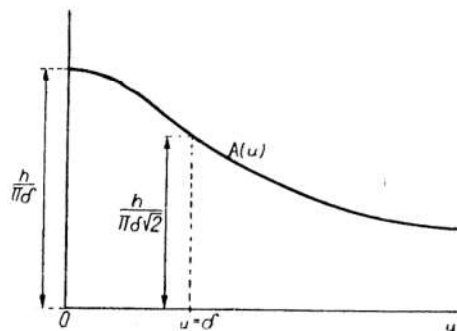
$$C(u) = \frac{h}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + u^2}, \quad S(u) = \frac{h}{\pi} \frac{u}{\delta^2 + u^2}$$

i nadalje

$$\operatorname{tg} \psi(u) = \frac{S(u)}{C(u)}.$$



Slika 81.



Slika 82.

Izraz $\frac{h}{\pi(\delta + j u)}$ je, uz pozitivno u , inverzija polupravca $(\delta + j u)$, pomnožena s konstantom $\frac{h}{\pi}$ i prema tome je polukružnica. Ona predstavlja krivulju mjesta

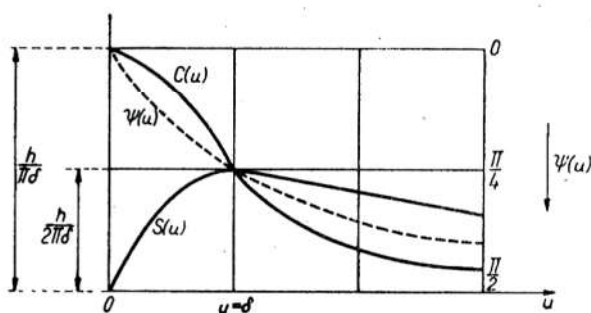
relativnih verzora (t. j. bez du), čija je „relativna amplituda“ dana izrazom

$$A(u) = \frac{h}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + u^2}}$$

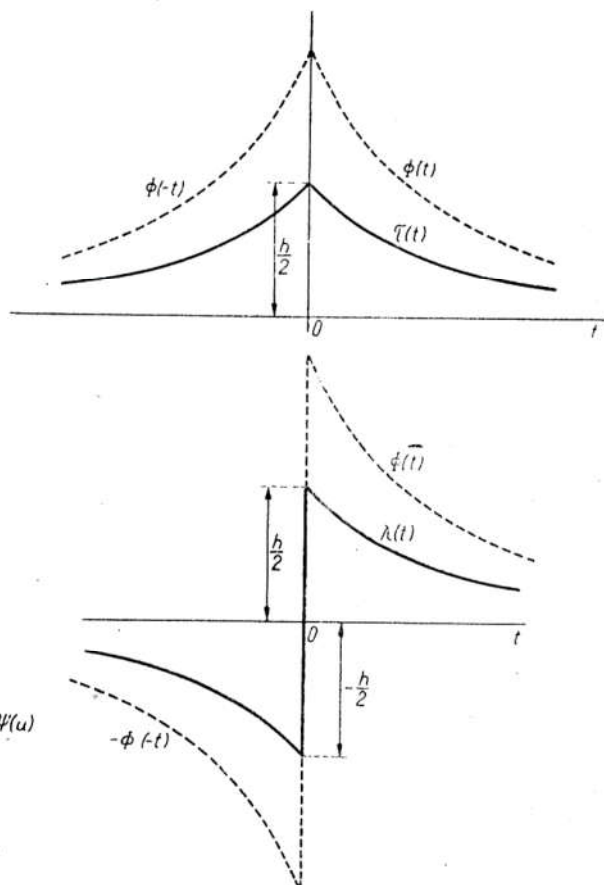
Odnos relativnih amplituda i pripadnih frekvencija prikazan je na sl. 82., koja, dakle, predstavlja spektar „relativnih amplituda“ fazno pomaknutih verzora.

Dobili smo

$$\Phi(t) = \frac{h}{\pi} \int_0^\infty \frac{\delta}{\delta^2 + u^2} \cos ut \, du + \frac{h}{\pi} \int_0^\infty \frac{u}{\delta^2 + u^2} \sin ut \, du = \tau(t) + \lambda(t).$$



Slika 83.

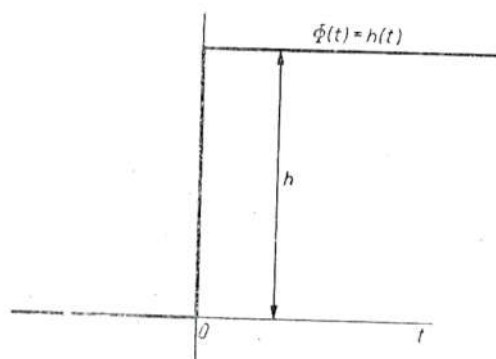


Slika 84.

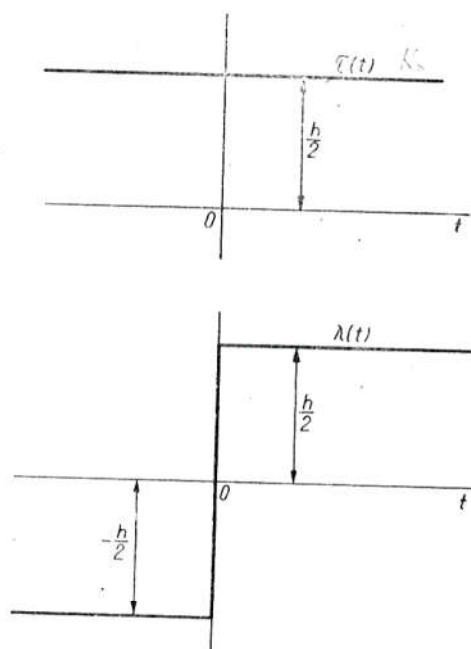
Slika 83. prikazuje komponentne spektre, t. j. cosinsov i sinosov spektar (čije pojedine pripadne vrijednosti, zbrojene geometrijski, daju, naravno, dužinu relativne amplitude dotičnog fazno pomaknutog vala, dakle ordinate sl. 82.) kao i fazni kut $\psi(u)$. Sl. 84. prikazuje funkcije $\tau(t)$, te $\lambda(t)$, kao i poznati način kako smo do njih došli.

d) Spektar uklopnih funkcija

α) Uklopna funkcija s okomitim čelom prema sl. 85. nastaje, ako gušenje kod funkcije $he^{-\delta t}$ konvergira prema nuli. Funkcija $\tau(t)$ prelazi, prema sl. 86. gore, u horizontalan pravac, čije su ordinate jednake $\frac{h}{2}$, a funk-



Slika 85.



Slika 86.

cija $\lambda(t)$ dobiva izgled prema istoj slici dolje, t. j. njene su ordinate za pozitivne vrijednosti od t jednake $\frac{h}{2}$, a za negativne vrijednosti jednake su $-\frac{h}{2}$. Funkcija $\tau(t)$ ima sada spektar nula, jer je kod $\delta = 0$ izraz

$$C(u) = \frac{h}{\pi} \frac{0}{0^2 + u^2} = 0,$$

dok je spektar funkcije $\lambda(t)$

$$S(u) = \frac{h}{\pi} \frac{u}{0^2 + u^2} = \frac{h}{\pi u}.$$

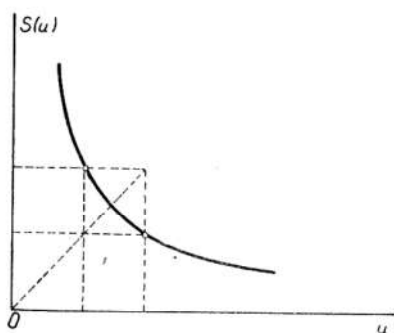
Prema tome, spektralni izraz za gornju uklopnu funkciju, koja je prije $t = 0$ na svakom mjestu jednaka nuli, glasi:

$$\Phi(t) = \frac{h}{2} + \int_0^{\infty} \frac{h}{\pi u} \sin ut \, du.$$

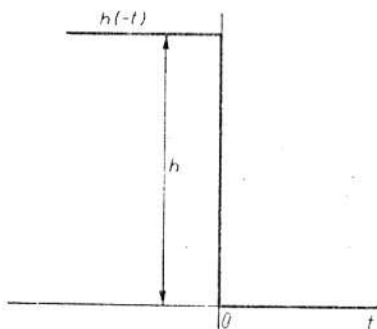
Prema sl. 87. spektralna funkcija $S(u)$ uklopne funkcije $h(t)$ je u koordinatnom sistemu istostrana hiperbola.

Ako bismo prema sl. 88. imali funkciju $h(-t)$, to bi ona izražena svojim spektrom, glasila

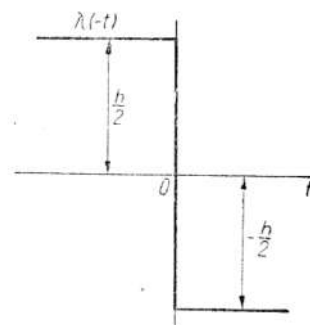
$$\Phi(t) = \frac{h}{2} - \int_0^{\infty} \frac{h}{\pi u} \sin ut \, du$$



Slika 87.



Slika 88.



Slika 89.

t. j. ona je zbroj konstante $\frac{h}{2}$ i funkcije $\lambda(-t)$ prema sl. 89., čiji spektralni izraz dobijemo tako, ako varijablu t u spektralnom izrazu funkcije $\lambda(t)$ zamijenimo s $-t$.

β) Uklopna funkcija s kosim čelom, prema sl. 90. gore, je zbroj uklopne funkcije $h(t)$ i funkcije $\chi(t)$, koju smo našli na taj način, da smo u sredini intervala T izabrali ishodište i odredili diferenciju $\Phi(t) - h(t)$. Jednadžba kosog pravca m kroz ishodište glasi:

$$y = t \cdot \operatorname{tg} \alpha = t \cdot \frac{\frac{h}{2}}{\frac{T}{2}} = \frac{th}{T}.$$

Za $-\frac{T}{2} \leq t \leq 0$ bit će $\chi(t)$ zbroj pravca m i konstante $\frac{h}{2}$, t. j.

$$\chi(t) = \frac{ht}{T} + \frac{h}{2}.$$

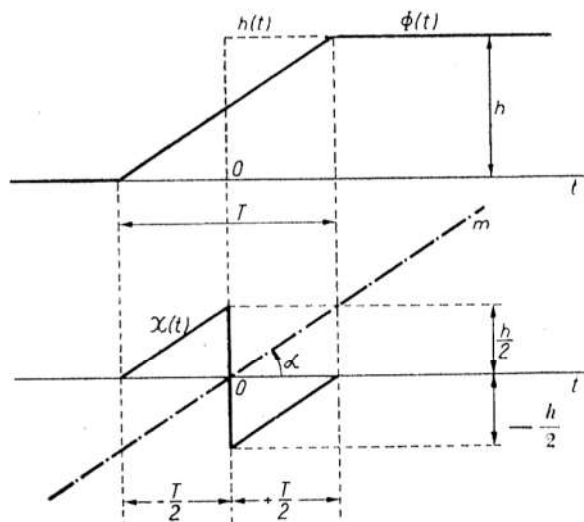
Za $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ bit će $\chi(t)$ zbroj pravca m i konstante $-\frac{h}{2}$, t. j.

$$\chi(t) = \frac{ht}{T} - \frac{h}{2}.$$

Budući da je $\chi(t)$ nalijevo od $-\frac{T}{2}$, odnosno nadesno od $\frac{T}{2}$, jednako nuli, to će granice njegovih integrala ići od $-\frac{T}{2}$ do 0, odnosno od 0 do $\frac{T}{2}$.

Nadalje, budući da je $\chi(t)$ liha (neparna) funkcija, imat će samo sinu-
sov spektar, pa pišući, kao obično, mjesto t varijablu a , slijedi:

$$\begin{aligned} S_1(u) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left[\frac{ha}{T} + \frac{h}{2} \right] \sin ua \, da + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} \left[\frac{ha}{T} - \frac{h}{2} \right] \sin ua \, da = \\ &= \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \sin ua \, da - \frac{h}{2\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin ua \, da + \frac{h}{\pi T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a \sin ua \, da. \end{aligned}$$



Slika 90.

Parcijalnom integracijom posljednjeg adenda bit će:

$$\begin{aligned} S_1(u) &= \frac{h}{2\pi u} \left[-\cos ua \right]_{-\frac{T}{2}}^0 - \frac{h}{2\pi u} \left[-\cos ua \right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{h}{\pi T u} \left[-a \cos ua + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{u} \sin ua \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{h}{2\pi u} \left[-1 + \cos u \frac{T}{2} \right] - \frac{h}{2\pi u} \left[-\cos u \frac{T}{2} + 1 \right] + \\ &\quad + \frac{h}{\pi T u} \left[-\frac{T}{2} \cos u \frac{T}{2} + \frac{1}{u} \sin u \frac{T}{2} + \left(-\frac{T}{2} \right) \cos u \left(-\frac{T}{2} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{u} \sin u \left(-\frac{T}{2} \right) &= \frac{h}{\pi u} \cos u \frac{T}{2} - \frac{h}{\pi u} + \frac{h}{\pi T u} \left[-T \cos u \frac{T}{2} + \frac{2}{u} \sin u \frac{T}{2} \right] = \\
 &= \frac{h}{\pi} \left[\frac{2}{T u^2} \sin u \frac{T}{2} - \frac{1}{u} \right].
 \end{aligned}$$

K tome pridolazi još spektar uklopne funkcije $h(t)$, t. j. $\frac{h}{\pi u}$.

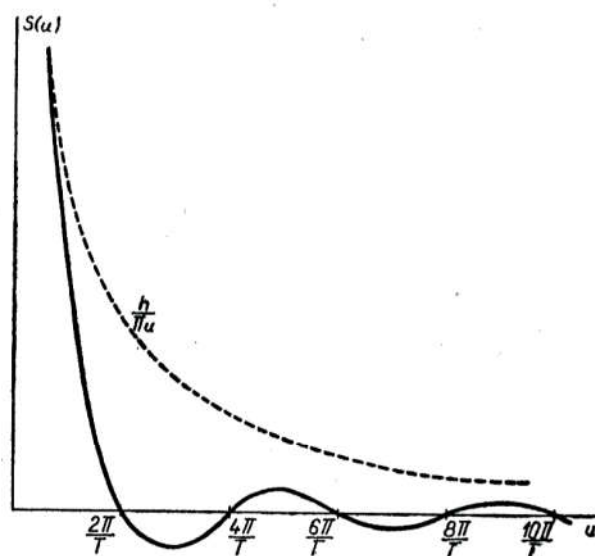
Prema tome spektar početne zadane funkcije $\Phi(t)$ glasi:

$$S(u) = \frac{2h}{\pi T u^2} \sin u \frac{T}{2}.$$

Sama funkcija u spektralnom obliku glasi:

$$\Phi(t) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi T} \int_0^{\infty} \frac{\sin u \frac{T}{2}}{u^2} \sin ut \, du.$$

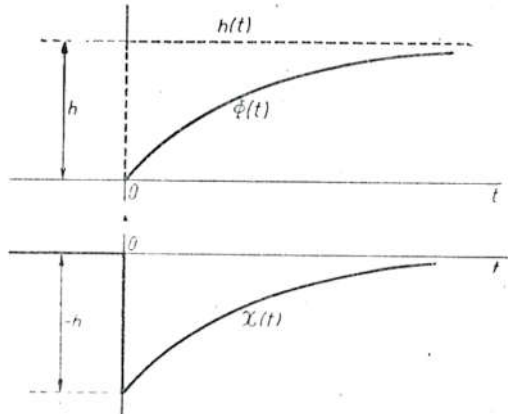
Spektralna funkcija $S(u)$ prikazana je na sl. 91.



Slika 91.

Kao što se vidi na navedenoj slici, amplitude većih frekvencija, u poređenju sa spektrom $\frac{h}{\pi u}$ od uklopne funkcije s okomitim čelom, sada su manje. Kod niskih frekvencija, kad je $\sin u \frac{T}{2} \approx u \frac{T}{2}$, te su amplitude međusobno skoro jednake. Ako na pr. obje uklopne funkcije predstavljaju porast struje u ovisnosti od vremena, to znači, da će, što je čelo okomitije, nastati to veći inducirani naponi, jer će tada umnošci visokih frekvencija s većim amplitudama biti veći, nego kod koso položenog čela.

γ) Uklopna funkcija s eksponencijalnim usponom prema sl. 92., označena s $\Phi(t)$, je zbroj uklopne funkcije $h(t)$ i negativne eksponencijalne funkcije $\chi(t) = -he^{-\delta t}$. Svojedobno smo našli, da pozitivna eksponencijalna funkcija $he^{-\delta t}$ ima slijedeće spektralne funkcije:



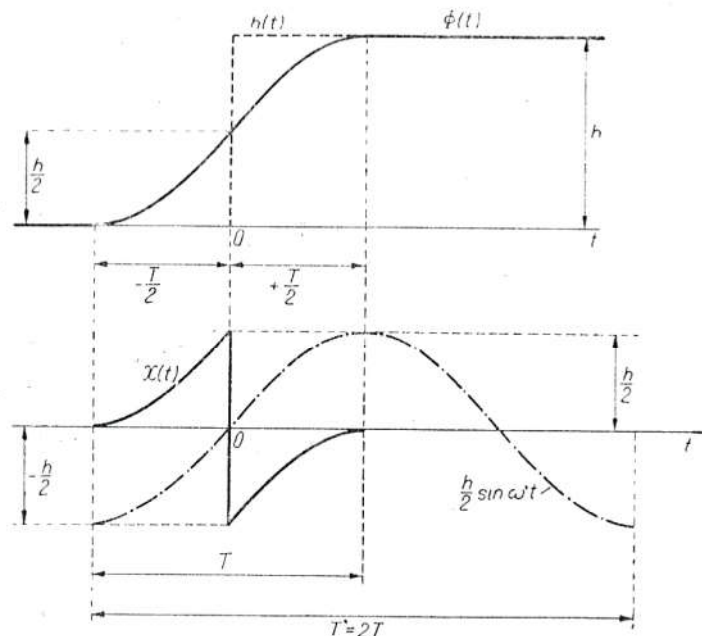
Slika 92.

$$C_1(u) = \frac{h}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + u^2}$$

$$S_1(u) = \frac{h}{\pi} \frac{u}{\delta^2 + u^2}$$

Ako tim spektralnim funkcijama damo predznak minus, bit će to spektralne funkcije od $\chi(t)$, a ako sinusovoj spektralnoj funkciji pribrojimo spek-

tralnu funkciju $\frac{h}{\pi u}$ od uklopne funkcije $h(t)$, onda će to biti sinusova spektralna funkcija od $\Phi(t)$.



Slika 93.

Radi toga će biti:

$$\Phi(t) = \frac{h}{2} + \int_0^{\infty} \left[\left(-\frac{h}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + u^2} \right) \cos ut + \left(-\frac{h}{\pi} \frac{u}{\delta^2 + u^2} + \frac{h}{\pi u} \right) \sin ut \right] du$$

8) Uklopna funkcija s harmoničkim usponom prema sl. 93., označena s $\Phi(t)$, je zbroj uklopne funkcije $h(t)$ i funkcije $\chi(t)$, koju smo dobili na isti način kao i istoimenu funkciju na sl. 90. Osnovni val funkcije $\chi(t)$ ima periodu T i prema tome osnovna frekvencija mu je $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Sama funkcija $\chi(t)$ je u intervalu $-\frac{T}{2} \leq t \leq 0$ zbroj sinusoide amplitude $\frac{h}{2}$ i periode $T' = 2T$, čiji je $\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{2T}$, te konstante $\frac{h}{2}$, t. j.

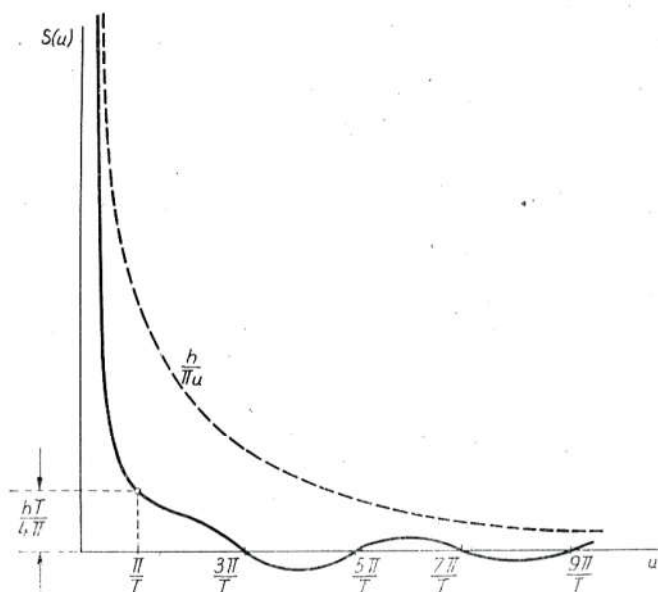
$$\chi(t) = \frac{h}{2} \sin \frac{\pi}{T} t + \frac{h}{2}.$$

U intervalu $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ funkcija $\chi(t)$ je zbroj sinusoide i konstante $-\frac{h}{2}$, te je stoga tada:

$$\chi(t) = \frac{h}{2} \sin \frac{\pi}{T} t - \frac{h}{2}.$$

Izvan tih intervala je

$$\chi(t) = 0$$



Slika 94.

Budući da je to liha (neparna) funkcija, imat će samo sinusov spektar, t. j.

$$S_1(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(\frac{h}{2} \sin \frac{\pi}{T} a + \frac{h}{2} \right) \sin ua \, da + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{h}{2} \sin \frac{\pi}{T} a - \frac{h}{2} \right) \sin ua \, da,$$

gdje smo kao i prije varijablu t zamijenili s varijablom a .

$$\begin{aligned}
S_1(u) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{h}{2} \sin \frac{\pi}{T} a \sin ua \, da + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \frac{h}{2} \sin ua \, da - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{h}{2} \sin ua \, da = \\
&= \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{T} - u \right) a - \cos \left(\frac{\pi}{T} + u \right) a \right] da + \frac{h}{2\pi u} \left[-\cos ua \right]_{-\frac{T}{2}}^0 - \\
&\quad - \frac{h}{2\pi u} \left[-\cos ua \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{h}{4\pi \left(\frac{\pi}{T} - u \right)} \sin \left(\frac{\pi}{T} - u \right) a \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \\
&\quad - \frac{h}{4\pi \left(\frac{\pi}{T} + u \right)} \sin \left(\frac{\pi}{T} + u \right) a \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{h}{2\pi u} \left[-1 + \cos u \left(-\frac{T}{2} \right) \right] - \\
&\quad - \frac{h}{2\pi u} \left[-\cos u \frac{T}{2} + 1 \right] = \frac{h}{4\pi \left(\frac{\pi}{T} - u \right)} 2 \sin \left(\frac{\pi}{T} - u \right) \frac{T}{2} - \\
&\quad - \frac{h}{4\pi \left(\frac{\pi}{T} + u \right)} 2 \sin \left(\frac{\pi}{T} + u \right) \frac{T}{2} - \frac{h}{\pi u} + \frac{h}{\pi u} \cos u \frac{T}{2} = \\
&= \frac{h T}{2\pi(\pi - u T)} \cos u \frac{T}{2} - \frac{h T}{2\pi(\pi + u T)} \cos u \frac{T}{2} - \frac{h}{\pi u} + \frac{h}{\pi u} \cos u \frac{T}{2} = \\
&= \frac{h \pi}{u(\pi^2 - u^2 T^2)} \cos u \frac{T}{2} - \frac{h}{\pi u}.
\end{aligned}$$

K tome pridolazi još spektar uklopne funkcije $h(t)$, t. j. $\frac{h}{\pi u}$, i radi toga konačno je:

$$S(u) = \frac{h \pi}{u(\pi^2 - u^2 T^2)} \cos u \frac{T}{2},$$

dok je sama funkcija

$$\Phi(t) = \int_0^\infty \frac{h \pi}{u(\pi^2 - u^2 T^2)} \cos u \frac{T}{2} \sin ut \, du + \frac{h}{2}.$$

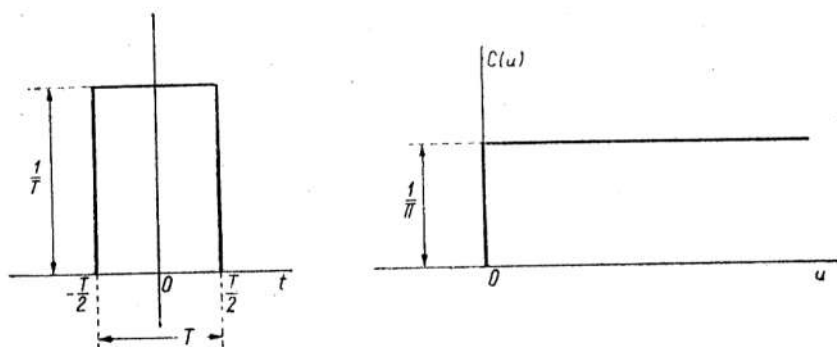
Kao što se vidi, kod vrlo malenih u spektralna će se funkcija u blizini nule približavati izrazu $\frac{h}{\pi u}$.

Izraz $\cos u \frac{T}{2}$ bit će za vrijednosti $u = \frac{n\pi}{T}$ jednako $\cos \frac{n\pi}{2}$. Kod lihoga n bit će to jednako 0, i prema tome će i spektralna funkcija $S(u)$ tada biti jednaka nuli, izuzevši slučaj $n = 1$, odnosno $u = \frac{\pi}{T}$, jer tada u izrazu za $S(u)$ dobivamo neodređeni oblik $\frac{0}{0}$. Prema L'Hospitalu, za taj slučaj dobit ćemo vrijednost:

$$\lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{T}} \frac{h\pi \cos u \frac{T}{2}}{u\pi^2 - u^3 T^2} = \frac{-h\pi \frac{T}{2} \sin \frac{\pi}{T} \frac{T}{2}}{\pi^2 - 3 \frac{\pi^3}{T^2} T^2} = \frac{hT}{4\pi}$$

Sl. 94. prikazuje izgled funkcije $S(u)$.

ε) Spektar Diracove Delta funkcije $\delta(t)$, koja ima neizmjerljivo veliku vrijednost, a postoji samo u $t = 0$, izračunat ćemo tako, da ćemo poći



Slika 95.

od funkcije nacrtane na sl. 95. lijevo, i pustiti, da T teži k nuli. Bit će:

$$S(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} \sin ut \, dt = \frac{1}{\pi T u} \left[-\cos ut \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$$

$$C(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} \cos ut \, dt = \frac{1}{\pi T u} \sin ut \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{\pi T u} \sin u \frac{T}{2}$$

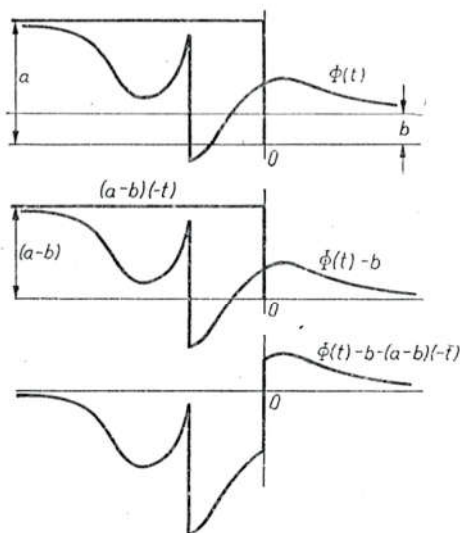
Za $T \rightarrow 0$ bit će $C(u) = \frac{1}{\pi}$.

Prema tome prednja Diracova udarna funkcija u spektralnom obliku glasi:

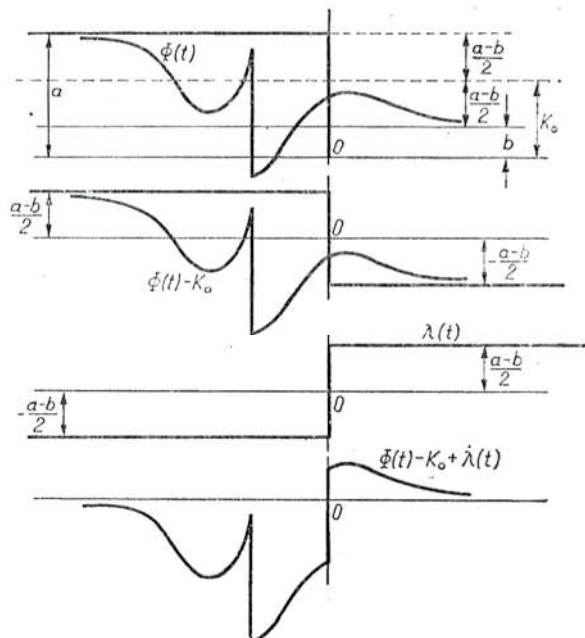
$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ut \, du. *$$

Spektar je predstavljen jednom horizontalnom linijom, što znači, da su sve frekvencije u spektru podjednako zastupljene (prema sl. 95. desno).

Na sl. 95. površina odabrane funkcije, t. j. pravokutnog impulsa, iznosi upravo jedinicu. Mjesto toga mogli smo odabrati takvu funkciju s bilo kakvom površinom konačne vrijednosti, koju ćemo označiti sa Sd (t. j. sadržaj — o tome će biti govora u odsjeku f) ovog poglavlja). Okomita stranica iznosila bi $\frac{Sd}{T}$. U tom slučaju bilo bi $C(u) = \frac{Sd}{\pi}$. Ta činjenica ne mijenja ništa.



Slika 96.



Slika 97.

bitno na stvari, jer bi to samo značilo, da smo našu predašnju Diracovu funkciju, koja ima neizmjenjenu veliku vrijednost, još pomnožili s konačnim brojem, dakle bi i umnožak bio Diracova funkcija.

*) Ovaj je integral, istina, divergentan. Za $t = 0$ je divergentan u užem smislu, t. j. ima vrijednost neizmjenjenu, što se slaže sa značenjem Diracove funkcije. Za $t \neq 0$ integral ne bi imao smisla, jer ne postoji

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \cos ut \, du.$$

No takvom se integralu može dati smisao time, da se njegova vrijednost definira kao

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \cos ut \, du,$$

što za $t \neq 0$ daje nulu, u skladu sa značenjem Diracove funkcije. Kaže se, da je integral, doduše, divergentan, ali da je A -sumabilan. Kod konvergentnih integrala takav postupak daje isti rezultat kao integracija u običnom smislu.

e) Spektar funkcije, koja obostrano teži čvrstim konačnim vrijednostima različitim od nule

Ako funkcija $\Phi(t)$ teži obostrano k nuli, onda su pod ranijom pretpostavkom, t. j. da je funkcija na mjestima, kad je glatka, svagdje konačna, i da ima konačan broj konačnih skokova, izrazi

$$C(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a) \cos ua \, da$$

odnosno

$$S(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a) \sin ua \, da$$

konvergentni. Međutim, ako funkcija s jedne strane, ili obostrano, teži k nekoj konačnoj čvrstoj vrijednosti, onda ćemo prema sl. 96. postupiti na slijedeći način:

Oduzet ćemo najprije konstantu b i dobiti funkciju na istoj slici u sredini. Ako toj novoj funkciji oduzmemo uklopnu funkciju, koja prije $t = 0$ ima vrijednost $(a - b)$, a poslije je svagdje jednaka nuli, i dosljedno s predašnjim, označimo je $(a - b)(-t)$, onda ćemo dobiti donju funkciju, koja obostrano teži k nuli i čije spektralne funkcije $C(u)$, odnosno $S(u)$, možemo lako naći.

Prema tome, cosinsov spektar funkcije $\Phi(t)$ bit će nađeni $C(u)$, a njen sinusov spektra dobit ćemo tako, ako k $S(u)$ pribrojimo sinusov spektar od $(a - b)(-t)$, koja ima — kako znamo — samo sinusov spektar. Radi toga konačno će biti:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= b + \frac{(a - b)}{2} + \int_0^{\infty} \left\{ C(u) \cos ut + \left[S(u) - \frac{(a - b)}{\pi u} \right] \sin ut \right\} du = \\ &= \frac{(a + b)}{2} - \int_0^{\infty} \frac{(a - b)}{\pi u} \sin ut \, du + \int_0^{\infty} [C(u) \cos ut + S(u) \sin ut] \, du. \end{aligned}$$

Mogli smo poći i drugim putem. Prema sl. 97. mogli smo na pr. od $\Phi(t)$ oduzeti konstantu

$$K_0 = b + \frac{(a - b)}{2} = \frac{(a + b)}{2},$$

te dobiti funkciju

$$\Phi(t) - K_0.$$

Ako sada toj funkciji pribrojimo uklopnu funkciju nacrtanu na istoj slici, koja ima prije $t = 0$ vrijednost $-\frac{(a - b)}{2}$, a poslije toga vrijednost $\frac{(a - b)}{2}$, dobit ćemo istu konačnu funkciju kao i kod prvog razmatranja. Uklopna funkcija glasi

$$\int_0^{\infty} \frac{(a - b)}{\pi u} \sin ut \, du.$$

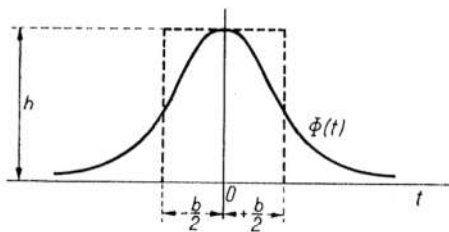
Sada ćemo imati kao i prije:

$$\Phi(t) = \frac{(a+b)}{2} - \int_0^{\infty} \frac{(a-b)}{\pi u} \sin ut \, du + \int_0^{\infty} [C(u) \cos ut + S(u) \sin ut] \, du.$$

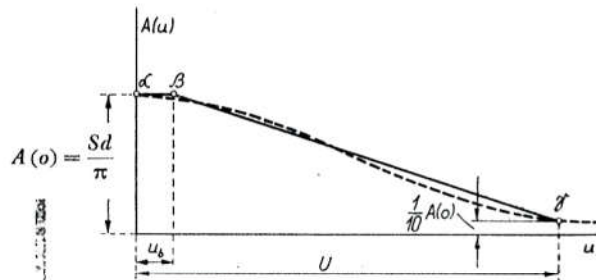
Minus ispred drugog adenda dolazi radi toga, jer moramo — da dobijemo $\Phi(t)$ — odbiti ono, što smo prije tokom izvođenja pribrojili.

f) Sadržaj i spektar impulsa

Pod impulsom podrazumijevamo neku funkciju $\Phi(t)$, koja u izvjesnom vremenskom intervalu ima znatno veće vrijednosti od nule, a izvan toga intervala ima vrijednost nula, ili se progresivno približava nuli. Uzevši općenito takva se funkcija $\Phi(t)$ proteže od $t = -\infty$ do $t = +\infty$.



Slika 98.



Slika 99.

Sl. 98. prikazuje karakterističan izgled impulsa, kod čega se ishodište izabranog koordinatnog sistema pokriva s momentom, u kojem impuls ima svoj maksimum h .

Kao što nam je poznato, rezultatni relativni verzor izvjesne pozitivne frekvencije u , čiji se titraj zbiva na realnoj osi, glasi:

$$\mathcal{A}(u) = C(u) - jS(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{-j u t} \, dt.$$

Ovdje smo pod integralom umjesto a , pisali originalno t .

Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) \, dt = Sd$$

zove se sadržaj ili jačina impulsa. Kao širinu impulsa b definirat ćemo širinu pravokutnog impulsa iste visine h , a jednakog sadržaja kao zadani impuls.

Prema tome $b = \frac{Sd}{h}$.

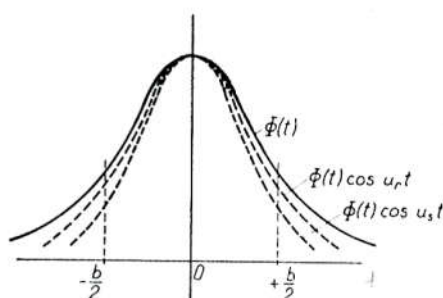
Interesira nas spektar amplituda $A(u)$ rezultatnih relativnih verzora. Ta se krivulja za jednostavnije svrhe ne izračunava. Približno se dovoljno točno dobiva tako, da se uzima kao da amplituda frekvencije nula, t. j. $A(0)$,

nepromijenjeno ostaje do frekvencije u_b , koju ćemo definirati kasnije, te da se nadalje, do frekvencije U pravocrtno snizuje na $\frac{1}{10} A(0)$. Frekvencija U ima vrijednost između $9 u_b$ i $18 u_b$ — najčešće $12 u_b$, što ovisi o samoj formi impulsa, t. j. da li je ta forma manje ili više „oštra“. Na taj način prema sl. 99. dobivamo razlomljeni potez $\alpha - \beta - \gamma$, koji nam može služiti kao gruba okosnica, u koju od oka u crtamo samu krivulju spektra, što je i učinjeno. Amplituda frekvencije nula iznosi:

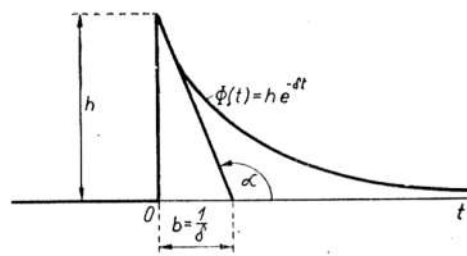
$$A(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{-j0t} dt = \frac{Sd}{\pi}$$

Frekvenciju u_b saznat ćemo na slijedeći način:

Najvažniji dio funkcije $\Phi(t)$, koji određuje izgled spektra, je, naravno, onaj, gdje funkcija ima najveće vrijednosti. To se važno područje prostire na obje strane oko ishodišta. Dogovorit ćemo se, da su granice toga područja $-\frac{b}{2}$, te $\frac{b}{2}$, jer lijevo od $-\frac{b}{2}$, kao i desno od $\frac{b}{2}$, ordinate su već tako malene, da ti dijelovi funkcije ne pridonose bitno izgledu spektra.



Slika 100.



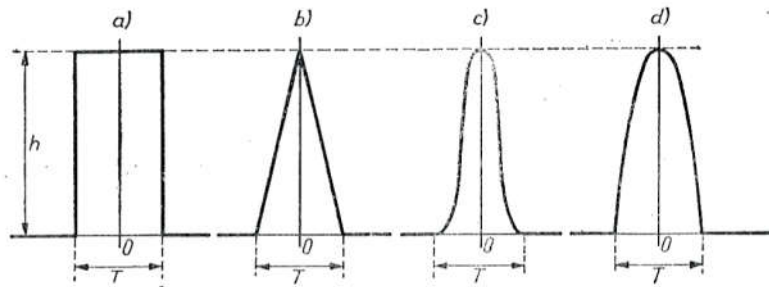
Slika 101.

Prema navedenoj formuli za $\mathcal{A}(u)$, kod nekog $u \neq 0$, moramo izvršiti integraciju po vremenu od $t = -\infty$ do $t = +\infty$, odnosno prema našem dogovoru od $t = -\frac{b}{2}$ do $t = \frac{b}{2}$, funkcije, koja je jednaka umnošku funkcije $\Phi(t)$ s iznosom $e^{-j u t}$. Taj iznos je u času $t = 0$ upravo jednak jedinici, bez obzira na frekvenciju u , te se radi toga originalna funkcija i sadašnji umnožak u točki $t = 0$ pokrivaju. Prema sl. 100., ukoliko idemo dalje nalijevo ili nadesno od ishodišta, i što je u veći, to se $\Phi(t)$ i $\Phi(t) e^{-j u t}$ sve jače razilaze. Umnožak

$$\Phi(t) e^{-j u t} = \Phi(t) [\cos ut - j \sin ut].$$

Na navedenoj slici nacrtali smo samo cosinusovu komponentu $\Phi(t) \cos ut$, dok bi se imaginarna sinusova komponenta $-j \Phi(t) \sin ut$ nalazila okomito na ravninu papira.

U negativnom vremenu, t. j. $-\frac{b}{2} \leq t \leq 0$ imaginarna bi komponenta uz $t = (-k)$, dakle, $-j\Phi(-k)\sin u(-k)$, bila u pozitivnom smjeru imaginarne osi, dakle na pr. iznad površine papira, a u pozitivnom vremenu, dosljedno tome, ispod površine papira. Međutim, tu imaginarnu komponentu možemo zanemariti, jer su kutovi ut unutar promatranih frekvencija i malenih vremena — kako će to odmah niže dolje biti razjašnjeno — veoma maleni i prema tome su veoma maleni i njihovi sinusi.



Slika 102.

Naš izraz za realnu komponentu $\Phi(t)\cos ut$, naravno, najviše se udaljuje od $\Phi(t)$ upravo u posljednjem još promatranom času, t. j. u času $-\frac{b}{2}$, odnosno u času $\frac{b}{2}$. Sada ćemo kao u_b definirati onu frekvenciju, kod koje je u tim kritičnim, još promatranim časovima, razmimoilaženje između $\Phi(t)$, te $\Phi(t)\cos ut$, maksimalno oko 4%. To znači, da $\cos u_b \frac{b}{2}$, odnosno $\cos u_b \left(-\frac{b}{2}\right)$, smije biti najmanje 0,96. Na taj način dobili smo onu najveću frekvenciju, kod koje još možemo smatrati, da je amplituda u bitnosti ostala nepromijenjena, t. j. $A(0)$. Kod opisanog razmatranja mislimo, naravno, na kut $u_b \frac{b}{2}$, koji je manji od $\frac{\pi}{2}$, dakle, kad cosinus prvi puta u vremenu $\frac{b}{2}$ postaje 0,96, jer bi, kod viših frekvencija mogli također udovoljiti zahtjevu, da $\cos u \frac{b}{2}$ bude 0,96, ali to ne bi u intervalu od 0 do $\frac{b}{2}$ za tu cosinusovu funkciju bilo prvi puta, i kut $u \frac{b}{2}$ bi bio veći od $\frac{\pi}{2}$.

Iz

$$\cos u_b \frac{b}{2} = 0,96 \quad \text{slijedi} \quad u_b \frac{b}{2} = 16,25^\circ$$

odnosno u radijanima (budući da se kružne frekvencije izražavaju u radijanima)

$$u_b \frac{b}{2} = \frac{\pi}{180} 16,25 = 0,283 \quad u_b = \frac{0,566}{b} [\text{s}^{-1}]$$

Napred navedeni postupak opravdan je statistički, jer se točne krivulje spektra praktično veoma malo razlikuju od ovako dobivenih aproksimativnih krivulja.

Promotrit ćemo još poznatu prigušnu funkciju, koja je zapravo impuls, prema sl. 101., t. j.

$$\mathcal{A}(u) = C(u) - jS(u) = \frac{h}{\pi(\delta + ju)}$$

$$A(u) = \frac{h}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + u^2}}$$

Jačina impulsa bit će

$$Sd = \int_0^{\infty} h e^{-\delta t} dt = -\frac{h}{\delta} e^{-\delta t} \Big|_0^{\infty} = \frac{h}{\delta}$$

Širina impulsa

$$b = \frac{Sd}{h} = \frac{1}{\delta}, \quad \text{odnosno} \quad \delta = \frac{1}{b}$$

Stoga je

$$A(u) = \frac{Sd \delta}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + u^2}} = \frac{Sd}{\pi \sqrt{1 + u^2 b^2}}$$

Širina impulsa je u ovom slučaju subtangenta u $t = 0$, t. j.

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\delta h e^{-\delta t}$$

odnosno

$$\left. \frac{d\Phi(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\delta h = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{h}{b}.$$

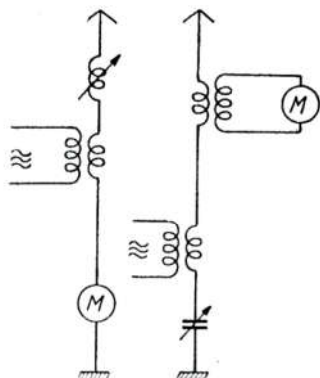
Na sl. 102. nacrtano je još nekoliko impulsa, te je pod a) prikazan pravokutni, nama već poznati impuls, pod b) trokutasti impuls, pod c) je kombinacija konstante $\frac{h}{2}$ i cosinusoide $\frac{h}{2} \cos x$ za $x = -\pi$ do $x = \pi$, dok je impuls pod d) cosinusoida $h \cos x$ za $x = -\frac{\pi}{2}$ do $x = \frac{\pi}{2}$.

Rastavljanje u Fourierov red, odnosno proučavanje spektra izvjesnih fizikalnih veličina, na pr. tonova govora, potrebno je zbog određivanja prolaza tih veličina kroz titrajne krugove, kod čega, uslijed nejednolike propustljivosti takvih krugova za razne frekvencije, nastaje distorzija prijašnjih veličina.

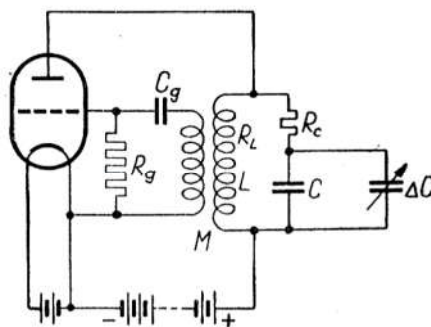
6. HARMONIČKA MODULACIJA

a) Općenito i principi praktičnih izvedbi

U mnogim važnim telekomunikacionim sistemima vijesti se prenose pomoću viših frekvencija, nego li su to originalne frekvencije samih signala. Originalne niskofrekventne funkcije signala djeluju na visokofrekventni val



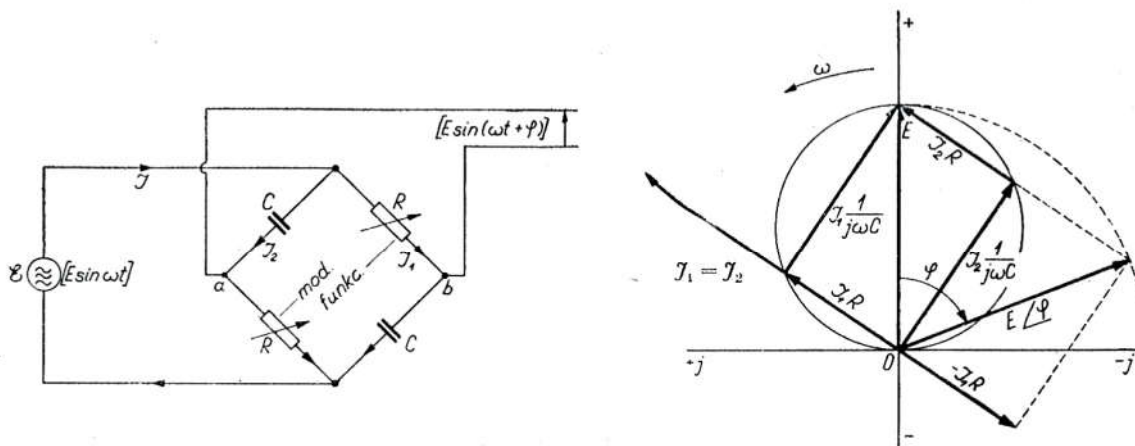
Slika 103.



Slika 104.

nosilac, mijenjajući mu izvjesne attribute, već prema upotrebljenom uređaju — one ga moduliraju. Kod primanja takvog visokofrekventnog moduliranog vala nastaje obrnut proces, t. j. iz njega se izluči — demodulira — originalna niskofrekventna funkcija.

Kao val nosilac služi nam u prvom redu harmonički titraj. Njegovi su atributi 1.) amplituda, 2.) frekvencija i 3.) faza, i već prema tome, koji od tih atributa mijenjamo, govorimo 1.) o amplitudnoj, 2.) o frekventnoj i 3.) o faznoj

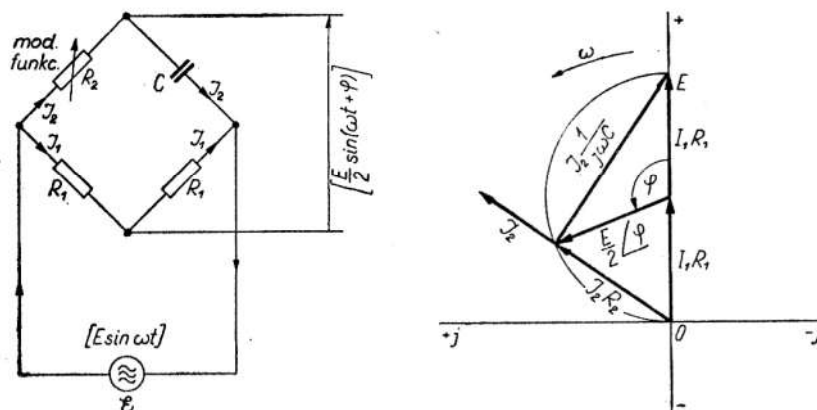


Slika 105.

harmoničkoj modulaciji. Moguće su kombinacije amplitudne modulacije s frekventnom ili faznom modulacijom. Već smo spomenuli, da na pr. treptaj možemo shvatiti kao istovremenu amplitudnu i frekventnu, ili kao amplitudnu i faznu modulaciju.

Princip praktične izvedbe amplitudne modulacije prikazuje sl. 103. Otpor mikrofona M , odnosno otpor antenskog kruga, mijenja se djelovanjem valova zraka, koje prouzrokuje govor, pa se radi toga u anteni mijenja amplituda visokofrekventne struje.

Princip frekventne modulacije prikazuje sl. 104. Nacrtan je uređaj, koji se zove oscilator, i koji pod izvjesnim uvjetima proizvodi u anodnom krugu, superponirano istosmjernoj struji, stalne titraje izmjenične struje frekvencije $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{L(C + \Delta C)}}$. Ako modulacionom funkcijom utječemo na kondenzator ΔC , mijenjat će se prema tome i frekvencija tih strujnih titraja, te imamo frekventnu modulaciju.



Slika 106.

Faznu modulaciju postići ćemo pomoću uređaja nacrtanog na sl. 105. lijevo. Promjenljivi otpori označeni sa R mogu biti na pr. elektronke, ili plinski tinjavi otpori i t. d. Modulacionom funkcijom utječemo na oba otpora. Pomoću verzorskog prikaza na istoj slici desno objasniti ćemo djelovanje uređaja. U ogranku struje $\mathcal{I}_1$ napon E raspada se na padove napona $\mathcal{I}_1 R$ i $\mathcal{I}_1 \frac{1}{j\omega C}$, a u ogranku struje $\mathcal{I}_2$, koja je jednaka struji $\mathcal{I}_1$, na $\mathcal{I}_2 \frac{1}{j\omega C}$, te $\mathcal{I}_2 R$. Između točaka b i a dobit ćemo napon $E \sin(\omega t + \varphi)$, ako idući na pr. gornjim stranicama mosta, počevši od b , k $-\mathcal{I}_1 R$ (minus radi toga, jer je struja $\mathcal{I}_1$ tada negativna) pribrojimo $\mathcal{I}_2 \frac{1}{j\omega C}$, što je u dijagramu i učinjeno. Do istog bi rezultata, naravno, došli, da smo od b prema a išli donjim stranicama mosta.

Umjesto, da upotrebimo promjenljive otpore kod konstantnih kapaciteta C , možemo postupiti obrnuto, t. j. možemo upotrebiti promjenljive kapacitete kod konstantnih otpora.

Sl. 106. lijevo prikazuje sličan most, ali gdje fazno modulirani napon ima samo polovičnu amplitudu izvornog napona. Prema verzorskom prikazu na istoj slici desno, vidi se, da se izvorni napon u otporničkoj grani raspada na dva jednaka dijela, dok se u drugoj grani raspada na $\mathcal{I}_2 R_2$ i $\mathcal{I}_2 \frac{1}{j\omega C}$. Kod promjene R_2 , na koji utječe modulaciona funkcija, vrh pravog kuta gibat će se po polukružnici. Napon $\frac{E}{2} \sin(\omega t + \varphi)$ je spojnicu središta polukružnice i vrha toga kuta.

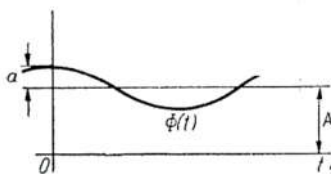
b) Poblíže o amplitudnoj harmoničkoj modulaciji

Prema sl. 107. gore, amplitudu A modulirat ćemo na pr. cosinusovom funkcijom $a \cos \omega t$, te će radi toga amplituda moduliranog vala glasiti

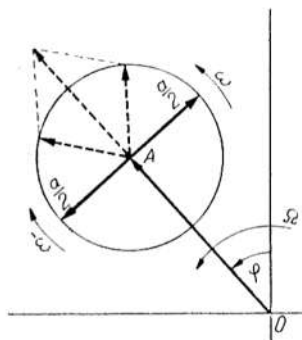
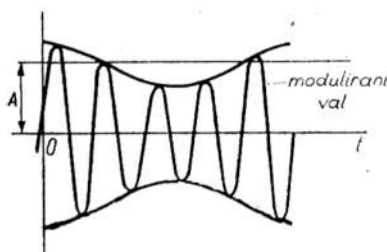
$$\Phi(t) = (A + a \cos \omega t),$$

a sam modulirani val bit će

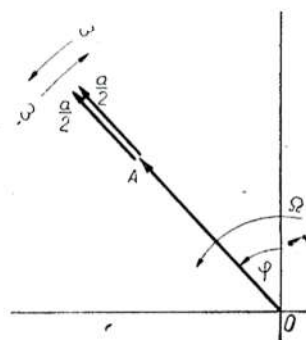
$$M(t) = (A + a \cos \omega t) \sin(\Omega t + \varphi),$$



Slika 107.



Slika 108.



Slika 109.

gdje smo s Ω označili visoku kružnu frekvenciju vala nosioca, za razliku od ω , koji označuje nisku kružnu frekvenciju signala. Da je modulaciona funkcija neki općeniti harmonički val $a \sin(\omega t + \varepsilon)$, onda bi bilo

$$M(t) = [A + a \sin(\omega t + \varepsilon)] \sin(\Omega t + \varphi).$$

Sl. 107. dolje prikazuje sam amplitudno modulirani val $M(t)$ uz cosinusovu modulacionu funkciju.

Prema tome bit će:

$\frac{\Omega}{2\pi}$ frekvencija vala nosioca

$\frac{\omega}{2\pi}$ frekvencija modulacionog vala

a domet negativne i pozitivne promjene amplitude

$\frac{a}{A}$ stepen modulacije.

Mjesto „domet promjene“ udomaćio se je i izraz „razmah“. Sada ćemo poblíže promotriti amplitudnu modulaciju, ako je modulaciona funkcija na pr. sinusova funkcija, t. j.

$$\begin{aligned} M(t) &= (A + a \sin \omega t) \sin(\Omega t + \varphi) = A \sin(\Omega t + \varphi) + \\ &+ a \sin \omega t \sin(\Omega t + \varphi) = A \sin(\Omega t + \varphi) + \frac{a}{2} \cos[(\Omega - \omega)t + \varphi] - \end{aligned}$$

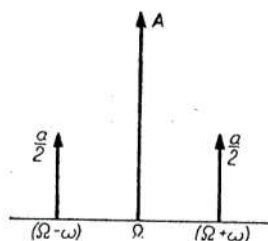
$$-\frac{a}{2} \cos [(\Omega + \omega)t + \varphi] = A \sin (\Omega t + \varphi) + \\ + \frac{a}{2} \sin \left[(\Omega - \omega)t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{a}{2} \sin \left[(\Omega + \omega)t + \varphi - \frac{\pi}{2} \right].$$

Sl. 108. prikazuje verzorski prikaz dobivenog matematičkog izraza kod čega je $\frac{\Omega + \omega}{2\pi}$ gornja bočna frekvencija, a $\frac{\Omega - \omega}{2\pi}$ donja bočna frekvencija.

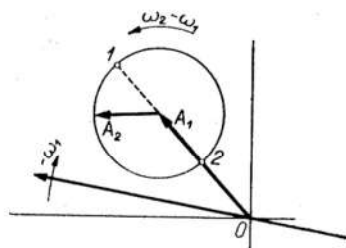
Ako je modulaciona funkcija cosinusova funkcija, onda slijedi, da je:

$$M(t) = A \sin (\Omega t + \varphi) + \frac{a}{2} \sin [(\Omega - \omega)t + \varphi] + \frac{a}{2} \sin [(\Omega + \omega)t + \varphi].$$

Sl. 109. prikazuje verzorski prikaz za taj slučaj. Taj prikaz ovih triju verzora crta se još i prema sl. 110., dakle ispustivši fazu, koja je ista za sva tri ver-



Slika 110.



Slika 111.

zora. Ako pojav traje oduvijek i prije povoljno odabranog $t = 0$, i ako će postojati do vijeka, onda je taj prikaz ujedno i linijski spektar moduliranog vala. Stanje u $t = 0$ sadržano je u fazi, koja postoji u času, kad smo odlučili početi brojiti vrijeme. Vrijednost $M(t)$ znači vrijednost vala u promatranom vremenu t .

U opisanim slučajevima, kad je modulaciona funkcija bila harmonička funkcija, bio je domet isti u pozitivnom i negativnom smislu. Razumije se, da će kod neke drugačije modulacione funkcije pozitivni domet biti općenito različit od negativnog.

c) Poblje o harmoničkoj frekventnoj i faznoj modulaciji

Kako je sada amplituda konstantna, modulirani val možemo općenito napisati u obliku

$$M(t) = A \sin a(t).$$

Međutim, taj izraz vrijedi i za nemodulirani val nosilac, čiji je argument $a(t) = (\Omega t + \varphi)$ i stoga $\frac{da(t)}{dt} = \Omega$, t. j. promjena njegovog argumenta po

vremenu, jednaka je konstantnoj frekvenciji. Ako, međutim, tu frekvenciju mijenjamo prema modulacionoj funkciji, ona će postati ovisna o vremenu, t. j. $\Omega(t)$, a sam val bit će frekventno moduliran.

U nekom času imat ćemo:

$$a(t) = \int_0^t \Omega(t) dt + \varphi,$$

gdje je φ početna faza, odnosno

$$M(t) = A \sin \left[\int_0^t \Omega(t) dt + \varphi \right].$$

Pri tome pojav može biti vremenski ograničen, a može trajati od $t = -\infty$ do $t = +\infty$.

Pri faznoj modulaciji je $\frac{da(t)}{dt} = \Omega + \frac{d\varphi(t)}{dt}$, t. j. argument se mijenja tako, kao da se pri konstantnoj frekvenciji početna faza vala nosioca neprestano mijenja prema modulacionoj funkciji. Napisali smo „kao“, jer fizikalno početna faza postoji uistinu samo jedamput, t. j. u $t = 0$, i stoga se tokom vremena ne može mijenjati, jer je prošla i više ne postoji. Međutim, bez obzira na to, iz verzorskog prikaza razabire se, da se pojav može konstruirati sasvim formalno matematički tako, kao da se uz konstantnu frekvenciju modulacijom neprestano mijenja početna faza. Radi toga će biti:

$$a(t) = \int_0^t \Omega dt + \varphi(t) = \Omega t + \varphi(t),$$

odnosno

$$M(t) = A \sin [\Omega t + \varphi(t)].$$

Zapravo, fizikalno se i kod fazne modulacije, uz prednju definiciju faze, svakog trenutka mijenja frekvencija, iako je ta promjena drukčija, nego li kod frekventne modulacije. Ako modulacionu funkciju označimo s $m(t)$, to će u slučaju frekventne modulacije promjenljiva frekvencija biti

$$\Omega(t) = \Omega + m(t).$$

U slučaju fazne modulacije bit će

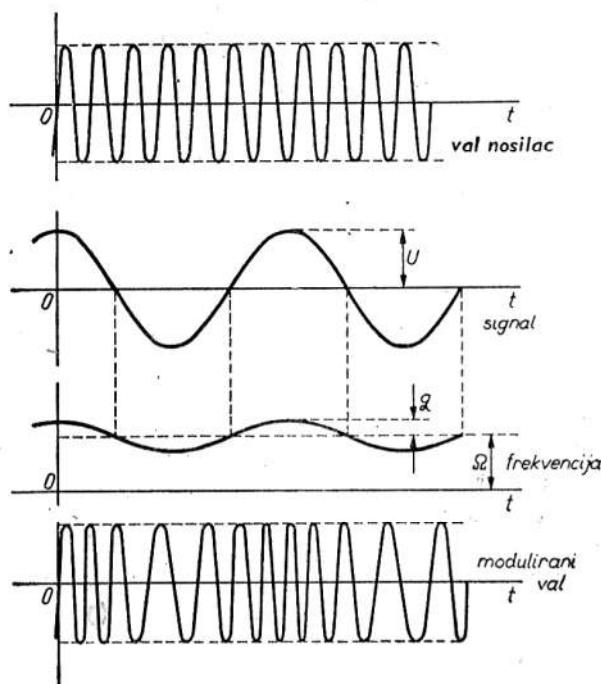
$$\varphi(t) = \varphi + m(t),$$

dakle „promjenljiva frekvencija“ glasit će sada

$$\Omega(t) = \Omega + \frac{d[\varphi + m(t)]}{dt} = \Omega + \frac{dm(t)}{dt}.$$

Prema tome, obje modulacije, fizikalno gledano, istovrsni su pojavi. Njihova kvantitativna razlika — o kojoj će se još detaljnije govoriti — nastaje radi toga, što u matematičkom izrazu modulaciona funkcija djeluje, kako znamo, jednom na frekvenciju, a drugi put na fazu, dakle na dva razna (iako međusobno kauzalno povezana) atributa nosivog vala.

Kako smo već naveli, treptaj je modulirani val s istodobnom amplitudnom i frekventnom modulacijom, ili ga možemo shvatiti kao modulirani val s istodobnom amplitudnom i faznom modulacijom. Prema sl. 111. domet negativne i pozitivne amplitudne promjene je isti, t. j. A_2 . Međutim, domet pozitivne i negativne promjene frekvencije nije isti. U točki 1 su A_1 i A_2 u istom pravcu i radi toga djeluju kao radius $(A_1 + A_2)$, dok u točki 2, iz istog razloga, djeluju kao radius $(A_1 - A_2)$. U točki 1 imamo najveću pozitivnu promjenu frekvencije, jer se dodatna frekvencija pribraja k ω_1 , a u točki 2



Slika 112.

imamo najveću negativnu promjenu frekvencije, jer se dodatna frekvencija odbija od ω_1 . Dodatna frekvencija u točki 1 bit će $\frac{A_2(\omega_2 - \omega_1)}{A_1 + A_2}$, t. j. luk u jedinici vremena podijeljen s radiusom, dok će u točki 2 biti $\frac{A_2(\omega_2 - \omega_1)}{A_1 - A_2}$. Vidimo, dakle, da je pozitivni domet promjene frekvencije manji od njenog negativnog dometa promjene.

Ako je signal cosinusova funkcija, modulaciona funkcija, koja je proporcionalna signalu, glavit će $q \cos \omega t$. Tada će kod frekventne modulacije biti:

$$\Omega(t) = \frac{da(t)}{dt} = \Omega + q \cos \omega t,$$

odnosno

$$a(t) = \Omega t + \frac{q}{\omega} \sin \omega t + \varphi$$

$$M(t) = A \sin \left(\Omega t + \frac{q}{\omega} \sin \omega t + \varphi \right) = A \sin \left[\Omega t + \frac{q}{\omega} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \varphi \right].$$

Ako bi signal bio sinusova funkcija, modulaciona funkcija glasila bi $q \sin \omega t$, odnosno

$$a(t) = \left(\Omega t - \frac{q}{\omega} \cos \omega t + \varphi \right)$$

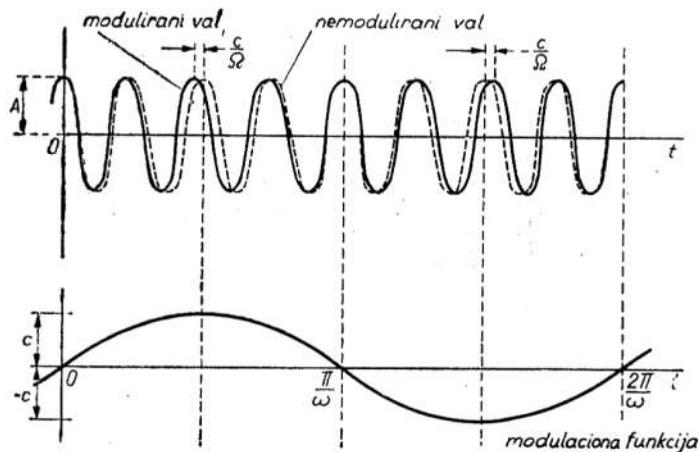
$$M(t) = A \sin \left(\Omega t - \frac{q}{\omega} \cos \omega t + \varphi \right) = A \sin \left[\Omega t + \frac{q}{\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \varphi \right].$$

Ovdje je:

$\frac{q}{2\pi}$ domet promjene frekvencije (u našem slučaju jednak u pozitivnom i negativnom smislu).

$\frac{q}{\Omega}$ stepen modulacije.

Sl. 112. prikazuje val nosilac, signal, frekvenciju i modulirani val. Vidimo, da su kod veće frekvencije valovi gušći, a kod manje rjeđi.



Slika 113.

Sada ćemo uz cosinsov signal izvršiti faznu modulaciju. Modulaciona funkcija, koja je proporcionalna signalu, glasit će pri ovoj vrsti modulacije $c \cos \omega t$, te će se superponirati početnoj fazi φ i radi toga bit će:

$$\varphi(t) = \varphi + c \cos \omega t,$$

odnosno

$$M(t) = A \sin(\Omega t + c \cos \omega t + \varphi).$$

Uz sinusov signal bilo bi

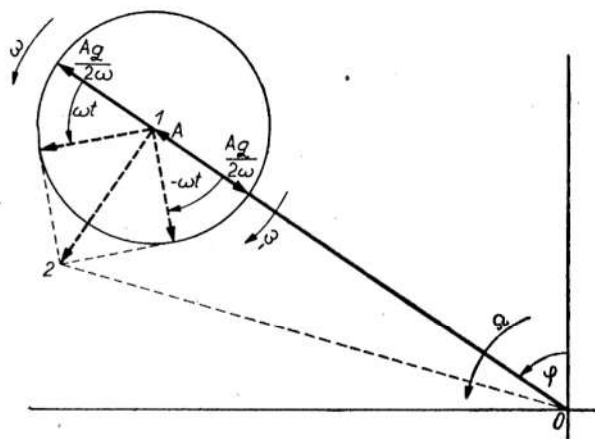
$$M(t) = A \sin(\Omega t + c \sin \omega t + \varphi).$$

Ovdje je:

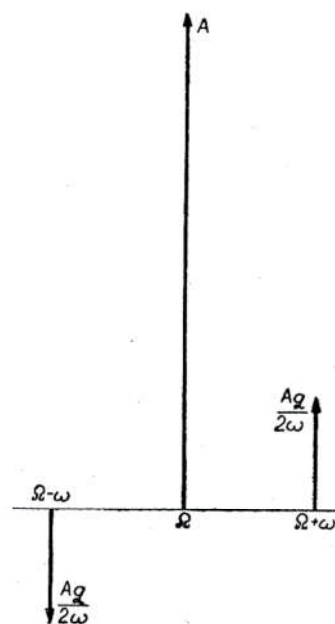
c domet promjene faze (u našem slučaju jednak u pozitivnom i negativnom smislu),

$\frac{c}{\varphi}$ stepen modulacije.

Sl. 113. prikazuje faznu modulaciju sa sinusovom modulacionom funkcijom. Najveći vremenski razmak između moduliranog i nemoduliranog vala iznosi $\pm \frac{c}{\Omega}$. Kod sinusove ili cosinusove modulacione funkcije vidimo, da će, u slučaju ako je $c = \frac{q}{\omega}$, frekventna i fazna modulacija dati jednaki modulirani val onda, ako je signal, upotrebljen za frekventnu modulaciju za $\frac{\pi}{2}$ ispred jednalog signala upotrebljenog za faznu modulaciju.



Slika 114.



Slika 115.

To dolazi otuda, što se — kako proizlazi iz prednjega — u formuli moduliranog vala, kod frekventne modulacije, pojavljuje vremenski integral modulacione funkcije, koji je kod harmoničke modulacione funkcije opet harmonička funkcija, samo druge amplitude i koja za samom modulacionom funkcijom zaostaje za $\frac{\pi}{2}$.

Kod fazne modulacije u formuli moduliranog vala pojavljuje se pak sama modulaciona funkcija. Kod ostalih funkcija, čiji vremenski integral nije jednakog funkcionalnog sastava kao što su one same, obje vrste modulacija, makar i uz fazni pomak tih funkcija za jednu i drugu vrst modulacije, ne bi se ni u kom slučaju podudarale.

Sada ćemo pristupiti točnijoj analizi izraza dobivenog za modulirani val, ako smo frekventno modulirali na pr. s cosinusom, da saznamo što taj izraz predstavlja. Kod toga ćemo pretpostaviti, da pojav traje od $t = -\infty$ do $t = +\infty$.

$$M(t) = A \sin \left(\Omega t + \frac{q}{\omega} \sin \omega t + \varphi \right) = A \sin (\Omega t + \varphi) \cos \left(\frac{q}{\omega} \sin \omega t \right) + A \cos (\Omega t + \varphi) \sin \left(\frac{q}{\omega} \sin \omega t \right)$$

Izraz $\cos \left(\frac{q}{\omega} \sin \omega t \right)$ označit ćemo s $g(t)$, a izraz $\sin \left(\frac{q}{\omega} \sin \omega t \right)$ s $f(t)$.

α) Kod slabe modulacije, t. j. ako je odnos $\frac{q}{\omega}$ malen, bit će

$$g(t) \approx 1, \quad \text{a} \quad f(t) \approx \frac{q}{\omega} \sin \omega t.$$

Prema tome bit će:

$$\begin{aligned} M(t) &= A \sin(\Omega t + \varphi) + A \cos(\Omega t + \varphi) \frac{q}{\omega} \sin \omega t = \\ &= A \sin(\Omega t + \varphi) + \frac{Aq}{2\omega} \sin[(\Omega + \omega)t + \varphi] - \frac{Aq}{2\omega} \sin[(\Omega - \omega)t + \varphi]. \end{aligned}$$

Modulirani val sastoji se prema sl. 114. iz tri vala. Ispustivši fazu, verzorski prikaz predložen je na sl. 115.

Komponente $\pm \frac{Aq}{2\omega}$ kod ispravnog prikazivanja morale bi, naravno, iščezavati prema A , da rezultatni verzor ne bi mijenjao svoju veličinu. Ako bi se netko okretao konstantnom kutnom brzinom Ω , pričinilo bi mu se, da se verzor njiše oko svog srednjeg položaja. Kako je kod takvog oscilatornog gibanja kutna brzina, ili kružna frekvencija, najveća u srednjem položaju, ona će tada predstavljati domet promjene konstantne kružne frekvencije Ω , s kojom se on okreće.

Da vidimo kolika je ta maksimalna kutna brzina u srednjem položaju $O1$! Put s , koji prevari vršak rezultatnog verzora nakon nekog vremena t , je dužina

$$\overline{12} = 2 \frac{Aq}{2\omega} \sin \omega t.$$

Brzina

$$v = \frac{ds}{dt} = Aq \cos \omega t.$$

U času $t = 0$ brzina je radi toga jednaka Aq . To je relativna brzina vrška rezultatnog verzora prema promatraču, a apsolutna će biti, ako joj pribrojimo brzinu uslijed Ω , t. j. $A\Omega$. Prema tome, u položaju $O1$ apsolutna brzina vrška verzora jednaka je

$$(A\Omega \pm Aq) = A(\Omega \pm q).$$

Predznak „+“ vrijedi za smjer, kad se obje brzine podudaraju, a predznak „—“ za protivan smjer. Vidimo, da pozitivni i negativni domet promjene kružne frekvencije ima apsolutnu vrijednost q , shodno našoj pretpostavci.

β) Kod jake modulacije odnos $\frac{q}{\omega}$ je tako velik, da izraze $g(t)$ i $f(t)$ ne možemo više aproksimirati kao kod slabe modulacije. Da saznamo, što nam u tom slučaju predstavlja modulirani val, razvit ćemo najprije dobivene izraze za $g(t)$ i $f(t)$, koje su uz t od $-\infty$ do $+\infty$ periodičke vremenske funkcije, u Fourierov red.

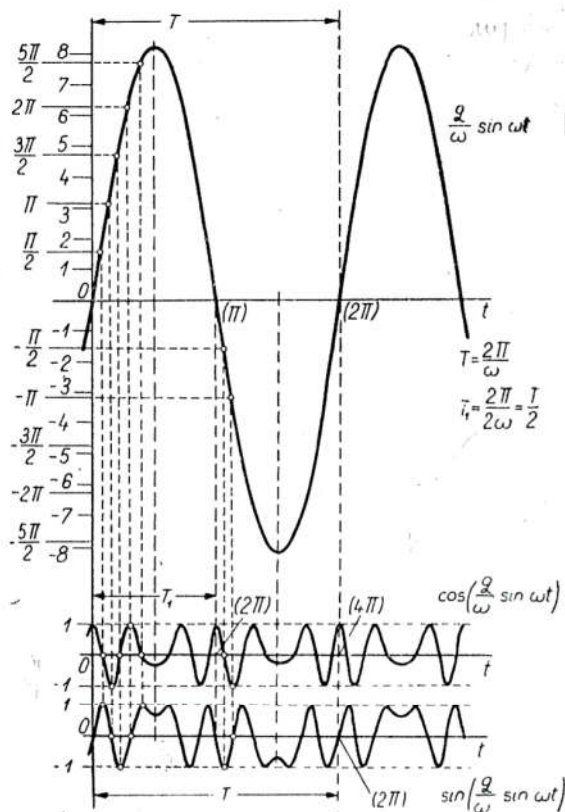
Funkciju $\frac{q}{\omega} \sin \omega t$, koja je obična sinusoida s amplitudom $\frac{q}{\omega}$, predstavlja gornji diagram u sl. 116. U zagradi su označeni prevaljeni kutovi verzora u dotičnom vremenu.

Srednji diagram prikazuje krivulju $\cos\left(\frac{q}{\omega} \sin \omega t\right)$, te se vidi kako smo došli do te krivulje, t. j. crtajući cosinuseve vrijednosti ordinata gornje sinusove funkcije, koje (ordinate) su izražene u radijanima. Trajanje periode ove funkcije jednako je polovici trajanja periode prve funkcije, jer su cosinusi negativnih ordinata jednaki cosinusima pozitivnih ordinata. Prema tome je $T_1 = \frac{T}{2}$, i radi toga je frekvencija njene osnovne harmoničke 2ω . Kutovi označeni u zagradi pokazuju prevaljeni kut verzora osnovnog vala u dotičnom vremenu.

Donji diagram pokazuje funkciju $\sin\left(\frac{q}{\omega} \sin \omega t\right)$, dobivenu na isti način iz gornje sinusoida. Ova krivulja ima trajanje periode T , budući da su sinusi negativnih ordinata negativni. Frekvencija njene osnovne harmoničke je radi toga ω . Kutovi, označeni u zagradi, odnose se i ovdje na verzor osnovne harmoničke.

Dalje vidimo, da funkcija $g(t)$ sada drži konstantni član K_0 , te je tak- (parna) funkcija, i prema tome, sastoji se samo iz cosinusovih članova. Njen polual nije ^{centralno} simetričan obzirom na vertikalnu kroz njen $\frac{\pi}{2}$, dakle funkcija sadrži sve multiplume osnovnog vala od 1 do ∞ , a frekvencija osnovnog vala je, kako znamo, 2ω . Radi toga je

$$g(t) = K_0 + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} C_{2n} \cos 2n \omega t.$$



Slika 116.

Funkcija $f(t)$ nema konstantni član, ona je liha (neparna) i radi toga se sastoji samo iz sinusovih članova. Obzirom na vertikalnu kroz svoj $\frac{\pi}{2}$, ima simetričan polual, dakle funkcija sadrži samo lihe multiplume osnovne harmoničke, čija je frekvencija, kako znamo, ω . Radi toga je

$$f(t) = \sum_{n=0,1,2,3,\dots}^{\infty} S_{(2n+1)} \sin(2n+1) \omega t.$$

$$K_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \cos \left(\frac{q}{\omega} \sin \omega t \right) dt = \frac{1}{\frac{2\pi}{2\omega} \omega} \int_0^{\frac{2\pi}{2\omega} \omega} \cos \left(\frac{q}{\omega} \sin \omega t \right) d(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \left(\frac{q}{\omega} \sin x \right) dx.$$

$$C_{2n} = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \cos \left(\frac{q}{\omega} \sin \omega t \right) \cos 2n \omega t dt =$$

$$= \frac{2}{\frac{2\pi}{2\omega} \omega} \int_0^{\frac{2\pi}{2\omega} \omega} \cos \left(\frac{q}{\omega} \sin \omega t \right) \cos 2n \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \left(\frac{q}{\omega} \sin x \right) \cos 2nx dx.$$

$$S_{(2n+1)} = \frac{2}{T} \int_0^T \sin \left(\frac{q}{\omega} \sin \omega t \right) \sin (2n+1) \omega t dt =$$

$$= \frac{2}{\frac{2\pi}{\omega} \omega} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega} \omega} \sin \left(\frac{q}{\omega} \sin \omega t \right) \sin (2n+1) \omega t d\omega t =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \left(\frac{q}{\omega} \sin x \right) \sin (2n+1) x dx.$$

Drugi poluval funkcije $\sin \left(\frac{q}{\omega} \sin x \right)$ negativno je jednak prvom poluvalu, a isto tako su svi valovi sinusa lihih multipluma, t. j. $\sin (2n+1)x$ unutar intervala tog drugog poluvala, negativno jednaki onima unutar intervala prvog poluvala. Znači, dakle, da će te dvije veličine izmijenjenog predznaka, međusobno pomnožene, dati istu vrijednost kao i dvije njima apsolutno jednake veličine prijašnjeg predznaka. Prema tome, integracioni put možemo smanjiti na polovicu i taj integral uzeti dvostruko, t. j.

$$S_{(2n+1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \left(\frac{q}{\omega} \sin x \right) \sin (2n+1) x dx.$$

Izraz za K_0 jednak je — kao što se vidi — izrazu $\frac{1}{2} C_{2n}$ za $n=0$.

Navedeni izrazi su Besselove cilindričke funkcije prve vrste u integralnom obliku, t. j.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{q}{\omega} \sin x\right) \cos[2nx] dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{q}{\omega}\right)^{2n+2r}}{r!(2n+r)!} = \mathcal{J}_{2n}\left(\frac{q}{\omega}\right) = \frac{1}{2} C_{2n}.$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{q}{\omega} \sin x\right) \cos[-2nx] dx = \sum_{r=2n}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{q}{\omega}\right)^{2r-2n}}{r!(r-2n)!} = \mathcal{J}_{-2n}\left(\frac{q}{\omega}\right) = \frac{1}{2} C_{-2n}.$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{q}{\omega} \sin x\right) dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{q}{\omega}\right)^{2r}}{(r!)^2} = \mathcal{J}_0\left(\frac{q}{\omega}\right) = K_0.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{q}{\omega} \sin x\right) \sin[(2n+1)x] dx &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{q}{\omega}\right)^{2n+1+2r}}{r!(2n+1+r)!} = \\ &= \mathcal{J}_{(2n+1)}\left(\frac{q}{\omega}\right) = \frac{1}{2} S_{(2n+1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{q}{\omega} \sin x\right) \sin[-(2n+1)x] dx &= \sum_{r=2n+1}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{q}{\omega}\right)^{2r-2n-1}}{r!(r-2n-1)!} = \\ &= \mathcal{J}_{-(2n+1)}\left(\frac{q}{\omega}\right) = \frac{1}{2} S_{-(2n+1)}. \end{aligned}$$

Kao što se lako vidi iz integralnog oblika,

$$\mathcal{J}_{2n}\left(\frac{q}{\omega}\right) = \mathcal{J}_{-2n}\left(\frac{q}{\omega}\right),$$

budući da je

$$\cos[-2nx] = \cos[2nx],$$

a

$$\mathcal{J}_{-(2n+1)}\left(\frac{q}{\omega}\right) = -\mathcal{J}_{(2n+1)}\left(\frac{q}{\omega}\right)$$

budući da je

$$\sin[-(2n+1)x] = -\sin[(2n+1)x].$$

Prema tome, konačno dobivamo:

$$g(t) = \mathcal{J}_0\left(\frac{q}{\omega}\right) + 2 \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \mathcal{J}_{2n}\left(\frac{q}{\omega}\right) \cos 2n\omega t$$

$$f(t) = 2 \sum_{n=0,1,2,3,\dots}^{\infty} \mathcal{J}_{(2n+1)}\left(\frac{q}{\omega}\right) \sin(2n+1)\omega t.$$

Naš modulirani val glasio je:

$$M(t) = A \sin(\Omega t + \varphi) g(t) + A \cos(\Omega t + \varphi) f(t).$$

Iz toga slijedi, da je:

$$\begin{aligned} \frac{M(t)}{A} &= \mathcal{F}_0\left(\frac{q}{\omega}\right) \sin(\Omega t + \varphi) + 2 \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \mathcal{F}_{2n}\left(\frac{q}{\omega}\right) \cos 2n\omega t \sin(\Omega t + \varphi) + \\ &+ 2 \sum_{n=0,1,2,3,\dots}^{\infty} \mathcal{F}_{(2n+1)}\left(\frac{q}{\omega}\right) \sin(2n+1)\omega t \cos(\Omega t + \varphi). \\ \frac{M(t)}{A} &= \mathcal{F}_0\left(\frac{q}{\omega}\right) \sin(\Omega t + \varphi) + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \mathcal{F}_{2n}\left(\frac{q}{\omega}\right) \{ \sin[(\Omega + 2n\omega)t + \varphi] + \\ &+ \sin[(\Omega - 2n\omega)t + \varphi] \} + \sum_{n=0,1,2,3,\dots}^{\infty} \mathcal{F}_{(2n+1)}\left(\frac{q}{\omega}\right) \{ \sin\{[\Omega + (2n+1)\omega]t + \varphi\} - \\ &- \sin\{[\Omega - (2n+1)\omega]t + \varphi\} \} = \\ &= \mathcal{F}_0\left(\frac{q}{\omega}\right) \sin(\Omega t + \varphi) + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \mathcal{F}_{2n}\left(\frac{q}{\omega}\right) \sin[(\Omega + 2n\omega)t + \varphi] + \\ &+ \sum_{n=-1,-2,-3,\dots}^{-\infty} \mathcal{F}_{2n}\left(\frac{q}{\omega}\right) \sin[(\Omega + 2n\omega)t + \varphi] + \\ &+ \sum_{n=0,1,2,3,\dots}^{\infty} \mathcal{F}_{(2n+1)}\left(\frac{q}{\omega}\right) \sin\{[\Omega + (2n+1)\omega]t + \varphi\} + \\ &+ \sum_{n=0,1,2,3,\dots}^{\infty} \mathcal{F}_{-(2n+1)}\left(\frac{q}{\omega}\right) \sin\{[\Omega - (2n+1)\omega]t + \varphi\}. \end{aligned}$$

Kod trećeg adenda u posljednjoj jednadžbi promijenili smo predznake za n . To je dopušteno, jer je $\mathcal{F}_{2n} = \mathcal{F}_{-2n}$, a u uglatoj zagradi ispred $2n$ promijenili smo minus u plus. Petom adendu promijenili smo predznak, ali smo to kompenzirali, jer smo mjesto $\mathcal{F}_{(2n+1)}$ stavili $\mathcal{F}_{-(2n+1)}$.

Taj peti adend možemo pisati ovako:

$$+ \sum_{n=-1,-2,-3,\dots}^{-\infty} \mathcal{F}_{(2n+1)}\left(\frac{q}{\omega}\right) \sin\{[\Omega + (2n+1)\omega]t + \varphi\}$$

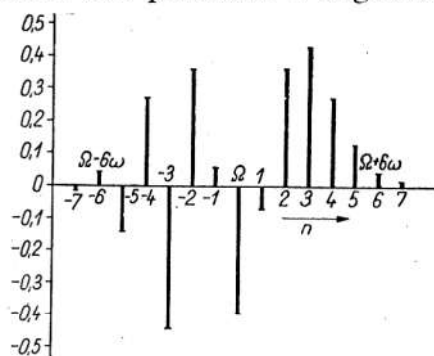
To je dopušteno, jer su izrazi $\mathcal{F}_{-(2n+1)}$, te izrazi $-(2n+1)$ kod $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ jednaki izrazima $\mathcal{F}_{(2n+1)}$, te izrazima $+(2n+1)$ kod $n = -1, -2, -3, \dots$

Ako sada pogledamo prva tri adenda, vidjet ćemo, da su u njima zastupani svi pozitivni i negativni parni cijeli brojevi, te nula, dakle svi $2n$ za $n = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty$. Četvrti i peti adend sadrže sve pozitivne i negativne neparne cijele brojeve.

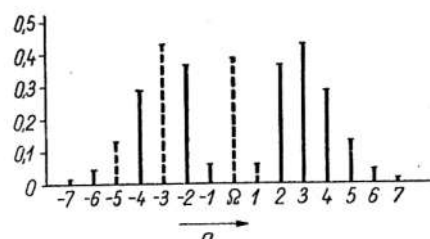
Prema tome možemo pisati:

$$\frac{M(t)}{A} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{q}{\omega}\right) \sin[(\Omega + n\omega)t + \varphi]$$

gdje n znači sve pozitivne i negativne cijele brojeve, te nulu.



Slika 117.



Slika 118.

To je Besselov red. On se razlikuje od Fourierovog reda time, što nije sastavljen od osnovnog vala i ostalih valova, čije su frekvencije multiplumi osnovne frekvencije, nego se sastoji od povoljnog vala frekvencije Ω i ostalih valova, čije su frekvencije zbroj Ω , te $n\omega$, gdje je $n = -\infty$ do $+\infty$.

Izračunate cilindričke funkcije mogu se naći na pr. u tablicama, koje su sastavili Jahnke i Emde. Sl. 117. prikazuje linijski spektar verzora ovakvog Besselovog reda za odnos $\frac{q}{\omega} = 4$, budući da smo iz tabela dobili cilindričke funkcije kako slijedi:

n	$J_n(4)$
0	— 0,397
1	— 0,066
2	0,364
3	0,430
4	0,281
5	0,132
6	0,049
7	0,015
8	0,004
9	i t. d.*)

Kako u tabelama nisu navedene cilindričke funkcije za negativne n , to ćemo se sjetiti, da su kod parnih vrijednosti n te funkcije jednake onima s pozitivnim n , a kod neparnih su negativno jednake. Taj se linijski spektar često prikazuje prema sl. 118., gdje crtkane dužine znače negativne vrijednosti.

*) Besselove funkcije — kako se to vidi na gornjem primjeru — imaju to svojstvo da monotonno opadaju, kad red funkcije postaje veći od argumenta, t. j. kod $n \geq \frac{q}{\omega}$.

Bočne komponente, koje su manje od 1% nemoduliranog nosivog vala, obično se ne uzimaju više u obzir kod prenosa spektra.

Kako je

$$\frac{M(t)}{A} = \sin\left(\Omega t + \frac{q}{\omega} \sin \omega t + \varphi\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n\left(\frac{q}{\omega}\right) \sin[(\Omega + n\omega)t + \varphi]$$

to znači, da svi verzori, koji predstavljaju Besselov red, imaju fazni pomak φ , odnosno kod negativnih vrijednosti cilindričke funkcije $(\varphi + \pi)$, i da zajedno daju rezultantu amplitude 1. Svaki verzor s parnim n , i njegov pripadni verzor s protuvrtnjom, su u $t=0$ međusobno u fazi, dok su svaki verzor s neparnim n , i njegov pripadni verzor, međusobno u protufazi. Verzor s $n=0$, amplitude $\mathcal{J}_0\left(\frac{q}{\omega}\right)$, nema pripadnog verzora. Taj će verzor, i svi verzori s parnim n , u svakom momentu dati jednu promjenljivu komponentu u smjeru verzora sa $n=0$, na kojoj stoji okomito druga promjenljiva komponenta, sastavljena od svih verzora s neparnim n . Obje međusobno okomite komponente, daju rezultantu, čija amplituda je svakog momenta 1, a frekvencija joj je modulirana nosiva frekvencija.

Razumije se, da će naš linijski spektar vrijediti i za faznu modulaciju sa sinusom, t. j.

$$M(t) = A \sin(\Omega t + c \sin \omega t + \varphi),$$

ako je $c = \frac{q}{\omega}$.

Kad bi sada promijenili frekvenciju signala, a prema tome i frekvenciju modulacione funkcije t. j. ω , Besselove cilindričke funkcije $\mathcal{J}_n(c)$, t. j. amplitude verzora, zadržale bi kod fazne modulacije svoje prijašnje vrijednosti, a cio linijski spektar bi se samo rastegnuo, ili suzio, već prema tome, da li je ω postao veći ili manji. Kod frekventne modulacije u tom slučaju, međutim, promijenio bi se još i oblik linijskog spektra, t. j. i amplitude, jer bi u izrazu $\mathcal{J}_n\left(\frac{q}{\omega}\right)$ promijenili odnos $\left(\frac{q}{\omega}\right)$.

Kod frekventne modulacije, koju smo upravo istraživali, domet promjene kružne frekvencije Ω , t. j. q je proporcionalan samo amplitudi signala, koji glasi $U \sin \omega t$, odnosno $U \cos \omega t$. Kod fazne modulacije s navedenim signalom domet fazne promjene c analogno je proporcionalan samo amplitudi U .

γ) Da uočimo razliku između frekventne i fazne modulacije shvatit ćemo kod frekventno moduliranog vala izraz $\frac{q}{\omega} \sin \omega t$, kao promjenu faze φ . Odnos $\frac{q}{\omega}$ bio bi tada domet te fazne promjene, dakle proporcionalan amplitudi signala i obrnuto proporcionalan njegovoj frekvenciji. Znači, da se takav domet fazne promjene po strukturi razlikuje od pravog dometa fazne promjene, koji ne zavisi od frekvencije signala.

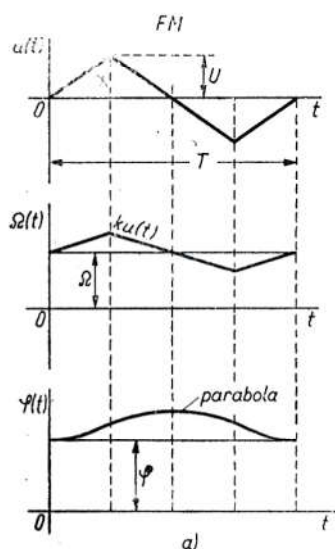
Ako bi analogno, kod fazne modulacije adend $c \sin \omega t$, shvatili kao da je pridošao uslijed promjene frekvencije, t. j.

$$\frac{d(c \sin \omega t)}{dt} = \omega c \cos \omega t,$$

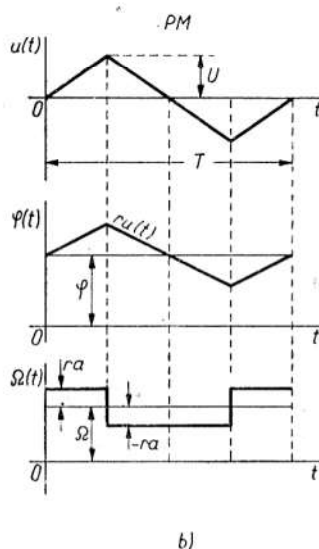
onda bi domet te frekventne promjene ωc zavisio od amplitude signala i njegove frekvencije. Time bi se također po strukturi razlikovao od pravog dometa

frekventne promjene, koji ne zavisi od frekvencije signala, nego samo od nje-gove amplitude.

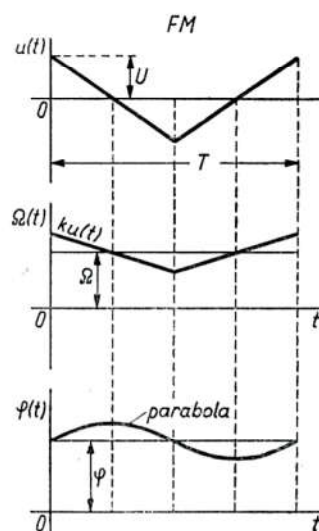
Razlika između obje vrsti modulacija postat će nam zornija, ako prema sl. 119. umjesto harmoničkog signala upotrebimo trokutasti signal, kojim ćemo na istom valu nosiocu izvršiti jedamput frekventnu modulaciju, a drugi put faznu modulaciju. Tada ćemo „da oba pojava svedemo na isti nazivnik“ analogno kao i pri harmoničkom signalu promatrati u prvom slučaju frekventnu promjenu kao da je fazna, a u drugom slučaju faznu promjenu kao da je frekventna, i zatim oba slučaja uporediti. Kratica za frekventnu modulaciju je *FM* (od engleskog Frequency Modulation), a za faznu *PM* (od engleskog Phase Modulation).



Slika 119.



b)



Slika 120.

Gornji diagram na sl. 119 a) prikazuje trokutasti signal. U intervalu od 0 do $\frac{T}{4}$ njegova jednadžba glasi $u(t) = at$, u intervalu od $\frac{T}{4}$ do $\frac{3T}{4}$ glasi

$$u(t) = a\frac{T}{2} - at,$$

te konačno u intervalu od $\frac{3T}{4}$ do T , glasi

$$u(t) = -aT + at.$$

Srednji diagram prikazuje konstantnu frekvenciju Ω vala nosioca, kojoj je superponirana modulaciona funkcija $ku(t)$. Momentane vrijednosti te funkcije proporcionalne su, dakle, momentanim vrijednostima signala. Donji diagram pokazuje fazu vala nosioca, ako bi našu frekventnu modulaciju shvatili kao faznu, t. j. da je frekvencija ostala Ω , a pridolazak modulacione funkcije u frekvenciju da znači promjenu faze, t. j.

$$\Delta\varphi \Big|_0^t = \int_0^t k u(t) dt.$$

U pojedinim intervalima, na pr. između 0 i $\frac{T}{4}$, između $\frac{T}{4}$ i $\frac{3T}{4}$ i t. d. ta promjena faze predstavljat će parabole. Na pr.

$$\Delta\varphi \Big|_0^{\frac{T}{4}} = \int_0^{\frac{T}{4}} k a t dt = k a \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{T}{4}}.$$

Da bi dobili ukupnu fazu $\varphi(t)$, razumije se, da se ta promjena faze treba pribrojiti početnoj fazi φ .

Gornji diagram na sl. 119 b) prikazuje isti trokutasti signal $u(t)$, kao i kod iste slike lijevo. Srednji diagram prikazuje modulacionu funkciju $ru(t)$, koja se superponira početnoj fazi. Naravno, i ta funkcija je proporcionalna signalu. Donji diagram prikazuje frekvenciju vala nosioca Ω , kojoj je superponirana promjena frekvencije, kad bi ovu faznu modulaciju shvatili kao frekventnu, t. j. da pridolazak modulacione funkcije u fazu znači promjenu frekvencije. Promjena frekvencije bila bi, naravno, u tom slučaju $\frac{d(\Delta\varphi)}{dt}$, dakle konstanta $\pm ra$.

Sjetimo se, da smo kod harmoničkih modulacionih funkcija faznim pomakom signala, odnosno tih funkcija za $\frac{\pi}{2}$, obje vrste modulacija uspješli kvalitativno (a u specijalnom slučaju, kod $\frac{q}{\omega} = c$, i kvantitavno) izjednačiti. Da li je to moguće i kod trokutastog signala? Sl. 120. prikazuje frekventnu modulaciju s trokutastim signalom kao prije, ali koji je za $\frac{T}{4}$ (što bi odgovaralo za verzor harmoničke funkcije $\frac{\pi}{2}$) ispred prijašnjeg signala.

Vidimo, da unatoč faznom pomaku, nismo postigli izjednačenje s faznom modulacijom na sl. 119 b), iako smo joj se približili znatno više, nego li je to slučaj na sl. 119 a), budući da se $\Omega(t)$ i $\varphi(t)$ na ovoj slici bolje podudaraju s $\Omega(t)$ i $\varphi(t)$ na sl. 119 b), nego li je to slučaj između sl. 119 a) i sl. 119 b)*)

*) Pokušat ćemo na slikovitiji način predočiti razliku između frekventne i fazne modulacije. Zamislimo tri platforme, koje se nalaze na jednakoj udaljenosti od tla. Udaljenost prve i druge platforme ne može se mijenjati, ali udaljenost treće može se mijenjati prema gore i dolje. Na svakoj se platformi nalazi po jedan zidar. Na dani znak sva trojica počnu na svojim platformama zidati jedan stup, slažući istim pokretima opeke jednu iznad druge. Prvi zidar upotrebljava uvijek opeke istih dimenzija. Drugi upotrebljava „frekventno modulirane“ opeke, t. j. takvih dimenzija, kakve mu toga časa propisuje nametnuti zakon (signal). Treći upotrebljava — kao i prvi — uvijek opeke istih dimenzija, ali se udaljenost njegovog postolja neprestano mijenja prema nametnutom zakonu (signalu).

Prvi stup je analogon nemoduliranom kruženju verzora. On ima uvijek istu udaljenost postolja (fazu), a uvećava se uvijek jednakom brzinom (frekvencijom). Drugi je analogon frekventno moduliranom kruženju verzora. On ima također uvijek istu udaljenost postolja (fazu), ali se ne uvećava jednakom brzinom (frekvencijom). Treći je analogon fazno moduliranom kruženju verzora. Sâm stup uvećava se jednakom brzinom (frekvencijom), ali mu se kod toga mijenja udaljenost postolja (faza).

Ako bi neki gledalac motrio samo vrhove stupova, opazio bi u drugom i trećem slučaju u suštini istu fizikalnu činjenicu, t. j. da se drugi i treći vrh, počevši od postolja, koja

Nastavak primjedbe na stani 99 dolje (slijedeća strana)

δ) Odnos frekventne i fazne modulacije prema amplitudnoj modulaciji dobit ćemo ako izraze za frekventnu, odnosno faznu modulaciju, uz modulacionu funkciju $f(t)$ razvijemo kako slijedi:

$$M(t) = A \sin \left[\Omega t + \int_0^t f(t) dt + \varphi \right] = A \sin(\Omega t + \varphi) \cos \int_0^t f(t) dt + \\ + A \cos(\Omega t + \varphi) \sin \int_0^t f(t) dt$$

odnosno

$$M(t) = A \sin[\Omega t + f(t) + \varphi] = A \sin(\Omega t + \varphi) \cos f(t) + A \cos(\Omega t + \varphi) \sin f(t).$$

To znači, da je frekventna, odnosno fazna modulacija, jednaka zbroju dviju amplitudnih modulacija, čiji su valovi nosioci međusobno pomaknuti za $\frac{\pi}{2}$.

Izrazi

$$A \cos \int_0^t f(t) dt, \quad \text{te} \quad A \sin \int_0^t f(t) dt,$$

kao i izrazi

$$A \cos f(t), \quad \text{te} \quad A \sin f(t),$$

su amplitude moduliranih valova u vremenu t .

ε) Ako je modulaciona funkcija sastavljena iz više istovrsnih adenada, na pr. pri amplitudnoj modulaciji neka ima oblik

$$f(t) = a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t + \dots + a_z \sin \omega_z t.$$

Tada će biti:

$$M(t) = (A + a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t + \dots + a_z \sin \omega_z t) \sin(\Omega t + \varphi).$$

Na isti način kao i prije, dobili bismo:

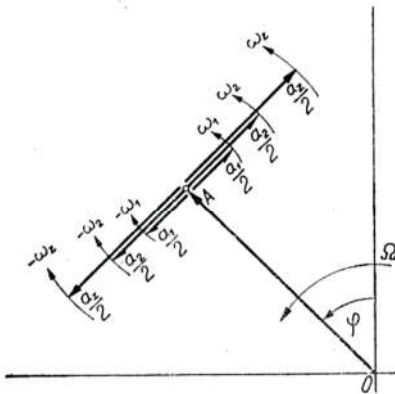
$$M(t) = A \sin(\Omega t + \varphi) + \frac{a_1}{2} \sin \left[(\Omega - \omega_1) t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right] + \\ + \frac{a_1}{2} \sin \left[(\Omega + \omega_1) t + \varphi - \frac{\pi}{2} \right] + \frac{a_2}{2} \sin \left[(\Omega - \omega_2) t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right] +$$

su se u početku nalazila na jednakoj udaljenosti, gibaju nekom promjenljivom brzinom (frekvencijom). Te brzine, međutim, iako bi na pr. u oba slučaja vrijedio isti nametnuti zakon, općenito ne bi bile jednake. Ako, naime, isti zakon djeluje na dva razna atributa, daje različite rezultate.

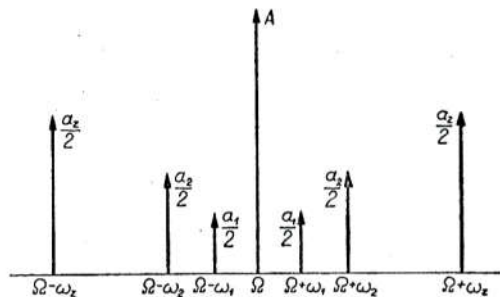
U iznimnom slučaju, t. j. ako bi taj zakon bio harmonička funkcija uz $\frac{q}{\omega} = c$, te ako bi oba upotrebljena signala bila fazno razmaknuta za $\frac{\pi}{2}$, bile bi brzine obih vrhova uvijek međusobno jednake, kao što smo to već prije spomenuli.

$$+ \frac{a_2}{2} \sin \left[(\Omega + \omega_2) t + \varphi - \frac{\pi}{2} \right] + \dots + \frac{a_z}{2} \sin \left[(\Omega - \omega_z) t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right] + \\ + \frac{a_z}{2} \sin \left[(\Omega + \omega_z) t + \varphi - \frac{\pi}{2} \right].$$

Verzorski prikaz bio bi prema sl. 121., a linijski spektar prema sl. 122.



Slika 121.



Slika 122.

Ako bi modulaciona funkcija kod frekventne modulacije imala oblik

$$f(t) = q_1 \cos \omega_1 t + q_2 \cos \omega_2 t + \dots + q_z \cos \omega_z t$$

modulirani val glasio bi:

$$M(t) = A \sin \left(\Omega t + \frac{q_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{q_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t + \dots + \frac{q_z}{\omega_z} \sin \omega_z t + \varphi \right).$$

Kod rješavanja te formule naišli bi na međusobne umnoške izraza

$$\sin \left(\frac{q_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right), \cos \left(\frac{q_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right), \sin \left(\frac{q_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right), \cos \left(\frac{q_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right), \dots \\ \dots \sin \left(\frac{q_z}{\omega_z} \sin \omega_z t \right), \text{ te } \cos \left(\frac{q_z}{\omega_z} \sin \omega_z t \right),$$

koje smo već razvili u Fourierov red. Konačan rezultat bio bi:

$$\frac{M(t)}{A} = \sum_{m, n, \dots, p = -\infty}^{+\infty} J_m \left(\frac{q_1}{\omega_1} \right) J_n \left(\frac{q_2}{\omega_2} \right) \dots J_p \left(\frac{q_z}{\omega_z} \right) \sin [(\Omega + m \omega_1 + n \omega_2 + \dots + p \omega_z) t + \varphi].$$

To je z -struki Besselov red, čiji linijski spektar sadrži sve linearne kombinacije zbroja frekvencija

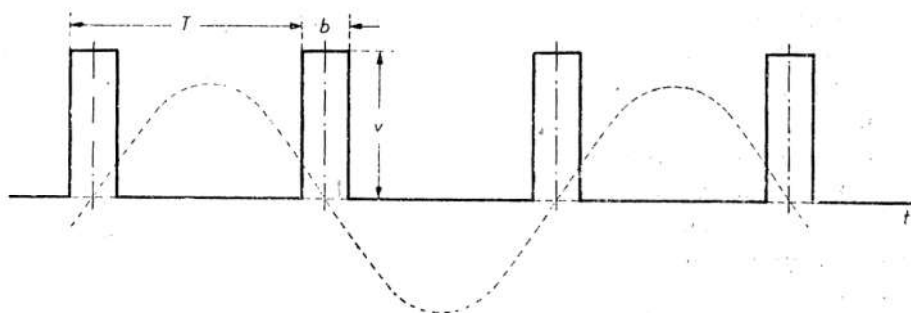
$$(\Omega + m \omega_1 + n \omega_2 + \dots + p \omega_z).$$

Ukoliko su, međutim, neke od tih suma frekvencija za izvjesne $m, n, \dots, p$ međusobno jednake, onda se te sume u linijskom spektru, naravno, pokrivaju, dakle ukupni se broj frekvencija tada smanjuje.

Uređaji za proizvodnje moduliranih valova zovu se modulatori, a uređaji, koji iz moduliranih valova rekonstruiraju modulacionu funkciju, zovu se demodulatori.

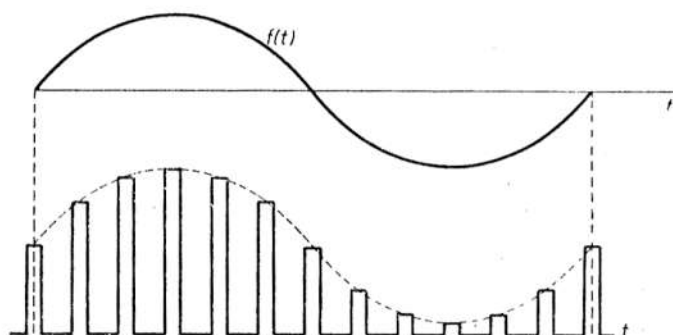
7. IMPULSNA MODULACIJA. OPĆENITO I NAČELNI OPIS NEKIH PRAKTIČNIH IZVEDBI

Napretkom slabostrujne tehnike razvijaju se i sve više dolaze u upotrebu prenosni sistemi u kojima se primjenjuje impulsna modulacija, kojom se na shodne načine mijenjaju atributi t. zv. impulsnog niza. Taj se niz u nemo-
dularanom obliku prema sl. 123. sastoji iz vremenskog slijeda jednakih isto-



Slika 123.

smjernih električnih impulsa, koji uistinu praktično ne moraju biti baš takvog pravilnog pravokutnog oblika, budući da na taj oblik utječu karakteristike prenosnog sistema. U navedenoj slici ucrtana je točkasto i sinusoida, što će se još pobliže objasniti.



Slika 124.

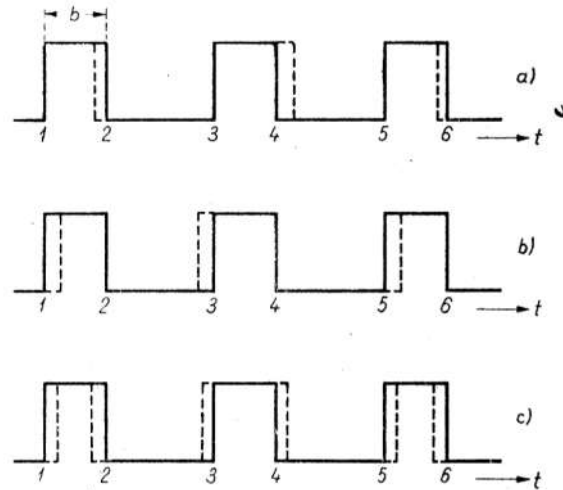
Mogućnosti moduliranja impulsnog niza su slijedeće:

1.) Prema sl. 124. modulacionom funkcijom $f(t)$ mijenjamo amplitudu, t. j. visinu v pojedinih impulsa.

2.) Modulacionu funkciju utiskujemo u impulsni niz na taj način, da mijenjamo repeticiju ili poziciju pojedinih impulsa. To se može događati na pr. tako, da sinusoidu — koju smo spomenuli kod sl. 123. — čije nultoeke koincidiraju s vremenskom sredinom pojedinih impulsa, moduliramo frekventno ili fazno, kod čega pojedini impulsi, nepromijenjene visine i širine, slijede nultoeke te modulirane sinusoide. U tom slučaju možemo govoriti o impulsno-frekventnoj, odnosno impulsno-faznoj modulaciji. U daljnjem razmatranju navest ćemo jednu daljnju varijantu, kako se dobiva ta modulacija s moduliranim položajem impulsa.

3.) Modulacionom funkcijom utječemo na trajanje impulsa b . To se može ostvariti tako, da se pomiče samo završni bok pojedinih impulsa (2, 4 i 6 u sl. 125 a), ili samo prednji bok (1, 3 i 5 u sl. 125 b), ili da sredina impulsa ostaje na mjestu, a oba boka da se jednakomjerno približuju ili udaljuju od sredine (sl. 125 c).

4.) Osim navedenih impulsnih modulacija, u najnovije vrijeme nastale su modulacije kod kojih se za prenošenje modulacione funkcije primjenjuju drugi principi. U prvom redu to je impulsno-kodna modulacija, kojom se određene diskretne momentane vrijednosti modulacione funkcije, t. zv. kvantizirani uzorci, koji slijede u odabranim vremenskim razmacima, prenose kodom. Razmaci između diskretnih vrijednosti mogu biti ili jednaki, ili mogu slijediti po drugačijem zakonu (na pr. da većim momentanim vrijednostima odgovara i veći razmak između dvije diskretne vrijednosti).

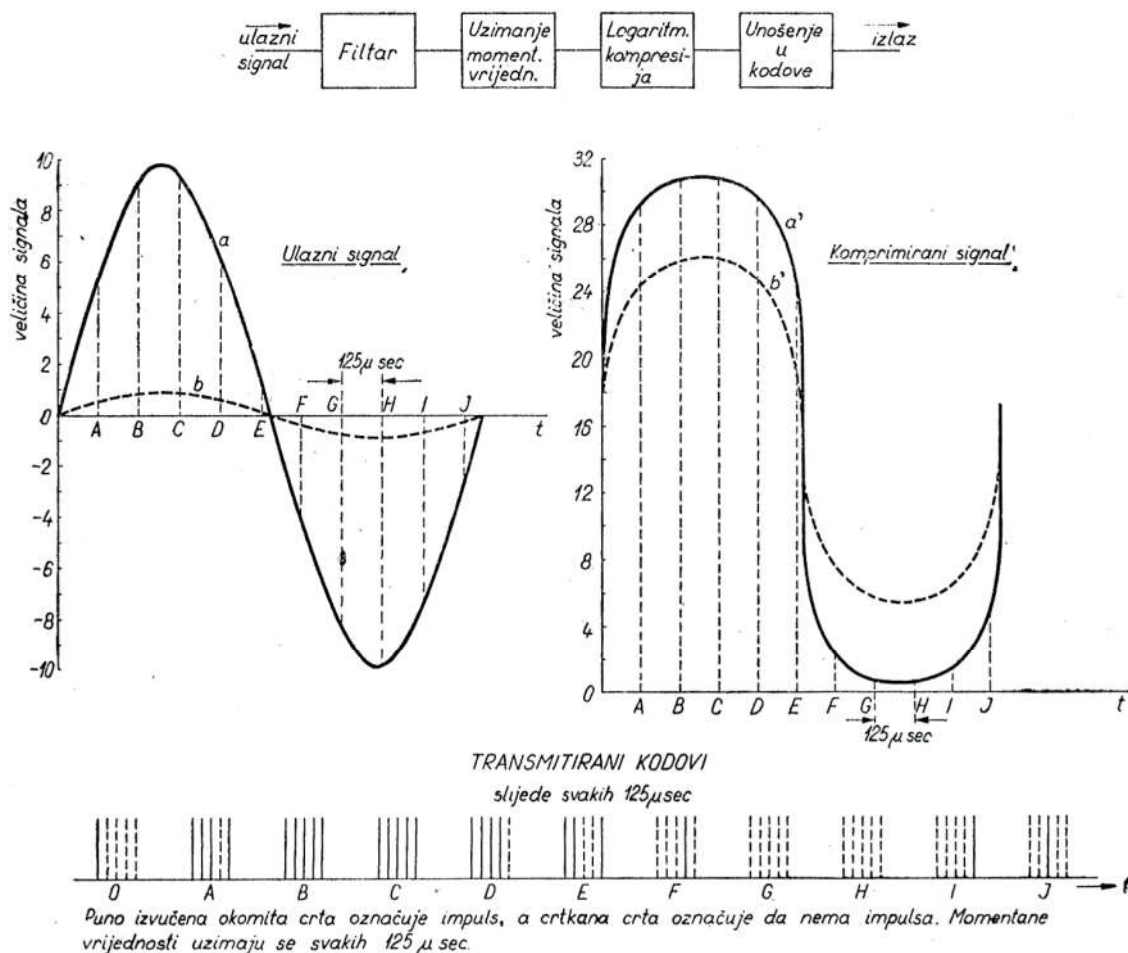


Slika 125.

Najjednostavniji je t. zv. binarni kod, koji je okarakteriziran time, što svaki broj u njemu može biti prikazan određenom kombinacijom od samo dva elementa, na pr. impulsom i nulom. Iz određenog broja jednakih impulsa (na pr. pet ili sedam), koji zajedno čine snop, pomoću svih mogućih kombinacija ispuste se pojedini impulsi. Broj tih mogućih kombinacija iznosi, dakle, 2^n , gdje je n broj impulsa nemoduliranog snopa, koji snopovi slijede, naravno, jedan za drugim u istim odabranim vremenskim razmacima, kao i određene momentane vrijednosti modulacione funkcije. Budući, da svaki impuls u snopu ima vrijednost određenu svojim položajem, to ispuštanjem tih pojedinih impulsa snop kao cjelina zadobiva upravo onu vrijednost, koja odgovara dotičnoj pridruženoj momentanoj vrijednosti modulacione funkcije. Naravno, najveću moguću vrijednost ima snop, ako nijedan njegov impuls nije ispušten.

Na sl. 126. prikazane su dvije sinusoide označene sa a i b , kao modulacione funkcije, a odabrani vremenski razmak između momentanih vrijednosti, koje ćemo prenijeti kodom, iznosi $125 \mu s$. Međutim, tim kodom ne ćemo obuhvatiti te originalne momentane vrijednosti, nego njihove logaritme, koji su na desnom crtežu označeni sa a' i b' . Kod toga su — što se vidi i na crtežu — malene momentane vrijednosti uvećane znatno više, nego velike momentane vrijednosti. Znači, dakle, da se modulaciona funkcija, odnosno signal, prethodno „logaritmički komprimira“. Ta logaritmička kompresija postizava se upotrebom uređaja s nelinearnom karakteristikom, t. zv. kompresorom, koji izobličuje signal i to tako, da su apsolutne promjene momentanih vrijednosti signala na izlazu iz kompresora proporcionalne relativnim promjenama momentanih vrijednosti signala na ulazu u kompresor. Prema tome, iste relativne promjene bilo koje momentane vrijednosti ulaznog signala mijenjat će za isti broj jedinica pripadni kod. Pri originalnom signalu ili njegovom linearnom

povećanju to ne bi bilo tako, jer bi iste relativne promjene većih momentanih vrijednosti snažnije utjecale na kod, nego li promjene manjih vrijednosti. Šta više, promjene, koje bi bile unutar jedne jedinice kodnog sistema, bile one relativno i velike, ne bi se uopće mogle prenijeti.



Slika 126.

To ćemo najlakše uočiti na slijedeći način:

Izvjerna momentana vrijednost $f(t_1)$, nakon vremenskog intervala Δt , zadobiva vrijednost $f(t_1 + \Delta t)$. Analogno, neka druga momentana vrijednost $f(t_2)$, koja je različita od prve, nakon jednakog intervala Δt , zadobiva vrijednost $f(t_2 + \Delta t)$. Pretpostavit ćemo, da je relativna promjena u oba slučaja ista, t. j.

$$\frac{f(t_1 + \Delta t)}{f(t_1)} = \frac{f(t_2 + \Delta t)}{f(t_2)} = \text{konst.}$$

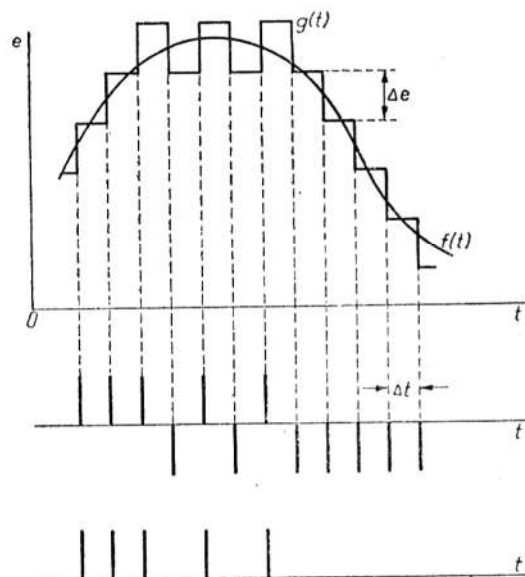
Iz toga slijedi za komprimirane vrijednosti:

$$\ln f(t_1 + \Delta t) - \ln f(t_1) = \ln f(t_2 + \Delta t) - \ln f(t_2) = \ln \text{konst} = C$$

dakle, apsolutna promjena na izlaznoj strani iz kompresora, u oba slučaja ista je.

Nakon prijenosa ovako komprimiranog signala kodom, na prijemnoj strani nakon dekodiranja, još uvijek komprimirani signal dolazi u dekompresor, t. zv. ekspander, koji ima upravo suprotnu karakteristiku od kompresora u predajniku, i konačno u niskofrekventni propust, na čijem izlazu se dobije ponovno govorni signal.

5.) Kod delta-modulacije primjenjuje se isti princip kao i kod kodne modulacije, t. j. ispuštaju se pojedini impulsi impulsnog niza. Prema sl. 127. modulaciona funkcija $f(t)$ aproksimira se pravokutnom linijom $g(t)$. Vertikalni dijelovi te linije su jednaki naponski skokovi Δe , a jednaki horizontalni dijelovi odabrani vremenski intervali Δt , nakon kojih se navedenim naponskim skokom približavamo modulacionoj funkciji. To znači, da će Δe imati pozitivan predznak, ako se na početku novog intervala nalazimo ispod modulacione funkcije $f(t)$, odnosno negativni predznak, ako smo iznad nje. Pozitivnom naponskom skoku pridružen je u uređaju pozitivni impuls, a negativnom skoku negativni impuls. Međutim, ne ćemo prenositi i pozitivne i negativne impulse, nego na pr. samo pozitivne, a negativne ćemo ispustiti, tako, da na dotičnim mjestima uopće ne će biti impulsa. Kad ne bi učinili tako, te ako bi s obje vrste impulsa modulirali visokofrekventni val nosilac, na mjestima negativnih impulsa nastao bi fazni skok. No taj fazni skok tokom prolaza do mjesta dekodiranja fazno bi se izmijenio tako, da tamo ne bi mogli razlučiti pozitivne i negativne impulse. Međutim, ma da ispuštamo negativne impulse, ne će nastati poteškoće, ako se na prijemnoj strani, na mjestima ispuštenih impulsa, dodaju takvi negativni impulsi. Iz toga niza pozitivnih i negativnih impulsa, tada se na prijemnoj strani dobiva naša pravokutna linija, odnosno sama modulaciona funkcija.



Slika 127.

U tehničkim prenosnim uređajima mogu se upotrebiti i izvjesne kombinacije navedenih metoda, što omogućuje bolje iskorišćenje prenosnog sistema.

Za žični prenos dovoljan je sam impulsni niz, moduliran modulacionom funkcijom, dok je za bežični prenos tim moduliranim nizom potrebno još modulirati visokofrekventni val nosilac. U tom slučaju, i taj visokofrekventni val nosilac može se također modulirati nekom drugom modulacionom funkcijom, a može se modulacionom funkcijom utjecati samo na visokofrekventni val, koji se samo otvara i zatvara nemoduliranim impulsnim nizom.

Opisat ćemo sasvim ukratko kako se dobivaju neke navedene jednostavnije vrste moduliranih impulsa, budući da dublje zalaženje u tu materiju zahtjeva opširnije znanje elektronskih sklopova.

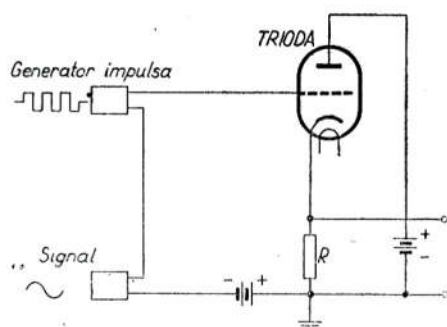
Amplitudnu impulsnu modulaciju možemo postići uređajem prema sl. 128. Elektronska cijev s radnim otporom R u katodi, ima toliki prednapon, da sam

signal ne može izazvati nikakvo protjecanje anodne struje. S druge strane, generator impulsa proizvodi impulse dovoljne veličine, da oni superponirani signalu mogu otvoriti elektronku i onda, kad signal ima najnižu momentanu vrijednost. Kod toga se na radni otpor prenesu impulsi tolike veličine, koliko je vrh zbroja obih valnih oblika premašio zaporni napon, koji je prije zatvarao cijev.

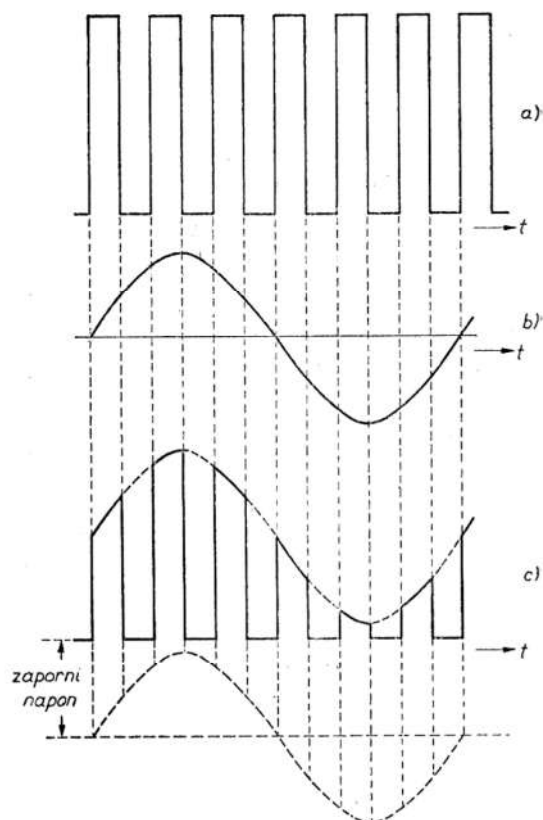
Kako, dakle, sam signal nikada ne dosegne zaporni napon, to na izlazu dobivamo samo impulse, koji dosižu razinu, koju im određuje signal. Na sl. 129. gore, predložen je impulsni niz, u sredini signal, a dolje amplitudno moduliran impulsni niz.

Kako se signal u toku intervala impulsa mijenja, to vrh impulsa nije ravan, no postoje metode, koje daju i ravan modulirani impuls.

Impulsi, kojima je modulirano trajanje, dobivaju se pomoću uređaja, koji se zove amplitudni komparator.



Slika 128.

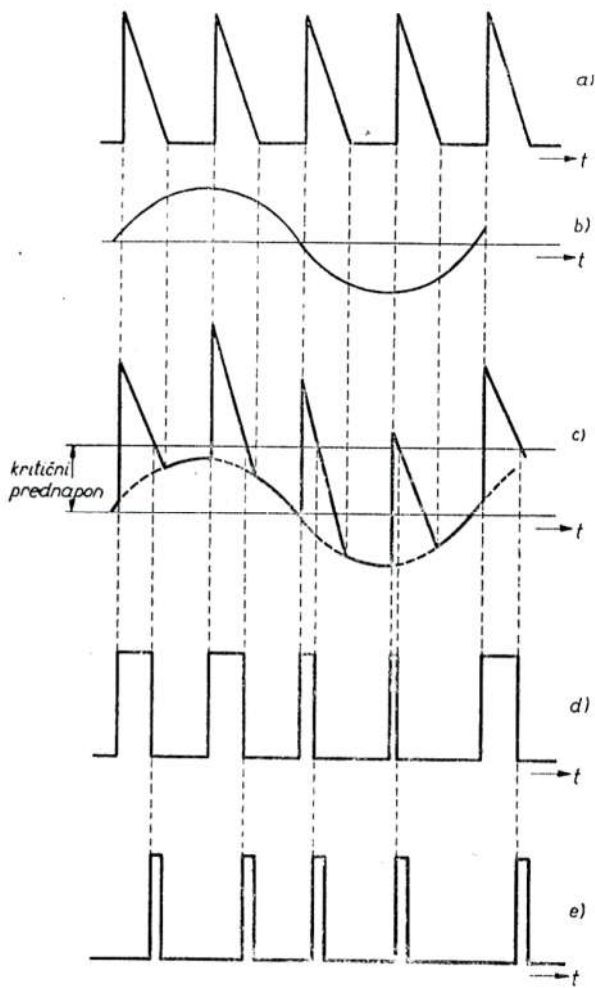


Slika 129.

Taj uređaj ima to svojstvo, da na izlazu ne daje nikakav impuls, ako je njegov ulazni napon ispod neke kritične vrijednosti. Ako napon na ulazu premaši tu vrijednost, tada napon na izlazu odmah zadobiva maksimalnu vrijednost i zadržava je tako dugo, dok se ulazni napon nalazi iznad navedene kritične vrijednosti.

Na ulaz amplitudnog komparatora dovedemo signal, ali uz toliki prednapon, da sam signal ne može potaknuti komparator. Tom signalu prema sl. 130. superponiramo pilasti valni oblik, čija je amplituda nešto veća od najveće varijacije signala, tako, da se i za najniže momentane vrijednosti signala komparator otvara. Superponirani pilasti valni oblik otvarat će komparator dulje vremena kod većih momentanih vrijednosti signala, a kraće vrijeme kod manjih vrijednosti, kako se to vidi na sl. 130. pod c). Iz toga će rezultirati modulirani niz pod d).

Ako želimo modulirati prednji bok impulsa, moramo upotrebiti okrenuti pilasti oblik prema sl. 131., dok bi u slučaju, da želimo modulirati oba boka, umjesto pilastog oblika morali upotrebiti oblik istokračnih trokuta.



Slika 130.

Impulzni niz s moduliranim položajem pojedinih impulsa, o čemu smo već govorili, možemo dobiti na pr. i pomoću prednje opisanih impulsa s moduliranim trajanjem, ako ove dovedemo na uređaj, koji daje uvijek jednak impuls, ali u času nastupanja moduliranog boka impulsa, koji je moduliran po trajanju. Budući da je taj modulirani bok pomaknut prema položaju boka nemoduliranog impulsa, to su i impulsi, koji izlaze iz uređaja, jednake visine i trajanja, ali pomaknuti iz svog srednjeg položaja, što se vidi na sl. 130 e).



Slika 131.

8. DOBIVANJE SPEKTRA AMPLITUDNO MODULIRANIH HARMONIČKIH TITRAJA IZ SPEKTRA AMPLITUDNE FUNKCIJE

Jednadžba moduliranog vala prema sl. 132. glasi:

$$M(t) = \Phi(t) \sin(\Omega t + \varphi),$$

gdje je $\Phi(t)$ amplitudna funkcija.

$$M(t) = \underbrace{\cos \varphi \Phi(t) \sin \Omega t}_{= M_s(t)} + \underbrace{\sin \varphi \Phi(t) \cos \Omega t}_{= M_c(t)}.$$

Prvi adend $M_s(t)$ ima indeks s , da nas podsjeti na množenje amplitudne funkcije sa $\sin \Omega t$, a drugi adend ima indeks c zbog množenja s $\cos \Omega t$.

Amplitudna funkcija zadana nam je u svojem spektralnom obliku, t. j.

$$\Phi(t) = K_0 + \int_0^\infty [C(u) \cos ut + S(u) \sin ut] du.$$

Integral možemo protegnuti na dvostruko integraciono područje, t. j. od $-\infty$ do $+\infty$, i podijeliti ga s 2. Prema tome je:

$$\Phi(t) = K_0 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [C(u) \cos ut + S(u) \sin ut] du.$$

To smo mogli učiniti, jer je izraz

$$C(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a) \cos ua da$$

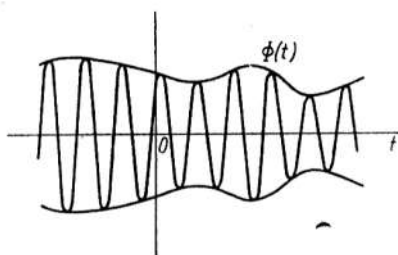
taka (parna) funkcija obzirom na u , a isto je tako i

$$\cos ut = \cos(-ut),$$

dakle, njihov umnožak kod $(-u)$ jednak je kao i kod u . Izraz

$$S(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a) \sin ua da$$

je liha (neparna) funkcija obzirom na u , dakle, kod $(-u)$ mijenja svoj predznak, ali isto tako mijenja i $\sin ut$, te je prema tome njihov umnožak kod



Slika 132.

$(-u)$ također ostao isti kao i kod u . Razlog zašto integral protežemo od $-\infty$ do $+\infty$, leži u tome, što će na taj način tokom daljnjih računskih operacija granice ostati uvijek iste, dok bi za slučaj starih granica od 0 do $+\infty$, tokom operacija pri modifikaciji varijable, valjalo mijenjati donju granicu, što bi donekle kompliciralo samo računanje.

$$\begin{aligned} M_s(t) &= \cos \varphi K_0 \sin \Omega t + \cos \varphi \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [C(u) \cos ut \sin \Omega t + S(u) \sin ut \sin \Omega t] du = \\ &= \cos \varphi K_0 \sin \Omega t + \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{4} C(u) [\sin(u + \Omega)t - \sin(u - \Omega)t] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} S(u) [\cos(u - \Omega)t - \cos(u + \Omega)t] \right\} du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \varphi K_0 \sin \Omega t + \frac{1}{4} \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} [C(u) \sin(u + \Omega)t - S(u) \cos(u + \Omega)t] du + \\
&\quad + \frac{1}{4} \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} [S(u) \cos(u - \Omega)t - C(u) \sin(u - \Omega)t] du.
\end{aligned}$$

Uvest ćemo nove varijable, t. j.

$$\begin{aligned}
(u + \Omega) &= u^* \quad \text{iz čega slijedi} \quad u = u^* - \Omega, \quad \text{odnosno} \quad du = du^* \\
(u - \Omega) &= u^{**} \quad \text{iz čega slijedi} \quad u = u^{**} + \Omega, \quad \text{odnosno} \quad du = du^{**}
\end{aligned}$$

Granice će ostati nepromijenjene, jer je kod $u = \pm \infty$ i izraz $(u \pm \Omega) = \pm \infty$.

Radi toga je:

$$\begin{aligned}
M_s(t) &= \cos \varphi K_0 \sin \Omega t + \frac{1}{4} \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} [C(u^* - \Omega) \sin u^* t - S(u^* - \Omega) \cos u^* t] du^* + \\
&\quad + \frac{1}{4} \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} [S(u^{**} + \Omega) \cos u^{**} t - C(u^{**} + \Omega) \sin u^{**} t] du^{**}.
\end{aligned}$$

Kako se radi o određenim integralima, koji su ovisni samo o svojim granicama, svejedno je, kako se zove varijabla, i radi toga umjesto u^* , odnosno u^{**} , možemo opet pisati u , tako da će biti:

$$\begin{aligned}
M_s(t) &= \cos \varphi K_0 \sin \Omega t + \frac{1}{4} \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} [C(u - \Omega) \sin u t - S(u - \Omega) \cos u t] du + \\
&\quad + \frac{1}{4} \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} [S(u + \Omega) \cos u t - C(u + \Omega) \sin u t] du = \\
&= \cos \varphi K_0 \sin \Omega t + \frac{1}{2} \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} [S(u + \Omega) - S(u - \Omega)] \cos u t + \right.}_{= C_s(u)} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} [C(u - \Omega) - C(u + \Omega)] \sin u t \right\}}_{= S_s(u)} du.
\end{aligned}$$

$C_s(u)$ je cosinusov spektar funkcije $M_s(t)$, a

$S_s(u)$ je sinusov spektar funkcije $M_s(t)$.

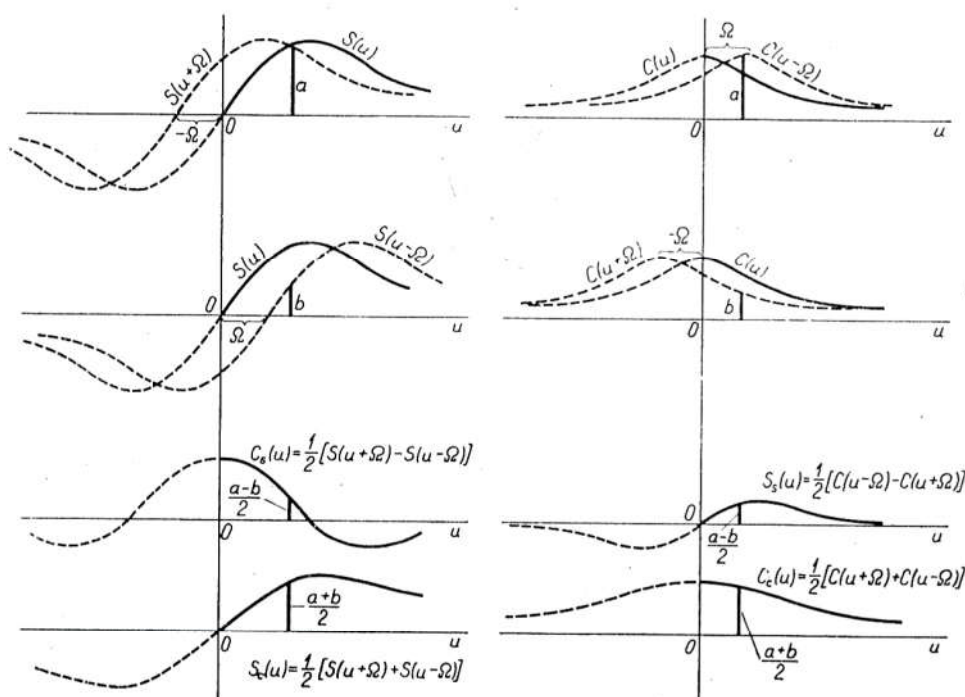
Sada ćemo se vratiti u stare granice, t. j. od 0 do $+\infty$!

$$C_s(-u) = \frac{1}{2} [S(-u + \Omega) - S(-u - \Omega)] = \frac{1}{2} [S(-(u - \Omega)) - S(-(u + \Omega))] = \frac{1}{2} [-S(u - \Omega) + S(u + \Omega)] = C_s(u).$$

Vidimo, da je $C_s(u)$ taka (parna) funkcija od u , što se je moglo i očekivati, jer se radi o cosinusovom spektru.

Analogno će biti:

$$\begin{aligned} S_s(-u) &= \frac{1}{2} [C(-u - \Omega) - C(-u + \Omega)] = \frac{1}{2} [C(-(u + \Omega)) - C(-(u - \Omega))] = \\ &= \frac{1}{2} [C(u + \Omega) - C(u - \Omega)] = \\ &= -\frac{1}{2} [C(u - \Omega) - C(u + \Omega)] = -S_s(u). \end{aligned}$$



Slika 133.

Vidimo, da je $S_s(u)$ liha (neparna) funkcija od u , što je i razumljivo, jer se radi o sinusovom spektru.

Obzirom na prednji rezultat, bit će

$$C_s(-u) \cos(-ut) = C_s(u) \cos ut,$$

odnosno

$$S_s(-u) \sin(-ut) = S_s(u) \sin ut,$$

te radi toga možemo upotrebiti samo polovicu integracionog puta, pomnoživši integral s 2.

Prema tome, konačno će biti:

$$M_s(t) = \cos \varphi K_0 \sin \Omega t + \cos \varphi \int_0^{\infty} [C_s(u) \cos u t + S_s(u) \sin u t] du.$$

Sl. 133. lijevo gore prikazuje, kako se iz poznatog sinusovog spektra amplitudne funkcije, $S(u)$, pomicanjem za $-\Omega$ nalijevo, dobiva spektar $S(u + \Omega)$, a ispod toga, kako se pomicanjem za $+\Omega$ nadesno, dobije spektar $S(u - \Omega)$, i konačno, kako se prema dobivenoj formuli dolazi do spektra $C_s(u)$. Na istoj slici desno, prikazan je sličan postupak za dobivanje $C(u - \Omega)$, te $C(u + \Omega)$, kao i za $S_s(u)$.

Sada ćemo pristupiti izračunavanju drugog adenda, kako slijedi:

$$\begin{aligned} M_c(t) &= \sin \varphi K_0 \cos \Omega t + \sin \varphi \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [C(u) \cos u t \cos \Omega t + S(u) \sin u t \cos \Omega t] du = \\ &= \sin \varphi K_0 \cos \Omega t + \sin \varphi \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} C(u) [\cos(u + \Omega)t + \cos(u - \Omega)t] du + \\ &\quad + \sin \varphi \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} S(u) [\sin(u + \Omega)t + \sin(u - \Omega)t] du = \\ &= \sin \varphi K_0 \cos \Omega t + \sin \varphi \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [C(u) \cos(u + \Omega)t + S(u) \sin(u + \Omega)t] du + \\ &\quad + \sin \varphi \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [C(u) \cos(u - \Omega)t + S(u) \sin(u - \Omega)t] du = \\ &= \sin \varphi K_0 \cos \Omega t + \sin \varphi \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [C(u^* - \Omega) \cos u^* t + S(u^* - \Omega) \sin u^* t] du^* + \\ &\quad + \sin \varphi \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [C(u^{**} + \Omega) \cos u^{**} t + S(u^{**} + \Omega) \sin u^{**} t] du^{**} = \\ &= \sin \varphi K_0 \cos \Omega t + \sin \varphi \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} [C(u + \Omega) + C(u - \Omega)] \cos u t + \right.}_{= C_c(u)} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [S(u + \Omega) + S(u - \Omega)] \sin u t \right\}}_{= S_c(u)} du. \end{aligned}$$

Analogno kao prije, bit će:

$$C_c(-u) = \frac{1}{2} [C(-u + \Omega) + C(-u - \Omega)] = \frac{1}{2} [C(-(u - \Omega)) + C(-(u + \Omega))] = \frac{1}{2} [C(u - \Omega) + C(u + \Omega)] = C_c(u).$$

Nadalje je

$$\begin{aligned} S_c(-u) &= \frac{1}{2} [S(-u + \Omega) + S(-u - \Omega)] = \frac{1}{2} [S(-(u - \Omega)) + S(-(u + \Omega))] \\ &= \frac{1}{2} [-S(u - \Omega) - S(u + \Omega)] = \\ &= -\frac{1}{2} [S(u - \Omega) + S(u + \Omega)] = -S_c(u). \end{aligned}$$

Kako se $C_c(u)$ množi s takom (parnom) funkcijom od u , t. j. $\cos ut$, a $S_c(u)$ s lihom (neparnom), t. j. sa $\sin ut$, možemo integracioni put skratiti za polovicu, pomnoživši integral s 2. Radi toga će biti:

$$M_c(t) = \sin \varphi K_0 \cos \Omega t + \sin \varphi \int_0^{\infty} [C_c(u) \cos ut + S_c(u) \sin ut] du.$$

Na navedenoj slici 133. prikazane su, sasvim dolje lijevo i desno, funkcije $S_c(u)$, odnosno $C_c(u)$, te se vidi kako smo do njih došli.

Čitav amplitudno modulirani val bit će:

$$\begin{aligned} M(t) &= M_s(t) + M_c(t) = \cos \varphi K_0 \sin \Omega t + \cos \varphi \int_0^{\infty} [C_s(u) \cos ut + \\ &+ S_s(u) \sin ut] du + \sin \varphi K_0 \cos \Omega t + \sin \varphi \int_0^{\infty} [C_c(u) \cos ut + S_c(u) \sin ut] du = \\ &= K_0 \sin(\Omega t + \varphi) + \int_0^{\infty} \{ [\cos \varphi C_s(u) + \sin \varphi C_c(u)] \cos ut + \\ &+ [\cos \varphi S_s(u) + \sin \varphi S_c(u)] \sin ut \} du. \end{aligned}$$

9. SPEKTAR SINUSOVOG TITRAJA, KOJI POČINJE U $t = 0$

Funkciju $h(t) \sin \Omega t$ možemo shvatiti kao sinusov val, koji se proteže od $t = -\infty$ do $t = \infty$, čija je promjenljiva amplituda predstavljena uklopnom funkcijom $h(t)$. Radi toga je:

$$h(t) \sin \Omega t = \frac{h}{2} \sin \Omega t + \int_0^{\infty} S(u) \sin ut \sin \Omega t du.$$

Kod toga je, kao što je poznato, $S(u) = \frac{h}{\pi u}$. Izraz $h(t) \sin \Omega t$ je, međutim, nama poznati „adend moduliranog vala $M_s(t)$ “, koji za sadašnji slučaj prema prethodnom poglavlju glasi:

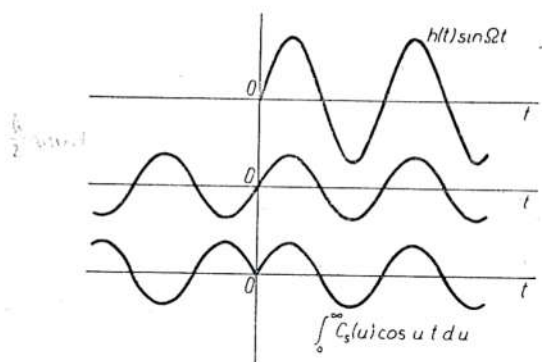
$$M_s(t) = \frac{h}{2} \sin \Omega t + \int_0^{\infty} [C_s(u) \cos ut + S_s(u) \sin ut] du.$$

$$C_s(u) = \frac{1}{2} [S(u + \Omega) - S(u - \Omega)] = \frac{1}{2} \left[\frac{h}{\pi(u + \Omega)} - \frac{h}{\pi(u - \Omega)} \right] = \frac{h}{\pi} \frac{\Omega}{\Omega^2 - u^2}.$$

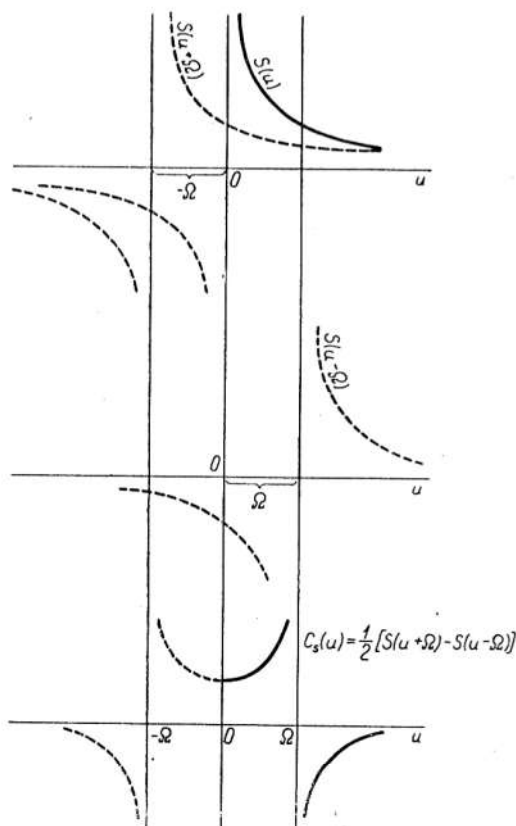
$$S_s(u) = \frac{1}{2} [C(u - \Omega) - C(u + \Omega)] = 0$$

budući da je

$$C(u) = 0.$$



Slika 134.



Slika 135.

Prema tome funkcija $h(t) \sin \Omega t$ ima samo cosinusov spektar, a njen spektralni oblik glasi:

$$h(t) \sin \Omega t = \frac{h}{2} \sin \Omega t + \int_0^{\infty} \frac{h}{\pi} \frac{\Omega}{\Omega^2 - u^2} \cos ut du.$$

Njen drugi adend je, dakle, taka (parna) funkcija vremena t , što vidimo lako i iz sl. 134., gdje smo od $h(t) \sin \Omega t$ odbili $\frac{h}{2} \sin \Omega t$, t. j. njen prvi adend.

Sl. 135. prikazuje kako se dobije spektar

$$C_s(u) = \frac{h}{\pi} \frac{\Omega}{\Omega^2 - u^2},$$

ako je poznato

$$S(u) = \frac{h}{\pi u}.$$

10. SPEKTAR COSINUSOVOG TITRAJA, KOJI POČINJE U $t = 0$.

Potpuno analogno predašnjem, bit će:

$$\begin{aligned} h(t) \cos \Omega t &= \frac{h}{2} \cos \Omega t + \int_0^\infty S(u) \sin u t \cos \Omega t \, du = \\ &= M_c(t) = \frac{h}{2} \cos \Omega t + \int_0^\infty [C_c(u) \cos u t + S_c(u) \sin u t] \, du. \end{aligned}$$

Dalje je

$$C_c(u) = \frac{1}{2} [C(u + \Omega) + C(u - \Omega)] = 0.$$

$$S_c(u) = \frac{1}{2} [S(u + \Omega) + S(u - \Omega)] = \frac{1}{2} \left[\frac{h}{\pi(u + \Omega)} + \frac{h}{\pi(u - \Omega)} \right] = \frac{h}{\pi} \frac{u}{u^2 - \Omega^2}.$$

Prema tome, $h(t) \cos \Omega t$ ima samo sinusov spektar.

Iz toga slijedi:

$$h(t) \cos \Omega t = \frac{h}{2} \cos \Omega t + \int_0^\infty \frac{h}{\pi} \frac{u}{u^2 - \Omega^2} \sin u t \, du.$$

Drugi adend je liha (neparna) funkcija vremena t , što vidimo i iz sl. 136., gdje smo od $h(t) \cos \Omega t$ odbili $\frac{h}{2} \cos \Omega t$.

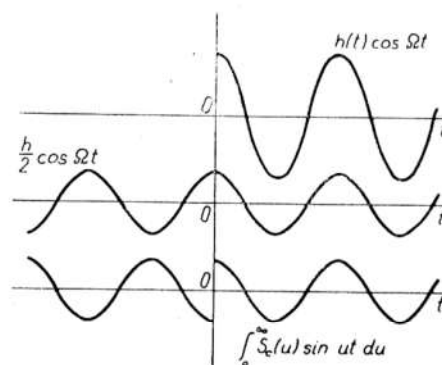
Sl. 137. prikazuje kako smo dobili spektar $S_c(u)$, ako nam je poznato $S(u) = \frac{h}{\pi u}$.

Iz gornjega slijedi, da funkcija $h(t) \sin(\Omega t + \varphi)$ ima i sinusov i cosinusov spektar, jer se raspada na

$$\cos \varphi h(t) \sin \Omega t$$

i na

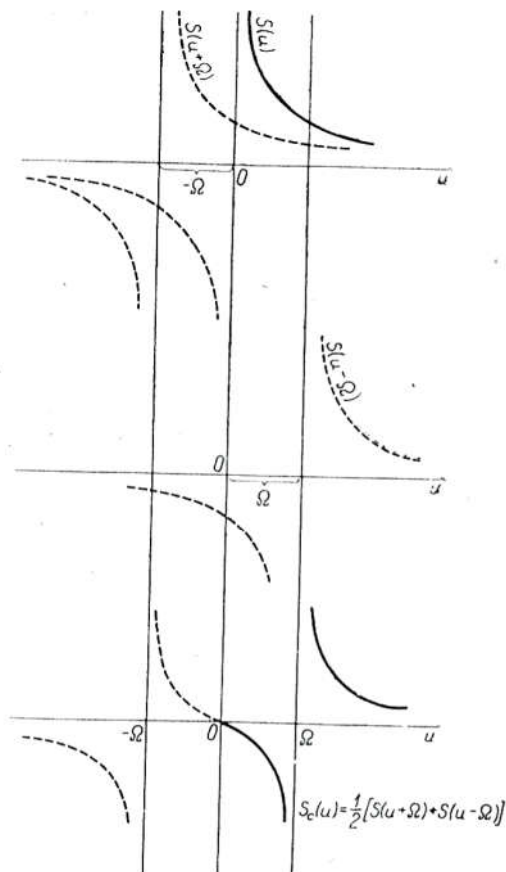
$$\sin \varphi h(t) \cos \Omega t.$$



Slika 136.

Sada smo nešto dublje upoznali prirodu verzora. Onaj verzor, koji se okreće oduvijek, t. j. od $t = -\infty$, i koji će se okretati dovijeka do $t = +\infty$, ima samo jednu frekvenciju, i prema tome i jednu amplitudu. Naprotiv, onaj verzor, koji počinje sa svojim okretanjem u $t = 0$, i okreće se do $t = +\infty$, sastavljen je od neizmerno mnogo verzora različitih amplituda i frekvencija.

Sada se samo od sebe nameće pitanje, da li će nastati ista struja, ako neki titrajni krug priključimo u vrijeme $t=0$, na napon, koji traje oduvijek, ili pak da izvor napona, koji je mrtav i koji se nalazi u tom krugu, oživi u $t=0$. U oba slučaja nastaje ista struja, jer oba napona, obzirom na taj krug, počinju djelovati u $t=0$, dok ih prije $t=0$ u tom sistemu nije bilo. Prema tome, oba napona proizvest će takvu struju kao da je neizmerno mnogo napona, t. j. spektar svih mogućih frekvencija, počevši od $t = -\infty$ priključen na taj krug. O tome će još kasnije biti govora.



Slika 137.

11. SPEKTAR TREPTAJA, KOJI POČINJE U $t = 0$

$$a = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = A_1 \cos \varphi_1 \sin \omega_1 t + A_1 \sin \varphi_1 \cos \omega_1 t + \\ + A_2 \cos \varphi_2 \sin \omega_2 t + A_2 \sin \varphi_2 \cos \omega_2 t.$$

Prema tome, treptaj se sastoji iz dva sinusova vala frekvencije ω_1 i ω_2 , koji počinju u $t=0$, t. j. jednom je amplituda predstavljena uklopnom funkcijom $A_1 \cos \varphi_1(t)$, a drugome s $A_2 \cos \varphi_2(t)$, te dva cosinusova vala istih frekvencija kao navedeni sinusovi valovi, dakle ω_1 i ω_2 s amplitudom $A_1 \sin \varphi_1(t)$, te $A_2 \sin \varphi_2(t)$.

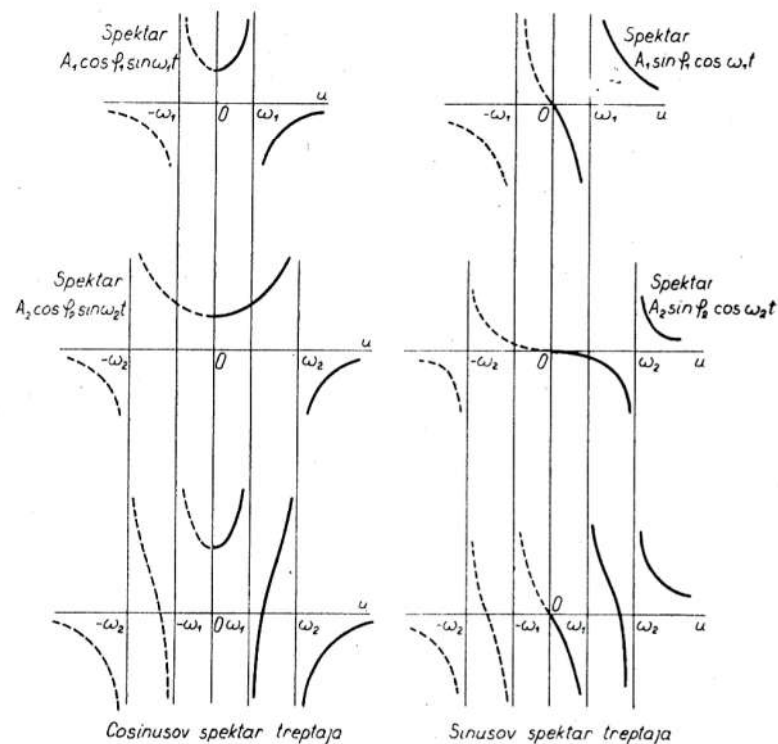
Kao što smo već pronašli:

$$A_1 \cos \varphi_1(t) \sin \omega_1 t = \frac{A_1 \cos \varphi_1}{2} \sin \omega_1 t + \int_0^\infty \frac{A_1 \cos \varphi_1}{\pi} \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - u^2} \cos u t \, du.$$

$$A_2 \cos \varphi_2(t) \sin \omega_2 t = \frac{A_2 \cos \varphi_2}{2} \sin \omega_2 t + \int_0^\infty \frac{A_2 \cos \varphi_2}{\pi} \frac{\omega_2}{\omega_2^2 - u^2} \cos u t \, du.$$

$$A_1 \sin \varphi_1(t) \cos \omega_1 t = \frac{A_1 \sin \varphi_1}{2} \cos \omega_1 t + \int_0^\infty \frac{A_1 \sin \varphi_1}{\pi} \frac{u}{u^2 - \omega_1^2} \sin u t du.$$

$$A_2 \sin \varphi_2(t) \cos \omega_2 t = \frac{A_2 \sin \varphi_2}{2} \cos \omega_2 t + \int_0^\infty \frac{A_2 \sin \varphi_2}{\pi} \frac{u}{u^2 - \omega_2^2} \sin u t du.$$

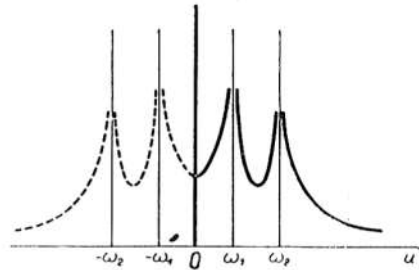


Slika 138.

Ta četiri izraza daju zbrojena konačni izraz za treptaj u spektralnom obliku, t. j.

$$a = \frac{A_1}{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2}{2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \int_0^\infty \left[\frac{A_1 \cos \varphi_1 \omega_1 (\omega_2^2 - u^2) + A_2 \cos \varphi_2 \omega_2 (\omega_1^2 - u^2)}{\pi (\omega_1^2 - u^2)(\omega_2^2 - u^2)} \cos u t + \frac{A_1 \sin \varphi_1 u (u^2 - \omega_2^2) + A_2 \sin \varphi_2 u (u^2 - \omega_1^2)}{\pi (u^2 - \omega_1^2)(u^2 - \omega_2^2)} \sin u t \right] du$$

Na sl. 138. prikazan je lijevo cosinusov spektar treptaja, dobiven zbrajanjem dvaju cosinusovih spektara njegovih sinusovih adenada, a desno sinusov spektar treptaja, dobiven zbrajanjem dvaju sinusovih spektara njegovih



Slika 139.

cosinusovih adenada. Sl. 139. prikazuje spektar rezultatnih amplituda, dobivenih geometrijskim zbrajanjem pojedinih cosinusovih i sinusovih amplituda iste frekvencije.*)

*) Nakon svršetka ovog dijela, napomenuli bismo još povezanost Fourierovog dvostrukog integrala s Laplaceovom transformacijom. Znademo, da je izraz za funkciju u kompleksnom obliku, ne uzimajući u obzir konstantu:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) e^{-j u t} dt \right] e^{j u t} du = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) e^{-j u t} dt \right] e^{j u t} d(ju).$$

Stavimo li $p = ju$, to slijedi:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} f(p) e^{p t} dp, \quad \text{gdje je} \quad f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) e^{-p t} dt,$$

t. j. dvostrana Laplaceova transformacija, što je uz $p = ju$ jednako $\pi [C(u) - j S(u)]$. Ako funkcija $\Phi(t)$ prije $t = 0$ ima vrijednost nula, onda možemo, naravno, pisati:

$$f(p) = \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-p t} dt,$$

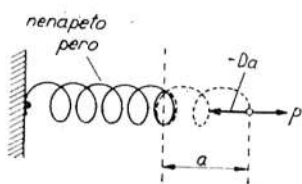
što je obična, odnosno jednostrana Laplaceova transformacija, kod koje također vrijedi gornja formula za dobivanje $\Phi(t)$ iz $f(p)$.

C. FIZIKALNE VELIČINE I NJIHOVI ODNOSI U ELEKTRIČNIM TITRAJNIM KRUGOVIMA S KONSTANTNIM KONCENTRIRANIM PARAMETRIMA

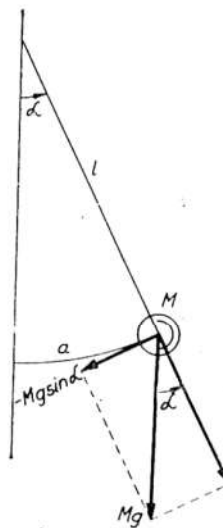
1. ELEMENTI MEHANIČKOG TITRAJNOG KRUGA

Kod elastičnog istezanja štapa, po Hookeu vrijedi jednadžba $E \frac{a}{l} = \frac{p}{F}$, odnosno $p = \frac{EF}{l} a$, gdje je p vanjska sila, E modul elastičnosti materijala iz kojega je sastavljen štap, l početna duljina štapa, F njegov presjek, i konačno a , njegovo istezanje, t. j. povećanje njegove duljine. Po zakonu akcije i reakcije, toj vanjskoj nametnutoj sili drži ravnotežu „elastična“ sila samoga štapa, t. j.

$$-p = -\frac{EF}{l} a,$$



Slika 140.



Slika 141.

odnosno, ako izraz $\frac{EF}{l}$, koji je konstantan za izvjestan materijal i izvjesnu duljinu i formu štapa, označimo s D , elastična sila bit će dana izrazom $-Da$. Prema tome, svojstvo te elastične sile je, da je po veličini proporcionalna istezanju, a po smjeru da mu djeluje nasuprot. Faktor D je — kako se vidi

— „neke vrsti modul elastičnosti“ upravo individualno adaptiran za dotični štap, jer se pravi modul elastičnosti E množi s individualnim presjekom i dijeli s početnom duljinom toga štapa. Sam E je općenita prikrojena, dakle uvjetovana veličina samog materijala, t. j. sila, koja pri jediničnom presjeku štapa izaziva istežanje štapa jednako njegovoj početnoj duljini.

Sve srodne sile u prirodi, koje mogu biti izražene istom formulom — Da , gdje su, naravno, konstanta D i djelovanje a različite nutarnje strukture od naprijed opisanog slučaja, već prema naravi samog pojava, zovu se kvazi-elastične sile.

U prvom redu, prema sl. 140., takva se sila pojavljuje kod mehaničkog pera gdje vrijedi jednadžba

$$p + (-Da) = 0.$$

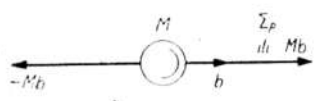
S D označen je ovdje koeficijent elastičnosti pera. Nadalje, prema sl. 141., nastupa kod njihala, kod malenih kutova njihanja, dakle, kad se titranje zbiva u pravcu titranja. Sila, koja djeluje suprotno putu, bit će $-Mg \sin \alpha$, odnosno kod malenog kuta

$$-Mg \alpha = -Mg \frac{a}{l}.$$

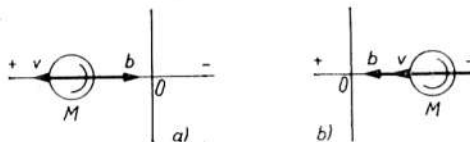
Ovdje je, dakle,

$$D = \frac{Mg}{l}.$$

U titrajnim mehaničkim sistemima kao daljnji element sudjelovat će masa. Rezultanta vanjskih sila — sila akcije — koja djeluje na masu, prouzrokovat će promjenu brzine mase, koja promjena ima radi toga uvijek smjer te rezultante.



Slika 142.



Slika 143.

Ako na masu kao vanjska sila djeluje, dakle, samo kvazielastična sila, promjena brzine shodno toj sili, imat će uvijek smjer, koji je protivan uvećanju puta, t. j. prema središtu mirovanja mase.

U skladu s navedenim je po Newtonu matematički sinonim za rezultantu vanjskih sila izraz Mb . Radi toga autogena sila reakcije mase, koja drži ravnotežu toj rezultanti, jednaka je $-Mb$, što prikazuje sl. 142. Kod toga se masa može gibati u smjeru rezultante, ili protivno, te joj se tada brzina povećava, odnosno smanjuje. U prvom slučaju govorimo o akceleraciji, t. j. ubrzanju, a u drugom o retardaciji, t. j. usporanju mase.

Ako masa izvodi sinusovo titranje

$$a = A \sin \omega t$$

bit će

$$\frac{da}{dt} = v = \omega A \cos \omega t,$$

odnosno

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = b = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 a.$$

Prema tome je izraz

$$Mb = -\omega^2 Ma = -Da,$$

što dokazuje, da je sinusovo titranje mase posljedica djelovanja vanjske kvazi-elastične sile.

Vrlo približan slučaj sinusovog titranja, je titranje žice kod glasovira. Ton „a“ ima frekvenciju

$$f = 435 \text{ s}^{-1},$$

a amplituda titraja iznosi $A \approx 0,1 \text{ cm}$. Prema tome je amplituda brzine

$$\omega A = 2\pi f A = 6,28 \times 435 \times 0,1 = 273,2 \text{ cm s}^{-1},$$

dok amplituda akceleracije iznosi

$$(6,28 \times 435)^2 \times 0,1 = 7,4638 \times 10^6 \text{ cm s}^{-2},$$

odnosno oko 760 puta gravitacije Zemlje.

Treći element, s kojim ćemo se susretati kod mehaničkih titrajnih krugova, je mehanički otpor, koji će prigušivati titraje. Otpora ima više vrsta, o čemu će još biti govora. Sada ćemo navesti najvažniju vrstu otpora, kod kojeg je sila prigušenja proporcionalna brzini gibanja i djeluje joj, naravno, nasuprot, t. j. njen izraz glasi $-Rv$. Toj autogenoj sili otpora drži ravnotežu narinuta sila, koja iznosi $p = Rv$. Kad ćemo u daljnjem izlaganju govoriti o mehaničkom otporu, mislimo samo na otpor ove vrsti.

Titrajne diferencijalne jednadžbe su univerzalne, t. j. one vrijede za razna područja fizike, a naročito se dobro poklapaju za mehaničke i električne sisteme. Da diferencijalna jednadžba jednog sistema, vrijedi za drugi sistem, treba samo simbole, koji označuju elemente jednog sistema, shodno zamijeniti s korespondentnim elementima drugog sistema. To je vrlo korisno, jer se na taj način na pr. električna zbivanja mogu pratiti na kadšto lakše uočljivim mehaničkim analogijama, i obratno. Koristit ćemo se obim alternativama, već prema tome, koja će za dotičnu svrhu biti pogodnija.

Ako koordinatni sistem odaberemo tako, da put mase leži u apscisnoj osi, a položaj mirovanja mase da se poklapa s ishodištem, prema izboru pozitivnog i negativnog smjera koordinatnog sistema, govorit ćemo o pozitivnom ili negativnom putu, odnosno o pozitivnom ili negativnom smjeru brzine, ili promjene brzine. Na sl. 143 a) je na pr. masa M prevalila pozitivni put, smjer njene brzine je pozitivan, a smjer promjene brzine negativan. Budući da su smjerovi brzine i promjene brzine različiti, masa se usporava. Na sl. 143 b) put je negativan, a smjer brzine i promjene brzine pozitivan. Budući da su smjerovi brzine i promjene brzine isti, masa se ubrzava.

2. ANALOG IJA MEHANIČKIH I ELEKTRIČNIH VELIČINA

Ako krug sadrži samo kondenzator i izvor napona, to je narinuti napon određen formulom:

$$e = \frac{q}{C} = q \frac{1}{C} = qS.$$

Ta formula po svom obliku odgovara u mehanici formuli

$$p = aD.$$

Prema tome je narinutoj mehaničkoj sili analogon narinuti električni napon, mehaničkom istezanju, odnosno mehaničkom putu, električni naboj, a mehaničkom koeficijentu elastičnosti recipročni električni kapacitet, koji se naziva i elastancijom S . Pošto formula iz mehanike

$$M \frac{d^2 a}{dt^2} = p$$

prema navedenom, mora biti pridružena formuli

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} = e,$$

to slijedi, da mehanička masa M odgovara električnom induktivitetu L . Formula

$$\frac{da}{dt} = v$$

pridružena je formuli

$$\frac{dq}{dt} = i,$$

dakle, mehaničkoj brzini v odgovara električna struja i . Konačno, formula

$$p = R_{\text{meh}} \cdot v$$

pridružena je formuli

$$e = R_{\text{el}} \cdot i$$

dakle, mehaničkom otporu R_{meh} odgovara električni otpor R_{el} . Tabelarno bi cjelokupna analogija izgledala ovako:

$$e \triangleq p$$

$$i \triangleq v$$

$$L \triangleq M$$

$$C \triangleq \frac{1}{D}$$

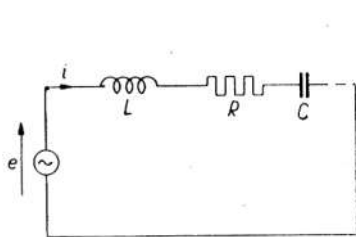
$$R_{\text{el}} \triangleq R_{\text{meh}}$$

$$q \triangleq a$$

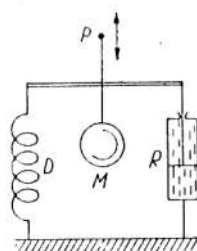
U prethodnom poglavlju našli smo, da je kod štapa $D = \frac{EF}{l}$. Kako $\frac{1}{D}$ odgovara kapacitetu, znači, da bi „kapacitet štapa“ bio $\frac{l}{EF}$. To je uistinu tako, jer će se

štap pod utjecajem narinute sile rastegnuti, odnosno „nabiti“, to više što je dulji, što je tanji i što mu je manji modul elastičnosti.

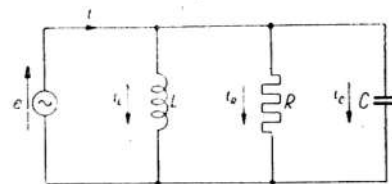
Da sada vidimo kako se naša analogija podudara s konkretnim situacijama!



Slika 144.



Slika 145.



Slika 146.

Na sl. 144. prikazan je serijski titrajni krug s narinutim sinusovim naponom. Prema drugom Kirchhoffovom zakonu bit će:

$$e = L \frac{di}{dt} + R_{el} i + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Ta diferencijalna jednadžba glasila bi u mehaničkoj transkripciji

$$p = M \frac{dv}{dt} + R_{meh} v + \underbrace{D \int v dt}_{= D a}$$

To je uvjet ekvivalencije narinute sile s trima paralelnim mehaničkim silama prema sl. 145. U serijskom električnom krugu struja je iste jačine u svakom elementu. U mehaničkom analognom paralelnom krugu, svaki element ima istu brzinu.

Vidimo, da analogija nije potpuna, jer serijskom električnom krugu odgovara mehanički paralelni sistem!

Uzmimo, da nam je zadan električni sklop prema sl. 146. Sada bi po prvom Kirchhoffovom zakonu bilo:

$$i = i_L + i_R + i_C = \frac{1}{L} \int e dt + \frac{e}{R_{el}} + C \frac{de}{dt}.$$

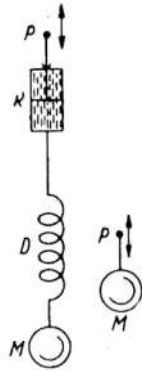
Transkribirano mehanički daje

$$v = \frac{1}{M} \int p dt + \frac{p}{R_{meh}} + \frac{1}{D} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{M} \int M \frac{dv}{dt} dt + v_{otp} + \frac{1}{D} \frac{d(Da)}{dt}$$

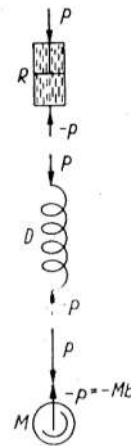
$$v_{sila} = v_{masa} + v_{otp} + v_{pero}.$$

Prema tome brzina narinute sile jednaka je zbroju brzine mase, brzine otpora i brzine pera. Brzina mase je vremenska promjena puta mase, brzina pera je vremenska promjena dužine pera, a brzina otpora je brzina klipa prema cilindru. Rezultat odgovara serijskom spoju prema sl. 147. Kod toga moramo,

naravno, zamisliti, da pero i naprava otpora nemaju mase. Da nam stvar bude jasnija, na navedenoj sl. 147. desno, nacrtana je samo masa bez prisutnosti otpora i pera. U tom slučaju put sile bio bi jednak putu mase. Međutim, ako uzmemo u obzir pero i otpor, tom putu mase pridolazi stiskanje ili rastezanje pera, dakle, ukratko „put“ pera i relativni hod klipa prema cilindru, t. j. „put“ otpora.*)



Slika 147.



Slika 148.

U električnoj paralelnoj shemi svaki element je na istom naponu. U mehaničkoj analogiji, koja je serijska, na svaki element djeluje ista sila, jer u slučaju prekida na bilo kojem mjestu, moramo prema sl. 148. radi ravnoteže zamisliti silu p , odnosno $-p$.

Prema tome, sada električnoj paralelnoj shemi odgovara mehanička serijska slika.

Navest ćemo drugu analogiju električnih i mehaničkih veličina, kod koje se pripadne sheme obih sistema potpuno podudaraju, t. j.

$$e \hat{=} v$$

$$i \hat{=} p$$

$$L \hat{=} \frac{1}{D}$$

$$C \hat{=} M$$

$$R_{el} \hat{=} \frac{1}{R_{meh}}$$

$$q = Mv \quad \text{odnosno} \quad \int p \, dt.$$

*) Kod tog razmatranja moramo odabrati pozitivni put sile, na pr. put od srednjeg položaja njenog hvatišta prema dolje. Iz toga slijedi, kao pozitivni put pera — stiskanje, a kao negativni — rastezanje pera. Kao pozitivni put otpora, slijedi put klipa od sredine prema dnu cilindra, a kao negativni put otpora, put klipa od sredine prema gore. Kao pozitivni put mase slijedi put mase od središnjeg položaja prema dolje, a kao negativni, slijedi put mase prema gore.

Put sile = put mase + put otpora + put pera. Derivacijom po vremenudođq-vamo navedenu jednadžbu brzina.

Serijskom električnom spoju, izraženom jednadžbom

$$e = L \frac{di}{dt} + R_{el} i + \frac{1}{C} \int i dt,$$

odgovara sada serijski mehanički spoj

$$v = \frac{1}{D} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{R_{meh}} p + \frac{1}{M} \int p dt.$$

Paralelnom električnom spoju, prema jednadžbi

$$i = \frac{1}{L} \int e dt + \frac{e}{R_{el}} + C \frac{de}{dt},$$

odgovara sada paralelni mehanički spoj

$$p = D \int v dt + v R_{meh} + M \frac{dv}{dt}.$$

Prema tome, ova analogija daje potpuni sklad vanjskog izgleda korespondentnih sklopova.

Druga analogija izgleda bolja radi podudaranja shema. Međutim, već smo uočili njen prvi manjak, t. j. korespondentni otpori odnose se međusobno recipročno. To ne vrijedi samo za omske otpore, nego i za reaktivne. Prema tome, matematički izrazi u diferencijalnim jednadžbama nisu sasvim isti. Drugi njen manjak je unutarnje naravi. Električnu struju predočujemo si kao posljedicu napona, a brzinu u mehanici zamišljamo kao posljedicu postojanja sile. U ovoj točki nije, međutim, održan sklad između mehaničke i električne sheme, i to otežava promatranje problema pomoću te analogije.

Ako bi pokušali, da na bilo koji način pronađemo razne analogije, nikad ne bismo mogli postići potpuno podudaranje, jer bi to značilo identitet fizikalnih zbivanja, što, međutim, elektrotehnika i mehanika, pri današnjem stanju nauke, još ne sadrže.

Navešt ćemo još jednu sličnu analogiju, kod koje se upotrebljavaju veličine vrtnje oko osi, t. j.

$$e \triangleq m \dots (\text{moment vanjske sile})$$

$$i \triangleq \omega \dots (\text{kutna brzina})$$

$$L \triangleq \mathcal{J}_z \dots (\text{moment tromosti oko osi } z)$$

$$C \triangleq \frac{1}{D_t} \dots (D_t \text{ je elastični koeficijent torzije})$$

$$R \triangleq R_t \dots (R_t \text{ je otpor vrtnje})$$

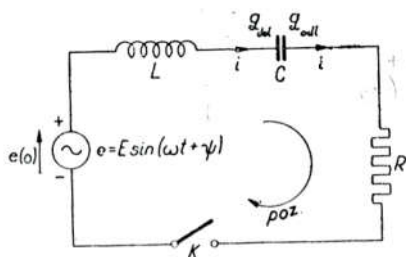
$$q \triangleq \psi \dots (\text{kut zaokretanja}).$$

Upotrebljavat ćemo samo prvu analogiju, koja se je kod nas udomačila, i koja je s matematičkog stanovišta najshodnija.

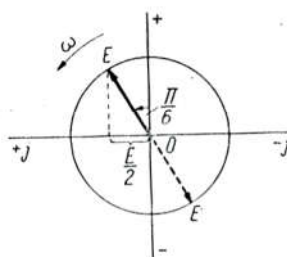
3. NEKE PRIMJEDBE O POČETNIM UVJETIMA, PADOVIMA NAPONA

I DEFINICIJI $e_C = \frac{q}{C}$, odnosno $i = \frac{dq}{dt}$

Na sl. 149. predložen je najopćenitiji serijski titrajni krug. Svaki krug definiran je tek onda, kad su mu poznati svi elementi. Ako te elemente smatramo samo matematičkim veličinama, t. j. koeficijentima izvjesnih izraza u diferencijalnoj jednačini, onda ih nazivamo parametrima titrajnog kruga. Nadalje, svaki krug mora imati još i povoljno odabrani — ali zatim zauvijek



Slika 149.



Slika 150.

utvrđeni — pozitivni smjer ophoda. Sve istosmjerne ili momentane izmjenične veličine smatrat ćemo pozitivnim, ako djeluju u pozitivnom smjeru, a u protivnom slučaju su, naravno, negativne. Kad se zatvori sklopka K , na krug se narine napon, koji smo zbog jednostavnosti pretpostavili kao harmoničan

$$e = E \sin(\omega t + \psi).$$

Neka taj napon u času uklapanja ima, od nas neovisno, momentanu vrijednost, koja je na pr. jednaka polovici amplitude, i neka je toga časa potencijal gornje stezaljke pozitivan, a donje negativan, dakle, napon djeluje u smjeru nacrtane strelice, te je obzirom na naš odabrani pozitivni smjer pozitivan. Međutim, to još ne bi bilo dovoljno, da se izraz za napon potpuno odredi analitički ili simbolički, jer treba navesti još i njegovu tendenciju toga časa, t. j. da li ima tendenciju porasta ili smanjenja, odnosno drugim riječima, treba navesti njegovu derivaciju po vremenu u tom času. Uzevši na pr. da je derivacija pozitivna, analitički izraz za naš napon prema sl. 150. bio bi

$$e = E \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right),$$

odnosno simbolički

$$e e^{j\omega t} = E e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

Da smo odabrali obratan pozitivni smjer ophoda našeg kruga, naš nepromijenjeni zadani napon bio bi izražen kao

$$e = -E \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = E \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6} + \pi\right) = E \sin\left(\omega t + \frac{7\pi}{6}\right),$$

odnosno

$$e e^{j\omega t} = E e^{j\left(\omega t + \frac{7\pi}{6}\right)}$$

Znači, dakle, da se kod okretanja pozitivnog smjera ophoda, verzor okreće za kut π , kako je to crtkano na navedenoj slici i označeno.

Budući da smo na krug narinuli napon e , teći će kroza nj također vremenski promjenljiva struja i . Postojanje te struje izazvat će dinamički autogeni napon na stezaljkama omskog otpora $-iR$, koji se protivi protjecanju struje kroz otpor, zatim dinamički autogeni napon na krajevima kondenzatora $-\frac{1}{C} \int i dt$, koji se opire nabijanju kondenzatora, odnosno stvaranju električnog polja, i konačno dinamički autogeni napon na induktivitetu $-L \frac{di}{dt}$, koji se opire bilo kakvoj promjeni struje, odnosno magnetskog polja. Ti autogeni naponi su po svojoj strukturi potpuno jednaki korespondentnim dinamičkim autogenim silama u mehaničkom krugu. Naš aktivni napon e mora kompenzirati te autogene napone. Njegov dio, koji služi za kompenzaciju autogenog omskog otpora, zove se omski pad napona

$$e_R = iR,$$

onaj dio, koji kompenzira autogeni napon kondenzatora, zove se kapacitivni pad napona

$$e_C = \frac{1}{C} \int i dt,$$

a onaj dio, koji kompenzira autogeni napon induktiviteta, zove se induktivni pad napona

$$e_L = L \frac{di}{dt}.$$

Prema tome, jednadžba

$$e + (-iR) + \left(-L \frac{di}{dt}\right) + \left(-\frac{1}{C} \int i dt\right) = e + (-e_R) + (-e_L) + (-e_C) = 0$$

znači, analogno ravnoteži sila prema d'Alembertovom principu u mehanici, da se svi faktični naponi, dakle aktivni napon i autogeni naponi u krugu, međusobno kompenziraju u nulu, dok jednadžba

$$e = e_R + e_L + e_C$$

znači identitet, t. j. narinuti napon je identičan sa zbrojem svih svojih dijelova, odnosno svih padova napona. Kod toga ne smijemo shvatiti kao da se ti padovi napona „nalegnu“ na svoje elemente. Oni ostaju na mjestu izvora napona, gdje je i e , koji oni identično zamjenjuju, i tek posredništvom vodova oni kompenziraju dotične autogene napone, koji su na stezaljkama elemenata, i to iste veličine, ali protivnog predznaka. Ukoliko to ne bi bilo tako, voltmetar, koji bi stavili na stezaljke izvora napona, ne bi nam pokazivao otklon.

Međutim, u svakom krugu možemo bilo koji faktični napon shvatiti kao aktivni napon, koji je jednak zbroju svih padova napona; dakle, to ne mora

biti baš narinuti napon e . Na pr. neka je autogeni napon na induktivitetu ($-e_L$) naš aktivni napon. Tada će onaj njegov dio, koji se kompenzira s naponom e , biti pad napona ($-e$), onaj koji se kompenzira s autogenim naponom kondenzatora, bit će kao i prije pad napona e_C , i konačno onaj, koji se kompenzira s autogenim naponom omskog otpora, bit će e_R . Prema tome, aktivni napon ($-e_L$) sastojat će se iz svojih dijelova, t. j. padova napona

$$(-e_L) = (-e) + e_R + e_C,$$

odnosno

$$-L \frac{di}{dt} = (-e) + iR + \frac{1}{C} \int i dt.$$

U prednjem razlaganju dolaze umnošci parametara sa strujom i , njenom vremenskom derivacijom $\frac{di}{dt}$ i njenim vremenskim integralom $\int i dt$. Često puta je, međutim, shodno izraziti te vrijednosti s množinom elektricitete, koja se nalazi na kondenzatoru. Tu, međutim, odmah opažamo, da se na nabijenom kondenzatoru na jednoj ploči nalazi pozitivna množina elektricitete, a na drugoj ploči jednaka, ali po predznaku protivna, t. j. negativna množina elektricitete. Te dvije kvalitetno različite množine elektricitete mogu na pločama mirovati, ili se istosmjerno povećavati, a pod utjecajem izmjeničnog narinutog napona također će se izmjenično mijenjati, t. j. ne samo po kvantiteti, nego i po kvaliteti — dakle, po svom predznaku. Prema tome, nameće se pitanje, koje ćemo se ploče držati, odnosno kojom ćemo množinom elektricitete izraziti struju, njenu derivaciju i njen integral. Na navedenoj slici ucrtali smo pozitivnu struju. Idući pozitivnim smjerom ophoda, počevši od izvora napona, nailazimo na lijevu „dolaznu“ ploču na kojoj se nalazi q_{dol} , a zatim, prešavši električno polje, na „odlaznu“ ploču, na kojoj se nalazi q_{odl} . Inače te množine elektricitete označuju se na pr. s $+q$ i $-q$, ali mi smo hotimice izabrali drugačije označivanje, koje će poslužiti većoj jasnoći izlaganja. Razumije se, da q_{dol} , kao i q_{odl} , može biti i pozitivno i negativno.

Ako je q_{dol} pozitivno, a q_{odl} negativno, imat će pad napona e_C , koji „prištište“ kondenzator, t. j. puni ga, ili se protivi njegovom ispražnjenju, pozitivni smjer, bit će, dakle, pozitivan. Naprotiv, ako je q_{dol} negativno, a q_{odl} pozitivno, bit će pad napona e_C negativan. Znači, dakle, da će se predznak pada napona e_C uvijek podudarati s predznakom q_{dol} . Prema tome je

$$e_C = \frac{q_{dol}}{C} = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Iz ove jednadžbe slijedi

$$i = \frac{dq_{dol}}{dt}$$

Uostalom, da nismo upotrebili gornju jednadžbu, došli bi do istog rezultata i samim razmatranjem. Naime, naša pozitivna struja i donosi na „dolaznu“ ploču kroz vrijeme dt množinu elektricitete $i dt$, te je radi toga

$$i dt = dq_{dol}.$$

Iz ovoga se vidi, da su definicije

$$e_C = \frac{q_{dol}}{C}, \quad \text{te} \quad i = \frac{dq_{dol}}{dt},$$

međusobno organski povezane zbog q_{dol} . Time je na lak način postignuto, da svi adendi diferencijalne jednačbe sadrže istu varijabilnu veličinu, t. j.

$$e = L \frac{d^2 q_{dol}}{dt^2} + R \frac{dq_{dol}}{dt} + \frac{q_{dol}}{C}.$$

Razumljivo je, da smo za definiranje pada napona e_C , odnosno struje i , mogli upotrebiti i q_{odl} . Budući da je q_{odl} negativno jednako q_{dol} , odmah slijedi

$$e_C = -\frac{q_{odl}}{C},$$

odnosno

$$i = -\frac{dq_{odl}}{dt}.$$

To je potpuno u skladu s našim razmatranjem, budući da pozitivna struja i odnosi s „odlazne“ ploče množinu elektricitete, te je radi toga

$$i \, dt = -dq_{odl}.$$

Prema tome, sada vrijedi diferencijalna jednačba:

$$e = -L \frac{d^2 q_{odl}}{dt^2} - R \frac{dq_{odl}}{dt} - \frac{q_{odl}}{C}$$

Ako nam je zadan konkretni slučaj, da je na pr. u početku

$$q_{dol} = -7 \times 10^{-4} \text{ As},$$

a prema tome

$$q_{odl} = 7 \times 10^{-4} \text{ As},$$

onda će nam početni uvjet za integral prve diferencijalne jednačbe biti, naravno,

$$q_{dol}(0) = -7 \times 10^{-4} \text{ As},$$

a za integral druge

$$q_{odl}(0) = 7 \times 10^{-4} \text{ As},$$

te ćemo za q_{dol} i q_{odl} dobiti iste vrijednosti, koje se razlikuju samo po predznaku. Međutim, uz odnosne definicije za struju dobit ćemo u oba slučaja isti izraz, jer je struja ista duž cijeloga kruga.

Do sada govorili smo samo o pozitivnoj struji, ali se razumije, da naboji dotičnih ploča moraju i pri negativnoj struji dati iste definicije kao i prije, jer inače pri izmjeničnoj struji za vrijeme trajanja negativne struje ne bi vrijedila ista diferencijalna jednačba.

Negativna struja $-i$ odnosi sa „dolazne“ ploče elektricitetu i radi toga je

$$-i dt = -dq_{\text{dol}},$$

dakle je opet

$$i = \frac{dq_{\text{dol}}}{dt}.$$

Pad napona e_C ne zavisi o smjeru struje, nego samo o naboju, te je radi toga, kao što smo već utvrdili,

$$e_C = \frac{q_{\text{dol}}}{C}$$

Na „odlaznu“ ploču negativna struja donosi elektricitet, i radi toga je

$$-i dt = dq_{\text{odl}},$$

odnosno

$$i = -\frac{dq_{\text{odl}}}{dt},$$

a pad napona je kao i prije

$$e_C = -\frac{q_{\text{odl}}}{C}.$$

Konačno, možemo formulirati slijedeće:

Definicija

$$e_C = \frac{q}{C}, \quad \text{odnosno} \quad i = \frac{dq}{dt},$$

pridružena je naboju one ploče kondenzatora, koju odabrani smjer pozitivne struje pogađa svojim šiljkom, dok je definicija

$$e_C = -\frac{q}{C}, \quad \text{odnosno} \quad i = -\frac{dq}{dt}$$

pridružena naboju one ploče, koju odabrani smjer negativne struje pogađa svojim šiljkom.

4. JEDNOSTAVNI NEPRIGUŠENI KRUG BEZ NARINUTOG NAPONA

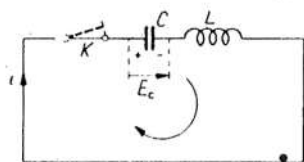
a) Opći integral. Vlastita neprigušena frekvencija

Početi ćemo s mehaničkom analogijom. Toga ćemo se držati i ubuduće. Pronašli smo, da je prema sl. 141. sila kod njihala, koja djeluje kao aktivna, izražena s $-Mg \sin \alpha$. Uz pretpostavku, da možemo zanemariti otpore zraka, trenja u ležaju i t. d., bit će

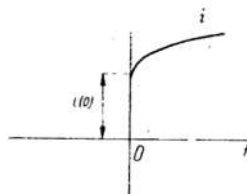
$$-Mg \sin \alpha = M \frac{d^2 a}{dt^2} = M l \frac{d^2 \alpha}{dt^2}.$$

Kod rješavanja te jednačbe pojavljuju se eliptične funkcije. Ako je α maleno, onda se titranje zbiva u pravcu titranja i imamo jednostavnu homogenu linearnu diferencijalnu jednačbu drugoga reda s konstantnim koeficijentima

$$-Mg\alpha = -Mg \frac{a}{l} = M \frac{d^2 a}{dt^2}.$$



Slika 151.



Slika 152.

Ta je jednačba potpuno ista kao i kod titrajnog sistema s perom i masom, t. j.

$$-Da = M \frac{d^2 a}{dt^2}.$$

Prenesena u elektrotehniku, imali bi naš jednostavni neprigušeni krug s kapacitetom i induktivitetom, t. j.

$$-\frac{1}{C}q = L \frac{d^2 q}{dt^2},$$

odnosno

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{CL}q = 0.$$

Uz postavak $q = \mathcal{E}e^{pt}$, kod čega će se kasnije pokazati, da li je konstanta kompleksna ili realna, te dijeljenjem s $\mathcal{E}e^{pt}$, dobivamo karakterističnu jednačbu:

$$p^2 + \frac{1}{CL} = 0.$$

Karakteristična jednačba — kako joj i samo ime kaže — karakterizira samu bit fizikalnog procesa, koji je predstavljen diferencijalnom jednačbom. Njenim algebarskim rješenjem određeno je kako će se odigrati sam fizikalni proces titranja. Njeni su korijeni:

$$p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{1}{CL}}.$$

Radi toga opći integral glasi:

$$q = \mathcal{E}_1 e^{j\sqrt{\frac{1}{CL}}t} + \mathcal{E}_2 e^{-j\sqrt{\frac{1}{CL}}t}$$

$$q = \mathcal{E}_1 \left(\cos \sqrt{\frac{1}{CL}}t + j \sin \sqrt{\frac{1}{CL}}t \right) + \mathcal{E}_2 \left[\cos \left(-\sqrt{\frac{1}{CL}}t \right) + j \sin \left(-\sqrt{\frac{1}{CL}}t \right) \right].$$

$$q = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \cos \sqrt{\frac{1}{CL}} t + j(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \sin \sqrt{\frac{1}{CL}} t.$$

Neka su naši početni uvjeti prema sl. 151., pri odabranom pozitivnom smjeru, da je u času zatvaranja sklopke K na lijevoj ploči kondenzatora pozitivni naboj

$$q(0) = Q = E_C C.$$

Tada će uslijed postojanja induktiviteta početna struja biti nula, t. j.

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Kad bi, naime, početna struja bila različita od nule, na pr. prema sl. 152., t. j. $i(0)$, onda bi bilo

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \infty.$$

To znači, da bi prema formuli

$$e_L = L \frac{di}{dt}$$

u tu svrhu bio potreban neizmjerljivo velik induktivni pad napona, koji, međutim, nemamo na raspoloženju. Prema tome je u $t=0$ iz izračunatog općeg integrala za naboj:

$$Q = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

Opći integral struje glasit će:

$$\frac{dq}{dt} = -(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \sqrt{\frac{1}{CL}} \sin \sqrt{\frac{1}{CL}} t + j(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \sqrt{\frac{1}{CL}} \cos \sqrt{\frac{1}{CL}} t$$

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0 = j(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \sqrt{\frac{1}{CL}},$$

odnosno, budući da j kao i $\sqrt{\frac{1}{CL}}$ nije jednako nuli, onda slijedi:

$$0 = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2).$$

Prema tome je

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \frac{Q}{2}, \quad \text{odnosno} \quad q = \left(\frac{Q}{2} + \frac{Q}{2} \right) \cos \sqrt{\frac{1}{CL}} t = Q \cos \omega_0 t.$$

Želimo li, da se događaj zbiva na imaginarnoj osi, slijedi:

$$jq = jQ \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right), \quad \text{odnosno} \quad q = \mathcal{I}_m \left[jQ \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Frekvencija $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}}$ zove se „vlastita neprigušena kružna frekvencija“, te — kao što se razabire — ne ovisi o amplitudi Q , nego samo o parametrima titrajnog kruga C i L . Trajanje jedne periode titraja iznosi

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Struja će biti

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q \sin \omega_0 t = \omega_0 Q \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) = I \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Ako se pravac titranja poklapa s imaginarnom osi, tada će biti:

$$ji = jI \sin(\omega_0 t + \pi), \text{ odnosno } i = \mathcal{I}m[jI \sin(\omega_0 t + \pi)].$$

U mehaničkom sistemu s perom i masom bilo bi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{M}}.$$

Kod njihala je — kako smo već spomenuli,

$$D = \frac{Mg}{l}.$$

Radi toga je

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

a trajanje jedne periode titraja iznosi

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Kapacitivni pad napona bit će

$$e_C = \frac{q}{C} = E_C \cos \omega_0 t.$$

Induktivni pad napona bit će

$$e_L = L \frac{di}{dt} = L \omega_0 I \cos(\omega_0 t + \pi).$$

Budući da je narinuti napon jednak nuli, bit će

$$e_C + e_L = 0,$$

dakle su verzori obih padova napona jednakih amplituda i u protufazi.

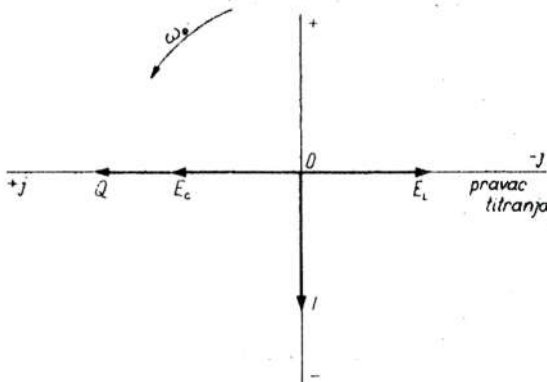
Odnos amplitude padova napona i amplitude struje

$$\frac{E_C}{I} = \frac{E_C}{\omega_0 E_C C} = \frac{E_L}{I} = \frac{L \omega_0 I}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

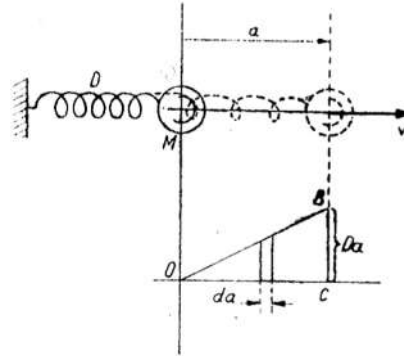
zove se „valni otpor“ idealnog kruga, te je realna veličina u Ohmima.

U navedenom primjeru izračunali smo naboj na lijevoj ploči, dok je na desnoj, naravno,

$$-Q \cos \omega_0 t.$$



Slika 153.



Slika 154.

Na slici 153. nacrtan je vektorski prikaz za navedeni krug s time, da se pravac titranja poklapa s imaginarnom osi.

Mehanički analogon valnom otporu je izraz $\sqrt{DM}$.

b) Energetski odnosi

Ako smo prema sl. 154. masu M izvukli iz središta njenog mirovanja za put a , time smo peru predali potencijalnu energiju

$$\int_0^a D a \, da = \frac{1}{2} D a^2,$$

što predoduje površina trokuta OBC . Ako masa na koncu toga puta ima još i brzinu $v = \frac{da}{dt}$, predali smo masi i kinetičku energiju $\frac{1}{2} M \left(\frac{da}{dt}\right)^2$. Ispustimo li sada masu, ostat će sistem prepušten sam sebi i izvoditi titraje s ukupnom energijom na svakom mjestu puta:

$$\frac{1}{2} D a^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \text{konst.}$$

Ta jednadžba slijedi i iz titrajne jednadžbe

$$M \frac{d^2 a}{dt^2} + D a = 0,$$

koju možemo pisati još i ovako:

$$\frac{d \left[\frac{1}{2} M \left(\frac{da}{dt}\right)^2 \right]}{dt} + \frac{d \left(\frac{1}{2} D a^2 \right)}{dt} = 0.$$

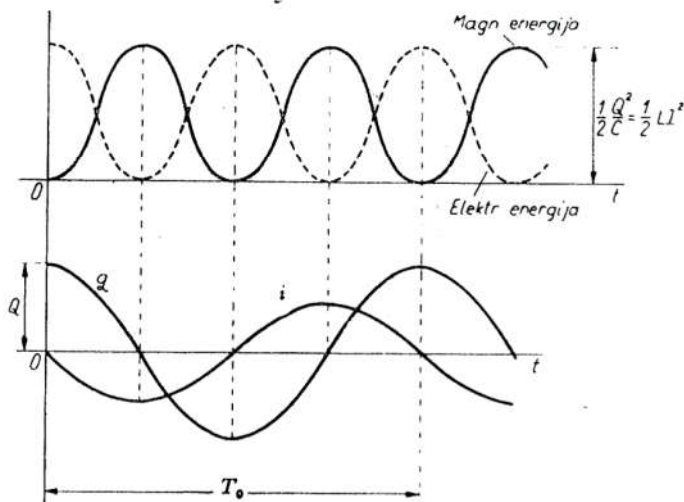
Integracijom po vremenu dobivamo gornju energetsku jednadžbu.

U električnom krugu s L i C , bit će analogno energija magnetskog polja svitka

$$\frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} L i^2,$$

dok će energija električnog polja kondenzatora biti:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}.$$



Slika 155.

Ako pretpostavimo iste početne uvjete kao i prije, onda u $t = 0$, iznosi

$$q(0) = Q \quad \text{te} \quad \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Tada će, uz $q = Q \cos \omega_0 t$, kao i uz $i = -\omega_0 Q \sin \omega_0 t$, magnetska energija biti:

$$\frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L (-\omega_0 Q \sin \omega_0 t)^2 = \frac{1}{2} L \frac{1}{CL} Q^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{Q^2}{2C} \sin^2 \omega_0 t.$$

Električna energija bit će:

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{Q^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t.$$

Suma energija svakog časa iznosi:

$$\frac{Q^2}{2C} \sin^2 \omega_0 t + \frac{Q^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t = \frac{Q^2}{2C},$$

dakle, jednaka je početnoj energiji kruga.

U času najvećeg naboja na kondenzatoru, t. j. kod

$$\cos \omega_0 t = \pm 1, \quad \text{odnosno} \quad \sin \omega_0 t = 0,$$

magnetska energija svitka bit će

$$\frac{Q^2}{2C} \sin^2 \omega_0 t = 0,$$

a električna energija kondenzatora

$$\frac{Q^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t = \frac{Q^2}{2C}.$$

U času kad je kondenzator bez naboja, t. j.

$$\cos \omega_0 t = 0, \text{ odnosno } \sin \omega_0 t = \pm 1,$$

bit će magnetska energija svitka $\frac{Q^2}{2C}$, a električna energija kondenzatora nula.

Energija oscilira između obih formi energije, što se vidi na sl. 155.

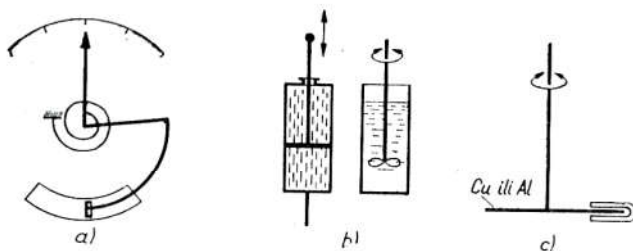
5. PRIGUŠENI SERIJSKI KRUG BEZ NARINUTOG NAPONA

a) O mehaničkom i električnom otporu. Opći integral.

Faktor gušenja i mjera gušenja

Neprigušeni titraji trajali bi neizmjereno dugo — cjelokupna energija kruga neprestano sudjeluje u titrajnom procesu. Kod t. zv. prigušenih titraja energija postepeno prelazi u treću formu energije, t. j. u toplinu, koja se ne vraća u titrajnu igru. Ukupna energija kruga ostaje i dalje konstantna — o čemu ćemo govoriti kasnije — jer ne može izaći iz kruga. Međutim, postepenim smanjenjem onog dijela energije, koji titra, smiruju se zbivanja u krugu, odn. kažemo, da se fizikalne veličine, kao što su struja, padovi napona, naboji i t. d.

Slika 156.

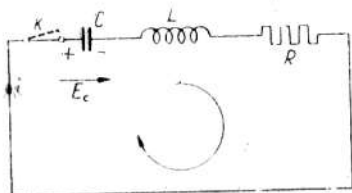


prigušuju. Da se to dogodi, potrebno je, da krug sadrži jedan novi elemenat, a ne samo pero (kapacitet) i masu (induktivitet). Taj novi elemenat nazivamo općenito otpor. Mehanički otpor prouzrokovan je na pr. trenjem ležaja, trenjem zraka, elastičnim molekularnim trenjem ili stvaranjem zvučnih valova. Električni omski otpor očituje se kod prolaza elektrona kroz provodnike. Često puta se mehanički otpor namjerno izaziva, da se njime priguše vlastiti titraji raznih dijelova aparature, na pr. kod seizmografa, koji tada titra samo pod utjecajem vanjske sile. Prigušenja kod instrumenata, koji služe za registriranje, stvaraju izobličenja registriranih krivulja. Prigušenja, koja se temelje na otporu uslijed trenja, premještaju položaj mirovanja instrumenata, jer i kod mirovanja

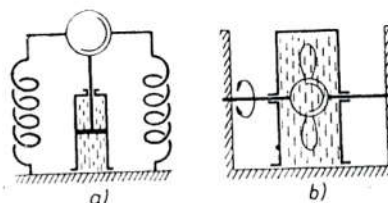
apsorbiraju izvjesnu silu. Prigušenja, koja ne premještaju položaj mirovanja instrumenata, dakle, koja djeluju samo za vrijeme gibanja, su na pr. prema sl. 156. a) zračna prigušenja, sl. 156. b) prigušenja, koja stvaraju tekućine u kojima se giba neki predmet, i sl. 156. c) elektromagnetska prigušenja. Razumije se, ako želimo promatrati samo prigušenja, da moramo u shemama zamisljati, da njihovi dijelovi, koji se gibaju, nemaju mase.

Općenito su prigušenja — bilo mehanička ili električna — komplicirane veličine. Međutim, mi ćemo promatrati samo dva jednostavna slučaja, koji su i najvažniji, i to:

1.) Prigušenje, koje prouzrokuje silu o kojoj smo već govorili, t. j. koja je proporcionalna brzini, a djeluje suprotno od nje, dakle $-Rv$. To su t. zv. linearna prigušenja. Mehanički uređaji, koji imaju elektromagnetska kočenja, gotovo u potpunosti ispunjavaju taj uvjet. Kod električnih krugova tako djeluje omski otpor.



Slika 157.



Slika 158.

2.) Prigušenje, koje izaziva silu uvijek iste jačine, ali protivnog predznaka od brzine. Prema tome, ta sila s promjenom smjera brzine kroz nulu, momentano, ne smanjujući svoju veličinu, mijenja svoj predznak. Takvu silu izazivaju vrlo približno na pr. mehanička suha trenja. U električnim krugovima takva prigušenja nalazimo kod električnog luka „treće vrste“, kod kojega je protunapon luka skoro konstantan i djeluje uvijek nasuprot struji.

Linearna prigušenja su u elektrotehnici najčešća. Na sl. 157. prikazan je općeniti električni serijski krug, a na sl. 158. a) i b) prikazani su njegovi mehanički analogoni. Na sl. 158. a) radi simetrije nacrtali smo pero kao dva paralelna pera.

Za krug na sl. 158. a) vrijedi jednačba:

$$M \frac{d^2 a}{dt^2} = \Sigma p = (-D a) + \left(-R \frac{da}{dt} \right),$$

gdje je, naravno, D zajednički koeficijent elastičnosti obaju pera.

Za krug na sl. 158. b) vrijedi jednačba:

$$\mathcal{J}_z \frac{d^2 \psi}{dt^2} = (-D_0 \psi) + \left(-R_0 \frac{d\psi}{dt} \right),$$

gdje je $\mathcal{J}_z$ moment tromosti mase oko osi vrtnje, nadalje D_0 je koeficijent elastičnosti torzije, a R_0 je otpor okretanja za vrijeme porasta ili smanjivanja kuta ψ .

Za naš električni krug vrijedit će jednačba:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

s time, da se prema sl. 157. naboj q kod odabranog pozitivnog smjera odnosi na lijevu ploču, koja je „dolazna“. Postavkom $q = \mathcal{E} e^{pt}$, te kraćenjem s tim izrazom, dobivamo karakterističnu jednačbu:

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Opći integral gornje homogene diferencijalne jednačbe radi toga će biti:

$$q = \mathcal{E}_1 e^{p_1 t} + \mathcal{E}_2 e^{p_2 t} = \mathcal{E}_1 e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + \mathcal{E}_2 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}.$$

Izraz $\delta = \frac{R}{2L}$, odnosno za mehanički krug $\frac{R}{2M}$, zove se „faktor gušenja“. U literaturi se kadšto kao „gušenje“ uzima izraz $\frac{R}{2\delta} = \frac{R}{\omega_0 L}$ i označuje s D . Njegova recipročna vrijednost $\frac{\omega_0 L}{R}$, zove se „faktor kvalitete serijskog kruga“, koji ćemo označivati s ρ , dok se naročito u anglo-američkoj literaturi označuje s Q . O tome će još biti govora. Izraz $\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{R}{2\omega_0 L}$ naziva se u starijoj literaturi „mjera gušenja“ i obilježava se s $\mathcal{H}$.

Sada ćemo pristupiti detaljnijem proučavanju općeg integrala titrajne jednačbe. Pokazat će se, da postoje tri različita slučaja titranja.

α) Aperiodički slučaj nastaje, ako je $\delta > \omega_0$. Tada su oba korijena karakteristične jednačbe realna i negativna. Parametri R , L i C su, naravno, pozitivni. Množina elektricitete predstavljena je algebarskom sumom dviju eksponencijalnih funkcija, od kojih svaka, zbog svog negativnog eksponenta, s vremenom konvergira prema nuli. Radi toga će ukupni izraz biti aperiodičan, t. j. početna vrijednost konvergirat će nepovratno prema nuli.

Pretpostavit ćemo slijedeće početne uvjete:

U $t = 0$ neka je $q(0) = Q$, te

$$i(0) = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

To bi na sl. 157. značilo, da kod nabijenog kondenzatora zatvorimo sklopku K . Tada će biti:

$$Q = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

$$\frac{dq}{dt} = p_1 \mathcal{E}_1 e^{p_1 t} + p_2 \mathcal{E}_2 e^{p_2 t}.$$

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0 = p_1 \mathcal{E}_1 + p_2 \mathcal{E}_2.$$

Iz ovih jednadžbi slijedi da je:

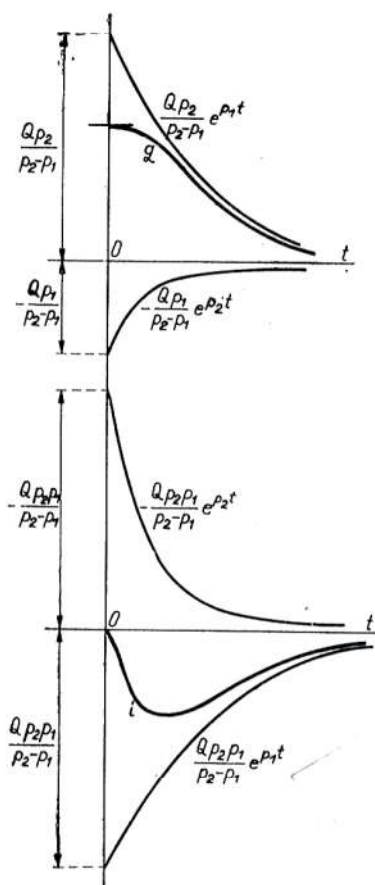
$$\mathcal{C}_1 = \frac{Q p_2}{p_2 - p_1},$$

dakle, pozitivno, jer su p_2 i p_1 negativni, a $|p_2| > |p_1|$.

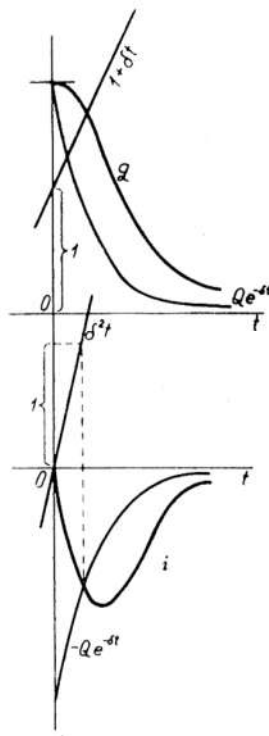
$$\mathcal{C}_2 = -\frac{Q p_1}{p_2 - p_1},$$

je, dakle, negativno. Prema tome bit će:

$$q = \frac{Q p_1}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \left(-\frac{Q p_1}{p_2 - p_1} \right) e^{p_2 t},$$



Slika 159.



Slika 160.

što je prikazano na sl. 159. gore. Druga eksponencijalna funkcija je jače uleknuta zbog $|p_2| > |p_1|$. Struja će biti:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{Q p_2 p_1}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} - \frac{Q p_1 p_2}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}$$

Sl. 159. dolje prikazuje struju i , koja je negativna, dakle obzirom na naš pozitivni smjer na sl. 157. kondenzator će se ispražnjavati.

Vidi se, da su izrazi za q i za i jednake strukture, te se razlikuju samo u koeficijentima. To dolazi otuda, što je i diferencijalna jednačba za struju

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

potpuno ista kao i diferencijalna jednačba za naboj, što se vidi ako je diferenciramo, t. j.

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0.$$

Sada ćemo preurediti izraz za struju uvođenjem

$$\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \beta.$$

Tada će biti:

$$\begin{aligned} i &= \frac{Q(-\delta - \beta)(-\delta + \beta)}{(-\delta - \beta) - (-\delta + \beta)} e^{(-\delta + \beta)t} - \frac{Q(-\delta + \beta)(-\delta - \beta)}{(-\delta - \beta) - (-\delta + \beta)} e^{(-\delta - \beta)t} = \\ &= Q \frac{\beta^2 - \delta^2}{2\beta} e^{-\delta t} [e^{\beta t} - e^{-\beta t}] = -Q \frac{\omega_0^2}{\beta} e^{-\delta t} \sinh(\beta t). \end{aligned}$$

Budući da je $Q = E_C C$, gdje je E_C početni kapacitivni pad napona, a $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, slijedi:

$$i = -\frac{E_C}{L\beta} e^{-\delta t} \sinh(\beta t).$$

β) Granično aperiodički slučaj nastaje, ako je

$$\delta = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ odnosno } \frac{R}{2L} = \omega_0.$$

Iz toga slijedi

$$\frac{1}{2} = \frac{\omega_0 L}{R} = \rho, \quad \text{ili} \quad \frac{R}{2} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Oba korijena karakteristične jednačbe su jednaka, t. j.

$$p_1 = p_2 = -\delta.$$

Da dobijemo opći integral za taj slučaj, pisat ćemo naš prijašnji izraz, zamijenivši mu pritom konstante shodnom kombinacijom novo uvedenih konstanta i diferencije $p_1 - p_2$, kako slijedi:

$$\begin{aligned} q &= \mathcal{C}_1 e^{p_1 t} + \mathcal{C}_2 e^{p_2 t} = \left(\mathcal{C}_3 + \frac{\mathcal{C}_4}{p_1 - p_2} \right) e^{p_1 t} + \left(\mathcal{C}_4 - \frac{\mathcal{C}_3}{p_1 - p_2} \right) e^{p_2 t} = \\ &= \mathcal{C}_3 e^{p_1 t} + \mathcal{C}_4 e^{p_2 t} + \mathcal{C}_4 \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2}. \end{aligned}$$

Sada ćemo izvršiti granični prelaz po L'Hospitalu za $p_2 \rightarrow p_1$. Tada će biti:

$$q = \underbrace{(\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4)}_{\mathcal{C}} e^{p_1 t} + \mathcal{C}_4 \frac{\frac{d}{dp_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})}{\frac{d}{dp_2} (p_1 - p_2)} = \mathcal{C} e^{p_1 t} + \mathcal{C}_4 t e^{p_1 t}.$$

Budući da je: $p_1 = p_2 = -\delta$ slijedi:

$$q = (\mathcal{C} + \mathcal{C}_4 t) e^{-\delta t}.$$

$$i = \frac{dq}{dt} = e^{-\delta t} (-\delta \mathcal{C} - \delta \mathcal{C}_4 t + \mathcal{C}_4).$$

Izabrat ćemo iste početne uvjete kao i prije, t. j. u $t = 0$, neka je $q(0) = Q$, te

$$i(0) = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Tada slijedi:

$$\begin{aligned} Q &= \mathcal{C} \\ 0 &= -\delta \mathcal{C} + \mathcal{C}_4, \end{aligned}$$

odnosno iz ovih jednadžbi $\delta Q = \mathcal{C}_4$.

Prema tome bit će:

$$\begin{aligned} q &= (Q + \delta Q t) e^{-\delta t} = Q e^{-\delta t} (1 + \delta t). \\ i &= -Q e^{-\delta t} \delta^2 t. \end{aligned}$$

Iz rezultata se vidi, da su naboj i struja opet iste strukture, t. j. umnožak eksponencijalne funkcije i pravca. Sl. 160. gore prikazuje naboj, a dolje struju u ovisnosti o vremenu.

Budući da je, prema pretpostavci za granično aperioidički slučaj

$$\delta^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

slijedi da je:

$$i = -E_C C e^{-\delta t} \frac{1}{LC} t = -\frac{E_C}{L} e^{-\delta t} t.$$

Taj izraz slijedi i iz formule za aperioidički slučaj kod prijelaza $\beta \rightarrow 0$ t. j.

$$i = \lim_{(\beta \rightarrow 0)} \left[-\frac{E_C}{L} e^{-\delta t} \frac{\sinh(\beta t)}{\beta} \right] = -\frac{E_C}{L} e^{-\delta t} t.$$

Ako kod aperioidičkog slučaja, kod kojega je $\frac{R}{2} > \sqrt{\frac{L}{C}}$, smanjujemo postepeno R i C , odnosno povećavamo L , nastat će kod $\frac{R}{2} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ granično aperioidički slučaj, koji će biti „najkraći“ između svih prethodnih aperioidičkih slučajeva, t. j. njegov vremenski integral bit će najmanji.

γ) Oscilatorni slučaj nastaje, ako je $\delta < \omega_0$. Tada su p_1 i p_2 konjugirano kompleksni izrazi, t. j.

$$p_1 = -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$p_2 = -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Opći integral glasi:

$$q = \mathcal{C}_1 e^{(-\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})t} + \mathcal{C}_2 e^{(-\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})t}.$$

Uvest ćemo $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_d$, t. j. kružna frekvencija prigušenog titranja (u literaturi udomačen indeks „ d “ prema engleskom „to damp“, što znači gušiti). Veličine ω_0 i δ imaju naravno iste dimenzije, t. j.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{\text{Voltsec Ampsec}}{\text{Amp Volt}}}} \right] = [\text{sec}^{-1}]$$

$$\delta = \frac{R}{2L} = \left[\frac{\text{Volt Amp}}{\text{Amp Voltsec}} \right] = [\text{sec}^{-1}].$$

Dalje slijedi:

$$q = e^{-\delta t} [\mathcal{C}_1 e^{j\omega_d t} + \mathcal{C}_2 e^{-j\omega_d t}].$$

Prema Moivreu će biti

$$q = e^{-\delta t} [\mathcal{C}_1 (\cos \omega_d t + j \sin \omega_d t) + \mathcal{C}_2 (\cos \omega_d t - j \sin \omega_d t)] =$$

$$= e^{-\delta t} [(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \cos \omega_d t + j(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2) \sin \omega_d t].$$

Izraz u uglatoj zagradi predstavlja općenito elipsu, a opći integral naboja dobili bismo množenjem verzora te elipse s eksponencijalnom funkcijom. Međutim, za opći integral moramo uvesti ograničenje, naime, da se zbiva uvijek na istom pravcu titranja, jer je naboj fizikalno realna veličina, te nema karakter kompleksnosti. Znači, da elipsa mora degenerirati u odsječak pravca. Pravac titranja možemo poistovjetiti s realnom ili imaginarnom osi. Prema tom našem zahtjevu, slijedit će tada i izrazi za konstante. Kako smo se općenito odlučili za sinusov titraj, naznačeni opći integral mora biti „imaginaran“. Prema tome, $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$ mora biti imaginarno, a $(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)$ realno, kako bi čitav izraz postao imaginaran.*) Radi toga je:

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 = jN$$

$$\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 = M$$

Iz tih jednadžbi dobivamo:

$$\mathcal{C}_1 = \frac{M}{2} + j\frac{N}{2}$$

$$\mathcal{C}_2 = -\frac{M}{2} + j\frac{N}{2},$$

koji verzori su sa svojim pripadnim smjerom vrtnje nacrtani na sl. 161. Kao što je crtkano naznačeno, oba se verzora vremenski smanjuju, jer se množe s $e^{-\delta t}$.

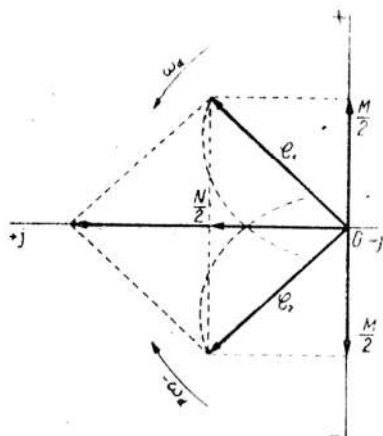
*) Ako bismo htjeli, da se titraj zbiva u realnoj osi, tada bi naš zahtjev bio, da $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$ bude realno, a $(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)$ imaginarno.

Našu formulu možemo sada pisati:

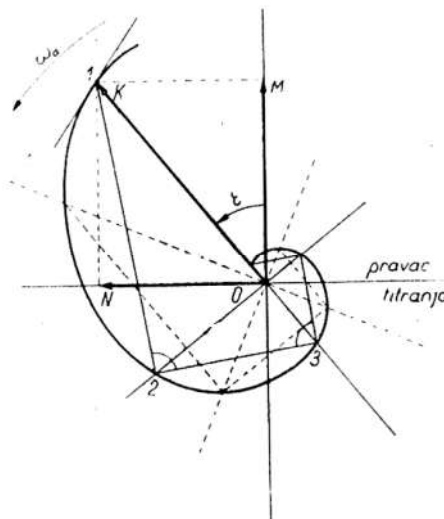
$$jq = e^{-\delta t} (jN \cos \omega_d t + jM \sin \omega_d t),$$

odnosno

$$q = \mathcal{I}_m [j e^{-\delta t} (N \cos \omega_d t + M \sin \omega_d t)]$$



Slika 161.



Slika 162.

Međutim, kompleksnu ravninu možemo i odbaciti, ispustivši operator $\mathcal{I}_m$ i j , te će tada preostati samo pravac titranja na kojem se izvodi titraj:

$$q = e^{-\delta t} (N \cos \omega_d t + M \sin \omega_d t).$$

Izraz u zagradi možemo zamijeniti s izrazom

$$K \sin(\omega_d t + \varepsilon),$$

gdje je prema sl. 162.

$$K \sin \varepsilon = N$$

$$K \cos \varepsilon = M.$$

Prema tome je konačno:

$$q = K e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon).$$

Verzor se neprestano smanjuje prema formuli

$$K(t) = K e^{-\delta t}.$$

Vrijeme $t = \frac{\varphi}{\omega_d}$, gdje je φ prevaljeni kut verzora od početnog njegovog položaja u vremenu t . Radi toga će biti:

$$K(\varphi) = K e^{-\delta \frac{\varphi}{\omega_d}} = K e^{-\delta \frac{\varphi}{\sqrt{\omega_d^2 - \delta^2}}} = K e^{-\frac{\delta}{\omega_0} \frac{\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}}} = K e^{-\frac{H}{\sqrt{1 - H^2}} \varphi},$$

t. j. formula logaritmičke spirale.

Kao što je poznato, kod te krivulje tangenta zatvara s verzorom uvijek isti kut. Na navedenoj slici pokazana je jednostavna konstrukcija te spirale, koja slijedi iz spoznaje, da je za isti zaokret, t. j. za kut φ , faktor smanjenja, t. j.

$$e^{-\frac{H}{\sqrt{1-H^2}}\varphi}$$

uvijek isti. Prema tome mora biti $\overline{O1}:\overline{O2} = \overline{O2}:\overline{O3}$, budući da se $\overline{O1}$ do $\overline{O2}$ zaokreće za isti kut, t. j. $\frac{\pi}{2}$, kao i $\overline{O2}$ do $\overline{O3}$. Navedeni razmjer je postignut, ako je kod 2 pravi kut, jer su tada trokuti $O12$ i $O23$ slični. Razumije se, da interpolirajući međusobno okomite pravce možemo naći veći broj točaka krivulje, što je crtkano i učinjeno.

Struja će biti:

$$\begin{aligned} i = \frac{dq}{dt} &= K[e^{-\delta t} \omega_d \cos(\omega_d t + \varepsilon) - \delta e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon)] = \\ &= -K e^{-\delta t} \delta \left[-\frac{\omega_d}{\delta} \cos(\omega_d t + \varepsilon) + \sin(\omega_d t + \varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Izabrat ćemo iste početne uvjete kao i kod prijašnjih slučajeva, t. j. u $t = 0$ neka je

$$q(0) = Q, \quad \text{te} \quad \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Tada slijedi iz navedene jednadžbe:

$$0 = -K\delta \left[-\frac{\omega_d}{\delta} \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \right].$$

Veličina K ne može biti nula, jer bi to značilo, da se naboj i struja uopće ne pojavljuju, a isto tako nije ni δ jednako nuli. Prema tome bit će

$$0 = -\frac{\omega_d}{\delta} \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \quad \text{ili} \quad \frac{\omega_d}{\delta} = \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Prema tome bit će

$$\begin{aligned} i &= \frac{-K e^{-\delta t} \delta}{\cos \varepsilon} [-\sin \varepsilon \cos(\omega_d t + \varepsilon) + \cos \varepsilon \sin(\omega_d t + \varepsilon)] = \\ &= \frac{-K e^{-\delta t} \delta}{\cos \varepsilon} \sin \omega_d t = -K^* e^{-\delta t} \sin \omega_d t, \end{aligned}$$

gdje je

$$K^* = \frac{K\delta}{\cos \varepsilon}.$$

Vrijednost K dobit ćemo iz jednadžbe za q u $t = 0$, t. j.

$$q(0) = Q = E_C C = K \sin \varepsilon,$$

ili

$$K = \frac{E_c C}{\sin \varepsilon}.$$

Prema tome je

$$i = - \frac{E_c C e^{-\delta t} \delta}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon} \sin \omega_d t.$$

Budući da je

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_d}{\delta}\right)^2}} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega_d^2}} = \frac{\delta}{\omega_0},$$

odnosno

$$\sin \varepsilon = \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\delta}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_d}{\delta} = \frac{\omega_d}{\omega_0},$$

bit će

$$i = - \frac{E_c C e^{-\delta t} \delta}{\frac{\omega_d}{\omega_0} \cdot \frac{\delta}{\omega_0}} \sin \omega_d t = - \frac{E_c C e^{-\delta t} \omega_0^2}{\omega_d} \sin \omega_d t.$$

Uz $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ slijedi:

$$i = - \frac{E_c C}{\omega_d LC} e^{-\delta t} \sin \omega_d t = - \frac{E_c}{\omega_d L} e^{-\delta t} \sin \omega_d t.$$

Izraz za naboj bit će

$$\begin{aligned} q &= \frac{E_c C}{\sin \varepsilon} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon) = \frac{E_c C \omega_0}{\omega_d} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon) = \\ &= \frac{E_c C}{\omega_d \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon) = \frac{E_c}{\omega_d} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon). \end{aligned}$$

Vidimo, da su opet izrazi za struju i naboj iste strukture. Na sl. 163. gore nacrtan je verzorski prikaz za

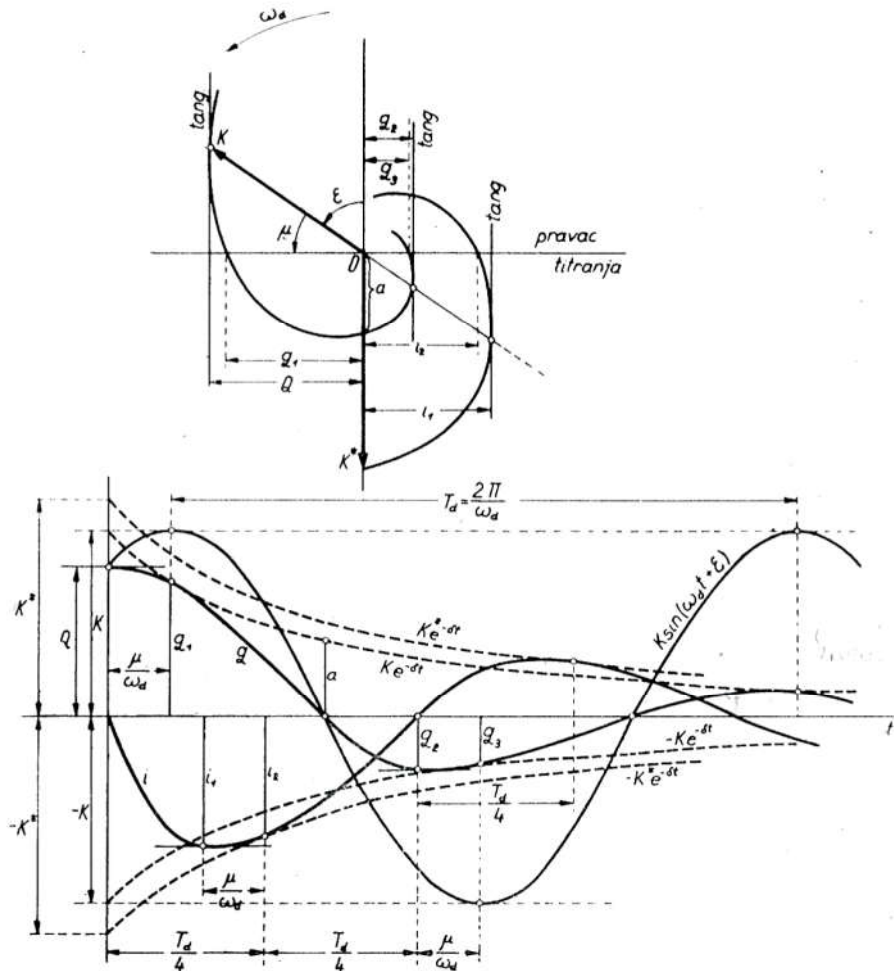
$$q = K e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon)$$

te za

$$i = -K^* e^{-\delta t} \sin \omega_d t.$$

U našem slučaju je $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, jer su mu tangens i sinus pozitivni. Tangenta na logaritmičku spiralu, koja je pridružena verzoru naboja, mora u $t = 0$ biti okomita na pravac titranja. To iz toga razloga, jer je vremenska derivacija one komponente našeg verzora amplitude $K(\varphi)$, koja leži u pravcu titranja, u času

$t = 0$ jednaka nuli, budući da je početni uvjet $\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0$. Prema tome, tada brzina vrška verzora — t. j. derivacija čitavog verzora po vremenu — odnosno tangenta na hodograf, nema komponente u smjeru pravca titranja, ili drugim riječima mora biti na nj okomita.



Slika 163.

Na navedenoj slici ispod verzorskog prikaza nalazi se vremenski dijagram naboja i struje. Učrtana je i sinusoida

$$K \sin(\omega_d t + \epsilon),$$

da bi se istaklo, da se mjesta dodira krivulje naboja s dodirnicom $\pm K e^{-\delta t}$ nalaze na istoj ordinati kao i ekstremne točke te sinusoida, t. j. kad sinus iznosi ± 1 , dakle, u razmacima poluperiode. Ekstremi krivulje naboja nalaze se za vrijeme $\frac{\mu}{\omega_d}$ nalijevo od tih točaka dodira. U času ekstremnih vrijednosti naboja struja ima vrijednost nula. Analogno naboju, ekstremne vrijednosti struje nalaze se za vrijeme $\frac{\mu}{\omega_d}$ nalijevo od mjesta, gdje strujna krivulja dira svoju dodirnicu. Trajanje periode prigušenog titraja $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$.

b) Energetski odnosi

Da saznamo energetske odnose u općenitom serijskom krugu, upotrijebit ćemo našu početnu titrajnu jednadžbu, koju ćemo pomnožiti s $\frac{dq}{dt}$. Radi toga će biti:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} \frac{dq}{dt} + R \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0.$$

To možemo shvatiti kao

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \right] + R \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right] = 0,$$

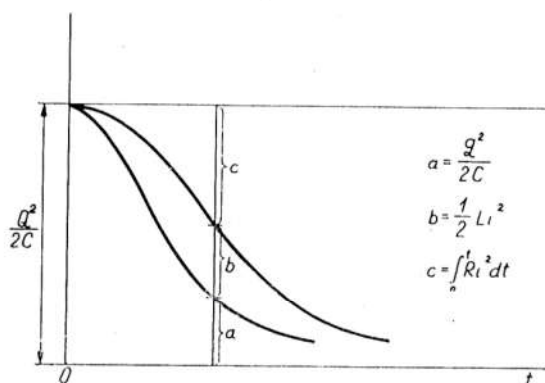
odnosno kao

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right] = -R \left(\frac{dq}{dt} \right)^2.$$

Integracijom po vremenu slijedi:

$$\frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \int_0^t R i^2 dt + \frac{q^2}{2C} = \text{konst.}$$

Znači, dakle, da je zbroj magnetske, toplinske i električne energije konstantan, ali da je vremenska promjena zbroja samo električne i magnetske energije negativna, te se radi toga taj zbroj umanjuje, a Jouleova toplina raste.



Slika 164.

Sl. 164. prikazuje energetske odnose kod aperioidičkog, odnosno granično aperioidičkog slučaja s početnim uvjetima u $t = 0$ je $q(0) = Q$, te $\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0$.

Treći — najvažniji — oscilatorski slučaj proučit ćemo računski za iste početne uvjete. Pritom ćemo pretpostaviti jaku oscilatornost, t. j. $\delta \ll \omega_0$. Upotrebivši već prije izračunane izraze za struju i naboj, imat ćemo za magnetsku energiju:

$$L \frac{i^2}{2} = \frac{1}{2} L \left(-\frac{E_c}{\omega_d L} e^{-\delta t} \sin \omega_d t \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{L C^2 \omega_d^2} e^{-2\delta t} \sin^2 \omega_d t,$$

dok će izraz za električnu energiju glasiti:

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2C} \left[\frac{E_c}{\omega_d} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon) \right]^2.$$

Kako je prema pretpostavci $\delta \ll \omega_0$, to znači, da je

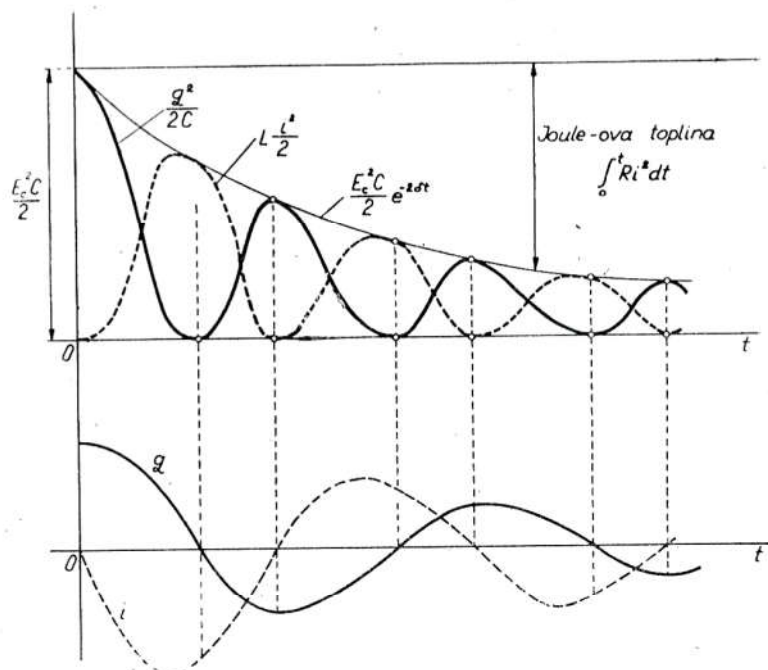
$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0,$$

odnosno

$$\varepsilon = \arctg \frac{\omega_d}{\delta} \approx \frac{\pi}{2}.$$

Ako izraz pomnožimo s $\frac{C}{C}$, dobili smo za električnu energiju:

$$\frac{1}{2} \frac{E_c^2 C^2}{\omega_d^2 L C^2} e^{-2\delta t} \cos^2 \omega_d t = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{L C^2 \omega_d^2} e^{-2\delta t} \cos^2 \omega_d t$$



Slika 165.

Znači, dakle, da je suma magnetske i električne energije eksponencijalna funkcija $\frac{Q^2}{2LC^2 \omega_d^2} e^{-2\delta t}$, te se dakle ta suma dvaput jače prigušuje od struje, odnosno naboja.

Početna energija bit će:

$$\frac{Q^2}{2LC^2 \omega_d^2} = \frac{1}{2C} \frac{Q^2 \omega_0^2}{\omega_d^2} \approx \frac{Q^2}{2C} = \frac{E_c^2 C}{2},$$

gdje je E_c početni kapacitivni pad napona. Sl. 165. prikazuje sve tri vrste energija u ovisnosti o vremenu, za opisani izrazito oscilatorski slučaj.

c) Kapacitet s paralelnom vodljivosti u prigušenom serijskom titrajnom krugu

Prema sl. 166. kod zatvorene sklopke K struja će biti:

$$i = i_c + i_G.$$

Nadalje će biti:

$$i_c = \frac{dq}{dt} = C \frac{de_c}{dt}.$$

$$i_G = e_c G.$$

Iz tih jednadžbi slijedi:

$$i = C \frac{de_c}{dt} + e_c G.$$

Prema drugom Kirchhoffovom zakonu slijedi:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e_c = 0,$$

odnosno

$$L \frac{d}{dt} \left(C \frac{de_c}{dt} + G e_c \right) + R \left(C \frac{de_c}{dt} + G e_c \right) + e_c = 0$$

$$LC \frac{d^2 e_c}{dt^2} + (LG + RC) \frac{de_c}{dt} + (RG + 1) e_c = 0.$$

S postavkom $e_c = e^{pt}$ slijedi karakteristična jednadžba:

$$LCp^2 + (LG + RC)p + (RG + 1) = 0$$

$$p_{1,2} = -\left(\frac{R}{2L} + \frac{G}{2C}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L} + \frac{G}{2C}\right)^2 - \left(\frac{RG}{LC} + \frac{1}{LC}\right)},$$

odnosno

$$p_{1,2} = -\left(\frac{R}{2L} + \frac{G}{2C}\right) \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{G}{2C}\right)^2}.$$

Prema tome opći integral glasi:

$$e_c = \mathcal{E}_1 e^{\left[-\left(\frac{R}{2L} + \frac{G}{2C}\right) + j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{G}{2C}\right)^2}\right] t} + \mathcal{E}_2 e^{\left[-\left(\frac{R}{2L} + \frac{G}{2C}\right) - j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{G}{2C}\right)^2}\right] t}$$

U ovom slučaju je, kako vidimo,

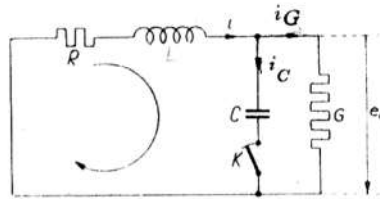
$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{G}{2C}\right)^2}.$$

Prema tome, postepeni pridolazak vodljivosti u prvi mah povećava frekvenciju ω_d , odnosno oscilatornost, jer diskriminanta postaje veća. Štoviše, inače obični serijski aperiodički slučaj, kod kojega je bilo $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$, može se pridolaskom vodljivosti pretvoriti u oscilatorni, ako je postalo $\left(\frac{R}{2L} - \frac{G}{2C}\right)^2 < \frac{1}{LC}$.

U slučaju, da je $\frac{G}{2C} = \frac{R}{2L}$, odnosno $C : G = L : R$ (slova slijede po abecedi!) ω_d prelazi štoviše u neprigušeni ω_0 , što je — kako slijedi iz formule — i najveća moguća frekvencija. Međutim, s druge strane, pridošla vodljivost povećava prigušenje, koje je sada postalo $\left(\frac{R}{2L} + \frac{G}{2C}\right)$ tako, da se nastale oscilacije, čija se je frekvencija povećala, brže prigušuju. Daljnje povećanje vodljivosti opet smanjuje frekvenciju od ω_0 do 0.

Izračunat ćemo sada slijedeći primjer:

$$L = 1 \text{ H}, \quad C = 10^{-6} \text{ F}, \quad R = 1000 \Omega, \quad \text{te} \quad G = 10^{-3} \text{ S}.$$



Slika 166.

U $t = 0$ zatvara se sklopka K . Struja $i(0) = 0$, a naboj $q(0) = Q = 2 \times 10^{-4} \text{ As}$ odnosi se na gornju ploču prema sl. 166. $\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = 1000$. Iz ovoga slijedi, da će frekvencija biti:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 10^{-6}}} = 10^3 \text{ s}^{-1}.$$

Prema tome je:

$$p_{1,2} = -\left(\frac{1000}{2} + \frac{1000}{2}\right) \pm j 1000.$$

Opći integral za e_c glasi:

$$e_c = \mathcal{C}_1 e^{-(1000 - j 1000)t} + \mathcal{C}_2 e^{-(1000 + j 1000)t}.$$

Dalje imamo:

$$i(0) = i_c(0) + i_G(0) = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} + G e_c(0) = 0,$$

odnosno

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = C \left. \frac{de_c}{dt} \right|_{t=0} = -G e_c(0) = -G \frac{Q}{C}.$$

Iz ove jednadžbe slijedi:

$$\left. \frac{de_c}{dt} \right|_{t=0} = -G \frac{Q}{C^2}.$$

Derivacijom jednadžbe za e_c dobivamo:

$$\frac{de_c}{dt} = -(1000 - j1000)\mathcal{E}_1 e^{-(1000 - j1000)t} - (1000 + j1000)\mathcal{E}_2 e^{-(1000 + j1000)t}.$$

Prije nego pristupimo izračunavanju konstanti u Gaussovoj ravnini, moramo odlučiti, da li želimo, da se naš pravac titranja pokriva s realnom ili imaginarnom osi. Dosljedno ćemo, kao i dosad, izabrati ovo posljednje. Prema tome — budući da će se sve veličine pojavljivati na imaginarnoj osi — moraju se tamo pojaviti i naši početni uvjeti, koji će radi toga u Gaussovoj ravnini glasniti:

$$je_c(0) = j\frac{Q}{C}, \text{ i dalje } j\frac{de_c}{dt}\bigg|_{t=0} = j\left(-G\frac{Q}{C^2}\right).$$

Prema tome, slijedi:

$$j\frac{Q}{C} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

$$j\left(-G\frac{Q}{C^2}\right) = -(1000 - j1000)\mathcal{E}_1 - (1000 + j1000)\mathcal{E}_2.$$

Iz ovoga će biti:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \left(\frac{Q}{2C} - \frac{GQ}{2000C^2}\right) + j\frac{Q}{2C} = 2 \times 10^{-4} \left(\frac{1}{2 \times 10^{-6}} - \frac{1 \times 10^{-3}}{2000 \times 10^{-12}}\right) + \\ &+ j\frac{2 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-6}} = j10^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= -\left(\frac{Q}{2C} - \frac{GQ}{2000C^2}\right) + j\frac{Q}{2C} = -2 \times 10^{-4} \left(\frac{1}{2 \times 10^{-6}} - \frac{1 \times 10^{-3}}{2000 \times 10^{-12}}\right) + \\ &+ j\frac{2 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-6}} = j10^3. \end{aligned}$$

Da odredimo konstante, mogli smo postupiti i ovako:

$$\mathcal{E}_1 = A_1 + jB_1$$

$$\mathcal{E}_2 = A_2 + jB_2$$

$$e_c(0) = \frac{Q}{C} = \mathcal{I}m[(A_1 + jB_1) + (A_2 + jB_2)]$$

$$\begin{aligned} \frac{de_c}{dt}\bigg|_{t=0} &= -G\frac{Q}{C^2} = \mathcal{I}m[-(1000 - j1000)(A_1 + jB_1) - \\ &- (1000 + j1000)(A_2 + jB_2)]. \end{aligned}$$

$$0 = \mathcal{R}e[(A_1 + jB_1) + (A_2 + jB_2)].$$

$$0 = \mathcal{R}e[-(1000 - j1000)(A_1 + jB_1) - (1000 + j1000)(A_2 + jB_2)]^*.$$

*) Realne komponente jednake su nuli analogno sl. 161.

Iz te četiri jednadžbe slijede četiri obične algebarske jednadžbe, t. j.

$$\frac{Q}{C} = B_1 + B_2.$$

$$-G \frac{Q}{C^2} = 1000 A_1 - 1000 B_1 - 1000 A_2 - 1000 B_2.$$

$$0 = A_1 + A_2.$$

$$0 = -1000 A_1 - 1000 B_1 - 1000 A_2 + 1000 B_2.$$

Iz treće jednadžbe slijedi, da je $A_1 = -A_2$. Ako to uvrstimo u četvrtu jednadžbu, dobit ćemo:

$$0 = -1000 B_1 + 1000 B_2, \text{ odnosno } B_1 = B_2 = \frac{Q}{2C} = \frac{2 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-6}} = 10^2.$$

Prema tome sada druga jednadžba glasi:

$$-10^{-3} \frac{2 \times 10^{-4}}{10^{-12}} = -2000 A_2 - 2000 \times 10^2.$$

$$A_2 = 0 = -A_1.$$

Na temelju toga, konačno slijedi isto kao i prije, t. j.

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = j 10^2.$$

Titraju su, dakle, pridružena dva verzora, koji se prigušuju s faktorom gušenja jednako 1000, a od kojih se jedan okreće s $\omega_0 = 1000 \text{ s}^{-1}$ i drugi s $-\omega_0 = -1000 \text{ s}^{-1}$. Početni položaj obadva verzora je u pozitivnom smjeru pravca titranja, odnosno imaginarne osi. Ta dva verzora možemo zamijeniti s jednim verzorom dvostruke dužine, koji se okreće s $\omega_0 = 1000 \text{ s}^{-1}$ s time, da vrijedi samo njegova projekcija na imaginarnu os, te možemo pisati:

$$e_c = \mathcal{I}m[j 2 \times 10^2 e^{(-1000 + j 1000)t}] = \mathcal{I}m[2 \times 10^2 e^{-1000t} (j \cos 1000t - \sin 1000t)],$$

odnosno

$$e_c = 2 \times 10^2 e^{-1000t} \sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ Volti.}$$

Derivacijom slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{de_c}{dt} &= 2 \times 10^2 \left[-1000 e^{-1000t} \sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + 1000 e^{-1000t} \cos\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= -2 \times 10^5 e^{-1000t} \left[\sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Taj izraz ćemo proširiti s $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i pisati:

$$\begin{aligned} \frac{de_c}{dt} &= -2\sqrt{2} \times 10^5 e^{-1000t} \left[\sin \left(1000t + \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi}{4} - \right. \\ &\quad \left. - \cos \left(1000t + \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{\pi}{4} \right] = \\ &= -2\sqrt{2} \times 10^5 e^{-1000t} \left[\sin \left(1000t + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \end{aligned}$$

Radi toga će biti:

$$i_c = C \frac{de_c}{dt} = -2\sqrt{2} 10^{-1} e^{-1000t} \left[\sin \left(1000t + \frac{\pi}{4} \right) \right] \text{ Amp.}$$

Vidi se, da će u $t=0$ struja, obzirom na izabrani pozitivni smjer od i_c , biti negativna, jer se kondenzator uistinu ispražnjava, t. j.

$$i_c(0) = -2 \times 10^{-1} \text{ Amp.}$$

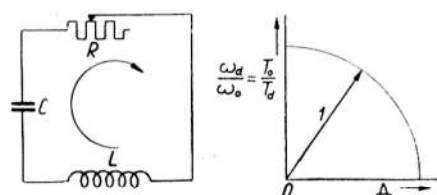
Struja

$$i_G = G e_c = 2 \times 10^{-1} e^{-1000t} \sin \left(1000t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ Amp.}$$

U $t=0$ bit će:

$$i_G(0) = 2 \times 10^{-1} \text{ Amp,}$$

što znači, da u prvom momentu sva struja iz kondenzatora prolazi kroz G , pošto kroz induktivitet ne može tada proći nikakva struja.



Slika 167.

d) Odnos trajanja neprigušene i prigušene periode, logaritmički dekrement i vrijeme polovične vrijednosti

Sl. 167. lijevo, prikazuje serijski titrajni krug, kojemu kod utvrđenog L i C mijenjamo R od slučaja do slučaja, počevši od nule pa naviše. Za svaki pojedini slučaj biti će radi toga i R konstantno. Prema tome, mijenjat će se od slučaja do slučaja

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0} \right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}.$$

Nadalje će biti:

$$\frac{T_0}{T_d} = \frac{2\pi}{\omega_0} : \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{\omega_d}{\omega_0}.$$

Prema tome slijedi:

$$\left(\frac{T_0}{T_d}\right)^2 + D^2 = 1.$$

Na navedenoj slici, desno, prikazana je četvrtina kružnice, shodno dobivenoj jednadžbi, budući da $\frac{T_0}{T_d}$, kao i D , može biti samo pozitivno.*) Kako je $D = \frac{R}{\frac{R}{2\omega_0 L}}$, to ćemo kod $R = 0$ imati $\frac{T_0}{T_d} = 1$, t. j. neprigušeni titraj. Kod $\frac{R}{2\omega_0 L} = 1$, odnosno $\frac{R}{2L} = \omega_0$, imat ćemo odnos $\frac{T_0}{T_d} = 0$, što znači, da je kod nepromijenjenog konačnog T_0 nazivnik razlomka, t. j. T_d postalo neizmjereno. To odgovara graničnom aperiodičkom slučaju, kad je, dakle, upravo prestala oscilatornost.

Sad ćemo se upoznati s pojmom t. zv. logaritmičkog dekrementa, koji ćemo označiti s d . Pod tim se podrazumijeva prirodni logaritam kvocijenta bilo koje vrijednosti prigušenog titraja, i one njegove vrijednosti, koja nastupa iza jedne njegove periode, t. j. iza vremena T_d . Najjednostavnije će biti, ako promatramo dvije uzastopne dodirne točke na gornjoj ili na donjoj dodirnici, jer je tada kut prigušnog verzora jednak $\frac{\pi}{2}$, odnosno lihom multiplumu od $\frac{\pi}{2}$, i prema tome njegov pripadni sinus iznosi ± 1 . U nekoj točki gornje dodirnice bit će radi toga vrijednost titraja $Ke^{-\delta t}$, a poslije vremena T_d , bit će u slijedećoj točki gornje dodirnice vrijednost titraja $Ke^{-\delta(t+T_d)}$. Kvocijent tih vrijednosti bit će:

$$\frac{Ke^{-\delta t}}{Ke^{-\delta(t+T_d)}} = e^{\delta T_d}, \quad \text{odnosno} \quad \ln e^{\delta T_d} = \delta T_d = d.$$

Budući da smo naveli, da bi do istog rezultata došli za bilo koje dvije vrijednosti, koje slijede u intervalu $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$, znači, da se to odnosi i na nultočke, t. j.

$$\lim_{\omega_d t + \varepsilon \rightarrow 0, \pi, 2\pi, \dots} \frac{Ke^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon)}{Ke^{-\delta(t+T_d)} \sin[\omega_d(t+T_d) + \varepsilon]} = e^{\delta T_d}.$$

*) Ovaj dijagram vrijedi, naravno, kod promjena svih elemenata kruga, a ne samo kod promjena R .

Pomoću logaritmičkog dekrementa možemo lijepo izraziti odnos $\frac{T_d}{T_0} = \frac{\omega_0}{\omega_d}$, dakle recipročnu vrijednost od već promatrane vrijednosti, t. j.

$$\begin{aligned}\frac{T_d}{T_0} = \frac{\omega_0}{\omega_d} &= \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \delta^2}} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2 - \delta^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{d}{T_d}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{d}{T_d}}{\frac{2\pi}{T_d}}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2}.\end{aligned}$$

Na pr. neka je $d = 1$. Za koliko će se procenata povećati trajanje periode uzevši kao bazu neprigušenu periodu?

$$T_d - T_0 = \frac{x}{100} T_0$$

$$x = \frac{100(T_d - T_0)}{T_0} = 100 \left(\frac{T_d}{T_0} - 1 \right) = 100 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2} - 1 \right] \approx 1,2\%.$$

Kod $d = 0,1$ procentualna razlika iznosi $\approx 0,01\%$.

Kako vidimo, kod navedenih vrijednosti dekrementa procentualna razlika trajanja periode, odnosno frekvencije, vrlo je malena. Visina tona udarene žice na glasoviru ne mijenja se radi toga uslijed gušenja, jer je njen dekrement manji od 1. Žice glasovira udešene su tako, da imaju približno isti dekrement. $d = \delta T_d$ Prema tome je gušenje žice višeg tona, koja ima visoku frekvenciju i maleni T_d , veće, nego gušenje žice niskog tona s velikim T_d . Kako je kod istog dekrementa potreban isti broj titraja, da se od iste početne vrijednosti praktično dode do nule, to će pri istoj početnoj jačini visoki ton vremenski prije utrnuti, nego niski ton.

Na koncu navest ćemo još pojam t. zv. vremena polovične vrijednosti. Tako se zove vrijeme t , kad početna vrijednost dodirnice padne na polovicu te vrijednosti, t. j.

$$K e^{-\delta t} = \frac{K}{2}, \text{ odnosno } \delta t = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{\delta} = \frac{0,7}{\delta}.$$

e) Spektar prigušenog titraja kao amplitudno moduliranog vala

Spektar prigušne funkcije $K e^{-\delta t}$ već smo izračunali i predložili ga na sl. 83. Prigušeni titraj shvatit ćemo kao sinusov val amplitudno moduliran tom funkcijom. Prema tome slijedi:

$$\begin{aligned}K e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon) &= \sin(\omega_d t + \varepsilon) \int_0^\infty [C(u) \cos ut + S(u) \sin ut] du = \\ &= \cos \varepsilon \int_0^\infty [C_s(u) \cos ut + S_s(u) \sin ut] du + \sin \varepsilon \int_0^\infty [C_c(u) \cos ut + S_c(u) \sin ut] du.\end{aligned}$$

$$C(u) = \frac{K}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + u^2}, \quad S(u) = \frac{K}{\pi} \frac{u}{\delta^2 + u^2}.$$

Pomoću poznatih formula dobivamo izraze:

$$C_s(u) = \frac{K}{2\pi} \left[\frac{u + \omega_d}{\delta^2 + (u + \omega_d)^2} - \frac{u - \omega_d}{\delta^2 + (u - \omega_d)^2} \right] = \frac{K}{\pi} \frac{\omega_d(\delta^2 + \omega_d^2 - u^2)}{(\delta^2 + u^2 + \omega_d^2)^2 - (2u\omega_d)^2}$$

$$S_s(u) = \frac{K}{2\pi} \left[\frac{\delta}{\delta^2 + (u - \omega_d)^2} - \frac{\delta}{\delta^2 + (u + \omega_d)^2} \right] = \frac{K}{\pi} \frac{2u\delta\omega_d}{(\delta^2 + u^2 + \omega_d^2)^2 - (2u\omega_d)^2}$$

$$C_c(u) = \frac{K}{2\pi} \left[\frac{\delta}{\delta^2 + (u + \omega_d)^2} + \frac{\delta}{\delta^2 + (u - \omega_d)^2} \right] = \frac{K}{\pi} \frac{\delta(\delta^2 + u^2 + \omega_d^2)}{(\delta^2 + u^2 + \omega_d^2)^2 - (2u\omega_d)^2}$$

$$S_c(u) = \frac{K}{2\pi} \left[\frac{u + \omega_d}{\delta^2 + (u + \omega_d)^2} + \frac{u - \omega_d}{\delta^2 + (u - \omega_d)^2} \right] = \frac{K}{\pi} \frac{u(\delta^2 + u^2 - \omega_d^2)}{(\delta^2 + u^2 + \omega_d^2)^2 - (2u\omega_d)^2}$$

Spektralni izraz za prigušeni titraj radi toga glasi:

$$Ke^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon) = \int_0^\infty \left[\frac{K}{\pi} \frac{\omega_d(\delta^2 + \omega_d^2 - u^2) \cos \varepsilon + \delta(\delta^2 + u^2 + \omega_d^2) \sin \varepsilon}{(\delta^2 + u^2 + \omega_d^2)^2 - (2u\omega_d)^2} \cos ut + \right. \\ \left. + \frac{K}{\pi} \frac{2u\delta\omega_d \cos \varepsilon + u(\delta^2 + u^2 - \omega_d^2) \sin \varepsilon}{(\delta^2 + u^2 + \omega_d^2)^2 - (2u\omega_d)^2} \sin ut \right] du$$

6. DJELOVANJE NARINUTE KONSTANTNE SILE P NA MEHANIČKI, ODNOSNO NARINUTOG KONSTANTNOG NAPONA E NA ELEKTRIČNI TITRAJNI KRUG

Jednadžba sila za neprigušeni mehanički krug glasi: će:

$$M \frac{d^2 a}{dt^2} = -Da + P, \quad \text{odnosno} \quad M \frac{d^2 a}{dt^2} + Da - P = 0.$$

Uvest ćemo $a = \zeta + r$, gdje je r konstanta. Kako je $\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$, to će biti:

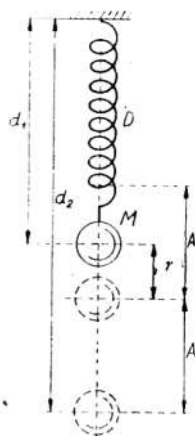
$$M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + D(\zeta + r) - P = 0, \quad \text{odnosno} \quad M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + D\zeta + (Dr - P) = 0.$$

Ako je r definiran jednadžbom:

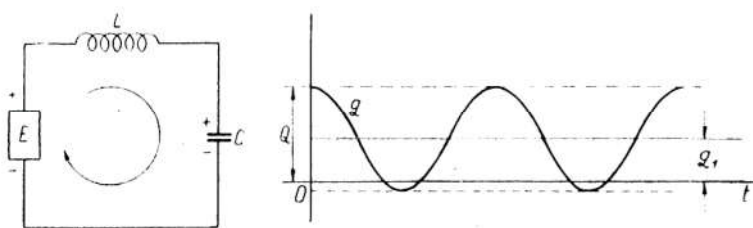
$$Dr - P = 0, \quad \text{ili} \quad \frac{P}{D} = r,$$

dobili smo našu poznatu diferencijalnu jednadžbu neprigušenog titranja s momentanom vrijednosti titraja $\zeta = a - r$. Iz ovoga slijedi, da se je središte titranja pomaknulo u smjeru sile P za iznos statičkog izduženja $r = \frac{P}{D}$, što znači, da jedan dio sile pera stalno drži ravnotežu sili P , i prema tome pripadni dio potencijalne energije pera, t. j. $\frac{Dr^2}{2}$ ne sudjeluje u titrajnom procesu.

Na sl. 168. dužina d_1 odgovara nenapetom peru bez ovješene mase M . Ako masu M objesimo i pero istegnemo na dužinu d_2 , to će masa titrati oko srednjeg položaja, koji odgovara dužini $(d_1 + r)$, gdje je r istežanje uslijed gravitacije, t. j. $r = \frac{Mg}{D}$. Bez prisutnosti gravitacije, dakle, konstantne sile, masa bi titrala oko



Slika 168.



Slika 169.

središta, koje bi odgovaralo dužini nenapetog pera, t. j. d_1 . Amplituda sadašnjeg titraja iznosi $(d_2 - d_1 - r)$, dok bi bez prisutnosti gravitacije iznosila $(d_2 - d_1)$. Imamo, dakle, superpoziciju statičkog stanja i titrajnog procesa. Prema sl. 169. u elektrotehničkom slučaju bi kod početnog naboja Q jedan njegov dio, t. j. naboj q_1 , stalno stvarao protunapon narinutom naponu E , dok bi ostatak naboja s amplitudom $Q - q_1$ neprigušeno oscilirao, dakle, s frekvencijom $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Kod toga bi bilo $E = \frac{q_1}{C}$.

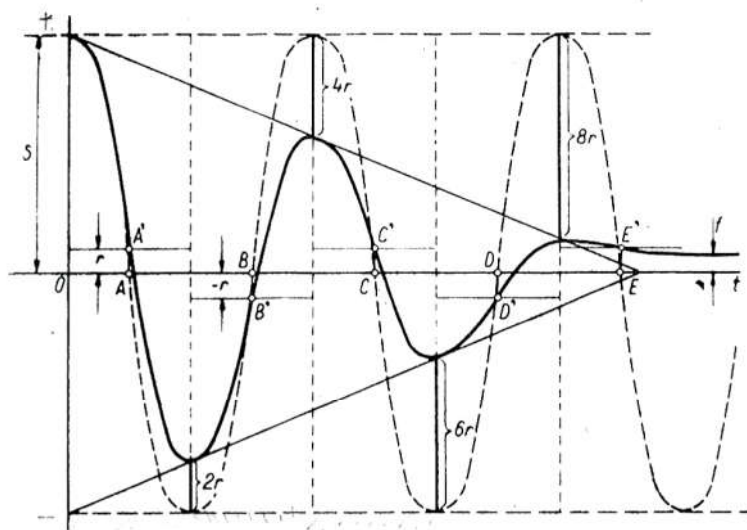
Ukoliko bi umjesto neprigušenog kruga imali prigušeni krug, to bi se i tada središte titranja pomaknulo za statičko istežanje, dok bi sami titraji bili, naravno, prigušeni. U električnom slučaju bi, analogno, jedan dio naboja stalno stvarao protunapon narinutom naponu, a ostatak bi prigušeno titrao.

7. TITRANJE UZ PRISUTNOST KONSTANTNE SILE, KOJA DJELUJE PROTIVNO SMJERU TITRANJA

Sl. 170. prikazuje takav titraj. Kod početnog puta S , uz postojanje pera i mase, nastupilo bi sinusovo titranje. Kako, međutim, djeluje konstantna protusila, to će ona premjestiti srednji položaj titranja od A na A' i prema tome će oko A' nastati sinusov titraj s amplitudom $(S - r)$. Znači, da će prvi maksimalni negativni put iznositi $(S - 2r)$. Na povratku djeluje opet ista sila, nasuprot gibanju, i srednji položaj se premješta od B na B' . Drugi pozitivni maksimum iznositi će radi toga $(S - 4r)$ i t. d.

Spojnice svih pozitivnih i negativnih maksimuma su kosi pravci, koji se sijeku u apscisnoj osi. Takvo titranje izvode na pr. uređaji i instrumenti sa „suhim trenjem“. Ostatak puta, označen s f , preostaje uslijed „trenja mirovanja“,

koje drži ravnotežu sili $-Df$, koja teži prema središtu. Ako želimo, da kazalo instrumenta dođe u središte, t. j. u nultočku, moramo kuckati po instrumentu. U elektrotehnici ovakav oblik titranja pojavljuje se kod struje električnog luka,



Slika 170.

ako uslijed naročitih okolnosti nastaje t. zv. „titraj treće vrsti“. I ispražnjenje kondenzatora iskrom, koja nije ništa drugo, nego električni luk, zbiva se na isti način.

8. RAZMATRANJE DJELOVANJA NARINUTE PERIODIČKE SILE I POJAVA REZONANCIJE U MEHANIČKOM TITRAJNOM KRUGU. PRISILNI ILI PRINUDNI TITRAJI

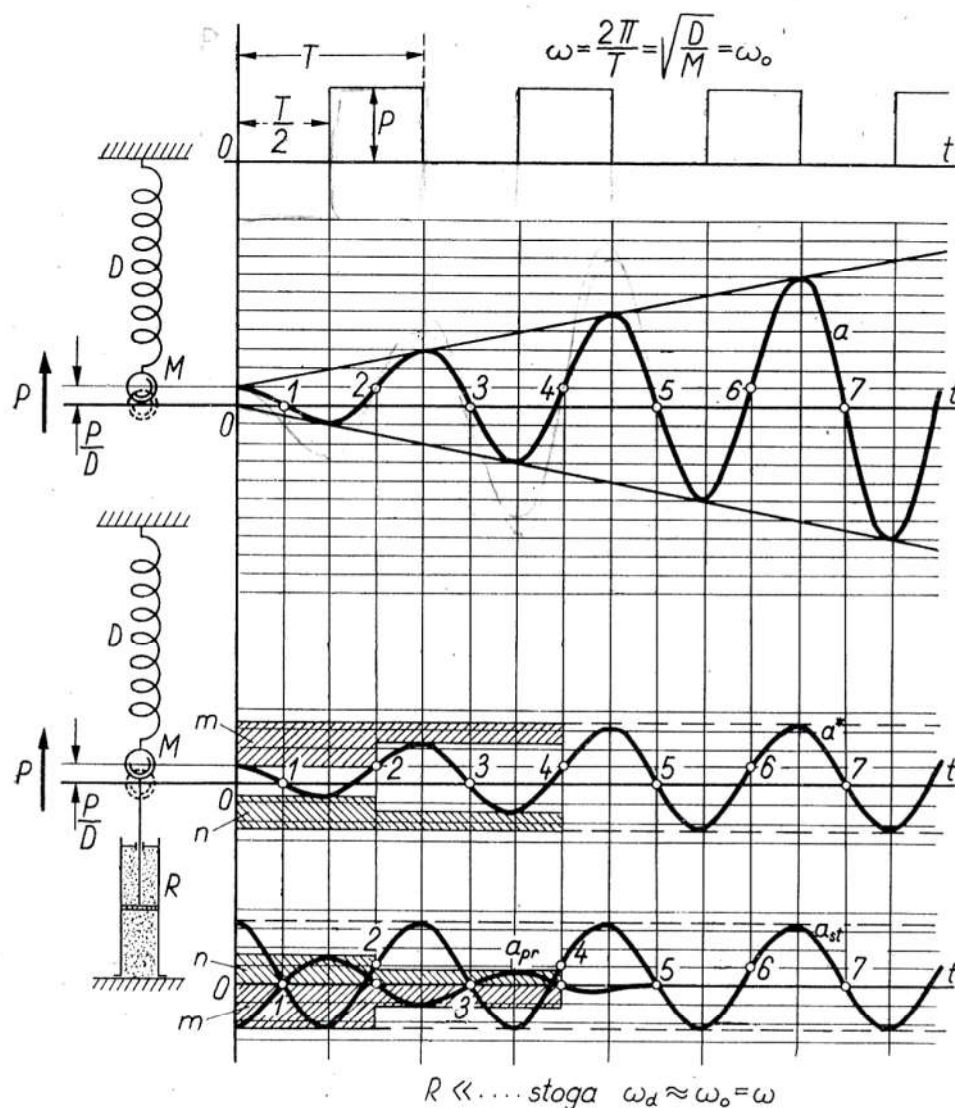
Prema sl. 171., gore, na masu M neprigušenog titrajnog kruga djeluje periodička sila, čija je frekvencija ω izabrana tako, da je upravo jednaka vlastitoj frekvenciji toga titrajnog kruga, t. j.

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{M}}.$$

Veličina sile — kao što se vidi iz najgornjeg dijagrama — ima za vrijeme prve poluperiode vrijednost nula, a za vrijeme druge poluperiode vrijednost P , što se, naravno, dalje periodički opetuje.

Kao početni položaj, izabrat ćemo udaljenost mase M od srednjeg položaja za dužinu $\frac{P}{D}$, t. j. za statičku promjenu dužine pera pod utjecajem konstantne sile P . Ako masu ispustimo iz tog položaja, ona će zatitrati oko položaja mirovanja, označenom na vremenskom dijagramu s 1, amplitudom $\frac{P}{D}$, kod čega je vrijednost periodičke sile jednaka nuli. Nakon što je masa dosegla krajnji položaj, pojavit će se, pri promjeni smjera brzine, sila P , što znači, da se je sada srednji položaj pomaknuo u pravcu sile za $\frac{P}{D}$, u točku označenu

s 2, te je prema tome amplituda postala dvostruko veća, t. j. $2 \frac{P}{D}$, a krajnji položaj do kojega će masa sada doprijeti, bit će u vremenskom dijagramu udaljen od apscisne osi za $3 \frac{P}{D}$. Na povratku prestaje djelovanje sile P , jer je njena vrijednost postala opet nula, te je u vremenskom dijagramu sada srednji



Slika 171.

položaj točka označena s 3 i t. d. Vidimo, da se je za vrijeme jedne periode amplituda povećala za $2 \frac{P}{D}$, t. j. za dva statička izduženja. To povećanje iznosilo bi kod svake slijedeće periode isti iznos, i kad bi dužina pera bila veoma velika, i amplituda bi postala veoma velika.*)

*) Taj proces je u načelu sličan onome iz prethodnog poglavlja 7, no ovdje sila potpomaže gibanje, a djeluje samo u jednom smjeru.

Ako titrajni krug osim pera i mase sadrži još i otpor, prema istoj slici dolje, to se amplituda ni u kojem slučaju ne će povećavati do veoma velike, nego samo do neke znatno manje vrijednosti. Treba, naime, zamisliti, da osim naprijed opisanog procesa povećavanja amplitude, sada postoji još i proces prigušivanja amplitude, te kad se te dvije međusobno protivne tendencije upravo ukidaju, onda se je amplituda ustaljila.

Amplitudu neke povoljne periode označit ćemo s A_1 . Ako bi uzeli u obzir samo prigušenje, tada bi njena vrijednost nakon jedne periode pala na A_2 , s time da vrijedi:

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{-d}.$$

Prema Mac Laurinovoformuli, bit će:

$$e^{-d} = 1 - d + \frac{d^2}{2} - \dots$$

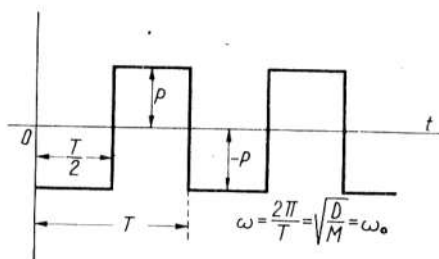
Ako razvoj prekinemo kod drugog člana, zbog malenih vrijednosti, koje praktično nastupaju, bit će:

$$e^{-d} \approx 1 - d.$$

Radi toga slijedi:

$$\frac{A_2}{A_1} = 1 - d, \quad \text{odnosno} \quad \frac{A_1 - A_2}{d} = A_1.$$

Slika 172.



Da bi A_1 bila upravo ustaljena amplituda, iznos njenog prigušenja nakon jedne periode, t. j. $(A_1 - A_2)$, mora biti upravo tolik, koliko iznosi i povećanje amplitude zbog prisutnosti sile P , t. j. $2 \frac{P}{D}$. Prema tome vrijednost ustaljene (ili stacionarne) amplitude bit će:

$$A_1 = \frac{2}{d} \frac{P}{D}.$$

Kad bi prema sl. 172. umjesto navedene jednosmjerne sile, imali takvu silu, koja bi djelovala i za vrijeme gibanja u drugom smjeru, i to s istom jačinom, dakle, bi opet potpomagala gibanje, onda bi ustaljena amplituda bila dvostruka, t. j.

$$A_1 = \frac{4}{d} \frac{P}{D}.$$

Ovakav događaj, koji smo upravo opisali, t. j. kad narinuta vanjska sila djeluje uvijek u smjeru gibanja, ili kako se to kaže, kad je „u fazi“ s brzinom, zove se „rezonancija“ i nastupa, kad je narinuta frekvencija ω jednaka ω_0 .

Iz dobivenog rezultata vidimo, dakle, da kod narinute periodičke sile pravokutnog oblika, te podjednake pozitivne i negativne vrijednosti, rezonantnu amplitudu puta dobijemo tako, da statičko izduženje pomnožimo s faktorom $\frac{4}{d}$.

Pokazat ćemo kasnije kod električnih krugova, da je rezonantna vrijednost naboja (što odgovara putu) kod narinutog sinusovog napona (što odgovara narinutoj sili) jednaka statičkom naboju, pomnoženim s vrlo sličnim faktorom, t. j. s $\frac{\pi}{d_0}$, gdje je $d_0 = \delta T_0$, a kod čega se kod slabih gušenja — za koje vrijedi naša prednja dedukcija — iznosi d i d_0 vrlo malo razlikuju.

Za ilustraciju konkretnih odnosa, koji nastaju kod rezonancije, uzet ćemo, da je na pr. statičko izduženje pera $\frac{P}{D} = 1$ mm, uz $d = 0,01$. Tada će rezonantna amplituda kod izmjenične pravokutne sile iznositi

$$\frac{4}{0,01} \times 1 = 400 \text{ mm.}$$

Ispod vremenskog dijagrama puta za neprigušeni krug, na navedenoj sl. 171., nacrtan je vremenski dijagram puta za prigušeni krug, označen s a^* , i vidimo, da su srednji položaji ostali isti, t. j. točke 1, 2, 3, . . . i t. d., ali je početna amplituda oko svakog srednjeg položaja veća, nego završna amplituda oko istog položaja, jer se početna amplituda, naravno, prigušuje. Vidimo nadalje, da je poslije točke 5 praktično nastalo ustaljeno ili stacionarno stanje titraja, dok je prije toga bilo stanje t. zv. utitravanja. Uistinu, stanje utitravanja traje teoretski neizmjereno dugo. U vremenu našeg praktičnog utitravanja, označena je nad apscisnom osi ploha m , odnosno ispod te osi ploha n , koje titraj — zbog svojih tadašnjih amplituda — ne može nikako doseći.

Kasnije, rješavanjem diferencijalne jednadžbe, pokazat će se, da se cio proces može shvatiti kao da stacionarno stanje postoji od početka, uz superpoziciju vlastitog prigušenog istitravanja, oboje, naravno, u skladu s početnim uvjetima. To je nacrtano na najdonjem vremenskom dijagramu, gdje je sa a_{st} označen stacionarni titraj, a sa a_{pr} prigušeno istitravanje, s time, da je u svakom času

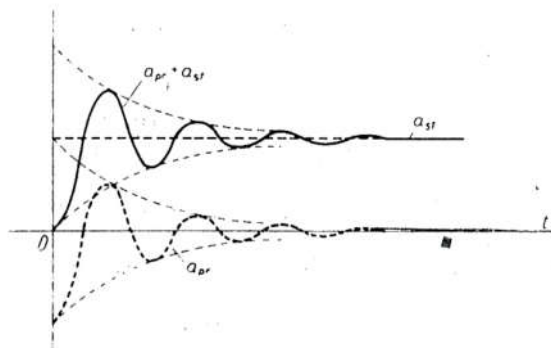
$$a_{st} + a_{pr} = a^*,$$

t. j. stvarni titraj prigušenog kruga pod utjecajem konstantne sile P , koja djeluje samo u poluperiodama. Pri tome se a_{pr} nalazi upravo u istim označenim površinama, koje smo opet obilježili s m i n , ali je sada m ispod apscisne osi, a n iznad nje.

Zbog preglednosti dijagrama, pretpostavili smo krug s vrlo slabim gušenjem, tako, da je vlastita prigušna frekvencija $\omega_d \approx \omega_0$, odnosno $\approx \omega$, što naravno, obično nije slučaj, te utitravanja nisu tako jednostavna.

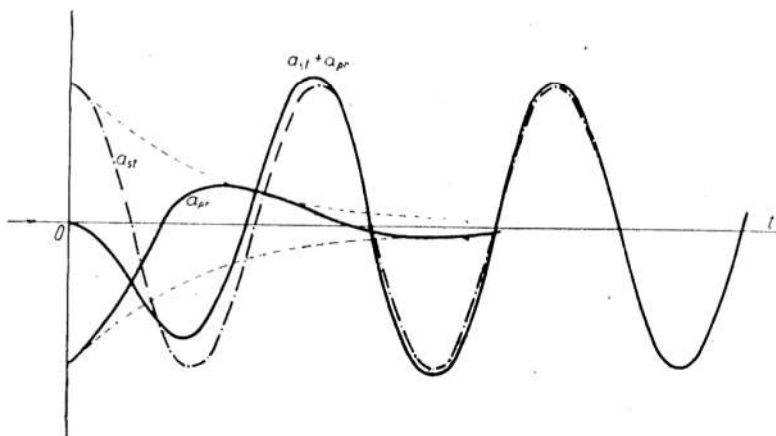
Frekvenciju narinute sile, t. j. ω , možemo mijenjati po vlastitoj volji, te radi toga stacionarni ili ustaljeni titraj, koji je dirigiran i mora titrati tom frekvencijom, zovemo i prisilni ili prinudni, za razliku od vlastitog prigušenog.

titraja, čija frekvencija ω_d ovisi — kako znamo — samo od parametra kruga, bez obzira na narinutu frekvenciju. Mijenjamo li ω , što će u našem slučaju značiti, da smo izašli iz rezonancije, dakle $\omega \neq \omega_0$, to će se, kod inače istih početnih uvjeta, mijenjati i frekvencija stacionarnog titraja, dok će frek-



Slika 173.

vencija prigušenog titraja ostati, naravno, ista kao i prije. Međutim, promijenit će se amplituda stacionarnog titraja, kao i početna amplituda (a prema tome i sve ostale amplitude) prigušenog titraja. Osim toga nestat će i istofaznosti između narinute sile i brzine. O tome ćemo kasnije detaljnije govoriti.



Slika 174.

Slika 173. prikazuje utitravanje prigušenog serijskog titrajnog kruga pod utjecajem narinute konstantne sile, ako je početni put pera i mase jednak nuli. U električnoj analogiji ta slika predstavljala bi naboj na kondenzatoru prigušenog serijskog kruga kod narinutog istosmjernog napona E . Sl. 174. predstavlja utitravanje sličnog kruga s istim početnim uvjetom, ali pod utjecajem narinutog sinusovog napona, čiji $\omega \neq \omega_d$.

Ako na prigušeni serijski titrajni krug djeluje neka općenita narinuta sila, ovisna o vremenu, koju ćemo označiti s $P(t)$, tada će jednačba sila glasniti:

$$M \frac{d^2 a}{dt^2} = (-D a) + \left(-R \frac{da}{dt} \right) + P(t), \quad \text{odnosno} \quad \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{D a}{M} + \frac{R}{M} \frac{da}{dt} = \frac{P(t)}{M}.$$

To je nehomogena linearna diferencijalna jednačba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Njen opći integral je zbroj ma kojeg od njenih partikularnih rješenja (stacionarnog stanja) i općeg rješenja pripadne homogene diferencijalne jednačbe (prigušnog stanja). Ukoliko nam, međutim, ni jedno partikularno rješenje nije poznato, možemo naći opći integral po Lagrangeovoj metodi varijacije konstanta.*)

9. DJELOVANJE NARINUTOG SINUSOVOG NAPONA NA ELEKTRIČNI SERIJSKI TITRAJNI KRUG S KONSTANTNIM PARAMETRIMA

a) Poblize o stacionarnim veličinama

Prelazeći na električno područje, jednačba serijskog RLC kruga, na koji je narinut sinusov napon, glasila bi:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \sin \omega t.$$

Budući da je partikularni integral harmonička funkcija, kojoj ćemo dati oblik $Q \sin(\omega t - \psi)$, to će opći integral glasniti

$$\begin{aligned} \text{za slučaj } \delta > \omega_0 \dots q &= Q \sin(\omega t - \psi) + \mathcal{C}_1 e^{p_1 t} + \mathcal{C}_2 e^{p_2 t} \\ \text{,, ,, } \delta = \omega_0 \dots q &= Q \sin(\omega t - \psi) + e^{-\delta t} (\mathcal{C} + \mathcal{C}_1 t) \\ \text{,, ,, } \delta < \omega_0 \dots q &= Q \sin(\omega t - \psi) + K e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \epsilon). \end{aligned}$$

Kako su nam prigušne komponente već poznate, promotrit ćemo sada stacionarnu komponentu. Budući da je

$$\frac{dq_{st}}{dt} = \omega Q \cos(\omega t - \psi), \quad \text{odnosno} \quad \frac{d^2 q_{st}}{dt^2} = -\omega^2 Q \sin(\omega t - \psi),$$

*) Prema toj metodi, taj traženi opći integral glasi formalno kao i opći integral homogene diferencijalne jednačbe istoga reda, t. j.

$$a = C_1(t) e^{p_1 t} + C_2(t) e^{p_2 t},$$

gdje su p_1 i p_2 korijeni karakteristične jednačbe pripadne homogene diferencijalne jednačbe, a koeficijenti — kako je i naznačeno — funkcije od t . Te koeficijente za našu diferencijalnu jednačbu drugog reda, dobivamo pomoću dviju jednačbi, u kojima su nepoznanice prve derivacije tih koeficijenata kao funkcije od vremena, t. j.

$$\begin{aligned} C_1'(t) e^{p_1 t} + C_2'(t) e^{p_2 t} &= 0 \\ p_1 C_1'(t) e^{p_1 t} + p_2 C_2'(t) e^{p_2 t} &= \frac{P(t)}{M}. \end{aligned}$$

Iz tih algebarskih odnosa možemo izračunati nepoznanice, t. j. $C_1'(t)$, kao i $C_2'(t)$, i integracijom po vremenu dobivamo:

$$C_1(t) = \int C_1'(t) dt + K_1, \quad \text{odnosno} \quad C_2(t) = \int C_2'(t) dt + K_2.$$

Radi toga opći integral nehomogene diferencijalne jednačbe glasi:

$$a = \left[\int C_1'(t) dt + K_1 \right] e^{p_1 t} + \left[\int C_2'(t) dt + K_2 \right] e^{p_2 t}.$$

to ćemo, uvrstivši te izraze u diferencijalnu jednadžbu, dobiti:

$$-\omega^2 L Q \sin(\omega t - \psi) + R \omega Q \cos(\omega t - \psi) + \frac{Q}{C} \sin(\omega t - \psi) = E \sin \omega t.$$

Ako tu jednadžbu uredimo, slijedi:

$$Q \left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right) \sin(\omega t - \psi) + Q R \omega \cos(\omega t - \psi) = E \sin \omega t.$$

U času, kad je $\omega t = \frac{\pi}{2}$, bit će:

$$Q \left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right) \cos \psi + Q R \omega \sin \psi = E \quad \text{I.)}$$

U času, kad je $\omega t = 0$, bit će:

$$-Q \left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right) \sin \psi + Q R \omega \cos \psi = 0 \quad \text{II.)}$$

Iz jednadžbe II.) slijedi:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R \omega}{\frac{1}{C} - \omega^2 L} = \frac{\frac{R}{L} \omega}{\frac{1}{CL} - \omega^2} = \frac{2 \delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2 \delta \omega}{\omega_d^2 + \delta^2 - \omega^2}.$$

Ako izraz za $\operatorname{tg} \psi$ uvrstimo u jednadžbu I.), dobivamo:

$$\begin{aligned} Q \left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right) + Q R \omega \frac{R \omega}{\frac{1}{C} - \omega^2 L} &= \frac{E}{\cos \psi} = E \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} = \\ &= E \sqrt{1 + \left(\frac{R \omega}{\frac{1}{C} - \omega^2 L} \right)^2}. \end{aligned}$$

Prema tome je:

$$Q = \frac{E \sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)^2 + (R \omega)^2}}{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)^2 + (R \omega)^2} = \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)^2 + (R \omega)^2}}.$$

Za kut ψ pronašli smo tangens, ali kako kut nije određen jednom kružnom funkcijom, to ćemo istražiti područje toga kuta. Ako našu jednadžbu I.) pomnožimo s $\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)$, a jednadžbu II.) s $R \omega$, te ih zbrojimo, dobit ćemo:

$$Q \left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)^2 \cos \psi + Q (R \omega)^2 \cos \psi = E \left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right).$$

Iz toga slijedi:

$$\cos \psi = \frac{E \left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)}{Q \left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)^2 + Q(R\omega)^2}.$$

Budući da je nazivnik uvijek pozitivan, to će cosinus biti pozitivan ili negativan, već prema tome, koji adend u brojniku prevlađuje.

Pomnožimo sada obratno, t. j. jednadžbu I.) s $R\omega$, a jednadžbu II.) s $\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)$, i ako odbijemo drugu od prve, dobit ćemo:

$$Q(R\omega)^2 \sin \psi + Q \left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)^2 \sin \psi = ER\omega.$$

Iz toga slijedi:

$$\sin \psi = \frac{ER\omega}{Q \left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)^2 + Q(R\omega)^2}.$$

Prema tome je sinus kuta uvijek pozitivan; dakle je ψ pozitivan kut između 0 i π i radi toga umjesto prosto $\text{tg} \psi$ pisat ćemo izraz $\text{tg} \psi$, t. j. s oznakom $(0 \text{ do } \pi)$ područja kuta. Prema tome će biti:

$$q_{st} = \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)^2 + (R\omega)^2}} \sin \left(\omega t - \underset{(0 \text{ do } \pi)}{\text{arctg}} \frac{R\omega}{\frac{1}{C} - \omega^2 L} \right).$$

$$i_{st} = \frac{dq_{st}}{dt} = \frac{E\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)^2 + (R\omega)^2}} \sin \left[\omega t - \left(\underset{(0 \text{ do } \pi)}{\text{arctg}} \frac{R\omega}{\frac{1}{C} - \omega^2 L} - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

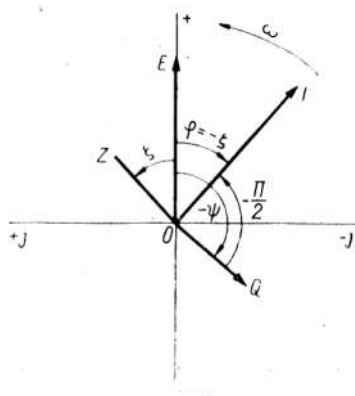
odnosno, jer je

$$\text{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\text{tg} \alpha},$$

to slijedi:

$$\begin{aligned} i_{st} &= \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2 + R^2}} \sin \left[\omega t - \left(\underset{\left(-\frac{\pi}{2} \text{ do } \frac{\pi}{2} \right)}{\text{arctg}} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{E}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2}} \sin \left(\omega t - \underset{\left(-\frac{\pi}{2} \text{ do } \frac{\pi}{2} \right)}{\text{arctg}} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \end{aligned}$$

Ova posljednja vrijednost $\arctg$ između $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$ je „glavna vrijednost funkcije Arctg “. Sl. 175. predstavlja verzorski prikaz stacionarnih veličina.*)



Slika 175.

b) Spektralni oblik općeg rješenja serijskog titrajnog kruga kod narinutog sinusovog napona

Mogli smo pronaći opće rješenje pomoću spektralnog izraza za narinuti napon $E \sin \omega t$. U tom slučaju ne bi kod pojedinih frekvencija imali oba procesa, t. j. prigušni i stacionarni, nego samo stacionarni, jer je svaki prigušni proces, koji je počeo u vremenu $t = -\infty$, do sada, odnosno do vremena t , već morao utrnuti. Kako nam je poznato, narinuti napon možemo pisati:

$$E \sin \omega t = \frac{E}{2} \sin \omega t + \int_0^{\infty} \frac{E}{\pi} \frac{\omega}{\omega^2 - u^2} \cos ut \, du,$$

pa će shodno naprijed spomenutom biti:

$$q = \frac{\frac{E}{2} \sin \left(\omega t - \underset{(0 \text{ do } \pi)}{\arctg} \frac{R \omega}{\frac{1}{C} - \omega^2 L} \right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right)^2 + (R \omega)^2}} +$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{\frac{E}{\pi} \frac{\omega}{\omega^2 - u^2} \cos \left(ut - \underset{(0 \text{ do } \pi)}{\arctg} \frac{R u}{\frac{1}{C} - u^2 L} \right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - u^2 L \right)^2 + (R u)^2}} \, du.$$

*) Obično se glavna vrijednost piše malim početnim slovom, a ostale vrijednosti izvan toga područja pišu se velikim početnim slovom. Mi smo sve vrijednosti pisali malim slovom, jer drugačije nije moguće, budući da se pola područja od 0 do π , t. j. od 0 do $\frac{\pi}{2}$, pokriva s područjem glavne vrijednosti. Uostalom, kako smo svagdje naročito napisali i kuteve, to nikako ne može doći do zabune.

U tim stacionarnim izrazima svin frekvencija i frekvencije ω s pola amplitude, sadržane su prigušna i stacionarna komponenta kod narinutog napona frekvencije ω s čitavom amplitudom.

Ispravnost našeg postupka dokazat ćemo na jednom jednostavnijem primjeru, t. j. na serijskom RL krugu s narinutim naponom $E \sin \omega t$. Diferencijalna jednačba za taj krug glasi:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \sin \omega t.$$

Njen opći integral bit će:

$$i = \frac{E \sin \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} + K e^{-\frac{R}{L} t} \quad (*)$$

Stacionarni dio slijedi iz naše formule za stacionarnu struju u RLC krugu, ako je $C = \infty$. Sadašnji krug možemo upravo tako i shvatiti, jer na pr. bilo koje mjesto provodnika čine dvije ploče površine presjeka, a međusobne udaljenosti nula. Prigušni dio je opće rješenje pripadne homogene diferencijalne jednačbe prvog reda. Kako se u krugu nalazi induktivitet, mora početni uvjet biti $i(0) = 0$. S tim početnim uvjetom lako ćemo izračunati K , te će konačno opći integral glasiti:

$$\begin{aligned} i &= \frac{E \sin \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} + \frac{E \sin \arctg \frac{\omega L}{R}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-\frac{R}{L} t} = \\ &= \frac{E \sin \omega t \cos \arctg \frac{\omega L}{R}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} - \frac{E \cos \omega t \sin \arctg \frac{\omega L}{R}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} + \frac{E \sin \arctg \frac{\omega L}{R}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-\frac{R}{L} t} \end{aligned}$$

Budući da je

$$\cos \arctg \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \arctg \frac{\omega L}{R}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

te nadalje

$$\sin \arctg \frac{\omega L}{R} = \frac{\operatorname{tg} \arctg \frac{\omega L}{R}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \arctg \frac{\omega L}{R}}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

*) Kod RL kruga stacionarna struja zaostaje za narinutim naponom za kut između 0 do $\frac{\pi}{2}$.

to će opći integral glasiti:

$$i = \frac{ER}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t - \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Taj izraz možemo vrlo jednostavno transformirati u spektralni oblik, jer su nam otprije poznati spektralni izrazi za sinus, cosinus i prigušnu funkciju, koja počinje u $t = 0$.

Imat ćemo:

$$\begin{aligned} \frac{ER}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t &= \frac{ER \sin \omega t}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} + \int_0^\infty \frac{E}{\pi} \frac{R \omega \cos ut}{(R^2 + \omega^2 L^2)(\omega^2 - u^2)} du, \\ \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t &= \frac{E\omega L \cos \omega t}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} + \int_0^\infty \frac{E}{\pi} \frac{\omega L u \sin ut}{(R^2 + \omega^2 L^2)(u^2 - \omega^2)} du, \\ \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} &= \frac{E\omega L}{\pi(R^2 + \omega^2 L^2)} \int_0^\infty \frac{\frac{R}{L}}{u^2 + \frac{R^2}{L^2}} \cos ut du + \\ &+ \frac{E\omega L}{\pi(R^2 + \omega^2 L^2)} \int_0^\infty \frac{u}{u^2 + \frac{R^2}{L^2}} \sin ut du. \end{aligned}$$

Prema tome, opći integral u spektralnom obliku je:

$$\begin{aligned} i &= \frac{ER \sin \omega t}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} + \int_0^\infty \frac{E}{\pi} \frac{R \omega \cos ut}{(R^2 + \omega^2 L^2)(\omega^2 - u^2)} du - \frac{E\omega L \cos \omega t}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} - \\ &- \int_0^\infty \frac{E}{\pi} \frac{\omega L u \sin ut}{(R^2 + \omega^2 L^2)(u^2 - \omega^2)} du + \frac{E\omega L}{\pi(R^2 + \omega^2 L^2)} \int_0^\infty \frac{RL}{u^2 L^2 + R^2} \cos ut du + \\ &+ \frac{E\omega L}{\pi(R^2 + \omega^2 L^2)} \int_0^\infty \frac{u L^2}{u^2 L^2 + R^2} \sin ut du = \frac{ER \sin \omega t}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} - \frac{E\omega L \cos \omega t}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} + \\ &+ \int_0^\infty \frac{E}{\pi} \frac{R \omega}{(R^2 + \omega^2 L^2)} \left(\frac{1}{\omega^2 - u^2} + \frac{L^2}{u^2 L^2 + R^2} \right) \cos ut du + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} \frac{E}{\pi} \frac{uL\omega}{(R^2 + \omega^2 L^2)} \left(\frac{L^2}{u^2 L^2 + R^2} - \frac{1}{u^2 - \omega^2} \right) \sin ut \, du = \\
& = \frac{ER \sin \omega t}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} - \frac{E\omega L \cos \omega t}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} + \int_0^{\infty} \frac{E}{\pi} \frac{R\omega \cos ut}{(R^2 + u^2 L^2)(\omega^2 - u^2)} \, du + \\
& + \int_0^{\infty} \frac{E}{\pi} \frac{uL\omega \sin ut}{(R^2 + u^2 L^2)(\omega^2 - u^2)} \, du.
\end{aligned}$$

Ako postupimo prema prije navedenom tvrđenju, t. j. da uzmemo u obzir samo stacionarne komponente svih frekvencija i stacionarnu komponentu frekvencije ω s polovičnom amplitudom, tada će opći integral glasniti:

$$\begin{aligned}
i & = \frac{E \sin \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right)}{2\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} + \int_0^{\infty} \frac{E}{\pi} \frac{\omega}{\omega^2 - u^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + u^2 L^2}} \cos \left(ut - \arctg \frac{uL}{R} \right) \, du = \\
& = \frac{E \sin \omega t \cos \arctg \frac{\omega L}{R}}{2\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} - \frac{E \cos \omega t \sin \arctg \frac{\omega L}{R}}{2\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} + \\
& + \int_0^{\infty} \frac{E}{\pi} \frac{\omega \cos ut \cos \arctg \frac{uL}{R}}{(\sqrt{R^2 + u^2 L^2})(\omega^2 - u^2)} \, du + \int_0^{\infty} \frac{E}{\pi} \frac{\omega \sin ut \sin \arctg \frac{uL}{R}}{(\sqrt{R^2 + u^2 L^2})(\omega^2 - u^2)} \, du.
\end{aligned}$$

Istim postupkom kao prije, t. j. uvrštenjem adekvatnih vrijednosti za $\cos$ i $\sin$ ciklometrijskih funkcija slijedi:

$$\begin{aligned}
i & = \frac{ER \sin \omega t}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} - \frac{E\omega L \cos \omega t}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} + \int_0^{\infty} \frac{E}{\pi} \frac{R\omega \cos ut}{(R^2 + u^2 L^2)(\omega^2 - u^2)} \, du + \\
& + \int_0^{\infty} \frac{E}{\pi} \frac{uL\omega \sin ut}{(R^2 + u^2 L^2)(\omega^2 - u^2)} \, du.
\end{aligned}$$

Kao što se vidi, dobili smo isti izraz kao prvi puta, i time smo dokazali ispravnost našeg postupka.

c) **Detaljnije izračunavanje općeg rješenja RLC kruga uz narinuti sinusov napon ako je $\delta < \omega_0$**

Početni uvjeti neka budu, da je u $t = 0$ naboj $q(0) = 0$, te

$$i(0) = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Opći integral glavit će:

$$q = Q \sin(\omega t - \psi) + K e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon).$$

$$\frac{dq}{dt} = \omega Q \cos(\omega t - \psi) + K e^{-\delta t} [\omega_d \cos(\omega_d t + \varepsilon) - \delta \sin(\omega_d t + \varepsilon)].$$

Prema tome, u $t = 0$ slijedi da je:

$$0 = Q \sin(-\psi) + K \sin \varepsilon.$$

$$K = \frac{Q \sin \psi}{\sin \varepsilon}.$$

$$0 = \omega Q \cos \psi + Q \frac{\sin \psi}{\sin \varepsilon} (\omega_d \cos \varepsilon - \delta \sin \varepsilon).$$

$$-\frac{\omega \cos \psi}{\sin \psi} = \frac{-\omega}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{\omega_d}{\operatorname{tg} \varepsilon} - \delta.$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\omega_d \operatorname{tg} \psi}{\delta \operatorname{tg} \psi - \omega}.$$

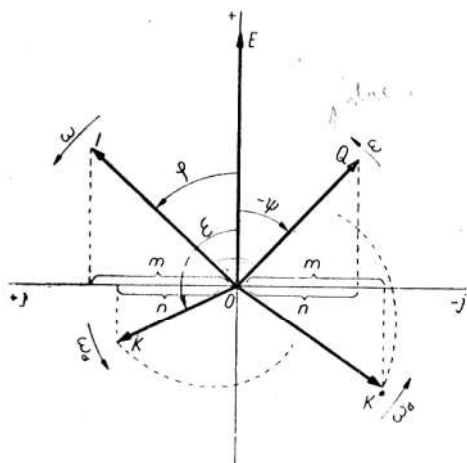
Upotrebivši već ranije izračunati izraz za $\operatorname{tg} \psi$, bit će:

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}_{(0 \text{ do } 2\pi)} \frac{\frac{2\delta\omega}{\omega_d^2 + \delta^2 - \omega^2}}{\frac{2\delta\omega}{\omega_d^2 + \delta^2 - \omega^2} - \omega} = \operatorname{arctg}_{(0 \text{ do } 2\pi)} \frac{2\delta\omega_d}{\delta^2 - \omega_d^2 + \omega^2}.$$

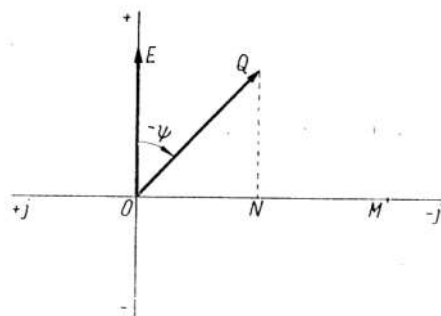
Prema tome, opći integral bit će:

$$q = \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)^2 + (R\omega)^2}} \left[\sin\left(\omega t - \operatorname{arctg}_{(0 \text{ do } \pi)} \frac{2\delta\omega}{\omega_d^2 + \delta^2 - \omega^2}\right) + \frac{\sin \operatorname{arctg}_{(0 \text{ do } \pi)} \frac{2\delta\omega}{\omega_d^2 + \delta^2 - \omega^2}}{\sin \operatorname{arctg}_{(0 \text{ do } 2\pi)} \frac{2\delta\omega_d}{\delta^2 - \omega_d^2 + \omega^2}} e^{-\delta t} \left(\sin \omega_d t + \operatorname{arctg}_{(0 \text{ do } 2\pi)} \frac{2\delta\omega_d}{\delta^2 - \omega_d^2 + \omega^2} \right) \right].$$

Sl. 176. predstavlja verzorski prikaz stacionarnih i prigušnih veličina. S K je označena, kao i na sl. 163., početna duljina verzora naboja, koji se prigušuje, a s K^* početna duljina prigušnog verzora struje.*) Kut ε može zauzeti, kao što smo i naznačili, bilo koju vrijednost od 0 do 2π , već prema početnim uvjetima. Na pr., ako je prema sl. 177. početni $q(0)$ negativan i



Slika 176.



Slika 177.

njegova vrijednost u tom prikazu označena s $\overline{OM}$, tada bi stacionarni dio bio $\overline{ON}$, a $\overline{NM}$ bio bi prigušni dio — dakle, također negativan. Kut ε morao bi tada biti veći od π , da bi projekcija početnog položaja prigušnog verzora duljine K bila negativna.

d) Serijska frekventna karakteristika

α) Uvest ćemo pojam nesklada. Da bi upoznali kako neki titrajni krug „propušta“ električne veličine, (kao što su struja, naboj, padovi napona i t. d. kod raznih frekvencija) mijenjat ćemo frekvenciju narinutog napona. Amplitude stacionarnih vrijednosti navedenih veličina, nacrtane u ovisnosti od frekvencije, daju krivulje, koje zovemo frekventnim karakteristikama kruga. Mjesto frekvencija u tim crtežima upotrebljavaju se shodni omjeri, bilo sami, bilo kombinirani s jedinicom, koje izraze onda nazivamo neskladima.

Najprije je tu nesklad

$$\frac{\omega}{\omega_0} = z,$$

gdje je $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, dakle vlastita neprigušena frekvencija. Dalje slijedi nesklad definiran kao:

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} = x.$$

) Budući da nam je poznat prigušni verzor naboja $Ke^{j\varepsilon + (-\delta + j\omega_d)t}$, to će njegov diferencijalni kvocijent po vremenu u $t=0$ dati početni položaj prigušnog verzora struje, t. j. vrijednost K^ i pripadni kut.

Taj se nesklad pojavljuje, ako iz poznatog izraza $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ izlučimo ωL , t. j.

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right).$$

Zatim je uveden nesklad definiran kao:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \left(z - \frac{1}{z}\right) = v.$$

Taj nesklad dobivamo, ako iz $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ izlučimo $\omega_0 L$, t. j.

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 L \omega C}\right) = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

Konačno, kadšto se kao nesklad uvodi još i

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = \omega^2 LC - 1.$$

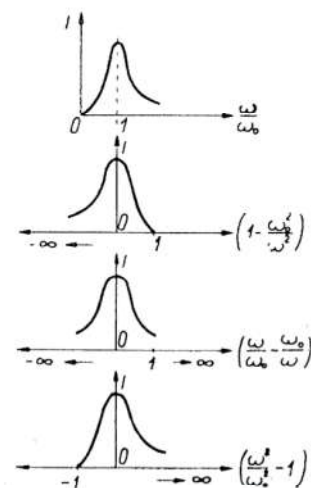
Taj izraz dobivamo, ako iz $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ izlučimo $\frac{1}{\omega C}$, t. j.

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{1}{\omega C} (\omega L \omega C - 1).$$

Prema potrebi, kako će se u pojedinom slučaju pokazati shodnim, upotrebljavat ćemo navedene izraze, ali uglavnom z i v . Na sl. 178. prikazana je frekventna karakteristika struje u ovisnosti od navedenih nesklada, te se vidi, da se ishodište prvog koordinatnog sistema, t. j. upotrebom nesklada $\frac{\omega}{\omega_0} = z$, pokriva sa $z = 0$. Ishodišta ostalih koordinatnih sistema, t. j. upotrebom drugih nesklada, pokrivaju se s rezonancijom, kad je, naime, $\omega = \omega_0$. Kod upotrebe istih dužina kao jedinice, ispada krivulja u prvom slučaju, dakle kod upotrebe z , u blizini rezonancije uža, nego kod upotrebe ostalih nesklada.

β) Da dobijemo frekventnu karakteristiku naboja, poći ćemo od naše poznate formule za stacionarnu vrijednost naboja, t. j.

$$Q = \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)^2 + (R\omega)^2}} = \frac{E}{C \sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (CR\omega)^2}} =$$



Slika 178.

$$= \frac{EC}{\sqrt{(1-z^2)^2 + \left(CR\omega \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

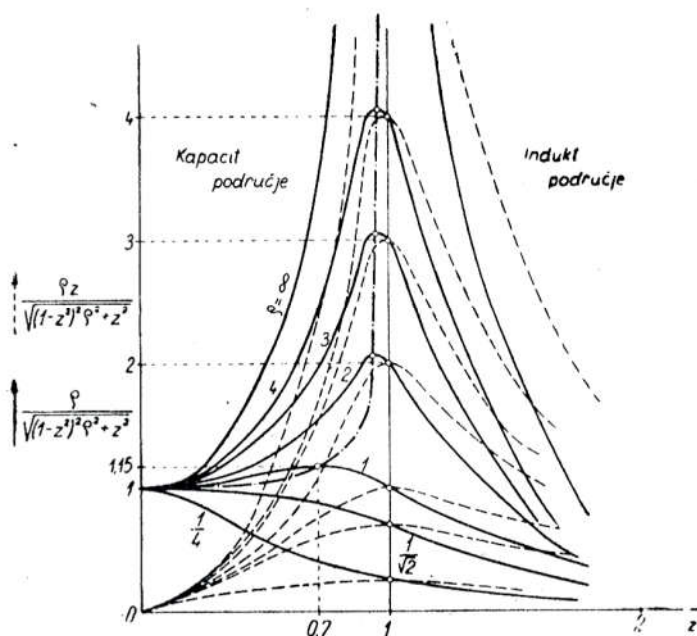
$$CR\omega_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{\rho}$$

Recipročna vrijednost, t. j.

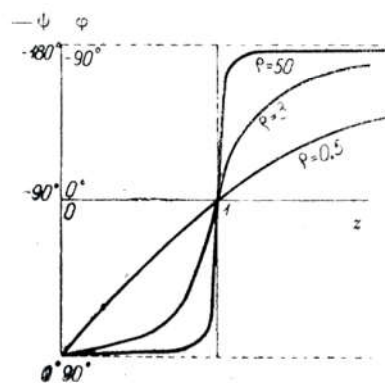
$$\rho = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

je već spomenuti faktor kvalitete serijskog titrajnog kruga, za koji smo naveli, da se često obilježuje s Q , dakle istim slovom kao ovdje amplituda stacionarnog naboja. Prema tome će biti:

$$Q = \frac{EC}{\sqrt{(1-z^2)^2 + \frac{z^2}{\rho^2}}} = \frac{EC\rho}{\sqrt{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2}}$$



Slika 179.



Slika 180.

Time smo dobili jednadžbu frekventne karakteristike naboja. Frekventna karakteristika struje bit će:

$$\omega Q = \frac{\omega EC\rho}{\sqrt{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2}} = I,$$

odnosno prošireno s $\frac{\omega_0}{\omega}$ slijedi:

$$I = \frac{EC\omega_0 z \rho}{\sqrt{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2}}$$

Sl. 179. prikazuje izraze $\frac{\rho}{\sqrt{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2}}$, a crtkano izraze $\frac{z\rho}{\sqrt{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2}}$ u ovisnosti od z . Ako želimo imati Q , odnosno I , pripadne ordinate za dotični z treba pomnožiti s EC , odnosno s $EC\omega_0^*$

Kod rezonancije, t. j. $z = 1$, bilo bi $Q_0 = EC\rho$. Prema tome faktor kvalitete ρ je onaj broj, kojim treba pomnožiti statički naboj $Q = EC$, koji nastupa kod narinutog istosmjernog napona E , da se dobije amplituda rezonantnog sinusovog naboja kod narinutog sinusovog napona $E \sin \omega t$. Radi toga se ρ naziva još i rezonantno nadvišenje. Pisat ćemo još:

$$\rho = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\frac{2\pi}{T_0} L}{R} = \frac{\pi}{T_0 \frac{R}{2L}} = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\pi}{d_0}$$

Prilikom razmatranja rezonancije na mehaničkom primjeru s narinutom pravokutnom silom upozorili smo također i na navedeno rezonantno nadvišenje kod narinute sinusove sile, odnosno napona, koje se je sada i pojavilo.

Kod dva mehanička sistema s jednakim masama M i otporima R , krući sistem, dakle onaj čije pero ima veći D , imao bi veće rezonantno nadvišenje $\frac{\sqrt{MD}}{R}$. Međutim, statičko istezanje $\frac{P}{D}$ krućeg pera kod iste sile P , bilo bi manje, nego kod elastičnijeg pera. Prema tome, u rezonanciji krući sistem bi se, apsolutno uzevši, ipak manje istegnuo od elastičnijeg sistema, t. j. $\frac{P}{D} \frac{\sqrt{MD}}{R} = \frac{P}{R} \sqrt{\frac{M}{D}}$, iako bi se obzirom na svoje statičko istezanje relativno jače istegnuo.

○ Proučit ćemo ekstremlne frekventne karakteristike naboja.

$$\frac{dQ}{dz} = EC\rho \frac{-4z\rho^2(1-z^2) + 2z}{-2\sqrt{[(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2]^3}} = EC\rho \frac{f(z)}{g(z)}$$

Taj je izraz nula najprije za $z = \infty$, a inače samo ako je $f(z) = 0$, pošto je tada $g(z)$ konačno i različito od nule.

$$\frac{d^2Q}{dz^2} = EC\rho \frac{g(z) \cdot f'(z) - f(z) \cdot g'(z)}{[g(z)]^2},$$

odnosno radi $f(z) = 0$, slijedi:

$$\frac{d^2Q}{dz^2} = EC\rho \frac{f'(z)}{g(z)} = EC\rho \frac{-4\rho^2 + 12z^2\rho^2 + 2}{\text{negativno}}$$

Ekstremlne dobivamo iz jednadžbe

$$f(z) = 0 = -4z\rho^2(1-z^2) + 2z.$$

Prvo rješenje je $z = 0$. Dalje slijedi:

$$2\rho^2 z^2 - 2\rho^2 + 1 = 0.$$

*) To je rezonantna struja kod $\rho = 1$.

Iz te jednadžbe dobivamo drugo rješenje

$$z = \sqrt{1 - \frac{1}{2\rho^2}}$$

Treće rješenje, t. j. negativni z ne dolazi za nas u obzir, jer je naša krivulja uvijek na pozitivnoj strani apscisne osi. S prvim rješenjem bit će:

$$\frac{d^2Q}{dz^2} = EC\rho \frac{-4\rho^2 + 2}{\text{negativno}}$$

Taj izraz je za $\rho > \sqrt{\frac{1}{2}}$ pozitivan, dakle, tada se kod $z = 0$ nalazi minimum. S drugim rješenjem bit će:

$$\frac{d^2Q}{dz^2} = EC\rho \frac{-4\rho^2 + 12\left(\sqrt{1 - \frac{1}{2\rho^2}}\right)^2\rho^2 + 2}{\text{negativno}} = \frac{8\rho^2 - 4}{\text{neg.}}$$

Taj je izraz za $\rho > \sqrt{\frac{1}{2}}$ negativan, dakle, tada se kod $z = \sqrt{1 - \frac{1}{2\rho^2}}$ nalazi maksimum. Kod $\rho = \sqrt{\frac{1}{2}}$ postaju svi korijeni jednadžbe $f(z) = 0$ jednako nuli, dok kod $\rho < \sqrt{\frac{1}{2}}$ imamo jedan korijen jednako nuli i dva imaginarna rješenja. Prema tome kod $\rho \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}$ bit će samo jedan ekstrem, t. j. kod $z = 0$ i taj je maksimum. Tada je, naime, kod $\rho = \sqrt{\frac{1}{2}}$ druga i treća derivacija jednaka nuli, a $\frac{d^4Q}{dz^4} \neq 0$ i negativno, dok je kod $\rho < \sqrt{\frac{1}{2}}$ druga derivacija negativna. Koliko iznosi $Q_{\max}$?

$$Q_{\max} = \frac{EC\rho}{\sqrt{\left[1 - \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2\rho^2}}\right)^2\right]^2\rho^2 + \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2\rho^2}}\right)^2}} = \frac{EC\rho}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\rho^2}}}$$

Kod $\rho = 1$ iznosi

$$Q_{\max} = \frac{EC}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = 1,15 EC,$$

dok je dotični

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7.$$

Za struju možemo još pisati:

$$I = \frac{EC\omega_0\rho z}{\sqrt{(1-z^2)^2\rho^2 + z^2}} = \frac{EC}{\sqrt{LC}} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{z} - z\right)^2\rho^2 + 1}}$$

Budući da je $\left(\frac{1}{z} - z\right)^2 = \left(z - \frac{1}{z}\right)^2$, to će biti:

$$I = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{v^2 \rho^2 + 1}}.$$

Iz ove formule vidi se, da će frekventna karakteristika za struju kod nesklada v biti simetrična obzirom na ordinatnu os, kao i da maksimum struje $I_0 = \frac{E}{R}$ nastupa kod $v = 0$, odnosno $z = 1$.

Na sl. 179. nacrtana je i krivulja, koja spaja $Q_{\max}$. Kako glasi njezina jednačba? U jednačbi

$$Q = \frac{EC\rho}{\sqrt{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2}} = \frac{EC}{\sqrt{(1-z^2)^2 + \frac{z^2}{\rho^2}}}$$

izrazit ćemo $\frac{1}{\rho^2}$ pomoću z , kod kojeg nastupa maksimum.

Iz $z = \sqrt{1 - \frac{1}{2\rho^2}}$ slijedi $2(1-z^2) = \frac{1}{\rho^2}$. Uvrštenjem toga dobivamo:

$$Q_{\max} = \frac{EC}{\sqrt{(1-z^2)^2 + z^2 2(1-z^2)}} = \frac{EC}{\sqrt{1-z^4}}.$$

To je tražena jednačba.

Za fazni pomak dobili smo tangens kako slijedi:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R\omega}{\frac{1}{C} - \omega^2 L} = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{1}{R\omega_0 C} - \frac{\omega^2 L}{R\omega_0}} = \frac{z}{\frac{1}{R\omega_0 C}(1 - \omega^2 LC)} = \frac{z}{\rho(1-z^2)}.$$

Koliki je fazni pomak između napona i $Q_{\max}$?

Uz $z = \sqrt{1 - \frac{1}{2\rho^2}}$ slijedi:

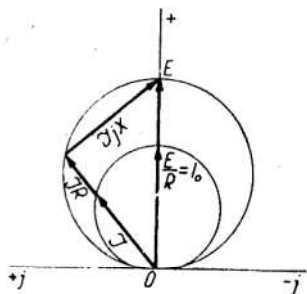
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2\rho^2}}}{\rho \left[1 - \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2\rho^2}} \right)^2 \right]} = \sqrt{4\rho^2 - 2}.$$

Sl. 180. prikazuje frekventnu karakteristiku faznog pomaka između napona i naboja, t. j. $-\psi$, kao i između napona i struje, t. j. $\left(-\psi + \frac{\pi}{2}\right) = \varphi$.

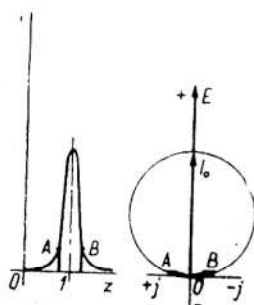
Krivulja mjesta ili verzorski dijagram*) svih mogućih struja serijskog kruga kod konstantne amplitude napona E i konstantnih parametara R , L i C , te

*) Mi ćemo dosljedno upotrebljavati taj izraz umjesto inače raširenog izraza „vektordijagram“.

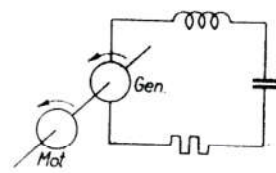
promjena ω , je kružnica s promjerom $\frac{E}{R} = I_0$ prema sl. 181. To je razumljivo, budući da je verzorski prikaz napona i padova napona uvijek pravokutni trokut hipotenuze E , a jedna kateta je $\mathcal{I}R$. Prema tome su svi verzorski prikazi u kružnici s promjerom E . Ako sve veličine podijelimo s R , dobit ćemo verzorski dijagram struja. Rezonantna struja I_0 je u fazi s naponom.



Slika 181.



Slika 182.



Slika 183.

Na sl. 180. vidimo, da kod velikih ρ , u blizini rezonancije, nastaje fazni skok za gotovo 180° . To znači, da je tada frekventna karakteristika veoma uska, kako je to prikazano na sl. 182., te da u blizini rezonancije kod malene promjene narinute frekvencije, odnosno nesklada, prelazimo sve struje, počevši od na pr. kapacitivne s amplitudom $\overline{OA}$, do induktivne s amplitudom $\overline{OB}$, dakle, od faznog pomaka gotovo 90° do -90° . Ako na pr. prema slici 183. imamo serijski krug napajan generatorom, to će motor, koji tjera generator, u rezonanciji biti najjače opterećen. To stanje je teško postići, ali još ga je teže održati, jer kod najmanjeg povećanja brzine iznad rezonancije, motor će se snažno rasteretiti, i to iz dva razloga: 1.) amplituda struje opada i 2.) fazni pomak između struje i napona se povećava. Kao posljedica bit će daljnje povećavanje brzine, odnosno rasterećenje motora, t. j. odmicanje iz rezonancije, i motor će „pobjeći“.

Na temelju frekventne karakteristike serijski krug kao filter upotrebit će se u slučaju, kad želimo isključiti mnoge frekvencije i propustiti samo uski pojas uz rezonanciju.

γ) Zanima nas odnos stacionarnog kapacitivnog pada napona i narinutog napona. Uvest ćemo partikularni integral naboja u simboličkom obliku u diferencijalnu jednadžbu, kako slijedi:

$$\mathcal{E} e^{j\omega t} = L \frac{d^2 Q e^{j\omega t}}{dt^2} + R \frac{d Q e^{j\omega t}}{dt} + \frac{Q e^{j\omega t}}{C},$$

odnosno

$$\mathcal{E} = L(-\omega^2 Q) + R(j\omega Q) + \frac{Q}{C}. \quad Q = \mathcal{E}_c C = \frac{\mathcal{E}}{-\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C}}$$

$$\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}} = \frac{1}{-\omega^2 LC + j\omega RC \frac{\omega_0}{\omega_0} + 1} = \frac{1}{(1 - z^2) + j \frac{z}{\rho}}$$

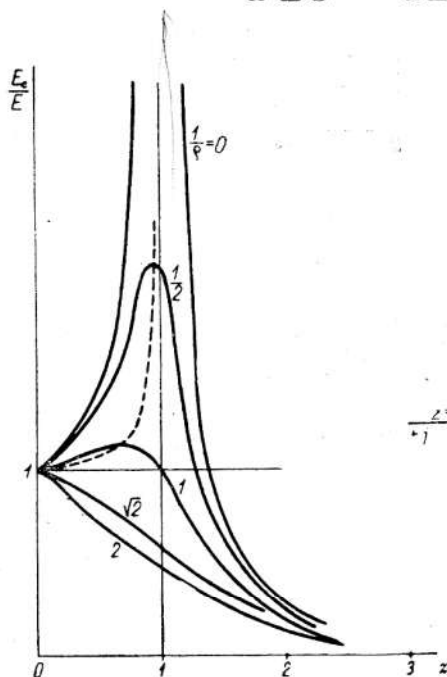
svladavanje autogenog napona kondenzatora. Kod $z = \infty$ je $\frac{\mathcal{E}_C}{\mathcal{E}} = 0$, budući da tada kondenzator uopće ne predstavlja neki otpor struji, koja je, međutim, radi induktiviteta također jednaka nuli, kao što je to i u predhodnom slučaju radi kapaciteta.

δ) Sada ćemo razmotriti odnos stacionarnog induktivnog pada napona i narinutog napona. U simboličkom obliku bit će:

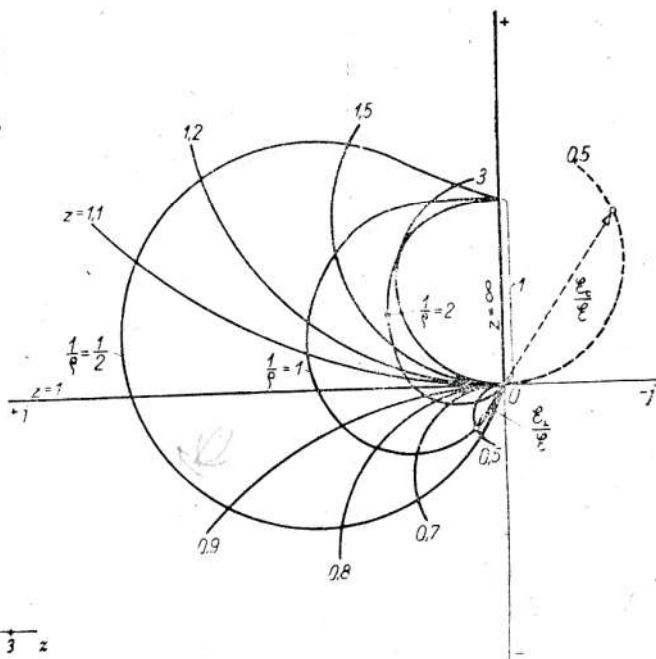
$$\mathcal{E}_L e^{j\omega t} = L \frac{d^2(Q e^{j\omega t})}{dt^2}$$

$$\mathcal{E}_L = L(-\omega^2 Q) = \mathcal{E} \frac{-\omega^2 L}{-\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C}}$$

$$\frac{\mathcal{E}_L}{\mathcal{E}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\omega^2 LC} - j \frac{R}{\omega L} \frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{z}\right)^2 - j \left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{\rho}}$$



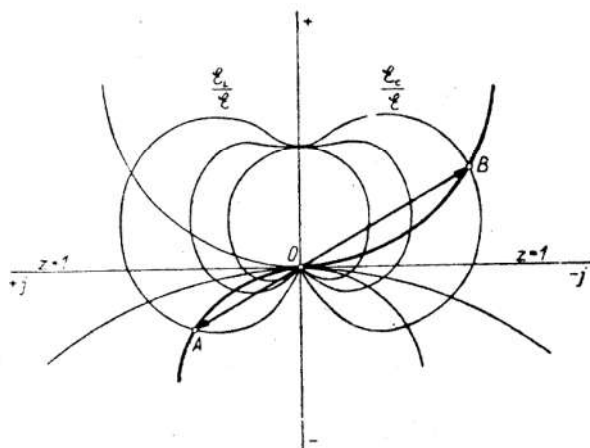
Slika 186.



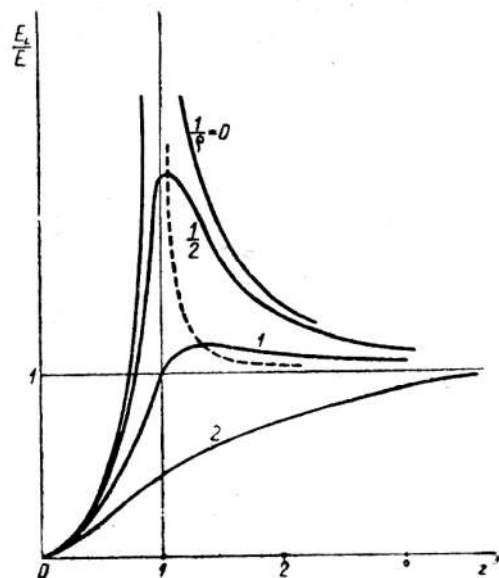
Slika 187.

Krivulje mjesta za konstantni ρ bit će zrcalne krivuljama za $\frac{\mathcal{E}_C}{\mathcal{E}}$, ali, naravno, s drugim vrijednostima z na mjestu zrcaljene točke. Krivulje za konstantni z bit će opet polukružnice. Ako kružimo po krivulji $\frac{\mathcal{E}_C}{\mathcal{E}}$ za konstantni ρ , na pr. s lijeva na desno, to ćemo početi s točkom $z = 0$, i kontinuirano rastući, doći do $z = \infty$. Uz isti smjer kruženja, nastavno po krivulji $\frac{\mathcal{E}_L}{\mathcal{E}}$, za dotični ρ , počet ćemo isto tako sa $z = 0$ i svršiti kod $z = \infty$. Razumije se, da se za isti z

odnosi $\frac{\mathcal{E}_C}{\mathcal{E}}$, te $\frac{\mathcal{E}_L}{\mathcal{E}}$, nalaze na istom pravcu. Sl. 187. prikazuje $\frac{\mathcal{E}_L}{\mathcal{E}}$, a sl. 188. zajedničku potpunu sliku obih odnosa s debelo izvučenom krivuljom istoga z . Sl. 189. prikazuje $\frac{E_L}{E}$ u ovisnosti od z .



Slika 188.



Slika 189.

U rezonanciji je $\frac{\mathcal{E}_L}{\mathcal{E}} = j\rho$. Kod $z = 0$ iznosi $\frac{\mathcal{E}_L}{\mathcal{E}} = 0$, a kod $z = \infty$ je $\frac{\mathcal{E}_L}{\mathcal{E}} = 1$, jer kondenzator ne predstavlja tada nikakav otpor, a kako je struja jednaka nuli, nemamo ni omskog pada napona. Čitav narinuti napon troši se na autogeni napon induktiviteta.

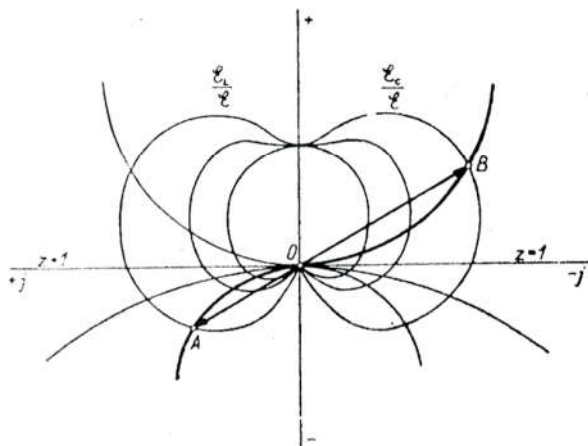
Crtkana krivulja kod prikaza $\frac{E_C}{E}$, odnosno $\frac{E_L}{E}$, kao funkcije od z , je spojica svih maksimuma puno izvučenih krivulja. Maksimum kapacitivnog pada napona nastupa prije rezonancije, a maksimum induktivnog nakon rezonancije.

e) Oštrina rezonancije

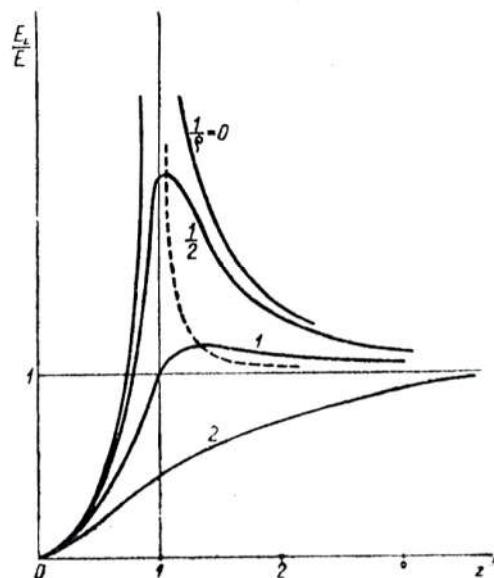
Na sl. 190. prikazane su za neke konkretne slučajeve frekventne karakteristike za područje u blizini rezonancije. Da bi se odnosi mogli bolje slijediti, mjerilo za z uzeto je tisuću puta veće od mjerila ordinata. Budući da se nalazimo vrlo blizu rezonancije, t. j. između $z = 0,95$ do $1,05$, kod vrijednosti za ρ jednako 10, 50 i 100, to krivulje mogu predstavljati Q i I , s time, da je u prvom slučaju jedinica za ordinate $1 = EC$, a u drugom slučaju $1 = EC\omega_0$. Uz svaki z upisani su i iznosi

$$x = (z - 1) 100 = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} 100,$$

odnosi $\frac{\mathcal{E}_C}{\mathcal{E}}$, te $\frac{\mathcal{E}_L}{\mathcal{E}}$, nalaze na istom pravcu. Sl. 187. prikazuje $\frac{\mathcal{E}_L}{\mathcal{E}}$, a sl. 188. zajedničku potpunu sliku obih odnosa s debelo izvučenom krivuljom istoga z . Sl. 189. prikazuje $\frac{E_L}{E}$ u ovisnosti od z .



Slika 188.



Slika 189.

U rezonanciji je $\frac{\mathcal{E}_L}{\mathcal{E}} = j\rho$. Kod $z = 0$ iznosi $\frac{\mathcal{E}_L}{\mathcal{E}} = 0$, a kod $z = \infty$ je $\frac{\mathcal{E}_L}{\mathcal{E}} = 1$, jer kondenzator ne predstavlja tada nikakav otpor, a kako je struja jednaka nuli, nemamo ni omskog pada napona. Čitav narinuti napon troši se na autogeni napon induktiviteta.

Crtkana krivulja kod prikaza $\frac{E_C}{E}$, odnosno $\frac{E_L}{E}$, kao funkcije od z , je spojnica svih maksimuma puno izvučenih krivulja. Maksimum kapacitivnog pada napona nastupa prije rezonancije, a maksimum induktivnog nakon rezonancije.

e) Oštrina rezonancije

Na sl. 190. prikazane su za neke konkretne slučajeve frekventne karakteristike za područje u blizini rezonancije. Da bi se odnosi mogli bolje slijediti, mjerilo za z uzeto je tisuću puta veće od mjerila ordinata. Budući da se nalazimo vrlo blizu rezonancije, t. j. između $z = 0,95$ do $1,05$, kod vrijednosti za ρ jednako 10, 50 i 100, to krivulje mogu predstavljati Q i I , s time, da je u prvom slučaju jedinica za ordinate $1 = EC$, a u drugom slučaju $1 = EC\omega_0$. Uz svaki z upisani su i iznosi

$$x = (z - 1) 100 = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} 100,$$

dobiveni iz razmjera

$$(\omega - \omega_0) : \omega_0 = x : 100.$$

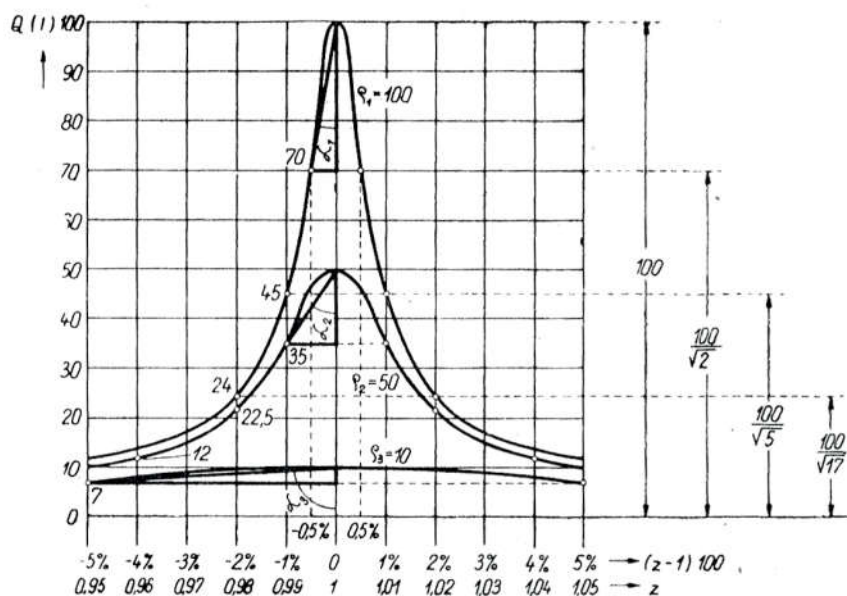
Prema tome je x procentualna promjena rezonantne frekvencije za dotični nesklad.

Kolika je ordinata kod $|z - 1| = \frac{1}{2\rho}$?

$$Q = \frac{EC\rho}{\sqrt{(1-z^2)^2\rho^2 + z^2}} = \frac{EC\rho}{\sqrt{(1-z)^2(1+z)^2\rho^2 + z^2}}.$$

Kako je $(1-z)^2 = (z-1)^2$, te kako je nadalje, radi blizine rezonancije, $z \approx 1$, odnosno $(1+z) \approx 2$, to će biti:

$$Q = \frac{EC\rho}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\rho}\right)^2 2^2 \rho^2 + 1^2}} = \frac{EC\rho}{\sqrt{2}}.$$



Slika 190.

Znači, dakle, da se kod $|z - 1| = \frac{1}{2\rho}$, rezonantna vrijednost smanjuje za 30%, odnosno kod naših krivulja na vrijednosti 70, 35 i 7.

Uzmimo sada, da je $|z - 1| = \frac{1}{\rho}$. Prema gornjem bit će:

$$Q = \frac{EC\rho}{\sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 2^2 \rho^2 + 1^2}} = \frac{EC\rho}{\sqrt{5}}.$$

Sada će se rezonantna vrijednost smanjiti za 55%, t. j. kod naših krivulja na vrijednosti 45, 22,5 i 4,5.

Na isti način kod $|z-1| = \frac{2}{\rho}$ bilo bi:

$$Q = \frac{EC\rho}{\sqrt{\left(\frac{2}{\rho}\right)^2 \rho^3 + 1^2}} = \frac{EC\rho}{\sqrt{17}},$$

te bi se radi toga rezonantna vrijednost smanjila za 76%, t. j. kod naših krivulja na vrijednosti 24, 12 i 2,4. Prema našoj slici, prvi slučaj, t. j. smanjenje rezonantnih vrijednosti za 30%, kod najviše krivulje sa $\rho_1 = 100$, dogodio bi se već kod

$$(z-1)100 = \pm \frac{1}{2\rho_1} 100 = \pm \frac{1}{200} 100 = \pm 0,5\%$$

promjene rezonantne frekvencije, kod srednje krivulje s $\rho_2 = 50$, kod

$$\pm \frac{1}{2\rho_2} 100 = \pm \frac{1}{100} 100 = \pm 1\%,$$

a kod najmanje krivulje s $\rho_3 = 10$ tek kod

$$\pm \frac{1}{2\rho_3} 100 = \pm 5\%.$$

Dakle, ne samo da je kod nižih krivulja to smanjenje apsolutno uzevši manje, nego se ono zbiva i kod znatno veće promjene rezonantne frekvencije.

Smanjenje za 55% dogodilo bi se za prvu krivulju kod

$$(z-1)100 = \pm \frac{1}{\rho_1} 100 = \pm 1\%, \text{ za drugu kod } \pm \frac{1}{\rho_2} 100 = \pm 2\%,$$

dok bi za treću već bilo izvan područja, koje promatramo.

Smanjenje za 76% zbilo bi se za prvu krivulju kod

$$(z-1)100 = \pm \frac{2}{\rho_1} 100 = \pm 2\%,$$

za drugu kod $\pm 4\%$.

Tangense naznačenih kutova α_1 , α_2 odnosno α_3 , naći ćemo tako, da horizontalnu katetu podijelimo s vertikalnom katetom nacrtanih pravokutnih trokuta. Horizontalna kateta je $|z-1|1000$, t. j. apsolutna vrijednost razlike nesklada na njenom početku i kraju pomnožena s 1000 radi povećanog mjera apscise. Vertikalna kateta je — kako znamo — $\frac{30\rho}{100}$. Prema tome, tangens iznosi

$$\frac{1}{2\rho} 1000 : \frac{30\rho}{100} = \frac{10^4}{6\rho^2}.$$

Kako je, dakle, frekventna karakteristika u blizini rezonancije to oštrija, što je oštrije i navedeni kut, odnosno što je ρ veći, to se ρ naziva i „oštrina rezonancije“.

Daleko izvan rezonantnog područja, na pr. kod vrlo malenog z , bit će:

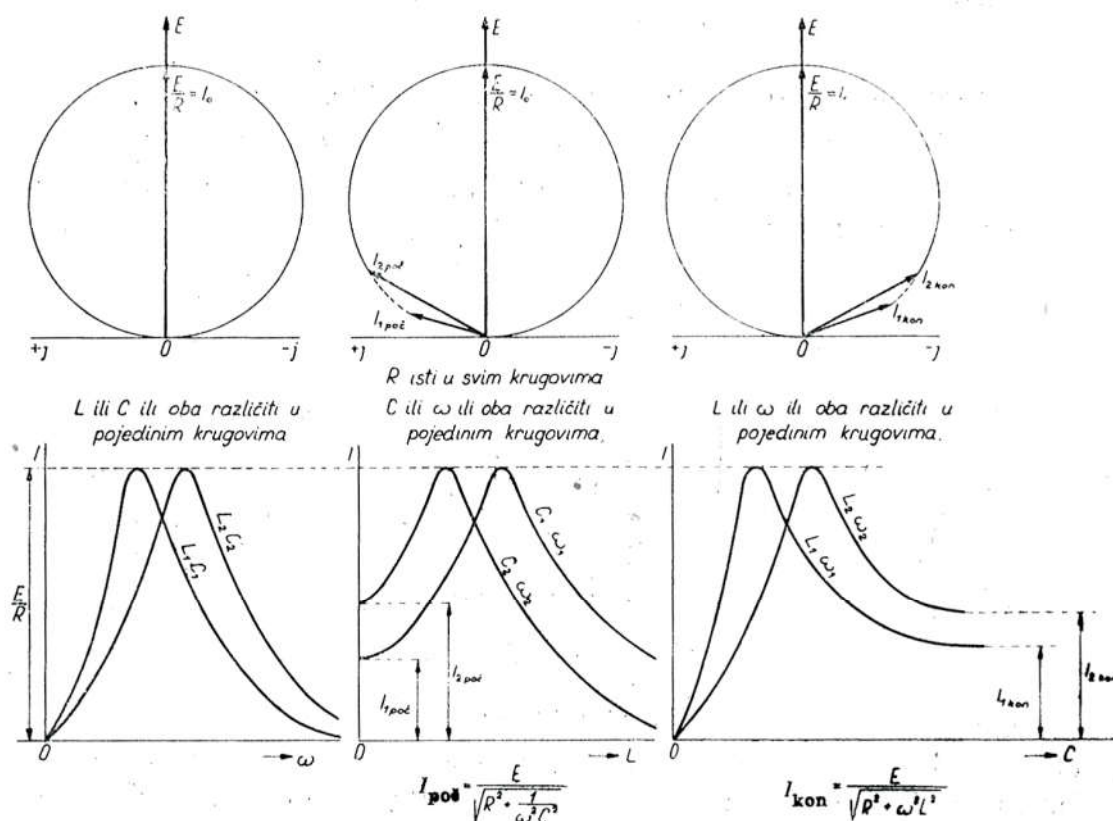
$$Q = \frac{EC\rho}{\sqrt{(1-z^2)^2\rho^2 + z^2}} \approx \frac{EC\rho}{\sqrt{(1-z^2)^2\rho^2}} = \frac{EC}{(1-z^2)}$$

Kod velikog z bit će:

$$Q = \frac{EC\rho}{\sqrt{(1-z^2)^2\rho^2 + z^2}} \approx \frac{EC\rho}{\sqrt{z^4\rho^2}} = \frac{EC}{z^2}$$

Iz ovoga slijedi, da je ρ izvan rezonantnog područja, praktično uzevši, bez važnosti, te se sve krivulje slijevaju u jednu krivulju.

Potrebno je još upozoriti, da možemo dobiti krivulje slične opisanim krivuljama, ako ne mijenjamo frekvenciju, nego kapacitet ili induktivitet serijskog kruga. Na sl. 191. lijevo, prikazuje se ovisnost amplitude struje kod promjene frekvencije od 0 do ∞ kod jednakog E i R u obim krugovima, koji su nam zadani, kod čega su L ili C , ili oba parametra, različiti za pojedini krug i nisu jednaki nuli. Te su nam krivulje poznate i donosimo ih ovdje



Slika 191.

ponovno samo radi upoređenja. Verzorski dijagram svih struja je — kako smo to već opisali — kružnica promjera $\frac{E}{R}$. Srednja slika prikazuje ovisnost amplitude struje uz isti E i R kod promjene L od 0 do ∞ , kod čega su ω , ili C , ili obje veličine, različite za svaki pojedini krug i nisu jednake nuli.

Sada verzorski dijagram svih struja nije čitava kružnica promjera $\frac{E}{R}$, jer kod $L = 0$ početna kapacitivna struja nije jednaka nuli, nego je

$$I_{\text{poč}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}},$$

dakle, kapacitivne točke kružnice od O do te vrijednosti, koja je za svaki krug drukčija, nisu zaposjednute. Desna slika prikazuje, opet uz isti E i R , ovisnost amplitude struje kod promjene C od 0 do ∞ , kod čega su ω , ili L , ili obje veličine, različite za svaki pojedini krug, i različite od nule. Sada preostaje konačna induktivna struja

$$I_{\text{kon}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

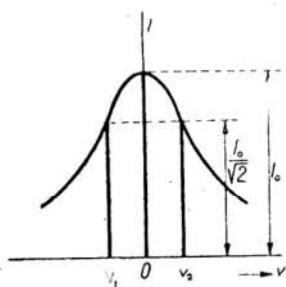
koja, naravno, ovisi o veličinama ω i L dotičnog kruga. Verzorski dijagram svih struja jednog kruga opet nije čitava kružnica.

f) Dobivanje faktora kvalitete serijskog kruga iz krivulja

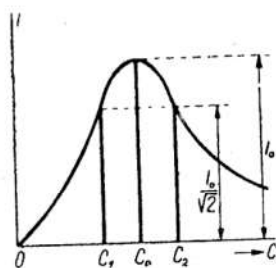
$$I = f_1(v), \quad I = f_2(C) \quad \text{ i } \quad I = f_3(L)$$

Svojedobno smo pronašli izraz za frekventnu karakteristiku struje serijskog kruga uz nesklad v , kako slijedi:

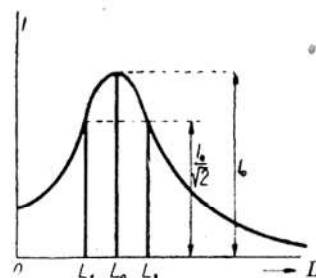
$$I = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{(\rho v)^2 + 1}}$$



Slika 192.



Slika 193.



Slika 194.

Budući da su kod toga, naravno, uz isti E , parametri R , L i C uvijek isti, to se promjenom frekvencije, ρ ne će mijenjati. Ako gornju jednadžbu podijelimo s rezonantnim I_0 bit će:

$$\frac{I}{I_0} = \left[\frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{(\rho v)^2 + 1}} \right] : \frac{E}{R} = \frac{1}{\sqrt{(\rho v)^2 + 1}}$$

$$\left(\frac{I}{I_0} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2 v^2 + 1} \quad \frac{I^2}{I_0^2} \rho^2 v^2 + \frac{I^2}{I_0^2} = 1 \quad \frac{1}{\rho} = \pm v \sqrt{\frac{I_0^2 - I^2}{I^2}}$$

Kod toga vrijedi onakav predznak, da $\frac{1}{\rho}$ bude pozitivno.

Prema tome, iz krivulje $I = f_1(v)$, očitavanjem nekog I , te pripadnog v , lako možemo saznati i $\frac{1}{\rho}$ toga kruga. Ako smo prema sl. 192. odabrali

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,707 I_0,$$

onda je $\frac{1}{\rho} = -v_1$, ili što daje isti rezultat $\frac{1}{\rho} = v_2$. Ako su nam zadane krivulje $I = g(\omega)$, odnosno $I = h(z)$, koje su u bitnosti iste, samo modificirane krivulje kao i krivulja $I = f_1(v)$, onda ćemo uz dotični izabrani I očitati ω , odnosno z , te očitane vrijednosti pretvoriti u

$$v = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

i dalje postupiti prema formuli, koju smo upravo izveli.

○ Kod krivulje $I = f_2(C)$, uz nepromjenljive E , ω , R i L , promjenom C mijenjat će se i

$$\rho = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Sada će biti:

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} : \frac{E}{R} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \left(\frac{I}{I_0} \right)^2 &= \frac{R^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \frac{\left(\frac{R}{\omega L} \right)^2}{\left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\omega^2 CL} \right)^2}. \end{aligned}$$

Kao što nam je poznato, izraz $\left(1 - \frac{1}{\omega^2 CL} \right)$ je nesklad, koji smo obilježili s x . Budući da je sada ω uvijek isto, to će biti za slučaj rezonancije

$$\omega L = \frac{1}{\omega C_0}, \text{ te je radi toga rezonantni } C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

U tom slučaju bit će rezonantni

$$\rho_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_0}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{\frac{1}{\omega^2 L}}} = \frac{\omega L}{R}.$$

Prema tome je:

$$\left(\frac{I}{I_0} \right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{\rho_0} \right)^2}{\left(\frac{1}{\rho_0} \right)^2 + x^2}.$$

Iz te jednadžbe slijedi:

$$\left(\frac{I}{I_0}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{I}{I_0}\right)^2 x^2 = \left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2$$

$$\frac{1}{\rho_0} = \pm x \sqrt{\frac{I^2}{I_0^2 - I^2}}$$

Pošto x može biti pozitivno ili negativno, to će u izvjesnom slučaju pred izrazom vrijediti onaj predznak s kojim je $\frac{1}{\rho_0}$ pozitivno.

Prema tome, ako očitamo bilo koji I , te pomoću pripadnog C izračunamo nesklad x , dobit ćemo iz prednje formule, unatoč toga što za svaki I vrijedi drugačiji ρ , ipak uvijek jedan te isti, t. j. rezonantni ρ_0 . Ako smo izabrali $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, onda će biti $\frac{1}{\rho_0} = \pm x$ s time, da prema navedenom, vrijedi onaj predznak s kojim je $\frac{1}{\rho_0}$ pozitivno. Prema sl. 193. bilo bi:

$$\frac{1}{\rho_0} = -\left(1 - \frac{1}{\omega^2 C_1 L}\right) = -\left(1 - \frac{1}{\frac{1}{C_0 L} C_1 L}\right) = -\left(1 - \frac{C_0}{C_1}\right) =$$

$$= -\left(\frac{C_1 - C_0}{C_1}\right) = \frac{C_0 - C_1}{C_1}.$$

Isti rezultat morali bi, naravno, dobiti i s

$$\frac{1}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{\omega^2 C_2 L} = \frac{C_2 - C_0}{C_2}.$$

Kako će kod eksperimentalno snimljene krivulje svakako postojati netočnosti, to ćemo očitati obje vrijednosti, C_1 i C_2 , i uzeti aritmetičku sredinu.

Radi toga će, naime, biti:

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{C_0 - C_1}{C_1} + \frac{C_2 - C_0}{C_2} \right] = \frac{C_2 C_0 - C_1 C_0}{2 C_1 C_2}.$$

Umnožak $C_1 C_2 \approx C_0^2$, te ćemo konačno dobiti:

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{C_2 - C_1}{2 C_0} = \frac{\Delta C}{2 C_0}.$$

Kod krivulje $I = f_s(L)$, kod čega su E , ω , C i R uvijek nepromijenjeni, bit će:

$$\left(\frac{I}{I_0}\right)^2 = \frac{R^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{(R \omega C)^2}{(R \omega C)^2 + (\omega^2 L C - 1)^2}.$$

U rezonanciji je $\omega L_0 = \frac{1}{\omega C}$, odnosno rezonantni $L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}$. Radi toga je rezonantni

$$\rho_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L_0}{C}} = \frac{1}{R \omega C}.$$

Prema tome je:

$$\left(\frac{I}{I_0}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2}{\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}.$$

Iz toga slijedi:

$$\frac{1}{\rho_0} = \pm (\omega^2 LC - 1) \sqrt{\frac{I^2}{I_0^2 - I^2}}.$$

Prema sl. 194. kod $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ kod lijevog očitavanja bit će:

$$\frac{1}{\rho_0} = -(\omega^2 L_1 C - 1) = -\left(\frac{1}{L_0 C} L_1 C - 1\right) = -\frac{L_1 - L_0}{L_0} = \frac{L_0 - L_1}{L_0}.$$

Kod desnog očitavanja, bilo bi:

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{L_2 - L_0}{L_0}.$$

Aritmetička sredina bila bi, analogno kao prije,

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{L_2 - L_1}{2L_0} = \frac{\Delta L}{2L_0}.$$

Premda su napred navedene krivulje međusobno različite, možemo, naravno, slučajno doći do istih vrijednosti. Na pr. kod krivulje $I = f_2(C)$, koju snimamo, narinuta nepromjenljiva frekvencija jednaka je $\frac{\omega_0}{n}$, dok je nepromjenljivi induktivitet jednak nL , kod čega su ω_0 , te L veličine drugog kruga, kod kojega ćemo mijenjati narinutu frekvenciju. Otpor R je isti u oba kruga.

Rezonantni ρ_0 prvog kruga bit će $\frac{\omega_0 nL}{R}$, što smo izveli u ovom poglavlju. Faktor ρ drugog kruga bit će jednak tom iznosu, t. j. $\frac{\omega_0 L}{R}$, što smo također već spomenuli prilikom izračunavanja frekventne karakteristike.

g) Dobivanje faktora kvalitete iz istitravanja prigušenog serijskog kruga

Kod vrlo oscilatorskih krugova, kod kojih je $T_d \approx T_0$, možemo $\frac{1}{\rho}$ pronaći i iz prigušenih oscilacija istitravanja pomoću osciloskopa. Istovrsne amplitude dvaju uzastopnih valova naboja (a ujedno i struje), odnose se kao:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = e^d = e^{\delta T_d} \approx e^{\delta T_0}. \quad \ln \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi \frac{1}{\rho}. \quad \frac{1}{\pi} \ln \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{\rho}.$$

Ako promatramo amplitude prvog i n -tog vala, tada će biti:

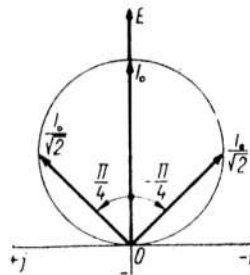
$$\frac{Q_1}{Q_n} = e^{(n-1)\delta T_0},$$

odnosno

$$\frac{1}{\pi(n-1)} \ln \frac{Q_1}{Q_n} = \frac{1}{\rho}.$$

h) Širina pojasa serijskog titrajnog kruga

Kod struje $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ krug sadrži još polovinu maksimalne radne snage. Frekventni pojas, t. j. broj cijelih frekvencija između dviju struja $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$, zovemo



Slika 195.

„širina frekventnog pojasa“. Ako prema sl. 195. verzor napona stavimo u realnu os, verzori struja, čije amplitude iznose $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$, imat će fazni pomak $\frac{\pi}{4}$, odnosno $-\frac{\pi}{4}$. Prema tome će biti:

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} \left[R + j \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right) \right] = E = I_0 R.$$

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \left[R + j \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right) \right] = E = I_0 R.$$

Ako gornju jednadžbu podijelimo s donjom, imamo:

$$e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{R + j \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right)}{R + j \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right)} = 1.$$

Kako je $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, slijedi:

$$jR - \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right) = R + j \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right).$$

Budući da imaginarni, odnosno realni dijelovi obih strana jednadžbe, moraju biti međusobno jednaki, to ćemo pisati:

$$j\left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right) = jR.$$

$$-\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right) = R.$$

To su dvije kvadratne jednadžbe, t. j.

$$R\omega_2 C - \omega_2^2 LC + 1 = 0.$$

$$R\omega_1 C + \omega_1^2 LC - 1 = 0.$$

Njihova rješenja glase:

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(-\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$

Minusi pred korijenima ne dolaze u obzir, jer frekvencije ne mogu biti negativne. Diferencija $\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$. Radi toga je širina frekventnog pojasa:

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi}(\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{f_0}{\rho}.$$

Kod krivulja $I = f_2(C)$ bila bi „širina kapacitivnog pojasa“:

$$C_2 - C_1 = \frac{2C_0}{\rho_0} = 2C_0 \frac{R}{\omega L}.$$

Analogno kod krivulja $I = f_3(L)$ „širina induktivnog pojasa“ iznosila bi:

$$L_2 - L_1 = \frac{2L_0}{\rho_0} = 2L_0 R \omega C.$$

i) Energetski odnosi serijskog kruga u stacionarnom stanju

Kao što je poznato, izraz za prividnu snagu glasi:

$$N = E_{ef} I_{ef},$$

za radnu

$$N_r = E_{ef} I_{ef} \cos \varphi,$$

te za praznu

$$N_p = E_{ef} I_{ef} \sin \varphi.$$

Efektivna struja bit će:

$$\begin{aligned} I_{ef} &= E_{ef} C \omega_0 \frac{\rho z}{\sqrt{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2}} = \frac{E_{ef} C}{\sqrt{LC}} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{z}{\sqrt{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2}} = \\ &= \frac{E_{ef}}{R} \frac{z}{\sqrt{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Kut između struje i napona je $\varphi = \left(-\psi + \frac{\pi}{2}\right)$. Radi toga je:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{\rho(1-z^2)}{z}$$

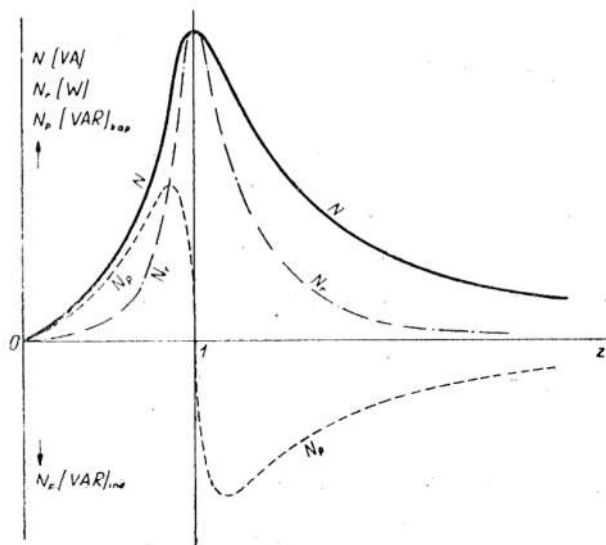
$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{z}{\sqrt{\rho^2(1-z^2)^2 + z^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\rho(1-z^2)}{\sqrt{\rho^2(1-z^2)^2 + z^2}}$$

Prema tome, imamo:

$$N_r = \frac{E_{ef}^2}{R} \frac{z^2}{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2}, \text{ t. j. } I_{ef}^2 R.$$

$$\begin{aligned} N_p &= \frac{E_{ef}^2}{R} \frac{z}{\sqrt{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2}} \frac{\rho(1-z^2)}{\sqrt{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2}} = \\ &= \frac{E_{ef}^2}{R} \frac{z^3}{(1-z^2)^2 \rho^2 + z^2} \frac{\rho(1-z^2)}{z}, \text{ t. j. } N_r \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}$$



Slika 196.

Slika 196. prikazuje N , N_r , te N_p , u ovisnosti od z . Da bi uštedili izračunavanje za svaki z , poslužit ćemo se konstrukcijom prema sl. 197. Na imaginarnu os nanijet ćemo u mjerilu $1 = \overline{OB}$ izraze

$$j \operatorname{tg} \varphi = j \frac{\rho(1-z^2)}{z},$$

i to, prema tome da li su pozitivni ili negativni, na lijevu ili desnu stranu od ishodišta. Pritom ćemo na dotičnim mjestima imaginarne osi napisati samo vrijednost pripadnog z . Ako bi distancije od O , koje, dakle, označuju vrijednosti $\operatorname{tg} \varphi$ kod izvjesnog ρ , podvostručili, onda bi one vrijedile za 2ρ . Međutim, to

Ako prema sl. 198. gore, imamo serijski krug napajan generatorom s unutrašnjim otporom, koji smo nacrtali odvojeno, pita se kakav treba biti optimalni odnos tog unutrašnjeg otpora generatora Z_u i vanjskog Z_v , da krug daje na vanjskom otporu najveću radnu snagu.

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{E}}{Z_u + Z_v} = \frac{\mathcal{U}}{Z_v},$$

odnosno iz toga

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{E} Z_v}{Z_u + Z_v}.$$

Prividni učin na vanjskom otporu bit će:

$$\begin{aligned} N = U_{ef} I_{ef} &= \frac{EZ_v}{\sqrt{2}|Z_u + Z_v|} \frac{E}{\sqrt{2}|Z_u + Z_v|} = \frac{E^2 Z_v}{2|Z_u + Z_v|^2} = \\ &= \frac{E^2}{2} \frac{Z_v}{Z_u^2 + Z_v^2 + 2Z_u Z_v \cos \gamma}. \end{aligned}$$

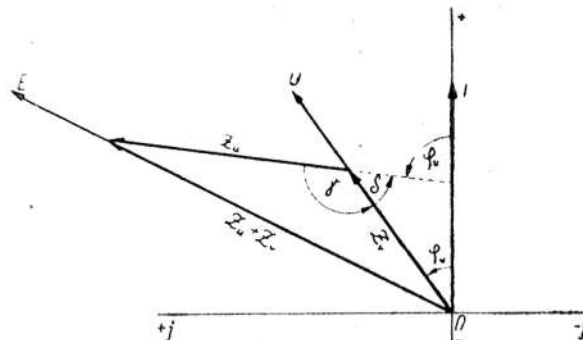
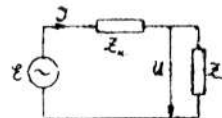
Budući da je $\gamma = \pi - \delta = \pi - (\varphi_u - \varphi_v)$, to slijedi:

$$N = \frac{E^2}{2} \frac{Z_v}{Z_u^2 + Z_v^2 + 2Z_u Z_v \cos(\varphi_u - \varphi_v)}.$$

Dalje imamo:

$$N_r = N \cos \varphi_v = \frac{E^2}{2} \cos \varphi_v \frac{Z_v}{Z_u^2 + Z_v^2 + 2Z_u Z_v \cos(\varphi_u - \varphi_v)}.$$

$$N_p = N \sin \varphi_v = \frac{E^2}{2} \sin \varphi_v \frac{Z_v}{Z_u^2 + Z_v^2 + 2Z_u Z_v \cos(\varphi_u - \varphi_v)}.$$



Slika 198.

Da pronađemo optimalne odnose veličina, kod kojih nastupa najveća radna snaga, potražiti ćemo ekstrem funkcije, t. j.

$$\frac{\partial N_r}{\partial Z_v} = \frac{E^2}{2} \cos \varphi_v \frac{[Z_u^2 + Z_v^2 + 2Z_u Z_v \cos(\varphi_u - \varphi_v)] - Z_v [2Z_v + 2Z_u \cos(\varphi_u - \varphi_v)]}{(\text{nazivnik})^2} = 0.$$

udući da nazivnik nije jednak nuli, mora to biti brojnik. Iz toga slijedi:

$$Z_u^2 + Z_v^2 + 2Z_uZ_v \cos(\varphi_u - \varphi_v) - 2Z_v^2 - 2Z_vZ_u \cos(\varphi_u - \varphi_v) = 0,$$

a iz toga

$$Z_u = Z_v.$$

Dalje će biti:

$$\frac{\partial N_r}{\partial \varphi_v} = \frac{E^2 Z_v [Z_u^2 + Z_v^2 + 2Z_uZ_v \cos(\varphi_u - \varphi_v)] (-\sin \varphi_v) - \cos \varphi_v \{2Z_uZ_v [-\sin(\varphi_u - \varphi_v)](-1)\}}{(nazivnik)^2} = 0.$$

Izjednačivši brojnik s nulom, dobivamo:

$$-(Z_u^2 + Z_v^2) \sin \varphi_v - 2Z_uZ_v \sin(\varphi_u - \varphi_v + \varphi_v) = 0.$$

Upotrebivši dobiveni prvi rezultat, slijedi:

$$-\sin \varphi_v = \sin \varphi_u, \text{ ili } \varphi_v = -\varphi_u, \text{ odnosno } \varphi_v = \varphi_u + \pi.$$

Kod pozitivnih parametara ne dolazi u obzir ova druga mogućnost, jer je tada područje oba kuta između $\frac{\pi}{2}$ i $-\frac{\pi}{2}$.

Kao što se vidi, maksimalna radna snaga nastupit će, ako su radni otpori jednaki, t. j. $R_u = R_v$, a reaktivni otpori negativno jednaki. To drugim riječima znači, da mora postojati rezonancija.

Da se uistinu radi o maksimumu, a ne o minimumu funkcije, nije potrebno dokazivati uobičajenom metodom, koja vrijedi za funkciju od više promjenljivih, jer minimum nastupa kod kuta $\varphi_v \neq \pm \frac{\pi}{2}$ samo onda, ako je struja jednaka nuli, odnosno $Z_v = \infty$.

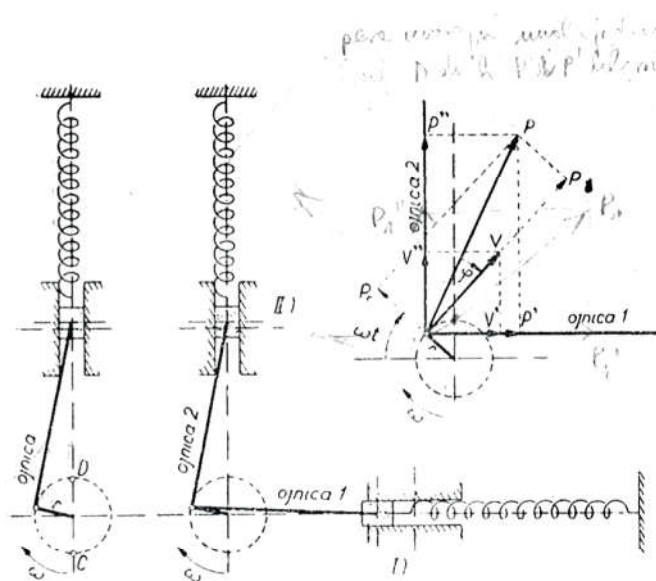
j) Mehanički uređaj za dobivanje serijske frekventne karakteristike

Na sl. 199. lijevo, prikazan je sistem, koji sadrži pero i masu, koja se giba uz linearni otpor. Taj otpor nismo nacrtali, da ne preopteretimo crtež i radi toga treba ga zamisliti, a kod eksperimenata trebalo bi ga, naravno, na neki način dodati. Masu pokreće motor pomoću ojnice. Kutna brzina motora, t. j. ω , neka je konstantna. Moment motora, a prema tome i snaga, koju daje osovinu, zavisi od momentanog položaja mase, odnosno položaja krivaje motorâ. Mi, međutim, želimo, da motor tokom čitavog okretaja bude podjednako opterećen i da na masu djeluje čista harmonička sila. Da ispunimo ta dva zahtjeva, potrebno je, da imamo dva jednaka međusobno okomita sistema, kao što je to prikazano na srednjem crtežu, te da su im ojnice veoma duge. Ojnice će u tom slučaju međusobno uvijek biti skoro okomite i izvoditi praktično samo translatorno gibanje.

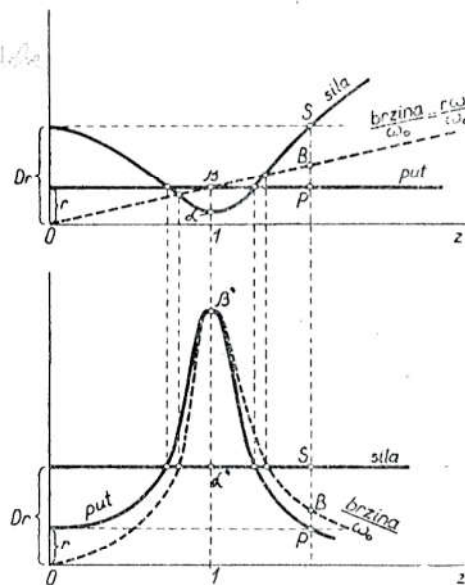
Pod tim okolnostima motor bi tokom svog okretaja bio uvijek podjednako opterećen, t. j. davao bi isti moment. Prema desnom crtežu gore, sila P motora rastavlja se na tangencijalnu silu P_t i na radijalnu silu P_r , koje u svakoj točki oboda imaju istu vrijednost. Projekcije sile P na ojnice, t. j. P' , odnosno P'' , u međusobnom faznom pomaku $\frac{\pi}{2}$, čiste su harmoničke sile, a analogno su V'

i V'' harmoničke brzine. Sila P — budući da ima radijalnu komponentu — nije općenito u fazi s brzinom V , nego zatvara s njom kut φ .

Seriju naših pokusa započeli bismo kod vrlo malog ω , za koji bismo praktično mogli smatrati, da se približava nuli. Prema gornjem dijagramu na sl. 200., sila P bila bi tada jednaka Dr , gdje je r polumjer kružnice, a D elastični koeficijent jednog pera. Znači, dakle, da bi tada sila P svladavala samo sile pera, jer sile mase kod tog malenog ω , još ne bi postojale. Fazni kut φ između sile P i brzine V , iznosio bi u tom slučaju $\frac{\pi}{2}$. Da je tome tako,



Slika 199.



Slika 200.

vidi se najbolje, ako uočimo na pr. položaj krivaje kod kuta $\omega t = 0$, kod čega gibanje postoji i prije $t = 0$. Tada će, naravno, brzina V , koja je uvijek okomita na polumjer r , imati vertikalni smjer. Naprotiv, sila P imat će horizontalni smjer, jer će pero sistema I.) biti maksimalno nategnuto, i njemu će držati ravnotežu sila $P = Dr$, dok pero sistema II.) uopće ne će biti nategnuto, budući da se taj sistem nalazi u svom srednjem položaju. Ako povećavamo ω , pridolazi sila mase, a naša sila P — koja je amplituda harmoničkih sila P' i P'' — postala bi manja, jer sada sve više ulazi u igru ta navedena sila mase, i sa svoje strane djeluje također na pero, rastežući ga i sabijajući. Povećava-

jući ω , došli bismo do frekvencije $\sqrt{\frac{D}{M}}$, t. j. do rezonancije, kad bi P postalo naj-

manje, a u idealnom slučaju, t. j. kad sistem ne bi sadržavao i otpor, jednako nuli, jer bi tada obje sile — naime sila pera i sila mase — same održavale titranje. Šta se je pritom dogodilo s kutom φ ? Taj bi se neprestano smanjivao i u rezonanciji bi bio jednak nuli, jer smo svojedobno, na mehaničkom primjeru s narinutom pravokutnom silom, pokazali, da u rezonanciji postoji istofaznost narinute sile i brzine. To znači, da u rezonanciji sila P ne bi imala radijalne komponente. Kod daljnjeg povećavanja frekvencije opet bi porasla sila P , a kut φ zadobio bi negativne vrijednosti, ako smo njegove prijašnje vrijednosti smatrali pozitivnim.

Put mase je harmonička funkcija s amplitudom r . Amplituda brzina V' i V'' je $V = r\omega$, i raste linearno s ω . U navedeni dijagram unijeli smo vrijednosti $\frac{r\omega}{\omega_0}$, i to zato, da bismo ispod toga dobili iste krivulje, kao što su one s kojima smo se pozabavili kod električnog kruga, t. j. da u rezonanciji ordinate brzine i puta (što odgovara struji i naboju) budu jednake.

Međutim, kod električnog kruga, amplituda narinutog napona kod promjene frekvencije, bila je uvijek ista. U ovom našem mehaničkom primjeru umjesto toga konstantna je amplituda puta r . Da bismo mogli izvršiti upoređenje, eksperimentalno dobivenu krivulju mehaničkog kruga moramo reducirati na konstantnu silu. To je učinjeno u donjem dijagramu iste slike, gdje smo sve reducirali na početnu silu Dr . U rezonanciji bi na pr. bilo $\overline{1\alpha}:\overline{1\beta} = \overline{1\alpha'}:\overline{1\beta'}$. Ordinate u točkama S , B i P u gornjem dijagramu jednake su kao ordinate u donjem dijagramu, jer je u oba slučaja sila također jednaka. Kako se vidi, dobili smo uistinu iste krivulje kao i kod električnog kruga.

10. GRAFIČKO RJEŠENJE TITRAJNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE SERIJSKOG KRUGA PO METODI LORDA KELVINA

Kako je diferencijalna jednadžba za naboj

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \sin(\omega t + \alpha)$$

ista kao i za struju, koja glasi

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E \sin(\omega t + \alpha),$$

odnosno diferencirana po vremenu

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \omega E \cos(\omega t + \alpha),$$

to ćemo istom grafičkom metodom moći pronaći integralnu krivulju za naboj i za struju.

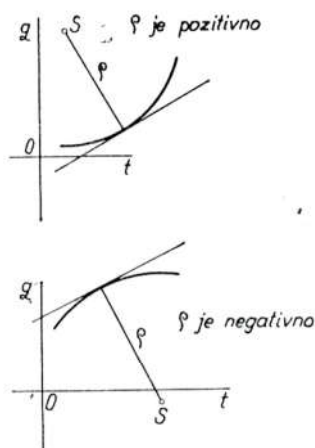
Maleni dio integralne krivulje u svakoj njenoj točki pokriva se s malenim dijelom pripadne kružnice zakrivljenosti. Prema tome, u zadanoj početnoj točki te krivulje treba pronaći kružnicu zakrivljenosti, i na njoj proslijediti naprijed za maleni segment. U krajnjoj točki tog segmenta, koja je još točka integralne krivulje, valja opet pronaći kružnicu zakrivljenosti i onda na njoj dalje proslijediti za maleni segment i t. d.

Polumjer zakrivljenosti krivulje $q = f(t)$ glasi:

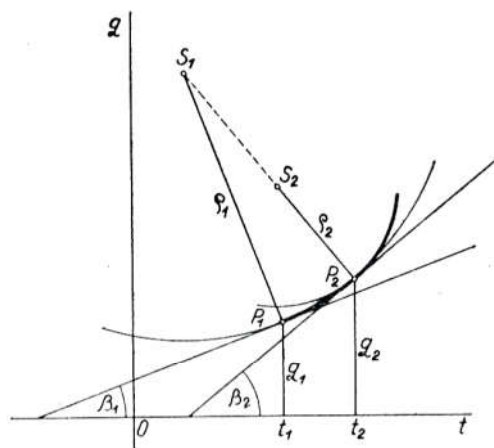
$$\rho = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2q}{dt^2}} \quad *)$$

*) S ρ označili smo faktor kvalitete. Međutim, tako se označuje i polumjer zakrivljenosti.

kod čega je korijen uvijek pozitivan, te radi toga predznak nazivnika određuje predznak čitavom izrazu. Ako je ρ pozitivno, onda je krivulja na tom mjestu, prema sl. 201. gore, konkavna prema pozitivnom dijelu ordinatne osi, a ako je negativno, onda je prema istoj slici dolje, konveksna prema tom dijelu.



Slika 201.



Slika 202.

Prema sl. 202. zadani su početni uvjeti, t. j. u vremenu t_1 zadan je naboj i njegova derivacija po vremenu, dakle točka P_1 i $\tan \beta_1$. Da bismo u toj točki izračunali ρ_1 , potrebno je još znati i drugu derivaciju $\left. \frac{d^2 q}{dt^2} \right|_{t=t_1}$. Da to saznamo, mora biti moguće, da se $\frac{d^2 q}{dt^2}$ izrazi eksplicitno iz diferencijalne jednadžbe. U protivnom slučaju ne bismo mogli primijeniti ovu metodu. Bit će:

$$\left. \frac{d^2 q}{dt^2} \right|_{t=t_1} = \frac{E}{L} \sin(\omega t_1 + \alpha) - \frac{R}{L} \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=t_1} - \frac{q_1}{LC}.$$

Sad imamo sve potrebno za izračunavanje ρ_1 , koji nanosimo okomito na tangentu, a iz središta S_1 opisujemo kružnicu zakrivljenosti. Na njoj prosljeđujemo do točke P_2 , gdje opet povlačimo tangentu i tako znamo vrijeme t_2 , q_2 i $\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=t_2} = \tan \beta_2$. Izračunavanjem $\left. \frac{d^2 q}{dt^2} \right|_{t=t_2}$, na isti način kao i prije, dobili smo sve potrebno za ρ_2 i t. d.

Međutim, kadšto se ne ćemo bez daljnje moći poslužiti gornjom metodom. Dužina za jedinicu vremena i za jedinicu množine elektricitete mora biti ista, a dobiveni broj za ρ označuje radius zakrivljenosti, izražen tom „dužinskom jedinicom“. Zamislimo sada na pr., da je frekvencija stacionarnog q_{st} , koji s prigušnom komponentom q_{pr} daje integralnu krivulju, 10^3 Hz, a stacionarna amplituda $Q = 5 \times 10^{-2}$ As. Ta stacionarna vrijednost, koju smo mogli lako izračunati, dobro će nam doći, da unaprijed ocijenimo dokle će se protezati crtež integralne krivulje. Da se jedna perioda nacrti, na pr. na razdaljinu od 20 cm, koliko je otprilike potrebno, da bi se kroz taj interval dobro mogla uočiti sva izobličenja, morala bi „dužinska jedinica“, koja bi značila 1 sec, iznositi 20.000 cm, i u njoj bi bio izražen ρ . To ne bi još bilo nimalo nezgodno, ali bi u tom slučaju stacionarna amplituda Q iznosila

$$5 \times 10^{-2} \times 20.000 = 1000 \text{ cm},$$

što se na običnom formatu papira ne bi dalo nacrtati. Pomoći ćemo si, međutim, na taj način, da ne ćemo crtati krivulju $q-t$, nego, prema sl. 203. lijevo, krivulju q^*-t , gdje je $q^* = qb$. Ako bismo želili, da nam stacionarna amplituda $Q^* = Qb$ iznosi na papiru 10 cm, onda bi bilo $b = \frac{1}{100}$. Razumije se, da kasnije, kad smo već nacrtali krivulju q^*-t , ordinate možemo označiti 100 puta većim brojkama tako, da iz dijagrama možemo očitati pravu vrijednost za q .

Zadani su nam početni uvjeti, da je u $t=0$ poznato $q(0)$ i $\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0}$. Za krivulju q^*-t bit će tada početni uvjeti, da je u $t=0$ poznato

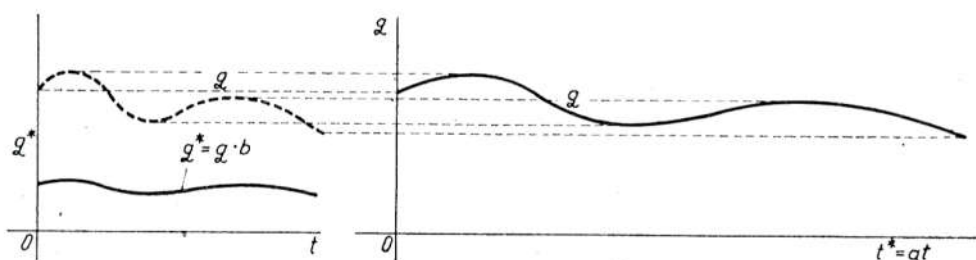
$$q^*(0) = q(0) \cdot b \quad \text{i} \quad \left. \frac{dq^*}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} \cdot b. \quad q^* = q \cdot b$$

Druga derivacija

$$\left. \frac{d^2 q^*}{dt^2} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^2 q}{dt^2} \right|_{t=0} \cdot b$$

nije poznata. Radius zakrivljenosti karikirane krivulje iznosi:

$$\rho^* = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dq^*}{dt} \right)^2 \right]^{3/2}}}{\frac{d^2 q^*}{dt^2}}$$



Slika 203.

Da bismo u toku konstruiranja krivulje najbrže saznali vrijednosti $\frac{d^2 q^*}{dt^2}$, našu originalnu jednadžbu shodno ćemo adaptirati, a da pritom, naravno, ostane fizikalno nepromijenjena. Sve veličine u kojima dolazi q , zamijenit ćemo adekvatnim izrazima od q^* , i tada će naša transformirana diferencijalna jednadžba glasniti:

$$L \frac{d^2 q^*}{dt^2} \frac{1}{b} + R \frac{dq^*}{dt} \frac{1}{b} + \frac{1}{C} \frac{q^*}{b} = E \sin(\omega t + \alpha).$$

Sada ćemo postupiti na isti način, kao što smo već opisali, t. j. pomoću ρ^* za početnu točku doći ćemo po segmentu do druge točke, dakle opet ćemo saznati vrijeme, ordinatu i prvu derivaciju. Iz adaptirane jednadžbe saznat ćemo drugu derivaciju i izračunati novi polumjer zakrivljenosti i t. d. Na taj način dobili smo karikiranu krivulju i — kao što smo naveli — polumjer ρ^* je

izražen dotičnom „dužinskom jedinicom“, koja u konkretnom slučaju iznosi 20.000 cm, t. j. toliko koliko i dužina s kojom je predstavljena 1 sec, odnosno 1 As. Ako želimo imati ρ^* u cm, tada bismo našu formulu morali pomnožiti s 20.000, i tada bi bilo za naš slučaj, uz $b = \frac{1}{100}$,

$$\begin{aligned}\rho^* &= \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dq^*}{dt}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2 q^*}{dt^2}} \times 20.000 \text{ cm} = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dq}{dt} \frac{1}{100}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2 q}{dt^2} \frac{1}{100}} \times 20.000 \text{ cm} = \\ &= \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dq}{dt} \frac{1}{100}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2 q}{dt^2}} \times 2.000.000 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Međutim, prema sl. 203. desno, mogli smo postupiti i na drugačiji način. Mogli smo, naime, naboj ostaviti nepromijenjen, a preinačiti vrijeme. Pritom ćemo — samo protivno nego je to predloženo na navedenoj slici — za karikiranu krivulju izabrati sada manju „dužinsku jedinicu“, da nam crtež stane na papir. Izabrat ćemo takvu „dužinsku jedinicu“, da dobijemo opet istu karikiranu krivulju kao i prvi put, iako ćemo je sada promatrati s drugog gledišta. Opet, dakle, želimo, da 5×10^{-2} As na papiru bude predstavljeno dužinom od 10 cm. Prema tome, sada naša „dužinska jedinica“, koja predstavlja 1 As, odnosno 1 sec, iznosi

$$10 : 5 \times 10^{-2} = 200 \text{ cm}.$$

Budući da nadalje želimo, da se jedna perioda protegne, kao i prije, na 20 cm, to će za vrijeme od 1 sec sada biti samo 10 perioda, umjesto prijašnjih 1000 perioda. To, međutim, znači, da će potpuni pojav sada iziskivati 100 puta više vremena, nego prije s 1000 Hz, da bi se prijašnji događaji odigrali u cijelosti. Drugim riječima, pojav smo vremenski rastegnuli 100 puta. Radi toga će biti $t^* = at$, gdje je za naš slučaj $a = 100$.

Uz iste početne uvjete kao i prvi put, t. j. da je u $t = 0$ poznato $q(0)$ i $\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0}$, početni uvjeti za karikiranu krivulju sada će glasniti, da je u $t^* = 0$ poznato

$$q = q(0) \text{ i } \left.\frac{dq}{dt^*}\right|_{t^*=0} = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} \cdot \frac{1}{a}.$$

Budući da je

$$\frac{d^2 q}{dt^{*2}} = \frac{d}{dt^*} \left(\frac{dq}{dt^*} \right) = \frac{d}{d(at)} \left[\frac{dq}{d(at)} \right] = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 q}{dt^2}$$

sada će adaptirana jednadžba glasniti:

$$L \frac{d^2 q}{dt^{*2}} a^2 + R \frac{dq}{dt^*} a + \frac{q}{C} = E \sin \left(\omega \frac{t^*}{a} + \alpha \right).$$

Radius zakrivljenosti bit će sada izražen u „dužinskoj jedinici“ od 200 cm. Ako ga želimo imati u cm, moramo ga pomnožiti s 200, t. j. bit će:

$$\begin{aligned}\rho^* &= \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dq}{dt^*}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2q}{dt^{*2}}} \times 200 \text{ cm} = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dq}{dt} \frac{1}{100}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2q}{dt^2} \frac{1}{(100)^2}} \times 200 \text{ cm} = \\ &= \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dq}{dt} \frac{1}{100}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2q}{dt^2}} \times 2,000.000 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Kao što se vidi, dobili smo u cm isti izraz za polumjer zakrivljenosti kao i prvi put, što je i razumljivo, budući da su dobivene krivulje jednake po vanjskom izgledu, iako to nisu po svojim vrijednostima. Međutim, kao što smo naprijed naveli, umjesto karikiranih možemo naknadno upisati prave vrijednosti.

Mada se, bilo jednim, bilo drugim opisanim postupkom, u svakom slučaju može postići cilj, to ćemo radi potpunosti opisati i treću mogućnost. Ako bismo naime, postavili zahtjev, da polumjer zakrivljenosti bude izražen u cm, dakle da „dužinska jedinica“ bude 1 cm, onda bismo u našem konkretnom slučaju, t. j. da amplituda $Q = 5 \times 10^{-2}$ As iznosi na papiru 10 cm, a jedna perioda kod 1000 Hz da se proteže na 20 cm, morali uvesti $q^* = qb$, gdje je $b = 200$, odnosno $t^* = at$, gdje je $a = 20.000$.

Isti početni uvjeti kao i u prijašnjim slučajevima, t. j. u $t = 0$ poznato je $q(0)$ i $\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0}$, glasit će za karikiranu krivulju, da je u $t^* = 0$ poznato

$$q^*(0) = q(0)b, \quad \text{odnosno} \quad \left.\frac{dq^*}{dt^*}\right|_{t^*=0} = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} \cdot \frac{b}{a}.$$

Budući da je

$$\frac{d^2q^*}{dt^{*2}} = \frac{d}{dt^*} \left(\frac{dq^*}{dt^*} \right) = \frac{d}{d(at)} \left[\frac{d(qb)}{d(at)} \right] = \frac{b}{a^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dq}{dt} \right) = \frac{b}{a^2} \frac{d^2q}{dt^2},$$

sada će adaptirana jednadžba glasiti:

$$L \frac{d^2q^*}{dt^{*2}} \frac{a^2}{b} + R \frac{dq^*}{dt^*} \frac{a}{b} + \frac{1}{C} \frac{q^*}{b} = E \sin \left(\omega \frac{t^*}{a} + \alpha \right).$$

Radius zakrivljenosti bit će izražen u cm, t. j. za naš konkretni slučaj:

$$\rho^{**} = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dq^*}{dt^*}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2q^*}{dt^{*2}}} \text{ cm} = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dq}{dt} \frac{200}{20.000}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2q}{dt^2} \frac{200}{(20.000)^2}} \text{ cm} =$$

Prigušno stanje

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{18}{2 \times 0,3} = 30 \text{ s}^{-1}. \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,3 \times 0,4 \times 10^{-6}}} = 2880 \text{ s}^{-1}.$$

Budući da je $\delta < \omega_0$, radi se o oscilatorskom slučaju.

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{8,3 \times 10^6 - (30)^2} \approx \omega_0 = 2880 \text{ s}^{-1}.$$

Kod prigušenog titranja bit će:

$$q_{\text{pr}} = K e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varepsilon),$$

odnosno u eksponencijalnom obliku

$$q_{\text{pr}} = \mathcal{I}m[\mathcal{K} e^{(-\delta + j\omega_d)t}], \quad \text{gdje je } \mathcal{K} = K/\varepsilon = K_1 + jK_2.$$

$$i_{\text{pr}} = \mathcal{I}m[(-\delta + j\omega_d) \mathcal{K} e^{(-\delta + j\omega_d)t}].$$

$$q = \mathcal{I}m[\mathcal{Q} e^{j\omega t}] + \mathcal{I}m[\mathcal{K} e^{(-\delta + j\omega_d)t}].$$

$$i = \mathcal{I}m[\mathcal{J} e^{j\omega t}] + \mathcal{I}m[(-\delta + j\omega_d) \mathcal{K} e^{(-\delta + j\omega_d)t}].$$

U času $t = 0$ bit će:

$$q(0) = \mathcal{I}m[\mathcal{Q}] + \mathcal{I}m[\mathcal{K}].$$

$$\begin{aligned} i(0) &= \mathcal{I}m[\mathcal{J}] + \mathcal{I}m[(-\delta + j\omega_d) \mathcal{K}] = \mathcal{I}m[\mathcal{J}] + \mathcal{I}m[(-\delta + j\omega_d)(K_1 + jK_2)] = \\ &= \mathcal{I}m[\mathcal{J}] + \mathcal{I}m[-\delta K_1 + j\omega_d K_1 - j\delta K_2 - \omega_d K_2] = \mathcal{I}m[\mathcal{J}] + \omega_d K_1 - \delta K_2. \end{aligned}$$

Prema sl. 206., pošto je u zadatku $q(0)$ pozitivno, bit će:

$$q(0) = 280 \times 10^{-6} = \underbrace{[0,539 \times 10^{-3} \sin 7^\circ + K_2]}_{65,6 \times 10^{-6}} \text{ As.}$$

Iz ovoga slijedi:

$$K_2 = 280 \times 10^{-6} - 65,6 \times 10^{-6} = 214,4 \times 10^{-6} \text{ As.}$$

$$i(0) = 0 = \underbrace{1,69 \sin 97^\circ}_{1,68} + 2880 K_1 - 30 \times 214,4 \times 10^{-6}.$$

$$2880 K_1 = 6432 \times 10^{-6} - 1,68.$$

$$K_1 = -581 \times 10^{-6} \text{ As.}$$

$$\mathcal{K} = (-581 + j214,4) \times 10^{-6} \text{ As.}$$

$$\mathcal{K} = \sqrt{(581)^2 + (214,4)^2} \times 10^{-6} / \text{arc tg } \frac{214,4}{-581} = 620 \times 10^{-6} / 159^\circ 50' \text{ As.}$$

Prema tome je, konačno,

$$q = \mathcal{I}m[539/7^\circ e^{j2\pi 500 t} + 620/159^\circ 50' e^{(-30 + j2880)t}] \times 10^{-6} \text{ As.}$$

Potrebna konstanta za izračunavanje struje bit će:

$$(-\delta + j\omega_a)\mathcal{K} = (-30 + j2880) \times 620 \times 10^{-6} / 159^\circ 50' = \\ = 2880 / 90^\circ 35' \times 620 \times 10^{-6} / 159^\circ 50' = 1,79 / 250^\circ 25'.$$

Radi toga će biti:

$$i = \mathcal{I}m[1,69 / 97^\circ e^{j2\pi 500t} + 1,79 / 250^\circ 25' e^{(-30 + j2880)t}] \text{ A.}$$

Kontrola:

$$q(0) = (539 \sin 7^\circ + 620 \sin 159^\circ 50') \times 10^{-6} = (65,6 + 214,4) \times 10^{-6} = \\ = 280 \times 10^{-6} \text{ As.}$$

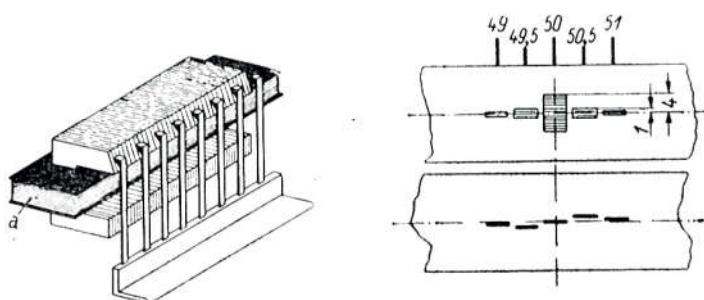
$$i(0) = 1,69 \sin 97^\circ + 1,79 \sin 250^\circ 25' = 1,68 - 1,68 = 0,00.$$

Dobili smo naše početne uvjete, što znači, da je kontrola dala pozitivni rezultat.

Izračunate, ili konstruirane krivulje, možemo lako eksperimentalno potvrditi. Shodnim izborom L i C , mogu se postići titraji s trajanjem periode od nekoliko sekundi, dok s druge strane susrećemo, na pr. kod radarskih uređaja, titraje s trajanjem periode od 10^{-10} sec, pa i manje. Razumljivo je, da je računski jedva moguće potpuno obuhvatiti i najjednostavnije krugove, pa se radi toga — kao što smo i uradili — zanemaruju međusobni kapaciteti vodova, kao i kapaciteti prema zemlji, induktiviteti vodova i odvodi. Međutim, unatoč toga eksperimentalni rezultati na ekranu osciloskopa vrlo dobro se podudaraju s izračunatim ili konstruiranim rezultatima, i to je najsajnija potvrda Faraday-Maxwellove elektromagnetske teorije.

12. IZRAČUNAVANJE DIMENZIJA MJERAČA FREKVENCIJE

Kako je frekvencija ona veličina, s kojom se kod titrajnih krugova najviše susrećemo, to ne će biti na odmet, da malo поближе promotrimo odnose, na temelju kojih se dimenzioniraju mjeraci frekvencija s jezicima, koji se upotrebljavaju za tehničke i niskotonske frekvencije.



Slika 207.

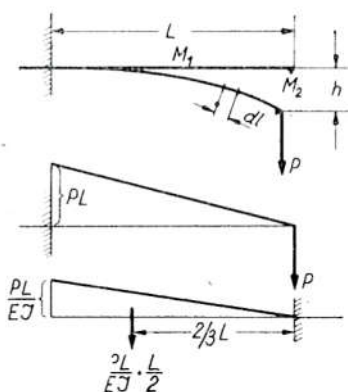
Na sl. 207., lijevo, nacrtan je jedan poznati tip mjeraca frekvencije, koji se sastoji od magneta, oko kojega je obavijen svitak a . Kroz svitak protiče struja, koje frekvenciju želimo saznati. Magnet će u taktu dvostruke frekvencije, t. j. kod svog pozitivnog i negativnog polariteta privlačiti jezike, koji su upeti u čvrsto postolje, a na svom kraju nose nešto materijala u formi zastavice. Jezici imaju različite vlastite titrajne frekvencije. Ako su prethodno trajno magnetizirani, privlačenje se zbiva u taktu jednostruke frekvencije. Pretpostavit ćemo taj slučaj.

Onaj jezik, kojeg se vlastita frekvencija podudara s taktom privlačenja, titrat će najjače, t. j. rezonantnim otklonom. Razumije se, da se to privlačenje ne mora u svakom slučaju sasvim pokrivati s vlastitom frekvencijom kojeg jezika, i onda najveći otklon, koji će se pojaviti, ne će ujedno biti i rezonantni otklon dotičnog jezika, nego manji. Na slici, desno gore, vidimo, da jezik, koji je označen frekvencijom 50, titra upravo rezonantnom frekvencijom, budući da su otkloni jezika, lijevo i desno od njega, jednaki. Rezonantni otklon svih jezika, t. j. $\frac{P}{D}\rho$ udešen je tako, da iznosi na pr. 4 mm. Jezici s oznakom frekvencije 49,5, odnosno 50,5, imaju izmjereni otklon 1 mm, t. j. upravo $\frac{1}{4}$ rezonantnog otklona. Nesklad tih jezika iznosi $z = \frac{50}{49,5}$, odnosno $\frac{50}{50,5}$, budući da frekvenciju 50 ima upravo struja, koja baš protiče kroz svitak. Ako periodičku magnetsku silu aproksimiramo njenom prvom harmonikom, za otklone vrijedit će jednačbe:

$$\frac{1}{4} \frac{P_1}{D_1} \rho_1 = \frac{P_1}{D_1} \frac{\rho_1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{50}{49,5}\right)^2\right]^2 \rho_1^2 + \left(\frac{50}{49,5}\right)^2}},$$

odnosno

$$\frac{1}{4} \frac{P_2}{D_2} \rho_2 = \frac{P_2}{D_2} \frac{\rho_2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{50}{50,5}\right)^2\right]^2 \rho_2^2 + \left(\frac{50}{50,5}\right)^2}}.$$



Slika 208.

Iz ovih jednačbi slijedi $\rho_1 \approx \rho_2 = 194$. Prema tome, dobili bismo statički otklon jezika, t. j. kod istosmjerne struje, koja bi prouzročila konstantnu magnetsku silu jednaku amplitudi magnetske sile kod izmjenične struje, iz jednačbi:

$$4 = \frac{P_1}{D_1} 194 = \frac{P_2}{D_2} 194,$$

odnosno

$$\frac{P_1}{D_1} = \frac{P_2}{D_2} \approx 0,02 \text{ mm.}$$

Taj se otklon ne bi mogao ni primijetiti.

Na navedenoj slici, desno dolje, prikazano je kako bi izgledala trenutna fotografija jezika, ako bi se rezonantni jezik nalazio upravo u svom srednjem položaju. Jezici lijevo i desno od njega nalazili bi se tada — kako je to i nacrtano — gotovo u svojim krajnjim međusobno opozicionim položajima. To je radi toga, što, kako smo to već spomenuli kod razmatranja električnog kruga, kod velikog ρ u blizini rezonancije nastaje fazni skok za gotovo 180° . Ako je, dakle, srednji jezik u rezonanciji, jedan susjedni jezik bit će ispred njega gotovo za 90° , a susjedni jezik s druge strane, zaostajat će za njim za isto toliko.

Da saznamo koliko iznosi D , t. j. koeficijent elastičnosti jezika, upotrebili bismo, prema sl. 208., gore, neku poznatu statičku silu P na vršku jezika. Ta sila prouzročila bi otklon h , koji se može lako izmjeriti. Kvocijent $\frac{P}{h} = D$.

Međutim, kad bi nam bilo zadano, da pronađemo dimenzije jezika za neku određenu frekvenciju, postupili bismo na slijedeći način:

Neka je l udaljenost diferencijala dl od mjesta upetosti, nadalje M_1 masa jezika, a M_2 masa zastavice na vrhu. Reducirat ćemo masu M_1 na vrh pomoću jednadžbe:

$$\int_0^L \text{masa na cm} \times dl \cdot l^2 = \text{masa na cm} \int_0^L l^2 dl = \text{masa na cm} \times L \frac{L^2}{3} = M_1 \frac{L^2}{3} = \\ = M_{1 \text{ red}} L^2.$$

Prema tome je

$$M_{1 \text{ red}} = \frac{M_1}{3}.$$

Ukupna masa na vrhu, dakle, je

$$M_2 + \frac{M_1}{3}.$$

Prema Mohru saznat ćemo otklon, koji nastaje na vrhu jednostrano upete grede uslijed vršne sile P , ako krivulju momenta savijanja te sile, nacrtanu na istoj slici u sredini, pomnožimo s $\frac{1}{E\mathcal{J}}$, te tu reduciranu krivulju, prema istoj slici dolje, shvatimo kao fiktivni teret, koji opterećuje gredu, s time, da joj se sada mjesto upetosti nalazi tamo, gdje je prije bila sila P . Moment savijanja tog fiktivnog tereta na mjestu upetosti biti će numerički jednak otklonu. Pritom je E modul elastičnosti, a $\mathcal{J}^*)$ moment tromosti presjeka oko njegove osi savijanja. Radi toga je:

$$\frac{PL}{E\mathcal{J}} \frac{L}{2} \frac{2L}{3} = \frac{PL^3}{3E\mathcal{J}} = h.$$

Kako je s druge strane $\frac{P}{D} = h$, to iz toga slijedi, ispadanjem sile P , da je:

$$D = \frac{3E\mathcal{J}}{L^3}.$$

Pomoću ove jednadžbe možemo za zadani materijal, dužinu i oblik presjeka, pronaći dimenzije presjeka jezika, koji će imati određeni D . Vlastita frekvencija jezika bit će:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3E\mathcal{J}}{L^3 \left(\frac{M_1}{3} + M_2 \right)}} = \frac{3}{2\pi L} \sqrt{\frac{E\mathcal{J}}{L(M_1 + 3M_2)}}.$$

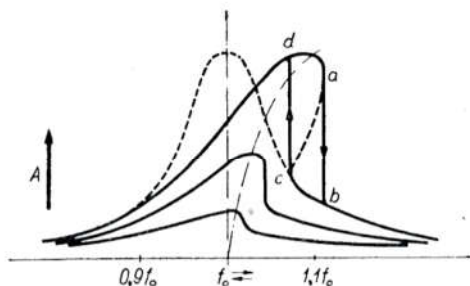
Pritom nismo uzeli u obzir gušenje, ali budući da je ono vrlo maleno, može se zanemariti.

Uređaj u našem uhu, t. zv. Cortijeve niti, nalik su na prednje jezike. Čisti sinusov ton uzbuđuje praktično samo jednu, t. j. rezonantnu nit, dok nesinusoidalni zvuk, koji se rastavlja na svoje harmoničke komponente, uzbuđuje istodobno više niti.

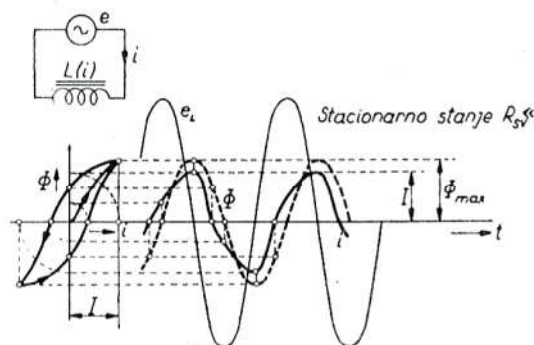
*) Mehanički moment tromosti označen je, dakle, istim slovom kao i verzor struje.

13. SVITAK SA ŽELJEZOM U SERIJSKOM TITRAJNOM KRUGU. DOBIVANJE FREKVENTNE KARAKTERISTIKE PO METODI W. PETERSENA

Općenito, proučavanje takvog kruga spada u poglavlje o krugovima s nelinearnim parametrima, jer L nije više konstantno, nego ovisno o struji. Međutim, ipak ćemo na ovom mjestu iznijeti metodu W. Petersena, koja po načinu obrađivanja spada ovamo, budući da zanemaruje izobličenja struje, koja se smatra kao sinusoidalna, dakle, možemo je predstaviti kao i kod krugova



Slika 209.



Slika 210.

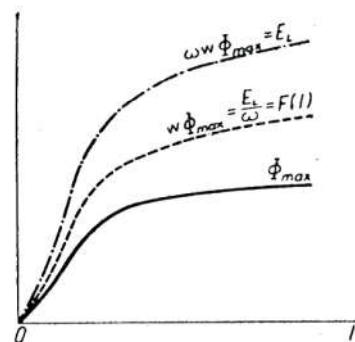
s linearnim parametrima pomoću verzora. U pojedinom se slučaju krug, naime, smatra kao linearan, s pripadnim linearnim L_1 , koji važi samo za taj slučaj. Ako se amplituda struje promijeni, važiti će drugi, opet linearni L_2 toga slučaja.

Prethodno ćemo objasniti sl. 209., koja prikazuje eksperimentalno dobljenu frekventnu karakteristiku za sličnu problematiku, i to za mehanički titrajni krug, u kojem nelinearni koeficijent elastičnosti D pera postaje veći kod produženja, odnosno kod većeg puta, t. j. pero postaje rastezanjem kruće.

Kod konstantnog D dobili bismo poznatu crtkanu frekventnu karakteristiku puta A (odnosno u blizini rezonancije u drugim jedinicama i brzine V) s rezonantnom frekvencijom

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{M}}$$

Međutim, kako sada D kod porasta amplitude A također raste, znači, da f_0 odmiče nadesno, jer izraz pod korijenom postaje sve veći. S porastom frekvencije u blizini vrha krivulje put više ne raste tako naglo kao prije, nego sve više zadržava istu vrijednost, a s njime i D , odnosno f_0 . Kod dosegnuća maksimuma puta, t. j. kod horizontalne tangente na krivulju, put ne mijenja svoju vrijednost, a s njime ni f_0 . Kod daljnjeg povećavanja frekvencije, prešli smo f_0 i uslijed toga put, radi udaljenja iz rezonancije, postaje manji. No čim je put postao manji, putuje f_0 natrag nalijevo, jer je D postalo manje — tom činjenicom smo kod iste frekvencije još više ispali iz rezonancije. Prema tome, na smanjenje puta djeluju dva faktora, t. j. 1.) povećanje naše narinute frekvencije i 2.) odmicanje f_0 .



Slika 211.

Radi toga će nastupiti nagli prelaz — obrušavanje — krivulje iz a prema b . Ako bismo počeli snimati krivulju s početnom velikom frekvencijom, te je snizivali, dobili bismo taj nagli prelaz — sada porast — od c do d , te bi opet f_0 odmicao najprije nadesno i zatim se vraćao nalijevo. Petlja $a-b-c-d$ nastaje zbog tromosti titrajne mase M , i to područje nije stabilno.

Dobili smo, dakle, nagnute frekventne karakteristike kruga. Isto takve nagnute frekventne karakteristike, dobit ćemo kod našeg kruga, koji ima svitak sa željeznom jezgrom, t. j. nelinearni $L(i)$, što bi u mehaničkoj analogiji odgovaralo nelinearnoj masi $M(v)$.*)

Ako narinemo sinusov napon $E \sin(\omega t + \alpha)$ na svitak sa željeznom jezgrom, vrijedit će jednadžba:

$$E \sin(\omega t + \alpha) = w \frac{d\Phi}{dt} + i R_{sv},$$

ako je R_{sv} omski otpor svitka. Pojav će u početku biti prelazan, a nakon praktičnog nestanka prigušne komponente postat će stacionaran. Ako je omski otpor vrlo malen, čitav će narinuti napon biti približno jednak induktivnom padu napona, t. j.

$$E \sin(\omega t + \alpha) \approx E_L \sin(\omega t + \alpha) = w \frac{d\Phi}{dt},$$

te će radi toga u stacionarnom stanju, t. j. partikularni integral, s dovoljnom točnošću biti:

$$\Phi = - \frac{E_L}{w \omega} \cos(\omega t + \alpha).$$

Tada stacionarnu struju možemo dobiti na poznati način pomoću krivulje histereze, što je učinjeno na sl. 210. Ona ne će više biti sinusoidalna, ali će njeni ekstremi nastupiti istodobno kad nastupaju i ekstremi toka Φ . Kako smo već naveli, to izobličenje ćemo zanemariti, i struju smatrati sinusoidalnom. Na sl. 211. nacrtali smo ovisnost amplitude toka $\Phi_{\max}$ od amplitude struje I . Kako je $E_L = w \omega \Phi_{\max}$, lako se može nacrtati i E_L u ovisnosti od I , i ta krivulja će, naravno, za svaki eventualni novi ω biti drugačija. Na istoj slici nacrtana je i reducirana krivulja

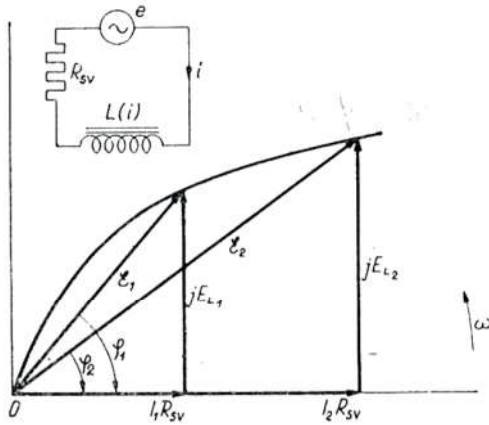
$$\frac{E_L}{\omega} = w \Phi_{\max}.$$

Ta je krivulja univerzalna, jer je neovisna od ω , te, kako nema zasebnog naziva, obilježili smo je naprosto kao funkciju struje s $F(I)$. Razumije se, da krivulju $E_L = f(I)$ možemo dobiti i eksperimentalno, mjerenjem. Ona bi se tada donekle razlikovala od navedene, budući da bismo instrumentom, koji pokazuje efektivnu, odnosno srednju vrijednost struje, morali zaključiti na drugačiju amplitudu, nego što je to maksimalna vrijednost izobličene struje. Kad se omski otpor svitka ne bi mogao zanemariti, onda bi se stvar znatno komplicirala, jer uslijed nesinusoidalnog omskog pada napona, ne bismo mogli

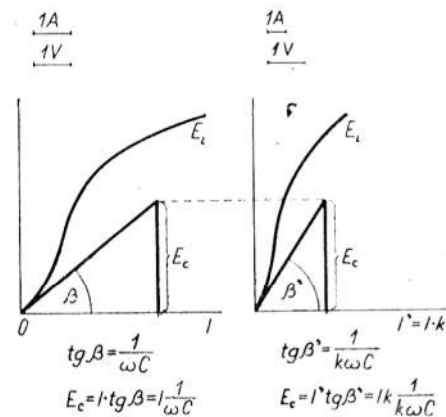
*) D i M djeluju u formuli za frekvenciju u suprotnom smislu. Međutim, naša paralela ipak vrijedi, jer — izuzevši kod malenih struja — povećanje struje djeluje u suprotnom smislu na $L(i)$, nego što povećanje puta djeluje na $D(a)$.

govoriti ni o približno sinusoidalnom induktivnom padu napona e_L . Međutim, i u tom slučaju proslijedit ćemo našim započetim putem, pa ćemo, prema sl. 212. smatrati, da je i tada stacionarna struja sinusoidalna, što znači, da je za struju amplitude I „njen pripadni“ L konstantan, t. j.

$$E_{L_1} = \omega L_1 I_1, \quad E_{L_2} = \omega L_2 I_2, \quad \text{i t. d.}$$

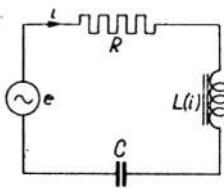


Slika 212.

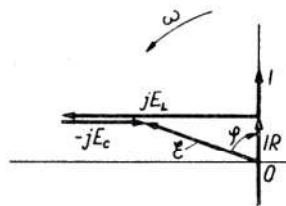


Slika 213.

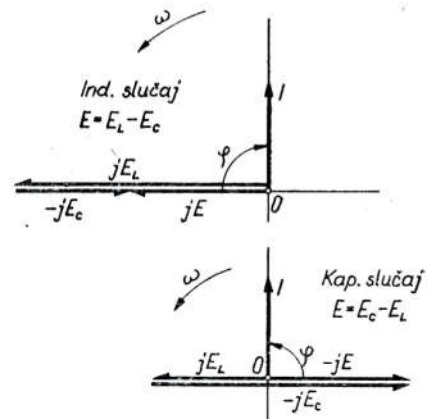
S ovakvim pojednostavnjenjem mogli smo nacrtati verzorski dijagram predložen na toj slici. Otpor R_{sv} mogli smo prethodno odrediti kojom poznatom metodom, te prema tome, poznamo hipotenuzu $\mathcal{E}$ i katetu IR_{sv} , pa možemo konstruirati pravokutni trokut, t. j. verzorski prikaz.*)



Slika 214.



Slika 215.

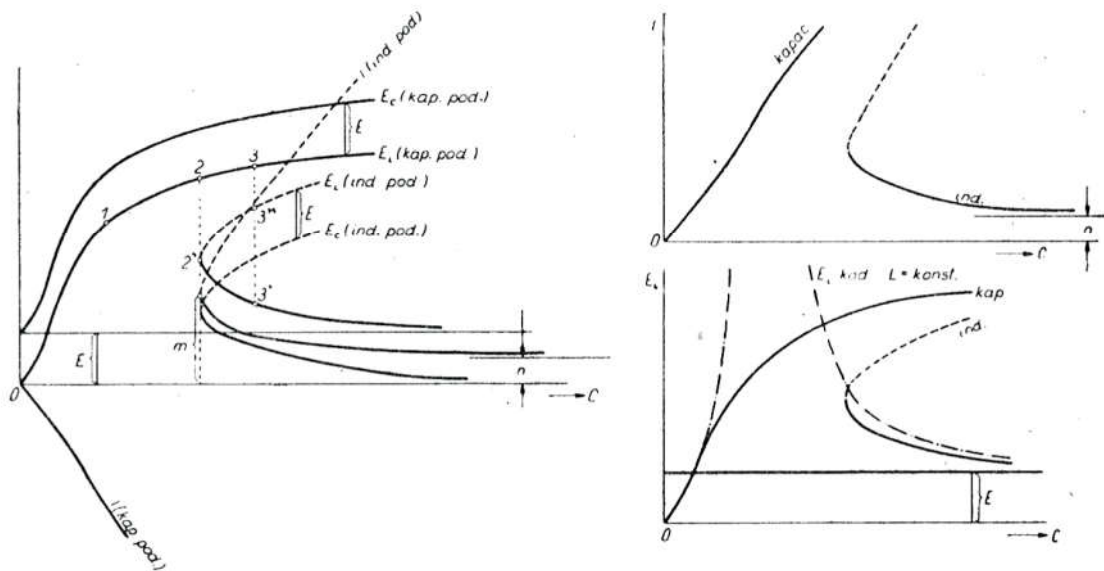


Slika 216.

Na sl. 213., lijevo, nacrtana je pomenuta krivulja $E_L = f(I)$. Ako u taj crtež želimo unijeti i kapacitivni pad napona $I \frac{1}{\omega C}$, to ćemo povući pravac kroz ishodište s $\tan \beta = \frac{1}{\omega C}$, te će ordinate toga pravca predstavljati E_C . Na istoj slici, desno, nacrtan je isti dijagram, ali karikiran, t. j. nije upotrebljena ista jedinična dužina za ordinate i apscise, te je $I' = kI$. U tom slučaju $\tan \beta' = \frac{1}{k\omega C}$

*) Na slici 212. nacrtali smo verzore struje, za koje smo pretpostavili da su realni, horizontalno, radi boljeg upoređenja sa sl. 213.

u tom induktivnom slučaju ima vrijednost m . Kod daljnjeg povećavanja C imamo kapacitivno rješenje 3 i dva induktivna, t. j. 3' i 3''. Rješenje 3'' je labilno. Na pr. pretpostavimo, da struja u točki 3'' ima, iz bilo kojeg razloga, tendenciju porasta — dakle, valjalo bi se odmaći nadesno od 3''. Tamo bismo za pokriće padova napona kod istoga C , trebali narinuti napon ($a_2 - b_2$), koji bi, dakle, bio manji od našeg raspoloživog napona E . Znači, da će taj naš raspoloživi, a sa ($a_2 - b_2$) samo djelomično konzumirani napon, prouzročiti daljnji porast struje, t. j. još veće udaljivanje od 3''. Kod umanjenja struje, dakle



Slika 218.

kod pomicanja od 3'' nalijevo, trebali bismo narinuti napon ($a_1 - b_1$), koji bi bio veći od raspoloživog napona E . Prema tome, struja će padati još više, jer raspoloživi napon ne dostaje, da održi tu jačinu struje. Točka 3' je stabilna, jer bismo kod pomicanja nadesno trebali veći napon, a kod pomicanja nalijevo manji napon od raspoloživog E , i radi toga će se struja uvijek vraćati u vrijednost točke 3'. Kod $C = \infty$ struja ima vrijednost n .

Na sl. 218. lijevo, nacrtane su tražene krivulje, t. j. pokazana je ovisnost I , E_L i E_C od C , iz svih mogućih rješenja slike 217. Desno, gore, još je jednom odvojeno nacrtan dijagram ovisnosti I od C , i to na uobičajeni način, t. j. sve su amplitude nacrtane iznad apscisne osi. Vidimo, da je ta krivulja nagnuta nadesno. Ispod te krivulje nacrtan je ponovo i dijagram ovisnosti E_L od C , koji je, naravno, isto tako nagnut. Radi upoređenja ucrtana je u nj i ovisnost E_L od C kod konstantnog L . Labilni dijelovi navedenih nagnutih krivulja su crtkani. Na slici lijevo vidimo, da je i krivulja ovisnosti E_C od C također nagnuta.

— Kad bismo htjeli na opisani način naći frekventnu karakteristiku, t. j. I u ovisnosti od ω , za svaki novi ω morali bismo crtati novu krivulju $E_L = f(I)$, što bi bio mučan posao. Međutim, možemo postupiti na slijedeći način:

Uzmimo najprije kapacitivan slučaj, t. j.

$$E = E_C - E_L = I \frac{1}{\omega C} - E_L,$$

ili

$$\frac{E}{\omega} = I \frac{1}{\omega^2 C} - \frac{E_L}{\omega}$$

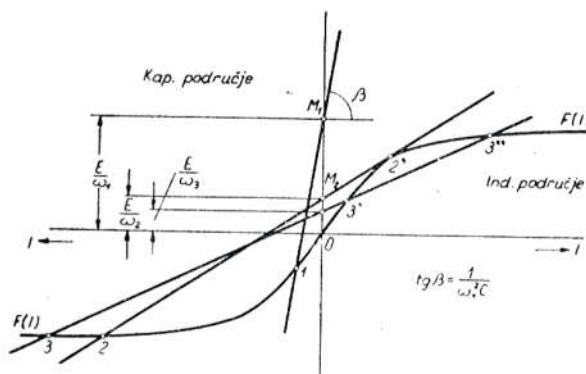
Analogno bi za induktivni slučaj bilo:

$$\frac{E}{\omega} = \frac{E_L}{\omega} - I \frac{1}{\omega^2 C}$$

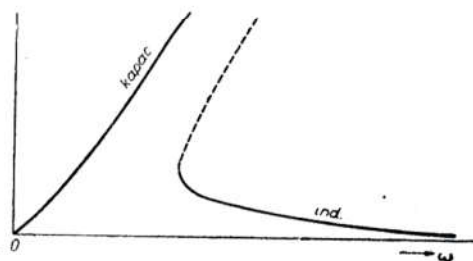
Prema sl. 219., umjesto prijašnje krivulje $E_L = f(I)$, nacrtat ćemo već spomenutu univerzalnu krivulju, t. j.

$$\frac{E_L}{\omega} = w \Phi_{\max} = F(I),$$

koja je neovisna od ω . Umjesto prijašnjeg $\tan \beta = \frac{1}{\omega C}$, sada ćemo crtati zraku, čiji tangens nagiba iznosi $\tan \beta = \frac{1}{\omega^2 C}$, a umjesto prijašnjeg konstantnog E , za svaki ω vrijedit će kvocijent $\frac{E}{\omega}$. Razumije se, da ćemo sada za svaki ω , umjesto jedne točke M , imati drugu točku, kroz koju ćemo navedene zrake povlačiti do njihovog sjecišta s krivuljom $F(I)$. Inače nema nikakve razlike prema prijašnjem postupku. Na sl. 220. nacrtana je nagnuta frekventna karakteristika I u ovisnosti od ω , kod čega sada struja kod $\omega \rightarrow \infty$ konvergira prema nuli.



Slika 219.



Slika 220.

Neka naš titrajni krug ostane netaknut, te ćemo mijenjati amplitudu narinutog napona kod stalne frekvencije. Želimo znati, kakva će u svakom slučaju biti struja po fazi i veličini, a da kod toga uzmemo u obzir omski pad napona uslijed otpora R , kao i uslijed otpora svitka R_{sv} . Razumije se, da kod toga vrijede i nadalje sva prijašnja pojednostavnjenja, obzirom na to, da ćemo struju smatrati sinusoidalnom. Postupit ćemo na slijedeći način:

Prema sl. 221., lijevo gore, načinit ćemo prenosivi crtež ili drvenu napravu s dva kraka, koji međusobno zatvaraju kut, čiji tangens iznosi $\frac{1}{\omega CR}$. Prema tome, ako na jedan krak, koji ćemo smjestiti u smjeru struje, nanesemo IR , okomica do drugog kraka iznositi će $I \frac{1}{\omega C}$. Na tom drugom kraku

14. DJELOVANJE NARINUTOG SINUSOVOG NAPONA NA KRUG S DVA PARALELNA OGRANKA, OD KOJIH JE JEDAN INDUKTIVAN, A DRUGI KAPACITIVAN

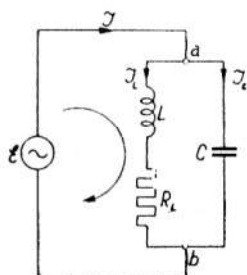
a) Samo induktivni ogranak sadrži omski otpor

α) Proučit ćemo rezonantnu struju kruga prema sl. 222. Budući da kondenzatori, koji se praktično upotrebljavaju, imaju malene gubitke, koji se mogu zanemariti, to ovakva shema odgovara stvarnosti. Struja će biti:

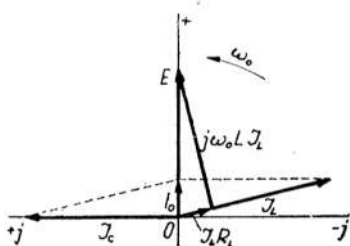
$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{Z}_{ab}},$$

gdje je $\mathcal{Z}_{ab}$ impedancija između točaka a i b . Dalje slijedi:

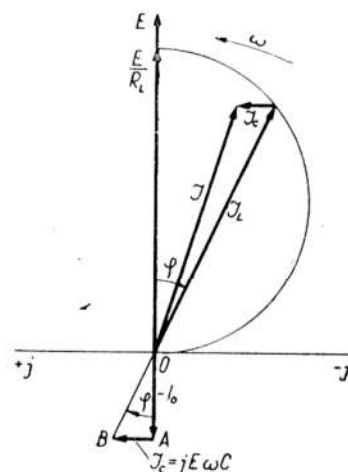
$$\mathcal{Z}_{ab} = \frac{1}{\frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C} = \frac{R_L^2 + \omega^2 L^2}{R_L - j\omega L + j\omega C(R_L^2 + \omega^2 L^2)}$$



Slika 222.



Slika 223.



Slika 224.

U našim krugovima, koje ćemo promatrati, gušenja su slaba i radi toga

$$R_L^2 \ll \omega^2 L^2.$$

Prema tome, s dopuštenim zanemarenjem bit će:

$$\mathcal{Z}_{ab} = \frac{1}{\frac{R_L}{\omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}.$$

Za slučaj rezonancije, $\mathcal{Z}_{ab}$ mora biti čisti omski otpor, što znači, da u navedenom izrazu mora biti:

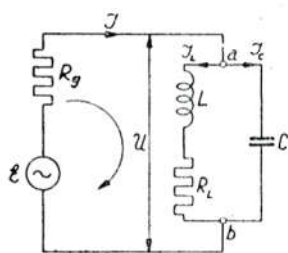
$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Tada vrijedi:

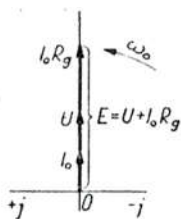
$$\mathcal{Z}_{ab} = Z_{ab} = \frac{\omega_0^2 L^2}{R_L} = \frac{L}{C R_L}$$

Na sl. 223. nacrtan je verzorski prikaz kruga za taj slučaj.

Pomoću rezonantne struje lako možemo odrediti struju kod nekog drugog ω . Prema sl. 224. struju $I_0 = E \frac{C R_L}{L}$ nanijet ćemo na negativnu stranu realne osi. Nalijevo od A , nanijet ćemo $j E \omega C$, i iz B povući zraku kroz O . Gdje ta zraka siječe polukružnicu s promjerom $\frac{E}{R_L}$, nalazi se vršak verzora



Slika 225.



Slika 226.

$\mathcal{I}_L$. Pribrojivši k $\mathcal{I}_L$ struju $\mathcal{I}_C$, dobivamo verzor struje $\mathcal{I}$. Da je postupak opravdan, vidi se iz slijedećega:

Pošto je, uz pretpostavku da je faza verzora napona jednaka nuli,

$$E = \mathcal{I}_L (R_L + j \omega L),$$

odnosno

$$\frac{E}{R_L} = \mathcal{I}_L + j \mathcal{I}_L \frac{\omega L}{R_L},$$

to će $\mathcal{I}_L$ biti jedna kateta pravokutnog trokuta s hipotenuzom $\frac{E}{R_L}$, i prema tome vrh verzora $\mathcal{I}_L$ mora biti na nacrtanoj polukružnici. Iz trokuta OAB je vidljivo, da je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E \omega C}{I_0} = \frac{E \omega C}{E \frac{C R_L}{L}} = \frac{\omega L}{R_L},$$

što je tangens faznog pomaka između napona i induktivne struje. Znači, dakle, da s $\mathcal{I}_L$ označeni verzor ispunjava oba potrebna uvjeta induktivne komponente.

Kod kruga prema sl. 225., t. j. kad bi valjalo uzeti u obzir unutrašnji otpor generatora R_g , a uz istu pretpostavku kao i prije $R_L^2 \ll \omega^2 L^2$, opet bi u slučaju rezonancije moralo biti

$$\mathcal{Z}_{ab} = Z_{ab} = \frac{L}{C R_L},$$

dakle, čisti omski otpor. Rezonantna struja I_0 , koju smo stavili u realnu os, mora biti, naime, u fazi s E , a prema tome i s U , budući da je

$$E - I_0 R_g = U,$$

što prikazuje sl. 226. Iz istofaznosti I_0 s U onda slijedi ista vrijednost za $\mathcal{Z}_{ab}$ kao i prije.

β) Da bismo pronašli frekventne karakteristike kruga prema navedenoj slici 225., preinačit ćemo prethodno izraz za $\mathcal{Z}_{ab}$, kako slijedi:

$$\mathcal{Z}_{ab} = \frac{1}{\frac{R_L}{\omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} = \frac{1}{\frac{R_L}{\omega^2 L^2} + j \omega_0 C \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{1}{\frac{R_L}{\omega^2 L^2} + j \omega_0 C v}$$

Budući da želimo proučavati frekventne karakteristike samo u području, koje je od praktične važnosti, t. j. u blizini rezonancije, gdje je

$$\frac{R_L}{\omega^2 L^2} \approx \frac{R_L}{\omega_0^2 L^2},$$

to će nadalje biti:

$$\mathcal{Z}_{ab} = \frac{1}{\omega_0 C \left(\frac{R_L}{\omega_0 L} + jv \right)} = \frac{1}{\omega_0 C \left(\frac{1}{\rho_L} + jv \right)} \quad *)$$

Označit ćemo izraz $R_g \omega_0 C = \frac{1}{\rho_g}$. Izraz za struju bit će:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{\mathcal{E}}{R_g + \mathcal{Z}_{ab}} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\omega_0 C} + \frac{1}{\omega_0 C \left(\frac{1}{\rho_L} + jv \right)}} = \frac{\mathcal{E}}{\omega_0 C \left(\frac{1}{\rho_g} + \frac{1}{\frac{1}{\rho_L} + jv} \right)} = \\ &= \frac{\mathcal{E}}{\omega_0 C \left[\frac{1}{\rho_g} + \frac{\frac{1}{\rho_L}}{\left(\frac{1}{\rho_L} \right)^2 + v^2} - j \frac{v}{\left(\frac{1}{\rho_L} \right)^2 + v^2} \right]} \end{aligned}$$

Prema tome je amplituda struje:

$$\begin{aligned} I &= \frac{E \omega_0 C}{\sqrt{\left[\frac{1}{\rho_g} + \frac{\frac{1}{\rho_L}}{\left(\frac{1}{\rho_L} \right)^2 + v^2} \right]^2 + \left[\frac{v}{\left(\frac{1}{\rho_L} \right)^2 + v^2} \right]^2}} = \\ &= \frac{E \omega_0 C}{\sqrt{\left(\frac{1}{\rho_g} \right)^2 + \frac{2 \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L}}{\left(\frac{1}{\rho_L} \right)^2 + v^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_L} \right)^2 + v^2}}} \end{aligned}$$

*) $\frac{\omega_0 L}{R_L}$ je faktor kvalitete onog serijskog kruga, što bi ga činila petlja obaju ogranaka, kad bi pod narinutim naponom postojala sama za sebe. Podrazumijevamo li, međutim, pod R_L omski otpor, koji u serijskoj sprezi s induktivitetom L predstavlja konkretni svitak, onda je taj izraz i „faktor kvalitete svitka“ kod frekvencije ω_0 . Analogno i kod kondenzatora izraz $\frac{1}{R_C \omega_0 C}$ je „faktor kvalitete kondenzatora“ kod frekvencije ω_0 , ako pod R_C podrazumijevamo omski otpor, koji u serijskoj sprezi s kapacitetom C predstavlja taj konkretni kondenzator. Predstavimo li svitak, odnosno kondenzator, adekvatnim paralelnim spregama, formule za dotične faktore kvalitete glasit će recipročno od navedenih.

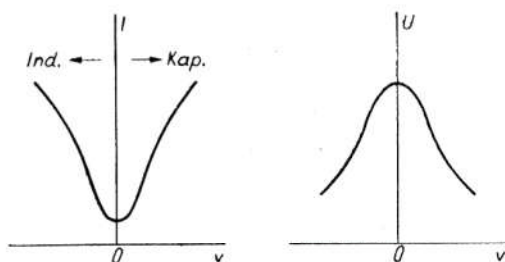
Pad napona $\mathcal{U}$ bit će:

$$\mathcal{U} = \mathcal{I} \mathcal{Z}_{ab} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{1}{\omega_0 C} \left[\frac{1}{\rho_g} + \frac{\frac{1}{\rho_L}}{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2} - j \frac{v}{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2} \right]} \cdot \frac{1}{\omega_0 C \left(\frac{1}{\rho_L} + jv \right)}$$

$$U = \frac{E}{\sqrt{\left\{ \left[\frac{1}{\rho_g} + \frac{\frac{1}{\rho_L}}{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2} \right]^2 + \left[\frac{v}{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2} \right]^2 \right\} \left\{ \left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2 \right\}}}$$

$$= \frac{E}{\sqrt{\left\{ \left(\frac{1}{\rho_g}\right)^2 + \frac{2 \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L}}{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2} + \frac{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2}{\left[\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2\right]^2} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2 \right\}}}$$

$$= \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{1}{\rho_g}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2\right] + 2 \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L} + 1}}$$



Slika 227.

Sl. 227. prikazuje frekventne karakteristike za struju I i napon U . Kod prve „konkavne“ krivulje, obratno nego kod serijske „konveksne“, za $v < 0$ struja je induktivna, a za $v > 0$ kapacitivna.

γ) Sada ćemo promotriti granične slučajeve frekventnih karakteristika. Neka je $R_g = 0$, odnosno $\frac{1}{\rho_g} = 0$. Iz prednjih jednadžbi slijedi:

$$I = \frac{E \omega_0 C}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2}}} = E \omega_0 C \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2}$$

U slučaju rezonancije, t. j. kod $v = 0$, slijedi:

$$I_0 = E \omega_0 C \frac{R_L}{\omega_0 L} = E \frac{C R_L}{L}.$$

Napon $U = E$. Frekventne karakteristike pokazuje sl. 228.

Neka je $R_g \gg \frac{1}{\rho_g}$, odnosno $\frac{1}{\rho_g} \gg \frac{1}{R_g}$.

U formuli za $\mathcal{J}$ u nazivniku možemo prema $\frac{1}{\rho_g}$ zanemariti ostale veličine, koje su nižeg reda, te pisati:

$$\mathcal{J} \approx \frac{\mathcal{E} \omega_0 C}{\frac{1}{\rho_g}} = \frac{\mathcal{E} \omega_0 C}{R_g \omega_0 C} = \frac{\mathcal{E}}{R_g},$$

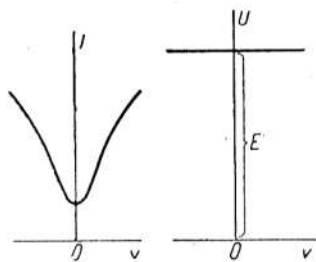
t. j. konstantno.

$$\begin{aligned} U &= \frac{E}{\frac{1}{\rho_g} \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2 + \frac{2\frac{1}{\rho_L}}{\frac{1}{\rho_g}} + \left(\frac{1}{\rho_g}\right)^2}} \approx \frac{E}{\frac{1}{\rho_g} \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2}} = \\ &= \frac{E}{R_g \omega_0 C \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2}} = I_0 \frac{1}{\omega_0 C \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2}}. \end{aligned}$$

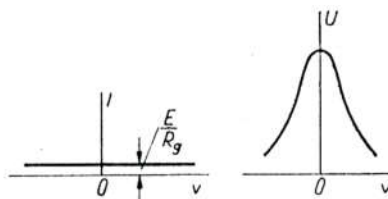
Frekventne karakteristike prikazane su na sl. 229. U rezonanciji kod $v = 0$, bit će:

$$U = I_0 \frac{1}{\omega_0 C} \frac{\omega_0 L}{R_L} = I_0 \frac{L}{C R_L},$$

što je već poznato.



Slika 228.



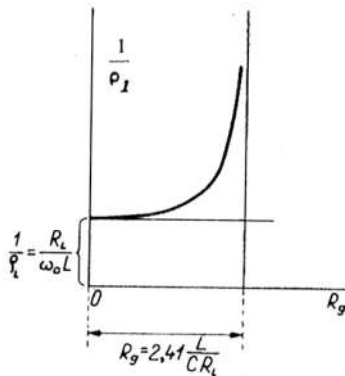
Slika 229.

Kod drugog slučaja, t. j. $R_g \gg \frac{1}{\rho_g}$, treba upozoriti na slijedeći idejni nedostatak, koji je nastao uslijed zanemarenja u izrazu za struju. Budući da smo dobili, da je $\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{R_g}$, to bi slijedilo, da je $\mathcal{J} R_g = \mathcal{E}$, odnosno uvijek bi bilo $\mathcal{U} = 0$. Međutim, točno vrijedi jednadžba $\mathcal{J} R_g + \mathcal{U} = \mathcal{E}$ s time, da frekventna

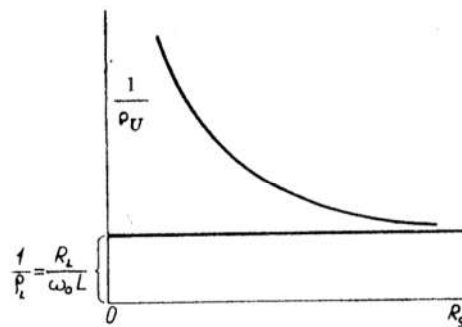
karakteristika struje uistinu egzaktno nije pravac, nego kao i prije uleknuta krivulja — iako vrlo slabo, tako, da je u rezonanciji amplituda $I_0 R_g$ omskog pada napona najmanja. Uslijed toga, tada je amplituda U najveća, usprkos toga, što se u rezonanciji $\mathcal{J}_0 R_g$ i $\mathcal{U}$ sastavljaju algebarski u napon $\mathcal{E}$, a izvan rezonancije to se zbiva verzorski, što pogoduje, da amplituda U ispadne veća.

Još je jedna stvar od važnosti. Uslijed toga što je R_L^2 zanemareno prema $\omega^2 L^2$, kao i zbog drugih približnosti tokom dedukcije, rezonantna struja ispala je ujedno i najmanja struja. Međutim, kod točnog postupka to ne bi bilo tako, nego bi najmanja struja nastala kod nešto veće frekvencije, nego što je rezonantna, i prema tome imala bi kapacitivni pomak prema narinutom naponu, koji bi pomak zavisio od veličine R_g i R_L .

δ) Prividni faktori kvalitete ρ_I i ρ_U . Faktor kvalitete serijskog kruga $\rho = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ je karakteristična veličina, koja karakterizira glavna svojstva tog kruga, t. j. oštrinu rezonancije i rezonantno nadvišenje. Ta su svojstva — kako znamo — implicitno sadržana i u činjenici, da je nesklad na grani-



Slika 230.



Slika 231.

cama širine pojasa jednak recipročnom faktoru kvalitete. Strujna i naponska karakteristika sadašnjeg kruga kvalitativno su istovrsne krivulje kao i serijska frekventna karakteristika, samo je strujna karakteristika sada obrnuta, t. j. konkavna. Da bismo sve te krivulje, t. j. onu serijsku, kao i ove sadašnje, mogli ocijeniti s jednog jedinstvenog stanovišta, potrebno je, da glavna svojstva sadašnjih krivulja izrazimo adekvatnim veličinama, koje ćemo analogno nazvati „prividnim faktorima kvalitete“ ρ_I , odnosno ρ_U . Te ćemo veličine saznati na temelju navedene činjenice, koju, naravno, radi istovrsnosti krivulja smijemo primijeniti, t. j. da je nesklad na granicama širine pojasa jednak recipročnom prividnom faktoru kvalitete. Za strujnu karakteristiku to će biti kod $I = I_0 \sqrt{2}$, a za naponsku kod $U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$.

Ako smo verzor napona stavili u realnu os, općeniti izraz za rezonantnu struju glasit će:

$$I_0 = \frac{E \omega_0 C}{\frac{1}{\rho_g} + \rho_L}$$

Prema tome je:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\frac{1}{\rho_g} + \rho_L}{\sqrt{\left[\frac{1}{\rho_g} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2} \right]^2 + \left[\frac{v}{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2} \right]^2}}$$

$$\left(\frac{I}{I_0}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{\rho_g} + \rho_L\right)^2}{\left[\frac{1}{\rho_g} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2} \right]^2 + \left[\frac{v}{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2} \right]^2}$$

Kod $I = I_0 \sqrt{2}$, bit će $\pm v = \frac{1}{\rho_I}$ s time, da vrijedi onaj predznak s kojim je $\frac{1}{\rho_I}$ pozitivno. Radi toga je:

$$\left(\frac{I_0 \sqrt{2}}{I_0}\right)^2 = 2 = \frac{\left(\frac{1}{\rho_g} + \rho_L\right)^2}{\left[\frac{1}{\rho_g} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_I}\right)^2} \right]^2 + \left[\frac{\frac{1}{\rho_I}}{\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_I}\right)^2} \right]^2}$$

S nešto računanja iz ovoga slijedi:

$$\frac{1}{\rho_I} = \frac{1}{\rho_L} \frac{1 + \frac{1}{\rho_g \rho_L}}{\sqrt{1 + 2 \frac{1}{\rho_g \rho_L} - \left(\frac{1}{\rho_g \rho_L}\right)^2}}$$

Iz ove jednadžbe dobit ćemo upotrebljive vrijednosti samo onda, ako je izraz pod korijenom pozitivan, t. j.

$$1 + 2 \frac{1}{\rho_g \rho_L} - \left(\frac{1}{\rho_g \rho_L}\right)^2 \geq 0.$$

$$\frac{1}{\rho_g} \leq \rho_L (1 \pm \sqrt{2}).$$

Minus ne dolazi u obzir, jer kako nema negativnih parametara u krugu, ni ρ_L , kao ni ρ_g , ne može biti negativno. Radi toga slijedi:

$$\frac{1}{\rho_g} \leq 2,41 \rho_L$$

odnosno

$$R_g \omega_0 C \leq 2,41 \frac{\omega_0 L}{R_L}, \quad \text{ili} \quad R_g \leq 2,41 \frac{L}{C R_L}.$$

Prema tome, ako korijen u nazivniku u izrazu za $\frac{1}{\rho_I}$ postaje jednak nuli, onda $\frac{1}{\rho_I}$ postaje neizmjereno, dakle, u tom slučaju bi tek kod neizmjereno velikog nesklada v , struja poprimila vrijednost $I_0 \sqrt{2}$. To znači, da se struja ne povećava ako izademo iz rezonancije, nego da praktično ostaje konstantna. To vrijedi tim više, ako korijen, te prema tome i $\frac{1}{\rho_I}$, postaje imaginarno. Kod $\frac{1}{\rho_g} = 0$ postaje

$$\frac{1}{\rho_I} = \frac{1}{\rho_L} = \frac{R_L}{\omega_0 L}, \quad \text{odnosno} \quad \rho_I = \frac{\omega_0 L}{R_L}.$$

Sl. 230. pokazuje ovisnost $\frac{1}{\rho_I}$ od

$$R_g = \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\omega_0 C}.$$

Analogno ćemo postupiti za $\frac{1}{\rho_U}$. Rezonantni pad napona U_0 bit će:

$$U_0 = \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{1}{\rho_g}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + 2 \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L} + 1}} = \frac{E}{\frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L} + 1}.$$

$$\left(\frac{U_0}{U}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{\rho_g}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + v^2\right] + 2 \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L} + 1}{\left(\frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L} + 1\right)^2}.$$

Kod $U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ bit će $\pm v = \frac{1}{\rho_U}$. Prema tome je:

$$\left(\frac{U_0}{\frac{U_0}{\sqrt{2}}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{\rho_g}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_U}\right)^2\right] + 2 \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L} + 1}{\left(\frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L} + 1\right)^2} = 2.$$

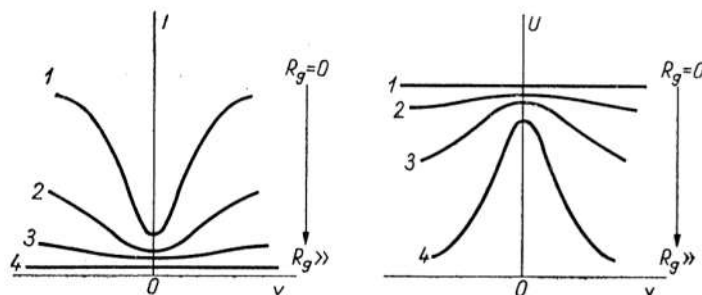
$$\frac{1}{\rho_U} = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L} + 1\right)^2 - 2 \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L} - 1}{\left(\frac{1}{\rho_g}\right)^2}} - \left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\rho_g}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho_L}\right)^2 + 2 \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L} + 1}{\left(\frac{1}{\rho_g}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{\rho_g} \frac{1}{\rho_L} + 1}{\frac{1}{\rho_g}} = \frac{1}{\rho_L} + \rho_g = \frac{1}{\rho_L} (1 + \rho_L \rho_g) =$$

$$= \frac{1}{\rho_L} \left(1 + \frac{\omega_0 L}{R_L} \frac{1}{R_g \omega_0 C} \right) = \frac{1}{\rho_L} \left(1 + \frac{L}{R_g C} \right).$$

Kod $R_g = \infty$ postaje $\frac{1}{\rho_U} = \frac{1}{\rho_L}$, a kod $R_g = 0$ postaje ∞ . Sl. 231. prikazuje ovisnost $\frac{1}{\rho_U}$ od R_g .

Iz prednjeg vidimo, da je kod $R_g = 0$ faktor kvalitete za strujnu karakteristiku najveći, i upravo jednak najvećem faktoru kvalitete za naponsku karakteristiku, koji se ali pojavljuje kod $R_g = \infty$, t. j. $\frac{\omega_0 L}{R_L}$. Iz ovoga slijedi, kod promjena R_g , da svaku širinu pojasa, koju možemo postići prema izvjesnoj strujnoj karakteristici, možemo postići i prema određenoj, njoj obrnuto jednakoj, naponskoj karakteristici.



Slika 232.

ε) Istražit ćemo sada širinu pojasa, i to najprije za struju, t. j. želimo saznati pojas frekvencija između obiju struja $I_0 \sqrt{2}$. Na mjestu, gdje je $I = I_0 \sqrt{2}$ uzevši negativni v_1 , vrijednost $\frac{1}{\rho_I} = -v_1$, t. j.

$$\frac{1}{\rho_I} = - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = - \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega_1} = - \frac{(2\pi)^2 (f_1^2 - f_0^2)}{(2\pi)^2 f_0 f_1} = - \frac{f_1^2 - f_0^2}{f_0 f_1} =$$

$$= - \frac{(f_1 + f_0)(f_1 - f_0)}{f_0 f_1} \approx - \frac{2f_0(f_1 - f_0)}{f_0^2} = - \frac{2(f_1 - f_0)}{f_0}.$$

Analogno bi bilo za pozitivni v_2 kod ω_2 , odnosno f_2 , t. j.

$$\frac{1}{\rho_I} = \frac{(f_2 + f_0)(f_2 - f_0)}{f_0 f_2} \approx \frac{2(f_2 - f_0)}{f_0}.$$

Iz obiju prednjih formula slijedi:

$$\frac{1}{\rho_I} = \frac{(f_0 - f_1) + (f_2 - f_0)}{f_0} = \frac{f_2 - f_1}{f_0} = \frac{\Delta f_I}{f_0},$$

odnosno

$$\Delta f_I = \frac{f_0}{\rho_I}.$$

Širina pojasa frekvencija Δf_U između obiju vrijednosti $U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ dobila bi se na potpuno isti način, s time, da bi umjesto $\frac{1}{\rho_I}$ valjalo uvrstiti $\frac{1}{\rho_U}$.

Tada bismo dobili, da je:

$$\Delta f_U = \frac{f_0}{\rho_U}.$$

Sl. 232. prikazuje pripadne frekventne karakteristike za struju I i napon U označene istim brojem, ako se mijenja R_g , počevši od nule do veoma velike vrijednosti.

b) Oba ogranka sadrže omski otpor

α) Rezonantna struja kod nejednakih omskih otpora. Prema sl. 233. bit će:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{I}_L + \mathcal{I}_C = \mathcal{E} \left(\frac{1}{R_L + j\omega L} + \frac{1}{R_C + \frac{1}{j\omega C}} \right) = \\ &= \mathcal{E} \left(\frac{R_L - j\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_C + \frac{j}{\omega C}}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right). \end{aligned}$$

Ako imaginarni dio izraza postane jednak nuli, onda će $\mathcal{I}_0$ biti u fazi s $\mathcal{E}$ i govorit ćemo o rezonantnoj struji. Tada će, dakle, biti:

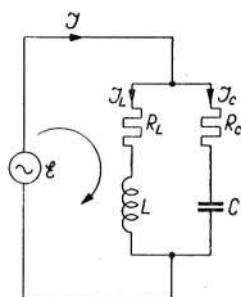
$$\frac{-j\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + \frac{\frac{j}{\omega C}}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = 0.$$

Ako kod prvog adenda brojnik i nazivnik podijelimo, a kod drugog pomnožimo s ω , bit će kod $\omega = 0$, ili $\omega = \infty$

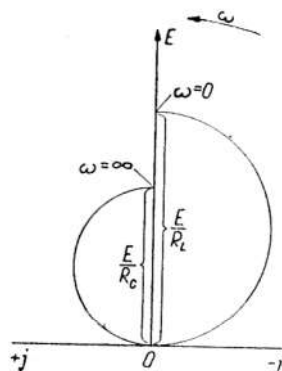
$$\begin{aligned} \frac{-jL}{\frac{R_L^2}{\omega} + \omega L^2} + \frac{\frac{j}{C}}{R_C^2 \omega + \frac{1}{\omega C^2}} &= 0. \\ (\omega = 0 \text{ ili } \infty) \end{aligned}$$

U slučaju $\omega = 0$, bila bi struja $\mathcal{I}_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_L}$, a u slučaju $\omega = \infty$, bila bi $\frac{\mathcal{E}}{R_C}$.

Međutim, te dvije rezonantne struje nazvat ćemo „rezonantnim strujama u širem smislu“, jer u slučaju postojanja jedne ili druge takve struje nisu potrebna oba ogranka, nego samo jedan, dakle, prazni ogranak može se naprosto



Slika 233.



Slika 234.

odbaciti, te bismo tada jednom imali serijski krug s R_L i L , drugi put s R_C i C . „Rezonantnu struju u užem smislu“ nazvat ćemo onu struju, kod koje u obim granama teku komponentne struje, dakle, kad je $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_{(0)L} + \mathcal{I}_{(0)C}$, kod čega su $\mathcal{I}_{(0)L}$ i $\mathcal{I}_{(0)C}$ različiti od nule. S indeksom (0) označili smo pripadnost komponenata rezonantnoj rezultanti.

Imaginarni dio naše jednadžbe nakon kraćenja s j , možemo pisati:

$$R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{1}{\omega^2 LC} (R_L^2 + \omega^2 L^2) = 0.$$

$$\frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{1}{\omega C} \left(\frac{R_L^2 + \omega^2 L^2}{\omega L} \right) + R_C^2 = 0.$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{R_L^2 + \omega^2 L^2}{2 \omega L} \pm \sqrt{\left(\frac{R_L^2 + \omega^2 L^2}{2 \omega L} \right)^2 - R_C^2},$$

odnosno riješeno po ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{CLR_C^2 - L^2}}.$$

Minus pred korijenom smo izostavili, jer frekvencije brojimo samo pozitivno. Ukoliko bi ω ispalo imaginarno, ne bi uopće postojala „rezonantna struja u užem smislu“. Sl. 234. prikazuje verzorske dijagrame svih komponentnih induktivnih i kapacitivnih struja kod $\mathcal{E} = E$, t. j. s fazom jednako nuli. Međutim, ako je ω iz gornje formule realno, onda bi rezonantnu struju u užem smislu dobili uz taj ω s

$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{E} \left(\frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right),$$

odnosno, jer je tada prema uvjetu rezonancije

$$R_c^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} = \frac{R_L^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 LC},$$

to slijedi:

$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{E} \frac{R_L + R_c \omega^2 LC}{R_L^2 + \omega^2 L^2}.$$

β) Rezonantna struja u slučaju jednakih omskih otpora. Prema tome je

$$R_L = R_c = \frac{R}{2}.$$

Obje „rezonantne struje u širem smislu“ kod $\omega = 0$, odnosno $\omega = \infty$, zadbivaju istu vrijednost, jer je

$$\frac{\mathcal{E}}{R_L} = \frac{\mathcal{E}}{R_c} = \frac{2\mathcal{E}}{R}.$$

S R je označen omski otpor petlje obaju ogranaka.

Da saznamo „rezonantnu struju u užem smislu“ moramo naći rješenje općeg rezonantnog uvjeta, koji smo naveli prije, t. j.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega C} &= \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \omega^2 L^2}{2\omega L} \pm \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \omega^2 L^2}{2\omega L}\right]^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{\frac{R^2}{4} + \omega^2 L^2}{2\omega L} \pm \sqrt{\left[\frac{\frac{R^2}{4} - \omega^2 L^2}{2\omega L}\right]^2} = \frac{\frac{R^2}{4} + \omega^2 L^2}{2\omega L} \pm \frac{\frac{R^2}{4} - \omega^2 L^2}{2\omega L}. \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi, ako vrijedi minus

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L,$$

odnosno s analognom oznakom prema serijskom krugu

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Ta frekvencija će, uz izvjestan L i C , uvijek postojati.

Drugo rješenje slijedi, ako vrijedi plus, t. j.

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{R^2}{4\omega L} \quad \text{ili} \quad \frac{1}{LC} = \left(\frac{R}{2L}\right)^2.$$

To bi bilo, ako promatramo samo petlju, što je čine oba ogranka prema sl. 235., granično aperioidički slučaj toga serijskog kruga, t. j. $\omega_0 = \delta$.

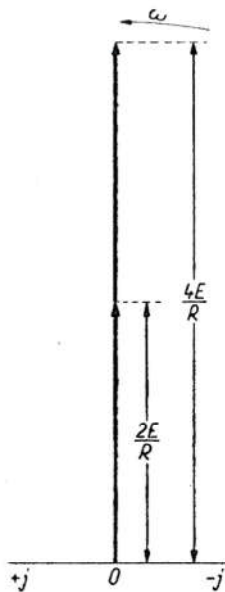
Kako vidimo, struja otporničke rezonancije ima istu vrijednost kao i rezonantne struje u širem smislu, što je i razumljivo, jer te struje postoje kod svakog mogućeg rasporeda parametara, dakle, i kod otporničke rezonancije, u kom je pak slučaju struja uvijek ista, bez obzira na ω .

Komponentne struje kod prvog slučaja rezonancije, t. j. uz ω_0 , bit će:

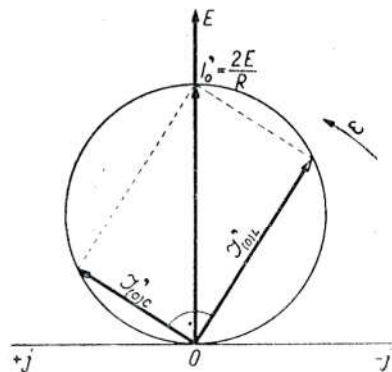
$$I_{(0)L} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} + j\omega_0 L} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} + j\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$I_{(0)C} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega_0 C}} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} - j\omega_0 L} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} - j\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

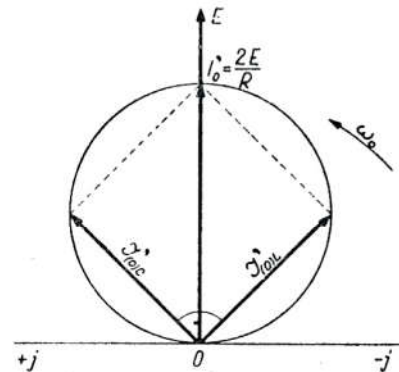
Iz gornjega slijedi, da je $I_{(0)L} = I_{(0)C}$; verzori su simetrični obzirom na $\mathcal{E}$, a njihovi vršci nalaze se na obim polukružnicama promjera $\frac{2\mathcal{E}}{R}$. Stavimo li $\mathcal{E}$ u realnu os, to će verzorski prikaz biti prema sl. 236., gdje su nacrtana dva rezonantna slučaja za dvije različite kombinacije L i C , uz isti R . Najveća moguća rezonantna struja bit će kod $L \rightarrow 0$, ili $C \rightarrow \infty$, ili $L \rightarrow 0$, uz istodobno $C \rightarrow \infty$, dakle kod $\rho = 0$, i iznositi će $\frac{4E}{R}$.



Slika 237.



Slika 238.



Slika 239.

Najmanja moguća rezonantna struja bit će kod $L \rightarrow \infty$, ili $C \rightarrow 0$, ili $L \rightarrow \infty$, uz istodobno $C \rightarrow 0$, dakle, kod $\rho = \infty$, i iznositi će nula.

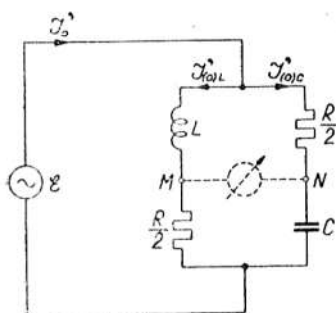
Struja kod $\rho = \frac{1}{2}$, t. j. kod otporničke rezonancije kod nepromjenjenog R , nalaziti će se, prema tome, upravo u sredini između maksimalne i minimalne rezonantne struje, što prikazuje sl. 237.

Vidimo, dakle, da je izraz kod $\rho = \frac{1}{2}$ djelišnica rezonantnih struja, i to ne samo po njihovoj veličini, nego — kako ćemo kasnije saznati — i po njihovom značenju prema svim drugim nerezonantnim strujama.

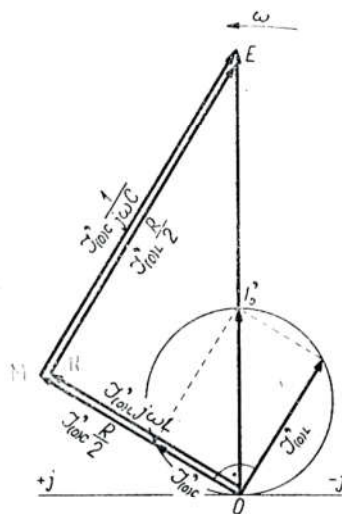
Komponentne struje u slučaju otporničke rezonancije, t. j. kod $\frac{R}{2} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, odnosno $C = \frac{4L}{R^2}$, bit će:

$$\mathcal{I}'_{(0)L} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} + j\omega L}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_{(0)C} &= \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega \frac{4L}{R^2}}} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} + \frac{R^2}{4j\omega L}} = \frac{\mathcal{E}j\omega L}{\frac{R}{2} \left(j\omega L + \frac{R}{2} \right)} = \\ &= \frac{2}{R} j\omega L \mathcal{I}'_{(0)L}. \end{aligned}$$



Slika 240.



Slika 241.

Iz ovoga slijedi, da su sada prema sl. 238. komponentne struje međusobno okomite, i radi toga je razumljivo, da je uzevši $\mathcal{E} = E$ njihova rezultanta uvijek jednaka $\frac{2E}{R}$. Međusobno okomite komponente, koje bi ispunjavale i uvjet međusobne simetrije, dakle, i uvjet za prvu alternativu rezonancije, prikazane su na sl. 239. Kako je i tamo $\mathcal{E} = E$, bit će:

$$\mathcal{I}'_{(0)L} = \frac{E}{\frac{R}{2} + j\omega_0 L} = \frac{E}{\frac{R}{2} + j\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Budući da fazni kut između struje i napona iznosi $\frac{\pi}{4}$, apsolutne vrijednosti realnog i imaginarnog dijela kompleksnog otpora moraju biti međusobno jednake, t. j. $\frac{R}{2} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, što je, međutim, uvjet otporničke rezonancije.

Ako bismo prema sl. 240. izmijenili redoslijed parametara u jednoj grani, dobili bismo Maxwellov most. Uz uvjet, da je $\frac{R}{2} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, bit će komponentne struje $\mathcal{I}'_{(0)L}$ i $\mathcal{I}'_{(0)C}$ — kako znamo — međusobno uvijek okomite, i most će tada biti uvijek u ravnoteži. Sl. 241. pokazuje verzorski prikaz, te je prema njemu vidljivo, da su točke M i N na istom potencijalu.

Uvjet za ravnotežu mosta upravo je okomičnost struja $\mathcal{I}'_{(0)L}$ i $\mathcal{I}'_{(0)C}$, jer se tada trokuti, koji su sastavljeni iz padova napona i narinutog napona, kao pravokutni trokuti s istom hipotenuzom i jednakim oštrim kutovima, međusobno pokrivaju.

Međutim, da bi struje bile međusobno okomite, nije bezuvjetno potrebno, da oba omska otpora budu jednaka. Ako je njihov odnos prema jednadžbi $R_L R_C = \frac{L}{C}$, onda je okomičnost već postignuta. Tada imamo uz $\mathcal{E} = E$:

$$\mathcal{I}_C = \frac{E}{R_C + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{E}{\frac{1}{R_L} \frac{L}{C} + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega C R_L \frac{E}{j\omega L + R_L} = j\omega C R_L \mathcal{I}_L.$$

Prema tome, i u tom slučaju kod svakog ω postoji okomičnost struja $\mathcal{I}_L$ i $\mathcal{I}_C$, dakle, i ravnoteža mosta. Razlika prema mostu s jednakim omskim otporima sastojala bi se u tome, što sada vanjska struja $\mathcal{I} = \mathcal{I}_C + \mathcal{I}_L$ nije konstantna, nego se mijenja sa svakim ω , i ima prema naponu izvjestan fazni pomak, dok je kod mosta s jednakim omskim otporima konstantna, t. j. $\frac{2E}{R}$ s fazom nula.

γ) Promotrit ćemo sada sve moguće verzorske dijagrame struja kod jednakih omskih otpora. Do sada smo se, naime, bavili samo rezonantnim strujama, a sada ćemo proučiti i ostale nerezonantne struje, koje nastaju pod raznim okolnostima.

Općeniti izraz za struju glasi, kako je već poznato,

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{E} \left(\frac{1}{\frac{R}{2} + j\omega L} + \frac{1}{\frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega C}} \right) = \mathcal{E} \left(\frac{1}{\frac{R}{2} + j\omega L \frac{\omega_0}{\omega_0}} + \frac{1}{\frac{R}{2} - \frac{j}{\omega C} \frac{\omega_0}{\omega_0}} \right) = \\ &= \mathcal{E} \left(\frac{1}{\frac{R}{2} + jz\omega_0 L} + \frac{1}{\frac{R}{2} - j\frac{1}{\omega_0 C} \frac{1}{z}} \right) = \mathcal{E} \left(\frac{1}{\frac{R}{2} + jz\omega_0 L} + \frac{1}{\frac{R}{2} - j\omega_0 L \frac{1}{z}} \right) = \end{aligned}$$

$$= \mathcal{E} \frac{R + j\sqrt{\frac{L}{C}} \left(z - \frac{1}{z}\right)}{\left(\frac{R}{2} + jz\sqrt{\frac{L}{C}}\right) \left(\frac{R}{2} - j\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{z}\right)}$$

Ako taj izraz pomnožimo sa

$$\frac{4 \sqrt{\frac{C}{L}} \sqrt{\frac{C}{L}}}{2 \sqrt{\frac{C}{L}} 2 \sqrt{\frac{C}{L}}} = 1,$$

dobivamo:

$$\mathcal{J} = 4 \mathcal{E} \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{R \sqrt{\frac{C}{L}} + j \left(z - \frac{1}{z}\right)}{\left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + 2jz\right) \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} - 2j \frac{1}{z}\right)}$$

Ako uvedemo $\sqrt{\frac{C}{L}} = a$, te $\left(z - \frac{1}{z}\right) = v$, dobivamo:

$$\mathcal{J} = 4 \mathcal{E} a \frac{Ra + jv}{R^2 a^2 + 2jRav + 4},$$

odnosno ako proširimo nazivnik s $v^2 - v^2$, bit će u nazivniku kvadrat brojnika plus $v^2 + 4$. Radi toga je, konačno:

$$\mathcal{J} = 4 \mathcal{E} a \frac{1}{Ra + jv + \frac{v^2 + 4}{Ra + jv}}.$$

Ako u ovu formulu stavimo $v = 0$, dobit ćemo naš poznati izraz za rezonantnu struju.

Kako vidimo, uvođenjem odnosa $a = \sqrt{\frac{C}{L}}$, smanjili smo broj promjenljivih veličina od četiri na tri, t. j. R , a i v , ili z , jer sa z možemo izraziti v . Mi ćemo proučavati verzorske dijagrame struja na tri načina i to 1.) kod nepromjenljivog R , mijenjajući z od 0 do ∞ , uz čvrsti a_1 , a_2 , a_3 , i t. d. i zatim mijenjajući a od 0 do ∞ , uz čvrsti z_1 , z_2 , z_3 , i t. d. 2.) kod nepromjenljivog a , mijenjajući z od 0 do ∞ , uz čvrsti R_1 , R_2 , R_3 , i t. d., i zatim, mijenjajući R od 0 do ∞ , uz čvrsti z_1 , z_2 , z_3 , i t. d. 3.) kod nepromjenljivog z , mijenjajući a od 0 do ∞ , uz čvrsti R_1 , R_2 , R_3 , i t. d., i zatim, mijenjajući R od 0 do ∞ , uz čvrsti a_1 , a_2 , a_3 , i t. d.

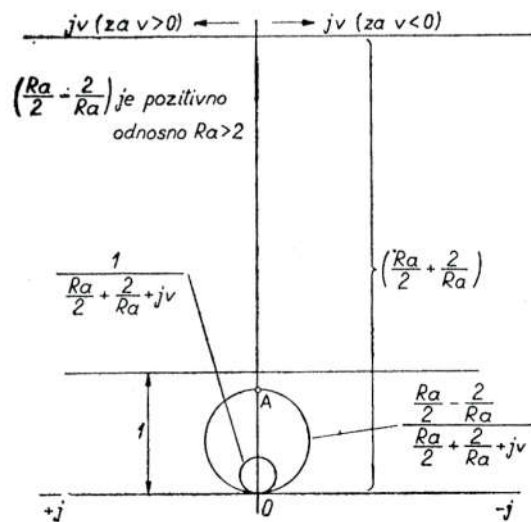
Kod svakog od ta tri načina dobit ćemo, prema navedenom, po dva jata krivulja, koja, položena na crtežu jedno preko drugoga, daju svako rješenje, koje zadovoljava za dvije povoljno odabrane veličine, ali treća veličina je kod toga za čitav crtež uvijek ista. Znači, dakle, kad bismo htjeli pronaći struju za svaku povoljnu kombinaciju svih triju veličina, t. j. da rješenje kruga bude

univerzalno, trebali bismo neizmjereno mnogo crteža. Međutim, kasnije ćemo pokazati mogućnost takvog univerzalnog rješenja na samo jednom crtežu uz dva jata krivulja.

Zbog lakšeg promatranja, prednju formulu ćemo malo preinačiti. Proširit ćemo brojnik dodavanjem i istovremenim odbijanjem istog broja, t. j.

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= 4 \mathcal{E} a \frac{Ra + jv}{R^2 a^2 + 2Ra jv + 4} = \frac{4 \mathcal{E} a \frac{Ra}{2} + jv + \frac{2}{Ra} + \frac{Ra}{2} - \frac{2}{Ra}}{\frac{Ra}{2} + jv + \frac{2}{Ra}} = \\ &= \frac{2 \mathcal{E}}{R} \left[1 + \frac{\frac{Ra}{2} - \frac{2}{Ra}}{\frac{Ra}{2} + \frac{2}{Ra} + jv} \right]. \end{aligned}$$

Budući da napon stavljamo obično u realnu os, pisat ćemo E umjesto $\mathcal{E}$.



Slika 242.

Drugi adend u zagradi ima kod $v = 0$, uz $Ra \rightarrow \infty$, ekstremnu vrijednost 1, dok kod $v = 0$, uz $Ra \rightarrow 0$, ima ekstremnu vrijednost -1 . Znači da tada nastupaju uz čvrsti R i ekstremne vrijednosti svih struja, koje su ujedno i ekstremne rezonantne vrijednosti, t. j. $\frac{4E}{R}$, odnosno 0.

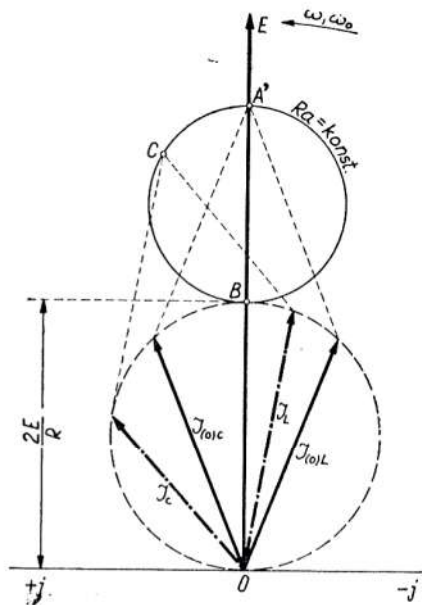
1.) Prvi slučaj: R se ne mijenja. Kod nekog čvrstog a_1, a_2, a_3 , i t. d. mijenjamo z od 0 do ∞ , odnosno v od $-\infty$ do $+\infty$.

Drugi adend u zagradi navedene formule predstavlja inverziju pravca $\left(\frac{Ra}{2} + \frac{2}{Ra} + jv\right)$, t. j. kružnicu, s time, da se svaka invertirana vrijednost još množi s istim brojem, t. j. s $\left(\frac{Ra}{2} - \frac{2}{Ra}\right)$, dakle, zadržava isti kut, a

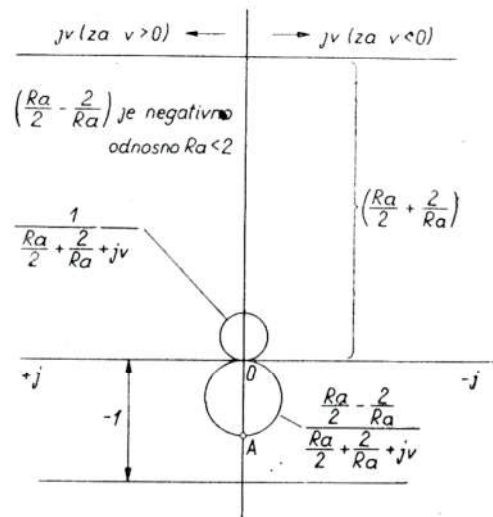
kako se sve vrijednosti množe istim faktorom, znači, da opet dobivamo kružnicu prema sl. 242. Kod toga smo pretpostavili, da je $\left(\frac{Ra}{2} - \frac{2}{Ra}\right)$ pozitivno, odnosno

$$Ra = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{\rho} > 2 \quad \text{ili} \quad \rho < \frac{1}{2}.$$

Točka kružnice, označena s A , odgovara $v=0$, dakle, rezonanciji u užem smislu. Točkama kružnice treba pribrojiti 1, što znači da kružnicu treba podići za 1 iznad imaginarne osi i onda sve pomnožiti s $\frac{2E}{R}$, te tako dobivamo sl. 243.



Slika 243.



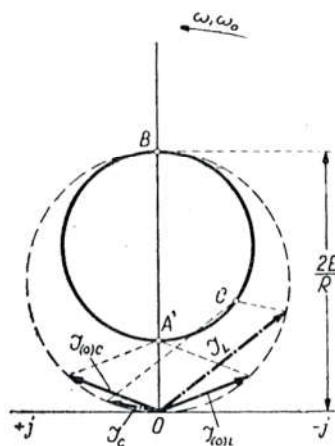
Slika 244.

Točka A' odgovara točki A , t. j. rezonanciji u užem smislu. Vidimo, da je ovdje rezonantna struja u užem smislu najveća moguća struja. U opoziciji od A' nalazi se točka B , koja pokazuje rezonantnu struju u širem smislu $\frac{2E}{R}$, a koja je sada najmanja moguća struja. Točka C označuje neku nerezonantnu struju kod povoljnog $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

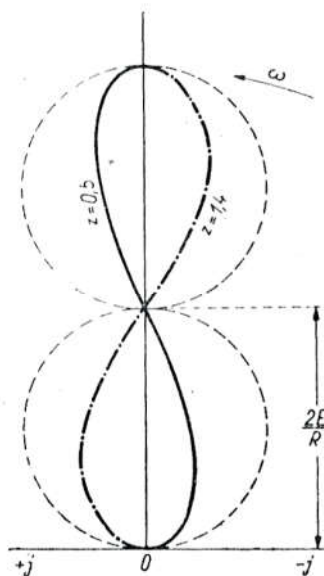
Kod $Ra = 2$, odnosno $\rho = \frac{1}{2}$, vrijednost drugog adenda u zagradi uvijek je nula, i prema tome kružnica je degenerirala u jednu točku, odnosno vrijednost svih struja jednaka je $\frac{2E}{R}$, što znači, da postoji otpornička rezonancija.

Kod nekog drugog $Ra < 2$, odnosno $\rho > \frac{1}{2}$, postaje $\left(\frac{Ra}{2} - \frac{2}{Ra}\right)$ negativno. To znači, da množimo invertirane vrijednosti točaka pravca s negativnim faktorom, i prema tome je kružnica, koja predstavlja drugi adend u

zagradi, postala negativna (prema sl. 244.). Daljnje operacije su iste kao i prije, t. j. pribraja se 1 i množi s $\frac{2E}{R}$, te dobivamo sl. 245. Ovdje je rezonantna struja u užem smislu najmanja moguća struja, a njoj u opoziciji je rezonantna



Slika 245.

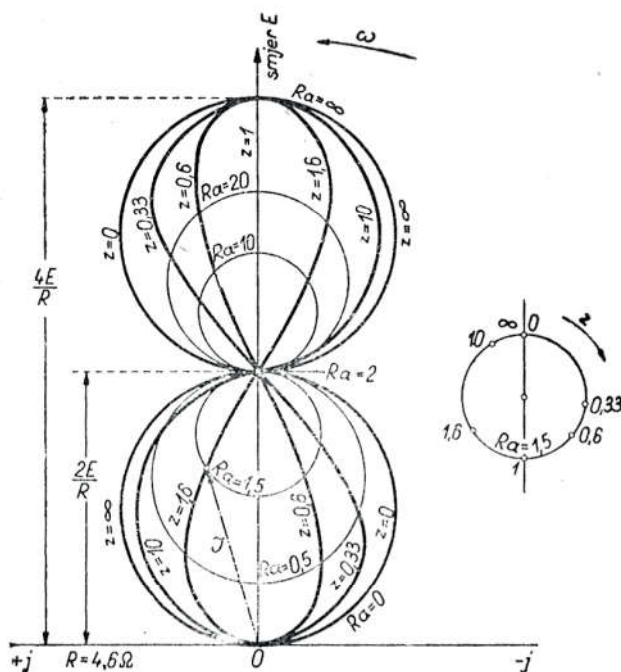


Slika 246.

struja u širem smislu, koja je sada najveća struja. Imamo, dakle, dva područja, t. j. $\rho < \frac{1}{2}$, kad je rezonantna struja u užem smislu najveća moguća struja, te zatim $\rho > \frac{1}{2}$, kad je najmanja moguća struja. Djelišnica tih dvaju područja je otpornička rezonancija.

Na taj način dobili bismo prvo jato krivulja, koje su, kako vidimo, kružnice. Drugo jato dobili bismo, ako kod nekog čvrstog z_1, z_2, z_3 , i t. d. (ili v_1, v_2, v_3 , i t. d.) mijenjamo a od 0 do ∞ . Sl. 246. prikazuje dvije takve krivulje.

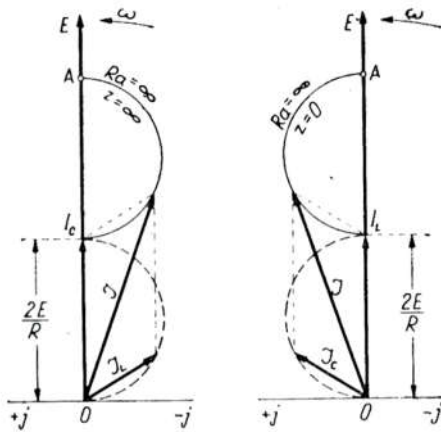
Oba jata, položena jedno na drugo, pokazuje sl. 247. Unešena je struja kod $Ra = 1,5$, te $z = 1,6$, a na istom krugu $Ra = 1,5$, koji je i posebno nacrtan, vidi se smjer porasta z od 0 do ∞ . Ako vrijednosti amplituda unesemo u koordinatni sistem u ovisnosti od z , dobivamo sl. 248.



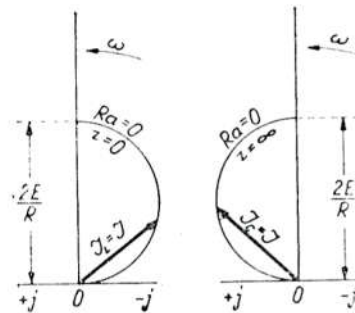
Slika 247.

odnosno $z = \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$. Kod $L \rightarrow 0$ je $\mathcal{J}_L = \frac{2E}{R}$, dok se vršak od $\mathcal{J}_C$ nalazi na polukružnici prema istoj slici, desno. Pritom je $\omega_0 \rightarrow \infty$, odnosno $z \rightarrow 0$. Točka A vrijedi za $C \rightarrow \infty$, uz istodobno $L \rightarrow 0$.

Izraz $R\sqrt{\frac{C}{L}}$ ide prema nuli kod $C \rightarrow 0$, ili $L \rightarrow \infty$, ili ako vrijedi oboje. Kod $C \rightarrow 0$ je $\mathcal{J}_C = 0$, te imamo samo $\mathcal{J}_L = \mathcal{J}$ prema sl. 250., lijevo. Pritom



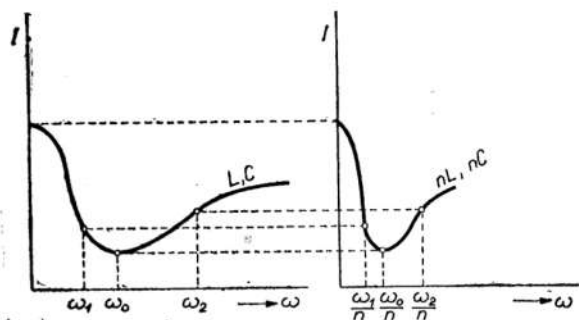
Slika 249.



Slika 250.

je $\omega_0 \rightarrow \infty$, odnosno $z \rightarrow 0$. Kod $L \rightarrow \infty$ imamo samo $\mathcal{J}_C = \mathcal{J}$ prema istoj slici, desno. Pritom je $\omega_0 \rightarrow 0$, odnosno $z \rightarrow \infty$. Točka 0 vrijedi za $C \rightarrow 0$, uz istodobno $L \rightarrow \infty$.

Pojedini krug vrijedi za neki čvrsti $a = \sqrt{\frac{C}{L}} = \sqrt{\frac{nC}{nL}}$. U prvom slučaju je $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}$, a u drugom $\frac{1}{n\sqrt{CL}} = \frac{\omega_0}{n}$. Prema tome bismo u koordinatnom sistemu, u ovisnosti od kružne frekvencije, dobili za oba slučaja dijagrame



Slika 251.

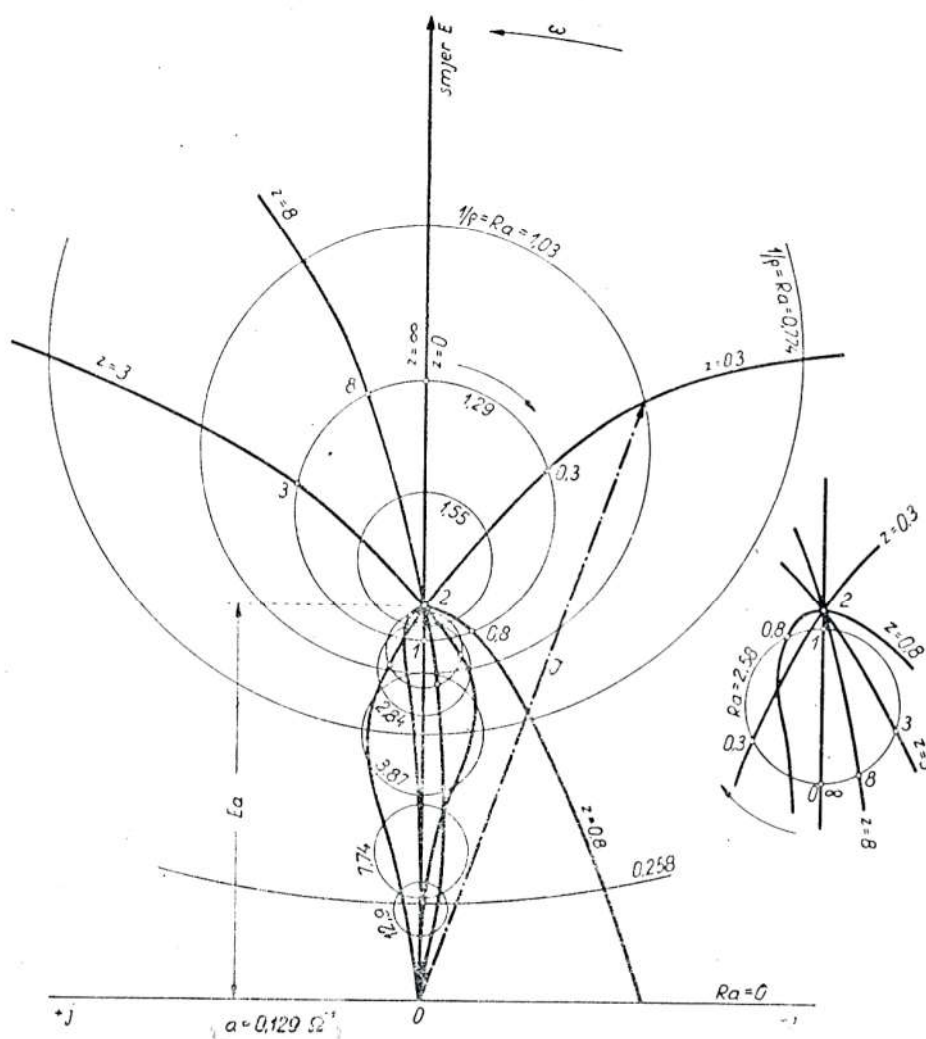
prema sl. 251., t. j. u drugom slučaju nastupaju iste vrijednosti kod $\frac{\omega_r}{n}$, kao u prvom slučaju kod ω_r .

Na sl. 247. nismo bili sasvim dosljedni, jer smo kružnice umjesto s a označili s Ra , no kod toga je uzeto, da se veličina Ra mijenja radi promjene veličine a , dok je R uvijek isti. Međutim, ako bismo struju izrazili u iznosima

$\frac{2E}{R}$ za bilo koji R , t. j. ako je reduciramo na tu vrijednost, onda naš verzorski dijagram postaje univerzalan, jer tako reducirana struja zavisi o umnošku Ra i v .

2.) Drugi slučaj: a se ne mijenja. Kod nekog čvrstog R_1 , R_2 , R_3 i t. d. mijenjamo z od 0 do ∞ , odnosno v od $-\infty$ do $+\infty$.

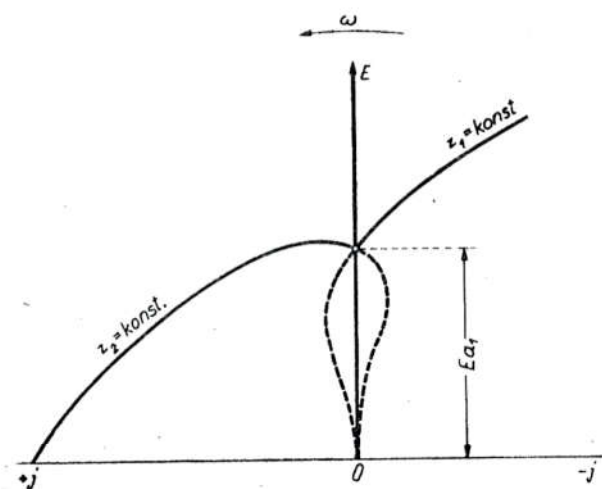
Izraz u zagradi naše preuređene formule dat će potpuno istu sliku kao kod slučaja 1.), dakle, snop kružnica vezanih u točki vrijednosti 1 iznad ishodišta. Kružnice za $Ra > 2$, imat će točku za $v=0$ iznad te točke 1, a maksimalna vrijednost točke za $v=0$ iznosi 2. Kružnice za $Ra < 2$ imat će točku za $v=0$ ispod točke 1, a minimalna vrijednost točke za $v=0$ je 0.



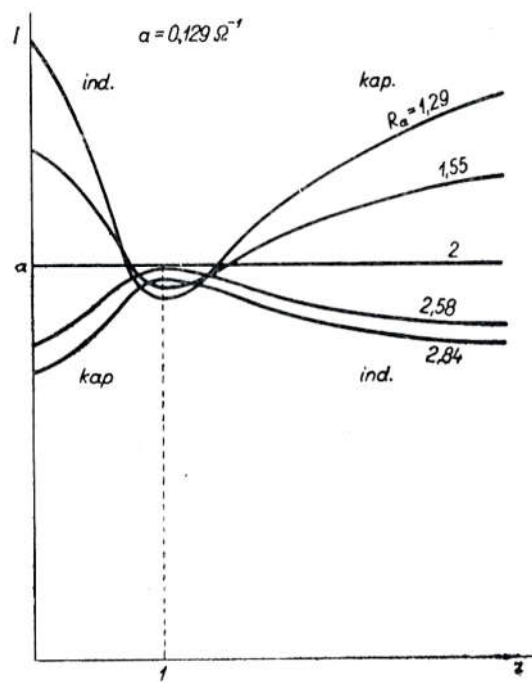
Slika 252.

Međutim, kod množenja s faktorom $\frac{2E}{R}$, nastupa razlika prema slučaju 1.). Dok su se tamo sve kružnice množile s istim faktorom, jer je R bio nepromjenljiv, sada se svaka kružnica množi sa svojim pripadnim faktorom $\frac{2E}{R_1}$, $\frac{2E}{R_2}$, $\frac{2E}{R_3}$ i t. d., te prema tome više ne ostaje ista slika vezanih kružnica u jednoj točki u drugom mjerilu, nego se te kružnice sada razaspu kako to pokazuje sl. 252. Kružnice za $Ra < 2$ leže jedna unutar druge, a posljednja

je ona za $Ra = 2$, koja je degenerirala u točku $Ea = \frac{2E}{R}$, budući da je tada $a = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{2}{R}$. Točka za rezonantnu struju u užem smislu je najniža točka, a točka za rezonantnu struju u širem smislu je njena opoziciona, t. j. najviša točka kružnice. Na slici nacrtan je kod kruga $Ra = 1,29$ smjer ophoda od $z = 0$ do $z = \infty$, te označene točke za $z = 0, 0,3, 0,8, 1, 3, 8$ i ∞ .



Slika 253.



Slika 254.

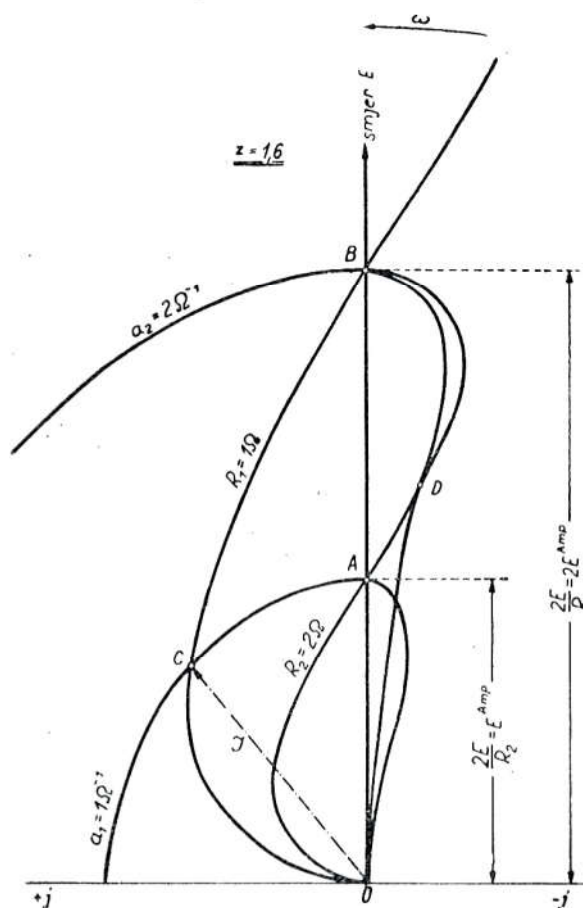
Kružnice za $Ra > 2$ nalaze se sve ispod točke Ea , i nisu jedna u drugoj. Njihova najviša točka je rezonantna struja u užem smislu, a njoj u opoziciji je najniža točka, t. j. rezonantna struja u širem smislu. Ovdje dobro vidimo, da iako rezonantne struje u širem smislu postoje kod svakog Ra , to kod svakog Ra ne postoji ujedno i otpornička rezonancija, nego samo kod $Ra = 2$. U slučaju 1.) nije ta činjenica tako uočljiva, baš zbog toga, što je snop kružnica vezan u jednoj točki, i zato smo tamo naglasili, da je ta točka „izvor“, t. j. da tamo sve krivulje z ne sijeku kružnice, osim jedne kružnice, koja je degenerirala u točku.

Sa strane je u uvećanom mjerilu nacrtan krug za $Ra = 2,58$, koji zbog prenatrpanosti nije na glavnoj slici označen brojem, da bi se vidio isti smjer ophoda kao i prije, počevši od $z = 0$ do $z = \infty$.

Drugo jato krivulja dobili bismo, ako kod čvrstog z_1, z_2, z_3 i t. d. mijenjamo R od 0 do ∞ . I to je jato vidljivo u gornjoj slici. Dvije krivulje konstantnog z , za izvjestan a , zasebno su nacrtane na sl. 253. Sve te krivulje konstantnoga z sijeku se, naravno, u točki otporničke rezonancije, koja ih dijeli u dva područja. Puno izvučeni dio tih krivulja sijече kružnice za $Ra < 2$, a crtani dio kružnice za $Ra > 2$. Međutim, kako se to naročito dobro vidi na već spomenutom uvećanom crtežu za $Ra = 2,58$ na sl. 252., taj dio linija konstantnoga z sijече svaku pripadnu kružnicu dvaput. Unatoč tome, ne može doći do zabune koje

sjecište vrijedi, jer uz logični smjer ophoda, koji se nada je sam od sebe, točke moraju slijediti u progresivnom slijedu — kod nas je taj slijed 0, 0,3, 0,8, 1, 3, 8, ∞ .

Na sl. 254. prikazane su u koordinatnom sistemu amplitude struja u ovisnosti od z , za neke vrijednosti Ra prema sl. 252.



Slika 255.

Ako analogno kao kod verzorskog dijagrama u prethodnoj točki kod sadašnjeg verzorskog dijagrama na sl. 252. struju izrazimo u iznosima veličine Ea , onda i taj verzorski dijagram postaje univerzalan, jer tako reducirana struja zavisi o umnošku Ra i v .

3.) Treći slučaj: z , odnosno v , ne mijenja se. Kod čvrstog R_1, R_2, R_3 i t. d. mijenjamo a od 0 do ∞ , a zatim kod čvrstog a_1, a_2, a_3 i t. d. mijenjamo R od 0 do ∞ . Obje vrste krivulja, koje su nam već poznate kod prijašnjih slučajeva, vidimo na sl. 255., i to za $z = 1,6$ (t. j. $\approx v = 1$).

Ovdje su rezonantne samo one struje, kod kojih je $Ra = 2$, t. j. kad nastupa otpornička rezonancija, koja daje rezonantnu struju za svaki nesklad. Prema tome, ne će na pr. točka B vrijediti za $a_2 = 2\Omega^{-1}$ i $R_2 = 2\Omega$, nego za $a_2 = 2\Omega^{-1}$ i $R_1 = 1\Omega$, dok će za $a_2 = 2\Omega^{-1}$ i $R_2 = 2\Omega$ vrijediti točka D.

Ovaj verzorski dijagram ne može biti univerzalan, jer vrijedi samo za jedan z .

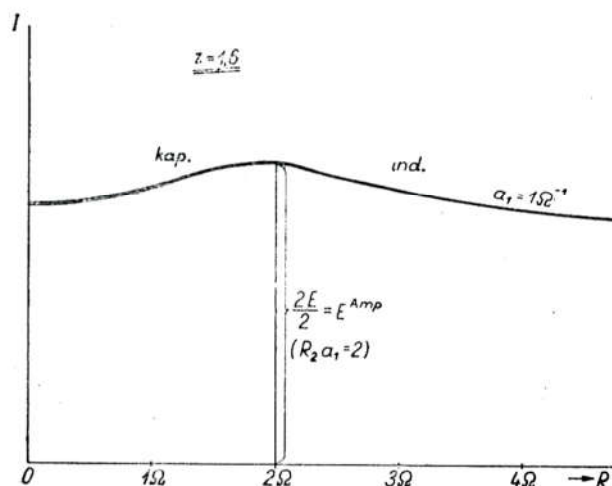
Sl. 256. prikazuje u koordinatnom sistemu ovisnost amplitude struja od R , za $a_1 = 1\Omega^{-1}$, kod konstantnog nesklada $z = 1,6$ prema sl. 255.

Slika 257. prikazuje konstrukciju izraza za struju. Počeli smo konstruirati nacrtavši najprije $(Ra + jv)$. Množenjem njegove inverzije s $(v^2 + 4)$, dobivamo izraz $\frac{v^2 + 4}{Ra + jv}$. Pribrajanjem $(Ra + jv)$ te invertiranjem zbroja i množenjem inverzije s $4Ea$, dobivamo konačno verzor struje

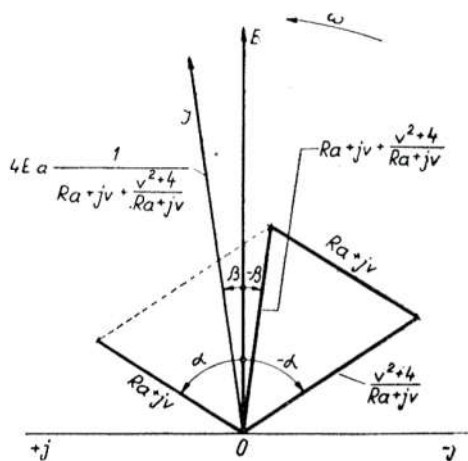
$$\mathcal{I} = 4Ea \frac{1}{Ra + jv + \frac{v^2 + 4}{Ra + jv}}$$

8.) Univerzalni verzorski dijagram struja reduciranih na rezonantnu struju kod jednakih omskih otpora. U toku našeg prijašnjeg izvođenja općenitog izraza za struju, došli smo do slijedeće međuformule:

$$\mathcal{I} = 4 \mathcal{E} \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{R \sqrt{\frac{C}{L}} + j \left(z - \frac{1}{z} \right)}{\left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + 2jz \right) \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} - 2j \frac{1}{z} \right)}$$



Slika 256.



Slika 257.

Uvođenjem $\frac{1}{\rho} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$, te dijeljenjem brojnika i nazivnika s 4, bit će dalje:

$$\mathcal{I} = \mathcal{E} \frac{1}{\rho R} \frac{\frac{1}{\rho} + jv}{\left(\frac{1}{2\rho} + jz \right) \left(\frac{1}{2\rho} - \frac{j}{z} \right)}$$

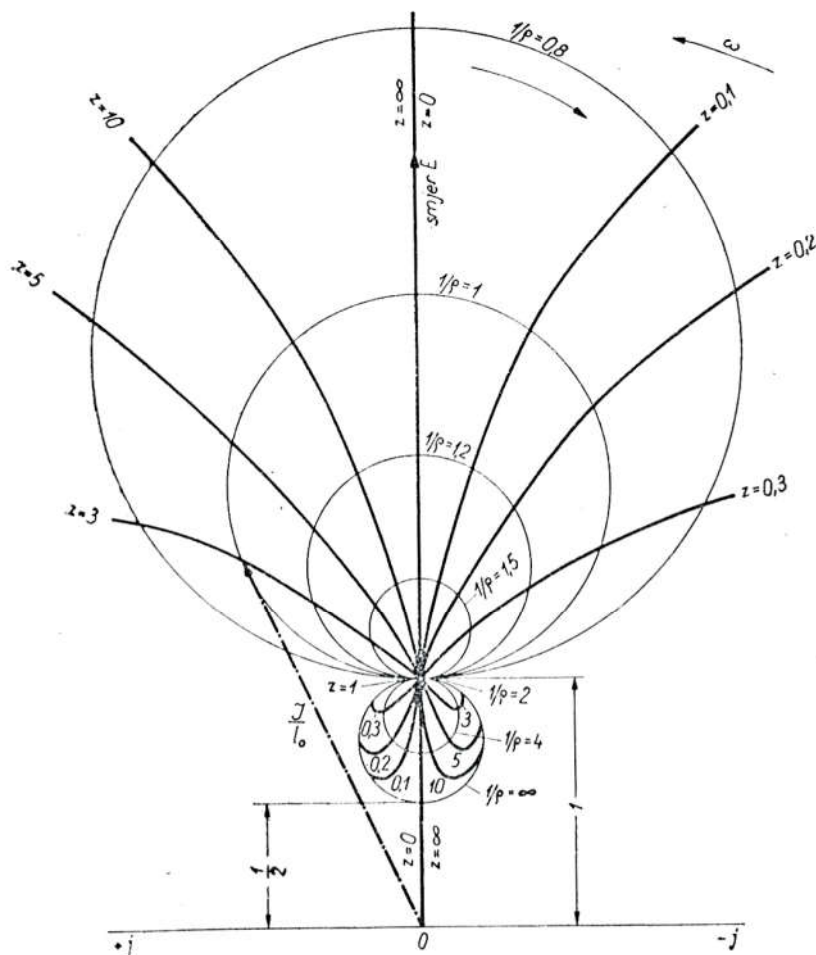
Budući da je rezonantna struja — kako nam je poznato — dana izrazom

$$\mathcal{I}_0 = \frac{\mathcal{E}}{R \left(\frac{1}{4} + \rho^2 \right)},$$

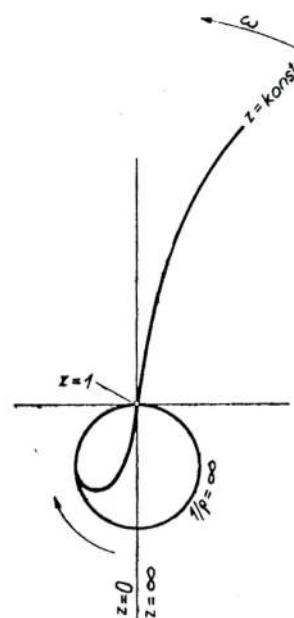
to će biti:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}_0} &= \frac{\frac{1}{4} + \rho^2}{\rho} \frac{\frac{1}{\rho} + jv}{\frac{1}{4\rho^2} + \frac{zj}{2\rho} - \frac{j}{2\rho z} + 1} = \frac{(1 + 4\rho^2)(1 + j\rho v)}{1 + 4\rho^2 + 2j\rho v} = \\ &= \frac{1 + j\rho v}{1 + \frac{2j\rho v}{4\rho^2 + 1}} \end{aligned}$$

Dobili smo, dakle, formulu, koja sadrži samo dvije veličine, koje se mijenjaju, t. j. ρ i v . Sada ne dobivamo struju, nego odnos $\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}_0}$. Znači, da je sačuvan fazni kut između struje i napona, budući da je $\mathcal{I}_0$ u fazi s $\mathcal{E}$, a kako nam je izraz za $\mathcal{I}_0$ poznat, lako možemo u svakom slučaju izračunati $\mathcal{I}$, odnosno vrijednost amplitude I .



Slika 258.

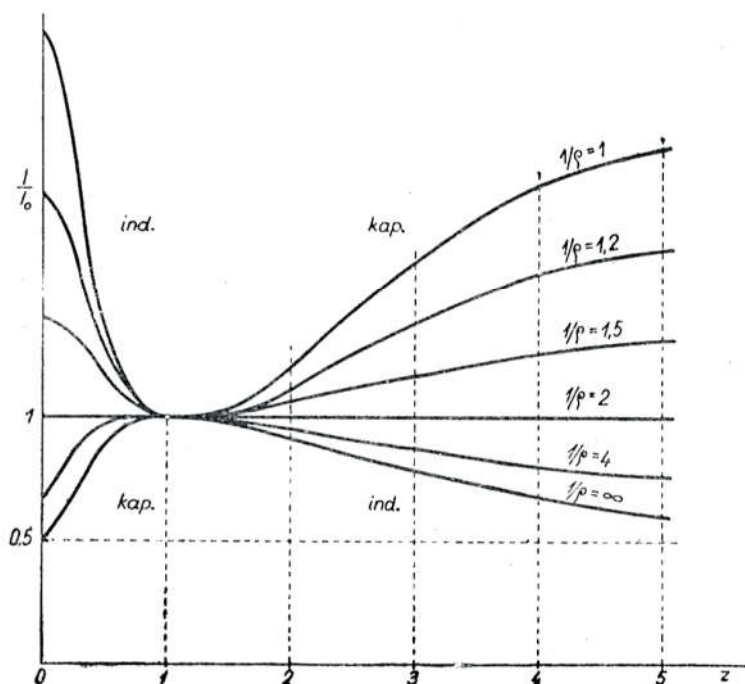


Slika 259.

Za promatranje preinačit ćemo dobivenu formulu dodavanjem i oduzimanjem istog broja u brojniku, t. j.

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}_0} &= \frac{(1 + 4\rho^2)(1 + j\rho v)}{1 + 4\rho^2 + 2j\rho v} = \frac{1 + 4\rho^2}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + j\rho v + 2\rho^2 - 2\rho^2}{\frac{1}{2} + 2\rho^2 + j\rho v} = \\ &= \left(\frac{1}{2} + 2\rho^2 \right) \left(1 + \frac{\frac{1}{2} - 2\rho^2}{\frac{1}{2} + 2\rho^2 + j\rho v} \right). \end{aligned}$$

To je u principu ista formula kao i za $\mathcal{J}$ u odsječku γ). Prema tome će, kako to pokazuje sl. 258., verzorski dijagrami odnosa struja i ovdje biti kružnice, i to međusobno vezane u točki za $v=0$, odnosno $z=1$. U toj točki vrijednost izraza za bilo koji ρ iznosi 1, što je i razumljivo, jer rezonantna struja, podijeljena sama sobom, mora u svakom slučaju dati 1.



Slika 260.

Za $\rho = \frac{1}{2}$, vrijednost izraza za bilo koji v bit će također 1, t. j. kružnica degenerira u točku, jer kod otporničke rezonancije svaka je struja rezonantna. Nadalje opet vidimo, da je vrijednost kod $\rho = \frac{1}{2}$ djelišnica dviju grupa kružnica, t. j. kod $\rho < \frac{1}{2}$ rezonantna struja u užem smislu je najveća, a kod $\rho > \frac{1}{2}$ je najmanja moguća struja.

Kod $v = \pm \infty$, bit će $\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = \frac{1}{2} + 2\rho^2$, koji izraz za $\rho \rightarrow 0$ ide prema $\frac{1}{2}$. To je najmanji mogući odnos $\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0}$, što se vidi i na navedenoj slici, a vrijedi za rezonantne struje u širem smislu. Kako se na slici rezonantni nesklad nalazi u realnoj osi, odnos je $\frac{\mathcal{J}}{I_0}$. Da vidimo поближе kad nastupa najmanji odnos! U slučaju rezonancije je

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Prema tome, ako je L vrlo maleno, ili C vrlo veliko, ili ako vrijedi oboje, t. j. L vrlo maleno uz istodobno C vrlo veliko, reaktivni otpori obaju grana bit će maleni prema omskim otporima tako, da će se rezonantna struja u tim ekstremnim slučajevima približavati svom maksimumu $\frac{4\mathcal{E}}{R}$. Struje kod $v = \pm \infty$, odnosno rezonantne struje u širem smislu imaju, kako znamo, uvijek jednaku vrijednost, t. j. $\frac{2\mathcal{E}}{R}$. Prema tome, u tom slučaju, t. j. za $\rho \rightarrow 0$, odnos tih struja prema rezonantnoj struji ide prema $\frac{1}{2}$.

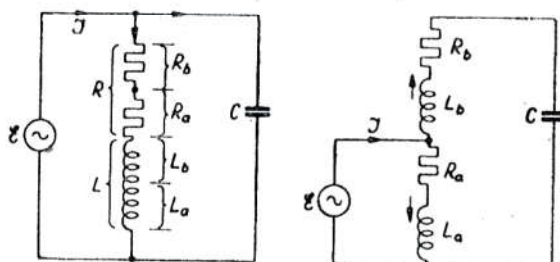
Na sl. 259. prikazana je krivulja za $z = \text{konst.}$, ako mijenjamo ρ od 0 do ∞ . Ucrtan je i smjer, kojim te krivulje slijede jedna za drugom od $z = 0$ do $z = \infty$.

Sl. 260. prikazuje odnose $\frac{I}{I_0}$ u koordinatnom sistemu, za razne $\frac{1}{\rho}$, prema verzorskim dijagramima na sl. 258., u ovisnosti od z .

c) Smanjenje rezonantnog otpora

Na sl. 261., lijevo, nacrtan je krug s dva paralelna ogranka, kakav smo proučavali pod točkom a.) ovog poglavlja, t. j. jedan ogranak sadrži samo

Slika 261.



kapacitet, a drugi svitak, koji ima i omski otpor. Ako zamislimo da se taj svitak sastoji iz dva svitka, to će jedan od njih sadržavati L_a i R_a , a drugi L_b i R_b . Uz uvjet, da je $R^2 \ll \omega^2 L^2$, znademo, da je rezonantna frekvencija

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(L_a + L_b)C}},$$

a rezonantni otpor

$$\frac{L}{RC} = \frac{L}{(R_a + R_b)C}.$$

Na istoj slici, desno, napon $\mathcal{E}$ nismo priključili na krajeve svitka, nego na krajeve jednog dijela toga svitka.

Sada će biti:

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= \mathcal{E} \left[\frac{1}{R_a + j\omega L_a} + \frac{1}{R_b + j\left(\omega L_b - \frac{1}{\omega C}\right)} \right] = \\ &= \mathcal{E} \left\{ \frac{R_a}{R_a^2 + \omega^2 L_a^2} + \frac{R_b}{R_b^2 + \left(\omega L_b - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - \right. \\ &\quad \left. - j \left[\frac{\omega L_a}{R_a^2 + \omega^2 L_a^2} + \frac{\omega L_b - \frac{1}{\omega C}}{R_b^2 + \left(\omega L_b - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Analogno kao i prije $R_a^2 \ll \omega^2 L_a^2$, odnosno $R_b^2 \ll \left(\omega L_b - \frac{1}{\omega C}\right)^2$. Radi toga će biti:

$$\mathcal{J} = \mathcal{E} \left\{ \frac{R_a}{\omega^2 L_a^2} + \frac{R_b}{\left(\omega L_b - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - j \left(\frac{1}{\omega L_a} + \frac{1}{\omega L_b - \frac{1}{\omega C}} \right) \right\}.$$

U slučaju rezonancije bit će:

$$\frac{1}{\omega_0 L_a} + \frac{1}{\omega_0 L_b - \frac{1}{\omega_0 C}} = 0,$$

odnosno

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C(L_a + L_b)}},$$

dakle, isto kao i onda kad je $\mathcal{E}$ bio priključen na krajevima cijelog svitka.

Kako je pri rezonantnoj struji

$$\left(\frac{1}{\omega_0 L_a} \right)^2 = \left(\frac{1}{\omega_0 L_b - \frac{1}{\omega_0 C}} \right)^2,$$

to slijedi:

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{E} \frac{R_a + R_b}{\omega_0^2 L_a^2},$$

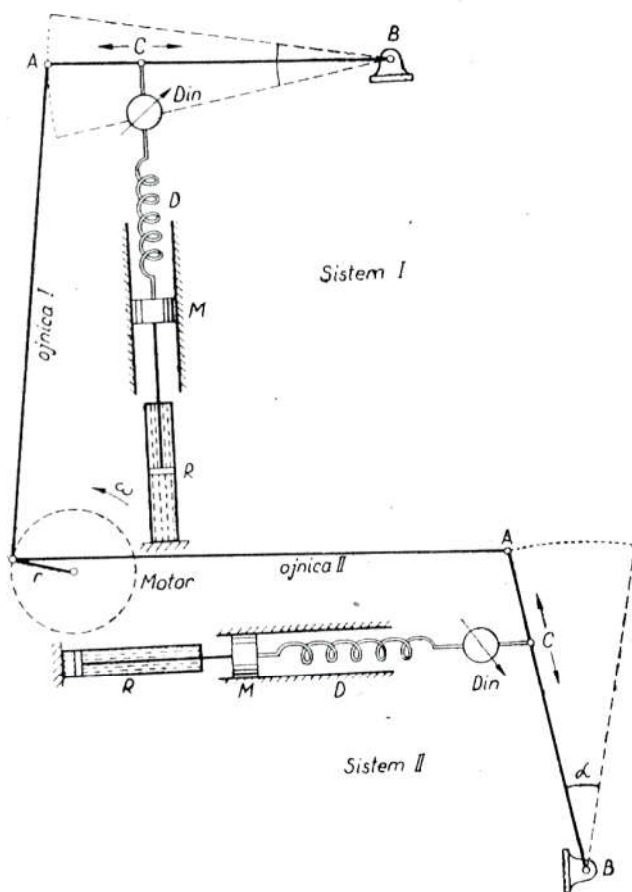
odnosno rezonantni otpor bit će:

$$\frac{\omega_0^2 L_a^2}{R_a + R_b} = \frac{1}{C(L_a + L_b)} \frac{L_a^2}{(R_a + R_b)} = \frac{L}{CR} \left(\frac{L_a}{L} \right)^2.$$

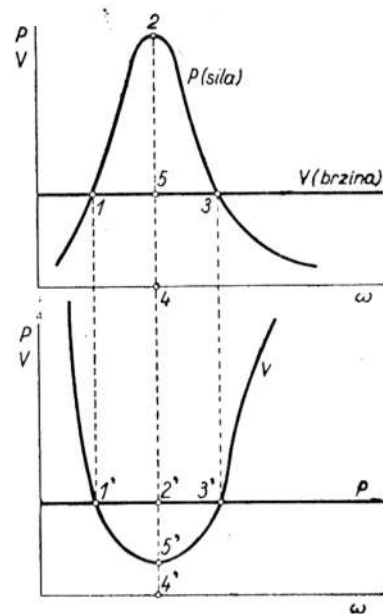
Rezonantni otpor smanjio se je sada prema prijašnjem u odnosu $\left(\frac{L_a}{L} \right)^2$.

d) Mehanički uređaj, koji ima istu frekventnu karakteristiku kao i električni krug s dva paralelna ogranka

Sl. 262. prikazuje dva jednaka titrajna sistema, koji su međusobno zaokrenuti za $\frac{\pi}{2}$, kako bi njihov uzbudni motor — što smo već objasnili kod serijske rezonancije — za vrijeme čitavog okretaja bio jednoliko opterećen. Pod pretpostavkom, da su ojnice mnogo dulje od krivaje r , te da je kut



Slika 262.



Slika 263.

zaokretanja motaka AB malen, točka A , kod konstantnog broja okretaja motora, imat će brzinu, koja će biti harmonička funkcija amplitude V , gdje je $V = r\omega$ konstantna obodna brzina čepa krivaje. Razumije se, da će i sve ostale točke motaka AB imati brzine, koje su iste harmoničke funkcije, ali

manjih amplituda, srazmjerno svojim udaljenostima od uporišta B . Ako povećamo ω na ω_p , povećat će se u istom odnosu i navedene amplitude brzina, ali na svakoj motki lako možemo naći onu točku C , koja ima upravo istu amplitudu V , koju je prije imala točka A .

Čitav uređaj treba zamisliti tako, da djeluje u horizontalnoj ravnini, da bi se što više isključilo djelovanje gravitacije na titranje masa M . Titrajni sistemi, ovješeni o točke označene s C , sastoje se iz pera D^*), mase M i otpora R . Između točke C , koja je pomična, i pera, ugrađen je kod oba sistema dinamometar označen s Din .

Kod nekog malenog početnog ω uz malenu amplitudu brzine V , neka C i A padnu zajedno. Dinamometar ne će pokazivati, da djeluje velika sila, jer je taj početni ω znatno manji od rezonantnog ω_0 , i radi toga masa M ne će jako rastezati pero D . Ako povećamo brzinu okretaja, morat ćemo se s C pomaknuti prema uporištu B , jer želimo, da točka C ima uvijek istu amplitudu brzine, t. j. V . Dinamometar će pokazivati veću silu, nego prije, a najveću, naravno, kod najvećeg istezanja pera, t. j. nešto ispred rezonancije, koja

nastupa kod $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{M}}$. Kad bismo — analogno kao i kod serijskog kruga — promatrali, radi upoređenja, na čepu krivaje brzinu i silu, koje motor proizvodi, opazili bismo, da su oni i sada općenito u međusobnom faznom pomaku. Međutim, ovdje, obratno nego kod serijskog kruga, kod malenih ω , t. j. prije rezonancije, sila prethodi brzini, pri rezonanciji je naravno i ovdje s njom u fazi, a poslije rezonancije kod velikih ω zaostaje za brzinom.

Amplituda P sile iza rezonancije postajala bi sve manja, a kod $\omega \rightarrow \infty$, t. j. kad bi se točka C neizmjenjivo približila točki B , bila bi jednaka nuli. U tom času bi, naime, masa M mirovala, jer ne može titrati neizmjenjivom frekvencijom, i prema tome se pero ne bi rastezalo, dakle, dinamometar ne bi pokazivao nikakvu silu.

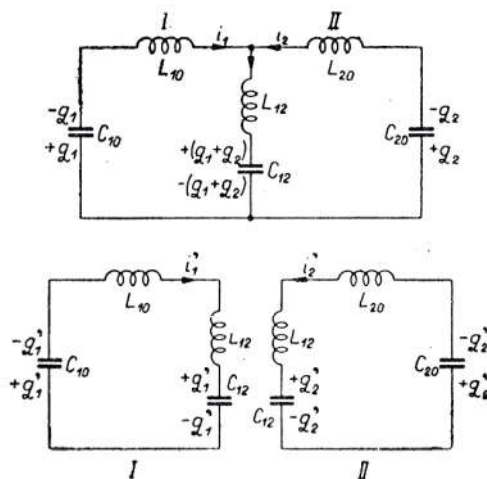
Sl. 263., gore, pokazuje tako dobivene dijagrame, t. j. brzinu i silu u ovisnosti od frekvencije. Odnose tih dijagrama kod svakog ω možemo svesti, prema istoj slici dolje, na konstantnu amplitudu P . Na pr. za točku 2 bi to bilo $42:45 = 4'2':4'5'$. Na taj način dobit ćemo istu frekventnu karakteristiku kao što je frekventna karakteristika struje kod električnog titrajnog kruga s dva paralelna ogranka, koja nam je poznata iz prethodnih promatranja.

15. POJAM VEZANIH KRUGOVA

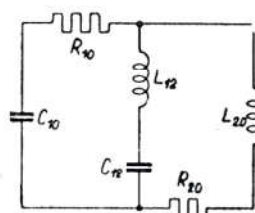
Krugovi, kojima su izvjesni parametri, ili dijelovi tih parametara, zajednički s jednim ili više drugih krugova, zovu se vezani krugovi. Najmanji broj vezanih krugova čine radi toga dva kruga. Kao vezane krugove, u potpunom smislu riječi, smatrati ćemo takve, kod kojih svaki sadrži i induktivitet (kod mehaničkih krugova masu) i kapacitet (pero). Bez prisutnosti omskog otpora, bit će pojavi neprigušeni, a uz omski otpor prigušeni. Sadrži li koji od vezanih krugova, ili oba, samo po jedan od parametara L ili C , onda su to „degenerirani“ vezani krugovi.

*) Tim slovom ovdje i ubuduće ne mislimo samo označiti dotično pero na slici, nego mu i pridružiti koeficijent elastičnosti D .

Parametri u zajedničkom veznom dijelu predstavljaju „vezanje“. Vezanje se u načelu postizava induktivitetom (kod mehaničkih krugova masom), kapacitetom (perom), otporom (mehaničkim otporom), ili bilo kojom kombinacijom dvaju različitih parametara, kao i, konačno, svim trim parametrima.



Slika 264.



Slika 265.

Krugovi, kojima ćemo se baviti, i koji su praktički najvažniji, imaju veliki $\rho = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ s malenim R , a vezanje im je induktivno, ili kapacitivno, ili kombinacija obojega, t. zv. mješovito vezanje. Otporničko vezanje nije uobičajeno, budući da bi se, zbog malenih R , u veznom dijelu nalazio tako maleni dio energije, da taj ne bi dostajao za efikasno vezanje.

Kapacitivno i induktivno, kao i mješovito vezanje, zove se još i vezanje energetskim rezervoarima, jer su kapacitet i induktivitet rezervoari energije, koju mogu vratiti natrag. Najvažnije vezanje je induktivno vezanje, t. j. transformator.

Kao mjera za veličinu vezanja nekog kruga uzima se odnos energije u veznom parametru prema cjelokupnoj istovršnoj energiji toga kruga — dakle, prema zbroju energije te vrsti u vezanom i nevezanom dijelu toga kruga. Ukoliko, prema tome, u vezanom dijelu ima više raznovrsnih parametara, dakle, i više vrsta energije, bit će i više takvih odnosa, t. j. više raznovrsnih mjera vezanja za taj krug, koje se navode zasebno svaka za sebe. Te mjere nazivamo „koeficijentima vezanja“ dotičnog kruga. Da ih odredimo, moramo zamisliti, da smo vezane krugove prethodno „razvezali“, t. j. međusobno odijelili. To je, naravno, samo zamišljeno stanje, jer se pritom uzima, da vezni dio postoji istodobno u svim razvezanim krugovima.

Sl. 264., gore, prikazuje dva vezana kruga bez narinutog napona, a ispod njih su nacrtana njihova razvezana stanja.

Koeficijenti vezanja sistema I bit će:

$$k_{1\text{ind}} = \frac{\frac{1}{2} L_{12} i_1'^2}{\frac{1}{2} L_{12} i_1'^2 + \frac{1}{2} L_{10} i_1'^2} = \frac{L_{12}}{L_{12} + L_{10}}.$$

$$k_{1\text{kap}} = \frac{\frac{1}{2} q_1'^2 \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{2} q_1'^2 \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{2} q_1'^2 \frac{1}{C_{10}}} = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{10}}}.$$

Analogno su koeficijenti vezanja sistema II

$$k_{2\text{ind}} = \frac{L_{12}}{L_{12} + L_{20}}.$$

$$k_{2\text{kap}} = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{20}}}.$$

Koeficijenti vezanja mogu imati vrijednost od 0 do 1. Kod vrijednosti 0 znači, da nema veznog elementa te vrsti, a kod vrijednosti 1 znači, da izvan veze nema elemenata te vrsti.

Mjera za veličinu međusobnog vezanja obaju sistema, zove se „faktor vezanja“ obaju krugova, koji je jednak geometrijskoj sredini dotičnih koeficijenata vezanja, t. j.

$$K_{\text{ind}} = \sqrt{k_{1\text{ind}} k_{2\text{ind}}}$$

$$K_{\text{kap}} = \sqrt{k_{1\text{kap}} k_{2\text{kap}}}.$$

Vrijednost faktora vezanja ide od 0 do 1. Ako je jedan koeficijent vezanja jednak nuli, onda je kod zatvorenih krugova s parametrima većim od 0, a manjim od ∞ , i drugi istovrsni koeficijent jednak nuli, budući da u srednjem, t. j. veznom dijelu, nema takve energije.

Vezanje u zatvorenim krugovima, kod kojeg su svi mogući faktori vezanja, t. j. $k_{n\text{ind}}$, $k_{n\text{kap}}$ i $k_{n\text{otp}}$ jednaki nuli, zove se ekstremno slabo vezanje. Ako unesemo taj postulat u diferencijalne jednadžbe vezanih krugova, automatski će izazvati raspadanje diferencijalnih jednadžbi na samostalne diferencijalne jednadžbe nevezanih krugova. Ako se energija nalazi samo u veznom dijelu, onda se takvo vezanje zove ekstremno čvrsto vezanje. Dotični faktori vezanja imaju tada vrijednost 1. Ako taj postulat unesemo u diferencijalne jednadžbe vezanih krugova, izazvat će automatski stapanje diferencijalnih jednadžbi u jednu diferencijalnu jednadžbu.

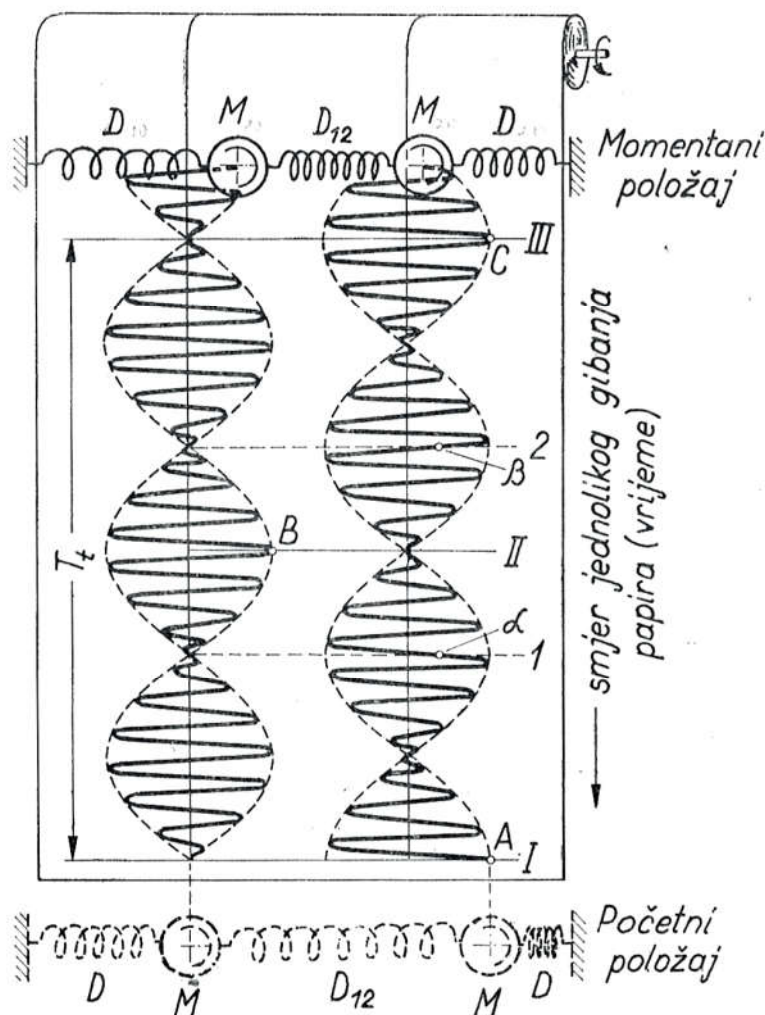
Naročito treba upozoriti, da se na pr. dva vezana kruga bez prisutnosti narinutog napona, prema sl. 265., ne mogu pretvoriti u serijski krug pronalženjem nadomjesne impedancije, jer se ne mogu primijeniti operatori $j\omega$,

odnosno $\frac{1}{j\omega}$, budući da ovdje struje i naboji nisu harmoničke funkcije. Kod narinutog harmoničkog napona to se može učiniti za stacionarno stanje, ali nadomjesni parametri za svaki novi ω imaju drugu vrijednost, jer su ovisni o ω .

16. UVODNO OPĆENITO RAZMATRANJE O NEPRIGUŠENIM VEZANIM KRUGOVIMA BEZ PRISUTNOSTI VANJSKE NARINUTE SILE (NAPONA)

a) Eksperimentalna opažanja kod mehaničkih sistema

Sl. 266. prikazuje titranje dvaju mehaničkih vezanih simetričnih sistema. U početnom položaju, koji je označen crtkano na dnu slike, desnu masu izvukli smo rukom iz položaja mirovanja do mjesta *A*. Položaji mirovanja



Slika 266.

označeni su dvama vertikalnim pravcima, dok sistemi titraju, naravno, uvijek u istom horizontalnom pravcu, t. j. tamo, gdje piše „Momentani položaj“. Prema tome, horizontala papira, označena s *I*, nalazila se je u početku upravo

u „Momentanom položaju“. Lijevu masu pridržavali smo drugom rukom u njenom srednjem položaju. Istodobno smo ispustili obje mase. Pisaljke pričvršćene na masama nacrtale su dva treptaja. U početku se je čitava energija nalazila u desnom sistemu, i to u obliku potencijalne „energije pera“. Lijevi sistem bio je „prazan“, t. j. njegova masa nalazila se je u središtu i nije imala nikakvu brzinu, dakle, derivacija njenog puta po vremenu bila je nula. U položaju II vidimo, da je sva energija prešla u lijevi sistem, te se njegova masa nalazi u točki B , ali nema brzine — znači, da čitava energija ima opet oblik „energije pera“. Desni sistem je prazan, t. j. masa je u središtu bez brzine. U položaju III imamo opet početni položaj, t. j. desni sistem ima čitavu energiju, a lijevi je prazan. U međupoložajima, na pr. u položaju 1, imaju oba sistema energiju — lijeva masa se, istina, nalazi u središtu, ali derivacija njenog puta po vremenu nije nula — dakle, lijevi sistem ima kinetičku energiju ili „energiju mase“. Desni sistem ima obje vrste energije, jer se njegova masa nalazi u točki α , i osim toga ima i brzinu. Isto vrijedi i za položaj 2. Međutim, treba odmah naglasiti, da se takva potpuna izmjena energije događa samo kod izvjesnih odnosa parametara, te da do potpune izmjene energije, makar i kod simetričnih sistema, ne treba doći ni kod takvih naročitih početnih uvjeta. O tome ćemo govoriti поближе kasnije.

U općenitom slučaju nesimetričnih sistema, kod povoljnih početnih uvjeta, dobili bismo sl. 267.

Da bi postojala potpuna izmjena energije između obaju sistema, ti sistemi ne moraju biti istovrsno građeni. Na pr., prema sl. 268., imamo dva raznovrsna sistema. Prvi sistem, ako postoji sam za sebe, čini masa M , ako titra samo gore, dolje, i pero D , t. j.

$$M \frac{d^2 a}{dt^2} + D a = 0,$$

a drugi sistem, ako postoji sam za sebe, čini ista masa M , ako se samo okreće, naprežući pritom isto pero na torziju, t. j.

$$\mathcal{J} \frac{d^2 \psi}{dt^2} + D_0 \psi = 0,$$

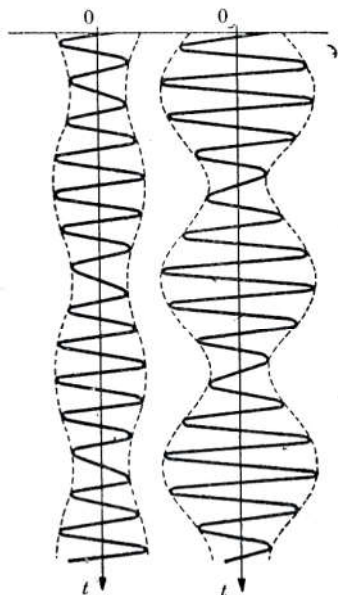
kod čega je $\mathcal{J}$ moment ustrajnosti mase oko osi vrtnje, ψ je kut zaokreta mase, a D_0 je koeficijent elastičnosti torzije. Istovremena vrtnja i uzdužno gibanje mase čini dva vezana sistema, gdje je vezni element pero, jer tada njegovo naprezanje zavisi o kombiniranom djelovanju obiju vrsta gibanja.

Naprotiv, vrtnja mase ne mijenja ništa na izrazu $M \frac{d^2 a}{dt^2}$, kao što ni uzdužno gibanje mase ne mijenja ništa na izrazu $\mathcal{J} \frac{d^2 \psi}{dt^2}$. U naročitom slučaju, t. j.

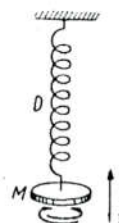
da smo upravo pogodili pravi odnos parametara krugova i početne uvjete za slučaj potpune izmjene energije, opazit ćemo u izvjesnom času, da se masa ne okreće, nego titra samo gore, dolje, a zatim nakon nekog vremena, da se samo okreće ne gibajući se pritom gore, dolje.

Da smo kod prvog eksperimenta upotrebili povoljne sisteme, kojima bismo mijenjali parametre od slučaja do slučaja, uz iste naprijed opisane početne uvjete, dobili bismo treptaje, kojima bi se frekvencije i amplitude njihovih harmoničkih komponenata mijenjale od slučaja do slučaja.

Međutim, ako bi kod bilo koja dva vezana sistema s čvrstim parametrima mijenjali samo početne uvjete, opazili bismo, da se unatoč tih promjena svaki njihov novi treptaj u prvom i drugom sistemu sastoji od dviju nepromjenjenih frekvencija, a mijenjaju se samo amplitude komponenata, koje su između prvog i drugog sistema u izvjesnom međusobnom odnosu. Prema tome, svakom vezanom sistemu pridružene su vezne frekvencije, koje ovise samo o parametrima svih međusobno povezanih krugova. Isti početni uvjeti izazivaju kod različitih krugova različite vezne frekvencije i različite amplitude komponenata, dok različiti početni uvjeti izazivaju kod istih krugova različite amplitude uz nepromjenjene vezne frekvencije.

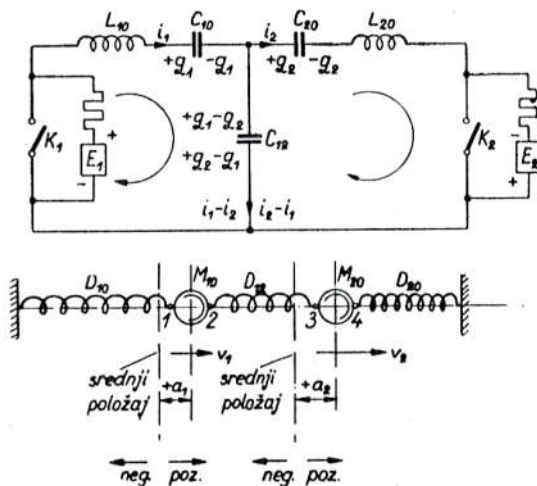


Slika 267.

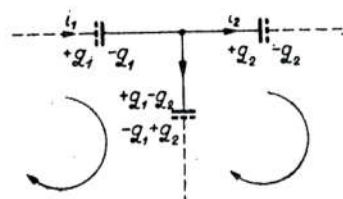


Slika 268.

Kod jednostavnog neprigušenog kruga bez narinutog napona imali smo samo jednu vlastitu frekvenciju, dok kod dva vezana kruga imamo dvije vlastite frekvencije, kojima istodobno titraju oba kruga.



Slika 269.



Slika 270.

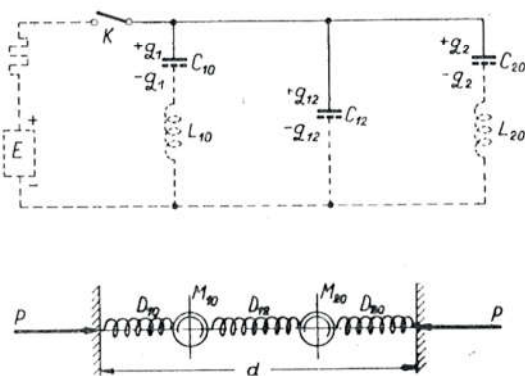
Frekvencije dvaju vezanih simetričnih krugova zvat ćemo „glavne titrajne frekvencije“ i obilježavat ćemo ih velikim grčkim slovom omega, t. j. Ω_{ks} i Ω_{kc} . Konačno treba spomenuti, da je pod naročitim početnim uvjetima kod vezanih sistema, bili oni simetrični, ili nesimetrični, uvijek moguće izazvati titranje samo jedne vezne frekvencije, i to prve ili druge — odnosno, drugim

riječima, možemo pronaći onakve početne uvjete, kod kojih će amplitude, bilo prve ili druge vezne frekvencije, istodobno u oba sistema (koje stoje, kako smo već spomenuli, u međusobnoj čvrstoj zavisnosti) biti jednake nuli.

b) Mehanička analogija električnih vezanih krugova

Neprigušeni kapacitivno vezani električni krugovi nacrtani su sa svojim mehaničkim analogonom na sl. 269. Ako su električni krugovi bez energije, t. j. „prazni“, dakle svi kondenzatori bez naboja, a struje jednake nuli, to u mehaničkoj analogiji znači, da su sva pera u nenapetom stanju i sve mase bez brzine. Proučavati ćemo samo takve sisteme, koji su za vrijeme svog mirovanja bili prazni, dakle, pera su im bila nenapeta, a utitravanje, odnosno

dovodjenje energije, uslijeduje, kao što je to označeno na električnoj shemi, serijski, na pr. putem istosmjernog izvora napona E_1 i E_2 uz dovoljne otpore, da dobijemo aperiodičko punjenje, te zatvaranjem sklopki K_1 i K_2 po svršenom punjenju.

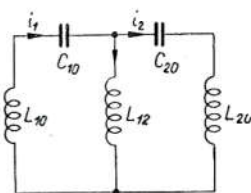


Slika 271.

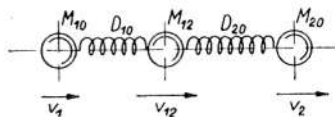
Po posljedicama bi tome u mehaničkoj analogiji bilo adekvatno, kad bismo prema donjem crtežu kod praznih sistema rukom pomakli mase M_{10} i M_{20} , kod čega bi se oba sistema snabdijela energijom, i onda istovremeno ispustili obje mase. Kod takvog dovođenja energije, zbroj „puteva“ svih pera, dakle, zbroj svih produženja (uze-

tih na pr. pozitivno) i skraćanja (dosljedno uzetih negativno), bit će uvijek jednak nuli, odnosno u električnoj shemi zbroj svih naboja na izvučenom dijelu (a prema tome i na crtkanom) na sl. 270. bit će jednak nuli.

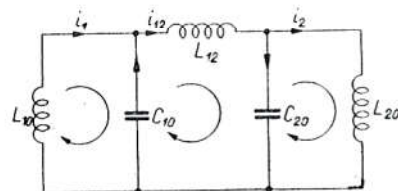
Kod paralelnog dovođenja energije prema sl. 271., gore, ne bi, naravno, naboj izvučenog dijela (a prema tome ni crtkanog) bio jednak nuli, i otvaranjem sklopke K , t. j. isključenjem napona E , ne bi na taj način, na pr. kod



Slika 272.



Slika 273.



Slika 274.

svršenog nabijanja svih kondenzatora, uopće došlo do titranja. To bi u mehaničkoj analogiji značilo istovremeno stiskanje svih pera, dok se sistemi pomoću nekog povremenog gušenja ne bi umirili, dakle, sva pera bila bi pritisnuta istom silom, prema donjem crtežu na istoj slici. To bi značilo skraćivanje distancije d , a ne kao na prije navedenoj slici 269., gdje je ta distancija ostala uvijek ista, i radi toga je stiskanje na jednom mjestu bilo popraćeno istovremenim produžavanjem na drugom mjestu.

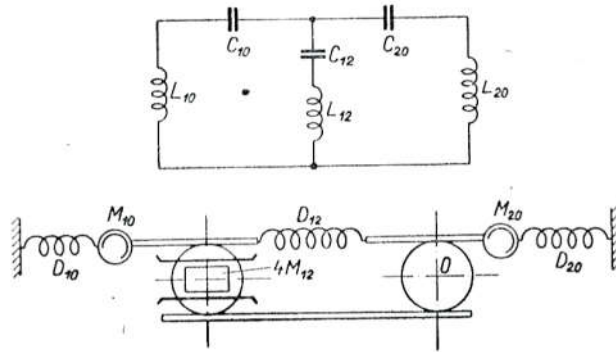
putevi, t. j. udaljenosti masa M_{10} i M_{20} od položaja mirovanja. Prema tome je sila mase $4M_{12}$ jednaka:

$$4M_{12} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 a_1}{dt^2} - \frac{d^2 a_2}{dt^2} \right) \right].$$

Ta se sila rastavlja na svoje obje komponente $M_{12} \left(\frac{d^2 a_1}{dt^2} - \frac{d^2 a_2}{dt^2} \right)$ od kojih jedna djeluje na motku r_1 , a druga na motku r_3 . Prema tome bi prvi sistem imao diferencijalnu jednadžbu:

$$M_{10} \frac{d^2 a_1}{dt^2} + D_{10} a_1 + M_{12} \left(\frac{d^2 a_1}{dt^2} - \frac{d^2 a_2}{dt^2} \right) = 0.$$

Slika 276.



Komponenta, koja djeluje na motku r_3 , prenosi se koturom K_2 na motku r_2 , ali pritom mijenja svoj smjer, t. j. predznak, i prema tome diferencijalna jednadžba drugog sistema glasi:

$$M_{20} \frac{d^2 a_2}{dt^2} + D_{20} a_2 + M_{12} \left(\frac{d^2 a_2}{dt^2} - \frac{d^2 a_1}{dt^2} \right) = 0.$$

Zamjenom mehaničkih veličina korespondentnim električnim, dobili bismo diferencijalne jednadžbe induktivno vezanih električnih krugova. Energija mase $4M_{12}$ bila bi:

$$\frac{1}{2} 4M_{12} \left(\frac{v_1 - v_2}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} M_{12} (v_1 - v_2)^2,$$

što u električnoj shemi odgovara izrazu $\frac{1}{2} L_{12} (i_1 - i_2)^2$. Ako bi L_{12} , odnosno $4M_{12}$, postalo neizmjereno veliko, onda bi se u mehaničkoj analogiji kotur K_1 samo okretao na mjestu kao i kotur K_2 , i imali bismo jedan titrajni krug s dvije mase i dva pera „jednake brzine“ u seriji, što bi odgovaralo i električnoj shemi. Razvezano stanje, na pr. prvog kruga, dobili bismo, ako bi masa M_{20} postala neizmjereno velika, t. j. ako bismo je rukom pridržavali. U tom slučaju bi kotur K_2 mirovao, a masa $4M_{12}$ gibala bi se brzinom $\frac{v_1}{2}$, dakle, sila te mase bila bi:

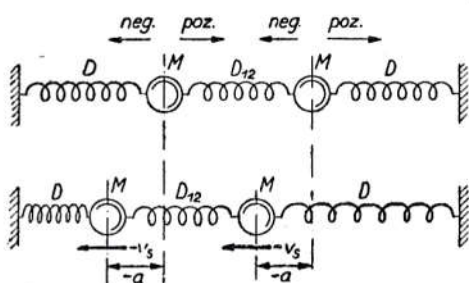
$$4M_{12} \frac{1}{2} \frac{d^2 a_1}{dt^2} = 2M_{12} \frac{d^2 a_1}{dt^2}.$$

Ta sila ima hvatište na osovinu kotura K_1 , t. j. u težištu mase $4M_{12}$. Na prvi sistem djelovala bi, međutim, samo sila $M_{12} \frac{d^2 a_1}{dt^2}$, koja bi, obzirom na točku zahvata kotura K_1 i motke r_3 , imala isti moment kao i sila $2M_{12} \frac{d^2 a_1}{dt^2}$, budući da im se krakovi odnose kao 2:1.

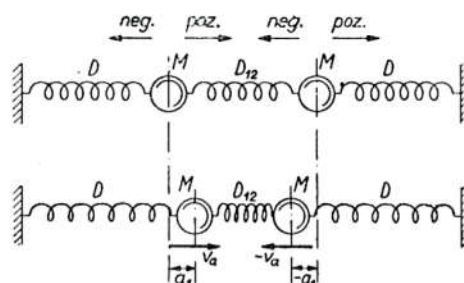
Sl. 276. prikazuje još i kombinirano vezanje, t. j. kapacitivno i induktivno vezanje kod neprigušenih električnih krugova.

c) Glavne titrajne frekvencije

Pretpostavit ćemo, da imamo dva simetrična sistema, koja su vezana elasticitetom, t. j. perom. Očigledno je, da takvi sistemi, iako su vezani, mogu, prema sl. 277., proizvoditi čiste sinhrono sinusove titraje jednakih amplituda, kod čega se veza uopće ne napreže, dakle, uopće ne,



Slika 277.



Slika 278.

dolazi do izražaja. Frekvencija titranja bit će $\Omega_{ks} = \sqrt{\frac{D}{M}}$, odnosno za električni analogon $\Omega_{ks} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. To je kod našeg slučaja prva ili polagana „glavna titrajna frekvencija“. Glavne titrajne frekvencije, kao što smo nave li označit ćemo velikim slovom, dok indeks „k“ znači, da se radi o vezanom titranju (od kopula, t. j. veza), a indeks „s“ znači sinhrono titranje. Drugi sinusovi titraji jednakih amplituda bili bi antisinhroni titraji prema sl. 278., t. j. mase proizvode uvijek jednaka, ali suprotna gibanja. Ako promatramo zasebno titranje prve ili druge mase, bit će amplituda puta pera s koeficijentom D_{12} (a radi toga i njegova „brzina“) dva puta veća od amplitude puta pera s koeficijentom D , odnosno mase M . Prema tome će frekvencija titranja iznositi

$$\Omega_{ka} = \sqrt{\frac{D + 2D_{12}}{M}},$$

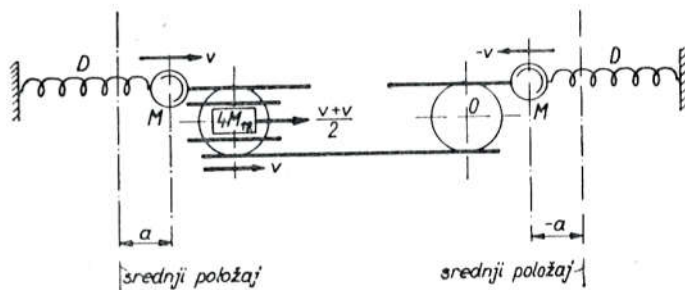
odnosno za električni analogon

$$\Omega_{ka} = \sqrt{\frac{1}{\frac{C}{2} + \frac{2}{C_{12}}}},$$

i to će biti kod našeg slučaja druga ili brza „glavna titrajna frekvencija“. Indeks „a“ znači antisinhroni titraj.

Kasnije ćemo dokazati, da simetrični sistemi mogu proizvoditi samo takve titraje jednakih amplituda u obim sistemima, i to kao što smo vidjeli, bilo sinhrono, bilo antisinhrono, ili obje vrste zajedno. Uostalom, već smo općenito naveli, da je odnos amplituda partikularnih titraja iste frekvencije prvog i drugog kruga stalan. Razumije se, da se amplitude sinhronih i antisinhronih titraja, koji mogu zasebno postojati, ne nalaze u nekom određenom odnosu, te stoga nisu općenito međusobno jednake, iako je pod naročitim početnim uvjetima i to moguće.

Već smo naveli, da i povoljni nesimetrični sistemi proizvode kao svoje partikularne titraje čiste sinusove titraje. Međutim, takvi sinusovi titraji ne će općenito biti glavni titraji, jer će im amplitude u prvom i drugom sistemu biti međusobno različite. Prema tome, kod povoljnih krugova će i kod sinhronog titraja sudjelovati veza, i to tako, da će na sistem s većom amplitudom



Slika 279.

puta djelovati u istom smislu kao i vlastito pero, a na sistem s manjom amplitudom u protivnom smislu od vlastitog pera. Kod antisinhronog titranja ne će se sudjelovanje veze obzirom na jedan i drugi sistem moći izraziti s $2D_{12}$, nego će se djelovanje pera D_{12} , obzirom na sistem s manjom amplitudom puta, očitovati jače, nego bi odgovaralo toj dvostruko manjoj amplitudi puta ovog sistema, a obzirom na drugi sistem, djelovanje pera D_{12} bit će slabije, nego bi odgovaralo dvostruko većoj amplitudi puta drugoga sistema.

Već bismo ovdje naveli, da je to sasvim izvanredni slučaj, da vezani sistemi, bilo simetrični, bilo nesimetrični, titraju samo s jednim svojim partikularnim titrajem, i da općenito proizvode istovremeno oba partikularna titraja — što smo, uostalom, opisali već na početku ovog poglavlja u točki a) na mehaničkom primjeru.

Nije bezuvjetno potrebno, da sistemi budu simetrični, kako bismo mogli proizvesti sinhroni ili antisinhroni glavni titraj, ali samo simetrični sistemi mogu proizvesti oba glavna titraja. Da to dokažemo, pretpostavit ćemo nesimetrične sisteme, za koje ćemo u prvi mah uzeti, da proizvode oba glavna titraja. Tada bi bilo:

$$\Omega_{ks} = \sqrt{\frac{D_{10}}{M_{10}}} = \sqrt{\frac{D_{20}}{M_{20}}} = \sqrt{\frac{\alpha D_{10}}{\alpha M_{10}}},$$

te nadalje

$$\Omega_{ka} = \sqrt{\frac{D_{10} + 2D_{12}}{M_{10}}} = \sqrt{\frac{D_{20} + 2D_{12}}{M_{20}}} = \sqrt{\frac{\alpha D_{10} + 2D_{12}}{\alpha M_{10}}}.$$

Iz posljednje jednadžbe slijedi $\alpha = 1$, odnosno $D_{10} = D_{20}$, i $M_{10} = M_{20}$, t. j. imamo simetrične sisteme. Naprotiv, kod nesimetričnih sistema može biti na pr.

$$\sqrt{\frac{D_{10}}{M_{10}}} = \sqrt{\frac{D_{20}}{M_{20}}},$$

dakle postoji sinhroni glavni titraj Ω_{ks} , a drugi partikularni titraj bit će općenite vrijednosti, t. j. ne će biti Ω_{ka} . Isto tako, može slučajno biti

$$\sqrt{\frac{D_{10} + 2D_{12}}{M_{10}}} = \sqrt{\frac{D_{20} + 2D_{12}}{M_{20}}} = \Omega_{ka},$$

a prvi partikularni titraj nije Ω_{ks} .

Kad bismo imali masom (induktivno) vezane simetrične sisteme, tada bi sinhroni glavni titraj, t. j. bez sudjelovanja veze, glasio kao i za elastičnu vezu

$$\Omega_{ks} = \sqrt{\frac{D}{M}}.$$

Međutim, taj će titraj sada biti brzi glavni titraj, kako će se to odmah dalje vidjeti.

Ako, prema sl. 279., obje mase proizvode antisinhroni titraj, t. j. gibaju se jedna prema drugoj, tada se masa $4M_{12}$ giba brzinom $\frac{v+v}{2} = v$, t. j. kao i mase M . Sila mase $4M_{12}$ jednaka je $4M_{12} \frac{d^2a}{dt^2}$, a na svaki sistem djeluje sila $2M_{12} \frac{d^2a}{dt^2}$. Drugim riječima, kod antisinhronog titranja, kad oba sistema proizvode čiste sinusove titraje, izgleda, da je svakom D i M pridošla masa $2M_{12}$, te je

$$\Omega_{ka} = \sqrt{\frac{D}{M + 2M_{12}}}.$$

Budući da je nazivnik toga izraza veći nego kod sinhronog titranja, znači, da je Ω_{ka} sada polagani glavni titraj!*) To je i razumljivo, jer povećanje mase znači usporavanje procesa, za razliku od elastičnog vezanja, kad pero D_{12} potpomaže akciju pera D jednog i drugog sistema i time ubrzava proces. Ovdje smo prvi put uočili veoma važnu činjenicu, da je djelovanje induktiviteta (mase) i kapaciteta (pera) u veznom dijelu međusobno suprotno.

Analogno sistemima s elastičnom vezom, i ovdje samo simetrični sistemi proizvode oba glavna titraja.

Kod kombinirane veze, t. j. kod prisutnosti elastičnog pera i mase, bit će, shodno izloženom, glavni titraji, i to sinhroni

$$\Omega_{ks} = \sqrt{\frac{D}{M}},$$

odnosno antisinhroni

$$\Omega_{ka} = \sqrt{\frac{D + 2D_{12}}{M + 2M_{12}}}.$$

To će nam potvrditi i kasniji analitički dobiveni izrazi. Ovdje se, međutim, ne može općenito reći, koji je od glavnih titraja, t. j. sinhroni ili antisinhroni,

*) Sila $2M_{12} \frac{d^2a}{dt^2}$ može se shvatiti i tako, kao da je svakom D i M pridošla masa M_{12} , koja ima dva puta veću brzinu, nego li mase M , t. j. $2 \frac{da}{dt}$, odnosno dva puta veću promjenu brzine po vremenu, t. j. $2 \frac{d^2a}{dt^2}$. Analogno kod električnih krugova kroz L_{12} teče dvostruka struja svakog sistema.

brzi, a koji je polagani titraj, jer to zavisi od međusobnih odnosa parametara. O tome ćemo govoriti detaljno kasnije. I ovdje samo simetrični sistemi proizvode oba glavna titraja.

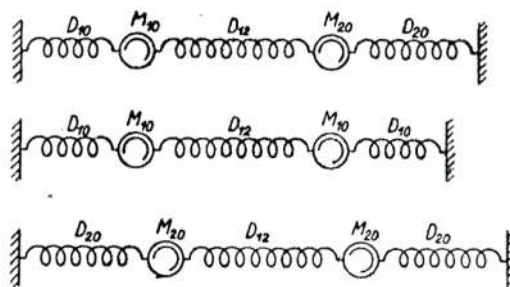
Prema izloženom, što ćemo kasnije još detaljnije dokazati, kod simetričnih električnih sistema, u slučaju sinhronog glavnog titraja, kroz vezu ne će teći nikakva struja, a u slučaju antisinhronog glavnog titraja teći će dvostruka struja pojedinih sistema. U općenitom slučaju, dakle, kod simetričnih električnih sistema, kad postoje oba titraja, kroz vezu će, naravno, teći opet samo dvostruka struja antisinhronog partikularnog titraja. Prema tome, kod simetričnih električnih sistema, ukoliko kroz vezu teče struja, može to biti samo čisti harmonički val, a nikada kombinacija dvaju valova raznih frekvencija.

Kod povoljnih vezanih električnih sistema, kroz vezu će u svakom slučaju teći struja, t. j. ako je titranje samo sinhrono, ili samo antisinhrono, ili ako istodobno postoje oba titraja. U prva dva slučaja bit će struja veze harmonička funkcija, a u trećem bit će treptaj, t. j. kombinacija obaju partikularnih harmoničkih struja.

d) Pojam simetriranja nesimetričnih sistema

Simetriranje je zamišljena operacija, kod koje se svaka razvezana strana nesimetričnih vezanih sistema nadopunjuje izvan veze simetričnim parametrima, i na taj se način dobiju dva para pripadnih simetričnih sistema. Na sl. 280., gore, nacrtani su nesimetrični elastično vezani sistemi, a ispod toga oba para njima pripadnih simetriranih sistema. Analogno bismo postupili i kod sistema vezanih masom (induktivitetom), ili kod kombinirane veze.

Slika 280.



Razumije se samo po sebi, da se kod svake promjene jednog ili više parametara originalnih nesimetričnih sistema, automatski mijenjaju jedan ili oba para pripadnih simetriranih sistema. Pripadni simetrirani sistemi imat će — kako već znamo — samo glavne titrajne frekvencije

$$\Omega_{ks} = \sqrt{\frac{D_{10}}{M_{10}}}, \quad \text{te} \quad \Omega_{ka} = \sqrt{\frac{D_{10} + 2D_{12}}{M_{10}}},$$

odnosno kod najdonjih sistema na navedenoj slici bit će glavne titrajne frekvencije

$$\Omega_{ks} = \sqrt{\frac{D_{20}}{M_{20}}}, \quad \text{te} \quad \Omega_{ka} = \sqrt{\frac{D_{20} + 2D_{12}}{M_{20}}}.$$

Kasnije ćemo pokazati, da se stvarne sinhrono i antisinhrono frekvencije naših fizikalno zadanih nesimetričnih sistema nalaze u granicama, koje čine oba para glavnih frekvencija njima pripadnih zamišljenih simetriranih sistema.

17. KAPACITIVNO VEZANI NEPRIGUŠENI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA

a) Opći integral titrajnih diferencijalnih jednadžbi

Prema sl. 281. bit će za prvi sistem

$$L_{10} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{1}{C_{10}} q_1 + \frac{1}{C_{12}} (q_1 - q_2) = 0,$$

a za drugi sistem

$$L_{20} \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{1}{C_{20}} q_2 + \frac{1}{C_{12}} (q_2 - q_1) = 0,$$

odnosno

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10}} q_1 - \frac{1}{L_{10}} q_2 = 0$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20}} q_2 - \frac{1}{L_{20}} q_1 = 0.$$

Izraz

$$\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10}} = \omega_1^2,$$

odnosno

$$\frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20}} = \omega_2^2,$$

gdje su ω_1 i ω_2 vlastite neprigušne frekvencije prvog i drugog razvezanog kruga. Prema tome slijedi:

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_1^2 q_1 - \frac{1}{L_{10}} q_2 = 0 \quad \text{I.)}$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_2^2 q_2 - \frac{1}{L_{20}} q_1 = 0 \quad \text{II.)}$$

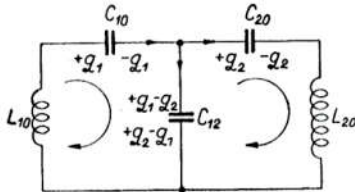
Iz II.) dobivamo:

$$q_1 = \frac{L_{20}}{\frac{1}{C_{12}}} \left(\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_2^2 q_2 \right).$$

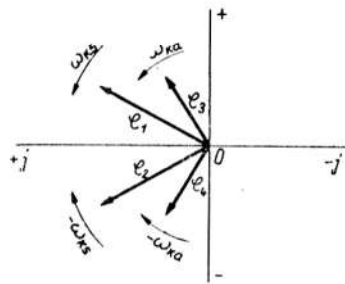
Unijeto u I.), daje:

$$\frac{L_{20}}{C_{12}} \left[\frac{d^4 q_2}{dt^4} + \omega_2^2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_1^2 \left(\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_2^2 q_2 \right) \right] - \frac{1}{L_{10}} q_2 = 0$$

$$\frac{d^4 q_2}{dt^4} + (\omega_2^2 + \omega_1^2) \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \left[\omega_1^2 \omega_2^2 - \frac{\left(\frac{1}{C_{12}} \right)^2}{L_{10} L_{20}} \right] q_2 = 0.$$



Slika 281.



Slika 282.

Budući da su diferencijalne jednačbe za prvi i drugi sistem jednako građene, to će i opći integral za q_1 biti istog oblika kao i za q_2 , i u nastavku našeg izvoda umjesto q_2 pisat ćemo q . Kao što vidimo, dobili smo homogenu diferencijalnu jednačbu 4. reda. Za tri vezana kruga dobili bismo jednačbu 6. reda, jer svaki novonadošli krug, koji ima sve parametre, povisuje jednačbu za dva reda.

S postavkom $q = \mathcal{C} e^{j\omega_k t}$, gdje indeks „ k “ označuje vezu (kopulu), dobivamo karakterističnu jednačbu:

$$\omega_k^4 - \omega_k^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \left[1 - \left(\frac{\frac{1}{C_{12}}}{\sqrt{L_{10} L_{20}} \omega_1 \omega_2} \right)^2 \right] \omega_1^2 \omega_2^2 = 0.$$

$$\frac{\frac{1}{C_{12}}}{\sqrt{L_{10} L_{20}} \omega_1 \omega_2} = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\sqrt{L_{10} L_{20}} \sqrt{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}} \sqrt{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}} \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}} = K_{\text{kap}},$$

t. j. faktor vezanja. Prema tome će četiri korijena karakteristične jednačbe biti:

$$\begin{aligned} \pm \omega_{ks}, \pm \omega_{ka} &= \pm \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} \mp \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}\right)^2 - (1 - K_{\text{kap}}^2) \omega_1^2 \omega_2^2} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4K_{\text{kap}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2}. \end{aligned}$$

Prema tome, opći integral glasi:

$$\begin{aligned} q &= \mathcal{C}_1 e^{j\omega_{ks}t} + \mathcal{C}_2 e^{-j\omega_{ks}t} + \mathcal{C}_3 e^{j\omega_{ka}t} + \mathcal{C}_4 e^{-j\omega_{ka}t}, \\ q &= \mathcal{C}_1 (\cos \omega_{ks}t + j \sin \omega_{ks}t) + \mathcal{C}_2 (\cos \omega_{ks}t - j \sin \omega_{ks}t) + \\ &+ \mathcal{C}_3 (\cos \omega_{ka}t + j \sin \omega_{ka}t) + \mathcal{C}_4 (\cos \omega_{ka}t - j \sin \omega_{ka}t) = \\ &= (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \cos \omega_{ks}t + j(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2) \sin \omega_{ks}t + (\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4) \cos \omega_{ka}t + \\ &+ j(\mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_4) \sin \omega_{ka}t. \end{aligned}$$

Da bi opći integral naboja, koji je fizikalno realna veličina, zadobio oblik sinusa, poistovjetit ćemo pravac titranja s imaginarnom osi, i tada će, naravno, dobiveni izraz biti imaginaran. Prema tome, mora biti:

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \text{ te } (\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4) &\text{ imaginarno,} \\ \text{odnosno} \\ (\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2) \text{ te } (\mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_4) &\text{ realno.} \end{aligned}$$

Taj uvjet bit će ispunjen, ako je

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \frac{M}{2} + j \frac{N}{2}, & \mathcal{C}_3 &= \frac{P}{2} + j \frac{R}{2}, \\ \mathcal{C}_2 &= -\frac{M}{2} + j \frac{N}{2}, & \text{te } \mathcal{C}_4 &= -\frac{P}{2} + j \frac{R}{2}, \end{aligned}$$

što prikazuje sl. 282.

Radi toga možemo pisati:

$$q = \mathcal{I}m[jN \cos \omega_{ks}t + jM \sin \omega_{ks}t + jR \cos \omega_{ka}t + jP \sin \omega_{ka}t].$$

Ako ispustimo Gaussovu ravninu, to će, obzirom na pravac titranja, biti:

$$q_1 = A_1 \sin(\omega_{ks}t + \varphi) + A_2 \sin(\omega_{ka}t + \chi),$$

te analogno

$$q_2 = B_1 \sin(\omega_{ks}t + \delta) + B_2 \sin(\omega_{ka}t + \epsilon).*)$$

*) Ova dva opća integrala napisali smo po obliku, t. j. kvalitativno, kao analogna, no treba ih još međusobno i kvantitativno „zakvačiti“, kao što su to i njihove diferencijalne jednačbe, što se u nastavku i čini.

Analogno kao i kod simetričnih sistema označili smo ovdje polagani titraj indeksom „s“, a brzi titraj indeksom „a“, ali našu slutnju, da se uistinu radi o sinhronim i antisinhronim titrajima, nismo proveli do kraja, jer bi tada B_2 morao imati protivan predznak od A_2 . To će, međutim, kasnije uslijediti samo od sebe. Kao što se vidi, frekvencija ω_{ks} dobije se, ako u izračunatom izrazu za frekvenciju vrijedi pod korijenom diferencija, a ω_{ka} ako vrijedi zbroj.

Vidimo, dakle, da prilikom vezanja, oba sistema gube svoju vlastitu razvezanu frekvenciju, ali zato svaki dobiva dvije vezne frekvencije, koje se temelje na razvezanim frekvencijama obaju sistema. Umjesto harmoničkog titraja u razvezanom stanju, nastupa sada treptaj.

Općenito su nam u $t = 0$ poznata četiri početna uvjeta, t. j. $q_1(0)$, $q_2(0)$, $i_1(0)$, te $i_2(0)$, koje ćemo uvrstiti u četiri jednadžbe tih veličina. Izrazi za struju bit će vremenske derivacije naboja. Međutim, potrebne su nam još četiri relacije, budući da općeniti integrali sadrže ukupno osam konstanti, t. j. A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , φ , χ , δ , te ε . Radi toga uvrstit ćemo nađene opće integrale u početne diferencijalne jednadžbe, i to na pr. u prvu diferencijalnu jednadžbu. Dobili bismo

$$\begin{aligned} 0 &= L_{10} [-\omega_{ks}^2 A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) - \omega_{ka}^2 A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi)] + \\ &+ \frac{1}{C_{10}} [A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) + A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi)] + \frac{1}{C_{12}} [A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) + \\ &+ A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi) - B_1 \sin(\omega_{ks} t + \delta) - B_2 \sin(\omega_{ka} t + \varepsilon)] = \\ &= -L_{10} \omega_{ks}^2 A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) + \frac{1}{C_{10}} A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) + \frac{1}{C_{12}} A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) - \\ &- \frac{1}{C_{12}} B_1 \sin(\omega_{ks} t + \delta) - L_{10} \omega_{ka}^2 A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi) + \frac{1}{C_{10}} A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi) + \\ &+ \frac{1}{C_{12}} A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi) - \frac{1}{C_{12}} B_2 \sin(\omega_{ka} t + \varepsilon). \end{aligned}$$

Četiri izraza, koji sadrže ω_{ks} , su sinusove projekcije četiriju verzora jednake frekvencije, od kojih tri imaju isti fazni kut φ , a četvrti fazni kut δ . Analogno su ostala četiri adenda, koji sadrže ω_{ka} , sinusove projekcije četiriju verzora jednake frekvencije, od kojih tri imaju fazni kut χ , a četvrti fazni kut ε . Kako verzori jednake frekvencije daju rezultatni verzor iste frekvencije, bit će općenito:

$$0 = G \sin(\omega_{ks} t + \alpha) + H \sin(\omega_{ka} t + \beta).$$

Da ta jednadžba vrijedi u svako vrijeme t , mora biti $G = 0$, te $H = 0$, što je moguće samo onda, ako su poligoni komponentnih verzora zatvoreni, t. j. ako daju rezultante jednake nuli. U našem slučaju, gdje po tri komponentna verzora imaju isti smjer, mora i njihov četvrti komponentni verzor imati taj smjer, jer se inače poligoni, koji su degenerirali u odsječak pravca, ne bi mogli zatvoriti. Ta spoznaja znači dalje, da je

$$\alpha = \varphi = \delta,$$

i osim toga, da je

$$\left(-L_{10} \omega_{ks}^2 + \frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}\right) A_1 - \frac{1}{C_{12}} B_1 = 0,$$

odnosno za ostala četiri verzora,

$$\beta = \chi = \varepsilon,$$

te:

$$\left(-L_{10} \omega_{ka}^2 + \frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}\right) A_2 - \frac{1}{C_{12}} B_2 = 0.$$

To su dakle četiri dodatne relacije.

Da smo opće integrale uvrstili umjesto u prvu u drugu titrajnu diferencijalnu jednadžbu, dobili bismo adekvatne relacije $\varphi = \delta$, i osim toga

$$\left(-L_{20} \omega_{ks}^2 + \frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}\right) B_1 - \frac{1}{C_{12}} A_1 = 0,$$

odnosno za ostala četiri verzora $\chi = \varepsilon$, te:

$$\left(-L_{20} \omega_{ka}^2 + \frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}\right) B_2 - \frac{1}{C_{12}} A_2 = 0.$$

Prema tome će biti:

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{A_1} &= \frac{-L_{10} \omega_{ks}^2 + \frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{12}}} = \frac{-\omega_{ks}^2 + \omega_1^2}{\frac{1}{C_{12} L_{10}} \frac{1}{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}}} = \frac{-\omega_{ks}^2 + \omega_1^2}{k_{1\text{kap}} \omega_1^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{C_{12}}}{-L_{20} \omega_{ks}^2 + \frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}} = \frac{\frac{1}{C_{12} L_{20}} \frac{1}{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}}{\frac{1}{C_{12} L_{10}} \frac{1}{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}}} = \frac{\omega_2^2 k_{2\text{kap}}}{-\omega_{ks}^2 + \omega_2^2} = F_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{B_2}{A_2} &= \frac{-L_{10} \omega_{ka}^2 + \frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{12}}} = \frac{-\omega_{ka}^2 + \omega_1^2}{\frac{1}{C_{12} L_{10}} \frac{1}{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}} = \frac{-\omega_{ka}^2 + \omega_1^2}{\omega_1^2 k_{1 \text{ kap}}} = \\
&= \frac{\frac{1}{C_{12}}}{-L_{20} \omega_{ka}^2 + \frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}} = \frac{\frac{1}{C_{12} L_{20}} \frac{1}{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}}{-\omega_{ka}^2 + \omega_2^2} = \frac{\omega_2^2 k_{2 \text{ kap}}}{-\omega_{ka}^2 + \omega_2^2} = -F_2.
\end{aligned}$$

Da bi titraji s polaganom frekvencijom ω_{ks} bili sinhroni, mora $\frac{B_1}{A_1}$ biti pozitivno, a da bi titraji s brzom frekvencijom ω_{ka} bili antisinhroni, mora $\frac{B_2}{A_2}$ biti negativno, kao što smo to — ne dokazavši još — i naznačili. Da vidimo, da li je to uistinu tako!

Prethodno ćemo se sjetiti, da smo za manju frekvenciju, za koju vrijedi pod korijenom diferencija u izračunatom izrazu veznih frekvencija, pretpostavili, da je sinhrona, t. j. ω_{ks} , dok smo za veću frekvenciju, za koju vrijedi zbroj, pretpostavili, da je antisinhrona, t. j. ω_{ka} . Prema tome, izraz $\omega_1^2 - \omega_2^2$, što dolazi u brojniku izraza $\frac{B_1}{A_1}$, bit će kako slijedi:

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 - \left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \sqrt{\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4} + K_{\text{kap}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right] &= \\
&= \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} + \sqrt{\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4} + K_{\text{kap}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2}.
\end{aligned}$$

Taj je izraz uvijek pozitivan, bilo da je $\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}$ pozitivno ili negativno. Time smo dokazali, da uistinu postoji sinhroni titraj, i da je to polagani titraj!

U brojniku izraza $\frac{B_2}{A_2}$ imamo $\omega_1^2 - \omega_{ka}^2$, što je jednako:

$$\omega_1^2 - \left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \sqrt{\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4} + K_{\text{kap}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right] =$$

$$= \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} - \sqrt{\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4} + K_{\text{kap}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2}.$$

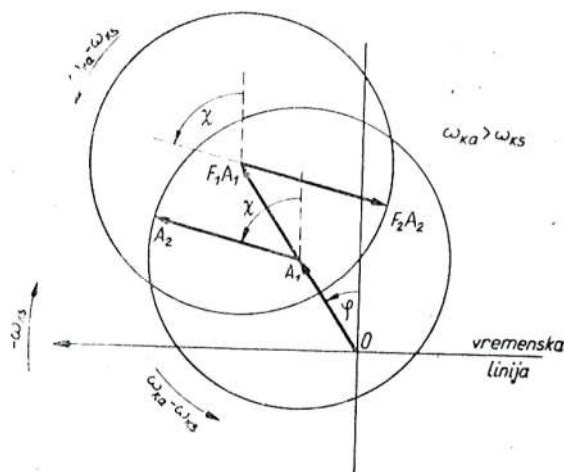
Taj je izraz uvijek negativan, bilo da je $\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}$ pozitivno ili negativno. Znači, dakle, da je brzi titraj ujedno i antisinhroni titraj!

Do istih rezultata došli bismo, da smo razmatrali adekvatne izraze za $\frac{B_1}{A_1}$, odnosno $\frac{B_2}{A_2}$, u kojima dolazi ω_2^2 umjesto ω_1^2 .

Sada na temelju gornjih rezultata možemo konačno pisati:

$$q_1 = A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) + A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi),$$

$$q_2 = F_1 A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) - F_2 A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi),$$



Slika 283.

te prema tome dostaju naša četiri početna uvjeta, jer — kako smo već naveli — derivacijom po vremenu dobivamo još dvije jednadžbe, i to za i_1 , odnosno i_2 , te možemo iz njih izračunati četiri konstante, t. j. A_1 , A_2 , φ i χ . Sl. 283. pokazuje početne položaje verzora prvog i drugog kruga.

b) Granice veznih frekvencija

Pretpostavit ćemo prema sl. 284., da u sistemima postoje samo partikularne i to sinhrone struje, koje su za $\frac{\pi}{2}$ ispred svojih naboja, t. j. $\varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}$. Neka je $I_1 > I_2$. Tada će prema Kirchhoffu za prvi sistem vrijediti jednadžba:

$$0 = L_{10} \omega_{ks} I_1 \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) - \frac{1}{\omega_{ks} C_{10}} I_1 \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) - \\ - \frac{1}{\omega_{ks} C_{12}} (I_1 - I_2) \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) =$$

$$= L_{10} \omega_{ks} I_1 \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) - \frac{1}{\omega_{ks}} \left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} \frac{I_1 - I_2}{I_1} \right) I_1 \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1).$$

Prema toj jednadžbi možemo shvatiti kao da imamo jednostavan krug s L_{10} , i u seriji dva kapaciteta, t. j. C_{10} i $C_{12} \frac{I_1 - I_2}{I_1}$. Radi toga će biti:

$$\omega_{ks}^2 = \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} \frac{I_1 - I_2}{I_1}}{L_{10}}.$$

Budući da je $(I_1 - I_2)$ pozitivno, znači, da je

$$\omega_{ks}^2 > \frac{1}{C_{10} L_{10}}.$$

Za drugi sistem vrijedit će jednadžba:

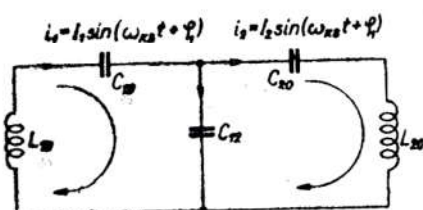
$$0 = L_{20} \omega_{ks} I_2 \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) - \frac{1}{\omega_{ks} C_{20}} I_2 \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) - \\ - \frac{1}{\omega_{ks} C_{12}} (I_2 - I_1) \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1).$$

Prema ovoj jednadžbi, bit će:

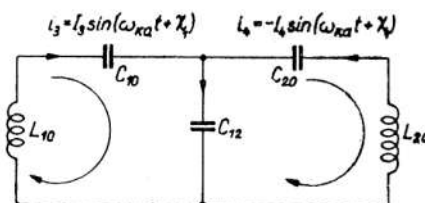
$$\omega_{ks}^2 = \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} \frac{I_2 - I_1}{I_2}}{L_{20}}.$$

Budući da je $(I_2 - I_1)$ negativno, znači, da je

$$\omega_{ks}^2 < \frac{1}{C_{20} L_{20}}.$$



Slika 284.



Slika 285.

Iz dosadašnjih rezultata slijedi, da se ω_{ks}^2 nalazi između $\frac{1}{C_{10} L_{10}}$ i $\frac{1}{C_{20} L_{20}}$. Ako je $I_1 = I_2$, onda će biti:

$$\omega_{ks}^2 = \frac{1}{C_{10} L_{10}} = \frac{1}{C_{20} L_{20}} = \Omega_{ks}^2.$$

Nadalje se vidi, da je ω_{ks}^2 manje od $\frac{1}{\frac{C_{10}}{L_{10}} + \frac{C_{12}}{L_{10}}}$, budući da je $\frac{I_1 - I_2}{I_1}$ pravi razlomak. Isto tako je manje i od $\frac{1}{\frac{C_{20}}{L_{20}} + \frac{C_{12}}{L_{20}}}$, budući da je $\frac{I_2 - I_1}{I_2}$ negativno, odnosno i radi toga, jer je — kako znamo — manje i od $\frac{1}{C_{20} L_{20}}$.

Neka prema sl. 285. u sistemima postoji samo partikularni antisinhroni titraj. Pretpostavit ćemo, da je $I_3 > I_4$. Za prvi sistem vrijedit će jednačba:

$$0 = L_{10} \omega_{ka} I_3 \cos(\omega_{ka} t + \chi_1) - \frac{1}{\omega_{ka} C_{10}} I_3 \cos(\omega_{ka} t + \chi_1) - \\ - \frac{1}{\omega_{ka} C_{12}} [I_3 - (-I_4)] \cos(\omega_{ka} t + \chi_1).$$

Za drugi sistem vrijedit će:

$$0 = L_{20} \omega_{ka} (-I_4) \cos(\omega_{ka} t + \chi_1) - \frac{1}{\omega_{ka} C_{20}} (-I_4) \cos(\omega_{ka} t + \chi_1) - \\ - \frac{1}{\omega_{ka} C_{12}} (-I_4 - I_3) \cos(\omega_{ka} t + \chi_1).$$

Iz jednačbe za prvi sistem slijedi:

$$\omega_{ka}^2 = \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} \frac{I_3 + I_4}{I_3}}{L_{10}} < \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{10}}.$$

Iz jednačbe za drugi sistem slijedi:

$$\omega_{ka}^2 = \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} \frac{I_4 + I_3}{I_4}}{L_{20}} > \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{20}}.$$

Nadalje se vidi, da je ω_{ka}^2 veće od $\frac{1}{\frac{C_{10}}{L_{10}} + \frac{C_{12}}{L_{10}}}$ i od $\frac{1}{\frac{C_{20}}{L_{20}} + \frac{C_{12}}{L_{20}}}$, budući da je $\frac{I_3 + I_4}{I_3}$, kao i $\frac{I_4 + I_3}{I_4}$, veće od 1.

Za slučaj jednakosti $I_3 = I_4$, bit će:

$$\omega_{ka}^2 = \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{10}} = \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{20}} = \Omega_{ka}^2.$$

Prema tome, uzevši u obzir i granične slučajeve, možemo pisati:

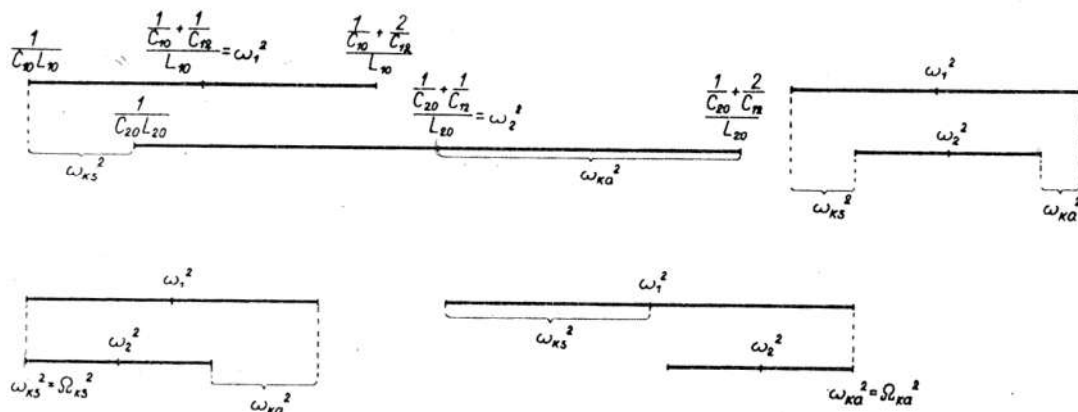
$$\min\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right) \leq \omega_{ks}^2 \leq \max\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right),$$

$$\omega_{ks}^2 \leq \min\left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20}}\right),$$

$$\min\left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{10}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{20}}\right) \leq \omega_{ka}^2 \leq \max\left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{10}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{20}}\right),$$

$$\omega_{ka}^2 \geq \max\left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20}}\right).$$

Kako vidimo, vezne frekvencije su ograničene s glavnim frekvencijama simetriranih sistema kao i razvezanim frekvencijama. Sl. 286. prikazuje razne slučajeve, koji mogu nastupiti prilikom simetriranja kapacitivno vezanih nepri-
gušenih sistema, te područja u kojima se nalaze ω_{ks}^2 i ω_{ka}^2 .



Slika 286.

Ukoliko mijenjamo parametre vezanih sistema, mijenjat će se, razumljivo, ω_{ks}^2 i ω_{ka}^2 , ali istodobno i njihove granice, jer će se mijenjati i pripadni simetrirani sistemi, a prema tome i njihove glavne titrajne frekvencije.

c) Simetrični sistemi

Ako imamo dva kapacitivno vezana i međusobno usklađena sistema, t. j.

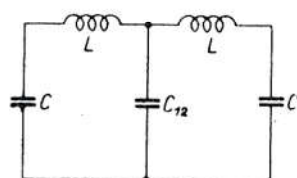
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega^*),$$

to će biti:

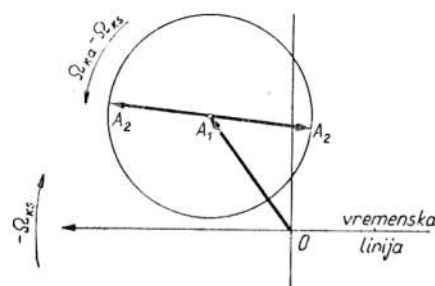
$$\omega_{ks, ka}^2 = \frac{\omega^2 + \omega^2}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\omega^2 - \omega^2)^2 + 4K_{kap}^2 \omega^2 \omega^2} = \omega^2 \mp K_{kap} \omega^2,$$

odnosno

$$\omega_{ks, ka} = \omega (1 \mp K_{kap})^{\frac{1}{2}}.$$



Slika 287.



Slika 288.

Ako, prema slici 287., imamo dva simetrična sistema, onda je:

$$K_{kap} = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}}.$$

Prema tome je:

$$\omega_{ks, ka}^2 = \omega^2 \left(1 \mp \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}} \right) = \frac{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}}{L} \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}} \mp \frac{1}{C_{12}},$$

odnosno

$$\omega_{ks} = \sqrt{\frac{1}{CL}} = \Omega_{ks},$$

$$\omega_{ka} = \sqrt{\frac{\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}}}{L}} = \Omega_{ka}.$$

*) Kod prigušenih krugova označivat ćemo parametre, koji su jednaki u obim krugovima s indeksom „raz“. O tome, međutim, kasnije.

To znači — kako smo to već naveli u poglavlju 16. točka c.) — da simetrični sistemi mogu proizvesti samo glavne titraje. Ta činjenica se mora pokazati i kod odnosa $\frac{B_1}{A_1}$ i $\frac{B_2}{A_2}$, kako slijedi:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{-L \frac{1}{LC} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{12}}} = 1,$$

odnosno

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{-L \frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{12}}} = -1.$$

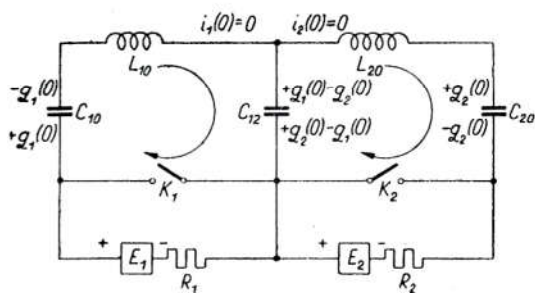
Prema tome opći integral glasi:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(\Omega_{ks} t + \varphi) + A_2 \sin(\Omega_{ka} t + \chi), \\ q_2 &= A_1 \sin(\Omega_{ks} t + \varphi) - A_2 \sin(\Omega_{ka} t + \chi). \end{aligned}$$

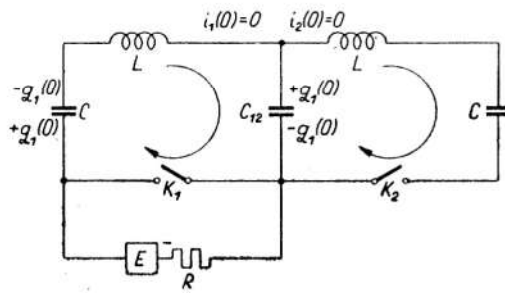
Na sl. 288. nacrtan je verzorski prikaz simetričnih kapacitivno vezanih nepri-
gušenih sistema.

d) Po jedan primjer izazivanja zadanih početnih uvjeta

α) Kod nesimetričnih sistema neka je u $t=0 \dots q_1 = q_1(0)$,
 $q_2 = q_2(0)$, $i_1 = i_1(0) = 0$, te $i_2 = i_2(0) = 0$.



Slika 289.



Slika 290.

Praktično bismo početne uvjete izazvali prema sl. 289. djelovanjem napona

$$E_1 = \frac{q_1(0)}{C_{10}} + \frac{q_1(0) - q_2(0)}{C_{12}},$$

te napona

$$E_2 = \frac{q_2(0)}{C_{20}} + \frac{q_2(0) - q_1(0)}{C_{12}}$$

na prvi, odnosno na drugi sistem, te istodobnim zatvaranjem sklopki K_1 i K_2 po svršenom punjenju. Tada bi u $t=0$ bilo:

$$q_1(0) = A_1 \sin \varphi + A_2 \sin \chi,$$

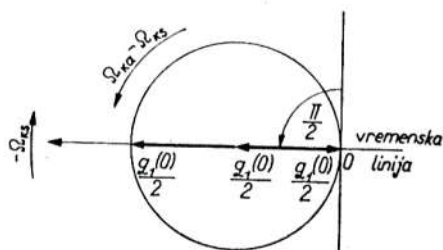
$$q_2(0) = F_1 A_1 \sin \varphi - F_2 A_2 \sin \chi,$$

$$\left. \frac{dq_1}{dt} \right|_{t=0} = 0 = \omega_{ks} A_1 \cos \varphi + \omega_{ka} A_2 \cos \chi,$$

$$\left. \frac{dq_2}{dt} \right|_{t=0} = 0 = \omega_{ks} F_1 A_1 \cos \varphi - \omega_{ka} F_2 A_2 \cos \chi.$$

Rješenjem tih četiri jednadžbi, dobili bismo A_1 , A_2 , φ i χ , a time bi bilo potpuno određeno q_1 , q_2 , i_1 , te i_2 u svako vrijeme t .

β) Kod simetričnih sistema, neka je u času $t=0 \dots q_1 = q_1(0)$, $q_2 = q_2(0) = 0$, $i_1 = i_1(0) = 0$, te $i_2 = i_2(0) = 0$.



Slika 291.

Praktično bismo te početne uvjete izazvali prema sl. 290. djelovanjem napona:

$$E = \frac{q_1(0)}{C} + \frac{q_1(0)}{C_{12}},$$

te istovremenim zatvaranjem sklopki K_1 i K_2 po dovršenom nabijanju. U $t=0$ tada bi bilo:

$$q_1(0) = A_1 \sin \varphi + A_2 \sin \chi,$$

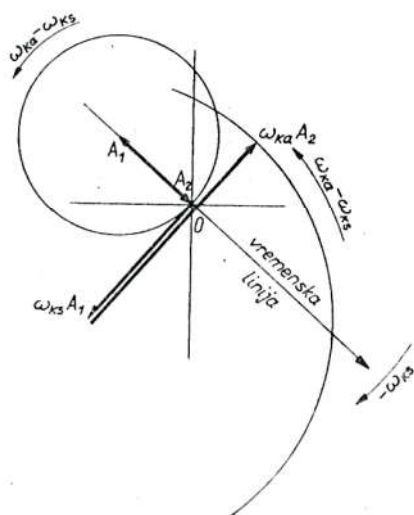
$$0 = A_1 \sin \varphi - A_2 \sin \chi,$$

$$0 = \Omega_{ks} A_1 \cos \varphi + \Omega_{ka} A_2 \cos \chi,$$

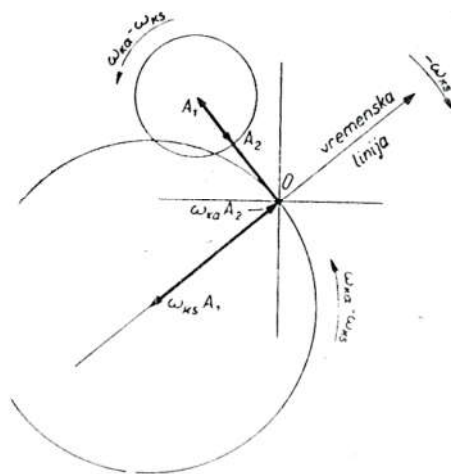
$$0 = \Omega_{ks} A_1 \cos \varphi - \Omega_{ka} A_2 \cos \chi.$$

naboj q , to u tom času sistem sadrži samo magnetsku energiju. Obratno, kad je vremenska linija okomita na promjenljivi verzor $(j\omega_{ks}\mathcal{A}_1 + j\omega_{ka}\mathcal{A}_2)$, čija projekcija označuje momentanu struju i , sistem sadrži samo električnu energiju.

Kako znamo, jednostavni neprigušeni sistem sadrži uvijek istu količinu titrajne energije, t. j. zbroj magnetske i električne energije je konstantan. Naprotiv, jedan vezani sistem, koji titra istodobno s dva harmonička titraja,



Slika 293.



Slika 294.

t. j. treptajem, može pod izvjesnim okolnostima biti potpuno „prazan“, t. j. bez magnetske i bez električne energije s time, da se sva energija nalazi u drugom sistemu. To je moguće u dva slučaja, i to:

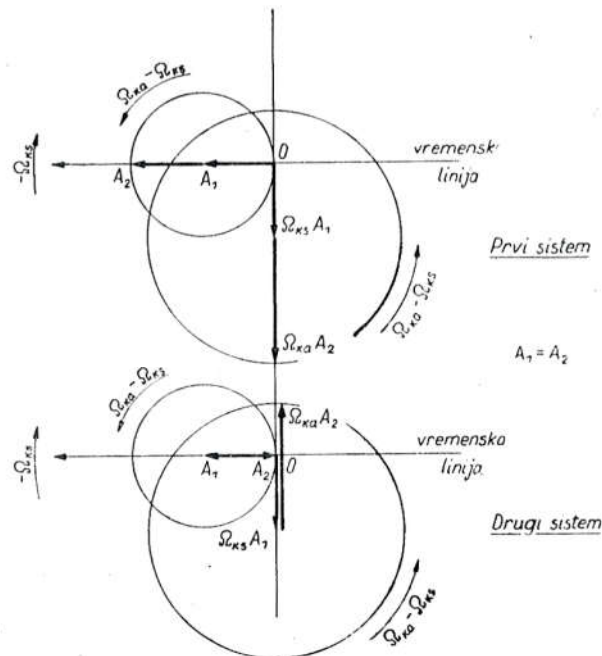
1.) Ako je prema sl. 293. amplituda $A_1 = A_2$, a njihovi verzori $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ upravo su u protufazi, dok se vremenska linija poklapa sa smjerom $\mathcal{A}_1$, ili $\mathcal{A}_2$. Takav slučaj može nastupiti kod naročitih početnih uvjeta, ali kod nesimetričnih sistema amplitude $B_1 = F_1 A_1$ i $B_2 = F_2 A_2$ u drugom vezanom sistemu ne će, naravno, biti međusobno jednake, jer bi to onda bili simetrični sistemi.

2.) Ako je prema sl. 294. amplituda $\omega_{ks} A_1 = \omega_{ka} A_2$, a verzori $j\omega_{ks}\mathcal{A}_1$ i $j\omega_{ka}\mathcal{A}_2$ nalaze se u protufazi, dok se vremenska linija poklapa sa smjerom jednoga od njih. (Istovremeno postojanje $A_1 = A_2$ u protufazi, te $\omega_{ks} A_1 = \omega_{ka} A_2$ znači, da imamo dva jednaka harmonička verzora iste frekvencije u međusobnoj opoziciji, čija je rezultanta uvijek jednaka nuli).

U našim simetričnim sistemima, koje želimo sada promatrati, imat ćemo u početku situaciju prema sl. 295., t. j. prvi sistem sadrži samo električnu energiju, a drugi je prazan. Da energija u cijelosti pređe iz prvoga u drugi sistem, situacija nakon nekog vremena t mora biti upravo obrnuta, t. j. kod prvog sistema, uz horizontalni položaj vremenske linije, verzor $\mathcal{A}_2$ mora se nalaziti u protufazi s verzorom $\mathcal{A}_1$, a kod drugog sistema oba verzora moraju biti u fazi. Općenito su, međutim, moguća tri slučaja, t. j. omjer $\frac{\Omega_{ka} - \Omega_{ks}}{\Omega_{ks}}$ izražen najmanjim mogućim cijelim brojevima, dakle kao $\frac{(\Omega_{ka} - \Omega_{ks}) : \alpha}{\Omega_{ks} : \alpha}$, gdje je

α najveća zajednička mjera brojnika i nazivnika, može biti $\frac{\text{neparno}}{\text{parno}}$, $\frac{\text{neparno}}{\text{neparno}}$ i $\frac{\text{parno}}{\text{neparno}}$.

Vrijeme t odabrali smo upravo tako, da je vektor $\mathcal{A}_2$ kroz to vrijeme opisao kut, koji je jednak $\frac{(\Omega_{ka} - \Omega_{ks})}{\alpha} \pi$. Kod toga, razumije se, izraz ispred π bit će bez dimenzije, jer on označuje samo jedan broj iz omjera. Vremenska linija opisat će kroz isto vrijeme kut, koji je jednak $-\frac{\Omega_{ks}}{\alpha} \pi$. Kod odnosa $\frac{\text{neparno}}{\text{parno}}$, ili $\frac{\text{neparno}}{\text{neparno}}$, opisat će vektor $\mathcal{A}_2$ neparni multiplum od π , a istovre-

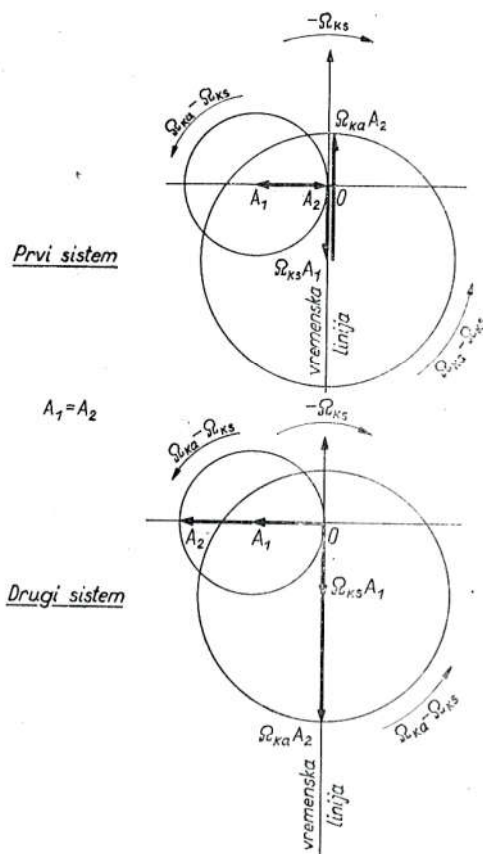


Slika 295.

meno će vremenska linija opisati prvi put parni, a drugi put neparni multiplum od $-\pi$. U oba slučaja bit će ispunjen uvjet za potpunu izmjenu energije, jer će vremenska linija doći opet u horizontalan položaj (iako u drugom slučaju protivnog smjera, nego u početku), a vektor prvog i drugog treptaja, koji se okreće, imat će protivan smjer od svog početnog smjera.

Međutim, kod odnosa $\frac{\text{parno}}{\text{neparno}}$, okrenut će se vektor prvog i drugog sistema za parni multiplum od π , dakle, imat će isti smjer kao u početku, dok će se vremenska linija okrenuti za neparni multiplum od $-\pi$. Ako uzmemo polovinu vremena, to će se u slučaju, da je $\frac{(\Omega_{ka} - \Omega_{ks})}{2\alpha}$ postalo neparno, oba vektora sada okrenuti u protivan smjer, ali vremenska linija ne će biti horizontalna, nego vertikalna, jer će se njen kut, koji je prije bio neparni

multiplum od $-\pi$, sada raspoloviti. Sl. 296. prikazuje taj položaj, te je vidljivo, da se prvi sistem nije ispraznio, jer $i_1 \neq 0$, te prema tome ne postoji potpuna izmjena energije. Ako bi oba verzora nakon $\frac{t}{4}$, $\frac{t}{8}$ i t. d. došla u smjer-



Slika 296.

protivan njihovom početnom smjeru, onda bi vremenska linija opisala samo jednu četvrtinu, jednu osminu i t. d. neparnog multipluma od $-\pi$, dakle, nikako ne bi bila u horizontalnom položaju. U slučaju, da je navedeni omjer iracionalan broj, ne bi također nikad došlo do potpune izmjene energije.

f) Neke primjedbe o postavljanju početnih uvjeta

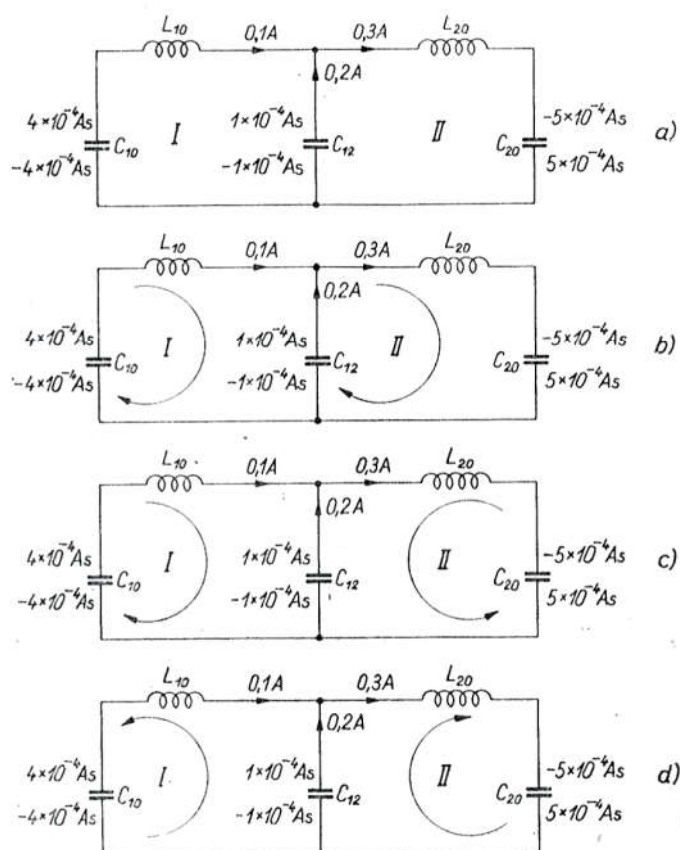
Obično su kao početni uvjeti zadani $q_1(0)$, $q_2(0)$,

$$i_1(0) = \left. \frac{dq_1}{dt} \right|_{t=0}, \text{ te } i_2(0) = \left. \frac{dq_2}{dt} \right|_{t=0}.$$

Kod zamjenjivanja tih općenitih simbola određenim brojčanim veličinama, treba uočiti slijedeće:

Početno fizikalno stanje krugova zadano je, i radi toga ne zavisi od nas. Međutim, od nas zavisi, koji ćemo smjer kod obilaska pojedinog kruga smatrati pozitivnim, a koji negativnim. Pomoću tih smjerova, čiji smo, dakle, predznak povoljno odredili, možemo izraziti stvarno početno fizikalno stanje brojčanim veličinama, jer će upravo o tim odabranim smjerovima ovisiti predznaci tih naših brojčanih iznosa.

Zadano nam je početno fizikalno stanje krugova prema sl. 297. crtež a), gdje su označeni naboji svake ploče, kao i stvarni smjerovi struja u pojedinim granama, te njihova amperaža. Odabrane pozitivne smjerove obilaska označili



Slika 297.

smo na ostalim trima crtežima kružnim strelicama. Uz definicije $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$, odnosno $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$, bit će početni uvjeti za crtež b) na navedenoj slici:

Za prvi sistem

$$\begin{aligned} q_1(0) &= -4 \times 10^{-4} \text{ As,} \\ q_1(0) - q_2(0) &= 1 \times 10^{-4} \text{ As,} \\ i_1(0) &= 0,1 \text{ A,} \\ i_1(0) - i_2(0) &= -0,2 \text{ A.} \end{aligned}$$

Za drugi sistem

$$\begin{aligned} q_2(0) &= -5 \times 10^{-4} \text{ As,} \\ q_2(0) - q_1(0) &= -1 \times 10^{-4} \text{ As,} \\ i_2(0) &= 0,3 \text{ A,} \\ i_2(0) - i_1(0) &= 0,2 \text{ A.} \end{aligned}$$

Početni uvjeti za crtež c) na navedenoj slici bit će:

Za prvi sistem

$$\begin{aligned}q_1(0) &= -4 \times 10^{-4} \text{ As}, \\q_1(0) + q_2(0) &= 1 \times 10^{-4} \text{ As}, \\i_1(0) &= 0,1 \text{ A}, \\i_1(0) + i_2(0) &= -0,2 \text{ A}.\end{aligned}$$

Za drugi sistem

$$\begin{aligned}q_2(0) &= 5 \times 10^{-4} \text{ As}, \\q_2(0) + q_1(0) &= 1 \times 10^{-4} \text{ As}, \\i_2(0) &= -0,3 \text{ A}, \\i_2(0) + i_1(0) &= -0,2 \text{ A}.\end{aligned}$$

Početni uvjeti za crtež d) na navedenoj slici bit će:

Za prvi sistem

$$\begin{aligned}q_1(0) &= 4 \times 10^{-4} \text{ As}, \\q_1(0) + q_2(0) &= -1 \times 10^{-4} \text{ As}, \\i_1(0) &= -0,1 \text{ A}, \\i_1(0) + i_2(0) &= 0,2 \text{ A}.\end{aligned}$$

Za drugi sistem

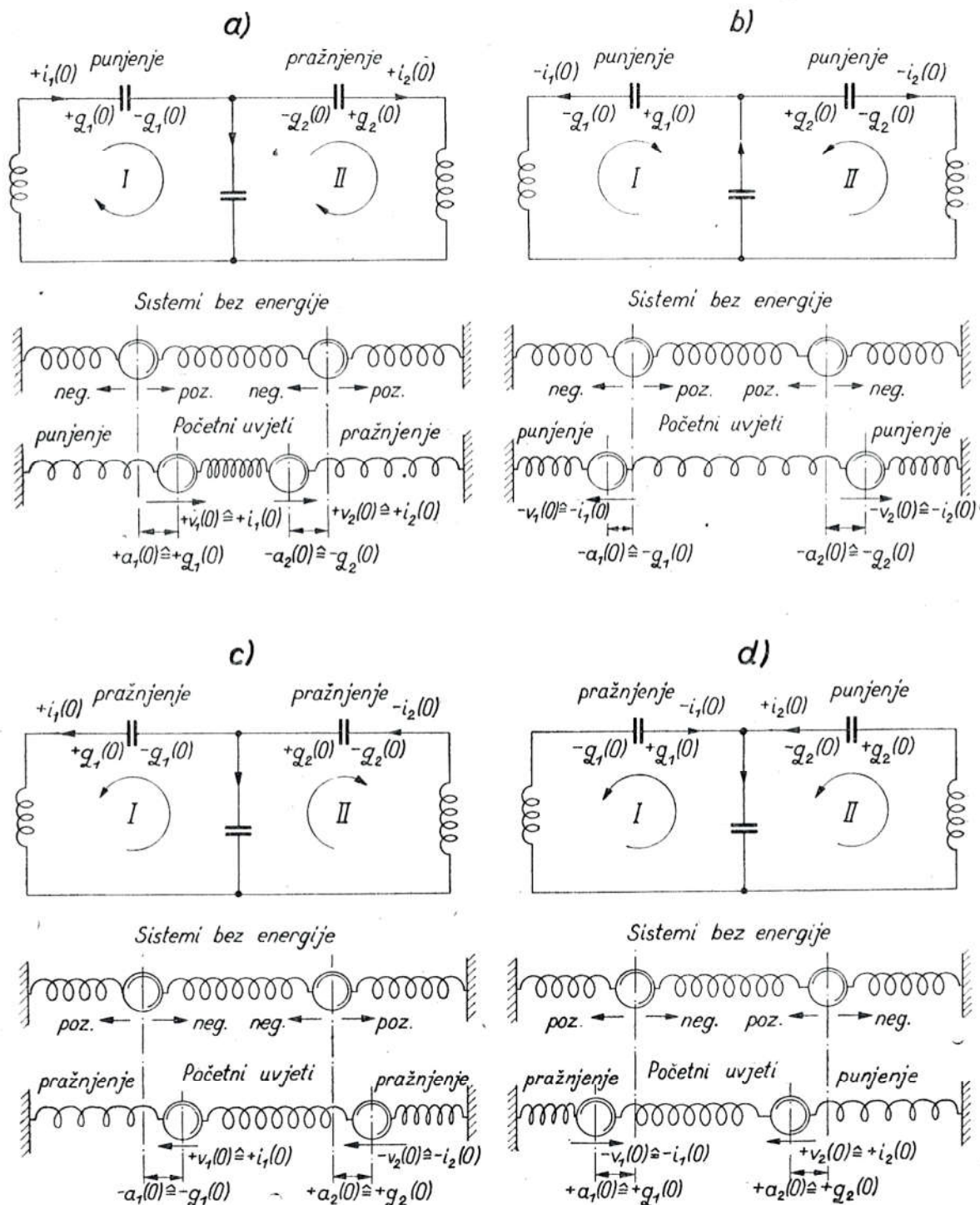
$$\begin{aligned}q_2(0) &= -5 \times 10^{-4} \text{ As}, \\q_2(0) + q_1(0) &= -1 \times 10^{-4} \text{ As}, \\i_2(0) &= 0,3 \text{ A}, \\i_2(0) + i_1(0) &= 0,2 \text{ A}.\end{aligned}$$

Rezultati dobiveni pomoću tih početnih uvjeta, bili bi, naravno, fizikalno jednaki, ali bi se razlikovali po predznacima, no s time, da svaki vrijedi za dotični pozitivni smjer obilaska, za koji vrijede i početni uvjeti, koje smo upravo upotrebili da pronađemo te rezultate.

○ Kako izgledaju zadani početni uvjeti električnih krugova kod njihovog mehaničkog analogona?

Nabijanje električnog kondenzatora strujom pozitivnog ili negativnog smjera, analogno je u mehaničkoj slici stezanju ili rastezanju pera, jer se ono tada napinje i prima energiju. Pražnjenje električnog kondenzatora analogno je vraćanju pera u nenapeti položaj.

Na sl. 298. crtež a), gore, prikazani su zadani početni uvjeti, te su ucrtani i odabrani pozitivni smjerovi kod kapacitivno vezanih neprigušenih električnih krugova. Na istom crtežu, u sredini, prikazani su njihovi mehanički analogoni, ali bez energije, čiji se pozitivni smjerovi u oba sistema podudaraju



Slika 298.

s gornjim odabranim pozitivnim smjerovima električnih krugova. Obzirom na to, da ćemo struju definirati kao $i = \frac{dq}{dt}$, promatrat ćemo kod oba sistema lijeve ploče, jer na njih pozitivna struja donosi naboj. Međutim, na tim pločama nalaze se već početni naboji, i to na lijevoj ploči sistema I nalazi se

$$q_1 = q_1(0),$$

t. j. pozitivno, a na lijevoj ploči sistema II, nalazi se

$$q_2 = -q_2(0),$$

t. j. negativno. To se vidi na istom crtežu dolje, gdje je

$$a_1(0) \triangleq q_1(0)$$

naneseno u pozitivnom smjeru od položaja mirovanja prve mase, dok je

$$-a_2(0) \triangleq -q_2(0)$$

naneseno u negativnom smjeru od položaja mirovanja druge mase. Isto tako su unesene i početne brzine u skladu s početnim strujama, t. j.

$$v_1(0) \triangleq i_1(0), \quad \text{te} \quad v_2(0) \triangleq i_2(0),$$

i to oboje kao pozitivno. Struja $i_1(0)$ puni prvi kondenzator, i analogno, $v_1(0)$ rasteže korespondentno pero, dok naprotiv struja $i_2(0)$ ispražnjava drugi kondenzator, i analogno $v_2(0)$ vraća dotično pero u srednji položaj.

Na crtežu b) promatrat ćemo kod sistema I, obzirom na odabrani pozitivni smjer, lijevu ploču s negativnim početnim nabojem $-q_1(0)$, te negativnom strujom $-i_1(0)$, koja puni taj kondenzator, a kod sistema II, gdje smo odabrali obratni pozitivni smjer, promatrat ćemo desnu ploču također s negativnim početnim nabojem $-q_2(0)$, te negativnom strujom $-i_2(0)$, koja također puni svoj kondenzator.

Na crtežu c) promatrat ćemo, obzirom na ovdje odabrane pozitivne smjerove, kod sistema I desnu ploču s negativnim početnim nabojem $-q_1(0)$, te pozitivnom strujom $i_1(0)$, koja prazni taj kondenzator. Kod sistema II, s obratnim pozitivnim smjerom, promatrat ćemo lijevu ploču s pozitivnim početnim nabojem $q_2(0)$, i negativnom strujom $-i_2(0)$, koja također prazni svoj kondenzator.

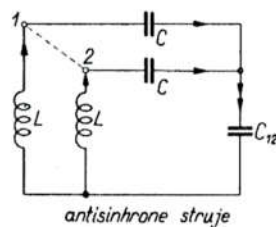
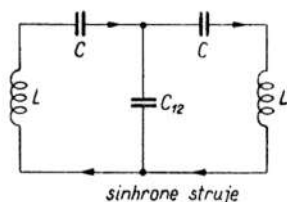
Na crtežu a) kod sistema II, i na crtežu c), također kod sistema II, u početku je kondenzator nabijen, ali različitog polariteta. To se očituje i u mehaničkoj analogiji, jer je korespondentno pero u crtežu a), dolje, rastegnuto, a u crtežu c) dolje, stisnuto. Međutim, iz toga ne bismo smjeli zaključiti, da ćemo na crtežu b) kod sistema II, i na crtežu c) kod sistema I, čiji kondenzatori imaju isti polaritet, u mehaničkoj analogiji dobiti istu sliku. To se, uostalom, tamo i vidi, jer je na crtežu b) dotično pero stisnuto, a na crtežu c) rastegnuto. To je ipak sasvim ispravno, jer se istovrsni smjerovi električnih polja, koja se nalaze u raznim sistemima, u mehaničkoj analogiji raznovrsno pokazuju, t. j. kod jednoga sistema kao stiskanje pera, a kod drugog kao rastezanje. To se vidi i na crtežima c) i d), gdje je na jednom i drugom prikazan baš takav slučaj, t. j. idući vanjskom petljom imaju oba električna polja na svakom crtežu isti smjer.

g) Određivanje glavnih frekvencija pomoću struja

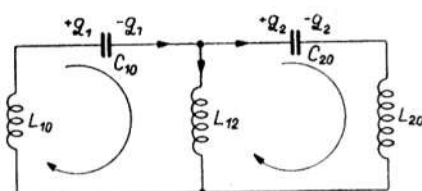
U simetričnim električnim vezanim sistemima vrlo lako možemo pomoću struja odrediti glavne titrajne frekvencije. Pošto su sinhronne struje po jačini jednake, to, prema sl. 299., gore, u veznom dijelu ne će teći nikakva struja,

pa radi toga imamo pred sobom obični serijski krug s $2L$ i $\frac{C}{2}$, odnosno

$$\Omega_{ks} = \sqrt{\frac{1}{2L \frac{C}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$



Slika 299.



Slika 300.

Kod antisinhroneg slučaja zbog jednakih struja možemo, prema istoj slici, dolje, spojiti točke istog potencijala 1 i 2, i imamo obični serijski krug s $\frac{L}{2}$, $2C$ i C_{12} , odnosno

$$\Omega_{ka} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2C} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{L}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}}}{L}}.$$

18. INDUKTIVNO VEZANI NEPRIGUŠENI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA

a) Opći integral titrajnih diferencijalnih jednadžbi

Prema sl. 300. bit će:

$$L_{10} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C_{10}} + L_{12} \frac{d^2 (q_1 - q_2)}{dt^2} = 0,$$

$$L_{20} \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_2}{C_{20}} + L_{12} \frac{d^2 (q_2 - q_1)}{dt^2} = 0,$$

$$(L_{10} + L_{12}) \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C_{10}} - L_{12} \frac{d^2 q_2}{dt^2} = 0,$$

$$(L_{20} + L_{12}) \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_2}{C_{20}} - L_{12} \frac{d^2 q_1}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{1}{C_{10}(L_{10} + L_{12})} q_1 - \frac{L_{12}}{L_{10} + L_{12}} \frac{d^2 q_2}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{1}{C_{20}(L_{20} + L_{12})} q_2 - \frac{L_{12}}{L_{20} + L_{12}} \frac{d^2 q_1}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_1^2 q_1 - k_{1\text{ind}} \frac{d^2 q_2}{dt^2} = 0, \quad \text{I.)}$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_2^2 q_2 - k_{2\text{ind}} \frac{d^2 q_1}{dt^2} = 0. \quad \text{II.)}$$

Iz II.) dvostrukom integracijom slijedi:

$$q_1 = \frac{1}{k_{2\text{ind}}} q_2 + \frac{\omega_2^2}{k_{2\text{ind}}} \left[\iint q_2 dt dt + C_1 t + C_2 \right].$$

Uvršteno u I.) daje:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{2\text{ind}}} \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{\omega_2^2}{k_{2\text{ind}}} q_2 + \omega_1^2 \left[\frac{q_2}{k_{2\text{ind}}} + \frac{\omega_2^2}{k_{2\text{ind}}} \iint q_2 dt dt + \frac{\omega_2^2}{k_{2\text{ind}}} C_1 t + \right. \\ \left. + \frac{\omega_2^2}{k_{2\text{ind}}} C_2 \right] - k_{1\text{ind}} \frac{d^2 q_2}{dt^2} = 0. \end{aligned}$$

Dva puta diferencirano, te budući da je

$$k_{1\text{ind}} k_{2\text{ind}} = K_{\text{ind}}^2,$$

slijedi:

$$\frac{d^4 q_2}{dt^4} + \omega_2^2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_1^2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_1^2 \omega_2^2 q_2 - K_{\text{ind}}^2 \frac{d^4 q_2}{dt^4} = 0.$$

Budući da su obje diferencijalne jednačbe, t. j. ona za q_1 , i ona za q_2 , jednako građene, to će im opći integral biti istog oblika, te naprosto možemo pisati q , t. j.

$$[1 - K_{\text{ind}}^2] \frac{d^4 q}{dt^4} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_1^2 \omega_2^2 q = 0.$$

Pomoću postavka

$$q = \mathcal{C} e^{j\omega_k t},$$

dobivamo karakterističnu jednadžbu:

$$[1 - K_{\text{ind}}^2] \omega_k^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \omega_k^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0,$$

iz koje slijede obje vezne frekvencije, t. j.

$$\begin{aligned} \omega_{ks}^2, \omega_{ka}^2 &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2(1 - K_{\text{ind}}^2)} \pm \sqrt{\left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2(1 - K_{\text{ind}}^2)} \right]^2 - \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{1 - K_{\text{ind}}^2}}, \\ \pm \omega_{ks}, \pm \omega_{ka} &= \pm \sqrt{\frac{1}{1 - K_{\text{ind}}^2} \left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right]}. \end{aligned}$$

Ovdje smo (obratno nego kod kapacitivno vezanih krugova, a prema analogiji kod simetričnih induktivno vezanih krugova) brzi titraj, dakle, onaj, koji se dobiva zbrajanjem izraza pod korijenom, označili kao sinhroni, a polagani, koji se dobiva odbijanjem izraza pod korijenom, označili smo kao antisinhroni titraj. Kasnije ćemo i sasvim egzaktno dokazati, da je ovdje $\omega_{ks} > \omega_{ka}$. Opći integral glavit će:

$$q_1 = A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) + A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi),$$

te analogno

$$q_2 = B_1 \sin(\omega_{ks} t + \delta) + B_2 \sin(\omega_{ka} t + \varepsilon).$$

Ovdje nismo do kraja proveli našu misao, da uistinu postoje sinhroni i anti-sinhroni titraji, jer bi B_2 moralo imati drukčiji predznak od A_2 , što će kasnije slijediti samo od sebe.

Ako opće integrale stavimo u prvu titrajnu diferencijalnu jednadžbu, dobivamo:

$$\begin{aligned} L_{10} [-\omega_{ks}^2 A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) - \omega_{ka}^2 A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi)] + \frac{1}{C_{10}} [A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) + \\ + A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi)] + L_{12} [-\omega_{ks}^2 A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) - \omega_{ka}^2 A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi) + \\ + \omega_{ks}^2 B_1 \sin(\omega_{ks} t + \delta) + \omega_{ka}^2 B_2 \sin(\omega_{ka} t + \varepsilon)] = 0. \end{aligned}$$

Poredano po ω_{ks} i ω_{ka} , daje:

$$\begin{aligned} -L_{10} \omega_{ks}^2 A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) + \frac{A_1}{C_{10}} \sin(\omega_{ks} t + \varphi) - L_{12} \omega_{ks}^2 A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) + \\ + L_{12} \omega_{ks}^2 B_1 \sin(\omega_{ks} t + \delta) - L_{10} \omega_{ka}^2 A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi) + \frac{A_2}{C_{10}} \sin(\omega_{ka} t + \chi) - \\ - L_{12} \omega_{ka}^2 A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi) + L_{12} \omega_{ka}^2 B_2 \sin(\omega_{ka} t + \varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Da bi ova jednađba vrijedila u svakom času, mora biti $\varphi = \delta$, odnosno $\chi = \varepsilon$ i zatim:

$$-L_{10} \omega_{ks}^2 A_1 + \frac{A_1}{C_{10}} - L_{12} \omega_{ks}^2 A_1 + L_{12} \omega_{ks}^2 B_1 = 0,$$

$$-L_{10} \omega_{ka}^2 A_2 + \frac{A_2}{C_{10}} - L_{12} \omega_{ka}^2 A_2 + L_{12} \omega_{ka}^2 B_2 = 0.$$

Iz ovih jednađbi slijedi:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{(L_{10} + L_{12}) \omega_{ks}^2 - \frac{1}{C_{10}}}{L_{12} \omega_{ks}^2} = \frac{\omega_{ks}^2 - \omega_1^2}{k_{1\text{ind}} \omega_{ks}^2} = F_1,$$

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{(L_{10} + L_{12}) \omega_{ka}^2 - \frac{1}{C_{10}}}{L_{12} \omega_{ka}^2} = \frac{\omega_{ka}^2 - \omega_1^2}{k_{1\text{ind}} \omega_{ka}^2} = -F_2.$$

Da smo upotrebili drugu diferencijalnu jednađbu, dobili bismo istovrijedne izraze, t. j.

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_{2\text{ind}} \omega_{ks}^2}{\omega_{ks}^2 - \omega_2^2} = F_1,$$

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{k_{2\text{ind}} \omega_{ka}^2}{\omega_{ka}^2 - \omega_2^2} = -F_2.$$

Da bi titraj s ω_{ks} , t. j. s brzom frekvencijom, bio sinhroni, mora F_1 , odnosno

$$(\omega_{ks}^2 - \omega_1^2) \text{ i } (\omega_{ks}^2 - \omega_2^2),$$

biti pozitivno, a da bi polagani titraj s ω_{ka} bio antisinhroni, mora $-F_2$, odnosno

$$(\omega_{ka}^2 - \omega_1^2) \text{ i } (\omega_{ka}^2 - \omega_2^2),$$

biti negativno. Da vidimo!

$$\begin{aligned} \omega_{ks}^2 - \omega_1^2 &= \frac{1}{1 - K_{\text{ind}}^2} \left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \right)^2 + K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right] - \\ &- \frac{2(1 - K_{\text{ind}}^2)}{2(1 - K_{\text{ind}}^2)} \omega_1^2 = \frac{1}{1 - K_{\text{ind}}^2} \left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1^2 + 2K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2}{2} + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \right)^2 + K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right] = \frac{1}{1 - K_{\text{ind}}^2} \left[\frac{-\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2}{2} + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \right)^2 + K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Taj je izraz uvijek pozitivan, bez obzira da li je $(-\omega_1^2 + \omega_2^2)$ pozitivno ili negativno. Prema tome je brzi titraj uistinu ujedno i sinhroni titraj. Analogno je:

$$\begin{aligned}\omega_{ka}^2 - \omega_1^2 &= \frac{1}{1 - K_{\text{ind}}^2} \left[\frac{-\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right] = \\ &= \frac{1}{1 - K_{\text{ind}}^2} \left[\frac{-\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2 - \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right].\end{aligned}$$

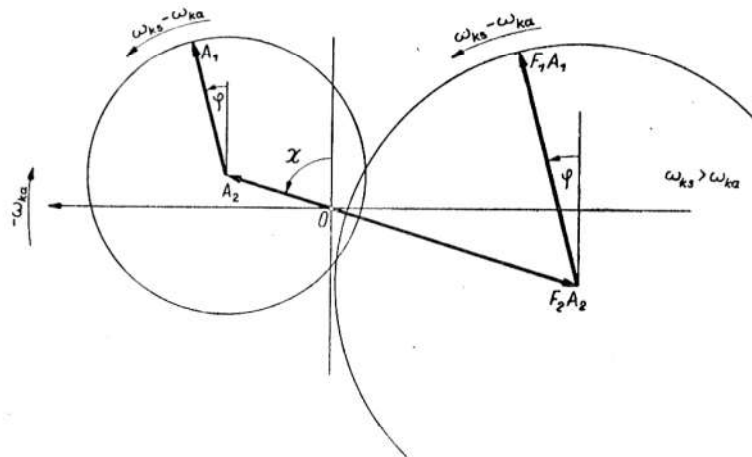
Da bi to uvijek bilo negativno, mora biti:

$$\left(\frac{-\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2\right)^2 < \left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2.$$

$$\left(\frac{-\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}\right)^2 + (-\omega_1^2 + \omega_2^2)K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2 + K_{\text{ind}}^4 \omega_1^4 < \left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + K_{\text{ind}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2.$$

$$-K_{\text{ind}}^2 \omega_1^4 + K_{\text{ind}}^4 \omega_1^4 < 0.$$

Ta je nejednadžba ispunjena, jer je $K_{\text{ind}} < 1$. Prema tome smo dokazali, da je polagani titraj ujedno i antisinhroni titraj.



Slika 301.

Do istih rezultata došli bismo, da smo upotrebili izraze, u kojima dolazi $(\omega_{ks}^2 - \omega_2^2)$, odnosno $(\omega_{ka}^2 - \omega_2^2)$.

Prema tome, možemo pisati:

$$q_1 = A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) + A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi),$$

$$q_2 = F_1 A_1 \sin(\omega_{ks} t + \varphi) - F_2 A_2 \sin(\omega_{ka} t + \chi).$$

Sl. 301. prikazuje verzore prvog i drugog kruga.

b) Granice veznih frekvencija

Pretpostavit ćemo, prema sl. 302., da u sistemima postoje samo sinhronne struje i neka je $I_1 > I_2$. Tada će za prvi sistem vrijediti:

$$0 = L_{10} \omega_{ks} I_1 \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) - \frac{1}{\omega_{ks} C_{10}} I_1 \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) + \\ + L_{12} \omega_{ks} (I_1 - I_2) \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1).$$

Iz toga slijedi:

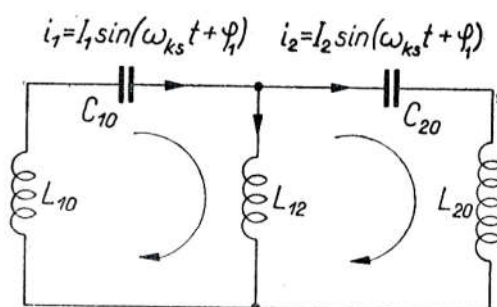
$$\omega_{ks}^2 = \frac{\frac{1}{C_{10}}}{L_{10} + L_{12} \frac{I_1 - I_2}{I_1}}.$$

Za drugi sistem vrijedi:

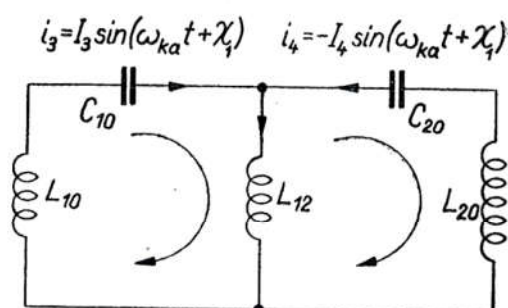
$$0 = L_{20} \omega_{ks} I_2 \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) - \frac{1}{\omega_{ks} C_{20}} I_2 \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) + \\ + L_{12} \omega_{ks} (I_2 - I_1) \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1).$$

Iz te jednadžbe slijedi:

$$\omega_{ks}^2 = \frac{\frac{1}{C_{20}}}{L_{20} + L_{12} \frac{I_2 - I_1}{I_2}}.$$



Slika 302.



Slika 303.

Budući da je $\frac{I_1 - I_2}{I_1}$ pravi razlomak, a $\frac{I_2 - I_1}{I_2}$ negativno, to znači, da je $\omega_{ks}^2 < \frac{1}{C_{10} L_{10}}$, te dalje, da je $\omega_{ks}^2 > \frac{1}{C_{20} L_{20}}$. Kod $I_1 = I_2$, bit će:

$$\omega_{ks}^2 = \frac{1}{C_{10} L_{10}} = \frac{1}{C_{20} L_{20}} = \Omega_{ks}^2.$$

Osim toga vidi se, da je:

$$\omega_{ks}^2 > \frac{1}{L_{10} + L_{12}}, \text{ te } \omega_{ks}^2 > \frac{1}{L_{20} + L_{12}}.$$

Sada ćemo pretpostaviti, da u sistemima, prema sl. 303., postoje samo antisinhronne struje, i neka je $I_3 > I_4$. Tada će za prvi sistem vrijediti:

$$\begin{aligned} 0 = L_{10} \omega_{ka} I_3 \cos(\omega_{ka} t + \chi_1) - \frac{1}{\omega_{ka} C_{10}} I_3 \cos(\omega_{ka} t + \chi_1) + \\ + L_{12} \omega_{ka} [I_3 - (-I_4)] \cos(\omega_{ka} t + \chi_1). \end{aligned}$$

Za drugi sistem bit će:

$$\begin{aligned} 0 = L_{20} \omega_{ka} (-I_4) \cos(\omega_{ka} t + \chi_1) - \frac{1}{\omega_{ka} C_{20}} (-I_4) \cos(\omega_{ka} t + \chi_1) + \\ + L_{12} \omega_{ka} (-I_4 - I_3) \cos(\omega_{ka} t + \chi_1). \end{aligned}$$

Iz tih jednažbi slijedi:

$$\omega_{ka}^2 = \frac{\frac{1}{C_{10}}}{L_{10} + L_{12} \frac{I_3 + I_4}{I_3}} = \frac{\frac{1}{C_{20}}}{L_{20} + L_{12} \frac{I_4 + I_3}{I_4}}.$$

Budući da je $\frac{I_3 + I_4}{I_3}$ manje od 2, a $\frac{I_4 + I_3}{I_4}$ veće od 2, to će biti:

$$\omega_{ka}^2 > \frac{1}{L_{10} + 2L_{12}}, \text{ odnosno } \omega_{ka}^2 < \frac{1}{L_{20} + 2L_{12}}.$$

U slučaju da je $I_3 = I_4$ bit će:

$$\omega_{ka}^2 = \frac{\frac{1}{C_{10}}}{L_{10} + 2L_{12}} = \frac{\frac{1}{C_{20}}}{L_{20} + 2L_{12}} = \Omega_{ka}^2.$$

Nadalje se vidi, da je ω_{ka}^2 manje od $\frac{1}{L_{10} + L_{12}}$, i manje od $\frac{1}{L_{20} + L_{12}}$.

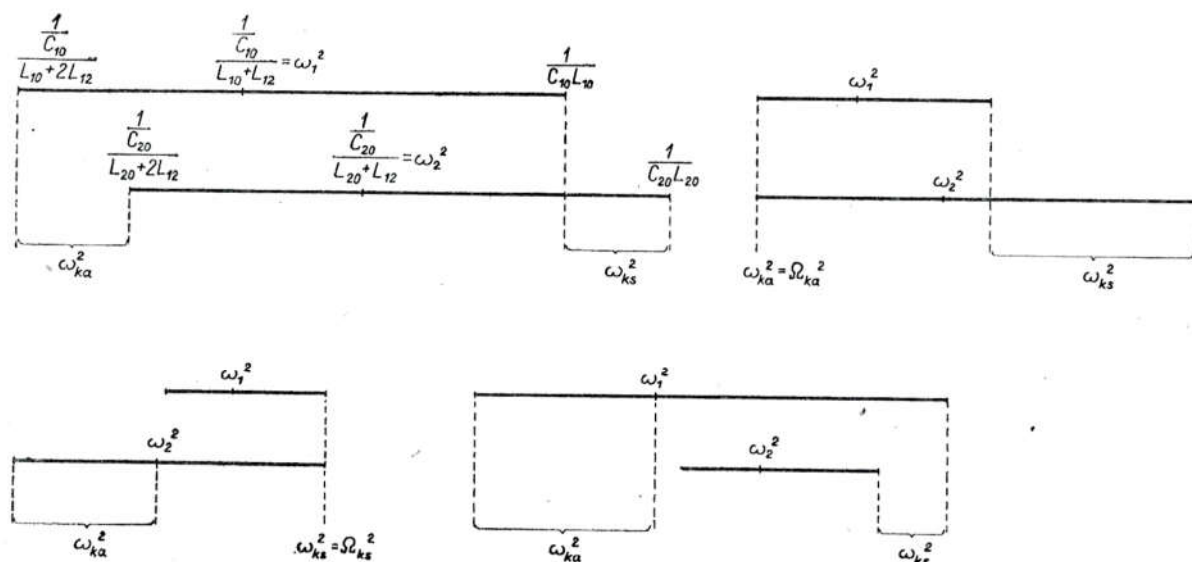
Prema tome, uzevši u obzir i granične slučajeve, možemo pisati:

$$\min\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right) \leq \omega_{ks}^2 \leq \max\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right).$$

$$\omega_{ks}^2 \geq \max\left(\frac{\frac{1}{C_{10}}}{L_{10} + L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}}}{L_{20} + L_{12}}\right).$$

$$\min\left(\frac{\frac{1}{C_{10}}}{L_{10} + 2L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}}}{L_{20} + 2L_{12}}\right) \leq \omega_{ka}^2 \leq \max\left(\frac{\frac{1}{C_{10}}}{L_{10} + 2L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}}}{L_{20} + 2L_{12}}\right).$$

$$\omega_{ka}^2 \leq \min\left(\frac{\frac{1}{C_{10}}}{L_{10} + L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}}}{L_{20} + L_{12}}\right).$$



Slika 304.

Slika 304. prikazuje neke slučajeve, koji mogu nastupiti kod induktivno vezanih neprigušenih krugova. (Kod simetriranja induktivno vezanih krugova ω_1^2 , odnosno ω_2^2 , ne leže u sredini kvadrata pripadnih glavnih titrajnih frekvencija, kao što je to kod kapacitivno vezanih krugova).

c) Simetrični sistemi

Ako imamo dva usklađena induktivno vezana sistema, bit će:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

i stoga

$$\omega_{ks, ka}^2 = \frac{1}{1 - K_{\text{ind}}^2} \left[\omega^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{4K_{\text{ind}}^2 \omega^4} \right] = \frac{\omega^2 (1 \pm K_{\text{ind}})}{1 - K_{\text{ind}}^2} = \frac{\omega^2}{1 \mp K_{\text{ind}}}.$$

$$\omega_{ks, ka} = \omega (1 \mp K_{\text{ind}})^{-\frac{1}{2}}.$$

Kod simetričnih sistema je $C_{10} = C_{20} = C$, odnosno $L_{10} = L_{20} = L$. Radi toga će biti:

$$K_{\text{ind}} = \frac{L_{12}}{L + L_{12}},$$

i nadalje

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C(L + L_{12})}}.$$

Prema tome je:

$$\omega_{ks, ka} = \omega \left(1 \mp \frac{L_{12}}{L + L_{12}} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{C(L + L_{12})}} \sqrt{\frac{L + L_{12} \mp L_{12}}{L + L_{12}}}.$$

$$\omega_{ks} = \frac{1}{\sqrt{CL}} = \Omega_{ks}.$$

$$\omega_{ka} = \frac{1}{\sqrt{C(L + 2L_{12})}} = \Omega_{ka}.$$

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{(L + L_{12}) \frac{1}{CL} - \frac{1}{C}}{L_{12} \frac{1}{CL}} = 1.$$

$$\frac{B_2}{A_1} = \frac{(L + L_{12}) \frac{1}{C(L + 2L_{12})} - \frac{1}{C}}{L_{12} \frac{1}{C(L + 2L_{12})}} = -1.$$

Prema tome je kod induktivno vezanih simetričnih krugova, analogno kao i kod kapacitivno vezanih simetričnih krugova:

$$q_1 = A_1 \sin(\Omega_{ks} t + \varphi) + A_2 \sin(\Omega_{ka} t + \chi),$$

$$q_2 = A_1 \sin(\Omega_{ks} t + \varphi) - A_2 \sin(\Omega_{ka} t + \chi).$$

Na sl. 305. vidi se verzorski prikaz simetričnih induktivno vezanih nepriguženih krugova.

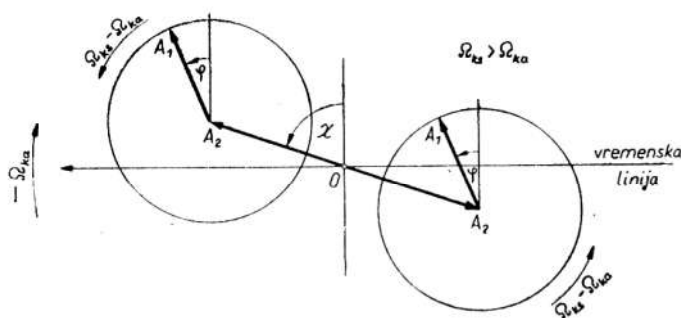
Kod početnih uvjeta, ako je u

$$t = 0 \dots q_1 = q_1(0),$$

$$q_2 = 0,$$

$$\dot{q}_1 = 0,$$

$$\dot{q}_2 = 0,$$



Slika 305.

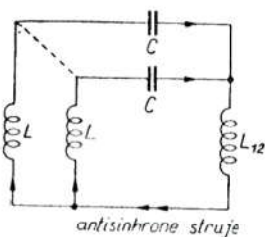
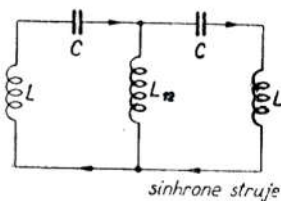
bilo bi analogno kao i kod kapacitivno vezanih simetričnih krugova:

$$q_1 = \frac{q_1(0)}{2} \sin\left(\Omega_{ks} t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{q_1(0)}{2} \sin\left(\Omega_{ka} t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$q_2 = \frac{q_1(0)}{2} \sin\left(\Omega_{ks} t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{q_1(0)}{2} \sin\left(\Omega_{ka} t + \frac{\pi}{2}\right).$$

d) Određivanje glavnih frekvencija pomoću struja

Neka u simetričnim sistemima, prema sl. 306., gore, teku samo sinhronne struje. U veznom dijelu ne će tada teći nikakva struja, jer se obje sinhronne struje međusobno poništavaju. Radi toga je:



Slika 306.

$$\Omega_{ks} = \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{2} 2L}} = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

Ako u obim sistemima teku samo antisinhronne struje, prema istoj slici, dolje, tada ukupni kapacitet iznosi $2C$, a ukupni induktivitet $\frac{L}{2} + L_{12}$.

Prema tome će biti:

$$\Omega_{ka} = \frac{1}{\sqrt{2C\left(\frac{L}{2} + L_{12}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{C(L + 2L_{12})}}.$$

19. UPOREĐENJE VEZNIH FREKVENCIJA USKLAĐENIH KRUGOVA KOD KAPACITIVNOG VEZANJA S VEZNIM FREKVENCIJAMA KOD INDUKTIVNOG VEZANJA

Kod kapacitivno vezanih usklađenih krugova, t. j. kod

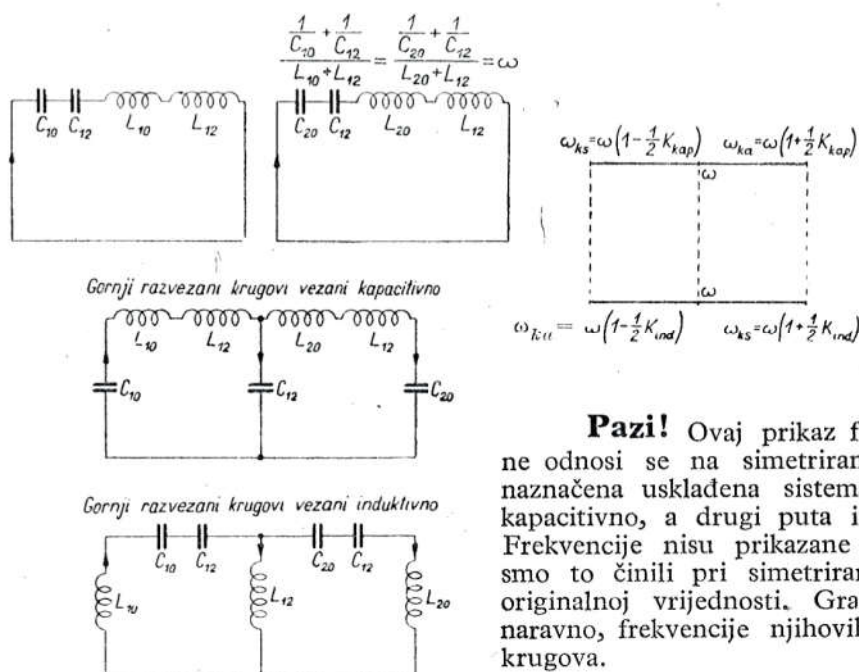
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega,$$

dobili smo za vezne frekvencije formulu

$$\omega_{ks, ka} = \omega (1 \mp K_{kap})^{\frac{1}{2}},$$

a kod induktivno vezanih usklađenih krugova formulu

$$\omega_{ks, ka} = \omega (1 \mp K_{ind})^{-\frac{1}{2}}.$$



Pazi! Ovaj prikaz frekvencija na brojnoj crti ne odnosi se na simetrirane sisteme, nego na oba naznačena usklađena sistema, koji su jednom vezani kapacitivno, a drugi puta induktivno istom jačinom. Frekvencije nisu prikazane u kvadratu — kao što smo to činili pri simetriranim sistemima — nego u originalnoj vrijednosti. Granice tih frekvencija su, naravno, frekvencije njihovih pripadnih simetriranih krugova.

$$K_{kap} = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}\right) \left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}\right)}} = K_{ind} = \frac{L_{12}}{\sqrt{(L_{10} + L_{12})(L_{20} + L_{12})}} = K \ll 1.$$

Slika 307.

Kod slabog vezanja, bit će, prema tome, po Mac Laurinovom razvoju, koji ćemo prekinuti kod drugog člana, za kapacitivno vezane usklađene krugove:

$$\omega_{ks, ka} = \omega \left(1 \mp \frac{1}{2}K_{kap}\right),$$

a za induktivno vezane usklađene krugove:

$$\omega_{ks, ka} = \omega \left(1 \pm \frac{1}{2} K_{\text{ind}} \right).$$

Ako imamo, dakle, dva usklađena kruga, koje možemo slabo vezati, jedamput kapacitivno, a drugi put induktivno, tako, da bude

$$K_{\text{kap}} = K_{\text{ind}} = K,$$

dobit ćemo u oba slučaja iste frekvencije, naravno, s time, da će kod kapacitivnog vezanja polagana frekvencija biti sinhrona, a brza antisinhrona, dok će kod induktivnog vezanja biti upravo obrnuto. Te odnose pokazuje sl. 307.

Ako bi kod krugova na navedenoj slici bilo $C_{10} = C_{20} = C$, te nadalje $L_{10} = L_{20} = L$, imali bismo simetrične krugove.

U tom slučaju bi bilo:

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{C}}{L + L_{12}}} \approx \sqrt{\frac{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}}{L + 2L_{12}}},$$

t. j. sinhroni titraj kod kapacitivnog vezanja jednak je antisinhronom titraju kod induktivnog vezanja, odnosno

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}}}{L + L_{12}}} \approx \sqrt{\frac{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}}{L}},$$

t. j. antisinhroni titraj kod kapacitivnog vezanja jednak je sinhronom titraju kod induktivnog vezanja.

Kasnije ćemo vidjeti, da kod usklađenih krugova sa slabim vezanjem, koji sadrže osim kapaciteta i induktiviteta još i omske otpore, kod narinutog vanjskog napona, kojemu uz istu amplitudu mijenjamo frekvenciju, najveće struje nastaju u blizini naših gornjih ω_{ks} i ω_{ka} . Međutim, budući da će te najveće struje, prema navedenom, kod kapacitivnog vezanja nastati upravo kod istih frekvencija kao i kod induktivnog vezanja, ne ćemo moći iz eventualnog eksperimenta zaključiti na vrstu vezanja. Tek kod čvrstog vezanja, kad je faktor vezanja iznad 0,3—0,4, opazila bi se razlika položaja tih istaknutih frekvencija najvećih struja, ako bismo jednom upotrebili kapacitivno, a drugi puta induktivno vezanje.

20. KOMBINIRANO VEZANI NEPRIGUŠENI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA

a) Opći integral titrajnih diferencijalnih jednadžbi

Prema sl. 308., bit će:

$$L_{10} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C_{10}} + L_{12} \left(\frac{d^2 q_1}{dt^2} - \frac{d^2 q_2}{dt^2} \right) + \frac{q_1 - q_2}{C_{12}} = 0,$$

$$L_{20} \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_2}{C_{20}} + L_{12} \left(\frac{d^2 q_2}{dt^2} - \frac{d^2 q_1}{dt^2} \right) + \frac{q_2 - q_1}{C_{12}} = 0,$$

$$(L_{10} + L_{12}) \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} \right) q_1 - L_{12} \frac{d^2 q_2}{dt^2} - \frac{1}{C_{12}} q_2 = 0,$$

$$(L_{20} + L_{12}) \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} \right) q_2 - L_{12} \frac{d^2 q_1}{dt^2} - \frac{1}{C_{12}} q_1 = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_1^2 q_1 - k_{1\text{ind}} \frac{d^2 q_2}{dt^2} - \frac{\frac{1}{C_{12}} \frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10} + L_{12} \frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}} q_2 &= 0, \\ \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_2^2 q_2 - k_{2\text{ind}} \frac{d^2 q_1}{dt^2} - \frac{\frac{1}{C_{12}} \frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20} + L_{12} \frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}} q_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Posljednji adend pomno-} \\ \text{žili smo i podijelili s istim} \\ \text{brojem.} \end{array}$$

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_1^2 q_1 - k_{1\text{ind}} \frac{d^2 q_2}{dt^2} - k_{1\text{kap}} \omega_1^2 q_2 = 0,$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_2^2 q_2 - k_{2\text{ind}} \frac{d^2 q_1}{dt^2} - k_{2\text{kap}} \omega_2^2 q_1 = 0.$$

Uz postavke $q_1 = \mathcal{C} e^{j\omega_k t}$, te $q_2 = \mathcal{D} e^{j\omega_k t}$, i kraćenjem s $e^{j\omega_k t}$, slijedi:

$$-\omega_k^2 \mathcal{C} + \omega_1^2 \mathcal{C} + k_{1\text{ind}} \omega_k^2 \mathcal{D} - k_{1\text{kap}} \omega_1^2 \mathcal{D} = 0, \quad \text{I.)}$$

$$-\omega_k^2 \mathcal{D} + \omega_2^2 \mathcal{D} + k_{2\text{ind}} \omega_k^2 \mathcal{C} - k_{2\text{kap}} \omega_2^2 \mathcal{C} = 0. \quad \text{II.)}$$

Ovdje ćemo se malo zaustaviti, da opravdamo naš postupak. Kako se vidi, pretpostavili smo, da su eksponenti obaju partikularnih integrala međusobno jednaki, t. j. $j\omega_k t$. Ako bismo pretpostavili različite eksponente, te napisali, da je

$$q_1 = \mathcal{C} e^{j\omega_{k1} t},$$

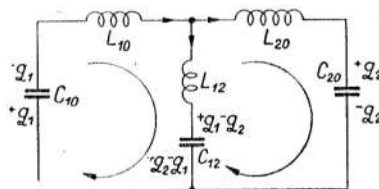
odnosno

$$q_2 = \mathcal{D} e^{j\omega_{k2} t},$$

diferencijalne jednačbe, uzevši općenito, ne bi bile zadovoljene, jer se ne bi mogle svakog časa izjednačiti s nulom. Ako bismo, naime, u te jednačbe uvrstili navedene partikularne integrale s različitim eksponentima, ne bismo više mogli kratiti zajedničkim faktorom, te bi slijedilo:

$$(-\omega_{k1}^2 + \omega_1^2) \mathcal{C} e^{j\omega_{k1} t} + (k_{1\text{ind}} \omega_{k2}^2 - k_{1\text{kap}} \omega_1^2) \mathcal{D} e^{j\omega_{k2} t} = 0, \quad \text{III.})$$

$$(-\omega_{k2}^2 + \omega_2^2) \mathcal{D} e^{j\omega_{k2} t} + (k_{2\text{ind}} \omega_{k1}^2 - k_{2\text{kap}} \omega_2^2) \mathcal{C} e^{j\omega_{k1} t} = 0. \quad \text{IV.})$$



Slika 308.

Iz III.) i IV.) vidimo — kako smo naveli — da te jednačbe, uzevši općenito, ne mogu uvijek postojati, jer oba verzora, koja se okreću različitim frekvencijama, a množena su realnim brojevima, ne će u svakom slučaju dati rezultantu jednako nuli. Međutim, u jednom specijalnom slučaju, t. j. kad ti brojevi sami postaju jednako nuli, te će jednačbe moći uvijek postojati. To će biti kod slijedećih četiri relacija:

$$(-\omega_{k1}^2 + \omega_1^2) = 0, \quad 1.)$$

$$(k_{1\text{ind}} \omega_{k2}^2 - k_{1\text{kap}} \omega_1^2) = 0, \quad 2.)$$

$$(-\omega_{k2}^2 + \omega_2^2) = 0, \quad 3.)$$

$$(k_{2\text{ind}} \omega_{k1}^2 - k_{2\text{kap}} \omega_2^2) = 0. \quad 4.)$$

Iz druge i četvrte relacije slijedi:

$$\omega_{k2}^2 = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{10}}} \omega_1^2 = \frac{1}{C_{12} L_{12}}, \text{ te } \omega_{k1}^2 = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{20}}} \omega_2^2 = \frac{1}{C_{12} L_{12}}.$$

Uzevši u obzir još i prvu i treću relaciju dobivamo:

$$\pm \omega_{k1} = \pm \omega_{k2} = \pm \omega_k = \pm \omega_1 = \pm \omega_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{C_{12}L_{12}}}.$$

Iz ovog rezultata vidimo, da smo pravilno postupili, te da i za taj specijalni slučaj vrijede naši postavci s jednakim eksponentima, t. j.

$$q_1 = \mathcal{C}e^{j\omega_k t}, \text{ te } q_2 = \mathcal{D}e^{j\omega_k t}.$$

Da nastavimo, gdje smo se zaustavili!

Eliminiranjem konstanta $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ iz jednadžbi I.) i II.) dobivamo karakterističnu jednadžbu:

$$(\omega_1^2 - \omega_k^2)(\omega_k^2 - \omega_2^2) = (k_{1\text{kap}}\omega_1^2 - k_{1\text{ind}}\omega_k^2)(k_{2\text{ind}}\omega_k^2 - k_{2\text{kap}}\omega_2^2).$$

Dalje slijedi:

$$\omega_k^4(1 - k_{1\text{ind}}k_{2\text{ind}}) - \omega_k^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 - k_{1\text{ind}}k_{2\text{kap}}\omega_2^2 - k_{2\text{ind}}k_{1\text{kap}}\omega_1^2) + \omega_1^2\omega_2^2(1 - k_{1\text{kap}}k_{2\text{kap}}) = 0,$$

$$\omega_k^4(1 - K_{\text{ind}}^2) - \omega_k^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 - k_{1\text{ind}}k_{2\text{kap}}\omega_2^2 - k_{2\text{ind}}k_{1\text{kap}}\omega_1^2) + \omega_1^2\omega_2^2(1 - K_{\text{kap}}^2) = 0.$$

Prema tome, kvadrati veznih frekvencija su:

$$\omega_{kb, kp}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - k_{1\text{ind}}k_{2\text{kap}}\omega_2^2 - k_{2\text{ind}}k_{1\text{kap}}\omega_1^2}{2(1 - K_{\text{ind}}^2)} \pm \sqrt{\left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - k_{1\text{ind}}k_{2\text{kap}}\omega_2^2 - k_{2\text{ind}}k_{1\text{kap}}\omega_1^2}{2(1 - K_{\text{ind}}^2)} \right]^2 - \frac{\omega_1^2\omega_2^2(1 - K_{\text{kap}}^2)}{(1 - K_{\text{ind}}^2)}}.$$

U ovom slučaju postupili smo drugačije, nego dosad, jer smo veznu frekvenciju, koja se dobiva pribrajanjem izraza pod korijenom prvom adendu, označili indeksom kb , t. j. kao brzu frekvenciju, dok smo onu, koja se dobiva odbijanjem toga izraza, označili indeksom kp , t. j. kao polaganu frekvenciju. Nismo ih označili indeksima ks , odnosno ka , jer sada i brzi i polagani titraj može biti i sinhroni i antisinhroni. O tome ćemo kasnije podrobno govoriti, ali ćemo ovdje ipak navesti, da će u slučaju, ako je

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \max\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right),$$

brzi titraj biti antisinhroni, a polagani sinhroni, dok će u slučaju

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} < \min\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right),$$

polagani titraj biti antisinhroni, a brzi sinhroni. U slučaju

$$\frac{1}{C_{10}L_{10}} > \frac{1}{C_{12}L_{12}} > \frac{1}{C_{20}L_{20}}, \text{ ili } \frac{1}{C_{10}L_{10}} < \frac{1}{C_{12}L_{12}} < \frac{1}{C_{20}L_{20}},$$

bit će oba titraja, t. j. i brzi i polagani titraj, sinhroni, a antisinhronog titraja uopće ne će biti. Ako u posljednjim formulama umjesto znakova nejednakosti nastupe znakovi jednakosti, onda će postojati samo jedan titraj.

Na isti način kao i kod čisto kapacitivnog, odnosno čisto induktivnog vezanja, možemo i ovdje dokazati, da su fazni kutovi treptaja u izrazu za q_1 jednaki faznim kutovima treptaja u izrazu za q_2 .

Prema tome ćemo, bez ikakvog naglašavanja da se radi o sinhronim ili antisinhronim titrajbima, općenito pisati:

$$q_1 = A_1 \sin(\omega_{kb} t + \varphi) + A_2 \sin(\omega_{kp} t + \chi),$$

$$q_2 = B_1 \sin(\omega_{kb} t + \varphi) + B_2 \sin(\omega_{kp} t + \chi).$$

Iz početnih diferencijalnih jednadžbi dobit ćemo na poznati način još slijedeće odnose:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_{kb}^2 - \omega_1^2}{k_{1\text{ind}} \omega_{kb}^2 - k_{1\text{kap}} \omega_1^2} = \frac{k_{2\text{ind}} \omega_{kb}^2 - k_{2\text{kap}} \omega_2^2}{\omega_{kb}^2 - \omega_2^2} = \pm F_1,$$

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_{kp}^2 - \omega_1^2}{k_{1\text{ind}} \omega_{kp}^2 - k_{1\text{kap}} \omega_1^2} = \frac{k_{2\text{ind}} \omega_{kp}^2 - k_{2\text{kap}} \omega_2^2}{\omega_{kp}^2 - \omega_2^2} = \mp F_2.$$

Ako $\frac{B_1}{A_1}$ ispadne pozitivno, onda je titraj s frekvencijom ω_{kb} sinhroni titraj, a ako ispadne negativno, onda je antisinhroni. Isto vrijedi i za $\frac{B_2}{A_2}$, obzirom na titraj s frekvencijom ω_{kp} . Ako postoje sinhroni i antisinhroni titraji, tada će kod pozitivnog $\frac{B_1}{A_1}$, vrijednost $\frac{B_2}{A_2}$ biti negativna, i obratno. Međutim — kako smo već naveli — oba odnosa mogu biti pozitivna.

Ako u gornjim formulama stavimo

$$k_{1\text{kap}} = k_{2\text{kap}} = K_{\text{kap}} = 0,$$

dobit ćemo formule za induktivno vezane krugove, a kod

$$k_{1\text{ind}} = k_{2\text{ind}} = K_{\text{ind}} = 0,$$

dobit ćemo formule za kapacitivno vezane krugove.

Za usklađene krugove bit će:

$$\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{L_{10}} + \frac{1}{L_{12}}} = \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{L_{20}} + \frac{1}{L_{12}}},$$

odnosno iz toga

$$\left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}\right)(L_{20} + L_{12}) = \left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}\right)(L_{10} + L_{12}).$$

Prema tome bit će:

$$k_{1\text{ind}} k_{2\text{kap}} = \frac{L_{12}}{L_{10} + L_{12}} \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}} = k_{2\text{ind}} k_{1\text{kap}} = \frac{L_{12}}{L_{20} + L_{12}} \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}.$$

Označimo li $k_{1\text{ind}}$ s a , $k_{2\text{ind}}$ s b , $k_{1\text{kap}}$ s c , i $k_{2\text{kap}}$ s d , tada će, dakle, biti:

$$ad = bc.$$

Pošto je $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega^2$, prelazi formula za vezne frekvencije u oblik:

$$\begin{aligned} \omega_{kb, kp}^2 &= \frac{2\omega^2 - ad\omega^2 - bc\omega^2}{2(1-ab)} \pm \sqrt{\left[\frac{2\omega^2 - ad\omega^2 - bc\omega^2}{2(1-ab)}\right]^2 - \frac{\omega^4(1-cd)}{1-ab}} = \\ &= \frac{\omega^2(2-ad-bc)}{2(1-ab)} \pm \\ &\pm \omega^2 \sqrt{\frac{4 + a^2d^2 + b^2c^2 - 4ad - 4bc + 2abcd}{4(1-ab)^2} - \frac{4(1-ab)(1-cd)}{4(1-ab)^2}} = \\ &= \frac{\omega^2}{2(1-ab)} [2 - 2ad \pm \\ &\pm \sqrt{4 + a^2d^2 + b^2c^2 - 4ad - 4bc + 2abcd - 4 + 4ab + 4cd - 4abcd}]. \end{aligned}$$

Pošto je prema navedenom $a^2d^2 + b^2c^2 = 2abcd$, to slijedi nakon kraćenja s 2:

$$\begin{aligned} \omega_{kb, kp}^2 &= \frac{\omega^2}{1-ab} [1 - ad \pm \sqrt{ab + cd - ad - bc}] = \\ &= \frac{\omega^2}{1-ab} [1 - ad \pm \sqrt{ab + cd - 2ad}]. \end{aligned}$$

Diskriminanta će biti:

$$\begin{aligned}
 ab + cd - 2ad &= \frac{L_{12}}{L_{10} + L_{12}} \frac{L_{12}}{L_{20} + L_{12}} + \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}} - \\
 &\quad - 2 \frac{L_{12}}{L_{10} + L_{12}} \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}} = \\
 &= \frac{L_{12}^2 \left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} \right) \left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} \right) + \frac{1}{C_{12}^2} (L_{10} + L_{12})(L_{20} + L_{12}) - 2 \frac{L_{12}}{C_{12}} (L_{20} + L_{12}) \left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} \right)}{(L_{10} + L_{12})(L_{20} + L_{12}) \left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} \right) \left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} \right)}
 \end{aligned}$$

Radi navedenog uvjeta usklađenosti, možemo odmah napisati drugi korijen toga izraza, t. j.

$$\left| \frac{\frac{1}{C_{12}} \sqrt{(L_{10} + L_{12})(L_{20} + L_{12})} - L_{12} \sqrt{\left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} \right) \left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} \right)}}{(L_{10} + L_{12}) \left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} \right)} \right|,$$

odnosno

$$\left| \frac{\frac{1}{C_{12}} \sqrt{(L_{20} + L_{12})}}{\sqrt{(L_{10} + L_{12})} \left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} \right)} - \frac{L_{12} \sqrt{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} \right) (L_{10} + L_{12})}} \right|.$$

Sada možemo pisati:

$$\begin{aligned}
 \omega_{kb, kp}^2 &= \frac{\omega^2}{(1 - K_{\text{ind}}^2)} \left[1 - k_{1\text{ind}} k_{2\text{kap}} \pm \left| k_{2\text{kap}} \sqrt{\frac{k_{1\text{ind}}}{k_{2\text{ind}}}} - k_{1\text{ind}} \sqrt{\frac{k_{2\text{kap}}}{k_{1\text{kap}}}} \right| \right] = \\
 &= \frac{\omega^2}{(1 - K_{\text{ind}}^2)} \left[1 - k_{1\text{ind}} k_{2\text{kap}} \pm \left| \frac{\sqrt{k_{2\text{kap}} k_{2\text{kap}} k_{1\text{ind}} k_{1\text{kap}}} - \sqrt{k_{1\text{ind}} k_{1\text{ind}} k_{2\text{kap}} k_{2\text{ind}}}}{\sqrt{k_{2\text{ind}} k_{1\text{kap}}}} \right| \right].
 \end{aligned}$$

Budući da je

$$k_{1\text{ind}} k_{2\text{kap}} = k_{2\text{ind}} k_{1\text{kap}},$$

slijedi konačno:

$$\omega_{kb, kp}^2 = \frac{\omega^2}{(1 - K_{ind}^2)} [1 - k_{1ind} k_{2kap} \pm |K_{kap} - K_{ind}|].$$

b) Granice veznih frekvencija

Da bismo pronašli granice veznih frekvencija, postupit ćemo kao i prije prema sl. 309., t. j. pretpostavit ćemo, da postoje samo sinhronne struje. Tada za prvi sistem slijedi:

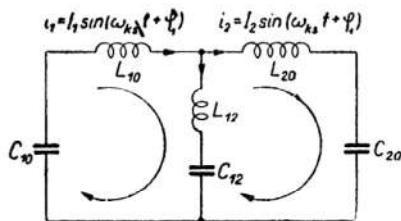
$$-\frac{1}{\omega_{ks} C_{10}} I_1 \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) + \omega_{ks} L_{10} I_1 \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) + \\ + \omega_{ks} L_{12} (I_1 - I_2) \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) - \frac{1}{\omega_{ks} C_{12}} (I_1 - I_2) \cos(\omega_{ks} t + \varphi_1) = 0.$$

Prema tome, bit će:

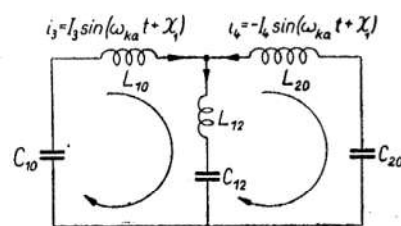
$$\omega_{ks}^2 = \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} \frac{I_1 - I_2}{I_1}}{L_{10} + L_{12} \frac{I_1 - I_2}{I_1}}.$$

Analogno bi bilo za drugi sistem:

$$\omega_{ks}^2 = \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} \frac{I_2 - I_1}{I_2}}{L_{20} + L_{12} \frac{I_2 - I_1}{I_2}}.$$



Slika 309.



Slika 310.

Za antisinhronu veznu frekvenciju prema sl. 310. dobili bismo za prvi sistem:

$$-\frac{1}{\omega_{ka} C_{10}} I_3 \cos(\omega_{ka} t + \chi_1) + \omega_{ka} L_{10} I_3 \cos(\omega_{ka} t + \chi_1) + \\ + \omega_{ka} L_{12} (I_3 + I_4) \cos(\omega_{ka} t + \chi_1) - \frac{1}{\omega_{ka} C_{12}} (I_3 + I_4) \cos(\omega_{ka} t + \chi_1) = 0.$$

Na navedenoj slici, lijevo, gore, izvedena je konstrukcija za ω_{ks}^2 . Počevši od O , nanijeto je u horizontalnom smjeru L_{10} , i okomito na nj $\frac{1}{C_{10}}$. Budući da je $I_1 > I_2$, to će $\frac{I_1 - I_2}{I_1} = a$ biti pozitivno i manje od 1. Ako na završetku od $\frac{1}{C_{10}}$ nanese-
mo horizontalno dužinu aL_{12} , i na ovu vertikalno $\frac{a}{C_{12}}$, doći ćemo do točke P . Ako točku P spojimo s O , dobili smo kut α , čiji je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{a}{C_{12}}}{L_{10} + aL_{12}} = \omega_{ks}^2.$$

Analogno, na horizontalni L_{20} nanijet ćemo okomito $\frac{1}{C_{20}}$, te zatim od kraja dužine $\frac{1}{C_{20}}$ odbiti dužinu $\frac{b}{C_{12}}$, jer je $b = \frac{I_2 - I_1}{I_2}$ negativno, uz $|a| < |b|$. Na dobivenoj točki, nanijet ćemo nalijevo bL_{12} . Došli smo do točke R , koja spojena s O daje isti kut α kao i prije, t. j.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{b}{C_{12}}}{L_{20} + bL_{12}} = \omega_{ks}^2.$$

Iz crteža proizlazi, budući da su a i b uvijek protivnog predznaka, da kut α mora ležati između kutova, čiji su tangensi $\frac{1}{C_{10}L_{10}}$ i $\frac{1}{C_{20}L_{20}}$, a čiji je jedan krak horizontala iz O , a drugi donja odnosno gornja crtkana linija.

Ako na vrh od $\frac{1}{C_{10}}$ nanese-
mo dužinu L_{12} , te okomito na nju $\frac{1}{C_{12}}$, došli smo do točke U . Analogno, nanošenjem tih dužina na $\frac{1}{C_{20}}$, došli bismo do točke V . Spajanjem točke U s O , dobili bismo kut, koji, uz $\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \frac{1}{C_{10}L_{10}}$, mora biti veći od kuta α , budući da je $a < 1$. Isto tako mora i kut, koji dobivamo spajanjem O s V , uz $\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \frac{1}{C_{20}L_{20}}$, biti veći od kuta α , jer je b negativno. Radi toga je:

$$\omega_{ks}^2 < \min \left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10} + L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20} + L_{12}} \right).$$

Da slika ne bi postala nepregledna, nacrtali smo desno novi crtež za konstrukciju ω_{ka}^2 . Razumije se, da su parametri ostali kao i prije. Budući da je $I_3 > I_4$, to će $\frac{I_3 + I_4}{I_3} = m$ biti veće od 1, ali manje od 2, dok će $\frac{I_4 + I_3}{I_4} = n$, biti veće od 2. Na $\frac{1}{C_{10}}$ nanijet ćemo horizontalno mL_{12} , i dalje vertikalno $\frac{m}{C_{12}}$, i dobiti točku S . Na $\frac{1}{C_{20}}$ nanijet ćemo horizontalno nL_{12} ,

i dalje vertikalno $\frac{n}{C_{12}}$, i dobiti točku T . Kut dobiven spajanjem T , odnosno S , s O , bit će kut β , a

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{m}{C_{12}}}{L_{10} + mL_{12}} = \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{n}{C_{12}}}{L_{20} + nL_{12}} = \omega_{ka}^2.$$

Budući da su m i n veći od 1, to će kut β , uz

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \max\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right),$$

biti veći od poznatih kutova, koji nastaju spajanjem U , odnosno V , s O . Radi toga je:

$$\omega_{ka}^2 > \max\left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10} + L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20} + L_{12}}\right).$$

- Sada ćemo na $\frac{1}{C_{10}}$ i na $\frac{1}{C_{20}}$ nanijeti horizontalno $2L_{12}$, te dalje vertikalno $\frac{2}{C_{12}}$, pa tako dobivene točke spojiti s O crtanim linijama. U prvom smo slučaju dobili veći kut od β , a u drugom manji. Radi toga je kut β između tih kutova, t. j.

$$\omega_{ka}^2 \text{ leži između } \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{10} + 2L_{12}} \text{ i } \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{20} + 2L_{12}}.$$

Konačno iz konstrukcije slijedi, da, uz

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \max\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right),$$

mora biti $\beta > \alpha$, jer je $m > a$, odnosno $n > b$. To se vidi iz prvog crteža, gore, lijevo, gdje smo ucrtali kut β , radi upoređenja s kutom α .

Kutovi α i β moraju, naravno, biti manji od $\frac{\pi}{2}$, jer njihovi tangensi moraju biti pozitivni, da ω_{ks} i ω_{ka} budu realni.

Dobivene rezultate nanijeli smo na brojne crte dolje, lijevo, gdje su odvojeno nacrtane veličine za svaki sistem, i vidimo, da se naši konkretno izabrani sistemi s kombiniranom vezom, ponašaju slično kao da je veza samo kapacitivna.*) Potreban uvjet, da dobijemo takav rezultat, bio je — kako smo to već u početku ovog poglavlja naveli — da je

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \max\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right).$$

Šta to uključuje?

*) Brojčani odnosi frekvencija su ipak različiti, nego kod čisto kapacitivnog vezanja! Sličnost je samo kvalitativna.

Iz

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \frac{1}{C_{10}L_{10}}, \text{ slijedi } \frac{L_{10}}{L_{12}} > \frac{C_{12}}{C_{10}},$$

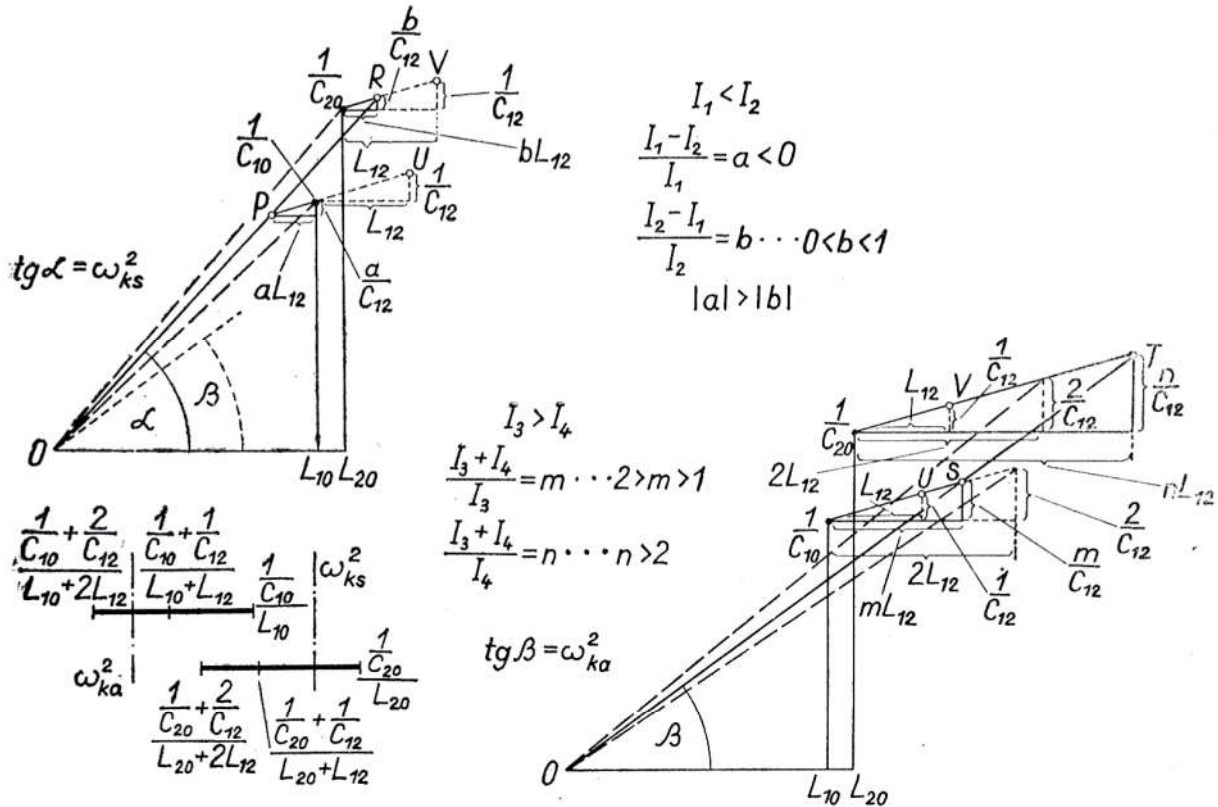
a iz

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \frac{1}{C_{20}L_{20}}, \text{ slijedi } \frac{L_{20}}{L_{12}} > \frac{C_{12}}{C_{20}}.$$

Kao što je poznato,

$$K_{\text{ind}} = \frac{L_{12}}{\sqrt{(L_{12} + L_{10})(L_{12} + L_{20})}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{L_{10}}{L_{12}}\right)\left(1 + \frac{L_{20}}{L_{12}}\right)}},$$

$$K_{\text{kap}} = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{C_{13}} + \frac{1}{C_{10}}\right)\left(\frac{1}{C_{13}} + \frac{1}{C_{20}}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{C_{13}}{C_{10}}\right)\left(1 + \frac{C_{13}}{C_{20}}\right)}}.$$



Slika 312.

Na temelju gornjih nejednadžbi slijedi, da naš uvjet uključuje, da je $K_{\text{kap}} > K_{\text{ind}}$, ali obrat ne vrijedi, t. j. ne mora činjenica, da je $K_{\text{kap}} > K_{\text{ind}}$, sadržavati i gornji uvjet. Naime, $\frac{C_{12}}{C_{10}}$ može biti znatno manje od $\frac{L_{10}}{L_{12}}$, a $\frac{C_{12}}{C_{20}}$ samo malo veće od $\frac{L_{20}}{L_{12}}$, i tada je, također, $K_{\text{kap}} > K_{\text{ind}}$, a gornji uvjet nije ispunjen!

Ako je

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} = \frac{1}{C_{10}L_{10}} = \frac{1}{C_{20}L_{20}},$$

onda je

$$\frac{L_{10}}{L_{12}} = \frac{C_{12}}{C_{10}},$$

odnosno

$$\frac{L_{20}}{L_{12}} = \frac{C_{12}}{C_{20}},$$

a

$$K_{\text{kap}} = K_{\text{ind}}.$$

Iz konstrukcije vidimo, da je tada kut $\alpha = \beta$, t. j. $\omega_{ks} = \omega_{ka}$, dakle sistemi titraju samo s jednom frekvencijom, što znači, da mogu postojati samo čisti sinusovi valovi, a ne treptaji.

Pregledno napisani rezultati za „kapacitivni“ slučaj, uzevši u obzir i granice, glase:

$$\begin{aligned} \min\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right) &\leq \omega_{ks}^2 \leq \max\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right), \\ \omega_{ks}^2 &\leq \min\left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10} + L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20} + L_{12}}\right), \\ \min\left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{10} + 2L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{20} + 2L_{12}}\right) &\leq \omega_{ka}^2 \leq \max\left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{10} + 2L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{20} + 2L_{12}}\right), \\ \omega_{ka}^2 &\geq \max\left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10} + L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20} + L_{12}}\right). \end{aligned}$$

Ako je

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} < \min\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right),$$

onda je

$$\frac{L_{10}}{L_{12}} < \frac{C_{12}}{C_{10}}, \text{ te } \frac{L_{20}}{L_{12}} < \frac{C_{12}}{C_{20}},$$

dakle,

$$K_{\text{ind}} > K_{\text{kap}}.$$

Takav slučaj nacrtan je na sl. 312., a parametri su sada izabrani tako, da je $I_1 < I_2$, a $I_3 > I_4$. Prema tome, sada je $a < 0$, dok je $b < 1$, i pozitivno. Nadalje je $|a| > |b|$. Opet $\omega_{ks}^2 = \operatorname{tg} \alpha$ leži između $\frac{1}{C_{10}L_{10}}$ i $\frac{1}{C_{20}L_{20}}$, ali sada su kutovi, određeni spojnicama točaka U , odnosno V , s O , te horizontalom, manji od kuta α , t. j.

$$\omega_{ks}^2 > \max \left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10} + L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20} + L_{12}} \right),$$

Budući da je i ovdje $I_3 > I_4$, kao i kod prvog slučaja na sl. 311., to je opet $n > 2$, a $2 > m > 1$. Kut β je radi toga opet između kutova, čiji su tangensi

$$\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{10} + 2L_{12}}, \text{ odnosno } \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{20} + 2L_{12}}.$$

Međutim, ovdje je kut β manji od navedenih kutova, čiji je jedan krak OV , odnosno OU , a drugi horizontala kroz O , i radi toga je:

$$\omega_{ka}^2 < \min \left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10} + L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20} + L_{12}} \right).$$

Prema tome je također, $\alpha > \beta$.

Rezultati gornjih konstrukcija prikazani su na brojnoj crti, dolje, lijevo, za svaki sistem posebno, i vidimo, da se ovi sadašnji sistemi s mješovitom vezom, ponašaju slično kao da im je veza samo induktivna.

Pregledno napisani rezultati za „induktivni“ slučaj, uzevši u obzir i granice, glase:

$$\min \left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}} \right) \leq \omega_{ks}^2 \leq \max \left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}} \right),$$

$$\omega_{ks}^2 \geq \max \left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10} + L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20} + L_{12}} \right),$$

$$\min \left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{10} + 2L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{20} + 2L_{12}} \right) \leq \omega_{ka}^2 \leq \max \left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{10} + 2L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{2}{C_{12}}}{L_{20} + 2L_{12}} \right),$$

$$\omega_{ka}^2 \leq \min \left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10} + L_{12}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20} + L_{12}} \right).$$

Treba napomenuti, da su prednji odnosi i veličine, t. j. a , b , m , n , sinhrona i antisinhrona vezna frekvencija, potpuno definirane parametrima krugova, te da ti parametri dozvoljavaju radi toga samo jedan pravac kroz ishodište, na kojem leže točke P i R , i drugi pravac, na kojem leže točke S i T , te da, eventualno, daljnjih rješenja nema. Odnosi komponentnih amplituda struja $\frac{I_2}{I_1}$, te $\frac{I_4}{I_3}$, isti su, kao i odnosi dotičnih komponentnih amplituda naboja. Prema tome možemo po volji pretpostaviti, na pr., amplitude struja I_1 i I_3 , dok I_2 i I_4 slijede tada same od sebe. Za podlogu naših prednjih crteža za amplitude struja upotrebili smo konkretne podatke, da bismo mogli odmah pristupiti pronalaženju granica veznih frekvencija. Međutim, iz sl. 311. i iz sl. 312. može se, barem kvalitativno, lako razabrati, uz a i b , koji moraju biti protivnog predznaka, kod čega pozitivni broj mora biti manji od 1, te uz m i n , od kojih je jedan broj između 1 i 2, a drugi veći od 2, da su nacrtana rješenja kod konkretno zadanih vrijednosti parametara, jedina moguća rješenja.

Varirali parametre bilo kako, ali pridržavajući se uvjeta, da je

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \max\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right),$$

odnosno

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} < \min\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right),$$

uvijek ćemo u prvom slučaju dobiti slične vezne frekvencije, kao da je veza samo kapacitivna, a u drugom slučaju, kao da je samo induktivna.

Razumije se, da sisteme, koji su vezani čisto induktivno, ili čisto kapacitivno, a sadrže L_{10} , C_{10} , L_{20} i C_{20} , koje smo promatrali prije sistema s mješovitom vezom, možemo proučavati na temelju sadašnjih crteža. Kod čisto kapacitivne veze je $L_{12}=0$, dakle je $\frac{1}{C_{12}L_{12}} = \infty$. Radi toga je ispunjen uvjet

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \max\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right).$$

Trokuti, koji se nastavljaju na kraju dužine $\frac{1}{C_{10}}$, odnosno $\frac{1}{C_{20}}$, degeneriraju u vertikalnu dužinu. Kod čisto induktivne veze je $\frac{1}{C_{12}}=0$, i radi toga je $\frac{1}{C_{12}L_{12}}=0$, te je, prema tome,

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} < \min\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right),$$

a trokuti degeneriraju u horizontalnu dužinu.

Kod krugova vezanih čisto induktivno, ili čisto kapacitivno, pojmovno je sasvim točno definirano, koja je grana vezna, t. j. ona, koja sadrži samo induktivitet, odnosno kapacitet, za razliku od ostalih dviju grana, koje sadrže obje vrste parametara. Kod mješovite veze su, međutim, sve grane pojmovno jednakopravne, jer svaka sadrži obje vrste parametara. Radi toga se pojavljuje problem, što se događa, ako umjesto jedne izvjesne grane drugu granu počnemo smatrati kao veznu granu*.) Razumije se, da se kod tog ne smije fizikalno „ništa dogoditi“, ali će, obzirom na naša razmatranja, nastati razlika.

Pretpostavit ćemo, prema sl. 313., gore, iste krugove, koje smo tretirali na sl. 311., t. j.

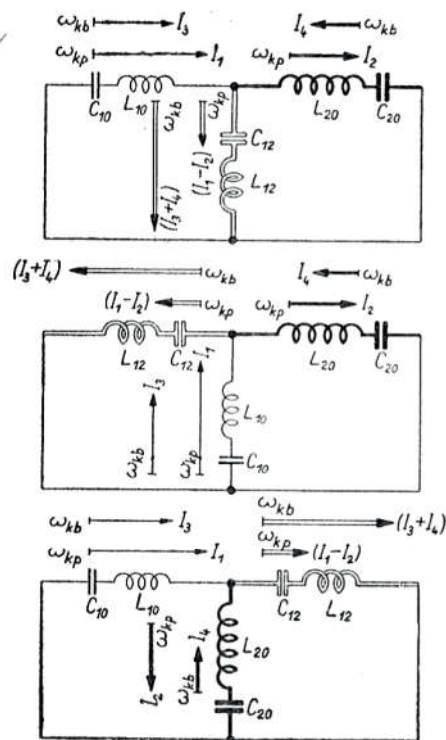
$$\frac{1}{C_{12}L_{13}} > \frac{1}{C_{20}L_{20}} > \frac{1}{C_{10}L_{10}},$$

te smo ucrtali i amplitude struja $I_1 > I_2$, odnosno $I_3 > I_4$, kao i smjerove struja u $t = 0$. Da bismo grane međusobno bolje razlikovali, izvukli smo onu s L_{10} i C_{10} tanko, onu s L_{20} i C_{20} debelo, a onu s L_{12} i C_{12} dvostrukom crtom. Zbog navedenog uvjeta, krugovi se ponašaju kao da su vezani kapacitivno, t. j. sinhrona frekvencija je polagana, a antisinhrona brza. Ako sada kao veznu granu želimo smatrati onu, koja sadrži C_{10} i L_{10} , krugovi će se ponašati kao induktivno vezani, jer je

$$\frac{1}{C_{10}L_{10}} < \min\left(\frac{1}{C_{20}L_{20}}, \frac{1}{C_{12}L_{12}}\right).$$

Prema tome će brza frekvencija sada morati biti sinhrona, a polagana antisinhrona. To je uistinu tako, što se vidi i na navedenoj slici u sredini, gdje smo u crtežu grane zamijenili, ostavivši struje u njima, naravno, iste kao i prije. Vidimo, da je sada polagana frekvencija, t. j. prijašnja sinhrona, postala antisinhrona, a brza frekvencija, t. j. prijašnja antisinhrona, postala je sinhrona!

Međutim, dosada namjerno nismo govorili o trećem slučaju, t. j., da se recipročni umnožak kapaciteta i induktiviteta vezne grane, nalazi između takvih umnožaka ostalih dviju grana. Uistinu, kod konkretno zadanih sistema, uvijek možemo izbjeći taj slučaj, jer kao veznu granu možemo smatrati onu, čiji je recipročni umnožak kapaciteta i induktiviteta najveći, ili najmanji, između sve tri grane, te odrediti, na pr. konstrukcijama, obje frekvencije, koje će, naravno, u oba slučaja dati isti par brojka, s time, da će im značenje biti različito, t. j. jednom sinhrono, a drugi put antisinhrono, kako smo to upravo pokazali.



Slika 313.

*) Kod vezanih krugova s narinutim naponom i određenim potrošačem, vezna je grana, i u slučaju kombiniranog vezanja, točno definirana.

Budući da je u trećem slučaju na pr.

$$\frac{L_{10}}{L_{12}} < \frac{C_{12}}{C_{10}}, \quad \text{a} \quad \frac{L_{20}}{L_{12}} > \frac{C_{12}}{C_{20}},$$

gdje indeks 12 označuje veznu granu, to kod takvih krugova može u pogledu faktora vezanja biti

$$K_{\text{kap}} \geq K_{\text{ind}}.$$

Na navedenoj slici, dolje, nacrtan je taj slučaj, jer je kod naših krugova

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \frac{1}{C_{20}L_{20}} > \frac{1}{C_{10}L_{10}},$$

a mi sada kao veznu granu smatramo onu s C_{20} i L_{20} . Vidimo, da se sada prijašnje nepromijenjene struje u vanjskim granama, pokazuju kao dvije sinhronne struje obaju sistema i radi toga ćemo njihove frekvencije označiti s ω_{ks_1} i ω_{ks_2} , s time, da su to, naravno, naše već poznate, brza i polagana frekvencija. Na našem crtežu u času $t=0$ oba para sinhronih struja međusobno su istoga smjera, ali mogu biti međusobno i protivnog smjera, što ovisi o početnim uvjetima i parametrima obaju sistema.

Da ne mijenjamo naše uobičajene formule, u kojima su parametri vezne grane označivani indeksom 12, pretpostavit ćemo neovisno od sl. 313.

$$\frac{1}{C_{10}L_{10}} > \frac{1}{C_{12}L_{12}} > \frac{1}{C_{20}L_{20}},$$

odnosno

$$\frac{L_{20}}{C_{12}} > \frac{L_{12}}{C_{20}}, \quad \frac{L_{10}}{C_{12}} < \frac{L_{12}}{C_{10}}, \quad \frac{L_{20}}{C_{10}} > \frac{L_{10}}{C_{20}}.$$

Kao što nam je poznato, antisinhrona frekvencija iznosi

$$\omega_{ka} = \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{m}{C_{12}}}{L_{10} + mL_{12}} = \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{n}{C_{12}}}{L_{20} + nL_{12}}$$

s time, da su m i n pozitivni brojevi.

Iz prednje jednadžbe slijedi:

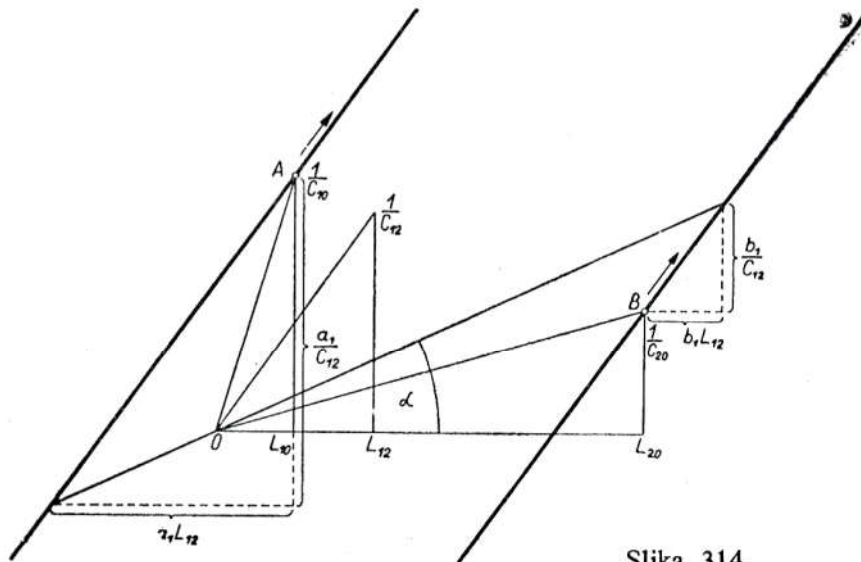
$$\frac{L_{20}}{C_{10}} + m \frac{L_{20}}{C_{12}} + n \frac{L_{12}}{C_{10}} + mn \frac{L_{12}}{C_{12}} = \frac{L_{10}}{C_{20}} + n \frac{L_{10}}{C_{12}} + m \frac{L_{12}}{C_{20}} + mn \frac{L_{12}}{C_{12}},$$

odnosno

$$m \left(\frac{L_{20}}{C_{12}} - \frac{L_{12}}{C_{20}} \right) + n \left(\frac{L_{12}}{C_{10}} - \frac{L_{10}}{C_{12}} \right) = \frac{L_{10}}{C_{20}} - \frac{L_{20}}{C_{10}}.$$

Ako u prvoj zagradi zamijenimo minuend manjim brojem $\frac{L_{12}}{C_{20}}$, a u drugoj suptrahend većim brojem $\frac{L_{12}}{C_{10}}$, postala je lijeva strana jednaka nuli, što je kod pozitivnih m i n manje od originalne vrijednosti prije supstituiranja. Radi toga je:

$$0 < \frac{L_{10}}{C_{20}} - \frac{L_{20}}{C_{10}}, \text{ odnosno } \frac{L_{20}}{C_{10}} < \frac{L_{10}}{C_{20}},$$



Slika 314.

dakle, upravo protivno pretpostavci! Iz toga slijedi, da je nemoguće, da postoje dva pozitivna broja m i n , odnosno, ne može postojati antisinhrona frekvencija, nego obje frekvencije moraju biti sinhronne, t. j.

$$\omega_{ks_1}^2 = \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{a_1}{C_{12}}}{L_{10} + a_1 L_{12}} = \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{b_1}{C_{12}}}{L_{20} + b_1 L_{12}},$$

te

$$\omega_{ks_2}^2 = \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{a_2}{C_{12}}}{L_{10} + a_2 L_{12}} = \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{b_2}{C_{12}}}{L_{20} + b_2 L_{12}}$$

s time, da su a_1 i b_1 , odnosno a_2 i b_2 , protivnog predznaka.

Na našoj konstrukciji na sl. 314. također se dobro vidi, da je nemoguće da kod

$$\frac{1}{C_{10}L_{10}} > \frac{1}{C_{12}L_{12}} > \frac{1}{C_{20}L_{20}}$$

postoji antisinhroni titraj. To bi, naime, značilo, da se iz O može povući pravac, koji bi sjekao oba deblje izvučena pravca, čiji tangensi nagiba iznose $\frac{1}{C_{12}L_{12}}$, s time, da bi im se sjecišta nalazila uzlazno iznad točaka A i B , te da bi kod toga m , ili n , imalo vrijednost između 1 i 2. Naprotiv, sinhroni titraj je sasvim lako moguć, te je nacrtan kvadrat polagane sinhronne frekvencije

$$\omega_{ks_1}^2 = \operatorname{tg} \alpha,$$

kod čega je $0 < b_1 < 1$, dok je $a_1 < 0$.

Kod druge, t. j. brze sinhronne frekvencije, bilo bi upravo obrnuto, dakle, $b_2 < 0$, dok $0 < a_2 < 1$. Ovo slijedi iz spoznaje, koju ćemo kasnije dokazati, da vezne frekvencije moraju biti s obje strane intervala, ograničenog s ω_1 i ω_2 .

Osim negativnog dokaza, dat ćemo i pozitivan dokaz!

Karakteristična jednadžba za mješovito vezane neprigušene krugove glasi, kako znamo:

$$(\omega_1^2 - \omega_k^2)(\omega_k^2 - \omega_2^2) = (k_{1\text{kap}}\omega_1^2 - k_{1\text{ind}}\omega_k^2)(k_{2\text{ind}}\omega_k^2 - k_{2\text{kap}}\omega_2^2).$$

Zamijenit ćemo mjesto brojkama u drugom faktoru s lijeve i desne strane, i na desnoj strani izlučiti $k_{1\text{ind}}k_{2\text{ind}}$, t. j.

$$(\omega_1^2 - \omega_k^2)(\omega_2^2 - \omega_k^2) = k_{1\text{ind}}k_{2\text{ind}} \left(\frac{k_{1\text{kap}}}{k_{1\text{ind}}} \omega_1^2 - \omega_k^2 \right) \left(\frac{k_{2\text{kap}}}{k_{2\text{ind}}} \omega_2^2 - \omega_k^2 \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{k_{1\text{kap}}}{k_{1\text{ind}}} \omega_1^2 &= \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{10}}} \frac{L_{12} + L_{10}}{L_{12}} \omega_1^2 = \frac{1}{C_{12}L_{12}} \\ \frac{k_{2\text{kap}}}{k_{2\text{ind}}} \omega_2^2 &= \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{20}}} \frac{L_{12} + L_{20}}{L_{12}} \omega_2^2 = \frac{1}{C_{12}L_{12}} \end{aligned}$$

Prema tome slijedi:

$$(\omega_1^2 - \omega_k^2)(\omega_2^2 - \omega_k^2) = k_{1\text{ind}}k_{2\text{ind}} \left(\frac{1}{C_{12}L_{12}} - \omega_k^2 \right)^2.$$

Budući da je desna strana uvijek pozitivna, to znači, da je

$$\omega_k^2 > \max(\omega_1^2, \omega_2^2),$$

ili, da je

$$\omega_k^2 < \min(\omega_1^2, \omega_2^2),$$

odnosno u graničnom slučaju, kad je desna strana jednaka nuli, da je jednako ω_1^2 , ili ω_2^2 . Prema tome, kvadrat veznih frekvencija ω_k^2 nalazi se, svakako, izvan intervala, ograničenog s ω_1^2 i ω_2^2 . Dalje imamo:

$$\omega_1^2 = \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{L_{10}} + \frac{1}{L_{12}}} = \frac{\frac{1}{C_{10}L_{12}} + \frac{1}{C_{12}L_{12}}}{\frac{L_{10}}{L_{12}} + 1} = \frac{1}{C_{12}L_{12}} \frac{\frac{C_{12}}{C_{10}} + 1}{\frac{L_{10}}{L_{12}} + 1}.$$

$$\omega_2^2 = \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{L_{20}} + \frac{1}{L_{12}}} = \frac{\frac{1}{C_{20}L_{12}} + \frac{1}{C_{12}L_{12}}}{\frac{L_{20}}{L_{12}} + 1} = \frac{1}{C_{12}L_{12}} \frac{\frac{C_{12}}{C_{20}} + 1}{\frac{L_{20}}{L_{12}} + 1}.$$

Ako je

$$\frac{1}{C_{10}L_{10}} > \frac{1}{C_{12}L_{12}} > \frac{1}{C_{20}L_{20}},$$

onda slijedi:

$$\frac{C_{12}}{C_{10}} > \frac{L_{10}}{L_{12}}, \quad \frac{C_{12}}{C_{20}} < \frac{L_{20}}{L_{12}}.$$

Prema tome, u tom slučaju, a u vezi s prednjim formulama, bit će:

$$\omega_1^2 > \frac{1}{C_{12}L_{12}} > \omega_2^2.$$

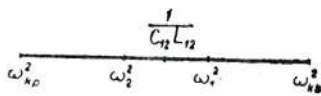
Svojedobno smo našli, da odnosi partikularnih naboja, koji su jednaki odnosima partikularnih struja*), glase:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_{kb}^2 - \omega_1^2}{k_{1\text{ind}} \omega_{kb}^2 - k_{1\text{kap}} \omega_1^2} = \frac{\omega_{kb}^2 - \omega_1^2}{k_{1\text{ind}} \left(\omega_{kb}^2 - \frac{k_{1\text{kap}}}{k_{1\text{ind}}} \omega_1^2 \right)} = \frac{\omega_{kb}^2 - \omega_1^2}{k_{1\text{ind}} \left(\omega_{kb}^2 - \frac{1}{C_{12}L_{12}} \right)}.$$

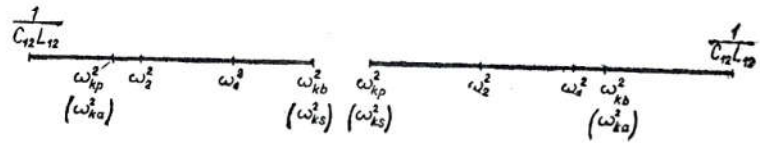
*) Međutim, odnos suma svih partikularnih naboja prvog i drugog kruga, nije jednak odnosu suma svih partikularnih struja prvog i drugog kruga. To sve vrijedi i za prigušene krugove bez narinutog napona.

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_{kp}^2 - \omega_1^2}{k_{1\text{ind}} \omega_{kp}^2 - k_{1\text{kap}} \omega_1^2} = \frac{\omega_{kp}^2 - \omega_1^2}{k_{1\text{ind}} \left(\omega_{kp}^2 - \frac{k_{1\text{kap}}}{k_{1\text{ind}}} \omega_1^2 \right)} = \frac{\omega_{kp}^2 - \omega_1^2}{k_{1\text{ind}} \left(\omega_{kp}^2 - \frac{1}{C_{12} L_{12}} \right)}.$$

Ako pretpostavimo, da je $\omega_{kb}^2 > \omega_1^2$, onda je $\omega_{kb}^2 > \frac{1}{C_{12} L_{12}}$, odnosno, ako pretpostavimo, da je $\omega_{kb}^2 < \omega_1^2$, mora biti $\omega_{kb}^2 < \frac{1}{C_{12} L_{12}}$, jer kvadrat vezne frekvencije mora biti izvan intervala, ograničenog s ω_1^2 i ω_2^2 , i radi toga je $\frac{B_1}{A_1}$ uvijek pozitivno.



Slika 315.



Slika 316.

Analogno, ako pretpostavimo, da je $\omega_{kp}^2 > \omega_1^2$, onda je i $\omega_{kp}^2 > \frac{1}{C_{12} L_{12}}$, odnosno, ako pretpostavimo $\omega_{kp}^2 < \omega_1^2$, onda je i $\omega_{kp}^2 < \frac{1}{C_{12} L_{12}}$, i radi toga je $\frac{B_2}{A_2}$ uvijek pozitivno. Znači, dakle, da su sada oba titraja sinhrona.

Pravi međusobni smještaj frekvencija prikazuje sl. 315.

Ako je $\frac{1}{C_{12} L_{12}}$ manje od ω_1^2 i ω_2^2 , prema sl. 316. lijevo, onda to znači po formuli:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{C_{12} L_{12}} \frac{\frac{C_{12}}{C_{10}} + 1}{\frac{L_{10}}{L_{12}} + 1},$$

da je

$$\frac{C_{12}}{C_{10}} > \frac{L_{10}}{L_{12}},$$

a prema formuli

$$\omega_2^2 = \frac{1}{C_{12} L_{12}} \frac{\frac{C_{12}}{C_{20}} + 1}{\frac{L_{20}}{L_{12}} + 1},$$

da je

$$\frac{C_{12}}{C_{20}} > \frac{L_{20}}{L_{12}},$$

odnosno

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} < \min\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right).$$

Analogno, prema sl. 316. desno, ako je $\frac{1}{C_{12}L_{12}}$ veće od ω_1^2 i ω_2^2 , slijedi:

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \max\left(\frac{1}{C_{10}L_{10}}, \frac{1}{C_{20}L_{20}}\right).$$

U tim posljednjim dvama slučajevima postoji — kako znamo — sinhroni i antisinhroni titraj. Kod toga je

$$\text{u prvom slučaju } \frac{1}{C_{12}L_{12}} < \omega_{kp}^2, \text{ a u drugom } \frac{1}{C_{12}L_{12}} > \omega_{kb}^2,$$

što se lako može uočiti prema našim konstrukcijama na sl. 312. i 311.

Preostalo nam je — što smo nagovijestili — da dokažemo, da se, prema sl. 315., vezne frekvencije nalaze obostrano od intervala, ograničenog s ω_1 i ω_2 , i u slučaju, kad recipročni umnožak vevnog kapaciteta i induktiviteta leži između recipročnih umnožaka kapaciteta i induktiviteta obiju vanjskih grana. U tu svrhu poslužiti ćemo se već poznatom slikom 313. Gornji i srednji crtež na toj slici prikazuje — kako znamo — one slučajeve, kad je recipročan umnožak parametara vezne grane veći, odnosno manji, od oba takva umnoška vanjskih grana, a donji crtež prikazuje slučaj, kad leži između njih. Vezne frekvencije su u svim slučajevima iste, jer time, što pojedine grane naizmjenično smatramo veznom granom, ne mijenjamo fizikalno stanje tih grana. Kod gornjeg crteža, bit će:

$$\omega_1^2 = \frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{10} + L_{12}},$$

dok je

$$\omega_2^2 = \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{20} + L_{12}}.$$

Kod srednjeg crteža, bit će:

$$\omega_1^2 = \frac{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{10}}}{L_{12} + L_{10}},$$

dok je

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\frac{C_{20}}{L_{20}} + \frac{1}{C_{10}}}.$$

Pomoću sl. 311. i sl. 312. dokazali smo, da se naše nepromijenjene vezne frekvencije u oba ova slučaja nalaze obostrano od intervala, ograničenog s ω_1 i ω_2 , koji vrijede za pojedini slučaj, ili, što je isto, da se dotični ω_1 i ω_2 nalaze unutar intervala, koji je ograničen nepromijenjenim veznim frekvencijama.

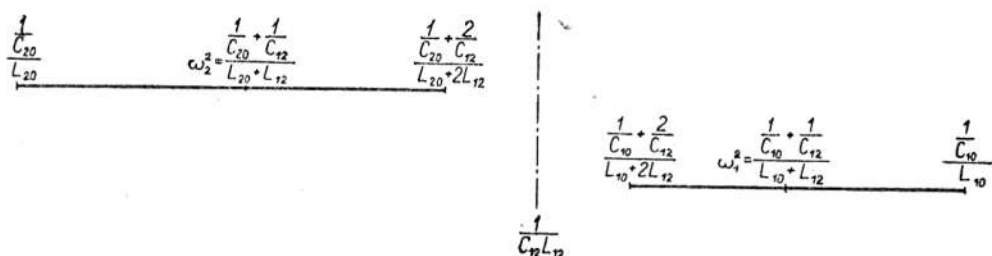
Kod donjeg crteža bit će:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\frac{C_{10}}{L_{10}} + \frac{1}{C_{20}}}.$$

dok je

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\frac{C_{12}}{L_{12}} + \frac{1}{C_{20}}}.$$

dakle, po jedna frekvencija prvih dvaju slučajeva, i, prema tome, obje leže, naravno, unutar intervala, ograničenog nepromijenjenim veznim frekvencijama, odnosno vezne frekvencije leže i u ovom slučaju obostrano od intervala, ograničenog s ω_1 i ω_2 . To razmicanje frekvencija uslijed vezanja uočiti ćemo i



Slika 317.

kasnije kod prigušenih krugova bez narinutog napona, ako su vezani preko energetskih rezervoara, dakle preko kapaciteta, induktiviteta ili njihove kombinacije. Stoga možemo općenito reći, da pri energetskom vezanju vezne frekvencije leže izvan intervala ograničenog s ω_1 i ω_2 , koji je za njih „tabu“.*)

*) Sva prednja razmatranja i konstrukcije imaju i čisto praktičnu svrhu, jer će se kod krugova s malenim omskim otporima, počevši od izvjesne vrijednosti vezanja, kod narinutog vanjskog napona, najveće struje pojaviti kod obiju frekvencija, koje su blizu ovim sadašnjim frekvencijama neprigušenih krugova, koje na temelju prednjega možemo, barem kvalitativno, lako odrediti. Prednji pak zaključci o sinhronim, odnosno antisinhronim frekvencijama, omogućit će nam tada — kako ćemo to kasnije pokazati — da zaključimo o faznom pomaku između struje prvog i drugog kruga.

Označimo li kao obično vezne elemente indeksom 12, a elemente u obim vanjskim granama indeksom 10 odnosno 20, tada će pregledno napisani rezultati za slučaj dvaju sinhronih titraja, uzevši u obzir i granice, glasiti:

$$\min \left(\frac{1}{C_{10} L_{10}}, \frac{1}{C_{20} L_{20}} \right) \leq \omega_{kp}^2 \leq \max \left(\frac{1}{C_{10} L_{10}}, \frac{1}{C_{20} L_{20}} \right),$$

$$\omega_{kp}^2 \leq \min \left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{L_{10}} + \frac{1}{L_{12}}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{L_{20}} + \frac{1}{L_{12}}} \right),$$

$$\min \left(\frac{1}{C_{10} L_{10}}, \frac{1}{C_{20} L_{20}} \right) \leq \omega_{kb}^2 \leq \max \left(\frac{1}{C_{10} L_{10}}, \frac{1}{C_{20} L_{20}} \right),$$

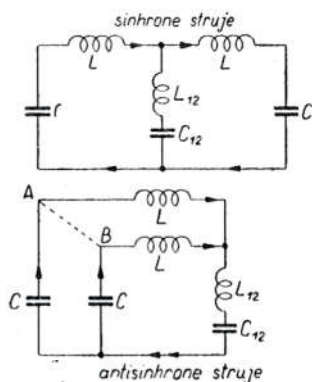
$$\omega_{kb}^2 \geq \max \left(\frac{\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{L_{10}} + \frac{1}{L_{12}}}, \frac{\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{L_{20}} + \frac{1}{L_{12}}} \right).$$

Sl. 317. prikazuje simetriranje sistema za taj slučaj, te je vidljivo, zašto sada antisinhroni titraj ne postoji. Antisinhrona frekvencija nalazila bi se, naime, između antisinhronih frekvencija simetriranih sistema, dakle, u intervalu između ω_1 i ω_2 , u kojem intervalu, međutim, ne može postojati nikakva vezna frekvencija.

c) Određivanje glavnih frekvencija pomoću struja i simetrični sistemi

Sinhroni titraj, kod kojega u simetričnim sistemima kroz vezni dio, prema sl. 318. gore, ne teče nikakva struja, imat će frekvenciju:

$$\Omega_{ks} = \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{2} 2L}} = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$



Antisinhroni titraj, prema navedenoj slici, dolje, kod kojega su, radi jednakih struja, točke A i B ekvipotencijalne točke, imat će frekvenciju:

$$\Omega_{ka} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2C} + \frac{1}{C_{12}}}{\frac{L}{2} + L_{12}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}}}{L + 2L_{12}}}.$$

Slika 318.

Razumije se, da bismo te izraze dobili i iz naše općenite formule za $\omega_{kb, kp}$, ako bismo uvrstili:

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega^2 = \frac{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}}{L + L_{12}},$$

$$k_{1\text{ind}} = k_{2\text{ind}} = K_{\text{ind}} = \frac{L_{12}}{L + L_{12}},$$

$$k_{1\text{kap}} = k_{2\text{kap}} = K_{\text{kap}} = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}}.$$

Iz prednje formule za Ω_{ka} , koju možemo transformirati, t. j.

$$\Omega_{ka} = \frac{1}{\sqrt{CL}} \sqrt{\frac{L + \frac{2CL}{C_{12}}}{L + 2L_{12}}},$$

vidimo, što smo već i naveli, da će za slučaj

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} > \frac{1}{CL}, \text{ odnosno } \frac{2CL}{C_{12}} > 2L_{12},$$

glavna frekvencija Ω_{ka} biti veća od glavne frekvencije Ω_{ks} , a u slučaju

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} < \frac{1}{CL}, \text{ odnosno } \frac{2CL}{C_{12}} < 2L_{12},$$

biti manja od Ω_{ks} . U slučaju

$$\frac{1}{C_{12}L_{12}} = \frac{1}{CL}, \text{ odnosno } \frac{2CL}{C_{12}} = 2L_{12},$$

bit će

$$\Omega_{ka} = \Omega_{ks} = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

To znači, da će sada sistemi titrati samo jednom frekvencijom, što smo već i prije uočili.

Ako je kod simetričnih krugova, na pr., $\Omega_{ks} > \Omega_{ka}$, onda će biti:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\frac{1}{CL} - \frac{1}{L+L_{12}} \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}}}{\frac{L_{12}}{L+L_{12}} \frac{1}{CL} - \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}} \frac{1}{L+L_{12}}} = 1,$$

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{\frac{1}{L+2L_{12}} \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}} - \frac{1}{L+L_{12}} \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}}}{\frac{L_{12}}{L+L_{12}} \frac{1}{L+2L_{12}} \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}} - \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}}} \frac{1}{L+L_{12}}} = -1.$$

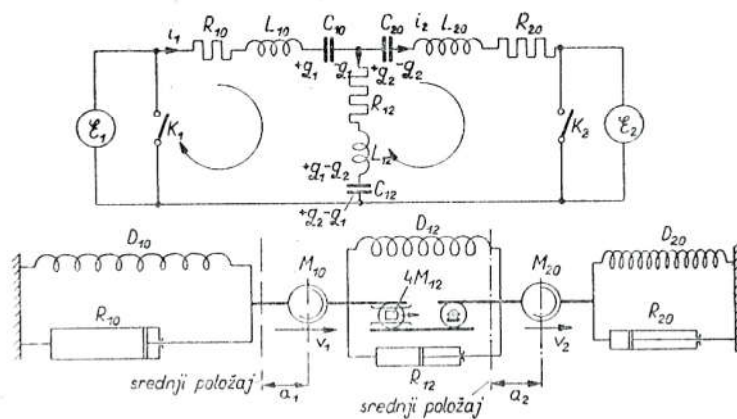
Opći integral će, prema tome, glasniti:

$$q_1 = A_1 \sin(\Omega_{ks} t + \varphi) + A_2 \sin(\Omega_{ka} t + \chi),$$

$$q_2 = A_1 \sin(\Omega_{ks} t + \varphi) - A_2 \sin(\Omega_{ka} t + \chi).$$

21. OPĆI INTEGRAL TITRAJNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI PRIGUŠENIH VEZANIH ELEKTRIČNIH KRUGOVA BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA

Slika 319.



Ako prema sl. 319., gore, u izvjesnom času, koji ovisi o početnim uvjetima, zatvorimo sklopke K_1 i K_2 , imat ćemo pred sobom dva vezana električna sistema bez prisutnosti narinutog napona, u kojima će energija titrati prigušeno. Označene su struje, odnosno množine elektricitete, u nekom vremenu t , nakon zatvaranja sklopki.

Na navedenoj slici, dolje, prikazan je mehanički analogon gornjoj električnoj shemi.

Vrijedit će slijedeće diferencijalne jednačbe:

$$0 = \frac{q_1}{C_{10}} + R_{10} i_1 + L_{10} \frac{di_1}{dt} + \frac{q_1 - q_2}{C_{12}} + R_{12} (i_1 - i_2) + L_{12} \frac{d(i_1 - i_2)}{dt}.$$

$$0 = \frac{q_2}{C_{20}} + R_{20} i_2 + L_{20} \frac{di_2}{dt} + \frac{q_2 - q_1}{C_{12}} + R_{12} (i_2 - i_1) + L_{12} \frac{d(i_2 - i_1)}{dt}.$$

$$0 = q_1 \left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} \right) + (R_{10} + R_{12}) i_1 + (L_{10} + L_{12}) \frac{di_1}{dt} - \left(\frac{q_2}{C_{12}} + R_{12} i_2 + L_{12} \frac{di_2}{dt} \right).$$

$$0 = q_2 \left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} \right) + (R_{20} + R_{12}) i_2 + (L_{20} + L_{12}) \frac{di_2}{dt} - \left(\frac{q_1}{C_{12}} + R_{12} i_1 + L_{12} \frac{di_1}{dt} \right).$$

Označit ćemo vrijednosti prvog, odnosno drugog razvezanog kruga, kako slijedi:

$$\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1}.$$

$$\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_2}.$$

$$R_{10} + R_{12} = R_1.$$

$$R_{20} + R_{12} = R_2.$$

$$L_{10} + L_{12} = L_1.$$

$$L_{20} + L_{12} = L_2.$$

Nadalje je:

$$i_1 = \frac{dq_1}{dt}, \text{ odnosno } i_2 = \frac{dq_2}{dt}.$$

Prema tome, bit će:

$$0 = q_1 \frac{1}{C_1} + R_1 \frac{dq_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} - \left(\frac{q_2}{C_{12}} + R_{12} \frac{dq_2}{dt} + L_{12} \frac{d^2 q_2}{dt^2} \right),$$

$$0 = q_2 \frac{1}{C_2} + R_2 \frac{dq_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} - \left(\frac{q_1}{C_{12}} + R_{12} \frac{dq_1}{dt} + L_{12} \frac{d^2 q_1}{dt^2} \right),$$

$$0 = \underbrace{\left[\frac{1}{C_1} + R_1 \frac{d}{dt} + L_1 \frac{d^2}{dt^2} \right]}_{= a_{11}} q_1 - \underbrace{\left[\frac{1}{C_{12}} + R_{12} \frac{d}{dt} + L_{12} \frac{d^2}{dt^2} \right]}_{= a_{12}} q_2,$$

$$0 = \underbrace{\left[\frac{1}{C_2} + R_2 \frac{d}{dt} + L_2 \frac{d^2}{dt^2} \right]}_{= a_{22}} q_2 - \underbrace{\left[\frac{1}{C_{12}} + R_{12} \frac{d}{dt} + L_{12} \frac{d^2}{dt^2} \right]}_{= a_{21}} q_1.$$

Operatorske izraze u zagradama označili smo s a_{11} , a_{22} , a_{12} te a_{21} , ali kako je $a_{12} = a_{21}$, naše diferencijalne jednačbe glasit će:

$$0 = a_{11} q_1 - a_{12} q_2,$$

$$0 = a_{22} q_2 - a_{12} q_1.$$

Kako su postavci za rješenje tih diferencijalnih jednačbi, slično kao kod nepri-
gušenih krugova u poglavlju 20., $q_1 = \mathcal{C} e^{pt}$, odnosno $q_2 = \mathcal{D} e^{pt}$, to je operator $\frac{d}{dt} = p$, odnosno $\frac{d^2}{dt^2} = p^2$. Prema tome će biti:

$$a_{11} = \frac{1}{C_1} + p R_1 + p^2 L_1,$$

$$a_{22} = \frac{1}{C_2} + p R_2 + p^2 L_2,$$

$$a_{12} = \frac{1}{C_{12}} + p R_{12} + p^2 L_{12}.$$

Karakterističnu jednačbu gornjih homogenih linearnih diferencijalnih jednačbi, dobit ćemo izjednačenjem determinante sistema s nulom, t. j.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{12} \\ -a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

To je jednačba četvrtog stepena s četiri rješenja za p . Da smo imali n petlji, od kojih bi svaka imala sve parametre, dobili bismo jednačbu $2n$ -tog stepena.

Prema tome, opći integral, s time, da se q_1 , odnosno q_2 „zbivaju“ na pravcu titranja, glasi:

$$q_1 = \mathcal{C}_1 e^{p_1 t} + \mathcal{C}_2 e^{p_2 t} + \mathcal{C}_3 e^{p_3 t} + \mathcal{C}_4 e^{p_4 t},$$

$$q_2 = \mathcal{D}_1 e^{p_1 t} + \mathcal{D}_2 e^{p_2 t} + \mathcal{D}_3 e^{p_3 t} + \mathcal{D}_4 e^{p_4 t}.$$

Budući da su koeficijenti karakteristične jednadžbe, t. j. naši parametri, realni, to njeni korijeni mogu biti, ili svi realni, ili su samo dva realna, a ostala dva konjugirano kompleksna, ili, konačno, mogu postojati dva para konjugirano kompleksnih korijena. Realni korijeni mogu biti međusobno različiti, ili neki od njih, dapače i svi, mogu biti međusobno jednaki. Isto tako oba para konjugirano kompleksnih korijena mogu biti međusobno različiti, ili jednaki. Svi realni korijeni, kao i realni dijelovi kompleksnih korijena, moraju biti negativni, jer bi se inače procesi s vremenom pojačavali, što nije moguće, jer izvana ne pridolazi energija, nego naprotiv, energija izlazi sve više iz titrajnog procesa, u obliku topline. Ako postoje samo realni korijeni, tada se procesi u svakom krugu sastoje iz dva aperiodička, ili granično aperiodička titraja, dok se kod dva para konjugirano kompleksnih korijena sastoje — kako ćemo pokazati — iz dva oscilatorska prigušena titraja. Budući da istodobno mogu nastupiti dva realna i dva konjugirano kompleksna korijena, znači, da se tada procesi sastoje iz jednog aperiodičkog, odnosno granično aperiodičkog, i jednog oscilatorskog prigušenog titraja.

Da u obim općim integralima osam nepoznatih konstanti reduciramo na četiri, što je u skladu s naša četiri početna uvjeta, postupit ćemo u načelu isto kao i kod neprigušenih krugova, iako formalno nešto drukčije. Tamo smo, naime, opće integrale izrazili tako, da smo po dva partikularna integrala sjedinili u sinusov val, te se je, prema tome, svaki opći integral sastojao iz dva sinusova vala. Tako izražene opće integrale, unijeli smo u cijelosti u početne diferencijalne jednadžbe, iz čega je tada slijedilo, da su dva fazna kuta prvog općeg integrala, jednaka dvama faznim kutovima drugog općeg integrala, i osim toga dobili smo odnose amplituda prvog i drugog općeg integrala. Takvo računanje bi ovdje — naročito ako se radi o kompleksnim korijenima — bilo dosta nepregledno i razvučeno. Radi toga ćemo se ovdje zadovoljiti s time, da ćemo pronaći općenite formule odnosa konstanti partikularnih integrala, iz kojih ćemo formula moći zaključiti kako se kvalitativno odnose amplitude i fazni kutovi obih općih integrala.

Ako unesemo, dakle, prve partikularne integrale u početne diferencijalne jednadžbe, dobit ćemo:

$$a_{11} \mathcal{C}_1 e^{h_1 t} - a_{12} \mathcal{D}_1 e^{h_1 t} = 0,$$

$$a_{22} \mathcal{D}_1 e^{h_1 t} - a_{12} \mathcal{C}_1 e^{h_1 t} = 0.$$

Prema tome slijedi:

$$\frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{C}_1} = \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Ako bismo u diferencijalne jednadžbe unijeli druge partikularne integrale, dobili bismo za odnose njihovih konstanti, na izgled, naravno, iste formule, t. j.

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

ali se treba sjetiti, da je u prvom slučaju odnos

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{\frac{1}{C_1} + p_1 R_1 + p_1^2 L_1}{\frac{1}{C_{12}} + p_1 R_{12} + p_1^2 L_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{\frac{1}{C_{12}} + p_1 R_{12} + p_1^2 L_{12}}{\frac{1}{C_2} + p_1 R_2 + p_1^2 L_2},$$

dok bi kod odnosa konstanti drugih partikularnih integrala mjesto p_1 valjalo staviti p_2 , kod odnosa konstanti trećih partikularnih integrala p_3 , a kod odnosa konstanti četvrtih p_4 .

Prema tome, općenito možemo pisati:

$$q_1 = \mathcal{C}_1 e^{p_1 t} + \mathcal{C}_2 e^{p_2 t} + \mathcal{C}_3 e^{p_3 t} + \mathcal{C}_4 e^{p_4 t},$$

$$q_2 = \mathcal{F}_1 \mathcal{C}_1 e^{p_1 t} + \mathcal{F}_2 \mathcal{C}_2 e^{p_2 t} + \mathcal{F}_3 \mathcal{C}_3 e^{p_3 t} + \mathcal{F}_4 \mathcal{C}_4 e^{p_4 t}.$$

Odnose konstanti napisali smo općenito $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ i $\mathcal{F}_4$ kao kompleksne vrijednosti, a razlog ćemo odmah razjasniti. Ako se radi o realnim korijenima, onda su, prema gornjim formulama, i ti odnosi realni. No ovakvi nas slučajevi ne će zanimati, jer titrajni krugovi, koji su važni i s kojima se najviše susrećemo u visokofrekventnoj tehnici, izvide oscilatorske titraje, jer imaju slaba gušenja. Kod ovakvih krugova korijeni karakteristične jednadžbe su konjugirano kompleksni, t. j.

$$p_1 = -\delta_{kb} + j\omega_{dkb} = -\delta_{kb} + j\sqrt{\omega_{kb}^2 - \delta_{kb}^2},$$

$$p_2 = -\delta_{kb} - j\omega_{dkb} = -\delta_{kb} - j\sqrt{\omega_{kb}^2 - \delta_{kb}^2},$$

$$p_3 = -\delta_{kp} + j\omega_{akp} = -\delta_{kp} + j\sqrt{\omega_{kp}^2 - \delta_{kp}^2},$$

$$p_4 = -\delta_{kp} - j\omega_{akp} = -\delta_{kp} - j\sqrt{\omega_{kp}^2 - \delta_{kp}^2}.$$

Indeks b odnosi se — kako znamo — na brzi, a indeks p na polagani titraj, indeks k označuje, da se radi o veznim veličinama, dok indeks d znači — što je također već prije upotrebljavano — da su krugovi prigušeni. Indeksi b i p kod gušenja ne znače naravno, da se radi o „brzom“ i „polaganom“ gušenju, jer su gušenja slaba ili jaka, nego znači pridruženost brzom ili polaganom frekvenciji, kod čega može biti

$$\delta_{kp} \leq \delta_{kb}.$$

Već se iz ovakvog označivanja može naslutiti, da je svakoj veznoj frekvenciji pridruženo i naročito vezno gušenje, dakle, gušenje, koje je izraženo posebnom formulom, koja sadrži parametre obih vezanih krugova. U sasvim specijalnim slučajevima, međutim, može se dogoditi, da se u dotičnim formulama

dijelovi parametara obih krugova tako međusobno odbijaju, da u konačnom rezultatu izgleda, kao da se to vezno gušenje sastoji samo od dijelova parametara jednog kruga. To su zapravo granični slučajevi.*)

Budući da su, dakle, korišteni kompleksni, bit će i odnosi

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}, \quad \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$$

također kompleksni. Odmah vidimo, da će $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ biti konjugirano kompleksni, jer su i p_1 i p_2 konjugirano kompleksni, odnosno, da će $\mathcal{F}_3$ i $\mathcal{F}_4$ također biti konjugirano kompleksni radi p_3 i p_4 .

Radi kontrole primijenit ćemo našu sadašnju formulu za $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ i $\mathcal{F}_4$ na neprigušene krugove, unijevši za sve omske otpore $R = 0$, te za

$$\begin{aligned} p_1 &= j\omega_{kb}, \\ p_2 &= -j\omega_{kb}, \\ p_3 &= j\omega_{kp}, \\ p_4 &= -j\omega_{kp}. \end{aligned}$$

Tada ćemo dobiti:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \frac{\frac{1}{C_1} - \omega_{kb}^2 L_1}{\frac{1}{C_{12}} - \omega_{kb}^2 L_{12}} = \frac{\frac{1}{C_1 L_1} - \omega_{kb}^2}{\frac{1}{\frac{C_{12}}{1} \frac{1}{L_1} \frac{1}{C_1} - \omega_{kb}^2 \frac{L_{12}}{L_1}}} = \frac{\omega_1^2 - \omega_{kb}^2}{k_{1 \text{ kap}} \omega_1^2 - \omega_{kb}^2 k_{1 \text{ ind}}},$$

*) Izrazi za prigušne vezne frekvencije ω_{akb} i ω_{akp} pokazuju, da i te frekvencije preko neprigušnih veznih frekvencija „vuku lozu“ od neprigušnih razvezanih frekvencija, koje su njihov „zametak“.

Prema navedenim formulama, njihova geneza počela bi tako, da bi najprije postojali razvezani neprigušeni krugovi, u kojima bi se pojavile razvezane frekvencije ω_1 i ω_2 . Vezanjem došli bismo do neprigušnih veznih frekvencija ω_{kb} i ω_{kp} , koje sadrže u sebi razvezane neprigušne frekvencije ω_1 i ω_2 , kao i činjenicu vezanja, t. j. faktor vezanja. Prigušne vezne frekvencije ω_{akb} i ω_{akp} slijede dalje iz neprigušnih veznih frekvencija ω_{kb} i ω_{kp} , kojima pridolazi još momenat gušenja.

Naravno, da bismo navedenu genezu mogli zamisliti i na drugačiji način, t. j. da bismo neprigušenim razvezanim krugovima s frekvencijama ω_1 i ω_2 pridodali omske otpore, i tada bismo došli do ω_{d1} i ω_{d2} . Te prigušne razvezane frekvencije prešle bi vezanjem krugova u prigušne vezne frekvencije ω_{akb} i ω_{akp} . Razumije se, da bismo u ovom drugom slučaju dobili za ω_{akb} i ω_{akp} nešto drugačije formule, u kojima bi se nalazili ω_{d1} i ω_{d2} i faktor vezanja, koji bi bio drugačiji, nego u prvom slučaju vezivanja još neprigušenih krugova, ali te bismo formule lako preinačili u prijašnje formule, ako bismo ω_{d1} izrazili kao $\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}$, odnosno ω_{d2} kao $\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2}$.

Analogno kao i frekvencije, i oba vezna gušenja sadrže u svojim formulama svoje „zametke“, t. j. razvezana gušenja obaju krugova δ_1 i δ_2 , kao i činjenicu vezanja. Treba napomenuti, da, radi eventualno znatno većeg gušenja, izraz $\sqrt{\omega_{kb}^2 - \delta_{kb}^2} = \omega_{akb}$ može ispasti i manji od izraza $\sqrt{\omega_{kp}^2 - \delta_{kp}^2} = \omega_{akp}$, i da bi tada valjalo mijenjati indekse b i p prigušnih veznih frekvencija.

dakle, našu već poznatu formulu. Isto tako bismo dobili prijašnju formulu i za odnose partikularnih polaganih titraja kod

$$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4.$$

Svojedobno smo kod neprigušenih krugova pravac titranja poistovjetili s imaginarnom osi, te smo tada za množinu elektricitete u prvom krugu, t. j. u izrazu za opći integral

$$\mathcal{C}_1 e^{j\omega_{kb}t} + \mathcal{C}_2 e^{-j\omega_{kb}t} + \mathcal{C}_3 e^{j\omega_{kp}t} + \mathcal{C}_4 e^{-j\omega_{kp}t}$$

pokazali, da $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$, kao i $\mathcal{C}_3$ i $\mathcal{C}_4$, moraju biti simetrični obzirom na imaginarnu os prema sl. 282. Da se dobije izraz za množinu elektricitete u drugom krugu, kod svakog para oba simetrična verzora treba pomnožiti istim realnim brojem, no s time, da je kod jednog para taj broj pozitivan, a kod drugog negativan, i tada će jedan par umnožaka biti u fazi, a drugi u antifazi s prvotnim verzorima, odnosno, drugim riječima imat ćemo sinhronu i antisinhronu titraje.

Opći integral za prigušene krugove glavit će, međutim,

$$q_1 = \mathcal{C}_1 e^{(-\delta_{kb} + j\omega_{akb})t} + \mathcal{C}_2 e^{(-\delta_{kb} - j\omega_{akb})t} + \mathcal{C}_3 e^{(-\delta_{kp} + j\omega_{akp})t} + \\ + \mathcal{C}_4 e^{(-\delta_{kp} - j\omega_{akp})t}.$$

$$q_2 = \mathcal{F}_1 \mathcal{C}_1 e^{(-\delta_{kb} + j\omega_{akb})t} + \mathcal{F}_2 \mathcal{C}_2 e^{(-\delta_{kb} - j\omega_{akb})t} + \mathcal{F}_3 \mathcal{C}_3 e^{(-\delta_{kp} + j\omega_{akp})t} + \\ + \mathcal{F}_4 \mathcal{C}_4 e^{(-\delta_{kp} - j\omega_{akp})t}.$$

$$q_1 = e^{-\delta_{kb}t} [\mathcal{C}_1 e^{j\omega_{akb}t} + \mathcal{C}_2 e^{-j\omega_{akb}t}] + e^{-\delta_{kp}t} [\mathcal{C}_3 e^{j\omega_{akp}t} + \mathcal{C}_4 e^{-j\omega_{akp}t}].$$

$$q_2 = e^{-\delta_{kb}t} [\mathcal{F}_1 \mathcal{C}_1 e^{j\omega_{akb}t} + \mathcal{F}_2 \mathcal{C}_2 e^{-j\omega_{akb}t}] + \\ + e^{-\delta_{kp}t} [\mathcal{F}_3 \mathcal{C}_3 e^{j\omega_{akp}t} + \mathcal{F}_4 \mathcal{C}_4 e^{-j\omega_{akp}t}].$$

$$q_1 = e^{-\delta_{kb}t} [(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \cos \omega_{akb}t + j(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2) \sin \omega_{akb}t] + \\ + e^{-\delta_{kp}t} [(\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4) \cos \omega_{akp}t + j(\mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_4) \sin \omega_{akp}t].$$

Da bismo dobili sinusove titraje, poistovjetit ćemo pravac titranja s imaginarnom osi, i tada izraz za množinu elektricitete mora postati imaginaran.

Radi toga će biti:

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \text{ imaginarno,}$$

$$\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 \text{ imaginarno,}$$

$$\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 \text{ realno,}$$

$$\mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_4 \text{ realno.}$$

Prema tome

$$\mathcal{C}_1 = \frac{M}{2} + j \frac{N}{2},$$

$$\mathcal{C}_2 = -\frac{M}{2} + j \frac{N}{2},$$

$$\mathcal{C}_3 = \frac{P}{2} + j \frac{R}{2},$$

$$\mathcal{C}_4 = -\frac{P}{2} + j \frac{R}{2}.$$

Znači, da su $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$, kao i $\mathcal{C}_3$ i $\mathcal{C}_4$, simetrični obzirom na imaginarnu os. Prema tome, slijedi:

$$q_1 = \mathcal{I}m \left\{ e^{-\delta_{kb} t} [j N \cos \omega_{akb} t + j M \sin \omega_{akb} t] + \right. \\ \left. + e^{-\delta_{kp} t} [j R \cos \omega_{akp} t + j P \sin \omega_{akp} t] \right\}.$$

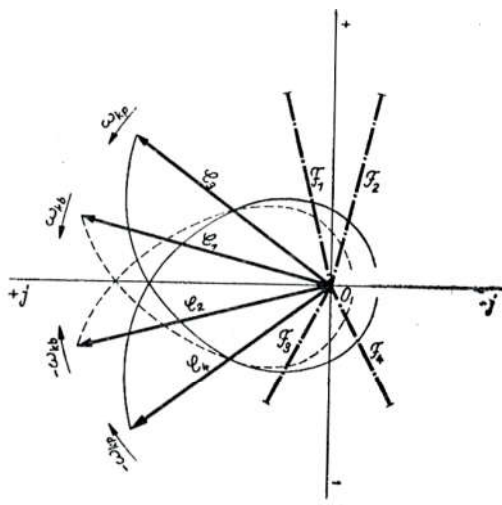
Analogno, za drugi krug bit će:

$$q_2 = \mathcal{I}m \left\{ e^{-\delta_{kb} t} [j N_1 \cos \omega_{akb} t + j M_1 \sin \omega_{akb} t] + \right. \\ \left. + e^{-\delta_{kp} t} [j R_1 \cos \omega_{akp} t + j P_1 \sin \omega_{akp} t] \right\}.$$

Kako smo $\mathcal{C}_1$, odnosno $\mathcal{C}_2$, pomnožili s konjugirano kompleksnim brojevima $\mathcal{F}_1$, odnosno $\mathcal{F}_2$, to će i umnošci $\mathcal{C}_1 \mathcal{F}_1$ i $\mathcal{C}_2 \mathcal{F}_2$ biti simetrični obzirom na imaginarnu os, iz čega i rezultira navedena formula za q_2 , ali $\frac{N}{M}$ ne će biti jednako $\frac{N_1}{M_1}$, što bi bilo, da smo ih pomnožili s istim realnim brojem.

Analogno vrijedi i za $\mathcal{C}_3$ i $\mathcal{C}_4$ u odnosu na umnoške $\mathcal{C}_3 \mathcal{F}_3$ i $\mathcal{C}_4 \mathcal{F}_4$. Iz toga slijedi, da sada više nemamo sinhronu i antisinhronu titraje, jer prvotni verzori i navedeni umnošci nisu kao prije međusobno u čistoj fazi, odnosno u čistoj antifazi.

Na sl. 320. prikazani su prvotni verzori, zatim odnosi, kojima se oni množe, a naznačene su i logaritmičke spirale umanjenja verzora.



Slika 320.

Ispustivši Gaussovu ravninu, možemo, dakle, konačno pisati:

$$q_1 = e^{-\delta_{kb} t} A_1 \sin(\omega_{akb} t + \varphi) + e^{-\delta_{kp} t} A_2 \sin(\omega_{akp} t + \chi).$$

$$q_2 = e^{-\delta_{kb} t} B_1 \sin(\omega_{akb} t + \delta) + e^{-\delta_{kp} t} B_2 \sin(\omega_{akp} t + \epsilon).$$

22. SIMETRIČNI PRIGUŠENI VEZANI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA

a) Izrazi za vezne veličine. Slučaj naročitih početnih uvjeta

Prema sl. 321., bit će:

$$C_1 = C_2 = C_{raz},$$

$$L_1 = L_2 = L_{raz},$$

$$R_1 = R_2 = R_{raz}.$$

Indeks „raz“ znači u razvezanom stanju.

Prema tome je:

$$a_{11} = a_{22} = a = \frac{1}{C_{raz}} + p R_{raz} + p^2 L_{raz}.$$

Karakteristična jednadžba radi toga glasi:

$$a^2 - a_{12}^2 = 0.$$

Iz ovoga slijedi

$$(a - a_{12}) = 0,$$

i nadalje

$$(a + a_{12}) = 0,$$

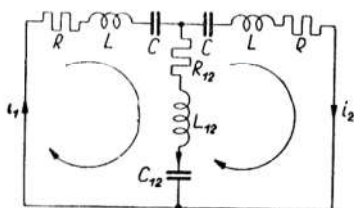
t. j. dvije kvadratne jednadžbe. Iz prve se dobiju korijeni p_1 i p_2 , a iz druge p_3 i p_4 . Odnos partikularnih integrala od q_2 i q_1 iznosi općenito $\frac{a_{11}}{a_{12}}$ ili $\frac{a_{12}}{a_{22}}$, odnosno u našem slučaju simetričnih krugova, $\frac{a}{a_{12}}$ ili $\frac{a_{12}}{a}$. Prva dva odnosa bit će:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 1.$$

To slijedi iz prve kvadratne jednadžbe, gdje je $a = a_{12}$. Prema tome u ovom naročitom slučaju postoji čisti sinhroni titraj. Treći i četvrti odnos glase:

$$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = -1.$$

To analogno slijedi iz druge kvadratne jednadžbe, gdje je $a = -a_{12}$. To znači, da je drugi titraj čisti antisinhroni titraj.



Slika 321.

Kod prigušenih simetričnih krugova imat ćemo, iznimno, kao i kod neprigušenih krugova, sinhroni ili fazni, i antisinhroni ili antifazni titraj, koji će radi toga biti glavni prigušni titraji. Njima pridružena vezna gušenja nazvat ćemo, također, glavna gušenja i označit ćemo ih velikim slovom. Radi toga ćemo kod simetričnih prigušenih vezanih krugova pisati:

$$q_1 = e^{-H_{ks}t} A_1 \sin(\Omega_{dks}t + \varphi) + e^{-H_{ka}t} A_2 \sin(\Omega_{dka}t + \chi),$$

$$q_2 = e^{-H_{ks}t} A_1 \sin(\Omega_{dks}t + \varphi) - e^{-H_{ka}t} A_2 \sin(\Omega_{dka}t + \chi).$$

Diferenciranjem po vremenu dobili bismo struje i_1 , te i_2 . Odmah se vidi, da će struja u srednjem ogranku, kao diferencija tih dviju struja, potjecati samo od antisinhronog titraja, dakle, sadržavat će samo jedan prigušeni sinusov val.

Sada ćemo поближе razmotriti glavne prigušne frekvencije i njima pridružena glavna gušenja. U tu svrhu, najprije ćemo riješiti jednadžbu

$$a - a_{12} = 0,$$

t. j.

$$\frac{1}{C_{\text{raz}}} + p R_{\text{raz}} + p^2 L_{\text{raz}} - \frac{1}{C_{12}} - p R_{12} - p^2 L_{12} = 0.$$

$$\left(\frac{1}{C_{\text{raz}}} - \frac{1}{C_{12}} \right) + p (R_{\text{raz}} - R_{12}) + p^2 (L_{\text{raz}} - L_{12}) = 0.$$

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{R_{\text{raz}} - R_{12}}{2(L_{\text{raz}} - L_{12})} + j \sqrt{\frac{\frac{1}{C_{\text{raz}}} - \frac{1}{C_{12}}}{L_{\text{raz}} - L_{12}} - \left[\frac{R_{\text{raz}} - R_{12}}{2(L_{\text{raz}} - L_{12})} \right]^2} = \\ &= -\frac{R}{2L} + j \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} = -\mathcal{H}_{ks} + j\Omega_{dks} = -\mathcal{H}_{ks} + j\sqrt{\Omega_{ks}^2 - \mathcal{H}_{ks}^2}. \\ p_2 &= -\frac{R_{\text{raz}} - R_{12}}{2(L_{\text{raz}} - L_{12})} - j \sqrt{\frac{\frac{1}{C_{\text{raz}}} - \frac{1}{C_{12}}}{L_{\text{raz}} - L_{12}} - \left[\frac{R_{\text{raz}} - R_{12}}{2(L_{\text{raz}} - L_{12})} \right]^2} = \\ &= -\frac{R}{2L} - j \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} = -\mathcal{H}_{ks} - j\Omega_{dks} = -\mathcal{H}_{ks} - j\sqrt{\Omega_{ks}^2 - \mathcal{H}_{ks}^2}. \end{aligned}$$

Vidimo, da se u konačnim formulama za p_1 i p_2 nigdje ne pojavljuju elementi veze, što ponovo potvrđuje, da se radi o sinhronom titranju. Kod

$$\left[\frac{R_{\text{raz}} - R_{12}}{2(L_{\text{raz}} - L_{12})} \right]^2 > \frac{\frac{1}{C_{\text{raz}}} - \frac{1}{C_{12}}}{L_{\text{raz}} - L_{12}}$$

imali bismo aperiodički slučaj, odnosno kod njihove jednakosti granično aperiodički slučaj, koje međutim — kako smo već jednom naveli — ne ćemo ovdje pretpostavljati. Ako omski otpori postaju jednaki nuli, prešlo bi

$$\Omega_{dks} \text{ u } \Omega_{ks} = \frac{1}{\sqrt{CL}},$$

t. j. u glavnu sinhronu frekvenciju neprigušenih krugova.

Druga jednadžba glasi:

$$a + a_{12} = 0,$$

t. j.

$$\frac{1}{C_{raz}} + p R_{raz} + p^2 L_{raz} + \frac{1}{C_{12}} + p R_{12} + p^2 L_{12} = 0.$$

$$\begin{aligned} p_3 &= -\frac{R_{raz} + R_{12}}{2(L_{raz} + L_{12})} + j \sqrt{\frac{\frac{1}{C_{raz}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{raz} + L_{12}} - \left[\frac{R_{raz} + R_{12}}{2(L_{raz} + L_{12})} \right]^2} = \\ &= -\frac{R + 2R_{12}}{2(L + 2L_{12})} + j \sqrt{\frac{\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}}}{L + 2L_{12}} - \left[\frac{R + 2R_{12}}{2(L + 2L_{12})} \right]^2} = \\ &= -H_{ka} + j\Omega_{dka} = -H_{ka} + j\sqrt{\Omega_{ka}^2 - H_{ka}^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4 &= -\frac{R_{raz} + R_{12}}{2(L_{raz} + L_{12})} - j \sqrt{\frac{\frac{1}{C_{raz}} + \frac{1}{C_{12}}}{L_{raz} + L_{12}} - \left[\frac{R_{raz} + R_{12}}{2(L_{raz} + L_{12})} \right]^2} = \\ &= -H_{ka} - j\Omega_{dka} = -H_{ka} - j\sqrt{\Omega_{ka}^2 - H_{ka}^2}. \end{aligned}$$

Ako omski otpori postanu jednaki nuli, Ω_{dka} prelazi u neprigušno Ω_{ka} . U pogledu veznih gušenja, iz njihovih izraza se vidi, da može biti

$$H_{ks} \gtrless H_{ka}.$$

Oba vezna gušenja bit će jednaka, ako je

$$\frac{L}{R} = \frac{L_{12}}{R_{12}}.$$

Promotrit ćemo sada naročiti slučaj početnih uvjeta, koji smo obrađivali i kod neprigušenih kapacitivno vezanih krugova, t. j. u času

$$t = 0 \dots q_1 = q_1(0), \quad \left. \frac{dq_1}{dt} \right|_{t=0} = i_1 = 0.$$

$$q_2 = 0, \quad \left. \frac{dq_2}{dt} \right|_{t=0} = i_2 = 0.$$

Prema tome, bit će:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4, \\ 0 &= \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_4, \\ 0 &= p_1 \mathcal{C}_1 + p_2 \mathcal{C}_2 + p_3 \mathcal{C}_3 + p_4 \mathcal{C}_4, \\ 0 &= p_1 \mathcal{C}_1 + p_2 \mathcal{C}_2 - p_3 \mathcal{C}_3 - p_4 \mathcal{C}_4. \end{aligned}$$

Iz ovih jednažbi slijedi:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= -\frac{q_1(0)}{2} \frac{p_2}{p_1 - p_2}, \quad \mathcal{C}_2 = \frac{q_1(0)}{2} \frac{p_1}{p_1 - p_2}, \\ \mathcal{C}_3 &= -\frac{q_1(0)}{2} \frac{p_4}{p_3 - p_4}, \quad \mathcal{C}_4 = \frac{q_1(0)}{2} \frac{p_3}{p_3 - p_4}. \end{aligned}$$

Izrazi za naboje i struje u vremenu t glasiće:

$$q_1 = \frac{q_1(0)}{2} \left[-\frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} - \frac{p_4}{p_3 - p_4} e^{p_3 t} + \frac{p_3}{p_3 - p_4} e^{p_4 t} \right],$$

$$q_2 = \frac{q_1(0)}{2} \left[-\frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} + \frac{p_4}{p_3 - p_4} e^{p_3 t} - \frac{p_3}{p_3 - p_4} e^{p_4 t} \right],$$

$$i_1 = \frac{q_1(0)}{2} \left[-\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_2 p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} - \frac{p_3 p_4}{p_3 - p_4} e^{p_3 t} + \frac{p_4 p_3}{p_3 - p_4} e^{p_4 t} \right],$$

$$i_2 = \frac{q_1(0)}{2} \left[-\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_2 p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} + \frac{p_3 p_4}{p_3 - p_4} e^{p_3 t} - \frac{p_4 p_3}{p_3 - p_4} e^{p_4 t} \right].$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{q_1(0)}{2} \left[-\frac{-\mathcal{H}_{ks} - j\Omega_{dks}}{2j\Omega_{dks}} e^{(-\mathcal{H}_{ks} + j\Omega_{dks})t} + \frac{-\mathcal{H}_{ks} + j\Omega_{dks}}{2j\Omega_{dks}} e^{(-\mathcal{H}_{ks} - j\Omega_{dks})t} - \right. \\ &\quad \left. -\frac{-\mathcal{H}_{ka} - j\Omega_{dka}}{2j\Omega_{dka}} e^{(-\mathcal{H}_{ka} + j\Omega_{dka})t} + \frac{-\mathcal{H}_{ka} + j\Omega_{dka}}{2j\Omega_{dka}} e^{(-\mathcal{H}_{ka} - j\Omega_{dka})t} \right]. \end{aligned}$$

Pretpostavit ćemo vrlo slabo gušene krugove, t. j.

$$\mathcal{H}_{ks} \ll \Omega_{dks}, \quad \text{te} \quad \mathcal{H}_{ka} \ll \Omega_{dka},$$

pa će uz ta zanemarenja u brojniku razlomaka, dalje slijediti:

$$q_1 = \frac{q_1(0)}{2} \left[e^{-\mathcal{H}_{ks} t} \frac{e^{j\Omega_{dks} t} + e^{-j\Omega_{dks} t}}{2} + e^{-\mathcal{H}_{ka} t} \frac{e^{j\Omega_{dka} t} + e^{-j\Omega_{dka} t}}{2} \right].$$

$$q_1 = \frac{q_1(0)}{2} \left[e^{-\mathcal{H}_{ks} t} \cos \Omega_{dks} t + e^{-\mathcal{H}_{ka} t} \cos \Omega_{dka} t \right].$$

Analogno je

$$q_2 = \frac{q_1(0)}{2} \left[e^{-\mathcal{H}_{ks} t} \cos \Omega_{dks} t - e^{-\mathcal{H}_{ka} t} \cos \Omega_{dka} t \right].$$

Kod slabo vezanih krugova bit će R_{12} , L_{12} i $\frac{1}{C_{12}}$ maleno, i radi toga će biti:

$$\mathcal{H}_{ks} \approx \mathcal{H}_{ka} = \frac{R}{2L} = \mathcal{H}^*)$$

Prema tome, u tom slučaju, t. j. za slabo gušene i slabo vezane simetrične krugove, možemo konačno pisati:

$$q_1 = \frac{q_1(0)}{2} e^{-\mathcal{H} t} \left[\sin \left(\Omega_{dks} t + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(\Omega_{dka} t + \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

$$q_2 = \frac{q_1(0)}{2} e^{-\mathcal{H} t} \left[\sin \left(\Omega_{dks} t + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(\Omega_{dka} t + \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Za struju će biti:

$$i_1 = \frac{q_1(0)}{2} \left[-\frac{\mathcal{H}_{ks}^2 + \Omega_{dks}^2}{2j\Omega_{dks}} e^{(-\mathcal{H}_{ks} + j\Omega_{dks})t} + \frac{\mathcal{H}_{ks}^2 + \Omega_{dks}^2}{2j\Omega_{dks}} e^{(-\mathcal{H}_{ks} - j\Omega_{dks})t} - \right. \\ \left. -\frac{\mathcal{H}_{ka}^2 + \Omega_{dka}^2}{2j\Omega_{dka}} e^{(-\mathcal{H}_{ka} + j\Omega_{dka})t} + \frac{\mathcal{H}_{ka}^2 + \Omega_{dka}^2}{2j\Omega_{dka}} e^{(-\mathcal{H}_{ka} - j\Omega_{dka})t} \right].$$

Zanemarivši $\mathcal{H}_{ks}^2$ prema Ω_{dks}^2 , odnosno $\mathcal{H}_{ka}^2$ prema Ω_{dka}^2 , bit će:

$$i_1 = \frac{q_1(0)}{2} \left[e^{-\mathcal{H}_{ks} t} \left(-\Omega_{dks} \frac{\sinh j\Omega_{dks} t}{j} \right) + e^{-\mathcal{H}_{ka} t} \left(-\Omega_{dka} \frac{\sinh j\Omega_{dka} t}{j} \right) \right].$$

$$i_1 = \frac{q_1(0)}{2} \left[e^{-\mathcal{H}_{ks} t} (-\Omega_{dks} \sin \Omega_{dks} t) + e^{-\mathcal{H}_{ka} t} (-\Omega_{dka} \sin \Omega_{dka} t) \right].$$

*) Tako smo u poglavlju 5. točki a.) ovog dijela označili i mjeru gušenja.

Kod slabog vezanja, analogno kao i kod množine elektricitete, možemo staviti

$$\Pi_{ks} \approx \Pi_{ka} = \Pi,$$

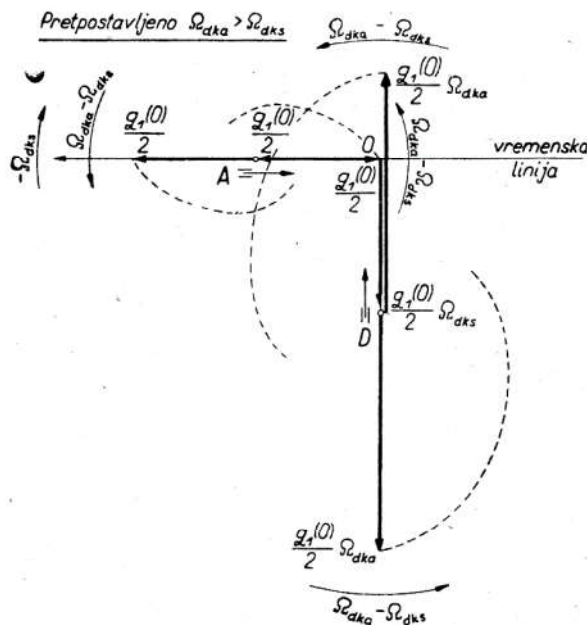
te će dalje biti:

$$i_1 = \frac{q_1(0)}{2} e^{-\Pi t} [\Omega_{dks} \sin(\Omega_{dks} t + \pi) + \Omega_{dka} \sin(\Omega_{dka} t + \pi)].$$

Analogno bit će:

$$i_2 = \frac{q_1(0)}{2} e^{-\Pi t} [\Omega_{dks} \sin(\Omega_{dks} t + \pi) - \Omega_{dka} \sin(\Omega_{dka} t + \pi)].$$

Iz dobivenog rezultata slijedi, da su u ovom naročitom slučaju struje i množine elektricitete prigušeni treptaji, dakle, dobili bismo sliku analogno slici 266. samo s time, da se dotični treptaji s vremenom prigušuju, t. j. da se



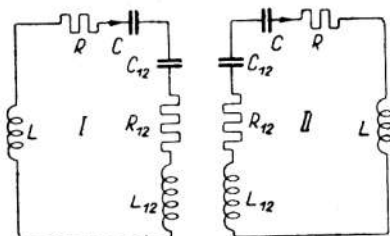
Slika 322.

nalaze unutar pozitivne i negativne eksponencijalne krivulje s negativnim eksponentom umnoška gušenja i vremena. Sl. 322. prikazuje stanje prigušenih verzora u $t=0$. Točka A, koja je vrh „mirnog“ verzora amplitude $\frac{q_1(0)}{2} e^{-\Pi t}$, giba se s vremenom u smjeru strelice, jer taj „mirni“ verzor biva sve manji. Isto tako je crtkano označeno, da se i ostala dva verzora, koji se okreću kružnom frekvencijom $(\Omega_{dka} - \Omega_{dks})$, smanjuju po logaritmičkoj spirali, ali se pritom mora zamisliti, da se te spirale pomiču, paralelno same sebi, zajedno s točkom A. U faznom pomaku za π nacrtani su verzori struja. Vrh „mirnog“ verzora, označen s D, giba se u smjeru strelice.

U prednjem naročitom slučaju izvršili smo aproksimaciju, koja je — kako smo istakli — kod slabog vezanja i slabog gušenja dopuštena, te smo oba vezna gušenja izjednačili, i to kao da glavno antisinhrono gušenje ima istu vrijednost kao i glavno sinhrono gušenje, t. j. $\frac{R}{2L}$. Nadalje smo u istom smislu zanemarili $\mathcal{H}_{ks}^2$ prema Ω_{dks}^2 , i $\mathcal{H}_{ka}^2$ prema Ω_{dka}^2 . Radi toga smo i dobili rezultat, da su prigušni komponentni verzori struja okomiti na svojim pripadnim komponentnim verzorima množine elektricitete, iako oni, uistinu, međusobno zatvaraju kut veći od $\frac{\pi}{2}$.

b) Utjecaj jačine vezanja na vezne veličine

α) Općenite primjedbe. Ako razvezane simetrične krugove, koji imaju, naravno, jednaka gušenja i jednake prigušne frekvencije, počnemo vezati sve jače, počevši od nule, to će se frekvencije općenito — kako se to vidi i iz njihovih formula — sve više međusobno kontinuirano razmicati, a isto tako i gušenja (izuzevši na pr. navedeni slučaj kad se gušenja ne mijenjaju, t. j. kad vezanje pojačavamo tako, da odnos $\frac{L}{R}$ ostane uvijek jednak $\frac{L_{12}}{R_{12}}$). Razumije se, da pritom, kod bilo kakvog vezanja, razvezano stanje ostaje nepromijenjeno, dakle, ne mijenjamo parametre pojedinih krugova, nego te parametre samo sve jače međusobno ispreplićemo.



Slika 323.

Prije nego pređemo na razmatranje, kako jačina veze utječe na vezne veličine, potrebne su neke općenite primjedbe.

Slika 323. prikazuje razvezane simetrične prigušene krugove. Kod nesimetričnih krugova, koje ćemo proučavati poslije simetričnih krugova, sve razvezane veličine sistema I označit ćemo općenito, kao i dosada, indeksom 1, a sve razvezane veličine sistema II, indeksom 2. Međutim, ako će pojedine razvezane veličine sistema I biti jednake istovrsnim veličinama sistema II, onda ćemo ih za oba sistema označiti zajedničkim indeksom „raz“. Ovakvo označivanje možda nije potpuno opravdano, jer su i veličine s indeksom 1 i 2 isto tako razvezane, kao i one s indeksom „raz“. Međutim, budući da smo zajednički indeks „raz“ uveli već kod simetričnih sistema, to ćemo tako i proslijediti, da uvođenjem nekih novih — iako možda i malo logičnijih — indeksa, ne bismo suviše komplicirali simboliku.

Za oba naša razvezana simetrična kruga, vrijedit će nama poznata karakteristična jednačba prigušenog serijskog kruga:

$$p^2 L_{\text{raz}} + p R_{\text{raz}} + \frac{1}{C_{\text{raz}}} = 0,$$

te će, uz pretpostavku da postoji oscilatorski titraj, biti:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{R_{\text{raz}}}{2L_{\text{raz}}} \pm j \sqrt{\frac{1}{C_{\text{raz}}L_{\text{raz}}} - \left[\frac{R_{\text{raz}}}{2L_{\text{raz}}}\right]^2} = -\delta_{\text{raz}} \pm j \sqrt{\omega_{\text{raz}}^2 - \delta_{\text{raz}}^2} = \\ &= -\delta_{\text{raz}} \pm j \omega_{d\text{raz}}. \end{aligned}$$

Budući da ćemo promatrati uopće samo slabo gušene krugove znatne oscilatornosti, koji su od velike praktične važnosti, a kod kojih se prigušna vlastita frekvencija $\omega_{d\text{raz}}$ vrlo malo razlikuje od neprigušne vlastite frekvencije ω_{raz} , to je dopušteno, da naše polazno stanje, t. j. kod vezanja nula, bude okarakterizirano sa:

$$p_{1,2} = -\delta_{\text{raz}} \pm j \omega_{\text{raz}}.$$

Uzimajući to kao polazno stanje, uistinu, činimo malo zanemarenje, ali s druge strane, time znatno olakšavamo razmatranje formula, u kojima dolaze istovremeno te dvije veličine, t. j. ω_{raz} i δ_{raz} , u raznim funkcionalnim odnosima. Ako bismo u te formule unijeli egzaktnu vrijednost frekvencije, t. j. diferenciju kvadrata pod korijenom, samo bismo nepotrebno zamaglili glavna rasuđivanja.

β.) Čisto kapacitivno vezanje. To znači $R_{12} = L_{12} = 0$. Vezne frekvencije sa zanemarenjem $\mathcal{H}_{ks}^2$, odnosno $\mathcal{H}_{ka}^2$, prema prvom adendu pod korijenom, bit će kako slijedi:

$$\Omega_{dks} = \sqrt{\frac{1}{\frac{C_{\text{raz}}}{L_{\text{raz}}} - \frac{1}{C_{12}}} - \mathcal{H}_{ks}^2} =$$

prelazi u

$$\sqrt{\frac{1}{C_{\text{raz}}L_{\text{raz}}} - \frac{1}{C_{12}L_{\text{raz}}}} = \omega_{\text{raz}} \sqrt{1 - \frac{C_{\text{raz}}}{C_{12}}},$$

$$\Omega_{dka} = \sqrt{\frac{1}{\frac{C_{\text{raz}}}{L_{\text{raz}}} + \frac{1}{C_{12}}} - \mathcal{H}_{ka}^2}$$

prelazi u

$$\sqrt{\frac{1}{C_{\text{raz}}L_{\text{raz}}} + \frac{1}{C_{12}L_{\text{raz}}}} = \omega_{\text{raz}} \sqrt{1 + \frac{C_{\text{raz}}}{C_{12}}}.$$

Kvocijent

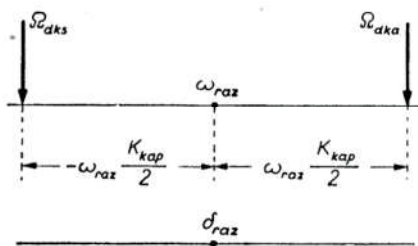
$$\frac{C_{\text{raz}}}{C_{12}} = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{1}{C_{\text{raz}}}} = k_{1\text{kap}} = k_{2\text{kap}} = K_{\text{kap}}.$$

Počnemo s vezom od nule. Tada je C_{12} vrlo veliko prema C_{raz} , koji, kod povećanja vezanja mora, naravno, uvijek ostati isti kao i u početku. Mi ne mijenjamo C_{raz} , nego samo vršimo podjelu kapaciteta na C i C_{12} prema formuli

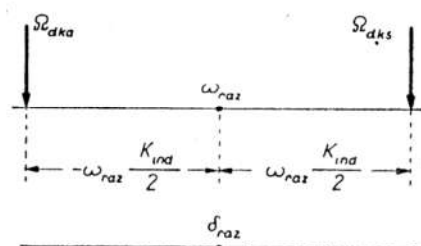
$$\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_{\text{raz}}} = \text{konst.}$$

Maksimalno vezanje bit će postignuto kod $C = \infty$, a $C_{12} = C_{\text{raz}}$, i onda će biti:

$$k_{1\text{kap}} = k_{2\text{kap}} = K_{\text{kap}} = 1.$$



Slika 324.



Slika 325.

Budući da promatramo samo slaba vezanja, počevši od nule, to, prema Mac Laurinovom razvoju izraza

$$(1 \mp K_{\text{kap}})^{\frac{1}{2}},$$

koji razvoj prekidamo kod drugog člana, možemo pisati:

$$\Omega_{dks} = \omega_{\text{raz}} \sqrt{1 - K_{\text{kap}}} = \omega_{\text{raz}} \left(1 - \frac{K_{\text{kap}}}{2}\right).$$

$$\Omega_{dka} = \omega_{\text{raz}} \sqrt{1 + K_{\text{kap}}} = \omega_{\text{raz}} \left(1 + \frac{K_{\text{kap}}}{2}\right).$$

Budući da je $\Omega_{dka} > \Omega_{dks}$ opet vidimo, da uvođenje kapaciteta ubrzava titranje.

$$\mathcal{H}_{ks} = \frac{R_{\text{raz}} - R_{12}}{2(L_{\text{raz}} - L_{12})} \text{ prelazi u } \frac{R_{\text{raz}}}{2L_{\text{raz}}} = \delta_{\text{raz}}.$$

$$\mathcal{H}_{ka} = \frac{R_{\text{raz}} + R_{12}}{2(L_{\text{raz}} + L_{12})} \text{ prelazi u } \frac{R_{\text{raz}}}{2L_{\text{raz}}} = \delta_{\text{raz}}.$$

Iz prednjega slijedi zaključak, da se kod čisto kapacitivnog vezanja, koje je slabo i počinje od nule, frekvencije simetrično razmiču nalijevo i nadesno, proporcionalno faktoru vezanja, a gušenja ostaju nepromijenjena, t. j. δ_{raz} , prema sl. 324.

γ) Čisto induktivno vezanje. Sada će biti:

$$\frac{1}{C_{12}} = R_{12} = 0.$$

Kod izraza za frekvencije izvršit ćemo ista zanemarenja kao i prije, t. j.

$$\Omega_{dks} = \sqrt{\frac{1}{\frac{C_{\text{raz}}}{L_{\text{raz}} - L_{12}}} - \frac{1}{C_{12}}} \mathcal{H}_{ks}$$

prelazi u

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{\frac{C_{\text{raz}}}{L_{\text{raz}} - L_{12}}}} &= \sqrt{\frac{1}{C_{\text{raz}} L_{\text{raz}} \left(1 - \frac{L_{12}}{L_{\text{raz}}}\right)}} = \omega_{\text{raz}} \sqrt{\frac{1}{1 - K_{\text{ind}}}} = \\ &= \omega_{\text{raz}} (1 - K_{\text{ind}})^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ako izraz

$$(1 - K_{\text{ind}})^{-\frac{1}{2}}$$

razvijemo po Mac Laurinu, i prekinemo razvoj za maleni K_{ind} kod drugog člana, bit će:

$$\Omega_{dks} = \omega_{\text{raz}} \left(1 + \frac{1}{2} K_{\text{ind}}\right).$$

Analogno slijedi:

$$\Omega_{dka} = \sqrt{\frac{1}{\frac{C_{\text{raz}}}{L_{\text{raz}} + L_{12}}} + \frac{1}{C_{12}}} \mathcal{H}_{ka}$$

prelazi u

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{C_{\text{raz}}}{L_{\text{raz}} + L_{12}}}} = \omega_{\text{raz}} \sqrt{\frac{1}{1 + K_{\text{ind}}}},$$

odnosno za maleni K_{ind} ,

$$\Omega_{\text{dka}} = \omega_{\text{raz}} \left(1 - \frac{1}{2} K_{\text{ind}} \right).$$

Vidi se, budući da je $\Omega_{\text{dks}} > \Omega_{\text{dka}}$, da uvođenje induktiviteta usporava titranje.

$$\mathcal{H}_{\text{ks}} = \frac{R_{\text{raz}} - R_{12}}{2(L_{\text{raz}} - L_{12})}$$

prelazi u

$$\frac{R_{\text{raz}}}{2(L_{\text{raz}} - L_{12})} = \frac{R_{\text{raz}}}{2L_{\text{raz}} \left(1 - \frac{L_{12}}{L_{\text{raz}}} \right)},$$

odnosno kod malenog $\frac{L_{12}}{L_{\text{raz}}}$, imat ćemo:

$$\mathcal{H}_{\text{ks}} = \frac{R_{\text{raz}}}{2L_{\text{raz}}} \left(1 + \frac{L_{12}}{L_{\text{raz}}} \right) = \delta_{\text{raz}} \left(1 + \frac{L_{12}}{L_{\text{raz}}} \right).$$

Analogno slijedi:

$$\mathcal{H}_{\text{ka}} = \frac{R_{\text{raz}} + R_{12}}{2(L_{\text{raz}} + L_{12})}$$

prelazi u

$$\frac{R_{\text{raz}}}{2(L_{\text{raz}} + L_{12})} = \frac{R_{\text{raz}}}{2L_{\text{raz}} \left(1 + \frac{L_{12}}{L_{\text{raz}}} \right)},$$

odnosno

$$\mathcal{H}_{\text{ka}} = \delta_{\text{raz}} \left(1 - \frac{L_{12}}{L_{\text{raz}}} \right).$$

Iz prednjeg vidimo, da čisto induktivno vezanje, koje počinje od nule, razmiče frekvencije i gušenja. Razmicanje frekvencija iznosi $\pm \omega_{\text{raz}} \frac{K_{\text{ind}}}{2}$, i kraj velikog ω_{raz} ono je zamjetljivo makar i uz maleni K_{ind} . Razmicanje gušenja iznosi $\pm \delta_{\text{raz}} K_{\text{ind}}$, i kraj malenog δ_{raz} i malenog K_{ind} , ono je malena veličina drugog reda, i radi toga prema sl. 325. praktično zanemarivo.

δ) Čisto otporničko vezanje. Sada će biti:

$$\frac{1}{C_{12}} = L_{12} = 0.$$

Kod izraza za frekvencije postupit ćemo kao i prije, te će uz ista zanemarenja

$$\Omega_{dks} = \sqrt{\frac{1}{\frac{C_{raz}}{L_{raz} - L_{12}} - D_{ks}^2}} \text{ preći u } \sqrt{\frac{1}{C_{raz} L_{raz}}} = \omega_{raz},$$

odnosno

$$\Omega_{dka} = \sqrt{\frac{1}{\frac{C_{raz}}{L_{raz} + L_{12}} - D_{ka}^2}} \text{ preći u } \sqrt{\frac{1}{C_{raz} L_{raz}}} = \omega_{raz}.$$

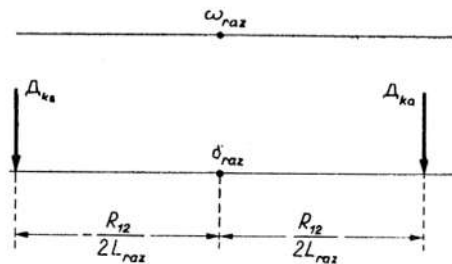
U pogledu gušenja bit će kako slijedi:

$$D_{ks} = \frac{R_{raz} - R_{12}}{2(L_{raz} - L_{12})} \text{ prelazi u } \frac{R_{raz}}{2L_{raz}} - \frac{R_{12}}{2L_{raz}} = \delta_{raz} - \frac{R_{12}}{2L_{raz}},$$

$$D_{ka} = \frac{R_{raz} + R_{12}}{2(L_{raz} + L_{12})} \text{ prelazi u } \frac{R_{raz}}{2L_{raz}} + \frac{R_{12}}{2L_{raz}} = \delta_{raz} + \frac{R_{12}}{2L_{raz}}.$$

Kod čisto otporničkog vezanja sa slabim gušenjem, frekvencije će uvijek ostati nepromijenjene, t. j. ω_{raz} , a promjena će nastupiti samo u gušenjima, koja će se razmicati proporcionalno R_{12} prema sl. 326.

Slika 326.



Prema tome, sada će se opći integral sastojati iz zbroja dvaju verzora iste frekvencije, t. j. ω_{raz} , ali različitih gušenja, i ta kombinacija daje jedan verzor, koji je moduliran amplitudno i frekventno (odnosno možemo shvatiti kao amplitudno i fazno).

Konačni zaključak za simetrične krugove glasi:

Kod slabo gušenih simetričnih titrajnih krugova, kod slabog vezivanja dvaju takvih krugova počevši od nule, preko induktiviteta ili kapaciteta, nastupa razmicanje razvezane frekvencije proporcionalno faktoru vezanja, a gušenja ostaju kao u razvezanom stanju. Vezanjem preko otpora frekvencije ostaju nepromijenjene kao u razvezanom stanju, dok se gušenja razmiču proporcionalno R_{12} .

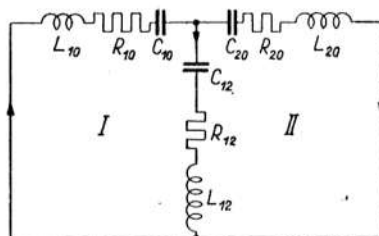
23. USKLAĐENI PRIGUŠENI VEZANI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA

a) Preuređena karakteristična jednačba

Usklađeni sistemi su vrlo važni u uređajima slabe struje. Prema sl. 327. bit će za razvezano stanje:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} &= \frac{1}{C_1}, & \frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} &= \frac{1}{C_2}, \\ R_{10} + R_{12} &= R_1, & R_{20} + R_{12} &= R_2, \\ L_{10} + L_{12} &= L_1, & L_{20} + L_{12} &= L_2, \\ \sqrt{\frac{1}{C_1 L_1}} &= \omega_1, & \sqrt{\frac{1}{C_2 L_2}} &= \omega_2, \\ \frac{R_1}{2L_1} &= \delta_1, & \frac{R_2}{2L_2} &= \delta_2. \end{aligned}$$

Kao usklađene, definirat ćemo takve sisteme, kojima su neprigušni $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{\text{raz}}$. Kao i prije, promatrat ćemo slabo gušene vrlo oscilatorne



Slika 327.

krugove, kod kojih je $\delta_1^2 \ll \omega_{\text{raz}}^2$, odnosno $\delta_2^2 \ll \omega_{\text{raz}}^2$. S tim ograničenjem oba korijena karakteristične jednačbe za razvezani krug I, bit će, kako nam je poznato,

$$-\delta_1 \pm j\sqrt{\omega_{\text{raz}}^2 - \delta_1^2} \approx -\delta_1 \pm j\omega_{\text{raz}},$$

i analogno za razvezani krug II, t. j.

$$-\delta_2 \pm j\sqrt{\omega_{\text{raz}}^2 - \delta_2^2} \approx -\delta_2 \pm j\omega_{\text{raz}}.$$

Proučavat ćemo opet samo slaba vezanja, koja ćemo kontinuirano pojačavati, počevši od nule. Kod vezanja nula, karakteristična jednačba glasila bi:

$$a_{11} a_{22} = 0,$$

kod čega bi bilo $a_{11} = 0$, i $a_{22} = 0$, te bismo dobili četiri naprijed navedena korijena za razvezane krugove. Uvodeći vezanje, karakteristična jednadžba glasit će:

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

kod čega a_{12} počinje rasti od nule. Radi toga će i naša nova četiri korijena početi zadobivati vrijednosti, koje će se kontinuirano udaljivati od navedena četiri korijena s vezanjem nula.

Općenito ta nova četiri korijena imat će radi toga oblik:

$$p = -\delta_k \pm j(\omega_{\text{raz}} + \Delta \omega)$$

te će se i prvo i drugo vezno gušenje, osobito kod početnog vezanja, nalaziti tik uz δ_1 , odnosno δ_2 , a naravno, isto tako i obje vezne frekvencije uz ω_{raz} .

Znamo, da je karakteristična jednadžba, jednadžba četvrtog stepena s nepoznanicom p . Analiziranje ovakve originalne jednadžbe ne bi bilo shodno, jer njenom analizom ne bismo mogli zaključiti kakve vrijednosti zadobivaju posebno vezne frekvencije, a posebno vezna gušenja, budući da su te veličine implicitno sadržane u p . Mi ćemo stoga upotrebiti adaptiranu karakterističnu jednadžbu, u kojoj će p biti rastavljen na svoje adende, dakle će ta jednadžba sadržavati kao nepoznanice odvojeno vezna gušenja i vezne frekvencije. Kod toga ćemo zanemarivanjima, koja će biti dopustiva, što više pojednostavniti tu jednadžbu, da razmatranja budu što lakša.

Budući da nam je, dakle, po strukturi poznat općeniti izraz za korijen karakteristične jednadžbe, upotrebit ćemo ga i izgraditi pomoću toga izraza, „idući od konca prema početku“, samu jednadžbu. Ponajprije treba dobiti izraz a_{11} . U tom izrazu osim p dolazi još i p^2 . Bit će dakle:

$$p^2 = [-\delta_k \pm j(\omega_{\text{raz}} + \Delta \omega)]^2 = \delta_k^2 - \omega_{\text{raz}}^2 - \Delta \omega^2 \mp 2j\delta_k \omega_{\text{raz}} \mp 2j\delta_k \Delta \omega - 2\omega_{\text{raz}} \Delta \omega.$$

Ovdje su δ_k i $\Delta \omega$ malene veličine, a ω_{raz} je velika, i radi toga ćemo zanemariti veličine nižeg reda prema veličinama višeg reda, t. j.

$$p^2 \approx -\omega_{\text{raz}}^2 - 2\omega_{\text{raz}} \Delta \omega \mp 2j\delta_k \omega_{\text{raz}}.$$

S tim vrijednostima, te ako još prvi i drugi član pomnožimo s $\frac{L_1}{L_1}$, bit će:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{C_1} + pR_1 + p^2L_1 = \frac{1}{C_1} \frac{L_1}{L_1} + [-\delta_k \pm j(\omega_{\text{raz}} + \Delta \omega)] R_1 \frac{L_1}{L_1} + \\ &\quad + [-\omega_{\text{raz}}^2 - 2\omega_{\text{raz}} \Delta \omega \mp 2j\delta_k \omega_{\text{raz}}] L_1 = \\ &= L_1 \left(\omega_{\text{raz}}^2 - \delta_k \frac{R_1}{L_1} \frac{2}{2} \pm j\omega_{\text{raz}} \frac{R_1}{L_1} \frac{2}{2} \pm j\Delta \omega \frac{R_1}{L_1} \frac{2}{2} - \omega_{\text{raz}}^2 - 2\omega_{\text{raz}} \Delta \omega \mp 2j\delta_k \omega_{\text{raz}} \right) = \\ &= L_1 (\omega_{\text{raz}}^2 - 2\delta_k \delta_1 \pm 2j\omega_{\text{raz}} \delta_1 \pm 2j\Delta \omega \delta_1 - \omega_{\text{raz}}^2 - 2\omega_{\text{raz}} \Delta \omega \mp 2j\delta_k \omega_{\text{raz}}). \end{aligned}$$

Zanemarivši opet umnoške malenih veličina, slijedi:

$$a_{11} = L_1 [-2 \omega_{\text{raz}} \Delta \omega \pm 2j \omega_{\text{raz}} (\delta_1 - \delta_k)] = 2 \omega_{\text{raz}} L_1 [-\Delta \omega \pm j(\delta_1 - \delta_k)].$$

Analogno je cikličkim zamjenjivanjem:

$$a_{22} = L_2 [-2 \omega_{\text{raz}} \Delta \omega \pm 2j \omega_{\text{raz}} (\delta_2 - \delta_k)] = 2 \omega_{\text{raz}} L_2 [-\Delta \omega \pm j(\delta_2 - \delta_k)].$$

Prema tome, naša karakteristična jednačba glasiće:

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 2 \omega_{\text{raz}} L_1 [-\Delta \omega \pm j(\delta_1 - \delta_k)] 2 \omega_{\text{raz}} L_2 [-\Delta \omega \pm j(\delta_2 - \delta_k)] - a_{12}^2 = 0,$$

te konačno

$$\Delta \omega^2 - (\delta_1 - \delta_k)(\delta_2 - \delta_k) \mp j \Delta \omega (\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_k) = \frac{a_{12}^2}{4 \omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} = \mathcal{R}e \mp j \mathcal{I}m.$$

Prema tome, jednačba se općenito sastoji iz realnih i imaginarnih adenada. Proučavat ćemo samo takve slučajeve vezanja, kod kojih će imaginarni adendi biti tako maleni, da ćemo ih moći zanemariti, t. j. jednačba će tada sadržavati samo realne vrijednosti.

U tu svrhu razmotrit ćemo najprije sve moguće slučajeve vezanja, t. j. 1.) čisto kapacitivno vezanje, 2.) čisto induktivno vezanje, 3.) kombinirano kapacitivno i induktivno vezanje, 4.) čisto otporničko vezanje i 5.) kombinirano vezanje sa svim trima parametrima.

Kod čisto kapacitivnog vežanja, bit će:

$$\frac{a_{12}^2}{4 \omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} = \frac{\left(\frac{1}{C_{12}}\right)^2}{4 \omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2},$$

dakle, realno.

Kod čisto induktivnog vežanja, bit će:

$$\begin{aligned} \frac{a_{12}^2}{4 \omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} &= \frac{(p^2 L_{12})^2}{4 \omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} = \frac{[(-\omega_{\text{raz}}^2 - 2 \omega_{\text{raz}} \Delta \omega \mp 2j \delta_k \omega_{\text{raz}}) L_{12}]^2}{4 \omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} = \\ &= \frac{L_{12}^2}{4 L_1 L_2} [\omega_{\text{raz}}^2 + 4 \Delta \omega^2 - 4 \delta_k^2 + 4 \omega_{\text{raz}} \Delta \omega \pm j(4 \delta_k \omega_{\text{raz}} + 8 \Delta \omega \delta_k)]. \end{aligned}$$

Ako zanemarimo veličine nižeg reda, naš izraz bit će:

$$\approx \frac{\omega_{\text{raz}}^2 L_{12}^2}{4 L_1 L_2},$$

dakle, opet realno.

Kod kombiniranog induktivnog i kapacitivnog vezanja, bit će:

$$\begin{aligned} a_{12}^2 &= \left(p^2 L_{12} + \frac{1}{C_{12}} \right)^2 = p^4 L_{12}^2 + 2p^3 \frac{L_{12}}{C_{12}} + \left(\frac{1}{C_{12}} \right)^2 = \\ &= (-\omega_{\text{raz}}^2 - 2\omega_{\text{raz}} \Delta\omega \mp j2\delta_k \omega_{\text{raz}})^2 L_{12}^2 + 2(-\omega_{\text{raz}}^2 - 2\omega_{\text{raz}} \Delta\omega \mp \\ &\mp j2\delta_k \omega_{\text{raz}}) \frac{L_{12}}{C_{12}} + \left(\frac{1}{C_{12}} \right)^2 \approx (-\omega_{\text{raz}}^2)^2 L_{12}^2 + 2(-\omega_{\text{raz}}^2) \frac{L_{12}}{C_{12}} + \left(\frac{1}{C_{12}} \right)^2. \end{aligned}$$

Prema tome, sad će biti:

$$\frac{a_{12}^2}{4\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} \approx \frac{\left(\frac{1}{C_{12}} - \omega_{\text{raz}}^2 L_{12} \right)^2}{4\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2},$$

t. j. realno.

Kod čisto otporničkog vezanja, bit će:

$$\begin{aligned} \frac{a_{12}^2}{4\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} &= \frac{(pR_{12})^2}{4\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} = \\ &= (-\omega_{\text{raz}}^2 - 2\omega_{\text{raz}} \Delta\omega \mp j2\delta_k \omega_{\text{raz}}) \frac{R_{12}^2}{4\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} \approx -\frac{R_{12}^2}{4L_1 L_2}, \end{aligned}$$

dakle, realno, ali negativno!

U slučaju kombiniranog vezanja sa svim trim parametrima, ne bismo mogli zanemariti sve imaginarne članove, jer između njih ima veličina istog reda, kao što je najveći realni član. Radi toga ovaj slučaj — koji međutim nije od načelne važnosti — ne ćemo ovdje proučavati. Proučavat ćemo samo prva četiri slučaja. Kod ta četiri slučaja pronašli smo, da je desna strana jednadžbe realna, a prema tome i imaginarni adend lijeve strane mora biti jednak nuli. Znači, dakle, da imamo dvije jednadžbe, t. j.

$$\Delta\omega^2 - (\delta_1 - \delta_k)(\delta_2 - \delta_k) = \mathcal{R}e,$$

$$\Delta\omega(\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_k) = \mathcal{I}m = 0.$$

Da imaginarni izraz postane jednak nuli, postoje tri mogućnosti, t. j.

$$1.) \Delta\omega = 0, \text{ a } (\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_k) \neq 0,$$

$$2.) \Delta\omega = 0 \text{ i } (\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_k) = 0,$$

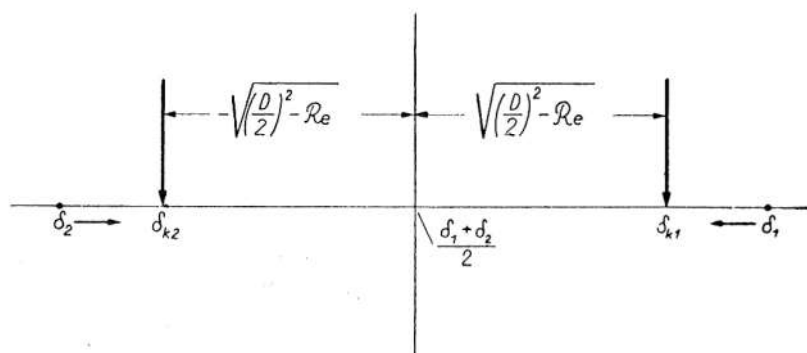
te, konačno,

$$3.) \Delta\omega \neq 0, \text{ a } (\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_k) = 0.$$

Proučit ćemo najprije te alternative kod vezanja preko energetske rezervoara, t. j. kapaciteta, induktiviteta i njihove kombinacije, kod čega je $\mathcal{R}_e$ pozitivno. Energetskim rezervoarima smatramo takve elemente, koji mogu vratiti u njima pohranjenu energiju. Iza toga proučit ćemo prilike kod vezanja preko otpora, kad je $\mathcal{R}_e$ negativno.

b) Utjecaj jačine vezanja na vezne veličine kod energetskog vezanja

$\alpha.$) $\Delta\omega = 0$, a $(\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_k) \neq 0$. Prva alternativa znači, da se frekvencije nisu promijenile, t. j. oba kruga, koja su usklađena, zadržala su, i



Slika 328.

nakon povećanja veze iznad nule, svoju razvezanu frekvenciju $\omega_{\text{raz}} (\approx \omega_{d\text{raz}})$. Karakteristična jednačba reducirala se je na:

$$-(\delta_1 - \delta_k)(\delta_2 - \delta_k) = \mathcal{R}_e,$$

$$\delta_1 \delta_2 - (\delta_1 + \delta_2) \delta_k + \delta_k^2 + \mathcal{R}_e = 0,$$

$$\delta_{k1,2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)^2 - \delta_1 \delta_2 - \mathcal{R}_e},$$

$$\delta_{k1,2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right)^2 - \mathcal{R}_e} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \mathcal{R}_e},$$

kod čega je:

$$\delta_1 - \delta_2 = D.$$

Kao što vidimo, dobili smo dva vezna gušenja, koja, naravno, nisu više ista kao i kod razvezanih krugova, iako se djelomično temelje na vrijednostima δ_1 , odnosno δ_2 . Ona ovise i o

$$\mathcal{R}_e = \frac{a_{12}^2}{4\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2},$$

t. j. o vezanju! Ta gušenja nismo označili indeksima kb i kp , nego s $k1$ i $k2$, budući da ovdje nema brze i polagane frekvencije, jer su frekvencije jednake. Sl. 328. prikazuje pomicanje veznih gušenja iz njihovih početnih vrijednosti, t. j. iz razvezanih gušenja.

Opći integral za naboj imat će sada oblik:

$$q_1 = A_1 e^{-\delta_{k1} t} \sin(\omega_{\text{raz}} t + \varphi) + A_2 e^{-\delta_{k2} t} \sin(\omega_{\text{raz}} t + \chi),$$

te analogno za naboj q_2 .

Kako će dugo vrijediti ova prva alternativa? Očigledno tako dugo, dok izraz za vezna gušenja ostane realan, jer kompleksni izraz za gušenje ukazuje, radi imaginarnog dijela, na promjenu imaginarnog člana korijena karakteristične jednadžbe, t. j. ω , dakle, protivno pretpostavci. Znači, tako dugo, dok je

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 > \mathcal{R}_e,$$

odnosno, dok je apsolutni iznos diferencije razvezanih gušenja

$$|\delta_1 - \delta_2| > 2\sqrt{\mathcal{R}_e}.$$

Izraz $2\sqrt{\mathcal{R}_e}$ raste, naravno, s vezanjem, počevši od nule, i kod situacije, kad je $2\sqrt{\mathcal{R}_e}$ postalo jednako $|\delta_1 - \delta_2|$, dostignuto je t. zv. „kritično vezanje“, koje ćemo u nastavku posebno proučavati za svaku vrstu vezanja. Međutim, tada je diskriminanta postala jednaka nuli, a oba gušenja su se izjednačila, te iznose:

$$\delta_{k1,2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \delta_k.$$

Nastupila je druga alternativa!

$\beta.) \Delta\omega = 0$, a $\delta_{k1,2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \delta_k$. Opći integral, kod te sasvim naročite alternative, imat će oblik:

$$q_1 = A_1 e^{-\delta_k t} \sin(\omega_{\text{raz}} t + \varphi) + A_2 e^{-\delta_k t} \sin(\omega_{\text{raz}} t + \chi),$$

odnosno u verzorskom obliku

$$q_1 = \mathcal{I}m [\mathcal{A}_1 e^{(-\delta_k + j\omega_{\text{raz}})t} + \mathcal{A}_2 e^{(-\delta_k + j\omega_{\text{raz}})t}] = \mathcal{I}m [\mathcal{K}_1 e^{(-\delta_k + j\omega_{\text{raz}})t}],$$

gdje je

$$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \mathcal{K}_1.$$

Vidimo, dakle, da je opći integral postao obični prigušeni sinusov titraj.

$\gamma.) \delta_k = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$, $\Delta\omega \neq 0$. Kod daljnjeg povećavanja vezanja ne može se više održati druga alternativa, nego nastupa treća, t. j. vezna gušenja ostaju i dalje jednaka

$$\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \delta_k, \text{ a } \Delta\omega \neq 0.$$

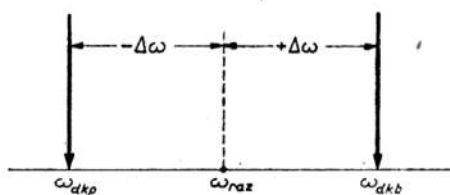
Karakteristična jednadžba sada će glasiti:

$$\Delta\omega^2 - \left(\delta_1 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \left(\delta_2 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) = \mathcal{R}_e,$$

$$\Delta\omega^2 = -\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right)^2 + \mathcal{R}_e,$$

$$\Delta\omega = \pm \sqrt{\mathcal{R}_e - \left(\frac{D}{2}\right)^2}.$$

Slika 329.



Iz te formule proizlazi, da će se povećavanjem vezanja iznad „kritičnog“ vezanja, kad je, dakle,

$$2\sqrt{\mathcal{R}_e} > |\delta_1 - \delta_2|,$$

frekvencije početi simetrično razmicati prema sl. 329. Radi toga će sada opći integral naboj glasiti:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 e^{-\delta_k t} \sin[(\omega_{\text{raz}} - \Delta\omega)t + \varphi] + A_2 e^{-\delta_k t} \sin[(\omega_{\text{raz}} + \Delta\omega)t + \chi] = \\ &= e^{-\delta_k t} [A_1 \sin(\omega_{dkp} t + \varphi) + A_2 \sin(\omega_{dkb} t + \chi)]. \end{aligned}$$

Dobili smo prigušeni treptaj!

8.) Kritično vezanje. Koliko ono iznosi?

1.) Prema dosadašnjem, kod čisto kapacitivnog vezanja je:

$$\mathcal{R}_e = \frac{\left(\frac{1}{C_{12}}\right)^2}{4\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} = \frac{\left(\frac{1}{C_{12}}\right)^2}{4\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} \frac{\omega_{\text{raz}}^2}{\omega_{\text{raz}}^2}.$$

Kako je zbog usklađenosti krugova

$$\omega_{\text{raz}}^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2},$$

to će biti:

$$\mathcal{R}_e = \frac{\left(\frac{1}{C_{12}}\right)^2 \omega_{\text{raz}}^2}{4 \frac{1}{L_1 C_1} L_1 L_2 \frac{1}{L_2 C_2}} = \frac{\left(\frac{1}{C_{12}}\right)^2 \omega_{\text{raz}}^2}{4 \frac{1}{C_1} \frac{1}{C_2}},$$

odnosno

$$2\sqrt{\mathcal{R}_e} = \frac{\frac{1}{C_{12}} \omega_{\text{raz}}}{\sqrt{\frac{1}{C_1}} \sqrt{\frac{1}{C_2}}} = K_{\text{kap krit}} \omega_{\text{raz}}.$$

Prema tome „kritično vezanje“ dostignuto je, kad je

$$|\delta_1 - \delta_2| = K_{\text{kap krit}} \omega_{\text{raz}},$$

ili „kritični faktor vezanja“ iznosi:

$$K_{\text{kap krit}} = \frac{|D|}{\omega_{\text{raz}}}.$$

○ 2. Kod čisto induktivnog vezanja

$$\mathcal{R}_e = \frac{\omega_{\text{raz}}^2 L_{12}^2}{4 L_1 L_2},$$

odnosno

$$2\sqrt{\mathcal{R}_e} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \omega_{\text{raz}} = K_{\text{ind}} \omega_{\text{raz}}.$$

„Kritično vezanje“ je dostignuto, kad je

$$|\delta_1 - \delta_2| = K_{\text{ind krit}} \omega_{\text{raz}},$$

ili „kritični faktor vezanja“ iznosi:

$$K_{\text{ind krit}} = \frac{|D|}{\omega_{\text{raz}}}.$$

3.) Kod kombiniranog kapacitivno-induktivnog vezanja, bit će:

$$\mathcal{R}_e = \frac{\left(\frac{1}{C_{12}} - \omega_{\text{raz}}^2 L_{12}\right)^2}{4 \omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2},$$

odnosno

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\mathcal{R}_e} &= \frac{\left|\frac{1}{C_{12}} - \omega_{\text{raz}}^2 L_{12}\right|}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} = \omega_{\text{raz}} \left| \frac{1}{C_{12} \omega_{\text{raz}}^2 \sqrt{L_1 L_2}} - \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \right| = \\ &= \omega_{\text{raz}} \left| \frac{1}{C_{12} \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \sqrt{L_1 L_2}} - \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \right| = \omega_{\text{raz}} \left| \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{C_1} \frac{1}{C_2}}} - \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \right| = \\ &= \omega_{\text{raz}} |K_{\text{kap}} - K_{\text{ind}}|. \end{aligned}$$

„Kritično vezanje“ dostignuto je, kad je

$$|\delta_1 - \delta_2| = \omega_{\text{raz}} |(K_{\text{kap}} - K_{\text{ind}})_{\text{krit}}|,$$

ili „apsolutna vrijednost kritične diferencije faktora vezanja“, iznosi

$$|(K_{\text{kap}} - K_{\text{ind}})_{\text{krit}}| = \frac{|D|}{\omega_{\text{raz}}}.$$

I ovdje primjećujemo, da kapacitivni i induktivni elementi djeluju u vezi jedan protiv drugog.

c) Utjecaj jačine vezanja na vezne veličine kod otporničkog vezanja

Preostaje još, da se pozabavimo slučajem čisto otporničkog vezanja. Prošli smo, da je tada

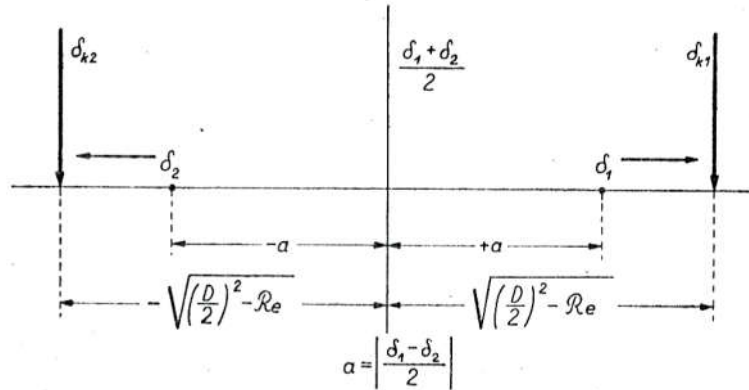
$$\mathcal{R}_e = -\frac{R_{12}^2}{4L_1 L_2},$$

t. j. negativno.

Prema tome bit će izraz za vezna gušenja kod prve alternative uz $\Delta \omega = 0$, t. j.

$$\delta_{k1,2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \mathcal{R}_e},$$

uvijek realan, budući da je diskriminanta uvijek pozitivna. Nadalje vidimo, da je apsolutna vrijednost korijena uvijek veća od $\frac{|\delta_1 - \delta_2|}{2}$. To prema sl. 330.



Slika 330.

znači, da se gušenja δ_{k1} i δ_{k2} uslijed vezanja međusobno razmiču, a frekvencije ostaju uvijek nepromijenjene, t. j. ω_{raz} , jer je — kako znamo — razmicanje frekvencija, t. j. $\Delta\omega \neq 0$, moguće samo uz uvjet, da je

$$(\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_k) = 0,$$

što, međutim, ovdje nikad ne nastupa.

Konačni zaključak.

Energetsko vezanje. Ako se vežu dva slabo gušena, usklađena, ali inače različita električna kruga, počevši od ekstremno slabog vezanja, u sve jačoj mjeri, oni će ponajprije zadržati svoje jednake vlastite frekvencije

$$\omega_{\text{raz}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}},$$

dok će se njihova početna različita gušenja sve više približavati zajedničkoj srednjoj vrijednosti $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$. Kad je faktor vezanja (kod kombiniranog vezanja apsolutna vrijednost diferencije kapacitivnog i induktivnog faktora vezanja) dostignuo svoju „kritičnu vrijednost“ $\frac{|\delta_1 - \delta_2|}{\omega_{\text{raz}}}$, oba vezna gušenja upravo su se sastala u toj navedenoj srednjoj vrijednosti. Kod daljnjeg povećanja faktora vezanja (apsolutne vrijednosti diferencije kapacitivnog i induktivnog faktora vezanja) oba gušenja ostaju kod te srednje vrijednosti, a frekvencije se simetrično razmiču počevši od prijašnje zajedničke vrijednosti ω_{raz} , za $\pm \Delta\omega$.

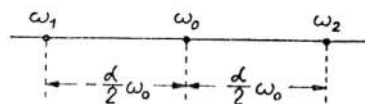
Otporničko vezanje. Ako se dva slabo gušena, usklađena, ali inače različita električna kruga, počevši od ekstremno slabog vezanja, vežu u sve jačoj mjeri, njihova početna gušenja sve će se više simetrično razmicati, a frekvencije će zadržati zajedničku vrijednost ω_{raz} .

24. MALO NEUSKLAĐENI PRIGUŠENI VEZANI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA

a) Preuređena karakteristična jednadžba

Ako oba kruga imaju različite, ali vrlo blize razvezane frekvencije ω_1 i ω_2 prema sl. 331., između tih frekvencija postojati će neka „srednja frekvencija“ ω_0 , t. j.

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \mp \frac{\alpha}{2} \omega_0.$$



Slika 331.

Kod toga je $\alpha \ll 1$, dok su oba kruga vrlo oscilatorna, t. j. ω_1 i ω_2 su veliki, a gušenja slaba. Prema tome, bit će:

$$\frac{1}{C_1 L_1} = \left[\omega_0 - \frac{\alpha \omega_0}{2} \right]^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^2,$$

$$\frac{1}{C_2 L_2} = \left[\omega_0 + \frac{\alpha \omega_0}{2} \right]^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right)^2.$$

$$\left(1 \mp \frac{\alpha}{2} \right)^2 = 1 \mp \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \approx 1 \mp \alpha.$$

Radi toga je:

$$\frac{1}{C_1 L_1} \approx \omega_0^2 - \alpha \omega_0^2,$$

$$\frac{1}{C_2 L_2} \approx \omega_0^2 + \alpha \omega_0^2,$$

$$\frac{1}{C_1 L_1} + \frac{1}{C_2 L_2} \approx 2 \omega_0^2,$$

odnosno

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_1 L_1} + \frac{1}{C_2 L_2} \right)}.$$

I ovdje ćemo „izgraditi“ karakterističnu jednadžbu „idući od njenih korijena prema njenom početku“. Korijene ćemo pretpostaviti s

$$p = -\delta_k \pm j(\omega_0 + \Delta\omega).$$

To je opravdano, jer i sada promatramo općenito samo slabo vezane krugove, a budući da je ω_0 vrlo blizu njihovim razvezanim frekvencijama, vezne frekvencije ne će se mnogo razlikovati od ω_0 .

Ako, analogno kao i u prethodnom poglavlju, zanemarimo umnoške i kvadrate malenih veličina, bit će:

$$p^2 = [-\delta_k \pm j(\omega_0 + \Delta\omega)]^2 \approx -\omega_0^2 - 2\omega_0\Delta\omega \mp 2j\delta_k\omega_0.$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{C_1} + pR_1 + p^2L_1 = L_1 \left(\frac{1}{C_1L_1} + p\frac{R_1}{L_1} + p^2 \right) = \\ &= L_1(\omega_0^2 - \alpha\omega_0^2 + p2\delta_1 + p^2) = L_1\{\omega_0^2 - \alpha\omega_0^2 + [-\delta_k \pm j(\omega_0 + \Delta\omega)]2\delta_1 - \\ &\quad - \omega_0^2 - 2\omega_0\Delta\omega \mp 2j\delta_k\omega_0\}. \end{aligned}$$

Ako, dosljedno, opet zanemarimo malene veličine, bit će:

$$\begin{aligned} a_{11} &\approx L_1(-\alpha\omega_0^2 \pm 2j\omega_0\delta_1 - 2\omega_0\Delta\omega \mp 2j\delta_k\omega_0) = \\ &= 2\omega_0L_1 \left[-\frac{\alpha\omega_0}{2} \pm j(\delta_1 - \delta_k) - \Delta\omega \right]. \end{aligned}$$

Analogno će biti:

$$\begin{aligned} a_{22} &= \frac{1}{C_2} + pR_2 + p^2L_2 = L_2 \left(\frac{1}{C_2L_2} + p\frac{R_2}{L_2} + p^2 \right) = L_2(\omega_0^2 + \alpha\omega_0^2 + 2p\delta_2 + p^2) = \\ &= L_2\{\omega_0^2 + \alpha\omega_0^2 + 2[-\delta_k \pm j(\omega_0 + \Delta\omega)]\delta_2 - \omega_0^2 - 2\omega_0\Delta\omega \mp 2j\delta_k\omega_0\} \approx \\ &\approx L_2(\alpha\omega_0^2 \pm 2j\omega_0\delta_2 - 2\omega_0\Delta\omega \mp 2j\delta_k\omega_0) = 2\omega_0L_2 \left[\frac{\alpha\omega_0}{2} \pm j(\delta_2 - \delta_k) - \Delta\omega \right]. \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba glavit će:

$$\left[-\frac{\alpha\omega_0}{2} \pm j(\delta_1 - \delta_k) - \Delta\omega \right] \left[\frac{\alpha\omega_0}{2} \pm j(\delta_2 - \delta_k) - \Delta\omega \right] = \frac{a_{12}^2}{4\omega_0^2L_1L_2},$$

odnosno

$$\begin{aligned} \Delta\omega^2 - (\delta_1 - \delta_k)(\delta_2 - \delta_k) - \frac{\alpha^2\omega_0^2}{4} \mp j \left[(\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_k)\Delta\omega - (\delta_1 - \delta_2)\frac{\alpha\omega_0}{2} \right] = \\ = \frac{a_{12}^2}{4\omega_0^2L_1L_2}. \end{aligned}$$

Izraz na desnoj strani jednadžbe ne će se mnogo razlikovati od izraza $\frac{a_{12}^2}{4\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2}$, koji vrijedi za usklađene krugove, jer je ω_0 blizu tamošnjem ω_{raz} .

Prema tome, taj će izraz kod energetske veze biti realan i pozitivan, a kod otporničke veze realan i negativan. Kombiniranu energetsku i otporničku vezu ne ćemo promatrati ni ovdje. Kao i kod usklađenih krugova, karakteristična jednadžba u promatranim slučajevima raspast će se na dvije jednadžbe, t. j.

$$\Delta\omega^2 - (\delta_1 - \delta_k)(\delta_2 - \delta_k) - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4} = \mathcal{R}e,$$

$$(\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_k)\Delta\omega - (\delta_1 - \delta_2)\frac{\alpha\omega_0}{2} = \mathcal{I}m = 0.$$

b) Utjecaj jačine vezanja na vezne veličine, ako je $\delta_1 = \delta_2$

Prema tome je

$$(\delta_1 - \delta_2) = D = 0, \quad \text{odnosno} \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta_{\text{raz}}.$$

Jednadžba za imaginarni dio postaje ista kao i kod usklađenih krugova. Opet postoje tri alternative, i to:

- 1.) $\Delta\omega = 0$, a $(\delta_{\text{raz}} + \delta_{\text{raz}} - 2\delta_k) \neq 0$,
- 2.) $\Delta\omega = 0$, i isto tako $(\delta_{\text{raz}} + \delta_{\text{raz}} - 2\delta_k) = 0$, te konačno
- 3.) $(\delta_{\text{raz}} + \delta_{\text{raz}} - 2\delta_k) = 0$, dok $\Delta\omega \neq 0$.

Prva alternativa $\Delta\omega = 0$, te $(\delta_{\text{raz}} + \delta_{\text{raz}} - 2\delta_k) \neq 0$, uvrštena u jednadžbu za realni dio, daje:

$$-(\delta_{\text{raz}} - \delta_k)(\delta_{\text{raz}} - \delta_k) - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4} = \mathcal{R}e,$$

odnosno

$$\delta_{k1,2} = \delta_{\text{raz}} \mp \sqrt{-\mathcal{R}e - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4}}.$$

Druga alternativa $\Delta\omega = 0$, i $\delta_{\text{raz}} = \delta_{k1,2}$, uvrštena u jednadžbu za realni dio, daje:

$$-\frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4} = \mathcal{R}e.$$

Treća alternativa $\delta_{\text{raz}} = \delta_{k1,2}$, te $\Delta\omega \neq 0$, uvrštena u jednadžbu za realni dio, daje:

$$\Delta\omega^2 - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4} = \mathcal{R}_e, \text{ odnosno } \Delta\omega = \pm \sqrt{\mathcal{R}_e + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4}}.$$

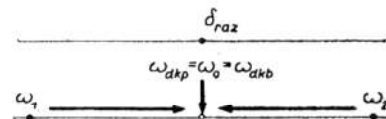
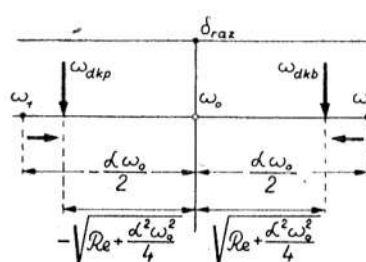
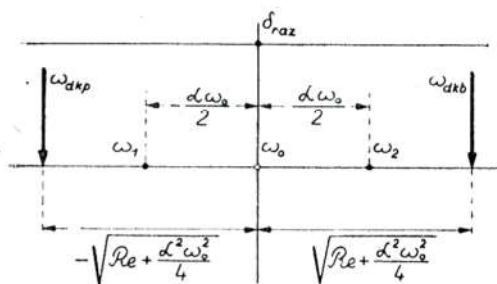
Kod čisto energetske veze, prva je alternativa nemoguća, jer bi diskriminanta izraza za vezna gušenja, uz pozitivno $\mathcal{R}_e$, uvijek bila negativna, odnosno gušenja bi bila kompleksna, što bi značilo promjenu imaginarnog člana korijena karakteristične jednadžbe, dakle, protivno pretpostavci. Treća alternativa uvijek je moguća, budući da je diskriminanta izraza za $\Delta\omega$ uvijek pozitivna, a samo $\Delta\omega$ je veće, odnosno manje, od $\pm \frac{\alpha \omega_0}{2}$. Druga alternativa nije moguća, jer $\mathcal{R}_e$ ne može biti negativno. Znači, dakle, da su kod energetskog vezanja gušenja ostala δ_{raz} , a frekvencije se međusobno razmiču.

ENERGETSKO VEZANJE

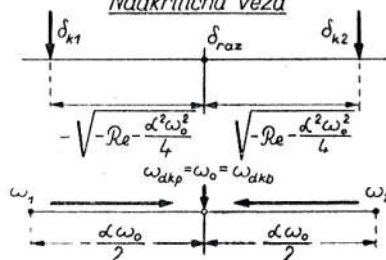
OTPORNIČKO VEZANJE

Prva taza

Kritična veza $\mathcal{R}_e = -\frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4}$



Nadkritična veza



Slika 332.

Kod čisto otporničkog vezanja, kod negativnog $\mathcal{R}_e$, vrijedit će, ako se veza pojačava počevši od nule, najprije treća alternativa, sve dotle, dok je diskriminanta pozitivna. U tom intervalu ne vrijedi prva alternativa, jer bi onda δ_k bilo kompleksno, što bi bilo protivno toj alternativni, t. j. da je $\Delta\omega = 0$. Kad je $\mathcal{R}_e$ postalo jednako $-\frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4}$, došli smo do „kritičnog vezanja“, te je nastupila druga alternativa. Kod daljnjeg povećavanja veze vrijedi prva alternativa, jer je diskriminanta za vezna gušenja postala pozitivna, a ona

za $\Delta \omega$ negativna. Negativna diskriminanta za $\Delta \omega$ ukazuje na uvećanje realnog dijela korijena*), što je ali u protivnosti s trećom alternativom. Znači, da kod otporničke veze, u početku, kod nepromijenjenih gušenja δ_{raz} , nastaje primicanje frekvencija sve do ω_0 , kad oba titraja imaju jednaka gušenja i jednake frekvencije, dakle, kombiniraju se u prigušeni sinusov titraj. Kod daljnjeg pojačavanja veze ostaju frekvencije ω_0 , a gušenja se počnu razmicati.

U sl. 332. prikazani su navedeni odnosi.

Ovaj slučaj je — kako se to vidi i iz spomenute slike — upravo „protuslučaj“ usklađenim krugovima s različitim gušenjem δ_1 i δ_2 , koje smo opisali u prethodnom poglavlju 23. Treba samo međusobno zamijeniti riječi „energetski“ i „otpornički“, te oznake frekvencija s oznakama gušenja, i obrnuto, da se dođe do slike, koja bi vrijedila za usklađene krugove s raznim gušenjima.

c) Utjecaj jačine vezanja na vezne veličine, ako je $\delta_1 \neq \delta_2$

Ovdje ćemo promatrati odnose α .) kod veoma slabog vezanja, β .) kod slabog vezanja, i γ .) kod jačeg vezanja (koje, međutim, u poređenju s čvrstim vezanjima, još uvijek spada u opću kategoriju slabih vezanja, za koju i vrijedi preuređena karakteristična jednačba, gdje smo u tom smislu i izvršili izvjesna zanemarenja).

α .) Veoma slabo vezanje. $|\mathcal{R}e| \ll |D|$.

Zbog veoma slabog vezanja, vezna gušenja malo će se razlikovati od gušenja razvezanih krugova, te će biti:

$$\begin{aligned}\delta_{k1} &= \delta_1 + \Delta \delta_1, \\ \delta_{k2} &= \delta_2 + \Delta \delta_2.\end{aligned}$$

Karakteristična jednačba vrijedit će, naravno, ako u nju uvrstimo te izraze umjesto općenitog izraza δ_k . Uvrstit ćemo naprije δ_{k1} . Tada će za imaginarni dio biti:

$$(\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_{k1})\Delta\omega - (\delta_1 - \delta_2)\frac{\alpha\omega_0}{2} = \mathcal{I}m = 0,$$

$$[\delta_1 + \delta_2 - 2(\delta_1 + \Delta\delta_1)]\Delta\omega - D\frac{\alpha\omega_0}{2} = 0,$$

$$(-D - 2\Delta\delta_1)\Delta\omega - D\frac{\alpha\omega_0}{2} = 0.$$

Sa zanemarenjem malene veličine $2\Delta\delta_1$ prema D , slijedi:

$$-D\Delta\omega - D\frac{\alpha\omega_0}{2} = 0, \text{ odnosno } \Delta\omega = -\frac{\alpha\omega_0}{2}.$$

*) Ispred izraza za $\Delta\omega$ dolazi, kako znamo, j , dakle, u slučaju negativne diskriminante dolazi j^2 , i prema tome postaje ta vrijednost realna.

Prema tome će uz prvo vezno gušenje δ_{k1} , iznos $\Delta\omega$, koji se pribraja k ω_0 , biti $-\frac{\alpha\omega_0}{2}$. Njihov zbroj bit će, dakle, ω_1 . Znači, da je ω_1 ujedno ω_{akp} , a vezno gušenje δ_{k1} je pripadno δ_{kp} .

Ako taj rezultat uvrstimo u izraz za realni dio, bit će:

$$\left(-\frac{\alpha\omega_0}{2}\right)^2 - [\delta_1 - (\delta_1 + \Delta\delta_1)][\delta_2 - (\delta_1 + \Delta\delta_1)] - \frac{\alpha^2\omega_0^2}{4} = \mathcal{R}e,$$

odnosno

$$-[-\Delta\delta_1][-\Delta\delta_1] = \mathcal{R}e.$$

Zanemarivši opet $\Delta\delta_1$ prema D , bit će:

$$-D\Delta\delta_1 = \mathcal{R}e, \text{ ili } \Delta\delta_1 = -\frac{\mathcal{R}e}{D}.$$

Analogno ćemo postupiti s δ_{k2} . Tada će biti:

$$[\delta_1 + \delta_2 - 2(\delta_2 + \Delta\delta_2)]\Delta\omega - D\frac{\alpha\omega_0}{2} = 0.$$

Dalje slijedi:

$$D\Delta\omega - D\frac{\alpha\omega_0}{2} = 0.$$

Iz ovoga dobivamo:

$$\Delta\omega = \frac{\alpha\omega_0}{2}.$$

Znači, da i druga frekvencija ω_2 ostaje nepromijenjena, te bismo umjesto ω_2 mogli pisati ω_{akb} , a umjesto δ_{k2} toj frekvenciji pripadni δ_{kb} .

Uvršteno u izraz za realni dio karakteristične jednadžbe, daje

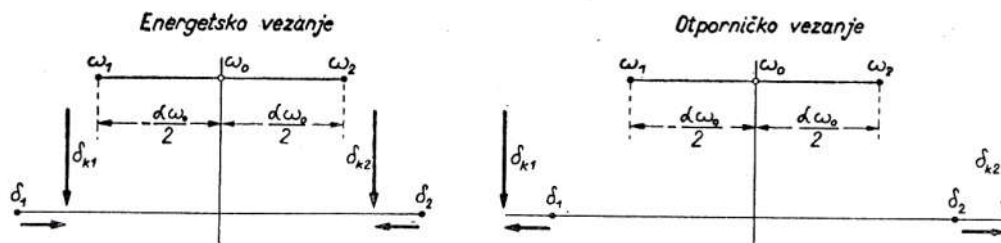
$$\left(\frac{\alpha\omega_0}{2}\right)^2 - [\delta_1 - (\delta_2 + \Delta\delta_2)][\delta_2 - (\delta_2 + \Delta\delta_2)] - \frac{\alpha^2\omega_0^2}{4} = \mathcal{R}e,$$

odnosno

$$D\Delta\delta_2 = \mathcal{R}e, \text{ ili } \Delta\delta_2 = \frac{\mathcal{R}e}{D}.$$

Ako je $\delta_1 < \delta_2$ bit će D negativno. U tom slučaju, kod energetskog vezanja uz pozitivno $\mathcal{R}e$, izraz za $\Delta\delta_1$ bit će pozitivan, a za $\Delta\delta_2$ negativan. Kod $\delta_1 > \delta_2$, odnosno kod pozitivnog D , bit će izraz za $\Delta\delta_1$ negativan, a za $\Delta\delta_2$

pozitivan. To znači u oba slučaja, da će se veće gušenje umanjivati, a manje uvećavati, dakle, oba gušenja se primiču. Kod otporničkog vezanja s negativnim $\mathcal{R}_e$, bilo bi upravo obrnuto, t. j. gušenja se međusobno razmiču. Frekvencije



Slika 333.

ostaju u svakoj prilici neizmjenjene. Te odnose pokazuje sl. 333. Iz samog gornjeg izvoda ne vidi se, međutim, pridruženost pojedine frekvencije većem ili manjem gušenju. Ta pridruženost mora biti poznata iz razvezanih krugova, gdje je k ω_1 pridruženo δ_1 , a k ω_2 pripadno δ_2 , te može biti $\delta_1 \geq \delta_2$.

β.) Slabo vezanje.

$$|\mathcal{R}_e| < \frac{D^2}{4}.$$

Do sada smo sve promjene veznih veličina promatrali počevši od neusklađenog razvezanog stanja, koje je bilo „početno“ stanje, te postepeno povećavali stepen vezanja. Međutim, sada ćemo kao „početno“ odabrati stanje sa već postignutim željenim stepenom vezanja za gornji uvjet

$$|\mathcal{R}_e| < \frac{D^2}{4},$$

ali kod usklađenih krugova frekvencije ω_0 , dakle, kod $\alpha = 0$, i pojačavati neusklađenost do α .

Kod usklađenih krugova, uz gornji uvjet, kako znamo, ostale su frekvencije nepromijenjene, t. j. ω_0 , a vezna gušenja iznosila su:

$$\delta_{k1,2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}_e} \quad (*)$$

Kod gušenja, ispod indeksa, pripisali smo „ $(\alpha = 0)$ “, da se sjetimo, da se to odnosi na usklađene krugove.

Kod $\alpha \neq 0$, iznositi će

$$\delta_{k1} = \delta_{k1} + \Delta\delta_{k1} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}_e} + \Delta\delta_{k1},$$

*) Ovdje smo, obratno nego u poglavlju 23., veće gušenje obilježili indeksom 2, a manje indeksom 1, što je dakako, svejedno.

odnosno

$$\delta_{k2} = \delta_{k2} + \Delta\delta_{k2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}e} + \Delta\delta_{k2}.$$

Uvrstit ćemo δ_{k1} u izraz za imaginarni dio karakteristične jednačbe, t. j.

$$\left[\delta_1 + \delta_2 - 2 \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}e} + \Delta\delta_{k1} \right) \right] \Delta\omega - D \frac{\alpha\omega_0}{2} = 0.$$

Zanemarivši $\Delta\delta_{k1}$ kao adend, slijedi:

$$\left(\sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}e} \right) \Delta\omega = D \frac{\alpha\omega_0}{2},$$

odnosno

$$\Delta\omega = \frac{D\alpha\omega_0}{2\sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}e}}.$$

Taj rezultat, uvršten u drugi dio karakteristične jednačbe, daje:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{D\alpha\omega_0}{2\sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}e}} \right)^2 - \left[\delta_1 - \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}e} + \Delta\delta_{k1} \right) \right] \left[\delta_2 - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}e} + \Delta\delta_{k1} \right) \right] - \frac{\alpha^2\omega_0^2}{4} = \mathcal{R}e. \end{aligned}$$

Dalje slijedi:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2\omega_0^2[D^2 - (D^2 - 4\mathcal{R}e)]}{4(D^2 - 4\mathcal{R}e)} - \left[\frac{D}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}e} - \Delta\delta_{k1} \right] \left[-\frac{D}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}e} - \Delta\delta_{k1} \right] = \mathcal{R}e. \end{aligned}$$

Zatim imamo:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2\omega_0^2\mathcal{R}e}{D^2 - 4\mathcal{R}e} - \left[\frac{1}{4}(D^2 - 4\mathcal{R}e) - \Delta\delta_{k1}\sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}e} + \right. \\ & \left. + (\Delta\delta_{k1})^2 - \frac{D^2}{4} \right] = \mathcal{R}e. \end{aligned}$$

Ako $(\Delta\delta_{k1})^2$ zanemarimo kao adend, slijedi:

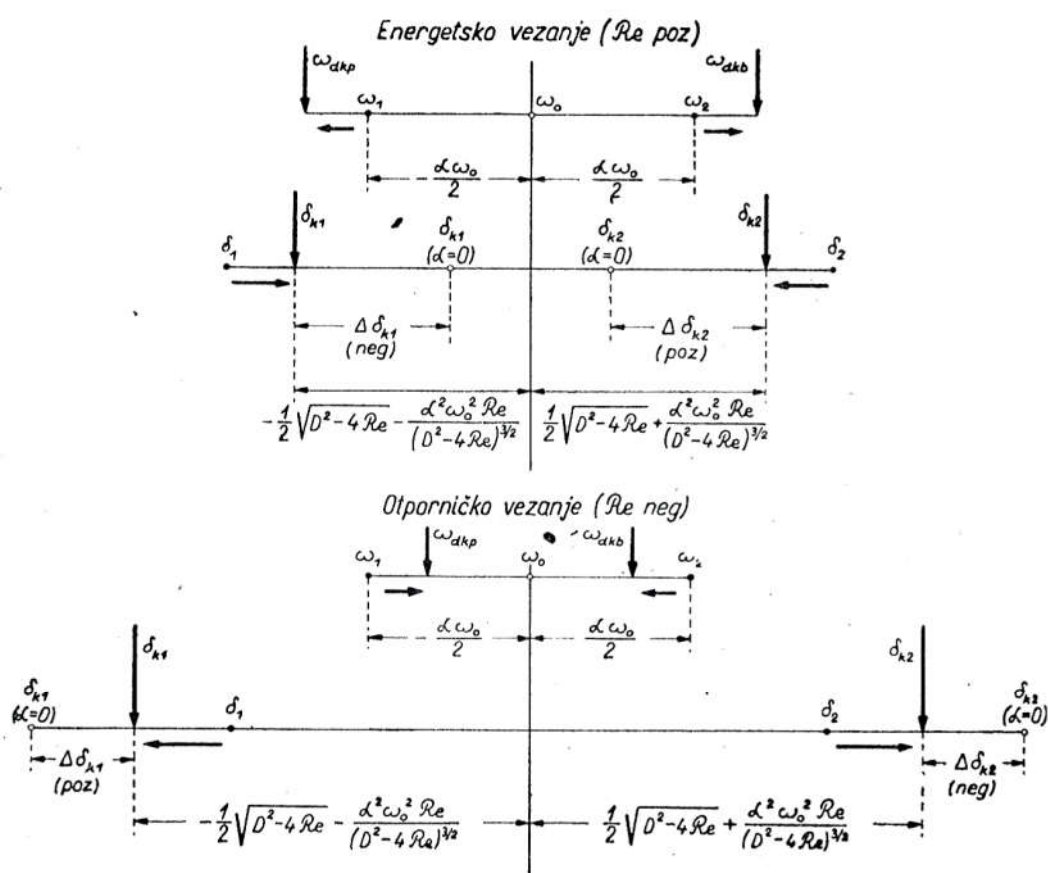
$$\frac{\alpha^2 \omega_0^2 \mathcal{R}e}{D^2 - 4 \mathcal{R}e} + \Delta\delta_{k1} \sqrt{D^2 - 4 \mathcal{R}e} = 0,$$

odnosno

$$\Delta\delta_{k1} = - \frac{\alpha^2 \omega_0^2 \mathcal{R}e}{(D^2 - 4 \mathcal{R}e)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ako bismo, analogno, u imaginarni dio uvrstili δ_{k2} , dobili bismo:

$$\Delta\omega = - \frac{D \alpha \omega_0}{2 \sqrt{D^2 - 4 \mathcal{R}e}},$$



Slika 334.

odnosno, uvrstivši taj rezultat, te izraz za δ_{k2} , u drugi dio karakteristične jednačbe, slijedi:

$$\Delta\delta_{k2} = \frac{\alpha^2 \omega_0^2 \mathcal{R}e}{(D^2 - 4 \mathcal{R}e)^{\frac{3}{2}}}.$$

Izraz

$$(D^2 - 4\mathcal{R}_e)$$

je prema pretpostavci pozitivan. Kod energetske veze, uz pozitivno $\mathcal{R}_e$, bit će

$$\sqrt{(D^2 - 4\mathcal{R}_e)}$$

manje od D , a kod otporničke veze, uz negativno $\mathcal{R}_e$, bit će taj izraz veći od D .

Kod $\mathcal{R}_e = 0$, t. j. kod veze jednako nula, bilo bi razmicanje frekvencija počevši od ω_0 prema dobivenim formulama $\pm \frac{\alpha \omega_0}{2}$, t. j. imali bismo naše početne razvezane frekvencije ω_1 i ω_2 . Kod $\alpha = 0$ bilo bi to razmicanje nula, t. j. imali bismo usklađene krugove, gdje se — kako nam je to poznato iz prethodnog poglavlja — kod vezanja, koje je ispod „kritičnog“, jednake frekvencije ω_0 ne razmiču. Kod $\alpha \neq 0$, te povećanju veze, imamo za energetski slučaj razmicanje frekvencija počevši od ω_0 , koje je veće, odnosno manje, od $\pm \frac{\alpha \omega_0}{2}$, a za otpornički slučaj manje, odnosno veće, od $\pm \frac{\alpha \omega_0}{2}$. To, drugim riječima, znači, da će se u energetskom slučaju naše početne frekvencije ω_1 i ω_2 međusobno razmicati, a u otporničkom slučaju primicati.

U pogledu gušenja bit će kod energetske veze $\Delta\delta_{k1}$, koji se iznos pribraja k

$$\delta_{k1} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}_e},$$

($\alpha = 0$)

negativno, a $\Delta\delta_{k2}$, koji se iznos pribraja k

$$\delta_{k2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - 4\mathcal{R}_e},$$

($\alpha = 0$)

pozitivno. Kod otporničke veze bit će obrnuto, t. j. $\Delta\delta_{k1}$ bit će pozitivno, a $\Delta\delta_{k2}$ negativno. Gornje odnose kod vrlo malenog α prikazuje sl. 334.

Gušenja se za vrlo maleni α kod energetske veze primiču, a kod otporničke veze razmiču, iako to nije tako intenzivno, kao kod usklađenih krugova. Frekvencije i gušenja mijenjaju se istodobno, a ne kao što smo vidjeli kod dosadašnjih slučajeva, da se je najprije mijenjalo jedno, a tek onda drugo.

γ.) Jače vezanje.

$$|\mathcal{R}_e| > \frac{D^2}{4}.$$

Za taj slučaj ne možemo upotrebiti prethodne jednadžbe, jer za energetsko vezanje kod

$$\mathcal{R}_e = \frac{D^2}{4}$$

postaju izrazi za $\Delta\omega$ i $\Delta\delta_{k1,2}$ neizmjereno veliki, budući da nazivnik dotičnog izraza, zbog zanemarenja, koje smo učinili tokom dedukcije, postaje jednak nuli.

Međutim, postupit ćemo kao i kod prijašnjeg slučaja, t. j. naše „početno stanje“ bit će usklađeni krugovi frekvencije ω_0 , s postignutim željenim stepenom vezanja, koji odgovara gornjem uvjetu

$$|\mathcal{R}e| > \frac{D^2}{4},$$

te ćemo tada neusklađenost povećavati od $\alpha = 0$ do zadane vrijednosti α .

Kod usklađenih krugova s energetskim vezanjem, uz gornji uvjet, gušenja bi se međusobno približila na zajedničku srednju vrijednost

$$\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \delta_{\text{sred.}} \quad (\alpha = 0)$$

Uzet ćemo upravo tu vrijednost, kao polaznu vrijednost za naša vezna gušenja. Prema tome će biti:

$$\delta_k = \delta_{\text{sred.}} + \Delta\delta_k \quad (\alpha = 0)$$

Uvrstit ćemo to u imaginarni dio karakteristične jednadžbe, t. j. u

$$\Delta\omega(\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_k) - (\delta_1 - \delta_2) \frac{\alpha\omega_0}{2} = 0.$$

Prema tome, imamo:

$$\Delta\omega \left[\delta_1 + \delta_2 - 2 \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \Delta\delta_k \right) \right] - D \frac{\alpha\omega_0}{2} = 0.$$

Iz ovoga slijedi:

$$\Delta\omega \Delta\delta_k = -D \frac{\alpha\omega_0}{4} = b.$$

Prema tome će biti:

$$\Delta\delta_k = \frac{b}{\Delta\omega}.$$

Radi toga je:

$$\delta_k = \delta_{\text{sred.}} + \frac{b}{\Delta\omega} \quad (\alpha = 0)$$

Uvrstit ćemo taj rezultat u realni dio karakteristične jednadžbe, t. j. u

$$\Delta \omega^2 - (\delta_1 - \delta_k)(\delta_2 - \delta_k) - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4} = \mathcal{R}_e.$$

Radi toga slijedi:

$$\Delta \omega^2 - \left[\delta_1 - \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \frac{b}{\Delta \omega} \right) \right] \left[\delta_2 - \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \frac{b}{\Delta \omega} \right) \right] - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4} = \mathcal{R}_e.$$

$$\Delta \omega^2 - \left(\frac{D}{2} - \frac{b}{\Delta \omega} \right) \left(-\frac{D}{2} - \frac{b}{\Delta \omega} \right) - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4} = \mathcal{R}_e,$$

$$\Delta \omega^2 + \frac{D^2}{4} - \frac{b^2}{\Delta \omega^2} - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4} = \mathcal{R}_e,$$

$$\Delta \omega^2 - \frac{b^2}{\Delta \omega^2} - \left(\mathcal{R}_e - \frac{D^2}{4} + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4} \right) = 0.$$

Stavit ćemo, da je:

$$\mathcal{R}_e - \frac{D^2}{4} + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4} = a.$$

Prema tome, iz gornje jednadžbe slijedi:

$$\Delta \omega^2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$

Minus pred korijenom nema smisla, jer bi tada $\Delta \omega$, a prema prije navedenoj formuli i $\Delta \delta_k$, postalo imaginarno, što je nemoguće. Uvrstit ćemo to u izraz za

$$(\Delta \delta_k)^2 = \frac{b^2}{\Delta \omega^2},$$

i dobiti:

$$(\Delta \delta_k)^2 = \frac{b^2}{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}} = \frac{b^2 \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} \right)}{-b^2} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$

Kod energetske veze, t. j. kod pozitivnog $\mathcal{R}_e$, bit će, uz

$$\left(\mathcal{R}_e - \frac{D^2}{4}\right) > 0,$$

vrijednost

$$a > \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4}, \text{ odnosno } \frac{a}{2} > \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8}.$$

Izraz

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

biti će, zbog b^2 , u još većoj mjeri veći od $\frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8}$. Radi toga će njihov zbroj

$$\Delta \omega^2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2},$$

biti svakako veći od $\frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4}$, a $\Delta \omega$, koji se pribraja k ω_0 , bit će veće, odnosno manje, od $\pm \frac{\alpha \omega_0}{2}$. To znači, da će se razvezane frekvencije ω_1 i ω_2 uslijed energetske veze međusobno udaljivati.

Kod otporničke veze, t. j. kod negativnog $\mathcal{R}_e$, ali uz

$$|\mathcal{R}_e| > \frac{D^2}{4},$$

možemo pisati:

$$a = -\frac{D^2}{4}\beta + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4},$$

gdje je $\beta > 2$. Prema tome, dobit ćemo izraz:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} &= -\frac{D^2}{8}\beta + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8} + \sqrt{\left(-\frac{D^2}{8}\beta + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8}\right)^2 + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{16} D^2} = \\ &= -\frac{D^2}{8}\beta + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8} + \sqrt{\frac{D^4 \beta^2}{64} + \frac{\alpha^2 \omega_0^2 D^2}{64}(4 - 2\beta) + \frac{\alpha^4 \omega_0^4}{64}}. \end{aligned}$$

Kad bi bilo $(4 - 2\beta) = 2\beta$, onda bismo pod korijenom imali

$$\left(\frac{D^2}{8}\beta + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8}\right)^2,$$

dakle, čitav izraz za $\Delta \omega^2$ bio bi jednak $\frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4}$, i prema tome, dobili bismo

$$\Delta \omega = \pm \frac{\alpha \omega_0}{2},$$

t. j. nalazili bismo se upravo u razvezanim frekvencijama ω_1 i ω_2 . Kako je, međutim, uz $\beta > 2$, izraz $(4 - 2\beta) < 2\beta$, to je onda i čitav izraz za

$$\Delta \omega^2 < \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4}.$$

To znači, da će se kod otporničkog vezanja frekvencije međusobno približavati.

Izraz za

$$\begin{aligned} (\Delta \delta_k)^2 &= -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} = -\frac{\mathcal{R}_e}{2} + \frac{D^2}{8} - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8} + \\ &+ \sqrt{\left(\frac{\mathcal{R}_e}{2} - \frac{D^2}{8} + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8}\right)^2 + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{16} D^2} = -\frac{\mathcal{R}_e}{2} + \frac{D^2}{8} - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8} + \\ &+ \sqrt{\frac{\mathcal{R}_e^2}{4} + \frac{2\alpha^2 \omega_0^2 \mathcal{R}_e}{16} - \frac{2D^2 \mathcal{R}_e}{16} + \frac{2D^2 \alpha^2 \omega_0^2}{64} + \frac{\alpha^4 \omega_0^4}{64} + \frac{D^4}{64}}. \end{aligned}$$

Kad bi pod korijenom umjesto $-\frac{2D^2 \mathcal{R}_e}{16}$ stajalo $\frac{2D^2 \mathcal{R}_e}{16}$, onda bi radikand bio upravo

$$\left(\frac{\mathcal{R}_e}{2} + \frac{D^2}{8} + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8}\right)^2,$$

a čitav izraz iznosio bi $\frac{D^2}{4}$. U tom slučaju bilo bi $\Delta \delta_{k1,2}$, koje se pribraja k δ_{ared} , jednako $\pm \frac{D}{2}$, t. j. nalazili bismo se upravo u razvezanim δ_1 i δ_2 .

Međutim, kod energetskog vezanja, uz pozitivno $\mathcal{R}_e$, naš će radikand biti manji od

$$\left(\frac{\mathcal{R}_e}{2} + \frac{D^2}{8} + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8}\right)^2,$$

i radi toga će sada biti:

$$(\Delta \delta_k)^2 < \frac{D^2}{4}.$$

To znači, da se kod energetske veze gušenja primiču.

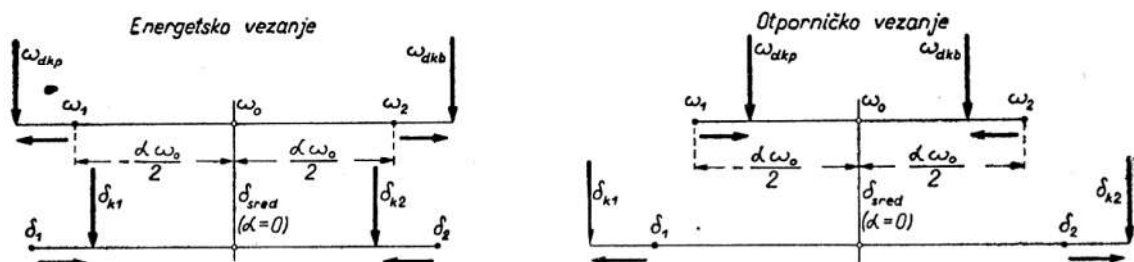
Kod otporničke veze, uz negativno $\mathcal{R}_e$, radikand će biti veći od

$$\left(\frac{\mathcal{R}_e}{2} + \frac{D^2}{8} + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8} \right)^2$$

i radi toga će sada biti:

$$(\Delta \delta_k)^2 > \frac{D^2}{4}.$$

To znači, da se kod otporničke veze gušenja međusobno razmiču.



Slika 335.

Navedeni odnosi prikazani su na sl. 335.

25. JAKO NEUSKLAĐENI PRIGUŠENI VEZANI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA

Oba kruga su „vrlo oscilatorna“, slabo gušena i slabo vezana. [Za razvezano stanje stavit ćemo za prvi krug

$$p_{1,2} = -\delta_1 \pm j\omega_1,$$

kod čega smo aproksimirali

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}} \approx \omega_{d1},$$

a za drugi krug

$$p_{3,4} = -\delta_2 \pm j\omega_2,$$

s

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C_2 L_2}} \approx \omega_{d2}.$$

Zbog velike oscilatornosti je $\omega_1 \gg \delta_1$, odnosno $\omega_2 \gg \delta_2$. Budući da ćemo promatrati samo slaba vezanja, to će, počevši od nule, $p_{1,2}$ prijeći u vezni

$$p_{k1,2} = p_{1,2} + \Delta p_{1,2},$$

a $p_{3,4}$ u vezni

$$p_{k3,4} = p_{3,4} + \Delta p_{3,4},$$

gdje su $\Delta p_{1,2}$ i $\Delta p_{3,4}$ malene veličine i glase

$$\Delta p_{1,2} = -\Delta \delta_1 \pm j \Delta \omega_1,$$

odnosno

$$\Delta p_{3,4} = -\Delta \delta_2 \pm j \Delta \omega_2.$$

Kao i dosad proučavat ćemo samo energetski vezane krugove, i krugove s čisto otporničkim vezanjem, t. j. one kod kojih je a_{12} realno. Općeniti izraz

$$a_{12} = \left(\frac{1}{C_{12}} + p_k R_{12} + p_k^2 L_{12} \right),$$

možemo, naime, u ovom kvalitativnom razmatranju s dovoljnom točnošću aproksimirati kao:

$$\left(\frac{1}{C_{12}} \pm j \omega_{1,2} R_{12} - \omega_{1,2}^2 L_{12} \right),$$

budući da su, prema naprijed navedenom, $\delta_{1,2}$ te $\Delta p_{1,2,3,4}$ malene veličine u odnosu na $\omega_{1,2}$.

Sada ćemo „izgraditi“ karakterističnu jednadžbu, i to najprije za

$$p_{k1,2} = p_{1,2} + \Delta p_{1,2}.$$

Izraz a_{11} , kao funkciju od $(p_{1,2} + \Delta p_{1,2})$, odredit ćemo pomoću Taylor-ovog reda, koji ćemo zbog malenog $\Delta p_{1,2}$ prekinuti kod drugog člana, t. j.

$$a_{11} = f(p_{1,2} + \Delta p_{1,2}) = f(p_{1,2}) + \Delta p_{1,2} \frac{df(p_{1,2})}{dp_{1,2}} + \dots$$

$$f(p_{1,2}) = \frac{1}{C_1} + p_{1,2} R_1 + p_{1,2}^2 L_1 = 0,$$

budući da su obje vrijednosti $p_{1,2}$ korijeni te jednadžbe, koja je karakteristična jednadžba razvezanog prvog kruga.

$$\begin{aligned} \frac{df(p_{1,2})}{dp_{1,2}} &= R_1 + 2p_{1,2} L_1 = R_1 + 2(-\delta_1 \pm j\omega_1) L_1 = R_1 - 2 \frac{R_1}{2L_1} L_1 \pm 2j\omega_1 L_1 = \\ &= \pm 2j\omega_1 L_1. \end{aligned}$$

Radi toga je:

$$a_{11} = \pm 2j\omega_1 L_1 \Delta p_{1,2}.$$

U izrazu a_{22} nadomjestit ćemo, zbog malene međusobne razlike, $p_{k1,2}$ s $p_{1,2}$, te zanemariti malene veličine, t. j.

$$\begin{aligned} a_{22} &= \frac{1}{C_2} + (-\delta_1 \pm j\omega_1)R_2 + (-\delta_1 \pm j\omega_1)^2 L_2 = \\ &= L_2 \left(\frac{1}{C_2 L_2} - \frac{\delta_1 R_2}{L_2} \pm \frac{j\omega_1 R_2}{L_2} + \delta_1^2 \mp 2j\delta_1 \omega_1 - \omega_1^2 \right) \approx \\ &\approx L_2 [\omega_2^2 \mp 2j\omega_1(\delta_1 - \delta_2) - \omega_1^2]. \end{aligned}$$

Prema tome, karakteristična jednačba s $p_{k1,2}$ glasi:

$$a_{11} = \frac{a_{12}^2}{a_{22}} = \pm 2j\omega_1 L_1 \Delta p_{1,2} = \frac{a_{12}^2}{L_2 [\omega_2^2 \mp 2j\omega_1(\delta_1 - \delta_2) - \omega_1^2]},$$

odnosno

$$\begin{aligned} \Delta p_{1,2} &= \pm \frac{a_{12}^2}{2j\omega_1 L_1 L_2 [\omega_2^2 \mp 2j\omega_1(\delta_1 - \delta_2) - \omega_1^2]} = \\ &= \pm \frac{a_{12}^2}{2j\omega_1 L_1 L_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) \left[1 \mp \frac{2j\omega_1(\delta_1 - \delta_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right]} \end{aligned}$$

Budući da je po Mac Laurinu za malene veličine α izraz

$$\frac{1}{1 \mp \alpha} \approx (1 \pm \alpha),$$

a drugi izraz u uglatoj zagradi u nazivniku je malena veličina, to uz $(\delta_1 - \delta_2) = D$ možemo pisati:

$$\Delta p_{1,2} = \mp \frac{j a_{12}^2}{2\omega_1 L_1 L_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[1 \pm \frac{j 2\omega_1 D}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right].$$

Imaginarni dio ovog izraza bit će $\pm j\Delta\omega_1$, a realni $-\Delta\delta_1$, te je radi toga:

$$\Delta\omega_1 = - \frac{a_{12}^2}{2\omega_1 L_1 L_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

odnosno

$$\Delta\delta_1 = - \frac{a_{12}^2 D}{L_1 L_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2},$$

kod čega se vrijednost a_{12}^2 izračunava unijevši u izraz frekvenciju ω_1 .

Potpuno analogno bilo bi za

$$p_{k3,4} = p_{3,4} + \Delta p_{3,4},$$

kako slijedi:

$$a_{32} = f(p_{3,4} + \Delta p_{3,4}) = f(p_{3,4}) + \Delta p_{3,4} \frac{df(p_{3,4})}{dp_{3,4}} + \dots = \pm 2j\omega_2 L_2 \Delta p_{3,4}.$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{C_1} + (-\delta_2 \pm j\omega_2) R_1 + (-\delta_2 \pm j\omega_2)^2 L_1 \approx L_1 [\omega_1^2 \mp 2j\omega_2(\delta_2 - \delta_1) - \omega_2^2] = \\ &= L_1 [\omega_1^2 \pm 2j\omega_2(\delta_1 - \delta_2) - \omega_2^2]. \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba s $p_{k3,4}$ glasi:

$$a_{22} = \frac{a_{12}^2}{a_{11}} = \pm 2j\omega_2 L_2 \Delta p_{3,4} = \frac{a_{12}^2}{L_1 [\omega_1^2 \pm 2j\omega_2(\delta_1 - \delta_2) - \omega_2^2]},$$

odnosno

$$\begin{aligned} \Delta p_{3,4} &= \pm \frac{a_{12}^2}{j2\omega_2 L_2 L_1 [-(\omega_2^2 \mp 2j\omega_2 D - \omega_1^2)]} = \\ &= \mp \frac{a_{12}^2}{j2\omega_2 L_2 L_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2) \left[1 \mp \frac{2j\omega_2 D}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\right]} = \\ &= \pm \frac{ja_{12}^2}{2\omega_2 L_2 L_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2) \left[1 \pm \frac{2j\omega_2 D}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\right]}. \end{aligned}$$

Radi toga je sada:

$$\Delta \omega_2 = \frac{a_{12}^2}{2\omega_2 L_2 L_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

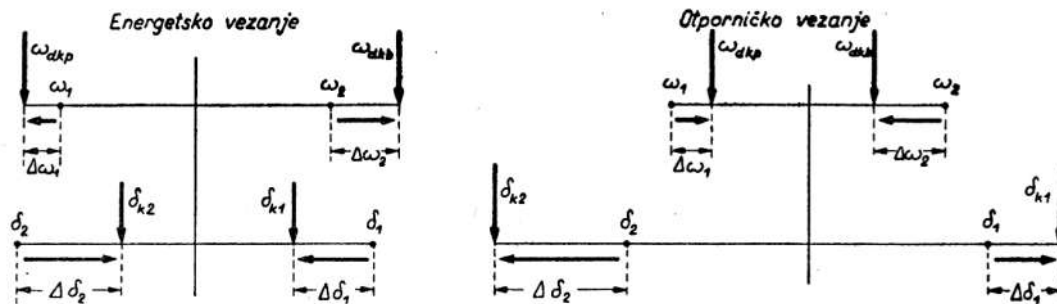
te nadalje

$$\Delta \delta_2 = \frac{a_{12}^2 D}{L_2 L_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2},$$

kod čega se a_{12}^2 izračunava unijevši u izraz frekvenciju ω_2 .

Ako je na pr. $\omega_2 > \omega_1$, prema gornjim formulama kod energetskog vezanja, dakle, uz pozitivno a_{12}^2 , vrijednost za $\Delta \omega_1$ bit će negativna, a za $\Delta \omega_2$ pozitivna — frekvencije se razmiču. Kod otporničke veze, t. j. uz negativno a_{12}^2 bilo bi upravo obrnuto, t. j. frekvencije se približavaju.

Uzevši na pr. $\delta_1 > \delta_2$, dakle pozitivno D , to će kod energetskog vezanja $\Delta\delta_1$ biti negativno, a $\Delta\delta_2$ pozitivno — gušenja se primiču. Kod otporničkog vezanja bilo bi upravo obrnuto, t. j. gušenja se razniču. Te odnose prikazuje sl. 336. Sada razmicanja nisu simetrična!



Slika 336.

U slučaju jednakih razvezanih gušenja $\delta_1 = \delta_2$, bit će $D = 0$. Tada ćemo i kod energetskog i kod otporničkog vezanja imati samo premještanje frekvencija, dok će gušenja ostati ista kao i u razvezanom stanju.

26. STACIONARNO STANJE DVAJU USKLAĐENIH VEZANIH ELEKTRIČNIH KRUGOVA POD UTJECAJEM NARINUTOG SINUSOVOG NAPONA

a) Izraz za krivulje frekventnih karakteristika naboja i struja

Jednadžbe obaju krugova, prema sl. 337., glase:

$$e = a_{11} q_1 - a_{12} q_2,$$

$$0 = a_{22} q_2 - a_{12} q_1,$$

gdje je, kao i prije

$$a_{11} = \frac{1}{C_1} + pR_1 + p^2 L_1,$$

$$a_{22} = \frac{1}{C_2} + pR_2 + p^2 L_2,$$

$$a_{12} = \frac{1}{C_{12}} + pR_{12} + p^2 L_{12}.$$

Opći integral gornjih jednadžbi sastojat će se iz partikularnog stacionarnog rješenja i iz prigušnog rješenja, t. j. rješenja pripadne homogene diferencijalne jednadžbe, koje smo proučavali u prethodnim poglavljima. Sada ćemo se pozabaviti partikularnim rješenjem, koje će u simboličkoj formi, uz

$$e = \mathcal{E} e^{j\omega t}, \text{ glasniti } q_1 = Q_1 e^{j\omega t}, \text{ te } q_2 = Q_2 e^{j\omega t}.$$

Uvrstivši partikularni integral u diferencijalne jednačbe, dobivamo

$$\mathcal{E}e^{j\omega t} = a_{11} Q_1 e^{j\omega t} - a_{12} Q_2 e^{j\omega t},$$

odnosno

$$0 = a_{22} Q_2 e^{j\omega t} - a_{12} Q_1 e^{j\omega t},$$

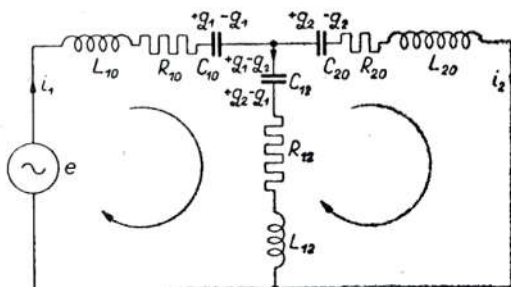
iz čega slijedi:

$$Q_1 = \frac{\mathcal{E} a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2},$$

i nadalje

$$Q_2 = \frac{\mathcal{E} a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}.$$

Vidimo, da se u izrazima za Q_1 , te Q_2 , nalazi u nazivniku naša poznata karakteristična jednačba, čiji su korijeni, pretpostavivši oscilatorski slučaj, općenito $-\delta_{kp} \pm j\omega_{dkp}$, te $-\delta_{kb} \pm j\omega_{dkb}$, kod čega su kod naših krugova gušenja malena, a frekvencije velike. Ako bismo koji od tih korijena uvrstili u nazivnik, on bi zadobio vrijednost nula, a Q_1 , odnosno Q_2 , postalo bi neizmjereno. Međutim, sada postoji samo jedan narinuti $j\omega$, i prema tome ne će nazivnik nikada nestati, ali će biti najmanji, ako se ω nalazi negdje u blizini ω_{dkp} , ili ω_{dkb} . Kad bi krugovi bili neprigušeni, karakteristična jednačba imala bi korijene $\pm j\omega_{kp}$, te $\pm j\omega_{kb}$, koji su općenito, kao i izrazi a_{11} , a_{22} , te a_{12} , razli-



Slika 337.

čiti od nule. Ako bi narinuti $j\omega$ bio jednak kojemu od tih korijena, u tom bi slučaju nazivnik nestao i Q_1 , odnosno Q_2 , postalo bi neizmjereno. Nadalje znamo, da na pr. kod usklađenih prigušenih krugova, u granicama točnosti dedukcija u poglavlju 23., kod slabih vezanja, ne nastaju dvije frekvencije, nego samo jedna — nema razmicanja frekvencija, dakle, svi korijeni karakteristične jednačbe imali bi, s dopuštenim zanemarenjem, imaginarni dio jednak. Znači, da će tada nazivnik samo kod jedne narinute frekvencije postati naročito malen.

Kod dva vezana oscilatorska kruga, za razliku od jednostavnog oscilatorskog kruga, možemo, dakle, općenito dobiti frekventnu karakteristiku naboja s jednim, ili s dva maksimuma, već prema tome da li ti krugovi, ako su bez

narinutog napona, imaju, praktično uzevši, jednu ili dvije vezne frekvencije. (Razumije se, da strogo teoretski postoje uvijek dvije vezne frekvencije). Ako su u pitanju dva maksimuma, onda se — kako smo upravo saznali — ti maksimumi nalaze u blizini vlastitih veznih frekvencija tih krugova, i radi toga, sve ono u predašnjim poglavljima, što se odnosi na utjecanje međusobnog razmaka veznih frekvencija, vrijedi, naravno, i sada za utjecanja međusobnog razmaka obaju maksimuma, budući da ćemo opet proučavati samo slabo vezane i slabo gušene krugove.

Iz prethodnih poglavlja znamo, da se vezne frekvencije kod takvih krugova nalaze u blizini razvezanih frekvencija, bile one jednake ili nejednake kod obih krugova. Prema tome će se, kod usklađenih, odnosno kod malo neusklađenih krugova, vezne frekvencije, a zatim i maksimumi, nalaziti jedan blizu drugoga. Kako je $I = \omega Q$, to će i frekventne krivulje struja imati dva maksimuma, ali, jer će se svaka vrijednost od Q množiti sa svojim pripadnim ω , to će se frekventne krivulje naboja i frekventne krivulje struja u velikom intervalu frekvencija po obliku znatno razlikovati. Međutim, ako je taj interval relativno malen, onda se početni ω intervala ne će naročito razlikovati od njegovog posljednjeg ω , i tada će frekventne krivulje naboja u gruboj slici prikazivati i frekventne krivulje struja. To će upravo biti kod naših krugova, jer ćemo se uvijek radi slabih vezanja nalaziti u intervalu u blizini razvezanih frekvencija.

Kad bismo imali tri vezana kruga, svaki sa svim parametrima, imali bismo dosljedno i tri maksimuma, kod četiri kruga četiri maksimuma i t. d.

Za daljnja razmatranja pretpostavit ćemo usklađene krugove, t. j.

$$\frac{1}{C_1 L_1} = \frac{1}{C_2 L_2} = \omega_{\text{raz}}^2,$$

a veza će biti čisto energetska, dakle sadržavat će samo induktivitet i kapacitet. Izračunat ćemo struje, koje bismo mogli naći, naravno, i pomoću formula

$$\mathcal{I}_1 = j \omega Q_1, \quad \text{te} \quad \mathcal{I}_2 = j \omega Q_2,$$

na temelju prednjih jednadžbi za Q_1 i Q_2 . Međutim, poslužiti ćemo se uobičajenim putem, t. j. upotrebivši kompleksne otpore. Prema tome, bit će:

$$\mathcal{E} = \mathcal{I}_1 \left\{ R_{10} + j \left[\omega (L_{10} + L_{12}) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} \right) \right] \right\} - \mathcal{I}_2 \left[j \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C_{12}} \right) \right],$$

$$0 = \mathcal{I}_2 \left\{ R_{20} + j \left[\omega (L_{20} + L_{12}) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}} \right) \right] \right\} - \mathcal{I}_1 \left[j \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C_{12}} \right) \right].$$

Budući da u vezi nema omskog otpora, bit će:

$$R_{10} = R_1,$$

$$R_{20} = R_2,$$

i nadalje

$$(L_{10} + L_{12}) = L_1,$$

$$(L_{20} + L_{12}) = L_2,$$

odnosno

$$\left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}\right) = \frac{1}{C_1},$$

$$\left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}\right) = \frac{1}{C_2}.$$

Radi toga slijedi:

$$\mathcal{E} = \mathcal{J}_1 \left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] - \mathcal{J}_2 j \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C_{12}} \right),$$

$$0 = \mathcal{J}_2 \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] - \mathcal{J}_1 j \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C_{12}} \right),$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{j \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C_{12}} \right)}{R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} \mathcal{J}_1,$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{J}_1 \left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) - \frac{j \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C_{12}} \right) j \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C_{12}} \right)}{R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} \right].$$

Ako u brojniku razlomka pomnožimo dva faktora s -1 , dakle, cijeli razlomak s $-1 \times -1 = 1$, bit će:

$$\mathcal{E} = \mathcal{J}_1 \left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) + \frac{\left(\frac{1}{\omega C_{12}} - \omega L_{12} \right)^2}{R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} \right],$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{J}_1 \omega_{\text{raz}} L_1 \left\{ \frac{R_1}{\omega_{\text{raz}} L_1} + j \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{raz}}} - \frac{\omega_{\text{raz}}}{\omega} \right) + \frac{\left(\frac{1}{\omega C_{12}} - \omega L_{12} \right)^2}{\omega_{\text{raz}} L_1} \frac{1}{\omega_{\text{raz}} L_2} \right\},$$

kod čega smo posljednji razlomak još proširili s

$$\frac{1}{\frac{\omega_{\text{raz}} L_2}{1}} = \frac{1}{\omega_{\text{raz}} L_2}.$$

Dalje je:

$$\mathcal{E} = \mathcal{J}_1 \omega_{\text{raz}} L_1 \left[\frac{1}{\rho_1} + jv + \frac{\left(\frac{1}{\omega \omega_{\text{raz}} C_{12} \sqrt{L_1 L_2}} - \frac{\omega}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \frac{L_{12}}{\omega_{\text{raz}}} \right)^2}{\frac{1}{\rho_2} + jv} \right].$$

Budući da je:

$$\frac{1}{\omega \omega_{\text{raz}} C_{12} \sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\omega \omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega_{\text{raz}}}{\omega} \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\sqrt{\frac{1}{C_1} \frac{1}{C_2}}} = \frac{1}{z} K_{\text{kap}},$$

to će biti:

$$\mathcal{E} = \mathcal{J}_1 \omega_{\text{raz}} L_1 \left[\frac{1}{\rho_1} + jv + \frac{\left(\frac{1}{z} K_{\text{kap}} - z K_{\text{ind}} \right)^2}{\frac{1}{\rho_2} + jv} \right].$$

U ovom rezultatu vidimo, da se kombinirana kapacitivna i induktivna veza kod prisilnih titraja drugačije očituje, nego kod vlastitih titraja. Tamo se je kombinirana veza očitovala kao obična diferencija faktora vezanja, t. j. $(K_{\text{kap}} - K_{\text{ind}})$, dok je ona sada ovisna o neskladu z , i prema tome je kod različitih ω , također različita. Sadašnji izraz

$$\left(\frac{1}{z} K_{\text{kap}} - z K_{\text{ind}} \right)$$

nazvat ćemo K_{akt} , t. j. aktivni faktor vezanja. Radi toga je:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{J}_1 \omega_{\text{raz}} L_1 \left[\frac{1}{\rho_1} + jv + \frac{K_{\text{akt}}^2}{\frac{1}{\rho_2} + jv} \right] = \\ &= \mathcal{J}_1 \omega_{\text{raz}} L_1 \frac{\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + jv \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) - v^2 + K_{\text{akt}}^2}{\frac{1}{\rho_2} + jv}, \end{aligned}$$

odnosno

$$I_1 = \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_2^2} + v^2}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2 - v^2\right)^2 + v^2 \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)^2}},$$

$$I_1 = \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_2^2} + v^2}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 - 2 \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right) v^2 + v^4 + v^2 \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)^2}},$$

te konačno

$$I_1 = \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_2^2} + v^2}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + v^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2 K_{\text{akt}}^2\right) + v^4}}.$$

Dalje slijedi:

$$Q_1 = \frac{I_1}{\omega} = \frac{I_1}{z \omega_{\text{raz}}} = \frac{E C_1}{z} \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_2^2} + v^2}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + v^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2 K_{\text{akt}}^2\right) + v^4}}.$$

Ako izraz za $\mathcal{J}_2$ proširimo s

$$\frac{1}{\frac{\omega_{\text{raz}} L_2}{1}},$$

bit će:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= \frac{j \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C_{12}} \right) \frac{1}{\omega_{\text{raz}} L_2}}{\left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] \frac{1}{\omega_{\text{raz}} L_2}} \mathcal{J}_1 = \\ &= \frac{j \left(\frac{\omega L_{12}}{\omega_{\text{raz}} L_2} \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_1}} - \frac{1}{\omega C_{12} \omega_{\text{raz}} L_2} \frac{\omega_{\text{raz}}}{\omega_{\text{raz}}} \right)}{\frac{1}{\rho_2} + j v} \mathcal{J}_1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-j \left(\frac{1}{z} \frac{\sqrt{L_1 C_1} \sqrt{L_2 C_2}}{C_{12} L_2} - z \frac{L_{12}}{\sqrt{L_2 L_1}} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \right)}{\frac{1}{\rho_2} + jv} \mathcal{J}_1 = \frac{-j \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \left(\frac{1}{z} K_{\text{kap}} - z K_{\text{ind}} \right)}{\frac{1}{\rho_2} + jv} \mathcal{J}_1 = \\
&= \frac{-j \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} K_{\text{akt}}}{\frac{1}{\rho_2} + jv} \mathcal{J}_1. *)
\end{aligned}$$

Zaustavit ćemo se malo kod ove formule!

Da bismo bolje uočili načelne odnose, koji se pojavljuju, uzet ćemo krugove bez omskih otpora, t. j. $\frac{1}{\rho_2} = 0$. Tada će biti:

$$\mathcal{J}_2 = \frac{-\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \left(\frac{1}{z} K_{\text{kap}} - z K_{\text{ind}} \right)}{v} \mathcal{J}_1.$$

Ako je vezanje čisto kapacitivno, bit će:

$$\mathcal{J}_2 = \frac{-\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \left(\frac{1}{z} K_{\text{kap}} \right)}{v} \mathcal{J}_1.$$

Iz ovoga slijedi, da će kod malenih frekvencija, dakle, za $v < 0$, struja $\mathcal{J}_2$ biti istofazna (sinhrona!) s $\mathcal{J}_1$, a kod velikih frekvencija, za $v > 0$, bit će antifazna (antisinhrona!).

Ako je vezanje čisto induktivno, bit će:

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} z K_{\text{ind}}}{v} \mathcal{J}_1.$$

Ovdje će biti upravo obratno, t. j. kod malenih frekvencija, za $v < 0$, struja $\mathcal{J}_2$ bit će antifazna (antisinhrona!) s $\mathcal{J}_1$, a kod velikih frekvencija, za $v > 0$, bit će istofazna (sinhrona!).

Vidimo, da smo dobili rezultat, koji je potpuno u skladu s našim razmatranjima, koje smo vršili kod istih krugova bez narinutog vanjskog napona.

*) U ovoj verzorskoj formuli, K_{akt} može, naravno, biti pozitivno ili negativno, dok u narednim algebarskim formulama, za proračun amplituda ili nesklada, pod K_{akt} podrazumijevamo uvijek samo apsolutnu vrijednost.

u fluksu i prelaze jedna u drugu — kompliciranije vuku korijen od jednostavnijih. Novi činioči, koji pridolaze u krug, kompliciraju formule, koje, međutim, imaju svoje „zametke“ u prijašnjim jednostavnijim situacijama.

Proslijedit ćemo sada ondje, gdje smo se zaustavili!

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{E \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} K_{\text{akt}}}{\omega_{\text{raz}} L_1} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + v^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right) + v^4}} = \\
 &= \frac{EK_{\text{akt}}}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + v^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right) + v^4}} \\
 Q_2 &= \frac{I_2}{\omega} = \frac{EK_{\text{akt}} \sqrt{C_1 C_2}}{z} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + v^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right) + v^4}}.
 \end{aligned}$$

Kod $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, što, međutim, uz $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{\text{raz}}$ još nije dovoljan uvjet za simetrične krugove, prednje formule frekventnih karakteristika pojednostavnjuju se, i glase:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho^2} + v^2}{\left(\frac{1}{\rho^2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + v^2 \left(\frac{2}{\rho^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right) + v^4}}, \\
 I_2 &= \frac{EK_{\text{akt}}}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho^2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + v^2 \left(\frac{2}{\rho^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right) + v^4}},
 \end{aligned}$$

dok su za naboj Q_1 , odnosno Q_2 , faktori pred korijenom $\frac{EC_1}{z}$, odnosno

$$\frac{EK_{\text{akt}} \sqrt{C_1 C_2}}{z}.$$

b) Razmatranje krivulja frekventnih karakteristika

α) Potražiti ćemo nesklade v kod kojih nastupaju ekstremi frekventnih karakteristika, te ćemo dotične izraze zbog jednostavnosti prethodno kvadrirati, da se riješimo korijena. Osim toga — kako smo već naveli — ti će se ekstremi, uslijed slabog vezanja, nalaziti blizu razvezanih frekvencija, dakle, kod $z \approx 1$. Radi toga ćemo K_{akt} svagdje u tekstu i na crtežima, ukoliko nije izričito drugačije istaknuto, smatrati konstantnim, t. j. kao da ima vrijednost

$$|(K_{kap} - K_{ind})|,$$

iako ono uistinu nije konstantno, te će radi toga i naši rezultati, dobiveni diferenciranjem po v , biti samo približni.*)

U toku daljnjih dedukcija, umjesto K_{akt} mogli bismo kod nesklada $z = 1$, odnosno $v = 0$, sasvim egzaktno pisati

$$K = |K_{kap} - K_{ind}|.$$

Međutim, da ne bismo suviše komplicirali tekst dvojakim označivanjem faktora vezanja, t. j. s K_{akt} i K , pisat ćemo i u tom slučaju K_{akt} . To je, uostalom, sasvim točno, jer je tada $K_{akt} = K$, dok je inače kod drugih naših promatranih nesklada samo $K_{akt} \approx K$. Faktor K može imati vrijednost od 0 do 1, dok faktor K_{akt} — uzevši u obzir sve nesklade, dakle i one, koji su izvan našeg promatranog područja $z \approx 1$ — može imati apsolutnu vrijednost od 0 do ∞ .

Prema tome, izraz

$$\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{akt}^2 \right)^2$$

označit ćemo s M , a izraz

$$\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{akt}^2 \right)$$

s N . Za primarnu struju bit će:

$$\frac{dI_1^2}{dv} = \frac{E^2}{\omega_{raz}^2 L_1^2} \frac{(M + v^2 N + v^4) 2v - \left(\frac{1}{\rho_2^2} + v^2 \right) (2vN + 4v^3)}{(M + v^2 N + v^4)^2} =$$

*) Ako bi slučajno bilo $K_{kap} = K_{ind}$, onda ne bismo smjeli tako postupiti, nego bismo morali točno smatrati, da je

$$K_{akt} = \left| \left(\frac{K_{kap}}{z} - z K_{ind} \right) \right|,$$

jer bi, inače, uzevši $z \approx 1$, vrijednost za K_{akt} kroz čitav interval bila nula, što nije točno, jer se izvan točke $z = 1$ veza pojavljuje.

$$= \frac{E^2}{\omega_{\text{raz}}^2 L_1^2} \frac{-2v^5 - \frac{4v^3}{\rho_2^2} + \left(2M - \frac{2N}{\rho_2^2}\right)v}{(M + v^2 N + v^4)^2} = 0.$$

Rješenja s $v = \pm \infty$ ne dolaze za nas u obzir, jer čitava dedukcija vrijedi za $z \approx 1$. U ostalim slučajevima brojnik mora biti nula, jer je tada nazivnik konačan broj različit od nule.

Prvo rješenje, ako smo brojnik izjednačili s nulom, glasi:

$$v_{\text{prim}} = 0.$$

(1)

Preostaje još jednačba, ako smo izraz brojnika podijelili s $(-2v)$:

$$v^4 + v^2 \frac{2}{\rho_2^2} + N \frac{1}{\rho_2^2} - M = 0.$$

Prema tome, bit će:

$$\begin{aligned} v^2 &= -\frac{1}{\rho_2^2} \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_2^4} - N \frac{1}{\rho_2^2} + M} = \\ &= -\frac{1}{\rho_2^2} \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_2^4} - \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right) \frac{1}{\rho_2^2} + \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2}, \\ v^2 &= -\frac{1}{\rho_2^2} \pm \sqrt{K_{\text{akt}}^2 \left(\frac{2}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_1 \rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)}. \end{aligned}$$

Minus pred korijenom nema fizikalnog smisla, jer čitav izraz za v^2 postaje negativan, dakle, za v imamo dva imaginarna rješenja. Preostaje radi toga drugo i treće fizikalno rješenje, t. j.

$$v_{\text{prim}} = \pm \sqrt{K_{\text{akt}} \left[K_{\text{akt}}^2 + \frac{2}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_1 \rho_2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right]}.$$

(2,3)

Za sekundarnu struju bi bilo:

$$\frac{dI_2^2}{dv} = \frac{E^2 K_{\text{akt}}^2}{\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} \frac{-(2vN + 4v^3)}{(M + v^2 N + v^4)^2} = 0.$$

Dalje slijedi, pošto rješenja s $v = \pm \infty$ ne dolaze za nas u obzir:

$$2v(N + 2v^2) = 0.$$

Prvo rješenje te jednadžbe glasi:

$$v_{\text{sek}}^{(1)} = 0.$$

Drugo i treće rješenje slijedi iz:

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2 + 2v^2 = 0.$$

$$v_{\text{sek}}^{(2,3)} = \pm \sqrt{K_{\text{akt}}^2 - \frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2}}.$$

Za krugove s $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, bit će:

$$v_{\text{prim}}^{(1)} = 0,$$

$$v_{\text{prim}}^{(2,3)} = \pm \sqrt{K_{\text{akt}} \sqrt{K_{\text{akt}}^2 + \frac{4}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}}},$$

$$v_{\text{sek}}^{(1)} = 0,$$

$$v_{\text{sek}}^{(2,3)} = \pm \sqrt{K_{\text{akt}}^2 - \frac{1}{\rho^2}}.$$

Ako u izraz*)

$$\frac{d^2 I_1^2}{dv^2} = \frac{E^2}{\omega_{\text{raz}}^2 L_1^2} \frac{(M + v^2 N + v^4)^3 \left[-10v^4 - \frac{12v^2}{\rho_2^2} + 2M - \frac{2N}{\rho_2^2} \right] - \left[-2v^5 - \frac{4v^3}{\rho_2^2} + \left(2M - \frac{2N}{\rho_2^2} \right) v \right] 2(M + v^2 N + v^4)(2vN + 4v^3)}{(M + v^2 N + v^4)^4}$$

uvrstimo $v_{\text{prim}}^{(1)} = 0$, dobivamo:

$$\left. \frac{d^2 I_1^2}{dv^2} \right|_{v_{\text{prim}}^{(1)} = 0} = \frac{E^2}{\omega_{\text{raz}}^2 L_1^2} \left(\frac{2}{M} - \frac{2N}{\rho_2^2 M^2} \right) = \frac{2E^2}{M \omega_{\text{raz}}^2 L_1^2} \left(1 - \frac{N}{\rho_2^2 M} \right).$$

Taj je izraz negativan tako dugo, dok je

$$\frac{N}{\rho_2^2 M} > 1.$$

*) Kod nekoliko razlomaka nisu svi adendi brojnika, odnosno nazivnika, mogli stati u jedan red, te su tada, kako slijedi, štampani u dva reda.

To znači, za slučaj kad je $\rho_1 \neq \rho_2$, da je:

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2 > \rho_2^2 \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2 \right)^2,$$

odnosno

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2 > \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{2\rho_2}{\rho_1} K_{\text{akt}}^2 + K_{\text{akt}}^4 \rho_2^2,$$

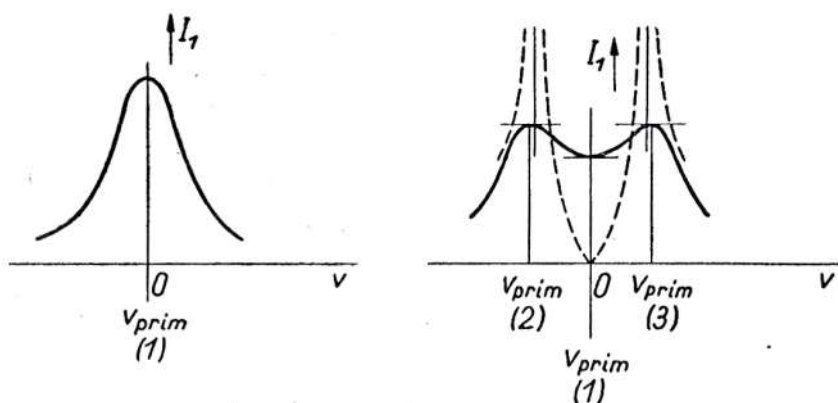
iz čega slijedi dijeljenjem s ρ_2^2 , te vađenjem drugog korijena:

$$\frac{1}{\rho_2^2} > K_{\text{akt}} \sqrt{K_{\text{akt}}^2 + \frac{2}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_1 \rho_2}}.$$

Kod malenog K_{akt} , počevši od nule, bit će tome udovoljeno, te će, prema tome, tada kod $v_{\text{prim}}^{(1)} = 0$ postojati maksimum. Kod toga su ekstremi za $v_{\text{prim}}^{(2,3)}$ imaginarni — krivulja je samo s jednim maksimumom, prema sl. 338., lijevo. Kod

$$\frac{1}{\rho_2^2} = K_{\text{akt}} \sqrt{K_{\text{akt}}^2 + \frac{2}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_1 \rho_2}}$$

postaje $v_{\text{prim}}^{(1)} = 0$. Ako povećavamo K_{akt} dalje, ekstrem kod $v_{\text{prim}}^{(1)} = 0$ postaje minimum, jer je drugi diferencijalni kvocijent postao pozitivan, a ekstremi kod $v_{\text{prim}}^{(2,3)}$, koji se nalaze simetrično obostrano od $v_{\text{prim}}^{(1)} = 0$, realni su i ujedno maksimumi, jer je $\left. \frac{d^2 I_1}{dv^2} \right|_{v_{\text{prim}}^{(2,3)}}$ u tom slučaju negativno. Dobili smo sedlastu kri-



Slika 338.

vulju s dva maksimuma, koja je obzirom na $v_{\text{prim}}^{(1)} = 0$ simetrična, prema sl. 338., desno. Radi upoređenja crtkano je naznačena i frekventna karakteristika, koja bi nastala kod neprigušenih krugova, t. j. bez omskih otpora.

Za sekundarnu struju bilo bi:

$$\frac{d^2 I_2^2}{dv^2} = \frac{E^2 K_{\text{akt}}^2}{\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} \frac{(M + v^2 N + v^4)^2 [-2N - 12v^2] + [2vN + 4v^3] 2(M + v^2 N + v^4)(2vN + 4v^3)}{(M + v^2 N + v^4)^4}.$$

Ako uvrstimo $v_{\text{sek}} = 0$, to slijedi:

$$\frac{d^2 I_2^2}{dv^2} = \frac{E^2 K_{\text{akt}}^2}{\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} \frac{-2NM^2}{M^4} = \frac{E^2 K_{\text{akt}}^2}{\omega_{\text{raz}}^2 L_1 L_2} \frac{-2\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right)}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^4}.$$

Taj je izraz negativan tako dugo, dok je

$$\frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2} > K_{\text{akt}}^2.$$

U tom slučaju je ekstrem kod $v_{\text{sek}} = 0$ maksimum, dok su ekstremi kod v_{sek} imaginarni.

Kod

$$\frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2} = K_{\text{akt}}^2,$$

postalo je $v_{\text{sek}}^{(2,3)}$ realno, t. j. jednako nuli. Ako povećavamo K_{akt} dalje, postaje ekstrem kod $v_{\text{sek}}^{(1)} = 0$ minimum, a ekstremi kod $v_{\text{sek}}^{(2,3)}$ su maksimumi. Krivulja je postala sedlasta s dva maksimuma, te je simetrična obzirom na $v_{\text{sek}}^{(1)} = 0$. Kod krugova bez omskih otpora dobili bismo krivulju sličnu crtkanoj krivulji na sl. 338., desno, s tom razlikom, da struja kod $v_{\text{sek}}^{(1)} = 0$ ne bi bila jednaka nuli, nego bi imala izvjesnu konačnu vrijednost.*)

Međutim, te krivulje, ni primarna, ni sekundarna, nisu uistinu, matematički točno uzeto, simetrične, nego su to samo uz naprijed navedena zanemarenja, dakle, ako se K_{akt} smatra konstantnim. Kod neusklađenih krugova ta je nesimetričnost u horizontalnom i u vertikalnom pogledu, naravno, još veća, te se može dogoditi, da je od dva maksimuma samo jedan izražen tako, da krivulja ima sasvim nepravilan oblik.

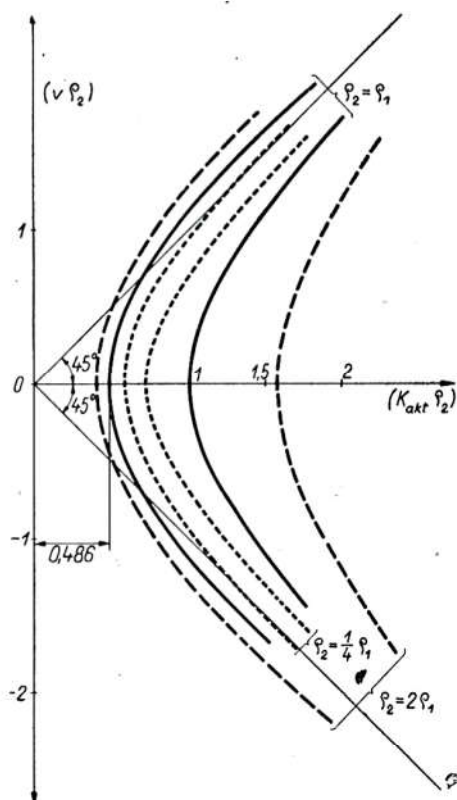
*) U prvi mah izgleda čudno, da je kod nesklada nula primarna struja jednaka nuli, a sekundarna je različita od nule. To je radi toga, što sekundarni krug kod nesklada nula, odnosno kod ω_{raz} , predstavlja neizmjenno veliki otpor, analogno paralelnom spoju induktiviteta i kapaciteta u rezonanciji. Prema tome, vanjska, t. j. primarna struja jednaka je nuli, dok kroz obje paralelne grane, međutim, struja teče.

β) Vezanja kod kojih jednostavne krivulje prelaze u krivulje s dva maksimuma. Vezanje, kod kojeg primarna krivulja počinje dobivati sedlo, slijedi iz jednadžbe:

$$\frac{1}{\rho_2^2} = K_{\text{akt}} \sqrt{K_{\text{akt}}^2 + \frac{2}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_1 \rho_2}},$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_2^4} + K_{\text{akt}}^4 + K_{\text{akt}}^2 \left(\frac{2}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_1 \rho_2} \right),$$

$$K_{\text{akt}}^2 = -\left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \right)^2 + \frac{1}{\rho_2^4}}.$$



Slika 339.

Minus pred korijenom nema fizikalnog smisla, jer bi K_{akt} postalo imaginarno. Radi toga je:

$$K_{\text{akt}} = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \right)^2 + \frac{1}{\rho_2^4}} - \left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \right)}.$$

Vezanje, kod kojeg sekundarna krivulja počinje dobivati sedlo, bit će:

$$K_{\text{akt}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2}}.$$

Uz $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ počela bi primarna krivulja dobivati sedlo kod

$$K_{akt} = \sqrt{\sqrt{\frac{5}{\rho^4}} - \frac{2}{\rho^2}} = \frac{1}{\rho} \sqrt{\sqrt{5} - 2} = \frac{0,486}{\rho},$$

a sekundarna kod

$$K_{akt} = \frac{1}{\rho},$$

dakle, otprilike, kod dvostruko jačeg vezanja, nego primarna krivulja.

Sl. 339. prikazuje nesklade, kod kojih nastupaju oba maksimuma primarne i sekundarne struje, pomnožene s ρ_2 , u ovisnosti od $(K_{akt} \rho_2)$, za odnose

$$\rho_2 = 2\rho_1, \quad \rho_2 = \rho_1, \quad \text{i} \quad \rho_2 = \frac{1}{4}\rho_1.$$

γ) Odnos vlastitih veznih frekvencija prema frekvencijama kod kojih nastupaju primarni i sekundarni maksimumi. Da sada vidimo, kako se odnose neskladi v , kod kojih nastupaju gornji maksimumi, prema neskladima v , koji bi vrijedili za ω_{akb} , odnosno ω_{akp} , kad bi naši sadašnji krugovi bili bez narinutog vanjskog napona, a pod z bismo podrazumijevali $\frac{\omega_{akb}}{\omega_{raz}}$, odnosno $\frac{\omega_{akp}}{\omega_{raz}}$.

Zbog jednostavnosti, pretpostavit ćemo, da naši usklađeni krugovi imaju

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho.$$

Dakle je:

$$\frac{\omega_{raz} L_1}{R_1} = \frac{\omega_{raz} L_2}{R_2},$$

odnosno

$$\frac{L_1}{2R_1} = \delta_1 = \frac{L_2}{2R_2} = \delta_2,$$

i prema tome je:

$$(\delta_1 - \delta_2) = D = 0.$$

Pretpostavit ćemo zatim takvu vrijednost za aktivni faktor vezanja, da kod obje krivulje postoje dva maksimuma, na pr.

$$K_{akt} = \frac{2}{\rho}.$$

Tada je:

$$v_{\text{prim}}^{(2,3)} = \pm \sqrt{\frac{2}{\rho} \sqrt{\frac{4}{\rho^2} + \frac{4}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}}} = \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{2\sqrt{8}-1} = \pm \frac{2,16}{\rho},$$

$$v_{\text{sek}}^{(2,3)} = \pm \sqrt{\frac{4}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}} = \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{3} = \pm \frac{1,73}{\rho}.$$

Vidi se, da su razmaci primarnih maksimuma znatno veći od sekundarnih.

Sada ćemo promotriti iste krugove bez narinutog napona, kod kojih za jačinu vezanja vrijedi — kako znamo — $|K_{\text{kap}} - K_{\text{ind}}|$. Međutim, kako pretpostavljamo krugove s velikim ρ , to će K_{akt} koji smo prije odabrali jednako $\frac{2}{\rho}$, biti maleno. To nadalje znači, da će se gore izračunati maksimumi sedlastih krivulja nalaziti blizu ω_{raz} , te će biti kao obično, u skladu s čitavom dedukcijom:

$$K_{\text{akt}} = |K_{\text{kap}} - K_{\text{ind}}|,$$

dakle, bit će $|K_{\text{kap}} - K_{\text{ind}}|$ jednako $\frac{2}{\rho}$.

Kod usklađenih, energetski slabo vezanih krugova, počinje razmicanje frekvencija kod kritičnog faktora vezanja, kad se izjednače gušenja, dakle, u našem slučaju odmah, jer su im razvezana gušenja jednaka, odnosno $D = 0$. Formula za razmicanje frekvencija glasi:

$$\Delta \omega = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\mathcal{R}e - D^2},$$

dakle u našem slučaju je

$$\Delta \omega = \pm \sqrt{\mathcal{R}e}.$$

Kod mješovitog kapacitivno-induktivnog vezanja — kako smo to već saznali — iznosi:

$$\mathcal{R}e = \frac{\omega_{\text{raz}}^2}{4} (K_{\text{kap}} - K_{\text{ind}})^2,$$

dakle, u našem slučaju,

$$\mathcal{R}e = \left(\frac{\omega_{\text{raz}}}{\rho} \right)^2.$$

Radi toga je:

$$\Delta \omega = \pm \frac{\omega_{\text{raz}}}{\rho}.$$

Prema tome, uz taj $\Delta\omega$, izraz za nesklad za vezne frekvencije glasio bi:

$$v_{1,2} = \frac{\omega_{\text{raz}} \pm \frac{\omega_{\text{raz}}}{\rho}}{\omega_{\text{raz}}} = \frac{\omega_{\text{raz}}}{\omega_{\text{raz}} \pm \frac{\omega_{\text{raz}}}{\rho}} = \frac{1 \pm \frac{1}{\rho}}{1 \pm \frac{1}{\rho}} = \frac{\pm 2\rho + 1}{\rho(\rho \pm 1)}.$$

Uzevši prema pretpostavci nešto povoljniji ρ , na pr. 100, dobili bismo:

$$v_1 = \frac{201}{101\rho}, \text{ odnosno } v_2 = -\frac{199}{99\rho}.$$

Znači, dakle, da se vlastite prigušne vezne frekvencije nalaze između naprijed izračunatih frekvencija primarnih i sekundarnih maksimuma, kod čega je:

$$v_1 < +\frac{2}{\rho}, \text{ ili } v_1 < +K_{\text{akt}},$$

odnosno

$$v_2 < -\frac{2}{\rho}, \text{ ili } v_2 < -K_{\text{akt}}.$$

Ako u našim prije izvedenim formulama:

$$I_1 = \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho^2} + v^2}{\left(\frac{1}{\rho^2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + v^2 \left(\frac{2}{\rho^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right) + v^4}},$$

odnosno

$$I_2 = \frac{EK_{\text{akt}}}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho^2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + v^2 \left(\frac{2}{\rho^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right) + v^4}},$$

koje vrijede za sadašnji slučaj, omski otpori idu prema nuli, odnosno ρ prema ∞ , dobit ćemo formule za neprigušene krugove, t. j.

$$I_1 = \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \left| \frac{v}{K_{\text{akt}}^2 - v^2} \right|,$$

te

$$I_2 = \frac{EK_{\text{akt}}}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \left| \frac{1}{K_{\text{akt}}^2 - v^2} \right|.$$

Ove formule vrijede bez ikakvog zanemarenja, dakle za svaki nesklad s time, da je potpuno egzaktno K_{akt} ovisno o z ! Vidimo, da maksimumi primarne i sekundarne struje, koji su neizmjereno veliki, nastupaju kod iste vrijednosti, t. j.

$$v_{(2,3)} = \pm K_{\text{akt}}.$$

Da vidimo, šta bez zanemarenja predstavlja ta vrijednost $\pm K_{\text{akt}}$!

Kod čisto induktivne veze, bit će:

$$K_{\text{akt}} = z K_{\text{ind}}.$$

Radi toga je:

$$v_{(2,3)} = z - \frac{1}{z} = \pm z K_{\text{ind}},$$

$$z^2 - 1 = \pm z^2 K_{\text{ind}},$$

$$z^2 = \frac{1}{1 \mp K_{\text{ind}}}, \text{ odnosno } \omega^2 = \frac{\omega_{\text{raz}}^2}{1 \mp K_{\text{ind}}},$$

ili za maleni K_{ind}

$$\omega_{k1, k2} = \omega_{\text{raz}} \left(1 \pm \frac{K_{\text{ind}}}{2} \right).$$

Kod čisto kapacitivne veze, bit će:

$$K_{\text{akt}} = \frac{K_{\text{kap}}}{z}.$$

Radi toga je:

$$v_{(2,3)} = z - \frac{1}{z} = \pm \frac{K_{\text{kap}}}{z},$$

$$z^2 - 1 = \pm K_{\text{kap}},$$

$$\omega^2 = (1 \pm K_{\text{kap}}) \omega_{\text{raz}}^2,$$

odnosno za maleni K_{kap} , bit će:

$$\omega_{k1, k2} = \omega_{\text{raz}} \left(1 \pm \frac{K_{\text{kap}}}{2} \right).$$

Pri kombiniranoj vezi, bit će:

$$K_{\text{akt}} = \left| \left(\frac{K_{\text{kap}}}{z} - z K_{\text{ind}} \right) \right|.$$

Radi toga je:

$$v_{(2,3)} = z - \frac{1}{z} = \pm \left(\frac{K_{\text{kap}}}{z} - z K_{\text{ind}} \right),$$

$$z^2 - 1 = \pm (K_{\text{kap}} - z^2 K_{\text{ind}}),$$

$$z^2 \pm z^2 K_{\text{ind}} = 1 \pm K_{\text{kap}},$$

$$z^2 = \frac{1 \pm K_{\text{kap}}}{1 \pm K_{\text{ind}}},$$

odnosno

$$\omega_{k1, k2}^2 = \omega_{\text{raz}}^2 \frac{1 \pm K_{\text{kap}}}{1 \pm K_{\text{ind}}}.$$

Pomnožimo li brojnik i nazivnik s $(1 \mp K_{\text{ind}})$, dobit ćemo:

$$\omega_{\text{raz}}^2 \frac{(1 \pm K_{\text{kap}})(1 \mp K_{\text{ind}})}{(1 \pm K_{\text{ind}})(1 \mp K_{\text{ind}})} = \omega_{\text{raz}}^2 \frac{(1 \pm K_{\text{kap}} \mp K_{\text{ind}} - K_{\text{kap}} K_{\text{ind}})}{1 - K_{\text{ind}}^2}.$$

Pošto je

$$K_{\text{kap}} K_{\text{ind}} = \sqrt{k_{1 \text{ kap}} k_{2 \text{ kap}} k_{1 \text{ ind}} k_{2 \text{ ind}}},$$

a radi usklađenosti već smo kod neprigušenih krugova bez narinutog napona dokazali, da je

$$k_{1 \text{ ind}} k_{2 \text{ kap}} = k_{2 \text{ ind}} k_{1 \text{ kap}},$$

to je

$$K_{\text{kap}} K_{\text{ind}} = k_{1 \text{ ind}} k_{2 \text{ kap}},$$

i prema tome slijedi:

$$\omega_{k1, k2}^2 = \frac{\omega_{\text{raz}}^2}{1 - K_{\text{ind}}^2} [1 - k_{1 \text{ ind}} k_{2 \text{ kap}} \pm (K_{\text{kap}} - K_{\text{ind}})].$$

Vidimo, da smo u sva tri slučaja dobili naše poznate formule za vezne frekvencije neprigušenih usklađenih krugova. To je razumljivo, jer su sada frekvencije primarnih i sekundarnih maksimuma pale zajedno u neprigušne vezne frekvencije, koje se, kod $\rho_1 = \rho_2$ i postojanja sedla, analogno prigušnim veznim frekvencijama, nalaze između frekvencija primarnih i sekundarnih maksimuma istih krugova, ako smo im dodali omske otpore.*)

*) Iz ovoga se vidi, da je upravo prisutnost omskog otpora uzrok, da primarni i sekundarni maksimumi ne nastupaju kod istih frekvencija, t. j. kod neprigušnih veznih frekvencija. Kosi polupravci pod kutovima od 45° na sl. 339. prikazuju te zajedničke nesklade primarnih i sekundarnih maksimuma, u ovisnosti od vezanja, kod krugova bez omskih otpora.

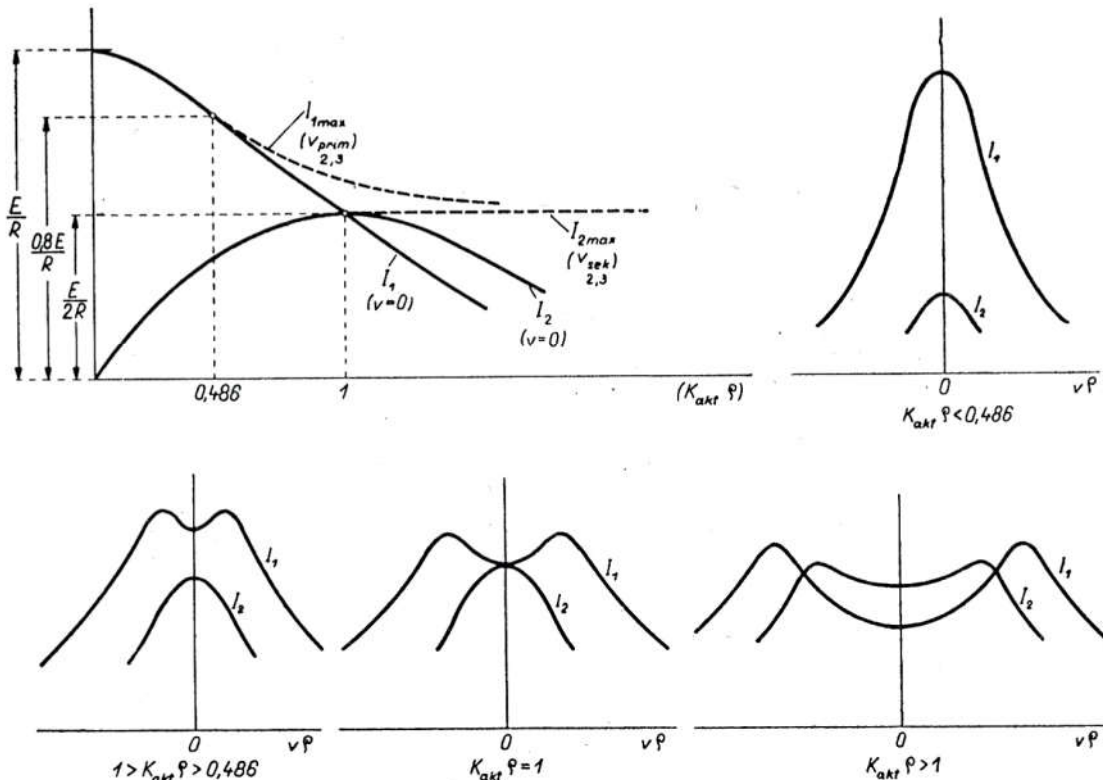
8) Krivulje struja kod $v = 0$. Ako u formuli za I_1 uvrstimo $v = 0$, dobit ćemo vrijednosti amplituda primarnih struja kod frekvencije ω_{raz} u ovisnosti od K_{akt} , te će za $\rho_1 \neq \rho_2$ biti:

$$I_{1(v=0)} = \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \frac{1}{\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2} \cdot \frac{1}{\rho_2}$$

Prema tome, primarna struja kod $v = 0$, te $K_{\text{akt}} = 0$, imat će vrijednost:

$$\frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \rho_1 = \frac{E}{R_1},$$

t. j. vrijednost rezonantne struje razvezanog primarnog kruga.



Slika 340.

Vrijednosti amplituda sekundarnih struja kod frekvencije ω_{raz} za $\rho_1 \neq \rho_2$ bit će:

$$I_{2(v=0)} = \frac{E}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \frac{K_{\text{akt}}}{\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2}$$

Kod $K_{\text{akt}} = 0$, bit će vrijednost sekundarne struje kod $v = 0$ nula, budući da taj krug uopće nije uzbuđen. (Prednje krivulje kod simetričnih krugova prikazane su na sl. 340., gore, lijevo).

ε) Kritični aktivni faktor vezanja i maksimalna vrijednost sekundarne struje kod $v=0$. Da dobijemo t. zv. $K_{\text{akt krit}}$, kod kojega nastupa maksimum vrijednosti sekundarne struje kod $v=0$, derivirat ćemo gornji izraz po K_{akt} , te izjednačiti diferencijalni kvocijent s nulom, t. j.

$$\frac{d I_2}{d(K_{\text{akt}})} \Big|_{(v=0)} = \frac{E}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \frac{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2 \right) - 2 K_{\text{akt}}^2}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2 \right)^2} = 0.$$

Budući da je nazivnik konačan broj različit od nule, to izjednačivši brojnik s nulom, slijedi kritični aktivni faktor vezanja:

$$K_{\text{akt krit}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}.$$

Budući da je

$$\frac{d^2 I_2}{d(K_{\text{akt}})^2} \Big|_{(v=0)} \text{ kod } K_{\text{akt krit}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}$$

negativno, radi se zaista o maksimumu.

Vezanje, kod kojega sekundarna krivulja počinje dobivati sedlo, iznosi prema prijašnjem:

$$K_{\text{akt}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \sqrt{\frac{\rho_2 + \rho_1}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2}}} = K_{\text{akt krit}} \sqrt{\frac{\rho_2 + \rho_1}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2}}}.$$

Kako je izraz pod korijenom kod $\rho_1 \neq \rho_2$ veći od 1, to je faktor vezanja, kod kojeg počinje sekundarno sedlo, veći od $K_{\text{akt krit}}$. Kod $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, faktor vezanja upravo je jednak $K_{\text{akt krit}}$, te tada maksimum sekundarne struje kod $v=0$ nastupa kod istog vezanja, kod kojeg počinje sekundarno sedlo.

Maksimalna vrijednost sekundarne struje kod $v=0$, te $\rho_1 \neq \rho_2$, iznosi:

$$\frac{E}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \frac{1}{\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1 \rho_2}} = \frac{E}{2 \omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \sqrt{\rho_1 \rho_2} = \frac{E \sqrt{L_1 C_1}}{2 \sqrt{L_1 L_2}} \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2} \frac{L_1 L_2}{C_1 C_2}}.$$

Zbog usklađenosti je

$$\frac{L_1}{C_2} = \frac{L_2}{C_1},$$

te će tražena vrijednost biti:

$$\frac{E}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_2}} \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2} \frac{L_2}{C_1}} = \frac{E}{2 \sqrt{R_1 R_2}}.$$

Ova formula vrijedi i za $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Kod simetričnih krugova kod $K_{\text{akt krit}}$, koje iznosi $\frac{1}{\rho}$, bit će vrijednost primarne struje kod $v = 0$:

$$\frac{E}{2 \omega_{\text{raz}} L_1} \rho = \frac{E}{2R},$$

dakle, upravo koliko i maksimalna sekundarna struja kod $v = 0$, koja se kod tog kritičnog aktivnog faktora vezanja pojavljuje, te će se radi toga krivulje primarne i sekundarne struje kod $v = 0$ sjeći u toj točki. Kod $K_{\text{akt}} < \frac{1}{\rho}$ krivulja primarne struje kod $v = 0$ je iznad krivulje sekundarne struje kod $v = 0$, a kod $K_{\text{akt}} > \frac{1}{\rho}$ je ispod nje.

ζ) Krivulje maksimalnih primarnih i sekundarnih struja kod postojanja sedla u ovisnosti od K_{akt} .

Ako u formulu za I_1 unesemo $v_{\text{prim}}^{(2,3)}$, dobit ćemo funkcionalnu ovisnost maksimalnih primarnih struja, kod postojanja sedla, od K_{akt} , t. j.

$$I_{1 \max}^{(v_{\text{prim}}^{(2,3)})} = \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_2^2} + K_{\text{akt}} \sqrt{K_{\text{akt}}^2 + \frac{2}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_1 \rho_2} - \frac{1}{\rho_2^2}}}{\left(\frac{1}{\rho_1 \rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + \left(K_{\text{akt}} \sqrt{K_{\text{akt}}^2 + \frac{2}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_1 \rho_2} - \frac{1}{\rho_2^2}}\right) \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right) + \left(K_{\text{akt}} \sqrt{K_{\text{akt}}^2 + \frac{2}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_1 \rho_2} - \frac{1}{\rho_2^2}}\right)^2}}.$$

$$I_{1 \max}^{(v_{\text{prim}}^{(2,3)})} = \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \sqrt{\frac{K_{\text{akt}} \sqrt{K_{\text{akt}}^2 + \frac{2}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_1 \rho_2}}}{\frac{4K_{\text{akt}}^2}{\rho_1 \rho_2} + 2K_{\text{akt}}^4 + \frac{4K_{\text{akt}}^2}{\rho_2^2} + \left(K_{\text{akt}} \sqrt{K_{\text{akt}}^2 + \frac{2}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_1 \rho_2}}\right) \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right)}}.$$

Za $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, bit će:

$$I_{1 \max}^{(v_{\text{prim}})_{(2,3)}} = \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{(K_{\text{akt}} \rho)^2}}{\frac{8}{\rho^2} + 2 K_{\text{akt}}^2 + \left[\sqrt{1 + \frac{4}{(K_{\text{akt}} \rho)^2}} \right] (-2 K_{\text{akt}}^2)}}$$

Za $K_{\text{akt}} = \frac{0,486}{\rho}$, kod koje vrijednosti počinje sedlo primarne krivulje, početna maksimalna primarna struja, kod postojanja sedla, iznosi:

$$\begin{aligned} \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{(0,486)^2}}{\frac{8}{\rho^2} + 2 \left(\frac{0,486}{\rho} \right)^2 + \left[\sqrt{1 + \frac{4}{(0,486)^2}} \right] \left[-2 \left(\frac{0,486}{\rho} \right)^2 \right]}} &\approx \\ &\approx \frac{E \rho}{\omega_{\text{raz}} L_1} 0,8 = \frac{0,8 E}{R_1} \end{aligned}$$

Istu vrijednost dobili bismo, naravno, i uvrštavanjem $K_{\text{akt}} = \frac{0,486}{\rho}$ u jednadžbu za primarnu struju kod $v = 0$, jer je prvo sedlo sabito u jednu točku kod $v = 0$.

Navedena gornja jednadžba primarnih maksimalnih struja kod postojanja sedla vrijedi, naravno, samo tako dugo, dok se K_{akt} može smatrati konstantnim. Praktično, izraz $\frac{4}{(K_{\text{akt}} \rho)^2}$ kod krugova s vrlo velikim ρ , bit će obično mnogo manji od 1, i radi toga tada prema Mac Laurinu naprijed navedenu jednadžbu možemo pisati:

$$\begin{aligned} I_{1 \max}^{(v_{\text{prim}})_{(2,3)}} &= \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{(K_{\text{akt}} \rho)^2}}{\frac{8}{\rho^2} + 2 K_{\text{akt}}^2 + \left[1 + \frac{2}{(K_{\text{akt}} \rho)^2} \right] (-2 K_{\text{akt}}^2)}} = \\ &= \frac{E}{\omega_{\text{raz}} L_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{(K_{\text{akt}} \rho)^2}}{\frac{4}{\rho^2}}} = \frac{E}{2 R_1} \sqrt{1 + \frac{2}{(K_{\text{akt}} \rho)^2}} \end{aligned}$$

Znači, da se kod nešto jačeg vezanja, vrijednost maksimalne primarne struje, kod postojanja sedla, približava iznosu $\frac{E}{2R_1}$, odnosno kod simetričnih krugova iznosu $\frac{E}{2R}$.

Ako analogno postupimo s izrazom za sekundarnu struju, t. j. da uvrstimo u nj $v_{\text{sek}}^{(2,3)}$, dobit ćemo maksimalnu sekundarnu struju, kod postojanja sedla, kao funkciju od K_{akt} , t. j.

$$I_{2\text{ max}}^{(v_{\text{sek}}^{(2,3)})} = \frac{EK_{\text{akt}}}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + \left(K_{\text{akt}}^2 - \frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2}\right) \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right) + \left(K_{\text{akt}}^2 - \frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{EK_{\text{akt}}}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 - \left(K_{\text{akt}}^2 - \frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2}\right)^2}}.$$

Za $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ bit će iz ove formule:

$$I_{2\text{ max}}^{(v_{\text{sek}}^{(2,3)})} = \frac{E\rho}{2\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} = \frac{E\sqrt{L_1 C_1}}{2\sqrt{L_1 L_2}} \frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \frac{E}{2R_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$$

Budući da je

$$\frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \frac{1}{R_2} \sqrt{\frac{L_2}{C_2}},$$

kao i $L_1 C_1 = L_2 C_2$, to slijedi:

$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{C_1 L_2}{L_1 C_2}} = \sqrt{\frac{L_2 C_2}{L_1} \frac{L_2}{L_1 C_2}} = \frac{L_2}{L_1}.$$

Radi toga je sada:

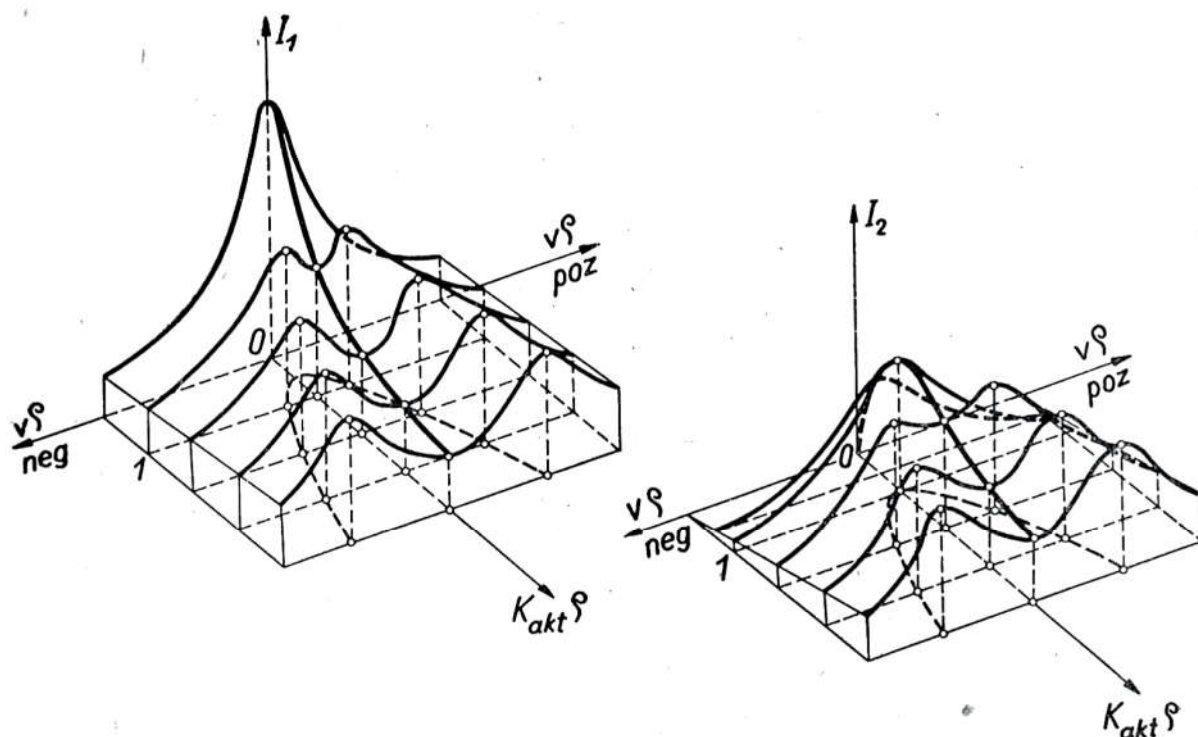
$$I_{2 \max}^{(v_{\text{sek}})_{2,3}} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}},$$

dakle konstantno i upravo jednako maksimalnoj sekundarnoj struji kod $v = 0$, a bez obzira na vezanje!

Kod simetričnih krugova je:

$$I_{2 \max}^{(v_{\text{sek}})_{2,3}} = \frac{E}{2R}.$$

Sl. 340. gore, lijevo, prikazuje za jedan konkretni slučaj simetričnih krugova krivulje I_1 , I_2 , $I_{1 \max}$, te $I_{2 \max}$, u ovisnosti od $(K_{\text{akt}} \rho)$, dok ostala četiri



Slika 341.

crteža, na istoj slici, pokazuju primarne i sekundarne frekventne karakteristike za četiri razne vrijednosti $(K_{\text{akt}} \rho)$. Sl. 341. prikazuje aksonometrički izgled od nekoliko primarnih i sekundarnih frekventnih karakteristika struja simetričnih krugova s nešto drugačijim parametrima, nego u prethodnoj slici, poredanih jedna uz drugu po vezanjima, počevši od nule, pa na više. Sve karakteristike

čine udubljene plohe, koje se s jačim vezanjem sve više proširuju i udubljuju. Da nismo upotreabili simetrične slabo vezane krugove, ne bi te plohe izgledale tako pravilno, nego bi bile to nepravilnije, što se krugovi više međusobno razlikuju, naročito po faktorima kvalitete. Uzevši strogo teoretski nisu te plohe pravilne ni kod simetričnih slabo vezanih krugova.

c) Širina pojasa

Širina pojasa odnosi se na sekundarnu krivulju, jer je važno saznati pojas frekvencija, koje prolaze kroz vezane krugove. Budući da kod usklađenih krugova, uz $\rho_1 \neq \rho_2$, za

$$K_{\text{akt}} \leq \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2}}$$

imamo sekundarnu frekventnu karakteristiku s jednim maksimumom, a za jača vezanja, kad je vrijednost aktivnog faktora vezanja veća od vrijednosti desnog izraza, krivulju s dva maksimuma, to ćemo imati i dvije dedukcije za širinu pojasa.

Za krivulju s jednim maksimumom, bit će odnos struje na granici širine pojasa, uz nesklad, koji ćemo označiti s v_α , prema maksimalnoj struji:

$$\frac{I_2}{I_2(v=0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\frac{EK_{\text{akt}}}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + v_\alpha^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right) + v_\alpha^4}}}{\frac{EK_{\text{akt}}}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \frac{1}{\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2}}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2 + v_\alpha^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2\right) + v_\alpha^4}$$

$$v_\alpha = \pm \sqrt{K_{\text{akt}}^2 - \frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2}} \pm \sqrt{\left(K_{\text{akt}}^2 - \frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2\right)^2}$$

Minus pred unutarnjim korijenom nema fizikalnog smisla, jer bi v_α ispalo imaginarno.

$$v_{\alpha} = \pm \sqrt{K_{\text{akt}}^2 - \frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2}} + \sqrt{2K_{\text{akt}}^4 - K_{\text{akt}}^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2\rho_1^2} + \frac{1}{2\rho_2^2} \right)^2 + \frac{1}{\rho_1^2 \rho_2^2}}.$$

Za krivulju s dva maksimuma, bit će odnos struje na granici širine pojasa, uz nesklad, koji ćemo označiti s v_{β} , prema maksimalnoj struji:

$$\frac{I_2}{I_{2\text{ max}}^{(v_{\text{sek}})_{2,3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{EK_{\text{akt}}}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2 \right)^2 + v_{\beta}^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2 \right) + v_{\beta}^4}}}}{\frac{EK_{\text{akt}}}{\omega_{\text{raz}} \sqrt{L_1 L_2}} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2 \right)^2 - \left(K_{\text{akt}}^2 - \frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2} \right)^2}}}}.$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2\rho_1^2 \rho_2^2} + \frac{2K_{\text{akt}}^2}{\rho_1 \rho_2} - \frac{1}{4\rho_1^4} - \frac{1}{4\rho_2^4} + K_{\text{akt}}^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right)}{\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2 \right)^2 + v_{\beta}^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2K_{\text{akt}}^2 \right) + v_{\beta}^4}.$$

$$v_{\beta} = \pm \sqrt{K_{\text{akt}}^2 - \frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2}} \pm \sqrt{\left(K_{\text{akt}}^2 - \frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} + K_{\text{akt}}^2 \right)^2 + 2K_{\text{akt}}^2 \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right)^2}.$$

$$v_{\beta} = \pm \sqrt{K_{\text{akt}}^2 - \frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}{2}} \pm \sqrt{K_{\text{akt}}^2 \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 - \left(\frac{\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2}}{2} \right)^2}.$$

Za $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, bit će:

$$v_{\alpha} = \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{(K_{\text{akt}} \rho)^2 - 1} + \sqrt{2(K_{\text{akt}} \rho)^4 + 2},$$

$$v_{\beta} = \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{(K_{\text{akt}} \rho)^2 - 1 \pm 2K_{\text{akt}} \rho}.$$

Kako nam je već poznato, v_α vrijedi za

$$K_{akt} \leq \frac{1}{\rho}.$$

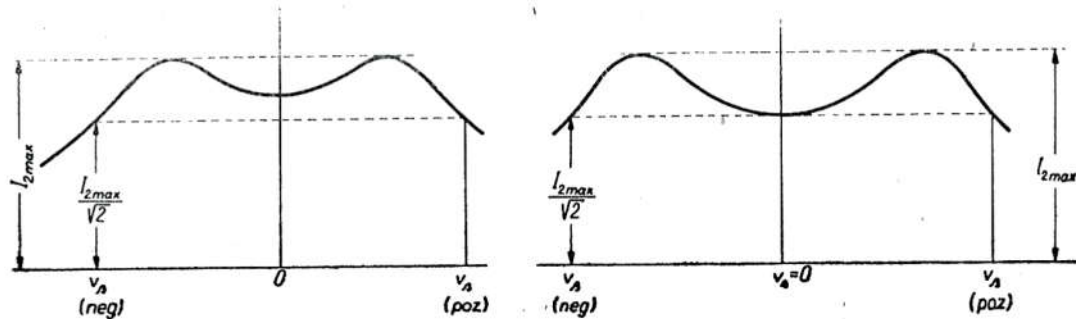
Kod $K_{akt} = 0$, bit će:

$$v_\alpha = \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{-1 + \sqrt{2}} = \pm \frac{0,64}{\rho}.$$

Kod $K_{akt} = \frac{1}{\rho}$, bit će:

$$v_\alpha = \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{2} = \pm \frac{1,41}{\rho}.$$

Kod $K_{akt} \geq \frac{1}{\rho}$, vrijedi v_β . Kako vidimo, v_β ima, za razliku od v_α , općenito četiri vrijednosti, jer zadnji adend pod korijenom ima predznak plus i minus. Međutim, kod K_{akt} , koje je blizu $\frac{1}{\rho}$, vrijedit će samo plus, budući da



Slika 342.

bi s minusom cio izraz pod korijenom postao negativan, a v_β imaginarno, što je nemoguće. Znači, da ćemo tada imati samo dvije vrijednosti v_β , prema sl. 342., lijevo. Kod $K_{akt} = \frac{1}{\rho}$, bit će

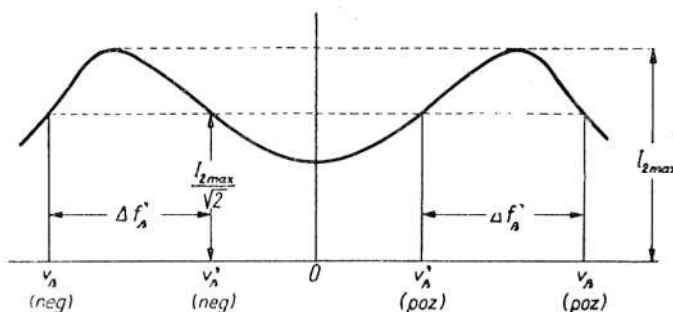
$$v_\beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{\rho} = \pm \frac{1,41}{\rho},$$

dakle, jednako je v_α za to vezanje, što i treba da bude, jer bi inače nastao skok u iznosima širine pojasa kod povećavanja vezanja.

Ukoliko se K_{akt} povećava iznad $\frac{1}{\rho}$, sedlo se spušta sve dublje. Konačno, nastat će situacija prema navedenoj slici, desno. Tada za v_β dobivamo tri rješenja, od kojih je jedno jednako nuli. Tu, naime, osim plusa, počinje vrijediti i predznak minus trećeg adenda pod korijenom, dakle, bit će:

$$(K_{akt}\rho)^2 - 1 - 2K_{akt}\rho = 0,$$

$$(K_{akt}\rho) = 1 \pm \sqrt{1+1}.$$



Slika 343.

Minus pred korijenom nema smisla, jer bi $K_{akt}\rho$ postalo negativno, što je nemoguće. Radi toga je:

$$K_{akt} = \frac{1}{\rho} (1 + \sqrt{2}) = \frac{2,41}{\rho}.$$

Ostale dvije vrijednosti za v_β , kod toga vezanja, iznose:

$$v_\beta = \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{\left(\frac{2,41}{\rho}\right)^2 - 1 + 2 \frac{2,41}{\rho} \rho} = \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{9,6281} = \pm \frac{3,1}{\rho}.$$

Kod $K_{akt} > \frac{2,41}{\rho}$ ima v_β četiri vrijednosti, prema sl. 343.

Sl. 344. prikazuje ovisnost vrijednosti $(v_\alpha \rho)$, $(v_\beta \rho)$, te $(v_\beta' \rho)$, od $(K_{akt} \rho)$.

Uzevši apsolutnu vrijednost od v slijedi:

$$\left| v \right| = \left| \frac{\omega}{\omega_{raz}} - \frac{\omega_{raz}}{\omega} \right| = \left| \frac{\omega^2 - \omega_{raz}^2}{\omega_{raz} \omega} \right| = \left| \frac{f^2 - f_{raz}^2}{f_{raz} f} \right| = \left| \frac{(f + f_{raz})(f - f_{raz})}{f_{raz} f} \right| \approx$$

$$\approx \left| \frac{2(f - f_{raz})}{f_{raz}} \right| = \frac{\Delta f}{f_{raz}}, \text{ odnosno } \Delta f = f_{raz} |v|.$$

Prema tome, kod krivulje s jednim maksimumom, širina pojasa bit će:

$$\Delta f_\alpha = f_{raz} |v_\alpha|.$$

Kod krivulje s dva maksimuma, za slučaj, da je najniža točka sedla iznad $\frac{I_{2 \max}}{\sqrt{2}}$, širina pojasa bit će:

$$\Delta f_{\beta} = f_{\text{raz}} |v_{\beta}|.$$

Ako je najniža točka sedla upravo jednaka $\frac{I_{2 \max}}{\sqrt{2}}$, dakle, kod

$$K_{\text{akt}} = \frac{2,41}{\rho},$$

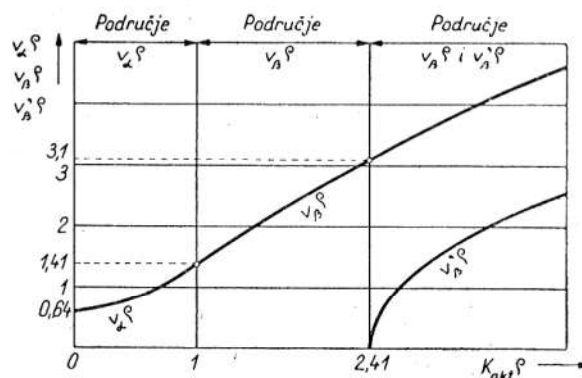
bit će:

$$\Delta f_{\beta} = f_{\text{raz}} \frac{3,1}{\rho}.$$

Ako je najniža točka sedla manja od $\frac{I_{2 \max}}{\sqrt{2}}$, dakle, kod

$$K_{\text{akt}} > \frac{2,41}{\rho},$$

Slika 344.



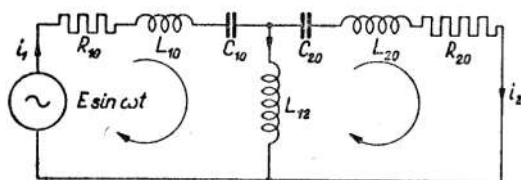
bit će širina pojasa, samo za jednu stranu frekventne karakteristike:

$$\Delta f_{\beta}' = f_{\text{raz}} \left| \frac{v_{\beta} - v_{\beta}'}{2} \right|.$$

To se vidi na navedenoj slici 343.

27. STACIONARNO STANJE DVAJU NEUSKLAĐENIH VEZANIH ELEKTRIČNIH KRUGOVA POD UTJECAJEM NARINUTOG SINUSOVOG NAPONA

U prethodnom poglavlju razmatrali smo stacionarno stanje usklađenih krugova. Sada ćemo još izračunati stacionarne vrijednosti općenitih neuskla-



Slika 345.

denih krugova u ovisnosti od nesklada. Pretpostavit ćemo najčešće, t. j. induktivno vezanje prema sl. 345., te će biti:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{10}, & R_2 &= R_{20}, \\ L_1 &= L_{10} + L_{12}, & L_2 &= L_{20} + L_{12}, \\ C_1 &= C_{10}, & C_2 &= C_{20}. \end{aligned}$$

Nadalje će vrijediti slijedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned} E \sin \omega t &= L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt - L_{12} \frac{di_2}{dt}, \\ 0 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt - L_{12} \frac{di_1}{dt}. \end{aligned}$$

Partikularna rješenja su:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1 \sin(\omega t - \varphi_1), \\ i_2 &= I_2 \sin(\omega t - \varphi_1 - \varphi_{12}). \end{aligned}$$

Uvršteno u diferencijalne jednadžbe, daje:

$$\begin{aligned} E \sin \omega t &= L_1 \omega I_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + R_1 I_1 \sin(\omega t - \varphi_1) - \\ &\quad - \frac{I_1}{\omega C_1} \cos(\omega t - \varphi_1) - L_{12} \omega I_2 \cos(\omega t - \varphi_1 - \varphi_{12}), \\ 0 &= L_2 \omega I_2 \cos(\omega t - \varphi_1 - \varphi_{12}) + R_2 I_2 \sin(\omega t - \varphi_1 - \varphi_{12}) - \\ &\quad - \frac{I_2}{\omega C_2} \cos(\omega t - \varphi_1 - \varphi_{12}) - L_{12} \omega I_1 \cos(\omega t - \varphi_1). \end{aligned}$$

Iz prve jednačbe za $(\omega t - \varphi_1) = 0$, odnosno $\omega t = \varphi_1$, slijedi:

$$E \sin \varphi_1 = L_1 \omega I_1 - \frac{I_1}{\omega C_1} - L_{12} \omega I_2 \cos \varphi_{12}. \quad 1.)$$

Za $(\omega t - \varphi_1) = \frac{\pi}{2}$, odnosno $\omega t = \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)$, iz prve jednačbe slijedi:

$$E \cos \varphi_1 = R_1 I_1 - L_{12} \omega I_2 \sin \varphi_{12}. \quad 2.)$$

Iz druge jednačbe za $(\omega t - \varphi_1 - \varphi_{12}) = 0$, odnosno $(\omega t - \varphi_1) = \varphi_{12}$, slijedi:

$$0 = L_2 \omega I_2 - \frac{I_2}{\omega C_2} - L_{12} \omega I_1 \cos \varphi_{12}. \quad 3.)$$

Za $(\omega t - \varphi_1 - \varphi_{12}) = \frac{\pi}{2}$, odnosno $(\omega t - \varphi_1) = \frac{\pi}{2} + \varphi_{12}$, iz druge jednačbe slijedi:

$$0 = R_2 I_2 + L_{12} \omega I_1 \sin \varphi_{12}. \quad 4.)$$

Dobivene četiri jednačbe možemo dalje preinačiti, t. j.

$$\frac{E}{I_1 R_1} \sin \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{R_1} - \frac{1}{R_1 \omega C_1} - \frac{L_{12} \omega}{R_1} \frac{I_2}{I_1} \cos \varphi_{12},$$

$$\frac{E}{I_1 R_1} \cos \varphi_1 = 1 - \frac{L_{12} \omega}{R_1} \frac{I_2}{I_1} \sin \varphi_{12}.$$

$$0 = \frac{L_2 \omega}{R_2} - \frac{1}{\omega C_2 R_2} - \frac{L_{12} \omega}{R_2} \frac{I_1}{I_2} \cos \varphi_{12},$$

$$0 = 1 + \frac{L_{12} \omega}{R_2} \frac{I_1}{I_2} \sin \varphi_{12}.$$

Budući da je $\frac{\omega_1 L_1}{R_1} = \rho_1$, $\frac{\omega_2 L_2}{R_2} = \rho_2$, $k_{1 \text{ ind}} = \frac{L_{12}}{L_1}$, $k_{2 \text{ ind}} = \frac{L_{12}}{L_2}$, te nadalje $\omega_1 L_1 = \frac{1}{\omega_1 C_1}$, odnosno $\omega_2 L_2 = \frac{1}{\omega_2 C_2}$, to će biti:

$$\frac{E}{I_1 R_1} \sin \varphi_1 = \frac{\omega_1 L_1}{R_1} \frac{\omega}{\omega_1} - \frac{1}{R_1 \omega_1 C_1} \frac{\omega}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_1} k_{1 \text{ ind}} \frac{L_1 \omega_1}{R_1} \frac{I_2}{I_1} \cos \varphi_{12},$$

$$\frac{E}{I_1 R_1} \cos \varphi_1 = 1 - \frac{\omega}{\omega_1} k_{1 \text{ ind}} \frac{L_1 \omega_1}{R_1} \frac{I_2}{I_1} \sin \varphi_{12}.$$

$$0 = \frac{\omega}{\omega_2} \frac{\omega_2 L_2}{R_2} - \frac{\omega_2}{\omega} \frac{1}{\omega_2 C_2 R_2} - \frac{\omega}{\omega_2} k_{2 \text{ ind}} \frac{L_2 \omega_2}{R_2} \frac{I_1}{I_2} \cos \varphi_{12},$$

$$0 = 1 + \frac{\omega}{\omega_2} k_{2 \text{ ind}} \frac{L_2 \omega_2}{R_2} \frac{I_1}{I_2} \sin \varphi_{12}.$$

Ako uvrstimo, da je $\frac{\omega}{\omega_1} = z_1$, $\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right) = v_1$, $\frac{\omega}{\omega_2} = z_2$, te $\left(\frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega}\right) = v_2$, bit će:

$$\frac{E}{I_1 R_1} \sin \varphi_1 = \rho_1 v_1 - z_1 k_{1 \text{ ind}} \rho_1 \frac{I_2}{I_1} \cos \varphi_{12}, \quad 1 \text{ a.)}$$

$$\frac{E}{I_1 R_1} \cos \varphi_1 = 1 - z_1 k_{1 \text{ ind}} \rho_1 \frac{I_2}{I_1} \sin \varphi_{12}. \quad 2 \text{ a.)}$$

$$0 = \rho_2 v_2 - z_2 k_{2 \text{ ind}} \rho_2 \frac{I_1}{I_2} \cos \varphi_{12}, \quad 3 \text{ a.)}$$

$$0 = 1 + z_2 k_{2 \text{ ind}} \rho_2 \frac{I_1}{I_2} \sin \varphi_{12}. \quad 4 \text{ a.)}$$

Iz jednadžbi 3 a.) i 4 a.) slijedi diobom:

$$\cotg \varphi_{12} = -\rho_2 v_2.$$

To je prvi rezultat. Kod toga može $(-\varphi_{12})$ biti samo između 0 i π , odnosno φ_{12} između 0 i $(-\pi)$, dakle, $\mathcal{J}_2$ je ispred $\mathcal{J}_1$. To možemo najbrže uočiti, ako u drugu diferencijalnu jednadžbu uvrstimo partikularni integral u verzorskom obliku, t. j.

$$0 = L_2 j \omega \mathcal{J}_2 + R_2 \mathcal{J}_2 + \frac{1}{C_2 j \omega} \mathcal{J}_2 - L_{12} j \omega \mathcal{J}_1.$$

Iz toga slijedi:

$$\mathcal{J}_2 = \frac{j \omega L_{12}}{R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} \mathcal{J}_1.$$

Kako se kut nazivnika u ekstremnim slučajevima približuje k $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$, odnosno k $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, ukupni kut zaokretanja verzora $\mathcal{J}_1$ u ekstremnim slučajevima iznositi će $\left[\frac{\pi}{2} - \left(\pm \frac{\pi}{2}\right)\right]$, t. j. od 0 do π , koji će položaj biti položaj verzora $\mathcal{J}_2$.

Ako kvadriramo jednadžbe 3 a.) i 4 a.), te ih zbrojimo, dobit ćemo:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{z_2 k_{2 \text{ ind } \rho_2}} \sqrt{1 + (\rho_2 v_2)^2}.$$

To je drugi rezultat. Minus pred korijenom ne dolazi u obzir, jer su amplitude uvijek istoimene, i to pozitivne. Tu činjenicu smo, zapravo, već čutke usvojili kod utvrđivanja φ_{12} .

Ako dobivene rezultate uvrstimo u 1 a.), uz

$$\cos \varphi_{12} = \frac{\cotg \varphi_{12}}{\sqrt{\cotg^2 \varphi_{12} + 1}},$$

slijedi:

$$\frac{E}{I_1 R_1} \sin \varphi_1 = \rho_1 v_1 - z_1 k_{1 \text{ ind } \rho_1} \frac{z_2 k_{2 \text{ ind } \rho_2}}{\sqrt{1 + (\rho_2 v_2)^2}} \frac{(-\rho_2 v_2)}{\sqrt{(\rho_2 v_2)^2 + 1}},$$

$$\frac{E}{I_1 R_1} \sin \varphi_1 = \rho_1 v_1 + \frac{z_1 z_2 K_{\text{ind}}^2 \rho_1 \rho_2 v_2}{(\rho_2 v_2)^2 + 1}.$$

Ako analogno postupimo s 2 a.), uz

$$\sin \varphi_{12} = \frac{1}{\sqrt{\cotg^2 \varphi_{12} + 1}},$$

slijedi:

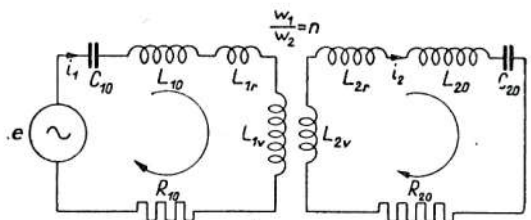
$$\frac{E}{I_1 R_1} \cos \varphi_1 = 1 - \frac{z_1 z_2 K_{\text{ind}}^2 \rho_1 \rho_2}{(\rho_2 v_2)^2 + 1}.$$

Dijeljenjem tih dviju jednadžbi, slijedi izraz za $\tg \varphi_1$ s time, da je φ_1 između $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ i $\frac{\pi}{2}$, budući da između narinutog napona i njegove pripadne struje ne može biti drugačiji kut. Ako obje jednadžbe kvadriramo, te ih potom zbrojimo, dobit ćemo jednadžbu iz koje lako izračunamo I_1 .

Budući da su nam poznate četiri veličine, t. j. I_1 , $\frac{I_1}{I_2}$, φ_1 , te φ_{12} , s time smo pronašli obje stacionarne struje, za bilo kakav nesklad.

28. TRANSFORMATOR BEZ ŽELJEZNE JEZGRE U ELEKTRIČNIM TITRAJNIM KRUGOVIMA

Sl. 346. prikazuje dva električna titrajna kruga, vezana transformatorom bez željezne jezgre. S indeksom r označili smo primarni i sekundarni induktivitet rasipanja, a s indeksom v primarni i sekundarni vezani induktivitet.



Slika 346.



Slika 347.

Smjer primarnog i sekundarnog namota transformatora, nacrtanog na slici, isti je. Ukoliko bi sekundarni namot imao obrnut smjer, naznačen na sl. 347., to bi ovo razmatranje vrijedilo i za takav transformator, s time, da bi tada struja i_2 također imala obrnut smjer. Odnos broja zavoja primarnog i sekundarnog namota je $\frac{w_1}{w_2} = n$, i radi toga je odnos vezanih induktiviteta:

$$\frac{L_{1v}}{L_{2v}} = \frac{w_1^2}{w_2^2} = n^2, \text{ odnosno } \sqrt{\frac{L_{1v}}{L_{2v}}} = n.$$

Budući da se inducirani napon na sekundarnoj strani transformira kao n puta veći na primarnoj strani, a inducirani napon na primarnoj kao n puta manji na sekundarnoj strani, to će diferencijalne jednadžbe krugova glasiti:

$$e = \frac{1}{C_{10}} \int i_1 dt + i_1 R_{10} + (L_{10} + L_{1r} + L_{1v}) \frac{di_1}{dt} - L_{2v} \frac{di_2}{dt} n,$$

$$0 = \frac{1}{C_{20}} \int i_2 dt + i_2 R_{20} + (L_{20} + L_{2r} + L_{2v}) \frac{di_2}{dt} - L_{1v} \frac{di_1}{dt} \frac{1}{n}.$$

Iz odnosa

$$\frac{L_{1v}}{L_{2v}} = n^2$$

slijedi:

$$L_{2v} n = L_{1v} \frac{1}{n} = M,$$

t. j. koeficijent međusobne indukcije. Nadalje je:

$$L_{2v} n \frac{L_{1v}}{n} = M^2, \text{ ili } M = \sqrt{L_{1v} L_{2v}}.$$

Karakteristične vrijednosti gornjih krugova su, kako slijedi:

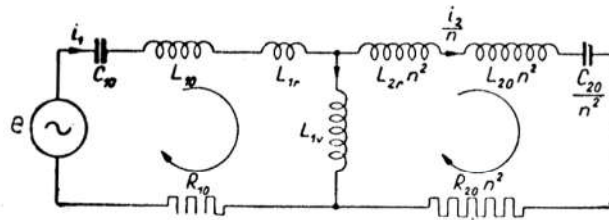
$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L_{10} + L_{1r} + L_{1v})C_{10}}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L_{20} + L_{2r} + L_{2v})C_{20}}},$$

$$k_{1 \text{ ind}} = \frac{L_{1v}}{L_{10} + L_{1r} + L_{1v}}, \quad k_{2 \text{ ind}} = \frac{L_{2v}}{L_{20} + L_{2r} + L_{2v}},$$

$$\rho_1 = \frac{1}{R_{10}} \sqrt{\frac{L_{10} + L_{1r} + L_{1v}}{C_{10}}}, \quad \rho_2 = \frac{1}{R_{20}} \sqrt{\frac{L_{20} + L_{2r} + L_{2v}}{C_{20}}}.$$

Ako je $L_{1v} = L_{2v}$, te ako oba namota imaju isti smjer, onda ih možemo nadomjestiti samo jednim namotom, te tada imamo naše uobičajene induktivno vezane krugove. Da to postignemo, možemo n puta povećati broj sekundarnih

Slika 348.



zavoja, ili n puta umanjiti broj primarnih zavoja. Kod toga diferencijalne jednadžbe moraju sadržajno ostati iste kao i prije. Kod redukcije na primarnu stranu, samo ćemo drugu jednadžbu pomnožiti s n , i shodno pisati obje jednadžbe, t. j.

$$e = \frac{1}{C_{10}} \int i_1 dt + i_1 R_{10} + (L_{10} + L_{1r} + L_{1v}) \frac{di_1}{dt} - L_{2v} n^2 \frac{d\left(\frac{i_2}{n}\right)}{dt},$$

$$0 = \frac{1}{\frac{C_{20}}{n^2}} \int \left(\frac{i_2}{n}\right) dt + \left(\frac{i_2}{n}\right) R_{20} n^2 + (L_{20} + L_{2r} + L_{2v}) n^2 \frac{d\left(\frac{i_2}{n}\right)}{dt} - L_{1v} \frac{di_1}{dt}.$$

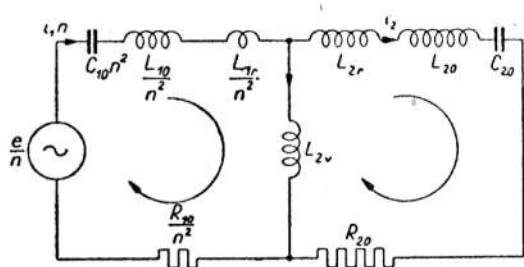
Te jednadžbe daju sl. 348.

Karakteristične vrijednosti ω_1 , $k_{1 \text{ ind}}$, te ρ_1 , naravno, iste su kao i kod originalnih krugova, jer se u primarnom krugu nije dogodila nikakva promjena.

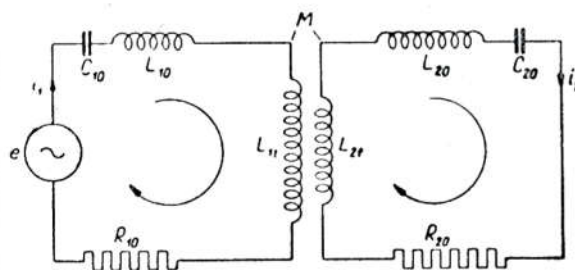
Za drugi krug slijedi:

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \frac{1}{\sqrt{(L_{1v} + L_{2r} n^2 + L_{20} n^2) \frac{C_{20}}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(L_{2v} n^2 + L_{2r} n^2 + L_{20} n^2) \frac{C_{20}}{n^2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(L_{2v} + L_{2r} + L_{20}) C_{20}}} \\ k_{2 \text{ ind}} &= \frac{L_{1v}}{L_{1v} + L_{2r} n^2 + L_{20} n^2} = \frac{L_{2v} n^2}{L_{2v} n^2 + L_{2r} n^2 + L_{20} n^2} = \\ &= \frac{L_{2v}}{L_{2v} + L_{2r} + L_{20}} \\ \rho_2 &= \frac{1}{R_{20} n^2} \sqrt{\frac{(L_{1v} + L_{2r} n^2 + L_{20} n^2) \frac{C_{20}}{n^2}}{C_{20}}} = \frac{1}{R_{20} n^2} \sqrt{\frac{(L_{2v} n^2 + L_{2r} n^2 + L_{20} n^2) \frac{C_{20}}{n^2}}{C_{20}}} = \\ &= \frac{1}{R_{20}} \sqrt{\frac{(L_{2v} + L_{2r} + L_{20})}{C_{20}}}\end{aligned}$$

Vidimo, da su gornje karakteristične vrijednosti i za sekundarni krug ostale nepromijenjene.



Slika 349.



Slika 350.

Kod redukcije na sekundarnu stranu, samo ćemo prvu jednadžbu originalnih krugova podijeliti s n , i shodno pisati obje jednadžbe:

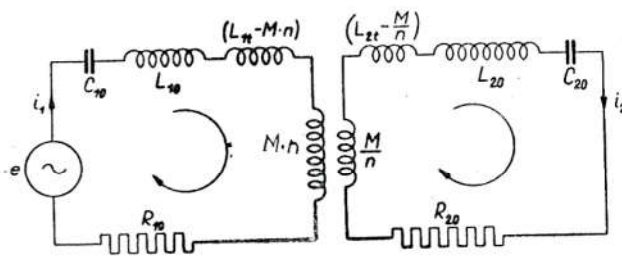
$$\begin{aligned}\frac{e}{n} &= \frac{1}{C_{10} n^2} \int (i_1 n) dt + (i_1 n) \frac{R_{10}}{n^2} + \frac{(L_{10} + L_{1r} + L_{1v})}{n^2} \frac{d(i_1 n)}{dt} - L_{2v} \frac{di_2}{dt} \\ 0 &= \frac{1}{C_{20}} \int i_2 dt + i_2 R_{20} + (L_{20} + L_{2r} + L_{2v}) \frac{di_2}{dt} - \frac{L_{1v}}{n^2} \frac{d(i_1 n)}{dt}\end{aligned}$$

Te dvije jednadžbe daju sl. 349.

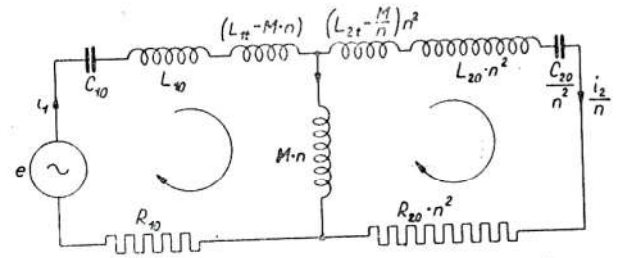
Karakteristične vrijednosti drugog kruga iste su kao i kod originalnih krugova. Za prvi krug slijedi:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L_{10}}{n^2} + \frac{L_{1r}}{n^2} + L_{2v}\right) C_{10} n^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_{10}}{n^2} + \frac{L_{1r}}{n^2} + \frac{L_{1v}}{n^2}} C_{10} n^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(L_{10} + L_{1r} + L_{1v}) C_{10}}} \\ k_{1 \text{ ind}} &= \frac{L_{2v}}{L_{2v} + \frac{L_{1r}}{n^2} + \frac{L_{10}}{n^2}} = \frac{\frac{L_{1v}}{n^2}}{\frac{L_{1v}}{n^2} + \frac{L_{1r}}{n^2} + \frac{L_{10}}{n^2}} = \frac{L_{1v}}{L_{1v} + L_{1r} + L_{10}} \\ \rho_1 &= \frac{1}{\frac{R_{10}}{n^2}} \sqrt{\frac{L_{2v} + \frac{L_{1r}}{n^2} + \frac{L_{10}}{n^2}}{C_{10} n^2}} = \frac{1}{\frac{R_{10}}{n^2}} \sqrt{\frac{\frac{L_{1v}}{n^2} + \frac{L_{1r}}{n^2} + \frac{L_{10}}{n^2}}{C_{10} n^2}} = \\ &= \frac{1}{R_{10}} \sqrt{\frac{L_{1v} + L_{1r} + L_{10}}{C_{10}}}\end{aligned}$$

Prema tome, karakteristične vrijednosti i za ovaj krug ostale su nepromijenjene.



Slika 351.

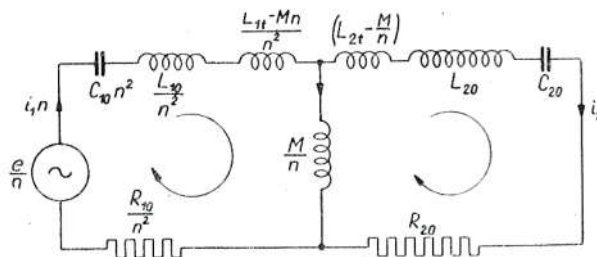


Slika 352.

Često nisu zadane odijeljene vrijednosti rasipnih i vezanih induktiviteta, nego sveukupni induktivitet primarne i sekundarne strane transformatora L_{1t} , i L_{2t} , te koeficijent međusobne indukcije prema sl. 350. Vrlo je jednostavno podijeliti induktivitete L_{1t} , i L_{2t} , na njihove rasipne i vezane dijelove, budući da je:

$$Mn = \sqrt{L_{1v} L_{2v}} \sqrt{\frac{L_{1v}}{L_{2v}}} = L_{1v}, \text{ a } \frac{M}{n} = \sqrt{L_{1v} L_{2v}} \sqrt{\frac{L_{2v}}{L_{1v}}} = L_{2v}.$$

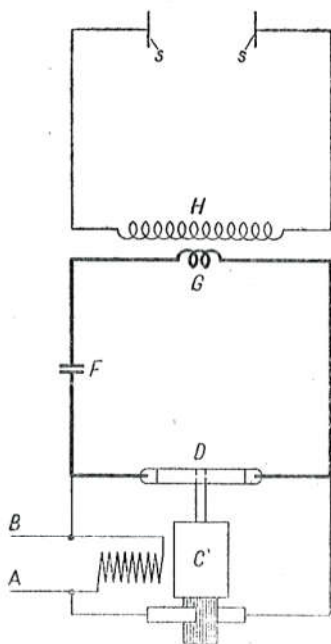
Prema tome, gornji krugovi s odijeljenim rasipnim i vezanim induktivitetima izgledaju prema sl. 351., a reducirani na primarnu stranu, prema sl. 352., odnosno na sekundarnu stranu, prema sl. 353.



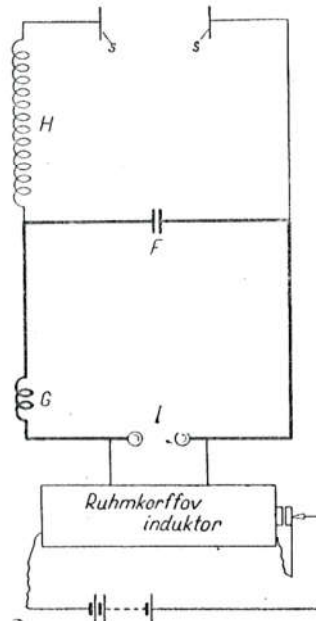
Slika 353.

Kako, dakle, transformatorska vezanja možemo svesti na čisto induktivna vezanja, svi tamošnji rezultati vrijede i za sadašnji slučaj.

Objasnit ćemo još djelovanje uređaja, koji je u četiri varijante patentirao Nikola Tesla dne 22. IX. 1896., kao patent USA pod brojem 568.178. Opisat ćemo četvrtu varijantu prema sl. 354.



Slika 354.



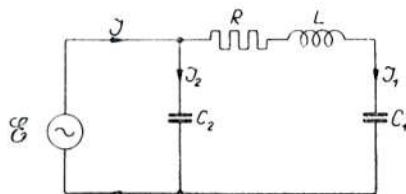
Slika 355.

A i B su dovodi mreže istosmjerne struje, na koju je priključen poredni motor C, koji svojim okretanjem otvara i zatvara sklopku D. Struja kotve prolazi kroz zatvoreni D. Prilikom otvaranja sklopke D, prekida se struja kotve, te se uslijed toga u kotvi inducira snažni napon, koji preko mreže nabija kondenzator F. Tako se, dakle, magnetska energija kotve pretvara u energiju električnog polja kondenzatora. Kod zatvaranja sklopke D, zatvara se titrajni krug, koji se — kako se to vidi na slici — sastoji iz kondenzatora F, koji smo upravo

snabdijeli energijom, zatim iz svitka G , te konačno iz omskih otpora sprovodnika. Sekundarni titrajni krug, koji je s primarnim magnetski vezan, sastoji se iz svitka H , zatim iz kondenzatora vrlo malenog kapaciteta, čije se ploče ss mogu pomicati jedna prema drugoj radi udešavanja kapaciteta, i omskih otpora sprovodnika. Krugovi su usklađeni, a njihovi parametri su takvi, da im je vlastita razvezana frekvencija vrlo visoka, i da među njima nastupa potpuna izmjena titrajne energije. Razumije se, da energija, koja prelazi iz jednog kruga u drugi, postaje postepeno sve manja, pošto se tokom procesa Joule-ova toplina obaju krugova povećava.

Kod zatvorene sklopke D imamo, dakle, dva prigušena vezana titrajna kruga bez narinutog napona, u kojima nastaju dva prigušena sinusova vala naboja i struje. Kad je titrajna energija prešla iz prvog u drugi krug, ona će se jednom nalaziti sva, ili gotovo sva, u magnetskom polju svitka H , a drugi put u električnom polju kondenzatora ss . Pošto kondenzator ss ima vrlo maleni kapacitet, mora prema formuli za energiju, t. j. $\frac{E^2 C}{2}$, u tom času napon na njegovim stezaljkama biti vrlo velik.

Proces istitravanja bit će radi gušenja vrlo kratak, ali će se naskoro ponovno otvoriti sklopka D , i naprijed opisano nabijanje kondenzatora F početi će opet s time, da kod zatvaranja sklopke D nastupa proces prigušenog istitravanja. Frekvencija istitravanja je vrlo velika tako, da je vrijeme, kad je D



Slika 356.

zatvoreno, dovoljno za željeni stepen istitravanja. Umjesto istosmjerne mreže može se upotrebiti i izmjenična mreža, ili Ruhmkorff-ov induktor, a umjesto motora i sklopke D ugrađuje se u krug iskrište. Iskre, koje preskaču između polova iskrišta, kad narinuti napon dosegne potrebnu vrijednost, zatvaraju titrajni krug slično kao prije sklopka D .

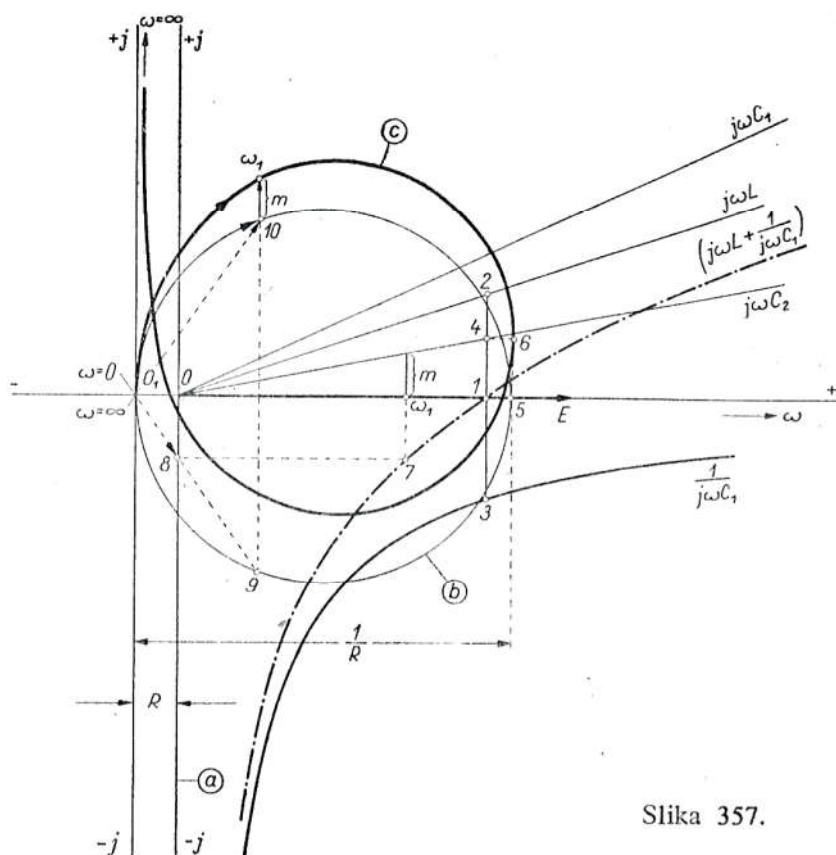
Za vrijeme preskoka iskre između ploča kondenzatora ss , nastat će potpuno nova situacija, jer u tom slučaju taj kondenzator više ne postoji, a međuprostor predstavlja novi element vodljivosti titrajnog kruga. Međutim, od kapaciteta preostao je naravni kapacitet samog svitka.

Transformator s malenim brojem primarnih zavoja G , i vrlo velikim brojem sekundarnih zavoja H , zove se „Teslin transformator“.

Umjesto induktivne veze možemo, prema sl. 355., upotrebiti i kapacitivnu vezu, kod čega mora vezni kondenzator F imati veliki kapacitet prema kondenzatoru ss . U tom slučaju će naponi na kondenzatoru ss biti daleko veći, nego naponi, koji nastaju na veznom kondenzatoru F . Razumije se, da svitak primarnog i svitak sekundarnog kruga, kod takve čisto kapacitivne veze, međusobno nisu ni u kakovoj transformatorskoj sprezi.

29. GRAFIČKA KONSTRUKCIJA FREKVENTNIH KARAKTERISTIKA ELEKTRIČNIH TITRAJNIH KRUGOVA

Na sl. 356. nacrtan je serijski krug RLC_1 , kojemu je paralelno priključen kondenzator C_2 , s narinutim naponom $\mathcal{E}$. Treba grafičkim putem naći frekventnu karakteristiku vanjske struje. U tu svrhu nanijeli smo na sl. 357., u koordinatnom sistemu s ishodištem O , nadesno frekvencije ω kao apscise, a vrijednosti ωC_1 , ωL , te ωC_2 , kao ordinate. Na taj način dobili smo kose



Slika 357.

pravce kroz ishodište, koje smo označili s $j\omega C_1$, $j\omega L$, te $j\omega C_2$, kod čega, naravno, onaj „ j “ još nema nikakav matematski smisao, nego nas samo potsjeća, da ćemo pojedine točke tih pravaca projicirati u imaginarnu os Gaussove ravnine. Kao realnu os te Gaussove ravnine upotrebit ćemo našu apscisnu os, zadržavši njen pozitivni smjer, dok će se imaginarna os po položaju i smjeru podudarati s ordinatnom osi. Uzevši negativne recipročne vrijednosti ordinata ωC_1 , nacrtali smo krivulju:

$$y = -\frac{1}{\omega C_1},$$

koju smo dosljedno označili s $\frac{1}{j\omega C_1}$. Zbrajanjem ordinata dobili smo krivulju:

$$y_1 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1} \right),$$

koju smo analogno označili s:

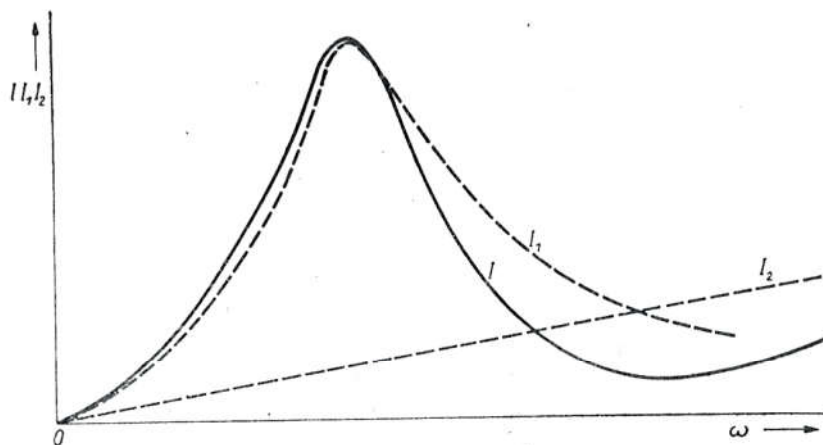
$$\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1}\right).$$

Nanesemo li sada nalijevo od O vrijednost R , dobit ćemo točku O_1 , koja će biti ishodište nove Gaussove ravnine. U toj novoj Gaussovoj ravnini bit će okomiti pravac kroz O , označen s $\mathbf{a}^*$) (dakle, naša prijašnja imaginarna os!), dijagram impedancija:

$$\left[R + \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\right].$$

Točka, koja odgovara $\omega = 0$, nalazit će se u neizmjerljivoj udaljenosti na negativnom dijelu pravca, dok će točka, koja odgovara $\omega = \infty$, ležati u neizmjerljivoj udaljenosti na njegovom pozitivnom dijelu. Inverzija tog dijagrama, t. j. pravca $\mathbf{a}$, bit će kružnica, označena s $\mathbf{b}$, s promjerom $\frac{1}{R}$ kroz O_1 , i ona predstavlja dijagram vodljivosti:

$$\frac{1}{R + \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1}\right)}.$$



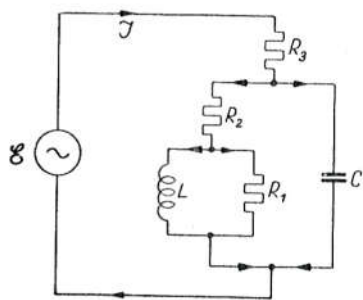
Slika 358.

Na kružnici smo strelicom označili smjer kako slijede vršci kompleksne vodljivosti, počevši od vrijednosti za $\omega = 0$ do $\omega = \infty$, koje obje vrijednosti se, naravno, nalaze u O_1 , t. j. jednake su nuli, jer te frekvencije serijski krug ne propušta. Točka 5 odgovara slučaju rezonancije, kad je:

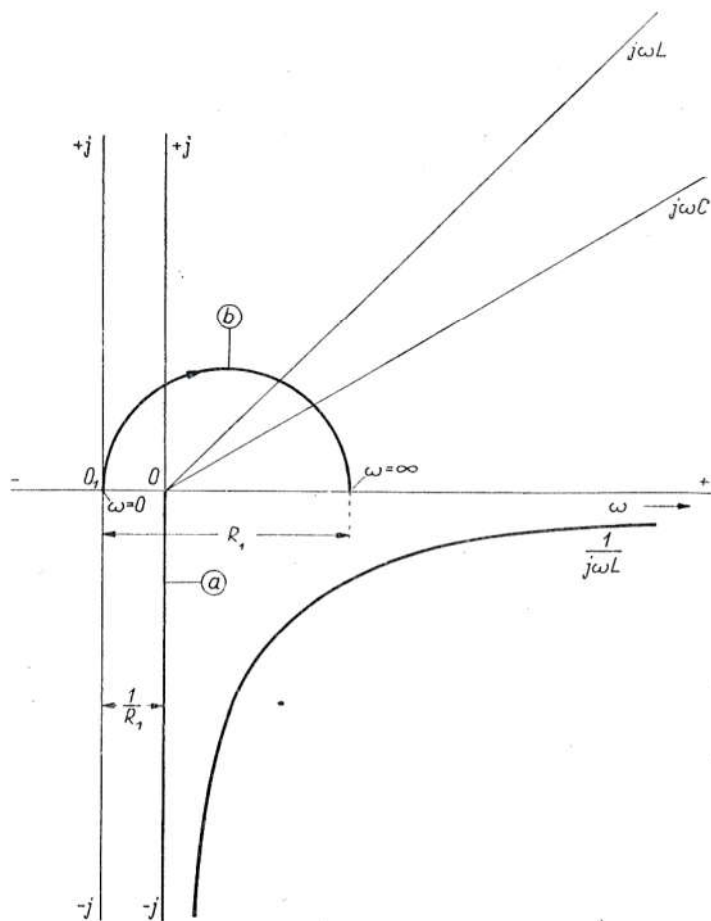
$$\omega L = \frac{1}{\omega C_1}.$$

*) Masna slova u tekstu odgovaraju zaokruženim slovima na slikama.

Vrijednost te rezonantne frekvencije serijskog kruga predstavljena je na apscisnoj osi točkom 1, jer je u tom slučaju $\overline{12} = \overline{13}$. Vodljivost ima tada vrijednost $\frac{1}{R}$.



Slika 359.



Slika 360.

K vodljivosti serijskog kruga treba pribrojiti još vodljivost $j\omega C_2$. To je pokazano na pr. za odabranu frekvenciju ω_1 . Vrijednost

$$\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C_1} \right)$$

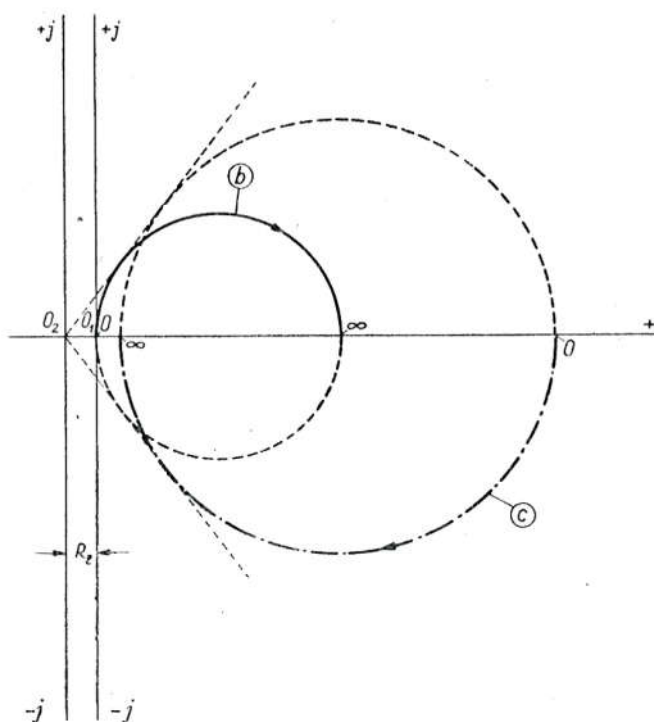
predstavljena je ordinatom točke 7. Impedancija

$$\left[R + \left(j\omega_1 L + \frac{1}{j\omega_1 C_1} \right) \right]$$

predstavljena je tada s $\vec{O_1 8}$. Kompleksna vodljivost

$$\frac{1}{R + \left(j\omega_1 L + \frac{1}{j\omega_1 C_1} \right)}$$

predstavljena je s $\vec{O_1 10}$. Pribrojimo li toj vodljivosti kapacitivnu vodljivost $j\omega_1 C_2$, koja ima vrijednost m , dobili smo sveukupnu vodljivost. Postupivši tako za sve vrijednosti frekvencija od 0 do ∞ , dobili smo dijagram sveukupne vodljivosti, označen s **c**. Kod vodljivosti serijskog kruga jednako $\frac{1}{R}$, t. j. kod frekvencije u točki 1, dobili smo sveukupnu vodljivost tako, da smo vodljivosti $\vec{O_1 5}$ pribrojili kapacitivnu vodljivost $\vec{5 6}$, čiju vrijednost predstavlja ordinata točke 4.

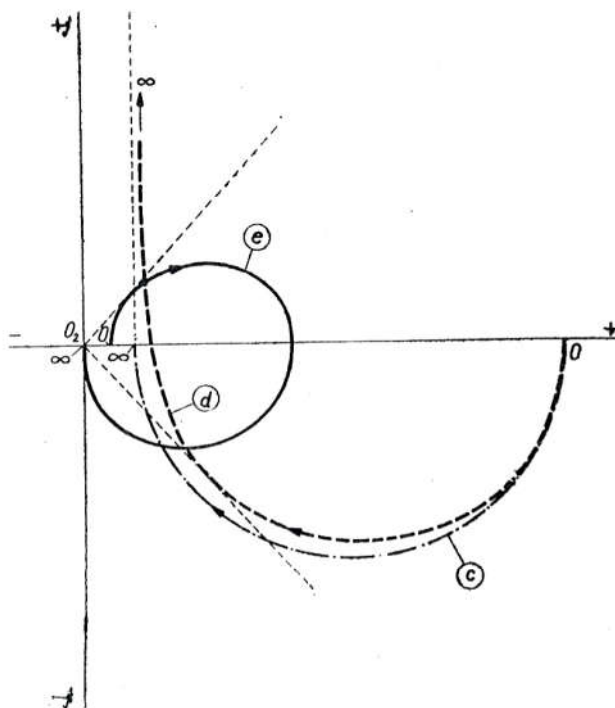


Slika 361.

Stavimo li sada vektor napona $\mathcal{E}$ u realnu os, predstavljat će dijagram vodljivosti, označen s **c**, ujedno i verzorski dijagram struja $\mathcal{I}$ u reduciranom mjerilu, t. j. svaku vodljivost valjalo bi još pomnožiti s vrijednosti E .

Pošto dijagram vodljivosti, označen s **c**, odnosno verzorski dijagram struja $\mathcal{I}$, dva put siječe apscisnu os, to će u tim slučajevima struja biti u fazi s naponom, dakle, imat ćemo dvije rezonantne struje I_0 .

Na slici 358. nacrtana je frekventna karakteristika amplituda struja I , nadalje struja I_1 , te I_2 . Vidimo, da je frekventna karakteristika amplituda struja I_1 naša poznata frekventna karakteristika serijskog kruga. Razumije se, da frekventna karakteristika amplituda struja I ne slijedi prostim algebarskim zbrajanjem pripadnih vrijednosti I_1 , te I_2 , nego verzorskim zbrajanjem dotičnih verzora struja.

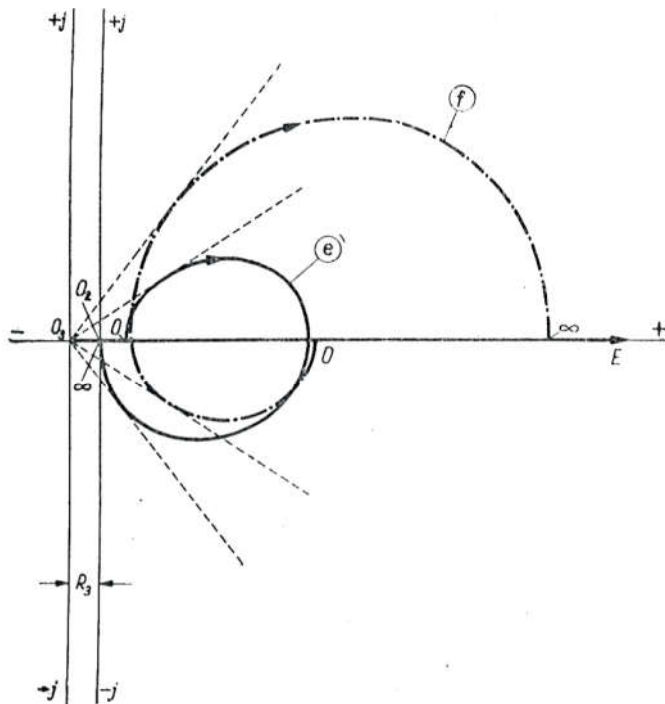


Slika 362.

Na sl. 359. nacrtan je nešto kompliciraniji krug s paralelnim ograncima, za koji treba konstruirati frekventnu karakteristiku. Ponajprije naći ćemo zbroj vodljivosti onih paralelnih grana, koje sadrže L , odnosno R_1 . Na sl. 360. označen je gornji kosi pravac s $j\omega L$, a njegove recipročne vrijednosti s $\frac{1}{j\omega L}$. U udaljenosti $\frac{1}{R_1}$ od O dobili smo O_1 , t. j. ishodište nove Gaussove ravnine. Dijagram zbroja vodljivosti $\frac{1}{j\omega L}$ i $\frac{1}{R_1}$, bit će polupravac, označen s **a**, od točke O prema dolje. Inverzija toga polupravca, označena s **b**, predodčuje dijagram impedancija $\frac{j\omega L R_1}{j\omega L + R_1}$, a strelica pokazuje smjer smještaja vrhova impedancija, počevši od $\omega = 0$ do $\omega = \infty$.

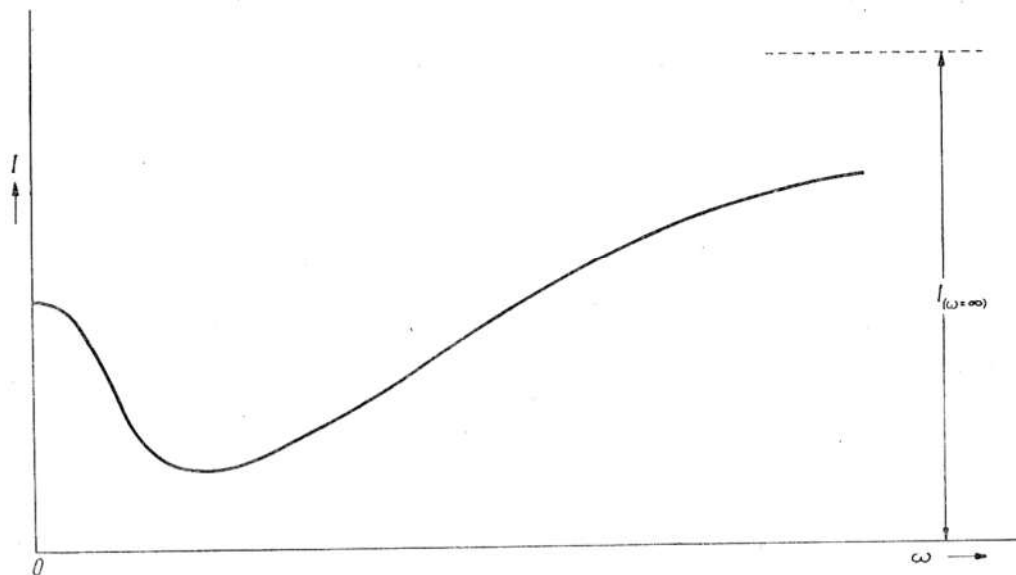
Da ne preopteretimo sliku, nacrtali smo ponovo na sl. 361. dijagram **b** s ishodištem Gaussove ravnine O_1 . Pomaknemo li ishodište za vrijednost R_2 na lijevo u točku O_2 , predstavljat će krivulja označena s **b**, dijagram impedancija

lijeve grane. Njegova inverzija, označena s **c**, predstavljat će vodljivost te grane. Polukružnice smo točkasto nadopunili u potpune kružnice, da se vide njihove zajedničke simetrične tangente.



Slika 363.

Na sl. 362. ponovo smo nacrtali dijagram označen s **c**. Pribrojimo li pojedinim vodljivostima krivulje **c**, vodljivosti desne kapacitivne grane, t. j. $j\omega C$, koje vrijednosti se vide na sl. 360., dobit ćemo dijagram, označen s



Slika 364.

d, koji predstavlja dijagram zbroja vodljivosti obiju paralelnih grana. Inverzija tog dijagrama, označena s **e**, predstavlja dijagram ukupnih impedancija obiju paralelnih grana. Na sl. 363. pomaknuli smo opet ishodište za vrijednost R_3 u

točku O_3 , i tada će dijagram e predstavljati dijagram ukupnih impedancija kruga, a inverzija tog dijagrama, označena s f , predstavljat će dijagram ukupnih vodljivosti kruga. Stavimo li analogno kao i prvi put verzor napona u realnu os, dijagram vodljivosti f predstavljat će ujedno i reducirani verzorski dijagram struja $\mathcal{J}$.

Na sl. 364. predočena je frekventna karakteristika vanjske struje. Struja počinje s vrijednosti kod $\omega = 0$, t. j. $\frac{E}{R_2 + R_3}$, te se potom smanjuje do svog minimuma s time, da kod svog porasta konačno kod $\omega = \infty$ poprima vrijednost $\frac{E}{R_3}$.

Kako se vidi, prilikom grafičke konstrukcije frekventnih karakteristika zaokrenuli smo naš uobičajeni crtež osi Gaussove ravnine za $-\frac{\pi}{2}$. To, je međutim, uslijedilo samo od sebe, jer smo prethodno pretpostavili normalni položaj apscisne osi koordinatnog sistema, t. j. u horizontalnom smjeru, a onda smo tu os poistovjetili s realnom osi Gaussove ravnine.

S A D R Ź A J

	Strana
PREDGOVOR	5
A. UVOD	7
B. MATEMATIČKI IZRAZ ZA POJAV TITRAJA	9
1. GAUSSOVA RAVNINA I PRAVAC TITRANJA. HARMONIČKI TITRAJ I NJEMU PRIDRUŽENI VERZOR	9
2. TREPTAJ I NJEGOV DIFERENCIJALNI KVOCIJENT PO VREMENU. DEGENERIRANI TREPTAJ	16
3. DVA MEĐUSOBNO OKOMITA TITRAJA I NJIHOV FAZNI POMAK	27
4. FOURIEROV RED PERIODIČKE FUNKCIJE	31
a) Matematički izvod. Praktični dokaz za Fourierov red	31
b) Izračunati primjeri	40
c) Metoda preklapanja periodičke funkcije	43
d) Primjeri izračunati metodom preklapanja	46
e) Fourierovi redovi još nekih periodičkih funkcija	50
f) Fourierov red u kompleksnom obliku	51
g) Primjer pravokutne i pilaste funkcije u kompleksnom obliku	54
h) Neke primjedbe o Fourierovom redu. Linijski spektar	56
5. RASTAVLJANJE NEPERIODIČKE FUNKCIJE U HARMONIČKE KOM- PONENTE	59
a) Dobivanje izraza za spektar funkcije	59
b) Spektar funkcije, koja se obostrano od ishodišta sastoji iz istog broja sinusovih valova	63
c) Spektar prigušne funkcije	65
d) Spektar uklopnih funkcija	68
α) s okomitim čelom	68
β) s kosim čelom	69
γ) s eksponencijalnim usponom	72
δ) s harmoničkim usponom	73
ε) Diracove Delta funkcije	75
e) Spektar funkcije, koja obostrano teži čvrstim konačnim vrijednostima različitim od nule	77
f) Sadržaj i spektar impulsa	78
6. HARMONIČKA MODULACIJA	82
a) Općenito i principi praktičnih izvedbi	82
b) Poblje o amplitudnoj harmoničkoj modulaciji	84

	Strana
c) Poblíže o harmoničkoj frekventnoj i faznoj modulaciji	85
α) Slaba modulacija s cosinusovom funkcijom	90
β) Jaka modulacija s cosinusovom funkcijom	90
γ) Razlika između frekventne i fazne modulacije	96
δ) Odnos frekventne i fazne modulacije prema amplitudnoj modulaciji	99
ε) Modulaciona funkcija sastoji se iz više istovrsnih adenada	99
7. IMPULSNA MODULACIJA, OPĆENITO I NAČELNI OPIS NEKIH PRAKTIČNIH IZVEDBI	101
8. DOBIVANJE SPEKTRA AMPLITUDNO MODULIRANIH HARMONIČKIH TITRAJA IZ SPEKTRA AMPLITUDNE FUNKCIJE	106
9. SPEKTAR SINUSOVOG TITRAJA, KOJI POČINJE U $t=0$	111
10. SPEKTAR COSINUSOVOG TITRAJA, KOJI POČINJE U $t=0$	113
11. SPEKTAR TREPTAJA, KOJI POČINJE U $t=0$	114
C. FIZIKALNE VELIČINE I NJIHOVI ODNOSI U ELEKTRIČNIM TITRAJNIM KRUGOVIMA S KONSTANTNIM KONCENTRIRANIM PARAMETRIMA	117
1. ELEMENTI MEHANIČKOG TITRAJNOG KRUGA	117
2. ANALOGIJA MEHANIČKIH I ELEKTRIČNIH VELIČINA	120
3. NEKE PRIMJEDBE O POČETNIM UVJETIMA, PADOVIMA NAPONA I DEFINICIJI $e_c = \frac{q}{C}$, odnosno $i = \frac{dq}{dt}$	124
4. JEDNOSTAVNI NEPRIGUŠENI KRUG BEZ NARINUTOG NAPONA	128
a) Opći integral. Vlastita neprigušna frekvencija	128
b) Energetski odnosi	132
5. PRIGUŠENI SERIJSKI KRUG BEZ NARINUTOG NAPONA	134
a) O mehaničkom i električnom otporu. Opći integral. Faktor gušenja i mjera gušenja	134
α) Aperiodički slučaj	136
β) Granično aperiodički slučaj	138
γ) Oscilatorski slučaj	140
b) Energetski odnosi	145
c) Kapacitet s paralelnom vodljivosti u prigušenom serijskom titrajnom krugu	147
d) Odnos trajanja neprigušene i prigušene periode, logaritmički dekrement i vrijeme polovične vrijednosti	151
e) Spektar prigušenog titraja kao amplitudno moduliranog vala	153
6. DJELOVANJE NARINUTE KONSTANTNE SILE P NA MEHANIČKI, ODNOSNO NARINUTOG KONSTANTNOG NAPONA E NA ELEKTRIČNI TITRAJNI KRUG	154
7. TITRANJE UZ PRISUTNOST KONSTANTNE SILE, KOJA DJELUJE PROTIVNO SMJERU TITRANJA	155
8. RAZMATRANJE DJELOVANJA NARINUTE PERIODIČKE SILE I POJAVA REZONANCIJE U MEHANIČKOM TITRAJNOM KRUGU, PRISILNI ILI PRINUDNI TITRAJI	156

9. DJELOVANJE NARINUTOG SINUSOVOG NAPONA NA ELEKTRIČNI SERIJSKI TITRAJNI KRUG S KONSTANTNIM PARAMETRIMA . .	161
a) Poblje o stacionarnim veličinama	161
b) Spektralni oblik općeg rješenja serijskog titrajnog kruga kod narinutog sinusovog napona	164
c) Detaljnije izračunavanje općeg rješenja $R L C$ kruga uz narinuti sinusov napon, ako je $\delta < \omega_0$	168
d) Serijska frekventna karakteristika	169
α) Pojam nesklada	169
β) Frekventna karakteristika naboja i struje. Rezonantno nadvišenje. Frekventna karakteristika faznog pomaka	170
γ) Odnos stacionarnog kapacitivnog pada napona i narinutog napona	175
δ) Odnos stacionarnog induktivnog pada napona i narinutog napona	177
e) Oštrina rezonancije	178
f) Dobivanje faktora kvalitete serijskog kruga iz krivulja $I = f_1(v)$, $I = f_2(C)$, i $I = f_3(L)$	182
g) Dobivanje faktora kvalitete iz istitravanja prigušenog serijskog kruga	185
h) Širina pojasa serijskog titrajnog kruga	186
i) Energetski odnosi serijskog kruga u stacionarnom stanju	187
j) Mehanički uređaj za dobivanje serijske frekventne karakteristike	191
10. GRAFIČKO RJEŠENJE TITRAJNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE SERIJSKOG KRUGA PO METODI LORDA KELVINA	193
11. PRIMJER ZA DOBIVANJE OPĆEG RJEŠENJA SERIJSKOG KRUGA RAČUNSKIM PUTEM	198
12. IZRAČUNAVANJE DIMENZIJA MJERAČA FREKVENCije	201
13. SVITAK SA ŽELJEZOM U SERIJSKOM TITRAJNOM KRUGU. DOBIVANJE FREKVENTNE KARAKTERISTIKE PO METODI W. PETERSENA	204
14. DJELOVANJE NARINUTOG SINUSOVOG NAPONA NA KRUG S DVA PARALELNA OGRANKA, OD KOJIH JE JEDAN INDUKTIVAN, A DRUGI KAPACITIVAN	211
a) Samo induktivni ogranak sadrži omski otpor	211
α) Rezonantna struja	211
β) Frekventne karakteristike općenito	212
γ) Granični slučajevi frekventnih karakteristika	214
δ) Prividni faktori kvalitete Q_I i Q_U	216
ϵ) Širina pojasa	219
b) Oba ogranka sadrže omski otpor	220
α) Rezonantna struja kod nejednakih omskih otpora	220
β) Rezonantna struja u slučaju jednakih omskih otpora. Otpornička rezonancija	222
γ) Verzorski dijagrami struja kod jednakih omskih otpora. 1. Prvi slučaj: R se ne mijenja. 2. Drugi slučaj: a se ne mijenja. 3. Treći slučaj: z odnosno v se ne mijenja	226

d) Univerzalni verzorski dijagram struja, reduciranih na rezonantnu struju, kod jednakih om- skih otpora	236
c) Smanjenje rezonantnog otpora	239
d) Mehanički uređaj, koji ima istu frekventnu karakteristiku kao i elek- trični krug s dva paralelna ogranka	241
15. POJAM VEZANIH KRUGOVA	242
16. UVODNO OPĆENITO RAZMATRANJE O NEPRIGUŠENIM VEZANIM KRUGOVIMA BEZ PRISUTNOSTI VANJSKE NARINUTE SILE (NA- PONA)	245
a) Eksperimentalna opažanja kod mehaničkih sistema	245
b) Mehanička analogija električnih vezanih krugova	248
c) Glavne titrajne frekvencije	251
d) Pojam simetriranja nesimetričnih sistema	254
17. KAPACITIVNO VEZANI NEPRIGUŠENI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA	255
a) Opći integral titrajnih diferencijalnih jednadžbi	255
b) Granice veznih frekvencija	261
c) Simetrični sistemi	265
d) Po jedan primjer izazivanja zadanih početnih uvjeta	266
a) kod nesimetričnih sistema	266
b) kod simetričnih sistema	267
e) Potpuna izmjena energije između obaju sistema	268
f) Neke primjedbe o postavljanju početnih uvjeta	271
g) Određivanje glavnih frekvencija pomoću struja	275
18. INDUKTIVNO VEZANI NEPRIGUŠENI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA	276
a) Opći integral titrajnih diferencijalnih jednadžbi	276
b) Granice veznih frekvencija	281
c) Simetrični sistemi	284
d) Određivanje glavnih frekvencija pomoću struja	285
19. UPOREĐENJE VEZNIH FREKVENCIJA USKLAĐENIH KRUGOVA KOD KAPACITIVNOG VEZANJA S VEZNIM FREKVENCIJAMA KOD INDUKTIVNOG VEZANJA	286
20. KOMBINIRANO VEZANI NEPRIGUŠENI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA	288
a) Opći integral titrajnih diferencijalnih jednadžbi	288
b) Granice veznih frekvencija	294
c) Određivanje glavnih frekvencija pomoću struja i simetrični sistemi	310
21. OPĆI INTEGRAL TITRAJNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI PRI- GUŠENIH VEZANIH ELEKTRIČNIH KRUGOVA BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA	312
22. SIMETRIČNI PRIGUŠENI VEZANI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NA- RINUTOG VANJSKOG NAPONA	320
a) Izrazi za vezne veličine. Slučaj naročitih početnih uvjeta	320
b) Utjecaj jačine vezanja na vezne veličine	327
a) Općenite primjedbe	327
b) Čisto kapacitivno vezanje	328
γ) Čisto induktivno vezanje	330
d) Čisto otporničko vezanje	332

23. USKLAĐENI PRIGUŠENI VEZANI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA	333
a) Preuređena karakteristična jednačba	333
b) Utjecaj jačine vezanja na vezne veličine kod energetskog vezanja	337
α) $\Delta\omega = 0$, a $(\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_k) \neq 0$	337
β) $\Delta\omega = 0$, a $\delta_{k1,2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \delta_k$	338
γ) $\delta_{k1,2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$, $\Delta\omega \neq 0$	339
δ) Kritično vezanje	339
c) Utjecaj jačine vezanja na vezne veličine kod otporničkog vezanja	341
24. MALO NEUSKLAĐENI PRIGUŠENI VEZANI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA	343
a) Preuređena karakteristična jednačba	343
b) Utjecaj jačine vezanja na vezne veličine, ako je $\delta_1 = \delta_2$	345
c) Utjecaj jačine vezanja na vezne veličine, ako je $\delta_1 \neq \delta_2$	347
α) Veoma slabo vezanje	347
β) Slabo vezanje	349
γ) Jače vezanje	352
25. JAKO NEUSKLAĐENI PRIGUŠENI VEZANI ELEKTRIČNI KRUGOVI BEZ NARINUTOG VANJSKOG NAPONA	357
26. STACIONARNO STANJE DVAJU USKLAĐENIH VEZANIH ELEKTRIČNIH KRUGOVA POD UTJECajem NARINUTOG SINUSOVOG NAPONA	361
a) Izraz za krivulje frekventnih karakteristika naboja i struja	361
b) Razmatranje krivulja frekventnih karakteristika	371
α) Neskladi kod kojih nastupaju ekstremi frekventnih karakteristika	371
β) Vezanja kod kojih jednostavne krivulje prelaze u krivulje s dva maksimuma	376
γ) Odonos vlastitih veznih frekvencija prema frekvencijama kod kojih nastupaju primarni i sekundarni maksimumi	377
δ) Krivulje struja kod $v=0$	382
ε) Kritični aktivni faktor vezanja i maksimalna vrijednost sekundarne struje kod $v=0$	383
ζ) Krivulje maksimalnih primarnih i sekundarnih struja pri postojanju sedla u ovisnosti od K_{akt}	384
c) Širina pojasa	388
27. STACIONARNO STANJE DVAJU NEUSKLAĐENIH VEZANIH ELEKTRIČNIH KRUGOVA POD UTJECajem NARINUTOG SINUSOVOG NAPONA	393
28. TRANSFORMATOR BEZ ŽELJEZNE JEZGRE U ELEKTRIČNIM TITRAJNIM KRUGOVIMA	397
29. GRAFIČKA KONSTRUKCIJA FREKVENTNIH KARAKTERISTIKA ELEKTRIČNIH TITRAJNIM KRUGOVA	403

ZAPAZENE ŠTAMPARSKE GRIJEŠKE

Strana	Red	Ispravci
9	5 odozgo	umjesto „ $\triangle$ “ staviti „ $\triangleq$ “
20	7 odozgo	kod „ ω_2 “ ne vidi se dobro indeks „ $_2$ “
32		na sl. 52., desno, ne vidi se dobro slovo „c“, kojim je označena crtkana površina
122		na sl. 148., ispred četvrte sile odozgo, staviti predznak minus, t. j. umjesto „p“ treba da stoji „—p“
122	2 odozdo	umjesto „vremenudoiq vamo“ staviti „vremenu dobivamo“
148		na sl. 166. induktivitet treba označiti s „L“
182		na sl. 192., lijevo od ishodišta treba staviti „ v_1 “
182	10 odozdo	kod „ $f_3(L)$ “ ne vidi se dobro indeks „ $_3$ “
190	5 odozdo	kod „ Z_v^2 “ ne vidi se dobro oznaka kvadrata
237		stranicu treba providjeti brojem
281	7 odozgo	kod „ ω_{ks}^2 “ ne vidi se dobro oznaka kvadrata
283	4 odozgo	kod „ ω_{ka}^2 “ ne vidi se dobro oznaka kvadrata
284	5 odozgo	u nazivniku drugog izraza kod „ $1 - K_{\text{ind}}$ “ ne vidi se dobro oznaka kvadrata, a u nazivniku trećeg izraza, na istom mjestu, ta je oznaka sasvim ispala
303	4 odozdo	kod „ ω_{ku}^2 “ ne vidi se dobro oznaka kvadrata
323	7 odozgo	pod korijenom kod „ Ω_{ku}^2 “ jedva se nazire oznaka kvadrata
393	8 odozgo	kod „ R_{20} “ ne vidi se „ $_2$ “

Napomena: Osim u naprijed navedenim slučajevima, postoje još oznake kvadrata, koje se jasno ne vide, naročito ako su štampane iznad eventualnih indeksa, a ne malo u stranu.

Znak: 192-Sv

Izdanje:

Ing. ĐURO ŠVARC, doc.

ELEKTRIČNI TITRAJNI KRUGOVI I.

Stručna recenzija:

Akademik Prof. Dr. Ing. DANILO BLANUŠA

Prof. Dr. VATROSLAV LOPAŠIĆ

Izdavač:

»TEHNIČKA KNJIGA«

izdavačko poduzeće Zagreb, Jurišićeva 10

Za izdavača odgovara:

Ing. KUZMAN RAŽNJEVIĆ

Uredništvo sveučilišnih udžbenika -
glavni urednik:

ZVONIMIR VISTRIČKA

Urednik edicije:

IVAN UREMOVIĆ

Korigirao:

Autor

Tisak:

Grafički zavod Hrvatske

Tisak dovršen: rujna 1959.

