

*Petar Kulišić*  
*Vjera Lopac*

# ELEKTROMAGNETSKE POJAVE I STRUKTURA TVARI

12738



ŠKOLSKA KNJIGA — ZAGREB



UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU  
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS





Urednik  
BRANIMIRA VALIĆ

Recenzenti  
Dr. BRANKO EMAN  
Dr. TOMISLAV IVEZIĆ  
Dr. VLADIMIR PAAR

Crteže izradila  
ŽELJKA SAMBOLEK

Grafički urednik  
STJEPAN SAMBOLEK

Lektor  
TOMISLAV SALOPEK

Korektor  
SLAVKO BRNČIĆ

Objavljivanje ovog sveučilišnog udžbenika odobrio je Odbor za znanstveno-nastavnu literaturu Sveučilišta u Zagrebu broj 02-285/1-1989. od 12. lipnja 1989.

CIP – Katalogizacija u publikaciji  
Nacionalna i sveučilišna biblioteka, Zagreb

UDK 537.8(075.8)

UDK 539(075.8)

KULIŠIĆ, Petar

Elektromagnetske pojave i struktura tvari: udžbenik fizike za studente Tehnološkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu / Petar Kulišić, Vjera Lopac; [crteže izradila Željka Sambolek]. – Zagreb: Školska knjiga, 1991. – XII, 511 str.: ilustr.; 24 cm. – (Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu = Manualia Universitatis studiorum Zagrabiensis)

Bibliografija: str. 511. – Kazala.

ISBN 86-03-99656-3

1.Lopac, Vjera

Naklada 1600 primjeraka

Slog i prijelom na računalu  
KAZIMIR RAJIĆ  
DAVOR TOMLJENović

Tisak: TIZ »Zrinski« – Čakovec

Prof. dr. PETAR KULIŠIĆ  
Prof. dr. VJERA LOPAC

# ELEKTROMAGNETSKE POJAVE I STRUKTURA TVARI

Udžbenik fizike za studente Tehnološkog fakulteta  
Sveučilišta u Zagrebu



ŠKOLSKA KNJIGA  
ZAGREB 1991

KNJIZNICA  
Elektrotehničkog fakulteta  
ZAGREB



12738

5356



KNJIZNICA  
ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA  
ZAGREB

Inv. br. 12738

Sign.:

5356

Objavljivanje ovog djela finansijski je pomogla Samoupravna interesna zajednica  
znanosti Republike Hrvatske.

## Predgovor

Ovaj je udžbenik priređen prema nastavnom planu i programu predmeta Fizika za studente prve godine studija kemijske tehnologije na Tehnološkom fakultetu u Zagrebu i namijenjen je u prvom redu studentima tog studija. Njime se mogu služiti i studenti drugih studija na Tehnološkom fakultetu, a također i studenti ostalih tehničkih i nastavničkih fakulteta.

Udžbenik je nastao na osnovi predavanja koja već niz godina autori drže na Tehnološkom fakultetu. Sadržajno i metodički on se nadovezuje na udžbenik *Mehanika i toplina* autora P. Kulišića, koji pokriva veći dio sadržaja predmeta Fizika u prvom semestru studija, te na onaj dio udžbenika *Valovi i optika* autora V. Henč i P. Kulišića koji se bavi titranjima i valovima, što je također sastavni dio programa fizike u prvome semestru studija. Ovim udžbenikom obuhvaćene su električne i magnetske pojave, elektromagnetski valovi i optika, te zakoni kvantne fizike i njihova uloga u razumijevanju i istraživanju strukture tvari.

U nastavnome planu i programu predmeta Fizika za studente kemijske tehnologije posebno je istaknuta važnost osnovnih načela kojima se odlikuju fizički zakoni. To su zakoni očuvanja, principi simetrije, koncept polja, te relativistički, kvantnomehanički i statistički pristup u tumačenju zakonitosti prirode. Tim je načelima prožet i ovaj udžbenik. Pri pisanju udžbenika za studente kemijske tehnologije i kemijskog inženjerstva autori su vodili računa da je riječ o interdisciplinarnom studiju, o studiju koji mora pripremiti studenta za nove tehnologije, a u njima će fizici pripadati sve značajnija uloga. Bilo je potrebno voditi računa i o sadržajima ostalih predmeta na tom studiju te o predznanjima s kojima budući kemijski inženjeri dolaze na fakultet. To se djelomično odražava u strukturi udžbenika i u metodičkom pristupu. U prvom dijelu, koji se bavi elektromagnetskim pojavama i optikom, podjednako su zastupljeni fundamentalni pristup, empirijska znanja i tehničke primjene. U drugom dijelu naglašen je fundamentalni pristup zakonima očuvanja i osnovnim zakonima kvantne fizike, bez kojeg se ne može zamisliti puno razumijevanje kemijskih procesa i pojava u svijetu atomskih dimenzija.

Autori su mišljenja da student mora biti aktivan sudionik u nastavnom procesu i da se stečeno znanje potvrđuje sposobnošću postavljanja i rješavanja konkretnih problema. Stoga je udžbenik protkan nizom riješenih primjera, koji s njime tvore nedjeljivu cjelinu. Na kraju svakog poglavlja dan je i izbor pitanja i zadataka za vježbu. Riješeni primjeri protežu se od najlakših ilustrativnih zadataka, preko težih numeričkih problema od kakvih se sastoje pismeni ispiti, pa sve do opsežnih i kompleksnih zadataka koji zahtijevaju znatniju primjenu matematike i koji su

prikladni kao seminarske teme i referati za nadarenije i marljivije studente. U cijeloj knjizi dosljedno je provedeno načelo da se matematički egzaktno obrađuju one teme za koje je to moguće učiniti služeći se sadržajima iz nastave matematike na prvoj godini studija. Međunarodni sustav jedinica (SI) dosljedno se upotrebljava u cijelom udžbeniku.

Predavanja su praćena demonstracijskim pokusima i s njima čine jedinstvenu cjelinu. Opisi tih pokusa također su nedjeljiv dio udžbenika, unoseći zorne predodžbe, koje se – posebno u klasičnim granama fizike – ne mogu nadomjestiti ničime drugim.

U svjetskoj literaturi postoji velik broj dobrih i suvremenih udžbenika fizike. Autori su se koristili mnogima od njih, prilagodili ih nastavnom programu i čitateljstvu kojemu je namijenjen ovaj udžbenik, te ih upotpunili vlastitim iskustvima. Popis literature nalazi se na kraju knjige.

Na kraju želimo zahvaliti svim onim kolegama fizičarima koji su konstruktivnom suradnjom i mnogobrojnim diskusijama pomogli da se uobličí suvremeni koncept nastave fizike i ohrabрили nas u njegovu ostvarenju, kao i kolegama kemičarima koji su uočili nužnost fundamentalnog i interdisciplinarnog pristupa pojavama u prirodi i njihovim primjenama. Posebno zahvaljujemo recenzentima prof. dr. B. Emanu, prof. dr. T. Iveziću i prof. dr. V. Paaruu na konstruktivnim i kritičkim primjedbama kojima su pomogli da sadržajno i koncepcijski ovaj udžbenik poprими svoj sadašnji oblik. Svakome tko nas upozori na pogreške i propuste koji su se možda potkrali, bit ćemo također iskreno zahvalni.

Autori

U Zagrebu, 15. siječnja 1989.



# Sadržaj

|                                                       |           |
|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I. Elektromagnetske pojave</b>                     | <b>1</b>  |
| <b>1. Elektrostatika</b>                              | <b>1</b>  |
| 1.1. Električni naboji                                | 1         |
| 1.2. Coulombov zakon                                  | 5         |
| 1.3. Električno polje                                 | 10        |
| 1.4. Električna influencija                           | 15        |
| 1.5. Vektor električnoga pomaka                       | 17        |
| 1.6. Električni tok                                   | 18        |
| 1.7. Gaussov zakon                                    | 20        |
| 1.8. Električna potencijalna energija                 | 26        |
| 1.9. Električni potencijal i napon                    | 29        |
| 1.10. Električno polje i gradijent potencijala        | 35        |
| 1.11. Električni dipol                                | 37        |
| 1.12. Dipol u električnome polju                      | 41        |
| 1.13. Električni kapacitet i kondenzatori             | 44        |
| 1.14. Spajanje kondenzatora                           | 51        |
| 1.15. Energija električnoga polja                     | 53        |
| 1.16. Polarizacija dielektrika                        | 54        |
| 1.17. Millikanov eksperiment                          | 62        |
| 1.18. Gibanje naboja pod utjecajem električnoga polja | 64        |
| <b>2. Električna struja</b>                           | <b>71</b> |
| 2.1. Jakost električne struje                         | 71        |
| 2.2. Električni otpor. Ohmov zakon                    | 73        |
| 2.3. Mikroskopski opis električne struje              | 77        |
| 2.4. Mikroskopski oblik Ohmova zakona                 | 80        |
| 2.5. Ovisnost otpora o temperaturi. Supravodljivost   | 81        |
| 2.6. Otpornici                                        | 83        |
| 2.7. Spajanje otpornika                               | 86        |
| 2.8. Izvori napona. Elektromotorna sila               | 89        |
| 2.9. Kirchhoffova pravila                             | 93        |
| 2.10. Instrumenti za mjerenje struje i napona         | 96        |
| 2.11. Kondenzator u strujnome krugu                   | 98        |
| 2.12. Rad i snaga električne struje                   | 101       |
| 2.13. Električna struja u tekućinama                  | 105       |

|                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------|------------|
| <b>3. Magnetsko polje</b>                                     | <b>111</b> |
| 3.1. Osnovne činjenice                                        | 111        |
| 3.2. Magnetsko polje električne struje                        | 113        |
| 3.3. Magnetska indukcija $\vec{B}$                            | 115        |
| 3.4. Jakost magnetskoga polja                                 | 118        |
| 3.5. Biot–Savartov zakon                                      | 119        |
| 3.6. Vodič kojim teče struja u magnetskome polju              | 123        |
| 3.7. Djelovanje struje na struju. Definicija ampera           | 125        |
| 3.8. Ampèreov zakon                                           | 127        |
| 3.9. Magnetski tok                                            | 131        |
| 3.10. Gaussov zakon za magnetizam                             | 133        |
| 3.11. Magnetski moment                                        | 133        |
| 3.12. Potencijalna energija magnetskog dipola                 | 135        |
| 3.13. Gibanje nabijenih čestica u magnetskom polju            | 137        |
| <b>4. Elektromagnetska indukcija</b>                          | <b>145</b> |
| 4.1. Faradayev zakon indukcije                                | 145        |
| 4.2. Lenzovo pravilo                                          | 149        |
| 4.3. Samoindukcija i induktivitet                             | 150        |
| 4.4. Energija magnetskoga polja                               | 155        |
| <b>5. Magnetsko polje u materijalu</b>                        | <b>161</b> |
| 5.1. Magnetizacija                                            | 161        |
| 5.2. Dijamagnetizam                                           | 162        |
| 5.3. Paramagnetizam                                           | 163        |
| 5.4. Feromagnetizam                                           | 164        |
| 5.5. Feromagnetski materijali. Krivulja magnetiziranja        | 166        |
| <b>6. Izmjenična struja</b>                                   | <b>171</b> |
| 6.1. Dobivanje izmjeničnih napona i struja                    | 171        |
| 6.2. Otpori u krugu izmjenične struje                         | 175        |
| 6.3. Serijski spoj radnog, induktivnog i kapacitivnog otpora. | 180        |
| 6.4. Električna rezonancija                                   | 183        |
| 6.5. Rad i snaga izmjenične struje                            | 189        |
| 6.6. Transformatori                                           | 194        |
| 6.7. Trofazna struja                                          | 199        |
| <b>7. Maxwellove jednadžbe. Elektromagnetski valovi</b>       | <b>205</b> |
| 7.1. Gaussov zakon za električno i magnetsko polje            | 205        |
| 7.2. Faradayev zakon indukcije i treća Maxwellova jednadžba   | 206        |
| 7.3. Ampèreov zakon. Struja pomaka                            | 207        |
| 7.4. Maxwellove jednadžbe u integralnu obliku                 | 208        |
| 7.5. Elektromagnetski titraji i valovi                        | 210        |
| 7.6. Širenje elektromagnetskih valova kroz prostor            | 212        |
| 7.7. Energija elektromagnetskoga vala. Poyntingov vektor      | 217        |

|                                                                          |                |
|--------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 7.8. Spektar elektromagnetskih valova . . . . .                          | 218            |
| <b>8. Optika . . . . .</b>                                               | <b>223</b>     |
| 8.1. Vidljiva svjetlost. Izvori svjetlosti . . . . .                     | 224            |
| 8.2. Fotometrijske veličine i jedinice . . . . .                         | 225            |
| 8.3. Osnovni zakoni geometrijske optike . . . . .                        | 232            |
| 8.4. Refleksija i lom svjetlosti . . . . .                               | 234            |
| 8.5. Zrcala . . . . .                                                    | 237            |
| 8.6. Totalna refleksija . . . . .                                        | 245            |
| 8.7. Optička prizma . . . . .                                            | 247            |
| 8.8. Disperzija svjetlosti . . . . .                                     | 248            |
| 8.9. Sferni dioptrar . . . . .                                           | 251            |
| 8.10. Tanka leća . . . . .                                               | 253            |
| 8.11. Pogreške leće . . . . .                                            | 259            |
| 8.12. Optički instrumenti . . . . .                                      | 260            |
| 8.13. Interferencija svjetlosti . . . . .                                | 269            |
| 8.14. Ogib svjetlosti . . . . .                                          | 277            |
| 8.15. Optička rešetka . . . . .                                          | 282            |
| 8.16. Polarizacija svjetlosti . . . . .                                  | 288            |
| <br><b>II. Uvod u strukturu tvari . . . . .</b>                          | <br><b>297</b> |
| <b>9. Osnovna međudjelovanja u prirodi . . . . .</b>                     | <b>297</b>     |
| 9.1. Uvod . . . . .                                                      | 297            |
| 9.2. Osnovna međudjelovanja . . . . .                                    | 298            |
| 9.3. Gravitacijsko međudjelovanje . . . . .                              | 298            |
| 9.4. Elektromagnetsko međudjelovanje . . . . .                           | 301            |
| 9.5. Jako međudjelovanje . . . . .                                       | 304            |
| 9.6. Slabo međudjelovanje . . . . .                                      | 306            |
| <b>10. Zakoni očuvanja . . . . .</b>                                     | <b>309</b>     |
| 10.1. Zakon očuvanja količine gibanja . . . . .                          | 310            |
| 10.2. Zakon očuvanja momenta količine gibanja . . . . .                  | 312            |
| 10.3. Zakon očuvanja energije . . . . .                                  | 314            |
| 10.3.1. Potencijalna energija i vremensko ponašanje sistema . . . . .    | 315            |
| 10.4. Energija i masa . . . . .                                          | 316            |
| 10.5. Konzervativne i nekonzervativne sile . . . . .                     | 321            |
| <b>11. Primjena zakona očuvanja energije na vezane sisteme . . . . .</b> | <b>323</b>     |
| 11.1. Uvod . . . . .                                                     | 323            |
| 11.2. Veza između sile i potencijalne energije . . . . .                 | 324            |
| 11.3. Harmonički oscilator u jednoj dimenziji . . . . .                  | 324            |
| 11.4. Anharmonički oscilator . . . . .                                   | 329            |
| 11.5. Potencijalne krivulje s dva minimuma . . . . .                     | 335            |



|                                                                         |            |
|-------------------------------------------------------------------------|------------|
| 11.6. Potencijalna energija pri vrtnji . . . . .                        | 338        |
| 11.7. Gibanje čestice u trodimenzionalnom prostoru . . . . .            | 343        |
| 11.8. Centralne sile . . . . .                                          | 345        |
| 11.8.1. Efektivna potencijalna energija centralne sile . . . . .        | 345        |
| <b>12. Temelji suvremene kvantne fizike . . . . .</b>                   | <b>353</b> |
| 12.1. Toplinsko zračenje . . . . .                                      | 354        |
| 12.1.1. Toplinska ravnoteža . . . . .                                   | 354        |
| 12.1.2. Kirchhoffov zakon . . . . .                                     | 355        |
| 12.1.3. Spektar zračenja crnog tijela . . . . .                         | 358        |
| 12.1.4. Stefan-Boltzmannov i Wienov zakon . . . . .                     | 358        |
| 12.1.5. Ultraljubičasta katastrofa . . . . .                            | 361        |
| 12.1.6. Planckov zakon zračenja . . . . .                               | 363        |
| 12.2. Fotoelektrični efekt . . . . .                                    | 368        |
| 12.2.1. Rad izlaza . . . . .                                            | 369        |
| 12.2.2. Eksperimentalne činjenice . . . . .                             | 369        |
| 12.2.3. Dvojna priroda svjetlosti . . . . .                             | 371        |
| 12.2.4. Einsteinovo objašnjenje fotoelektričnog efekta . . . . .        | 371        |
| 12.3. Comptonov efekt . . . . .                                         | 375        |
| 12.4. Linijski spektri i stacionarna stanja . . . . .                   | 377        |
| 12.4.1. Linijski spektri atoma . . . . .                                | 377        |
| 12.4.2. Bohrovo objašnjenje linijskih spektara . . . . .                | 378        |
| 12.4.3. Frank-Hertzov eksperiment . . . . .                             | 380        |
| 12.5. Valna priroda čestica . . . . .                                   | 381        |
| 12.5.1. Dvojna priroda svjetlosti . . . . .                             | 381        |
| 12.5.2. Dvojna priroda čestica . . . . .                                | 382        |
| 12.5.3. De Broglieove relacije za valnu duljinu i frekvenciju . . . . . | 382        |
| 12.5.4. Eksperimentalna potvrda de Broglieove teorije . . . . .         | 385        |
| 12.5.5. Elektronski mikroskop . . . . .                                 | 386        |
| <b>13. Kvantna mehanika . . . . .</b>                                   | <b>389</b> |
| 13.1. Relacije neodređenosti . . . . .                                  | 389        |
| 13.2. Valna funkcija i gustoća vjerojatnosti . . . . .                  | 391        |
| 13.3. Schrödingerova jednačba . . . . .                                 | 393        |
| 13.4. Slobodna čestica u kvantnoj fizici . . . . .                      | 395        |
| 13.5. Potencijalna stepenica . . . . .                                  | 397        |
| 13.6. Harmonički oscilator u kvantnoj mehanici . . . . .                | 400        |
| 13.7. Proboj kroz potencijalnu prepreku . . . . .                       | 404        |
| 13.8. Opća načela kvantne mehanike . . . . .                            | 407        |
| 13.9. Moment količine gibanja u kvantnoj fizici . . . . .               | 411        |

|                                                           |            |
|-----------------------------------------------------------|------------|
| <b>14. Fizika atoma</b>                                   | <b>419</b> |
| 14.1. Atomi s jednim elektronom                           | 419        |
| 14.1.1. Bohrov model jednoelektronskog atoma              | 419        |
| 14.1.2. Jednoelektronski atom u kvantnoj mehanici         | 422        |
| 14.2. Atom u magnetskome polju                            | 430        |
| 14.3. Izborna pravila za prijelaze između atomskih stanja | 432        |
| 14.4. Spin elektrona                                      | 433        |
| 14.4.1. Eksperimentalne činjenice                         | 433        |
| 14.4.2. Kvantni broj spina                                | 434        |
| 14.5. Međudjelovanje spina i staze                        | 435        |
| 14.6. Atomi s više elektrona                              | 438        |
| <b>15. Kvantnomehanička struktura molekula</b>            | <b>445</b> |
| 15.1. Molekularni ion vodika $H_2^+$                      | 445        |
| 15.2. Ostale molekule                                     | 452        |
| 15.3. Molekularne vibracije i rotacije                    | 454        |
| 15.3.1. Vibracijska stanja molekula                       | 454        |
| 15.3.2. Rotacijska stanja molekula                        | 456        |
| <b>16. Atomska jezgra</b>                                 | <b>461</b> |
| 16.1. Svojstva atomske jezgre                             | 461        |
| 16.1.1. Veličina atomske jezgre                           | 463        |
| 16.1.2. Električna i magnetska svojstva jezgre            | 464        |
| 16.2. Modeli atomske jezgre                               | 469        |
| 16.2.1. Kvantnomehanička struktura atomske jezgre         | 469        |
| 16.2.2. Model kapljice                                    | 470        |
| 16.2.3. Model ljusaka                                     | 473        |
| 16.3. Radioaktivnost                                      | 476        |
| 16.3.1. Zakon radioaktivnoga raspada                      | 476        |
| 16.3.2. $\alpha$ -raspad                                  | 478        |
| 16.3.3. $\beta$ -raspad                                   | 479        |
| 16.4. Nuklearne reakcije                                  | 480        |
| 16.4.1. Vrste nuklearnih reakcija                         | 481        |
| 16.4.2. Udarni presjek reakcije                           | 482        |
| 16.4.3. Apsorpcija upadnih čestica                        | 483        |
| 16.5. Nuklearna fisija                                    | 484        |
| 16.6. Nuklearna fuzija                                    | 486        |
| 16.7. Osnovne čestice                                     | 487        |
| <br>Dodatak                                               | <br>495    |
| Kazalo imena                                              | 499        |
| Kazalo pojmova                                            | 501        |
| Literatura                                                | 511        |





# Elektromagnetske pojave

## 1. Elektrostatika

### 1.1. Električni naboji

Proučavanje električnih pojava počelo je još u 7. stoljeću pr. n. e. Grčki matematičar i filozof Tales iz Mileta (624–546) uočio je da jantara, natrljan suknom, privlači druge lagane predmete, tj. da se tijela trljanjem mogu naelektrizirati\*, odnosno električki nabiti. Potkraj 16. st. engleski liječnik William Gilbert (1544–1603) ispituje svojstva naelektriziranog jantara i drugih tvari i svoja istraživanja iz elektrostatike i magnetostatike opisuje u knjizi *De Magnete*. Američki učenjak Benjamin Franklin (1706–1790) je naboj proizveden trljanjem stakla prvi nazvao pozitivnim, a naboj proizveden na jantaru negativnim. Franklin je smatrao da tijela sadrže fluid koji trljanjem može prelaziti s jednoga tijela na drugo: višak toga fluida čini tijelo pozitivno nabijenim; naprotiv, manjak fluida čini ga negativno nabijenim, a električki neutralna tijela imaju neku određenu "normalnu" količinu fluida. U 18. st. francuski fizičar Charles de Coulomb (1736–1806) izmjerio je silu između dvaju naboja i tako pronašao osnovni zakon elektrostatike. Posebno je intenzivan razvoj elektriciteta u 19. st. kada Faraday, Ampère, Maxwell i drugi otkrivaju osnovne zakone elektromagnetizma.

Pokusi pokazuju da postoje dvije vrste električnih naboja: pozitivni i negativni. Trljanjem staklenoga štapa amalgamiranom kožom, štap postaje pozitivno nabijen. Slično tome, trljanjem ebonitnoga štapa vunenom krpom, štap postaje negativno nabijen. Dva nabijena staklena (ebonitna) štapa odbijaju se, dok se nabijeni stakleni i ebonitni štap privlače. Nadalje, pokusi pokazuju da vunena krpa kojom se trlja ebonitni štap pritom postaje suprotno (tj. pozitivno) naelektrizirana. Slično je i s kožom kojom trljamo stakleni štap; ona postaje suprotno (negativno) nabijena.

Danas znamo objasniti ove pojave. Atomi od kojih je sastavljena tvar sastoje se od pozitivne jezgre i negativna elektronskog omotača. Jezgra se sastoji od pozitivno nabijenih protona i neutralnih neutrona. Elektron i proton imaju jednak naboj po iznosu, ali suprotna predznaka. Zapravo, sve nabijene elementarne čestice imaju

\* Korijen ove riječi dolazi od grčkog naziva za jantara (ηλεκτρον).

po iznosu jednak naboj, bilo pozitivan bilo negativan. To je tzv. elementarni naboj  $e$ ; naboj je protona, dakle,  $+e$ , a naboj elektrona  $-e$ .

Električki neutralno tijelo ima jednak broj pozitivnih naboja (protona) i negativnih naboja (elektrona), pa je ukupni naboj jednak nuli. Ukupni naboj nekog tijela označavat ćemo slovom  $Q$ . Budući da naboj nastaje zbog viška elektrona odnosno protona, svaka je količina naboja uvijek cjelobrojni višekratnik elementarnoga naboja:

$$Q = Ne \quad (1.1)$$

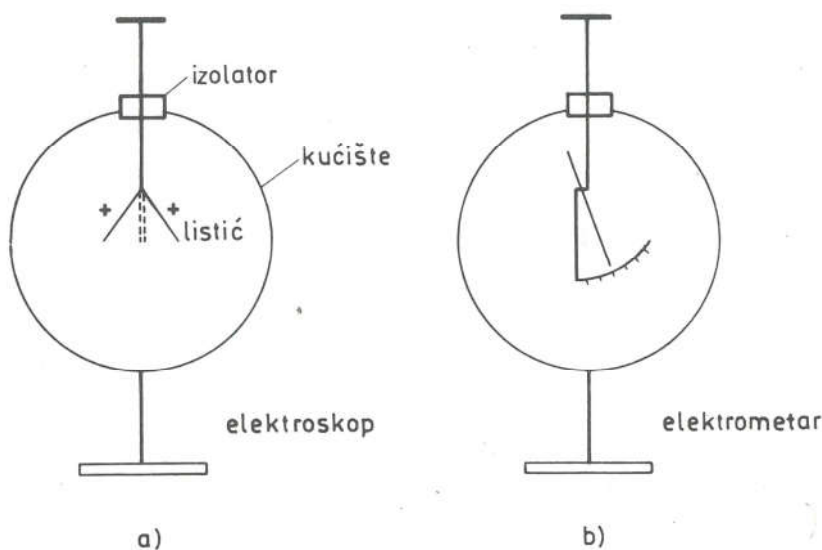
gdje je  $N$  cijeli broj\*.

Mjerna SI-jedinica naboja je kulon (znak C); to je izvedena jedinica i definira se pomoću osnovne jedinice ampera ( $1 \text{ kulon} = 1 \text{ ampersekunda}$ ).

Naboj 1 kulon sadrži  $6,2 \cdot 10^{18}$  elementarnih naboja. Elementarni naboj iznosi:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

To je naboj jednog protona i katkad se naziva i atomskom jedinicom naboja. Elektron ima po iznosu jednak naboj, ali suprotnog predznaka, tj.  $-e$ .



Slika 1.1. Elektroskop i elektrometar

Elektroskop (sl. 1.1.a) sastoji se od metalnoga kućišta u obliku valjka u kojemu je metalni štap s dvama tankim zlatnim (ili aluminijskim) listićima. Štap je od kućišta izoliran dobrim izolatorom (jantarom, teflonom, porculanom i sl.). Kućište je uglavnom uzemljeno. Na drugome kraju štapa može biti okrugla pločica, kuglica i sl.

Kada nabijeno tijelo dodirne kuglicu elektroskopa, listići se rašire. Ako je riječ o negativno nabijenom ebonitnom štupu, elektroni s njega prelaze na kuglicu,

\* Američki fizičar R. Millikan (1886–1953) precizno je izmjerio naboj elektrona (godine 1909) i pokazao da je svaki električni naboj kvantiziran, tj. da se sastoji od elementarnih naboja (v. str. 62).



odnosno na listiće elektroskopa i nabiju ih negativno; negativno se nabijeni listići odbijaju. Slično se događa i kada pozitivno nabijeno tijelo dodirne elektroskop: listići se nabiju pozitivno i razmaknu. Razmak između listića razmjeran je njihovom naboju. Ako elektroskop baždavimo, dobivamo instrument za mjerenje električnih naboja, tzv. elektrometar (sl. 1.1.b).

**Vodiči i izolatori.** Ako kuglicu i kućište elektroskopa međusobno spojimo nekim metalnim predmetom (npr. komadićem žice), elektroskop će se izbiti i listići će se skupiti. Naprotiv, ako kuglicu i kućište spojimo staklenim, porculanskim ili ebonitnim štapom, listići se neće skupiti, tj. elektroskop će ostati nabijen. Metali su vodiči, a staklo, porculan i sl. su izolatori.

Materijale s obzirom na električna svojstva možemo podijeliti na vodiče i izolatore. Dobri se vodiči od dobrih izolatora u vodljivosti razlikuju čak za faktor  $10^{20}$ . Dobri su vodiči metali, vodene otopine soli, kiselina i lužina, a dobri su izolatori keramika, staklo, ebonit, jantar, sumpor itd.

Dobru vodljivost metala možemo shvatiti ako uzmemo u obzir njihovu mikroskopsku strukturu. Atomi su metala poredani u kristalnoj rešetki. U vanjskoj su ljusci atoma metala uglavnom jedan ili dva elektrona. Ti su valentni elektroni pod utjecajem privlačnih sila više jezgara, slabo su vezani i nazivamo ih slobodni elektroni. Oni su lako pokretljivi u kristalnoj rešetki i mogu služiti kao nosioci električnoga naboja. Zato su metali dobri vodiči elektriciteta.

Tvari sastavljene od iona, dok su u čvrstome agregatnom stanju (ionska kristalna rešetka), loši su vodiči, jer su ioni čvrsto fiksirani na svojim mjestima u kristalnoj rešetki. Međutim, ako te tvari otopimo ili rastalimo, ioni će postati pokretni i takve će tekućine (elektroliti) postati dobri vodiči. Dobivene elektrolitske otopine imaju slobodne nosioce naboja obaju predznaka, za razliku od metala gdje su slobodni nosioci naboja samo elektroni.

Tvari koje nemaju slobodnih nosilaca naboja (elektrona ili iona) nazivaju se izolatori. U njima su svi elektroni povezani za svoje atomske jezgre jakim silama pa se vrlo teško mogu otrgnuti od atoma kojemu pripadaju. Zbog toga izolatori ne vode električnu struju. Izolatore još nazivamo i dielektricima.

Ima tvari s električnim svojstvima između dobrih vodiča i izolatora, a to su poluvodiči. Vodljivost se poluvodiča može mijenjati u široku intervalu dodavanjem primjesa ili mijenjanjem temperature i sl. Ovdje su nosioci naboja negativni elektroni i tzv. pozitivne šupljine. Najvažniji su poluvodiči silicij, germanij, selen itd.

**Raspodjela naboja.** U elektrostatici se često koristimo pojmom točkasta naboja. To su nabijena sitna tijela (npr. kuglice) kojih se dimenzije mogu zanemariti pa možemo smatrati da je sav naboj u jednoj točki.

Ako naboj nije točkast, nego kontinuirano raspoređen na nekom tijelu (ili kontinuirano ispunjava promatrani prostor), korisno je definirati gustoću naboja. S obzirom na raspodjelu naboja u prostoru, razlikujemo prostornu, plošnu i linijsku gustoću.



Da bismo odredili prostornu gustoću naboja, odaberimo mali volumen  $\Delta V$ , koji je dovoljno malen da bi u njemu gustoća bila konstantna, a dovoljno velik da se može pretpostaviti da ga naboj  $\Delta Q$  ispunjava jednoliko. (Volumen  $\Delta V$  mora biti znatno veći od dimenzija atoma.)

**Prostorna gustoća naboja**  $\rho$  definirana je relacijom:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \quad (1.2)$$

Ukupni naboj  $Q$  u prostoru volumena  $V$  računa se pomoću prostornog integrala:

$$Q = \iiint_V \rho \, dV \quad (1.3)$$

Prostorna je gustoća važna u slučajevima kada postoji prostorni naboj, kao npr. u poluvodičima, plinovima, elektronskim cijevima itd.

Kod nabijenih vodiča sav je naboj uvijek na površini vodiča. Da bi se odredila **plošna gustoća naboja**, na plohi se odabere dovoljno mali element površine  $\Delta S$  na kojoj se nalazi naboj  $\Delta Q$  i gustoća se računa pomoću relacije:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \quad (1.4)$$

**Linijaska gustoća naboja** neke žice, tankog valjka i sl. određuje se izrazom:

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad (1.5)$$

gdje je  $dl$  infinitezimalno mali dio te žice, a  $dQ$  naboj na tom dijelu žice.

Slično prostornom naboju raspoređenom u nekom volumenu, ukupni plošni i linijski naboj može se odrediti integralima:

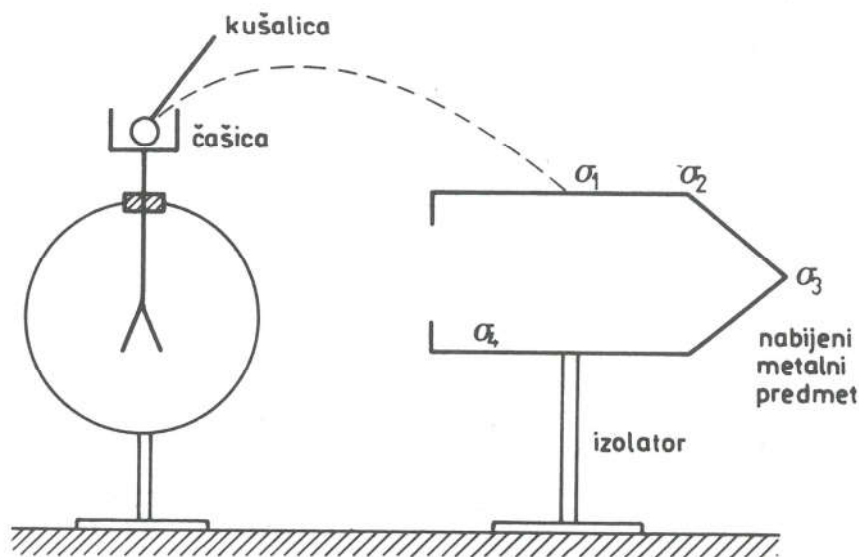
$$Q = \iint_S \sigma \, dS, \quad (1.6)$$

i

$$Q = \int_K \lambda \, dl$$

Raspored naboja na vodiču možemo ustanoviti pokusom. Tijelo u obliku metalnoga šupljeg valjka (sl. 1.2) nabijemo staklenim štapićem. Malom metalnom kuglicom na dršci od izolatora možemo prenositi naboj s različitih mjesta vodiča u čašicu elektroskopa.

Tako npr. možemo vidjeti da je plošna gustoća naboja veća na mjestima gdje je radius zakrivljenosti manji. Napose je gustoća naboja velika na šiljcima (npr. točka 3 na sl. 1.2). U unutrašnjosti vodiča nema naboja ( $\sigma_4 = 0$ ) pa zaključujemo da je u vodičima sav naboj na površini.



Slika 1.2. Raspodjela naboja na nabijenom vodiču

Kada nabijenu kušalicu (metalnu kuglicu na dršku od izolatora) unesemo u metalnu čašicu na elektroskopu i dodirnemo je iznutra, sav električni naboj priđe na vanjsku površinu čašice i na štap elektroskopa, a kušalica ostane bez naboja. Na tom načelu rade zaštitne žičane mrežice (Faradayev kavez); električni uređaji unutar takvih zaštitnih mrežica zaštićeni su od vanjskih električnih utjecaja.

## 1.2. Coulombov zakon

Eksperimentalna je činjenica, već odavno poznata, da se istoimeni električni naboji odbijaju, a raznoimeni privlače.

Charles Coulomb\* prvi je izmjerio silu između dviju nabijenih kuglica (1785) i utvrdio ovisnost te sile o naboja i o njihovoj udaljenosti.

Silu između dvaju naboja Coulomb je izmjerio pomoću torzijske vage, kasnije u njegovu čast nazvane Coulombovom vagom. (Kasnije, g. 1798, upotrebom sličnog uređaja Cavendish je odredio gravitacijsku konstantu.)

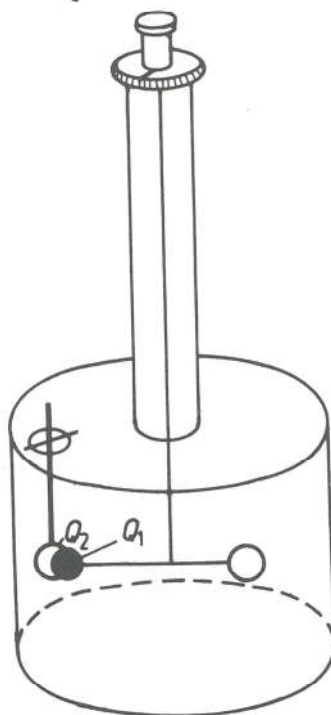
Na sl. 1.3. prikazan je princip mjerenja električne sile pomoću torzione vage. Na laganoj šipci od izolatora nalazi se nabijena metalna kuglica naboja  $Q_1$ . Šipka visi na žici poznate torzijske konstante. Kada se prvoj kuglici (naboju  $Q_1$ ) približi druga nabijena kuglica nabijena istoimenim nabojem  $Q_2$ , kuglice će se odbiti i zbog toga će se žica uviti za određeni kut  $\vartheta$ . Mjereći otklon  $\vartheta$  i poznajući torzionu konstantu žice, može se izračunati sila kojom se međusobno odbijaju naboji  $Q_1$  i  $Q_2$ . Eksperiment se može izvesti i tako da se jedna od kuglica nabije nabojem  $Q$  i zatim njome dodirne druga jednaka kuglica. Budući da su metalne kuglice jednake

\* Charles Augustin Coulomb (1736–1806), francuski inženjer

veliĉine, obje su se kuglice dodirrom nabile jednakim nabojem

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{2}$$

i zbog elektriĉne se sile odbijaju. Uvijajuĉi Źicu, kuglice se mogu pribliŹavati. Tako se moŹe i izmjeriti kako odbojna sila meĹu njima ovisi o udaljenosti.



Slika 1.3. Coulombova torziona vaga

Na osnovi tih mjerenja Coulomb je zakljuĉio da je elektrostatska interakcija (sila) izmeĹu dvaju toĉkastih naboja proporcionalna produktu njihovih naboja, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove udaljenosti. Smjer sile uzduŹ je pravca koji spaja te naboje.

To je Coulombov zakon:

$$F_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (1.7)$$

ili, pisano vektorski,

$$\vec{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_0 \quad (1.8)$$

pri ĉemu je  $r$  udaljenost toĉkastih naboja,  $\vec{r}_0$  jediniĉni vektor na spojnici naboja usmjeren od  $Q_1$  do  $Q_2$ , a  $\vec{F}_{12}$  sila naboja  $Q_1$  na naboj  $Q_2$  (sl. 1.4). Sila naboja  $Q_2$  na naboj  $Q_1$ ,  $\vec{F}_{21}$ , po iznosu jednaka je sili  $\vec{F}_{12}$ , ali je suprotnoga smjera ( $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ). Kada primjenjujemo jednadŹbu (1.7), naboje treba uvrštavati s njihovim predznacima. Dobivena pozitivna vrijednost za silu, odgovara odbojnoj sili, a negativna vrijednost privlaĉnoj sili.





Slika 1.4. Coulombova sila između dva naboja

Konstanta  $k$  u izrazu (1.7) ovisi o sredstvu koje okružuje naboje i za vakuum (a približno i za zrak) iznosi:

$$k_0 = 8,988 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}.$$

Obično se konstanta  $k$  piše u obliku  $k = 1/4\pi\epsilon$ , gdje je  $\epsilon$  dielektrična konstanta sredstva.

(U literaturi nailazimo na različite nazive za  $\epsilon$ : dielektričnost, dielektrična konstanta, permitivnost i konstanta influencije.)

U vakuumu je dielektričnost  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ .

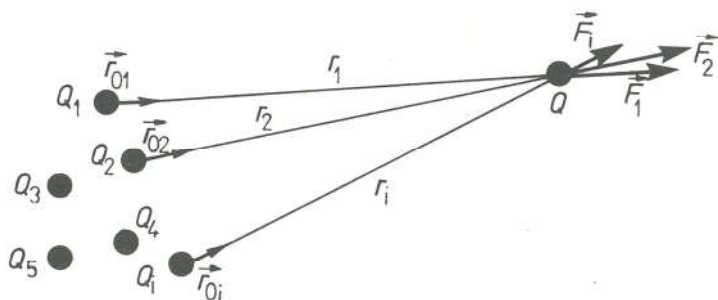
Ako je između naboja neki izolator (dielektrik), eksperimenti pokazuju da je sila manja. *Relativna dielektrična konstanta* dielektrika

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

je broj koji nam kaže koliko je puta kulonska sila između dvaju naboja manja u izolatoru nego u vakuumu. Tako je za zrak  $\epsilon_r = 1,0006$  (približno 1), za parafin 2,2, vodu 81 itd.

Kada su dva točkasta naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  u dielektriku relativne dielektrične konstante  $\epsilon_r$ , Coulombov zakon glasi:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_0 \quad (1.9)$$



Slika 1.5. Princip superpozicije za električnu silu

Ako na naboj  $Q$  djeluje više naboja  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  (sl. 1.5), tada je ukupna sila jednaka vektorskom zbroju sila kojima svaki od naboja  $Q_i$  djeluje na naboj  $Q$ :

$$\vec{F}_{\text{uk}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \frac{Q Q_i}{4\pi\epsilon r_i^2} \vec{r}_{0i} \quad (1.10)$$

To je načelo superpozicije koje vrijedi zato što sila između dvaju naboja ne ovisi o prisutnosti ostalih naboja.



Slika 1.6. Uz proračun sile između dva nabijena tijela

Coulombov zakon u obliku (1.7) vrijedi za točkaste naboje. Ako naboj nije točkast već kontinuirano raspoređen na nekom tijelu (sl. 1.6), tada silu kojom to nabijeno tijelo djeluje na neki točkasti naboj  $Q'$  možemo izračunati tako da tijelo podijelimo na mnogo infinitezimalnih elemenata naboja  $dQ$  (koji se mogu smatrati točkastim nabojima). Sila  $dF$  kojom naboj  $dQ$  djeluje na naboj  $Q'$ , je prema Coulombovom zakonu:

$$d\vec{F} = k \frac{Q' dQ}{r^2} \vec{r}_0 \quad (1.11)$$

Služeći se načelom superpozicije, ukupnu silu računamo integralom

$$\vec{F} = \int_Q d\vec{F} \quad (1.12)$$

gdje je integracija preko čitave raspodjele naboja.

### Primjer 1.1.

Kolikom se električnom silom privlače proton i elektron kada su na udaljenosti 0,05 nm? Usporedite električnu i gravitacijsku silu između protona i elektrona.

Primjenom Coulombova zakona dobivamo da je privlačna električna sila između protona i elektrona:

$$F_e = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -9,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

Gravitacijsku silu izračunavamo iz Newtonova zakona gravitacije:

$$F_g = -G \frac{m_e m_p}{r^2} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{kg}}{25 \cdot 10^{-22} \text{m}^2}$$

$$F_g = -4,1 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

(Uočite formalnu sličnost Newtonova i Coulombova zakona.)

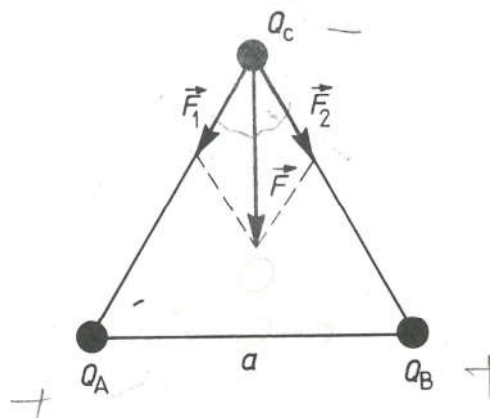
Omjer između električne i gravitacijske sile ne ovisi o udaljenosti:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}}{-G \frac{m_e m_p}{r^2}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_e m_p} = 2,3 \cdot 10^{39}.$$

Gravitacijska sila između nabijenih elementarnih čestica zanemarivo je mala u usporedbi s električnom (kulonskom) silom.

### Primjer 1.2.

U dva vrha A i B istostraničnoga trokuta, stranice  $a = 10^{-9}\text{m}$ , nalaze se protoni, a u trećemu vrhu C, elektron. Kolika je rezultantna sila na elektron?



Slika 1.7.

Sila je između naboja  $Q_A$  i  $Q_C$  (protona i elektrona):

$$F_1 = \frac{Q_A Q_C}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = -2,3 \cdot 10^{-10} \text{ N}.$$

Sila je između naboja  $Q_B$  i  $Q_C$  (protona i elektrona):

$$F_2 = \frac{Q_B Q_C}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = -2,3 \cdot 10^{-10} \text{ N}.$$

Sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  jednakog su iznosa ali različitoga smjera i međusobno zatvaraju kut od  $60^\circ$ . Rezultat je njihova vektorskoga zbroja sila  $\vec{F}$ , iznosa:

$$F = 2F_1 \cos 30^\circ = \sqrt{3}F_1 = 3,98 \cdot 10^{-10} \text{ N}.$$

Smjer sile  $\vec{F}$  označen je na sl. 1.7.



### 1.3. Električno polje

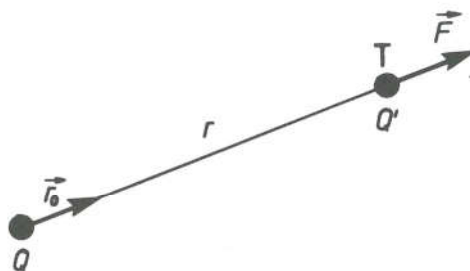
Slično kao i za gravitacijsku silu, i ovdje ćemo uvesti pojam polja i razmatrati interakciju naboja i električnog polja. Na taj način direktno djelovanje jednog naboja na drugi zamjenjujemo indirektnim djelovanjem posredovanjem električnoga polja koje stvara prvi naboj u svojoj okolini.

Zbog prisutnosti naboja, prostor oko naelektriziranoga tijela mijenja svojstva i postaje električno polje u kojemu se očituje električno djelovanje toga tijela. Da bismo ispitali postoji li u nekoj točki prostora električno polje, dovodimo mali pokusni naboj  $Q'$  u tu točku; ako na naboj  $Q'$  djeluje sila, tada u toj točki prostora postoji električno polje.

Vektor jakosti električnoga polja  $\vec{E}$  definiramo kao omjer između električne sile i naboja:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \quad \left( \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \quad (1.13)$$

Smjer električnoga polja  $\vec{E}$  definira se smjerom električne sile kojom to polje djeluje na pozitivni električni naboj u toj točki. Jedinica za jakost električnoga polja je njutn po kulonu, N/C.



Slika 1.8. Uz definiciju električnog polja

Izračunajmo polje točkastoga naboja  $Q$  na udaljenosti  $r$ , tj. u točki T na sl. 1.8. Dovedimo u točku T pokusni naboj  $Q'$  i odredimo silu kojom polje djeluje na pokusni naboj  $Q'$ . Prema Coulombovom zakonu je:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{QQ'}{r^2} \vec{r}_0,$$

gdje je  $\vec{r}_0$  jedinični vektor usmjeren od naboja  $Q$  prema  $Q'$ . Jakost je električnoga polja  $\vec{E} = \vec{F}/Q'$ , ili:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{r}_0 \quad (1.14)$$

#### Primjer 1.3.

Koliko je električno polje protona na udaljenosti od 0,05 nm? Kolika bi bila sila na elektron u toj točki?

Električno je polje na udaljenosti  $r = 0,05$  nm od točkastog naboja (protona):

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/(\text{Nm}^2) \cdot 2,5 \cdot 10^{-21} \text{m}^2} = \\ &= 5,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{C}}. \end{aligned}$$

Kada se elektron nađe u toj točki prostora, na njega djeluje električna sila:

$$F = -eE = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 5,76 \cdot 10^{11} \text{NC}^{-1} = -9,2 \cdot 10^{-8} \text{N}.$$

Zbog negativnog naboja elektrona smjer je sile suprotan smjeru polja. Negativna vrijednost za silu pokazuje da je sila između protona i elektrona privlačna.

Uspoređujući taj primjer s primjerom 1.1. uočavamo da se električna sila između naboja može računati na dva načina, pomoću Coulombova zakona i pomoću električnoga polja.

Za sustav od dvaju ili više točkastih naboja vrijedi načelo superpozicije polja: rezultantno polje jednako je vektorskom zbroju polja pojedinih naboja, što proizlazi iz izraza (1.10) za ukupnu silu na točkasti naboj:

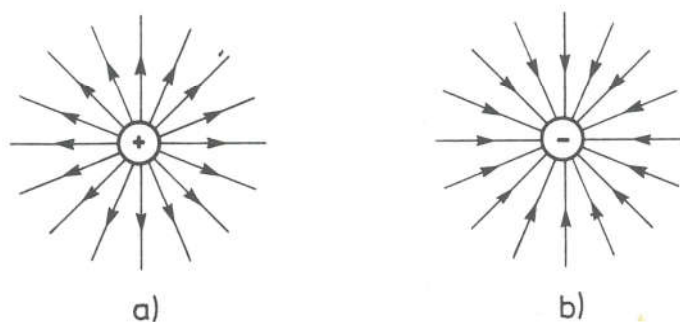
$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{uk}} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n \\ \vec{E}_{\text{uk}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{r}_{i0} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ako je naboj kontinuirano raspoređen po nekom tijelu, podijelimo ga u male elemente naboja  $dQ$  i polje, umjesto sumom, računamo integralom po čitavom naboju:

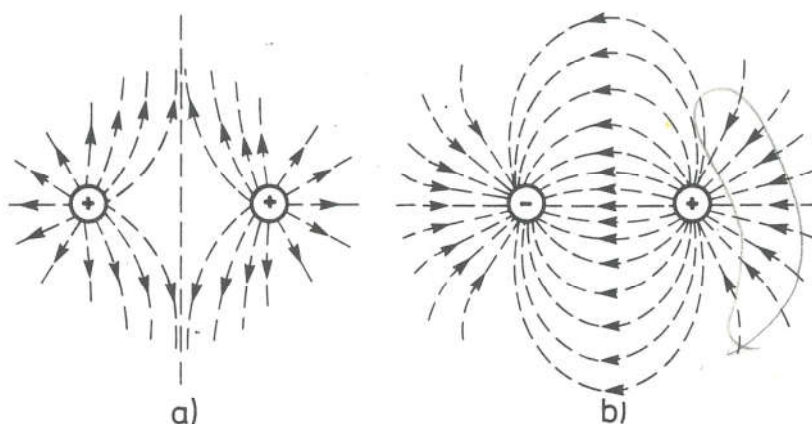
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_Q \frac{dQ}{r^2} \vec{r}_0 \quad (1.16)$$

Električno polje možemo zorno predložiti silnicama\* (sl. 1.9. i 1.10). Električne silnice (linije električnoga polja) zamišljene su krivulje kojih tangente u bilo kojoj točki leže na pravcu polja u toj točki. Smjer tangente na silnicu daje smjer  $\vec{E}$  u toj točki, a gustoća silnica razmjerna je jakosti električnog polja; na mjestima gdje su silnice gušće električno je polje jače i obratno. Kroza svaku točku prolazi samo jedna silnica, pa je smjer električnog polja određen jednoznačno.

\* Engleski fizičar Michael Faraday (1791–1867) prvi je uveo pojam silnice radi zorna opisivanja električnih i magnetskih polja

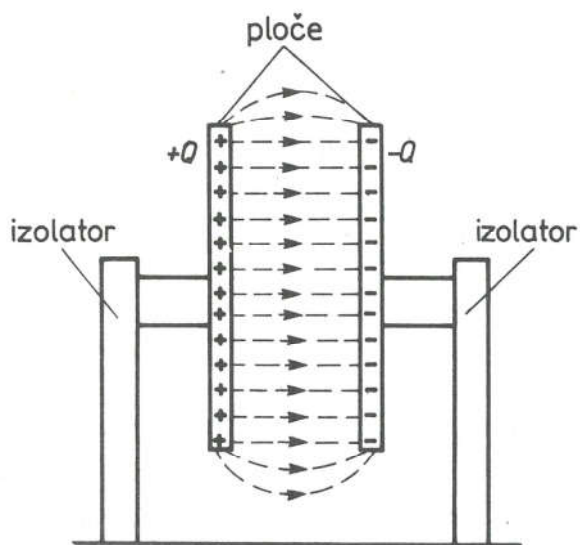


Slika 1.9. Silnice točkastog naboja radijalni su pravci koji izvire iz pozitivnog a) odnosno poniru u negativni naboj b)



Slika 1.10. Silnice dvaju naboja a) istog i b) suprotnog predznaka, tzv. električnog dipola

Homogeno električno polje ima isti iznos i smjer u svim točkama pa su silnice takva polja paralelni ekvidistantni (jednako udaljeni) pravci. Homogeno polje najlakše je ostvariti pomoću pločastoga kondenzatora. To su dvije međusobno izoli-



Slika 1.11. Silnice homogenog polja pločastog kondenzatora

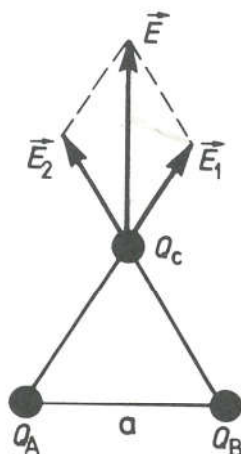


rane metalne ploče jednake površine. Ako jedna ploča ima naboj  $+Q$ , onda druga ima naboj  $-Q$ . Na sl. 1.11. silnicama je prikazano električno polje pločastoga kondenzatora.

Silnice su međusobno paralelni i jednako udaljeni pravci koji izlaze okomito iz pozitivne ploče i ulaze u negativnu. Ako zanemarimo rubove, možemo reći da je električno polje pločastoga kondenzatora homogeno, tj. u svakoj točki jednako po iznosu i po smjeru ( $\vec{E} = \text{konst.}$ ), dok izvan kondenzatora polja nema.

#### Primjer 1.4.

U dva vrha A i B istostraničnoga trokuta ( $a = 10^{-9}$  m) nalaze se protoni, a u trećem vrhu C, elektron. Koliko je električno polje u točki C? Kolika je sila na elektron?



Slika 1.12.

Električno polje u točki C dobije se vektorskim zbrajanjem električnih polja što ih stvaraju protoni u točki A i B:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Polja  $\vec{E}_1$  i  $\vec{E}_2$  imaju isti iznos, ali različit smjer; kut je između tih dvaju vektora  $60^\circ$ . Iznos im je

$$E_1 = E_2 = k \frac{e}{a^2}$$

Rezultat je vektorskog zbroja  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$  vektor  $\vec{E}$  čiji je smjer označen na sl. 1.12, dok je iznos

$$E = 2E_1 \cos 30^\circ = \sqrt{3}E_1 = \sqrt{3} \frac{ke}{a^2} = 2,49 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Sila na elektron  $\vec{F} = -e\vec{E}$  bit će u suprotnome smjeru od  $\vec{E}$ , jer je naboj elektrona negativan i iznosit će:

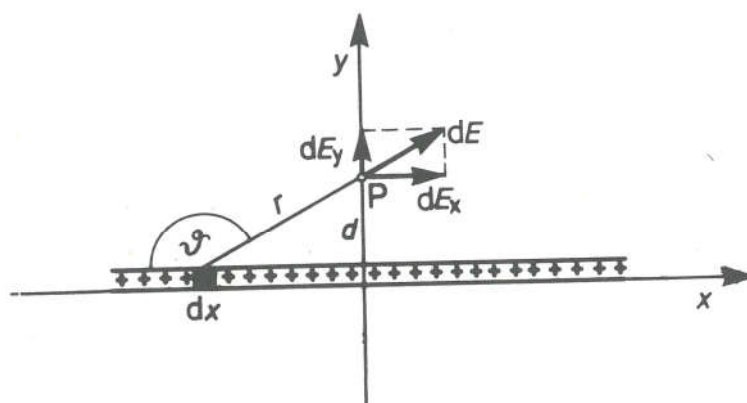
$$F = -eE$$

$$F = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2,49 \cdot 10^8 \text{ NC}^{-1} = 3,98 \cdot 10^{-10} \text{ N}.$$

Usporedite taj primjer i primjer 1.3.

### Primjer 1.5.

Dugački tanki štap od izolatora nabijen je pozitivnim nabojem jednolike linijske gustoće  $\lambda$ . Odredite jakost električnoga polja u točki P na udaljenosti  $d$  od štapa (sl. 1.13).



Slika 1.13.

Odaberimo os  $x$  koordinatnoga sustava duž štapa, a os  $y$  okomito na štap. Jakost električnoga polja  $dE$  koju proizvodi nabijeni dio vodiča  $dx$  na udaljenosti  $r$  od točke P dana je izrazom:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} = k_0 \frac{dQ}{r^2} = k_0 \frac{\lambda dx}{r^2}.$$

Komponenta toga polja u smjeru osi  $x$  iznosi:

$$\begin{aligned} dE_x &= -dE \cos \vartheta \\ dE_x &= -k_0 \frac{dQ}{r^2} \cos \vartheta = -k_0 \frac{\lambda dx}{\left(\frac{d}{\sin \vartheta}\right)^2} \cos \vartheta \\ dE_x &= k_0 \frac{\lambda d \cos \vartheta d\vartheta}{\sin^2 \vartheta} = \frac{k_0 \lambda}{d} \cos \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

Ukupno polje  $E_x$  integral je toga izraza u granicama  $\vartheta = \vartheta_1$  do  $\vartheta = \vartheta_2$

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{k_0 \lambda}{d} \cos \vartheta d\vartheta \\ E_x &= \frac{k_0 \lambda}{d} (\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1) \end{aligned}$$

Ako je duljina vodiča  $l$  mnogo veća od udaljenosti  $d$  ( $l \gg d$ ), tada je

$$\vartheta_1 \approx \pi, \vartheta_2 \approx 0 \text{ i } E_x = 0.$$

Komponenta je električnoga polja u smjeru osi  $y$ :

$$dE_y = dE \sin \vartheta = k_0 \frac{\lambda dx}{r^2} \sin \vartheta = -k_0 \frac{\lambda d}{d^2} \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta} = \frac{k_0 \lambda}{d} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Ukupno polje  $E_y$  dobivamo integriranjem:

$$E_y = -\frac{k_0 \lambda}{d} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{k_0 \lambda}{d} (\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1).$$

Budući da je

$$\cos \vartheta_2 = \frac{l/2}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{4}}} \quad \cos \vartheta_1 = -\frac{l/2}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{4}}},$$

to je

$$E_y = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 d} \frac{1}{\sqrt{4d^2 + l^2}},$$

a ako je  $l \gg d$ , tada polje iznosi:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \frac{l}{\sqrt{4d^2 + l^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \frac{1}{\sqrt{4\left(\frac{d}{l}\right)^2 + 1}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}.$$

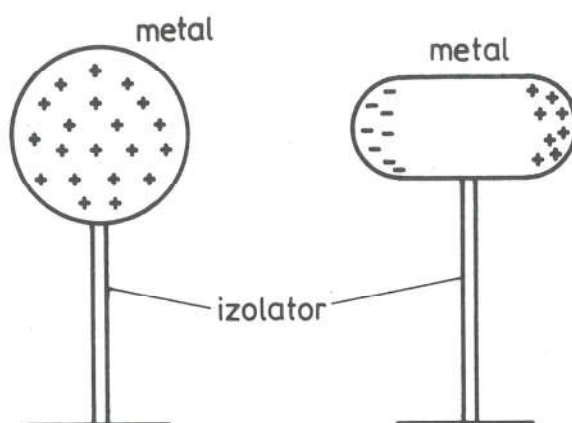
Taj rezultat dobivamo i uvrštavanjem granica integracije,  $\vartheta_1 = \pi$ ;  $\vartheta_2 = 0$ , tj. uzimajući u obzir da je vodič beskonačno dugačak.

## 1.4. Električna influencija

Ako neutralni komad metala (vodiča) približimo nekom nabijenom tijelu (npr. pozitivno nabijenoj metalnoj kugli), na slobodne elektrone u metalu djelovat će električna sila, oni će se pomaknuti i jedna će strana vodiča postati pozitivno nabijena, a druga negativno, kao što pokazuje sl. 1.14. (Kada tijelo udaljimo od nabijene kugle, ono ponovno postaje neutralno.) Na strani vodiča bližoj pozitivno nabijenome tijelu pojavit će se višak negativna naboja, a udaljenija će strana postati pozitivno nabijena. Takvo razdvajanje naboja na vodičima koji su u okolini nabijenih tijela nazivamo električnom influencijom\*, a opisano djelovanje električnog

\* influere (lat.) – utjecati

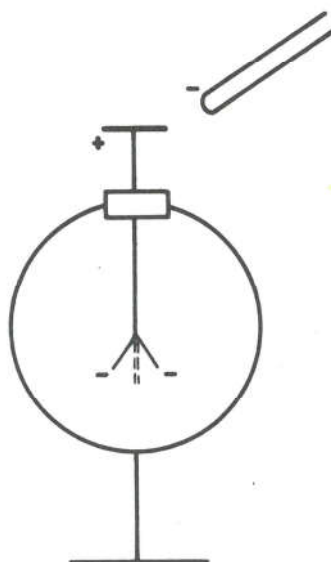




Slika 1.14. Električna indukcija

polja influencijskim djelovanjem. Opisat ćemo kako se električnom influencijom može nabiti elektroskop.

Kada negativno nabijeni ebonitni štap primaknemo elektroskopu, listići će se zbog influencije raširiti (sl. 1.15). Kada štap odmaknemo, listići će se skupiti. Pri bližavanjem negativno nabijenoga štapa slobodni elektroni iz pločice elektroskopa otiđu u listiće, listići postaju negativno nabijeni i zbog toga se razmaknu. (Pločica elektroskopa postaje pri tom pozitivno nabijena.)



Slika 1.15. Nabijanje elektroskopa influencijom

Ako nakon toga prstom taknemo pločicu elektroskopa (držeći stalno negativno nabijeni štap u njezinoj blizini), tj. uzemljimo je, listići se skupe jer višak elektrona ode u zemlju. Ako odmaknemo prst, a zatim i nabijeni ebonitni štap, elektroskop ostaje pozitivno nabijen. Tako se elektroskop može nabiti pomoću električne influencije, a da ga pri tom ne dodirnemo nabijenim tijelom.

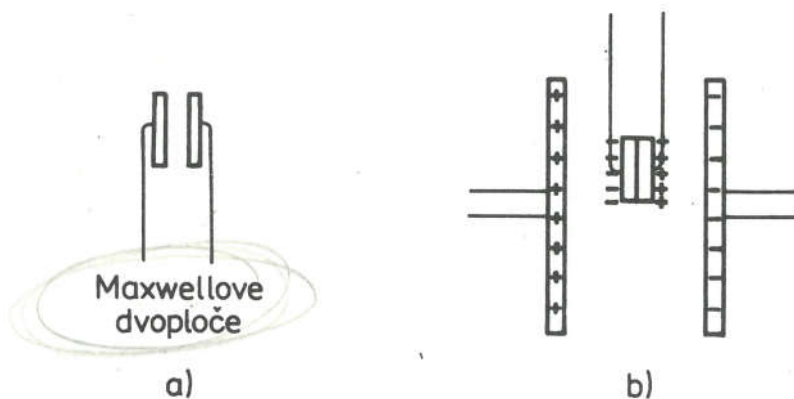
Negativno nabijenim ebonitnim štapom elektroskop se influencijom nabija pozitivno. Slično se elektroskop pozitivno nabijenim staklenim štapom može nabiti negativno. Naprotiv, ako nabijenim štapom dodirnemo pločicu elektroskopa, elektroskop se nabija onim nabojem kojim je nabijen štap.

## 1.5. Vektor električnoga pomaka

Električno polje možemo opisati pomoću sile na određeni pokusni naboj u nekoj točki toga polja. U tu svrhu definirali smo vektor jakosti električnog polja  $\vec{E}$ . Sada ćemo definirati još jednu fizikalnu veličinu za opisivanje električnoga polja – vektor električnog pomaka  $\vec{D}$  kojim se određuje influencijsko djelovanje polja na tijelo koje se unese u to polje.

Ako komad metala (metalnu pločicu) unesemo u električno polje (npr. homogeno polje pločastoga kondenzatora na sl. 1.11), na slobodne elektrone u metalu djelovat će električne sile i oni će se gibati suprotno smjeru polja i skupiti na strani metala okrenutoj prema pozitivnoj ploči kondenzatora. Tako će jedna strana metala postati pozitivno, a druga negativno nabijena. To je već spomenuta pojava električne influencije na metalima u električnome polju.

Razmotrimo o čemu ovisi influencijsko djelovanje električnoga polja. Očito je da će influencijsko djelovanje polja biti jače ako je jakost polja  $\vec{E}$  veća. Da bismo kvantitativno ispitali influencijsko djelovanje električnoga polja, upotrijebit ćemo Maxwellove dvoploče. To su dvije vrlo tanke okrugle metalne ploče s drškom od izolatora (sl. 1.16.a). Kada ih, držeći ih za drške priljubljene jednu uz drugu, unesemo u električno polje, između ploča pločastoga kondenzatora (sl. 1.16.b) influencirat će se na njima električni naboj. Ako su paralelne s pločama kondenzatora, onda se ona prema pozitivnoj ploči nabije negativno, a ona prema negativnoj ploči – pozitivno. Ako se ploče rastave dok su još u polju i izvade se iz polja, na svakoj se od njih može izmjeriti (npr. pomoću balističkog galvanometra) količina influenciranog naboja.



Slika 1.16. Maxwellove dvoploče

Mjerenja pokazuju da je influencirani naboj najveći kad su pločice usporedne s pločama kondenzatora i da je to veći što je površina pločica veća.



Da bismo opisali influencijsko djelovanje električnoga polja, uvodimo vektor električnog pomaka  $\vec{D}$ , čiji iznos definiramo relacijom:

$$D = \frac{\Delta Q_{\text{maks}}}{\Delta S} \quad (1.17)$$

gdje je  $\Delta Q_{\text{maks}}$  najveći influencirani naboj na jednoj od pločica, a  $\Delta S$  površina na kojoj se taj naboj nakupio influencijom. Dakle, iznos vektora  $\vec{D}$  jednak je gustoći maksimalno influenciranoga naboja na površini metala u električnome polju. Smjer vektora  $\vec{D}$  određen je smjerom normale na pozitivnu dvoploču kad je ona orijentirana tako da se na njoj dobije maksimalna gustoća influenciranoga naboja.

U literaturi susrećemo više naziva za vektor električnoga pomaka: vektor influencijskoga djelovanja, vektor gustoće električnoga pomaka, vektor električne indukcije, vektor gustoće električnoga toka ili sasvim kratko vektor  $\vec{D}$ . Jedinica za  $D$  je kulon po četvornom metru, C/m<sup>2</sup>.

Ako površinu pločice prikažemo kao vektor  $\Delta \vec{S}$  (smjer toga vektora okomit je na pozitivnu dvoploču), tada je:

$$\Delta Q = \vec{D} \cdot \Delta \vec{S} \quad (1.18)$$

Vektor  $\vec{D}$  ovisi o električnom polju i o sredstvu koje se nalazi u tom polju. Pokazalo se da je veza između  $\vec{D}$  i  $\vec{E}$  za izotropni izolator (tj. onaj koji u svim smjerovima ima jednaka električna svojstva):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (1.19)$$

U vakuumu je ta veza još jednostavnija:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (1.20)$$

U vakuumu i u izotropnome dielektriku  $\vec{D}$  i  $\vec{E}$  imaju isti smjer. (Za neizotropne izolatore veza je složenija –  $\epsilon$  nije skalarna, već tenzorska veličina.) U vakuumu nema bitne fizikalne razlike između vektora  $\vec{D}$  i  $\vec{E}$  i za opisivanje električnoga polja upotrebljava se samo jedan od njih (obično  $\vec{E}$ ). U materijalu (dielektriku) vektor  $\vec{D}$  dio je električnoga polja koje je uzrokovano slobodnim nabojima, dok je vektor  $\vec{E}$  u vezi sa svim nabojima, slobodnim i polariziranim (v. odjeljak 1.17).

Slično kao što jakost električnoga polja  $\vec{E}$  prikazujemo silnicama ( $E$ -linijama), možemo i vektor  $\vec{D}$  prikazati silnicama, tzv.  $D$ -linijama. U slučaju polja u vakuumu,  $D$ - i  $E$ -linije se podudaraju.

## 1.6. Električni tok

U hidrodinamici smo tok nestlačive tekućine (npr. vode) definirali kao površinski integral brzine:

$$q = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (1.21)$$



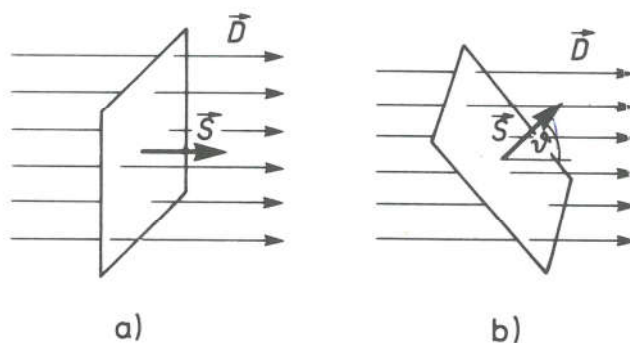
gdje je tok  $q$  izražen u  $\text{m}^3/\text{s}$ .

Osim za brzinu, tok se može definirati i za neke druge vektorske veličine, npr. električno i magnetsko polje.

Električni se tok definira jednačbom:

$$\Phi = \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (1.22)$$

gdje je  $\vec{D}$  vektor električnog pomaka,  $d\vec{S}$  vektor čiji je iznos element površine  $dS$ , a smjer mu je u smjeru normale na tu površinu. Zamislamo najjednostavniji slučaj: silnice homogenoga električnog polja upadaju okomito na zamišljenu ravnu plohu površine  $S$  (sl. 1.17.a). (Vektor  $\vec{S}$  ima iznos površine, a smjer normale na površinu.)



Slika 1.17. Električni tok

Električni tok kroz tu površinu  $S$  definira se u ovom slučaju produktom:

$$\Phi = DS \quad (1.23)$$

Ako je kut  $\vartheta$  između normale na površinu (odnosno vektora  $\vec{S}$ ) i silnica različit od nule (sl. 1.17.b), tada je tok manji i iznosi:

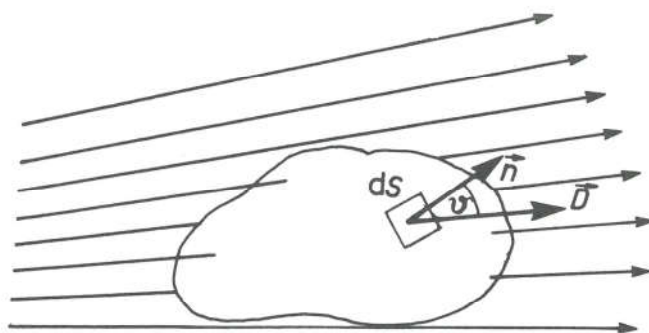
$$\Phi = DS \cos \vartheta = \vec{D} \cdot \vec{S} \quad (1.24)$$

U elektromagnetizmu često razmatramo električni tok kroz zatvorenu plohu (kuglu, valjak, itd.).

Zamislamo zatvorenu plohu proizvoljnoga oblika površine  $S$  (sl. 1.18) i odredimo električni tok kroz tu plohu. Budući da u općenitom slučaju električno polje nije konstantno u svim točkama plohe  $S$ , plohu ćemo podijeliti na male površine  $\Delta S$ , tako malene da ih možemo smatrati ravnima i da bismo mogli pretpostaviti da je polje konstantno u svakoj točki na  $\Delta S$ . Također ćemo definirati vektor  $\Delta\vec{S}$  kojemu je iznos  $\Delta S$ , a smjer određen smjerom vanjske normale  $\vec{n}$  na tu površinu.

Tok vektora  $\vec{D}$  kroz zatvorenu plohu površine  $S$  dobijemo zbrajanjem produkata  $\vec{D} \cdot \Delta\vec{S}$  za sve elemente površine  $\Delta\vec{S}$ , tj.

$$\Phi = \vec{D}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1 + \vec{D}_2 \cdot \Delta\vec{S}_2 + \vec{D}_3 \cdot \Delta\vec{S}_3 + \dots = \sum_i \vec{D}_i \cdot \Delta\vec{S}_i \quad (1.25)$$



Slika 1.18. Električni tok kroz zatvorenu plohu

Točan rezultat dobivamo tek u graničnom slučaju, kada svaki  $\Delta S_i$  teži prema nuli, tj. dvostrukim (površinskim) integralom:

$$\Phi = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{D}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (1.26)$$

Dakle, električni tok kroz zatvorenu plohu  $S$  jednak je površinskom integralu skalarnog produkta  $\vec{D} \cdot d\vec{S}$  preko te plohe.

Često tok električnoga polja zorno predočujemo brojem silnica koje prolaze kroz promatranu plohu; pritom se silnice koje ulaze u zatvorenu plohu računaju kao negativne, a one koje izlaze kao pozitivne. Kada iz plohe izlazi onoliko silnica koliko ih je u plohu ušlo, ukupni je tok nula. Iznos vektora  $\vec{D}$  može se zorno predočiti brojem silnica kroz jediničnu okomitu površinu. Sada nam je jasniji i naziv gustoća električnoga toka za vektor  $\vec{D}$ . Budući da se  $D$  izražava kulonom po četvornom metru,  $C/m^2$ , a površina četvornim metrom  $m^2$ , jedinica je za električni tok – kulon, C, dakle, jednaka je jedinici naboja.

## 1.7. Gaussov zakon

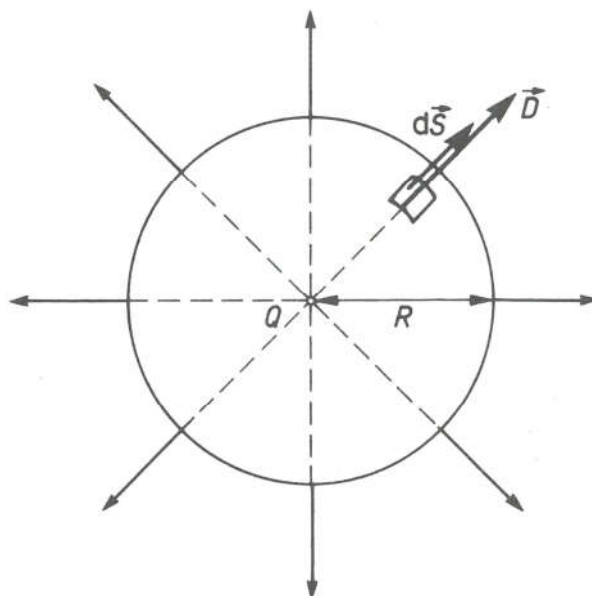
Veza između električnog polja i naboja koji ga proizvodi može se izraziti jednostavnom i korisnom relacijom, tzv. Gausovim zakonom, do kojega dolazimo razmatranjem električnoga toka.

Pogledajmo koliki je električni tok točkastoga naboja  $Q$  kroz neku zatvorenu plohu površine  $S$ . Radi jednostavnosti pretpostavimo da je zamišljena ploha kugla u središtu koje je pozitivni točkasti naboj  $Q$  (sl. 1.19).

Električni tok u ovom je slučaju lako izračunati. Silnice okomito probadaju kuglinu plohu, a iznos vektora  $\vec{D}$  jednak je u svim točkama kugline plohe. Zato je tok jednak umnošku iznosa vektora  $\vec{D}$  i ukupne površine kugle, tj.

$$\Phi = 4R^2 \pi D \quad (1.27)$$

gdje je  $R$  polumjer kugle.



Slika 1.19. Električni tok točkastog naboja kroz kuglu

Budući da se unutar kugle nalazi točkasti naboj  $Q$ , polje na površini kugle iznosi

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \quad (1.28)$$

a vektor gustoće električnoga toka  $D = \epsilon E = \frac{Q}{4\pi R^2}$ , pa je tok

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi R^2} 4R^2\pi = Q \quad (1.29)$$

Tok električnoga polja kroz neku kuglu razmjernan je naboju unutar te kugle i neovisan o polumjeru kugle. Može se pokazati da je i u općenitom slučaju tok električnoga polja kroz zatvorenu plohu proizvoljna oblika jednak ukupnome naboju unutar te plohe.

Uvrstimo li u relaciju (1.29) izraz za tok (1.26), dobivamo Gaussov zakon za elektrostatsko polje – osnovni zakon elektrostatičke:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (1.30)$$

Iako je formula (1.30) izvedena jednostavnosti radi za kuglinu plohu, ona vrijedi i za bilo koju zatvorenu plohu oko naboja.

Kada je u volumenu koji zatvara ploha površine  $S$  više točkastih naboja, ukupno je električno polje zbroj pojedinih polja; tok pojedinih električnih polja jednak je nabojima iz kojih proizlaze ta polja pa je tok ukupnoga električnog polja jednak zbroju svih naboja unutar plohe  $S$ . Ako unutar plohe nema naboja ili ima jednaka količina pozitivnog i negativnog naboja, ukupni je tok nula jer je  $Q = 0$ .

Pomoću Gaussova poučka (1.30) možemo izračunati električna polja jednostavnijih konfiguracija naboja.



**Primjer 1.6.**

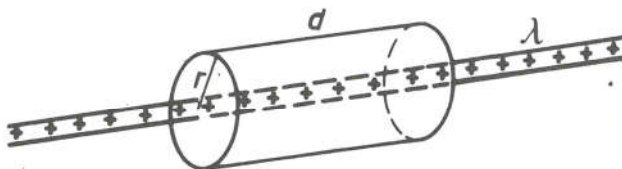
Izračunajte jakost električnoga polja izvan dugačkoga homogeno nabijenog vodiča.

Pretpostavimo da je vodič u obliku beskonačno dugačkoga valjka homogeno nabijen pozitivnim nabojem linearne gustoće  $\lambda$ . Zbog simetrije zaključujemo da je električno polje u svakoj točki izvan vodiča usmjereno okomito na os vodiča. Da bismo izračunali jakost električnoga polja, primijenit ćemo Gaussov zakon.

Kao Gaussovu plohu zamislit ćemo valjak polumjera  $r$  i duljine  $d$  koji koncentrično okružuje jedan dio vodiča kao što je prikazano na sl. 1.20. Budući da je  $\vec{E}$  u svim točkama plašta paralelno elementu površine  $d\vec{S}$  zamišljena valjka i po iznosu jednako u svakoj točki plašta valjka, to je tok kroz plašt valjka:

$$\Phi = ES = E \cdot 2r\pi d.$$

(Tok kroz osnovice valjka jednak je nuli jer je tu  $\vec{E}$  okomito na  $d\vec{S}$ , odnosno  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ .)



Slika 1.20.

Naboj je unutar zamišljena valjka  $Q = \lambda d$  pa Gaussov teorem daje:

$$\Phi = E \cdot 2r\pi d = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda d}{\epsilon_0},$$

odnosno:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Jakost polja izvan drugoga cilindričnog vodiča razmjerna je linearnoj gustoći naboja  $\lambda$ , a obrnuto razmjerna udaljenosti  $r$  točke u kojoj računamo polje od osi vodiča. Ako je vodič nabijen negativno, polje je po iznosu jednako, ali suprotnoga smjera, tj. usmjereno je prema vodiču. Taj smo primjer na 14. str. riješili na drukčiji način. Uspoređujući ta dva rješenja vidimo prednost upotrebe Gaussova zakona.

**Primjer 1.7.**

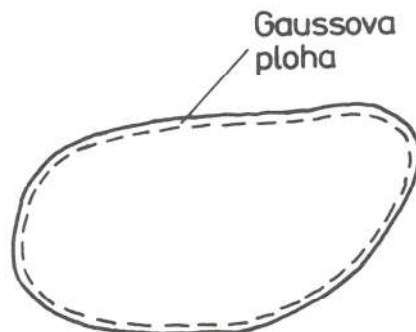
a) Pomoću Gaussova zakona pokažite da je sav naboj naelektriziranoga vodiča na njegovoj površini i da u unutrašnjosti vodiča nema slobodnog naboja.

b) Koliko je električno polje na površini nabijenog vodiča?

c) Izračunajte ukupni naboj metalne ploče površine  $1 \text{ m}^2$  ako je na njezinoj površini jakost električnoga polja  $100 \text{ N/C}$ ?

a) U elektrostatskim uvjetima (a samo takve uvjete ovdje i razmatramo) električno je polje unutar naelektriziranog vodiča nula. Kad bi, naime, polje postojalo, slobodni elektroni u vodiču gibali bi se pod njegovim utjecajem (tj. tekla bi struja) sve dok polje ne bi iščeznulo. Dakle, elektrostatsko polje ne može postojati unutar vodiča.

Slično, kada se vodič unese u vanjsko električno polje  $\vec{E}$ , električna sila djeluje na slobodne elektrone i oni se gibaju nasuprot polju pa dio vodiča postaje pozitivno, a drugi negativno nabijen. Tako razdvojeni naboji uzrokuju inducirano polje  $\vec{E}_i$  koje je takvo da je  $\vec{E} + \vec{E}_i = 0$ . Inducirani naboji na površini vodiča razmjesti se tako da je ukupno polje unutar vodiča jednako nuli.



Slika 1.21.

Budući da je u svakoj točki u unutrašnjosti vodiča (metala)  $E = 0$ , i u svakoj će točki Gaussove plohe, koju zamislimo unutar vodiča, polje iščezavati, pa i za Gaussovu plohu (sl. 1.21) koja u unutrašnjosti vodiča ide tik uz vanjsku površinu metala. Dakle je:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S 0 \cdot dS = 0.$$

Iz Gaussova zakona slijedi:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

te je  $Q = 0$  unutar bilo koje zamišljene zatvorene plohe u vodiču. Budući da je vodič nabijen, a u njegovoj unutrašnjosti nema naboja, zaključujemo da je sav naboj na njegovoj površini.

b) Električnoga polja nema u unutrašnjosti vodiča, a na površini vodiča ne može postojati tangencijalna, nego samo normalna komponenta električnoga polja. Električno polje na površini vodiča okomito je na površinu.

Zamislimo tanki valjak čija je jedna baza površine  $\Delta S$  unutar vodiča, a druga izvan vodiča, obje blizu površine vodiča. Tok električnoga polja postoji samo kroz vanjsku osnovicu valjka i iznosi

$$D\Delta S = \varepsilon_0 E\Delta S.$$

Prema Gaussovu zakonu, taj je tok jednak naboju unutar valjka. Ako je  $\sigma$  površinska gustoća naboja na površini vodiča, tada je naboj unutar valjka  $\sigma\Delta S$ , te je

$$D\Delta S = \varepsilon_0 E\Delta S = \sigma\Delta S$$

$$D = \sigma$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Vektor električnoga pomaka okomit je na površinu vodiča i jednak površinskoj gustoći naboja  $\sigma$ . Silnice polja izlaze iz površine vodiča ako je  $\sigma$  pozitivna, a ulaze u vodič ako je  $\sigma$  negativan. Jakost električnoga polja u točki upravo izvan površine nabijenog vodiča jednaka je površinskoj gustoći naboja podijeljenoj s dielektričnom konstantom.

Metalna ploča površine  $\Delta S = 1 \text{ m}^2$  s obje strane nabijena je površinskom gustoćom naboja  $\sigma$ . Sa svake strane električno polje izlazi okomito iz ploče i jednako je:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Odatle je:

$$\sigma = \varepsilon_0 E = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \cdot 100 \text{ NC}^{-1} = 8,85 \cdot 10^{-10} \text{ Cm}^{-2}.$$

c) Ukupni je naboj na ploči:

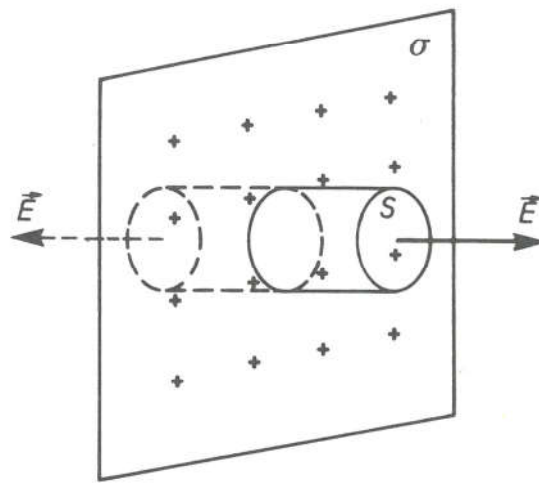
$$Q = 2\sigma\Delta S = 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-10} \text{ Cm}^{-2} \cdot 1 \text{ m}^2$$

$$Q = 1,8 \cdot 10^{-9} \text{ C} = 1,8 \text{ nC}.$$



**Primjer 1.8.**

- a) Koliko je električno polje što ga u prostoru stvara jednoliko nabijena ravnina?
- b) Kolika je jakost električnoga polja dviju paralelnih jednoliko nabijenih ravnina od kojih je jedna pozitivna, a druga (sl. 1.22.b) negativna, tj. jakost električnoga polja pločastoga kondenzatora?



Slika 1.22. a)

a) Neka je ravna površina koje je dio prikazan na sl. 1.22.a nabijena plošnom gustoćom naboja  $\sigma$ . Ako je  $\sigma$  pozitivna, silnice izlaze okomito iz ravnine, a ako je  $\sigma$  negativna, silnice okomito ulaze u ravninu. Da bismo odredili jakost električnoga polja, primijenit ćemo Gaussov zakon. Kao integracijsku plohu izabrat ćemo mali šuplji valjak površine baze  $S$  kojeg je os okomita na ravninu (sl. 1.22.a). Primijenimo Gaussov zakon:

$$\oint_S \epsilon_0 E_n dS = Q.$$

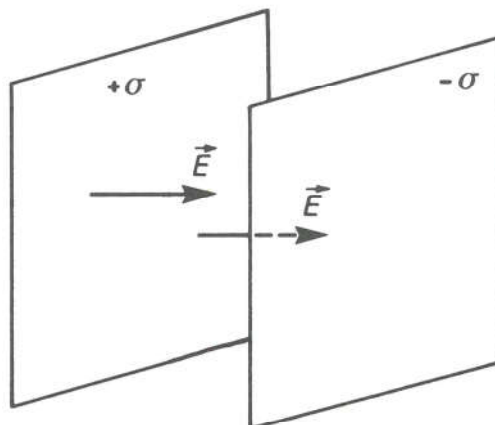
Tok je kroz osnovice valjka  $E \cdot S$ , a kroz plašt valjka jednak je nuli jer je tu električno polje usporedno s plaštem, odnosno  $\vec{E}$  je okomito na vektor  $d\vec{S}$ . Ukupni je tok kroz zatvorenu plohu valjka  $\Phi = 2ES$ , tj. jednak je toku kroz njegove dvije osnovice. Naboj je unutar valjka  $\sigma \cdot S$ . Primjenom Gaussova zakona dobivamo:

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum Q$$

$$2\varepsilon_0 ES = \sigma S$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Električno je polje homogeno (silnice su međusobno paralelne i okomite na ravninu) i ne ovisi o udaljenosti od ravnine.



Slika 1.22. b)

b) Dvije su paralelne ravnine udaljene za  $d$ , nabijene površinskom gustoćom naboja  $\sigma$  i  $-\sigma$  (sl. 1.22.b). To je zapravo idealni pločasti kondenzator. Unutra, između ploča, električna su polja od jedne i druge ravnine istoga smjera i iznosa i rezultatno polje jednako je njihovoj zbroju:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Polja izvan kondenzatora jednaka su po iznosu, a suprotna smjera pa je rezultatno polje:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0.$$

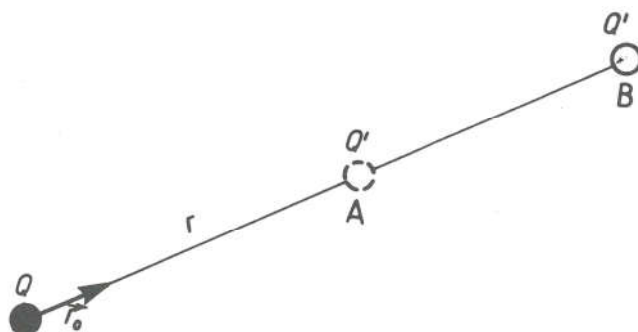
Stvarni pločasti kondenzator ima ploče koje su dio ravnine i dobiveni rezultat vrijedi ako je razmak  $d$  mali prema površini ploča i ako se zanemari učinak rubova kondenzatora.

## 1.8. Električna potencijalna energija

Slično kao što smo gravitacijsku silu i polje opisivali potencijalnom energijom i potencijalom, tako ćemo i ovdje uvesti pojmove električne potencijalne energije i potencijala.

Međutim, dok se u mehanici češće koristi pojam potencijalne energije, u elektricitetu se češće koristi potencijal.

Ako se predmet podigne u visinu  $h$  iznad tla, obavi se rad protiv gravitacijskih privlačnih sila i taj rad povećava potencijalnu energiju sistema predmet–Zemlja. Ako se predmet ispusti i pada prema tlu, potencijalna energija se smanjuje pretvarajući se u kinetičku energiju. Slično je i u elektrostatici. Da bismo povećali udaljenost dvaju naboja različitog predznaka, potrebno je da okolina obavi rad. Kad dva naboja različitog predznaka pustimo da se gibaju jedan prema drugome, ubrzavat će se i potencijalna će se energija pretvarati u kinetičku.



Slika 1.23. Rad pri pomicanju naboja u polju točkastog naboja

Izračunajmo rad kada se pokusni naboj  $Q'$  pomakne iz točke  $A$  u točku  $B$  u električnom polju točkastog naboja  $Q$  (sl. 1.23). Na naboj  $Q'$  djeluje električna sila

$$F = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0 \quad (1.31)$$

Rad te sile pri pomaku naboja  $Q'$  iz  $A$  u  $B$  jednak je:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} \\ W_{AB} &= -\frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Rad električne sile ovisi samo o početnoj i konačnoj udaljenosti naboja  $Q'$  od naboja  $Q$ , a ne o stazi po kojoj se naboj pomicao. Elektrostatska sila je dakle konzervativna i može se izračunati njena potencijalna energija jednako kao i za gravitacijsku i druge konzervativne sile:

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= E_{pB} - E_{pA} = -W_{AB} \\ E_{pB} - E_{pA} &= \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned} \quad (1.33)$$



Ako su npr. naboji suprotnog predznaka, potencijalna se energija povećava kada se naboji udaljavaju, a smanjuje kada se približavaju.

Dogovorom da je potencijalna energija jednaka nuli kad su naboji vrlo daleko jedan od drugog i zamjenom  $E_p(r_B \rightarrow \infty) = 0$  u formuli (1.33) – dobivamo potencijalnu energiju dvaju točkastih naboja  $Q$  i  $Q'$  udaljenih za  $r$ :

$$E_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{QQ'}{r} \quad (1.34)$$

Ako električno polje svojom silom na naboj  $Q'$  obavlja rad pomičući taj naboj,  $W_{AB}$  je pozitivan. To je npr. kada se dva suprotno nabijena naboja približuju. Da bismo te naboje udaljili potrebno je vanjskom silom djelovati na naboj  $Q'$ . Ako je ta sila jednaka po iznosu, a suprotna po smjeru električnoj sili  $\vec{F}' = -Q'\vec{E}$ , naboj se pomiče bez ubrzavanja i rad je te sile:

$$W'_{AB} = -W_{AB} = E_{pB} - E_{pA} \quad (1.35)$$

gdje je  $W_{AB}$  rad električne sile.

Promjena je potencijalne energije:

$$E_{pB} - E_{pA} = -Q' \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.36)$$

Općenito, potencijalna energija naboja  $Q'$ , koji se nalazi u točki A električnoga polja jakosti  $E$ , jednaka je radu električne sile obavljenom pri udaljavanju naboja  $Q'$  iz točke A u beskonačnost:

$$E_p(r_A) = Q' \int_{r_A}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.37)$$

### Primjer 1.9.

Kolika je električna potencijalna energija elektrona i protona kada su udaljeni za  $r_1 = 0,053$  nm? Ako se s te udaljenosti  $r_1$  elektron pomakne na udaljenost  $r_2 = 0,2$  nm, koliko se promijeni potencijalna energija?

Primjenom formule za potencijalnu energiju dvaju točkastih naboja dobivamo:

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{0,053 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = -4,34 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

Ta se energija može izraziti i u elektronvoltima, što se običava u atomskoj fizici. Budući da je  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , to je  $E_p = -27,1 \text{ eV}$ .

U Bohrovu modelu atoma vodika, u osnovnome stanju elektron kruži oko protona na udaljenosti 0,053 nm. Dobiveni rezultat daje, dakle, potencijalnu energiju elektrona u osnovnome stanju vodikova atoma. Predznak minus dolazi zbog različitih predznaka naboja jezgre (protona) i elektrona.

Promjena je električne potencijalne energije pri udaljavanju elektrona:

$$\Delta E_p = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\Delta E_p = 3,456 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 21,68 \text{ eV}.$$

Naboji su različita predznaka i udaljavaju se, promjena je potencijalne energije pozitivna, a potencijalna se energija povećava. Uzimajući u obzir predznak naboja, dobivamo ispravan predznak za promjenu potencijalne energije.

## 1.9. Električni potencijal i napon

Slično kao što djelovanje konzervativne sile možemo opisati potencijalnom energijom, tako se i konzervativno polje može opisati potencijalom. To smo učinili u mehanici, proučavajući gravitacijsko polje, a isto ćemo sada primijeniti i na elektrostatsko polje budući da je ono konzervativno.

Potencijal  $\varphi$  neke točke električnoga polja definira se kao omjer potencijalne energije naboja  $Q'$  u toj točki i tog naboja:

$$\varphi = \frac{E_p}{Q'} \quad (1.38)$$

Razlika potencijala dviju točaka A i B u električnome polju naziva se električnim naponom  $U$  između tih dviju točaka:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

$$U_{AB} = \frac{E_{pA} - E_{pB}}{Q'} \quad (1.39)$$

Prijeđe li naboj  $Q'$  iz točke A u točku B električnog polja, rad električne sile je

$$W_{AB} = Q' U_{AB} \quad (1.40)$$

Definicijska formula (1.38) naznačuje i jedinicu potencijala, a i napona, volt\* (znak: V):

$$\text{volt} = \frac{\text{džul}}{\text{kulon}}$$

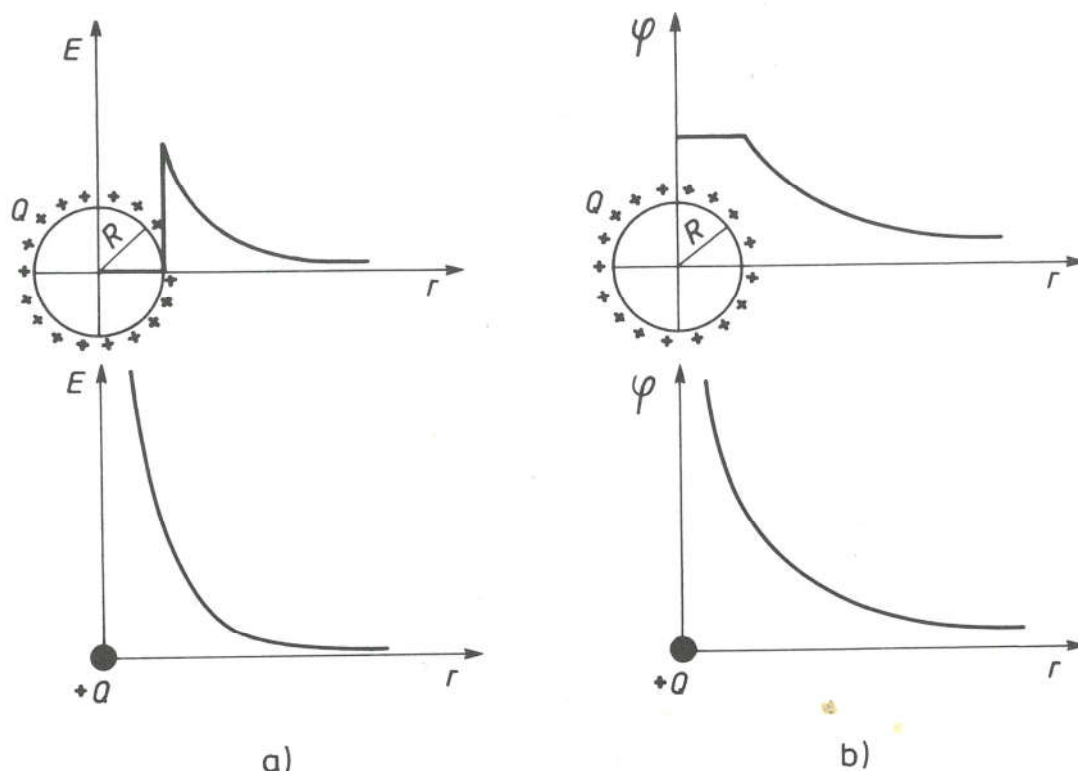
$$\text{V} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{C}^{-1}$$

\* Alessandro Volta (1745–1827), talijanski fizičar, poznat po otkriću prvog galvanskog članka

Rad obavljen kada se elektron (ili neka druga čestica s elementarnim nabojem) pomakne za razliku potencijala 1 V naziva se elektronvolt (eV). Budući da elementarni naboj iznosi  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C, to je

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Uz SI-jedinicu energije i rada džul, u atomskoj fizici i u nekim drugim područjima fizike i tehnike iznimno je dopuštena izvansustavna jedinica elektronvolt.



Slika 1.24. Polje a) i potencijal b) točkastog naboja i nabijene metalne kugle

Potencijal u nekoj točki A u električnome polju proizvedenom točkastim nabojem  $Q$  možemo odrediti dijeljenjem potencijalne energije točkastog naboja  $Q'$  koji se nalazi u toj točki s nabojem  $Q'$ . Budući da je potencijalna energija dvaju naboja  $Q$  i  $Q'$  udaljenih za  $r$  jednaka (v. izraz 1.34)

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r},$$

potencijal je u točki udaljenoj za  $r$  od točkastog naboja:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (1.41)$$

Pozitivni naboj stvara u prostoru pozitivni potencijal, a točke u prostoru oko negativnoga naboja imaju negativni potencijal. Ako je točka beskonačno daleko, potencijal je nula.



Ako je električno polje uzrokovano sistemom naboja  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ , tada je potencijal u bilo kojoj točki polja jednak zbroju potencijala što ga svaki od tih naboja stvara u toj točki:

$$\varphi(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) + \varphi_3(r) + \dots + \varphi_n(r) \quad (1.42)$$

Potencijal je skalarna veličina, za razliku od vektora električnoga polja  $\vec{E}$  pa je lakše računati s potencijalima nego s poljima i u tome je prednost opisivanja polja potencijalom.

Na sl. 1.24. prikazani su električno polje i potencijal u ovisnosti o udaljenosti  $r$  za točkasti naboj i pozitivno nabijenu metalnu kuglu polumjera  $R$ . Sav je naboj na površini kugle. Unutar kugle električno je polje nula, a potencijal konstantan i jednak potencijalu na površini kugle. Izvan kugle polje i potencijal jednaki su za kuglu i točkasti naboj.

Potencijal nabijene metalne kugle polumjera  $R$  računa se, dakle, relacijom (1.41) za sve točke izvan kugle ( $r > R$ ), dok je potencijal svih točaka na kuglinoj plohi i unutar kugle konstantan i jednak:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad (1.43)$$

Rad obavljen kada se pokusni naboj  $Q'$  pomakne od jedne ploče A do druge B u homogenom polju pločastog kondenzatora produkt je sile  $Q'E$  i razmaka ploča  $d$

$$W = Q'Ed$$

Odatle je

$$U = \frac{W}{Q'} = Ed \quad (1.44)$$

Jakost električnoga polja pločastog kondenzatora može se, dakle, izraziti pomoću napona:

$$E = \frac{U}{d} \quad (1.45)$$

Iz te formule uočavamo da je moguće jednostavno odrediti jakost električnoga polja pločastoga kondenzatora: mjereći razmak ploča  $d$  i napon među njima  $U$ , može se po toj formuli izračunati jakost polja  $E$ .

Iz relacije (1.45) također vidimo da se jakost električnoga polja može izraziti jedinicom volt po metru V/m, što se vrlo često i čini. To je naravno ekvivalentno jedinici njutn po kulonu N/C:

$$\frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{J C}^{-1}}{\text{m}} = \frac{\text{N m C}^{-1}}{\text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Potencijal neke točke električnoga polja definira se, dakle, kao potencijalna energija jediničnoga pozitivnog naboja u toj točki. Ako je potencijalna energija

naboja  $Q'$  u točki A jednaka  $E_p(r_A)$ , tada je potencijal  $\varphi_A$ :

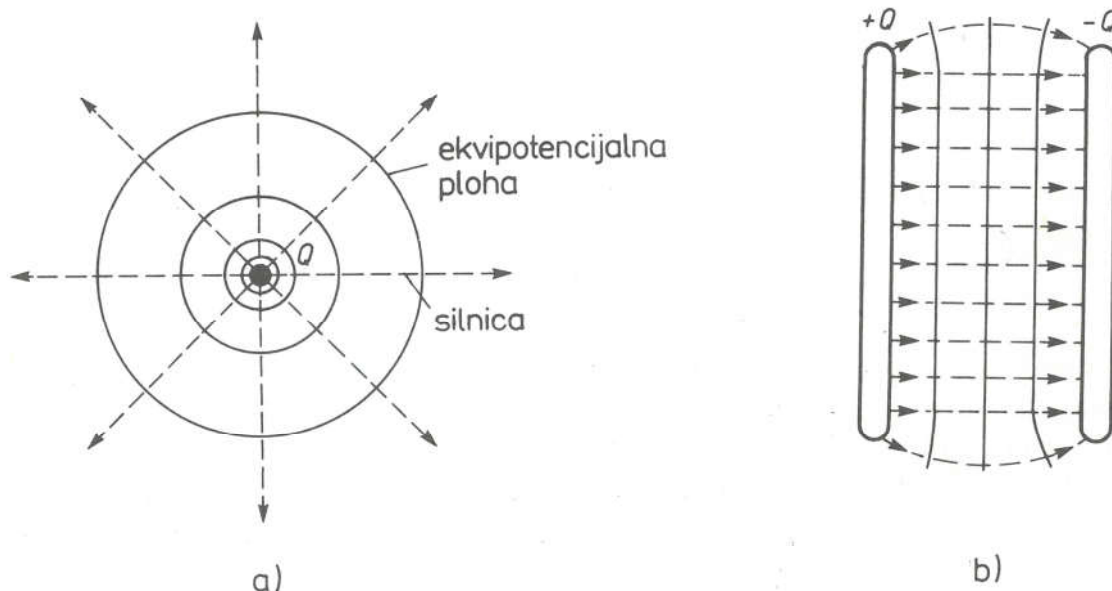
$$\varphi_A = \frac{E_p(r_A)}{Q'} = \int_{r_A}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^{r_A} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.46)$$

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Potencijal je neke točke električnoga polja brojčano jednak radu elektrostatskih sila pri pomaku jediničnoga pozitivnog naboja iz odabrane referentne točke (obično iz beskonačnosti u tu točku). Na taj način potencijal ovisi o izboru referentne točke nultoga potencijala. U našim razmatranjima uzimamo da je potencijal beskonačno dalekih točaka jednak nuli, premda bismo mogli uzeti kao referentnu točku npr. površinu Zemlje. Budući da za mjerenje nije bitan apsolutni potencijal, nego potencijalna razlika, to je manje-više svejedno gdje uzeti referentni (nulti) potencijal.

Napon između dviju točaka električnoga polja mjerimo **voltmetrom**. Najbolji, iako ne i najpraktičniji voltmetar jest elektrostatski voltmetar. To je elektrometar baždaren tako da pokazuje napon između kućišta i štapića izražen u voltima.

Slično kao što polje prikazujemo silnicama, potencijal možemo zorno prikazati i tzv. *ekvipotencijalnim ploham*, tj. skupom točaka jednakoga potencijala u prostoru. Tako su npr. ekvipotencijalne plohe u polju točkastoga naboja koncentrične kugle oko toga naboja (sl. 1.25.a). Površina vodiča također je ekvipotencijalna ploha.



Slika 1.25. Ekvipotencijalna ploha a) točkastog naboja i b) pločastog kondenzatora

Ekvipotencijalne plohe u polju pločastoga kondenzatora međusobno su usporedne ravnine (sl. 1.25.b). Ekvipotencijalne plohe crtaju se obično tako da je među njima napon jednak ( $\Delta\varphi = \text{konst.}$ ).

Gibanjem naboja po ekvipotencijalnoj plohi ne obavlja se nikakav rad ( $W = QU = 0$ ). Iz toga slijedi da je  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ , odnosno, da su silnice okomite na ekvipotencijalnu plohu.

Vektor  $\vec{E}$  ima uvijek smjer normale na ekvipotencijalnu plohu.

### Primjer 1.10.

U dva vrha A i B istostraničnoga trokuta ( $a = 10^{-9}$  m) nalaze se protoni, a u trećem vrhu C je elektron. Kolika je potencijalna energija elektrona?

Električni je potencijal što ga naboji u A i B proizvedu u točki C

$$\varphi_1 = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\varphi_2 = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Ukupni je potencijal zbroj tih dvaju potencijala. (Potencijal je skalarna veličina pa je zbrajanje algebarsko, za razliku od električnih polja, koja zbrajamo vektorski.)

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2e}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 a}.$$

Potencijalna je energija naboja  $Q_C$  u vrhu C:

$$E_p = Q_C \varphi = -e\varphi = -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a}$$

$$E_p = -4,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = -2,88 \text{ eV}.$$

### Primjer 1.11.

Dva naboja od  $1,5 \mu\text{C}$  i  $-1,5 \mu\text{C}$  nalaze se u točkama A i B (sl. 1.26).

a) Izračunajte ukupni električni potencijal u točki C koja je od točaka B i A udaljena za  $a = 0,6$  m i  $b = 0,8$  m.

b) Kolik je rad potreban da bi se naboj  $Q_C = 2 \mu\text{C}$  doveo iz beskonačnosti u tu točku?

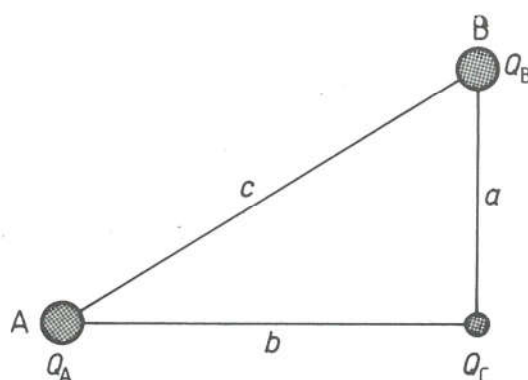
c) Kolika je potencijalna energija sistema tih triju naboja  $Q_A$ ,  $Q_B$  i  $Q_C$ ?

a) Potencijal je skalarna veličina pa je ukupni potencijal jednak zbroju potencijala što ga svaki od tih dvaju naboja stvara u točki C:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_A}{b} + \frac{Q_B}{a} \right)$$

$$\varphi = -5,63 \text{ kV}.$$





Slika 1.26.

b) Električni potencijal neke točke C definira se kao rad  $W'_{\infty \rightarrow C}$  koji je potrebno obaviti po jedinici pozitivnoga naboja da bi se pokusni naboj  $Q'$  pomaknuo iz beskonačnosti u točku C

$$\varphi_C = \frac{W'_{\infty \rightarrow C}}{Q'}$$

Odatle je traženi rad:

$$W' = Q' \varphi_C = -1,13 \cdot 10^{-2} \text{ J.}$$

Ako pri pomaku pozitivnoga naboja okolica obavlja rad  $W'$ , tada se taj rad smatra pozitivnim, dok je rad  $W$  što ga obavlja električno polje negativan. U našem slučaju, budući da je potencijal točke C negativan, a naboj koji dovodimo u tu točku pozitivan, resultantna kulonska sila naboja  $Q_A$  i  $Q_B$  privlačit će naboj  $Q_C$ , on će se sam od sebe gibati prema točki C i električno će polje obaviti rad; zato je u rezultatu negativan predznak. Da bismo vratili naboj iz točke C u beskonačnost, morali bismo obaviti (pozitivan) rad od  $1,13 \cdot 10^{-2} \text{ J}$ .

c) Potencijalna je energija triju zadanih naboja u točkama A, B i C (sl. 1.26):

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_A Q_B}{c} + \frac{Q_A Q_C}{b} + \frac{Q_B Q_C}{a} \right)$$

$$E_p = -3,15 \cdot 10^{-2} \text{ J.}$$

## 1.10. Električno polje i gradijent potencijala

Ako je poznata jakost električnoga polja  $E(\vec{r})$ , potencijal se izračunava relacijom (1.46):

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1.47)$$

gdje smo umjesto  $d\vec{s}$  pisali  $d\vec{r}$  (sjetite se da je  $d\vec{s} = d\vec{r}$ ). Veza između potencijala i električnoga polja može se pisati i u diferencijalnu obliku:

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1.48)$$

Potencijal se najbrže povećava u smjeru električnoga polja, tj. kada se pravac vektora  $\vec{E}$  podudara s pravcem vektora  $d\vec{r}$ . Tada je

$$d\varphi = -E dr \quad (1.49)$$

i jakost električnog polja jednaka

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \quad (1.50)$$

pri čemu je potrebno tu derivaciju uzeti u smjeru najbržega povećanja potencijala. Smjer vektora jakosti električnoga polja suprotan je tom smjeru zbog predznaka minus u (1.50). Stoga kažemo da je jakost električnoga polja negativni gradijent potencijala.

Općenito se može pisati da su komponente jakosti električnoga polja

$$E_x = -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y} \quad \text{i} \quad E_z = -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z} \quad (1.51)$$

gdje oznaka  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$  označuje parcijalnu derivaciju, što znači da, derivirajući  $\varphi(x, y, z)$  po  $x$ , smatramo samo  $x$  varijablom, a  $y$  i  $z$  konstantnim i, slično, za  $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$  i  $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ .

Općenito se veza između električnog polja  $\vec{E}$  i potencijala  $\varphi$  piše u vektorskom obliku:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad (1.52)$$

gdje je  $\text{grad } \varphi$  vektor čije su komponente

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (1.53)$$

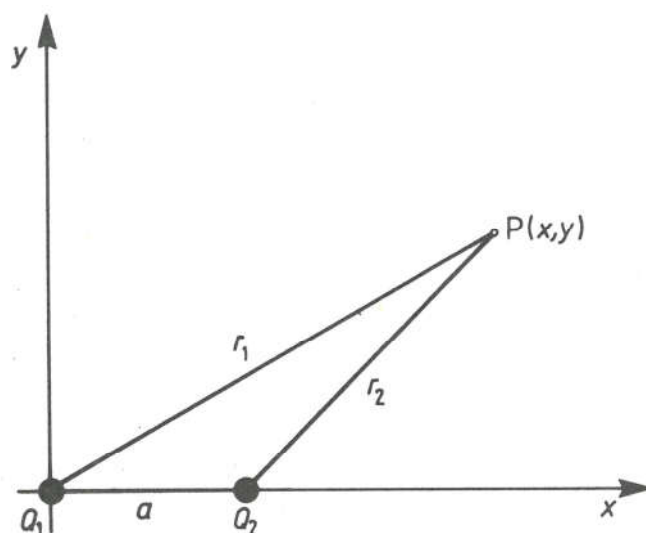
**Primjer 1.12.**

Naboj  $Q_1$  nalazi se u ishodištu, a naboj  $Q_2$  na osi  $x$  u točki  $A(a, 0)$ . Izračunajte potencijal i električno polje u točki  $P(x, y)$ . Koliki je rezultat u posebnom slučaju kada je  $Q_1 = 2 \text{ nC}$ ,  $Q_2 = 1 \text{ nC}$ , a  $a = 3 \text{ cm}$ , i  $P(3 \text{ cm}, 4 \text{ cm})$ ?

Potencijal u točki  $P(x, y)$  zbroj je potencijala od prvog i od drugog naboja:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \right) = 585 \text{ V}$$



Slika 1.27.

Iz dobivenog izraza za potencijal izračunat ćemo komponente električnoga polja u smjeru osi  $x$  i osi  $y$ :

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q_1 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{Q_2 (x-a)}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} \right] = 48 \text{ Vm}^{-1}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q_1 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{Q_2 (x-a)}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} \right] = 122 \text{ Vm}^{-1}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 131 \text{ Vm}^{-1} \quad \text{tg } \alpha = \frac{E_y}{E_x} \Rightarrow \alpha = 68,5^\circ$$

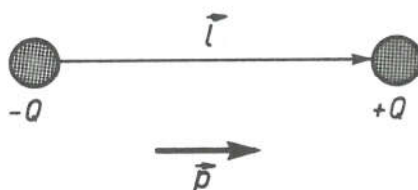


## 1.11. Električni dipol

Električni je dipol sistem dvaju naboja istog iznosa  $Q$ , ali suprotnih predznaka, koji su međusobno udaljeni za  $l$  (sl. 1.28). Dipol opisujemo električnim dipolnim momentom. To je vektor definiran relacijom:

$$\vec{p} = Q\vec{l}, \quad (1.54)$$

gdje je  $Q$  iznos naboja, a  $\vec{l}$  vektor usmjeren od naboja  $-Q$  prema naboju  $+Q$ . Dipolni je moment vektor koji je usmjeren od negativnoga naboja prema pozitivnom.



Slika 1.28. Električni dipol

Električni dipolni moment izražava se jedinicom kulonmetar, (Cm)\*. U tabl. 1.1. navedeni su dipolni momenti nekih molekula.

Tablica 1.1. Dipolni momenti nekih molekula

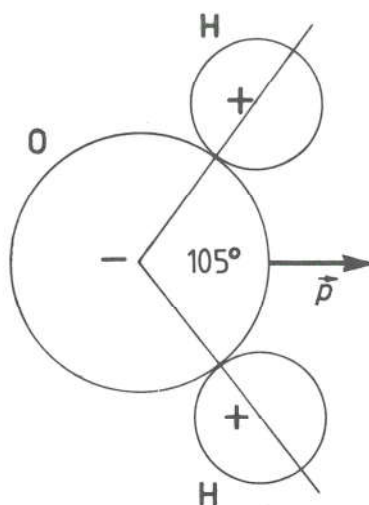
| Molekula        | H <sub>2</sub> O  | H <sub>2</sub> S              | NH <sub>3</sub>                 | SO <sub>2</sub> | CO               | CO <sub>2</sub> |
|-----------------|-------------------|-------------------------------|---------------------------------|-----------------|------------------|-----------------|
| $p/10^{-30}$ Cm | 6,2               | 3,3                           | 4,8                             | 5,1             | 0,3              | 0               |
| Molekula        | CH <sub>4</sub> O | C <sub>2</sub> H <sub>2</sub> | C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> O | HCl             | HNO <sub>3</sub> | AgCl            |
| $p/10^{-30}$ Cm | 5                 | 0                             | 6                               | 3,5             | 7                | 19              |

Zbog svoje unutrašnje strukture mnoge molekule imaju permanentni dipolni moment, jer im središta pozitivnog i negativnog naboja ne padaju u istu točku. Nazivamo ih polarnim molekulama. Takve su molekule H<sub>2</sub>O, HCl, NH<sub>3</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>OH. Neke druge (npr. N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>) nemaju dipolni moment. Međutim, ako takve nepolarne molekule unesemo u vanjsko električno polje, polje razdvaja središta pozitivnog i negativnog naboja i inducira električni dipolni moment. Atom, odnosno, molekula se polariziraju. Nepolarne molekule postaju polarne, a polarizacija prestaje ako polje uklonimo.

Na sl. 1.29. shematski je prikazana molekula vode. Središte pozitivnoga i središte negativnoga naboja nisu u istoj točki i molekula ima dipolni moment. Tako je npr. dipolni moment vode  $6,17 \cdot 10^{-30}$  Cm.

Električne dipole susrećemo i u drugim primjenama. U radijskim i televizijskim antenama elektroni titraju od jednoga do drugoga kraja antenskoga štapa, čineći

\* Stara jedinica debye ( $3,3 \cdot 10^{-30}$  Cm) više se ne upotrebljava.



Slika 1.29. Molekula vode

krajeve čas pozitivnima, čas negativnima. Dipolni moment takva antenskoga štapa mijenja se periodički u vremenu i možemo ga nazvati titrajućim dipolom.

U atomu, koji se sastoji od jezgre i elektronskog oblaka, centar negativnoga elektronskog oblaka je na mjestu gdje je jezgra pa se naboji jezgre i elektrona poništavaju i atom nema dipolni moment.

Međutim, ako je atom u vanjskome električnom polju, elektronski oblak promijenjen oblik i središte naboja više nije tamo gdje je jezgra pa se pojavi dipolni moment.

### Primjer 1.13.

Izračunajte električno polje dipola u točki T

- na pravcu okomitu na spojnicu naboja dipola koji prolazi sredinom te spojnice (sl. 1.30.a) i
- na pravcu koji prolazi kroz oba naboja (sl. 1.30.b).

a) Po principu superpozicije polje u točki T jednako je vektorskom zbroju polja jednoga i drugoga naboja:

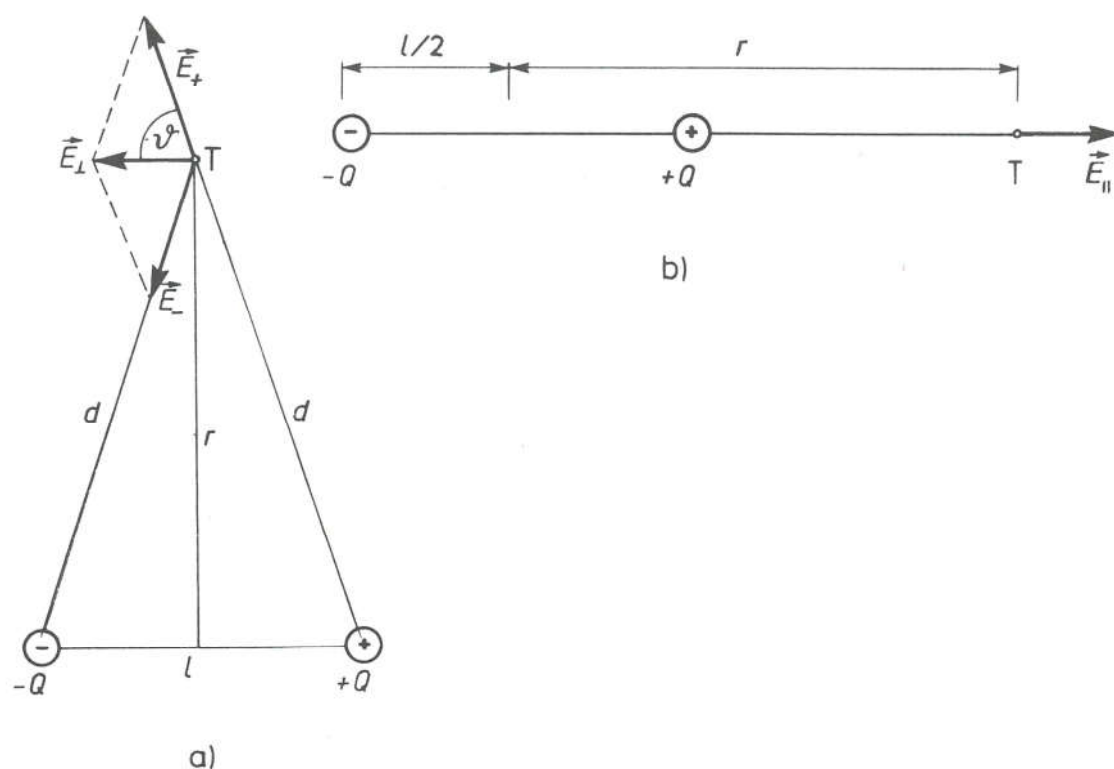
$$\vec{E}_{\perp} = \vec{E}_{-} + \vec{E}_{+},$$

gdje je:

$$E_{-} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \quad E_{+} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2}.$$

Iz slike uočavamo da je rezultatni vektor  $\vec{E}_{\perp}$  u smjeru okomitom na promatrani pravac i da zatvara kut  $\vartheta$  sa  $\vec{E}_{-}$  i  $\vec{E}_{+}$ , pa iznosi:

$$E_{\perp} = 2E_{-} \cos \vartheta = 2E_{+} \cos \vartheta.$$



Slika 1.30. Uz izračunavanje polja dipola

Budući da je

$$d = \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}} \quad \text{i} \quad \cos \vartheta = \frac{\frac{1}{2}l}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}},$$

to je:

$$E_{\perp} = 2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{2}l}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

$$E_{\perp} = \frac{Ql}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}.$$

Ako je točka daleko od dipola, tako da je  $r \gg l$ , možemo zanemariti  $l^2/4$  u nazivniku i pisati:

$$E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Daleko od dipola polje se smanjuje s  $1/r^3$ , a za točkaste naboje ta je promjena kao  $1/r^2$ .



b) Na smjeru osi dipola na udaljenosti  $r$  od sredine dipola (sl. 1.30.b) polje je

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}_{-} + \vec{E}_{+}$$

Polje  $\vec{E}_{-}$  i  $\vec{E}_{+}$  u tom je primjeru na istom pravcu, a suprotna smjera, pa je:

$$E_{\parallel} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{2Qrl}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}$$

i u smjeru je dipolnoga momenta. Ako je točka daleko, tj. za  $r \gg l$ , tada u nazivniku možemo zanemariti  $l^2/4$ , te pisati:

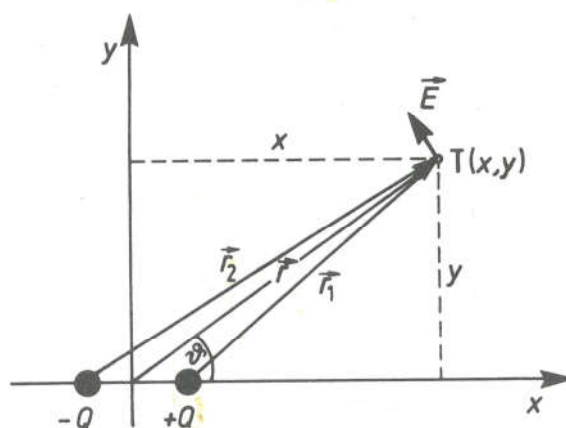
$$E_{\parallel} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Uočavamo da je polje u primjeru b) dvaput veće nego u primjeru a).

Može se pokazati da polje dipola u bilo kojoj dalekoj točki iznosi (sl. 1.31):

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{-2x^2 + y^2}{r^2} \\ E_x &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\sin^2 \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 - 3 \cos^2 \vartheta) \\ E_y &= \frac{3p}{4\pi\epsilon_0} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{xy}{r^2} \\ E_y &= \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \vartheta \cos \vartheta, \end{aligned}$$

gdje su  $x = r \cos \vartheta$  i  $y = r \sin \vartheta$ , koordinate točke T (sl. 1.31).



Slika 1.31. Polje dipola u dalekoj točki

Ukupno polje je:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \sqrt{\frac{y^4 - 4x^2 y^2 + 4x^4 + 9x^2 y^2}{r^4}}$$

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \sqrt{1 - 6 \cos^2 \vartheta + 9 \cos^4 \vartheta + 9 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta}$$

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}$$

ili pisano vektorski:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot [3\vec{r}_0(\vec{p} \cdot \vec{r}_0) - \vec{p}].$$

#### Primjer 1.14.

Izračunajte potencijal dipola u dalekoj točki (sl. 1.31).

Potencijal dipola jednak je zbroju potencijala svakog od naboja (sl. 1.31):

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}.$$

Ako je točka P daleko, tada je  $r_1 \approx r_2 = r$  i  $r_2 - r_1 = l \cos \vartheta$ , pa je:

$$\varphi = \frac{Ql \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

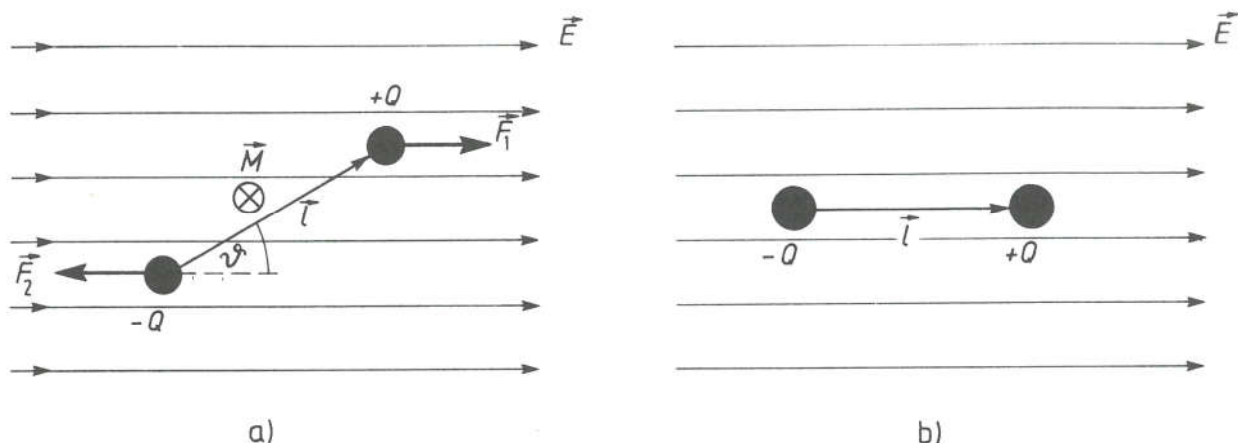
$$\varphi = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

gdje je  $p = Ql$  iznos dipolnoga momenta.

Potencijal dipola ne ovisi samo o naboju  $Q$  ili o udaljenosti  $l$ , već samo o njihovom produktu  $p = Ql$ . On je nula za  $\vartheta = 90^\circ$ , najveći je za  $\vartheta = 0^\circ$  i najmanji za  $\vartheta = 180^\circ$ .

## 1.12. Dipol u električnome polju

Promatrajmo električni dipol (dva naboja  $+Q$  i  $-Q$  udaljena za  $l$ ) koji se nalazi u homogenome električnom polju  $\vec{E}$  (sl. 1.32.a). Neka je dipol orijentiran tako da dipolni moment  $\vec{p}$  zatvara kut  $\vartheta$  s električnim poljem  $\vec{E}$ .



Slika 1.32. Dipol u homogenom polju

Na svaki naboj dipola djeluje električna sila  $\vec{F} = Q\vec{E}$  jednaka iznosa, ali suprotna predznaka. Te dvije sile,  $\vec{F}_1 = Q\vec{E}$  i  $\vec{F}_2 = -Q\vec{E}$ , čine, dakle, par sila. Rezultanta je tih dviju sila nula ( $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = F - F = 0$ ), ali postoji rezultatni moment para sila koji nastoji zakrenuti dipol i orijentirati ga u smjeru polja.

Električni dipol u homogenome električnom polju neće se gibati translatorno (jer je rezultatna sila nula), nego samo rotirati (jer postoji moment sile) dok se ne postavi u smjer polja ( $\vartheta = 0$ ), kao što pokazuje sl. 1.32.b.

Moment para sila na dipol u homogenome električnome polju iznosi:

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F}_1 = \vec{l} \times Q\vec{E} = Q\vec{l} \times \vec{E}$$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (1.55)$$

Iznos je momenta sile:

$$M = pE \sin \vartheta, \quad (1.56)$$

dok je smjer momenta okomit na smjer vektora  $\vec{p}$  i na smjer vektora  $\vec{E}$  i određuje se pravilom desne ruke za smjer vektorskoga produkta. Na sl. 1.32.a smjer vektora  $\vec{M}$  je okomit na ravninu crtnje prema unutra, kao što je na slici i označeno.

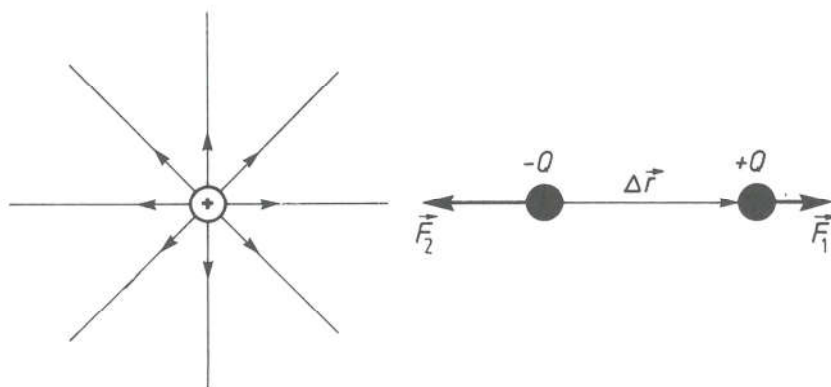
**Dipol u nehomogenome električnom polju.** Ako je električno polje  $\vec{E}$  nehomogeno, sile na dipol  $\vec{F}_1 = Q\vec{E}_1$  i  $\vec{F}_2 = Q\vec{E}_2$  nisu jednake i ne poništavaju se (kao u homogenom polju), nego na dipol djeluje rezultatna sila:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1.57)$$

To je zbog toga što se polje mijenja od točke do točke i jedan naboj dipola nalazi se u drukčijem polju nego drugi pa je sila na njega drukčija.

Pretpostavimo da je polje proizvedeno pozitivnim točkastim nabojem, kao što je prikazano na sl. 1.33. tako da se smanjuje radijalno sa  $1/r^2$ . Neka je dipol orijentiran u smjeru polja.





Slika 1.33. Dipol u nehomogenom polju

Ukupna je sila:

$$F = -QE(r) + QE(r + \Delta r) = Q\Delta E.$$

Budući da je

$$\Delta E \approx \frac{dE}{dr} \Delta r,$$

to je

$$F \approx Q\Delta r \frac{dE}{dr} = p \frac{dE}{dr} \quad (1.58)$$

Ta sila nastoji pomaknuti dipol u smjeru rastućeg polja, što se vidi i iz slike.

**Energija dipola.** Dipol u vanjskom električnom polju ima potencijalnu električnu energiju. Ako radom vanjskih sila promijenimo orijentaciju dipola, promijenit će mu se i potencijalna energija. Da bismo zakrenuli dipol iz nekoga početnog položaja  $\vartheta_0$  u položaj  $\vartheta$ , potreban je rad:

$$W' = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} M d\vartheta = \Delta E_p \quad (1.59)$$

i taj rad jednak je promjeni potencijalne energije. Ako pri tom vanjska sila obavi rad, rad je pozitivan i potencijalna se energija povećava. Ako je rad vanjske sile negativan, potencijalna se energija smanjuje.

Moment sile koji pri tom djeluje na dipol je  $M = pE \sin \vartheta$  pa je:

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} pE \sin \vartheta d\vartheta = -pE(\cos \vartheta) \Big|_{\vartheta_0}^{\vartheta} \\ \Delta E_p &= pE \cos \vartheta_0 - pE \cos \vartheta \end{aligned} \quad (1.60)$$

Odaberimo položaj  $\vartheta_0$  u kojemu je potencijalna energija jednaka nuli. Dogovorom je za taj referentni položaj odabrano  $\vartheta_0 = 90^\circ$ , položaj u kojem je dipol okomit na polje. Tada je  $E_p(90^\circ) = 0$ .

Potencijalna energija dipola u položaju određenu kutem  $\vartheta$  iznosi:

$$E_p = -pE \cos \vartheta = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (1.61)$$

gdje je  $\vartheta$  kut između  $\vec{p}$  i  $\vec{E}$ .

Potencijalna je energija minimalna kad je  $\vartheta = 0$ . Tada je  $E_p = -pE$ , dipol je orijentiran u smjeru polja i u ravnoteži je. (Sjetite se iz mehanike da ravnotežni položaj odgovara minimumu potencijalne energije.) Potencijalna je energija najveća ( $E_p = pE$ ) kada je  $\vartheta = 180^\circ$  i tada je dipol orijentiran nasuprot polju.

### Primjer 1.15.

a) Kolik je moment sile na molekulu vode u vanjskome električnom polju od  $10^6 \text{ V/m}$ ? Kada je moment sile najveći?

b) Kolik je rad potreban za zakretanje molekule iz položaja kad je dipolni moment u smjeru polja u položaj sa suprotnim smjerom?

a) Moment para sila je:

$$M = pE \sin \vartheta$$

i najveći je za  $\vartheta = 90^\circ$  te iznosi:

$$M = 6,2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm} \cdot 10^6 \text{ Vm}^{-1} = 6,2 \cdot 10^{-24} \text{ Nm}.$$

b) Kad su smjerovi dipolnoga momenta  $\vec{p}$  i električnog polja  $\vec{E}$  usporedni ( $\vartheta = 0$ ), potencijalna je energija minimalna,  $E_p = -pE$ . To je položaj ravnoteže. Kada je  $\vartheta = 180^\circ$  (smjerovi  $\vec{p}$  i  $\vec{E}$  antiparalelni), potencijalna je energija maksimalna,  $E_p = pE$ .

Rad potreban za zakretanje dipola jednak je promjeni potencijalne energije:

$$W = E_p(\vartheta = 0^\circ) - E_p(\vartheta = 180^\circ)$$

$$W = -pE - pE = -2pE$$

$$W = 12,4 \cdot 10^{-24} \text{ J}.$$

## 1.13. Električni kapacitet i kondenzatori

Izolirani vodič nabijen nabojem  $Q$  ima neki potencijal  $\varphi$ . Naboj je razmjeran potencijalu, a konstantu proporcionalnosti nazivamo kapacitetom vodiča

$$Q = C\varphi \quad (1.62)$$

U praksi je još važniji primjer kada su dva vodiča, jedan nabijen s  $+Q$ , a drugi s  $-Q$ , međusobno razdvojena nekim izolatorom ili vakuumom. Takve uređaje nazivamo kondenzatorima. U njima se mogu uskladištiti električni naboj i energija.

Kondenzator je, dakle, uređaj načinjen od dviju međusobno izoliranih vodljivih površina između kojih je dielektrik ili vakuum. Te se površine nazivaju armature ili obloge kondenzatora.

Električni kapacitet kondenzatora pokazuje koliku količinu naboja  $Q$  ima određeni kondenzator na svojim armaturama pri naponu  $U$ . Uočite da su armature kondenzatora uvijek nabijene po iznosu jednakim, a po predznaku suprotnim nabojem: kad je jedna armatura nabijena nabojem  $+Q$ , druga ima naboj  $-Q$ .

Veza između kapaciteta kondenzatora  $C$ , naboja na oblozi kondenzatora  $Q$  i napona  $U$  između obloga označuje se relacijom:

$$Q = CU \quad (1.63)$$

Najpoznatiji i najjednostavniji je pločasti kondenzator sastavljen od dviju međusobno usporednih metalnih ploča između kojih je izolator.

SI-jedinica za kapacitet je farad, F.\* Ta jedinica izvedena je iz definicijske jednadžbe

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$F = \frac{C}{V} = CV^{-1} = C^2 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^2.$$

Farad je vrlo velika jedinica pa se u praksi za kapacitet najčešće upotrebljavaju manje jedinice:

$$1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}, \quad 1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}, \quad \text{ i } \quad 1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}.$$

#### Primjer 1.16.

Kolik je kapacitet kugle polumjera  $R$ ?

Ako je metalna kugla polumjera  $R$  nabijena nabojem  $Q$ , tada je potencijal na njezinoj površini:

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R}.$$

Pri tome smo pretpostavili da je potencijal na beskonačno dalekoj udaljenosti od kugle jednak nuli ( $\varphi_\infty = 0$ ). Budući da je kapacitet jednak omjeru naboja i potencijala, kapacitet je kugle, koja je daleko od ostalih predmeta

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R.$$

Kapacitet osamljene kugle razmjernan je s njezinim polumjerom. Kugla u zraku polumjera 1 m ima kapacitet 111 pF. Kapacitet Zemlje ( $R_z = 6,3 \cdot 10^6 \text{ m}$ ) je  $4\pi\epsilon_0 R_z = 710 \mu\text{F}$ .

\* U čast engleskog fizičara M. Faradaya (1791–1867).



**Kapacitet pločastoga kondenzatora.** Pokusi pokazuju da, uz isti naboj na pločama, napon ovisi o razmaku ploča, površini ploča i o dielektriku između ploča. Kapacitet je to veći što je površina ploča veća, odnosno razmak među pločama manji. Kapacitet kondenzatora s dielektrikom veći je od kapaciteta istoga kondenzatora sa zrakom. Nema bitne razlike u kapacitetu ako je između ploča zrak ili vakuum.

Upotrebom Gaussova zakona izračunali smo da je jakost električnoga polja, koje je između ploča pločastoga kondenzatora homogeno, jednaka  $E = \sigma/\epsilon$ , gdje je  $\sigma$  plošna gustoća naboja na pločama. Naboj je jednoliko raspoređen na pločama površine  $S$  tako da je  $\sigma = Q/S$ , što daje:

$$E = \frac{Q}{\epsilon S} \quad \text{i} \quad Q = \epsilon S E \quad (1.64)$$

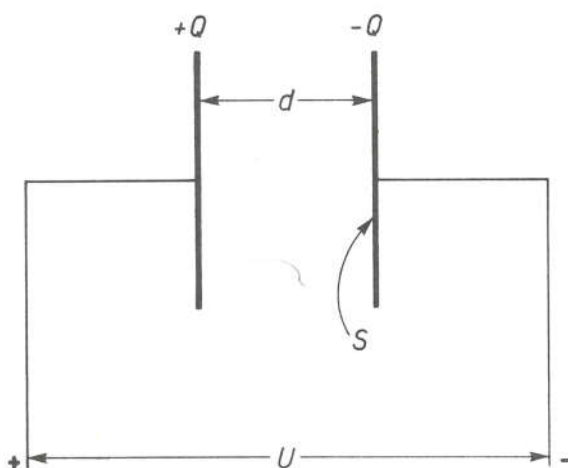
Napon između ploča dobivamo integralom (1.46) koji, u slučaju homogenog polja, jednostavno prelazi u:

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = E d. \quad (1.65)$$

Kapacitet je jednak kvocijentu naboja (1.64) i napona (1.65):

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon S E}{E d} = \epsilon \frac{S}{d} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (1.66)$$

To je izraz za kapacitet pločastoga kondenzatora s površinom ploča  $S$  i razmakom između ploča  $d$  (sl. 1.34).



Slika 1.34. Pločasti kondenzator

Ako između ploča kondenzatora umetnemo dielektrik relativne dielektrične konstante  $\epsilon_r$ , kapacitet će se povećati za  $\epsilon_r$  puta. Ako je  $C_0$  kapacitet kondenzatora kada je između ploča vakuum (zrak), a  $C$  kapacitet kondenzatora s dielektrikom, tada je:

$$C = \epsilon_r C_0, \quad \epsilon_r = \frac{C}{C_0} \quad (1.67)$$

U literaturi se često  $\epsilon_r$  naziva relativna dielektrična konstanta, relativna permisivnost, odnosno relativna električna propustljivost. Mi ćemo uglavnom upotrebljavati naziv relativna dielektrična konstanta.

Produkt  $\epsilon_0 \epsilon_r$  često se označuje s  $\epsilon$  i zove dielektrična konstanta (dielektričnost).

Uočite da se jedinica dielektrične konstante  $\epsilon_0$  i  $\epsilon$  može pisati na više načina:  $C^2/(Nm^2)$ ,  $C/(Vm)$  i  $F/m$ .

### Primjer 1.17.

Pločasti kondenzator napravljen je od kružnih metalnih ploča polumjera 0,1 m, međusobno udaljenih 0,1 cm. Između ploča nalazi se parafin ( $\epsilon_r = 2,2$ ). Koliki su kapacitet i naboj na pločama kondenzatora ako je napon između ploča 1000 V?

Kapacitet računamo primjenom relacije (1.66):

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$$

$$C = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \cdot 2,2 \cdot \frac{0,1^2 \cdot 3,14 m^2}{0,001 m} = 611,4 \text{ pF}.$$

Iz  $Q = CU$  dobivamo

$$Q = 611,4 \cdot 10^{-12} F \cdot 10^3 V = 6,11 \cdot 10^{-7} C$$

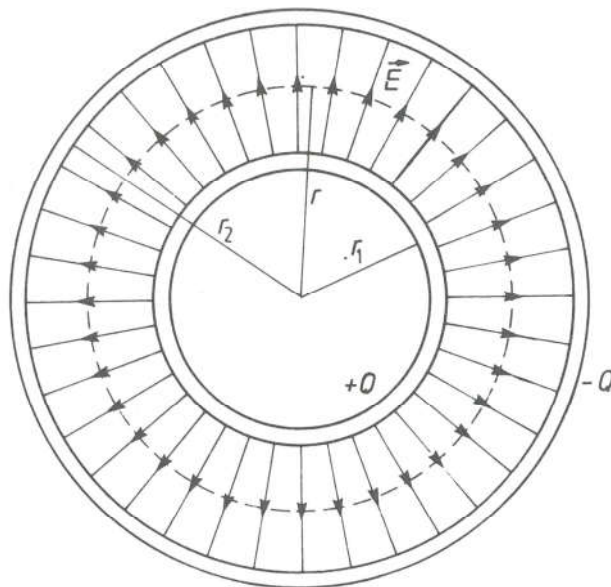
$$Q = 0,611 \mu C.$$

### Primjer 1.18.

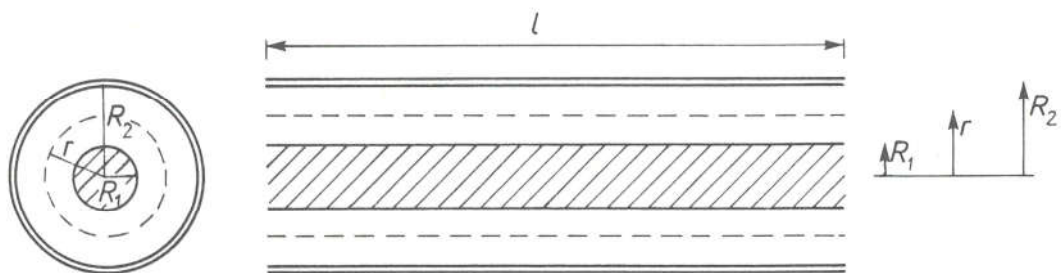
a) Kuglasti kondenzator sastoji se od dviju vodljivih koncentričnih kuglinih ljusaka, polumjera  $r_1$  i  $r_2$ . To može biti puna metalna kugla unutar veće šuplje metalne kugle. Kolik je kapacitet takva kondenzatora?

b) Cilindrični kondenzator sastoji se od dvaju cilindričnih vodiča duljine  $l$  međusobno izoliranih dielektrikom konstante  $\epsilon$  (sl. 1.35.a). Polumjer je unutrašnjeg vodiča  $R_1$ , dok je unutrašnji polumjer vanjskoga (šupljeg) vodiča  $R_2$ . Kolik je kapacitet cilindričnog kondenzatora?

a) Kad se kugle nabiju, ili priključe na izvor napona  $U$ , formirat će se u izolatoru među njihovim ploham električno polje. Ako je vanjska kugla nabijena nabojem  $-Q$ , unutrašnja će imati naboj  $+Q$ . Budući da plohe nisu jednakih površina, električno je polje nehomogeno; silnice su radijalni pravci koji izlaze iz pozitivno nabijene i ulaze u negativno nabijenu kuglu.



Slika 1.35. a) Kuglasti kondenzator



Slika 1.35. b) Cilindrični kondenzator

Električno polje unutar kondenzatora ( $r_1 < r < r_2$ ) jednako je kao i polje točkastoga naboja  $Q$  koji bi se našao u središtu kugle

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}.$$

Iz relacije (1.47) možemo izračunati napon između armatura kuglastoga kondenzatora:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

odnosno kapacitet kuglastoga kondenzatora:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$



Ako pretpostavimo da je vanjska kugla beskonačno velikog polumjera,  $r_2 = \infty$ , možemo dobiti kapacitet osamljene kugle (kugle daleko od ostalih vodiča):

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r r.$$

Ako su, naprotiv, kugline plohe vrlo blizu, tada formula za kapacitet kuglastoga prelazi u formulu za kapacitet pločastoga kondenzatora  $C = \epsilon_0\epsilon_r S/d$ .

b) Jakost električnog polja unutar cilindričnoga kondenzatora odredit ćemo Gaussovim zakonom. Kao Gaussovu integracijsku površinu zamislit ćemo koncentrični valjak polumjera  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ):

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$D \cdot 2\pi r l = Q$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l}.$$

Napon je između armatura cilindričnog kondenzatora:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Kapacitet je:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}.$$

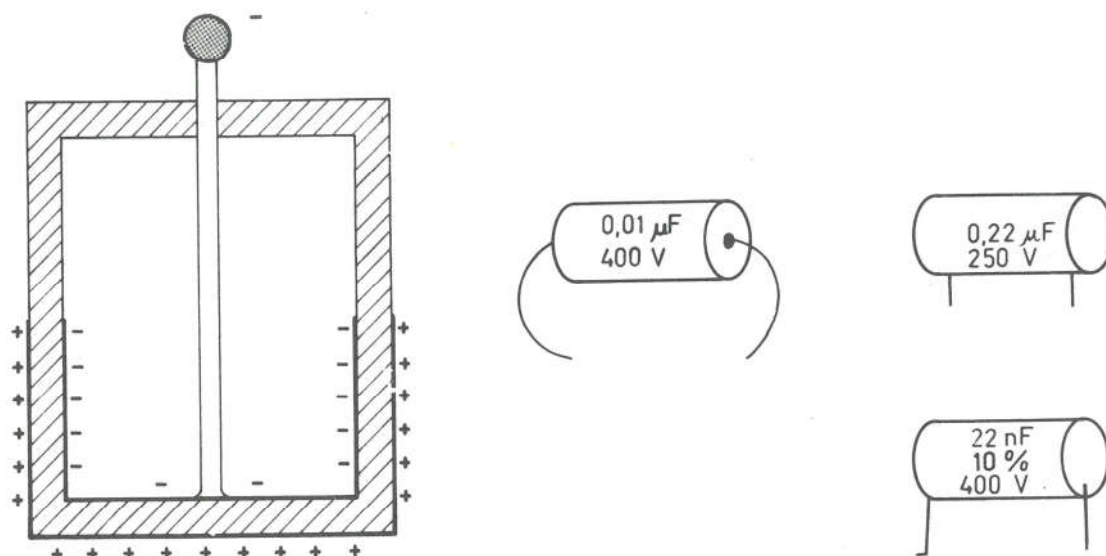
**Vrste kondenzatora.** Prema načinu izrade i načinu primjene postoje različite vrste kondenzatora: stalni i promjenljivi, papirni, liskunski, keramički, elektrolitni itd.

Lajdenska boca (sl. 1.36.a) najstariji je kondenzator. To je staklena boca (čša) obložena metalnom folijom izvana i iznutra, s poklopcem od izolatora kroz koji je provučena metalna šipka koja je spojena s unutrašnjom oblogom.

Kapacitet je lajdenske boce reda veličine 1 nF, a naponi mogu doseći nekoliko desetaka tisuća volti.

Papirni kondenzatori (sl. 1.36.b) izrađuju se od dviju dugačkih i vrlo tankih metalnih (alumijskih) folija odvojenih impregniranim parafiniranim papirom. Folije se uviju u obliku valjka i zaliju izolacijskim materijalom (umjetnom smolom). Umjesto papira mogu se kao dielektrik upotrijebiti plastične mase (polistirol, polipropilen) i sl. Takvi kondenzatori imaju kapacitet od nekoliko nanofarada (nF) do nekoliko mikrofara (μF).

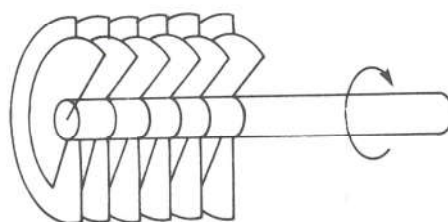
Posebno su kvalitetni keramički kondenzatori kod kojih se kao dielektrik primjenjuju razni keramički materijali velikih dielektričnih konstanti  $\epsilon_r$ . Takvi kondenzatori (zbog velike  $\epsilon_r$ ) mogu biti i vrlo malih dimenzija.



a)

Slika 1.36. a) Lajdenska boca b) Blok kondenzator

Elektrolitni kondenzatori sastoje se od aluminijske elektrode, koja služi kao pozitivna obloga kondenzatora, dok je elektrolit (vodena otopina boraksa i borne kiseline) negativna obloga kondenzatora. Tanki oksidni sloj  $\text{Al}(\text{OH})_3$ , koji kao dielektrik razdvaja elektrode, formira se na aluminiju pri proizvodnji kondenzatora. Elektrolitni kondenzatori spajaju se samo na izvore istosmjerne struje, i to tako da se pozitivna elektroda priključi na viši potencijal od negativne. Pogrešno priključenje elektrolitnog kondenzatora uništava oksidni sloj i kondenzator. Zbog velike površine aluminijske folije i male debljine dielektrika (oko  $10^{-6} \text{ m}$ ), kapaciteti mogu biti veliki (nekoliko stotina mikrofarađa).



promjenljivi kondenzator

c)

Slika 1.36. c) Promjenljivi kondenzator

Promjenljivi kondenzatori sastoje se od nekoliko nepomičnih metalnih ploča, koje čine jednu armaturu, između kojih je više pokretnih metalnih ploča kao druga armatura kondenzatora (sl. 1.36.c).

Uvlačenjem i izvlačenjem pokretnih ploča mijenja se djelotvorna površina, pa i kapacitet kondenzatora. Kod nekih promjenljivih kondenzatora kapacitet se mijenja promjenom razmaka između ploča. Takvi kondenzatori imaju kapacitet od nekoliko pikofarada (pF) do oko 1 nF.



Slika 1.37. Oznake za kondenzatore

Na sl. 1.37. prikazane su oznake za kondenzator stalnog, promjenljivog kapaciteta i elektrolitni kondenzator. Prema propisima JUS-a na svakom kondenzatoru moraju biti označeni kapacitet, točnost navedenog podatka (tolerancija) i maksimalni radni napon.

## 1.14. Spajanje kondenzatora

Kondenzatori se mogu međusobno spajati na dva osnovna načina: serijski i paralelno. Naravno, pri spoju više od dvaju kondenzatora moguće su kombinacije serijskog i paralelnog spajanja.

**Serijski spoj kondenzatora.** Pri spajanju u seriju spaja se po volji mnogo kondenzatora, tako da se obloga prvoga kondenzatora vezuje za oblogu drugog, druga obloga ovog za prvu oblogu trećeg itd., kao što prikazuje sl. 1.38.a. Priključenjem takvog spoja (baterije) kondenzatora na izvor stalnoga napona  $U$ , kao na sl. 1.38.a, lijeva obloga prvoga kondenzatora nabit će se nabojem  $+Q$ , taj će naboj influencirati na desnoj oblozi prvoga kondenzatora naboj  $-Q$ , dok će naboj  $+Q$  ostati na lijevoj oblozi drugoga kondenzatora itd., pa će svaki kondenzator biti nabijen jednakim nabojem  $Q$ . Naponi pojedinih kondenzatora bit će različiti i ovisit će o kapacitetu:

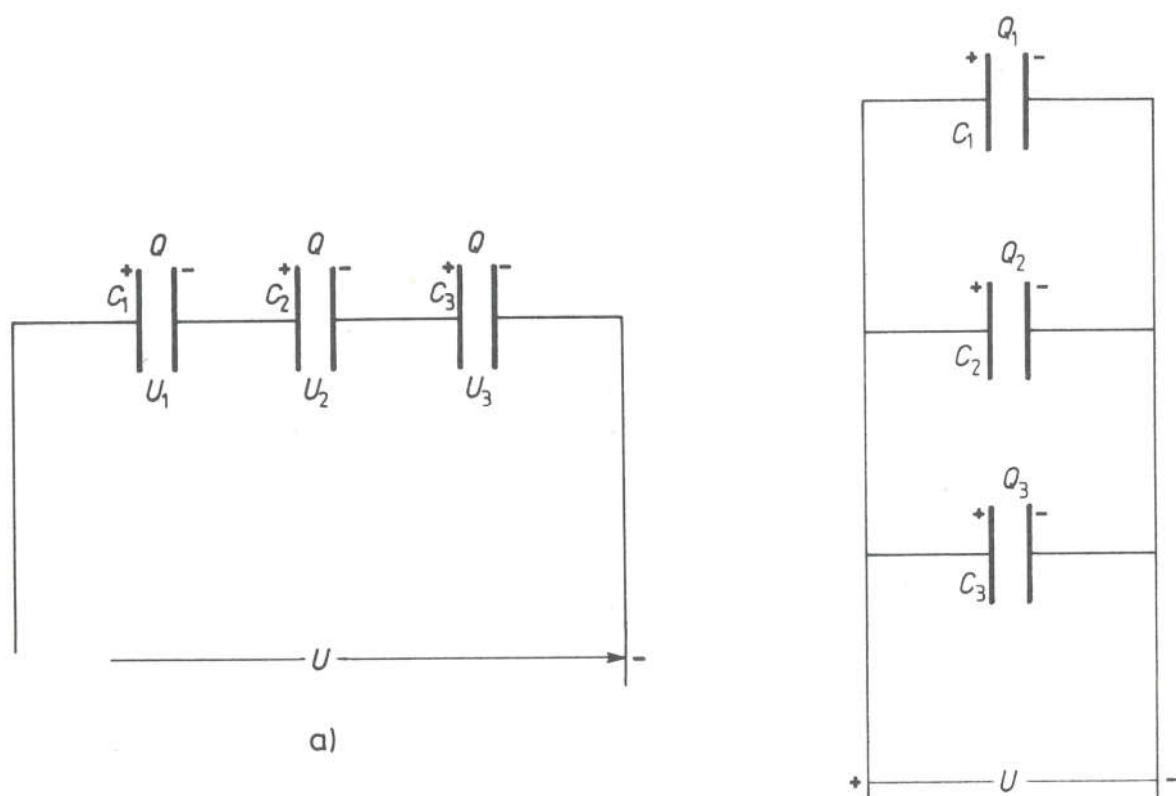
$$Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 = C_3 U_3 \quad (1.68)$$

Ukupni je napon:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{Q}{C} \quad (1.69)$$

gdje je  $C$  ukupni kapacitet serijske kombinacije kondenzatora.





Slika 1.38. a) Serijsko spajanje kondenzatora  
b) Paralelno spajanje kondenzatora

Iz (1.69) slijedi:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (1.70)$$

ili, općenito za  $n$  kondenzatora:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (1.71)$$

Recipročna vrijednost ukupnoga kapaciteta serijskoga spoja kondenzatora jednaka je zbroju recipročnih vrijednosti kapaciteta pojedinih kondenzatora.

**Paralelni spoj kondenzatora.** Na sl. 1.38.b prikazana su tri kondenzatora kapaciteta  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  paralelno spojena na izvor stalnog napona  $U$ . Na svakom je kondenzatoru napon jednak, a naboj je različit i ovisi o kapacitetu pojedinog kondenzatora:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 = U_3 = U \\ Q_1 &= C_1 U, \quad Q_2 = C_2 U, \quad Q_3 = C_3 U \end{aligned} \quad (1.72)$$

Ukupni je naboj:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 U + C_2 U + C_3 U = C U \quad (1.73)$$

Iz (1.73) slijedi:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \quad (1.74)$$

ili, općenito za spoj od  $n$  kondenzatora:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (1.75)$$

Ukupni kapacitet baterije paralelno vezanih kondenzatora jednak je zbroju kapaciteta pojedinih kondenzatora.

### Primjer 1.19.

Dva kondenzatora  $C_1 = 100 \mu\text{F}$  i  $C_2 = 50 \mu\text{F}$  spojena su a) serijski i b) paralelno na izvor napona  $U = 200 \text{ V}$ . Odredite naboj i napon na svakom od kondenzatora.

a) Ukupni je kapacitet pri serijskome spoju:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{100}{3} \mu\text{F} = 33,3 \mu\text{F}.$$

Na svakom je od kondenzatora naboj jednak:

$$Q = CU = \frac{100}{3} \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 200 \text{ V} = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ C}.$$

Naponi su na kondenzatorima različiti i iznose:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{CU}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = 66,7 \text{ V}$$

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = 133,3 \text{ V}$$

Na kondenzatoru manjeg kapaciteta veći je napon.

b)  $C = C_1 + C_2 = 150 \mu\text{F}; \quad U_1 = U_2 = U$   
 $Q_1 = C_1 U = 2 \cdot 10^{-2} \text{ C}; \quad Q_2 = C_2 U = 10^{-2} \text{ C}; \quad Q = Q_1 + Q_2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ C}.$

## 1.15. Energija električnoga polja

Izračunajmo kolik je rad potreban da bi se nabio kondenzator kapaciteta  $C$ . Ako je napon na kondenzatoru  $U$ , tada za prijenos naboja  $dQ$  s jedne ploče na drugu treba obaviti rad:

$$dW = U dQ = \frac{Q}{C} dQ \quad (1.76)$$

Ukupni je rad potreban da se kondenzator nabije nabojem  $Q$ :

$$W = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 \quad (1.77)$$

Taj rad ne ovisi o načinu nabijanja kondenzatora, nego samo o početnom (nula) i konačnom naponu  $U$  kondenzatora. Zbog toga možemo uvesti potencijalnu električnu energiju kondenzatora:

$$E_c = \frac{1}{2} CU^2 \quad (1.78)$$

Ako umjesto kapaciteta  $C$  u relaciji (1.77) pišemo izraz (1.66) za kapacitet pločastoga kondenzatora, te primijenimo vezu  $U = Ed$ , dobivamo:

$$E_c = \frac{\epsilon SU^2}{2d} = \frac{\epsilon SE^2 d^2}{2d} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V \quad (1.79)$$

gdje je  $V = Sd$  volumen kondenzatora. Budući da je polje unutar pločastoga kondenzatora, tj. unutar volumena  $V$ , homogeno, energiju kondenzatora možemo smatrati energijom električnoga polja s gustoćom energije:

$$w = \frac{E_c}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} ED \quad (1.80)$$

Izraz za gustoću energije ne ovisi o geometrijskim veličinama, ni o vrsti kondenzatora, nego samo o kvadratu jakosti električnoga polja. Ovaj izraz vrijedi općenito za bilo koje električno polje.

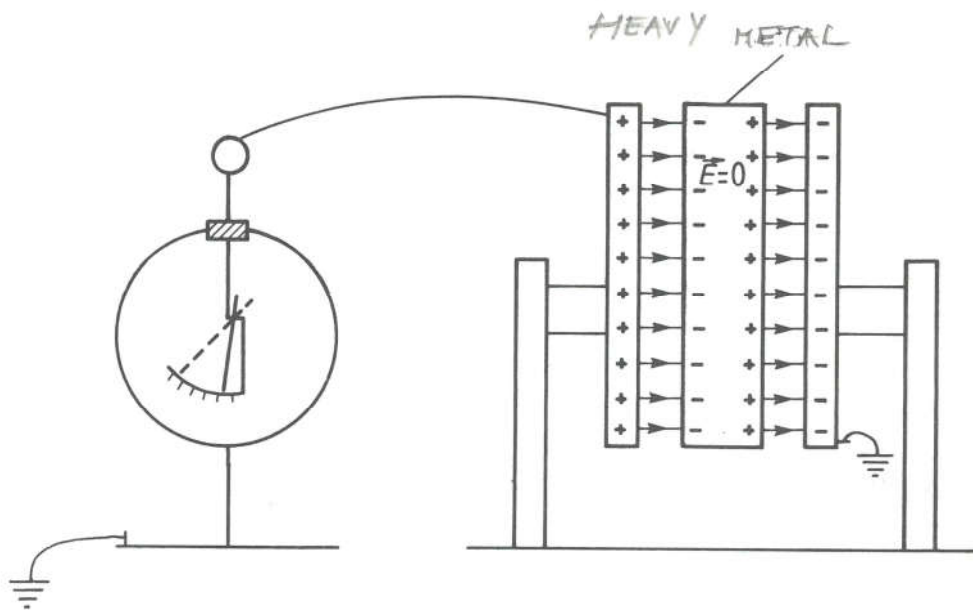
## 1.16. Polarizacija dielektrika

Ako između ploča nabijenoga kondenzatora umetnemo metalnu ploču, tako da ploče ne dodirujemo, niti ih međusobno spojimo (sl. 1.39), elektrometar (elektroskop) pokazuje smanjenje napona između ploča (odnosno između izolirane ploče i zemlje). Napon se smanjuje to više, što je metalna ploča deblja. Kad bi metal ispunio čitav prostor između ploča, napon bi spao na nulu. Kad se metalna ploča izvuče, napon se poveća na prvobitnu vrijednost.

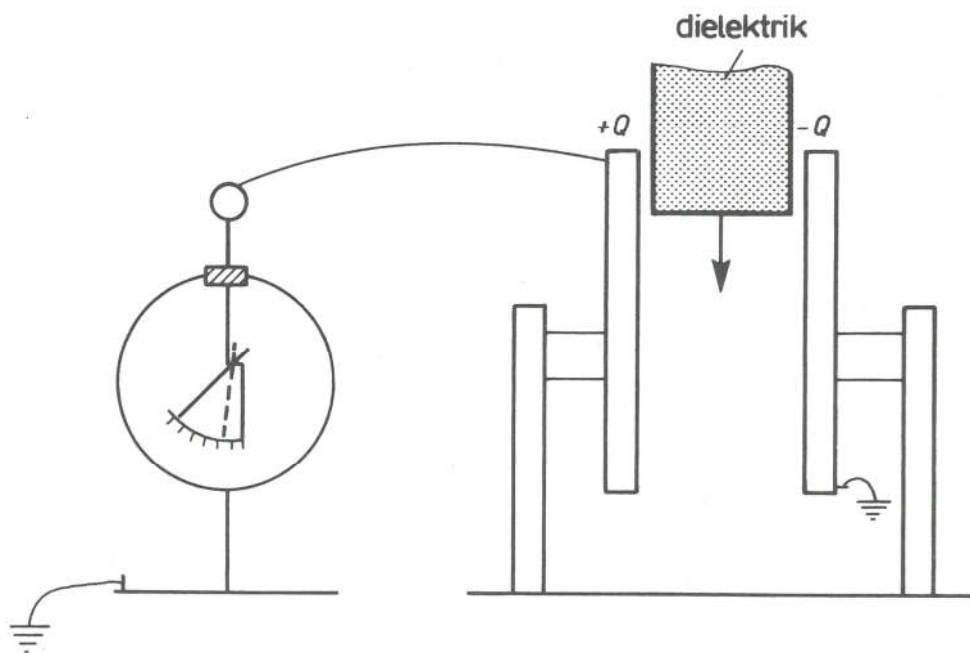
Slobodni elektroni u metalu, koji se nalaze u električnome polju, gibaju se pod utjecajem električne sile; u metalu se inducira vlastito električno polje  $E_i$  smjera suprotnoga od vanjskog polja  $E_0$ . Budući da su inducirano i vanjsko polje jednaka, a suprotnoga smjera, poništavaju se i unutar metala polje je nula. Na površini metala uz ploče kondenzatora pojavljuju se naboji  $+Q$  i  $-Q$ ; gustoća naboja na površini metala jednaka je plošnoj gustoći na oblogama kondenzatora, ali suprotnoga predznaka (sl. 1.39). (Uočite da će polje biti nula i u šupljini unutar metala i na tome se upravo i zasniva elektrostatska zaštita metalnim mrežicama i oklopima.)

Ako između ploča nabijenoga kondenzatora, čija je jedna ploča uzemljena, a druga spojena s elektrometrom, umetnemo ploču od parafina ili nekoga drugog izolatora (sl. 1.40), listići elektrometra pri tom se nešto skupe pokazujući da je napon





Slika 1.39. Metal između ploča kondenzatora



Slika 1.40. Dielektrik između ploča kondenzatora

postao manji. Kad parafin izvučemo, napon se poveća na prvobitnu vrijednost. Za vrijeme ovoga pokusa ploča je kondenzatora izolirana, pa je na njoj naboj (odnosno površinska gustoća naboja) konstantan:

$$Q = \text{konst.} \quad \sigma = \text{konst.} \quad (1.81)$$

Budući da je  $U = Q/C$ , a naboj se nije promijenio, iz smanjenja napona zaključujemo da se umetanjem izolatora kapacitet kondenzatora povećao.

Ovaj pokus također pokazuje da je jakost električnoga polja ( $E = U/d$ ) manja u parafinu nego u zraku (vakuumu) uz jednak naboj na pločama kondenzatora.

Ako je u vakuumu (zraku) jakost električnog polja  $E_0$ , napon između ploča  $U_0$ , a električni pomak  $D_0$ , umetanjem dielektrika (izolatora) jakost polja i napon se smanje na  $E$  i  $U$ , dok  $D = D_0 = Q/A$  ostaje nepromijenjen (uz uvjet da je za vrijeme pokusa  $Q = \text{konst.}$ ). Dakle:

$$D = D_0, \quad E < E_0, \quad U < U_0 \quad (1.82)$$

Izvedimo prethodni pokus, ali s kondenzatorom stalno spojenim na izvor napona  $U$ . Kada umetnemo dielektrik, napon, naravno, ostaje jednak, ali se gustoća naboja (a time i naboj) na pločama kondenzatora poveća. Da se naboj povećao, može se pokazati balističkim galvanometrom spojenim u seriju s kondenzatorom. Dodatni naboj pri tom na kondenzator dođe iz izvora napona.

U slučaju konstantnoga napona između ploča kondenzatora, možemo, dakle, pisati:

$$U = U_0, \quad E = E_0, \quad D > D_0 \quad (1.83)$$

Pokusi pokazuju da se umetanjem izolatora kapacitet kondenzatora povećava, odnosno, ako je naboj konstantan, jakost se električnoga polja smanjuje. Dok je u unutrašnjosti metala polje nula, kroz izolator električno polje prolazi, iako oslabljeno. Zato se izolatori zovu dielektrici\*.

U tablici 1.2. navedene su relativne dielektrične konstante i dielektrične čvrstoće nekih izolacijskih materijala. Relativna dielektričnost  $\epsilon_r$  može se definirati kao omjer kapaciteta kondenzatora s dielektrikom i kapaciteta istoga kondenzatora s vakuumom, odnosno kao omjer jakosti električnoga polja u vakuumu i jakosti polja u dielektriku pri konstantnoj plošnoj gustoći naboja na pločama kondenzatora:

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} \quad \epsilon_r = \frac{E_0}{E} \quad (1.84)$$

Dielektrična (probojna) čvrstoća izolatora maksimalna je jakost električnoga polja koji izolator može izdržati a da ne dođe do proboja i gubitka izolatorskih svojstava. Obično se dielektrična čvrstoća materijala izražava jedinicom kilovolt po milimetru, kV/mm ili kV/cm.

Probojna čvrstoća može se mjeriti tako da se odredi napon pri kojemu nastaje proboj među elektrodama uz određenu udaljenost elektroda.

Vrijednosti u tablici samo su orijentacijske jer dielektrična konstanta ovisi o kvaliteti dielektrika, temperaturi i sl., a kod nekih materijala i o smjeru električnoga polja.

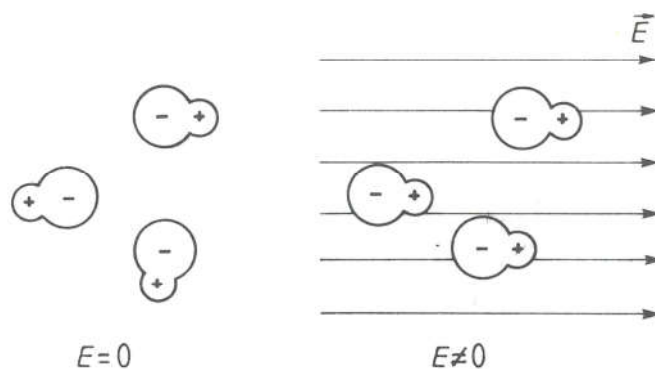
Pogledajmo zašto dielektrici smanjuju električno polje. U izolatorima nije moguće razdvojiti pozitivni i negativni naboj kao kod metala, jer su svi elektroni čvrsto vezani za jezgru atoma. Ipak, pod utjecajem električnoga polja pomiče se težište pozitivnoga i negativnoga naboja u atomima i molekulama izolatora i stvaraju se molekularni dipoli, odnosno već postojeći dipoli usmjeruju se prema polju.

\*  $\delta\epsilon\alpha$  (grč.) - kroz

Tablica 1.2. Osobine dielektrika. Relativna permitivnost i dielektrična čvrstoća

| Dielektrik                   | Permitivnost<br>$\epsilon_r$ | Dielektrična<br>čvrstoća<br>kV/mm |
|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| zrak (norm. tlak)            | 1,0006                       | 3                                 |
| petrolej                     | 2                            |                                   |
| teflon                       | 2,1                          | 60                                |
| parafin                      | 2,2                          | 25                                |
| transform. ulje              | 2,2                          | 11                                |
| benzen                       | 2,3                          |                                   |
| polistiren                   | 2,5                          | 25                                |
| papir                        | 2,6                          | 20                                |
| guma                         | 2,8                          |                                   |
| pčelinji vosak               | 2,9                          |                                   |
| pleksiglas                   | 3-4                          |                                   |
| pertinaks                    | 4-5                          |                                   |
| kvarcno staklo               | 3,5                          |                                   |
| kvarc                        | 4                            | 7                                 |
| polivinil klorid             | 4,5                          | 35                                |
| porculan                     | 6-8                          | 5                                 |
| tinjac                       | 6-7                          |                                   |
| staklo                       | 5-10                         | 13                                |
| neopren                      | 7                            | 11                                |
| dest. voda (100 °C)          | 56                           |                                   |
| dest. voda (18 °C)           | 81                           |                                   |
| titandioksid                 | 100                          | 6                                 |
| posebni keram.<br>materijali | > 500                        |                                   |

Postoje, naime, dvije vrste molekula s obzirom na električna svojstva polarne i nepolarne molekule. Polarne molekule, zbog svoje strukture, imaju permanentni električni dipolni moment. Takve su npr. molekule  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{HCl}$ ,  $\text{NH}_3$  itd. (sl. 1.41.a). Kod nepolarnih molekula težišta pozitivnoga i negativnoga naboja padaju u istu točku pa one nemaju permanentni dipolni moment (sl. 1.41.b).

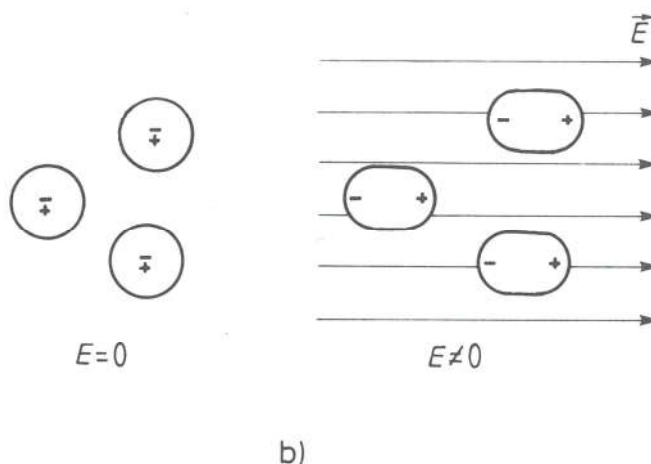


a)

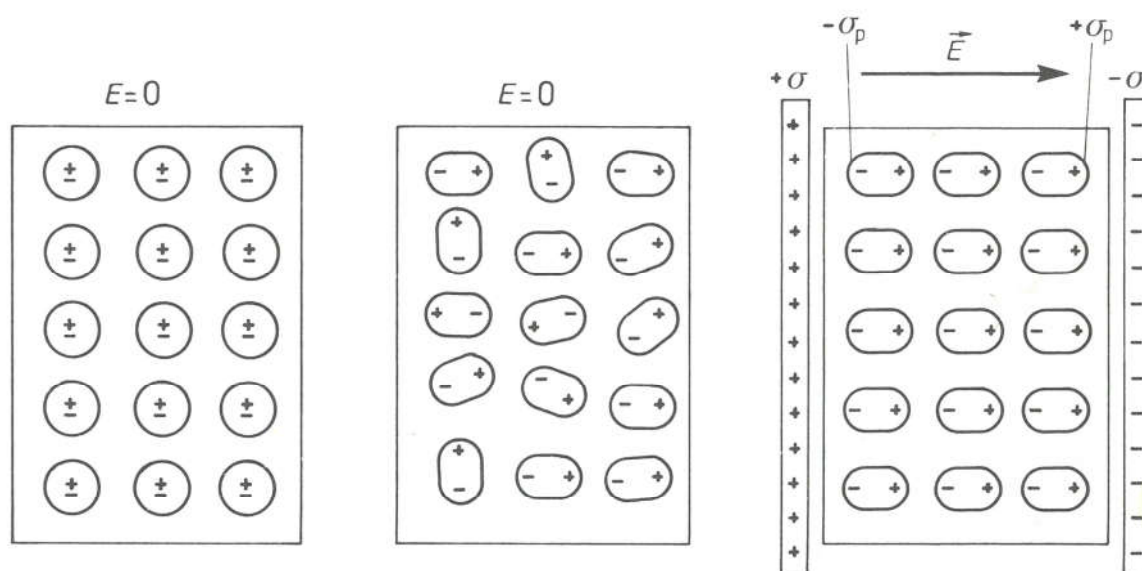
Slika 1.41. a) Polarne molekule



Kada izolator, čije molekule nemaju dipolni moment, unesemo u električno polje, težišta se naboja pomaknu i od neutralne molekule nastaje inducirani električni dipol. Ako u polje unesemo izolator s polarnim molekulama, molekularni će se dipoli nastojati orijentirati u smjeru polja. Ako su polja dovoljno jaka, molekularni će se dipolni momenti i povećati. Prema tome, u izolatoru, koji je u električnome polju moguća su dva procesa: a) induciranje dipolnih momenata razmicanjem težišta naboja, i b) orijentiranje permanentnih dipola.



Slika 1.41. b) Nepolarne molekule



Slika 1.42. Polarizacija dielektrika

Na sl. 1.42. shematski je prikazano što se događa u dielektriku koji je u homogenom električnom polju pločastoga kondenzatora. Elementarni dipoli poređaju se u lance koji počinju i završavaju na površini dielektrika. Jedna strana dielektrika (ona uz pozitivnu ploču) postaje negativno nabijena, a ona uz negativnu ploču kondenzatora pozitivno nabijena. Budući da se dipoli postavljaju u smjeru polja

polariziraju, ovu pojavu nazivamo polarizacijom dielektrika. Za razliku od metala, inducirani naboj na površini dielektrika nije slobodan, nego je vezan za molekule na površini dielektrika.

Plošna je gustoća naboja induciranih na površini dielektrika u električnome polju kondenzatora:

$$\sigma_p = \frac{Q_p}{S} \quad (1.85)$$

Inducirana plošna gustoća dielektrika  $\sigma_p$  ovisi o jakosti polja, o svojstvima dielektrika i uvijek je manja od plošne gustoće  $\sigma$  na pločama kondenzatora.

**Vektor električne polarizacije  $\vec{P}$ .** Polarizaciju dielektrika možemo kvantitativno opisati fizikalnom veličinom koja se naziva električna polarizacija  $\vec{P}$ . Polarizacija  $\vec{P}$  ukupni je dipolni moment jedinice volumena.

Ukupni dipolni moment dobivamo zbrajanjem dipolnih momenata svih elementarnih dipola u jedinici volumena dielektrika. Kada nema vanjskoga polja, taj je zbroj jednak nuli; naime, molekule ili nemaju dipolni moment, ili su im dipolni momenti kaotično raspodijeljeni, pa je  $\sum \vec{p} = 0$ . Kad se dielektrik nalazi u vanjskome polju, on se polarizira, pa je vektor električne polarizacije:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V} \quad (1.86)$$

gdje je  $\Delta V$  promatrani volumen dielektrika.

Koja je veza između električne polarizacije  $P$  i naboja inducirano na površini dielektrika? Ploču dielektrika u polju kondenzatora (sl. 1.42) možemo smatrati velikim dipolom i izračunati njegov dipolni moment. Svaka strana ploče ima ukupni naboj  $Q_p = \sigma_p S$  ( $S$  je površina ploče dielektrika) pa je ukupni dipolni moment čitave ploče:

$$Q_p d = \sigma_p S d = \sigma_p V \quad (1.87)$$

Budući da je polarizacija dipolni moment jedinice volumena, to je

$$P = \sigma_p. \quad (1.88)$$

Možemo, dakle, zaključiti da je električna polarizacija  $P$  po iznosu jednaka plošnoj gustoći naboja na površini dielektrika. (U općenitom slučaju plošna gustoća vezanoga naboja jednaka je normalnoj komponenti vektora  $\vec{P}$  tj.  $\vec{P}\vec{n}$ , gdje je  $\vec{n}$  jedinični vektor na površinu.)

Električna je polarizacija  $\vec{P}$  vektor čiji je iznos određen relacijom (1.88), dok mu je smjer (kao za svaki dipol) od negativnoga naboja prema pozitivnom. Vektori  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  i  $\vec{P}$  međusobno su ovisni. Ako poznamo dva od njih, možemo izračunati treći; za opisivanje električnoga polja u materijalu dovoljna su, dakle, dva vektora. Uz jednaku gustoću naboja  $\sigma$  jakost električnoga polja u dielektriku manja je nego u vakuumu. To je jasno jer polje u dielektriku uzrokuje efektivna gustoća  $\sigma - \sigma_p$ , dok

je polje u vakuumu uzrokovano gustoćom  $\sigma$ . Jakost električnog polja u vakuumu iznosi:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (1.89)$$

dok je polje u dielektriku:

$$E = \frac{\sigma - \sigma_p}{\varepsilon_0} \quad (1.90)$$

Omjer je jakosti polja u vakuumu  $E_0$  i jakosti polja nakon unošenja dielektrika  $E$ , uza stalnu plošnu gustoću  $\sigma$ :

$$\frac{E_0}{E} = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_p} = \varepsilon_r \quad (1.91)$$

Iz relacije (1.91) slijedi da plošnu gustoću polarizacijom induciranoga naboja na površini dielektrika možemo pisati u obliku:

$$\sigma_p = \frac{(\varepsilon_r - 1)\sigma}{\varepsilon_r} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E = \varepsilon_0\chi_{el}E \quad (1.92)$$

gdje veličinu:

$$\chi_{el} = \varepsilon_r - 1 \quad (1.93)$$

nazivamo električna susceptibilnost\* dielektrika; to je parametar koji, slično kao i  $\varepsilon_r$ , opisuje električna svojstva dielektrika.

Električnu susceptibilnost možemo definirati i omjerom:

$$\chi_{el} = \frac{P}{\varepsilon_0 E} \quad (1.94)$$

Električna susceptibilnost materijala s polarnim molekulama razmjerna je s  $1/T$  ( $T$  je apsolutna temperatura u K) i smanjuje se kada temperatura raste. Termičko gibanje molekula, naime, ometa njihovu orijentaciju u smjeru vanjskoga polja, to više što je temperatura veća. Kod materijala s nepolarnim molekulama  $\chi$  ne ovisi o temperaturi.

Iz relacija (1.88) i (1.92) vidimo da je polarizacija dielektrika razmjerna jakosti električnoga polja. Jača polja, naime, induciraju veće dipolne momente, odnosno uspijevaju jače usmjeriti permanentne dipole.

Za razliku od influencije, polarizacija ostaje još neko vrijeme nakon nestanka električnoga polja, ali je termičko gibanje molekula ubrzo razori. Ima, međutim, dielektrika koji dugo zadržavaju polarizaciju (čak i do nekoliko godina). To su tzv. elektreti, električni analozi permanentnim magnetima.

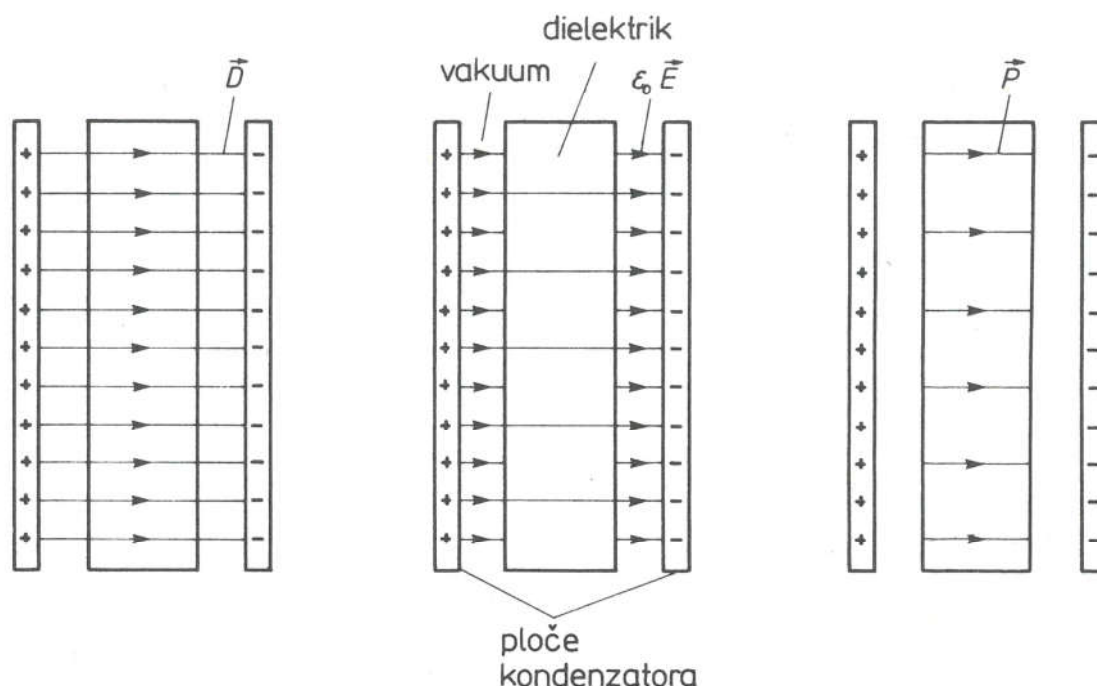
Iz relacija (1.88) i (1.90) slijedi:

$$E = \frac{\sigma - \sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma - P}{\varepsilon_0} \quad (1.95)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.96)$$

\* susceptibilas (lat.) – osjetljivost



Slika 1.43. Silnice vektora  $\vec{D}$ ,  $\epsilon_0 \vec{E}$  i  $\vec{P}$ 

Uočite da vektor  $\vec{E}$  ovisi o ukupnom (efektivnom) naboju, tj. o slobodnom naboju na pločama kondenzatora umanjenom za inducirani naboj na plohi dielektrika. Vektor  $\vec{D}$  ovisi samo o slobodnom naboju na pločama kondenzatora, dok vektor  $\vec{P}$  ovisi o polariziranim nabojima na dielektriku. Slika 1.43. prikazuje silnice vektora  $\vec{D}$ ,  $\epsilon_0 \vec{E}$  i  $\vec{P}$  u pločastom kondenzatoru s dielektrikom.

**Primjer 1.20.**

Kondenzator se sastoji od dviju paralelnih ploča, svaka površine  $1 \text{ dm}^2$  razdvojenih slojem zraka. Razmak između ploča je  $2 \text{ mm}$ . Kondenzator se nabije na napon od  $100 \text{ V}$ , odvoji od izvora napona i, između tako nabijenih i izoliranih ploča, umetne se ploča tinjca – tako da sasvim ispuni prostor između ploča.

- Kolik je naboj na pločama kondenzatora?
- Koliki su kapacitet i napon kondenzatora nakon umetanja dielektrika?
- Kolike su jakost električnoga polja i gustoća električnoga toka unutar kondenzatora prije i nakon umetanja dielektrika?
- Kolika je električna potencijalna energija uskladištena unutar kondenzatora u oba slučaja?

a) Budući da su nakon nabijanja ploče kondenzatora izolirane, na njima će naboj ostati isti i nakon umetanja dielektrika. Kada je između ploča zrak, kapacitet je  $C_0 = \epsilon_0 S/d$ , napon je između ploča  $U_0$  pa je naboj:

$$Q = C_0 U_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} U_0 = 4,4 \cdot 10^{-9} \text{ C} = 4,4 \text{ nC}.$$

b) Kada se između ploča umetne tinjac dielektrične konstante  $\epsilon_r = 7$ , kapacitet će se povećati, naboj ostati isti, a napon smanjiti:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = 3,1 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 310 \text{ pF},$$

$$U = \frac{Q}{C} = 14 \text{ V}$$

c) Iznos je vektora  $\vec{E}$  i  $\vec{D}$  prije i nakon umetanja dielektrika:

$$E_0 = \frac{U_0}{d} = 5 \cdot 10^4 \text{ NC}^{-1} \text{ (ili } \text{Vm}^{-1}\text{)},$$

$$D_0 = \epsilon_0 E = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ Cm}^{-2},$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{E_0}{\epsilon_r} = 7 \cdot 10^3 \text{ Vm}^{-1},$$

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E = D_0 = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ Cm}^{-2}.$$

Iznos vektora  $\vec{D}$  jednak je plošnoj gustoći naboja na pločama kondenzatora i, budući da su ploče izolirane, ne mijenja se umetanjem dielektrika. Možemo ga, dakle, računati i ovako:

$$D_0 = D = \sigma = \frac{Q}{S} = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ Cm}^{-2}.$$

d) Električna potencijalna energija nabijenog kondenzatora sa zrakom iznosi:

$$E_{c0} = \frac{QU_0}{2} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ J}.$$

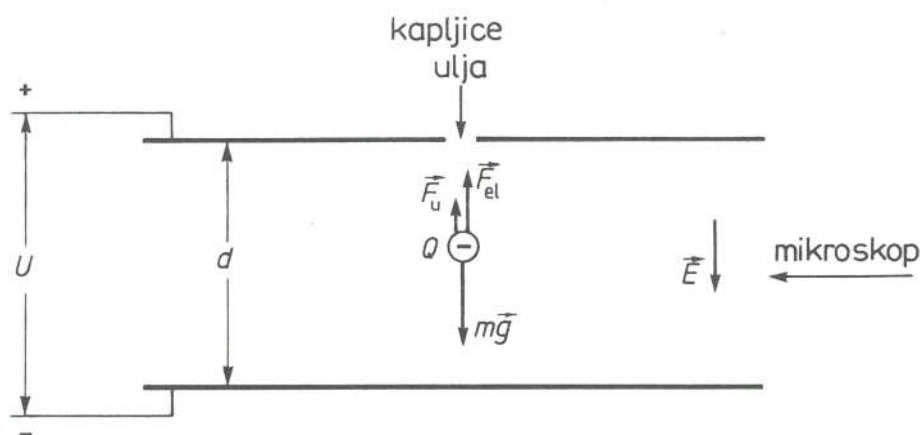
Kada umetnemo dielektrik, naboj će ostati jednak, napon će se smanjiti  $\epsilon_r$  puta, pa će se i energija smanjiti  $\epsilon_r$  puta:

$$E_c = \frac{QU}{2} = 3,1 \cdot 10^{-8} \text{ J}.$$

## 1.17. Millikanov eksperiment

R. A. Millikan\* je nizom preciznih eksperimenata, koje je obavio na Sveučilištu u Chicagu od 1909 do 1913. g., odredio elementarni naboj  $e$  (naboj elektrona) i pokazao da se naboj u prirodi pojavljuje u cjelobrojnim višekratnicima elementarnoga naboja.

\* Robert Andrews Millikan (1868–1953), američki fizičar, poznat po mjerenju elementarnoga naboja i radovima iz fotoelektričnog efekta. Za svoje radove dobio je Nobelovu nagradu 1923. god.



Slika 1.44. Millikanov pokus

Millikan je promatrao padanje nabijenih kapljica ulja u homogenome električnom polju pločastoga kondenzatora (sl. 1.44). Kondenzator se sastojao od dviju kružnih mjedenih ploča, promjera 22 cm, međusobno udaljenih 16 mm. Kroz rupicu u sredini gornje ploče u kondenzator su ulazile kapljice ulja dobivene raspršivačem u komori iznad kondenzatora. Većina tih kapljica bila je električki nabijena zbog trenja nastalog za vrijeme raspršivanja ulja.

Kapljice (kojih je promjer bio oko  $10^{-4}$  cm) bile su osvijetljene jakim snopom svjetlosti i promatrane mikroskopom.

Polumjer kapljice ulja Millikan je odredio mjereći njezinu brzinu padanja u zraku pri isključenom električnom polju. Pri tom na kapljicu djeluju sila teža (njezina težina) prema dolje, a uzgon i sila trenja prema gore. Još je Stokes sredinom prošloga stoljeća utvrdio da na kuglicu polumjera  $r$ , koja se giba kroz viskozni fluid konstantnom brzinom  $v$ , djeluje sila trenja:

$$F_{tr} = 6\pi\eta rv \quad (1.97)$$

Izjednačujući te tri sile:

$$F_u + F_{tr} = mg \quad (1.98)$$

$$\frac{4r^3\pi}{3} \rho_z g + 6\pi\eta rv = \frac{4r^3\pi}{3} \rho_u g$$

možemo, mjereći brzinu, izračunati polumjer:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v}{2(\rho_u - \rho_z)g}}. \quad (1.99)$$

Mijenjanjem napona  $U$  na pločama kondenzatora može se promatrana nabijena kapljica ulja zaustaviti ili postići da se giba jednoliko. Tada su sve sile koje djeluju na kapljicu u ravnoteži. Ako je električno polje takvo da se kapljica zaustavi, mora biti ispunjeno:

$$F_u + F_{el} = mg$$



ili:

$$\frac{4}{3}r^3\pi\varrho_z g + QE = \frac{4}{3}r^3\pi\varrho_u g \quad (1.100)$$

gdje je  $r$  polumjer kapljice ulja,  $\varrho_u$  gustoća ulja,  $\varrho_z$  gustoća zraka,  $Q$  naboj kapljice, a  $E = U/d$  jakost električnoga polja kondenzatora. Poznajući polumjer kapljice, gustoću ulja i gustoću zraka, razmak kondenzatora i napon potreban za zaustavljanje kapljice, može se izračunati i njezin naboj:

$$Q = \frac{mg - F_u}{E} = \frac{4}{3}r^3\pi(\varrho_u - \varrho_z)g \frac{d}{U} = \frac{9\pi v}{E} \sqrt{\frac{2\eta^3 v}{(\varrho_u - \varrho_z)g}} \quad (1.101)$$

Mjereći naboj za velik broj kapljica, Millikan je opazio da je naboj  $Q$  uvijek cjelobrojni višekratnik jednoga osnovnog naboja:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}.$$

Tako je izmjeren elementarni naboj, naboj elektrona  $e$ . Ukupni naboj bilo kojega tijela uvijek je cjelobrojni višekratnik, bilo pozitivan bilo negativan, toga osnovnog kvanta elektriciteta.

### 1.18. Gibanje naboja pod utjecajem električnoga polja

U prostoru s homogenim električnim poljem  $\vec{E}$  giba se nabijena čestica mase  $m$  i naboja  $Q$ , npr. elektron. Električno polje djeluje na česticu silom:

$$F = QE \quad (1.102)$$

i prema 2. Newtonovu zakonu čestica će se ubrazati akceleracijom:

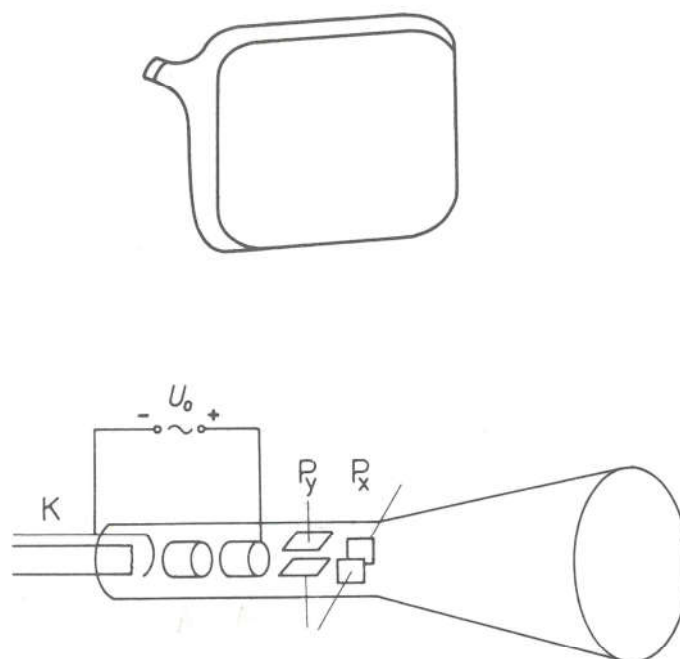
$$a = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m} \quad (1.103)$$

Homogeno električno polje najlakše je ostvariti između dviju paralelnih metalnih ploča međusobno udaljenih za  $d$  spojenih na izvor istosmjernoga napona  $U$  (pločasti kondenzator). Između ploča i kondenzatora polje je:

$$E = \frac{U}{d} \quad (1.104)$$

i, ako je razmak između ploča mali s obzirom na veličinu ploča, polje je homogeno, osim na rubovima.

Katodna je cijev jedan od primjera gibanja elektrona u električnim poljima (sl. 1.45). Elektroni dobiveni termionskom emisijom iz posredno grijane katode prolaze kroz rešetku i ubrazavaju se pomoću dviju anoda. Takav uređaj, tzv. elektronski top, daje snop brzih elektrona koji kroz otvor u anodi brzinom  $v_0$  ulaze u prostor iza anode i udaraju u fluorescentni ekran koji zasvijetli kad u njega udare elektroni.



Slika 1.45. Katodna cijev

U prostoru između anode i ekrana smješten je sistem otklonskih pločica za skretanje elektronskoga snopa, dvije horizontalne ploče za skretanje snopa u vertikalnom i dvije vertikalne ploče za skretanje snopa u horizontalnom smjeru (sl. 1.45).

Ako npr. na gornju horizontalnu ploču spojimo pozitivni, a na drugu negativni pol izvora napona  $U$ , tada će nastalo električno polje skrenuti elektrone prema gore. Ako se polaritet napona okrene, snop se skreće prema dolje. Promjenljiv napon na pločama uzrokovat će promjenljivi otklon pa se tako na ekranu može vidjeti oblik promjenljivog napona. Slično se može snop skretati u vodoravnome smjeru. Na taj se način (elektrostatskim otklonskim sistemima) skreće elektronski snop, npr. u katodnim cijevima u osciloskopima. (U televizijskoj katodnoj cijevi – kineskopu – otklon elektrona postiže se elektromagnetskim otklonskim sistemima mijenjajući struju kroz otklonske zavojnice i na taj način mijenjajući magnetsko polje i Lorentzovu silu na elektrone.)

Elektroni iz elektronskoga topa katodne cijevi izlaze brzinom  $v_0$ , koja ovisi o naponu ubrzanja. Kada se elektron ubrza naponom  $U_0$ , dobiva energiju  $eU_0$  u obliku kinetičke energije:

$$\frac{mv_0^2}{2} = eU_0$$

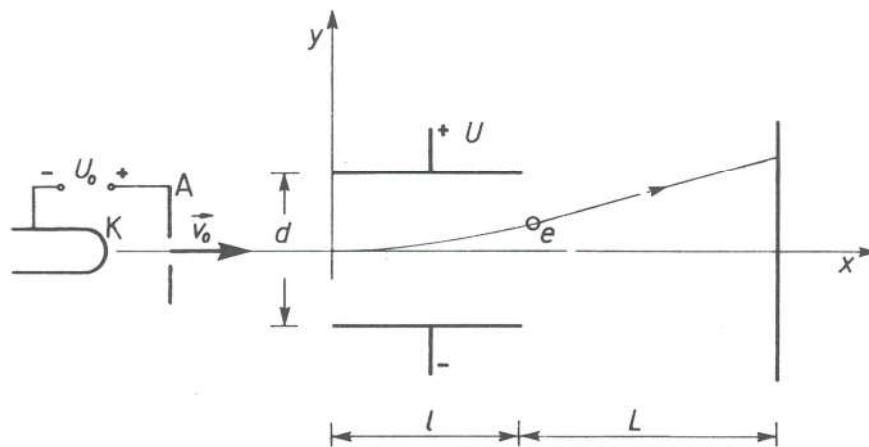
$$v_0 = \sqrt{2 \frac{e}{m} U_0} \quad (1.105)$$

Tako npr. za napon od 18 kV (koji se primjenjuje u crno-bijelim kineskopima televizora)  $v_0 = 7,95 \cdot 10^7$  m/s, a u televizorima u boji napon je 25 kV i brzina  $9,4 \cdot 10^7$  m/s. U osciloskopima napon je manji (reda veličine 1000 V) pa je i brzina manja (oko  $2 \cdot 10^7$  m/s).

Ako je otklon elektrostatički pomoću napona  $U$  i električnoga polja  $E = U/d$ , primjenom 2. Newtonovog zakona možemo odrediti akceleraciju, brzinu i otklon elektrona:

$$\begin{aligned} ma &= F = eE \\ a &= \frac{eE}{m} \end{aligned} \quad (1.106)$$

To je gibanje s konstantnom akceleracijom slično gibanju tijela pri kosom (horizontalnom) hicu u zemljinu gravitacijskome polju.



Slika 1.46. Otklon elektrona u električnom polju

Ako odaberemo os  $y$  u smjeru električne sile (sl. 1.46),  $v_y$  komponenta brzine u prostoru između ploča raste s vremenom:

$$v_y = \frac{e}{m} Et \quad (1.107)$$

dok je  $v_x$  komponenta konstantna (jer u smjeru osi  $x$  nema sile ni akceleracije) i jednaka je početnoj brzini  $v_0$ .

Pomak je elektrona:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= \frac{e}{2m} Et^2 \end{aligned}$$

Eliminacijom vremena  $t$  dobivamo jednadžbu putanje elektrona u homogenome električnom polju:

$$y = \frac{e}{2m} \frac{E}{v_0^2} x^2 = \frac{E}{4U_0} x^2 \quad (1.108)$$

To je jednadžba parabole, slično kao i za horizontalni hitac u polju sile teže.

Ako je razmak između otklonskih pločica  $d$ , a napon na njima  $U$ , tada je:

$$y = \frac{U}{4U_0 d} x^2 \quad (1.109)$$

Izašavši iz električnoga polja (sl. 1.46), elektron se giba po pravcu prema ekranu.



**Primjer 1.21.**

Elektroni ubrzani naponom  $U_0 = 600$  V između katode i anode katodne cijevi prolaze kroz otklonske ploče i udaraju u ekran (sl. 1.46). Razmak je između otklonskih ploča (pločasti kondenzator)  $d = 1$  cm a ploče su dugačke  $l = 5$  cm. Napon je na otklonskim pločama  $U = 1$  V. Udaljenost je ekrana od otklonskih ploča  $L = 20$  cm.

a) Kolikom brzinom elektroni ulaze u kondenzator?

b) Kolikom brzinom izlaze iz kondenzatora?

c) Koliki je otklon elektrona na ekranu?

a) Napon  $U$  između katode i anode ubrzava elektrone dajući im kinetičku energiju

$$\frac{mv_0^2}{2} = eU_0,$$

odnosno brzinu

$$v_x = v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = 1,453 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

b) Gibajući se između ploča, elektroni se jednoliko ubrzavaju u smjeru osi  $y$  akceleracijom  $a = eE/m = eU/md$ . Na izlasku iz kondenzatora elektroni imaju jednaku  $x$  – komponentu brzine kao pri ulasku, dok im  $y$  – komponenta brzine nije više nula, nego:

$$v_y = at_1 = a \frac{l}{v_x} = \frac{eUl}{mdv_x} = 6 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

c) Za vrijeme gibanja među pločama elektron se otklonio u smjeru osi  $y$  za:

$$y_1 = \frac{a}{2} t_1^2 = \frac{al^2}{2v_x^2} = \frac{eUl^2}{2mdv_0^2}.$$

Izvan ploča elektron se giba jednoliko i vrijeme je potrebno za put od kondenzatora do ekrana  $t_2 = L/v_x$ . Pri tom je otklon u  $y$  smjeru:

$$y_2 = v_y t_2 = at_1 t_2 = \frac{eUL}{dmv_x^2}.$$

Ukupni otklon iznosi, dakle:

$$Y = y_1 + y_2 = \frac{eUl}{dmv_x^2} \left( \frac{l}{2} + L \right) + \frac{eUL}{dmv_x^2} = \frac{UIL}{2U_0d}$$

$$Y = 0,94 \text{ mm}.$$

Otklon elektrona  $y$  ovisi o naponu  $U$ ; omjer  $Y/U$ , karakterizira osjetljivost katodne cijevi.

## Pitanja i zadaci

- 1.1. Koliko ima vrsta električnoga naboja? Kako se mogu naelektrizirati stakleni i ebonitni štap?
- 1.2. Odakle potječe naboj električki nabijenih tijela? Što je elementarni naboj i koliko on iznosi?
- 1.3. U kojim slučajevima možemo govoriti o točkastome naboju? Definirajte prostornu, plošnu i linijsku gustoću naboja.
- 1.4. Obrazložite Coulombov zakon o elektrostatskoj sili.
- 1.5. Koliko iznosi elektrostatska sila između jezgara  $^{235}\text{U}$  i  $^4\text{He}$  kad su im središta udaljena  $1,5 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ ?
- 1.6. Dva točkasta naboja  $Q_1 = 1 \mu\text{C}$  i  $Q_2 = 9 \mu\text{C}$  udaljena su međusobno 10 cm. Kamo treba staviti negativni naboj  $Q_3$  tako da bi rezultantna sila na njega iščezavala?
- 1.7. Četiri točkasta naboja  $Q_1 = -1 \mu\text{C}$ ,  $Q_2 = 2 \mu\text{C}$ ,  $Q_3 = -2 \mu\text{C}$  i  $Q_4 = 2 \mu\text{C}$  nalaze se u vakuumu u vrhovima kvadrata stranice  $a = 0,3 \text{ m}$ . Izračunajte iznos rezultantne sile  $\vec{F}$  na naboj  $Q_1$  i kut koji ta sila zatvara sa silom  $\vec{F}_{1,2}$  između prvih dvaju naboja.
- 1.8. Kolika je jakost električnoga polja točkastoga naboja od 50 pC na udaljenosti 50 cm od naboja?
- 1.9. U blizini Zemljine površine djeluje, vertikalno prema dolje, električno polje jakosti 120 N/C. Odredite omjer sile teže i električne sile na ioniziranu vodikovu molekulu  $\text{H}_2^+$  u tome polju.
- 1.10. Navedite izraz koji daje uzajamnu potencijalnu energiju dvaju naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  u vakuumu, na međusobnoj udaljenosti  $r$ .
- 1.11. Izračunajte ukupnu potencijalnu energiju šest jednakih naboja  $Q = 1 \text{ nC}$ , smještenih u vrhove pravilna šesterokuta stranice 3 nm.
- 1.12. Što je električni potencijal?
- 1.13. Izračunajte:
  - a) električni potencijal točkastoga naboja  $Q$  u točki koja se nalazi na udaljenosti  $r$  od naboja,

- b) električni potencijal kugle polumjera  $R$ , nabijene jednoliko po cijelome volumenu nabojem  $Q$ , u točki koja je za  $r$  udaljena od središta kugle.
- 1.14. Što je to električni dipol? Kako se definira dipolni moment? Navedite koliko iznose dipolni momenti molekula  $H_2O$ ,  $CO$ ,  $CO_2$  i  $AgCl$ .
- 1.15. Izračunajte jakost električnoga polja koje stvaraju molekule navedene u zadatku 1.14, na udaljenosti 10 nm od dipola:
- a) za točku na pravcu dipola,  
b) za točku na pravcu okomitom na smjer dipola.
- 1.16. Pomoću rezultata iz primjera 1.11. i relacije (1.61) pokažite da uzajamna potencijalna energija dvaju dipola  $\vec{p}_1$  i  $\vec{p}_2$ , kojima su središta povezana vektorom  $\vec{r}$ , iznosi:

$$E_{p_1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{r}_0 \cdot \vec{p}_1)(\vec{r}_0 \cdot \vec{p}_2)}{r^3}.$$

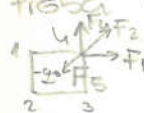
- 1.17. Dva električna dipola,  $p_1 = 4 \cdot 10^{-30}$  Cm i  $p_2 = 2 \cdot 10^{-30}$  Cm, leže na međusobnoj razdaljini od 10 nm. Izračunajte njihovu uzajamnu potencijalnu energiju i izrazite je u eV, ako:
- a) leže na istome pravcu i istog su smjera,  
b) leže na istom pravcu, a suprotnog su smjera,  
c) leže na paralelnim pravcima i istog su smjera,  
d) leže na paralelnim pravcima i suprotnog su smjera,  
e) leže na međusobno okomitim pravcima.

Za svaki pojedini slučaj odredite je li sila među dipolima privlačna ili odbojna.

- 1.18. Definirajte kapacitet izoliranog vodiča i kapacitet kondenzatora. Kojim se jedinicama mjeri električni kapacitet?
- 1.19. Opišite uređaj koji nazivamo kondenzatorom. Kakve vrste kondenzatora poznajete?
- 1.20. Dva serijski spojena kondenzatora kapaciteta  $C_1 = 2 \mu F$  i  $C_2 = 5 \mu F$  priključena su na izvor napona od 120 V. Odredite napon na svakom od kondenzatora.
- 1.21. Tri kondenzatora kapaciteta 10 pF, 20 pF i 40 pF spojena su međusobno i priključena na napon od 10 V.
- a) Odredite na koliko se različitih načina mogu spojiti kondenzatori i nacrtajte pripadne sheme,  
b) izračunajte ekvivalentni kapacitet svake od kombinacija,  
c) izračunajte napon i količinu električnog naboja na svakom od kondenzatora u pojedinim kombinacijama.



- 1.22. Kolika se energija oslobodi pri izbijanju ladjenske boce kapaciteta  $6,5 \cdot 10^{-10} \text{ F}$ , priključene na napon od 15 000 V?
- 1.23. Objasnite na koji je način Millikan eksperimentalno odredio elementarni naboj.
- 1.24. Po kakvoj se stazi giba nabijena čestica u konstantnome električnom polju? Odredite jednadžbu te krivulje.
- 1.25. Elektron uleti početnom brzinom  $v_0 = 10^6 \text{ m s}^{-1}$  u središte između ploča kondenzatora, a izleti uz rub ploče. Razlika je potencijala među pločama 100 V. Kolika je promjena energije elektrona izražena u eV? Za koliko se puta povećala kinetička energija elektrona?

- 1) Elektron uleti u homogeno el. polje u vakuumu i giba se u smjeru el. silnica nalaze kojih će vremena brzina elektrona biti 0 ako je jakost polja  $50 \text{ N/C}$  a  $v_0 = 1,8 \cdot 10^3 \text{ km/s}$
- $$ma = -eE \quad v = v_0 - at \Rightarrow t = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$
- 2) U homogeno elektr. polje jakosti 3000 V/m uleti elektron i na silnice brzinom  $5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  za koliko će skrenuti ako je u polju proćao put od 8 cm
- $$ma = -eE \quad a = \frac{eE}{m} \quad x = v_0 t \quad y = \frac{at^2}{2} = \frac{e}{2m} E t^2 = \frac{e}{2m} E \frac{x^2}{v_0^2} = 6,74 \text{ cm}$$
- 3) Dva kuglice obasane su svaka u svom kutu definiran kutom  $\alpha$ , kuglice posmatrano prvo zrakom pa u drugom u poradi  $g = 9800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$   $\epsilon_r = 2,2$  kolika bi trebala biti g kuglice da uiti zatvoreni isti kut
- $$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{F_e}{G} \quad \frac{kQ^2}{r^2} = \tan \frac{\alpha}{2} \cdot g \cdot V \quad \frac{kQ^2}{\epsilon_r r^2} = \tan \frac{\alpha}{2} (g_k V - g_p V) \quad g_k = \frac{3\pi \epsilon_r}{\epsilon_r - 1} = 1650 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$
- 4) Točkasti električni naboji  $q_1 = 10^{-8} \text{ C}$  i  $q_2 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  međusobno su udaljeni 3 cm. Odredi  $q_3$  i udaljenost od njih da su tri naboja u ravnoteži (To je labilna ravnoteža)
- $$\frac{q_1 q_3}{r_1^2} = \frac{q_2 q_3}{(r-r_1)^2} \quad \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{q_1 q_3}{r_1^2} \quad r_1 = \frac{r}{1 + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}} = 1 \text{ cm} \quad \frac{1}{\sqrt{q_3}} = \frac{1}{\sqrt{q_1}} + \frac{1}{\sqrt{q_2}} \quad q_3 = \frac{4}{9} 10^{-8}$$
- 5) Između ravnomjerno nabijenih ravne ploče  $\sigma = 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$  labdi se kuglica ukupna naboj  $q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$   $g_m = 8800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  kolika je polumjer kuglice
- $$\frac{4}{3} \pi r^3 g_m = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot q \quad r = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{30q}{2g_m} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,676 \text{ cm}$$
- 6) Četiri  $\oplus$  naboja  $\ominus$  nalaze se u vrhovima kvadrata katara naboja treba staviti u središte kvadrata da se postigne ravnoteža
- 
- $$x-0: F_1 + F_2 \cos \alpha - F_5 \cos \alpha = 0$$
- $$y-0: F_3 + F_2 \sin \alpha - F_5 \sin \alpha = 0$$
- $$x-0: k \cdot \frac{e^2}{a^2} + \left[ k \cdot \frac{e^2}{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2} - k \cdot \frac{e^2}{(\frac{a}{2})^2} \right] \frac{1}{r^2} = 0 \quad q = e \left( \frac{r}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0,96e$$

7)

## 2. Električna struja

### 2.1. Jakost električne struje

U elektrostatici smo proučavali električne naboje koji miruju, a sada ćemo razmatrati naboje u gibanju. Usmjereno gibanje električnih naboja naziva se električna struja. Spojimo li npr. ploče nabijenog kondenzatora vodičem, poteći će kratkotrajna struja (koju možemo opaziti npr. pomoću galvanometra) i kondenzator će se isprazniti. Pod utjecajem električnoga polja kondenzatora elektroni će se gibati kroz vodič i tako proizvesti električnu struju.

Slično, spojimo li žarulju na bateriju (akumulator), struja će prolaziti kroz otpornu žicu žarulje, zagrijavati je i žarulja će svijetliti. Od negativnoga pola baterije elektroni će se, pod utjecajem električnoga polja (koje proizvodi baterija), gibati kroz vodič i žarulju prema pozitivnome polu.

Struja nastaje usmjerenim gibanjem nosilaca naboja pod utjecajem električnoga polja. U metalima su to slobodni elektroni, a u elektrolitima (vodenim otopinama soli, kiselina i lužina) i plinovima pozitivni i negativni ioni.

Smjer je struje u smjeru električnoga polja, tj. u smjeru gibanja pozitivnog naboja, od pozitivne stezaljke izvora struje (baterije, akumulatora i sl.) prema negativnoj. Elektroni su negativno nabijeni i gibaju se u suprotnome smjeru, od negativne stezaljke prema pozitivnoj. Dogovor o smjeru električne struje prvi je predložio B. Franklin, koji je zamišljao da elektricitet, kao neki fluid, teče od mjesta na kojemu ga ima više prema mjestu gdje ga ima manje.

Općenito se električna struja mijenja s vremenom. Ako je smjer struje uvijek isti, takvu struju nazivamo istosmjernom strujom. U suprotnome slučaju, struja je izmjenična.

Struja je stalna ako kroz presjek vodiča u jednakim vremenskim razmacima teku jednake količine naboja.

Jakost stalne struje kroz neki vodič omjer je električnoga naboja  $Q$  i vremena  $t$  potrebnog da taj naboj prođe kroz neki presjek vodiča:

$$I = \frac{Q}{t} \quad (2.1)$$



Ako je struja promjenljiva, tada trenutnu vrijednost jakosti struje definiramo izrazom:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (2.2)$$

(Ponekad promjenljivu struju označavamo malim slovom  $i$ .)

Ukupni naboj koji u vremenu  $t$  prođe kroz presjek vodiča pri stalnoj struji jakosti  $I$  jednak je:

$$Q = I t \quad (2.3)$$

Ako je struja promjenljiva, naboj se računa integriranjem:

$$Q = \int_0^t I(t') dt' \quad (2.4)$$

Jakost električne struje  $I$  osnovna je fizikalna veličina Međunarodnog sustava (SI). Jedinica je za jakost struje amper, A.\* O definiciji ampera govorit ćemo u 3. poglavlju.

Stalna struja ima jakost od jednog ampera ako u jednoj sekundi kroz presjek vodiča proteče jedan kulon naboja.

(Kulon je izvedena jedinica i to je njena definicija pomoću ampera kao osnovne jedinice.)

Naboj elektrona je  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C pa pri jakosti struje od 1 ampera kroz presjek vodiča prođe  $\frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 6,25 \cdot 10^{18}$  elektrona.

Ako je struja jednoliko raspoređena po presjeku  $S$  okomitom na smjer gibanja nosilaca naboja, gustoća struje  $J$  jednaka je kvocijentu jakosti električne struje  $I$  i presjeka vodiča  $S$ :

$$J = \frac{I}{S} \quad (2.5)$$

Gustoća struje definira se kao vektorska veličina: smjer vektora  $\vec{J}$  je u smjeru u kojem bi se gibao pozitivni naboj u promatranoj točki.

Ako gustoća struje nije po cijelom presjeku konstantna, tada je:

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{odnosno} \quad I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.6)$$

gdje je  $d\vec{S}$  vektor elementa površine koji ima smjer normale na presjek. Za razliku od jakosti struje koja se odnosi na vodič kao cjelinu, gustoća struje odnosi se na pojedinu točku u vodiču.

Jedinica za gustoću struje je amper po četvornom metru A/m<sup>2</sup>, no u praksi se često vrijednosti iskazuju i po četvornom milimetru A/mm<sup>2</sup>. Tipične su vrijednosti gustoće struje u bakrenim vodovima npr. do 10 A/mm<sup>2</sup>, u namotajima strojeva do 4 A/mm<sup>2</sup>, u volframovoj niti žarulje oko 400 A/mm<sup>2</sup> i sl. Ako je gustoća struje

\* André Marie Ampère (1775–1836), francuski fizičar i matematičar, poznat po radovima iz elektromagnetizma.



suviše velika, žice će se zagrijavati pa se pri proračunu vodiča za instalacije i različite uređaje moraju uzeti u obzir maksimalno dopuštene gustoće struje.

U tabl. 2.1. navedeni su presjeci vodiča u vodovima električne instalacije i najveća dopuštena trajna jakost struje koja smije teći kroz takve vodiče.

Navedene vrijednosti su za višezilne vodove npr. za priključak prenosivih trošila.

Tablica 2.1. Dopuštena trajna struja u priključnim vodovima

| Presjek / mm <sup>2</sup> | 0,5 | 0,75 | 1  | 1,5 | 2,5 | 4  | 6  | 10 | 16 |
|---------------------------|-----|------|----|-----|-----|----|----|----|----|
| Jakost struje / A         | 6   | 10   | 16 | 20  | 25  | 36 | 47 | 63 | 80 |

## 2.2. Električni otpor. Ohmov zakon

Za mnoge vodiče, posebno metale, jakost struje kroz vodič pri konstantnoj temperaturi razmjerna je naponu na njegovim krajevima. Ta se činjenica naziva Ohmov zakon\*. Omjer napona  $U$  i jakosti struje  $I$  električni je otpor vodiča  $R$ :

$$\frac{U}{I} = R \quad (2.7)$$

Ohmov zakon za vodič otpora  $R$  možemo, dakle, pisati u obliku:

$$U = RI \quad (R = \text{konst.}) \quad (2.8)$$

Ako se pri promjeni napona otpor vodiča ne mijenja, kažemo da za vodič vrijedi Ohmov zakon. Vodiči za koje vrijedi Ohmov zakon nazivaju se omski otpornici. (Kad kažemo otpornik, obično i mislimo samo na omske otpornike.)

Mjerenjem se može odrediti veza između napona  $U$  na krajevima vodiča i jakosti struje  $I$  koja prolazi vodičem. Tablica pokazuje rezultate takva mjerenja za otpornik napravljen od metalne žice. Uređaj kojim možemo obaviti takvo mjerenje prikazan je na sl. 2.1.a.

Tablica 2.2. Rezultati mjerenja ovisnosti struje o naponu

| $U/V$ | 0 | 2    | 4    | 6    | 8    | 10   | 12   | -2    | -4    |
|-------|---|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| $I/A$ | 0 | 0,23 | 0,46 | 0,69 | 0,92 | 1,15 | 1,37 | -0,23 | -0,47 |

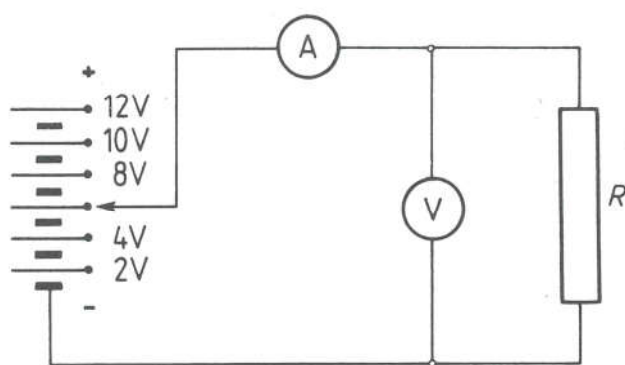
(Negativne vrijednosti napona koje su navedene u tablici dobiju se okretanjem polariteta napona. Pri tom se promijeni i smjer struje pa jakost struje pišemo s negativnim predznakom.)

Rezultati mjerenja prikazani su u tablici 2.2, a grafički na sl. 2.1.b. Ovisnost je struje o naponu linearna, jakost struje izravno je razmjerna s naponom.

Jedinica je električnoga otpora om,  $\Omega$

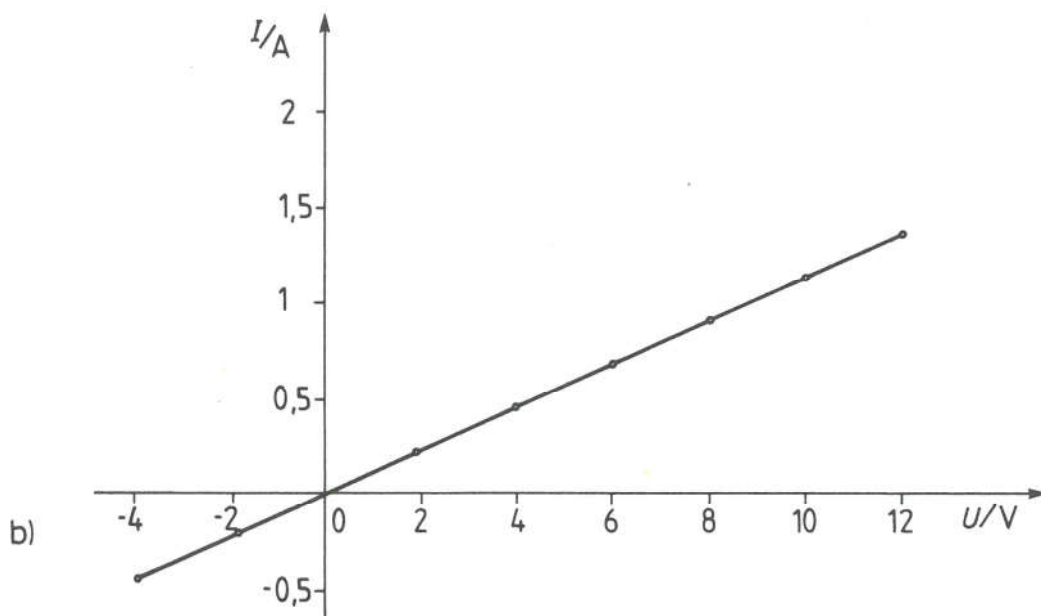
$$\Omega = \frac{V}{A}.$$

\* Georg Simeon Ohm (1787–1854), njemački fizičar, poznat po radovima iz elektriciteta



a)

Slika 2.1. a) Uređaj za mjerenje ovisnosti struje kroz vodič o naponu



b)

Slika 2.1. b) Ovisnost struje kroz vodič o naponu

Recipročna vrijednost otpora naziva se električna vodljivost:

$$G = \frac{1}{R} \quad (2.9)$$

Jedinica električne vodljivosti,  $\Omega^{-1}$ , je simens, S, koja je po definiciji

$$S = \frac{A}{V} = \Omega^{-1}.$$

Mjerenja pokazuju da je električni otpor homogenoga vodiča u obliku žice razmjeran s njegovom dužinom  $l$ , a obrnuto razmjeran s presjekom žice  $S$ :

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2.10)$$

Faktor razmjernosti  $\varrho$  naziva se električna otpornost materijala i ovisi samo o materijalu i o temperaturi. Otpornost se iskazuje jedinicom ommetar, znak  $\Omega \text{ m}$ , a često je u upotrebi i jedinica  $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ . Recipročna vrijednost otpornosti jest električna provodnost  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{1}{\varrho} \quad (2.11)$$

Jedinica je električne provodnosti simens po metru,  $\text{S/m}$ , odnosno  $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ .

S obzirom na vrijednost električne otpornosti, materijale dijelimo na vodiče, poluvodiče i izolatore. Za vodiče (metale) otpornost se kreće u granicama od  $10^{-8}$  do  $10^{-6} \Omega \text{ m}$ , a za izolatore od  $10^8$  do  $10^{18} \Omega \text{ m}$ . Tipične vrijednosti prikazane su u tabl. 2.3.

Tablica 2.3. Električne otpornosti materijala i temperaturni koeficijenti otpora kod  $20^\circ\text{C}$

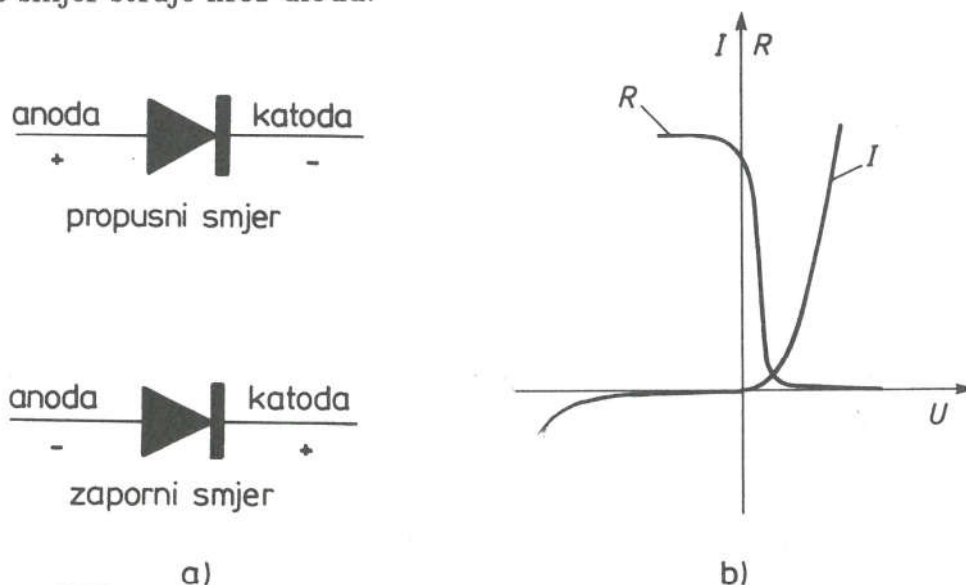
| Materijal         | $\varrho/\Omega \text{ m}$ | $\alpha/\text{K}^{-1}$ |
|-------------------|----------------------------|------------------------|
| <b>vodiči</b>     |                            |                        |
| srebro            | $1,59 \cdot 10^{-8}$       | $4,1 \cdot 10^{-3}$    |
| bakar             | $1,7 \cdot 10^{-8}$        | $3,9 \cdot 10^{-3}$    |
| zlato             | $2,3 \cdot 10^{-8}$        | $4 \cdot 10^{-3}$      |
| aluminij          | $2,7 \cdot 10^{-8}$        | $3,8 \cdot 10^{-3}$    |
| volfram           | $5,5 \cdot 10^{-8}$        | $5 \cdot 10^{-3}$      |
| cink              | $6 \cdot 10^{-8}$          | $4,2 \cdot 10^{-3}$    |
| željezo           | $9,7 \cdot 10^{-8}$        | $5 \cdot 10^{-3}$      |
| platina           | $10 \cdot 10^{-8}$         | $5 \cdot 10^{-3}$      |
| kositar           | $10 \cdot 10^{-8}$         | $4,6 \cdot 10^{-3}$    |
| olovo             | $20 \cdot 10^{-8}$         |                        |
| mangan            | $43 \cdot 10^{-8}$         | $1 \cdot 10^{-6}$      |
| konstantan        | $50 \cdot 10^{-8}$         | $4 \cdot 10^{-5}$      |
| živa              | $98 \cdot 10^{-8}$         | $9 \cdot 10^{-4}$      |
| <b>poluvodiči</b> |                            |                        |
| ugljen            | 40                         | $-4,5 \cdot 10^{-4}$   |
| germanij (čisti)  | 600                        |                        |
| silicij (čisti)   | 230                        | $-7 \cdot 10^{-2}$     |
| <b>izolatori</b>  |                            |                        |
| voda              | $2,5 \cdot 10^5$           |                        |
| drvo              | $10^{10}$                  |                        |
| staklo            | $10^{10}-10^{14}$          |                        |
| teflon            | $10^{13}$                  |                        |
| kvarc             | $10^{15}$                  |                        |

**Otpori koji nisu omski.** Utvrdili smo da za metale pri stalnoj temperaturi postoji razmjernost između struje i napona: kažemo da za njih vrijedi Ohmov zakon. Takvi otpori se nazivaju omski. Struja prikazana kao funkcija napona (tzv. karakteristika struja-napon) za otpornike omskoga otpora je linearna. Neki drugi materijali, odnosno elektronički elementi imaju nelinearne karakteristike. Za njih struja nije razmjerna naponu pa za njih ne vrijedi Ohmov zakon.

Tipičan primjer takva otpornika neomskog otpora jest ispravljačka dioda. Njezin je simbol prikazan na sl. 2.2.a. Kada je anoda diode pozitivna, a katoda negativna (propusni smjer) kroz diodu teče struja. Obratno, kada je dioda spojena u za-



pornome smjeru, ne propušta struju. Smjer strelice u simbolu diode (sl. 2.2.a) pokazuje smjer struje kroz diodu.



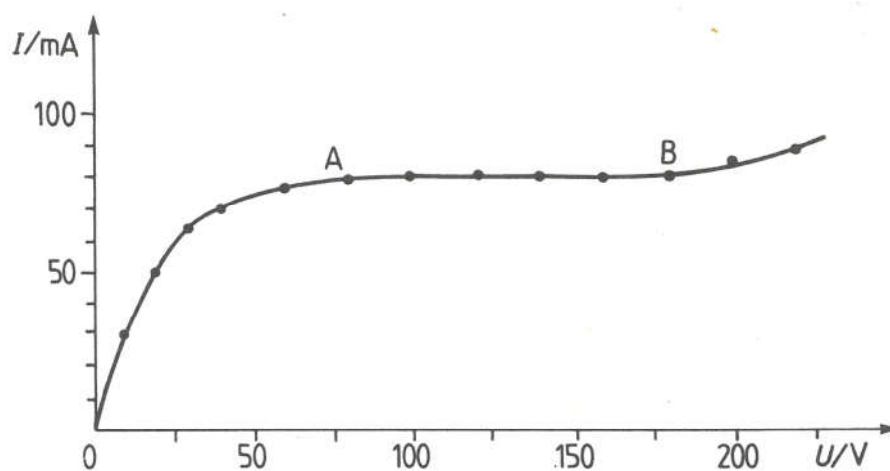
Slika 2.2. a) Oznaka diode i b) ovisnost struje i otpora diode o naponu

Na sl. 2.2.b prikazani su karakteristika diode (ovisnost struje o naponu), kao i ovisnost otpora diode o naponu. Karakteristika diode nije linearna; za diodu ne vrijedi Ohmov zakon.

Za žarulju sa željeznom niti napunjenom vodikom ne vrijedi Ohmov zakon, što je vidljivo iz mjerenja ovisnosti struje o naponu (tabl. 2.4)

Tablica 2.4. Rezultati mjerenja karakteristike željeza u vodik

| $U / V$  | 10 | 20 | 30 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 | 220 |
|----------|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $I / mA$ | 30 | 50 | 65 | 70 | 75 | 80 | 80  | 80  | 80  | 80  | 80  | 83  | 85  |



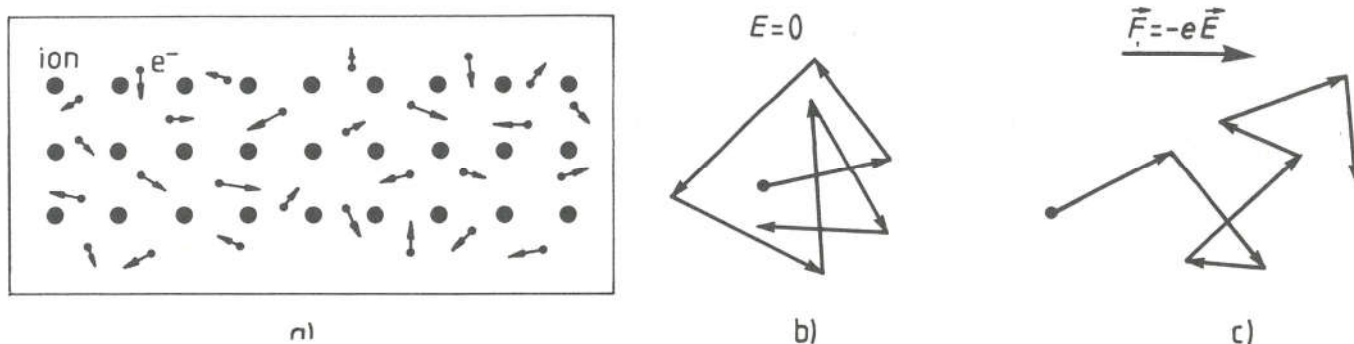
Slika 2.3.  $U-I$  karakteristika željeza u vodik

Iz tabl. 2.4, a još lakše iz sl. 2.3. vidimo da taj otpor nije omski. U određenom području napona, (AB), struja je stalna, pa se ovakav otpornik može upotrijebiti kao strujni regulator. (Razlog je takva ponašanja željeza pri višim temperaturama u promjeni njegove kristalne strukture.) Postoje također otpornici za održavanje stalnog napona; to su tzv. voltage dependent resistors – VDR–otpornici.

Otpornici čiji otpori nisu u skladu s Ohmovim zakonom imaju veliku primjenu u elektrotehnici. Cijevne i poluvodičke diode upotrebljavaju se u ispravljačima, Zenerove diode upotrebljavaju se za stabiliziranje napona itd.

## 2.3. Mikroskopski opis električne struje

Električna struja uzrokovana je gibanjem nosilaca naboja. Pogledajmo kako se elektroni pod utjecajem električnoga polja gibaju u metalima. Naravno, naša će razmatranja biti osnivana na zakonima klasične fizike i zato samo približna; samo kvantna fizika može u potpunosti objasniti gibanje elektrona.



Slika 2.4. a) Slobodni elektroni u metalu, b) Kaotično gibanje elektrona, c) Usmjereno gibanje elektrona

U kristalima (pa i u metalima, koji su također kristali) atomi su pravilno raspoređeni u kristalnu rešetku i ne mogu se slobodno gibati, nego – samo titrati oko ravnotežnog položaja. Kao rezultat interakcije među susjednim atomima, veza vanjskoga elektrona atoma i jezgre u metalima vrlo je slaba, pa se takvi elektroni unutar metala ponašaju kao slobodni. Slobodne elektrone u metalima nazivamo i elektronskim plinom jer se, slično česticama plina, gibaju kroz rešetku između fiksnih metalnih iona (sl. 2.4.a). Iako je termička brzina tih elektrona relativno velika (oko  $10^6$  m/s), zbog stalnih je sudara gibanje kaotično pa je, kada nema električnoga polja, srednja brzina nula (sl. 2.4.b).

Pod utjecajem električnoga polja, slobodni se elektroni ubrzavaju između sudara s atomima u rešetki, a u sudarima gube energiju. Zapravo, ti su sudari interakcija elektrona i titranja kristalne rešetke tzv. *fonona* – u što ovdje ne možemo iscrpnije ulaziti. (Potpuni opis elektronskoga plina moguć je samo pomoću kvantne fizike.)

Kao rezultat djelovanja električne sile (ubrzanja) i ostalih sudara (usporavanja), elektron dobiva neku srednju dodatnu brzinu u smjeru električne sile (sl. 2.4.c). Ta

dodatna *usmjerena* brzina može se nazvati brzinom strujanja (pomicanja) elektrona u smjeru električne sile (ili, prema engleskom nazivu drift velocity, *drift-brzina*  $v_d$ .)

Interakcija elektrona s titranjem kristalne rešetke djeluje slično viskoznome trenju i ometa gibanje elektrona djelujući suprotno električnoj sili.

Slično kao u mehanici fluida, i ovdje možemo pretpostaviti da je:

$$\vec{F}_{tr} = -b\vec{v}_d \quad (2.12)$$

gdje je  $b$  konstanta razmjernosti, koja ovisi o vrsti nosilaca naboja i o kristalnoj rešetki.

Drift-brzinu  $\vec{v}_d$  određujemo iz uvjeta da je zbroj sila na elektron (koji se giba konstantnom brzinom  $v_d$ ) jednak nuli:

$$\vec{F}_{el} + \vec{F}_{tr} = 0 \quad (2.13)$$

odnosno:

$$-e\vec{E} - b\vec{v}_d = 0$$

tj.:

$$v_d = -\frac{e}{b} E = \mu_{el} E \quad (2.14)$$

gdje se konstanta  $\mu_{el} = -e/b$  naziva *pokretljivost elektrona*. (U ovim je izrazima  $e$  elementarni naboj, dakle, pozitivna veličina, dok je naboj elektrona jednak  $-e$ .) Drift-brzina elektrona, zbog njegova negativnog naboja, suprotna je smjeru električnoga polja, što se vidi iz izraza (2.14).

Srednje vrijeme između dvaju sudara elektrona označimo s  $\tau$ , a srednji put koji pri tom prewali elektron s  $\lambda$  (tzv. *srednji slobodni put*). Slično kao molekule plina, elektroni imaju različite brzine i raspodjelu brzina možemo, kao i za plin, opisati nekom efektivnom brzinom  $v$ . (Ona za elektrone u bakru iznosi oko  $10^6$  m/s.) Veza između  $\tau$  i  $\lambda$ , uzevši u obzir efektivnu brzinu elektrona između dvaju sudara, može se pisati kao:

$$\lambda = v\tau \quad (2.15)$$

Ako u metalu postoji električno polje  $\vec{E}$ , električna će sila djelovati na elektrone i ubrzavati ih

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= -e\vec{E} \\ \vec{a} &= -\frac{e}{m} \vec{E} \end{aligned} \quad (2.16)$$

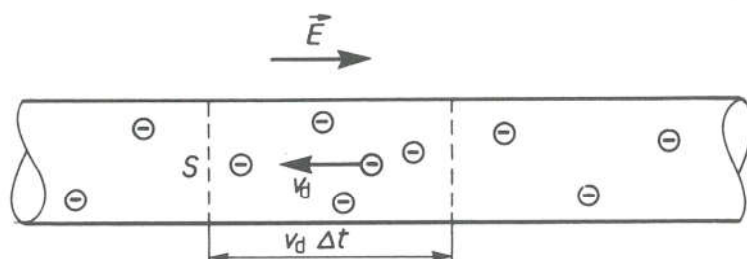
Zbog te akceleracije elektron će između dvaju sudara dobiti dodatnu brzinu u smjeru električne sile

$$\begin{aligned} \vec{v}_d &= \vec{a}\tau \\ \vec{v}_d &= -\frac{e}{m} \vec{E}\tau \end{aligned}$$

ili

$$\vec{v}_d = \mu \vec{E} \quad (2.17)$$





Slika 2.5. Uz objašnjenje drift-brzine

gdje je  $\mu = -e\tau/m$  pokretljivost elektrona, koja je negativna. (Ako je struja uzrokovana pozitivnim nosiocima naboja, pokretljivost  $\mu$  je pozitivna.)

Povežimo jakost, odnosno gustoću struje, i drift-brzinu elektrona u metalu. Neka je komad metalne žice duljine  $l$  i presjeka  $S$  spojen na napon  $U$ . Pod utjecajem električnoga polja  $E = U/l$  elektroni će dobiti određenu drift-brzinu i teći će struja. Za vrijeme  $\Delta t$  elektron će u prosjeku prevaliti put  $v_d \Delta t$ ; svi elektroni u valjku osnovice  $S$  i visine  $v_d \Delta t$  proći će u vremenu  $\Delta t$  kroz promatrani presjek  $S$  i izići iz valjka (sl. 2.5). Ako je  $n$  koncentracija slobodnih elektrona u vodiču (tj. broj elektrona po jedinici volumena), tada je ukupni naboj koji u vremenu  $\Delta t$  prostruji kroz presjek  $S$ :

$$Q = neSv_d \Delta t \quad (2.18)$$

Jakost je struje:

$$I = \frac{Q}{t} = nev_d S \quad (2.19)$$

a gustoća struje

$$J = \frac{I}{S} = nev_d \quad (2.20)$$

ili pisano vektorski za elektrone:

$$\vec{J} = -ne\vec{v}_d \quad (2.21)$$

Pomoću relacije (2.14) drift-brzinu možemo povezati s jakošću električnoga polja:

$$\vec{J} = -ne\mu_{el}\vec{E} \quad (2.22)$$

### Primjer 2.1.

Kolika je drift-brzina elektrona u bakru pri gustoći struje od  $150 \text{ A/cm}^2$ , uz pretpostavku da svaki atom bakra ima po jedan slobodni elektron. Gustoća bakra je  $8,9 \text{ g/cm}^3$ , a molarna masa  $0,0636 \text{ kg/mol}$ .

Budući da svaki atom ima po jedan slobodni elektron, koncentracija slobodnih elektrona jednaka je koncentraciji atoma. U  $1 \text{ m}^3$  bakra količina tvari bakra bit će  $\rho/M$  mola, gdje je  $M$  molna masa bakra i  $\rho$  gustoća

bakra. Budući da u količini tvari 1 mol ima  $N_A$  atoma, i isto toliko slobodnih elektrona, broj atoma, odnosno slobodnih elektrona  $n$  iznosi:

$$n = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{8,9 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{6,36 \cdot 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3},$$

a drift-brzina:

$$v_d = \frac{J}{ne}$$

$$v_d = \frac{JM}{\rho N_A e} = \frac{1,56 \cdot 10^6 \text{ A m}^{-2} \cdot 6,36 \cdot 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}}{8,9 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}$$

$$v_d = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0,11 \text{ mm s}^{-1}.$$

Kada se strujni krug zatvori, struja, gotovo istoga trenutka, poteče i kroz najudaljeniji dio strujnog kruga. Taj se strujni impuls (promjena konfiguracije električnog polja) širi brzinom svjetlosti. Naprotiv, brzina kojom se naboj prenosi kroz vodič, kao što pokazuje i ovaj primjer, vrlo je mala, samo djelić milimetra u sekundi.

## 2.4. Mikroskopski oblik Ohmova zakona

Makroskopski oblik Ohmova zakona  $U/I = R$  napose je pogodan za tehničara koji mjeri napon i jakost struje. Ohmov zakon možemo izvesti i u mikroskopskome obliku\* kao vezu između gustoće struje i jakosti električnoga polja koje tu struju proizvodi. Primjenom Ohmova zakona, naime, dobijemo:

$$\begin{aligned} J &= \frac{I}{S} = \frac{U}{RS} \\ J &= \frac{U}{\frac{l}{\rho} S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l} = \kappa E \end{aligned} \quad (2.23)$$

čime smo povezali gustoću struje i jakost električnoga polja. Usporedimo li ovu relaciju s (2.22), vidimo da se električna provodnost može povezati s mikroskopskim veličinama: koncentracijom elektrona i pokretljivošću:

$$\kappa = ne\mu_{el} \quad (2.24)$$

Izraz (2.7) nazivamo makroskopskim oblikom Ohmova zakona, jer povezuje makroskopske veličine  $U$ ,  $I$  i  $R$  za određeni (makroskopski) dio materijala, dok su veličine  $J$ ,  $E$  i  $\kappa$  u izrazu (2.23) određene za svaku točku materijala, te mikroskopski opisuju vezu između električnoga polja i gibanja naboja.

\* Naziv mikroskopski nema veze s mikroskopom, već se odnosi na atomistički prikaz određenih pojava.

Ohmov će zakon:

$$J = ne\mu_{el}E$$

vrijediti za takav vodič ako je koncentracija nosilaca naboja (slobodnih elektrona) stalna i ako njihova pokretljivost ne ovisi o električnom polju, pa je  $J/E = \kappa$  konstanta, tj. promjene polja  $\vec{E}$  razmjerne su odgovarajućim promjenama gustoće struje  $\vec{J}$ .

Pokretljivost elektrona u bakru može se izračunati primjenom relacije (2.24). Uzevši  $\kappa = 1/\rho = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ , koncentraciju elektrona  $n = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  (v. primjer 2.1. na str. 79) i  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , dobivamo za pokretljivost:

$$\mu = \frac{\kappa}{ne} = 4,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\Omega\text{C}} = 43 \frac{\text{cm}^2}{\Omega\text{C}} = 43 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}.$$

Bakar koji se upotrebljava za izradu vodiča nema sasvim pravilnu kristalnu strukturu, već je polikristaliničan tako da je pokretljivost elektrona relativno mala u usporedbi s pokretljivošću u monokristalima kakav je npr. monokristalni silicij.

U monokristalu silicija pokretljivost elektrona, zbog pravilne kristalne strukture, je velika i iznosi oko  $0,13 \text{ m}^2/\Omega\text{C}$ , tj.  $1300 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ . Usprkos tome silicij je mnogo lošiji vodič od bakra, jer je koncentracija nosilaca naboja (elektrona) u njemu vrlo mala (oko  $10^{16} \text{ m}^{-3}$ ). Ako se dodavanjem primjesa koncentracija poveća na, recimo,  $10^{21} \text{ m}^{-3}$ , tada je električna otpornost takva poluvodiča s primjesama (tzv. N odnosno P-tipa silicija) bitno manja:

$$\rho = \frac{1}{ne\mu} = \frac{1}{10^{21} \text{ m}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,13 \text{ m}^2\Omega^{-1}\text{C}^{-1}}$$

$$\rho = 0,05 \Omega\text{m}.$$

Za čisti silicij električna otpornost je:

$$\rho = \frac{1}{ne\mu} = \frac{1}{10^{16} \text{ m}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,13 \text{ m}^2\Omega^{-1}\text{C}^{-1}}$$

$$\rho = 5000 \Omega\text{m}$$

## 2.5. Ovisnost otpora o temperaturi. Supravodljivost

Otpor materijala ovisi o temperaturi. Povećavanjem temperature, otpor se metala povećava, a kod nekih drugih materijala (npr. poluvodiča), otpor pada kada temperatura raste. Promjenu otpora s temperaturom možemo opisati temperaturnim koeficijentom otpora  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{\Delta R}{\Delta T} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta T} \quad (2.25)$$

Temperaturni koeficijent otpora  $\alpha$  pokazuje kolika je relativna promjena otpora pri promjeni temperature za jedan kelvin. Ako je na temperaturi  $T_1$ , otpor  $R_1$ ,



tada će na temperaturi  $T_2$  otpor biti jednak:

$$R_2 = R_1(1 + \alpha \Delta T) \quad (2.26)$$

gdje je  $\Delta T = T_2 - T_1$ .

Slično se mijenja i električna otpornost:

$$\varrho_2 = \varrho_1(1 + \alpha \Delta T) \quad (2.27)$$

Ovaj linearni zakon vrlo dobro vrijedi za čiste metale u području "običnih" temperatura (npr.  $0^\circ\text{C}$  do  $100^\circ\text{C}$ ). Za čiste metale  $\alpha$  je uvijek pozitivan, praktički neovisan o temperaturi i iznosi približno  $\frac{1}{250} \text{ K}^{-1}$  (v. sl. 2.6.a).

Promjenom otpora s temperaturom koristimo se npr. u otpornome termometru. Mjereći otpor platine i poznajući njegovu temperaturnu ovisnost, možemo odrediti temperaturu. U tu se svrhu u novije vrijeme sve više primjenjuju *poluvodički termistori*.

Otpor se poluvodiča smanjuje s temperaturom. Ta se ovisnost može prikazati izrazom:

$$R = Ae^{B/T} \quad (2.28)$$

gdje su  $A$  i  $B$  konstante ovisne o vrsti i obliku materijala.

Temperaturni je koeficijent otpora takva poluvodiča:

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} = -\frac{B}{T^2} \quad (2.29)$$

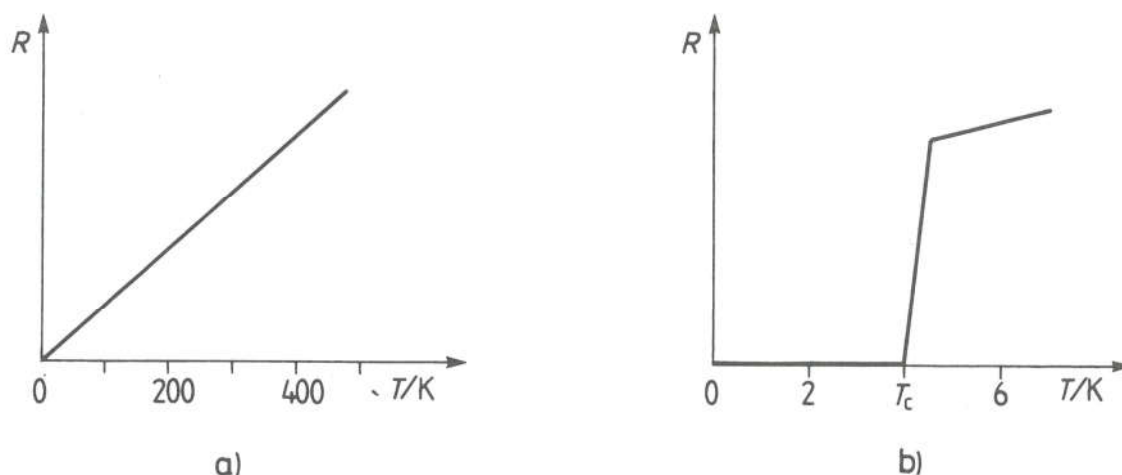
Ako je npr.  $B = 3000 \text{ K}$ , tada je za temperaturu  $T = 300 \text{ K}$ ,  $\alpha = -0,03 \text{ K}^{-1}$ . (Usporedite s vodičima za koje je  $\alpha = 0,004 \text{ K}^{-1}$ .)

Posebni poluvodički otpornici *termistori* imaju relativno velik negativni temperaturni koeficijent  $\alpha$ . Zbog te se osobine mogu upotrijebiti za mjerenje temperature.

Obični otpornici imaju pozitivan termički koeficijent otpora  $\alpha$ , a termistori negativni, pa se kombinacijom jednih i drugih može dobiti otpornik čiji otpor ne ovisi o temperaturi.

**Supravodljivost.** U blizini apsolutne nule otpor nekih metala iščezava. Ta se pojava naziva supravodljivost. Otkrio ju je nizozemski fizičar Kamerlingh Onnes (1911) mjereći otpor žive na vrlo niskim temperaturama (oko  $4 \text{ K}$ ).<sup>\*</sup> Temperatura pri kojoj se otpor naglo smanji na nulu (tzv. *temperatura skoka* ili *kritična temperatura*) reda je veličine nekoliko kelvina i razlikuje se za razne materijale. U tabl. 2.5. navedene su neke kritične temperature pri kojima počinje supravodljivost. Na sl. 2.6.a prikazana je ovisnost otpora metala o temperaturi, a na sl. 2.6.b ovisnost otpora supravodiča o temperaturi u blizini apsolutne nule.

Ako se npr. olovna žica ohladi ispod  $7,2 \text{ K}$ , njezin otpor nestaje, postaje nula, olovo postaje supravodljivo. Naprotiv, neki drugi metali poput bakra ili srebra, ne pokazuju supravodljivost, nego im je otpor na temperaturama bliskim apsolutnoj nuli stalan i različit od nule. U okvirima klasične fizike ne može se objasniti supravodljivost.



Slika 2.6. a) Ovisnost otpora metala o temperaturi i b) ovisnost otpora supravodiča o temperaturi

Tablica 2.5. Kritične temperature za neke materijale

| Materijal          | Kritična temperatura, $T_k$ |
|--------------------|-----------------------------|
| In                 | 3,4 K                       |
| Sn                 | 3,7 K                       |
| Hg                 | 4,2 K                       |
| Pb                 | 7,2 K                       |
| Nb <sub>3</sub> Sn | 18 K                        |
| Nb <sub>3</sub> Ga | 20 K                        |

Primjena supravodljivosti dolazi sve više do izražaja i istraživanja u vezi s tim vrlo su intenzivna u svijetu.

Budući da je u supravodljivom području otpor materijala sveden na nulu, nema toplinskih gubitaka (zagrijavanja vodiča), te se u vodičima mogu proizvesti vrlo jake gustoće struja i održavati po volji dugo bez velikog potroška energije. Problemi se, međutim, javljaju zbog velikog utroška energije za dobivanje i održavanje tako niskih temperatura.

## 2.6. Otpornici

Otpornik je jedan od najčešće upotrebljivanih elektroničkih komponenata. U radio i televizijskom prijemniku njih je, uz kondenzatore, više od svih drugih komponenata. Obično se otpornici izrađuju u obliku malog valjka dugačkog nekoliko centimetara s dvjema žicama na krajevima. Treba razlikovati pojmove otpor i otpornik, kapacitet i kondenzator, induktivitet i zavojnica. Otpornik, kondenzator i zavojnica elektronički su elementi koji se ugrađuju u sklopove, a otpor, kapacitet i induktivitet fizikalne su veličine, električna svojstva spomenutih elemenata.

\* Za doprinos objašnjenju supravodljivosti dobili su J. Bardeen, L. Cooper i J. Schrieffer Nobelovu nagradu za fiziku 1972. godine.



Ima više vrsta otpornika, ovisno o tehnologiji proizvodnje i namjeni: žičani, slojni, stalni i promjenljivi otpornici.

*Žičani* su otpornici izrađeni od otporne žice na izolatoru od keramike ili stakla s priključnim stezaljkama ili obujmicama na krajevima otpornika. Obično se upotrebljavaju za veća opterećenja.

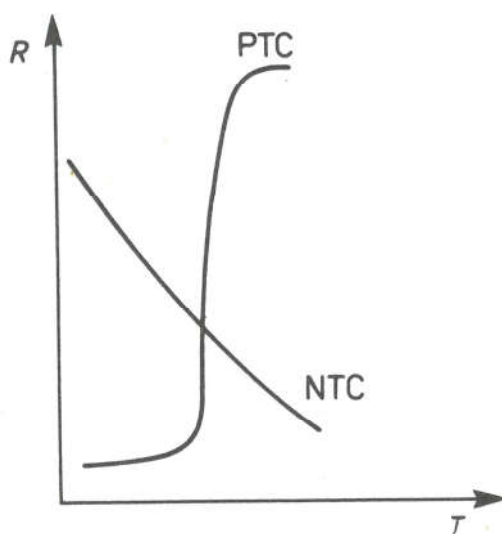
*Slojni* otpornici izrađuju se tako da se na nosač od izolatora (keramike) nanese sloj određene otpornosti. Sloj može biti ugljeni ili metalni.

*Potenciometri* su promjenljivi otpornici kojima se vrijednost otpora klizačem može mijenjati od nule do neke najveće koja je označena kao vrijednost potencimetra. Manji potenciometri za fino namještanje nazivaju se trimerpotenciometri i služe za povremeno podešavanje radnih točaka u strujnim krugovima.

Osim potencimetara kojima se otpor mijenja mehanički, ima i promjenljivih otpornika kojima se otpor mijenja promjenom napona (VDR), temperature (NTC i PTC) i osvjetljenja (LDR).

Otpornik od željezne žice u vodiku jedan je od klasičnih otpornika s pozitivnim temperaturnim koeficijentom. To je jedan od primjera PTC-otpornika (Positive Temperature Coefficient). Obična je žarulja također PTC-otpornik jer joj se otpor povećava s temperaturom. Međutim, u elektrotehnici se često upotrebljavaju PTC-otpornici iz poluvodičkog materijala. Upotrebljavaju se npr. za mjerenje temperature, u sklopovima za zaštitu od pregrijavanja i sl.

*Termistori* s negativnim temperaturnim koeficijentom obično se nazivaju NTC-otpornici (Negative Temperature Coefficient). Povećanjem temperature otpor im se smanjuje; temperaturni je koeficijent  $\alpha$  takvih otpora oko  $-0,05 \text{ K}^{-1}$ . Na sl. 2.7. prikazana je ovisnost otpora o temperaturi za NTC i PTC-otpornik. Primjene su NTC-otpornika različite: mjerenje i reguliranje temperature, ograničenje visokih struja pri uključivanju uređaja, u raznim relejima i sl.



Slika 2.7. Ovisnost otpora o temperaturi za NTC- i PTC-otpornik

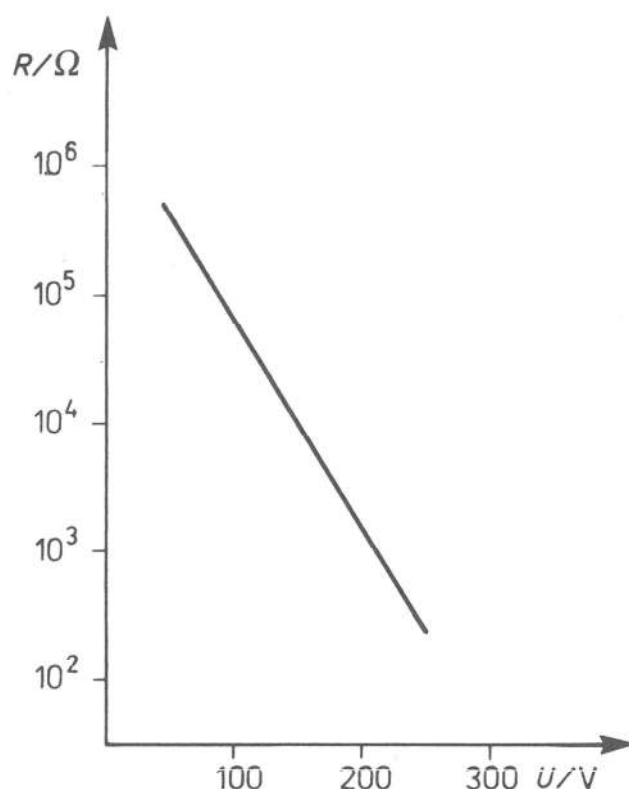
*Varistori* ili VDR-otpornici (Voltage Dependent Resistor) primjenjuju se za stabilizaciju napona jer mu otpor ovisi o naponu na njegovim krajevima (sl. 2.8).



Povećanjem napona otpor se varistora smanjuje. To se može primijeniti za regulaciju napona.

LDR-fotootpornik (**L**ight **D**ependent **R**esistor) načinjen je od poluvodičkoga materijala (npr. kadmij-sulfid) i otpor mu ovisi o tome koliko je osvijetljen; pri slabu je osvijetljenju veći, a pri jakom manji. To se svojstvo može primijeniti npr. za upravljanje relejima.

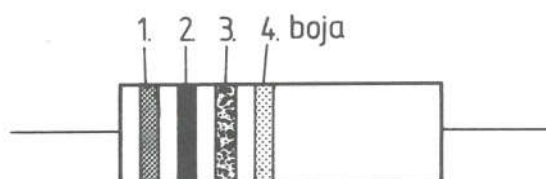
Pri upotrebi otpornika važno je za svaki od njih poznavati ove podatke: vrijednost otpora, toleranciju i snagu za koju je otpornik predviđen i koja se pri upotrebi ne smije premašiti.



Slika 2.8. Ovisnost otpora o naponu za VDR-otpornik

Pri prolazu struje otpornik se zagrijava i to zagrijavanje ne smije prijeći određenu granicu. Snaga za koju je predviđen pojedini otpornik najveća je snaga koja se smije postići na otporniku, a da ne nastane oštećenje zbog pregrijavanja otpornika. Izrađuju se otpornici za različite snage:  $\frac{1}{4}$  W,  $\frac{1}{2}$  W, 1 W, 2 W itd. Ako je npr. otpornik za snagu 2 W, tada pri uključanju na napon 200 V struja kroz otpornik mora biti manja od 10 mA.

Vrijednost otpora može se na otporniku označiti brojem ili obojenim prstenovima različitih boja (sl. 2.9). Označavanje bojama pokazalo se praktičnijim, iako je očitavanje nešto teže. Značenje pojedinih boja za obilježavanje vrijednosti otpora i kondenzatora prikazano je u tabl. 2.6.



Slika 2.9. Označavanje bojom otpora otpornika

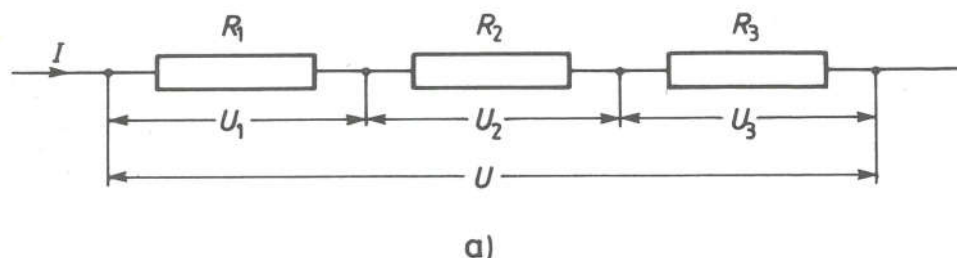
Tablica 2.6. Međunarodne oznake bojom za otpornike i kondenzatore.\*

| Boja        | 1. prsten<br>ili točka | 2. prsten<br>ili točka | 3. prsten<br>ili točka | 4. prsten<br>ili točka | 5. prsten<br>ili točka |
|-------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| crna        | 0                      | 0                      |                        |                        |                        |
| smeđa       | 1                      | 1                      | 0                      | 1 %                    | 100                    |
| crvena      | 2                      | 2                      | 00                     | 2 %                    | 200                    |
| narandžasta | 3                      | 3                      | 000                    |                        | 300                    |
| žuta        | 4                      | 4                      | 0000                   |                        | 400                    |
| zeleni      | 5                      | 5                      | 00000                  | 0,5 %                  | 500                    |
| plava       | 6                      | 6                      | 000 000                |                        | 600                    |
| ljubičasta  | 7                      | 7                      |                        |                        | 700                    |
| siva        | 8                      | 8                      |                        |                        | 800                    |
| bijela      | 9                      | 9                      |                        |                        | 900                    |
| zlatna      |                        |                        |                        | 5 %                    | 1 000                  |
| srebrna     |                        |                        |                        | 10 %                   | 2 000                  |
| bez boje    |                        |                        |                        | 20 %                   | 5 000                  |

\*Prva i druga boja daju prvu i drugu znamenku vrijednosti otpora, treća boja daje broj nula, četvrta boja označava toleranciju. (Peta boja daje radni napon u voltima za kondenzatore.)

## 2.7. Spajanje otpornika

Slično kao kondenzatore, i otpornike možemo spajati na dva osnovna načina: serijski i paralelno. Naravno da se oba načina mogu kombinirati i tako dobiti najraznovrsniji spojevi otpornika.



Slika 2.10. a) Serijsko spajanje otpornika

**Serijski spoj.** Više otpornika spojeno je u seriji kada je kraj jednog priključen na početak drugog, kraj drugog na početak trećeg itd. Kroz tako spojene otpornike prolazi ista električna struja  $I$  (sl. 2.10). Na krajevima svakog otpornika postoji

određeni napon jednak umnošku otpora i jakosti struje; to je pad napona na otporu. Ukupni pad napona na serijskome spoju jednak je zbroju pojedinih padova napona:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_3 \\ U &= IR_1 + IR_2 + IR_3 = I(R_1 + R_2 + R_3) = RI \end{aligned} \quad (2.30)$$

gdje je  $R$  ukupni otpor spoja. Očito je:

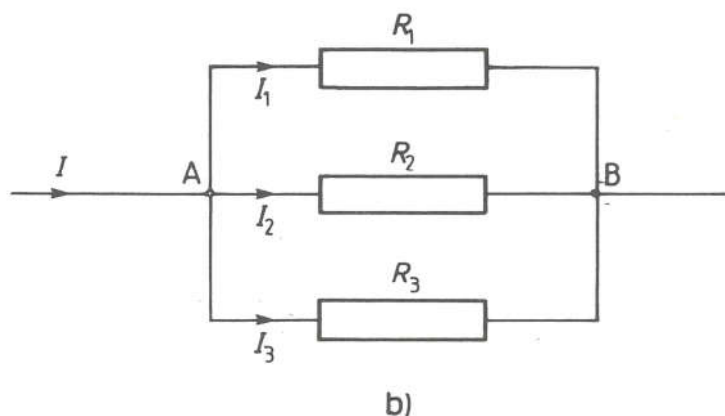
$$R = R_1 + R_2 + R_3 \quad (2.31)$$

Rezultantni otpor serijskoga spoja otpornika jednak je, dakle, zbroju otpora pojedinih otpornika:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \quad (2.32)$$

**Paralelni spoj.** Na sl. 2.10.b prikazan je paralelni spoj triju otpornika. U točki A struja  $I$  grana se u tri dijela, pa je:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (2.33)$$



Slika 2.10. b) Paralelno spajanje otpornika

Za svaku granu posebno vrijedi Ohmov zakon pa su padovi napona za sve tri grane jednaka naponu  $U$  između točaka A i B:

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = U \quad (2.34)$$

Uzimajući u obzir (2.33) dobivamo:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (2.35)$$

Usporedimo li to s:

$$I = \frac{U}{R},$$



gdje je  $R$  rezultatni otpor paralelnog spoja, dobivamo:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (2.36)$$

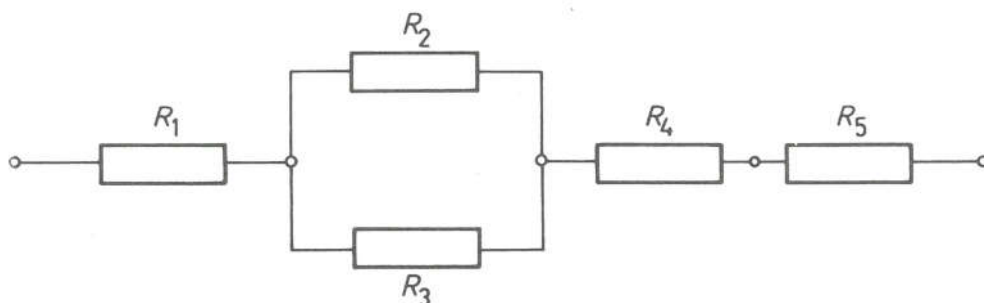
odnosno, općenito:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (2.37)$$

Pri paralelnom spajanju više otpornika recipročna vrijednost rezultatnog otpora jednaka je zbroju recipročnih vrijednosti pojedinih otpora. Izraz (2.36) možemo pročitati i ovako: Ukupna vodljivost paralelnoga spoja jednaka je zbroju pojedinih vodljivosti  $G = G_1 + G_2 + G_3$ . Serijskim spajanjem zbrajaju se otpori, a paralelnim zbrajaju se vodljivosti.

### Primjer 2.2.

Osim serijskoga i paralelnoga spajanja, otpornici se mogu spajati i kombinirano. Takve kombinacije serijskih i paralelnih spojeva možemo nazvati mješovitima. Izračunajte ukupni (ekvivalentni) otpor kombinacije otpornika na sl. 2.11, ako je  $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$ ,  $R_4 = R_5 = 2 \Omega$ .



Slika 2.11.

Da bismo izračunali ukupni otpor, najprije ćemo izračunati otpor paralelnoga spoja  $R_2$  i  $R_3$ :

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{23} = 0,5 \Omega.$$

Taj je otpor u serijskom spoju s otporom  $R_1$  pa se ta tri otpora ( $R_1$ ,  $R_2$ , i  $R_3$ ) mogu zamijeniti otporom:

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 1,5 \Omega.$$

Otpori  $R_4$  i  $R_5$  spojeni su serijski pa se mogu nadomjestiti otporom:

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 4 \Omega.$$

Konačno cijeli sklop otpornika ima otpor:

$$R = R_{45} + R_{123} = 5,5 \, \Omega .$$

## 2.8. Izvori napona. Elektromotorna sila

Uređaji kojima se stalno može održavati potencijalna razlika (napon) u strujnome krugu nazivaju se električni izvori. U tim se napravama različite vrste energije pretvaraju u električku razdvajajući pozitivne naboje na jedan pol izvora, a negativne na drugi.

Tako se npr. u električnim generatorima električna energija dobiva na račun mehaničke, u galvanskim člancima i akumulatorima, kemijska se energija pretvara u električnu, u fotoćelijama sunčana energija pretvara se u električnu itd.

Svaki izvor karakteriziran je dvjema fizikalnim veličinama: unutrašnjim otporom  $R_u$  i unutrašnjim naponom izvora, tzv. elektromotornom silom  $\mathcal{E}$ . Kada nema struje kroz izvor, nema ni pada napona na unutrašnjem otporu, pa je napon na priključnicama izvora jednak elektromotornoj sili. Što je veća struja koju daje izvor, veći je pad napona na unutrašnjem otporu pa je time i napon izvora manji.

Posebna su vrsta izvora napona galvanski članci u kojima se kemijska energija pretvara u električnu: to su elektrokemijski izvori napona.

Razlikujemo primarne i sekundarne galvanske članke. Primarni članci (Leclanchéov članak, ćelije od živinog oksida, ćelije od srebrnog oksida itd.), kada se istroše, ne mogu se ponovno napuniti, za razliku od sekundarnih (raznih vrsta akumulatora) u kojima se dovođenjem električne energije proces može okrenuti i ispražnjeni izvor napuniti.

Suhi članak, najčešće upotrebljavani galvanski izvor, sastoji se od cinčane posude (katode) i grafitnog (ugljenog) štapića anode okruženog mangan-dioksidom (piroluzit) i grafitom radi sprečavanja polarizacije (skupljanje plina vodika na anodi). Elektrolit je amonij-klorid i cink-klorid u pasti. To je poznati *Leclanchéov članak*. Napon je praznoga hoda (elektromotorna sila) takvoga članka od 1,4 V do 1,7 V, radni napon nešto je manji i ovisi o opterećenju, dok mu je nazivni napon 1,5 V po definiciji.

*Danielov članak* sastoji se od cinčane katode u zasićenoj otopini cink-sulfata koja je poroznom pregradom odvojena od bakrene anode u zasićenoj otopini  $\text{CuSO}_4$ .

*Živine ćelije* sastoje se od cinčane katode i anode koju čine grafit i živa(II)oksid ( $\text{HgO}$ ), a elektrolit je kalij-hidroksid ( $\text{KOH}$ ). Takve ćelije imaju elektromotornu silu 1,4 V i relativno velik kapacitet.

*Manganove alkalne ćelije* imaju anodu od cinka i katodu od mangan-dioksida, a elektrolit je otopina kalij-hidroksida.

Za razliku od primarnih, sekundarne ćelije, kada se električki isprazne, mogu se puniti tako da se promijeni smjer struje, a time i smjer kemijskoga procesa na elektrodama. Najpoznatiji su od njih *olovni akumulatori*. Elektrode su od olova, ( $\text{Pb}$ )



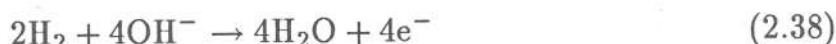
i olovo-oksida ( $\text{PbO}_2$ ) u razrijeđenoj sulfatnoj kiselini ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ). Elektromotorna im je sila 2,1 V.

Kada je akumulator spojen s trošilom, Pb-elektroda je negativna, a  $\text{PbO}_2$ -elektroda pozitivna. Pražnjenjem akumulatora obje se elektrode postupno prekrivaju slojem olovo-sulfata  $\text{PbSO}_4$ , a koncentracija se kiseline u elektrolitu akumulatora smanjuje, a i njegov napon. Ako se pražnjenje akumulatora nastavi, elektrode se potpuno prekriju slojem sulfata i tada akumulator više nije upotrebljiv. To se pri upotrebi akumulatora nastoji izbjeći i akumulator se puni prije nego što se potpuno isprazni. Punjenjem se odvija suprotan proces i na elektrodama se formira sloj čistog olova na jednoj, a na drugoj sloj  $\text{PbO}_2$ .

Osim olovnih, koji su najrasprostranjeniji, upotrebljavaju se još i *nikal-kadmij*-akumulatori.

*Goriva ćelija* uređaj je koji hladnim "izgaranjem" vodika kemijsku energiju izravno pretvara u električnu.

U ćeliju se odvojeno dovode plinovi vodik i kisik. Prolazeći kroz propusnu negativnu elektrodu, vodik u reakciji s elektrolitom (vodenom otopinom KOH) oslobađa elektrone:



Tako se formira negativni pol izvora napona.

Kroz drugu prolaznu elektrodu dovodi se kisik i tu se ionizira uzimajući elektrone s metalne elektrode koja postaje pozitivna:



Elektrode su prekrivene katalizatorima koji ubrzavaju spomenute procese. Napon je ćelije oko 1,2 V.

Gorive ćelije još se uvijek malo upotrebljavaju. Očekuje se, međutim, njihova primjena u budućnosti.

U tabl. 2.7. prikazani su neki galvanski članci i njihove značajke.

Tablica 2.7. Galvanski članci

| Članak            | Anoda          | Katoda | Elektrolit                        | Elektromotorna sila |
|-------------------|----------------|--------|-----------------------------------|---------------------|
| Voltin            | Cu             | Zn     | HCl                               | 1,08 V              |
| Daniellov         | Cu             | Zn     | $\text{ZnSO}_4$ i $\text{CuSO}_4$ | 1,5 V               |
| Leclanchéov       | $\text{MnO}_2$ | Zn     | $\text{NH}_4\text{Cl}$            | 1,35 V              |
| Živin             | HgO            | Zn     | KOH                               | 1,85 V              |
| Olovni akumulator | $\text{PbO}_2$ | Pb     | $\text{H}_2\text{SO}_4$           | 2,1 V               |

**Elektromotorna sila.** Procesi unutar električnog izvora održavaju napon na njegovim krajevima. Pri tom sile neelektrostatske prirode prisiljavaju naboje da se gibaju unutar izvora i tako stvaraju potencijalnu razliku između (+) i (−) pola izvora. Te sile mogu biti uzrokovane kemijskim procesima, električnim poljima, vremenskom promjenom magnetskoga polja i sl.

Kao što smo elektrostatsku silu na naboj  $Q$  opisali električnim poljem:

$$\vec{F}_{el} = Q\vec{E}_{el} \quad (2.40)$$

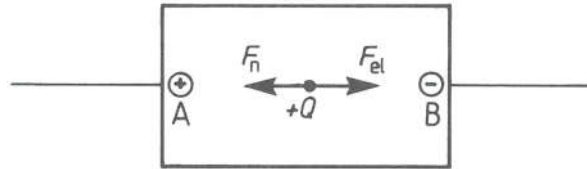


to isto možemo učiniti i s neelektrostatskom silom:

$$\vec{F}_n = Q\vec{E}_n \quad (2.41)$$

Elektromotorna sila  $\mathcal{E}$  ili unutrašnji napon izvora jednaka je radu koji obavi neelektrostatska sila  $\vec{F}_n$  pri prijenosu jediničnoga pozitivnog naboja unutar izvora od minus do plus-pola; to je, dakle, krivuljni integral neelektrostatskoga polja od jednog do drugog priključka izvora:

$$\mathcal{E} = \int_B^A \vec{E}_n \cdot d\vec{s} \quad (2.42)$$



Slika 2.12. Izvor napona u otvorenom strujnom krugu

U izvoru u otvorenome strujnom krugu (sl. 2.12), dakle u nepriključenom izvoru, struje nema i zbroj elektrostatske i neelektrostatske sile na naboj jednaka je nuli:

$$\vec{F}_{el} + \vec{F}_n = Q(\vec{E}_{el} + \vec{E}_n) = 0 \quad (2.43)$$

Napon na stezaljkama izvora jednak je krivuljnome integralu električnoga polja:

$$U = \int_A^B \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} \quad (2.44)$$

Zamijenimo li električno polje pomoću relacije (2.40) neelektrostatskim poljem  $E_n$  i rezultat usporedimo s elektromotornom silom (2.42):

$$U = - \int_A^B \vec{E}_n \cdot d\vec{s} = \mathcal{E} \quad (2.45)$$

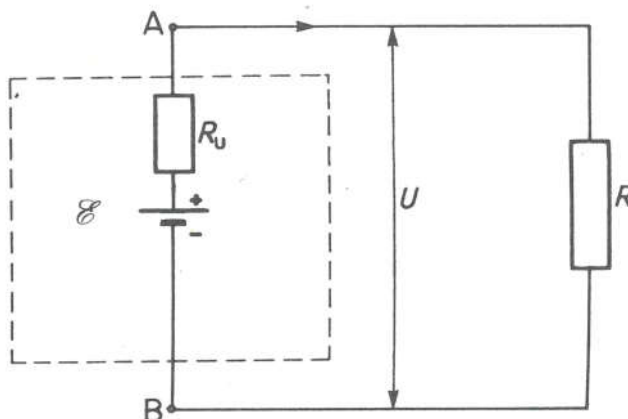
došli smo do rezultata da je napon nepriključenog izvora jednak elektromotornoj sili.

Drukčije je u izvoru priključenom na trošilo otpora  $R$ . U krugu teče struja  $I$ , na unutrašnjem otporu izvora  $R_u$  nastaje pad napona  $IR_u$  te je veza između napona i elektromotorne sile:

$$U = \mathcal{E} - IR_u \quad (2.46)$$

Napon izvora kroz koji teče struja jednak je elektromotornoj sili umanjenoj za pad napona na otporu izvora.

Uočite da je jedinica za elektromotornu silu ista kao jedinica za napon, tj. volt, pa elektromotorna sila zapravo nije nikakva sila, nego krivuljni integral sile na jedinični naboj.



Slika 2.13. Oznaka izvora elektromotorne sile

Bateriju elektromotorne sile  $\mathcal{E}$  i unutrašnjega otpora  $R_u$  simbolički crtamo kao na sl. 2.13. (Ponekad se otpor  $R_u$  u shemama ne crta, već se podrazumijeva da je unutar izvora.) Stezaljke su baterije označene s A(+) i B(-). Napon je na stezaljkama izvora  $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$ . Kada kroz izvor teče struja  $I$  na unutrašnjem otporu baterije nastaje pad napona  $R_u I$ , to veći što je  $R_u$  veći. Kad bi  $R_u$  bio nula, tada bi napon na stezaljkama bio jednak elektromotornoj sili  $\mathcal{E}$ .

### Primjer 2.3.

Kada kroz akumulator teče struja 10 A, napon padne s 12,6 V na 10,6 V.

Kolik je unutrašnji otpor akumulatora?

Koliki napon mora imati ispravljač da bismo taj akumulator punili strujom 2 A?

Unutrašnji otpor baterije određujemo na osnovi pada napona kad uključimo potrošač:

$$R_u = \frac{\mathcal{E} - U}{I} = \frac{12,6 \text{ V} - 10,6 \text{ V}}{10 \text{ A}} = 0,2 \Omega.$$

Kada akumulator priključimo na punjač, pri struji punjenja 2 A, pad je napona na unutrašnjem otporu  $0,2 \Omega \cdot 4 \text{ A} = 0,4 \text{ V}$ .

Napon punjenja mora biti za toliko veći, tj. 13 V.

## 2.9. Kirchhoffova pravila

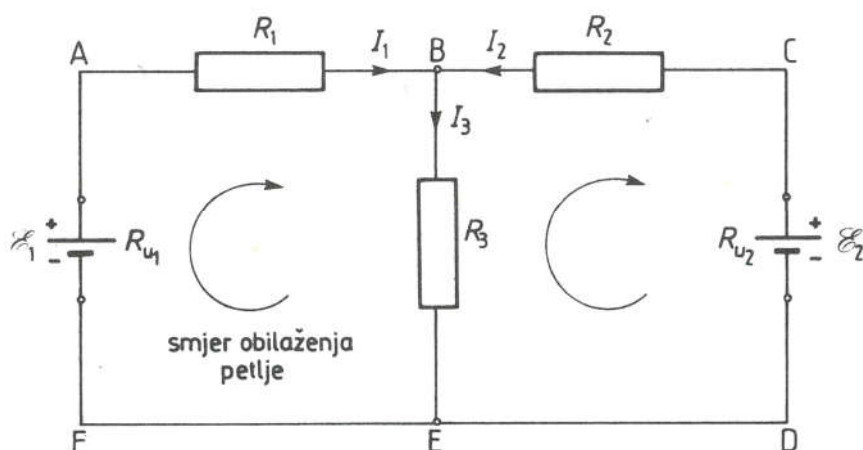
Za rješavanje jednostavnih strujnih krugova dovoljan je Ohmov zakon, ali za složenije strujne krugove (mreže) moramo upotrijebiti Kirchhoffova pravila.

Kirchhoffova pravila naučit ćemo razmatrajući električnu mrežu na sl. 2.14. To je jednostavna mreža koju možemo riješiti i bez Kirchhoffovih pravila, ali ćemo na njoj, baš zato što je jednostavna, lakše shvatiti ta pravila.

Najprije definirajmo neke pojmove. Točku u mreži gdje se spajaju tri ili više vodiča nazivamo čvor. U mreži na sl. 2.14. postoje dva čvora, točke B i E. Grana električne mreže jest onaj njezin dio koji se sastoji od serijski spojenih izvora napona i otpora kroz koje prolazi ista struja, (npr. BAFE na sl. 2.14).

Petlja (kontura) električne mreže jest bilo koji zatvoreni strujni krug u mreži. U mreži na slici imamo tri petlje: ABEFA, BCDEB i ACDEA.

Pretpostavimo da su otpori i elektromotorne sile poznati i da treba odrediti jakosti struja u pojedinim granama mreže ( $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ). Smjerove struja još ne znamo pa ih odaberemo proizvoljno. Konačni će rezultat pokazati jesmo li pogodili: ako u rezultatu dobijemo negativan rezultat za struju, znači da je izabrani smjer pogrešan i treba ga promijeniti.



Slika 2.14. Električne mreže za ilustraciju Kirchhoffovih pravila

**Prvo Kirchhoffovo pravilo.** Zbroj jakosti struja koje ulaze u čvor jednak je zbroju jakosti struja koje iz čvora izlaze, ili, što je isto: zbroj svih struja u nekom čvoru jednak je nuli. Pri tom struje koje ulaze u čvor možemo računati pozitivnima, a one koje izlaze negativnima:

$$\sum_i I_i = 0 \quad (2.47)$$

Ovo pravilo posljedica je zakona očuvanja naboja.

Prvo Kirchhoffovo pravilo primijenjeno na čvor B ili E na sl. 2.14. daje:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (2.48)$$

$$I_1 + I_2 = I_3$$



**Drugo Kirchhoffovo pravilo.** U svakoj zatvorenoj petlji zbroj svih elektromotornih sila jednak je zbroju svih padova napona na otporima.

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I_i \quad (2.49)$$

Ovo je pravilo poopćenje jednadžbe (2.44), gdje je napon  $U$  jednak padu napona na trošilu ( $IR$ ). Drugo Kirchhoffovo pravilo posljedica je zakona očuvanja energije.

Da bismo utvrdili predznak elektromotornih sila i padova napona, proizvoljno odaberemo smjer obilaženja petlje, recimo, u smjeru kretanja kazaljke na satu. Elektromotornu silu uzimamo kao pozitivnu, ako bi dala struju u odabranom smjeru kad bi se sama nalazila u strujnome krugu. Pad je napona  $RI$  pozitivan ako je smjer struje kroz taj otpor u smjeru obilaženja petlje.

#### Primjer 2.4.

Odredite jakosti struja u mreži na sl. 2.14.

Već smo spomenuli da prvo Kirchhoffovo pravilo, primijenjeno na čvor B ili E, daje:

$$I_1 + I_2 = I_3.$$

Promatrajmo npr. petlju ABEFA i primijenimo drugo Kirchhoffovo pravilo:

$$\mathcal{E}_1 = R_{u1}I_1 + R_1I_1 + R_3I_3$$

Slično, iz petlje ACDEFA dobivamo:

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I_1R_{u1} + I_1R_1 - I_2R_2 - I_2R_{u2},$$

a iz petlje BCDEB proizlazi:

$$-\mathcal{E}_2 = -R_{u2}I_2 - R_2I_2 - R_3I_3.$$

Rješavanjem ovih jednadžbi dobivamo:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R_{u2} + R_2 + R_3) - \mathcal{E}_2R_3}{(R_{u1} + R_1 + R_3)(R_{u2} + R_2 + R_3) - R_3^2}$$

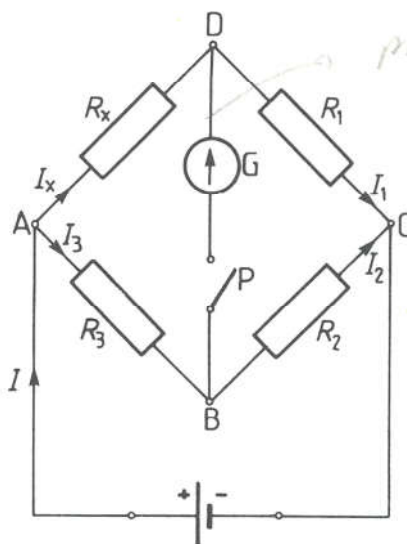
$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2(R_{u1} + R_1 + R_3) - \mathcal{E}_1R_3}{(R_{u1} + R_1 + R_3)(R_{u2} + R_2 + R_3) - R_3^2}$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_2(R_{u1} + R_1) + \mathcal{E}_2(R_{u2} + R_2)}{(R_{u1} + R_1 + R_3)(R_{u2} + R_2 + R_3) - R_3^2}.$$

Ako je npr.  $\mathcal{E}_1 = 2,2 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 6,6 \text{ V}$ ,  $R_{u1} = 0,01 \Omega$ ,  $R_{u2} = 0,03 \Omega$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$  i  $R_3 = 10 \Omega$ , tada uvrštavanjem podataka dobivamo  $I_1 = -0,26 \text{ A}$ ,  $I_2 = 1,17 \text{ A}$  i  $I_3 = 0,31 \text{ A}$ . Budući da je predznak od  $I_1$  negativan, potrebno je na sl. 2.14. struji  $I_1$  promijeniti smjer.

**Primjer 2.5.**

Omski se otpori mogu precizno mjeriti pomoću Wheatstoneova mosta. Električni se krug sastoji od nepoznatog otpora  $R_x$  i triju poznatih otpora  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$  spojenih prema shemi na sl. 2.15. Galvanometar spojen između



Slika 2.15. Wheatstoneov most

točaka B i D pokazuje teče li kroz taj dio kruga struja, tj. je li most uravnotežen ( $I = 0$ ). Pri zatvorenom prekidaču P otpor  $R_1$  mijenja se sve dok kroz galvanometar G ne prestane teći struja. Ako je most na crtežu na taj način uravnotežen s  $R_1 = 8,6 \, \Omega$ ,  $R_2 = 16,6 \, \Omega$  i  $R_3 = 20,3 \, \Omega$ , izračunajte kolik je otpor  $R_x$ .

Ako nema struje kroz galvanometar, ista struja  $I_1$  teče kroz  $R_x$  i  $R_1$ , a struja  $I_2$  teče kroz  $R_2$  i  $R_3$ . Razlika je potencijala između točaka B i D tada nula, pa je zbog toga pad napona na otporu  $R_1$  jednak padu napona na otporu  $R_2$  i pad napona na  $R_3$  jednak je padu napona na  $R_x$ :

$$R_1 I_1 = R_2 I_2,$$

$$R_3 I_2 = R_x I_1.$$

Dijeljenjem tih dviju jednadžbi dobivamo nepoznatu otpor:

$$R_x = R_1 \frac{R_3}{R_2} = 10,5 \, \Omega.$$

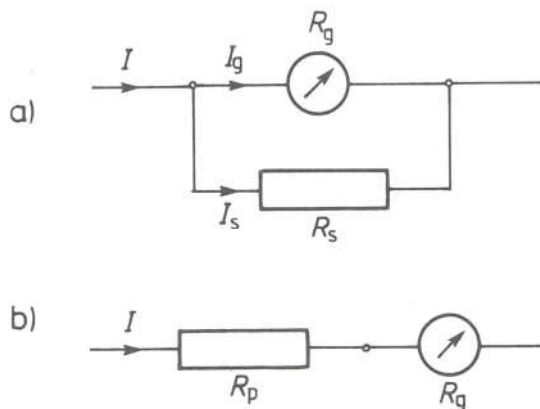
Obično su otpornici  $R_2$  i  $R_3$  napeta homogena žica po kojoj klizi kontakt, čime se postiže promjena omjera  $R_3/R_2$  sve dok se ne uspostavi ravnoteža mosta. Budući da je u tom slučaju  $R_3 = \rho l_3/S$ , a  $R_2 = \rho l_2/S$ , to je  $R_3/R_2 = l_3/l_2$  pa je

$$R_x = R_1 \frac{l_3}{l_2}.$$

## 2.10. Instrumenti za mjerenje struje i napona

Postoje dvije bitno različite vrste instrumenata za mjerenje struje i napona: analogni i digitalni. Jedna od najočitijih razlika jest način očitavanja izmjerene vrijednosti. Dok kod analognih instrumenata (starije izvedbe instrumenata) pomična kazaljka (mehanički) pokazuje mjerenu vrijednost, moderni su električni instrumenti digitalni i rezultat mjerenja prikazuju brojkama (obično pomoću tekućih kristala – tzv LCD-prikaz). Dok je analogni instrument elektromagnetski i pri njemu se otklon dobije zbog zakretnoga momenta koji nastaje protjecanjem struje kroz zavojnicu u magnetskom polju, u digitalnom instrumentu nema pokretnih mehaničkih dijelova, nego se mjerenje napona, struje i otpora postiže elektroničkim krugovima.

Sastavni je dio većine analognih instrumenata zavojnica od bakrene žice u magnetskome polju koja se može pomicati (vrtjeti se) kada kroz nju teče struja. Kazaljka spojena s tom zavojnicom otklanja se i otklon je razmjeran jakosti struje koja prolazi kroz zavojnicu. Sve takve instrumente čiji je otklon kazaljke razmjeran jakosti struje koja kroz njega prolazi možemo nazvati galvanometrima. Otpor je zavojnice galvanometra reda veličine  $10\ \Omega$  do  $1\ 000\ \Omega$ , a struje koje uzrokuju pun otklon kazaljke oko  $50\ \mu\text{A}$  do  $100\ \mu\text{A}$ . Spajanjem serijskih i paralelnih otpora s tim osnovnim instrumentom mogu se dobiti voltmetri i ampermetri za mjerenje napona i struja raznih vrijednosti.



Slika 2.16. a) Shunt i b) predotpor

Ako se galvanometrom (mikroampermetrom) želi mjeriti veća struja  $I$  od one za koju je predviđen (recimo veća od  $I_g = 50\ \mu\text{A}$ ), potrebno je paralelno instrumentu spojiti otpornik tzv. shunt (sl. 2.16.a), takav da bi kroz njega prolazila struja  $I - I_g$ , a kroz instrument struja  $I_g$  pri punom otklonu skale. Ako je otpor instrumenta  $R_g$ , a želi se mjeriti  $n$  puta veća struja nego što je može izmjeriti instrument bez shunta, otpor je shunta:

$$R_s = \frac{R_g}{n - 1} \quad (2.50)$$

Pri tom će kroz instrument teći struja  $I_g$ , kroz shunt struja  $(n - 1)I_g$ , a ukupna je struja  $I_g + (n - 1)I_g = nI_g$ .



To se lako može pokazati. Budući da je:

$$I_g R_g = I_s R_s ,$$

to je:

$$R_s = \frac{I_g}{I_s} R_g .$$

Ako je

$$I = n I_g = I_g + I_s ,$$

tada je

$$n = 1 + \frac{I_s}{I_g}, \quad n - 1 = \frac{I_s}{I_g}$$

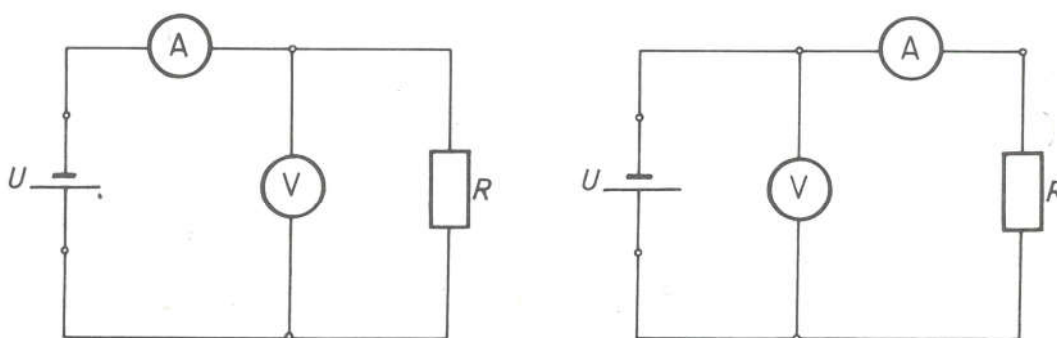
pa je

$$R_s = \frac{R_g}{n - 1} .$$

Voltmetar se dobiva ako u seriju s mikroampermetrom spojimo predotpor velikog otpora (sl. 2.16.b). Tako npr. ako instrumentom unutrašnjega otpora  $R_g$  koji daje potpun otklon kazaljke pri struji  $50 \mu\text{A}$  želimo mjeriti napone do  $1 \text{ V}$ , tada je potreban predotpor:

$$R_g + R_p = \frac{1 \text{ V}}{50 \cdot 10^{-6} \text{ A}} = 20 \text{ k}\Omega$$

$$R_p = 20 \text{ k}\Omega - R_g .$$



Slika 2.17. Mjerenje otpora ampermetrom i voltmetrom

Mjerenje otpora pomoću voltmetra i ampermetra izvodi se tako da se mjere napon i struja i računa otpor prema Ohmovu zakonu. Pri tom instrumente možemo spojiti na dva načina, kao na sl. 2.17.

Idealnim voltmetrom ( $R = \infty$ ) i idealnim ampermetrom ( $R = 0$ ) dobili bismo na oba načina jednak rezultat. Međutim, zbog konačne vrijednosti za unutrašnji otpor instrumenta dobiju se različiti rezultati.

**Primjer 2.6.**

Kroz otpornik  $10\text{ k}\Omega$  teče struja jakosti  $1\text{ mA}$ . Kolik će pad napona izmjeriti instrument osjetljivosti: a)  $20\text{ k}\Omega/\text{V}$  i b)  $10\text{ k}\Omega/\text{V}$ ?

a) Pad je napona na otporniku  $U = IR = 10^4\ \Omega \cdot 10^{-3}\text{ A} = 10\text{ V}$ . Kada otporniku paralelno priključimo voltmetar ukupnog otpora  $R_p + R_g = R_v$  od  $20\text{ k}\Omega/\text{V}$  i izaberemo mjerni opseg  $10\text{ V}$ , kroz instrument će teći struja  $I_2$ , a kroz otpornik struja  $I_1$ , pa će biti:

$$\begin{aligned} RI_1 &= R_v I_2 \\ I &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

a pad napona

$$U_1 = RI_1 = \frac{RR_v}{R_v + R} I.$$

Uvrštavajući  $R = 10\text{ k}\Omega$ ,  $R_v = 200\text{ k}\Omega$ ,  $I = 1\text{ mA}$ , dobivamo  $U_1 = 9,5\text{ V}$ .

b) Ako je osjetljivost instrumenta  $10\text{ k}\Omega/\text{V}$ , tada na mjernom opsegu  $10\text{ V}$  otpor instrumenta iznosi  $R_v = 100\text{ k}\Omega$ , te je:

$$U_1 = RI_1 = \frac{RR_v}{R_v + R} I = 9\text{ V}.$$

Idealni voltmetar ( $R_v = \infty$ ) izmjerio bi stvarni pad napona, tj.  $10\text{ V}$ .

## 2.11. Kondenzator u strujnome krugu

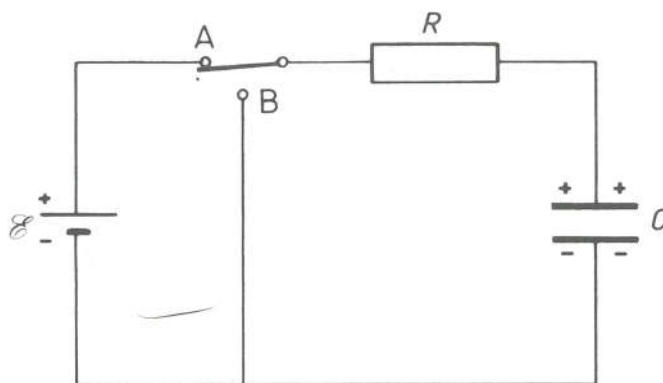
Promatrajmo strujni krug na sl. 2.18. u kojemu su otpornik otpora  $R$  i kondenzator kapaciteta  $C$  spojeni na izvor elektromotorne sile  $\mathcal{E}$ . Neka je u  $t = 0$  zatvoren prekidač u položaju A.

Kad bi otpor  $R$  bio jednak nuli, kondenzator bi se momentano nabio na vrijednost  $Q_0 = C\mathcal{E}$ . Kad otpor postoji, proći će neko vrijeme dok se kondenzator ne nabije na punu vrijednost napona. Ovisnost naboja  $Q$  na kondenzatoru (odnosno napona  $U_c = Q/C$ ) i struje  $I$  o vremenu možemo odrediti iz jednadžbe za taj strujni krug. Tu (diferencijalnu) jednadžbu možemo dobiti primjenom zakona očuvanja energije ili, što je isto, primjenom drugog Kirchhoffova pravila:

$$\mathcal{E} = RI + U_c = RI + \frac{Q}{C} \quad (2.51)$$

Tu su struja i naboj funkcije vremena međusobno povezane relacijom:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (2.52)$$



Slika 2.18. RC strujni krug

Diferencijalna jednadžba nabijanja kondenzatora dakle glasi:

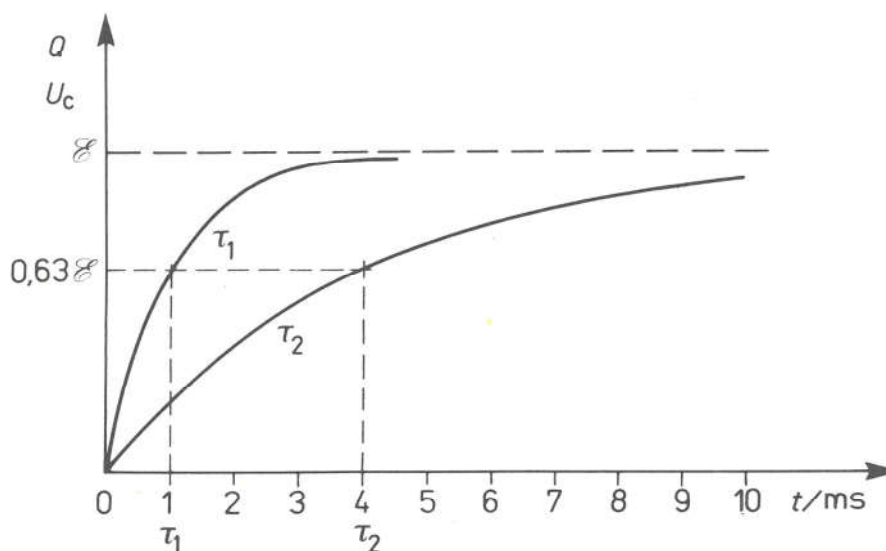
$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E} \quad (2.53)$$

Njezino je rješenje:

$$Q = Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (2.54)$$

što se može pokazati uvrštavanjem.

Naboj  $Q_0 = C\mathcal{E}$  puna je vrijednost naboja koju će kondenzator imati nakon što protekne dovoljno vremena da član  $e^{-t/RC}$  postane zanemariv.



Slika 2.19. a) Ovisnost napona i naboja u RC krugu o vremenu

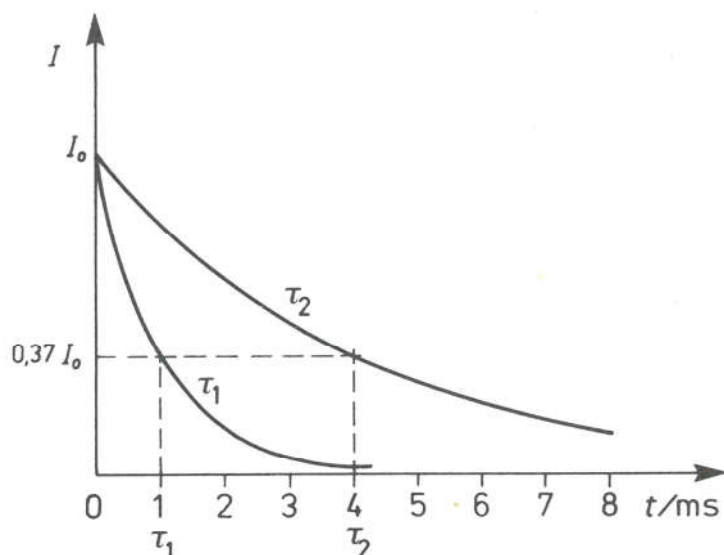
Slično vrijedi za napon na kondenzatoru i struju nabijanja kondenzatora:

$$U_c = \frac{Q}{C} = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (2.55)$$

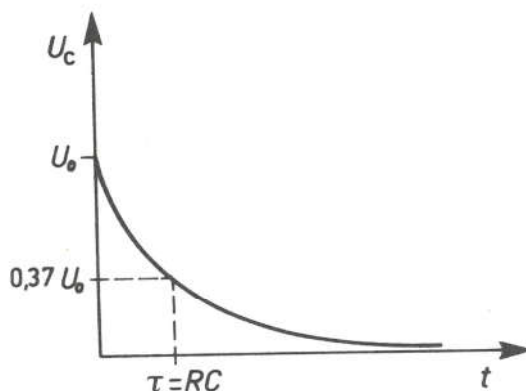
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.56)$$



Napon se na kondenzatoru pri nabijanju u početku brzo povećava, a kasnije sve sporije, jer je razlika napona izvora i napona kondenzatora (dakle, i struja nabijanja) sve manja.



Slika 2.19. b) Ovisnost struje u  $RC$  krugu o vremenu



Slika 2.19. c) Ovisnost napona kondenzatora, koji se prazni kroz otpor  $R$ , o vremenu

Veličina  $\tau = RC$  ima dimenziju vremena i naziva se *vremenska konstanta*. Ako je  $t = RC$ , dobivamo:

$$Q = C\mathcal{E}(1 - e^{-1}) = C\mathcal{E}(1 - 0,37) = 0,63 C\mathcal{E}$$

$$Q = 0,63 Q_0$$

$$U_c = 0,63 \mathcal{E}$$

$$I = 0,37 \frac{\mathcal{E}}{R} = 0,37 I_0 .$$

Nakon vremena  $\tau = RC$  napon na kondenzatoru poraste na  $0,63 \mathcal{E}$ , a struja punjenja smanji se na 37 % od maksimalne vrijednosti  $I_0$ . Nabijanje je to sporije što je  $RC$  veće. Na sl. 2.19.a) i b) prikazano je  $U_c(t)$ ,  $Q(t)$  i  $I(t)$  za dvije različite vremenske konstante.

Ako se izvor napona brzo iskopča (prekidač u položaju B na sl. 2.18), kondenzator se prazni, u početku brže pa sve sporije.

Sada je  $\mathcal{E} = 0$ , pa je jednadžba pražnjenja

$$\begin{aligned} IR + \frac{Q}{C} &= 0 \\ R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} &= 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

a rješenje:

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.58)$$

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.59)$$

$$I = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.60)$$

što se može provjeriti uvrštavanjem.

Nakon vremena  $\tau = RC$  napon na kondenzatoru koji se prazni kroz otpor  $R$  padne na  $0,37 U_0$  (sl. 2.19.c).

## 2.12. Rad i snaga električne struje

20ULEDI ZAKON

Kad električna struja protječe nekim trošilom (vodičem), elektroni teku s mjesta gdje im je potencijalna energija veća prema mjestu gdje je manja. Kinetička energija elektrona pri tom se ne promijeni i razlika potencijalnih energija sudarima se pretvara u termičku energiju kaotičnog gibanja atoma u vodiču. Ako je vodič toplinski izoliran, povećat će mu se unutrašnja energija, a time i temperatura. Međutim, ako je vodič u toplinskom doticaju s okolišem, energija će u obliku topline prelaziti iz vodiča u okoliš (Jouleova toplina).

Ako zbog razlike potencijala  $U$  na krajevima vodiča duljine  $l$ , kroz vodič prođe naboj  $dQ$ , rad što ga obavi električna sila koja djeluje na naboj iznosi:

$$dW = E dQl = \frac{U}{l} l dQ \quad (2.61)$$

$$dW = U dQ \quad (2.62)$$

(Pretpostavili smo homogeno električno polje, što ne umanjuje općenitost izvoda.)

Snaga  $P$  koja se dovodi vodiču je

$$P = \frac{dW}{dt} = U \frac{dQ}{dt} = UI \quad (2.63)$$

Električna snaga dovedena vodiču produkt je razlike potencijala  $U$  na krajevima vodiča i struje  $I$  kroz vodič. SI-jedinica snage je vat, znak  $W$ .

Ako za vodič vrijedi Ohmov zakon  $U = RI$ , dobivamo još dva izraza za snagu

$$P = I^2 R \quad (2.64)$$

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (2.65)$$

Jednadžba  $P = RI^2$  često se naziva Jouleov zakon, a pojava zagrijavanja vodiča kroz koji prolazi struja naziva se Jouleovo zagrijavanje i Jouleova toplina.

Jouleova toplina glavni je uzrok tzv. toplinskih gubitaka pri prijenosu električne energije. Vodiči kojima teče struja mogu se jako zagrijati i uzrokovati požar ako nisu dimenzionirani za struje koje kroz njih prolaze. Osigurači se u strujnim krugovima zagriju i rastale ako struja premaši određenu jakost.

U općenitom slučaju rad je električne struje integral snage po vremenu

$$W = \int P dt = \int UI dt = \int U dQ \quad (2.66)$$

U slučaju da se napon i struja ne mijenjaju s vremenom, rad je jednak:

$$W = UQ = UIt \quad (2.67)$$

tj. jednak je produktu protekloga naboja  $Q$  i razlike potencijala (napona)  $U$  kroz koju taj naboj prođe.

Potrošnja električne energije mjeri se kilovatsatima (kWh). Budući da je  $1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$  i  $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ , to je

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Električna snaga mjeri se instrumentima koje nazivamo vatmetri.

Električna energija mjeri se električnim brojilima. Ona integriraju električnu snagu koju troši potrošač i tako registriraju potrošenu električnu energiju. Razlikujemo brojila za istosmjernu struju i brojila za (jednofaznu i trofaznu) izmjeničnu struju.

U brojilu za rad izmjenične struje, koje se upotrebljava u stanovima, pri prolazu električne struje okreće se aluminijska pločica, a broj okretaja te pločice registrira brojčanik. Brzina vrtnje aluminijske ploče razmjerna je snazi trošila (taj podatak, npr. 1500 okr./kWh, napisan je na tablici brojila). Broj okretaja aluminijske ploče razmjeran je potrošenoj električnoj energiji.

### Primjer 2.7.

Koliko je vremena potrebno da bi električni bojler (220 V; 2 kW) zagrijao 10 L vode od  $15^\circ\text{C}$  do  $60^\circ\text{C}$  uz pretpostavku 100%-tnog iskorištenja. (Specifični je toplinski kapacitet vode  $4187 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .)

Radom električne struje u grijaču, povećava se unutrašnja energija vode. Uz pretpostavku 100% efikasnosti dobivamo:

$$Pt = mc\Delta T.$$

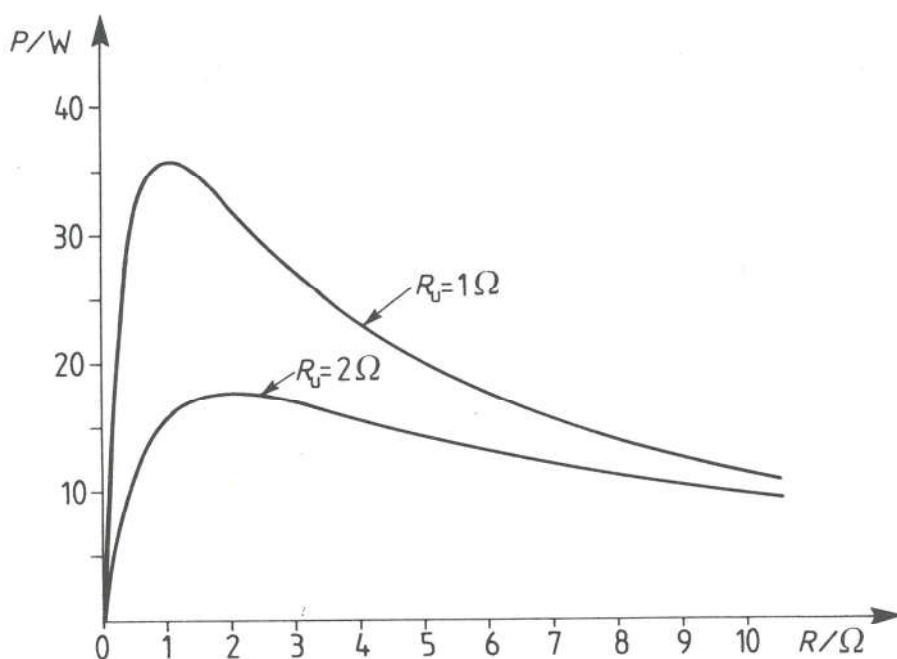


Odatle je

$$t = \frac{mc\Delta T}{P} = \frac{10 \text{ kg} \cdot 4187 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 45 \text{ K}}{2 \cdot 10^3 \text{ W}} = 940 \text{ s}.$$

### Primjer 2.8.

Trošilo otpora  $R$  priključeno je na naponski izvor elektromotorne sile  $\mathcal{E}$  i unutrašnjeg otpora  $R_u$ . Kolik mora biti otpor trošila da bi se iz izvora dobila maksimalna moguća snaga?



Slika 2.20.

Struja kroz trošilo je:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_u},$$

a pad je napona na trošilu:

$$U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{R + R_u}.$$

Odatle je snaga koja se razvije na trošilu

$$P = UI = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + R_u)^2}$$

i ona ovisi o otporu  $R$ . Za neki otpor  $R$  funkcija  $P(R)$  ima maksimum. Sjetimo se da funkcija ima ekstremnu vrijednost tamo gdje joj je derivacija jednaka nuli.

Dakle:

$$\frac{dP}{dR} = 0$$

$$\frac{\mathcal{E}^2(R_u + R)^2 - 2\mathcal{E}^2R(R_u + R)}{(R_u + R)^4} = 0.$$

Odatle je  $(R_u + R) - 2R = 0$ ,  $R_u = R$ . Maksimalni prijenos snage iz izvora u trošilo dobijemo kad je otpor trošila jednak unutrašnjem otporu izvora.

Uzmimo kao primjer:  $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ ,  $R_u = 1 \Omega$  i  $R_u = 2 \Omega$ . Ako izračunamo snagu za razne otpore trošila  $R$  (npr.  $0,1 \Omega$ ;  $0,5 \Omega$ ;  $1 \Omega$ ;  $5 \Omega$  i  $10 \Omega$ ) i dobivene vrijednosti unesemo u  $P$ - $R$ -dijagram, dobivamo sliku 2.20. Vidi-mo da je snaga maksimalna kad je  $R = R_u$ . Što je manji otpor  $R$ , snaga je, naravno, veća. Za  $R \gg R_u$  snaga je približno  $\mathcal{E}^2/R$ . (Ako je  $R = 1 \text{ k}\Omega$ , tada je  $P = 143,9 \text{ mW}$  za  $R_u = 1 \Omega$  i  $P = 143,7 \text{ mW}$  za  $R_u = 2 \Omega$ , dakle, približno  $\mathcal{E}^2/R = 144 \text{ mW}$ .)

**Decibelska ljestvica.** Često nam nije zanimljiv iznos neke veličine, već međusobni odnos dviju vrijednosti te veličine, npr. koliko je puta neki napon na izlazu nekog uređaja veći ili manji od napona na ulazu.

Slično kao što smo u akustici decibelima mjerili razinu jakosti zvuka možemo i u elektricitetu (posebno u elektronici) upotrijebiti tu jedinicu npr. pri uspoređivanju ulazne i izlazne napone, struje i snage nekog pojačala.

Ako je ulazna snaga u neko pojačalo  $P_1$ , a izlazna snaga  $P_2$ , tada se pojačanje pojačala može iskazati i logaritamskom vrijednošću omjera tih snaga

$$L = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$$

i iskazati jedinicom decibel, znak dB.

Tako npr. pojačanje snage od  $1 \text{ mW}$  na  $1 \text{ W}$  odgovara pojačanju od  $30 \text{ dB}$ :

$$L = 10 \log \frac{1000 \text{ mW}}{1 \text{ mW}} = 30 \text{ dB}.$$

Omjer snaga  $1 : 100$  znači  $20 \text{ dB}$ ,  $1 \text{ dB}$  odgovara omjeru snaga  $10^{0,1} = 1,259$ , itd. Međutim, obično se umjesto sa snagom  $P$  računa s naponom  $U$ . Budući da je  $P = U^2/R$ , uz pretpostavku da je ulazni i izlazni otpor pojačala jednak, pojačanje pojačala može se izraziti i ovako:

$$L = 20 \log \frac{U_2}{U_1}.$$

Tako, npr., omjeru napona  $1 : 1,41$  odgovara pojačanje od  $3 \text{ dB}$ , omjeru napona  $10$  odgovara pojačanje  $20 \text{ dB}$  i sl.

Obično se kao referentna snaga uzima  $1 \text{ mW}$  (ili napon od  $0,775 \text{ V}$  pri otporu  $600 \Omega$ ) pa se razine veće od nje računaju kao pozitivne, a manje kao negativne.

Tablica 2.8. Veza između omjera napona i snage i odgovarajućeg pojačanja iskazanog jedinicom decibel

| $L/\text{dB}$     | -3    | -2   | -1   | 0 | 1    | 2    | 3    | 4   |
|-------------------|-------|------|------|---|------|------|------|-----|
| $\frac{U_2}{U_1}$ | 0,708 | 0,79 | 0,89 | 1 | 1,12 | 1,26 | 1,41 | 1,6 |
| $\frac{P_2}{P_1}$ | 0,5   | 0,63 | 0,79 | 1 | 1,26 | 1,6  | 2,0  | 2,5 |

| $L/\text{dB}$     | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 20  | 30   |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| $\frac{U_2}{U_1}$ | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,5 | 2,8 | 3,2 | 10  | 32   |
| $\frac{P_2}{P_1}$ | 3,2 | 4,0 | 5,0 | 6,3 | 8,0 | 10  | 100 | 1000 |

Prednost izražavanja pojačanja napona i struja omjerskom jedinicom decibel jest i u tome što za nekoliko stupnjeva pojačanja resultantno pojačanje dobivamo jednostavnim zbrajanjem pojedinih pojačanja. Decibelska ljestvica je logaritamska i pomoću nje mogu se prikazati velika područja pojačanja.

## 2.13. Električna struja u tekućinama

Ako u posudu s destiliranom vodom uronimo dvije platinske elektrode i uključimo izvor istosmjernoga napona (uspostavimo električno polje), instrument će pokazati da kroz strujni krug teče vrlo slaba struja. Destilirana voda nije dobar vodič elektriciteta jer u njoj nema slobodno pokretnih nosilaca naboja. Električna je provodnost destilirane vode oko  $10^{-7}$ – $10^{-10}$  S/m. (Dobri izolatori imaju mnogo manju provodnost, npr. oko  $10^{-14}$  S/m.)

Dodavanjem nekoliko kapi sulfatne kiseline ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ), struja se uveliko poveća; istodobno na elektrodama opažamo mjehuriće plina. Razrijeđena sulfatna kiselina vodi struju, i pritom se kemijski rastvara.

Slično povećanje vodljivosti opažamo ako u destiliranoj vodi, umjesto sulfatne kiseline, otopimo neku drugu kiselinu, sol ili lužinu (npr. NaCl ili NaOH).

Većina su čistih tekućina izolatori. Naprotiv, vodene otopine kiselina, soli i lužina dobri su vodiči i nazivaju se **elektroliti**. (Elektroliti su također i taline ovih spojeva.) U elektrolitima postoje pokretljivi ioni\* koji u prisutnosti vanjskog električnog polja proizvode ionsku struju i tako elektrolite čine vodičima. Elektrolit je, dakle, otopina ili talina u kojoj su nosioci naboja ioni.

Vodljivost elektrolita nešto je manja od one u metalu i ovisi o vrsti elektrolita, koncentraciji i o temperaturi. Tipične su vrijednosti električne provodnosti elektrolita oko 10 S/m.

Molekule kiselina, soli i lužina disociraju, kad ih otopimo u vodi, na pozitivne i negativne ione. (Ion je električki nabijeni atom ili skupina atoma koji nastaje kada neutralni atom ili skupina atoma izgubi ili primi jedan ili više elektrona.) Proces stvaranja iona u elektrolitima naziva se elektrolitička disocijacija.

\* Ion ( $i\omega\nu$ ) = koji putuje.



Upoznajmo disocijaciju na primjeru NaCl. Natrijev klorid (kuhinjska sol) u čvrstom je stanju izolator jer nema pokretljivih nosilaca naboja. Čim ga otopimo u vodi ili rastalimo, postaje vodič.

Elektronski omotač natrijeva atoma ima jedanaest elektrona od kojih je jedan slabije vezan od ostalih (zato Na ima valenciju +1). Klorovu atomu, naprotiv, nedostaje jedan atom u zadnjoj podljusci (valencija -1). Kada se atomi Na i Cl spoje u molekulu NaCl, natrijev atom preda svoj "slobodni" elektron klorovu atomu; tako nastaju pozitivni ion natrija  $\text{Na}^+$  i negativni ion  $\text{Cl}^-$  međusobno povezani u molekulu NaCl elektrostatskom (kulonskom) silom.

Natrij-klorid u čvrstome stanju pravilno je građeni kristal čiji su atomi (ili bolje rečeno ioni) raspoređeni u tzv. kristalnoj rešetki.

Otapanjem takva ionskog kristala u vodi rešetka će se raspasti. Zbog velike dielektrične konstante vode ( $\epsilon_r = 81$ ) elektrostatske sile između iona  $\text{Na}^+$  i  $\text{Cl}^-$  oslabe i dovoljna je energija termičkog gibanja za disocijaciju molekula NaCl na ione  $\text{Na}^+$  i  $\text{Cl}^-$ . Elektrolitička disocijacija pojavljuje se, dakle, zbog velike dielektrične konstante vode, ili, što vodi na isto, zbog velikoga električnoga dipolnog momenta molekula vode.

Gibajući se elektrolitom kaotično u svim smjerovima pozitivni i negativni ioni se sudaraju i pritom često oblikuju molekule. Taj proces, suprotan disocijaciji, naziva se *rekombinacija* iona. Na određenoj temperaturi postoji u elektrolitu dinamička ravnoteža između disocijacije i rekombinacije; broj je disociranih molekula stalan, ali to nisu uvijek iste molekule jer se stalno određeni broj molekula raspada, ali istodobno isto tolik broj molekula i stvara rekombinacijom iona.

Ioni, koji se u elektrolitičkoj otopini gibaju kaotično u svim smjerovima, počet će se u trenutku kada ukopčamo vanjsko električno polje usmjereno gibati prema elektrodama. Pozitivni ioni putuju prema negativnoj elektrodi (katodi), a negativni ioni prema pozitivnoj elektrodi (anodi). Zbog toga pozitivne ione često nazivamo *kationi*, a negativne *anioni*.

Kada dođu na elektrode, ioni se neutraliziraju, postaju neutralni atomi ili atomske skupine, pa se talože na elektrodama, izlaze kao plinovi ili pak kemijski reagiraju s otapalom ili samom elektrodom.

Proces kod kojeg se pri prolazu električne struje kroz elektrolite na elektrodama izlučuju neutralni atomi ili skupine atoma nazivamo *elektroliza*. To je proces rastvaranja elektrolita uzrokovan kemijskim učinkom električne struje.

M. Faraday prvi je proučavao elektrolizu i 1836. god. pronašao zakone koji omogućuju izračunavanje mase tvari izlučene na elektrodama (tzv. Faradayevi zakoni elektrolize).

Prolazom struje  $I$  u vremenu  $t$  prenese se naboj  $Q$  s elektrode u elektrolit:

$$Q = It = Nze \quad (2.68)$$

gdje je  $z$  kemijska valencija promatranog iona, a  $Ne$  naboj iona koji se u tom vremenu neutraliziraju na elektrodi. Tako je npr. valencija bakrenog iona  $\text{Cu}^{++}$   $z = 2$ , natrijeva iona  $\text{Na}^+$   $z = 1$ , klorova iona  $\text{Cl}^-$   $z = 1$  i sl. Pozitivni ioni imaju, dakle, naboj  $+ze$ , a negativni  $-ze$ .

Masa je tvari koja se kroz to vrijeme izluči na elektrodi:

$$m = Nm_m = N \frac{M}{N_A} \quad (2.69)$$

gdje je  $m_m$  masa molekule (iona),  $M$  molarna masa (masa jednog mola tvari) i  $N$  broj izlučenih iona.

Ako podijelimo jednadžbe (2.69) i (2.68), dobivamo:

$$m = \frac{M}{N_A z e} Q = \frac{M}{F z} It \quad (2.70)$$

gdje je tzv. *Faradayeva konstanta*:

$$F = N_A e = 96487 \text{ C/mol} \quad (2.71)$$

Faradayeva konstanta jednaka je umnošku Avogadrove konstante i elementarnoga naboja.

### Primjer 2.9.

Pri elektrolizi vodene otopine sulfatne kiseline na platinskim elektrodama izdvajaju se sastavni dijelovi vode: vodik ( $\text{H}_2$ ) i kisik ( $\text{O}_2$ ).

a) Kolika je masa izlučenoga kisika za vrijeme od 1 sekunde pri jakosti struje od 1 A?

b) Kolik je volumen tako nastaloga kisika ako je temperatura 273 K, a tlak  $10^5 \text{ Pa}$ ?

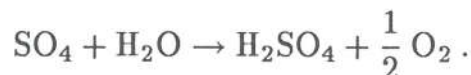
a) Molekula  $\text{H}_2\text{SO}_4$  u vodenoj otopini disocira se ovako:



Došavši na elektrodu, ioni se neutraliziraju:



Vodik ( $\text{H}_2$ ) izlučuje se u obliku plina na katodi, a neutralna skupina  $\text{SO}_4$  reagira s vodom:



Tako se molekula sulfatne kiseline vraća u otopinu, a kisik ( $\text{O}_2$ ) izlučuje se u obliku plina na anodi. Broj se molekula  $\text{H}_2\text{SO}_4$  u otopini ne mijenja dok se voda rastavlja na svoje sastavne dijelove pa ovaj proces zato nazivamo elektroliza vode.

Masa je izlučenoga kisika na anodi:

$$m = \frac{MIt}{Fz} = \frac{1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 1}{9,65 \cdot 10^4 \cdot 2} \text{ kg} = 8,3 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \cdot$$

Slično se dobije da je masa izlučenoga vodika  $1,04 \cdot 10^{-8}$  kg.

b) Na katodi se izlučuje plin kisik u obliku molekula  $O_2$  pa je prema plinskoj jednačbi  $pV = mRT/M$ :

$$V = \frac{mRT}{Mp},$$

gdje je  $M$  molarna masa kisika  $O_2$  (kg/mol),  $m$  masa izlučenoga kisika (kg),  $R$  plinska konstanta,  $p$  i  $T$  tlak i temperatura. Nakon uvrštavanja dobivamo:

$$V = \frac{8,3 \cdot 10^{-8} \cdot 8,3 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 1,013 \cdot 10^5} \text{ m}^3 = 5,8 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3.$$

Volumen je izlučenoga vodika  $11,08 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$ .

Elektrolizom jednog mola  $H_2O$  (18 g) nastat će 2 g (točnije 2,016 g)  $H_2$  i 16 g  $O_2$ . Elektrolizom 1 g vode nastaje, dakle, 0,1119 g vodika i 0,888 g kisika.

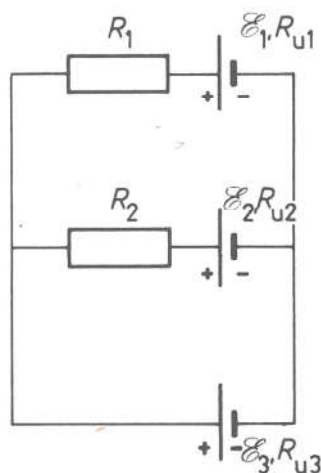
Za potpunu elektrolizu jednog grama vode strujom od 1 A potrebno je  $0,888 \text{ g} / 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ gs}^{-1} = 10\,699 \text{ s} = 2,97 \text{ h}$ . Pri tom nastane 0,62 L kisika i 1,14 L vodika, dakle 1,86 L plina praskavca.



## Pitanja i zadaci

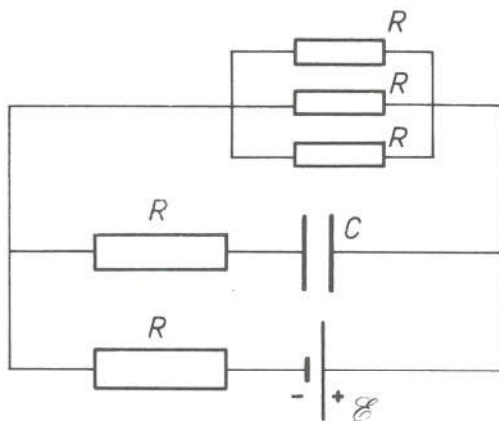
- 2.1. Što je i kako nastaje električna struja?
- 2.2. Definirajte jakost električne struje za slučaj stalne i promjenljive struje.
- 2.3. Što je to pad napona? Obrazložite Ohmov zakon za stalnu struju. Navedite jedinice za električni otpor i električnu vodljivost.
- 2.4. Kolik je otpor automobilskeg elektropokretača kroz koji pri naponu od 12 V teče struja jakosti 67 A?
- 2.5. Izrazite i obrazložite Ohmov zakon u mikroskopskom obliku.
- 2.6. Navedite što znate o otporima koji nisu omski.
- 2.7. Kroz metalnu žicu promjera 2 mm teče struja jakosti 4 A.
  - a) Izračunajte gustoću struje u žici.
  - b) Pretpostavivši da je koncentracija (gustoća) slobodnih elektrona u žici  $2 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$ , izračunajte drift-brzinu elektrona.
- 2.8. Što je pokretljivost elektrona? Obrazložite vezu između električne otpornosti, te pokretljivosti i koncentracije elektrona.
- 2.9. Kako se otpor vodiča i poluvodiča mijenja s temperaturom? Što je to supravodljivost?
- 2.10. Navedite sve što znate o različitim vrstama otpornika i o spajanju otpora.
- 2.11. Što je elektromotorna sila? Kojim se jedinicama mjeri?
- 2.12. Navedite osobine različitih izvora elektromotorne sile.
- 2.13. Obrazložite prvo i drugo Kirchhoffovo pravilo i njihovu vezu sa zakonima očuvanja.
- 2.14. Homogenu žicu otpora  $12 \Omega$  razrežemo na jednake dijelove koje zatim spojimo paralelno. Na koliko dijelova treba razrezati žicu ako želimo da otpor takva spoja bude  $0,75 \Omega$ ?
- 2.15. Od metalne žice načinjena je kocka. Svaki brid ima otpor  $R$ . Kolik je ekvivalentni otpor kocke ako su krajevi prostorne dijagonale priključeni na napon  $U$ ?

- 2.16. Izračunajte jakost struje, pad napona i utrošenu snagu u svakom od otpornika u shemi prikazanoj na slici 2.21. Otpori su  $R_1 = 8 \Omega$  i  $R_2 = 15 \Omega$ , elektromotorne sile izvora iznose  $\mathcal{E}_1 = 1,5 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 3 \text{ V}$  i  $\mathcal{E} = 6 \text{ V}$ , a njihovi unutarnji otpori su  $R_{u1} = 3,2 \Omega$ ,  $R_{u2} = 6,4 \Omega$  i  $R_{u3} = 0,12 \Omega$ .



Slika 2.21.

- 2.17. Odredite razliku potencijala na pločama kondenzatora u električnoj shemi prikazanoj na slici 2.22, ako su svi otpori međusobno jednaki, a elektromotorna sila iznosi  $\mathcal{E} = 200 \text{ V}$ . Unutarnji otpor izvora zanemarite.



Slika 2.22.

- 2.18. Izračunajte kolika se masa bakra izluči elektrolizom vodene otopine  $\text{CuSO}_4$  na  $10 \text{ cm}^2$  površine elektrode za 1 minutu pri gustoći struje  $10^{-3} \text{ A m}^{-2}$ . Koliko je atoma bakra izlučeno u toj elektrolizi?
- 2.19. Nakon koliko se vremena bakrena anoda stanji za  $0,03 \text{ mm}$ , ako je gustoća struje pri elektrolizi  $2 \text{ A dm}^{-2}$ ?

## 3. Magnetsko polje

### 3.1. Osnovne činjenice

Još je starim Grcima bilo poznato da željezna ruda (magnetit,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) privlači željezne predmete. Materijale koji imaju svojstvo da privlače predmete od željeza, nikla, kobalta i njihovih legura nazivamo magnetima\*. Osim prirodnog magneta (željezne rude), postoje i umjetni magneti koje dijelimo na permanentne i elektromagnete. Permanentni magneti izrađuju se od posebnih željeznih legura (tzv. tvrdih feromagnetskih materijala) i trajno zadržavaju magnetska svojstva. U praksi često susrećemo i elektromagnete (zavojnice s jezgrom od meka željeza) koji su magneti samo dok kroz njihovu zavojnicu teče električna struja.

Magnetizirana čelična igla privlači željeznu piljevinu. Čeličnu iglu možemo magnetizirati prevlačenjem permanentnim magnetom ili ulaganjem u zavojnicu kroz koju teče istosmjerna električna struja. Privlačenje je čelične igle najjače na krajevima, tzv. polovima, a u sredini je magnetska privlačna sila vrlo slaba.

Ako magnet u obliku igle objesimo tako da se može vrtjeti u vodoravnoj ravnini, orijentirat će se u smjeru sjever–jug. Kraj magneta koji pokazuje prema sjeveru nazivamo sjeverni pol, dok je drugi kraj južni pol. To svojstvo magnetske igle primjenjujemo u kompasu (busoli) za određivanje strana svijeta.

Približimo li sjeverni pol jednog magneta sjevernome polu slobodno obješene magnetske igle, vidjet ćemo da se međusobno odbijaju. Slično se opaža i za južne polove. Naprotiv, sjeverni pol jednog magneta privlači južni pol drugog, i obratno.

Svaki magnet ima dva pola: sjeverni N i južni S pol. Na polovima su magnetske sile najjače. Raznoimeni magnetski polovi međusobno se privlače, a istoimeni se polovi odbijaju.

Ako magnetsku iglu (ili magnetiziranu čeličnu šipku) prepolovimo, dobit ćemo dva magneta od kojih svaki ima i sjeverni i južni pol. Daljim komadanjem možemo dobiti sve manje magnete.

Takvim dijeljenjem došli bismo do elementarnih magnetiča od kojih je sastavljen magnetski materijal, ali ne bismo uspjeli odvojiti magnetske polove. To je poznati Peregrinusov\*\* pokus koji pokazuje da se sjeverni magnetizam ne može odvojiti

\* Lithos Magnētis (grč.) – kamen iz pokrajine Magnezije koja je u starome vijeku bila u Maloj Aziji.

\*\* P. Peregrinus (13. st.), francuski inženjer, poznat po knjizi *Epistola de magnete* (1269).



od južnog, tj. da ne postoje izolirani magnetski polovi ni magnetski naboji. To je bitna razlika između magnetizma i elektriciteta.

Komad mekog željeza u blizini magneta postaje magnetičan i privlači željezne predmete. Ako magnet odmaknemo, meko željezo više nije magnetično.

To je poznata pojava magnetske influencije. Pri tom se u blizini sjevernoga magnetskog pola influencira u mekome željezu južni magnetski pol, i obratno.

Naprotiv, ako umjesto mekoga željeza upotrijebimo čelik (tvrdi magnetski materijal), i nakon otklanjanja uzroka magnetiziranja, čelik će u znatnoj mjeri zadržati magnetska svojstva. Uočite da magnetskom influencijom uvijek nastaju oba pola, tj. magnetski dipol.

**Zemljin magnetizam.** Na svakom se mjestu na Zemlji magnetska igla orijentira u određenu smjeru. Iz toga zaključujemo da oko Zemlje postoji posebno polje sila koje nazivamo Zemljino magnetsko polje.

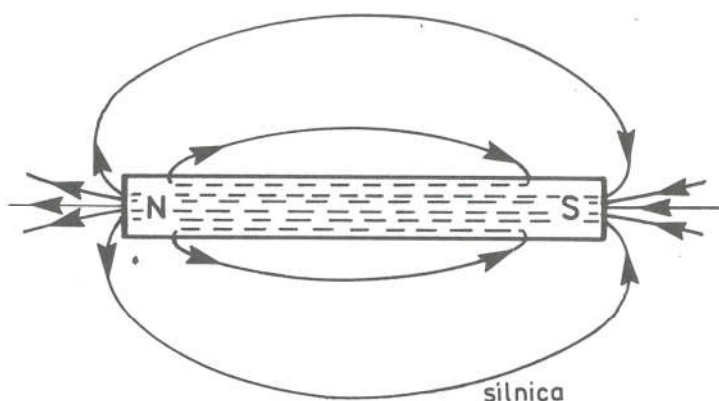
Budući da se sjeverni pol magnetske igle orijentira prema sjeveru Zemlje, zaključujemo da je Zemlja magnet kojega je južni pol negdje na sjeveru. Magnetski i zemljopisni polovi Zemlje nisu u istoj točki. Južni magnetski pol nalazi se u sjevernoj Kanadi ( $74^\circ$  sjev. geog. širine i  $100^\circ$  zap. geog. dužine), dok je sjeverni magnetski pol na jugu (istočni Antarktik). Položaj Zemljinih magnetskih polova nije vremenski stalan, nego je podvrgnut neprestanim malim promjenama.

Magnetska igla, dakle, neće pokazivati geografski, već magnetski sjever-jug. Odstupanje geografskog pravca sjever-jug i pravca koji pokazuje magnetska igla, tj. kut između geografskog i magnetskog meridijana, nazivamo *magnetska deklinacija*. Točno poznavanje deklinacije koja je različita na raznim mjestima, a mijenja se i u vremenu, vrlo je važno za navigaciju. Magnetska igla, koja se može vrtjeti u vertikalnoj ravnini, postavlja se pod nekim kutem prema horizontali; taj kut nazivamo *inklinacija*.

Slično kao i u elektricitetu, i ovdje ćemo uvesti pojam magnetskoga polja kao prostora u kojemu se osjeća djelovanje magneta i magnetske sile. Magnetsko polje u prostoru možemo ustanoviti pomoću male magnetske igle. Takav mali pokusni magnet orijentirat će se u smjeru polja tako da nam njegov sjeverni pol pokazuje smjer polja.

Magnetsko polje, slično kao i električno, možemo zorno predočiti **silnicama**. Magnetske su silnice zamišljene krivulje koje svojim tangentama pokazuju smjer magnetskoga polja u svakoj točki. Silnice izlaze iz sjevernog N i ulaze u južni S pol. Za razliku od električnih silnica, magnetske su silnice uvijek zatvorene krivulje. Gustoća magnetskih silnica u vezi je s jakošću polja: tamo gdje su silnice gušće, polje je jače i obratno. Silnice homogenoga magnetskog polja paralelni su pravci.

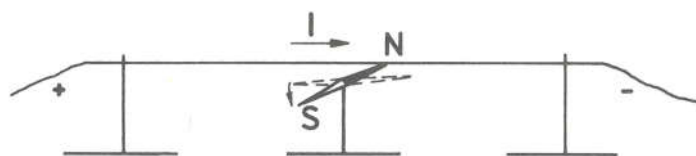
Magnetske silnice možemo pokazati željeznom piljevinom. U magnetskome polju svaki komadić piljevine postaje sitna magnetska igla koja se orijentira u smjeru magnetskoga polja. Tako orijentirani komadići nadovezuju se jedan na drugi, redaju se u lanac, te nam zorno predočuju oblik magnetskoga polja (sl. 3.1).



Slika 3.1. Magnetske silnice

### 3.2. Magnetsko polje električne struje

Danski fizičar Oersted\* otkrio je (1819) da se magnetska igla odklanja u blizini vodiča kojim teče struja i tako je pronašao da električna struja proizvodi magnetsko polje.



Slika 3.2. Oerstedov pokus

Postavimo li ravnu žicu iznad magnetske igle (orijentirane u smjeru sjever-jug), igla se zakrene čim kroz žicu poteče električna struja (sl. 3.2). Kada struju prekinemo, igla se vrati u prvobitni smjer sjever-jug. Promijenimo li smjer struje, mijenja se i smjer odklona. Kada je igla iznad žice, odklanjanje je u suprotnome smjeru nego kad je igla ispod žice.

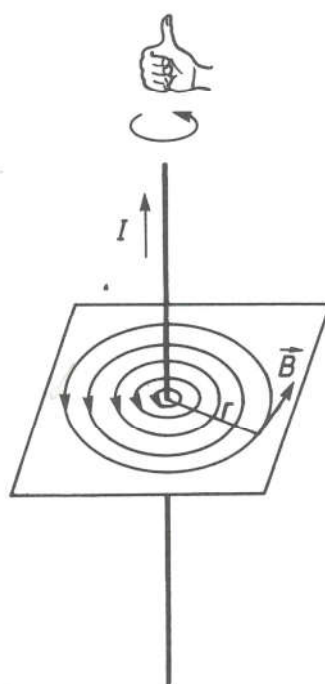
Iz ovog i sličnih pokusa zaključujemo da u prostoru oko vodiča kojim teče struja postoji magnetsko polje. Magnetska se igla odklonila zbog djelovanja magnetskoga polja struje koja teče kroz vodič. Električni naboji u gibanju, dakle, proizvode magnetsko polje.

Budući da su magnetske silnice zatvorene krivulje, silnice ravnoga vodiča kroz koji teče struja, zbog simetrije, koncentrične su kružnice koje leže u ravninama okomitim na vodič, a središte im je na osi vodiča. Smjer magnetskoga polja određujemo pravilom desne ruke: Ako palac pokazuje smjer struje (sl. 3.3), svijeni prsti pokazuju smjer kojim silnice obilaze vodič. Slično, ako desni vijak rotira tako da napreduje u smjeru struje, smjer vrtnje pokazuje smjer magnetskoga polja.

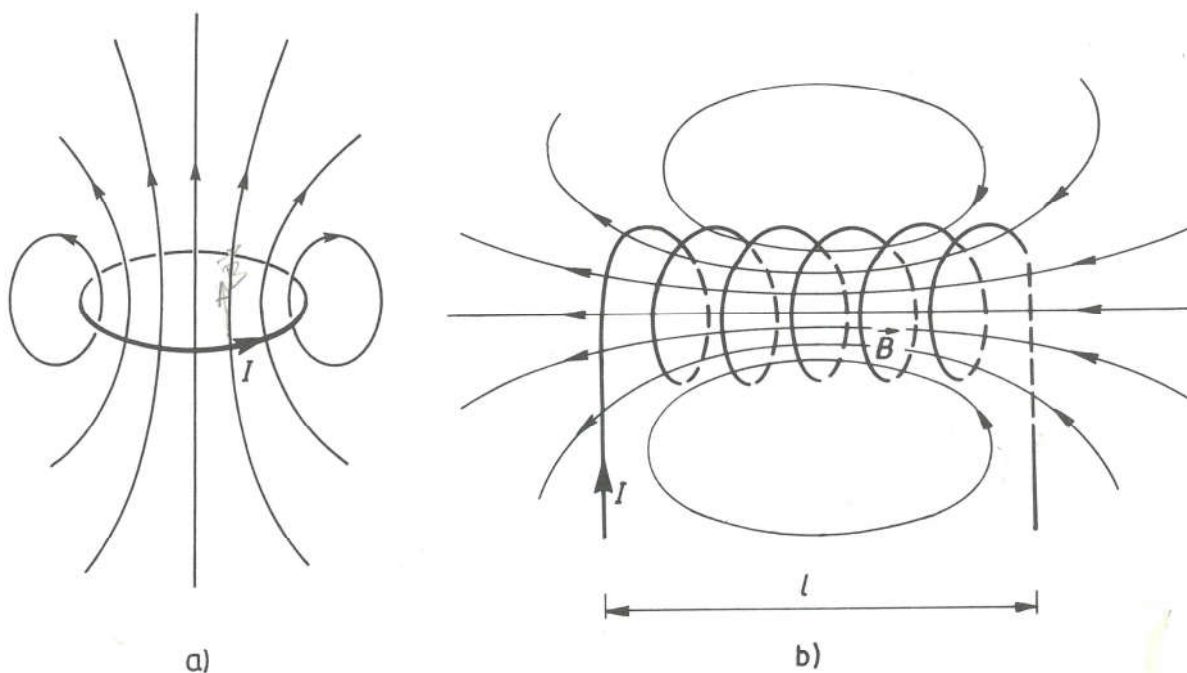
Magnetske silnice kružnoga zavoja (strujne petlje) i valjkaste zavojnice prikazane su na sl. 3.4.

\* H. C. Oersted (1777–1851), danski fizičar, otkrio je vezu između električnih i magnetskih pojava, poznat je i po istraživanjima iz kemije.





Slika 3.3. Magnetsko polje ravnog vodiča



Slika 3.4. Magnetske silnice kružnog zavoja a) i valjkaste zavojnice b)

Magnetsko polje kružnog zavoja slično je polju tzv. magnetskog dipola (kratkoga magnetskog štapa). Sjeverni je pol zavoja, na sl. 3.4.a, iznad zavoja, a južni ispod. Zavojnica se sastoji od više kružnih zavoja čija se magnetska polja zbrajaju. Unutar druge zavojnice polje je homogeno, dok je izvan zavojnice vrlo slabo i praktički zanemarivo (sl. 3.4.b).



### 3.3. Magnetska indukcija $\vec{B}$

Za opisivanje električnoga polja u materijalu upotrebljavali smo tri fizikalne veličine, vektore  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  i  $\vec{P}$ , od kojih su samo dva neovisna. (Za opisivanje polja u vakuumu dovoljan je samo jedan vektor, npr.  $\vec{E}$ .) Vektor  $\vec{E}$  definiran je električnom silom na jedinični naboj, dakle, djelovanjem električnoga polja na naboje, dok je vektor električnog pomaka  $\vec{D}$  povezan sa slobodnim nabojem koji uzrokuje električno polje. Pravi razlog za uvođenje dvaju nezavisnih vektora za opisivanje električnoga polja uviđa se tek pri proučavanju električnog polja u materijalu.

Na isti način možemo opisati i magnetsko polje: vektorom magnetske indukcije (gustoće magnetskoga toka)  $\vec{B}$ , jakošću magnetskoga polja  $\vec{H}$  i magnetizacijom  $\vec{M}$ .

Vektor magnetske indukcije  $\vec{B}$  (ili, kako se još često naziva, vektor gustoće magnetskoga toka) definirat ćemo pomoću sile na naboj u gibanju. Jakost magnetskoga polja  $\vec{H}$  opisivat ćemo pomoću električnih struja koje uzrokuju to polje\*. Magnetizaciju ćemo uvesti pri razmatranju magnetskih polja u materijalu. Za opisivanje polja u vakuumu dovoljan je jedan vektor,  $\vec{B}$  ili  $\vec{H}$ .

Dok magnetsko polje ne djeluje na mirni električni naboj, na naboj koji se giba (odnosno na električnu struju) u magnetskome polju djeluje magnetska sila. Ona ovisi o magnetskome polju, količini naboja, brzini naboja, te o smjeru brzine s obzirom na smjer magnetskoga polja.

Magnetska indukcija  $\vec{B}$  definira se pomoću sile  $\vec{F}$  kojom magnetsko polje djeluje na naboj  $Q$  koji se giba brzinom  $\vec{v}$ :

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{LORENTZOVA SILA} \quad (3.1)$$

Magnetska indukcija  $\vec{B}$  vektorska je veličina, okomita na smjer djelovanja magnetske sile  $\vec{F}$ . Odatle je:

$$B = \frac{F}{Qv \sin \vartheta} \quad (3.2)$$

gdje je  $\vartheta$  kut što ga zatvaraju vektori brzine naboja  $\vec{v}$  i magnetske indukcije  $\vec{B}$ .

Iz definicijskih relacija (3.1) i (3.2) slijedi jedinica za magnetsku indukciju  $B$  koja se – u čast našeg izumitelja Nikole Tesle (1856–1943) – naziva tesla, znak T:

$$[B] = \text{NC}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T}.$$

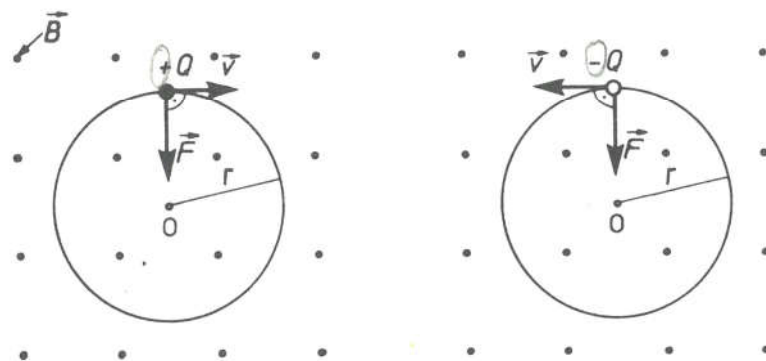
Srednja je magnetska indukcija na Zemljinoj površini oko  $6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  u blizini polova i oko  $2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  na ekvatoru. Magnetska je indukcija permanentnih magneta oko  $1,5 \text{ T}$ .

Slično kao što smo jakost električnoga polja  $\vec{E}$  grafički prikazivali silnicama, tako se i magnetska indukcija  $\vec{B}$  može zorno predložiti magnetskim silnicama (linijama magnetske indukcije). To su zamišljene krivulje tangente kojih u svakoj točki

\* Neki autori isključivo, ili bar pretežno, upotrebljavaju samo vektor  $\vec{B}$  i nazivaju ga, jednostavno, magnetskim poljem  $\vec{B}$ .

pokazuju smjer vektora magnetske indukcije  $\vec{B}$ , a njihova gustoća pokazuje iznos (veličinu) vektora  $\vec{B}$  (sl. 3.3. i 3.4).

Kao primjer djelovanja magnetske sile (3.1) razmotrimo gibanje nabijene čestice (elektrona, protona, iona i sl.) u homogenom magnetskom polju ( $B = \text{konst.}$ ). Budući da je sila uvijek okomita na  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$ , putanja će biti kružnica ako je brzina okomita na magnetsku indukciju, odnosno vijčana spirala u općenitom slučaju.



Slika 3.5. Gibanje nabijene čestice u homogenom magnetskom polju

Kruženje nastaje jer djeluje magnetska sila (3.1) kao centripetalna sila i uzrokuje centripetalnu akceleraciju. Polumjer kružnice po kojoj se giba nabijena čestica mase  $m$  i naboja  $Q$  u homogenom magnetskom polju indukcije  $\vec{B}$  (sl. 3.5) dobiva se primjenom 2. Newtonovog zakona. Budući da je sila uvijek u istoj ravnini i okomita na  $\vec{v}$ , postoji samo radijalna akceleracija, pa je:

$$\frac{mv^2}{r} = QvB \quad (3.3)$$

iz čega slijedi polumjer kruženja:

$$r = \frac{mv}{QB} \quad (3.4)$$

Na sl. 3.5. prikazani su smjerovi kruženja pozitivnog i negativnog naboja u magnetskome polju okomitu na ravninu papira sa smjerom prema van.

Ako, osim magnetskog, na naboj djeluje i električno polje, ukupna elektromagnetska (tzv. Lorentzova) sila vektorski je zbroj električne i magnetske sile:

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.5)$$

Svojstvo magnetskoga polja da utječe na gibanje nabijenih čestica (elektrona, protona, deuterona i sl.) primjenjuje se u različitim uređajima (ciklotron, spektrograf masa, katodna cijev itd.).

**Primjer 3.1.**

U ciklotronu se pomoću električnoga polja ubrzavaju nabijene čestice, dok im magnetsko polje pri tom savija putanju i prisiljava ih da se gibaju po kružnici.

Koliki je polumjer putanje  $\alpha$ -čestica (jezgri  ${}^4_2\text{He}$ ) energije 10 MeV u ciklotronu pri magnetskoj indukciji  $b = 1 \text{ T}$ ? Kolika bi bila energija deuterona (jezgri  ${}^2_1\text{H}$ ) ubrzanih u tom ciklotronu za isti polumjer i magnetsko polje?

Kinetička je energija  $\alpha$ -čestica  $E_k = 10 \text{ MeV}$ . Polumjer putanje za čestice naboja  $2e$  iznosi:

$$r = \frac{mv}{QB} = \frac{1}{QB} \sqrt{2mE_k} = \frac{1}{2eB} \sqrt{2mE_k}.$$

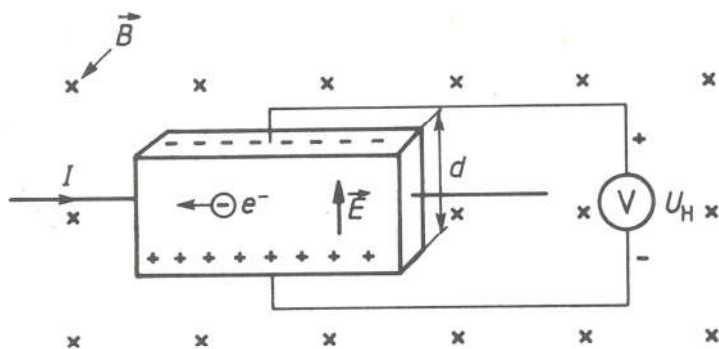
Uvrštavanjem  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $B = 1 \text{ T}$  i  $E_k = 10 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ J}$  dobivamo

$$r = 0,456 \text{ m}.$$

Budući da je  $m_d = \frac{1}{2}m_\alpha$  i  $Q_d = \frac{1}{2}Q_\alpha$ , energija deuterona bila bi:

$$E_{kd} = \frac{Q_d^2 B^2 r^2}{2m_d} = \frac{1}{2} E_{k\alpha} = 5 \text{ MeV}.$$

**Hallov efekt.** Magnetsku indukciju možemo mjeriti pomoću *Hallova efekta*. Ako vodljivu pločicu (većinom izrađenu od poluvodiča) kroz koju protječe struja  $I$  unesemo u magnetsko polje, kao što je to prikazano na sl. 3.6. magnetska će sila otklanjati slobodne nosioce naboja u poprečnome smjeru, pa će se jedna strana pločice nabiti pozitivno, a druga negativno. To je poznati Hallov efekt.



Slika 3.6. Hallov efekt

Hallov se napon,  $U_H$ , određuje iz uvjeta da je sila zbog nastalog električnog polja jednaka po iznosu, a suprotna smjera sili magnetskoga polja:

$$QE = QvB \quad (3.6)$$



Odatle izlazi da je:

$$B = \frac{E}{v} = \frac{U_H}{dv} = \frac{nQ}{Jd} U_H \quad (3.7)$$

Mjereći nastali Hallov napon, uz poznatu jakost (gustoću) električne struje i gustoću naboja  $nQ$ , može se odrediti magnetska indukcija  $B$ . Budući da se Hallova sonda može napraviti vrlo malom, ovom je metodom moguće precizno mjeriti magnetsku indukciju gotovo od točke do točke.

### 3.4. Jakost magnetskoga polja

Magnetsko polje nastaje u prostoru oko naboja u gibanju i može se opisati vektorom magnetske indukcije  $\vec{B}$ . Budući da magnetska indukcija ovisi o sredstvu koje se nalazi u magnetskome polju, praktično je definirati jakost, veličinu koja ne ovisi o sredstvu, već samo o strujama koje proizvode magnetsko polje. To je jakost magnetskoga polja  $H$ .

Ako je u nekoj točki sredstva permeabilnosti  $\mu$  magnetska indukcija jednaka  $\vec{B}$ , tada jakost magnetskoga polja  $\vec{H}$  u toj točki definiramo izrazom:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad (3.8)$$

gdje je  $\mu$  permeabilnost sredstva.

Mjerenja pokazuju da je magnetsko polje unutar duge cilindrične zavojnice, duljine  $l$  i promjera  $d$  ( $d \ll l$ ), koja ima  $N$  gusto namotanih zavoja kroz koje protječe struja  $I$ , homogeno, praktički neovisno o promjeru te razmjerno jakosti struje i broju zavoja po jedinici duljine, tj.:

$$B = \text{konst.} \cdot \frac{NI}{l} = \mu \frac{NI}{l} \quad (3.9)$$

Ako je unutar zavojnice vakuum, konstanta je razmjernosti u izrazu (3.9) *apsolutna permeabilnost* vakuuma  $\mu_0$ :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ TmA}^{-1}.$$

(U pogledu magnetskih svojstava zrak se vrlo malo razlikuje od vakuuma.)

Jakost magnetskoga polja  $H$  zavojnice definiramo izrazom:

$$H = \frac{NI}{l} \quad (3.10)$$

Struja kroz vodič uzbudila je na neki način okolni prostor; zato se veličina  $H$  često naziva i magnetska uzbuda.

Jakost magnetskoga polja  $\vec{H}$  vektorska je veličina. Smjer vektora  $\vec{H}$  u vakuumu i u drugim izotropnim sredstvima (tj. u sredstvima kojih svojstva ne ovise o smjeru), isti je kao i smjer vektora  $\vec{B}$ .

Jedinica je jakosti magnetskoga polja, kao što se vidi i iz izraza (3.10) *amper po metru*:

$$[H]_{SI} = \frac{A}{m}.$$

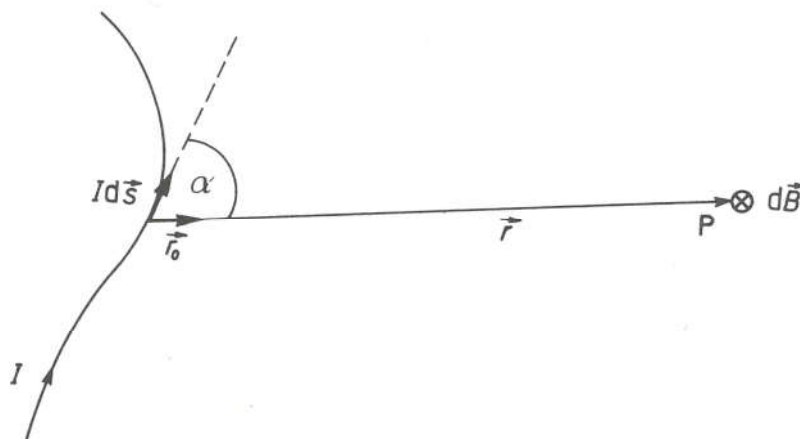
Mjerenja i računi pokazuju da jakost magnetskoga polja  $H$  dugoga ravnog vodiča ovisi samo o jakosti struje  $I$  i o udaljenosti od vodiča  $a$ , tj.:

$$H = \frac{I}{2\pi a} \quad (3.11)$$

Silnice magnetskoga polja oko ravnoga vodiča kroz koji protječe struja jakosti  $I$ , koncentrične su kružnice u ravnini okomitoj na vodič sa središtem na osi vodiča (sl. 3.3).

### 3.5. Biot–Savartov zakon

Biot i Savart\* proučavali su magnetska polja za različite oblike vodiča kojima teče električna struja. Ta su istraživanja, zajedno s Laplaceovim radovima, dovela do zakona za izračunavanje jakosti magnetskoga polja, odnosno magnetske indukcije na bilo kojem mjestu i za bilo koji oblik vodiča kroz koji teče električna struja.



Slika 3.7. Uz izvod Biot–Savartova zakona

Prema Biot–Savartovu zakonu, magnetska indukcija, koju u točki P proizvodi tzv. element struje  $I d\vec{s}$  (sl. 3.7) jednaka je:

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}_0}{r^2} \quad (3.12)$$

gdje je  $\vec{r}$  udaljenost elementa vodiča  $d\vec{s}$  do točke promatranja P,  $I$  jakost struje, a  $\vec{r}_0$  jedinični vektor koji je uzduž  $\vec{r}$  usmjeren od elementa struje prema točki promatranja, tj.  $\vec{r}_0 = \vec{r}/|\vec{r}|$ .

\* J. B. Biot (1774–1862) i F. Savart (1791–1841), francuski fizičari, poznati po radovima iz elektromagnetizma, optike itd.

Smjer vektora  $d\vec{B}$  određuje se pravilom desne ruke (desnoga vijka) za vektorski produkt, tj. vektor  $d\vec{B}$  okomit je na ravninu određenu vektorima  $d\vec{s}$  i  $\vec{r}_0$ , dok je iznos jednak:

$$dB = \frac{\mu I ds \sin \alpha}{4\pi r^2} \quad (3.13)$$

gdje je  $\alpha$  kut između  $d\vec{s}$  i  $\vec{r}$ .

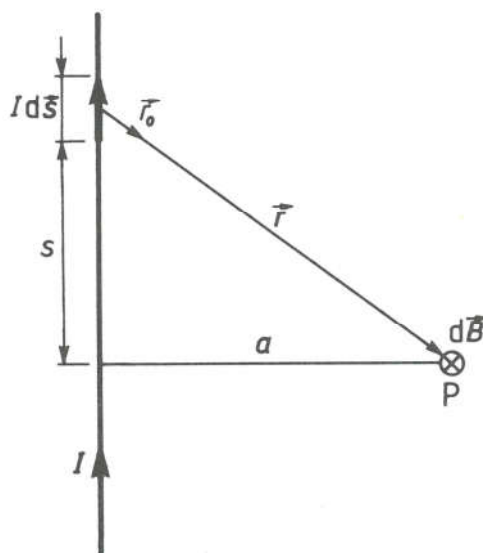
Biot–Savartov zakon možemo pisati i pomoću vektora  $\vec{H}$ :

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}_0}{4\pi r^2} \quad (3.14)$$

Dok diferencijalni oblik Biot–Savartova zakona (3.12) daje magnetsku indukciju koju element struje proizvodi u nekoj točki, magnetska indukcija koju u toj točki uzrokuje čitav vodič jednaka je krivuljnom integralu po konfiguraciji vodiča (princip superpozicije):

$$\vec{B} = \int d\vec{B} \quad (3.15)$$

Integral je moguće jednostavno izračunati samo za nekoliko posebnih oblika vodiča, od kojih ćemo neke i izračunati u slijedećim primjerima.



Slika 3.8. Magnetsko polje ravnog vodiča

**Magnetsko polje ravnoga vodiča.** Magnetsku indukciju  $\vec{B}$  u okolini beskonačno dugoga ravnog vodiča kojim teče struja jakosti  $I$  možemo izvesti primjenom Biot–Savartova zakona. Svi doprinosi  $d\vec{B}$  (sl. 3.8) imaju isti smjer (u ravnini crteža) pa u integralu (3.15) možemo upotrijebiti izraz (3.13):

$$dB = \frac{\mu I ds \sin \alpha}{4\pi r^2} \quad (3.16)$$



Budući da je  $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = a/r$  i  $r^2 = a^2 + s^2$  (sl. 3.8), jednačba (3.16) poprima oblik:

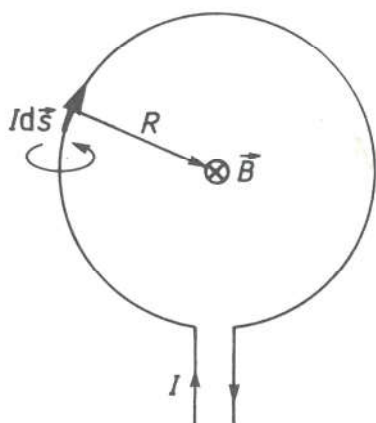
$$B = \frac{\mu I a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s^2)^{3/2}} \quad (3.17)$$

Integriranjem dobivamo:

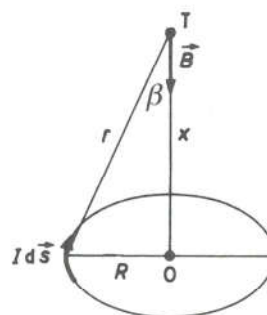
$$B = \mu \frac{I a}{4\pi} \cdot \frac{s}{a^2 \sqrt{a^2 + s^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

a, uvrštavanjem granica, izlazi:

$$B = \mu \frac{I}{2\pi a} \quad (3.18)$$



a)



b)

Slika 3.9. Magnetsko polje kruznoga zavoja

**Magnetsko polje kruznoga zavoja.** Izračunajmo magnetsku indukciju  $\vec{B}$  u središtu kruznoga zavoja kroz koji teče struja jakosti  $I$  (sl. 3.9). Doprinosi  $d\vec{B}$  svih  $I d\vec{s}$  imaju u središtu zavoja isti smjer (na sl. 3.9.a), okomito prema unutra na ravninu zavoja, te, umjesto vektorskog zbrajanja, imamo jednostavno skalarno zbrajanje doprinosa  $dB$ . Također je, za sve elemente vodiča  $d\vec{s}$ , udaljenost od promatrane točke stalna i jednaka polumjeru kružnice  $R$ . Nadalje je  $\sin \alpha = 1$ . Zbog svega ovoga račun je u ovom slučaju zaista jednostavan:

$$B = \oint \frac{\mu I ds}{4\pi R^2} = \frac{\mu I}{4\pi R^2} \oint_{\text{po kružnici}} ds = \frac{\mu I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R,$$

ili:

$$B = \frac{\mu I}{2R} \quad (3.19)$$

Slično možemo izračunati magnetsku indukciju  $B$  (odnosno jakost magnetskoga polja  $H$ ) u bilo kojoj točki T na osi kruznoga zavoja (sl. 3.9.b).

Točka T udaljena je od središta zavoja za  $x$ . Element struje  $I d\vec{s}$  stalno je okomit na  $\vec{r}$  pa je  $I d\vec{s} \times \vec{r} = I r ds$ .

Doprinos  $d\vec{B}$  od elementa struje  $I d\vec{s}$  možemo rastaviti u dvije komponente, jednu  $dB_1$  uzduž osi i drugu  $dB_2$  okomito na os. Vektorski zbroj (integral) svih  $d\vec{B}$  svodi se na skalarno zbrajanje doprinosa  $dB_1$  jer se oni, zbog simetrije komponente okomite na os  $dB_2$ , međusobno poništavaju.

Primjenom Biot-Savartova zakona dobivamo:

$$dB = \frac{\mu I r ds}{4\pi r^3} = \frac{\mu I ds}{4\pi r^2}$$

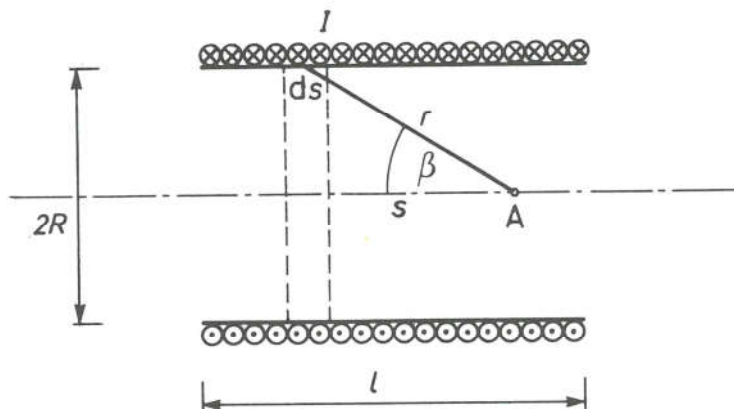
$$dB_1 = dB \sin \beta = dB \frac{R}{r} = \frac{\mu I R ds}{4\pi r^3}.$$

Magnetska indukcija  $B$  jednaka je integralu po čitavom zavoju (kružnici):

$$B = \oint dB_1 = \frac{\mu R I}{4\pi r^3} \oint_{\text{po kružnici}} ds = \frac{\mu R I}{4\pi r^3} \cdot 2R\pi = \frac{\mu I R^2}{2r^3} = \frac{\mu I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (3.20)$$

gdje je  $x$  udaljenost točke na osi od središta zavoja, a  $R$  polumjer zavoja. Za  $x = 0$  (središte zavoja) formula (3.20) prelazi, naravno, u formulu (3.19).

**Magnetsko polje zavojnice.** Pomoću Biot-Savartova zakona možemo izračunati i magnetsku indukciju (jakost magnetskoga polja) u točkama na osi cilindrične zavojnice (sl. 3.10).



Slika 3.10. Magnetsko polje zavojnice

Zavojnica dužine  $l$  i polumjera  $R$  sastoji se od  $N$  koncentričnih kružnih zavoja. Magnetska indukcija može se izračunati primjenom izraza (3.20), tj. zbrajanjem doprinosa pojedinih kružnih zavoja.

Dio zavojnice dužine  $ds$  može se smatrati kružnom strujom. Element te struje  $(N/l)I ds$  uzrokuje u točki A na osi zavojnice magnetsku indukciju  $d\vec{B}$  koje je smjer u smjeru osi, a iznosi:

$$dB = \frac{\mu R^2}{2(s^2 + R^2)^{3/2}} \frac{N}{l} I ds.$$

Da bismo odredili ukupnu indukciju potrebno je integrirati po cijeloj zavojnici, tj. po kutu  $\beta$  od  $\beta_1$  do  $\beta_2$  (sl. 3.10).

Budući da je:

$$r = \frac{R}{\sin \beta}; \quad s = R \operatorname{ctg} \beta,$$

odnosno

$$ds = -\frac{R d\beta}{\sin^2 \beta},$$

to je

$$B = \int \frac{\mu N I R^2}{2r^3 l} ds = -\frac{\mu N I}{2l} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta$$

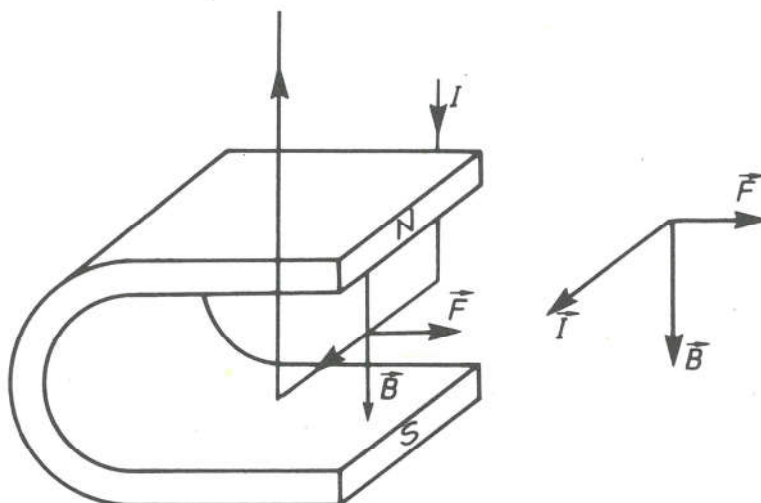
$$B = \frac{\mu I N}{2l} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad (3.21)$$

Ako je zavojnica vrlo dugačka ( $l \gg R$ ), a točka A unutar zavojnice (daleko od rubova), tada je  $\cos \beta_1 = -\cos \beta_2 \approx 1$  pa je:

$$B = \mu \frac{N I}{l}.$$

### 3.6. Vodič kojim teče struja u magnetskome polju

Na naboj  $Q$  koji se giba u magnetskome polju djeluje sila  $\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$ . Budući da je električna struja gibanje naboja, i na vodič kojim teče struja mora u magnetskome polju djelovati sila.

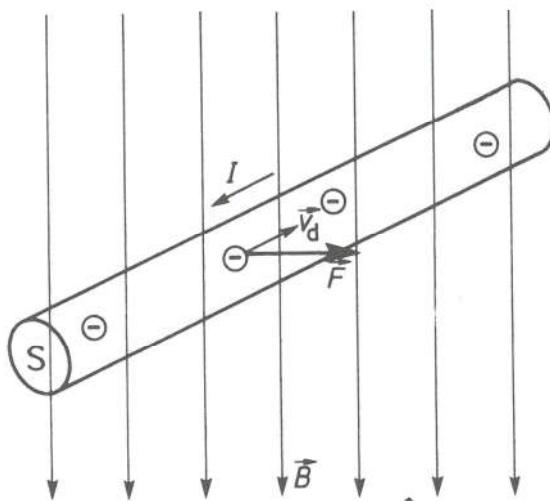


Slika 3.11. Sila na struju u magnetskom polju

Ako je ravni vodič kroz koji teče istosmjerna struja u homogenome magnetskom polju, na njega će djelovati sila kako to prikazuje sl. 3.11.



Pokusom se može pokazati da će se obješena žica otkloniti već prema smjeru magnetskoga polja, ili prema sredini ili pak, prema krajevima potkovastog magneta. Na vodič djeluje sila okomita na smjer struje i na smjer vanjskoga polja. Otklon je to veći što je struja kroz vodič jača.



Slika 3.12. Uz izvod magnetske sile na koju teče struja

Izvedimo izraz za silu koja djeluje na ravni vodič duljine  $l$  kroz koji teče struja  $I$  i koji je okomit na silnice homogenoga magnetskog polja  $\vec{B}$ . Struja kroz vodič nastaje gibanjem slobodnih elektrona – kako to simbolički prikazuje sl. 3.12. Na svaki elektron djeluje sila  $\vec{F}_1 = -e\vec{v}_d \times \vec{B}$ , pa će ukupna sila na vodič duljine  $l$  biti jednaka sili na jedan elektron, pomnožena brojem slobodnih elektrona unutar vodiča.

Ako je  $S$  presjek vodiča,  $n$  gustoća (koncentracija) slobodnih elektrona, ukupni je broj elektrona u vodiču duljine  $l$  jednak  $nSl$ . Stoga je ukupna sila:

$$\vec{F} = N\vec{F}_1 = nSl(-e)\vec{v}_d \times \vec{B} \quad (3.22)$$

Prisjetivši se da je gustoća struje kroz vodič  $\vec{J} = -ne\vec{v}_d$ , dobivamo:

$$\vec{F} = Sl\vec{J} \times \vec{B}$$

ili

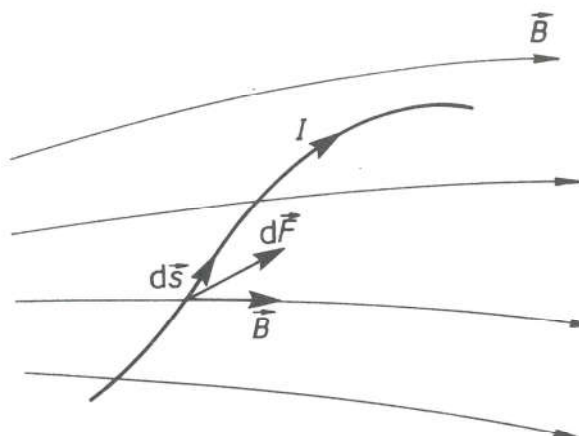
$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \quad (3.23)$$

Vektor  $\vec{F}$  iznosi:

$$F = IlB \sin \alpha \quad (3.24)$$

gdje je  $\alpha$  kut između  $\vec{l}$  i  $\vec{B}$ . Smjer vektora  $\vec{l}$  u smjeru je struje, tj. u smjeru gibanja pozitivnih naboja.

Izraz (3.23) izveden je za ravni vodič kroz koji teče struja u homogenom magnetskom polju. Ako vodič nije ravan, odnosno ako polje nije homogeno, moramo računati s elementarnim dijelovima vodiča  $d\vec{s}$ , jer za svaki taj element možemo



Slika 3.13. Sila na krivocrti vodič kojim teče struja u magnetskom polju

pretpostaviti da je ravan i da je na tako maloj dužini magnetsko polje homogeno (sl. 3.13).

Relaciju (3.23) možemo u tom slučaju pisati u obliku:

$$d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B} \quad (3.25)$$

gdje je  $d\vec{F}$  sila na element struje  $I d\vec{s}$ .

Sila na strujni element u magnetskome polju jednaka je vektorskom produktu strujnog elementa i magnetske indukcije.

Ukupna sila jednaka je zbroju svih  $d\vec{F}$ , tj. integralu preko cijeloga vodiča:

$$\vec{F} = I \int d\vec{s} \times \vec{B} \quad (3.26)$$

### 3.7. Djelovanje struje na struju. Definicija ampera

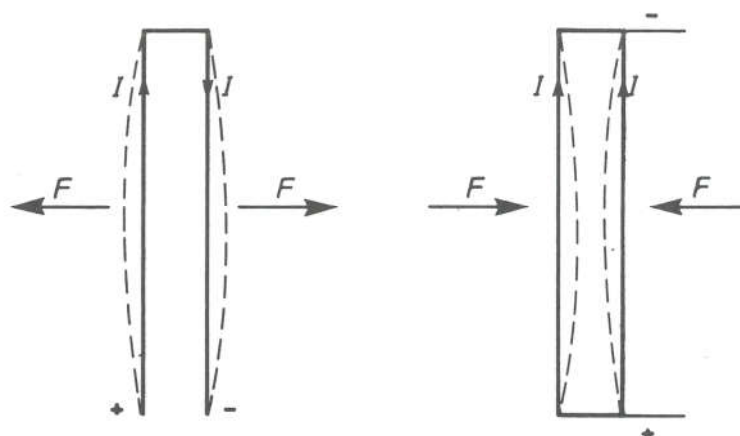
U odjeljku navedenom prije promatrali smo djelovanje magnetskoga polja na vodič kroz koji teče struja. Magnetsko polje možemo proizvesti i električnom strujom pa ćemo sada razmatrati vodič kojim teče struja u magnetskome polju druge struje, ukratko: proučavat ćemo sile između dvaju vodiča kroz koje teku električne struje.

Pokus pokazuje da se dvije paralelne žice kroz koje teče struja odbijaju ako su struje protivnoga smjera, a privlače ako su struje u objema žicama istoga smjera (sl. 3.14). Rezultat ovoga pokusa lako je shvatiti: struja  $I_1$  proizvodi magnetsko polje, i to polje djeluje silom na vodič kojim teče struja  $I_2$ , ili obratno, struja  $I_2$  proizvodi magnetsko polje koje djeluje na struju  $I_1$ , odnosno obje struje proizvode magnetska polja koja međusobno interagiraju.

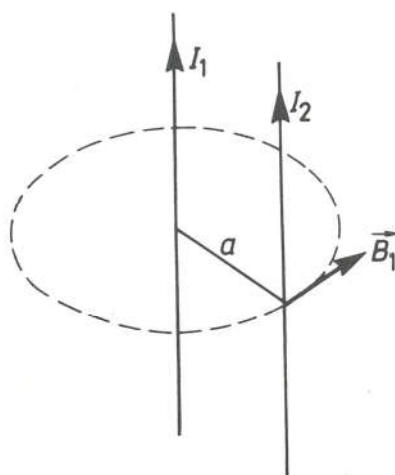
Izračunajmo silu između dvaju paralelnih, tankih, ravnih vodiča kroz koje teku struje  $I_1$  i  $I_2$  u vakuumu (sl. 3.15).

Jedan vodič nalazi se u polju drugoga, i obratno. Magnetsko polje prvoga vodiča na mjestu gdje je drugi vodič iznosi:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi a} \quad (3.27)$$



Slika 3.14. Dvije paralelne struje se privlače (desno) a dvije antiparalelne struje odbijaju (lijevo)



Slika 3.15. Uz izvod sile između dvije paralelne struje

To magnetsko polje djeluje na struju  $I_2$  silom:

$$F = I_2 l B_1 \quad (3.28)$$

gdje je  $l$  duljina vodiča. Uvrstimo li (3.27) u (3.28), dobivamo silu kojom dvije paralelne struje djeluju jedna na drugu:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{a} l \quad (3.29)$$

Ovaj se izraz upotrebljava za definiciju osnovne mjerne jedinice fizikalne veličine jakosti električne struje – ampera:

*Jedan je amper jakost one stalne struje koja, prolazeći kroz dva ravna, usporedna i neizmjereno dugačka vodiča, zanemarlivo maloga kružnog presjeka, u vakuumu, međusobno udaljena jedan metar, uzrokuje između njih silu od  $2 \cdot 10^{-7}$  njutna po metru.*



### 3.8. Ampèreov zakon

Kada neku veličinu u svakoj točki prostora opisujemo vektorom, govorimo o vektorskom polju te veličine. Vektorska su polja npr. električno i magnetsko polje. *Cirkulacija vektorskoga polja* linijski je integral po zatvorenoj krivulji projekcije vektora na krivulju u svakoj točki te krivulje. Tako je npr. cirkulacija vektora jakosti magnetskoga polja po krivulji K:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (3.30)$$

Najprije ćemo izračunati cirkulaciju jakosti magnetskoga polja dugačkoga ravnog vodiča kojim teče struja  $I$ . Radi jednostavnosti neka zatvorena krivulja bude kružnica (silnica) oko vodiča (sl. 3.3). U svakoj točki te kružnice magnetsko je polje tangencijalno na kružnicu i – po iznosu – konstantno i jednako  $H = I/(2\pi a)$ . Stoga je cirkulacija vektora  $\vec{H}$  jednaka:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_K \frac{I}{2\pi a} ds = \frac{I}{2\pi a} \oint_K ds.$$

Budući da je  $\oint_K ds$  po kružnici jednak opsegu kružnice  $2\pi a$ ,

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = I \quad (3.31)$$

Cirkulacija vektora  $\vec{H}$  u ovom slučaju jednaka je jakosti struje koja prolazi kroz krivulju. Može se pokazati da to vrijedi za bilo koju krivulju. Ako krivulja K obuhvaća više struja, tada (3.31) možemo pisati:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum I,$$

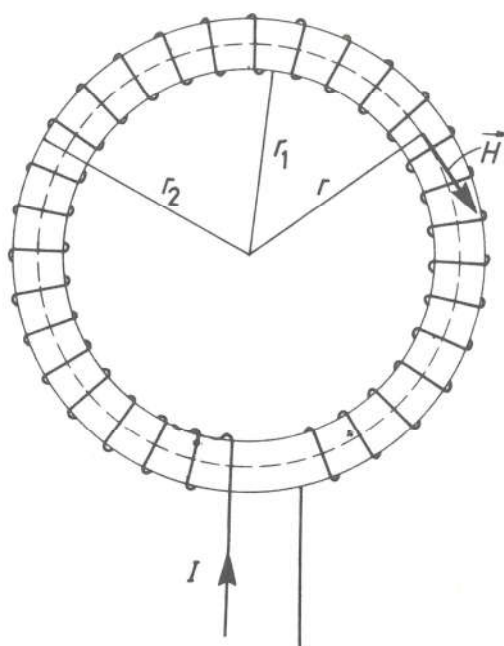
ili

$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \sum I \quad (3.32)$$

To je Ampèreov zakon, ili, kako se još često naziva, zakon protjecanja. Magnetske su silnice zatvorene krivulje protjecane strujom; nema magnetske silnice koja ne bi bila protjecana strujom, i obratno: struja stvara oko sebe zatvorene magnetske silnice.

Ampèreov zakon može se primijeniti za izračunavanje magnetskih polja kada postoji određena simetrija koja olakšava izračunavanje integrala u (3.31). Kao primjer primjene Ampèreova zakona izračunat ćemo magnetsko polje torusne i duge cilindrične zavojnice.

**Magnetsko polje torusne zavojnice.** U torusnoj (prstenastoj) zavojnici (sl. 3.16) magnetsko polje postoji samo unutar zavojnice, dok je izvan zavojnice nula.



Slika 3.16. Magnetsko polje torusne zavojnice

Zbog aksijalne simetrije silnice su magnetskoga polja koncentrične kružnice unutar prstena. Smjer je magnetske indukcije  $\vec{B}$  u smjeru tangente na te kružnice.

Zbog simetrije magnetskoga polja magnetsku indukciju, odnosno jakost magnetskog polja torusne zavojnice možemo izračunati primjenom Ampèreova zakona. Ako kao krivulju integracije  $K$  odaberemo kružnicu polumjera  $r < r_1$  ili  $r > r_2$  (dakle da prolazi izvan prstena), cirkulacija je magnetskog polja po toj kružnici nula jer je u oba slučaja  $\sum I = 0$ .

Međutim, odaberemo li kao krivulju  $K$  jednu od silnica (tj. kružnicu polumjera  $r_1 < r < r_2$ ), primjenom Ampèreova zakona dobivamo:

$$\int_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum I$$

$$H \oint_K ds = \sum I; \quad H \cdot 2r\pi = NI$$

$$H = \frac{NI}{2r\pi} = \frac{NI}{l} \quad (3.33)$$

gdje je  $2r\pi = l$  duljina (opseg) odgovarajuće silnice.

Magnetska je indukcija unutar torusne zavojnice:

$$B = \mu \frac{NI}{2r\pi} \quad (3.34)$$

gdje je  $\mu$  propusnost zavojnične jezgre.

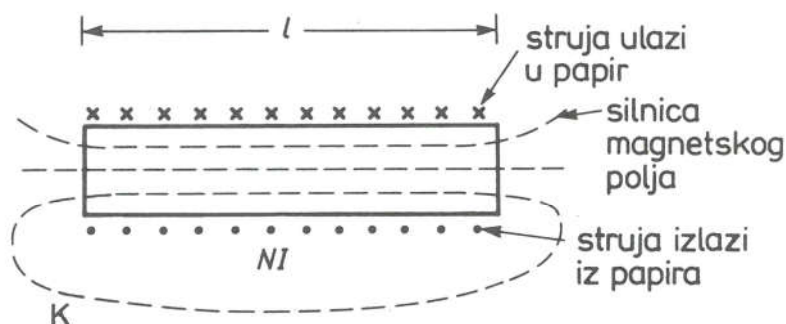
Magnetsko polje unutar torusne zavojnice nije sasvim homogeno i ovisi o udaljenosti  $r$  od središta zavojnice. Međutim, ako je poprečni presjek zavojnice (odnosno

$r_2 - r_1$ ) znatno manji od duljine zavojnice (odnosno  $r_1$ ), možemo pretpostaviti da je polje homogeno i da iznosi:

$$B = \mu \frac{NI}{l},$$

gdje je  $l$  srednja duljina zavojnice.

**Magnetsko polje cilindrične zavojnice.** U odjeljku 3.5. izveli smo jakost magnetskoga polja (magnetsku indukciju) u točkama na geometrijskoj osi zavojnice, a sada ćemo primjenom Ampèreova zakona izračunati jakost magnetskoga polja unutar dugačke cilindrične zavojnice (solenoida).



Slika 3.17. Uz izvod magnetske indukcije valjkaste zavojnice

Unutar zavojnice polje je približno homogeno, a izvan zavojnice praktično nema polja.

Cirkulacija polja po krivulji K (npr. po jednoj od silnica) jednaka je:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = Hl, \quad (3.35)$$

jer je, unutar zavojnice (na duljini  $l$ ), polje homogeno i iznos mu je  $H$ , a vani je polje nula. Zbroj je obuhvaćenih struja  $NI$  jer vodič sa strujom  $I$  prolazi  $N$  puta kroz površinu određenu krivuljom K na sl. 3.17. Jednadžba (3.31) poprima, dakle, oblik:

$$Hl = NI$$

odnosno:

$$H = \frac{NI}{l} \quad (3.36)$$

Magnetska indukcija  $B = \mu H$  unutar zavojnice jednaka je:

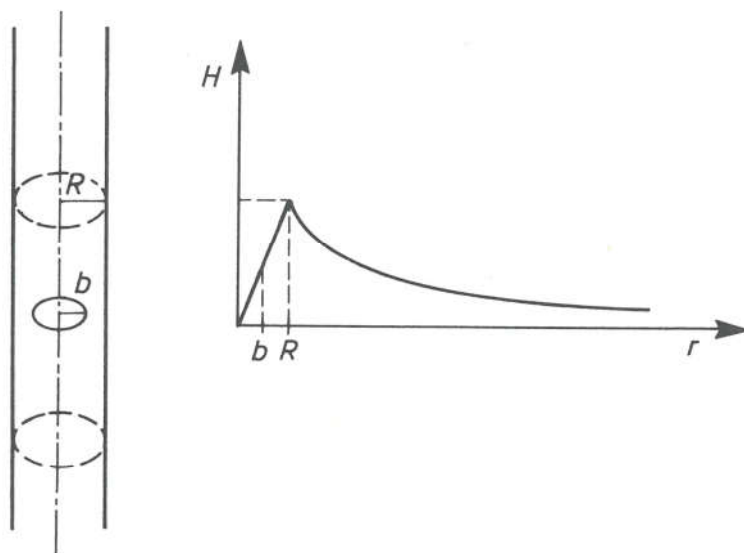
$$B = \mu \frac{NI}{l} \quad (3.37)$$

gdje je  $\mu$  permeabilnost jezgre zavojnice. Izrazi (3.36) i (3.37) vrijede točno za torusnu (prstenastu) zavojnicu, dok za valjkastu zavojnicu vrijede približno to bolje što je manji promjer zavojnice u odnosu prema njezinoj duljini.



**Primjer 3.2.**

Izračunajte jakost magnetskoga polja unutar dugačkoga ravnog vodiča kružna presjeka polumjera  $R$  kojim protječe struja konstantne gustoće  $J = I/S = I/(R^2\pi)$ .



Slika 3.18. Magnetsko polje unutar ravnog vodiča kojim protječe struja

Zbog aksijalne simetrije silnice su magnetskoga polja unutar, kao i izvan vodiča, koncentrične kružnice sa središtima na osi vodiča. Sve točke na jednoj takvoj kružnici imaju jednak iznos vektora  $H$  odnosno  $B$ , dok je smjer tih vektora određen pravilom desne ruke i u smjeru je tangente na kružnicu. Kao krivulju integracije odabrat ćemo jednu od tih kružnica polumjera  $b < R$  i primijeniti zakon protjecanja:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum I$$

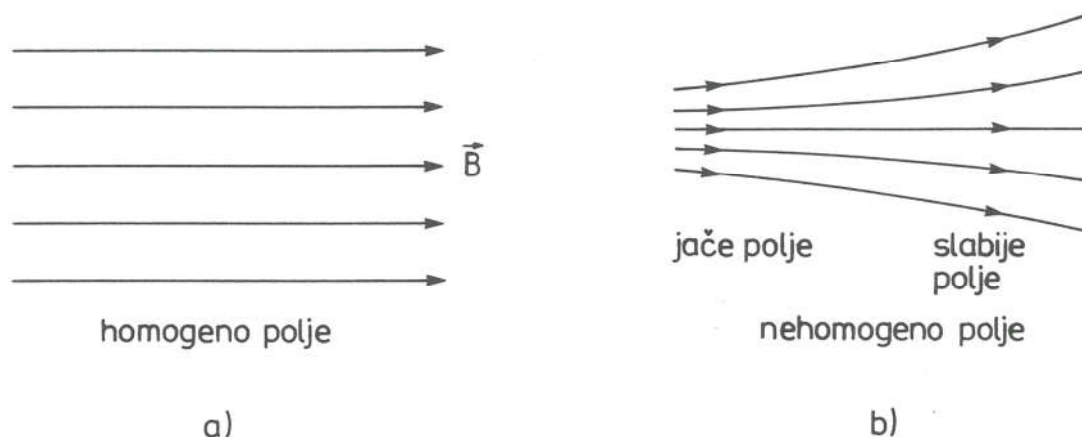
$$H \int_{\text{kružnica}} d\vec{s} = \frac{I}{R^2\pi} \cdot b^2\pi; \quad H \cdot 2r\pi = I \frac{b^2}{R^2}$$

$$H = \frac{Ib}{2R^2\pi}$$

Unutar vodiča jakost se magnetskoga polja (magnetska indukcija) povećava linearno od nule (u osi vodiča) do maksimalne vrijednosti  $H = I/2R\pi$  (sl. 3.18), a zatim se smanjuje po zakonu  $H = I/(2r\pi)$  (v. formulu 3.19).

### 3.9. Magnetski tok

Iz gustoće silnica magnetskog polja (sl. 3.19) zaključujemo je li polje jako ili slabo, tj. tamo gdje su silnice gušće, veće su magnetska indukcija i jakost magnetskog polja. Paralelne ekvidistantne silnice predaju homogeno magnetsko polje, sl. 3.19.a.



Slika 3.19. Homogeno a) i nehomogeno magnetsko polje b)

Slično kao i za električno polje, i ovdje ćemo skup silnica koje prolaze kroz neku plohu nazvati tok magnetskoga polja kroz tu plohu i označavati slovom  $\Phi_B$ . Za homogeno (u svim točkama prostora isto) polje (sl. 3.20.a) tok je kroz ravnu površinu  $S$  – koja je okomita na magnetske silnice te time i na vektor  $\vec{B}$  – jednak:

$$\Phi_B = BS. \quad (3.38)$$

Magnetski tok  $\Phi_B$  jednak je produktu magnetske indukcije  $B$  i površine  $S$  okomite na smjer magnetskih silnica. Sada je jasno zašto se magnetska indukcija:

$$B = \frac{\Phi_B}{S} \quad (3.39)$$

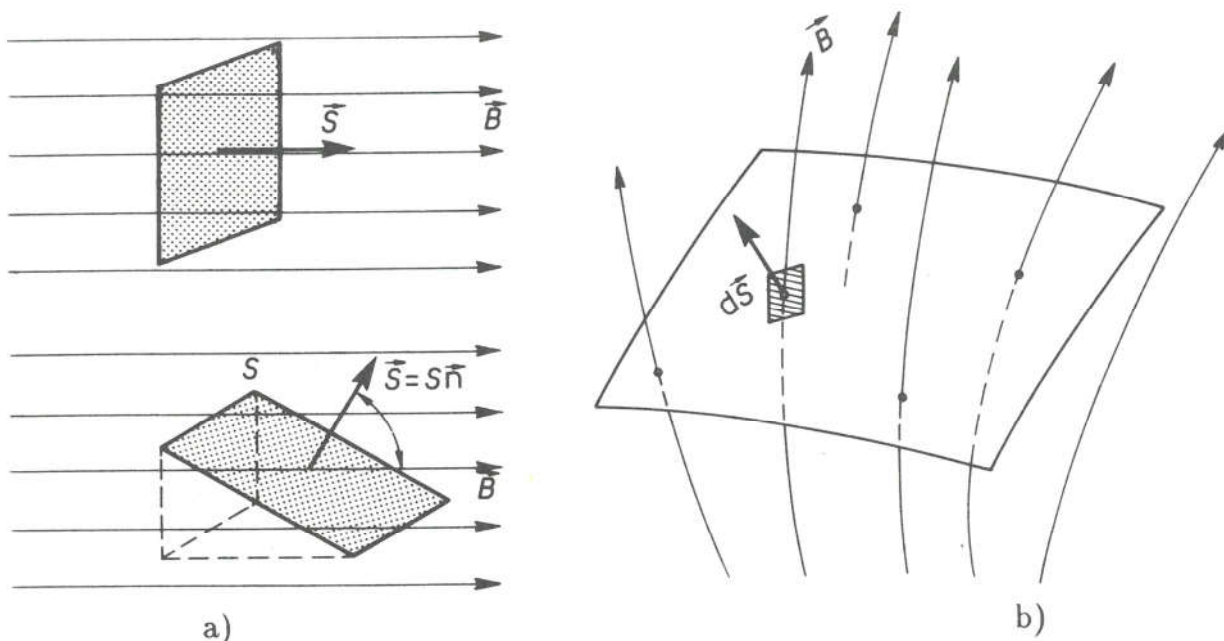
naziva još i gustoća magnetskoga toka.

Ako silnice homogenoga magnetskoga polja ne upadaju okomito na površinu  $S$ , već pod nekim kutem  $\theta$ , tada je tok:

$$\Phi_B = BS \cos \theta = \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (3.40)$$

gdje je  $\vec{S}$  vektor čiji je iznos jednak površini, dok mu je smjer u smjeru normale na plohu. U općenitom slučaju plohu moramo podijeliti na infinitezimalno male elemente  $dS$  (sl. 3.20.b) i magnetski tok izračunati integralom po površini kroz koju računamo tok:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.41)$$



Slika 3.20. Uz definiciju magnetskog toka

Magnetski tok jednak je, dakle, plošnom integralu vektora magnetske indukcije. Jedinica je magnetskoga toka veber, znak Wb\*.

$$[\Phi_B] = \text{Tm}^2 = \text{Vs} = \text{Wb}$$

### Primjer 3.3.

Torusna zavojnica vanjskoga promjera 12 cm i unutrašnjega promjera 11,5 cm ima 800 zavoja. Kroz zavojnicu teče struja jakosti 1 A. Jezgra je zavojnice od paramagnetičnoga materijala. Kolik je magnetski tok kroz zavojnicu?

Budući da je  $r_2 - r_1$  dosta manje od  $r_1$ , možemo pretpostaviti da je magnetsko polje unutar zavojnice homogeno i okomito na presjek zavojnice:

$$B = \mu \frac{NI}{2r\pi} = \mu \frac{NI}{l}.$$

Magnetski je tok:

$$\Phi = B \cdot S = \mu \frac{NI}{l} S \doteq \mu_0 \frac{NI}{l} S = 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ Wb}.$$

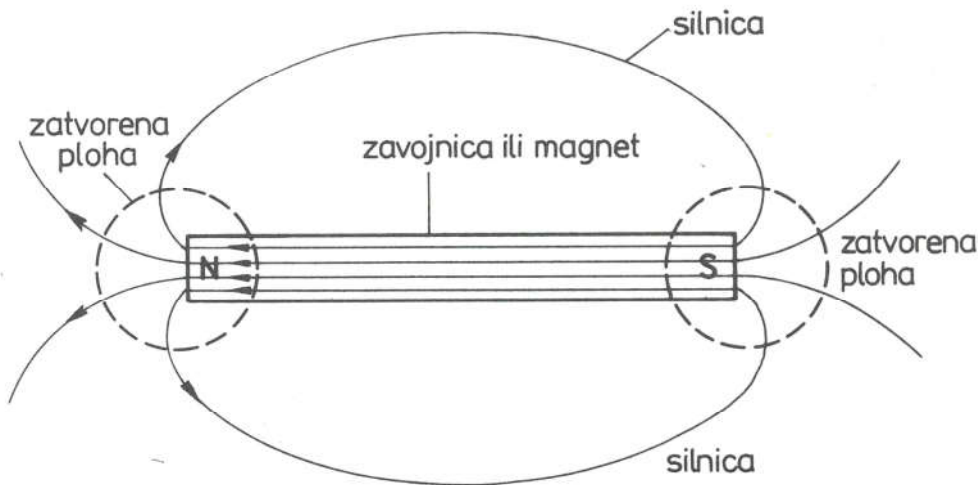
\* Wilhelm Weber (1804–1891), njemački fizičar, poznat po istraživanjima iz magnetizma; osnovao je elektromagnetski cgs - sustav.



### 3.10. Gaussov zakon za magnetizam

Kolik je magnetski tok kroz bilo koju zatvorenu plohu? Općenito, tok vektorskoga polja kroz zatvorenu plohu jednak je zbroju svih izvora unutar plohe (Gaussov zakon). Tako je tok električnoga polja bio jednak naboju unutar volumena obuhvaćena plohom. Isto vrijedi i za tok magnetskoga polja, samo izoliranih magnetskih polova nema i magnetske su silnice zatvorene krivulje; zato je broj silnica koje ulaze u neku zatvorenu plohu jednak broju silnica koje izlaze iz te plohe (sl. 3.21). Drugim riječima, magnetski je tok kroz bilo koju zatvorenu plohu nula:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.42)$$



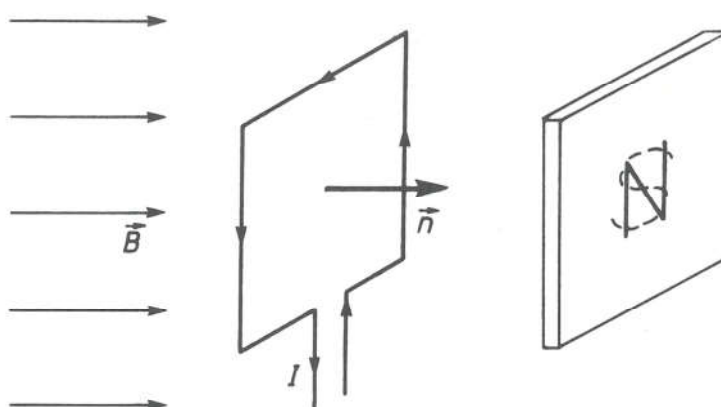
Slika 3.21. Tok magnetskog polja štapastog magneta kroz kuglu

To je Gaussov zakon za magnetizam, jedna od osnovnih jednadžbi elektromagnetizma.

### 3.11. Magnetski moment

Okvir od žice kroz koji teče struja (magnetski list), poduprt tako da se može okretati oko svoje vertikalne osi simetrije (sl. 3.22), orijentira se u Zemljinu magnetskom polju tako da normala na ravninu okvira pokazuje prema sjeveru. (Smjer normale određujemo pravilom desne ruke: ako savijeni prsti obilaze petlju u smjeru struje, palac pokazuje smjer normale.) Slično se ponaša i zavojnica kroz koju teče struja. Pokus je još očitiji u polju permanentnoga magneta.

Magnetski list (strujna petlja) ponaša se kao magnet. Sjeverni je magnetski pol na onoj strani okvira na kojoj normala izlazi van, a južni je pol na drugoj strani. Strujna petlja ponaša se kao tanki široki magnet i zato se često i naziva magnetski list.



Slika 3.22. Magnetski list

U vanjskome homogenom magnetskom polju na strujnu petlju djeluje moment sile koji je nastoji orijentirati u smjeru polja. Da bismo izračunali zakretni moment na strujnu petlju, pogledajmo koje sile djeluju na pravokutni zavoju na sl. 3.23. Sila na stranicu  $b$

$$\vec{F}_2 = I\vec{b} \times \vec{B} \quad (3.43)$$

jednaka je po iznosu, a suprotna po smjeru sili na stranicu  $d$

$$\vec{F}_4 = I\vec{d} \times \vec{B} \quad (3.44)$$

Obje sile također leže na istom pravcu nosiocu, te, dakle, ne pomiču niti zakreću okvir. (Kad su stranice  $b$  i  $d$  usporedne silnicama, obje ove sile iščezavaju.)

Naprotiv, sile na stranice  $a$  i  $c$

$$\vec{F}_1 = I\vec{a} \times \vec{B} \quad \vec{F}_3 = I\vec{c} \times \vec{B} \quad (3.45)$$

iako su jednake po iznosu, a suprotnoga smjera, ne leže na istome pravcu, te čine par (spreg) sila i svojim momentom nastoje zakrenuti petlju i postaviti je okomito na magnetsko polje.

Moment je sile (zakretni moment) koji djeluje na strujnu petlju kojom teče struja  $I$  u homogenom magnetskom polju  $B$  (sl. 3.23):

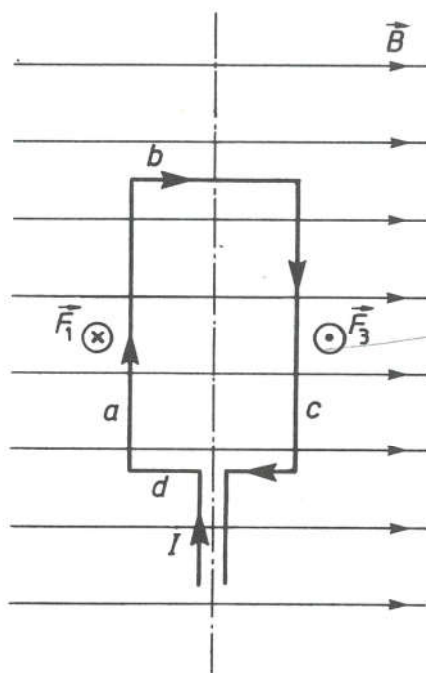
$$M = Fb \sin \theta = IabB \sin \theta = ISB \sin \theta \quad (3.46)$$

gdje je  $S$  površina strujne petlje, a  $\theta$  kut između magnetskoga polja  $\vec{B}$  i normale na petlju  $\vec{n}$ . Izraz (3.46) možemo pisati i vektorski:

$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B} \quad (3.47)$$

Magnetski moment  $\vec{p}_m$  definira se izrazom (3.47). To je vektorska veličina koje je vektorski produkt s magnetskom indukcijom (gustoćom magnetskoga toka) jednak zakretnom momentu. Dakle:

$$\vec{p}_m = I\vec{S} \quad (3.48)$$



po desnoj ruci  
(ti prsta)

Slika 3.23. Zakretni moment na strujnu petlju

gdje je  $S$  površina petlje,  $\vec{n}$  jedinični vektor normale ( $\vec{S} = S\vec{n}$ ), a  $I$  jakost struje kroz petlju\*. Jedinica je magnetskoga momenta amper četvorni metar,  $\text{Am}^2$ .

Magnetski je moment zavojnice s  $N$  zavoja:

$$p_m = NIS \quad (3.49)$$

gdje je  $S$  presjek zavojnice.

Veza je između magnetskoga momenta  $\vec{p}_m$  i zakretnoga momenta  $\vec{M}$  u vanjskom magnetskom polju indukcije  $\vec{B}$ :

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} \quad (3.50)$$

Mjereći zakretni moment  $M$  i indukciju  $B$  možemo odrediti magnetski moment  $p_m$ .

Strujna petlja čije su dimenzije malene prema udaljenosti točke promatranja naziva se magnetski dipol; zato se  $p_m$  često naziva i magnetski dipolni moment.

Rad galvanometra, ampermetra i voltmetra s pomičnom zavojnicom osniva se na ovim razmatranjima. Atomi i molekule također imaju magnetski dipolni moment.

### 3.12. Potencijalna energija magnetskog dipola

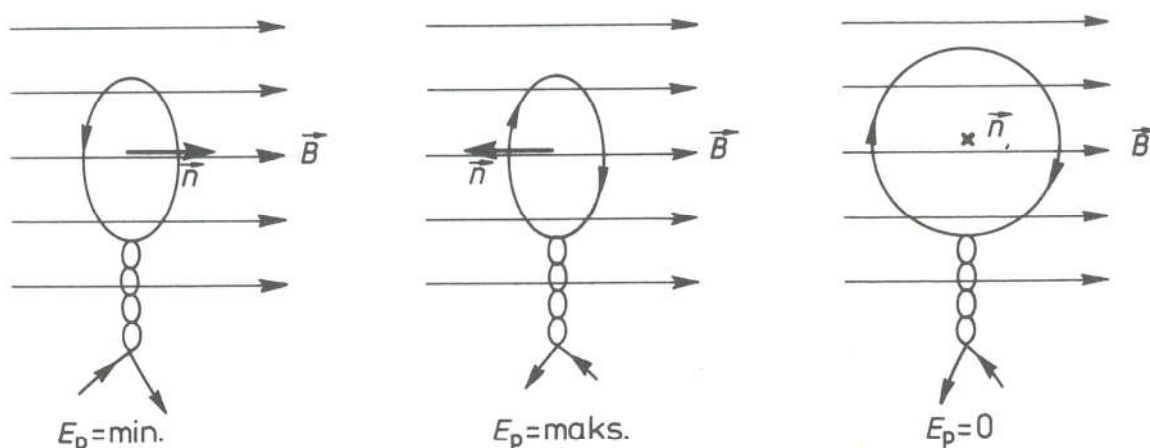
Magnetski dipol u vanjskom magnetskom polju ima određenu potencijalnu energiju koja se može izračunati slično kao što smo to uradili za električni dipol.

Potencijalna je energija električnoga dipola u vanjskom homogenom električnom polju jakosti  $\vec{E}$ :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (3.51)$$

\* Neki autori definiraju magnetski moment izrazom  $\mu IS$ ; zato treba obratiti pažnju kako je u određenom problemu magnetski moment definiran.





Slika 3.24. Potencijalna energija magnetskog dipola u homogenom magnetskom polju

Potencijalna energija magnetskoga dipola u homogenom magnetskom polju dana je sličnim izrazom:

$$E_p = \vec{p}_m \cdot \vec{B} = -p_m B \cos \theta \quad (3.52)$$

Potencijalna je energija minimalna kada je dipol u smjeru polja ( $\theta = 0$ ); to je položaj ravnoteže. Potencijalna je energija maksimalna kada je dipol u smjeru suprotnom smjeru polja ( $\theta = 180^\circ$ ); kada je pak  $\theta = 90^\circ$ , potencijalna je energija nula (sl. 3.24).

#### Primjer 3.4.

Kolik je rad kad se zavojnica duljine 40 cm i promjera 6 cm koja ima 400 zavoja zakrene u vanjskom magnetskom polju  $B = 1$  T iz položaja ravnoteže za kut od  $90^\circ$ ? Jakost je struje kroz zavojnicu 1 A.

Taj je rad jednak negativnoj promjeni potencijalne energije. U položaju ravnoteže ( $\theta = 0$ ) potencijalna je energija minimalna, a u položaju  $\theta = 90^\circ$  iznosi nula. Dakle:

$$W = -\Delta E_p = p_m B \cos \theta_2 - p_m B \cos \theta_1$$

$$W = -p_m B.$$

Magnetski je moment zavojnice:

$$p_m = nIS$$

$$p_m = N I r^2 \pi = 1,13 \text{ A m}^2.$$

Uvrštavajući vrijednosti, dobivamo:

$$W = -1,13 \text{ Am}^2 \cdot 1 \text{ T} = -1,13 \text{ J}.$$

Pri okretanju zavojnice radom vanjskih sila povećala se potencijalna energija. Zbog toga je predznak rada negativan.

**Primjer 3.5.**

Elektron koji se giba oko jezgre predstavlja zatvorenu strujnu petlju. Kolik je magnetski dipolni moment elektrona u vodikovu atomu? Kolika je potencijalna energija ako je elektron u vanjskom magnetskom polju  $B = 1 \text{ T}$ ? Pretpostavite da je projekcija momenta količine gibanja elektrona na smjer vanjskog polja jednaka reduciranoj Planckovoj konstanti  $\hbar = h/(2\pi) = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .

Pretpostavimo da se elektron oko jezgre (protona) giba po kružnici polumjera  $r$ . Elektron se giba brzinom  $v$  i napravi  $v/(2r\pi)$  okreta u sekundi. Ekvivalentna struja je:

$$I = \frac{ev}{2r\pi}.$$

Magnetski je moment te strujne petlje:

$$p_m = IS = \frac{ev}{2r\pi} \cdot r^2 \pi = \frac{evr}{2}.$$

Ako uvedemo moment količine gibanja elektrona  $L = mvr$ , tada magnetski dipolni moment možemo pisati u obliku:

$$p_m = \frac{emvr}{2m} = \frac{e}{2m} L$$

ili vektorski:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m} \vec{L}.$$

Predznak minus dolazi zbog toga što je smjer struje suprotan smjeru gibanja elektrona te magnetski dipolni moment  $\vec{p}_m$  i moment količine gibanja  $\vec{L}$  imaju suprotan smjer.

Potencijalna je energija atoma u vanjskome magnetskom polju:

$$E_p = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m} L_B B.$$

Uvrštavanjem  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $L_B = \hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  i  $B = 1 \text{ T}$ , dobivamo  $E_p = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ J}$ .

### 3.13. Gibanje nabijenih čestica u magnetskom polju

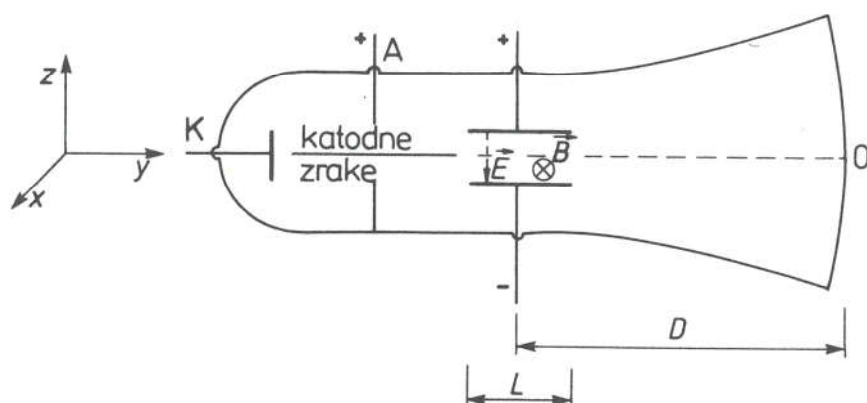
Proučavanjem električnog izboja u plinovima potkraj prošlog stoljeća otkrivene su katodne i kanalne zrake. Mjerenjem utjecaja električnih i magnetskih polja na katodne i kanalne zrake određen je omjer naboja i mase za elektrone i ione i otkriveni su izotopi. Osvrnut ćemo se na gibanje katodnih zraka (elektrona) i kanalnih zraka (iona) u električnim i magnetskim poljima.

Brzina katodnih zraka ovisi o naponu  $U$  i može se izračunati iz relacije:

$$\frac{mv^2}{2} = eU \quad (3.53)$$

gdje je  $U$  napon između katode i anode, a  $m$  i  $e$  masa i naboj elektrona. (Za velike brzine moramo upotrijebiti relativističke izraze.)

Magnetska i električna polja utječu na putanju katodnih zraka. Promatranjem gibanja katodnih zraka u električnom i magnetskom polju, J. J. Thomson\* prvi je odredio brzinu i omjer između naboja i mase za katodne zrake i tako zaključio da su to negativno nabijene čestice – elektroni.



Slika 3.25. Thomsonov eksperiment; mjerenje  $e/m$  za elektrone

Elektroni, emitirani iz katode, (sl. 3.25) ubrzavaju se u električnome polju između anode i katode i prolaze kroz šupljinu u anodi u prostor iza anode. Tamo nailaze na električno polje (među pločama kondenzatora) duljine  $L$ . Zbog djelovanja električnog polja elektroni će se otkloniti u smjeru osi  $z$ , i umjesto da udare u ekran u točki  $O$ , oni će zasvijetlucati na fluorescentnom ekranu u nekoj drugoj točki s koordinatom  $z_E$ .

Da bismo odredili otklon elektrona brzine  $v$ , naboja  $e$  i mase  $m$  u homogenom električnom polju  $\vec{E}$ , primijenimo drugi Newtonov zakon  $F = eE = ma$  i odredimo jednadžbu putanje. Problem je sličan horizontalnome hicu u polju sile teže i putanja je parabola:

$$z = \frac{a}{2v_0^2} y^2 = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 \quad (3.54)$$

Nakon izlaska iz električnoga polja kondenzatora elektron će se nastaviti gibati pravocrtno po tangenti na parabolu u točki  $y = L$ . Nagib tangente ( $\tan \alpha$ ) može se odrediti iz prve derivacije u toj točki:

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dy} = \frac{2E}{2mv_0^2} y = \frac{eE}{mv_0^2} L \quad (3.55)$$

\* Joseph John Thomson (1856–1940), engleski fizičar, dobitnik Nobelove nagrade za eksperimentalna istraživanja o električnoj vodljivosti plinova.



Otklon na ekranu cijevi  $z_E$  uzrokovan električnim poljem  $\vec{E}$  jednak je:

$$z_E = D \tan \alpha = \frac{e}{m} \frac{1}{v^2} ELD \quad (3.56)$$

U ovoj jednadžbi dvije su nepoznanice  $e/m$  i  $v$ , pa je potrebna još jedna jednadžba da bismo eliminirali brzinu i odredili  $e/m$ . Druga se jednadžba može dobiti primjenjujući magnetsko polje  $B$  u prostoru među pločama kondenzatora, okomito i na električno polje i na snop elektrona (znak  $\times$  na sl. 3.25).

Zbog magnetskoga polja  $B$  na elektrone djeluje sila prema dolje (u smjeru negativne osi  $z$ ),  $F = evB$ , i prisiljava ih da se gibaju po kružnici polumjera  $mv/(eB)$ . Zbog toga će, pri izlasku iz magnetskoga polja, elektroni biti otklonjeni od prvobitna smjera za neki kut  $\beta$  i na ekranu će umjesto u točku O udariti u neku drugu točku s koordinatom  $z_B$ . Slično kao za električno polje, može se pokazati da je otklon zbog magnetskoga polja:

$$z_B = -\frac{e}{m} \frac{1}{v} BLD \quad (3.57)$$

Ako se električno i magnetsko polje odaberu tako da otklon zbog magnetskoga polja poništi otklon zbog električnoga polja (tj. da snop elektrona nakon otklona udara ponovo u točku O), tada je:

$$z_E = z_B$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} \frac{1}{v^2} ELD &= \frac{e}{m} \frac{1}{v} BLD \\ v &= \frac{E}{B} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Uvrštavajući (3.58) u (3.56), može se izračunati omjer  $e/m$ :

$$\frac{e}{m} = \frac{E}{B^2} \frac{z_E}{LD} \quad (3.59)$$

iz izmjerenih podataka  $E$ ,  $B$  i  $z_E$ .

Tako je Thomson odredio  $e/m$  za katodne zrake (elektrone).

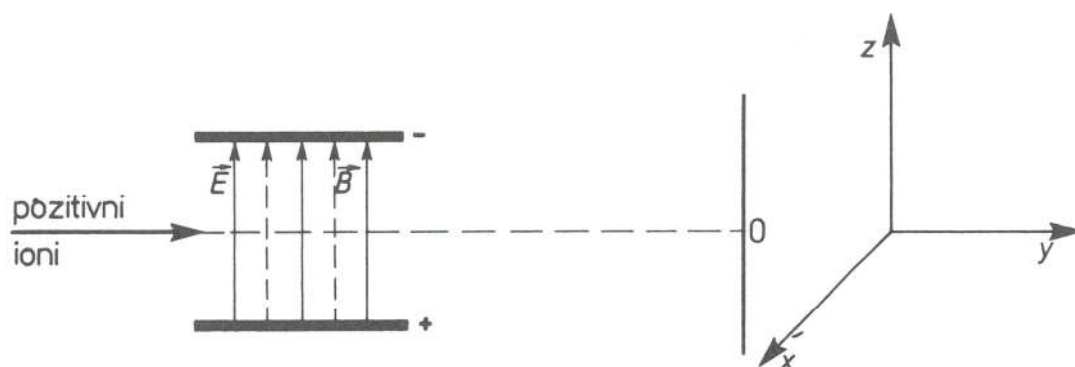
Danas omjer  $e/m$ , tzv. specifični naboj elektrona, poznajemo s velikom točnošću:

$$\frac{e}{m} = 7,75882 \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}.$$

Kasnije su napravljeni slični pokusi s pozitivnim (kanalnim) zrakama.

Pozitivni ioni, koji nastaju u blizini katode pri izbijanju u razrijeđenom plinu, mogu se propuštati kroz otvore u katodi (tzv. kanale) i tako se mogu dobiti snopovi pozitivnih iona ili, kako se još nazivaju, kanalnih zraka.

Opaženo je da kanalne zrake u električnom i magnetskom polju skreću u suprotnome smjeru nego elektroni, da im je brzina mnogo manja, a omjer naboj/masa

Slika 3.26. Mjerenje  $Q/m$  za katodne zrake

( $Q/m$ ) nekoliko tisuća puta manji nego za elektrone. Omjer  $Q/m$  također ovisi o vrsti plina u cijevi. Na osnovi tih ispitivanja zaključeno je da su pozitivne zrake ioni plina.

Thomson je umjesto ukrštenih polja, kao kod katodnih zraka, za mjerenje  $Q/m$  pozitivnih zraka upotrijebio paralelno električno i magnetsko polje okomito na smjer širenja zraka (sl. 3.26).

Zbog magnetskoga polja ioni su skretali u smjeru osi  $x$ :

$$x = \frac{Q}{m} \frac{1}{v} BLD \quad (3.60)$$

a zbog električnog polja u smjeru osi  $z$ :

$$z = \frac{Q}{m} \frac{1}{v^2} ELD \quad (3.61)$$

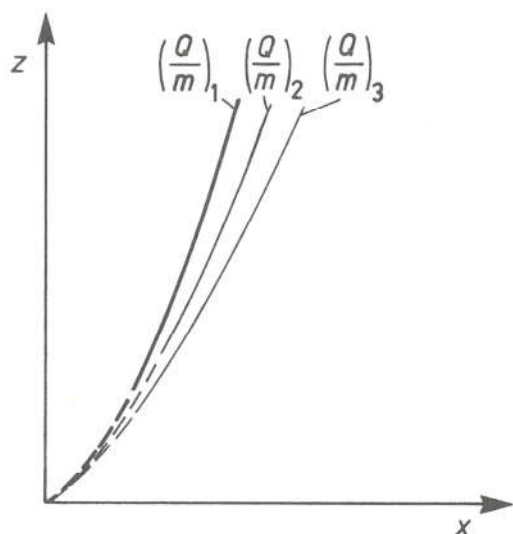
Budući da svi ioni nisu imali istu brzinu, za određeni  $E$  i  $B$  na ekranu se umjesto točke dobivala parabola, dana parametarski jednadžbama (3.60) i (3.61) odnosno sa:

$$z = \frac{mE}{QB^2LD} x^2 \quad (3.62)$$

Ako se snop sastoji od iona različitih omjera  $Q/m$ , na ekranu će se vidjeti različite parabole, svaka za određeni omjer naboj/masa (sl. 3.27).

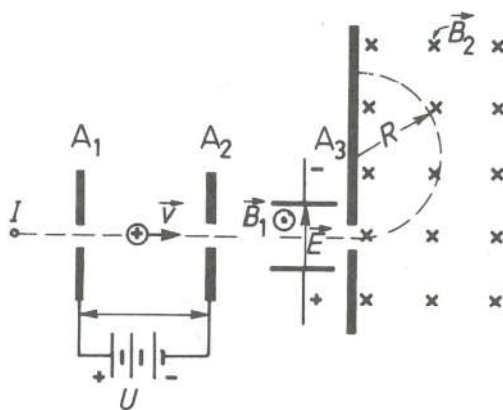
Radeći s kemijski čistim neonom, Thomson i suradnici dobili su pri mjerenju  $Q/m$  dvije parabole: jednu koja odgovara atomskoj masi 20 i drugu koja odgovara masi 22. Atomska je masa neona 20,2 i očekivala se samo jedna parabola koja odgovara toj atomskoj masi. Međutim, na osnovi rezultata tih mjerenja Thomson je zaključio da postoje dvije kemijski istovjetne vrste neona koje imaju različitu masu,  $^{20}\text{Ne}$  i  $^{22}\text{Ne}$ . Na taj su način i otkriveni izotopi neona. Thomsonov je učenik Aston izdvojio ta dva izotopa i tako ih dokazao.

Izotopi nekog elementa imaju isto mjesto u periodnom sustavu (po tome su dobili ime), isti redni broj, ista kemijska i fizikalna svojstva, a različite su im samo atomske mase. U njihovim jezgrama broj je neutrona različit, dok im je broj protona jednak. Otkrićem izotopa objašnjeno je zašto atomske mase prirodnih

Slika 3.27. Rezultat mjerenja  $Q/m$  za različite izotope

elemenata nisu cijeli brojevi. Tako je npr. udjel izotopa  $^{20}\text{Ne}$  u prirodnom neonu 91%, a izotopa  $^{22}\text{Ne}$  8,8% ( $^{21}\text{Ne}$  samo 0,2%), pa je zato atomska masa prirodnog neona sredina ovih brojeva i iznosi 20,18. Kositar npr. ima 9 izotopa, i atomsku masu 118,69, dakle, daleko od cijelog broja, dok je aluminij, Al, monoizotopan u prirodi i atomska mu je masa vrlo blizu cijelome broju (26,98).

Kanalne zrake (ioni) različita specifičnog naboja  $Q/m$  razdvajaju se pomoću tzv. spektrografa masa; tako se mogu vrlo točno odrediti relativne atomske mase pojedinih izotopa.



Slika 3.28. Maseni spektrometar

**Spektrometar masa** odvađa čestice kojima se mase malo razlikuju. Pomoću njega mogu se odrediti atomske mase iona. Iz ionskog izvora (sl. 3.28), prolazeći kroz pukotinu  $A_1$ , pozitivni ioni ubrzavaju se razlikom potencijala između  $A_1$  i  $A_2$ , prolaze kroz pukotinu  $A_2$  i ulaze u selektor brzine. To je prostor s električnim poljem  $E$  i magnetskim poljem  $B_1$ . Polja su međusobno okomita tako da električna sila  $QE$  na ione s nabojem  $Q$  djeluje prema gore, a magnetska sila  $QvB$  djeluje



prema dolje. Ioni čija brzina zadovoljava uvjet

$$QE = QvB_1$$

$$v = \frac{E}{B_1} \quad (3.63)$$

neće se otkloniti i proći će kroz pukotinu  $A_3$  u prostor s magnetskim poljem  $B_2$ . Tu se ioni gibaju po kružnoj putanji koje polumjer ovisi o njihovoj masi. Mjereći polumjer te putanje, može se odrediti masa iona:

$$\frac{mv^2}{R} = vQB_2$$

$$m = \frac{QB_2 R}{v} = \frac{QB_1 B_2 R}{E} \quad (3.64)$$

$$m = \frac{QB_1 B_2 R d}{U}$$

1)

3.11)  $F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 l}{a} \quad R = 5 \cdot \frac{l}{3} \quad R = 4,33 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad I = \frac{E}{R+r} = 191,6 \text{ A}$

$F = 2,94 \text{ N}$

$T \cdot m \cdot A = N$

2) Ioni meona u kojima je masa  $3,32 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$  i  $5,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$  ulete s kin. energijom  $E_k = 6,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$  u hom. m. polju  $\perp$  na silnice pošto opisuju polukružnice izlete iz polja razdvojeni u dva snopa. odrediti razmak između silnovima ako je  $B = 0,2 \text{ T}$

$BQv = \frac{mv^2}{r} \quad v^2 = \frac{2E_k}{m} \quad r = \frac{mv}{BQ} = \frac{1}{BQ} \sqrt{2Em} \quad r_1 = 0,175 \quad r_2 = 0,166 \quad d = 2(r_1 - r_2) = 1,8$

\*)  $v = 10^5 \text{ m/s} \quad \vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

$E = 10^4 \text{ V/m} \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$\vec{F} = ?$

$a = ?$

$a = \frac{F}{m_e}$

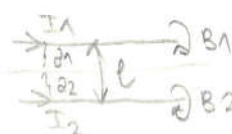
3.8) 2 duga paralelna vodiča

$l = 12 \text{ cm}$

$I_1 = 10 \text{ A}$

$I_2 = 5 \text{ A}$

$a_1 (A=0) = ?$



$B_1 = B_2 = 0$

$a_1 + a_2 = l$

$a_2 = l - a_1$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad ; \quad \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi a_1} = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi a_2}$

$\frac{I_1}{a_1} = \frac{I_2}{a_2}$

3.23) Pravokutni okvir  $a = 5 \text{ cm}$  i  $b = 20 \text{ cm}$

$B = 0,2 \text{ T}$

$A = \epsilon_0$

$\omega = 314 \text{ s}^{-1}$

$N = 200$

$\epsilon_i(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt}$



a)  $\epsilon_i = ?$

b)  $f, A = ?$

$\Phi_B = N \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos\theta$

$\theta = \omega \cdot t$

$\epsilon_i(t) = -NBS(-\sin\omega t) \cdot \omega$

$\epsilon_i(t) = \frac{NBS(a \cdot b) \omega}{\epsilon_0} \cdot \sin\omega t$

$\omega = 2\pi f$

3.11)  $E_k = 1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \cdot 1 \text{ MeV}$

$B = 3,16 \cdot 10^{-4} \text{ T}$

$F = ? \quad E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$

$r = ?$

$F = q \cdot v \cdot B$

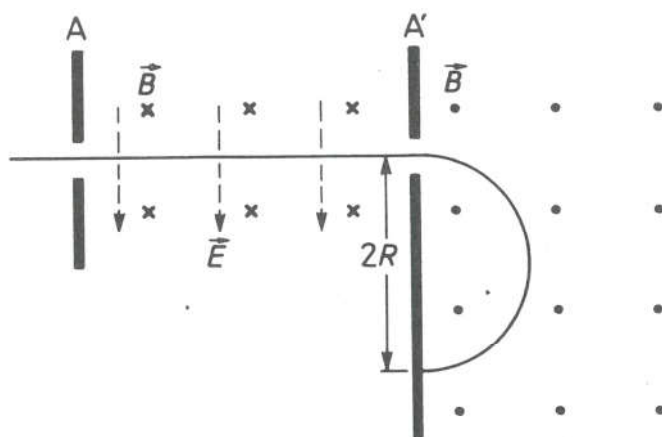
$q \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r}$

$r = \frac{m \cdot v^2}{q \cdot v \cdot B} = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$

## Pitanja i zadaci

- 3.1. Opišite vrste magneta i magnetske pojave koje poznajete.
- 3.2. Što su to magnetske silnice? Po čemu se razlikuju od električnih silnica?
- 3.3. Što je i kako se definira magnetska indukcija (gustoća magnetskoga toka)?
- 3.4. Navedite jedinice jakosti magnetskoga polja, magnetskoga toka i gustoće magnetskoga toka.
- 3.5. Kakva sila djeluje na naboj koji se giba u magnetskome polju? Po kakvoj se stazi giba takav naboj?
- 3.6. Elektron se giba brzinom od  $5 \text{ m s}^{-1}$  pod kutem  $30^\circ$  prema smjeru magnetskoga polja indukcije  $0,1 \text{ T}$ . Kolika sila djeluje na elektron?
- 3.7. Proton, gibajući se u magnetskome polju gustoće toka  $B = 0,1 \text{ T}$ , opiše kružnicu polumjera  $1,67 \text{ cm}$ . Kolika je brzina protona? Kolika bi bila brzina  $\alpha$ -čestice pri istim uvjetima?
- 3.8. Opišite metodu mjerenja magnetske indukcije (gustoće magnetskoga toka) pomoću Hallova efekta.
- 3.9. Izračunajte jakost magnetskoga polja i magnetsku indukciju (gustoću magnetskoga toka) u vakuumu na udaljenosti  $20 \text{ cm}$  od dugačkoga ravnog vodiča kroz koji teče struja jakosti  $15 \text{ A}$ .
- 3.10. Opišite kakav oblik imaju silnice magnetskoga polja u prostoru oko ravnoga vodiča, strujne petlje te cilindrične i toroidalne zavojnice kroz koju teče struja. Kako se mogu izračunati jakost magnetskoga polja i gustoća magnetskoga toka u navedenim slučajevima?
- 3.11. Izračunajte silu koja djeluje između dvaju paralelnih ravnih bakrenih vodiča udaljenih  $0,5 \text{ cm}$ , kratko spojenih na jednome kraju, a na drugom spojenih s akumulatorom elektromotorne sile  $2 \text{ V}$  i unutrašnjeg otpora  $0,01 \Omega$ . Oba vodiča imaju promjer  $2 \text{ mm}$  i duljinu  $2 \text{ m}$ .
- 3.12. Pravokutni okvir od žice, koji ima  $200$  namotaja, sa stranicama  $a = 5 \text{ cm}$  i  $b = 20 \text{ cm}$ , vrti se u magnetskome polju indukcije  $0,5 \text{ T}$  oko simetrale dulje stranice.
  - a) Ako se takva zavojnica promatra kao magnetski list, izračunajte magnetski dipolni moment te zavojnice kad kroz nju teče struja od  $2 \text{ A}$ .

- b) Izračunajte potencijalnu energiju toga dipola ako normala na list zatvara sa smjerom magnetskoga polja kutove  $\varphi = k \cdot 30^\circ$ , gdje je  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$  i  $\pm 6$ .
- c) Prikažite grafički potencijalnu energiju u ovisnosti o kutu  $\varphi$ .
- 3.13.** Snop jednostruko nabijenih pozitivnih iona različitih brzina ulazi kroz pukotinu A u prostor s ukrštenim homogenim električnim i magnetskim poljem  $E = 3,2 \cdot 10^4 \text{ Vm}^{-1}$  i  $B = 0,4 \text{ T}$  (sl. 3.29). U tom, tzv. selektoru brzine



Slika 3.29.

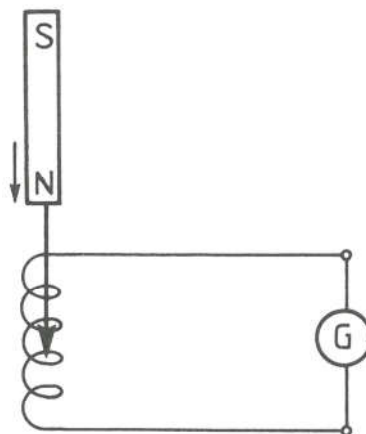
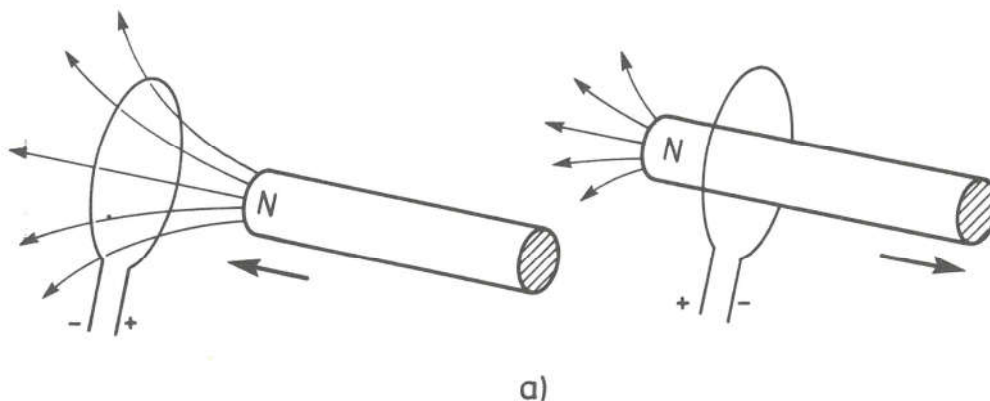
samo čestice određene brzine prođu neotklonjene i kroz pukotinu A' ulaze u homogeno magnetsko polje  $B^1 = 0,1 \text{ T}$ , tako da im je brzina  $\vec{v}$  stalno okomita na  $\vec{B}$ . Kolike su mase iona ako su polumjeri kružnica koje ioni opisuju  $R_1 = 16,59 \text{ cm}$  i  $R_2 = 18,25 \text{ cm}$ ? O kojim je ionima riječ?



## 4. Elektromagnetska indukcija

### 4.1. Faradayev zakon indukcije

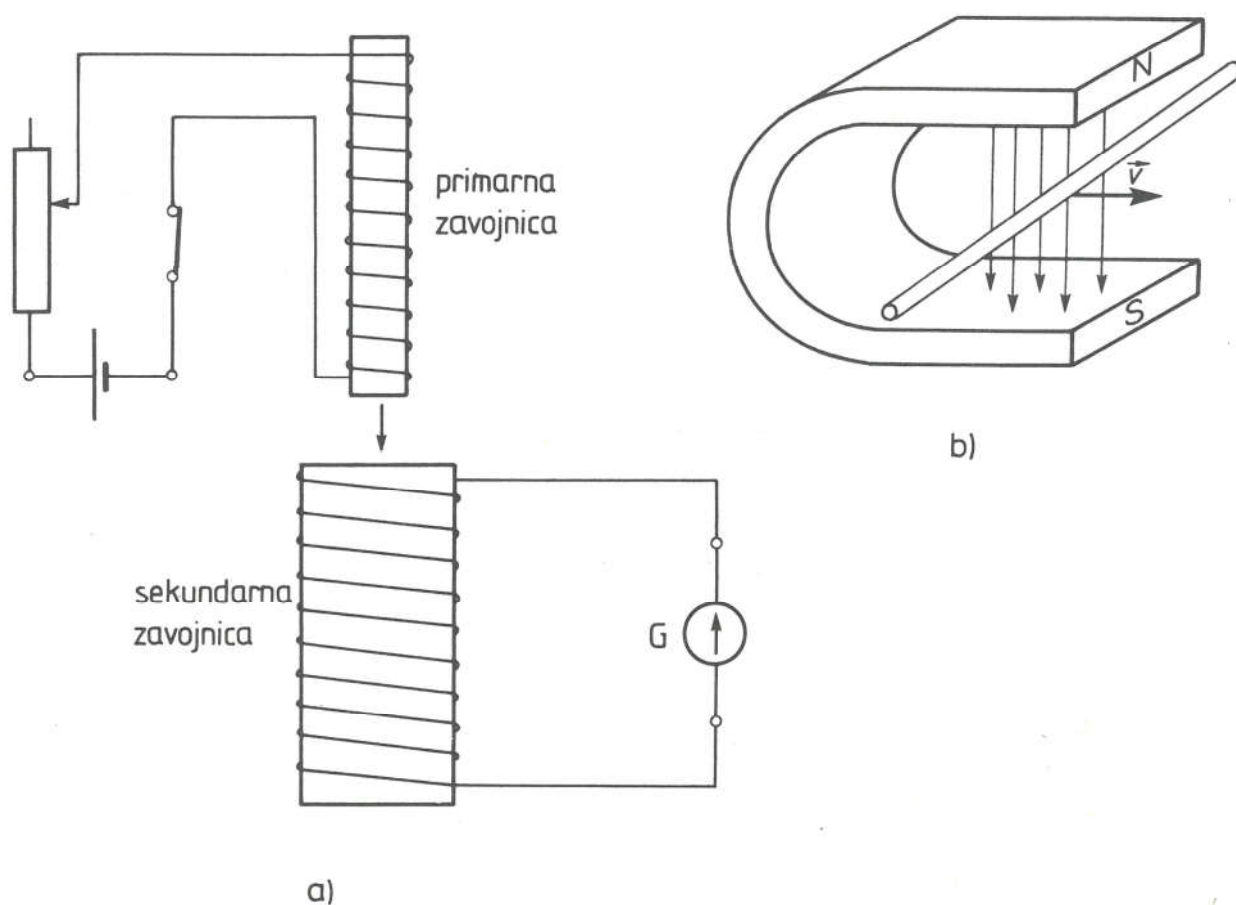
Oersted je, kao što smo već opisali, opazio da električna struja (tj. naboj u gibanju) proizvodi magnetsko polje i tako pokazao da su električne pojave uzrok magnetskim. Nešto kasnije (1831) M. Faraday pronašao je da promjenljivo magnetsko polje stvara električno. On je, naime, eksperimentalno pokazao da promjenljivi magnetski tok kroz neki vodič (zavojnicu) inducira elektromotornu silu na njegovim krajevima. Tako je pronađena elektromagnetska indukcija, jedan od najvažnijih načina dobivanja električne energije.



Slika 4.1. Dobivanje induciranog napona

Uvlačenjem magnetskoga štapa u zavojnicu (ili strujnu petlju) na njezinim se krajevima inducira elektromotorna sila, odnosno kroz strujni krug potekne struja (sl. 4.1). Izvlačenjem magneta nastaje elektromotorna sila suprotna smjera. Kad magnet miruje u zavojnici, nema inducirane elektromotorne sile, ni inducirane struje.

Elektromagnetsku indukciju opažamo i kada, umjesto permanentnoga magneta, u petlju uvlačimo elektromagnet. Ako u jednoj od dviju zavojnica (koje su blizu jedna drugoj) mijenjamo jakost struje, u drugoj (sekundarnoj) inducirat će se elektromotorna sila. Elektromotorna sila inducira se i kada vodič siječe magnetske silnice (sl. 4.2).



Slika 4.2. Elektromagnetska indukcija gibanjem

Ti i slični pokusi pokazuju da se u petlji od jednog (ili više) zavoja žice inducira elektromotorna sila uvijek kad se kroz petlju mijenja magnetski tok. Ako je pri tom strujni krug zatvoren, nastat će i inducirana struja. Inducirana je elektromotorna sila to veća što je promjena toka brža i veća i što je broj zavoja veći. Magnetski se tok može mijenjati na različite načine, kao npr. gibanjem vodiča u magnetskome polju, gibanjem magneta s obzirom na vodič, rotacijom zavojnice, promjenom struje u zavojnici i sl.

Možemo reći da je elektromagnetska indukcija pojava u kojoj se u prisutnosti magnetskoga polja mehanička energija pretvara u električnu; to se iskorištava u tehnici proizvodnje električne energije.

Mjerenja pokazuju da je veličina inducirane elektromotorne sile razmjerna brzini promjene magnetskoga toka kroz petlju (zavoj žice):

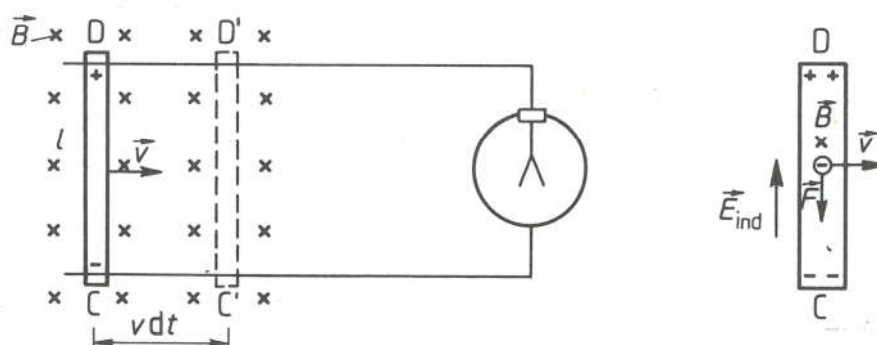
$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad (4.1)$$

Ako umjesto jednog zavoja postoji zavojnica od  $N$  zavoja, tada je:

$$\mathcal{E} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} \quad (4.2)$$

gdje je  $\Psi = N\Phi$  ukupni (tzv. ulančani) tok.

To je Faradayev zakon indukcije. Negativan predznak u (4.1) posljedica je zakona o održanju energije. Inducirana elektromotorna sila ima predznak suprotan predznaku promjene toka. Značenje predznaka minus najbolje objašnjava Lenzovo pravilo\*, koje kaže da je smjer inducirane elektromotorne sile uvijek takav da od toga napona stvorena struja svojim magnetskim učinkom nastoji poništiti uzrok koji ju je proizveo. O Lenzovu pravilu bit će još govora kasnije u tekstu.



Slika 4.3. Uz izvod Faradayevog zakona indukcije

Faradayev zakon indukcije izvest ćemo za poseban slučaj kada se komad kratka metalnog vodiča duljine  $l$  koji klizi preko dviju usporednih metalnih tračnica (sl. 4.3) giba jednolikom brzinom  $\vec{v}$  okomito na homogeno magnetsko polje  $\vec{B}$ .

Na slobodne elektrone u vodiču koji se giba u magnetskome polju djeluje Lorentzova sila  $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$  i tjera ih prema jednom kraju žice, u našem primjeru prema dolje. Možemo shvatiti da je to gibanje naboja (u smjeru od D prema C) uzrokovano induciranim neelektrostatskim električnim poljem:

$$\vec{E}_{ind} = \frac{\vec{F}}{Q} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.3)$$

\* E. H. Lenz (1804–1864), ruski fizičar, poznat po pravilu za smjer inducirane struje objavljenom 1834. g.



Žica se električki polarizira, jedan njezin kraj postaje pozitivan, a drugi negativan. Ovako razdvojeni naboji u žici stvaraju elektrostatsko polje  $\vec{E}$ ; razdvajanje naboja prestaje i ravnoteža se uspostavlja kada elektrostatsko polje postane jednako  $-\vec{v} \times \vec{B}$  i tako poništi inducirano električno polje.

Inducirana elektromotorna sila jednaka je cirkulaciji inducirano (neelektrostatskog) polja:

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{s} = \int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = vBl \quad (4.4)$$

Ako smjer gibanja vodiča (smjer vektora  $\vec{v}$ ) i smjer magnetske indukcije (polja)  $\vec{B}$  zatvaraju kut  $\theta$ , tada je inducirana elektromotorna sila:

$$\mathcal{E} = Blv \sin \theta \quad (4.5)$$

Gibanjem vodiča mijenja se površina  $S$  koju petlja (pravokutnik na sl. 4.3) obuhvaća u magnetskome polju. Za vrijeme  $dt$  vodič se pomakne za  $ds = v dt$  i pri tom se površina promijeni za  $lv dt$ ; zbog toga promjena magnetskog toka iznosi:

$$d\Phi = Blv dt \quad (4.6)$$

Odatle je:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= Blv \\ \mathcal{E}_{ind} &= -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Predznak je minus zbog Lenzova pravila. Tako bi u primjeru na sl. 4.3. struja imala takav smjer da njezino magnetsko polje bude u istom smjeru kao vanjsko jer bi se tako protivila smanjenju magnetskoga toka kroz petlju.

Faradayev zakon indukcije (4.1) možemo prikazati u još jednom obliku, praktičnijem za teoriju polja. Ako induciranu elektromotornu silu prikažemo cirkulacijom inducirano električnog polja, a magnetski tok plošnim integralom gustoće magnetskoga toka, izraz (4.1) prelazi u:

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4.8)$$

Promjena magnetskoga toka inducirala je električno polje; to je jedna od osnovnih jednadžbi elektromagnetizma.

Uočite da se magnetski tok može mijenjati na dva načina:

- mijenjanjem toka u vremenu zbog vremenske promjene magnetskoga polja u mirnoj petlji
- mijenjanjem toka zbog promjene površine petlje, tj. gibanjem pojedinih dijelova petlje.

Dok je u elektrostatici cirkulacija električnoga polja po krivulji K jednaka nuli

$$\oint_K \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = 0, \quad (4.9)$$

to ne vrijedi za inducirano električno polje: inducirano električno polje nije konzervativno.

Primjene su elektromagnetske indukcije brojne i na njima se osniva današnja elektrotehnika. Nabrojmo samo neke od njih: generatori, transformatori, induktori, mikrofon, betatron itd.

## 4.2. Lenzovo pravilo

Inducirana elektromotorna sila ovisi o brzini mijenjanja magnetskoga toka:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Kada je strujni krug zatvoren, inducirani napon uzrokuje struju:

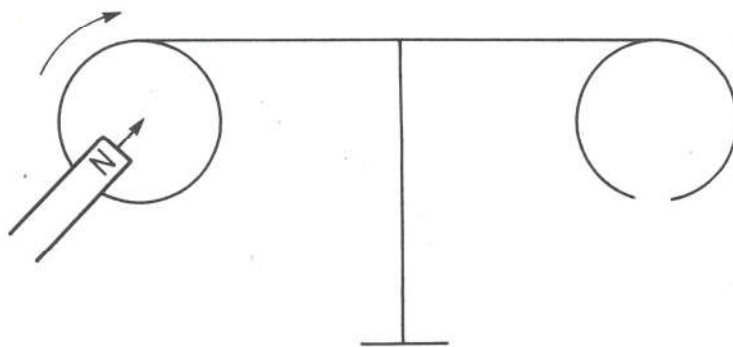
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{d\Phi/dt}{R} \quad (4.10)$$

Predznak minus u ovim jednadžbama objašnjava se Lenzovim pravilom:

Inducirana električna struja ima takav smjer da proizvodi magnetski tok koji se suprotstavlja promjeni toka zbog kojega je nastala.

Tako npr., kada se tok kroz petlju smanjuje ( $d\Phi < 0$ ), inducirana struja vlastitim tokom nastoji povećati tok; kada se tok povećava, inducira se takva struja koja svojim magnetskim učinkom nastoji smanjiti taj tok.

Lenzovo pravilo proizlazi iz zakona o održanju energije. Rad koji ulažemo kad npr. gibamo vodič u magnetskome polju, pretvara se u električnu energiju. Kada se proizvedeni magnetski tok ne bi suprotstavljao uzroku svog nastanka, tj. kada ne bi vrijedilo Lenzovo pravilo, inducirana struja stalno bi rasla pa bismo dobili neku vrstu perpetuum mobile, što je u suprotnosti sa zakonom o održanju energije.

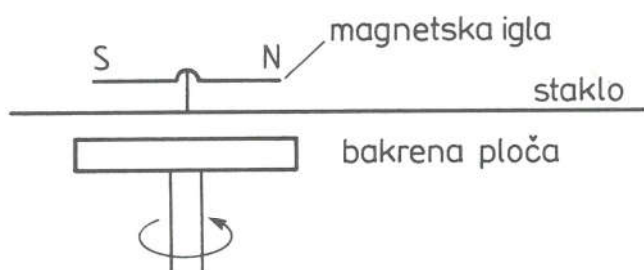


Slika 4.4. Uz ilustraciju Lenzova pravila



Kada u zatvoreni aluminijski prsten uvučemo magnet, prsten se tome nastoji izmaknuti i otkloniti se iz magnetskoga polja (sl. 4.4). Inducirana struja u prstenu proizvodi magnetsko polje suprotna smjera polju koje ju je induciralo. Kada magnet izvlačimo, prsten će se gibati u suprotnome smjeru nastojeći slijediti magnet. Naprotiv, kada prsten nije zatvoren (sl. 4.4), uvlačenje i izvlačenje magnet ne uzrokuje gibanje prstena. Zašto?

Poznatim Aragoovim pokusom (1824) mogu se lijepo pokazati elektromagnetska indukcija i Lenzovo pravilo. Kada se bakrena ploča vrti ispod magnetske igle (sl. 4.5), igla se počinje vrtjeti u istome smjeru. Zbog gibanja u magnetskome polju igle induciraju se u ploči vrtložne struje koje imaju takav smjer da svojim magnetskim efektima nastoje ukloniti uzrok koji ih je izazvao, tj. relativno gibanje ploče s obzirom na magnetsku iglu.



Slika 4.5. Aragoov pokus

Kada se masivni metalni predmet nalazi u promjenljivo magnetskom polju (odnosno giba se kroz magnetsko polje), u njemu se induciraju tzv. vrtložne (Foucaultove) struje. To su male zatvorene strujne petlje unutar vodiča, slične vrtložima u fluidu. Aragoov pokus (sl. 4.5) jedan je od primjera za induciranje vrtložnih struja.

Metalna ploča koja se može njihati između polova elektromagneta ubrzo se zaustavi kada uključimo struju kroz zavojnice elektromagneta. Slično se ukoči i kotač od aluminija koji se vrti između polova elektromagneta. Nastale vrtložne struje djeluju kao sila trenja i nastoje zaustaviti metalni predmet.

Vrtložne struje slične su trenju u mehanici, troše energiju pretvarajući je u toplinu, nepoželjne su u raznim uređajima i treba ih što više smanjiti. To se može postići upotrebom tankih međusobno izoliranih limova kao npr. u transformatorskoj jezgri.

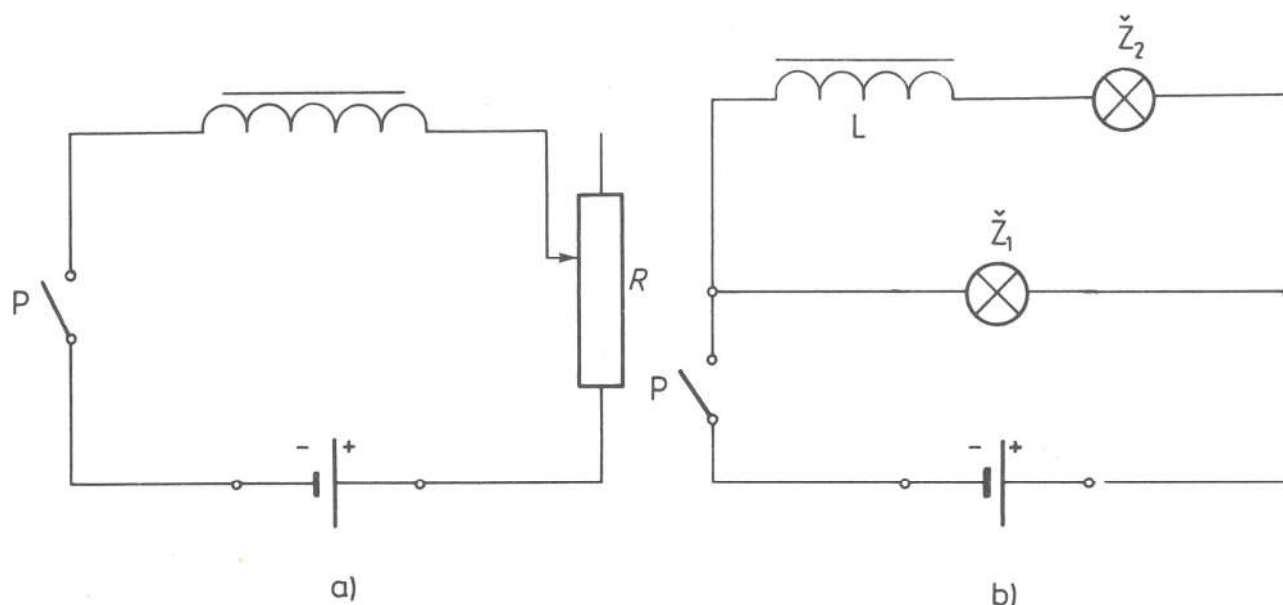
Vrtložne se struje korisno upotrebljavaju u električnome brojilu za mjerenje potroška električne energije, za zagrijavanje u indukcijskim pećima itd.

### 4.3. Samoindukcija i induktivitet

Mijenjanjem struje u petlji ili u zavojnici nastaje u njima promjenljivo magnetsko polje (sl. 4.6.a). Prema zakonu elektromagnetske indukcije to će promjenljivo polje inducirati elektromotornu silu u toj petlji ili zavojnici. Budući da zavojnica inducira elektromotornu silu sama u sebi, ta se pojava naziva samoindukcija.



Tako npr. zatvaranjem strujnoga kruga na sl. 4.6. struja počinje teći kroz zavojnicu, odnosno magnetski tok počinje rasti. Taj porast toka inducira takvu struju samoindukcije koja svojim magnetskim efektom nastoji spriječiti povećanje toka.



Slika 4.6. Samoindukcija u zavojnici

Žaruljica  $\check{Z}_1$  (sl. 4.6.b) zasvijetli odmah nakon zatvaranja prekidača, dok se žaruljica  $\check{Z}_2$ , koja je spojena preko zavojnice sa željeznom jezgrom, upali s malim zakašnjenjem.

Inducirana elektromotorna sila samoindukcije jednaka je:

$$\mathcal{E}_L = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.11)$$

Ako se kroz strujnu petlju mijenja struja s vremenom, mijenja se i magnetski tok  $\Phi$ . Budući da je magnetsko polje proporcionalno struji kroz petlju, struji je proporcionalan i magnetski tok:

$$\Phi = LI \quad (4.12)$$

Koeficijent proporcionalnosti  $L$  naziva se induktivitet (samoinduktivitet, odnosno koeficijent samoindukcije).

Za zavojnicu od  $N$  zavoja, ta relacija ima oblik

$$N\Phi = LI \quad (4.13)$$

gdje je  $\Phi$  tok kroz zavoj zavojnice, a  $L$  induktivitet cijele zavojnice.

Elektromotorna je sila samoindukcije:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (4.14)$$

Jedinica induktiviteta naziva se *henri\**, znak H:

$$H = \frac{V_s}{A} = \Omega s.$$

Ova veza slijedi iz definicijske jednadžbe za induktivitet:

$$L = - \frac{\mathcal{E}_L}{dI/dt} \quad (4.15)$$

Induktivitet vodiča (petlje, zavojnice i sl.) u vakuumu ovisi samo o geometriji (broju zavoja, duljini itd.), a ako nije u vakuumu, tada i o permeabilnosti  $\mu$  sredstva. Tako je npr. induktivitet dugačke cilindrične zavojnice (bez jezgre):

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \mu_0 S l \left( \frac{N}{l} \right)^2 \quad (4.16)$$

gdje je  $N$  broj zavoja,  $S$  presjek, a  $l$  duljina zavojnice.

#### Primjer 4.1.

Koliki je induktivitet a) torusne i b) cilindrične zavojnice?

a) Ako kroz zavojnicu od  $N$  zavoja teče struja  $I$ , a magnetski tok u zavojnici je  $\Phi$ , tada je induktivitet zavojnice:

$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

Da bismo odredili tok magnetskog polja kroz torusnu zavojnicu, integrirat ćemo  $BdS$  po presjeku torusa. Magnetsko polje nije homogeno unutar torusa već ovisi o udaljenosti  $r$  od središta zavojnice:

$$B = \mu \frac{NI}{2r\pi}$$

Ako pretpostavimo da je presjek torusa pravokutan sa stranicama  $r_2 - r_1 = a$  i  $b$ , tada je  $dS = b da = b dr$ , pa je magnetski tok kroz torus:

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{r_1}^{r_2} \mu \frac{INb}{2r\pi} dr = \mu \frac{INb}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Induktivitet je

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \mu \frac{IN^2b}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

\* Joseph Henry (1798–1878), američki fizičar, otkrio pojavu samoindukcije, električni motor i dr.

Ako je presjek torusa mnogo manji od njegove dužine, možemo magnetsko polje smatrati homogenim i  $B$  konstantnim te je

$$B = \mu \frac{NI}{2r\pi} = \mu \frac{NI}{l}, \quad L = \frac{N\Phi}{I} = \mu \frac{N^2 S}{l}$$

Isti rezultat dobivamo i ovako:

$$L = \mu \frac{N^2 b}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \approx \frac{\mu N^2 b \Delta r}{2\pi r} = \mu \frac{N^2 S}{l}$$

b) Za drugu jednoslojnu cilindričnu zavojnicu tok je:

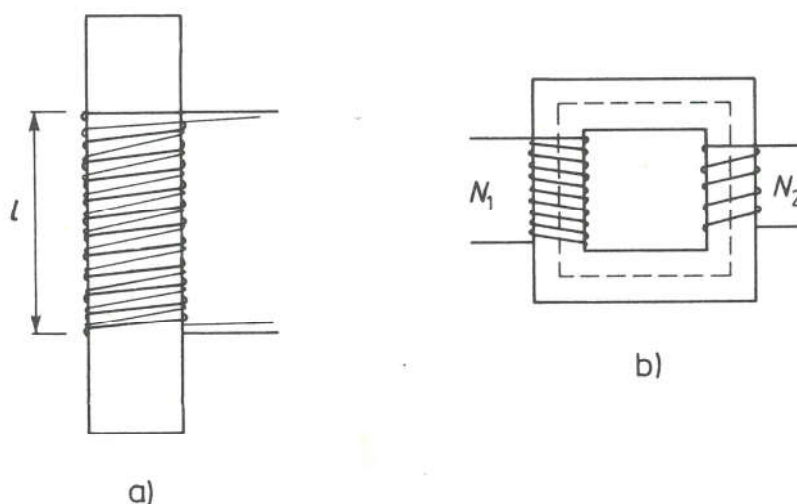
$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu \frac{NI}{l} S$$

te je induktivitet

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \mu \frac{N^2 S}{l}$$

dakle isti kao i za usku torusnu zavojnicu.

**Međuindukcija.** Ako se dvije zavojnice nalaze jedna blizu druge (tj. magnetski povezane), promjena struje u prvoj (primarnoj) uzrokuje induciranu elektromotornu silu u sekundarnoj. Ta se pojava naziva uzajamna indukcija ili međuindukcija. Promjenljiva struja u prvoj stvara, naime, promjenljiv magnetski tok koji zbog povezanosti zavojnice prolazi kroz drugu zavojnicu i u njoj inducira napon.



Slika 4.7. Međuindukcija dviju zavojnica

Pretpostavimo da su dvije jednoslojne zavojnice, prva duljine  $l$  i presjeka  $S$  s brojem navoja  $N_1$  i druga s brojem navoja  $N_2$ , namotane jedna na drugu na jezgri permeabilnosti  $\mu$  (sl. 4.7) tako da su jedna s drugom idealno magnetski vezane.



Kada kroz primarnu zavojnicu teče struja  $I_1$ , u njoj se stvara magnetski tok koji ujedno prolazi i kroz drugu zavojnicu. Ako je struja  $I_1$  promjenljiva, mijenja se i magnetski tok i u sekundarnoj zavojnici inducira se elektromotorna sila:

$$\mathcal{E} = -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} \quad (4.17)$$

Budući da je magnetski tok koji uzrokuje struja  $I_1$

$$\Phi = BS = \mu \frac{N_1 I_1}{l} S \quad (4.18)$$

i da, prema pretpostavci, čitav taj tok prolazi i kroz drugu zavojnicu, induciranu elektromotornu silu možemo pisati i u obliku:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = -N_2 \frac{\mu N_1 S}{l} \frac{dI_1}{dt} = -\frac{\mu S N_1 N_2}{l} \frac{dI_1}{dt} \quad (4.19)$$

Označimo li

$$L_{12} = \frac{\mu S N_1 N_2}{l} \quad (4.20)$$

dobivamo

$$\mathcal{E}_2 = -L_{12} \frac{dI_1}{dt} \quad (4.21)$$

gdje je  $L_{12}$  koeficijent međui indukcije ili međui induktivitet dviju zavojnica.

Budući da su induktiviteti svake pojedine zavojnice

$$L_1 = \frac{\mu N_1^2 S}{l} \quad L_2 = \frac{\mu N_2^2 S}{l} \quad (4.22)$$

vidimo da se međui induktivitet može prikazati i jednadžbom:

$$L_{12} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (4.23)$$

Ako primar i sekundar nisu idealno povezani, međui induktivitet je manji od  $\sqrt{L_1 L_2}$  i može se prikazati formulom:

$$L_{12} = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (4.24)$$

gdje je faktor veze  $k$  manji od jedan ( $0 \leq k \leq 1$ ).

Ukupni magnetski tok kroz sekundarnu zavojnicu može se izraziti pomoću induktiviteta:

$$N_2 \Phi = L_{12} I_1 \quad (4.25)$$

Često se primarna i sekundarna zavojnica motaju na zatvorenoj željeznoj jezgri (sl. 4.7.b) i tako postiže vrlo dobro magnetsko vezanje (v. odjeljak 6.6). Međui induktivitet se i u tom slučaju računa formulom (4.20), gdje je  $l$  duljina magnetskoga toka (srednja duljina željezne jezgre).

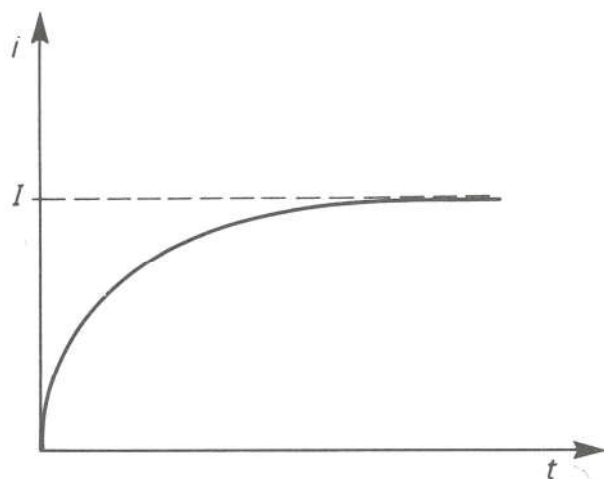
## 4.4. Energija magnetskoga polja

Kada se na zavojnicu induktiviteta  $L$  priključi određeni napon, struja neće odmah postići maksimalnu vrijednost jer će joj se suprotstavljati struja samoindukcije.

Može se pokazati da pri ukapčanju struja kroz serijski  $LR$ -krug raste eksponencijalno po zakonu

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (4.26)$$

i približava se vrijednosti  $I = \mathcal{E}/R$  koju praktično i dostigne kad je  $t \gg L/R$  (sl. 4.8). Magnetsko polje u zavojnici pri tom raste od nule do maksimalne vrijednosti  $NI/l$ .



Slika 4.8. Porast struje kroz zavojnicu

Kada struja kroz zavojnicu poraste od  $i$  na  $i + di$ , na krajevima zavojnice inducira se elektromotorna sila  $e_L = -L di/dt$ , a energija  $e_L i dt$  prijeđe iz izvora u magnetsko polje zavojnice:

$$dE_m = e_L i dt = Li di \quad (4.27)$$

Ukupna energija magnetskoga polja zavojnice kada je kroz nju uspostavljena struja jakosti  $I$  iznosi dakle:

$$\begin{aligned} E_m &= \int_0^I Li di \\ E_m &= \frac{LI^2}{2} \end{aligned} \quad (4.28)$$

(Usporedite (4.28) s izrazom (1.78) za energiju električnoga polja kondenzatora.)

Ako se zavojnica kroz koju teče struja  $I$  odvoji od izvora napona i istovremeno spoji s otporom  $R$  u zatvoreni strujni krug, zavojnica će se ponašati kao izvor i kroz otpor će teći struja

$$i = Ie^{-\frac{R}{L}t} \quad (4.29)$$

Magnetska energija zavojnice pretvarat će se pritom u unutrašnju energiju (toplinu) u otporniku sve dok ne iščezne i struja postane nula.

Da bismo dobili gustoću energije magnetskoga polja zavojnice, transformirajmo izraz (4.28) uvrštavanjem (4.16) i (3.10):

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l} \quad \text{i} \quad I = \frac{Hl}{N}$$

$$E_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu N^2 S H^2 l^2}{N^2 l} = \frac{1}{2} \mu H^2 S l \quad (4.30)$$

Gustoća energije magnetskoga polja  $w_m$  iznosi dakle:

$$w_m = \frac{\text{energija}}{\text{volumen}} = \frac{E_m}{Sl} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (4.31)$$

Pokažite da izraz (4.31) možemo pisati u više oblika:

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (4.32)$$

Izraz za gustoću energije (4.32), koji smo izveli za zavojnicu, vrijedi i općenito za bilo koje magnetsko polje u prostoru.

#### Primjer 4.2.

Kolika je gustoća energije i energija magnetskoga polja u zavojnici (bez jezgre) u obliku valjka polumjera 1 cm, duljine 30 cm, koja ima 300 zavoja, kada kroz nju teče struja jakosti 1 A?

Budući da je duljina zavojnice dosta veća od promjera pretpostavit ćemo da je polje homogeno:

$$H = NI/l = 1000 \text{ Am}^{-1}.$$

Gustoća je energije magnetskog polja:

$$w = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = 0,628 \text{ Jm}^{-3}.$$

Energija polja je:

$$E_m = wSl = 5,9 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

(Kod električnih strojeva gustoće energije magnetskoga polja dostižu vrijednosti i do  $10^5 \text{ Jm}^{-3}$ .)



**Primjer 4.3.**

Zavojnica induktiviteta 12 mH i otpora 12  $\Omega$  spojena je na izvor napona 12 V. Pošto se prekidač zatvori, kroz koje će vrijeme struja u krugu dostići vrijednost 0,5 A? Izračunajte snagu koju daje izvor u tom trenutku, snagu koja se u obliku Jouleove topline troši na otporniku i snagu koja se u obliku energije magnetskoga polja uskladištava u induktivitetu zavojnice.

Zbog induktiviteta struja će rasti eksponencijalno od nule do konačne vrijednosti  $I_0$  prema jednadžbi:

$$i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

gdje je  $\tau = L/R$  vremenska konstanta kruga koja ovdje iznosi

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{12 \cdot 10^{-3} \text{ H}}{12 \Omega} = 1 \text{ ms}.$$

(Uočite da je  $\text{H}/\Omega = \frac{\text{VsA}^{-1}}{\text{VA}^{-1}} = \text{s}$ .)

Nakon dovoljno duga vremena ( $t \rightarrow \infty$ ) struja kroz krug bit će  $I_0$ , dana Ohmovim zakonom:

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{12 \text{ V}}{12 \Omega} = 1 \text{ A}.$$

Budući da je tražena vrijednost  $i = 0,5 \text{ A}$  upravo jednaka  $I_0/2$ , vrijedi:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2}, \quad e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2}$$

$$t = \tau \ln 2 = 0,69 \tau = 0,69 \text{ ms}.$$

Tada je trenutna snaga iz izvora:

$$P_1 = \mathcal{E}i = 12 \text{ V} \cdot 0,5 \text{ A} = 6 \text{ W}.$$

Snaga je na otporniku:

$$P_2 = Ri^2 = 12 \Omega \cdot 0,25 \text{ A}^2 = 3 \text{ W},$$

a snaga na induktivitetu:

$$P_3 = \mathcal{E}_L i = L \frac{di}{dt} i$$

$$P_3 = L \frac{U}{R} \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} i = U i e^{-\frac{t}{\tau}}$$

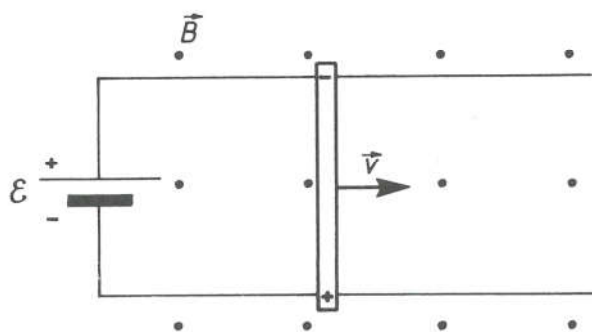
$$P_3 = 3 \text{ W}$$

Prema zakonu očuvanja energije mora biti:

$$P_1 = P_2 + P_3$$
$$6 \text{ W} = 3 \text{ W} + 3 \text{ W}.$$

## Pitanja i zadaci

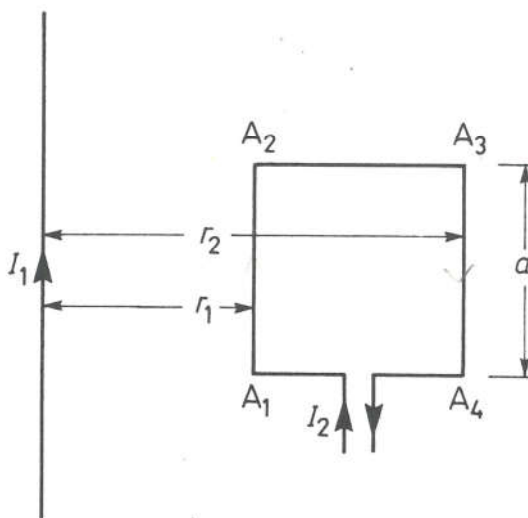
- 4.1. Opišite pokuse u kojima se opažaju inducirani napon i inducirana struja.
- 4.2. O čemu ovisi inducirana elektromotorna sila?
- 4.3. Što je to ulančani tok?
- 4.4. Kvadratni okvir od žice stranice 10 cm nalazi se u homogenom magnetskom polju od 0,01 T. Silnice polja prolaze okomito kroz ravninu okvira.
- a) Kolik je magnetski tok kroz okvir?
- b) Ako se polje jednoliko smanjuje i za 0,5 s padne na nulu, izračunajte kolika je inducirana elektromotorna sila u okviru.
- 4.5. Obrazložite Lenzovo pravilo kojim se određuje smjer inducirana napona.
- 4.6. Kvadratni okvir od žice ( $a = 10$  cm) vrti se u homogenom magnetskom polju  $B = 0,2$  T oko simetrale jedne stranice kutnom brzinom  $\omega = 314$  s<sup>-1</sup>. Okvir ima 200 zavoja.
- a) Kako inducirana elektromotorna sila ovisi o vremenu?
- b) Kolike su frekvencija i amplituda dobivene izmjenične struje?
- 4.7. Pravocrtni vodič duljine 40 cm i otpora 0,5  $\Omega$  giba se brzinom  $v = 2$  m s<sup>-1</sup> u homogenom magnetskom polju  $B = 0,5$  T, tako da okomito siječe silnice (sl. 4.9). Vodič je spojen na akumulator elektromotorne sile 2 V i unutrašnjeg otpora 0,1  $\Omega$ . Otpor vodiča je zanemariv. Kolika je jakost struje kroz vodič?



Slika 4.9.



- 4.8. Kvadratni okvir od žice nalazi se u zraku paralelno sa dugačkim ravnim vodičem i u istoj ravnini s njim (sl. 4.10). Kroz vodič teče struja jakosti  $I = 10$  A. Udaljenosti stranica kvadrata od vodiča su  $r_1 = 5$  cm i  $r_2 = 10$  cm.



Slika 4.10.

- a) Izračunajte tok magnetskoga polja kroz okvir.
- b) Kolika je inducirana elektromotorna sila u okviru, ako jakost struje u vodiču počne rasti po zakonu  $I = (10 + 2t \text{ s}^{-1})$  A?
- 4.9. a) Izračunajte induktivitet cilindrične zavojnice dugačke 12 cm, polumjera 1 cm, bez jezgre, ako se na 1 cm nalazi 38 zavoja žice.
- b) Kolika je energija spremljena u toj zavojnici kada kroz nju teče struja jakosti 12 A?
- 4.10. Izračunajte kolik je koeficijent samoindukcije zavojnice sa željeznom jezgrom, ako se za vrijeme od  $\Delta t = 0,5$  s jakost struje koja teče zavojnicom promijeni s  $I_1 = 10$  A na  $I_2 = 5$  A, pri čemu se na njezinim krajevima inducira napon  $\mathcal{E} = 25$  V.

## 5. Magnetsko polje u materijalu

### 5.1. Magnetizacija

Mjerenja pokazuju da se magnetska indukcija mijenja kada u magnetsko polje (npr. unutar zavojnice) unesemo neki materijal. Ako je magnetska indukcija zavojnice bez jezgre:

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{l} \quad (5.1)$$

tada ta ista zavojnica s jezgrom ima magnetsku indukciju:

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{NI}{l} = \mu_r B_0 \quad (5.2)$$

Relativna magnetska permeabilnost materijala  $\mu_r$  omjer je magnetske indukcije u materijalu i magnetske indukcije bez materijala:

$$\mu_r = \frac{B}{B_0} \quad (5.3)$$

Dok jakost magnetskog polja  $H$  ovisi samo o jakosti struje kroz zavojnicu, magnetska indukcija  $B$  ovisi o materijalu unutar zavojnice.

Slično kao što smo vektorom polarizacije opisali ponašanje materijala u električnome polju, tako ćemo magnetizacijom  $\vec{M}$  opisati utjecaj sredstva na magnetsko polje:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B} - \vec{B}_0}{\mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \quad (5.4)$$

Veza je između vektora magnetske indukcije  $\vec{B}$ , jakosti magnetskog polja  $\vec{H}$  i magnetizacije  $\vec{M}$ :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (5.5)$$

U većini slučajeva magnetizacija je razmjerna jakosti magnetskoga polja:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (5.6)$$

Konstanta proporcionalnosti  $\chi_m$  naziva se **magnetska susceptibilnost** materijala. Iz (5.4), (5.5) i (5.6) može se odrediti veza između susceptibilnosti i permeabilnosti:

$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad (5.7)$$

Za vakuum je, naravno,  $\mu_r = 1$  ( $\chi_m = 0$ ), a za zrak  $\mu_r$  gotovo je isti kao i za vakuum. S obzirom na magnetska svojstva, materijale možemo podijeliti u tri skupine:

1. Materijali čija je permeabilnost  $\mu_r$  mnogo veća od jedinice ( $\chi_m \gg 0$ ) nazivaju se feromagnetici. To su željezo, nikal, kobalt i njihove legure.

Susceptibilnost željeza ovisi o jakosti polja i reda je veličine 1 000; postoje posebne feromagnetske legure kojih susceptibilnost, (odnosno permeabilnost) dostiže vrijednosti i do  $10^5$ .

2. Materijali čija je relativna permeabilnost  $\mu_r$  nešto malo veća od jedinice pa je  $\chi_m > 0$  nazivaju se paramagnetici. Oni malo povećavaju magnetsku indukciju s obzirom na onu u vakuumu. To su Al, Pt, W, Ta itd.
3. Materijali čija je relativna permeabilnost nešto manja od jedinice pa je  $\chi_m < 0$ , nazivaju se dijamagnetici. Oni malo smanjuju magnetsku indukciju  $B$ . Dijamagnetični materijali su Bi, Pb, Cu, H<sub>2</sub> itd.

Tablica 5.1. Magnetske susceptibilnosti  $\chi_m$  nekih materijala pri sobnoj temperaturi

| Tvar           | $\chi_m$            | Tvar           | $\chi_m$              |
|----------------|---------------------|----------------|-----------------------|
| Pt             | $2,6 \cdot 10^{-4}$ | Bi             | $-20 \cdot 10^{-5}$   |
| Al             | $2,1 \cdot 10^{-5}$ | Cu             | $-0,96 \cdot 10^{-5}$ |
| Mg             | $1,2 \cdot 10^{-5}$ | H <sub>2</sub> | $-1,1 \cdot 10^{-9}$  |
| O <sub>2</sub> | $2 \cdot 10^{-6}$   | N <sub>2</sub> | $-5 \cdot 10^{-9}$    |

## 5.2. Dijamagnetizam

U nehomogenom magnetskom polju kuglica od bizmuta giba se u smjeru slabijega polja. To vrijedi bez obzira na smjer magnetskoga polja. Bizmut se, dakle, ponaša sasvim suprotno od željeza. Slično se ponašaju i ostali dijamagnetski materijali.

Dijamagnetski materijali imaju male negativne vrijednosti susceptibilnosti (od  $-10^{-5}$  do  $-10^{-3}$ ). Za razliku od paramagnetizma i feromagnetizma, dijamagnetizam je svojstvo svih materijala. Međutim, materijali će pokazivati dijamagnetizam i imati negativnu susceptibilnost samo ako dijamagnetizam u njima nije nadjačan paramagnetizmom ili feromagnetizmom. Uzrok magnetizma u materijalu su atomske struje uzrokovane orbitalnim gibanjem elektrona oko jezgre i vlastitim spinom elektrona. Ako se magnetski efekti svih elektronskih struja međusobno ponište, materijali ne pokazuju magnetska svojstva.

Dijamagnetizam se može objasniti atomističkom strukturom materijala. Dijamagnetični materijali imaju nemagnetične molekule (atome). Dipolni momenti



elektrona u takvom atomu međusobno se poništavaju pa atom (molekula) kao cjelina nema permanentni magnetski dipolni moment. Kada se materijal unese u vanjsko magnetsko polje, u strujnim petljama elektrona induciraju se magnetski dipolni momenti suprotnoga smjera od vanjskoga magnetskog polja (Lenzovo pravilo), i zato dijamagnetične tvari slabe vanjsko magnetsko polje. Takva inducirana struja ostaje sve do nove promjene vanjskoga polja. Dijamagnetizam je moguće objasniti i proračunati magnetsku susceptibilnost samo kvantnom teorijom. Pomoću klasične fizike možemo dobiti samo približan rezultat, koji ovdje navodimo bez izvoda\*.

Ako je  $n$  koncentracija elektrona (broj elektrona u jedinici volumena),  $m$  masa,  $e$  naboj i  $r$  polumjer putanje elektrona,  $\Delta p_m$  dodatni dipolni magnetski moment, tada je magnetizacija materijala, tj. magnetski moment jedinice volumena:

$$\vec{M} = n\Delta\vec{p}_m = -\mu_0 \frac{ne^2r^2}{4m} \vec{H} \quad (5.8)$$

pri čemu predznak minus izražava suprotnu orijentaciju induciranog magnetizma.

Budući da je  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ , magnetska je susceptibilnost dijamagnetskih materijala:

$$\chi_m = -\mu_0 \frac{ne^2r^2}{4m} \quad (5.9)$$

Ovaj se rezultat dobiva pomoću klasične fizike, a kvantna fizika daje nešto točniji rezultat.

Iz relacije (5.9) uočavamo da je magnetska susceptibilnost dijamagnetika negativna i neovisna o temperaturi.

### 5.3. Paramagnetizam

Ako atomi (molekule) u materijalu imaju permanentni magnetski dipolni moment, tada materijal ima paramagnetična svojstva. Kada nema vanjskoga magnetskog polja, atomski magnetski momenti orijentirani su kaotično pa je ukupni dipolni moment materijala jednak nuli. U vanjskom magnetskom polju indukcije  $B$  na te dipole djeluje moment sile koji elementarne magnetiće nastoji usmjeriti uzduž polja (ne sasvim jer ih termičko gibanje u tome ometa) i tako nastaje određena (iako mala) paramagnetska magnetizacija.

U nehomogenu magnetskom polju kuglica od aluminijske i magnezije giba se u smjeru jačega polja. Slično se ponašaju i drugi paramagnetski materijali.

Magnetizacija  $M$  i susceptibilnost  $\chi_m$  paramagnetika ovise o temperaturi po tzv. Curievu zakonu:

$$\chi_m = \frac{\mu_0 n}{3kT} p_m^2 = \frac{\text{konst.}}{T} \quad (5.10)$$

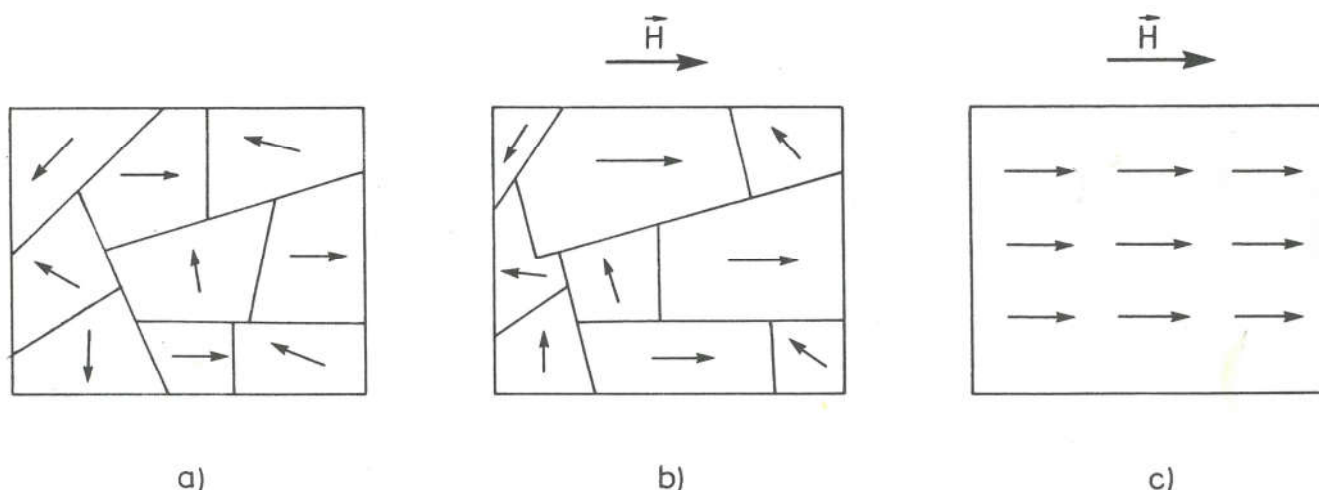
gdje je  $p_m$  permanentni atomski ili molekularni magnetski dipolni moment,  $n$  broj molekula po jedinici volumena,  $T$  apsolutna temperatura,  $k$  Boltzmanova konstanta i  $\mu$  permeabilnost vakuuma.

\* Detaljnije o magnetskim svojstvima materijala v. npr. V. Knapp, P. Colić, *Uvod u električna i magnetska svojstva materijala*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

Molekularno gibanje povećava se s porastom temperature i ono ometa usmjerenje elementarnih magneta i zato je  $\chi_m$  obrnuto razmjerna apsolutnoj temperaturi, tj. smanjuje se s porastom  $T$ . Ako u (5.10) uvrstimo  $p_m \approx 10^{-23}$  J/T, dobivamo  $\chi_m$  oko  $10^{-4}$ ;  $\chi_m$  je malo i često ga možemo zanemariti. I paramagnetici imaju dijamagnetska svojstva, tj. i u njihovim se elektronskim putanjama inducira dodatni dipolni moment smjera suprotna vanjskome magnetskom polju. Međutim, dodatna je magnetizacija zbog paramagnetizma jača od one zbog dijamagnetizma, tako da je u paramagnetskim materijalima dijamagnetski efekt potpuno zasjenjen paramagnetskim.

#### 5.4. Feromagnetizam

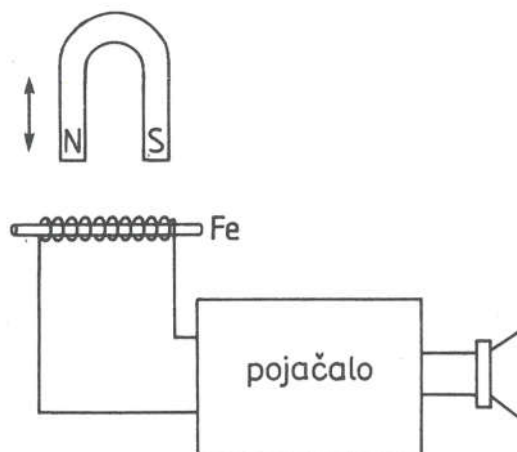
Magnetizacija željeza i drugih feromagnetika vrlo je velika, pa oni izrazito povećavaju magnetsku indukciju i magnetski tok. U takvim materijalima postoje mikroskopska područja ( $10^{-8} - 10^{-12}$  m<sup>3</sup>) spontane magnetizacije – tzv. Weissove domene. U svakoj domeni svi atomi (kojih u domeni ima oko  $10^{20}$ ) imaju paralelne magnetske dipolne momente, pa se domena ponaša kao mali permanentni magnet. U nemagnetiziranom materijalu smjerovi su magnetskih momenata domena raspoređeni kaotično pa materijal kao cjelina nije magnetičan (sl. 5.1.a). Vanjsko polje dvojako utječe na orijentaciju domena: domene u smjeru polja povećavaju se na račun onih kojih je smjer suprotan polju (sl. 5.1.b), dok jača polja mogu zarotirati domene i tako ih orijentirati u smjeru polja. Slika 5.1.c prikazuje da su za jaka magnetska polja svi elementarni magneti željeza orijentirani u smjeru vanjskoga polja.



Slika 5.1. Weissove domene u željezu

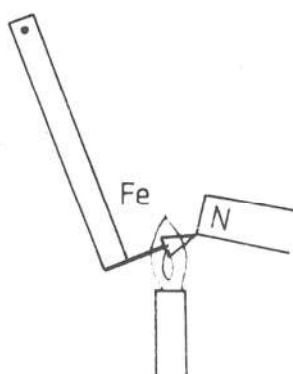
**Barkhausenov efekt.** U zavojnici, koja je spojena s pojačalom i zvučnikom, nalazi se željezna žica (sl. 5.2). Kada približavamo permanentni magnet, domene u željezu orijentiraju se u smjeru polja. Pritom se u zavojnici induciraju kratkotrajni

strujni impulsi koji uzrokuju šum u zvučniku. Pokus pokazuje da se magnetizacija željeza sastoji od niza diskontinuiranih procesa u kojima se domene orijentiraju u smjer polja. Ako željezo izvučemo iz zavojnice, ili ako u zavojnicu umjesto željezne stavimo bakrenu žicu, približavanje magneta ne izaziva šum u zvučniku.



Slika 5.2. Barkhausenov pokus

Pri visokim temperaturama toplinsko gibanje postaje dovoljno jako da razruši orijentaciju magnetskih dipola unutar domena pa feromagnetici gube feromagnetska svojstva i ponašaju se kao paramagnetici. Temperatura na kojoj se to događa naziva se *Curieva temperatura*. Tako je npr. Curieva temperatura za čisto željezo  $770\text{ }^{\circ}\text{C}$ , za nikal  $360\text{ }^{\circ}\text{C}$ , za kobalt  $1075\text{ }^{\circ}\text{C}$  i za gadolinij  $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ .



Slika 5.3. Feromagnetsko njihalo

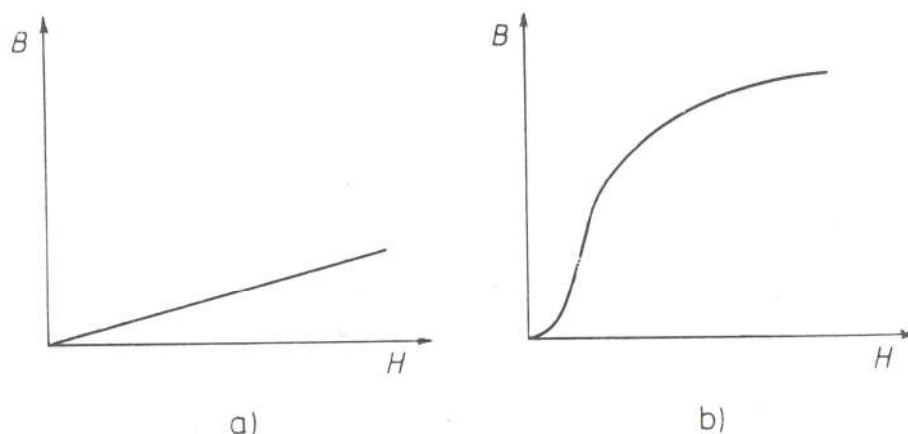
Gubitak feromagnetičnosti željeza može se pokazati pomoću feromagnetskog njihala (sl. 5.3). Kada se željezna pločica dovoljno zagrije, odvoji se od magneta, njihalo se zanjše, pločica iziđe iz plamena, ohladi se, pa je permanentni magnet ponovno privuče i tako se proces ponavlja i njihanje se održava.



### 5.5. Feromagnetski materijali. Krivulja magnetiziranja

Dok je za dijamagnetske i paramagnetske materijale magnetska indukcija strogo razmjerna jakosti magnetskoga polja ( $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$ ), pa su permeabilnost i susceptibilnost konstantne, za feromagnetske materijale permeabilnost i susceptibilnost nisu konstantne, nego funkcije jakosti magnetskoga polja.

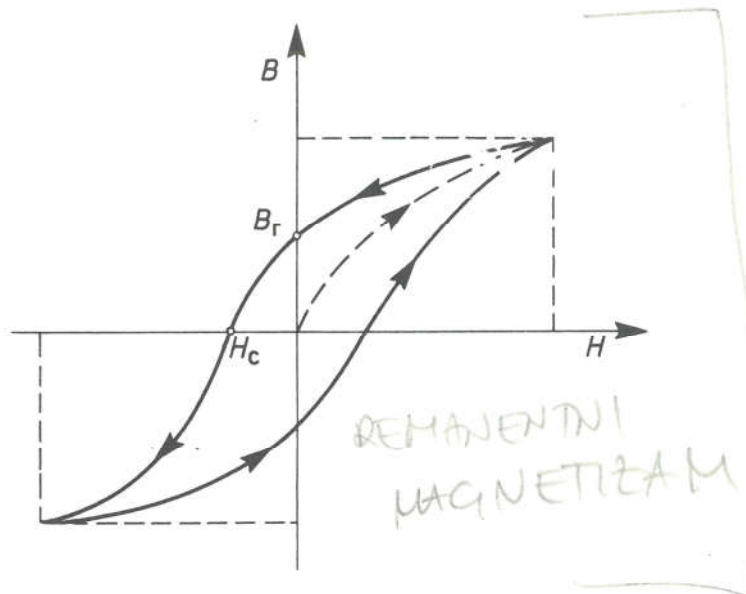
Kada se željezo nađe u vanjskom magnetskom polju (npr. u zavojnici kroz koju teče struja), Weissove domene kojih je spontana magnetizacija paralelna vanjskom polju povećavaju se na račun drugih domena i tako se magnetska indukcija povećava s porastom jakosti magnetskoga polja. Kada se svi elementarni magneti u željezu usmjere prema magnetskome polju, magnetizacija poprima maksimalnu vrijednost, i daljnje povećanje polja ne mijenja magnetizaciju željeza. Željezo se magnetski zasitilo.



Slika 5.4. Krivulje magnetiziranja a) paramagnetskog i b) feromagnetskog materijala

Slika 5.4. prikazuje krivulje magnetiziranja nemagnetičnog (npr. paramagnetičnog) i feromagnetičnog materijala, tj. gustoću magnetskog toka  $B$  u materijalu kao funkciju jakosti magnetskoga polja (ili jakosti struje kroz zavojnicu). Dok je prva krivulja pravac, krivulja za željezo svija se prema horizontali i nakon zasićenja raste toliko koliko bi rasla i u vakuumu (tj. za  $\mu_0 H$ ). Budući da je  $B = \mu_0 H + \mu_0 M$ , i magnetizacija se mijenja po sličnoj krivulji. Pretpostavili smo da je željezo, kojega je krivulja magnetiziranja prikazana na sl. 5.4. prije mjerenja bilo sasvim nemagnetično i zato se takva krivulja naziva krivulja prvog magnetiziranja.

Ako bismo nakon što smo magnetizirali željezo, postupnim slabljenjem struje smanjivali jakost magnetskoga polja, opazili bismo da se magnetska indukcija  $B$  i magnetizacija  $M$  ne smanjuju do nule po istoj krivulji koju smo dobili povećavajući magnetsko polje  $H$ , već preko nove krivulje vrijednosti koje su za indukciju  $B$  i magnetizaciju  $M$  nešto veće za istu vrijednost jakosti magnetskoga polja (sl. 5.5). Posebno za  $H = 0$  (tj. kada kroz zavojnicu ne teče struja) u željezu još uvijek zaostaje neki magnetski tok  $\Phi_r$  i magnetska indukcija  $B_r$ . To je tzv. **remanentni magnetizam**.



Slika 5.5. Krivulja histereze

Da bi se željezo razmagnetiziralo, tj. da bi se magnetska indukcija svela na nulu, potrebno je okrenuti smjer magnetskoga polja (tj. struje kroz zavojnicu). Vrijednost  $H_c$  pri kojoj se zaostali magnetizam potpuno poništi naziva se koercitivno polje ili koercitivna sila. Daljnjim porastom struje željezo se magnetizira u suprotnome smjeru, sve do zasićenja. Ponovnim smanjenjem struje do nule i povećanjem u prijašnjem smjeru dobivamo sličnu krivulju magnetiziranja, ali ispod one prve (sl. 5.5). Ovakva krivulja naziva se petlja histereze i služi kao važna karakteristika magnetskih svojstava materijala.

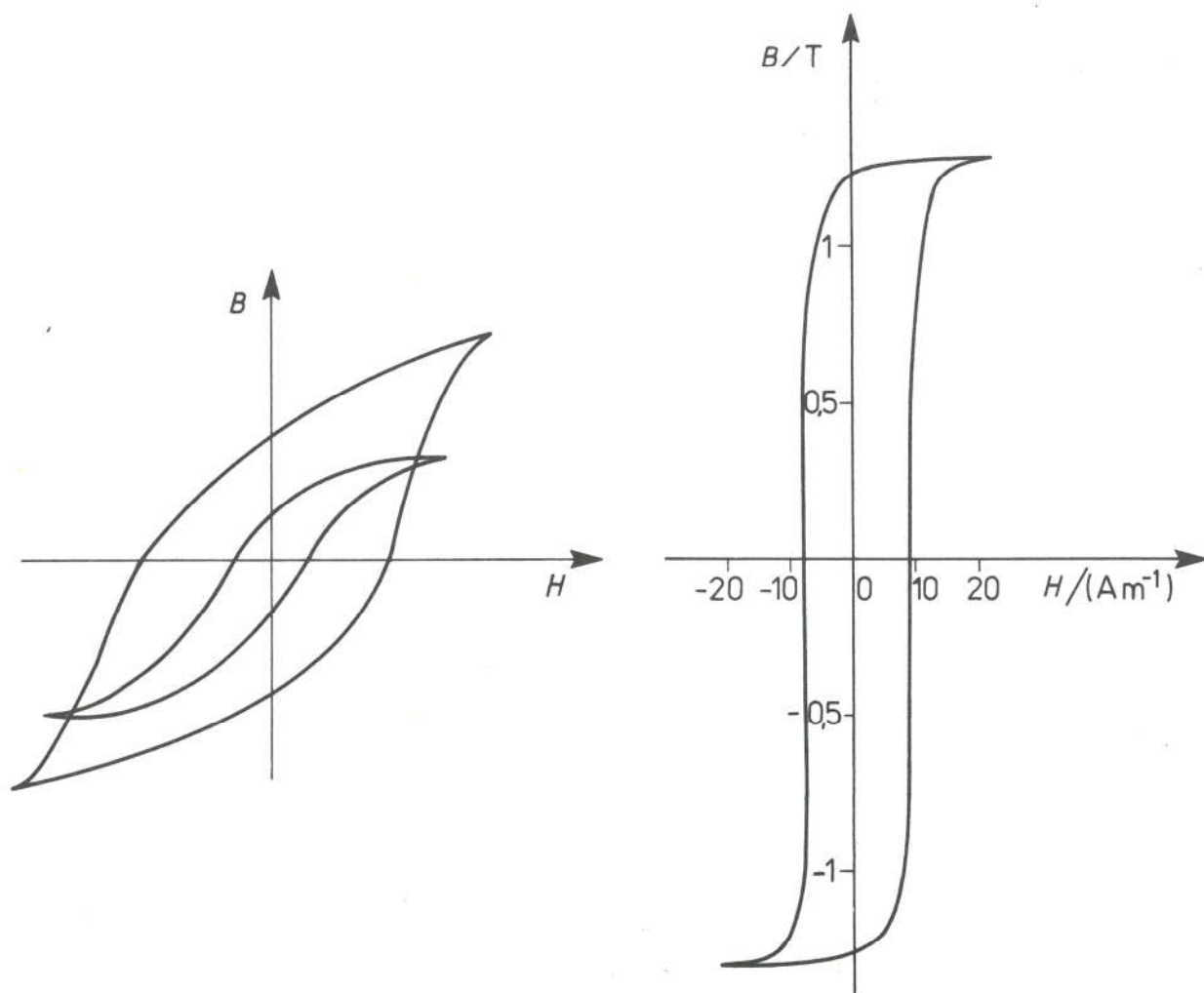
Meki feromagnetski materijali imaju usku petlju histereze i maleno koercitivno polje  $H_c$  (oko  $0,5 \text{ A/m}$ ) odnosno mali produkt  $B_r H_c$  (i do  $2 \text{ J/m}^3$ ).

Tvrđi magnetski materijali (npr. za izradu permanentnih magneta) imaju velike petlje histereze (sl. 5.6) velike  $B_r$  (veće od  $0,5 \text{ T}$ ) i  $H_c$  (oko  $10^5 \text{ A/m}$ ), odnosno veliku vrijednost za produkt  $B_r H_c$  (i do  $10^5 \text{ J/m}^3$ ). U tabl. 5.2 su prikazane magnetske karakteristike nekih materijala.

Tablica 5.2. Magnetske karakteristike nekih materijala

| Materijal                | $B_r/\text{T}$ | $H_c/\text{Am}^{-1}$ | $B_r H_c/\text{Jm}^{-1}$ |
|--------------------------|----------------|----------------------|--------------------------|
| platinaks II             | 0,6            | $4 \cdot 10^5$       | $2,6 \cdot 10^5$         |
| željezo – kobalt – ferit | 0,6            | $1,3 \cdot 10^5$     | $7,8 \cdot 10^4$         |
| željezo – kobalt         | 0,9            | $8 \cdot 10^4$       | $7 \cdot 10^4$           |
| alnico II                | 0,73           | $4,7 \cdot 10^4$     | $3,4 \cdot 10^4$         |
| čelik s kobaltom         | 1              | $2 \cdot 10^4$       | $2 \cdot 10^4$           |
| čelik                    | 1              | $4 \cdot 10^3$       | $4 \cdot 10^3$           |
| magnetske (video) vrpce  | 0,2            | $10^5$               | $2 \cdot 10^4$           |

Meki magnetski materijali mogu se lako i potpuno premagnetizirati. Kada se struja prekine, u njima praktički nestaje magnetske indukcije  $B$ , imaju, dakle, mali



Slika 5.6. Krivulje histereze za razne feromagnetske materijale

remanentni magnetizam  $B_r$ , malo koercitivno polje  $H_c$ , male gubitke premagnetiziranja, usku i strmu petlju histereze i veliku gustoću magnetskoga toka zasićenja (sl. 5.6). Meki su magnetski materijali meko željezo, legure željeza te oksidi nekih materijala.

Pri promjenama magnetskoga polja nastaju gubici i mjera je tih gubitaka petlja histereze. Nakon obilaska cijele petlje postiže se početno stanje uz određeni potrošak energije koji se u magnetskome materijalu pretvorio u toplinu. Zbog promjene polja inducira se napon  $U = d\Phi/dt$ , što uzrokuje vrtložne struje pa su gubici  $P = U^2/R$  to veći što je veći inducirani napon, a otpor manji. Pri promjeni smjera magnetskoga polja okreću se i smjerovi elementarnih magneta i gubici koji pri tome nastaju rastu s porastom frekvencije. Da bi gubici bili što manji, otpor magnetskih materijala mora biti što veći.

Da bi se smanjili gubici zbog vrtložnih struja izrađuju se transformatorske jezgre od mnogo tankih limova orijentiranih paralelno magnetskom toku i međusobno izoliranih. Debljina je limova reda veličine mm; što su tanji, gubici su manji.



Posebni magnetski materijali, feriti, smjese su željezo-oksida s drugim metalnim oksidima. Otpornost im je (u usporedbi sa željezom) velika jer su od metalnih oksida pa su i gubici od vrtložnih struja mali. Upotrebljavaju se za visoke frekvencije u jezgrama zavojnica i transformatora, kao i za kompjuterske memorije.

Kod većine kompjutera podaci se uskladištavaju u diskovima od feritnog materijala. Disk se sastoji od sitnih prstenova. Ti se prstenovi mogu magnetizirati u jednom ili drugom (suprotnom) smjeru. Magnetizacija se može postići s vrlo malo energije; ona se lako okreće u suprotni smjer ili izbriše. Takvi materijali mogu, dakle, zapamtiti brojeve 1 i 0 binarnoga sustava tako da 1 odgovara jednom smjeru magnetizacije, a 0 suprotnome smjeru. Kroz prsten prolaze četiri žice. Dvije žice služe za upisivanje podataka (magnetizaciju prstena), jedna žica za čitanje (ona otkriva smjer magnetizacije), a struja kroz četvrtu žicu sprečava brisanje podataka.

## Pitanja i zadaci

- 5.1. Što je relativna magnetska permeabilnost tvari?
- 5.2. Što je to magnetska susceptibilnost? Kakva je veza između magnetske permeabilnosti i susceptibilnosti?
- 5.3. Kako možemo podijeliti materijale s obzirom na magnetska svojstva?
- 5.4. Objasnite uzroke dijamagnetizma i paramagnetizma.
- 5.5. Opišite i objasnite pojavu feromagnetizma. Što su to Weissove domene i koju ulogu imaju prilikom magnetizacije feromagnetskoga materijala?
- 5.6. Je li magnetska permeabilnost feromagnetskih materijala konstantna ili promjenljiva veličina? Objasnite krivulju magnetske histereze. Što su to remanentni magnetizam i koercitivno polje?
- 5.7. Izračunajte Larmorovu frekvenciju elektrona u magnetskome polju indukcije 0,05 T.
- 5.8. Izračunajte induktivitet zavojnice elektromagneta koji ima 2 000 namotaja na duljinu od 50 cm, a presjek zavojnice iznosi  $1,6 \text{ dm}^2$ . Struja koja teče zavojnicom ima jakost 50 A, a relativna permeabilnost feromagnetske jezgre iznosi  $\mu_r = 5\,000$ . Kolika je energija spremljena u toj zavojnici?

## 6. Izmjenična struja

### 6.1. Dobivanje izmjeničnih napona i struja

Dosad smo uglavnom razmatrali istosmjerne struje, indistosmjerna struja tj. struje koje stalno imaju isti smjer. Tako npr. kada na akumulator priključimo trošilo određenog otpora, kroz trošilo će proteći struja koja ima stalno isti smjer, od + pola do – pola strujnog izvora.

Kod izmjeničnih struja smjer se stalno mijenja u pravilnim vremenskim razmacima jer se u izvoru istom frekvencijom mijenja smjer elektromotorne sile (napona). Najčešće je ta promjena u obliku sinusoidne funkcije. Veza između jakosti izmjenične struje (odnosno izmjeničnoga napona) i vremena u tom je slučaju slična vezi između pomaka i vremena kod jednostavnog harmoničnog oscilatora. (Zbog toga se analogija s harmoničnim gibanjem često primjenjuje pri razmatranju izmjeničnih struja.)

Izmjenične struje su glavni izvor električne energije. Izmjenični naponi proizvode se u sinkronim generatorima u elektranama i odatle se nakon prijenosa i transformacije upotrebljavaju u gradskoj mreži. Generatori za proizvodnju izmjeničnih napona osnivaju se na principu elektromagnetske indukcije. Promjenom magnetskoga toka kroz vodič u obliku zavojnice (svitka) na krajevima zavojnice inducira se izmjenična elektromotorna sila.

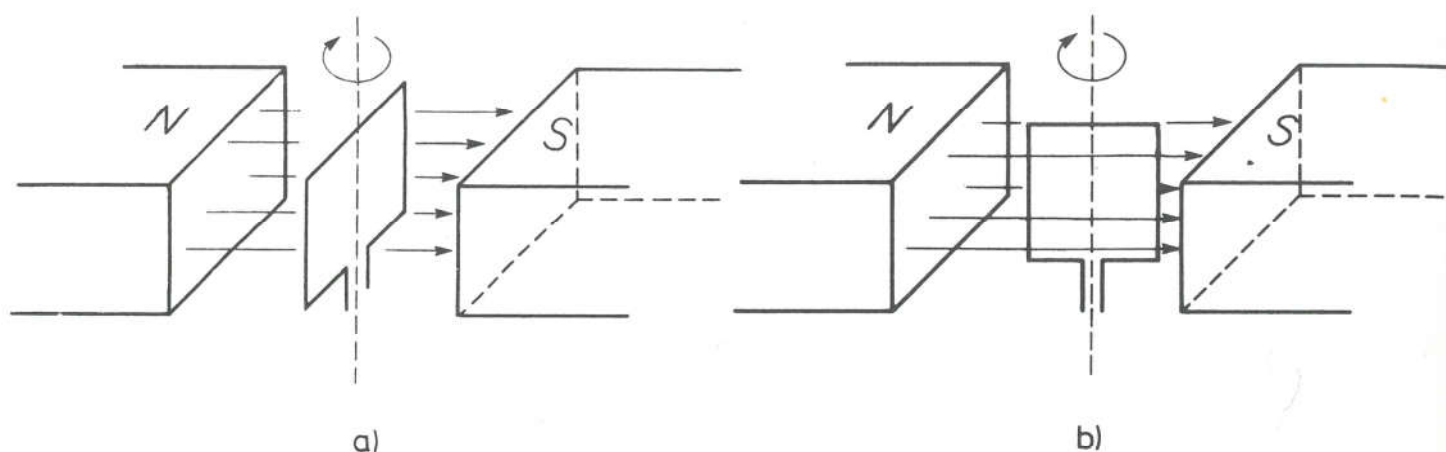
U sinkronim generatorima za proizvodnju izmjeničnih napona promjena magnetskoga toka postiže se tako da vodič miruje, a magnetsko polje rotira, tj. magneti (obično elektromagneti) su na rotoru generatora.

Da bismo razumjeli princip rada generatora izmjenične struje, pretpostavimo radi jednostavnosti, da se svitak sastoji od jednog pravokutnog zavoja (petlje) žice koji rotira u homogenom magnetskom polju.

Kada se pravokutna petlja vrti u homogenom magnetskom polju (sl. 6.1), na njezinim će se polovima inducirati izmjenična elektromotorna sila koje se iznos i smjer stalno mijenjaju u vremenu. Pri okretanju petlje mijenja se, naime, kut pod kojim petlja siječe silnicu, a time i tok  $\Phi$  kroz petlju, pa je prema Faradayevom zakonu inducirana elektromotorna sila:

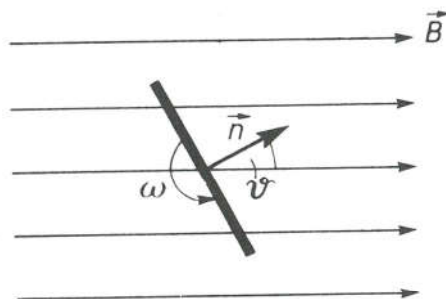
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (6.1)$$





Slika 6.1. Dobivanje izmjeničnih napona

Kada je površina petlje okomita na silnice (sl. 6.1.a), magnetski je tok kroz petlju najveći, a kad je površina petlje paralelna silnicama (sl. 6.1.b), tok je nula. Brzina je promjene toka ( $d\Phi/dt$ ) najveća (a time i elektromotorna sila) kada je površina paralelna silnicama, a jednaka je nuli kada silnice prolaze okomito kroz površinu petlje. Pri svakom okretu smjer elektromotorne sile mijenja se dvaput, i to onda kada petlja prolazi kroz položaj označen na sl. 6.1.a.



Slika 6.2. Uz izvod inducirano izmjeničnog napona

Ako je površina petlje  $S$ , magnetska indukcija  $\vec{B}$ , tada je magnetski tok kroz petlju:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \vartheta \quad (6.2)$$

gdje je  $\vartheta$  kut između normale na površinu petlje i silnica polja (sl. 6.2), a  $\vec{S}$  vektor u smjeru normale na površinu ( $\vec{S} = S\vec{n}$ ). Kada se petlja vrti stalnom kutnom brzinom  $\omega$ , kut  $\vartheta$  mijenja se u vremenu ( $\vartheta = \omega t$ ), pa se i tok kroz petlju mijenja po zakonu:

$$\Phi = BS \cos \omega t \quad (6.3)$$

i pritom nastaje inducirana elektromotorna sila:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t = \mathcal{E}_m \sin \omega t \quad (6.4)$$

gdje smo s  $\mathcal{E}_m$  označili njezinu maksimalnu vrijednost (amplitudu).

Ako se petlja sastoji od  $N$  zavoja žice, inducirana je elektromotorna sila:

$$e = NBS\omega \sin \omega t = \mathcal{E}_m \sin \omega t \quad (6.5)$$

Izmjenična elektromotorna sila i struja mijenjaju se sinusoidno s periodom  $T = 2\pi/\omega$  i frekvencijom  $f = \omega/2\pi$ . Frekvencija izmjenične struje za rasvjetu i industriju (gradske mreže) u Evropi je 50 Hz a u Sjevernoj Americi 60 Hz. Veličina  $\omega = 2\pi f$  naziva se kružna frekvencija i ona za gradsku mrežu iznosi 314 rad/s.

Slično izrazu (6.4) izmjenični sinusoidni napon prikazujemo izrazom:

$$u = U_m \sin \omega t \quad (6.6)$$

a izmjeničnu sinusoidnu struju izrazom:

$$i = I_m \sin \omega t \quad (6.7)$$

Trenutne vrijednosti izmjeničnih struja i napona označavat ćemo malim slovom ( $i$ ,  $e$  odnosno  $u$ ), a maksimalne vrijednosti velikim slovom s indeksom  $m$  ( $I_m$ ,  $U_m$ , odnosno  $\mathcal{E}_m$ ). U praksi se upotrebljavaju i efektivne vrijednosti struje i napona koje ćemo označavati velikim slovom bez indeksa ( $I$ ,  $U$  odnosno  $\mathcal{E}$ ).

Efektivna vrijednost izmjenične struje definira se kao vrijednost koju bi imala ona istosmjerna struja stalne jakosti koja bi proizvela isti toplinski učinak na nekom omskom otporu kao i ta izmjenična struja. Budući da je snaga istosmjerne struje dana izrazom  $P = I^2 R$ , za efektivnu snagu izmjenične struje možemo pisati:

$$P = I^2 R \quad (6.8)$$

gdje je  $I$  efektivna vrijednost izmjenične struje. Da bismo dobili vezu između efektivne i maksimalne vrijednosti izmjenične struje, izračunat ćemo srednju snagu za vrijeme jednog perioda:

$$\bar{P} = \frac{\int_0^T Ri^2 dt}{T} = \frac{R \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt}{T} = \frac{RI_m^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt.$$

Budući da je

$$\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} T,$$

to je

$$\bar{P} = \frac{RI_m^2}{2} \quad (6.9)$$

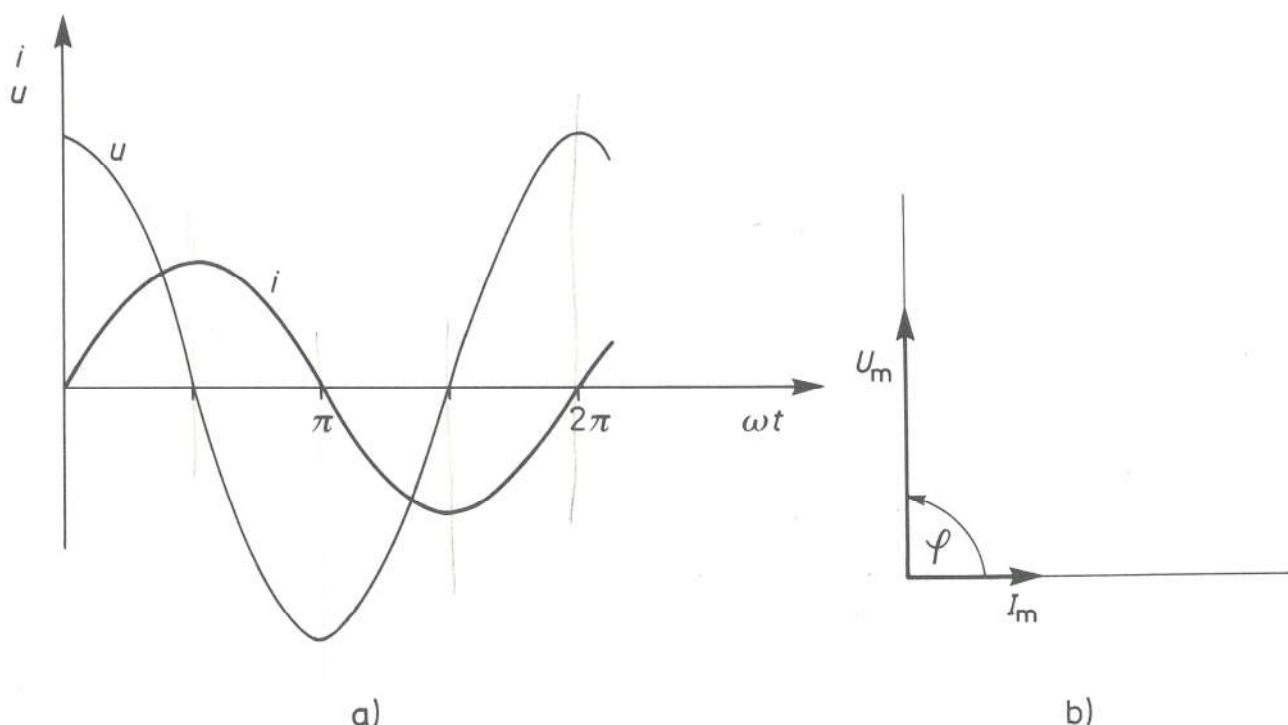
Uspoređujući izraze (6.8) i (6.9), vidimo da je efektivna vrijednost izmjenične struje:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m \quad (6.10)$$

Ista veza vrijedi i za napone:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m \quad (6.11)$$

Izmjenična struja mijenja se sinusoidno pa je njezina srednja vrijednost  $\bar{i}$  jednaka nuli. Međutim, pri prolazu struje kroz trošilo rad je razmjeran kvadratu jakosti struje pa za učinak izmjenične struje nije važna srednja vrijednost jakost, nego srednja vrijednost kvadrata jakosti.



Slika 6.3. a) Fazni pomak između struje i napona b) Fazorski dijagram iz kojeg se također vidi razlika u fazi

Efektivna je vrijednost, dakle, kvadratni korijen iz srednje vrijednosti kvadrata napona odnosno struje:  $I = \sqrt{\bar{i}^2}$ , odnosno  $U = \sqrt{\bar{u}^2}$ . Efektivna je vrijednost napona gradske mreže 220 V, a njegova je maksimalna vrijednost  $220\sqrt{2} = 310$  V.

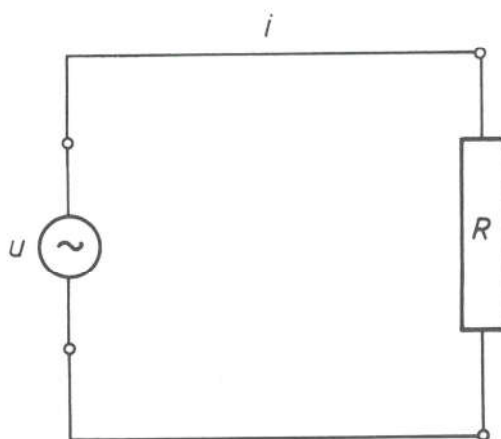
U izrazima (6.6) i (6.7) napon i struja mijenjaju se po istoj vremenskoj funkciji ( $\sin \omega t$ ) pa kažemo da su u fazi. Međutim u krugovima izmjenične struje napon i struja često nisu u fazi, nego među njima postoji fazna razlika  $\varphi$ . Tada se obično struja prikazuje funkcijom  $\sin \omega t$ , a napon funkcijom  $\sin(\omega t + \varphi)$ . Tako je npr. na sl. 6.3.a prikazana ovisnost struje i napona o vremenu za slučaj kada je napon ispred struje za  $\varphi = 90^\circ$ . Fazna se razlika još lakše prikazuje u tzv. fazorskom ili vektorskom dijagramu. Obično se struja crta kao vektor u smjeru osi  $x$ , a napon kao vektor zakrenut za fazni kut  $\varphi$ , kao što je prikazano na sl. 6.3.b. Kada je  $\varphi$  pozitivan, napon je u fazi ispred struje, a kada je  $\varphi$  negativan, iza struje. (Obično se u vektorskim dijagramima crtaju efektivne vrijednosti struje i napona, a ne maksimalne jer se one najčešće i mjere u praksi.)



## 6.2. Otpori u krugu izmjenične struje

Osim omskog otpora, u krugovima izmjenične struje možemo imati i induktivni i kapacitivni otpor.

Kada izmjenična struja prolazi kroz zavojnicu odnosno kondenzator pojavljuje se induktivni odnosno kapacitivni otpor, koji ovisi o induktivitetu  $L$  odnosno kapacitetu  $C$  i o frekvenciji izmjenične struje. Razmatrat ćemo prolaz izmjenične struje kroz omska trošila te zavojnice i kondenzatore, odnosno kombinacije tih triju otpora.

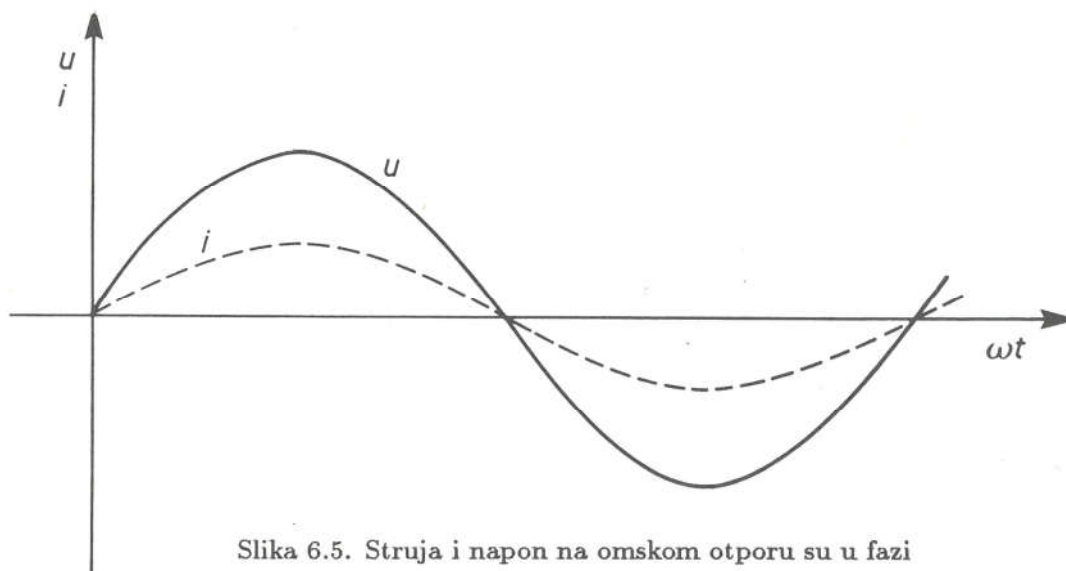


Slika 6.4. Omski otpor u krugu izmjenične struje

**Omski otpor.** Ako je u krugu izmjenične struje trošilo omskog otpora  $R$  (sl. 6.4), tada se jakost struje u svakom trenutku može izračunati po Ohmovu zakonu:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t \quad (6.12)$$

gdje je  $u$  trenutna vrijednost napona na omskom otporu, a  $i$  trenutna vrijednost struje kroz omski otpor  $R$ .



Slika 6.5. Struja i napon na omskom otporu su u fazi

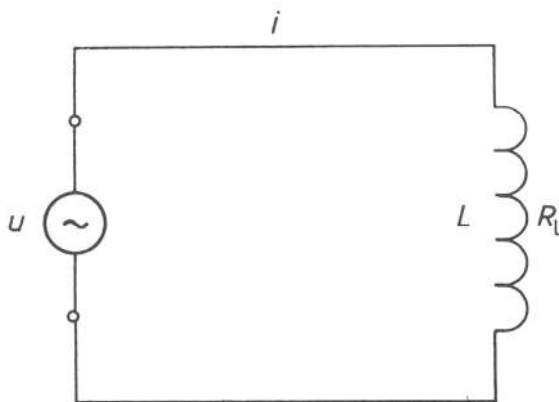
Budući da se i napon i struja mijenjaju po istoj vremenskoj funkciji ( $\sin \omega t$ ), kažemo da su napon i struja u fazi, odnosno da je fazni pomak  $\varphi$  između njih jednak nuli (sl. 6.5). U vektorskom se dijagramu ta dva vektora crtaju jedan iznad drugog u smjeru osi  $x$ .

Pišemo li umjesto trenutnih vrijednosti efektivne, Ohmov zakon (6.12) poprima oblik:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (6.13)$$

dakle, formalno jednak obliku za istosmjernu struju.

**Induktivni otpor.** Ako u krug izmjenične struje na izvor napona  $u$  priključimo zavojnicu induktiviteta  $L$  i zanemariva omskog otpora (sl. 6.6), opazit ćemo da i zavojnica (induktivitet) pruža određen otpor izmjeničnoj struji, koji se naziva induktivni otpor  $R_L$ . Taj je otpor uzrokovan pojavom samoindukcije koja nastaje u zavojnici zbog stalne promjene izmjenične struje.



Slika 6.6. Induktivitet u krugu izmjenične struje

Budući da je elektromotorna sila samoindukcije:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} \quad (6.14)$$

u svakom trenutku jednaka po iznosu, a suprotna smjera naponu  $u$ , možemo pisati:

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (6.15)$$

Ako se struja mijenja po zakonu  $i = I_m \sin \omega t$ , tada je :

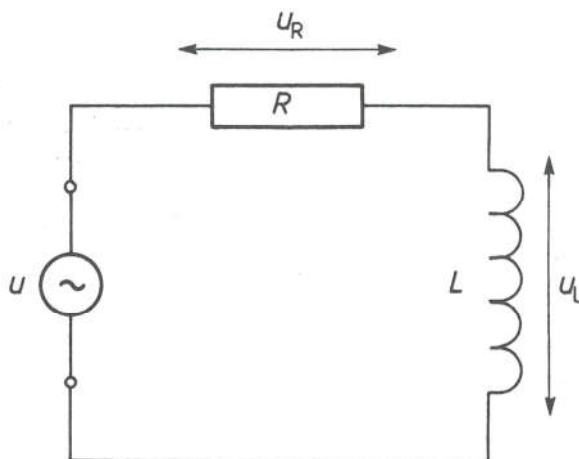
$$u = L \frac{di}{dt} = L\omega I_m \cos \omega t = L\omega I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.16)$$

Iz izraza (6.16) slijedi da je Ohmov zakon za induktivni otpor:

$$I = \frac{U}{L\omega} = \frac{U}{R_L} \quad (6.17)$$

gdje je  $R_L = L\omega$  induktivni otpor induktiviteta  $L$  za izmjeničnu struju kružne frekvencije  $\omega$ .

Struja kroz zavojnicu nije u fazi s naponom, kao što se vidi iz izraza (6.16). Ako se struja mijenja po zakonu  $\sin \omega t$ , napon se mijenja po zakonu  $\cos \omega t = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ . Kada je pak omski otpor zavojnice jednak nuli, fazni je pomak  $90^\circ$ , pa kažemo da struja kroz induktivitet (bez omskog otpora) zaostaje za naponom za  $\frac{\pi}{2}$  (odnosno  $90^\circ$ ), kao što je prikazano na sl. 6.3.a, odnosno da napon prethodi struji za  $90^\circ$ .



Slika 6.7. Induktivni i omski otpor u krugu izmjenične struje

Ako se, uz induktivni, u strujnome krugu nalazi i omski otpor  $R$  (sl. 6.7), tada je:

$$\begin{aligned}
 u &= u_R + u_L = iR + L \frac{di}{dt} \\
 u &= RI_m \sin \omega t + L\omega I_m \cos \omega t \\
 u &= RI_m \sin \omega t + L\omega I_m \left( \sin \omega t + \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Da bismo zbrojili dvije sinusoidne funkcije u izrazu (6.18), možemo se poslužiti metodom rotirajućeg vektora (kao što smo radili pri proučavanju titranja). Iz sl. 6.8.a dobivamo da je napon na serijskom spoju omskog i induktivnog otpora:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} I \sin(\omega t + \varphi) \tag{6.19}$$

gdje je  $\varphi$  fazni pomak između napona i struje dan izrazom:

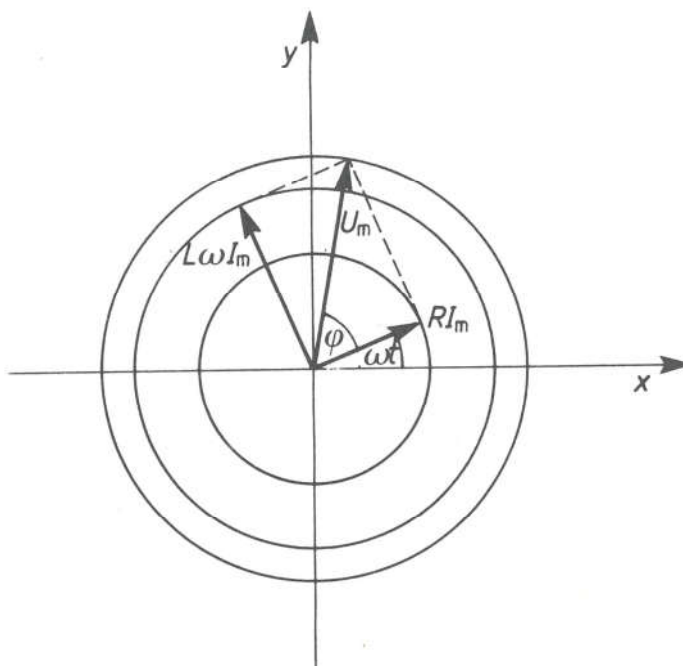
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_L}{R} = \frac{L\omega}{R} \tag{6.20}$$

Ohmov zakon za serijski spoj omskog i induktivnog otpora, dakle, glasi:

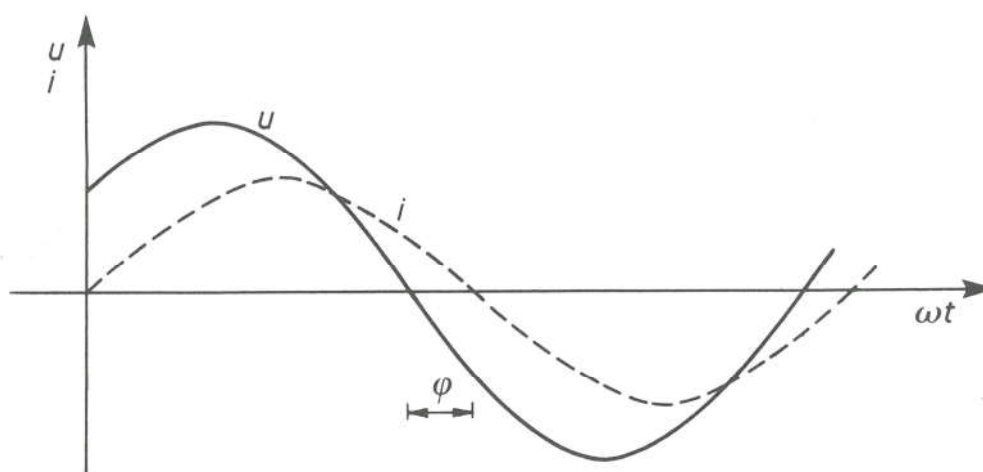
$$U = \sqrt{R^2 + R_L^2} I = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} I \tag{6.21}$$

pri čemu su  $U$  i  $I$  efektivne vrijednosti izmjeničnoga napona odnosno struje.





Slika 6.8. a) Zbrajanje sinusoidalnih napona u  $RL$ -kruhu metodom rotirajućeg vektora



Slika 6.8. b) Fazni pomak između napona i struje na induktivno omskom otporu

Na sl. 6.8.b prikazan je fazni pomak između napona i struje pri induktivnom omskom opterećenju: izmjenična struja kasni za naponom za kut  $\varphi$ .

Zavojnica u krugu izmjenične struje ima, dakle, dva otpora: induktivni (reaktivni) otpor  $R_L$  i radni (omski) otpor  $R$ . Induktivni je otpor  $R_L = L\omega$  tzv. jalovi otpor, on ne pretvara snagu u Jouleovu toplinu (ne troši snagu), u njemu se električna energija pretvara u magnetsku energiju, koja se ponovno može pretvoriti u električnu. U radnom se otporu  $R$  električna energija pretvara u unutrašnju toplinsku energiju (Jouleovu toplinu), dakle, troši se i gubi. Radni otpor sastoji se uglavnom od omskog otpora žice od koje je namotana zavojnica i otpora gubitaka

za izmjeničnu struju (npr. u jezgri zavojnice). Napon na induktivnom i radnom otporu pomaknuti su u fazi za  $90^\circ$  i zbrajaju se vektorski pa je ukupni otpor:

$$Z = \sqrt{R^2 + R_L^2} \quad (6.22)$$

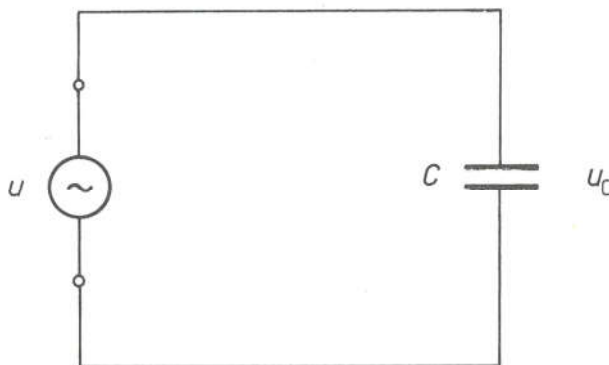
Kut gubitaka zavojnice definira se izrazom:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{R}{R_L} = \frac{R}{L\omega} \quad (6.23)$$

a faktor kvalitete ("dobrote") zavojnice:

$$Q = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{\omega L}{R} \quad (6.24)$$

**Kapacitivni otpor.** Ako je u izmjeničnome strujnom krugu kondenzator kapaciteta  $C$  (sl. 6.9), kroz kondenzator će teći struja koje je jakost razmjerna kapacitetu kondenzatora. Kada kondenzator priključimo na istosmjerni napon, on se nabije i nakon toga struja više ne teče. Za istosmjernu struju kondenzator znači beskonačni otpor. Međutim, priključenjem kondenzatora na izvor izmjenične struje zbog stalnoga mijenjanja smjera struje kondenzator se naizmjenično puni i prazni, tako da u krugu teče izmjenična struja, bilo u jednom, bilo u drugom smjeru.



Slika 6.9. Kapacitet u krugu izmjenične struje

Budući da je veza između naboja  $q$  i napona  $u$  na kondenzatoru  $u = q/C$ , možemo pisati:

$$u = \frac{q}{C} = \frac{\int i \, dt}{C} \quad (6.25)$$

Pretpostavimo li da se struja mijenja po zakonu

$$i = I_m \sin \omega t,$$

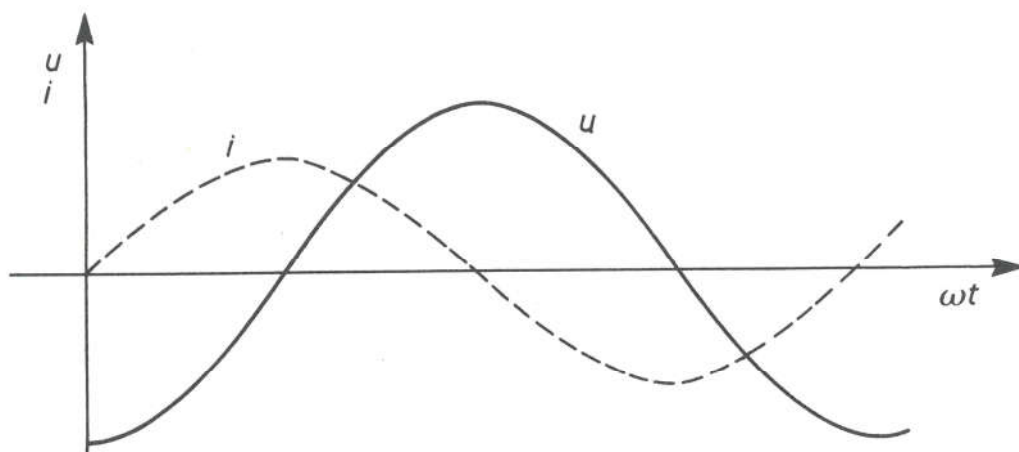
to je:

$$u = \frac{1}{C} \int I_m \sin \omega t \, dt = -\frac{I_m}{C\omega} \cos \omega t = \frac{I_m}{C\omega} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.26)$$

Kondenzator kapaciteta  $C$  pruža izmjeničnoj struji kružne frekvencije  $\omega$  kapacitivni otpor:

$$R_C = \frac{1}{C\omega} \quad (6.27)$$

Fazni je pomak između napona i struje na kapacitivnom otporu  $-\frac{\pi}{2}$ : izmjenična struja kroz kondenzator prethodi naponu za  $90^\circ$  (sl. 6.10), odnosno napon zaostaje za strujom za  $90^\circ$ .



Slika 6.10. Fazni pomak između napona i struje na kapacitivnom otporu

Kondenzatori, osim svojeg kapacitivnog (jalovog) otpora  $R_C = 1/(C\omega)$ , imaju i radni otpor  $R$  koji je uzrokovan određenom vodljivošću kondenzatora. Idealni kondenzator ne vodi struju i otpor  $R$  mu je, naravno, beskonačan. Faktor gubitaka kondenzatora (omjer kapacitivnog i omskog otpora) treba da bude što manji.

### 6.3. Serijski spoj radnog, induktivnog i kapacitivnog otpora

Kada su u krugu izmjenične struje serijski spojeni omski (radni), induktivni i kapacitivni otpor (sl. 6.11), možemo zbrajanjem napona na pojedinim otporima izračunati rezultatni napon.

Pretpostavimo da je struja u serijskom RLC-krugu (sl. 6.11) dana izrazom:

$$i = I_m \sin \omega t \quad (6.28)$$

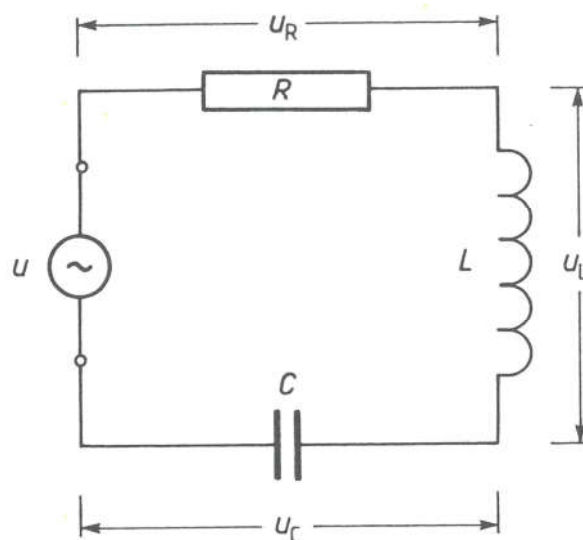
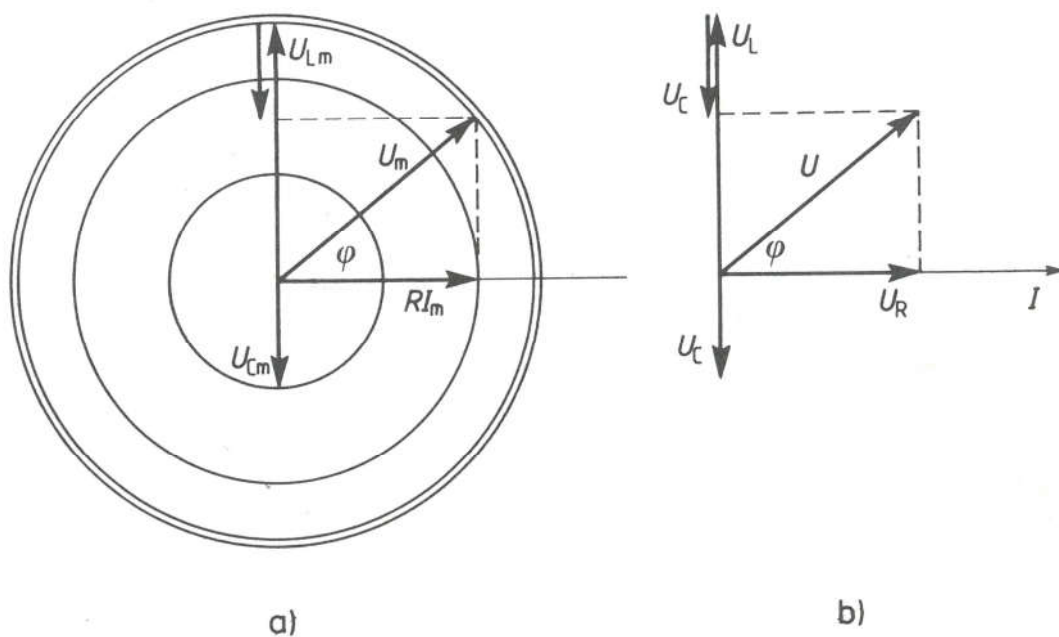
Ukupni pad napona na svim trima otporima jednak je zbroju padova napona na otporu  $R$ , induktivitetu  $L$  i kondenzatoru  $C$ , tj.:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (6.29)$$

Uvrštavanjem izraza (6.28) u (6.29) dobivamo:

$$u = RI_m \sin \omega t + L\omega I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{I_m}{C\omega} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.30)$$



Slika 6.11. Serijski  $RLC$ -krugSlika 6.12. a) Zbrajanje sinusoidalnih napona u  $RLC$ -krugu b) Fazorski dijagram za  $RLC$ -krug

Zbrojimo li te tri sinusne funkcije (npr. pomoću rotirajućih vektora kao na sl. 6.12) dobivamo rezultatni napon:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.31)$$

gdje je

$$U_m = \sqrt{U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2} = I_m \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (6.32)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

Ohmov zakon za izmjeničnu struju možemo, dakle, pisati:

$$I = \frac{U}{Z} \quad (6.33)$$

pri čemu je:

$$Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (6.34)$$

ukupni otpor (impedancija) strujnoga kruga.

Vektorski dijagram za efektivne vrijednosti napona u serijskom RLC-krugu prikazan je na sl. 6.12.b. Napon  $U_R$  na omskom je otporu u fazi sa strujom, napon  $U_L$  na induktivitetu prethodi struji za  $\frac{\pi}{2}$ , a napon  $U_C$  na kapacitetu kasni za strujom za  $\frac{\pi}{2}$ . Uzmemo li u obzir da je  $U_R = IR$ ,  $U_L = R_L I$  i  $U_C = R_C I$  i iz sl. 6.12.b, slijedi da je ukupna impedancija  $Z$  dana izrazom (6.34).

Slično kao za struje i napone vektorski dijagram možemo crtati i za otpore. Premda impedancija nije rotirajući vektor (fazor), možemo je crtati kao vektor, tako da npr. otpor  $R$  crtamo u smjeru osi  $+x$ , otpor  $R_L$  u smjeru osi  $+y$  i otpor  $R_C$  u smjeru osi  $-y$  te rezultatni vektor  $Z$  dobijemo zbrajanjem tih vektora.

### Primjer 6.1.

Na gradsku mrežu ( $U = 220$  V,  $f = 50$  Hz) priključen je serijski spoj omskog otpora od  $100 \Omega$ , kondenzatora kapaciteta  $10 \mu\text{F}$  i zavojnice induktiviteta  $0,7$  H (sl. 6.11). Kolik je ukupni otpor? Koliki su efektivna jakost struje i padovi napona na svakom elementu?

Ukupni je otpor (impedancija):

$$Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 140 \Omega.$$

Efektivnu vrijednost jakosti struje dobivamo iz Ohmova zakona za izmjeničnu struju:

$$I = \frac{U}{Z} = 1,57 \text{ A.}$$

Efektivna vrijednost pada napona na omskom je otporu:

$$U_R = IR = 157 \text{ V.}$$

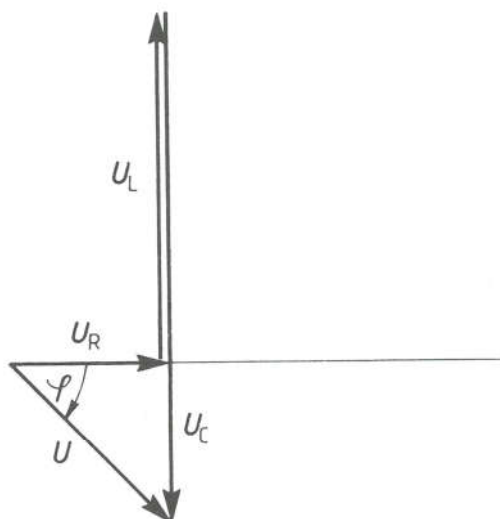
Napon je na omskom (radnom) otporu u fazi sa strujom ( $\varphi = 0$ ). Efektivna je vrijednost pada napona na kondenzatoru:

$$U_C = IR_C = \frac{I}{C\omega} = 499 \text{ V.}$$

Napon na kondenzatoru zaostaje u fazi iza struje za  $90^\circ$ .  
Efektivna je vrijednost pada napona na zavojnici:

$$U_L = IR_L = IL\omega = 344 \text{ V}.$$

Pretpostavili smo da je omski otpor zavojnice zanemariv. Napon na induktivnom otporu u fazi je ispred struje za  $90^\circ$ .



Slika 6.13.

Vektorski dijagram za taj RLC-krug prikazan je na sl. 6.13. Fazni pomak napona u odnosu prema struji iznosi:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_L - R_C}{R} = \frac{U_L - U_C}{U_R} = -\frac{155}{157} \doteq -1.$$

Napon zaostaje za strujom za  $45^\circ$ .

## 6.4. Električna rezonancija

**Serijski krug.** Jakost izmjenične struje kroz strujni krug u kojem su omski, induktivni i kapacitivni otpor spojeni serijski (sl. 6.11) dana je izrazom:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (6.35)$$

*Handwritten notes: Otklon, Razlika na 127,502V*

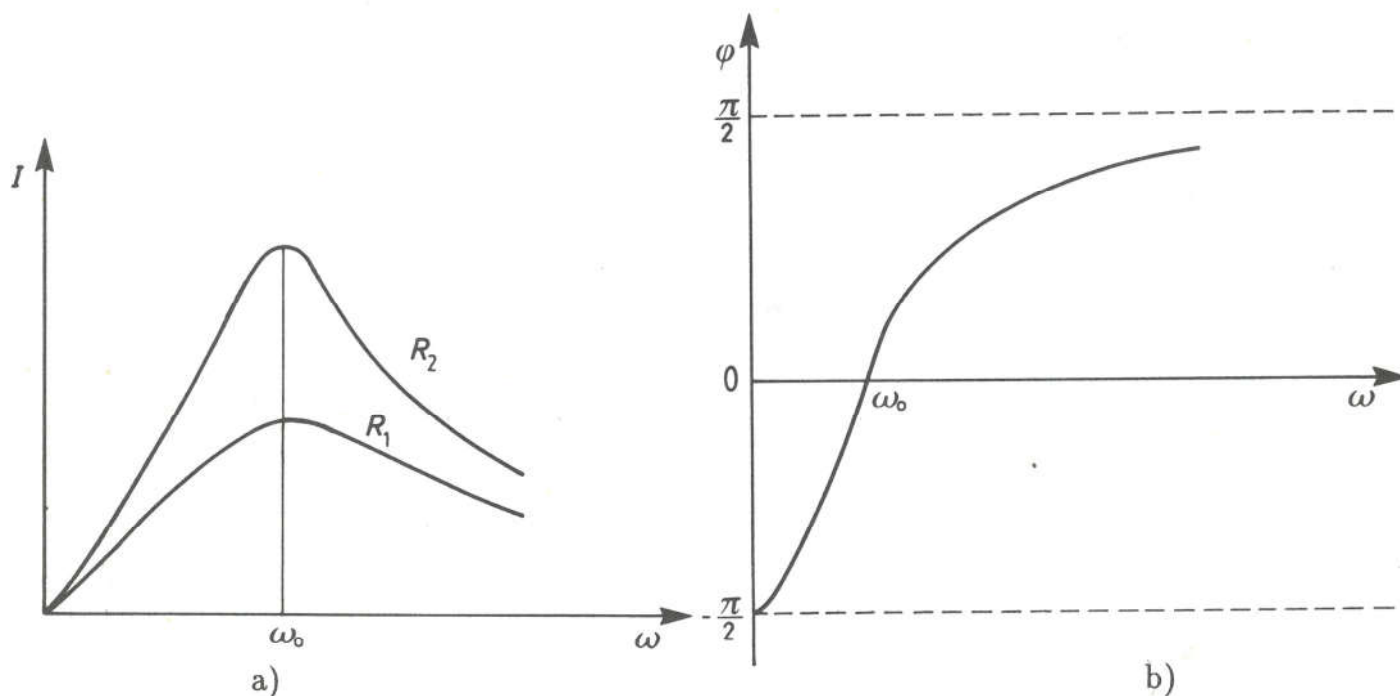
Ako je induktivni otpor jednak kapacitivnom ( $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ ), struja je kroz krug maksimalna. Ta se pojava naziva serijska rezonancija, a frekvencija  $f_0$  na kojoj



se to postiže zove se rezonantna frekvencija. Izjednačimo li oba otpora, dobivamo poznatu Thomsonovu formulu za rezonantnu frekvenciju:

$$\begin{aligned} L\omega_0 &= \frac{1}{C\omega_0} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\ f_0 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \end{aligned} \quad (6.36)$$

U slučaju rezonancije  $Z = R$ , struja je maksimalna i u fazi je s naponom ( $\varphi = 0$ ). Rezonanciju možemo postići bilo mijenjanjem induktiviteta,  $L$ , ili kapaciteta,  $C$ , bilo pak mijenjanjem frekvencije izmjenične struje. Na sl. 6.14. prikazana je promjena jakosti struje s promjenom frekvencije i ovisnost faznog pomaka o frekvenciji.



Slika 6.14. Ovisnost jakosti struje a) i faznog pomaka b) o frekvenciji izmjenične struje u serijskom krugu

U slučaju rezonancije (6.36), naponi na zavojnici i kondenzatoru jednako su veliki, ali suprotne faze pa se poništavaju. Ukupni je napon malen (ovisno o omskom otporu), a struja jaka. Takvu rezonanciju nazivamo serijska ili naponska rezonancija.

Tako npr., ako je u krugu na sl. 6.11.  $R = 10 \, \Omega$ ,  $L = 1 \, \text{mH}$ ,  $C = 0,1 \, \mu\text{F}$ ,  $U = 1 \, \text{mV}$ , dobivamo  $f_0 = 15,9 \, \text{kHz}$ ,  $I_0 = 0,1 \, \text{mA}$ ,  $U_L = 10 \, \text{mV}$ ,  $U_C = 10 \, \text{mV}$ . Naponi na zavojnici i kondenzatoru veći su nego vanjski napon doveden na RLC-krug, to više što je manji omski otpor  $R$ . Napon na induktivitetu fazno je ispred, a napon na kapacitetu iza struje za  $90^\circ$ , pa se ti naponi poništavaju. Primjenom rezonancije mali se ulazni signal može pojačati i to se koristi pri prijemu radio i

televizijskih signala. To se pojačanje izražava i faktorom  $Q$  rezonantnoga kruga:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad (6.37)$$

Pojačanje naponskog signala je

$$U_C = U_L = QU$$

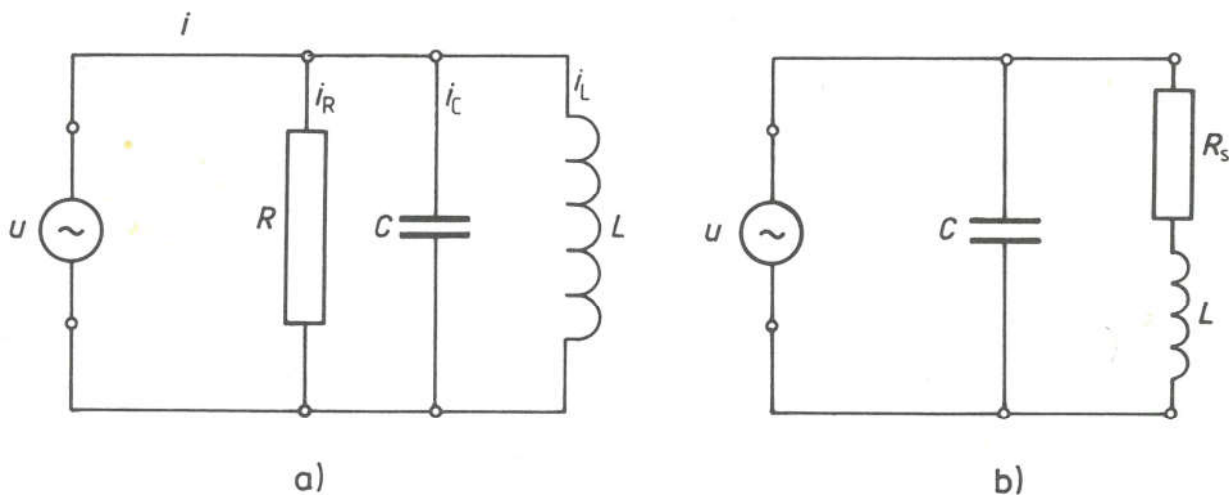
Kvalitet rezonantnog kruga to je bolji, što je faktor  $Q$  veći.

**Paralelni RCL-krug.** Ako su omski, kapacitivni i induktivni otpor paralelno spojeni (sl. 6.15.a), ukupna je struja jednaka:

$$i = i_R + i_C + i_L \quad (6.38)$$

Te struje imaju različite amplitude i faze, dok je amplituda i faza napona na sva tri otpora ista. Prikažemo li struje pomoću rotirajućih vektora, odnosno nacrtamo li vektorski dijagram za struje, dobivamo recipročnu vrijednost impedancije:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2} \quad (6.39)$$



Slika 6.15. Strujna (paralelna) rezonancija

Strujna (paralelna) rezonancija nastupit će u slučaju kad je ispunjen uvjet:

$$\omega_0 C = \frac{1}{L\omega_0}$$

ili

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (6.40)$$

dakle, isti uvjet (Thomsonova formula), kao i za naponsku rezonanciju. Dok je struja iz izvora minimalna, i jednaka  $i_R$ , struje kroz pojedine otpore (kapacitivni odnosno induktivni) jednake su amplitude, ali suprotne faze. Kažemo da strujni krug titra frekvencijom  $f_0$  danom Thomsonovom formulom (6.40). Unutar kruga izmjenjuje se energija između magnetskoga polja zavojnice i električnoga polja kondenzatora. Poželjno je da u paralelnom rezonantnom krugu omski otpor bude što veći da bi se dobila što oštrija rezonancija.

Slično kao i za serijski krug, kvalitet paralelnog kruga određuje se  $Q$  faktorom:

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} \quad (6.41)$$

U praksi zavojnice imaju i određeni omski otpor te rezonantni krug obično izgleda kao na sl. 6.15.b i sastoji se od kondenzatora paralelno spojenog sa serijskim spojem omskog otpora  $R_s$  i induktivnog otpora  $R_L$ . Može se pokazati da je impedancija  $Z$  takvog kruga dana izrazom:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{R_s}{R_s^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega L}{R_s^2 + \omega^2 L^2} - \omega C\right)^2} \quad (6.42)$$

Jednaku impedanciju ima i paralelni spoj omskog otpora  $R' = \frac{R_s^2 + \omega^2 L^2}{R_s}$ , induktivnog otpora  $R'_L = \frac{R_s^2 + \omega^2 L^2}{\omega L}$  i kapacitivnog otpora  $R_C = \frac{1}{C\omega}$ , dakle, da je krug na sl. 6.15.b ekvivalentan paralelnom  $R', L', C$  krugu (sl. 6.15.a).

Fazni pomak između struje i napona u krugu na sl. 6.15.b je:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega C - \frac{\omega L}{R_s^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{R_s}{R_s^2 + \omega^2 L^2}} \quad (6.43)$$

U slučaju rezonancije, struja je u fazi s naponom ( $\varphi = 0$ ), te je

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0 L}{R_s^2 + \omega_0^2 L^2} &= \omega_0 C \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_s^2 C}{L}} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Tada je ukupna impedancija

$$Z_0 = \frac{L}{R_s C}.$$

Rezonantna frekvencija (6.44) nešto je manja od rezonantne frekvencije idealnog kruga (6.40).



**Primjer 6.2.**

Serijski RLC-krug ( $R = 50 \, \Omega$   $C = 2 \, \text{nF}$ ) podešen je da rezonira na frekvenciji od 15 625 Hz. Kolik je induktivitet? Ako na krug priključimo izmjenični napon od 1 mV, kolik je napon na zavojnici i kondenzatoru? Kolik je faktor dobrote kruga? Koliko se promijeni rezonantna frekvencija ako se kapacitet promjeni za 100 pF?

Iz zadanih podataka određujemo induktivitet:

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{9,638 \cdot 10^9 \text{s}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-9} \text{F}}$$

$$L = 51,88 \, \text{mH}.$$

U slučaju rezonancije, impedancija kruga jednaka je omskom otporu ( $Z_0 = R$ ) i struja kroz krug iznosi:

$$I_0 = \frac{U}{Z_0} = \frac{1 \, \text{mV}}{50 \, \Omega} = 0,02 \, \text{mA}.$$

Naponi na omskom otporu, induktivitetu i kapacitetu iznose:

$$U_R = IR = 1 \, \text{mV}$$

$$U_C = \frac{I}{C\omega} = 100 \, \text{mV}$$

$$U_L = IL\omega = 100 \, \text{mV}.$$

Naponi  $U_L$  i  $U_C$  stoput su veći nego napon na omskom otporu, odnosno ulazni napon. Ako je omski otpor  $R$  otpor žice od koje je načinjena zavojnica, tada je napon na krajevima zavojnice

$$U = IZ_1 = I\sqrt{R^2 + R_L^2} = 2 \cdot 10^{-5} \, \text{A} \sqrt{50^2 + 5093^2} \, \Omega$$

$$U = 102 \, \text{mV}.$$

Budući da je omski otpor zavojnice malen u usporedbi s induktivnim, napon na krajevima zavojnice praktički je  $U_L$ .

Ako se kapacitet od 2 nF poveća na 2,1 nF, rezonantna frekvencija postaje:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L(C + \Delta C)}} = 15\,248 \, \text{Hz}.$$

Frekvencija se promijenila za 377 Hz. Tu promjenu možemo približno odrediti i deriviranjem

$$\Delta\omega = -\frac{1}{2} (LC)^{-\frac{3}{2}} L\Delta C = -\frac{1}{2} \omega \frac{\Delta C}{C}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} = 0,025; \quad \frac{\Delta f}{f} = 0,025 = 2,5\%$$

Faktor  $Q$  toga kruga iznosi:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = 102.$$

Napomenimo da je  $f = 15\,625$  Hz horizontalna ili linijska frekvencija u televizijskom prenosu slike.

### Primjer 6.3.

Rezonantni krug sastoji se od paralelnog spoja omskog otpora  $R = 1000\,\Omega$  induktiviteta  $L = 0,5$  mH i kapaciteta  $C = 0,2$   $\mu$ F. Izračunajte struje kroz pojedine elemente kruga pri rezonanciji ako je napon izvora 1 mV.

Rezonantna frekvencija je

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^5 \text{ s}^{-1}$$

Induktivni otpor je  $R_L = L\omega_0 = 50\,\Omega$ , kapacitivni otpor je  $R_C = \frac{1}{\omega_0 C} = 50\,\Omega$ . Struje su

$$I_R = \frac{U}{R} = 1\,\mu\text{A}$$

$$I_L = \frac{U}{R_L} = 20\,\mu\text{A}$$

$$I_C = \frac{U}{R_C} = 20\,\mu\text{A}$$

Ukupna struja je vektorski zbroj tih struja i jednaka je  $I_R$  jer se struje  $I_L$  i  $I_C$  poništavaju.

Faktor  $Q$  je:

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = 20.$$

### Primjer 6.4.

Paralelni RLC-krug sastoji se od zavojnice ( $L = 2,5$  mH,  $R_s = 10\,\Omega$ ) paralelno spojene s kondenzatorom ( $C = 0,1$   $\mu$ F). Kolika je rezonantna frekvencija? Kolike su struje ako je krug priključen na rezonantni napon od 1 V?

Rezonantna frekvencija dana je formulom:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_s^2 C}{L}} = 63\,245,55 \cdot 0,998 \text{ s}^{-1} = 63\,119 \text{ s}^{-1}; \quad f_0 = 10,5 \text{ kHz}$$

Ukupna impedancija pri rezonanciji iznosi:

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{R_s}{R_s^2 + \omega_0^2 L^2}, \quad Z_0 = \frac{L}{CR_s} = 2500 \, \Omega.$$

Ukupna struja, te struja kroz zavojnicu i kondenzator iznose:

$$I = \frac{U}{Z_0} = 0,4 \, \text{mA}$$

$$I_L = \frac{U}{\sqrt{R_s^2 + \omega_0^2 L^2}} = 6,325 \, \text{mA}$$

$$I_C = UC\omega_0 = 6,312 \, \text{mA}$$

Napomenimo da je taj krug ekvivalentan krugu u kojem su paralelno spojeni induktivni otpor

$$R'_L = \frac{R_s^2 + L^2 \omega_0^2}{L\omega_0} = 158,43 \, \Omega$$

kapacitivni otpor

$$R_C = \frac{1}{C\omega} = 158,43 \, \Omega$$

i omski otpor

$$R_P = \frac{R_s^2 + L\omega_0^2}{R_s} = 2500 \, \Omega.$$

Pri rezonanciji kapacitivni otpor jednak je induktivnom otporu, struje kroz ta dva otpora jednake su i protufazne te se poništavaju i ukupna je struja jednaka struji kroz ekvivalentni omski otpor.

## 6.5. Rad i snaga izmjenične struje

Trenutna vrijednost snage izmjenične struje dobiva se množenjem trenutne vrijednosti struje i napona:

$$p = ui \quad (6.45)$$

Ako se napon mijenja po zakonu  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ , a jakost struje po zakonu  $i = I_m \sin \omega t$ , izraz (6.45) poprima oblik:

$$p = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t \quad (6.46)$$

Snaga se dakle, stalno mijenja od nule do maksimalne vrijednosti. Srednju vrijednost snage dobivamo integracijom:

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t \, dt \quad (6.47)$$



$$\overline{P} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = UI \cos \varphi$$

gdje su  $U = U_m/\sqrt{2}$  i  $I = I_m/\sqrt{2}$  efektivne vrijednosti napona i struje.

Srednja snaga  $\overline{P}$  ovisi o faktoru  $\cos \varphi$ , tj. o faznom pomaku između struje i napona. Kada su struja i napon u fazi ( $\varphi = 0$ ), tj. kada je u strujnome krugu samo omsko trošilo, srednja snaga jednaka je produktu efektivne vrijednosti napona i struje:

$$P = UI \quad (6.48)$$

U tom slučaju snagu računamo istim izrazom kao i kod jednosmjerne struje, što je i razumljivo jer smo efektivne vrijednosti upravo i definirali tako da izmjenična struja efektivnoga napona  $U$  i jakosti  $I$  proizvodi istu snagu u otporu  $R$  kao i stalna struja napona  $U$  i jakosti  $I$ . To je tzv. radna snaga (tj. ona koja proizvodi toplinsku energiju u omskom otporu kruga, mehaničku energiju u motoru i sl.).

Ako idealnu zavojnicu induktiviteta  $L$  priključimo na izvor izmjeničnog napona  $U$ , snaga je

$$p = ui = U_m I_m \cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} U_m I_m \sin 2\omega t \quad (6.49)$$

Snaga se mijenja sinusoidno s dvostrukom frekvencijom i pozitivna je kada zavojnica uzima energiju iz izvora, a negativna kada zavojnica vraća energiju u izvor. Srednja snaga je nula jer su te dvije energije jednake. U idealnoj zavojnici nema gubitaka. Tu snagu zovemo reaktivnom (jalovom)  $P_r$  za razliku od radne snage  $P$  koja se troši u omskom otporu. Slično je i kada je kondenzator priključen na izvor izmjeničnog napona.

#### Primjer 6.5.

Kolika je snaga kada kondenzator kapaciteta  $0,1 \mu\text{F}$  priključimo na gradsku mrežu?

Kapacitivni je otpor:

$$R_C = \frac{1}{C\omega} = 31\,847 \, \Omega$$

Struja kroz kondenzator je

$$I = \frac{U}{R_C} = 6,91 \, \text{mA}$$

Trenutna je snaga

$$p = ui = U_m \sin(\omega t - 90^\circ) I_m \sin \omega t = -\frac{1}{2} U_m I_m \sin 2\omega t$$

Reaktivna snaga iznosi

$$\begin{aligned} P_r &= U_C I_C = 220 \, \text{V} \cdot 6,91 \, \text{mA} = 1,5 \, \text{voltamper reaktivni} = \\ &= 1,5 \, \text{var} \end{aligned}$$

Isti rezultat dobivamo i ovako

$$P = I_C^2 R_C = \frac{U^2}{R_C} = 1,5 \text{ var}$$

Faktor snage je nula ( $\varphi = -90^\circ$ ) te je radna snaga jednaka nuli.

Ako je impedancija  $Z$  (sastavljena od radnog i reaktivnog otpora) priključena na izvor izmjeničnog napona  $U$ , razlika u fazi između napona i struje je  $\varphi$ , a u krugu teče struja efektivne vrijednosti  $I$ . Produkt napona i struje naziva se prividnom snagom:

$$P_p = UI \quad (6.50)$$

Slično kao za struju i napon, možemo crtati vektorski dijagram za snagu, tzv. trokut snage. Ako radnu snagu crtamo u smjeru osi  $x$ , reaktivnu u smjeru osi  $y$ , njihov zbroj je prividna snaga i vektor koji nju predstavlja zatvara kut  $\varphi$  s vektorom radne snage. Iz tog trokuta vidimo da je prividna snaga jednaka geometrijskom (vektorskom) zbroju radne i reaktivne snage:

$$\begin{aligned} P &= P_p \cos \varphi \\ P_r &= P_p \sin \varphi \\ P_p &= \sqrt{P^2 + P_r^2} = UI \end{aligned} \quad (6.51)$$

Vrijednost radne snage iskazujemo vatima (W), prividne u voltamperima (VA), a reaktivnu snagu jedinicom var (voltamper reaktivni). Naravno da su i voltamper i var jednaki vatu ( $1 \text{ VA} = 1 \text{ var} = 1 \text{ W}$ ). Faktor snage  $\cos \varphi$  omjer je radne i prividne snage:

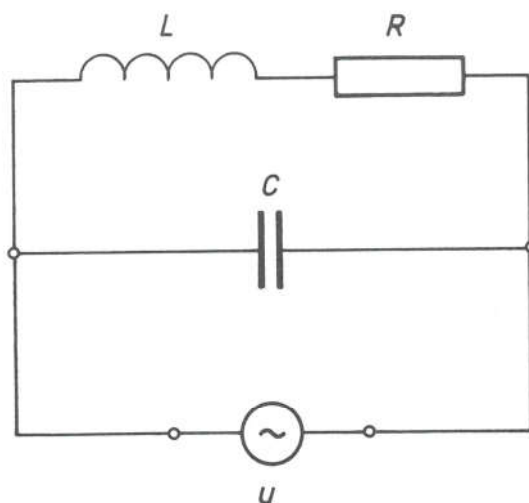
$$\cos \varphi = \frac{\overline{P}}{UI} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (6.52)$$

Induktivna (odnosno kapacitivna), tj. jalova struja koja teče kroz zavojnice (kondenzatore) zagrijava žice vodova i zato je važno postići što veći faktor snage, odnosno što manju jalovu struju.

Ako uređajima sa zavojnicama (induktivnim otporom) spojimo paralelno kondenzator, povećat će se faktor  $\cos \varphi$  (smanjiti jalova snaga). Takav postupak se naziva kompenzacija jalove struje (v. primjer 6.6).

#### Primjer 6.6.

Serijski spoj induktivnog otpora od  $352 \, \Omega$  i omskog otpora od  $264 \, \Omega$  priključen je na gradsku mrežu (220 V, 50 Hz). Kolika je prividna, reaktivna (jalova) i radna snaga? Koliki je kondenzator potrebno paralelno priključiti uređaju da bi faktor snage  $\cos \varphi$  bio jednak jedinici?



Slika 6.16.

Ukupna je impedancija

$$Z = \sqrt{R^2 + R_L^2} = 440 \, \Omega$$

Fazni je kut između struje i napona

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_L}{R} = 1,33; \quad \varphi = 53,13^\circ$$

Faktor snage je

$$\cos \varphi = 0,6$$

Struja kroz krug iznosi

$$I = \frac{U}{Z} = 0,5 \, \text{A}$$

Ako struju prikazemo funkcijom  $i = I_m \sin \omega t$ , tada je napon  $u = U_m \sin(\omega t + 53,13^\circ)$ , gdje je  $I_m = 0,5 \sqrt{2} \, \text{A}$ ,  $U_m = 220 \sqrt{2} \, \text{V}$ . Prividna snaga je produkt struje i napona

$$P_p = UI = 110 \, \text{VA}$$

Radna je snaga

$$P = UI \cos \varphi = 66 \, \text{W}$$

Reaktivna je snaga

$$P_r = UI \sin \varphi = 88 \, \text{var}$$

U vektorskom dijagramu snage radnu snagu  $P$  crtamo u smjeru osi  $x$ , snagu  $P_r$  u smjeru osi  $y$ , te vektorskim zbrajanjem dobivamo prividnu snagu  $P_p$  pod kutem  $\varphi = 53,13^\circ$ :

$$P_p = \sqrt{P^2 + P_r^2}, \quad 110 \, \text{W} = \sqrt{66^2 + 88^2} \, \text{W}$$



Reaktivna snaga u ovom primjeru je dosta velika i to uzrokuje nepotrebne gubitke u vodovima kojima je uređaj spojen na mrežu. Dodavanjem paralelnog kondenzatora tj. kompenzacijom jalove struje gubici će se smanjiti i faktor snage povećati. Pri potpunoj kompenzaciji jalove struje jalova snaga zavojnice i kondenzatora se poništava, i krug je opterećen samo s radnom snagom, struja je u fazi s naponom i  $\cos \varphi = 1$ . Potrebno je dakle odabrati takav kondenzator da njegova reaktivna snaga bude jednaka reaktivnoj snazi uređaja, tj. 88 var:

$$R_C = \frac{U^2}{P_r} = \frac{(220 \text{ V})^2}{88 \text{ var}} = 550 \Omega$$

$$C = \frac{1}{\omega R_C} = 5,79 \mu\text{F}$$

Ukupna struja nakon kompenzacije vektorska je suma struja kroz kondenzator i kroz uređaj:

$$I_C = \frac{U}{R_C} = 0,4 \text{ A}, \quad I_{ur} = \frac{U}{Z} = 0,5 \text{ A}$$

Budući da ti vektori zatvaraju kut od  $90^\circ + \varphi = 143,13^\circ$ , njihov je zbroj 0,3 A, te je ukupna struja 0,3 A i u fazi s naponom ( $\cos \varphi_1 = 1$ ).

Zadatak možemo riješiti i pomoću uvjeta za rezonanciju. Faktor snage bit će jedan, ako je struja u fazi s naponom, tj. ako je krug u rezonanciji. Iz uvjeta rezonancije (6.44) dobivamo:

$$\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \omega C, \quad C = 5,79 \mu\text{F}$$

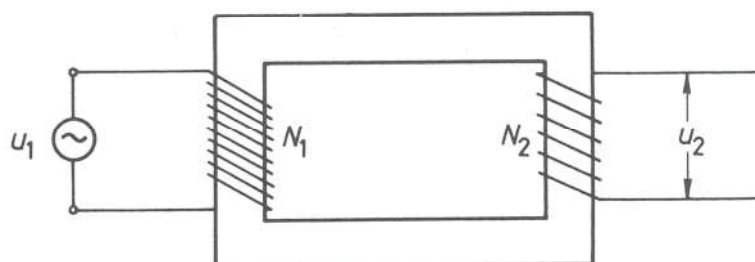
Kada bi kondenzator C priključili serijski u strujni krug, impedancija bi iznosila

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Odabiranjem  $1/(C\omega) = L\omega = 352 \Omega$ , tj.  $C = 9,05 \mu\text{F}$ , postiže se rezonancija. U tom bi slučaju impedancija bila jednaka omskom otporu ( $264 \Omega$ ), struja kroz krug bi iznosila 0,83 A, napon na kondenzatoru 292 V, napon na uređaju 365 V, dakle puno veći od napona za koji je uređaj predviđen. Pri kompenzaciji jalove struje potrebno je dakle kondenzator priključiti paralelno, a ne serijski.

## 6.6. Transformatori

Jedna od osnovnih prednosti izmjeničnog napona je mogućnost transformacije od jednog napona na drugi. Transformatori su uređaji koji prenose električnu energiju iz jednog (primarnog) u drugi (sekundarni) krug posredstvom magnetskog polja.



Slika 6.17. Transformator

Transformator se sastoji od dvije zavojnice s  $N_1$  zavoja i sekundarne s  $N_2$  zavoja koje su međusobno magnetski (induktivno) povezane, npr. tako da se motaju na zatvorenoj željeznoj jezgri (sl. 6.17). Gubici u transformatoru nastaju zbog histereze i vrtložnih struja. Da bi se smanjili ti gubici za jezgru se odabiru meki magnetski materijali i jezgra se izrađuje od međusobno izoliranih limenih pločica.

Pretpostavit ćemo da je transformator idealan, tj. da su gubici u omskom otporu zavojnica te gubici zbog histereze i vrtložnih struja u željeznoj jezgri zanemarivi i da nema rasipanja magnetskog toka izvan jezgre transformatora. Čitav magnetski tok proizveden u primarnoj zavojnici idealnog transformatora prolazi i kroz sekundarnu zavojnicu. Snaga i energija koju dovodimo primarnoj zavojnici prenosi se potpuno u sekundarnu.

Pretpostavimo da je primarna zavojnica transformatora priključena na izmjenični napon  $u_1$ . U praznom hodu (tj. kada u sekundarnoj zavojnici ne teče struja jer nije spojena na trošilo) kroz primarnu zavojnicu teče struja praznog hoda ( $I_{ph} = U_1/(L_1\omega)$ ), u željeznoj jezgri nastaje promjenljivi magnetski tok te se na primarnoj zavojnici inducira elektromotorna sila samoindukcije  $e_1$  koja uravnotežuje narinuti napon  $u_1$ . Promjenljivi magnetski tok prolazi i kroz sekundarnu zavojnicu i u njoj inducira elektromotornu silu  $e_2$ . Prema Faradayevom zakonu indukcije te su elektromotorne sile

$$e_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt}, \quad e_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (6.53)$$

Odatle je

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (6.54)$$

Za idealni transformator taj omjer vrijedi i za napone  $u_1$  i  $u_2$  na krajevima primarne i sekundarne zavojnice. Ako je izmjenični napon sinusoidaln taj omjer vrijedi

i za efektivne vrijednosti napona:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (6.55)$$

Kada se na sekundarnu zavojnicu transformatora priključi trošilo impedancije  $Z$ , kroz zavojnicu protekne struja  $I_2$ . Zbog toga se promijeni i magnetski tok kroz željeznu jezgru, te da bi na primaru ostao napon  $U_1$  (na koji je transformator priključen), povećava se i struja  $I_1$  kroz primarnu zavojnicu. U idealnom transformatoru snaga utrošena u otporu priključenom na sekundar jednaka je snazi koja se iz izvora dovodi primarnoj zavojnici. Zanimarimo li struju praznog hoda, možemo pisati:

$$U_1 I_1 = U_2 I_2 \quad (6.56)$$

$$I_1 : I_2 = U_2 : U_1 = N_2 : N_1 \quad (6.57)$$

Struje kroz primar i sekundar transformatora odnose se obrnuto nego napon na njima. Pri istoj snazi, onoliko puta koliko se poveća napon toliko se puta smanji jakost struje.

Pri prijenosu električne energije na daljinu upotrebljavaju se visoki naponi (110 kV, 380 kV), koji se prije upotrebe transformiraju na napon gradske mreže. Zbog tako visokih napona struja kroz vodove dalekovoda relativno je mala, pa su i gubici na otporima vodova, tzv.  $RI^2$  gubici, na taj način bitno smanjeni. To je upravo najvažniji razlog da se električna energija upotrebljava u obliku izmjeničnih struja.

U realnom transformatoru gubici nisu sasvim zanemarivi, kao što smo pretpostavili pri razmatranju idealnoga transformatora. Međutim, stupanj korisnosti transformatora

$$\eta = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \quad (6.58)$$

može biti vrlo velik, čak i do 0,99, tako da izrazi koje smo izveli za idealni transformator vrlo dobro vrijede i za realni.

#### Primjer 6.7.

Potrošaču je potreban napon od 220 V i struja 500 A. Tu snagu treba dovesti iz izvora udaljenog 10 km vodovima ukupnog otpora  $2 \Omega$ .

- Koliki su gubici zbog Jouleove topline i pad napona u vodovima?
- Koliki bi bio presjek vodova? Kako bi se gubici mogli smanjiti upotrebom transformatora s omjerom transformacije 1 000?

- Ukupni je otpor vodova  $2 \Omega$  pa je snaga izgubljena u Jouleovoj toplini:

$$P = I^2 R = (500 \text{ A})^2 \cdot 2 \Omega = 500 \text{ kW}$$

Izgubljena snaga bila bi oko pet puta veća od potrebne ( $220 \text{ V} \cdot 500 \text{ A} = 110 \text{ kW}$ ), što je naravno, sasvim, neekonomično.



Pad napona u vodovima bio bi

$$U = IR = 500 \text{ A} \cdot 2 \Omega = 1000 \text{ V}$$

pa bi izvor morao osigurati 1220 V i 500 A, tj. snagu od 610 kW. Kad bi se za prijenos upotrijebila dva bakrena voda, svaki dužine 10 km, presjek bi im trebao biti:

$$S = \frac{\rho l}{R} = \frac{1,67 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m} \cdot 10^4 \text{ m}}{1 \Omega}$$

$$S = 1,67 \text{ cm}^2,$$

odnosno promjer:

$$2r = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 1,46 \text{ cm}.$$

b) Ako napon izvora transformiramo na 1000 puta veći napon koji se prenese vodovima i na kraju prije trošila ponovno transformira na početni napon 220 V, tada će gubici biti bitno manji. Transformator na koji je priključeno trošilo imat će na sekundaru napon 220 V i struju 500 A, dok će na primaru biti 1000 puta veći napon ( $2,2 \cdot 10^5 \text{ V}$ ) i 1000 puta manja struja (0,5 A). Ta će struja teći kroz dalekovod, gubici zbog zagrijavanja bit će:

$$P = I^2 R = (0,5 \text{ A})^2 \cdot 2 \Omega = 0,5 \text{ W}$$

a pad će napona iznositi:

$$U = IR = 0,5 \text{ A} \cdot 2 \Omega = 1 \text{ V},$$

što je zanemarivo.

Iz ovoga primjera očita je prednost transformiranja napona pri prijenosu na veće udaljenosti. Prijenos bez transformiranja bio bi neekonomičan, a često praktički neizvediv.

### Primjer 6.8.

Izmjenični izvor efektivne elektromotorne sile 110 V i unutrašnjega otpora  $10 \Omega$  spojen je na trošilo od  $100 \Omega$ , najprije izravno, a zatim preko transformatora s omjerom zavoja  $N_1 : N_2 = 1 : 2$ .

a) Kolika je snaga u prvom slučaju?

b) Kolika je snaga u primarnom i sekundarnom krugu kada je trošilo spojeno preko transformatora?

a) Struja kroz krug iznosi:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_u + R} = \frac{110 \text{ V}}{110 \Omega} = 1 \text{ A},$$

snaga predana trošilu:

$$P_R = I^2 R = 100 \text{ W}$$

a snaga potrošena unutar izvora:

$$P_u = I^2 R_u = 10 \text{ W}$$

Ukupna je snaga

$$P = P_R + P_u = 110 \text{ W}.$$

b) Ako je  $U_1$  napon na primaru i  $I_1$  struja kroz primarnu zavojnicu, tada su napon i struja u sekundaru

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1 \quad I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1$$

Omjer  $U_2/I_2$  jednak je otporu trošila  $R$ :

$$R = \frac{U_2}{I_2} = \frac{\frac{N_2}{N_1} U_1}{\frac{N_1}{N_2} I_1} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{U_1}{I_1}.$$

Odatle je

$$\frac{U_1}{I_1} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 R.$$

Ukupni otpor primarnoga kruga jednak je

$$R_{uk} = R_u + \frac{U_1}{I_1} = R_u + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 R.$$

Struja iznosi:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_{uk}} = \frac{110 \text{ V}}{35 \Omega} = 3,14 \text{ A},$$

snaga potrošena u izvoru:

$$P_u = I^2 R_u = 3,14^2 \text{ A}^2 \cdot 10 \Omega = 98,6 \text{ W}.$$

a ukupna snaga u primaru:

$$P_{uk} = I^2 R_{uk} = 3,14^2 \text{ A}^2 \cdot 35 \Omega = 346 \text{ W}.$$

Snaga koja se troši zbog trošila iznosi:

$$P = P_{uk} - P_u = 346 \text{ W} - 98,6 \text{ W} = 247 \text{ W}.$$

Napon je na primarnoj zavojnici:

$$U_1 = \mathcal{E} - R_u I_1 = \mathcal{E} - R_u \frac{\mathcal{E}}{R_{uk}} = 110 \text{ V} - 10 \Omega \frac{110 \text{ V}}{35 \Omega} = 78,6 \text{ V},$$

a napon na sekundarnoj:

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1 = 157 \text{ V.}$$

Snaga u primarnom krugu transformatora iznosi

$$P_1 = U_1 I_1 = 78,6 \text{ V} \cdot 3,14 \text{ A} = 247 \text{ W}$$

dok je snaga u sekundarnom krugu

$$P_2 = U_2 I_2 = 157 \text{ V} \cdot \frac{3,14 \text{ A}}{2} = 247 \text{ W}$$

Transformatori se, dakle, mogu upotrijebiti da bi se poboljšao, odnosno optimizirao prenos snage između izvora i trošila.

### Primjer 6.9.

Primar transformatora ima 500 zavoja. Omski otpor primara je  $1 \Omega$ . Pri naponu od 220 V struja je kroz primar 0,7 A. Snaga je u primarnome krugu 100 W. Koliki su:

- gubici u jezgri, ekvivalentni otpor i struja tih gubitaka,
- faktor snage,
- maksimalni magnetski tok kroz jezgru i
- struja i otpor magnetizacije?

a) Gubici su u željeznoj jezgri transformatora:

$$P_j = 100 \text{ W} - I^2 R$$

$$P_j = 100 \text{ W} - 1 \cdot 1,07^2 \text{ W} = 99,5 \text{ W.}$$

b) Faktor snage  $\cos \varphi$  za neopterećeni transformator iznosi:

$$P = UI \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{100 \text{ W}}{220 \text{ V} \cdot 0,7 \text{ A}} = 0,71.$$

c) Napon je na primaru transformatora:

$$u_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} = N_1 \frac{d}{dt} (\Phi_m \sin \omega t) = \omega N_1 \Phi_m \cos \omega t,$$

a maksimalna vrijednost inducirano napona na primaru transformatora

$$U_m = \omega N_1 \Phi_m$$

Odatle dobivamo maksimalni magnetski tok kroz lim transformatora:

$$\Phi_m = \frac{U_m}{\omega N_1} = \frac{220\sqrt{2} \text{ V}}{314 \cdot 500 \text{ s}^{-1}} = 1,97 \text{ mWb.}$$



d) Ekvivalentni je otpor koji odgovara gubicima u jezgri:

$$R_j = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2 \text{ V}^2}{100 \text{ W}} = 484 \Omega$$

Odatle je struja kroz jezgru transformatora

$$I_j = \frac{220 \text{ V}}{484 \Omega} = 0,45 \text{ A}.$$

Budući da je ukupna struja 0,7 A, struja kroz jezgru 0,45 A, struja magnetiziranja iznosi:

$$I_m = \sqrt{I^2 - I_j^2} = \sqrt{0,7^2 - 0,45^2} \text{ A} = 0,54 \text{ A}$$

pa je reaktivni (induktivni) otpor transformatora:

$$X_m = \frac{U}{I} = \frac{220 \text{ V}}{0,54 \text{ A}}$$

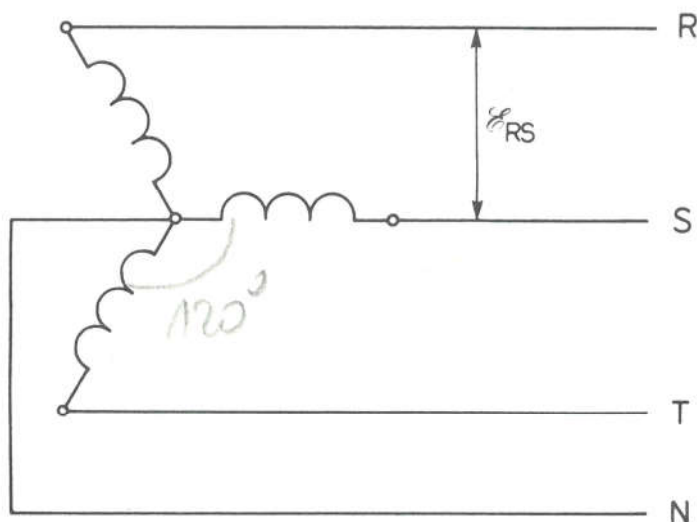
$$X_m = 407 \Omega.$$

## 6.7. Trofazna struja

U praksi se izmjenični naponi proizvode pomoću trofaznih sinkronih generatora. Princip je rada jednak kao kod jednofaznih (sl. 6.1) samo se umjesto jedne nalaze tri zavojnice koje međusobno zatvaraju kut od  $120^\circ$ . Obično su te zavojnice na statoru, a rotor je u obliku magneta koji, okrećući se, u zavojnicama statora inducira elektromotornu silu. Tako se dobije trofazni sustav izmjeničnih elektromotornih sila. Jednu fazu označujemo slovom **R**, drugu sa **S**, a treću sa **T**. Obično se jedan od krajeva zavojnica **R**, **S** i **T** međusobno spoji i uzemlji i tako se dobiva nul-vodič. Drugi je kraj zavojnice fazni vodič. Napon između faznoga vodiča i nul-vodiča fazni je napon. Njegova je efektivna vrijednost za gradsku mrežu 220 V i jednaka je za sva tri (**R**, **S** odnosno **T**) vodiča. Pri ovakvom spajanju zavojnica (tzv. spoj u zvijezdu) iz generatora izlaze četiri vodiča: **R**, **S** i **T** fazni vodič i nul-vodič (sl. 6.18).

U trofaznome generatoru sve su tri zavojnice jednake pa su jednake i inducirane elektromotorne sile, ali međusobno pomaknute u fazi za  $\frac{2}{3} \pi$  ( $120^\circ$ ):

$$\begin{aligned} e_R &= \mathcal{E}_m \sin \omega t \\ e_S &= \mathcal{E}_m \sin \left( \omega t - \frac{2}{3} \pi \right) \\ e_T &= \mathcal{E}_m \sin \left( \omega t - \frac{4}{3} \pi \right). \end{aligned} \quad (6.59)$$



Slika 6.18. Trofazna mreža

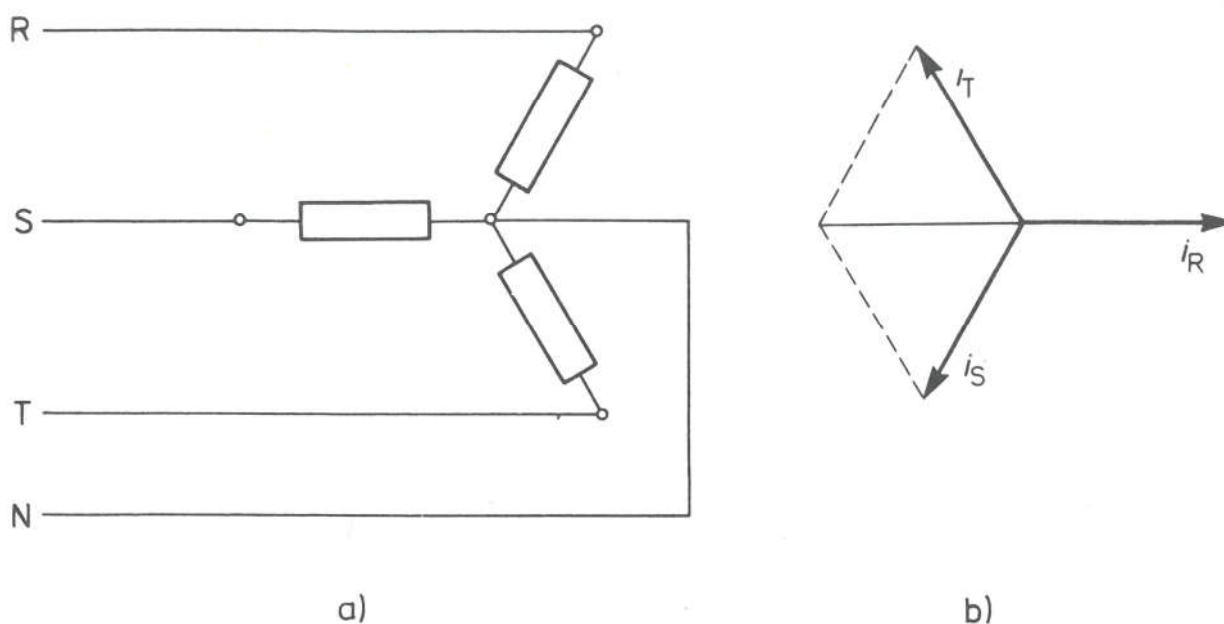
Za gradsku mrežu  $\mathcal{E}_m$  iznosi  $220\sqrt{2} = 310$  V, jer je efektivni napon između svakog od faznih vodiča i zemlje 220 V. Napon između dvaju faznih vodiča naziva se linijski napon. Njegova je efektivna vrijednost  $U\sqrt{3} = 220\sqrt{3}$  V = 380 V. U to se možemo lako uvjeriti računom (sl. 6.18):

$$\begin{aligned}
 e_{RS} &= e_R - e_S = \mathcal{E}_m \sin \omega t - \mathcal{E}_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\
 e_{RS} &= 2\mathcal{E}_m \cos \frac{1}{2} \left( \omega t + \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \sin \frac{1}{2} \left( \omega t - \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \\
 e_{RS} &= 2\mathcal{E}_m \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right) \sin \frac{\pi}{3} = \mathcal{E}_m \sqrt{3} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \\
 e_{RS} &= \mathcal{E}_m \sqrt{3} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{6} \right).
 \end{aligned} \tag{6.60}$$

Maksimalna je vrijednost elektromotorne sile između dvaju faznih vodiča (amplituda linijske elektromotorne sile) za  $\sqrt{3}$  veća nego amplituda faznoga napona; isto vrijedi i za efektivne vrijednosti.

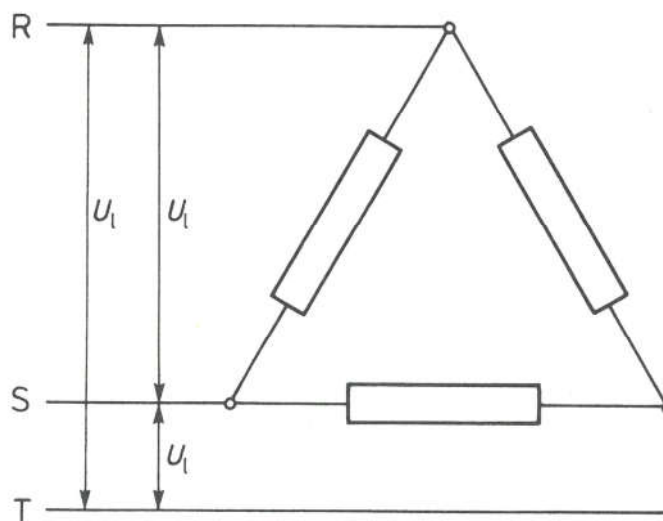
Trošila možemo spajati na trofazni sustav na različite načine. Kada trošilo priključimo između faznog (**R** ili **S** ili **T**) vodiča i nul-vodiča (sl. 6.19.a), na krajevima je trošila fazni napon (220 V). Tako se npr. priključuju kućanski aparati. Ako je moguće, poželjno je takva trošila spajati u zvijezdu i postići što simetričnije opterećenje da bi struja u nul-vodiču bila što manja. Jakost struje u nul-vodiču dobivamo zbrajanjem triju struja kroz trošila spojena u zvijezdu (sl. 6.19.b) i pri simetričnom opterećenju ta je struja jednaka nuli:

$$\begin{aligned}
 i_{nv} &= i_R + i_S + i_T \\
 i_{nv} &= I_m \sin \omega t + I_m \sin(\omega t - 120^\circ) + I_m \sin(\omega t - 240^\circ) \\
 i_{nv} &= I_m (\sin \omega t + \sin \omega t \cos 120^\circ - \cos \omega t \sin 120^\circ + \sin \omega t \cos 240^\circ - \cos \omega t \sin 240^\circ) \\
 i_{nv} &= I_m \left( \sin \omega t - \frac{1}{3} \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t - \frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) = 0
 \end{aligned} \tag{6.61}$$



Slika 6.19. a) Spoj trošila u zvijezdu b) Struja kroz nul-vod

Ako otpori priključeni na trofaznu mrežu nisu jednaki, neće ni struje u vodičima R, S, T biti jednake pa će kroz nul-vodič teći vektorski zbroj struja  $i_R$ ,  $i_S$ ,  $i_T$ .



Slika 6.20. Spoj trošila u trokut

Trofazna trošila predviđena za napon od 380 V (npr. trofazne elektromotore) spajamo u trokut kao što je prikazano na sl. 6.20.

Snaga je trofazne struje pri simetričnom opterećenju:

$$P = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi = 3 U_f I_f \cos \varphi \quad (6.62)$$

gdje je  $U_l$  linijski napon (380 V),  $I_l$  linijska struja (struja kroz fazni vodič),  $\cos \varphi$  faktor snage,  $U_f$  fazni napon i  $I_f$  fazna struja. Uočite da je  $\varphi$  kut između faznog napona i fazne struje, a ne kut između linijskog napona i linijske struje.



**Primjer 6.10.**

Na trofaznu gradsku mrežu priključene su tri jednake zavojnice ( $R = 29 \Omega$ ,  $L = 70 \text{ mH}$ ) i spojene u trokut. Kolike su struje kroz zavojnice, a kolike linijske struje?

Impedancija je svake zavojnice

$$Z = \sqrt{R^2 + R_L^2} = 36,4 \Omega$$

Struja kroz otpor  $Z_1$  priključen između faza **R** i **S** je

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = 10,44 \text{ A}, \quad \varphi_1 = 37,2^\circ$$

Uzmemo li napon  $u_{RS}$  kao referentni, struja kroz otpor  $Z_1$  zaostaje za naponom za  $37,2^\circ$  ( $\varphi_1 = -37,2^\circ$ ).

Struje kroz zavojnice impedancije  $Z_2$  i  $Z_3$  imaju jednaki iznos (10,44 A) međutim fazni kutovi su različiti i iznose  $\varphi_2 = -157,2^\circ$  i  $\varphi_3 = -277,2^\circ$  ( $= 82,8^\circ$ )

Linijske su struje:

$$i_R = i_1 - i_3$$

$$i_S = i_2 - i_1$$

$$i_T = i_3 - i_2$$

Pomoću vektorskih dijagrama dobivamo:

$$i_R = 18,1 \text{ A} \quad (\varphi_R = -67,2^\circ)$$

$$i_S = 18,1 \text{ A} \quad (\varphi_S = -187,2^\circ)$$

$$i_T = 18,1 \text{ A} \quad (\varphi_T = 52,8^\circ)$$

Struje su jednakog iznosa, međusobno zatvaraju kutove od  $120^\circ$ , te im je zbroj

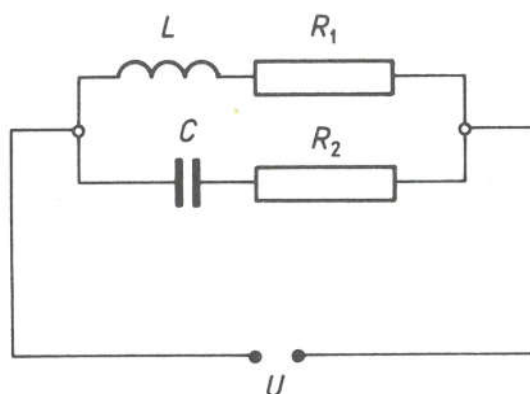
$$i_R + i_S + i_T = 0.$$

## Pitanja i zadaci

- 6.1. Objasnite princip rada generatora kojim se dobiva izmjenična struja.
- 6.2. Što su efektivne vrijednosti jakosti struje i napona izmjenične struje? Izvedite vezu između maksimalne i efektivne vrijednosti.
- 6.3. Objasnite pojavu induktivnog i kapacitivnog otpora u krugu izmjenične struje.
- 6.4. Što je impedancija? Kako se računa ukupni otpor za serijski spoj, a kako za paralelni spoj omskog otpora, zavojnice i kondenzatora u krugu izmjenične struje?
- 6.5. Izračunajte induktivni otpor i impedanciju zavojnice induktiviteta  $0,1 \text{ H}$  i radnog otpora  $50 \Omega$  koja je priključena na izmjenični napon frekvencije  $1000 \text{ Hz}$ .
- 6.6. Obrazložite što uzrokuje pojavu faznog pomaka između jakosti struje i napona. O čemu ovisi fazni pomak i kako se može izračunati? Prikažite to vektorskim dijagramom.
- 6.7. Kada zavojnicu priključimo na istosmjerni napon  $100 \text{ V}$ , potekne struja jakosti  $4 \text{ A}$ , a kada je uključimo na izmjenični efektivni napon  $100 \text{ V}$  i frekvencije  $50 \text{ Hz}$ , efektivna je jakost struje  $2 \text{ A}$ . Odredite induktivitet zavojnice. Nacrtajte vektorski dijagram.
- 6.8. Kolik je kapacitivni otpor kondenzatora od  $100 \text{ pF}$  za izmjeničnu struju frekvencije  $206 \text{ MHz}$ , a kolik za izmjeničnu struju gradske mreže?
- 6.9. Objasnite električnu rezonanciju u serijskom i paralelnom spoju induktivnog i kapacitivnog otpora.
- 6.10. Izračunajte rezonantnu frekvenciju  $\omega_0$  za serijski krug s  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 0,1 \text{ H}$  i  $C = 10 \mu\text{F}$ . Nacrtajte ovisnost otpora  $R_L$ ,  $R_C$  i  $Z$  te struje  $I$  o kružnoj frekvenciji  $\omega$  od  $500$  do  $1500 \text{ rad/s}$ .
- 6.11. Pokažite da je rezonantna frekvencija kruga na sl. 6.21. jednaka

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{R_2^2 - \frac{L}{C}}}$$

i izračunajte je za slučaj  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$ ,  $L = 0,1 \text{ H}$  i  $C = 10 \mu\text{F}$ .



Slika 6.21.

- 6.12. Kako se računa snaga izmjenične struje? Što je to faktor snage?
- 6.13. Izvedite izraz (6.49) za radnu snagu izmjenične struje. Poslužite se izrazima (6.28) i (6.31) za trenutačne vrijednosti jakosti struje i napona.
- 6.14. Što je to jalova, a što prividna snaga izmjenične struje? Zašto se radna snaga razlikuje od prividne? U što se troši razlika između prividne i radne snage?
- 6.15. Na gradsku mrežu serijski su spojeni induktivni otpor  $R_L = 40 \, \Omega$  i omski otpor  $R = 30 \, \Omega$ . Koliki su: a) impedancija, b) jakost struje, c) faktor snage, d) prividna, radna i jalova snaga? e) Kolik je kondenzator potrebno paralelno priključiti tom spoju da bi se faktor snage poboljšao na 0,9?
- 6.16. Što je transformator? Objasnite princip rada transformatora.
- 6.17. Transformator za električno zvonice snižava izmjenični napon od 220 V na 4 V. Koliko zavoja ima primarna zavojnica, ako sekundarna ima 12 zavoja? Zanimajte gubitke.
- 6.18. Transformator je priključen na izlaz generatora snage 20 kW tako da napon od 1 kV transformira na 10 kV uz korisnost od 95%. Odredite kolika će se snaga izgubiti pri transformaciji i u transportu ako je ukupni otpor vodova  $25 \, \Omega$ . Koliki bi bili gubici kad bi se energija izravno prenosila, bez transformacije?
- 6.19. Objasnite prednosti izmjenične struje u usporedbi s istosmjernom. Obrazložite zbog čega su pri prijenosu na daljinu gubici za izmjeničnu struju izrazito manji.
- 6.20. Opišite osobine i način dobivanja trofazne izmjenične struje. Koje su prednosti takve struje u usporedbi s jednofaznom?
- 6.21. Kolik je napon između dviju faza, a kolik između jedne faze i nul-vodiča? Kolika je snaga trofazne struje prilikom spoja u trokut, pri simetričnom opterećenju?



## 7. Maxwellove jednađžbe. Elektromagnetski valovi

J. C. Maxwell\* postavio je 1864. opću matematičku teoriju elektriciteta i osnovne zakone elektrodinamike prikazao pomoću četiriju jednađžbi. One su osnova klasične elektrodinamike i svih proračuna koji se odnose na elektromagnetske valove i njihovo širenje kroz prostor; čitav se elektromagnetizam može sumirati pomoću ovih četiriju jednađžbi. One opisuju vezu između električnog i magnetskog polja, te vezu ovih dvaju polja i električnih naboja. Njih smo zapravo već djelomično upoznali razmatrajući Gaussov zakon za elektricitet i magnetizam, Ampèreov zakon i Faradayev zakon indukcije.

### 7.1. Gaussov zakon za električno i magnetsko polje

Veza između električnog polja i naboja koji ga proizvodi može se izraziti jednostavnom i korisnom relacijom, tzv. Gausovim zakonom, do kojeg dolazimo razmatranjem toka električnoga polja.

U odjeljku 1.7. izveli smo Gaussov zakon za elektrostatsko polje – osnovni zakoni elektrostatike:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (7.1)$$

Ako naboj  $Q$  izrazimo prostornom gustoćom naboja u volumenu  $V$  (koji obuhvaća ploha  $S$ ):

$$Q = \iiint_V \rho \, dV \quad (7.2)$$

tada jednađžba (7.2) poprima oblik:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho \, dV \quad (7.3)$$

To je prva Maxwellova jednađžba u integralnu obliku.

\* James Clerk Maxwell (1831 – 1879), škotski matematičar i fizičar, poznat po radovima iz elektrodinamike i kinetičke teorije plinova.

Slično je i za magnetsko polje (v. odjeljak 3.10.). Magnetski je tok kroz bilo koju zatvorenu plohu nula:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (7.4)$$

To je Gaussov zakon za magnetizam, jedna od osnovnih jednađbi elektromagnetizma. Relacija (7.4) druga je Maxwellova jednađba u integralnu obliku.

## 7.2. Faradayev zakon indukcije i treća Maxwellova jednađba

Oersted je, kao što smo već opisali, pronašao da električna struja proizvodi magnetsko polje i tako pokazao da su električne pojave uzrok magnetskim. Nešto kasnije (1831) M. Faraday je pronašao da promjenljivo magnetsko polje stvara električno. On je, naime, pokusno pokazao da promjenljivi magnetski tok kroz neki vodič (zavojnicu) inducira elektromotornu silu na njegovim krajevima. Tako je pronađena elektromagnetska indukcija.

Veličina inducirane elektromotorne sile  $\mathcal{E}$  razmjerna je brzini promjene magnetskoga toka  $\Phi$  kroz petlju:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.5)$$

To je Faradayev zakon indukcije. Negativan predznak u (7.5) posljedica je zakona o održanju energije.

Elektromotornu silu definirali smo kao krivuljni (krivocrtni) integral (cirkulaciju) nekonzervativnog polja neelektrostatskih sila. Na isti način možemo i sada induciranu elektromotornu silu pisati kao cirkulaciju nekonzervativnoga inducirana električnog polja:

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (7.6)$$

gdje je  $E$  ukupno električno polje  $E_i + E_{el}$ ; budući da je elektrostatsko polje  $E_{el}$  konzervativno, cirkulacija  $\oint \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s}$  iščezava pa je  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s}$  i u izrazu (7.6) možemo umjesto  $\vec{E}_i$  pisati ukupno polje  $\vec{E}$ .

Iz (7.5), uzimajući u obzir izraz za magnetski tok  $\Phi = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ , dobivamo Faradayev zakon u obliku:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7.7)$$

pri čemu je krivulja  $K$  granica površine  $S$ .

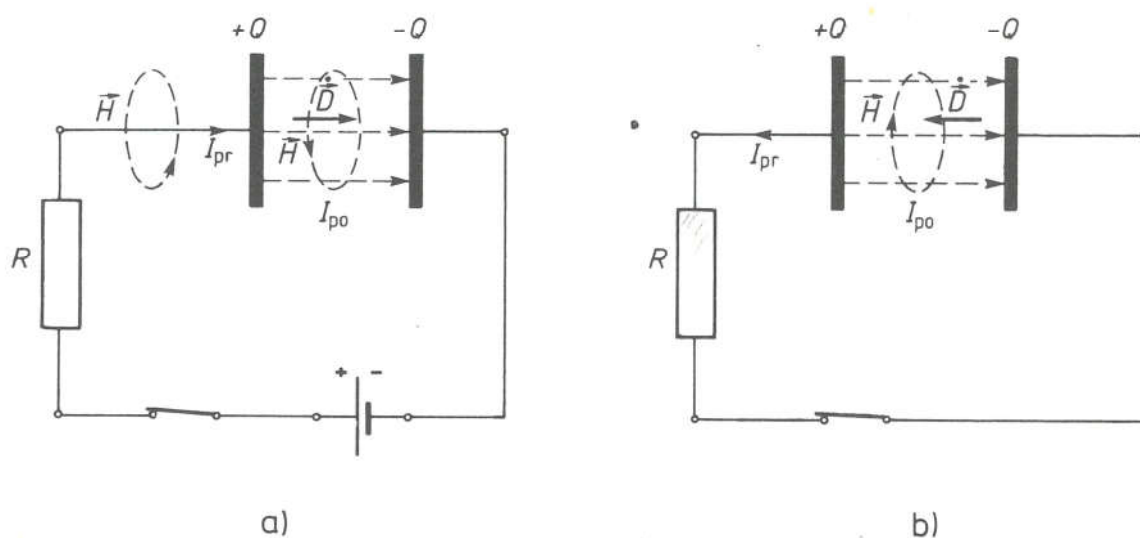
Električno i magnetsko polje povezani su: Promjena magnetskoga toka inducira električno polje i to je jedna od osnovnih jednađbi elektromagnetizma.

Za razliku od elektrostatskoga polja čija je cirkulacija iščezavala, inducirano električno polje nije konzervativno i – njegova cirkulacija daje elektromotornu silu.

Relacija (7.7) treća je Maxwellova jednađba u integralnu obliku.

### 7.3. Ampèreov zakon. Struja pomaka

Promatrajmo nabijanje ili izbijanje kondenzatora (sl. 7.1). Dok se kondenzator nabija, vodičem teče struja, a na pločama kondenzatora prikuplja se naboj i pojačava električno polje između ploča gdje nema provodne struje. Da bi prvo Kirchhoffovo pravilo vrijedilo i za kondenzator, kažemo da provodna struja, koja vodičem dolazi do ploča kondenzatora, nastavlja teći između ploča kao struja pomaka. Promjenu električnoga polja između ploča tumačimo kao struju pomaka. Da bi vrijedila jednadžba kontinuiteta struje (koja proizlazi iz zakona o očuvanju naboja), provodna struja i struja pomaka moraju biti jednake.



Slika 7.1.

Potražimo vezu između struje pomaka i toka električnoga polja. Zamislimo neku zatvorenu plohu koja obuhvaća pozitivno nabijenu ploču kondenzatora na slici.

Prema Gaussovu zakonu je:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

Provodna struja jednaka je struji pomaka

$$I_{\text{pr}} = \frac{dQ}{dt} = I_{\text{pom}} \quad (7.8)$$

Uvrštavanjem (7.1) u (7.8) dobivamo:

$$I_{\text{pom}} = \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{d\Phi_D}{dt} \quad (7.9)$$



To je ukupna struja pomaka kroz zatvorenu površinu oko ploče. Struja pomaka kroz odabranu površinu  $S$  jednaka je:

$$I_{\text{pom}} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (7.10)$$

Vidimo, dakle, da se u strujnome krugu na sl. 7.1. promjenljiva provodna struja u vodovima nastavlja kao struja pomaka u izolatoru (vakuumu) između ploča i tako zatvara strujni krug. Jednako kao provodna struja, i struja pomaka uzrokuje magnetske efekte. Zato u Ampèreovom zakonu, koji povezuje električnu struju i magnetsko polje što ga ona proizvodi, moramo napisati obje struje, i *provodnu*, i *pomačnu*:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{\text{pr}} + I_{\text{pom}} \quad (7.11)$$

ili:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = I + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}, \quad (7.12)$$

gdje je krivulja  $K$  rub plohe površine  $S$ . To je **poopćeni Ampèreov zakon**.

Provodnu struju možemo prikazati i *gustoćom struje*  $\vec{J}$ :

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (7.13)$$

i uvrstiti u relaciju (7.12). Tako dobijemo relaciju:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (7.14)$$

To je *četvrta Maxwellova jednađba*.

#### 7.4. Maxwellove jednađbe u integralnu obliku

Maxwellove jednađbe povezuju *električno* i *magnetsko polje* i *naboje* koji ta polja proizvode. One su osnova klasične elektrodinamike i opisuju elektromagnetske valove i njihovo širenje kroz prostor. U prethodnim smo ih odjeljcima izveli iz osnovnih zakona elektriciteta i magnetizma, napisali u integralnu obliku i tako dobili ove četiri jednađbe:

1.  $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho \, dV$  *Gaussov zakon za električno polje*
2.  $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  *Gaussov zakon za magnetsko polje*
3.  $\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  *Faradayev zakon indukcije*
4.  $\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$  *poopćeni Ampèrev zakon*

Ako brzine promjene električnoga i magnetskoga toka ( $d\Phi_D/dt$  i  $d\Phi_B/dt$ ) nastaju samo zbog mijenjanja vektora  $\vec{D}$  i  $\vec{B}$ , tada je:

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{ i } \quad \frac{d\Phi_B}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

pa zadnje dvije Maxwellove jednadžbe možemo pisati i u obliku:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (7.15)$$

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (7.16)$$

Maxwellove jednadžbe pokazuju da su električno i magnetsko polje određeni razmještajem i gibanjem naboja i da su polja međusobno povezana.

Električno i magnetsko polje  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  definirani su Lorentzovom silom, tj. ukupnom silom na naboj u elektromagnetskome polju:

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.17)$$

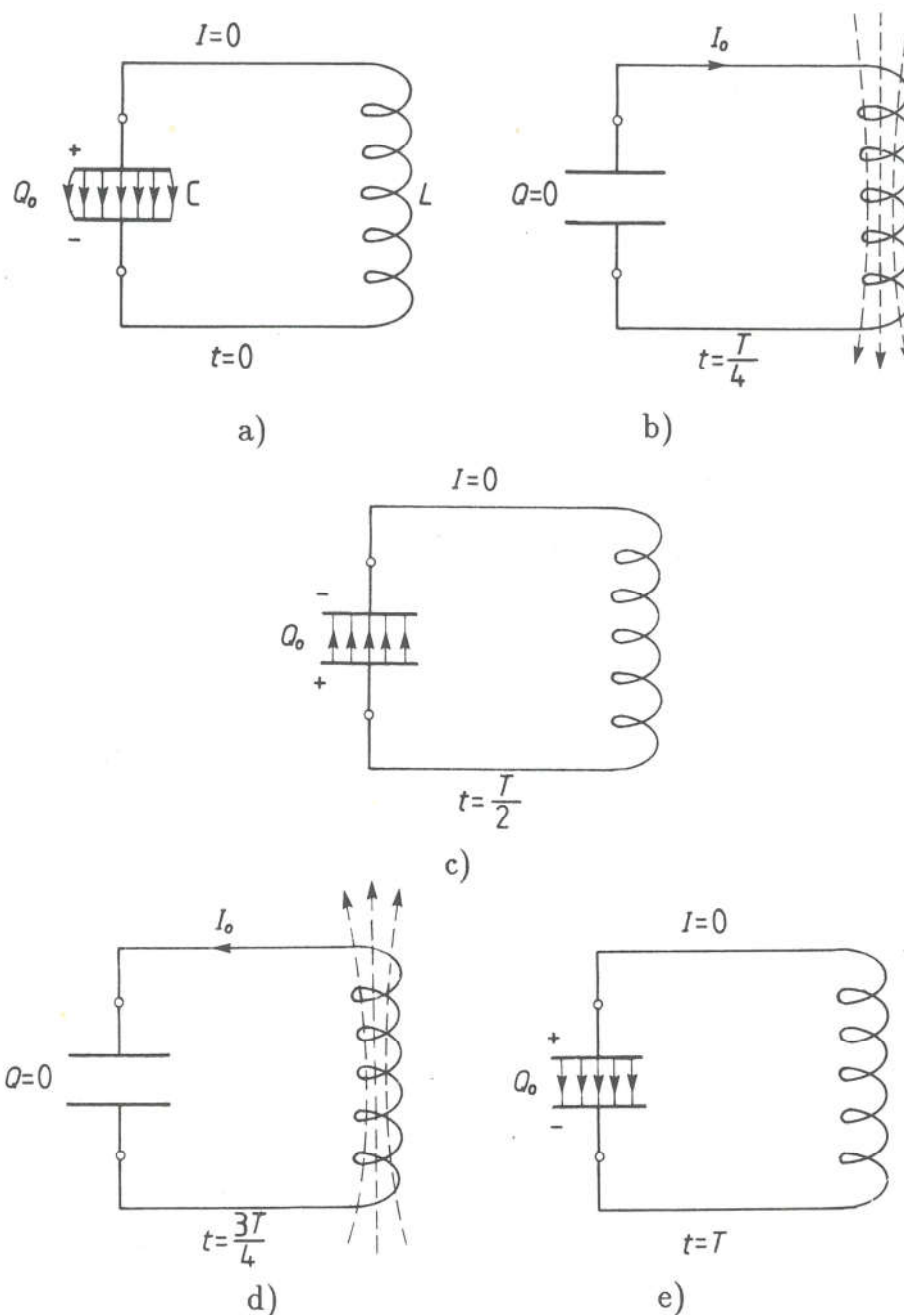
Maxwellove jednadžbe, kao i ova relacija, osnovne su jednadžbe elektromagnetizma pa su, zajedno s relacijom između gustoće struje i jakosti električnoga polja  $\vec{J} = \kappa \vec{E}$ , relacijama  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  i  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  i jednadžbom kontinuiteta za naboj

$$\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{dQ}{dt},$$

osnova elektrodinamike.

## 7.5. Elektromagnetski titraji i valovi

*Elektromagnetski titraji* nastaju u električnome titrajnome krugu koji se sastoji od kondenzatora kapaciteta  $C$ , zavojnice induktiviteta  $L$  i otpornika  $R$ . Takav se titrajni krug često skraćeno naziva  $RLC$ -krug. Katkad se omski otpor kruga može zanemariti i promatrati idealizirani titrajni  $LC$ -krug.



Slika 7.2.

Titranje u krugu možemo uspostaviti dovođenjem početnog naboja na kondenzator tako da u  $t = 0$ , naboj na kondenzatoru bude  $Q_0$ . Zamislimo da pomoću prekidača u  $LC$ -strujnome krugu odvojimo kondenzator od zavojnice i iz nekog



vanjskog izvora kondenzator nabijemo nabojem  $Q_0$ , te da napon na njemu bude  $U_0$ , a energija električnog polja u kondenzatoru  $E_C = Q_0^2/2C$ . Zatim prekidačem isključimo izvor napona  $U$  i zatvorimo  $LC$ -krug tako da se kondenzator izbija kroz zavojnicu (sl. 7.2.a). Zbog samoindukcije zavojnice struja kroz  $LC$ -krug eksponencijalno raste, i kada se kondenzator izbije, dosegne maksimalnu vrijednost  $I_0$  (sl. 7.2.b).

Energija električnoga polja kondenzatora  $E_C = Q^2/2C$  pritom se pretvori u energiju magnetskog polja zavojnice  $E_L = LI_0^2/2$ . Kada se kondenzator isprazni, struja ne prestaje teći kroz krug jer zbog samoindukcije zadržava isti smjer i postupno se smanjuje do nule, nabivši ponovno kondenzator, ovaj put suprotnim polaritetom (sl. 7.2.c). Tada ponovno počinje izbijanje kondenzatora i proces teče u suprotnome smjeru (sl. 7.2.d i e), a nakon vremena  $T$  sistem se nađe u početnom stanju i počinje isti proces, koji se stalno ponavlja. Rezultat je periodično nabijanje i izbijanje kondenzatora odnosno pretvaranje energije električnoga polja u energiju magnetskog polja i obratno. U titrajnome su krugu nastali elektromagnetski titraji odnosno kružne frekvencije  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.18)$$

odnosno perioda:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC} \quad (7.19)$$

To je poznata **Thomsonova formula** za frekvenciju i period električnoga titrajnog kruga.

Iz titrajnoga kruga može se preko antene u obliku pravocrtnog vodiča (titrajućeg dipola) titranje električnoga i magnetskoga polja prenijeti u okolni prostor i tako ostvariti širenje električnoga i magnetskoga polja u obliku elektromagnetskoga vala.

Prvi takav oscilator napravio je H. Hertz (1888) i tako proizveo elektromagnetske valove. Pomoću prijemnika, tj. *rezonantnoga titrajnog kruga* uspio je detektirati elektromagnetske valove iz odašiljača.

### Primjer 7.1.

U ulaznome titrajnom krugu nekog radio prijemnika nalazi se promjenljivi kondenzator paralelno spojen sa zavojnicom induktiviteta 0,33 mH i zanemariva omskog otpora. Kolike su maksimalna i minimalna vrijednost kapaciteta promjenljivoga kondenzatora ako prijemnik obuhvaća cijelo srednjovalno područje između 500 kHz i 1,6 MHz?

Kada je vlastita frekvencija titrajnoga kruga jednaka frekvenciji upadnog radio-vala, nastaje rezonancija, struja u krugu je maksimalna, pa kažemo da je krug ugođen na tu frekvenciju. Iz formule za rezonantnu frekvenciju  $f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$  dobivamo:

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2 f_1^2 L} = 3,07 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

$$C_1 = 307 \text{ pF}$$

$$C_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_2^2 L} = 3,0 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

$$C_2 = 30 \text{ pF}$$

Da bi se obuhvatilo cijelo srednjovalno područje radio-valova frekvencije između 0,5 MHz i 1,6 MHz, potrebno je mijenjati kapacitet od 307 do 30 pF.

## 7.6. Širenje elektromagnetskih valova kroz prostor

Maxwellove jednađbe opisuju elektromagnetsko polje u svakoj točki prostora: iz njih možemo izvesti *valnu jednađbu za elektromagnetske valove* i odrediti kako se magnetsko i električno polje šire kroz prostor.

Promatrat ćemo elektromagnetske valove u homogenome izotropnom prostoru bez struja i naboja tako da je  $\vec{J} = 0$ ,  $\rho = 0$  te  $\epsilon$  i  $\mu$  konstantni. U tom slučaju Maxwellove jednađbe glase:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$$

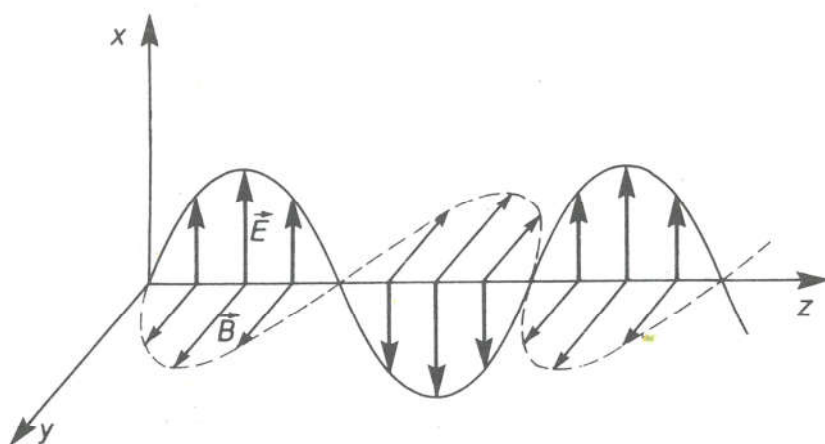
$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (7.20)$$

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Promatrat ćemo harmonički ravni elektromagnetski val koji putuje u smjeru osi  $z$  (sl. 7.3). Iz prvih dviju Maxwellovih jednađbi može se dokazati da električno i magnetsko polje moraju biti okomiti na pravac širenja, tj. da ne postoji longitudinalna komponenta električnoga odnosno magnetskoga polja u smjeru osi  $z$ . Vektori  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  titraju, dakle, okomito na smjer širenja. Smjer možemo odrediti desnom rukom: ako prstima slijedimo kraći put od  $\vec{E}$  do  $\vec{B}$ , palac pokazuje smjer širenja. Odaberimo takav koordinatni sustav u kojemu  $\vec{E}$  titra na pravcu osi  $x$ ,  $\vec{B}$  na pravcu osi  $y$ , a val se širi u smjeru osi  $z$ ; postoje, dakle, samo komponente  $E_x$  i  $B_y$ .

Na takav ćemo ravni val primijeniti Maxwellove jednađbe. Lako je dokazati da su prve dvije jednađbe zadovoljene; tok električnoga i magnetskoga polja takva vala kroz bilo koju zatvorenu površinu uvijek je jednak nuli.



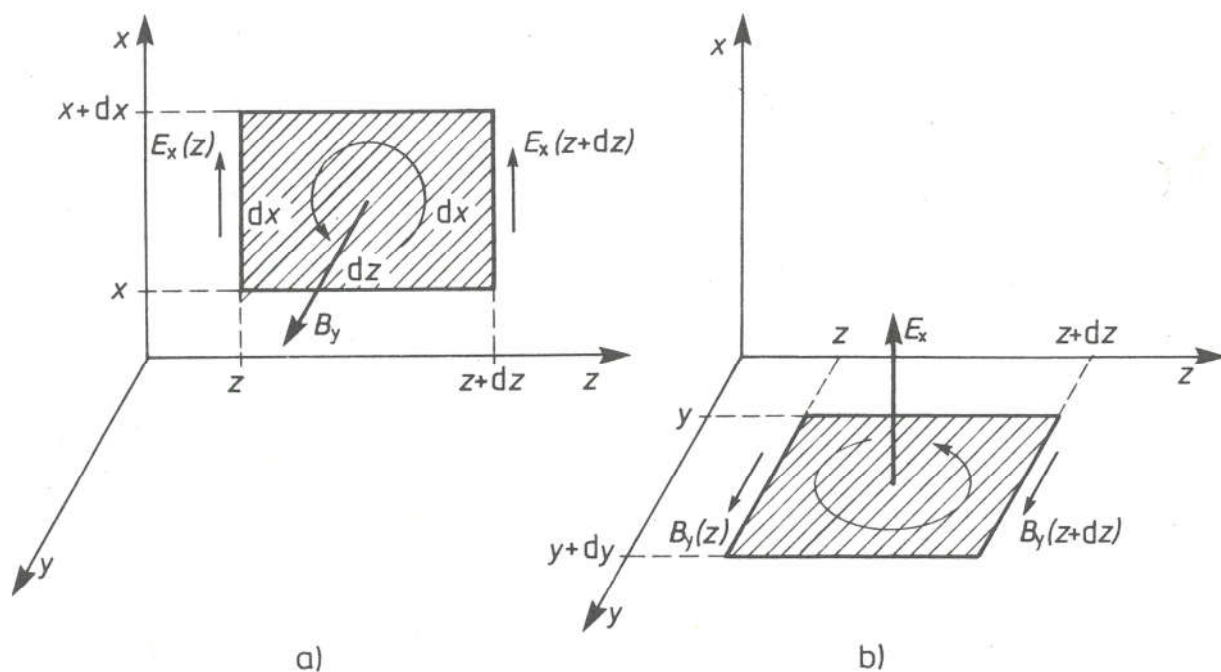
Slika 7.3.

Taj ravni val mora zadovoljavati i treću jednačbu:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Kao površinu integracije  $S$  najpraktičnije je izabrati pravokutnik u ravnini  $x, z$  sa stranicama  $\Delta x$  i  $\Delta z$  (sl. 7.4). Tada je:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = (E_x)_{z+\Delta z} \Delta x - (E_x)_z \Delta x$$



Slika 7.4.



a desna strana jednadžbe:

$$-\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Delta x \Delta z$$

Izjednačavanjem (7.37) i (7.38) te nakon dijeljenja s  $\Delta x \Delta z$  dobivamo:

$$\frac{(E_x)_{z+\Delta z} - (E_x)_z}{\Delta z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

U graničnom slučaju, kada  $\Delta z \rightarrow 0$ , dobivamo:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(E_x)_{z+\Delta z} - (E_x)_z}{\Delta z} = -\frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Tako smo iz treće Maxwellove jednadžbe dobili vezu između električnoga i magnetskoga polja u nekoj točki prostora:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (7.21)$$

Za izračunavanje četvrte Maxwellove jednadžbe izabrat ćemo pravokutnik stranica  $\Delta y$  i  $\Delta z$  u ravnini  $y, z$ . (Izbor pravokutnika u ostalim dvjema koordinatnim ravninama ne bi nas doveo do rezultata jer bi se tada obje strane četvrte Maxwellove jednadžbe poništile.)

Sličnim računom kao prije iz četvrte jednadžbe (7.20) dobivamo:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = (H_y)_z \Delta y - (H_y)_{z+\Delta z} \Delta y$$

$$\iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial D_x}{\partial t} \Delta y \Delta z$$

Izjednačavanjem tih dviju jednadžbi, dijeljenjem s  $\Delta y$  i  $\Delta z$  i primjenom graničnog prijelaza  $\Delta z \rightarrow 0$ , dobivamo:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t},$$

odnosno:

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\epsilon \mu \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (7.22)$$

(Pritom smo uzeli u obzir da je  $D = \epsilon E$  i  $B = \mu H$  te da su permeabilnost i dielektričnost konstantne.)

Dobili smo dvije diferencijalne jednadžbe (7.21) i (7.22) koje povezuju električno i magnetsko polje elektromagnetskoga vala. Ako iz njih eliminiramo jedno polje,

npr. magnetsko polje  $B_y$ , dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu sa samo jednim poljem,  $E_x$ . To postizemo deriviranjem (7.21) po  $z$  i (7.22) po vremenu:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t}, \quad \frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} = -\epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}.$$

Kombinirajući te dvije jednadžbe, dobivamo **valnu jednadžbu za električno polje  $\vec{E}$** :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (7.23)$$

Slično ćemo eliminacijom  $E_x$  dobiti **valnu jednadžbu za magnetsko polje  $\vec{B}$** :

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0 \quad (7.24)$$

Tako smo iz Maxwellovih jednadžbi dobili valnu jednadžbu za električno i magnetsko polje.

Diferencijalne jednadžbe (7.23) i (7.24) slične su jednadžbi za transversalni val u žici:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (7.25)$$

gdje je  $s$  deformacija, a  $v$  brzina kojom val putuje u žici. U valnoj jednadžbi za elektromagnetski val (7.23) analogno možemo pisati:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon\mu}} \quad (7.26)$$

nakon čega valna jednadžba poprima oblik:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (7.27)$$

**Fazna brzina** (tj. brzina širenja valne fronte u smjeru širenja vala) u sredstvu s određenom dielektričnošću  $\epsilon$  i permeabilnošću  $\mu$  bit će, dakle:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Brzina širenja elektromagnetskog vala u vakuumu ( $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ):

$$v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \text{C}^{-2}\text{N s}^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}}} \quad (7.28)$$

$$v = 2,998 \cdot 10^8 \text{m/s} = c,$$

a to je upravo **brzina svjetlosti** u vakuumu, što upućuje na to da je svjetlost elektromagnetski val.

U vakuumu je fazna brzina za sve frekvencije, odnosno valne duljine jednaka; u vakuumu nema disperzije. U tom je slučaju grupna brzina (brzina širenja energije) jednaka faznoj brzini. Drukčije je u sredstvu čija dielektričnost i permeabilnost ovise o frekvenciji, tj. gdje postoji disperzija.

Za većinu materijala (osim za feromagnete)  $\mu \approx \mu_0 (\mu_r \approx 1)$  pa je:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (7.29)$$

Pri prijelazu elektromagnetskoga vala iz sredstva u kojemu se širi jednom brzinom u sredstvo u kojemu se širi nekom drugom brzinom mijenja se valna duljina.

Ako je prvo sredstvo vakuum, valna će se duljina  $\lambda_0 = c/f$  pri ulasku u drugo sredstvo relativne dielektričnosti  $\epsilon_r$  i permeabilnosti  $\mu_r$  smanjiti na:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}f} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}f} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \quad (7.30)$$

Najjednostavniji oblik valnoga gibanja nastaje kada izvor vala harmonički titra. To posebno rješenje valne jednadžbe možemo pisati u obliku analognome onom za mehaničke valove:

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) = E_0 \sin(\omega t - kz) \\ H_y &= H_0 \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) = H_0 \sin(\omega t - kz), \end{aligned} \quad (7.31)$$

gdje je  $\omega = 2\pi f$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ , a  $E_0$  i  $H_0$  amplitude elektromagnetskoga polja. Ako se val širi u nekom smjeru određenim jediničnim vektorom  $\vec{u}$ , rješenje valne jednadžbe možemo pisati:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega \left( t - \frac{\vec{u}\vec{r}}{v} \right) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad (7.32)$$

Rješenje valne jednadžbe često je prikladnije pisati u obliku eksponencijalne funkcije s imaginarnim eksponentom:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (7.33)$$

Iz Maxwellovih jednadžbi može se izračunati omjer amplitude jakosti električnoga i magnetskoga polja u elektromagnetskome valu:

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (7.34)$$

odnosno, budući da je  $B = \mu H$ ,  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ , to je:

$$E_0 = vB_0 \quad (7.35)$$

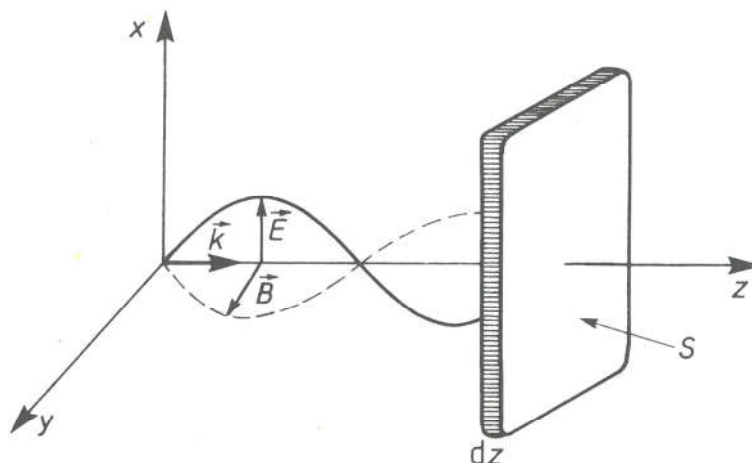
U vakuumu, a praktično i u zraku, vrijedi:

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8,85 \cdot 10^{-12}}} \Omega = 377 \Omega \quad (7.36)$$



## 7.7. Energija elektromagnetskoga vala. Poyntingov vektor

Kao i svaki drugi val, i elektromagnetski val može prenositi energiju kroz prostor. Radio-valovi prenose energiju od odašiljača do prijemnika, toplinska i svjetlosna energija preko elektromagnetskih valova dolazi od Sunca itd. Odredimo energiju koju ravni elektromagnetski val u jedinici vremena prenese kroz jedinicu površine, tj. odredimo **gustoću toka energije** ili, kako se često naziva *intenzitet* elektromagnetskoga vala.



Slika 7.5.

Promatrajmo infinitezimalni valjak osnovice površine  $S$  i debljine  $dz = v dt$  (sl. 7.5). Ukupna gustoća energije elektromagnetskoga polja zbroj je gustoće energije električnoga polja i gustoće energije magnetskoga polja:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E_x^2 + \frac{1}{2\mu} B_y^2 \quad (7.37)$$

Budući da su električno i magnetsko polje u elektromagnetskom valu povezani relacijom (7.35), doprinosi su električnog i magnetskog polja gustoći energije jednaki pa je:

$$w = \epsilon E_x^2 = \frac{1}{\mu} B_y^2 = \mu H_y^2 \quad (7.38)$$

U vremenu  $dt$  kroz površinu  $S$  na sl. 7.5. prođe energija:

$$P dt = w dV = w S dz = w S v dt \quad (7.39)$$

pa je gustoća toka energije (intenziteta), tj. snaga po jediničnoj površini:

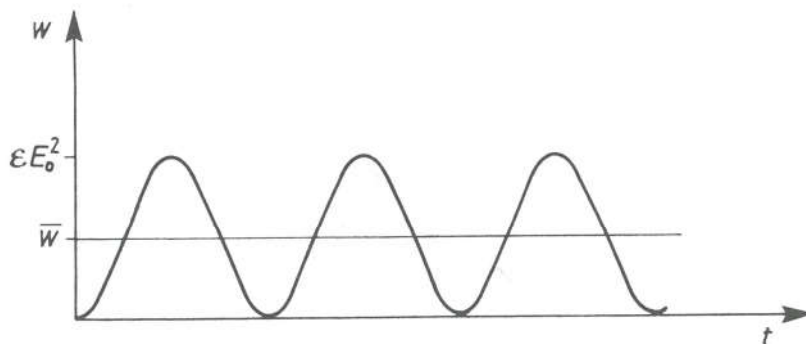
$$S = wv \quad (7.40)$$

Koristeći se izrazima (7.40), (7.38) i (7.35), dobivamo izraz za gustoću toka energije elektromagnetskoga vala:

$$S = v \epsilon E_x^2 = v \mu H_y^2 = E_x H_y \quad (7.41)$$

Gustoća toka vektorska je veličina, a smjer joj je jednak smjeru širenja vala i naziva se *Poyntingov vektor*. Uzevši u obzir da je iznos Poyntingova vektora određen izrazom (7.41), možemo pisati:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (7.42)$$



Slika 7.6.

Gustoća energije harmoničkoga elektromagnetskoga vala mijenja se s vremenom (sl. 7.6). Srednja gustoća energije jednaka je polovici maksimalne vrijednosti:

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 \quad (7.43)$$

jer je srednja vrijednost kvadrata funkcije sinus jednaka 1/2. Budući da je  $S = wv$ , i iznos Poyntingova vektora ravnoga harmoničkog vala mijenja se kao kvadrat funkcije sinus:

$$S = v\epsilon E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) \quad (7.44)$$

a srednja je vrijednost:

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 = \frac{1}{2} E_0 H_0 \quad (7.45)$$

Gustoća toka kuglastih valova (koji izlaze iz točkastog izvora) smanjuje se s  $1/r^2$  zadržavajući time ukupni tok energije (snagu) konstantnom. Amplitude električnog i magnetskoga polja kuglastoga vala smanjuju se sporije (kao  $1/r$ ).

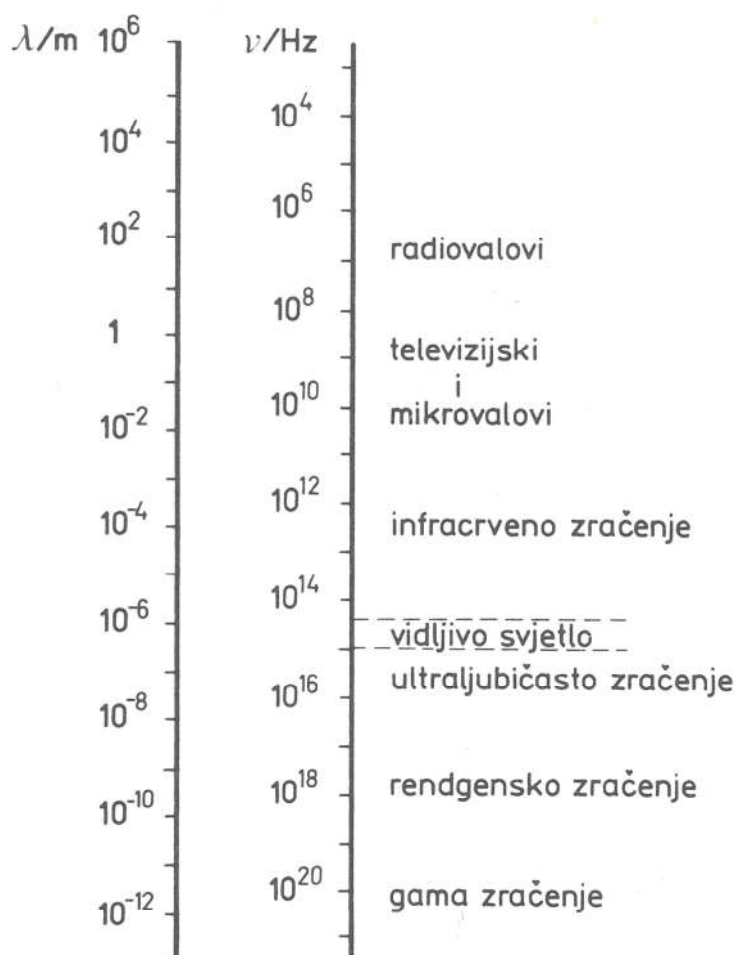
## 7.8. Spektar elektromagnetskih valova

U odjeljku 7.5. opisali smo kako se elektromagnetski val može proizvesti pomoću titrajnoga kruga. Promjenom kapaciteta kondenzatora u Primjeru 7.1. bilo je moguće mijenjati frekvenciju vala od  $5 \cdot 10^5$  Hz do  $1,6 \cdot 10^6$  Hz. To odgovara valnim

duljinama od 200 do 187,5 m, budući da su frekvencije  $\nu$  i valne duljine  $\lambda$  povezane relacijom  $\lambda = c/\nu$ . Spektar elektromagnetskih valova, međutim, obuhvaća mnogo veći raspon frekvencija i valnih duljina. Zakoni su širenja jednaki za sve elektromagnetske valove, bez obzira na valnu duljinu. Međutim, valovi različitih valnih duljina dolaze iz različitih izvora i imaju različito djelovanje na materiju. (Elektromagnetsko se zračenje može opisati i kao snop kvanata elektromagnetskog zračenja – *fotona*; energija takva kvanta razmjerna je frekvenciji zračenja  $E = h\nu$ . Pritom je  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Js *Planckova konstanta*. O tome će biti mnogo više riječi u 12. poglavlju.)

Elektromagnetske valove obično klasificiramo prema tipu izvora iz kojega dolaze, no te granice nisu uvijek oštre. Navodimo uobičajenu podjelu elektromagnetskoga spektra.

*Radio-valovi* obuhvaćaju valne duljine od nekoliko kilometara do 0,3 m. To su valovi kojima se služe televizijski i radio-odašiljači, a njihov su izvor elektronski uređaji, najčešće titrajni krugovi.



Slika 7.7. Spektar elektromagnetskih valova

*Mikrovalovi* su valovi valnih duljina od 0,3 m do 1 mm. Primjenjuju se u radarskoj tehnici i u komunikacijskim sistemima, a proizvode ih elektronski uređaji. Frekvencije tih valova bliske su frekvencijama kojima titraju molekule u tvari pa se upotre-



bljavaju pri izučavanju atomske i molekularne strukture te za mijenjanje svojstava tvari.

*Infracrveni* dio spektra obuhvaća valne duljine od  $10^{-3}$  m do  $7,8 \cdot 10^{-7}$  m (780 nm). Te valove emitiraju molekule i užarena tijela. Oni imaju mnogostruku primjenu u industriji, medicini, tehnici, astronomiji, istraživanjima molekularne strukture i drugdje.

*Vidljivom svjetlošću* nazivamo uski dio spektra unutar kojega su sadržane valne duljine na koje je osjetljiva mrežnica ljudskog oka, a one leže između 780 i 380 nm. Zakonima širenja svjetlosti – zakonima *optike* – opsežno ćemo se baviti u 8. poglavlju.

*Ultraljubičastom (ultravioletnom)* zračenju pripada područje od  $3,8 \cdot 10^{-7}$  m do  $6 \cdot 10^{-10}$  m. To su valovi što ih zrače atomi i molekule. Energije kvanta ultraljubičasta zračenja sežu od 3 eV do  $2 \cdot 10^3$  eV, a to su upravo energije važne u kemijskim reakcijama. Ultraljubičasto zračenje izaziva ionizaciju i disocijaciju molekula, pa se na tome osnivaju njegove primjene u medicini i u tehnici. Međutim, zbog tih svojstava ono može štetno djelovati na živa tkiva i organizme.

*Rendgensko zračenje (X-zrake)* proteže se od  $10^{-9}$  m do  $6 \cdot 10^{-12}$  m valne duljine. Otkrio ih je 1895. W. Röntgen proučavajući katodne zrake. X-zrake nastaju pri promjenama stanja unutrašnjih, jače vezanih, elektrona u atomima i u procesu tzv. *zakočnog zračenja*. Te zrake imaju veću energiju od ultraljubičastih i zato mogu izazvati znatna oštećenja na živim organizmima. U medicini se upotrebljavaju u dijagnostici, jer imaju svojstvo da različito prolaze kroz različite organe, a također i u liječenju tumora.

$\gamma$ -zračenje nuklearnog je porijekla, a nastaje pri promjeni stanja atomske jezgre. Valne su duljine tog zračenja od  $10^{-10}$  m do  $10^{-14}$  m. To je zračenje koje emitiraju radioaktivne tvari, a u interakciji sa živim organizmima izaziva teška oštećenja. I to se zračenje, nužno uz jake mjere opreza i zaštite, primjenjuje u medicini i tehnici.

Još manje valne duljine susreću se u *kozmičkom zračenju*, koje dolazi iz svemira. Na sl. 7.7. prikazan je spektar kojim su obuhvaćeni svi nabrojani tipovi elektromagnetskoga zračenja.

## Pitanja i zadaci

- 7.1. Napišite i obrazložite Gaussov zakon za električno polje.
- 7.2. Napišite i obrazložite Gaussov zakon za magnetizam.
- 7.3. Kako glasi Faradayev zakon elektromagnetske indukcije?
- 7.4. Što je to struja pomaka?
- 7.5. Napišite i objasnite poopćeni Ampèreev zakon.
- 7.6. Kako glase Maxwelllove jednadžbe u integralnu obliku? Koji je njihov fizikalni smisao?
- 7.7. Izvedite Thomsonovu formulu za frekvenciju i period električnoga titrajnoga kruga.
- 7.8. Što je to elektromagnetski val? Kakva je veza između valne duljine i frekvencije elektromagnetskoga vala?
- 7.9. Napišite diferencijalnu jednadžbu za električno i magnetsko polje u elektromagnetskome valu.
- 7.10. Napišite jednadžbe koje prikazuju ovisnost o vremenu električnog i magnetskog polja u elektromagnetskome valu. Kakvi su smjerovi električnoga i magnetskoga polja? Prikažite ta polja crtežom.
- 7.11. Kojom se brzinom elektromagnetski val širi kroz vakuum? Što je to fazna brzina? O čemu ovisi brzina kojom se elektromagnetski val širi kroz sredstvo? Što je valni broj?
- 7.12. Frekvencija je elektromagnetskoga vala u vakuumu 600 Hz. Izračunajte kolike su frekvencija, brzina širenja i valna duljina toga vala u benzolu.
- 7.13. Pokažite da elektromagnetsko polje  $E_x = E_0 \sin(\omega t - kz)$ ,  $E_y = 0$ ,  $E_z = 0$ ,  $B_x = 0$ ,  $B_y = B_0 \sin(\omega t - kz)$ ,  $B_z = 0$ , u prostoru bez struja i naboja, zadovoljava Maxwelllove jednadžbe. Kao zatvorenu plohu odaberite kocku stranice  $a$ , a kao zatvorenu krivulju odaberite rub stranice te kocke.
- 7.14. Kakav je odnos između jakosti električnoga i magnetskoga polja u elektromagnetskome valu?
- 7.15. Kako glasi veza između gustoće energije i intenziteta elektromagnetskoga vala? Što je Poyntingov vektor, kako glasi i koji je njegov smisao?

- 7.16. Srednja je gustoća energijskoga toka monokromatskoga ravnog vala u zraku  $26 \text{ Wm}^{-2}$ . Kolika je srednja gustoća energije?
- 7.17. Gustoća je toka Sunčeva zračenja na Zemljinoj površini (tzv. solarna konstanta)  $1,35 \text{ kWm}^{-2}$ . Pod pretpostavkom da ta energija dolazi u obliku ravnih sinusnih elektromagnetskih valova izračunajte amplitudu električnoga i magnetskoga polja.
- 7.18. Navedite uobičajenu podjelu elektromagnetskoga spektra. Opišite svojstva i primjene zračenja za pojedine dijelove spektra.
- 7.19. Pomoću valnih duljina navedenih u odjeljku 7.8. izračunajte granične frekvencije za svaki dio elektromagnetskoga spektra.
- 7.20. Pomoću valnih duljina navedenih u odjeljku 7.8. izračunajte najniže i najviše energije fotona za svaki pojedini dio elektromagnetskoga spektra. Energije izrazite u elektronvoltima (eV).



## 8. Optika

Optika je dio fizike koji proučava svjetlost i svjetlosne pojave. Svjetlost je elektromagnetski val, dio elektromagnetskoga spektra u uskom području valnih duljina od oko 380 do 780 nm: to je ono zračenje koje djeluje na mrežnicu ljudskog oka i uzrokuje osjet vida. Preostali dio elektromagnetskoga zračenja (toplinsko, ultraljubičasto, radiovalovi itd.) naše tijelo osjeća drukčije ili uopće ne osjeća. Proučavanjem cjelokupnoga elektromagnetskog zračenja bavi se optika u širem smislu.

Optiku često dijelimo na geometrijsku, fizikalnu (valnu) optiku i fotometriju\*.

Svjetlost je valna pojava pa i kod nje kao i kod svih valova, postoji mogućnost interferencije i ogiba na preprekama. U **geometrijskoj optici** u većini razmatranja zaboravit ćemo valna svojstva svjetlosti i zamišljat ćemo svjetlost kao snopove svjetlosnih zraka koje se šire sredstvom. Ova aproksimacija dosta je dobra sve dok su promatrane dimenzije dosta veće od valne duljine svjetlosti. Rad gotovo svih optičkih instrumenata može se objasniti geometrijskom optikom.

**Fizikalna optika** proučava one pojave u kojima se jasno očituje valna priroda svjetlosti (interferencija, ogib, disperzija i polarizacija).

Ima procesa koje ne može objasniti klasična optika, tj. valna teorija svjetlosti. Početkom ovoga stoljeća opaženo je da svjetlost (i ostalo elektromagnetsko zračenje) pokazuje, uz valna, i čestična svojstva. Korpuskularnu (čestičnu) prirodu svjetlosti obrađivat ćemo u 12. poglavlju.

**Fotometrija** se bavi mjerenjem vidljive svjetlosti, posebno veličina koje karakteriziraju svjetlosne izvore. Značajke svjetlosnih izvora mogu se odrediti na dva načina: fizikalno (raznim instrumentima, kao npr. termočlankom, bolometrom i sl.) i fiziološki, tj. osjećajem što ga svjetlost izaziva u ljudskom oku. Budući da taj osjećaj ne ovisi samo o energiji, nego i o spektralnom sastavu svjetlosti, potrebno je uvesti posebne fotometrijske veličine i jedinice. Veza između fotometrijskih i energijskih veličina (džula, vata i sl.) nije jednostavna, jer je oko različito osjetljivo na razne valne duljine.

---

\* φωξ svjetlost, μετρεω mjeriti

## 8.1. Vidljiva svjetlost. Izvori svjetlosti

Elektromagnetske valove na koje je osjetljivo ljudsko oko nazivamo vidljivom svjetlošću. Valne duljine vidljiva područja protežu se od 380 do 780 nm, što odgovara frekvenciji od  $3,8 \cdot 10^{14}$  do  $7,7 \cdot 10^{14}$  Hz.

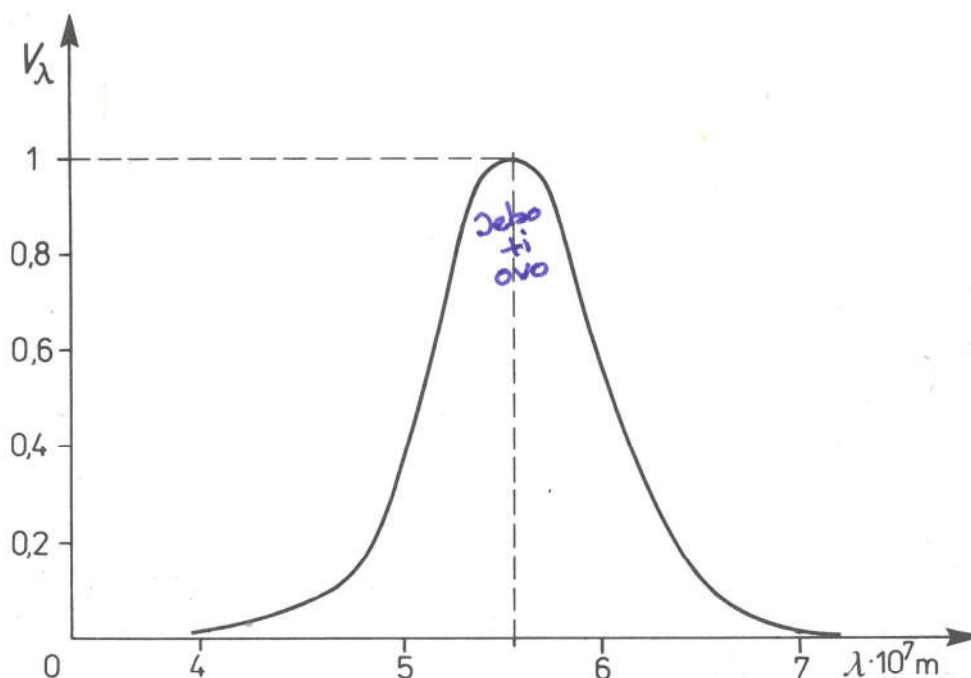
Sunčana (prirodna) svjetlost sadrži valove različitih valnih duljina kontinuirano raspoređene od neke minimalne do maksimalne. Ona se sastoji od ultraljubičastoga zračenja, vidljive svjetlosti i infracrvenog područja. Vidljivo područje bijele svjetlosti sastoji se od boja prikazanih u tabl. 8.1.

Tablica 8.1. Vidljiva svjetlost

| Boja       | $\lambda/\text{nm}$ | $\nu/10^{14}\text{Hz}$ | Boja       | $\lambda/\text{nm}$ | $\nu/10^{14}\text{Hz}$ |
|------------|---------------------|------------------------|------------|---------------------|------------------------|
| ljubičasta | 380 – 440           | 7,9 – 6,8              | žuta       | 570 – 590           | 5,3 – 5,1              |
| plava      | 440 – 490           | 6,8 – 6,1              | narančasta | 590 – 620           | 5,1 – 4,8              |
| zelena     | 490 – 570           | 6,1 – 5,3              | crvena     | 620 – 780           | 4,8 – 3,8              |

Nevidljivo ultraljubičasto zračenje ima valne duljine manje od 380 nm (do oko 0,5 nm), dok se toplinsko (infracrveno) područje proteže iznad 780 nm do oko 1 mm.

Naravno, granične valne duljine (frekvencije) ovih područja samo su približne.



Slika 8.1. Osjetljivost oka

**Osjetljivost oka.** Oko nije podjednako osjetljivo na sve boje (valne duljine) vidljivoga dijela spektra elektromagnetskih valova, već je najosjetljivije na valnu duljinu od oko 555 nm (žutozelena svjetlost), a uopće ne vidi elektromagnetske valove duljina ispod 380 i iznad 780 nm. Oko ima veću osjetljivost za svjetlost za



koju je potrebna manja snaga da se dobije jednako jak osjet vida. Sl. 8.1, prikazuje relativnu osjetljivost (vidljivost) normalnoga ljudskoga oka  $V_\lambda$  kao funkciju valne duljine  $\lambda$ . Iz grafa vidimo da je oko najosjetljivije za valne duljine oko 555 nm te da se osjetljivost brzo smanjuje kada se udaljavamo od te valne duljine. Tako je npr. za  $\lambda = 470$  nm potrebna desetput jača svjetlosna snaga nego za  $\lambda = 550$  nm da bi se u oku izazvao isti osjećaj vidljivosti.

**Izvori svjetlosti.** Svako tijelo ugrijano na određenu temperaturu zrači elektromagnetske valove u obliku kontinuiranoga spektra koji sadrži sve valne duljine, od neke minimalne do maksimalne. Pri običnim temperaturama to je toplinsko (infracrveno) zračenje, a na visokim temperaturama, osim infracrvene, tijela zrače i vidljivu svjetlost te užarena čvrsta tijela upotrebljavamo kao svjetlosne izvore. Plinovi i pare također mogu emitirati svjetlost i služiti kao svjetlosni izvori; njihovi se spektri sastoje od diskretnog niza valnih duljina i zato se nazivaju linijski spektri.

Većinom je svjetlost sastavljena od više valnih duljina (polikromatska). Neki izvori emitiraju bijelu svjetlost (npr. Sunce, električni luk i dr.), a neki samo svjetlost određene boje. Tako npr. živina lampa, osim ultraljubičaste i infracrvene svjetlosti sadrži ove linije vidljivoga spektra: 579,1 nm, 577,0 nm, 546,1 nm, 496 nm, 491,6 nm, 435,8 nm, 404,7 nm. (Uočite da u živinoj svjetlosti nema crvene svjetlosti.)

Monokromatska\* svjetlost je, naprotiv, sastavljena od valova samo jedne valne duljine. Monokromatsku svjetlost teško je dobiti; većina "monokromatskih" izvora daje samo približno monokromatsku svjetlost. Tako je npr. natrijeva žuta svjetlost približno monokromatska (tzv. D-linija) i sastoji se od dviju valnih duljina, dubleta  $D_1$  ( $\lambda = 589,593$  nm) i  $D_2$  ( $\lambda = 588,996$  nm).

Jedan od najboljih monokromatskih izvora svjetlosti jest laser; kod njega je valna duljina emitirane svjetlosti vrlo dobro određena i razmaz  $\Delta\lambda$  vrlo je malen. Laser je najbliži monokromatskom izvoru svjetlosti. Valna je duljina He, Ne-lasera 632,8 nm.

## 8.2. Fotometrijske veličine i jedinice

**Jakost svjetlosti.** Osnovna je fotometrijska fizikalna veličina jakost svjetlosti  $I$  i to je jedna od sedam osnovnih veličina Međunarodnog sustava (SI). Jedinica je za jakost svjetlosti kandela, cd\*\*. Definicija kandeke mijenjala se nekolikoput.

Na XVI zasjedanju Generalne konferencije za utege i mjere (CGPM), 1979. g. kandela je definirana ovako:

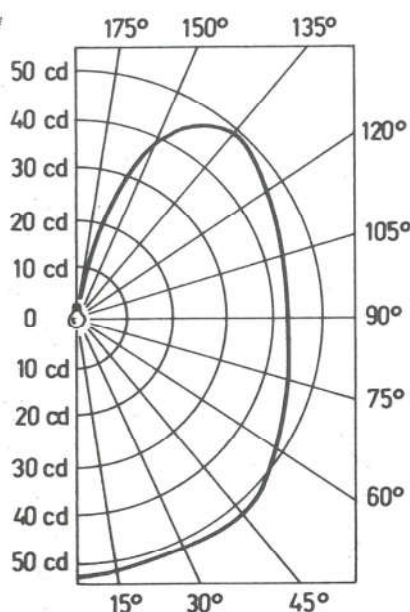
Kandela (znak: cd) jakost je svjetlosti u danome pravcu izvora koji emitira monokromatsko zračenje frekvencije  $5,4 \cdot 10^{14}$  Hz i čija je energetska jakost u tom

\* monos (jedan), chromos (boja)

\*\* Jedinica za jakost svjetlosti koja se prije upotrebljavala bila je npr. Hefnerova svijeća. Zanimljivo je spomenuti da je Hefnerova svijeća bila definirana kao jakost svjetlosti plamena amil-acetata visine 4 cm (u horizontalnome smjeru). Jakost svjetlosti jedne Hefnerove svijeće iznosi približno oko 0,9 cd.



pravcu  $1/683 \text{ W}$  po steradianu. Uočite da frekvencija  $5,4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  odgovara valnoj duljini  $555 \text{ nm}$  za koju je oko najosjetljivije.



Slika 8.2. Polarni dijagram jakosti svjetlosti žarulje snage 60 W

Jakost svjetlosti izvora (npr. žarulje, svijeće) nije uvijek jednaka u svim smjerovima, nego svaki izvor ima svoju **krivulju raspodjele** jakosti svjetlosti, koja se obično prikazuje polarnim dijagramom. Slika 8.2. prikazuje jedan takav polarni dijagram za žarulju od 60 W. Dobijemo ga da izvor zamislimo u ishodištu polarnoga koordinatnog sustava pa iz njega nanosimo radijus vektore kojima je duljina razmjerna jakosti svjetlosti  $I$  u smjeru radijus-vektora.

**Svjetlosni tok.** Svjetlosni tok (fluks)  $\Phi$  izotropnoga točkastog izvora jakosti  $I$  jednak je produktu jakosti svjetlosti i prostornog kuta u koji je emitiran:

$$\Phi = I\Omega \quad (8.1)$$

Ako jakost svjetlosti  $I$  ovisi o smjeru iz kojeg izvor promatramo, tada je (sl. 8.3):

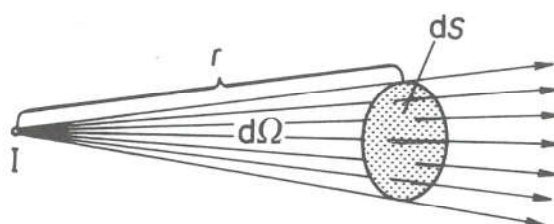
$$d\Phi = Id\Omega,$$

odnosno:

$$\Phi = \int Id\Omega \quad (8.2)$$

Prostorni kut  $\Omega$  (sl. 8.3) je kut omeđen plaštom stošca u koji se emitira određeni tok svjetlosti; računa se tako da se površina odgovarajućeg dijela kugline plohe (kalote) podijeli s kvadratom polumjera kugle i izražava se u steradianima (sr):

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (8.3)$$



Slika 8.3. Uz definiciju prostornog kuta i svjetlosnog toka

Prostorni kut od 1 sr odgovara kružnome stošcu otvora  $65,6^\circ$ , a puni prostorni kut ima  $4\pi$  steradiana.

Jedinica je za svjetlosni tok lumen (lm). Lumen je dakle:

$$[\Phi]_{SI} = \text{cd} \cdot \text{sr} = \text{lm}$$

Dakle, svjetlosni tok koji izotropni točkasti izvor jakosti od 1 cd emitira u prostorni kut 1 sr iznosi 1 lm:

$$\text{cd} = \frac{\text{lm}}{\text{sr}}$$

Jedinica za jakost svjetlosti  $I$  u fotometriji je candela. Međutim energijska jedinica za jakost zračenja koje emitira svjetlosni izvor je vat po steradianu,  $\text{W sr}^{-1}$ . Između te dvije mjerne jedinice postoji veza koja ovisi o valnom sastavu zračenja koje emitira izvor. Na osnovi mjerenja sa zdravim osobama utvrđeno je da za zračenje valne duljine od 555 nm (za koje je oko najosjetljivije) postoji veza

$$1 \frac{\text{W}}{\text{sr}} = 683 \text{ cd}$$

odnosno

$$1 \text{ W} = 683 \text{ lm}$$

Kada bi svo emitirano zračenje izvora jakosti 1 cd bilo u obliku žuto zelene svjetlosti valne duljine 555 nm, izvor bi bio energijske jakosti od 683 W/sr. Definicija kandeले upravo se i bazira na toj činjenici.

Ta se veza naziva fotometrijski ekvivalent za tu valnu duljinu. Za druge valne duljine treba uzeti u obzir osjetljivost oka (sl. 8.1). Tako npr. za 600 nm,  $V(\lambda) = 0,63$  te jednom vatu odgovara 430 lm. Kada bi se sva snaga emitirala u obliku vidljive svjetlosti od snage jednog vata dobio bi se tok od 250 lm.

Međutim izvori svjetlosti ne emitiraju svu energiju u obliku vidljive svjetlosti te su dobiveni svjetlosni tokovi znatno manji od ove teoretske granice.

*Svjetlosna efikasnost* (korisnost) izvora svjetlosti  $\eta$  jednaka je omjeru ukupnog svjetlosnog toka  $\Phi_{uk}$  (lumen) i ukupne uložene snage  $P$  (vat):

$$\eta = \frac{\Phi_{uk}}{P} \quad (8.4)$$

Tablica 8.2 pokazuje tipične vrijednosti za ukupne svjetlosne tokove i efikasnosti nekih svjetlosnih izvora.

Tablica 8.2. Svjetlosni tok i efikasnost nekih izvora svjetlosti

| Izvor                          |       |       | Tok $\Phi_{uk}/lm$ | Efikasnost $\eta/(lm/W)$ |
|--------------------------------|-------|-------|--------------------|--------------------------|
| Žarulja                        | 110 V | 25 W  | 232 lm             | 9,3                      |
| "                              | 220 V | 25 W  | 220 lm             | 8,8                      |
| "                              |       | 60 W  | 620 lm             | 10,3                     |
| "                              |       | 100 W | 1 300 lm           | 13                       |
| "                              |       | 200 W | 2 900 lm           | 14,5                     |
| Fluorescentna cijev            |       | 20 W  | 1 100 lm           | 55*                      |
| "                              | "     | 40 W  | 3 000 lm           | 75*                      |
| Visokotlačna živina svjetiljka |       |       |                    |                          |
| snage 200 W                    |       |       | 8 500 lm           | 43                       |

(\* nije uzeta u obzir snaga prigušnice)

**Osvijetljenost.** Kada svjetlosni tok upada okomito na neku površinu, ona je rasvijetljena to više što je veći svjetlosni tok, a manja površina koju osvjetljavamo. Osvijetljenost (osvjetljenje, iluminancija) ( $E$ ) kvocijent je svjetlosnoga toka,  $\Phi$ , koji okomito upada na neku plohu i površine te plohe:

$$E = \frac{\Phi}{S} \quad (8.5)$$

ili, općenito:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} \quad (8.6)$$

Jedinica je za osvijetljenost luks (znak: lx):

$$lx = \frac{lm}{m^2} = \frac{cd \cdot sr}{m^2}.$$

Osvijetljenost je neke površine 1 lx ako na 1 m<sup>2</sup> te površine okomito upada jednoliko raspoređen svjetlosni tok 1 lm.

Ako točkasti izvor jakosti  $I$  osvjetljava neku površinu  $S$  (sl. 8.4.a), i pri tom zrake svjetlosti upadaju okomito, rasvijetljenost je:

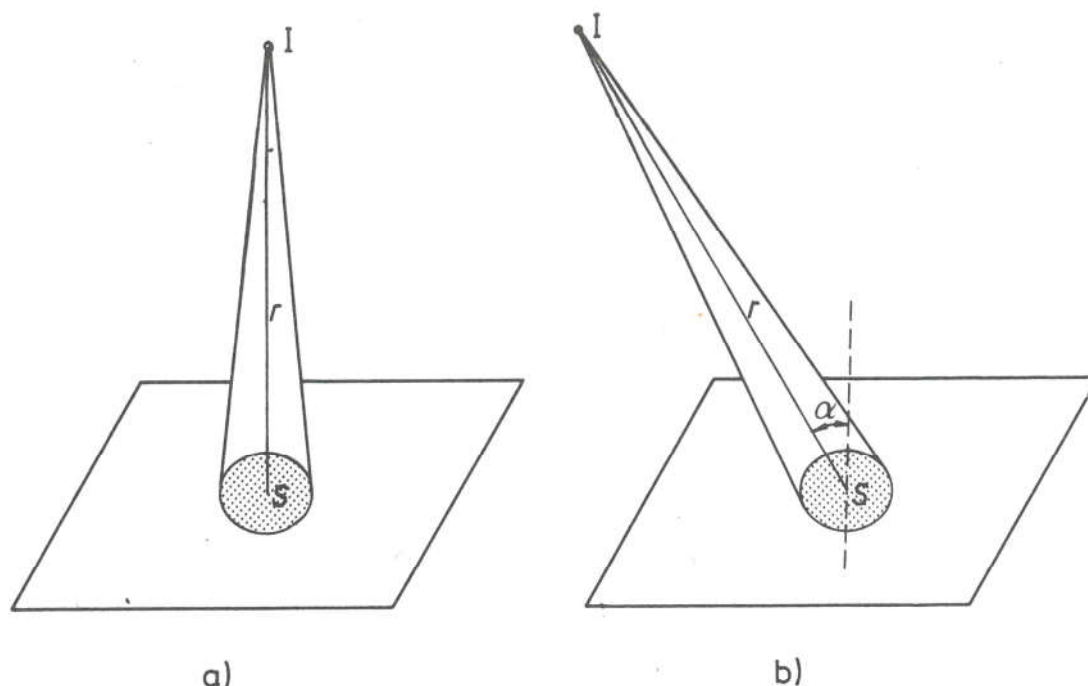
$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{I\Omega}{S} = \frac{I \frac{S}{r^2}}{S} = \frac{I}{r^2} \quad (8.7)$$

Kada zrake svjetlosti točkastoga izvora jakosti  $I$  upadaju pod nekim kutem  $\alpha$  na površinu  $S$  (sl. 8.4.b), osvijetljenost je:

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha \quad (8.8)$$

Osvijetljenost se neke površine smanjuje s kvadratom udaljenosti od točkastoga izvora i razmjerna je kosinusu kuta između zrake svjetlosti i okomice na tu površinu. Formula (8.7) vrijedi za točkaste izvore, tj. kada su dimenzije izvora male u usporedbi s udaljenošću  $r$ .





Slika 8.4. Uz objašnjenje osvijetljenosti površine

Tablica 8.3. Neke tipične osvijetljenosti

|                          |               |
|--------------------------|---------------|
| Sunčeva svjetlost        | do 100 000 lx |
| Oblačno vrijeme          | 2 000 lx      |
| Dnevna svjetlost u sobi  | 1 000 lx      |
| Radni stol               | 300 lx        |
| Dobro osvijetljena cesta | 20 lx         |
| Vanjska rasvjeta ulica   | 8 lx          |

**Sjaj (luminancija) izvora.** Za široke (rasprostranjene, plošne) izvore svjetlosti sjaj (svjetlinu površine, luminanciju) izvora definiramo kao gustoću jakosti svjetlosti u određenom smjeru promatranja.

$$L = \frac{I}{S_i \cos \vartheta} = \frac{I}{S_n} \quad (8.9)$$

gdje je  $S_i$  svjetleća površina izvora svjetlosti, a kut  $\vartheta$  kut između smjera gledanja i okomice na površinu (sl. 8.5),  $S_n = S_i \cos \vartheta$  projekcija je površine izvora na ravninu okomitu na smjer gledanja, tj. prividna površina izvora gledanog u smjeru  $\vartheta$ .

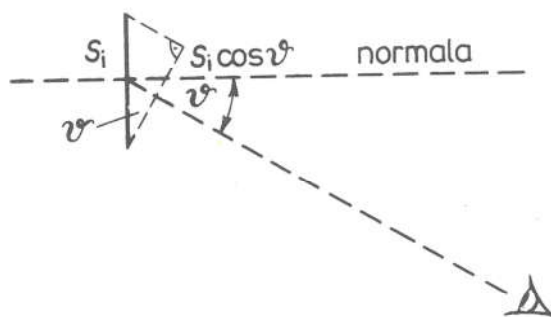
Jednadžbu (8.9) možemo još i općenitije pisati u obliku:

$$L = \frac{d^2 \Phi}{d\Omega dS_i \cos \vartheta} \quad (8.10)$$

Ova razmatranja vrijede i za sekundarne izvore svjetlosti, tj. površine koje svjetle zbog reflektirane svjetlosti.

Jedinica za sjaj izvora, kao što se vidi iz definicijske relacije (8.9) je kandela po četvornom metru,  $\text{cd}/\text{m}^2$ .\*

\* Mjerna jedinica za sjaj nekada je imala poseban naziv – nit i znak nt.

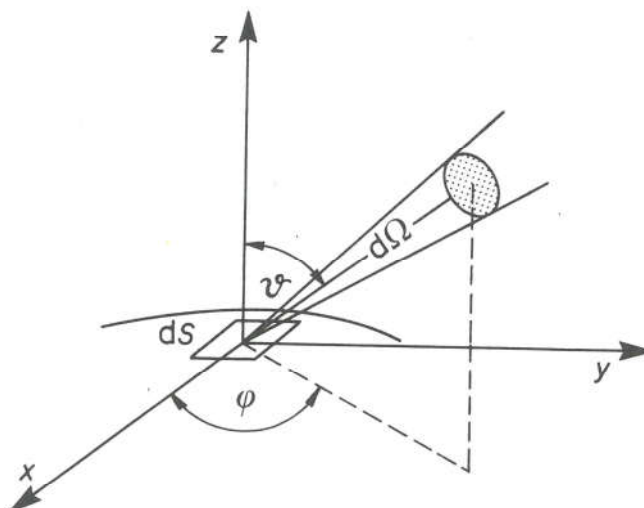


Slika 8.5. Uz definiciju sjaja rasprostranjenog izvora

Svjetlosni tok koji emitira mali dio površine  $dS$  u prostorni kut  $d\Omega$  (sl. 8.6):

$$d^2\Phi = L \cos \vartheta d\Omega dS$$

Izračunajmo tok koji savršeno difuzna površina emitira u svim pravcima, tj. u poluprostor iznad te površine. Radit ćemo u prostornome polarnom sustavu (sl. 8.6).



Slika 8.6. Uz izračunavanje veze između sjaja i osvijetljenosti

Prostorni kut  $d\Omega$  u prostornim koordinatama jednak je:

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (8.11)$$

pa je:

$$d^2\Phi = L \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dS.$$

Ukupni tok koji dio površine  $dS$  emitira u čitav poluprostor dobivamo integriranjem:

$$d\Phi = L dS \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \pi L dS.$$

$$\frac{d\Phi}{dS} = \pi L \quad (8.12)$$

Omjer svjetlosnog toka  $d\Phi$  što ga šalje element površine  $dS$  i površine tog elementa,  $M = d\Phi/dS$  je svijetljenje (svjetlosna egzitancija) površine izvora na mjestu elementa  $dS$ . Jedinica svijetljenja je  $\text{lm}/\text{m}^2$ .

Ako je neka površina sekundarni izvor, tj. svijetli zbog reflektirane svjetlosti, veza između osvijetljenosti  $E$  te površine i njezinog sjaja je

$$\rho E = \pi L \quad (8.13)$$

gdje je  $\rho$  koeficijent refleksije.

Sjaj ili luminancija veći od  $7\,000\text{ cd}/\text{m}^2$  izaziva blještanje. Najveći je dopušteni sjaj pri unutrašnjoj rasvjeti  $3\,000\text{ cd}/\text{m}^2$ .

Tablica 8.4. Neke tipične vrijednosti luminancije

| Izvor svjetlosti                   | $L/(\text{cd m}^{-2})$ |
|------------------------------------|------------------------|
| Sunce (u podne)                    | $1,5 \cdot 10^9$       |
| žarna nit žarulje                  | $10^7$                 |
| matirana žarulja                   | $3 \cdot 10^5$         |
| fluorescentna cijev                | $4 \cdot 10^3$         |
| filmsko platno (kinoekran)         | 10                     |
| Mjesec                             | $3 \cdot 10^3$         |
| najmanji sjaj koji se može vidjeti | $10^{-6}$              |

Tablica 8.5. Fotometrijske veličine i jedinice

| Veličina                  | Znak   | Jedinica                   | Znak jedinice                      |
|---------------------------|--------|----------------------------|------------------------------------|
| jakost svjetlosti         | $I$    | kandela                    | cd                                 |
| tok svjetlosti            | $\Phi$ | lumen                      | $\text{lm} = \text{cd sr}$         |
| količina svjetlosti       | $Q$    | lumen sekunda              | $\text{lm s} = \text{cd sr s}$     |
| osvijetljenost            | $E$    | luks                       | $\text{lx} = \text{lm}/\text{m}^2$ |
| sjaj (luminancija) izvora | $L$    | kandela po četvornom metru | $\text{cd}/\text{m}^2$             |
| svjetlosna egzitancija    | $M$    | lumen po četvornom metru   | $\text{lm}/\text{m}^2$             |

### Primjer 8.1.

Ulična svjetiljka na visini 7 m iznad ceste ima jakost 1000 cd u svim smjerovima prema cesti. Kolika je osvijetljenost ceste vertikalno ispod svjetiljke, a koliko 10 m daleko od stupa?

Osvijetljenost računamo pomoću relacije (8.8). Vertikalno ispod svjetiljke iznosi:

$$E_1 = \frac{I}{r_1^2} = \frac{1000\text{ cd}}{49\text{ m}^2} = 20,41\text{ lx}$$

Na udaljenosti  $d = 10\text{ m}$  od stupa svjetiljke osvijetljenost je ceste:

$$E_2 = \frac{I}{r_2^2} \cos \alpha = \frac{I r_1}{(r_1^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1000\text{ cd} \cdot 7\text{ m}}{(49\text{ m}^2 + 100\text{ m}^2)^{\frac{3}{2}}} = 3,85\text{ lx}.$$



**Primjer 8.2.**

Žarulja (60 W) u balonu od mliječnog (opal) stakla radijusa 6,5 cm osvjetljava savršeno difuznu reflektirajuću površinu. Odrediti sjaj balona, te rasvjetu i sjaj površine koja je 1 m daleko od žarulje pod pretpostavkom da svjetlost upada okomito i da je jakost žarulje u tom smjeru 60 cd.

Sjaj je savršeno difuznoga širokog izvora svjetlosti:

$$L = \frac{I}{S \cos \vartheta} = \frac{I}{S_n},$$

gdje je  $S_n$  projekcija površine izvora na ravninu okomitu na smjer gledanja:

$$S_n = r^2 \pi = (6,5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 3,14 \text{ m}^2 = 1,327 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2.$$

Sjaj balona je:

$$L = \frac{I}{S_n} = \frac{60 \text{ cd}}{0,0133 \text{ m}^2}$$

$$L = 4511 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}.$$

Osvjetljenost je površine:

$$E = \frac{I}{r^2}$$

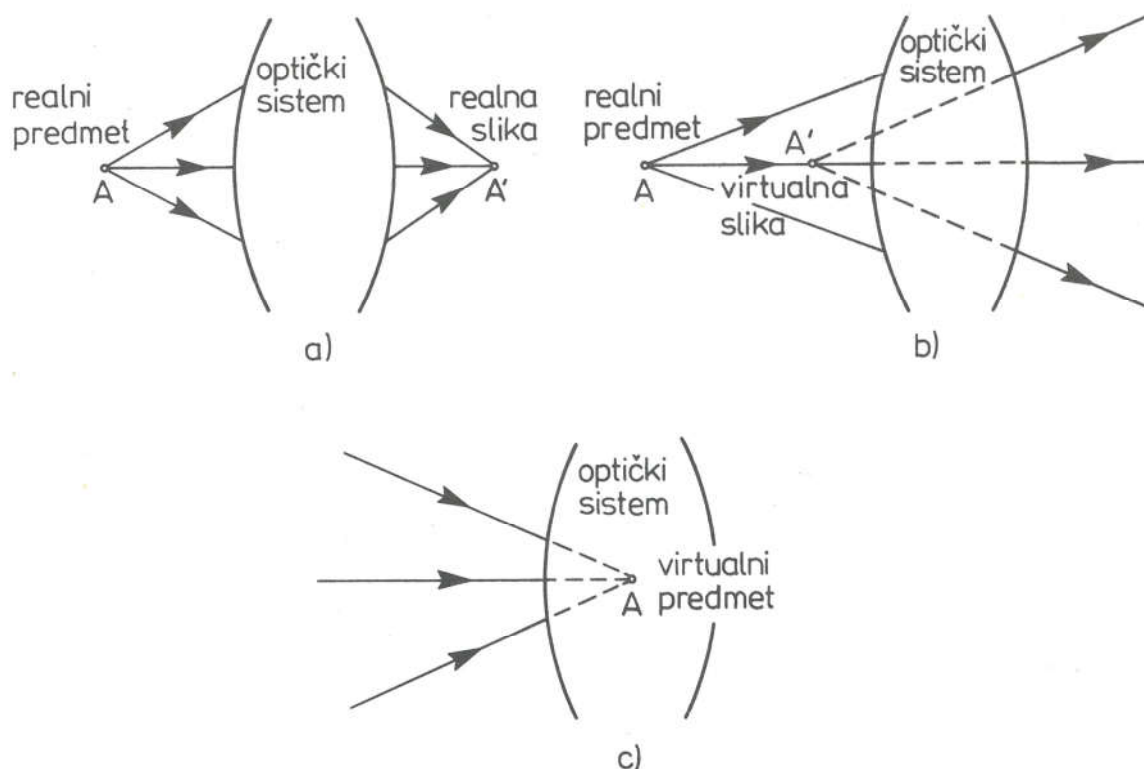
$$E = 60 \text{ lx}.$$

Uz pretpostavku da se sva svjetlost reflektira, sjaj je površine:

$$L = \frac{E}{\pi} = 19,1 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}.$$

### 8.3. Osnovni zakoni geometrijske optike

Geometrijska optika predočuje svjetlost pomoću zraka koje iz svake točke svijetlećeg tijela (izvora svjetlosti) izlaze u divergentnim snopovima i šire se po osnovnim zakonima optike. Ako nakon lomova i refleksija (tj. prolaza kroz neki optički sistem), divergentni snop iz svjetleće točke A konvergira u neku točku A', tada točku A' nazivamo realnom slikom točke A (sl. 8.7.a). Ako se, naprotiv, nakon prolaza kroz neki optički sistem zrake ne sijeku, nego divergiraju, tada njihova produženja (suprotno od smjera širenja svjetlosti) daju virtualnu (prividnu, imaginarnu) sliku te svjetleće točke (sl. 8.7.b). Virtualnu sliku, za razliku od realne, ne možemo uhvatiti na zastoru.



Slika 8.7. Virtualni i realni predmet i slika

Predmet (tj. izvor svjetlosti) može također biti realan i virtualan. Točkasti je izvor svjetlosti virtualan za neki optički sistem ako na ulaznu plohu sistema pada konvergentni snop zraka. Iz realnog izvora (sl. 8.7.a) izlazi divergentni snop zraka, a u virtualnom se izvoru sastaju konvergentne virtualne zrake (sl. 8.7.c). Kao i od realnog, tako i od virtualnog predmeta (ovisno o njegovom položaju prema sistemu) neki optički sistem može dati i realnu i virtualnu sliku.

Već su starim Grcima bila poznata četiri osnovna empirijska zakona o širenju svjetlosti:

1. zakon *pravocrtna širenja svjetlosti*,
2. zakon *nezavisnosti svjetlosnih snopova*,
3. zakon *refleksije (odbijanja) svjetlosti* i
4. zakon *refrakcije (loma) svjetlosti*.

To su osnovni zakoni geometrijske optike; dobiveni su opažanjem i ništa nam ne kažu o prirodi svjetlosti. Vidjet ćemo da su svi ti zakoni, kao i čitava geometrijska optika, samo manje-više dobra aproksimacija za opisivanje širenja svjetlosti. Samo valna optika može točno (iako ne jednostavno) opisati širenje svjetlosti kroz prostor.

**Zakon pravocrtnoga širenja svjetlosti** kaže da se *svjetlost u homogenome prozirnom sredstvu širi po pravcu*. Ovaj zakon proizlazi iz svakodnevnog iskustva: ne vidimo iza ugla, predmeti obasjani svjetlošću iz točkastog izvora daju ostru geometrijsku sjenu.

Geometrijska sjena predmeta ponukala je Newtona da predoči svjetlost kao roj čestica; samo tako mogao je objasniti oštre sjene predmeta. Kasnija preciznija ispitivanja pokazala su da rub sjene nije nipošto oštar, da se svjetlost ogiba iza zapreke, tj. da pokazuje valna svojstva.

Zakon pravocrtznoga širenja svjetlosti primjenit ćemo, dakle, samo onda kad su pojave ogiba zanemarive. Kasnije ćemo vidjeti da je to ispunjeno kada su dimenzije predmeta mnogo veće od valne duljine svjetlosti. Geometrijsku optiku možemo, dakle, primjenjivati samo ako su površine i predmeti na koje svjetlost upada vrlo velike u usporedbi s valnom duljinom svjetlosti.

**Zakon nezavisnosti svjetlosnih snopova glasi:** *Ako se dva svjetlosna snopa presjecaju, jedan na drugi ne utječu i svaki se širi tako kao da onaj drugi ne postoji.* Ni taj zakon ne vrijedi uvijek. Ako su ta dva snopa koherentna (tj. ako ispunjavaju određene uvjete), tada nastaje interferencija, pojava koju može objasniti samo valna teorija svjetlosti (v. odjeljak 8.13). Refleksiju i lom svjetlosti obradit ćemo iscrpnije u slijedećim odjeljcima.

## 8.4. Refleksija i lom svjetlosti

Kada svjetlost upada na granicu između dvaju sredstava (npr. zrak-voda), jedan se njezin dio reflektira, a ostatak prolazi (transmitira) u drugo sredstvo, pri čemu dolazi do loma (refrakcije).

Ako je drugo sredstvo neprozirno, tada nastaju apsorpcija i pretvaranje svjetlosne energije u toplinu.

Pri refleksiji i lomu svjetlosti vrijede ovi eksperimentalno potvrđeni zakoni:

- Kut upadanja  $u$ , koji upadna zraka zatvara s normalom na površinu, jednak je kutu refleksije  $r$ , tj. kutu između normale i reflektirane zrake (sl. 8.8).
- Upadna zraka, normala na reflektirajuću površinu, reflektirana i lomljena zraka leže u istoj ravnini (tzv. ravnini upadanja).

Omjer je sinusa kuta upada i sinusa kuta loma konstantan i jednak omjeru indeksa loma drugog sredstva i indeksa loma prvog sredstva (Snellov\* zakon loma):

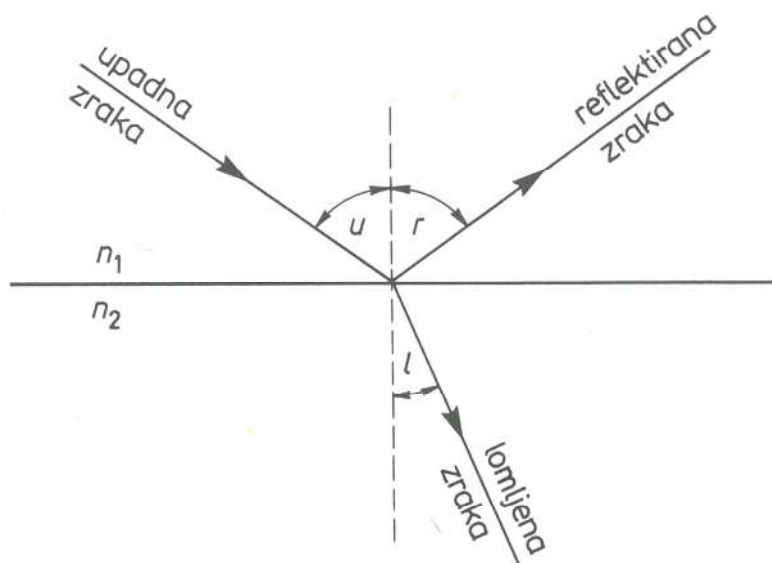
$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{n_2}{n_1} \quad (8.14)$$

Neka svjetlosna zraka upada na ravninu pod kutem  $u$  i neka se reflektira pod kutem  $r$  s obzirom na normalu na reflektirajuću površinu (sl. 8.9). Točke  $A_1$ ,  $A_2$ , odnosno  $B_1$  i  $B_2$ , na istim su valnim frontama gdje valovi imaju istu fazu. Zato je razlika u fazi  $k \Delta x$  od  $A_1$  do  $B_1$ :

$$\Delta\varphi_1 = 2\pi \frac{d \sin r}{\lambda}$$

\* W. Snell van Royen (Snellius), 1581–1626, profesor u Leydenu.



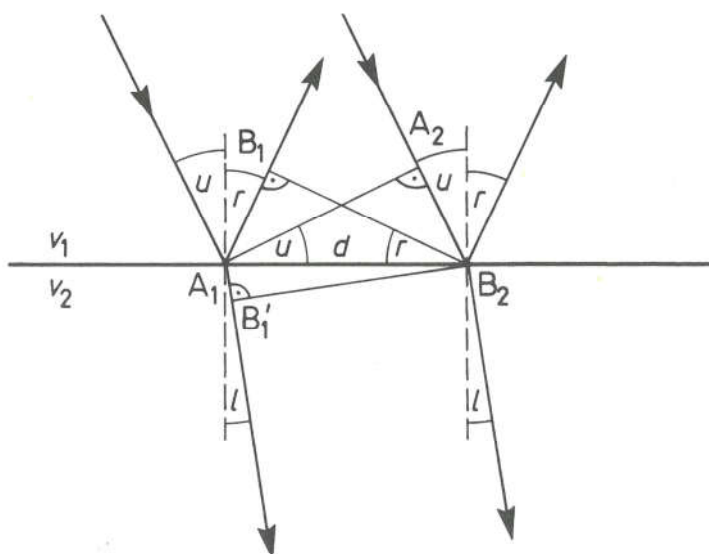


Slika 8.8. Refleksija i lom svjetlosti

jednaka razlici u fazi od  $A_2$  do  $B_2$ :

$$\Delta\varphi_2 = 2\pi \frac{d \sin u}{\lambda}.$$

Iz  $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$  slijedi  $\sin u = \sin r$ , što znači da je pri refleksiji kut refleksije jednak kutu upada.



Slika 8.9. Uz izvod zakona na refleksiju i lom

Lom svjetlosti nastaje na granici dvaju sredstava zbog različite brzine svjetlosti u tim sredstvima. Dužina  $A_1A_2$  (sl. 8.9) dio je valne fronte pa u svakoj točki na toj dužini val ima jednaku fazu; isto vrijedi i za točke dužine  $B_1B_2$ . Promjena faze na putu  $A_2B_2$  mora, dakle, biti jednaka promjeni faze na putu  $A_1B_1$ . Izjednačimo

li promjene faze  $\Delta\varphi = k \Delta x = 2\pi \Delta x/\lambda$ , dobivamo:

$$\frac{2\pi d \sin u}{\lambda_1} = \frac{2\pi d \sin l}{\lambda_2},$$

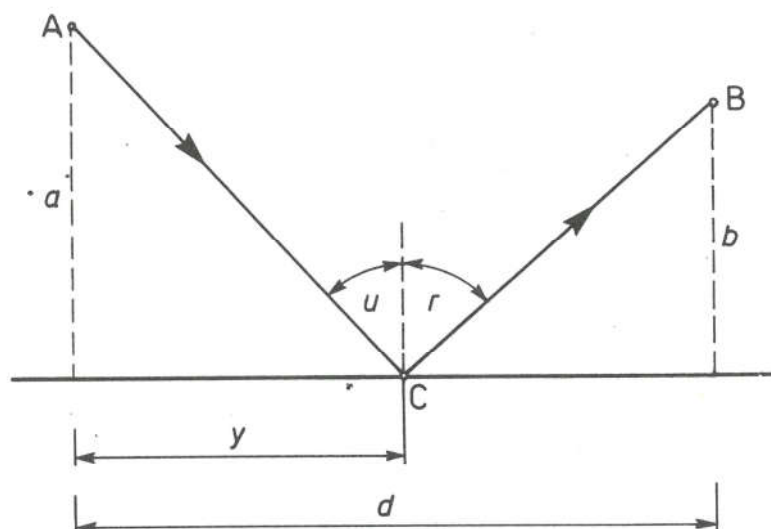
gdje su  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  valne duljine u sredstvima 1 i 2. Gornju relaciju možemo napisati i u obliku:

$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{f}{\frac{v_2}{v_1}} = \frac{v_1}{v_2} \quad (8.15)$$

jer je frekvencija  $f$  u oba sredstva ista. Definiramo li omjer  $c/v = n$  kao indeks loma, Snellov zakon loma (8.15) poprima oblik:

$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{n_2}{n_1}$$

Zakon refleksije i loma svjetlosti može se izvesti i iz Fermatova principa o širenju svjetlosnih zraka. Fermat\* je zaključio da se svjetlost širi tako da udaljenost između dviju točaka prijeđe putem za koji je potrebno minimalno vrijeme. Ako je sredstvo homogeno, tada je taj put očito pravac, kao što i kaže zakon pravocrtanoga širenja. Sada ćemo pomoću ovog principa izvesti zakon refleksije.



Slika 8.10. Izvod zakona refleksije pomoću Fermatovog principa

Zraka će svjetlosti putovati iz točke A preko točke C u točku B (sl. 8.10) po onoj stazi za koju je potrebno najkraće vrijeme.

Vrijeme potrebno za put  $AB = AC + CB$  je:

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + y^2} + \sqrt{b^2 + (d - y)^2}}{v}.$$

\* Pierre de Fermat (1601–1665), veliki francuski matematičar, poznat po radovima iz teorije brojeva

Iz uvjeta za minimum,  $dt/dy = 0$ , slijedi:

$$\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{d - y}{\sqrt{b^2 + (d - y)^2}},$$

ili, što je isto  $\sin u = \sin r$ . Prva mogućnost  $u = r$  znači odbijanje, dok je druga mogućnost  $u = \pi - r$  pravocrtno širenje koje nas ne zanima. Zraka se, dakle, odbija tako da je kut refleksije jednak kutu upadanja.

Slično se iz Fermatova principa izvodi i zakon loma.

Neko je sredstvo optički gušće od drugog ako je brzina širenja svjetlosti u njemu manja nego u tom drugom sredstvu, odnosno njegov indeks loma veći. Ako je pak brzina veća, onda je to sredstvo optički rjeđe. Iz Snellova zakona loma  $\sin u / \sin l = n_2 / n_1$  slijedi: kada zraka svjetlosti prelazi iz optički rjeđeg u optički gušće sredstvo, lomi se k okomici. Kada pak zraka svjetlosti prelazi iz optički gušćeg u optički rjeđe sredstvo, lomi se od okomice.

Tablica 8.6. prikazuje brzine svjetlosti u nekim sredstvima i odgovarajuće indekse loma za žutu svjetlost ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ).

Tablica 8.6. Indeksi loma nekih tvari

| Sredstvo        | Brzina / $1000 \text{ km s}^{-1}$ | Indeksa loma |
|-----------------|-----------------------------------|--------------|
| vakuum          | 300                               | 1            |
| zrak            | 300                               | 1,0003       |
| voda            | 225                               | 1,333        |
| etilni alkohol  | 220                               | 1,362        |
| krunko staklo   | 198                               | 1,515        |
| kanadski balsam | 198                               | 1,515        |
| flint-staklo    | 186                               | 1,609        |
| ugljik-bisulfid | 184                               | 1,629        |
| dijamant        | 124                               | 2,417        |

Indeks loma ovisi o frekvenciji svjetlosti (tzv. disperzija svjetlosti). Zato je u tablicama indeksa loma navedeno koje se valne duljine svjetlosti tiče navedeni indeks loma.

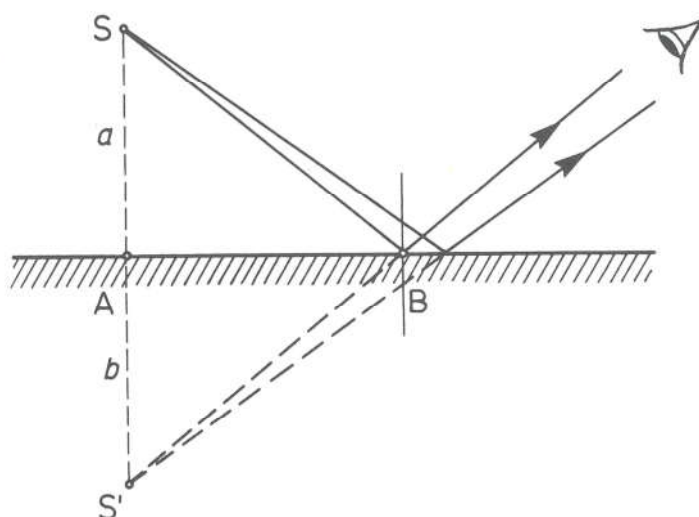
## 8.5. Zrcala

Zrcalo (ogledalo) je svaka glatka ploha koja dobro reflektira svjetlost. Za razliku od zrcala, odbijanje je od hrapavih ploha difuzno ili neregularno: svjetlo se reflektira u svim smjerovima. Zrcala se prave od dobro poliranog materijala, ili se glatke površine prevuku tankim slojem metala (npr. srebra) tako da refleksija bude što bolja (gotovo 100 %-tna). S obzirom na oblik, postoji više vrsta zrcala: ravno, sferno, parabolično, eliptično...

**Ravno zrcalo** jest svaka glatka ravna površina koja može pravilno reflektirati svjetlost. Pogledajmo kakvu sliku daje ravno zrcalo. Zrake emitirane iz točkastoga izvora S nakon refleksije na zrcalu daju divergentni snop (sl. 8.11). Produžeci



odbijenih zraka sijeku se iza zrcala u točki  $S'$ . Točka  $S'$  je, dakle, virtualna slika izvora; ona se ne može uhvatiti na zastoru. Ljudsko oko koje prima ovaj divergentni reflektirani snop vidi sliku izvora u točki  $S'$ , dakle u sjecištu ekstrapoliranih reflektiranih zraka; oku izgleda da zrake dolaze iz točke  $S'$ .



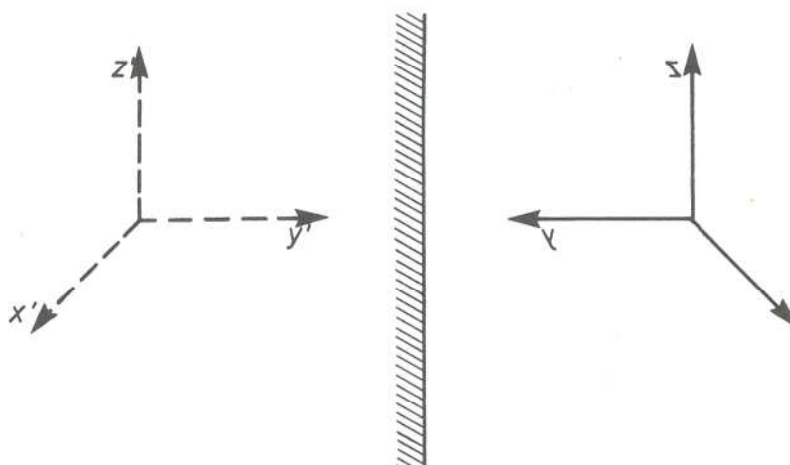
$$\begin{aligned} \tan d &= \frac{AB}{h} \\ \tan n &= \frac{AB}{h} \\ h &= h \frac{\tan B}{\tan d} \approx \frac{h}{n} \end{aligned}$$

Slika 8.11. Ravno zrcalo

Iz zakona refleksije ( $u = r$ ) slijedi da su izvor  $S$  i slika  $S'$  na normali na zrcalo i da je udaljenost predmeta od zrcala  $a$  jednaka udaljenosti slike od zrcala  $b$ . Naime, trokuti  $SAB$  i  $S'AB$  su sukladni te je  $SA = S'A$ . Jednadžba ravnog zrcala je:

$$a = -b \quad (8.16)$$

(Prema dogovoru o predznacima udaljenost  $a$  je pozitivna, a  $b$  negativna jer je slika virtualna.)



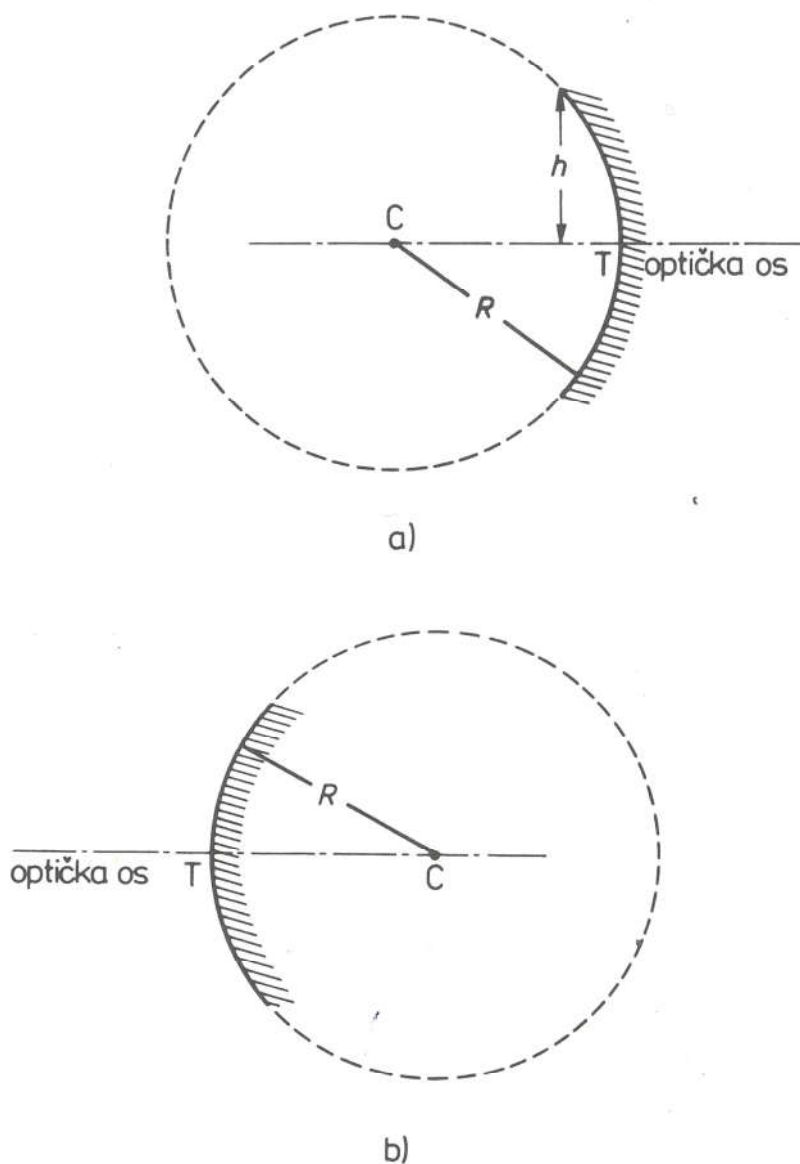
Slika 8.12. Predmet i slika u ravnom zrcalu; zrcalna simetrija

Na sličan način može se naći slika svjetlog predmeta konačnih dimenzija (strelice na sl. 8.12) tražeći slike pojedinih točaka tog predmeta. Slika je jednaka predmetu i virtualna (povećanje je jednako jedinici).

Ravno zrcalo daje jasnu i ostru sliku predmeta. Zrake koje izlaze iz pojedine točke predmeta nakon refleksije na zrcalu šire se tako kao da izlaze iz jedne točke; slika točkastoga izvora jest točka. Budući da od točkastoga izvora daje točkastu sliku, kažemo da je ravno zrcalo uvijek (bez obzira na položaj i veličinu predmeta) strogo stigmatično.

Simetrija između predmeta i slike u ravnom zrcalu posebne je prirode: predmet i slika ne mogu se pokriti translacijom. Oni su zrcalno simetrični, kao npr. desna i lijeva ruka (sl. 8.12).

**Sferno zrcalo.** Sferno zrcalo dio je kugline plohe (kalote), kojoj je jedna strana glatka, tako da reflektira svjetlost. Slika 8.13. prikazuje moguće vrste sfernih zrcala: konkavno ili udubljeno i konveksno ili ispupčeno. Kod konkavnoga zrcala svjetlo odbija unutrašnja, a kod konveksnog vanjska strana.



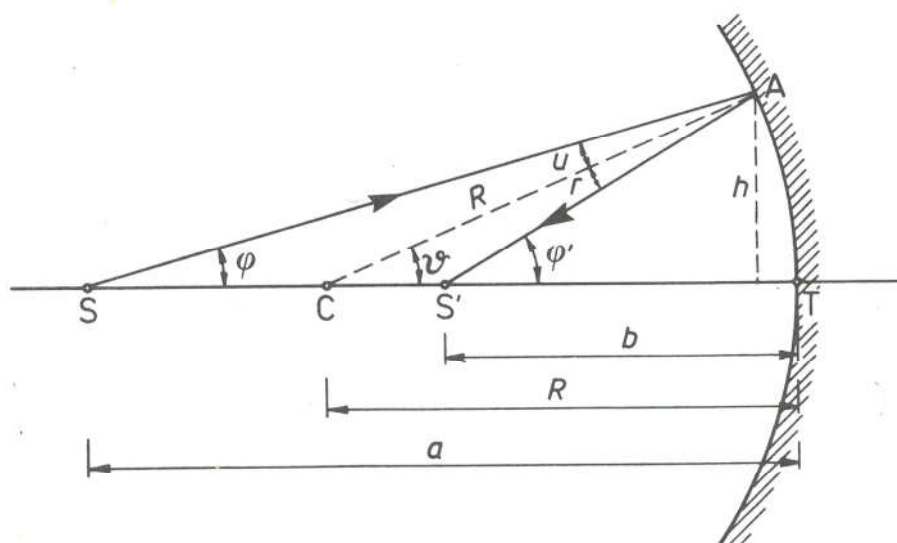
Slika 8.13. Konkavno a) i konveksno b) sferno zrcalo

Središte ili centar sfernog zrcala jest središte kugle koje je to dio (sl. 8.13). Točka T naziva se tjeme zrcala, C je središte zakrivljenosti,  $R$  je polumjer zakrivljenosti ( $R = CT$ ),  $h$  je polumjer otvora zrcala, a glavna je optička os zrcala pravac koji spaja središte zrcala C s tjemenom zrcala T.

Sferno zrcalo daje nesavršenu, više ili manje točnu sliku. Dovoljno dobru sliku daje samo kada sve zrake koje daju sliku zatvaraju mali kut s optičkom osi, tj. kada se upotrijebi snop malog otvora čije zrake idu približno paralelno optičkoj osi. Takve se zrake zovu *paraksijalne zrake*, a ove aproksimacije poznate su pod imenom *Gaussovih aproksimacija*.

Da bismo izveli jednadžbu sfernog zrcala, promatrajmo točkasti izvor svjetlosti S na osi zrcala i nađimo njegovu sliku (sl. 8.14). Razmatranja ćemo vršiti na konkavnom zrcalu, a rezultate kasnije primjeniti i na konveksno sferno zrcalo.

Uzet ćemo u obzir samo paraksijalne zrake. Jedna od takvih paraksijalnih zraka koje izlaze iz S nacrtana je na sl. 8.14. Nakon refleksije (kut  $u = \text{kut } r$ ) ta zraka siječe os zrcala u točki S'. Bilo koja paraksijalna zraka koja izlazi iz S nakon refleksije na zrcalu prolaziti će istom točkom S'. Naprotiv, ako je kut  $\varphi$  velik, tj. ako zraka SA nije paraksijalna, nakon refleksije neće prolaziti kroz istu točku S', nego će na različite zrake biti različit položaj točke S' gdje reflektirana zraka siječe optičku os.



Slika 8.14. Uz izvod jednadžbe sfernog zrcala

Pri položaju izvora kao na sl. 8.14. u točki S' dobit ćemo realnu sliku točkastoga izvora S. Sve reflektirane (paraksijalne) zrake realno se sijeku u točki S', i ako tu stavimo zastor, vidjet ćemo sliku izvora. Slično možemo dobiti sliku predmeta koji je u blizini optičke osi; ono što vrijedi za jednu svijetlu točku, vrijedi i za čitav niz točaka nekoga malog ravnog predmeta iz kojeg izlaze paraksijalne zrake. Udaljenost predmeta (izvora svjetlosti) od tjemena zrcala označavat ćemo s  $a$ , a udaljenost slike s  $b$ ; polumjer je zrcala  $R$ .



Iz sl. 8.14. možemo uočiti relacije:

$$\begin{aligned}\frac{h}{a} &= \operatorname{tg}(\vartheta - u) \approx \vartheta - u \\ \frac{h}{b} &= \operatorname{tg}(\vartheta + u) \approx \vartheta + u \\ \frac{h}{R} &= \operatorname{tg} \vartheta \approx \vartheta,\end{aligned}\tag{8.17}$$

gdje smo, uzimajući približne vrijednosti za tangense, primjenili činjenicu da je promatrana zraka paraksijalna, tj. učinili Gaussovu aproksimaciju. Iz relacija (8.17) zbrajanjem dobivamo:

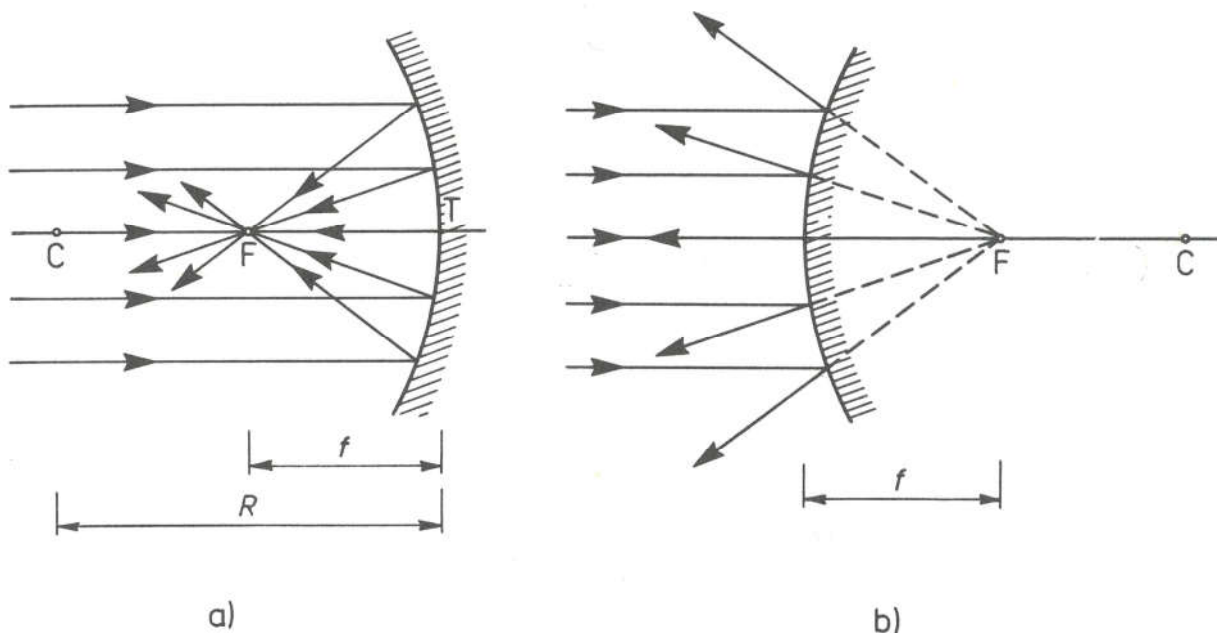
$$\frac{h}{a} + \frac{h}{b} = \frac{2h}{R},$$

ili

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}\tag{8.18}$$

Udaljenost  $b$ , do točnosti upotrijebljene aproksimacije, ne ovisi o kutu  $\vartheta$ , pa se stoga sve zrake koje izlaze iz točke  $S$  sijeku u točki  $S'$ . Točka  $S'$  slika je točke  $S$  i relacija (8.18) jednadžba je zrcala koja povezuje udaljenost predmeta i udaljenost slike s polumjerom zakrivljenosti zrcala. Ona ima isti oblik (8.17) za konkavno i konveksno zrcalo.

Ako kutovi nisu dovoljno mali, tada od točkastoga izvora nećemo dobiti točkastu sliku nego nejasnu razmazanu točku. Ta se pojava naziva *sferna aberacija*.



Slika 8.15. Žarište sfernog zrcala

Posebno je zanimljiv slučaj kada je predmet vrlo daleko od zrcala ( $a = \infty$ ). U tom slučaju jednadžba zrcala (8.18) kaže da se slika nalazi na udaljenosti

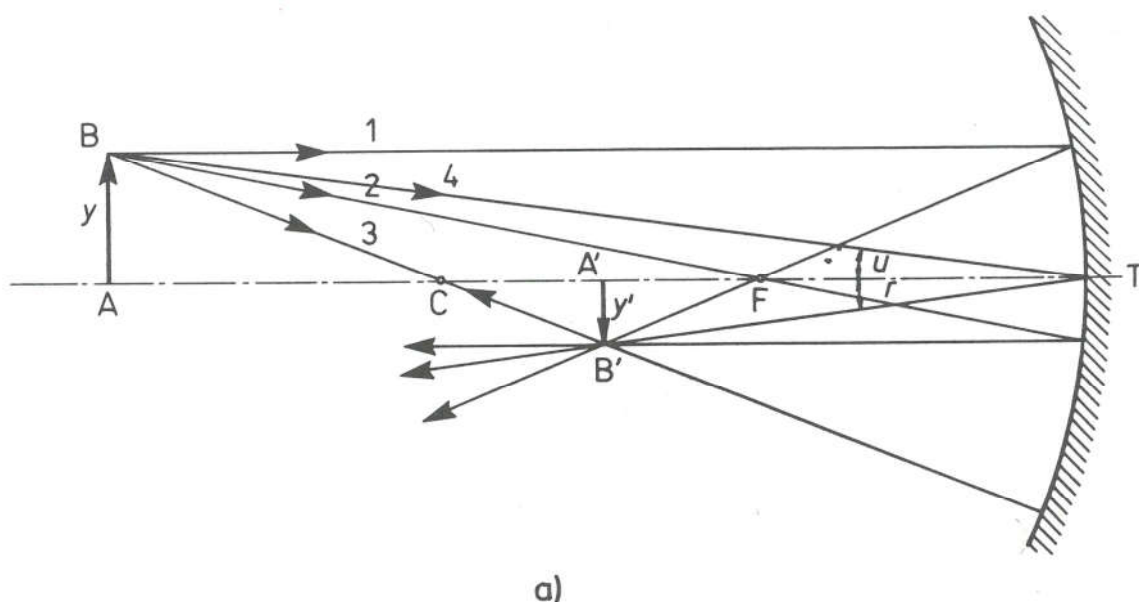
$b = R/2$ . Ova točka, slika beskonačno dalekog predmeta, naziva se *žarište* (fokus) sfernog zrcala, a udaljenost  $f = R/2$  zove se *žarišna daljina*. Možemo, dakle, reći: sve paraksijalne zrake usporedne s optičkom osi reflektiraju se tako da prolaze žarištem konkavnoga sfernog zrcala (sl. 8.15.a). Vrijedi i obratno: zraka koja prolazi žarištem reflektira se paralelno s optičkom osi zrcala. Veza je između žarišne daljine i polumjera sfernog zrcala:

$$f = \frac{R}{2} \quad (8.19)$$

Ako umjesto polumjera pišemo žarišnu daljinu  $f$ , jednadžba sfernoga zrcala poprima oblik:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (8.20)$$

Sliku predmeta u sfernome zrcalu najlakše ćemo konstruirati pomoću karakterističnih zraka (sl. 8.16.a).



Slika 8.16. a) Karakteristične zrake za konkavno sferno zrcalo

1. Zraka svjetlosti koja ide paralelno s optičkom osi konkavnoga sfernog zrcala reflektira se tako da prolazi njegovim žarištem.
2. Zraka koja prolazi žarištem reflektira se paralelno s optičkom osi.
3. Zraka koja prolazi središtem zakrivljenosti konkavnoga sfernog zrcala reflektira se sama u sebe.
4. Zraka koja upada u zrcalo u tjemenu reflektira se tako da čini jednak kut s optičkom osi kao i upadna zraka ( $u = r$ ).

Dovoljno je crtati dvije karakteristične zrake, ili eventualno, radi provjere da smo točno radili, tri zrake.

*Pravila za predznake* u jednadžbama konkavnog i konveksnog sfernog zrcala su:

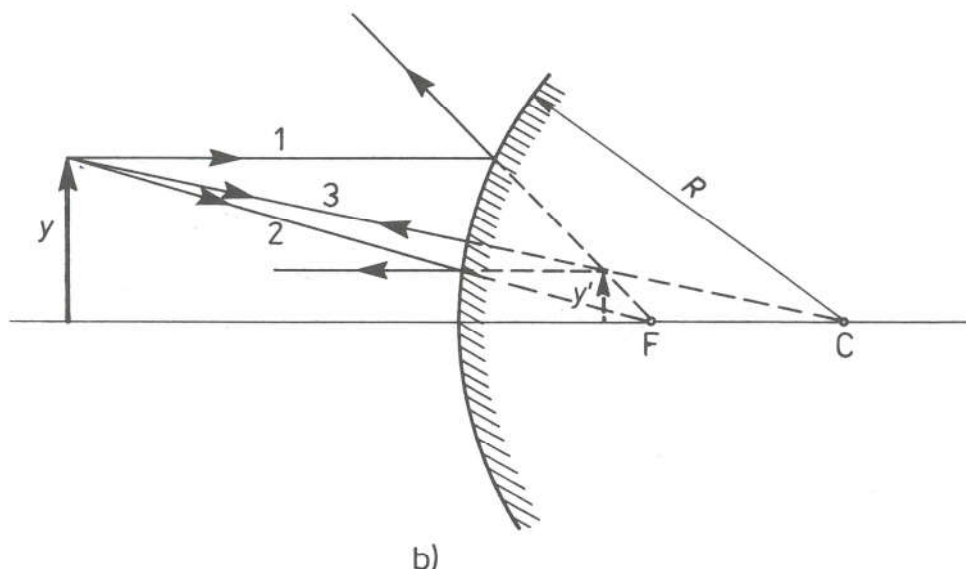
1. Udaljenost  $a$  i  $b$  su pozitivne ako su ispred zrcala, tj. na onoj strani gdje je zrcalo osvijetljeno.
2. Udaljenost  $a$  i  $b$  su negativne ako su iza zrcala, tj. u prostoru gdje nema svjetlosti. Može se također reći da su udaljenosti  $a$  i  $b$  pozitivne za realne predmete i slike, a negativni za virtualne.
3. Polumjer i žarišna daljina konkavnog zrcala su pozitivni (nalaze se ispred zrcala), dok su polumjer i žarišna daljina konveksnog zrcala negativni (nalaze se iza zrcala).

Omjer veličine slike i veličine predmeta zove se linearno povećanje  $m$ . Iz sličnosti trokuta  $ABT$  i  $A'B'T$  može se napisati:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \quad (8.21)$$

Predznak minus u (8.21) dolazi zbog dogovora da je za obrnutu sliku povećanje negativno, a za uspravnu pozitivno.

Za konveksno sferno zrcalo (uz navedeni dogovor o predznacima) vrijede ista razmatranja kao i za konkavno zrcalo: jednadžbe (8.18), (8.20) i (8.21) imaju isti oblik.



Slika 8.16. b) Karakteristične zrake za konveksno sferno zrcalo

Konveksno sferno zrcalo uvijek daje virtualnu ( $b < 0$ ), uspravnu i umanjenu sliku. Što je predmet bliže, slika je veća. Sliku konstruiramo slično kao za konkavno zrcalo – pomoću najmanje dvije karakteristične zrake (sl. 8.16.b). Pri tome:



1. Zraka paralelna osi reflektira se kao da dolazi iz fokusa.
2. Zraka koje produženje prolazi kroz fokus reflektira se paralelno.
3. Zraka koje produženje prolazi kroz središte reflektira se sama u sebe.
4. Zraka koja upada u tjemenu reflektira se tako da su kut upada i kut refleksije jednaki.

Konkavno sferno zrcalo primjenjujemo kad u zrcalu želimo vidjeti uvećanu sliku predmeta: tada se predmet mora staviti između tjemena i žarišta zrcala. Ako izvor svjetlosti stavimo u žarište, tada nam sferno konkavno zrcalo malog otvora može poslužiti kao reflektor – jer će zrake svjetlosti reflektirane od zrcala ići paralelno optičkoj osi. Bolji reflektor dobivamo od paraboličnoga konkavnog zrcala jer se njime dobiva paralelni snop za otvor po volji. Konkavno sferno zrcalo upotrebljava se i za velike dalekozore (npr. Mount Palomar); tu se slika dalekog predmeta stvara u fokusu sfernog zrcala i promatra pomoću okulara koji nam služi kao lupa. Konveksna sferna zrcala vrlo se često primjenjuju za povećanje vidnoga polja kao, naprimjer, u retrovizoru, za promatranje prostora iza vozila.

### Primjer 8.3.

Konkavno sferno zrcalo daje triput uvećanu realnu sliku. Udaljenost je predmeta od slike 40 cm. Koliki su udaljenost predmeta i slike od zrcala te polumjer zakrivljenosti zrcala?

Konstrukcijom se možemo uvjeriti da konkavno sferno zrcalo daje realnu i uvećanu sliku kada je predmet između žarišta  $F$  i središta zakrivljenosti  $C$ . Slika je pri tom iza središta zakrivljenosti.

Slika je obrnuta pa je povećanje  $m = y'/y$  negativno. Udaljenost slike  $b$  veća je od udaljenosti predmeta  $a$ . Udaljenost predmeta od slike je  $d = b - a = 0,4$  m. Iz jednadžbe zrcala i uvjeta zadatka:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}, \quad b - a = d, \quad -\frac{b}{a} = m$$

dobivamo

$$a = -\frac{d}{m+1} = 0,2 \text{ m},$$

$$b = \frac{dm}{m+1} = 0,6 \text{ m},$$

$$R = -\frac{2dm}{m^2 - 1} = 0,3 \text{ m}.$$

Rješenje možemo provjeriti konstrukcijom slike pomoću karakterističnih zraka.

**Primjer 8.4.**

Polumjer je zakrivljenosti konveksnoga sfernog zrcala  $R = 75$  cm. Predmet visine 3 cm, okomit na optičku os, udaljen je 37,5 cm od zrcala. Gdje je i kakva je slika? Koliki su povećanje i veličina slike?

Iz jednadžbe sfernoga zrcala

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}$$

dobivamo

$$b = \frac{aR}{2a - R} = \frac{0,375 \cdot (-0,75)}{2 \cdot 0,375 - (-0,75)} \text{ m}$$

$$b = -0,188 \text{ m.}$$

Predznak minus kaže da je slika iza zrcala i da je virtualna.

Povećanje je:

$$m = -\frac{b}{a} = 0,5.$$

Slika je uspravna ( $m > 0$ ) i umanjena ( $m < 1$ ). Visina je slike:

$$y' = my = 1,5 \text{ cm.}$$

Zadatak možemo riješiti konstrukcijom slike pomoću karakterističnih zraka.

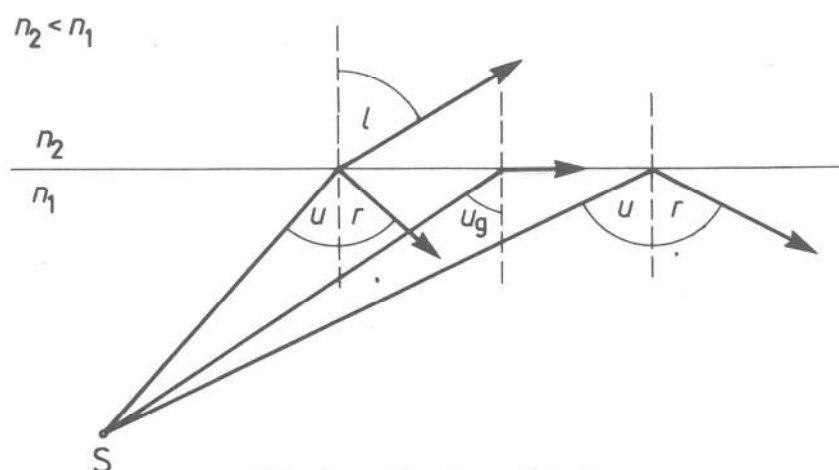
## 8.6. Totalna refleksija

Prilikom prijelaza iz optički gušćeg u optički rjeđe sredstvo zraka svjetlosti lomi se od okomice, tj. kut je loma  $l$  veći od kuta upada  $u$ . Očito je da u ovom slučaju postoji takav upadni kut, nazovimo ga granični kut  $u_g$ , kada se zraka lomi tako da ide točno duž granice sredstava (kut  $l = 90^\circ$ ). Ako je kut upada veći od graničnog kuta  $u_g$ , zraka više ne može prijeći u optički rijeđe sredstvo, nego se sva reflektira natrag u gušće sredstvo (sl. 8.17).

Tu pojavu nazivamo *totalna refleksija*. Totalna refleksija može, dakle, nastati samo onda kada zraka svjetlosti prelazi iz optički gušćeg sredstva u optički rjeđe sredstvo, i to – za kutove upada veće od graničnoga kuta. U slučaju totalne refleksije nema lomljene zrake i upadni se tok energije potpuno reflektira u prvo sredstvo.

Granični kut možemo lako izračunati iz Snellova zakona  $\sin u / \sin l = n_2 / n_1$ . Budući da je  $l = 90^\circ$ , te  $\sin l = 1$ , to je:

$$\sin u_g = \frac{n_2}{n_1} \quad (8.22)$$



Slika 8.17. Totalna refleksija

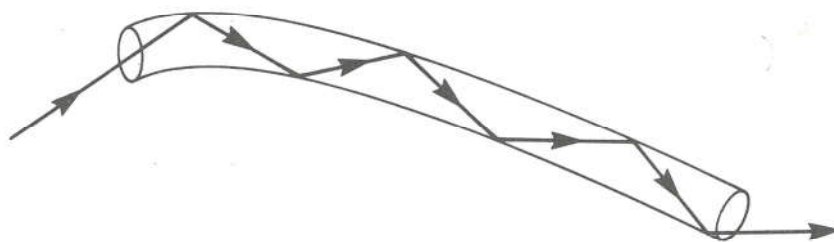
Kada svjetlost prelazi iz sredstva indeksa loma  $n_1 = n$  u vakuum, odnosno zrak ( $n_2 = 1$ ), tada je:

$$\sin u_g = \frac{1}{n} \quad (8.23)$$

Granični kut  $u_g$  za vodu–zrak iznosi  $49^\circ$ , za staklo–zrak oko  $40^\circ$  ovisno o čvrstoći stakla, dok je npr. za dijamant–zrak ( $n = 2,7$ ) relativno mali ( $24^\circ$ ) i sl.

Prednost je totalne refleksije nad običnom u tome što je ona uvijek 100 %. Obično zrcalo, naime, dio svjetlosti apsorbira pa je reflektirana zraka manjeg intenziteta od upadne, a pri totalnoj se refleksiji reflektira čitav intenzitet.

**Svjetlovodi. Optička vlakna.** Vodič svjetlosti osniva se na totalnoj refleksiji. Ravni ili savijeni štap od stakla ili nekog drugog prozirnog materijala može nam poslužiti da bez gubitaka prenesemo svjetlost od jednog mjesta na drugo.



Slika 8.18. Svjetlovod

Ako svjetlo uđe na početku prozirnoga štapa (sl. 8.18), može se dogoditi da ostane unutar štapa i nizom sukcesivnih totalnih refleksija stigne na njegov kraj i tamo izađe iz štapa, kao što prikazuje slika. Tako dobivamo svjetlovod kroz koji se širi svjetlost kao što voda teče kroz vodovodne cijevi. Svjetlovodni štap ne mora biti ravan, može biti i savijen na različite načine, uz uvjet pri svakoj refleksiji svjetlost upadne na stijenku štapa (cijevi) pod kutem većim od kritičnog pa da se totalno reflektira.



Pri totalnoj refleksiji nema gubitaka. Ako je materijal sasvim transparentan, ako nema gubitaka zbog apsorpcije, intenzitet svjetlosti ne smanjuje se pri prolazu kroz svjetlovod, makar se svjetlost reflektirala mnogoput. Tako bi tisuću npr. običnih refleksija na vrlo dobroj, gotovo savršenoj podlozi koeficijenta refleksije 0,99 smanjilo intenzitet za 23 000 puta ( $0,99^{-1000}$ ), a da ne govorimo o običnim zrcalima ( $\rho = 0,95$ ) gdje bi se intenzitet smanjio na pola već nakon 13 refleksija. U svjetlovodu se, zbog totalne refleksije, intenzitet smanjuje minimalno.

Umjesto jednog može se upotrijebiti snop (fleksibilnih) vlakana i tako dobiti svjetlosni kablovi kao vrlo efikasni vodiči svjetlosti.

Fiberska je optika novo područje primjenjene fizike koja proučava i koristi se optičkim vlaknima i širenjem svjetlosti kroz njih.

Ako se na početak takva snopa optičkih vlakana fokusira neka slika, svako vlakno u snopu uhvatit će djelić slike koji je na njega pao, prenijeti ga i na drugom kraju snopa (kabela) dobit ćemo poslanu sliku.

Svjetlosni kabeli primjenjuju se u istraživanjima, u industriji, medicini i sl. Pomoću njih se npr. u medicinskoj dijagnostici može činiti ono što je nedavno bilo nemoguće: promatrati unutrašnjost tijela, tkiva, vidjeti npr. unutrašnjost srca i sl.

Optička vlakna mogu biti vrlo tanka, promjera i do  $1\ \mu\text{m}$ . Snopovi takvih vlakana debljine 1 mm mogu sadržavati i do milijun vlakana. Budućnost je ove tehnike prijenosa informacija u komunikacijama, posebno digitalnim. Valna duljina svjetlosti relativno je mala (reda veličine  $\mu\text{m}$ ), mnogo kraća od npr. zvuka, tako da se valovima svjetlosti može prenijeti neuporedivo više informacija nego npr. zvučnim valovima.

## 8.7. Optička prizma

Optička je prizma prozirno sredstvo omeđeno dvama ravnim dioptrima koji međusobno zatvaraju kut  $A$ . Pri prolazu kroz prizmu zraka svjetlosti lomi se dva puta i, zbog toga, otklanja prema debljem kraju prizme (sl. 8.19).

Promatrajmo kako se zraka svjetlosti lomi kroz optičku prizmu. Prizma je napravljena od sredstva indeksa loma  $n$  (npr. stakla) i nalazi se u sredstvu indeksa loma 1.

Zraka svjetlosti upada pod kutem  $u$  s obzirom na normalu, lomi se pri ulasku i izlasku iz prizme te izlazi pod kutem  $l'$ . Prošavši kroz prizmu, upadna zraka zakrene se za kut devijacije  $\delta$ . Iz sl. 8.19. vidi se da je:

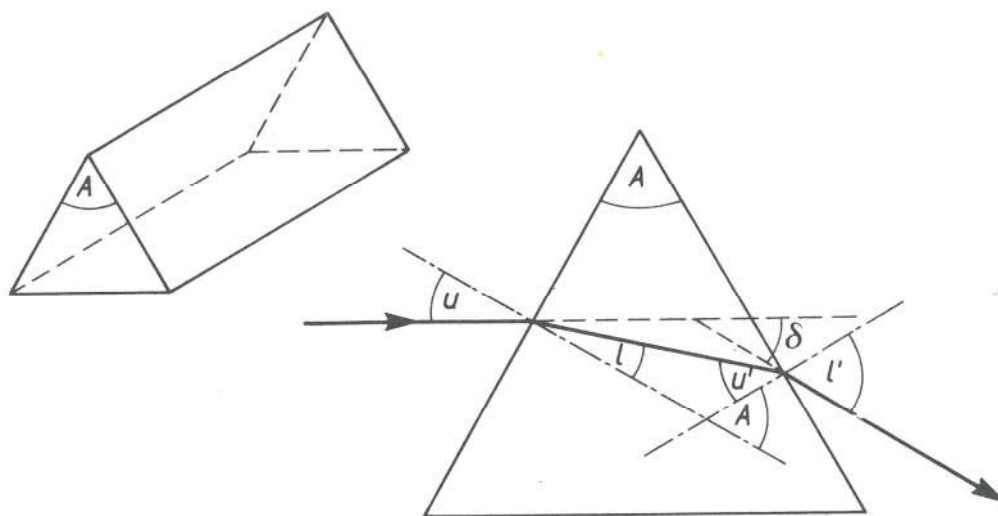
$$\delta = u - l + l' - u'.$$

Budući da je  $A = l + u'$ , slijedi:

$$\delta = u + l' - A \quad (8.24)$$

Devijacija ovisi o kutu prizme  $A$ , o indeksu loma  $n$  i o upadnom kutu  $u$ . Može se pokazati, traženjem ekstrema funkcije (8.24), da je kut devijacije minimalan kada zraka svjetlosti prolazi prizmom simetrično, tj. kada je:

$$u = l' \quad \text{i} \quad l = u'. \quad (8.25)$$



Slika 8.19. Optička prizma

Tada je (8.24):

$$\delta_{\min} = 2u - A \quad (8.26)$$

$$u = \frac{\delta_{\min} + A}{2} \quad \text{i} \quad l = \frac{A}{2} \quad (8.27)$$

Primjenom Snellova zakona dobivamo:

$$n = \frac{\sin u}{\sin l} = \frac{\sin \frac{\delta_{\min} + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (8.28)$$

Mjereći minimalni kut devijacije prizme može se odrediti indeks loma materijala. Ako je kut prizme  $A$  mali, tada je i  $\delta$  mali, pa vrijedi aproksimativna relacija:

$$\delta_{\min} = (n - 1) A \quad (8.29)$$

## 8.8. Disperzija svjetlosti

Mjerenja su pokazala da brzina svjetlosti, a time i indeks loma, u nekom sredstvu ovisi o valnoj duljini (frekvenciji) svjetlosti. Tu pojavu nazivamo disperzija\*. Disperzija je, dakle, pojava da se različite boje (valne duljine) lome različito.

U vidljivom dijelu elektromagnetskoga spektra indeks loma prozirnih tvari povećava se s frekvencijom, odnosno smanjuje s valnom duljinom. Empirički nađena ovisnost može se prikazati pomoću Cauchyove formule:

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \dots \quad (8.30)$$

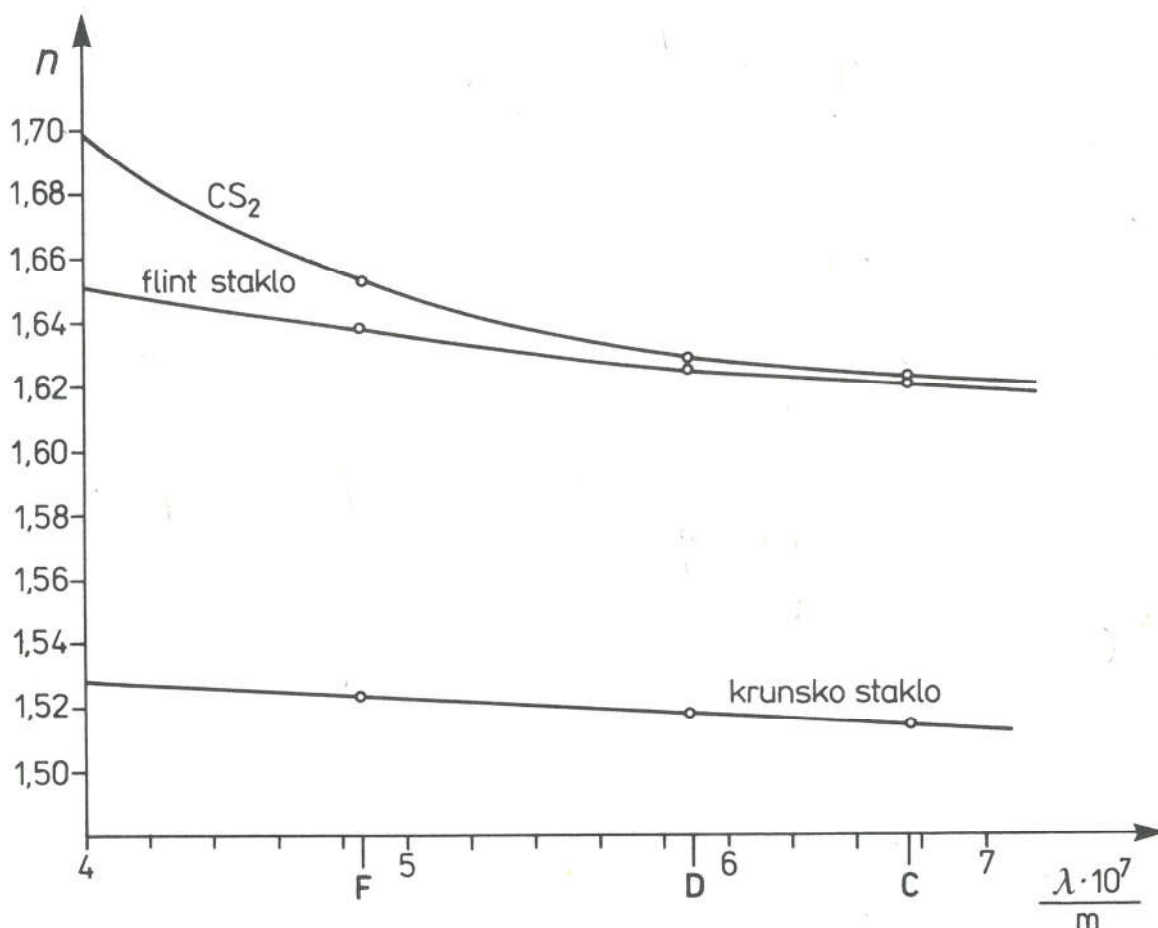
gdje su  $A$  i  $B$  konstante karakteristične za pojedini materijal.

\* dispergere (lat.) – raspršiti

Tablica 8.7. Ovisnost indeksa loma vode i ugljik-disulfida o valnoj duljini.

| Valna duljina<br>$\lambda/\text{nm}$ | crvena<br>656 | žuta<br>589 | zelena<br>486 | modra<br>431 | ljubičasta<br>397 |
|--------------------------------------|---------------|-------------|---------------|--------------|-------------------|
| H <sub>2</sub> O                     | 1,331         | 1,333       | 1,337         | 1,341        | 1,343             |
| kvarc                                | 1,456         | 1,458       | 1,464         | 1,469        | 1,172             |
| krunsko staklo                       | 1,513         | 1,516       | 1,523         | 1,528        | 1,531             |
| flint staklo                         | 1,621         | 1,626       | 1,638         | 1,646        | 1,651             |
| CS <sub>2</sub>                      | 1,619         | 1,628       | 1,653         | 1,677        | 1,699             |

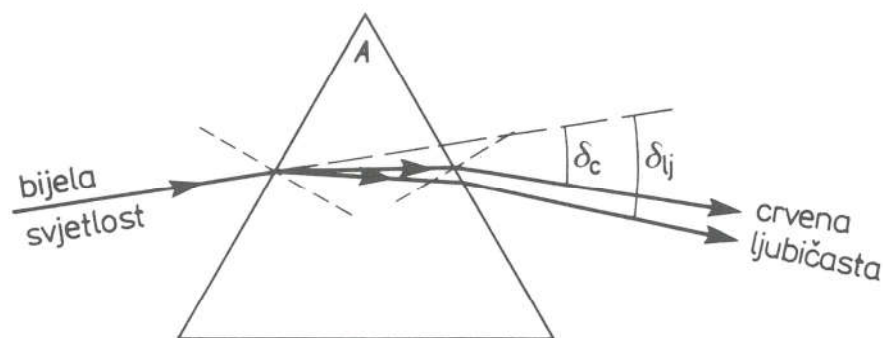
Nacrta li se indeks loma nekog materijala u ovisnosti o valnoj duljini, dobije se disperzijska krivulja sredstva. Tako je na sl. 8.20. prikazana disperzijska krivulja nekih materijala. Diferencijalni kvocijent  $dn/d\lambda$  mjera je disperzije u određenoj točki te krivulje, tj. za određenu valnu duljinu.



Slika 8.20. Disperzijske krivulje

Devijacije zrake svjetlosti pri prolazu kroz prizmu ovisi o indeksu loma, dakle, i o valnoj duljini upadne svjetlosti (relacija 8.24 i 8.29). Devijacija je najveća za ljubičasti dio vidljive svjetlosti, a najmanja za crveni dio. Prizma, dakle, rastavlja bijelu svjetlost u spektar boja (sl. 8.21). Zbog toga se prizme upotrebljavaju u instrumentima (spektroskopima) za dobivanje spektara polikromatskih svjetlosnih





Slika 8.21. Disperzija u prizmi

izvora i određivanje valnih duljina koje se pojavljuju u tim spektrima (sl. 8.22), jer je svaka valna duljina u spektru otklonjena pod različitim kutem. Osim s prizmom, postoje i spektrometri s optičkom rešetkom (v. odjeljak 8.15).



Slika 8.22. Princip rada spektrometra s prizmom

Disperzija prizme opisuje se tzv. disperzijskom moći prizme. Disperzijska moć definira se pomoću devijacija dviju određenih boja, tzv. C i F *Fraunhoferovih linija*.\*

$$\lambda_C = 656,3 \text{ nm (crvena)} \quad \lambda_F = 486,1 \text{ nm (zeleno - plava)}$$

i devijacije žute natrijeve D linije ( $\lambda_D = 589,3 \text{ nm}$ ). Disperzijska je moć prizme:

$$\omega = \frac{\delta_F - \delta_C}{\delta_D} \quad (8.31)$$

Ako je kut prizme mali, vrijedi relacija (8.29)  $\delta = (n - 1) A$  pa je:

$$\omega = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \quad (8.32)$$

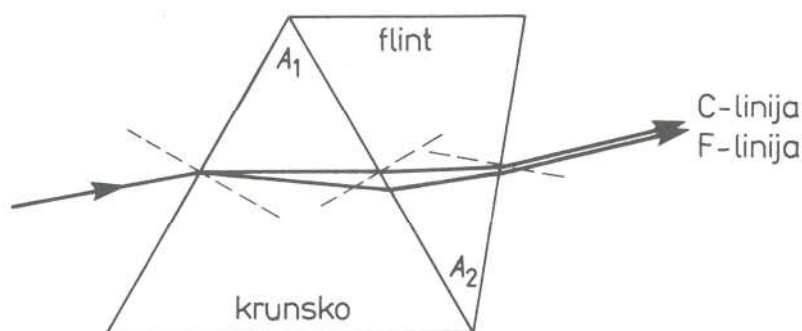
Recipročna vrijednost  $1/\omega$  naziva se  $\nu$ -vrijednost stakla (ili Abbeov broj):

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \quad (8.33)$$

\* Tamne linije u Sunčevu spektru nastale apsorpcijom određenih valnih duljina u Sunčevoj atmosferi. Označavaju se slovima od A, B, C... Tako je npr. D-linija dublet (589 i 589,6 nm) i nalazi se na istom mjestu u spektru gdje i natrijeva žuta svjetlost, linija C na mjestu vodikove crvene linije (656,3 nm) i sl.

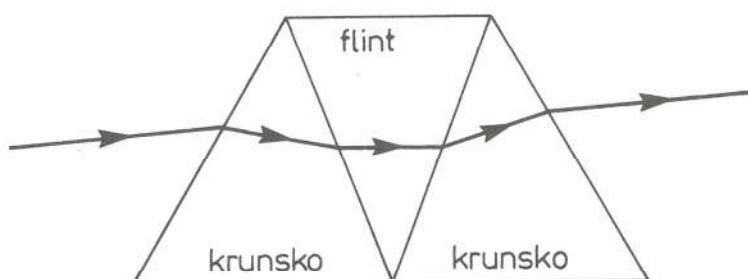
Disperzijska moć optičkih stakala varira od  $\frac{1}{65}$  do  $\frac{1}{35}$ .

Srednji indeks loma  $n_D$  i Abbeov broj  $\nu$  služe za opisivanje optičkih značajki stakla, iako je za točno poznavanje optičkih svojstava potrebno poznavati disperzijsku krivulju  $n(\lambda)$ .



Slika 8.23. Akromatska prizma

Kombinacijom dviju prizmi, jedne od krunskog i druge od flint-stakla, moguće je napraviti sistem koji otklanja svjetlost uz vrlo malu disperziju. To je tzv. akromatska prizma (sl. 8.23).



Slika 8.24. Amicieva prizma

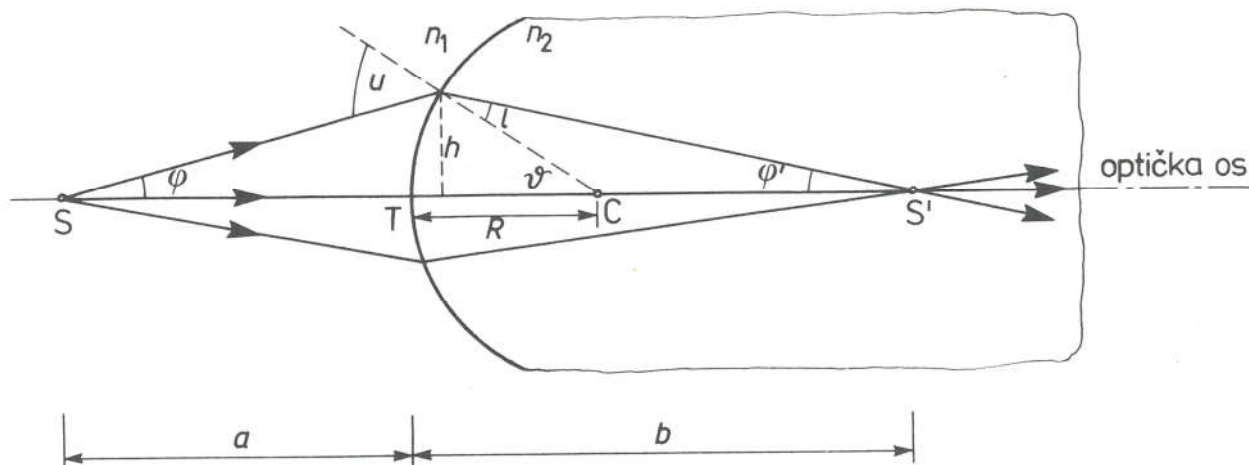
Kombinacijom triju ili pet prizmi od različitih vrsta stakla (ili drugih prozirnih materijala), ali s jednakom srednjom devijacijom, dobiva se tzv. Amicieva prizma za izravno gledanje (sl. 8.24). Takva prizma, kao što joj i samo ime kaže, ima vrlo malu devijaciju i zbog te svoje osobine često se upotrebljava u manjim spektroskopima.

## 8.9. Sferni dioptrar

Sferni dioptrar sastoji se od dvaju homogenih, izotropnih optičkih sredstava različitih indeksa loma  $n_1$  i  $n_2$ , rastavljenih sfernom plohom (sl. 8.25). Leće, najvažniji sastavni dijelovi optičkih instrumenata, sastoje se, kao što ćemo kasnije vidjeti, od dvaju takvih sfernih dioptara koji imaju zajedničku os.

Pretpostavit ćemo da je indeks loma prvog sredstva  $n_1$  manji od  $n_2$  indeksa loma drugog sredstva, npr. zrak – staklo. Zraka svjetlosti koja putuje od lijeva na desno nakon loma savit će se prema optičkoj osi. Nađimo sliku predmeta, koji se nalazi u prvom sredstvu, kada su zrake koje sudjeluju u preslikavanju paraksijalne

jer će, samo u tom slučaju, slika biti neiskrivljena i oštra. Kao i za zrcalo, i ovdje udaljenost zraka od optičke osi mora biti mnogo manja od polumjera zakrivljenosti.



Slika 8.25. Lom na sfernom dioptru

Pogledajmo gdje je slika točkastoga predmeta S koji se nalazi na optičkoj osi. Iz sl. 8.25. se vidi da je:

$$u = \varphi + \vartheta \quad \text{i} \quad l = \vartheta - \varphi'.$$

Dijeljenjem ovih dviju relacija dobivamo:

$$\frac{u}{l} = \frac{\varphi + \vartheta}{\vartheta - \varphi'} \quad (8.34)$$

Koristeći se izrazom (8.34), možemo napisati zakon loma:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin u}{\sin l} = \frac{\sin(\vartheta + \varphi)}{\sin(\vartheta - \varphi')} \approx \frac{\vartheta + \varphi}{\vartheta - \varphi'} \quad (8.35)$$

Budući da su uz Gaussove aproksimacije kutovi mali, slijedi:

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi = \frac{h}{a}, \quad \operatorname{tg} \varphi' \approx \varphi' = \frac{h}{b} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \vartheta \approx \vartheta = \frac{h}{R} \quad (8.36)$$

Aproksimacije (8.36) prevode jednadžbu (8.35) u:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{h}{R} + \frac{h}{a}}{\frac{h}{R} - \frac{h}{b}}$$

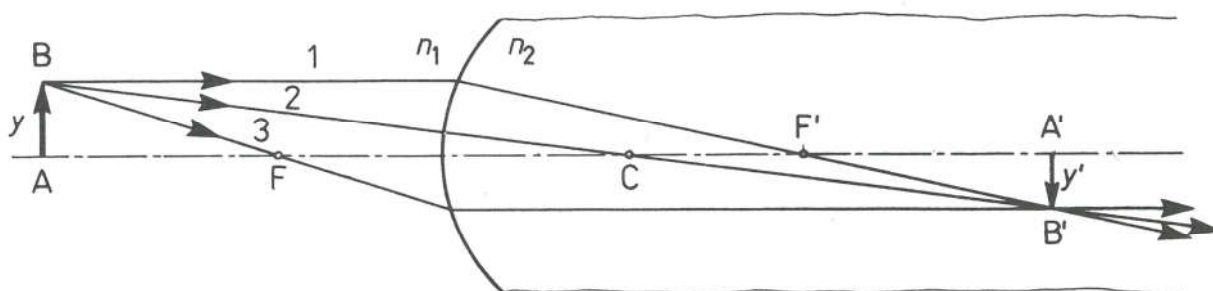
Nakon sređivanja dobivamo:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (8.37)$$

Relacija (8.37) jednadžba je konjugacije sfernoga dioptra u uvjetima Gaussovih aproksimacija. Ona vrijedi za konkavnu i za konveksnu plohu te za bilo koji položaj predmeta i slike. Pri tom se držimo dogovora za predznake:



1. Polumjer  $R$  pozitivan je ako je na strani prema kojoj ide svjetlo, inače je negativan. Za konveksnu granicu  $R > 0$ , a za konkavnu  $R < 0$ .
2. Udaljenost je predmeta od tjemena  $a$  pozitivna ako je na strani odakle dolazi svjetlost. Za realne predmete  $a > 0$ , a za virtualne  $a < 0$ .
3. Udaljenost je slike od tjemena  $b$  pozitivna ako je na strani prema kojoj ide svjetlo. Za realnu sliku  $b > 0$ , za virtualnu je  $b < 0$ .



Slika 8.26. Karakteristične zrake za sferni dioptrar

Iz jednadžbe (8.37) slijede za žarišnu daljinu slike ( $a = \infty$ ,  $b = f'$ ) i za žarišnu daljinu predmeta ( $b = \infty$ ,  $a = f$ ) izrazi:

$$f' = R \frac{n_2}{n_2 - n_1} \quad \text{i} \quad f = R \frac{n_1}{n_2 - n_1} \quad (8.38)$$

Sliku uspravnoga svijetlog predmeta okomitog na optičku os najlakše dobivamo pomoću karakterističnih zraka (sl. 8.26). Iz sličnosti trokuta ABC i A'B'C i zakona loma slijedi povećanje sfernog dioptra:

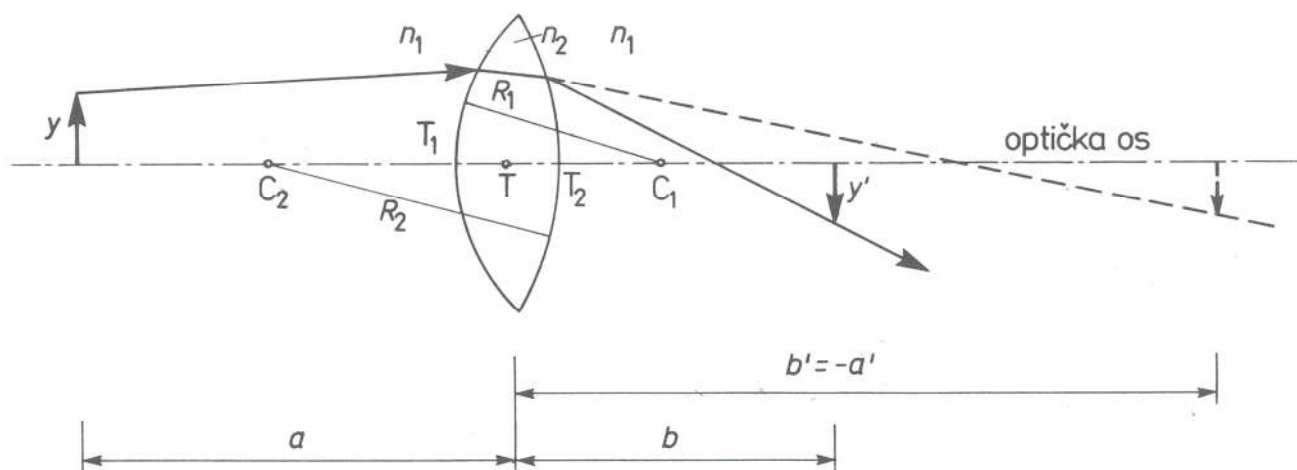
$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 b}{n_2 a}. \quad (8.39)$$

## 8.10. Tanka leća

Prozirno sredstvo omeđeno dvama sfernim dioptrima naziva se leća. Pravac koji prolazi kroz središte zakrivljenosti sfernih dioptrara naziva se optička os leće (sl. 8.27). Točke  $T_1$  i  $T_2$  su prednje i stražnje tjeme leće, a  $T_1 T_2$  debljina leće. Ako je leća tako tanka da joj se debljina može zanemariti, tada smatramo da su  $T_1$  i  $T_2$  u istoj točki  $T$  – tjemenu leće. Promatrat ćemo samo tanke leće jer su za debele leće razmatranja složenija.

Razlikujemo dvije vrste leća: konveksne (konvergentne) i konkavne (divergentne) leće\*. Konveksne su leće u sredini deblje nego na rubovima; nazivaju se još i sabirače ili konvergentne (pozitivne) leće jer upadni paralelni snop zraka skupljaju u jednu točku – žarište leće. Konkavne (divergentne) leće u sredini su tanje nego na krajevima i često ih nazivamo leće debeloga ruba. One od upadnoga paralelnog snopa daju divergentni snop i zato se često nazivaju i rastresače. Na sl. 8.28 prikazane

\* Naziv leća nastaje zbog sličnosti sa sjemenkom biljke leće (*Lens culinaris*)

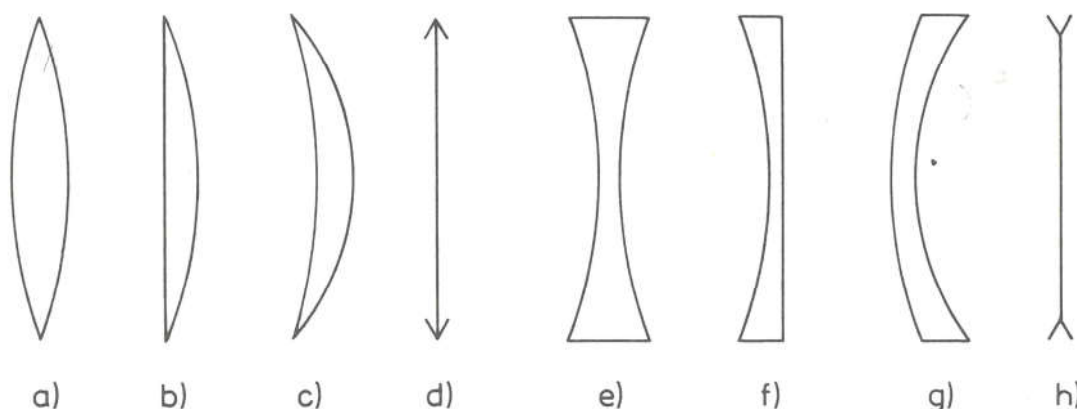


Slika 8.27. Leća

su razne vrste konvergentnih i divergentnih leća, kao i simbolična oznaka za konvergentnu i divergentnu leću.

Slično kao za sferno zrcalo i sferni dioptar, i ovdje ćemo jednadžbu leće (relacija koja povezuje udaljenost predmeta  $a$ , udaljenost slike  $b$  i žarišnu daljinu  $f$ ) izvesti upotrebom Gaussove aproksimacije. Slike će biti vjerne predmetu samo ako je on mali i ako se nalazi na optičkoj osi, ili blizu nje, a zrake od njega padaju samo na središnji dio leće, tj. ako su te zrake paraksijalne.

Neka je leća napravljena od materijala (stakla) indeksa loma  $n_2$ , a nalazi se u sredstvu indeksa loma  $n_1$ , npr. zraku (sl. 8.27). Leća ima dva polumjera zakrivljenosti:  $R_1$  je polumjer prvog, a  $R_2$  polumjer drugoga sfernoga dioptara. Debljina je leće zanemariva prema polumjerima zakrivljenosti pa i pretpostavljamo da je tjeme leće u istoj točki kao i tjemena sfernih dioptara.



Slika 8.28. Vrste leća

Budući da je leća sastavljena od dvaju sfernih dioptara, jednadžbu ćemo tanke leće naći jednostavno: najprije ćemo naći položaj slike predmeta s obzirom na prvi sferni dioptar (udaljenost  $b'$ ); zatim ćemo tu sliku uzeti kao predmet za drugi sferni dioptar i, na taj način, naći položaj što ju od predmeta stvara leća.

Udaljenost  $b'$  slike koju od predmeta daje prva sferna granica nalazimo iz jednadžbe sfernog dioptra (8.37):

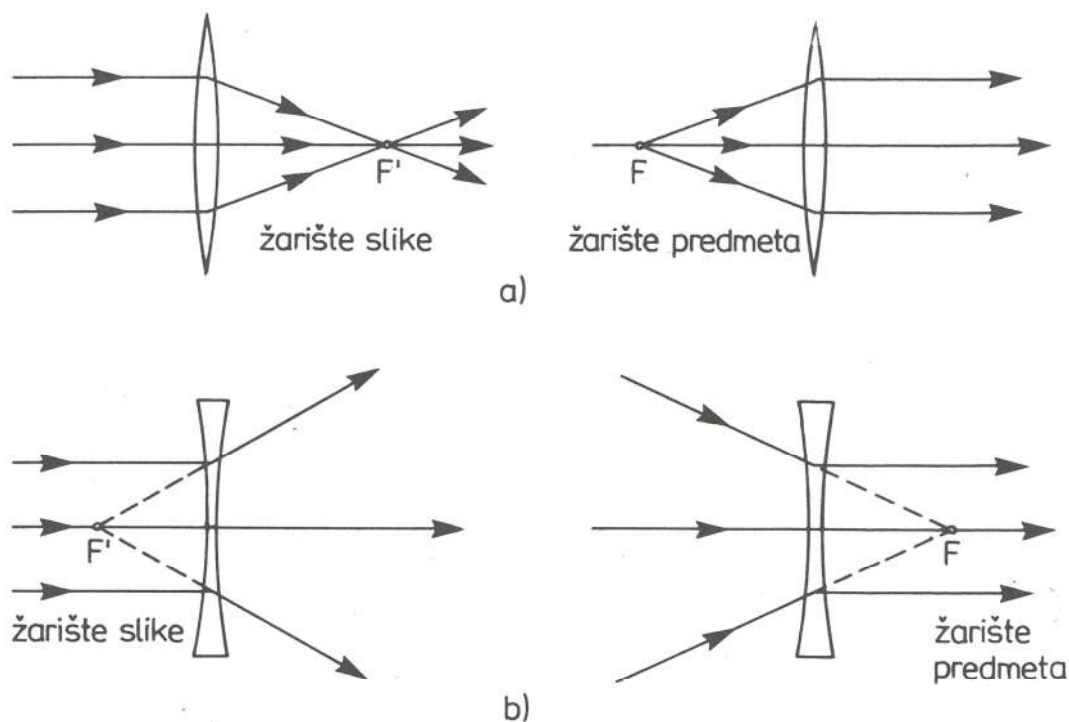
$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (8.40)$$

Ova slika služi kao predmet drugome sfernom dioptru; predmet je virtualan pa je po dogovoru za predznake njegova udaljenost od tjemena drugoga sfernoga dioptra negativna, tj.  $-b'$ . Kad u jednadžbu za drugu sfernu granicu:

$$\frac{n_2}{-b'} + \frac{n_1}{b} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad (8.41)$$

uvrstimo vrijednost za  $n_2/b'$  iz (8.40) i sredimo, dobivamo jednadžbu tanke leće:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (8.42)$$



Slika 8.29. Žarišta a) konvergentne b) divergentne leće

Slično kao i za sferni dioptrar definiramo i za leću žarište i žarišnu daljinu (sl. 8.29). Ako je s obiju strana leće isto sredstvo, tada su žarišne daljine predmeta i slike jednake pa ćemo ih označiti istim slovom  $f$ . Slika će biti u žarištu slike (tj.  $b = f$ ) ako je predmet u beskonačnosti ( $a = \infty$ ), odnosno svijetli predmet smješten u žarištu predmeta ( $a = f$ ) dat će sliku u beskonačnosti ( $b = \infty$ ). Uvrstimo li to u jednadžbu (8.42), dobivamo izraz za žarišnu daljinu slike odnosno predmeta:

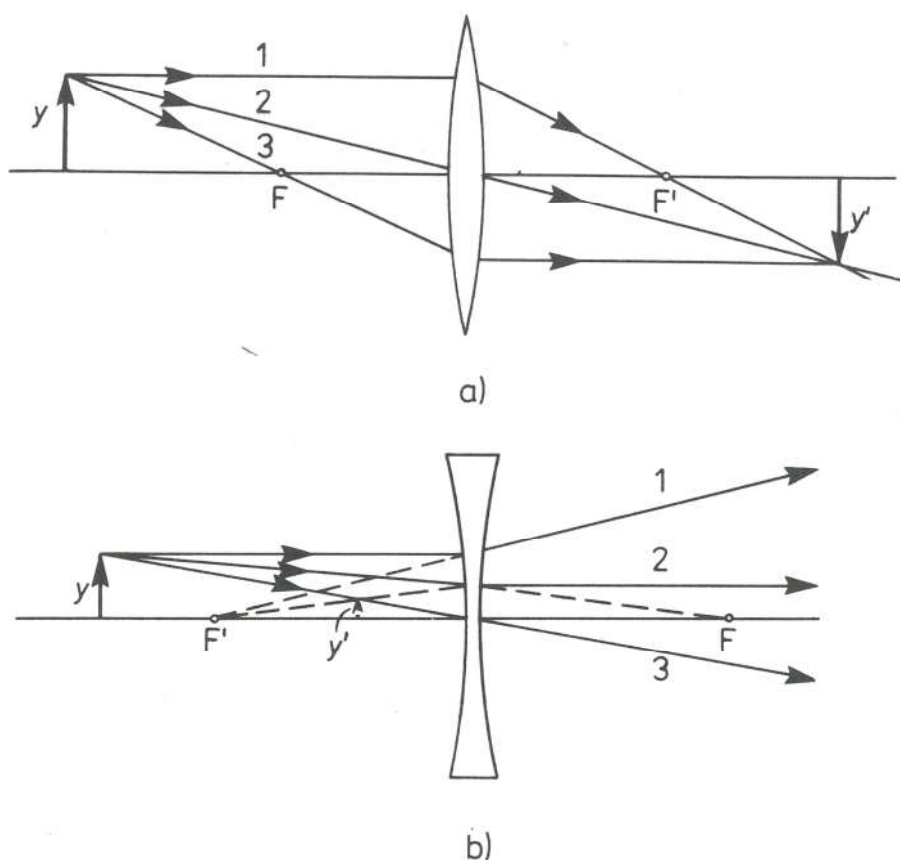
$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (8.43)$$



Primjenom izraza (8.43) za žarišnu daljinu, jednadžba leće (8.42) poprima jednostavan oblik i postaje po obliku istovjetna jednadžbi sfernoga zrcala:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (8.44)$$

Konveksne leće imaju  $R_1 < R_2$  (a uglavnom je uvijek  $n_2$  veće od  $n_1$ ) pa je prema (8.44) žarišna daljina  $f$  pozitivna. One skupljaju paralelni snop zraka u žarištu i nazivaju se sabirače ili konvergentne leće. Konkavne leće, koje su u sredini tanje nego na krajevima, imaju negativnu žarišnu daljinu, rasipaju paralelni snop zraka i nazivaju se rastresače, negativne ili divergentne leće.



Slika 8.30. Karakteristične zrake za a) konvergentnu i b) divergentnu leću

I kod leće, kao i kod zrcala, sliku najlakše konstruiramo pomoću triju karakterističnih zraka (sl. 8.30):

1. Zraka koja dolazi paralelno optičkoj osi lomi se kroz žarište slike  $F'$ .
2. Zraka koja dolazi kroz žarište predmeta  $F$  lomi se paralelno optičkoj osi.
3. Zraka koja prolazi kroz tjeme leće ne lomi se, tj. prolazi bez promjene smjera.

Razmatranja za konvergentne leće vrijede i za divergentne leće. Pri tom treba uzeti u obzir ovaj dogovor o predznacima:

Pod pretpostavkom da se svjetlost širi od lijeva na desno, udaljenost  $a$  je pozitivna ako je predmet lijevo od tjemena, udaljenost  $b$  je pozitivna ako je slika desno od tjemena. Polumjer je zakrivljenosti pozitivan ako je središte desno od  $T$ , inače je negativan; žarišna je daljina pozitivna za konvergentne, a negativna za divergentne leće. Ako se svjetlost širi zdesna nalijevo, predznaci su obrnuti.

Iz sl. 8.30. vidi se da je *linearno povećanje* tanke leće, tj. omjer veličine slike  $y'$  prema veličini predmeta  $y$  jednako:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \quad (8.45)$$

Znakom minus označavamo da je slika okrenuta prema predmetu (povećanje negativno) ako su  $a$  i  $b$  pozitivni.

**Jakost** (konvergencija) leće recipročna je vrijednost žarišne daljine izražena u metrima, tj.:

$$j = \frac{1}{f} \quad (8.46)$$

Jakost leće izražava se u dioptrijama: jedna dioptriya je jakost leće koja ima žarišnu daljinu jedan metar. Konvergentne leće imaju pozitivnu, a divergentne leće negativnu jakost.

Narav i veličina slike konvergentne leće ovise o položaju realnog predmeta.

Divergentne (konkavne) leće daju **uvijek** virtualnu, umanjenu i uspravnu sliku, bez obzira na to gdje je bio realni predmet.

### Primjer 8.5.

Predmet se nalazi na udaljenosti  $a_1 = 10$  cm ispred konvergentne leće jakosti  $j_1 = 20 \text{ m}^{-1}$ . Iza konvergentne leće na udaljenosti  $c = 2,5$  cm nalazi se druga konvergentna leća jakosti  $j_2 = 20 \text{ m}^{-1}$ .

a) Gdje je slika predmeta i kakva je?

b) Gdje bi bila slika koju taj sistem daje od beskonačno dalekog predmeta?

a) Prva leća od predmeta daje sliku na udaljenosti  $b_1$ :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = j_1, \quad \frac{1}{b_1} = j_1 - \frac{1}{a_1}, \quad b_1 = \frac{a_1}{j_1 a_1 - 1}.$$

Ta je slika predmet za drugu leću. Primjenom jednadžbe leće dobivamo:

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = j_2.$$

Tu je  $a_2$  udaljenost predmeta od druge leće i u ovom je primjeru  $a_2 = -(b_1 - c)$ , a  $b_2$  je udaljenost slike od druge leće. Dakle:

$$\frac{1}{b_2} = j_2 - \frac{1}{c - b_1} = j_2 - \frac{j_1 a_1 - 1}{j_1 a_1 c - c - a_1}$$

ili, pisano pomoću žarišnih daljina:

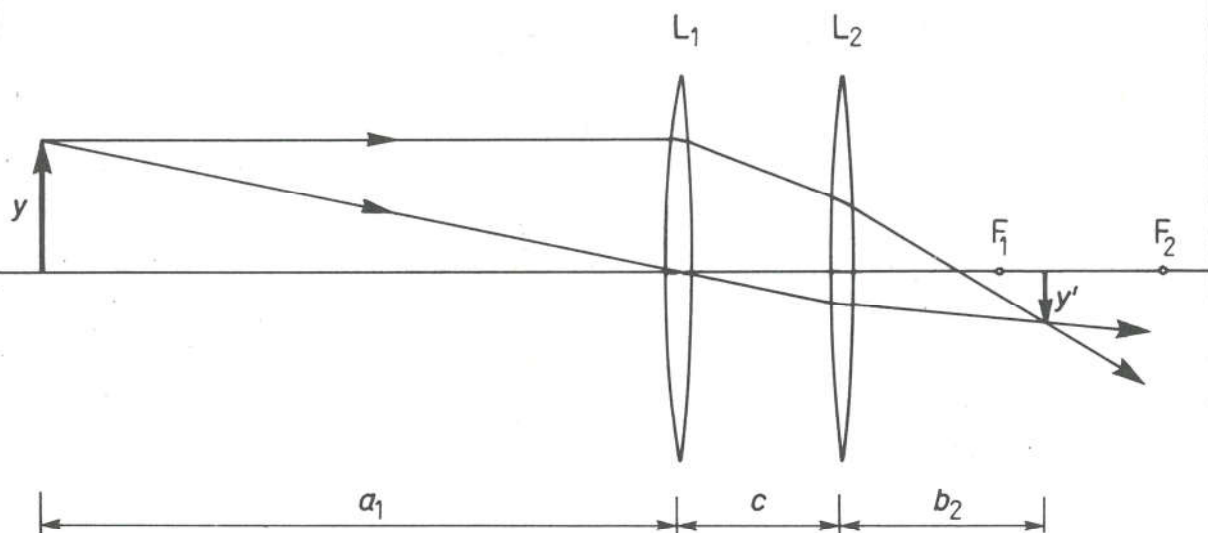
$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{a_1 - f_1}{a_1 c - f_1 c - a_1 f_1}.$$

Ako je  $c$  zanemarivo:

$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{a_1 - f_1}{-a_1 f_1} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} - \frac{1}{a_1}.$$

Rezultat koji smo dobili ne ovisi o vrsti leća, pa ga možemo upotrijebiti za bilo koji par takvih leća.

Ovisno o zadanim veličinama  $b_2$  može biti pozitivno (realna slika) i negativno (virtualna slika). Uvrštavanjem vrijednosti dobivamo  $b_1 = 10$  cm,  $b_2 = 3$  cm. Slika je realna i umanjena (sl. 8.31).



Slika 8.31.

b) Ako je predmet beskonačno dalek ( $a_1 = \infty$ ), tada iz:

$$\frac{1}{b_2} = j_2 - \frac{j_1 a_1 - 1}{j_1 a_1 c_1 - c - a_2} = j_2 - \frac{j_1 - \frac{1}{a_1}}{j_1 c_1 - \frac{c}{a_1} - 1}$$

dobivamo:

$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{f} = j_2 - \frac{j_1}{j_1 c - 1} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{c - f_1} = \frac{f_1 + f_2 - c}{f_2(f_1 - c)}.$$

U zadanom primjeru jakost leće  $j_1 = 20 \text{ m}^{-1}$ ,  $j_2 = 20 \text{ m}^{-1}$ ,  $c = 0,025$  cm pa je:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b_2} = 20 \text{ m}^{-1} - \frac{20 \text{ m}^{-1}}{20 \cdot 0,025 - 1} = 60 \text{ m}^{-1}; \quad f = 1,67 \text{ cm}$$



Ako je  $c$  zanemarivo, sistem od dviju leća ima žarišnu daljinu:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$j = j_1 + j_2$$

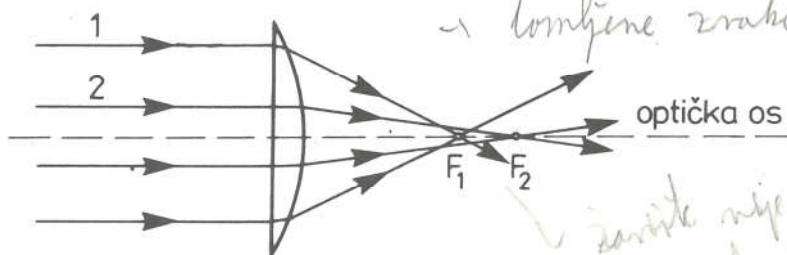
i ekvivalentan je jednoj tankoj leći koje je jakost jednaka zbroju jakosti pojedinih leća.

## 8.11. Pogreške leće

Pri razmatranju leće ograničili smo se samo na paraksijalne zrake (Gaussove aproksimacije) i samo pod tim uvjetima leće su stigmatične, tj. od točkasta predmeta daju točkastu sliku. Međutim, to je dosta idealiziran slučaj, zapravo često zrake svjetlosti dopiru i do ruba leće ili sijeku optičku os pod nekim kutem. Tada sinuse i tangense kuteva ne možemo zamijeniti lukovima, dobivene slike nisu više oštre i govorimo o pogreškama leće.

Disperzija svjetlosti također utječe na kvalitetu slike kod leće. Osvrnut ćemo se ukratko na dvije pogreške leće.

**Sferna aberacija.** Ova se pogreška pojavljuje kada široki snop zraka upada na leću. Rubne zrake lome se jače od centralnih i oblikuju sliku bliže leći (sl. 8.32). Tako npr. paralelni snop zraka koji upada na leću s velikim otvorom ne lomi se sav kroz žarište; zato leća s velikim otvorom od točkasta izvora ne daje točkastu, nego razmazanu sliku u obliku malenoga kruga. Ta pogreška koja se pojavljuje

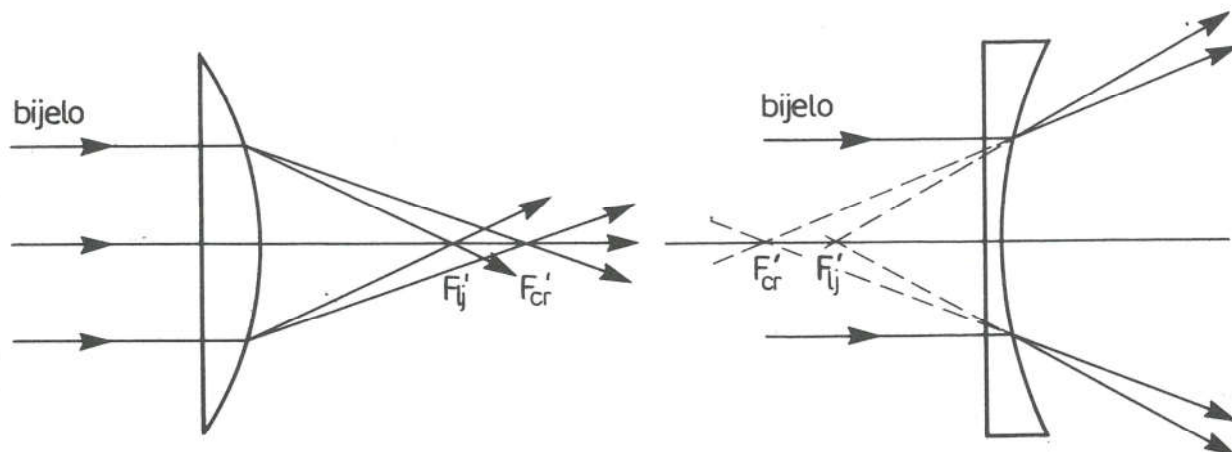


Slika 8.32. Sferna aberacija

kod sfernih zrcala i leća naziva se sferna aberacija. Jedan od načina da se ta pogreška izbjegne jest upotreba dijafragmi koje ograničavaju upadni snop zraka na paraksijalne zrake. Aberacija se može ispraviti i zgodnim kombiniranjem pozitivnih i negativnih leća kojih su aberacije u suprotnim smjerovima tako da se u sistemu leće poništavaju. Takav je sistem npr. objektiv mikroskopa.

**Kromatska aberacija.** Kada polikromatska (npr. bijela) svjetlost prolazi kroz leću, različite valne duljine lomit će se različito jer indeks loma ovisi o valnoj duljini

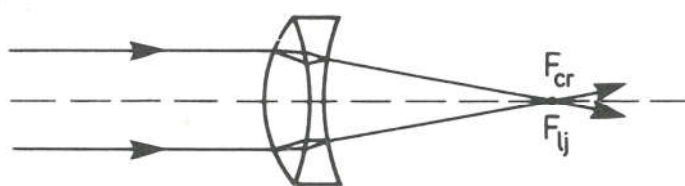
(disperzija). Tako će leća za svaku valnu duljinu imati drukčije žarište (sl. 8.33). Za konvergentnu leću žarišna daljina za crvenu svjetlost veća je nego žarišna daljina za plavu (ljubičastu) svjetlost, dok je za divergentnu leću obratno. Slika bijeloga točkastog izvora sastojat će se od koncentričnih krugova raznih boja. Ova se pogreška naziva kromatska aberacija.



Slika 8.33. Kromatska aberacija

Da bi se pomoću leće dobila dobra slika, potrebno je da svjetlo raznih boja fokusira što je moguće bolje u istu točku. To nije moguće postići običnom lećom, već je potrebno napraviti tzv. akromatski sistem leća.

Sistemom od konveksne leće napravljene od krunskoga stakla priljubljene uz konkavnu (divergentnu) leću od flint stakla, tzv. konvergentnim akromatom, može se dosta dobro ukloniti kromatska aberacija (sl. 8.34).



Slika 8.34. Akromatske leće

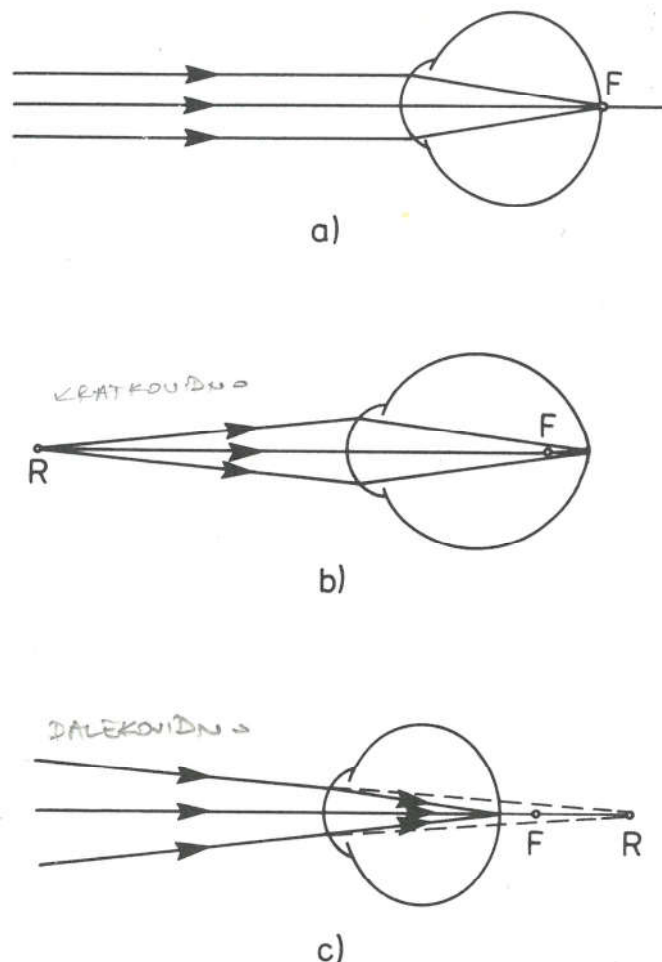
Na kraju ponovno istaknimo da se pogreške leće mogu djelomično otkloniti tako da sastavimo više leća različitih jakosti i različitih indeksa loma jednu do druge. Takve korigirane leće vrlo su precizno izrađene i upotrebljavaju se u raznim optičkim instrumentima (dalekozorima, fotografskim aparatima itd.).

## 8.12. Optički instrumenti

Gotovo svi optički instrumenti osnivaju se na geometrijskoj optici i njezinim zakonima; jedino pri proučavanju njihove moći razlučivanja moramo uzeti u obzir valnu prirodu svjetlosti.

Postoje dvije skupine optičkih instrumenata: okularni i projekcijski instrumenti. Prvi od njih, stvarajući virtualnu sliku omogućuju promatranje vrlo malih (mikroskop) ili udaljenih predmeta (dalekozor, teleskop). Oni, naime, povećavaju kut gledanja, a time i prividnu veličinu predmeta. Kod projekcionih aparata pomoću konvergentne leće dobivamo realnu uvećanu (npr. dijaprojektor) ili umanjenu (npr. fotoaparat) sliku predmeta.

Ukratko ćemo razmotriti neke od njih.



*akomodacija*

Slika 8.35. Normalno a) kratkovidno b) i dalekovidno c) oko

Oklo je najvažniji iako ne i najjednostavniji optički sistem. Najbitniji dio oka jest konvergentna leća koja stvara sliku na stražnjoj strani, tzv. mrežnici oka. Udaljenost leće od mrežnice uvijek je stalna, pa da bismo oštro vidjeli predmete na svim udaljenostima, mora se mijenjati žarišna daljina leće. Mišići oko leće mogu stezanjem i rastezanjem mijenjati njezin oblik i tako omogućiti da se na mrežnici uvijek dobije oštra i jasna slika. Ta se sposobnost oka naziva akomodacijom. Kada se oko odmara, ono je adaptirano za gledanje dalekih predmeta i to je jedino gledanje bez naprezanja oka. Da bi se vidjeli bliži predmeti, mora se očnim mišićima mijenjati zakrivljenost leće i oko se pri tom napreže.

*predmet stvara stvarnu sliku*

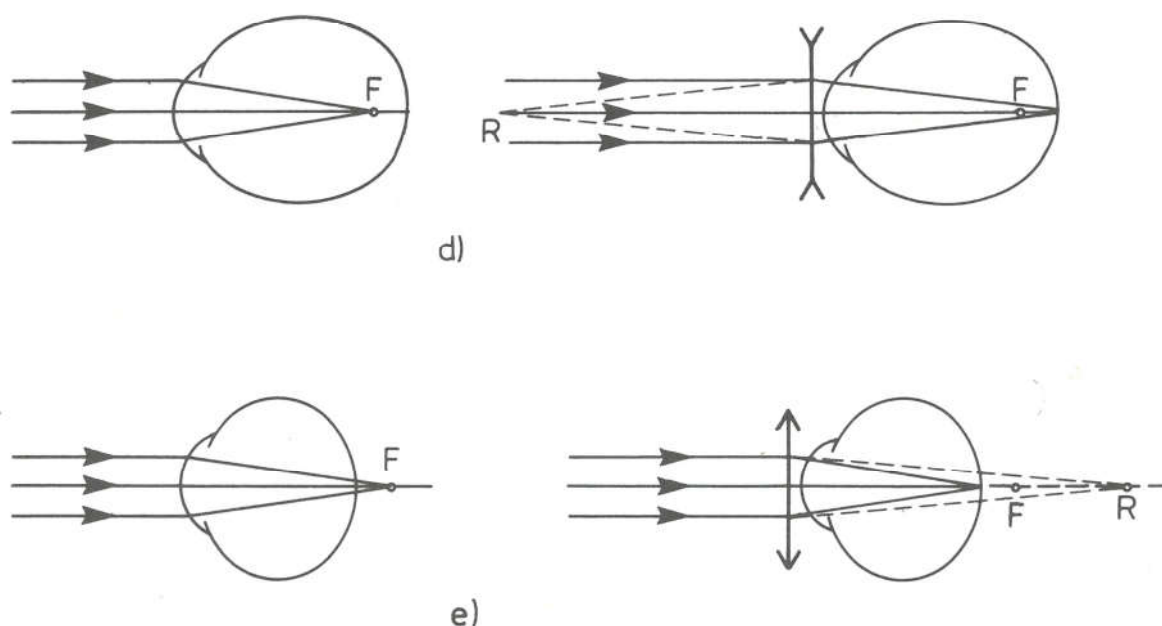


Akomodacija oka nije neograničena; oko oštro vidi predmete između jedne najbliže (P) i jedne najdalje točke (R). Bliska točka P (punctum proximum) kod normalnog je oka na udaljenosti oko 10 cm, i predmete bliže od te točke oko ne vidi jasno. U toj je točki akomodacija oka najjača i jakost očne leće najveća. Starenjem bliska se točka odmiče tako da je u dobi od oko 60 godina udaljena od oka oko 2 m. Naravno, to mijenjanje, kao i ostala svojstva oka, mijenjaju se od čovjeka do čovjeka. Blisku točku P možemo odrediti npr. tako da knjigu približavamo oku dok ne dođemo na udaljenost kada slova postaju nejasna.

Daleka točka R (punctum remotum) najudaljenija je točka na osi oka koju oko jasno vidi. Tada leća ima najmanju jakost, oko nije akomodirano. Za normalno oko ona je u beskonačnosti. Starenjem se smanjuje sposobnost akomodacije oka i u dobi oko šezdeset godina ova se točka pomakne kroz beskonačnost i dođe iza oka na udaljenost od nekoliko metara.

Kada je daleka točka oka u beskonačnosti, kažemo da je oko emetropično. Takvo oko paralelni snop zraka fokusira na mrežnicu (sl. 8.35.a) i, što se tiče daleke točke, emetropično je oko normalno. Oko je ametropično ako daleka točka nije u beskonačnosti.

U neakomodiranu ametropičnu oku paralelni snop zraka ne fokusira se na mrežnicu. Postoje dvije vrste takvog oka: kratkovidno i dalekovidno, već prema tome na kojoj strani oka leži daleka točka R.

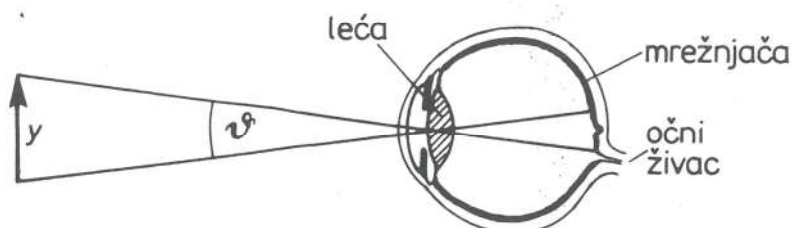


Slika 8.35. Korekcija miopije d) i hipermetropije e)

Ako točka R leži na konačnoj udaljenosti ispred oka, oko je kratkovidno i ta se mana oka naziva miopija. Paralelni snop zraka u takvom oku fokusira se ispred mrežnice (sl. 8.35.b). Kod dalekovidnosti (hypermetropia) paralelni snop zraka dođe na mrežnicu prije fokusiranja i fokus je iza mrežnice (sl. 8.35.c). Kratkovidno oko ne vidi jasno daleke predmete bez upotrebe naočala. Dalekovidno se oko mora naprezati da bi vidjelo bilo koji realni predmet. Korekcijske naočale služe, dakle,

da bi ametropično oko jasno vidjelo daleke predmete (sl. 8.35.d). Naočalne leće moraju, dakle, fokusirati paralelni snop zraka u daleku točku oka. Za kratkovidno oko to su konkavne (divergentne) leće, a za dalekovidno oko to su konveksne (konvergentne) leće, kao što je prikazano na sl. 8.35.d i 8.35.e.

U literaturi se često susreće i pojam daljine jasnoga vida  $d$  koja iznosi 25 cm. Taj pojam unosi dosta nesporazuma jer oko može jasno vidjeti ne samo na jednoj udaljenosti nego i na različitim udaljenostima od neke najkraće do najduže. Prirodno je stanje kad oko gleda daleke predmete, kad se ne napreže akomodacijom. Daljina jasnog vida samo je umjetno stvoren pojam i služi za definiciju nekih pojmova u optici. To je udaljenost na kojoj normalno oko lako, bez velika naprezanja gleda sitne predmete, kao npr. pri čitanju. Ako knjigu držimo na toj udaljenosti, oko se neće brzo zamoriti.



Slika 8.36. Oko. Vidni kut i prividna veličina predmeta

Što je predmet bliže oku, njegova je slika na mrežnici veća i predmet je, dakle, prividno veći. Prividna veličina predmeta mjeri se, dakle, veličinom vidnog kuta pod kojim se vidi predmet (sl. 8.36). Vidni kut možemo povećati ili približavanjem predmeta, što je ograničeno najmanjom udaljenošću jasnog vida, odnosno bliskom točkom P, ili pomoću optičkih instrumenata.

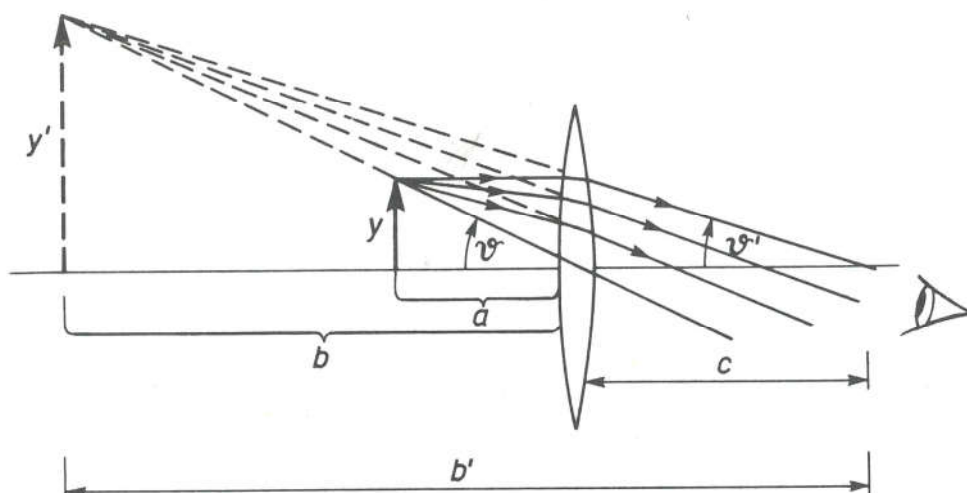
Prividna se veličina predmeta smanjuje, dakle, s udaljenošću oka a raste s veličinom predmeta. Mjeri se u stupnjevima odnosno radijanima. Tako je npr. prividna veličina Mjeseca oko pola stupnja, granična je vrijednost za ljudsko oko vidni kut od  $1'$  ( $2,9 \cdot 10^{-4}$  rad) pa oko ne može razlikovati dva predmeta čija je kutna razlika manja od te granične vrijednosti. Za male vidne kutove tangens kuta približno je jednak kutu (izraženom u radijanima) pa se obično prividna veličina predmeta izražava tangensom vidnoga kuta.

**Povećalo (lupa).** Da bismo povećali vidni kut pod kojim gledamo neki bliski predmet, služimo se povećalom. To je jednostavna konvergentna leća žarišne daljine manje od daljine jasnoga vida (25 cm). Leća se postavi uz oko tako da je predmet između žarišta i tjemena leće ( $0 < a \leq f$ ) (sl. 8.37). Dobivena je slika uspravna, virtualna i povećana.

**Kutno povećanje** povećala definiramo kao omjer tangensa kuta gledanja  $v'$  pod kojim se predmet vidi kroz povećalo i tangensa kuta  $v$  pod kojim se predmet vidi bez povećala, tj.:

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} v'}{\operatorname{tg} v} \approx \frac{v'}{v} \quad (8.47)$$





Slika 8.37. Lupa ili povećalo

Vidni kut  $\vartheta$  pod kojim oko (bez povećala) vidi predmet dogovorom se definira kao:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{d} \quad (8.48)$$

gdje je  $y$  veličina predmeta, a  $d = 25 \text{ cm} = \frac{1}{4} \text{ m}$  udaljenost jasna vida.

Neka se predmet visine  $y$  između povećala i njegova žarišta, na udaljenosti  $a$  od tjemena. Virtualna povećana i uspravna slika visine  $y'$  nalazit će se na udaljenosti  $b$  od lupe. Udaljenost oka (centra zjenice) od lupe je  $c$  od predmeta je  $a''$ , a od slike je  $b'$ .

Vidni kut slike je  $\vartheta'$ .

Primjenom jednadžbe leće može se pokazati da je kutno povećanje povećala:

$$\gamma = \frac{\vartheta'}{\vartheta} = d \left[ \frac{1}{f} - \frac{1}{b'} \left( 1 - \frac{c}{f} \right) \right] \quad (8.49)$$

Ono ovisi, dakle, o instrumentu i o oku pa nije jednoznačno definirano. Zato se "apsolutno" povećanje povećala (optičkog instrumenta) kroz koji gledamo definira tako da izraz  $\frac{1}{b'} \left( 1 - \frac{c}{f} \right)$  iščezne. To se događa kad je predmet u žarištu, a slika u beskonačnosti. Tada je:

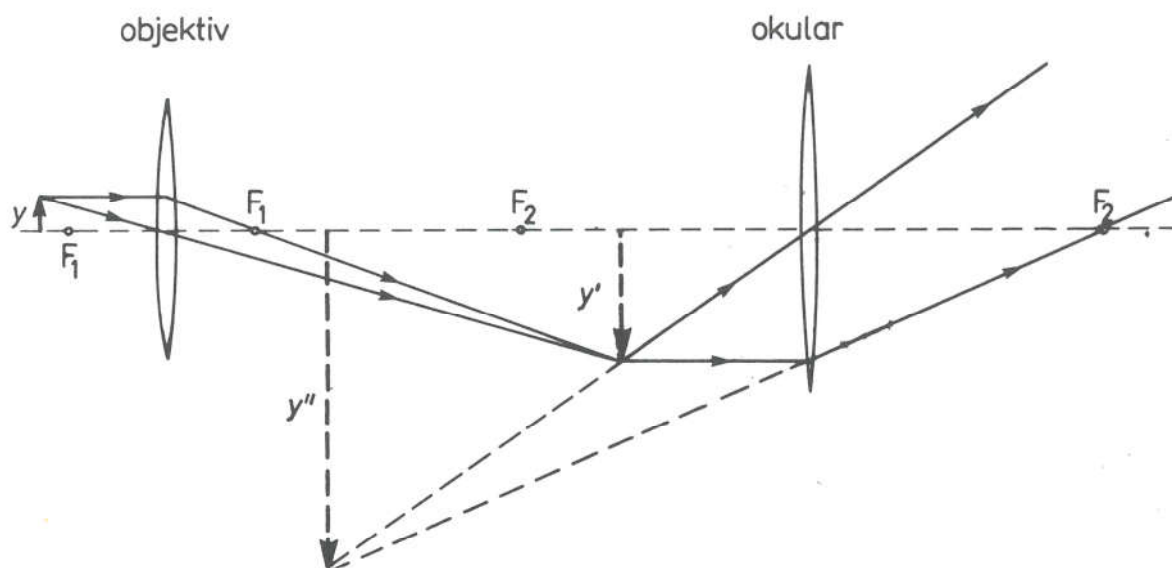
$$\gamma = \frac{d}{f} \quad (8.50)$$

gdje je  $d = 25 \text{ cm}$  daljina jasnog vida, a  $f$  žarišna daljina povećala. Ako se povećalo postavi tako da je slika koju ono daje na udaljenosti  $d = 25 \text{ cm}$  od oka, a udaljenost oka od povećala zanemariva ( $b = -d$ ,  $c = 0$ ), povećanje povećala je:

$$\gamma = \frac{d}{f} + 1 \quad (8.51)$$

**Mikroskop.** Obično povećalo ne povećava više od desetak puta a da se ne izobličiti slika. Zato se za veća povećanja upotrebljava mikroskop koji može povećati i do 1 000 puta.





Slika 8.38. Mikroskop

Mikroskop se sastoji od dviju konvergentnih leća: objektiva i okulara (sl. 8.38). Objektiv je konvergentna leća male žarišne daljine (nekoliko cm), predmet je nešto dalje od žarišta ( $f < a < 2f$ ) i objektiv, dakle, daje uvećanu realnu sliku predmeta. Okular, koji radi kao lupa, ovu sliku još više poveća, tj. stvaranjem virtualne uvećane slike povećava vidni kut gledanja. Žarišna daljina objektiva  $f$  znatno je manja od žarišne daljine okulara, a obje su znatno manje od razmaka  $c$  objektiva od okulara.

Predmet  $y$  (sl. 8.38) nalazi se između žarišta i dvostruke žarišne daljine. Objektiv od predmeta  $y$  daje realnu sliku  $y'$ . Okular se namjesti tako da okom prislonjenim uz okular (kao povećalo) vidimo virtualnu, uvećanu sliku  $y''$  na udaljenosti 25 cm (daljini jasnog vida).

Ukupno je povećanje mikroskopa produkt povećanja  $m_1$  objektiva i kutnog povećanja  $\gamma$  okulara:

$$m = m_1 \gamma = \left( -\frac{b_1}{a_1} \right) \cdot \frac{d}{f_2} \quad (8.52)$$

Možemo pretpostaviti da je  $a_1 \approx f_1$  i  $b_1 \approx c - f_2 \approx c$ , pri čemu je  $c$  udaljenost između okulara i objektiva (obično oko 18 cm). Odatle dobivamo ukupno povećanje mikroskopa:

$$m \approx -\frac{cd}{f_1 f_2} \quad (8.53)$$

#### Primjer 8.6.

Žarišna je daljina objektiva mikroskopa  $f_1 = 0,5$  cm, žarišna daljina okulara  $f_2 = 5$  cm, a duljina tubusa (razmak leća)  $c = 18$  cm. Gdje treba staviti predmet da bi oko koje gleda kroz mikroskop vidjelo virtualnu sliku predmeta na daljini jasnog vida  $d = 25$  cm? Koliko je ukupno povećanje mikroskopa?

Ako je predmet na udaljenosti  $a_1$  od objektiva, objektiv će dati sliku na udaljenosti  $b_1$ , pa je:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow a_1 = \frac{b_1 f_1}{b_1 - f_1}$$

Ta slika, koja je od okulara udaljena za  $c - b_1$  služi kao predmet okularu koji od nje daje virtualnu sliku na udaljenosti jasnog vida, te je  $b_2 = -d$ . Uzevši sve to u obzir, dobivamo iz jednadžbe okulara:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} &= \frac{1}{f_2} \\ \frac{1}{c - b_1} - \frac{1}{d} &= \frac{1}{f_2} \\ b_1 &= c - \frac{df_2}{d + f_2} \end{aligned}$$

Iz tih relacija dobivamo udaljenost predmeta od objektiva:

$$a = \frac{dcf_1 + f_1 f_2 (c - d)}{dc + f_2 c - f_2 d - f_1 d - f_1 f_2} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Uočite da se predmet nalazi nešto dalje od žarišne daljine objektiva.

Ukupno povećanje mikroskopa jednako je produktu linearnoga povećanja objektiva i kutnog povećanja okulara:

$$m = m_1 \gamma = -\frac{b_1}{a_1} \gamma = \frac{b_1 - f_1}{f_1} \gamma.$$

Budući da je kutno povećanje povećala (8.51)

$$\gamma = 1 + \frac{d}{f_2}$$

to je:

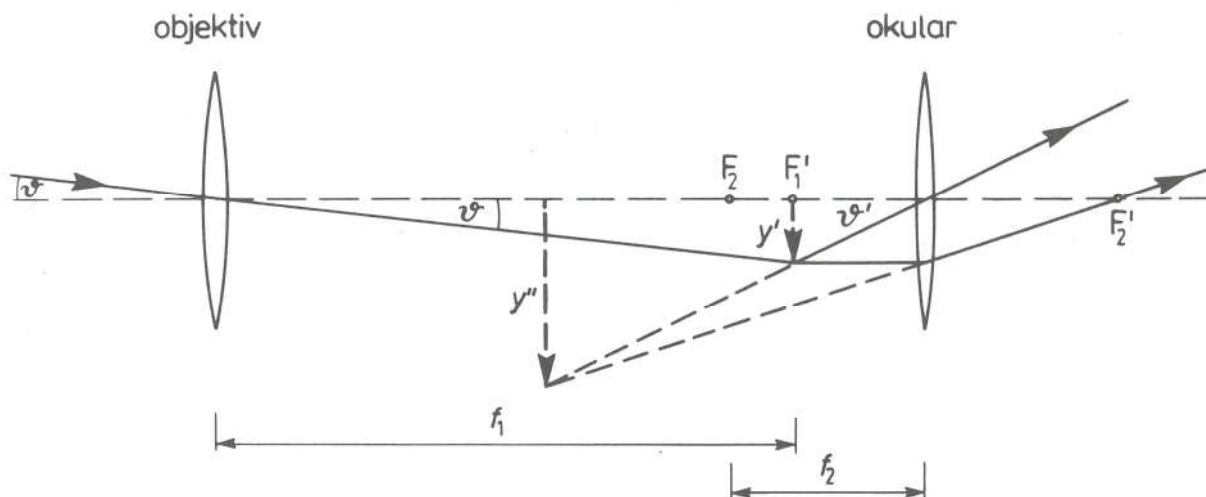
$$\begin{aligned} m &= \frac{b_1 - f_1}{f_1} \left( 1 + \frac{d}{f_2} \right) = \frac{(c - f_1)(d + f_2) - df_2}{(d + f_2)f_1} \frac{d + f_2}{f_2} \\ m &= \frac{(c - f_1)(d + f_2) - f_2 d}{f_1 f_2} = 160. \end{aligned}$$

Uzmemo li normalno povećanje lupe (8.50)  $\gamma = d/f_2$ , tada je:

$$m = \frac{b_1 - f_1}{f_1} \frac{d}{f_2} = \frac{(c - f_1)(d + f_2) - df_2}{f_1 f_2 (d + f_2)} d = 133.$$

**Dalekozori** (teleskopi). Dalekozor je optički instrument koji povećava vidni kut pod kojim gledamo daleke predmete. Sastavljen je od dva bitna dijela: objektiv i okulara.

Objektiv velikog otvora (da bi mogao primiti dovoljno svjetla) konvergentni je sistem velike žarišne daljine (konvergentna leća ili konkavno zrcalo) i daje realnu okrenutu sliku daleka predmeta. Okular je povećalo kratke žarišne daljine i daje virtualnu sliku koje promatra oko.



Slika 8.39. Teleskop

Slika 8.39. pokazuje princip rada teleskopa. Drugi fokus objektiva obično se podudara s prvim fokusom okulara. Slika daleka predmeta oblikuje se u fokusu  $F_2$  i ona je realna i obrnuta. Okular služi kao povećalo kojim gledamo realnu sliku predmeta što ga objektiv stvara u svojoj žarišnoj daljini. Zbog toga kroz okular vidimo obrnutu, uvećanu i virtualnu sliku predmeta koju pomicanjem okulara možemo dobiti na udaljenosti jasnog vida ili (ako želimo gledati neakomodiranim okom) u beskonačnosti.

Kod reflektora ili Newtonova dalekozora objektiv nije leća nego konkavno sferno zrcalo velike žarišne daljine. Reflektori se upotrebljavaju kao najveći astronomski dalekozori jer je lakše napraviti dobro konkavno sferno zrcalo velikih dimenzija nego dobru leću jednakih dimenzija.

Galileiev (nizozemski) dalekozor ili kazališno staklo ima kao objektiv konvergentnu leću velike žarišne daljine, a okular je divergentna leća. Ovakav je dalekozor dosta kraći i daje uspravnu sliku.

Snop zraka iz daleka predmeta upada na objektiv pod kutem  $\vartheta$  prema osi teleskopa. Uočimo jednu od njih koja dolazi s vrha predmeta (sl. 8.39). To je vidni kut pod kojim oko vidi predmet bez teleskopa. Iz okulara te zrake izlaze pod kutem  $\vartheta'$  i ulaze u oko te je  $\vartheta'$  vidni kut pod kojim oko kroz teleskop vidi predmet. Iz slike slijedi:

$$\gamma = \frac{\vartheta'}{\vartheta} \approx \frac{\operatorname{tg} \vartheta'}{\operatorname{tg} \vartheta} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{f_{ob}}{f_{ok}}. \quad (8.54)$$



To je, dakle, povećanje teleskopa fokusiranog na beskonačno daleki predmet, i to za emetropično neakomodirano oko. Za astronomski (Keplerov) dalekozor  $f_1$  i  $f_2$  su pozitivni, povećanje je negativno, a slika obrnuta. Za nizozemski dalekozor  $f_1$  je pozitivno,  $f_2$  negativno, povećanje pozitivno i slika uspravna.

### Primjer 8.7.

Izvedite izraz za općenito povećanje teleskopa koji se sastoji od objektiva žarišne daljine  $f_1$  i okulara žarišne daljine  $f_2$ . Oko je udaljeno od okulara za  $c$ .

Ako je predmet udaljen za  $a$  od objektiva, slika će biti na udaljenosti  $b$ , vidni kut pod kojim se predmet vidi iz tjemena objektiva je:

$$\vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{a} = -y' \left( \frac{1}{f_{ob}} - \frac{1}{a} \right),$$

gdje je  $y'$  linearna veličina slike koju daje objektiv i koja služi kao predmet okularu.

Okular je zapravo povećalo kroz koje gledamo tu sliku. On povećava vidni kut, i to ovisno o žarišnoj daljini udaljenosti okulara od oka i veličini predmeta. Vidni je kut  $\vartheta'$  pod kojim oko kroz povećalo vidi predmet (8.49):

$$\vartheta' \approx y \left[ \frac{1}{f} - \frac{1}{b'} \left( 1 - \frac{c}{f} \right) \right],$$

gdje je  $y$  veličina predmeta,  $f$  žarišna daljina povećala, a  $b'$  udaljenost od oka slike koju stvori povećalo. Za naš primjer uvrštavanjem odgovarajućih oznaka dobivamo

$$\vartheta' = y' \left[ \frac{1}{f_{ok}} - \frac{1}{b'} \left( 1 - \frac{c}{f_{ok}} \right) \right].$$

Povećanje je teleskopa:

$$\gamma = \frac{\vartheta'}{\vartheta} = - \frac{\frac{1}{f_{ok}} - \frac{1}{b'} \left( 1 - \frac{c}{f_{ok}} \right)}{\frac{1}{f_{ob}} - \frac{1}{a}}.$$

Ako je predmet beskonačno daleko ( $a = \infty$ ) i slika beskonačno daleko ( $b' = \infty$ ), tada je:

$$\gamma = - \frac{f_{ob}}{f_{ok}}.$$

## 8.13. Interferencija svjetlosti

Interferencija i difrakcija tipične su valne pojave i pomoću njih pokazala se i valna priroda elektromagnetskih valova, posebno svjetlosti. Ako pretpostavimo da je svjetlo (i ostali elektromagnetski valovi) sastavljeno od valova, tada ono mora pokazivati slične efekte kao mehanički valovi (valovi na vodi, valovi zvuka i sl.). Zaista se i pokazalo da za elektromagnetske valove, kao i za mehaničke, vrijedi princip superpozicije. Poznato je da se dva vala na vodi koji izlaze iz dvaju bliskih izvora u određenim točkama prostora pojačavaju, a u drugima poništavaju.

To što vrijedi za valove na vodi vrijedi i općenito za svako valno gibanje. Kada dva ili više valova dođu u istu točku prostora, oni se zbrajaju i nastaje interferencija. Pri tom je, ovisno o razlici u fazi, resultantni intenzitet manji ili veći: superpozicijom (zbrajanjem) valova može nastati konstruktivna ili destruktivna interferencija. Dva će se vala pojačati ako su u fazi, tj. ako maksimum jednog i maksimum drugog istodobno dođe u tu točku prostora; oni će se poništavati ako maksimum jednog koincidira s minimumom drugog.

Da li svjetlost interferira? Drugi osnovni zakon geometrijske optike kaže da dva snopa zraka kad prolaze jedan kroz drugi ne utječu jedan na drugi. Na prvi pogled ovaj zakon izgleda kao da je u kontradikciji s valnim svojstvima svjetlosti. Pažljivija su proučavanja, međutim, pokazala da svjetlosni valovi interferiraju. Da bismo opazili interferenciju, svjetlosni valovi moraju biti koherentni.

Valovi su koherentni kada im je frekvencija ista, a razlika u fazi neovisna o vremenu, tj. uvijek konstantna.

Kako dobiti dva ili više koherentnih valova svjetlosti?

Atomi u svjetlosnom izvoru emitiraju kratke valne pakete. Poznato je, naime, da pobuđeni atom emitira višak energije u obliku svjetlosti; taj proces traje vrlo kratko ( $10^{-8}$  s) i za to vrijeme emitira se val duljine oko 3 m. U međuvremenu počinju emitirati drugi atomi. Emisija svjetlosti sastoji se, dakle, od velikog broja kaotičnih emisija pojedinih atoma, pa nastali valovi nemaju nikakvu korelaciju u fazi. Iz toga je jasno da je nemoguće da dva različita izvora (iako iste frekvencije) ili različiti dijelovi istoga izvora emitiraju valove s konstantnom razlikom u fazi. Razlika u fazi takvih valova stalno se mijenja u vremenu pa se zbog toga stalno mijenja i interferencijska slika; zbog te vrlo brze promjene nemoguće je opaziti maksimume i minimume nego se vidi samo srednja rasvjetljenost.

(Napomenimo da je moguće napraviti svjetlosni izvor u kojemu atomi emitiraju ovisno jedan o drugome, dakle koji emitiraju koherentnu svjetlost. To su laseri nazvani po prvim slovima engleskih riječi za pojačanje svjetlosti stimuliranom emisijom zračenja. Laserska je svjetlost, dakle, koherentna.)

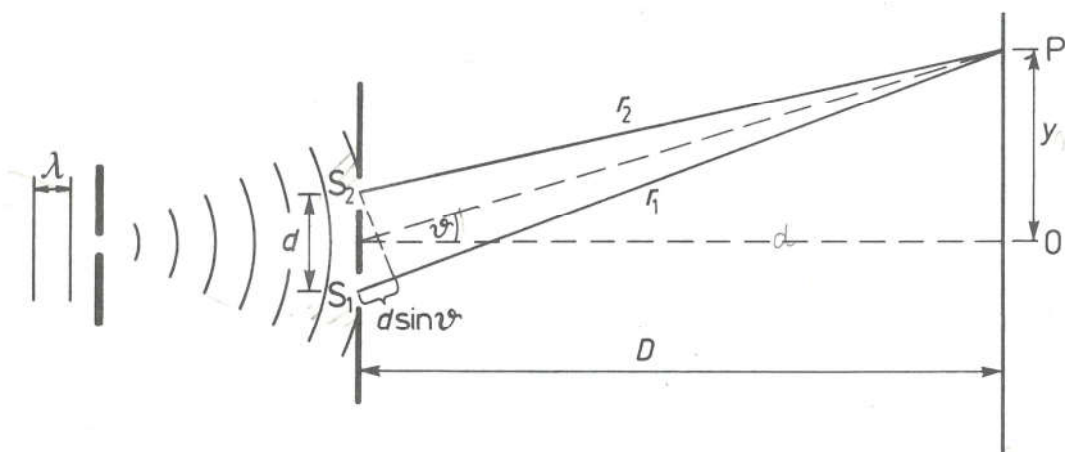
Zbog činjenice da se svjetlosni izvori sastoje od mnogo atoma, koji neovisno jedan o drugome emitiraju elementarne svjetlosne valove, nemoguće je opaziti interferenciju od dvaju različitih izvora svjetlosti. Da bismo dobili interferenciju, moramo na neki način od jednog izvora načiniti više njih. To se može postići na više načina.



**Youngov pokus.** Engleski fizičar Thomas Young (1773–1829) opazio je interferenciju svjetlosti iz dviju pukotina, i to je bio jedan od prvih pokusa koji su potvrdili valnu prirodu svjetlosti. Taj je pokus pokazao da svjetlost koja izlazi iz dviju pukotina interferira slično kao što interferiraju dva vala na površini vode.

Young je pustio sunčanu svjetlost kroz usku pukotinu i zatim pomoću zastora s dvije bliske pukotine tu zraku podijelio na dva dijela, tj. na dva koherentna vala. Na mjestima u prostoru gdje su se ta dva vala preklapala Young je opazio maksimume i minimume svjetlosti.

Youngovu interferenciju možemo opaziti npr. ovako: Dvije uske pukotine (npr. širine oko 2 cm i razmaka 0,2 mm) postavljaju se u laserskom snopu tako da laserska svjetlost pokrije obje pukotine. Na zastoru udaljenom nekoliko metara od pukotina opažaju se svijetle i tamne pruge interferencije. Povećanjem razmaka pukotina razmak se među prugama smanjuje. Kada se jedna od pukotina prekrije, interferencijska slika iščezne, a umjesto nje vidimo ogibnu sliku jedne pukotine. Sličan pokus možemo napraviti ako umjesto laserskoga snopa upotrijebimo točkasti izvor svjetlosti (npr. pukotinu rasvjetljenu lučnicom), samo je u tom slučaju, zbog slabijeg intenziteta interferenciju teže opaziti.



Slika 8.40. Youngov pokus

Na sl. 8.40. shematski je prikazan Youngov uređaj. Iz pukotina izlaze dva koherentna vala jednake amplitude, frekvencije i faze. Na zastoru (u točki P) elektromagnetski valovi iz jednog i drugog izvora (pukotine) zbrajaju se i daju interferencijsku sliku. Valovi su na pukotinama bili u fazi, ali, došavši do točke P, jedan je od njih prevalio duži put. Razlika u fazi  $\varphi$  ovisi o razlici putova jednog i drugog vala, tj.  $\delta = r_1 - r_2 = d \sin \vartheta$ . Pritom smo pretpostavili da se oba vala šire u vakuumu (zraku). Veza je između razlike u fazi i razlike puta jednostavna. Kada je razlika u putu  $\lambda/2$ , tada je razlika u fazi  $\pi$ , a kada je razlika puta  $\lambda$ , tada je razlika u fazi  $2\pi$  itd., ili općenito:

$$\varphi = 2\pi \frac{d \sin \vartheta}{\lambda} = kd \sin \vartheta \quad (8.55)$$

gdje je valni broj  $k = 2\pi/\lambda$ .



Električno polje valova iz izvora  $S_1$  i  $S_2$  možemo opisati izrazima:

$$E_1 = E_0 \cos(kr_1 - \omega t) \quad \text{i} \quad E_2 = E_0 \cos(kr_2 - \omega t).$$

Ta se dva vala u točki P zbrajaju pa dobivamo rezultatno titranje:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_0 [\cos(kr_1 - \omega t) + \cos(kr_2 - \omega t)] \\ E &= 2E_0 \cos \frac{kr_1 - \omega t + kr_2 - \omega t}{2} \cos \frac{kr_1 - kr_2}{2} \end{aligned}$$

ili

$$E = 2E_0 \cos \frac{k(r_1 - r_2)}{2} \cos \left[ k \frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t \right] \quad (8.56)$$

Prvi faktor u izrazu (8.56) jest amplituda titranja, a drugi opisuje harmonično titranje u toj točki.

Intenzitet elektromagnetskoga vala (svjetlosti) u točki P jednak je srednjem iznosu Poyntingova vektora u toj točki:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\text{amplituda električnog polja})^2 \\ I &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} 4E_0^2 \cos^2 \frac{k(r_1 - r_2)}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} 4E_0^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \quad (8.57)$$

Ako intenzitet koji pojedini izvor daje u točki P označimo s

$$I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2, \quad (8.58)$$

rezultantni je intenzitet:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad (8.59)$$

Raspodjela intenziteta pri interferenciji na dvjema pukotinama (izraz 8.49) prikazana je na sl. 8.41. Kao što se vidi i iz slike, na zastoru se opaža niz svijetlih i tamnih interferencijskih pruga.

Iz relacije (8.57) i sl. 8.41. vidimo da je intenzitet maksimalan (svijetla pruga) kad je razlika u fazi jednaka:

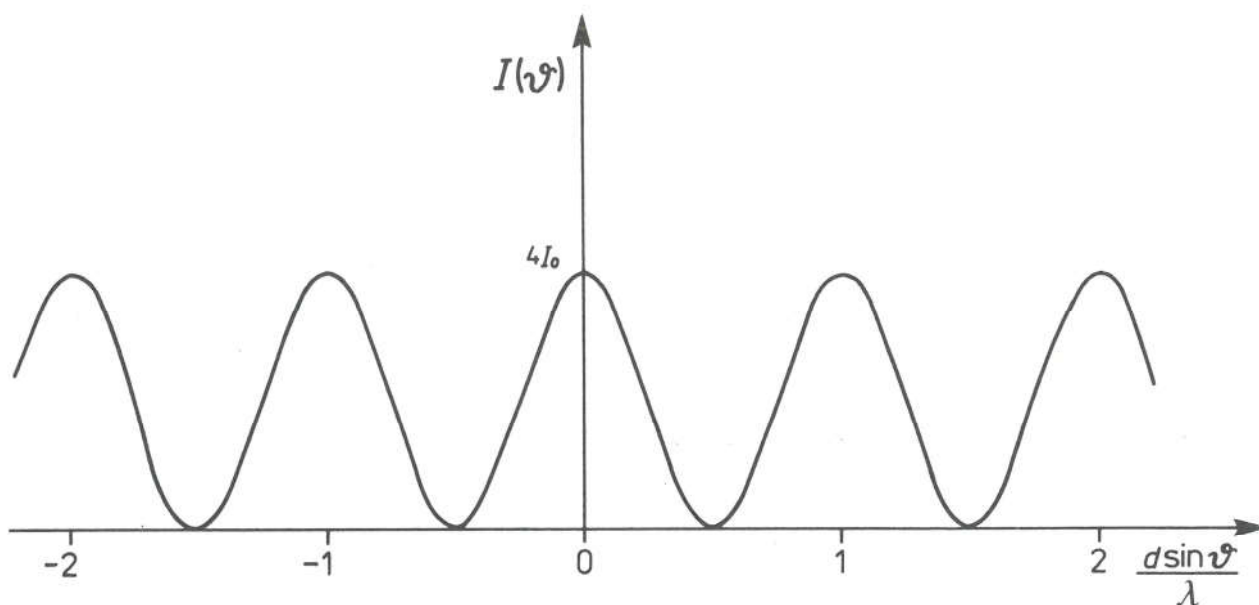
$$\varphi = kd \sin \vartheta = m \cdot 2\pi \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.60)$$

Taj se uvjet za konstruktivnu interferenciju može pisati i pomoću razlike hoda:

$$d \sin \vartheta = m\lambda; \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.61)$$

Slično se vidi da destruktivna interferencija nastupa na mjestima gdje je ispunjen uvjet:

$$d \sin \vartheta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda; \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.62)$$



Slika 8.41. Raspodjela intenziteta svjetlosti u Youngovom pokusu; pruge interferencije

### Primjer 8.8.

Izračunajte razmak između dviju susjednih svijetlih (tamnih) pruga interferencije u Youngovu pokusu.

Ako u Youngovu eksperimentu na udaljenosti od  $D \gg d$  stavimo zastor, na njemu će se pojaviti svijetle i tamne interferencijske pruge. U sredini zastora (točka O na slici 8.40) svijetla je pruga, a zatim se na jednu i drugu stranu nizaju ekvidistantne tamne i svijetle interferencijske pruge.

Označimo razmak dviju susjednih svijetlih (tamnih) pruga s  $y$ . Iz sl. 8.40. vidimo da vrijedi:

$$r_2^2 = D^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{i} \quad r_1^2 = D^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2.$$

Odbijanjem ovih dviju relacija dobivamo:

$$r_1^2 - r_2^2 = 2yd,$$

odnosno:

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 2yd.$$

Budući da je za dvije susjedne svijetle (tamne) pruge  $r_1 + r_2 \approx 2D$ , a  $r_1 - r_2 = \lambda$ , dobivamo da je razmak između dviju susjednih svijetlih (tamnih) pruga interferencije:

$$y = \frac{D\lambda}{d} \quad (8.63)$$

Mjerenjem  $y$ ,  $d$  i  $D$  možemo odrediti valnu duljinu svjetlosti  $\lambda$ . To je jedna od metoda mjerenja valne duljine. Tako npr. ako je  $d = 0,02$  cm, udaljenost zastora  $D = 100$  cm, razmak pruga  $y = 0,29$  cm, dobiva se valna duljina:

$$\lambda = \frac{yd}{D} = 580 \text{ nm.}$$

**Optička razlika putova.** Pri proučavanju interferencije na dvjema pukotinama ustanovili smo da razlika u fazi dvaju valova ovisi o razlici njihova hoda (puta)  $\delta$ .

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad (8.64)$$

Pri tom su obje zrake (oba vala) putovale kroz zrak ( $n \approx 1$ ). Općenito se valovi mogu širiti kroz sredstvo indeksa loma  $n$  odnosno jedan val može putovati sredstvom indeksa loma  $n_1$ , a drugi sredstvom indeksa loma  $n_2$ . Valna duljina u sredstvu manja je nego u vakuumu, tj.  $\lambda/n$ . Ako val prijeđe put duljine  $d$  u sredstvu indeksa loma  $n$ , tada sadrži toliko valova (tj. valnih duljina) koliko bi sadržavala duljina puta  $nd$  u vakuumu (zraku). Put vala pomnožen indeksom loma naziva se optički put vala (zrake). Ako se val na svojem putu reflektira na optički gušćem sredstvu, faza mu se mijenja za  $\pi$  (brijeg se odbija kao dol i obratno) pa optičkom putu treba dodati  $\lambda/2$ .

Optički se put, dakle, dobiva tako da se geometrijski put množi s apsolutnim indeksom loma sredstva kroz koji val prolazi i eventualno doda  $\lambda/2$  ako nastane refleksija na gušćem sredstvu. Budući da je vrijeme potrebno da val prevali put  $d$  u vakuumu jednako  $d/c$ , a u sredstvu

$$\frac{d}{v} = \frac{d}{\frac{c}{n}} = \frac{nd}{c},$$

proizlazi da su za jednake optičke putove potrebna jednaka vremena.

Uzmimo npr. da se u nekoj točki prostora P sastaju dva vala koji iz izvora S dolaze različitim putovima. Prvi val putuje sredstvom indeksa loma  $n_1$  i prevali put duljine  $r_1$ , a drugi val, putujući sredstvom indeksa loma  $n_2$ , prevali put  $r_2$ .

Pretpostavimo li da je u izvoru S faza titranja  $\omega t$ , tada će električno polje prvoga vala u točki P titrati po zakonu  $E_{01} \cos \omega(t - r_1/v_1)$ , a drugog vala po zakonu  $E_{02} \cos \omega(t - r_2/v_2)$ , gdje su  $v_1$  i  $v_2$  brzine svjetlosti u sredstvima indeksa loma  $n_1$  i  $n_2$ .

Razlika je faza ovih dviju valova:

$$\Delta\varphi = \omega \left( t - \frac{r_2}{v_2} \right) - \omega \left( t - \frac{r_1}{v_1} \right) = \omega \left( \frac{r_2}{v_2} - \frac{r_1}{v_1} \right)$$

Ako uvrstimo  $v_1 = c/n_1$  i  $v_2 = c/n_2$ , dobivamo:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} (n_2 r_2 - n_1 r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 r_2 - n_1 r_1),$$



gdje je  $\lambda = c/v$  valna duljina svjetlosti u vakuumu. Ako optičku razliku putova označimo s

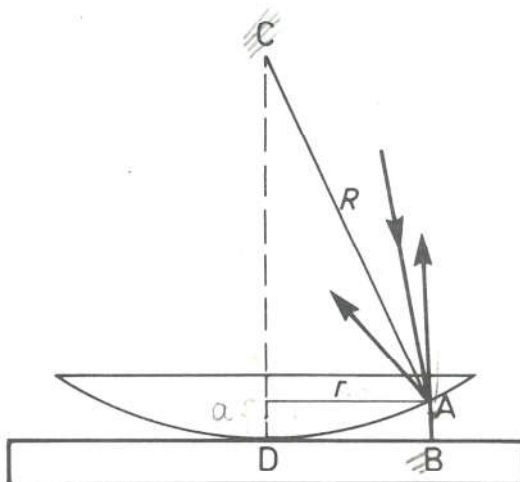
$$\delta = n_2 r_2 - n_1 r_1 \quad (8.65)$$

dobivamo da je razlika u fazi:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta.$$

### Primjer 8.9.

Promatrajte interferenciju na tankome sloju zraka između planparalelne staklene ploče i plankonveksne leće (sl. 8.42), poznatom Newtonovu uređaju za interferenciju svjetlosti. Odredite polumjere svijetlih i tamnih kolobara.



Slika 8.42. Newtonov uređaj; Newtonovi kolobari

Kada se uređaj obasja monokromatskom svjetlošću i gleda u normalno reflektiranoj (ili prolaznoj) svjetlosti, u ravnini gornje plohe planparalelne ploče se vidi niz svijetlih i tamnih koncentričnih krugova, tzv. Newtonovih kolobara, sa središtem u dodirnoj točki leće i ploče.

Promatrat ćemo Newtonove kolobare u normalno reflektiranoj svjetlosti: oni nastaju interferencijom valova reflektiranih na planparalelnoj ploči i valova reflektiranih na sfernoj lećnoj plohi.

Pokus pokazuje da je centralni kolobar taman. Na tom je mjestu razmak između leće i ploče zanemariv pa jedina razlika u fazi ( $180^\circ$ ) nastaje zbog refleksije na gušćem sredstvu. Ovo je još jedna eksperimentalna potvrda činjenice da se refleksija na gušćem sredstvu faza valu mijenja za  $180^\circ$ .

Svijetli kolobar bit će tamo gdje je optička razlika puta prve i druge zrake jednaka  $m\lambda$ , a gdje je ta razlika jednaka  $(m + \frac{1}{2})\lambda$ , kolobar će biti taman. Da bismo odredili polumjere kolobara, treba naći razliku u hodu između ovih dviju zraka.

Geometrijska je razlika hoda  $2\overline{AB}$ , a zbog refleksije na gušćem sredstvu (u točki B), optička se razlika hoda razlikuje od geometrijske:

$$\delta = 2\overline{AB} + \frac{\lambda}{2}.$$

Ako s  $r$  označimo udaljenost točke refleksije (B) od dodirne točke D (sl. 8.42), slijedi:

$$(R - \overline{AB})^2 + r^2 = R^2 \quad \text{ili} \quad \overline{AB} \approx \frac{r^2}{2R}.$$

Ovdje smo zanemarili  $\overline{AB}^2$  budući da je  $\overline{AB} \ll R$ . Sada razliku hoda možemo pisati u obliku:

$$\delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

Polumjer  $m$ -tog tamnog kolobara  $r_m$  dobivamo iz uvjeta da je optička razlika hoda  $\delta$  jednaka  $(m + 1/2)\lambda$ , tj.:

$$\frac{r_m^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \Rightarrow r_m = \sqrt{mR\lambda} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Slično možemo odrediti polumjer  $m$ -tog svijetlog kolobara

$$r_m = \sqrt{R(2m - 1) \frac{\lambda}{2}} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

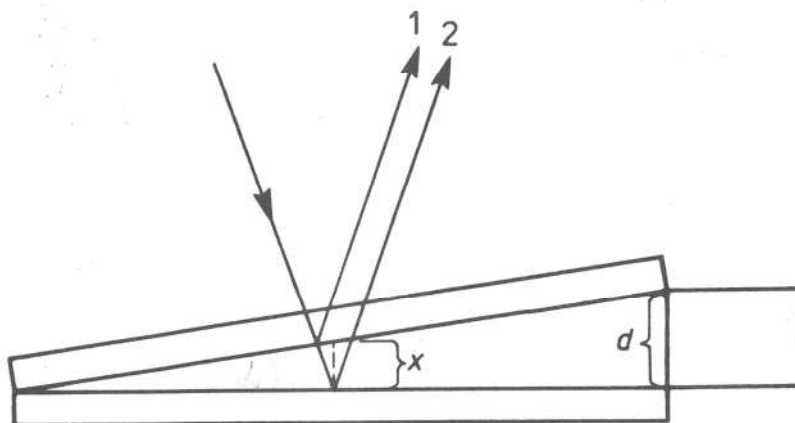
Mjereći polumjere Newtonovih kolobara, možemo odrediti valnu dužinu svjetlosti.

Newtonovi kolobari mogu se opaziti i u prolaznoj svjetlosti. Pri tom je središnji kolobar ( $r = 0$ ) svijetao. Izvedite izraze za polumjere kolobara u ovom slučaju.

Među ostalim, Newtonovi se kolobari primjenjuju za ispitivanje kvalitete leća pri njihovoj proizvodnji. Leća se stavi u kalup od stakla i, ako je polirana da točno sjedne u kalup, kolobari se ne opažaju. Čim zakrivljenost leće odstupa od zakrivljenosti kalupa, tj. ako leća nije točno ispolirana, kolobari će pokazati mjesta na kojima su nedostaci.

#### Primjer 8.10.

Između dvaju mikroskopskih stakalaca, na jednom njihovom kraju, stavljen je komadić papira i tako načinjen klin (sl. 8.43). Koliko je debeo papir ako se između početka klina i mjesta gdje je stavljen komadić papira opazi 120 svijetlih interferencijskih pruga u reflektiranoj natrijevoj svjetlosti ( $\lambda = 590 \text{ nm}$ )?



Slika 8.43.

Refleksijom svjetlosti na ploham klina nastaju koherentni valovi koji se razlikuju u fazi te njihovim zbrajanjem nastaju interferencijske pruge. U našem slučaju klin je od zraka i upadna se svjetlost prvi put reflektira pri prijelazu iz stakla u zrak (na optički rjeđem sredstvu), a drugi put pri prijelazu iz zraka u staklo (na optički gušćem sredstvu). Pri toj, drugoj refleksiji, svjetlosni val mijenja fazu za  $180^\circ$ . (Zbog relativno velike debljine staklenih ploča refleksija na ostalim dvjema staklenim ploham ne daje interferencijske pojave.)

Ukupna je razlika optičkoga puta između zrake koja se reflektira na gornjem stakalcu i zrake koja se reflektira na donjem stakalcu:

$$\delta = 2nx + \frac{\lambda}{2} = 2x + \frac{\lambda}{2},$$

pri čemu je  $x$  debljina klina na promatranom mjestu. ( $\lambda/2$  smo dodali zbog refleksije jedne od zraka na gušćem sredstvu.)

Svijetla pruga nastat će tamo gdje je  $\delta = k\lambda$ , odnosno:

$$x = (2k - 1) \frac{\lambda}{4} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

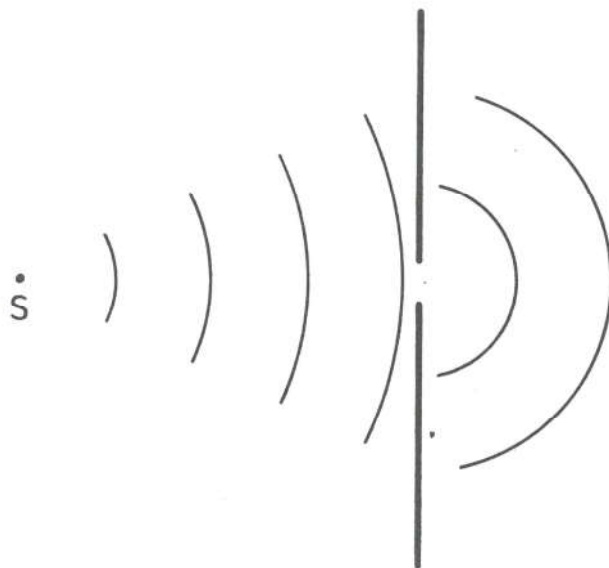
Na mjestu gdje se stakalca dodiruju bit će tamna pruga ( $x = 0$ ,  $\delta = \lambda/2$ ). Za  $k = 1$ , tj. tamo gdje je klin debeo  $\lambda/4$ , bit će prva svijetla pruga, za  $k = 2$  druga svijetla pruga itd. Budući da je u našem primjeru na kraju klina 120. svijetla pruga, na tom mjestu je debljina klina, a i papira:

$$x = d = \frac{2k - 1}{4} \lambda = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ m.}$$



## 8.14. Ogib svjetlosti

Ogib (difrakcija) lako se opaža kod valova zvuka ili valova na vodi. Zvuk čujemo i kada je iza neke prepreke ili u drugoj sobi. Slično se ogiblju i valovi na vodi (sl. 8.44). Iza pukotine valovi se šire kao da je pukotina izvor vala (Huygensov princip). Kad ne bi bilo ogiba, dobili bismo geometrijsku sjenu pukotine i valovi ne bi ulazili u područje sjene.

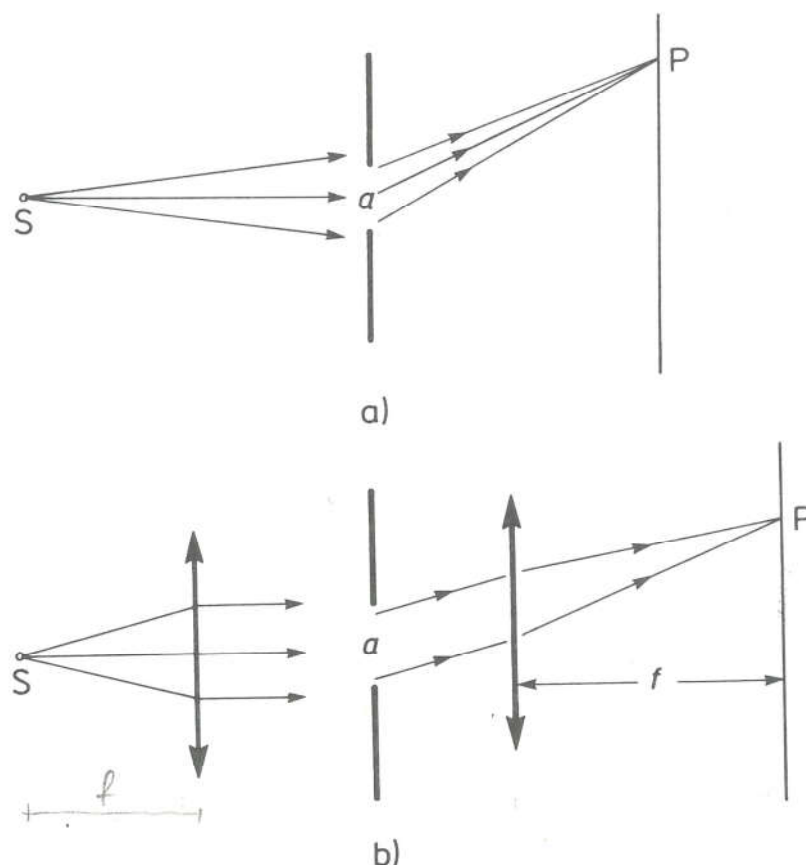


Slika 8.44. Ogib valova na vodi

Budući da je svjetlost elektromagnetski val, i kod svjetlosti moramo opaziti ogibne pojave. Ogib svjetlosti teže je opaziti i zato u većini slučajeva opažamo da svjetlost daje oštre sjene. Ogib se, naime, opaža tek kada su dimenzije prepreke ili pukotine uporedive s valnom duljinom. Kod zvuka ili valova na vodi valne su duljine reda veličine jednog metra, te je ogib lako opaziti. Naprotiv, kod svjetlosti valna je duljina reda veličine mikrometra, pa je ogib teže opaziti.

Stavimo li usku pukotinu u snop laserske svjetlosti, opažamo na zastoru difrakcijsku sliku koja se sastoji od svijetlih i tamnih pruga, tj. maksimuma i minimuma difrakcije. Pri tom je središnji maksimum najintenzivniji, dok su maksimumi višeg reda sve slabiji. (Umjesto laserskoga snopa može se, naravno, upotrijebiti i snop svjetlosti npr. iz električnoga luka, ali je pokus s laserskom svjetlošću jednostavnije izvesti.) Mijenjanjem širine pukotine, mijenjaju se i udaljenosti između difrakcijskih minimuma i maksimuma.

Detaljnije ćemo promatrati ogib (difrakciju) na jednoj pukotini. Pri tom razlikujemo Fresnelovu i Fraunhoferovu difrakciju. Pri Fresnelovoj difrakciji izvor svjetlosti i zastor na kojem se difrakcija gleda na konačnoj su udaljenosti od pukotine (sl. 8.45.a): valne fronte koje padaju na pukotinu i odlaze od pukotine nisu ravnine. Ako su, naprotiv, izvor i zastor vrlo daleko od pukotine, valne su fronte ravnine, a zrake svjetlosti međusobno usporedne i imamo tzv. Fraunhoferovu difrakciju. Nju



Slika 8.45. Fresnelova a) i Fraunhoferova b) difrakcija

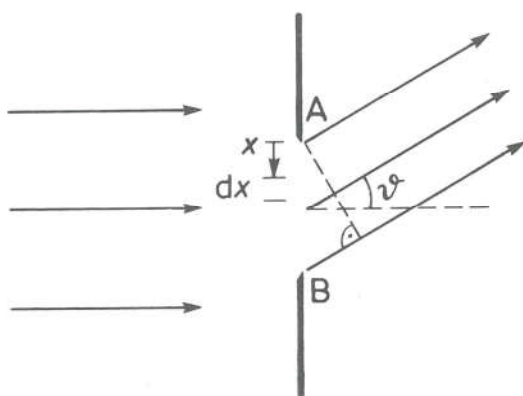
možemo postići pomoću dviju konvergentnih leća koje kuglaste valove pretvaraju u ravne i obratno (sl. 8.45.b).

Iscrpnije ćemo proučavati samo Fraunhoferovu difrakciju jer je nju jednostavnije matematički interpretirati.

Širinu pukotine označit ćemo s  $a$  i pretpostavit ćemo da je  $a$  mnogo manje od duljine pukotine. Zamislimo da je čitava širina pukotine podijeljena u tanke pruge širine  $dx$ . Kada na pukotinu upada ravni elektromagnetski val, svaka od tih pruga ponaša se kao izvor novoga elementarnoga cilindričnog vala (Huygensov princip). Sve točke valne fronte AB (sl. 8.46) emitiraju, dakle, elementarne valove u svim smjerovima. Anvelope tih valova daju nove valne fronte.

Izračunajmo kolik je ukupni intenzitet u smjeru  $\vartheta$  prema nekoj dalekoj točki P. Svaka elementarna pruga pukotine pridonosi ukupnom intenzitetu u P, ali različiti doprinosi imaju različite faze, pa zbrajanjem tih doprinosa u točki P može nastati konstruktivna ili destruktivna interferencija, odnosno maksimumi ili minimumi ogiba. Zapravo, nema neke bitne razlike između fizikalne prirode interferencije i difrakcije. Difrakcijska slika nastaje interferencijom beskonačno mnogo koherentnih valova (koji npr. izlaze iz jedne pukotine), a interferencijsku sliku dobivamo zbrajanjem dvaju ili više koherentnih valova iz odvojenih izvora.

Rezultantno titranje u točki P dobiva se vektorskim zbrajanjem svih elementarnih titranja valova koji iz raznih dijelova pukotine dolaze u točku P. Svako od



Slika 8.46. Uz izvod intenziteta svjetlosti pri ogibu na jednoj pukotini

tih elementarnih titranja ima različitu fazu titranja  $\varphi$ , ovisno o tome gdje je na pukotini stvoren elementarni val. Koordinata  $x$  (sl. 8.46), koja se mijenja od nula do  $a$ , označit će nam mjesto nastanka elementarnoga vala. Razlika je u fazi između vala iz točke A i onoga iz točke s koordinatom  $x$ :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \vartheta = kx \sin \vartheta \quad (8.66)$$

Valovi iz krajnjih točaka pukotine (tj. iz A i B) najviše se razlikuju u fazi, i to za:

$$\varphi_m = ka \sin \vartheta \quad (8.67)$$

Svaki elementarni val razlikuje se u fazi od sljedećeg susjednog vala za  $d\varphi = k dx \sin \vartheta$ . Njegova je amplituda razmjerna dijelu pukotine na kojoj je nastao, tj. veličini  $dx$ . Električno polje, koje u točku P dolazi valom iz djelića pukotine  $dx$  koje je položaj određen koordinatom  $x$ , može se prikazati funkcijom:

$$dE = E_0 \frac{dx}{a} \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.68)$$

gdje je faktor  $1/a$  dodan da bi relacija (8.68) bila dimenzionalno ispravna i da bi ukupna amplituda bila  $E_0$  kada je  $\vartheta = 0$ . Relaciju (8.68) možemo prikazati i pomoću realnoga dijela eksponencijalne funkcije s imaginarnim eksponentom:

$$dE = E_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \frac{dx}{a} \quad (8.69)$$

Rezultantno titranje u točki P dobiva se zbrajanjem svih elementarnih titranja, uzevši u obzir njihovu razliku u fazi.

Da bismo izračunali ukupnu amplitudu u dalekoj točki P, zbrojimo sve doprinose, tj. integrirajmo izraz (8.69) po  $x$  od nule do  $a$ :

$$E = \int_0^a E_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \frac{dx}{a} = \int_0^a \frac{E_0}{a} e^{i\omega t} e^{ikx \sin \vartheta} dx.$$

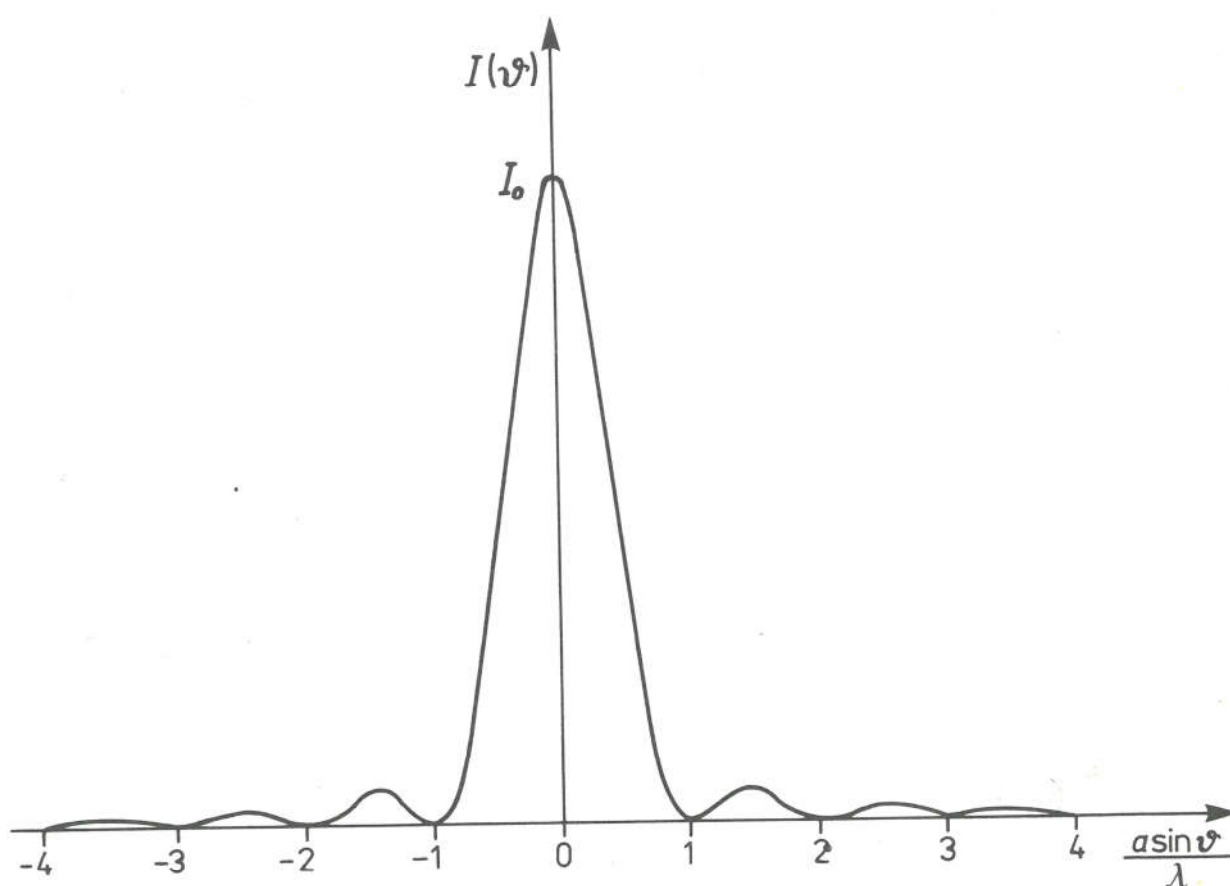


Nakon integriranja dobivamo:

$$E = E_0 \frac{e^{ika \sin \vartheta} - 1}{ika \sin \vartheta} e^{i\omega t} \quad (8.70)$$

Intenzitet svjetlosti (iznos Poyntingova vektora) razmjernan je prosječnoj vrijednosti kvadrata amplitude električnoga polja:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} EE^* \quad (8.71)$$



Slika 8.47. Intenzitet svjetlosti pri ogibu na jednoj pukotini

Uvrštavanjem izraza (8.70) u (8.71) dobivamo raspodjelu intenziteta po kutu  $\vartheta$ :

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{ka \sin \vartheta}{2} \right)}{\left( \frac{ka \sin \vartheta}{2} \right)^2} \quad (8.72)$$

gdje je  $I_0$  intenzitet središnjeg maksimuma, tj. intenzitet za  $\vartheta = 0$ . Zamjenom

$y = \frac{ka}{2} \sin \vartheta = \frac{\pi a \sin \vartheta}{\lambda}$ , formula (8.72) poprima jednostavniji oblik:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 y}{y^2} \quad (8.73)$$

Za  $\vartheta = 0$  dobivamo središnji maksimum: tada je  $y = 0$  i  $\sin y = 0$ , pa je i  $I = I_0$ . Minimumi nastaju uvijek kada je  $\sin y = 0$  (osim, naravno, za  $y = 0$ ). Prema tome, uvjet za minimum glasi:

$$a \sin \vartheta = n \lambda \quad \sin \vartheta = \frac{n \lambda}{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.74)$$

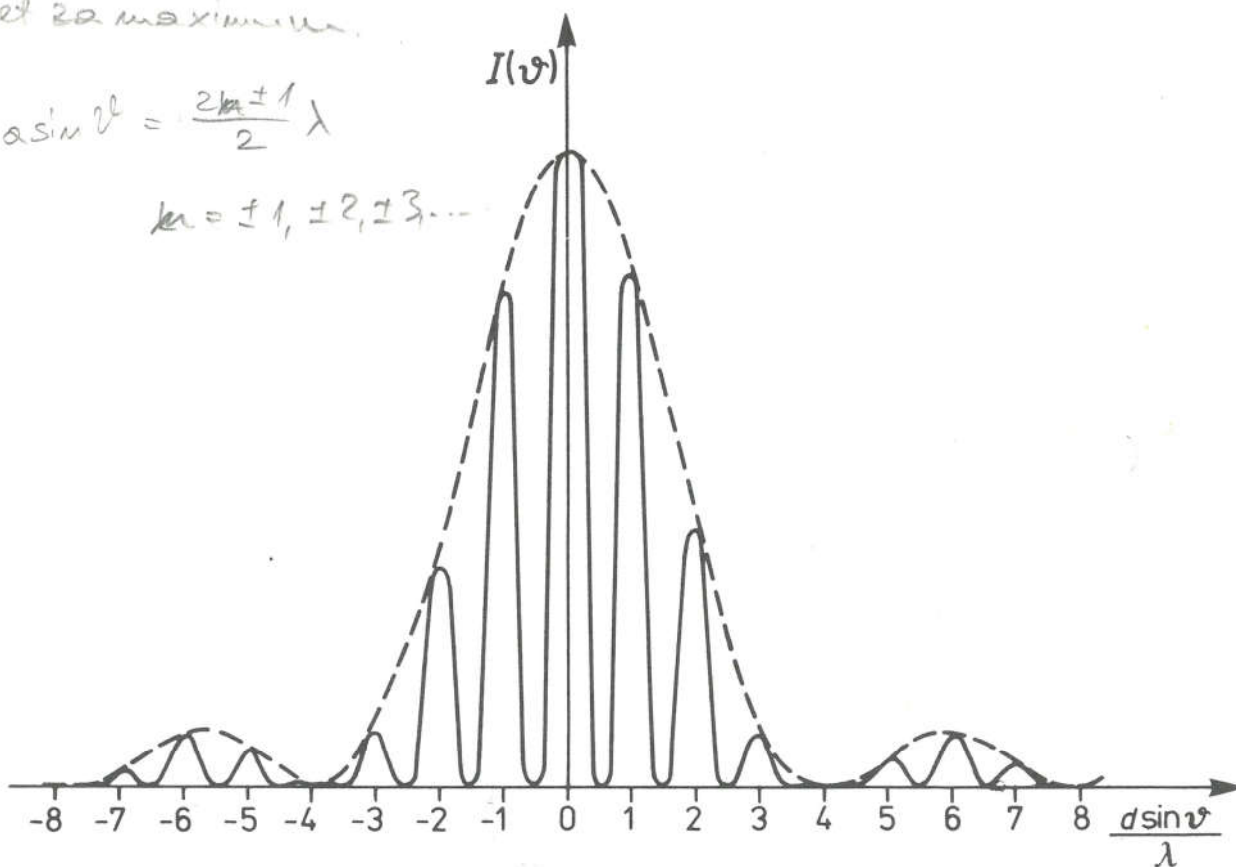
Između minimuma nalaze se sve manji sekundarni maksimumi (sl. 8.47).

Kada je širina pukotine nešto veća od valne duljine (npr.  $a = 5\lambda$ ), svi elementarni valovi koji izlaze iz pukotine nisu u fazi i kao rezultat njihove interferencije u prostoru iza pukotine pojavljuju se pruge ogiba. Na zastoru ćemo vidjeti niz maksimuma i minimuma. Kako se  $a/\lambda$  povećava, središnji maksimum postaje sve uži, ogibna slika postaje sve manje izrazita i, u slučaju  $a \gg \lambda$ , ne vidi se ogib, nego samo geometrijska slika pukotine.

uvjet za maksimum

$$a \sin \vartheta = \frac{2k+1}{2} \lambda$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$



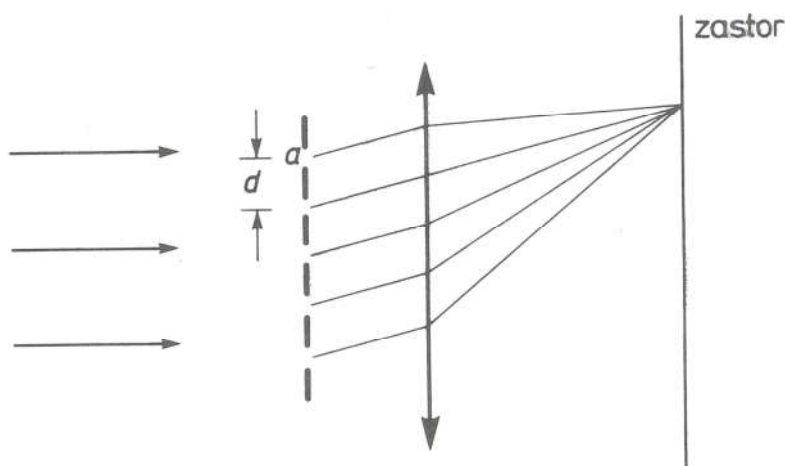
Slika 8.48. Ogib i interferencija na dvije pukotine

Pri razmatranju interferencije na dvjema pukotinama (Youngov pokus) pretpostavili smo da je  $a < \lambda$ , tako da svaka pukotina daje jednaku rasvjetu u prostoru

iza nje. To u realnome eksperimentu nije ispunjeno (jer je  $a > \lambda$ ), pa uz pruge interferencije vidimo maksimume i minimume difrakcije. Slika 8.48. pokazuje pruge interferencije u Youngovu pokusu, kada je razmak između pukotina  $d = 4a$ .

### 8.15. Optička rešetka

Niz ekvidistantnih uskih pukotina naziva se optička (ogibna) rešetka. Svaka je pukotina široka  $a$ , a razmak je između pukotina  $d$ . Razmak između pukotina  $d$  naziva se konstanta rešetke.



Slika 8.49. Optička rešetka

Optička rešetka za ogib vidljive svjetlosti obično je načinjena tako da je na staklenoj ploči zarezan niz paralelnih zareza: tamo gdje je staklo zarezano svjetlost ne prolazi, a prolazi prostorom između zareza. Tako se mogu dobiti rešetke s vrlo velikim brojem zareza po jedinici dužine: dobre rešetke imaju 500 do 1 000 zareza po mm; poznate su vrlo kvalitetne Rowlandove rešetke\*.

Promatrajmo monokromatski ravni val koji upada okomito na optičku rešetku (sl. 8.49). Konvergentnom lećom dobit ćemo na zastoru (koji je u žarišnoj ravnini leće) difrakcijsku sliku. Svaka od pukotina daje svoju difrakcijsku sliku, a rezultatna slika nastaje interferencijom valova iz svih ( $N$ ) pukotina rešetke.

U smjeru okomitu na optičku rešetku ( $\vartheta = 0$ ) svi su valovi u fazi pa na zastoru dobivamo svijetlu prugu. Zatim će slijediti maksimumi i minimumi dobiveni interferencijom svjetlosti iz  $N$  pukotina i ogibom na svakoj pukotini.

Najprije ćemo izračunati interferenciju  $N$  koherentnih elektromagnetskih valova koji dolaze u točku P na zastoru iz  $N$  ekvidistantnih pukotina optičke rešetke.

Budući da se uređaj nalazi u vakuumu (zraku) optička razlika hoda između dvaju susjednih valova koji se susreću u točki P jednaka je geometrijskoj i iznosi  $\delta = d \sin \vartheta$ , dok je razlika u fazi  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$ .

\* Henry Rowland (1848–1901), američki fizičar, poznat po radovima iz spektroskopije i elektromagnetizma.



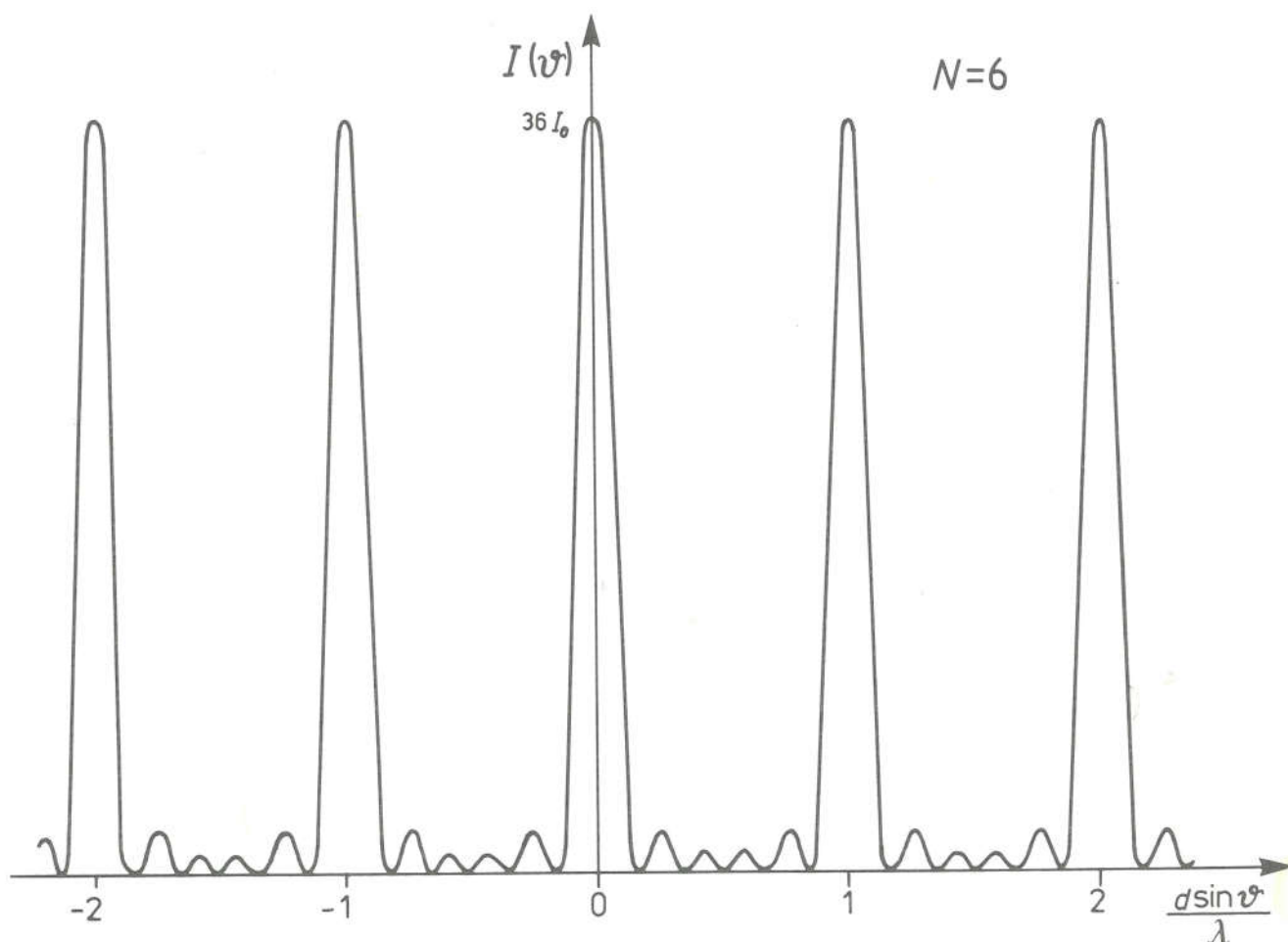
Pišemo li izraz za električno polje elektromagnetskoga vala u kompleksnome obliku, možemo jednostavno izvesti izraz za resultantnu amplitudu (odnosno intenzitet) pri interferenciji  $N$  koherentnih valova. Neka se u točki P sastaju  $N$  valova jednake amplitude i međusobno konstantne razlike u fazi; tada njihovo električno polje u točki P titra po zakonu:

$$E_1 = Ae^{i(\omega t - kr)}, \quad E_2 = Ae^{i(\omega t - kr + \varphi)}, \quad E_3 = Ae^{i(\omega t - kr + 2\varphi)} \dots$$

$$E_N = Ae^{i[\omega t - kr + (N-1)\varphi]}$$

Rezultantno je električno polje :

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_N = Ae^{i(\omega t - kr)} [1 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \dots + e^{i(N-1)\varphi}] \quad (8.75)$$



Slika 8.50. a) Raspodjela intenziteta svjetlosti pri interferenciji iz šest izvora

Izračunavši zbroj geometrijskoga reda u uglatoj zagradi, dobivamo:

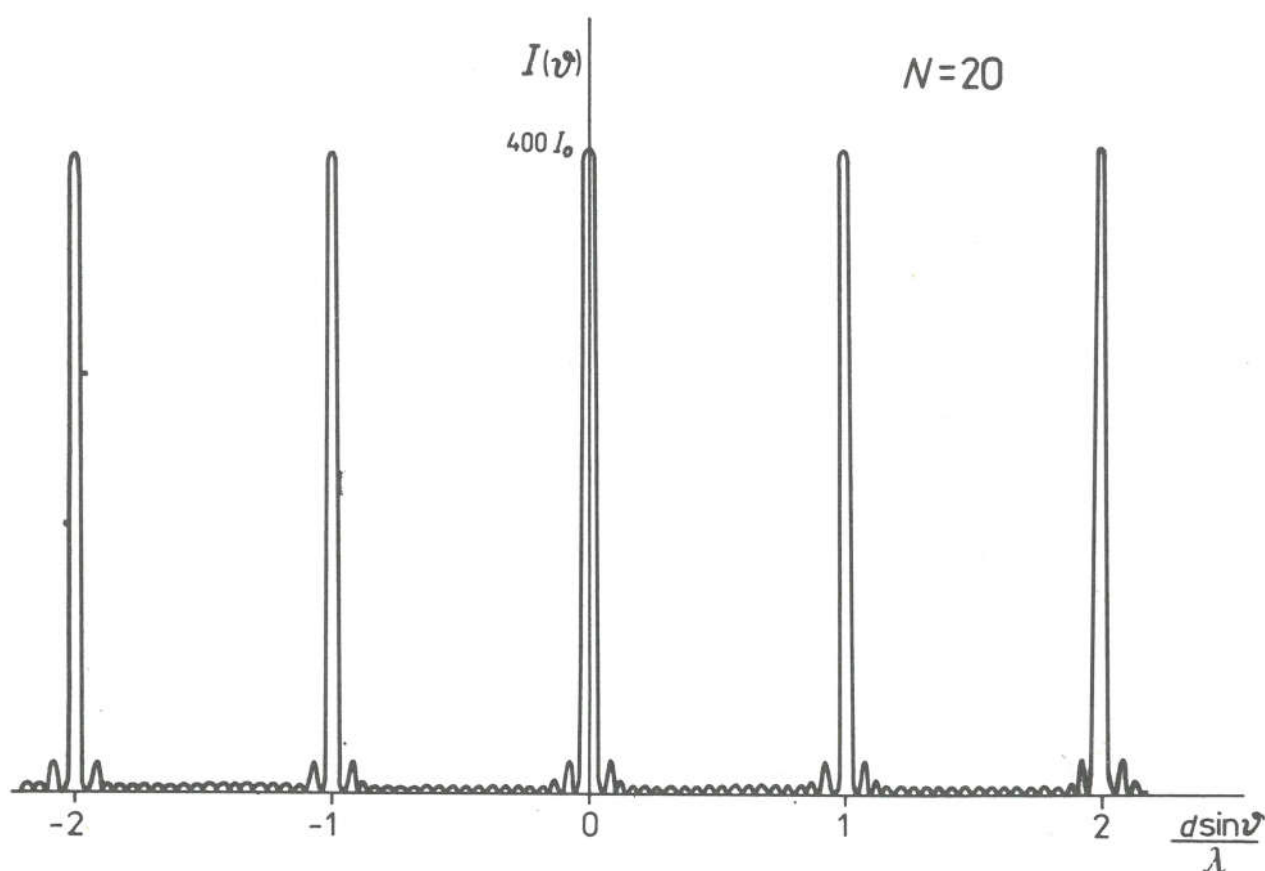
$$E = Ae^{i(\omega t - kr)} \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = Ae^{\frac{i(N-1)\varphi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} e^{i(\omega t - kr)}.$$

Intenzitet je razmjeran prosječnoj vrijednosti kvadrata amplitude

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E E^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{N\varphi}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)}$$

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{N\varphi}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)} \quad (8.76)$$

gdje je  $N$  broj izvora (pukotina), a  $\varphi = kd \sin \vartheta$  razlika u fazi između susjednih valova.

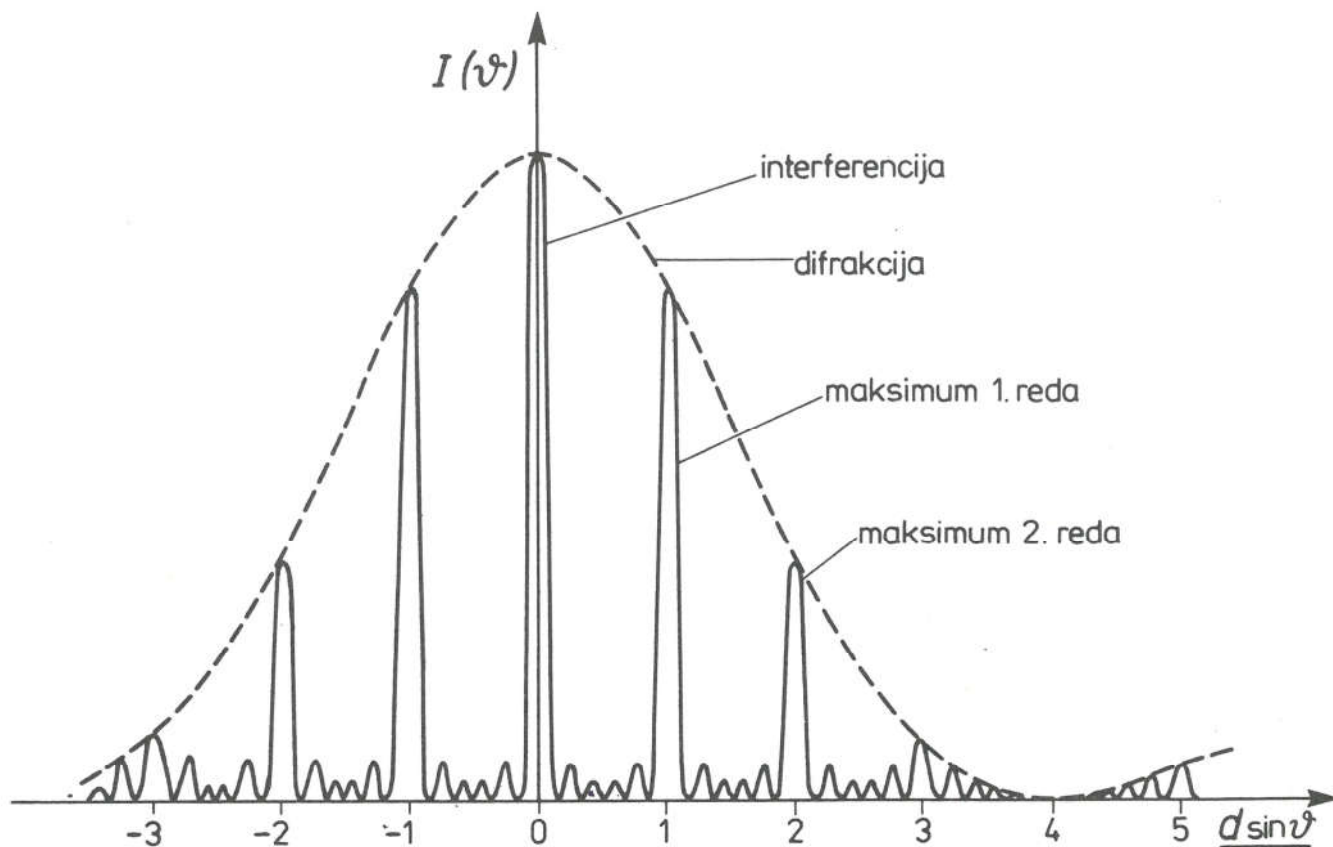


Slika 8.50. b) Raspodjela intenziteta svjetlosti pri interferenciji iz dvadeset izvora

Slike 8.50.a i 8.50.b prikazuju  $I(\varphi)$  za  $N = 6$  i za  $N = 20$ . Uočite da se jaki i uski maksimumi pojavljuju u onim točkama i kojima valovi iz svih  $N$  izvora dolaze u fazi, tj. za  $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ . Tada se i brojnik i nazivnik u izrazu (8.76) poništavaju, a intenzitet poprima vrijednost:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{N\varphi}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)} \approx I_0 \left( \frac{\frac{N\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \right)^2 = N^2 I_0.$$

Minimumi intenziteta (tj. potpuno poništavanje valova) pojavljuju se u točkama u koje valovi dođu s takvom razlikom u fazi da je brojnik u izrazu (8.76) jednak nuli, a nazivnik različit od nule. Između jakih maksimuma pojavljuju se  $(N - 2)$  sekundarnih maksimuma na mjestima gdje je brojnik u izrazu (8.76) jednak jedinici.



Slika 8.51. Ogib i interferencija na optičkoj rešetki

Uzimajući u obzir interferenciju  $N$  koherentnih valova (relacija 8.76) i ogib na jednoj pukotini (relacija 8.72), dobiva se resultantni intenzitet za optičku rešetku:

$$I(\vartheta) = I_0 \left( \frac{\sin y}{y} \right)^2 \left( \frac{\sin Nz}{\sin z} \right)^2, \quad (8.77)$$

gdje je:

$$y = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \vartheta, \quad a \quad z = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \vartheta.$$

Prvi faktor u relaciji (8.77) dolazi zbog ogiba na svakoj pukotini, a drugi faktor zbog interferencije  $N$  pukotina.

Izraz (8.77) ima jake maksimume kada se nazivnik približava nuli, tj. kada je  $\sin z = 0$ , ili:

$$d \sin \vartheta = m\lambda \quad m \text{ cijeli broj.} \quad (8.78)$$

Između dvaju jakih maksimuma imamo  $N - 2$  mnogo slabija sekundarna maksimuma (sl. 8.51). Uvjet minimuma za ogib na jednoj pukotini (8.74) također je



uvjet minimuma i za optičku rešetku:

$$a \sin \vartheta = m\lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (8.79)$$

Osim ovih minimuma između susjednih glavnih maksimuma, pojavljuje se  $N - 1$  minimum zbog destruktivne interferencije valova iz pojedinih pukotina. Uvjet je za ove minimume:

$$\sin Nz = 0 \quad \text{ili} \quad d \sin \vartheta = \frac{m\lambda}{N}, \quad (8.80)$$

gdje je  $m = 1, 2, 3, \dots$  ali  $\neq N, 2N, \dots$

Slika 8.51. prikazuje difrakcijsku sliku optičke rešetke koja ima šest pukotina a razmak je pukotina  $d = 4a$ .

Kao što se vidi iz uvjeta (8.78) položaj glavnih maksimuma ovisi o valnoj duljini  $\lambda$ . Zato se pri prolazu bijele svjetlosti kroz rešetku svi maksimumi, osim središnjeg razlažu u spektar boja. "Spektar" je nultoga reda ( $m = 0$ ) bijel, spektar prvog reda ( $m = 1$ ) počinje ljubičastom, a završava crvenom bojom, zatim slijedi spektar drugoga reda itd.

Često se spektri pojedinih redova prekrivaju. Budući da optička rešetka različito otklanja različite valne duljine, može se, slično kao prizma, upotrijebiti u spektroskopskim uređajima.

### Primjer 8.11.

Izračunajte rezoluciju  $\lambda/\Delta\lambda$  i kutnu disperziju  $d\vartheta/d\lambda$  optičke rešetke.

Moć razlučivanja (rezolucija) optičke rešetke kaže koliko je minimalna razlika između dviju valnih duljina ( $\Delta\lambda$ ) koje rešetka može razlučiti. Definira se kao omjer  $\lambda/\Delta\lambda$ .

Da bi rešetka razlučivala valne duljine  $\lambda$  i  $\lambda + \Delta\lambda$  maksimum  $m$ -tog reda valne duljine  $\lambda + \Delta\lambda$  mora pasti baš na rub maksimuma za valnu duljinu  $\lambda$ , tj. na prvi minimum do toga maksimuma. Prema tome, moraju biti ispunjeni ovi uvjeti:

$$\text{uvjet maksimuma za } \lambda + \Delta\lambda: \quad d \sin \vartheta = m(\lambda + \Delta\lambda)$$

$$\text{uvjet minimuma za } \lambda: \quad d \sin \vartheta = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

Izjednačujući ova dva uvjeta, dobivamo rezoluciju optičke rešetke:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN.$$

Moć razlučivanja rešetke razmjerna je broju pukotina  $N$  i redu spektra  $m$ .

Kutna disperzija rešetke definira se izrazom  $d\vartheta/d\lambda$ . Može se izračunati deriviranjem relacije (8.78):

$$d \cos \vartheta \, d\vartheta = m d\lambda$$

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \vartheta}$$

Kutna disperzija razmjerna je redu spektra  $m$ , a obrnuto razmjerna konstanti  $d$ .

**Primjer 8.12.**

Optička rešetka ima 500 zarezna na 1 mm. Okomito na rešetku pada paralelni snop svjetlosti valne duljine  $\lambda = 400$  nm i  $\lambda' = 410$  nm. Kolik je kutni razmak između:

- a) maksimuma prvoga reda i
- b) maksimuma drugog reda za ove dvije linije?

Budući da na optičku rešetku upadaju dvije različite duljine vala, u spektrima prvog, drugog itd. reda dobit ćemo po dvije linije, a u smjeru okomitom na optičku rešetku (spektar nultoga reda) samo jednu liniju – maksimum od obiju valnih duljina.

- a) Iz uvjeta za maksimum rasvjete kod optičke rešetke

$$d \sin \vartheta_m = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

dobivamo za spektar prvoga reda ( $m = 1$ ) kutove pod kojima se vidi maksimum za valnu duljinu  $\lambda$  odnosno  $\lambda'$

$$\sin \vartheta_1 = \frac{\lambda}{d} = 0,2 \Rightarrow \vartheta_1 = 11^\circ 32' 12''$$

$$\sin \vartheta'_1 = \frac{\lambda'}{d} = 0,205 \Rightarrow \vartheta'_1 = 11^\circ 49' 42''.$$

Odatle je kutni razmak:

$$\Delta \vartheta_1 = \vartheta'_1 - \vartheta_1 = 17' 30''.$$

- b) Slično dobivamo za spektar drugoga reda

$$\sin \vartheta_2 = \frac{m}{\frac{\lambda}{d}} = \frac{2\lambda}{d} = 0,4 \Rightarrow \vartheta_2 = 23^\circ 34' 42''$$

$$\sin \vartheta'_2 = \frac{m}{\frac{\lambda'}{d}} = \frac{2\lambda'}{d} = 0,41 \Rightarrow \vartheta'_2 = 24^\circ 12' 18''.$$

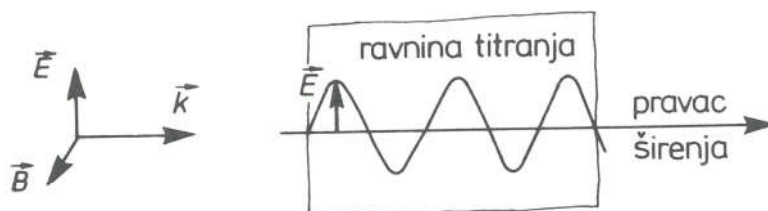
Kutni razmak iznosi:

$$\Delta \vartheta_2 = \vartheta'_2 - \vartheta_2 = 37' 36''.$$

Uočite da je kod spektra višega reda kutni razmak (rasip svjetlosti) veći.

## 8.16. Polarizacija svjetlosti

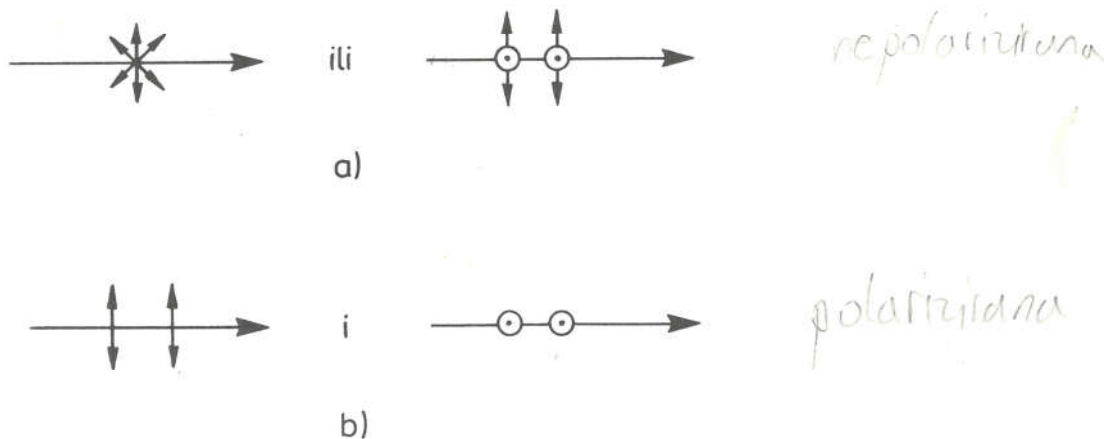
Svjetlost je transverzalni elektromagnetski val čije električno i magnetsko polje titraju međusobno okomito i okomito na smjer širenja vala. Ako s osi  $z$  označimo smjer širenja vala, tada električno polje može titrati u bilo kojemu smjeru u ravnini okomitoj na os  $z$ . Sl. 8.52. pokazuje dvije od bezbroj mogućih orijentacija vektora  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  s obzirom na smjer širenja vala. Kažemo da je svaki od tih valova polariziran. Ravnina definirana vektorom  $\vec{E}$  i smjerom širenja naziva se polarizacijska ravnina.



Slika 8.52. Polarizirani elektromagnetski val

Dok pojave interferencije i ogiba pokazuju da je svjetlost valne prirode, polarizacija pokazuje da su svjetlosni valovi transverzalni, tj. da električno i magnetsko polje titraju okomito na smjer širenja elektromagnetskoga vala.

Neki izvori elektromagnetskih valova emitiraju polarizirane valove (npr. televizijska antena). Naprotiv, svjetlost emitirana iz većine svjetlosnih izvora nije polarizirana. Prirodna se svjetlost, naime, sastoji od elektromagnetskih valova čiji su smjerovi električnoga polja kaotično raspodijeljeni i titraju u svim mogućim smjerovima s različitim faznim razlikama. Golemi broj atoma u izvorima svjetlosti emitira svjetlost vraćajući se iz pobuđenog u osnovno stanje. Atom emitira svjetlost u relativno kratkom vremenu ( $10^{-8}$  s) i pritom jedan atom daje svjetlost polariziranu u jednom smjeru, drugi u nekom drugom. Nastala svjetlost sastoji se od titranja u svim smjerovima pa se polarizacija stalno mijenja i kažemo da je takva svjetlost nepolarizirana.

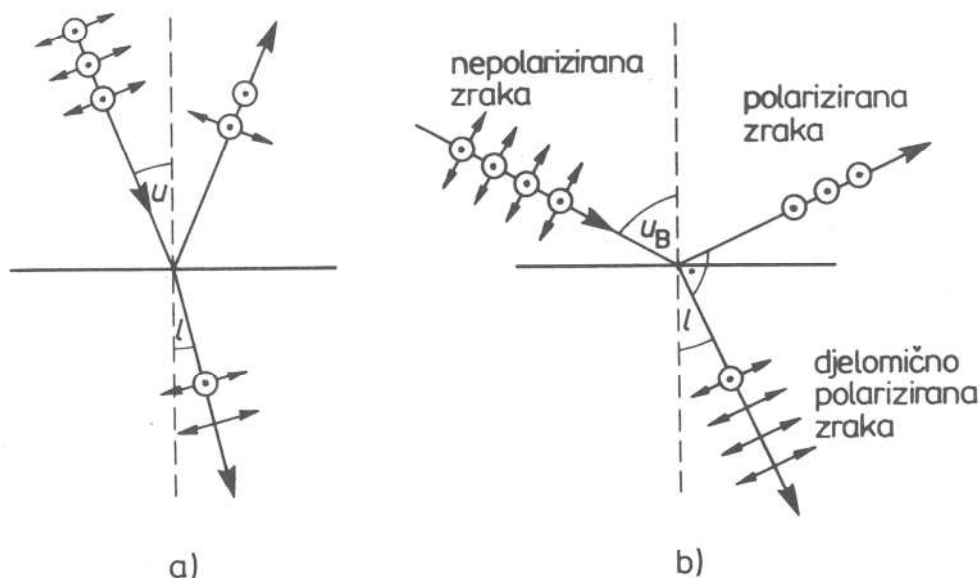


Slika 8.53. Oznaka za a) polariziranu i b) nepolariziranu svjetlost



Obična svjetlost sastavljena je, dakle, od velikog broja valova koji su polarizirani u svim ravninama okomitim na smjer širenja. To je simbolički prikazano na sl. 8.53.a gdje strelice pokazuju titranje električnoga polja u svim mogućim smjerovima. Svako od tih električnih polja može se rastaviti u dvije međusobno okomite komponente, npr. u smjeru okomito na ravninu upada i paralelno upadnoj ravnini, pa se nepolarizirana svjetlost umjesto s mnogo strelica može prikazati i dvjema strelicama kao na sl. 8.53.a od kojih jedna izlazi iz ravnine crtnje, a druga je u ravnini crtnje.

Međutim, ako je ta raspodjela nesimetrična, svjetlost je polarizirana (sl. 8.53.b).



Slika 8.54. Polarizacija refleksijom

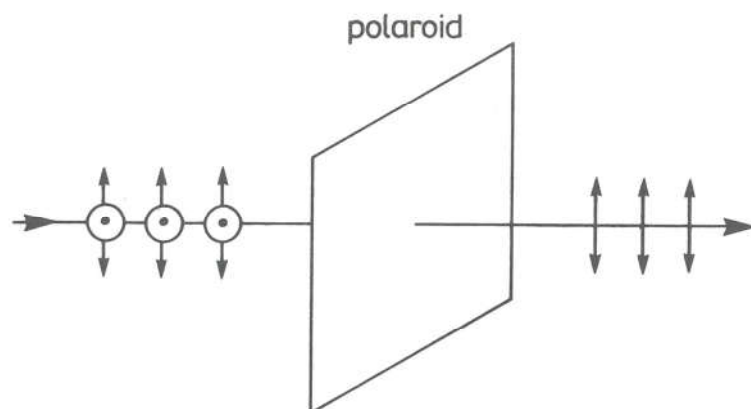
Ima više načina da od nepolarizirane dobijemo polariziranu svjetlost. Jedan od najjednostavnijih načina jest refleksijom prirodne svjetlosti na nekoj (npr. staklenoj) površini. Opaženo je da se pri tom više reflektiraju oni valovi čiji električni vektor titra okomito na upadnu ravninu. Zbog toga su reflektirana i transmitirana zraka djelomično polarizirane (sl. 8.54). Stupanj polarizacije ovisi o kutu upada. Postoji kut kada se reflektiraju samo valovi čiji električni vektor titra okomito na upadnu ravninu. To je takozvani Brewsterov kut  $u_B$ . Uvjet je za potpunu polarizaciju reflektirane svjetlosti:

$$u_B + l = 90^\circ \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg} u_B = n \quad (8.81)$$

Tako je npr. Brewsterov kut  $u_B$  za staklo oko  $56^\circ$ , a za vodu oko  $53^\circ$  i sl.

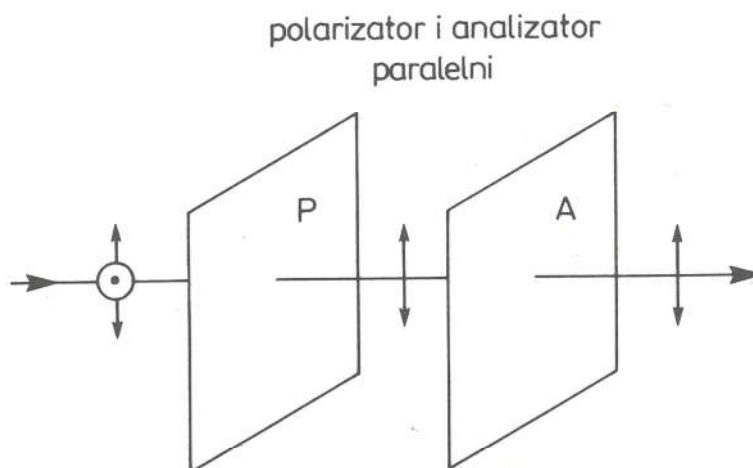
Svjetlost se može polarizirati i pomoću dikroičnih kristala. Takvi kristali propuštaju svjetlost čiji električni vektor titra samo u jednome smjeru, a apsorbiraju svjetlost koja titra u okomitu smjeru. Komercijalni naziv za takav materijal jest polaroid; to je suspenzija malih dikroičnih kristala jod-kinin-sulfata na celofanu.

Kada nepolariziranu svjetlost propustimo kroz polaroid, prolaze uglavnom valovi čiji  $\vec{E}$  titra u određenu smjeru, a ostali ne prolaze i tako dobivamo polariziranu svjetlost (sl. 8.55).



Slika 8.55. Polarizacija svjetlosti pomoću polaroida

Uređaj kojim smo od nepolarizirane napravili polariziranu svjetlost naziva se polarizator. Ako iza takva polarizatora stavimo još jedan polaroid, tzv. analizator, tada će intenzitet transmitirane svjetlosti kroz ova dva polaroida ovisiti o kutu koji zatvaraju polarizator i analizator (sl. 8.56).



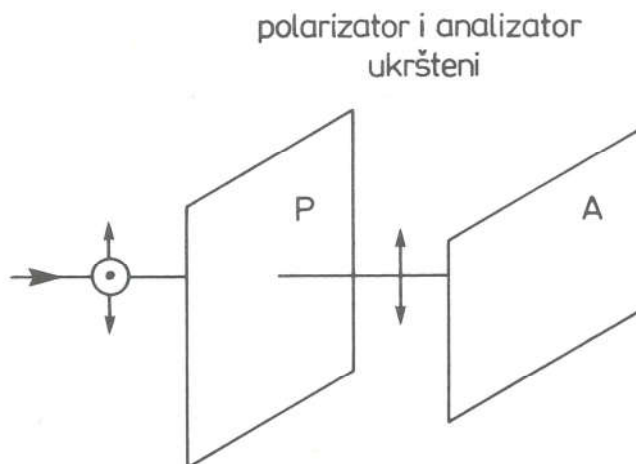
Slika 8.56. a) Prolaz svjetlosti kroz dva paralelna polaroida

Kada su polarizator i analizator paralelni, tada je intenzitet maksimalan (sl. 8.56.a); ako su pak ukršteni, tada polarizirana svjetlost ne prolazi kroz analizator (sl. 8.56.b). Općenito, kada analizator i polarizator zatvaraju kut  $\theta$ , električni vektor vala koji upada na analizator zatvara kut  $\theta$  s propuštajućom ravninom analizatora i kroz analizator prolazi komponenta  $E_0 \cos \theta$ . Intenzitet će transmitirane svjetlosti iza analizatora biti:

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

(8.82)

gdje je  $I_0$  intenzitet svjetlosti koja upada na analizator. Ovo je poznati Malusov zakon, otkriven još 1809.



Slika 8.56. b) Prolaz svjetlosti kroz dva ukrštena polaroida

Svjetlost se može polarizirati i pomoću tzv. **dvolomca**. Neki kristali su anizotropni i imaju svojstvo da im indeks loma ovisi o smjeru pod kojim svjetlost upada na taj kristal, kao i o polarizaciji upadne svjetlosti. Kada prirodna (tj. nepolarizirana) svjetlost upada na kristal kalcita  $\text{CaCO}_3$  (islandski dvolomac), pod nekim kutom  $u$ , nastaju od nje u kristalu dvije zrake (sl. 8.57). Jedna se od njih lomi pod kutom  $l_1$  a druga pod kutom  $l_2$ ; jedna se lomi više a druga manje. Zato se takav kristal i zove dvolomac. Ako mijenjamo kut upada, opazit ćemo čudnu pojavu. Dok se jedna zraka lomi po Snellovu zakonu, za drugu indeks loma (dakle, i brzina) ovisi o smjeru kroz koji se zraka širi kroz kristal.

Ako je optička os kalcita okomita na površinu na koju upada svjetlo i ako zraka svjetla upada usporedno optičkoj osi, kalcit se ponaša kao ostala prozirna anizotropna sredstva; nema dvoloma.



Slika 8.57. Dvolom

Ako je kristal kalcita tako odrezan da je optička os usporedna s površinom kristala i ako zraka svjetlosti upada okomito na površinu (pa i na optičku os), zraka je jednostruka, iako se zapravo sastoji od dviju zraka koje se šire različitim brzinama.



Ako ravnina kristala i optička os zatvaraju neki kut različit od  $0^\circ$  i  $90^\circ$ , a zraka upada okomito na površinu kristala, od jedne zrake nastaju dvije koje u raznim smjerovima putuju različitim brzinama  $v_r$  i  $v_i$ .

Prvu zraku za koju je indeks loma neovisan o smjeru nazivamo redovna zraka, a onu drugu izvanredna zraka. Izvanredna i redovna zraka polarizirane su (sl. 8.57) pa je dvolom jedan od načina dobivanja polarizirane svjetlosti.

Tablica 8.8. Svojstva nekih dvolomaca (za natrijevu svjetlost)

| Dvolomac               | $n_r$ | $v_r/\text{m s}^{-1}$ | $n_i$ | $v_i/\text{m s}^{-1}$ |
|------------------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|
| kalcit $\text{CaCO}_3$ | 1,658 | $1,8 \cdot 10^8$      | 1,486 | $2,02 \cdot 10^8$     |
| kvarc $\text{SiO}_2$   | 1,544 | $1,94 \cdot 10^8$     | 1,553 | $2,28 \cdot 10^8$     |

**Optički aktivne stvari.** Neki prozirni materijali (npr. vodena otopina šećera) optički su aktivni u smislu da zakreću ravninu polarizacije svjetla koje kroz njih prolazi. Ako se takvi materijali umetnu između ukrštenog polarizatora i analizatora, svjetlo će prolaziti jer se ravnina polarizacije zakrene. Da bi svjetlo iščezlo, analizator se mora zakrenuti za dodatni kut  $\alpha$  (kut optičkog zakretanja ravnine polarizacije) kojim se može mjeriti to zakretanje.

Kut  $\alpha$  jednak je umnošku specifične moći optičkog zakretanja  $\alpha_m$  promatrane tvari, gustoće optički aktivne tvari  $\rho = m/V$  i duljine  $l$  puta zrake kroz taj materijal:

$$\alpha = \alpha_m \rho l \quad (8.83)$$

gdje se  $\alpha$  izražava jedinicom radijan (stupanj), gustoća,  $\rho$  kilogramom po kubičnom metru, ( $\text{kg m}^{-3}$ ), a  $l$  metrima (m). Tako se zakretanjem ravnine polarizacije može mjeriti količina šećera u otopinama.

Plastični predmeti također kada su napregnuti zakreću ravninu polarizacije što se može vidjeti umetanjem takvih predmeta između ukrštenoga polarizatora i analizatora. Neke organske molekule tzv. tekući kristali također imaju to svojstvo koje se primjenjuje u modernoj tehnologiji elektroničkih komponenata.

### Primjer 8.13.

Polarizator je uređaj za određivanje koncentracije šećera u otopini. To je valjkasta staklena cijev s prozirnim krajevima, smještena između ukrštenoga polarizatora i analizatora. Kada se cijev napuni otopinom šećera, polarizacijska ravnina zakrene se za  $80^\circ$ . Kolika je koncentracija šećera u otopini? Cijev je dugačka 15 cm. Specifično zakretanje iznosi  $0,665 \text{ m}^2/\text{kg}$ .

Iz izraza za kut optičkog zakretanja polarizacijske ravnine dobivamo:

$$\alpha = \alpha_m \rho l = 0,665^\circ \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \cdot \rho \cdot 0,15 \text{ m}$$

$$\alpha = 80^\circ$$

$$\rho = 800 \text{ kg m}^{-3} = 0,8 \text{ g cm}^{-3}.$$

**Polarizirana svjetlost i tekući kristali.** Spomenimo upotrebu polarizirane svjetlosti u prikazima pomoću tekućih kristala (LCD – Liquid Crystal Display), tehnologiji koja se sve više primjenjuje u džepnim računalima, digitalnim instrumentima, satovima i sl. To je moderna elektronska tehnologija s vrlo malom potrošnjom energije (oko  $1 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ ). Televizori sa LCD-ekranima već se proizvode u "portabl" izvedbama.

Tekući su kristali organske molekule sa svojstvima kristala i tekućina. Otkrivene su početkom ovoga stoljeća, ali tek sada se počinju intenzivnije upotrebljavati. To su dipolne molekule koje se u vanjskome električnom polju orijentiraju u smjeru polja.

Tekući su kristali optički aktivni i zakreću polarizacijsku ravninu polarizirane svjetlosti. Međutim, ako su u vanjskome električnom polju, njihova optička aktivnost prestaje. Upravo se to svojstvo upotrebljava u LCD-tehnologiji.

Objasnit ćemo ukratko, dosta pojednostavljeno, način prikazivanja broja i slova pomoću LCD-a.

Nepolarizirana svjetlost prolazi, kroz stakleni pokrov i kroz polarizator. Nakon polarizatora polarizirana zraka prolazi kroz tekući kristal i ulazi u analizator. Polarizator i analizator su ukršteni i, kada ne bi bilo tekućega kristala, zraka bi se tu apsorbirala. Međutim, tekući kristal zakrene polarizacijsku ravninu tako da svjetlost prođe do zrcala, reflektira se i vraća natrag.

U reflektiranoj svjetlosti takav uređaj izgleda svijetao. Uključimo li vanjsko električno polje, tekući kristal gubi optičku aktivnost, zrake svjetlosti ne prolaze kroz ukršteni polarizator i gledajući analizator vidimo tamnu podlogu.

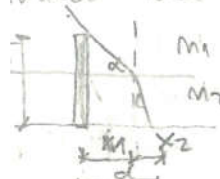
Svjetlost je pomoću koje vidimo brojeve na LCD-u (npr. u džepnom računalu), dakle, polarizirana. U to se možemo uvjeriti ako računalo gledamo kroz sunčane naočale od polaroida. Okrećući računalo brojke će u jednom položaju nestati jer će tada polarizator u računalu i polaroid naočala biti međusobno pod kutem od  $90^\circ$ .

1) U bozemu  $h=2\text{m}$  nalazi se točkasti izvor svjetlosti koji prosvjetljuje daske treba staviti na površinu vode da se svjetlost ne vidi u vodi  
 $\sin \alpha_{gr} = \frac{1}{n}$   $\alpha_{gr} = 48,753^\circ$   $\tan \alpha_{gr} = \frac{r}{h}$   $r = h \cdot \tan \alpha_{gr} = 2,281\text{m}$   $d = 2r = 4,562\text{m}$   
 $n = 1,33$

2) Koliki je kut slomljenja sunca kad se sručava zrake reflektirane od mirne površine totalno polariziraju  $\tan \alpha_g = n$   $\alpha = 53'3''40''$   $\beta = 90 - \alpha = 36'56''20''$

3) Kolika je zatvorena dubina lože ako je za postizanje slike računata u prirodnoj veličini predmet potreban staviti na 25cm od lože  $a=b$   $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$   $\frac{2}{25} = \frac{1}{f}$   $f = 12,5\text{cm}$

4) stup je zabiti u dno mora. Jedan dio pusti rucak vode 1,5m. Noćite dubinu sjeme stupa na površini i na dnu mora ako je visina linca na horizontu  $\alpha = 40^\circ$  a dubina vode 3m

  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_1}{n_2}$   $\sin \alpha_1 \cdot n_2 = \sin \alpha_2 \cdot n_1$   $\alpha = 35,060^\circ$   $\tan 40^\circ = \frac{1,5}{x_1}$   $x_1 = 1,787$  na zrak  
 $\tan \alpha = \frac{x_2}{3}$   $x_2 = 2,105$   $d = x_1 + x_2 = 3,88\text{m}$  u moru

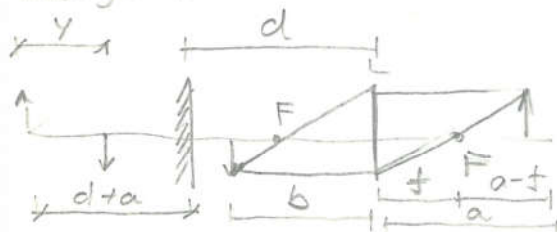
5) Koliko valnih dužina monokromatske svjetlosti treba imati na najkraćem putu dubine 2mm kroz staklo 1,77  
 $\lambda = \frac{c}{\nu}$   $\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-8}} = 6 \cdot 10^{15}$   $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{n_2}{n_1} = 1,77$   $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{1,77} = 3,5 \cdot 10^{-8}$   $N = \frac{d}{\lambda_2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-8}} = 5714$   
 Na tomboj foliji ( $n=1,4$ ) pada pod kutom  $32^\circ$  bijela svjetlost za koju dobijemo  
 koliko će svjetlost prolaziti kroz foliju bih crvena  $\lambda = 6,4 \cdot 10^{-7}$   
 $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$   $1,4 \sin 32^\circ = 1 \sin \alpha_2$   $\alpha_2 = 48,753^\circ$



7) Na leću i druga optička tijela vjerojatno se najčešće radi o proučavanju indeksa loma  $n_1$  manjeg od indeksa loma stakla iz čega bi se činilo da bi se svjetlost na njegovoj površini odrazilala minimalnu dubinu talva koja je općenito refleksija produžetog dijela spektra gdje su valne dužine  $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$  i  $\lambda = 0,65 \mu\text{m}$ . Koeficijent upada svetlosti na taj dio a indeks loma upad. zraka je 1,33.

294  $n_2 \sin \alpha \neq (k+1) \frac{\lambda}{2} \sin \alpha = 50^\circ, k=0 \quad d = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{0,55 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1,33} = 1,033 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  Optika - 7 m

8) Konv. leća nalazi se 1 m daleko od ravnog zrcala. S koje strane leće je predmet udaljen od 1 m. Koliko je razmak između slika dobijenih zrcalom od predmeta kad je leća ravnog predmeta zrcala? kad je nema. Zarišna daljina leće je 30 cm. Shćirgfo.



$$d = 1 \text{ m}$$

$$a = 1 \text{ m}$$

$$f = 0,3 \text{ m}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad b = 0,42 \text{ m}$$

$$x = d - b = 0,58 \text{ m}$$

$$y = d + a - x = 1,42 \text{ m}$$

## Pitanja i zadaci

- 8.1. Čime se bavi fotometrija? Što znate o vezi fotometrijskih i energijskih veličina?
- 8.2. Definirajte jakost izvora svjetlosti, svjetlosni tok, efikasnost izvora svjetlosti i osvijetljenost. Navedite jedinice kojima se te veličine mjere. Koja je od njih osnovna SI-jedinica?
- 8.3. Kolik je ukupni tok koji daje točkasti svjetlosni izvor jakosti 92 cd? Kolika je osvijetljenost površine okomite na zrake svjetlosti i udaljene 0,5 m?
- 8.4. Kolika je jakost svjetlosnog izvora koji se nalazi 6 m iznad pješačkog prijelaza ako je osvijetljenost prijelaza 30 lx? Kolik tok svjetlosti upada na površinu ceste od 0,5 m<sup>2</sup>?
- 8.5. Navedite osnovne zakone geometrijske optike. Koje su aproksimacije sadržane u tim zakonima?
- 8.6. Izvedite zakone refleksije i loma svjetlosti iz Fermatova principa.
- 8.7. Koja je najmanja visina vertikalnog zrcala u kojem bi čovjek visine  $h = 1,80 \text{ m}$  mogao vidjeti sliku čitava svojeg tijela? Kako bi ogledalo moralo biti postavljeno ako je visina čovjekovih očiju  $h_1 = 1,68 \text{ m}$ ?
- 8.8. Predmet visok 1 cm udaljen je 15 cm od tjemena konveksnoga sfernog zrcala žarišne daljine 25 cm. Odredite položaj, visinu i prirodu slike.
- 8.9. U retrovizoru koji ima oblik konveksnoga zrcala vidi se slika automobila. Koliko je slika daleko od tjemena zrcala ako je automobil udaljen 100 m? Polumjer je zakrivljenosti zrcala 10 m.
- 8.10. Dva sferna zrcala, jedno konkavno polumjera zakrivljenosti 25 cm, a drugo konveksno polumjera zakrivljenosti 50 cm, postavljena su jedno prema drugome, tako da im se optičke osi podudaraju i da im je udaljenost tjemena 50 cm. Predmet je u sredini između obaju zrcala. Mali zastor sprečava da zrake svjetlosti padaju izravno na konveksno zrcalo, zato slika nastaje najprije na konkavnome, a zatim na konveksnome zrcalu. a) Gdje se nalazi i kakva je slika? b) Gdje će biti slika ako umjesto konveksnoga upotrijebimo ravno zrcalo? (Riješite računski i grafički.)



- 8.11. Zraka svjetlosti upada na granicu između zraka i prozirnoga sredstva pod kutem od  $60^\circ$  i lomi se pod kutem  $34^\circ 52'$ . Koliko iznosi indeks loma sredstva?
- 8.12. Objasnite pojavu totalne refleksije. Opišite pojave pri kojima se ona pojavljuje te navedite primjene ove pojave.
- 8.13. Na dnu bazena duboka 2 m nalazi se točkasti izvor svjetlosti. Točno iznad izvora na površini vode pliva okrugla daska. Koliki mora biti promjer daske ako želimo da se sve zrake svjetlosti reflektiraju natrag u vodu?
- 8.14. Objasnite prolaz svjetlosti kroz optičku prizmu. Što je to disperzija svjetlosti i kako se ona opaža pomoću prizme?
- 8.15. Kako glasi jednadžba tanke leće? Kako se, poznajući polumjere zakrivljenosti, može izračunati žarišna daljina leće?
- 8.16. Što je jakost leće i kojim se jedinicama mjeri? Izračunajte: a) jakost konvergentne leće žarišne daljine 2 m; b) jakost divergentne leće žarišne daljine 50 cm.
- 8.17. Konvergentnom lećom žarišne daljine 2 cm promatramo sitne predmete. Ako je virtualna slika koju daje to povećalo na udaljenosti 25 cm, gdje je predmet i koliko je linearno povećanje?
- 8.18. Na koju udaljenost od divergentne leće žarišne daljine 10 cm treba postaviti predmet da bi se dobila tripud umanjena slika?
- 8.19. Kolike su žarišna daljina i jakost divergentne leće koja od predmeta visokog 2 cm, udaljenog od leće 60 cm, daje virtualnu sliku veličine 0,5 cm?
- 8.20. Opišite i objasnite sfernu i kromatsku aberaciju leće.
- 8.21. Obrazložite princip na kojem se osnivaju lupa, mikroskop i dalekozor.
- 8.22. Mikroskop ima objektiv sa žarišnom daljinom 1 cm i okular žarišne daljine 4 cm. Neki preparat, udaljen 1,1 cm od objektiva, daje konačnu virtualnu sliku udaljenu 25 cm od okulara. Kolika je duljina tubusa (razmak leća) i povećanje instrumenta?
- 8.23. Što je interferencija svjetlosti i u kojim se uvjetima ona može opažati? Opišite Youngov pokus i druge uređaje za dobivanje interferencijskih pruga.
- 8.24. U čemu se razlikuju optička i geometrijska razlika putova? U kojim se slučajevima optičkoj razlici putova dodaje polovica valne duljine ( $\lambda/2$ ) i zašto?
- 8.25. Opišite kako se dobivaju Newtonovi kolobari. Izračunajte razmak između 4. i 25. tamnog kolobara, ako kolobare promatramo u reflektiranoj svjetlosti, a polumjer je leće 15 m. Valna je duljina 600 nm.
- 8.26. Napišite analitički izraz za intenzitet svjetlosti koja kroz pukotinu širine  $a$ , pada na zastor, u ovisnosti o kutu  $\theta$ . Prikažite tu ovisnost grafički. Za koje se kutove dobivaju tamne pruge?

- 8.27. Opišite princip djelovanja i primjene optičke rešetke. Što je konstanta rešetke?
- 8.28. Pod kojim se kutovima vide maksimumi intenziteta svjetlosti optičke rešetke, ako je konstanta rešetke  $2 \mu\text{m}$ , a na rešetku pada okomito svjetlost valne duljine  $0,6 \mu\text{m}$ ?
- 8.29. Odredite konstantu optičke rešetke ako se pri osvjetljenju svjetlom valne duljine  $656 \text{ nm}$  spektar drugoga reda vidi pod kutem od  $15^\circ$ .
- 8.30. Objasnite razliku između polarizirane i nepolarizirane svjetlosti. Opišite uređaje i načine za dobivanje polarizirane svjetlosti.
- 8.31. Što je Brewsterov kut i kako se može izračunati?
- 8.32. Navedite nekoliko načina primjene polarizacije svjetlosti.

9) Odredite žarišnu daljinu optičkoga sistema ako je normala između predmeta i zrcala  $20 \text{ cm}$  a slika predmeta treba biti 3x veća od predmeta. Također nacrtajte korak zrače ako je predmet 12 cm od prvog zračenja od žarišta  $b = 3a$   $a = 20 \text{ cm}$   $b = 60 \text{ cm}$   $\frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{1}{f}$   $f = 15 \text{ cm}$

10) Osobi visokoj  $180 \text{ cm}$  na  $10 \text{ cm}$  malom ispod nivoa tjamenja kabela uglašeno mora biti visoko zrcalo da bi os osoba u yon mogla vidjeti u cjelosti i na kkg visini od poda treba biti postavljen zrcalo



$$x = 10 \text{ cm}$$

$$h = 180 \text{ cm}$$

$$h - x = 170 \text{ cm}$$

$$\text{od poda } \frac{h-x}{2} = 0,85 \text{ m}$$

$$\text{daljina zrcala } \frac{h-x}{2} + \frac{x}{2} = 0,9 \text{ m}$$

11) Pod uslov zakrivljenosti konvexnog zrcala  $R = 0,4 \text{ m}$  naći položaj predmeta tako da njegova slika bude i povećana dva puta. Također naći položaj predmeta tako da mu slika bude dvostruko i imaginarna. a)  $\frac{b}{a} = 2$   $b = 2a$   $f = \frac{R}{2} = 0,2$   $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{0,2}$   $a = 0,3$   $b = 0,6$

b)  $-\frac{b}{a} = 2$   $b = -2a$   $a = 0,1$   $b = -0,2$

12) Nađite minimalnu udaljenost između dva tačke koga je moguće razlučiti opt. mikroskopom

$$\lambda = 380 \text{ nm} = 380 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$d \sin \alpha = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad \text{iz } \alpha = 90^\circ \quad \sin \alpha = 1$$

$$k = 0 \quad 2k+1 = 1$$

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{380 \cdot 10^{-9}}{2} = 190 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad d = 1900 \text{ Å} \quad (\text{mikroskop})$$

13) Izračunajte polarizirani snop svjetlosti intenziteta  $I$  propada sa  $60^\circ$  na polarizator i na prvi itd itd. Naći intenzitet snopa na navedenim

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

$$I = I_0 (\cos^2 1) \quad n = 50$$

$$I = I_0 (\cos^2 1 + \cos^2 2 + \dots) \quad I = 70,01972 = 0,972 I_0 \quad (97,2\% I_0)$$



# Uvod u strukturu tvari

## 9. Osnovna međudjelovanja u prirodi

### 9.1. Uvod

Istraživanje strukture tvari interdisciplinarni je znanstveni pothvat, u kojemu ravnopravno sudjeluju fizika, kemija i druge prirodne znanosti. Različite teorijske i eksperimentalne metode kojima se te znanosti služe uzajamno se nadopunjuju i potiču na nov razvoj. Sve od prije kraja 19. st. te su se znanstvene grane razvijale odvojeno: fizika je proučavala zakone gibanja i sile, rad i energiju, toplinske pojave te pojave elektriciteta, magnetizma i optike. Kemija je ispitivala sastav tvari te promjene i načine pretvorbi tvari u raznim uvjetima, sa svrhom da se doznaju empirijski zakoni koji vladaju tim promjenama. Ta su se istraživanja osnivala na predodžbi o atomima kao temeljnim, nedjeljivim građevnim elementima od kojih je sazdana svaka tvar i svako tijelo u prirodi. Do korjenite promjene u shvaćanju strukture tvari došlo je potkraj 19. st. Prijelomnim događajem možemo smatrati otkriće elektrona. Nakon što je J. J. Thomson godine 1897. izmjerio omjer naboja i mase elektrona, a E. Rutherford godine 1911. svojim pokusima dokazao postojanje atomske jezgre, postalo je jasno da atom nije nerazoriva cjelina, nego da se i sam sastoji od manjih dijelova, elektrona i jezgre, koji se pod utjecajem uzajamnih sila gibaju u prostoru. Objasniti atom znači opisati to gibanje pomoću jednadžbi gibanja, naći izraze za energiju takva sistema čestica. Slično treba pristupiti i objašnjenju građe molekula, kristala i drugih oblika u kojima se tvar pojavljuje u prirodi. Pritom se neki od sastavnih dijelova tvari mogu i dalje dijeliti, kao naprimjer atomska jezgra, a drugi su – poput elektrona – osnovne (elementarne ili fundamentalne) čestice.

Ubrzo se, međutim, pokazalo da klasična Newtonova mehanika nije dovoljna za takav opis, da je njezin domet ograničen na sisteme sastavljene od malog broja čestica, sisteme kojih dimenzije znatno premašuju  $10^{-10}$  m i kod kojih su brzine mnogo manje od brzine svjetlosti  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ . Ta su otkrića dovela do razvoja triju novih grana fizike: *statističke fizike*, koja opisuje sisteme s velikim brojem čestica (sjetimo se da u 1 L vode ima približno  $10^{25}$  molekula), *relativističke fizike* za gibanja velikim brzinama i *kvantne fizike*, koja vrijedi kad su dimenzije sistema



reda veličine  $10^{-10}$  m ili manje. Sve do današnjih dana razvoj tih triju područja fizike nastavlja se nesmanjenom žestinom. Otkrivaju se i tumače nove pojave koje u sebi isprepleću statistička, relativistička i kvantna obilježja i koje nam obećavaju obilje primjena i neslućeni tehnološki razvoj. Newtonova mehanika, međutim, nije pritom izgubila svoju važnost. U svakoj od novih grana fizike ona se prirodno pojavljuje kao granični slučaj i vrijedi za sisteme sastavljene od malog broja čestica, za gibanja na područjima mnogo većim od atomskih mjerila i za čestice koje se gibaju brzinama malim u usporedbi sa brzinom svjetlosti. Kvantna fizika i pojave koje ju karakteriziraju katkad se u udžbenicima nazivaju "suvremenom fizikom". Treba reći da je, kad se govori o strukturi tvari, pojam suvremenosti znatno širi, on zadire i u klasičnu fiziku i u njezinu primjenu na mikroskopsko ustrojstvo tvari. Suvremena znanost u objašnjavanju prirodnih pojava slijedi opća načela i zakonitosti, a to su: zakoni očuvanja, principi simetrije, osnovna međudjelovanja i koncept polja. Današnji pristup znanstvenom istraživanju strukture tvari mogli bismo sažeti u tvrdnji da se materija u prirodi pojavljuje u obliku osnovnih čestica i njihovih međudjelovanja, a da pod pojmom "tvar" razumijevamo uređeni oblik materije, bilo da je riječ o atomu, atomskoj jezgri i o kompleksnim molekulama, o realnim fluidima i tvari u čvrstom stanju, ili o načinu kako je organizirana materija u zvjezdanim sustavima i u drugim svemirskim objektima. Budući da su za svaki uređeni oblik materije bitna međudjelovanja čestica, najprije ćemo ukratko opisati njihove osnovne značajke.

## 9.2. Osnovna međudjelovanja

U prirodi postoje četiri temeljne vrste međudjelovanja. To su *gravitacijsko* međudjelovanje, *elektromagnetsko* međudjelovanje, *jako* međudjelovanje i *slabo* međudjelovanje. Svakom od tih međudjelovanja pripada odgovarajuće polje. Osim polja, u nerelativističkim se problemima često upotrebljava pojam *sile*, ili se međudjelovanje opisuje *potencijalnom energijom*.

U ovom ćemo poglavlju opisati najvažnija obilježja četiriju osnovnih međudjelovanja u prirodi, vodeći računa o tome da se ona međusobno razlikuju po doseg, jakosti i načinu na koji ih možemo matematički izraziti. Svako od osnovnih međudjelovanja dolazi do izražaja u nekim karakterističnim pojavama i procesima, svako od njih igra određenu značajnu ulogu u strukturi tvari. Napokon, svako od njih ima svoje važno mjesto u tehnici i u tehnološkim primjenama. Na ta njihova svojstva upozorit ćemo u ovom kratkom pregledu osnovnih međudjelovanja.

## 9.3. Gravitacijsko međudjelovanje

Gravitacijsko se međudjelovanje pojavljuje između bilo koja dva tijela. Ono je privlačno, a ovisi o masama tijela i o njihovoj međusobnoj udaljenosti  $r$ . Matematički opis najčešće je dan u obliku općega Newtonova zakona gravitacije za silu kojom čestica mase  $M$  privlači česticu mase  $m$ :

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \vec{r}_0 \quad (9.1)$$

Pritom je  $\vec{r}_0$  jedinični vektor usmjeren od tijela mase  $M$  prema tijelu mase  $m$  (sl. 9.1), a  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$  opća gravitacijska konstanta. Važno je napomenuti da taj izraz vrijedi ne samo za materijalne točke nego i za svaka dva tijela koja posjeduju kuglastu simetriju, pri čemu je  $r$  udaljenost njihovih središta. Čak i ako je riječ o dvjema kuglama koje se dodiruju, sila se računa na isti način. U općem slučaju, međutim, rezultat ovisi još i o obliku tijela i o njihovu uzajamnu položaju.

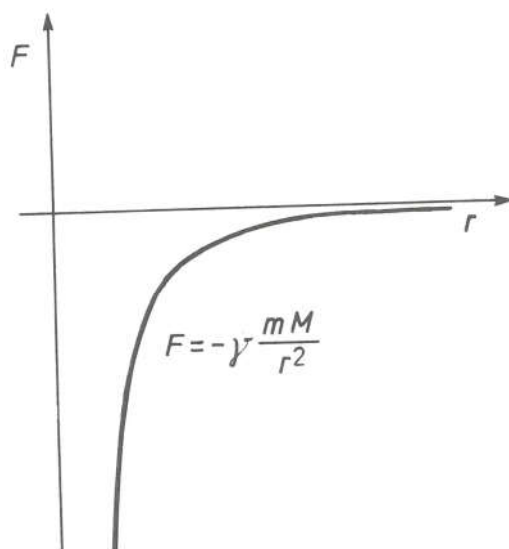


Slika 9.1. Smjer djelovanja gravitacijske sile

U mehanici smo se iscrpno bavili gravitacijskom silom (*Mehanika i toplina*, pogl. 8). Pokazali smo kako se gravitacijsko međudjelovanje može izraziti gravitacijskim poljem, i izračunali smo potencijalnu gravitacijsku energiju dvaju tijela:

$$E_p^{gr} = -\gamma \frac{Mm}{r} \quad (9.2)$$

Doseg je gravitacijskoga međudjelovanja beskonačan. Iako slabi s kvadratom udaljenosti, gravitacijska sila između dvaju tijela nikada sasvim ne iščezava (sl. 9.2). Zbog svoje prisutnosti u svakodnevnu životu (težina tijela, slobodni pad) i zbog uloge koju ima u gibanju planeta i zvijezda, gravitacijsko je međudjelovanje



Slika 9.2. Gravitacijska sila

bilo prvo koje je čovjek počeo sustavno istraživati. Promatranje pojava vezanih uz gravitaciju neposredno je utjecalo na razvoj fizike kao znanosti u njezinoj najranijoj fazi (otkrića N. Kopernika, G. Galileia i I. Newtona), kao i na suvremenu znanost (teorija relativnosti A. Einsteina, suvremena astrofizika). Međutim, u usporedbi



sa drugim međudjelovanjima, gravitacijsko je međudjelovanje izrazito najslabije. Ono postaje važno tek kad je riječ o velikim masama kakve su mase planeta i zvijezda. No od davnine do današnjih dana čovjek je znao primijeniti i iskoristiti gravitacijsko privlačenje Zemlje, počevši od primitivne vodenice do akumulacionih jezera, u kojima je uskladištena velika gravitacijska potencijalna energija. Gravitacijsko je međudjelovanje omogućilo precizna mjerenja vremena (sat s njihalom) i mase (vaga). Napokon, zahvaljujući gravitaciji u orbiti oko Zemlje kruži mnoštvo umjetnih satelita, koji nam – uz mnoge druge namjene – omogućuju prijenos komunikacijskih signala na velike daljine.

### Primjer 9.1.

Izračunajte gravitacijsku silu koja djeluje između dvaju atoma dušika u molekuli  $N_2$ . Udaljenost je među atomima 1 nm.

Masa jednog atoma dušika je

$$m_N = 14 u = 14 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_N = 2,324 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

Sila među atomima iznosi, dakle:

$$F_g = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot \frac{(2,324 \cdot 10^{-26} \text{ kg})^2}{(10^{-9} \text{ m})^2}$$

$$F_g = 3,60 \cdot 10^{-44} \text{ N}.$$

### Primjer 9.2.

Izračunajte silu kojom Zemlja privlači vodu u akumulacijskom jezeru površine  $4 \text{ km}^2$  i dubine 5 m. Masa je Zemlje  $5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , a polumjer je Zemlje približno 6380 km.

Masa vode iznosi:

$$m_v = \rho_v V = \rho_v \cdot Sh = 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 4 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \cdot 5 \text{ m} = 2 \cdot 10^{10} \text{ kg}.$$

Sila se može izračunati iz Newtonova zakona gravitacije i iznosi:

$$F = \gamma \frac{m_v M_Z}{R_Z^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{10} \text{ kg} \cdot 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,38 \cdot 10^6 \text{ m})^2}$$

$$F = 1,95 \cdot 10^{11} \text{ N}.$$



## 9.4. Elektromagnetsko međudjelovanje

Među tijelima koja posjeduju električni naboj javlja se elektromagnetsko međudjelovanje. Unošenjem u neki prostor jedne ili više električki nabijenih čestica koje miruju ili se gibaju taj prostor poprima nova svojstva: u njemu se stvaraju električno i magnetsko polje. Električno polje možemo opisati vektorom  $\vec{E}$ , čime su u svakoj točki prostora zadani njegova jakost i njegov smjer. Istodobno, u prostoru može postojati i magnetsko polje, opisano vektorom gustoće magnetskoga toka (ili magnetske indukcije)  $\vec{B}$ . Nađe li se naboj  $q$  u nekoj točki prostora u kojoj postoje polja  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ , na njega će djelovati *elektromagnetska sila* (Lorentzova sila), dana izrazom:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (9.3)$$

Elektromagnetska sila sastoji se od dvaju dijelova: električne i magnetske sile. Električna sila  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  ima smjer električnoga polja, ili njemu suprotan, ovisno o predznaku naboja  $q$ . Drugi član, magnetska sila  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ , pojavljuje se onda kad se nabijena čestica giba brzinom  $\vec{v}$  u prostoru u kojemu postoji magnetsko polje. Ta sila ima zanimljivo svojstvo: njezin je smjer okomit i na smjer brzine i na smjer magnetskoga polja, a ovisi i o njihovom međusobnom kutu.

### Primjer 9.3.

Izračunajte iznos i smjer elektromagnetske sile koja djeluje na elektron ako se on giba brzinom  $v = 10^4 \text{ ms}^{-1}$  u smjeru osi  $x$ , te ako u prostoru postoje homogeno električno polje jakosti  $E = 1000 \text{ Vm}^{-1}$  u smjeru osi  $y$  i magnetsko polje gustoće magnetskog toka  $B = 0,2 \text{ T}$  u smjeru osi  $z$ .

Računamo

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B}.$$

Prvi član je

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= -eE\vec{j} = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^3 \text{ Vm}^{-1} \cdot \vec{j} \\ \vec{F}_e &= -1,6 \cdot 10^{-16} \text{ N} \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

Magnetski je doprinos sili:

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= -e(\vec{v} \times B\vec{k}) = evB \cdot \vec{j} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^4 \text{ ms}^{-1} \cdot 0,2 \text{ T} \cdot \vec{j} \\ \vec{F}_m &= 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ N} \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

Ukupna je sila:

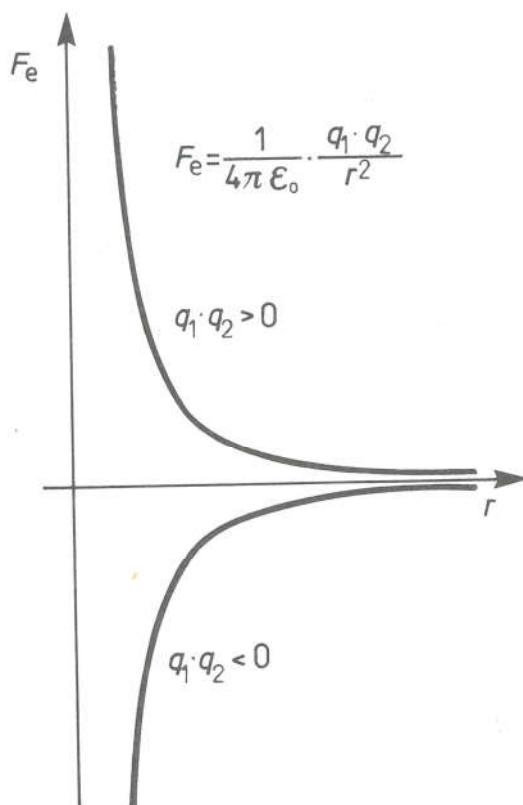
$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = (-1,6 + 3,2) \cdot 10^{-16} \text{ N} \cdot \vec{j},$$

ili

$$\vec{F} = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ N} \cdot \vec{j}.$$

Na elektron djeluje sila od  $1,6 \cdot 10^{-16} \text{ N}$  u smjeru osi  $y$ .

Elektromagnetska je sila usko povezana s pojmom relativnosti, jer brzina ovisi o sustavu u kojemu je mjerimo. No prijelazom iz jednog sustava u drugi, ne mijenja se samo brzina, već se mijenjaju i polja  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ . Kako to utječe na elektromagnetsku silu? Zamislimo uređaj koji se sastoji od ravnog vodiča kroz koji teče struja i



Slika 9.3. Elektrostatska sila između dvaju naboja

nabijene čestice koja se giba brzinom  $v$  paralelno s vodičem. Koordinatni sustav u kojemu vodič miruje označimo sa  $S$ , a onaj u kojemu miruje čestica sa  $S'$ . Računom se može pokazati da se sila na nabijenu česticu u sustavu  $S$  i ona koja na česticu djeluje u sustavu  $S'$  mogu povezati relacijom

$$F = F' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (9.4)$$

gdje je  $c$  brzina svjetlosti. Ima li čestica malu brzinu ( $v \ll c$ ), zaključujemo da je sila ostala nepromijenjena. Time smo utvrdili izuzetno važnu činjenicu: električno i magnetsko polje samo su dva oblika jednog, *elektromagnetskog polja*. A što ako se čestica giba relativističkom brzinom  $v \lesssim c$ ? Tada se moramo prisjetiti da fizičku realnost – koja ostaje nepromijenjena bez obzira na sustav – predstavlja promjena količine gibanja  $\Delta p$ , a ona je jednaka impulsu sile  $F \cdot \Delta t$ . Budući da se pri velikim brzinama mijenja i vremenski interval (*Mehanika i toplina*, poglavlje 9.)

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.5)$$

zaključujemo da je  $F \Delta t = F' \Delta t$ , dakle, ponovno u oba sustava dobivamo isti rezultat.

Elektromagnetskom međudjelovanju te njegovim posljedicama i primjenama posvetili smo prvi dio ovog udžbenika. Spomenimo ovdje još samo poseban slučaj sile koja se javlja između dvaju točkastih naboja  $q_1$  i  $q_2$ , koji miruju na međusobnoj udaljenosti  $r$ . Ta je sila dana Coulombovim zakonom:

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{r}_0 \quad (9.6)$$

gdje je  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1}\text{m}^{-2}\text{C}^2$  električna permitivnost vakuumu. Sila je privlačna ako su naboji različitih predznaka, a odbojna ako su predznaci obaju naboja jednaki. Ovisnost sile o udaljenosti za ta dva slučaja prikazana je na sl. 9.3. Uočavamo da se Coulombova sila, poput gravitacijske, smanjuje s kvadratom udaljenosti, i da stoga ima beskonačan doseg. Usporedimo li jakost elektrostatske i gravitacijske sile kojom uzajamno djeluju elektroni, protoni ili druge nabijene čestice, zapanjit će nas podatak koliko je elektrostatska sila jača.

#### Primjer 9.4.

Izračunajte omjer između sile elektrostatskoga privlačenja i gravitacijske sile koja djeluje između protona i elektrona u vodikovu atomu. Udaljenost je protona i elektrona  $a_0 = 0,053 \text{ nm}$ .

Elektrostatska sila iznosi:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2},$$

a gravitacijska:

$$F_g = \gamma \frac{m_e m_p}{a_0^2},$$

pa je njihov omjer:

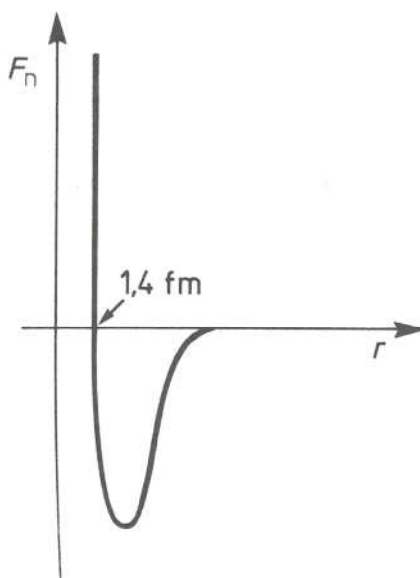
$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot m_e m_p} = 2,3 \cdot 10^{39}.$$

Elektromagnetsko međudjelovanje osnovica je za brojne primjene u suvremenom svijetu. Na njemu se osnivaju elektrotehnika i elektronika, bez njega ne bi bilo elektronskih računala ni televizije, industrijskih postrojenja ni udobnosti svakodnevnog života. Najbitnija je, međutim, uloga koju elektromagnetsko međudjelovanje ima u strukturi tvari i u uzrocima svojstava tvari. Elektromagnetsko je međudjelovanje ono koje drži na okupu elektrone i jezgru u atomu, ono je uzrok molekularnim i međumolekularnim silama i odgovorno je za kemijske promjene. Sva energija oslobođena u kemijskim reakcijama zapravo je elektromagnetska potencijalna energija. Elektromagnetsko međudjelovanje ima nezamjenljivu ulogu u mnogim mjer-nim tehnikama i metodama, a njegovo poznavanje nužan je preduvjet za istraživanje i razvoj suvremenih materijala i tehnoloških procesa.



## 9.5. Jako međudjelovanje

*Jako međudjelovanje* naziva se katkad i jako nuklearno, jer djeluje unutar atomske jezgre. To je međudjelovanje koje drži na okupu nukleone (protone i neutrone) u atomskoj jezgri. Osim nukleona, otkriven je cijeli niz čestica srodnih nukleonima, koje uzajamno djeluju jakim međudjelovanjem. Jake nuklearne sile jače su od svih ostalih međudjelovanja poznatih u prirodi, oko stoput jače od elektromagnetskih sila. Doseg je jakoga međudjelovanja mali, oko  $10^{-15}$  m, što je približno jednako veličini jezgre. Zbog toga nuklearno međudjelovanje ne utječe na stvaranje molekula i na kemijske pretvorbe tvari; to su, naime, pojave u kojima jezgra uglavnom ostaje nepromijenjena. Međutim, u procesima u kojima se mijenja stanje jezgre (nuklearne reakcije, nuklearni raspad), oslobađa se dio nuklearne potencijalne energije. Budući da je nuklearna sila vrlo jaka u usporedbi s električnim silama koje djeluju u atomu, i oslobođena je energija pri nuklearnim reakcijama mnogo veća od one u kemijskim procesima. Dok su tipične energije pri promjenama stanja atoma oko 10 eV, pri nuklearnim procesima energije iznose oko 1 MeV. Odatle potječe veliko značenje jakih nuklearnih sila u energetici i tehnologiji.



Slika 9.4. Jako nuklearna sila

Navedimo sada neka od bitnih obilježja nuklearnih sila. Za razliku od elektromagnetskoga i gravitacijskoga međudjelovanja, nema jednostavnog i općenitog izraza kojim bismo mogli izraziti nuklearnu silu ili odgovarajuću potencijalnu energiju. Osim o udaljenosti među česticama, ova sila ovisi i o njihovim svojstvima, kao što je, naprimjer, spin. Pri opisivanju uzajamna djelovanja među nukleonima nuklearni se fizičari služe mnoštvom približnih izraza, koji omogućuju interpretaciju eksperimentalnih rezultata.

**Primjer 9.5.**

Jednostavna približna formula za nuklearno međudjelovanje između dvaju nukleona dana je *Yukawinom potencijalnom energijom*:

$$E_p^{Yuk} = -E_0 e^{-\frac{r}{r_0}} \left( \frac{r_0}{r} \right) \quad (9.7)$$

gdje je  $E_0 = 50 \text{ MeV}$  i  $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ . Prikažite grafički Yukawinu potencijalnu energiju za  $r = 0,5r_0, r_0, 1,5r_0, 2r_0$  i  $3r_0$ . Usporedite rezultat s elektrostatskom potencijalnom energijom dvaju protona na istoj udaljenosti.

Izračunajmo vrijednosti za Yukawinu potencijalnu energiju

$$E_p^{Yuk} = -50 \text{ MeV} \cdot \left( \frac{r_0}{r} \right) e^{-\frac{r}{r_0}}$$

i za elektrostatsku potencijalnu energiju (v. pogl. 1):

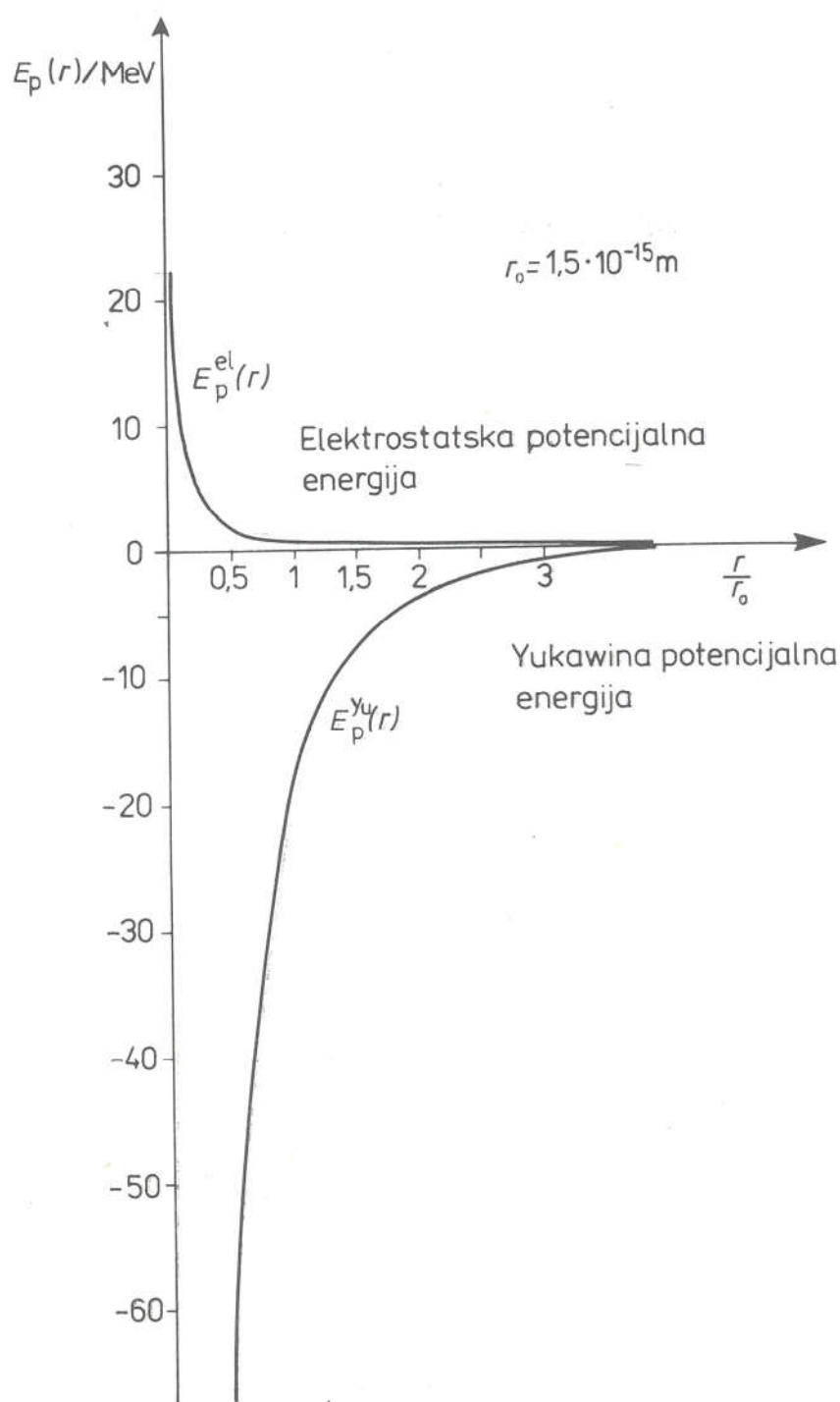
$$E_p^{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0} \left( \frac{r_0}{r} \right) = 0,96 \text{ MeV} \cdot \left( \frac{r_0}{r} \right)$$

Dobivamo tablicu:

| $r/r_0$                | 0,5    | 1,0    | 1,5   | 2,0   | 3,0   |
|------------------------|--------|--------|-------|-------|-------|
| $E_p^{Yuk}/\text{MeV}$ | -60,65 | -18,39 | -7,44 | -3,38 | -0,83 |
| $E_p^{el}/\text{MeV}$  | 1,92   | 0,96   | 0,64  | 0,48  | 0,32  |

Iz tablice i grafičkog prikaza (sl. 9.4) opaža se da na malim udaljenostima nuklearno privlačenje među protonima izrazito prevladava nad elektrostatskim odbijanjem. Na većim udaljenostima nuklearnog privlačenja nestaje i tada se opaža djelovanje električnih sila.

Smatra se da je nuklearna sila na vrlo malim udaljenostima izrazito odbojna. Dva nukleona u jezgri ne mogu se približiti na udaljenost manju od oko 0,4 fm, što se na krivulji potencijalne energije očituje postojanjem beskonačno strmog zida na toj udaljenosti (sl. 9.5). Kad se približe na najmanju udaljenost  $r_0$ , nukleoni se uzajamno odbijaju poput tvrdih kuglica. Takve odlike sila među nukleonima uzrok su mnoštvu raznoraznih nuklearnih fenomena o kojima će biti više riječi u 16. pogl.



Slika 9.5. Yukawina potencijalna energija

## 9.6. Slabo međudjelovanje

*Slabo međudjelovanje*, ili – kako se katkad još naziva – slabo nuklearno međudjelovanje, odgovorno je za mnoge procese i pretvorbe što se zbivaju među osnovnim česticama u prirodi, naprimjer za  $\beta$ -raspad. U  $\beta$ -raspadu neutron prelazi u elektron



i proton, a pritom nastaje i čestica nazvana antineutrino:



Sličan se proces zbiva kad se jedan neutron u atomskoj jezgri pretvori u proton, uz emisiju elektrona i antineutrina. Pritom se atom rednog broja  $Z$  pretvara u atom rednog broja  $Z + 1$ . Takve pretvorbe su prvi put primijećene potkraj 19. st. i bile su veliko iznenađenje za znanstvenike, koji su dotad vjerovali da su atomi nepromjenljive tvorevine. Uzrok je tim pretvorbama slabo međudjelovanje.

Doseg slaboga međudjelovanja vrlo je mali, dosta manji od promjera atomske jezgre. Ono se može uspoređivati s elektromagnetskim međudjelovanjem, no i od njega je slabije za faktor 10 do  $10^3$ . U opisu slabih međudjelovanja nisu prikladni pojmovi sile i potencijalne energije, jer su tu relativistički efekti izrazito važni.

Slabo međudjelovanje predmet je intenzivna proučavanja u suvremenoj fizici, i u proteklom je desetljećima odigralo važnu ulogu u razumijevanju svojstava osnovnih čestica. Zahvaljujući njemu u prirodi nema slobodnih neutrona. Slabo je međudjelovanje također odgovorno za to što ne postoje izotopi većih atomskih masa: kad neka jezgra ima previše neutrona, neutron se pretvara u proton, a čitav atom postaje atom drugog elementa. Ne možemo, dakle, tvrditi da se u svijetu oko nas ne osjećaju posljedice slaba međudjelovanja. Međutim, neposredno u svakodnevnom životu, u kemijskim procesima i u tehnološkim primjenama, ono je najmanje prisutno od svih četiriju osnovnih međudjelovanja.

**Zaključak.** Recimo na kraju da je naše današnje poznavanje četiriju osnovnih međudjelovanja rezultat velikog broja preciznih i domišljatih eksperimenata i teorijskih proračuna. Fizičari i dalje istražuju i usavršavaju svoje uređaje i razvijaju teorijske modele. Jedno od pitanja na koje žele odgovoriti jest ovo: postoji li veza između četiriju osnovnih međudjelovanja, imaju li ona neko zajedničko porijeklo? Dosad se elektromagnetsko uspjelo povezati sa slabim međudjelovanjem. Međutim, na pitanje kako to da se gravitacijska i elektrostatska sila smanjuju s kvadratom udaljenosti, a toliko su različite po intenzitetu, i nema li nekog zajedničkog izvora tih dviju sila, još nema odgovora. Postoje li zajednički uzroci svim međudjelovanjima, i nisu li možda u prirodi prisutna i neka još nepoznata međudjelovanja? Fizičari u cijelome svijetu danas intenzivno tragaju za odgovorima na ta pitanja, i nadajmo se da ćemo bar neke od njih saznati u bliskoj budućnosti.

Upoznavši osnovna međudjelovanja među česticama koje su sastavni dio tvari, sljedeći je zadatak fizike da predvidi i objasni svojstva tih tvari. U tome kompleksnom zadatku neprocjenjivo je važno poznavanje općih zakonitosti kojima se podvrgava materija i koje određuju njezin gibanje i promjene.

Imajući to na umu, u sljedećim četiri poglavlja upoznat ćemo zakone očuvanja, kao i zakone klasične i kvantne fizike koji upravljaju strukturom tvari.

## Pitanja i zadaci

- 9.1. Koja su znanstvena otkrića potkraj 19. i početkom 20. st. unijela bitne promjene u shvaćanje strukture tvari? Kako su ona utjecala na razvoj fizike i kemije?
- 9.2. U kojim se smjerovima nastavila razvijati fizika nakon što su došla do izražaja ograničenja klasične Newtonove mehanike?
- 9.3. Navedite ukratko osnovna načela na kojima se temelje suvremena istraživanja u fizici.
- 9.4. Koliko ima osnovnih međudjelovanja u prirodi, i koja su to?
- 9.5. Navedite matematičke izraze za silu i potencijalnu energiju gravitacijskog međudjelovanja.
- 9.6. Napišite i objasnite izraz za elektromagnetsku (Lorentzovu) silu. Obrazložite utjecaj velikih (relativističkih) brzina na elektromagnetsku silu.
- 9.7. Opišite sličnosti i razlike između gravitacijske i elektrostatske (kulonske) sile.
- 9.8. Izračunajte gravitacijsku i elektrostatsku silu između dvaju protona na uzajamnoj udaljenosti od  $10^{-13}$  m, te nađite njihov omjer.
- 9.9. Riješite prethodni zadatak za potencijalnu energiju.
- 9.10. Koliki je doseg i jakost jakog međudjelovanja? Među kojim česticama ono djeluje?
- 9.11. Nacrtajte i objasnite krivulju koja prikazuje uzajamnu potencijalnu energiju dvaju nukleona.
- 9.12. Izračunajte potencijalnu energiju Yukawina nuklearnog međudjelovanja za dva protona na uzajamnoj udaljenosti od  $10^{-13}$  m. Usporedite je s odgovarajućom gravitacijskom i elektrostatskom potencijalnom energijom. Obrazložite rezultat.



## 10. Zakoni očuvanja

Promatrajući gibanje čestica i tijela, otkrili smo da neke fizikalne veličine zadržavaju stalnu vrijednost u zatvorenom sistemu, bez obzira na promjene koje se zbivaju unutar sistema. Takve veličine su količina gibanja, moment količine gibanja, energija i električni naboj.

Nepromjenljivost navedenih veličina u fizici nazivamo zakonima očuvanja. Ti su zakoni izuzetno važni u istraživanju pojava u prirodi. Njihovo se značenje osniva na činjenici da vrijede uvijek, bez obzira na to o kojim se česticama i tijelima radi i kakva su međudjelovanja prisutna unutar fizikalnog sistema. Zakoni su očuvanja ona spona koja povezuje različita područja fizike i koja omogućuje razumijevanje prirodnih pojava na zajedničkoj osnovi, ma kako one izgledale različite. Kad ne bismo poznavali zakone očuvanja, prirodne bi nam se pojave činile kao kaotičan skup nepredvidivih događaja. Međutim, zakoni očuvanja unose u sve ostale prirodne zakone red i pravilnost i – što je možda najvažnije – omogućuju predviđanje novih pojava i otkrivanje novih zakonitosti.

Naveli smo četiri fizičke veličine – količinu gibanja, moment količine gibanja, energiju i električni naboj – za koje vrijede zakoni očuvanja. Posljedice tih zakona vidljive su u makroskopskim zbivanjima kakva smo proučavali u klasičnoj fizici, no jednako tako i u kemijskim reakcijama te u svim procesima u kojima sudjeluju molekule i atomi. No u prirodi ima i drugih zakona očuvanja. Oni ne dolaze do izražaja u kemijskim i makroskopskim procesima, ali imaju važnu ulogu u nuklearnim reakcijama i u procesima u kojima sudjeluju osnovne čestice visokih energija.

Zakoni očuvanja u uskoj su vezi sa simetrijom fizikalnog sistema. Kažemo da sistem posjeduje izvjesnu simetriju ako ga neki određeni postupak ostavlja nepromijenjenim. Katkad je riječ o simetriji u geometrijskome smislu. Naprimjer: zrcalimo li kvadrat oko osi koja prolazi kroz dva suprotna vrha, ništa se neće promijeniti. Ili, zavrtnimo li kružnicu oko njezina središta za bilo koji kut, ona ostaje nepromijenjena. No simetrija može imati i drukčiji smisao. Centralnu simetriju, naprimjer, posjeduje čestica ako njezina potencijalna energija ne ovisi o kutu, nego samo o udaljenosti od ishodišta.

Pokazalo se da je svaka takva simetrija povezana s očuvanjem neke fizičke veličine. Količina gibanja ostaje očuvana ako se svojstva sistema ne mijenjaju pri linearnom pomaku. Posjeduje li potencijalna energija sistema centralnu simetriju, moment količine gibanja ostaje konstantan. Slično se sa simetrijama mogu povezati energija, električni naboj i sve ostale očuvane veličine.



U slijedećim ćemo odjeljcima ilustrirati kako se zakoni očuvanja količine gibanja i momenta količine gibanja, koje smo izučavali u mehanici (*Mehanika i toplina*, poglavlja 3. i 6) mogu neposredno primijeniti na neke procese u kojima sudjeluju atomi i subatomske čestice. Zatim ćemo se iscrpno baviti zakonom očuvanja energije i njegovim primjenama.

### 10.1. Zakon očuvanja količine gibanja

Očuvanje količine gibanja povezano je s drugim Newtonovim zakonom mehanike, koji možemo izraziti relacijom:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (10.1)$$

Pritom smo s  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  označili zbroj svih sila kojima okolina djeluje na sistem čestica, a

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (10.2)$$

ukupna je količina gibanja sistema čestica. Ako je rezultanta vanjskih sila jednaka nuli, tada je:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0,$$

odakle proizlazi da je:

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{konst.}$$

Za jednu česticu to nas vodi zakonu ustrajnosti (inercije), a primjeri zakona očuvanja količine gibanja za dvije i više čestica poznati su nam iz mehanike: sjetimo se pokusa s topom ili sudara među česticama. Zakon očuvanja količine gibanja vrijedi i u procesima u kojima sudjeluju čestice atomskih i subatomskih dimenzija, te ima ključnu ulogu u tumačenju strukture tvari i u razumijevanju nuklearnih reakcija.

#### Primjer 10.1.

Atomska jezgra, prvobitno u mirovanju, raspadne se radioaktivno i pritom emitira elektron količine gibanja  $p_e = 9,22 \cdot 10^{-21} \text{ kg m s}^{-1}$  i, okomito na smjer elektrona, neutrino količine gibanja  $p_\nu = 5,33 \cdot 10^{-21} \text{ kg m s}^{-1}$ .

a) U kojem će se smjeru otkloniti novonastala (rezidualna) jezgra i kolika je njezina količina gibanja  $p_n$ ?

b) Kolika je brzina  $v_n$  rezidualne jezgre, ako je njezina masa  $m_n = 3,90 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ ?

a) Zbog očuvanja količine gibanja mora biti

$$\vec{p}_e + \vec{p}_\nu + \vec{p}_n = 0, \quad \text{ili} \quad \vec{p}_e + \vec{p}_\nu = -\vec{p}_n,$$

a odatle kvadriranjem dobivamo:

$$(\vec{p}_e + \vec{p}_\nu)^2 = \vec{p}_e^2 + \vec{p}_\nu^2 + 2\vec{p}_e \vec{p}_\nu = \vec{p}_n^2$$

Budući da je kut koji zatvaraju  $\vec{p}_e$  i  $\vec{p}_\nu$   $\alpha_{e\nu} = 90^\circ$ , dobivamo  $\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu = 0$ , dakle je

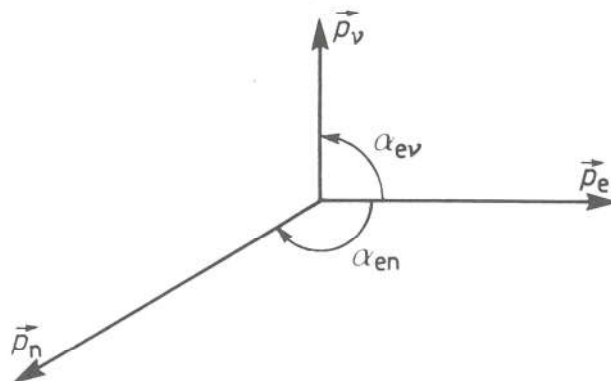
$$p_e^2 + p_\nu^2 = p_n^2 \quad \text{i} \quad p_n = \sqrt{p_e^2 + p_\nu^2},$$

tj. količina gibanja rezidualne jezgre iznosi:

$$p_n = \sqrt{(9,22 \cdot 10^{-21})^2 + (5,33 \cdot 10^{-21})^2} \text{ kg m s}^{-1}$$

$$p_n = 1,06 \cdot 10^{-20} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Želimo naći kut  $\alpha_{en}$  koji smjer otklona jezgre zatvara sa smjerom u kojemu je emitiran elektron.



Slika 10.1. Zakon očuvanja količine gibanja

Možemo pisati:

$$\vec{p}_e + \vec{p}_n = -\vec{p}_\nu,$$

što kvadriranjem daje:

$$p_e^2 + p_n^2 + 2\vec{p}_e \cdot \vec{p}_n = p_\nu^2,$$

ili:

$$p_e^2 + p_e^2 + p_\nu^2 + 2p_n p_e \cos \alpha_{en} = p_\nu^2.$$

Odatle dobivamo:

$$\cos \alpha_{en} = -\frac{p_e}{p_n} = -\frac{9,22 \cdot 10^{-21}}{1,6 \cdot 10^{-21}} = -0,866$$

$$\alpha_{en} = 150^\circ \quad (\text{vidi sl. 10.1}).$$

b) Brzina je rezidualne jezgre:

$$v_n = \frac{p_n}{m_n} = \frac{1,06 \cdot 10^{-20} \text{ kg m s}^{-1}}{3,90 \cdot 10^{-25} \text{ kg}}$$

$$v_n = 2,72 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

## 10.2. Zakon očuvanja momenta količine gibanja

Moment količine gibanja  $\vec{L}$  očuvan je u sistemu ako je rezultanta  $\vec{M}$  momenta vanjskih sila jednaka nuli. Tada se jednadžba gibanja za vrtnju (*Mehanika i toplina*, pogl. 5. i 6):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (10.3)$$

može pisati kao:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

Pritom smo s  $\vec{L}$  označili ukupni moment količine gibanja za sistem čestica:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (10.4)$$

a s  $\vec{M}$  ukupni moment vanjskih sila

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (10.5)$$

Budući da je promjena ukupnog momenta količine gibanja jednaka nuli, znači da veličina  $\vec{L}$  u toku vremena zadržava stalan iznos i smjer:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \text{konst.}$$

Za vrtnju sistema čestica ili tijela oko glavne osi očuvanje kutne količine gibanja može se pisati i na drugi način:

$$L = \sum_i I_i \omega_i = \text{konst.},$$

gdje je  $L$  iznos momenta vrtnje, a njegov smjer ima smjer osi vrtnje. S  $I_i$  označili smo moment tromosti s obzirom na glavnu os, a  $\omega_i$  je kutna brzina  $i$ -te čestice oko te osi. Zakon očuvanja momenta količine gibanja u mehanici smo ilustrirali mnoštvom pokusa (Prandtlov stolić, zvrkovi). Ponovno treba istaknuti da zakon očuvanja momenta količine gibanja vrijedi i u atomskoj, molekularnoj i u nuklearnoj fizici, te da ima važnu ulogu u tumačenju strukture tvari.

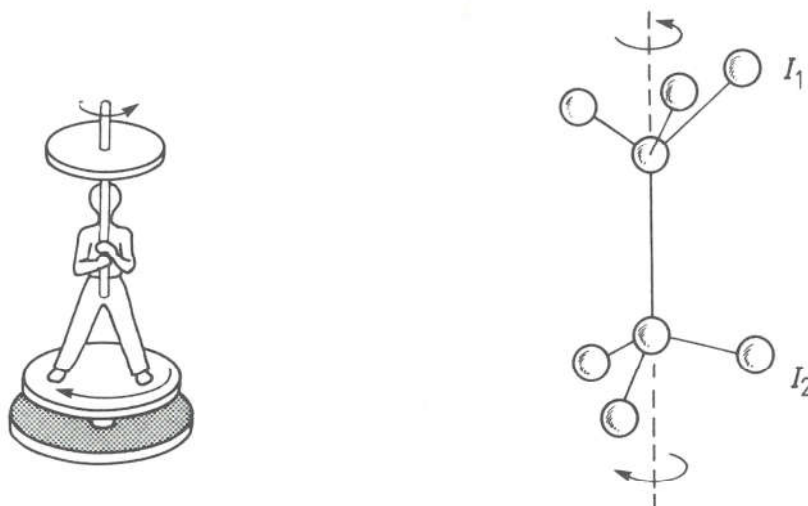
### Primjer 10.2.

a) Čovjek stoji na Prandtlovu stoliću (sl. 10.2.a) i u ruci drži kotač koji se može vrtjeti oko vertikalne osi. Najprije cijeli sistem miruje, a zatim čovjek zavrti kotač u svojoj ruci i opaža da se kotač u odnosu prema njemu vrti relativnom frekvencijom od četiri okretaja u sekundi. Kolikom se frekvencijom vrti stolić, a kojom kotač u odnosu prema Zemlji?



Moment tromosti čovjeka sa stolicem je  $I_1 = 15 \text{ kg m}^2$ , a moment tromosti kotača iznosi  $I_2 = 1 \text{ kg m}^2$ .

b) Riješite isti zadatak ako je posrijedi relativna (unutrašnja) vrtnja molekule (v. sl. 10.2.b). Momenti su tromosti dviju atomskih grupa:  $I_1 = 5 \cdot 10^{-47} \text{ kg m}^2$  i  $I_2 = 9 \cdot 10^{-47} \text{ kg m}^2$ , a relativna frekvencija iznosi  $\nu = 10^{11} \text{ s}^{-1}$ .



Slika 10.2. Zakon očuvanja momenta količine gibanja

a) Relativna je kutna brzina kotača prema stoliću:

$$\omega = \omega_2 - \omega_1.$$

Kutna količina gibanja cijeloga sistema iznosi:

$$L = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = 0,$$

jer na početku uopće nije bilo vrtnje.

Za frekvencije  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  vrijedi:

$$\nu = \nu_2 - \nu_1$$

$$I_1\nu_1 + I_2\nu_2 = 0.$$

Odatle izlazi za frekvenciju vrtnje stolića:

$$\nu_1 = -\frac{\nu}{1 + \frac{I_1}{I_2}} = -\frac{4 \text{ s}^{-1}}{1 + \frac{15}{1}} = -\frac{4}{16} \text{ s}^{-1} = -0,25 \text{ s}^{-1},$$

a za frekvenciju vrtnje kotača:

$$\nu_2 = \frac{\nu}{1 + \frac{I_2}{I_1}} = \frac{4 \text{ s}^{-1}}{1 + \frac{1}{15}} = 3,75 \text{ s}^{-1}.$$

b) Za frekvenciju vrtnje prve atomske grupe dobivamo:

$$\nu_1 = -\frac{\nu}{1 + \frac{I_1}{I_2}} = -6,43 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1},$$

a druga se grupa atoma u molekuli vrti frekvencijom od:

$$\nu_2 = \frac{\nu}{1 + \frac{I_2}{I_1}} = 3,57 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}.$$

### 10.3. Zakon očuvanja energije

Poznato nam je da se energija u prirodi pojavljuje u različitim oblicima: gravitacijska, električna, toplinska i kemijska energija, energija zračenja, nuklearna itd. Znamo također da se energija može pretvarati iz jednog oblika u drugi. Pritom ukupan zbroj svih vrsta energije ostaje nepromijenjen. Ako u nekom pokusu ili tehnološkom procesu izmjerimo potrošenu i dobivenu energiju i utvrdimo da one nisu jednake, to samo može značiti da nismo dovoljno precizno mjerili ili da se energija potrošila na neki dio sistema o kojemu nismo vodili računa. U prošlosti se fizika sastojala od više nepovezanih područja; jedan od glavnih razloga tome bio je što nije odmah uočeno da se energija u svim tim naizgled različitim sistemima može i mora opisivati na isti način.

Zakon očuvanja energije upoznali smo u mehanici. Na osnovi Newtonovih zakona zaključili smo da se energija čestice mase  $m$  sastoji od energije gibanja ili kinetičke energije  $E_k = \frac{mv^2}{2}$  i od energije položaja ili potencijalne energije  $E_p(\vec{r})$ . Ukupna energija čestice

$$E = E_k + E_p \quad (10.6)$$

ostaje nepromijenjena.

Potencijalna energija uzrokovana je međudjelovanjem s drugim tijelima, dakle, ovisi o položaju što ga čestica zauzima, s obzirom na druga tijela. Ona se, dakle, može izraziti kao funkcija položaja. Mijenja li se položaj čestice, mijenja se i njezina potencijalna energija. Ukupna energija može pritom ostati konstantna samo tako da se na odgovarajući način promijeni i kinetička energija.

Za sistem više tijela ukupna se energija sastoji od kinetičke

$$E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (10.7)$$

i od potencijalne energije

$$E_p = \sum_i E_p(i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq l} E_p(i, l) \quad (10.8)$$

Prvi član predstavlja energiju koju čestice imaju zbog djelovanja vanjskih sila, a drugi je uzajamna potencijalna energija koju tijela imaju zbog međusobnih interakcija. U drugom članu pojavljuje se faktor  $1/2$  kako se uzajamna energija para čestica  $i$  i  $l$  ne bi brojala dvaput.

U sistemu koji se sastoji od više čestica ima mnogo načina kako se energija može izmjenjivati. Čestice, kao naprimjer u sudarima, mogu međusobno izmjenjivati kinetičku energiju a da se potencijalna uopće ne promijeni. No moguće su i različite druge pretvorbe.

Ako vanjske sile ne djeluju ili je njihova rezultanta konstantna, ukupna energija sistema ostaje očuvana. O tome svjedoče brojni pokusi, i nijedan proces opažen i izmjeren u prirodi nije se dosad sukobio s tim zakonom. Stoga imamo puno pravo pretpostavljati da je zakon očuvanja energije univerzalno i svagdje prisutno pravilo. Pomoću njega možemo stoga otkrivati i nove zakone. Mnogi zakoni u raznim područjima fizike zapravo su posljedica zakona očuvanja energije. Takvi su zakoni primjerice u mehanici fluida, Bernoullieva jednadžba za protjecanje idealnog fluida te, u termodinamici, prvi zakon termodinamike. U elektricitetu, pri proučavanju strujnih krugova – susreli smo se s drugim Kirchoffovim pravilom, koje također nije ništa drugo do zakon očuvanja energije.

### 10.3.1. Potencijalna energija i vremensko ponašanje sistema

Ovdje ćemo pobliže razmotriti još jedan važan aspekt zakona očuvanja energije, da se, naime, pomoću njega može predvidjeti vremensko ponašanje sistema. Za razliku od pristupa u kojemu smo pošli od jednadžbe gibanja (Newtonovi zakoni mehanike) i kao početne uvjete zadali početni položaj i početnu brzinu tijela, sada polazimo od zakona očuvanja energije i obavezno zadajemo ukupnu energiju. Kao rješenje dobivamo vezu brzine i položaja čestice, a zatim integracijom dobivamo ovisnost položaja čestice o vremenu.

Pritom polazimo od izraza (10.6) koji za jednodimenzionalno gibanje ima oblik:

$$E = \frac{mv^2}{2} + E_p(x), \quad \text{što daje:}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}[E - E_p(x)]}.$$

Budući da je  $v = \frac{dx}{dt}$ , prethodni se izraz može napisati kao:

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - E_p(x)}} = dt.$$

Integriramo li to od početnog trenutka ( $t = 0$ ,  $x = x_0$ ) do krajnjeg trenutka ( $t$ ,  $x$ )

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - E_p(x)}} = \int_0^t dt = t \quad (10.9)$$



dobivamo, ovisno o potencijalnoj energiji, položaj čestice u svakom trenutku. Deriviranje će nam, naravno, dati ovisnost brzine o vremenu.

### Primjer 10.3.

Polazeći od zakona očuvanja i izraza za potencijalnu energiju harmoničkog oscilatora  $E_p(x) = (1/2)kx^2$ , nađite ovisnost položaja o vremenu, ako je zadano da je u trenutku  $t = 0$  čestica mase  $m$  u položaju  $x = 0$  te da je njezina ukupna energija  $E$ .

Jednadžba (10.9) poprima oblik:

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2} kx^2}} = t,$$

odakle integriranjem dobivamo:

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} x \right) = t$$

ili:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$

To je poznato rješenje za harmonički oscilator uz relacije koje povezuju amplitudu  $A$  i kružnu frekvenciju  $\omega$  s masom  $m$  i konstantom harmoničke sile  $k$ :

$$E = \frac{1}{2} kA^2 \quad \text{i} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

## 10.4. Energija i masa

U kemijskim reakcijama zbivaju se pretvorbe prilikom kojih se skupine atoma spajaju na različite načine i tvore nove spojeve. Atomistička struktura tvari otkrivena je upravo zahvaljujući tome što se tvari spajaju u zadanim omjerima, i što – poznajući mase sastojaka – možemo predvidjeti i masu spoja. Tako su kemičari zakon o očuvanju mase dugo smatrali jednim od osnovnih zakona prirode, neovisno o zakonu očuvanja energije.

Teorija je relativnosti, međutim, pokazala da je masa  $m$  s energijom najuže povezana relacijom (*Mehanika i toplina*, pogl. 9):

$$E = mc^2.$$

Zakonom je očuvanja energije, dakle, obuhvaćeno i očuvanje ukupne mase:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Čestica već samim tim što postoji posjeduje tzv. energiju mirovanja  $E_0 = m_0 c^2$ . Time, međutim, ništa nije rečeno o očuvanju mase mirovanja  $m_0$ . Masa mirovanja sistema čestica nije jednaka zbroju masa mirovanja pojedinih čestica. To ćemo pokazati sljedećim razmatranjem. Svaka čestica u sistemu ima svoju energiju, a ona se sastoji od energije mirovanja i kinetičke energije:

$$E_i = m_i c^2 = m_{0,i} c^2 + E_{k,i} \quad (10.10)$$

Slovom  $i$  obilježili smo pojedinu česticu.

Ukupna energija cijeloga sistema jednaka je zbroju energija  $E_i$  za sve čestice, čemu još treba pribrojiti ukupnu uzajamnu potencijalnu energiju  $E_p$ , jer čestice jedna na drugu djeluju uzajamnim silama. Dakle, energija mirovanja cijeloga sistema jest:

$$E_0 = \sum_i E_i + E_p = \sum_i m_{0,i} c^2 + \sum_i E_{k,i} + E_p.$$

Zbroj kinetičke energije  $\sum_i E_{k,i} = E_k$  i potencijalne energije  $E_p$  znači promjenu unutrašnje energije sistema:

$$\Delta E = E_k + E_p,$$

a ukupna se energija može pisati kao:

$$E_0 = m_0 c^2 = \sum_i m_{0,i} c^2 + \Delta E.$$

Podijelimo li to s kvadratom brzine svjetlosti, dobivamo relaciju između masa:

$$m_0 = \sum_i m_{0,i} + \frac{\Delta E}{c^2}.$$

Budući da je za vezano stanje obično  $\Delta E < 0$ , masa mirovanja sistema manja je od zbroja mase mirovanja pojedinih dijelova sistema. Razlika masa:

$$\Delta m = \frac{|\Delta E|}{c^2} \quad (10.11)$$

naziva se **defektom mase**. Postavlja se pitanje može li se defekt mase eksperimentalno provjeriti za različite procese u kojima se mijenja unutrašnja energija sistema. Pokazuje se da je defekt mase zanemarivo mali i da je ispod granica točnosti mjerenja ( $\Delta m \lesssim 10^{-10}$  kg) za procese kao što su elastična deformacija, toplinske promjene i – što je važno – za kemijske reakcije. U nuklearnim reakcijama, međutim defekt je mase oko 1% i vidljiv je u eksperimentu.

**Primjer 10.4.**

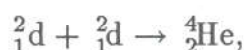
Izračunajte razliku unutrašnje energije i defekt mase koji nastaje u ovim procesima:

a) pri **elastičnoj deformaciji** koja nastaje kad sila od  $F = 2 \cdot 10^4$  N djeluje na čeličnu šipku duljine  $l = 1$  m i presjeka  $S = 1$  cm<sup>2</sup> i produži je za  $\Delta l = 1$  mm;

b) kod **toplinske promjene** pri kojoj se 1 kg vode pretvori u paru. Latentna je toplota isparavanja vode  $L_i = 2,25 \cdot 10^6$  Jkg<sup>-1</sup>;

c) pri **kemijskoj reakciji** koja se zbiva izgaranjem  $m = 1$  kg ugljena. U tom se procesu oslobađa energija od  $\Delta E_k = 3 \cdot 10^7$  J;

d) prilikom **nuklearne reakcije**:



u kojoj se dva deuteronu spajaju u jezgru helija. Pritom od 1 kg deuterija nastaje 993,75 g helija;

e) Usporedite slučajeve c) i d) i izračunajte koliko je ugljena potrebno sagorjeti da bi se dobila jednaka količina energije kao pri nuklearnoj reakciji.

a) Promjena unutrašnje energije pri elastičnoj deformaciji jednaka je radu koji treba obaviti da bi se svladala elastična sila iznosa  $F = k\Delta l$ . Taj je rad:

$$\Delta E_{el} = W = \int_0^{\Delta l} kx \, dx = \frac{1}{2} k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2} F(\Delta l).$$

Razlika unutrašnje energije iznosi:

$$\Delta E_{el} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 10^{-3} \text{ m} = 10 \text{ J},$$

a defekt mase:

$$\Delta m_{el} = \frac{\Delta E_{el}}{c^2} = \frac{10 \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1})^2} = 1,11 \cdot 10^{-16} \text{ kg}.$$

b) Pri isparavanju  $m = 1$  kg vode promjena je unutrašnje energije:

$$E_i = L_i \cdot m = 2,25 \cdot 10^6 \text{ Jkg}^{-1} \cdot 1 \text{ kg} = 2,25 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Tome odgovara defekt mase:

$$\Delta m_i = \frac{\Delta E_i}{c^2} = \frac{2,25 \cdot 10^6 \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1})^2} = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ kg}.$$

c) Iz poznate razlike unutrašnje energije pri sagorijevanju jednog kilograma ugljena:

$$\Delta E_k = 3 \cdot 10^7 \text{ J}$$



može se izračunati defekt mase:

$$\Delta m_k = \frac{\Delta E_k}{c^2} = \frac{3 \cdot 10^7 \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1})^2} = 3,33 \cdot 10^{-10} \text{ kg}.$$

d) Pri nuklearnoj reakciji  ${}^2_1\text{d} + {}^2_1\text{d} \rightarrow {}^4_2\text{He}$  defekt je mase:

$$\Delta m_n = 1 \text{ kg} - 0,99375 \text{ kg} = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Oslobodena je energija:

$$\begin{aligned}\Delta E_n &= (\Delta m_n) \cdot c^2 = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1})^2 \\ \Delta E_n &= 5,625 \cdot 10^{14} \text{ J}.\end{aligned}$$

e) Masa ugljena koja bi imala sagorjeti da bi se dobila ista energija kao pri raspadu 1 kg deuterija iznosi:

$$\begin{aligned}m &= \frac{\Delta E_n}{\Delta E_k} \text{ kg} = \frac{5,625 \cdot 10^{14} \text{ J}}{3 \cdot 10^7 \text{ J}} \text{ kg} \\ m &= 1,875 \cdot 10^7 \text{ kg}.\end{aligned}$$

Defekt mase i razlika unutrašnje energije podaci su koji sadrže važnu informaciju o jakosti uzajamna međudjelovanja među česticama, a možemo je doznati ako izračunamo energiju vezanja  $\mathcal{E}$  koja otpada na pojedinu česticu

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta E}{N}.$$

Pritom ćemo broj čestica  $N$  doznati iz relacije:

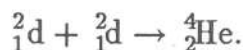
$$N = N_A \frac{m}{M},$$

gdje je  $m$  masa,  $N_A$  Avogadrova konstanta, a  $M$  molna masa spoja.

### Primjer 10.5.

Uzevši u obzir rezultate prethodnoga primjera, izračunajte kolika energija vezanja otpada:

- na jednu molekulu pri elastičnoj deformaciji čelične šipke;
- na jednu molekulu vode pri isparavanju;
- na jedan atom ugljika pri sagorijevanju;
- na jednu jezgru helija prilikom nuklearne reakcije:



a) Masa je čelične šipke (uz podatak da je gustoća čelika  $\rho_{\text{č}} = 7,7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ );

$$\begin{aligned}m &= \rho_{\text{č}} l S = 7,7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 1 \text{ m} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \\ m &= 0,77 \text{ kg}.\end{aligned}$$

Ako za molnu masu čelika uzmemo  $M = 60 \text{ g mol}^{-1}$ , broj je molekula:

$$N = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot \frac{0,77 \text{ kg}}{60 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}$$

$$N = 7,7 \cdot 10^{24},$$

a energija vezanja po molekuli iznosi:

$$\mathcal{E}_{el} = \frac{\Delta E_{el}}{N} = \frac{10 \text{ J}}{7,7 \cdot 10^{24}} = 1,30 \cdot 10^{-24} \text{ J}$$

$$\mathcal{E}_{el} = 10^{-5} \text{ eV}.$$

b) Broj je molekula u 1 kg vode:

$$N = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{18,02 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}$$

$$N = 3,34 \cdot 10^{25}.$$

Energija vezanja koja otpada na jednu molekulu iznosi:

$$\mathcal{E}_i = \frac{\Delta E_i}{N} = \frac{2,25 \cdot 10^6 \text{ J}}{3,34 \cdot 10^{25}} = 6,74 \cdot 10^{-26} \text{ J}$$

$$\mathcal{E}_i = 0,42 \text{ eV}.$$

c) U 1 kg ugljena ima:

$$N = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{12,011 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}$$

$$N = 5,01 \cdot 10^{25}$$

atoma ugljika. Energija vezanja po atomu iznosi:

$$\mathcal{E}_k = \frac{\Delta E_k}{N} = \frac{3 \cdot 10^7 \text{ J}}{5,01 \cdot 10^{25}} = 6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\mathcal{E}_k = 3,7 \text{ eV}.$$

d) Broj atoma u 0,993 75 kg helija jest:

$$N = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot \frac{0,993 75 \text{ kg}}{4,01 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}$$

$$N = 1,49 \cdot 10^{26}.$$

Energija je vezanja po jednoj helijevoj jezgri:

$$\mathcal{E}_n = \frac{\Delta E_n}{N} = \frac{5,625 \cdot 10^{14} \text{ J}}{1,49 \cdot 10^{26}} = 3,77 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

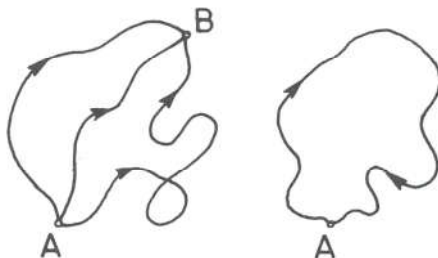
$$\mathcal{E}_n = 2,36 \cdot 10^7 \text{ eV} = 23,6 \text{ MeV}.$$

## 10.5. Konzervativne i nekonzervativne sile

Konzervativne su sile one sile kod kojih je obavljen rad jednak razlici potencijalnih energija. Ako se čestica giba pod djelovanjem konzervativne sile, i pritom se pomakne iz točke A u točku B, obavljeni rad ovisi samo o početnoj i konačnoj točki. On je jednak razlici potencijalnih energija:

$$W_{AB} = E_p(B) - E_p(A).$$

Za svaku stazu koja spaja točke A i B, bez obzira na to koliko ona bila dugačka i zapetljana, rad je jednak (v. sl. 10.3.a). Ista se činjenica može izreći i tvrdnjom da je rad na zatvorenoj krivulji jednak nuli (sl. 10.3.b). Konzervativne su sile naprimjer sila gravitacije, elektrostatska sila i harmonička sila (*Mehanika i toplina* 4. pogl.).



Slika 10.3. Rad konzervativne sile

Iz iskustva znamo da u svakodnevnu životu i u laboratoriju susrećemo i sile koje nemaju navedeno svojstvo. Popnemo li se pa zatim spustimo stepenicama, ili načinimo li kružnu šetnju kroz gradske ulice, s pravom smo uvjereni da smo potrošili dosta energije i obavili neki rad. Pustimo li tijelo da klizi po kosini, potrošeni rad i razlika potencijalnih energija nisu jednaki. To nas navodi na misao da u prirodi ima i sile koje nisu konzervativne, kao što je primjerice sila trenja. Takve sile nazivamo **nekonzervativnim** ili **disipativnim** silama. Čini se na prvi pogled, a i samo ime tih sila sugerira nam takvu pomisao, da se pri njihovom svladavanju ne održava energija. To, međutim, nije točno. Kad predmet klizi niz kosinu, dio njegove energije potroši se na svladavanje sile trenja. Što to zapravo znači? To znači da je i kosina dio našeg sistema, a mi to nismo uzeli u obzir. Površina kosine sastoji se od neravnina, koje su opet nakupine molekula. Predmet koji klizi izaziva promjene u stanju tih molekula, on ih ubrzava, mijenja njihove međusobne udaljenosti i tako zapravo mijenja unutrašnju energiju sistema. Budući da smo u takvim primjerima obično zainteresirani samo za gibanje predmeta, gledano makroskopski, sve ostalo pripisujemo trenju. Treba, međutim, razumjeti da se takve pojave načelno mogu objasniti mikroskopski, međudjelovanjem između pojedinih čestica (atoma, molekula ...), a tada se sve promjene mogu protumačiti osnovnim međudjelovanjima, koja su uvijek konzervativne sile.



## Pitanja i zadaci

- 10.1. Objasnite smisao zakona očuvanja u prirodi. Koje smo očuvane veličine dosad upoznali?
- 10.2. Ima li, osim očuvanja količine gibanja, momenta količine gibanja, energije i električnoga naboja, i drugih zakona očuvanja, i gdje oni dolaze do izražaja?
- 10.3. Što razumijevamo pod pojmom simetrije u prirodi? Ima li veze između simetrije i zakona očuvanja?
- 10.4. Opišite zakone očuvanja količine gibanja i momenta količine gibanja, koje ste upoznali u klasičnoj mehanici.
- 10.5. Navedite zakone i pravila klasične fizike koji proizlaze iz zakona očuvanja energije i električnoga naboja.
- 10.6. Obrazložite kako se vremensko ponašanje čestice može predvidjeti ako se poznaje ovisnost njezine potencijalne energije o položaju.
- 10.7. Nađite vremensko ponašanje čestice mase  $m$  i ukupne energije  $E$ , pretpostavljajući da potencijalna energija ovisi o udaljenosti  $x$  po zakonu  $E_p = mgx$ .
- 10.8. Što je to defekt mase?
- 10.9. Kolik je (navedite red veličine) defekt mase za tipične procese što se zbivaju u elastičnim, toplinskim, kemijskim i nuklearnim promjenama?
- 10.10. Izračunajte koliko se energije oslobodi pri fuziji triju  $\alpha$ -čestica u jezgru  $^{12}\text{C}$ .
- 10.11. Objasnite razliku između konzervativnih i disipativnih sila. Navedite primjere. Ima li među osnovnim međudjelovanjima takvih koja su disipativna?
- 10.12. Predmet mase 200 g, koji klizi niz kosinu visine 20 cm i nagiba  $30^\circ$ , stigne na podnožje kosine brzinom od 1 m/s. Predmet nema početne brzine.
  - a) Koliko je energije tijelo izgubilo? Kolika je razlika potencijalnih energija?
  - b) Kolika je sila trenja, a kolik prijeđeni put?
  - c) Koliki je rad utrošen na svladavanje sile trenja?

## 11. Primjena zakona očuvanja energije na vezane sisteme

### 11.1. Uvod

U ovom ćemo poglavlju zakone očuvanja, znanje o osnovnim međudjelovanjima i poznavanje dinamike materijalne točke i krutog tijela primijeniti na jednostavne vezane sisteme kakve susrećemo u proučavanju strukture tvari. Takvi su sistemi, naprimjer, dvoatomna molekula ili sustav Zemlja–Sunce, koji se mogu opisati relativnim gibanjem jedne čestice prema drugoj. Takav jednostavan sistem može biti i neka složenija molekula, npr.  $C_2H_6$ , koja poput krutoga tijela rotira oko unutrašnje osi.

Iz dosadašnjih primjera možemo zaključiti da je dovoljno poznavati potencijalnu energiju, te da odatle možemo naći jednadžbe koje upravljaju gibanjem čestice. Posebno je važno, i to ćemo napose istaknuti u ovom poglavlju, da se i bez rješavanja jednadžbi i bez postupka integriranja može predvidjeti ponašanje čestice ako se pozna njezina potencijalna energija.

Poznajemo li ovisnost konzervativne sile o položaju čestice, jednostavnim postupkom možemo naći potencijalnu energiju te čestice u bilo kojoj točki prostora. Zato za konzervativne sile opis međudjelovanja dvaju tijela pomoću sile možemo zamijeniti izrazom koji nam daje potencijalnu energiju. Ta su dva načina opisi- vanja interakcije načelno potpuno ravnopravna. U klasičnoj mehanici služili smo se uglavnom pojmom sile, i osnovna jednadžba koja nam je služila za predviđanje svojstava fizikalnog sistema bio je drugi Newtonov zakon. U kvantnoj fizici, u fizici materijala i fizici čestica, no isto tako i u mnogim područjima klasične fizike i u njezinim primjenama, međudjelovanja se najčešće opisuju pomoću potencijalne energije. Izrazita prednost potencijalne energije nad pojmom sile jest u tome što je potencijalna energija skalarna veličina i što se računi za višestruke sisteme svode na zbrajanje skalarnih veličina. To je mnogo jednostavnije nego zbrajanje sila koje su vektorske veličine. Ima, međutim, još jedan razlog: sila je pojam uveden u mehanici, i u svojem se klasičnom obliku ne može primijeniti na sva međudjelovanja. Pojam sile sadrži u sebi pretpostavku trenutna djelovanja. Stvarne interakcije u prirodi, međutim, nisu trenutačne: npr. elektromagnetsko se međudjelovanje širi brzinom svjetlosti  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ , koja je velika, ali ipak konačna.



## 11.2. Veza između sile i potencijalne energije

Da bismo našli izraze koji povezuju silu i potencijalnu energiju, moramo se sjetiti da je, za konzervativne sile, rad moguće dobiti samo na račun potencijalne energije sistema. Ako promatramo rad obavljen na infinitezimalnom putu  $dx$ , on je po iznosu jednak promjeni potencijalne energije toga sistema, no suprotna je predznaka:

$$dW = -dE_p.$$

Budući da je za česticu koja se giba na pravcu,

$$dW = F(x) dx,$$

dobivamo

$$F dx = -dE_p,$$

odakle slijedi:

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \quad (11.1)$$

Ovaj izraz treba shvatiti kao derivaciju funkcije potencijalne energije, i on nam omogućuje da iz poznate potencijalne energije nađemo silu. Često nam je, međutim, potrebna obrnuta veza. Budući da je obrnuta operacija od deriviranja integriranje, možemo pisati:

$$E_p(x) = -\int_{x_r}^x F(x) dx. \quad (11.2)$$

Pritom je  $x$  točka u kojoj se nalazi čestica. Vezu potencijalne energije i sile možemo izračunati i pomoću neodređena integrala, uz uvjet da vrijednost konstante prilagodimo zadanim početnim uvjetima.

Uočavamo da potencijalna energija nije određena jednoznačno. Za istu silu možemo nacrtati mnogo različitih potencijalnih krivulja koje se međusobno razlikuju samo za vrijednost konstante. Ta konstanta ovisi o položaju točke  $x_r$ , koju nazivamo **referentnom točkom**. Vrijednost  $x_r$  zadajemo tako da potencijalna energija u toj točki bude jednaka nuli.

Potencijalne energije koje se međusobno razlikuju samo za konstantu znače, međutim, istu fizikalnu situaciju, jer daju jednaku silu.

Jednakost (11.1) koja povezuje potencijalnu energiju i silu ima važnu posljedicu: ako je na nekom mjestu  $x_0$  sila jednaka nuli, znači da je na tom mjestu derivacija potencijalne energije jednaka nuli. Drugim riječima, krivulja potencijalne energije na tom mjestu ima ekstrem – minimum ili maksimum. Posebno su važne točke u kojima  $E_p(x)$  ima minimum: to su točke u kojima je sistem u stabilnoj ravnoteži.

## 11.3. Harmonički oscilator u jednoj dimenziji

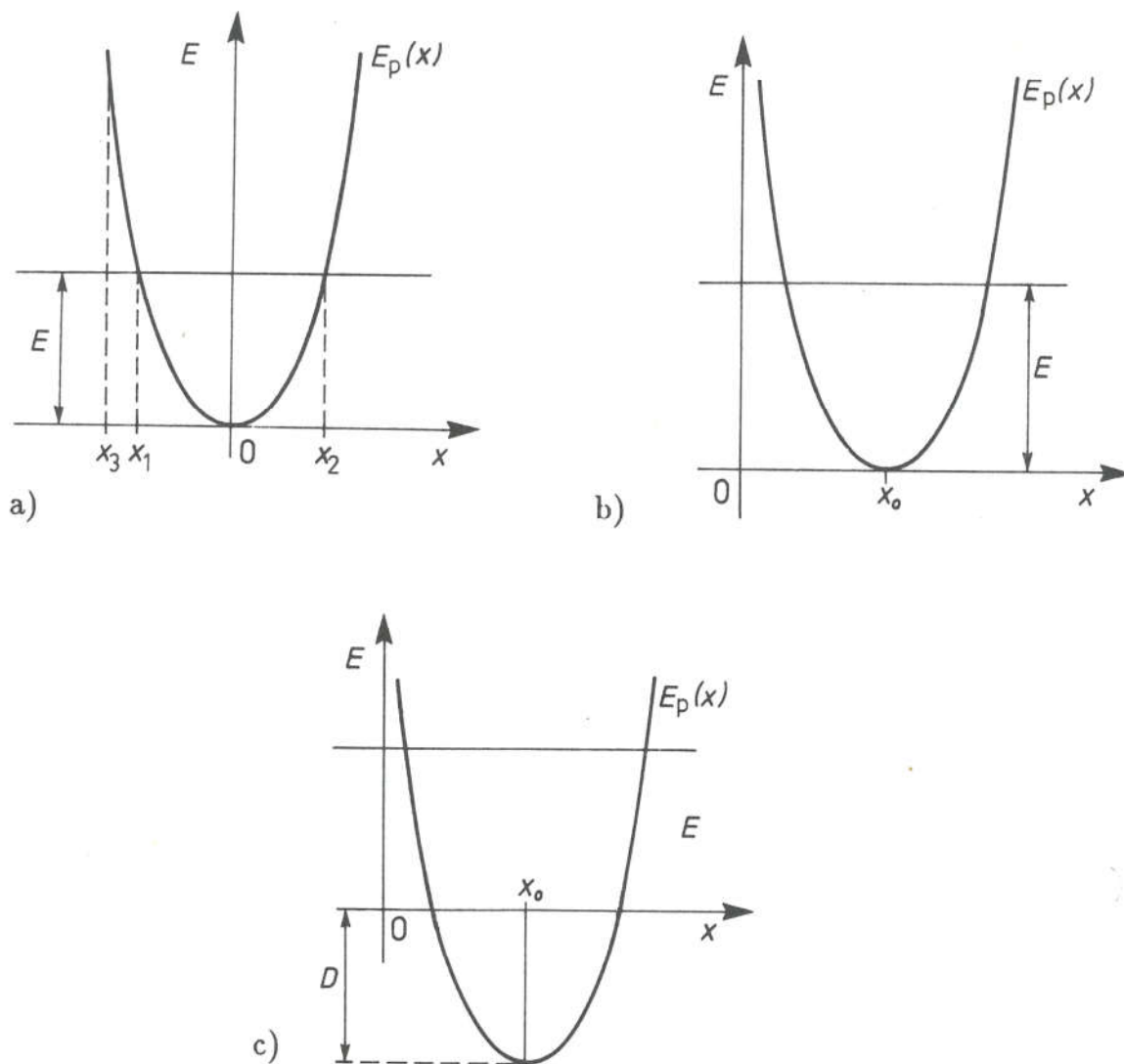
Ovim primjerom, koji je dobro poznat iz mehanike, ilustrirat ćemo kako se iz oblika krivulje potencijalne energije mogu izvući zaključci o ponašanju sistema.



Titranje čestice na pravcu uzrokuje harmonička sila  $F(x) = -kx$ , što pomoću relacije (11.2) vodi na izraz za potencijalnu energiju:

$$E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (11.3)$$

Ovdje je  $k$  konstanta harmoničke sile, a oblik je potencijalne krivulje parabola (v. sl. 11.1.a). Gibanje čestice ovisi o njezinoj ukupnoj energiji  $E$ . Čestica te



Slika 11.1. Potencijalna energija harmoničke sile

energije titrat će oko ravnotežnog položaja  $x = 0$  u konačnom dijelu prostora, između točaka  $x_1$  i  $x_2$ . Ona se ne može naći u točki  $x_3$ , jer bi tada njezina kinetička energija  $E_k = \frac{mv^2}{2}$  bila negativna, a to je nemoguće. Ma kolika joj bila ukupna energija, čestica se nikad neće moći sasvim otrgnuti od ravnotežna položaja i otići u nepovrat. Takva je čestica uvijek u vezanu stanju, ali čestica veće energije titrat će s većom amplitudom.

Umjesto u ishodištu, ravnotežni položaj čestice mogao je biti u nekoj točki  $x = x_0$ , kao što je prikazano na sl. 11.1.b. Tada je potencijalna energija opisana izrazom:

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k(x - x_0)^2, \quad (11.4)$$

a svi ostali zaključci ostaju isti.

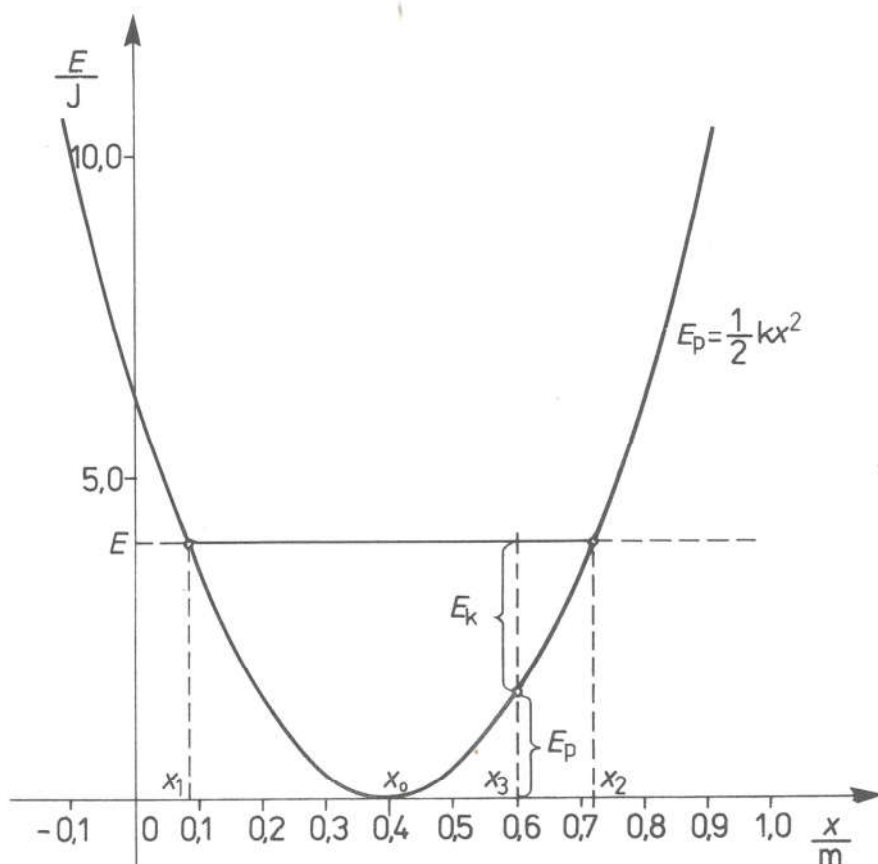
Budući da je fizikalna situacija nepromijenjena ako potencijalnoj i ukupnoj energiji dodamo jednak konstantni član, situacija izražena u izrazu (11.4) može se opisati i potencijalnom energijom:

$$E_p(x) = -D + \frac{1}{2} k(x - x_0)^2 \quad (11.5)$$

prikazanom na sl. 11.1.c. Ona nam samo kaže da smo odabrali drugu vrijednost kao polazište od kojega mjerimo energiju.

### Primjer 11.1.

Čestica mase  $m = 1$  g titra oko ravnotežnoga položaja  $x_0 = 0,4$  m pod djelovanjem harmoničke sile kojoj je konstanta  $k = 80$  Nm<sup>-1</sup>. Ukupna je energija čestice  $E = 4$  J.



Slika 11.2. a) Potencijalna energija kod harmoničkog oscilatora

a) Napišite potencijalnu energiju i silu i nacrtajte njihov grafički prikaz u intervalu  $-0,1 \text{ m} \leq x \leq 0,9 \text{ m}$ .

Izračunajte:

- b) amplitudu titranja te čestice,
- c) unutar kojeg će se intervala  $(x_1, x_2)$  gibati čestica,
- d) potencijalnu i kinetičku energiju čestice te njezinu brzinu u točki  $x_3 = 0,6$  m,
- e) isto kao u zadatku d) za točku  $x_4 = 0,9$  m. Može li se čestica naći u toj točki?

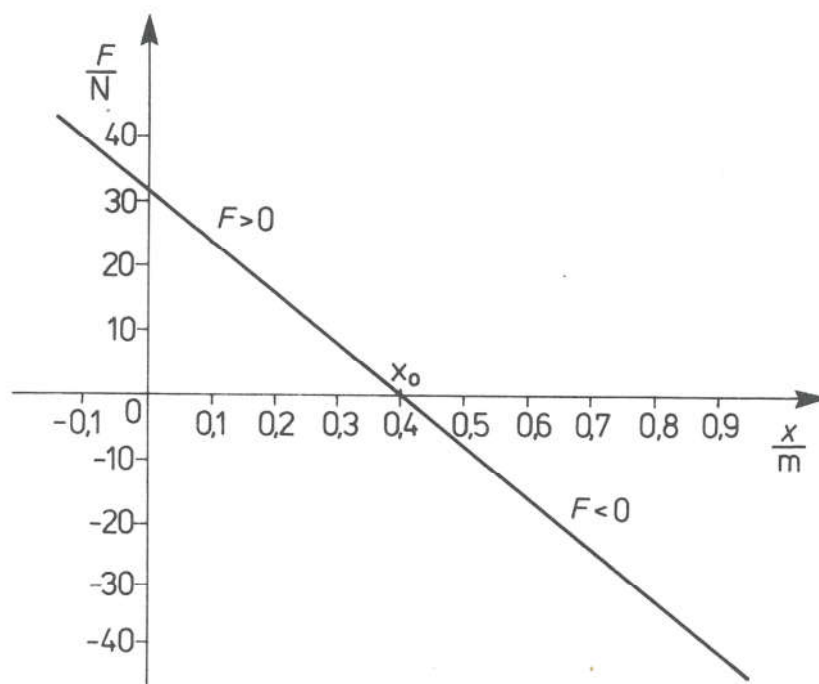
a) Za potencijalnu energiju možemo pisati:

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k(x - x_0)^2 = 40 \text{ Nm}^{-1}(x - 0,4 \text{ m})^2$$

$$E_p(x) = 40 \text{ J} \cdot \left(\frac{x}{\text{m}} - 0,4\right)^2.$$

Grafički prikaz na slici (11.2.a) dobiven je pomoću tablice vrijednosti za točke na paraboli:

| $x/\text{m}$   | -0,1 | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9  |
|----------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| $E_p/\text{J}$ | 10,0 | 6,4 | 3,6 | 1,6 | 0,4 | 0,0 | 0,4 | 1,6 | 3,6 | 6,4 | 10,0 |



Slika 11.2. b) Sila kod harmoničkog oscilatora

Za silu dobivamo ovisnost (sl. 11.2.b):

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx} = -k(x - x_0) = -80 \text{ N} \left(\frac{x}{\text{m}} - 0,4\right).$$



Tablica vrijednosti daje točke na pravcu:

|              |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|--------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x/\text{m}$ | -0,1 | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
| $F/\text{N}$ | 40   | 32  | 24  | 16  | 8   | 0   | -8  | -16 | -24 | -32 | -40 |

b) Amplituda titranja dobije se iz uvjeta da je:

$$E = \frac{1}{2} k A^2,$$

koji kaže da je u točkama  $x = x_0 \pm A$  kinetička energija jednaka nuli. Odatle je:

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \text{ J}}{80 \text{ Nm}^{-1}}} = \sqrt{\frac{1}{10}} \text{ m}$$

$$A = 0,316 \text{ m}.$$

c) Ukupna je energija čestice:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} k(x - x_0)^2.$$

Kinetička energija mora biti pozitivna, dakle:

$$\frac{mv^2}{2} = E - \frac{1}{2} k(x - x_0)^2 \geq 0.$$

Ova nejednadžba ima rješenje:

$$x_1 \leq x \leq x_2,$$

gdje su krajnje točke intervala:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{2E}{k}} + x_0 = 0,084 \text{ m} \quad \text{i}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2E}{k}} + x_0 = 0,716 \text{ m}.$$

d) Potencijalna energija iznosi:

$$E_p(x_3) = \frac{1}{2} k(x_3 - x_0)^2 = \frac{1}{2} 80 \text{ Nm}^{-1} \cdot (0,6 \text{ m} - 0,4 \text{ m})^2$$

$$E_p(x_3) = 1,6 \text{ J}.$$

Kinetička energija predstavlja razliku:

$$E_k(x_3) = E - E_p(x_3) = 4 \text{ J} - 1,6 \text{ J}$$

$$E_k(x_3) = 2,4 \text{ J}.$$

Brzina se dobije pomoću kinetičke energije  $E_k = \frac{mv^2}{2}$ :

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,4 \text{ J}}{10^{-3} \text{ kg}}}$$

$$v = 69,3 \text{ m s}^{-1}.$$

e) Potencijalna energija iznosi:

$$E_p(x_4) = \frac{1}{2} k(x_4 - x_0)^2 = \frac{1}{2} 80 \text{ N m}^{-1} \cdot (0,9 \text{ m} - 0,4 \text{ m})^2$$

$$E_p(x_4) = 10 \text{ J}.$$

Kinetička je energija

$$E_k(x_4) = E - E_p(x_4) = 4 \text{ J} - 10 \text{ J}$$

$$E_k(x_4) = -6 \text{ J}.$$

negativna i zato se čestica energije  $E = 4 \text{ J}$  ne može naći u točki  $x_4$ .

## 11.4. Anharmonički oscilator

Pravi harmonički oscilator malokad ćemo susresti u prirodi. Pri većoj energiji stvarna se čestica obično otrgne i udalji od ravnotežnoga položaja oko kojega bi titrala čestica manje energije. Tipičan primjer takvih anharmoničkih oscilacija (vibracija) opisuje nam Morseova potencijalna energija:

$$E_p(x) = D \left[ e^{-2\alpha \left( \frac{x-x_0}{x_0} \right)} - 2e^{-\alpha \left( \frac{x-x_0}{x_0} \right)} \right], \quad (11.6)$$

prikazana na sl. 11.3. Ako odaberemo polazište za mjerenje energije tako da potencijalna energija čestice u beskonačnosti bude jednaka nuli, tada nam negativna energija  $E < 0$  opisuje vezano stanje, a pozitivna energija  $E > 0$  slobodno stanje čestice. Morseova potencijalna energija ima izraziti minimum u točki  $x = x_0$ . Čestica koja ima energiju  $E < 0$  titra između  $x_1$  i  $x_2$ , a ako joj izvana dovedemo energiju tako da bude  $E > 0$ , tada će se ona moći naći na bilo kojoj udaljenosti  $x > x_3$ . Energiju  $D$ , koju je potrebno dovesti da bi se otrgnula i udaljila čestica koja miruje u točki ravnoteže, nazivamo **energijom disocijacije**.

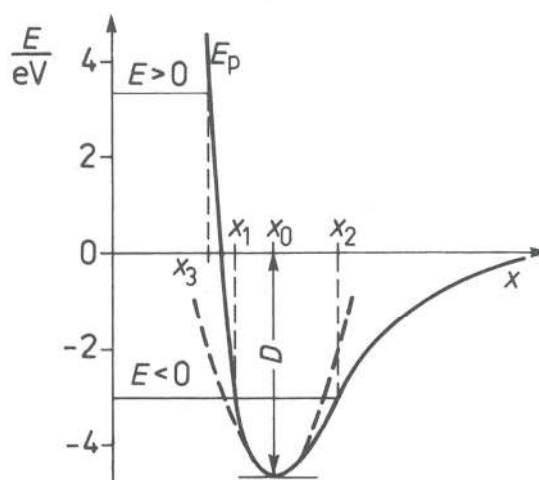
Takva potencijalna energija opisuje naprimjer titranje dvoatomne molekule, pri čemu je  $x$  međusobna udaljenost dvaju atoma u molekuli.

Za male energije gibanje je čestice vrlo slično gibanju harmoničkog oscilatora. U to ćemo se lako uvjeriti ako potencijalnu energiju (11.6), koristeći se znanjem iz

matematičke analize, napišemo u obliku beskonačnoga reda:

$$E_p(x) = -D + D\alpha^2 \left( \frac{x - x_0}{x_0} \right)^2 - D\alpha^3 \left( \frac{x - x_0}{x_0} \right)^3 + \\ + \frac{7}{12} D\alpha^4 \left( \frac{x - x_0}{x_0} \right)^4 - + \dots \quad (11.7)$$

Ako su udaljenosti  $|x - x_0|$  male, članove s trećom i višim potencijama možemo zanemariti, i tada nam ostaje harmonička potencijalna energija, prikazana crtkanom linijom na sl. 11.3.



Slika 11.3. Anharmonični oscilator

Oblik krivulje potencijalne energije, koji smo upoznali kod Morseova međudjelovanja, vrlo je tipičan. Potencijalna energija ima izrazit minimum na nekoj ravnotežnoj udaljenosti. Na malim udaljenostima potencijalna energija postaje velika i pozitivna, a na vrlo velikim udaljenostima približava se konstantnoj vrijednosti, obično nuli. Promatramo li odgovarajuću silu, vidimo da je sila za male udaljenosti pozitivna, tj. odbojna. Na ravnotežnoj udaljenosti  $r_0$  sila je jednaka nuli, a zatim postoji raspon udaljenosti na kojima je sila negativna, dakle, privlačna. Na nešto većoj udaljenosti sila postaje zanemarivo mala. Takva je sila koja drži na okupu dva atoma u dvoatomnoj molekuli, pa je u slučaju kovalentnog vezanja možemo približno prikazati Morseovom krivuljom. Međutim, i u drugim vezanim sistemima potencijalne energije imaju sličan oblik iako su dane drukčijim matematičkim izrazom. Tako se sličnim oblikom potencijalne energije može prikazati vezanje ionskoga tipa u molekulama, no jednako tako i međudjelovanje između dviju molekula u plinu ili međudjelovanje dvaju nukleona u atomskoj jezgri. Karakteristično je da čestica, koja s nekom drugom česticom djeluje takvom silom:

- na malim energijama titra gotovo harmonički,
- na energijama većim od energije disocijacije može se otrgnuti i udaljiti,
- postoji najmanja udaljenost do koje se čestice mogu međusobno približiti.



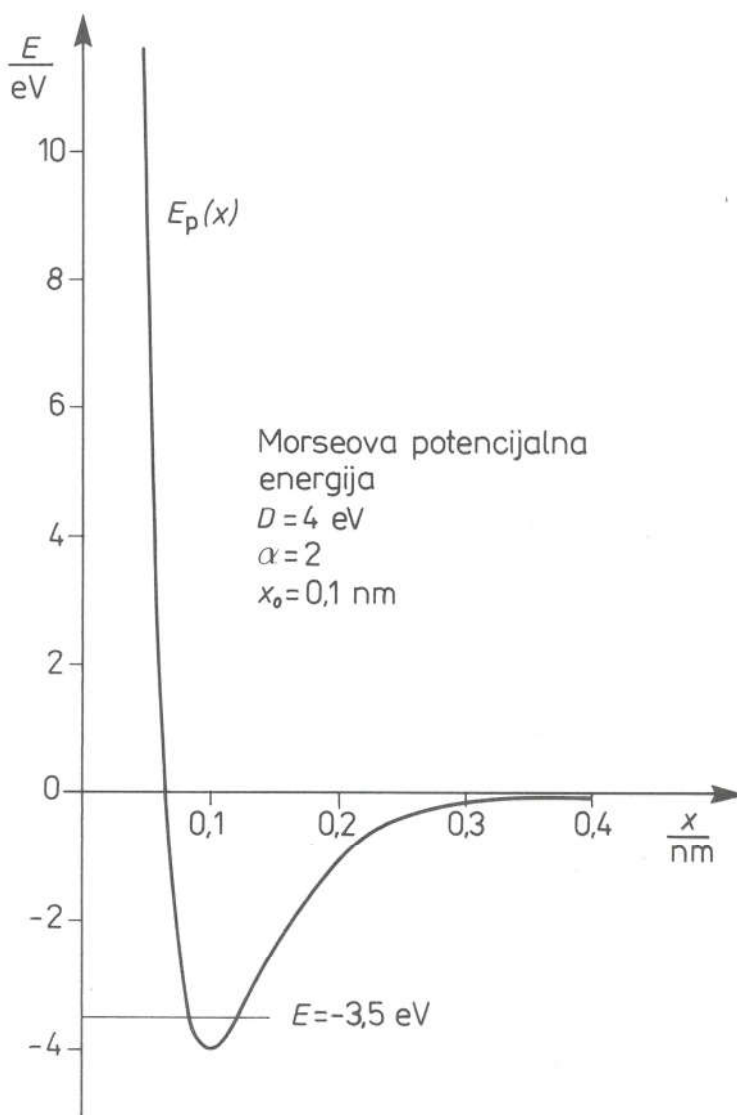
Ovdje treba primijetiti da je naš fizičar Ruđer Bošković još u 18. st. predvidio postojanje i važnost takvih sila, u vrijeme dok se još gotovo ništa nije znalo o atomističkoj građi tvari.

**Primjer 11.2.**

a) Nacrtajte grafički prikaz Morseove potencijalne energije u intervalu  $0 \leq x \leq 0,3$  nm, ako je zadano:

$$D = 4 \text{ eV}, \quad \alpha = 2, \quad x_0 = 0,1 \text{ nm}.$$

b) Napišite približni izraz za potencijalnu energiju za male amplitude, te izračunajte frekvenciju kojom će titrati čestica mase  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg i ukupne energije  $E = -3,5$  eV.



Slika 11.4. Morseova potencijalna energija

a) Da bismo nacrtali grafički prikaz (sl. 11.4), načinit ćemo tablicu vrijednosti funkcije:

$$E_p(x) = D \left[ e^{-2\alpha \left( \frac{x-x_0}{x_0} \right)} - 2e^{-\alpha \left( \frac{x-x_0}{x_0} \right)} \right] :$$

|                 |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x/\text{nm}$   | 0     | 0,05  | 0,06  | 0,07  | 0,09  | 0,10  |
| $E_p/\text{eV}$ | 159,3 | 7,81  | 2,01  | -1,30 | -3,80 | -4,00 |
| $x/\text{nm}$   | 0,11  | 0,12  | 0,15  | 0,20  | 0,25  | 0,30  |
| $E_p/\text{eV}$ | -3,87 | -3,57 | -2,40 | -1,01 | -0,39 | -0,15 |

b) Približni izraz za male amplitude dobiva se razvojem u red u kojemu zadržavamo samo prva dva člana:

$$E_p(x) = -D + D\alpha^2 \left( \frac{x-x_0}{x_0} \right)^2 = -D + \frac{1}{2} m\omega^2 (x-x_0)^2,$$

što odgovara harmoničkom oscilatoru. Frekvencija titranja može se odrediti iz uvjeta:

$$\frac{D\alpha^2}{x_0^2} = \frac{1}{2} m\omega^2,$$

što daje:

$$\omega = \sqrt{\frac{2D\alpha^2}{mx_0^2}} = \frac{\alpha}{x_0} \sqrt{\frac{2D}{m}}.$$

Za dani je slučaj kružna frekvencija:

$$\omega = \frac{2}{0,1 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}}$$

$$\omega = 5,54 \cdot 10^{14} \text{ rad s}^{-1}$$

a frekvencija iznosi:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 8,82 \cdot 10^{13} \text{ Hz}.$$

### Primjer 11.3.

Potencijalna energija za međudjelovanje dviju molekula u plinu može se prikazati **Lennard-Jonesovom funkcijom**:

$$E_p(r) = -E_0 \left[ 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} \right]. \quad (11.8)$$

a) Nacrtajte graf Lennard-Jonesove potencijalne energije za  $r_0 = 0,25 \text{ nm}$  i  $E_0 = 5 \text{ eV}$ .

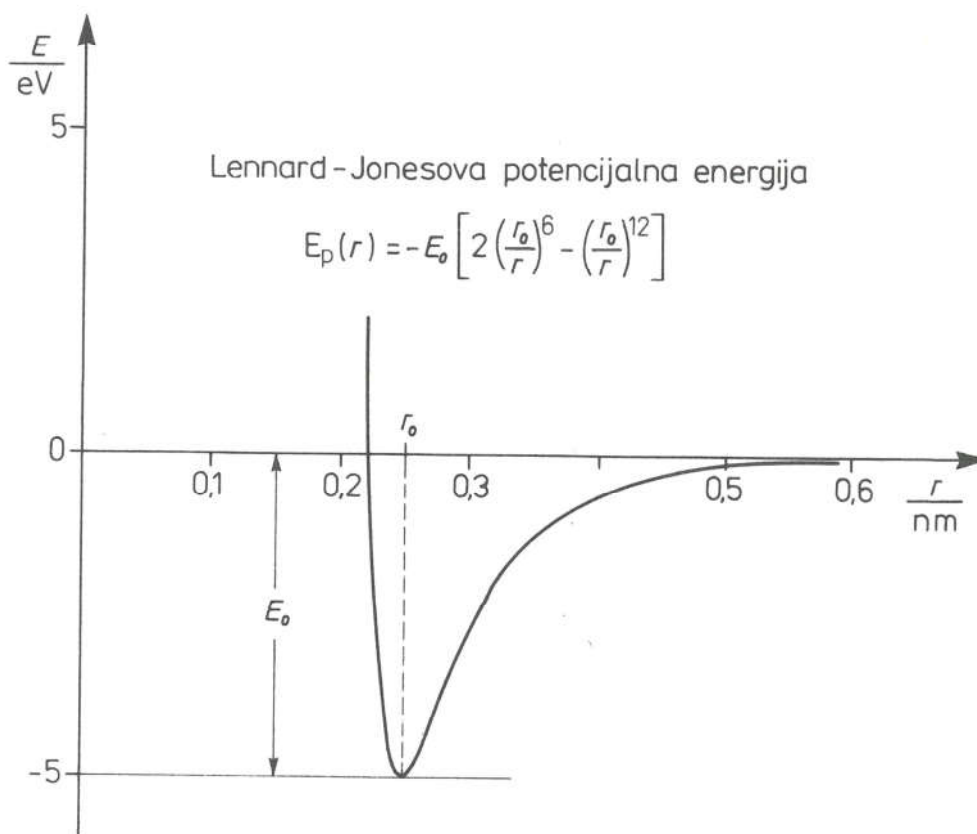
b) Nađite ovisnost međumolekularne sile o udaljenosti i prikažite je grafički.

c) Izračunajte ravnotežnu udaljenost molekula i potencijalnu energiju na toj udaljenosti.

d) Odredite za koje je udaljenosti sila odbojna, a za koje privlačna. Nađite za koju je udaljenost privlačna sila najveća i izračunajte tu silu.

a) Grafički prikaz (sl. 11.5.a) dobivamo pomoću tablice za potencijalnu energiju:

|                 |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $r/\text{nm}$   | 0,21  | 0,22  | 0,23  | 0,24  | 0,25  | 0,26  |
| $E_p/\text{eV}$ | 12,05 | 1,65  | -2,89 | -4,61 | -5,00 | -4,78 |
| $r/\text{nm}$   | 0,27  | 0,28  | 0,29  | 0,30  | 0,35  | 0,40  |
| $E_p/\text{eV}$ | -4,32 | -3,78 | -3,26 | -2,79 | -1,24 | -0,58 |
| $r/\text{nm}$   | 0,45  | 0,50  | 0,55  | 0,60  | 0,65  |       |
| $E_p/\text{eV}$ | -0,29 | -0,16 | -0,09 | -0,05 | -0,03 |       |



Slika 11.5. a) Lennard-Jonesova potencijalna energija

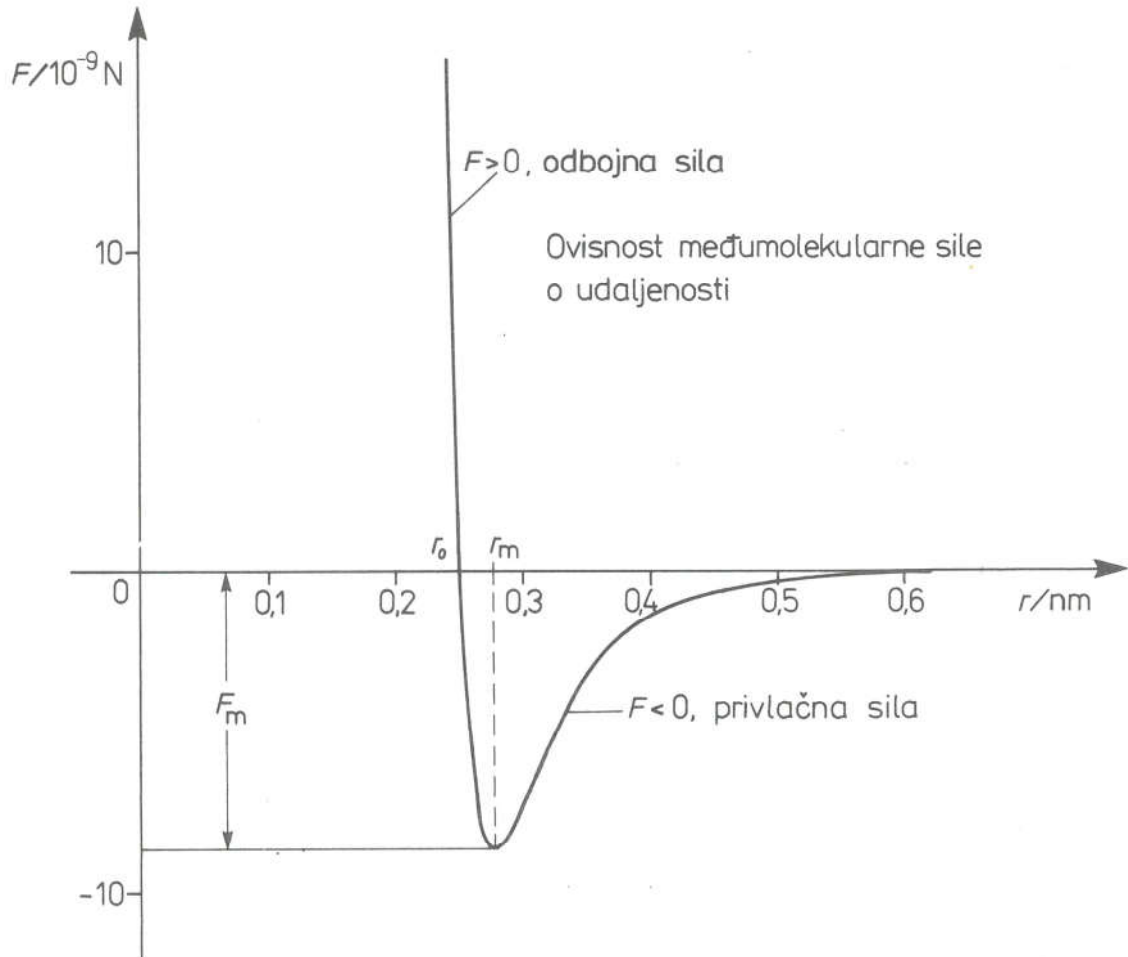
b) Ovisnost je sile o udaljenosti:

$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{12E_0}{r} \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} \right]$$



Grafički prikaz na sl. 11.5.b dobivamo pomoću tablice:

|                       |       |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| $r/\text{nm}$         | 0,22  | 0,23 | 0,24 | 0,25 | 0,26 | 0,27 | 0,28 | 0,29 |
| $F/10^{-9} \text{ N}$ | 108,5 | 44,7 | 14,2 | 0    | -6,1 | -8,3 | -8,6 | -8,0 |
| $r/\text{nm}$         | 0,30  | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 | 0,55 | 0,60 |      |
| $F/10^{-9} \text{ N}$ | -7,1  | -3,2 | -1,3 | -0,6 | -0,3 | -0,2 | -0,1 |      |



Slika 11.5. b) Sila kod Lennard-Jonesovog međudjelovanja

c) Ravnotežna je udaljenost kad je  $F(r) = 0$ , tj.:

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} = 0 \Rightarrow r = r_0 = 0,25 \text{ nm.}$$

Tome odgovara potencijalna energija:

$$E_p(r_0) = -E_0 = -5 \text{ eV}$$

d) Sila je odbojna kad je  $F > 0$ , dakle za  $r < r_0$ , a privlačna kad je  $F < 0$ , tj. za  $r > r_0$ . Privlačna je sila najveća kad  $F(r)$  ima minimum, tj. kad je:

$$\frac{dF(r)}{dr} = \frac{12E_0}{r^2} \left[ 7 \left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - 13 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} \right] = 0$$

Rješenje je ove jednadžbe:

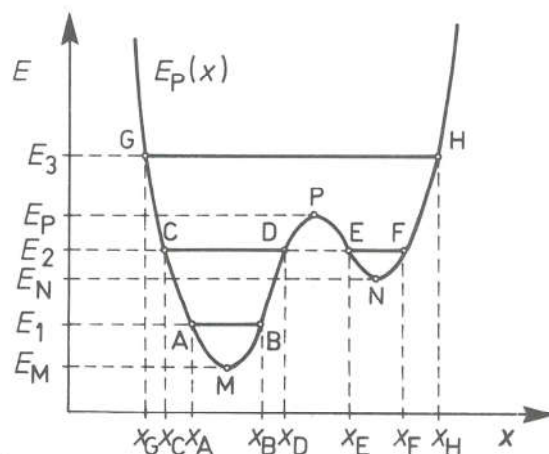
$$r_m = r_0 \sqrt[6]{\frac{13}{7}} = 1,11 r_0 = 0,277 \text{ nm.}$$

Sila pritom ima vrijednost:

$$F_m = F(r_m) = -\frac{504}{169} \sqrt[6]{\frac{7}{13}} \cdot \frac{E_0}{r_0} = -8,62 \cdot 10^{-9} \text{ N.}$$

## 11.5. Potencijalne krivulje s dva minimuma

Oblikom potencijalnih krivulja koje smo dosad upoznali nisu iscrpljene sve mogućnosti. Potencijalna energija može imati i neki složeniji oblik. Zanimljiv je primjer potencijalna energija krivulja koje ima dva minimuma, prikazana na sl. 11.6.



Slika 11.6. Potencijalna energija sa dva minimuma

Promotrimo gibanje čestice u takvu potencijalu. Ono ovisi o energiji čestice. Ako je energija čestice  $E_M < E_1 < E_N$ , čestica će oscilirati između točaka  $x_A$  i  $x_B$ . Ako pak ima veću energiju, takvu da je  $E_N < E_2 < E_P$ , ona će titrati ili između točaka  $x_C$  i  $x_D$  ili između točaka  $x_E$  i  $x_F$ . Prostor je između točaka  $x_D$  i  $x_E$  nedostupan, on je za klasičnu česticu neprobojna prepreka (potencijalna barijera). Međutim, čestica kojoj je energija još veća ( $E_3 > E_P$ ) ima na raspolaganju čitav raspon između točaka  $x_G$  i  $x_H$ .

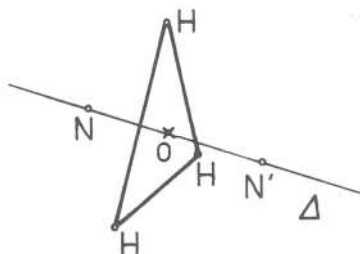
### Primjer 11.4.

Tipičan slučaj potencijalne energije s dva minimuma opisan je funkcijom:

$$E_p(s) = ks^4 - k's^2. \quad (11.9)$$

Ako konstante imaju vrijednosti  $k = 1,7 \cdot 10^5 \text{ eV nm}^{-4}$  i  $k' = 3 \cdot 10^2 \text{ eV nm}^{-2}$ ,

takva funkcija opisuje inverziju molekule amonijaka  $\text{NH}_3$ . Pritom je  $s$  udaljenost N-atoma od ravnine u kojoj leže atomi vodika (sl. 11.7). Uz pretpostavku da vrijede zakoni klasične fizike, izračunajte:



Slika 11.7. Molekula amonijaka  $\text{NH}_3$

- vrijednosti  $s$  za koje je molekula u stabilnoj ravnoteži;
- razlike između visine potencijalne barijere i minimuma potencijalne energije;
- brzinu kojom se giba dušikov atom ukupne energije  $E = 0$  kad prolazi kroz ravnotežni položaj
- grafički prikažite ovisnost potencijalne energije o  $s$ , u intervalu  $-0,06 \text{ nm} \leq s \leq 0,06 \text{ nm}$ .

a) Stabilna je ravnoteža kad je:

$$\frac{dE_p}{ds} = 4ks^3 - 2k's = 0 \quad \text{i kad je}$$

$$\frac{d^2E_p}{ds^2} = 12ks^2 - 2k' > 0,$$

a to je ispunjeno za:

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k'}{2k}} = \pm \sqrt{\frac{3 \cdot 10^2 \text{ eV nm}^{-2}}{2 \cdot 1,7 \cdot 10^5 \text{ eV nm}^{-4}}} = \pm 0,03 \text{ nm}.$$

b) U točkama  $s_1$  i  $s_2$  potencijalna je energija minimalna i ima vrijednost:

$$E_{\min} = E_p(s_1) = E_p(s_2) = -\frac{k'^2}{4k} = -\frac{(3 \cdot 10^2)^2}{2 \cdot 1,7 \cdot 10^5} \text{ eV} = -0,132 \text{ eV}.$$

Potencijalna energija ima lokalni maksimum u točki  $s = 0$ , gdje njezina vrijednost iznosi  $E_{\text{maks}} = E_p(0) = 0$ .

Visina je potencijalne barijere:

$$E = E_{\text{maks}} - E_{\min} = \frac{k'^2}{4k} = 0,132 \text{ eV}.$$

c) Kad prolazi kroz ravnotežni položaj, čestica energije  $E = 0$  ima potencijalnu energiju  $E_p(s_1) = E_{\min} = -0,132 \text{ eV}$ .



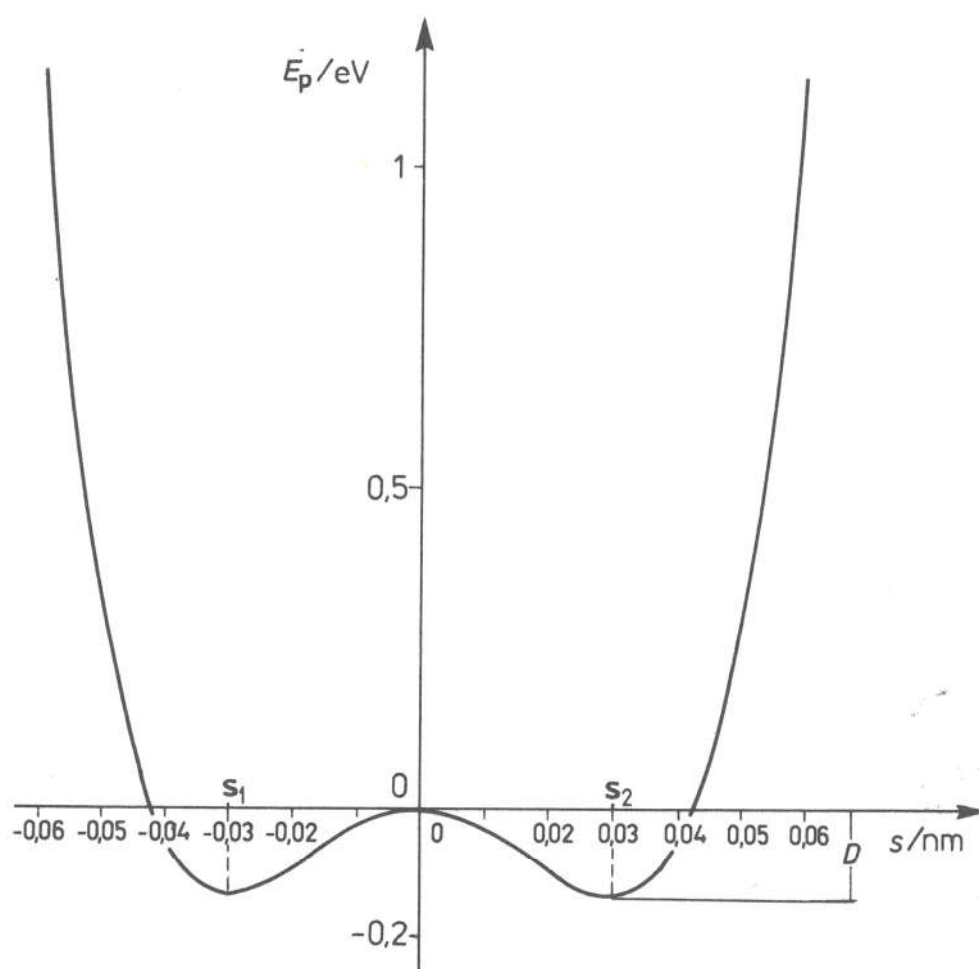
Kinetička energija, dakle, iznosi:

$$E_k = \frac{m_N v^2}{2} = E - E_{\min}$$

$$E_k = 0,132 \text{ eV}.$$

Odatle dobivamo brzinu atoma dušika:

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_N}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,132 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{14 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 1348 \text{ ms}^{-1}.$$



Slika 11.8. Potencijalna energija molekule  $\text{NH}_3$

d) Grafički prikaz potencijalne energije (sl. 11.8) dobivamo pomoću tablice vrijednosti:

|                 |   |            |            |            |            |             |            |            |
|-----------------|---|------------|------------|------------|------------|-------------|------------|------------|
| $s/\text{nm}$   | 0 | $\pm 0,01$ | $\pm 0,02$ | $\pm 0,03$ | $\pm 0,04$ | $\pm 0,042$ | $\pm 0,05$ | $\pm 0,06$ |
| $E_p/\text{eV}$ | 0 | -0,028     | -0,093     | -0,132     | -0,045     | 0,000       | 0,313      | 1,123      |

## 11.6. Potencijalna energija pri vrtnji

Dosad smo, radi jednostavnosti, promatrali slučaj u kojemu sila i potencijalna energija ovise samo o udaljenosti. Pokazalo se da je čak i taj jednostavan slučaj moguće primijeniti na stvarne sisteme u prirodi. No gibanje po pravcu nije jedini slučaj jednodimenzionalnog gibanja. Ima u prirodi slučajeva koji se mogu opisati kao vrtnja čestice ili tijela oko čvrste osi. Za jednu česticu, ako njezina vrtnja nije slobodna, potencijalna energija i moment sile mijenjaju se kad se mijenja kut vrtnje, a rad obavljen pri zakretu za mali kut  $d\varphi$  može se izraziti kao:

$$dW = F dl = Fr d\varphi = M d\varphi.$$

Pritom je  $dl$  element kružnoga luka koji pripada kutu  $d\varphi$ ,  $r$  je polumjer kružnice po kojoj se čestica vrti, a  $M = Fr$  iznos je momenta sile  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , ako je sila  $F$  tangencijalna. Kako je  $dW = -dE_p$ , dobivamo za potencijalnu energiju i moment sile relacije analogne onima pri gibanju na pravcu:

$$M(\varphi) = -\frac{dE_p(\varphi)}{d\varphi} \quad (11.10)$$

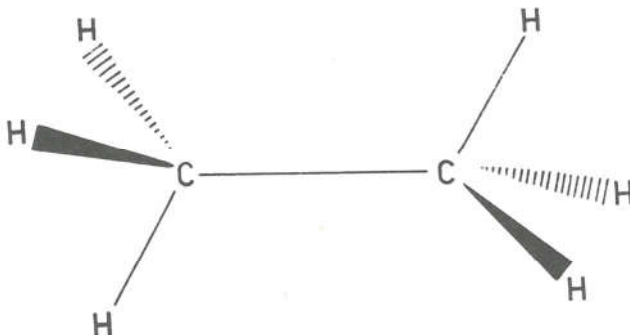
i:

$$E_p(\varphi) = -\int_{\varphi_r}^{\varphi} M(\varphi) d\varphi. \quad (11.11)$$

Lako je pokazati da ovi izrazi, izvedeni za česticu, vrijede i za rotaciju kruta tijela oko čvrste osi.

### Primjer 11.5.

U molekuli etana  $C_2H_6$  jedna metilna grupa  $CH_3$  može rotirati u odnosu prema drugoj metilnoj grupi oko osi koja spaja ugljikove atome (sl. 11.9).



Slika 11.9. Prikaz molekule etana  $C_2H_6$ . Crtkani klin označava vezu ispod ravnine prikaza, a puni klin vezu iznad ravnine prikaza.

Ta vrtnja, međutim, nije slobodna, jer potencijalna energija skupine  $CH_3$  ovisi o kutu unutrašnje rotacije po zakonu:

$$E_p(\varphi) = \frac{E_3}{2}(1 - \cos 3\varphi).$$

Pritom je  $E_3 = 0,127 \text{ eV}$ , a moment tromosti grupe  $\text{CH}_3$  s obzirom na os vrtnje je  $I = 5,3 \cdot 10^{-47} \text{ kg m}^2$ .

a) Nađite vrijednosti kuta  $\varphi$  za koje je molekula u stabilnoj i u labilnoj ravnoteži, u intervalu  $-60^\circ \leq \varphi \leq 300^\circ$ .

b) Grafički prikažite ovisnost potencijalne energije o kutu.

c) Opišite gibanje molekule ako je njezina ukupna energija  $E_V = 0,010 \text{ eV}$ . Izračunajte kutnu amplitudu i frekvenciju kojom će titrati oko ravnotežnoga kuta, uz pretpostavku da vrijede zakoni klasične mehanike.

d) Opišite gibanje molekule ako je njezina ukupna energija  $E_R = 0,140 \text{ eV}$ . Kolikom će kutnom brzinom i frekvencijom ta molekula prolaziti kroz položaj stabilne, a kojom kroz položaj labilne ravnoteže?

a) Molekula je u ravnoteži kad je:

$$\frac{dE_p(\varphi)}{d\varphi} = \frac{3E_3}{2} \sin 3\varphi = 0,$$

dakle, za kutove  $\varphi = \frac{k\pi}{3}$ , gdje je  $k$  cijeli broj.

Da bismo razlikovali položaje stabilne od položaja labilne ravnoteže, moramo naći drugu derivaciju potencijalne energije:

$$\frac{d^2 E_p(\varphi)}{d\varphi^2} = \frac{9E_3}{2} \cos 3\varphi = \frac{9E_3}{2} \cos k\pi.$$

Potencijalna energija ima minimum kad je  $\cos k\pi > 0$ , dakle, za  $k = 2n$ , pa stabilnoj ravnoteži odgovaraju kutovi  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  i  $240^\circ$ . Za labilnu ravnotežu mora biti  $\cos k\pi < 0$ , a to je ispunjeno za neparne vrijednosti  $k = 2n + 1$ , i odgovara kutovima  $-60^\circ$ ,  $+60^\circ$  i  $180^\circ$ .

b) Grafički prikaz (sl. 11.10) možemo nacrtati pomoću tablice:

| $\varphi$       | $-60^\circ$ | $-30^\circ$ | $0^\circ$   | $30^\circ$  | $60^\circ$  | $90^\circ$  | $120^\circ$ |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $E_p/\text{eV}$ | 0,1270      | 0,0635      | 0           | 0,0635      | 0,1270      | 0,0635      | 0,0000      |
| $\varphi$       | $150^\circ$ | $180^\circ$ | $210^\circ$ | $240^\circ$ | $270^\circ$ | $300^\circ$ |             |
| $E_p/\text{eV}$ | 0,0635      | 0,1270      | 0,0635      | 0,0000      | 0,0635      | 0,1270      |             |

c) Molekula energije  $E_V = 0,01 \text{ eV}$  titrat će oko ravnotežnoga položaja tako da bude

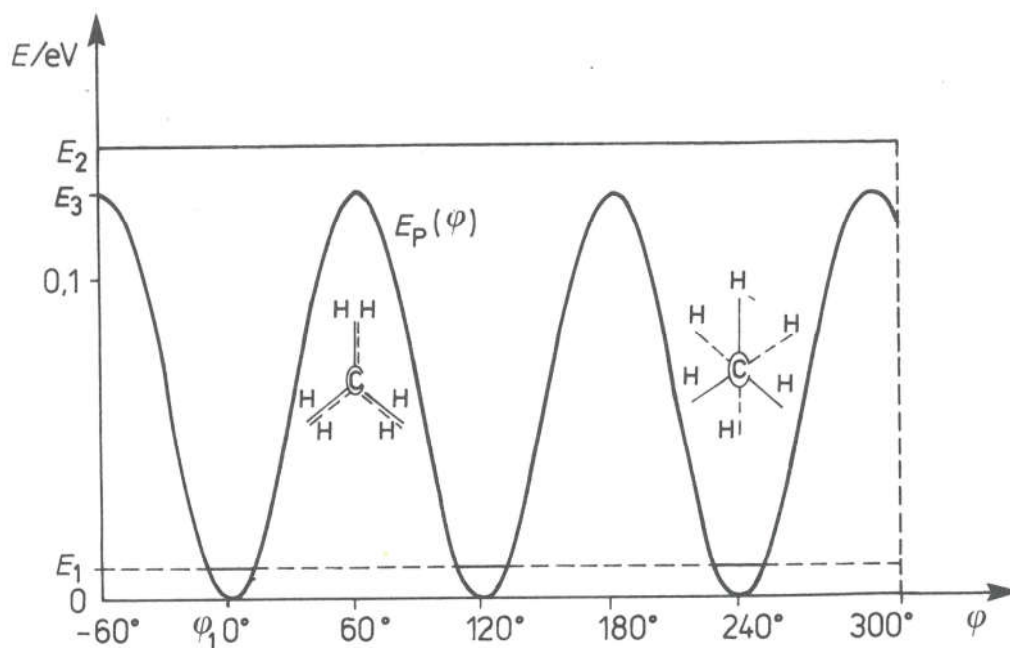
$$E_k = E_V - E_p(\varphi) > 0.$$

To je ispunjeno za kutove za koje vrijedi

$$\cos 3\varphi \geq 1 - \frac{2E_V}{E_3} = 0,84252.$$

Odaberemo li kao ravnotežni kut  $\varphi_0 = 0^\circ$ , molekula će oscilirati (vibrirati, titrati) između kutova  $\varphi_1 = -10,86^\circ$  i  $\varphi_2 = +10,86^\circ$ .





Slika 11.10. Potencijalna energija jedne metilne grupe u odnosu na drugu u molekuli etana, u ovisnosti o kutu vrtnje. Skice uz sliku prikazuju, na drugi način, prostorni raspored atoma vodika u stanju stabilne i labilne ravnoteže molekule.

Frekvenciju titranja naći ćemo ako potencijalnu energiju oko položaja ravnoteže  $\varphi = 0^\circ$  razvijemo u red i zadržimo kvadratni član:

$$E_p(\varphi) = \frac{E_3}{2} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{(3\varphi)^2}{2} + \dots \right] \right\} \cong \frac{E_3}{2} \cdot \frac{9}{2} \varphi^2.$$

Toj potencijalnoj energiji odgovara moment sile:

$$M = -\frac{dE_p}{d\varphi} = -\frac{9E_3}{2} \varphi = -D\varphi, \text{ uz } D = 9,144 \cdot 10^{-20} \text{ J}.$$

U analogiji s gibanjem torzionog njihala, dobivamo period titranja  $T_V$ :

$$T_V = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{red}}}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{2,65 \cdot 10^{-47} \text{ kg m}^2}{9,144 \cdot 10^{-20} \text{ J}}} = 1,07 \cdot 10^{-13} \text{ s},$$

te odgovarajuću frekvenciju titranja  $\nu_V$ :

$$\nu_V = \frac{1}{T} = 9,35 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}.$$

d) Ako je ukupna energija molekule  $E_R = 0,140 \text{ eV} > E_3$ , molekula rotira, ali ta rotacija nije jednolika. Kinetička je energija vrtnje:

$$E_k = \frac{1}{2} I_{\text{red}} \omega_R^2 = E_R - E_p(\varphi),$$

gdje je  $I_{\text{red}}$  reducirani moment tromosti, a kutna brzina  $\omega$ :

$$\omega_R = \sqrt{\frac{2}{I_{\text{red}}} [E_R - E_p(\varphi)]} = \sqrt{\frac{2}{I_{\text{red}}} \left[ E_R - \frac{E_3}{2}(1 - \cos 3\varphi) \right]}.$$

Za položaj stabilne ravnoteže, npr. za  $\varphi = 0^\circ$ :

$$\omega_R = \sqrt{\frac{2}{2,65 \cdot 10^{-47} \text{ kg m}^2} 0,140 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}$$

$$\omega_R = 4,11 \cdot 10^{13} \text{ rad s}^{-1},$$

a za položaj labilne ravnoteže, tj. za  $\varphi = 60^\circ$ :

$$\omega_R = \sqrt{\frac{2}{2,65 \cdot 10^{-47} \text{ kg m}^2} [0,140 - 0,127] \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}$$

$$\omega_R = 1,25 \cdot 10^{13} \text{ rad s}^{-1}.$$

Pritom smo se poslužili izrazom za reducirani moment tromosti  $\frac{1}{I_{\text{red}}} = \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}$ , što za simetričnu molekulu iznosi  $I_{\text{red}} = \frac{I}{2}$ .

Odgovarajuće su frekvencije vrtnje:

$$\nu_R = \frac{\omega_R}{2\pi} = 6,5 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1} \quad \text{i}$$

$$\nu'_R = \frac{\omega'_R}{2\pi} = 2,0 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}.$$

### Primjer 11.6.

Potencijalna energija molekule 1,2-difluoretana  $\text{C}_2\text{H}_4\text{F}_2$  (sl. 11.11), ovisna je o kutu  $\varphi$  unutrašnje vrtnje jedne grupe  $\text{CH}_2\text{F}$  prema drugoj, po zakonu:

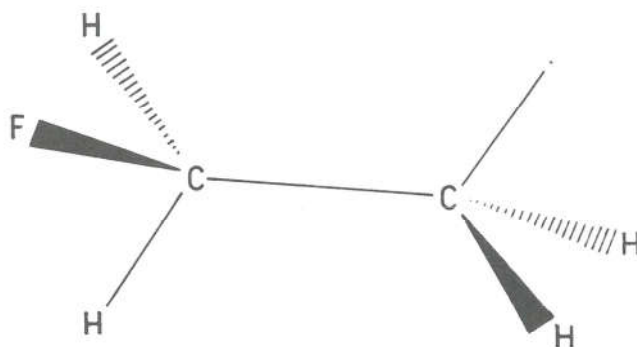
$$E_p(\varphi) = \frac{E_1}{2}(1 - \cos \varphi) + \frac{E_3}{2}(1 - \cos 3\varphi),$$

gdje su konstante  $E_1 = 0,30 \text{ eV}$  i  $E_3 = 0,15 \text{ eV}$ .

a) Izračunajte kutove za koje će molekula biti u stabilnoj, a za koje u labilnoj ravnoteži.

b) Izračunajte visine potencijalnih barijera u odnosu prema potencijalnoj energiji stabilnih ravnotežnih stanja.

c) Grafički prikažite ovisnost potencijalne energije o kutu unutrašnje rotacije, u intervalu  $-180^\circ \leq \varphi \leq +180^\circ$ .

Slika 11.11. Molekula 1,2-difluoretana  $C_2H_4F_2$ 

a) Položaji ravnoteže dobiju se iz jednadžbe

$$\begin{aligned}\frac{dE_p(\varphi)}{d\varphi} &= \frac{E_1}{2} \sin \varphi + \frac{3E_3}{2} \sin 3\varphi \\ &= \frac{\sin \varphi}{2} [E_1 + E_3(4 \cos^2 \varphi - 1)] = 0\end{aligned}$$

Poslužili smo se trigonometrijskom relacijom  $\sin 3\varphi = \sin \varphi(4 \cos^2 \varphi - 1)$ .

Rješenja su kutovi  $\varphi = k \cdot 180^\circ$ , ili – zbog  $\cos^2 \varphi = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{E_1}{3E_3}\right)$  –  $\varphi = k \cdot 180^\circ \pm 73,22^\circ$ . Dakle, za interval  $-180^\circ \leq \varphi \leq +180^\circ$  rješenja su  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pm 73,22^\circ$ ,  $\varphi = \pm 106,78^\circ$  i  $\varphi = \pm 180^\circ$ .

Iz uvjeta  $\frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} \geq 0$  vidi se da minimumu potencijalne energije (stabilnoj ravnoteži) odgovaraju kutovi  $\varphi = 0$  i  $\varphi = \pm 106,78^\circ$ , a maksimumu (labilnoj ravnoteži)  $\varphi = \pm 73,22^\circ$  i  $\varphi = \pm 180^\circ$ .

b) Vrijednosti su potencijalne energije u točkama stabilne ravnoteže:

$$\begin{aligned}E_A &= E_p(\varphi = 0) = 0 \quad \text{i} \\ E_B &= E_p(\varphi = \pm 106,78^\circ) = 0,211 \text{ eV},\end{aligned}$$

a u točkama labilne ravnoteže

$$\begin{aligned}E_C &= E_p(\varphi = \pm 73,22^\circ) = 0,239 \text{ eV} \quad \text{i} \\ E_D &= E_p(\varphi = \pm 180^\circ) = 0,450 \text{ eV}.\end{aligned}$$

Visina potencijalne barijere C prema apsolutnom minimumu A jest:

$$E_C - E_A = 0,239 \text{ eV},$$

a prema relativnom minimumu B iznosi:

$$E_C - E_B = 0,239 \text{ eV} - 0,211 \text{ eV} = 0,028 \text{ eV}.$$

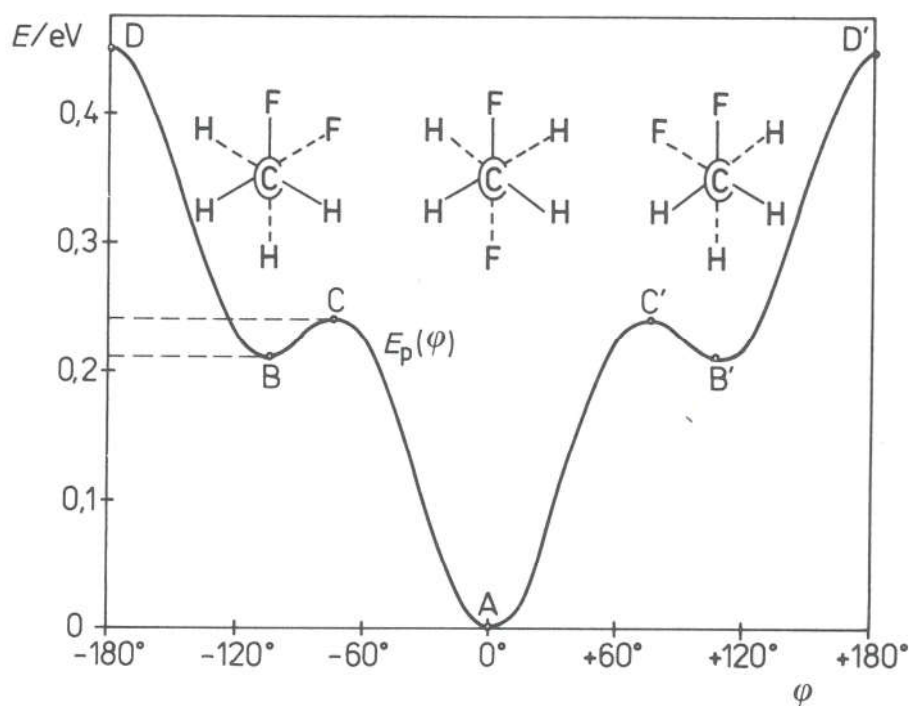
Visina potencijalne barijere D prema apsolutnom minimumu A iznosi:

$$E_D - E_A = 0,450 \text{ eV},$$



a prema relativnom minimumu B:

$$E_D - E_B = 0,450 \text{ eV} - 0,211 \text{ eV} = 0,239 \text{ eV}.$$



Slika 11.12. Potencijalna energija za unutarnju vrtnju molekule  $\text{C}_2\text{H}_4\text{F}_2$

c) Grafički prikaz (sl. 11.12) možemo nacrtati pomoću tablice

| $\varphi/^\circ$ | $\pm 180$ | $\pm 150$ | $\pm 120$ | $\pm 106,78$ | $\pm 90$ | $\pm 73,22$ | $\pm 60$ | $\pm 30$ | 0     |
|------------------|-----------|-----------|-----------|--------------|----------|-------------|----------|----------|-------|
| $E_p/\text{eV}$  | 0,450     | 0,355     | 0,225     | 0,211        | 0,225    | 0,239       | 0,225    | 0,095    | 0,000 |

## 11.7. Gibanje čestice u trodimenzionalnom prostoru

Kada se pri gibanju čestice mijenjaju sve tri komponente njezina položaja, vezu između sile i potencijalne energije možemo izraziti relacijama koje poznajemo iz vektorske analize. Tako je sila dana izrazom:

$$\vec{F}(x, y, z) = -\nabla E_p(x, y, z) \quad (11.12)$$

Ovdje je  $\nabla$  diferencijalni operator *nabla* ili *del*, a katkad se još naziva i operator gradijenta i bilježi se kao  $\text{grad } E_p(x, y, z)$ . On je definiran vektorom koji se dobije parcijalnim deriviranjem skalarne funkcije, na sljedeći način:

$$\nabla A = \text{grad } A = \left( \vec{i} \frac{\partial A}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial A}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \quad (11.13)$$

Umjesto pravokutnih koordinata  $x$ ,  $y$  i  $z$ , za opisivanje gibanja čestice možemo upotrijebiti i sferne koordinate  $r$ ,  $\vartheta$  i  $\varphi$ .

Ako je sila poznata, potencijalnu ćemo energiju naći pomoću integrala:

$$E_p(\vec{r}) = E_p(x, y, z) = - \int_{\vec{r}_R}^{\vec{r}} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} \quad (11.14)$$

Pritom je  $\vec{r}$  radiusvektor točke  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , a  $\vec{r}_R$  je položaj referentne točke u kojoj je vrijednost potencijalne energije nula.

### Primjer 11.7.

Potencijalna energija zadana je izrazom

$$E_p(x, y, z) = - \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

gdje je vrijednost konstante  $A = 5 \cdot 10^3 \text{ J m}$ . Nađite vektor sile i iznos sile u točki opisanoj radiusvektorom

$$\vec{r} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \text{ m}.$$

Nađemo li parcijalne derivacije

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{Ax}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{Ay}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

i

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = \frac{Az}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

možemo pisati

$$\vec{F} = - \frac{A(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = - \frac{5 \cdot 10^3 \text{ J m} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \text{ m}}{\sqrt{(2^2 + 3^2 + 4^2)^3 \text{ m}^3}}$$

$$\vec{F} = -32(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \text{ N} = (-64\vec{i} + 96\vec{j} + 128\vec{k}) \text{ N}$$

$$F = \sqrt{64^2 + 96^2 + 128^2} \text{ N} = 172 \text{ N}.$$

## 11.8. Centralne sile

Centralnom silom nazivamo silu koja je uvijek usmjerena prema ishodištu i ovisi samo o udaljenosti od njega. Takva je sila gravitacije: ako, promatrajući gibanje Zemlje oko Sunca, smatramo da je Sunce u ishodištu, tada je gravitacijska sila na Zemlju uvijek usmjerena prema ishodištu, a sila ovisi samo o udaljenosti Zemlje od Sunca. Potencijalna energija tada također ovisi samo o udaljenosti čestice od ishodišta. Ona je za konzervativne sile povezana s izrazom za silu na ovaj način:

$$F(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}.$$

Potencijalnu energiju možemo izračunati iz obrnute relacije

$$E_p(r) = -\int_{r_R}^r F(r) dr,$$

gdje je  $r_R$  referentna točka, u kojoj je zadana vrijednost potencijalne energije.

### Primjer 11.8.

Izračunajte potencijalnu energiju gravitacijske sile koja djeluje između dvaju tijela kojima su mase  $m$  i  $M$ . Smatramo da potencijalna energija iščezava kad  $r \rightarrow \infty$ .

Gravitacijska sila ovisi o udaljenosti po zakonu:

$$F(r) = -\gamma \frac{mM}{r^2},$$

gdje je  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  opća gravitacijska konstanta. Potencijalna će energija biti:

$$E_p(r) = -\int_{\infty}^r \left( -\gamma \frac{mM}{r^2} \right) dr = -\gamma \frac{mM}{r} \Big|_{\infty}^r = \gamma \frac{mM}{r} \quad (11.15)$$

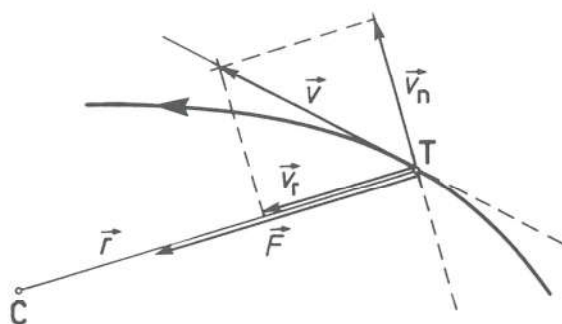
### 11.8.1. Efektivna potencijalna energija centralne sile

Čestica se pod djelovanjem centralne sile giba po nekoj zakrivljenoj stazi. Brzina čestice pritom može imati različite smjerove. U svakom trenutku možemo brzinu  $\vec{v}$  rastaviti na dvije komponente, jednu koja je usmjerena prema središtu, i drugu koja je okomita (normalna) na taj smjer:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_n,$$

gdje je  $\vec{v}_r$  vektor usmjeren prema središtu, a  $\vec{v}_n$  normalna komponenta brzine (v. sl. 11.13). Čestica u svakom trenutku ima i potencijalnu i kinetičku energiju.



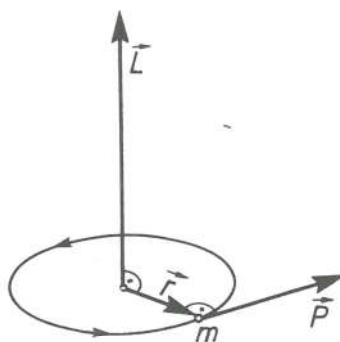


Slika 11.13. Radijalna i normalna komponenta brzine

Kinetičku energiju možemo napisati kao:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_n^2) = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{m^2 r^2 v_n^2}{2mr^2},$$

pri čemu je  $v_r = \frac{dr}{dt}$ , i gdje smo uzeli u obzir da je  $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_n = 0$ .



Slika 11.14. Moment količine gibanja

Sjetimo li se definicije momenta količine gibanja (sl. 11.14) (kutne količine gibanja):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v},$$

uočavamo da je  $L^2$  zapravo:

$$L^2 = (\vec{r} \times m\vec{v})^2 = (\vec{r} \times m\vec{v}_n)^2 = r^2 m^2 v_n^2.$$

Stoga za kinetičku energiju možemo pisati:

$$E_k = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2},$$

a ukupnu energiju čestice na koju djeluje centralna sila:

$$E = \frac{mv_r^2}{2} + E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (11.16)$$

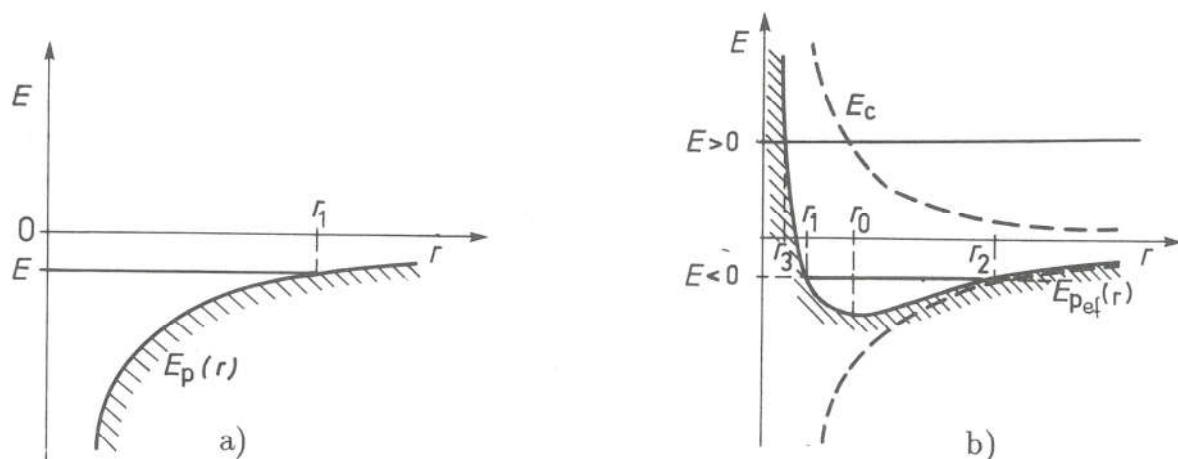
Ukupna je energija konstantna. No za centralne je sile  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ , pa je isto tako konstantan i moment količine gibanja  $\vec{L}$ . Dobili smo izraz kojem članovi ovise samo o udaljenosti od ishodišta i o radijalnoj komponenti brzine. Vidimo da, ako promatramo samo radijalnu komponentu brzine  $v_r$ , dakle brzinu kojom se mijenja udaljenost čestice od ishodišta, možemo ovaj problem gibanja promatrati kao gibanje u jednoj dimenziji, pri čemu se mijenja samo udaljenost  $r$ . No to je sada problem s izmijenjenom, **efektivnom potencijalnom energijom**:

$$E_p(r)_{ef} = E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (11.17)$$

Ako je posrijedi gravitacija, efektivna se potencijalna energija čestice mase  $m$  može napisati kao:

$$E_p(r)_{ef} = -\gamma \frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (11.18)$$

pri čemu masa  $M$  miruje u ishodištu. Prvi član prikazuje gravitacijsku potencijalnu energiju (sl. 11.15.a).



Slika 11.15. Potencijalna energija gravitacijske sile

Nacrtamo li efektivnu potencijalnu energiju, dobivamo rezultat koji će nas možda iznenaditi. Krivulja koju smo dobili (v. sl. 11.15.b) vrlo je slična krivulji koja je opisivala međudjelovanje dvaju atoma u molekuli: potencijalna energija ima izrazit minimum na nekoj udaljenosti. Sila je odbojna na malim udaljenostima, a privlačna na većim.

Promotrimo gibanje čestice koja ima energiju  $E < 0$  (v. sl. 11.15.b). Ta je čestica u vezanu stanju. Iz slike vidimo da se čestica može gibati tako da udaljenost od ishodišta bude veća od  $r_1$ , ali manja od  $r_2$ . Staza je takve čestice elipsa kojoj je jedno od žarišta u ishodištu. Ima li čestica ukupnu energiju upravo jednaku nuli, ona ne može doći na udaljenost  $r < r_3$ , ali se može udaljiti i potpuno odvojiti. Staza je takve čestice parabola. Ima li čestica energiju  $E > 0$ , ona je slobodna, može se udaljiti od ishodišta, a njezina je staza hiperbola. To su krivulje po kojima se pod utjecajem gravitacije gibaju planeti, asteroidi, sateliti i svemirske letjelice.

Prvi član predstavlja privlačenje prema ishodištu, dakle, negativnu potencijalnu energiju. Drugi član, koji dolazi od centrifugalne sile, pozitivan je i nastoji česticu

udaljiti od ishodišta to jače što je veći  $L$ . Ono što zapanjuje, to je rezultat njihova zajedničkog djelovanja: potencijalna energija koja stabilizira sistem i koja ne dopušta čestici da znatno odstupi od ravnotežne udaljenosti. Pritom se čestica vrti i giba u prostoru, pa ipak je njezino gibanje opisano jednom jednostavnom krivuljom potencijalne energije, kakvu smo susretali u raznim primjerima stabilnih jednodimenzionalnih sistema.

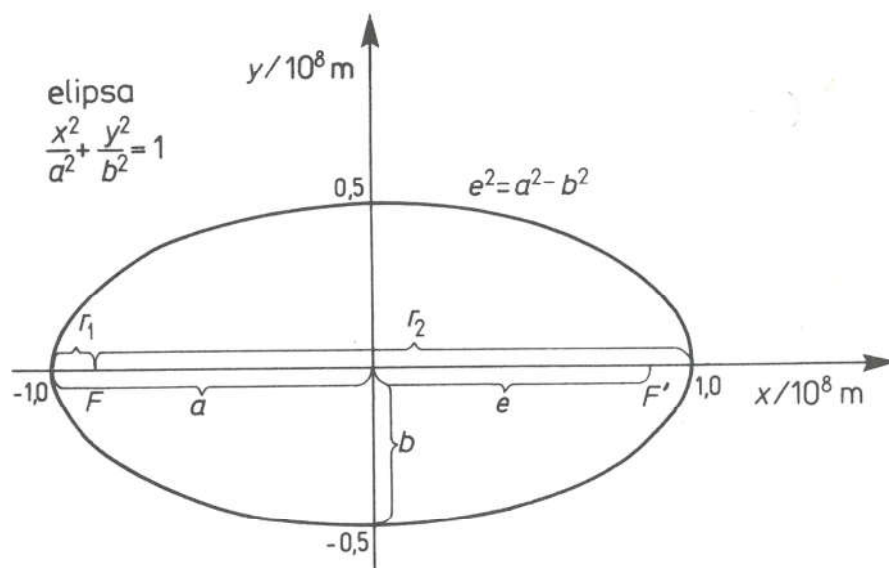
Sve što smo zaključili o gibanju dviju masa, vrijedi i za dva električna naboja suprotnih predznaka, jer je sila između njih privlačna i obrnuto razmjerna s kvadratom udaljenosti. To nas logično navodi na ideju da atom vodika, koji se sastoji od protona i elektrona, pokušamo objasniti kao mali planetarni sustav. Ta je predodžba osnovica Bohr-Sommerfeldova modela atoma. Pokazalo se, međutim, da mnoštvo pojava u atomskoj fizici proturječi jednostavnoj planetarnoj slici, da za sisteme malih dimenzija, manjih od  $10^{-10}$  m, klasična fizika ne vrijedi i da treba primijeniti nove zakone – zakone kvantne fizike.

No klasične predodžbe o gibanju i potencijalnoj energiji ostaju nam i dalje kao zorna slika i putokaz od neprocjenjive vrijednosti.

### Primjer 11.9.

Satelit mase  $m = 10^7$  kg giba se oko Zemlje po elipsi, kojoj je velika poluos  $a = 10^8$  m, a manja poluos  $b = 5 \cdot 10^7$  m (sl. 11.16).

- Nađite najmanju i najveću udaljenost satelita od središta Zemlje.
- Odredite ukupnu energiju  $E$  satelita i njegov moment količine gibanja  $L$ .
- Napišite izraz koji prikazuje ovisnost efektivne potencijalne energije satelita o udaljenosti  $r$  od Zemlje. Grafički prikažite ovisnost gravitacijskog i centrifugalnog člana, te ukupne potencijalne energije u ovisnosti o  $r$ , za  $0 < r \leq 20 \cdot 10^7$  m.



Slika 11.16. Gibanje pod djelovanjem gravitacijske sile



a) Najmanja udaljenost  $r_1$  i najveća udaljenost  $r_2$  mogu se izračunati iz izraza:

$$r_1 = a - \sqrt{a^2 - b^2} = 1,34 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$r_2 = a + \sqrt{a^2 - b^2} = 1,87 \cdot 10^8 \text{ m.}$$

b) Za najbližu i najdalju točku  $v_r = 0$  pa izraz (11.16) glasi:

$$E = -\gamma \frac{mM_Z}{r} + \frac{L^2}{2mr^2},$$

što se može napisati u obliku kvadratne jednadžbe za  $r$ :

$$r^2 + \gamma \frac{mM_Z}{E} r - \frac{L^2}{2mE} = 0$$

Za rješenja  $r_1$  i  $r_2$  kvadratne jednadžbe vrijedi, uz rezultate pod a):

$$r_1 \cdot r_2 = -\frac{L^2}{2mE} = b^2$$

i:

$$r_1 + r_2 = -\gamma \frac{mM_Z}{E} = 2a.$$

Odatle dobivamo:

$$E = -\gamma \frac{mM_Z}{2a} = -6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot \frac{10^7 \text{ kg} \cdot 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{2 \cdot 10^8 \text{ m}}$$

$$E = -2 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

i:

$$L = mb \sqrt{\frac{\gamma M_Z}{a}} = 10^7 \text{ kg} \cdot 5 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{10^8 \text{ m}}}$$

$$L = 10^{18} \text{ J s.}$$

c) Izraz za efektivnu potencijalnu energiju glasi:

$$E_{p,ef} = -\gamma \frac{mM_Z}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2},$$

gdje je:

$$A = \gamma mM_Z = 4 \cdot 10^{21} \text{ J m}$$

i

$$B = \frac{L^2}{2m} = \gamma M_Z \cdot \frac{b^2}{2a} = 5 \cdot 10^{28} \text{ J m}^2.$$

Pritom smo uzeli u obzir masu Zemlje  $M_Z = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ . Efektivna potencijalna energija jednaka je nuli u točki:

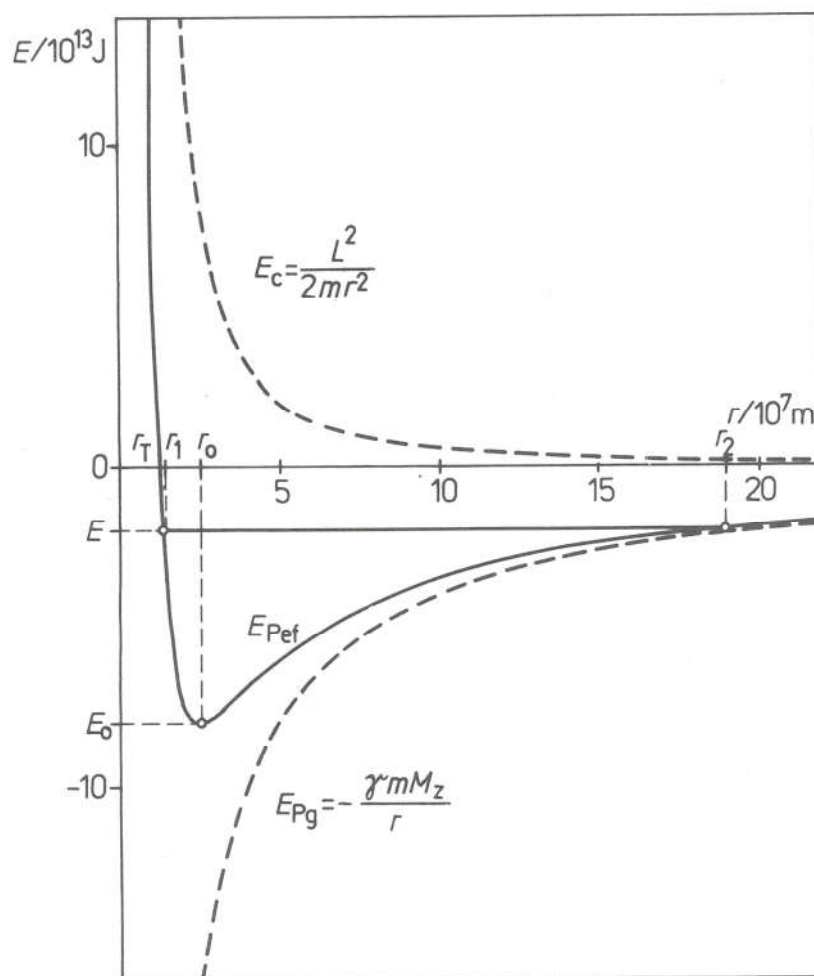
$$r_T = \frac{b^2}{2a} = 1,25 \cdot 10^7 \text{ m,}$$

a minimalna je u točki u kojoj je:

$$\frac{dE_{p,ef}}{dr} = 0, \quad \text{dakle, za} \quad r_0 = \frac{b^2}{a} = 2,50 \cdot 10^7 \text{ m.}$$

Krivulje možemo nacrtati (sl. 11.17) pomoću tablice:

|                              |        |        |        |        |        |
|------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $r/10^7 \text{ m}$           | 1,0    | 1,25   | 2,0    | 2,5    | 3,0    |
| $E_{pg}/10^{13} \text{ J}$   | -40,00 | -32,00 | -20,00 | -16,00 | -13,33 |
| $E_c/10^{13} \text{ J}$      | 50,00  | 32,00  | 12,50  | 8,00   | 5,56   |
| $E_{p,ef}/10^{13} \text{ J}$ | 10,00  | 0,00   | -7,50  | -8,00  | -7,78  |
| $r/10^7 \text{ m}$           | 4,0    | 6,0    | 8,0    | 10,0   | 12,0   |
| $E_{pg}/10^{13} \text{ J}$   | -10,00 | -6,67  | -5,00  | -4,00  | -3,34  |
| $E_c/10^{13} \text{ J}$      | 3,12   | 1,39   | 0,78   | 0,50   | 0,35   |
| $E_{p,ef}/10^{13} \text{ J}$ | -6,88  | -5,28  | -4,22  | -3,50  | -2,99  |
| $r/10^7 \text{ m}$           | 14,0   | 16,0   | 18,0   | 20,0   |        |
| $E_{pg}/10^{13} \text{ J}$   | -2,86  | -2,50  | -2,22  | -2,00  |        |
| $E_c/10^{13} \text{ J}$      | 0,26   | 0,20   | 0,15   | 0,12   |        |
| $E_{p,ef}/10^{13} \text{ J}$ | -2,60  | -2,30  | -2,07  | -1,88  |        |



Slika 11.17. Efektivna potencijalna energija gravitacijske sile

## Pitanja i zadaci

- 11.1. Napišite relacije kojima se iz poznate potencijalne energije može naći sila, i obratno, za slučaj jednodimenzionalnog gibanja pod djelovanjem konzervativne sile.
- 11.2. Što je referentna točka?
- 11.3. Kako se određuje točka u kojoj je čestica u stabilnoj ravnoteži?
- 11.4. Nađite izraz za silu i ravnotežni položaj čestice ako je potencijalna energija dana izrazom (uz uvjet  $x > 0$ ):

$$E_p(x) = \frac{A}{x} + Bx.$$

Konstante imaju vrijednost  $A = 32 \text{ eV nm}$  i  $B = 2 \text{ eV nm}^{-1}$ . Prikažite grafički silu i potencijalnu energiju.

- 11.5. Sila ovisi o položaju čestice po zakonu  $F(x) = -ax + bx^3$ , gdje su  $a$  i  $b$  pozitivne konstante. Nađite ovisnost potencijalne energije o  $x$  ako ona iščezava u ishodištu.
- 11.6. Napišite izraz za potencijalnu energiju jednodimenzionalnoga harmoničkog oscilatora ako je ravnotežni položaj
  - a) u ishodištu,
  - b) u točki  $x_0$ .

Prikažite to grafički.

- 11.7. Potencijalna energija čestice koja harmonički titra dana je izrazom  $E_p = 50 \text{ Nm}^{-1}(x - 1 \text{ nm})^2$ . Nađite položaje  $x_1$  i  $x_2$  krajnjih točaka između kojih se giba čestica energije  $10 \text{ eV}$ .
- 11.8. Kako se mijenja fizikalna situacija ako potencijalnoj energiji dodamo konstantni član? Kako ta promjena utječe na silu?
- 11.9. Opišite Morseovu i Lennard-Jonesovu potencijalnu energiju i objasnite njihovo značenje.
- 11.10. Objasnite gibanje čestice ako potencijalna energija ima dva minimuma. Navedite primjere.



- 11.11. Napišite vezu potencijalne energije i tangencijalne sile za slučaj rotacije.
- 11.12. Nacrtajte krivulju potencijalne energije za molekulu etana  $C_2H_6$  te objasnite titranje i unutrašnju rotaciju te molekule.
- 11.13. Nacrtajte krivulju efektivne potencijalne energije satelita koji se giba oko Zemlje pod djelovanjem gravitacijske sile. Objasnite porijeklo takve krivulje.
- 11.14. Po kakvim se stazama može gibati čestica na koju djeluje gravitacijska sila? Kakva je veza između oblika staze i energije čestice?
- 11.15. Nađite veliku i malu poluos elipse po kojoj se giba elektron oko protona ako je ukupna energija elektrona  $E = -1,51 \text{ eV}$ , a njegov moment količine gibanja  $L = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ . Pretpostavite da vrijedi klasična mehanika.

## 12. Temelji suvremene kvantne fizike

U manje od tri stoljeća, od prvih pokusa G. Galileia do Maxwellove teorije elektromagnetizma, fizika je prešla divovski put. Kraj prošloga stoljeća znanstvenici su dočekali zadovoljno, uvjereni da sada, kad poznaju valnu prirodu i zakonitosti elektromagnetskih valova, kad su ovladali zakonima Newtonove mehanike i upoznali statističku prirodu tvari, pred njima stoji još samo usklađivanje nekih sitnih detalja u velikom mozaiku prirode. No upravo u tom trenutku, na prijelazu stoljeća, pokazalo se da rubovi toga mozaika obiluju čudnim i još neviđenim fenomenima koje klasična fizika ne može objasniti. Istraživanje tih pojava dovelo je do neslućena razvoja fizike i njezinih primjena, i upravo godinu 1900. možemo smatrati početkom suvremene fizike.

Suvremena je fizika proširila poznavanje zakonitosti prirode na pojave u mikrosvijetu i na pojave pri velikim brzinama. Taj je razvoj čovječanstvu otvorio put prema novim materijalima, novim izvorima energije i novim komunikacijskim sustavima, bez kojih danas teško možemo zamisliti svakodnevni život. Istodobno, znanje koje je u proteklom stoljećima fizika nagomilala o makrosvijetu nije izgubilo ništa od svoje točnosti, već se prirodno uklopilo u jednu novu, širu sliku prirodnih zakonitosti.

Među pojavama koje su potkraj prošloga stoljeća opažene, a zatim ubrzo i protumačene na sasvim nov i revolucionaran način, izdvojit ćemo četiri: to su toplinsko zračenje tijela, fotoelektrični efekt, raspršenje svjetlosti na elektronima i atomski spektri. Svaku od tih pojava iscrpno ćemo razmotriti kako bismo bolje shvatili nove koncepte fizike 20. st. Što je bitno u tim novim predodžbama, a nije bilo poznato u klasičnoj fizici?

Jedan od novih pojmova jest dvojna priroda svjetlosti. Svjetlost se ponaša kao val, ali ona ima i čestičnu prirodu. Naizgled u protuslovlju, ta dva vida svjetlosti ipak nigdje u fizici ne dolaze u sukob, nego se međusobno nadopunjavaju. Daljnji je razvoj pokazao da i materija, koju smo navikli zamišljati kao mnoštvo čestica, i sama ima dvojnu prirodu; baš kao i svjetlost i ostala elektromagnetska zračenja, i materija ima istodobno i čestičnu i valnu prirodu. Nadalje, nova je fizika unijela u sliku svijeta pojam kvantiziranih promjena i veličina. Dok je klasična fizika u svakoj pojavi vidjela neprekinutu, kontinuiranu promjenu, mnoštvo pokusa izvedenih potkraj prošloga stoljeća pokazalo je da se energija, ali i mnoge druge mjerive fizikalne veličine, mijenjaju skokovito.

Pretpostavku o kvantiziranoj promjeni energije prvi je izrekao Max Planck na sastanku Njemačkog fizičkog društva 1900. g., objasnivši toplinsko zračenje tijela. Taj se datum, 14. 12. 1900, smatra rođendanom kvantne fizike.

## 12.1. Toplinsko zračenje

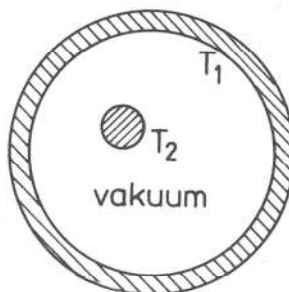
Toplinsko (termičko) zračenje nastaje kada atomi ili molekule tijela, pobuđeni termičkim gibanjem, emitiraju elektromagnetske valove. Užarena tijela zrače elektromagnetske valove uglavnom u infracrvenom (toplinskom) području. Upaljena peć grije okolne predmete to jače što joj je temperatura veća. Intenzitet i spektralni sastav izračene toplinske energije nekog tijela uglavnom ovise o njegovoj temperaturi. *Infra* *347. INFRACRUE*

Pri nižim temperaturama tijela emitiraju infracrveno zračenje, a ako su temperature veće od oko 800 K, tijela počinju, uz infracrvenu, zračiti i vidljivu svjetlost; pri vrlo visokim temperaturama, osim infracrvene i vidljive, emitira se i ultraljubičasta svjetlost. Iako pri visokim temperaturama tijela svijetle, ne smijemo zaboraviti da vidljiva svjetlost nije jedino zračenje koje emitiraju: oko 90% zračenja je nevidljivo.

Užarena tijela emitiraju, dakle, kontinuirane spektre koji se sastoje od svih valnih duljina, od najkraćih ultraljubičastih do najdužih infracrvenih; pritom su neke valne duljine isijavane jače, druge slabije. Raspored energije po pojedinim valnim duljinama bitno ovisi o temperaturi tijela koje zrači.

### 12.1.1. Toplinska ravnoteža

Pretpostavimo da se u evakuiranoj posudi, temperature zidova  $T_1$ , nalazi ugri-jano tijelo temperature  $T_2$  (sl. 12.1). Neka je  $T_2 > T_1$ . Nakon nekog vremena uspostaviti će se termička ravnoteža: tijelo će se ohladiti, stijenke posude ugri-jati i temperature tijela i zidova posude će se izjednačiti. Budući da predmet i posuda nisu u izravnom dodiru, već odvojeni vakuumom, toplina može prelaziti



Slika 12.1. Objašnjenje termičke ravnoteže

samo zračenjem. Ugri-jano će tijelo emitirati elektromagnetske valove, ali i apsorbirati zračenje koje prima od zidova posude. Slično će i stijenke posude emitirati zračenje i apsorbirati zračenje koje im dolazi od ugri-janog tijela (sl. 12.1). Pritom



je intenzitet zračenja tijela veći nego intenzitet zračenja zidova posude zbog veće temperature  $T_2$ .

Temperatura ugrijanog tijela smanjivat će se sve dok izračena energija ne bude jednaka apsorbiranoj energiji, a temperatura  $T_1$  zidova posude će se istodobno povećavati, sve dok se ne uspostavi toplinska ravnoteža. Ako je tijelo toplije od okoline, ono će se hladiti, jer više emitira nego što apsorbira. Kad se postigne toplinska ravnoteža, emisija je jednaka apsorpciji.

Prva važnija ispitivanja toplinskoga zračenja obavljena su potkraj prošloga stoljeća. Mjereni su zračenje užarenoga tijela, spektar tog zračenja na određenoj temperaturi, te raspored energije zračenja u spektrima. Otkrivena su tri empirijska zakona za zračenje: Kirchhoffov, Stefan-Boltzmannov i Wienov zakon. Neuspjeh u pokušaju da se zakonima klasične fizike objasni toplinsko zračenje doveo je do nastanka kvantne fizike.

### 12.1.2. Kirchhoffov zakon

Kada zračenje upada na neku plohu, jedan njegov dio može biti propušten u drugo sredstvo, dio će se reflektirati, a dio će se apsorbirati u tvari. Da bismo opisali te pojave, uvest ćemo tok zračenja kroz površinu  $S$ :

$$\Phi = \int_S \vec{S} \cdot d\vec{S}.$$

gdje je  $\vec{S}$  Poyntingov vektor koji smo definirali u poglavlju 7, a čiji iznos ima značenje intenziteta (gustoće toka) elektromagnetskog zračenja. Upada li zračenje okomito i ravnomjerno na plohu površine  $S$ , uobičajeno je njegov intenzitet označiti slovom  $I$ , tako da vrijedi:

$$I = \frac{\Phi}{S}.$$

Tok  $\Phi$  zračenja predstavlja energiju koja je u jedinici vremena protekla kroz plohu površine  $S$ , i iskazuje se jedinicom vat (W). Jedinica za intenzitet  $I$  zračenja jeste vat po četvornom metru ( $\text{Wm}^{-2}$ ).

Označimo li s  $\Phi_{up}$  upadni tok, s  $\Phi_a$  apsorbirani tok, s  $\Phi_t$  propušteni (transmitirani) tok, a s  $\Phi_r$  reflektirani tok, zbog očuvanja energije možemo pisati

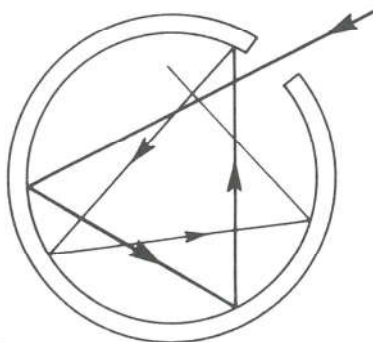
$$\Phi_{up} = \Phi_a + \Phi_t + \Phi_r.$$

Ako uvedemo nove veličine: faktor apsorpcije  $\alpha = \Phi_a / \Phi_{up}$ , faktor transmisije  $\tau = \Phi_t / \Phi_{up}$  i faktor refleksije  $\rho = \Phi_r / \Phi_{up}$ , tada je

$$\alpha + \tau + \rho = 1 \quad (12.1)$$

Ovi faktori mogu poprimiti vrijednosti između 0 i 1. Njihove se vrijednosti za neko tijelo, međutim, mogu i mijenjati, ovisno o temperaturi na kojoj je tijelo, kao i o spektralnom sastavu zračenja. Naime, zračenja koja proučavamo obuhvaćaju kontinuirani niz različitih valnih duljina  $\lambda$ , za koje se apsorpciona i ostala svojstva

tijela mogu znatno razlikovati. Stoga faktore apsorpcije, refleksije i transmisije najčešće pišemo kao funkcije  $\alpha(\lambda, T)$ ,  $\rho(\lambda, T)$  i  $\tau(\lambda, T)$ . Tim funkcijama određena su karakteristična svojstva nekog tijela. Tako će npr. za potpuno neprozirna tijela biti  $\tau = 0$  za sve temperature i valne duljine. Ako je  $\alpha(\lambda, T) = 1$ , to znači da je tijelo crno za valnu duljinu  $\lambda$ . Čađa, na primjer, ima  $\alpha = 1$  za vidljivi dio spektra, ali nije "crna" za zračenje u infracrvenom dijelu spektra.



Slika 12.2. Idealno crno tijelo

Posebnu važnost u izučavanju zračenja ima tzv. *idealno crno tijelo*, kod kojega je  $\alpha = 1$  za sve valne duljine i sve temperature. Iako idealno crno tijelo ne postoji u prirodi, možemo ga oponašati tako da uzmemo izotermnu šupljinu ( $T = \text{konst.}$ ) s vrlo malim otvorom (sl. 12.2). Takav otvor ponaša se kao idealno crno tijelo jer potpuno apsorbira sve upadno zračenje koje uđe u šupljinu. Naime, ušavši u šupljinu, zraka svjetlosti ili drugog zračenja brojnim se refleksijama u njoj potpuno apsorbira. Vjerojatnost da nešto od upadnog zračenja izađe kroz otvor zanemarivo je mala. (Na sl. 12.2. reflektirane su zrake sve tanje i tanje, da bi se istaklo kako se pri svakoj refleksiji dio energije apsorbira.)

Na početku ovog poglavlja bilo je riječi o tome da tijelo koje je u toplinskoj ravnoteži s okolinom mora, istodobno s apsorpcijom, energiju i emitirati. Označimo li slovom  $\Phi_e$  emitirani tok zračenja, intenzitet emitiranog zračenja možemo pisati kao

$$I = \frac{\Phi_e}{S} \quad (12.2)$$

a omjer  $\epsilon = \Phi_e / \Phi_{up}$  nazivamo faktorom emisije. Pritom intenzitetom  $I$  obuhvaćene su sve valne duljine i on zapravo predstavlja zbroj doprinosa po svim valnim duljinama sadržanima u emitiranom spektru. Kako je riječ o kontinuiranom spektru, možemo pisati

$$I = \int_0^{\infty} I_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \left( \frac{dI}{d\lambda} \right) d\lambda.$$

Za idealno crno tijelo uvodimo veličinu koja se naziva emisiona moć crnog tijela ili spektralna gustoća zračenja

$$f(\lambda, T) = \left( \frac{dI}{d\lambda} \right)_{ct}$$



Ona ovisi samo o temperaturi i valnoj duljini, bez obzira na sastav, oblik i strukturu tijela. Jedinica kojom se iskazuje emisiona moć crnog tijela je vat po kubnom metru ( $\text{Wm}^{-3}$ ).

Zamislamo sada da se unutar zatvorene evakuirane posude, zidovi koji su na temperaturi  $T_1$ , nalaze dva različita tijela temperatura  $T_2$  i  $T_3$ . Nakon što bude postignuta toplinska ravnoteža, oba će tijela imati istu temperaturu kao i zidovi posude. Pretpostavimo da je faktor apsorpcije prvoga tijela veći od faktora apsorpcije drugoga tijela. Budući da je prvo tijelo apsorbiralo više energije, a ipak je postiglo istu temperaturu kao i drugo tijelo, proizlazi da je moralo emitirati više energije nego drugo tijelo.

To znači da će tijelo koje jače apsorbira jače i emitirati pri istoj temperaturi. U ravnoteži je emitirani tok jednak apsorbiranom, što za crno tijelo vodi na izraz

$$\Phi_{up} = \Phi_a^{ct} = \Phi_e^{ct} \quad (12.3)$$

Radi li se o "sivom" tijelu, tj. takvom za koje je  $\alpha < 1$ , dio upadnog zračenja opisan tokom  $\Phi_a = \alpha \Phi_{up}$  se apsorbira, no isto toliko zračenja mora biti emitirano, pa je

$$\Phi_e = \varepsilon \Phi_{up} = \Phi_a = \alpha \Phi_{up}.$$

To vodi na relaciju

$$\varepsilon = \alpha.$$

Ako je spektar sastavljen od više valnih duljina, a apsorpciona se svojstva mijenjaju ovisno s valnom duljinom zračenja, tada relacije (12.3) vrijede za emisionu moć tijela,  $dI/d\lambda$ , tj. za dio toka koji otpada na interval valnih duljina između  $\lambda$  i  $\lambda + d\lambda$ . Sjetimo li se da je spektralna gustoća upadnog zračenja upravo jednaka spektralnoj gustoći emitiranog (i apsorbiranog) zračenja crnog tijela, možemo pisati

$$\varepsilon(\lambda, T) f(\lambda, T) = \alpha(\lambda, T) f(\lambda, T),$$

što nas vodi na izraz

$$\frac{\varepsilon(\lambda, T)}{\alpha(\lambda, T)} = 1 \quad (12.4)$$

To je Kirchhoffov zakon koji tvrdi da je omjer faktora emisije i faktora apsorpcije jednak jedinici za bilo koje tijelo. Važno je naglasiti da svaki od tih dvaju faktora zasebno može ovisiti o valnoj duljini i temperaturi, a ako tijelo nije idealno crno, tada čak i o sastavu tijela, njegovoj površini i obliku; no njihov je omjer uvijek konstantan i jednak jedinici. Dakle, ako nekom tijelu uglačamo površinu u namjeri da reflektira više i apsorbira manje od upadnog zračenja, tada će se i sposobnost emitiranja tog tijela smanjiti. Također je iz Kirchhoffova zakona jasno da je idealno crno tijelo najefikasniji emiter za danu temperaturu, a sva druga tijela – koja nisu crna – emitirat će manje.

Umjesto pomoću valne duljine, spektralna gustoća zračenja može se izraziti i pomoću frekvencije  $\nu$ , iz uvjeta

$$f(\nu, T) d\nu = f(\lambda, T) d\lambda.$$



Naime, intervalu  $d\lambda$  odgovara interval frekvencije  $d\nu$ , i intenzitet zračenja u tom intervalu mora biti isti, bez obzira kako ga izražavamo. Kako je  $\lambda = c/\nu$ , to mora biti  $d\lambda = (-c/\nu^2) d\nu$ . Stoga je

$$f(\nu, T) = (-c/\nu^2) f(\lambda, T).$$

Predznak minus potječe od toga što frekvencija pada kad valna duljina raste, i nema utjecaja u razmatranju spektralne gustoće.

Treba napomenuti još i da je zračenje koje izlazi iz otvora izotermne šupljine samo mali dio zračenja koje ispunja šupljinu kad u njoj vlada toplinska ravnoteža. Stoga je spektralna gustoća emitiranog zračenja  $f(\lambda, T)$  razmjerna s gustoćom energije

$$w(\lambda, T) = \frac{dW}{dV d\lambda}$$

zračenja unutar šupljine koje otpada na interval valnih duljina od  $\lambda$  do  $\lambda + d\lambda$ . Može se pokazati da točan izraz glasi

$$f(\lambda, T) = \frac{c}{4} w(\lambda, T).$$

### 12.1.3. Spektar zračenja crnog tijela

Kada je izotermna šupljina (sl. 12.2) ugrijana na neku temperaturu  $T$ , iz njezina otvora izlazi zračenje s kontinuiranom raspodjelom valnih duljina, od neke minimalne do maksimalne. Spektar toga zračenja vrlo je blizak spektru zračenja crnog tijela. Da bi se odredila spektralna gustoća zračenja  $f(\lambda, T)$ , zračenje je potrebno rastaviti u spektar (npr. pomoću ogibne rešetke) i mjeriti intenzitet dijelova spektra širine  $d\lambda$  za razne  $\lambda$ . Rezultati takvih mjerenja prikazani su na sl. 12.3. To su spektri zračenja crnoga tijela, tj. emisija moć kao funkcija valne duljine, za razne temperature.

Iz spektra na sl. 12.3. vidljivo je nekoliko važnih činjenica. Spektar bitno ovisi o temperaturi tijela: što je temperatura veća, i ukupna je izračena energija veća. (Uočite da površina ispod krivulje  $f(\lambda, T)$  predstavlja ukupni intenzitet zračenja, tj. ukupnu energiju koju u sekundi emitira jedinična površina.) Svaki spektar ima maksimum na određenoj valnoj duljini  $\lambda_m$ . Kako temperatura raste, maksimumi se pomiču prema manjim valnim duljinama. To pomicanje maksimuma dobro nam je poznato iz iskustva: bijelo usijana peć zrači mnogo više topline od peći koja je usijana do crvene boje.

Ova svojstva spektara uočena su još u prošlom stoljeću i izražena su pomoću Stefan-Boltzmannova i Wienova zakona.

### 12.1.4. Stefan-Boltzmannov i Wienov zakon

Jožef Stefan otkrio je na osnovi eksperimentalnih spektara zračenja da je ukupni intenzitet zračenja, tj. energija koju zrači  $1 \text{ m}^2$  površine tijela u sekundi razmjernan s četvrtom potencijom apsolutne temperature crnoga tijela.

L. Boltzmann, neovisno o Stefanu, teorijskim je razmatranjem došao do istog rezultata i odredio izraz za ukupni intenzitet zračenja idealnoga crnog tijela:

$$I = \int_0^{\infty} f(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4,$$

gdje je  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$  tzv. Stefan-Boltzmannova konstanta.

Izraz:

$$I = \sigma T^4 \quad (12.5)$$

naziva se **Stefan-Boltzmannov zakon**.

Iz (12.5) slijedi da ukupna snaga  $P$  zračenja crnoga tijela površine  $S$  iznosi:

$$P = S\sigma T^4 \quad (12.6)$$

Za realna "siva" tijela faktor emisije  $\varepsilon$  manji je od jedinice ( $0 < \varepsilon < 1$ ), pa Stefan-Boltzmannov zakon glasi:

$$I = \frac{P}{S} = \varepsilon \sigma T^4$$

### Primjer 12.1.

Koliku snagu emitira  $1 \text{ cm}^2$  površine crnoga tijela pri temperaturi  $1\,000 \text{ K}$ , a koliku pri  $2\,000 \text{ K}$ ?

Primjenom relacije (12.6) dobivamo:

$$P_1 = S\sigma T_1^4 = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot 1\,000^4 \text{ K}^4$$

$$P_1 = 5,67 \text{ W}$$

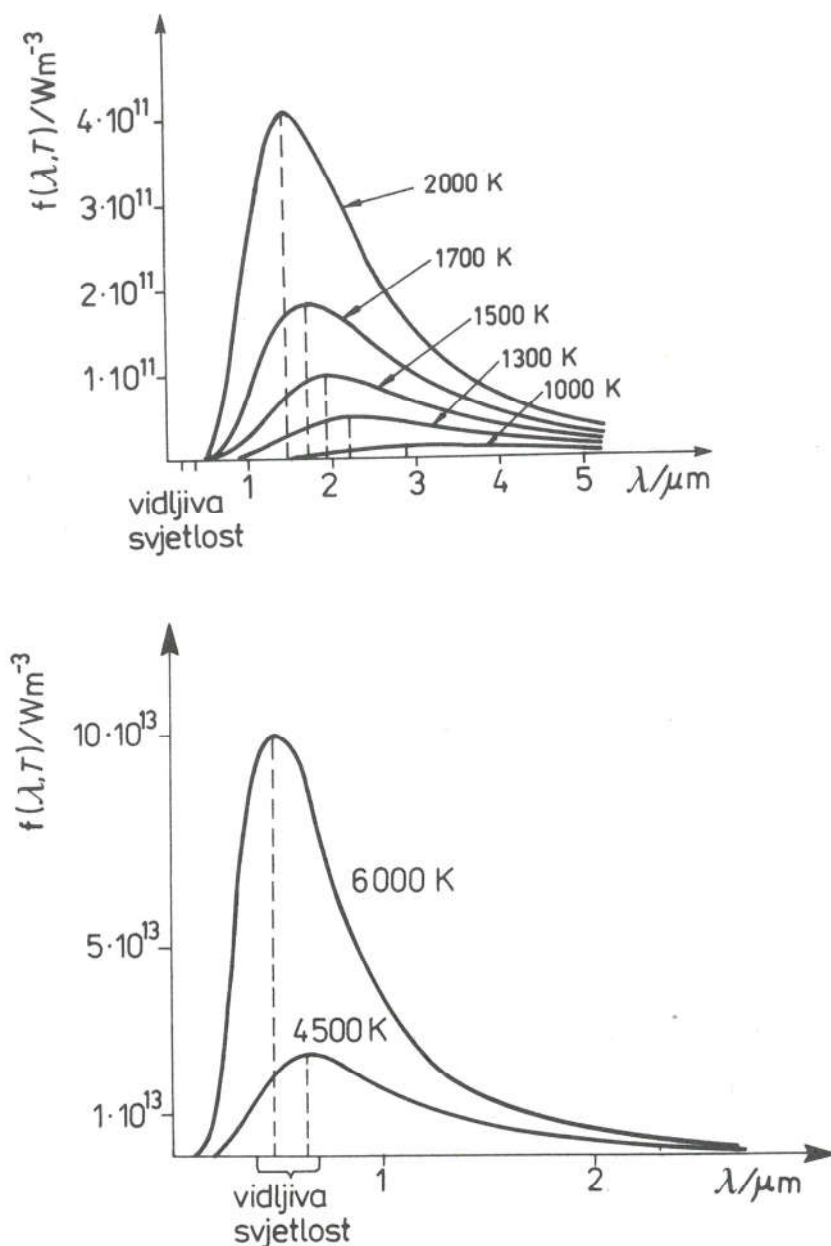
$$P_2 = S\sigma T_2^4 = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot 2\,000^4 \text{ K}^4$$

$$P_2 = 90,7 \text{ W}$$

Ako je crno tijelo temperature  $T_2$  okruženo stijenkama temperature  $T_1$  (sl. 12.1), tijelo će emitirati snagu  $S\sigma T_2^4$ , ali i apsorbirati snagu  $S\sigma T_1^4$ , pa je snaga koju tijelo gubi zračenjem jednaka:

$$\Delta P = S\sigma(T_2^4 - T_1^4)$$

Iz sl. 12.3. jasno se uočava da svaka krivulja ima maksimum na određenoj valnoj duljini  $\lambda_m$ . To je ona valna duljina oko koje se pri određenoj temperaturi emitira najviše energije. Maksimumi spektralne gustoće zračenja  $f(\lambda, T)$  pomiču se prema kraćim valnim duljinama kada temperatura raste.



Slika 12.3. Spektri zračenja crnoga tijela za različite temperature

Tu činjenicu izražava **Wienov zakon pomicanja**, koji kaže da je valna duljina koja odgovara maksimumu izračene energije  $\lambda_m$  obrnuto razmjerna apsolutnoj temperaturi:

$$\lambda_m T = b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K m} \quad (12.7)$$

Tako se npr. pri sobnoj temperaturi ( $T = 300 \text{ K}$ ) najviše energije emitira s valnom duljinom od oko  $10 \text{ nm}$  (infracrveno – toplinsko područje), dok je pri temperaturi  $6000 \text{ K}$  maksimum spektra u području vidljive svjetlosti (oko  $500 \text{ nm}$ ).



**Primjer 12.2.**

Odredite temperaturu površine Sunca i snagu koju zrači  $1 \text{ m}^2$  njegove površine pod pretpostavkom da Sunce zrači kao crno tijelo. (Maksimum je Sunčeva zračenja za valnu duljinu od  $480 \text{ nm}$ .)

Iz

$$\lambda_m T = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ K m}$$

slijedi

$$T = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} \text{ K m}}{480 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 6040 \text{ K}.$$

Iz Stefan-Boltzmannova zakona dobije se snaga koju zrači kvadratni metar površine Sunca:

$$I = \sigma T^4 = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot 6040^4 \text{ K}^4$$

$$I = 7,6 \cdot 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

**Primjer 12.3.**

Odredite početnu i konačnu temperaturu crnoga tijela ako mu se pri povećanju apsolutne temperature za dvaput  $\lambda_m$  smanji na  $580 \text{ nm}$ .

Iz Wienova zakona, koji glasi  $\lambda_{m_1} T_1 = b$  i  $\lambda_{m_2} T_2 = b$ , proizlazi

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\lambda_{m_2}}{\lambda_{m_1}} = \frac{1}{2}.$$

Odatle se dobiva

$$T_2 = \frac{b}{\lambda_{m_2}} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K m}}{580 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 4996 \text{ K} \quad \text{i} \quad T_1 = \frac{T_2}{2} = 2498 \text{ K}.$$

**12.1.5. Ultraljubičasta katastrofa**

Potkraj prošloga stoljeća, nakon što je bio izmjeren spektar zračenja crnoga tijela, fizičari su pomoću statističke mehanike i valne teorije svjetlosti pokušali objasniti oblik krivulja spektra za pojedine temperature i dobiti kvantitativnu ovisnost energije zračenja o valnoj duljini.

Mogu li zakoni klasične fizike (mehanike i elektrodinamike) objasniti toplinsko zračenje? Atome možemo shvatiti kao harmoničke oscilatore koji, kad se pobude, titraju i emitiraju svjetlost. Budući da užarena čvrsta tijela emitiraju kontinuirani

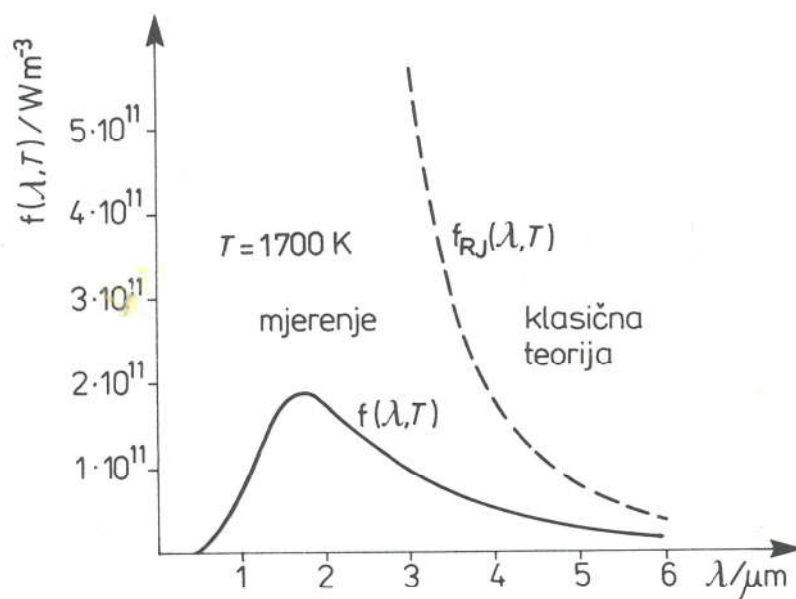
spektar, njihovi atomi moraju emitirati sve valne duljine od neke minimalne do maksimalne.

Neka je materijal od kojeg su napravljeni zidovi šupljine na sl. 12.2. zagrijan na temperaturu  $T$ . Elektroni u zidovima šupljine pobuđeni termičkim gibanjem emitiraju elektromagnetske valove u šupljinu. Tako nastali valovi putuju po šupljini, upadaju na njezine zidove i ondje se apsorbiraju. Kada je uspostavljena toplinska ravnoteža, apsorpcija je jednaka emisiji i čitava je šupljina izotermna.

Da bi izračunali gustoću energije u izotermnoj šupljini, engleski fizičari Jeans i Rayleigh pretpostavili su da se zračenje unutar šupljine sastoji od stojnih elektromagnetskih valova. Oni su izračunali da je broj valova  $dN$  frekvencije između  $\nu$  i  $\nu + d\nu$  koji se nalaze u volumenu  $V$  jednak:

$$dN = \frac{8\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu \quad (12.8)$$

Energija  $dw$  po jedinici volumena koja otpada na interval frekvencije  $d\nu$  dobiva se množenjem  $dN/V$  sa srednjom energijom harmoničkog oscilatora  $\overline{W}$ . U klasičnoj fizici po svakom stupnju slobode titranja u prosjeku otpada iznos energije jednak  $kT$ , gdje je Boltzmannova konstanta  $k = 1,3805 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ , a  $T$  apsolutna temperatura. Zato će srednja energija vala (harmoničkog oscilatora) iznositi  $\overline{W} = kT$ .



Slika 12.4. Usporedba Rayleigh-Jeansove krivulje i eksperimentalnih rezultata

Uz tu pretpostavku Rayleigh i Jeans dobili su sljedeću formulu za spektralnu gustoću zračenja:

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \overline{W} = \frac{2\pi c k T}{\lambda^4} \quad (12.9)$$

Slika 12.4. uspoređuje Jeans-Rayleighovu formulu (12.9) i eksperimentalni spektar za neku temperaturu  $T$ . Za velike valne duljine (male frekvencije) Rayleigh-

–Jeansova krivulja približava se eksperimentalnome spektru, ali za manje valne duljine, pogotovo u ultraljubičastom području, odstupanje je zaista veliko. Ona također, za razliku od eksperimentalne krivulje, nema maksimum.

Integriranje formule (12.9) po svim frekvencijama dalo bi beskonačno veliku vrijednost za ukupnu izračenu energiju, što, naravno, nije u skladu s eksperimentom.

Kad bi Rayleigh–Jeansova formula bila točna, zračenje u području valnih duljina manjih od valne duljine ultraljubičasta zračenja imalo bi beskonačni intenzitet pa se taj rezultat naziva “ultraljubičastom katastrofom”.

Slično je i Wien pomoću zakona termodinamike i elektrodinamike pokušao objasniti spektre crnoga tijela: formula koju je dobio nije reproducirala čitav spektar, nego samo njegov kratkovalni dio. Emisiona moć užarenog tijela u vidljivu dijelu spektra prema Wienovu zakonu zračenja iznosi:

$$f(\lambda, T) = \frac{A}{\lambda^5} e^{-\frac{B}{\lambda T}} \quad (12.10)$$

gdje su  $A$  i  $B$  konstante.

Tako Rayleigh–Jeansova formula (12.9) može približno opisati spektar na velikim valnim duljinama, a Wienova formula dio spektra na kratkim valnim duljinama. Ni jedna ni druga formula ne mogu reproducirati čitav spektar.

Jeans–Rayleighov i Wienov rezultat nisu u skladu s eksperimentom, ali ne zato što se u izvodu potkrala neka pogreška, već zato što klasična fizika svojim zakonima ne može objasniti sve pojave u prirodi, a pogotovo u mikrosvijetu atoma i molekula. Klasična fizika ne može zadovoljavajuće objasniti zračenje crnoga tijela, i potrebne su sasvim nove ideje za objašnjenje fizike mikrosvijeta.

#### 12.1.6. Planckov zakon zračenja

Problem zračenja crnoga tijela riješio je Max Planck g. 1900. svojom smionom hipotezom o kvantiziranosti energije atoma. Dotad se inače smatralo da atomi mogu kontinuirano mijenjati svoju energiju, slično klasičnim harmoničkim oscilatorima.

Atome i molekule u čvrstome tijelu možemo aproksimirati harmoničkim oscilatorom koji titra. Pomoću zakona statističke fizike može se naći srednja energija koju ima atom ili molekula nekoga tijela ugrijanog na temperaturu  $T$ . Poznato je da se srednja vrijednost nalazi pomoću izraza:

$$\overline{W} = \frac{\int_0^{\infty} W P(W) dW}{\int_0^{\infty} P(W) dW},$$

gdje je  $P(W)$  vjerojatnost da molekula ima energiju u intervalu između  $W$  i  $W + dW$ . U klasičnoj fizici molekule su raspoređene po tzv. Maxwell–Boltzmannovoj statistici:

$$P(W) = \text{konst.} \cdot e^{-W/kT},$$



pa je:

$$\overline{W} = \frac{\int_0^{\infty} W e^{-W/kT} dW}{\int_0^{\infty} e^{-W/kT} dW} = kT \quad (12.11)$$

Klasična fizika kaže da je srednja energija molekule u čvrstome tijelu jednaka  $kT$ . Energija zračenja bit će proporcionalna srednjoj energiji molekule. M. Planck je uvidio da to ne može biti ispunjeno ako želimo dobiti ispravan zakon zračenja crnoga tijela. Nastojeći da dobije izraz koji će točno prikazivati eksperimentalne spektre, on je uočio da energija što je emitiraju atomi ili molekule ne može biti bilo kakva, nego je **kvantizirana**. Atom ne može primiti ili emitirati bilo kako malu količinu energije, nego samo neku određenu količinu (kvant) energije ili višekratnike toga kvanta.

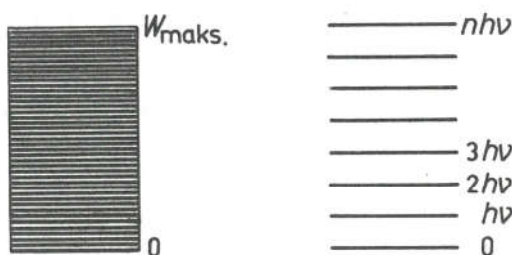
Planck je pretpostavio da se elektromagnetsko zračenje emitira iz atoma u obliku kvanata energije kojih je veličina proporcionalna frekvenciji zračenja

$$W = h\nu \quad (12.12)$$

pri čemu je koeficijent proporcionalnosti  $h$  dobio kasnije naziv **Planckova konstanta**. Njezina je vrijednost eksperimentalno određena i iznosi:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

U klasičnoj fizici energija je neprekinuta varijabla i klasični harmonički oscilator koji titra frekvencijom  $\nu$  može imati bilo koju vrijednost energije, od nule do neke maksimalne. Nasuprot tome kvantni harmonički oscilator (atom, molekula



Slika 12.5. Energijski spektar klasičnog i kvantnog oscilatora

i sl.) može imati samo određene diskretne energije  $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu$ . Slika 12.5.a prikazuje energijski dijagram klasičnog oscilatora koji titra frekvencijom  $\nu$ , a sl. 12.5.b dozvoljena energijska stanja Planckova oscilatora.

**Izračunavanje srednje energije Planckova oscilatora.** Pretpostavljajući kvantiziranost energije, srednja energija atomskog oscilatora, umjesto  $kT$ , postaje:

$$\overline{W} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}}, \quad (12.13)$$

gdje  $n$  poprima cjelobrojne vrijednosti.

Ta je relacija analogna izrazu (12.11), samo su integrali zamijenjeni odgovarajućim sumama.

Da bismo izračunali  $\overline{W}$ , zamijenimo  $e^{-h\nu/kT} = x$

$$\overline{W} = \frac{h\nu x + 2h\nu x^2 + 3h\nu x^3 + \dots}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots} = h\nu x \frac{1 + 2x + 3x^2 + \dots}{1 + x + x^2 + \dots}$$

U nazivniku je beskonačni geometrijski red, a u brojniku derivacija toga reda:

$$\overline{W} = h\nu x \frac{\frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + \dots)}{1 + x + x^2 + \dots} = h\nu x \frac{d}{dx} \ln(1 + x + x^2 + x^3 + \dots).$$

Budući da je

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

to je

$$\overline{W} = h\nu x \frac{d}{dx} \ln \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{h\nu x}{1-x} = \frac{h\nu}{\frac{1}{x} - 1}$$

ili nakon zamjene  $x = e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ :

$$\overline{W} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Tako smo dobili izraz za srednju energiju kvantnog oscilatora. Ova formula prelazi u klasični izraz  $\overline{W} = kT$  kada  $h \rightarrow 0$ , što je u skladu s činjenicom da u klasičnoj fizici energija može poprimiti neprekinuti niz vrijednosti.

**Planckova formula.** Ako u Rayleigh-Jeansovu formulu (12.9) uvrstimo ovaj izraz za  $\overline{W}$ , dobivamo Planckovu formulu za spektralnu gustoću zračenja crnoga tijela:

$$f(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (12.14)$$

ili

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}. \quad (12.15)$$

Kada se krivulje (12.14) i (12.15) nacrtaju kao funkcije frekvencije odnosno valne duljine za razne temperature, dobiva se potpuno slaganje s eksperimentalnim rezultatima (sl. 12.3). U tome je i bio najveći uspjeh Planckova zakona. Planckova ideja o kvantiziranosti energije ne može se shvatiti i opravdati zakonima klasične fizike, ali ona daje ispravan rezultat za zračenje crnoga tijela i zbog toga kvantiziranost prihvaćamo kao fundamentalnu činjenicu u prirodi.

**Prijelaz Planckove u Rayleigh-Jeansovu i Wienovu formulu.** Planckova formula prelazi u Wienovu na jednome kraju spektra, a u Rayleigh-Jeansovu na drugome kraju spektra.

Zaista, kada je  $h\nu \ll kT$ , tada je  $e^{h\nu/kT} \cong 1 + \frac{h\nu}{kT}$  pa je  $\overline{W} = kT$  i formula (12.14) prelazi u:

$$f(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 kT,$$

a to je upravo Rayleigh-Jeansova formula.

Slično za  $h\nu \gg kT$ ,  $e^{h\nu/kT} \gg 1$  pa je  $e^{h\nu/kT} - 1 \cong e^{h\nu/kT}$  i formula (12.14) prelazi u

$$f(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

ili:

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}$$

$$f(\lambda, T) = \frac{A}{\lambda^5} e^{-\frac{A}{\lambda T}},$$

a to je upravo Wienova formula za zračenje crnoga tijela.

**Izvod Wienova i Stefan-Boltzmannova zakona iz Planckova zakona.** Pokazat ćemo da Planckov zakon (12.15) sadrži u sebi i Wienov i Stefan-Boltzmannov zakon. Wienov zakon pomicanja kaže gdje je maksimum krivulje  $f(\lambda, T)$ . Da bismo odredili vrijednost od  $\lambda$  za koju izraz (12.15) ima ekstrem (maksimum), moramo prvu derivaciju  $df(\lambda, T)/d\lambda$  izjednačiti s nulom:

$$\frac{df(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{-5\lambda^4 \left( e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right) - \lambda^5 e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \left( -\frac{hc}{\lambda^2 kT} \right)}{\lambda^{10} \left( e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)^2} = 0,$$

odnosno:

$$\frac{hc}{\lambda kT} \frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} = 5.$$

Zamjenom  $x = \frac{hc}{\lambda kT}$  dobiva se jednadžba:

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 5.$$



Ova transcendentna jednadžba ima korijen  $x_\lambda = 4,9652$  u što se je lako uvjeriti uvrštavanjem.

Dakle:

$$x_\lambda = \frac{hc}{\lambda_m kT} = 4,9652$$

$$\lambda_m T = \frac{hc}{4,9652 k} = \frac{6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2,9979 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{4,9652 \cdot 1,3805 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}}$$

ili:

$$\lambda_m T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K m},$$

a to je upravo *Wienov zakon pomicanja*.

#### Primjer 12.4.

a) Iz Planckova zakona odredite frekvenciju  $\nu_m$  pri kojoj spektralna gustoća  $f(\nu, T)$  ima maksimum.

b) Koliki je produkt  $\nu_m \lambda_m$ ? Zašto nije  $\nu_m \lambda_m = c$ ?

a) Deriviramo izraz (12.14) za  $f(\nu, T)$  i izjednačimo s nulom. Nakon uvrštavanja  $x = \frac{h\nu}{kT}$  dobivamo jednadžbu

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = 3,$$

koja ima rješenje  $x_\nu = 2,826$ . To nas vodi na vrijednost

$$\frac{\nu_m}{T} = \frac{kx_\nu}{h}$$

$$\frac{\nu_m}{T} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 2,826}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ s K}} = 5,886 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

b) Iz poznatih vrijednosti  $\lambda_m = \frac{hc}{x_\lambda kT}$  i  $\nu_m = \frac{kx_\nu T}{h}$  dobivamo

$$\lambda_m \nu_m = \frac{x_\nu}{x_\lambda} c = \frac{2,826}{4,965} c = 0,569 c = 1,707 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

Iz Planckove formule (12.15) može se izvesti i Stefan-Boltzmannov zakon tako da se integriranjem odredi ukupni intenzitet zračenja za sve valne duljine.

Ukupni intenzitet zračenja je:

$$I = \int_0^\infty f(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Zamjenom  $x = \frac{hc}{kT\lambda}$  integral poprima oblik:

$$I = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

Budući da je određeni integral  $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$ , to je:

$$I = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \cdot \frac{\pi^4}{15} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \cdot T^4 = \sigma T^4.$$

Planckov izraz za emisiju moć crnoga tijela odlično se slaže s eksperimentalnim krivuljama (sl. 12.3) za sve valne duljine. I Wienov i Stefan-Boltzmannov zakon posljedice su Planckova zakona i mogu se izvesti iz njega. U tome je i najveća važnost Planckova zakona. Planck je prvi uočio korpuskularnu prirodu elektromagnetskoga zračenja i kvantiziranost u svijetu atoma i molekula i tako osnovao modernu kvantnu fiziku. U makroskopskim dimenzijama ni ne opažamo ovu "zrnatu" strukturu svjetlosti jer je kvant energije tako mali (oko  $10^{-20}$  J za vidljivu svjetlost), a broj kvanata tako velik da nam zračenje izgleda kontinuirano; zato smo širenje svjetlosti i pojave u vezi s tim (npr. interferenciju, difrakciju i sl.) mogli objasniti valnom prirodom svjetlosti. Međutim, za objašnjenje apsorpcije i emisije te interakcije svjetlosti s atomima svjetlost moramo shvaćati korpuskularno, tj. kao snop kvanata svjetlosti – fotona.

Zakoni zračenja mogu se primijeniti pri određivanju temperature užarenih tijela i izračunavanju temperatura zvijezda. Metode tih mjerenja proučava optička pirometrija.

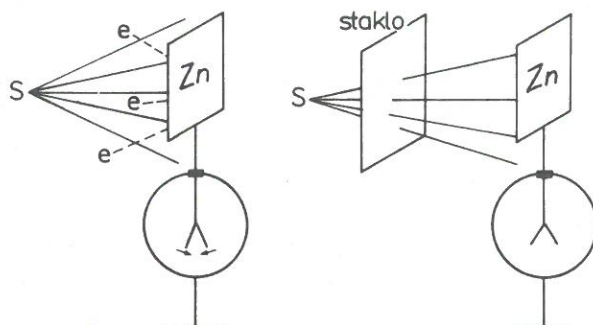
## 12.2. Fotoelektrični efekt

U prethodnom smo odjeljku vidjeli da klasična fizika ne može objasniti toplinsko zračenje. Sada ćemo upoznati još jednu pojavu – fotoelektrični efekt – za čije će nam objašnjenje ponovno biti potrebna kvantna priroda svjetlosti.

H. Hertz je 1887. opazio da se intenzitet iskre na metalnom iskrištu povećava ako je negativna elektroda osvijetljena ultraljubičastom svjetlošću. Kasnije je utvrđeno (Hallwachs, 1888) da iz metala obasjanih svjetlošću odgovarajuće valne duljine izlaze elektroni.

**Pokus:** Negativno nabijena očišćena ploča od cinka, koja je spojena s elektroskopom (sl. 12.6.a), izbija se ako je obasjamo svjetlošću lučne lampe koja sadrži ultraljubičaste zrake. Pri osvjetljavanju kroz staklenu ploču (koja apsorbira ultraljubičasto zračenje) razmak se listića elektroskopa ne mijenja (sl. 12.6.b).

Fotoelektrični efekt na cinku izaziva, prema tome, ultraljubičasta komponenta svjetlosti lučnice, a ne njezin vidljivi dio. Pokusi su, nadalje pokazali da za neke druge metale (Na, K, Cs i sl.) fotoefekt nastaje i s vidljivom svjetlošću.



Slika 12.6. Obasjavanje cinka ultraljubičastim zračenjem

Pojava da metali pod utjecajem elektromagnetskih valova (svjetlosti) emitiraju elektrone naziva se **fotoelektrični efekt**. Elektromagnetsko zračenje (svjetlost) dakle pri određenim uvjetima oslobađa elektrone iz metala. Neki metali (npr. Zn) emitiraju elektrone samo ako se upotrijebi ultraljubičasta svjetlost, a neki drugi (npr. alkalni) metali pokazuju fotoefekt i pri vidljivoj svjetlosti.

### 12.2.1. Rad izlaza

U metalima se elektroni manje više slobodno gibaju unutar kristalne rešetke, ali zbog kulonske barijere ne mogu napustiti površinu metala. Da bi se iz metala izbio elektron, potrebna je određena energija, tzv. **rad izlaza**  $W_i$ .

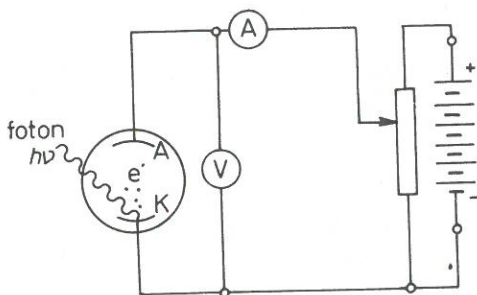
Ima različitih načina oslobađanja elektrona iz metala, npr. grijanjem metala (tzv. termoemisijom), fotoefektom itd. Ako je energija koju elektron dobije od upadne svjetlosti manja od rada izlaza, elektron neće izaći iz metala; fotoelektrični efekt nastat će samo ako elektroni u interakciji sa svjetlošću dobiju energiju veću od rada izlaza.

### 12.2.2. Eksperimentalne činjenice

Na sl. 12.7. shematski je prikazan uređaj za ispitivanje fotoelektričnog efekta. U evakuiranom staklenom balonu nalaze se fotoosjetljiva katoda (od materijala koji se ispituje) i anoda. Cijev je preko ampermetra (galvanometra) spojena za izvor napona.

Kada katodu obasjamo odgovarajućom svjetlosti, poteći će u krugu električna struja. Ovakvim uređajem možemo mjeriti  **$U$ - $I$  karakteristiku**, tj. krivulju koja pokazuje ovisnost fotostruje  $I$  o naponu  $U$  između elektroda pri stalnome svjetlosnom toku. Kada je katoda obasjana stalnim intenzitetom svjetlosti, a anodni napon varira, struja se mijenja, kao što to prikazuje sl. 12.8. Kada se napon na anodi povećava, povećava se i struja sve do zasićenja, kada su svi elektroni emitirani iz katode skupljeni na anodi. Struja zasićenja, osim o karakteristikama cijevi, ovisi i o intenzitetu upadne svjetlosti. Tako je na sl. 12.8. struja  $I_{m1}$  dobivena s dvostruko manjim intenzitetom svjetlosti nego  $I_{m2}$ .

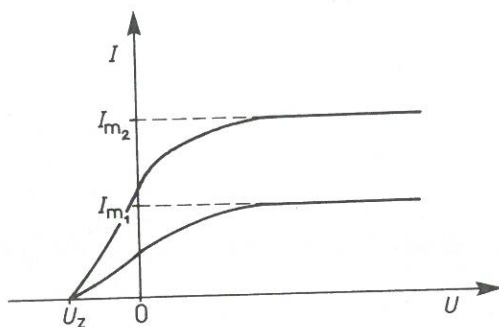




Slika 12.7. Uređaj za ispitivanje fotoelektričnog efekta

Što je intenzitet svjetlosti veći, to je broj emitiranih elektrona veći, dakle, i fotostruja je veća.

Smanjivanjem napona smanjuje se fotostruja. Kada napon padne na nulu, fotostruja ne iščezne, što pokazuje da fotoelektroni izlaze iz katode brzinom različitom od nule.



Slika 12.8. U-I karakteristika

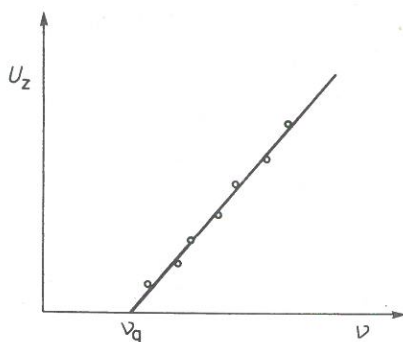
Ako se na anodu priključi negativni napon, struja se smanjuje da bi konačno prestala kada napon dostigne vrijednost  $U_z$  (napon zaustavljanja). Tada je napon dovoljno negativan da zaustavi i one najbrže elektrone oslobođene na fotokatodi:

$$\frac{mv_m^2}{2} = eU_z.$$

Mjereći napon zaustavljanja mogu se odrediti maksimalna brzina i kinetička energija fotoelektrona.

Millikan je prvi pokazao da napon zaustavljanja, odnosno maksimalna energija oslobođenih elektrona ovisi samo o **frekvenciji** svjetlosti (sl. 12.9). Što je frekvencija veća, elektroni imaju veću energiju i potreban je veći negativni napon da bi ih zaustavio.

Eksperiment je pokazao da za svaki metal postoji najmanja, tzv. **granična frekvencija** svjetlosti  $\nu_g$  ispod koje nema fotoelektričnog efekta ma kako velik bio



Slika 12.9. Ovisnost napona zaustavljanja o frekvenciji

intenzitet upadne svjetlosti. Naprotiv, ako je frekvencija  $\nu > \nu_g$ , fotoefekt će nastati ma kako malen bio intenzitet svjetlosti. Intenzitet utječe samo na broj emitiranih elektrona: što je intenzitet svjetlosti veći, broj je fotoelektrona veći. Ispod granične frekvencije  $\nu < \nu_g$ , nema fotoelektrona. Za  $\nu > \nu_g$  kinetička energija elektrona raste linearno s frekvencijom:

$$eU_z = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = \text{konst.} \cdot (\nu - \nu_g) \quad (12.16)$$

Relacija (12.16) zapravo je jednadžba pravca na sl. 12.9. Granične frekvencije ovise o vrsti metala. Za većinu metala one su u ultraljubičastom području, dok su npr. za cezij i kalij u vidljivom dijelu spektra.

### 12.2.3. Dvojna priroda svjetlosti

Nemoguće je ove osobine fotoefekta protumačiti valnom prirodom svjetlosti. Po klasičnoj valnoj teoriji energija koju bi elektromagnetski val predao elektronu u metalu morala bi ovisiti o intenzitetu svjetlosti. Eksperiment je, međutim, pokazao da tome nije tako. Energija ovisi o frekvenciji, a o intenzitetu ovisi samo broj fotoelektrona. Postojanje granične frekvencije također nije u skladu s valnom prirodom svjetlosti. Prema valnoj teoriji, fotoefekt bi se morao dogoditi za bilo koju frekvenciju ako je intenzitet elektromagnetskoga vala dovoljno velik.

Albert Einstein objasnio je fotoefekt godine 1905. korpuskularnom teorijom svjetlosti, a R. A. Millikan je 1914. eksperimentalno pokazao da postoji granična frekvencija ispod koje nema fotoefekta i tako potvrdio Einsteinovu teoriju.

### 12.2.4. Einsteinovo objašnjenje fotoelektričnog efekta

Prema Einsteinu, iz izvora svjetlosti izlaze kvanti svjetlosti koji se nazivaju fotoni. Svaki foton ima energiju:

$$E = h\nu \quad (12.17)$$

gdje je  $h$  Planckova konstanta, a  $\nu$  frekvencija svjetlosti.

Fotone možemo smatrati česticama svjetlosti kojima je masa mirovanja nula i koje se gibaju brzinom svjetlosti  $c$ . Budući da i za fotone vrijedi Einsteinova relacija  $E = mc^2$ , masa je fotona:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (12.18)$$

a količina gibanja:

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (12.19)$$

Dakle, foton kao i svaka druga čestica ima određenu masu, brzinu, energiju i količinu gibanja.

### Primjer 12.5.

Izračunajte masu i količinu gibanja fotona valne duljine  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .

Iz jednadžbi (12.18) i (12.19) proizlazi:

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^8 \cdot 500 \cdot 10^{-9}} \text{ kg}$$

$$m = 4,42 \cdot 10^{-36} \text{ kg}$$

i:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{500 \cdot 10^{-9}} \text{ kg ms}^{-1}$$

$$p = 1,33 \cdot 10^{-27} \text{ kg ms}^{-1}.$$

Ako svjetlost shvatimo kao roj fotona, lako možemo objasniti sve pojave u vezi s fotoefektom.

Kada foton upada na površinu metala, sudara se s elektronom, predaje mu svoju energiju  $h\nu$ , foton nestaje, apsorbira se, a elektron, ako je dobio dovoljnu energiju, može izaći iz metala.

Dio energije fotona troši se pritom na oslobađanje elektrona iz metala (rad izlaza  $W_i$ ), tj. na svladavanje potencijalne energije kojom je elektron vezan u metalu, a ostatak se pretvara u kinetičku energiju fotoelektrona:

$$h\nu = W_i + \frac{1}{2} m_e v_{\text{maks}}^2 \quad (12.20)$$

Ovo je poznata Einsteinova relacija za fotoelektrični efekt. Kinetička energija u formuli (12.20) maksimalna je energija koju elektron može imati; naravno, mnogi će elektroni izaći iz metala i manjom kinetičkom energijom jer će prije izlaska iz metala na svojem putu kroz metal izgubiti dio svoje kinetičke energije. Zato relaciju (12.20) možemo pisati i ovako:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 \leq h\nu - W_i.$$



Sve eksperimentalne rezultate fotoelektričnog efekta možemo razumjeti pomoću relacije (12.20). Ako je frekvencija upadne svjetlosti takva da je:

$$h\nu < W_i,$$

tada nema fotoefekta jer elektron ne može izaći iz metala. To znači da je granična frekvencija za pojedini metal određena radom izlaza:

$$W_i = h\nu_g \Rightarrow \nu_g = \frac{W_i}{h} \quad (12.21)$$

Rad izlaza, ovisno o metalu, varira između 2 eV i 6 eV, što odgovara graničnim frekvencijama od oko  $4,8 \cdot 10^{14}$  Hz (crvena svjetlost) do  $1,4 \cdot 10^{15}$  Hz (ultraljubičasta svjetlost).

Koristeći se relacijom (12.21) za rad izlaza, Einsteinovu relaciju za fotoefekt možemo pisati i u obliku:

$$\frac{1}{2} m_e v_{\text{maks}}^2 = h(\nu - \nu_g), \quad (12.22)$$

a to je upravo eksperimentalno dobivena relacija za maksimalnu energiju fotoelektrona (sl. 12.9).

### Primjer 12.6.

Najveća valna duljina koja izaziva fotoefekt u natriju jest 530 nm. Kolika će biti najveća brzina fotoelektrona iz natrija ako ga obasjamo ljubičastom svjetlošću valne duljine 400 nm?

Relacija (12.22) može se pisati kao:

$$\frac{1}{2} m_e v_{\text{maks}}^2 = hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_g} \right),$$

odakle izlazi:

$$v_{\text{maks}} = \sqrt{\frac{2hc}{m_e} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_g} \right)}$$

$$v_{\text{maks}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{9,1 \cdot 10^{-31}} \left( \frac{1}{400 \cdot 10^{-9}} - \frac{1}{530 \cdot 10^{-9}} \right)} \text{ ms}^{-1}$$

$$v_{\text{maks}} = 5,18 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}.$$

**Primjer 12.7.**

Maksimalna kinetička energija elektrona koji se oslobađaju iz rubidija kad na njegovu površinu padne ultraljubičasto zračenje valne duljine  $\lambda = 317 \text{ nm}$  iznosi  $E_{\text{maks}} = 2,84 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Izračunajte rad izlaza i fotoelektrični prag za rubidij.

Iz izraza

$$h\nu_g = W_i, \quad E_{k_{\text{maks}}} = h(\nu - \nu_g) \quad \text{i} \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

slijedi:

$$\lambda_g = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \frac{E_{k_{\text{maks}}}}{hc}} = \frac{1}{\frac{1}{317 \cdot 10^{-9}} - \frac{2,84 \cdot 10^{-19}}{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}} \text{ m}$$

$$\lambda_g = 579 \text{ nm}$$

i

$$W_i = \frac{hc}{\lambda_g} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{579 \cdot 10^{-9}} \text{ J}$$

$$W_i = 3,43 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,14 \text{ eV}.$$

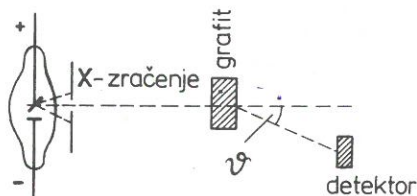
Kako objasniti eksperimentalnu činjenicu da o intenzitetu svjetlosti ovisi broj fotoelektrona? Korpuskularna teorija zračenja objašnjava i tu pojavu. Veći intenzitet u korpuskularnoj slici znači veći broj fotona, a time i veći broj izbačenih fotoelektrona. (Iako svaki foton ne izbaci elektron, ipak je broj fotoelektrona razmjeran broju upadnih fotona.)

U našim razmatranjima nismo uzeli u obzir zakon održanja količine gibanja pri sudaru fotona i elektrona. Uočite da elektron nije slobodan nego vezan za atom ili rešetku pa se količina gibanja apsorbiranoga fotona razdijeli između elektrona i rešetke (atoma). Zbog velike razlike u masi možemo pretpostaviti da pritom elektron dobiva gotovo svu energiju fotona. Pokažite da je zbog zakona održanja količine gibanja nemoguć fotoefekt na slobodnom elektronu.

Tako je fotoelektrični efekt bio još jedan dokaz kvantne prirode svjetlosti. Dok interferencija, difrakcija i polarizacija elektromagnetskih valova pokazuju njihova valna svojstva, fotoefekt i još neke druge pojave dokaz su čestične prirode zračenja. Zaključujemo da svjetlost i ostali elektromagnetski valovi imaju dualnu prirodu: valnu i korpuskularnu.

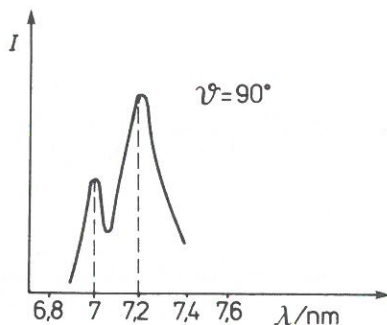
### 12.3. Comptonov efekt

Američki fizičar A. H. Compton otkrio je 1923. još jedan efekt koji može objasniti samo kvantna teorija i tako na još jedan način dokazao korpuskularnu prirodu zračenja. Pri raspršenju rendgenskih zraka (elektromagnetskih valova kratke valne



Slika 12.10. Shema Comptonova efekta

duljine, manje od  $10^{-10}$  m) na elektronima u komadu grafita (sl. 12.10) opazio je da raspršeno zračenje ima dvije komponente od kojih prva ima valnu duljinu jednaku onoj u upadnome snopu, a druga nešto veću (sl. 12.11).



Slika 12.11. Intenzitet raspršenog zračenja

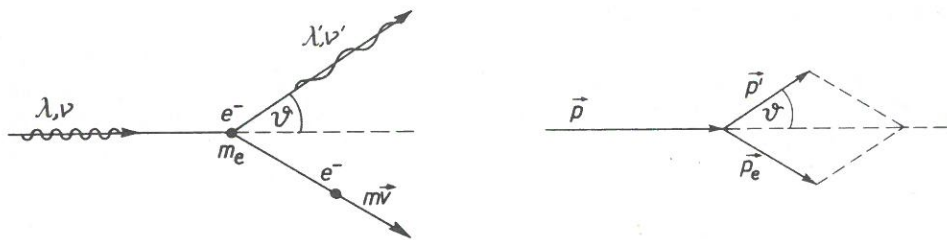
Razlika valnih duljina ovih dviju komponenata ( $\Delta\lambda$ ) ovisi o kutu raspršenja i proporcionalna je sa  $(1 - \cos \vartheta)$ .

Valna teorija ne može objasniti zašto se valna duljina dijela zračenja nakon raspršenja nešto povećala. Shvaćajući zračenje kao roj fotona, ovu je pojavu lako protumačiti.

Prilikom sudara fotona i elektrona, foton izgubi dio svoje energije ( $E = h\nu$ ), i zbog toga mu se smanji frekvencija, a poveća valna duljina.

Pogledajmo kvantitativno što se događa kada se foton sudari s elektronom. Neka je masa elektrona  $m_e$ , frekvencija fotona prije sudara  $\nu$ , a poslije sudara  $\nu'$  (sl. 12.12).





Slika 12.12. Sudar fotona i elektrona

Iz zakona očuvanja energije i zakona očuvanja količine gibanja, koji glase:

$$E + m_e c^2 = E' + m_e c^2 \quad (12.23)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_e + \vec{p}' \quad (12.24)$$

slijedi:

$$\frac{E}{c} - \frac{E'}{c} = m_e c - m_e c \quad \text{i} \quad \vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}'.$$

Kvadriranjem ovih dviju relacija i uvrštavanjem  $p = \frac{E}{c}$ ,  $p' = \frac{E'}{c}$  i  $p_e^2 = m_e^2 v^2$  dobivamo:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 + \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - \frac{2EE'}{c^2} = m_e^2 c^2 + m_e^2 c^2 - 2m_e m_e c^2 \quad (12.25)$$

i:

$$m_e^2 v^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 + \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - 2 \frac{EE'}{c^2} \cos \vartheta \quad (12.26)$$

Zbrojimo li (12.25) i (12.26), dobivamo

$$m_e^2 v^2 - m_e^2 c^2 - m_e^2 c^2 + 2m_e m_e c^2 = 2 \frac{EE'}{c^2} (1 - \cos \vartheta).$$

Kako iz  $m = m_e / \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$  slijedi  $m^2 v^2 = m_e^2 c^2 - m_e^2 c^2$ , dobiva se:

$$2m_e (m_e c^2 - m_e c^2) = \frac{2EE'}{c^2} (1 - \cos \vartheta).$$

Odatle zbog očuvanja energije (12.23) slijedi:

$$m_e (E - E') = \frac{EE'}{c^2} (1 - \cos \vartheta).$$

Podijelimo li s  $EE'$ , dobivamo:

$$m_e \left( \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) = \frac{1}{c^2} (1 - \cos \vartheta),$$

što nakon uvrštavanja energije fotona  $E = \frac{hc}{\lambda}$  i  $E' = \frac{hc}{\lambda'}$  daje:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta) \quad (12.27)$$

Pritom smo sa  $m_e$  označili masu mirovanja elektrona  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg.

Izračunamo li vrijednost konstante, dobivamo upravo Comptonovu valnu duljinu:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2,427 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (12.28)$$

izmjerenu u eksperimentu.

Promjena valne duljine relativno je mala, reda veličine Comptonove valne duljine  $\lambda_c$ . Ovako malu promjenu za vidljivu svjetlost ne možemo opaziti, dok se za rendgenske zrake ona može mjeriti, pogotovo kod tvrdih zraka, tj. onih manje valne duljine.

Ako elektron nije slobodan, nego vezan za atom, dolazi do izmjene energije i količine gibanja između fotona i atoma kao cjeline. Budući da je masa atoma znatno veća od mase elektrona, to je  $\Delta\lambda$  neznatno; tako objašnjavamo da u raspršenom snopu postoji komponenta nepromijenjene valne duljine.

## 12.4. Linijski spektri i stacionarna stanja

Poznato nam je da užarena tijela zrače elektromagnetske valove, i ako takvo zračenje rastavimo pomoću prizme ili optičke rešetke, dobivamo kontinuirani spektar. Zakone takva zračenja upoznali smo u pogl. 12.1. Međutim, i užareni razrijeđeni plinovi mogu biti izvori vidljive svjetlosti i zračenja u nevidljivu dijelu spektra. Takav je izvor svjetlosti npr. živina lampa. Proučavanje zračenja koje emitiraju razrijeđeni plinovi i pare metala počelo je još polovicom 19. st., a rezultati su bili takvi da ih klasična fizika nikako nije mogla objasniti. Naime, kad se zračenje užarena plina u atomskom stanju rastavi pomoću optičke rešetke, ne dobiva se kontinuirani spektar, već se on sastoji od odvojenih, diskretnih, spektralnih linija. Zato svjetlost koju daju takvi izvori ima karakterističnu boju, npr. u svjetlosti živine lampe nema ni traga crvenoj boji, svjetlost koju daje neonska rasvjetna cijev je crvene boje, a ako je lampa punjena argonom, svjetlost je plavkasta. Na sl. 12.13. prikazan je dio spektra zračenja živinih para koji ima frekvencije iz vidljivja dijela spektra.

### 12.4.1. Linijski spektri atoma

Posebno mjesto u povijesti atomske fizike pripada vodikovu spektru. Već 1865. Balmer je uočio da u zračenju vodikovih para postoje četiri linije koje pripadaju vidljivu dijelu spektra, a koje je on označio nazivima  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$  i  $H_\delta$ .



Slika 12.13. Dio spektra živinih para

Balmer je uočio da valne duljine tih linija nisu neki nepovezani brojevi, nego da se mogu izračunati formulom:

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

gdje je  $R_{\infty}$  tzv. *Rydbergova konstanta*  $R_{\infty} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ , a četiri navedene linije odgovaraju cijelim brojevima  $n = 3, 4, 5$  i  $6$ . Na sl. 12.14. prikazana je ta tzv. Balmerova serija vodikova spektra. Osim navedenih linija u vidljivu dijelu spektra, ona sadrži i mnogo linija u ultraljubičastom dijelu spektra koje odgovaraju cijelim brojevima  $n = 7, 8$ , itd, a završavaju s  $H_{\infty}$  valne duljine  $\lambda = 365 \text{ nm}$ .

#### 12.4.2. Bohrovo objašnjenje linijskih spektara

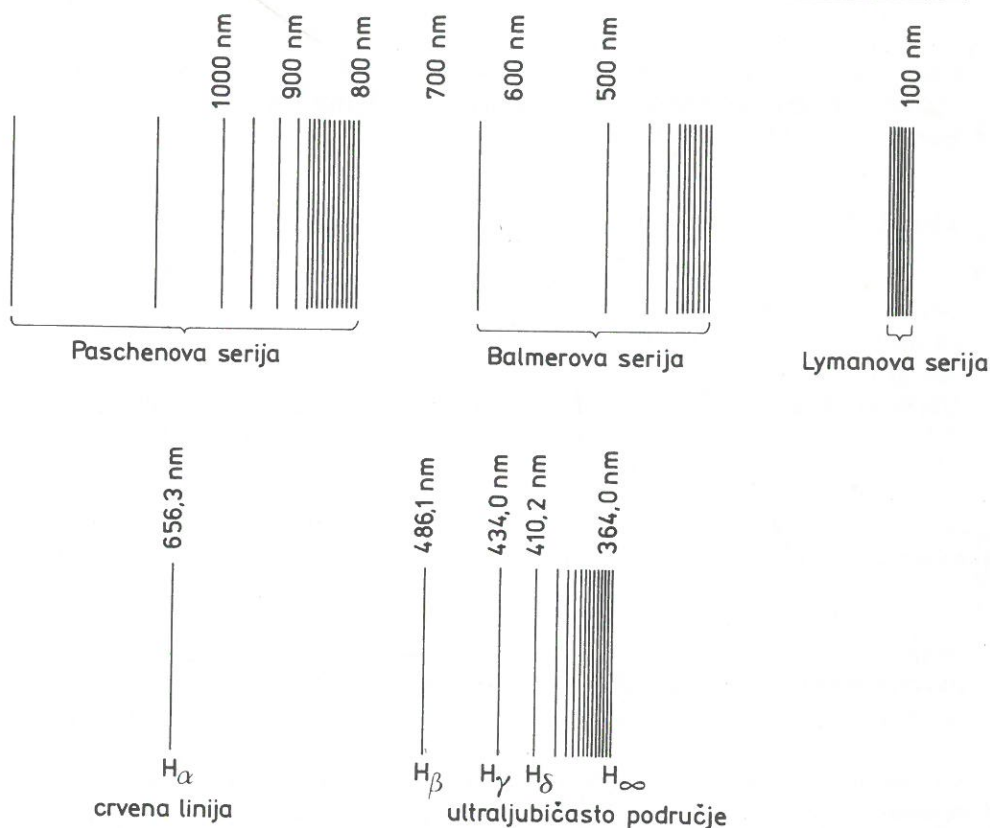
Godine 1913. Niels Bohr postavio je temelje suvremenoj fizici strukture tvari, utvrdivši sljedeće: atom (a isto tako i drugi sistemi atomskih dimenzija) ne može imati bilo koju energiju; on se može nalaziti samo u nekim stanjima, stanjima određene energije. Kad je atom u takvu stanju, on ne zrači energiju, i takvo se stanje naziva stacionarnim stanjem. Za svaki atomski sistem postoji točno određen niz energija  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  koje odgovaraju stacionarnim stanjima. Za vrijeme dok je atom u nekom od stacionarnih stanja, on je stabilan i ne gubi energiju. Međutim, atom može zračiti energiju i to se događa tako da atom prijeđe iz stanja više energije  $E_{n_2}$  u stanje niže energije  $E_{n_1}$ . Pritom atom emitira točno određenu količinu, "kvant" energije, u obliku elektromagnetskoga zračenja frekvencije  $\nu$ . Razlika energije konačnoga i početnoga stacionarnog stanja jednaka je energiji kvanta:

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1} \quad (12.29)$$

a frekvencija zračenja dobiva se ako napišemo:

$$\nu = \frac{E_{n_2} - E_{n_1}}{h}.$$





Slika 12.14. Balmerova serija vodikova spektra

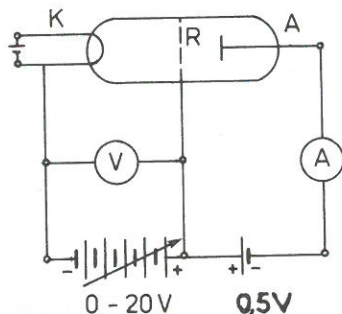
Dovedemo li atomu koji se nalazi u stacionarnom stanju energije  $E_{n_1}$  energiju  $h\nu$ , on će prijeći u više pobuđeno stanje energije  $E_{n_2}$ . Uz ovu je pretpostavku (koja je poznata pod imenom drugog Bohrovog postulata) Niels Bohr objasnio linijske spektre vodika i reproducirao eksperimentalno nađene vrijednosti valnih duljina i Rydbergove konstante. Time se još jednom potvrdila ispravnost pretpostavke da se elektromagnetsko zračenje može protumačiti kao snop fotona, kvanta energije  $h\nu$ , gdje je  $h$  Planckova konstanta.

U ovoj poglavlju ne ulazimo u detalje Bohrova modela vodikova atoma. O tome će biti riječi u 14. poglavlju. Napomenimo samo da je Bohr pretpostavio da se vodikov atom sastoji od protona i od elektrona koji se oko protona giba po kružnici, poput maloga planetarnog sustava. Međutim, elektron je – za razliku od planeta – nabijena čestica, i prema klasičnoj fizici, on bi trebao za čitavo vrijeme vrtnje gubiti energiju. Zbog toga bi se polumjer njegove staze smanjivao, sve dok elektron ne bi pao na jezgru. Takav atom nikako ne bi mogao biti stabilan. Vidimo da je ključnu ulogu u tumačenju strukture atoma odigrala bitno nova Bohrova pretpostavka da atomski sistemi imaju određena, stabilna, stacionarna stanja. Ta je pretpostavka

potvrđena u svim kasnijim atomskim, ali i u nuklearnim i molekularnim eksperimentima, i predstavlja osnovnu činjenicu strukture tvari. Zorna slika o kružnim stazama bila je samo pomoćno sredstvo kojim se trebalo poslužiti da bi se došlo do ispravne, kvantnomehaničke slike svijeta.

### 12.4.3. Frank-Hertzov eksperiment

Frank i Hertz uspjeli su godine 1914. eksperimentalno potvrditi postojanje određenih energijskih razina (nivoa) u atomu i opravdanost Bohrove teorije. Oni su atome žive bombardirali elektronima. Uređaj se sastojao od triode napunjene razrijeđenim živinim parama (sl. 12.15). Iz užarene katode izlijeću elektroni i ubrzavaju se prema anodi. Potencijal je rešetke nešto malo pozitivniji (za oko 0,5 V) od potencijala anode, te će se elektroni, koji imaju energiju manju od oko 0,5 eV, zaustaviti na rešetki, dok će se ostali elektroni veće energije skupiti na anodi.

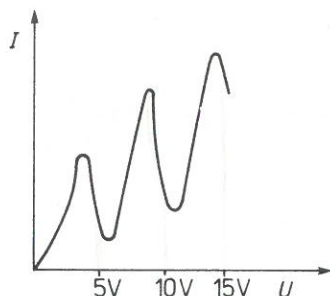


Slika 12.15. Frank-Hertzov pokus

Mijenjanjem anodnoga napona i mjerenjem anodne struje može se izmjeriti  $U-I$  karakteristika ove triode (sl. 12.16). Kada se napon podiže od nule do 4,9 V, anodna struja  $I$  raste jer se elektroni skupljaju na anodi. Kada je napon oko 4,9 V, anodna struja padne (a struja rešetke raste). Kako napon dalje raste, struja ponovno raste dok napon ne dosegne 9,8 V kada se pojavljuje novi minimum anodne struje itd. (sl. 12.16).

Čim je energija elektrona dosegla 4,9 eV, elektron ima dovoljno energije da pobudi atom žive u pobuđeno stanje. U takvu neelastičnom sudaru elektron izgubi energiju i umjesto na anodu ide na rešetku. Zbog toga se anodna struja smanjuje, a struja rešetke raste. (Rešetka će, naime, zbog svojega pozitivnog prednapona privući elektrone koji su u sudaru u blizini rešetke izgubili svu kinetičku energiju.)

Ovaj pokus možemo shvatiti samo ako pretpostavimo da su energijske razine elektrona u atomu žive kvantizirane. Kada je anodni napon manji od 4,9 V, elektroni u cijevi nemaju dovoljno energije da pobude atome žive, nego se samo elastično sudaraju s atomima i zbog male mase praktično im ne predaju energiju; u cijevi struja raste s naponom jer se elektroni skupljaju na anodi.

Slika 12.16.  $U$ - $I$  karakteristika Frank-Hertzove cijevi

Kada napon dalje raste, elektroni sve ranije dobivaju energiju potrebnu za neelastični sudar (4,9 eV) koji se događa prije rešetke, u prostoru između katode i rešetke sve bliže katodi, te elektron nakon sudara, dok dođe na rešetku, dobije dovoljno energije da prođe kroz nju. To je razlog da struja raste kada je napon veći od 4,9 V. Kada napon dosegne  $2 \cdot 4,9$  V, elektron je energijski sposoban da izvrši dva neelastična sudara, jedan ispred, a drugi blizu rešetke. To je uzrok drugom minimumu u  $U$ - $I$  karakteristici.

Iz ovih je eksperimenata zaključeno da atom žive iz osnovnoga stanja  $E_1$  može prijeći u pobuđeno stanje primivši samo određeni kvant energije. Prvo je takvo pobuđeno stanje atoma žive 4,9 eV iznad osnovnoga stanja. Sudarom s elektronom koji ima energiju veću od 4,9 eV atom žive prelazi iz osnovnoga u prvo pobuđeno stanje, a elektron gubi 4,9 eV energije.

Pobuđeni se atom žive ubrzo nakon pobuđivanja vraća u osnovno stanje i po drugom Bohrovu postulatu emitira svjetlost frekvencije  $h\nu = E_2 - E_1$ . U ovome pokusu atomi žive zaista emitiraju svjetlost čim je anodni napon veći od 4,9 V. To je poznata ultraljubičasta živina linija valne duljine 253 nm. Tu istu valnu duljinu predviđa i Bohrova formula:

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{4,9 \text{ eV}}{h} = 1,19 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = 253 \text{ nm.}$$

Ovaj i drugi slični eksperimenti pokazali su da se neelastični sudari s atomom događaju samo kada postoje određeni iznosi raspoložive energije i da atomi samo u tim slučajevima mogu apsorbirati energiju. Pokus je pokazao da su stanja atoma kvantizirana, tj. da u atomu postoje odvojene, diskretne, energijske razine.

## 12.5. Valna priroda čestica

### 12.5.1. Dvojna priroda svjetlosti

Za objašnjenje zračenja crnoga tijela te fotoelektričnog i Comptonova efekta bilo je potrebno pretpostaviti da svjetlost (i ostalo elektromagnetsko zračenje) posjeduje korpuskularnu prirodu. Foton je čestica koja se giba brzinom svjetlosti  $c$ , a masa



mirovanja jednaka je nuli. Energija je fotona:

$$E = h\nu,$$

gdje je  $h$  Planckova konstanta, a  $\nu$  frekvencija elektromagnetskoga zračenja. Količina gibanja fotona dana je relacijom:

$$p = mc = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Uvedemo li valni broj  $k = 2\pi/\lambda$ , kružnu frekvenciju  $\omega = 2\pi\nu$ , i reduciranu Planckovu konstantu  $\hbar = h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Js, relacije (12.17) i (12.19) možemo pisati kao:

$$E = \hbar\omega \quad \text{ i } \quad p = \hbar k \quad (12.30)$$

Eksperimenti su, dakle, pokazali da svjetlost, kao i ostali elektromagnetski valovi, ima dualnu prirodu: to je istodobno i roj fotona i valna pojava. To je teško zorno predočiti, a ipak je tako. Bez pretpostavke o dvojnoj prirodi elektromagnetskih valova ne bismo mogli protumačiti rezultate mnogih eksperimenata. Ova dualnost val-čestica ne smeta nam pri proučavanju elektromagnetskih valova. Kad proučavamo interferenciju i ogib (općenito širenje zračenja kroz prostor), zračenje shvaćamo kao val određene valne duljine  $\lambda$  i frekvencije  $\nu$  i upotrebljavamo zakone valnog gibanja, a prilikom proučavanja interakcije zračenja s atomima računamo s fotonima određene energije  $E$  i količine gibanja  $p$ .

### 12.5.2. Dvojna priroda čestica

Zbog simetrije u prirodi nameće nam se pitanje zašto elektron i ostale materijalne čestice ne bi pokazivale, uz čestična, i valna svojstva. Na tu ideju prvi je došao Louis de Broglie; on je 1924. postavio hipotezu, prema kojoj svaka čestica koja se giba ima uz čestična i valna svojstva. Ta je njegova pretpostavka kasnije potvrđena mnogim eksperimentima.

Dakle, elektron, proton i druge čestice određene brzine imaju i valnu duljinu! Mi smo navikli elektron smatrati malom kuglicom, određene mase  $m$  i brzine  $v$ , pa nam je teško da si ga predočimo kao val. Još je teže to bilo shvatiti godine 1924, kad je de Broglie prvi put uveo u fiziku valove materije braneći svoju disertaciju pod naslovom *Recherches sur la Théorie des Quanta* na Sveučilištu u Parizu.

### 12.5.3. De Broglieove relacije za valnu duljinu i frekvenciju

Kako izračunati valnu duljinu elektrona koji se giba brzinom  $v$ ? Koja je veza između valne duljine i količine gibanja neke materijalne čestice? De Broglie je pretpostavio da za materijalne čestice vrijede slične relacije kao i za fotone. Elektron i foton slični su po tome što i jedan i drugi imaju neka čestična i neka valna svojstva. Analogno relacijama (12.17) i (12.19) za fotone, de Broglie je pretpostavio da svaka materijalna čestica (elektron, proton, neutron, atom, molekula itd.) mase  $m$  koja

se giba brzinom  $v$  ima valna svojstva, posebno valnu duljinu  $\lambda$  i frekvenciju  $\nu$  dane s:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{i} \quad \nu = \frac{E}{h} \quad (12.31)$$

To su poznate de Broglieve relacije. Valovi pridruženi česticama nazivaju se valovi materije, a  $\lambda$  se naziva de Broglieva valna duljina. De Broglieve relacije za valove materije mogu se izraziti i relacijama (12.30).

Materija je, dakle, dualne prirode; kao što svjetlost ima svojstvo vala i čestice, tako i svaka čestica ima valna svojstva. Svaki je elektromagnetski val u isto vrijeme i snop čestica (fotona), a svakoj čestici pripada odgovarajući val. Val i čestica dva su načina kako se očituje materija. Dualnost čestica-val osnovna je osobina svijeta atoma.

Pritom treba voditi računa da su  $E$  i  $p$  relativistički izrazi za energiju i količinu gibanja čestice:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (12.32)$$

i

$$p = mv = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (12.33)$$

gdje je  $\beta = v/c$ , a  $m_0$  masa mirovanja čestice.

Zbog toga izraze za valnu duljinu možemo napisati u nekoliko oblika:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 c} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}$$

ili:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E}\right)^2}}.$$

Ove relacije pokazuju da se, za određenu masu mirovanja  $m_0$ , valna duljina smanjuje kad brzina odnosno energija čestice raste.

#### Primjer 12.8.

Elektroni imaju toliku brzinu da im je masa četiri puta veća od mase mirovanja. Kolika im je valna duljina?

$$m = 4m_0 \Rightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 4m_0, \quad \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{4}, \quad \beta = 0,968$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0 c} \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} = 6,3 \cdot 10^{-13} \text{ m.}$$

Recimo nešto o brzini čestice koju prikazujemo valom. Izračunamo li tzv. faznu brzinu  $v_f$ , dobivamo:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu = \frac{h}{p} \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} \quad (12.34)$$

što je veće od brzine svjetlosti. Očito pri opisivanju brzine čestice ne smijemo prihvatiti faznu brzinu kao brzinu kojom se giba stvarna čestica.

Međutim, to nam daje naslutiti jednu vrlo važnu činjenicu: želimo li da nam val opisuje stvarnu česticu, objekt omeđen u prostoru, tada moramo uzeti dva ili više valova bliskih valnih duljina. Takva pojava poznata je iz valne mehanike pod nazivom "valnog paketa". Takav paket valova giba se tzv. grupnom brzinom koja se može izračunati pomoću relacije:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (12.35)$$

Primijenimo li to sada na valove materije, dobivamo, zbog (12.35) i (12.32):

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{dE}{dp} = \frac{cp}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}} \\ v_g &= \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \left(\frac{c}{v}\right)^2 + 1}} = c\beta = v \end{aligned} \quad (12.36)$$

Vidimo da je brzina materijalne čestice jednaka grupnoj brzini skupine valova.

U slučaju malih brzina, količinu gibanja i energiju čestice možemo pisati kao:

$$p = m_0 v \quad \text{ i } \quad E = m_0 c^2 + E_k,$$

gdje je kinetička energija  $E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$ .

Stoga je valna duljina u nerelativističkoj aproksimaciji:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}} \quad (12.37)$$

Za izračunavanje valne duljine sporih elektrona možemo se koristiti praktičnom relacijom:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2,41 \cdot 10^{-37}}{E_k/\text{J}}} \text{ m} \quad \text{ ili } \quad \lambda = \sqrt{\frac{150,6}{E_k/\text{eV}}} \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

### Primjer 12.9.

Izračunajte valnu duljinu elektrona i protona kinetičke energije  $E_k = 150 \text{ eV}$ .

$$\lambda_e = \sqrt{\frac{150,6}{150}} \cdot 10^{-10} \text{ m} \cong 10^{-10} \text{ m} = 0,1 \text{ nm}$$



$$\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{2m_p E_k}} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 150 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} \text{ m} = 2,34 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$\lambda_p = 0,0023 \text{ nm.}$$

**Primjer 12.10.**

Izračunajte de Broglievu valnu duljinu kuglice mase 1 g koja se giba brzinom od  $v = 1 \text{ cm/s}$ .

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{10^{-3} \cdot 10^{-2}} \text{ m} = 6,63 \cdot 10^{-29} \text{ m.}$$

**Primjer 12.11.**

Izračunajte valnu duljinu molekule dušika ako je temperatura plina  $T = 300 \text{ K}$ .

Prosječna je kinetička energija čestice u plinu:

$$E_k = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \text{ J} = 6,21 \cdot 10^{-21} \text{ J,}$$

gdje je  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$  Boltzmannova konstanta. Masa je molekule:

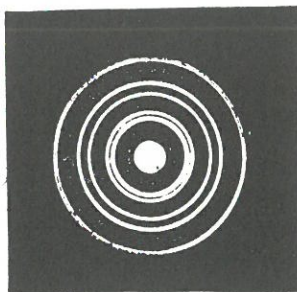
$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23}} \text{ kg} = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg.}$$

Odatle dobivamo:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 4,65 \cdot 10^{-26} \cdot 6,21 \cdot 10^{-21}}} \text{ m} = 2,76 \cdot 10^{-11} \text{ m.}$$

**12.5.4. Eksperimentalna potvrda de Broglieve teorije**

Tri godine nakon de Broglieve hipoteze Davisson i Germer u SAD i G. P. Thomson u Engleskoj opazili su interferenciju i ogib elektrona na kristalima metala i tako eksperimentalno pokazali da elektroni u gibanju imaju valna svojstva. Valna duljina određena u tim pokusima točno se slagala s onom koja proizlazi iz de Broglieve teorijske relacije (12.31). Tako je de Broglieva relacija bila eksperimentalno potvrđena i otklonjena svaka sumnja u njezinu ispravnost (sl. 12.17).



Slika 12.17. Ogib elektrona na kristalnome prahu

### 12.5.5. Elektronski mikroskop

Valna svojstva elektrona našla su praktičnu primjenu u elektronskom mikroskopu. Poznato je da granica rezolucije (moć razlučivanja) optičkih sistema ovisi o valnoj duljini: ako je udaljenost između dviju točaka koje promatramo mikroskopom manja od oko pola valne duljine svjetlosti kojom se služimo, nikakvim povećanjem nećemo uspjeti razlučiti te dvije točke. Moć razlučivanja mikroskopa možemo povećati ako smanjimo valnu duljinu. Pomoću elektronskih leća (električnih ili magnetskih polja) snop brzih elektrona usmjeruje se u elektronskom mikroskopu kao svjetlosne zrake u običnom mikroskopu. Budući da je valna duljina elektrona manja od 0,1 nm (npr. 0,01 nm pri 15 000 V), i moć razlučivanja elektronskoga mikroskopa bit će više tisuća puta veća nego kod običnog mikroskopa.

## Pitanja i zadaci

- 12.1. Definirajte tok i intenzitet elektromagnetskoga zračenja i navedite kojim se jedinicama iskazuju.
- 12.2. Kako se dijeli upadno zračenje kad padne na graničnu plohu između dvaju sredstava?
- 12.3. Što je idealno crno tijelo? Postoji li takvo tijelo u prirodi?
- 12.4. Objasnite Kirchhoffov zakon zračenja.
- 12.5. Objasnite fizikalni smisao spektralne gustoće zračenja.
- 12.6. Kako glase Wienov i Stefan–Boltzmannov zakon?
- 12.7. Izračunajte pri kojoj bi temperaturi maksimum spektralne gustoće zračenja crnoga tijela bio na valnoj duljini od: a) 240 nm, b) 0,48 nm, c) 9,7  $\mu\text{m}$ .
- 12.8. Spektralna gustoća Sunčeva zračenja ima maksimum za valnu duljinu 0,5  $\mu\text{m}$ .
  - a) Kolika je temperatura Sunčeve površine, uz pretpostavku da Sunce zrači kao crno tijelo?
  - b) Koliku snagu zrači 1  $\text{m}^2$  površine Sunca?
  - c) Kolika je ukupna snaga koju zrači cijela Sunčeva površina?
- 12.9. Kako glasi Planckov zakon zračenja za crno tijelo? Nacrtajte i objasnite krivulje koje prikazuju spektralnu gustoću zračenja za različite temperature.
- 12.10. U čemu je bitna razlika između Planckove i Rayleigh–Jeansove pretpostavke o prirodi zračenja crnoga tijela?
- 12.11. Iz izraza za spektralnu gustoću zračenja  $f(\lambda, T)$  izvedite izraz za  $f(\nu, T)$ , u kojemu je spektralna gustoća zračenja izražena pomoću frekvencije.
- 12.12. Izračunajte spektralnu gustoću zračenja danu Planckovom i Rayleigh–Jeansovom formulom za crno tijelo na temperaturi 1700 K, ako valna duljina poprima vrijednosti od 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7  $\mu\text{m}$ . Prikažite to tablično i grafički.
- 12.13. Opišite pojavu fotoelektričnog efekta.
- 12.14. Objasnite što su to rad izlaza, napon zaustavljanja i granična frekvencija za fotoelektrični efekt.



- 12.15. Kako glasi Einsteinovo objašnjenje fotoelektričnog efekta?
- 12.16. Kolik je rad izlaza za cink ako je granična valna duljina za fotoelektrični efekt na cinku 295 nm? Izrazite rezultat u eV.
- 12.17. Površina nekog metala obasja se svjetlošću valne duljine  $\lambda_1 = 589$  nm, a zatim svjetlošću valne duljine  $\lambda_2 = 405$  nm. Pritom se dobiju vrijednosti napon zaustavljanja  $U_1 = 0,2$  V i  $U_2 = 1,16$  V. Izračunajte iz tih podataka Planckovu konstantu i rad izlaza metala.
- 12.18. Opišite pokus kojim je Compton dokazao čestičnu prirodu zračenja.
- 12.19. Foton energije  $10^4$  eV sudari se sa slobodnim elektronom u mirovanju i rasprši se pod kutem od  $60^\circ$ . Nađite promjenu energije, frekvencije i valne duljine.
- 12.20. Što su to stacionarna stanja? U čemu je bitna razlika Bohrova objašnjenja u usporedbi s klasičnom slikom atoma?
- 12.21. Opišite Frank–Hertzov eksperiment.
- 12.22. Kolika je energijska razlika dvaju stanja u atomu natrija između kojih prelazi elektron pri emisiji žute natrijeve svjetlosti valne duljine 589 nm?
- 12.23. Što znači kad kažemo da svjetlost i materija imaju dvojnu (dualnu) prirodu?
- 12.24. Navedite de Broglieove relacije za valove materije.
- 12.25. Nađite izraz za valnu duljinu  $\lambda$  čestice koja se giba velikom brzinom ako je zadana njezina kinetička energija  $E_k$ .
- 12.26. De Broglieva valna duljina elektrona iznosi 8,7 pm. Izračunajte brzinu te čestice i kinetičku energiju (u MeV) toga elektrona.

## 13. Kvantna mehanika

### 13.1. Relacije neodređenosti

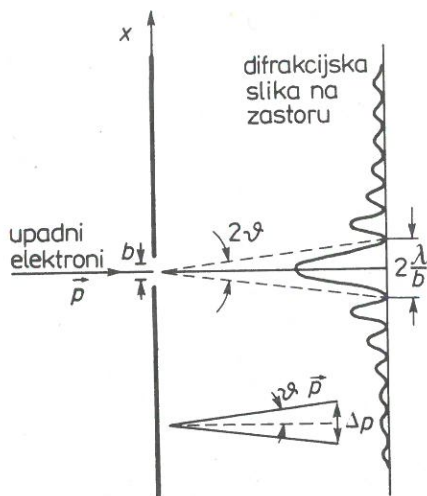
Mjerenje je u osnovi svih primjena fizike. Poznato nam je da nije dovoljno obaviti samo jedno mjerenje, jer se javljaju odstupanja između izmjerene i stvarne vrijednosti. Stoga uvijek računamo pogrešku mjerenja pa, mjerimo li vrijednost neke fizikalne veličine  $f$ , rezultat mjerenja izražavamo kao  $f \pm \Delta f$ . U klasičnoj fizici, u promatranju makroskopskih pojava, relativna pogreška mogla je iznositi npr. 10% ili 0,01%, no uvijek smo to mogli pripisati nepreciznosti uređaja kojim smo mjerili. Prešutno smo pretpostavili da bi vrlo precizan uređaj omogućio mjerenje sa zanemarivom pogreškom. Nešto potpuno novo pojavljuje se pri mjerenju pojava u svijetu atomskih dimenzija. Postoji granica točnosti do koje se može poznavati stanje nekog fizikalnog sistema: ne zato što bi uređaj bio nesavršen, već zato što povećana točnost mjerenja jedne fizikalne veličine vodi nepoznavanju neke druge fizikalne veličine za taj sistem. Ta se pojava može izraziti **relacijama neodređenosti**. Za količinu gibanja  $p$  i za položaj  $x$  čestice vrijedi:

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim h \quad (13.1)$$

gdje je  $\Delta x$  neodređenost s kojom poznajemo položaj čestice, a  $\Delta p$  neodređenost s kojom poznajemo količinu gibanja  $p = mv$ . Umnožak uvijek mora biti veći ili približno jednak vrijednosti Planckove konstante  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J s. Kad bismo točno poznavali položaj čestice, to bi značilo da  $\Delta x \rightarrow 0$ . Zato bi relacije neodređenosti bile zadovoljene samo kada bi pogreška s kojom poznajemo količinu gibanja postala vrlo velika:  $\Delta p \rightarrow \infty$ .

Drugim riječima, što točnije poznajemo položaj čestice, sve manje znamo o njezinoj brzini i obrnuto. Te su relacije eksperimentalno provjerene za mnoge različite atomske sisteme. One zapravo izražavaju činjenicu da uređaj kojim mjerimo i sistem o kojemu želimo dobiti podatke nisu međusobno neovisni te da i samo mjerenje utječe na stanje sistema. Sljedeći primjer to će zorno ilustrirati.

Promotrimo eksperiment (prikazan na sl. 13.1) kojim želimo odrediti položaj čestice npr. elektrona tako da na pukotinu širine  $b$  na zastoru, okomito usmjerimo snop elektrona pa gledamo je li neka čestica prošla kroz pukotinu ili nije. Izračunajmo  $\Delta x$ ,  $\Delta p$  i umnožak  $\Delta x \cdot \Delta p$  za taj slučaj. Točnost s kojom poznajemo



Slika 13.1. Relacije neodređenosti

položaj čestice koja je prošla kroz pukotinu jest  $\Delta x = b$ .\* Međutim, snop elektrona ponaša se i kao val. Pri prolazu kroz pukotinu došlo je do ogiba pa se na zastoru opaža ogibna (difrakcijska) slika. Elektron je najvjerojatnije pao unutar glavnog maksimuma, što znači – sjećamo se iz valne optike –  $\sin \vartheta = \lambda/b$ .

Istodobno vidimo da za taj smjer količina gibanja ima  $x$ -komponentu  $p_x = p \sin \vartheta$ , te da je neodređenost komponente  $p_x$  jednaka  $\Delta p_x = 2p_x$ . Uvrstimo li količinu gibanja iz de Broglieve relacije  $p = h/\lambda$ , i prije nađenu vrijednost za  $\sin \vartheta$ , dobivamo:

$$\Delta p = 2p \cdot \sin \vartheta = 2 \left( \frac{h}{\lambda} \right) \cdot \left( \frac{\lambda}{b} \right) = 2 \frac{h}{b},$$

ili za umnožak:

$$\Delta x \Delta p = b \frac{2h}{b} = 2h \gtrsim h.$$

Dakle, da bismo odredili točan položaj čestice, nastojimo uzeti što užu pukotinu. To, međutim, uzrokuje sve jači ogib i sve širu centralnu ogibnu prugu, dakle, sve slabije poznavanje količine gibanja čestice.

Položaj i brzina nisu jedini par veličina za koje vrijede relacije neodređenosti. Eksperimenti su pokazali da sličan odnos postoji i za  $x$ -komponentu i  $y$ -komponentu momenta vrtnje, ili za energiju i vrijeme. Klasična fizika nema načina da objasni relacije neodređenosti. To nam nije smetalo pri uobičajenim mjerenjima u klasičnoj fizici, jer su pogreške mjerenja, pa tako i njihov umnožak bili vrlo veliki u usporedbi s Planckovom konstantom. Međutim, za opis atomskih pojava potrebna je nova teorija, **kvantna fizika**, i njezine osnovne ideje izložiti ćemo u ovom poglavlju.

\* Neodređenost neke veličine ovdje smo definirali kao interval unutar kojega su izmjerene vrijednosti.



## 13.2. Valna funkcija i gustoća vjerojatnosti

Eksperimenti opisani u prethodnim poglavljima, te mnoga druga opažanja koja su se nagomilala u razdoblju do g. 1924. uvjerila su fizičare da moraju potpuno promijeniti tradicionalne predodžbe žele li uspješno objasniti pojave u atomskom svijetu.

Umjesto kontinuiranih promjena energije, u atomskom svijetu energija se mijenja u skokovima. Zbog relacija neodređenosti pojam staze po kojoj se čestica giba izgubio je smisao. Njezina se brzina i položaj nikako ne mogu doznati istodobno.

Kako ćemo onda opisivati gibanje čestica i kako predviđati svojstva atomskih sistema? Odgovor se na to pitanje nametnuo kad je Louis de Broglie 1924. izrazio ideju da se čestice mogu istovremeno shvatiti i kao valovi materije. Kao što mehanički stojni val (npr. na žici) ima pojedina mjesta s velikim amplitudama i mjesta koja uopće ne titraju, tako i valovi materije mogu na nekim mjestima imati znatan, a na drugima slab intenzitet. Čestica koja se nalazi na nekom mjestu može biti prikazana valom materije koji ima znatnu amplitudu na tom mjestu. Dakle, da bismo doznali gdje se nalazi čestica, treba poznavati amplitudu  $\Psi(x)$  vala materije. Ta se amplituda naziva **valnom funkcijom**. Budući da je intenzitet vala uvijek dan kvadratom amplitude, i intenzitet vala materije određen je kvadratom valne funkcije. Međutim, valna funkcija ne mora biti realna, nego može biti dana kompleksnim izrazom

$$\Psi(x) = \Psi_r(x) + i\Psi_i(x),$$

pa stoga intenzitet takva vala izražavamo kvadratom apsolutne vrijednosti  $|\Psi(x)|^2$ . Ta je vrijednost povezana s vjerojatnošću da se čestica nađe u malom intervalu između  $x$  i  $x + dx$ . Zato je nazivamo **gustoćom vjerojatnosti** i označavamo\* kao:

$$P(x) = |\Psi(x)|^2 = \Psi^*(x) \cdot \Psi(x).$$

Čestica će najvjerojatnije biti tamo gdje je  $|\Psi(x)|^2$  znatan. Tamo gdje je  $|\Psi(x)|^2$  vrlo mali, mala je i vjerojatnost da će se čestica pojaviti.

Promotrimo česticu koja se giba u omeđenom intervalu. Vjerojatnost da se čestica nađe u nekom malom intervalu  $dx$  jest  $|\Psi(x)|^2 dx$ . Da bismo saznali vjerojatnost da se čestica nađe u većem intervalu, npr. od  $a$  do  $b$ , treba izračunati integral:

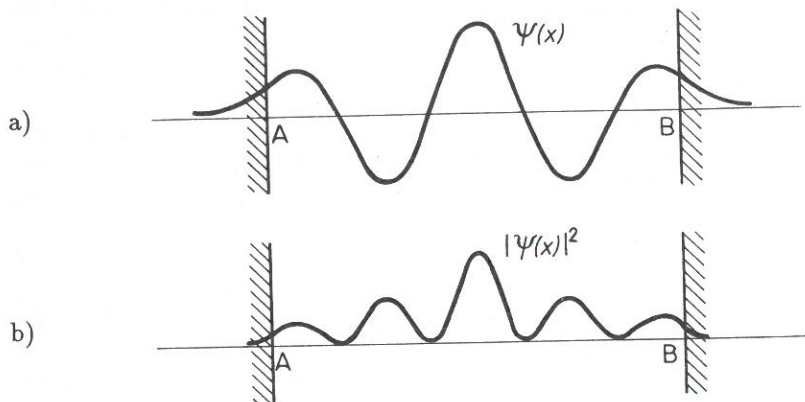
$$P(a < x < b) = \int_a^b |\Psi(x)|^2 dx.$$

Kao uvijek u računu vjerojatnosti, ukupna vjerojatnost mora biti jednaka jedinici: čestica mora biti "negdje". Mora dakle biti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1.$$

\* Zvezdicom smo označili konjugirano kompleksni broj.

Ovime smo izrazili vrlo važno svojstvo valne funkcije: ona mora biti **normirana**. Ako taj integral nije 1, već neki drugi, konačan broj, valnu funkciju možemo vrlo lako uskladiti sa zahtjevom normiranja: dovoljno je da je pomnožimo odgovarajućim faktorom. No, ako je funkcija takva da je integral beskonačan, onda ne može predstavljati valnu funkciju konačnog sistema. Primjer valne funkcije i gustoće vjerojatnosti za česticu koja se giba unutar intervala AB prikazuju nam sl. 13.2.a i 13.2.b.



Slika 13.2. Valna funkcija i gustoća vjerojatnosti

Uvjet normiranosti znači da je površina ispod krivulje vjerojatnosti na sl. 13.2.b jednaka jedinici.

Za gibanje čestice u trodimenzionalnome prostoru valna će funkcija ovisiti o svim trima prostornim koordinatama, pa će gustoća vjerojatnosti biti

$$P(x, y, z) = |\Psi(x, y, z)|^2.$$

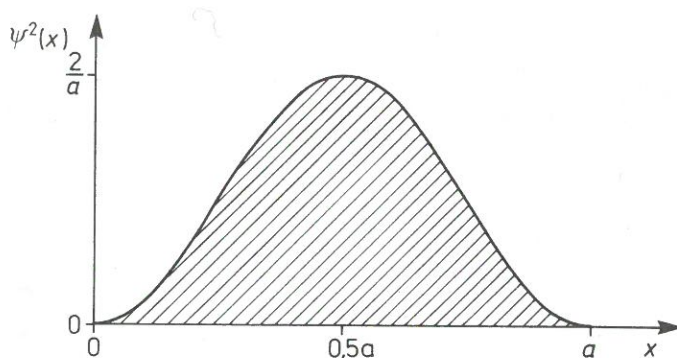
Najvažnije je, dakle, doznati valnu funkciju. U idućim ćemo poglavljima ilustrirati kako se to radi. Naučit ćemo kako se osobine valne funkcije mogu povezati s energijom i drugim svojstvima fizikalnoga sistema. Na kraju ćemo pokazati kako se pomoću kvantne mehanike mogu protumačiti svojstva atoma i molekula.

### Primjer 13.1.

Pokažite da valna funkcija:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x < 0, \quad x > a \end{cases}$$

zadovoljava uvjet normiranja. Prikažite grafički  $|\Psi(x)|^2$ .



Slika 13.3. Gustoća vjerojatnosti za funkciju. Površina ispod krivulje prikazuje ukupnu vjerojatnost.

Uputa i rješenje: Treba izračunati integral:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx &= \int_0^a \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{a} x - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \right]_0^a = 1. \end{aligned}$$

Grafički prikaz dan je na sl. 13.3.

### 13.3. Schrödingerova jednađba

Naš je sljedeći zadatak da nađemo postupak kojim bismo, ako poznamo sile koje djeluju na česticu i ako znamo njezinu ukupnu energiju, mogli doznati valnu funkciju. Za konzervativne sile gibanje je čestice određeno njezinom potencijalnom energijom, pa očekujemo da će i valna funkcija ovisiti o ukupnoj i o potencijalnoj energiji čestice:

$$E = \frac{p^2}{2m} + E_p(x).$$

U prvome članu, koji opisuje kinetičku energiju,  $p$  je količina gibanja, a  $m$  masa čestice.

Postupak koji tražimo dan je u obliku diferencijalne jednađbe koju je g. 1926. formulirao njemački fizičar Erwin Schrödinger. Za slučaj jedne dimenzije Schrödingerova jednađba za valnu funkciju  $\Psi(x)$  glasi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p(x)\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (13.2)$$

gdje je uvedena tzv. reducirana Planckova konstanta  $\hbar = h/2\pi$ , ili  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Js.



To je osnovna jednadžba kvantne mehanike, jednako toliko važna za kvantnu fiziku kao što su Newtonovi zakoni značajni za klasičnu mehaniku ili Maxwelllove jednadžbe za elektromagnetizam.

U svojem zaključivanju Schrödinger je slijedio ideju Louisa de Brogliea da materija ima dvojni prirodu te da se čestica s energijom  $E$  i količinom gibanja  $p$  može smatrati valom materije valne duljine  $\lambda = h/p$ . Valna funkcija  $\Psi(x)$  ima sličnu ulogu kao amplituda  $\xi(x)$  stojnoga vala:\*

$$s(x, t) = \xi(x) \cdot \cos \omega t,$$

za koju vrijedi jednadžba:

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + k^2 \xi = 0,$$

gdje smo s  $k$  označili valni broj. Budući da je  $k = 2\pi/\lambda = p/\hbar$ , možemo očekivati da će za valnu funkciju vrijediti slična jednadžba:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} \Psi = 0.$$

Pretpostavit ćemo da je taj izraz točan i kad količina gibanja nije konstantna:  $p^2$  ovisi o položaju čestice i može se iz zakona energije napisati kao

$$p^2 = 2m[E - E_p(x)].$$

Uvrštavanje nam daje:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - E_p(x)] \Psi = 0 \quad (13.3)$$

a to je upravo jednadžba (13.2). Ovo ne smijemo shvatiti kao egzaktni izvod Schrödingerove jednadžbe, već samo kao intuitivni putokaz. O strogim pravilima kako se dolazi do jednadžbi kvantne mehanike bit će riječi u odjeljku 13.8. No treba odmah reći da, usprkos analogijama s klasičnim fizikalnim jednadžbama, i bez obzira na matematičko opravdanje, treba shvatiti da se Schrödingerova jednadžba ne može izvesti na osnovi nekih drugih fizikalnih zakona, već da je ona sama osnovni zakon, formuliran na osnovi mnoštva opažanja i eksperimenata u pojavnome svijetu atomskih dimenzija.

Ako se čestica giba u trodimenzionalnome prostoru, Schrödingerova jednadžba glasi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + E_p(x, y, z) \Psi = E \Psi \quad (13.4)$$

gdje je:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad - \text{gradijent}$$

Laplaceov diferencijalni operator. On sadrži parcijalne derivacije jer sada valna funkcija ovisi o svim trima prostornim koordinatama:

$$\Psi = \Psi(\vec{r}) \equiv \Psi(x, y, z).$$

\* V. Henč, P. Kulišić, *Valovi i optika*, odjeljak 2.4.

### 13.4. Slobodna čestica u kvantnoj fizici

Pokažimo na najjednostavnijem slučaju – slobodnoj čestici – što nam daje rješavanje Schrödingerove jednačbe. Slobodna čestica ima samo kinetičku energiju:

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

pa Schrödingerova jednačba glasi:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + k^2 \Psi = 0,$$

gdje je valni broj  $k = 2\pi/\lambda = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ , a  $E$  energija čestice. Rješenja su ove valne jednačbe dvije funkcije:

$$\Psi(x) = e^{ikx} \quad \Psi(x) = e^{-ikx}.$$

Prva pokazuje gibanje slobodne čestice u smjeru osi  $x$ , a druga gibanje iste čestice u suprotnome smjeru. (Sjetimo se pritom da je:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha.)$$

Kolika je vjerojatnost da se čestica nađe na mjestu  $x$ ? Gustoća vjerojatnosti je

$$P(x) = |\Psi(x)|^2 = \Psi(x) \cdot \Psi^*(x) = e^{ikx} \cdot e^{-ikx} = 1,$$

što znači da se čestica s jednakom vjerojatnošću nalazi na bilo kojem mjestu. No to je potpuno u skladu s relacijama neodređenosti: budući da je brzina čestice točno poznata,  $\Delta p = 0$ , pa mora biti  $\Delta x \rightarrow \infty$  da bi se moglo ispuniti:

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim h.$$

To bi značilo da o položaju čestice ne znamo ništa. No, ako je čestica smještena unutar konačnog intervala  $\Delta x$ , tada njezina valna funkcija ne može biti zadana samo jednom jedinom vrijednošću  $p = \hbar k$  nego s nekoliko susjednih vrijednosti. Tako se valna funkcija, značajna samo u malom intervalu  $\Delta x$ , može pisati pomoću sume ili integrala:

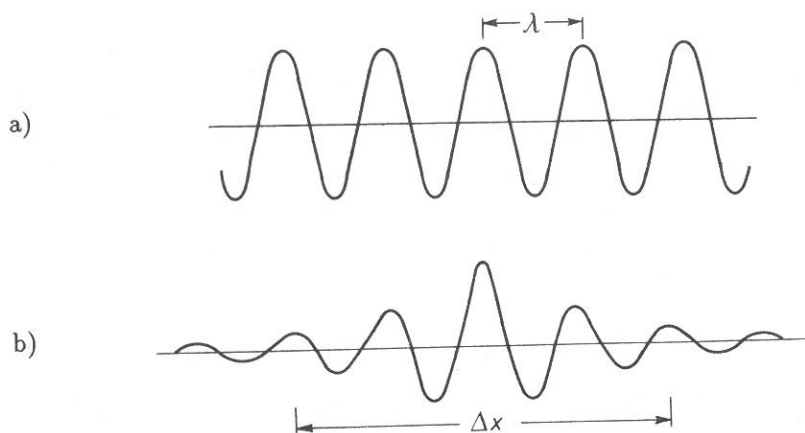
$$\Psi(x) = \sum_k A_k e^{ikx} \quad \text{ili} \quad \Psi(x) = \int A(k) e^{ikx} dk \quad (13.5)$$

i naziva se **valnim paketom**.

Svaka linearna kombinacija:

$$\Psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (13.6)$$

također je rješenje Schrödingerove jednačbe za slobodnu česticu. Na sl. 13.4.a prikazana je takva valna funkcija za česticu određene brzine, a sl. 13.4.b prikazuje valni paket opisan funkcijom (13.5).



Slika 13.4. Ravni val a) i valni paket b)

**Primjer 13.2.**

Provjerite zadovoljava li funkcija  $\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$  Schrödingerovu jednadžbu za slobodnu česticu, i pod kojim uvjetom.

Funkciju  $\Psi(x)$  dvaput deriviramo i uvrstimo u jednadžbu (13.2) s  $E_p = 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi}{dx} &= ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}) \quad \text{i} \\ \frac{d^2\Psi}{dx^2} &= -k^2(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}) = -k^2\Psi.\end{aligned}$$

Odatle slijedi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-k^2)\Psi = E\Psi,$$

što je ispunjeno uz uvjet  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ .

**Primjer 13.3.**

Izračunajte brzinu, valni broj i valnu duljinu slobodnog elektrona energije 2 eV.

Rješenje:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = 8,386 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}$$

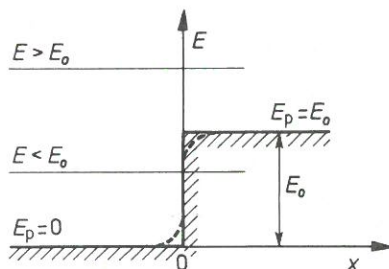


$$k = \frac{\sqrt{2m_e E}}{\hbar} = 7,241 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 8,678 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

## 13.5. Potencijalna stepenica

Nakon što smo upoznali rješenja Schrödingerove jednadžbe za slobodnu česticu, zamislimo česticu na koju djeluju sile. Zanimljiv je slučaj sile prikazane tzv. potencijalnom stepenicom (sl. 13.5).



Slika 13.5. Potencijalna stepenica

U točkama  $x < 0$  potencijalna je energija jednaka nuli, a za točke  $x > 0$  ona ima konstantnu vrijednost ( $E_p = E_0$ ). Kako se u klasičnoj fizici ponaša čestica u prostoru u kojemu djeluje takva potencijalna energija? To ovisi o energiji čestice. Ako je njezina energija  $E < E_0$ , čestica će se gibati do točke  $x = 0$ , a zatim će se odbiti i vratiti. Ona nikako ne može prodrijeti dalje od točke  $x = 0$ , jer bi joj tada kinetička energija bila negativna. Čestica energije  $E > E_0$  gibat će se, međutim, nesmetano dalje, iako će u točkama  $x > 0$  imati manju brzinu, naime, tamo je njezina kinetička energija manja.

U kvantnoj mehanici podatke o tome gdje je čestica dobivamo iz valne funkcije. Promatrajmo najprije slučaj kad je energija čestice  $E < E_0$ . Schrödingerovu jednadžbu sada treba zasebno riješiti za točke  $x < 0$  (rješenje je valna funkcija  $\Psi_1$ ) i za točke  $x > 0$  (rješenje je valna funkcija  $\Psi_2$ ). Jednadžba za  $x < 0$  glasi jednako kao za slobodnu česticu:

$$\frac{d^2 \Psi_1}{dx^2} + k^2 \Psi_1 = 0 \quad (13.7)$$

gdje je  $k = \sqrt{(2mE/\hbar^2)}$ , a njezina se rješenja mogu pisati kao:

$$\Psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (13.8)$$

Za točke  $x > 0$  jednadžba glasi:

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} - \alpha^2\Psi_2 = 0 \quad (13.9)$$

gdje je:

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E_0 - E) > 0.$$

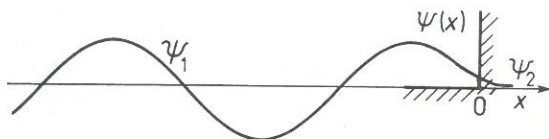
Ta jednadžba ima rješenje:

$$\Psi_2 = Ce^{-\alpha x} \quad (13.10)$$

Drugo smo moguće rješenje  $\sim e^{\alpha x}$  odbacili jer ne zadovoljava uvjet normiranja. Ova nas rješenja podsjećaju na ono što znamo iz valne mehanike: val koji nailazi na zapreku djelomično će se odbiti, a djelomično prodrijeti u nju. Uzmemo li u obzir činjenicu da u točki  $x = 0$  i valne funkcije i njihove derivacije moraju biti neprekinute, dolazimo do izraza za amplitude  $B$  i  $C$ . Jednostavan račun daje tada za valne funkcije:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= \frac{2ik}{ik - \alpha} A \left[ \cos kx - \frac{\alpha}{k} \sin kx \right] \\ \Psi_2(x) &= \frac{2ik}{ik - \alpha} A e^{-\alpha x} \end{aligned} \quad (13.11)$$

Na sl. 13.6. prikazane su te valne funkcije, točnije, izrazi u uglatim zagradama. Čestica će (s nekom vjerojatnošću) biti svagdje gdje je valna funkcija različita od nule, jer je tamo i  $|\Psi(x)|^2$  različit od nule. Odmah uočavamo da se čestica može naći i iza točke  $x = 0$ , premda je vjerojatnost za to mala. No to je rezultat tipičan za kvantnu fiziku, i potpuno se razlikuje od onoga u klasičnoj fizici.



Slika 13.6. Valna funkcija za potencijalnu stepenicu

Rješavamo li Schrödingerovu jednadžbu za česticu energije  $E > E_0$ , također dobivamo neočekivan rezultat. Naime, dok u klasičnoj mehanici za  $x > 0$  čestica obavezno putuje dalje, u kvantnoj se opažaju i refleksija i transmisija čestice, što smo već prije susreli kod valova (elastičnih, elektromagnetskih, valova na žici) koji nailaze na neki prekid u svojstvima sredstva.

Primjer potencijalne stepenice nema samo teorijsku nego i veliku praktičnu važnost. On naprimjer objašnjava što se zbiva s elektronom u metalu koji nailazi na rubnu plohu. Potencijalna je energija elektrona u tom slučaju slična potencijalnoj stepenici, samo što skok potencijalne energije nije oštar, nego odgovara crtkanoj liniji na sl. 13.5. Da bi izašao iz metala, elektron mora imati energiju jednaku ili

veću od energije  $E_0$  koja se tada naziva "rad izlaza". Iako će većina elektrona niže energije ostati u metalu, neki će od njih ipak izletjeti ali je vjerojatnost za to mala. Ako im dovedemo energiju (zagrijavanjem, osvjetljivanjem), oni će postići energiju veću od  $E_0$  i izletjet će iz metala (termoemisija, fotoelektrični efekt).

#### Primjer 13.4.

Visina je potencijalne stepenice  $E_0 = 4$  eV. Izračunajte gustoću vjerojatnosti da se elektron nalazi

a)  $x = 0$ , b)  $x = 0,1$  nm, c)  $x = 1$  nm unutar stepenice, ako je najveća gustoća vjerojatnosti ispred stepenice  $P = |\Psi_1|_{\text{maks}}^2 = 1$ , a energija je elektrona  $E = E_0/2$ .

Najprije računamo koeficijente  $k$  i  $\alpha$ :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 7,24 \text{ nm}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m(E_0 - E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = k.$$

Konstantu  $A$  u valnim funkcijama (13.11) naći ćemo iz uvjeta da je najveća gustoća vjerojatnosti (za  $x < 1$ )  $|\Psi_1|_{\text{maks}}|^2 = 1$ . Najprije ćemo izračunati:

$$|\Psi_1|^2 = \frac{4k^2}{k^2 + \alpha^2} A^2 (\cos kx - \frac{\alpha}{k} \sin kx)^2$$

$$|\Psi_1|^2 = 2A^2 (\cos kx - \sin kx)^2.$$

Ekstreme ove funkcije dobivamo kad je:

$$\frac{d}{dx} |\Psi_1|^2 = 2A^2 \cdot 2(\cos kx - \sin kx) \cdot k(-\sin kx - \cos kx) = 0.$$

Maksimumu odgovara kad je  $\text{tg } kx = -1$ , što je ispunjeno za točke  $kx = (n - \frac{1}{4})\pi$ . Dakle, maksimalna vrijednost ispred prepreke iznosi:

$$|\Psi_1|_{\text{maks}}^2 = 2A^2 \left[ \cos \left( n - \frac{1}{4} \right) \pi - \sin \left( n - \frac{1}{4} \right) \pi \right]^2 = 4A^2 = 1.$$

Odatle dobivamo:

$$A = -\frac{1}{2}.$$

Gustoća vjerojatnosti za  $x > 0$  u ovom slučaju iznosi:

$$|\Psi_1|^2 = 2 \cdot A^2 \cdot e^{-2\alpha x} = \frac{1}{2} e^{-2kx}.$$



Uvrštavanjem zadanih vrijednosti za  $x$  nalazimo:

$$\text{a) } |\Psi_2(x=0)|^2 = \frac{1}{2} = 0,500;$$

$$\text{b) } |\Psi_2(x=0,1 \text{ nm})|^2 = \frac{1}{2} e^{-2 \cdot 7,24 \text{ nm}^{-1} \cdot 0,1 \text{ nm}} = 0,118;$$

$$\text{c) } |\Psi_2(x=1 \text{ nm})|^2 = \frac{1}{2} e^{-2 \cdot 7,24 \text{ nm}^{-1} \cdot 1 \text{ nm}} = 2,57 \cdot 10^{-7}.$$

### Primjer 13.5.

Izvedite izraze (13.11) za valne funkcije  $\Psi_1(x)$  i  $\Psi_2(x)$  za slučaj potencijalne stepenice.

Valna funkcija:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x \leq 0 \\ \Psi_2(x) = Ce^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

i njezina derivacija:

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{d\Psi_1(x)}{dx} = ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}), & x \leq 0 \\ \frac{d\Psi_2(x)}{dx} = -\alpha Ce^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

moraju biti neprekinute u točki  $x=0$ . Uzmemo li u obzir taj uvjet, nalazimo:

$$A + B = C$$

$$ik(A - B) = -\alpha C.$$

Dobili smo dvije linearne jednadžbe, koje nam kao rješenje daju omjere:

$$\frac{B}{A} = \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} \quad \text{i} \quad \frac{C}{A} = \frac{2ik}{ik - \alpha}.$$

Uvrštavanjem u (13.8) i (13.10) dobivamo tražene izraze dane relacijama (13.11).

## 13.6. Harmonički oscilator u kvantnoj mehanici

Čestici koja titra pod djelovanjem harmoničke sile posvetili smo u klasičnoj mehanici veliku pozornost. Sjetimo se pokusa s njihalicama, utezima na opruzi i mnogih drugih. Harmonička sila jednako je važna i u atomskom svijetu jer njome tumačimo titranje oko ravnotežnoga položaja atoma u molekulama, iona u kristalu, pa čak i pobuđenja atomske jezgre.

Zato smo odabrali upravo primjer harmoničkog oscilatora da bismo ilustrirali metode kojima se služi kvantna mehanika i da bismo se upoznali s odlikama kvantnomehaničkih rješenja za česticu u vezanu stanju. Želimo li naći energiju čestice i njezinu valnu funkciju, valja nam riješiti Schrödingerovu jednadžbu. Potencijalna je energija harmoničkog oscilatora (v. sl. 11.2):

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2,$$

pa će Schrödingerova jednadžba za česticu mase  $m$  poprimiti oblik:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \Psi = E\Psi.$$

Ovdje je  $E$  ukupna energija čestice, a  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  klasična kružna frekvencija harmoničkog oscilatora.

Jednadžbu ćemo najprije pojednostaviti uvođenjem novih konstanti:

$$\kappa^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{i} \quad \lambda = \frac{m\omega}{\hbar} \quad (13.12)$$

tako da ona postaje:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (\kappa^2 - \lambda^2 x^2)\Psi = 0 \quad (13.13)$$

odakle je moguće naći valnu funkciju  $\Psi$ . No prije nego što se upustimo u matematički postupak rješavanja ove jednadžbe, upitajmo se: hoće li svako rješenje predstavljati ispravnu valnu funkciju? Odgovor je negativan. Dobro rješenje je samo ono za koje se valna funkcija može normirati! To znači da za  $x \rightarrow \infty$  valna funkcija mora težiti nuli! Pravo ćemo rješenje, dakle, naslutiti ako promatramo jednadžbu (13.13) za  $x \rightarrow \infty$ , a to je:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \lambda^2 x^2 \Psi = 0 \quad (13.14)$$

jer je:

$$\kappa^2 \ll \lambda^2 x^2 \quad \text{kad} \quad x \rightarrow \infty.$$

Prihvatljivo rješenje jednadžbe jest:

$$\Psi(x) = e^{-\frac{1}{2} \lambda x^2},$$

pa u konačnosti rješenje pretpostavljamo u obliku:

$$\Psi(x) = e^{-\frac{1}{2} \lambda x^2} \varphi(x).$$

Uvrštavanjem u (13.14) dobivamo jednadžbu za nepoznatu funkciju  $\varphi(x)$ :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2\lambda x \frac{d\varphi}{dx} + (\kappa^2 - \lambda)\varphi = 0.$$

Teorija diferencijalnih jednadžbi uči nas da funkciju  $\varphi(x)$  treba tražiti u obliku beskonačnog reda:

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j,$$

u kojemu su koeficijenti  $a_j$  međusobno povezani relacijom:

$$a_{j+2} = \frac{\lambda(2j+1) - \kappa^2}{(j+1)(j+2)} a_j.$$

No, kada bi to zaista bio beskonačan red, ni tada se funkcija  $\varphi(x)$  ne bi mogla normirati. Ali, ako je red konačan, tj. ako su svi koeficijenti nakon nekog  $j = n$  jednaki nuli, tada je rješenje fizikalno, a funkcija  $\varphi(x)$  ima oblik polinoma. Za neki  $n$ , dakle, mora biti:

$$a_{n+2} = \frac{\lambda(2n+1) - \kappa^2}{(n+1)(n+2)} a_n = 0,$$

pa dobivamo uvjet

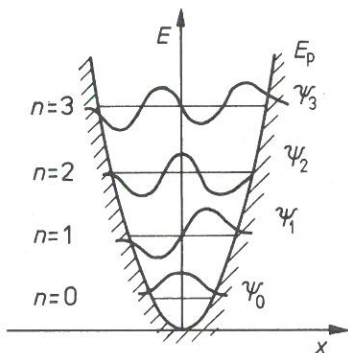
$$\lambda(2n+1) - \kappa^2 = 0.$$

Uvrstimo li izraze (13.12) za  $\lambda$  i  $\kappa^2$ , dobivamo uvjet za energiju:

$$E = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (13.15)$$

gdje je  $n = 0, 1, 2$  itd.

Došli smo do vrlo važnog rezultata: kvantnomehanički oscilator, za razliku od klasičnoga, ne može imati bilo kakvu energiju – njegova je energija kvantizirana. Energijske razine koje prikazuju energije stacionarnih stanja, jednako su razmaknute, i taj je razmak  $E = \hbar\omega = h\nu$ . To je energija elektromagnetskoga vala koji zrači čestica kad prelazi iz višega u najbliže niže stanje.



Slika 13.7. Valne funkcije harmoničkog oscilatora

Uočavamo još jednu osobitost karakterističnu za kvantnomehaničke sisteme. Najniža moguća energija nije jednaka nuli, nego je  $E(n=0) = (1/2)\hbar\omega$ . Naime,



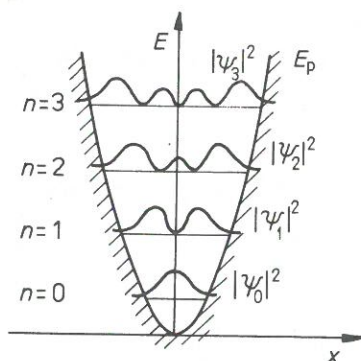
kad bi najniža energija bila jednaka nuli, to bi značilo da je čestica u položaju ravnoteže i da miruje. Time bi joj položaj i brzina bili određeni potpuno točno, a to se protivi relacijama neodređenosti. Energija osnovnoga stanja harmoničkog oscilatora jest najniža energija za koju nisu narušene relacije neodređenosti.

U kvantnoj mehanici, dakle, napuštamo predodžbu prema kojoj u harmoničkom oscilatoru čestica putuje s jednog kraja na drugi, vraća se itd. Mi znamo da je ona najvjerojatnije između vrijednosti  $x_1$  i  $x_2$  (v. sl. 13.2.a), a vjerojatnost nalaženja u malom intervalu  $dx$  daje nam kvadrat valne funkcije.

Tablica 13.1. Valne funkcije harmoničkog oscilatora

| $n$ | $E_n$                      | $\Psi_n(x)$                                                                                              | $\left(a^2 = \frac{m\omega}{\hbar}\right)$ |
|-----|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 0   | $\frac{1}{2} \hbar \omega$ | $\Psi_0(x) = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} a^2 x^2}$                           |                                            |
| 1   | $\frac{3}{2} \hbar \omega$ | $\Psi_1(x) = \left(\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} a^2 x^2} \cdot 2ax$                |                                            |
| 2   | $\frac{5}{2} \hbar \omega$ | $\Psi_2(x) = \left(\frac{a}{8\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} a^2 x^2} \cdot (4a^2 x^2 - 2)$     |                                            |
| 3   | $\frac{7}{2} \hbar \omega$ | $\Psi_3(x) = \left(\frac{a}{48\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} a^2 x^2} \cdot (8a^3 x^3 - 12ax)$ |                                            |

U tabl. 13.1. navedene su valne funkcije za nekoliko najnižih stanja, a na sl. 13.7. te iste valne funkcije prikazane su grafički, zajedno s ukupnom energijom svakog stanja i potencijalnom energijom. Slika 13.8. prikazuje gustoću vjerojatnosti  $|\Psi(x)|^2$  za svako od četiriju najnižih stanja.



Slika 13.8. Gustoća vjerojatnosti harmoničkog oscilatora

Uočljiva su dva svojstva kvantnomehaničkog oscilatora. Prvo, čestica ima znatnu vjerojatnost da se nađe na nekim mjestima, tamo gdje je gustoća vjerojatnosti mak-

simalna. Između tih mjesta postoje točke u kojima se, sigurno, neće naći, jer je vjerojatnost jednaka nuli (sjetite se amplitude stojnoga vala!). Postoji određena vjerojatnost da se čestica nađe i u području iza  $x_2$ , što je u klasičnoj fizici bilo nemoguće. Ta je vjerojatnost mala i brzo nestaje, ali znači bitnu razliku u ponašanju klasičnoga i kvantnoga sistema.

### Primjer 13.6.

Napišite relacije neodređenosti za položaj i količinu gibanja čestice u prvom pobuđenom stanju ( $n = 1$ ) harmoničkog oscilatora.

Neodređenost je položaja čestice  $\Delta x = 2x_1$ , gdje se  $x_1$  određuje iz izraza za energiju

$$\frac{3}{2} \hbar \omega = \frac{1}{2} m \omega^2 x_1^2.$$

Neodređenost je količine gibanja  $\Delta p = 2mv_{\text{maks}} = 2m\omega x_1$ .

Dobiva se:

$$\Delta x \cdot \Delta p = 4m\omega x_1^2 = 12\hbar = \frac{6}{\pi} h \gtrsim h.$$

### Primjer 13.7.

Izračunajte omjer vjerojatnosti da se čestica nađe u malom intervalu oko položaja ravnoteže, za drugo pobuđeno ( $n = 2$ ) i osnovno ( $n = 0$ ) stanje harmoničkog oscilatora.

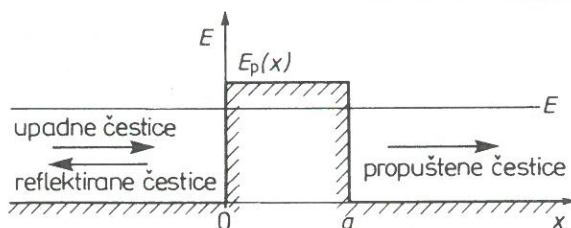
Pomoću valnih funkcija iz tabl. 13.1. dobivamo:

$$\frac{P_2}{P_0} = \frac{|\Psi_2(x=0)|^2 dx}{|\Psi_0(x=0)|^2 dx} = \frac{\frac{a}{8\sqrt{\pi}} \cdot 2^2}{\frac{a}{\sqrt{\pi}}} = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}.$$

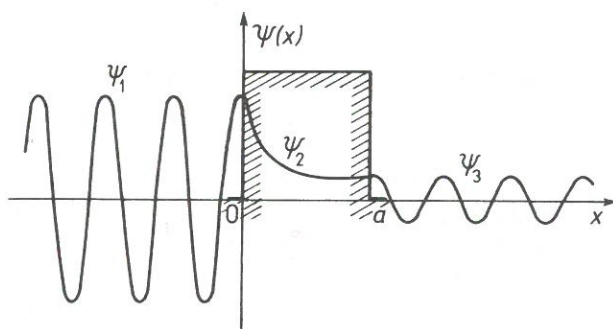
## 13.7. Proboj kroz potencijalnu prepreku

Potencijalnom preprekom (barijerom ili bedemom) naziva se potencijalna energija koja je u bitnim crtama prikazana na sl. 13.9. Zbog svojstva valne funkcije da prodiere i u klasično zabranjeno područje kvantnomehanička čestica pokazuje još jedno neočekivano svojstvo: može "probiti" prepreku.

Slika 13.10. prikazuje nam valnu funkciju čestice koja nailazi na opisanu potencijalnu prepreku. S obiju strana prepreke valna funkcija jest funkcija slobodne čestice. Čestica je prvobitno bila s lijeve strane prepreke. Unutar prepreke njezina valna funkcija trne, no na izlazu iz prepreke još uvijek nije zanemarivo mala. Stoga postoji određena vjerojatnost da se čestica nađe i s desne strane prepreke. Ta

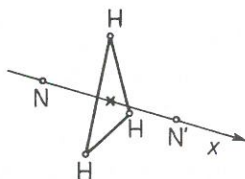


Slika 13.9. Potencijalna prepreka



Slika 13.10. Valna funkcija za potencijalnu prepreku

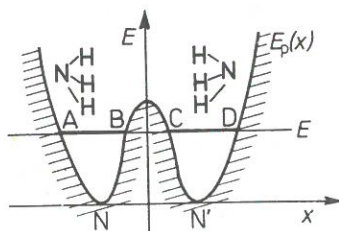
je vjerojatnost to veća što je debljina  $a$  prepreke manja. Jednako tako, ako je čestica bila s desne strane, postoji vjerojatnost da je možemo opaziti i lijevo od prepreke. Za razliku od klasične čestice, koja je – ako ima energiju manju od visine barijere – osuđena da ostane samo s lijeve ili samo s desne strane, kvantnu česticu možemo opaziti i s jedne i s druge strane prepreke. Taj fenomen sasvim kvantne prirode nema analogije u klasičnim zakonima i, radi zornog prikaza, naziva se “proboj potencijalne barijere” ili “tunel-efekt”. On nam objašnjava mnoge pojave opažene u atomskom svijetu. Opisat ćemo dva poučna primjera, molekulu amonijaka  $\text{NH}_3$  i metalni vodič u električnome polju.

Slika 13.11. Molekula  $\text{NH}_3$ 

Molekula  $\text{NH}_3$  ima oblik piramide, s trima vodikovim atomima u osnovici i atomom dušika na vrhu. Atom dušika može biti s jedne ili s druge strane trokuta

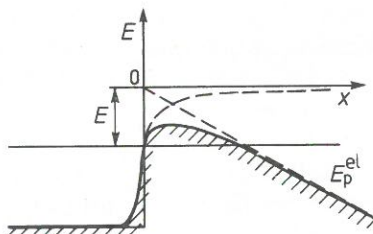


koji čine vodikovi atomi (sl. 13.11). Potencijalna energija takva sistema prikazana je na sl. 13.12.



Slika 13.12. Potencijalna energija molekule  $\text{NH}_3$

Kada bi vrijedila klasična mehanika, atom dušika energije  $E$  mogao bi se gibati ili između točaka A i B ili između točaka C i D (sl.13.12). Međutim, molekula  $\text{NH}_3$  kvantni je sistem, pa atom dušika može probiti potencijalnu prepreku i gibati se gotovo nesmetano također i u cijelom intervalu od A do D. Iz oblika potencijalne energije vidimo da i jedno i drugo gibanje odgovaraju harmoničkim oscilacijama, uz napomenu da titranje od A do D odgovara znatno manja frekvencija. Takvo je titranje opaženo u spektru amonijaka, frekvencija mu je  $2,5786 \cdot 10^{10}$  Hz, i to je upravo ona vrsta titranja koja se primjenjuje kao standard za atomske satove.



Slika 13.13. Potencijalna energija elektrona u metalu

Drugi primjer proboja potencijalne prepreke jeste slučaj elektrona u metalu (v. odj. 13.5.) ako je uključeno vanjsko električno polje. Potencijalna energija elektrona u homogenom električnom polju  $\epsilon$  jest  $E_p = -e\epsilon x$ , pa je grafički prikazana pravcem na sl. 13.13. Rezultantna potencijalna energija koju osjeća elektron također je prikazana na sl. 13.13 – ona ima oblik potencijalne prepreke. Kad ne bi bilo vanjskog polja, elektronu koji ima energiju  $E$  trebalo bi dovesti dodatnu energiju da bi mogao napustiti metal. U prisutnosti električnoga polja postoji, međutim, znatna vjerojatnost da će se elektron naći izvan metala, u području  $x > 0$ . To je poznata pojava da elektroni izlijeću iz katode pod utjecajem električnog napona.

### 13.8. Opća načela kvantne mehanike

Nakon što smo upoznali bitne značajke kvantnih sistema, nameće nam se pitanje: možemo li, osim energije i prostorne gustoće, saznati nešto i o drugim fizikalnim veličinama?

Odgovor na to pitanje daje matematički stroga kvantna teorija, koju su u kratkom razdoblju nakon godine 1924. razvili fizičari Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Paul Dirac, Max Born i drugi. Ovdje ćemo dati samo nekoliko najvažnijih zaključaka te teorije.

Promotrimo još jednom Schrödingerovu jednadžbu (13.2) za jednodimenzionalno gibanje. Ona se može napisati i kao:

$$\tilde{H}\Psi = E\Psi,$$

gdje je:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m} \left( -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) + E_p(x) \quad (13.16)$$

tzv. operator energije ili **hamiltonijan**. Riječ "operator" ovdje znači da takav izraz djeluje na neku funkciju, obavlja na njoj neku operaciju. On može sadržavati prvu ili drugu derivaciju, kao npr. prvi član u (13.16) ili može značiti samo obično množenje (kao što postoji u drugom članu). Postoje, osim operatora energije, i drugi operatori. Naprimjer, za neki operator  $\tilde{A}$  možemo pisati:

$$\tilde{A}\Psi_n = a_n\Psi_n.$$

Taj je izraz jednadžba koja kao rješenje daje **svojstvene vrijednosti**  $a_n$  i **svojstvene funkcije**  $\Psi_n$  toga operatora. Tako energija  $E$  može poprimiti neke vrijednosti za koje kažemo da su svojstvene ili vlastite vrijednosti operatora energije, i to su vrijednosti koje možemo dobiti mjerenjem.

Slične jednadžbe i njihova rješenja mogu se dobiti za druge fizičke veličine. Da bismo to učinili, treba poznavati nekoliko osnovnih načela kvantne mehanike, koja ćemo ovdje navesti.

1. Svakoj mjerivoj fizičkoj veličini, koja ovisi o položaju i količini gibanja čestice, pripada neki operator. On se može naći tako da se obavi zamjena:

- a) za slučaj jednodimenzionalnog gibanja

$$p \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx};$$

- b) za slučaj gibanja u prostoru

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla = -i\hbar \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

( $\nabla$  se naziva operator gradijenta, del ili nabra-operator).

Tablica 13.2. Operatori u kvantnoj mehanici

| Jednodimenzionalno gibanje |                           |                                                 |
|----------------------------|---------------------------|-------------------------------------------------|
| Fizička veličina           |                           | Operator                                        |
| položaj                    | $x$                       | $x$                                             |
| količina gibanja           | $p$                       | $-i\hbar \frac{d}{dx}$                          |
| kinetička energija         | $\frac{p^2}{2m}$          | $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$          |
| ukupna energija            | $\frac{p^2}{2m} + E_p(x)$ | $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + E_p(x)$ |

| Trodimenziionalno gibanje |                                       |                                               |
|---------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------------|
| Fizička veličina          |                                       | Operator                                      |
| položaj                   | $\vec{r}$                             | $\vec{r}$                                     |
| količina gibanja          | $\vec{p}$                             | $-i\hbar \nabla$                              |
| moment količine gibanja   | $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$    | $\vec{L} = i\hbar \vec{r} \times \nabla$      |
| kinetička energija        | $\frac{\vec{p}^2}{2m}$                | $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$                |
| ukupna energija           | $\frac{\vec{p}^2}{2m} + E_p(\vec{r})$ | $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_p(\vec{r})$ |

U tabl. 13.2. navodimo nekoliko najvažnijih fizičkih veličina i njihove pripadne kvantnomehaničke operatore.

2. Operatori fizičkih veličina su tzv. **hermitski** operatori, što znači da za sva prihvatljiva rješenja jednadžbe (13.4) vrijedi (za trodimenzionalni slučaj):

$$\iiint \Psi_1^* \tilde{A} \Psi_2 dV = \iiint (\tilde{A} \Psi_2)^* \Psi_1 dV,$$

gdje je  $dV$  element volumena  $dV = dx dy dz$ . Vlastite vrijednosti hermitskih operatora realni su brojevi.

3. Stanje nekoga fizikalnoga sistema može biti opisano valnom funkcijom:

$$\Phi = \sum_n C_n \Psi_n.$$

gdje su  $\Psi_n$  različite svojstvene funkcije operatora energije. U tome stanju



prosječna vrijednost neke mjerive fizičke veličine  $A$  dana je izrazom:

$$A = \bar{A} = \frac{\iiint \Phi^* \tilde{A} \Phi dV}{\iiint \Phi^* \Phi dV} \quad (13.17)$$

Nazivnik vodi računa o tome da valna funkcija mora biti normirana.

### Primjer 13.8.

a) Odredite koje su od ovih funkcija:  $\Psi_1 = e^{ikx}$ ,  $\Psi_2 = e^{\alpha x}$ ,  $\Psi_3 = \sin kx$  svojstvene funkcije operatora  $\tilde{A} = -\frac{d}{dx}$ . Nađite svojstvenu vrijednost za svaku od tih funkcija.

b) Riješite isti problem za operator:  $\tilde{B} = \frac{d^2}{dx^2}$ .

a) Tražimo rješenje jednadžbe  $\tilde{A}\Psi_i = a_i\Psi_i$ .

$$\tilde{A}\Psi_1 = -\frac{d}{dx} e^{ikx} = -ike^{ikx} = -ik\Psi_1, \quad a_1 = -ik$$

$$\tilde{A}\Psi_2 = -\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = -\alpha e^{\alpha x} = -\alpha\Psi_2, \quad a_2 = -\alpha$$

$$\tilde{A}\Psi_3 = -\frac{d}{dx} \sin kx = -k \cos kx, \quad \text{nije svojstvena funkcija.}$$

b)

$$\tilde{B}\Psi_1 = \frac{d^2}{dx^2} e^{ikx} = -k^2 e^{ikx} = -k^2\Psi_1, \quad b_1 = -k^2$$

$$\tilde{B}\Psi_2 = \frac{d^2}{dx^2} e^{\alpha x} = \alpha^2 e^{\alpha x} = \alpha^2\Psi_2, \quad b_2 = \alpha^2$$

$$\tilde{B}\Psi_3 = \frac{d^2}{dx^2} \sin kx = -k^2 \sin kx = -k^2\Psi_3, \quad b_3 = -k^2.$$

Uočavamo da svaki operator neke mjerljive fizikalne veličine ima svojstvene funkcije. Može se dogoditi da dva operatora imaju iste svojstvene funkcije, i to je vrlo važan slučaj, jer tada se te dvije fizikalne veličine mogu istodobno točno doznati. To se može ostvariti samo ako, primijenjeni na neku funkciju, operatori uvijek daju isti rezultat, bez obzira na to kojim su redom primijenjeni. Naprimjer ako su to operatori  $A$  i  $B$ , tada vrijedi:

$$\tilde{A}\tilde{B}\Psi = \tilde{B}\tilde{A}\Psi,$$

ili

$$[\tilde{A}, \tilde{B}]\Psi = (\tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A})\Psi = 0.$$

Tada kažemo da operatori  $\tilde{A}$  i  $\tilde{B}$  **komutiraju**. To nije uvijek slučaj. Kao što znamo, vrijednost položaja  $x$  i količine gibanja  $p$  ne mogu se odrediti istodobno.

Pripadni operatori ne komutiraju, što je lako provjeriti ako izračunamo:

$$\begin{aligned}(\tilde{x}\tilde{p} - \tilde{p}\tilde{x})\Psi &= -i\hbar\left(x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x\right)\Psi = \\ &= -i\hbar\left[x\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d}{dx}(x\Psi)\right] = i\hbar\Psi \neq 0.\end{aligned}$$

To još možemo pisati kao:

$$[\tilde{x}, \tilde{p}] = xp - px = i\hbar.$$

### Primjer 13.9.

a) Nađite operatore triju komponentata  $\tilde{L}_x$ ,  $\tilde{L}_y$  i  $\tilde{L}_z$  momenta vrtnje u kvantnoj fizici.

b) Pokažite da je komutator  $[\tilde{L}_x, \tilde{L}_y] = i\hbar\tilde{L}_z$ .

a) Budući da je vektor  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , u klasičnoj su fizici njegove komponente:

$$\begin{aligned}L_x &= yp_z - zp_y, \\ L_y &= zp_x - xp_z \quad \text{i} \\ L_z &= xp_y - yp_x.\end{aligned}$$

Zamjenom  $p_x \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $p_y \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$  i  $p_z \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$  dobivamo za komponente vektora  $\vec{L}$  operatore:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \tilde{L}_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \tilde{L}_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

b) Komutator  $[\tilde{L}_x, \tilde{L}_y]$  izračunat ćemo tako da ga primijenimo na neku funkciju  $\Psi$ :

$$\begin{aligned}[\tilde{L}_x, \tilde{L}_y]\Psi &= (\tilde{L}_x\tilde{L}_y - \tilde{L}_y\tilde{L}_x)\Psi = \\ &= (-i\hbar)^2\left[\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\Psi.\end{aligned}$$

Dobivamo:

$$[\tilde{L}_x, \tilde{L}_y]\Psi = (-i\hbar)^2\left[y\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) - y\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) - z\frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + z \frac{\partial}{\partial y} \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - z \frac{\partial}{\partial x} \left( y \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + z \frac{\partial}{\partial x} \left( z \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \\
& + x \frac{\partial}{\partial z} \left( y \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - x \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \Big] \\
[\tilde{L}_x, \tilde{L}_y] &= (-i\hbar)^2 \left( y \frac{\partial \Psi}{\partial x} - x \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = (-i\hbar)(-i\hbar) \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi \\
[\tilde{L}_x, \tilde{L}_y] &= i\hbar \tilde{L}_z \Psi.
\end{aligned}$$

Dakle, komutator  $[\tilde{L}_x, \tilde{L}_y] = i\hbar \tilde{L}_z$  različit je od nule, što znači da se  $x$  i  $y$ -komponente momenta količine gibanja ne mogu odrediti istodobno.

### Primjer 13.10.

Pokažite da je moguće istodobno odrediti komponentu  $x$  i  $y$  vektora količine gibanja  $\vec{p}$ .

Računamo komutator

$$\begin{aligned}
[\tilde{p}_x, \tilde{p}_y] \Psi &= (\tilde{p}_x \tilde{p}_y - \tilde{p}_y \tilde{p}_x) \Psi = \\
&= \left[ \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) - \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \Psi = \\
&= -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} \right) = 0,
\end{aligned}$$

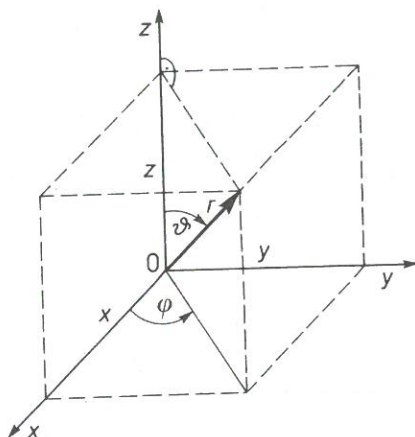
odakle zaključujemo da je  $[\tilde{p}_x, \tilde{p}_y] = 0$ .

## 13.9. Moment količine gibanja u kvantnoj fizici

Zbog zakona očuvanja koji vrijedi za centralne sile u kvantnoj kao i u klasičnoj fizici, moment količine gibanja  $\vec{L}$  ima posebnu važnost za proučavanje pojava u atomskome svijetu.

Iznos momenta količine gibanja doznat ćemo ako nađemo svojstvene vrijednosti operatora  $\tilde{L}^2$ . Znamo da se do operatora  $\tilde{L}$  dolazi zamjenom  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$  u klasičnom izrazu  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  (vidi primjer 13.9.). Matematičke operacije kojima se dolazi do svojstvenih vrijednosti operatora  $\tilde{L}^2$  ovdje nećemo izvoditi, ali ćemo spomenuti da se to najlakše postiže prijelazom u polarni koordinatni sustav. Umjesto pravokutnih koordinata  $x$ ,  $y$  i  $z$  uvode se koordinate  $r$ ,  $\vartheta$  i  $\varphi$ . Tu je  $r$  duljina radiusvektora  $\vec{r}$ , a  $\vartheta$  i  $\varphi$  kutovi su koji određuju njegovu orijentaciju. Veza između pravokutnih i





Slika 13.14. Prostorni polarni koordinatni sustav

polarnih koordinata prikazana je na sl. 13.14, a matematički je izražena relacijama (13.18):

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi & \varphi &= \arctg \frac{x}{y} \\ z &= r \cos \vartheta & \vartheta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (13.18)$$

Operator kvadrata momenta vrtnje tada se može napisati kao:

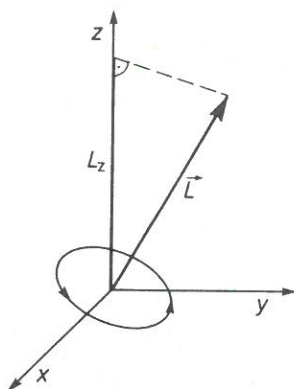
$$\tilde{L}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (13.19)$$

Vidimo da on ovisi samo o orijentaciji u prostoru, a ne i o udaljenosti  $r$ . Saznamo li svojstvene vrijednosti operatora  $\tilde{L}^2$ , tada znamo i iznos momenta vrtnje. Međutim, pitamo se je li moguće saznati i smjer momenta vrtnje  $\tilde{L}$ . Odgovor je negativan. U kvantnoj fizici nemoguće je istodobno doznati i vrijednost momenta vrtnje, i sve tri njegove komponente. To se protivi relacijama neodređenosti. Moguće je točno saznati samo jednu, npr. njegovu  $z$ -komponentu (sl. 13.15). Matematički je izraz za operator  $z$ -komponente momenta vrtnje u polarnome sustavu:

$$\tilde{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (13.20)$$

Napišimo sada kvantnomehaničke jednadžbe svojstvenih vrijednosti za operatore  $\tilde{L}^2$  i  $\tilde{L}_z$ . One glase:

$$\begin{aligned} \tilde{L}^2 Y_l^m(\vartheta, \varphi) &= \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \\ \tilde{L}_z Y_l^m(\vartheta, \varphi) &= \hbar m Y_l^m(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (13.21)$$



Slika 13.15. Moment količine gibanja

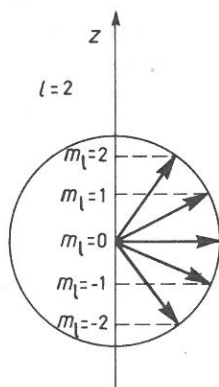
Operator kvadrata momenta vrtnje  $\hat{L}^2$  ima svojstvene vrijednosti  $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$ , i zato su vrijednosti iznosa momenta vrtnje kvantizirane. One mogu poprimiti samo vrijednosti:

$$L = |\vec{L}| = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad (13.22)$$

gdje je  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  itd. Istodobno  $z$ -komponenta momenta vrtnje može poprimiti vrijednosti  $L_z = \hbar m$ ; pritom  $m$  mogu biti samo cijeli brojevi od  $-l$  do  $l$ . Primjerice za  $l = 2$  vrijednost je momenta količine gibanja  $L = \sqrt{2 \cdot 3} \hbar = 2,45 \hbar$ , a njegova  $z$ -komponenta (projekcija na  $z$ -os) može biti:

$$L_z = 0, \pm \hbar, \pm 2\hbar,$$

jer je  $m = -2, -1, 0, 1, 2$ . Ta tzv. prostorna kvantizacija momenta vrtnje prikazana je na sl. 13.16.



Slika 13.16. Prostorna kvantizacija momenta vrtnje

Svojstvene funkcije operatora  $\tilde{L}^2$  i  $\tilde{L}_z$  jesu tzv. kugline funkcije  $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ . One ovise samo o kutnim koordinatama, a obilježene su dvama cijelim brojevima  $l$  i  $m$ , koje nazivamo **orbitalnim** i **magnetskim** kvantnim brojem. Kugline funkcije, zbog ovisnosti o orijentaciji, imaju posebnu važnost u tumačenju strukture atoma i molekula. Prvih nekoliko kuglinih funkcija navedeno je u tabl. 13.3.

Ovdje želimo napomenuti da vektor  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , koji ima važnu ulogu u klasičnoj i kvantnoj fizici, ima nekoliko naziva. Mi smo ga, radi kratkoće, obično nazivali vektorom momenta vrtnje. Međutim, općenito prihvaćeni nazivi za tu veličinu još su kutna količina gibanja, moment količine gibanja, zamah, a katkad i kutni zamah ili angularni moment. (Izraz impuls vrtnje ponekad se susreće u knjigama, no bolje ga je izbjegavati zbog višestruka značenja.)

Tablica 13.3. Kugline funkcije

| $l$ | $m$     | Kuglina funkcija                                                                                      |
|-----|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0   | 0       | $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$                                                                       |
| 1   | 0       | $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$                                                        |
|     | $\pm 1$ | $Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta \cdot e^{\pm i\varphi}$                       |
| 2   | 0       | $Y_2^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$                                  |
|     | $\pm 1$ | $Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot e^{\pm i\varphi}$ |
|     | $\pm 2$ | $Y_2^{\pm 2} = -\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta \cdot e^{\pm 2i\varphi}$                      |

**Primjer 13.11.**

Provjerite zadovoljava li kuglina funkcija  $Y_1^{-1}(\vartheta, \varphi)$  jednadžbe svojstvenih vrijednosti za  $\tilde{L}^2$  i  $\tilde{L}_z$ .

Primjenom operatora  $\tilde{L}^2$  i  $\tilde{L}_z$  na funkciju:

$$Y_1^{-1}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta \cdot e^{-i\varphi}$$

dobiva se:

$$\tilde{L}^2 Y_1^{-1} = 2\hbar^2 Y_1^{-1} \quad \text{i} \quad \tilde{L}_z Y_1^{-1} = -\hbar Y_1^{-1}.$$



Na kraju ćemo podsjetiti da u klasičnoj mehanici moment vrtnje ostaje sačuvan za česticu na koju djeluje centralna sila. Isto vrijedi i u kvantnoj fizici. Operator energije (hamiltonijan) za takav slučaj može se napisati kao:

$$\tilde{H}(r, \vartheta, \varphi) = \tilde{H}_0(r) + \frac{\tilde{L}^2}{2mr^2} \quad (13.23)$$

gdje

$$\tilde{H}_0(r) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + E_p(r) \right] \quad (13.24)$$

ovisi samo o udaljenosti  $r$  od središta, a  $\tilde{L}^2$  je poznati operator kvadrata momenta vrtnje. Takav operator energije komutira s operatorima  $\tilde{L}^2$  i  $\tilde{L}_z$ , pa će se za atomske sisteme sa centralnom simetrijom, uz energiju, moći točno odrediti i vrijednosti momenta vrtnje i njegove projekcije na  $z$ -os u svakome stacionarnom stanju.

## Pitanja i zadaci

- 13.1. Navedite i objasnite relacije neodređenosti za položaj i količinu gibanja čestice.
- 13.2. Položaj elektrona poznat je s neodređenošću  $\Delta x = 1$  nm. Nađite neodređenost  $\Delta p$  njegove količine gibanja.
- 13.3. Pretpostavite da snop elektrona de Broglieve valne duljine  $10^{-5}$  nm prolazi kroz pukotinu širine  $10^{-4}$  m (sl. 13.1). Kolik kutni raspon  $\Delta\theta$  uzrokuje ogib na pukotini?
- 13.4. Brzina protona u smjeru osi  $x$  određena je s točnošću  $\Delta v_x = 10^{-7}$  ms $^{-1}$ . Odredite granicu točnosti kojom se istodobno može odrediti položaj protona: a) duž osi  $x$ , b) duž osi  $y$ .
- 13.5. Jesu li položaj i količina gibanja jedine veličine za koje vrijede relacije neodređenosti?
- 13.6. Objasnite značenje valne funkcije i gustoće vjerojatnosti.
- 13.7. Čestica je predočena valnom funkcijom:

$$\Psi(x) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\alpha}} \sin(kx),$$

gdje je  $x_0 = 3 \cdot 10^{-9}$  m,  $\alpha = 7,2 \cdot 10^{-19}$  m $^2$  i  $k = 2 \cdot 10^9$  nm $^{-1}$ . Prikažite grafički valnu funkciju  $\Psi(x)$  i gustoću vjerojatnosti  $|\Psi(x)|^2$  u intervalu od  $x = 0$  do  $x = 6 \cdot 10^{-9}$  m. Predstavlja li ova valna funkcija vezano stanje čestice?

- 13.8. Što znači normiranost valne funkcije? Kada valna funkcija mora biti normirana?
- 13.9. Napišite Schrödingerovu jednadžbu za česticu koja se giba na pravcu.
- 13.10. Navedite bitne razlike u gibanju čestice u klasičnoj i kvantnoj mehanici.
- 13.11. Kako glasi izraz za energije kvantnomehaničkoga harmoničkog oscilatora? Zašto se njegova najniža energija razlikuje od nule?
- 13.12. Pokažite da valne funkcije dane u tabl. 13.1. zadovoljavaju Schrödingerovu jednadžbu za harmonički oscilator.

- 13.13. Čestica mase  $m = 10^{-26}$  kg harmonički titra, pri čemu je konstanta harmoničke sile  $k = 400 \text{ Nm}^{-1}$ . Nađite kvantnomehaničke energije prvih deset stacionarnih stanja toga oscilatora i izrazite ih elektronvoltima.
- 13.14. Objasnite što razumijevamo pod potencijalnom stepenicom.
- 13.15. Opišite i objasnite kvantnomehanički tunel-efekt. Navedite primjere.
- 13.16. Kako glasi jednačba svojstvenih vrijednosti za neki operator  $\tilde{A}$ ?
- 13.17. Kako se nalaze kvantnomehanički operatori koji pripadaju položaju, količini gibanja, te kinetičkoj i ukupnoj energiji:
- a) za česticu koja se giba na pravcu,
  - b) za česticu koja se giba u prostoru?
- 13.18. Položaj točke u prostoru zadan je polarnim koordinatama  $r = 10 \text{ m}$ ,  $\vartheta = 30^\circ$  i  $\varphi = 75^\circ$ . Nađite pravokutne koordinate  $x$ ,  $y$  i  $z$  te točke.
- 13.19. Provjerite da funkcija  $\Psi(\varphi) = a \cos(b\varphi)$  znači svojstvenu funkciju operatora  $\tilde{A} = -\hbar^2(d^2/d\varphi^2)$  i nađite pripadnu svojstvenu vrijednost  $A$ . Konstante su  $a = 3$  i  $b = 2$ .



## 14. Fizika atoma

Atom je najmanja čestica nekog elementa. Znamo da se on sastoji od pozitivno nabijene atomske jezgre oko koje se, ako je riječ o atomu rednoga broja  $Z$ , giba  $Z$  elektrona. Atomska jezgra sadrži  $Z$  protona (naboj je protona  $+e$ ) i  $N$  neutrona. Atomski je broj  $A$  jednak zbroju broja protona i broja neutrona:  $A = Z + N$ . Proton i neutron imaju gotovo jednaku masu, a ta je masa oko 1850 puta veća od mase elektrona. Stoga je gotovo sva masa atoma koncentrirana u jezgri. Međutim, volumen jezgre vrlo je mali u usporedbi s volumenom cijeloga atoma. Dok je promjer atoma reda veličine  $10^{-9}$  m, promjer jezgre iznosi samo oko  $10^{-14}$  m. Takvu predodžbu o građi atoma definitivno su potvrdili pokusi s raspršenjem  $\alpha$ -čestica na listićima zlata, koje je godine 1911. izveo Ernest Rutherford.

### 14.1. Atomi s jednim elektronom

Atom je vodika najjednostavniji od svih atoma: sastoji se od jednog protona i jednog elektrona. Bitna svojstva tog atoma određena su elektrostatskom privlačnom silom između protona i elektrona:  $F_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$ , gdje je  $e$  elementarni naboj, a  $r$  međusobna udaljenost protona i elektrona. Potencijalna je energija takve sile  $E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$ . No ima i drugih atoma sličnih svojstava. To su oni koji u jezgri imaju  $Z$  protona, ali imaju samo jedan elektron. Takvi su npr. atomi deuterija i tricija, a također i ioni  $\text{He}^+$  i  $\text{Li}^{++}$ . Za njih će potencijalna energija biti:

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r}.$$

#### 14.1.1. Bohrov model jednoelektronskog atoma

Prije nego što primijenimo Schrödingerovu jednadžbu na problem atoma, najprije ćemo kao ilustraciju pokazati kako je Niels Bohr godine 1913. pomoću jednostavnoga poluklasičnog modela uspio izračunati energije vodikova i sličnih atoma i objasniti atomske spektre.

Bohr je pretpostavio da se elektron, pod djelovanjem elektrostatske sile, giba oko jezgre po kružnici polumjera  $r$ . Nisu, međutim, moguće sve kružnice, nego samo one za koje moment vrtnje elektrona ima određenu kvantiziranu vrijednost.

$$L = m_e r v = n \hbar \quad (14.1)$$

gdje  $n$  može biti samo pozitivni cijeli broj 1, 2, 3, itd., i gdje je  $\hbar = h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Js reducirana Planckova konstanta. To je poznati "Bohrov kvantni uvjet". (Uočavamo da se takva ideja o kvantiziranosti momenta vrtnje slaže s predodžbom čestice kao stojnoga vala: opseg kružnice mora biti jednak cijelome broju valnih duljina:

$$2r\pi = n\lambda.$$

Kad uvrstimo de Broglievu relaciju:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{m_e v},$$

dobivamo kvantni uvjet (14.1).

Ako se kvantni uvjet napiše zajedno s izrazom za centripetalnu silu:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r^2} \quad (14.2)$$

i s izrazom za ukupnu energiju:

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r} \quad (14.3)$$

dobiju se tri jednadžbe (14.1), (14.2) i (14.3) u kojima su nepoznanice polumjer  $r$  kružnice, brzina  $v$  elektrona i energija  $E$ .

Te jednadžbe jednostavno je riješiti. Rezultat su polumjeri mogućih kružnica:

$$r_n = a_0 \frac{n^2}{Z} \quad (14.4)$$

brzina elektrona:

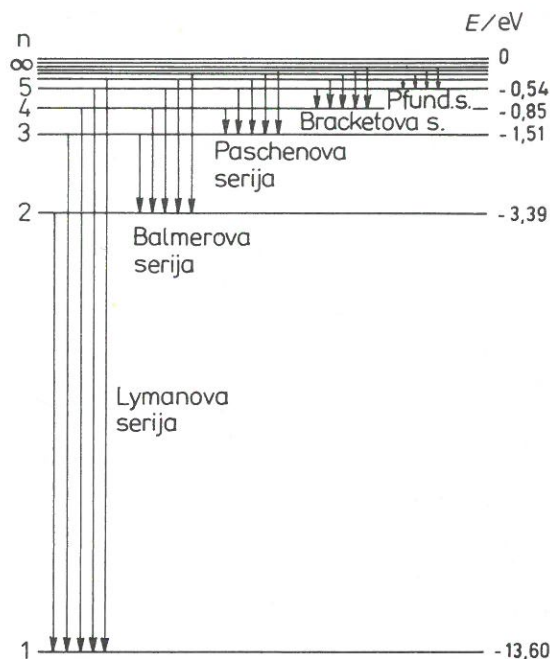
$$v_n = \frac{\hbar}{m_e a_0} \cdot \frac{Z}{n} \quad (14.5)$$

i energije stacionarnih stanja atoma:

$$E_n^{(Z)} = E_1 \frac{Z^2}{n^2} = E_n Z^2 \quad (14.6)$$

grafički prikazane za  $Z = 1$  (vodik) na sl. 14.1. Pritom je  $m_e$  masa elektrona, a  $a_0 = r_1 = (h^2\epsilon_0/\pi m_e e^2) = 5,29 \cdot 10^{-11}$  m polumjer prve elektronske staze u atomu vodika, tzv. Bohrov radijus. Energija je osnovnog stanja atoma vodika:

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,60 \text{ eV}.$$



Slika 14.1. Energije i prijelazi u vodikovu atomu

Katkad se upotrebljava tzv. Rydbergova konstanta:

$$R_{\infty} = -\frac{E_1}{hc} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Vidimo da su polumjeri kružnica, brzine i energije kvantizirane veličine i da ovise o  $n$ , koji može biti 1, 2, 3 itd. Elektron u atomu može, dakle, biti u stanju naj-niže energije ( $n = 1$ , K-ljuska) ili u jednom od pobuđenih stanja (redom ljuske L, M, N, O...). Niels Bohr pretpostavio je da atom ne zrači energiju kad se nalazi u nekom od stacionarnih stanja, već samo kad prelazi iz stanja više u stanje niže energije. Energija kvanta takva zračenja jednaka je:

$$h\nu = E_{n_2}^{(Z)} - E_{n_1}^{(Z)} = -E_1 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) Z^2.$$

To je u dobrom skladu s empirijskom formulom za valne duljine u Balmerovoj i ostalim serijama linija u vodikovu spektru, koja je glasila:

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) Z^2$$

(v. sl. 14.1). Potpuno točne vrijednosti dobiju se ako se uzme u obzir i gibanje



jezgre, zamjenom mase elektrona  $m_e$  s reduciranom masom atoma:

$$\mu = \frac{m_e M}{m_e + M}$$

u Rydbergovoj konstanti, pri čemu je  $M$  masa jezgre.

### Primjer 14.1.

Izračunajte: a) koje linije vodikova spektra padaju u vidljivi dio elektromagnetskoga zračenja ( $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 700 \text{ nm}$ );

b) Isti zadatak riješite za spektar iona  $\text{He}^+$ .

Valna duljina zračenja koje emitira atom dana je izrazom:

$$\lambda = \frac{1}{R_\infty} \cdot \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{Z^2}.$$

Za vodik je  $Z = 1$ , a za helij  $Z = 2$ .

Linije su:

a)  $\lambda = 657 \text{ nm}, 486 \text{ nm}, 434 \text{ nm}$  i  $410 \text{ nm}$  ( $n_1 = 2, n_2 = 3 - 6$ ), Balmerova serija;

b)  $\lambda = 469 \text{ nm}$  ( $n_1 = 3, n_2 = 4$ )

$\lambda = 657 \text{ nm}, 541 \text{ nm}, 486 \text{ nm}, 454 \text{ nm}, 434 \text{ nm}, 420 \text{ nm}, 410 \text{ nm}, 403 \text{ nm}$   
( $n_1 = 4, n_2 = 6 - 13$ )

$\lambda = 689 \text{ nm}, 669 \text{ nm}, 653 \text{ nm}, 641 \text{ nm}, 631 \text{ nm}$ , itd. do  $570 \text{ nm}$  ( $n_1 = 5, n_2 = 12 - \infty$ ).

### 14.1.2. Jednoelektronski atom u kvantnoj mehanici

Usprkos svojoj privlačnosti i uspješnu objašnjenju atomskih spektara, Bohrov je model samo jedna intuitivna i zapravo netočna slika atoma. Ona se protivi relacijama neodređenosti, a nedostaje joj i sposobnost da objasni mnoštvo drugih atomskih svojstava. I relacija (14.1) za moment vrtnje samo je približna.

Iako je nakon uspjeha Bohrova modela slijedilo mnoštvo pokušaja da se proširi klasična slika atoma (npr. uvođenjem eliptičnih staza u Bohr-Sommerfeldovom modelu atoma), jedini točan odgovor na pitanja atomske strukture daju Schrödingerovalna jednačina i njezina rješenja.

Za slučaj jednoelektronskog atoma Schrödingerovalna jednačina glasi:

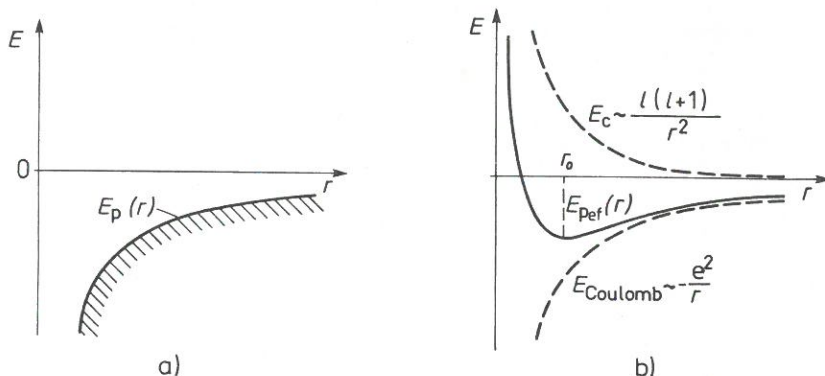
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \Psi = E\Psi.$$

Vezana su stanja atoma ona za koja je  $E < 0$ . Budući da je potencijalna energija (v. sl. 14.2.a) ovisna samo o udaljenosti  $r$ , kao i u klasičnoj fizici, problem se svodi

na rješavanje jednadžbe s efektivnom potencijalnom energijom:

$$E_{p,ef}(r) = E_p(r) + \frac{\vec{L}^2}{2m_e r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} + \frac{\vec{L}^2}{2m_e r^2}$$

Porijeklo je drugog člana na desnoj strani u centrifugalnoj sili koju elektron osjeća kao posljedicu vrtnje, o čemu je bilo riječi u poglavlju 11. Kvantnomehanički operator energije dan je izrazima (13.23) i (13.24).



Slika 14.2. Potencijalne energije elektrona u atomu

Operator momenta vrtnje daje nam vrlo važne podatke o gibanju elektrona u atomu. Njemu smo posvetili cijeli odjeljak 13.9, pa znamo da kvadrat momenta vrtnje može poprimiti vrijednosti:

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1),$$

gdje orbitalni kvantni broj  $l$  može biti 0 ili pozitivni cijeli broj. Uobičajeno je da se stanja s  $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  obilježavaju redom oznakama s, p, d, f, g, ... itd. Moment je vrtnje, dakle, kvantiziran, no ne onako kao u Bohrovu modelu, već je  $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ . Schrödingerova jednadžba za elektron u efektivnom potencijalu prelazi u diferencijalnu jednadžbu s jednom varijablom  $r$ , i ta je jednadžba donekle nalik na onu za harmonički oscilator. I efektivni potencijal (v. sl. 14.2.b) ima minimum sličan onome kod harmoničkog oscilatora. Rješavanje te jednadžbe složen je matematički postupak opisan u udžbenicima kvantne fizike. Mi ga ovdje nećemo ponavljati. Međutim, istaknut ćemo da od svih matematičkih rješenja što nam ih nudi jednadžba, smijemo prihvatiti samo ona koja se mogu normirati. Za takva stanja – pokazuje se u toku matematičkog postupka – mora biti:

$$l+1-\kappa = -n_r,$$

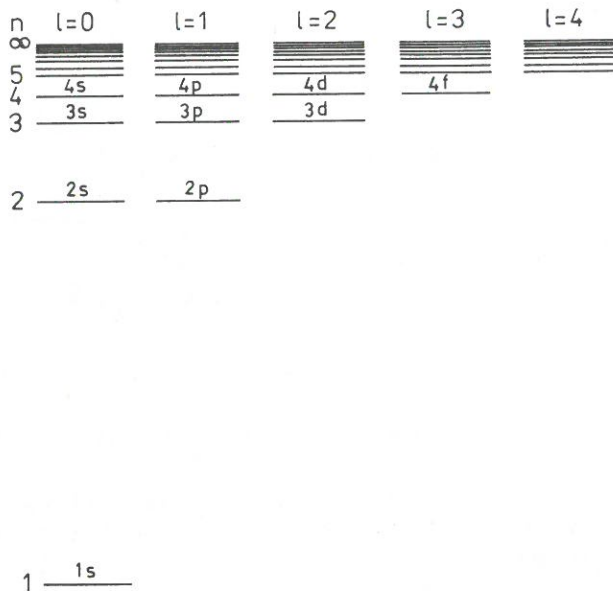
gdje je  $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$  itd., a  $\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{\hbar} \sqrt{-\frac{m_e}{2E}}$ . Uvedemo li tzv. glavni kvantni broj  $n$  tako da bude:

$$n = \kappa = n_r + l + 1,$$

to nas vodi na energije stanja atoma vodika i njemu sličnih atoma:

$$E_n^{(Z)} = E_1 \frac{Z^2}{n^2}, \quad \text{gdje je} \quad E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -13,60 \text{ eV}.$$

To je isti rezultat kakav je Bohr dobio u poluklasičnom modelu.



Slika 14.3. Glavni i orbitalni kvantni brojevi u vodikovu spektru

Za određeni glavni kvantni broj  $n$  orbitalni kvantni broj  $l = n - n_r - 1$  koji govori o veličini momenta vrtnje može poprimiti samo vrijednosti  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Svako od tih vrijednosti  $l$  odgovara drukčija valna funkcija, ali ista energija. Kažemo da se energijska stanja degenerirana: za svaku energiju  $E_n$  postoji  $n$  stanja s različitim vrijednostima momenta vrtnje. Na sl. 14.3. prikazana su moguća stanja vodikova atoma ( $Z = 1$ ) i pritom su energetske razine za svaki  $l$  nacrtane u zasebnu stupcu. No to još uvijek nisu sva stanja. Moment vrtnje može poprimiti i različite orijentacije u prostoru. Znamo da  $z$ -komponenta momenta vrtnje može biti  $L_z = m\hbar$ , gdje  $m$  smije biti samo cijeli broj  $-l, -l+1, \dots, l-2, l-1, l$ . Primjerice, za  $l = 2$  moguće su vrijednosti magnetskoga kvantnog broja  $m = -2, -1, 0, 1$  i  $2$ . Za svaki  $l$  postoji, dakle,  $2l + 1$  mogućih stanja i sva ona imaju istu energiju. Stavimo li, međutim, atom u magnetsko polje, tada atom u stanjima s različitim  $m$  ima različit magnetski moment, a zato i različitu energiju (v. odj. 14.2).



Ako atom nije u magnetskome polju, vidimo da je svaka energijska razina s glavnim kvantnim brojem  $n$  degenerirana

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2 \text{ puta.}$$

Navedimo, napokon, kako izgleda prostorna valna funkcija za stanja u vodikovu atomu i u ostalim jednoelektronskim atomima:

$$\Psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) \cdot Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (14.7)$$

Ona se može napisati kao produkt dviju funkcija: prve, radijalne, koja ovisi samo o udaljenosti  $r$ , i druge, kugline funkcije, koja ovisi samo o orijentaciji u prostoru. Umjesto pravokutnog, bilo je potrebno uvesti polarni sustav, a vezu između koordinata u jednom i drugom sustavu prikazali smo i opisali u odj. 13.9. U tablici 14.1. navedeno je nekoliko radijalnih valnih funkcija za najniža stanja.

Tablica 14.1. Radijalne valne funkcije jednoelektronskog atoma

| $n$ | $l$ | $R_{n,l}(r) \quad \left( \varrho = \frac{2Zr}{na_0} \right)$                                                           |
|-----|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | 0   | $R_{10}(r) = 2 \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{\varrho}{2}}$                                              |
| 2   | 0   | $R_{20}(r) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} (2 - \varrho) e^{-\frac{\varrho}{2}}$              |
|     | 1   | $R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \varrho e^{-\frac{\varrho}{2}}$                    |
| 3   | 0   | $R_{30}(r) = \frac{1}{9\sqrt{3}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} (6 - 6\varrho + \varrho^2) e^{-\frac{\varrho}{2}}$ |
|     | 1   | $R_{31}(r) = \frac{1}{9\sqrt{6}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \varrho(4 - \varrho) e^{-\frac{\varrho}{2}}$       |
|     | 2   | $R_{32}(r) = \frac{1}{9\sqrt{30}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \varrho^2 e^{-\frac{\varrho}{2}}$                 |

Gustoća vjerojatnosti nalaženja čestice dana je kvadratom valne funkcije  $|\Psi_{nlm}|^2$ . Ona ne ovisi samo o udaljenosti  $r$  nego i o smjeru u prostoru. To je posebno važno u fizici molekula, jer tumači usmjerenost kemijske veze. Kutna ovisnost dana je kuglinim funkcijama, navedenim u tabl. 13.3. Samo  $s$ -stanje ne ovisi o kutu, pa je u tom slučaju gustoća vjerojatnosti za sve smjerove jednaka.

Tablica 14.2. Atomske orbitale jednoelektronskog atoma

| $l$ | $ m $ | Kutna ovisnost atomske orbitale                                                                                                                       |
|-----|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0   | 0     | $s = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$                                                                                                                           |
| 1   | 0     | $p_z = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$                                                                                                          |
|     | 1     | $p_x = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$                                                                                       |
|     |       | $p_y = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$                                                                                       |
| 2   | 0     | $d_{3z^2-r^2} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$                                                                                      |
|     | 1     | $d_{xz} = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi$                                                              |
|     |       | $d_{yz} = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi$                                                              |
|     | 2     | $d_{x^2-y^2} = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \sin^2 \vartheta \cdot \cos 2\varphi$<br>$d_{xy} = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \sin^2 \vartheta \cdot \sin 2\varphi$ |

**Primjer 14.2.**

Izračunajte za atom vodika vjerojatnost da se elektron u stanju s kvantnim brojevima  $n = 2$ ,  $l = 1$  i  $m = 0$  nađe u malom elementu volumena  $\Delta V = 10^{-9} \text{ nm}^3$ , smještenom:

- u točki s polarnim koordinatama  $r = 0,1 \text{ nm}$ ,  $\vartheta = 90^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,
- u točki s polarnim koordinatama  $r = 0,1 \text{ nm}$ ,  $\vartheta = 0^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ .
- Nađite vjerojatnost da se elektron u zadanome stanju nađe unutar kuglaste ljuske debljine  $\Delta r = 10^{-3} \text{ nm}$ , udaljene za  $r = 0,1 \text{ nm}$  od protona.

Valna funkcija zadanoga stanja može se napisati pomoću tablica (14.1) i (13.3):

$$\begin{aligned} \Psi_{210}(r, \vartheta, \varphi) &= R_{21}(r)Y_1^0(\vartheta, \varphi) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

a) Tražena je vjerojatnost:

$$P(r, \vartheta, \varphi) = |\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi)|^2 \cdot \Delta V = \frac{1}{32\pi} \cdot \frac{r^2}{a_0^5} e^{-\frac{r}{a_0}} \cos^2 \vartheta \cdot \Delta V,$$

što za  $\vartheta = 90^\circ$  iznosi:

$$P(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{32\pi} \frac{(0,1 \text{ nm})^2}{(0,053 \text{ nm})^5} e^{-\frac{0,1}{0,053}} \cdot \cos^2 90^\circ \cdot 10^{-9} \text{ nm}^3 = 0.$$

b) Slično dobivamo za  $\vartheta = 0^\circ$ :

$$P(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{32\pi} \frac{(0,1 \text{ nm})^2}{(0,053 \text{ nm})^5} e^{-\frac{0,1}{0,053}} \cdot \cos^2 0^\circ \cdot 10^{-9} \text{ nm}^3 = 3,6 \cdot 10^{-8}.$$

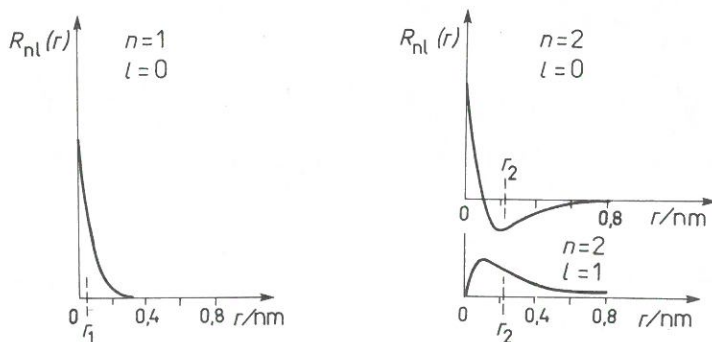
c) Radijalna vjerojatnost iznosi:

$$P(r) = r^2 \cdot R_{nl}^2(r) \cdot \Delta r = r^2 \frac{1}{24} \frac{r^2}{a_0^5} e^{-\frac{r}{a_0}} \Delta r$$

$$P(r) = \frac{1}{24} \frac{(0,1 \text{ nm})^4}{(0,053 \text{ nm})^5} e^{-\frac{0,1}{0,053}} \cdot 10^{-3} \text{ nm} = 1,5 \cdot 10^{-3}.$$

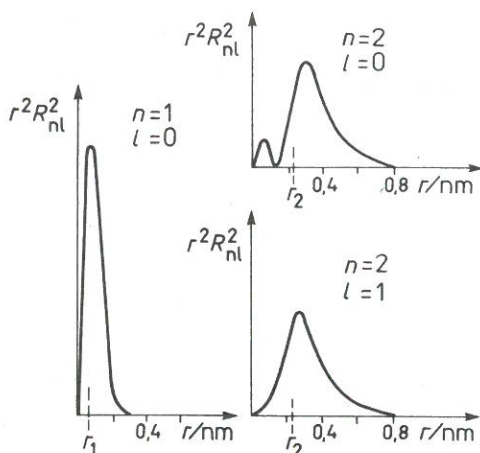
(Pritom smo pretpostavili da se gustoća vjerojatnosti unutar malog volumena  $\Delta V$  i unutar ljuske debljine  $\Delta r$  ne mijenja.)

U kemijskim primjenama često se upotrebljava nešto drukčiji oblik kutnog dijela valne funkcije, takav koji ne ovisi o predznaku  $z$ -komponente momenta vrtnje  $L_z$  nego samo o njezinu iznosu  $|L_z| = \hbar|m|$ . Stoga u tablici 14.2. navodimo nekoliko takvih kutnih valnih funkcija za najniža stanja. Kemičari ih obično nazivaju **atomskim orbitalama**.



Slika 14.4. Radijalne valne funkcije vodikova atoma





Slika 14.5. Radijalne vjerojatnosti za najniža stanja vodikova atoma

Kvadrat orbitale daje gustoću vjerojatnosti za različite smjerove u prostoru.

Radijalne valne funkcije  $R_{nl}(r)$  za najniža stanja vodikova atoma prikazane su na sl. 14.4. Slika 14.5. prikazuje odgovarajuće radijalne vjerojatnosti  $r^2 \cdot R_{nl}^2$ , tj. vjerojatnosti da se elektron nađe unutar kuglaste ljuske debljine  $dr$ , udaljene za  $r$  od jezgre.

### Primjer 14.3.

Izrazite atomske orbitale  $p_z$ ,  $p_x$  i  $p_y$  iz tablice 14.2. pomoću kuglinih funkcija  $Y_l^m$  za  $l = 1$ , navedenih u tabl. 13.3.

Uzimamo u obzir relacije  $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$  i  $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$  i dobivamo:

$$p_z = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta = Y_1^0$$

$$p_x = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \cos \varphi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_1^1 - Y_1^{-1}).$$

$$p_y = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \sin \varphi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = -\frac{i}{\sqrt{2}} (Y_1^1 + Y_1^{-1}).$$

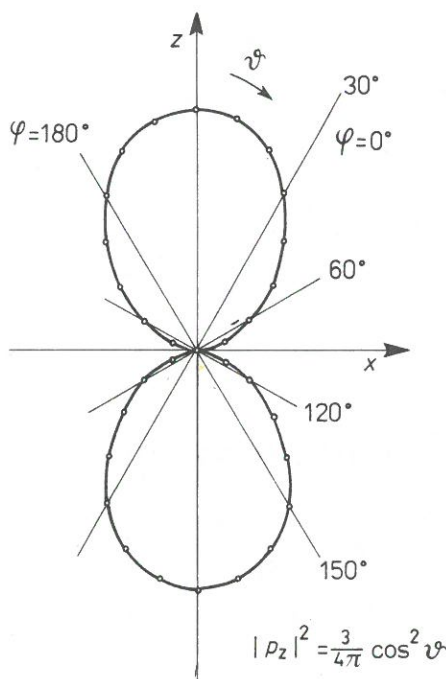
### Primjer 14.4.

a) Grafički prikazite ovisnost kvadrata orbitale  $p_z$  o kutnim koordinatama  $\vartheta$  i  $\varphi$ , za  $0^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$  i  $\varphi = 180^\circ$ , tj. u  $x$ - $z$  ravnini.

Funkciju  $|p_z|^2 = \frac{3}{4\pi} \cos^2 \vartheta$  možemo tablično prikazati:

|             |       |       |       |       |       |       |       |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\vartheta$ | 0°    | 10°   | 20°   | 30°   | 40°   | 50°   | 60°   |
| $ p_z ^2$   | 0,239 | 0,232 | 0,211 | 0,179 | 0,140 | 0,099 | 0,060 |
| $\vartheta$ | 70°   | 80°   | 90°   | 100°  | 110°  | 120°  |       |
| $ p_z ^2$   | 0,028 | 0,007 | 0,000 | 0,007 | 0,028 | 0,060 |       |
| $\vartheta$ | 130°  | 140°  | 150°  | 160°  | 170°  | 180°  |       |
| $ p_z ^2$   | 0,099 | 0,140 | 0,179 | 0,211 | 0,232 | 0,239 |       |

Grafički je prikaz dan na sl. 14.6.a.



Slika 14.6. a) Kutna ovisnost vjerojatnosti za atom u  $p_z$ -orbitali

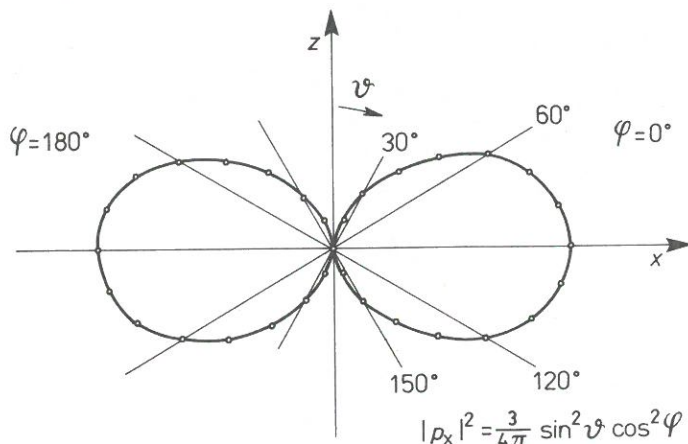
b) Slično, grafički prikažite ovisnost kvadrata orbitale  $p_x$  o kutnim koordinatama u  $x, z$ -ravnini.

Funkcija  $|p_x|^2 = \frac{3}{4\pi} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi$  u  $x, z$ -ravnini postaje  $|p_x|^2 = \frac{3}{4\pi} \sin^2 \vartheta$ , jer je  $\cos^2 \varphi = 1$ . Tabela ovisnosti o kutu  $\vartheta$ , dobivamo:

|             |       |       |       |       |       |       |       |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\vartheta$ | 0°    | 10°   | 20°   | 30°   | 40°   | 50°   | 60°   |
| $ p_x ^2$   | 0,000 | 0,007 | 0,028 | 0,060 | 0,099 | 0,140 | 0,179 |
| $\vartheta$ | 70°   | 80°   | 90°   | 100°  | 110°  | 120°  |       |
| $ p_x ^2$   | 0,211 | 0,232 | 0,239 | 0,232 | 0,211 | 0,179 |       |

| $\vartheta$ | 130°  | 140°  | 150°  | 160°  | 170°  | 180°  |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $ p_x ^2$   | 0,140 | 0,099 | 0,060 | 0,028 | 0,007 | 0,000 |

Grafički je prikaz dan na sl. 14.6.b.



Slika 14.6. b) Kutna ovisnost vjerojatnosti za atom u  $p_x$ -orbitali

## 14.2. Atom u magnetskome polju

Elektron koji se giba oko jezgre možemo si predočiti kao zatvorenu strujnu petlju (v. odjeljak 3.11). Zbog toga atom dobiva magnetski moment

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \vec{L},$$

gdje je  $\vec{L}$  orbitalni moment vrtnje elektrona. Stavimo li atom u magnetsko polje indukcije  $\vec{B}$ , pojavljuje se međudjelovanje koje želi zakrenuti dipolni moment  $\vec{p}_m$  u smjeru magnetskoga polja. Potencijalna energija toga međudjelovanja iznosi:

$$E_B = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m_e} \vec{L} \cdot \vec{B}.$$

Ako je atom u homogenome magnetskome polju usmjeren duž  $z$ -osi, on dobiva energiju:

$$E_B = \frac{e}{2m_e} L_z \cdot B.$$

Taj izraz vrijedi i u kvantnoj mehanici. Budući da poznajemo vrijednosti  $z$ -komponente orbitalnog momenta vrtnje  $L_z = m\hbar$ , možemo izračunati kolik je



doprinos  $E_B$  energiji atomskoga stanja zbog međudjelovanja s magnetskim poljem. On je:

$$E_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \cdot m \cdot B = \mu_B m B.$$

Magnetski kvantni broj  $m$  može poprimiti cjelobrojne vrijednosti  $-l \leq m \leq l$ , a  $\mu_B$  je tzv. Bohrov magneton:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,28 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1} = 5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV T}^{-1}.$$

Međudjelovanje s magnetskim poljem cijepa energijski nivo stanja s kvantnim brojevima  $n$  i  $l$  na  $2l + 1$  jednako razmaknutih nivoa – ono uklanja degeneraciju tog nivoa. Ta je pojava nazvana Zeemanovim efektom, prema fizičaru Zeemanu, koji ju je prvi opazio godine 1896.

#### Primjer 14.5.

a) Izračunajte cijepanje stanja 2p i 3d vodikova atoma u magnetskome polju gustoće toka  $B = 1 \text{ T}$ .

b) Usporedite maksimalnu razliku dobivenu rascjepom stanja 3d s energijskom razlikom između stanja 3d i 2p.

Doprinos je energiji:

$$E_B = \varepsilon m.$$

gdje je  $\varepsilon = \mu_B B = 5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV} = 9,28 \cdot 10^{-24} \text{ J}$ .

a) Za stanje 2p  $m = -1, 0, 1$  pa razlika energije poprima vrijednosti:

$$E_B(m = -1) = -\varepsilon = -5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

$$E_B(m = 0) = 0$$

$$E_B(m = 1) = +\varepsilon = 5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV}.$$

Za stanje 3d  $m = -2, -1, 0, 1, 2$ , a dodatna energija iznosi:

$$E_B(m = -2) = -2\varepsilon = -11,58 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

$$E_B(m = -1) = -\varepsilon = -5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

$$E_B(m = 0) = 0$$

$$E_B(m = 1) = \varepsilon = 5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV}.$$

$$E_B(m = 2) = 2\varepsilon = 11,58 \cdot 10^{-5} \text{ eV}.$$

b) Maksimalni je rascjep stanja 3d:

$$\Delta E_{3d} = E_B(m = 2) - E_B(m = -2) = 4\varepsilon = 2,32 \cdot 10^{-4} \text{ eV},$$

a razmak između stanja 2p i 3d iznosi:

$$\Delta E = E(n=3) - E(n=2) = -13,6 \text{ eV} \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 1,89 \text{ eV}$$

$$\Delta E = 3,03 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

Njihov je omjer:

$$\frac{\Delta E_{3d}}{\Delta E} = \frac{2,32 \cdot 10^{-4} \text{ eV}}{1,89 \text{ eV}} = 1,2 \cdot 10^{-4} = 0,01\%.$$

### 14.3. Izborna pravila za prijelaze između atomskih stanja

Prema osnovnom načelu kvantne fizike, kad atom prelazi iz stacionarnoga stanja više energije  $E_2$  u stanje niže energije  $E_1$ , on emitira elektromagnetsko zračenje. Frekvencija toga zračenja može se odrediti iz izraza:

$$h\nu = E_2 - E_1 \quad (14.8)$$

Iako je na taj način moguće povezati bilo koja dva atomska stanja, ipak se u eksperimentima ne opažaju svi prijelazi. Kažemo da su neki prijelazi dozvoljeni, a neki zabranjeni.

Uzrok tome treba tražiti u zakonu očuvanja momenta vrtnje. Osim energijom, svako atomsko stanje karakterizirano je momentom vrtnje i njegovom  $z$ -komponentom. Elektromagnetsko se zračenje može shvatiti kao emisija kvanta zračenja, fotona, čestice mase mirovanja  $m_0 = 0$ , koja osim energije nosi i vlastit moment vrtnje. Pokazuje se da su dozvoljeni samo prijelazi u kojima se orbitalni kvantni broj mijenja za  $\Delta l = \pm 1$ , a magnetski kvantni broj za  $\Delta m = 0, \pm 1$ .

#### Primjer 14.6.

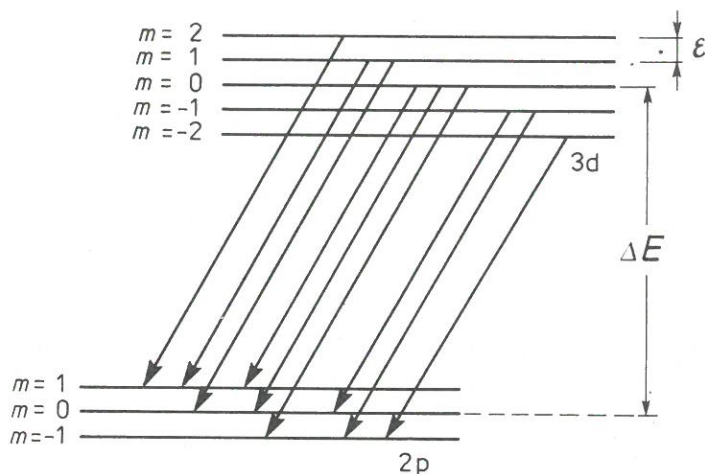
Koristeći se rezultatima primjera 14.5., izračunajte moguće dozvoljene prijelaze između stanja 2p i 3d u vodikovu atomu koji se nalazi u magnetskom polju indukcije  $B = 1 \text{ T}$ .

Iz slike 14.7. vidljivo je da ima devet dozvoljenih prijelaza, ali da se iste energijske razlike pojavljuju višeput. Zato se spektar sastoji od **tri**ju bliskih jednako razmaknutih linija, frekvencija kojih je:

$$\nu_1 = \frac{\Delta E}{h} + \Delta\nu, \quad \nu_0 = \frac{\Delta E}{h} \quad \text{i} \quad \nu_{-1} = \frac{\Delta E}{h} - \Delta\nu.$$

Osnovna je frekvencija:

$$\frac{\Delta E}{h} = \frac{3,03 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 4,57 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1},$$



Slika 14.7. Prijelazi među atomskim stanjima

a razmak među susjednim linijama iznosi:

$$\Delta\nu = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{9,28 \cdot 10^{-24} \text{ J}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

## 14.4. Spin elektrona

Pokusi su pokazali da elektron, osim orbitalnoga momenta vrtnje, ima i svoj vlastiti moment količine gibanja – spin – koji bi se mogao shvatiti kao posljedica vrtnje elektrona oko vlastite osi. Zbog te vrtnje elektron dobiva i vlastiti magnetski moment. Navedimo nekoliko eksperimentalnih činjenica koje idu u prilog takvoj pretpostavci.

### 14.4.1. Eksperimentalne činjenice

Prva je takva činjenica pojava dubleta u atomskim spektrima. Kad se proučava spektar natrijeve svjetlosti spektrometrima dovoljno velike rezolucije, opaža se da je karakteristična žuta D-linija zapravo dublet od dviju usko priljubljenih linija (589 nm i 589,6 nm). Slično vrijedi i za druge linije. Atom natrija ( $Z = 11$ ), kao što ćemo vidjeti kasnije, ima jedan elektron u vanjskoj M-ljusci, a ostalih mu deset elektrona popunjavaju K-ljusk i L-ljusk. Tih deset elektrona čvrsto je vezano uz jezgru, a jedanaesti se (valentni) elektron nalazi u vanjskoj ljusci, i slabije je vezan. Stoga atom natrija donekle slični atomu vodika i ima slične energijske razine i spektre. D-linija nastaje prijelazom elektrona iz stanja 3p u stanje 3s (koja u



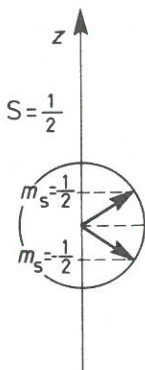
natrijevu atomu imaju različite energije, iako im je glavni kvantni broj  $n$  isti; v. odj. 14.6).

Dublet u spektru natrija može se razumjeti samo ako se pretpostavi da je stanje  $3p$  zapravo rascijepljeno u dva stanja, a to se ne može protumačiti već poznatim kvantnim brojevima  $n$ ,  $l$  i  $m$ , već treba uvesti i dodatni, četvrti kvantni broj  $m_s$ .

Poznati Stern–Gerlachov eksperiment također je izravna potvrda spina elektrona. O. Stern i W. Gerlach promatrali su 1924. gibanje atoma srebra u nehomogenome magnetskom polju. U evakuiranoj su cijevi isparavanjem srebra dobili snop atoma koji su propuštali kroz nehomogeno magnetsko polje okomito na smjer gibanja atoma. Pokus je pokazao da se snop cijepa u dva simetrična snopa: jedan se otklanja prema gore (u smjeru rastućeg polja), a drugi prema dolje (u smjeru padajućeg polja), upravo kao da se sastoji od dviju vrsta čestica sa suprotno orijentiranim magnetskim momentima. Budući da atom srebra (Ag) ima jedan valentni elektron i taj je u  $s$ -stanju, on nema orbitalnog momenta vrtnje. Jedini mogući uzrok magnetskom momentu atoma jest, dakle, spinsko gibanje elektrona. Stern–Gerlachov pokus jasno pokazuje da je magnetski moment koji dolazi od spina elektrona kvantiziran i da u magnetskome polju može poprimiti samo dvije orijentacije.

#### 14.4.2. Kvantni broj spina

G. Uhlenbeck i S. Goudsmith pretpostavili su g. 1926. da elektron ima vlastit moment vrtnje, spin, opisan vektorom  $\vec{S}$ . U zornim predodžbama pokušavamo to sebi zamišljati kao vrtnju kuglice oko vlastite osi. Međutim, spin je elektrona njegovo unutrašnje svojstvo, opisano kvantnomehaničkim jednadžbama, i ne može se predočiti zornim slikama preuzetim iz makrosvijeta.



Slika 14.8. Kvantizacija elektronskoga spina

Kvantnomehanički, spin opisujemo operatorom kvadrata spina  $\tilde{S}^2$  i operatorom njegove  $z$ -komponente  $\tilde{S}_z$ . Svojstvene su funkcije spinskih operatora  $\chi_{m_s}$ .

Jednadžbe svojstvenih vrijednosti glase:

$$\tilde{S}^2 \chi_{m_s} = \hbar^2 s(s+1) \chi_{m_s}$$

$$\tilde{S}_z \chi_{m_s} = \hbar m_s \chi_{m_s}.$$

Za elektron  $s = 1/2$ , a broj  $m_s$ , koji obično skraćeno nazivamo **spinskim kvantnim brojem**, može poprimiti samo dvije vrijednosti,

$$m_s = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad m_s = -\frac{1}{2}.$$

Odatle vidimo da vlastit moment količine gibanja, spin, može imati samo dvije orijentacije u prostoru, takve da mu je projekcija u smjeru  $z$ -osi:

$$\frac{1}{2} \hbar \quad \text{ili} \quad -\frac{1}{2} \hbar \quad (\text{v. sl. 14.8}).$$

Iznos vektora spina ima vrijednost

$$S = |\vec{S}| = \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right)} = \hbar \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Orbitalni i spinski moment količine gibanja zbrajaju se u ukupni moment količine gibanja

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Kvantna mehanika pokazuje da se spin elektrona  $s$  obzirom na orbitalni moment količine gibanja može orijentirati samo na dva moguća načina: paralelno i antiparalelno. Spin se, dakle, dodaje ili oduzima od orbitalnog momenta količine gibanja. Za  $l = 0$  kvantni broj  $j$  (kojim je određen iznos ukupnog momenta  $J = \hbar \sqrt{j(j+1)}$ ) ima samo jednu vrijednost:  $j = 1/2$ . Za  $l \neq 0$ , međutim,  $j$  ima dvije vrijednosti:  $j = l + 1/2$  i  $j = l - 1/2$ . Zato će se stanja sa  $l \neq 0$  cijepati u dvije razine, a  $s$ -stanje neće se cijepati.

Operatori  $\tilde{S}^2$  i  $\tilde{S}_z$  ne ovise o koordinatama elektrona, pa komutiraju s operatorom energije. Zato je stanje elektrona u atomu vodika opisano s četiri **kvantna broja**;  $n$ ,  $l$ ,  $m$  i  $m_s$ , a potpuna valna funkcija za stanje jednoelektronskog atoma ima oblik:

$$\Psi_{n,l,m,m_s} = R_{n,l}(r) \cdot Y_l^m(\vartheta, \varphi) \cdot \chi_{m_s} \quad (14.9)$$

Recimo na kraju i to da spin nije svojstvo samo elektrona nego i drugih elementarnih čestica. Spin protona i neutrona također ima vrijednost  $s = 1/2$ , dok je za foton  $s = 1$ .

## 14.5. Međudjelovanje spina i staze

Da bi se objasnila pojava dubleta u atomskim spektrima, treba se sjetiti da atom zbog orbitalne vrtnje posjeduje magnetski moment:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}.$$

Unutrašnja "vrtanja" elektrona, spin, uzrokuje također magnetski moment, koji se naziva unutrašnjim ili spinskim magnetskim momentom. Pokusi pokazuju da je unutrašnji magnetski moment elektrona povezan sa spinom relacijom:

$$\vec{p}_s = -\frac{e}{2m_e} g_e \vec{S},$$

gdje je tzv. giromagnetski faktor elektrona  $g_e = 2,002$ . Približno je, dakle:

$$\vec{p}_s = -\frac{e}{m_e} \vec{S}.$$

Između magnetskih momenata postoji međudjelovanje, nalik na ono koje se pojavljuje između dviju magnetskih igala. Potencijalna energija toga međudjelovanja ovisi o međusobnoj orijentaciji magnetskih momenata i može se napisati kao:

$$E_{SL} = A \vec{p}_s \cdot \vec{p}_m = a \vec{S} \cdot \vec{L}.$$

No, budući da je ukupni moment vrtnje atoma:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S},$$

možemo pisati:

$$\vec{J}^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{S} \cdot \vec{L},$$

pa dobivamo:

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2).$$

Poznata nam je vrijednost izraza u zagradi, jer svaki je od članova kvadrat nekog momenta vrtnje. Uvrstimo li:

$$J^2 = \hbar^2 j(j+1), \quad L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad \text{ i } \quad S^2 = \hbar^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right),$$

dobivamo:

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{\hbar^2}{2} \left\{ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \quad (14.10)$$

Spin elektrona može biti orijentiran samo na dva načina: paralelno s orbitalnim momentom vrtnje ( $\uparrow$ ), i tada je  $j = l + 1/2$ , ili suprotno (antiparalelno) momentu vrtnje ( $\downarrow$ ), kad je  $j = l - 1/2$ . Produkt iz relacije (14.10) može imati dvije vrijednosti:

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = \begin{cases} \frac{1}{2} l \hbar^2, & \text{za spin } \uparrow, \quad j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} (l+1) \hbar^2, & \text{za spin } \downarrow, \quad j = l - \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Stoga će se atomsko stanje energije  $E_n^{(Z)}$  rascijepiti u dva stanja, energije kojih su:

$$E(\uparrow) = E_n^{(Z)} + E_{SL}(\uparrow) = E_n^{(Z)} + \frac{1}{2} a \hbar^2$$

$$E(\downarrow) = E_n^{(Z)} + E_{SL}(\downarrow) = E_n^{(Z)} - \frac{1}{2} a(l+1) \hbar^2.$$

Dakle, zbog međudjelovanja spina i staze, nastao je rascjep stanja energije  $E_n$  u dva stanja, međusobno udaljena za:

$$\Delta E_{SL} = E(\uparrow) - E(\downarrow) = \frac{1}{2} a \hbar^2 (2l+1).$$

Veličina  $a$  je pozitivna, i proračuni pokazuju da ovisi o energiji i o kvantnim brojevima kao:

$$a = \frac{|E_n| Z^2 \alpha^2}{\hbar^2 n l (l+1) \left(l + \frac{1}{2}\right)}.$$

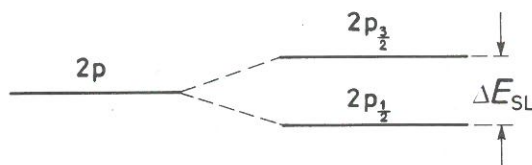
Pritom je  $\alpha$  tzv. *konstanta fine strukture*:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

U atomskoj spektroskopiji stanja nastala cijepanjem razina s kvantnim brojevima  $n$  i  $l$  označavaju se simbolima  $nlj$  koji, osim oznake  $n$  i  $l$ , sadrže još i vrijednost  $j = l \pm 1/2$ , npr. stanje  $2d$  cijepa se u stanja  $2d_{3/2}$  i  $2d_{5/2}$ .

### Primjer 14.7.

Izračunajte rascjep stanja  $2p$  u vodikovu atomu, koji nastaje zbog međudjelovanja spina i staze.



Slika 14.9. Među djelovanje spina i staze

Za stanje  $2p$   $n = 2$  i  $l = 1$ . Energija toga stanja iznosi:

$$E_2 = E_1 \frac{1}{2^2} = -13,60 \text{ eV} \frac{1}{4} = -3,40 \text{ eV}.$$

Stanje će se rascijepiti u dva stanja:  $2p_{3/2}$  i  $2p_{1/2}$  (sl. 14.9). Njihov će energijski razmak biti:

$$\Delta E_{SL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|E_n| Z^2 \cdot \alpha^2}{\hbar^2 n l (l+1) \left(l + \frac{1}{2}\right)} \hbar^2 (2l+1)$$

ili:

$$\Delta E_{SL} = |E_n| \frac{Z^2 \cdot \alpha^2}{nl(l+1)}.$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$E_{SL} = 3,40 \text{ eV} \cdot \frac{1^2 \cdot \left(\frac{1}{137}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}.$$

## 14.6. Atomi s više elektrona

Velika većina atoma u prirodi, svi osim vodika i nekoliko lakših iona, sadrže više od jednog elektrona. Valna funkcija za takav atom ovisi o koordinatama i o spinovima svih elektrona:

$$\Psi = \Psi(1, 2, 3, \dots).$$

Dvije činjenice, o kojima kod jednoelektronskih atoma nismo morali voditi računa, dobivaju izuzetno značenje pri tumačenju svojstava višeelektronskih atoma. Prva je istovjetnost, identičnost elektrona, a druga je postojanje međudjelovanja među elektronima.

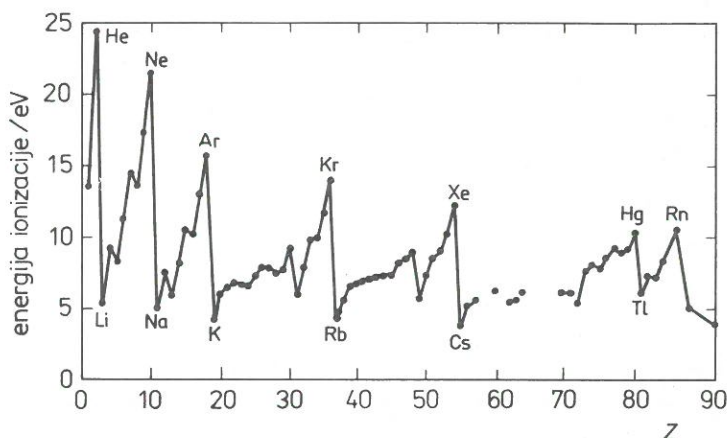
Elektroni se u atomu ne mogu razlikovati. Zamijenimo li u valnoj funkciji dva elektrona međusobno, moramo dobiti istu gustoću vjerojatnosti  $P = |\Psi|^2$ . Pokazuje se da valna funkcija za više elektrona mora posjedovati **svojstvo anti-simetričnosti**, a to znači da se zamjenom dvaju elektrona mijenja predznak valne funkcije. Naprimjer:

$$\Psi(2, 1, 3, 4, \dots) = -\Psi(1, 2, 3, 4, \dots).$$

To je svojstvo povezano sa spinom elektrona  $S = \hbar\sqrt{s(s+1)}$ , gdje je  $s = 1/2$ . (Slično se ponašaju i protoni, neutroni i druge čestice polucjelobrojnoga spina, tzv. fermioni.) Drugi način da se izrazi to svojstvo jest tzv. **princip isključenja** ili **Pauliev princip**. On kaže da se dva elektrona u atomu ne mogu naći u istome stanju. Pođemo li od jednostavne pretpostavke da se elektroni ponašaju slično kao u jednoelektronskom atomu, da imaju svoja jednoelektronska stanja opisana kvantnim brojevima  $n$ ,  $l$ ,  $m$ , i  $m_s$ , govorimo o **modelu nezavisnih čestica**. (Pritom smo zaboravili da i među elektronima postoji elektrostatsko međudjelovanje.) Evo što tvrdi princip isključenja: ako su radijalni, orbitalni i magnetski kvantni brojevi dvaju elektrona jednaki, tada spinovi moraju imati suprotne orijentacije ( $\uparrow\downarrow$ ). I, obrnuto, ako su spinovi elektrona usmjereni jednako ( $\uparrow\uparrow$ ), tada im se skupovi kvantnih brojeva ( $n, l, m$ ) moraju razlikovati.

Osnovno stanje svakog atoma, tj. stanje u kojemu atom ima najnižu energiju, nastaje tako da se redom popunjavaju najniža jednoelektronska stanja. Stanja istog

$n$  i  $l$  čine **podljusku** u koju stane  $2(2l + 1)$  elektrona, gdje faktor dva dolazi zbog dviju mogućih orijentacija spina. Budući da u vodikovu atomu sva stanja s istim  $n$  imaju istu energiju, (v. sl. 14.3), osobito stabilni bili bi atomi s  $2 \cdot \sum n^2$  elektrona, gdje se suma proteže do maksimalnoga kvantnog broja  $n$ . Znamo, međutim, da su vrlo stabilni atomi u prirodi oni sa  $Z = 2, 10, 18, 36, 54$  i  $86$  elektrona; to su plemeniti plinovi. Njihova je energija ionizacije vrlo velika, dok se atomi s jednim elektronom više (alkalijski elementi) daju vrlo lako ionizirati (v. sl. 14.10).



Slika 14.10. Energija ionizacije elemenata periodnog sustava

Da bismo protumačili stabilnost plemenitih plinova i stvarni redoslijed atoma u periodnom sustavu, treba još uzeti u obzir elektrostatsko odbijanje među elektronima u atomu. Za svaki par elektrona ( $i, k$ ) u potencijalnoj energiji pojavljuje se dodatni član:

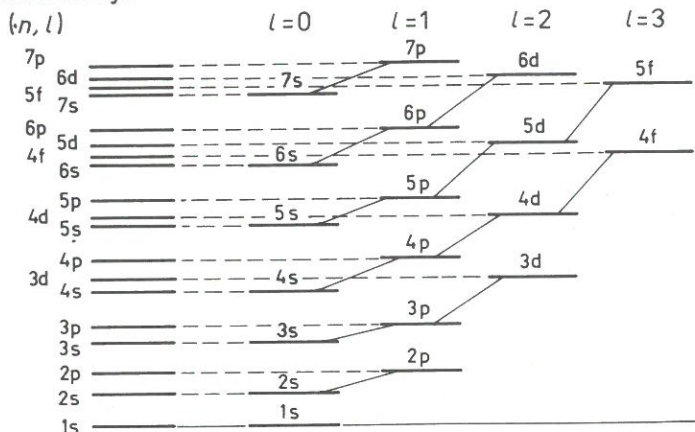
$$E_p(i, k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_{i,k}},$$

gdje je  $r_{i,k}$  međusobna udaljenost elektrona. Za veliki  $Z$  ti će članovi znatno utjecati na energije jednoelektronskih stanja. Kažemo da nastaje **zasjenjenje jezgre**. Elektron u vanjskoj nepopunjenoj ljusci privlačenje jezgre osjeća znatno slabije nego da unutrašnjih elektrona nema: oni zasjenjuju jezgru, prividno smanjuju njezin pozitivni električni naboj. Koliko je to zasjenjenje, ovisi o radijalnoj valnoj funkciji, tj. o kvantnim brojevima  $n$  i  $l$ . Najmanje je za  $s$ -stanja ( $l = 0$ ), jer je za ta stanja valna funkcija elektrona najveća blizu jezgre (sl. 14.4). Stoga će se, za isti  $n$ , energije stanja s različitim vrijednostima  $l$  razlikovati: stanje istog  $n$  nije više degenerirano kao na slici 14.3. Sada ljuska  $l = 0$  ima najnižu, a ona sa  $l = n - 1$  najvišu energiju. Rascjep je to veći što su veći  $n$  i  $l$ , pa nastaje pomak nivoa, kako je prikazano na sl. 14.11.

Energije su opet grupirane u ljuske, ali te ljuske više nisu karakterizirane rednim brojem  $n$  (K, L, M, ... ljuske), kao kod vodikovog atoma, već ljuska završava tamo gdje počinje veći energijski razmak. Konačan je redoslijed prikazan na sl. 14.12.



oznaka stanja



Slika 14.11. Energijska stanja višeelektronskih atoma

| oznaka stanja<br>( $n, l$ ) | $2(2l+1)$<br>broj elektrona<br>u podljusci | $\sum 2(2l+1)$<br>broj elektrona<br>u ljusci | ukupan<br>broj elektrona<br>za zatvorenu ljusku |
|-----------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 7p                          | 6                                          | 32                                           | 118 (?)                                         |
| 6d                          | 10                                         |                                              |                                                 |
| 5f                          | 14                                         |                                              |                                                 |
| 7s                          | 2                                          | 32                                           | 86 (Rn)                                         |
| 6p                          | 6                                          |                                              |                                                 |
| 5d                          | 10                                         |                                              |                                                 |
| 4f                          | 14                                         | 18                                           | 54 (Xe)                                         |
| 6s                          | 2                                          |                                              |                                                 |
| 5p                          | 6                                          |                                              |                                                 |
| 4d                          | 10                                         | 18                                           | 36 (Kr)                                         |
| 5s                          | 2                                          |                                              |                                                 |
| 4p                          | 6                                          |                                              |                                                 |
| 3d                          | 10                                         | 8                                            | 18 (Ar)                                         |
| 4s                          | 2                                          |                                              |                                                 |
| 3p                          | 6                                          |                                              |                                                 |
| 3s                          | 2                                          | 8                                            | 10 (Ne)                                         |
| 2p                          | 6                                          |                                              |                                                 |
| 2s                          | 2                                          |                                              |                                                 |
| 1s                          | 2                                          | 2                                            | 2 (He)                                          |

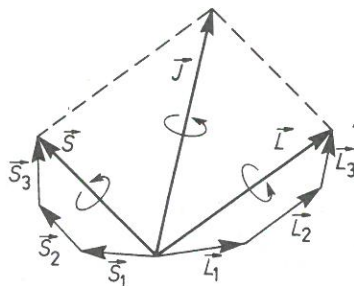
Slika 14.12. Ljuskasta struktura atomskih energijskih razina

Veći energijski razmaci pojavljuju se nakon skupina koje obuhvaćaju podljuske 1s (He,  $Z = 2$ ), 2s i 2p (Ne,  $Z = 10$ ), 3s i 3p (Ar,  $Z = 18$ ), 4s, 3d i 4p (Kr,  $Z = 36$ ), 5s, 4d i 5p (Xe,  $Z = 54$ ) i 6s, 4f, 5d i 6p (Rn,  $Z = 86$ ). Element s rednim brojem 118, kad bismo ga uspjeli proizvesti u laboratoriju, također bi imao svojstva plemenitoga plina.

Kemijska svojstva elemenata periodnog sustava ovise o stanjima koja zauzimaju elektroni vanjske, valentne ljuske – elektronskim konfiguracijama. Konfiguracije os-

novnoga stanja dane su u tablici koja prikazuje periodni sustav elemenata. Opaža se da redoslijed popunjavanja podljusaka, počevši od kroma ( $Z = 24$ ) pa dalje, ponegdje odstupa od onog na sl. 14.12. Razlog je tome što smo redoslijed na sl. 14.12. dobili uzevši u obzir samo elektrostatsko međudjelovanje između elektrona u atomu. Postoji, međutim, i magnetsko međudjelovanje. Naime, elektroni – zbog svojeg spina – nalikuju na male magnetske dipole, koji djeluju uzajamno. U potencijalnoj energiji atoma pojavljuje se dodatni član  $E_S = -b\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ .

Kvantnomehanički račun pokazuje da će osnovno stanje tvoriti ona konfiguracija kod koje je ukupni elektronski spin najveći (Hundovo pravilo). Tako u osnovnome stanju atoma Cr, umjesto konfiguracije  $3d^4 4s^2$ , koja bi imala ukupni spin nula, nalazimo konfiguraciju  $3d^5 4s$  s ukupnim spinom  $3\hbar$ , tj. stanje u kojem su spinovi svih elektrona usmjereni paralelno.



Slika 14.13. L-S-vezanje momenata količine gibanja

Dovedemo li energiju višeelektronskom atomu, on prelazi u pobuđeno stanje. Pritom unutrašnje, zatvorene ljuske ostaju netaknute, a mijenjaju se samo stanja elektrona u nepopunjenoj, valentnoj ljusci. Svojstva pobuđenog atoma bitno ovise o ukupnom momentu vrtnje  $\vec{J}$  svih valentnih elektrona. On se određuje tzv. L-S-vezanjem ili Russell-Saundersovim vezanjem, i jednak je:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S},$$

gdje su  $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$  i  $\vec{S} = \sum_i \vec{S}_i$  ukupni orbitalni odnosno ukupni spinski moment količine gibanja svih elektrona (sl. 14.13). Takvo pobuđeno stanje nosi oznaku:

$$^{2S+1}L_J,$$

gdje vrijednosti  $L = 0, 1, 2, 3, \dots$  zamjenjujemo slovima S, P, D, F itd. Tako, naprimjer, oznaka

$$^3S_1$$

znači tripletno stanje u kojemu je  $L = 0$ ,  $S = 1$  i  $J = 1$ .

**Primjer 14.8.**

Izračunajte kut što ga zatvaraju ukupni i orbitalni moment količine gibanja u stanju  $^4D_{3/2}$ .

Iz oznake stanja čitamo da je  $L = 2$ ,  $S = 3/2$  i  $J = 3/2$ . Iz  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  dobivamo  $\vec{S} = \vec{J} - \vec{L}$ . Kvadriranje zatim daje:

$$S^2 = J^2 + L^2 - 2JL \cos \vartheta,$$

pa kut možemo izračunati iz izraza

$$\cos \vartheta = \frac{J^2 + L^2 - S^2}{2JL}.$$

Uvrstimo li vrijednosti  $J^2 = \hbar^2 \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right)$ ,  $L^2 = \hbar^2 2(2 + 1)$  i

$S^2 = \hbar^2 \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right)$ , dobivamo:

$$\cos \vartheta = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot 3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{2 \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot 3}} = 0,632, \quad \vartheta = 50,8^\circ.$$



## Pitanja i zadaci

- 14.1. Obrazložite Bohrovu predodžbu o građi atoma i navedite osnovne pretpostavke Bohrova modela.
- 14.2. Navedite sličnosti i razlike između jednoelektronskog atoma i planetarnog sustava.
- 14.3. Napišite izraze za silu, energiju i moment količine gibanja jednoelektronskog atoma i iz njih izvedite polumjer staze, brzinu i energiju elektrona u Bohrovu modelu.
- 14.4. Kolika je najmanja energija što je može apsorbirati vodikov atom ako se nalazi u osnovnom stanju? Nađite frekvenciju i valnu duljinu pripadnoga zračenja te odredite kojem dijelu elektromagnetskoga spektra pripada to zračenje.
- 14.5. Što je to energija ionizacije atoma?
- 14.6. Što je to Balmerova serija? Navedite i ostale serije i pokažite njihovu vezu s Bohrovim modelom vodikova atoma.
- 14.7. Izračunajte energije prvih deset stacionarnih stanja za sljedeće atome: H, D, T,  $\text{He}^+$  i  $\text{Li}^{++}$ . Prikažite to grafički na istome dijagramu.
- 14.8. Kako se definira Rydbergova konstanta  $R_\infty$ ?
- 14.9. Za točno računanje energija jednoelektronskog atoma u Bohrovu modelu treba voditi računa i o gibanju atomske jezgre, tako da se umjesto mase elektrona uzima reducirana masa atoma  $M = m_e M_n / (m_e + M_n)$ , gdje je  $M_n$  masa jezgre.
  - a) Dokažite da je ta korekcija uzeta u obzir ako se Rydbergova konstanta u izrazu za energiju podijeli s  $(1 + m_e/M_n)$ .
  - b) Procijenite relativnu veličinu  $\Delta E/E$  za nekoliko najlakših atoma (H, D, T,  $\text{He}^+$  i  $\text{Li}^{++}$ ).
- 14.10. Napišite opći izraz za valnu funkciju jednoelektronskog atoma. Kojim je kvantnim brojevima ona karakterizirana i što je njihovo značenje?
- 14.11. Što su to atomske orbitale?
- 14.12. Što znate o magnetskom momentu atoma i o ponašanju atoma u magnetskome polju?

- 14.13. Kolika je vrijednost momenta količine gibanja  $L$  u pojedinim stanjima vodikova atoma? U čemu je razlika između Bohrova modela i kvantnomehaničkog rezultata?
- 14.14. Što je to spin elektrona i kolika je njegova vrijednost?
- 14.15. Obrazložite kvantizaciju momenta količine gibanja atoma. Što je to magnetski kvantni broj?
- 14.16. Orbitalni moment količine gibanja  $\vec{L}$  i spinski moment količine gibanja  $\vec{S}$  zbrajaju se u ukupni moment količine gibanja  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ , kojemu je vrijednost  $J = \hbar\sqrt{j(j+1)}$ . Koje su moguće vrijednosti kvantnoga broja  $j$ , ako se elektron nalazi u d-stanju?
- 14.17. Koji element ima konfiguraciju  $1s^2 2s^2 2p^2$ ?
- 14.18. Napišite elektronsku konfiguraciju osnovnoga stanja: a) aluminijska, b) neona, c) germanijska.
- 14.19. Pokažite da se Rydbergova konstanta  $R_\infty$ , energija  $E_1$  osnovnog stanja atoma vodika i polumjer  $a_0$  prve Bohrove staze mogu napisati pomoću konstante fine strukture  $\alpha$ , energije mirovanja elektrona  $m_e c^2$  i konstante  $\hbar c$ , na sljedeći način:

$$R_\infty = \frac{1}{4\pi} \frac{m_e c^2}{\hbar c} \alpha^2$$

$$E_1 = -\frac{1}{2} (m_e c^2) \alpha^2$$

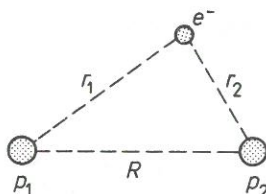
$$a_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar c}{m_e c^2}.$$

## 15. Kvantnomehanička struktura molekula

Molekula je najmanja čestica neke složene tvari pa je važno poznavati njezinu strukturu. Mogli bismo se upitati: što je zapravo molekula? Odgovor je: tvorevina koja nastaje spajanjem dvaju ili više atoma u cjelinu. Međutim, svaki se atom sastoji od jezgre i elektrona, i u tom, novom vezanom sistemu više se ne može reći koji elektron pripada kojoj jezgri – atomi su izgubili svoj identitet. Tako se npr. molekula natrij-klorida, NaCl, sastoji od dviju različitih atomskih jezgara i 28 elektrona, i stoga predstavlja jedan složeni višestručni sistem. Na pitanje zašto su neke molekule linearne, a druge nisu, što uzrokuje valenciju i kemijske veze, te mnoga druga koja su se nametnula fizičarima i kemičarima, odgovor je bio nemoguć prije nego što se razvila kvantna fizika. U ovom ćemo poglavlju na nekoliko jednostavnijih primjera pokazati metode kojima se služi molekularna kvantna fizika i upozoriti na važnost što je njezini rezultati imaju u razumijevanju empirijskih podataka.

### 15.1. Molekularni ion vodika $H_2^+$

Molekula je vodika  $H_2^+$  ion koji se sastoji od dvaju protona i jednog elektrona. To je stabilan sistem, u kojemu se ne može reći pripada li elektron jednom ili drugom protonu: on se giba u njihovu zajedničkom potencijalu. Zbog elektrostatskog



Slika 15.1. Molekularni ion  $H_2^+$

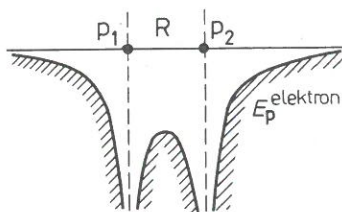
odbijanja između protona, trebalo bi da se takva molekula, po zakonima klasične fizike, raspadne, no u kvantnoj fizici pojavljuju se dodatne sile koje nemaju klasične analogije. Te sile, tzv. **sile izmjene**, posljedice su kvantnomehaničkog principa po kojemu se dvije jednake čestice, u ovom slučaju dva protona, međusobno ne mogu razlikovati.



Dva protona i elektron, raspoređeni u molekuli kako je to prikazano na sl. 15.1. imaju ukupnu potencijalnu energiju:

$$E_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \quad (15.1)$$

koja je za točke na spojnici protona prikazana na sl. 15.2. Udaljenost  $R$  između protona smatramo konstantnom\*, a  $r_1$  i  $r_2$  udaljenosti su elektrona od prvog odnosno



Slika 15.2. Potencijalna energija elektrona u molekuli  $H_2^+$

drugog protona. Naš je cilj doznati valnu funkciju elektrona i odatle vjerojatnost nalaženja elektrona na raznim mjestima u prostoru, a također i energiju molekule. Zato treba riješiti Schrödingerovu jednadžbu, koja glasi:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{2m}{\hbar^2} [E - E_p] \Psi = 0.$$

Rješavanje Schrödingerove jednadžbe složen je matematički problem, no u ovom slučaju možemo naslutiti da će rješenje biti dano pomoću valnih funkcija  $\Psi_1$  i  $\Psi_2$  za vodikov atom. Naime, za veliku udaljenost  $R$ , vjerojatnost nalaženja elektrona mora biti  $|\Psi_1|^2$  ako je elektron vezan s prvim protonom, a  $|\Psi_2|^2$  ako je vezan uz drugi proton. To je moguće samo ako valna funkcija molekule ima oblik:

$$\Psi_+ = \Psi_1 + \Psi_2 \quad (\text{parna valna funkcija}) \quad (15.2)$$

ili

$$\Psi_- = \Psi_1 - \Psi_2 \quad (\text{neparna valna funkcija}) \quad (15.3)$$

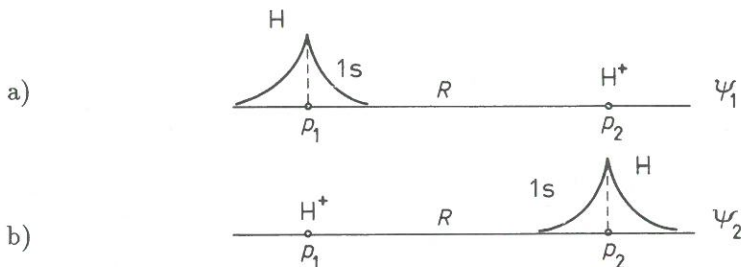
Takve valne funkcije nazivaju se **molekularnim orbitalama**.

Za najniže stanje molekule  $H_2^+$   $\Psi_1$  i  $\Psi_2$  valne su funkcije najnižeg (1s) stanja u vodikovu atomu (izraz 14.7)

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{1}{a_0^3\pi}} e^{-\frac{r_1}{a_0}} \quad \text{ i } \quad \Psi_2 = \sqrt{\frac{1}{a_0^3\pi}} e^{-\frac{r_2}{a_0}} \quad (15.4)$$

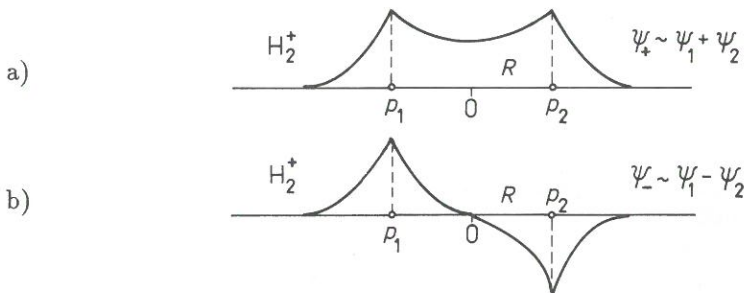
\* Takav opis je približan, i naziva se Born–Oppenheimerovom aproksimacijom.

gdje je  $a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11}$  m Bohrov radijus. One su prikazane na sl. 15.3.a i b. za točke na spojnici protona.



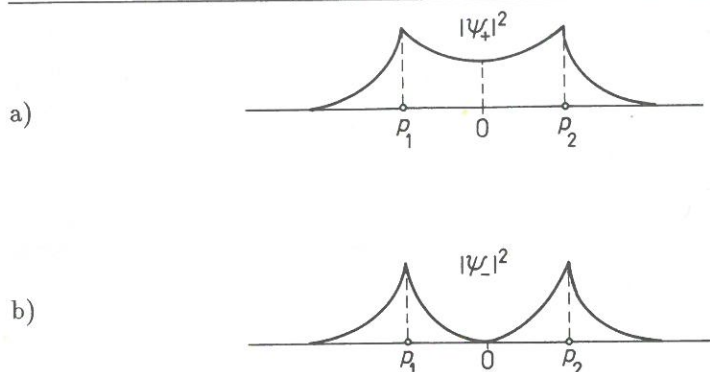
Slika 15.3. Atomske orbitale vodika

Slika 15.4.a i b. prikazuje parnu i neparnu valnu funkciju molekule  $H_2^+$  za slučaj kad se dva protona približe na malu udaljenost.

Slika 15.4. Parna a) i neparna b) orbitala molekule  $H_2^+$ 

Da bismo doznali gustoću vjerojatnosti nalaženja elektrona na nekom mjestu u molekuli, treba izračunati vrijednosti  $P(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|^2$  koje su za parnu i neparnu valnu funkciju, za točke na osi  $x$ , prikazane na sl. 15.5.a i b.

Iz spomenutih slika možemo zaključiti koja su bitna svojstva parne i neparne orbitale. Vjerojatnost je za  $s$ -stanje, kao i kod vodikova atoma, najveća u blizini jednog i drugog protona. Međutim, parna orbitala opisuje stanje u kojemu elektron ima i znatnu vjerojatnost da se nađe na sredini između dvaju protona. Takav elektron djeluje kao veza između protona, i molekula je stabilna. Područje znatne vjerojatnosti koncentrirano je na spojnici dvaju protona, što nam objašnjava usmjerenost valencije. U neparnu stanju vjerojatnost da se elektron nađe na sredini između dvaju protona jednaka je nuli, pa se elektron veže ili uz jedan ili uz drugi proton, što uzrokuje raspad molekule.



Slika 15.5. Vjerojatnost za parnu a) i neparnu b) orbitalu molekule  $H_2^+$

Ove ćemo tvrdnje opravdati izračunamo li energiju molekule opisane parnom i neparnom molekularnom orbitalom. U kvantnoj mehanici energija je dana izrazom (13.17):

$$E = \frac{\iiint \Psi^* \tilde{H} \Psi \, dV}{\iiint \Psi^* \Psi \, dV} \quad (15.5)$$

Ovdje je  $\tilde{H}$  operator energije ("hamiltonijan"), koji je za  $H_2^+$  molekulu:

$$\tilde{H} = \tilde{E}_k + \tilde{E}_p = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \quad (15.6)$$

a integral u nazivniku osigurava normiranost valne funkcije. Pritom je  $dV$  element volumena, a integrali se računaju preko cijeloga prostora, uvođenjem tzv. eliptičkoga koordinatnog sustava. Račun je elementaran, ali opsežan, i kao rezultat za energiju molekule daje:

$$E^\pm = E_0 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{C \pm \mathcal{E}}{1 \pm S} \right] \quad (15.7)$$

$E_0$  je konstantni član, koji određuje položaj minimuma energije.

Pozitivni predznak tiče se parne, a negativni neparne orbitale. Pritom se pojavljuju integrali:

$$C = \iiint \Psi_1^2 \frac{1}{r_1} \, dV_1 = \iiint \Psi_2^2 \frac{1}{r_2} \, dV_2,$$

$$\mathcal{E} = \iiint \Psi_1 \frac{1}{r_1} \Psi_2 \, dV_1 = \iiint \Psi_2 \frac{1}{r_2} \Psi_1 \, dV_2$$

i

$$S = \iiint \Psi_1 \Psi_2 \, dV_1 = \iiint \Psi_2 \Psi_1 \, dV_2.$$



Integral  $\mathcal{C}$  proizlazi iz elektrostatskoga privlačenja elektrona i protona (**Coulombov član**), a integral  $\mathcal{E}$  (**član izmjene**) posljedica je zamjene dvaju protona. Taj član, koji nema klasične analogije, bitno utječe na energiju i stabilnost molekule.  $\mathcal{S}$  je **integral prekrivanja**. Račun za integrale  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{S}$  daje izraze:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{a_0} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{R}{a_0} \right) e^{-\frac{2R}{a_0}} \right] \frac{a_0}{R} \quad (15.8)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{a_0} \left( 1 + \frac{R}{a_0} \right) e^{-\frac{R}{a_0}} \quad (15.9)$$

$$\mathcal{S} = \left[ 1 + \frac{R}{a_0} + \frac{1}{3} \left( \frac{R}{a_0} \right)^2 \right] e^{-\frac{R}{a_0}}, \quad (15.10)$$

pa vidimo da energija  $E - E_0$  ovisi o međusobnoj udaljenosti  $R$  između protona. Ta je ovisnost prikazana na sl. 15.6. za parnu i neparnu orbitalu. Kao što smo već naslutili, parna orbitala posjeduje izrazit energijski minimum i predstavlja stabilno stanje. Stoga se još naziva **vezna orbitala**. Međutim, za neparnu orbitalu, ovisnost energije o  $R$  sasvim je drukčija. Energija je svagdje pozitivna i nema minimuma, nije stabilan sistem, i takva se valna funkcija naziva **protuveznom orbitalom**.

Uobičajeno je da se vezne i protuvezne orbitale označuju malim slovom  $b$  (bonding) odnosno  $a$  (antibonding), ili se protuvezna orbitala označuje zvjezdicom.

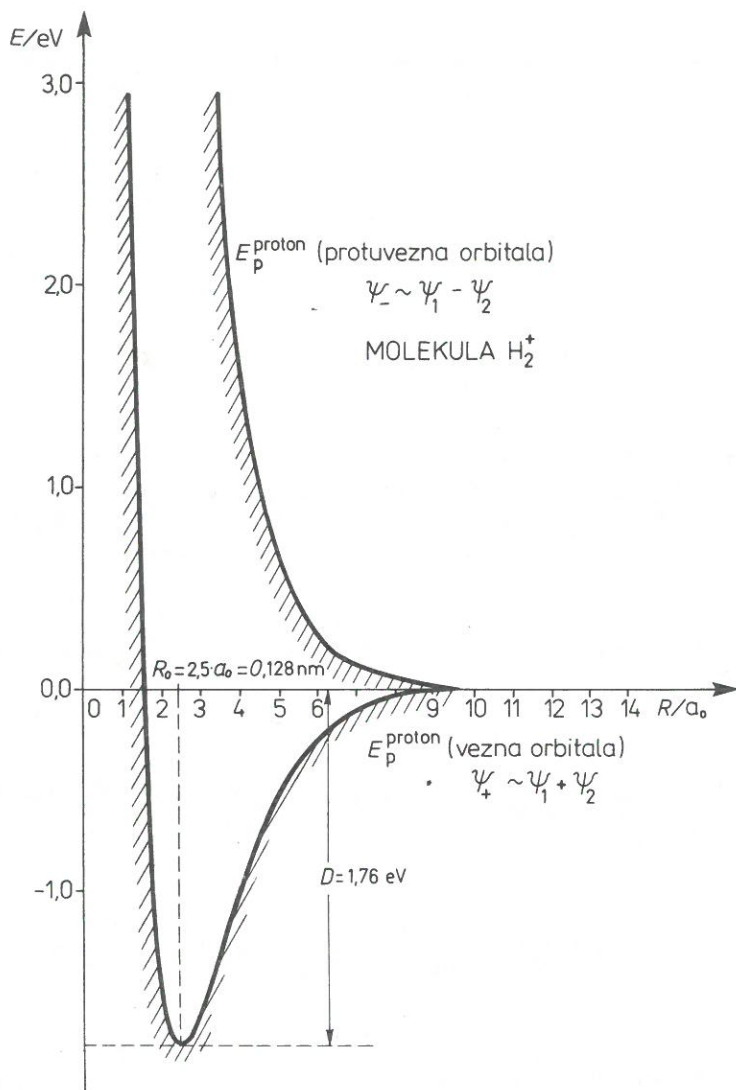
### Primjer 15.1.

Izračunajte relativnu energiju  $E - E_0$  (15.7) molekule  $\text{H}_2^+$  u ovisnosti o udaljenosti  $R$  među protonima.

Uvrstimo li Bohrov radijus  $a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11}$  m i niz vrijednosti  $R$  u izraze (15.8), (15.9), (15.10) i (15.7), dobivamo tablicu:

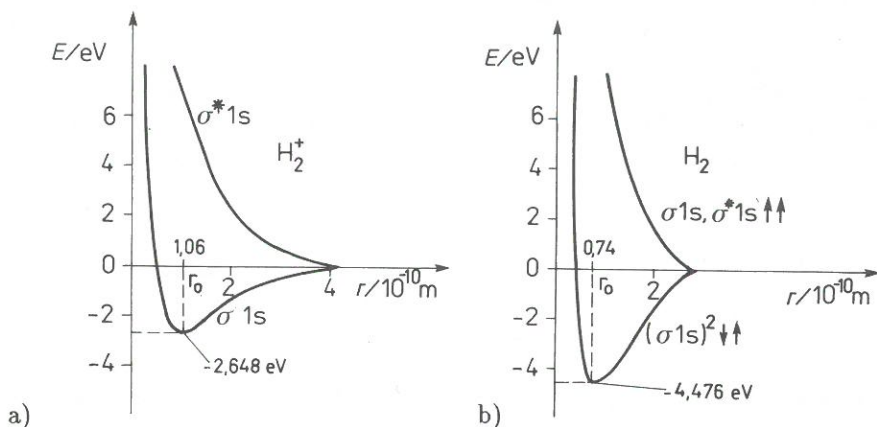
| $R/a_0$ | $a_0 \mathcal{C}$ | $a_0 \mathcal{E}$ | $\mathcal{S}$ | $(E_{\text{mol.}}^+ - E_0)/\text{eV}$ | $(E_{\text{mol.}}^- - E_0)/\text{eV}$ |
|---------|-------------------|-------------------|---------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1       | 0,729             | 0,736             | 0,858         | 5,8                                   | 29,1                                  |
| 2       | 0,473             | 0,406             | 0,586         | -1,5                                  | 9,2                                   |
| 3       | 0,330             | 0,199             | 0,349         | -1,6                                  | 3,6                                   |
| 4       | 0,250             | 0,092             | 0,189         | -1,0                                  | 1,5                                   |
| 5       | 0,200             | 0,040             | 0,097         | -0,52                                 | 0,43                                  |
| 6       | 0,167             | 0,017             | 0,047         | -0,25                                 | 0,25                                  |
| 7       | 0,143             | 0,007             | 0,022         | -0,11                                 | 0,10                                  |
| 8       | 0,125             | 0,003             | 0,010         | -0,05                                 | 0,05                                  |
| 9       | 0,111             | 0,001             | 0,005         | -0,02                                 | 0,02                                  |

Rezultati su prikazani na sl. 15.6. Opažamo da energija vezne orbitale ima izrazit minimum, dok protuvezna orbitala uopće nema minimuma energije i svagdje je pozitivna. Za ravnotežnu udaljenost naš je račun dao



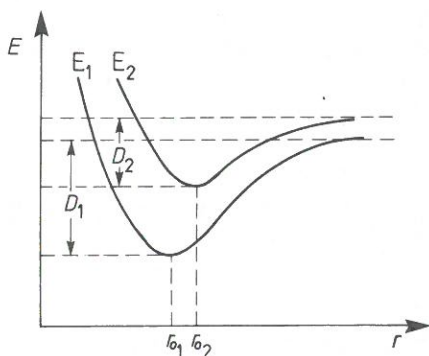
Slika 15.6. Elektronska energija molekule  $\text{H}_2^+$

$R_0 = 2,5 a_0 = 1,33 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ , a energija disocijacije iznosi  $D = 1,76 \text{ eV}$ . Naš je jednostavni račun kvalitativno, a i kvantitativno objasnio eksperimentalni oblik energijskih krivulja za  $\text{H}_2^+$  prikazan na sl. 15.7.a.

Slika 15.7. Energija molekule  $\text{H}_2^+$  a) i molekule  $\text{H}_2$  b)

Izraz (15.7) i krivulje na sl 15.6. predstavljaju zapravo efektivnu uzajamnu potencijalnu energiju dvaju protona, koja se zbog prisutnosti elektrona i zbog efekta izmjene znatno razlikuje od klasične elektrostatske energije. Protoni se, međutim, također gibaju – imaju kinetičku energiju – o čemu će biti riječi u idućem poglavlju. No ukupna energija izolirane molekule ostaje konstantna.

Gradimo li molekularne orbitale iz viših pobuđenih stanja vodikova atoma, a ne najnižeg kao u prethodnom slučaju, doći ćemo do sličnih rezultata. Međutim, dobit ćemo više potencijalnih krivulja nalik na one sa sl. 15.6, ali s drukčijom (većom) ravnotežnom udaljenošću, s višim položajem minimuma energije i različitim disocijacijskim energijama. Skup takvih krivulja za neku molekulu opisuje njezina elektronska stanja (sl. 15.8).



Slika 15.8. Elektronska stanja dvoatomne molekule

Viša molekularna stanja bit će građena od atomskih valnih funkcija (orbitala) kojih je kutni dio prikazan u tabl. 14.2. Molekularna stanja u kojima je mag-



netški kvantni broj elektrona ili, točnije – njegova apsolutna vrijednost, jednak  $|m| = 0, 1, 2$ , itd. označuju se kao stanja  $\sigma, \pi, \delta, \dots$  molekule  $H_2^+$ .

Dakle, u veznoj orbitali prikazanoj na slici 15.6. i 15.7.a elektron je u stanju ( $\sigma 1s$ ), a u protuveznoj elektron je u stanju ( $\sigma^* 1s$ ).

## 15.2. Ostale molekule

Možemo li slično protumačiti i **neutralnu molekulu vodika**  $H_2$ ? Najniža elektronska orbitala u  $H_2^+$  nastala je iz s-stanja vodikova atoma, pa i sama ima orbitalni moment vrtnje  $l = 0$ . U takvu stanju mogu biti najviše dva elektrona. Kod  $H_2$ , osim istovjetnosti protona, moramo uzeti u obzir i istovjetnost dvaju elektrona. Posljedica je toga da se u veznoj orbitali mogu smjestiti dva elektrona sa suprotnom orijentacijom spinova. Dobivena krivulja potencijalne energije ima izrazit, još dublji, minimum i opisuje stabilnu molekulu  $H_2$  (v. sl. 15.7.b). Druga je mogućnost da spinovi elektrona budu orijentirani u istome smjeru, no tada se mogu smjestiti samo u orbitalu  $\Psi_-$  zbog Paulieva principa isključenja. Dobivena potencijalna energija nema minimuma i predstavlja “molekulu” koja se zapravo raspala u dva vodikova atoma (sl. 15.7.b).

Mehanizam koji smo opisali vrijedi i za dvoatomne molekule sastavljene od težih atoma. Ako je molekula **homonuklearna** – sastavljena od dvaju jednakih atoma – kao što su npr. molekule  $H_2, O_2$  i  $N_2$  – molekularne orbitale možemo podijeliti na parne i neparne. Ako se radi o dvama različitim atomima (**heteronuklearne molekule**, npr.  $HCl, CO, NaCl$ ), molekularne valne funkcije nemaju to svojstvo. No u svakom od tih slučajeva rezultat je krivulja potencijalne energije koja ima karakterističan oblik sa sl. 15.6. i koja osigurava stabilnost molekule. U oblikovanju te krivulje sudjeluju uglavnom elektroni iz nepopunjene, vanjske atomske ljuske (**valentni elektroni**).

Kod nesimetričnih molekula može doći i do preraspodjele elektronskog oblaka u prostoru, pa tada najvažniji dio međudjelovanja ima uzrok u elektrostatskoj sili između pozitivnog i negativnog iona. U takvim slučajevima govorimo o **ionskom vezanju**.

U primjerima koje smo iscrpno opisali molekula je imala orbitalni moment vrtnje  $l = 0$ . Takva se stanja nazivaju orbitalama s-tipa. Vjerojatnost nalaženja elektrona za takvo stanje bila je najveća na spojnici dvaju protona. U stanjima s  $l = 1, 2, \dots$  itd. (orbitale tipa p, d itd.) postoje i drugi istaknuti smjerovi, točno određeni molekularnom valnom funkcijom. To nam objašnjava usmjerenost valencije u kovalentnoj kemijskoj vezi. Čvrstoća **kovalentne veze**, koju obično zorno predočujemo parom elektrona između dvaju atoma (iona), posljedica je duboka minimuma u potencijalnoj energiji koji je još dublji ako elektroni s istim  $l$  imaju suprotne orijentacije spinova (sl. 15.7.b).

U **višeatomnim molekulama** važnu ulogu ima geometrijski raspored elektrona i jezgara. Govorimo o **simetriji molekule**. U takvoj molekuli postoje neki smjerovi za koje je vezanje najjače. Kao što je za dvoatomnu molekulu prekrivanje atomskih valnih funkcija bilo najveće na spojnici dvaju atoma, tako i za višeatomne

molekule valna funkcija mora voditi na ispravne kutove poznate iz eksperimentalnih mjerenja. To je moguće postići ako se uzmu linearne kombinacije valnih funkcija (atomske orbitale) iz tabl. 14.2. Na taj način dobivaju se tzv. **hibridizirane valne funkcije**. Tako npr. za opis molekule metana moramo uzeti tzv.  $sp^3$ -hibridizaciju, gdje funkcije  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\Psi_3$  i  $\Psi_4$  nastaju kombinacijama orbitala  $s$ ,  $p_x$ ,  $p_y$  i  $p_z$  iz tabl. 14.2, na ovaj način:

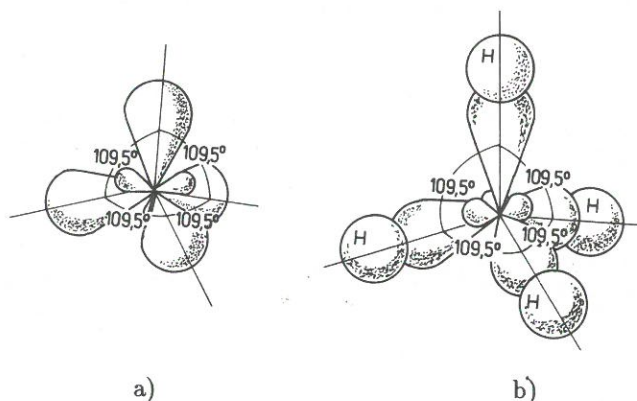
$$\Psi_1 = \frac{1}{2}(s + p_x + p_y + p_z)$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{2}(s + p_x - p_y - p_z)$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{2}(s - p_x + p_y - p_z)$$

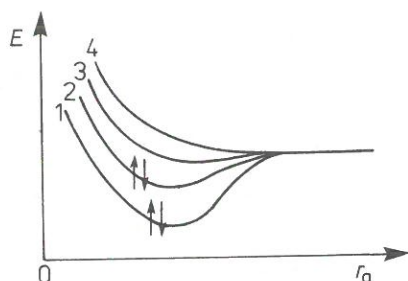
$$\Psi_4 = \frac{1}{2}(s - p_x - p_y + p_z).$$

Te funkcije opisuju četiri valentna ugljikova elektrona. Izračunamo li vjerojatnosti  $\Psi_i^2$  za svaku od tih valnih funkcija, vidjet ćemo da one ovise o smjeru u prostoru. Svaka od četiriju valnih funkcija ima jedan smjer u kojemu je vjerojatnost maksimalna, a ti smjerovi međusobno zatvaraju kutove od  $109,48^\circ$ . Time je određena tetraedarska struktura molekule  $CH_4$  (v. sl. 15.9).



Slika 15.9. a) Hibridizirana valna funkcija tipa  $sp^3$  – prostorni prikaz; b) Molekula  $CH_4$

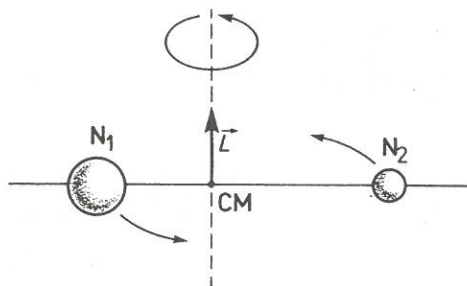
Zanimljiv primjer su tzv. **konjugirane** molekule, kod kojih su jezgre poredane u nizu, ili u tzv. lancu. U takvoj se molekuli elektroni svrstavaju u stanja različitih energija. Potencijalna energija elektrona ovisi o međuatomnoj udaljenosti  $r_a$ . Ona ima tipičan oblik koji smo upoznali kod dvoatomne molekule, međutim, sada kad ima više jezgara, elektron ima na raspolaganju više stanja, od kojih su neka veznog, a druga protuveznog tipa. Na sl. 15.10. prikazane su potencijalne energije  $\pi$ -elektrona u molekuli  $C_4H_6$ .



Slika 15.10. Elektronska potencijalna energija  $\pi$ -elektrona u molekuli  $C_4H_6$  kao funkcija međuatomske udaljenosti

### 15.3. Molekularne vibracije i rotacije

U prethodnom smo poglavlju, proučavajući elektronska stanja dvoatomne molekule, pretpostavljali da su jezgre atoma u toj molekuli nepomične. One se, međutim, mogu i same gibati. Mogu npr. titrati oko ravnotežne udaljenosti, ili se molekula kao cjelina može vrtjeti oko glavne osi koja prolazi kroz njezin centar mase (sl. 15.11). Vrtanja, zbog centrifugalne sile, može izazvati i povećanje razmaka među jezgrama, bez obzira na titranje. Svaka od tih pojava izazvat će promjene u energiji molekule, dakle, i u zračenjima što ih emitira ta molekula.



Slika 15.11. Rotacija dvoatomne molekule

Schrödingerova jednadžba koja opisuje rotacijska i vibracijska stanja dvoatomne molekule rješava se složenim matematičkim postupkom. Mi ćemo se ograničiti na analizu rezultata koje nam ta jednadžba daje za energije molekularnih stanja.

#### 15.3.1. Vibracijska stanja molekula

Za titranje duž pravca koji spaja atome u dvoatomnoj molekuli moment vrtnje molekule bit će jednak nuli. Pretpostavimo li sada da je potencijalna energija atoma



u molekuli opisana Morseovom potencijalnom energijom (v. sl. 11.4)

$$E_p(r) = D \left[ e^{-2\alpha \frac{r-r_0}{r_0}} - 2e^{-\alpha \frac{r-r_0}{r_0}} \right] \quad (15.11)$$

za moguće energije dobivamo:

$$E(n) = -D + \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{(\hbar\omega)^2}{4D} \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (15.12)$$

gdje je  $D$  energija disocijacije, a  $n$  poprima vrijednosti 0, 1, 2, 3 itd. Drugi član na desnoj strani nam je poznat: to je energija čestice koja titra harmonički. Frekvencija titranja može se odrediti iz izraza (v. Primjer 11.2.):

$$\omega^2 = \frac{2D\alpha^2}{Mr_0^2} \quad (15.13)$$

gdje je  $M$  reducirana masa molekule, a  $r_0$  ravnotežna udaljenost atoma u molekuli. Kad bi postojao samo taj član, energijske bi razine bile na jednakim razmacima  $\hbar\omega$  kao kod harmoničnog oscilatora.

Treći član, međutim, vodi računa o tome da je titranje anharmonično, pa je za viša stanja (veći  $n$ ) taj razmak sve manji.

### Primjer 15.2.

Potencijalna energija molekule HCl u ovisnosti o udaljenosti  $r$  među atomima može se prikazati Morseovom funkcijom (15.11). Ako je poznata energija disocijacije  $D = 4,618$  eV i parametar  $\alpha = 2,38$ , te vibracijska energija  $\hbar\omega = 0,370$  eV, izračunajte:

- reduciranu masu molekule,
- ravnotežnu udaljenost  $r_0$  među atomima,
- energije vezanih stanja molekule HCl.
- Grafički prikažite, na istoj slici, potencijalnu energiju i energijske razine za vezana stanja.

a) Kako su mase atoma  $m_{\text{Cl}} = 35,453$  u i  $m_{\text{H}} = 1,008$  u, reducirana je masa molekule:

$$M = \frac{m_{\text{Cl}}m_{\text{H}}}{m_{\text{Cl}} + m_{\text{H}}} = \frac{35,453 \cdot 1,008}{35,453 + 1,008} \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$M = 1,627 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

b) Ravnotežnu udaljenost među atomima možemo izračunati iz relacije (15.13), što daje:

$$r_0 = \sqrt{\frac{2D\alpha^2\hbar^2}{M(\hbar\omega)^2}} = \frac{\alpha\hbar}{\hbar\omega} \sqrt{\frac{2D}{M}} = 1,276 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

c) Energije vezanih stanja ( $E < 0$ ) izračunat ćemo pomoću relacije (15.12), gdje  $n$  može poprimiti vrijednosti  $0 \leq n \leq 24$ . Uvrštavanjem dobivamo tablicu:

|                  |       |       |       |       |       |        |       |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| $n$              | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5      | 6     |
| $E(n)/\text{eV}$ | -4,44 | -4,08 | -3,74 | -3,41 | -3,10 | -2,81  | -2,53 |
| $n$              | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12     |       |
| $E(n)/\text{eV}$ | -2,26 | -2,01 | -1,77 | -1,55 | -1,34 | -1,15  |       |
| $n$              | 13    | 14    | 15    | 16    | 17    | 18     |       |
| $E(n)/\text{eV}$ | -0,97 | -0,81 | -0,66 | -0,53 | -0,41 | -0,31  |       |
| $n$              | 19    | 20    | 21    | 22    | 23    | 24     |       |
| $E(n)/\text{eV}$ | -0,22 | -0,15 | -0,09 | -0,05 | -0,02 | -0,002 |       |

d) Morseova potencijalna energija i energijska stanja za molekulu HCl prikazana su na sl. 15.12.

### 15.3.2. Rotacijska stanja molekula

Da bismo opisali rotaciju molekule, pri rješavanju Schrödingerove jednadžbe moramo uzeti u obzir i njezinu rotacijsku kinetičku energiju:

$$E_{\text{rot}} = \frac{\tilde{L}^2}{2I}$$

gdje je  $I$  moment tromosti molekule s obzirom na os koja prolazi kroz centar mase. On je za dvoatomnu molekulu  $I = Mr^2$ , gdje je  $M$  reducirana masa dvaju atoma. Već smo upoznali svojstva momenta vrtnje u kvantnoj fizici: njegove su vrijednosti kvantizirane i dane izrazom

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}.$$

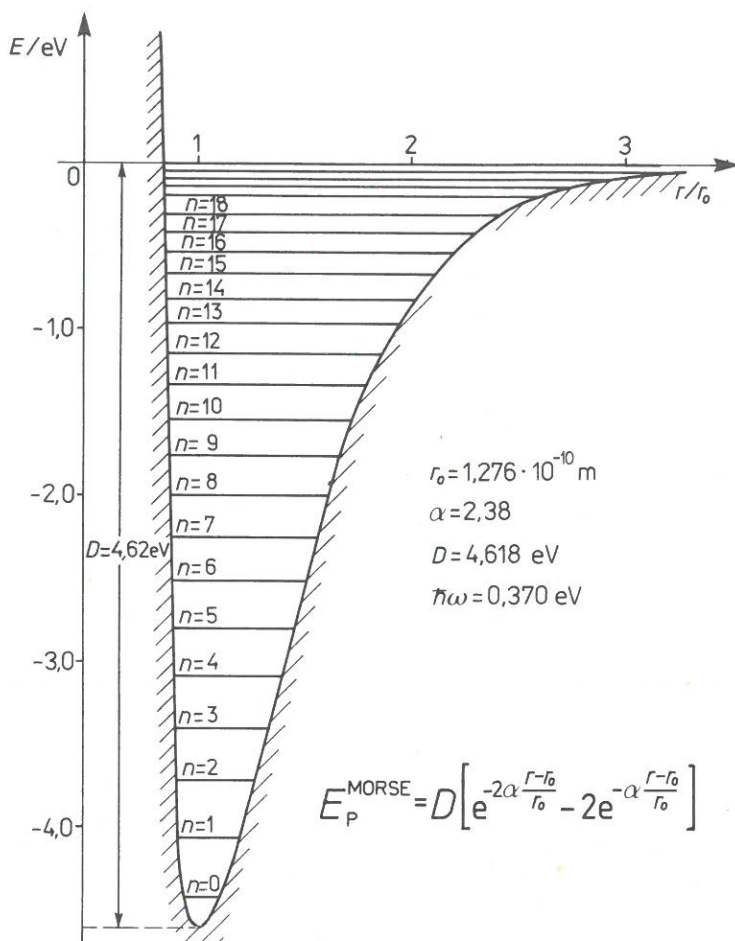
Možemo, dakle, zaključiti da vrtnja molekule oko vlastite osi povećava energiju za iznos

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr_0^2} \quad (15.14)$$

Za molekulu HCl energijski razmak između stanja s  $l = 0$  i  $l = 1$  iznosi:

$$\frac{\hbar^2}{Mr_0^2} = 2,62 \cdot 10^{-3} \text{ eV},$$

dakle, mnogo je manji nego razmak među vibracijskim stanjima. Nekoliko najnižih rotacijskih "vrpci" prikazano je na sl. 15.13. Pritom još uvijek nismo uzeli u obzir



Slika 15.12. Potencijalna energija i vibracijska stanja molekule HCl

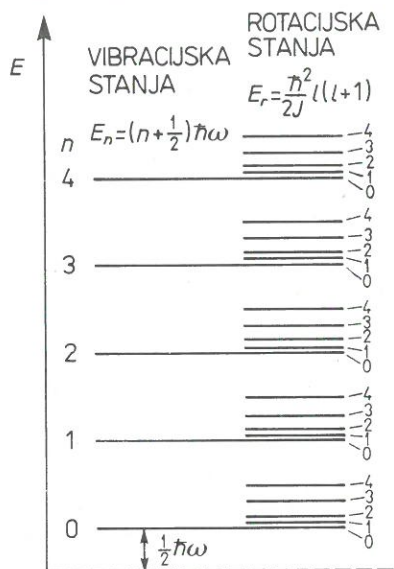
sve načine gibanja molekule. Točan rezultat sadrži još dva člana koja treba dodati energiji:

$$E_{\text{int.}} = -\frac{\hbar^2}{2Mr_0^2} \cdot \left\{ \frac{39(\alpha-1)}{\alpha\gamma} \left(n + \frac{1}{2}\right)(l+1) + \frac{9(\alpha-1)^2}{4\alpha^2\gamma^2} l^2(l+1)^2 \right\} \quad (15.15)$$

Oba snizuju energiju stanja o čemu svjedoči negativan predznak. Prvi član dolazi zbog utjecaja anharmoničnosti titranja na vrtnju, a drugom je uzrok povećanje ravnotežne udaljenosti  $r_0$  pri većem momentu vrtnje. Za molekulu HCl  $\gamma = 2D\alpha/(\hbar\omega) = 59,30$ , pa su dodatni članovi reda veličine  $10^{-5}$  eV, odnosno  $10^{-7}$  eV, dakle vrlo mali u usporedbi s energijom rotacija i vibracija.

Emisija i apsorpcija elektromagnetskoga zračenja, koje nastaje prijelazima između molekularnih rotacijsko-vibracijskih stanja, opažaju se u eksperimentalnim





Slika 15.13. Vibracijska i rotacijska stanja dvoatomne molekule

laboratorijima i na njima se osnivaju neke od najvažnijih spektroskopskih metoda istraživanja strukture tvari.

### Primjer 15.3.

Frekvencija elektromagnetskog prijelaza između dvaju najnižih susjednih stanja u čistome rotacijskom spektru spoja  $^{35}\text{Cl}^{19}\text{F}$  iznosi  $\nu = 1,12 \cdot 10^{10}$  Hz. Kolika je međusobna udaljenost atoma u toj molekuli?

Energija je rotacijskih nivoa:

$$E_{\text{rot}}(l) = \frac{\hbar^2}{2Mr^2} l(l+1).$$

Za najniža je stanja  $l = 0$  i  $l = 1$ , a  $M$  je reducirana masa molekule:

$$M = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = 12,315 \text{ u.}$$

Odatle se dobiva:

$$r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h}{\nu M}} = 0,27 \text{ nm.}$$

## Pitanja i zadaci

- 15.1. Kako izgleda krivulja potencijalne energije za elektron u molekularnom ionu  $\text{H}_2^+$ ?
- 15.2. U čemu je bitna razlika između parne i neparne s-orbitale za elektron u molekularnom ionu  $\text{H}_2^+$ ?
- 15.3. Objasnite kako nastaje efektivna potencijalna energija za elektron u veznoj orbitali molekularnog iona  $\text{H}_2^+$ , prikazana na sl. 15.6.
- 15.4. Koja je bitna razlika između molekula  $\text{H}_2^+$  i  $\text{H}_2$ , i kako se ona odražava na krivulju potencijalne energije?
- 15.5. Što je energija disocijacije? U starijoj je literaturi energija disocijacije često izražena u jedinicama kcal/mol. Pokažite da jednoj takvoj jedinici odgovara  $4,338 \cdot 10^{-2}$  eV. Izrazite energiju disocijacije molekule  $\text{H}_2^+$  u kcal/mol.
- 15.6. Empirijska formula za potencijalnu energiju ionskog vezanja u dvoatomnoj molekuli dana je izrazom:

$$E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{b}{r^9},$$

gdje je  $r$  udaljenost između središta atoma, a  $b$  konstanta karakteristična za molekulu. Izračunajte energiju disocijacije  $D$  i konstantu  $b$  za molekulu NaCl, ako je poznata ravnotežna udaljenost  $r_0 = 2,51 \cdot 10^{-10}$  m.

- 15.7. Navedite što znate o kvantnomehaničkoj strukturi višeatomnih molekula.
- 15.8. Objasnite najvažnija svojstva vibracijskih i rotacijskih molekularnih spektara.
- 15.9. Energijska razlika dvaju stanja u nekom molekularnom spektru često se izražava veličinom  $\Delta E/(hc)$ , koja se iskazuje u jedinicama  $\text{m}^{-1}$ .
  - a) Koju će valnu duljinu emitirati molekula ako je  $\Delta E/(hc) = 140 \text{ cm}^{-1}$ ?
  - b) Kolika je energijska razlika dvaju stanja, izražena u elektronvoltima?
- 15.10. Što je reducirana masa dvoatomne molekule? Izračunajte reduciranu masu za molekule  $\text{H}^{35}\text{Cl}$  i  $\text{H}^{37}\text{Cl}$ .

- 15.11. Pokažite da je moment tromosti dvoatomne molekule oko osi koja je okomita na spojnicu atoma, a prolazi kroz centar mase atoma, jednak  $I = Mr_0^2$ , gdje je  $r_0$  ravnotežna udaljenost, a  $M$  reducirana masa.
- 15.12. Dvije mase,  $m_1$  i  $m_2$ , povezane elastičnom silom konstante  $k$ , titraju uzajamno frekvencijom  $\nu = (1/2\pi)\sqrt{k/M}$ , gdje je  $M$  reducirana masa. Izračunajte konstantu  $k$  za titranje molekule HCl ako je poznata vibracijska frekvencija  $\nu = 9 \cdot 10^{13}$  Hz.



## 16. Atomska jezgra

### 16.1. Svojstva atomske jezgre

Rutherfordovi eksperimenti pokazali su da se atom sastoji od pozitivno nabijene jezgre i negativno nabijenoga elektronskog oblaka. Atomska jezgra zauzima vrlo mali volumen u usporedbi s volumenom atoma. Njezin je promjer reda veličine  $10^{-14}$  m, dakle, oko  $10^4$  puta manji od promjera atoma. U jezgri je, međutim, sadržana gotovo sva masa atoma. Atomska jezgra (latinski: nucleus) nakupina je protona i neutrona, čestica koje se zajedničkim imenom nazivaju nukleoni. Proton, čestica nabijena pozitivnim elementarnim nabojem  $+e$ , poznat je od godine 1919. kao jezgra atoma najlakšeg elementa, vodika. Neutron, čestica bez električnog naboja, otkriven je u pokusima Jamesa Chadwicka 1932. Mase protona i neutrona približno su jednake i malo se razlikuju od atomske jedinice za masu:

$$m_u = u = 1,66053 \cdot 10^{-27} \text{ kg.}$$

Točnije, mase mirovanja protona i neutrona iznose:

$$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,007\,277 \text{ u}$$

$$m_n = 1,6750 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,008\,665 \text{ u.}$$

Pomoću relacije  $E = mc^2$  možemo izraziti energijski ekvivalent atomske jedinice mase:

$$uc^2 = m_uc^2 = 931,48 \text{ MeV}$$

i energije mirovanja protona i neutrona:

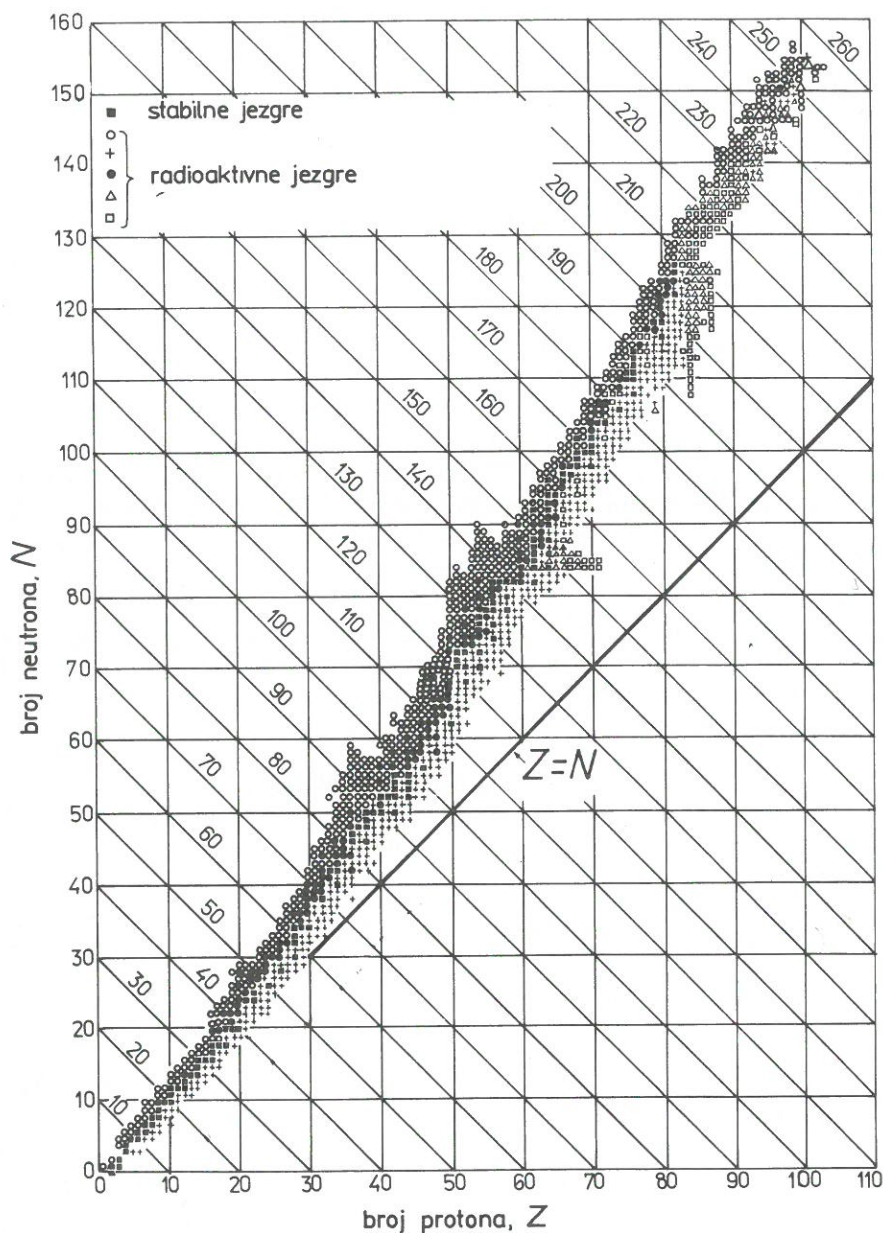
$$m_pc^2 = 938,26 \text{ MeV}$$

i:

$$m_nc^2 = 939,55 \text{ MeV.}$$

Naboj jezgre  $Ze$  određen je brojem protona. Ukupni broj nukleona  $A$  jednak je zbroju broja protona i broja neutrona:

$$A = Z + N$$



Slika 16.1. Stabilni radioaktivni nuklidi. Pravci položeni pod kutem  $45^\circ$  prema osima pravci su jednakog atomskog broja  $A$ .

i naziva se atomskim ili masenim brojem. Jezgru određenoga elementa karakterizira broj protona  $Z$  i to je redni broj elementa. Broj neutrona  $N = A - Z$  može varirati a da se pritom kemijska svojstva elementa ne mijenjaju. Jezgra koju karakteriziraju brojevi  $Z$  i  $N$  pripada određenom **nuklidu**. Dok u prirodi postoje samo 92 elementa, a još oko 15 umjetno je stvoreno u laboratoriju, broj nuklida kudikamo je veći. Njihov ukupan broj stalno se povećava i bliži se broju 2000. Od toga je stabilnih nuklida 266, a ostali se radioaktivno raspadaju.

Slika 16.1. prikazuje poznate nuklide, svrstane po protonskom broju  $Z$  i neutronskom broju  $N$ . Punim kvadratićima obilježene su stabilne jezgre. Iz slike 16.1. opažamo da je za lake jezgre ( $Z \lesssim 20$ ) broj protona približno jednak broju neutrona. Za teže jezgre, međutim, broj neutrona znatno premašuje broj protona. Stabilne jezgre leže približno na crti koja se naziva "linijom stabilnosti", a pruga koja obuhvaća nestabilne nuklide zahvaljujući razvoju eksperimentalnih metoda postaje sve šira i sve se više približava pravcu  $N = Z$ .

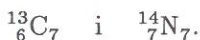
Nuklidi se obilježavaju nazivom elementa i ukupnim brojem  $A$  nukleona u lijevom gornjem uglu, npr.  $^{12}\text{C}$  ili  $^{238}\text{U}$ . Katkad se eksplicitno navodi i redni broj ( $^{12}_6\text{C}$  i  $^{238}_{92}\text{U}$ ). Najpotpuniji način obilježavanja sadrži i neutronske broj  $N$  desno dolje, tako da se navedeni nuklidi mogu napisati kao  $^{12}_6\text{C}_6$  i  $^{238}_{92}\text{U}_{146}$ .

Radi lakše klasifikacije među nuklidima razlikujemo izotope, izobare i izotone.

**Izotopi** su nuklidi istog broja protona  $Z$ , a različitog broja neutrona, npr.:



**Izotoni** su nuklidi istog broja neutrona, npr.:



Nuklidi s jednakim ukupnim brojem  $A$  nukleona nazivaju se **izobarima**. To su npr.:



Na sl. 16.1. izotopi leže na vertikalnim pravcima, izotoni na horizontalnim pravcima, a izobari na pravcima koji s objema osima zatvaraju kut od  $45^\circ$ .

Većina elemenata u prirodi pojavljuje se s više izotopa, a omjer je njihove zastupljenosti svugdje isti.

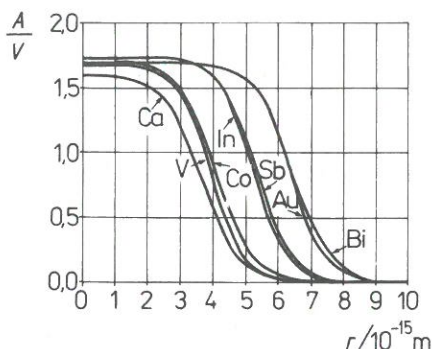
### 16.1.1. Veličina atomske jezgre

Veličina atomske jezgre varira od nuklida do nuklida. Eksperimenti su pokazali da je za većinu jezgara karakterističan približno sferičan oblik te da je gustoća tvari od koje se sastoji unutrašnjost jezgre ("nuklearne materije") približno konstantna za sve nuklide. Iz toga proizlazi da su polumjer jezgre i atomski broj  $A$  povezani relacijom:

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (16.1)$$

Mjerenja pokazuju da je za raspodjelu mase u jezgri  $r_0 = 1,4$  fm, dok se za raspodjelu električnoga naboja katkad uzima manja vrijednost  $r_0 = 1,2$  fm. Gustoća se na rubu jezgre ne smanjuje naglo, već se postupno smanjuje unutar površinskoga sloja (sl. 16.2).





Slika 16.2. Gustoća nukleona s obzirom na udaljenost od središta jezgre, prikazana u jedinicama  $10^{44} \text{ m}^{-3}$

### Primjer 16.1.

Izračunajte gustoću nuklearne materije i usporedite je s gustoćom vode.

Masa jezgre atomskoga broja  $A$  iznosi približno:

$$M = A u,$$

a volumen

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} (r_0 A^{1/3})^3 = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A.$$

Odatle je gustoća nuklearne materije (uz  $r_0 = 1,4 \text{ fm}$ ):

$$\rho_N = \frac{M}{V} = \frac{A u}{\frac{4\pi}{3} r_0^3 A} = \frac{3 u}{4\pi r_0^3} = \frac{3 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{4\pi \cdot (1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m})^3}$$

$$\rho_N = 1,4 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$$

Omjer gustoće nuklearne materije  $\rho_N$  i gustoće vode iznosi:

$$\frac{\rho_N}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{1,4 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^{-3}}{10^3 \text{ kg m}^{-3}} = 1,4 \cdot 10^{14}.$$

### 16.1.2. Električna i magnetska svojstva jezgre

**Električni naboj i potencijal jezgre.** Električni naboj jezgre rednoga broja  $Z$  iznosi  $q = Ze$ . Taj je naboj jednoliko razdijeljen po cijeloj jezgri. Uz pretpostavke

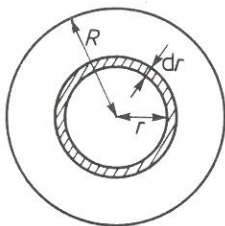
sferičnog oblika i  $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-15}$  m, možemo pokazati da je gustoća električnoga naboja u jezgri:

$$\rho_e = \frac{q}{V} = \frac{Ze}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{3e}{4\pi r_0^3} \cdot \frac{Z}{A} = 1,39 \cdot 10^{25} \text{ Cm}^{-3} \cdot \frac{Z}{A}.$$

Među protonima u jezgri djeluju odbojne elektrostatske sile, a ukupna električna potencijalna energija jezgre naglo raste s povećanjem rednoga broja  $Z$ . Među nukleonima u jezgri djeluju i jake privlačne nuklearne sile. Nuklearno međudjelovanje među samim protonima nije dovoljno da bi svladalo elektrostatsko odbijanje. Stoga je za stabilnost jezgre nužno postojanje neutrona u jezgri. Kako se povećava redni broj nuklida, tako je sve veći višak neutrona potreban da bi nukleoni ostali na okupu. To objašnjava veliku razliku između broja neutrona i broja protona u težim jezgrama (sl. 16.1).

### Primjer 16.2.

Izračunajte električnu potencijalnu energiju (kulonsku energiju) sferične jezgre uz pretpostavku da je električni naboj razdijeljen jednoliko.



Slika 16.3. Uz proračun kulonske potencijalne energije

Zamislamo sferičnu jezgru kao punu kuglu sastavljenu od koncentričnih kuglastih slojeva debljine  $dr$  (sl. 16.3). Elektrostatska potencijalna energija pojedinog sloja iznosi:

$$dE_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q(r) \cdot dq(r)}{r},$$

gdje je  $q(r)$  ukupni naboj kugle polumjera  $r$ , a  $dq(r)$  naboj u tankome sloju debljine  $dr$ .

Zbog stalne gustoće naboja  $\rho_e$ ,

$$q(r) = \rho_e V(r) = \rho_e \frac{4\pi}{3} r^3$$

i

$$dq(r) = \rho_e 4\pi r^2 dr,$$

odakle dobivamo:

$$E_p = \int_0^R dE_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \varrho_e^2 \frac{16\pi^2}{3} \cdot \frac{R^5}{5}.$$

Uvrstimo li izraz za gustoću naboja:

$$\varrho_e = \frac{q(R)}{V(R)} = \frac{Ze}{\frac{4\pi}{3} R^3},$$

dobivamo:

$$E_p = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Z^2 e^2}{R}.$$

Ovaj je izraz ispravan za velike vrijednosti  $Z$ . Za manje jezgre, međutim, moramo voditi računa o tome da elektricitet nije raspoređen kontinuirano, već se sastoji od  $Z$  točkastih naboja koji uzajamno djeluju. Broj parova čestica razmjernan je sa  $Z(Z-1)$ , stoga za lakše jezgre treba upotrijebiti točan izraz, koji glasi:

$$E_p = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot e^2 \cdot \frac{Z(Z-1)}{R} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_0} \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (16.2)$$

### Primjer 16.3.

Izračunajte kulonsku energiju jezgre  ${}^{73}_{32}\text{Ge}$ .

U zadanom slučaju  $A = 73$  i  $Z = 32$ , pa izraz (16.2) daje, uzmemo li u obzir vrijednost  $e^2/(4\pi\epsilon_0) = 1,44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ :

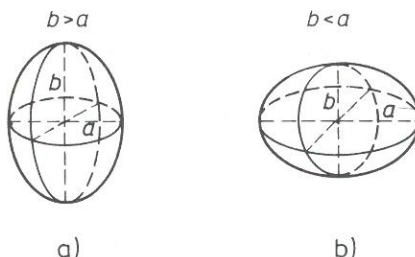
$$E_p = \frac{3}{5} \cdot \frac{1,44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1,4 \text{ fm}} \cdot \frac{32 \cdot 31}{73^{1/3}} = 146,5 \text{ MeV}.$$

**Električni kvadrupolni moment.** Neke jezgre nisu sferične, već mogu biti izdužene ili spljoštene, a mogu poprimiti i drukčije oblike. Odstupanje jezgre od kuglasta oblika može se mjeriti pomoću kvadrupolnog momenta  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{e} \int_V (3z^2 - r^2) \varrho_e(x, y, z) dV,$$

gdje je  $\varrho_e$  gustoća električnog naboja  $\varrho_e = \frac{dq}{dV}$ , a volumni integral proteže se po cijelome prostoru koji zauzima naboj u jezgri.





Slika 16.4. Izdužena i spljoštena jezgra

Za jezgru koja ima oblik rotacijskog elipsoida s poluosima  $a$  i  $b$ , uz uvjet da je os  $b$  ujedno os simetrije (v. sl. 16.4), kvadrupolni moment iznosi:

$$Q = \frac{2Z}{5} (b^2 - a^2).$$

Za izduženu jezgru (sl. 16.4.a)  $b > a$ , pa je kvadrupolni moment pozitivan. Za spljoštenu  $b < a$ , pa je kvadrupolni moment negativan (sl. 16.4.b).

#### Primjer 16.4.

Neka jezgra ima oblik rotacijskog elipsoida koji vrlo malo odstupa od kugle polumjera  $R_0$ . Pokažite da je u tom slučaju, uz uvjet  $b = R_0 + \delta R_0$ , kvadrupolni moment jezgre:

$$Q = \frac{6Z}{5} R_0^2 \left( \frac{\delta R_0}{R_0} \right) \quad (16.3)$$

Volumen je rotacijskog elipsoida  $V = \frac{4\pi}{3} a^2 b$ , a  $\delta R_0 \ll R_0$ .

Volumen rotacijskog elipsoida mora biti jednak volumenu kugle polumjera  $R_0$ :

$$\frac{4\pi}{3} a^2 b = \frac{4\pi}{3} R_0^3.$$

Odatle je:

$$a^2 = \frac{R_0^3}{b} = \frac{R_0^3}{R_0 + \delta R_0} = R_0^2 \left( 1 + \frac{\delta R_0}{R_0} \right)^{-1} \cong R_0^2 \left( 1 - \frac{\delta R_0}{R_0} \right).$$

Kvadrupolni je moment, zbog

$$b^2 = (R_0 + \delta R_0)^2 \cong R_0^2 \left( 1 + 2 \frac{\delta R_0}{R_0} \right),$$

$$Q = \frac{2Z}{5} (b^2 - a^2) \cong \frac{2Z}{5} \left[ R_0^2 \left( 1 + 2 \frac{\delta R_0}{R_0} \right) - R_0^2 \left( 1 - \frac{\delta R_0}{R_0} \right) \right],$$

što daje:

$$Q \cong \frac{6Z}{5} \cdot R_0^2 \left( \frac{\delta R_0}{R_0} \right).$$

### Primjer 16.5.

Za jezgru  $^{155}_{64}\text{Gd}$  izmjeren je kvadrupolni moment  $Q = 130 \text{ fm}^2$ . Ako je  $r_0 = 1,4 \text{ fm}$ , nađite  $\frac{\delta R_0}{R_0}$ . Izrazite u postocima.

Iz relacije (16.3) izlazi da je:

$$\begin{aligned} \frac{\delta R_0}{R_0} &= \frac{5Q}{6ZR_0^2} = \frac{5Q}{6Z(r_0 A^{1/3})^2} \\ \frac{\delta R_0}{R_0} &= \frac{5 \cdot 130 \cdot (10^{-15} \text{ m})^2}{6 \cdot 64 \cdot (1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot 155^{1/3})^2} = 0,030 \end{aligned}$$

Kad to izrazimo u postocima, dobivamo:

$$\frac{\delta R_0}{R_0} = 3\%,$$

iz čega zaključujemo da je odstupanje vrlo malo i da je jezgra gadolinija 155 gotovo sferična.

**Magnetski dipolni moment jezgre.** *Magnetski moment* upoznali smo prije, kao posljedicu kružnog gibanja nabijene čestice. Magnetski moment jezgre povezan je s ukupnim momentom količine gibanja  $J_{\text{uk}}$  jezgre, točnije s njegovom maksimalnom  $z$ -komponentom  $J_{\text{uk},z} = I$ , pomoću izraza:

$$\mu = g_N(I\hbar) \frac{e}{2m_p} = g_N I \beta_n \quad (16.4)$$

Ovdje je  $\beta_n$  tzv. **nuklearni magneton**:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ J T}^{-1} \\ \beta_n &= 3,15 \cdot 10^{-8} \text{ eV T}^{-1} \end{aligned} \quad (16.5)$$

a  $g_N$  se naziva **giromagnetskim faktorom** jezgre i može se odrediti eksperimentalno.

Proton i neutron imaju magnetski moment zahvaljujući spinskom momentu količine gibanja  $S = \frac{1}{2} \hbar$ . Spinski su giromagnetski faktori za proton i neutron:

$$g_s^p = 5,586 \quad \text{i} \quad g_s^n = -3,826 \quad (16.6)$$

a magnetski momenti protona i neutrona iznose:

$$\mu_p = 2,793 \beta_n \quad \text{i} \quad \mu_n = -1,913 \beta_n \quad (16.7)$$

Primjećujemo da i neutron, iako nema električnoga naboja, ipak posjeduje magnetski moment. U općem slučaju, magnetskome dipolnom momentu cijele jezgre pridonose orbitalni i spinski momenti količine gibanja svih nukleona.

## 16.2. Modeli atomske jezgre

### 16.2.1. Kvantnomehanička struktura atomske jezgre

Atomska je jezgra kvantni sistem. Dovedemo li joj energiju, jezgra prelazi iz osnovnog u pobuđeno stanje. Svaka jezgra ima karakteristične energijske razine pobuđenih stanja. Prijelazom iz višega stanja u niže jezgra emitira elektromagnetsko zračenje. Energije su fotona što ih zrači jezgra reda veličine 1 MeV, dakle su oko  $10^6$  puta veće nego energije zračenja tipičnih za atome i molekule. To su elektromagnetski valovi valnih duljina oko  $10^{-12}$  m, koje nazivamo  $\gamma$ -zrakama. Jezgra se može i radioaktivno raspadati, emisijom elektrona u  $\beta^-$ -raspadu, emisijom pozitrona u  $\beta^+$ -raspadu ili emisijom  $\alpha$ -čestice. Pritom se mijenja broj  $Z$  protona u jezgri, dakle, u radioaktivnome raspadu od jednog elementa nastaje drugi. Jezgra se također može rascijepiti u dva ili više manjih dijelova, ili može s drugim jezgrama sudjelovati u različitim pretvorbama – nuklearnim reakcijama.

Eksperimentalno su otkrivena i izmjerena mnoga svojstva pojedinih nuklida. Međutim, u teorijskome smislu jezgra je složen sustav, za koji se kvantnomehaničke jednadžbe ne mogu egzaktno riješiti. Tome su dva bitna razloga. Prvi je razlog što se jezgra sastoji od velikog broja nukleona, čestica podjednake mase, koje djeluju uzajamno. Za razliku od atoma, gdje postoji jedna središnja čestica, djelovanje koje svaki elektron osjeća mnogo jače od djelovanja ostalih elektrona, unutar jezgre takva središnjeg tijela nema. Drugi je razlog što nukleoni uzajamno djeluju jakim nuklearnim silama, a one nisu točno poznate i ne mogu se opisati jednostavnim analitičkim izrazima. Te dvije odlike – velik broj ravnopravnih čestica i sile koje nisu točno poznate – onemogućuju egzaktno rješenje Schrödingerove jednadžbe za atomsku jezgru.

Nasreću, mjerenja pokazuju da se mnoge jezgre pretežno ipak ponašaju kao jednostavni sistemi, za koje se kvantnomehaničke jednadžbe mogu znatno pojednostaviti. Takav pojednostavljeni matematički opis naziva se **nuklearnim modelom**. U nuklearnoj fizici razvijeno je mnogo modela, no svi se oni mogu svrstati u dvije skupine: to su **kolektivni modeli** i **modeli nezavisnih čestica**. Ta dva tipa modela odraz su dvaju naoko različitih ponašanja jezgre. U kolektivnim modelima jezgra djeluje kao cjelina. Svaki kvant energije doveden izvana dijeli se po svim nukleonima, i oni u tom sistemu potpuno gube svoju samostalnost. Takav je npr. **model kapljice**, koji jezgru zamišlja poput kapi tekućine, ili **rotacijski model** koji jezgru opisuje kao kruto tijelo koje može rotirati oko svoje osi.

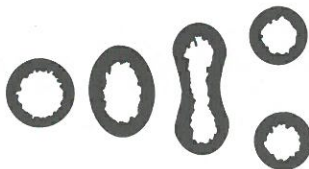
Naprotiv, u **modelu nezavisnih čestica** ili u **modelu ljusaka** nukleoni zadržavaju svoju individualnost.



Neka svojstva tih modela opisat ćemo u sljedećim odjeljcima. Treba, međutim, istaknuti da se kod velikog broja nuklida pojavljuju istodobno i kolektivna i individualna svojstva te da je upravo njihova isprepletenost uzrok velikoj raznovrsnosti nuklearnih fenomena.

### 16.2.2. Model kapljice

**Semiempirijska formula mase.** Pri istraživanju nuklearnih pojava uočeno je da postoji sličnost između nekih svojstava atomske jezgre i ponašanja kapi tekućine. "Tekućina" je u ovom slučaju nuklearna materija. Kaplja koja predstavlja atomsku jezgru može imati oblik kugle, ali taj oblik nije stalan. Takva se kap može izdužiti ili spljoštiti, pa i periodički titrati oko ravnotežnoga oblika. Pri znatnijim deformacijama izduženje može biti toliko da se jezgra podijeli u dvije manje kapi (sl. 16.5).



Slika 16.5. Model kapljice

Na osnovi pretpostavke o jezgri kao kaplji tekućine, godine 1935. Carl von Weizsäcker došao je do izraza kojim se može odrediti masa  $M$  pojedine jezgre. Taj se izraz naziva **semiempirijska formula mase**, i glasi:

$$M = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{b_1}{c^2} A + \frac{b_2}{c^2} A^{2/3} + \frac{b_3}{c^2} Z^2 A^{-1/3} + \frac{b_4}{c^2} (A - 2Z)^2 A^{-1} + \frac{b_5}{c^2} A^{-3/4} \quad (16.8)$$

gdje je  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$  brzina svjetlosti,  $Z$  i  $A$  su broj protona odnosno atomski broj,  $m_p$  i  $m_n$  su mase mirovanja protona i neutrona, a konstante imaju ove vrijednosti:

$$b_1 = 14,0 \text{ MeV}, \quad b_2 = 13,0 \text{ MeV}, \quad b_3 = 0,58 \text{ MeV}, \quad b_4 = 19,3 \text{ MeV}.$$

Konstanta  $b_5$  ima vrijednost 0 za neparne jezgre ( $A$  neparan). Za parno-parne jezgre ( $Z$  paran,  $N$  paran) ona je  $b_5 = -33,5 \text{ MeV}$ , a za neparno-neparne ( $Z$  neparan,  $N$  neparan)  $b_5 = +33,5 \text{ MeV}$ .

**Energija vezanja jezgre.** Semiempirijska formula mase može se promatrati u svjetlu energije vezanja (v. odj. 10.4). Budući da su nuklearne sile privlačne, za cijepanje jezgre na  $A$  nukleona trebalo bi obaviti rad, tj. utrošiti energiju. Drugim riječima, energija je vezanja  $E_B$  definirana izrazom

$$-E_B = [M - Zm_p - (A - Z)m_n]c^2$$

pozitivna veličina, i ona iznosi:

$$E_B = b_1 A - b_2 A^{2/3} - b_3 Z^2 A^{-1/3} - b_4 (A - 2Z)^2 A^{-1} - b_5 A^{-3/4} \quad (16.9)$$

Evo kako možemo protumačiti pojedine članove u ovom izrazu.

Prvi član (tzv. volumni član) odgovara energiji isparivanja kod tekućine, i on raste razmjerno broju  $A$  čestica.

Drugi je član popravka prvome članu, koja uzima u obzir da su neki nukleoni na površini kaplje i da je za te nukleone energija vezanja manja. Treba, dakle, oduzeti energiju koja je razmjerna površini jezgre  $4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$ .

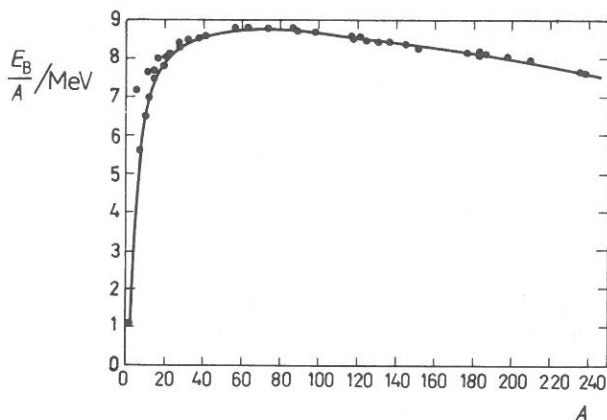
Treći član vodi računa o tome da među protonima u jezgri djeluju i odbojne elektrostatske sile, koje smanjuju djelovanje privlačnih nuklearnih sila za tzv. kulonsku energiju, proporcionalnu s (v. Primjer 16.2):

$$Z^2 R^{-1} = Z^2 r_0^{-1} A^{-1/3}.$$

Sve dosad navedene korekcije uvedene su po analogiji s klasičnom kapljom tekućine. Četvrti član uzima u obzir činjenicu da je jezgra kvantnomehanički sistem i da za protone i neutrone vrijedi Pauliev princip isključenja. Pripadna korekcija energiji razmjerna je višku neutrona (ili protona) i iznosi:

$$b_4 (N - Z)^2 A^{-1} = b_4 (A - 2Z)^2 A^{-1}.$$

Peti član, napokon, upućuje na sklonost nukleona istoga tipa da se vežu u parove, pri čemu se također mijenja energija vezanja.



Slika 16.6. Energija vezanja jezgre po nukleonu u ovisnosti o  $A$

Zanimljivo je promotriti izraz koji dobijemo kad energiju vezanja (16.9) podijelimo s brojem nukleona  $A$ :

$$\frac{E_B}{A} = b_1 - b_2 A^{-1/3} - b_3 Z^2 A^{-4/3} - b_4 (A - 2Z)^2 A^{-2} - b_5 A^{-7/4} \quad (16.10)$$

Dobili smo prosječnu energiju vezanja po nukleonu. Ona je prikazana na sl. 16.6. Opažamo da za velike vrijednosti  $A$  prosječna energija vezanja po nukleonu približno zadržava konstantnu vrijednost od oko 8 MeV. Treba istaknuti da su izrazi (16.8) i (16.9) za masu i energiju vezanja samo približni i da točnost varira od jezgre do jezgre. Izmjerene mase nekih nuklida dane su u tabl. 16.1. na str. 491.

### Primjer 16.6.

Izračunajte energiju vezanja jezgre telura  ${}^{126}_{52}\text{Te}$ .

Uvrštavanjem u izraz za energiju vezanja (16.9) dobivamo:

$$\begin{aligned} E_B &= 14,0 \text{ MeV} \cdot 126 - 13,0 \text{ MeV} \cdot 126^{2/3} - 0,58 \text{ MeV} \cdot 52^2 \cdot 126^{-1/3} - \\ &\quad - 19,3 \text{ MeV} (126 - 2 \cdot 52)^2 \cdot 126^{-1} - (-33,5 \text{ MeV}) \cdot 126^{-3/4} \\ E_B &= 1764,0 \text{ MeV} - 326,7 \text{ MeV} - 312,8 \text{ MeV} - 74,1 \text{ MeV} + 0,9 \text{ MeV} \\ E_B &= 1051,3 \text{ MeV} = 1,051 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

### Primjer 16.7.

Služeći se modelom kapljice, nađite najstabilniji izobar za  $A = 43$ .

Za neparni  $A$   $b_5 = 0$  pa se energija vezanja može pisati:

$$E_B = b_1 A - b_2 A^{2/3} - b_3 Z^2 A^{-1/3} - b_4 (A - 2Z)^2 A^{-1}.$$

Najstabilniji izobar ( $A = \text{konst.}$ ) jest onaj koji ima najmanju energiju vezanja, a to možemo naći ako stavimo  $\frac{dE_B}{dZ} = 0$ . Dobivamo:

$$\frac{dE_B}{dZ} = -2b_3 Z A^{-1/3} + 4b_4 (A - 2Z) A^{-1} = 0,$$

što daje rješenje:

$$Z = \frac{4b_4}{2b_3 A^{-1/3} + 8b_4 A^{-1}} = \frac{A}{\frac{b_3}{2b_4} A^{2/3} + 2}.$$

Uvrštavanjem vrijednosti  $b_3 = 0,58 \text{ MeV}$  i  $b_4 = 19,3 \text{ MeV}$  dobivamo:

$$Z = \frac{A}{0,015 A^{2/3} + 2}.$$

Zadani je atomski broj  $A = 43$ , što daje:

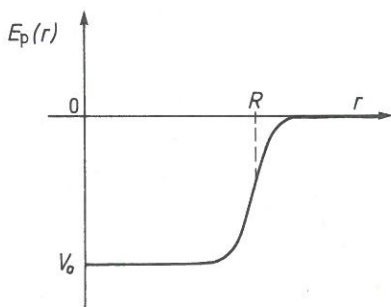
$$Z = \frac{43}{0,015 \cdot 43^{2/3} + 2} = 19,7 \cong 20.$$

Traženi je nuklid  ${}^{43}_{20}\text{Ca}$ . Pogledom u tablicu nuklida opažamo da je on zaista stabilan.



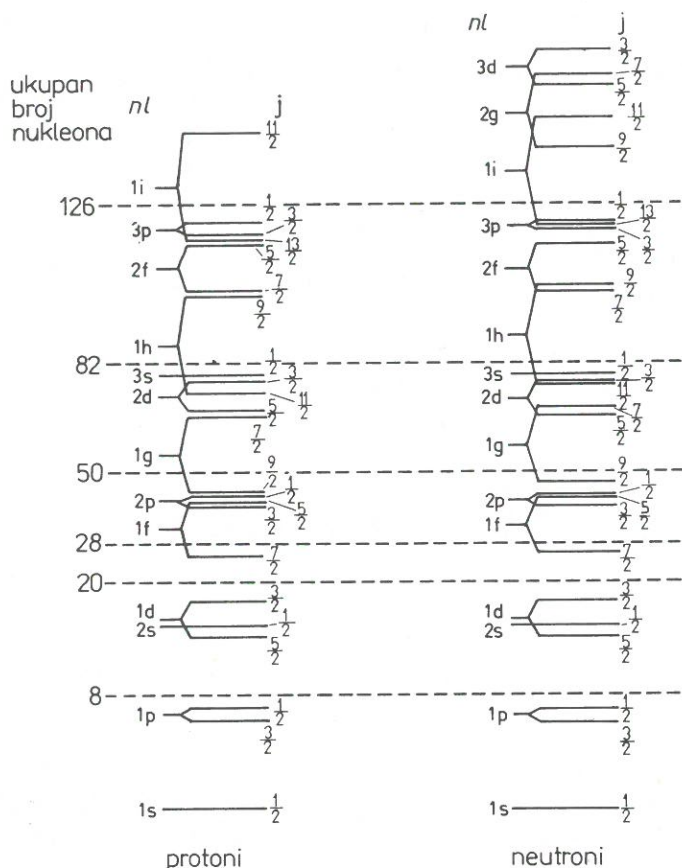
## 16.2.3. Model ljusaka

Nuklearni model ljusaka predložili su godine 1948. M. G. Mayer i J. H. D. Jensen kako bi protumačili neka dotad neobjašnjena svojstva atomske jezgre. To su u prvome redu tzv. magični brojevi. Eksperimenti su, naime, pokazali da su jezgre kojima je broj protona ili broj neutrona jednak 2, 8, 28, 50, 82 ili 126 izuzetno stabilne. Mayer i Jensen otkrili su da nukleoni u jezgri, slično elektronima u atomu, popunjavaju redom energijske ljuske, i da eksperimentalno nađeni "magični brojevi" upravo odgovaraju punim ljuskama. Dakle, stabilnost jezgara s "magičnim brojevima" protona i neutrona ima slično objašnjenje kao stabilnost plemenitih plinova u atomskoj fizici.



Slika 16.7. Potencijalna energija nukleona u nuklearnom modelu ljusaka

Pri proračunu modela ljusaka Mayer i Jensen pretpostavili su da se jako uzajamno djelovanje svih nukleona može zamijeniti potencijalnom energijom, zajedničkom za sve nukleone u jezgri. Pritom se nukleoni gibaju gotovo neovisno jedan o drugome, a potencijalna energija nukleona ovisi samo o njegovoj udaljenosti od središta jezgre (v. sl. 16.7). Da bi se doznale točne energije pobuđenja nukleona u takvom potencijalu, treba provesti kvantnomehanički proračun. Usporedba teorijskih i eksperimentalnih rezultata pokazala je da – osim centralnosimetričnog potencijala – u jezgri postoji i snažno međudjelovanje spina i staze, razmjerno s  $\vec{L} \cdot \vec{S}$ , znatno jače no što je to slučaj u atomu (v. odj. 14.5). Zato se svaka energijska razina za dani  $n$  i  $l$  cijepa u dva stanja, obilježena kvantnim brojevima  $(n, l, j)$ . Pritom  $j$  može poprimiti vrijednosti  $j = l - \frac{1}{2}$  i  $j = l + \frac{1}{2}$ , a njegova vrijednost povezana je s ukupnim momentom količine gibanja pojedinoga nukleona  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  relacijom  $J = \hbar \sqrt{j(j+1)}$ . Zbog različitih mogućih orijentacija  $\vec{J}$  u prostoru, koje su kvantizirane, podljuska  $(n, l, j)$  može primiti najviše  $(2j+1)$  nukleona. Stanje s  $j = l - \frac{1}{2}$  ima višu energiju od stanja s  $j = l + \frac{1}{2}$ , obrnuto no što je to slučaj u atomu. Orbitalni kvantni broj  $l$  u nuklearnom modelu ljusaka poprima vrijednosti  $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ , koje se bilježe slovima s, p, d, f, g, h, i, j. Oznaka  $3d_{5/2}$  obilježava stanje u kojemu je  $n = 3$ ,  $l = 2$  i  $j = \frac{5}{2}$ . Na sl. 16.8. prikazana su stanja modela ljusaka za protone i za neutrone. Razlika nastaje zbog elektrostatskih sila koje postoje samo među protonima.



Slika 16.8. Energijska stanja protona i neutrona u nuklearnom modelu ljusaka

Uz magične brojeve i energije pobuđenja jezgre, model ljusaka objasnio je i nuklearne magnetske momente. Za jezgre koje imaju samo jedan proton ili samo jedan neutron izvan popunjenih protonskih i neutronske ljuske model ljusaka predviđa tzv. Schmidtove vrijednosti magnetskih momenata:

$$\mu = \begin{cases} \beta_n \left[ g_l \left( j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_s \right], & \text{za } j = l + \frac{1}{2} \\ \beta_n \left[ g_l \left( j + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} g_s \right] \frac{j}{j+1}, & \text{za } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (16.11)$$

Prvi član dolazi od orbitalnog, a drugi od spinskog momenta količine gibanja vanjskoga nukleona. Stoga je za proton  $g_l^p = 1$ , a za neutron, koji nema električnoga naboja,  $g_l^n = 0$ . Za neke jezgre, npr.  $^{17}\text{O}$ ,  $^{39}\text{K}$  ili  $^{209}\text{Pb}$ , eksperimentalna vrijednost magnetskoga momenta dobro se slaže sa Schmidtovim formulama. Za mnoge jezgre

slaganje je samo približno i zahtijeva dodatne pretpostavke i proračune, no model ljusaka služi kao polazna osnovica za sva teorijska i eksperimentalna istraživanja nuklearnih svojstava.

### Primjer 16.8.

Za jezgru  $^{209}_{82}\text{Pb}$  u osnovnome stanju izračunajte:

- iznos orbitalnoga i ukupnoga momenta količine gibanja i njegovu maksimalnu  $z$ -komponentu;
- magnetski moment i giromagnetski faktor jezgre u osnovnome stanju;
- valnu duljinu zračenja koje zrači  $^{209}\text{Pb}$  kada prelazi iz prvog pobuđenog u osnovno stanje.

Energijska razlika između stanja  $2g_{9/2}$  i  $1i_{11/2}$  za neutrone iznosi 0,78 MeV.

a) Jezgra  $^{209}_{82}\text{Pb}_{127}$  ima popunjenu protonsku ljusku  $Z = 82$  i jedan neutron izvan popunjene neutronske ljuske  $N = 126$ . Iz sl. 16.8. uočava se da je taj neutron u stanju  $2g_{9/2}$ , za koje je  $l = 4$  i  $j = 9/2$ . Budući da zatvorene ljuske ne pridonose momentu količine gibanja, dobivamo:

$$I = j = \frac{9}{2}$$

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} = \hbar \sqrt{4 \cdot 5} = 4,47 \hbar = 4,71 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

i:

$$J_{\text{uk}} = \hbar \sqrt{I(I+1)} = \hbar \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{11}{2}} = 4,97 \hbar = 5,24 \cdot 10^{-34} \text{ J s.}$$

Za  $z$ -komponente računamo:

$$L_z = l\hbar = 4\hbar = 4,22 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

i

$$J_{\text{uk},z} = I\hbar = \frac{9}{2} \hbar = 4,74 \cdot 10^{-34} \text{ J s.}$$

b) Prema relaciji (16.11) magnetski je moment jezgre  $^{209}\text{Pb}$ :

$$\mu = \beta_n \left[ g_l^n \left( j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_s^n \right]$$

$$\mu = \beta_n \frac{1}{2} g_s^n = -1,913 \beta_n,$$

gdje je  $\beta_n$  nuklearni magneton.

Giromagnetski faktor,  $g_N$  prema relaciji (16.4), iznosi:

$$g_N = \frac{\mu}{\beta_n I} = \frac{-1,913 \beta_n}{\beta_n \cdot \frac{9}{2}} = -0,425.$$



c) Prvo pobuđeno stanje jezgre nastaje kada neutron prijeđe u stanje  $1i_{11/2}$  modela ljusaka. Povratkom u najniže stanje  $2g_{9/2}$  (v. sl. 16.8) jezgra zrači energiju:

$$E_\gamma = h\nu$$

$$E_\gamma = E(1i_{11/2}) - E(2g_{9/2}) = 0,78 \text{ MeV}.$$

Tome odgovara valna duljina:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{1241 \text{ MeV fm}}{0,78 \text{ MeV}}$$

$$\lambda = 1591 \text{ fm} = 1,591 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

### 16.3. Radioaktivnost

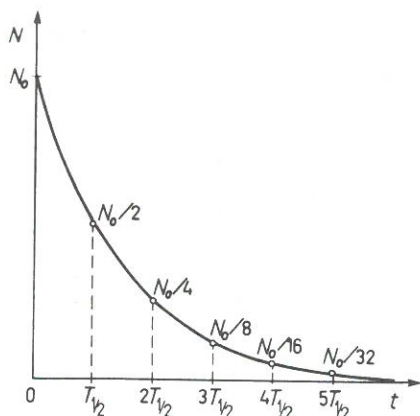
Od oko 2000 danas poznatih nuklida, samo 266 ih je stabilno. Od toga 159 nuklida ima paran broj protona  $Z$  i paran broj neutrona  $N$ , 50 ih ima neparni  $Z$  i parni  $N$ , 53 paran  $Z$  i neparan  $N$ , a od neparno-neparnih nuklida samo su četiri stabilna. Sve su ostale jezgre nestabilne i radioaktivnim raspadom nastoje poprimiti stabilniju nukleonsku konfiguraciju. Pritom jezgra može emitirati  $\alpha$ -česticu (jezgru helija  ${}^4\text{He}$ , koja se sastoji od dvaju protona i dvaju neutrona), i takav se proces naziva  $\alpha$ -raspad. U  $\beta$ -raspadu jezgra emitira elektrone. U  $\alpha$ -raspadu i  $\beta$ -raspadu jezgra jednog elementa pretvara se u jezgru nekoga drugog elementa. U slučaju da je novonastala jezgra u pobuđenom stanju, ona zrači karakteristične  $\gamma$ -zrake i prelazi u osnovno stanje. Raspade  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  prvi su opazili J. Becquerel, P. Curie i M. Curie-Sklodowska potkraj prošloga stoljeća, i time otvorili put istraživanjima nuklearnih fenomena.

#### 16.3.1. Zakon radioaktivnoga raspada

Za nuklearne raspade zajednički je statistički karakter tih procesa. Promatramo li neki uzorak radioaktivne tvari, ne možemo točno predvidjeti koje će se jezgre raspasti i u kojem trenutku. No možemo unaprijed izračunati kako će se vremenski mijenjati količina radioaktivne tvari u uzorku, tj. broj  $N$  jezgara koje se još nisu raspale. Taj se broj s vremenom eksponencijalno smanjuje i iznosi:

$$N = N_0 e^{-\lambda T} \quad (16.12)$$

Pritom je  $N_0$  broj jezgara koje su postojale u času  $t = 0$ , a  $\lambda$  je tzv. **konstanta raspada**, karakteristična za pojedinu radioaktivnu tvar. Krivulja raspada (16.12) prikazana je na sl. 16.9. Neke će se jezgre raspadati naglo, druge mnogo sporije.



Slika 16.9. Radioaktivni raspad kao funkcija vremena

Ta se razlika najbolje može ocijeniti ako se promatra tzv. **vrijeme poluraspada** ili **poluživot**,  $T_{1/2}$  radioaktivnog nuklida. On se definira kao vrijeme potrebno da bi se raspala polovica prisutne količine nuklida. Uvrštavanjem u (16.12)  $N = \frac{N_0}{2}$  i  $t = T_{1/2}$  dobivamo

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Zbog toga zakon radioaktivnoga raspada (16.12) možemo pisati i u obliku:

$$N = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}.$$

Vrijeme poluraspada nekih izotopa navedeno je u tabl. 16.2. na str. 491. Ima radionuklida kojima je poluživot više milijardi godina, kao i takvih za koje je  $T_{1/2} = 10^{-9}$  s. Tako naprimjer, poluživot uranovog izotopa  $^{238}_{92}\text{U}$  iznosi  $4,51 \cdot 10^9$  godina, dok je poluživot neutrona 12 minuta.

Promatramo li brzinu kojom se smanjuje količina radioaktivne tvari, dolazimo do pojma aktivnosti  $A$ :

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

što možemo pisati i kao:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (16.13)$$

Pritom je  $A_0 = \lambda N_0$  aktivnost u času  $t = 0$ . Vidimo da se i aktivnost radioaktivnoga izvora s vremenom eksponencijalno smanjuje.

SI-jedinica aktivnosti je bekerel, s oznakom Bq.

Neki radioaktivni izvor ima aktivnost 1 Bq, ako se u tom izvoru dogodi raspad jedne jezgre u jednoj sekundi. Bekerel je, dakle, izvedena jedinica u značenju recipročne sekunde:

$$\text{Bq} = \frac{\text{raspad}}{\text{sekunda}} = \text{s}^{-1}.$$

Prije se upotrebljavala jedinica kiri (curie) (Ci), koja se u SI-jedinicu može preračunati relacijom:

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq.}$$

### Primjer 16.9.

Nakon koliko će se dana aktivnost izotopa  $^{131}\text{I}$  smanjiti za 13 puta?

Iz tablice 16.2. vidimo da je za  $^{131}\text{I}$   $T_{1/2} = 8,04 \text{ d}$ , pa možemo pisati:

$$\frac{A_0}{13} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}.$$

Traženo je vrijeme:

$$t = \frac{\ln 13}{\ln 2} T_{1/2} = \frac{\ln 13}{\ln 2} \cdot 8,04 \text{ d} = 29,8 \text{ dana.}$$

### Primjer 16.10.

Dok je organizam (biljka, životinja, čovjek) živ, aktivnost radioaktivnog izotopa ugljika  $^{14}\text{C}$  (tzv. radiougljika) u njemu je stalno 250 Bq po kilogramu. Kad organizam umre, ne uzima više radiougljik iz prirode, pa se količina  $^{14}\text{C}$ , zbog raspadanja, s vremenom smanjuje. Koliko je star drevni predmet čija je sadašnja aktivnost 190 Bq? Poluživot izotopa  $^{14}\text{C}$  iznosi 5370 godina.

Izraz:

$$A = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}$$

možemo pisati kao:

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \left( \frac{A_0}{A} \right),$$

što uvrštavanjem daje:

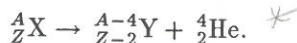
$$t = \frac{5370 \text{ god.}}{0,693} \cdot \ln \frac{250}{190} = 2126 \text{ g.}$$

### 16.3.2. $\alpha$ -raspad

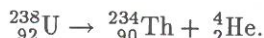
U  $\alpha$ -raspadu jezgra emitira  $\alpha$ -česticu (jezgru helija  $^4_2\text{He}$ ), koja se sastoji od dvaju neutrona i dvaju protona. Preostala jezgra ima dva neutrona i dva protona manje,



dakle predstavlja jezgru elementa kojemu je redni broj manji za dva, a maseni broj za četiri. Taj se proces može pisati kao:



Naprimjer, jezgra urana 238 raspada se ovako:



Teške radioaktivne jezgre ( $A > 200$ ) uglavnom se raspadaju  $\alpha$ -raspadom. U prirodi postoje tri prirodna radioaktivna niza u kojima se preostala jezgra ponovno raspada emitirajući  $\alpha$ -česticu, sve dok ne nastane stabilna jezgra ili jezgra koja se raspada na neki drugi način. Kao primjer navodimo dio tzv. uranova radioaktivnog niza:



Primjećujemo da u  $\alpha$ -raspadu ostaje očuvan ukupan naboj jezgre i ukupan broj nukleona. Očuvani su i ukupna količina gibanja, energija i moment količine gibanja.

### 16.3.3. $\beta$ -raspad

U prirodi i u laboratoriju opaženi su procesi u kojima se redni broj  $Z$  jezgre promijeni, a atomski broj  $A$  ostane isti. To se događa u  $\beta^-$ -raspadu kad jezgra emitira elektron ili u  $\beta^+$ -raspadu u kojemu jezgra emitira pozitron. Najmanja "jezgra" koja se raspada  $\beta^-$ -raspadom jest neutron, i taj proces možemo pisati:



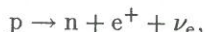
Neutron ( $Z = 0$ ) prešao je u proton ( $Z = 1$ ). Pritom je ostao sačuvan ukupan naboj i broj nukleona. Teže jezgre raspadaju se  $\beta^-$ -raspadom ovako:



npr.  ${}_{5}^{12}\text{B} \rightarrow {}_{6}^{12}\text{C} + e^- + \bar{\nu}_e.$

Primjećujemo da je, osim elektrona, u  $\beta^-$ -raspadu emitirana i čestica  $\bar{\nu}_e$ , nazvana antineutrino. Postojanje te čestice pretpostavio je W. Pauli godine 1930. na osnovi zakona očuvanja energije i očuvanja momenta količine gibanja. Antineutrino je čestica bez naboja i mase mirovanja jednake nuli, i zato se vrlo teško izravno opaža u eksperimentu.

U  $\beta^+$ -raspadu redni broj jezgre umanjuje se za jedan. Proton se raspada procesom:

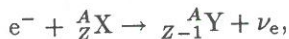


emitirajući, uz neutron, još jedan pozitron i jedan neutrino. Pozitron je čestica pozitivna naboja  $+e$  i mase jednake masi elektrona. Neutrino je čestica, također kao i antineutrino, bez naboja i bez mase mirovanja\*. Jezgra koja se raspada  $\beta^+$ -procesom, prelazi u jezgru elementa s manjim rednim brojem:

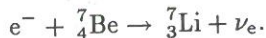


\* Zapravo, masa mirovanja neutrina određena u dosadašnjim eksperimentima manja je od 0,000033 mase elektrona, a u toku su mjerenja koja teže točnijoj vrijednosti.

Moguć je još i proces nazvan **uhvat elektrona**, u kojemu jezgra apsorbira elektron iz neke od unutrašnjih ljusaka (npr. K-ljuske) svojega elektronskog omotača. Tada se zbiva proces:



kao naprimjer:



Slobodno mjesto elektrona u unutrašnjoj ljusci popunjava se prijelazom elektrona iz viših ljusaka, i pritom se emitiraju karakteristične rendgenske zrake.

Treba istaknuti da u procesima  $\beta$ -raspada i elektronskog uhvata elektron ne postoji u jezgri. On nastaje zbog djelovanja slabih nuklearnih sila, kojih je doseg znatno manji od dimenzija jezgre. Da bismo razumjeli uzroke  $\beta$ -raspada, ne možemo se poslužiti nikakvim klasičnim usporedbama i predodžbama, jer su posrijedi procesi u kojima dolaze do izražaja kvantnomehanički i relativistički zakoni fizike.

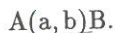
## 16.4. Nuklearne reakcije

Nuklearna reakcija proces je u kojemu se dvije jezgre,  $a$  i  $A$  približe jedna drugoj na udaljenost manju od dosega nuklearnih sila. Tada može doći do preraspodjele nukleona u tim jezgrama, pa u takvome procesu nastaju dvije nove jezgre,  $B$  i  $b$ .

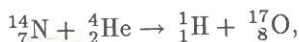
Nuklearne reakcije zbivaju se katkad spontano u prirodi. No naše znanje o njima najvećim dijelom dugujemo eksperimentima koji se izvode u nuklearnim laboratorijima. **Meta**, uzorak materijala koji sadrži jezgre tipa **A**, bombardira se **projektilima**, snopom jezgara tipa **a**. Nakon reakcije, u meti ostaje jezgra tipa **B**, a iz mete izlijeće čestica tipa **b**. Takvu reakciju možemo pisati kao:



ili



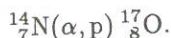
Ako naprimjer dušik  ${}^{14}\text{N}$  bombardiramo  $\alpha$ -česticama, kao rezultat možemo dobiti proton i jezgru kisika  ${}^{17}\text{O}$ . Takva reakcija bilježi se ovako:



ili se umjesto nepreglednog izraza:



najčešće piše:



### 16.4.1. Vrste nuklearnih reakcija

Mehanizam kvantnomehaničkih procesa koji se zbivaju u toku reakcije vrlo je složen. Neke reakcije teku sporo, neke vrlo brzo. U sporim reakcijama djeluje mehanizam tzv. složene jezgre. Upadna čestica  $a$  i jezgra  $A$  u meti najprije se stope u jednu novu jezgru koja traje neko vrijeme, a tada se raspada na dvije nove jezgre,  $b$  i  $B$ . Raspad ovisi o tipu složene jezgre, a ne o načinu kako je ona nastala. Naprimjer reakcija u kojoj aluminij  $^{27}\text{Al}$  bombardiramo protonima može teći tako da najprije nastane složena jezgra  $^{28}\text{Si}$  u pobuđenu stanju (to se označuje zvjezdicom), a zatim se ona dalje raspada:



U većini slučajeva složena se jezgra može raspasti na više načina. Primjerice  $^{28}\text{Si}$  u izrazu (16.14) mogao se raspasti na  $^{27}\text{Si} + n$ . Također je mogao nastaviti postojati kao  $^{28}\text{Si}$ , ali uz emisiju  $\gamma$ -zrake, ili je čak mogao prijeći u  $^{24}_{11}\text{Na}$ , uz emisiju jednog neutrona i triju protona. Različite načine raspada složene jezgre nazivamo kanalima reakcije.

U reakcijama sa složenom jezgrom sudjeluju svi nukleoni, i u tumačenju takvih procesa koristan nam je nuklearni model kapljice. Postoji, međutim, i drugi tip reakcija u kojima sudjeluju samo jedan, dva ili vrlo mali broj nukleona izvan punih ljusaka. Takve se reakcije zbivaju brzo i nazivaju se direktne reakcije. Reakcija tipa  $(d, t)$  ili  $(p, d)$  jesu tzv. pick up-reakcije, jer projektil otme od jezgre jedan nukleon (neutron u oba navedena slučaja) i odnese ga sa sobom. Ako jezgra zadrži nukleon iz projektila i on izleti okrnjen, kao npr. u reakcijama tipa  $(\alpha, t)$  ili  $(d, p)$ , reakcija se naziva stripping.

Posebno mjesto među reakcijama zauzima raspršenje, tj. reakcija u kojoj su jezgre prije i nakon reakcije iste. Elastično je raspršenje ono u kojem projektil i izlazna čestica imaju istu energiju, a pri neelastičnom se kinetička energija projektila promijeni, a jezgra u meti ostaje u pobuđenu stanju.

U proučavanju nuklearnih reakcija važnu ulogu imaju zakoni očuvanja energije, količine gibanja i momenta količine gibanja. Jednako je tako važno uočiti da u toku reakcije ostaju očuvani ukupan električni naboj te broj nukleona.

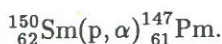
U nuklearnoj reakciji spajaju se čestice različitih masa, tj. energija mirovanja. U toku reakcije može se osloboditi energija. Neke će pak reakcije biti moguće tek ako energiju dovedemo izvana. Definiramo  $Q$ -vrijednost reakcije:

$$Q = [(m_A + m_a) - (m_b + m_B)]c^2 \quad (16.15)$$

Ako je  $Q$ -vrijednost pozitivna ( $Q > 0$ ), reakcija će se zbivati spontano. Ako je  $Q$ -vrijednost negativna ( $Q < 0$ ) tada će do reakcije doći tek ako projektil  $a$  ima dovoljno veliku kinetičku energiju.

#### Primjer 16.11.

Izračunajte  $Q$ -vrijednost reakcije:





Potrebne mase doznajemo iz tablice masa nuklida 16.1. i uvrštavamo u izraz:

$$Q = [(m_A + m_a) - (m_b + m_B)]c^2$$

$$Q = [(149,9137 \text{ u} + 1,0078 \text{ u}) - (146,9151 \text{ u} + 4,0026 \text{ u})]c^2$$

$$Q = 0,0074 \text{ u}c^2 = 0,0074 \cdot 931,48 \text{ MeV} = 6,89 \text{ MeV}.$$

### 16.4.2. Udarne presjek reakcije

Kad snop čestica  $a$  upadne na tanku metu debljine  $\Delta x$  i površine  $S$  (sl. 16.10), u meti će se dogoditi  $N_b$  reakcija u jedinici vremena, dakle  $N_b$  čestica tipa  $b$  izletjet će iz mete. **Udarne presjek**  $\sigma(a, b)$  za reakciju  $A(a, b)B$  definira se omjerom:

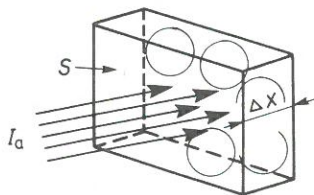
$$\sigma(a, b) = \frac{P_b}{I_a}$$

gdje je  $P_b$  vjerojatnost da jezgra tipa  $A$  u meti doživi reakciju u jedinici vremena, a  $I_a$  upadni tok čestica  $a$ . Vjerojatnost  $P_b$ , koju unosimo u brojnik gornjeg izraza, računamo kao omjer broja  $N_b$  reakcija u jedinici vremena u meti i ukupnog broja jezgara tipa  $A$  u meti:

$$P_b = \frac{N_b}{N_A} = \frac{N_b}{n_A \Delta V} = \frac{N_b}{n_A S \Delta x},$$

gdje smo s  $n_A$  označili broj jezgara tipa  $A$  u jedinici volumena mete. U nazivnik uvrštavamo tok upadnih čestica ili, drugim riječima, intenzitet upadnoga snopa  $I_a$ , tj. broj čestica  $a$  koje u jedinici vremena upadaju na površinu  $S$ :

$$I_a = \frac{N_a}{S \Delta t} = n_a v_a.$$



Slika 16.10. Uz definiciju udarnog presjeka

Ovdje je  $v_a$  brzina projektila, a  $n_a$  broj projektila u jedinici volumena snopa. Dakle, udarni presjek možemo pisati kao

$$\sigma(a, b) = \frac{N_b}{(n_a v_a) \cdot (n_A S \Delta x)} = \frac{N_b}{I_a (n_A S \Delta x)} \quad (16.16)$$

Budući da je  $N_b$  izražen jedinicom recipročna sekunda,  $s^{-1}$ , a  $n_a$  i  $n_A$  imaju dimenziju  $m^{-3}$ , udarni presjek ima dimenziju površine. U literaturi se nailazi i na jedinicu barn ( $1b = 10^{-28}m^2$ ).

Pod makroskopskim udarnim presjekom  $\Sigma$  za reakciju (a, b) razumijevamo produkt:

$$\Sigma(a, b) = n_A \sigma(a, b) \quad (16.17)$$

### 16.4.3. Apsorpcija upadnih čestica

Stvarnu metu debljine  $x$  možemo u mislima razdijeliti na više tankih slojeva debljine  $\Delta x$ . U svakom od tih slojeva dogodi se određen broj reakcija pa je upadni tok čestica **a** koje padaju na pojedine slojeve sve manji – nastaje apsorpcija upadnih čestica. Apsorbirano je upravo onoliko čestica tipa **a** koliko je proizvedeno čestica **b**, dakle  $N_b$  u jedinici vremena. Zbog toga je intenzitet snopa na izlazu iz tankoga sloja manji nego na ulazu za:

$$\Delta I = -\frac{N_b}{S}.$$

Iz definicije udarnoga presjeka, koja za neki tanki sloj glasi:

$$\sigma(a, b) = \frac{N_b}{I(n_A \cdot S \Delta x)}$$

proizlazi:

$$\frac{N_b}{S} = n_A \sigma(a, b) \cdot I \cdot \Delta x = \Sigma(a, b) \cdot I \cdot \Delta x,$$

pa možemo pisati

$$-\Delta I = \Sigma \cdot I \cdot \Delta x,$$

gdje smo radi jednostavnosti makroskopski udarni presjek označili samo sa  $\Sigma$ . U granici  $\Delta x \rightarrow 0$  izraz prelazi u diferencijalnu jednadžbu:

$$-\frac{dI}{I} = \Sigma dx,$$

koja ima rješenje:

$$I = I_0 e^{-\Sigma x}. \quad (16.18)$$

Intenzitet se snopa, dakle, eksponencijalno smanjuje s debljinom mete, jer je  $(I_0 - I) \cdot S$  čestica apsorbirano u meti. (Isti broj čestica tipa **b** izletjet će iz mete.) Zbog toga se  $\Sigma$  naziva i ukupni linearni koeficijent apsorpcije.

#### Primjer 16.12.

Tanki sloj zlata debljine  $x = 0,3$  mm izložen je snopu sporih neutrona intenziteta  $I_0 = 10^7 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ . Udarni presjek za reakciju neutronske uhlavata ( $n, \gamma$ ) za jezgru  $^{197}\text{Au}$  iznosi  $\sigma(n, \gamma) = 94 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$ . Gustoća je zlata  $\rho_{\text{Au}} = 19,3 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , a njegova je relativna atomska masa 197,2.

Izračunajte broj  $N$  jezgara izotopa  $^{198}\text{Au}$ , koji nastaje u  $1\text{ cm}^2$  pločice zlata u svakoj sekundi.

Broj proizvedenih jezgara  $^{198}\text{Au}$  bit će jednak broju apsorbiranih neutrona, a taj se može izračunati relacijom (16.18), kao razlika broja upadnih i broja izlaznih neutrona:

$$N = S(I_0 - I).$$

Po jedinici površine to iznosi:

$$\frac{N}{S} = I_0 - I = I_0 (1 - e^{-\Sigma x}).$$

Broj jezgara zlata u jedinici volumena iznosi:

$$\begin{aligned} n_{\text{Au}} &= \frac{\rho_{\text{Au}} N_A}{M_{\text{Au}}} \\ n_{\text{Au}} &= \frac{19,3 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{197,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} \\ n_{\text{Au}} &= 5,894 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}, \end{aligned}$$

a za makroskopski udarni presjek dobivamo:

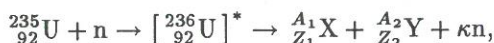
$$\begin{aligned} \Sigma &= n_{\text{Au}} \sigma(n, \gamma) = 5,894 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot 94 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 \\ \Sigma &= 554 \text{ m}^{-1}. \end{aligned}$$

Traženi je broj proizvedenih jezgara zlata  $^{198}\text{Au}$  u jedinici vremena:

$$\begin{aligned} \frac{N}{S} &= 10^7 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \cdot (1 - e^{-554 \text{ m}^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}}) \\ \frac{N}{S} &= 1,53 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-2}. \end{aligned}$$

## 16.5. Nuklearna fisija

Kad spori neutron upadne na tešku jezgru ( $A > 230$ ), ona ga apsorbira. Mnoge će se tako dobivene složene jezgre raspasti nakon toga na dvije srednje teške jezgre i na nekoliko neutrona. Takav tip reakcije naziva se **nuklearna fisija**, a jezgre srednjeg  $A$ , koje pritom nastaju, **fragmenti** fisije. Tipična je fisiona reakcija



gdje je  $\kappa$  cijeli broj. Fragmenti fisije u ovome slučaju mogu biti naprimjer  $^{143}_{56}\text{Ba}$  i  $^{90}_{36}\text{Kr}$ , pa je ovdje broj proizvedenih neutrona  $\kappa = 3$ . Za istu složenu jezgru moguće



je mnogo parova fragmenata, a ovisno o njima različit je i broj  $\kappa$  neutrona. U navedenom slučaju prosječna vrijednost  $\kappa = 2,44$ . Izmjereno je da su najzastupljeniji fragmenti kojima je omjer masa približno jednak  $3/2$ . Proizvedeni fragmenti nalaze se u području daleko od linije stabilnosti. Oni su zato vrlo radioaktivni pa je svaka nuklearna fisija praćena jakim  $\beta$ -zračenjem i  $\gamma$ -zračenjem.

Za vrijeme fisije oslobađa se oko 200 MeV energije po pojedinoj reakciji, mnogo više nego u običnim nuklearnim reakcijama. U većini fisionih reakcija najbolji projektili za postizanje fisije jesu tzv. **termalni neutroni** (tj. *spori* neutroni kinetičke energije  $E_k \cong \frac{3}{2} kT = 0,04 \text{ eV}$ , gdje je temperatura  $T = 300 \text{ K}$ . Neutroni koji nastaju u fisiji imaju znatno veće kinetičke energije (oko 2 MeV) pa ih treba usporiti da bi mogli izazivati daljnje fisione procese. To se usporavanje obavlja sudarima s atomima neke druge tvari, koja se naziva **moderator**.

U **nuklearnim reaktorima** zbiva se **kontrolirana fisija**, tako da se apsorbira višak proizvedenih neutrona. Na taj način jedan neutron iz svake fisije proizvodi lančano novu fisiju i proces teče ravnomjerno. U **nekontroliranoj fisiji** broj proizvedenih neutrona koji proizvode novu fisiju geometrijski se povećava. Zbog lančane reakcije oslobađa se golema količina energije u kratkom vremenskom razmaku. Upravo to se zbiva u **nuklearnoj bombi** (koja se katkad netočno naziva "atomskom bombom").

### Primjer 16.13.

Oko 185 MeV iskoristive energije oslobađa se u fisiji urana  ${}_{92}^{235}\text{U}$  izazvanoj neutronima. Ako generator kontinuirano proizvodi snagu od 100 MW, koliko će vremena proći dok se potpuno ne istroši količina od 1 kg nuklearnog goriva urana 235?

U kilogramu urana  ${}_{92}^{235}\text{U}$  ima:

$$N = \frac{m}{M_U} N_A = \frac{1 \text{ kg}}{235 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$N = 2,563 \cdot 10^{24}.$$

Kad se sve jezgre raspadnu fisijom oslobodi se ukupna energija od:

$$E = N \Delta E = 2,563 \cdot 10^{24} \cdot 185 \text{ MeV}$$

$$E = 4,742 \cdot 10^{26} \text{ MeV} = 7,586 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

$$E = 2,107 \cdot 10^7 \text{ kWh.}$$

Uz zadanu snagu od  $P = 100 \text{ MW} = 10^5 \text{ kW}$ , gorivo će trajati:

$$t = \frac{E}{P} = \frac{2,107 \cdot 10^7 \text{ kWh}}{10^5 \text{ kW}} = 210,7 \text{ h} = 8,78 \text{ dana.}$$

Mehanizam nuklearne fisije može se razumjeti ako se jezgra opiše modelom kapljice. Ako je energija pobuđenja složene jezgre dovoljno velika, ona će se izrazito deformirati, sve dok se ne raspadne u dvije manje jezgre (v. sl. 16.5).

## 16.6. Nuklearna fuzija

**Nuklearna fuzija** je reakcija u kojoj se dvije lakše jezgre stapaju u jednu težu – proces suprotan onome pri fisiji. Da bi nastupila fuzija, treba svladati jako elektrostatsko odbijanje među jezgrama. To je moguće samo ako početne jezgre imaju dovoljno veliku kinetičku energiju, reda veličine elektrostatske potencijalne energije dviju jezgara rednih brojeva  $Z_1$  i  $Z_2$ , na udaljenosti  $r \cong 10^{-14}$  m:

$$E_{p,el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

$$E_{p,el} = Z_1 \cdot Z_2 \cdot \frac{1,44 \text{ MeV} \cdot 10^{-15} \text{ m}}{10^{-14} \text{ m}} = 0,14 \cdot Z_1 Z_2 \text{ MeV}.$$

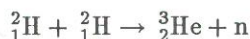
Vidimo da će ta energija biti najniža za male vrijednosti  $Z$ . Čak uz  $Z_1 = Z_2 = 1$ , visina kulonske barijere iznosi 0,14 MeV, a to odgovara energiji čestica na temperaturi:

$$T \cong \frac{E}{\frac{3}{2} k} = \frac{0,14 \text{ MeV}}{\frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}}$$

$$T \cong \frac{0,14 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{\frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}} \cong 10^9 \text{ K},$$

gdje smo uvrstili vrijednost Boltzmannove konstante  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ . Očito da bi se postigla fuzija većeg broja jezgara, materijal mora biti na golemoj temperaturi, svakako iznad  $10^7$  K. Na tako visokim temperaturama atomi se ne samo ioniziraju nego se jezgre potpuno ogoljuju od svojih elektrona pa nastaje mješavina jezgara i elektrona koja se naziva **plazma**. Tvar je na tako visokoj temperaturi nemoguće držati u nekoj posudi, jer nijedna posuda ne može izdržati toliko visoku temperaturu. Taj je problem riješen pomoću magnetskoga polja, koje zadržava visokotemperaturnu plazmu u omeđenu prostoru, najčešće toroidalnog oblika. Magnetsko polje ima važnu ulogu i pri povećanju temperature, potrebnom za početak fuzione reakcije.

Pogledamo li na sl. 16.6, uočavamo da će se pri fuziji lakih jezgara ( $A < 20$ ) oslobađati energija ( $Q > 0$ ). U pogodnim uvjetima ta je energija dovoljna za pobuđenje drugih jezgara, i tako nastaje lančana reakcija. Nekontrolirana fuzija rezultira eksplozijom golemih razmjera i taj je princip primijenjen kod **vodikove** (hidrogenske) **bombe**. Kontrolirana fuzija jedan je od mogućih izvora energije budućnosti. Za primjenu je najprikladnija fuzija dvaju deuterona, koja može teći ovako:



pri čemu je  $Q = 3,2 \text{ MeV}$ , ili ovako:



pri čemu je  $Q = 4,2 \text{ MeV}$ .

U novije vrijeme proučava se nuklearna fuzija u prisutnosti miona (v. odj. 16.7), koja je energetski još povoljnija.

Iako je količina oslobođene energije po pojedinoj reakciji manja nego kod fisije, treba se sjetiti da u kilogramu deuterija ima mnogo više jezgara negu u kilogramu urana, (Primjer 10.5.), a i da je deuterij mnogo jednostavnije nabaviti nego uran 235. Zasad se, međutim, između teorijske mogućnosti i ostvarenja kontrolirane fuzije ispriječilo još mnogo tehničkih teškoća na kojima se intenzivno radi. Treba istaknuti i činjenicu da fuziju ne prate sekundarna dugotrajna zračenja koja se pojavljuju kod fisije, pa i stoga na kontroliranu fuziju treba gledati kao na energijski izvor budućnosti.

Nuklearna je fuzija proces koji se zbiva u unutrašnjosti Sunca. To je i tip procesa kakvi su se zbivali u ranome stadiju razvoja materije u Svemiru, kad su iz lakših elemenata fuzijom nastali teži elementi.

#### Primjer 16.14.

Izračunajte energiju oslobođenu u fuziji dvaju deuterona u  ${}^4\text{He}$ .

U reakciji:



oslobađa se energija  $Q$  koju možemo izračunati uvrštavanjem masa iz tablice u jednadžbu (16.15):

$$Q = [2m({}_1^2\text{H}) - m({}_2^4\text{He})] c^2$$

$$Q = [2 \cdot 2,014102 - 4,002603] u \cdot c^2$$

$$Q = 0,025601 \cdot 931,48 \text{ MeV} = 23,8 \text{ MeV}.$$

## 16.7. Osnovne čestice

Prikaz strukture tvari završit ćemo kratkim osvrtom na osnovne sastavne dijelove od kojih je sagrađena priroda: *osnovne čestice*, ili, kako se još nazivaju, elementarne ili fundamentalne čestice.

Dosad smo se upoznali s nekima od njih: *elektron*, *proton* i *neutron* bili su nam dovoljni da objasnimo kemijska svojstva elemenata i strukturu nuklida u prirodi. Proučavajući  $\beta$ -raspad susreli smo *pozitron*, *neutrino* i *antineutrino* (točnije: elektronski neutrino i elektronski antineutrino). Dodamo li tim česticama *mion*, *proton* 1938. g., nabrojali smo sve osnovne čestice koje su bile poznate potkraj prve polovice ovoga stoljeća.



Razdoblje nakon godine 1950. obilježeno je snažnim razvojem eksperimentalne i teorijske fizike čestica. U kratkom vremenu otkriveno je mnogo novih čestica. Neke od njih fizičari su najprije predvidjeli teorijski, a zatim su eksperimentima potvrdili njihovo postojanje. Neke su čestice pronađene u kozmičkome zračenju, no većina ih je proizvedena u sudarima čestičnih snopova visokih energija. Da bi ti pokusi bili mogući, potrebno je raspolagati velikim i snažnim akceleratorima i preciznim uređajima za detekciju čestica. Takvi suvremeni laboratoriji postoje u mnogim zemljama. U njihov se razvoj ulaže mnogo znanja i sredstava, čime je omogućeno ubrzavanje čestica na energije i do 1000 GeV i otkrivanje novih, prije nepoznatih, procesa među osnovnim česticama.

Sada se ipak treba upitati: jesu li te čestice zaista najmanji dijelovi od kojih je sastavljena tvar, ili se i one mogu dalje dijeliti? To pitanje mogli bismo postaviti i malo drukčije: jesu li te čestice zaista nepromjenljive, traju li zauvijek, ili postoji vjerojatnost da će se i same raspasti? Pokusi i mjerenja pokazuju da je samo nekoliko čestica trajno; među njima je i elektron. Poluživot protona vjerojatno je oko  $10^{31}$  s, što je duže od vremena na koje se procjenjuje starost svemira. Slobodni neutron, kao što već znamo, traje samo oko 11 minuta. Vrijeme poluraspada za ostale čestice još je mnogo kraće. Fizičari *stabilnim česticama* obično nazivaju one kojima je vrijeme poluraspada veće od  $10^{-10}$  s, a one koje imaju vrlo kratko vrijeme trajanja ( $\lesssim 10^{-21}$  s) smatraju pobuđenim ili vezanim stanjima drugih čestica, tzv. *rezonancama*.

U tabl. 16.3. na str. 492. navodimo neke danas poznate čestice i njihova svojstva. Promatrajući tabl. 16.3, možemo uočiti podjelu svih čestica na *bozone* (čestice koje se ne pokoravaju Paulievom principu) i *fermione* (čestice za koje vrijedi Pauliev princip isključenja). Uočavamo također da su čestice okarakterizirane svojom masom, električnim nabojem i vlastitim momentom količine gibanja – spinom. Fermioni imaju polucjelobrojni spin, a bozoni imaju cjelobrojni spin, koji je za neke čestice jednak nuli.

Čestice uzajamno djeluju osnovnim međudjelovanjima: gravitacijskim, elektromagnetskim, slabim i jakim, o kojima je bilo riječi u pogl. 9. Značenje osnovnih međudjelovanja dolazi do punog izražaja tek u proučavanju osnovnih čestica. Teorijski opis osnovnih čestica i njihovih međudjelovanja vrlo je složen i zahtijeva opsežnije matematičko znanje nego naprimjer kvantnomehanički opis atoma ili molekula. Sve procese s osnovnim česticama treba razmatrati relativistički, uzimajući u obzir i kvantne zakonitosti. Pritom važnu ulogu imaju *simetrije*, i njihov matematički opis pomoću *teorije grupa*. Dok smo se za opis međudjelovanja u ne-relativističkoj fizici mogli poslužiti pojmom sile ili potencijalne energije, u teoriji osnovnih čestica međudjelovanje je opisano *poljem*. Kao nosilac međudjelovanja, pojavljuje se nova čestica, *kvant polja*. Prilikom međudjelovanja dviju čestica one između sebe izmjenjuju ("dobacuju") jedan kvant međudjelovanja. Već otprilike znamo da je nosilac elektromagnetskoga međudjelovanja *foton*, čestica mase mirovanja nula i spina 1  $\hbar$ . Tek nedavno, godine 1983, otkriveni su kvanti slaba međudjelovanja, tzv. *intermedijarni bozoni*  $W^\pm$  i  $Z^0$ , čestice vrlo velike mase (energija im je mirovanja oko 90 GeV). Nosilac jakog međudjelovanja među nukleonima, čestica nazvana *pion*, otkrivena je godine 1946. Eksperimentalnom otkrivanju

tih čestica prethodili su teorijski proračuni, koji su predviđali njihova svojstva. Predviđa se također i postojanje *gravitona*, čestice koja je nosilac gravitacijskog međudjelovanja, no koja još nije eksperimentalno potvrđena.

Time smo došli do još jedne, možda najvažnije klasifikacije osnovnih čestica, prema kojoj se čestice dijele u tri skupine.

Prvu skupinu čine *kvanti elektromagnetskog i slabog polja* i pripadaju joj foton i intermedijarni bozoni.

Drugu skupinu čine *leptoni* i njoj pripada elektron, elektronski neutrino i još dvije vrste neutrina. Tu su također *mion* i *taon*, čestice koje imaju svojstva slična svojstvima elektrona, ali znatno veću masu. Svi su leptoni fermioni.

Treću skupinu čine *hadroni*, a oni se dijele na *mezone* koji su bozoni, i na *barione*, koji su fermioni. Barione dijelimo na *nukleone* (proton i neutron) i *hiperone*. Hadroni uzajamno djeluju jakim međudjelovanjem, a nosioci su toga međudjelovanja *pioni*, čestice koje i same pripadaju skupini hadrona. Hadroni mogu djelovati i u svim ostalim tipovima međudjelovanja.

Svaka čestica ima svoju *antičesticu*. Masa antičestice jednaka je masi čestice. Djeluje li čestica elektromagnetskim međudjelovanjem, električni naboj i magnetski moment čestice i antičestice jednake su veličine, ali suprotna predznaka. Neke čestice, naprimjer foton ili  $\pi^0$ -mezon, jednake su svojim antičesticama. Ako je riječ o fermionima, čestica i antičestica mogu se poništiti (*anihilirati*) prilikom uzajamna djelovanja. Njihova ukupna energija, uključujući i energiju mirovanja, pojavljuje se u obliku drugih čestica. U tom procesu mora biti očuvana količina gibanja, moment količine gibanja, energija i električni naboj. Obrnut proces, u kojemu istodobno nastaju čestica i antičestica, također je moguć. Tako dolazi do tvorbe para elektron–pozitron:

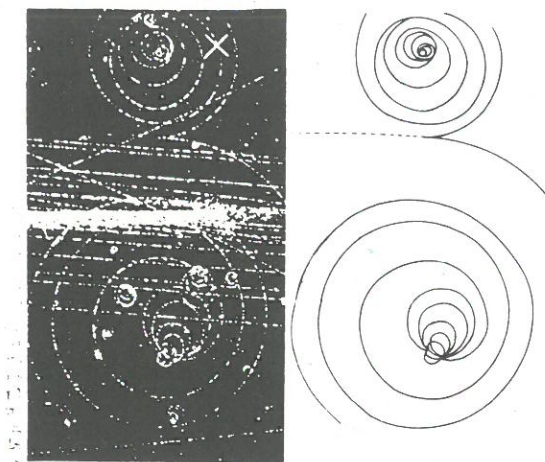
$$\gamma \rightarrow e^- + e^+,$$

pri čemu je energija fotona morala biti najmanje  $2m_e c^2 = 1,022 \text{ MeV}$ . Da bi zakoni očuvanja bili zadovoljeni, taj se proces mora zbiti u blizini jezgre koja preuzima razliku energije i količine gibanja. Na sl. 16.11. vidimo fotografiju tragova elektrona i pozitrona nastalih prilikom ulaska fotona u tzv. *komoru s mjehurićima*. (Takav je uređaj smješten u magnetsko polje pa se pomoću njega mogu opažati kružne staze nabijenih čestica.) Među česticama mogu se zbiti i mnogi drugi procesi; pritom vrijede zakoni očuvanja, od kojih smo samo neke iscrpnije upoznali.

Dok se leptoni zasad mogu smatrati osnovnim česticama u pravome smislu riječi, s velikom sigurnošću možemo tvrditi da su hadroni sastavljeni od manjih dijelova. Godine 1961. M. Gell-Mann iznio je teorijsku pretpostavku da se proton, neutron i ostali hadroni sastoje od manjih čestica, tzv. *kvarkova*. On je uveo tri vrste kvarkova i uspio klasificirati velik broj osnovnih čestica kao različite kombinacije kvarkova. Kasniji razvoj potvrdio je tu pretpostavku. Danas se smatra da postoji šest kvarkova, i oni se obilježavaju slovima *u*, *d*, *s*, *c*, *b* i *t\**. Svaki kvark ima i svoj antikvark. Svaki od poznatih hadrona može se protumačiti kao neka kombinacija

\* Oznake kvarkova potječu od engleskih naziva: *up* (gornji), *down* (donji), *strange* (strani), *charmed* (začarani), *bottom* (dubinski) i *top* (vršni).





Slika 16.11. Tvorba para elektron-pozitron

kvarkova i antikvarkova. Tako je proton kombinacija  $uud$ , neutron  $ddu$ , kaon je  $\bar{s}d$ , a  $\pi^0$ -mezon  $u\bar{u} + d\bar{d}$ . (Pritom smo crticom obilježili antikvark).

Recimo nešto o svojstvima kvarkova. Električni naboj kvarkova  $u$ ,  $c$  i  $t$  je  $2e/3$ , a naboj kvarkova  $d$ ,  $s$  i  $b$  iznosi  $-e/3$ . Osim električnoga naboja, kvarkovi još imaju dodatna svojstva: tzv. *stranost* i *šarm* (začaranost). Tako  $s$ -kvark ima stranost  $-1$ , a  $c$ -kvark ima šarm  $1$ . Kvarkovima se, osim toga, može mijenjati još jedan kvantni broj, nazvan *boja* (stoga se područje fizike koje se bavi kvarkovima naziva *kromodinamika*; vidimo da su fizičari, u nedostatku prikladnih termina, posegli za svakodnevним rječnikom, koji međutim ovdje ima potpuno drukčije značenje). Kvarkovi su, dakle, tvorevine vrlo neobičnih svojstava, i teško je povjerovati da se tu radi o realnim česticama. No, iako su kvarkovi u početku i bili uvedeni samo kao pogodne matematičke tvorevine, rezultati nekih eksperimenata ukazuju i na mogućnost da takve čestice zaista postoje, *zasušnjene* unutar protona i ostalih hadrona. Početna se pretpostavka o samo tri kvarka, doduše, pokazala prejednostavnom. Pa ipak, slika svijeta kakva nam se ukazala, sastavljenog od malog broja osnovnih građevnih elemenata, potvrđuje da su intuitivne predodžbe prvih atomista bile bliske stvarnoj istini.

U suvremenim istraživanjima velika se pažnja posvećuje osnovnim međudjelovanjima između čestica. Današnji eksperimenti i teorijska razmatranja usmjereni su prema odgovoru na pitanje: postoji li veza između četiriju osnovnih međudjelovanja? Velik korak u tom smjeru učinili su S. Weinberg i A. Salam godine 1967. teorijom koja ujedinjuje elektromagnetsko i slabo međudjelovanje u jedno, *elektroslabo* međudjelovanje. Krajnji cilj kojem teže današnja istraživanja jest ujedinjenje svih sila u prirodi, otkrivanje dokaza da su sva četiri međudjelovanja uzajamno povezana i da su samo različite posljedice jedne opće sile koja djeluje u prirodi. Taj bi rezultat bio divovski korak u spoznaji prirodnih zakonitosti, a da i ne govorimo o perspek-



tivama tehnološkog razvoja koje bi nam otvorila ta otkrića. No istaknimo na kraju da i današnji stupanj naših spoznaja o temeljnim prirodnim zakonitostima pruža bezbrojne mogućnosti, i zadatak je znanstvenika i inženjera da ih primijene u svrhu razvoja i napretka čovječanstva.

Tablica 16.1. Mase neutralnih atoma za neke nuklide

(Masa jezgre dobije se tako da se od mase atoma oduzme masa  $Z$  elektrona. Tako je masa protona  $m_p = m({}_1^1\text{H}) - m_e = 1,007\,28\text{ u}$ , a masa  $\alpha$ -čestice  $m_\alpha = m({}_2^4\text{He}) - 2m_e = 4,001\,51\text{ u}$ .)

| Nuklid                  | $m/\text{u}$ | Nuklid                   | $m/\text{u}$ |
|-------------------------|--------------|--------------------------|--------------|
| ${}_0^1\text{n}$        | 1,008 665    | ${}_{20}^{40}\text{Ca}$  | 39,962 589   |
| ${}_1^1\text{H}$        | 1,007 825    | ${}_{20}^{43}\text{Ca}$  | 42,958 780   |
| ${}_1^2\text{H}$        | 2,014 102    | ${}_{32}^{73}\text{Ge}$  | 72,923 462   |
| ${}_2^3\text{He}$       | 3,001 6030   | ${}_{52}^{126}\text{Te}$ | 125,903 322  |
| ${}_2^4\text{He}$       | 4,002 603    | ${}_{56}^{132}\text{Ba}$ | 131,905 120  |
| ${}_3^7\text{Li}$       | 7,016 004    | ${}_{56}^{134}\text{Ba}$ | 133,904 612  |
| ${}_4^9\text{Be}$       | 9,012 1821   | ${}_{56}^{138}\text{Ba}$ | 137,905 000  |
| ${}_6^{12}\text{C}$     | 12,000 000   | ${}_{61}^{147}\text{Pm}$ | 146,915 108  |
| ${}_6^{13}\text{C}$     | 13,003 354   | ${}_{62}^{150}\text{Sm}$ | 149,917 276  |
| ${}_6^{14}\text{C}$     | 14,003 242   | ${}_{64}^{155}\text{Gd}$ | 154,922 664  |
| ${}_7^{14}\text{N}$     | 14,003 7074  | ${}_{79}^{197}\text{Au}$ | 196,966 541  |
| ${}_8^{15}\text{O}$     | 15,003 070   | ${}_{82}^{208}\text{Pb}$ | 207,976 650  |
| ${}_8^{16}\text{O}$     | 15,994 915   | ${}_{92}^{233}\text{U}$  | 233,039 522  |
| ${}_{12}^{24}\text{Mg}$ | 23,985 042   | ${}_{92}^{234}\text{U}$  | 234,040 904  |
| ${}_{13}^{27}\text{Al}$ | 26,981 539   | ${}_{92}^{235}\text{U}$  | 235,043 915  |
| ${}_{14}^{28}\text{Si}$ | 27,976 929   | ${}_{92}^{238}\text{U}$  | 238,048 608  |

Tablica 16.2. Vrijeme poluraspada za neke radioaktivne nuklide

| Nuklid                  | $T_{1/2}$ | Nuklid                   | $T_{1/2}$                  |
|-------------------------|-----------|--------------------------|----------------------------|
| ${}_0^1\text{n}$        | 10,5 min  | ${}_{38}^{90}\text{Sr}$  | 28,8 g.                    |
| ${}_1^3\text{H}$        | 12,3 g.   | ${}_{53}^{131}\text{I}$  | 8,040 d                    |
| ${}_6^{14}\text{C}$     | 5730 g.   | ${}_{56}^{143}\text{Ba}$ | 15 s                       |
| ${}_8^{15}\text{O}$     | 122 s     | ${}_{61}^{147}\text{Pm}$ | 2,6 g.                     |
| ${}_{19}^{43}\text{K}$  | 22,3 h    | ${}_{88}^{226}\text{Ra}$ | 1590 g.                    |
| ${}_{21}^{43}\text{Sc}$ | 3,89 h    | ${}_{92}^{235}\text{U}$  | $7,1 \cdot 10^8\text{ g.}$ |
| ${}_{22}^{43}\text{Ti}$ | 0,20 s    | ${}_{92}^{238}\text{U}$  | $4,5 \cdot 10^9\text{ g.}$ |
| ${}_{36}^{90}\text{Kr}$ | 32,3 h    | ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ | $2,4 \cdot 10^4\text{ g.}$ |

Tablica 16.1. Osnovne čestice\*

|              |         |          | Čestica               | Oznaka           | $\frac{\text{Masa}}{m_e}$                | $\frac{\text{Naboj}}{e}$ | $\frac{\text{Spin}}{\hbar}$ | Vrijeme poluraspada<br>$T_{1/2}/s$                          |
|--------------|---------|----------|-----------------------|------------------|------------------------------------------|--------------------------|-----------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Kvanti polja |         |          | foton                 | $\gamma$         | 0                                        | 0                        | 1                           | stabilan                                                    |
|              |         |          | intermedijarni bozoni | $W^\pm$<br>$Z^0$ | $\approx 157\,700$<br>$\approx 178\,300$ | 1<br>0                   |                             |                                                             |
|              |         |          |                       |                  |                                          |                          |                             |                                                             |
| Leptoni      |         |          | elektron              | $e$              | 1                                        | 1                        | 1/2                         | stabilan                                                    |
|              |         |          | mion                  | $\mu$            | 206,8                                    | 1                        | 1/2                         | $1,523 \cdot 10^{-6}$                                       |
|              |         |          | taon                  | $\tau$           | 3491,4                                   | 0                        | 1/2                         | $2,100 \cdot 10^{-13}$                                      |
|              |         |          | elektronski neutrino  | $\nu_e$          | $< 0,000\,033$                           | 0                        | 1/2                         |                                                             |
|              |         |          | mionski neutrino      | $\nu_\mu$        | $< 0,53$                                 | 0                        | 1/2                         |                                                             |
|              |         |          | taonski neutrino      | $\nu_\tau$       | $< 68,5$                                 | 0                        | 1/2                         |                                                             |
| Hadroni      | Mezoni  |          | pion                  | $\pi^\pm$        | 273,1                                    | 1                        | 0                           | $1,804 \cdot 10^{-8}$                                       |
|              |         |          |                       | $\pi^0$          | 264,1                                    | 0                        | 0                           | $5,8 \cdot 10^{-17}$                                        |
|              |         |          | kaon                  | $K^\pm$          | 966,0                                    | 1                        | 0                           | $8,574 \cdot 10^{-9}$                                       |
|              |         |          |                       | $K^0$            | 973,9                                    | 0                        | 0                           | $K_S^0: 0,89 \cdot 10^{-10}$<br>$K_L^0: 5,18 \cdot 10^{-8}$ |
|              |         |          | eta                   | $\eta$           | 1074,0                                   | 0                        | 0                           |                                                             |
|              |         |          | D-mezon               | $D^\pm$          | 3658,1                                   | 1                        | 0                           | $7,36 \cdot 10^{-13}$                                       |
|              |         |          |                       | $D^0$            | 3648,7                                   | 0                        | 0                           | $2,92 \cdot 10^{-13}$                                       |
|              |         |          | D <sub>S</sub> -mezon | $D_S^\pm$        | 3852,8                                   | 1                        | 0                           | $3,08 \cdot 10^{-13}$                                       |
|              |         |          | B-mezon               | $B^\pm$          | 10328                                    | 1                        | 0                           | $8,18 \cdot 10^{-13}$                                       |
|              |         |          |                       | $B^0$            | 10332                                    | 0                        | 0                           |                                                             |
|              | Barioni | Nukleoni | proton                | p                | 1836,15                                  | 1                        | 1/2                         | stabilan                                                    |
|              |         |          | neutron               | n                | 1838,68                                  | 0                        | 1/2                         | 615,9                                                       |
|              |         | Hiperoni | lambda                | $\Lambda$        | 2183,2                                   | 0                        | 1/2                         | $1,824 \cdot 10^{-10}$                                      |
|              |         |          | sigma                 | $\Sigma^+$       | 2327,5                                   | 1                        | 1/2                         | $5,54 \cdot 10^{-11}$                                       |
|              |         |          |                       | $\Sigma^0$       | 2333,8                                   | 0                        | 1/2                         | $5,1 \cdot 10^{-20}$                                        |
|              |         |          |                       | $\Sigma^-$       | 2343,3                                   | 1                        | 1/2                         | $1,025 \cdot 10^{-10}$                                      |
|              |         |          | ksi                   | $\Xi^0$          | 2573,2                                   | 0                        | 1/2                         | $2,01 \cdot 10^{-10}$                                       |
|              |         |          |                       | $\Xi^-$          | 2585                                     | 1                        | 1/2                         | $7,87 \cdot 10^{-11}$                                       |
|              |         |          | omega                 | $\Omega^-$       | 3272,9                                   | 1                        | 3/2                         | $5,70 \cdot 10^{-11}$                                       |
|              |         |          | začarani lambda       | $\Lambda_c^+$    | 4472,0                                   | 1                        | 1/2                         | $1,32 \cdot 10^{-13}$                                       |

\* Podaci su uzeti iz *Phys. Lett. B239*, 1-516(1990)

## Pitanja i zadaci

- 16.1. Od kojih se čestica sastoji atomska jezgra?
- 16.2. Kako se obilježavaju nuklidi?
- 16.3. Objasnite što su to izotopi, što izotoni, a što izobari.
- 16.4. Koliko ima protona i koliko neutrona u nuklidima  $^{21}\text{Ne}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{197}\text{Au}$ ,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$  i  $^{239}\text{Pu}$ ?
- 16.5. Što je to nuklearna materija? Kolika je njezina gustoća?
- 16.6. Kako se računa polumjer sferične jezgre?
- 16.7. Kolik je promjer jezgre  $^{197}\text{Au}$ ?
- 16.8. Kojom se veličinom karakterizira odstupanje jezgre od sferičnog oblika?
- 16.9. Kvadrupolni moment jezgre  $^{122}\text{Te}$  u pobuđenom stanju iznosi  $Q = -0,4 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$ . Izračunajte odstupanje  $\delta R_0/R_0$  od sferičnog oblika.
- 16.10. Odakle potječe magnetski moment jezgre? Koliki su magnetski momenti protona i neutrona? Što su i koliko iznose giromagnetski faktori protona i neutrona?
- 16.11. Navedite osnovne karakteristike nuklearnog modela kapljice i modela lju-saka.
- 16.12. Napišite semiempirijsku formulu mase i objasnite značenje pojedinih čla-nova.
- 16.13. Što je energija vezanja jezgre?
- 16.14. Izračunajte energiju vezanja i energiju vezanja po nukleonu za jezgru  $^{16}\text{O}$ .
- 16.15. Zbog čega se redoslijed i razmak neutronske i protonske stanja u modelu lju-saka međusobno razlikuju?
- 16.16. Objasnite zakon radioaktivnoga raspada. Što je to vrijeme poluraspada? Što je aktivnost radioaktivnog uzorka?
- 16.17. Kolika je aktivnost jednog grama radija  $^{226}\text{Ra}$ ? Koliko će  $^{226}\text{Ra}$  od tog uzorka ostati nakon 795 godina? (Vrijeme je poluraspada  $^{226}\text{Ra}$  1590 godina.)



- 16.18. Kako se pomoću radioaktivnog raspada ugljika može odrediti starost organskih ostataka?
- 16.19. Navedite karakteristike nuklearnih reakcija. Kako se definira udarni presjek? Što je  $Q$ -vrijednost reakcije?
- 16.20. Izračunajte  $Q$ -vrijednost reakcije  $^{12}\text{C}(n,\alpha)^9\text{Be}$ .
- 16.21. Napišite nuklearnu reakciju u kojoj iz jezgre aluminija bombardirane neutronima izlaze protoni.
- 16.22. Nadopunite sljedeće nuklearne reakcije:
- a)  $^9\text{Be}(\alpha,\gamma)?$ , b)  $^{24}\text{Mg}(?,p)^{27}\text{Al}$ ,  
 c)  $^{27}\text{Al}(d,?)^{25}\text{Mg}$ , d)  $^{59}\text{Co}(n,?)^{60}\text{Co}$ .
- 16.23. Kolika je debljina olovnog sloja ako se intenzitet  $\gamma$ -zraka smanji deset puta? Linearni koeficijent apsorpcije za olovo iznosi  $\Sigma = 500 \text{ m}^{-1}$ .
- 16.24. Koja jezgra nastaje pri:
- a)  $\beta^+$ -raspadu  $^{19}\text{Ne}$ , b)  $\beta^-$ -raspadu  $^{14}\text{C}$ ,  
 c) pri  $\alpha$ -raspadu jezgre  $^{238}\text{U}$ ?
- 16.25. Navedite što znate o klasifikaciji elementarnih čestica i o njihovim osobinama.
- 16.26. Navedite koliko iznosi vrijeme poluraspada za sljedeće elementarne čestice: foton, elektron, proton, neutron, mion i pion.
- 16.27. Što su to kvarkovi i koja su njihova svojstva?

Kolika je energija zarada  $^{27}_{13}\text{Al}$

$$\begin{array}{rcl}
 13. \text{ } ^1_1\text{p} & 13 \cdot 1,00728 & = 13,09464 \text{ u} \\
 14. \text{ } ^1_0\text{n} & 14 \cdot 1,00866 & = 14,12124 \text{ u} \\
 \hline
 \text{ukupna masa jezgre} & & 27,21588 \text{ u} \\
 \text{masa 12 periodnog} & & 26,97431 \text{ u} \\
 \hline
 \text{potent masa} & & 0,24157 \text{ u}
 \end{array}$$

$$\text{Energija zarada} = 931 \text{ MeV} \cdot 0,24157 = \underline{\underline{225 \text{ MeV}}}$$

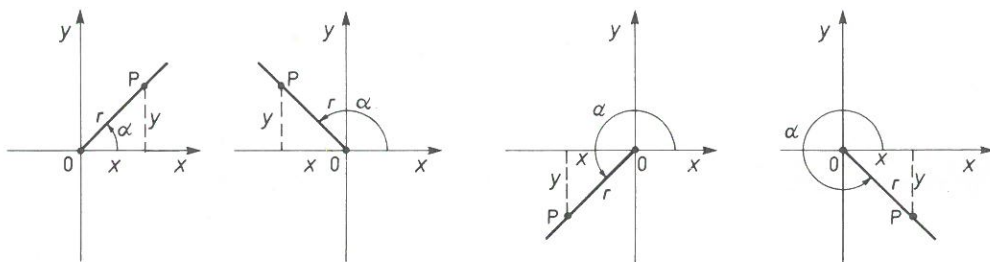
$$\begin{array}{l}
 m = \frac{1}{12} \text{ masa ugljika } ^{12}_6\text{C} = \underline{\underline{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \\
 \text{atomska jedinica mase}
 \end{array}$$

## Dodatak

U ovom dodatku navodimo neke matematičke izraze koji se češće pojavljuju u tekstu. Dokazi i obrazloženja tih izraza mogu se naći u udžbenicima elementarne i više matematike, a studentu preporučujemo i koristan priručnik I. N. Bronštejn i K. A. Semendjajev, *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb.

### 1. Trigonometrijske relacije

a) Navodimo izraze koji sadrže definiciju trigonometrijskih funkcija i neke od najvažnijih relacija među tim funkcijama. Značenje simbola vidljivo je iz sl. D.1.



Slika D.1.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

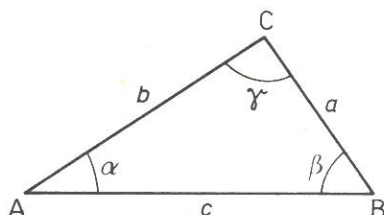
$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)]$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

b) Poučci o trokutu, s oznakama navedenim na sl. D.2, glase:



Slika D.2.

Sinusov poučak:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Kosinusov poučak:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

## 2. Logaritamska i eksponencijalna funkcija

a) Definicija broja e:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Eksponencijalne funkcije  $y = e^x$  i  $y = e^{-x}$  prikazane su na sl. D.3.

b) Prirodni logaritam, baza e:

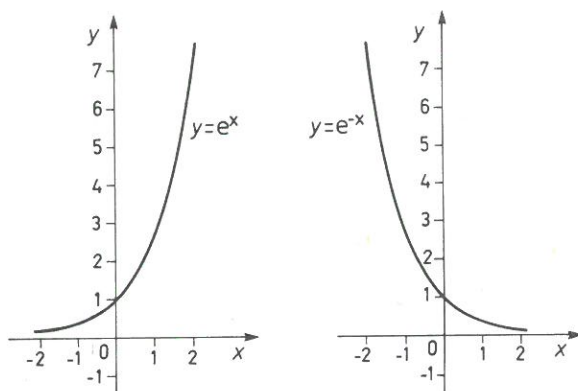
$$y = \ln x \quad \text{ako je} \quad x = e^y$$

Logaritamska funkcija prikazana je na sl. D.4.

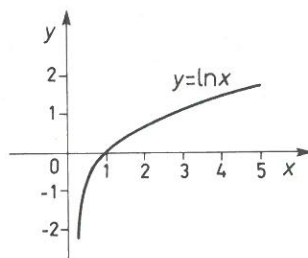
c) Dekadski logaritam, baza 10:

$$y = \log x \quad \text{ako je} \quad x = 10^y$$





Slika D.3.



Slika D.4.

Veza između prirodnog i dekadskog logaritma:

$$\ln x = 2,303 \log x \quad \log x = 0,434 \ln x.$$

### 3. Razvoj nekih funkcija u red potencija

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \dots$$

Za  $x \ll 1$  vrijede ove aproksimacije:

$$(1+x)^n \approx 1+nx,$$

$$e^x \approx 1+x,$$

$$\ln(1+x) \approx x,$$

$$\sin x \approx x,$$

$$\cos x \approx 1,$$

$$\operatorname{tg} x \approx x.$$

#### 4. Najvažnije derivacije i integrali

| $f(x)$                 | $\frac{df}{dx}$          | $\int f(x) dx$                             |
|------------------------|--------------------------|--------------------------------------------|
| $x^n$                  | $nx^{n-1}$               | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ |
| $\frac{1}{x}$          | $-\frac{1}{x^2}$         | $\ln x + C$                                |
| $\ln x$                | $\frac{1}{x}$            | $x \ln x - x + C$                          |
| $e^x$                  | $e^x$                    | $e^x$                                      |
| $a^x$                  | $a^x \ln a$              | $\frac{1}{\ln a} a^x$                      |
| $\sin x$               | $\cos x$                 | $-\cos x + C$                              |
| $\cos x$               | $-\sin x$                | $\sin x + C$                               |
| $\operatorname{tg} x$  | $\frac{1}{\cos^2 x}$     | $-\ln \cos x + C$                          |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$    | $\ln \sin x + C$                           |
| $\arcsin x$            | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$           |

#### 5. Kompleksni brojevi

Uz definiciju  $i^2 = -1$  ili  $i = \sqrt{-1}$  vrijedi:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

## Kazalo imena

- Ampère, Marie André (1775–1836), francuski matematičar i fizičar, 1, 72, 207
- Arago, Dominique François Jean (1786–1853), francuski fizičar, 150
- Avogadro, Amedeo (1776–1857), talijanski fizičar, 319
- Aston, Francis William (1878–1945), engleski kemičar i fizičar, 140
- Balmer, Johann Jakob (1825–1898), švicarski matematičar i fizičar, 378, 421
- Bardeen, John (1908– ), američki fizičar, 82
- Barkhausen, Heinrich (1881–1956), njemački fizičar, 164
- Becquerel, Alexandre Edmond (1820–1891), francuski fizičar, 476
- Bernoulli, Daniel (1700–1782), švicarski matematičar i fizičar,
- Biot, Jean (1774–1862), francuski fizičar, 119
- Bohr, Niels Baptiste (1885–1962), danski fizičar, 378, 419, 431
- Boltzmann, Ludwig (1844–1906), austrijski fizičar, 355, 359, 363
- Born, Max (1882–1970), njemački fizičar, 407
- Bošković, Ruđer (1711–1787), hrvatski znanstvenik, 331
- Brewster, David (1781–1868), škotski fizičar, 289
- de Broglie, Louis (1892–1987), francuski fizičar, 382, 391, 420, 446
- Cauchy, Augustin (1789–1857), francuski matematičar, 298
- Cavendish, Henry (1731–1810), engleski fizičar, 5
- Chadwick, James (1891–1974), engleski fizičar, 461
- Compton, Arthur (1892–1962), američki fizičar, 375
- Cooper, Leon (1930– ), američki fizičar, 82
- Coulomb, Charles Augustin (1736–1806), francuski inženjer, 1, 5, 303
- Curie, Pierre (1859–1906), francuski fizičar, 163, 476
- Curie-Sklodowska, Maria (1867–1934), poljsko-francuska fizičarka i kemičarka, 476
- Daniell, John (1790–1845), engleski znanstvenik, 89
- Davisson, Clinton (1881–1958), američki fizičar, 385
- Dirac, Paul (1902– ), engleski fizičar, 407
- Einstein, Albert (1879–1955), švicarski fizičar, 371
- Faraday, Michael (1791–1867), engleski fizičar, 1, 11, 45, 145
- Fermat, Pierre (1601–1665), francuski matematičar, 236
- Fermi, Enrico (1901–1954), talijanski fizičar,
- Frank, James (1882–1964), njemački fizičar, 380
- Franklin, Benjamin (1706–1790), američki učitelj, 1
- Fraunhofer, Josef (1788–1826), njemački fizičar, 250, 277
- Fresnel, Auguste (1788–1827), francuski fizičar, 277
- Galilei, Galileo (1564–1642), talijanski fizičar, 267, 299, 353
- Galvani, Luigi (1737–1798), talijanski fizičar i fiziolog,
- Gauss, Carl (1777–1855), njemački matematičar, fizičar i astronom, 20, 46, 133, 205
- Gell-Man, Murray (1929– ), američki fizičar, 489
- Gerlach, Walter (1889–1971), njemački fizičar, 434
- Germer, Lester (1896–1971), američki fizičar, 385
- Gilbert, William (1544–1603), engleski fizičar i liječnik, 1
- Goeppert-Mayer, Maria (1906–1972), poljsko-američka fizičarka, 473
- Goudsmith, Samuel (1902–1979), holandski fizičar, 434
- Hall, Edwin Herbert (1855–1938), američki fizičar, 117
- Heisenberg, Werner (1901–1976), njemački fizičar, 407
- Henry, Joseph (1797–1878), američki fizičar, 152



- Hertz, Gustav (1887–1975), njemački fizičar, 211, 380
- Hund, Friedrich (1896– ), njemački fizičar, 441
- Huygens, Christian (1629–1695), nizozemski fizičar i astronom, 277
- Jeans, James (1877–1946), engleski fizičar, 362
- Joule, James (1818–1889), engleski fizičar, 102
- Kammerling-Onnes, Heike (1853–1926), holandski fizičar, 82
- Kirchhoff, Gustav (1824–1887), njemački fizičar, 93, 355
- Kopernik, Nikola (1473–1543), poljski astronom, 299
- Larmor, Joseph (1857–1942), engleski fizičar i matematičar, 170
- Leclanche, Georges (1839–1882), francuski kemičar, 89
- Lennard-Jones, John (1894–1953), engleski fizičar i kemičar, 332
- Lenz, Emilij H. (1804–1864), ruski fizičar, 147
- Lorentz, Hendrik (1853–1928), holandski fizičar, 116, 301
- Malus, Etienne (1775–1812), francuski fizičar, 290
- Maxwell, James (1831–1879), engleski fizičar, 1, 205, 208, 363
- Millikan, Robert Andrews (1868–1953), američki fizičar, 62, 371
- Morse, Phillip (1903– ), američki fizičar, 329, 455
- Newton, Isac (1643–1727), engleski znanstvenik, 234, 299
- Oersted, Hans (1777–1851), danski fizičar, 113, 145, 206
- Ohm, Georg Simeon (1787–1854), njemački fizičar, 73
- Oppenheimer, Robert (1904–1967), američki fizičar, 446
- Pauli, Wolfgang (1900–1958), švicarski fizičar, 438, 488
- Peregrinus, Petrus (13. st), francuski znanstvenik, 111
- Planck, Max (1858–1947), njemački fizičar, 354, 363, 393
- Poynting, John (1852–1914), engleski fizičar, 280, 355
- Rayleigh, John (1842–1919), engleski fizičar, 362
- Rowland, Henry (1848–1901), američki fizičar, 282
- Russel, Alexander (1888–1972), engleski fizičar i kemičar, 441
- Rutherford, Ernest (1871–1937), engleski fizičar, 297, 419, 461
- Rydberg, Johannes (1888–1919), švedski fizičar i kemičar, 378, 421
- Salam, Abdus (1926– ), pakistansko-engleski fizičar, 490
- Saunders, Frederic (1875–1963), kanadski fizičar, 441
- Savart, Felix (1791–1841), francuski fizičar, 119
- Schmidt, Teodor (1908– ), njemački fizičar, 474
- Schrieffer, John Robert (1931– ), 82
- Schrödinger, Erwin (1887–1961), austrijski fizičar, 393, 407
- Snell Willebrord van Roijen (Snellius) (1581–1626), profesor u Leydenu, 234
- Sommerfeld, Arnold (1868–1951), njemački fizičar, 398
- Stefan, Josef (1835–1893), slovenski fizičar, 355, 358
- Stern, Otto (1888–1951), njemav cko-američki fizičar, 434
- Tesla, Nikola (1856–1943), jugoslavensko-američki znanstvenik, 115
- Thomson, Joseph John (1892–1975), engleski fizičar, 138, 184, 211, 297
- Uhlenbeck, Georg (1900– ), holandsko-američki fizičar, 434
- Volta, Alessandro (1745–1827), talijanski fizičar, 29
- Weber, Wilhelm Eduard (1804–1891), njemački fizičar, 132
- Weinberg, Stephen (1933– ), američki fizičar, 490
- Weiss, Pierre (1865–1940), francuski fizičar, 164, 166
- Weisszäcker, Carl von (1912– ), njemački fizičar,
- Wien, Wilhelm (1864–1928), njemački fizičar, 355, 358, 360, 367
- Young, Thomas (1773–1829), engleski fizičar, 270
- Yukawa, Hideki (1907–1981), japanski fizičar, 305
- Zeeman, Pieter (1865–1943), holandski fizičar, 431

## Kazalo pojmova

- Abbeov broj, 250  
abracija  
    kromatska, 259  
    sferna, 259  
akomodacija oka, 262  
akromatska prizma, 251  
akromatske leće, 260  
aktivnost, 477  
akumulator, 90  
    nikal-kadmijev, 90  
    olovni, 89  
 $\alpha$ -raspad, 476, 478  
Amicieva prizma, 251  
amper, 72, 126  
    definicija, 125  
Ampèreov zakon, 127, 205, 208  
analizator, 290  
angularni moment, 414  
anharmonički oscilator, 329  
antičestica, 489  
antineutrino, 307, 479, 487  
antisimetričnost, 438  
Aragoov pokus, 150  
atom, 419  
    stabilni, 439  
    u magnetskome polju, 424, 430  
    višeelektronski, 438  
    vodika, 419  
atomska jezgra, 419, 461  
atomske orbitale, 426, 427  
atomski broj, 419  
atomski (maseni) broj, 463  
atomski spektri, 353, 419  
  
Balmerova serija, 378, 421  
Barkhausenov efekt, 164  
 $\beta$ -raspad, 476, 479  
Biot-Savartov zakon, 119  
bliska točka, 262  
blještanje, 231  
Bohrov  
    kvantni uvjet, 420  
    magneton, 431  
    model jednoelektronskog atoma, 419  
    model vodikova atoma, 379  
    radijus, 447  
    boje, 225  
    bozoni, 488  
    Brewsterov kut, 289  
    brzina svjetlosti, 215  
  
Cauchyove formule, 248  
centralna sila, 345, 415  
centrifugalna sila, 347  
ciklotron, 117  
cirkulacija vektorskog polja, 127  
Comptonov efekt, 375  
Comptonova valna duljina, 377  
Coulombov  
    član, 449  
    zakon, 303  
Coulombova sila, 303  
Curiev zakon, 163  
Curieva temperatura, 165  
  
Čestice  
    osnovne, 487  
    stabilne, 488  
član izmjene, 449  
članak  
    Danielov, 89  
    suhi, 89  
  
Čelija  
    goriva, 90  
čelije  
    manganove alkalne, 89  
    živine, 89  
  
Daleka točka, 262  
dalekozori (teleskopi), 267  
daljina jasnoga vida, 263  
de Broglieve relacije, 383, 420  
debye, 37  
decibel, 104  
decibelska ljestvica, 105  
defekt mase, 317  
definicija ampera, 125  
deklinacija  
    magnetska, 112  
devijacija prizme, 247  
    minimalni kut, 248  
dielektrici, 56

- dielektrična čvrstoća, 56  
 dielektrična konstanta, 7, 106  
     relativna, 7, 56  
 dielektrik  
     polarizacija, 59  
 difrakcija (ogib), 269, 277  
     Fraunhoferova, 277  
     Fresnelova, 277  
 dijagram  
     fazorski, 174  
     vektorski, 174  
 dijamagnetici, 162  
 dijamagnetizam, 162  
 dioda, 75  
     karakteristika, 76  
     Zenerova, 77  
 dipol  
     električni, 37  
     energija, 43  
     magnetski, 112, 135  
     moment para sila, 42  
     u električnome polju, 41  
     u nehomogenome električnome polju, 42  
 direktne reakcije, 481  
 disipativne (nekonzervativne) sile, 321  
 disperzija, 216  
     svjetlosti, 237, 248  
 disperzijska moć prizme, 250  
 disperzijske krivulje, 249  
 dobivanje izmjeničnih napona, 172  
 dogovor za predznake, 252  
 dopušteni sjaj, 231  
 drift-brzina, 78  
 dvoatomne molekule, 329, 452  
 dvolom, 291  
 Efektivna potencijalna energija, 345, 347, 423  
 efektivna vrijednost izmjenične struje, 173  
 ekvipotencijalne plohe, 32  
 elastično raspršenje, 481  
 električna  
     energija, 102  
     influencija, 15  
     otpornost, 75  
     permitivnost, 303  
     potencijalna energija, 26  
     provodnost, 75  
     rezonancija, 183  
     snaga, 101  
     struja, 71  
         u tekućinama, 105  
     susceptibilnost, 60  
     vodljivost, 74  
 električni  
     dipol, 37  
         inducirani, 58  
         dipolni moment, 37  
         kvadrupolni moment, 466  
         naboj jezgre, 464  
         napon, 29  
         tok, 19  
         gustoća, 20  
 električno brojilo, 102  
 električno polje, 10, 301, 406  
     dipola, 38  
     energija, 53  
     homogeno, 12  
     jakost, 10  
 elektroliti, 71, 105  
 elektrolitička disocijacija, 105  
 elektroliza, 106  
     Faradayevi zakoni, 106  
 elektromagnetska  
     indukcija, 145  
 elektromagnetska sila, 301  
 elektromagnetski  
     titraji, 210  
     valovi, 354, 377  
 elektromagnetsko  
     međudjelovanje, 298, 301, 303, 488  
     polje, 302  
     zračenje, 432  
 elektromotorna sila, 89, 91  
 elektron u metalu, 398, 406  
 elektroni  
     slobodni, 3, 71  
 elektronske konfiguracije, 440  
 elektronski  
     mikroskop, 386  
     top, 64  
 elektroskop, 2, 16  
 elementarni naboj, 62  
 emisiona moć crnog tijela, 356  
 energija, 402  
     dipola, 43  
     disocijacije, 329  
     električnoga polja, 53  
     elektromagnetskoga vala, 217  
     kinetička, 314, 317  
     kvanta, 421  
     magnetskoga polja, 155  
     mirovanja, 317, 489  
         neutrona, 461  
         protona, 461  
     molekule, 448  
     potencijalna, 298, 314, 315, 317, 324  
     vezanja, 319  
     vezanja jezgre, 470  
 Faktor  
     apsorpcije, 355  
      $\cos \varphi$ , 190



- emisije, 356
- gubitaka, 180
- kvalitete ("dobrote"), 179
- $Q$ , 185, 186
- refleksije, 355
- snage, 191
- transmisije, 355
- farad, 45
- Faradayev zakon, 171
  - indukcije, 147, 148, 205, 206
- Faradayeva konstanta, 107
- Faradayevi zakoni elektrolize, 106
- fazna brzina, 215, 384
- fazna razlika, 174
- fazni pomak, 190
  - između napona i struje, 177
- fazorski dijagram, 174, 181
- feriti, 169
- Fermatov princip, 236
- fermioni, 488
- feromagnetici, 162
- feromagnetizam, 164
- feromagnetsko njihalo, 165
- fiberska optika, 247
- fizika
  - kvantna, 297
  - relativistička, 297
  - statistička, 297
- fononi, 77
- fotoelektrični efekt, 353, 368
- fotometrija, 223
- fotometrijske veličine i jedinice, 225
- fotometrijski ekvivalent, 227
- foton, 219, 368, 469, 488
- fragmenti fisije, 484
- Frank-Hertzov eksperiment, 380
- Fraunhoferova difrakcija, 277
- Fraunhoferove linije, 250
- frekvencija
  - izmjenične struje, 173
  - titranja, 340
  - vrtnje, 341
- Fresnelova difrakcija, 277
- Galileiev (nizozemski) dalekozor, 267
- $\gamma$ -zračenje, 220
- galvanometar, 96
- Gaussov zakon, 20
  - za elektricitet i magnetizam, 205
  - za magnetizam, 133
- Gaussove aproksimacije, 240
- geometrijska optika, 223
- giromagnetski faktor elektrona, 436
- goriva ćelija, 90
- gradijent, 343, 407
- potencijala, 35
- granična frekvencija, 370
- granični kut, 245
- gravitacijska sila, 299, 345
- gravitacijsko međudjelovanje, 298, 488
- grupna brzina, 384
- gustoća
  - električnoga toka, 20
  - energije magnetskoga polja, 156
  - magnetskoga toka, 115
- naboja
  - linijska, 4
  - plošna, 4
  - prostorna, 4
- nuklearne materije, 464
- struje, 72, 79
- toka energije, 217
- vjerojatnosti, 391, 399, 425, 428
  - harmoničkog oscilatora, 403
- Hadroni, 489
- Hallow efekt, 117
- hamiltonijan, 407, 415, 448
- harmonička sila, 325
- harmonički oscilator, 316, 324, 363, 400
  - gustoća vjerojatnosti, 403
  - valne funkcije, 402
- Hefnerova svijeća, 225
- henri, 152
- hermitski operatori, 408
- Hertz, 211
- hibridizirane valne funkcije, 453
- hiperoni, 489
- Hundovo pravilo, 441
- hypermetropia, 262
- Idealni transformator, 194
- idealno crno tijelo, 356
- impedancija strujnoga kruga, 182
- impuls sile, 302
- indeks loma, 236, 237, 249
- inducirana
  - elektromotorna sila, 147
- inducirani
  - napon, 145
- indukcija
  - magnetska, 115
- induktivitet, 151
  - cilindrične zavojnice, 152
  - torusne zavojnice, 152
  - u krugu izmjenične struje, 176
- induktivni otpor, 175, 176
- influcija
  - magnetska, 112
- infracrveni spektar, 220
- inklinacija, 112
- instrumenti
  - analogni, 96

- digitalni, 96
- okularni, 261
- optički, 260
- projekcijski, 261
- integral prekrivanja, 449
- intenzitet
  - elektromagnetskoga vala, 217
  - snopa, 483
  - svjetlosti pri ogibu, 280
  - zračenja, 355, 367
- interferencija, 269
- interferencija
  - N* koherentnih valova, 283
  - na dvjema pukotinama, 271
- ioni, 71, 105
- izborna pravila, 432
- izmjenična struja, 171
  - efektivna vrijednost, 173
  - frekvencija, 173
  - rad i snaga, 189
- izobari, 463
- izolatori, 3
- izotoni, 463
- izotopi, 140, 307, 463
- izvanredna zraka, 292
- izvori
  - napona, 89
  - svjetlosti, 224, 225
- Jako međudjelovanje, 298, 304, 488
- jakost
  - električnoga polja, 35
  - magnetskoga polja, 115, 118
  - struje, 71
  - svjetlosti, 225
- jakost (konvergencija) leće, 257
- jalova struja, 191
  - kompensacija, 191
- jalovi otpor, 178
- jantar, 1
- Jeans-Rayleighova formula, 362
- jednadžba
  - kontinuiteta, 209
  - ravnog zrcala, 238
  - tanke leće, 255
  - sfernog zrcala, 241
- Kalcit, 291
- kanali reakcije, 481
- kanalne zrake, 137
- kandela, 225
- kapacitet
  - kondenzatora, 45
  - pločastoga kondenzatora, 46
  - vodiča, 44
- kapacitivni otpor, 175, 179, 180
- karakteristične zrake
  - za divergentnu leću, 256
  - za konkavno sferno zrcalo, 242
  - za konveksno sferno zrcalo, 243
  - za konvergentnu leću, 256
  - za sferni dioptrar, 253
- karakteristika
  - diode, 76
  - željeza u vodik, 76
- katodna cijev, 64
- katodne zrake, 137
- kemijska veza, 425
- kemijske
  - reakcije, 303, 318
  - veze, 445
- kemijski procesi, 304, 307, 309
- kinetička energija, 314, 317
- Kirchhoffov zakon, 355
- Kirchhoffova pravila, 93
- koeficijent
  - međindukcije, 154
  - samoindukcije, 151
- koercitivna sila, 167
- koercitivno polje, 167
- koherentni valovi svjetlosti, 269
- kolektivni model, 469
- količina gibanja, 310
  - fotona, 382
  - moment, 310
- kompensacija jalove struje, 191
- kompjuterske memorije, 169
- koncentracija elektrona, 79
- kondenzator
  - cilindrični, 47
  - elektrolitni, 50
  - keramički, 49
  - kuglasti, 47
  - papirni, 49
  - pločasti, 12, 25, 45, 98
  - kapacitet, 46
  - promjenljivi, 50
- konkavna (divergentna) leća, 253
- konstanta
  - Faradayeva, 107
  - fine strukture, 437
  - raspada, 476
- konveksna (konvergentna) leća, 253
- konzervativne sile, 321, 324
- korekcijske naočale, 262
- korpuskularna teorija svjetlosti, 371
- kovalentno vezanje, 330
- kristali, 77
- kritična temperatura, 82
- krivulja histereze, 167
- krivulje magnetiziranja, 166
- kromatska aberacija, 259

- kromodinamika, 490
- kružna frekvencija, 173
- kugline funkcije, 414, 425
- kulonska energija sferične jezgre, 465
- kut
  - gubitaka, 179
  - optičkog zakretanja ravnine polarizacije, 292
- kutna disperzija, 286
- kutna količina gibanja, 414
- kutni zamah, 414
- kutno povećanje, 263
- kvadrat momenta vrtnje, 423
- kvant
  - elektriciteta, 64
  - energije, 364, 378
- kvantna fizika, 297, 353, 390
- kvantni broj, 435
  - magnetski, 438
  - orbitalni, 438
  - radijalni, 438
- kvantnomehanički
  - operatori, 408
  - oscilator, 402
- kvarkovi, 489
- Lajdenska boca, 49
- laser, 225
- LC-krug, 210
- LCD-prikaz, 96
- LCD-tehnologija, 293
- LDR-fotootpornici, 85
- LDR-otpornici, 84
- leća
  - akromatska, 260
  - konkavna (divergentna), 253
  - konveksna (konvergentna), 253
  - tanka, 253
- Lennard-Jonesova funkcija, 332
- Lenzovo pravilo, 147, 149
- leptoni, 489
- linearno povećanje leće, 257
- linija stabilnosti, 463
- linijski napon, 200
- linijski spektri, 377
- ljuska, 439
- ljuskasta struktura, 440
- lom svjetlosti, 234
- Lorentzova sila, 116, 209, 301
- luks, 228
- lumen, 227
- luminancija (sjaj) izvora, 229
- lupa (povećalo), 263
- Magični brojevi, 473
- magnet
  - permanentni, 111
- magnetizacija, 115, 161
- magnetska
  - deklinacija, 112
  - igla, 111
  - indukcija, 115
  - influencija, 112
  - sila, 116
  - susceptibilnost, 162
- magnetske silnice, 113
- magnetski
  - dipol, 135, 112
    - potencijalna energija, 136
  - dipolni moment
    - elektrona, 137
    - jezgre, 468
    - permanentni, 163
  - list, 133
  - moment, 133, 134, 430, 435, 474
  - tok, 131, 147
- magnetsko polje, 301
  - cilindrične zavojnice, 129
  - jakost, 118
  - kružnog zavoja, 114, 121
  - ravnog vodiča, 114, 120, 130
  - tok, 131
  - torusne zavojnice, 127
  - zavojnice, 122
- makroskopski udarni presjek, 483
- maksimalna vrijednost, 174
- Malusov zakon, 290
- manganove alkalne ćelije, 89
- maseni (atomske) broj, 463
- Maxwell-Boltzmannova statistika, 363
- Maxwellova jednadžba
  - četvrt, 208
  - druga, 206
  - prva, 205
  - treća, 206
- Maxwellove dvoploče, 17
- međudjelovanja, 307
  - osnovna, 490
- međudjelovanje
  - elektromagnetsko, 298, 301, 303, 488
  - gravitacijsko, 298, 488
  - jako, 298, 488
  - slabo, 298, 306, 488
  - spina i staze, 435
- međui indukcija, 153
- međui nduktivitet, 154
- meki feromagnetski materijali, 167
- metalni vodič u električnome polju, 405
- mezoni, 489
- mikroskop, 264
  - povećanje, 265
- mikrovalovi, 219
- miopija, 262



- mjerenje  $Q/m$ , 141  
 moć razlučivanja rešetke, 286  
 model  
   atoma, 348  
   kapljice, 470  
   ljusaka, 469, 473  
   nezavisnih čestica, 438, 469  
 molekula, 445  
   amonijaka, 405  
   dvoatomna, 452  
   HCl, 456  
   višeatomna, 452  
 molekularne orbitale, 446  
 molekularni ion vodika  $H_2^+$ , 445  
 moment  
   količine gibanja, 310, 312, 346, 411, 414  
   magnetski, 133, 134  
   sile na strujnu petlju, 134  
   tromosti, 339  
   vrtnje elektrona, 430  
 monokristalni silicij, 81  
 monokromatska svjetlost, 225  
 Morseova potencijalna energija, 329, 455  
 Naboj  
   električni, 1  
   elementarni, 2, 62  
   točkasti, 3, 30  
 načelo superpozicije, 8, 11  
 napon  
   električni, 29  
 natrijeva žuta svjetlost, 225  
 neelastično raspršenje, 481  
 neelektrostatska sila, 91  
 neelektrostatsko polje, 91  
 nekonzervativne (disipativne) sile, 321  
 nepolarne molekule, 57  
 neutralna molekula vodika  $H_2$ , 452  
 neutrino, 479, 487  
 neutron, 461  
   termalni, 485  
 Newtonov  
   dalekozor, 267  
   uređaj za interferenciju, 274  
 Newtonovi kolobari, 274  
 nikal-kadmijev-akumulator, 90  
 nit, 229  
 nosioci naboja, 71  
 NTC-otpornici, 84  
 nuklearna  
   fisija, 484  
   nuklearna fuzija, 486  
   nuklearna materija, 463  
   nuklearna reakcija, 304, 318, 480  
   nuklearne sile, 304  
   nuklearni model, 469  
   nukleoni, 304, 489  
   nuklid, 463  
 Objektiv, 265  
 Oerstedov pokus, 113  
 ogib (difrakcija), 277  
   elektrona, 385  
   i interferencija na dvije pukotine, 281  
   i interferencija na optičkoj rešetki, 285  
   na jednoj pukotini, 279  
 Ohmov zakon, 73  
   makroskopski oblik, 80  
   mikroskopski oblik, 80  
 oko, 261  
   akomodacija, 262  
   ametropično, 262  
   dalekovidno, 262  
   emetropično, 262  
   hypermetropia, 262  
   kratkovidno, 262  
   miopija, 262  
 okular, 265  
 okularni instrumenti, 261  
 olovni akumulator, 89  
 omjer  $e/m$ , 139  
 omski  
   otpori, 75, 175  
   otpornici, 73  
 opći zakon gravitacije, 298  
 operatori  
   hermitski, 408  
   kvantnomehantički, 408  
   momenta vrtnje, 410  
 optička  
   (ogibna) rešetka, 282  
   prizma, 247  
   razlika putova, 273  
   vlakna, 246  
 optički  
   aktivne stvari, 292  
   instrumenti, 260  
 orbitala  
   protuvezna, 449  
   vezna, 449  
 oscilator, 211  
   anharmonički, 329  
   harmonički, 400  
   kvantnomehantički, 402  
 osjetljivost oka, 224  
 osnovna međudjelovanja, 297, 307, 490  
 osnovne čestice, 309, 487  
 osnovni zakoni geometrijske optike, 232  
 osvijetljenost, 228  
 otpor, 73  
   induktivni, 175, 176  
   jalovi, 178

- kapacitivni, 175, 179, 180
- neomski, 75
- omski, 75, 175
- reaktivni, 178
- temperaturni koeficijent, 81
- unutrašnji, 89
- otpornici, 83
  - LDR, 84
  - NTC, 84
  - omski, 73
  - paralelni spoj, 87
  - promjenljivi, 84
  - PTC, 84
  - serijski spoj, 86
  - slojni, 84
  - spajanje, 86
  - VDR, 77, 84
  - žičani, 84
- Paraksijalne zrake, 240
- paralelni *RCL*-krug, 185
- paralelni spoj
  - kondenzatora, 52
  - otpornika, 87
- paramagnetici, 162
- paramagnetizam, 163
- Pauliev princip, 438, 488
- Peregrinov pokus, 111
- periodni sustav elemenata, 441
- permanentni
  - magnet, 111
  - magnetski dipolni moment, 163
- permeabilnost, 118, 166
  - vakuum, 118
- permitivnost
  - električna, 303
- petlja
  - histereze, 167
  - (kontura) električne mreže, 93
- Planckov zakon zračenja, 363
- Planckova konstanta, 364
- plazma, 486
- podljuska, 439
- pogreška mjerenja, 389
- pogreške leće, 259
- pojačanje snage, 104
- pokretljivost elektrona, 78
- polarizacija
  - dielektrika, 59
  - pomoću polaroida, 290
  - refleksijom, 289
  - svjetlosti, 288
- polarizator, 290
- polarizirani elektromagnetski val, 288
- polarne molekule, 57
- polarni
  - dijagram jakosti svjetlosti, 226
  - koordinatni sustav, 411
  - sustav, 425
- polje
  - električno, 10, 301
  - elektromagnetsko, 302
  - magnetsko, 114, 301
  - neelektrostatsko, 91
- poluživot (vrijeme poluraspada), 477
- potencijal, 29, 30, 35
  - dipola, 41
  - gradijent, 35
- potencijalna energija, 298, 314, 315, 317, 324, 439, 446
  - efektivna, 345, 347
  - električna, 26
  - električnog dipola, 135
  - magnetskoga dipola, 136
  - Morseova, 329
  - pri vrtnji, 338
  - s dva minimuma, 335
  - Yukawina, 305
- potencijalna
  - prepreka (barijera), 336, 404
  - stepenica, 397
- potencijalne krivulje s dva minimuma, 335
- potenciometri, 84
- povećalo (lupa), 263
- povećanje mikroskopa, 265
- Poyntingov vektor, 217, 271, 355
- pozitron, 479, 487
- pravila za predznake, 243
- predotpor, 97
- primarni članci, 89
- primjena zakona očuvanja, 323
- princip isključenja, 438
- prividna
  - snaga, 191
  - veličina predmeta, 263
- prizma
  - akromatska, 251
  - Amicieva, 251
- projekcijski instrumenti, 261
- prostorna kvantizacija momenta vrtnje, 413
- prostorni kut, 230
- protuvezna orbitala, 449
- provodna struja, 207
- PTC-otpornici, 84
- Q*-faktor, 185, 186
- Q*-vrijednost reakcije, 481
- Rad
  - električne sile, 27, 101
  - i snaga izmjenične struje, 189
  - izlaza, 369

- radijalne valne funkcije, 425  
 radio-valovi, 219  
 radioaktivnost, 476  
 radna snaga, 190  
 raspršenje  
     elastično, 481  
     neelastično, 481  
 ravno zrcalo, 237  
 RC-strujni krug, 99  
 RCL-krug, 180  
     paralelni, 185  
 reakcija  
     kemijska, 318  
     nuklearna, 318  
 reaktivna (jalova) snaga, 190  
 reaktivni otpor, 178  
 realni transformator, 195  
 redovna zraka, 292  
 reducirana  
     masa, 422  
     Planckova konstanta, 393, 420  
 reducirani moment tromosti, 341  
 referentna točka, 324, 345  
 refleksija svjetlosti, 234  
 rekombinacija iona, 106  
 relacije neodređenosti, 389, 404  
 relativistička fizika, 297  
 relativistički izrazi, 383  
 relativnost, 302, 316  
 remanentni magnetizam, 166  
 rendgensko zračenje, 220  
 rešetka  
     optička (ogibna), 282  
     Rowlandova, 282  
 rezolucija, 286  
 rezonance, 488  
 rezonantna frekvencija, 184  
 rezonantni titrajni krug, 211  
 rotacijska stanja dvoatomne molekule, 454  
 rotacijski model, 469  
 Rowlandova rešetka, 282  
 Russell-Saundersovo vezanje, 441  
 Rydbergova konstanta, 378, 421  
  
 Samoindukcija, 150  
 samoinduktivitet, 151  
 Schrödingerova jednačba, 393, 397, 401, 419,  
     422, 446  
 semiempirijska formula mase, 470  
 serijska rezonancija, 183  
 serijski krug, 183  
 serijski spoj  
     kondenzatora, 51  
     otpornika, 86  
 sferna aberacija, 241, 259  
 sferni dioptar, 251  
  
 sferno zrcalo, 239  
 shunt, 96  
 sila  
     centralna, 345, 415  
     centrifugalna, 347  
     Coulombova, 303  
     elektromagnetska, 301  
     gravitacijska, 345  
     između dviju struja, 125  
     Lorentzova, 116, 301  
     na struju u magnetskom polju, 123  
     neelektrostatska, 91  
 sile izmjene, 445  
 silnice, 11, 18, 112  
     magnetske, 113  
 simens, 74  
 simetrija, 309, 488  
 sinkroni generatori, 171  
 sjaj (luminancija) izvora, 229  
 slabo međudjelovanje, 298, 306, 488  
 slobodna čestica, 395  
 slobodni elektroni, 71  
 složena jezgra, 481  
 snaga  
     pojačanje, 104  
     trofazne struje, 201  
 Snellov zakon loma, 236  
 spajanje otpornika, 86  
 spektar  
     drugoga reda, 286  
     elektromagnetskih valova, 218  
     multoga reda, 286  
     prvog reda, 286  
     zračenja crnog tijela, 358  
 spektralna gustoća, 367  
     zračenja, 356  
 spektrometar masa, 141  
 spektrometar s prizmom, 250  
 spektroskopske metode, 458  
 spin, 304, 433  
 spinski kvantni broj, 435  
 spoj trošila  
     u trokut, 201  
     u zvijezdu, 201  
 srednja snaga, 190  
 srednji slobodni put, 78  
 stabilna ravnoteža, 324, 336  
 stabilne čestice, 488  
 stabilni atomi, 439  
 stacionarna stanja, 377, 378  
 statistička fizika, 297  
 Stefan-Boltzmannov zakon, 358, 359  
 stripping, 481  
 struja  
     gustoća, 72, 79  
     istosmjerna, 171



- izmjenična, 171
- jakost, 71
- jalova, 191
- kroz zavojnicu, 155
- pomaka, 207
- provodna, 207
- trofazna, 199
- strujna
  - (paralelna) rezonancija, 185
  - petlja, 133
- strujne mreže, 93
- stupanj korisnosti transformatora, 195
- supravodljivost, 82
- susceptibilnost, 166
  - dijamagnetika, 163
  - električna, 60
- svjetljenje (svjetlosna egzitancija), 231
- svjetlosna efikasnost, 227
- svjetlosni tok, 226
- svjetlost
  - disperzija, 248
  - monokromatska, 225
- svjetlovodi, 246
- svojstvene
  - funkcije, 407, 409
  - vrijednosti, 407, 409
- Tekući kristali LCD, 292
- temperatura
  - kritična, 82
  - skoka, 82
- temperaturni koeficijent otpora, 81
- termalni neutroni, 485
- termistori, 82, 84
- tesla, 115
- Thomsonov eksperiment, 138
- Thomsonova formula, 184, 211
- titrajni krug
  - rezonantni, 211
- tok
  - magnetskoga polja, 131
  - ulančani, 147
- toplinska ravnoteža, 354
- toplinsko zračenje, 353, 354
- torusna zavojnica, 132
- torzijska vaga, 5
- totalna refleksija, 245
- transformator, 194
  - idealni, 194
  - realni, 195
  - stupanj korisnosti, 195
- transformatorske jezgre, 168
- trenutne vrijednosti, 173
- trofazna struja, 199
  - snaga, 201
- trokut snage, 191
- tunel-efekt, 405
- tvorba para elektron-pozitron, 489
- tvrdi magnetski materijali, 167
- Udarni presjek, 482
  - makroskopski, 483
- ulančani tok, 147
- ultraljubičasta katastrofa, 361
- ultraljubičasto zračenje, 220
- unutrašnja rotacija, 341
- unutrašnji
  - napon izvora, 89
  - otpor, 89
- uvjet normiranja, 398
- Valencija, 106
- valentne ljuske, 440
- valentni elektroni, 452
- valna funkcija, 391
  - jednoelektronskog atoma, 435
  - molekule  $H_2^+$ , 447
  - u vodikovu atomu, 425
- valna jednadžba, 212
  - za električno polje, 215
  - za magnetsko polje, 215
- valne funkcije harmoničkog oscilatora, 402
- valni
  - broj, 382, 394, 395
  - paket, 384, 395
- valovi materije, 383
- var (voltamper reaktivni), 191
- varistori, 84
- vat, 191
- vatmetar, 102
- VDR-otpornici, 77, 84
- veber, 132
- vektor
  - $\vec{D}$ , 18
  - električne indukcije, 18
  - električne polarizacije, 59
  - električnog pomaka, 17, 18
  - gustoće električnoga toka, 18
- vektorski dijagram, 174
- vektorsko polje
  - cirkulacija, 127
- veličina atomske jezgre, 463
- vezani sistemi, 323, 445
- vezanje
  - ionskoga tipa, 330
  - kovalentno, 330
- vezna orbitala, 449
- vibracijska stanja dvoatomne molekule, 454
- vidljiva svjetlost, 220, 224
- vidni kut, 263
- višeatomna molekula, 452
- višeelektronski atomi, 438
- vodiči, 3

## vodljivost

- električna, 74
- voltamper, 191
- vrijeme poluraspada (poluživot), 477
- virtložne struje, 150
- virtjna molekule (unutrašnja), 313

## Weissove domene, 164

## Wheatstoneov most, 95

## Wien, 355

- Wienov zakon, 358
- pomicanja, 360

## Yukawina potencijalna energija, 305

## Youngov pokus, 270

Zakočno zračenje, 220  
zakon

- Ampèreov, 127, 208
- Biot-Savartov, 119
- Coulombov, 6, 303
- Curiev, 163
- Gaussov, 20
- Kirchhoffov, 355
- Malusov, 290
- nezavisnosti svjetlosnih snopova, 233
- očuvanja energije, 314, 376
- očuvanja količine gibanja, 376
- Ohmov, 73
- pravocrtna širenja svjetlosti, 233
- protjecanja, 127

- radioaktivnoga raspada, 476
- refleksije (odbijanja) svjetlosti, 233
- refrakcije (loma) svjetlosti, 233
- Stefan-Boltzmannov, 358, 359
- Wienov, 358

## zakoni očuvanja, 309

## zamah, 414

## zasjenjenje jezgre, 439

## zavojnica

## torusna, 132

## Zeemanov efekt, 431

## Zemljin magnetizam, 112

## Zenerova dioda, 77

## zavođenje

## elektromagnetsko, 432

## rendgensko, 220

## ultralubičasto, 220

## zakočno, 220

## zrake

## kanalne, 137

## katodne, 137

## zrcalo (ogledalo), 237

## konkavno, 239

## konveksno, 239

## ravno, 237

## sferno, 239

## Žarišna daljina, 255

## žarište, 255

## sfernog zrcala, 241

## živine ćelije, 89

## MEHANICA I FLUIDI

1) Odredite kin. energiju zavođenja poluge i zavođenje je  $6,37 \cdot 10^6$  m gustoća a srednja udaljenost zavođenja fukca  $1,5 \cdot 10^4$  m  
 $m = \rho \cdot V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = 6,06 \cdot 10^{24}$  kg  $r = \frac{\rho}{E} = \frac{2R\pi}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 29870,92 \frac{m}{s}$   $E_k = \frac{mv^2}{2} = 2,7 \cdot 10^{32}$  J

2) U posudi paraboličnog oblika  $z = x^2 + y^2$  isto do dubine 1 m sli uo stjenk

$F_H = \frac{\rho g h}{2} = 4905$  N  $F_V = (\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2) \rho g = 13.080$  N  
 $F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = 13969,45$  N  $tg \alpha = \frac{F_V}{F_H}$   $\alpha = 69^\circ 44'$

3) Mteri Plo prihvatičeni su o niti koo na niti taloda jo ut udaljena  $d = 250$   
 $\beta = 58^\circ$   $P = 15$  kN Nodi a) ugrotosh AB, BC, CD b) mozu utoga Q

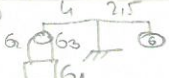
$\sum F_y = 0$   $F_{AB} \sin \alpha = P$   $F_{AB} = 35149$  N  
 $\sum F_x = 0$   $F_{BC} = F_{AB} \cos \alpha$   $F_{BC} = 32,1676$  N  
 $\sum F_x = 0$   $F_{BC} = F_{CD} \cos \beta$   $F_{CD} = 60,77$  N  $m_Q = \frac{Q}{g} = 5,24$  kg  
 $\sum F_y = 0$   $F_{CD} \sin \beta = Q$   $Q = 51,49$  N

4) Kuglica mase m udaljena je na neelastičnu nit od navedenog pu  
 od ravni položaja do zadržava nit na vertikalnom puštimo noćto no  
 potost N loo fukciju od  $\alpha$ .

$h = l - l \cos \alpha$   $E_k - E_{k1} = \sum W_{12}$   $\frac{mv^2}{2} = mgh$   $v = \sqrt{2gh}$   
 $F_{TN} = m \cdot \frac{v^2}{l} = 2mg(1 - \cos \alpha)$   $\sum x = 0$   $T = F_{TN} + mg \cos \alpha = 2mg(1 - \cos \alpha) + mg \cos \alpha$   
 $T = mg(2 - \cos \alpha)$

5) Eolice mase 2 kg udala ops. meletično po čavlu brzinom  $v = 10 \frac{m}{s}$  i za  
 bija ga  $0,5$  cm dublje. Kojom se pilom dno se postaje.  
 $m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2$   $2 \cdot 100 = 2 \cdot 10^5$  N

5) Na kgg dubini ispod površine zanje 10 m iznosi  $g' = 0.3g$   
 $g' = g \left( \frac{R^2}{R^2 - h^2} \right)^2$   $0.3g = g \left( \frac{6400}{6400 - h^2} \right)^2$   $h = -5284 \text{ km}$  iznad zanje

7)   $G_1 = 180N$   $G_2 = 60N$   $G_3 = 45N$   $G = ?$   
 $G \cdot 2.5 = (G_1 + G_2 + G_3) \cdot 4$   $G = 450N$

8) Iopta mase 1kg i radijusa 15cm monimno u H<sub>2</sub>O do dubine 1m  
 najtito visinu do toga jo Ioptica odskočila.

$h' = 0$   $U = R \cdot V \cdot g$   $G = mg$   $E_p = E_p'$   $(U - G)h = mgh'$   
 $mgh + R \cdot V \cdot G \cdot h = mgh'$

## 6 Literatura

$h' = 1313 \text{ m}$

- M. Alonso, E. J. Finn, *Fundamental University Physics, I-III*, Addison - Wesley Publ. Comp., Reading, Mass., 1969.
- A. Beiser, *Concepts of Modern Physics*, McGraw Hill, 1988.
- A. Beiser, *Modern Technical Physics*, Cummings Publ. Comp., 1966.
- The Berkeley Physics Course, I-V*, McGraw Hill, New York, 1967 (I, II, IV. dio - prijevod, Tehnička knjiga, Zagreb, 1988)
- D. M. Burns, S. G. G. McDonald, *Fizika za biologe i medicinare*, Školska knjiga, Zagreb, 1980.
- N. Cindro, *Fizika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.
- N. Cindro, P. Colić, *Fizika - Titranje, kvanti, struktura tvari, atomska jezgra*, II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1988.
- P. Dobrinski, G. K. Krakau, A. Vogel, *Physik für Ingenieure*, Teubner, Stuttgart, 1970.
- K. Dransfeld, *Physik II*, Oldenburg, München, 1974.
- R. Feynman, *Osobitosti fizikalnih zakona*, Školska knjiga, Zagreb, 1977.
- R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, I - III*, Addison - Wesley Publ. Comp., 1966.
- S. Flüge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer - Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.
- W. H. Flygare, *Molecular Structure and Dynamics, I - II*, Prentice - Hall, inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.
- G. D. Freier, *University Physics*, Meredith Publ. Comp., New York, 1965.
- R. Gautreau, W. Savin, *Modern Physics*, Schaum's Outline Series, McGraw Hill Book Co., 1978.
- G. Grimschl, *Lehrbuch der Physik II*, Teubner, Leipzig, 1963.
- K. Hahn, *Fizika II*, Naučna knjiga, Beograd, 1962.
- D. Halliday, R. Resnick, *Fundamentals of Physics*, J. Wiley and Sons, New York, 1970.
- A. Hammer, *Physik*, Oberstufe, Oldenburg, München,
- V. Henč-Bartolić, P. Kulišić, *Valovi i optika*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
- B. M. Javorski, A. A. Pinski, *Osnovi fiziki I - II*, Nauka, Moskva, 1981.
- T. Jelaković, *Uvod u elektroniku i elektrotehniku*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.
- Z. Kaminski, R. A. Gilas, *Physics for Technical Students*, London, Iliffe Books Ltd., 1968.
- V. Knapp, P. Colić, *Uvod u električna i magnetska svojstva materijala*, Školska knjiga, Zg., 1990.
- W. Körner i dr., *Physik - Fundament der Technik*, VEB Fachbuch Verlag, Leipzig, 1973.
- P. Kulišić, *Mechanika i toplina*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- D. P. Leach, *Basic Electric Circuits*, J. Wiley and Sons, New York, 1972.
- H. Lindner, *Physik für Ingenieure*, Vieweg, Braunschweig, 1973.
- V. Lopašić, *Predavanja iz fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 1977.
- V. Paar, *Atomi, molekule, poluvodiči, supravodljivost*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
- Particle Data Group, *Review of Particle Properties*, Phys. Lett. B239, 1-516 (1990)
- V. Pinter, *Osnove elektrotehnike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.
- R. Resnick, *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory*, J. Wiley and Sons, New York, 1972.
- I. V. Saveljev, *Kurs obščej fiziki*, Nauka, Moskva, 1977.
- F. W. Sears, M. W. Zemansky, *University Physics*, Addison - Wesley Publ. Comp., Reading, Mass., 1967.
- J. Strnad, *Mala kvantna fizika*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
- H. A. Stuart, G. Klages, *Kurzeslehrbuch der Physik*, Springer - Verlag, Berlin, 1979.
- I. Supek, *Teorijska fizika i struktura materije, I - II*, Školska knjiga, Zagreb, 1976.
- V. M. Vucić, D. M. Ivanović, *Fizika I - III*, Naučna knjiga, Beograd, 1987.
- R. T. Weidner, R. L. Sells, *Elementary Classical Physics*, Allyn and Bacon, Boston, 1967.



3) N suply kugla  $R = 1m$  iz palovog  $M$  kgom nepokretna ovisna kugla  
 zatvara kut  $\frac{\pi}{2}$  s chomicom pita se mala kugla odajusa  $r = R \sin \theta$   
 ko kugla na bazi pichitavaya nadi max ovisna mala kugla  
 $h = R - \frac{R}{2}$   $ugh = \frac{uv^2}{2} + \frac{1}{2}w^2$   $MgR(1 - \frac{1}{2}) = \frac{Mv^2}{2} + \frac{2Mv^2}{5}$   $\frac{v^2}{2} \cdot \frac{1}{2}$   
 $gR(1 - \frac{1}{2}) = v^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{5})$   $v = 2,388 \frac{m}{s}$

IA 1 1.0079 1  
 20.268 14.025 0.0899\*  
 1s<sup>1</sup>  
 Vodik  
 H  
 2) Preko kolotura k je pichitavaya mit na kugu su ovisni  
 m<sub>1</sub> = 2kg m<sub>2</sub> = 7kg Nit pichitavaya kugla pichitavaya 100 na x + 1 = 0,5  
 Nadi silu kugu glistrija  
 Mgomi nadi M, silu tiyaya  
 1) pichitavaya  
 IIA 3 6.941 1  
 1615 453.7 0.53  
 1s<sup>2</sup>2s<sup>1</sup>  
 Litij  
 Li  
 4 9.0122 2  
 2745 1560 1.85  
 1s<sup>2</sup>2s<sup>2</sup>  
 Berilij  
 Be  
 11 22.9898 1  
 1156 371.0 0.97  
 [Ne]3s<sup>1</sup>  
 Natrij  
 Na  
 12 24.3050 2  
 1363 922 1.74  
 [Ne]3s<sup>2</sup>  
 Magnezij  
 Mg

# PERIODNI SUSTAV ELE

III A IVA VA VIA VIIA VIIIA

24 51.996 6,3,2  
 2335 2130 7.19  
 [Ar]3d<sup>5</sup>4s<sup>1</sup>  
 Krom  
 Cr  
 Redni broj  
 Vreliste (K)  
 Talište (K)  
 Gustoća (g/cm<sup>3</sup>)  
 Relativna atomska masa  
 Oksidacijska stanja  
 Simbol  
 Elektronska konfiguracija  
 Naziv

23 50.9415 5,4,3,2  
 3682 2175 5.8  
 [Ar]3d<sup>3</sup>4s<sup>2</sup>  
 Vanadij  
 V  
 22 47.88 4,3  
 3562 1943 4.50  
 [Ar]3d<sup>2</sup>4s<sup>2</sup>  
 Titan  
 Ti  
 21 44.9559 3  
 3104 1812 3.0  
 [Ar]3d<sup>1</sup>4s<sup>2</sup>  
 Skandij  
 Sc  
 20 40.078 2  
 1757 1112 1.55  
 [Ar]4s<sup>2</sup>  
 Kalcij  
 Ca  
 19 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 18 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 17 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 16 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 15 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 14 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 13 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 12 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 11 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 10 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 9 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 8 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 7 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 6 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 5 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 4 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 3 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 2 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K  
 1 39.0983 1  
 1032 336.35 0.86  
 [Ar]4s<sup>1</sup>  
 Kalij  
 K

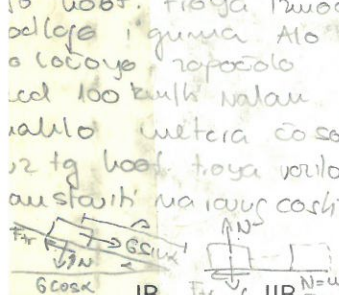
| 19                                                                       | 20                                                                    | 21                                                                                        | 22                                                                                                     | 23                                                                                                       | 24                                                                                                                    | 25                                                                                                                    | 26                                                                                                                    | 27                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 39.0983<br>1032<br>336.35<br>0.86<br>[Ar]4s <sup>1</sup><br>Kalij<br>K   | 40.078<br>1757<br>1112<br>1.55<br>[Ar]4s <sup>2</sup><br>Kalcij<br>Ca | 44.9559<br>3104<br>1812<br>3.0<br>[Ar]3d <sup>1</sup> 4s <sup>2</sup><br>Skandij<br>Sc    | 47.88<br>3562<br>1943<br>4.50<br>[Ar]3d <sup>2</sup> 4s <sup>2</sup><br>Titan<br>Ti                    | 50.9415<br>3682<br>2175<br>5.8<br>[Ar]3d <sup>3</sup> 4s <sup>2</sup><br>Vanadij<br>V                    | 51.9961<br>2945<br>2130<br>7.19<br>[Ar]3d <sup>5</sup> 4s <sup>1</sup><br>Krom<br>Cr                                  | 54.9381<br>2335<br>1517<br>7.43<br>[Ar]3d <sup>5</sup> 4s <sup>2</sup><br>Mangan<br>Mn                                | 55.847<br>3135<br>1809<br>7.86<br>[Ar]3d <sup>6</sup> 4s <sup>2</sup><br>Željezo<br>Fe                                | 58.93<br>3201<br>1768<br>8.90<br>[Ar]3d <sup>7</sup> 4s <sup>2</sup><br>Kobalt<br>Co                                  |
| 37                                                                       | 38                                                                    | 39                                                                                        | 40                                                                                                     | 41                                                                                                       | 42                                                                                                                    | 43                                                                                                                    | 44                                                                                                                    | 45                                                                                                                    |
| 85.4678<br>961<br>312.64<br>1.53<br>[Kr]5s <sup>1</sup><br>Rubidij<br>Rb | 87.62<br>1650<br>1041<br>2.6<br>[Kr]5s <sup>2</sup><br>Stroncij<br>Sr | 88.9059<br>3611<br>1799<br>4.5<br>[Kr]4d <sup>1</sup> 5s <sup>2</sup><br>Itrij<br>Y       | 91.224<br>4682<br>2125<br>6.49<br>[Kr]4d <sup>2</sup> 5s <sup>2</sup><br>Cirkonij<br>Zr                | 92.9064<br>5017<br>2740<br>8.55<br>[Kr]4d <sup>4</sup> 5s <sup>1</sup><br>Niobij<br>Nb                   | 95.94<br>4912<br>2890<br>10.2<br>[Kr]4d <sup>5</sup> 5s <sup>1</sup><br>Molibden<br>Mo                                | (98)<br>4538<br>2473<br>11.5<br>[Kr]4d <sup>6</sup> 5s <sup>1</sup><br>Tehnecij<br>Tc                                 | 101.07<br>4423<br>2523<br>12.2<br>[Kr]4d <sup>7</sup> 5s <sup>1</sup><br>Rutenij<br>Ru                                | 102.90<br>3970<br>2236<br>12.4<br>[Kr]4d <sup>8</sup> 5s <sup>1</sup><br>Rodij<br>Rh                                  |
| 55                                                                       | 56                                                                    | 57                                                                                        | 72                                                                                                     | 73                                                                                                       | 74                                                                                                                    | 75                                                                                                                    | 76                                                                                                                    | 77                                                                                                                    |
| 132.9054<br>944<br>301.55<br>1.87<br>[Xe]6s <sup>1</sup><br>Cezij<br>Cs  | 137.327<br>2171<br>1002<br>3.5<br>[Xe]6s <sup>2</sup><br>Barij<br>Ba  | 138.9055<br>3730<br>1193<br>6.7<br>[Xe]5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup><br>Lantan<br>La    | 178.49<br>4876<br>2500<br>13.1<br>[Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>2</sup> 6s <sup>2</sup><br>Hafnij<br>Hf | 180.9479<br>5731<br>3287<br>16.6<br>[Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>3</sup> 6s <sup>2</sup><br>Tantal<br>Ta | 183.85<br>5828<br>3680<br>19.3<br>[Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>4</sup> 6s <sup>2</sup><br>Volfram<br>W                | 186.207<br>5869<br>3453<br>21.0<br>[Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>5</sup> 6s <sup>2</sup><br>Renij<br>Re                | 190.2<br>5285<br>3300<br>22.4<br>[Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>6</sup> 6s <sup>2</sup><br>Osmij<br>Os                  | 192<br>4701<br>2716<br>22.5<br>[Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>7</sup><br>Iridij<br>Ir                                   |
| 87                                                                       | 88                                                                    | 89                                                                                        | 104                                                                                                    | 105                                                                                                      | 106                                                                                                                   | 107                                                                                                                   | 108                                                                                                                   | 109                                                                                                                   |
| (223)<br>950<br>300<br>[Rn]7s <sup>1</sup><br>Francij<br>Fr              | 226.0254<br>1809<br>973<br>5<br>[Rn]7s <sup>2</sup><br>Radij<br>Ra    | 227.0278<br>3473<br>1323<br>10.07<br>[Rn]6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup><br>Aktinij<br>Ac | (261)<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>2</sup> 7s <sup>2</sup><br>Raderfordij<br>Rf                     | (262)<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>3</sup> 7s <sup>2</sup><br>Hanijt<br>Ha                            | (263)<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>4</sup> 7s <sup>2</sup><br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>4</sup> 7s <sup>2</sup> | (262)<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>5</sup> 7s <sup>2</sup><br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>5</sup> 7s <sup>2</sup> | (265)<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>6</sup> 7s <sup>2</sup><br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>6</sup> 7s <sup>2</sup> | (264)<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>7</sup> 7s <sup>2</sup><br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>7</sup> 7s <sup>2</sup> |

| 58                                                                                                      | 59                                                                                                         | 60                                                                                                     | 61                                                                                                      | 62                                                                                                     | 63                                                                                                      | 64                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 140.115<br>3699<br>1071<br>6.78<br>[Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup><br>Cer<br>Ce    | 140.9077<br>3785<br>1204<br>6.77<br>[Xe]4f <sup>3</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup><br>Prazeodim<br>Pr | 144.24<br>3341<br>1289<br>7.00<br>[Xe]4f <sup>4</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup><br>Neodim<br>Nd  | (145)<br>3785<br>1204<br>6.475<br>[Xe]4f <sup>5</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup><br>Promecij<br>Pm | 150.36<br>2064<br>1345<br>7.54<br>[Xe]4f <sup>6</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup><br>Samarij<br>Sm | 151.965<br>1870<br>1090<br>5.26<br>[Xe]4f <sup>7</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup><br>Europij<br>Eu | 157.25<br>3539<br>1585<br>7.89<br>[Xe]4f <sup>7</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup><br>Gadolinij<br>Gd |
| 90                                                                                                      | 91                                                                                                         | 92                                                                                                     | 93                                                                                                      | 94                                                                                                     | 95                                                                                                      | 96                                                                                                       |
| 232.0381<br>5061<br>2028<br>11.7<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>2</sup> 7s <sup>2</sup><br>Torij<br>Th | 231.0359<br>15.4<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup><br>Protaktinij<br>Pa              | 238.0289<br>4407<br>1405<br>18.90<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup><br>Uran<br>U | 237.0482<br>910<br>20.4<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup><br>Neptunij<br>Np       | (244)<br>3503<br>913<br>19.8<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>0</sup> 7s <sup>2</sup><br>Plutonij<br>Pu | (243)<br>2880<br>1268<br>13.6<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>0</sup> 7s <sup>2</sup><br>Americij<br>Am | (244)<br>1340<br>13.511<br>[Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>0</sup> 7s <sup>2</sup><br>Kuri<br>Cm            |



b) Gipska kugla promjera  $R=30\text{cm}$ , maza u središtu kugle odnosi kut  $\varphi$  prema horizontalu. Ispojnice kugala i središte kugle gođa se sa osi  $\omega$ .  
 = t.j. kuglica inuter fuske aho gipska rotira kutuom  $\omega$  u odnosu na os  $\omega$ .  
 $\omega = 10 \pi \text{ s}^{-1}$   $r = R \sin \varphi$   $\tan \varphi = \frac{F_i}{F_g} = \frac{m \omega^2 R \sin \varphi}{m g} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$   
 $F_i = m \omega^2 r$   $\cos \varphi = \frac{g}{\omega^2 R} = \frac{9,81}{100 \pi^2 / 0,3} \Rightarrow \varphi = 88,101^\circ = 88^\circ 6' 4''$

c) Costa ima nagib od  $10^\circ$  prema horizontalu. Aho ja zaustavi put volje kola kod ugla koooya 2x  
**NATA** uo ugo približno koooya po ang cost kaku.  
 10 koot. toya izmote  
 o koooya zapaolo  
 ed 100 kmh nalan  
 alilo uetara ooo  
 2 tg koot toya volio  
 austavik na ravu cost



VIII

|                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2                                                                     | 4.0026    |
| 4.215                                                                 | <b>He</b> |
| 0.95                                                                  |           |
| 0.1787*                                                               |           |
| 1s <sup>2</sup>                                                       |           |
| Helij                                                                 |           |
| 10                                                                    | 20.1797   |
| 27.096                                                                | <b>Ne</b> |
| 24.553                                                                |           |
| 0.901*                                                                |           |
| 1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> p <sup>6</sup>                        |           |
| Neon                                                                  |           |
| 18                                                                    | 39.948    |
| 87.30                                                                 | <b>Ar</b> |
| 83.81                                                                 |           |
| 1.784*                                                                |           |
| [Ne] 3s <sup>2</sup> p <sup>6</sup>                                   |           |
| Argon                                                                 |           |
| 36                                                                    | 83.80     |
| 119.80                                                                | <b>Kr</b> |
| 115.78                                                                |           |
| 3.74*                                                                 |           |
| [Ar] 3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> p <sup>6</sup>                  |           |
| Krypton                                                               |           |
| 54                                                                    | 131.29    |
| 165.03                                                                | <b>Xe</b> |
| 161.36                                                                |           |
| 5.89*                                                                 |           |
| [Kr] 4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> p <sup>6</sup>                  |           |
| Xenon                                                                 |           |
| 86                                                                    | (222)     |
| 211                                                                   | <b>Rn</b> |
| 202                                                                   |           |
| 9.91*                                                                 |           |
| [Xe] 4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> p <sup>6</sup> |           |
| Radon                                                                 |           |

|                                                                                       |                                                                                                                               |                                                                                                                           |                                                                                                                                          |                                                                                                                                         |                                                                                                                                             |                                                                                                                                        |                                                                                                                                     |                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 58.69<br>2.3<br><b>Ni</b><br>3d <sup>8</sup> 4s <sup>2</sup><br>Kal                   | 29 63.546<br>2.1<br><b>Cu</b><br>[Ar] 3d <sup>10</sup> 4s <sup>1</sup><br>Bakar                                               | 30 65.39<br>2<br><b>Zn</b><br>1180<br>692.73<br>7.14<br>[Ar] 3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup><br>Cink                     | 31 69.723<br>3<br><b>Ga</b><br>2478<br>302.90<br>5.91<br>[Ar] 3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> p <sup>1</sup><br>Galij                   | 32 72.61<br>4<br><b>Ge</b><br>3107<br>1210.4<br>5.32<br>[Ar] 3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> p <sup>2</sup><br>Germanij                | 33 74.9216<br>±3.5<br><b>As</b><br>876<br>1081<br>5.72<br>[Ar] 3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> p <sup>3</sup><br>Arsen                     | 34 78.96<br>-2.4,6<br><b>Se</b><br>958<br>494<br>4.80<br>[Ar] 3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> p <sup>4</sup><br>Selen                 | 35 79.904<br>±1.5<br><b>Br</b><br>332.25<br>265.90<br>3.12<br>[Ar] 3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> p <sup>5</sup><br>Brom          | 36 83.80<br>±1.5<br><b>Kr</b><br>119.80<br>115.78<br>3.74*<br>[Ar] 3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> p <sup>6</sup><br>Krypton |
| 106.42<br>2.4<br><b>Pd</b><br>4d <sup>10</sup><br>ladij                               | 47 107.8682<br>1<br><b>Ag</b><br>2436<br>1234<br>10.5<br>[Kr] 4d <sup>10</sup> 5s <sup>1</sup><br>Srebro                      | 48 112.411<br>2<br><b>Cd</b><br>1040<br>594.18<br>8.65<br>[Kr] 4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup><br>Kadmij                 | 49 114.82<br>3<br><b>In</b><br>2346<br>429.76<br>7.31<br>[Kr] 4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> p <sup>1</sup><br>Indij                   | 50 118.710<br>4.2<br><b>Sn</b><br>2876<br>505.06<br>7.30<br>[Kr] 4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> p <sup>2</sup><br>Kositar             | 51 121.75<br>±3.5<br><b>Sb</b><br>1860<br>904<br>6.68<br>[Kr] 4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> p <sup>3</sup><br>Antimon                    | 52 127.60<br>-2.4,6<br><b>Te</b><br>1261<br>722.65<br>6.24<br>[Kr] 4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> p <sup>4</sup><br>Telur            | 53 126.9045<br>±1.5,7<br><b>I</b><br>458.4<br>386.7<br>4.92<br>[Kr] 4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> p <sup>5</sup><br>Jod          | 54 131.29<br>165.03<br>161.36<br>5.89*<br>[Kr] 4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> p <sup>6</sup><br>Ksenon                      |
| 195.08<br>2.4<br><b>Pt</b><br>4d <sup>9</sup> 5d <sup>9</sup> 6s <sup>1</sup><br>tina | 79 196.9665<br>3.1<br><b>Au</b><br>3130<br>1937.58<br>19.3<br>[Xe] 4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>1</sup><br>Zlato | 80 200.59<br>2.1<br><b>Hg</b><br>630<br>234.28<br>13.53<br>[Xe] 4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup><br>Živa | 81 204.3833<br>3.1<br><b>Tl</b><br>1746<br>577<br>11.85<br>[Xe] 4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> p <sup>1</sup><br>Tali | 82 207.2<br>4.2<br><b>Pb</b><br>2023<br>600.6<br>11.4<br>[Xe] 4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> p <sup>2</sup><br>Olovo | 83 208.9804<br>3.5<br><b>Bi</b><br>1837<br>544.52<br>9.8<br>[Xe] 4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> p <sup>3</sup><br>Bismut | 84 (209)<br>4.2<br><b>Po</b><br>1235<br>527<br>9.4<br>[Xe] 4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> p <sup>4</sup><br>Polonij | 85 (210)<br>±1.3,5,7<br><b>At</b><br>610<br>575<br>[Xe] 4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> p <sup>5</sup><br>Astatin | 86 (222)<br>211<br>202<br>9.91*<br>[Xe] 4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> p <sup>6</sup><br>Radon             |

$N = 6 \cos \alpha$   $F_{tr} = f \cdot \mu g \cos \alpha = \frac{m \omega^2 r}{2} = (\mu g \sin \alpha - f \cdot \mu g \cos \alpha) \cdot 2a$  (\*) Približne vrijednosti  
 $\frac{m \omega^2 r}{2} = -f \cdot \mu g \sin \alpha + 2 \mu g \sin \alpha - f \cdot \mu g \cos \alpha \cdot 2a + f \cdot \mu g \cos \alpha \cdot 2a = 0$   $2 \sin \alpha - 2 f \cos \alpha + f = 0$   
 $d(2 \cos \alpha - 1) = 2 \sin \alpha$   $f = \frac{2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - 1} = 0,358$

|                                                                                                                         |                                                                                                                           |                                                                                                                          |                                                                                                                       |                                                                                                                           |                                                                                                                           |                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 65 158.9253<br>3.4<br><b>Tb</b><br>496<br>630<br>1.27<br>[Xe] 4f <sup>9</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup><br>Terbij | 66 162.50<br>3<br><b>Dy</b><br>2835<br>1682<br>8.54<br>[Xe] 4f <sup>10</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup><br>Disprozij | 67 164.9303<br>3<br><b>Ho</b><br>2968<br>1743<br>8.80<br>[Xe] 4f <sup>11</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup><br>Holmij | 68 167.26<br>3<br><b>Er</b><br>3136<br>1795<br>9.05<br>[Xe] 4f <sup>12</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup><br>Erbij | 69 168.9342<br>3.2<br><b>Tm</b><br>2220<br>1818<br>9.33<br>[Xe] 4f <sup>13</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup><br>Tulij | 70 173.04<br>3.2<br><b>Yb</b><br>1467<br>1097<br>6.98<br>[Xe] 4f <sup>14</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup><br>Iterbij | 71 174.967<br>3<br><b>Lu</b><br>3668<br>1936<br>9.84<br>[Xe] 4f <sup>14</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup><br>Lutecij |
| 97 (247)<br>4.3<br><b>Bk</b><br>[Rn] 5f <sup>6</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup><br>Berkelij                        | 98 (251)<br>3<br><b>Cf</b><br>900<br>[Rn] 5f <sup>10</sup> 6d <sup>0</sup> 7s <sup>2</sup><br>Kalifornij                  | 99 (252)<br><b>Es</b><br>[Rn] 5f <sup>11</sup> 6d <sup>0</sup> 7s <sup>2</sup><br>Ajnštajnij                             | 100 (257)<br><b>Fm</b><br>[Rn] 5f <sup>12</sup> 6d <sup>0</sup> 7s <sup>2</sup><br>Fermij                             | 101 (258)<br><b>Md</b><br>[Rn] 5f <sup>13</sup> 6d <sup>0</sup> 7s <sup>2</sup><br>Mendeljevij                            | 102 (259)<br><b>No</b><br>[Rn] 5f <sup>14</sup> 6d <sup>0</sup> 7s <sup>2</sup><br>Nobelij                                | 103 (260)<br><b>Lr</b><br>[Rn] 5f <sup>14</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup><br>Lorensij                              |