

Ivan Flegar

Uloga matematičkih modela u projektiranju električkih uređaja

Sažetak: Matematički modeli osnovno su sredstvo projektiranja električkih uređaja u nadvladavanju složenosti objekata koje projektiraju. Korisnost matematičkog modela proizlazi iz činjenice da je formuliran u okviru nekog, za postavljeno pitanje o projektiranom objektu, relevantnog interpretiranog formalnog sustava. Time projektantu postaju dostupni mnogobrojni matematički teoremi, kao i analitičke i numeričke metode proračuna. Opisana je jedna od formalnih sustava elektrotehnike – teorija električkih mreža – koji omogućuje izgradnju električkih matematičkih modela i sustavnu formulaciju jednadžbi mreže električkih uređaja u svim situacijama kad se uređaj može promatrati kao električki malena mreža.

Ključne riječi: električki model, jednadžbe mreže, matematički model, teorija električkih mreža

Uvod

Osnovna zadaća inženjera jest rješavanje problema koji se odnose na projektiranje, proizvodnju te primjenu svrsishodnih i opredmećenih proizvoda koji zadovoljavaju neke specifične potrebe ili očekivanja korisnika.

Polazna točka svih djelatnosti u stvaranju proizvoda svrsishodnog korisniku jest projektiranje proizvoda. U općem slučaju, tijekom projektiranja treba identificirati potrebe ili očekivanja korisnika koje projektirani proizvod treba zadovoljiti, provesti usporedbenu analizu sličnih proizvoda na tržištu, identificirati sva relevantna zakonska, ekonomska, kadrovska i druga ograničenja te utvrditi

kriterije za odabir rješenja. Na osnovi rezultata tih analiza stvara se specifikacija željenih tehničkih karakteristika proizvoda. Na putu prema izradi tehničke dokumentacije proizvoda kojom projekt završava treba još provesti analizu mogućih rješenja, odabrati rješenje u sklopu tzv. idejnog projekta te na kraju i izraditi projekt proizvoda.

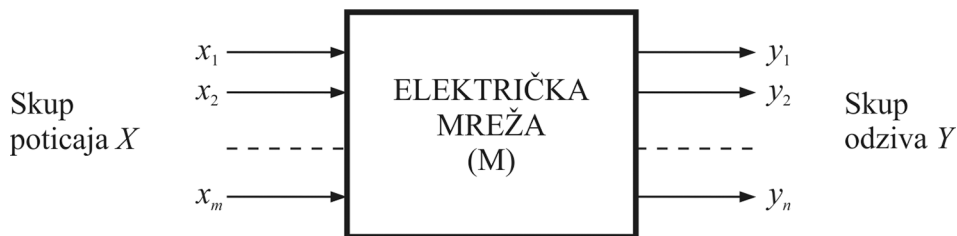
U stvarnosti će, ovisno o konkretnom projektu, neke od tih djelatnosti obaviti stručne službe proizvođača, naručitelja ili korisnika proizvoda. Katkad projektanti dobivaju od naručitelja projekta potpune projektne zahtjeve u obliku specifikacije tehničkih karakteristika proizvoda ili čak i prijedlog idejnog rješenja. Jedina faza projektiranja kojom će se projektanti baviti u svakom slučaju jest izrada projekta proizvoda. U toj se fazi projektiranja, primjerice kod projektiranja električkih uređaja, projektanti bave u prvom redu električkim, toplinskim i mehaničkim proračunom komponenata i sklopova uređaja te uređajem u cjelini.

Proračun bilo kojeg objekta (komponente, sklopa, uređaja, sustava, procesa) sastoji se od skupa matematičkih metoda kojima se na osnovi odabranih matematičkih modela objekta – električkog, toplinskog i mehaničkog modela – dobivaju vrijednosti svih varijabli potrebnih za njegovo dimenzioniranje. Ispravnost proračuna pretpostavka je ispravnog dimenzioniranja projektiranog objekta, a ona pak ovisi o ispravno odabranim matematičkim modelima objekta. Zbog toga je za projektanta bitno da zna ne samo što je matematički model, koje su značajke valjanog matematičkog modela te kako odabrati najbolji matematički model projektiranog objekta nego i da zna pretpostavke pod kojima su matematički modeli projektiranog objekta definirani te kako vrednovati rezultate proračuna. U nastavku teksta na ta će se pitanja pokušati odgovoriti razmatrajući samo električke modele električkih uređaja izgrađene unutar jednog od formalnih sustava elektrotehnike – teorije električkih mreža.

Sinteza i analiza električkih mreža

Svaki električki uređaj sadrži barem jednu električku mrežu kojom se trebaju zadovoljiti željena električka svojstva uređaja. Zbog toga je poznavanje metoda određivanja struktura i svojstava električkih mreža preduvjet korektnog proračuna električkih, ali i toplinskih i mehaničkih svojstava projektiranog uređaja.

Uobičajeno se električka mreža promatra kao sustav koji se sastoji od električkih komponenata (naprava) spojenih tako da se za narinuti skup poticaja X , karakteriziran varijablama $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$, dobije skup odziva Y , karakteriziran varijablama $y_j (j = 1, 2, \dots, n)$, slika 1. Pritom se pod sustavom smatra svaki skup različitih, međusobno djelujućih objekata s pomoću kojih se mogu



Sl. 1.: Električka mreža promatrana kao sustav

ostvariti neke funkcije neostvarive s pomoću pojedinačnih objekata od kojih je taj sustav sastavljen. Pod električkom komponentom smatra se svaki objekt svrshodno izrađen i funkcionalno nerastavljiv na sastavne dijelove. Tipični primjeri komponenata su kondenzator, otpornik i dioda.

Električke mreže grade se da bi se ostvarivši željeni odziv riješio neki elektrotehnički problem. Primjerice, da se električna energija pretvori u koji drugi oblik energije kod korisnika (toplinsku, mehaničku i dr.), da se TV signal kod korisnika preoblikuje u sliku i slično. No, kako ostvariti (električku) mrežu kojom bi se riješio postavljeni problem? Drugim riječima, kako za zadani skup poticaja X i željeni skup odziva Y pronaći mrežu M tako da skup poticaja X djelujući na mrežu M proizvede skup odziva Y . Taj se postupak pronalaženja mreže M naziva sinteza mreže.

Do rješenja postavljenog problema, tj. sinteze tražene mreže, načelno se uvijek može doći iterativnim procesom – metodom pokušaja i pogreške. U prvom se koraku, na osnovi iskustva, uvida u slične uređaje i intuicije, odabere jedna kandidatska mreža M_1 , fizički se realizira i za zadani se skup poticaja X narinutih na tu mrežu mjerenjima i opažanjima dobije skup odziva Y_1 . Ako se u prvom koraku ne dobije željeni skup odziva, postupak se ponavlja s promijenjenom mrežom M_2 , i tako redom dok se nakon N koraka (iteracija) ne dobije tehnički prihvatljivo odstupanje između dobivenog skupa odziva Y_N i željenog skupa odziva Y . Postupak kojim se u k -toj iteraciji za zadani skup poticaja X i odabranu, dakle, poznatu mrežu M_k dobije skup odziva Y_k naziva se analiza mreže.

Sinteza mreže sastoji se, prema tome, u višekratnom ponavljanju analize mreže. Očigledno, tako provedena sinteza mreže troši ljudske i materijalne resurse kao i vrijeme. Neizbježna je samo onda ako se o rješenju postavljenog problema zna vrlo malo. U svim ostalim slučajevima, a to je u praksi najčešći slučaj, sinteza mreže ne provodi se fizičkom izgradnjom i ispitivanjima kandidatskih mreža, nego izgradnjom odgovarajućih matematičkih električkih modela. Višekratnim ponavljanjem analize matematičkih električkih modela kandidatskih mreža, što je neusporedivo brže i jeftinije od prethodnog postupka,

dobiva se (matematički) električki model željene mreže. Tek na osnovi rezultata analize električkog modela pristupa se fizičkoj izgradnji željene mreže.

Zbog toga se u projektantskoj praksi pod analizom i sintezom mreža smatra analiza i sinteza odgovarajućih električkih modela mreže. Pritom je izravna sinteza mreže, tj. sinteza mreže a da se višekratno ne ponove analize kandidatskih mreža, moguća samo za neke vrlo jednostavne mreže te je za projektantsku praksu nevažna.

O modeliranju i matematičkim modelima

Osnovni pojmovi

Modeliranje nekog fizičkog objekta jest postupak kojim projektant (modelar) objekt – original – bilo da je realiziran ili ga tek treba projektirati, svjesno mu pojednostavnjujući svojstva, prevodi u drugi fizički ili apstraktan (simbolički) objekt – model, za koji smatra da će mu pomoći odgovoriti na pitanja koja ga zanimaju o originalu. Svako modeliranje karakterizira trojstvo: original – pitanje – model. Bez originala nema pitanja, bez pitanja ne zna se što raditi s modelom, a bez originala i pitanja model je bez svrhe.

Apstraktni se modeli dijele na logičke, analogijske, simulacijske i matematičke. Za projektantsku su praksu najvažniji matematički modeli. Matematički model je skup matematičkih relacija (jednadžbi, nejednadžbi, graničnih uvjeta i dr.) definiran unutar nekog interpretiranog formalnog sustava [2]. Između varijabli matematičkog modela i varijabli originala moraju postojati pravila korespondencije. U protivnom, matematički model je bez svrhe jer se njegova valjanost ne može eksperimentalno provjeriti na originalu.

Pod formalnim se sustavom razumijeva skup simbola i relacija među simbolima koji praktičnu važnost dobiva tek interpretacijom. Svaki formalni sustav sadrži postulate (sudove nedokazive unutar sustava za koje se, ako su interpretirani, smatra da su istiniti ili da su svrsishodni), primitivne pojmove (eksplicitno nedefinirane pojmove unutar sustava ili implicitno definirane postulatima), izvedene pojmove (pojmove izvedene iz postulata i primitivnih pojmova) i teoreme (deduktivne zaključke) [3]. Interpretira li ga se u pojmovima elektrotehnike, pripadni je matematički model električki model originala. Ako se formalni sustav interpretira u pojmovima termodinamike ili mehanike, pripadni je matematički model toplinski ili mehanički model originala.

U elektrotehnici postoje dva formalna sustava. Jedan od formalnih sustava – teorija elektromagnetskog polja – preuzet je iz klasične fizike, daje najpotpuniji opis elektromagnetskih pojava i može se načelno primijeniti u analizi svih električkih mreža. Drugi formalni sustav – teorija električkih mreža – poseban

je slučaj teorije elektromagnetskog polja i daje pojamovni okvir za izgradnju matematičkih modela te sustavan pristup analizi matematičkih modela svih električkih mreža kod kojih se može zanemariti valni karakter elektromagnetskih pojava.

Osnovno pravilo modeliranja

Suočeni s inherentnom složenosti fizičkih objekata koje projektiraju, projektanti primjenjuju strategiju nadvladavanja složenosti koja vrijedi i u svakodnevnom životu: ono što je složeno treba pojednostavniti. Modeliranjem s pomoću matematičkih modela raščlanjuju projektirani objekt na apstraktne objekte koji “oponašaju” samo neka za projektanta interesantna svojstva fizičkog objekta – originala.

Modeliranje nije egzaktni postupak. Ne postoje algoritmi kojih bi se modelar trebao pridržavati da izgradi valjani model za zadano pitanje o originalu. Osim deklarativnog stručnog znanja, važnu ulogu u modeliranju imaju i iskustvo, intuicija, sklonosti, kao i opće netehničko znanje modelara.

Jednom te istom originalu i pitanju može se uvijek pridružiti više modela različitih stupnjeva složenosti. Dobro strukturiran složeniji model sadrži kao posebne slučajeve jednostavnije modele. Njime je opisano više svojstava originala i točnije nego jednostavnijim modelom. No, model nije kopija originala. Stoga složeniji model nije uvijek ciljno bolji od jednostavnijeg. Tako u projektantskoj praksi previše složen model, koji uzima u obzir i svojstva originala koja projektantu nisu važna, ne samo da otežava kasnije proračune nego može i otežati razumijevanje dobivenih rezultata. S druge strane, prejednostavan model, kojim nisu obuhvaćena sva projektantu važna svojstva originala, vodi do pogrešnih proračuna.

Vještina modelara očituje se u tome da između raspoloživih modela odabere onaj kojim će najlakše, ali još uvijek dovoljno točno odgovoriti na postavljeno pitanje. Zbog toga kao osnovno pravilo modeliranja vrijedi iskaz [13]:

Najbolji model je najjednostavniji model koji još služi svrsi, tj. dovoljno je složen da daje zadovoljavajuće odgovore na postavljena pitanja o originalu.

Da bi se odredio najjednostavniji model potrebno je znati kriterije jednostavnosti, tj. po čemu je neki model jednostavniji od drugih. Neki od kriterija jednostavnosti su: manji broj i/ili manje vrsta entiteta (varijabli i parametara modela), manji broj i/ili manje vrste relacija između entiteta, manji broj postulata i/ili primitivnih pojmova te manji broj *ad hoc* pretpostavki [12].

Osnovne značajke matematičkog modela

Osnovne značajke svakog matematičkog modela su subjektivnost, tematska reduciranost i metodička apstrahiranost [6].

Subjektivnost proizlazi iz činjenice da modelar na osnovi svojeg znanja, iskustva i intuicije, između svih poznatih mu varijabli originala, odabire kao varijable matematičkog modela samo one za koje smatra da su bitne za rješenje zadanog problema. Odbacuje one za koje zna da utječu na original, ali po njegovu mišljenju ne bitno, kao i sve one varijable za koje zna da ne utječu na original. Također, svjestan je i da na original sigurno utječu i neke varijable za koje ne zna, ali vjeruje da je njihov utjecaj na original zanemariv.

Modelar gradi matematički model tako da dobije odgovor samo na neka pitanja koja se odnose na svojstva ili pojave karakteristične za original, što znači da je matematički model tematski reduciran. Odabirom samo onih varijabli za koje modelar smatra da bitno utječu na original matematički je model s jedne strane nužno pojednostavnjen, a s druge je strane originalan jer posjeduje neka svojstva koja original ne posjeduje.

Varijable matematičkog modela moraju biti ujedno i varijable nekog formalnog sustava iskazanog jezikom matematike. Time modelaru postaju dostupni mnogobrojni matematički teoremi te analitičke i numeričke metode proračuna. No, to znači da je matematički model metodički apstrahiran jer se modeliranjem zahvaćaju svojstva i pojave karakteristične za original samo onako kako dopuštaju pravila manipuliranja simbolima unutar odgovarajućeg formalnog sustava. Ostali su načini odbačeni (apstrahirani).

Značajke valjanog matematičkog modela

Matematički je model valjan ako je razlika između vrijednosti varijabli izračunatih nakon provedene analize matematičkog modela i izmjerenih na originalu manja od još dopuštenog odstupanja. Podudarnost matematičkog modela s originalom ne može biti dokazana matematičkim metodama jer bi svaki dokaz tražio uvođenje novih matematičkih modela i novih dokaza njihove podudarnosti. Podudarnost se dokazuje samo eksperimentima na originalu.

Podaci potrebni za izgradnju matematičkog modela i određivanje vrijednosti parametara odabranog matematičkog modela projektiranog objekta, primjerice, električkog modela električkog uređaja, amalgam su podataka dobivenih mjerenjima na sličnim uređajima, podataka proračunatih na temelju izmjerenih karakteristika komponenata uređaja, kataloških podataka komponenata, podataka iz tehničke specifikacije uređaja i dr. Vrijednosti većine tih, sa stajališta modeliranja, ulaznih podataka, nalaze se unutar određenih, često zadanih a kad i pretpostavljenih, granica. To znači da valjanost modeliranja treba

provjeriti za različite vrijednosti parametara odabranog matematičkog modela. Zbog toga je za valjani matematički model bitno da je robustan, tj. da su u matematičkom modelu uzete u obzir sve promjene vrijednosti parametara modela i njihove najnezgodnije kombinacije te da se rezultati analize rada modela mijenjaju na očekivani način zbog promjene vrijednosti pojedinih parametara modela.

Odnosi između matematičkog modela i originala

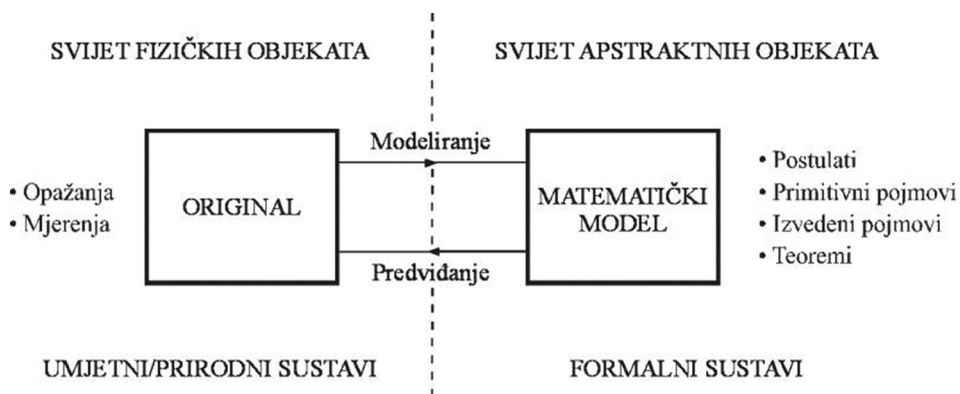
Postojanje odgovarajućeg formalnog sustava, tj. njegovih postulata, primitivnih i izvedenih pojmova te teorema omogućuje modelaru da preoblikuje postavljeno pitanje o originalu u jezik matematike stvarivši za to pitanje prikladan matematički model. Zatim modelar analizira matematički model originala koristeći deduktivne zaključke (teoreme) izvedene iz postulata odabranog formalnog sustava kao i analitičke i numeričke metode proračuna. Rezultat analize jest skup odziva Y iskazan s pomoću primitivnih i izvedenih pojmova (varijabli) odabranog formalnog sustava.

Uzimajući u obzir pravila korespondencije između varijabli matematičkog modela i varijabli originala, rezultat analize – skup odziva Y – ako original još ne postoji nego se tek projektira, postaje skup provjerljivih predviđanja o ponašanju i svojstvima originala. Nakon što se original izvede i eksperimentima utvrdi podudarnost modela s originalom, skup odziva Y postaje skup uređenih iskaza o ponašanju i svojstvima originala. To je i odgovor na temeljno pitanje modeliranja: “Čemu služi model?” Matematički model ne služi samo za generiranje provjerljivih predviđanja o ponašanju i svojstvima originala nego je i sredstvo za uređivanje (strukturiranje) iskustva [6].

U prirodnim znanostima od modela se očekuje ne samo da budu sredstva za generiranje provjerljivih predviđanja i uređivanje iskustva nego i da služe za objašnjenje pojava i događaja iz objektivnog svijeta. U prirodnim znanostima prevladava deduktivno-nomološko objašnjenje, tj. ono što se objašnjava dobiva se kao deduktivni zaključak iz premisa, odnosno kao poseban slučaj važenja teorema nekog interpretiranog formalnog sustava [14]. To znači da bi premise objašnjenja, a njih čine iskazi u kojima se koriste matematički modeli pripadnog formalnog sustava, morale biti istinite. Rasprave o tome je li zahtjev da premise objašnjenja budu istinite prestrog ili nije, a time posljedično i da modeli budu istiniti, traju u filozofiji znanosti još od Aristotelova doba [1, 10].

Za projektantsku djelatnost, kao i općenitije za inženjerstvo, pitanje istinitosti ili lažnosti modela nije važno. Cilj inženjerstva je stvaranje svrsishodnih proizvoda, a ne povećanje deklarativnog znanja o objektivnom svijetu. Za inženjere modeli su korisni instrumenti (sredstva), čija se vrijednost procjenjuje samo s obzirom na uspješnost predviđanja. Model kao i svako sredstvo ne može

biti niti istinit niti lažan nego samo prikladan ili neprikladan. Također, nikad se s potpunom sigurnošću ne može znati je li podudarnost između originala i modela istinska ili slučajna. Uvijek je moguće da će i neki drugi model, zasnovan na drukčijim pretpostavkama, biti podudaran s originalom.



Slika 2.: Odnosi između matematičkog modela i originala

Slika 2. prikazuje odnose između matematičkog modela i originala. Uočljiva je složenost uloge modelara. Njegova specijalnost ne smije biti niti isključivo svijet originala niti isključivo svijet modela. U njegovim je rukama modeliranje, tj. preoblikovanje postavljenog pitanja o ponašanju i svojstvima originala – objekta fizičkog svijeta – u problem analize matematičkog modela originala – objekta apstraktnog svijeta – ali i obratan postupak, tj. dobivanje odgovora na postavljeno pitanje interpretacijom rezultata analize matematičkog modela iskazanih s pomoću varijabli originala. Svo je umijeće modeliranja u tome da se modeliranjem izgubi što je manje moguće bitnih informacija o originalu i modelu.

Teorija električkih mreža kao interpretirani formalni sustav

Varijable u teoriji elektromagnetskog polja

Električkom, toplinskom i mehaničkom proračunu komponenata uređaja prethodi analiza rada one mreže za koju projektant smatra da će zadovoljiti zadanu specifikaciju tehničkih karakteristika uređaja. Analiza rada provodi se na električkom modelu mreže. Tu se kao osnovno pitanje postavlja: “Koje su

(električke) varijable na raspolaganju projektantu – modelaru da bi izgradio valjani (električki) model?”

Načelno, odgovor je vrlo jednostavan. Treba ih “posuditi” iz fizikalnih osnova elektrotehnike. To su vektorske veličine jakosti električnog polja, električnog pomaka, jakosti magnetskog polja, magnetske indukcije i gustoće provodne struje te skalarna veličina gustoće naboja. Te se varijable, uz parametre koji opisuju sredinu u kojoj se opaža elektromagnetsko djelovanje (parametri vodljivosti χ , permitivnosti ε i permeabilnosti μ)¹, nalaze u eksperimentalnim zakonima elektriciteta i magnetizma (Faradayev zakon, poopćeni Ampèrev zakon, Gaussovi zakoni za električno i magnetsko polje). Te je zakone matematički uobličio u skup jednačbi (teoriju elektromagnetskog polja) engleski fizičar Oliver Heaviside (1850. – 1925.) i nazvao Maxwellovim jednačbama, prema škotskom fizičaru Jamesu Clerku Maxwellu (1839. – 1879.), koji je prvi sustavno razradio, matematički formulirao i poopćio Faradayeve ideje o električnom i magnetskom polju.

Iz Maxwellovih jednačbi proizlazi da svaka stvarna mreža zauzima dio prostora u kojem se elektromagnetske pojave šire konačnom brzinom te da zbog vektorskog karaktera varijable mreže ne ovise samo o vremenu nego i o prostornim koordinatama. Maxwellove jednačbe zajedno sa zakonom o očuvanju naboja i zakonom o sili koja djeluje na električno nabijene čestice u gibanju daju najpotpuniji opis elektromagnetskih pojava u okvirima klasične fizike [4].

Iz tih činjenica proizlazi na prvi pogled logičan zaključak da bi za ostvarenje električkog modela neke mreže ili komponente trebalo odabrati skup varijabli iz teorije elektromagnetskog polja. Iako točan, taj je zaključak za najveći broj slučajeva u elektrotehničkoj praksi nekoristan, primjerice, pri projektiranju gotovo svih električkih uređaja. Naime, ovisnost tih varijabli o prostornim koordinatama znači da bi za analizu rada neke mreže trebalo kao ulazne podatke ne samo specificirati skup poticaja X i električne parametre komponenata (otpornost, kapacitivnost, induktivnost) nego i razmještaj komponenata, njihove dimenzije i prostornu orijentaciju u stvarnoj mreži (uređaju). To bi usložnilo analizu tako stvorenog električkog modela stvarne mreže u tolikoj mjeri da bi već za mreže s manjim brojem komponenata takva analiza bila praktički neprovediva.

Pretpostavka o električki malenoj mreži

Rješavanje Maxwellovih jednačbi može se izbjeći i time bitno olakšati projektiranje uređaja ako su komponente mreže kao i mreža u cjelini kojom su ostvarene željene funkcije uređaja električki malene. Električki malena komponenta je svaka komponenta s $2m$ priključaka ($m = 1, 2, \dots$), koji se mogu

¹U linearnoj, homogenoj i izotropnoj sredini ti su parametri konstante, dok su u općem slučaju nelinearne, nehomogene i anizotropne sredine ti parametri tenzorske veličine.

grupirati u m parova priključaka, pri čemu za svaki par priključaka vrijedi da je trenutačna vrijednost struje jednog priključka para po apsolutnoj vrijednosti približno jednaka trenutačnoj vrijednosti struje drugog priključka para [11]. Par priključaka s tim svojstvom naziva se prilaz komponente.²

Zamislimo komponentu s dvama priključcima (jednoprilaz) duljine d orijentiranu u smjeru osi x širenja elektromagnetskog polja na čijim su krajevima priključci A i B i kojoj je u ustaljenom stanju na priključak A narinut strujni val oblika

$$i_A = \hat{I} \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

gdje je $\hat{I}$ amplituda, f najveća frekvencija bitna za ispravno funkcioniranje komponente u uređaju, a c brzina širenja strujnog vala. Zbog toga je strujni val na priključku B oblika

$$i_B = \hat{I} \sin 2\pi f \left(t - \frac{x+d}{c} \right)$$

i razlika između trenutačnih vrijednosti struja priključaka bit će zanemariva ako vrijedi da je

$$2\pi fd \ll c$$

Dakle, komponenta je električki malena ako je

$$d \ll \frac{c}{2\pi f} \quad (1)$$

Isti uvjet vrijedi i za električki malene mreže ako se duljina d shvati kao najveća dimenzija uređaja u kojem se nalazi mreža. Primjerice, neka je u projektu audiopojачala važno da audiopojачalo vjerno prenese i pojača ulazni signal do frekvencije od 25 kHz. Budući da je brzina širenja elektromagnetskog polja u zraku praktički jednaka brzini svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, dobivamo da najveća dimenzija audiopojачala mora biti

²Navedeno vrijedi i za električki malene komponente s neparnim brojem priključaka. Naime, one se mogu prikazati kao komponente s parnim brojem priključaka ako se jedan od priključaka shvati kao zajednički za dva prilaza. Tako se, primjerice, sve komponente s trima priključcima, kao što su upravljive poluvodičke komponente, mogu prikazati kao komponente s dvama prilazima (dvoprilazi).

$$d \ll 1900 \text{ m}$$

što je, očigledno, zadovoljeno u svim primjenama.

Proizlazi da u električki malenoj mreži nije potrebno poznavati razmještaj komponenata u uređaju, njihove dimenzije ni prostornu orijentaciju da bi se odredilo njihovo strujno opterećenje. Dovoljno je poznavanje valnih oblika struje priključka $i(t)$ svake komponente. Neovisnost valnih oblika struje priključka komponente o njezinu fizičkom položaju u odnosu na druge komponente implicira da za opis fizikalnih pojava u komponentama u električki malenim mrežama nije potrebno poznavanje vektorskih varijabli elektromagnetskog polja, tj. da se može zanemariti utjecaj elektromagnetskog polja izvan komponenata na njihova fizikalna svojstva. Dovoljne su skalarne varijable definirane na priključcima komponenata.

Na pojedinačnom priključku svake komponente može se osim struje priključka definirati još samo skalarna varijabla električnog potencijala. Električni potencijal priključka komponente može se točno odrediti samo do neke konstantne vrijednosti, koja ovisi od po volji odabrane točke u uređaju, kojoj se pridjeljuje (električni) potencijal jednak nuli. Očigledno je da fizikalna svojstva komponente ne ovise o tome koja je točka, a to može biti i jedan od priključaka neke komponente, odabrana kao točka nultog potencijala. S druge strane, svaka komponenta ima barem dva priključka, što znači da u opisu fizikalnih svojstava komponente nisu bitni potencijali, nego samo njihova razlika. Zbog toga se, osim struje priključka, kao druga varijabla kojom se opisuju fizikalna svojstva komponente uvodi pojam napona $u(t)$ koji se, u električki malenim mrežama s dovoljnom točnošću, može definirati kao razlika potencijala između dvaju priključaka komponente.

Kirchhoffovi zakoni

U električki malenoj mreži sva su fizikalna svojstva komponenata koncentrirana u samim komponentama, tj. utjecaj elektromagnetskog polja izvan komponenata na njihova fizikalna svojstva je zanemariv. Pretpostavi li se, dodatno, da elektromagnetsko polje izvan komponenata uopće ne postoji, proizlazi da je svaka komponenta električno neutralna, tj. da je resultantni naboj svake komponente jednak nuli, te da ne postoji magnetska veza između komponenata.

Prihvatajući te pretpostavke iz Maxwellovih jednadžbi proizlaze Kirchhoffovi zakoni. Tako se, kombinirajući Gaussov zakon za električno polje sa zakonom o očuvanju električnog naboja dobiva za svaku zatvorenu plohu koja obuhvaća neki čvor mreže ili, općenitije, dijeli mrežu točno na dvije podmreže, ali tako da ne presijeca bilo koju od komponenata, da je zbroj trenutačnih vrijednosti struja koje prolaze kroz tu plohu u svakom trenutku jednak brzini

kojom se mijenja rezultantni naboj obuhvaćen tom plohom. No, ako je prema polaznoj pretpostavci rezultantni naboj svake komponente, a time i rezultantni naboj obuhvaćen bilo kojom zatvorenom plohom jednak nuli, dobiva se da je zbroj trenutanih vrijednosti struja koje prolaze kroz bilo koju zatvorenu plohu u svakom trenutku jednak nuli, što je iskaz Kirchhoffova zakona struje.

Kirchhoffov zakon napona, kojim se izriče da je algebarski zbroj svih trenutanih vrijednosti napona u svakoj petlji mreže u svakom trenutku jednak nuli, proizlazi izravno iz Faradayeva zakona pretpostavljajući da ne postoji magnetska veza između komponenata, tj. da mreža nije prožeta vanjskim promjenljivim magnetskim poljem.

Postulati i primitivni pojmovi teorije električkih mreža

Kao što je uvodno istaknuto, analiza rada električkih modela kandidatskih mreža ili poslije odabrane mreže, kojom se dobiva skup odziva Y i zatim uspoređuje sa specifikacijom tehničkih karakteristika uređaja, preduvjet je svim električkim proračunima komponenata stvarne mreže koja se projektira.

Zbog toga je bitno prije analize procijeniti hoće li stvarna mreža biti električki malena prema kriteriju danom izrazom (1). U procjeni dimenzija uređaja, a time i pripadne mreže, projektantu pomaže iskustvo kao i uvid u slične uređaje. Jer, ako mreža nije električki malena, kao što je to slučaj, primjerice, kod antena, valovoda i sličnih uređaja, analiza rada svodi se na rješavanje Maxwellovih jednadžbi uz uzimanje u obzir odgovarajućih graničnih uvjeta.

U najvećem broju slučajeva u praksi mreže su električki malene te se za analizu njihova rada mogu primijeniti matematički modeli električkih komponenata i mreža te matematičke metode analize električkih modela mreža koje pripadaju formalnom sustavu koji je poseban slučaj teorije elektromagnetskog polja – teoriji električkih mreža. Taj se formalni sustav temelji na dvama postulatima:

1. Mreža je električki malena, pri čemu se dodatno pretpostavlja:
 - da je brzina širenja elektromagnetskog polja mrežom beskonačna
 - da izvan komponenata mreže ne postoji elektromagnetsko polje, i
 - da se svaka komponenta mreže može zamisliti podijeljena na elektromagnetski odvojene sredine u kojima se, u svakoj zasebno, odvijaju fizikalni procesi pretvorbe i uskladištenja električne energije.
2. U mreži vrijede Kirchhoffovi zakoni.

Zamjenom konačne brzine širenja elektromagnetskog polja beskonačnom brzinom proizlazi: a) da je za svaki prilaz komponente trenutna vrijednost struje jednog priključka prilaza po apsolutnoj vrijednosti jednaka trenutnoj vrijednosti struje drugog priključka prilaza, b) da su na svakom prilazu kompo-

nente dobro definirane dvije varijable: napon prilaza i struja prilaza, koje imaju status primitivnih pojmova³ teorije električkih mreža i c) da na električka svojstva mreže, iskazana skupom odziva Y , utječe, uz zadani skup poticaja X , samo način kako su komponente međusobno spojene u mrežu, a ne i njihov razmještaj, dimenzije i prostorna orijentacija u stvarnoj mreži.

Pretpostavkom da izvan komponenata ne postoji elektromagnetsko polje svaka se komponenta promatra elektromagnetski odvojena od drugih komponenata, dok pretpostavka o “podjeli” komponente na različite elektromagnetske sredine omogućuje uvođenje jednostavnih modela za predodžbu fizikalnih procesa u komponenti.

Drugi postulat iskazuje da u električkom modelu mreže vrijede Kirchhoffovi zakoni, za čiju je primjenu potrebno poznavati kako su komponente spojene u stvarnoj mreži. Tu se kao primitivni pojam pojavljuje u Kirchhoffovu zakonu struje pojam čvora, dok se pojam petlje,⁴ bitan za primjenu Kirchhoffova zakona napona, može uvesti s pomoću primitivnog pojma grane. Pojmovi čvora i grane definirani su zajedno. Čvor je točka spoja dviju ili više grana, dok je grana linijski segment (put) koji spaja dva čvora.

Elementi mreže

Pretpostavka da se svaka komponenta može podijeliti na elektromagnetski odvojene sredine, i to tako da se u svakoj od tih sredina manifestira samo jedan od procesa koji karakteriziraju fizikalna svojstva komponente, omogućuje uvođenje četiriju modela, tzv. elemenata mreže, po jedan za svaki od fizikalnih procesa koji se odvijaju u komponenti. To su: a) otpor, kojim je predočena pretvorba električne energije u toplinsku energiju u sredini karakteriziranoj parametrom vodljivosti χ , b) kapacitet, kojim je predočeno uskladištenje elektrostatičke energije u sredini karakteriziranoj parametrom permitivnosti ϵ , c) induktivitet,⁵ kojim je predočeno uskladištenje magnetske energije u sredini

³U teoriji elektromagnetskog polja napon i struja prilaza su izvedeni pojmovi.

⁴Petlja je zatvoreni put duž mreže sa svojstvom da su samo po dvije grane tog puta spojene sa svakim čvorom puta.

⁵Razlikovanje naziva komponenata od naziva pripadnih elemenata mreže (modela komponenata) postoji samo za otpornike, kondenzatore i prigušnice (zavojnice). Tako se u teoriji električkih mreža, primjerice, naziv ‘prigušnica’ upotrebljava za komponentu u kojoj se skladišti magnetska energija, naziv ‘induktivitet’ za pripadni element mreže, a naziv ‘induktivnost’ za konstantu L , dimenzije Vs/A, karakterističnu za linearne vremenski nepromjenljive prigušnice. U praksi je češća druga varijanta, umjesto naziva ‘induktivitet’ upotrebljava se naziv ‘idealna prigušnica’, a umjesto naziva ‘induktivnost’ upotrebljava se naziv ‘induktivitet’. Za ostale komponente, kao što su transformatori, poluvodičke komponente i dr., razlike u nazivima između komponenata i pripadnih modela nema i tek iz konteksta postaje jasno je li riječ o komponenti ili o pripadnom modelu.

karakteriziranoj parametrom permeabilnosti μ i d) nezavisni naponski ili nezavisni strujni izvor, kojima je predložena pretvorba neelektrične energije u električnu kao i obratan proces⁶ (isključujući toplinsku energiju).

Otpor i nezavisni izvori. Za definiciju otpora i nezavisnih izvora dostaju (primitivne) varijable napona prilaza u i struje prilaza i . Tako je konstitutivna relacija⁷ jednoprilaznog vremenski nepromjenljivog otpora dana funkcijom $f_R(u, i) = 0$, a vremenski promjenljivog otpora funkcijom $f_R(u, i, t) = 0$. U općem slučaju, konstitutivnu relaciju m -prilaznog vremenski nepromjenljivog otpora čini skup od m funkcija $f_{Rk}(u_k, i_k) = 0, k = 1, 2, \dots, m$, a m -prilaznog vremenski promjenljivog otpora skup od m funkcija $f_{Rk}(u_k, i_k, t) = 0, k = 1, 2, \dots, m$.

Konstitutivnu relaciju m -prilaznog nezavisnog naponskog izvora čini skup funkcija $u_k(t), k = 1, 2, \dots, m$, dok je struja svakog prilaza $i_k(t)$ po volji. Konstitutivnu relaciju m -prilaznog nezavisnog strujnog izvora čini skup funkcija $i_k(t), k = 1, 2, \dots, m$, dok je napon svakog prilaza $u_k(t)$ po volji.

Formalno gledano, svi bi se procesi pretvorbe energije iz jednog oblika u drugi mogli predložiti samo jednim elementom mreže – otporom. No, u svijetu fizičkih objekata jasno se razlikuju izvori električne energije (generatori, akumulatorske baterije, fotonaponske ćelije), tj. komponente koje pretvaraju neelektričnu energiju u električnu, od komponenata koje mogu električnu energiju pretvoriti jedino u toplinsku (otpornici, poluvodičke komponente, sklopke i dr.). Svijet apstraktnih objekata – matematičkih modela – treba biti “slika” svijeta fizičkih objekata, pa je tu razliku važno održati i u svijetu matematičkih modela, tako da svi otpori, tj. modeli otpornika, poluvodičkih komponenata, sklopki i dr., pripadaju među pasivne elemente mreže, dok svi nezavisni izvori, tj. modeli izvora električne energije pripadaju među aktivne elemente mreže. Također, u mnogim primjenama ne treba obratiti pozornost samo na energetske procese pretvorbe u mrežama. Primjerice, u svakoj mreži koja se koristi u pojačalima postoji poseban prilaz, tzv. ulaz pojačala, na koji se unosi informacijski signal u obliku zadanog valnog oblika napona ili struje. To znači da je u analizi sposobnosti takve mreže da procesira informacijski signal na željeni način prikladno informacijski signal modelirati kao nezavisni naponski ili strujni izvor narinut na ulaz pojačala.

⁶Kad se u nezavisnim izvorima električna energija pretvara u neelektričnu energiju primjereno ih je nazvati nezavisnim uvorima.

⁷Konstitutivna relacija elementa mreže skup je algebarskih i/ili transcendentnih jednadžbi kojima su dane funkcijske veze između onih varijabli koje definiraju osnovno svojstvo elementa mreže. Budući da se vrijednosti varijabli u konstitutivnim relacijama odnose na isti trenutak t , skup jednadžbi koji tvori konstitutivnu relaciju nekog elementa mreže mora biti stvoren isključivo s pomoću algebarskih operacija. Nealgebarske operacije, kao što su vremenski pomak, deriviranje ili integriranje su isključene. Osim toga, konstitutivne relacije moraju vrijediti za svaki trenutak t i za sve u praksi ostvarive potencijale.

Kapacitet i induktivitet. Konstitutivne relacije otpora povezuju napone i struje otpora u istom trenutku. Vrijednosti struja ili napona otpora u prošlim trenucima ne utječu na vrijednosti napona i struja u sadašnjem trenutku. Otpori ne “pamte” ono što je prošlo. Za razliku od otpora, kapacitete i induktivite karakterizira uskladištenje elektrostatičke odnosno magnetske energije. To znači da mogu početi odavati energiju vanjskom svijetu od nekog trenutka zbog energetske procesa koji su se u tim elementima mreže odvijali prije tog trenutka. Kapaciteti i induktiviteti “pamte” ono što je prošlo. Ta činjenica implicira da se konstitutivne relacije kapaciteta i induktiviteta ne mogu opisati primitivnim varijablama napona i struje prilaza.

Primjerice, napon jednoprilaznog kapaciteta u nekom promatranom trenutku t ne ovisi o struji kapaciteta u tom trenutku, nego o naboju kapaciteta u tom trenutku,

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = q(t_0) + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

dakle, o svim vrijednostima struja koje su protekle kapacitetom od trenutka $t = -\infty$ kad je kapacitet “stvoren”, tj. kad je $q(-\infty) = 0$, do promatranog trenutka t . Uočimo da sve te vrijednosti struja kapaciteta ne treba znati ako se zna vrijednost naboja $q(t_0)$ u nekom trenutku t_0 . Tada je dovoljno samo poznavanje valnog oblika struje kapaciteta od tog trenutka do promatranog trenutka t . Sve rečeno vrijedi za svaki prilaz kapaciteta posebno, što znači da je u općem slučaju m -prilazni kapacitet definiran konstitutivnim relacijama između napona i naboja na svakom od njegovih prilaza.

Analogno tome, struja jednoprilaznog induktiviteta u nekom promatranom trenutku t ne ovisi o naponu induktiviteta u tom trenutku, nego o toku induktiviteta u tom trenutku,

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

dakle, o svim vrijednostima napona narinutim na induktivitet od trenutka $t = -\infty$ kad je induktivitet “stvoren”, tj. kad je $\varphi(-\infty) = 0$, do promatranog trenutka t . Sve te vrijednosti napona induktiviteta ne treba znati ako se zna vrijednost toka $\varphi(t_0)$ u nekom trenutku t_0 . Tada je dovoljno samo poznavanje valnog oblika napona induktiviteta od tog trenutka do promatranog trenutka t . Sve rečeno vrijedi za svaki prilaz induktiviteta posebno, što znači da je u općem slučaju m -prilazni induktivitet definiran konstitutivnim relacijama između struje i toka na svakom od njegovih prilaza.

Varijable q i φ izvedene su varijable iz primitivnih varijabli napona prilaza u i struje prilaza i i prikladno ih je nazvati nabojem prilaza i tokom prilaza. Njihovo značenje ne treba tražiti izvan okvira formalnog sustava. Stoga naboj prilaza ne treba interpretirati kao uzrok postojanja električnog polja ni tok prilaza kao magnetski tok čija promjena prouzročuje pojavu napona, nego samo kao integralne veličine napona i struje na prilazima modela komponente.⁸

Električki model mreže

Odabir najboljeg električkog modela mreže

S projektantskog stajališta analiza neke stvarne mreže obuhvaća nekoliko odvojenih aktivnosti. To su odabir sheme spoja mreže, modeliranje mreže, dobivanje sustava jednadžbi, tzv. jednadžbi mreže, rješenjem kojih se dobivaju naponi i struje svih elemenata mreže, rješavanje jednadžbi mreže te vrednovanje rješenja. Za odabir sheme spoja mreže kojom projektant smatra da će postići željeno električko ponašanje uređaja ne postoji sustavan (jednoznačan) postupak kao ni neko opće pravilo. Odabir ovisi samo o iskustvu, uvidu u slične uređaje drugih proizvođača i intuiciji projektanta.

Kao što je istaknuto, modeliranje mreže odnosno komponenata mreže također, nije egzaktni postupak. No, za razliku od pitanja: “Kako odabrati shemu spoja mreže?”, na koje nema čak ni načelnog odgovora, na ekvivalentno pitanje u pojmovima modeliranja: “Kako odabrati električki model stvarne mreže?”, načelni je odgovor očigledan: “Pridržavati se osnovnog pravila modeliranja, tj. odabrati najbolji model.”

U izgradnji najboljeg električkog modela mreže nema one višeznačnosti koja, u općem slučaju, prati značenje riječi ‘jednostavnost’, odnosno njoj suprotne riječi ‘složenost’. Tu se jednostavnost modela komponenata uspoređuje unutar istog formalnog sustava – teorije električkih mreža – pa se kriteriji jednostavnosti ne odnose na broj i vrstu postulata, primitivnih pojmova, *ad hoc* pretpostavki i dr. Zbog toga se u izgradnji modela komponenata smatra da je jednostavniji model onaj model koji sadrži manji broj i manje vrsta entiteta (varijabli i elemenata mreže) te manji broj i manje vrsta relacija između entiteta. Također, bitno je da su modeli dobro strukturirani, tj. da složeniji model kao posebne slučajeve obuhvaća jednostavnije modele.

⁸Tako shvaćeni pojmovi naboja prilaza i toka prilaza omogućuju u praksi fizičko modeliranje neke komponente s pomoću drugih komponenata. Karakterističan je primjer, čest u elektroničkim sklopovima, da se s pomoću kondenzatora, otpornika i operacijskih pojačala modelira prigušnica željene konstitutivne relacije $f_L(i, \varphi) = 0$. O tome više u [7].

Put prema odabiru najboljeg modela ovisi o tome postoji li original s rezultatima mjerenja na originalu ili original još ne postoji. Ako original postoji, modeliranje treba početi s najjednostavnijim mogućim modelom, provjeriti daje li zadovoljavajuće odgovore, ako ne, postupak ponoviti sa složenijim modelom i tako postupno usložnjavati model dok se ne dobiju zadovoljavajući odgovori na postavljena pitanja o originalu.

U projektantskoj je praksi drukčije. Original još ne postoji tako da provjera valjanosti modela nije moguća. No, za većinu modela komponenata postoje bilo kataloški podaci bilo podaci u stručnoj literaturi iz kojih se mogu izgraditi dobro strukturirani modeli komponenata. Zbog toga se za modeliranu komponentu može uzeti i najsloženiji model te zatim utvrditi pretpostavke pod kojima se model može pojednostavniti. Mnoge od tih pretpostavki ovise o međusobnom spoju komponenata ili njihovu spoju s vanjskim svijetom (izvorima i trošilima) i mogu se obično lako provjeriti ili se čak nalaze u specifikaciji tehničkih karakteristika uređaja.

Također treba uzeti u obzir i činjenicu da projektanti rijetko projektiraju posve nove uređaje. Uglavnom su to uređaji koji su barem po nekim karakteristikama slični prethodno projektiranim. Zbog toga u potrazi za sve boljim modelom, odnosno pri donošenju odluke kad treba stati s promjenama modela, bitnu ulogu osim znanja igraju iskustvo kao i intuicija projekatana.

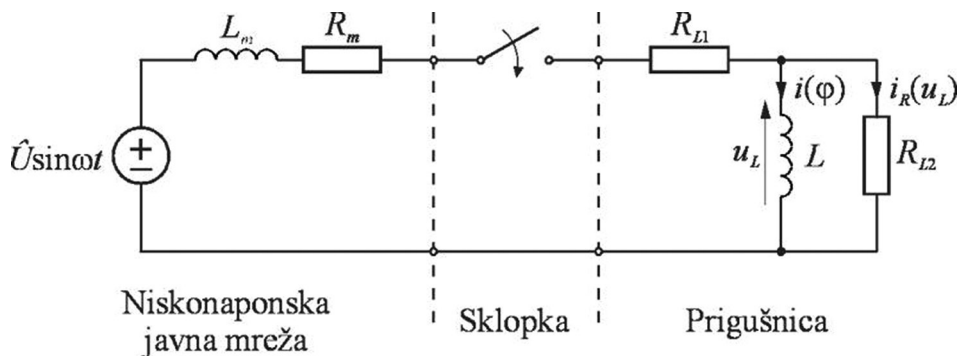
Primjer

Odabрати najbolji model nije lako, a često bez većeg iskustva u modeliranju nije ni moguće. Pokažimo to na jednostavnom primjeru. Pretpostavimo da treba odrediti najveću vrijednost struje prigušnice s feromagnetskom jezgrom nakon uklopa na niskonaponsku javnu mrežu. Radna indukcija prigušnice induktivnosti L u ustaljenom stanju odabrana je tako da se nalazi na linearnom dijelu krivulje magnetiziranja jezgre, “nešto ispod” koljena krivulje.

Problem se svodi na stvaranje električkog modela mreže koju čine niskonaponska javna mreža, sklopka i prigušnica, određivanje parametara odgovarajućih elemenata mreže te rješavanje pripadne jednadžbe mreže. Budući da sklopka može uklopiti u bilo kojem trenutku poluperiode napona javne mreže, potrebno je dobiti rješenja za više odabranih trenutaka uklopa sklopke unutar poluperiode izmjeničnog napona niskonaponske javne mreže.

Odaberu li se uobičajeni modeli niskonaponske javne mreže i prigušnice dobiva se nadomjesna shema spoja mreže prikazana na slici 3. Pritom je sklopka modelirana idealnom sklopkom jer je u promatranom slučaju vrijeme uklapanja sklopke neusporedivo kraće od trajanja prijelazne pojave uklopa. Niskonaponska javna mreža modelirana je serijskim spojem naponskog izvora $u = \hat{U} \sin \omega t$, induktiviteta L_m i otpora R_m . Prigušnica je modelirana nelinearnim

induktivitetom karakteristike $i(\varphi)$, linearnim otporom R_{L1} koji predočuje gubitke snage u namotu te nelinearnim otporom R_{L2} karakteristike $i_R(u_L)$, koji predočuje gubitke snage u jezgri (gubici vrtložnih struja i gubici histereze). Zbog niske frekvencije javne mreže zanemarene su kapacitivnosti između zavoja i između slojeva namota prigušnice [15].



Slika 3: Električni model mreže

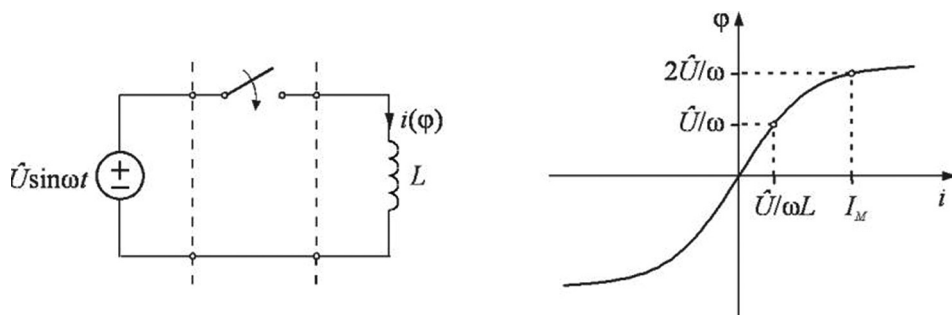
Iz tog električkog modela mreže lako se dobiva jednadžba mreže koja je oblika nelinearne diferencijalne jednadžbe drugog reda i može se riješiti samo numeričkim metodama. Varirajući trenutke uklopa sklopke dobio bi se skup rješenja odakle bi slijedio i odgovor na postavljeno pitanje.

U tom je postupku kritično određivanje parametara električkog modela prigušnice. U praksi se obično izmjere $I(U)$ i $P(U)$ karakteristike prigušnice, gdje su U i I efektivne vrijednosti napona i struje prigušnice, a P ukupni gubici snage prigušnice. Prijelaz na odabrani model s nelinearnim karakteristikama $i(\varphi)$ i $i_R(u_L)$ nije nimalo jednostavan i podliježe dodatnim pretpostavkama, koje nije lako provjeriti [9].

Zbog te inherentne nesigurnosti u točnost proračunatih parametara modela prigušnice razumno je iskušati i drugi put: maksimalno pojednostavniti model, na jednostavniji način dobiti traženu najveću vrijednost struje uklopa i usporediti je s rezultatom dobivenim složenijim modelom. Najjednostavniji mogući matematički model mreže dobiva se ako se u električkom modelu mreže zanemare svi otpori i pretpostavi da je $L \ll L_m$, što se lako provjeri jer se zna prosječna vrijednost induktivnosti javne mreže.⁹ Ako je ta pretpostavka zadovoljena, električki se model mreže svodi na spoj naponskog izvora i nelinearnog induktiviteta karakteristike $i(\varphi)$, slika 4. Sad je očigledno da će se najveća

⁹Za većinu europskih zemalja vrijedi da je na 90 % mjesta priključka trošila impedancija niskonaponske javne mreže manja od tzv. referentne vrijednosti $Z_m = R_m + j L_m = 0,4 + j 0,25 \, \Omega$, što znači da je $L_m < 0,8 \, \text{mH}$ [8].

struja uklopa postići ako se u poluperiodi izmjeničnog napona u kojoj se dogodio uklop na induktivitet narine najveća moguća vrijednost voltsekundi (toka). To se događa ako sklopka uklopi u trenutku prolaza izmjeničnog napona kroz nulu. Na induktivitet su tada narinute dvostruke voltsekunde u odnosu na ustaljeno stanje te se iz karakteristike $i(\varphi)$ očitava najveća vrijednost struje uklopa I_M .



Slika 4: Najjednostavniji mogući električki model mreže

Očigledno je drugi način rješavanja bitno jednostavniji i treba ga preferirati u budućim modeliranjima za slična pitanja ako je razlika između rezultata dobivenih tim modelom i složenijim modelom još tehnički prihvatljiva. Ako je razlika između dobivenih rezultata tehnički neprihvatljiva, odgovor na pitanje koji je model bolji može dati samo eksperiment.

Jednadžbe mreže

Sustavni zapis jednadžbi mreže

Teorija električkih mreža daje projektantu točan odgovor samo na jedno pitanje: “Kako na temelju sheme spoja stvarne mreže i modela komponenata te mreže stvoriti skup jednadžbi, tzv. jednadžbi mreže, rješenjem kojih se dobivaju naponi i struje svih modela komponenata?”

U prvom se koraku stvara električki model stvarne mreže, tzv. nadomjesna shema spoja originala, tako da se modeli komponenata spoje idealnim vodičima onako kako su komponente spojene u stvarnoj mreži.

U drugom se koraku na temelju nadomjesne sheme spoja (originala) stvaraju dva skupa jednadžbi. Prvi skup tvori skup linearnih algebarskih jednadžbi koji proizlazi iz primjene Kirchhoffovih zakona na nadomjesnu shemu spoja. Vrste elemenata mreže nisu bitne, bitno je samo kako su ti elementi mreže spojeni u nadomjesnoj shemi spoja. Zapis tog skupa jednadžbi je trivijalan ako je

riječ o nadomjesnim shemama spojeva (mrežama) s manjim brojem grana i čvorova. Za mreže s većim brojem grana i čvorova, primjerice mreže sa stotinjak grana i čvorova, bitno je znati sustavan postupak zapisa tih jednadžbi. To je osigurano primijeni li se temeljni teorem teorije grafova [5]. Broj linearnih algebarskih jednadžbi jednak je broju grana nadomjesne sheme spoja.

Drugi skup jednadžbi tvori skup konstitutivnih relacija grana mreže. Kako su te grane spojene u mrežu nije bitno, bitne su samo konstitutivne relacije elemenata mreže koji tvore svaku od grana. Konstitutivne relacije grana mogu biti linearne ili nelinearne funkcije u kojima može biti iskazana i vremenska nepromjenljivost ili vremenska promjenljivost elemenata mreže. Očigledno, i broj jednadžbi drugog skupa jednak je broju grana nadomjesne sheme spoja.

U trećem se koraku dobiva skup jednadžbi mreže. Tu su moguća dva načina iskaza. Jedan je da se iz konstitutivnih relacija grana svi naponi grana izraze s pomoću struja grana i uvrste u jednadžbe Kirchhoffova zakona napona te one zajedno s jednadžbama Kirchhoffova zakona struje čine jednadžbe mreže iskazane s pomoću struja grana. Analognim se postupkom dolazi i do drugog mogućeg skupa jednadžbi mreže iskazanog s pomoću napona grana. U svakom slučaju broj jednadžbi mreže jednak je broju grana nadomjesne sheme spoja.

Odabir metode rješavanja jednadžbi mreže

U osnovi postoje dvije metode rješavanja jednadžbi mreže. To su analitičke metode i numeričke metode. Odabir metode ovisi o postavljenom pitanju, vrsti analizirane mreže i broju elemenata mreže kojima je projektirana mreža modelirana.

Ako je projektirana mreža modelirana linearnom vremenski nepromjenljivom mrežom, jednadžbe mreže svode se na sustav linearnih algebarskih jednadžbi s konstantnim koeficijentima traži li se ustaljeno stanje, odnosno na sustav diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima traži li se vremenski odziv. No, da bi se dobio vremenski odziv imalo složenije mreže petog ili višeg reda, dakle, mreže s pet ili više kapaciteta i induktiviteta, potrebno je riješiti tzv. karakterističnu jednadžbu, tj. algebarsku jednadžbu petog ili višeg reda. Analitičko rješenje te jednadžbe nije moguće, nego samo približno numeričko rješenje.

Ako je projektirana mreža nelinearna i/ili vremenski promjenjiva, samo se neki vrlo jednostavni slučajevi mogu riješiti analitički. To vrijedi za mreže čije se električko ponašanje može opisati analitički rješivim nelinearnim diferencijalnim jednadžbama, kao i za posve jednostavne mreže linearne na odsječku. Za, u elektrotehničkoj praksi, najvažnije nelinearne diferencijalne jednadžbe, kao što su Duffingova ili van der Polova diferencijalna jednadžba, ne postoje točna nego samo približna analitička rješenja.

S druge strane, stalno povećavanje računalne snage elektroničkih računala promijenilo je značenje riječi 'rješenje'. Jer, ako se rješenje sustava od nekoliko

nelinearnih diferencijalnih jednadžbi može dobiti za nekoliko sekundi, onda eventualno prilagođavanje matematičkog modela mreže tipu diferencijalne jednadžbe, čije je rješenje poznato, ili primjena posebnih grafičkih metoda i slični “trikovi”, nekoć česti u projektantskoj praksi, danas nemaju nikakva smisla.

Zbog toga u svim slučajevima, osim u vrlo jednostavnim mrežama koji se mogu lako riješiti analitički, treba primjenjivati numeričke metode rješavanja jednadžbi mreže. Traži li se vremenski odziv, bitno je da zapis jednadžbi mreže bude takav da omogućući jednostavan numerički proračun odgovarajućih diferencijalnih jednadžbi. Taj je zahtjev zadovoljen ako se jednadžbe mreže prikazuju kao sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda, pri čemu su kao varijable mreže odabrane varijable stanja, tj. varijable čiji je valni oblik neprekinuta funkcija. U općem slučaju varijable stanja su naboj kapaciteta i tok induktiviteta, a u linearnim vremenski nepromjenjivim mrežama varijable stanja su napon kapaciteta i struja induktiviteta. Jednadžbe mreže iskazane s pomoću varijabli stanja nazivaju se jednadžbe stanja mreže i mogu se na sustavan način dobiti primjenom temeljnog teorema teorije grafova [5].

Vrednovanje rješenja jednadžbi mreže

Rješenjem jednadžbi mreže za odabranu nadomjesnu shemu spoja stvarne mreže (originala), kojom projektant smatra da će zadovoljiti željene funkcije uređaja, projektant dobiva skup podataka s pomoću kojih može početi dimenzioniranje komponenata uređaja, tj. odrediti najveća strujna i naponska opterećenja komponenata te njihove gubitke snage koji će mu poslije poslužiti kao osnova za toplinski proračun uređaja.

Jednadžbe mreže ovise o shemi spoja komponenata i njihovim (matematičkim) modelima. No, sam postupak modeliranja, kao što je spomenuto, nije egzaktno. Zbog toga je bitno prije početka dimenzioniranja komponenata kritički vrednovati ne samo izlazne podatke proračuna, tj. rezultate dobivene rješavanjem jednadžbi mreže nego i ulazne podatke te matematičku metodu proračuna [6].

Prethodna procjena rezultata. Prije rješavanja jednadžbi mreže projektant mora približno znati što treba dobiti kao rezultat. Jer, ako ne zna što treba dobiti, svaki mu rezultat može izgledati jednako dobar ili jednako loš. U tom slučaju nema načina da projektant prije fizičke izvedbe uređaja spozna, a tada je to već kasno, jesu li rezultati točni ili nisu.¹⁰

¹⁰Prije pedesetak i više godina nije trebalo posebno isticati važnost prethodne procjene rezultata proračuna. Tada je, naime, osnovni alat projektanata u proračunima bilo logaritamsko računalo, a ono se nije moglo uspješno koristiti ako projektant nije točno znao red vrijednosti rezultata koji je trebao dobiti proračunom.

U prethodnoj procjeni rezultata bitno je iskustvo, ispravno logičko zaključivanje i dokazivanje te znanje i sposobnost primjene osnovnih fizikalnih načela elektrotehnike na konkretne probleme, tj. fizikalno razumijevanje rada uređaja. Znanje matematičkih metoda proračuna u toj fazi procjene nije dovoljno. Trivijalno je reći, ali se to katkad zaboravlja, da su matematičke metode proračuna samo sredstvo za opisivanje kvantitativnih učinaka fizikalnih pojava u uređaju i nisu zamjena za njihovo objašnjenje.

Točnost ulaznih podataka. Neovisno o odabranoj metodi proračuna uvijek valja imati na umu da je točnost rezultata proračuna (izlaznih podataka) manja od točnosti ulaznih podataka. U većini slučajeva projektant ne zna točno vrijednosti ulaznih podataka nego samo opsege promjene njihovih vrijednosti, a katkad neke ulazne podatke mora tijekom modeliranja sam pretpostaviti. Usprkos tomu, složeniji modeli kao i složenije metode proračuna mogu projektantu stvoriti iluziju o točnosti dobivenih rezultata proračuna pogotovo ako se slažu s rezultatima mjerenja na projektiranom objektu. No, projektant ni u jednom trenutku ne smije zaboraviti da se proračuni odnose na matematičke modele tako da je postojanje razlika između rezultata mjerenja i rezultata proračuna normalno. Eventualno točno slaganje tih rezultata stvar je slučajnosti i ne treba mu pridavati neko drugo značenje.

Vrednovanje rezultata dobivenih numeričkim metodama. Projektant nije ekspert za numeričke metode proračuna. On uglavnom koristi gotove programske pakete, njemu, u pravilu, nepoznate ili nerazumljive strukture. Tu činjenicu treba projektant pri vrednovanju rezultata dobivenih numeričkim metodama stalno imati na umu.

Primjerice, odabere li, prema svojem mišljenju, najbolji matematički model analizirane sheme spoja mreže, projektant može nakon numeričkog proračuna (digitalne simulacije) dobiti očekivano ponašanje mreže, tj. ono što je predvidio. No, isto se tako može dogoditi da dobije ponašanje mreže drukčije od očekivanog, pogotovo ako je mreža nelinearna. Može dobiti subharmonički odziv, kaotično ponašanje ili neočekivane prijelazne pojave. Sa stajališta projektiranja uređaja u kojem se nalazi analizirana mreža nije uopće svejedno odražava li rezultat numeričkog proračuna buduće stvarno ponašanje uređaja ili je to tek posljedica pogrešnog odabira ulaznih podataka bitnih za numerički proračun. Tako se može dogoditi da je projektant odabrao prevelik korak integracije pri numeričkom rješavanju diferencijalnih jednadžbi ili prekratak vremenski interval unutar kojeg se brzom Fourierovom transformacijom određuje harmonijski sadržaj napona i struja komponenata uređaja. Da bi i u takvim slučajevima projektant znao ispravno vrednovati dobivene rezultate, bilo bi dobro da, osim fizikalnog razumijevanja rada uređaja, zna barem osnove numeričke matematike. Ostaje također i sumnja je li odabrani matematički model uistinu najbolji za postavljena pitanja analize.

Programski paket koji projektant koristi može biti koncipiran tako da se ne mogu mijenjati matematički modeli pojedinih komponenata, nego samo njihovi parametri. Tada nema načina kako bi projektant procijenio odražavaju li neočekivani rezultati numeričkog proračuna stvarno buduće ponašanje uređaja ili su posljedica pogrešnog odabira ulaznih podataka bitnih za numerički proračun ili čak posljedica neprimjerenog, projektantu nepoznatog, modela komponenata.

Zaključak

Električko, toplinsko i mehaničko dimenzioniranje komponenata uređaja te uređaja kao cjeline temelji se na projektantskim proračunima, a oni se u najvećem broju slučajeva u praksi temelje na odgovarajućim matematičkim modelima. S pomoću matematičkih modela projektantska se pitanja prevode u svijet apstraktnih objekata – svijet matematike – te se na njih može odgovoriti egzaktno, primjenjujući poznate analitičke i numeričke metode proračuna. Odabir matematičkih modela nije egzaktna postupak, nego ovisi o znanju, sklonostima i iskustvu projektanta. Ispravnost odgovora na postavljena pitanja o uređaju ne ovisi samo o točnosti ulaznih podataka, odabiru matematičkih modela i metoda proračuna nego i o tome jesu li zadovoljene sve pretpostavke pod kojima su matematički modeli definirani.

Primjerice, za većinu električkih uređaja i za većinu projektantskih pitanja u izgradnji električkih modela uređaja dostaju matematički modeli teorije električkih mreža. No, pri vrednovanju svih rezultata proračuna dobivenih s pomoću matematičkih modela temeljenih na teoriji električkih mreža, projektant mora stalno voditi računa o tome da je teorija električkih mreža samo poseban slučaj teorije elektromagnetskog polja. Drugim riječima, mora u svakom konkretnom primjeru provjeriti jesu li s dovoljnom točnošću zadovoljeni uvjeti pod kojima vrijede postulati i primitivni pojmovi teorije električkih mreža.

Literatura

- [1] Berčić, B., *Znanost i istina: realizam i instrumentalizam u filozofiji znanosti*, Hrvatski kulturni dom, Rijeka, 1995.
- [2] Casti, J. L., *Alternate realities*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [3] Feigl, H., “Ortodoksno” gledanje na teorije: Primjedbe u odbranu i kritika, *Filozofija nauke*, str. 222–235, Nolit, Beograd, 1985.
- [4] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M., *The Feynman lectures on physics*, Addison – Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.

- [5] Flegar, I., *Teorija mreža – Bilješke s predavanja*, Elektrotehnički fakultet, Osijek, 2001.
- [6] Flegar, I., *Osnove projektiranja električkih uređaja*, 2. izdanje, Element, Zagreb, 2016.
- [7] Hasler, M., Neirynck, J., *Nonlinear Circuits*, Artech House Inc., Norwood, 1986.
- [8] IEC 725:1981, *Considerations on reference impedances for use in determining disturbance characteristics of household appliances and similar electrical equipments*, International Electrotechnical Commission, Geneva, 1981.
- [9] Miličević, K., Lukačević, I., Flegar, I., Modeling of nonlinear coil in a ferroresonant circuit, *Electrical engineering*, Vol. 91, No. 2, 2009, pp. 51–59, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [10] Nagel, E., *Struktura nauke*, Nolit, Beograd, 1974.
- [11] Rohrer, R. A., *Circuit theory*, McGraw–Hill Kogakusha Ltd., Tokyo, 1970.
- [12] Schulz, D. B., *Simplicity in science*, PhD thesis, University of Iowa, 2012.
- [13] Velten, K., *Mathematical modeling and simulation. Introduction for scientists and engineers*, John Wiley & Sons, New York, 2009.
- [14] Woodward, J., *Scientific explanation*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, September 2017 Edition.
- [15] –, *Magnetic circuits and transformers*, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1965.

The role of mathematical models in electrical equipment design

Ivan Flegar

Abstract: Mathematical models are basic tools of electrical equipment designers to break up the complexity of objects they design. The usefulness of a mathematical model results from the fact that it is formulated in the frame of some, for a specific question about the designed object, relevant interpreted formal system. In this way a large number of mathematical theorems as well as analytical methods and numerical methods are available to the designer. One of the formal systems of electrical engineering – circuit theory – is described, which enables the building of electrical mathematical models and systematic formulation of network equations of electrical equipment in situations when lumped approximation is valid.

Keywords: circuit theory, electrical model, mathematical model, network equations