

UZROCI DJELOVANJA ZEMLJE

NA

MAGNETE I ELEKTRIČNE STRUJE

NAPISAO

FRANJO DIVIĆ,

PROFESOR NA C. KR. DOLNJOJ REALCI U MITROVICI.



U BEČU

TISKOM MECHITARISTA (W. HEINRICHA).

1881.

U V O D.

Zemlja djeluje poznatim nam načinom na magnete i električne struje tako, da ih uvijek stanovitom njekom silom i u stanoviti položaj donieti teži. Nu buduć da na magnete i električne struje, u koliko nam je to barem do danas poznato, opet samo magneti i električne struje, ravnajući ih, djeluju, to mora zemlja, pretpostavivši da je ona sjedištem gore spomenutih sila, ili magnetičnimi masami napunjeno, ili pako električnimi strujami obtečeno tielo biti.

Koji od tih dvajuh pretpostavaka nam više vjerojatnosti pruža, i kojim od njih si sve na to polje spadajuće pojave lakše razložiti možemo, biti će glavnim pitanjem ove razprave. U tu svrhu promatrati ćemo te dvie hipoteze pobliže, a obratiti ćemo se ponajprije k prvoj i starijoj.

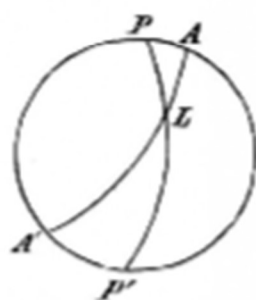
Zemlja kao magnetskim masama napunjeno tijelo.

Odmah u prva vremena, pošto se je svijet sa glavnim zakoni glede postavljenja magnetske igle na površini naše zemlje pobliže upoznao, te pošto je ista kod morskih putovanja više i češće upotrebljavana bila, bješe već i poznato, da njezini skrajnici nepokazuju točno prema geografskim polom zemlje, nego da njezina os sa dotičnim meridijanom u obće neki kut tvori, koji se ne samo mjestom nego i vremenom mjenja; nu istom početkom druge polovice prošloga vijeka pokušano je te, kao i sve slične pojave, i teoretično razložiti.

U to doba naime (1757) primio se je toga, za onda osobito tegetnoga posla, matematičar Euler, a ponukala ga je na to po svoj prilici hipoteza Halley-eva, da si zemlju glede njenoga djelovanja na izvanjstinu imademo predstaviti kao jedan složeni magnet sa četiri magnetska pola. Zaključivao je to naime Halley odtuda, što je iz učinjenih opažanja uvidjeti bilo, da se magnetska igla u raznim širinah jednoga te istoga meridijana upravo raznoimeno odkloniti može. Te Halley-ove zaključke opovrći, i sve pojave zemaljskoga magnetizma na djelovanje samo dvaju magnetskih polova svesti, bilo je bitnim ciljem svih Euler-ovih iztraživanja.

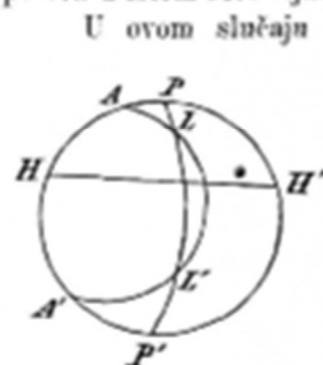
Predpostavivši dakle jedino, da će se magnetska igla na svakom mjestu površine naše zemlje u onu ravninu postaviti, koja kroz to isto mjesto i kroz magnetske polove zemlje prolazi, proračunao je Euler u gore spomenutu svrhu formule za magnetski odklon, t. j. za kut između magnetskoga i geografskoga meridijana za četiri slučaja, i to 1. ako magnetski polovi zemlje dijametralno leže, 2. ako se samo u protivnim meridijanima nalaze, 3. ako su u istom meridijanu a 4. ako su u različitim meridijanima.

Iz prvoga i drugoga pretpostavka bi slijedilo, da bi se magnetska igla u istom meridijanu uvijek i istoimeno odklonila.



Konstruiramo li si naime presjek zemlje sa jednom ravninom, koja kroz geografske polove P i P' i kroz magnetske polove A i A' ide, to će se i svaki magnetski meridijan, prolazeći kroz inače povoljnu točku L , sa geografskim meridijanom, koji istom točkom ide, u istoj hemisferi $PAP'A'$ samo jedanput sjeći i to tako, da će se sjeverna strana

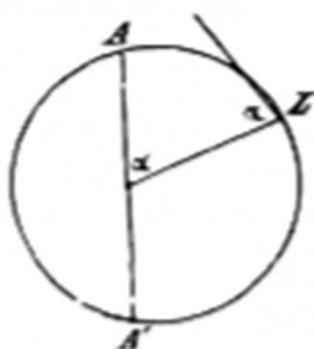
magnetičnoga meridijana uvijek na istoj strani geografskoga meridijana nalaziti, a usljed toga će i odklon u istoj hemisferi uvijek i istoimen ostati morati. Buduće se pako taj rezultat, po Halley-evih izražavanjima, s izkuštvom neslaže, to prelazi Euler k trećem pretpostavku, te uzima, da se magnetski polovi s iste strane geografskih polova u istom meridijanu nalaze.



U ovom slučaju siječe se svaki magnetski meridijan sa odgovarajućim geografskim, u istoj hemisferi osim u točki L , u obće jošte u drugoj točki L' , a odklon magnetske igle biti će u ove dvie točke upravo raznoimen. Razloživ tim načinom raznoimenost odklona magnetske igle u istom meridijanu i pod pretpostavkom samo dvaju polova, zaključuje Euler dalje, da mora u

slučaju istinitosti ovoga trećega pretpostavka osim linije $APPA'$ jošte jedna linija HH' oko zemlje obilaziti, u kojoj su magnetski odkloni jednaki ničtici. Biti će to naime ona linija, koja sve točke, u kojih se geografski meridijan sa magnetskim dodiruje, spaja, i nalaziti će se tim dalje od ekvatora, čim je veća razlika udaljenosti magnetskih polova od njim odgovarajućih geografskih. Dokazav tako netemeljitost Halley-evih zaključaka, prelazi Euler k četvrtom i najobćenitijem pretpostavku, da se naime magnetski polovi u raznih meridijanima nalaze, te nadaže i za taj slučaj formule za odklone magnetske igle.

Kod svih tih izražavanja zabavljao se je Euler jedino odklonom; u jednoj razpravi pako, koju je posliem kao popravak i dopunjak svojega prvajnjega rada izdao, uzeo je Euler i na naklon



magnetične igle obzir, i izrekao je hipotetično stavak, da će spojna linija sredine magneta L i središta magnetične osi zemlje AA' , s ovimi iste kutove α tvoriti. Iz toga pretpostavka sliedi opet, da će se igla u magnetičnom ekvatoru horizontalno staviti, u polovih pako da neće vertikalno položaj zauzimati, nego u druge dvie točke, koje bi bilo lahko konstrukcijom opredieliti, a i na zemlji opažanji naći, te koje bi onda mogle za označenje magnetičnih polova, kao i dalje za proračun inklinacija i deklinacija služiti.

To su glavne točke Euler-ove teorije zemaljskoga magnetizma, a mi vidimo, da su sva njegova iztraživanja bila prosto geometrična promatranja, jer fizikalni pretpostavci njegove teorije su stranom vrlo površni, a stranom, kao stavak za inklinacije, posvema pogrešni. Nije se dakle čuditi, ako su njegovi rezultati, pored svega oštroumnoga izvadjanja, jedva iz daleka prirodnim pojavom odgovarali.

Ta Euler-ova iztraživanja je dalje nastavio Mayer, koji je medju ostalim i jakost magnetičnoga djelovanja u svoje formule uveo, a tim bješe za dulje vremena završen svaki znatniji rad na polju teorije zemaljskoga magnetizma, dok se opet godine 1804 Biot toga posla neprimi.

Predpostaviv naime Biot, da je magnetični ekvator najveći okrug, opredielio ga je iz dvajuh opažanja, te je, držeći se takodjer Euler-ova pretpostavka, uzeo, da si magnetično djelovanje zemlje — barem što se naklona tiče — zamienjeno misliti možemo djelovanjem jednoga magneta, kojega os, idući kroz središte njeno, na ravnini magnetičnoga ekvatora okomito stoji, a kojega su polovi od iste ravnine jednako udaljeni. Uzevši osim toga, da je djelovanje magnetičnih polova obratno razmjerno drugoj potenciji udaljenosti od istih, proračunao je Biot formule za naklone magnetične igle, dočim je duljinu zemaljskoga magneta jošte neopredieljenu ostavio. Sravnivši zatim rezultate svoga računa sa opažanji na pojedinih mjestih, dobio je Biot za duljinu zemaljskoga magneta prema polumjeru zemlje neizmjereno sitnu olinu, i proračunao je na temelju svega toga naklone za razna mjesta, a rezultati njegovih računa odgovarali su, nje koje predelje izuzamši, skoro posvema za onda

opažanim vrijednostim. Da se pako odkloni i intenzitete pod pretpostavkom toga neizmjereno maloga magneta niti u prvoj približnosti izračunati nemogu, to je već bilo i njemu poznato.

Posliem Biota zabavljao se je sa teorijom zemaljskoga magnetizma Hansteen.

Skupivši najprije sva doondašnja opažanja glede djelovanja zemlje na magnete, i glede promjena toga djelovanja, pokazao je Hansteen nedostatke svih spomenutih teorija, te iztraživ zatim djelovanje magneta u obće, upotrebio je svoje rezultate i na djelovanje zemlje, od kojega dokazuje, da si ga zamienjeno misliti možemo dvjema magnetima različite jakosti i položaja, koji se u nutarnjosti njenoj nalaze. Opredieliv zatim duljinu i omjer jačina tih dvaju magneta, kao i položaj njihovih polova, proračunao je Hansteen inklinacije, deklinacije i intenzitete za razna mjesta, nu i njegovi rezultati nisu se dovoljno s iskustvom slagali.

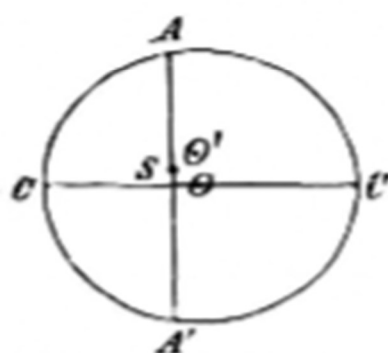
Od svih ovih teorija, kojima je pokušano, djelovanje zemlje na magnete razložiti, odlikovala se je barem svojom jednostavnošću, a i iz drugih uzroka, koje ćemo posliem vidjeti, Biot-ova modifikacija Euler-ove hipoteze, da je naime magnetizam u zemlji tako razpodieljen, da si ga glede djelovanja na izvanjštinu približno zamienjena misliti možemo jednim, i to prama polumjeru zemlje neizmjereno malim magnetom. Buduć je ta hipoteza za naša daljnja promatranja od važnosti, to ćemo ju i mi ovdje razviti, te ćemo onda vidjeti, u koliko ona vrijedi, i koje zaključke iz nje poteći možemo.

Pokusi, koji su na raznih mjestih površine našega planeta sa inače slobodno gibljivom, ali u težištu učvršćenom magnetičnom iglom učinjeni, pokazali su nam, da se ista u obće sa jednom čvrstom linijom, koja prolazeć blizu središta zemlje sa osi iste omanji kut tvori, približno u istu ravninu postaviti teži.

Iz toga sliedi opet, da si magnetične mase u nutarnjosti naše zemlje tako razpodieljene predstaviti imademo, da bi glede svoga djelovanja na izvanjštinu u obće, u nje kojoj približnosti barem, odgovarale djelovanju jednoga jakoga magneta, kojega os položaj gore spomenute čvrste linije imade.

Uzmemo li mi za sada, da će se magnetizmi zemlje zbilja dati zamieniti takovim magnetom, i konstruiramo li si prosjek

površine zemaljske kruglje sa jednom ravninom, koja ujedno i magnetsku os zemaljskoga magneta AA' u sebi sadržaje, to ćemo dobiti približno jedan okrug, kojega se središte O po gore rečenom



blizu magnetske osi zemlje, i blizu središta O' zemaljske kruglje nalazi. Povučemo li osim toga u ravnini istoga okruga kroz točku O na liniju AA' jednu okomitu, to će ona taj okrug u točkah C i C' sjeći, a iskustvo nas uči, da će se gibljiva igla u tih točkah, koje se, kako je lahko uviditi, blizu ekvatora zemlje nalaze, skoro horizontalno postaviti. Ako se

sada lijevom ili desnom stranom našega okruga iz točaka C gibljivom iglom sve više točki A približujemo, to ćemo vidjeti, da će se uvijek jedan te isti pol igle, i to onaj, koji je prama A okrenut, sve većma prama horizontu naklanjati, dok se najposlje u točki A , tako zvanom magnetskom polu zemlje, magnetska igla sasvim osovno nepostavi. Sve to isto zbiva se i sa drugim polom igle, ako se iz točaka C k točki A' približujemo, i to tako, da ćemo kod istih udaljenosti od točaka C i za naklone magnetske igle približno iste vrijednosti dobiti.

Buduće nam se svi ti pojavi i kod svih okruga, koji se u liniji AA' sieku, i koji, kako je lahko uvidjeti, nešto različitu veličinu imaju, ponavljaju, to sliedi neposredno, da će se i središte umišljenoga zemaljskoga magneta S blizu točke O , dakle svakako u blizini središta zemlje nalaziti.

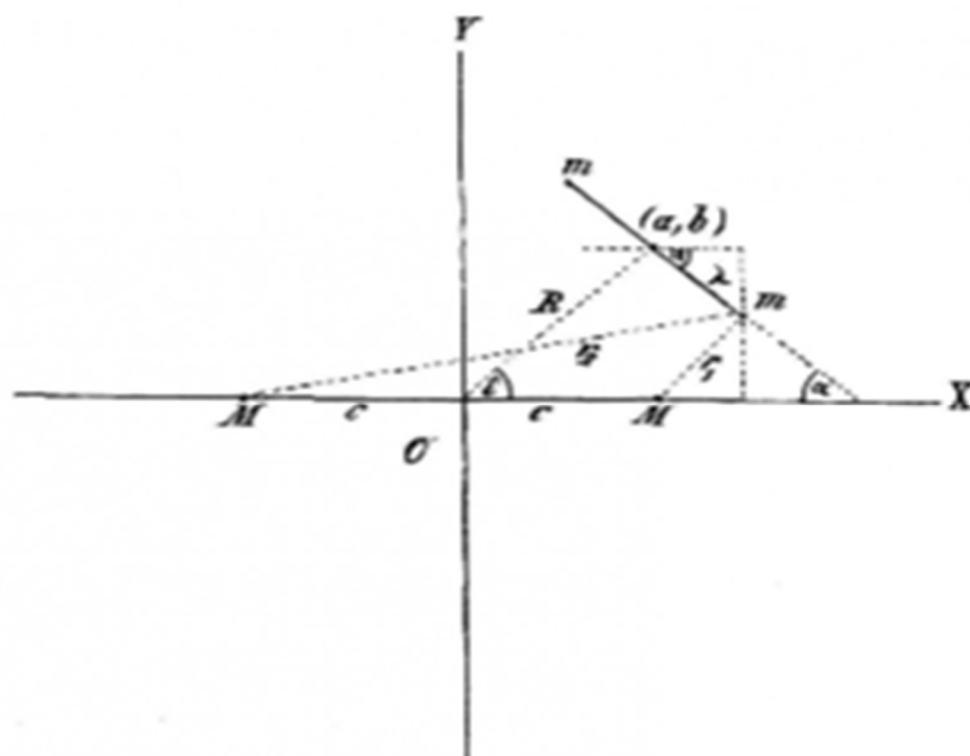
Preostaje nam dakle jošte pobliže iztražiti približnu duljinu toga umišljenoga magneta.

Da ta duljina svakako duljine promjera zemlje neprekoračuje, sliedi već odtuda, što bi se u tom slučaju polovi zemaljskoga magneta izvan zemlje nalazili, te što bi se iz toga uzroka kod približavanja k magnetskim polovima zemlje A i A' , uvijek ona strana igle pod horizont naklonila, koja je od tih polova odkrenjena, što se pako, kao što smo gore vidjeli, u prirodi nedogadja.

Da se pako i nijedan pol zemaljskoga magneta izvan zemlje nenalazi, sliedi osim iz prije navedenoga i odtuda, što bi opet u tom slučaju magnetska igla u oba pola A i A' s istom stranom prama zemlji okrenuta bila, što pako takodjer iskustvu neodgovara.

Polovi zemaljskoga magneta nalaze se dakle svakako u unutarnjosti zemlje, nu mi se možemo o njihovoj udaljenosti jošte i поближе izviestiti.

U tu svrhu konstruirati ćemo si jedan pravokutni koordinatni sistem u ravnini, kojega se izhodište O u sredini zemaljskoga magneta nalazi, a kojega os X u pravcu osi istoga magneta leži. Ravninu našega sistema uzeti ćemo tako, da ide ujedno kroz točku (a, b) , oko koje se jedan mali magnet od duljine 2λ povoljno gibati može.



Buduć će se i magnetska os ovoga maloga magneta u ravnini (X, Y) nalaziti, to dobijemo za potencijal zemaljskoga magneta glede jednoga pola našega maloga magneta

$$V = \frac{Mm}{r_1} - \frac{Mm}{r_2} = Mm \left\{ \frac{1}{\sqrt{y^2 + (c-x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + (c+x)^2}} \right\}$$

u kojoj formuli c polovinu duljine zemaljskoga magneta, M njegove iz polova slobodno djelujuće mase, x i y pako koordinate jednoga pola maloga magneta znače, u kojem si masu m skupljenu mislimo, i koji je od polova M zemaljskoga magneta odnosno za oline r_1 i r_2 udaljen.

Naznačimo li sa α kut između naša dva magneta, to imademo buduć je

$$x = a + \lambda \cos \alpha; y = b - \lambda \sin \alpha$$

za potencijal

$$V = Mm \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2b\lambda \sin \alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha + a^2 + 2a\lambda \cos \alpha + \lambda^2 \cos^2 \alpha - 2ac - 2\lambda c \cos \alpha + c^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2b\lambda \sin \alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha + a^2 + 2a\lambda \cos \alpha + \lambda^2 \cos^2 \alpha + 2ac + 2\lambda c \cos \alpha + c^2}} \right\}$$

Naznačimo li opet sa R udaljenost točke (a, b) od točke O , koja će olinja za razna mjesta naše zemlje razne, ali polumjeru zemlje približne vrijednosti imati, te naznačimo li osim toga sa ε kut između linije R i magnetske osi zemaljskoga magneta, to imademo buduć je

$$a = R \cos \varepsilon; b = R \sin \varepsilon; a^2 + b^2 = R^2$$

i buduć je λ tako maleno, da mu više potencije zanemariti možemo

$$V = Mm \left\{ \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2 - 2Rc \cos \varepsilon + 2\lambda [R \cos (\varepsilon + \alpha) - c \cos \alpha]}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2 + 2Rc \cos \varepsilon + 2\lambda [R \cos (\varepsilon + \alpha) + c \cos \alpha]}} \right\}$$

Ako R izpod korijena izvadimo i $\frac{c}{R}$ jednako k uzmemo, to dobijemo

$$V = \frac{Mm}{R} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 - 2k \cos \varepsilon + \frac{2\lambda}{R} [\cos (\varepsilon + \alpha) - k \cos \alpha]}} - \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 + 2k \cos \varepsilon + \frac{2\lambda}{R} [\cos (\varepsilon + \alpha) + k \cos \alpha]}} \right\}$$

Naznačimo li sa X i Y komponente djelovanja zemaljskoga magneta na jedan pol našega maloga magneta u smjeru osi x i y , to imademo

$$X = - \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\partial V}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}; Y = - \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\partial V}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

Ako sada oba korijena u izrazu za V razvijemo, i opet više potencije od $\frac{\lambda}{R}$ zanemarimo, te onda isti izraz po α diferenciramo, to dobijemo

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = - \frac{Mm \lambda}{R^2} \left\{ \frac{k \sin \alpha - \sin (\varepsilon + \alpha)}{\sqrt{(1 + k^2 - 2k \cos \varepsilon)^3}} + \frac{k \sin \alpha + \sin (\varepsilon + \alpha)}{\sqrt{(1 + k^2 + 2k \cos \varepsilon)^3}} \right\}$$

dakle buduć je

$$dx = - \lambda \sin \alpha d\alpha; dy = - \lambda \cos \alpha d\alpha$$

to imademo

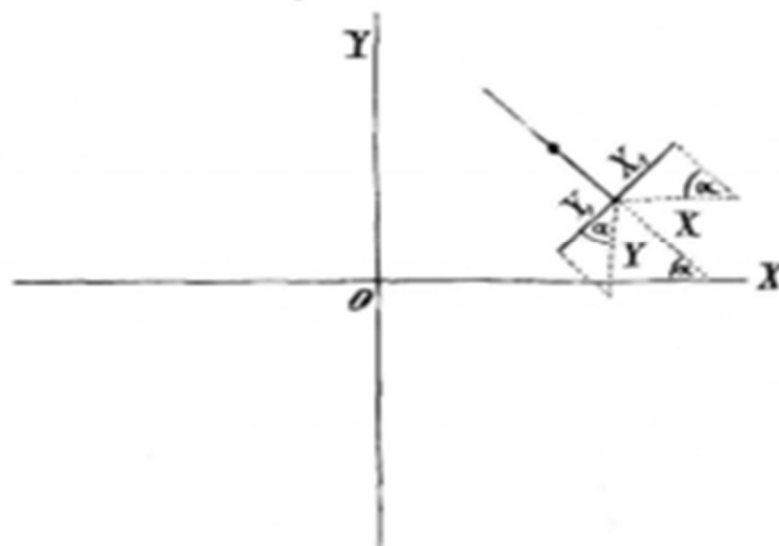
$$X = -\frac{Mm}{R^2 \sin \alpha} \left\{ \frac{k \sin \alpha - \sin(\varepsilon + \alpha)}{\sqrt{(1 + k^2 - 2k \cos \varepsilon)^3}} + \frac{k \sin \alpha + \sin(\varepsilon + \alpha)}{\sqrt{(1 + k^2 + 2k \cos \varepsilon)^3}} \right\}$$

$$Y = -\frac{Mm}{R^2 \cos \alpha} \left\{ \frac{k \sin \alpha - \sin(\varepsilon + \alpha)}{\sqrt{(1 + k^2 - 2k \cos \varepsilon)^3}} + \frac{k \sin \alpha + \sin(\varepsilon + \alpha)}{\sqrt{(1 + k^2 + 2k \cos \varepsilon)^3}} \right\}$$

Komponente sila na drugi pol djelujućih jesu zbog razmjerne sitnosti oline 2 λ isto tako velike, ali samo imaju protivne znakove.

Da pronadjemo kada će naša magnetska igla u ravnotežju biti, potegnemo si isti naš koordinatni sistem, te dobijemo za komponente glede jednoga pola m , koje okomito na duljini osi maloga magneta stoje, i koje jedino na njegovo kretanje oko točke (σ, b) upliva imaju

$$X_1 = X \sin \alpha; \quad Y_1 = Y \cos \alpha$$



Te dvie komponente drže si ravnotežje, ako je njihova algebrainska svota jednaka ničici, dakle ako je

$$-\frac{2 Mm}{R^2} \left\{ \frac{k \sin \alpha - \sin(\varepsilon + \alpha)}{\sqrt{(1 + k^2 - 2k \cos \varepsilon)^3}} + \frac{k \sin \alpha + \sin(\varepsilon + \alpha)}{\sqrt{(1 + k^2 + 2k \cos \varepsilon)^3}} \right\} = 0$$

Buduć da ta ista formula, absolutno uzeta, i za drugi pol vrijedi, te buduće je M, m i R od ničice različito, to dobijemo za ravnotežje magnetske igle konačnu jednačbu

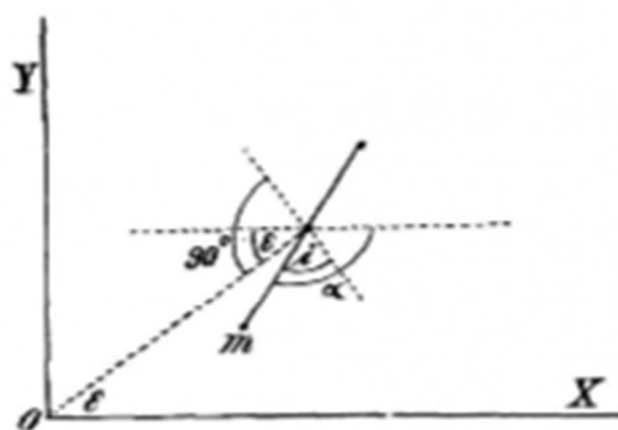
$$\frac{\sin(\varepsilon + \alpha) + k \sin \alpha}{\sqrt{(1 + k^2 + 2k \cos \varepsilon)^3}} = \frac{\sin(\varepsilon + \alpha) - k \sin \alpha}{\sqrt{(1 + k^2 - 2k \cos \varepsilon)^3}}$$

Ako sada naklon magnetske igle i , t. j. kut njezin sa horizontalnom ravninom u ovu jednačbu uvedemo, to možemo onda iz nje na temelju učinjenih pokusa broj k , koji će za razne točke površine

zemlje i u nješto različite vrijednosti imati, te koji za polove, kao što smo vidjeli, sigurno jedinice neprekoračuje, поближе označiti.

Mi dobijemo naime, jer je O blizu središta zemlje dakle budući je približno

$$\alpha = (i + 90 - \varepsilon)^0$$



za stanje ravnotežja

$$\frac{\cos i + k \cos (i - \varepsilon)}{\sqrt{(1 + k^2 + 2k \cos \varepsilon)^2}} = \frac{\cos i - k \cos (i - \varepsilon)}{\sqrt{(1 + k^2 - 2k \cos \varepsilon)^2}}$$

Iz te formule možemo ponajprije uviditi, da će se igla za makar koju vrijednost od k za $\varepsilon = 90^\circ$ hori-

zontalno, a za $\varepsilon = 0^\circ$, ili $\varepsilon = 180^\circ$ osnovno postaviti.

Za $\varepsilon = 90^\circ$ imademo naime

$$\frac{\cos i + k \sin i}{\sqrt{(1 + k^2)^2}} = \frac{\cos i - k \sin i}{\sqrt{(1 + k^2)^2}} \text{ dakle}$$

$$2k \sin i = 0$$

ili budući je k različito od ničice

$$\sin i = 0; i = 0^\circ$$

Za $\varepsilon = 0^\circ$ dobijemo opet

$$\frac{\cos i \cdot [1 + k]}{[1 + k]^2} = \frac{\cos i \cdot [1 - k]}{[1 - k]^2} \text{ dakle}$$

$$\cos i = \left[\frac{1 - k}{1 + k} \right]^2 \cos i$$

Budući je $\left[\frac{1 - k}{1 + k} \right]^2$ uvijek manje nego jedan, to zadovoljava toj jednačbi jedino

$$\cos i = 0; i = 90^\circ$$

Slično to dobijemo i za $\varepsilon = 180^\circ$.

Iz tih pojedinih vrijednosti za ε nemožemo dakle, prem rezultat prirodnim pojavom odgovaraju, ništa o veličini broja k zaključiti. Drugačije je to pako za druge vrijednosti od ε .

Ponajprije se možemo naime lahko uvjeriti, da je k za one točke, koje se blizu magnetskih polova zemlje nalaze, dakle po gore izvedenom i uvijek jedan omanji slomak.

Stavimo li mi naime za te točke k jednako 1 , to dobijemo

$$\frac{\cos i + \cos (i - \varepsilon)}{\sqrt{\{2(1 + \cos \varepsilon)\}^3}} = \frac{\cos i - \cos (i - \varepsilon)}{\sqrt{\{2(1 - \cos \varepsilon)\}^3}}$$

ili buduće je $1 + \cos \varepsilon = 2 \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}$; $1 - \cos \varepsilon = 2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$
to imademo

$$\frac{\cos i + \cos i \cos \varepsilon + \sin i \sin \varepsilon}{\cos^3 \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\cos i - \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon}{\sin^3 \frac{\varepsilon}{2}}$$

Metnemo li $\cos i = x$, dakle $\sin i = \sqrt{1 - x^2}$, to dobijemo

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - x^2} \sin \varepsilon (\cos^3 \frac{\varepsilon}{2} + \sin^3 \frac{\varepsilon}{2}) = \\ & = x \{ \cos^3 \frac{\varepsilon}{2} - \sin^3 \frac{\varepsilon}{2} - \cos \varepsilon (\cos^3 \frac{\varepsilon}{2} + \sin^3 \frac{\varepsilon}{2}) \} \end{aligned}$$

Stavimo li $\cos^3 \frac{\varepsilon}{2} + \sin^3 \frac{\varepsilon}{2} = a$; $\cos^3 \frac{\varepsilon}{2} - \sin^3 \frac{\varepsilon}{2} = b$

to je onda $a \sin \varepsilon \cdot \sqrt{1 - x^2} = x (b - a \cos \varepsilon)$, dakle

$$x = \frac{a \sin \varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varepsilon}}$$

Buduće je pako

$$\begin{aligned} a &= \cos^3 \frac{\varepsilon}{2} + \sin^3 \frac{\varepsilon}{2} = \\ &= (\cos \frac{\varepsilon}{2} + \sin \frac{\varepsilon}{2}) (\cos^2 \frac{\varepsilon}{2} - \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} + \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}) = \\ &= (\cos \frac{\varepsilon}{2} + \sin \frac{\varepsilon}{2}) (1 - \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \cos^3 \frac{\varepsilon}{2} - \sin^3 \frac{\varepsilon}{2} = \\ &= (\cos \frac{\varepsilon}{2} - \sin \frac{\varepsilon}{2}) (\cos^2 \frac{\varepsilon}{2} + \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} + \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}) = \\ &= (\cos \frac{\varepsilon}{2} - \sin \frac{\varepsilon}{2}) (1 + \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{to je } a^2 + b^2 - 2ab \cos \varepsilon &= 2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} (1 + \cos^2 \varepsilon) = \\ &= \frac{\sin^2 \varepsilon (1 + \cos^2 \varepsilon)}{2} \end{aligned}$$

Umetnemo li te vrijednosti u gornju jednačbu za $x = \cos i$
to imademo dakle

$$\cos i = \frac{\sin \varepsilon (\cos^3 \frac{\varepsilon}{2} + \sin^3 \frac{\varepsilon}{2}) \sqrt{2}}{\sin \varepsilon \sqrt{1 + \cos^2 \varepsilon}}$$

Za $\varepsilon = 0^\circ$ ili $\varepsilon = 180^\circ$ postaje ovaj izraz neopredjeljenim,
nu mi iz predjašnjih promatranja znademo, da je u tih slučajevih
 $i = 90^\circ$.

Za svaki drugi slučaj imademo pako za vrijednost broja $k = 1$
u blizini polova

$$\cos i = \frac{(\cos^3 \frac{\varepsilon}{2} + \sin^3 \frac{\varepsilon}{2}) \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos^2 \varepsilon}}$$

Uzmemo li u ovom izrazu ε tako sitno, da se sve većma ničtici približuje, to dobijemo

$$\lim (\cos i) = 1 \text{ dakle } i = 0^\circ.$$

Iz našega pretpostavka, da je k u blizini polova, dakle približno i u obće, jednako 1, slijedi bi, da bi se magneti u polovih istina osovno, u njihovoj neposrednoj blizini pako odmah vodoravno postavili, kao što bi to i zbilja djelovanju jednoga velikoga magneta na jedan mali, koji se blizu jednoga od njegovih polova nalazi, odgovaralo.

Buduć se pako sve to, kao što nam učinjena opažanja svjedoče, niti samo približno nedogadja, to slijedi, da je k u obće jedan omanji slomak, t. j. da je umišljeni zemaljski magnet puno manji nego $2 R$, ili što je približno isto, nego premjer zemlje.

Da prave vrijednosti broja k nadjemo, morali bi u gore izvedenu jednačbu za stanje ravnotežja magnetične igle razne vrijednosti za ε , koja nam olinu kut sa magnetičnom ne pako sa geografskom osi zemlje nadaje, i njim odgovarajuće za i uvrstiti, te bi vidjeli, da bi iz tih jednačba za broj k uvijek u obće male, prem ne iste slomke dobili.

Što pako za broj k u raznih slučajevih i u nekoliko različite vrijednosti dobijemo, nije može biti samo uzrok taj, što i R svoje vrijednosti mienja, nego upravo taj, što su magnetične mase naše zemlje — ako ih kao obstojeće pretpostavimo — tako razpodieljene, da glede svoga djelovanja na izvanjstinu neodgovaraju za svaku točku površine posvema jednom te istom magnetu, kao što je to osobito i iz položaja odklonive igle na raznih mjestih uvidjeti.

Nu to je nješto i sasvim naravna.

Kako naine iz teorije magnetizma slijedi, dade se svako pozitivnim i negativnim magnetičnim masami iste množine, nu inače sasma povoljno napunjeno tielo, glede svoga djelovanja na svaku pojedinu točku izvanjstine, uvijek zamieniti jednim umišljenim magnetom, u kojega su polovih te mase koncentrirane. Ti će polovi za razne točke izvanjstine u obće i vrlo razan položaj zauzimati, nu promjene toga položaja su takove, da ih možemo za sve one točke zanemariti, kojih je medjusobna udaljenost prama udaljenosti njihovoj od najbližih masa tiela, koje glede djelovanja već u obzir uzeti moramo, vrlo mala olinu.

Samo za one točke izvanjstine, kojih se udaljenost u pogledu na dimenzije tiela, od istoga sve većma neizmjernosti približuje,

zauzimati će i taj umišljeni magnet uvijek jedan te isti položaj. Osim toga će to i za sve izmjereno udaljene točke onda biti moći, ako su magnetične mase spomenutoga tiela stanovitim nekim načinom poredane, kao n. pr. ako pozitivne i negativne mase, posebno uzete, punu ili izdubljenu kruglju iste gustoće sačinjavaju. Uviditi je naime, da bi te mase glede svake točke izvanjštine isto tako djelovale, kao da bi bile u središtih dotičnih kruglja koncentrirane.

Ako dakle zemlja na male magnete dvjema polovima odgovarajuć djeluje, te ako je položaj tih polova za razne točke jednoga mjesta skoro sasvim isti, to je po gore rečenom sve to i uvidljivo, budući su i magnetične mase zemlje, koje već u obzir uzeti moramo, od svake točke površine u obće dosta udaljene.

Nu opažanja nam pokazuju, da je i položaj umišljenih polova za cijelu površinu zemlje razmjerno dosta malim, više mjestnim nego li obćim promjenam izvrnut — ovdje naravno nije razgovor o promjena u vremenu — a iz toga možemo zaključiti, da su magnetične mase u glavnom, budući se iz drugih uzroka nikako blizu sredine zemlje nalaziti nemogu, ili približno gore navedenim načinom u krugljah, ili pako drugim, glede djelovanja na izvanjstinu tom odgovarajućim načinom, nu svakako u svojoj cjelini dosta pravilno poredane.

Ili da se jošte jasnije izrazimo.

Mi si možemo predstaviti, da se magnetične mase zemlje iz dvajuh dielova sastoje, od kojih prvi, daleko znatniji dio, kod skoro sasvim pravilnoga poredanja na svaku točku površine isto tako djeluje, kao jedan neizmjereno sitni magnet, koji se blizu sredine zemlje nalazi, a od kojih drugi, puno manji, nu ipak i za obće djelovanje jošte znatni dio, kod nepravilnoga poredanja svoga, djelovanje prvoga diela u raznih točkah više ili manje modificira. Ako mi dakle samo prvi dio tih magnetičnih masa zemlje kod proračuna djelovanja njena na magnete u obzir uzmemo, kao što su to u glavnom Euler i Mayer a osobito i Biot učinili, to ćemo onda naravno samo i njeku obću preglednu sliku magnetičnih odnošaja zemlje dobiti. Da pako točnije i opažanjem približnije rezultate pronadjemo, morali bi cjelokupne magnetične mase zemlje u račun uvesti, a te, kako iz svega prije navedenoga sliedi, niti je možno jednim, niti dvjema magnetima točno zamieniti.

Iz toga uzroka je zasnovao i izveo Gauss teoriju zemaljskoga magnetizma sa sasvim novoga, puno obćenitijega gledišta.

Predpostavivši naime takodjer, da se magnetsko djelovanje zemlje osniva na djelovanju pozitivnih i negativnih magnetskih masa, koje su u istoj množini po nutarnosti njenoj razprostrte, te temeljeć se dalje na matematično dokazani stavak, da se djelovanje na izvanjstinu takovih makar kojim načinom po nutarnosti jednoga tiela razprostrtih masa uvijek daće svesti na djelovanje jedne neizmjenno tanke magnetske vrste, koja se na površini toga tiela nalazi, te koje su pozitivni i negativni magnetizmi takodjer jednaki, proračunao je Gauss potencijal zemlje za točke izvanjstine, pod pretpostavkom, da je ista podpuna kuglja.

Imademo li mi naime takovu jednu kuglju, koje je polumjer jednak R , i koje je površina gore navedenim načinom magnetskim masama obložena, i potegnemo li ju na jedan polarni koordinatni sistem, kojega se izhodište u njenom središtu nalazi, to će se potencijal te kuglje glede jedne točke izvanjstine, koje je udaljenost od njenoga središta jednaka D , uvijek izraziti dati neizmjenim, po potencija od $(\frac{R}{D})$ poredanim nizom, koji imade oblik

$$V = R \left\{ P_1 \left(\frac{R}{D} \right) + P_2 \left(\frac{R}{D} \right)^2 + \dots \right\}$$

Koeficijenti P toga niza odviše jedino od polarnih kutova one točke, glede koje potencijal tražimo, i od stanovitih konstanta, koje su poredanjem magnetskih masa na površini kuglje označene. Prvi koeficijent sadržaje 3, drugi 5, treći 7 i t. d., takovih konstanta, a kako vidimo, ostaje glavnim zadatkom, te konstante opredjeliti. Buduće je to opredjelenje jedino na temelju iskustva možno, to je proračunao Gauss iz točnijih opažanja za razna, dosta udaljena mjesta tri okomite komponente magnetskoga djelovanja, i to u smjeru od juga k sjeveru, od iztoka k zapadu, i od površine zemlje prema središtu njenom. Potraživ zatim te iste komponente i iz svoje formule za potencijal, sravnio ih je Gauss sa prvašnjimi, te je proračunao tim načinom 24 konstante od prva 4 koeficijenta pod pretpostavkom, da se magnetsko djelovanje zemlje i za udaljenija mjesta dosta neprekidno mienja.

Tim su načinom dakle bila i 4 prva člana neizmjenjivoga niza za potencijal V kao stanovite funkcije koordinata izvanjskih točaka opredjeljene, a Gauss je, zadovoljiv se u prvoj približnosti sa ta 4 člana, te jer je osim toga za sve točke površine R jednako D , uzeo, da je za te točke

$$V = R (P_1 + P_2 + P_3 + P_4).$$

Da se o točnosti te svoje formule osvjedoči, proračunao je Gauss iz nje deklinacije, inklinacije i intenzitete za razna mjesta, a rezultati njegovih računa nisu moćebiti samo u obće, nego zbilja i u prvoj približnosti opažanim vrijednostim odgovarali. Ta bi približnost naravno bila tim veća, čim bi se više članova neizmjer-noga niza u obzir uzelo, i vrijedila bi kao takova uvijek, osim za one točke površine, u kojih su i mjestni magnetični odnošaji od upliva, buduć da za te točke i Gauss-ova razvijanja nevrjede.

Osvjedočiv se tim načinom o dovoljnoj točnosti svojih formula, opredielio je Gauss iz njih one linije, koje točke jednakih potencijala površine zemlje spajaju, te na kojih dakle smjer magnetičnih sila okomito stoji, i nazvao ih je „linijami (magnetičnoga) ravnotežja“.

Te su linije u obće dvostruko zavinute zatvorene krivulje, od kojih se nijedna s drugom nesieće, te kojih udaljenosti, kod jednakih razlika njihovih potencijala, od sredine zemlje prama sjeveru i jugu, nu samo u obće i cjelokupno uzeto, rastu. Jedna od tih linija, koje je potencijal jednak ničtici, nalazi se u blizini ekvatora i sieće se s istim; druge pako suzuju se sve većma prama dvjema stanovitim točkama u blizini geografskih polova, dok najposlje u te točke i nepredju, dočim i absolutne vrijednosti njihovih potencijala, kod inače protivnoga znaka, na obe strane spomenute linije, prama tima točkama sve veće bivaju.

Osim tih linija magnetičnoga ravnotežja opredielio je Gauss jošte i položaj magnetične osi zemlje, kao i njen magnetični moment, a tim načinom je bilo i pitanje o djelovanju zemlje za jedno stanovito vrijeme pod pretpostavkom, da je ista magnetičnim masami napunjeno tielo, teoretično barem, u koliko je to samo kod tako tegotne i zamršene stvari možno, podpuno riješeno.

U koliko ta Gauss-ova teorija sa prvašnjimi teorijami suvisi, viditi ćemo u drugom dielu ove razprave.

Što se pako njene razlike od prvašnjih teorija tiče, to se ta sastoji u tom, da su svi prvašnji njeko stanovito razdjelenje magnetičnih masa već u principu pretpostavili, te onda pokušali, specijaliziranjem tih pretpostavaka rezultate svojih računa sa opažanimi magnetičnim odnošaji u sklad svesti, dočim je Gauss samo uzeo, da se magnetično djelovanje zemlje i za udaljenija mjesta dosta neprekidno mienja, te onda na temelju toga pretpostavka jistom iz opažanih pojava na ono umišljeno razdelenje zemaljskoga

magnetizma na površini zaključivao, koje približno možemo kao magnetizme zemlje glede njenoga djelovanja na izvanjštinu zamjenjujuće uzeti.

Gauss-ov je pretpostavak dakle bio puno obćenitiji a osim toga, kako smo vidjeli, u obće barem, prirodnim odnošajem odgovarajuć, te je usljed toga i sasvim naravno, da je njim magnetično djelovanje zemlje mnogo točnije opredjeljeno bilo.

Vremene promjene toga djelovanja pako, u pogledu na njihove uzroke, na temelju iste ili prvašnjih hipoteza razložiti, nije pošlo nikako za rukom, a to je upravo i bilo povodom, što je odmah po Oersted-ovom pronašaću elektromagnetičnih pojava zavladala druga hipoteza, da naime uzroke magnetičnoga djelovanja zemlje imademo tražiti u električnih strujah, koje nekim stano-
vitim načinom njenom površinom kolaju.

Preostaje nam dakle i tu drugu hipotezu поближе promotriti.

Zemlja kao električnim strujama obtečeno tijelo.

Prvi, koji je izrazio hipotezu, da se magnetičnost zemlje osniva na djelovanju električnih struja, koje njenom površinom od istoka prema zapadu kolaju, bio je Ampere. Slično je mislio i Davy, a Barlow i drugi pokušali su malom sa krugljama, koje su običnim galvaničnim strujama obtečene bile, magnetičnost zemlje predstaviti.

Uzrok tim zemaljskim strujama tražio se je usljed dnevnih varijacija magnetičnoga djelovanja u uplivu sunca, i to po Seebeck-ovom iznašaću termične elektricitete, obično u dnevnih promjenah temperature, koje se poznatim nam načinom iz upliva sunčane topline i iz okretanja zemlje oko svoje osi na površini njejoj kombiniraju, a i glede toga učinili su Christie, Muncke i drugi pokuse.

U novije doba pako pokušano je postojanje takovih zemaljskih struja i eksperimentalno pokazati, a jedan od tih pokusa učinio je Lamont.

Ukopav naime Lamont dvie kovne ploče u zemlju, spojio ih je jednom žicom, u koju je osjetljivi galvanometer uvršćen bio. Taj galvanometer pokazivao je struje, koje su žicom tekle, te koje su mogle usljed elektromotornih sila zatvorenoga članka postati, kao takodjer i ogranak zemaljskih struja sačinjavati. Ako se je žica dosta duga uzela, morale su struje prve vrsti oslabiti, i samo struje druge vrsti, ako ih u obće ima i ako su dosta jake, djelujući ostati, što se je poslednje i zbilja pokazalo. Osim toga se je vidjelo, da su galvanometri dviju takovih istosmjerno postavljenih žica sasvim jednake promjene struja u istom vremenu pokazivali, te da su te promjene s promjenami magnetičnih igala, koje su inklinacije i deklinacije nadavale, u uzkom savezu bile.

Tim je dakle i direktno pokazano, da zemaljske struje postoje, te da od tih struja i promjene položaja magnetične igle odvisi,

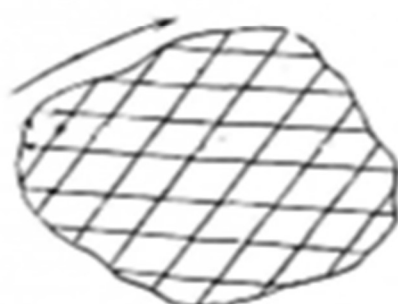
prem tim jošte nije dokazano, da su to upravo one struje, koje imademo kao uzrok i izvor cjelokupnoga magnetskoga djelovanja zemlje smatrati.

Svakako je pako naravno, da djelovanjem sunčane topline na površini naše zemlje termične, ekvatoru od prilike istosmjerne, struje postati mogu, a zatim je i sigurno, da će se i djelovanje tih struja periodično mienjati moći.

Preostaje nam dakle samo iztražiti, kojim načinom takove, oko jedne kruglje istosmjerno kolajuće struje na magnete djeluju, a zatim pokazati, jeli to djelovanje pod stanovitim uvjeti magnetskim učinkom zemlje odgovarati može.

U tu svrhu spomenuti ćemo najprije nekoliko stavaka iz elektromagnetizma, i upotrebiti ćemo onda te stavke na naš posebni slučaj.

Ako imademo jednu zatvorenu krivulju, kojom električne struje od intenzitete i u stanovitom pravcu teknu, to si možemo u



obće svaku tom krivuljom opasanu neprekidnu plohu tranzverzalnim linijami razstavljenu misliti u neizmjereno sitne, približno ravne plohe. Uzmemo li mi sada, da je svaka od tih elementarnih ploha takodjer električnim strujama od intenzitete i obtečena, i to tako, da se

pravci tih struja u onih elementih graničnih ploha, koji našu prvobitnu krivulju sačinjavaju, sa pravcem struje te krivulje slažu, i da se osim toga lieva ruka makar oko koje elementarne plohe sa strujom plivajuće, i prama njezinoj sredini gledajuće figure, uvijek na istoj strani cjelokupne izmjerne plohe nalazi, to će te struje, budući se načini svih nutarnjih elemenata ukidaju, na izvanjštinu isto tako djelovati, kao i naša prvobitna struja.

Takove, oko neizmjereno sitnih ravnih ploha kolajuće zatvorene struje, zovemo elementarnim strujama, te budući se potencijali tih struja glede svake magnetske mase, koja se izvan njimi zatvorene plohe nalazi, proračunati dadu, to ćemo i potencijal izmjereno velike zatvorene struje glede te iste mase naći moći, ako samo potencijale svih njezinih gore navedenim načinom dobivenih elementarnih struja sbrojimo.

Nu mi možemo djelovanje takovih struja jošte i drugačije opredieliti.

Kako naime poznato, daje se svaka elementarna struja glede svoga djelovanja na jednu magnetsku masu m , koja se izvan zatvorene plohe te struje nalazi, uvijek opet djelovanjem stanovitih magnetskih masa zamieniti.

Mislmo si mi naime sa svake strane zatvorene plohe jedne elementarne struje, koje je intenziteta i , u jednakoj udaljenosti od iste, po jednu njoj istosmjernu i kongruentnu ploču tako postavljenu, da svaka na plohi struje u jednoj točki okomito stojeća linija ujedno i kroz toj točki odgovarajuće točke naših ploča prolazi, te uzmimo dalje, da je udaljenost tih ploča neizmjerne sitna olinu λ , i da su one odnosno magnetskim masama od konstantne gustoće $\pm \frac{e}{\lambda}$ obložene, to će te ploče na svaku magnetsku masu, koja izvan njih leži, isto tako djelovati, kao i elementarna struja, samo ako se pozitivna ploča na lijevoj, a negativna na desnoj strani te struje nalazi.

Zamienimo li mi dakle svaku elementarnu plohu jedne izmjerne zatvorene električne struje takovimi magnetskim pločama, to će one i tu izmjernu struju glede njenoga djelovanja na jednu magnetsku masu, koja se u izmjerljivoj udaljenosti od one plohe nalazi, u kojoj sve elementarne struje leže (t. j. koja nije toj plohi neizmjerne bliza), podpunu nadomješćati. Sve pozitivno magnetske elementarne ploče nalaziti će se s jedne, a sve negativno magnetske s druge strane one plohe, u kojoj elementarne struje leže, i sačinjavati će, ako im je udaljenost konstantna i jednaka λ , te ako je ploha svih elementarnih struja ravninom, opet dvie s ovom poslednjom i međusobno istosmjerne i kongruentne ploče, koje su takodjer neprekidno magnetskim masama od konstantne gustoće $\pm \frac{e}{\lambda}$ obložene.

To zamjenjivanje električnih struja tranzverzalno magnetskim pločama od osobite je koristi ondje, gdje imademo učinke jednoga sistema takovih struja promatrati, a i mi ćemo ga upotrebiti, da proračunamo djelovanje onih struja, koje su, kolajuć istim pravcem u istosmjernih okruzih površinom jedne kruglje, jedna od druge glede njihovih ravnina za vrlo malu ali konstantnu olinu λ udaljene, na jedan magnetski pol m , koji se izvan te kruglje nalazi.

Konstruiramo li si u tu svrhu prosjek naše kruglje s jednom ravninom, koja iduć kroz njeno središte O , na ravninah svih naših

Izrazimo li p i u polarnimi koordinatami, to imademo buduć je

$p = r d\phi \cdot r \sin \phi d\varphi$; $u = \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \phi}$
za potencijal

$$dV = \frac{imr^2 \sin \phi d\phi \cos \varepsilon d\varphi}{\lambda \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \phi}}$$

dakle za potencijal površine ciele kruglje

$$V = \frac{imr^2}{\lambda} \int_0^\pi \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \phi}} \int_0^{2\pi} \cos \varepsilon d\varphi$$

U ovom potencijalu ostaje nam kut ε jošte kutovi α , ϕ i φ , od kojih jedino odvisi, izraziti.

Ponajprije čini linija OA sa osmi X , Y , Z odnosno kutove α° , 90° i $(90 - \alpha)^\circ$. Linija OB pako, koja ide kroz izhodište koordinata imade jednačbe

$$\eta = a \xi; \quad \zeta = b \xi.$$

Buduć ta linija osim toga u onoj ravnini leži, koja iduć kroz os X sa osi Z kut φ čini, te koja usljed toga jednačbu

$$\eta = \zeta \operatorname{tg} \varphi$$

imade, to moraju koordinate te linije OB i ovoj jednačbi udovoljavati a mi imademo dakle, jer je

$$\frac{\eta}{\zeta} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \varphi; \quad a = b \operatorname{tg} \varphi$$

$$\eta = b \operatorname{tg} \varphi \cdot \xi; \quad \zeta = b \xi$$

kao dalnje jednačbe linije OB .

Buduć da osim toga ta linija sa osi X kut ϕ tvori to imademo

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{\cos^2 \varphi}}} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{b^2 + \cos^2 \varphi}}$$

dakle $b = \cos \varphi \operatorname{tg} \phi$

a jednačbe linije OB glase konačno

$$\eta = \sin \varphi \operatorname{tg} \phi \cdot \xi; \quad \zeta = \cos \varphi \operatorname{tg} \phi \cdot \xi$$

Naznačimo li sada sa μ i ν kutove, koje ova linija sa osima Y i Z tvori, to dobijemo

$$\cos \mu = \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} = \sin \varphi \sin \phi;$$

$$\cos \nu = \frac{\cos \varphi \operatorname{tg} \phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} = \cos \varphi \sin \phi$$

dakle buduć je

$$\cos \varepsilon = \cos \alpha \cos \phi + \cos 90 \cos \mu + \cos (90 - \alpha) \cos \nu = \cos \alpha \cos \phi + \sin \alpha \cos \varphi \sin \phi,$$

to je usljed toga

$$V = \frac{imr^2}{\lambda} \left\{ \cos a \int_0^\pi \frac{\sin \phi \cos \phi d\phi}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \phi}} \int_0^{2\pi} d\varphi + \right. \\ \left. + \sin a \int_0^\pi \frac{\sin^2 \phi d\phi}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \phi}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right\}$$

Buduće da drugi integral u zagorki zbog

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

izčezava, to imademo dakle

$$V = \frac{2\pi imr^2}{\lambda} \cos a \int_0^\pi \frac{\sin \phi \cos \phi d\phi}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \phi}}$$

Stavimo li sada $\cos \phi = x$, to dobijemo dalje

$$V = \frac{2\pi imr^2}{\lambda} \cos a \int_{-1}^{+1} \frac{x dx}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r x}}$$

te nam preostaje dakle jošte ovaj integral proračunati.

Stavimo li mi u tu svrhu

$$\rho^2 + r^2 - 2\rho r x = y^2 \text{ to je } x = \frac{\rho^2 + r^2 - y^2}{2\rho r}; dx = -\frac{y dy}{\rho r}$$

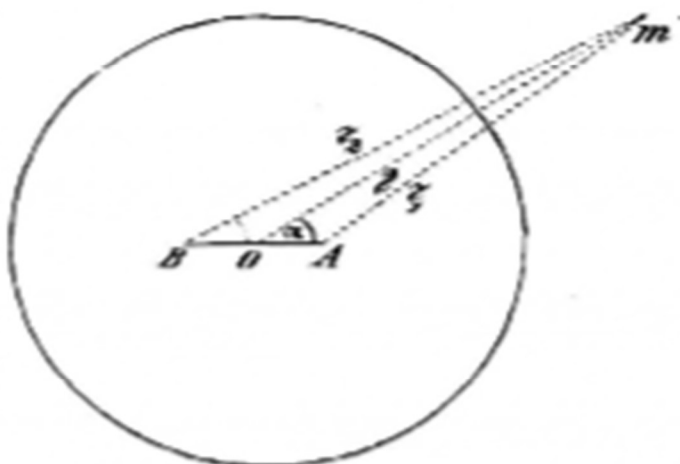
dakle

$$V = \frac{2\pi imr^2}{\lambda} \cos a \int_{\rho-r}^{\rho+r} \frac{\rho^2 + r^2 - y^2}{2\rho^2 r^2} dy = \frac{4r^3 \pi im}{3\lambda \rho^2} \cos a$$

Ako bi u ovu formulu za potencijal mjesto polarnih koordinata a i ρ pravokutne koordinate x, y i z uveli, te onda negativne diferencijalne kvocijente potencijala V po tih promjenljivih olinah proračunali, to bi dobili stanovite izraze X, Y i Z kao komponente djelovanja kruglje na masu m , u smjeru novouvedenih koordinata, od kojih bi olinu opet, kao što je lahko uviditi, za onaj izbor koordinatnoga sustava, kao što smo ga mi pretpostavili, Y uvijek izčezavalo, dočim bi za $a = 0$, t. j. ako bi se masa m u osi svih okruga nalazila, i Z takodjer jednako ničtici bilo.

Nu mi možemo iz našega izraza za V jošte i do drugih vrlo važnih zaključaka doći.

Pomislmo si mi naime jedan mali magnet AB od duljine λ , kojega se sredina u sredinu naše kruglje nalazi, te kojega magnetska os u pravcu osi galvaničnim strujama protečenih okrugla leži, to dobijemo za potencijal toga magnet, akosu njegove iz polova slobodno djelujuće mase $\pm M$, glede magnetske mase m , jednačbu



$$V = Mm \left\{ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right\}$$

u kojoj r_1 i r_2 udaljenosti mase m od polova maloga magnet AB znače.

Naznačimo li sa α i ρ iste oline kao i prije, to dobijemo buduće je

$$r_1 = \rho - \frac{\lambda}{2} \cos \alpha; \quad r_2 = \rho + \frac{\lambda}{2} \cos \alpha,$$

za potencijal

$$V = \frac{Mm}{\rho} \left\{ \left(1 - \frac{\lambda \cos \alpha}{2 \rho} \right)^{-1} - \left(1 + \frac{\lambda \cos \alpha}{2 \rho} \right)^{-1} \right\}$$

Razvijemo li ove izraze u zaporki, i zanemarimo li više potencije omjera $\frac{\lambda}{\rho}$ zbog njegove neizmjerne sitnosti, to dobijemo dalje

$$V = \frac{Mm}{\rho} \left\{ \left(1 + \frac{\lambda \cos \alpha}{2 \rho} \right) - \left(1 - \frac{\lambda \cos \alpha}{2 \rho} \right) \right\} = \frac{Mm \lambda}{\rho^2} \cos \alpha.$$

Sravnimo li taj potencijal sa prije nadjenim potencijalom električnih struja, to će oba jednaka biti ako je

$$M = \frac{4 \pi^2 \rho^2 i}{3 \lambda^2}$$

Ako si dakle u polovih maloga magnet AB mase $\pm M = \pm \frac{4 \pi^2 \rho^2 i}{3 \lambda^2}$ koncentrirane mislimo, to će taj magnet glede magnetske mase m , koja se izvan naše kruglje nalazi, isti potencijal kao i ova imati, a mi ih dakle smijemo i glede njihovoga djelovanja na istu masu zamieniti. Kad bi se pako masa m u nutarnosti kruglje nalazila, to nebi onda ovakovo zamjenjivanje dopušteno bilo, buduće za taj slučaj i izrazi, koje smo sa potencijal kruglje našli, nevrjede.

Do svih tih rezultata možemo pako jošte jednim, i to vrlo jednostavnim načinom doći.

Kao što smo naime vidjeli, djeluje naša kruglja na izvanjštinu tako, kao da bi bila istosmjernimi pozitivnimi i negativnimi okruglimi magnetičnimi pločami izpunjena, kojih je udaljenost jednaka konstanti λ , te kojih gustoća $\pm \frac{i}{\lambda}$ takodjer uvijek istu vrijednost imade. Osim toga je i udaljenost dviju bližnjih istovrstno magnetičnih ploča takodjer jednaka λ .

Naznačimo li polumjer jedne od naših pozitivnih ploča sa R , to je magnetična masa ciele te ploče

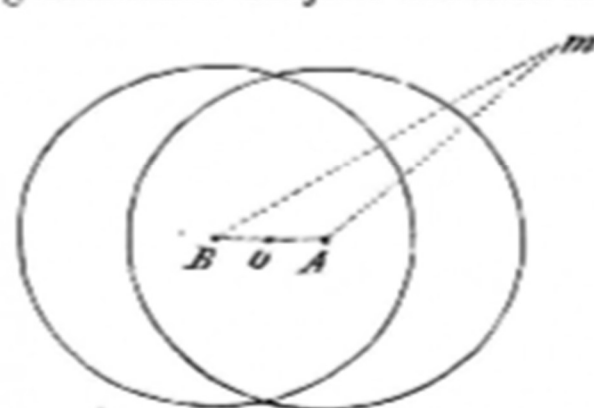
$$\mu = \frac{R^2 \pi i}{\lambda}$$

Mislamo si dalje svaku od tih masa između ploče R i njoj na lievoj strani se nalazeće susjedne, dakle na prostor $R^2 \pi \lambda$ jednako porazdieljenu, što zbog neizmjerne sitnosti oline λ učiniti smijemo, to dobijemo glede djelovanja na izvanjštinu mjesto svih pozitivnih ploča jednu magnetičnom masom od konstantne gustoće

$$\sigma = \frac{R^2 \pi i}{\lambda} : R^2 \pi \lambda = \frac{i}{\lambda^2}$$

neprekidno napunjenu kruglju, koje je polumjer jednak polumjeru naše kruglje, oko koje galvanične struje teku. Isto si tako možemo opet mjesto negativnih ploča drugu kruglju misliti, koje je gustoća jednaka $-\frac{i}{\lambda^2}$, nu koje je središte za olinu λ od središta pozitivne kruglje i to na lievu stranu u osi okruga galvaničnih struja pomaknuto. U sredini između oba središta nalazi se središte kruglje, oko koje galvanične struje teku.

Shvativši sve u jedno, to sliedi, da si možemo potencijal naše galvaničnimi strujami obtečene kruglje uvijek izražen misliti i po-



tencijali dviju drugih kruglja iste veličine, kojih su središta od središta prve kruglje u osi svih okruga za neizmjereno sitnu olinu $\frac{\lambda}{2}$ na desnoj i lievoj strani udaljena, te koje su magnetičnimi masami od konstantne gustoće $\pm \frac{i}{\lambda}$ neprekidno napunjene.

Kako pako poznato, možemo si mase ovih krugalja $\pm \frac{4}{3} \frac{r^3 \pi}{\lambda^2} \cdot \frac{i}{\lambda^2}$ opet, ali samo glede njihovoga djelovanja na izvanj-štinu, koncentrirane misliti u njihovih središtih A i B .

Uzmemo li sada ta dva središta kao polove jednoga magneta, to će se taj sa prije promatranim malim magnetom AB u svačem slagati, a mi smo dakle opet dokazali, da takovim jednim magne-
tom naše galvanične struje glede njihovoga djelovanja na izvanj-štinu zamieniti možemo.

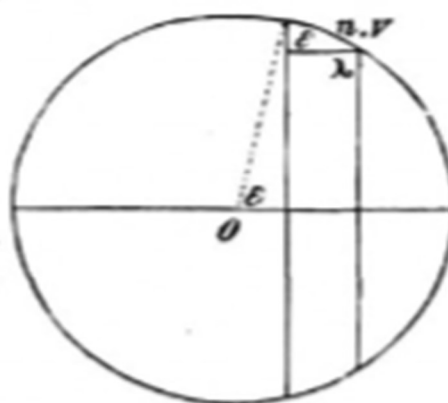
Ako daklem celom površinom jedne kruglje galvanične struje iste intenzitete u istosmjernih okruzih kolaju, te ako je uda-
ljenost ploha tih okruga konstantna i vrlo sitna olinu λ , to će one na jednu magnetičnu masu m , koja se izvan kruglje nalazi, isto tako djelovati, kao i jedan vrlo mali magnet, kojega je duljina takodjer jednaka λ , a kojega su iz polova slobodno djelujuće mase $\pm \frac{4}{3} \frac{r^3 \pi}{\lambda^2} \cdot \frac{i}{\lambda^2}$ vrlo velike, te koji u sredini kruglje tako leži, da mu se magnetična os u osi svih okruga nalazi.

Mislimo si mi pako sada galvanične struje okolo jedne krug-
lje tako tekuć, da im je neizmjerno sitna udaljenost na površini iste za sve konstantna, a da im je intenziteta razmjerna sinusuu onoga kuta ε , koji spojna linija jedne točke takove struje i sredine kruglje sa osi svih okruga tvori, to imademo u glavnom isti slučaj kao i prije, a i djelovanje takovih struja dati će se opet svesti na djelovanje jednoga neizmerno sitnoga magneta od gore navedenih svojstva.

Da to dokazati možemo, predstavimo si našu cielu kruglju strujam istosmjernimi, i međjusobno jednako udaljenimi ravni-
nami u dielove razstavljenu. Ako je udaljenost struja na po-
vršini kruglje jednaka ν , a okomita udaljenost konstruiranih ravnina jednaka λ , te ako uzmemo obe te konstantne i neizmerno sitne oline tako, da nami omjer $\frac{\lambda}{\nu}$ ipak dosta veliki broj daje, to ćemo imati u povoljnoj približnosti

$$\lambda = \pi \nu \sin \varepsilon$$

gdje nam π broj struja izmedju dvijuh susjednih ravnina, a ε gore spomenuti polarni kut jedne od tih struja znači.

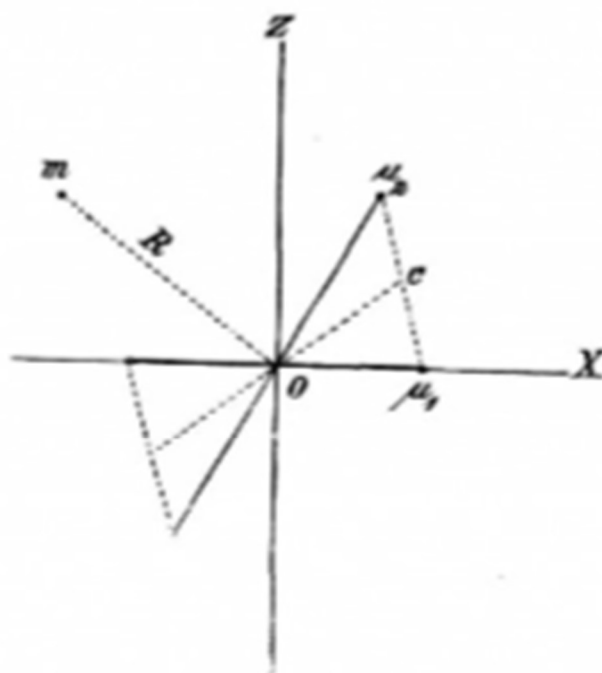


Zbog neizmjerne sitnosti oline λ pako možemo si uvijek sve između dviju bližnjih ravnina kolajuće struje, glede njihovoga djelovanja na izvanjštinu, skupljene misliti u onaj okrug površine kruglje, kojega se ploha upravo u sredini tih ravnina nalazi, a intenziteta svake tako sastavljene struje biti će jednaka

$$J = in \sin \varepsilon = \frac{i \lambda}{v}$$

Buduć je taj izraz, kako vidimo, pod gorujimi uvjeti za sve sastavljene struje jednak, a i udaljenost njihovih ploha konstantna, to dolazimo dakle opet na stari pretpostavak, a tim je i naša tvrdnja dokazana.

Imademo li pako dva sistema takovih okolo jedne kruglje kolajućih struja, i uzmemo li, da je kut između osi tih dvaju sistema jednak φ , to će se dakle i svaki od njih zamieniti dati jednim malim magnetom. Osi tih dvaju magneta tvoriti će također kut φ , a i oni će na izvanjštinu opet isto tako djelovati, kao jedan neizmjereno sitni magnet, kojega su pozitivne i negativne mase jednake svotam odgovarajućih masa gornjih dvaju magneta, te koje su u težištih ovih masa koncentrirane.



Potegnemo li si minaima jedan koordinatni sistem u prostoru, kojega se izhodište O u sredinu kruglje nalazi, a kojega os X u osi jednoga od naših dvaju magneta leži, i izaberemo li ravninu (X, Z) toga sistema tako, da u jedno i os drugoga magneta u sebi sadržaje, to ćemo dobiti za potencijal tih dvaju magneta, kojih ćemo duljine odnosno sa λ_1 i λ_2 , a slobodno iz polova djelujuće mase sa $\pm \mu_1$ i $\pm \mu_2$ naznačiti, glede magnetične mase m , ako spojna linija R iste i

izhodišta koordinata sa osima spomenutih magneta kutove ϕ_1 i ϕ_2 tvori, po prvašnjem

$$V = \frac{\mu_1 \lambda_1 m \cos \phi_1}{R^2} + \frac{\mu_2 \lambda_2 m \cos \phi_2}{R^2}$$

Naznačimo li mi sa α i β kutove izmedju linije R i osi sistema X i Z , to imademo

$$\cos \phi_1 = \cos \alpha; \cos \phi_2 = \cos \alpha \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi,$$

te dobijemo dakle za potencijal

$$V = \frac{\mu_1 \lambda_1 m \cos \alpha}{R^2} + \frac{\mu_2 \lambda_2 m (\cos \alpha \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi)}{R^2}$$

Spojimo li mi pozitivne mase μ_1 i μ_2 upravnom linijom, i izaberemo li si u ovoj točki c tako, da su udaljenosti njene od tih magnetičnih masa protivno razmjerne veličini istih, to će se onda točka c u njihovom težištu nalaziti, a mi dobijemo za koordinate te točke

$$x = \frac{\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 \cos \varphi}{2 (\mu_1 + \mu_2)} \quad z = \frac{\mu_2 \lambda_2 \sin \varphi}{2 (\mu_1 + \mu_2)}$$

Ako sada sa $\frac{\lambda}{2}$ duljinu one linije naznačimo, koja točku c sa izhodištem koordinata spaja, to će ta linija sa osi X kut δ tvoriti, a mi imademo

$$\sin \delta = \frac{\mu_2 \lambda_2 \sin \varphi}{\lambda (\mu_1 + \mu_2)} \quad \cos \delta = \frac{\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 \cos \varphi}{\lambda (\mu_1 + \mu_2)}$$

Mislino si mi sve to i kod negativnih masa ovih dvaju magneta učinjeno, i uzmimo da su u točkah c odnosno mase $\pm (\mu_1 + \mu_2)$ koncentrirane, to dobijemo tim načinom opet jedan neizmjerno sitni magnet od duljine λ , kojega se sredina u točki O nalazi, a kojega je potencijal glede iste naše magnetične mase m po prvašnjem

$$V = \frac{(\mu_1 + \mu_2) \lambda m}{R^2} \left\{ \cos \alpha \frac{\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 \cos \varphi}{\lambda (\mu_1 + \mu_2)} + \cos \beta \frac{\mu_2 \lambda_2 \sin \varphi}{\lambda (\mu_1 + \mu_2)} \right\} =$$

$$= \frac{\mu_1 \lambda_1 m \cos \alpha}{R^2} + \frac{\mu_2 \lambda_2 m (\cos \alpha \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi)}{R^2}$$

Buduć je taj potencijal potencijalu naših dvaju magneta, dakle i potencijalu naših dvaju sistema električnih struja jednak, to sliedi, da će se i takova dva sistema električnih struja uvijek dati zamieniti jednim u središtu kruglje se nalazećim neizmjerno sitnim magnetom.

Isto to vriedi naravno i za više sistema takovih struja, pak i onda, ako one okolo više krugalja razne veličine nu ipak istoga središta kolaju.

Mislmo si mi sada jednu kruglju, koja sve ovakove, sistemi električnih struja obtečene, kruglje zatvara, te koja je s timi svimi krugljami koncentrična, to će biti potencijal svih sistema ovih struja glede jedne točke njih zatvarajuće kruglje po prvašnjem jednak

$$V = C \cos \alpha$$

u kojoj nam jednačbi C jednu konstantu a α kut znači, koji spojna linija dotične točke kruglje i njenoga središta, sa osi sve sisteme zamjenjujućega neizmjerne sitnoga magneta tvori.

Da one linije, koje sve točke jednakih potencijala naše kruglje spajaju, te koje „linijami ravnotežja“ te kruglje nazvati možemo, dobijemo, imademo samo

$$\cos \alpha = K$$

staviti i onda olini K sve vriednosti od (-1) do $(+1)$ podieliti, a mi vidimo, da su sve te linije medjusobno istosmjerni okruzi, koji se sve većma prama onim točkam suzuju, u kojih produljena os neizmjerne sitnoga magneta kruglju sieće, i koje polovi te kruglje zovemo. U srednjem i najvećem od tih okruga, za koji je $\alpha = 90^\circ$, te kojega ravnina u polovici umišljenoga magneta na osi istoga okomito stoji, jeste $\cos \alpha$, dakle i potencijal $V = C \cos \alpha$, jednak ništici, a vriednosti toga potencijala rastu kod inače protivnoga znaka s obe strane spomenutoga najvećega okruga prama polom kruglje, dok najposlje u tih točkah, absolutno uzete, najveće nepostanu.

Što se konačno udaljenosti tih „linija ravnotežja“ kod jednakih razlika njihovih potencijala tiče, to sliedi iz jednačbe

$$d\alpha = -\frac{dK}{\sin \alpha}$$

ako u njoj dK konstantno predpostavimo, da će i one od polovice kruglje prama polom sve većma rasti.

Na temelju tih rezultata naših promatranja pokušati ćemo sada učinke zemlje na magnete i električne struje, nalazeće se na njenoj površini i iz predpostavka, da je ona električnimi strujami obtečeno tielo, pobliže protumačiti.

Ponajprije je, kao što smo to već na početku drugoga diela ove razprave spomenuli, nešto sasvim naravna, da djelovanjem sunčane topline na jednu stranu naše zemlje, dočim se druga ohlađuje, termične struje postati mogu, koje će međusobno i ekvatoru od prilike istosmjerne biti, ili koje će barem, glede svoga djelovanja na izvanjstinu, takovim strujam odgovarati. Te će struje prama polom zemlje sve slabije bivati, budući i razlike dnevni i noćnih temperatura prama tim točkama znatno manje bivaju.

Iz svega toga bi na prvi pogled slijedilo, da će i te zemaljske struje glede svoga djelovanja na izvanjstinu u dovoljnoj približnosti barem, odgovarati jednom neizmjereno sitnom, u sredini zemlje se nalazećem magnetu, kojega os u smjeru zemaljske osi leži, te da će dakle i „linije (magnetičnoga) ravnotežja“ zemlje približno onakovi okruzi biti, kao što smo ih mi kod promatranja djelovanja naših okolo krugalja stanovitim načinom kolajućih struja dobili.

Nu stvar ipak nije takova i to iz raznih uzroka.

Usljed neravnosti naše zemlje naime i usljed sasvim nepravilnoga razdjelenja mora i kopna na istoj, biti će svaki prosjek njene površine sa jednom ravninom, dakle i svaka električna okolo nje kolajuća struja u obće vrlo nepravilna krivulja, koja će u svojoj cjelosti samo okrugom odgovarati.

Što se dalje intenziteta tih zemaljskih struja tiče, to će iste ponajviše od toplenih odnošaja površine zemlje odvisiti, a i ovi, prem u glavnom geografskom širinom gore navedenim načinom označeni, nisu ipak niti u prvoj približnosti tako pravilni, da bi njimi prouzročene struje glede svojih intenziteta prije promatranim, okolo krugalja kolajućim, strujam točno odgovarati mogle.

Osim toga je i narav površine zemlje vrlo različita, što će takodjer u nekoliko nepravilnost struja glede njihovih intenziteta prouzročiti.

Iz svega toga slijedi, da će te zemaljske struje glede svoga djelovanja na izvanjstinu samo u glavnom i cjelokupno uzeto, neizmjereno sitnom magnetu odgovarati, ili što je isto, da će „linije ravnotežja“ zemlje po položaju i obliku svom, samo u glavnih svojstvima slične „okrugom ravnotežja“ promatranim krugalja biti, te da će dakle zemlja, i ako si ju kao električnim strujama gore navedenim načinom obtečeno tijelo predstavimo, na izvanjstinu upravo onako djelovati moći, kao što to prirodnim pojavom odgovara.

Što se vremenih varijacija toga djelovanja tiče, to će one, budući se oblik i narav površine zemlje, u kraćem vremenu barem, razmjerno dosta malo mienja, u najglavnijem od promjena toplenih odnošaja odvisiti i biti će, kao i ove posljednje usljed meteoroloških upliva, posebno uzete, momentane i nepravilne, dočim će ipak u svojoj cjelokupnosti dnevnu i godišnju periodičnost pokazivati morati.

Takove varijacije morati će naravno i onda nastati, ako uplivom nutarnje topline zemlje, kao što se to po svoj prilici kod potresa i vulkaničnih erupcija zbiva, ili iz kojih drugih uzroka, nove električne struje postanu.

Glede sekularnih varijacija magnetskoga djelovanja najposlije spomenuti nam je to, da su svakako prama odgovarajućim promjenam površine zemlje i toplenih odnošaja njenih vrlo velike, nu da se ipak barem u principu iz tih promjena razložiti dadu, pak da može biti i iz drugih, nam do sada nepoznatih uzroka sljeduju.

Na temelju ove hipoteze dakle da je zemlja električnim strujama obtečeno tijelo, možemo si mi ne samo njeno djelovanje na magnete i električne struje, nego također i promjene toga djelovanja protumačiti, a već zato moramo tu hipotezu onoj, koja zemlju kao magnetskim masami napunjeno tijelo uzima, pretpostaviti. Nu i osim toga je ta hipoteza u toliko vjerojatnija, što za osobiti način poredanja zemaljskih struja, kao što smo ga mi uzeli, i prirodnih uzroka imademo, dočim bi poredanje magnetskih masa, ako ih kao postojeće pretpostavimo, u pogledu na uzroke istoga, nješto više slučajnoga ili barem teško razloživoga bilo. Tim naravno nije baš rečeno, da se u nutarnjosti zemlje bliže površine njene takovih magnetskih masa i u nikojoj mjeri nenalazi, te da iste glede magnetskih pojava ni od mjestnoga upliva biti nemogu.

Jesu li pako sunčanom toplinom na površini naše zemlje prouzročene struje i jedine, koje kao uzrok i izvor cjelokupnoga magnetskoga djelovanja njena uzeti imademo, to je pitanje, na koje nam samo može biti iskustvo, ne pako iz promatranja učinaka izvedena teorija odgovoriti može, budući, kako smo vidjeli, i razni sistemi električnih struja jednom takovom sistemu odgovarajuće djelovati mogu.