

dr. sc. Ivan Šimatović, dipl. inž. el.
nezavisan istraživač
ivan0simatovic@gmail.com

00-00

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE ELEKTRODINAMIKE I NJIHOVA MODIFIKACIJA ZA HIPERDINAMIČKA¹ POLJA

Sažetak: Prikazane su Maxwelllove egzaktne jednačbe elektrodinamike u dvije verzije – teško preglednom i nezgrapnom skalarnom obliku te u preglednijem i matematički naprednijem kvaternionskom obliku. Zbog složene građe i mukotrpnog računanja kvaterniona Oliver Heaviside i Heinrich Rudolf Hertz su kvaternione u Maxwellovim jednačbama nadomjestili za računanje jednostavnijim te razumljivijim vektorima i skalarima. Uz ostala pojednostavnjenja, formulirali su četiri pregledne vektorske parcijalne diferencijalne jednačbe za elektrodinamička polja, koje su jednako točne te znatno lakše rješive od kvaternionskih. Zbog urađenih pojednostavnjenja one su nepotpune i ograničenog su dosega te vrijede za sva statička i dinamička makroskopska polja koja relativno miruju i mijenjaju se samo izravno u vremenu, što zadovoljava gotovo sve potrebe u fizici i elektrotehnici. Da bi te nepotpune jednačbe bile valjane i za funkcionalno složena hiperdinamička polja, koja se istovremeno mijenjaju izravno i neizravno (kinetički) u vremenu, neophodno je u njima modificirati operatore diferenciranja po vremenu i prostornim varijablama (*rot*, *div*). Time se dobivaju poopćene cjelovite vektorske jednačbe makroskopske elektrodinamike koje imaju znatno veći doseg te pokrivaju sve sagledive potrebe u fizici i elektrotehnici.

¹ Izrazito dinamička

Ključne riječi: Maxwellove jednačbe, kvaternion, vektor, elektrodinamika, hiperdinamičko polje, izravna promjena u vremenu, neizravna promjena u vremenu, modifikacija operatora diferenciranja

1. Maxwellove jednačbe elektrodinamike

Slavni škotski fizičar James Clerk Maxwell (1831.–1879.) objavio je 1865. godine svoju potpunu (objedinjenu) fenomenološku dinamičku teoriju elektromagnetskih polja [1] baziranu na hipotezi o postojanju luminiferoznog (svjetlonosnog) etera – hipotetske nepokretne, savršeno fine, fluidne te fizički i kemijski nedetektibilne tvari koja ispunjava čitav prostor, ne pruža otpor gibanju tijela te se vlada kao nedisipativan krut elastičan medij kojim se velikom brzinom rasprostiru titraji elektromagnetskih valova. Preko etera prenosi se prostorom električno, magnetsko i gravitacijsko međudjelovanje na daljinu.

Maxwell je svojoj dinamičkoj teoriji dovršio, objasnio te cjelovito egzaktno povezoao Faradayeve empirijski iznađene temeljne zakonitosti elektromagnetizma i formulirao ih je u strogom matematičkom obliku – sustavu od dvadeset skalarnih jednačbi napisanih u Kartezijevim koordinatama. Pritom je preuzeo Faradayev koncept silnica električnog i magnetskog polja zasnovan na dalekosežnoj Boškovićevoj prirodnoj filozofiji. Te jednačbe izgledaju ovako:

$e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$	(1) Gauss' Law
$\mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$ $\mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}$ $\mu\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}$	(2) Equivalent to Gauss' Law for magnetism
$P = \mu \left(\gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}$ $Q = \mu \left(\alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}$ $R = \mu \left(\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}$	(3) Faraday's Law (with the Lorentz Force and Poisson's Law)
$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi p' \quad p' = p + \frac{df}{dt}$ $\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi q' \quad q' = q + \frac{dg}{dt}$ $\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi r' \quad r' = r + \frac{dh}{dt}$	(4) Ampère-Maxwell Law
$P = -\zeta p \quad Q = -\zeta q \quad R = -\zeta r$	Ohm's Law
$P = kf \quad Q = kg \quad R = kh$	The electric elasticity equation ($\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon$)
$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0$	Continuity of charge

Maxwell je 1873. godine preformulirao svoj sustav od dvadeset egzakt-nih jednađbi dinamičkih polja napisanih u glomaznom, nezgrapnom i teško preglednom skalarnom obliku. Da bi ih donekle sažeo te učinio preglednijim i razumljivijim u njih je, kao bitno matematičko unapređenje, za sve elektromagnetske veličine uveo kvaternione. Njegovih dvanaest kvaternionskih jednađbi su blistav vrhunac tadašnje matematičke fizike. Prema [2] one izgledaju ovako:

• **Maxwell's equations in quaterionic form** (Treatise, 2nd edition, 1881, Vol. II, p. 239–240; S = scalar and V vector part of quaternion) $\mathfrak{v}$ = velocity, ψ, Ω = scalar el./mg. pot., eq. numbers 1st column from 1865, 2nd one from 1881

(B ₁) (A)	$\mathfrak{B} = V\nabla\mathfrak{A} \quad (S\nabla\mathfrak{A} = 0 \Rightarrow \mathfrak{B} = \nabla\mathfrak{A})$	eq. of mg. induction
(D) (B)	$\mathfrak{E} = V\mathfrak{v}\mathfrak{B} - \mathfrak{A} - \nabla\psi$	eq. of el. <i>motive</i> force
(C)	$\mathfrak{F} = V\mathfrak{E}\mathfrak{B} - e\nabla\psi - m\nabla\Omega$	eq. of el. magn. force
(D)	$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}$	eq. of magnetization
(C) (E)	$4\pi\mathfrak{E} = V\nabla\mathfrak{H}$	eq. of el. currents
(F) (G)	$\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}$	eq. of conductiv. (Ohm)
(E) (F)	$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}K\mathfrak{E}$	eq. of el. displacement
(A) (H)	$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \mathfrak{D}$	eq. of true currents
(B ₂) (L)	$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$	eq. of ind. magnetiz.
(G) (J)	$e = S\nabla\mathfrak{D}$	[Coulomb-Gauss law]
	$m = S\nabla\mathfrak{J}$	
	$\mathfrak{H} = -\nabla\Omega$	

On je držao da su sofisticirani kvaternioni, kojima se iskazuju sve električne i magnetske veličine, najprikladniji matematički alat za njihovu vjerodostojnu interpretaciju i egzaktnu analizu u elektrodinamici.

1.1 Što su kvaternioni?

Kvaternioni su Hamiltonovi hiperkompleksni četveročlani brojevi i predstavljaju zbroj skalara i vektora. Uz realni dio (skalar a) oni sadrže i tročlani imaginarni dio (vektor $\mathbf{v}$). Opći oblik kvaterniona u algebarskom zapisu prema [3] je:

$$\mathbf{q} = a + \mathbf{v} = a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$$

U njemu su a, b, c, d realni brojevi, a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ su tri međusobno okomite imaginarne jedinice ($\sqrt{-1}$) koje čine desni sustav. Za njih vrijedi:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

U preformuliranim jednadžbama dinamičkih EM polja Maxwell je prikazao sve usmjerene fizikalne veličine (jakosti polja, gustoću struje) kvaternionima bez realnog (skalarnog) dijela ($a = 0, b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} = \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), a sve neusmjerene veličine (naboje, potencijale, struje) kvaternionima bez imaginarnog (vektorskog) dijela ($a \neq 0, \mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow b = c = d = 0$).

Sofisticirana kvaternionska algebra, u odnosu na znatno jednostavniju Gibbs-Heavisideovu 3D vektorsku algebru, ima sljedeće prednosti:

- lakše se izvodi rotacija objekata u prostoru jer se ona zasniva na znamenitoj Eulerovoj formuli

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + \mathbf{i} \cdot \sin \varphi$$

- definiran je inverzni kvaternion $\mathbf{q}^{-1}$ što omogućuje dijeljenje kvaterniona $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ (lijevi ili desni produkt kvaterniona $\mathbf{p}$ s inverznim kvaternionom $\mathbf{q}$):

$$\mathbf{q}^{-1} \cdot \mathbf{p} \quad \text{ili} \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^{-1}$$

Kvaternionima se može elegantno iskazivati pozicija i rotacija usmjerenih veličina u prostoru i vremenu ali su oni, zbog svoje složene građe i pravila računanja, veoma otežavali rješavanje kvaternionskih jednadžbi elektromagnetskih polja na papiru s olovkom u ruci, jedinim alatom kojim su raspolagali tadašnji znanstvenici i elektrofizičari – preteče elektroinženjera. Te jednadžbe su u primjeni svima bile teško prihvatljive pa se stoga intenzivno razmišljalo o iznalaženju mogućnosti za njihovo pojednostavnjenje.

2. Heaviside-Hertzova vektorizacija Maxwellovih kvaternionskih jednadžbi

Nakon što je Maxwell 1873. godine prvotni sustav od 20 skalarnih diferencijalnih jednadžbi dinamičkih EM polja preformulirao u kvaternionске i time ih je sažeo u pregledniji te matematički napredniji i elegantniji oblik, oštrouman samouki britanski fizičar i matematičar Oliver Heaviside (1850. – 1925.) je, uz svesrdnu podršku Willarda Gibbsa, Arnolda Sommerfelda i drugih pragmatički orijentiranih utjecajnih fizičara ubrzo počeo inzistirati, unatoč oštrom Maxwellovom protivljenju, na zamjeni sofisticiranih kvaterniona strukturno jednostavnijim, intuitivnijim te stoga lakše razumljivim 3D vektorima i skalarima.

Heaviside je iz kvaterniona usmjerenih veličina EM polja izbacio njihov nulti skalarni član, a njihov tročlani imaginarni dio nadomjestio je vektorima čije se skalarne komponente mogu u Kartezijevim koordinatama iskazati funkcijama s uzajamno nezavisnim prostornim varijablama x , y , z i vremenom t .

Iz kvaterniona neusmjerenih veličina izbacio je njihov nulti imaginarni dio i time ih je pretvorio u skalarne veličine jednostavne za računanje.

To je uradio kao nužno i, valja priznati, kao vrlo uspješno pojednostavnjenje izvrsno prilagođeno efikasnom računanju u tadašnjim naglo naraslim potrebama primijenjene elektrofizike koja, za razliku od matematičke fizike, nije zahtijevala ni perfekciju, ni eleganciju, već što veću preglednost, jednostavnost i brzinu proračuna. Nezavisno o Heavisideu isto je nešto kasnije uradio i briljantan mladi te rano preminuli njemački fizičar Heinrich Rudolf Hertz (1857. – 1894.).

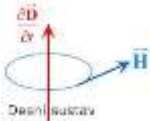
Prema njihovom mišljenju za matematičku interpretaciju i analizu elektromagnetskih polja u fizici, a posebice za složene proračune u tadašnjoj naglo

uznapredovanoj primijenjenoj elektrofizici – prethodnici suvremenog elektroinženjerstva, vektori i skalari su jednako točni te mnogo praktičniji od za računanje "grozni" sofisticiranih Hamilton-Maxwellovih kvaterniona.

S tog gledišta je Heaviside-Hertzova samovoljna pragmatička preformulacija strukturno složenog sustava od dvanaest Maxwellovih egzaktnih kvaternionskih jednadžbi dinamičkih EM polja u drastično pojednostavnjene i reducirane vektorske jednadžbe tada bila opravdana i svima dobro došla.

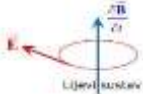
Vektorizacijom je Maxwellov egzaktni sustav sofisticiranih kvaternionskih jednadžbi makroskopskih dinamičkih polja bio transformiran u konceptualno degradiran te drastično reducirani sustav strukturno slabijih vektorskih jednadžbi. On sadrži tek četiri kratke te naizgled jednostavne parcijalne diferencijalne jednadžbe elegantno iskazane u sažetom operatorskom obliku zapisa. One vrlo pregledno povezuju vektore jakosti dinamičkih polja, struje, gustoće struja te slobodne električne naboje u prostoru i vremenu.

Četiri temeljne Heaviside-Hertzove vektorske parcijalne diferencijalne jednadžbe makroskopskog dinamičkog EM polja u inercijskom izotropnom praznom prostoru bez struja i naboja, iskazane u sažetom operatorskom obliku i racionaliziranom zapisu, prema [4] jesu:



Dinamički sustav

$$\underbrace{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}_{\text{Prva jednadžba - načelo EM indukcije}}, \quad \underbrace{\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(\epsilon_0 \cdot \vec{E}) = \epsilon_0 \cdot \operatorname{div} \vec{E} = 0}_{\text{Treća jednadžba - bezizvornost } \vec{D} \text{ polja}}$$



Ligjeni sustav

$$\underbrace{\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{Druga jednadžba - pomaćna struja}}, \quad \underbrace{\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div}(\mu_0 \cdot \vec{H}) = \mu_0 \cdot \operatorname{div} \vec{H} = 0}_{\text{Četvrta jednadžba - bezizvornost } \vec{B} \text{ polja}}$$

Prva i druga jednadžba su glavne i po svojem iskazu su rotorske pa funkcioniraju samo ako je na njihove obje strane dinamičko vrtložno te stoga bezizvorno $\vec{E}$ i $\vec{H}$ polje čije silnice su uvijek zatvorene krivulje.

Heaviside-Hertzov sustav vektorskih jednadžbi dinamičkih EM polja objavljen je 1884. godine, pet godina nakon Maxwellove smrti, te je, kao bitno jednostavniji, pregledniji i znatno lakše rješiv od sofisticiranih sustava kvaternionskih jednadžbi, ubrzo bio prihvaćen u fizici, a zatim u teoretskoj elektrotehnici i u tehnici bežičnih komunikacija gdje se vrlo uspješno i neupitno koristi sve do danas jer, unatoč svojoj nepotpunosti, izvrsno pokriva gotovo sve potrebe.

No, mnogo zahtjevnija teorijska (matematička) fizika je njihovim nedovoljno kritičkim prihvaćanjem te naknadnim odbacivanjem hipoteze o postojanju luminiferoznog etera, na temelju interpretacije iznenađujućih ishoda legendarnih Michelson-Morleyevih interferometrijskih mjerenja koja su, po mišljenju mnogih suvremenih istraživača, bila upitno koncipirana, mnogo izgubila.

Te četiri žalosno nepotpune vektorske jednačbe klasične elektrodinamike već se više od jednog stoljeća navode u svim visokoškolskim udžbenicima fizike, teoretske elektrotehnike i priručnicima kao slavne Maxwellove jednačbe, premda to nije tako. One, naime, zbog drastične konceptualne degradiranosti i očitih nepotpunosti u njihovom operatorskom prikazu predstavljaju tek blijedi odraz Maxwellovih egzaktnih sofisticiranih kvaternionskih jednačbi.

Stoga ih, zbog poštovanja visokog i prestižnog Maxwellovog ugleda, nije umjesno nazivati njegovim imenom. Najprikladnije ih je nazivati samo "jednačbama elektrodinamike" ili "Heaviside-Hertzovim jednačbama" želi li se istaći njihove autore koji su ih, uz svesrdnu podršku nekolicine tadašnjih utjecajnih te pragmatički orijentiranih (elektro)fizičara, samovoljno formulirali.

3. Ograničen doseg vektorskih jednačbi klasične elektrodinamike

"Criticizing Maxwell's equations is dangerous. One is immediately relegated as heretic. On the other hand, the power of mathematical reasoning cannot be ignored."

Daniele Funaro

Vektorske jednačbe klasične elektrodinamike su relativistički invarijantne te podržavaju sva relativno mirujuća makroskopska statička, kvazistatička i dinamička polja čiji se vektori jakosti $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ mogu općenito iskazati skalarnim komponentama definiranim trima neprekinutim diferencijabilnim funkcijama E_x, E_y, E_z i H_x, H_y, H_z koje zavise o tri prostorne varijable x, y, z i vremenu t .

Stoga za iskazivanje vektora jakosti dinamičkih polja u prostornim Kartezijevim koordinatama pomoću njihovih skalarnih komponenti općenito vrijedi:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &= E_x(x, y, z, t) \cdot \vec{\mathbf{i}} + E_y(x, y, z, t) \cdot \vec{\mathbf{j}} + E_z(x, y, z, t) \cdot \vec{\mathbf{k}} \\ \vec{\mathbf{H}}(x, y, z, t) &= H_x(x, y, z, t) \cdot \vec{\mathbf{i}} + H_y(x, y, z, t) \cdot \vec{\mathbf{j}} + H_z(x, y, z, t) \cdot \vec{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Pri tom se prešutno podrazumijeva da su tri prostorne varijable x, y, z i vrijeme t međusobno nezavisne varijable! Takva EM polja su dominantna u fizici i elektrotehnici pa za njih te nepotpune jednačbe izvrsno funkcioniraju.

No, već pri malo pažljivijem pogledu na prvu i drugu jednačbu, prvo što upada u oči jest da na njihovoj desnoj strani stoji parcijalna derivacija vektora jakosti polja po vremenu ($\partial\mathbf{H}/\partial t$ odnosno $\partial\mathbf{E}/\partial t$), što jasno upućuje da one opisuju samo dinamička polja čiji se vektori jakosti $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ u promatranoj fiksnoj točki (hvatištu) $T(x, y, z)$ u trenutku t mijenjaju samo izravno u vremenu duž međusobno okomitih pravaca e i h njihovog djelovanja. Ti pravci su tangente na silnice EM polja u promatranoj točki.

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{E}(x, y, z, t + dt) - \vec{E}(x, y, z, t)}{dt}, \quad dt > 0 \text{ i } dx = dy = dz = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{H}(x, y, z, t + dt) - \vec{H}(x, y, z, t)}{dt}, \quad dt > 0 \text{ i } dx = dy = dz = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

$\begin{matrix} v_x & v_y & v_z \end{matrix}$

Iz navedenih definicija parcijalnih derivacija po vremenu vektora jakosti **E** i **H** dinamičkog polja na promatranom mjestu $T(x, y, z)$ u trenutku t , uz nulti pomak njegovog hvatišta ($dx=dy=dz=0$) tijekom intervala dt , očito je da se u prvoj i drugoj jednadžbi ona tretiraju kao nepomična prema mirnom promatraču, ali pritom vektori jakosti polja mogu oko hvatišta postranično rotirati.

4. Redefiniranje jednadžbi elektrodinamike u vremenskoj domeni

Najjednostavniji način da se uoči nepotpunost prvih dviju jednadžbi u vremenskoj domeni je analiza funkcionalno složenih hiperdinamičkih polja koja se istovremeno mijenjaju izravno ($\partial \mathbf{H}/\partial t$ i $\partial \mathbf{E}/\partial t$) i neizravno (kinetički) u vremenu. To su – jasnije rečeno – sva dinamička polja u relativnom translatornom gibanju prema mirnom promatraču, ili osna polja funkcionalno složenih dvofaznih transverzalno-vektorskih (TVEM) mikrovalova čiji poprečno titrajući vektori jakosti polja istovremeno postranično rotiraju, ili torzijski titraju, oko valne zrake.

Brzina izravne promjene u vremenu vektora jakosti takvih polja na promatranom mjestu $T(x, y, z)$ u trenutku t određena je njihovim parcijalnim derivacijama $\partial \mathbf{E}/\partial t$ i $\partial \mathbf{H}/\partial t$ i zbiva se duž trenutnih pravaca **e** i **h** njihovog djelovanja.

Brzina neizravne (kinetičke) promjene u vremenu vektora jakosti tih polja na promatranom mjestu $T(x, y, z)$ u trenutku t određena je relativnom brzinom translacije njihovog hvatišta, ili kutnom brzinom postranične rotacije vektora jakosti polja oko njega, prema mirnom promatraču i poprečna je na brzinu izravne promjene u vremenu, odnosno na pravace **e** i **h** njihovog djelovanja.

Ukupna brzina promjene u vremenu vektora jakosti **E** i **H** hiperdinamičkog polja na promatranom mjestu jednaka je vektorskom zbroju tih dviju brzina i mjerodavna je za njihov ukupan elektromagnetski induksijski učinak u prostoru.

Gledano s tog rakursa očito je da na desnoj strani prve i druge jednadžbe, uz parcijalne derivacije po vremenu $\partial \mathbf{E}/\partial t$ i $\partial \mathbf{H}/\partial t$ vektora jakosti dinamičkih polja koja se relativno gibaju prema mirnom promatraču, nedostaju članovi koji na trenutno promatranoj poziciji iskazuju brzinu njihove neizravne (kinetičke) promjene u vremenu zbog translatorne promjene položaja hvatišta, ili promjene međusobno okomitih pravaca **e** i **h** djelovanja vektora osnih polja zbog njihove postranične rotacije ili torzijskog titranja oko valne zrake.

Da bi te dvije krnje vektorske diferencijalne jednadžbe bile primjenjive na hiperdinamička polja, koja se istovremeno mijenjanju izravno i neizravno u

vremenu, očito je da na njihovoj desnoj strani treba operator parcijalnog diferenciranja po vremenu $\partial/\partial t$ vektora jakosti polja nadomjestiti operatorom ukupnog diferenciranja po vremenu d/dt . Time se na promatranom mjestu u trenutku t dobiva ukupna brzina njihove promjene u vremenu prema mirnom promatraču.

Uz tu naizgled malenu, ali dalekosežnu, modifikaciju operatora prva i druga jednadžba postaju općenite i značajno povećavaju svoj doseg pa mogu vjerodostojno opisivati funkcionalno složeno ponašanje dinamičkih polja koja se relativno translacijski gibaju prema mirnom promatraču, ili osna polja funkcionalno složenih dvofaznih elektromagnetskih valova čiji vektori jakosti polja postranično rotiraju, ili torzijski titraju, oko valne zrake.

Ta modifikacija operatora diferenciranja po vremenu ($\partial/\partial t \rightarrow d/dt$) može se, slikovito rečeno, smatrati kao nužan "SP1" za prvu i drugu vektorsku jednadžbu elektrodinamike. Time se na njihovoj desnoj strani, uz izravnu brzinu promjene u vremenu $\partial\mathbf{E}/\partial t$ i $\partial\mathbf{H}/\partial t$ vektora jakosti polja, dobivaju nedostajući članovi koji daju brzinu njihove neizravne (kinetičke) promjene u vremenu na promatranom mjestu $T(x,y,z)$ u trenutku t prema mirnom promatraču.

5. Određivanje ukupne brzine promjene u vremenu hiperdinamičkog EM polja

Neka se dinamičko EM polje relativno translatorno giba nerelativističkom brzinom $|\mathbf{v}| \ll c_0$ prema mirnom promatraču te promatrano hvatište $T(x,y,z)$ vektora jakosti polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ u trenutku t ima brzinu $\mathbf{v}(t)$. Vektori jakosti polja su, općenito uzevši, zavisni o tri dinamičke prostorne koordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ i vremenu t kao jedinoj nezavisnoj varijabli.

Tijekom diferencijala vremena dt hvatište vektora jakosti polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ pomakne se iz točke $T(x,y,z)$ određene radijvektorom $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ za diferencijalni pomak $d\mathbf{r} = dx \cdot \mathbf{i} + dy \cdot \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k}$. Pri tom je ukupna promjena vektora jakosti polja na promatranom mjestu određena totalnim vektorskim diferencijalima $d\mathbf{E}$ i $d\mathbf{H}$ koji su definirani izrazima:

$$d\vec{\mathbf{E}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial z} \cdot dz \quad , \quad d\vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial z} \cdot dz$$

Njihovim dijeljenjem diferencijalom vremena $dt > 0$ dobivaju se za vektore jakosti $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ dinamičkog polja u translatornom gibanju u promatranj točki $T(x,y,z)$ u trenutku t opći izrazi za ukupnu brzinu njihove promjene u vremenu iskazani u sažetom operatorskom obliku:

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{E} \times \vec{v})$$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{H} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{H} \times \vec{v})$$

U njima prvi član na desnoj strani ($\partial \vec{H} / \partial t$ i $\partial \vec{E} / \partial t$) daje brzinu izravne promjene jakosti polja u vremenu, a drugi član, koji sadrži operator $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ usmjerenog diferenciranja vektora jakosti polja po vektoru brzine $\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt$, određuje brzinu neizravne promjene jakosti polja u vremenu. Taj skalarni operator u Kartezijevim prostornim koordinatama općenito izgleda ovako:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} = (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}) \cdot \left(\vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) = v_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

Za rotirajuća fiksna električna i magnetska polja koja se mijenjaju samo neizravno u vremenu otpadaju članovi $\partial \vec{H} / \partial t$ i $\partial \vec{E} / \partial t$ pa stoga za njih vrijedi:

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{E} = \text{rot}(\vec{E} \times \vec{v})$$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{H} = \text{rot}(\vec{H} \times \vec{v})$$

Za rotirajuća i torzijski titrajuća hiperdinamička radijalna osna polja funkcionalno složenih dvofaznih TVEM valova, s hvatištima vektora jakosti polja duž valne zrake (Z osi), ukupna brzina promjene u vremenu određena je izrazima:

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\omega}_z \times \vec{E} \quad , \quad \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\omega}_z \times \vec{H}$$

U njima je $\vec{\omega}_z = \omega_z \cdot \vec{k} = \partial \phi / \partial t \cdot \vec{k}$ vektor kutne brzine postranične rotacije vektora jakosti EM polja oko valne zrake.

Hiperdinamičko polje dvofaznih valova, čiji vektori jakosti polja u valnoj fronti poprečno titraju te istovremeno rotiraju ili torzijski titraju oko valne zrake može se u cilindričnim koordinatama predložiti parom vektorskih izraza s međusobno nezavisnim varijablama z i t , te polarnim kutovima φ_E i φ_H vektora jakosti EM polja zavisnim o tim varijablama. Ti izrazi iskazani u općem obliku jesu:

$$\vec{E}[\varphi_E(z, t), z, t] = E_\rho(z, t) \cdot \vec{e}_{\rho E}[\varphi_E(z, t)]$$

$$\vec{H}[\varphi_E(z, t), z, t] = H_\rho(z, t) \cdot \vec{e}_{\rho H}[\varphi_H(z, t)] = H_\rho(z, t) \cdot \vec{e}_{\varphi E}[\varphi_E(z, t)]$$

Pri tom se poprečno titranje vektora kombinira s rotacijom ili torzijskim titranjem.

$E_\rho(z,t) = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot z)$, $H_\rho(z,t) = H_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot z)$ – harmonijsko titranje

$$\varphi_E(z,t) = \begin{cases} \omega_r \cdot t - k_r \cdot z + \varphi_0 & - \text{jednolika rotacija oko valne zrake} \\ \tau_0 \cdot \sin(\omega_\tau \cdot t - k_\tau \cdot z + \varphi_0) & - \text{torzijsko titranje oko valne zrake} \end{cases}$$

$$\varphi_H(z,t) = \varphi_E(z,t) + \frac{\pi}{2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0}, \quad k_r = \frac{2\pi}{\lambda_r} = \frac{\omega_r}{c_0}, \quad k_\tau = \frac{2\pi}{\lambda_\tau} = \frac{\omega_\tau}{c_0}$$

Ukupna brzina promjene u vremenu vektora jakosti radijalnog osnog hiperdinamičkog polja na promatranom mjestu z valne zrake u trenutku t u određuje se njihovim ukupnim diferenciranjem po vremenu na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{E}}{dt} &= \frac{d}{dt} \cdot (E_\rho \cdot \vec{e}_{\rho E}) = \frac{\partial E_\rho}{\partial t} \cdot \vec{e}_{\rho E} + E_\rho \cdot \frac{d\vec{e}_{\rho E}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} = \frac{\partial E_\rho}{\partial t} \cdot \vec{e}_{\rho E} + E_\rho \cdot \omega_z \cdot \vec{e}_{\varphi E} \\ \frac{d\vec{H}}{dt} &= \frac{d}{dt} \cdot (H_\rho \cdot \vec{e}_{\rho H}) = \frac{\partial H_\rho}{\partial t} \cdot \vec{e}_{\rho H} + H_\rho \cdot \frac{d\vec{e}_{\rho H}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_H}{\partial t} = \frac{\partial H_\rho}{\partial t} \cdot \vec{e}_{\rho H} + H_\rho \cdot \omega_z \cdot \vec{e}_{\varphi H} = \\ &= \frac{\partial H_\rho}{\partial t} \cdot \vec{e}_{\varphi E} - E_\rho \cdot \omega_z \cdot \vec{e}_{\rho E} \quad \text{jer je:} \quad \vec{e}_{\rho H} = \vec{e}_{\varphi E} \text{ i } \vec{e}_{\varphi H} = -\vec{e}_{\rho E} \end{aligned}$$

Pri tom je $\omega_z(z,t) = \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_H}{\partial t}$ kutna brzina rotacije vektora polja

Pri diferenciranju poprečnih vektora $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ osnih polja po dinamičkoj polarnoj varijabli $\varphi(z,t)$ je uvaženo da pri njihovoj rotaciji ili torzijskom titranju oko valne zrake iz jednog položaja u drugi pripadni fluktuirajući jedinični vektori $\mathbf{e}_{\rho E}$ i $\mathbf{e}_{\rho H} = \mathbf{e}_{\varphi E}$, za razliku od fiksnog osnog jediničnog vektora $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$, neprestance mijenjaju pravac djelovanja, ali pri tom oni uvijek ostaju međusobno okomiti.

Iz prethodnih izraza za određivanja ukupne brzine promjene u vremenu osnog hiperdinamičkog EM polja je očito da oni sadrže dva člana (brzinu izravne i brzinu neizravne promjene u vremenu) pa su prve dvije jednačbe u svojem izvornom obliku, koje u vremenskoj domeni sadrže samo jedan član (brzinu izravne promjene u vremenu), za ta polja nepotpune i stoga su ograničenog dosega.

6. Redefiniranje jednačbi elektrodinamike u prostornoj domeni

Da Heaviside-Hertzove jednačbe ni u prostornoj domeni nisu formulirane dovoljno općenito može se uočiti pri određivanju ukupne rotacije i divergencije vektora jakosti polja hiperdinamičkih TVEM valova. Kod njih su, naime, dinamički polarni kutovi $\varphi_E(z,t)$ i $\varphi_H(z,t)$ vektora jakosti $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ prema horizontali duž valne zrake zavisni o uzdužnoj varijabli z i vremenu t , što usložnjava određivanje njihove rotacije i divergencije (diferenciranje složenih funkcija [4]).

Zato je u krnjem sustavu vektorskih jednadžbi za hiperdinamičke TVEM valove potrebno modificirati operatore prostornog diferenciranja (*rot*, *div*) tako da se u Hamiltonovom operatoru ∇ (*nabla*) u Kartezijevim i cilindričnim koordinatama podoperator parcijalnog diferenciranja $\partial/\partial z$ po uzdužnoj varijabli z nadomjesti podoperatorom ukupnog diferenciranja d/dz koji uvažava međuzavisnost dinamičkih polarnih kutova $\varphi_E(z,t)$ i $\varphi_H(z,t)$ o varijabli z . Shodno tome za proizvoljan putujući ravan hiperdinamički TVEM val koji se širi duž Z osi vrijedi:

$$\bar{\nabla} = \bar{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \bar{\nabla}_d = \bar{\mathbf{k}} \cdot \frac{d}{dz}$$

Tako modificiran operator *nabla* označen je indeksom "d" koji podsjeća na ukupno diferenciranje po varijabli z . On zahvaća u zavisnost polarnih varijabli $\varphi_E(z,t)$ i $\varphi_H(z,t)$ o varijabli z . To je, slikovito rečeno, nužan "SP2" u operatorskom redefiniranju sustava vektorskih jednadžbi elektrodinamike! Na njemu zasnovani operatori vektorske analize *Div*, *Grad*, *Rot* pišu se velikim početnim slovom

$$\text{div } \bar{\mathbf{V}} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{V}} \quad \rightarrow \quad \text{Div } \bar{\mathbf{V}} = \bar{\nabla}_d \cdot \bar{\mathbf{V}} \quad \Delta \cdot \mathbf{U} = (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}) \cdot \mathbf{U} \quad \rightarrow \quad \Delta_d \cdot \mathbf{U} = (\bar{\nabla}_d \cdot \bar{\nabla}_d) \cdot \mathbf{U}$$

$$\text{rot } \bar{\mathbf{V}} = \bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{V}} \quad \rightarrow \quad \text{Rot } \bar{\mathbf{V}} = \bar{\nabla}_d \times \bar{\mathbf{V}} \quad \Delta \cdot \bar{\mathbf{V}} = (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}) \cdot \bar{\mathbf{V}} \quad \rightarrow \quad \Delta_d \cdot \bar{\mathbf{V}} = (\bar{\nabla}_d \cdot \bar{\nabla}_d) \cdot \bar{\mathbf{V}}$$

$$\text{grad } U = \bar{\nabla} \cdot U \quad \rightarrow \quad \text{Grad } U = \bar{\nabla}_d \cdot U$$

da se time istakne razlika prema konvencionalnim operatorima *div*, *grad*, *rot* koji se navode u udžbenicima vektorske analize i matematičkim priručnicima te sadrže parcijalne derivacije po prostornim varijablama u odabranim koordinatama. Oni su, naime, valjani samo ako su prostorne varijable (x, y, z ili ρ, φ, z) u skalar-nim komponentama vektorskih polja međusobno nezavisne!

Ukupna promjena u prostoru (rotacija) radijalnog osnog hiperdinamičkog polja u cilindričnim koordinatama određuje se diferenciranjem na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \text{Rot } \bar{\mathbf{E}} &= \bar{\nabla}_d \times \bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{k}} \cdot \frac{d}{dz} \times (E_\rho \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\rho E}) = \bar{\mathbf{k}} \times \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\rho E} + E_\rho \cdot \frac{d\bar{\mathbf{e}}_{\rho E}}{d\varphi_E} \cdot \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \right) = \bar{\mathbf{k}} \times \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\rho E} + E_\rho \cdot k_z \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\varphi E} \right) = \\ &= \frac{\partial E_\rho}{\partial z} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\varphi E} - E_\rho \cdot k_z \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\rho E} \quad , \quad \bar{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{e}}_{\rho E} = \bar{\mathbf{e}}_{\varphi E} \quad , \quad \bar{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{e}}_{\varphi E} = -\bar{\mathbf{e}}_{\rho E} \\ \text{Rot } \bar{\mathbf{H}} &= \bar{\nabla}_d \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{k}} \cdot \frac{d}{dz} \times (H_\rho \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\rho H}) = \bar{\mathbf{k}} \times \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\rho H} + H_\rho \cdot \frac{d\bar{\mathbf{e}}_{\rho H}}{d\varphi_H} \cdot \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right) = \bar{\mathbf{k}} \times \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\rho H} + H_\rho \cdot k_z \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\varphi H} \right) = \\ &= \frac{\partial H_\rho}{\partial z} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\varphi H} - H_\rho \cdot k_z \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\rho H} = -\frac{\partial H_\rho}{\partial z} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\rho E} - H_\rho \cdot k_z \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\varphi E} \quad , \quad \bar{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{e}}_{\rho H} = \bar{\mathbf{e}}_{\varphi H} \quad , \quad \bar{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{e}}_{\varphi H} = -\bar{\mathbf{e}}_{\rho H} \end{aligned}$$

$$\text{Pri tom je } k_z(z,t) = \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \quad , \quad \bar{\mathbf{e}}_{\rho H} = \bar{\mathbf{e}}_{\varphi E} \quad , \quad \bar{\mathbf{e}}_{\varphi H} = -\bar{\mathbf{e}}_{\rho E}$$

Ona sadrži doprinose promjene hiperdinamičkog polja u prostoru od njegove brzine izravne i brzine neizravne (kinetičke) promjene u vremenu.

Ukupna divergencija vektora jakosti osnog polja hiperdinamičkog TVEM vala u cilindričnim koordinatama određuje se ovako:

$$\begin{aligned}
 \text{Div} \vec{E} &= \vec{\nabla}_d \cdot \vec{E} = \left(\vec{k} \cdot \frac{d}{dz} \right) \cdot (E_\rho \cdot \vec{e}_{\rho E}) = \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} \cdot \vec{e}_{\rho E} + E_\rho \cdot \frac{d\vec{e}_{\rho E}}{dz} \right) = \\
 &= \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} \cdot \vec{e}_{\rho E} + E_\rho \cdot \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \cdot \vec{e}_{\varphi E} \right) = \frac{\partial E_\rho}{\partial z} \cdot \left(\vec{k} \cdot \vec{e}_{\rho E} \right) + E_\rho \cdot \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \cdot \left(\vec{k} \cdot \vec{e}_{\varphi E} \right) = 0 \\
 \text{Div} \vec{H} &= \vec{\nabla}_d \cdot \vec{H} = \left(\vec{k} \cdot \frac{d}{dz} \right) \cdot (H_\rho \cdot \vec{e}_{\rho H}) = \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} \cdot \vec{e}_{\rho H} + H_\rho \cdot \frac{d\vec{e}_{\rho H}}{dz} \right) = \\
 &= \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} \cdot \vec{e}_{\rho H} + H_\rho \cdot \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \cdot \vec{e}_{\varphi H} \right) = \frac{\partial H_\rho}{\partial z} \cdot \left(\vec{k} \cdot \vec{e}_{\rho H} \right) + H_\rho \cdot \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \cdot \left(\vec{k} \cdot \vec{e}_{\varphi H} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Diferenciranje fluktuirajućih poprečnih jediničnih vektora $\mathbf{e}_\rho$ i $\mathbf{e}_\varphi$ polarnih i cilindričnih koordinata po polarnoj varijabli φ te varijablama z i t prikazano je u matematičkom prilogu na kraju članka.

7. Klasične i modificirane jednadžbe elektrodinamike

Prethodno obrazloženim modifikacijama operatora diferenciranja u vektorskim jednadžbama elektrodinamike u vremenskoj i prostornoj domeni:

$$\text{"SP1": } \partial/\partial t \rightarrow d/dt \quad \text{i} \quad \text{"SP2": } \partial/\partial z \rightarrow d/dz \rightarrow \text{Rot, Div}$$

dobiva se operatorski modificiran (poopćen) sustav potpunih vektorskih diferencijalnih jednadžbi podesan za egzaktno opisivanje svih makroskopskih dinamičkih i hiperdinamičkih polja u praznom prostoru bez struja i naboja, čija se hvatišta vektora polja relativno translatorno gibaju prema mirnom promatraču. U usporedbi s klasičnim jednadžbama one su mnogo bogatije i izgledaju ovako:

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \text{Rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\mu_0 \cdot \frac{d\vec{H}}{dt} = -\mu_0 \cdot \left[\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_d \right) \cdot \vec{H} \right] \\
 \text{II.} \quad \text{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{Rot} \vec{H} = \frac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon_0 \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} = \varepsilon_0 \cdot \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_d \right) \cdot \vec{E} \right] \\
 \text{III.} \quad \text{div} \vec{D} &= \varepsilon_0 \cdot \text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \text{Div} \vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \text{Div} \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \left(\vec{\nabla}_d \cdot \vec{E} \right) = 0 \\
 \text{IV.} \quad \text{div} \vec{B} &= \mu_0 \cdot \text{div} \vec{H} = 0 \Rightarrow \text{Div} \vec{B} = \mu_0 \cdot \text{Div} \vec{H} = \mu_0 \cdot \left(\vec{\nabla}_d \cdot \vec{H} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Za hiperdinamičke TVEM valove s rotirajućim ili torzijski titrajućim vektorima polja iskazanim u cilindričnim koordinatama, koji se šire duž Z osi, prve dvije operatorski modificirane vektorske jednačbe elektrodinamike jesu:

$$\begin{aligned} \text{Rot } \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\mu_0 \cdot \frac{d\vec{H}}{dt} = -\mu_0 \cdot \left[\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\omega}_z \times \vec{H} \right] = \frac{\partial E_\rho}{\partial t} \cdot \vec{e}_{\rho E} + E_\rho \cdot \omega_z \cdot \vec{e}_{\varphi E} \\ \text{Rot } \vec{H} &= \frac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon_0 \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} = \varepsilon_0 \cdot \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\omega}_z \times \vec{E} \right] = \frac{\partial H_\rho}{\partial t} \cdot \vec{e}_{\rho H} + H_\rho \cdot \omega_z \cdot \vec{e}_{\varphi H} \\ \vec{\omega}_z(z, t) &= \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \cdot \vec{k} = \frac{\partial \varphi_H}{\partial t} \cdot \vec{k} \quad - \quad \text{kutna brzina rotacije vektora oko valne zrake} \end{aligned}$$

Zaključak

Načinjena analiza vektorskih diferencijalnih jednačbi klasične elektrodinamike pokazala je da su one žalosno nepotpune i stoga su ograničenog dosega u primjeni. Besprijekorne su za sva statička, kvazistatička i dinamička polja s nepomičnim vektorima jakosti polja. Takva relativno mirujuća dinamička polja dominantna su u fizici i elektrotehnici i mijenjaju se samo izravno u vremenu. Za razliku od njih rotirajuća fiksna električna i magnetska polja za koja je $\partial \vec{E}/\partial t = 0$ ili $\partial \vec{H}/\partial t = 0$ mijenjaju se samo neizravno (kinetički) u vremenu pa se stoga mogu nazvati kinetičkim poljima.

Za egzaktno opisivanje i analizu funkcionalno složenih hiperdinamičkih polja, koja se istovremeno mijenjaju izravno i neizravno u vremenu, potrebno je na desnoj strani prve i druge jednačbe elektrodinamike operator parcijalnog diferenciranja po vremenu $\partial/\partial t$ nadomjestiti operatorom ukupnog diferenciranja po vremenu d/dt da bi se na promatranom mjestu $T(x, y, z)$ u trenutku t mogla ispravno odrediti ukupna brzina njihove promjene u vremenu.

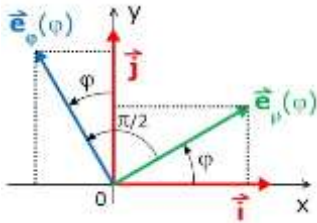
Za hiperdinamička osna polja TVEM valova s rotirajućim ili torzijski titrajućim vektorima jakosti polja, kod kojih su pripadni dinamički polarni kutovi $\varphi_E(z, t)$ i $\varphi_H(z, t)$ u cilindričnim koordinatama zavisni o uzdužnoj varijabli z i vremenu t , potrebno je u operatoru ∇ podoperator parcijalnog diferenciranja $\partial/\partial z$ nadomjestiti podoperatorom ukupnog diferenciranja d/dz , koji zahvaća u međuzavisnost polarnog kuta φ o varijabli z , da bi se pri izračunu rotacije na mjestu $T(x, y, z)$ u trenutku t ispravno odredila ukupna promjena u prostoru vektora hiperdinamičkog polja zbog njegove ukupne brzine promjene u vremenu.

Budući da suvremena računala i napredni algoritmi omogućuju veoma brzo računanje kvaterniona valjalo bi s tog aspekta preispitati u fizici i teoretskoj elektrotehnici opravdanost povratka na, silom prilika, olako napuštene egzaktne Maxwelllove kvaternionijske jednačbe koje bi prethodno trebalo napisati u suvremenoj simbolici fizikalnih veličina i u racionaliziranom obliku. Pri tom bi trebalo

na nekoliko karakterističnih primjera dinamičkih i hiperdinamičkih polja istražiti da li se, u čemu i zašto rješenja dobivena iz operatorski modificiranih vektorskih jednažbi razlikuju od rješenja dobivenih iz egzaktnih kvaternionskih jednažbi.
MATEMATIČKI PRILOG

Diferenciranje jediničnih vektora $\mathbf{e}_\rho$ i $\mathbf{e}_\varphi$ polarnih i cilindričnih koordinata

Fluktuirajuće poprečne jedinične vektore $\mathbf{e}_\rho$ i $\mathbf{e}_\varphi$ kružnih polarnih i cilindričnih koordinata te fiksne jedinične vektore $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ Kartezijevih koordinata povezuju izrazi:



$$\bar{\mathbf{e}}_\rho(\varphi) = \cos \varphi \cdot \bar{\mathbf{i}} + \sin \varphi \cdot \bar{\mathbf{j}}$$

$$\bar{\mathbf{e}}_\varphi(\varphi) = -\sin \varphi \cdot \bar{\mathbf{i}} + \cos \varphi \cdot \bar{\mathbf{j}}$$

Njihovim diferenciranjem po polarnoj varijabli φ dobiva se:

$$\frac{d}{d\varphi} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\rho(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} \cdot (\cos \varphi \cdot \bar{\mathbf{i}} + \sin \varphi \cdot \bar{\mathbf{j}}) = -\sin \varphi \cdot \bar{\mathbf{i}} + \cos \varphi \cdot \bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{e}}_\varphi(\varphi)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\varphi(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} \cdot (-\sin \varphi \cdot \bar{\mathbf{i}} + \cos \varphi \cdot \bar{\mathbf{j}}) = -\cos \varphi \cdot \bar{\mathbf{i}} - \sin \varphi \cdot \bar{\mathbf{j}} = -\bar{\mathbf{e}}_\rho(\varphi)$$

Za hiperdinamička radijalna osna polja iskazana u cilindričnim koordinatama, zbog zavisnosti polarne varijable φ o uzdužnoj varijabli z i vremenu t , diferenciranje poprečnih jediničnih vektora $\mathbf{e}_\rho$ i $\mathbf{e}_\varphi$, kao složenih funkcija po tim varijablama, ide ovako:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{e}}_\rho}{dz} &= \frac{d}{dz} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\rho[\varphi(z,t)] = \frac{d\bar{\mathbf{e}}_\rho}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \bar{\mathbf{e}}_\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} & , & \quad \frac{d\bar{\mathbf{e}}_\varphi}{dz} = \frac{d}{dz} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\varphi[\varphi(z,t)] = \frac{d\bar{\mathbf{e}}_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\bar{\mathbf{e}}_\rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{d\bar{\mathbf{e}}_\rho}{dt} &= \frac{d}{dt} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\rho[\varphi(z,t)] = \frac{d\bar{\mathbf{e}}_\rho}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \bar{\mathbf{e}}_\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} & , & \quad \frac{d\bar{\mathbf{e}}_\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\varphi[\varphi(z,t)] = \frac{d\bar{\mathbf{e}}_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\bar{\mathbf{e}}_\rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

Literatura

- [1] J. C. Maxwell, A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, *Philosophical Transactions*, No. 155, pages 459-512, Royal Society, London 1865., pdf izdanje, poveznica: <https://archive.org/details/electricandmagne01maxwrich>
- [2] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol. 2, The Clarendon Press, Oxford, 1873., pdf izdanje, poveznica: <http://www.bem.fi/library/1865-001.pdf>
- [3] John Voight, *Quaternion algebras*, v.1.01, 24. July, 2021., pdf izdanje, poveznica: <https://math.dartmouth.edu/~jvoight/quat-book.pdf>

- [3] Javorski – Detlaf, *Priručnik iz fizike*, Golden marketing & Tehnička knjiga, Zagreb, 2008.
- [4] Bronštejn – Semendjajev, *Matematički priručnik*, Golden marketing & Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS AND THEIR MODIFICATION FOR HYPERDYNAMIC FIELDS

Abstract: Maxwell's exact equations of electrodynamics are presented in two versions - in a difficult to review and unsuitable scalar form, and in a clearer and more mathematically advanced quaternion form. Due to the complex structure and painstaking calculation of quaternions, Oliver Heaviside and Heinrich Rudolf Hertz replaced the quaternions with Maxwell's equations to calculate with simpler and more understandable vectors and scalars. In addition to other simplifications, they formulated four vector partial differential equations for electrodynamic fields, which are equally accurate and much easier to solve than quaternionic ones. Due to the simplifications made, they are incomplete and have a limited range in use and apply to all static and dynamic macroscopic fields that are relatively dormant and change only directly in time, which satisfies almost all needs in physics and electrical engineering. It is necessary to modify the operators of differentiation by time and by space variables (*curl*, *div*) in order that these incomplete equations become valid for functionally complex hyperdynamic fields, which change directly and indirectly (kinetically) in time. This gives generalized complete vector equations of macroscopic electrodynamics that have a much greater range and cover all the perceived needs in physics and electrical engineering.

Key words: Maxwell's equations, quaternion, vector, electrodynamics, hyperdynamic field, direct change in time, indirect change in time, modification of differentiation operator

Ivan Šimatović