

75-ta obljetnica *Uvoda u višu analizu* Željka Markovića

Sažetak: Među mnogim hrvatskim visokoškolskim udžbenicima matematike *Uvod u višu analizu* profesora Željka Markovića zauzima sasvim posebno mjesto po svom opsegu, dugotrajnoj uporabi, mnogim ponovljenim izdanjima, koji je generacijama matematičara i inženjera bio temeljni udžbenik, ali prvenstveno po jedinstvenom stilu pisanja, njegovanom jeziku i u našoj literaturi nenadmašenom izvoru povijesnih podataka. Sve to zajedno čini ovaj udžbenik kulturološki važnim djelom povijesnoga značaja.

Ključne riječi: Željko Marković, Tehnički fakultet, viša analiza, visokoškolski udžbenici matematike,

Uvod

Prvo izdanje Markovićenog *Uvoda u višu analizu* objavljeno je neposredno po završetku II. svjetskog rata, u ranu jesen 1945. U predgovoru prvoga izdanja Marković slikovito i zorno navodi kako je *htio da uvede čitača u predvorje prostrane i visoke matematičke zgrade odakle će se moći uspeti i u gornje njene spratove ili zaći u posebne odjele, a pokazuje mu i putove koji vode do njenih primjena*. Danas znamo da je u svom naumu u cijelosti uspio.

Uvod u višu analizu prvi je cjeloviti udžbenik više matematike na hrvatskom jeziku [1]. Hrvati su i ranije objavljivali visokoškolske matematičke priručnike. Primjerice, posebno su bili cijenjeni udžbenici Senjanina Ivana Paskvića¹ [2], s kraja XVIII. i početka XIX. stoljeća, koji nisu pisani hrvatskim jezikom pa ih u ovome članku ne uvrštavamo u kategoriju hrvatskih visokoškolskih matematičkih priručnika.

Godine 1899. objavljena su litografirana skripta *Algebarska analiza, I., predavanja priv. docenta Dr. V. Varičaka* [3] Opseg ove knjige iznosi 156 stranica pisanih rukopisom Slave Dragića, poznatog hrvatskog stenografa. Knjiga se čuva u Nacionalnoj i sveučišnoj knjižnici u Zagrebu, Središnjoj matematičkoj knjižnici i knjižnici Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu. Varičakova predavanja iz kolegija *Diferencijalne jednadžbe* akademske godine 1909./10. vlastoručno je zabilježio Božo Širola, kasnije glasoviti hrvatski muzikolog. Primjerak se čuva u Središnjoj matematičkoj knjižnici na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.

Prvi pravi, autorski visokoškolski matematički udžbenik napisao je Marije Kiseljak [4], prvi predstojnik Zavoda za primijenjenu matematiku. Puni naziv toga udžbenika je *Udžbenik više matematike za slušače visokih škola*, s podnaslovima *Prva knjiga: Diferencijalni račun, prvi svezak: Uvod u višu matematiku (algebarska analiza)*. Knjiga je tiskana u Zagrebu godine 1920. Kiseljaku nije uspjelo izdati niz od preostalih osam svezaka, koji su u „čistopisu dovršeni“, stoga je 1925. objavio litografirani, meko uvezani *Repetitorij diferencijalnoga i integralnoga računa*.

¹ Ivan Paskvić, * Senj 1754., † Beč 1829., astronom, matematičar i fizičar. Koliko su njegovi udžbenici bili cijenjeni, najbolje ilustrira pismo mađarskog matematičara F. Bolyaia sinu Jánosu u kojem preporučuje čitanje *Karstena, Kästnera, Pasquicha, Eulera i La Grangea*.

U razdoblju od 1925. pa sve do tiskanja Markovićevog *Uvoda u višu analizu* 1945., nisu objavljivani visokoškolski matematički udžbenici na hrvatskome jeziku.

1. Životopis Željka Markovića

Željko Marković rođen je u Požegi 20. veljače 1889. Prema zapisu iz matične knjige Župe Požega kršten je 2. ožujka. U rubrici *ime kršćenika* upisana su imena Željko, Bartol i Franjo, a u rubrici *ime, prezime i stališ roditelja* upisani su prof. Petar Marković, gimn. učitelj i supruga mu Danica rođj. Sakač.

Sl. 1.: Zapis o krštenju Željka Markovića u matičnoj knjizi Župe Požega

Petar Marković, Željkov otac, prema zapisu iz matice župe Kaptol, kršten je 20. ožujka 1856. i taj se nadnevak obično navodi kao dan njegova rođenja. Petar je sin Ivana i Kate rođ. Bošnjak. Za oca Ivana se navodi da je *majstorskoga stališa*. Petar Marković hrvatski je književnik, prevoditelj, znanstvenik i profesor. Školovao se u Pleternici, Požegi i Zagrebu. Službovao je na Rijeci i u Osijeku, a u Požegi radi od 1881. do 1890., kada prelazi u Zagreb, gdje je 1894. imenovan ravnateljem novoosnovane realne gimnazije. Suradivao je s brojnim književnim časopisima, prevodio Andersenove priče (govorio je njemački, talijanski i francuski jezik). Služio se pseudonimom Pero Mijakić. Umro je 6. kolovoza 1900. od sušice u lječilištu Neumarkt u Štajerskoj. Zaslugom njegove rodbine, posebice unuke Lelje Dobronić, njegovi su posmrtni ostatci, nakon 102 godine preneseni u domovinu i danas počivaju u cintoru župne crkve Sv. Petra i Pavla u rodnom Kaptolu.

Petar Marković se 1882. g. oženio Danicom Sakač pl. Vojnovečkom, kćeri Bartola Sakača pl. Vojnovečkog. Danica je rođena 1862., a preminula je 1952. Pokopana je na Mirogoju. Kalnička plemićka obitelj Sakač potječe iz sela Vojnovca, po kojem se nazivaju Vojnovečki [5]. Bartol Sakač rođen je 1830. u Kapeli, mjestu sjeverno od Kalnika. Službovao je u Požegi od 1863. do 1868., gdje je bio predsjednik suda, zatim seli u Zagreb, i obnaša dužnosti tajnika Banskog stola i zamjenika državnog odvjetnika. Kasnije se vraća u Požegu (1877. – 1891.) gdje je postao predsjednikom Kraljevskoga sudbenoga stola. Vraća se u Zagreb, a do umirovljenja 1897., bio je vijećnikom Banskoga stola. Umro je 1898. u Zagrebu.

Petar Marković i Danica rođ. Sakač pl. Vojnovečka imali su petero djece: Zdenku, Željka, Jerku, Miljenka i Cvijetu.

Zdenka Marković hrvatska je spisateljica. U matici krštenih upisano je da se Zdenka Matilda Katarina² rodila 10. ožujka, a da je krštena 16. ožujka 1894. Roditelji Petar Marković, profesor kr. vel. gimnazije i Danica Sakač pl. Vojnovečka stanovali su u Požegi, u Sv. Florijana ulici, na kućnom broju 1. Zdenka je pohađala ženski licej u Zagrebu, gdje su joj predavale Marija Jambrišak i Jagoda Truhelka, a potom je prema [6] pohađala studij povijesti umjetnosti i filozofije u Zagrebu i Fribourgu, a u [7] se navodi da je pohađala predavanja iz slavistike (ruski i poljski jezik). U švicarskom Fribourgu specijalizirala se u poljskoj literaturi i godine 1914. stekla doktorat na osnovi radnje *Der Begriff des Dramas bei Wyspiański*. Do umirovljenja g. 1940. predavala je na ženskoj realnoj gimnaziji u Zagrebu. Umrula je u Zagrebu 1974.

Sl. 2.: Kuća u Požegi, u ulici Vučjak br. 12 u kojoj je živjela obitelj Marković

² Prema tadašnjim običajima su imena Katarina i Matilda dana u čast Zdenkinim bakama

Sl. 3.: Spomen ploča na kući u ulici Vučjak br. 12

Željкова sestra Jerka udala se za skladatelja Antuna Dobronića i njezina kći je već spomenuta znamenita hrvatska povjesničarka umjetnosti Lelja Dobronić. Željkov brat Miljenko (1893. – 1985.) bio je ekonomist i stručnjak za novčarstvo. Među suradnicima *Hrvatske enciklopedije*, što ju je uređivao Mate Ujević, uz matematičara Željka, su i dr. Zdenka Marković, za koju se navodi da je *profesor u m.* te dr. Miljenko Marković, *ravnatelj Saveza novčanih zavoda*. Prema nekim izvorima Miljenko Marković bio je prije II. svjetskog rata jedno vrijeme guverner Narodne banke Jugoslavije. No, u popisu guvernera nema njegovog imena. Nije nam poznato je li bio dužnosnik Narodne banke. U nekim se radovima spominju njegova nastojanja oko spašavanja hrvatskih novčarskih zavoda. Preveo je knjigu *Uputa u studij političke ekonomije*, njemačkog ekonomista Johanna Conrada.

Cvijeta Marković, najmlađa kći Petra i Danice bila je knjižničarka Pravnog fakulteta u Zagrebu.

Ovim popisom najbliže rodbine Željka Markovića htjeli smo prikazati obiteljski krug u kojemu je živio i koji ga je oblikovao kao osobu, kao znanstvenika, profesora i svestranog intelektualca. I čini nam se kako neke od ovih ličnosti zaslužuju više spomena u našim leksikonima i enciklopedijama. Primjerice, u knjizi *Znameniti i zaslužni Hrvati* uvršteni su i Petar Marković i kći mu Zdenka. Desetak godina kasnije, u *Leksikon Minerva*, uvršteni su Petar, Miljenko, Zdenka i Željko Marković. No, u suvremenoj *Hrvatskoj enciklopediji* nema natuknice o književniku Petru Markoviću niti o ekonomistu Miljenku Markoviću.

Željko Marković je tijekom svoga školovanja dao u *Opisu života* što ga je priložio molbi za polaganje učiteljskog ispita za srednje škole.

Opis života

Rodio sam se dne 20. veljače 1889. u Požegi u Slavoniji. Osnovnu sam školu svršio u Zagrebu, zatim polazim kao redoviti učenik osam godina Kr. donjogradsku gimnaziju zagrebačku, gdje sam položio dne 1. srpnja 1907. ispiz zrelosti. U jesen iste godine upisao sam se u mudroslovni fakultet sveučilišta Franje Josipa I. u Zagrebu, da studiram kao redoviti slušač matematiku i fiziku. Taj sam studij nastavio u ljetnom semestru iste školske godine 1907./8. na c. i k. češ. sveučilištu u Pragu. U zimskom i ljetnom semestru školske godine 1908./9. studirao sam opet na kr. sveučilištu Franje Josipa I. u Zagrebu, a tada zimski i ljetni semestar semestar školske godine 1909./10. proboravio u svrhu studija matematike, fizike i astronomije na kr. pruskom sveučilištu u Göttingenu. U jesen školske godine 1910./11. povratio sam se na sveučilište Franje Josipa I. u Zagrebu, gdje sada svršavam svoj osmi semestar.

Sl. 4.: Vlastoručno pisani Opis života Željka Markovića

Nakon što je već 1912. položio učiteljski ispit za srednje škole, čime mu je priznaje *sposobnost, da možu učiti matematiku i fiziku u cijeloj gimnaziji* [8]. Za domaću radnju iz matematike, kao obvezatni dio učiteljskog ispita, obradio je temu *Integralne jednadžbe*. Toj je radnji dodao i nastavak *Neke primjene teorije integralnih jednadžbi na rješavanje diferencijalnih jednadžbi*. Radnju je Varićak ocijenio odličnom i na nastavku dopisao *I ova bi sama radnja dostajala!* Svjedodžbu p položenom učiteljskom ispitu potpisali su T. Maretić, kao ravnatelj. Kr. povjerenstva te članovi V. Varićak i S. Hondl. Godine 1915. doktorirao je u Zagrebu temom *Primjena linearnih integralnih jednadžbi na rješavanje diferencijalnih jednadžbi*. Mentor, Vladimir Varićak, zadao je temu blisku onoj što ju je Marković

pripremio u radnji za učiteljski ispit. Ovim je učinjen prvi korak Markovićeve blistave karijere znanstvenika i sveučilišnog nastavnika.

Željko Marković je habilitirao 1918. g. radom *Novija istraživanja u problemu triju tijela* iz kolegija *Nebeska mehanika*. Već 1920. Marković je postao izvanredni, a 1921. redoviti profesor na Tehničkoj visokoj školi u Zagrebu, koja potom prerasta u Tehnički fakultet. Nakon što Marije Kiseljak napušta Tehničku visoku školu, Marković postaje 1925. g. predstojnikom Zavoda za primijenjenu matematiku i tu dužnost obnaša sve do 1949. kada prelazi na Prirodoslovno-matematički fakultet i na kojemu ostaje sve do umirovljenja 1962. Na mjestu predstojnika Zavoda za primijenjenu matematiku naslijedio ga je još jedan važan hrvatski matematičar i znameniti profesor – Danilo Blanuša.

Željko Marković obnašao je gotovo sve akademske dužnosti koje je bilo moguće postići, a najvažnije su:

predstojnik Zavoda za primijenjenu matematiku (1925. – 1949.);

dekan Tehničke visoke škole (1921./22.);

dekan Tehničkog fakulteta (1930./31.);

dekan Prirodoslovno-matematičkog fakulteta (1957./58.);

rektor Sveučilišta u Zagrebu (1954./55.).

Za redovitoga člana Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti izabran je god. 1931. Željko Marković bio je član i Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti koja je djelovala od 1941. do 1945. Godine 1946. izabran je i u novi sastav Akademije, uz Dragutina Boranića i Vladimira Nazora, kao jedan od trojice akademika koji su bili članovi Akademije i za trajanja Nezavisne Države Hrvatske [1]. U Akademiji je od 1947. do 1966. bio tajnikom Razreda za matematičke, fizičke i tehničke znanosti.

Željko Marković preminuo je 23. kolovoza 1974., a prema obiteljskoj osmrtnici koja se čuva u Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici, pogreb je obavljen 26. kolovoza, a sveta misa zadušnica služila se dan kasnije u crkvi Sv. Ivana u Zagrebu. Željko Marković počiva na Mirogoju, u grobnici sa suprugom Julijom i sinom Rankom.

2. O udžbeniku *Uvod u višu analizu*

Dadić navodi da je Željko Marković na temelju svojih predavanja dovršio udžbenik godine 1943. i predao ga pod naslovom *Uvod u višu analizu* izdavaču, vjerojatno Nakladnom odjelu Hrvatske državne tiskare. Tiskanje tako opsežnog djela sa složenim matematičkim slogom nije dovršeno za vrijeme rata. Predgovor prvoga izdanja udžbenika nosi nadnevak 20. rujna 1945., a izdavač je Nakladni zavod Hrvatske.

Sl. 5.:

Sl. 6.: Moto svukupnoga djela na samom početku udžbenika

U Predgovoru, Marković pretpostavlja da je udžbenik namijenjen *svakome koji pozna algebru, trigonometriju i analitičku geometriju srednjih škola, a hoće, ne plašeći se stalnog truda što ga matematički studij uvijek traži, da se upozna s pojmovima, načinom izvođenja i rezultatima više analize u obliku koji je primila u gotovo tri stoljeća pročišćavanja, ujednostavljivanja i produbljivanja, a da ne izgubi vezu s njenim primjenama*. Dakle, Marković nije i ne želi biti eksperimentator i svjesno se oslanja

na tradicionalno poučavanje više matematike koje se temelji na višestoljetnom metodičkom iskustvu, vodeći računa o tomu da studentima približi primjenu naučenih pojmova i metoda.

Svjestan je svih izazova s kojima se suočava svaki autor djela koje uvodi čitača u višu matematiku – kako spojiti strogost izvoda sa zornošću razlaganja. U predgovoru Marković obrazlaže zašto udžbenik više matematike započinje sustavnim razlaganjem osnova realnih brojeva, od prirodnih, preko racionalnih do iracionalnih brojeva. Čini mu se najprirodnijim da i *čitač prođe u sebi onaj proces čišćenja i uzdizanja što ga je prolazila matematička spoznaja u svom razvoju.*

Valja zamijetiti kako u Markovićevom predgovoru nema ni natruhe bilo kakvom podilaženju novoj vlasti, kakav se primjerice nalazi u Kiseljakovom predgovoru svoga prijevoda Bauleovog udžbenika [4].

Pri kraju predgovora prvom izdanju, Marković spominje sa zahvalnosti i one koji su mu pomagali pri izrađivanju ili uređivanju rukopisa. Dr. Boris Apsen pomagao je pri numeričkim računima, *a crtanje slika i strojno pisanje preuzeli su na se cand. ing. † Oton Mosner, Mirko Knežević, Josip Lorincz i Mladen Rovešnjak.* U predgovoru drugom izdanju iz 1947. Marković navodi da su *cand. ing. Vladimir Devidé i Vladimir Glaser pročitali sav tekst prvoga i drugoga izdanja.*

U predgovoru II. dijelu udžbenika s nadnevkom od 20. srpnja 1952., Marković *izriče srdačnu i odanu hvalu svojim mlađim suradnicima.* Tako je *Ing. Vladimir Devidé izradio s velikim marom slike i čitao dio rukopisa, a asistent Sibe Mardešić i Aleksandar Grossmann pročitali su s velikom pažnjom znatan dio rukopisa.* Mardešić i Grossmann *izvršili su numeričke račune* u dijelu u kojem se obrađuje numeričko rješavanje diferencijalnih jednačija.

Prvo izdanje *Uvoda u višu analizu* iz 1945. vjerojatno je jedinstvena knjiga i po pravopisu koji je korišten. Jedan dio te knjige otisnut je korijenskim pravopisom koji je bio u uporabi u Nezavisnoj Državi Hrvatskoj, a drugi dio je otisnut u tada važećem pravopisu, zapravo onomu iz doba Banovine Hrvatske. Novoj vlasti bilo je važno imati visokoškolski udžbenik namijenjen školovanju budućih inženjera pa je bilo moguće dopustiti ovakav potpuno jedinstven slučaj izdanja knjige pisane dvama različitim pravopisima. U predgovoru Željko Marković sve ovo spomenuto naziva kao *nastalu nehomogenost u pravopisu.* Valja imati na umu da je primjerice, gotovo cijela naklada V. sveska *Hrvatske enciklopedije* uništena upravo zbog toga jer je otisnuta korijenskim pravopisom. Zacijelo je sve ovo razlog što je Markovićev udžbenik objavljen bez kolofona, koji su tada bilo dosta detaljni. Primjerice, isti nakladnik za knjigu Drage Grdenića *Atomi i molekule* vrlo pedantno navodi imena korektora, nadnevke početka i dovršetka tiskanja, nakladu od 50 000 primjeraka, čak i nadnevak odobrenja o cijeni. Kao da se u ovom slučaju zaziralo od takvih podataka. U kasnijim izdanjima, kao onomu iz 1950., navedene su dvije odgovorne osobe, *za izdavača Dr. E. Musić i tehnička redakcija Z. Orban.* Ovdje je riječ o dr. Eduardu Musiću i Zlatku Orbanu.

Sl. 7.: Prva stranica udžbenika. Stranice 1. – 376. pisane su korijenskim pravopisom.

Usporede li se izdanja, koja su nam bila dostupna, ono iz 1945. i iz 1950. uočava se da je Marković tekst pomno pročitao te da su unesene izvjesne izmjene. Nekoliko takvih promjena u nazivlju dat ćemo u sljedećoj tablici:

Izdanje iz 1945.:

*zbroj harmoničkih gibanja, harmoničko titranje
kvadratni momenat, momenat ustrajnosti
traktris*

Izdanje iz 1950.:

*zbroj harmonijskih gibanja, harmonijsko titranje
kvadratni moment, moment ustrajnosti
traktrisa*

apsolutna pogreška
zbroj beskonačnoga reda

apsolutna pogreška
zbroj beskonačnog reda

Zanimljiviji su matematički termini koje Marković koristi u oba izdanja, a danas se manje koriste:

- *neprekinutost, neprekinuta funkcija;*
- *tâka i liha funkcija, tâki i lihi brojevi;*
- *beskonačni slijed;*
- *faktorijela;*
- *inversna funkcija;*
- *uvjet nuždan i dovoljan;*
- *ploština;*
- *logaritmička spirala, logaritmička skala, logaritmička derivacija;*

Dadić [1] naglašava kako Markovićev udžbenik sadrži izvorno hrvatsko matematičko nazivlje. Pri tomu posebno ističe termin *neprekinutost* kao onaj što je potiskivan nakon Drugog svjetskog rata u korist termina *neprekidnost*, koji pripada srpskom matematičkom nazivlju. Željko Marković, slijedeći hrvatsku matematičku tradiciju, dosljedno je rabio hrvatski naziv *neprekinutost*, kao što su ga u svojim udžbenicima rabili, primjerice, Vladimir Varićak i Marije Kiseljak. Termin *neprekinutost*, oslanjajući se na udžbenik i predavanja profesora Markovića, rabili su Vladimir Devide i Bogdan Zelenko u svojim litografiranim zbirkama zadataka što su izdavane krajem 40-tih godina XX. stoljeća.

Uvod u višu analizu je u hrvatskoj matematičkoj literaturi nenadmašen izvor povijesnih podataka o razvoju matematičkih pojmova, ideja i rezultata. Vrijedno je citirati ponajboljeg poznavatelja Markovićevog života i rada, Žarka Dadića [1]: *U cijelom djelu se Marković vrlo opširno osvrće na razvitak pojedinih ideja i matematičkih rezultata. Ti su povijesni dodaci vrlo iscrpni, tako da predstavljaju u cjelini razvitak više matematike, a i matematike uopće. Oni predstavljaju u određenom smislu enciklopedijski priznak razvitka matematičkih pojmova i shvaćanja...*

U prvom izdanju, u kazalu pojmova, nalazi se čak 140 matematičara. Nekima nije navedena godina rođenja i smrti pa je to dodano u kasnijim izdanjima. Zacijelo je nakladnik potaknut ideološkim razlozima tražio još neke ispravke na koje je autor jednostavno morao pristati. Naime, svugdje gdje je u prvom izdanju iz 1945. pisalo *prije Krista*, odnosno *pr. Kr.* zamijenjeno je novim izričajem *prije nove ere*, tj. s *pr. n. e.* Primjerice, umjesto Arhimed (287. – 212. pr. Kr.) u izdanju iz 1950. nalazi se Arhimed (287. – 212. pr. n. e.).

Sl. 8.: Povijesni podatci uz pojam konvergentnih sljedova

Sl. 9.: Udžbenik *Uvod u višu analizu* odlikuje se preglednim matematičkim slogom i zornim crtežima

Sadržaj obaju dijelova udžbenika *Uvod u višu analizu*

I. DIO

II. DIO

REALNI BROJEVI

DETERMINANTE I MATRICE

Racionalni brojevi	VEKTORI U PROSTORU
Iracionalni brojevi	PRIMJENA U ANALITIČKOJ
SLJEDOV I REDOV I	GEOMETRIJI PROSTORA
Beskonačni sljedovi	FUNKCIJE DVIJU I VIŠE
Beskonačni redovi	PROMJENLJIVIH
O FUNKCIJAMA	IMPLICITNE FUNKCIJE
Funkcije uopće	FUNKCIJE PREDOČENE U
Svojstva funkcija	INTEGRALNOM OBLIKU
DIFERENCIJALNI RAČUN	KRIVULJNI INTEGRALI U
Derivacije funkcija	RAVNINI
Redovi potencija	PROSTORNE KRIVULJE
INTEGRALNI RAČUN	SVOJSTVA POVRŠINA
Određeni integral	DVOSTRUKI I VIŠESTRUKI
Neodređeni integral	INTEGRALI
Primjene diferencijalnog i integralnog računa	FUNKCIJE KOMPLEKSNE
približno određivanje integrala	PROMJENLJIVE
FOURIEROVI REDOVI	DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE
	Obične diferencijalne jednađžbe
	Diferencijalne jednađžbe višeg reda i sustavi jednađžbi
	Linearne diferencijalne jednađžbe
	Parcijalne diferencijalne jednađžbe
	Račun varijacija

3. Bivši studenti o Željku Markoviću

Uvijek je zanimljivo što bivšim studentima ostane u trajnom sjećanju o svojim nekadašnjim profesorima. Matematičar i vodeći hrvatski povjesničar znanosti Žarko Dadić, o svom profesoru Markoviću i njegovom udžbeniku piše *kako ta knjiga nije bila suhoparan udžbenik, kao što to nisu bila ni predavanja Željka Markovića*. I posebno naglašava kako je knjiga pisana živim jezikom, ponegdje pravim književnim stilom [1].

Među bivšim studentima Željka Markovića na poseban se način izdvaja Mate Maras, koji je završio studij matematike i fizike, jedno vrijeme radio kao gimnazijski profesor, ali kojega su silnice sudbine i sirenski zov književnosti, potaknut i nasljednim pjesničkim genom, odveo u književne i prevoditeljske vode, kasnije i diplomatske. Usuđujemo se vjerovati kako bi Željko Marković bio ponosan na književno-prevoditeljske uspjehe svoga studenta Marasa, kao što je, vjerojatno bio ponosan i Vladimir Varićak na muzikološka postignuća svoga nekadašnjega studenta matematike Božidara Širole. U razgovoru za Matematičko-fizički list³, Mate Maras se prisjetio vremena svoga studija matematike: *Željko Marković nam je predavao Uvod u višu analizu, divio sam se umjetničkoj razini jezika u njegovim knjigama*.

³ Mate Maras, MFL, LXVI 4 (2015. – 2016.), str. 219.

U razgovoru, za potrebe ovoga članka, prisjetio se profesora Markovića, sljedećim riječima:

Profesor Marković se isticao dostojanstvenim držanjem i blagonaklonošću koju je iskazivao prema svima studentima; a bilo nas je u predavaonici s pogledom na Marulićev trg više od šezdeset. Meni se nekako činilo da on lebdi iznad nas, iako je bio malen rastom; resila ga je duhovna zrelost, uskoro ga je čekala mirovina. Govorio je jednostavno, tiho ali razumljivo, upletao je u predavanja anegdote o pojedinim učenjacima i događajima, a građivo iz svojih knjiga kao da nam je tek blago preporučivao. Na ispitu nas je primao u svojem kabinetu, u skupinama od deset-petnaest studenata; vodio je s nama poduži razgovor o svemu i svačemu, više odgovarao nego ispitivao; na kraju bi nas zamolio da izađemo i pričekamo ocjene; nitko se od nas nije zabrinjavao zbog ishoda -- jer kod profesora Markovića najniža ocjena je bila "dobar". ... Jezici i književnost odvlačili su me na drugu stranu. I doista, nakon desetak godina učiteljavanja, sve sam svoje sposobnosti potom uložio u prevođenje i pisanje. Ali nikada nisam zaboravio koliko sam volio knjige profesora Markovića zbog birana jezika i savršena stila.

Zaključak

Željko Marković je hrvatsku akademsku zajednicu obogatio knjigom koja je generacijama matematičara i inženjera bila temeljni udžbenik matematike i koja je svojim *biranim jezikom i savršenim stilom* izuzetan doprinos hrvatskoj kulturi uopće. Uz sam bok ovoga djela spada i ovdje nespomenuta, dvosveščana monografija *Ruđe Bošković*, o našem najvećem znanstveniku. Ovdje se prirodno nameće pitanje je li hrvatsko društvo iskazalo trajnim pamćenjem zahvalnost ovome čovjeku. Ne dajući konačnoga odgovora u ovoj prigodi, recimo ipak, da u Zagrebu nema ulice ili trga nazvanim po ovomu matematičaru. U zagrebačkom naselju Slobošćina nekoliko je ulica nazvano po matematičarima kao što su Mijo Šilobod Bolšić, Vladimir Varićak, Karel Zahradnik ili čak Milutin Milanković. Nismo se sjetili Željka Markovića. Njegovanje uspomene na velikane ne služi njima samima, već potomstvu kao putokaz za utiranje putova prema većim stvarima, da parafraziramo Gaussovu misao uzetu kao moto drugoga dijela *Uvoda: Ab his via sternitur ad maiora*.

Ne nalazeći bolji izričaj, poslužimo se sintagmom kojom je Miroslav Šicel okarakterizirao Zdenku Marković u predgovoru njezinim Izabranim djelima – *Plemkinja duha* [6]. Čini nam se da se s punim pravom može proširiti i na Željka Marković – *plemić, aristokrat duha*.

Zahvala

Zahvaljujemo profesoru Stanimiru Vuk-Pavloviću, dopisnom članu Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti, na danim podacima o članovima obitelji Željka Markovića.

Zahvaljujemo hrvatskome prevoditelju, književniku i diplomatu Mati Marasu, nekadašnjem studentu Željka Markovića što je s nama podijelio sjećanja na svoga profesora.

Literatura

[1] Ž. Dadić: Egzaktne znanosti u Hrvatskoj u ozračju politike i ideologije (1900-1960), Izvori, Zagreb, 2010.

[2] I. Vuković, A. Valent: Dva matematička priručnika Ivana Paskvića, *Prirodoslovlje*, 18(1-2)18, Zagreb, 2018.

[3] T. Šikić, A. Valent, I. Vuković: Nastavni rad Vladimira Varićaka, Vladimir Varićak (1865. – 1942.) u hrvatskoj i svjetskoj znanosti, *Rasprave i građa ua špovijest znanosti*, HAZU, Zagreb, 2018.

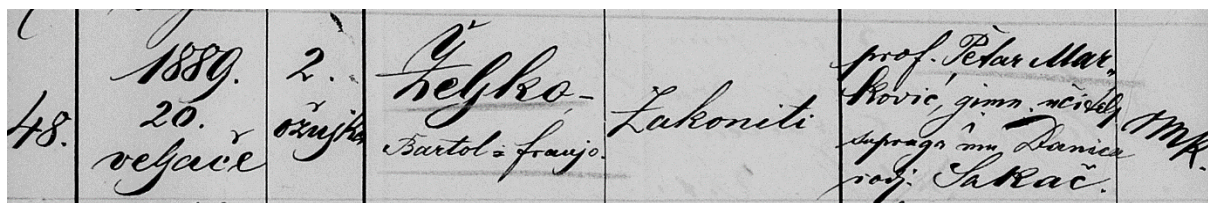
- [4] I. Vuković, A. Valent, B. Hanžek, Ž. Hanjš: Visokoškolski udžbenici matematike Marija Kiseljaka, Zbornik radova 8. simpozija Povijest i filozofija tehnike (ur. Z. Benčić), Kiklos – krug knjige, Zagreb, 2019.
- [5] O. Blagec: Bela IV. i kalničko plemstvo, *Cris*, XII, br. 1/2010., Križevci, 2010.
- [6] Ana Batinić: Plemkinje duha Marija Jambrišak – Jagoda Truhelka – Zdenka Marković, *Nova Croatic*, II (2008) 2, Zagreb, 2008.
- [7] – Znameniti i zaslužni Hrvati te pomena vrijedna lica u hrvatskoj povijesti od 925-1925, Zagreb, 1925.
- [8] I. Vuković, A Valent: Trnovit put do kraljevskog profesora matematike početkom XX. stoljeća, *Poučak*, 20 (80) 2019, Zagreb, 2019.

75-th anniversary of Introduction to Higher Analysis by Željko Marković

Ivica Vuković, Anđa Valent

Abstract: Among many croatian university textbooks of mathematics Introduction to Higher Analysis by professor Željko Marković occupies quite a distinct place for its volume, long-term usage and many reissues; a core textbook for generations of mathematicians and engineers alike, but primarily for unique style of writing, well-groomed language and in our literature unsurpassed source of historical data. All that combined makes this textbook culturally an important work of historical significance.

Key words: Željko Marković, higher analysis, university textbooks of mathematics



Sl. 1.



Sl. 2.



Sl. 3.



Opis života.

Rodio sam se dne 20. veljače 1889. u Požegi u Slavoniji. Osmoome sam školu završio u Zagrebu, zatim polazio kao redoviti učenik osam godina Kr. do. ugarske gimnaziji zagrebačkoj, gdje sam položio dne 1. srpnja 1907. ispit zrelosti. U jeseni iste godine upisao sam se u medicinski fakultet sveučilišta Franje Josipa I u Zagrebu, da studiram kao redoviti slušač matematiku i fiziku. Taj sam studij nastavio u ljetnom semestru iste školske godine 1907/8. na C. i K. čiš. kom sveučilištu u Pragu. U zimskom i ljetnom semestru školske godine 1908/9. studirao sam opet na Kr. sveučilištu Franje Josipa I u Zagrebu, a tada zimski i ljetni semestar školske godine 1909./10. proveo u svrhu studija matematike, fizike i astronomije na Kr. pruskom sveučilištu u Göttingenu. U jeseni školske godine 1910./11. povratio sam se na sveučilište Franje Josipa I u Zagrebu, gdje sada završavam svoj osmi semestar.

DR. ŽELJKO MARKOVIĆ
PROFESOR TEHNIČKOG FAKULTETA

UVOD U VIŠU ANALIZU

DIO PRVI

IZDANJE NAKLADNOG ZAVODA HRVATSKE

ZAGREB 1945

LAMPADEM TRADERE

J. WALLIS U PISMU G. W. LEIBNIZU (1696.)

Sl. 6.

GLAVA PRVA

REALNI BROJEVI

RACIONALNI BROJEVI

1. Prirodni brojevi.¹⁾ Brojevi 1, 2, 3, ... čine nam se tako dobro poznati, da o pojmu njihovu ne bi trebalo ni razpravljati. Oni su nam najbliži po uzkoj vezi s potrebama svakidanjega života i smatrani su takovim još odavna. Sam naziv „prirodni“ za te brojeve nalazi se već u *Uvodu u aritmetiku* NIKOMAHA iz Gerase (oko g. 100. po Kr.), odakle je preko BOECIJEVE *De institutione arithmetica* (Uputa u aritmetiku, 5/6. st. po Kr.) prešao u srednji viek i došao do nas.

Oni su bili prve jasne jezgre, proizašle iz misaone djelatnosti davnih preda u dugom nizu tisućljeća, kojima se obraćalo nastojanje njihovo, da u nesređenu množinu podataka izvanjega svijeta uvede brojenjem, mjerenjem i vaganjem preglednost, red i sustav. Svi narodi broje. PLATON je u tome vidio i najodličnije obilježje ljudi, jer jedini oni od svih živih bića računaju. Primitivni neki narodi broje i danas tako, da se vidi, da je za njih pojam broja još vezan uz stvar, koja se broji; drugi su se oslobodili naravi predmeta, što se broje, upirući se samo o to, da su ti predmeti razlučeni i da s obzirom na brojenje čine istovrstne jedinice, što je preduvjet i za vršenje operacija s njima.

Prirodni se brojevi javljaju već od najdavnijih vremena staroegipatskih i sumersko-babilonskih u dva različita značenja; kao *glavni* ili *kardinalni* utvrđuju oni koliko je izbrojenih predmeta; kao *redni* ili *ordinalni*²⁾ određuju oni mjesto po redu pojedinoga brojenog predmeta. Vrlo je stara razdioba njihova na tãke ili parne brojeve (2, 4, 6, ...; uobće $2n$) i na lihe ili neparne (1, 3, 5, ...; obćenito $2n+1$ ili $2n-1$).³⁾ U najstarijoj je fazi razvoja matematike imala ta razdioba mnogo veće značenje nego danas. Kod Egipćana je operacija udvostručavanja i obrnuta operacija dieljenja u dvoje imala u izvođenju računa osobito mjesto, a odsjev toga, osim u grčkom računanju, vidimo i u grčkoj filozofiji, napose kod t. zv. pitagorovaca (6/5. st. pr. Kr.) a po njima i u PLATONA (428/7.—348/7.,

¹⁾ Njem. natürliche Zahlen, ganze positive Z.; franc. nombres naturels, entiers positifs; engl. natural numbers, positive integers; tal. numeri naturali, interi positivi. U tom će redu biti navedeni važniji strani nazivi i dalje.

²⁾ Kardinal — Ordinalzahlen; nombres cardinaux — ordinaux; cardinal — ordinal numbers; numeri cardinali — ordinali.

³⁾ Gerade, ungerade Zahlen; nombres pairs, impairs; even, odd numbers; numeri pari, dispari.

Sl. 7.

d) Granica A može pripadati sliedu, ali ne mora; po svojoj definiciji ona mu ne pripada, ali se slied može zadati i tako, da i ona bude njegov član. Na primjer slied, kome je prvi član 1, a ostali $(a_n) = (1 - \frac{1}{n})$ teži granici 1, koja je sada član slieda.

e) Dovoljno daleki članovi slieda mogu se smatrati približnim vrijednostima granične vrijednosti A ; često i nema drugoga načina za izračunavanje broja A , nego da se smatra granicom slieda, koji njoj teži. Tako je svaki iracionalni broj zajednička granica sljedova racionalnih brojeva (a_n) i (b_n) s poznatim trima svojstvima (br. 20.), kojih su članovi približne vrijednosti toga broja na manje i na više. Obseg kružnice zajednička je granica obsega pravilnih, kružnici upisanih i opisanih višekuta, kad im broj stranica poraste u bezkonačnost.

Pojam granice jedan je od najvažnijih pojmova više analize, kako smo vidjeli govoreći o iracionalnim brojevima i kako ćemo u daljem razlaganju sve više uviđati. Sustavnom upotrebom toga pojma od druge polovine 17. stoljeća ušao je u matematiku sasvim nov duh. Uvođenje novih matematičkih bića graničnim prielazom dalo je matematičkom iztraživanju veliku slobodu, koja i označuje sav razvoj matematike od onih vremena. Stari grčki matematičari svjestno su se klonili u svojim iztraživanjima izravne upotrebe pojma bezkonačnosti i graničnoga prielaza, koji je s njim u vezi, premda je tok njihovih razmatranja često bio takov, da je mogao voditi do graničnoga prielaza. Ali i EUKLID i ARHIMED, premda ne provode graničnoga prielaza u dokazivanju mnogih od najvažnijih svojih teorema, promatraju tokom dokaza veličine, koje mogu postati po volji malene, služeći se u bitnosti, ako ne i u oznaci, našom veličinom ε . Pravu je narav granične točke uvidio GREGORIUS A S^{to} VINCENTIO (1584. Brugge — 1667. Gent) u geometrijskom obliku baveći se geometrijskim redom u djelu *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum con*i (Geometrijsko izvođenje kvadrature kruga i presjeka stožca, Antverpiae (Antwerpen) 1647.), a njegov učenik A. TACQUET poobćio je tu spoznaju i prenio je na aritmetičko područje; on već govori (1654.) o „veličini manjoj od kojegod zadane veličine ili kolikogod malene“. Rieč „konvergentan“ upotriebio je prvi, koliko se zna, škotski matematik JAMES GREGORY (1638. Aberdeen — 1675. Edinburgh) u važnom svom djelu *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (Prava kvadratura kruga i hiperbole, Patavii (Padova) 1667.) govoreći o sliedu višekuta, koji aproksimiraju kružnicu, kao konvergentnom; on je jasno vidio i to, da se graničnim prielazom otvara nov put za uvođenje i određivanje veličina. Jedan od predteča nove više analize JOHN WALLIS služi se u svojoj *Arithmetica infinitorum* (Aritmetika bezkonačnih veličina, Oxonii (Oxford) 1655.) već aritmetičkim pojmom granice i opisuje na izpravan način, ali bez simbola, granično približavanje te i on upotrebljava izričaj „manji od svake označive veličine“ (quodlibet

Sl. 8.

Svojstva JACOBIJEVIH eliptičkih funkcija za realne vrijednosti argumenta, koja zorno dolaze do izražaja u grafovima funkcija, pokazuju, da se one u mnogom pogledu vladaju gotovo tako jednostavno kao kružne funkcije, a tablice, koje su izračunate za te funkcije, čine, da se s njima i računa upravo tako kao s kružnim funkcijama. Od tablica spomenut ćemo L. M. MILNE-THOMSON, *Die elliptischen Funktionen von JACOBI*, J. Springer, Berlin 1931., koje daju vrijednosti funkcija $sn u$, $cn u$, $dn u$ na pet decimala za vrijednosti k^2 od 0,0, 0,1, 0,2, ..., 0,9 do 1. Zatim Dr. E. JAHNKE-F. EMDE, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*, 3. Aufl. B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1938., koje je i inače važna zbirka tablica.

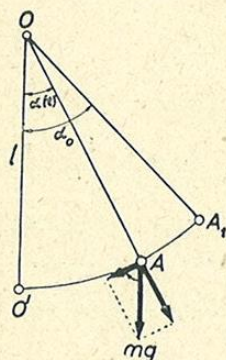
O određivanju eliptičkih integrala pomoću beskonačnih redova vidi br. 167.

LEGENDRE, a poslije ABEL i JACOBI, promatrali su drugi korijen iz polinoma četvrtoga stupnja, napose normalni oblik $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, u kome dolaze samo takve potencije od x , za koji se može pokazati, da se na nj dade svesti svaki polinom četvrtog stupnja uvođenjem zgodno odabrane nove promjenljive. K. WEIERSTRASS, koji je u 19. st. obnovio teoriju eliptičkih funkcija, polazi od drugog korijena iz polinoma trećeg stupnja $y = \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}$ kao normalnog oblika, u kome su g_2 i g_3 realne konstante, za koje vrijedi $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$. Integrali

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, I_2 = \int \frac{xdx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, I_3 = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

WEIERSTRASSOVI su kanonski integrali prve, druge i treće vrste. Inversija eliptičkog integrala prve vrste vodi do osnovne WEIERSTRASSOVE eliptičke funkcije Pu , s kojom se mogu izraziti i tri JACOBIJEVE eliptičke funkcije.

4. Primjena na matematičko njihalo. U točki O (sl. 185.) visi



Slika 185.

na niti duljine l , koje težinu zanemarujemo, materijalna točka mase m . Pomaknuta iz položaja ravnoteže OO' , od koga počinjemo brojiti kutove, u nov položaj, u kome zatvara s prvim kut α , i prepuštena samo utjecaju sile teže izvodi ona gibanje, koje treba analitički opisati. Put opisan u vremenu t , koje brojimo od časa prolaza točke m kroz O' , luk je $O'A = l \cdot \alpha(t)$; akceleracija je gibanja u čas t dakle $l \alpha''(t)$; od sile teže mg djeluje u tom gibanju samo tangentna komponenta $mg \sin \alpha$, tako da je po osnovnom zakonu mehanike gibanje opisano diferencijalnom jednačbom:

$$m l \alpha''(t) = - m g \sin \alpha;$$

negativni predznak desne strane znači, da je akceleracija, kojom se mijenja kut α s vremenom, negativna za $\sin \alpha > 0$, t. j. za kutove desno od položaja ravnoteže OO' , da se dakle za takve kutove brzina promjene kuta s vremenom umanjuje uzevši u obzir i predznak brzine. Radi se dakle o integraciji diferencijalne jednačbe drugog reda

$$\alpha'' + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0.$$

Pomnožimo li tu jednadžbu s $2\alpha'$, možemo je radi $2\alpha'\alpha'' = \frac{d\alpha'^2}{dt} i \alpha' \sin \alpha = -\frac{d}{dt}(\cos \alpha)$ pisati:

$$\frac{d}{dt}(\alpha')^2 = \frac{2g}{l} \frac{d}{dt}(\cos \alpha),$$

a odatle prvom integracijom:

$$(1) \quad \alpha'^2 = \frac{2g}{l} \cos \alpha + C.$$

Konstantu C odredit ćemo opet iz početnih uvjeta problema; u točki A_1 , u kojoj je amplituda njihaja najveća i jednaka α_0 , brzina promjene $\alpha'(t) = 0$, dakle je za $\alpha = \alpha_0$, $\alpha' = 0$, što uvršteno u (1) daje $C = -\frac{2g}{l} \cos \alpha_0$, pa (1) prima stoga oblik:

$$(2) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0},$$

gdje smo uzeli korijen s pozitivnim predznakom, jer promatramo dio gibanja, u kome $\alpha(t)$ raste te je $\alpha'(t) > 0$. Iz (2) izlazi:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}}, \text{ t. j. } t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}},$$

gdje smo u toj drugoj integraciji stavili konstantu po volji jednaku nuli, jer je za $\alpha = 0$ prema dogovoru o početku brojenja vremena $t = 0$. Stavimo $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $\cos \alpha_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}$; time dobivamo za vrijeme t , što prođe, dok točka m dođe iz položaja O' u A , izraz:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha_0}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

Neka je $\sin \frac{\alpha_0}{2} = k$, $\sin \frac{\alpha}{2} = k \sin \varphi$; tada je $0 < k < 1$ (slučaj $\alpha_0 = \pi$, kada bi bio $k = 1$ i kada bi točka došla u O , isključujemo), a $\alpha \leq \alpha_0$. Jer je

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}, \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha_0}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = k \cos \varphi \text{ i } \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha = k \cos \varphi d\varphi,$$

$$\text{to je} \quad d\alpha = \frac{2k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi, \quad \text{a} \quad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}};$$

vrijeme t kao funkcija kuta φ dano je dakle eliptičkim integralom prve vrste argumenta φ i modula $k = \sin \frac{\alpha_0}{2}$, t. j. prema (1) u 1.

$$(3) \quad t = \sqrt{\frac{l}{g}} F(\varphi, k).$$

Da odredimo kut α kao funkciju od t , moramo izvršiti najprije inversiju tog integrala, t. j. od vremena t prijeći na kut φ ; iz (3) izlazi prema (2) u 1. i (a₁):



Željko Marković