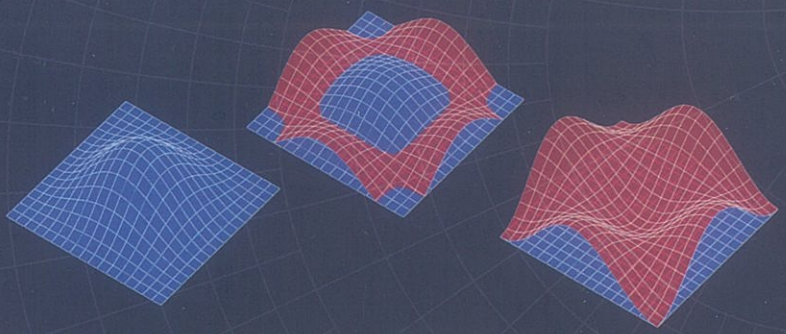


Mikrovalna elektronika

Juraj Bartolić

KIKLOS – KRUG KNJIGE

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS



Urednik:
prof. dr. sc. Zvonko Benčić

Recenzenti:
Prof. dr. sc. Borivoj Modlic
Prof. dr. sc. Zvonimir Šipuš
Prof. dr. sc. Nikša Burum

Crteži i grafička priprema:
Autor

Lektorica
Ksenija Trajbar, prof.

Motiv naslovnice:
Autor

Objavljivanje ovog udžbenika pomoglo je Ministarstvo znanosti i obrazovanja RH

Objavljivanje ovog udžbenika odobrio je Senat Sveučilišta u Zagrebu
rješenjem klasa: 032-01/20-01/49, ur. broj: 380-061/36-21-2 od 16. ožujka 2021.

ISBN: 978-953-7992-19-4

CIP zapis dostupan je u računalnom katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice
u Zagrebu pod brojem 001095730.

Nakladnik:
KIKLOS – KRUG KNJIGE d.o.o.

Tisak:
Denona d.o.o., Zagreb

Juraj Bartolić

Mikrovalna elektronika

KIKLOS – KRUG KNJIGE
ZAGREB, 2021.

Sadržaj

Predgovor XV

1. UVOD U MIKROVALNU ELEKTRONIKU 1

1.1. Uvod u vektorska polja 3
1.1.1. Gradijent 3
1.1.2. Divergencija 5
1.1.3. Rotor 5
1.1.4. Vektorske jednadžbe 8
1.1.5. Silnice vektorskog polja 8
1.2. Električne i magnetske sile i polja 9
1.2.1. Električno polje 9
1.2.2. Magnetsko polje 11
1.3. Statička i dinamička polja 13

2. TEORIJA ELEKTROMAGNETIZMA 15

2.1. Maxwellove jednadžbe i zakon Lorentzove sile 15
2.1.1. Integralni oblik Maxwellovih jednadžba 17
2.1.2. Lorentzov zakon 18
2.2. Fazorski prikaz harmonijskih veličina 19
2.3. Svojstva materijala i relacije građe 21
2.3.1. Jednostavni modeli dielektrika, vodiča i plazme 21
2.3.2. Anizotropni materijali 30
2.3.3. Umjetni dielektrici 31
2.4. Električne i magnetske struje 32
2.5. Ravni elektromagnetski valovi 35
2.5.1. Valna jednadžba 35
2.5.2. Harmonijski ravni val u sredstvu bez gubitaka 38
2.5.3. Opće rješenje valne jednadžbe u pravokutnom koordinatnom sustavu 42
2.5.4. Opće rješenje za ravni val 44
2.5.5. Disperzija i grupna brzina 49

2.6. Energija, snaga i Poyntingov teorem 51
2.7. Valovi u sredstvu s gubitcima 56
2.8. Polarizacija i ortogonalnost 61
2.9. Rubni uvjeti 64
2.9.1. Tangencijalne komponente polja na granici 65
2.9.2. Okomite komponente polja na granici 66
2.9.3. Polje na granici između dvaju dielektrika 66
2.9.4. Polje na granici sa savršenim vodičem (električni zid) 66
2.9.5. Rubni uvjet za magnetski zid 67
2.9.6. Uvjet zračenja 67
2.10. Refleksija i prijenos pri okomitom upadu ravnoga vala 67
2.10.1. Sredstvo bez gubitaka 69
2.10.2. Dobar vodič 71
2.10.3. Savršeno vodljivo sredstvo 73
2.11. Kosi upad vala na ravnu granicu između dvaju sredstava 76
2.11.1. Okomita (*TE*) polarizacija 78
2.11.2. Paralelna (*TM*) polarizacija 79
2.11.3. Polarizacijski kut – totalni prijenos 80
2.11.4. Tok snage 81
2.11.5. Kritični kut – totalna refleksija 81
2.12. Kosi upad vala na granicu sa savršenim vodičem 87
2.12.1. *TE*-mod 87
2.12.2. *TM*-mod 89
2.13. Tlak zračenja 90
2.14. Zračenje elektromagnetske energije 92
2.14.1. Električno polje ubrzanog naboja 92
2.14.2. Elektromagnetski potencijali 95
2.14.3. Hertzov dipol 99
2.15. Neki teoremi u elektromagnetizmu 108
2.15.1. Teorem o jedinstvenosti rješenja 108
2.15.2. Dualnost 109
2.15.3. Teorem recipročnosti 110
2.15.4. Načelo ekvivalencije 112
2.15.5. Teorija zrcalnog odslikavanja 114
2.15.6. Huygensovo načelo i fizikalna optika 116
2.15.7. Nadomjesne električne i magnetske struje i elementarni magnetski dipol 119

3. TEORIJA PRIJENOSNIH LINIJA 121

3.1. Valovi na prijenosnoj liniji 121
3.1.1. Prijenosna linija bez gubitaka 126
3.1.2. Prijenosna linija malih gubitaka 127
3.2. Parametri prijenosne linije (teorija polja) 128
3.2.1. Parametri suosne linije 129
3.3. Prijenosna linija zaključena proizvoljnom impedancijom tereta 132
3.3.1. Koeficijent refleksije 132
3.3.2. Ulazna impedancija 134
3.3.3. Odnos stojnih valova 135
3.3.4. Tok snage 137
3.3.5. Rubni uvjet na generatoru 139
3.3.6. Prijenos snage iz generatora u teret 140
3.3.7. Koeficijent prijenosa 141
3.4. Reaktivno zaključena prijenosna linija bez gubitaka 142
3.5. Smithov dijagram 146
3.6. Metoda perturbacije za izračunavanje koeficijenta prigušenja na liniji s gubitcima 151
3.7. Impulsi na prijenosnoj liniji 153
3.7.1. Otporno zaključena prijenosna linija 155
3.7.2. Kapacitivno i induktivno zaključena prijenosna linija 159
3.7.3. Refleksijski dijagram 162

4. VALOVODI 165

4.1. Planparalelni valovod 166
4.1.1. Valna impedancija 172
4.1.2. Tok snage 173
4.1.3. Gubitci snage i koeficijent prigušenja 173
4.2. Opća formulacija vođenih valova 175
4.2.1. *TEM*-val 179
4.2.2. *TE*-val 182
4.2.3. *TM*-val 183
4.3. Pravokutni valovod 184
4.3.1. *TE*-valovi 185
4.3.2. *TM*-valovi 189
4.3.3. Dominantni mod TE_{10} 190
4.3.4. Viši modovi 192

4.4. Kružni valovod 195
4.4.1. *TM*-valovi 195
4.4.2. *TM*-valovi 197
4.4.3. Dominantni mod TE_{11} 200
4.5. Viši modovi u suosnoj liniji 201
4.6. Analogija između valovoda i prijenosne linije 203
4.7. Dielektrični valovod 207
4.8. Planarne linije 214
4.8.1. Simetrična trakasta linija 216
4.8.2. Mikrotrakasta linija 221
4.8.3. Koplanarna linija 237
4.8.4. Prorezna linija 238
4.9. Metoda poprečne rezonancije 239
4.10. Prijenosne strukture s protusmjernim valovima 241
4.11. Brzina prijenosa energije u valovodu 243
4.12. Usporedba prijenosnih struktura 245

5. ANALIZA MIKROVALNIH MREŽA 247
5.1. Nadomjesni naponi i struje 249
5.2. Zamisao impedancije 251
5.2.1. Ulazna impedancija jednoprolazne mreže 251
5.2.2. Jednoprolazna mreža bez gubitaka 252
5.2.3. Fosterov teorem o reaktanciji 254
5.3. Impedancijske i admitancijske matrice 256
5.3.1. Recipročne mreže 258
5.3.2. Nedisipativne mreže 261
5.3.3. Serijski i paralelni spoj dvoprolaznih mreža 261
5.4. Raspršna matrica 262
5.4.1. Poopćeni valovi snage 266
5.4.2. Veza između raspršne i impedancijske matrice 268
5.4.3. Recipročne mreže 269
5.4.4. Očuvanje energije i svojstvo unitarnosti raspršne matrice mreže bez gubitaka 270
5.4.5. Nerefleksivne mreže 272
5.4.6. Pomak referentnih ravnina 274

5.5. Prijenosni parametri 277
5.5.1. Strujno-naponska prijenosna matrica 277
5.5.2. Matrica prijenosa valova snage 279
5.6. Analiza simetričnih mreža primjenom svojstvenih vrijednosti 280
5.6.1. Svojstvene vrijednosti dvoprolazne mreže 284
5.6.2. Svojstvene vrijednosti četveroprolazne mreže 289
5.7. Grafovi toka signala 291
5.7.1. Reduciranje grafa toka signala 295
5.7.2. Masonovo pravilo 298
5.8. Posebna svojstva višeprolaznih mreža 299
5.8.1. Dvoprolazne mreže 299
5.8.2. Troprolazne mreže 303
5.8.3. Četvroprolazne mreže 310
5.9. Diskontinuiteti u valovodu 314
5.10. Pobuda valovoda 321
5.10.1. Pobuda električnim i magnetskim strujama 321
5.10.2. Pobuda otvorom u stijenki valovoda 328
5.11. Diskontinuiteti na mikrotrakastoj liniji 333
5.11.1. Otvoreni kraj linije 333
5.11.2. Koljenasti spoj 335
5.11.3. Skok impedancije 336
5.11.4. Prorez u mikrotrakastoj liniji 337
5.11.5. Prospoj (via) u mikrotrakastoj liniji 337

6. PRILAGODBA I TRANSFORMACIJA IMPEDANCIJE 339
6.1. Prilagodba s pomoću koncentriranih elemenata 339
6.2. Prilagodba jednim stabom 343
6.3. Prilagodba četvrtvalnim transformatorom impedancije 348
6.4. Bode-Fanov kriterij 351
6.5. Teorija malih refleksija 354
6.5.1. Transformator s jednim odsječkom 354
6.5.2. Približna teorija za četvrtvalne transformatore s više odsječaka 356
6.6. Binomni transformator 358
6.7. Čebiševljev transformator 363
6.8. Širokopojasna transformacija impedancije neuniformnom linijom 367
6.8.1. Eksponencijalni transformator impedancije 368
6.8.2. Klopfensteinov transformator impedancije 369

7. PASIVNI SKLOPOVI 371

7.1. Valovodne komponente 371
7.1.1. Prilagođeni teret 371
7.1.2. Pomični kratkospojnik 372
7.1.3. Atenuator 373
7.1.4. Fazni zakretač 375
7.2. Dijelila snage 376
7.2.1. Valovodni T-spoj 376
7.2.2. Otporno djelilo 377
7.2.3. Wilkinsonovo djelilo snage 379
7.2.4. Nejednoliko dijeljenje snage i Wilkinsonovo djelilo s više izlaznih grana 382
7.3. Usmjerni sprežnici i hibridi 383
7.3.1. Valovodni sprežnik s jednim otvorom 385
7.3.2. Valovodni sprežnik s više otvora 390
7.3.3. Usmjerni sprežnici sa spregnutim linijama 395
7.3.4. Nadomjesni sklop spregnutih linija 406
7.3.5. Kvadraturni hibrid 409
7.3.6. Hibridni T-spoj i balansni transformator 412
7.4. Mikrovalni rezonatori 418
7.4.1. Serijski i paralelni titrajni krugovi 419
7.4.2. Rezonantni sklopovi s prijenosnim linijama 425
7.4.3. Valovodni rezonatori 431
7.4.4. Dielektrični rezonator 439
7.4.5. Fabry-Perotov rezonator 443
7.4.6. Pobuda rezonatora 446
7.4.7. Perturbacija rezonatora 458
7.5. Mikrovalni filtri 462
7.5.1 Sinteza filtara 463
7.5.2 Transformacije filtara 471
7.5.3 Invertori impedancije i admitancije 482
7.5.4 Izvedbe mikrovalnih filtar 490
7.6. Periodične prijenosne strukture 511
7.7. Feritne komponente 517
7.7.1. Magnetski materijali 518
7.7.2. Rasprostiranje elektromagnetskih valova u feritima 524
7.7.3. Feritne mikrovalne komponente 530

8. AKTIVNI SKLOPOVI 537

8.1. Šum u aktivnim komponentama i sklopovima 537
8.1.1. Izvori šuma 537
8.1.2. Snaga i nadomjesna temperatura šuma 538
8.1.3. Faktor šuma 540
8.1.4. Mreže s više izvora šuma i kaskada šumnih mreža 541
8.1.5. Izvori šuma za mjerenje temperature šuma 545
8.2. Nelinearne komponente i mreže 546
8.2.1. Nelinearni dvopoli i nelinearnost 547
8.2.2. Frekvencije miješanja i matrica pretvorbe 552
8.2.3. Nelinearna analiza velikog signala 557
8.2.4. Dinamičko područje prijamnog sustava 558
8.3. Mikrovalne elektronske cijevi 562
8.3.1. Klistron 564
8.3.2. Refleksni klistron 570
8.3.3. Cijev s putujućim valom 572
8.3.4. Magnetron 579
8.4. Mikrovalne poluvodičke komponente 584
8.4.1. Schottkyjeva dioda 584
8.4.2. PIN-dioda 586
8.4.3. IMPATT dioda 589
8.4.4. Gunnova dioda 593
8.4.5. Mikrovalni tranzistori 595
8.5. Detektori 605
8.5.1. Detekcija nemoduliranih signala 606
8.5.2. Detekcija moduliranih signala 607
8.6. Miješala 609
8.6.1. Diodno miješalo 611
8.6.2. Tranzistorsko miješalo 620
8.7. Sklopovi s PIN-diodom 624
8.7.1. Sklopka s PIN-diodom 624
8.7.2. Zakretači faze i fazni modulatori 629
8.7.3. Atenuatori s PIN-diodom 632
8.8. Tranzistorska pojačala 634
8.8.1. Pojačanje snage dvoprolazne mreže 634
8.8.2. Stabilnost pojačala 640

8.8.3. Osnovna načela proračuna tranzistorskih pojačala 645
8.8.4. Izvedbe pojačala i sklopovi za dovođenje napajanja aktivnim komponentama 650
8.8.5. Niskošumna pojačala 657
8.8.6. Širokopojasna pojačala 665
8.8.7. Lančani spoj više pojačala 672
8.8.8. Pojačala snage i obilježja tranzistora u režimu rada s velikim signalom 673
8.9. Mikrovalni oscilatori 674
8.9.1. Mikrovalni oscilatori s negativnim otporom 674
8.9.2. Tranzistorski oscilatori 699
8.10. Množila frekvencije i parametarska pojačala 720
8.10.1. Manley-Roweove relacije 721
8.10.2. Pobuda varaktora harmonijskim signalom 721
8.10.3. Množila frekvencije 723
8.10.4. Uvod u parametarske sustave 724
8.10.5. Uzlazni pretvornik 726
8.11. Mikrovalni integrirani sklopovi 728
8.11.1. Materijali za podloge mikrovalnih integriranih sklopova 729
8.11.2. Pasivne koncentrirane komponente 730
8.12. RF-MEMS sklopke 735

9. UVOD U MIKROVALNA MJERENJA 739
9.1. Mjerenje mikrovalne snage 739
9.1.1. Termistor 739
9.1.2. Termopar 740
9.1.3. Diodni detektor 741
9.1.4. Mjerna nesigurnost i faktor umjeravanja 742
9.2. Mjerenje frekvencije 743
9.2.1. Valomjer 743
9.2.2. Digitalno brojilo 743
9.3. Mjerenje spektra 745
9.4. Mjerenje impedancije i reflektometri 747
9.4.1. Mjerenje impedancije na osnovi mjerenja odnosa stojnih valova 747
9.4.2. Troprolazni i četveroprolazni reflektometri 749
9.4.3. Mjerenje prijenosnih parametara 751
9.4.4. Vektorski analizator mreža 751

9.4.5. Reflektometar sa šesteroprolaznim hibridom 757
9.4.6. Mjerenje raspršnih parametara recipročne mreže refleksijom 758
9.4.7. Reflektometri u vremenskoj domeni 760

10. UVOD U MIKROVALNE SUSTAVE I PRIMJENE 763

10.1. Mikrovalne antene 763
10.1.1. Dijagram zračenja i intenzitet zračenja 764
10.1.2. Usmjerenost 766
10.1.3. Impedancija antene 768
10.1.4. Dobitak 769
10.1.5. Efektivna površina i efektivna duljina antene 769
10.1.6. Antena u komunikacijskim sustavima 771
10.1.7. Osnovne vrste antena 773
10.2. Mikrovalni komunikacijski sustavi 789
10.2.1. Mikrovalni odašiljači i prijamnici 790
10.2.2. Šumna svojstva mikrovalnog prijamnika 791
10.2.3. Satelitski komunikacijski i radiodifuzijski sustavi 792
10.3. Radarski sustavi 793
10.3.1. Impulsni radar 794
10.3.2. Dopplerov radar 796
10.4. Radiometrija 797
10.5. Rasprostiranje mikrovalova 802
10.5.1. Atmosferski učinci u troposferi 802
10.5.2. Ionosfera i rasprostiranje elektromagnetskih valova u jednostavnoj plazmi 805
10.6. Mikrovalno zagrijavanje 807
10.7. Učinci elektromagnetskoga zračenja na živa bića 808

DODATCI 811

Dodatak A: SI elektromagnetske jedinice 811
Dodatak B: Fizikalne konstante 812
Dodatak C: Predmetci decimalnih jedinica 812
Dodatak D: Električna svojstva materijala 813
Provodnost materijala 813
Dubina prodiranja elektromagnetskoga vala u metale 813
Permitivnost i tangens kuta gubitaka dielektričnih materijala 814
Parametri materijala za podloge mikrotrakastih linija 815

Dodatak E: Vektorska analiza 816
Transformacija koordinata 816
Zbrajanje vektora 816
Množenje vektora 816
Vektorske derivacije 817
Vektorski integrali 818
Neke korisne vektorske jednadžbe 818
Helmholtzov teorem 818
Dodatak F: Möbiusova transformacija 818
Dodatak G: Besselove funkcije 820
Dodatak H: 822
Korisni integrali 822
Taylorov red 822
Dodatak I: Tablica visokofrekvencijskih suosnih kabela 823
Dodatak J: Tablica normiranih pravokutnih valovoda 824
Dodatak K: Invertiranje reda potencija 825

KAZALO IMENA 827

KAZALO POJMOVA 829

O autoru 843

Predgovor

Ovaj sam sveučilišni udžbenik počeo pisati 1997. godine kad sam osmislio i preuzeo predavanja redovitog kolegija *Mikrovalna elektronika* u skladu sa studijskim programom FER1 Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu. Taj sam kolegij predavao uz manje promjene sadržaja više od dvadeset godina na Zavodu za komunikacije i svemirske tehnologije u okviru studijskih programa FER1 i FER2. Cilj je tog kolegija prikazati temeljna načela mikrovalne elektronike za inženjere elektrotehnike koji su znanstveno ili stručno orijentirani prema radijskim komunikacijama i visokofrekvencijskoj elektronici.

Prvo rasprodano izdanje istoimenog udžbenika u izdanju nakladnika Graphis. d.o.o. iz Zagreba tiskano je 2011. godine. Stoga se pojavila potreba za drugim, proširenim i ispravljenim izdanjem.

Mikrovalna elektronika pripada području primijenjenog elektromagnetizma, a njezino proučavanje egzaktna je znanost jer se može matematički precizno formulirati. No težina same matematičke analize ovisi o složenosti prostorne razdiobe elektromagnetskog polja, koja pak ovisi o obliku graničnih ploha, tj. rubnih uvjeta. Osnovna matematička teorija iznesena u udžbeniku ograničena je na opis polja koja su posljedica razmjerno jednostavnih rubnih uvjeta. Premda takve rubne uvjete često ne nalazimo u stvarnom životu, mnoga se praktična rješenja mogu dovoljno dobro aproksimirati razmjerno jednostavnim oblicima, pa jednostavna teorija koja iz toga proizlazi može pružiti korisne rezultate za mnoge primjene.

Udžbenik obrađuje temeljna načela mikrovalne elektronike i cjelovite izvode svih važnijih formula i relacija. Izloženo gradivo poglavito je prilagođeno potrebama dvosemestralnog kolegija sveučilišnog studijskog programa koji je okrenut prema znanstvenim područjima elektronike i radiokomunikacija, ali i drugim područjima koja teže uporabi struktura i naprava s raspodijeljenim parametrima. No udžbenik može poslužiti i istraživačima i stručnjacima u praksi, koji se u svom radu od vremena do vremena pozivaju na temeljne jednadžbe.

Knjiga je podijeljena u pet cjelina. U prvoj cjelini, poglavlja 1 i 2, sažeta je osnovna teorija elektromagnetizma nužna za puno razumijevanje ostatka teksta. Da bi se čitatelja što lakše uvelo u problematiku vektorske analize, u prvom su poglavlju dane osnovne definicije poput polja i vektorskih diferencijalnih operatora te prikazane neke važne analogije između elektromagnetskih pojava i sličnih pojava iz drugih područja tehničkih znanosti. U drugome su poglavlju izložene osnove elektrodinamike koje su nužne za puno razumijevanje rasprostiranja elektromagnetskih valova u raznim prijenosnim strukturama i slobodnome prostoru, što je predmet razmatranja preostalog dijela knjige. Čitatelji koji nisu imali priliku odslušati temeljne kolegije iz elektromagnetizma upućuju se na potanko čitanje materijala drugoga poglavlja.

Druga cjelina, poglavlja 3 i 4, obrađuje teoriju prijenosnih linija i valovoda. U trećemu je poglavlju izložena osnovna teorija prijenosnih linija, nužna za razumijevanje složenijih prijenosnih struktura i sklopova. Pri tomu su razmotrene pojave u frekvencijskoj i vremenskoj domeni. Obrađuje se također uporaba grafičkog rješavanja zadaća s prijenosnim linijama uz pomoć Smithova dijagrama. U četvrtome su poglavlju, na osnovi stroge analize polja, obrađene složenije prijenosne strukture poput šupljeg metalnog valovoda pravokutnog i kružnog presjeka te dielektričnog valovoda. Osim toga, dana su osnovna svojstva planarnih linija poput mikrotrakastih, proreznih i koplanarnih linija. Na kraju je dan kratak osvrt na problematiku prijenosnih struktura s protusmjernim valovima.

U trećoj cjelini, poglavlja 5 i 6, potanko je obrađena teorija mikrovalnih mreža i prilagodba impedancije. U petom je poglavlju prikazana teorija mikrovalnih mreža. Mikrovalni sustavi sastoje se od niza posve različitih komponenata, gdje ukupno ponašanje sustava ovisi o ponašanju pojedinačnih komponenata. Stoga je posebna pozornost posvećena linearnim mrežama koje je lako opisati naponima i strujama na njihovim prolazima. To upućuje na opis mikrovalnih sklopova skupom parametara poput impedancijskih, admitancijskih ili raspršnih parametara. Primjenom tih parametara obrađena su posebna svojstva višeprolaznih mreža poput recipročnosti, nerefleksivnosti, nedisipativnosti i geometrijske simetričnosti. Pokazana je primjenjivost grafova toka signala i matrica prijenosnih parametara za rješavanje složenih mikrovalnih mreža. Izvedene su veze između navedenih parametara, čime je omogućeno znatno pojednostavnjenje proračuna složenih mikrovalnih mreža. Posebno su razmotrena temeljna obilježja dvo-, tro- i četveroprolaznih mreža koje se nerijetko nalaze u mikrovalnim sustavima. Na kraju je obrađena problematika diskontinuiteta u valovodnim i mikrotrakastim strukturama te načini pobuđivanja valovoda preko električne sonde, magnetskog dipola i kružnog otvora u široj stijenki valovoda i poprečnome zaslonu. Prilagodba impedancije jedan je od najznačajnijih pojmova koji se neizostavno susreće prilikom proučavanja prijenosa mikrovalne energije. Stoga je cijelo šesto poglavlje posvećeno prilagodbi kompleksne impedancije generatora karakterističnoj impedanciji prijenosne linije ili kompleksnoj impedanciji općenitog trošila u svrhu maksimalnog prijenosa snage iz generatora u trošilo. Obrađene su također mreže s koncentriranim i raspodijeljenim elementima te neuniformnim prijenosnim linijama za širokopojasnu prilagodbu impedancije.

Četvrtu, najopsežniju cjelinu čine poglavlja 7 i 8, nudeći čitatelju potrebna znanja za samostalno projektiranje mikrovalnih pasivnih i aktivnih sklopova. U sedmome su poglavlju obrađeni osnovni pasivni sklopovi, linijski i valovodni. Razmatraju se spregnute prijenosne linije i usmjerni sprežnici, djelila snage i hibridi, mikrovalni rezonatori i filtri, periodične elektromagnetske strukture te nerecipročne feromagnetske komponente. U osmome poglavlju obrađene su osnovne aktivne elektroničke komponente s pripadajućim sklopovima. Najprije se razmatraju obilježja šuma i nelinearnih izobličenja u mikrovalnim komponentama i sustavima. Budući da se mikrovalna snaga može stvarati i pojačavati uzajamnim djelovanjem elektromagnetskoga polja i nabijenih čestica, obrađene su mikrovalne elektronske cijevi za generiranje i pojačavanje signala. Podrobnije su obrađene poluvodičke komponente i pripadajući mikrovalni sklopovi: detektori i mješala, sklopke i modulatori s PIN diodama, tranzistorska i parametarska pojačala te diodni i tranzistorski oscilatori. Na kraju su prikazane osnovne značajke koncentriranih mikrovalnih komponenata i monolitnih integriranih sklopova te minijaturnih elektromehaničkih sustava (MEMS).

Posljednja cjelina, sastavljena od poglavlja 9 i 10, ustrojena je tako da čitatelj dobije osnovna znanja na području mikrovalnih mjerenja i konstrukcije mikrovalnih sustava uključujući problematiku antena i rasprostiranja elektromagnetskih valova. U devetome poglavlju obrađene su osnovne mjerne tehnike. Mikrovalne signale uglavnom karakteriziraju snaga i frekvencija ili skup tih veličina koji nazivamo *spektar*. Osim tih osnovnih, uz

mikrovalne se signale vežu i neke druge važne električne veličine kao što je primjerice impedancija. Stoga su prije svega obrađene metode mjerenja snage, frekvencije i impedancije, uključujući metode mjerenja raspršnih parametara mikrovalnih komponenata i sklopova. U desetome poglavlju najprije su prikazana osnovna obilježja i vrste mikrovalnih antena koje čine temeljne komponente bežičnih komunikacijskih i radarskih sustava. Obrađene su i primjene mikrovalnih komponenata i odgovarajućih sklopova u spomenutim sustavima i daljinskim istraživanjima. U tu je svrhu dan kratak uvod u radiometriju i objašnjeni su osnovni učinci atmosfere na rasprostiranje elektromagnetskih valova uz površinu Zemlje. Zatim je dan i kratak osvrt na zagrijavanje materijala mikrovalovima s primjenama u industriji za sušenje i toplinsku obradu materijala. Na kraju su objašnjeni učinci izlaganja ljudskog organizma mikrovalovima te prikazane državne norme za maksimalno dopuštene razine jakosti električnog i magnetskog polja te gustoće toka snage nesmetanog ravnog elektromagnetskog vala u širokom frekvencijskom pojasu.

Dodaci na kraju udžbenika trebali bi poslužiti čitatelju kao podsjetnik na neka područja matematike i elektromagnetizma čiji se rezultati nerijetko upotrebljavaju tijekom izlaganja gradiva u pojedinim poglavljima ove knjige.

Popis literature na kraju svakoga poglavlja omogućuje zainteresiranomu čitatelju daljnje produbljivanje znanja i olakšava formiranje vlastitih stajališta.

Na samom su kraju dana kazala autora i pojmova za lakše snalaženje čitatelja prilikom pretraživanja citiranih autora ili stručnih pojmova.

Suvremeno mikrovalno inženjerstvo uključuje analizu i sintezu električnih krugova s raspodijeljenim parametrima i uporabu minijaturnih plosnatih prijenosnih struktura bez izravnog rješavanja složenih elektromagnetskih zadaća. Stoga je prednost dana izvedbama sklopova s trakastim prijenosnim strukturama. Budući da se nalazimo u eri poluvodičke elektronike i nanotehnologije, pri razmatranju aktivnih sklopova gradivo je usredotočeno na primjene tranzistora i drugih poluvodičkih komponenata primjerenih mikroelektroničkim izvedbama.

Pri sastavljanju gradiva istaknuto su mjesto zauzele ilustracije jer jedna slika nadomješćuje tisuću riječi. No izlažući gradivo mikrovalnog inženjerstva, koje je prožeto objašnjenjima niza različitih elektromagnetskih pojava, nerijetko sam se suočavao s univerzalnim problemom kako studentu na jednostavan način predočiti izrazito dinamične pojave poput gibanja elektromagnetskog poremećaja primjenom statičnih alata poput slika i dijagrama.

U radu sa studentima uvijek sam pokušavao pokusima i eksperimentima u laboratoriju objasniti temeljne pojave te pokazati prirodni put spoznajnog lanca koji vodi od razumijevanja same pojave do formule koja ga objašnjava. Uporno sam tragao za najprikladnijim metodama učenja posudbom analogija iz drugih područja tehnike za potpunije objašnjenje, vizualizaciju i postizanje što jasnije fizikalne slike razmjerno složenih elektromagnetskih pojava izloženih u knjizi, čime sam nastojao u studenata razvijati fizikalnu intuiciju i kreativnost.

U udžbenik su ugrađeni rezultati rada niza znanstvenika i stručnjaka, fizičara, inženjera i izumitelja. Pritom, nažalost, nije moguće zahvaliti svima na čijim su se zamislima razvile nove koncepcije i pristupi analizi primijenjenog elektromagnetizma i mikrovalne elektronike te svima onima koji su svojom domišljatošću otkrili ili objasnili značajne pojave ili pak izumili nove elektroničke komponente i naprave. Ipak, u svojemu sam se radu poglavito oslanjao na dva cjelovita i dobro osmišljena teksta: drugo izdanje udžbenika Roberta E. Collina *Foundation for Microwave Engineering* i četvrto izdanje udžbenika Davida M. Pozara *Microwave Engineering*, koji su možda ponajviše prožeti svim tim postignućima. No pri

izlaganju gradiva koristio sam se i nizom novijih djela i znanstvenih radova, posebno onih koji upućuju na praktične aspekte mikrovalne elektronike.

Na kraju izražavam zahvalnost svima koji su svojim izravnim pomaganjem i zalaganjem pridonijeli izlaženju ove knjige. Ponajprije svim članovima Zavoda za bežične komunikacije i svemirske tehnologije koji su posljednjih pedesetak godina utkali svoje znanje u razvoj struke kojom se bavi ovo djelo i koji su sudjelovali mojem razvoju od studentskih dana kao stručnjaka i sveučilišnog nastavnika. To su napose profesori Zlatko Smrkić, Ivan Modlic, Ervin Zentner i Boris Kviz koji su u meni razvijali sklonost i ljubav prema toj struci. Profesorima Borisu Zimmermannu, Zlatku Korenu i Borivoju Modlicu zahvaljujem na suradnji na samom početku moje stručne i znanstvene karijere na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu. Profesorima Robertu Nađu, Zvonimiru Šipušu, Silviju Hrabaru, Davoru Bonefačiću i Radovanu Zentneru zahvaljujem na mnoštvu konstruktivnih komentara, korisnim diskusijama i iznimno nadahnjujućem i toplom, prijateljskom ozračju tijekom naše plodne dugogodišnje stručne i znanstvene suradnje na nizu projekata iz područja mikrovalne elektronike. Zahvaljujem i drugim suradnicima Zavoda i Fakulteta, a posebno svim mojim bivšim diplomantima i doktorandima, koji su mi omogućili da se na svojem radnom mjestu osjećam kao u mojem drugom domu.

Hvala Ministarstvu znanosti i obrazovanja RH što je pomoglo izdavanju ovoga udžbenika.

Posebno zahvaljujem recenzentima profesorima Borivoju Modlicu, Zvonimiru Šipušu i Nikši Burumu na uloženom trudu i pozornom čitanju rukopisa te na nizu korisnih kritičkih savjeta kako bi se poboljšao tekst.

Profesoru Zvonku Benčiću posebno zahvaljujem na poticanju i ohrabrivanju tijekom pripreme rukopisa za tisak.

Na kraju, ali ne i kao najmanje važno, želio bih zahvaliti svojoj supruzi Nevenki, bez čijeg neizmjernog strpljenja, odricanja i ljubavi sasvim sigurno ovaj projekt ne bih mogao uspješno privesti kraju.

U Zagrebu, ožujka 2021. *Juraj Bartolić*

1. Uvod u mikrovalnu elektroniku

Izraz »mikrovalovi« odnosi se na elektromagnetske pojave i signale u frekvencijskom području između 300 MHz ($3 \cdot 10^8$ Hz) i 300 GHz ($3 \cdot 10^{11}$ Hz). Perioda mikrovalnoga signala $T = 1/f$ nalazi se u području od 3 ns ($3 \cdot 10^{-9}$ s) do 3 ps ($3 \cdot 10^{-12}$ s), a odgovarajuće valne duljine $\lambda = c/f$ od 1 m do 1 mm, gdje je $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s $\simeq 3 \cdot 10^8$ m/s brzina svjetlosti u vakuumu. Signali valnih duljina reda milimetra nazivaju se *milimetarski valovi*. U tablici 1.1. prikazan je cjelovit spektar elektromagnetskih valova. Kratke valne duljine čine mikrovalnu tehniku vrlo različitom od drugih područja elektrotehnike. Zbog visokih frekvencija problemi se više ne mogu riješiti izravnom primjenom klasične teorije mreža. Zapravo, klasična je teorija mreža aproksimacija ili poseban slučaj opće teorije elektrodinamike koja je opisana Maxwellovim jednadžbama [1], [2]. To ima za posljedicu da aproksimacija koncentriranog elementa u teoriji mreža više ne vrijedi na mikrovalnim frekvencijama. Mikrovalne su naprave ponajviše građene od raspodijeljenih elemenata kod kojih se faze napona ili struja znatno mijenjaju duž naprave jer su električne dimenzije naprave reda veličine valne duljine. Stoga se na visokim frekvencijama obično napušta koncepcija struje i napona, tipična za klasičnu teoriju mreža, i uvodi se koncepcija valne prirode naprava i prijenosnih ustroja. U drugoj su krajnosti optičke tehnike kod kojih je valna duljina znatno kraća od dimenzija naprave pa se Maxwellove jednadžbe mogu pojednostaviti primjenom teorije geometrijske optike. Ta se tehnika može primijeniti i na rješavanje problema u milimetarskome valnom području, gdje je poznata pod nazivom *kvazioptička tehnika*.

Pri razmatranju mikrovalnih sklopova valja započeti s Maxwellovim jednadžbama. One uključuju diferencijalne ili integralne operacije na vektorskim poljima koja su funkcije prostornih koordinata. Rješenja iz teorije polja općenito daju cjelovitu informaciju o veličinama na priključcima mikrovalnih sklopova ili prijenosnih struktura poput napona, struje, snage, impedancije itd. koji se često mogu izraziti uz pomoć zamisli teorije mreža.

Premda na visokim frekvencijama, tj. kratkim valnim duljinama mikrovalnih signala, često nailazimo na poteškoće u analizi i projektiranju mikrovalnih naprava zbog složenosti ustroja s raspodijeljenim parametrima, ti isti čimbenici daju upravo mikrovalnim sustavima jedinstvena svojstva. Tako je primjerice dobitak antene razmjeran električnoj površini antene, s time da je na višim frekvencijama moguće ostvariti veći dobitak povećanjem fizičkih izmjera antene. Na višim se frekvencijama također može jednostavno povećati korisna širina frekvencijskog pojasa, što je razmjerno povećanju kapaciteta prijenosa informacija, posebno u tehnologiji 5G i upravljanju autonomnih robota. Osim toga, mikrovalni signali putuju približno ravnocrtno, tj. niti se lome niti se reflektiraju u ionosferskom sloju za razliku od signala nižih frekvencija, pa se mogu iskoristiti za usmjerene radioveze, kako zemaljske tako i satelitske. Zbog toga što je efektivna refleksijska površina radarskog cilja razmjerna njegovim električnim i fizičkim dimenzijama, mikrovalno frekvencijsko područje uporabom antena velike usmjerenosti postaje posebno zanimljivo za radarske primjene. Na mikrovalnim frekvencijama također nastaju različite molekularne, atomske i nuklearne rezonancije što proširuje područje primjena na daljinska istraživanja (engl. *remote sensing*) našega planeta i radioastronomiju, medicinsku dijagnostiku, nove postupke obrade i pripremanja hrane itd.

Mikrovalovi se poglavito primjenjuju u komunikacijskim, senzorskim i radarskim sustavima. Usmjerene veze čine važnu primjenu gdje se rasprostiranje elektromagnetskih valova ostvaruje ravnocrtnim stazama uz pomoć jako usmjerenih antena postavljenih na visoke tornjeve ili planinske vrhove. Drugu zanimljivu primjenu čine satelitske veze gdje satelit ima

ulogu radijskog repetitora. Brz razvoj širokopojasnih pokretnih ćelijskih sustava i lokalnih bežičnih mreža upućuje na sve veću uporabu visokih frekvencija, tj. mikrovalova. Radarski se sustavi rabe za detekciju i određivanje položaja ciljeva na zemlji, u zraku i na moru, uključujući nadzor i praćenje zračnoga prometa, za vođenje projektila u obrambenim sustavima, za predviđanje vremenskih prilika u meteorologiji, za daljinska istraživanja u različnim područjima gospodarstva te u sustavima za sprečavanje sudara u automobilskom i zračnom prometu. Osim toga, razvoj optičkih komunikacijskih sustava pruža nove mogućnosti uporabe širokopojasnih mikrovalnih naprava, sklopova i podsustava, jer se međufrekvencije optičkih komunikacijskih sustava nalaze u mikrovalnome frekvencijskom području s jakom tendencijom proširenja na područje teraherca (THz). S druge strane, prodor radnih frekvencija bežičnih komunikacijskih sustava u mikrovalno područje, poput tehnologije 5G, zahtijeva usvajanje novih znanja uz daljnji razvoj metoda analize i pronalaženje novih tehničkih rješenja, uključujući terahercne tehnologije.

Tablica 1.1. Spektar elektromagnetskoga zračenja

Pojas	Frekvencija	Valna duljina	Primjer
	3 kiloherca (10^3 Hz)	100 kilometara (10^3 m)	
dugi val	30 kiloherca (10^3 Hz)	10	
AM (srednji val)	300 kiloherca (10^3 Hz)	1	
kratki val	3 megaherca (10^6 Hz)	100 metara	← nogometno igralište
FM i TV (VHF)	30 megaherca (10^6 Hz)	10	
TV (UHF)	300 megaherca (10^6 Hz)	1	← čovjek
radar pojasevi S – X	3 gigaherca (10^9 Hz)	100 milimetara (10^{-3} m)	
	30 gigaherca (10^9 Hz)	10	
	300 gigaherca (10^9 Hz)	1	← zrno pšenice
IC zračenje	3 teraherca (10^{12} Hz)	100 mikrometara (10^{-6} m)	
	30 teraherca (10^{12} Hz)	10	
vidljiva svjetlost	300 teraherca (10^{12} Hz)	1	← bakterija
UV zračenje	3 petaherca (10^{15} Hz)	100 nanometara (10^{-9} m)	
	30 petaherca (10^{15} Hz)	10	← virus
X-zrake	300 petaherca (10^{15} Hz)	1	
	3 eksaherca (10^{18} Hz)	100 pikometara (10^{-12} m)	← atom
	30 eksaherca (10^{18} Hz)	10	
gama-zrake	300 eksaherca (10^{18} Hz)	1	
	$3 \cdot 10^{21}$ Hz	100 femtometara (10^{-15} m)	
	$30 \cdot 10^{21}$ Hz	10	
	$300 \cdot 10^{21}$ Hz	1	
	$3 \cdot 10^{24}$ Hz	100 atometara (10^{-18} m)	← atomska jezgra
	$30 \cdot 10^{24}$ Hz	10	
	$300 \cdot 10^{24}$ Hz	1	

niže frekvencije ↑ — ↓ više frekvencije

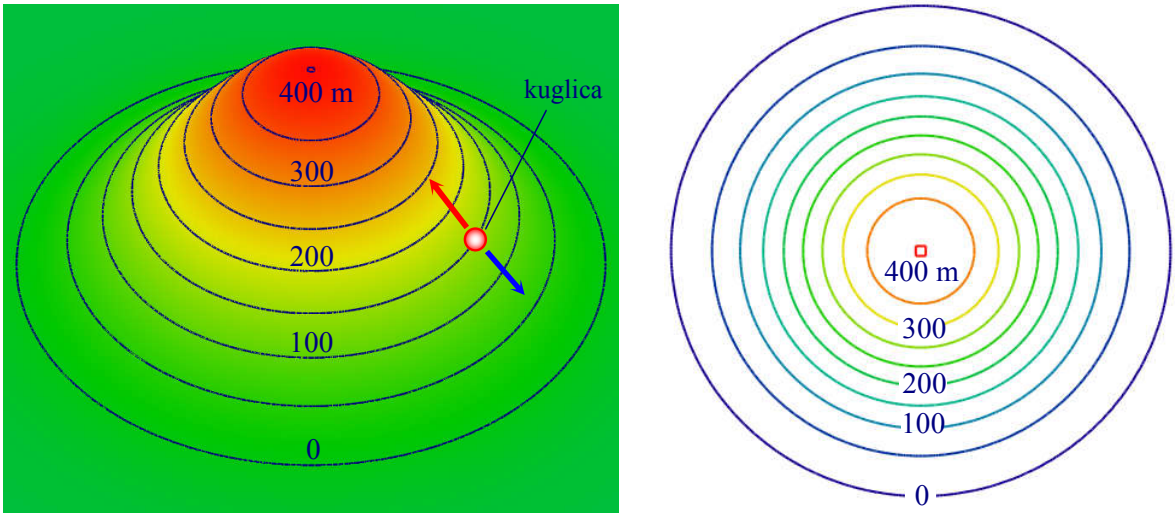
RF spektar

mikrovalovi

dulji valovi ↑ — ↓ kraći valovi

1.1. Uvod u vektorska polja

Elektromagnetska su polja vektorska polja pa nešto valja reći o načinu na koji se računaju i prikazuju. Vektorska i skalarna polja mogu se vizualizirati na različite načine, a njihov je grafički prikaz posebno koristan za dublje razumijevanje njihovog matematičkog ponašanja [3]. Suvremena računala s odgovarajućim programskim paketima pružaju neizmjerne mogućnosti vizualizacije skalarnih i vektorskih polja. U tom smislu posebno su zanimljivi konturni dijagrami za prikaz porasta skalarnog polja. Na slici 1.1a) prikazan je crtež simetričnog brda koje se uzdiže do njegovog sljemena (vrha) u središtu konturnog dijagrama. Konturni dijagram na slici 1.1b) prikazuje polje visina kao skup skalarnih veličina, gdje svakoj točki na površini Zemlje pripada određena vrijednost. Kad se sve točke iste visine povežu jednom krivuljom (izohipsom), tad je površina Zemlje posve definirana. Zamislimo da se negdje na padini brda nalazi kamena kuglica koja će se pod djelovanjem sile teže kotrljati nizbrdo. Neovisno o tomu na kojem se dijelu brda kuglica nalazila, uvijek će biti potrebna neka sila da je zadrži na istome mjestu. Time je definirano vektorsko polje sila. Na slici 1.2 dan je drukčiji grafički prikaz brda, u kojem strelice pokazuju veličinu i smjer sile potrebne da zadrži kuglicu na raznim mjestima padine. Relacija koja povezuje skalarno polje visina i vektorsko polje sila koje djeluje na kuglicu dobro je poznata i može se izreći ovako: sila ovisi o strmini ili, drugim riječima, sila ovisi o veličini promjene visine s udaljenošću. U diferencijalnom računu ta se promjena naziva *derivacija*. Na jednak se način mogu prikazivati električne i magnetske sile, tj. električna i magnetska polja [4], [5].

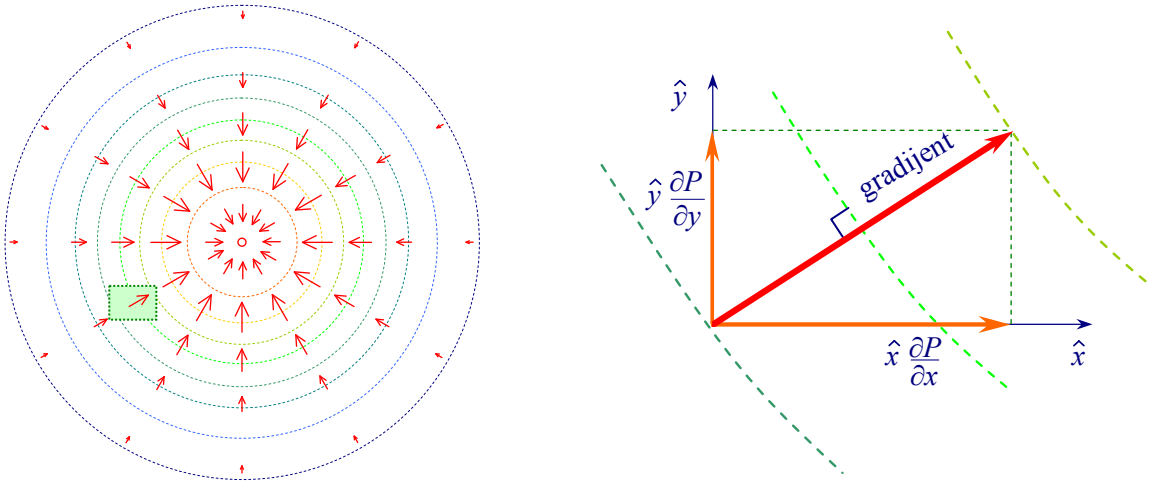


a) b)

Slika 1.1. Prikaz skalarnog polja na primjeru brda; **a)** kosa projekcija polja visina, **b)** konturni prikaz

1.1.1. Gradijent

Općenito je teško odrediti »smjer« najvećeg mogućeg nagiba (strmine) kojim će se kuglica kotrljati. Najveći nagib u danoj točki naziva se *gradijent* u točki [3]. Gradijent je linearni operator deriviranja u smjeru svake koordinatne osi i u svakoj točki daje vektor tvoreći tako vektorsko polje. Na slici 1.2 povećan je detalj vektorskog polja, unutar malog pravokutnika, da bi se mogle prikazati komponente polja. Radi boljeg snalaženja u prostoru dodane su osi lokalnog koordinatnog sustava. U tom malom isječku polja, gradijent je gotovo jednolik, tj. približno je jednak u svim točkama i po veličini i po smjeru te je označen kao vektor. Vektor gradijenta može rastaviti na dvije komponente. Prva od njih, $\partial P/\partial x$, upućuje na strminu ili nagib u x-smjeru, a druga, $\partial P/\partial y$, upućuje na strminu u y-smjeru. Pri tomu je visina označena simbolom P, koji je odabran s razlogom, jer u stvari visina određuje *gravitacijski potencijal*.



Slika 1.2. Objašnjenje gradijenta s pomoću vektorskog polja sila koje je potrebno da bi kuglica ostala u mirovanju na padini brda prikazanog na slici 1.1

Tako dobiveno dvodimenzionalno polje može se matematički izraziti kao

$$\text{gradijent} = \hat{x}\frac{\partial P}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{1–1}$$

gdje $\hat{x}$ i $\hat{y}$ označuju jedinične vektore u x-smjeru odnosno y-smjeru.

Posebno valja istaknuti dva svojstva gradijenta. Prvo, vektor gradijenta uvijek je okomit na krivulje na konturnom dijagramu jer gradijent upravo označuje najveću strminu. Drugo, što je manji razmak između konturnih krivulja to je veći nagib pa je i gradijent veći.

Trodimenzionalni gradijent poput gradijenta temperature u prostoru, posve je analogan dvodimenzionalnom slučaju s visinama pa mu je i definicija slična, tj.

$$\text{grad}\, P = \hat{x}\frac{\partial P}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial P}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial P}{\partial z}\ . \tag{1–2}$$

Veličina (magnituda) gradijenta dobiva se kao drugi korijen zbroja kvadrata njegovih komponenata u pravokutnome koordinatnom sustavu, tj.

$$\left|\text{grad}\, P\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2}\ . \tag{1–3}$$

U svrhu skraćenja zapisa veličina poput gradijenta, divergencije ili rotora, irski je matematičar i fizičar W. R. Hamilton [3] uveo diferencijalni operator ∇ koji koji se naziva *nabla*. Taj je operator definiran samo u pravokutnome koordinatnom sustavu, tj.

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{1–4}$$

Sam simbol nabla nema neko fizikalno značenje. Formalno se pojavljuje kao vektor s x-, y- i z-komponentama $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ i $\partial/\partial z$. Budući da je nabla operator, mora postojati »nešto« na što taj operator djeluje. Kad djeluje na skalarnu funkciju, tad daje gradijent te funkcije, kao što je definirano u izrazu (1–2), tj.

$$\nabla P = \hat{x}\frac{\partial P}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial P}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial P}{\partial z}\,. \tag{1–5}$$

Matematički izraženo, *gradijent skalarnog polja vektor je koji upućuje na smjer i veličinu najveće prostorne promjene skalarnog polja u točki prostora*.

1.1.2. Divergencija

Veličina koja se naziva gradijent upućuje na mjeru promjene skalarnog polja. No i vektorsko se polje može mijenjati od točke do točke, ali to čini na znatno zamršeniji način [3]. Za vektorsko se polje ne može reći da ima gradijent, ali postoje drugi načini na koje se to polje može opisati. Jedan od najkorisnijih poznat je pod nazivom *divergencija*. Divergencija nekog vektorskog polja $\vec{A}$ definirana je djelovanjem operatora nabla na to vektorsko polje u obliku skalarnog umnoška, tj.

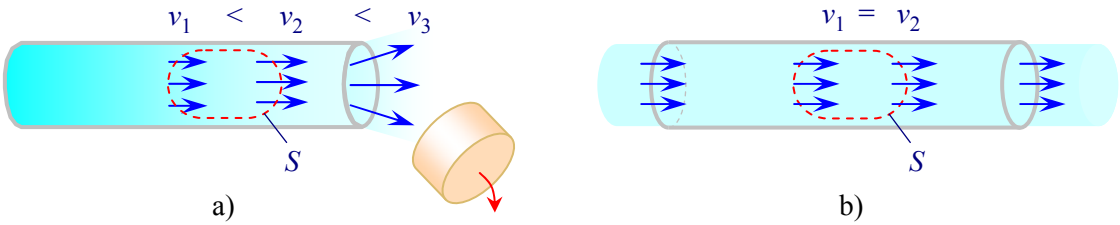
$$\text{div}\,\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z \,. \tag{1–6}$$

Ovdje je A_x veličina x-komponente vektorskog polja $\vec{A}$. Kako je $\vec{A}$ trodimenzionalno vektorsko polje, A_x je trodimenzionalno skalarno polje koje se može mijenjati od točke do točke i općenito je funkcija triju koordinata: x, y i z. Derivacija polja po x prvi je član u izrazu (1–6). Drugi i treći član mogu se naći na jednak način iz y- i z-komponenata vektorskog polja $\vec{A}$.

Matematički izraženo, *divergencija je mjera promjene jakosti polja u smjeru vektorskog polja*. Može se primijetiti da je divergencija vektora *skalarna* veličina. Postoji divergencija od neke točke ili prema nekoj točki (konvergencija), ali u nju nije uključen pojam smjera. Ta se vrlo korisna veličina nerijetko rabi u elektromagnetskim zadaćama, a može se lako objasniti na toku fluida.

Divergencija vektorskog polja može se objasniti na primjeru epruvete u kojoj je sabijen zrak, kao što je prikazano na slici 1.3a). Uklanjanjem poklopca, zrak počinje naglo izlaziti iz epruvete pa dolazi do ekspanzije zraka. Crtkana krivulja unutar cijevi označuje zatvorenu plohu S kojom struji zrak. Zbog ekspanzije, više zraka napušta plohu u blizini otvora nego što u nju ulazi sa suprotne strane. Naime, zrak koji se nalazi pri dnu epruvete ne može izaći prije negoli izađe zrak kod otvora. Stoga u svakoj točki u kojoj dolazi do ekspanzije zraka postoji i divergencija pa će, ako se brzina zraka prikaže kao vektorsko polje $\vec{v}$, divergencija toga polja biti različita od nule.

Promotrimo pokus prikazan na slici 1.3b) u kojem zrak struji kroz cijev stalnom brzinim. Sad je količina zraka koji izlazi iz zamišljene zatvorene plohe S jednaka količini zraka koji u nju ulazi. To znači da nema divergencije brzine ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$). Ako se zrak zamijeni vodom, onda je još lakše pokazati da je u tom pokusu divergencija uvijek nula jer je voda nestlačiv fluid.



Slika 1.3. a) Nakon uklanjanja poklopca, zrak stlačen u epruveti naglo izlazi stvarajući divergentno polje brzina; **b)** nedivergentno polje brzina u cijevi kojom zrak struji stalnom brzinom

1.1.3. Rotor

Drugi način na koji se može opisati mjera promjene vektorskoga polja jest vrtlog ili *rotor*. Pokušajmo rotor objasniti s pomoću vjedra vode prikazanog na slici 1.4a). U vjedru se voda miješa lopaticom tako da nastaje vrtložno gibanje čestica vode [3]. Vektori $\vec{v}$ označuju smjer i brzinu čestica vode. Kao jednostavan mehanički indikator ili detektor vrtloga, prikazan sa strane, može poslužiti mali kotač s lopaticama nalik vodeničkom kolu. Ako se kolo postavi na osovinu s kugličnim ležajem bez trenja i smjesti u središte vjedra, onda će se kolo okretati u suprotnome smjeru kazaljke sata. Premjesti li se kolo u bilo koju drugu točku na površini

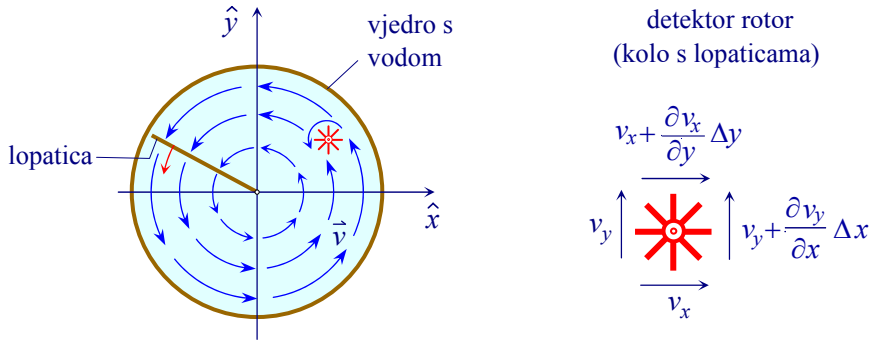
vode, i dalje će se okretati u istome smjeru. To znači da se vektorsko polje koje opisuje brzinu čestica vode mijenja na način svojstven vrtlogu. U vektorskoj je analizi taj vrtlog dobio poseban naziv, *rotor*. Pojmovi vrtlog i rotor asociraju na gibanje po zakrivljenim crtama.

Smjer vrtnje vektora rotora određen je smjerom vrtnje kola s lopaticama. Okreće li se kolo kao desni vijak, vijak će se uvrtati u smjeru kojeg pokazuje vektor rotora, kao što je prikazano na slici 1.5. U svrhu određivanja smjera »zavrtanja« valja primijeniti pravilo desne ruke.

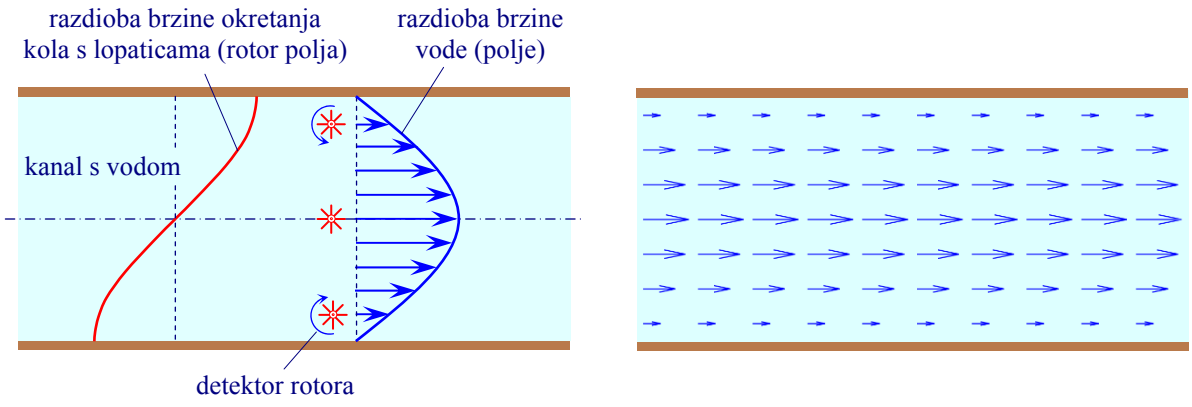
Primjer na slici 1.4a) pokazuje da se vrtlog (rotor) razvija oko osi $\hat{z}$ i po definiciji je pozitivan kad se kolo vrti suprotno kazaljci sata, tj. od osi $\hat{x}$ prema osi $\hat{y}$. Zato će pozitivna vrijednost $\partial v_x/\partial y$ zakretati kolo baš u tom smjeru, dok će pozitivna vrijednost $\partial v_y/\partial x$ zakretati kolo u suprotnome smjeru. Otuda će ukupna kutna brzina, kojom se kolo vrti oko osi $\hat{z}$, biti razmjerna razlici tih dviju veličina. To se može matematički izraziti kao

$$\text{rotor od } \vec{v} \text{ u smjeru osi } \hat{z} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

U primjeru na slici 1.4a), komponenta $\partial v_y/\partial x$ pozitivna je veličina, a komponenta $\partial v_x/\partial y$ negativna, pa se kolo s lopaticama vrti u suprotnome smjeru kazaljke sata.

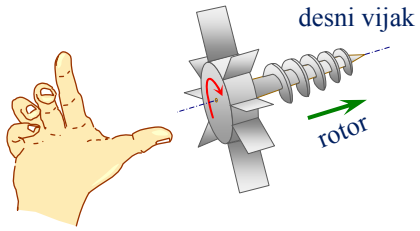


a)



b)

Slika 1.4. Dva primjera vektorskih polja koja imaju rotor: **a)** vjedro u kojem se čestice vode vrte po koncentričnim kružnim stazama i detektor rotora, **b)** kanal u kojem se čestice vode gibaju ravnocrtno, ali im je brzina funkcija koordinate u poprečnome smjeru. Zdesna je prikazana razdioba vektorskog polja brzine čestica vode u cijelom kanalu



Slika 1.5. Definicija smjera rotora

Rotor proizvoljnog vektorskog polja $\vec{A}$ općenito može imati komponente koje su paralelne sa svim trima smjerovima pravokutnoga koordinatnog sustava, što se može matematički izraziti kao

$$\text{rot}\,\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right). \tag{1–7}$$

Taj je izraz sličan izrazu vektorskog umnoška pa se može napisati u obliku determinante i lakše se pamti od izraza (1–7), tj.

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \tag{1–8}$$

Drugim riječima, *rotor upućuje na brzinu promjene jakosti polja u smjeru koji je okomit na vektorsko polje*, a dobiva se deriviranjem x-komponente po y i z, y-komponente po x i z te z--komponente po x i y, ali ne deriviranjem x-komponente po x i tomu slično. Predoči li se rotor virom (vrtlogom), taj vir mora imati neku os vrtnje. Smjer te osi po definiciji je jednak smjeru vektora koji označuje rotor. Vratimo li se na kolo s lopaticama na mjestu gdje se najbrže vrti, tad će njegova osovina gledati u smjeru vektora rotora. Pojedinačne komponente rotora mogu naći tako da se osovina kola poravna sa smjerom odgovarajuće koordinatne.

Valja znati da i ravnocrtno gibanje (ili polje) može imati rotor, kao u slučaju s protokom vode kanalom. Zbog trenja, čestice vode na slici 1.4b) sporije se gibaju rubom kanala negoli njegovom sredinom. Stoga se brzina čestica vode mijenja u poprečnoj dimenziji po zakonu sličnom sinusu, tj. najmanja je na rubovima kanala, a najveća u sredini kanala. Postavi li sad u kanal indikator rotora (kolo s lopaticama), kolo će se okretati posvuda osim u sredini kanala jer su brzine čestica vode s lijeve i desne strane kola jednake, pa na tom mjestu kolo miruje. No pomakne li se kolo imalo ulijevo ili udesno od simetrale kanala, počet će se okretati. Ako pritom voda teče udesno, kao što je prikazano na slici, onda će se kolo ispod simetrale vrtjeti u smjeru kazaljke sata, a kolo iznad simetrale vrtjet će se u suprotnome smjeru. Bilježenjem brzina vrtnje kola za sve vrijednosti poprečne dimenzije, dobiva se ovisnost slična funkciji kosinusa koja je razmjerna derivaciji razdiobe brzine. Drugim riječima, da bi ravnocrtno polje imalo rotor, jakost polja mora ovisiti o koordinati u poprečnome smjeru.

Zamisli divergencije i rotora mogu se korisno primijeniti za objašnjenje različitih elektromagnetskih pojava. Sve su to diferencijalni operatori koji djeluju na vektorska polja poput električnog i magnetskog polja. Te prostorne derivacije, tj. parcijalne derivacije po koordinatama x, y i z, mogu se definirati i u drugim koordinatnim sustavima (vidjeti dodatak E).

Veze između diferencijalnih operacija te vektorskih i skalarnih polja nalaze se u tablici 1.2.

Tablica 1.2. Diferencijalne operacije nad vektorskim i skalarnim poljima

Vrsta operacije	Simbol	Primjenjuje se na	Rezultat
gradijent od A	∇A	skalarno polje	vektorsko polje
divergencija od $\vec{A}$	$\nabla \cdot \vec{A}$	vektorsko polje	skalarno polje
rotor od $\vec{A}$	$\nabla \times \vec{A}$	vektorsko polje	vektorsko polje

1.1.4. Vektorske jednadžbe

Ako se operator nabla primijeni dva put uzastopno na različite funkcije, dobivaju se korisne vektorske jednadžbe. Tako primjerice rotor vektora $\vec{A}$ daje novi vektor (1–7) ili (1–8) pa divergencija (1–6) tog novog vektora izravno daje

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0 \,. \tag{1–9}$$

Drugim riječima, *divergencija rotora vektorskog polja jednaka je nuli*. No vrijedi i suprotno: *ako vektorska funkcija nema divergenciju, onda mora biti rotor neke vektorske funkcije*.

S druge strane, primjenom operatora nable na skalarnu funkciju f također se dobiva vektor (1–5). Primjenom operatora rotora (1–7) ili (1–8) na taj vektor izlazi

$$\nabla \times (\nabla f) \equiv 0 \,. \tag{1–10}$$

Drugim riječima, *rotor gradijenta skalarne funkcije jednak je nuli*. No vrijedi i suprotno: *ako vektorska funkcija nema rotor, onda mora biti gradijent neke skalarne funkcije*.

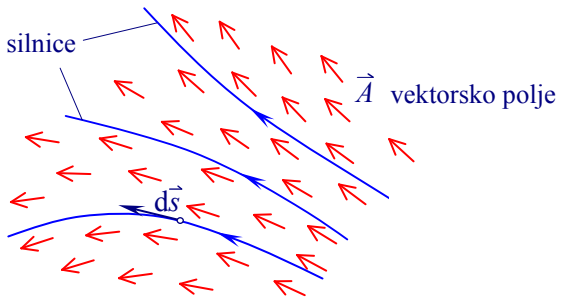
Sličnim se postupkom mogu naći i druge korisne jednadžbe poput Laplaceove jednadžbe, s pomoću kojih se mogu izvesti jednadžbe polja. Neke se od njih nalaze u dodatku E.

1.1.5. Silnice vektorskog polja

Kao što smo vidjeli, vektorsko polje $\vec{A}$ definirano na nekom području uvijek se može izraziti preko komponenata. Tako se u pravokutnome koordinatnom sustavu polje može napisati kao

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = \hat{x} A_x(x, y, z) + \hat{y} A_y(x, y, z) + \hat{z} A_z(x, y, z) \,.$$

Silnica vektorskog polja $\vec{A}$ označuje krivulju koja u nekoj točki ima tangencijalni vektor $\mathrm{d}\vec{s}$ paralelan s vektorom $\vec{A}$ u istoj točki, kao što je prikazano na slici 1.6. Primjerice, za polje brzina pri protoku vode prikazanom na slici 1.4, silnica je krivulja po kojoj se giba čestica vode. Valja uočiti da je gustoća silnica razmjerna jakosti polja.



Slika 1.6. Silnice vektorskog polja

1.2. Električne i magnetske sile i polja

U ovoj knjizi uglavnom ćemo se baviti izmjeničnim elektromagnetskim poljima, tj. elektromagnetskim valovima te posljedicama njihove interakcije s različitim materijalima, uključujući i nabijene čestice, u prijenosnim strukturama, rezonatorima, antenama i aktivnim mikrovalnim elektroničkim sklopovima. Drugim riječima, predmet ove knjige bit će prije svega proučavanje složenih elektrodinamičkih pojava koje su posljedica pobude izmjeničnim strujama visokih frekvencija pa ovaj uvod može pomoći njihovom lakšem razumijevanju.

Fizikalnim svijetom koji nas okružuje vladaju osnovne četiri sile prirode. *Nuklearna sila* (ili *jaka sila*) najjača je od svih sila, ali joj doseg ne prelazi submikroskopske dimenzije poput, primjerice, promjera atomske jezgre. *Slaba nuklearna sila* (ili *slaba sila*) ima osnovnu uloga pri interakcijama između nekih elementarnih čestica. Jakost joj je manja za četrnaest redova veličine (10^{-14}) od jakosti nuklearne sile. *Elektromagnetska sila* vezana je uz sile između nabijenih čestica i prevladava u mikroskopskome svijetu poput atoma i molekula. Njezina je jakost manja za dva reda veličine (10^{-2}) od jakosti nuklearne sile. *Sila teže* (gravitacijska sila) najslabija je od svih sila. Jakost joj je manja za četrdeset i jedan red veličine (10^{-41}) od jakosti nuklearne sile. Unatoč tomu ta sila prevladava u makroskopskome svijetu poput Sunčevog sustava.

Premda elektromagnetska sila djeluje na ljestvici atomskih dimenzija, njezini se učinci mogu osjetiti i na vrlo velikim udaljenostima u obliku elektromagnetskih valova koji se mogu rasprostirati slobodnim prostorom i kroz materijalna sredstva poput dielektrika. U ovom ćemo odjeljku dati kratak pregled osnovnih pojava u elektromagnetizmu i objasniti analogiju između sile teže i električne sile između nabijenih čestica. O električnoj i magnetskoj sili može se više naći u odjeljku 2.1.2.

1.2.1. Električno polje

Elektromagnetska sila sastoji se od električne sile $\vec{F}_{\mathrm{e}}$ i magnetske sile $\vec{F}_{\mathrm{m}}$. Uz manje razlike, električna je sila slična gravitacijskoj sili. Izvor gravitacijskog polja je masa, a izvor električnog polja je naboj. Jakosti tih polja mijenjaju se obrnuto razmjerno kvadratu udaljenosti. No, za razliku od mase, električni naboj može imati polaritet, pozitivan i negativan.

Iz atomske je fizike poznato da se sva materija sastoji od neutrona, pozitivno nabijenih protona i negativno nabijenih elektrona. Pri tomu se kao osnovna količina naboja uzima *naboj elektrona*, koji ćemo označiti slovom *e*. Električni se naboj mjeri u kulonima (C = As), u čast francuskom znanstveniku Charlesu Augustinu de Coulombu (1736-1806). Za naboj elektrona odabran je negativni predznak, tj.

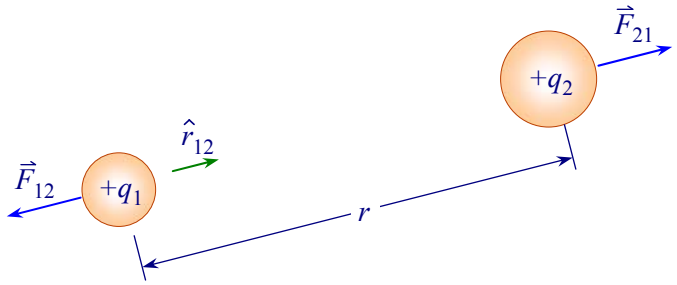
$$q_{\mathrm{e}} = -e = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \quad \mathrm{C}. \tag{1–11}$$

Proton nosi jednaku količinu naboja, ali suprotnog predznaka, $q_{\mathrm{p}} = e$. Coulombovi su eksperimenti objasnili da se dva naboja istog predznaka međusobno odbijaju, a da se naboji suprotnog predznaka privlače. Pritom na naboje djeluje sila duž pravca na kojem naboji leže. Jakost te sile razmjerna je umnošku tih dvaju naboja, a obrnuto razmjerna njihovom razmaku.

Ta su svojstva danas poznata pod nazivom *Coulombov zakon* matematički izražen kao

$$\vec{F}_{\mathrm{e}21} = \hat{r}_{12} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \mathrm{N}, \tag{1–12}$$

gdje je $\vec{F}_{\mathrm{e}21}$ električna sila koja se mjeri u njutnima (N). Ta sila djeluje na naboj q_2 zbog naboja q_1, gdje je r udaljenost između naboja, a $\hat{r}_{12}$ jedinični vektor usmjeren od naboja q_1 prema naboju q_2, kao što je prikazano na slici 1.7. Na naboj q_1 djeluje jednaka sila suprotnoga smjera, $\vec{F}_{\mathrm{e}12} = -\vec{F}_{\mathrm{e}21}$. Univerzalna fizikalna konstanta $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ farada po metru (F/m) naziva se



Slika 1.7. Električne sile na dva pozitivna naboja u slobodnome prostoru

permitivnost slobodnoga prostora. Ovdje je pretpostavljeno da se naboji nalaze u slobodnome prostoru (vakuumu) i da su izolirani od drugih naboja. Izraz (1–12) za električnu silu analogan je izrazu za privlačnu gravitacijsku silu [6] između masa m_1 i m_2,

$$\vec{F}_{g21} = -\hat{r}_{12}\frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad \text{N}, \tag{1–13}$$

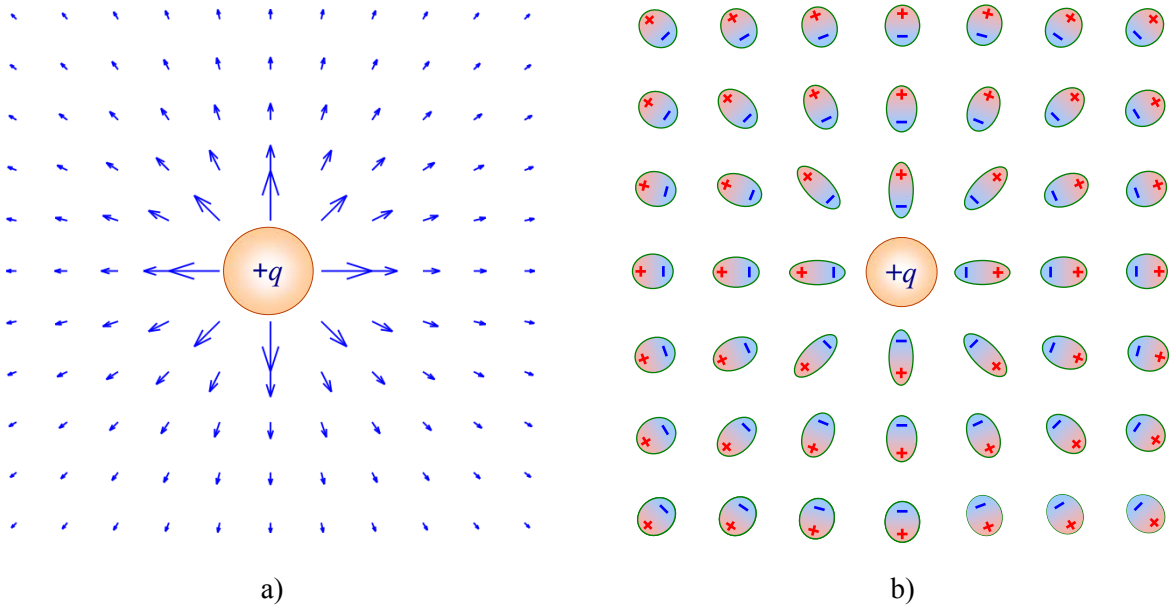
gdje je $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 univerzalna gravitacijska konstanta.

Analogija se može proširiti definiranjem električnog polja $\vec{E}$ koje je proizveo naboj q, tj.

$$\vec{E} = \hat{r}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{V/m}, \tag{1–14}$$

gdje je sad r udaljenost između naboja i točke promatranja, a $\hat{r}$ jedinični vektor usmjeren od pozitivnog naboja. Na slici 1.8a) prikazano je statičko vektorsko polje pozitivnog naboja. Jakost električnog polja mjeri se u voltima po metru (V/m).

Električni naboj ima dva korisna svojstva. Prvo je sadržano u *zakonu očuvanja naboja*, koji kaže da se električni naboj ne može ni stvoriti ni uništiti. Ako, primjerice, neki volumen sadrži n_p protona i n_e elektrona, onda ukupni naboj iznosi $q = n_p e - n_e e = (n_p - n_e)e$ kulona. Čak i kad se neki protoni sjedine s jednakim brojem elektrona da bi proizveli neutrone ili neke druge elementarne čestice, naboj q ostaje nepromijenjen.



Slika 1.8. a) Vektorski prikaz električnog polja pozitivnog točkastog naboja. **b)** Polarizacija atoma dielektričnog materijala u polju pozitivnog točkastog naboja

Druga temeljna značajka električnog naboja vezana je uz *načelo linearne superpozicije*. Ona kaže da je ukupno električno polje nastalo od skupa naboja u bilo kojoj točki prostora jednako vektorskom zbroju električnih polja pojedinačnih naboja u toj istoj točki. Ta, naizgled jednostavna, koncepcija omogućit će nam u sljedećim poglavljima izračunavanje polja koja su posljedica složenih razdioba naboja.

Izraz (1–14) opisuje proizvedeno polje električnim nabojem u slobodnome prostoru. No nešto je teže izračunati polje nastalo od naboja unutar dielektričnog materijala sastavljenog od atoma. Ako nije prisutan točkasti naboj, onda je materijal električki neutralan jer se svi atomi sastoje od pozitivno nabijene jezgre i negativno nabijenog elektronskog oblaka jednake količine naboja suprotnog predznaka. Zato je u svakoj točki materijala u kojoj ne postoji atom električno polje jednako nuli. Ako se sad u materijal postavi točkasti naboj, kao što je prikazano na slici 1.8b), onda na elastične elektrone počinju djelovati električne sile koje izobličuju atome. Pritom se pomiče središte simetrije elektronskog oblaka u odnosu na jezgru, pa je atom polariziran. Takav se atom naziva *električni dipol*, a pojava koja izobličuje atome naziva se *polarizacija*. Iznos polarizacije razmjeran je udaljenosti između atoma i izoliranog točkastog naboja. Ukupan učinak polarizacije tumači se kao suprotstavljanje električnih dipola atoma (ili molekula) polju točkastog naboja. To ima za posljedicu oslabljeno električno polje u svakoj točki materijala u odnosu na odgovarajuće polje u istim točkama kad se materijal ukloni. No to protupolje nije dovoljno jako da bi posve poništilo polje izvora naboja. Sad se izraz (1–14) za slobodni prostor može proširiti tako da se permitivnost slobodnoga prostora (ε_0) zamijeni permitivnošću (ε) materijala u kojem se mjeri jakost električnog polja. Stoga je

$$\vec{E} = \hat{r}\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \quad \text{V/m.} \tag{1–15}$$

Za izotropne se materijale ε može izraziti u obliku

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad \text{F/m,} \tag{1–16}$$

gdje se bezdimenzionalna veličina ε_r naziva *relativna permitivnost* materijala (dodatak D).

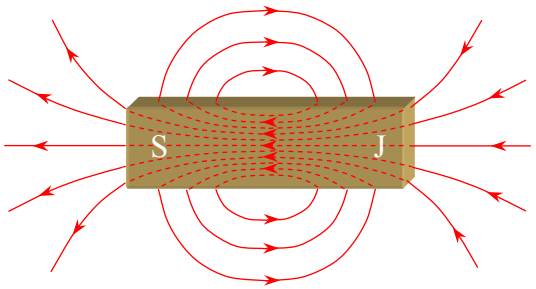
Uz jakost električnog polja $\vec{E}$, nerijetko se rabi s njom izravno vezana vektorska veličina $\vec{D}$ koja se naziva *gustoća električnog toka*,

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad \text{C/m}^2. \tag{1–17}$$

Te dvije električne veličine, tvore prvi od dvaju osnovnih parova elektromagnetskih polja. Drugi par, koji je povezan s magnetskim poljem, razmotrit ćemo u sljedećem odjeljku.

1.2.2. Magnetsko polje

Već su 800 godina prije nove ere stari Grci otkrili neke vrste minerala koje su pokazale moć privlačenja komadića željeza. Jedan se od tih materijala danas naziva magnetit (Fe_2O_3), a pojava na koju upućuje naziva se *magnetičnost*. U trinaestome stoljeću francuski znanstvenici zapazili su da se željezna igla usmjeri u točno određenom smjeru kad se nađe na nekom položaju na površini prirodnog magneta kuglastog oblika. Pomno bilježeći smjerove te igle, našli su da sve silnice magnetskog polja koje okružuju kuglu prolaze kroz dvije točke na suprotnim krajevima kugle. Tim su točkama dali posebne nazive: sjeverni i južni pol magneta. Kasnije je utvrđeno da su ti polovi svojstveni svim magnetima. Razdioba silnica magnetskog štapa prikazane su na slici 1.9. Također je ustanovljeno da se istoimeni polovi različitih magneta odbijaju, a suprotni se polovi privlače. To svojstvo odbijanja i privlačenja slično je električnoj sili između dvaju električnih naboja, uz bitnu razliku da električni naboji moraju biti međusobno izolirani, a magnetski se polovi uvijek nalaze u parovima. Ako se, primjerice, permanentni magnet izreže na male dijelove, bez obzira na to koliko mali bili, uvijek će svaki od njih imati sjeverni (S) i južni pol (J).



Slika 1.9. Silnice magnetskog polja štapastog permanentnog magneta

Magnetske linije koje izviru iz jednog pola i poniru u drugi, nazivaju se *silnice magnetskog polja.* One pokazuju prisutnost tog novog polja koje se naziva *gustoća magnetskog polja* ili *magnetska indukcija* označuje se s $\vec{B}$. No to polje nije samo svojstveno permanenetnim magnetima nego ga može izazvati i električna struja. Tu vezu između elektriciteta i magnetizma otkrio je danski znanstvenik Hans Christian Oersted (1777 - 1851) zamijetivši nagli otklon igle kompasa u blizini žice kojom je potekla istosmjerna struja. Pritom je zaključio da struja u žici inducira magnetsko polje i u prostoru izvan žice te da učinci tog polja na iglu kompasa djeluju u smjeru zatvorenih kružnih linija poput onih na slici 1.10, s maksimalnim učinkom u smjeru okomitom na tok struje. Nedugo nakon obznanjivanja tog epohalnog otkrića, francuski je fizičar i matematičar André - Marie Ampère (1775–1836) pokazao da nastaje privlačna sila između žica kad u njima protječu struje istoga smjera, a odbojna sila kad u njima protječu struje suprotnoga smjera. Samo nekoliko godina kasnije, francuski znanstvenici Jean - Baptiste Biot (1774–1862) i Félix Savart (1791–1841) izveli su izraz koji uspostavlja vezu između gustoće magnetskog toka $\vec{B}$ u točki prostora i istosmjerne struje I koja protječe beskonačno dugačkom žicom. Taj koristan izraz danas je poznat pod nazivom Biot-Savrtov zakon i glasi

$$\vec{B} = \hat{\varphi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{T}, \tag{1–18}$$

gdje je r radijalna udaljenost od struje (žice), a $\hat{\varphi}$ jedinični vektor obilaznog kuta, što pokazuje da je smjer djelovanja magnetskog polja tangencijalan na koncentričnu kružnicu oko struje, kao što je prikazano na slici 1.10. Gustoća magnetskog toka mjeri se u teslama (T) u čast hrvatsko-američkom inženjeru elektrotehnike i velikom izumitelju Nikoli Tesli (1856–1943). Veličina $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ henrija po metru (H/m) naziva se *permeabilnost slobodnoga prostora* i analogna je električnoj permitivnosti ε_0. U poglavlju 2, tim dvjema fizikalnim konstantama određena je *brzina svjetlosti* u slobodnome prostoru (vakuumu), tj.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 3 \cdot 10^8 \quad \text{m/s}. \tag{1–19}$$

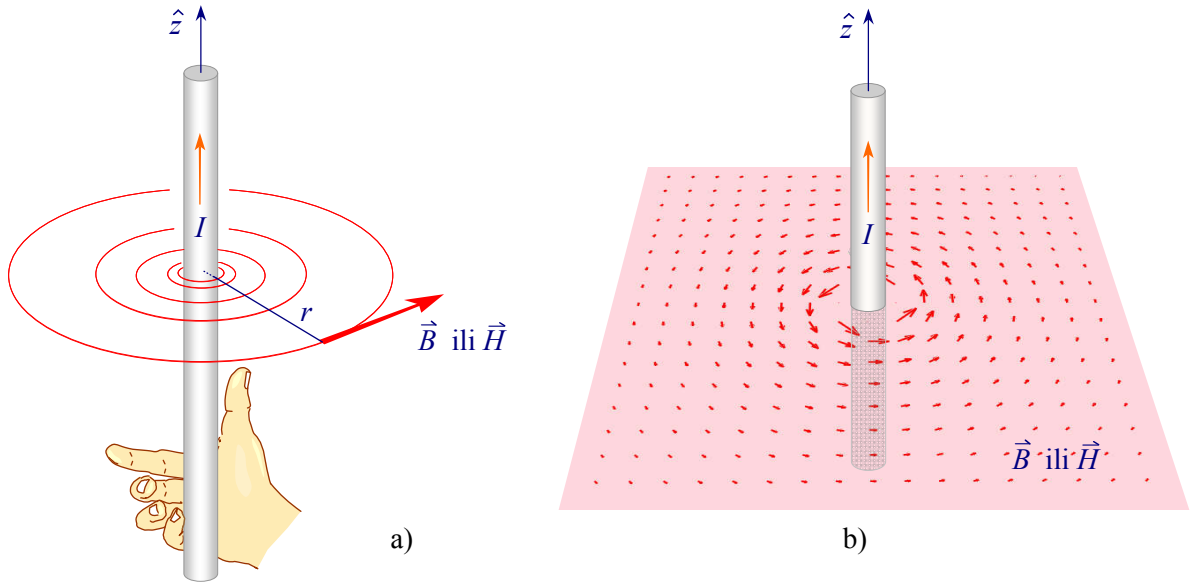
Ustvari, većina prirodnih materijala nije magnetična, što znači da im je permeabilnost μ jednaka ili približno jednaka μ_0. Za feromagnetske materijale, kakvi su željezo, nikal i neke njihove legure, μ može biti znatno veće od μ_0. Permeabilnost μ uzima u obzir magnetizacijska svojstva materijala. Analogno izrazu (1–16), μ se za posebne materijale može definirati kao

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad \text{H/m}, \tag{1–20}$$

gdje je bezdimenzionalna veličina μ_r poznata pod nazivom *relativna permeabilnost materijala.*

Već smo ranije utvrdili da $\vec{E}$ i $\vec{D}$ tvore prvi par elektromagnetskih veličina koje opisuju polja. Drugi par tvore gustoća magnetskog toka $\vec{B}$ i jakost magnetskog polja $\vec{H}$, ili skraćeno, *magnetsko polje*. Te dvije veličine povezuje izraz

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \, . \tag{1–21}$$



Slika 1.10. Prikaz magnetskog polja u blizini beskonačno dugačkog ravnog vodiča. **a)** Smjer polja može se lako odrediti pravilom desne ruke. Ako se palac postavi u smjeru struje, onda prsti pokazuju smjer silnica magnetskog polja. **b)** Vektorski prikaz magnetskog polja; jakost polja opada udaljavanjem od žice u skladu s izrazom (1–18)

1.3. Statička i dinamička polja

Budući da je električno polje $\vec{E}$ određeno nabojem q, a magnetsko je polje $\vec{H}$ određeno strujom $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, i jer su q i $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ nezavisne varijable, inducirana električna i magnetska polja ne ovise jedno o drugom dok je god struja stalne vrijednosti. To se može pokazati na primjeru kratkog odsječka mlaza nabijenih čestica koje se gibaju stalnom brzinom. Naboj u gibanju stvara istosmjernu struju. Električno polje toga naboja određeno je ukupnim nabojem q koji je sadržan u tom odsječku. Magnetsko polje ne ovisi o q nego o (I), tj o brzini promjene naboja koji protječe tim odsječkom. No mali broj nabijenih čestica koje se gibaju velikom brzinom može stvoriti struju jednake jakosti onoj koju stvara velik broj nabijenih čestica male brzine. Stoga će inducirano magnetsko polje u obama slučajevima biti jednake jakosti, ali će inducirano električno polje biti različito, zbog različitog broja nabijenih čestica.

Dakle, u elektrostatici glavnu ulogu ima statični naboj, a u magnetostatici istosmjerna struja stalne jakosti, koju proizvode nositelji naboja stalne brzine. Stoga su elektrostatika i magnetostatika dva posebna slučaja elektromagnetizma, koji se mogu razdvojiti u dvije nezavisne grane jer im električna i magnetska polja nisu međusobno povezana. Treću, općenitiju granu elektromagnetima, čini *elektrodinamika* koja uključuje vremenski promjenljiva polja koja proizvode vremenski promjenljivi izvori, tj. izvori izmjenične struje. Ako se, primjerice, struja u mlazu nabijenih čestica mijenja u vremenu, onda se i količina naboja koji se nalazi u danom odsječku mlaza mijenja u vremenu i obratno. Drugim riječima, vremenski promjenljivo električno polje stvara vremenski promjenljivo magnetsko polje i obratno. U tablici 1.3. prikazane su osnovne značajke svih triju grana elektromagnetizma. Više o statičkim i dinamičkim (električnim i magnetskim) poljima može se naći u literaturi [4]-[8].

Kao što se može vidjeti u poglavlju 2 pri proučavaju učinaka elektromagnetskih polja, električna i magnetska svojstva materijala mogu se opisati parametrima ε, odnosno μ. No obično je potrebna i treća fizikalna veličina, *provodnost* (σ), koja se mjeri u simensima po metru (S/m). Ta veličina pokazuje kojom se lakoćom slobodni nositelji naboja (elektroni)

mogu gibati materijalom. Ako je $\sigma = 0$, onda se naboji ne mogu pomaknuti dalje od atomskog razmaka pa se za takav materijal kaže da je *savršeni dielektrik* (ili *izolator*). Kad $\sigma \to \infty$, tad se naboji počinju slobodno kretati unutar cijelog materijala bez imalo otpora pa se taj materijal naziva *savršeni vodič*. Parametri materijala nerijetko se nazivaju *parametri građe* materijala (tablica 1.4). U homogenom sredstvu parametri građe zadržavaju stalnu vrijednost unutar sredstva. Kod materijala s kristalnom atomskom strukturom, parametri građe nerijetko se pojavljuju u obliku tenzora pokazujući time različite vrijednosti za različite smjerove.

Tablica 1.3. Tri grane elektromagnetizma

Grana	Uvjet	Veličine polja (jedinice)
elektrostatika	statični naboj ($\partial q/\partial t = 0$)	jakost električnog polja, $\vec{E}$ (V/m)
magnetostatika	stalna struja ($\partial I/\partial t = 0$)	jakost magnetskog polja, $\vec{H}$ (A/m)
elektrodinamika (vremenski promjenljiva polja)	vremenski promjenljiva struja ($\partial I/\partial t \neq 0$)	$\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ i $\vec{B}$ ($\vec{E}$, $\vec{D}$) spregnuti s ($\vec{H}$, $\vec{B}$)

Tablica 1.4. Parametri građe materijala za slobodni prostor

Parametar	Jedinice	Vrijednosti za slobodni prostor
električna permitivnost, ε	F/m = As/Vm	$\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \cdot 10^{-12}$
magnetska permeabilnost, μ	H/m = Vs/Am	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$
provodnost (električna), σ	S/m	0

U sljedećem ćemo poglavlju vidjeti da postoji čvrsta veza između magnetskih i električnih polja koja je stvorio jedan te isti izvor izmjenične struje. To su dinamička polja koja se mogu rasprostirati u obliku elektromagnetskih valova slobodnim prostorom i različitim prijenosnim strukturama poput *linija* i *valovoda* (poglavlja 3 i 4) ili pohraniti unutar šupljih zatvorenih struktura poput *rezonatora* dobro vodljivih stijenka (vidjeti odjeljak 7.4 o rezonatorima) ili izračiti, tj. odaslati, u slobodni prostor ili unijeti u valovode i rezonatore uz pomoć naprave koja se naziva *antena* (vidjeti odjeljke 2.14, 5.10, 7.4.6. i 10.1).

Literatura

[1] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Claredon Press, Oxford, 1873.

[2] H. Hertz, *Electric Waves*, McMillan, London, 1893 i Dover Publications, New York, 1962.

[3] H. H. Skilling, *Fundamentals of Electric Waves*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York 1967.

[4] E. C. Jordan, K. G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.

[5] J. D. Kraus, K. R. Carver, *Electromagnetics*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1973.

[6] F. Ulaby, *Applied Electromagnetics*, Prentice Hall, New Jersey, 2001.

[7] Z. Haznadar, Ž. Štih, *Elektromagnetizam*, svezak I. i II., Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[8] Z. Smrkić, *Mikrovalna elektronika*, Školska knjiga, Zagreb 1986.

2. Teorija elektromagnetizma

Klasična teorija elektromagnetizma daje sistematičan i točan opis električnih i magnetskih pojava oslanjajući se samo na nekoliko jednostavnih jednadžba. Za najopćenitiju formulaciju zakona o elektricitetu i magnetizmu zaslužan je James Clerk Maxwell (1831–1879). Maxwell je 1864. godine [1] objedinio i upotpunio zapažanja koja su objavili Michael Faraday (1791––1836), Karl Friedrich Gauss (1777–1855) i André-Marie Ampère (1775–1836). Stoga su, njemu u čast, temeljne jednadžbe koje opisuju ponašanje elektromagnetskih polja prozvane Maxwellovim jednadžbama. Fascinantan povijesni razvoj elektromagnetizma opisali su mnogi znanstvenici, ali osnovni razlog iznimno široke primjene Maxwellovih jednadžba njihov je nemjerljiv doprinos u eksperimentalnoj fizici.

Premda su Maxwellove jednadžbe ponajprije izražene u integralnom obliku, u ovoj smo se knjizi opredijelili za Hertzovu (Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894) formulaciju u diferencijalnom obliku [2] jer je prikladnija za proučavanje vremenski promjenljivih polja, tj. elektromagnetskih valova. Kako Maxwellove jednadžbe čine skup međusobno povezanih parcijalnih diferencijalnih jednadžba, rješavanje problema u elektromagnetizmu blisko je povezano s njihovim punim razumijevanjem. No golo je matematičko razumijevanje, premda nužno, nedovoljno. Maxwellove jednadžbe, pune različitih fizikalnih značenja, posebno su korisne za razvoj fizikalne intuicije. Stoga ćemo u ovoj knjizi istražiti njihove fizikalne i matematičke posljedice rješavanjem polja unutar različitih materijala poput dielektrika, vodiča, ferita itd. i to uz različite rubne uvjete. Vezano uz navedenu problematiku, zainteresirani se čitatelj upućuje na dodatnu literaturu [3]-[19], [23],[24].

2.1. Maxwellove jednadžbe i zakon Lorentzove sile

Pokusima je utvrđeno da se električni naboji gibaju kad na njih djeluju električne i magnetske sile. Te sile linearno ovise o veličinama koje nazivamo električna i magnetska polja, a ta se polja nalaze u svakoj točki prostora i u svakom vremenskom trenutku. Maxwellove jednadžbe opisuju uzajamni odnos između električnih i magnetskih polja te vezu polja s položajem i kretanjem nabijenih čestica. Premda su vrlo jednostavne, Maxwellove su jednadžbe dovoljne za razumijevanje niza elektromagnetskih pojava opisanih u ovoj knjizi.

U diferencijalnom obliku, *Maxwellove jednadžbe* mogu se napisati kao:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad \text{(Faradayev zakon)}, \qquad (2\text{–}1)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad \text{(Ampèreov zakon)}, \qquad (2\text{–}2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t) \qquad \text{(Gaussov zakon)}, \qquad (2\text{–}3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \qquad \text{(Gaussov zakon)}, \qquad (2\text{–}4)$$

gdje su varijable ovako definirane:

$\vec{E}$	električno polje	(volt po metru, V/m)
$\vec{H}$	magnetsko polje	(amper po metaru, A/m)
$\vec{B}$	gustoća magnetskog toka	(tesla, T)
$\vec{D}$	gustoća električnog toka	(kulon po četvornome metru, C/m^2)

$\vec{J}$	gustoća električne struje	(amper po četvornome metru, A/m^2)
ρ	gustoća električnog naboja	(kulon po prostornome metru, C/m^3)

Po dogovoru, vremenski promjenljive veličine označivat ćemo pisanim slovima. Hamiltonov diferencijalni operator ∇ (*nabla* ili *del-operator*) definiran je u uvodu kao

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z},$$

gdje $\hat{x}, \hat{y}$ i $\hat{z}$ označuju jedinične vektore u smjeru osi trodimenzionalnog pravokutnoga koordinatnog sustava.

Osim skalarne veličine $\rho(\vec{r}, t)$ koja označuje gustoću električnog naboja, sve su ostale veličine vektori. To jest, uz magnitudu, veličinama $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$ ($\vec{r}$, $\vec{D}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ i $\vec{J}(\vec{r}, t)$ pridružen je i smjer u vremenu t te u svakoj točki prostora opisanoj vektorom $\vec{r}$. U ovoj su knjizi upotrijebljene mks-jedinice (SI), premda su mogući i drugi sustavi jedinica (primjerice, cgs), u kojima se Maxwellove jednadžbe pojavljuju u neznatno izmijenjenom obliku.

Izvori naboja $\rho(\vec{r}, t)$ i struje $\vec{J}(\vec{r}, t)$ uzrokuju električna i magnetska polja. U konkretnim problemima nerijetko su poznate veličine ρ i $\vec{J}$ pa polja, koja se namjeravaju odrediti primjenom Maxwellovih jednadžba, postaju predmet rubnih uvjeta. Znatno je složeniji problem kad ρ i $\vec{J}$ nisu jedinstveno zadani i kad se mijenjaju u ovisnosti o poljima. Tad se Maxwellove jednadžbe moraju riješiti jedinstveno kako bi se zadovoljili rubni uvjeti. U ovoj ćemo se knjizi baviti problemima u kojima su veličine ρ i $\vec{J}$ *a priori* poznate ili su vrlo točno procijenjene.

Matematički model svakog fizikalnog problema ispravno je postavljen ako su zadovoljena sljedeća tri uvjeta. Prvo, model mora imati najmanje jedno rješenje (*egzistencija rješenja*). Drugo, model mora imati najviše jedno rješenje (*jedinstvenost rješenja*, vidjeti odjeljak 2.15.1) i treće, rješenje neprekidno ovisi o zadanim podatcima (*značajnost rješenja*). Smisao je prvoga uvjeta očit: ako elektromagnetski model nema rješenje, onda će biti od male koristi znanstvenicima i inženjerima. Smisao drugoga uvjeta jednako je tako očit: ako se dvije različite metode rješavanja primijene na jedan te isti model i pritom se dobiju dva različita rezultata, onda taj model neće biti od koristi ni za analizu ni za proračun. Treći se uvjet može objasniti kao: male promjene u zadanim podatcima proizvode male promjene u rješenjima, što drugim riječima znači da su rješenja neosjetljiva na male pogreške u podatcima.

Maxwellove jednadžbe sadrže i vrlo korisnu vezu između struje i naboja. Primjenom vektorske jednadžbe $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ na bilo koji vektor $\vec{A}$, divergencija Ampèreova zakona daje

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

Redoslijed operacija derivacije nad vektorom $\vec{D}$ po vremenu i prostoru može se zamijeniti, jer su vrijeme i prostor međusobno neovisni, pa se primjenom Gaussova zakona (2–3) dobiva

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0. \qquad (2\text{–}5)$$

Ta diferencijalna jednadžba, poznata pod nazivom *jednadžba kontinuiteta struje* ili *jednadžba očuvanja naboja*, pokazuje da vremenski promjenljiva razdioba prostornog naboja inducira volumnu struju. Kao što se vidi, $\rho(\vec{r}, t)$ i $\vec{J}(\vec{r}, t)$ ne moraju biti neovisno zadani pa je to vjerojatno navelo Maxwella na zaključak da je u jednadžbu (2–2) za izmjenična polja potrebno uvesti dodatni član koji upućuje na gustoću pomačne struje $\partial\vec{D}/\partial t$.

2.1.1. Integralni oblik Maxwellovih jednadžba

Primjenom Gaussova i Stokesova teorema, diferencijalni oblik Maxwellovih jednadžba može se pretvoriti u integralni oblik. Integralni oblik posebno je koristan u zadaćama u kojima postoje diskontinuiteti ili singularne vrijednosti polja, struja i naboja. Te su singularne vrijednosti posljedica *rubnih uvjeta* na sučelju različitih sredstava, tj. materijala.

Razmotrimo sad prostorno deriviranje vektora. U Maxwellovim jednadžbama (2–1) - (2–4) mogu se naći dvije različite vrste derivacija vektorskih polja, divergencija i rotor (odjeljak 1.1.2), baš kao što postoje dva različita načina množenja vektora, skalarni i vektorski.

Kao što je pokazano u uvodu, divergencija vektora $(\nabla \cdot \vec{A})$ skalarna je veličina bez smjera i definirana je kao

$$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot \hat{n} \mathrm{d}S ,$$

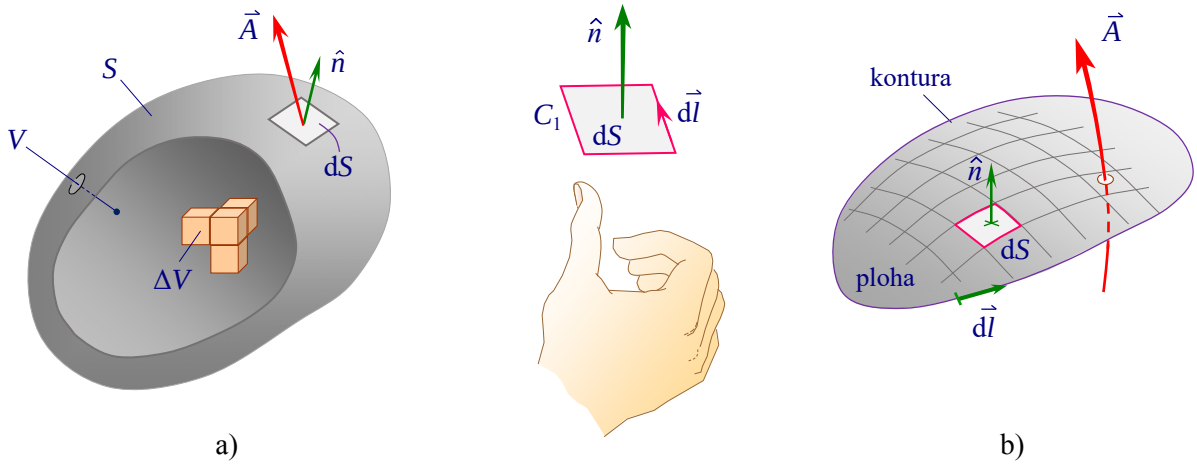
gdje se integracija obavlja na orijentiranoj zatvorenoj plohi ΔS koja omeđuje mali volumni element ΔV. Jedinični vektor $\hat{n}$ okomit je na plohu s vanjske strane i pokazuje orijentaciju te plohe, kao što je prikazano na slici 2.1a). Integriranje divergencije na određenom volumenu V ekvivalentno je sumiranju veličine $\nabla \cdot \vec{A} \Delta V$ unutar tog istog volumena. Prema definiciji, veličina $\nabla \cdot \vec{A} \Delta V$ može se napisati u obliku plošnog integrala. Tok koji napušta elementarni volumen ΔV na slici 2.1a) kroz jednu od ploha jednak je toku koji ulazi u susjedni volumni element kroz tu istu plohu. Otuda se pri zbrajanju plošnih integrala, doprinosi svih zajedničkih ploha međusobno poništavaju pa ostaju samo doprinosi graničnih ploha koje nemaju susjednih volumnih elemenata. To se može napisati kao

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{A}) \mathrm{d}V = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} \mathrm{d}S . \qquad (2–6)$$

To je *Gaussov teorem* ili *teorem o divergenciji* koji kaže da je skalarni tok polja $\vec{A}$ kroz zatvorenu plohu S jednak integralu divergencije polja $\vec{A}$ po cijelom prostoru V omeđenom plohom S. Izravna primjena teorema o divergenciji na jednadžbe (2–3) i (2–4) daje.

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = \int_V \rho \mathrm{d}V = Q , \qquad (2–7)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = 0 , \qquad (2–8)$$



a) b)

Slika 2.1. a) Objašnjenje Gaussova teorema; **b)** objašnjenje Stokesova teorema

gdje veličina Q u jednadžbi (2–7) označuje ukupan naboj unutar volumena V omeđenog zatvorenom plohom S. Jednadžbe (2–7) i (2–8) zapravo su Maxwellove jednadžbe divergencije u integralnom obliku.

Rotacija ili vrtloženje polja može se zamisliti kao krivuljni integral po jediničnoj površini u nekoj točki prostora. Ako se neka orijentirana ploha podijeli na mnoštvo malih dijelova, kao što je prikazano na slici 2.1b), onda iz definicije rotora za svaku infinitezimalnu plohu izlazi

$$\oint_{C_1} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\,,$$

gdje je $\mathrm{d}\vec{l}$ diferencijalna duljina tangencijalna na rub C_1 infinitezimalne plohe dS. Smjer diferencijalnog vektora određen je pravilom desne ruke, kao što je prikazano na slici 2.1. Ako se zbroje doprinosi svih tih malih dijelova plohe po cijeloj plohi S, može se vidjeti da krivuljni integral iščezava na svim unutarnjim dijelovima plohe. Drugim riječima, krivuljni se integrali na zajedničkim rubovima sa susjednim dijelovima plohe poništavaju zbog toga što su smjerovi integrala suprotni, kao što se vidi na slici 2.1b). Doprinosi stoga dolaze samo od krivuljnih integrala na vanjskom rubu plohe S koji je označen sa C. Zbrajanje svih doprinosa, tj. integracija u graničnom prijelazu $\mathrm{d}S\to 0$, daje jednadžbu

$$\int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \oint_C \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\,. \tag{2–9}$$

To je *Stokesov teorem* koji vrijedi za svako kontinuirano vektorsko polje. Taj koristan teorem kaže da je krivuljni integral vektorske funkcije po zatvorenoj krivulji C jednak integralu okomitih komponenata rotora po plohi S koju obrubljuje krivulja C.

Izravnom primjenom Stokesova teorema na jednadžbe (2–1) i (2–2) dabivaju se druge dvije Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku. Prva od njih označuje uobičajeni oblik Faradayeva zakona i upućuje na drugi Kirchhoffov zakon

$$\oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\,. \tag{2–10}$$

Druga jednadžba upućuje na Ampèreov zakon

$$\oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S + \int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S + i\,, \tag{2–11}$$

gdje je i ukupna izmjenična struja koja teče kroz plohu S.

2.1.2. Lorentzov zakon

Lorentzov zakon povezuje elektromagnetska polja sa silama koje se mogu mjeriti. Sila $\vec{F}$ koja djeluje na pozitivni naboj q koji se giba brzinom $\vec{v}$ u prisutnosti polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$ naziva se Lorentzova sila. Ta se sila može izraziti kao

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\,. \tag{2–12}$$

U sustavu SI, $\vec{F}$ se mjeri u njutnima (N), q u kulonima (C), a $\vec{v}$ u metrima u sekundi (m/s). Newtonova jednadžba gibanja (za nerelativističke brzine) glasi

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\,, \tag{2–13}$$

gdje je m masa naboja u kilogramima (kg). Sila $\vec{F}$ povećat će kinetičku energiju naboja u mjeri koja je jednaka brzini promjene rada pod djelovanjem Lorentzove sile na naboj, tj. $\vec{v}\cdot\vec{F}$. Otuda za vremensku derivaciju kinetičke energije $W_{\mathrm{kin}}=\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}$ po vremenu izlazi

$$\frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial t} = m\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \cdot \vec{F} = q\vec{v} \cdot \vec{E} \,. \tag{2–14}$$

Valja uočiti da samo električna sila pridonosi porastu kinetičke energije jer magnetska sila ostaje okomita na $\vec{v}$ pa je $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$.

Ako naboj nije diskretan, nego je zadan prostornom gustoćom ρ, onda zakon Lorentzove sile stavlja gustoću sile $\vec{f}$ koja se mjeri u njutnima po prostornome metru (N/m3), u suodnos s veličinama ρ i $\vec{J}$ u skladu s izrazom

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \,, \tag{2–15}$$

gdje izraz (2–12) upućuje na volumni integral izraza (2–15). Ako $\vec{J}$ proizlazi iz gibanja naboja čija je razdioba ρ, onda je $\vec{J} = \rho\vec{v}$, pa je u tom slučaju

$$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \,. \tag{2–16}$$

Prema analogiji s jednadžbom (2–14), veličina $\vec{v} \cdot \vec{f} = \rho\vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \vec{E}$ označuje *snagu po jedinici volumena* koja proizlazi iz sila koje djeluju na naboj u gibanju. Dakle, ta je prostorna snaga preuzeta iz polja i pretvorena u kinetičku energiju naboja ili toplinu. Ona ima jedinice W/m^3 i može se zapisati kao

$$\frac{\mathrm{d}P_{\text{dis}}}{\mathrm{d}V} = \vec{J} \cdot \vec{E} \qquad \text{(omski gubitci snage po jediničnom volumenu).} \tag{2–17}$$

U odjeljku 2.6. razmotrena je uloga prostorne snage u očuvanju energije i utvrđeno da elektromagnetska energija, pri ulasku u neko područje, povećava pohranjenu energiju u tom području te se dio te energije možebitno pretvara u toplinu u skladu s jednadžbom (2–17).

2.2. Fazorski prikaz harmonijskih veličina

Prethodni izrazi vrijede za bilo koju vremensku ovisnost. No u mikrovalnome se području elektromagnetski sustavi nerijetko pobuđuju samo na jednoj frekvenciji, harmonijskom funkcijom sinusne (ili približno sinusne) vremenske ovisnosti

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) \,, \tag{2–18}$$

gdje je $\omega = 2\pi f$ kružna (kutna) frekvencija, a φ faza. Taj se izraz međutim može matematički izraziti i primjenom eksponencijalne funkcije s imaginarnim argumentom, kao

$$A(t) = \mathrm{Re}\left\{ A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)} \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \underline{A}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \right\} , \tag{2–19}$$

gdje je uvedena kompleksna veličina $\underline{A}_0 = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ koja se naziva *fazor*. Crtica ispod te veličine upućuje na kompleksnu veličinu magnitude A_0 i faze φ koja odgovara fazi rješenja vremenske funkcije (2–18). Operator $\mathrm{Re}\{\cdot\}$ vraća realni dio kompleksne funkcije. Valja upamtiti da samo realni dio člana $\underline{A}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ daje stvarnu veličinu, a da je imaginarni dio prividna veličina. Istovjetnost prethodnih dvaju izraza može se lako naći preinakom eksponencijalnog izraza (2–19) uz pomoć Eulerove formule

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x \,.$$

Tako se dobiva

$$A(t) = \mathrm{Re}\left\{ A_0 \left[\cos(\omega t + \varphi) + \mathrm{j}\sin(\omega t + \varphi) \right] \right\} = A_0 \cos(\omega t + \varphi) \,. \tag{2–20}$$

Valja također istaknuti da fizikalna veličina A označuje samo realni dio eksponencijalne funkcije. Simbol $\mathrm{Re}\{\cdot\}$ nerijetko se ispušta pa je u kraćem zapisu

$$A = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)} = \underline{A}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \,, \tag{2–21}$$

gdje se na kraju uzima samo realni dio toga izraza. Štoviše, u kraćem zapisu nerijetko se ispušta i eksponencijalni član koji označuje vremensku ovisnost jer je ona uvijek ista za veličine na čvrstoj frekvenciji. Uporaba takvog načina označivanja harmonijskih funkcija znatno olakšava račun s parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, a posebno je korisna u radu s impedancijama. Naime, poznato je da je impedancija jednaka omjeru fazora napona i struje, a ne omjeru njegovih trenutačnih vrijednosti izraženih funkcijama sinus ili kosinus. I druge se vremenske ovisnosti mogu analizirati na sličan način, ako se svedu na linearnu kombinaciju harmonijskih funkcija (primjerice, Fourierovom analizom). Takav način označivanja može se jednako tako primijeniti i na vektorske veličine poput elektromagnetskih polja i struje. Kad nema dvojbe da je riječ o fazorima, tad ćemo u daljem tekstu redovito ispuštati crticu ispod varijable, koja označuje fazor.

Pogledajmo odmah primjer fazorskog zapisa izraza (2–19) za vremenski harmonijsko električno polje

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{ \underline{\vec{E}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \right\} \tag{2–22}$$

koje se mijenja kružnom frekvencijom ω. Tu je *vektorski fazor*, $\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \left| \vec{E}(\vec{r}) \right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, samo funkcija položaja koja sadrži šest realnih brojeva (tri vektora, svaki zadan veličinom i fazom). No i ostale varijable $\vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{J}$ i ρ mogu se prikazati s pomoću fazora. Na taj se način prostorna ovisnost polja može jednostavno odvojiti od vremenske ovisnosti. To će se kasnije pokazati kao velika prednost pri rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžba postupkom separacije varijabla.

Uvrštenje $\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{ \underline{\vec{E}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \right\}$ i $\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{ \underline{\vec{B}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \right\}$ u Faradayev zakon (2–1) daje

$$\mathrm{Re}\left\{ \left[\nabla \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}) + \mathrm{j}\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}) \right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \right\} = 0 .$$

Budući da ta jednadžba vrijedi u bilo kojem trenutku, mora vrijediti i za $\omega t = 0$, tj.

$$\mathrm{Re}\left\{ \nabla \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}) + \mathrm{j}\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}) \right\} = 0 .$$

Jednako tako mora vrijediti i za $\omega t = \pi/2$ pa je

$$\mathrm{Im}\left\{ \nabla \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}) + \mathrm{j}\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}) \right\} = 0 .$$

Stoga se općenito može napisati

$$\nabla \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = -\mathrm{j}\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}) .$$

Taj koristan rezultat pokazuje da harmonijski oblik Faradayeva zakona ne ovisi o vremenu, što proizlazi iz činjenice da su fazori polja samo kompleksne funkcije koordinate položaja. Također se vidi da se u fazorskom načinu zapisa derivacija po vremenu može jednostavno zamijeniti veličinom $\mathrm{j}\omega$ jer je $\partial \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}/\partial t = \mathrm{j}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.

Istim se postupkom može doći i do fazorskog oblika ostalih Maxwellovih jednadžba, pa se konačno može napisati:

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\omega \underline{\vec{B}} , \tag{2–23}$$

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + \mathrm{j}\omega \underline{\vec{D}} , \tag{2–24}$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{D}} = \underline{\rho} , \tag{2–25}$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{B}} = \underline{0} . \tag{2–26}$$

Primjenom fazorskog načina označivanja, jednadžba očuvanja naboja (2–5) poprima oblik

$$\mathrm{j}\omega \underline{\rho} + \nabla \cdot \underline{\vec{J}} = 0 . \tag{2–27}$$

2.3. Svojstva materijala i relacije građe

U svrhu rješavanja zadaća iz elektromagnetizma i mikrovalne elektronike valja uspostaviti dodatne veze između veličina $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$ i $\vec{J}$, jer u skupu Maxwellovih jednadžba (2–1) - (2–4) postoji više nepoznanica nego jednadžba. Te su dodatne jednadžbe poznate pod nazivom *relacije građe*, a proizlaze iz fizikalnih svojstava materijala. Relacije građe pokazuju vezu između polja i gustoće njihovog toka. Za vakuum, relacije građe posebno su jednostavne:

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t)\,, \tag{2–28}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r},t)\,, \tag{2–29}$$

gdje je ε_0 *permitivnost vakuuma*, a μ_0 *permeabilnost vakuuma*. Vrijednosti tih konstanata i njima pripadajuće jedinice u međunarodnom sustavu mjernih jedinica (SI) mogu se napisati kao:

$$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \simeq \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \qquad \text{(farada po metru, F/m=As/Vm),}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \qquad \text{(henrija po metru, H/m=Vs/Am).}$$

2.3.1. Jednostavni modeli dielektrika, vodiča i plazme

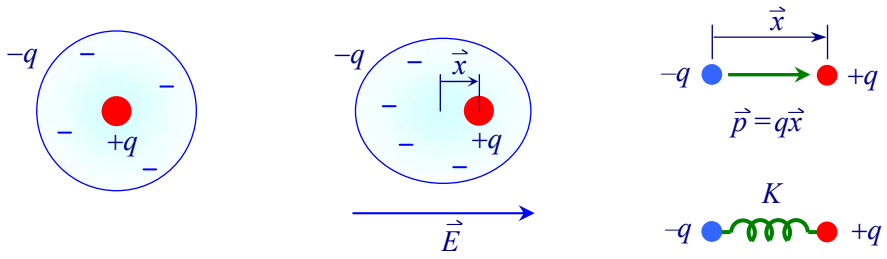
Svaka se tvar sastoji od atoma koji se u njoj nalaze u zadanom fizičkom rasporedu. Atom je pak sastavljen od pozitivno nabijene jezgre okružene elektronima. Postoje kompozitni kruti materijali koji su tako ustrojeni da svi elektroni u njima nisu čvrsto vezani za atome pa se neki od njih slobodno kreću unutar materijala od atoma do atoma. To su tzv. *slobodni elektroni*. Primjeri takvih materijala su kovine (metali) i poluvodiči. Veću skupinu materijala čine izolatori i vrlo loši vodiči. U izolatoru su, naprotiv, svi elektroni čvrsto vezani s atomskim ili molekularnim orbitalima pa ne postoje elektroni koji bi se mogli slobodno kretati. U metalima će i vrlo slabo utisnuto električno polje izazvati protjecanje provodne struje slobodnih i pokretnih elektrona. Ali u izolatoru ili dielektriku mora se dogoditi nešto posve drugo jer tu ne postoje slobodni elektroni. Ono što se može dogoditi i što se često događa jeste to da električno polje »privlači« elektrone a »odbija« pozitivno nabijenu jezgru. Kao rezultat tog procesa, atom se izobličuje i nastaje *dipolni moment*, tj. električna *polarizacija dielektrika*. To se naziva *elektronska polarizacija*. No postoje još dvije vrste polarizacije, orijentacijska polarizacija (voda) i ionska polarizacija (kristali soli). Da bi se odredila makroskopska polarizacija, moraju se zbrojiti sve mikroskopske polarizacije pojedinačnih atoma, molekula, jediničnih ćelija, itd.

Razmotrimo najprije neka temeljna električna svojstva materijala. Postavili se dielektrik u električno polje $\vec{E}$, doći će do polarizacije njegovih atoma ili molekula. Drugim riječima, električne sile izobličuju atome ili molekule pa u materijalu nastaju efektivni električni dipoli dipolnog momenta $\vec{P}_\mathrm{e}$ po jediničnom volumenu. Ukupnu pomačnu struju čini zbroj pomačne struje u vakuumu $\partial \varepsilon_0 \vec{E} / \partial t$ i polarizacijske struje $\partial \vec{P}_\mathrm{e} / \partial t$. Da bi se izbjeglo eksplicitno računanje polarizacijske struje, korisno je definirati vektor dielektričnog pomaka

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_\mathrm{e}\,, \tag{2–30}$$

gdje se ukupna pomačna struja bilježi kao $\partial \vec{D} / \partial t$.

Za većinu materijala vektori polarizacije i električnog polja poklapaju se, premda obično nemaju istu fazu (u vremenu). Na slici 2.2a) prikazan je jednostavni model izoliranog atoma koji se sastoji od jezgre s efektivnim točkastim nabojem q oko koje se nalazi elektronski oblak simetrično raspodijeljenog negativnog naboja $-q$. Budući da između jezgre i elektrona postoje jake električne privlačne sile, središta negativnog i pozitivnog naboja međusobno se poklapaju. No kad se atom nađe u vanjskom električnom polju $\vec{E}$, tad će električna sila izaz-

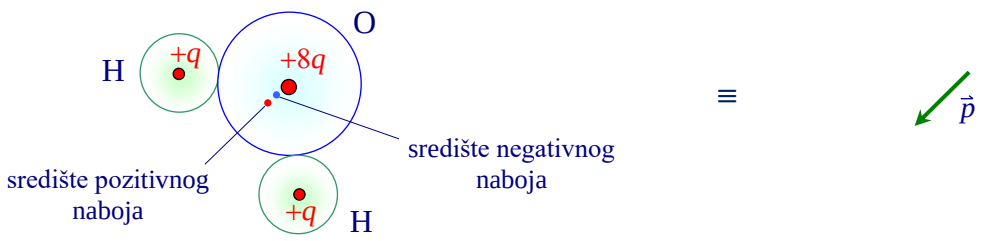


Slika 2.2. Model atoma: **a)** bez vanjskog polja poklapaju se središta pozitivnog i negativnog naboja; **b)** uz utisnuto vanjsko električno polje središta pozitivnog i negativnog naboja međusobno su pomaknuta; **c)** mehanički model dipola

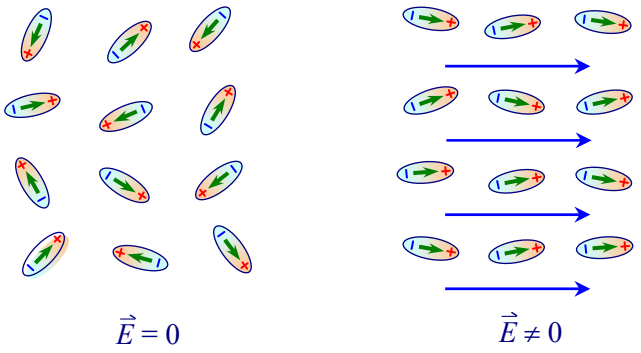
vana tim poljem djelovati na jezgru u suprotnome smjeru od sile koja djeluje na elektronski oblak pa će se u ravnotežnom stanju središta jezgre i elektronskoga oblaka naći na međusobnom razmaku $\hat{x}$, kao što je prikazano na slici 2.2b). Tom je usmjerenom pomaku suprotstavljena sila razmjerna geometrijskom pomaku. Kao rezultat djelovanja te vanjske električne sile nastaje dipolni moment pa se kaže da je atom *polariziran*. U dinamičkom slučaju, pri pobudi izmjeničnim poljima, još su prisutni i učinci tromosti i disipacije, tj. prigušenja, što stvara dodatne sile. Slično se događa i s molekulama.

Neke molekule pokazuju permanentni dipolni moment, pri čemu se središta pozitivnog i negativnog naboja međusobno ne poklapaju, čak i onda kad se ne nalaze u električnom polju. Takva svojstva, primjerice, pokazuje molekula vode (slika 2.3) koja se sastoji od dvaju atoma vodika i jednog atoma kisika. Ovdje veličina q odgovara naboju elektrona ($1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As). Bez utisnutog električnog polja, molekularni su dipoli nasumično orijentirani, kao što je prikazano na slici 2.4a). No ako se dipoli momenta $\vec{p}$ nađu u električnom polju $\vec{E}$, onda će to polje nastojati postrojiti sve vektore $\vec{p}$ u smjeru u kojem ono djeluje. Kad je riječ o molekularnim dipolima, tad će to postrojavanje biti podvrgnuto statističkim zakonitostima, zbog stalnog nemira molekula uzrokovanog toplinom, kao što je prikazano na slici 2.4b). Stoga je ta vrsta polarizacije izrazito temperaturno ovisna, a njezini učinci slabe porastom temperature.

Za obične materijale, može se lako naći veza između vektora $\vec{P}_e$ i vektora električnog polja primjenom jednostavnog mehaničkog modela prikazanog na slici 2.2c). Taj se model zasniva na analogiji između elastične električne sile, koja nastoji postaviti središta pozitivnog i negativnog naboja u istu točku te elastične sile u jednostavnoj mehaničkoj opruzi. Dinamika geometrijskog pomaka x može se opisati ovom diferencijalnom jednadžbom drugoga reda



Slika 2.3. Molekula vode (H_2O) upućuje na permanentni dipolni moment



Slika 2.4. a) U području bez polja dipolni su momenti polarnih molekula orijentirani nasumično; **b)** molekule se nastoje postrojiti u smjeru vanjskog električnog polja, ali to se postrojavanje ne može obaviti u cijelosti zbog stalne toplinske pobude materije

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -qE_x - Kx - mg\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{2–31a}$$

gdje je pretpostavljeno da električno polje djeluje u smjeru osi $\vec{x}$. U toj je jednadžbi veličina K povezana s prirodnom frekvencijom opruge ω_0, kao $\omega_0\sqrt{K/m}$, gdje je m efektivna masa elektronskog oblaka. U predloženom modelu ω_0 označuje rezonantnu frekvenciju polarnog atoma ili molekule. Stoga se jednadžbu (2–31a) može napisati kao

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + g\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = -\frac{q}{m}E_x. \tag{2–31b}$$

Uvjet $\omega_0 = 0$ odgovara slobodnom elektronu i opisuje slučaj dobrog vodiča. Član $g\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ uključuje »trenje« zbog sudara koji usporavaju elektrone. Pozitivna konstanta g mjera je količine sudara u jedinici vremena pa $\tau = 1/g$ označuje srednje vrijeme između dvaju sudara. U tipičnom vodiču τ je reda 10^{-14} sekunda. (Za bakar je $\tau = 2{,}4 \cdot 10^{-14}$ s pa je $g = 4{,}1 \cdot 10^{13}$ 1/s.) Istim modelom mogu se opisati i svojstva rijetke plazme, u kojoj nema sudara nabijenih čestica pa u tom slučaju valja postaviti $g = 0$. Ovim jednostavnim modelom mogu se opisati svojstva:

- dielektrika, uz uvjet $\omega_0 \neq 0$, $g \neq 0$;
- vodiča, uz uvjet $\omega_0 = 0$, $g \neq 0$;
- plazme bez sudara, uz uvjet $\omega_0 = 0$, $g = 0$.

Osnovna se ideja predloženog modela temelji na tomu da utisnuto električno polje nastoji odvojiti negativne naboje od pozitivnih naboja stvarajući tako dipolne momente. Tim se modelom mogu opisati osnovna svojstva i drugih vrsta polarizacije u materijalima, kao što su ionsko-molekularna polarizacija koja nastaje odvajanjem pozitivnih i negativnih iona u jakom polju ili polarizacija u polarnim materijalima s permanentnim dipolnim momentom.

Dielektrici

Vremenska ovisnost električnog polja u jednadžbi (2–31) može biti proizvoljna. Za jednostavan slučaj harmonijskog električnog polja $E(t) = \mathrm{Re}\{E_x \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = E_x \cos(\omega t)$ frekvencije ω, koje je polarizirano u smjeru osi $\hat{x}$, jednadžba (2–31) svodi se na ovu fazorsku jednadžbu

$$-\omega^2 X + \mathrm{j}\omega g X + \omega_0^2 X = -\frac{q}{m} E_x, \tag{2–32}$$

u kojoj je operator d/dt zamijenjen s jω. Radi jednostavnosti ispuštene su oznake fazora. Lako se može pokazati da je rješenje te jednadžbe fazor geometrijskog pomaka

$$X = \frac{-q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega g} E_x . \tag{2–33}$$

U vremenskoj se domeni to rješenje može napisati u obliku $x(t) = \mathrm{Re}\{X\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = |X|\cos(\omega t + \varphi)$. Iz izraza (2–33) za amplitudu i fazni pomak dobiva se:

$$|X| = \frac{q/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2 g^2}} E_x, \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{\omega g}{\omega^2 - \omega_0^2} .$$

Kad se taj pomak jednom odredi, tad se mogu lako naći svi ostali parametri dielektrika. Odgovarajuća brzina elektrona bit će također sinusna, $v(t) = \mathrm{Re}\{v\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$, gdje je $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ zapisana u obliku fazora, $v = \mathrm{j}\omega x$, pa je

$$v = \mathrm{j}\omega X = \frac{-\mathrm{j}\omega q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega g} E_x . \tag{2–34}$$

Električna polarizacija po jedinici volumena može se naći s pomoću jednadžba (2–33) i (2–34). Uz pretpostavku da se u jedinici volumena nalazi N takvih elementarnih dipola i da je moment pojedinačnog električnog dipola $\vec{p} = -q\vec{X} = -\hat{x}q\vec{X}$, makroskopska se *električna polarizacija* ili *dipolni moment po jediničnom volumenu* $\vec{P}_\mathrm{e}$ dobiva kao umnožak dipolnoga momenta $\vec{p}$ s brojem molekula N po jedinici volumena. Dakle, $\vec{P}_\mathrm{e} = N\vec{p} = -Np\hat{x}$ pa je

$$\vec{P}_\mathrm{e} = \frac{-Nq^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega g}\vec{E} = \varepsilon_0 \chi_\mathrm{e}(\omega)\vec{E} , \tag{2–35}$$

gdje je veličina χ_e *električna susceptibilnost* i općenito je kompleksna. Njezin imaginarni dio uključuje gubitke u dielektriku. Izraz (2–35) pokazuje da je električna polarizacija linearna funkcija električnog polja. Materijali s čvrsto vezanim nabojima imaju malu susceptibilnost i teško ih je polarizirati jer su im parametri ω_0 i K vrlo velikih iznosa.

Da bi se dobilo ukupno pomačno polje, električnoj polarizaciji $\vec{P}_\mathrm{e}$ valja pribrojiti $\varepsilon_0\vec{E}$, tj.

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}_\mathrm{e} . \tag{2–36}$$

Veličine $\vec{D}$ i $\vec{P}_\mathrm{e}$ mjere se u kulonima po četvornome metru (As/m^2). Uvrštenjem izraza (2–35) u (2–36), dobiva se korisna relacija građe dielektričnih materijala

$$\vec{D} = \varepsilon_0\left[1 + \chi_\mathrm{e}(\omega)\right]\vec{E} = \varepsilon(\omega)\vec{E} . \tag{2–37}$$

U veličini

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\left[1 + \chi_\mathrm{e}(\omega)\right] = \varepsilon_0 + \frac{Nq^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega g} \tag{2–38}$$

sadržana su sva dielektrična svojstva materijala. Stoga je toj veličini i dan poseban naziv, *permitivnost materijala*. Izraz (2–38) može se napisati u prikladnijem obliku kao

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\omega_\mathrm{p}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega g} , \tag{2–39}$$

gdje je ω_p tzv. *frekvencija plazme* razmatranog materijala definirana izrazom

$$\omega_{\mathrm{p}}^2 = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}. \tag{2–40}$$

Za dielektrike je $\omega_0 \neq 0$, pa ograničenje na donjem kraju frekvencijskog područja ($\omega = 0$) daje nazivnu (niskofrekvencijsku) permitivnost materijala

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_0^2} = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \frac{Nq^2}{m\omega_0^2}. \tag{2–41}$$

Takvi su materijali izotropni, homogeni i linearni. Kad god postoje učinci prigušenja, tj. gubitci u materijalu, tad je permitivnost $\varepsilon(\omega)$ kompleksna veličina i može se napisati kao

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - \mathrm{j}\varepsilon''(\omega). \tag{2–42a}$$

Izotropni materijali pokazuju jednaku permitivnost u svim smjerovima prostora. No u sljedećem ćemo odjeljku vidjeti da postoje i anizotropni dielektrici različite permitivnosti u različitim smjerovima prostora. Rastavljanjem izraza (2–38) na realni i imaginarni dio izlazi:

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \omega_{\mathrm{p}}^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2}, \qquad \varepsilon''(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_{\mathrm{p}}^2 \omega g}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2}.$$

Realnim dijelom, $\varepsilon'(\omega)$, definiran je *indeks loma*, $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon'(\omega)/\varepsilon_0}$. Imaginarnim dijelom, $\varepsilon''(\omega)$, uključeni su gubitci u materijalu jer se dio elektromagnetske energije pretvara u toplinu zbog prigušenja vibracija dipolnih momenata. Zakon o očuvanju energije nalaže da imaginarni dio permitivnosti bude negativan, odnosno da je $\varepsilon''(\omega)$ pozitivan. Izluči li se član $\varepsilon'(\omega)$ s desne strane izraza (2–42a), dobiva se izraz

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega)\left[1 - \mathrm{j}\tan\delta_\varepsilon(\omega)\right], \tag{2–42b}$$

u kojem se pojavljuje korisna veličina

$$\tan\delta_\varepsilon(\omega) = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)}, \tag{2–43}$$

poznata pod nazivom *tangens gubitaka* dielektrika. To je ujedno omjer imaginarnog i realnog dijela pomačne struje, koji upućuje na kakvoću dielektrika. Mikrovalne materijale na zadanoj frekvenciji moguće je opisati dvjema veličinama: relativnom permitivnošću $\varepsilon_{\mathrm{r}} = \varepsilon'/\varepsilon_0$ i tangensom gubitaka $\tan\delta_\varepsilon$. Za različite materijale, te su veličine prikazane u dodatku D. Ako se, primjerice, neka zadaća riješi za slučaj bez gubitaka, onda se gubitci mogu naknadno uključiti tako da se realna permitivnost jednostavno zamijeni kompleksnom permitivnošću (2–42).

Osim toga, zbog kauzalnosti, realni i imaginarni dijelovi permitivnosti međusobno su povezani Kramers-Kronigovim relacijama [7] i [8]:

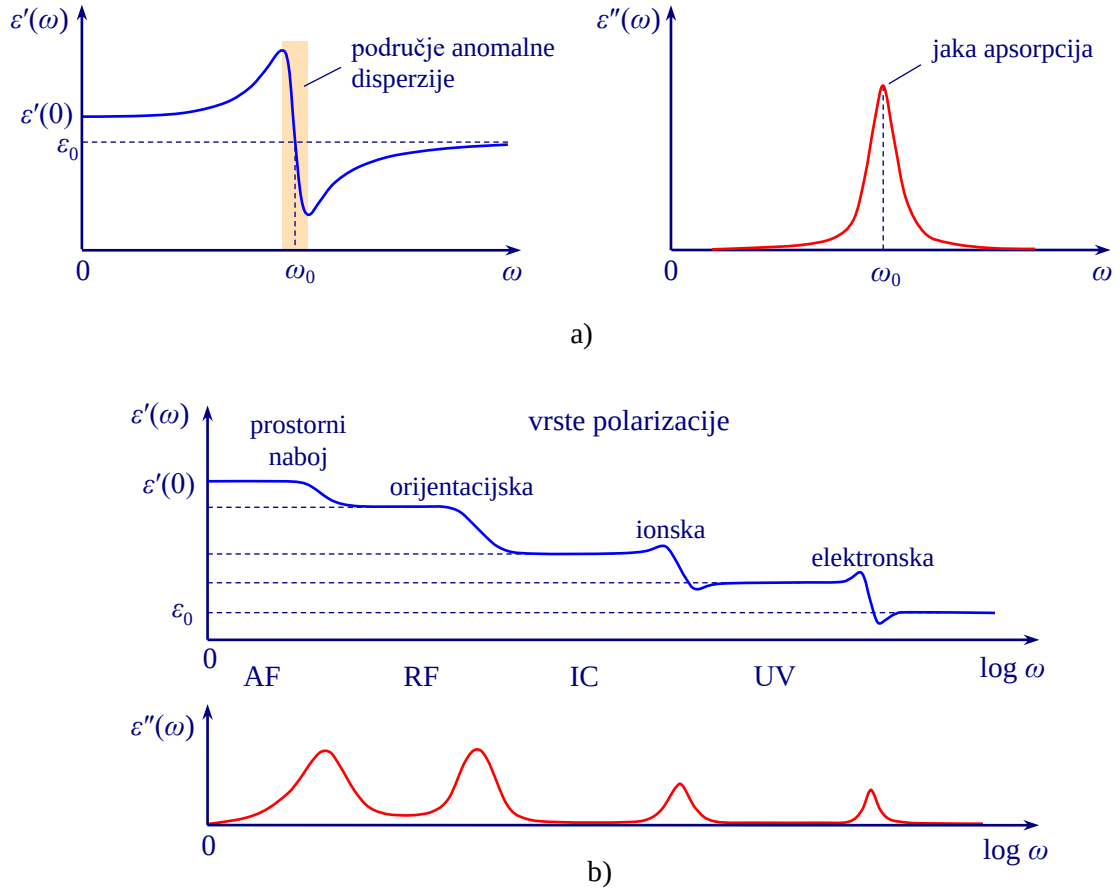
$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega'\varepsilon''(\omega')}{(\omega')^2 - \omega^2}\,\mathrm{d}\omega', \qquad \varepsilon''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega'\varepsilon'(\omega') - \varepsilon_0}{(\omega')^2 - \omega^2}\,\mathrm{d}\omega'. \tag{2–44}$$

Materijale s frekvencijski ovisnom permitivnošću $\varepsilon(\omega)$ obično nazivamo disperzivnim materijalima. Frekvencijska ovisnost tih materijala proizlazi iz činjenice da u izmjeničnom električnom polju odziv polarizacije ne može nastati trenutačno. Takav dinamički odziv u vremenskoj domeni valja opisati konvolucijskom i kauzalnom relacijom građe

$$\vec{D}(\vec{r},t) \quad \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(t-t')\vec{E}(\vec{r},t')\mathrm{d}t', \tag{2–45a}$$

koja postaje multiplikativna u frekvencijskoj (spektralnoj) domeni, tj.

$$\vec{D}(\vec{r},\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega). \tag{2–45b}$$



Slika 2.5. a) Učinak elektronske polarizacije; **b)** frekvencijska ovisnost permitivnosti unutar velikog raspona frekvencija za hipotetični dielektrik. (AF – audiofrekvencije, RF – radiofrekvencije, IC – infracrveno područje, UV – ultraljubičasto područje)

Zapravo, svi su materijali disperzivni. No $\varepsilon(\omega)$ upućuje na jaku ovisnost o ω samo u okolišu nekih diskretnih frekvencija. To su ustvari rezonantne frekvencije koje pripadaju odgovarajućim modovima vibracija i različitim vrstama polarizacije (elektronska, ionska, orijentacijska itd). Tako, primjerice, na optičkim frekvencijama indeks loma vode iznosi $n = \sqrt{\varepsilon_r} = 1{,}33$, a u RF i nižem frekvencijskom području $n = 9$.

Na slici 2.5a) prikazan je učinak elektronske polarizacije. Može se uočiti da oko rezonantne frekvencije materijal ima velike gubitke, a iznad nje permitivnost postaje manja od ε_0. Slične učinke pokazuju i druge vrste polarizacije, kao što se može vidjeti na slici 2.5b). Očito je da su rezonantne frekvencije povezane s efektivnim masama čestica ili tijela koje pridonose polarizaciji. Veće efektivne mase daju niže rezonantne frekvencije, jer je zbog konačnog momenta tromosti molekula potrebno konačno vrijeme da se teške molekule mogu orijentirati u smjeru vanjskog polja. Stoga će se na frekvencijama u višem mikrovalnom području ili iznad njega polarni doprinos permitivnosti smanjivati jer trome molekule više neće moći pratiti brze promjene polja. Razmjerno široka frekvencijska područja minimalnih promjena permitivnosti nazivaju se područjima *normalne disperzije*. U njima permitivnost monotono raste s frekvencijom. Nasuprot tomu, područja s naglim promjenama (oko frekvencije plazme ω_p) nazivaju se područjima *anomalne disperzije*.

Slične relacije građe imaju i materijali koji se mogu magnetizirati, tj.

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{P}_m), \qquad (2\text{–}46a)$$

gdje $\vec{P}_{\mathrm{m}}$ označuje *magnetsku polarizaciju* ili *vektor magnetizacije*. U uobičajenim materijalima $\vec{P}_{\mathrm{m}}$ linearno ovisi o magnetskom polju $\vec{H}$ pa izraz (2–46a) valja napisati kao

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}})\vec{H} = \mu\vec{H}\,, \tag{2–46b}$$

gdje je χ_{m} kompleksna magnetska susceptibilnost. Stoga se, slično izrazu (2–38) za permitivnost, može definirati izraz za permeabilnost materijala, $\mu = \mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}}) = \mu' - \mathrm{j}\mu''$. Imaginarnim dijelom magnetske susceptibilnosti uzeti su u obzir gubitci zbog prigušnih sila. Budući da stvarna magnetska struja ne postoji, nema ni magnetske provodnosti.

Materijali koji se mogu magnetizirati obično pokazuju izrazito anizotropna svojstva (odjeljak 2.3.2). Magnetizacija materijala može se objasniti fizikalnom slikom u kojoj se naboji koji se gibaju u atomu ili molekuli mogu staviti u vezu s vanjskim magnetskim poljem. To su, primjerice, spinovi u feritnom materijalu.

Vodiči

Za većinu vodljivih materijala vrijedi *Ohmov zakon*

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{2–47}$$

koji je eksperimentalno dokazan. Ovdje je σ provodnost materijala koja se mjeri u jedinicama simens po četvornome metru (S/m^2). Gustoća struje razmjerna je električnom polju i ima isti smjer kao i polje. Primijeni li se na elementarni volumen, vektorska jednadžba (2–47) može se svesti na izraz $I = V/R$ koji je dobro poznat u teoriji električnih krugova. U dodatku D mogu se naći podatci o provodnosti različitih materijala.

Ohmov se zakon može izvesti iz ranije opisanog modela primjenom relacije $J = \rho v$, gdje je $\rho = -Nq$ volumna gustoća negativnog naboja. Iz jednadžbe (2–34) slijedi

$$J = \rho v = \frac{\mathrm{j}\omega Nq^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega g}E = \sigma(\omega)E\,, \tag{2–48}$$

iz čega se može prepoznati da je provodnost materijala jednaka

$$\sigma(\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega Nq^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega g} = \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega g}\,. \tag{2–49}$$

Može se također uočiti da $\sigma(\omega)/\mathrm{j}\omega$ označuje *električnu susceptibilnost* koja je definirana za dielektrike izrazom (2–35). Budući da je volumna gustoća struje $J = -Nqv = -\mathrm{j}\omega NqX = \mathrm{j}\omega P$, izlazi $P = J/\mathrm{j}\omega = \sigma(\omega)E/\mathrm{j}\omega$. Dalje slijedi da je $\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 = \sigma(\omega)/\mathrm{j}\omega$, tj.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega g} = \varepsilon_0\left[1 - \mathrm{j}\frac{\sigma(\omega)}{\omega\varepsilon_0}\right]. \tag{2–50}$$

Dakle, pri određivanju svojstava materijala jednu od temeljnih uloga ima frekvencija, tj. omjer $\sigma(\omega)/\omega\varepsilon_0$ u izrazu (2–50). Materijal koji je možda dobar vodič na niskim frekvencijama može postati loš vodič poput tla na visokim frekvencijama. Na frekvencijama do približno 1 MHz prosječno tlo ima odlike dobrog vodiča, na frekvencijama od 1 MHz do 1 GHz kvazi-vodiča, a u mikrovalnome području poprima odlike dielektrika. U mikrovalnome području, većina metala ima odlike dobrog ili izvrstnog vodiča. Na slici 2.6 prikazan je omjer $\sigma/\omega\varepsilon$ u ovisnosti o frekvenciji za nekoliko različitih sredstava, gdje je pretpostavljeno da veličine σ i ε zadržavaju svoje niskofrekvencijske vrijednosti na svim frekvencijama.

Budući da su u vodičima (metalima) nositelji naboja slobodni, u izrazu (2–49) može se uvrstiti $\omega_0 = 0$, pa se dijeljenjem brojnika i nazivnika veličinom $\mathrm{j}\omega$ dobiva

$$\sigma(\omega) = \frac{\varepsilon_0\omega_{\mathrm{p}}^2}{g + \mathrm{j}\omega}\,. \tag{2–51}$$

Uz uvjet $\omega=0$ dobiva se izraz za *nominalnu provodnost materijala*

$$\sigma(0)=\frac{\varepsilon_0\omega_\mathrm{p}^2}{g}=\frac{Nq^2}{mg}. \tag{2–52}$$

Primjenom Ohmova i Gaussova zakona na jednadžbu kontinuiteta struje dobiva se ova diferencijalna jednadžba prvoga reda

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}=\nabla\cdot\vec{J}=\sigma\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\nabla\cdot\varepsilon\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho,$$

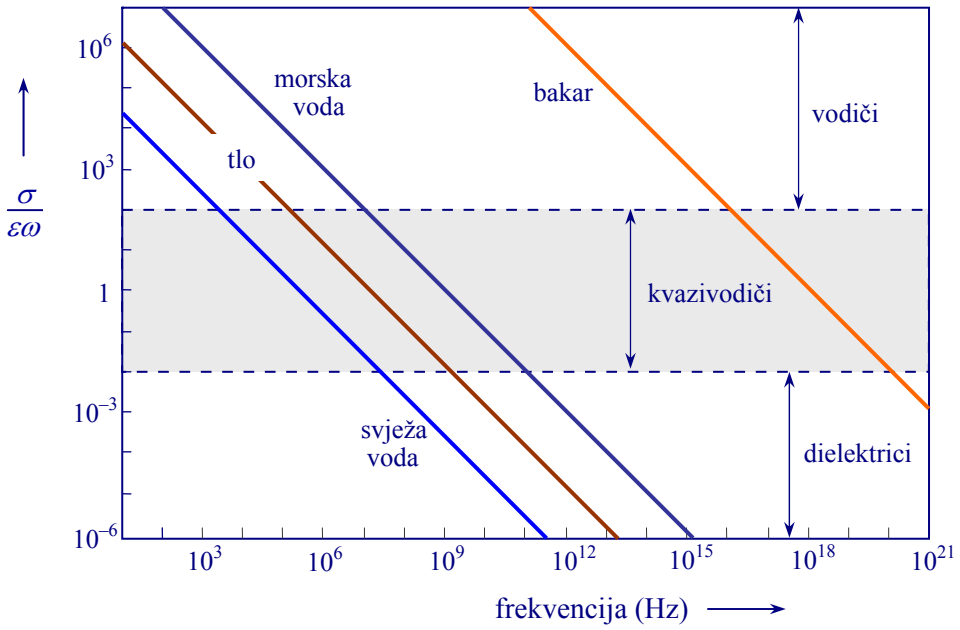
tj.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho=0. \tag{2–53}$$

Integriranjem jednadžbe (2–53) dobiva se rješenje

$$\rho(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t=0)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_\mathrm{c}}}, \tag{2–54}$$

gdje je $\tau_\mathrm{c}=\varepsilon/\sigma$ *vrijeme relaksacije naboja*. Ta veličina pokazuje kojom će se brzom gustoća naboja smanjiti za faktor 1/e u odnosu na svoju početnu vrijednost. Za dielektrik bez gubitaka τ_c poprima beskonačnu vrijednost. Drugim riječima, naboj će zadržati svoju početnu gustoću neograničeno dugo. S druge strane, u dobrim je vodičima vrijeme relaksacije ekstremno kratko. Primjerice, vrijeme relaksacije naboja za bakar iznosi oko $1{,}5\cdot10^{-19}$ s, pa tako kratak interval odgovara periodi *X*-zraka. U mikrovalnome području vrijeme relaksacije naboja znatno je kraće od periode elektromagnetskoga vala pa vodič ne može dovoljno dugo zadržati razdiobu naboja. Stoga je rasprostiranje vala u vodiču ograničeno na vrlo malu udaljenost. No na dovoljno visokim frekvencijama, primjerice reda 10^{19} Hz, relaksacijsko je vrijeme sumjerljivo trajanju periode pa se val može rasprostirati i u metalima. Da bi u idealnom vodiču ($\sigma\to\infty$) gustoća struje $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ bila konačna, električno polje mora biti jednako nuli. Uz konačne ali velike vrijednosti provodnosti, metale možemo poistovjetiti sa skoro savršenim vodičima.



Slika 2.6. Usporedba električnih svojstava materijala u širem frekvencijskom području

Gubitci u dielektričnom materijalu mogu nastati i zbog konačne provodnosti σ koja sudjeluje u provodnoj struji gustoće $\vec{J} = \sigma\vec{E}$. Stoga se Maxwellova rotorska jednadžba za struju (Ampèreov zakon) može napisati u fazorskom obliku kao

$$\nabla \times \vec{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E} = \mathrm{j}\omega\varepsilon'\vec{E} + \omega\varepsilon''\vec{E}, \tag{2–55}$$

gdje se $\varepsilon'' + \sigma/\omega$ može uzeti kao efektivni imaginarni dio permitivnosti ili $\omega\varepsilon'' + \sigma$ kao efektivna provodnost dielektrika. No, makroskopskim promatranjem bilo kojeg materijala, mehanizam gubitaka koji nastaje vibracijama dipolnih momenata ne može se razlučiti od mehanizma gubitaka koje uzrokuju provodne struje.

Plazma

Pojam plazma označuje vruć, posve ioniziran »plin« sastavljen od iona i elektrona koji su posve izgubili vezu s atomima. U njoj se nabijene čestice mogu slobodno gibati pod utjecajem utisnutog polja i interakcije između samih čestica. Plazma je električki neutralna, jer je ukupni negativni naboj slobodnih elektrona jednak ukupnom pozitivnom naboju iona, pa je srednja vrijednost gustoće naboja po vremenu jednaka nuli. Plazma se razlikuje od drugih materijala poglavito po tomu što u njoj ne postoje atomske rešetke koje bi ograničavale gibanje čestica. No, čak i u plinu, interakcije između samih čestica te interakcija čestica s poljima stvaraju polarizacijske učinke, što stvara razliku između permitivnosti plina i permitivnosti slobodnoga prostora. Valja dodati da izlaganje plina vanjskom polju uzrokuje tok sekundarne struje što je rezultat Lorentzove sile na čestice. Te pokretne čestice međusobnim sudaranjem oslobađaju svoj zalet, što se može tumačiti kao provodnost.

Za $\omega_0 = 0$, $g = 0$, naš model opisuje elektromagnetska obilježja plazme u kojoj nema sudara čestica ili je broj sudara zanemarivo mali kao u ionosferi. Također ćemo pretpostaviti da je utisnuto samo polje elektromagnetskoga vala za koji je omjer između magnetskog i električnog polja jednak $\left|\vec{H}\right| / \left|\vec{E}\right| = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} = 1/\eta_0$, tako da je

$$\frac{\left|\vec{B}\right|}{\left|\vec{E}\right|} = \mu_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{1}{c}.$$

Dakle, u jednadžbi Lorentzove sile (2–12) može se posve zanemariti utjecaj magnetskog polja ravnoga vala u slobodnome prostoru pa je sila na elektron naboja $-q$ približno jednaka

$$\vec{F} = -q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \simeq -q\vec{E}, \quad \text{za } v \ll c.$$

Uz te uvjete, iz izraza (2–51), dobiva se posve imaginarna provodnost

$$\sigma(\omega) = -\mathrm{j}\varepsilon_0\omega_\mathrm{p}^2/\omega. \tag{2–56}$$

Otuda je, u skladu s izrazom (2–50), odgovarajuća permitivnost posve realna, tj.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\sigma(\omega)}{\mathrm{j}\omega} = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right), \tag{2–57}$$

gdje se kružna frekvencija plazme može izračunati iz izraza (2–40) kao

$$\omega_\mathrm{p} = 2\pi f_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}}. \tag{2–58}$$

Budući da je tipična vrijednost gustoće elektrona u ionosferi približno jednaka $N = 10^{12}$, iz izraza (2–58) izlazi $f_\mathrm{p} = 8{,}98$ MHz. Frekvencija plazme prirodna je frekvencija ili rezonantna frekvencija pomaknutog elektrona (ili skupine elektrona) u uniformnoj plazmi gdje elektroni titraju oko svog ravnotežnog stanja. Za frekvencije ispod f_p, efektivna je permitivnost plazme negativna veličina. Više o plazmi i ionosferi može se naći u odjeljku 10.5.2.

2.3.2. Anizotropni materijali

Materijale u kojima je $\vec{P}$ u linearnom suodnosu i u istom smjeru s $\vec{E}$ nalazimo pod nazivom *linearni izotropni materijali*. Nelinearni učinci obično nastaju tek pri ekstremno jakim poljima i nećemo ih podrobnije razmatrati. No u mikrovalnoj se praksi nerijetko nalaze *anizotropni materijali* pa ćemo proučiti neke njihove temeljne odlike. Ako kristalna struktura nema sfernu simetriju poput kristalne rešetke oblika kocke, onda se može očekivati da će polarizacija u jediničnom volumenu ovisiti o smjeru utisnutog polja. Stoga u relacijama građe anizotropnih materijala vektori $\vec{D}$ i $\vec{E}$ više nisu povezani jednostavnom konstantom proporcionalnosti nego se permitivnost anizotropnih materijala pojavljuje se kao tenzorska veličina. Tad za opis takvih materijala valja rabiti tenzorsku jednadžbu

$$\vec{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\vec{E} \tag{2–59a}$$

gdje tenzor permitivnosti $\overline{\overline{\varepsilon}}$ (označen dvostrukim crticama iznad simbola ε) može biti realan ili kompleksan. Ako se pravilna kristalna struktura postavi u proizvoljno orijentiran koordinatni sustav, onda se jednadžba (2–59a) može napisati u matričnom obliku kao

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \tag{2–59b}$$

gdje su elementi ε_{ij} općenito međusobno različiti. No za posebnu orijentaciju kristalne strukture, tenzor u izrazu (2–59b) može se pojednostavniti tako da se tenzorska relacija (2–59a) svodi na $D_x = \varepsilon_{xx}E_x$, $D_y = \varepsilon_{yy}E_y$, $D_z = \varepsilon_{zz}E_z$.

Plazma, koja se nalazi u statičkom magnetskom polju, upućuje na giroelektrična svojstva i može se općenito izraziti tenzorskom permitivnošću oblika

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} K_1 & \mathrm{j}K_2 & 0 \\ -\mathrm{j}K_2 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix}. \tag{2–60}$$

Matrica (2–60) naziva se *girotropni tenzor* i ima zanimljivo svojstvo, $\overline{\overline{\varepsilon}} = (\overline{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{t}})^*$. Ako je matrica jednaka svojoj transponiranoj konjugiranoj matrici, onda se naziva *hermitska matrica*. Može se pokazati da su tada K_1 i K_2 funkcije frekvencije plazme i *ciklotronske frekvencije*

$$\omega_{\mathrm{c}} = \frac{qB_0}{m} \tag{2–61}$$

kojom se elektroni okreću u statičkom magnetskom polju djelovanjem Lorentzove sile.

Relacija (2–61) upućuje na linearnu ovisnost ciklotronske frekvencija o gustoći statičkog magnetskog toka B_0. Elementi tenzora (2–60) mogu se napisati kao:

$$K_1 = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2}, \quad K_2 = -\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2\omega_{\mathrm{c}}}{\omega(\omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2)}, \quad K_3 = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}.$$

Valja uočiti da na ciklotronskoj frekvenciji, elementi tenzora K_1 i K_2 poprimaju beskonačne vrijednosti. Bez magnetske indukcije, $B_0 = 0$, tenzorski elementi poprimaju vrijednosti $K_1 = K_3 = 1 - \omega_{\mathrm{p}}^2 / \omega^2$, a $K_2 = 0$ pa se za plazmu bez sudara dobiva izotropni tenzor.

Slično se mogu prikazati i anizotropni magnetski materijali,

$$B = \overline{\overline{\mu}}H\,. \tag{2–62}$$

Među tim materijalima izrazito anizotropna svojstva pokazuju magnetizirani feriti. Feritni materijali imaju široku primjenu u nereciprocnim mikrovalnim napravama. Permeabilnost im na mikrovalnim frekvencijama ima svojstva slična permitivnosti magnetizirane plazme (2–60)

pa ih se općenito može izraziti tenzorskom permeabilnošću, tj.

$$\bar{\bar{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mathrm{j}\mu_2 & 0 \\ -\mathrm{j}\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}, \tag{2–63}$$

gdje je na ferit utisnuto statičko magnetsko polje u smjeru u kojem se nalazi permeabilnost μ_3. O svojstvima ferita i feritnim napravama bit će više riječi u odjeljku 7.7.

2.3.3. Umjetni dielektrici

Neka svojstva dielektričnih materijala mogu se ostvariti umjetnim dielektricima koji se nerijetko rabe u antenskim lećama za fokusiranje elektromagnetskih valova. Dok se stvarni dielektrik izgrađen od atomskih i molekularnih čestica mikroskopski malih dimenzija, umjetni se dielektrici sastoje od diskretnih metalnih čestica makroskopskih dimenzija. U tu se svrhu, primjerice, mogu uporabiti metalne kuglice, kao što je prikazano na slici 2.7a). Te su kuglice ustrojene u trodimenzionalnu rešetkastu strukturu pravilnog rasporeda nalik kristalnoj rešetki atoma u stvarnom dielektriku. Pritom razmak između susjednih elemenata i promjer kuglica moraju biti znatno manji od valne duljine elektromagnetskoga vala kojim je pobuđen umjetni dielektrik. Uporabom šupljih metalnih kuglica ili trakastih metalnih dipola, masa tih umjetnih dielektričnih materijala može se znatno smanjiti u usporedbi s prirodnim dielektrikom jednakih makroskopskih svojstava.

Izračunajmo sad permitivnost umjetnog dielektrika koji se sastoji od vodljivih kuglica znatno manjeg promjera od valne duljine. Premda približan, taj će račun dati dobru fizikalnu sliku o polarizaciji materijala i pokazati kako se polarizacija može primijeniti u praktičnim zadaćama [18]. Pretpostavimo li da je na svaku pojedinačnu kuglicu na slici 2.7a) utisnuto jednoliko električno polje $\bar{E}$, to će polje na kuglicama inducirati naboj, kao što je prikazano na slici 2.7b). Pritom se kuglice ponašaju poput polariziranih atoma u stvarnom dielektriku pa ih je moguće nadomjestiti električnim dipolima. Ovdje je polarizacija P umjetnog dielektrika jednaka ukupnom učinku dipolnih momenata unutar jediničnog volumena, tj. $P=Np$, gdje je p veličina dipolnog momenta pojedinačne kuglice, a N volumna gustoća kuglica, tj. njihov ukupan broj unutar jediničnog volumena. Iz izraza (2–36) izlazi $\varepsilon=\varepsilon_0+P/E$, tj. $\varepsilon=\varepsilon_0+Np/E$.

U skladu s time, permitivnost umjetnog dielektrika može se odrediti ako je poznat ukupan broj kuglica u jediničnom volumenu i dipolni moment za jedinično električno polje. Interakcije između kuglica mogu se posve zanemariti ako se sve kuglice nalaze u uniformnom polju i ako su im polumjeri znatno manji od međusobnog razmaka.

Potencijal V_0 u točki unutar uniformnog polja može se napisati kao

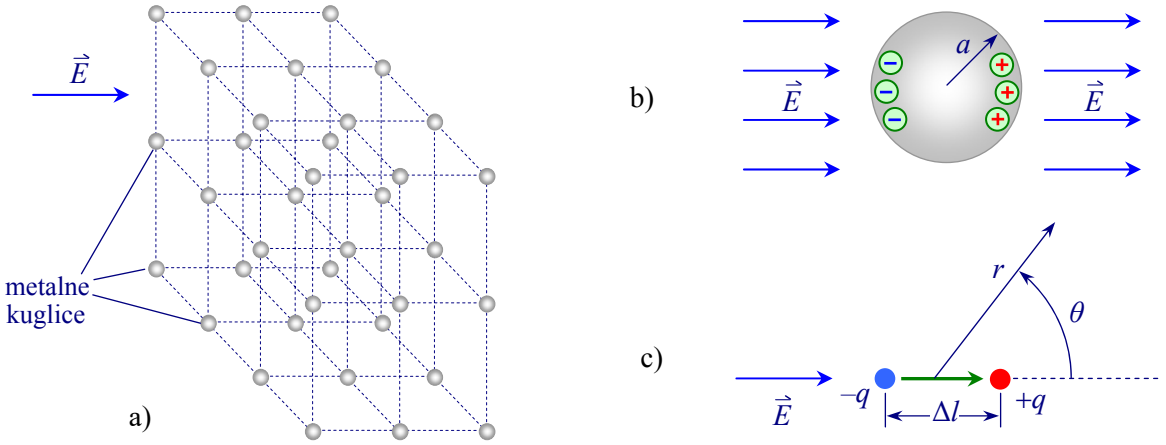
$$V_0 = -\int_0^r E\cos\theta\,\mathrm{d}r = -Er\cos\theta\,,$$

gdje je r radijalna udaljenost od lokalnog ishodišta u kojem se nalazi središte kuglice, a θ kut u odnosu na smjer električnog polja. U skladu s tim izrazom, vrijedi da je $V_0 = 0$ u svim točkama ravnine koja prolazi ishodištem i istodobno je okomita na smjer električnog polja. Za $r \gg \Delta l$, potencijal dipola u zraku može se napisati kao

$$V_\mathrm{d} = \frac{q\Delta l\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,.$$

Ukupan se potencijal može dobiti superpozicijom tih dvaju potencijala, tj.

$$V = V_\mathrm{d} + V_0 = \frac{q\Delta l\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - Er\cos\theta\,. \tag{2–64}$$



Slika 2.7. a) Struktura umjetnog dielektrika pravilno raspoređenih savršeno vodljivih kuglica, **b)** pojedinačna kuglica umjetnog dielektrika, **c)** nadomjesni električni dipol

U električnom polju samo dolazi do preraspodjele naboja na površini vodljive kuglice, tj. količine pozitivnog i negativnog naboja ostaju jednake, pa je potencijal jednak nuli. Stoga za kuglice polumjera a, uz uvjet $r=a$, iz izraza (2–64) izlazi

$$\frac{q\Delta l}{E} = 4\pi\varepsilon_0 a^3$$

pa se uvrštenjem u izraz za permitivnost dobiva $\varepsilon=\varepsilon_0+4\pi\varepsilon_0 N a^3$, tj.

$$\varepsilon_\mathrm{r} = 1 + 4\pi N a^3 , \qquad (2–65a)$$

gdje su ε i ε_r permitivnost, odnosno relativna permitivnost umjetnog dielektrika, a N volumna gustoća kuglica. Budući da je volumen kuglice $V_\mathrm{k}=4a^3/3$, taj se izraz može napisati i kao

$$\varepsilon_\mathrm{r} = 1 + 3V_\mathrm{k} N . \qquad (2–65b)$$

Otuda se može zaključiti da permitivnost umjetnog dielektrika ovisi o volumnoj gustoći kuglica i njihovoj veličini.

Posebnim oblikovanjem vodljivih elemenata (ovalnim, valjkastim i sl.) i odabirom različite periodičnosti za različite smjerove, moguće je ostvariti izrazito anizotropne umjetne dielektrike (metamaterijale) s posebnim svojstvima rasprostiranja elektromagnetskih valova.

2.4. Električne i magnetske struje

U elektromagnetizmu nailazimo na različite oblike razdiobe električnog naboja u prostoru, na površini (plohi) ili uzduž niti (linije). Izvorno se pod pojmom struja podrazumijevao tok slobodnih nositelja naboja u vodičima. Zaslugom Maxwella, pojam struje proširen je i na *pomačnu struju* koja se može predočiti pomicanjem vezanog naboja u dielektričnom materijalu. Pojam pomačna struja primjenjuje se i pri razmatranju polja i valova u vakuumu, unatoč tomu što ta struja nije posljedica gibanja ili premještanja naboja. Struja se može i dalje poopćiti uvođenjem magnetske pomačne struje, što je »dualan« pojam električnoj pomačnoj struji. Na kraju su uvedene *utisnute struje*, električne i magnetske, koje označuju izvore. Premda ćemo uglavnom razmatrati volumne gustoće struje koje se mjere u amperima po četvornome metru, radi jednostavnosti nerijetko ćemo primjenjivati izraz struja. Budući da se u mikrovalnom inženjerstvu obično rabe harmonijske veličine sinusne vremenske ovisnosti, valja primijeniti fazorski prikaz.

U metalima, primjerice, postoji jednaka količina pozitivnog naboja (u atomskoj jezgri) i negativnog naboja (u elektronskim ljuskama). Svi pozitivni naboji i većina negativnog naboja ne mogu se pomicati. No kad se na krajevima nekog vodiča priključi izvor napona, tad se neki elektroni ipak mogu pomicati, tj. premještati od atoma do atoma. To su oni elektroni koji se nalaze u vanjskim ljuskama atoma. Pomicanje elektrona od atoma do atoma stvara tok struje koji se ponaša u skladu s Ohmovim zakonom $\vec{J}=\sigma\vec{E}$. Ta se struja naziva *provodna* ili *kondukcijska struja*. Elektroni koji izlaze iz vodiča na jednome kraju ne moraju nužno biti ti isti elektroni koji su ušli na drugom kraju vodiča. Premda je općenito kompleksna, ta je struja u mikrovalnome području za većinu vodljivih materijala realna veličina. Čak i u dielektričnim materijalima postoji izvjesna količina provodne struje, ali obično je malog iznosa. Za proizvoljnu površinu S presjeka vodiča, stvarna ukupna struja koja teče kroz njega dana je kao

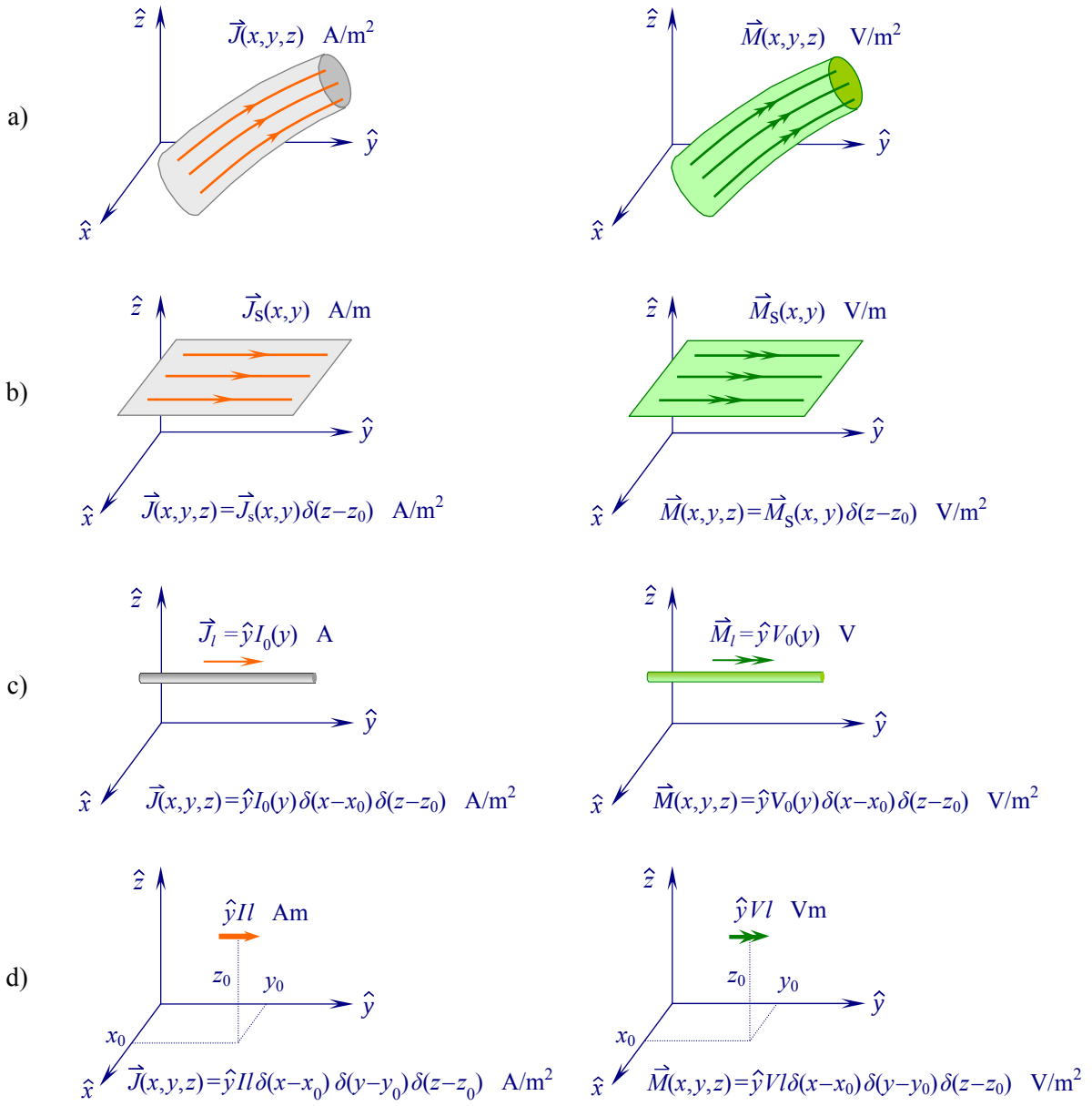
$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n}\mathrm{d}S$$

i mjeri se u amperima. Struja nabijenih čestica u prostoru naziva se *konvekcijska struja*, $\vec{J}=\rho\vec{v}$, gdje je $\vec{v}$ brzina kojom se kreću čestice, elektroni, ioni i sl. Konvekcijska je struja, primjerice, struja elektrona u elektronskim cijevima. No valja je razlikovati od provodne struje pri čemu se atomi vodljivog sredstva ne gibaju. Premda je također vezana sa statičkim ili dinamičkim električnim poljem, ta je veza kod konvekcijske struje općenito nelinearna, što znači da se ne ponaša u skladu s Ohmovim zakonom.

U slobodnome prostoru ne postoje pokretni nositelji naboja pa je prisutna samo *pomačna struja slobodnoga prostora*, $\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\vec{E}$. Uz te struje u materijalu postoji i struja koja je posljedica vezanih naboja. Ta se struja naziva *polarizacijska struja*, a bilježi se kao $\mathrm{j}\omega\vec{E}(\varepsilon - \varepsilon_0)$. Budući da član $\mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}$ ima isti matematički oblik kao i pomačna struja slobodnoga prostora naziva se *pomačna struja*. U mikrovalnome inženjerstvu nerijetko nas zanima razlaganje struje na komponente. Komponenta $\varepsilon_0(\sigma+\omega\varepsilon'')\vec{E}$ istofazna je s električnim poljem $\vec{E}$ i naziva se *disipativna struja*, a komponenta $\mathrm{j}\omega\varepsilon'\vec{E}$ koja prethodi u fazi polju $\vec{E}$ za 90 stupnjeva naziva se *reaktivna struja*. To je ustvari poopćenje poimanja struje iz teorije električnih krugova [5], koje kaže da disipativna struja stvara gubitke snage, a reaktivna struja pridonosi pohrani energije.

Tablica 2.1. Električne i magnetske struje

Vrsta struje	Gustoća kompleksne električne struje	Gustoća kompleksne magnetske struje
provodna	$\sigma\vec{E}$	ne postoji
konvekcijska	$\rho\vec{v}$	ne postoji
pomačna u vakuumu	$\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\vec{E}$	$\mathrm{j}\omega\mu_0\vec{H}$
polarizacijska	$\mathrm{j}\omega(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}$	$\mathrm{j}\omega(\mu-\mu_0)\vec{H}$
pomačna	$\mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}$	$\mathrm{j}\omega\mu\vec{H}$
disipativna	$(\sigma+\omega\varepsilon'')\vec{E}$	$\omega\mu''\vec{H}$
reaktivna	$\mathrm{j}\omega\varepsilon'\vec{E}$	$\mathrm{j}\omega\mu'\vec{H}$
inducirana	$(\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon)\vec{E}=(\sigma+\omega\varepsilon''+\mathrm{j}\omega\varepsilon')\vec{E}$	$\mathrm{j}\omega\mu\vec{H}=(\omega\mu''+\mathrm{j}\omega\mu')\vec{H}$
utisnuta	$\vec{J}_\mathrm{G}$	$\vec{M}_\mathrm{G}$ (fiktivna)
ukupna	$\vec{J}_\mathrm{uk}=(\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon)\vec{E}+\vec{J}_\mathrm{G}$	$\vec{M}_\mathrm{uk}=\mathrm{j}\omega\mu\vec{H}+\vec{M}_\mathrm{G}$

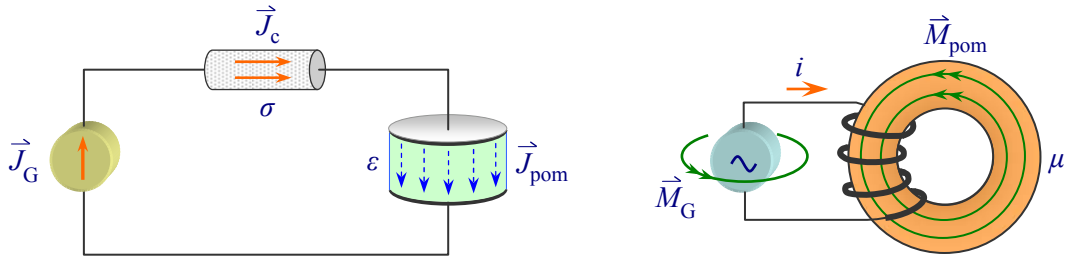


Slika 2.8. Električne i magnetske struje; **a)** volumna struja, **b)** plošna struja u ravnini $z=z_0$, **c)** linijska struja (strujna nit) paralelna s osi $\hat{y}$, **d)** elementarni strujni dipol paralelan s osi $\hat{y}$

Sve do sad spomenute vrste struje mogu se okarakterizirati kao *inducirane struje*, tj. te su struje uzrokovane poljima. No postoji još jedna vrsta struje koju ćemo zvati *utisnuta struja*. To je struja koja označuje izvore ili poznate veličine i ne ovisi o poljima nego ih stvara. Ukupna je struja zbroj induciranih i utisnutih struja.

Prema istom obrascu, mogu se razvrstati i magnetske struje. U tablici 2.1. sažete su sve vrste električnih i magnetskih struja s kojima ćemo se susretati u ovoj knjizi.

Izvori električne i fiktivne magnetske struje, $\vec{J}$ i $\vec{M}$, u Maxwellovim jednadžbama jesu volumne struje čije su jedinice A/m^2, odnosno V/m^2. No u praksi se nerijetko susreću stvarne struje u obliku plošne struje (strujne plohe), linijske struje (strujne niti) ili u obliku elementarnog strujnog dipola. Te se posebne vrste struje uvijek mogu svesti na volumne struje primjenom Diracove delta-funkcije. Na slici 2.8 prikazani su primjeri toga postupka [11], gdje su električne struje označene jednostrukom strelicom, a magnetske dvostrukom strelicom.



a) b)

Slika 2.9. Električni i magnetski krugovi za definiranje: **a)** gustoće električne struje; **b)** gustoće magnetske struje

Da bi se što lakše shvatilo puno značenje električnih i magnetskih struja, s pomoću kojih je moguće povezati teoriju polja i valova s teorijom električnih krugova i mreža, razmotrit ćemo dva dobro poznata strujna kruga prikazana na slici 2.9. Na slici 2.9a) strujni izvor $\vec{J}_G$ proizvodi provodnu struju $\vec{J}_v=\sigma\vec{E}$ koja teče otporom i pomačnu struju $\vec{J}_{pom}=j\omega\varepsilon\vec{E}$ koja teče kondenzatorom. Na slici 2.9b) naponski izvor $\vec{M}_G$ proizvodi električnu struju u žici koja dalje proizvodi pomačnu magnetsku struju $\vec{M}_{pom}=j\omega\mu\vec{H}$ magnetskoj jezgri.

Općenito se može reći da su utisnute struje one koje doživljavamo kao izvore u nekom elektromagnetskom problemu. Tako se, primjerice, u nekom problemu kao izvor može uzeti provodna struja, a u nekom drugom problemu to može biti struja polarizacije u dielektriku ili pak struja magnetizacije.

2.5. Ravni elektromagnetski valovi

2.5.1. Valna jednadžba

Jedan od najznačajnijih rezultata Maxwellovih jednadžba pokazuje da se električna i magnetska polja mogu rasprostirati u obliku elektromagnetskih valova i tako prenositi energiju i informaciju prostorom. Matematički, elektromagnetski su valovi podskup rješenja Maxwellovih jednadžba. Ta rješenja zadovoljavaju *elektromagnetsku valnu jednadžbu* koju je moguće izvesti iz Maxwellovih jednadžba pod određenim uvjetima. To se može lako pokazati na primjeru jednostavnog valnog gibanja, poput ravnoga vala u homogenom, izotropnom, linearnom sredstvu, u području gdje se valna rješenja rasprostiru daleko od struja i naboja. U tom je slučaju $\vec{J}=0$ i $\rho=0$ pa je $\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon=0$. Za takvo su sredstvo jednadžbe građe vrlo jednostavne, tj. $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, $\vec{B}=\mu\vec{H}$ pa se Maxwellove rotorske jednadžbe svode na:

$$\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \tag{2–66a}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{2–66b}$$

Te jednadžbe tvore sustav dviju jednadžba s dvjema nepoznanicama, $\vec{E}$ i $\vec{H}$. Sad se vektorsko polje $\vec{H}$ može eliminirati tako da se na jednadžbu (2–66a) primijeni operacija rotora i zatim se u desnu stranu dobivenog izraza uvrsti jednadžba (2–66b). Zamjenom redoslijeda parcijalnog deriviranja, dobiva se

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H})=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \tag{2–67a}$$

Na sličan se način može eliminirati ovisnost o električnom polju pa se kao rezultat dobiva

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{H})=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E})=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\,. \tag{2–67b}$$

Iz vektorskog računa (dodatak E) također izlazi:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}\,,$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{H})=\nabla(\nabla\cdot\vec{H})-\nabla^2\vec{H}=-\nabla^2\vec{H}\,,$$

jer je $\nabla\cdot\vec{E}=0$ u području bez izvora, a $\nabla\cdot\vec{H}=0$ iz Gaussova zakon za divergenciju solenoidnih polja. Uvrste li se ti izrazi u jednadžbe (2–67), konačno se dobivaju *valne jednadžbe* u općem obliku:

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\,, \tag{2–68a}$$

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\,. \tag{2–68b}$$

Uočljiva je savršena simetrija jednadžba (2–68). U tim jednadžbama veličina ∇^2 upućuje na trodimenzionalni Laplaceov operator koji u pravokutnom koordinatnom sustavu glasi

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{2–69}$$

Laplaceov operator daje tri komponente za skalar, a devet komponenata za vektor, po tri za svaki smjer. Tako, primjerice, *x*-komponenta vektora $\nabla^2\vec{E}$ u izrazu (2–68a) sadrži ove tri komponente

$$\nabla^2E_x=\frac{\partial^2E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}\,.$$

Sličan oblik imaju *y*- i *z*-komponente, što ukupno daje devet komponenata.

Razmotrimo najprije jednostavniji poseban slučaj u kojem električno polje ima samo komponentu E_x (vektor polja djeluje samo u smjeru osi $\hat{x}$), tj. pretpostavit ćemo da su komponente E_y i E_z jednake nuli. To znači da je vektor električnog polja paralelan s osi $\hat{x}$ pa se može reći da je električno polje $\hat{x}$-polarizirano (odjeljak 2.8). Osim toga, jakost je polja jednolika u smjeru osi $\hat{x}$ i $\hat{y}$, što se može napisati kao $\partial/\partial x=\partial/\partial y=0$. Električno je polje, dakle, samo funkcija varijable *z*. Pretpostavimo također da je sredstvo linearno, homogeno, izotropno i bez gubitaka. U takvom su sredstvu veličine μ i ε realni skalari. Uz ta se ograničenja valna jednadžba (2–68a) svodi na parcijalnu diferencijalnu jednadžbu drugoga reda u najjednostavnijem mogućem obliku

$$\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2E_x}{\partial t^2}\,. \tag{2–70a}$$

Ovakve se jednadžbe nerijetko sreću u različitim granama tehnike i u mehanici, gdje opisuju gibanje mehaničkih, akustičkih i drugih valova. Recipročna vrijednost umnoška $\mu\varepsilon$ ima dimenziju kvadrata brzine. Kasnije ćemo vidjeti da je to brzina rasprostiranja poremećaja $v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ i da je u vakuumu ($\varepsilon=\varepsilon_0$ i $\mu=\mu_0$) ta brzina jednaka brzini svjetlosti. Valna jednadžba (2–70a) sad poprima kompaktniji oblik

$$\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2E_x}{\partial t^2}\,. \tag{2–70b}$$

Ako se uvrsti $\tau=z/v$, valna se jednadžba dalje pojednostavnjuje na oblik

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial \tau^2}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0\,, \qquad (2\text{–}70c)$$

koji upućuje na međusobnu jednakost drugih derivacija funkcije električnog polja po τ i t. O zahtjevima koje valja postaviti na funkciju $E_x(\tau,\ t)$ može se više saznati, ako se valna jednadžba (2–70c) napiše u ovom obliku

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial \tau^2}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial}{\partial \tau}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial t}\right)E_x=0\,.$$

Iz toga je očito da je bilo koja funkcija $E_x(\tau, t)$, za koju vrijedi

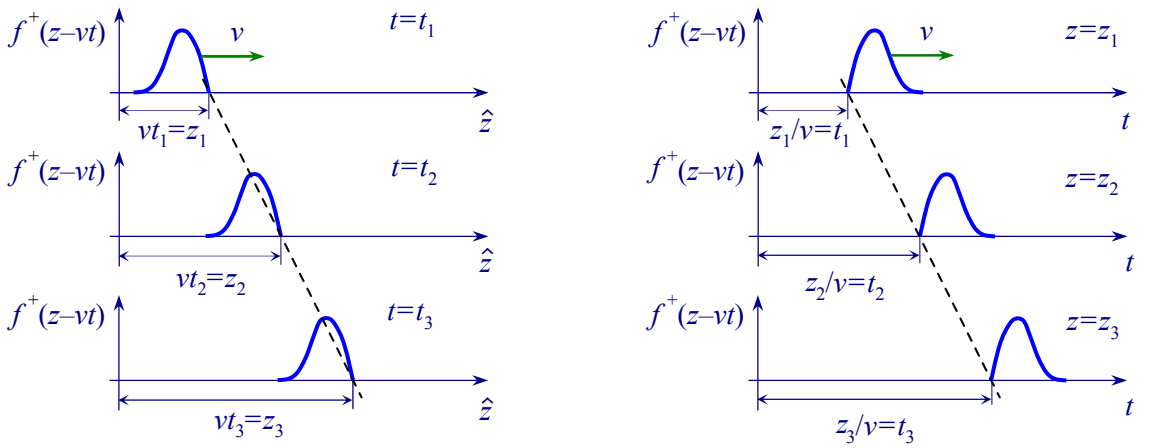
$$\frac{\partial E_x}{\partial \tau}=\frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad \text{ili} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial \tau}=-\frac{\partial E_x}{\partial t}\,,$$

sigurno jedno od rješenja. Prvu jednadžbu može zadovoljiti rješenje oblika $E_x(\tau,t)=f^-(t+\tau)$, gdje je f^- proizvoljna funkcija koja ne mora nužno biti periodična. Slično tomu, drugu će jednadžbu zadovoljiti rješenje oblika $f^+(t-\tau)$, gdje je f^+ također proizvoljna funkcija. Otuda slijede dva rješenja. Svako od njih sadrži proizvoljnu funkciju. Budući da je jednadžba (2–70) linearna, njezino se rješenje može konstruirati i kao zbroj rješenja. Stoga je rješenje oblika $E_x(\tau,t)=f^+(t-\tau)+f^-(t+\tau)$ najopćenitije moguće rješenje jer sadrži dvije proizvoljne funkcije.

Parcijalna diferencijalna jednadžba drugoga reda, poput jednadžbe (2–70), može se riješiti dvostrukim uzastopnim integriranjem po jednoj od varijabla, držeći pritom drugu varijablu konstantnom. Stoga dvije proizvoljne »konstante« integracije moraju ustvari biti proizvoljne funkcije druge varijable. Otuda sva rješenja koja sadrže dvije tražene »funkcije integracije« tvore opće rješenje.

Budući da je $\tau=z/v$, funkcija $f^+(z-vt)$ čini jedno od rješenja jednadžbe (2–70b). Kao što je prikazano na slici 2.10a), to rješenje pokazuje poremećaj koji putuje u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$ brzinom v. S druge strane, rješenje $f^-(z+vt)$ označuje poremećaj koji se istom brzinom rasprostire u negativnom smjeru osi $\hat{z}$. Na slici 2.10b) isto je rješenje prikazano u funkciji druge varijable (vrijeme), gdje je koordinata položaja parametar.

No sva elektromagnetska polja ne zadovoljavaju valnu jednadžbu kao, primjerice, statička električna i magnetska polja.



Slika 2.10. Rasprostiranje poremećaja $f^+(z-vt)$: **a)** u prostoru i **b)** u vremenu

2.5.2. Harmonijski ravni val u sredstvu bez gubitaka

U mikrovalnoj elektronici i teoriji antena električne su veličine nerijetko harmonijske. Tad je korisno primijeniti fazorski prikaz polja (odjeljak 2.2). Ako se veličina $\omega^2\varepsilon\mu$ zamijeni s k^2, gdje se pozitivno definirana veličina

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{2–71}$$

naziva *valni broj*, onda se valne jednadžbe (2–68) svode na *vektorske valne jednadžbe* oblika:

$$\nabla^2 \underline{\vec{E}} + k^2 \underline{\vec{E}} = 0\,, \tag{2–72a}$$

$$\nabla^2 \underline{\vec{H}} + k^2 \underline{\vec{H}} = 0\,, \tag{2–72b}$$

gdje su $\underline{\vec{E}}$ i $\underline{\vec{H}}$ fazori električnog i magnetskog polja i gdje je derivacija po vremenu $\partial/\partial t$ zamijenjena veličinom $\mathrm{j}\omega$. Jednadžba tog oblika naziva se *Helmholtzova jednadžba*. (Opće se rješenje ove jednadžbe može naći u odjeljku 2.5.3)

Da bismo objasnili valnu prirodu elektromagnetskih polja, valja konstruirati jednostavno rješenje jednadžbe (2–72a) za koje je $\nabla\cdot\underline{\vec{E}}=0$, i gdje je vektor električnog polja jednak u svim točkama ravnine koja je okomita na jedan pravac. Radi jednostavnosti, može se uzeti da je taj pravac os $\hat{z}$ pravokutnoga koordinatnog sustava i pretpostaviti da električno polje ne djeluje u smjeru osi $\hat{y}$, tj. $\underline{E}_y = 0$. Budući da je $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, izlazi da je $\nabla^2 = \partial^2/\partial z^2$ pa se jednadžba (2–72a) svodi na oblik

$$\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial z^2} + k^2 \underline{\vec{E}} = 0\,. \tag{2–73}$$

Pogledajmo sad koje komponente električnog polja uopće postoje. Kako u području bez naboja mora vrijediti Gaussov zakon, $\nabla\cdot\underline{\vec{E}} = 0$, dobiva se

$$\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = 0\,, \tag{2–74}$$

tj. $\partial\underline{E}_z/\partial z = 0$. Ta se jednadžba može zadovoljiti samo ako je $\underline{E}_z$ konstantno ili jednako nuli. Ako je polje u smjeru osi $\hat{z}$ konstantno, onda se radi o statičkom električnom polju koje nas ne zanima. Znači da u ovom slučaju, uz pretpostavku $\underline{E}_y = 0$, električno polje ne može imati komponentu u smjeru rasprostiranja $\hat{z}$, pa ostaje samo komponenta polja u smjeru osi $\hat{x}$. Tako se jednadžba (2–73) svodi na običnu skalarnu diferencijalnu jednadžbu drugoga reda

$$\frac{\mathrm{d}^2 \underline{E}_x}{\mathrm{d}z^2} + k^2 \underline{E}_x = 0\,, \tag{2–75}$$

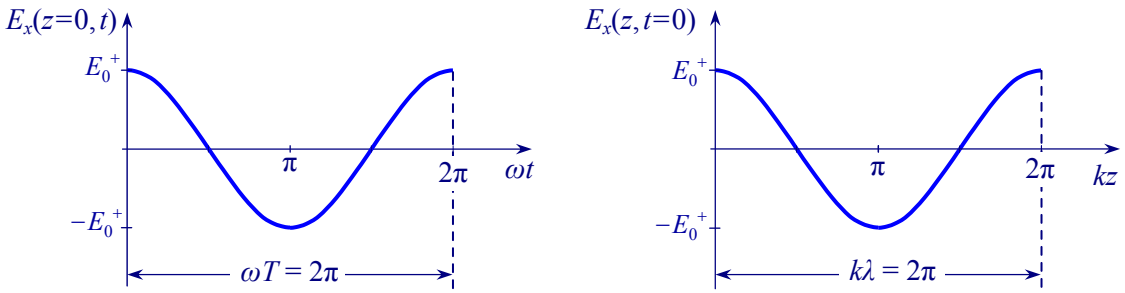
čije je opće rješenje periodična valna funkcija oblika

$$\underline{E}_x(z) = \underline{E}_0^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \underline{E}_0^- \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\,. \tag{2–76}$$

Veličine $\underline{E}_0^+ = E_0^+ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_+}$ i $\underline{E}_0^- = E_0^- \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_-}$ označuju proizvoljne kompleksne amplitudne konstante, gdje su φ_+ i φ_- relativni fazni kutovi, a E_0^+ i E_0^- moduli kompleksnih amplituda valova koji putuju pozitivnim odnosno negativnim smjerom osi $\hat{z}$. U skladu s razmatranjima u odjeljku 2.2, trenutačno polje u vremenskoj domeni može se napisati kao

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= \mathrm{Re}\left\{\underline{E}_x(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{E_0^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + E_0^- \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \\ &= E_0^+ \cos(\omega t - kz) + E_0^- \cos(\omega t + kz)\,, \end{aligned} \tag{2–77}$$

gdje su radi jednostavnosti uzete realne konstante E_0^+ i E_0^-, tj. pretpostavljeno je da su relativni fazni kutovi jednaki nuli.



a) b)

Slika 2.11. Ovisnost električnog polja ravnoga vala: **a)** u vremenu; **b)** u prostoru

Zadrže li se kompleksne konstante, njihov se fazni pomak može uključiti tako da se u argument funkcije kosinusa dodaju odgovarajući fazni kutovi, φ_+ i φ_-.

Da bismo našli kako se električno polje pojavljuje u prostoru i vremenu, dovoljno je razmotriti samo prvi član izraza (2–77)

$$\vec{E}(z,t) = \hat{x}E_0^+ \cos(\omega t - kz)\,, \tag{2–78}$$

gdje je polju vraćen smjer primjenom jediničnog vektora $\hat{x}$. Ako se promjene polja promatraju u određenoj točki prostora ($z=0$), onda postoji samo ovisnost o vremenu, tj.

$$\vec{E}(z=0,t) = \hat{x}E_0^+ \cos(\omega t)\,. \tag{2–79}$$

Na slici 2.11a) prikazana je vremenska promjena toga polja koje titra u svakoj točki prostora *kružnom frekvencijom* ω koja se mjeri u radijanima u sekundi (rad/s). Kružna frekvencija jednaka je $2\pi f$, gdje je f frekvencija vala, koja se mjeri u hercima (Hz = 1/s). Odgovarajuća vremenska perioda vala T iznosi $1/f$ sekunda, a pozitivna skalarna veličina E_0^+ označuje *amplitudu vala* koja se mjeri u V/m.

Ispitajmo sad i prostornu promjenu električnog polja u točno određenom vremenskom trenutku, primjerice u trenutku $t=0$. Iz izraza (2–78) izlazi

$$\vec{E}(z,t=0) = \hat{x}E_0^+ \cos(kz)\,, \tag{2–80}$$

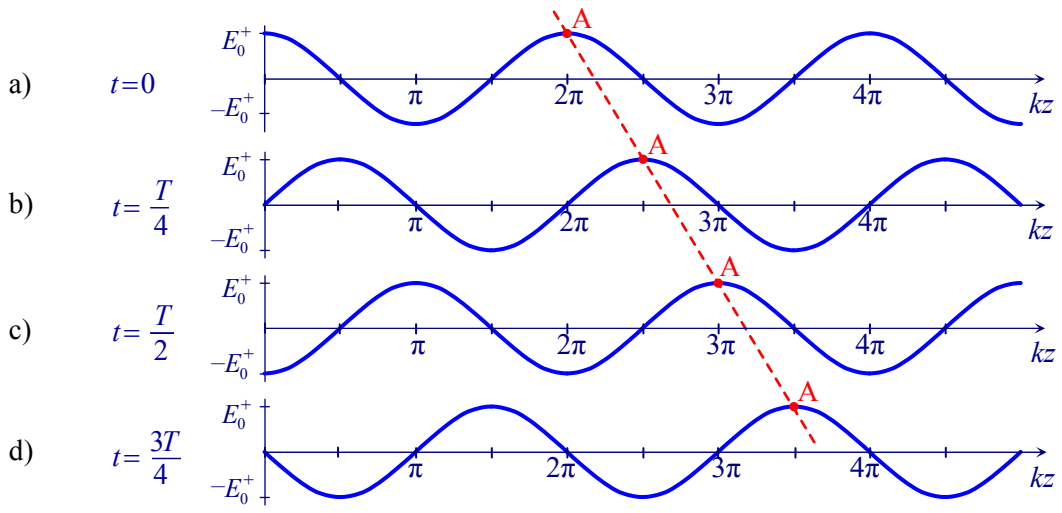
što je prikazano na slici 2.11b). Slika pokazuje da je taj val periodičan u prostoru na jednak način kao i u vremenu. Prostorna perioda vala naziva se *valna duljina* λ, gdje je $\lambda = 2\pi/k$ u metrima pa je veličina k (1/m) dobila naziv *valni broj* ili *fazni koeficijent*. Kako je k pozitivno definirana veličina, porastom vremena val putuje u pozitivnom smjeru osi $\hat{z}$. Otuda oznaka »+« uz amplitudni član. Na sličan način val putuje u negativnom smjeru osi $\hat{z}$ što pokazuje drugi član u rješenju (2–77) pa nosi oznaku »–«.

Bolji uvid u prostorno-vremenske odnose u valu može se dobiti s pomoću serije slika 2.12 na kojima su prikazane prostorne razdiobe električnog polja u četirima različitim vremenskim trenutcima. Prva od njih, prikazana na slici 2.12a), jednaka je onoj na slici 2.11b). Razmotrimo sad stanje četvrt periode titraja kasnije, tj. za $t=T/4$. Tad je

$$\omega t = \frac{2\pi}{T}t = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Krivulja za $t=T/4$, tj. $\omega t=\pi/2$, prikazana na slici 2.12b), odgovara geometrijskom pomaku vala udesno za četvrt valne duljine. Na slikama 2.12c) i 2.12d) prikazani su valni oblici koji nastaju kasnije, tj. u trenutcima $t=T/2$, odnosno $t=3T/4$.

Dosad nismo ništa rekli o brzini rasprostiranja vala. Usredotočimo se sad na čelo vala označeno točkom A. Porastom vremena, točka A putovat će udesno, tj. u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$, poput elektromagnetskog poremećaja na slici 2.10.



Slika 2.12. Prostorna razdioba električnog polja $\vec{E}(z,t)=\hat{x}E_0^+\cos(\omega t-kz)$ u četirima različitim trenutcima $t=0$, $t=T/4$, $t=T/2$ i $t=3T/4$. Porastom vremena, točka A stalne faze giba se udesno

Nasuprot tomu, val će putovati u negativnome smjeru osi $\hat{z}$, ako se u izrazu (2–78) u argumentu kosinusa negativni predznak zamijeni pozitivnim predznakom. Točka A je točka stalne faze u kojoj se jakost polja ne mijenja promjenom položaja. Njezino gibanje u prostoru i vremenu mora zadovoljiti fazni uvjet $\omega t-kz=$konstanta. Deriviranje tog izraza po vremenu daje

$$v=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{k}=v_\mathrm{f}\,, \tag{2–81}$$

što je jednako brzini kojom se promatrač mora kretati da bi ostao u istoj točki valnog oblika. Budući da je to brzina točke konstantne faze, dan joj je naziv *fazna brzina* i nosi oznaku v_f. Disperzijska relacija (2–71) pokazuje da količnik kružne frekvencije i valnoga broja daje

$$v_\mathrm{f}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\,, \tag{2–82}$$

što znači da val putuje konstantnom brzinom, ako su μ i ε konstante. Za val u vakuumu fazna je brzina jednaka brzini svjetlosti $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=2{,}998\cdot10^8$ m/s. Stoga su Maxwellove jednadžbe posebno značajne jer su predvidjele točnu vrijednost brzine svjetlosti.

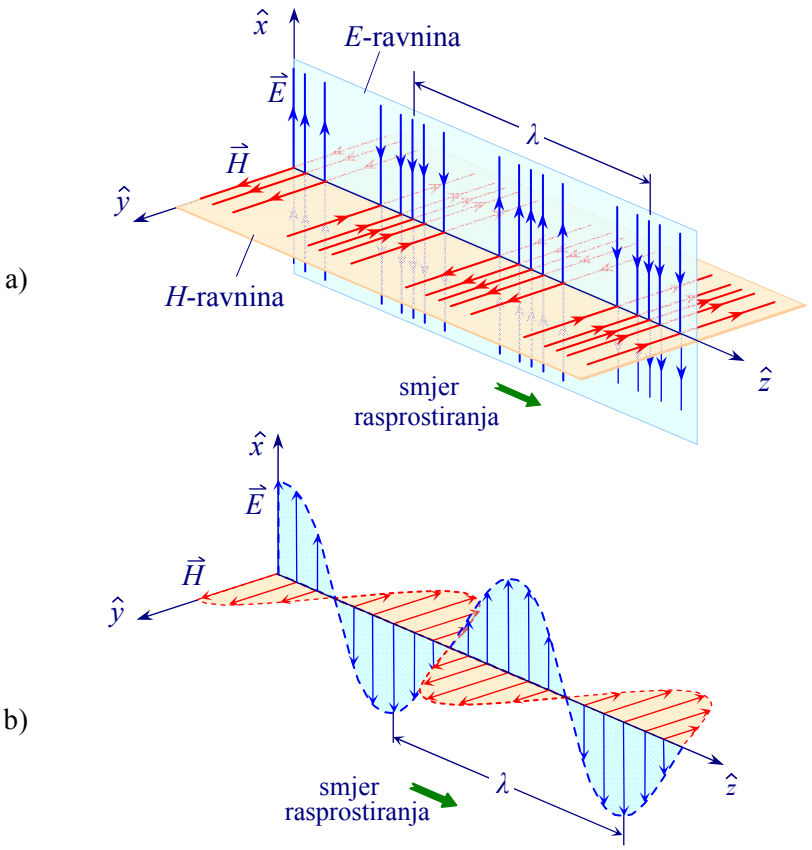
U elektromagnetskome valu električno je polje svezano s magnetskim poljem što se vidi iz Faradayeva i Ampèreova zakona. Budući da električno polje u ovom primjeru ima samo x-komponentu, tj. $\partial/\partial x=\partial/\partial y=0$, Faradayev zakon u fazorskom obliku, nakon primjene operacije rotora na električno polje, daje

$$\underline{\vec{H}}(z)=\frac{\nabla\times\underline{\vec{E}}}{-\mathrm{j}\omega\mu}=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \underline{E}_0^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} & 0 & 0\end{vmatrix}=\hat{y}\frac{k\underline{E}_0^+}{\omega\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\,. \tag{2–83}$$

Primjenom disperzijske relacije (2–71), izraz (2–83) bilježi se u vremenskoj domeni kao

$$\vec{H}(z,t)=\hat{y}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^+\cos(\omega t-kz)\,, \tag{2–84}$$

gdje magnetsko polje ima samo y-komponentu i jednake je ovisnosti o vremenu i prostoru kao električno polje.



Slika 2.13. Dva prikaza transverzalnog elektromagnetskoga vala koji se rasprostire u smjeru osi $\hat{z}$. **a)** Prikaz sa silnicama promjenljive gustoće, **b)** prikaz sa silnicama konstantne gustoće, ali promjenljive duljine

U izrazu (2–84) opet je radi jednostavnosti pretpostavljena realna amplitudna konstanta, tj. da je $\underline{E}_0^+ = E_0^+$. Veličina

$$\eta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \tag{2–85a}$$

čija recipročna vrijednost u izrazu (2–84) povezuje električno i magnetsko polje, ima dimenziju u omima (Ω). Uveo ju je Schelkunoff 1920. godine i dan joj poseban naziv, *intrinzična valna impedancija* prema analogiji s impedancijom u električnim krugovima izmjeničnih struja. Za val u vakuumu ona iznosi

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376,73 \simeq 120\pi \ \ \Omega. \tag{2–85b}$$

Izrazi (2–78) i (2–84) pokazuju da su električno i magnetsko polje u homogenom, izotropnom i linearnom sredstvu bez gubitaka međusobno okomiti. Smjer rasprostiranja elektromagnetske energije također je okomit na vektore električnog i magnetskog polja, što je pokazano u idućem odjeljku. Faze obaju polja ne ovise o koordinatama x i y, pa ne postoji promjena faze u ravnini koja je okomita na smjer rasprostiranja. Val koji ne pokazuje promjenu faze u ravnini naziva se *ravni val*. Budući da se obje komponente polja u cijenosti nalaze u ravnini koja je poprečna na smjer rasprostiranja, ti se valovi još nazivaju *transverzalni* (poprečni) *elektromagnetski valovi* ili *TEM*-valovi (prema engl. *transverse electromagnetic waves*). Ako je pritom i amplituda vala konstantna (kao u ovome primjeru), onda se val naziva *uniformni ravni val*.

Komponente električnog i magnetskog polja ravnoga vala obično se prikazuju na sljedeća dva načina. Na slici 2.13a) promjena gustoće silnica simbolizira promjenu jakosti polja. Polja mijenjaju smjer djelovanja nakon pola valne duljine. Razdioba polja može se predočiti i na način prikazan na slici 2.13b). U tom se prikazu silnice polja nalaze na jednakim razmacima, ali im se intenzitet mijenja duž osi $\hat{z}$, u našem slučaju po sinusnom zakonu. Vidi se također da su u ravnome valu koji se rasprostire u homogenom, izotropnom sredstvu bez gubitaka polja istofazna. Drugim riječima, maksimumi električnog i magnetskog polja uvijek nastaju istodobno i to na istom mjestu.

2.5.3. Opće rješenje valne jednadžbe u pravokutnom koordinatnom sustavu

Sad ćemo naći opće rješenje Helmholtzove jednadžbe za val koji se rasprostire u homogenom, linearnom, izotropnom sredstvu. Kao što smo ranije istaknuli, valne se jednadžbe mogu riješiti u vremenskoj i frekvencijskoj domeni. Radi jednostavnosti, rješenje valne jednadžbe u trima dimenzijama s dodatnom vremenskom varijablom dat ćemo samo za harmonijsku pobudu u frekvencijskoj domeni u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Kao što smo vidjeli u odjeljku 2.5.2, vektorske valne jednadžbe za električno i magnetsko polje u homogenom, izotropnom i linearnom sredstvu mogu se napisati u fazorskom obliku:

$$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0\,, \qquad \nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} = 0\,, \tag{2–86}$$

gdje su ispuštene oznake za fazor. Budući da su te dvije jednadžbe posve istog oblika, razmotrit ćemo samo rješenje jedne od njih i to u pravokutnom koordinatnom sustavu u kojem su rješenja najjednostavnijeg oblika. Za električno se polje rješenje može napisati u obliku

$$\vec{E}(x,y,z) = \hat{x}E_x(x,y,z) + \hat{y}E_y(x,y,z) + \hat{z}E_z(x,y,z)\,.$$

Uvrštenjem tog rješenja u prvu od jednadžba (2–86), dobiva se

$$\nabla^2(\hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z) + k^2(\hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z) = 0\,,$$

što se svodi na tri skalarne valne jednadžbe, po jednu za svaku od komponenata, tj.

$$\nabla^2E_x(x,y,z) + k^2E_x(x,y,z) = 0\,, \tag{2–87a}$$

$$\nabla^2E_y(x,y,z) + k^2E_y(x,y,z) = 0\,, \tag{2–87b}$$

$$\nabla^2E_z(x,y,z) + k^2E_z(x,y,z) = 0\,. \tag{2–87c}$$

Budući da su te jednadžbe jednaka oblika, rješenje bilo koje od njih imat će jednak oblik kao rješenja za preostale dvije. Primjenom Lapalaceova operatora u pravokutnome koordinatnom sustavu, jednadžba (2–87a) poprima oblik

$$\frac{\partial^2E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2E_x}{\partial z^2} + k^2E_x = 0\,. \tag{2–88}$$

Ta se linearna i nehomogena parcijalna diferencijalna jednadžba (Helmholtzova jednadžba) u trima dimenzijama može riješiti postupkom *separacije varijabla*. Uobičajeni se postupak rješavanja sastoji u tomu da se pretpostavi rješenje u obliku umnoška triju funkcija (po jedna za svaku od triju koordinata). Uvrštenjem tog rješenja, parcijalna se diferencijalna jednadžba razloži na tri obične diferencijalne jednadžbe koje se zatim mogu riješiti na uobičajeni način. Sličnim se postupkom mogu naći rješenja u cilindričnom i kuglastom koordinatnom sustavu.

Pretpostavimo, dakle, da je rješenje jednadžbe (2–88) u obliku umnoška triju funkcija, tj.

$$E_x(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)\,. \tag{2–89}$$

Uvrštenjem tog rješenja u jednadžbu (2–88) i dijeljenjem sa XYZ izlazi

$$\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{X(x)\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{Y(y)\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}^2Z(z)}{Z(z)\mathrm{d}z^2}=-k^2, \tag{2–90}$$

gdje se lijeva strana razložila na tri dijela od kojih svaki ovisi samo o jednoj varijabli. Stoga su parcijalne derivacije zamijenjene običnim derivacijama. Budući da su sve tri varijable međusobno nezavisne, tad se izraz (2–90) može zadovoljiti, ali samo ako je svaki dio za sebe jednak konstanti, što se može napisati kao

$$\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{X(x)\mathrm{d}x^2}=-k_x^2, \qquad \frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{Y(y)\mathrm{d}y^2}=-k_y^2, \qquad \frac{\mathrm{d}^2Z(z)}{Z(z)\mathrm{d}z^2}=-k_z^2,$$

gdje su k_x, k_y, k_z *separacijske konstante*, tj. valni brojevi u smjerovima $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$. U skladu s jednadžbom (2–90), separacijske konstante moraju zadovoljiti *separacijsku jednadžbu*

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2. \tag{2–91}$$

Tako je jednadžba (2–88) svedena na tri obične diferencijalne jednadžbe drugoga reda:

$$\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2X(x)=0, \quad \frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2Y(y)=0, \quad \frac{\mathrm{d}^2Z(z)}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2Z(z)=0. \tag{2–92}$$

Sve su te tri jednadžbe jednakog oblika i nazivaju se *harmonijske jednadžbe* jer su im rješenja *harmonijske valne funkcije*. Harmonijska se funkcija može također proizvesti i množenjem konstante s harmonijskom funkcijom te zbrojem dviju ili više harmonijskih funkcija. Dakle, za pozitivne separacijske konstante, rješenje prve od njih može se, primjerice, napisati kao

$$X(x)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_xx}+B\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_xx} \quad \text{ili} \tag{2–93a}$$

$$X(x)=A\cos k_xx+B\sin k_xx. \tag{2–93b}$$

Rješenja za ostale koordinate mogu se napisati u istom obliku uz odgovarajuću zamjenu varijabla u izrazima (2–93). Rješenja (2–93a) s kompleksnim eksponencijalnim funkcijama odgovaraju putujućim valovima, a rješenja (2–93b) opisuju *stojne valove* (odjeljak 2.10.3). U konkretnom problemu, nepoznate se konstante određuju uvođenjem rubnih uvjeta. Koliku će amplitudu koji od članova imati, ovisi o izvoru polja i njegovoj orijentaciji u prostoru.

Za negativnu vrijednost konstante k^2, pripadajuća se rješenja mogu naći u obliku eksponencijalnih funkcija s realnim argumentom ili hiperboličkih funkcija kao, primjerice,

$$X(x)=A\mathrm{e}^{-k_xx}+B\mathrm{e}^{k_xx} \quad \text{ili} \tag{2–93c}$$

$$X(x)=A\cosh k_xx+B\sinh k_xx, \tag{2–93d}$$

jer su u tom slučaju separacijske konstante imaginarne veličine koje se nalaze u argumentima sinusnih funkcija. Stoga ta rješenja u praksi označuju evanescentna polja. Kompleksnim separacijskim konstantama k_x, k_y ili k_z odgovaraju rješenja u obliku prigušenih ili pojačanih sinusoida. Kao rješenja za prijenosne strukture mogu se pojaviti i sve moguće kombinacije funkcija (2–93). To se bolje vidi na primjeru valovoda u poglavlju 4.

Jednom kad su odabrani oblici rješenja $X(x)$, $Y(y)$ i $Z(z)$, cjelokupno rješenje skalarne funkcije (2–89) može se napisati kao

$$E_x(x,y,z)=X(x)Y(x)Z(z)=E_{0x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_xx}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_yy}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_zz}, \tag{2–94a}$$

što opisuje rasprostiranje ravnoga vala u proizvoljnom smjeru ili kao

$$E_x(x,y,z)=\left[A\cos(k_xx)+B\sin(k_xx)\right]\left[C\cos(k_yy)+D\sin(k_yy)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_zz}, \tag{2–94b}$$

opisujući rasprostiranje valova u pravokutnome valovodu (odjeljak 4.3).

2.5.4. Opće rješenje za ravni val

Jedno od mogućih rješenja prve valne jednadžbe (2–86) može se napisati u kompleksnom obliku kao

$$E_x(x,y,z) = E_{0x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)}, \tag{2–95}$$

gdje je E_{0x} proizvoljna amplitudna konstanta. To se rješenje može tumačiti kao x–komponenta vala koji se rasprostire u smjeru kojeg pokazuje *valni vektor*

$$\vec{k} = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z \tag{2–96}$$

jer skalarni umnožak $\vec{k}$ s vektorom položaja

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \tag{2–97}$$

daje $k_x x + k_y y + k_z z$. Prema slici 2.14a), to je jednako umnošku veličine k s $r\cos\theta$ što je udaljenost ravnine okomite na vektor $\vec{k}$ od ishodišta pa se rješenje (2–95) može sažeto napisati kao

$$E_x(x,y,z) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{2–98a}$$

U kompleksnim funkcijama (2–95) i (2–98a) veličine $k_x x + k_y y + k_z z$ za realne k_x, k_y, k_z, tj. $\vec{k}\cdot\vec{r}$ za realni vektor označuju *fazu* vala $\Phi(x,y,z)$. Prosječna brzina kojom faza opada u zadanom smjeru naziva se *fazni koeficijent* za taj smjer. Za tu je veličinu u literaturi uvriježen naziv *fazna konstanta*. No budući da je ona funkcija frekvencije, linearna ili nelinearna, u daljem ćemo tekstu upotrebljavati naziv fazni koeficijent.

U ovom slučaju fazni koeficijenti za smjerove $\hat{x}$, $\hat{y}$ i $\hat{z}$ glase:

$$\beta_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad \beta_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad \beta_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Oni su ujedno komponente *vektorskog faznog koeficijenta*

$$\vec{\beta} = -\nabla\Phi, \tag{2–99}$$

čija se maksimalna vrijednost $|\nabla\Phi|$ nalazi u smjeru rasprostiranja vala.

Ploha stalne faze naziva se *ekvifazna ravnina*, što se može matematički formulirati uvjetom $\vec{k}\cdot\vec{r} = \text{konstanta}$. Ta je ravnina okomita na vektor $\vec{k}$, kao što je prikazano na slici 2.14a). Izraz (2–91) pokazuje da je $|\vec{k}| = k$ pa se izraz (2–96) može napisati i kao $\vec{k} = \hat{n}k$, gdje $\hat{n}$ označuje *valnu normalu* (jedinični vektor u smjeru rasprostiranja). Stoga rješenje (2–98a) opisuje skalarni uniformni ravni val koji se rasprostire u smjeru $\vec{k}$.

Rješenja u cilindričnom i kuglastom koordinatnom sustavu pokazuju da su plohe stalne faze cilindri odnosno sfere.

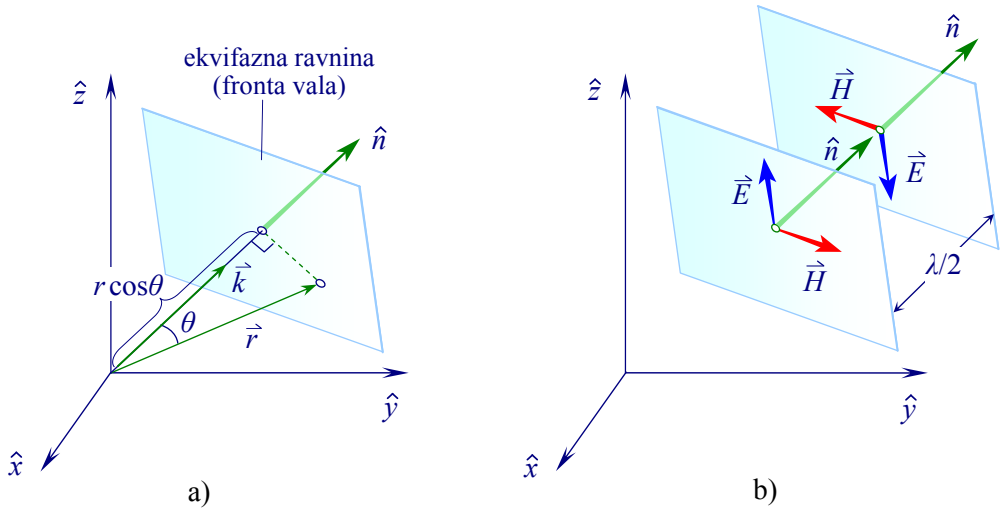
No svako rješenje valne jednadžbe nije istodobno i rješenje svake Maxwellove jednadžbe. Naime, tri komponente polja $\vec{E}$ nisu nezavisne jer u prostoru bez izvora mora biti zadovoljen Gaussov zakon $\nabla\cdot\vec{E} = 0$. No da bi $\nabla\cdot\vec{E}$ bilo posvuda jednako nuli, sve komponente polja $\vec{E}$ moraju imati istu ovisnost u prostoru pa se rješenja:

$$E_y(x,y,z) = E_{0y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}, \tag{2–98b}$$

$$E_z(x,y,z) = E_{0z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{2–98c}$$

razlikuju od rješenja (2–98a) samo u amplitudnim konstantama. Taj uvjet također uključuje ograničenja na amplitude E_{0x}, E_{0y} i E_{0z}. Ako se $\vec{E}_0 = \hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y} + \hat{z}E_{0z}$ definira kao amplitudni vektor, onda se ukupno rješenje za električno polje može sažeti u vektorski oblik

$$\vec{E} = \vec{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{2–100}$$



Slika 2.14. Ravni *TEM*-val u slobodnome prostoru. Vektori $\vec{k} = \hat{n}k$, $\vec{E}$ i $\vec{H}$ međusobno su okomiti; $\vec{E}$ i $\vec{H}$ te vrh radijvektora $\vec{r}$ leže u ravnini konstantne faze koja je okomita na smjer rasprostiranja $\hat{n}$

Primjenom uvjeta divergencije i vektorske jednakosti $\nabla\cdot(f\vec{A}) = \vec{A}\cdot\nabla f + f\,\nabla\cdot\vec{A}$ [dodatak E, jednakost (E39)] dobiva se

$$\nabla\cdot\vec{E} = \nabla\cdot\left(\vec{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) = \vec{E}_0\cdot\nabla\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}} = -\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0\,,$$

jer je $\nabla\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}} = -\mathrm{j}\vec{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}$. Iz toga slijedi koristan rezultat

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0\,,$$

koji pokazuje da amplitudni vektor $\vec{E}_0$ mora biti okomit na smjer rasprostiranja $\vec{k}$, kao što je prikazano na slici 2.14b). Iz tog općenitog rezultata za ravni val izlazi da se od triju amplitudnih konstanta (E_{0x}, E_{0y} i E_{0z}) samo dvije mogu neovisno odabrati. Također se vidi da se u tom slučaju operator ∇ može zamijeniti s $-\mathrm{j}\vec{k}$.

U elektromagnetskome je valu magnetsko polje svezano s električnim poljem pa ga se može izvesti iz Faradayeva zakona. Za val u homogenom izotropnom sredstvu, Faradayev zakon (2–23) daje

$$\vec{H} = \frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu}\nabla\times\vec{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}\,,$$

što se primjenom vektorske jednakosti (E28) iz dodatka E može preinačiti u oblik

$$\vec{H} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\vec{E}_0\times\nabla\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\vec{E}_0\times(-\mathrm{j}\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}} =$$

$$= \frac{k}{\omega\mu}\hat{n}\times\vec{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\hat{n}\times\vec{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{\eta}\hat{n}\times\vec{E}\,, \qquad (2\text{–}101a)$$

gdje je konačni izraz dobiven uporabom relacije (2–85a), $\eta = \omega\mu/k$.

Na sličan način, iz Ampèreova zakona (2–24), električno se polje može izraziti preko magnetskog polja u izotropnom sredstvu podalje od izvora struje i naboja, tj.

$$\vec{E} = -\frac{1}{\omega\varepsilon}\vec{k}\times\vec{H} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\hat{n}\times\vec{H} = -\eta\hat{n}\times\vec{H}\,, \qquad (2\text{–}101b)$$

Izrazi (2–101) pokazuju važno svojstvo ravnoga vala da su vektori $\vec{H}$ i $\vec{E}$ uvijek okomiti jedan na drugoga te da leže u ravnini koja je okomita na vektor $\vec{k}$, tj. na $\hat{n}$. Drugim riječima, smjer rasprostiranja elektromagnetske energije okomit je na vektore električnog i magnetskog polja pa ne postoji promjena faze polja u ravnini koja je okomita na smjer rasprostiranja (slika 2.14). Stoga se takvi valovi nazivaju *transverzalni elektromagnetski valovi* (*TEM*-valovi).

No i za kompleksni $\vec{k}$ postoje fizikalno moguća rješenja. U tom slučaju umjesto $\vec{k}$ valja uvesti kompleksni *vektorski koeficijent rasprostiranja* definiran preko brzine promjene veličine $-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}$ kao

$$\vec{\gamma} = -\nabla(-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}) = \mathrm{j}\vec{k} = \vec{\alpha} + \mathrm{j}\vec{\beta}\,. \tag{2–102}$$

Taj koeficijent sadrži dva realna vektora: *vektorski fazni koeficijent* ($\vec{\beta}$) i *vektorski koeficijent prigušenja* ($\vec{\alpha}$). Prema toj definiciji $\vec{k}$ se može napisati kao

$$\vec{k} = \vec{\beta} - \mathrm{j}\vec{\alpha}\,. \tag{2–103}$$

Uvrštenje u izraz (2–100) pokazuje da se rješenje sastoji od umnoška amplitudne vektorske konstante $\vec{E}_0$ i dvaju eksponencijalnih članova: prigušnog $\mathrm{e}^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{r}}$ i periodičnog $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{\beta}\cdot\vec{r}}$,

$$\vec{E} = \vec{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{E}_0\mathrm{e}^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{\beta}\cdot\vec{r}}\,. \tag{2–104}$$

Dakle, kad je vektor $\vec{k}$ kompleksan, rješenje (2–104) opisuje ravni val koji se rasprostire u smjeru $\vec{\beta}$ i prigušuje u smjeru $\vec{\alpha}$. Prigušni je član uvijek realan, dok periodični član uvijek ima jediničnu veličinu, a faza mu se mijenja s položajem kao $\vec{\beta}\cdot\vec{r}$. Stoga je *ravnina konstantne faze* definirana relacijom

$$\vec{\beta}\cdot\vec{r} = \beta r\cos\theta = \text{konstanta},$$

uz $\beta = |\vec{\beta}|$. Ta jednadžba odgovara ravnini okomitoj na $\vec{\beta}$.

S druge strane, amplituda vala mijenja se kao $\mathrm{e}^{\vec{\alpha}\cdot\vec{r}}$ pa je *ravnina konstantne amplitude* definirana relacijom

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{r} = \alpha r\cos\theta' = \text{konstanta},$$

u kojoj je kut θ' kut između $\vec{r}$ i $\vec{\alpha}$, a $\alpha = |\vec{\alpha}|$. Ta je ravnina okomita na $\vec{\alpha}$.

Val opisan izrazom (2–104) uniforman je samo ako $\vec{\alpha}$ i $\vec{\beta}$ imaju isti smjer. Valja reći da definicije $\vec{k} = \vec{\beta} - \mathrm{j}\vec{\alpha}$ i $k = \mathrm{Re}\{k\} - \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\{k\}$ općenito ne uključuju $\beta = \mathrm{Re}\{k\}$ ili $\alpha = \mathrm{Im}\{k\}$. Ustvari, za sredstvo bez gubitaka, traži se da veličina

$$k^2 = \vec{k}\cdot\vec{k} = \beta^2 - \alpha^2 - \mathrm{j}2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$

bude realna i pozitivna. To je moguće postići samo uz uvjet $\vec{\alpha} = 0$ ili $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$. Za $\vec{\alpha} = 0$, val je uniforman što smo već razmotrili. Ako su pak $\vec{\alpha}$ i $\vec{\beta}$ okomiti jedno na drugo, onda se val ne rasprostire. Takav se »val« naziva *evanescentni val* (ili nerasprostirući val). Više o tomu može se naći u odjeljku 2.11.5. pri razmatranju totalne refleksije za kosi upad vala na granicu dvaju dielektričnih sredstava.

Električno polje koje odgovara fazorskom prikazu (2–104) može se izraziti u vremenskoj domeni kao

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}+\mathrm{j}\omega t}\right\} = \vec{E}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\,, \tag{2–105}$$

gdje su radi jednostavnosti uzete realne amplitudne konstanata E_{0x}, E_{0y} i E_{0z} pa je otuda i veličina $\vec{E}_0$ realna. Ako su te konstante kompleksne, onda se njihove faze mogu lako uključiti

u argument kosinusnog člana u izrazu (2–105). Električno polje u svakoj točki prostora titra kutnom frekvencijom ω. U odjeljku 2.5.2. vidjeli smo kako su definirane veličine poput frekvencije, periode titraja i valne duljine. Označi li se valna duljina u sredstvu s λ, dobiva se

$$\left|\vec{k}\right|\lambda = k\lambda = 2\pi$$

pa je

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (2\text{–}106)$$

No komponenta valnoga vektora (tj. valnoga broja) i valna duljina mogu se definirati i za smjer koji je različit od smjera rasprostiranja. Na slici 2.15 prikazan je val polariziran u smjeru $\hat{y}$, koji se rasprostire u ravnini xy pod kutom θ u odnosu na os $\hat{x}$. Električno se polje toga vala može izraziti kao

$$\vec{E} = \hat{y}\vec{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x - \mathrm{j}k_z z}, \qquad (2\text{–}107a)$$

gdje je valni broj $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$, koji označuje brzinu promjene faze u smjeru rasprostiranja, razložen na komponente k_x i k_z, a E_0 je realna amplitudna konstanta.

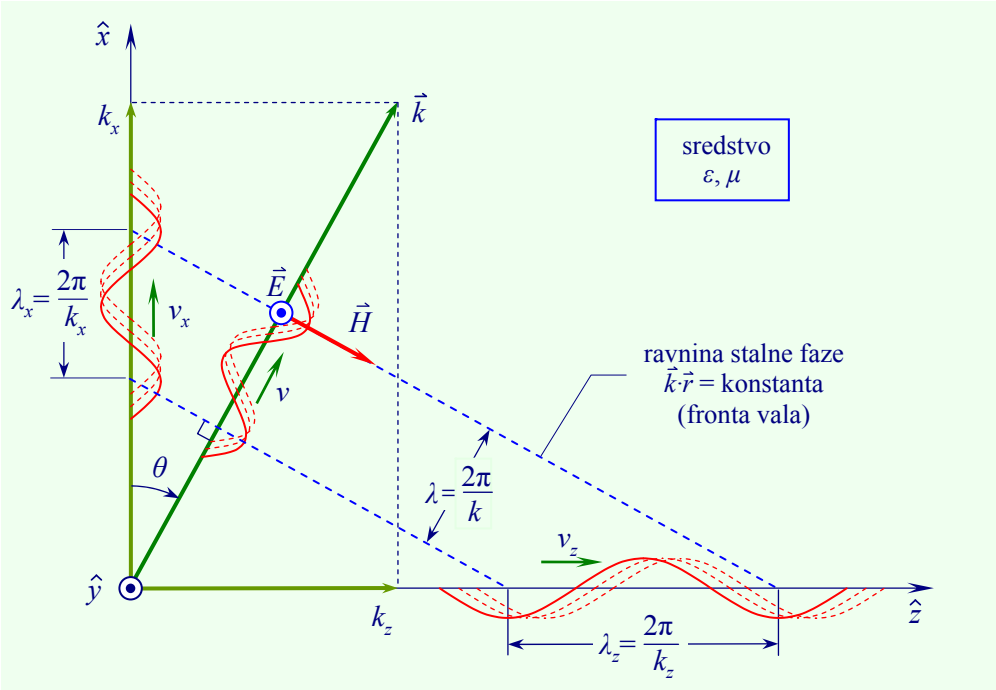
Primjenom relacija:

$$\vec{k} = \hat{x}k_x + \hat{z}k_z, \qquad (2\text{–}108a)$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{z}z, \qquad (2\text{–}108b)$$

izraz (2–107) može se napisati u sažetijem obliku kao

$$\vec{E} = \hat{y}\vec{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}, \qquad (2\text{–}107b)$$



Slika 2.15. Rasprostiranje $\hat{y}$-polariziranog uniformnoga ravnog vala u homogenom izotropnom sredstvu bez gubitka u ravnini zx pod proizvoljnim kutom u odnosu na osi koordinatnoga sustava. Projekcije valne duljine na koordinatne osi veće su od valne duljine ravnoga vala u smjeru rasprostiranja. Budući da je na fiksnoj frekvenciji brzina vala razmjerna valnoj duljini, prividne fazne brzine vala u smjeru $\hat{x}$ i $\hat{z}$ uvijek su veće od stvarne fazne brzine ravnoga vala

gdje vektori $\vec{k}$ i $\vec{r}$ mogu općenito imati komponente u smjeru $\hat{x}$, $\hat{y}$ i $\hat{z}$. U razmatranjima koja slijede dovoljno će biti razmotriti vektore $\vec{k}$ i $\vec{r}$ koji leže samo u *xy*-ravnini.

Umjesto razmatranja prostorne brzine kojom se faze mijenja duž različitih smjerova, valja razmotriti udaljenosti između dviju uzastopnih istofaznih ravnina na kojima se faza polja razlikuje točno za 2π. Te će udaljenosti biti prividne valne duljine jer je fazni pomak linearno razmjeran udaljenosti za bilo koji smjer. Mjereno u smjeru rasprostiranja (slika 2.15), udaljenost λ, na kojoj se faza promijeni za 2π, stvarna je valna duljina. No, mjereno u bilo kojem drugom smjeru, udaljenosti između tih dviju ravnina bit će veće od λ, kao što je prikazano na slici 2.15 jer je prostorna brzina promjene faze u svakom drugom smjeru manja od one u smjeru rasprostiranja. Sad se ta zapažanja mogu matematički izraziti.

Uvrštenjem izraza (2–108) u homogenu valnu jednadžbu (2–72a), $(\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon)\vec{E} = 0$, za homogeno sredstvo izlazi

$$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon \equiv k^2 . \tag{2–109}$$

Iz izraza (2–109) i slike 2.15 također se vidi da komponente valnoga broja iznose:

$$k_x = \vec{k}\cdot\hat{x} = k\cos\theta , \qquad k_z = \vec{k}\cdot\hat{z} = k\sin\theta . \tag{2–110}$$

Može se također uočiti da su $\lambda_x = 2\pi/k_x$ i $\lambda_z = 2\pi/k_z$ projekcije valne duljine λ na osi $\hat{x}$ i $\hat{z}$. Te se projicirane ili *prividne valne duljine* odnose na prividne valove koji »putuju« u smjeru koji je različit od smjera vektora $\vec{k}$ u kojem se rasprostire energija. Uvijek su veće od $\lambda = 2\pi/k$ pa u skladu s izrazom (2–109) moraju zadovoljiti uvjet

$$\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_z^2} = \frac{1}{\lambda^2} . \tag{2–111}$$

Magnetsko se polje toga vala može izračunati iz Faradayeva zakona

$$\vec{H} = \frac{\nabla\times\vec{E}}{-\mathrm{j}\omega\mu} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega\mu} = (\hat{x}k_x + \hat{z}k_z)\times\hat{y}\frac{E_0}{\omega\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}} = \left(\hat{z}\frac{k_x}{k} - \hat{x}\frac{k_z}{k}\right)\frac{E_0}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}} ,$$

gdje su, u skladu s izrazima (2–110), $k_x/k = \cos\theta$ i $k_z/k = \sin\theta$.

Sad se mogu odrediti i prividne brzine u smjerovima $\hat{x}$ i $\hat{z}$ na slici 2.15. Iz izraza (2–105) izlazi da je faza električnog polja konstantna, ako je $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$ konstantno. Kad se traži brzina u smjeru $\hat{x}$, tad vektor $\vec{r}$ leži na osi $\hat{x}$ pa vektori $\vec{k}$ i $\vec{r}$ međusobno zatvaraju kut θ. Stoga je $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = kr\cos\theta - \omega t =$ konstanta. Deriviranjem tog izraza po vremenu, dobiva se prividna brzina u smjeru $\hat{x}$ kao

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_x = v_x = \frac{\omega}{k\cos\theta} . \tag{2–112a}$$

To je brzina kojom bi se promatrač morao kretati uzduž ili paralelno s osi $\hat{x}$ da bi ostao u istoj točki valnog oblika. Budući da je to brzina točke konstantne faze, veličina v_x naziva se *fazna brzina* u smjeru $\hat{x}$. Na jednak se način može odrediti fazna brzina u smjeru $\hat{z}$, tj.

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_z = v_z = \frac{\omega}{k\sin\theta} . \tag{2–112b}$$

Stvarna brzina vala jednaka je faznoj brzini v_f u smjeru rasprostiranja, gdje je $\cos\theta = 1$, tj.

$$v = v_\mathrm{f} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} , \tag{2–113}$$

što je jednako izrazu (2–82). U odjeljku 2.5.1. pokazano je da se val u vakuumu (slobodnome prostoru) giba brzinom svjetlosti. No izrazi (2–112) pokazuju da je u svim drugim smjerovima fazna brzina vala veća od brzine svjetlosti. Ako $\theta \to 90°$, onda se val rasprostire u smjeru osi $\hat{z}$ pa mu je brzina v. No fazna brzina u smjeru osi $\hat{x}$ teži u beskonačnost, što znači da se u tom smjeru energija ne prenosi.

2.5.5. Disperzija i grupna brzina

Zamislimo val koji se sastoji od skupine valova različitih frekvencija. Ta se skupina ponaša kao *valni paket* koji prenosi elektromagnetsku energiju ili informaciju. Ako fazna brzina ne ovisi o frekvenciji kao, primjerice, pri rasprostiranju ravnoga vala u homogenom dielektriku, onda će različite frekvencijske komponente zadržati jednake fazne odnose pa će valni paket zadržati jednak oblik na putu proizvoljne duljine. Pritom, cjelokupni valni paket putuje faznom brzinom. No ako se val rasprostire u sredstvu čiji parametri μ ili ε ili σ ovise o frekvenciji, onda će općenito i valna brzina ovisiti o frekvenciji. Stoga će različite frekvencijske komponente putovati različitim brzinama pa na svom putu neće moći zadržati jednake fazne odnose. Tad je teško definirati brzinu prijenosa valnog paketa koji u takvim uvjetima pretrpi izobličenje oblika. Pojava koja je za to odgovorna naziva se *disperzija*, a naziv je dobila prema spektralnom raspršenju (disperziji) boja svjetlosti na staklenoj prizmi. Stoga će brzina rasprostiranja u disperzivnom sredstvu biti točno definirana samo u frekvencijskom pojasu koji je dovoljno uzak da se unutar tog pojasa (ili određene »grupe« frekvencija) fazni koeficijent β može aproksimirati linearnom funkcijom frekvencije. Zato se za disperzivna sredstva obično uvodi pojam *grupne brzine* kojom se može opisati rasprostiranje »grupe« frekvencija ili ovojnice vala. U homogenom izotropnom sredstvu i prijenosnim strukturama bez gubitaka u vodičima tom se brzinom prenosi energija (vidjeti odjeljke 2.6. i 4.11).

Budući da monokromatski val sam po sebi ne nosi informaciju, za prijenos informacija potreban je frekvencijski spektar konačne širine. Takav se spektar, primjerice, može ostvariti moduliranjem vala. To znači da će na modulirane valove uvijek djelovati učinci disperzivnih sredstava ili disperzivnih prijenosnih struktura. Budući da u komunikacijskim primjenama disperzija nerijetko stvara izobličenja u prijenosu moduliranih signala, radi se o nepoželjnoj pojavi pa je valja izbjegavati.

Da bismo bolje razumjeli učinke disperzije, razmotrimo superpoziciju dvaju valova jednakih amplituda, ali neznatno različitih frekvencija $\omega_0 \pm \Delta\omega$, gdje je $\Delta\omega \ll \omega_0$. Ako ti valovi putuju u smjeru $\hat{z}$ i pripadajući su im fazni koeficijenti $\beta_0 \pm \Delta\beta$, gdje je $\Delta\beta \ll \beta_0$, onda se cjelokupni val dobiven njihovom superpozicijom može izraziti u obliku dvaju nezavisnih rješenja kao

$$E(z,t) = E_0 \cos\left[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z\right] + E_0 \cos\left[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z\right]$$

Primjenom trigonometrijske formule $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, dobiva se

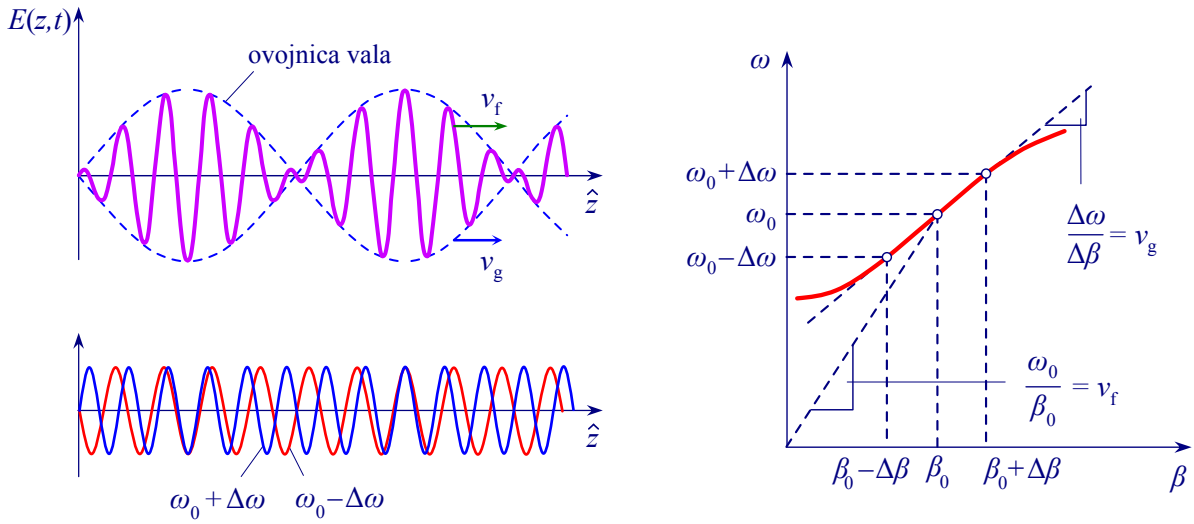
$$E(z,t) = 2E_0 \cos(\omega_0 t - \beta_0 z)\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z),$$

gdje član $\cos(\omega_0 t - \beta_0 z)$ označuje val na središnjoj frekvenciji (ω_0) valnog paketa. Taj se val rasprostire faznom brzinom $v_f = \omega_0/\beta_0$. Drugi član opisuje ovojnicu vala i može se napisati kao

$$\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) = \cos\left[\Delta\omega\left(t - \frac{\Delta\beta}{\Delta\omega}z\right)\right].$$

Interferencija tih dvaju valova prikazana je na slici 2.16a). U izrazu za ovojnicu vala može se prepoznati član $\Delta\omega/\Delta\beta$ koji ima dimenziju brzine. Ako se u graničnom prijelazu pusti da $\Delta\omega$ teži nuli, onda modulacijska ovojnica putuje brzinom

$$v_g = \frac{1}{\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\omega\big|_{\omega=\omega_0}}. \qquad (2\text{–}114)$$



a) b)

Slika 2.16. a) Objašnjenje grupne i fazne brzine pri interferenciji dviju sinusnih funkcija različite frekvencije; **b)** karakteristika ω-β disperzivnog sredstva

To je *grupna brzina* jer njome putuje skupina valova čije se frekvencije nalaze u uskom frekvencijskom pojasa oko frekvencije ω_0. Deriviranjem fazne brzine $v_f = \omega/\beta$ po frekvenciji ω, dobiva se koristan izraz koji povezuje te dvije brzine, tj.

$$\frac{v_f}{v_g} = 1 - \beta \frac{\mathrm{d}v_f}{\mathrm{d}\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0} = 1 - \frac{\omega}{v_f}\frac{\mathrm{d}v_f}{\mathrm{d}\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0}. \tag{2–115}$$

Taj izraz pokazuje da je fazna brzina veća od grupne brzine, kad fazna brzina vala opada s frekvencijom, tj. kad je derivacija fazne brzine po frekvenciji negativna. To je svojstveno svim dielektričnim materijalima izvan područja anomalne disperzije (odjeljak 2.3.1). Izrazi (2–114) i (2–115) posve su općeniti i vrijede za bilo koji modulirani signal što se može pokazati primjenom Fourierove transformacije na općenit signal (vidjeti, primjerice, literaturu [6]). Ako je β nelinearna funkcija frekvencije (slika 2.16b)), kao za *TE*- i *TM*-modove, onda grupna brzina v_g i fazna brzina v_f nisu međusobno jednake. Budući da v_f nije brzina kojom se prenosi energija ili informacija, fazna brzina može biti veća od brzine svjetlosti. Veza između tih dviju brzina nerijetko se pojavljuje u obliku

$$v_f v_g = c^2, \tag{2–116}$$

kao, primjerice, kod geometrijske disperzije u valovodu (vidjeti odjeljke 4.1, 4.3 i 4.4).

Grupna se brzina nerijetko poistovjećuje s brzinom v_E kojom se prenosi energija, na što upućuje izraz (2–133) u odjeljku 2.6. Ta zamisao vrijedi u većini slučajeva, uključujući valovode bez gubitaka (vidjeti poglavlje 4). No općenito nije ispravna jer ne vrijedi za prijenosne sustave s anomalnom disperzijom, gdje je $\mathrm{d}v_f/\mathrm{d}\omega > 0$, uključujući jednostavne prijenosne linije s gubitcima u vodiču. Valja reći da u ovom kontekstu riječ »anomalno« ne upućuje ni na što nepravilno ili izvanredno. Postoje i takva sredstva za koja je grupna brzina negativna. To znači da energija putuje u suprotnome smjeru od faze vala, kao što je pokazano u odjeljku 7.6. o periodičnim prijenosnim strukturama.

2.6. Energija, snaga i Poyntingov teorem

Bitan aspekt rasprostiranja valova čini tok snage u prostoru. Očigledno je da putujući val u sebi nosi energiju kao, primjerice, radijski val koji prenosi energiju od odašiljača do prijamnika. U ovom ćemo odjeljku razmotriti tok elektromagnetske energije za harmonijske veličine na koje nerijetko nailazimo u mikrovalnoj elektronici.

Kad se snaga i energija prikazuju s pomoću sinusnih veličina valja primijeniti zapis konjugirano kompleksnih veličina označenih zvjezdicom (*). U skladu s fazorskim načinom označivanja harmonijskih veličina, koji je uveden u odjeljku 2.2, skalarni se umnožak dviju sinusnih funkcija, $A(t)B(t) = A\cos(\omega t + \varphi_A)\, B\cos(\omega t + \varphi_B)$, može napisati kao

$$A(t)B(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}\mathrm{Re}\left\{\underline{B}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}, \tag{2–117}$$

gdje su $\underline{A} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_A}$ i $\underline{B} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_B}$ fazori u kojima su A, odnosno B realne konstante, φ_A i φ_B proizvoljne faze. Primjenom trigonometrijske formule, taj se izraz može dalje razviti u oblik

$$A(t)B(t) = \frac{AB}{2}\left[\cos(\varphi_A - \varphi_B) + \cos(2\omega t + \varphi_A + \varphi_B)\right]. \tag{2–118}$$

Prosječna vrijednost u vremenu dobiva se integriranjem kroz jednu periodu titraja, tj.

$$\left\langle A(t)B(t)\right\rangle = \frac{1}{2}\int_0^T A(t)B(t)\mathrm{d}t = \frac{AB}{2}\cos(\varphi_A - \varphi_B). \tag{2–119a}$$

Prvi član izraza (2–118) ne ovisi o vremenu pa pridonosi integralu u izrazu (2–119a). No prosječna vrijednost drugoga člana, $\cos(2\omega t + \varphi_A + \varphi_B)$, jednaka je nuli unutar jedne periode. Otuda se izraz (2–119a) može napisati primjenom fazora kao

$$\left\langle A(t)B(t)\right\rangle = \mathrm{Re}\left\{\frac{AB}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_A}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_B}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{A}\underline{B}^*\right\}. \tag{2–119b}$$

Može se zapaziti da je vremenski prosjek dviju skalarnih harmonijskih veličina jednak realnom dijelu umnoška jednog skalara s konjugirano kompleksnom vrijednošću drugog skalara. Ovo razmatranje sa skalarima može se proširiti na vektorske umnoške.

Ako je $A(t)=B(t)$, tj. ako se radi o jednoj te istoj veličini, onda u skladu s izrazom (2–119b) prosječna vrijednost skalarnog umnoška (2–117) iznosi

$$\left\langle\left[A(t)\right]^2\right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{A}\underline{A}^*\right\} = \frac{1}{2}\left|\underline{A}\right|^2,$$

što znači da je efektivna vrijednost sinusne funkcije $A(t)$ jednaka $A_{\mathrm{ef}} = \left|\underline{A}\right|/\sqrt{2}$. Isti izrazi vrijede i za vektorske veličine.

Trenutačne *volumne gustoće energije* pohranjene u električnom i magnetskom polju mogu se napisati kao:

$$w_{\mathrm{e}}(t) = \frac{\varepsilon}{2}\left[E(t)\right]^2, \tag{2–120a}$$

$$w_{\mathrm{m}}(t) = \frac{\mu}{2}\left[H(t)\right]^2. \tag{2–120b}$$

Ukupnu trenutačnu prostornu gustoću energije pohranjene u poljima čini zbroj $w = w_{\mathrm{e}} + w_{\mathrm{m}}$. Te se energije mogu staviti u vezu sa srednjim energijama pohranjenim u pripadnim poljima:

$$\left\langle W_{\mathrm{e}}\right\rangle = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{4}\int_V \underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{D}}^*\,\mathrm{d}V\right\} = \frac{\varepsilon}{4}\int_V \left|\underline{\vec{E}}\right|^2\mathrm{d}V, \tag{2–121a}$$

$$\left\langle W_{\mathrm{m}}\right\rangle = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{4}\int_V \underline{\vec{H}}^*\cdot\underline{\vec{B}}\,\mathrm{d}V\right\} = \frac{\mu}{4}\int_V \left|\underline{\vec{H}}\right|^2\mathrm{d}V. \tag{2–121b}$$

Da se izbjegne zabuna, kroz cijeli ćemo odjeljak harmonijskim vremenskim ovisnostima za polja i struje pridijeliti oznaku za fazor. Izrazi (2–121) vrijede samo za nedisperzivna sredstva u kojima su ε i μ realne konstante. No ako su ε i μ funkcije frekvencije, onda valja uporabiti općenitije izraze za srednje energije koje nećemo ovdje izvoditi. Cjelovit izvod može se naći u literaturi [7]. Tako za sredstvo s malim gubitcima, $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ i $\mu'' \ll \mu'$, izlazi:

$$\langle W_\mathrm{e} \rangle = \frac{1}{4}\int_V \frac{\partial \omega\varepsilon}{\partial\omega}\left|\underline{\vec{E}}\right|^2 \mathrm{d}V\,, \quad \text{(2–122a)} \qquad \langle W_\mathrm{m} \rangle = \frac{1}{4}\int_V \frac{\partial \omega\mu}{\partial\omega}\left|\underline{\vec{H}}\right|^2 \mathrm{d}V\,. \quad \text{(2–122b)}$$

Premda su jednakosti (2–122) općenitije, u ovoj ćemo knjizi u gotovo svim prilikama za opis pohranjene energije primjenjivati jednakosti (2–121). Time ćemo prešutno zanemariti disperzivnost sredstva, tj. pretpostavit ćemo da se radi o materijalu koji je gotovo posve frekvencijski neovisan.

Sad ćemo izvesti teorem koji pokazuje da je zakon očuvanja energije primjenjiv i na elektromagnetizam. Budući da nas u mikrovalnoj elektronici uglavnom zanimaju harmonijske vremenske ovisnosti, u izvodu ćemo primijeniti fazorski oblik Maxwellovih jednadžba. Ako se u vektorsku jednakost [dodatak E, jednakost (E41)]

$$\nabla\cdot(\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*) = \underline{\vec{H}}^*\cdot(\nabla\times\underline{\vec{E}}) - \underline{\vec{E}}\cdot(\nabla\times\underline{\vec{H}}^*)$$

izravno uvrste Maxwellove rotorske jednadžbe $\nabla\times\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\vec{B}}$ i $\nabla\times\underline{\vec{H}}^* = \underline{\vec{J}}^* - \mathrm{j}\omega\underline{\vec{D}}^*$, gdje je druga jednadžba kompleksno konjugirana, dobiva se

$$\nabla\cdot(\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*) = -\mathrm{j}\omega\underline{\vec{B}}\cdot\underline{\vec{H}}^* + \mathrm{j}\omega\underline{\vec{D}}^*\cdot\underline{\vec{E}} - \underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{J}}^*\,. \quad \text{(2–123)}$$

Ta je jednadžba poznata pod nazivom *Poyntingov teorem u kompleksnom diferencijalnom obliku*. Teorem je dobio naziv prema britanskom fizičaru J. H. Poyntingu (1852-1914). Očito je da zadnji član ove jednadžbe ima mjernu jedinicu u vatima po prostornom metru (W/m^3) jer se jakost električnog polja mjeri u V/m, a gustoća struje mjeri se u A/m^2. Tako je i sa svim ostalim članovima jednadžbe (2–123) pa se može reći da je diferencijalni oblik Poyntingova teorema u stvari jednadžba volumne gustoće snage. Kako nas samo zanima protok stvarne snage u elektromagnetskome sustavu, ta se jednadžba može integrirati po volumenu V koji je omeđen zatvorenom plohom S. Kao rezultat dobiva se

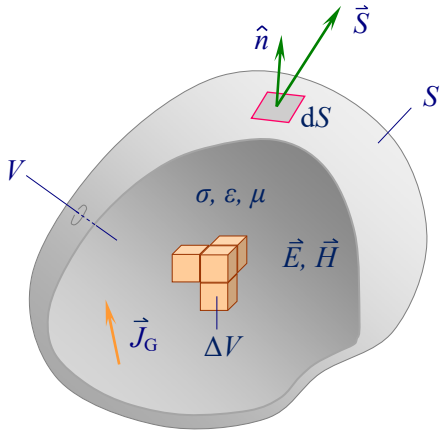
$$\frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot(\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*)\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\oint_S(\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S =$$

$$= -\mathrm{j}\frac{\omega}{2}\int_V(\underline{\vec{B}}\cdot\underline{\vec{H}}^* - \underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{D}}^*)\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\oint_V \underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{J}}^*\,\mathrm{d}V\,, \quad \text{(2–124)}$$

što je *Poyntingov teorem u kompleksnom obliku*. To je u osnovi jednadžba ravnoteže snage u elektromagnetskome sustavu opisanom harmonijskim veličinama. Izraz je pojednostavljen tako da je volumni integral slijeva zamijenjen plošnim integralom s pomoću Gaussova teorema o divergenciji [formula (E28) u dodatku E], gdje je okomica $\hat{n}$ na plohu S određena u skladu sa slikom 2.17.

U disperzivnom sredstvu prvi volumni integral zdesna ne opisuje samo elektromagnetsku energiju pohranjenu u poljima nego i energiju koja se disipira u materijalu zbog faznog pomaka između utisnutih polja i električne ili magnetske polarizacije (odjeljak 2.3.1) koje ta polja stvaraju. Otuda je teško odvojiti članove za pohranjenu i disipiranu energiju.

Ako u elektromagnetskome sustavu postoji izvor utisnute električne struje $\vec{J}_\mathrm{G}$ i inducirana struja $\sigma\vec{E}$ koju stvara električno polje u sredstvu konačne provodnosti, onda se vektor gustoće ukupne provodne struje može napisati kao zbroj, tj. $\vec{J} = \vec{J}_\mathrm{G} + \sigma\vec{E}$. Pretpostavimo također da se u volumenu V nalazi jednostavno linearno sredstvo u kojem su $\varepsilon = \varepsilon' - \mathrm{j}\varepsilon''$ i $\mu = \mu' - \mathrm{j}\mu''$ kompleksne konstante koje uključuju gubitke polarizacije dielektrika. Sad jednadžba (2–124) poprima oblik



Slika 2.17. Zatvorena ploha S obuhvaća volumen V u kojem postoje polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ te izvor struje $\vec{J}_{\mathrm{G}}$

$$-\frac{1}{2}\int_V \underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{J}}_{\mathrm{G}}^{*}\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\oint_V(\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^{*})\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S+\frac{1}{2}\int_V\sigma\left|\underline{\vec{E}}\right|^2\mathrm{d}V+$$

$$+\frac{\omega}{2}\int_V\left(\varepsilon''\left|\underline{\vec{E}}\right|^2+\mu''\left|\underline{\vec{H}}\right|^2\right)\mathrm{d}V+\mathrm{j}\frac{\omega}{2}\int_V\left(\mu'\left|\underline{\vec{H}}\right|^2-\varepsilon'\left|\underline{\vec{E}}\right|^2\right)\mathrm{d}V\,. \qquad (2\text{–}125)$$

Integral slijeva označuje kompleksnu snagu koju daje izvor $\vec{J}_{\mathrm{G}}$ smješten unutar S,

$$P_{\mathrm{G}}=-\frac{1}{2}\int_V\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{J}}_{\mathrm{G}}^{*}\,\mathrm{d}V\,. \qquad (2\text{–}126)$$

Plošni integral zdesna može se objasniti kao tok kompleksne snage, tj. kao mjera protoka elektromagnetske energije koja napušta volumen V kroz plohu S. U tom integralu posebno mjesto zauzima kompleksna vektorska veličina

$$\underline{\vec{S}}=\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^{*} \qquad (2\text{–}127)$$

pod nazivom *kompleksni Poyntingov vektor*. Jedinica je mjere toga vektora vat po četvornom metru (W/m^2), što znači da je riječ o gustoći toka snage po jedinici površine, koji je usmjeren okomito na vaktore $\vec{E}$ i $\vec{H}$. Otuda kompleksna snaga koja napušta volumen V iznosi

$$P_{\mathrm{iz}}=\frac{1}{2}\oint_S(\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^{*})\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\oint_S\underline{\vec{S}}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S\,. \qquad (2\text{–}128)$$

U prethodnim izrazima, pojam kompleksne snage upućuje na prosječnu snagu (uklonjena vremenska ovisnost) i uključuje realnu snagu, tj. *srednju snagu*, $\mathrm{Re}\{P\}$ i *reaktivnu snagu*, $\mathrm{Im}\{P\}$, kao za kondenzator s gubitcima. U skladu s izrazima (2–119) srednja se gustoća snage može izračunati kao

$$\left\langle\vec{S}(t)\right\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{E}(t)\times\vec{H}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^{*}\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{\vec{S}}\right\}. \qquad (2\text{–}129)$$

Taj izraz ujedno povezuje kompleksni Poyntingov vektor (2–127) s realnim Poyntingovim vektorom $\vec{S}(t)=\vec{E}(t)\times\vec{H}(t)$ koji pokazuje trenutačnu gustoću toka snage kroz jediničnu površinu. Veličina $\langle\vec{S}(t)\rangle$ označuje tok srednje snage kroz jedinicu površine i jednaka je polovini realnog dijela kompleksnog Poyntingova vektora.

Valja upamtiti da kompleksni Poyntingov vektor nije fazor vremenski ovisne snage, a nije ni fazor srednje gustoće snage jer nije harmonijska veličina nego je umnožak dviju sinusnih veličina. Naime, fazor se ne može primijeniti na umnožak dviju harmonijskih funkcija, čak i onda kad su im frekvencije jednake. Dakle, ispravno je pisati $\langle \vec{S}(t) \rangle = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{S}\}$ kao u izrazu (2–129), a nikako ne $\langle \vec{S}(t) \rangle = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{S}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$.

U jednakosti (2–125) zdesna drugi i treći integral realne su veličine. To upućuje na vremenski prosječne snage koje se disipiraju u volumenu V zbog konačne vodljivosti materijala te dielektričnih i magnetskih gubitaka u materijalu. Ako se zbroj tih snaga označi s $\langle P_{\mathrm{dis}} \rangle$, onda je

$$\langle P_{\mathrm{dis}} \rangle = \frac{1}{2}\int_V \sigma \left|\underline{\vec{E}}\right|^2 \mathrm{d}V + \frac{\omega}{2}\int_V \left(\varepsilon'' \left|\underline{\vec{E}}\right|^2 + \mu'' \left|\underline{\vec{H}}\right|^2\right)\mathrm{d}V \,. \tag{2–130}$$

Budući da su to gubitci energije koji se pretvaraju u toplinu, izraz (2–130) nerijetko se naziva *Jouleov zakon*. Zadnji integral u jednakosti (2–125) odnosi se na pohranjenu energijom u električnom i magnetskom polju, kao što je definirano izrazima (2–121).

Prema tim definicijama, Poyntingov se teorem u kompleksnom obliku bilježi kao

$$P_{\mathrm{G}} = P_{\mathrm{iz}} + \langle P_{\mathrm{dis}} \rangle + \mathrm{j}2\omega(\langle W_{\mathrm{m}} \rangle - \langle W_{\mathrm{e}} \rangle) \,. \tag{2–131}$$

Ta općenita jednakost upućuje na ravnotežu kompleksne snage. Riječju, kompleksna snaga P_{G} koju u elektromagnetski sustav unosi izvor (generator) jednaka je zbroju »izlazne« kompleksne snage P_{iz} koja napušta volumen V kroz plohu S, disipirane snage $\langle P_{\mathrm{dis}} \rangle$ koja se pretvara u toplinu unutar tog istog volumena i reaktivne snage $\mathrm{j}2\omega(\langle W_{\mathrm{e}} \rangle - \langle W_{\mathrm{m}} \rangle)$ koja upućuje na energiju pohranjenu u V. Razlika pohranjenih energija, tj. negativni predznak ispred člana $\langle W_{\mathrm{e}} \rangle$, odnosno člana $\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^* = \varepsilon' |\underline{\vec{E}}|^2$, u jednakostima (2–124), (2–125) i (2–131) nerijetko je izvor zabune jer se u realnom Poyntingovu teoremu sličan izraz s energijama pojavljuje u obliku zbroja (vidjeti, primjerice, literaturu [6], [9], [12]). No smisao kompleksnog Poyntingova teorema može se lakše objasniti preko analogije koja opisuje pohranjenu električnu i magnetsku energiju u električnim krugovima. Budući da se pohranjena energija u električnom polju može uzeti kao *kapacitivna energija*, a energija pohranjena u magnetskom polju kao *induktivna energija*, iz teorije električnih krugova dobiva se jednadžba $P = \tfrac{1}{2}\underline{V}\underline{I}^* = \tfrac{1}{2}Z|\underline{I}|^2$ za kompleksnu snagu, koja je analogna Poyntingovu teoremu. Ovdje su $\underline{V}$ i $\underline{I}$ fazori napona i struje, koji odgovaraju fazorima polja $\underline{\vec{E}}$, odnosno $\underline{\vec{H}}$ u Poyntingovu teoremu. Fazori $\underline{V}$ i $\underline{I}$ međusobno su povezani impedancijom Z koja je definirana omjerom tih istih fazora. Budući da je impedancija kapaciteta $Z_C = -\mathrm{j}/\omega C$, pohranjena je električna energija negativna imaginarna veličina. S druge strane, impedancija je induktiviteta $Z_L = \mathrm{j}\omega L$ pa se pohranjena magnetska energija može izraziti pozitivnim imaginarnim brojem. To upućuje na ispravan odabir predznaka u jednakostima (2–124), (2–125) i (2–131). S tim ćemo se pristupom nerijetko susretati prilikom razmatranja rezonantnih električnih mreža (odjeljci 5.2. i 7.4).

Ako ploha S ne obuhvaća izvor struje, tj. $J_{\mathrm{G}} = 0$, onda se iz jednadžbe (2–131) dobiva $-P_{\mathrm{iz}} = \langle P_{\mathrm{dis}} \rangle = \mathrm{j}2\omega(\langle W_{\mathrm{m}} \rangle - \langle W_{\mathrm{e}} \rangle)$. Negativni predznak valja tumačiti činjenicom da snaga ulazi u dio prostora omeđenog plohom S, tj. da se izvor snage nalazi izvan tog prostora. To znači da smjer vektora $\hat{n}$ na slici 2.17 valja obrnuti.

Volumne gustoće srednje (vremenski prosječne) energije sadržane u električnom i magnetskom polju ravnoga *TEM*-vala mogu se napisati kao [formula (E–31) u dodatku E]:

$$\langle w_{\mathrm{e}} \rangle = \frac{\varepsilon}{4}\vec{E} \cdot \vec{E}^* = \frac{\varepsilon}{4}E_0^2 \,, \tag{2–132a}$$

$$\langle w_{\mathrm{m}} \rangle = \frac{\mu}{4}\vec{H} \cdot \vec{H}^* = \frac{\mu}{4\eta^2}(\hat{n} \times \vec{E}) \cdot (\hat{n} \times \vec{E}^*) = \frac{\varepsilon}{4}E_0^2 = \langle w_{\mathrm{e}} \rangle \,. \tag{2–132b}$$

Dakle, energije pohranjene u električnom i magnetskom polju ravnoga *TEM*-vala međusobno su jednake.

S druge strane, gustoća snage jednaka je toku energije u jedinici vremena, tj.

$$\left(\langle w_{\mathrm{e}}\rangle + \langle w_{\mathrm{m}}\rangle\right) v_{\mathrm{e}} = \langle S\rangle,$$

gdje je S gustoća toka srednje snage definirana izrazom (2–129). Primjenom izraza (2–132), sad se može definirati brzina v_{E} kojom se ta energija prenosi, tj.

$$v_{\mathrm{E}} = \frac{\langle S\rangle}{\langle w_{\mathrm{e}}\rangle + \langle w_{\mathrm{m}}\rangle} = \frac{\frac{1}{2\eta}E_0^2}{\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2} = \frac{1}{\varepsilon\eta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = v_{\mathrm{f}}. \tag{2–133}$$

U slobodnome prostoru energija se prenosi brzinom svjetlosti, jer je tada $v_{\mathrm{f}} = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = c$. Budući da fazna brzina ne ovisi o frekvenciji, sve će se komponente moduliranoga vala nositelja rasprostirati istom brzinom, c. No u odjeljku 4.2. pokazano je da fazna brzina vala u valovodu ovisi o frekvenciji i da nije jednaka brzini kojom se prenosi energija. Frekvencijska ovisnost brzine rasprostiranja može izazvati izobličenja pri prijenosu signala širokog spektra jer različite frekvencijske komponente putuju različitim brzinama. Stoga valja uvesti pojam *grupne brzine* kojom putuje ovojnica signala i, u tom slučaju, energija. U sredstvu s gubitcima i s nemalom apsorpcijom snage grupna brzina gubi smisao, ali je zato brzina prijenosa energije i dalje dobro definirana. Dok fazna i grupna brzina mogu biti veće od brzine svjetlosti, brzina prijenosa energije uvijek je manja od brzine svjetlosti [25].

Fizikalna intuicija navodi na zaključak da ravni val prenosi beskonačnu snagu jer su na beskonačnoj fronti vala jakosti električnog i magnetskog polja posvuda jednake. No, s druge strane, gustoća snage može imati konačnu vrijednost. Pogledajmo to na sljedećem primjeru.

Primjer 2.1. Poyntingov vektor ravnoga vala

Naći kompleksni Poyntingov vektor uniformnoga ravnog vala koji se rasprostire u smjeru $\vec{k}/|\vec{k}|$ u neograničenom sredstvu bez gubitaka. Kolika je gustoća snage koju prenosi ravni val?

Rješenje:

Faradayev zakon za magnetsko polje daje

$$\underline{\vec{H}} = \frac{\vec{k}\times\underline{\vec{E}}}{\omega\mu_0}$$

pa kompleksni Poyntingov vektor izražen samo preko električnog polja poprima oblik

$$\vec{S} = \frac{\underline{\vec{E}}\times(\vec{k}\times\underline{\vec{E}})^*}{\omega\mu_0} = \frac{1}{\omega\mu_0}\left[\vec{k}^*(\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{E}}^*) - \underline{\vec{E}}^*(\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}})\right], \tag{2–134}$$

gdje je upotrijebljena vektorska jednakost (E33) dodatak E. U odjeljku 2.5.2. pokazano je da je smjer rasprostiranja ravnoga *TEM*-vala uvijek okomit na vektore električnog i magnetskog polja. Stoga je drugi član u uglatoj zagradi izraza (2–134) jednak nuli. Budući da ravni val koji se rasprostire izotropnim sredstvom bez gubitaka ima realni valni vektor $(\vec{k} = \vec{k}^*)$, Poyntingov vektor ravnoga vala poprima oblik

$$\vec{S} = \frac{\vec{k}}{k}\frac{|\underline{\vec{E}}|^2}{\eta} = \frac{\vec{k}}{k}\eta|\underline{\vec{H}}|^2, \tag{2–135}$$

gdje je $\vec{k}/k = \vec{k}/|\vec{k}| = \hat{n}$ smjer u kojim se val rasprostire. Stoga, u skladu s izrazom (2–129), gustoća srednje snage u smjeru $\hat{n}$ iznosi

$$\left\langle \vec{S}(t) \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^{*} \right\} = \frac{1}{2\eta}\underline{\vec{E}} \times (\hat{n} \times \underline{\vec{E}})^{*} = \hat{n}\frac{1}{2\eta}E_0^2, \tag{2–136}$$

gdje je E_0 realna amplitudna konstanta električnog polja. Ako je amplitudna konstanta kompleksna, onda u izrazu (2–136) valja uzeti kvadrat njezinog modula, $|E_0|^2$.

Na osnovi provedenih razmatranja, opća se svojstva uniformnoga ravnog vala u savršenom dielektriku mogu sažeti kako slijedi:

- električno i magnetsko polje međusobno su okomiti;
- ni električno ni magnetsko polje nemaju komponente u smjeru rasprostiranja;
- amplituda magnetskog polja jednaka je omjeru amplitude električnog polja i intrinzične valne impedancije sredstva u kojem se val rasprostire, tj. $H=E/\eta$;
- smjer rasprostiranja poklapa se sa smjerom vektorskog umnoška električnog i magnetskog polja, $\vec{E} \times \vec{H}$ (Poyntingov vektor);
- trenutačna vrijednost Poyntingova vektora dana je s E^2/η ili s ηH^2, gdje su E i H trenutačne vrijednosti polja;
- srednja vrijednost Poyntingova vektora dana je s $E^2/2\eta$ ili s $\eta H^2/2$, gdje su E i H vršne vrijednosti polja;
- pohranjena energija u električnom polju u svakom je trenutku jednaka pohranjenoj energiji u magnetskom polju;
- brzina kojom se prenosi energija jednaka je faznoj brzini, $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

2.7. Valovi u sredstvu s gubitcima

Rasprostiranje ravnoga vala u sredstvu s gubitcima može se razmatrati tako da se u valnu jednadžbu za sredstvo bez gubitaka ugradi efektivna permitivnost opisana izrazima (2–42) u odjeljku 2.3.1. Dakle, kvadrat valnog broja, $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$, valja zamijeniti s $\omega^2\mu\varepsilon[1 - \mathrm{j}(\sigma/\omega\varepsilon)]$ iz čega izlazi kompleksni koeficijent rasprostiranja

$$\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{\mathrm{j}\sigma}{\omega\varepsilon}}. \tag{2–137}$$

Veličina $\sigma/\omega\varepsilon$ može se prepoznati kao tangens gubitaka materijala definiran izrazom (2–43).

Ako se pretpostavi da električno polje ima samo x-komponentu, onda valna jednadžba za električno polje poprima jednostavan oblik

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_x}{\mathrm{d}z^2} - \gamma^2 E_x = 0. \tag{2–138}$$

Jedno od rješenja te jednadžbe može se zapisati kao

$$E_x(z) = E_0 \mathrm{e}^{-\gamma z}, \tag{2–139}$$

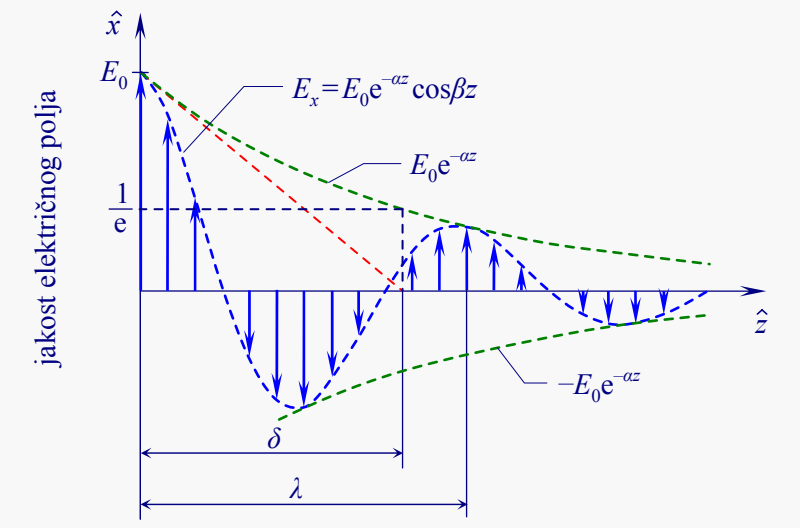
gdje je E_0 kompleksna amplitudna konstanta za val koji se rasprostire u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$. Taj se val eksponencijalno prigušuje u tom istom smjeru, što se može vidjeti iz prigušnog član $\mathrm{e}^{-\alpha z}$ u *faktoru rasprostiranja*

$$\mathrm{e}^{-\gamma z} = \mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}.$$

U vremenskoj se domeni faktor rasprostiranja poprima oblik

$$\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z). \tag{2–140}$$

Faktor rasprostiranja (2–139) označuje val (slika 2.18) koji putuje u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$ brzinom $v_\mathrm{f}=\omega/\beta$. Valna mu je duljina $\lambda=2\pi/\beta$, a mjera kojom jakost polja opada s udalje-



Slika 2.18. Prostorna ovisnost električnog polja ravnoga vala u sredstvu s gubitcima. Na sličnu ovisnost upućuje i gustoća struje. Prikazan je i način na koji se može grafički odrediti dubina prodiranja

ljenošću određena je *koeficijentom prigušenja* α. Ako se u jednadžbama (2–139) i (2–140) negativni predznaci zamijene pozitivnim predznacima, onda se dobiva slično rješenje za val koji putuje u negativnome smjeru osi $\hat{z}$. Za sredstvo bez gubitaka ($\alpha = 0$) izlazi da je $\gamma = \mathrm{j}k$, tj. $\alpha = 0$ i $\beta = k$ pa se valna jednadžba (2–138) i njezino rješenje (2–139) svode na izraze (2–75), odnosno (2–76) u odjeljku 2.5.2.

Pripadajuće magnetsko polje može se naći na isti način kao u odjeljku 2.5.2, tj.

$$H_y(z) = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mathrm{j}\frac{\gamma}{\omega\mu}E_0 \mathrm{e}^{-\gamma z}. \tag{2–141}$$

Kao i za sredstvo bez gubitaka, valna je impedancija definirana omjerom poprečnih komponenata električnog i magnetskog polja, tj.

$$\eta = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma} \tag{2–142}$$

pa izraz za magnetsko polje poprima oblik

$$H_y(z) = \frac{1}{\eta}E_0 \mathrm{e}^{-\gamma z}. \tag{2–143}$$

Izraz (2–142) pokazuje da je intrinzična impedancija sredstva općenito kompleksni broj, a za materijal bez gubitaka, kad je $\gamma = \mathrm{j}k = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, svodi se na realnu vrijednost $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$.

Dobar vodič posebni je slučaj prethodnog razmatranja, u kojem je provodna struja znatno veća od pomačne struje, što znači da je $\sigma \gg \omega\varepsilon$. Obratno je međutim s *lošim vodičem* ili *dobrim dielektrikom*, $\sigma \ll \omega\varepsilon$. Uz uvjet $\sigma \gg \omega\varepsilon$, izraz (2–137) svodi se na

$$\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \simeq \mathrm{j}\omega\sqrt{\frac{-\mathrm{j}\sigma}{\omega\varepsilon}} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \tag{2–144}$$

gdje se drugi korijen od –j može riješiti tako da se izraz –j preinači u obliku $-\mathrm{j} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$, tj.

$$\sqrt{-\mathrm{j}} = \pm\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4} = \pm\frac{1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}.$$

U izrazu (2–139) zadržano je samo pozitivno rješenje koje označuje val koji putuje u pozitivnom smjeru osi $\hat{z}$. Također se vidi da su na visokim frekvencijama koeficijenti α i β međusobno jednake i da mogu poprimiti velike vrijednosti. Valja se sjetiti da je α stupanj slabljenja polja u neperima po metru (Np/m), a β fazni koeficijent ili stupanj promjene faze u radijanima po metru (rad/m). Slabljenje od 1Np/m znači smanjenje jedinične vrijednosti na vrijednost 1/e, što je ekvivalentno slabljenju od $20\log e = 8{,}686$ dB/m. Otuda u dobrom vodiču amplituda električnog polja naglo opada udavanjem od površine, tj. struja na vrlo visokim frekvencijama teče u vrlo tankom sloju. To se jednim nazivom naziva *površinski učinak* (ili *skin-efekt*). Udaljenost na kojoj se jakost polja smanji na vrijednost 1/e, tj. 36,8 % svoje maksimalne vrijednosti na koordinati $z=0$, naziva se *dubina prodiranja* δ, a definirana je kao

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad \text{m.} \tag{2–145}$$

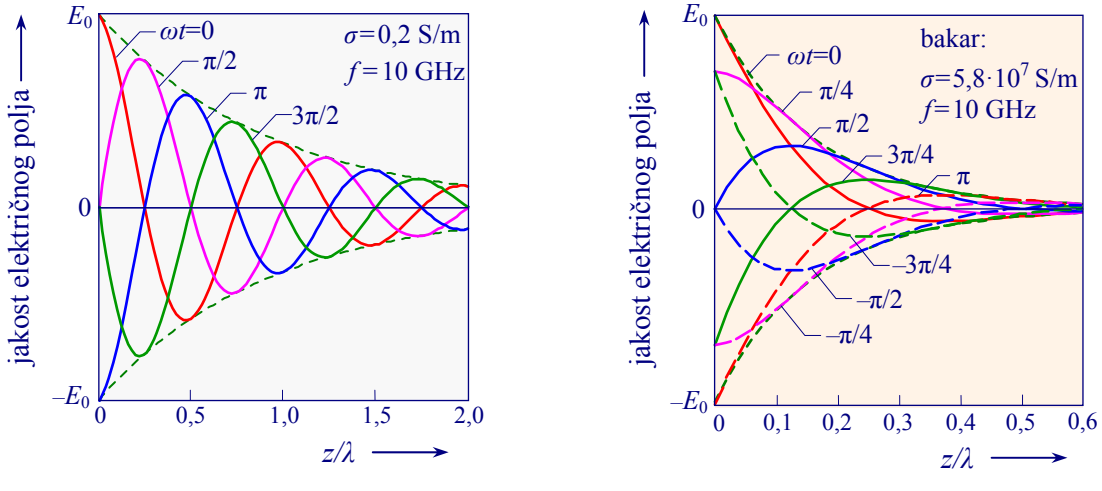
Na slici 2.19 može se vidjeti kako se val rasprostire u vodljivim materijalima u prostoru i vremenu. Prostorno-vremenska ovisnost opisana je članom (2–142). Prikazana su dva slučaja za materijale različite provodnosti i frekvenciju 10 GHz. Na slici 2.19a) prikazana je raspodjela električnog polja za loš vodič sa $\sigma = 0{,}2$ S/m, a na slici 2.19b) za bakar (dobar vodič) sa $\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7$ S/m.

Na mikrovalnim frekvencijama u dobrim vodičima poput srebra, bakra ili zlata ta je dubina manja od tisućinke milimetra. Zbog toga su dobri vodiči uvijek neprozirni za svjetlost, osim ako nisu izrađeni u obliku optički tankog filma. No za nevodljive tvari koje su elektromagnetski »prozirne« na niskim frekvencijama općenito se ne može reći da su nužno prozirne i na optičkim frekvencijama.

U skladu s izrazima (2–142), (2–144) i (2–145), intrinzična je impedancija dobrog vodiča

$$\eta \simeq (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = (1+\mathrm{j})\frac{1}{\sigma\delta}. \tag{2–146}$$

Fazni kut te impedancije iznosi 45°, a kako je to ujedno omjer električnog i magnetskog polja ravnoga vala, električno polje prethodi u fazi magnetskom polju za 45°. To proizlazi iz činjenice da je magnetsko polje posljedica provodne struje u vodiču, a da u dielektriku magnetsko polje stvara pomačna struja. Fazni koeficijent β u dobrom vodiču znatno je veći od onog u slobodnome prostoru pa su otuda valna duljina $\lambda = 2\pi/\beta$ i fazna brzina vala u dobrom vodiču znatno manje od onih u slobodnome prostoru. Fazni kut intrinzične impedancije mate-



Slika 2.19. Rasprostiranje elektromagnetskoga vala u sredstvu s gubitcima; **a)** loš i **b)** dobar vodič

rijala bez gubitaka iznosi 0° pa se fazni kut intrinzične impedancije proizvoljnog materijala s gubitcima nalazi u rasponu od 0° do 45°. Kao što je pokazano u odjeljku 2.3.1, gubitke je također moguće uključiti preko kompleksne permitivnosti. Iz izraza (2–137), za $\sigma = 0$ i kompleksnu permitivnost $\varepsilon = \varepsilon' - \mathrm{j}\varepsilon''$, izlazi

$$\gamma = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \mathrm{j}k = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon'(1 - \mathrm{j}\tan\delta_\varepsilon)}\,, \tag{2–147}$$

gdje veličina $\tan\delta_\varepsilon = \varepsilon''/\varepsilon'$ označuje tangens gubitaka materijala. Za sredstva s malim gubitcima, iz izraza (2–147) slijedi ovaj približan izraz za koeficijent rasprostiranja

$$\gamma \simeq \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left(1 - \mathrm{j}\frac{\tan\delta_\varepsilon}{2}\right), \tag{2–148}$$

gdje je član oblika $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$ za mali x razvijen u Taylorov red samo do linearnog člana. Vidi se da je u sredstvu s malim gubitcima izraz za β ostao gotovo nepromijenjen u odnosu na onaj za idealni dielektrik (sredstvo bez gubitaka) pa je i valna duljina ostala približno jednaka. Realni dio izraza (2–148) daje koeficijent prigušenja koji poprima oblik

$$\alpha \simeq \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}}{2}\tan\delta_\varepsilon\,. \tag{2–149}$$

Stoga dubina prodiranja iznosi

$$\delta \simeq \frac{2}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\tan\delta_\varepsilon} \tag{2–150}$$

pa je prema izrazu (2–142) intrinzična impedancija sredstva s malim gubitcima

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'(1 - \mathrm{j}\tan\delta_\varepsilon)}} \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\left(1 + \mathrm{j}\frac{\tan\delta_\varepsilon}{2}\right), \tag{2–151}$$

gdje su za $x \ll 1$ primijenjene aproksimacije $1/\sqrt{1-x} \simeq \sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$.

U električki vodljivom materijalu, čija je provodnost σ realna konstanta, električno polje inducira volumnu provodnu struju istog smjera i faze kakve ima to isto električno polje. To proizlazi iz Ohmova zakona $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ (2–47) pa je otuda razdioba volumne struje u vodiču jednaka onoj na slici 2.20. Kao što se vidi na slici 2.19a), za x-polarizirano električno polje (2–139) koje putuje u pozitivnom smjeru osi $\hat{z}$, pripadajuća gustoća struje ima oblik

$$\vec{J}(z) = \hat{x}J_x(z)\,, \tag{2–152}$$

gdje je

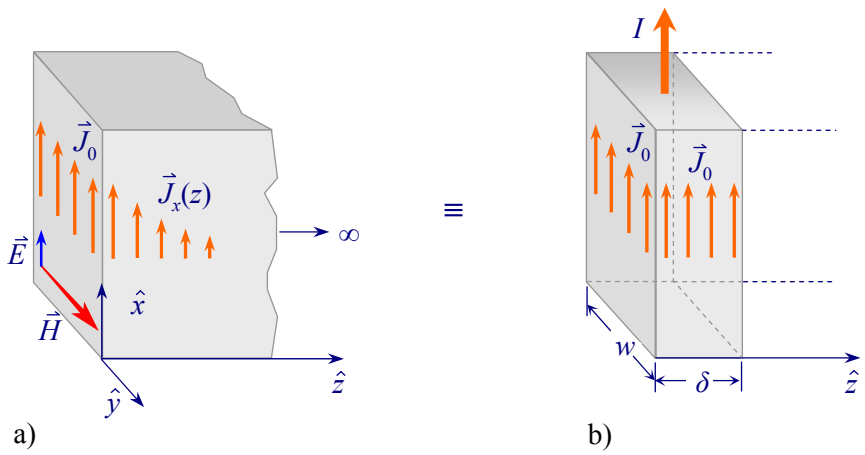
$$J_x(z) = J_0\,\mathrm{e}^{-\gamma z} = \sigma E_0\,\mathrm{e}^{-\gamma z}\ \mathrm{A/m^2}. \tag{2–153}$$

Veličina $J_0 = J_x(0) = \sigma E_0$ označuje amplitudu volumne struje na površini vodiča ($z = 0$), a E_0 označuje amplitudu jakosti polja na površini vodiča. Struja koja teče pravokutnim vodičem širine w, koji se u dubinu (smjer $\hat{z}$) proteže od nule do beskonačnosti, može se jednostavno dobiti integriranjem volumne struje prikazane na slici 2.20a),

$$I = w\int_0^\infty J_x(z)\mathrm{d}z = wJ_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\gamma z}\mathrm{d}z = \frac{wJ_0}{\gamma}\ \ \mathrm{A}. \tag{2–154}$$

Uvrštenje relacija (2–144) i (2–145) za dobre vodiče u izraz (2–154) daje

$$I = \frac{w\delta J_0}{1 + \mathrm{j}}\ \ \mathrm{A}, \tag{2–155}$$



Slika 2.20. a) Gustoća struje u vodiču pada eksponencijalno s dubinom z. **b)** Ukupna struja koja protječe vodičem širine w, koji se proteže od $z = 0$ do $z = \infty$, može se nadomjestiti konstantnom gustoćom struje J_0 koncentrirane u sloju debljine δ

gdje je brojnik ekvivalentan jednolikoj gustoći struje J_0 koja teče tankim slojem debljine δ i širine w, kao što je prikazano na slici 2.20b). Budući da jakost struje eksponencijalno opada sa z, u inženjerskoj se praksi može uzeti da je vodič beskonačne debljine d, ako je deblji od pet dubina prodiranja δ. (Za $d = 5\delta$ pogreška je manja od 1 %.) Drugim riječima, više od 99 % posto ukupne struje protječe slojem debljim od 5δ, što za dobre vodiče poput bakra i srebra iznosi svega nekoliko tisućinki milimetara na frekvenciji 10 GHz.

Na isti se način može izračunati struja u vodičima zakrivljenog oblika, ako je polumjer zakrivljenosti vodiča nekoliko puta veći od δ. U tablici 2.2. dane su vrijednosti dubine prodiranja dobivene izrazom (2–145) za nekoliko dobrih vodiča (metala) na frekvencijama 1 kHz i 10 GHz. Pripadajuće vrijednosti provodnosti metala preuzete su iz dodatka D.

Tablica 2.2. Dubina prodiranja za neke metale na frekvencijama 1 kHz i 10 GHz

Metal	Provodnost	Dubina prodiranja, δ	
	σ (S/m)	$f = 1$ kHz	$f = 10$ GHz
Srebro	$6{,}17 \cdot 10^7$	2,03 mm	0,641 μm
Bakar	$5{,}8 \cdot 10^7$	2,09 mm	0,660 μm
Zlato	$4{,}1 \cdot 10^7$	2,49 mm	0,786 μm
Aluminij	$3{,}8 \cdot 10^7$	2,58 mm	0,814 μm
Mjed	$2{,}56 \cdot 10^7$	3,14 mm	0,992 μm
Lem	$7{,}0 \cdot 10^6$	5,97 mm	1,889 μm

No koncentriranjem struje u vrlo tankom površinskom sloju vodiča smanjuje se raspoloživa površina presjeka kojom bi ta struja mogla teći pa rastu gubitci. Stoga se u strukturama za vođenje elektromagnetskih valova visokih frekvencija rabe najbolji mogući vodiči poput srebra, bakra, zlata i sl. Gubitci u lošem vodiču mogu se smanjiti tako da se na loš vodič postupkom galvanizacije nanese dovoljno debeo sloj dobrog vodiča. Tako je za rad na frekvencijama iznad 1 GHz dovoljno nanijeti sloj srebra ili bakra debljine samo desetak mikrometara.

2.8. Polarizacija i ortogonalnost

Ravni val koji smo dosad razmatrali imao je vektor električnog polja u smjeru čvrste osi. Takav se val naziva *linearno polarizirani val*. Po definiciji, polarizacija vala općenito ovisi o orijentaciji vektora električnog polja. Taj vektor može imati čvrsti smjer ili mu se smjer može mijenjati u vremenu. Na slici 2.21 prikazane su tri osnovne polarizacije, linearna, kružna i najopćenitija, eliptična polarizacija.

Ako se elektromagnetski val rasprostire u smjeru $+\hat{z}$, da se zadovolji jednadžba $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, onda električno polje može imati samo komponente E_x i E_y. Superpozicijom se dobiva:

$$\vec{E}(z) = (\hat{x}A + \hat{y}B)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}, \qquad \vec{H}(z) = \frac{1}{\eta}(-\hat{x}B + \hat{y}A)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}, \tag{2–156}$$

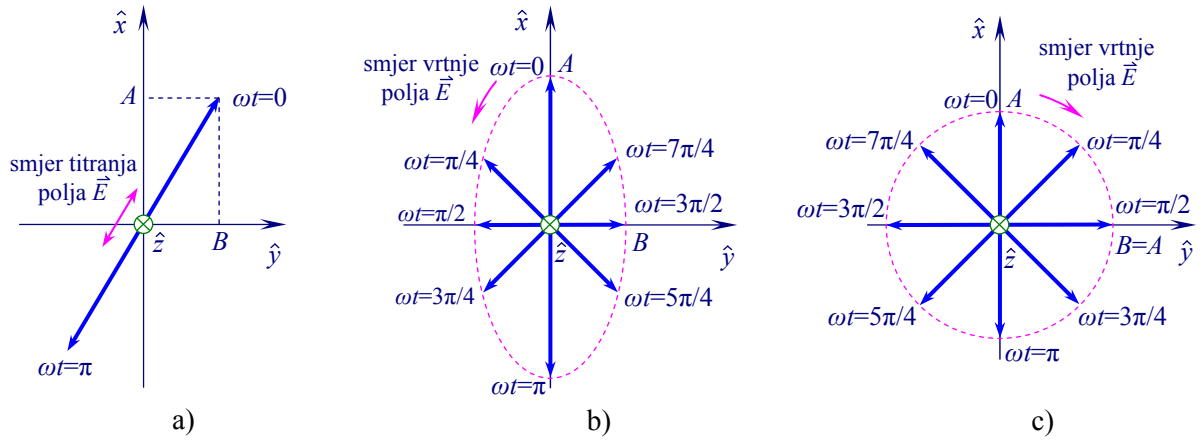
gdje je, kraće zapisano, $A = E_x$ i $B = E_y$. Ako je $B = 0$, onda je val linearno polariziran u smjeru $\hat{x}$. Uz $A = 0$, val je linearno polariziran u smjeru $\hat{y}$. Ako su A i B realni (ili kompleksni i istofazni), onda je val opet linearno polariziran, s tim da mu je polarizacijska os nagnuta na os $\hat{x}$ pod kutom $\tan^{-1}(B/A)$, kao što je prikazano na slici 2.21a).

Ako su A i B kompleksni s različitim faznim kutovima, tad se vrh vektora $\vec{E}$ više neće kretati po jednom te istom prostornom smjeru. Dopuste li se općeniti fazori $A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_A}$ i $B\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_B}$, polja u vremenskoj domeni poprimaju oblik:

$$E_x(z,t) = A\cos(\omega t - kz + \varphi_A), \qquad E_y(z,t) = B\cos(\omega t - kz + \varphi_B).$$

Za taj su slučaj, na slici 2.21b) prikazane trenutačne vrijednosti električnog polja po amplitudi i po smjeru unutar jednog titraja elektromagnetskoga vala za $A = 2B$, $\varphi_A = 0$ i $\varphi_B = \pi/2$. Pritom smjer rasprostiranja vala gleda u ravninu crteža (smjer osi $+\hat{z}$), a vektor električnog polja vrti se u suprotnom smjeru kazaljke sata. To je po definiciji lijeva eliptična polarizacija. Ako se vrh električnog polja vrti u smjeru kazaljke sata, gledano u smjeru rasprostiranja, onda je polarizacija desna. Omjer velike i male osi elipse A/B naziva se *aksijalni odnos*. Ovisno o veličini i fazi fazora A i B može se dobiti proizvoljna orijentacija elipse u ravnini xy i proizvoljni aksijalni odnos. Prema tomu, linearna je polarizacija poseban slučaj eliptične polarizacije i ima beskonačni aksijalni odnos. Budući da vrijedi načelo superpozicije, polje eliptično polariziranog vala uvijek se može rastaviti na, ili sastaviti od dviju ortogonalnih komponenata koje su ili kružno polarizirane ili linearno polarizirane i fazno pomaknute.

Za jedinični aksijalni odnos i $\varphi_A - \varphi_B = \pm\pi/2$ vrh strelice električnog polja opisuje kružnicu pa je riječ o kružnoj polarizaciji vala, kao što je prikazano na slici 2.21c). To je također poseb-



Slika 2.21. Definicija polarizacije elektromagnetskoga vala: **a)** linearna, **b)** lijeva eliptična i **c)** desna kružna. Smjer rasprostiranja gleda u ravninu crteža

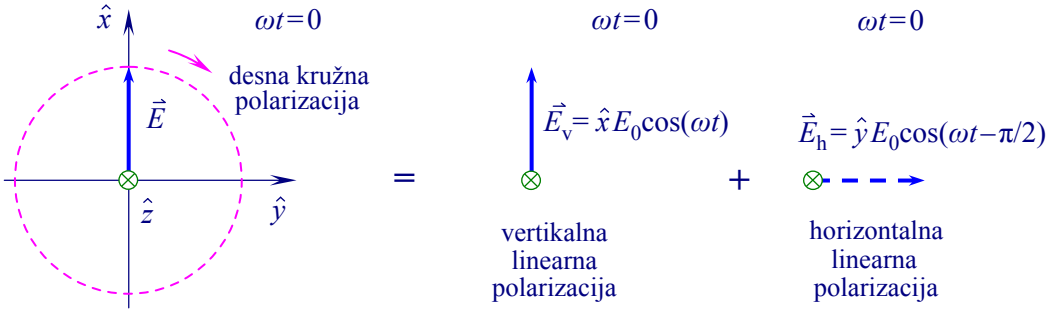
ni slučaj eliptične polarizacije, za $\underline{A}=\pm j\underline{B}$. Na slici je prikazan slučaj desne kružne polarizacije ($\underline{A}=j\underline{B}$), gdje y-komponenta električnog polja kasni u fazi $\pi/2$ radijana (ili 90°) za x-komponentom. Promijeni li se predznak jednoj od komponenata na slici 2.21c), polarizacija prelazi u lijevu kružnu polarizaciju.

Ako se kružno polarizirani val promatra u smjeru koji se ne poklapa sa smjerom rasprostiranja, polarizacija se općenito promijeni u eliptičnu.

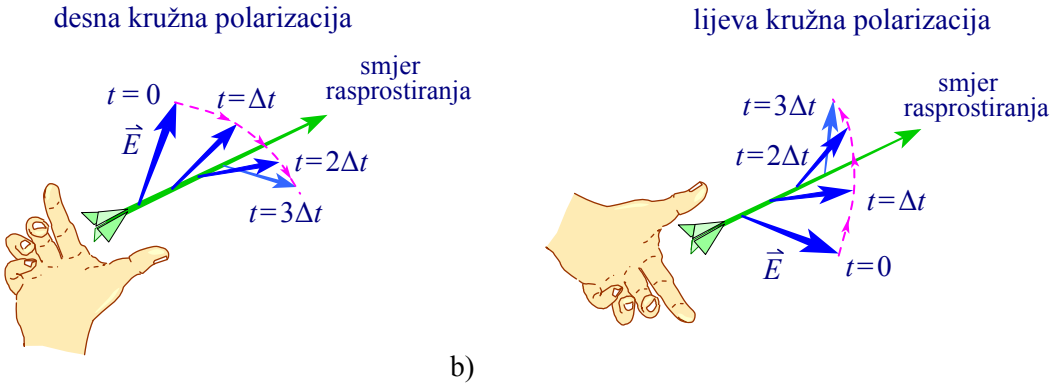
Na slici 2.22 prikazano je kako se kružno polarizirano polje može rastaviti na dvije ortogonalne linearno polarizirane komponente jednakih jakosti polja pomaknute u fazi za 90°. Slično se može linearno polarizirani val rastaviti na dva ortogonalna kružno polarizirana vala. Kružno polarizirani val stalne jakosti električnog polja E_0 nosi snagu gustoće $S = E_0^2/\eta$, a horizontalno odnosno vertikalno polarizirana komponenta nose upola manju gustoću snage, tj. $S_h = S_v = E_0^2/(2\eta)$, što je u skladu sa zakonom očuvanja energije.

Na slici 2.22b) zorno je prikazana definicija kružne polarizacije. Ako se vrh električnog polja vrti u smjeru prstiju desne ruke, a palac gleda u smjeru rasprostiranja, polarizacija je desna. Suprotno je definirana lijeva kružna polarizacija.

Izraz (2–156) pokazuje da vrh vektora $\vec{H}(t)$ opisuje jednak lik kao i $\vec{E}(t)$, samo što je geometrijski zakrenut za 90° u ravnini xy. To znači da su električno i magnetsko polje međusobno razmjerni i ortogonalni u svakom trenutku i u svakoj točki prostora.

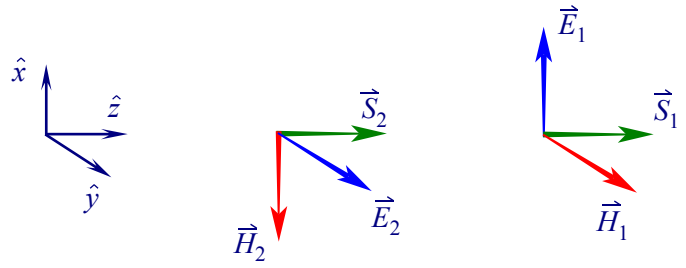


a)



b)

Slika 2.22. a) Rastavljanje desno kružno polariziranog vala na dva ortogonalna linearno polariziranog vala (vertikalno i horizontalno polarizirana). Pritom horizontalno polarizirana komponenta kasni u fazi $\pi/2$ radijana za vertikalnom komponentom. Kod lijeve kružne polarizacije horizontalno polarizirana komponenta prethodi u fazi 90°. Vektor električnog polja kružno polariziranog vala prikazan je za $\omega t = 0$, tj. u trenutku u kojem je prisutna samo vertikalna komponenta. Nakon četvrt periode fazni je pomak $\omega t = \pi/2$ pa je tad prisutna samo horizontalna komponenta, itd. **b)** Definicije desne i lijeve kružne polarizacije



Slika 2.23. Prikaz dvaju ortogonalnih uniformnih ravnih valova koji putuju u istom smjeru

Da bismo se uvjerili da se svaki uniformni ravni val može uistinu izraziti linearnom kombinacijom dvaju rješenja, kao pri kružno ili eliptički polariziranom valu, valja razmotriti znatno općenitija svojstva toka snage ili Poyntingova vektora za takvu linearnu kombinaciju. Pritom rješenja moraju putovati u istome smjeru.

Gustoća toka snage koju nosi val na slici 2.23 algebarski je zbroj gustoća snaga koje nosi svaka od komponenta vala za sebe. To se može lako dokazali na općenitom slučaju u kojem se vektorsko polje u fazorskom obliku rastavi na dvije ortogonalne komponente (vertikalnu komponentu $\underline{\vec{E}}_1, \underline{\vec{H}}_1$ i horizontalnu komponentu $\underline{\vec{E}}_2, \underline{\vec{H}}_2$) proizvoljnih amplituda i faza. Sada primjenom ukupnih polja $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}_2$, $\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{H}}_1 + \underline{\vec{H}}_2$, kompleksni Poyntingov vektor poprima oblik

$$\vec{S} = \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* = (\underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}_2) \times (\underline{\vec{H}}_1^* + \underline{\vec{H}}_2^*) =$$

$$= \underline{\vec{E}}_1 \times \underline{\vec{H}}_1^* + \underline{\vec{E}}_2 \times \underline{\vec{H}}_2^* + \underline{\vec{E}}_1 \times \underline{\vec{H}}_2^* + \underline{\vec{E}}_1 \times \underline{\vec{H}}_2^* . \qquad (2\text{–}157a)$$

No budući da je

$$\underline{\vec{E}}_1 \times \underline{\vec{H}}_2^* = \underline{\vec{E}}_1 \times \underline{\vec{H}}_2^* \equiv 0 \qquad (2\text{–}157b)$$

jer je $\underline{\vec{E}}_1$ paralelno s $\underline{\vec{H}}_2$, a $\underline{\vec{E}}_2$ paralelno s $\underline{\vec{H}}_1$, konačno izlazi

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 .$$

Dakle, Poyntingov vektor ukupnog polja jednak je zbroju Poyntingovih vektora komponenata. To je također u skladu s rezultatom za kružno polarizirani val (slika 2.22).

Taj je koristan rezultat zapravo primjer općenitijeg uvjeta poznatog pod nazivom *ortogonalnost* rješenja sustava diferencijalnih jednadžba. Uobičajen matematički izričaj tog uvjeta uključuje integraciju. Pretpostavimo, primjerice, da u nekom području D prostora (ili vremena) postoje dva različita skalarna rješenja Φ_i i Φ_j iste diferencijalne jednadžbe. Tad su te dvije funkcije ortogonalne ako vrijedi

$$\int_D \Phi_i \Phi_j \mathrm{d}D = 0 \quad \text{za } i \neq j . \qquad (2\text{–}158)$$

Ovdje je riječ »ortogonalnost« upotrijebljena zbog sličnosti izraza (2–158) s relacijom ortogonalnosti između dvaju vektora,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0 .$$

Ako su Φ_i i Φ_j vektorske funkcije, onda množenje pod znakom integrala može biti bilo skalarno bilo vektorsko. U našem slučaju s uniformnim ravnim valovima, polje se ne mijenja promjenom točke promatranja u bilo kojoj ravnini koja je okomita na smjer rasprostiranja. Stoga se rezultat poput (2–157b) može integrirati po bilo kojem dijelu ravnine polja, tj.

integraciju nije potrebno provoditi na cijeloj ravnini. To upućuje na uvjet ortogonalnosti po jediničnoj površini. U našem je primjeru »ortogonalnost« očigledna jer se radi o poljima koja su geometrijski okomita. No postoje i primjeri kod kojih dolazi do ortogonalnosti iz posve drugih razloga. Tako su, primjerice, modovi u pravokutnome valovodu rješenja Maxwellovih jednadžba i čine beskonačan skup ortogonalnih funkcija (vidjeti odjeljak 4.3).

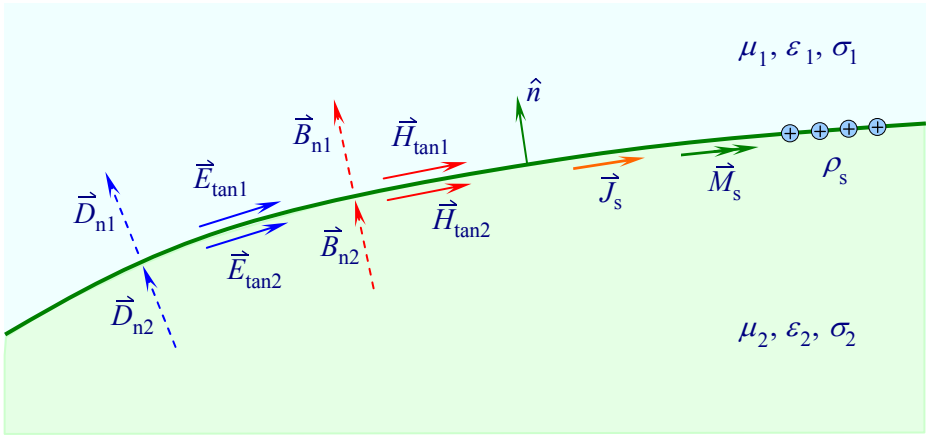
2.9. Rubni uvjeti

Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku izražavaju odnose između vektorskih polja $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}$ i $\vec{B}$ u svakoj točki unutar kontinuiranog materijala. No u praktičnoj izvedbi mikrovalnih naprava nerijetko dolazi do naglih prijelaza s jednog materijala na drugi što stvara diskontinuitete polja. Zbog toga se od Maxwellovih jednadžba u diferencijalnom obliku ne mogu očekivati valjana rješenje u točkama diskontinuiteta. Ali u području s diskontinuiranim i singularnim poljima mogu se uspješno primijeniti Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku. Da bismo našli ispravna i jedinstvena rješenja Maxwellovih jednadžba u stvarnom praktičnom problemu u kojem se nalaze materijali različitih električnih svojstava potrebno je znati kako se polja ponašaju na diskontinuitetima, tj. na graničnim plohama koje razdvajaju te materijale. Maxwellove se jednadžbe prvo rješavaju odvojeno za svaki materijal, a potom se primjenjuju odgovarajući rubni uvjeti kako bi se na graničnoj plohi ta ista rješenja mogla uskladiti (slika 2.24). Kad su zadovoljeni rubni uvjeti, rješenja za oba materijala bit će jedinstvena.

Odmah se mogu izreći neka temeljna obilježja polja na graničnoj plohi, a to su *rubni uvjeti*:

- tangencijalna je komponenta električnog polja $\vec{E}$ neprekinuta;
- tangencijalna je komponenta magnetskog polja $\vec{H}$ neprekinuta osim na površini *idealnoga vodiča*;
- okomita je komponenta magnetskog toka $\vec{B}$ neprekinuta;
- okomita je komponenta električnog toka $\vec{D}$ neprekinuta, ako na graničnoj plohi nema površinskoga naboja. U suprotnom, električni tok $\vec{D}$ pokazuje diskontinuitet čija je veličina razmjerna količini površinskoga naboja.

Dokaze ovim tvrdnjama možemo naći izravnom primjenom Maxwellovih jednadžba na granicu između dvaju homogenih materijala.



Slika 2.24. Elektromagnetska polja, površinska struja i površinski naboj na granici dvaju materijala

2.9.1. Tangencijalne komponente polja na granici

Razmotrimo najprije tangencijalne komponente električnog polja s jedne i druge strane granične plohe S koja se nalazi između dvaju različitih materijala zadanih parametrima ε_1 i μ_1, odnosno ε_2 i μ_2. Ako se obje strane Maxwellove rotorske jednadžbe (Faradayev zakon), napisane u fazorskom obliku, integriraju po površini pravokutnika ΔS prikazanog na slici 2.25a) i zatim primijeni Stokesov teorem, s pomoću kojeg se izraz slijeva pretvara u krivuljni integral na zatvorenom putu C, onda se dobiva

$$\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{j}\omega \int_{\Delta S} \vec{B}\cdot \hat{n}_\mathrm{s}\,\mathrm{d}S - \int_{\Delta S} \vec{M}\cdot \hat{n}_\mathrm{s}\,\mathrm{d}S\,, \tag{2–159}$$

gdje je $\hat{n}_\mathrm{s}$ jedinični vektor okomit na ΔS. U izrazu (2–159) dopušta se postojanje fiktivne magnetske struje $\vec{M}$ koja se nerijetko uvodi prilikom rješavanja dualnih elektromagnetskih problema. Kad visina pravokutnika teži nuli ($\Delta h \to 0$), plošni integral od $\vec{B}$ iščezava. Ako postoji površinska magnetska struja $\vec{M}_\mathrm{s}$, onda postoji i doprinos pripadajućeg plošnog integrala. Volumna magnetska struja može se napisati s pomoću Diracove δ-funkcije kao $\vec{M} = \vec{M}_\mathrm{s}\delta(\Delta h)$, gdje se koordinata Δh mjeri u okomitom smjeru na graničnu ravninu.

Otuda se jednadžba (2–159) svodi na oblik $E_{\mathrm{tan}1}\Delta l - E_{\mathrm{tan}2}\Delta l = M_s\Delta l$, ili

$$E_{\mathrm{tan}\,1} - E_{\mathrm{tan}\,2} = M_\mathrm{s}\,,$$

što se može napisati u općenitom vektorskom obliku kao

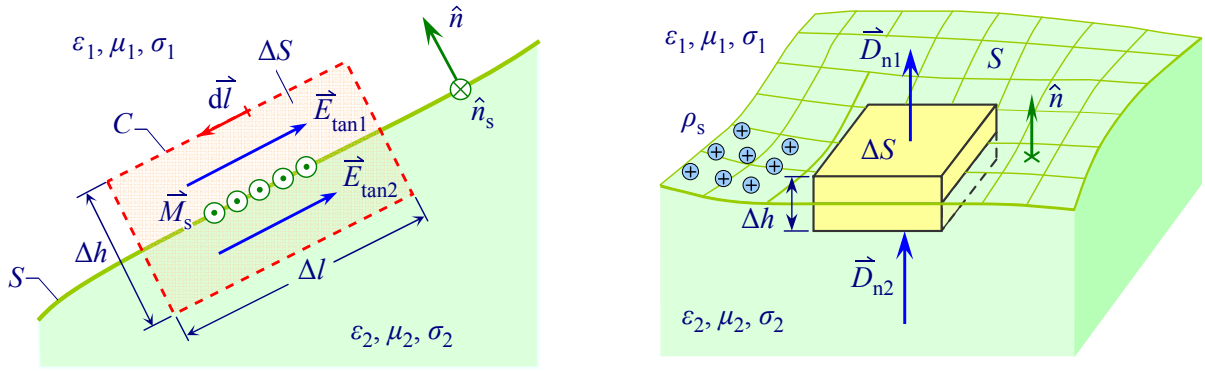
$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\times\hat{n} = \vec{M}_\mathrm{s}\,. \tag{2–160}$$

Ako nema magnetske struje, onda jednadžba (2–160) pokazuje da tangencijalna komponenta električnog polja na granici mora biti nula.

Slično se može naći

$$\hat{n}\times(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_\mathrm{s}\,, \tag{2–161}$$

gdje je $\vec{J}_\mathrm{s}$ površinska električna struja koja može postojati na graničnoj ravnini, ako je sredstvo vodljivo. Ako na granici ne postoji površinska električna struja, onda jednadžba (2–161) pokazuje da tangencijalna komponenta magnetskog polja na granici mora biti nula.



Slika 2.25. a) Elementarna površina i **b)** elementarni volumen za određivanje rubnih uvjeta

2.9.2. Okomite komponente polja na granici

Razmotrimo sad okomite komponente električnog toka. Rubne uvjete možemo izvesti iz Gaussova zakona (2–7) i (2–8) odabirom plosnatog diferencijalnog volumnog elementa ΔV koji je prikazan na slici 2.25b). Gornja ploha nalazi se u jednom sredstvu, a donja u drugome sredstvu. Obje diferencijalne plohe paralelne su s graničnom plohom i imaju jednake površine ΔS. Ako razmak Δh između diferencijalnih ploha teži nuli brže od površina, onda doprinos lijevoj strani jednadžbe (2–7) dolazi samo od gornje i donje plohe, tj.

$$\oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = (\vec{D}_{\mathrm{n1}} - \vec{D}_{\mathrm{n2}})\Delta S\,, \tag{2–162}$$

gdje su $\vec{D}_{\mathrm{n1}}$ i $\vec{D}_{\mathrm{n2}}$ okomite komponente električnog toka u sredstvu 1 i 2, kao što je prikazano na slici 2.25b). U skladu s izrazom (2–7), plošni integral jednak je ukupnom naboju unutar diferencijalnog volumena pa se jednadžba (2–162) može pojednostavniti. Ako se sad pusti da Δh teži nuli, onda u diferencijalnom volumenu ne ostaje nimalo naboja pa na graničnoj plohi može jedino opstati površinski naboj ρ_{s} koji se mjeri u $\mathrm{C/m^2}$. Stoga se rubni uvjet (2–162) svodi na

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_{\mathrm{s}}\,. \tag{2–163}$$

Sličnim postupkom može se naći rubni uvjet za okomite komponente magnetskog toka, tj.

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0\,, \tag{2–164}$$

jer ne postoji slobodni magnetski naboj. Stoga kad nema površinskoga naboja na granici dvaju sredstava, onda se može zaključiti da su okomite komponente električnog i magnetskog toka neprekinute.

2.9.3. Polje na granici između dvaju dielektrika

Na granici između dvaju dielektrika bez gubitaka u normalnim okolnostima ne postoje ni površinski naboji ni površinske struje pa se jednadžbe (2–160), (2–161), (2–163) i (2–164) svode na:

$$\vec{E}_1\times\hat{n} = \vec{E}_2\times\hat{n}\,, \tag{2–165a}$$

$$\hat{n}\times\vec{H}_1 = \hat{n}\times\vec{H}_2\,, \tag{2–165b}$$

$$\hat{n}\cdot\vec{D}_1 = \hat{n}\cdot\vec{D}_2\,, \tag{2–165c}$$

$$\hat{n}\cdot\vec{B}_1 = \hat{n}\cdot\vec{B}_2\,. \tag{2–165d}$$

Te jednadžbe pokazuju da su tangencijalne komponente polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ jednake na objema stranama granične ravnine i da su okomite komponente od $\vec{D}$ i $\vec{B}$ neprekinute na graničnoj ravnini.

2.9.4. Polje na granici sa savršenim vodičem (električni zid)

U mnogim problemima mikrovalne elektronike pojavljuju se granice s dobrim vodičima (metalima) koji se obično mogu uzeti kao sredstvo bez gubitaka ($\sigma\to\infty$). U savršenom vodiču sve su komponente polja jednake nuli. Taj se rezultat može vidjeti iz razmatranja vodiča velike, ali konačne provodnosti ($\omega\varepsilon \ll \sigma < \infty$). U tom slučaju sva struja teče u tankom površinskom sloju (površinski učinak) čija debljina teži nuli kad provodnost teži u beskonačnost, što se može vidjeti u odjeljcima 2.7. i 2.10.2. Uz pretpostavku da nema magnetskih struja, jednadžbe (2–160), (2–161), (2–163) i (2–164) svode se na

$$\vec{E} \times \hat{n} = 0\,, \tag{2–166a}$$

$$\hat{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s\,, \tag{2–166b}$$

$$\hat{n} \cdot \vec{D} = \rho_s\,, \tag{2–166c}$$

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0\,, \tag{2–166d}$$

gdje su $\vec{J}_s$ i ρ_s gustoće površinske struje i površinskoga naboja na površini vodiča, a $\hat{n}$ je vektor okomice koja gleda iz vodiča. Taj je rubni uvjet poznat pod nazivom *električni zid* jer su tangencijalne komponente električnog polja »kratko spojene«, kao što se vidi iz jednadžbe (2–166a) i moraju nestati.

2.9.5. Rubni uvjet za magnetski zid

Dualni slučaj prethodnom jest rubni uvjet *magnetskog zida*, kod kojeg nestaju tangencijalne komponente magnetskog polja. Premda ne postoje materijali koji su magnetski dobro vodljivi, taj se slučaj ipak nalazi u praksi kad je riječ o elektromagnetski simetričnim strukturama kakve su pojedine prijenosne linije i valovodi, te neke umjetne elektromagnetske strukture. Također ćemo vidjeti da je taj uvjet analogan uvjetima koji vladaju između napona i struja na kraju otvorene prijenosne linije. Polja na magnetskom zidu zadovoljavaju jednadžbe:

$$\vec{E} \times \hat{n} = \vec{M}_s\,, \tag{2–167a}$$

$$\hat{n} \times \vec{H} = 0\,, \tag{2–167b}$$

$$\hat{n} \cdot \vec{D} = 0\,, \tag{2–167c}$$

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0\,, \tag{2–167d}$$

gdje je $\hat{n}$ vektor okomice koja gleda iz područja s magnetski vodljivim materijalom.

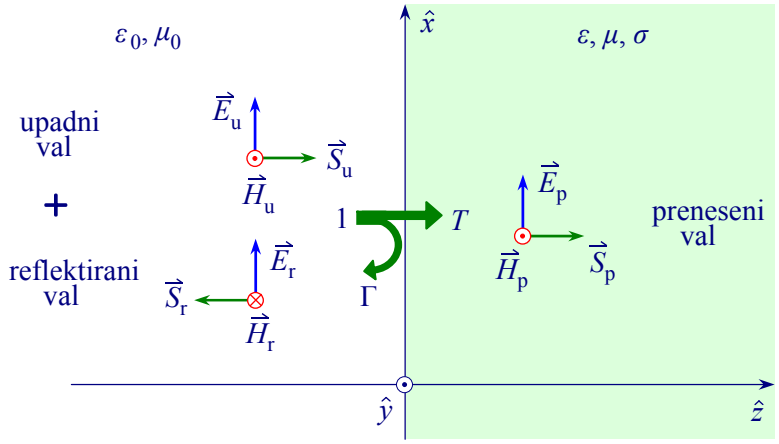
2.9.6. Uvjet zračenja

Pri razmatranju problema s jednom ili više beskonačnih granica, kao što su ravni valovi u sredstvu beskonačnih dimenzija ili u beskonačno dugačkoj prijenosnoj liniji, mora se postaviti uvjet na polja u beskonačnosti. Taj je rubni uvjet poznat pod nazivom uvjet zračenja koji u stvari potvrđuje zakon očuvanja energije jer traži da polja na beskonačnoj udaljenosti od izvora iščeznu ili moraju putovati u smjeru prema vani. Taj se rezultat može lako objasniti na primjeru sredstva s malim, ali konačnim gubitcima, što je slučaj u svakom stvarnom sredstvu. U tom bi slučaju valovi konačne energije koji dolaze iz beskonačnosti tražili izvore beskonačne energije, što je nemoguće postići u stvarnosti.

2.10. Refleksija i prijenos pri okomitom upadu ravnoga vala

Pretpostavimo da ravni elektromagnetski val upada okomito iz slobodnoga prostora (ε_0, μ_0) na ravnu granicu (sučelje) s poluprostorom električnih i magnetskih svojstava σ, ε, μ, kao što je prikazano na slici 2.26. Pritom su istodobno i električno i magnetsko polje tangencijalni na graničnu plohu. Stoga u neposrednoj blizini granične plohe slijeva postoje konačne tangencijalne komponente električnog i magnetskog polja. No rubni uvjeti pokazuju da će tad i zdesna postojati konačna tangencijalna polja istoga iznosa. Obično, upadni i preneseni valovi ne mogu sami od sebe zadovoljiti sve rubne uvjete, što ima za posljedicu pojavu reflektiranoga vala koji se vraća prema izvoru.

Ništa se neće izgubiti na općenitosti ako se pretpostavi da je električno polje upadnoga vala polarizirano u smjeru osi $\hat{x}$ i da val putuje u smjeru osi $\hat{z}$. Tad se upadna polja za $z < 0$ mogu izraziti kao



Slika 2.26. Okomiti upad ravnoga vala iz slobodnoga prostora (ε_0, μ_0) na sredstvo s σ, ε, μ

$$\vec{E}_{\mathrm{u}} = \hat{x}E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}, \qquad \vec{H}_{\mathrm{u}} = \hat{y}\frac{E_0}{\eta_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}, \tag{2–168}$$

gdje je E_0 proizvoljna kompleksna amplituda, a k_0 i η_0 označuju valni broj, odnosno intrinzičnu impedanciju slobodnoga prostora koji se nalazi slijeva od granične ravnine. U sredstvu iz kojeg val upada ($z<0$) postoji i reflektirani val koji se može izraziti kao

$$\vec{E}_{\mathrm{r}} = \hat{x}E_0 \Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z}, \qquad \vec{H}_{\mathrm{r}} = -\hat{y}\frac{E_0}{\eta_0}\Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z}. \tag{2–169}$$

Ovdje je uvedena nova veličina Γ koja se naziva *koeficijent refleksije* električnog polja i čija je vrijednost za sad nepoznata. Koeficijent refleksije uspostavlja vezu između amplituda i faza upadnoga i reflektiranoga vala pa je stoga općenito kompleksna veličina. Valja uočiti da su predznaci eksponenata u fazorima električnog i magnetskog polja pozitivni, što pokazuje da reflektirani val putuje u negativnome smjeru osi $\hat{z}$. To je u skladu s Poyntingovim vektorom

$$\vec{S}_{\mathrm{r}} = \vec{E}_{\mathrm{r}} \times \vec{H}_{\mathrm{r}}^{*} = -\hat{z}\frac{|E_0|^2}{\eta_0}|\Gamma|^2. \tag{2–170}$$

Budući da reflektirani val putuje u suprotnome smjeru, Poyntingov vektor ima negativni predznak. Stoga jedan od faktora u umnošku mora promijeniti predznak pa je u izrazu (2–169) promijenjen predznak magnetskom polju.

U skladu s izrazima (2–139) i (2–141) za općenito sredstvo s gubitcima u odjeljku 2.7, prenesena se polja za $z>0$ mogu napisati kao:

$$\vec{E}_{\mathrm{p}} = \hat{x}E_0 T \mathrm{e}^{-\gamma z}, \qquad \vec{H}_{\mathrm{p}} = \hat{y}\frac{1}{\eta}E_0 T \mathrm{e}^{-\gamma z}, \tag{2–171}$$

gdje je nepoznata veličina *T koeficijent prijenosa* za električno polje. Ta veličina uspostavlja vezu između amplituda i faza upadnoga i prenesenoga vala i općenito je kompleksna veličina. Intrinzična impedancija i koeficijent rasprostiranja u sredstvu zdesna od granice bilježe se kao:

$$\eta = \mathrm{j}\frac{\omega\mu}{\gamma}, \tag{2–172}$$

$$\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\frac{\mathrm{j}\sigma}{\omega\varepsilon}}. \tag{2–173}$$

Rješavanjem rubnih uvjeta, tj. primjenom uvjeta kontinuiteta tangencijalnih komponenata $\vec{E}_{\mathrm{u}}(0)+\vec{E}_{\mathrm{r}}(0)=\vec{E}_{\mathrm{p}}(0)$ i $\vec{H}_{\mathrm{u}}(0)+\vec{H}_{\mathrm{r}}(0)=\vec{H}_{\mathrm{p}}(0)$ na graničnoj ravnini ($z=0$) dobiva se:

$$1+\Gamma = T\,, \tag{2–174}$$

$$\frac{1-\Gamma}{\eta_0} = \frac{T}{\eta}\,, \tag{2–175}$$

što se može jednostavno riješiti za T i Γ kao:

$$\Gamma = \frac{\eta-\eta_0}{\eta+\eta_0}\,, \tag{2–176}$$

$$T = 1+\Gamma = \frac{2\eta}{\eta+\eta_0}\,. \tag{2–177}$$

To je općenit rezultat za koeficijente refleksije Γ i prijenosa T, kad ravni val upada okomito na graničnu ravninu između dvaju sredstava. Koeficijent refleksije definiran je kao omjer fazora električnog polja reflektiranoga i upadnoga vala. Izraz (2–176) valja usporediti s izrazima (3–43) i (3–44) za koeficijent refleksije na prijenosnoj liniji u odjeljku 3.3.1.

2.10.1. Sredstvo bez gubitaka

Ako se pretpostavi da je sredstvo zdesna na slici 2.26 homogeni, izotropni, linearni dielektrik bez gubitaka, onda je $\sigma = 0$, a ε i μ su realne veličine. Tad je koeficijent rasprostiranja u izrazu (2–173) posve imaginaran, tj.

$$\gamma = \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \mathrm{j}k_0\sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}}\,, \tag{2–178}$$

gdje su ε_r i μ_r relativna permitivnost i permeabilnost materijala. U dielektriku je valna duljina

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}}} \tag{2–179}$$

uvijek kraća od valne duljine λ_0 u slobodnom prostoru. Toj valnoj duljini odgovara fazna brzina vala

$$v_\mathrm{f} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}}}\,, \tag{2–180}$$

koja je manja od brzine svjetlosti c u slobodnom prostoru. Intrinzična impedancija dielektrika iznosi

$$\eta = \mathrm{j}\frac{\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}}}\,, \tag{2–181}$$

i može biti veća ili manja od intrinzične impedancije vakuuma ($\eta_0 \simeq 377\ \Omega$), što ovisi o omjeru permeabilnosti i permitivnosti. No nerijetko je permeabilnost dielektrika jednaka onoj za vakuum pa je intrinzična impedancija u dielektriku obično manja od 377 Ω. Za dielektrik bez gubitaka intrinzična valna impedancija realna je veličina pa su i koeficijenti refleksije i prijenosa realni. Otuda je električno polje u obama sredstvima u fazi s magnetskim poljem.

Ako je sredstvo zdesna od granice nemagnetično ($\mu_\mathrm{r} = 1$), onda jednadžbe (2–176) i (2–177) primjenom izraza (2–181) poprimaju ovaj oblik:

$$\Gamma = -\frac{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}-1}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}+1}\,, \tag{2–182}$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}+1}\,, \tag{2–183}$$

gdje je ε_r relativna permitivnost sredstva zdesna od granične ravnine.

Otuda je koeficijent refleksije uvijek negativan i realan kad val nailazi iz optički rjeđeg sredstva u gušće sredstvo, gdje su oba sredstva bez gubitaka.

Očuvanje energije u poljima koja se nalaze u obama sredstvima može se razmotriti na isti način kao u odjeljku 2.6, gdje je primijenjen Poyntingov teorem. Za $z<0$, s pomoću definicije (2–127) te izraza (2–168) i (2–169) dobiva se kompleksni Poyntingov vektor

$$\vec{S}(z<0)=\vec{E}\times\vec{H}^{*}=\hat{x}E_0\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z}+\Gamma\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0z}\right)\times\hat{y}\frac{E_0^{*}}{\eta_0}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z}+\Gamma\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0z}\right)^{*}=$$

$$=\hat{z}\frac{\left|E_0\right|^2}{\eta_0}\left(1-\left|\Gamma\right|^2+\Gamma\mathrm{e}^{\mathrm{j}2k_0z}-\Gamma^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k_0z}\right). \qquad (2\text{–}184)$$

Budući da je razlika kompleksnog broja i njegove konjugirane vrijednosti posve imaginarna veličina, zadnja dva člana u drugome retku jednadžbe (2–184) ne pridonose realnoj vrijednosti kompleksnog Poyntingova vektora. Otuda, u skladu s izrazom (2–129), gustoća toka srednje snage u prvome sredstvu iznosi

$$\left\langle\vec{S}(z<0)\right\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E}\times\vec{H}^{*}\right\}=\hat{z}\frac{\left|E_0\right|^2}{2\eta_0}\left(1-\left|\Gamma\right|^2\right), \qquad (2\text{–}185)$$

a označuje razliku gustoća upadne i reflektirane snage. Negativni predznak člana koji opisuje reflektiranu snagu pokazuje da energija putuje unatrag prema izvoru koji se nalazi slijeva na slici 2.26. Za jediničnu veličinu koeficijenta refleksije ($|\Gamma|=1$), izraz (2–185) pokazuje da ne postoji tok snage kroz graničnu plohu. To je uvjet *totalne refleksije*.

Gustoća toka srednje snage u drugome sredstvu ($z>0$) iznosi

$$\left\langle\vec{S}(z>0)\right\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{x}TE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z}\times\hat{y}\left(\frac{TE_0}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{\mathrm{p}}z}\right)^{*}\right\}=\hat{z}\frac{\left|E_0\right|^2\left|T\right|^2}{2\eta}. \qquad (2\text{–}186)$$

Valja uočiti da su prosječne gustoće snage, koje teku obama sredstvima bez gubitaka, stalne i da uopće ne ovise o koordinati z. S druge strane, zbog očuvanja energije na graničnoj ravnini ($z=0$), jednadžbe (2–185) i (2–186) moraju biti međusobno jednake. Otuda je

$$1-\left|\Gamma\right|^2=\frac{\eta_0}{\eta}\left|T\right|^2, \qquad (2\text{–}187)$$

gdje je $|\Gamma|^2$ *refleksivnost*, a veličina zdesna *transmisivnost* sredstva. Njihov je zbroj uvijek jednak jedinici. Za pasivno sredstvo koje ne pojačava snagu uvijek vrijedi $|\Gamma|^2 \le 1$ jer u pasivnom sredstvu reflektirana snaga ne može biti veća od upadne snage. No, za kompleksnu intrinzičnu impedanciju prvoga sredstva, $|\Gamma|^2$ može premašiti jediničnu vrijednost.

Valja naglasiti da rastavljanje Poyntingova vektora na upadnu i reflektiranu komponentu nije općenito opravdano jer može dovesti do pogrešnog rezultata. Primjerice, izračunavanjem kompleksnih Poyntingovih vektora upadnoga i reflektiranoga vala dobiva se:

$$\vec{S}_{\mathrm{u}}=\vec{E}_{\mathrm{u}}\times\vec{H}_{\mathrm{u}}^{*}=\hat{z}\frac{\left|E_0\right|^2}{\eta_0}, \qquad \vec{S}_{\mathrm{r}}=\vec{E}_{\mathrm{r}}\times\vec{H}_{\mathrm{r}}^{*}=-\hat{z}\frac{\left|E_0\right|^2}{\eta_0}\left|\Gamma\right|^2.$$

Iz toga se jasno vidi da zbroj komponenata $(\vec{S}_{\mathrm{u}}+\vec{S}_{\mathrm{r}})$ ne daje kompleksni Poyntingov vektor $\vec{S}(z<0)$ koji je u izrazu (2–184) izračunat preko ukupnih polja jer u zbroju $(\vec{S}_{\mathrm{u}}+\vec{S}_{\mathrm{r}})$ nedostaje član koji upućuje na pohranjenu energiju u stojnome valu. Stoga se može zaključiti da rastavljanje Poyntingova vektora na upadnu i reflektiranu komponentu općenito ne daje fizikalno smislen rezultat [11].

2.10.2. Dobar vodič

Razmotrimo slučaj u kojem je na slici 2.26 sredstvo u području $z>0$ dobar, ali ne i savršen vodič, tj. $\sigma \gg \omega\varepsilon$. Proučavanje rasprostiranja ravnoga vala u odjeljku 2.7. pokazalo je da je za slučaj $\sigma \gg \omega\varepsilon$ kompleksni koeficijent rasprostiranja

$$\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta \simeq (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\,. \tag{2–188}$$

Iz toga slijedi da jakost polja u vodljivom sredstvu naglo opada udaljavanjem od granične ravnine ($z=0$) uz eksponencijalnu ovisnost $\mathrm{e}^{-\alpha z}=\mathrm{e}^{-z/\delta}$, gdje je $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}$ dubina prodiranja.

S druge strane, izraz (2–146) pokazuje da je intrinzična valna impedancija

$$\eta \simeq (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \tag{2–189}$$

za dobre vodiče ($\sigma \gg \omega\varepsilon$) znatno manja od intrinzične impedancije vakuuma. Budući da je $|\eta|$ znatno manje od η_0, izraz (2–176) svodi se na približan izraz

$$\Gamma = \frac{\eta/\eta_0 - 1}{\eta/\eta_0 + 1} \simeq -1 + 2\frac{\eta}{\eta_0} = -1 + (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{2\omega\mu\varepsilon_0}{\mu_0\sigma}}\,. \tag{2–190}$$

Ovdje je član oblika $(x-1)/(1+x)$ razvijen za $x=\eta/\eta_0 \ll 1$ kao

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{x-1}{x-1}\right) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} \simeq -1+2x\,,$$

gdje je zanemaren član x^2 kao mala veličina drugoga reda.

Izraz (2–190) pokazuje da je koeficijent refleksije Γ na granici između vakuuma i dobrog vodiča približno jednak –1. Izravna usporedba izraza (2–190) i (2–177) pokazuje da je uz uvjet $\sigma \gg \omega\varepsilon$ koeficijent prijenosa vrlo mala kompleksna veličina oblika

$$T = 1+\Gamma \simeq (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{2\omega\mu\varepsilon_0}{\mu_0\sigma}}\,. \tag{2–191}$$

Iz izraza (2–168) i (2–171) izlazi da su fazori električnog i magnetskog polja prenesenoga vala pomaknuti u fazi za 45° u odnosu na odgovarajuće fazore upadnih polja.

U drugome sredstvu (vodiču), $z>0$, protječe izmjenična struja. Primjenom Ohmova zakona (2–47) i izraza (2–171), za gustoću provodne struje u vodiču dobiva se

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}_\mathrm{p} = \hat{x}\sigma T E_0 \mathrm{e}^{-\gamma z}\,. \tag{2–192}$$

Sad se može naći ukupna površinska struja, tj.

$$\vec{J}_\mathrm{s} = \int_0^\infty \vec{J}(z)\mathrm{d}z = \hat{x}\sigma T E_0 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\gamma z}\mathrm{d}z = \hat{x}\frac{\sigma T}{\gamma}E_0 \quad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\,.$$

Uvrsti li se za T izraz (2–177) i γ zamijeni s $\mathrm{j}\omega\mu/\eta$, što je u skladu s relacijom (2–172), taj se izraz za površinsku struju može preinačiti u oblik

$$\vec{J}_\mathrm{s} = \hat{x}\frac{-\mathrm{j}2\sigma\eta^2}{\omega\mu(\eta+\eta_0)}E_0\,, \tag{2–193a}$$

pa se ukupna površinska struja može konačno napisati kao

$$\vec{J}_\mathrm{s} = \hat{x}\frac{\sigma T E_0}{\gamma} = \hat{x}\frac{T E_0}{\eta}\,. \tag{2–193b}$$

Uz uvjet velike provodnosti, faktor $\sigma T/\gamma$ može se razviti kao

$$\frac{\sigma T}{\gamma} = \left(\frac{2\delta}{1+\mathrm{j}}\right)\left(\frac{2\eta}{\eta+\eta_0}\right) \simeq \frac{2\delta}{(1+\mathrm{j})}\frac{2(1+\mathrm{j})}{\sigma\delta\eta_0} = \frac{2}{\eta_0},$$

pa iz izraza (2–193) izlazi

$$\vec{J}_\mathrm{s} \simeq \hat{x}\frac{2E_0}{\eta_0} = \hat{x}2H_0, \tag{2–194}$$

Drugim riječima, amplituda ukupne gustoće struje po jedinici širine približno je jednaka amplitudi tangencijalnog magnetskog polja na površini, $J_\mathrm{s} \simeq 2H_0 = H_\mathrm{tan}$.

Za $z < 0$, kompleksni Poyntingov vektor ima isti oblik kao u izrazu (2–184) za sredstvo 2 bez gubitaka s time da za koeficijent refleksije valja uvrstiti izraz (2–190). Jednako tako, srednji tok snage opisan je izrazom (2–185). No prodiranje polja i struje u vodič konačne provodnosti σ stvara izvjesne gubitke snage.

Srednja snaga P_dis po jedinici površine (W/m^2), koja se prenese u vodič i u njemu disipira, čini polovinu realne vrijednosti kompleksnog Poyntingova vektora na granici

$$P_\mathrm{dis} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E}\times\vec{H}^*\right\}\cdot\hat{z}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{x}TE_0\times\hat{y}\left(\frac{TE_0}{\eta}\right)^*\right\}\cdot\hat{z} = \frac{1}{2}|T|^2|E_0|^2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\eta^*}\right\}. \tag{2–195}$$

U skladu s izrazom (2–189), $\mathrm{Re}\{1/\eta^*\} = \sigma\,\delta/2$ pa se izraz (2–195) svodi na oblik

$$P_\mathrm{dis} = \frac{1}{4}|T|^2|\vec{E}_0|^2\sigma\delta, \tag{2–196a}$$

što je jednako rezultatu koji se dobiva iz volumnog integrala veličine $|\vec{J}|^2$, tj.

$$P_\mathrm{dis} = \frac{1}{2\sigma}\int_0^\infty |\vec{J}|^2\,\mathrm{d}z. \tag{2–196b}$$

Primjenom izraza (2–177) za T i izraza (2–189) za η dobiva se

$$\frac{\sigma|T|^2}{\alpha} = \frac{4\sigma\delta|\eta|^2}{|\eta+\eta_0|^2} \simeq \frac{8}{\sigma\delta\eta_0^2} = \frac{8R_\mathrm{s}}{\eta_0^2},$$

gdje je pretpostavljeno $\eta \ll \eta_0$, što vrijedi za dobar vodič. Sad se izraz (2–196a) može pojednostavniti na oblik

$$P_\mathrm{dis} = \frac{2R_s}{\eta_0^2}|E_0|^2, \tag{2–196c}$$

gdje veličina R_s označuje *površinski* ili *plošni otpor vodiča* koji je definiran kao

$$R_\mathrm{s} = \mathrm{Re}\{\eta\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1+\mathrm{j}}{\sigma\delta}\right\} = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}. \tag{2–197}$$

Veličina $2E_0/\eta_0$ jednaka je tangencijalnoj komponenti magnetskog polja na površini vodiča, kad σ teži u beskonačnost, pa se s pomoću nje mogu izračunati gubitci u stvarnom vodiču. Taj se postupak nerijetko rabi u mikrovalnoj elektronici jer vrijedi i za znatno složenije vodljive strukture poput vodljivih kugla i cilindara uz uvjet da je polumjer zakrivljenosti takvih struktura veći od nekoliko δ.

Gubitci snage u vodiču konačne provodnosti mogu se izračunati uporabom efektivne površinske (plošne) struje i plošne impedancije, a da nije poznato polje u vodiču. Gustoća struje $\vec{J} = \sigma\vec{E}_\mathrm{p} = \hat{x}\sigma TE_0\mathrm{e}^{-\gamma z}$ eksponencijalno opada s udaljenošću i može se zamijeniti uniformnom volumnom strujom koja se proteže u vodič do dubine prodiranja δ. Stoga se može napisati

$$J_{\text{uk}} = \begin{cases} \vec{J}_{\text{s}}/\delta & \text{za } 0 < z < \delta \\ 0 & \text{za } z > \delta, \end{cases}$$

pa ukupna struja ostaje nepromijenjena. Radi jednostavnosti, disipirana je snaga prikazana bez zagrade $\langle\ \rangle$, a izlazi iz Juleova zakona kao

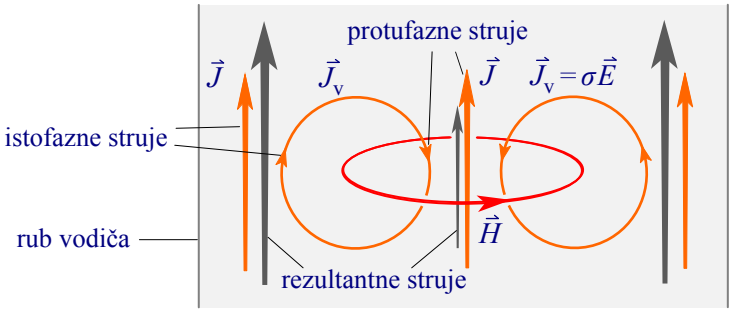
$$P_{\text{dis}} = \frac{1}{2\sigma}\int_S \int_{z=0}^{\delta} \frac{\left|\vec{J}_{\text{s}}\right|^2}{\delta^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}S = \frac{R_{\text{s}}}{2}\int_S \left|\vec{J}_{\text{s}}\right|^2 \mathrm{d}S = \frac{2R_{\text{s}}}{\eta_0^2}\left|E_0\right|^2,$$

gdje se plošni integral odnosi na površinu vodiča koja u ovom slučaju iznosi jedan četvorni metar. Taj je rezultat jednak onom u izrazu (2–196c) iz čega se vidi da se disipirana snaga

$$P_{\text{dis}} = \frac{R_{\text{s}}}{2}\int_S \left|\vec{J}_{\text{s}}\right|^2 \mathrm{d}S = \frac{R_{\text{s}}}{2}\int_S \left|\vec{H}_{\text{tan}}\right|^2 \mathrm{d}S \qquad (2\text{–}198)$$

može izraziti u ovisnosti o površinskom otporu R_{s} i površinskoj struji $\vec{J}_{\text{s}}$ ili o tangencijalnom magnetskom polju $\vec{H}_{\text{tan}}$.

Fizikalno objašnjenje tendencije toka struje da se povlači prema površini vodiča može se tumačiti pojavom vrtložnih struja u vodiču. Pretpostavimo da unutar vodiča na slici 2.27 postoji strujnica električne struje $\vec{J}$ čija jakost raste u tom trenutku. Ta je struja povezana s rastućim vrtložnim magnetskim poljem $\vec{H}$ oko te strujnice. U skladu s Faradayevim zakonom $\nabla\times\vec{E} = -\mu\partial\vec{H}/\partial t$, promjenljivo magnetsko polje inducira električno polje $\vec{E}$ koje istodobno inducira vrtložnu struju u vodiču $\vec{J}_{\text{v}} = \sigma\vec{E}$. Prema Lentzovu zakonu smjer je tog električnog polja takav da se suprotstavlja porastu struje. Dakle, novonastale vrtložne strujnice pridonose potiskivanju ukupne struje u dubljem sloju vodiča, a njezinom jačanju uz rub vodiča gdje je glavnina toka struje. Također se može vidjeti da taj učinak raste s frekvencijom, provodnošću i permeabilnošću što dodatno pojačava učinak u feromagnetskim materijalima. Ovdje se pomačna struja u vodiču može zanemariti jer je $\sigma\vec{E} \gg \varepsilon\,\partial\vec{E}/\partial t$ za frekvencije ispod 10^3 THz.



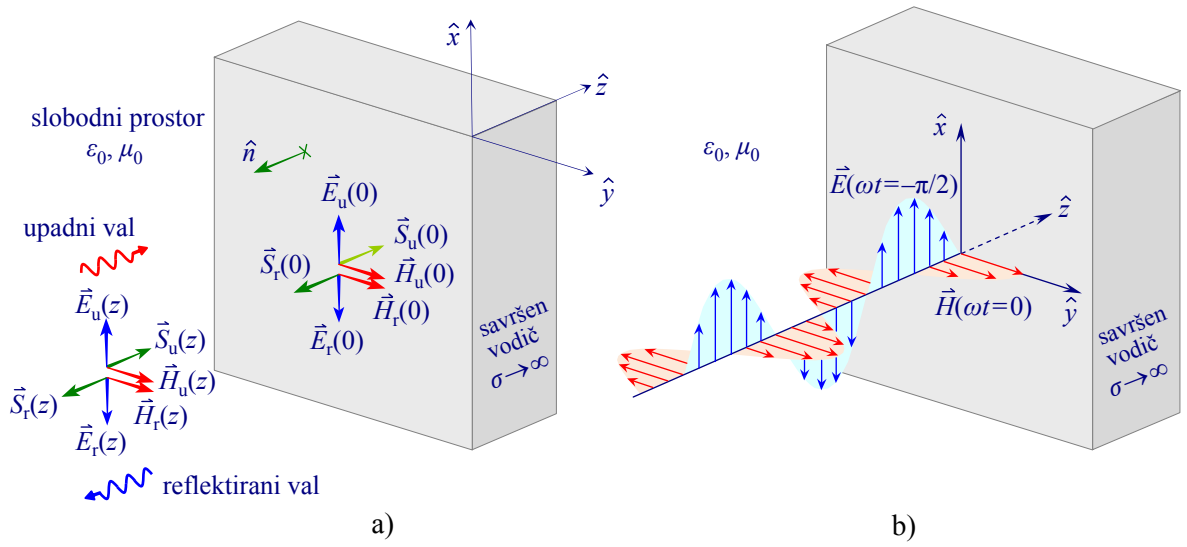
Slika 2.27. Objašnjenje površinskog učinka u kratkom odsječku vodiča preko vrtložne struje J_{v}.

2.10.3. Savršeno vodljivo sredstvo

Za savršeni vodič $\sigma\to\infty$, a $\eta\to 0$ pa iz izraza (2–190) izravno izlazi $\Gamma = -1$. Otuda, u skladu s izrazima (2–168) i (2–169), ukupno magnetsko polje na koordinati $z = 0$ iznosi

$$\vec{H}(0) = \vec{H}_{\text{u}}(0) + \vec{H}_{\text{r}}(0) = \hat{y}\frac{1}{\eta_0}\left(E_0 - \Gamma E_0\right) = \hat{y}2H_0\,. \qquad (2\text{–}199)$$

Dakle, ukupno je magnetsko polje na graničnoj ravnini dvostruko jače od upadnoga magnetskog polja (slika 2.28). To je u skladu s fizikalnom intuicijom jer se izostanak električne energije nadoknađuje porastom pohranjene magnetske energije da bi se zadovoljio zakon očuvanja energije.



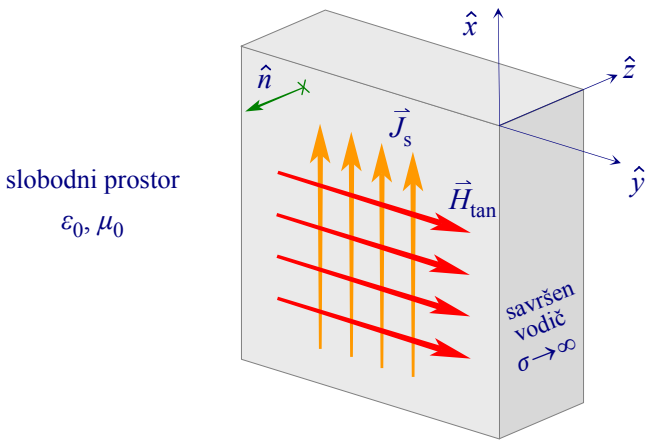
Slika 2.28. a) Ravni val upada okomito iz slobodnoga prostora na savršeno vodljivo sredstvo; **b)** Stojni val; razdioba električnog polja za $\omega t = -\pi/2$ i magnetskog polja za $\omega t = 0$. U prostoru ispred savršenog vodiča, električno je polje jednako nuli za $\omega t = \pm n\pi$, $n = 0, 1, \ldots$, a magnetsko je polje jednako nuli za $\omega t = \pm(2n-1)\pi/2$, $n = 1, 2 \ldots$

Ako se na tangencijalno magnetsko polje ($H_{\tan}$) primijeni rubni uvjet $\hat{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s$, onda je na površini savršenog vodiča gustoća struje po jedinici širine

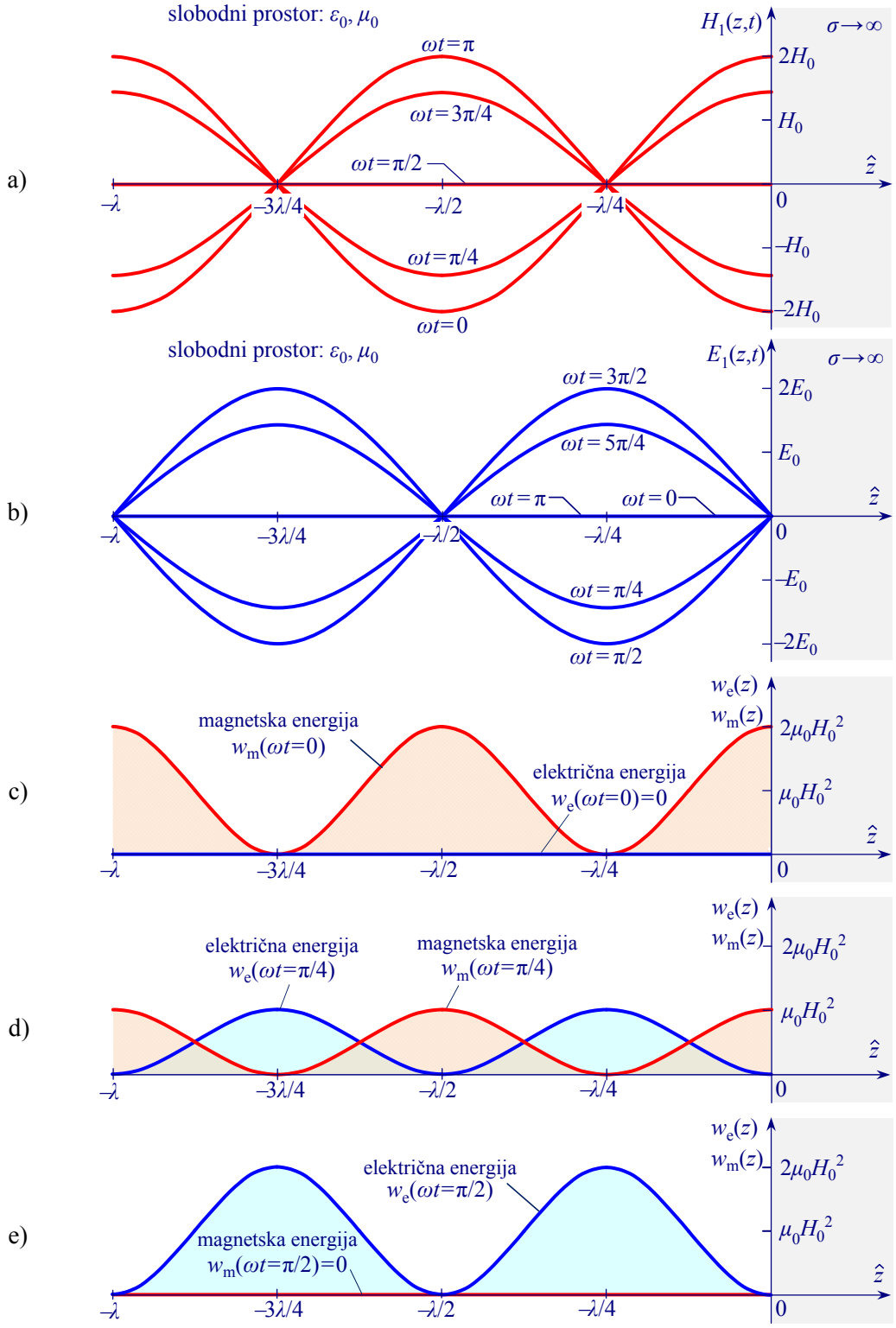
$$\vec{J}_s = -\hat{z} \times \hat{y} 2\vec{H}_0 = \hat{x} 2\vec{H}_0 , \qquad (2\text{–}200)$$

što je u skladu s izrazom (2–194) uz uvjet $\sigma \to \infty$. Ovdje je $\hat{n}$ jedinični vektor okomit na granicu i usmjeren od vodiča prema izvoru (slike 2.28 i 2.29). Budući da u vodiču polje naglo opada s udaljenošću, struja je prisutna samo na površini vodiča jer kad $\sigma \to \infty$ dubina prodiranja $\delta \to 0$. Valja uočiti da se smjer struje $\hat{x}$ podudara sa smjerom električnog polja, a smjer magnetskog polja ostaje $\hat{y}$. To je u skladu s rubnim uvjetima (2–166a) i (2–166b) koji vrijede na granici sa savršenim vodičem, tj.

$$\vec{E} \times \hat{n} = 0 , \qquad \hat{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s .$$



Slika 2.29. Površinska struja inducirana magnetskim poljem pri okomitom upadu ravnoga vala na savršen vodič. Smjer površinske struje poklapa se sa smjerom vektora upadnog električnog polja



Slika 2.30. Ovojnice stojnoga vala pri okomitom upadu vala iz slobodnoga prostora na savršeno vodljivo sredstvo; geometrijske razdiobe **a)** magnetskog polja, **b)** električnog polja, **c) - e)** volumne gustoće energije u različitim vremenskim trenutcima

Budući da je na granici $\vec{E} \times \hat{n} = 0$, ne postoji komponenta Poyntingova vektora $\vec{E} \times \vec{H}^*$ koja ulazi u savršeni vodič, tj. $\hat{z} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = 0$ za $z > 0$, nego se ukupna upadna snaga reflektira od površine savršenog vodiča putujući natrag prema izvoru koji ju je stvorio. Drugim riječima,

na sučelju sa savršenim vodičem, dolazi do totalne refleksije, kao što je prikazano na slikama 2.28a) te 2.30a) i b).

U blizini površine vodiča, električno je polje zanemarivo malog iznosa. No odmakne li se promatrač neznatno od granice u smjeru prema izvoru vala, izmjerit će konačnu vrijednost električnog polja i neznatno manju vrijednost magnetskog polja od one na samoj granici. Protegnu li se mjerenja i dalje duž osi $-\hat{z}$ dobit će se razdioba jakosti polja poput one na slikama 2.28b) te 2.30a) i b). Superpozicija upadnoga i reflektiranoga vala koji putuju u suprotnim smjerovima na nekim će mjestima u prostoru stvoriti maksimume polja, a na nekim će mjestima stvoriti minimume polja. Pri tomu su upadni i reflektirani valovi jednakih amplituda pa je u minimumima polje jednako nuli. Budući da polja u tom »valu« ne putuju, već samo titraju u prostoru između čvrstih minimuma, taj se »val« naziva *stojni val*. Valja uočiti da su minimumi i maksimumi međusobno pomaknuti za četvrt valne duljine i da je susjedni minimum uvijek udaljen pola valne duljine. Kad je amplituda reflektiranoga vala manja od amplitude upadnoga vala, minimumi nisu jednaki nuli, što znači da dio energije nastavlja putovati u smjeru $\hat{z}$, a samo ovojnica toga vala miruje na mjestu tvoreći tako stojni val. Više o stojnim valovima može se naći u poglavlju 3.

Stojni val, za $\Gamma = -1$, može se matematički izraziti superpozicijom izraza (2–168) i (2–169). Vraćanjem vremenske ovisnosti poljima u fazorskom prikazu dobiva se:

$$\vec{E}(z,t) = \hat{x}2E_0 \sin(k_0 z)\sin(\omega t)\,, \tag{2–201}$$

$$\vec{H}(z,t) = \hat{y}\frac{2E_0}{\eta_0}\cos(k_0 z)\cos(\omega t)\,. \tag{2–202}$$

Tad su električno i magnetsko polje međusobno ortogonalni u vremenu i prostoru, tj. srednja je vrijednost Poyntingova vektora jednaka nuli jer je $\langle \sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle = 0$. Dakle, ukupna energija pohranjena u poljima izmjenjuje se između električne i magnetske energije. Razdiobe gustoće srednje volumne energije glase:

$$\langle w_\mathrm{e}\rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \left(2E_0\right)^2 \sin^2(k_0 z)\,, \tag{2–203a}$$

$$\langle w_\mathrm{m}\rangle = \frac{1}{4}\mu_0 \left(\frac{2E_0}{\eta_0}\right)^2 \cos^2(k_0 z) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \left(2E_0\right)^2 \cos^2(k_0 z)\,. \tag{2–203b}$$

Izrazi (2–203) pokazuju da je u tom prostoru ukupna energija konstantna, tj. vrijedi $\langle w_\mathrm{m}\rangle + \langle w_\mathrm{e}\rangle = \varepsilon_0 E_0^2$. Na slikama 2.30c) - 2.30e) prikazane su prostorne razdiobe gustoće pohranjene električne i magnetske volumne energije u stojnome valu.

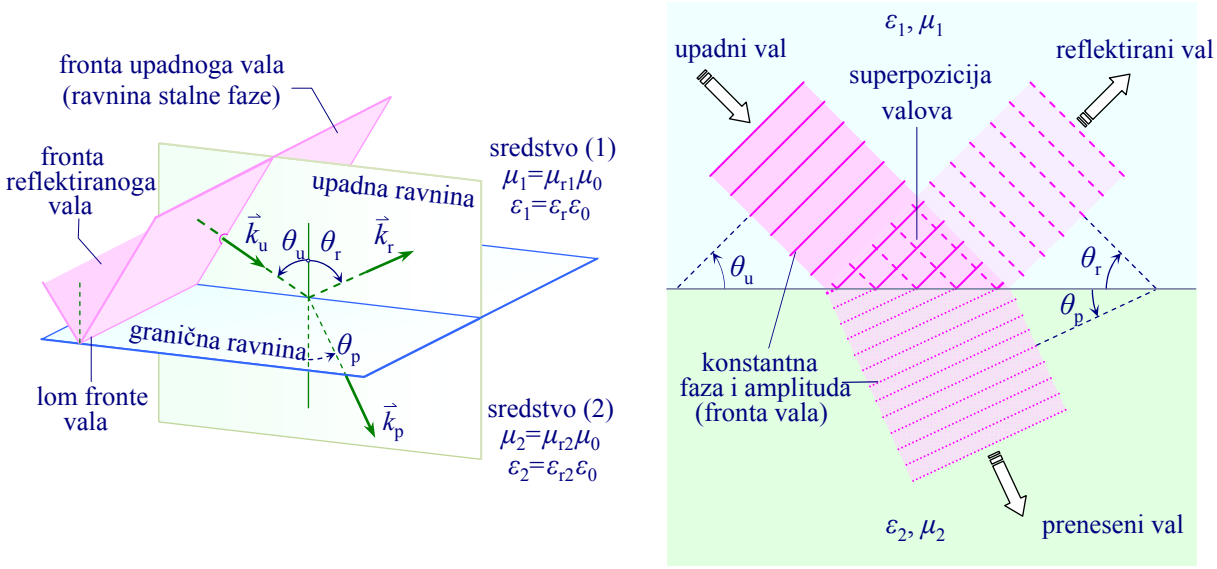
2.11. Kosi upad vala na ravnu granicu između dvaju sredstava

Razmotrimo ponašanje ravnoga vala koji pod proizvoljnim kutom nailazi na granicu između dvaju idealnih sredstava opisanih parametrima ε_1, μ_1, odnosno ε_2, μ_2, kao što je prikazano na slici 2.31. U tom je slučaju korisno definirati dvije karakteristične ravnine koje su međusobno okomite [12]. To su *granična ravnina* koja definira granicu između dvaju sredstava i *upadna ravnina* u kojoj leži vektor rasprostiranja. Upadna je ravnina okomita na graničnu ravninu i na ravnine konstantne faze vala. Pri kosom upadu vala postoje dvije elementarne orijentacije (polarizacije) elektromagnetskih polja.

⊥ Okomita polarizacija: električno je polje okomito na upadnu ravninu, a magnetsko je polje s njom paralelno. Polja su ustrojena kao transverzalni električni (*TE*) mod, slika 2.32a).

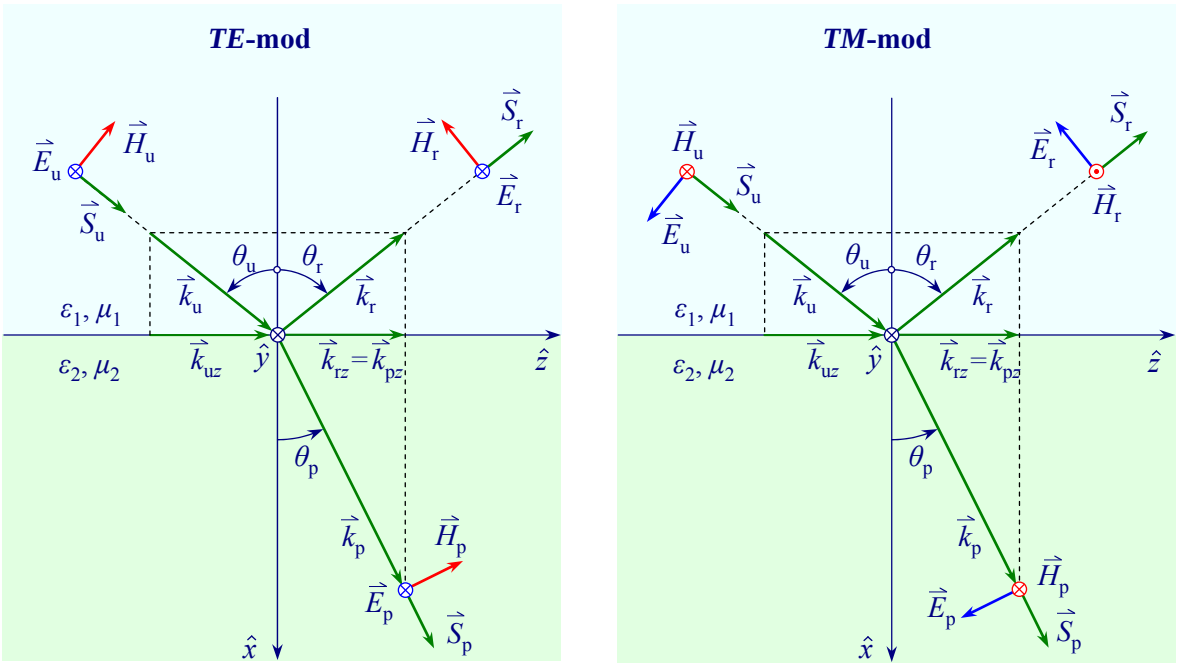
∥ Paralelna polarizacija: magnetsko je polje okomito na upadnu ravninu, a električno je polja s njom paralelno. Polja su ustrojena kao transverzalni magnetski (*TM*) mod, slika 2.32b).

Ravni val proizvoljne orijentacije polja može se dobiti superpozicijom dvaju ravnih valova od kojih je jedan okomito polariziran, a drugi paralelno polariziran.



a) b)

Slika 2.31. Nailazak ravnoga vala na granicu dvaju sredstava pod proizvoljnim kutom. **a)** Definicija upadne i granične ravnine. **b)** Prikaz fronta upadnoga, reflektiranoga i prenesenoga ravnog vala te lom vala na granici dvaju sredstava, gdje ravni val upada iz optički rjeđeg sredstva 1 u optički gušće sredstvo 2



a) b)

Slika 2.32. Orijentacija vektora električnog i magnetskog polja pri kosom nailasku ravnoga vala na granicu dvaju sredstava; **a)** okomita (*TE*) i **b)** paralelna (*TM*) polarizacija električnog polja

2.11.1. Okomita (*TE*) polarizacija

Vektori električnog polja pri okomitoj polarizaciji u koordinatnom sustavu prikazanom na slici 2.32a) imaju samo komponente u smjeru osi $\hat{y}$, tj.

$$\vec{E}_{\mathrm{u}} = \hat{y}E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\cos\theta_{\mathrm{u}} + z\sin\theta_{\mathrm{u}})}, \tag{2–204a}$$

$$\vec{E}_{\mathrm{r}} = \hat{y}E_0\Gamma_{\perp} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(-x\cos\theta_{\mathrm{r}} + z\sin\theta_{\mathrm{r}})}, \tag{2–204b}$$

$$\vec{E}_{\mathrm{p}} = \hat{y}E_0 T_{\perp} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\cos\theta_{\mathrm{p}} + z\sin\theta_{\mathrm{p}})}, \tag{2–204c}$$

gdje je θ_{u} upadni kut, a θ_{r} i θ_{p} kutovi refleksije i prijenosa koje vektori rasprostiranja:

$$\vec{k}_{\mathrm{u}} = \hat{x}k_1\cos\theta_{\mathrm{u}} + \hat{z}k_1\sin\theta_{\mathrm{u}}, \tag{2–205a}$$

$$\vec{k}_{\mathrm{r}} = -\hat{x}k_1\cos\theta_{\mathrm{r}} + \hat{z}k_1\sin\theta_{\mathrm{r}}, \tag{2–205b}$$

$$\vec{k}_{\mathrm{p}} = \hat{x}k_2\cos\theta_{\mathrm{p}} + \hat{z}k_2\sin\theta_{\mathrm{p}} \tag{2–205c}$$

zatvaraju s okomicom na graničnu ravninu. Magnitude vektora rasprostiranja u prvome i drugome sredstvu čine valni brojevi $k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$ i $k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$.

Vektori magnetskog polja mogu se dobiti iz izraza (2–101a) i (2–204) kao:

$$\vec{H}_{\mathrm{u}} = \frac{\vec{k}_{\mathrm{u}} \times \vec{E}_{\mathrm{u}}}{\omega\mu_1} = \frac{E_0}{\eta_1}\left(-\hat{x}\sin\theta_{\mathrm{u}} + \hat{z}\cos\theta_{\mathrm{u}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\cos\theta_{\mathrm{u}} + z\sin\theta_{\mathrm{u}})}, \tag{2–206a}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{r}} = \frac{\vec{k}_{\mathrm{r}} \times \vec{E}_{\mathrm{r}}}{\omega\mu_1} = \frac{E_0}{\eta_1}\Gamma_{\perp}\left(-\hat{x}\sin\theta_{\mathrm{r}} - \hat{z}\cos\theta_{\mathrm{r}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(-x\cos\theta_{\mathrm{r}} + z\sin\theta_{\mathrm{r}})}, \tag{2–206b}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{p}} = \frac{\vec{k}_{\mathrm{p}} \times \vec{E}_{\mathrm{p}}}{\omega\mu_2} = \frac{E_0}{\eta_2}T_{\perp}\left(-\hat{x}\sin\theta_{\mathrm{p}} + \hat{z}\cos\theta_{\mathrm{p}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\cos\theta_{\mathrm{p}} + z\sin\theta_{\mathrm{p}})}, \tag{2–206c}$$

gdje su η_1 i η_2 intrinzične valne impedancije u prvome, odnosno drugome sredstvu. Konstante proporcionalnosti $\Gamma_{\perp}$ i $T_{\perp}$ označuju koeficijente refleksije i prijenosa za okomitu polarizaciju električnog polja i zasad su nepoznate veličine. Zbroj izraza (2–204a) i (2–204b) te (2–206a) i (2–206b) opisuju električno, odnosno magnetsko polje neuniformnoga *TE*-vala u sredstvu 1.

Uz pretpostavku da su zadani amplituda i kut upadnoga električnog polja, primjenom rubnih uvjeta na granici ($x=0$) za električno i magnetsko polje, dobivaju se dvije kompleksne jednadžbe iz kojih je moguće riješiti nepoznanice $\Gamma_{\perp}$, $T_{\perp}$, θ_{r} i θ_{p}. Pri okomitoj polarizaciji, ukupno je električno polje ujedno i tangencijalno polje, pa na granici ($x=0$) vrijedi:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z\sin\theta_{\mathrm{u}}} + \Gamma_{\perp}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z\sin\theta_{\mathrm{r}}} = T_{\perp}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 z\sin\theta_{\mathrm{p}}}, \tag{2–207a}$$

$$\frac{1}{\eta_1}\cos\theta_{\mathrm{u}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z\sin\theta_{\mathrm{u}}} - \frac{\Gamma_{\perp}}{\eta_1}\cos\theta_{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z\sin\theta_{\mathrm{r}}} = \frac{T_{\perp}}{\eta_2}\cos\theta_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 z\sin\theta_{\mathrm{p}}}, \tag{2–207b}$$

gdje su obje strane jednadžba (2–207) samo funkcije od z. Da bi E_y i H_z bili neprekinuti za sve vrijednosti z na cijeloj graničnoj ravnini $x=0$, ovisnost o z mora biti jednaka na objema stranama jednadžba (2–207), što vodi do *uvjeta očuvanja faze*

$$k_1\sin\theta_{\mathrm{u}} = k_1\sin\theta_{\mathrm{r}} = k_2\sin\theta_{\mathrm{p}}. \tag{2–208}$$

Prva jednadžba pokazuje da je kut reflektiranoga vala jednak kutu upadnoga vala

$$\theta_{\mathrm{u}} = \theta_{\mathrm{r}}, \tag{2–209}$$

i to je *Snellov zakon refleksije*. Druga jednadžba daje vezu između upadnoga kuta i kuta loma (kut prijenosa), iz čega slijedi *Snellov zakon loma*

$$\sin\theta_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}\sin\theta_{\mathrm{u}}. \tag{2–210a}$$

Član s drugim korijenom označuje omjer brzina vala u drugome i prvome sredstvu. Za obične, nemagnetične dielektrike ($\mu_1=\mu_2=\mu_0$), Snellov zakon loma svodi se na uobičajeni oblik

$$\frac{\sin\theta_{\mathrm{u}}}{\sin\theta_{\mathrm{p}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{2–210b}$$

gdje je veličina n_i (za $i=1, 2$) u optici poznata pod nazivom *indeks loma*. Očito je da u tom slučaju veza između upadnoga kuta i kuta loma ovisi samo o permitivnosti materijala.

Uvrštenje jednadžbe (2–208) i (2–209) u jednadžbe rubnih uvjeta (2–207) daje:

$$1+\Gamma_\perp = T_\perp, \qquad 1-\Gamma_\perp = \frac{\eta_1\cos\theta_{\mathrm{p}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{u}}}T_\perp, \tag{2–211}$$

iz čega se dobivaju koeficijenti refleksije i prijenosa za okomitu polarizaciju:

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{u}} - \eta_1\cos\theta_{\mathrm{p}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{u}} + \eta_1\cos\theta_{\mathrm{p}}}, \tag{2–212a}$$

$$T_\perp = \frac{2\eta_2\cos\theta_{\mathrm{u}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{u}} + \eta_1\cos\theta_{\mathrm{p}}}. \tag{2–212b}$$

Valja odmah uočiti da se za okomiti upad vala ($\theta_{\mathrm{u}}=\theta_{\mathrm{r}}=0$) izrazi (2–212) svode na izraze (2–176) i (2–177) izvedene u odjeljku 2.10, tj.

$$\Gamma = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}, \qquad T = \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}. \tag{2–213}$$

2.11.2. Paralelna (*TM*) polarizacija

U koordinatnom sustavu prikazanom na slici 2.32b) fazori magnetskog polja pri paralelnoj polarizaciji imaju samo komponente u smjeru osi $\hat{y}$, tj.

$$\vec{H}_{\mathrm{u}} = \hat{y}\frac{E_0}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\cos\theta_{\mathrm{u}}+z\sin\theta_{\mathrm{u}})}, \tag{2–214a}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{r}} = -\hat{y}\frac{E_0\Gamma_{\parallel}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(-x\cos\theta_{\mathrm{r}}+z\sin\theta_{\mathrm{r}})}, \tag{2–214b}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{p}} = \hat{y}\frac{E_0T_{\parallel}}{\eta_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\cos\theta_{\mathrm{p}}+z\sin\theta_{\mathrm{p}})}. \tag{2–214c}$$

Komponente električnog polja mogu se dobiti iz izraza (2–101b) i (2–214) kao:

$$\vec{E}_{\mathrm{u}} = -\frac{\vec{k}_{\mathrm{u}}\times\vec{H}_{\mathrm{u}}}{\omega\varepsilon_1} = E_0\left(\hat{x}\sin\theta_{\mathrm{u}} - \hat{z}\cos\theta_{\mathrm{u}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\cos\theta_{\mathrm{u}}+z\sin\theta_{\mathrm{u}})}, \tag{2–215a}$$

$$\vec{E}_{\mathrm{r}} = -\frac{\vec{k}_{\mathrm{r}}\times\vec{H}_{\mathrm{r}}}{\omega\varepsilon_1} = E_0\Gamma_{\parallel}\left(-\hat{x}\sin\theta_{\mathrm{r}} - \hat{z}\cos\theta_{\mathrm{r}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(-x\cos\theta_{\mathrm{r}}+z\sin\theta_{\mathrm{r}})}, \tag{2–215b}$$

$$\vec{E}_{\mathrm{p}} = -\frac{\vec{k}_{\mathrm{p}}\times\vec{H}_{\mathrm{p}}}{\omega\varepsilon_2} = E_0T_{\parallel}\left(\hat{x}\sin\theta_{\mathrm{p}} - \hat{z}\cos\theta_{\mathrm{p}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\cos\theta_{\mathrm{p}}+z\sin\theta_{\mathrm{p}})}. \tag{2–215c}$$

Konstante proporcionalnosti $\Gamma_{\parallel}$ i $T_{\parallel}$ označuju koeficijente refleksije i prijenosa za paralelnu polarizaciju električnog polja. Izračunavanjem tangencijalnih komponenata polja E_z i H_y na

graničnoj ravnini $x=0$, dobiva se:

$$\cos\theta_{\mathrm{u}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z\sin\theta_{\mathrm{u}}}+\Gamma_{\parallel}\cos\theta_{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z\sin\theta_{\mathrm{r}}}=T_{\parallel}\cos\theta_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 z\sin\theta_{\mathrm{p}}}, \tag{2–216a}$$

$$\frac{1}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z\sin\theta_{\mathrm{u}}}-\frac{\Gamma_{\parallel}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z\sin\theta_{\mathrm{r}}}=\frac{T_{\parallel}}{\eta_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 z\sin\theta_{\mathrm{p}}}, \tag{2–216b}$$

Lako se može pokazati da između kutova vrijedi ista zakonitost koju smo već našli pri okomitoj polarizaciji, uključujući i Snellove zakone. Primjenom izraza (2–208) i (2–209) jednadžbe (2–216) svode se na:

$$1+\Gamma_{\parallel}=\frac{\cos\theta_{\mathrm{p}}}{\cos\theta_{\mathrm{u}}}T_{\parallel}, \tag{2–217a}$$

$$1-\Gamma_{\parallel}=\frac{\eta_1}{\eta_2}T_{\parallel}, \tag{2–217b}$$

iz čega se dobivaju koeficijenti refleksije i prijenosa za paralelnu polarizaciju, tj.

$$\Gamma_{\parallel}=\frac{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{p}}-\eta_1\cos\theta_{\mathrm{u}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{p}}+\eta_1\cos\theta_{\mathrm{u}}}, \tag{2–218a}$$

$$T_{\parallel}=\frac{2\eta_2\cos\theta_{\mathrm{u}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{p}}+\eta_1\cos\theta_{\mathrm{u}}}. \tag{2–218b}$$

Za okomiti upad vala ($\theta_{\mathrm{u}}=\theta_{\mathrm{r}}=0$), izrazi (2–218) svode se na poznate izraze (2–176) i (2–177) iz odjeljka 2.10.

Prethodni se izrazi mogu pojednostavniti ako su dielektrici nemagnetični ($\mu_1=\mu_2=\mu_0$). Primjenom elementarne trigonometrije, koeficijenti refleksije i prijenosa za okomitu i paralelnu polarizaciju svode se na izraze prikazane u tablici 2.3. Ti su koeficijenti u literaturi poznati pod nazivom *Fresnelovi koeficijenti*. No valja napomenuti da su izrazi za okomiti upad u toj tablici neodređeni.

Tablica 2.3. Koeficijenti refleksije i prijenosa za okomitu i paralelnu polarizaciju uz uvjet $\mu_1=\mu_2=\mu_0$

	Okomita polarizacija	Paralelna polarizacija
koeficijent refleksije	$-\dfrac{\sin(\theta_{\mathrm{u}}-\theta_{\mathrm{p}})}{\sin(\theta_{\mathrm{u}}+\theta_{\mathrm{p}})}$	$-\dfrac{\tan(\theta_{\mathrm{u}}-\theta_{\mathrm{p}})}{\tan(\theta_{\mathrm{u}}+\theta_{\mathrm{p}})}$
prijenosni koeficijent	$\dfrac{2\sin\theta_{\mathrm{p}}\cos\theta_{\mathrm{u}}}{\sin(\theta_{\mathrm{u}}-\theta_{\mathrm{p}})}$	$\dfrac{2\sin\theta_{\mathrm{p}}\cos\theta_{\mathrm{u}}}{\sin(\theta_{\mathrm{u}}+\theta_{\mathrm{p}})\cos(\theta_{\mathrm{u}}-\theta_{\mathrm{p}})}$

2.11.3. Polarizacijski kut – totalni prijenos

Za paralelnu polarizaciju postoji poseban upadni kut ($\theta_{\mathrm{u}}=\theta_{\mathrm{B}}$) koji se naziva *Brewsterov kut*. Pri tom kutu dolazi do potpunog prijenosa snage iz jednog sredstva u drugo, tj. nema refleksije na graničnoj ravnini. Stoga se taj kut nerijetko naziva i *kut totalnoga prijenosa*. Može ga se izračunati tako da se brojnik izraza (2–218a) izjednači s nulom, $\eta_1\cos\theta_{\mathrm{p}}=\eta_1\cos\theta_{\mathrm{B}}=0$ i zatim primijeni Snellov zakon loma (2–210), tj.

$$\sin\theta_{\mathrm{B}}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2/\varepsilon_1-\mu_2/\mu_1}{\varepsilon_2/\varepsilon_1-\varepsilon_1/\varepsilon_2}}. \tag{2–219a}$$

Za nemagnetične dielektrike ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) koji se najčešće nalaze u primjeni, taj se izraz svodi na oblik

$$\sin\theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}\,. \tag{2–219b}$$

Za nemagnetične materijale i okomitu polarizaciju ne postoji kut totalnoga prijenosa. Budući da se pojavljuje samo pri paralelnoj polarizaciji, Brewsterov se kut nerijetko naziva *polarizacijski kut*. Naime, ako je pri upadnome kutu koji je jednak Brewsterovu kutu ulazno polje proizvoljno polarizirano, onda će se u drugo sredstvo u cijelosti prenijeti samo paralelno polarizirana komponenta, pa će reflektirani val biti posve vertikalno polariziran. Na taj se način, primjerice, kružno polarizirani val može pretvoriti u linearno polarizirani val.

2.11.4. Tok snage

Tok srednje (vremenski prosječne) snage, koji je okomit na granicu, mora biti neprekinut, tj.

$$\underbrace{\frac{1}{2}\frac{E_u^2}{\eta_1}\cos\theta_u}_{\text{upadna snaga}} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{E_r^2}{\eta_1}\cos\theta_r}_{\text{reflektirana snaga}} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{E_p^2}{\eta_2}\cos\theta_p}_{\text{prenesena snaga}}. \tag{2–220}$$

To se može napisati u normiranom obliku kao

$$1 - |\Gamma|^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{\cos\theta_p}{\cos\theta_u}|T|^2, \tag{2–221}$$

gdje su refleksivnost i transmisivnost, tj. koeficijenti refleksije i prijenosa snage i njihova veza s pripadajućim koeficijentima za polja, definirani kao:

$$\text{refleksivnost} = \frac{\text{reflektirana snaga}}{\text{upadna snaga}} = \frac{E_r^2}{E_u^2} = |\Gamma|^2, \tag{2–222a}$$

$$\text{transmisivnost} = \frac{\text{prenesena snaga}}{\text{upadna snaga}} = \frac{E_p^2}{E_u^2}\frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{\cos\theta_p}{\cos\theta_u} = \frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{\cos\theta_p}{\cos\theta_u}|T|^2. \tag{2–222b}$$

Koeficijenti refleksije i prijenosa srednje snage pozitivni su i realni. Iz zakona očuvanja energije dobiva se da je njihov zbroj jednak jedinici. Budući da smo razmatrali protok snage, koji je okomit na granicu, dobiveni izrazi vrijede i za paralelnu i za okomitu polarizaciju.

2.11.5. Kritični kut – totalna refleksija

Ako je refleksivnost $\Gamma\Gamma^* = |\Gamma|^2 = 1$, onda izraz (2–221) pokazuje da ne postoji prijenos snage u drugo sredstvo nego na granici dolazi do totalne refleksije koja ne ovisi o vrsti polarizacije. Naime, kad je $\varepsilon_1\mu_1 > \varepsilon_2\mu_2$, tad Snellov zakon loma (2–210a) pokazuje da $\sin\theta_p$ može poprimiti vrijednosti veće od jedan. Za nemagnetične materijale ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$), taj se uvjet može ostvariti za $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, tj. kad val upada iz sredstva veće permitivnosti ili iz »gušćeg« u »rjeđe« sredstvo. Tad se Snellov zakon loma (2–210b) svodi na

$$\sin\theta_p = \sin\theta_u\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} > 1.$$

Povećanjem upadnoga kuta θ_u, povećava se i kut loma θ_p, ali kut θ_p brže raste nego kut θ_u. Stoga se može naći kut $\theta_u = \theta_c$ za koji kut loma θ_p iznosi 90°. Taj se kut naziva *kritični kut* ili *kut totalne refleksije*. Otuda, za nemagnetične materijale iz Snellova zakona, izravno slijedi

$$\theta_c = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\,. \tag{2–223}$$

Dakle, za $\theta_u > \theta_c$, tj. za upadne kutove veće od kritičnoga kuta, $\sin\theta_p$ poprima vrijednosti veće od jedinice, pa $\cos\theta_p$ postaje imaginarna veličina, tj.

$$\cos\theta_p = \sqrt{1-\sin^2\theta_p} = -\mathrm{j}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sqrt{\sin^2\theta_u - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\,. \tag{2–224}$$

Pritom kut θ_p gubi fizikalni smisao. Otuda, koeficijenti refleksije i prijenosa za polja postaju kompleksni bez obzira na polarizaciju. Ubrzo ćemo vidjeti da to vodi do jedinične reflektivnosti, tj. $|\Gamma|^2 = 1$, pa ne postoji prijenos snage u drugo sredstvo. U izrazu (2–224) odabran je negativni predznak drugoga korijena, što je u skladu sa zakonom očuvanja energije.

Na ovom je mjestu korisno zamijeniti izraze za prenesena polja novim izrazima koji uključuju imaginarnu komponentu člana $\cos\theta_p$. Primjenom izraza (2–224) mogu se izračunati komponente valnoga vektora za prenesena polja kao:

$$k_2\cos\theta_p = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}\left(-\mathrm{j}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sqrt{\sin^2\theta_u - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) = -\mathrm{j}k_1\sqrt{\sin^2\theta_u - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = -\mathrm{j}\alpha_p\,, \tag{2–225a}$$

$$k_2\sin\theta_p = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_u = k_1\sin\theta_u = \beta_p\,, \tag{2–225b}$$

gdje je α_p koeficijent prigušenja evanescentnoga polja, a β_p fazni koeficijent prenesenoga vala.

Uvrsti li se izraz (2–225a) u (2–212a) za okomitu polarizaciju (*TE*-val), koeficijent refleksije u uvjetima totalne refleksije poprima oblik

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2 k_2\cos\theta_u + \mathrm{j}\eta_1\alpha_p}{\eta_2 k_2\cos\theta_u - \mathrm{j}\eta_1\alpha_p}\,. \tag{2–226}$$

Budući da taj kompleksni koeficijent refleksije ima oblik $(a - \mathrm{j}b)/(a + \mathrm{j}b)$, apsolutna mu je vrijednost jednaka jedinici, što potvrđuje da se radi o totalnoj refleksiji snage.

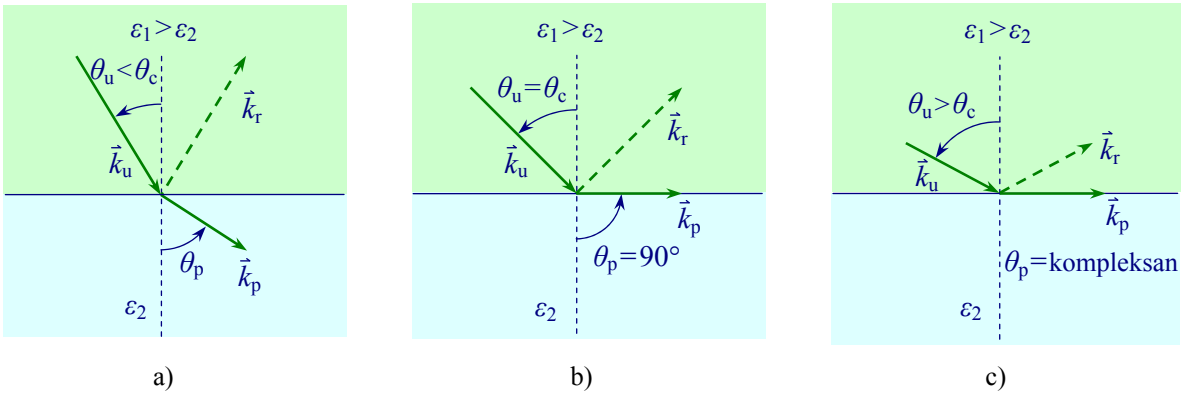
Na slici 2.33 prikazano je kako nastaje totalna refleksija postupnim povećanjem upadnoga kuta pri kosom upadu elektromagnetskoga vala iz gušćeg u rjeđe dielektrično sredstvo.

Pogledajmo sad kako izgledaju polja i prijenos snage u drugo sredstvo. Uvrštenjem izraza (2–225) u izraze (2–204c) i (2–206c) za okomitu polarizaciju (*TE*-val), vektori električnog i magnetskog polja »prenesenog« vala poprimaju oblik:

$$\vec{E}_p = \hat{y}E_0T_\perp\mathrm{e}^{-\alpha_p x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_p z}\,, \tag{2–227a}$$

$$\vec{H}_p = -\frac{E_0T_\perp}{\eta_2}\left(\hat{x}\frac{\beta_p}{k_2} + \hat{z}\frac{\mathrm{j}\alpha_p}{k_2}\right)\mathrm{e}^{-\alpha_p x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_p z}\,. \tag{2–227b}$$

Pri totalnoj refleksiji ne postoji prijenos energije u rjeđe sredstvo, ali da bi se zadovoljili rubni uvjeti na graničnoj ravnini, u drugome sredstvu postoje konačne vrijednosti polja. Ta polja pripadaju novoj vrsti vala jer se polja $\vec{E}_p$ i $\vec{H}_p$ rasprostiru u smjeru $\hat{z}$ s koeficijentom rasprostiranja $\mathrm{j}\beta_p$, ali im amplitude eksponencijalno slabe u smjeru $\hat{x}$ s koeficijentom prigušenja α_p, što je u skladu sa zakonom očuvanja energije. Dakle, predznak drugoga korijena (2–224) ispravno je odabran jer daje fizikalno smisleno rješenje. No amplituda toga vala nije uniformna u ravninama stalne faze koje su okomite na smjer rasprostiranja $\hat{z}$ pa je to primjer *neuniformnoga ravnog vala*. Budući da su mu amplitude polja znatnijeg iznosa samo u blizini granične ravnine (slika 2.34), taj se val nerijetko naziva i *površinski val*. Premda se raspros-



Slika 2.33. Grafički prikaz fenomena totalne refleksije; **a)** upadni kut iz nemagnetičnog dielektrika u slobodni prostor manji od kritičnoga kuta, **b)** jednak kritičnome kutu, **c)** veći od kritičnoga kuta, gdje je kut prijenosa kompleksan i gubi fizikalni smisao

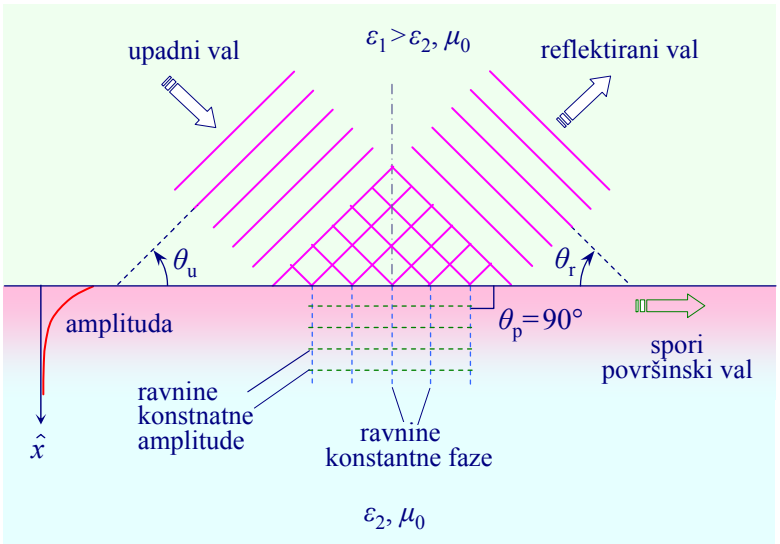
tire u rjeđem sredstvu, nerijetko u zraku, brzina mu je manja od brzine koju bi imao uniformni ravni val u rjeđem sredstvu jer je površinski val ustvari »prirepak« sporih polja koja putuju gušćim sredstvom. Zbog toga što može opstati samo ako postoje polja ravnoga vala u gušćem dielektriku, bolje mu pristaje naziv *prisilni površinski val*.

Uvrštenjem izraza (2–227a) u Helmholtzovu jednadžbu za električno polje izravno izlazi

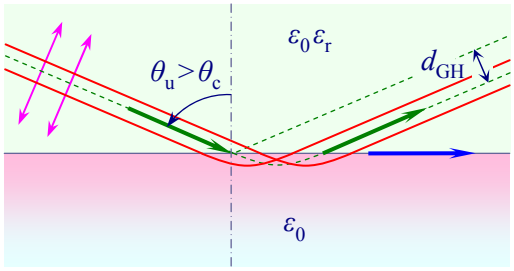
$$-\beta_p^2 + \alpha_p^2 + k_2^2 = 0\,,$$

iz čega se može odrediti α_p, a da se ne rabi izraz (2–225a).

Zbog jakih polja koja se nalaze uz granicu, valja pripaziti da se u rjeđem sredstvu blizu granične ravnine ne nađu dielektrični ili vodljivi predmeti koji bi mogli stvoriti neželjene refleksije i gubitke snage. Pojava totalne refleksije uspješno se primjenjuje u praksi za prijenos elektromagnetske energije (uključujući svjetlost) uz minimalne gubitke dielektričnim valovodom ili *svjetlovodom*. Ako se na dovoljno malom razmaku u rjeđem sredstvu (zrak) nalazi drugo dielektrično sredstvo paralelno s prvim, onda se u njemu mogu inducirati nova polja i putujući valovi. Na taj se način ostvaruju svjetlovodni sprežnici s pomoću kojih se dio signala iz jednog može odvojiti u drugi svjetlovod.



Slika 2.34. Ravni val upada iz optički gušćeg u rjeđe sredstvo uz totalnu refleksiju. U rjeđem sredstvu nastaje spori površinski val koji putuje paralelno s granicom

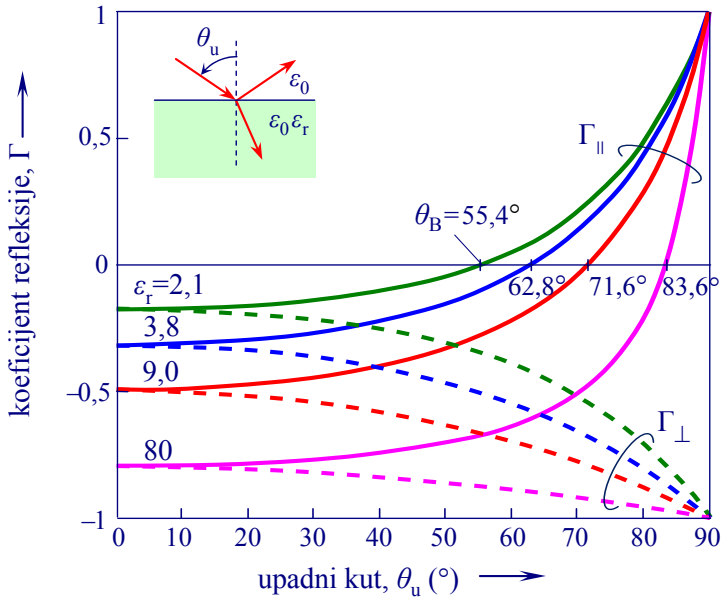


Slika 2.35. »Savijanje« zrake u rjeđem sredstvu pri totalnoj refleksiji na granici

Fazni kut koeficijenta refleksije Γ u izrazu (2–226) ima za posljedicu geometrijski pomak zrake poznat pod nazivom *fazni pomak Goos-Hänchen* (odjeljak 4.7). Ti su fazni kutovi različiti za paralelnu i okomitu polarizaciju elektromagnetskoga vala. Naime, potanko razmatranje elektromagnetske zrake ili zrake svjetlosti, koja upada na graničnu ravninu uz zadovoljen uvjet totalne refleksije, pokazuje da se ta refleksija ne događa na samoj granici, nego prodire u rjeđe sredstvo do određene dubine koja je obično manja od jedne valne duljine u gušćem sredstvu. Jedna od mogućih predodžaba jest ta da reflektirana zraka zapravo nastaje savijanjem upadne zrake unutar rjeđeg sredstva pri čemu nastaje pomak d_{GH} u odnosu na zamišljenu zraku koja se oštro lomi na graničnoj ravnini, kao što je prikazano na slici 2.35.

Na slici 2.36 prikazana je ovisnost koeficijenta refleksije o upadnom kutu pri nailasku ravnoga vala iz slobodnoga prostora na idealni nemagnetični dielektrik za nekoliko vrijednosti relativne permitivnosti dielektrika i za okomito i paralelno polarizirani val. Pri okomitoj je polarizaciji koeficijent refleksije negativan za sve upadne kutove, a pri paralelnoj polarizaciji koeficijent refleksije mijenja predznak kad je upadni kut jednak Brewsterovu kutu. (Za upadne kutove veće od Brewsterova kuta, koeficijent refleksije je pozitivan.) Uočljivo je da su *TE*-modovi refleksivniji od *TM*-modova za isti upadni kut.

Na slici 2.37a) dan je konturni prikaz magnetskog polja uz okomito polarizirano električno polje, tj. za *TE*-mod u uvjetima totalne refleksije. Pri tomu se magnetsko polje pojavljuje

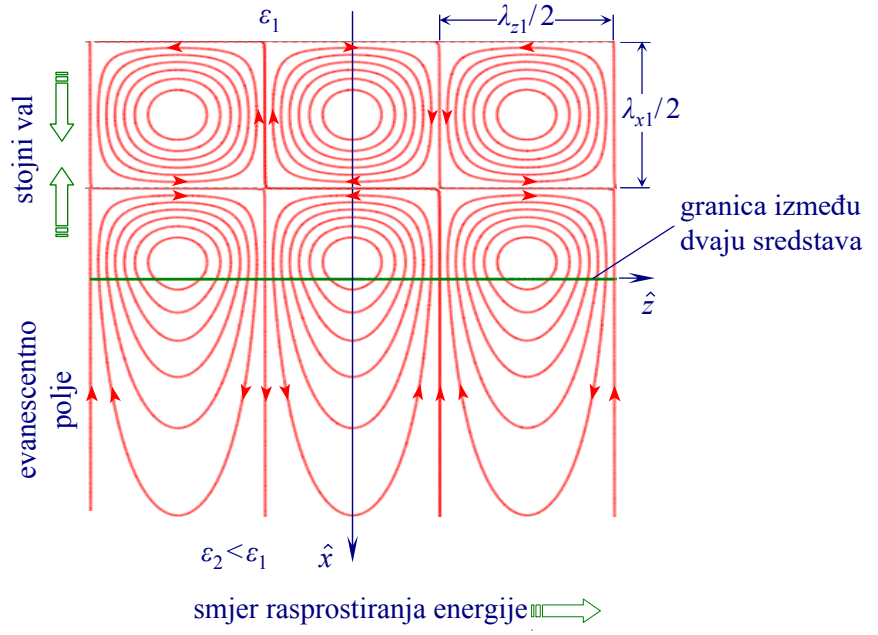


Slika 2.36. Koeficijent refleksije $\Gamma_\parallel$ za paralelnu i $\Gamma_\perp$ za okomitu polarizaciju pri kosom nailasku vala iz slobodnoga prostora na savršeno dielektrično sredstvo

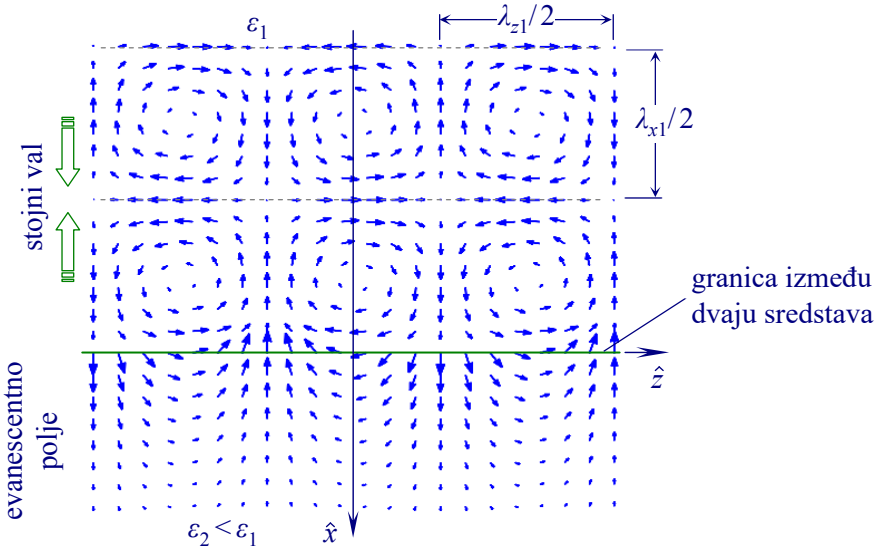
u gušćem sredstvu 1 u obliku vrtloga koji se ponavljaju svakih $\lambda_{z1}/2$ u smjeru $\hat{z}$, odnosno $\lambda_{x1}/2$ u smjeru $\hat{x}$ u kojem se nalazi stojni val, gdje je $\lambda_{x1} = 2\pi/k_1\cos\theta_u$, a $\lambda_{z1} = 2\pi/k_1\sin\theta_u$. Dakle, magnetsko polje ima transverzalne i longitudinalne komponente, a električno polje ima samo transverzalnu komponentu u poprečnoj ravnini (xy).

Na slici 2.37a) valja također uočiti da se paralelno s granicom, na udaljenostima $m\lambda_{x1}/2$, u gušćem sredstvu nalaze diskretne ravnine, prikazane isprekidanom crtom, gdje je $m = 1, 2 \ldots$ Na tim je ravninama magnetsko polje tangencijalno, a električno polje uvijek jednako nuli. Stoga zamjena bilo koje od tih ravnina beskonačno tankom savršeno vodljivom ravnom plohom, neće izazvati promjene u razdiobama magnetskog i električnog polja, a pritom će ostati zadovoljeni i rubni uvjeti (2–166). U sljedećem odjeljku i poglavlju 4 vidjet ćemo da se na tom načelu zasniva rad planparalelnoga valovoda u kojem se između dviju takvih ravnina može rasprostirati *TM*-val. No ako je električno polje okomito polarizirano na upadnu ravninu, onda će to polje imati sličnu razdiobu kao magnetsko polje uz paralelnu polarizaciju. Na taj se način može izvesti planparalelni valovod u kojem se rasprostire *TE*-val.

a)



b)



Slika 2.37. a) Konturni prikaz magnetskog polja *TE*-vala i **b)** vektorski prikaz električnog polja *TM*-vala u uvjetima totalne refleksije

Ako se u prvo sredstvo postavi samo jedna savršeno vodljiva ravnina, na kojoj su zadovoljeni rubni uvjeti (2–166), a s donje strane te iste ravnine zadrže uvjeti totalne refleksije, onda se na granici dvaju dielektričnih sredstva dobiva dielektrični valovod s uzemljenom dielektričnom pločom. Jednako se tako može ostvariti dielektrični valovod bez ijedne vodljive ravnine, tj. s dvjema graničnim ravninama na dielektričnoj ploči određene debljine, ali se tad rubni uvjeti moraju istodobno zadovoljiti na objema graničnim ravninama (vidjeti odjeljak 4.7).

U rjeđem sredstvu uz granicu ($x > 0$) postoje samo zaporna (evanescentna) polja čija jakost eksponencijalno opada prema nuli udaljavanjem od granične ravnine ($x = 0$). Ta polja ne prenose energiju u rjeđe sredstvo nego putuju samo uz granicu u smjeru $\hat{z}$ kao spori površinski val. To se može lako provjeriti razmatranjem kompleksnog Poyntingova vektora.

Pri okomitoj polarizaciji, iz izraza (2–227) za $x > 0$ dobiva se

$$\vec{S}_\mathrm{p} = \vec{E}_\mathrm{p} \times \vec{H}_\mathrm{p}^* = \frac{|E_0|^2 |T_\perp|^2}{\eta_2} \left(\hat{x} \frac{\mathrm{j}\alpha_\mathrm{p}}{k_2} + \hat{z} \frac{\beta_\mathrm{p}}{k_2} \right) \mathrm{e}^{-2\alpha_\mathrm{p} x} . \tag{2–228a}$$

To znači da u smjeru $\hat{x}$ ne postoji tok realne snage. No u rjeđem sredstvu ipak postoji izvjesna količina realne snage koja putuje u smjeru $\hat{z}$ u obliku površinskoga vala. Gustoća snage u području $x > 0$ opada s faktorom $\mathrm{e}^{-2\alpha_\mathrm{p} x}$, gdje je x udaljenost od granice. Koeficijent prigušenja α_p može se izračunati iz izraza (2–225a). On raste povećanjem upadnoga kuta, a opada s valnom duljinom u gušćem sredstvu.

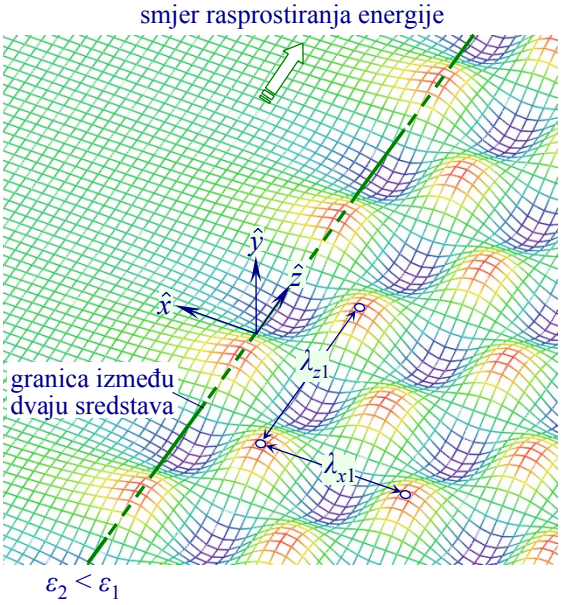
Na slici 2.37b) dan je vektorski prikaz električnog polja za paralelnu polarizaciju (TM-val) pri totalnoj refleksiji. Sad je u prvome dielektriku električno polje vrtložno, a u drugome je dielektriku površinski val. Izraz za kompleksni Poyntingov vektor može se naći uvrštenjem izraza (2–225) u (2–215c) i (2–214c) za magnetsko, odnosno električno polje, tj.

$$\vec{S}_\mathrm{p} = \vec{E}_\mathrm{p} \times \vec{H}_\mathrm{p}^* = \frac{|E_0|^2 |T_{||}|^2}{\eta_2} \left(-\hat{x} \frac{\mathrm{j}\alpha_\mathrm{p}}{k_2} + \hat{z} \frac{\beta_\mathrm{p}}{k_2} \right) \mathrm{e}^{-2\alpha_\mathrm{p} x} . \tag{2–228b}$$

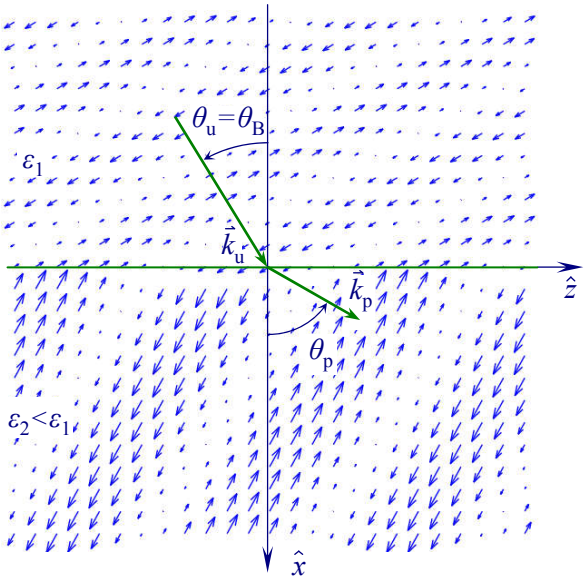
Na slici 2.38 prikazana je razdioba jakosti okomito polariziranog električnog polja pri kosom upadu vala na granicu dvaju dielektrika pri totalnoj refleksiji. U području s rjeđim dielektrikom ($x > 0$) nastaje površinski val čije polje upućuje na eksponencijalno slabljenje udaljavanjem od granične ravnine. Dakle, val pokazuje evanescentani karakter, tj. ne postoji rasprostiranje energije u smjeru osi $\hat{x}$ nego se sva energija u površinskome valu prenosi paralelno s graničnom ravninom u smjeru osi $\hat{z}$. Budući da pri okomitoj polarizaciji (*TE*-val) električno polje ima samo komponentu E_y koja je ujedno paralelna s granicom, rubni uvjet (1–165a) traži jednake vrijednosti polja s obje strane granične ravnine. Otuda je valna duljina površinskoga vala jednaka valnoj duljini λ_{z1} vala koji gušćim sredstvom putuje u smjeru $\hat{z}$.

No za paralelnu polarizaciju (*TM*-val), električno polje ima i komponentu koja je okomita na graničnu ravninu. Stoga rubni uvjet (2–165c) pokazuje da okomite komponente električnog polja s jedne i druge strane granične ravnine općenito mogu imati različite jakosti, čiji je omjer jednak omjeru permitivnosti dielektrika. To vodi zaključku da je pri totalnoj refleksiji električno polje *TM*-vala diskontinuirano na granici dvaju dielektrika.

Na slici 2.39 dan je vektorski prikaz paralelno polariziranog električnog polja za upadni kut jednak Brewsterovu kutu prema izrazu (2–219b), tj. za totalni prijenos snage. Vidi se da u gornjem (gušćem) sredstvu nema reflektiranoga vala. To jest, u tom sredstvu postoji samo upadni val, a u donjem (rjeđem) sredstvu samo preneseni val. Budući da val upada iz gušćeg u rjeđe sredstvo, kut loma veći je od upadnoga kuta. Kao što se vidi, električno je polje jače u rjeđem sredstvu jer to sredstvo ima višu intrinzičnu impedanciju od gušćeg sredstva. Posve jednaka razdioba polja dobiva se za val koji upada iz rjeđeg u gušće sredstvo, samo što upadni kut i kut loma moraju zamijeniti uloge jer se radi o recipročnome elektromagnetskom sustavu.



Slika 2.38. Vizualizacija razdiobe jakosti električnog polja *TE*-vala pri totalnoj refleksiji na granici dvaju dielektričnih sredstava



Slika 2.39. Vektorski prikaz paralelno polariziranog električnog polja pri totalnom prijenosu snage ($\theta_u = \theta_B$)

2.12. Kosi upad vala na granicu sa savršenim vodičem

U odjeljku 2.10. vidjeli smo da pri okomitom upadu vala na savršeno vodljivo sredstvo dolazi do totalne refleksije vala. U prethodnom smo odjeljku vidjeli da se uz zadovoljenje uvjeta totalne refleksije pri kosom upadu vala iz dielektrika veće permitivnosti energija rasprostire paralelno s graničnom ravninom. No ta se energija ne može prenositi *TEM*-modom nego samo *TE*- ili *TM*-modom. Koji će od tih modova biti prisutan ovisi o položaju vektora upadnoga električnog polja u odnosu na graničnu ravninu. Ta se saznanja mogu korisno uporabiti za izvedbe različitih prijenosnih struktura, tj. valovoda. Stoga ćemo u ovom odjeljku razmotriti kosi upad vala na ravnu savršeno vodljivu plohu.

2.12.1. *TE*-mod

Pretpostavimo da je prostor iznad savršeno vodljive horizontalne ravnine $x = 0$ ispunjen homogenim sredstvom sa μ i ε, kao što je prikazano na slici 2.40a). Ako ravni val upada na tu ravninu pod kutom θ, kao u odjeljku 2.11.1, onda se oblikuje *TE*-val s električnim poljem

$$\vec{E}_u = \hat{y} E_0 e^{-jk_x x - jk_z z}, \tag{2–229}$$

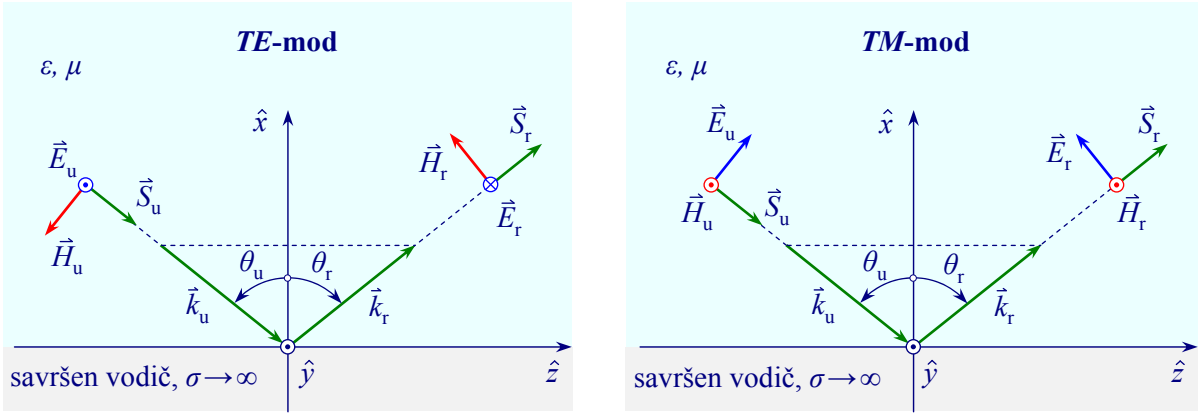
gdje je $k_x = k\cos\theta$, $k_z = k\sin\theta$, a $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. Budući da na savršeno vodljivoj granici ($x = 0$) tangencijalno električno polje mora biti jednako nuli, nužno mora postojati reflektirani val

$$\vec{E}_r = -\hat{y} E_0 e^{-jk_x x - jk_z z}. \tag{2–230}$$

I upadni i reflektirani valovi moraju zadovoljiti istu disperzijsku relaciju

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon, \tag{2–231}$$

a komponente k_z obaju valova moraju još zadovoljiti i uvjet faznog sklada (2–208) na $x = 0$. Otuda, oba vala imaju zajednički $|k_x|$, pa je upadni kut $\theta = \tan^{-1}|k_z/k_x|$ jednak kutu reflektiranoga vala.



a) b)

Slika 2.40. Rasprostiranje uz savršeno vodljivu plohu; **a)** *TE*-val, **b)** *TM*-val

Ukupno električno polje *TE*-vala dobiva se superpozicijom upadnoga i reflektiranoga vala:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\mathrm{u}} + \vec{E}_{\mathrm{r}} = \mathrm{j}\hat{y}2E_0 \sin(k_x x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}. \tag{2–232}$$

Magnetsko se polje može izraziti preko Faradayeva zakona kao

$$\vec{H} = -\frac{\nabla\times\vec{E}}{\mathrm{j}\omega\mu} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial z} - \hat{z}\frac{\partial}{\partial x}\right)E_y =$$

$$= \frac{2E_0}{\eta}\left(\hat{x}\frac{-\mathrm{j}k_z}{k}\sin(k_x x) - \hat{z}\frac{k_x}{k}\cos(k_x x)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}, \tag{2–233}$$

gdje je $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$. Kao što se moglo i očekivali, na koordinati $x = 0$ tangencijalna komponenta električnog polja E_y i okomita komponenta magnetskog polja H_x jednake su nuli, čime su zadovoljeni rubni uvjeti za polja na savršeno vodljivoj plohi.

No tangencijalna komponenta magnetskog polja na vodljivoj plohi inducira površinsku struju. Prema izrazu (2–233) to je uzdužna, tj. $\hat{z}$ -komponenta magnetskog polja. Izraz (2–194) u odjeljku 2.10.2. za x=0 pokazuje da je gustoća površinske struje

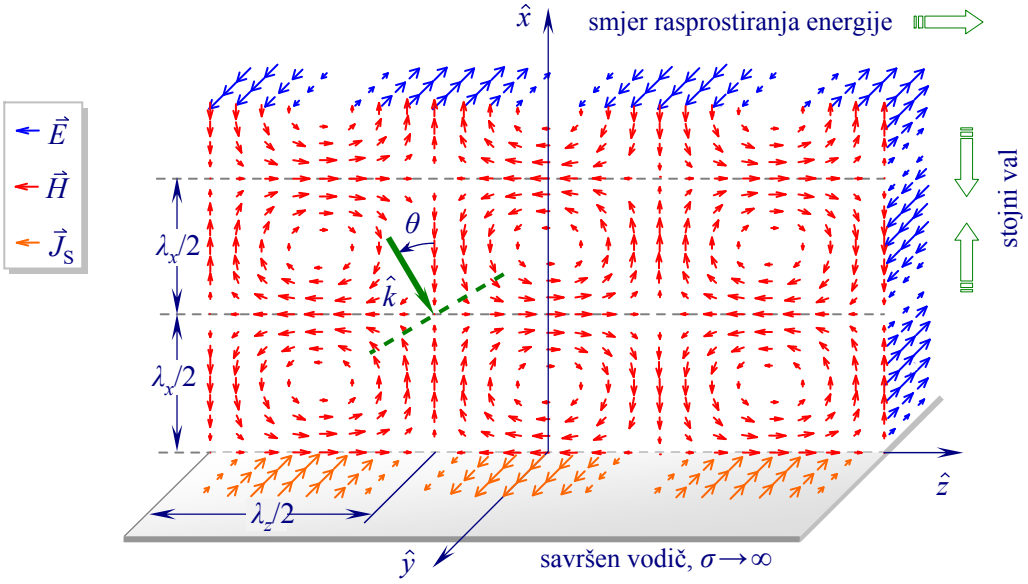
$$\vec{J}_{\mathrm{s}} = \hat{n}\times\vec{H}_{\tan} = \hat{y}\frac{2E_0}{\eta}\frac{k_x}{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} = \hat{y}\frac{2E_0}{\eta}\cos\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}, \tag{2–234}$$

gdje je $\hat{n} = \hat{x}$ jer je os $\hat{x}$ okomita na površinu vodiča.

Na slici 2.41 dan je vektorski prikaz magnetskog i električnog polja opisanih izrazima (2–232) i (2–233). Unatoč tomu što su upadni i reflektirani valovi (2–229) i (2–230) svaki za sebe čisti putujući ravni valovi, njihova superpozicija u poprečnome smjeru $\hat{x}$ stvara razdiobu polja poput one u stojnome valu. Taj se »stojni val« rasprostire duž valovoda u smjeru $\hat{z}$, što je također u skladu s izrazom za kompleksni Poyntingov vektor $\vec{S} = \underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*$, tj.

$$\vec{S} = \frac{4|E_0|^2}{\eta}\left[\hat{z}\frac{k_z}{k}\sin^2(k_x x) - \hat{x}\frac{\mathrm{j}k_x}{k}\sin(k_x x)\cos(k_x x)\right]. \tag{2–235}$$

Sad se može izvesti srednja (vremenski prosječna) vrijednost gustoće snage $\langle\vec{S}\rangle = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{S\}$ koja je različita od nule samo za smjer $\hat{z}$ jer je Poyntingov vektor za smjer $\hat{x}$ posve reaktivan.



Slika 2.41. Kosi upad vala na savršeno vodljivu plohu. Vektorski prikaz električnog i magnetskog polja te površinske struje na vodljivoj plohi za *TE*-mod. Podebljana strelica upućuje na smjer iz kojeg ravni val nailazi na vodljivu plohu, a isprekidana crta upućuje na položaj fronte upadnoga vala

Dakle, u *TE*-modu, upadni i reflektirani valovi stvaraju vrtložno magnetsko polje s transverzalnom komponentom u smjeru $(\hat{x})$ i longitudinalnom komponentom u smjeru $(\hat{z})$. Samo tangencijalna (longitudinalna) komponenta proizvodi površinsku struju koja teče vodljivom plohom poprečno (okomito) na smjer rasprostiranja, što je u skladu s izrazom (2–234). Vektor električnog polja i dalje je polariziran u poprečnome smjeru $(\hat{y})$. Na slici 2.41 vidi se da se maksimumi električnog polja pojavljuju na mjestima maksimuma transverzalne komponente magnetskog polja, što pokazuje da je prijenos energije u smjeru $\hat{z}$. No u poprečnome (transverzalnome) smjeru nema prijenosa energije jer za taj smjer polja pokazuju razdiobu kakvu ima stojni val pri okomitom nailasku vala na vodljivu plohu. To je u skladu s rezultatom (2–235) za Poyntingov vektor.

Valja istaknuti važnu činjenicu da su rubni uvjeti zadovoljeni za sve vrijednosti $x=a$ za koje je $\sin(k_x a)=0$, tj. kad je $k_x a = m\pi$, gdje je m cijeli broj. Sad se na koordinati $x=a=m\lambda_x/2$, gdje je λ_x valna duljina u smjeru $\hat{x}$, može umetnuti paralelna ravnina od savršenog vodiča, a da se ne naruši razdioba postojećih polja *TE*-moda. Valna duljina u smjeru $\hat{z}$ iznosi $\lambda_z = 2\pi/k_z$. Te dvije paralelne ravnine i prostor između njih tvore posebnu vrstu prijenosne strukture koja se naziva *planparalelni valovod* (vidjeti odjeljak 4.1).

2.12.2. *TM*-mod

Ako električno i magnetsko polje zamijene uloge kao na slici 2.40b), onda iz načela dualnosti (odjeljak 2.15.2), dobivaju se rješenja za *TM*-mod. Otuda je upadno magnetsko polje

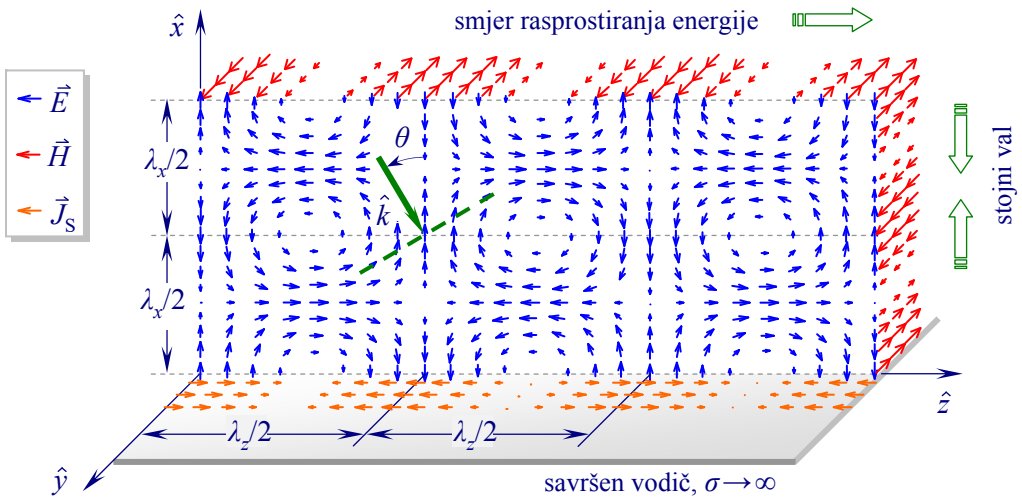
$$\vec{H}_u = \hat{y} H_0 e^{jk_x x - jk_z z} \tag{2–236}$$

stvara reflektirano magnetsko polje

$$\vec{H}_r = \hat{y} H_0 e^{-jk_x x - jk_z z} \tag{2–237}$$

uz koeficijent refleksije +1. Ukupno je magnetsko polje superpozicija tih dvaju izraza,

$$\vec{H} = \vec{H}_u + \vec{H}_r = \hat{y} 2H_0 \cos(k_x x) e^{-jk_z z}. \tag{2–238}$$



Slika 2.42. Kosi upad vala na savršeno vodljivu plohu. Vektorski prikaz električnog i magnetskog polja te površinske struje na vodljivoj plohi za *TM*-mod

Električno se polje može dobiti iz Ampèreova zakona kao

$$\vec{E} = \frac{\nabla \times \vec{H}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\left(-\hat{x}\frac{\partial}{\partial z} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial x}\right)H_y =$$

$$= 2\eta H_0\left(\hat{x}\frac{k_z}{k}\cos(k_x x) + \hat{z}\frac{\mathrm{j}k_x}{k}\sin(k_x x)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}. \qquad (2\text{–}239)$$

Oba polja moraju zadovoljiti rubne uvjete na $x = 0$, tj. $E_y = E_z = H_x = 0$. Kao i za *TE*-mod i sad se mogu postaviti savršeno vodljive ravnine u posebnim točkama prostora na koordinatama $x = a = m\lambda_x/2$, iz čega opet izlaze rješenja za planparalelni valovod kojim se sad rasprostiru *TM*-modovi.

Primjenom izraza (2–194) može se naći površinska struja koju proizvodi ukupno magnetsko polje. To je polje tangencijalno na površinu savršenog vodiča, tj.

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_{\tan} = \hat{z}2H_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}. \qquad (2\text{–}240)$$

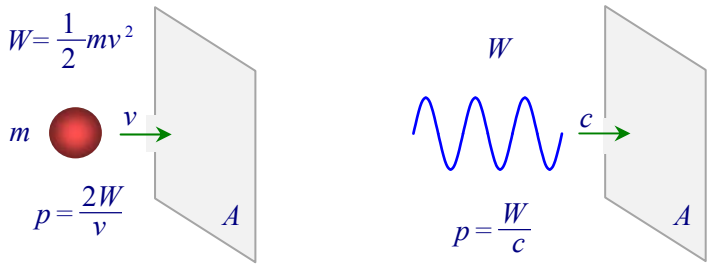
Budući da je to magnetsko polje poprečno na smjer rasprostiranja, površinska struja teče samo uzdužnim smjerom jer je smjer površinske struje uvijek okomit na smjer magnetskog polja.

Na slici 2.42 prikazane su razdiobe polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ te površinske struje $\vec{J}_s$ za *TM*-mod. Lako je uočiti da je *TM*-mod karakterističan po vrtložnom električnom polju koje uz transverzalnu komponentu ima i longitudinalnu komponentu paralelnu s osi $\hat{z}$. Silnice električnog polja posvuda su okomite na savršeno vodljivu plohu, a silnice magnetskog polja posvuda su paralelne s tom plohom. Stoga površinska struja teče u smjeru rasprostiranja energije što je u skladu s izrazom (2–240).

2.13. Tlak zračenja

Zamislimo da neka ploha apsorbira elektromagnetske valove. Tad ti valovi ne predaju samo energiju nego i prenose zalet (količinu gibanja). Slika 2.43 prikazuje česticu mase m, brzine v i kinetičke energije $W = mv^2/2 = pv/2$ koju apsorbira ploha površine A. Pritom je zalet

$$p = \frac{2W}{v}.$$



Slika 2.43. Tlak i zalet elektromagnetskoga zračenja na plohi površine A. Analogija s česticom mase m

Relacija između zaleta i predane energije elektromagnetskoga vala razlikuje se za faktor 2, jer definicija energije $W = mv^2/2$ ne vrijedi za objekte koji se gibaju brzinama blizu brzine svjetlosti. Stoga, za elektromagnetske valove, zalet pri potpunoj apsorpciji glasi

$$p = \frac{W}{v} = \frac{W}{c}\,.$$

Obično je zgodno govoriti o *tlaku zračenja* na plohu, koji se definira kao sila po jedinici površine, tj. $\Pi = F/A$. Budući da je sila na plohu razmjerna prirastu zaleta, tlak zračenja za potpunu apsorpciju glasi

$$\Pi = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\langle S\rangle}{c}\,,$$

gdje je $\langle S\rangle$ srednja vrijednost gustoće toka snage. Pri totalnoj refleksiji vala, i zalet i tlak zračenja valja udvostručiti, kao za savršeno reflektirane čestice.

Primjer 2.2. Snaga Sunčevog zračenja

Sunce zrači snagom $P_z = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ W jednoliko u svim smjerovima, a udaljenost Zemlje od Sunca iznosi $d = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. Što se tiče frekvencijskog spektra, glavnina tog zračenja dolazi iz infracrvenoga i optičkoga valnog područja ($10^{13} - 10^{16}$ Hz). Naći ekvivalentnu gustoću snage, jakost električnog i magnetskog polja te tlak Sunčevog zračenja na površini Zemlje.

Rješenje:

Gustoća snage može se izračunati preko izraza za Poyntingov vektor kao

$$\langle S\rangle = \frac{P_z}{4\pi d^2} = \frac{3{,}9\cdot 10^{26}}{4\pi\cdot\left(1{,}5\cdot 10^{11}\right)^2} = 1{,}38\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\,.$$

Jakost električnog polja iznosi

$$\left|\vec{E}_0\right| = \sqrt{2\eta_0\langle S\rangle} = \sqrt{2\cdot 376{,}7\cdot 1{,}38\cdot 10^3} = 1{,}02\ \frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}\,.$$

Jakost magnetskog polja iznosi

$$\left|\vec{H}_0\right| = \frac{\left|\vec{E}_0\right|}{\eta_0} = \frac{1{,}02\cdot 10^3}{376{,}7} = 2{,}71\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\,.$$

Tlak zračenja iznosi

$$\Pi = \frac{\langle S\rangle}{c} = \frac{1{,}38\cdot 10^3}{3\cdot 10} = 4{,}6\cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\,.$$

2.14. Zračenje elektromagnetske energije

Zračenje elektromagnetske energije važna je, ali složena materija. Uspjeh u projektiranju učinkovitih struktura zračenja uvijek je plod mješavine umjetnosti i znanosti. Umjetnost se nerijetko ufa u intuiciju ili »osjećaj« pa ćemo za objašnjenje fizikalnog mehanizma elektromagnetskoga zračenja, a to je ubrzavanje (ili usporavanje) električnog naboja, primijeniti intuitivni pristup. Dosad nismo razmatrali prirodu izvora koji stvaraju polja. Stoga ćemo u nastavku razmatranja uporabom znanstvene metodologije pokazati kako zrači izvor struje koji je posve sam u neograničenom prostoru, tj. kako taj izvor odašilje elektromagnetsku energije.

U analizi zračenja elektromagnetskih valova, uobičajen je postupak da se najprije zadaju izvori (struje), a zatim se odrede nastala polja, nasuprot sintezi gdje se zadaju polja, a traže izvori (struje). Pri razmatranju polja koja stvaraju zadani izvori, kao kod antena, pobude valovoda i šupljinskih rezonatora, itd., zadaća se može znatno olakšati uvođenjem pomoćne veličine koju nazivamo *vektorski potencijal*. Kao što ćemo vidjeti, vektorski je potencijal $\vec{A}$ povezan sa strujom pa se preko njega može odrediti cjelokupno elektromagnetsko polje.

2.14.1. Električno polje ubrzanog naboja

Na početku razmatranja pretpostavimo da je polja stvorio izvor koji se nalazi na velikoj udaljenosti od točke u kojoj ta polja promatramo. Ako se točka promatranja nalazi na sferi beskonačnog polumjera u čijem se središtu nalazi izvor polja, onda se izvor polja doimlje poput točkastog izvora. Polja koja do nas stižu nalaze se u ravnome valu jer rješenje Maxwellovih jednadžba u prostoru bez izvora daje ravni val. Stoga se može očekivati da je vektor električnog polja okomit na vektor magnetskog polja i da je jakost magnetskog polja jednaka omjeru jakosti električnog polja i intrinzične impedancije η.

Izvor energije nalazi se u središtu kugle, pa se očekuje da su gustoća toka snage, tj. Poyntingov vektor $\vec{S}_r$ i valni vektor $\vec{k}$ usmjereni radijalno prema van. Budući da površina kugle raste s kvadratom polumjera r, gustoća toka snage S_r opada s $1/r^2$, pa pripadajuća polja opadaju s $1/r$. Stoga zračeća polja u sfernome koordinatnom sustavu moraju poprimiti ovaj oblik:

$$\vec{E} = \hat{\theta}\frac{E_0(\theta,\varphi)}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \quad \text{ili} \quad \vec{E} = \hat{\varphi}\frac{E_0(\theta,\varphi)}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}, \tag{2–241a}$$

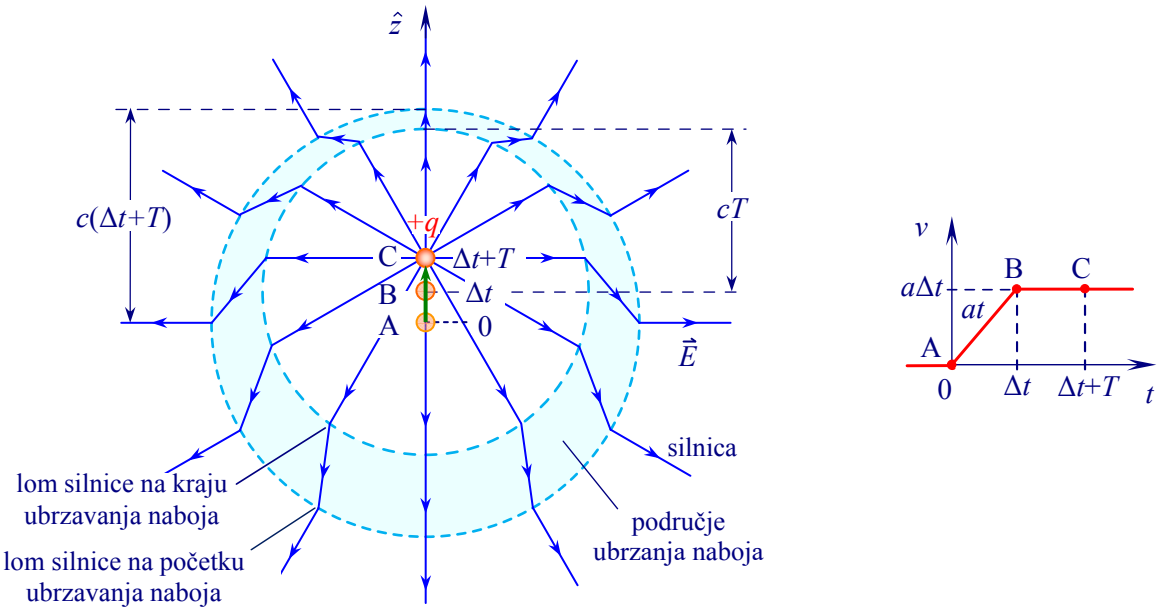
$$\vec{H} = \hat{\varphi}\frac{\eta E_0(\theta,\varphi)}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \quad \text{ili} \quad \vec{H} = -\hat{\theta}\frac{\eta E_0(\theta,\varphi)}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}, \tag{2–241b}$$

gdje je $\eta=\sqrt{\varepsilon/\mu}$ intrinzična valna impedancija sredstva u kojem se rasprostire elektromagnetski val, a $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi/\lambda$ valni broj, kao što je definirano u odjeljku 2.5.4. Naravno, moguće su i sve druge kombinacije tih komponenata, čime se postiže proizvoljna polarizacija (odjeljak 2.8). Ovisnost u radijalnom smjeru dana je faktorom $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}/r$, a ovisnost o θ i φ određena je smjerom u kojem se giba naboj u izvoru.

Statični naboj stvara statičko električno polje. Ubrzavanjem, naboj proizvodi dodatna električna i magnetska polja koja se rasprostiru podalje od naboja. Ubrzavanje i usporavanje naboja ekvivalentno je protjecanju izmjenične struje u vodiču pa se može reći da svaka izmjenična struja stvara elektromagnetsko zračenje, tj. elektromagnetske valove koji u vakuumu putuju brzinom svjetlosti i prenose energiju. Budući da su im svojstva određena svojstvima ubrzanog naboja, s pomoću njih se mogu prenositi informacije brzinom svjetlosti.

No, zbog toga što još nemamo ispravne formule za polja blizu naboja, pogledajmo što se zbiva u prostoru podalje od naboja q prikazanog na slici 2.44 [14].

Pretpostavimo da je taj naboj mirovao u razdolju $t<0$ i da se zatim ubrzavao akceleracijom a u kratkom razdoblju od $t=0$ do $t=\Delta t$, od točke A do točke B. Nakon toga, za $t>\Delta t$, naboj se



Slika 2.44. Silnice električnog polja nastale prilikom ubrzanja naboja

dalje giba stalnom brzinom ($v=a\Delta t$) do točke C u koju stiže u trenutku promatranja, $t=\Delta t+T$. U toj se točki nalazi i hvatište vektora električnog polja. No pritom valja imati na umu da naboj u vodiču putuje znatno sporije od svjetlosti ($v \ll c$) pa se električno polje može naći u trima zasebnim područjima, kao što je prikazano na slici 2.44.

Podalje od naboja (slika 2.44), na udaljenostima $r>c(\Delta t+T)$, električno je polje prikazano silnicama statičkog naboja u vrijeme kad se još nalazio u ishodištu. Budući da se elektromagnetski valovi rasprostiru brzinom svjetlosti, promatrač u području $r>c(\Delta t+T)$ još ne zna je li se naboj pomaknuo u ishodištu. U sfernom području polumjera $r<cT$ sa središtem u točki $z=\Delta t/2$, električno polje odgovara polju naboja koji putuje stalnom brtinom v. No poremećaj koji je nastao tijekom ubrzavanja naboja nalazi se samo u uskom, približno koncentričnom, području između tih dviju sfera. Budući da moraju ostati neprekinute, u prostoru bez naboja, silnice električnog polja nužno se prelamaju. Stoga uz radijalnu komponentu polja nastaje i poprečna komponenta koja jedina prenosi elektromagnetsku energiju. Jednako tako, prelamanje silnica izaziva i usporavanje naboja.

U teoriji antena obično nas zanimaju jakost i smjer električnog polja na velikoj električnoj udaljenosti od naboja koji stvara to isto polje. Radijalna se komponenta polja može izvesti iz Gaussova zakona. Zamislimo sad kuglastu plohu smještenu između dviju sfera na slici 2.44, koja obuhvaća naboj q. Električni tok kroz tu plohu ovisi samo o radijalnoj komponenti polja. Otuda se primjenom Gaussova zakona može zaključiti da je radijalna komponenta električnog polja jednaka Coulombovu polju

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \qquad (2\text{–}242)$$

Veza između radijalne i poprečne komponente električnog polja može se naći tako da se razmotre svojstva jedne silnice polja prikazane na slici 2.45. Silnica električnog polja zatvara kut θ sa smjerom u kojem se giba naboj. Iz geometrije silnice i uvjeta $v \ll c$, za omjer između amplituda poprečne i radijalne komponente električnog polja izlazi

$$\frac{E_\theta}{E_r} \simeq \frac{vT\sin\theta}{c\Delta t} = \frac{aT}{c}\sin\theta. \qquad (2\text{–}243)$$

Budući da je radijalno polje poznato iz izraza (2–242), poprečna se komponenta električnog polja može odrediti iz relacije (2–243) kao

$$E_\theta = \frac{a}{c} T \sin\theta \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}, \tag{2–244}$$

gdje je $a = v/\Delta t$. Udaljenost r na kojoj nastaje lom silnice razmjerna je trenutku u kojem se polje promatra, $r = cT$. Uvrštenjem toga u izraz (2–244) dobiva se konačan izraz za poprečnu komponentu električnog polja,

$$E_\theta = \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \sin\theta\,. \tag{2–245}$$

Taj izraz pokazuje tri osnovna obilježja poprečne komponente električnog polja. Poprečna je komponenta maksimalna u smjeru okomitom na smjer ubrzavanja naboja ($\theta = 90°$), razmjerna je ubrzanju naboja (a) i obrnuto je razmjerna udaljenosti ($1/r$).

Za razliku od poprečne komponente električnog polja, radijalna (Coulombova) komponenta opada s kvadratom udaljenosti ($1/r^2$). Stoga se može zaključiti da će poprečna komponenta polja uvijek biti znatno veća od Coulombove komponente, kad se točka promatranja nalazi daleko od naboja koji stvara to isto polje. Dobiveni rezultat posve odgovara izrazu (2–281b) za θ-komponentu Hertzova dipola u odjeljku 2.14.3.

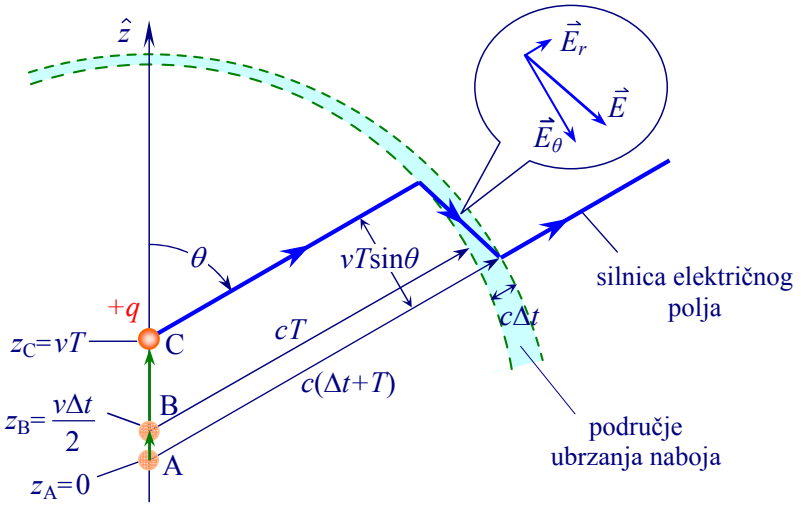
Izraz (2–245) za poprečnu komponentu vrijedi posve općenito, dakle i onda kad ubrzanje naboja nije konstantno. Tako, primjerice, za naboj koji titra naprijed-natrag po jednostavnom harmonijskom zakonu frekvencijom ω, ubrzanje u trenutku t može se napisati kao

$$a(t) = a_0 \sin\omega t\,. \tag{2–246}$$

Radijacijsko polje u trenutku t na udaljenosti r dobiva se tako da se za a u izrazu (2–245) uvrsti vrijednost ubrzanja u trenutku $t - r/c$, gdje je r/c vrijeme potrebno da signal prevali put duljine r. Stoga se izraz za električno polje proizvedeno sinusnim titrajima naboja može napisati u konačnom obliku kao

$$E_\theta(r,t) = \frac{\mu_0 q \sin\theta}{4\pi r} a_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right], \tag{2–247}$$

gdje je primijenjena veza $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$. Zbog navedenog kašnjenja poremećaja, to se polje obično naziva *retardirano polje*. Izraz (2–247) posve je jednak izrazu (2–281b) za daleko polje Hertzova dipola, koji je izveden u odjeljku 2.14.3.



Slika 2.45. Određivanje poprečne komponente električnog polja

2.14.2. Elektromagnetski potencijali

Za vektorsko polje bez divergencije kaže se da je solenoidno ili bez izvora. Tom su polju sve silnice zatvorene krivulje, koje nemaju ni početka ni kraja. Sva solenoidna polja imaju vektorski potencijal. Zato i svako magnetsko polje ima vektorski potencijal jer je solenoidno. Budući da se u mikrovalnoj elektronici najčešće rabe harmonijske veličine, primijenit ćemo fazorski prikaz.

Maxwellova jednadžba (2–4), odnosno (2–26), pokazuje da je $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Taj uvjet vrijedi i kad se $\vec{B}$ izrazi preko rotora proizvoljnog vektora [3], [6], [9] i [12], jer je diverencija rotora svakog vektora uvijek jednaka nuli (izraz (1–9)). Budući da je povezan a magnetskim poljem, taj se vektor naziva *vektorski magnetski potencijal* i označuje s $\vec{A}$. Tako se može napisati

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \,. \tag{2–248}$$

U ovom ćemo odjeljku vektorski magnetski potencijal kraće zvati *vektorski potencijal*. (Za sustave pobuđene magnetskom strujom može se definirati *vektorski električni potencijal*.)

Budući da se radi o fazorskom prikazu, vremenska se ovisnost $e^{-j\omega t}$ ne piše eksplicitno. Uvrštenjem relacije (2–248) u Faradayev zakon, dobiva se

$$\nabla \times \vec{E} = -\mathrm{j}\omega\vec{B} = -\mathrm{j}\omega\nabla \times \vec{A} \,,$$

što se može preurediti u oblik

$$\nabla \times (\vec{E} + \mathrm{j}\omega\vec{A}) = 0 \,.$$

Budući da složeni vektor u zagradi označuje električno polje čiji je rotor jednak nuli, riječ je o konzervativnom polju koje se ponaša kao statičko električno polje. Stoga se umjesto tog polja može uvesti gradijent proizvoljnog skalara, tj.

$$\vec{E} + \mathrm{j}\omega\vec{A} = -\nabla\Phi \,, \tag{2–249}$$

gdje je Φ *dinamički skalarni potencijal*. Premda se statički skalarni potencijal primjenjuje na nepokretne naboje, a dinamički na pokretne naboje, jednadžba (2–249) daje ispravan rezultat i za statički slučaj u kojem $\partial/\partial t \to 0$, tj. $\omega \to 0$ jer se svodi na $\vec{E} = -\nabla\Phi$. Valja napomenuti, da pri rasprostiranju elektromagnetskih valova prisutnost nepokretnog naboja ne stvara probleme jer se istosmjerna polja ne rasprostiru.

Jednadžba za $\vec{A}$ može se naći tako da se jednadžbe (2–249) i (2–248) uvrste u Maxwell-ovu rotorsku jednadžbu $\nabla \times \vec{H} = \mathrm{j}\omega\vec{E} + \vec{J}$, tj.

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \omega^2\varepsilon\vec{A} - \mathrm{j}\omega\varepsilon\nabla\Phi + \vec{J} \,. \tag{2–250}$$

S pomoću vektorske jednadžbe $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$ jednadžba (2–250) svodi se na

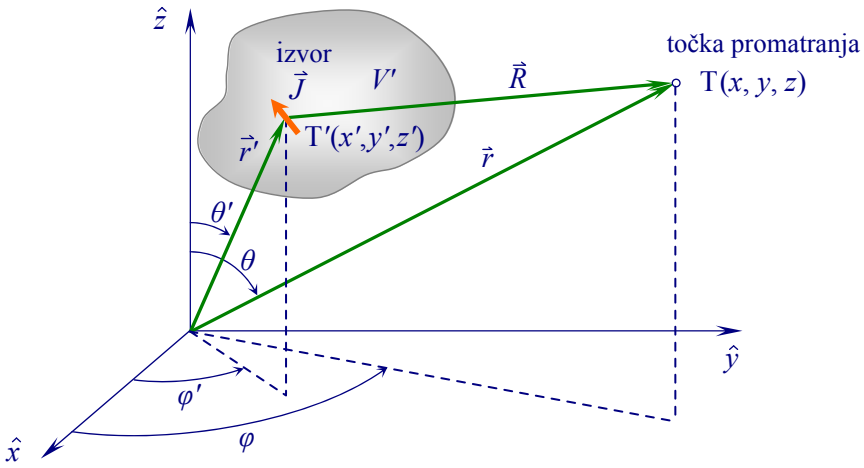
$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = k^2\vec{A} - \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\nabla\Phi + \mu\vec{J} \,, \tag{2–251}$$

gdje je $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$. Može se također uočiti da jednadžba (2–248) opisuje samo rotor vektora $\vec{A}$. No da bi vektor bio jednoznačno određen, moraju biti poznati njegov rotor i divergencija [vidjeti Helmholtzov teorem (E45) u dodatku E]. Ovdje se divergencija od $\vec{A}$ može proizvoljno definirati jer ne ovisi o rotoru. Pritom je korisno odabrati sljedeću vrijednost

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\,\Phi \,, \tag{2–252}$$

što je poznato pod nazivom *Lorenzov uvjet*, jer se jednadžba (2–248) znatno pojednostavnjuje i svodi na *nehomogenu Helmholtzovu jednadžbu* oblika vektorske valne jednadžbe, tj.

$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = -\mu\vec{J} \,. \tag{2–253}$$



Slika 2.46. Elementarni strujni izvor u proizvoljnoj točki pravokutnoga koordinatnog sustava

Ako je poznata prostorna razdioba struje izvora $\vec{J}$, onda rješenje ove jednadžbe daje vektorski potencijal $\vec{A}$.

Primjenom Lorenzova uvjeta, jednadžba (2–249) poprima oblik

$$\vec{E} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \mathrm{j}\omega\vec{A}. \tag{2–254}$$

Ako je poznat vektorski potencijal $\vec{A}$, onda se s pomoću jednadžba (2–248) i (2–254) mogu naći polja $\vec{H}$ i $\vec{E}$. Polje $\vec{E}$ može se naći i izravno iz Ampèreova zakona $\nabla\times\vec{H} = \mathrm{j}\omega\vec{E} + \vec{J}$, ako se uzme $\vec{J} = 0$. No glavna je prednost uporabe vektorskoga potencijala $\vec{A}$, u odnosu na polja $\vec{H}$ ili $\vec{E}$, u tomu što je vektor $\vec{A}$ paralelan s vektorom svoga izvora $\vec{J}$.

U ovom smo izvodu primijenili tri Maxwellove jednadžbe. No može se upotrijebiti i četvrta jednadžba, tj. $\nabla\cdot\vec{D} = \rho$, koja u kombinaciji s Lorenzovim uvjetom (2–252) daje sličnu jednadžbu za skalarni potencijal, tj.

$$\nabla^2\Phi + k^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{2–255}$$

Ovdje skalarni potencijal Φ označuje rješenje nehomogene Helmholtzove jednadžbe, u kojoj ulogu izvora ima gustoća naboja ρ. Rješenje te jednadžbe nešto je složenije.

Sad se može naći rješenje nehomogene Helmholtzove diferencijalne jednadžbe (2–253) za pobudu jediničnim strujnim izvorom, prikazanim na slici 2.46, koji podsjeća na poznatiji primjer s točkastim nabojem. Taj izvor jedinične jakosti, smješten u proizvoljnoj točki prostora T′(x', y', z'), može se na vremenskoj osi prikazati Diracovom delta-funkcijom $\delta(t-t')$. U trodimenzionalnom koordinatnom sustavu jedinični se impuls može prikazati umnoškom triju delta-funkcija (po jedna za svaku koordinatu), tj.

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'), \tag{2–256}$$

gdje eksponent 3 označuje da se radi o trodimenzionalnoj delta-funkciji. Ta poopćena funkcija ima ova svojstva:

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') = 0 \qquad \text{za } r\neq 0, \tag{2–257a}$$

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \to \infty \quad \text{za } r=0, \tag{2–257b}$$

$$\int_{V'} \vec{F}(\vec{r})\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\mathrm{d}V' = \begin{cases} \vec{F}(\vec{r}) & \text{za } \vec{r}' \text{ unutar } V' \\ 0 & \text{za } \vec{r}' \text{ izvan } V' \end{cases}, \qquad (2\text{–}257c)$$

gdje je $\vec{F}(\vec{r})$ proizvoljna vektorska (ili skalarna) funkcija koja je neprekinuta u $\vec{r}'$, to jest u točki prostora x', y', z'. Svojstvo (2–257c) pokazuje da delta-funkcija ima dimenziju $1/\mathrm{m}^3$.

Jedinični izvor u točki $\vec{r}'$ u kojem struja teče u proizvoljnom smjeru $\hat{a}$ može se izraziti kao $\vec{J} = \hat{a}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$, pa valna jednadžba (2–253) poprima oblik

$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = -\mu\hat{a}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\,. \qquad (2\text{–}258)$$

Rješenje jednadžbe (2–258) vektorski je potencijal u točki promatranja T(x, y, z) pa se zbog toga nerijetko naziva *valni potencijal*. Budući da struja teče u smjeru $\hat{a}$, u istom smjeru djeluje vektorski potencijal, tj. $\vec{A} = \hat{a}A$. Stoga se jednadžba (2–258) može napisati u skalarnom obliku kao

$$\nabla^2 A + k^2 A = -\mu\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\,. \qquad (2\text{–}259)$$

U svim točkama $\vec{r} \neq \vec{r}'$, A je rješenje jednadžbe

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0\,. \qquad (2\text{–}260)$$

U točku $\vec{r}'$, u kojoj se nalazi izvor, može se smjestiti ishodište lokalnog koordinatnog sustava. Budući da se radi o točkastom izvoru, u jednadžbi (2–259) zdesna ne postoje varijable koje ovise o kutu, pa je rješenje za A sferno simetrično oko točke izvora $\vec{r}'$. Stoga je Laplaceov operator ∇^2 najprirodnije pisati u sfernome koordinatnom sustavu u kojem dužina

$$R = |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

označuje radijalnu udaljenost od lokalnog ishodišta u točki $\vec{r}'$ do točke $\vec{r}$ u kojoj se izračunava $\vec{A}$. Sad jednadžba (2–259) ovisi samo o varijabli R pa se može napisati kao

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial A}{\partial R}\right) + k^2 A = 0\,.$$

Budući da A ovisi samo o radijalnoj koordinati, parcijalna se derivacija može zamijeniti običnom derivacijom pa se jednadžba svodi na

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}R^2} + \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}R} + k^2 A = 0\,. \qquad (2\text{–}261)$$

Ta jednadžba ima dva nezavisna rješenja $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}/R$ i $\mathrm{e}^{\mathrm{j}kR}/R$. Prvo od njih opisuje odlazni val, a drugo opisuje val koji »ulazi« u točkasti izvor. Koje od njih daje fizikalno održivo rješenje može se lako naći ako se pretpostavi da sredstvo ima gubitke. Kad R teži u beskonačnost, tad prvo rješenje iščezava, a drugo rješenje postaje beskonačno. Stoga valja odabrati prvo rješenje koje se može napisati u obliku $A = K\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}/R$, gdje je K konstanta. Oblik rješenja tad odgovara intuitivnom rezultatu (2–241) za radijacijska polja iz odjeljka 2.14.1. Može se uočiti da je rješenje singularno za $R = 0$, što i ne čudi, jer je struja posvuda jednaka nuli osim u točki u kojoj se nalazi izvor (delta-funkcija).

Konstanta K može se odrediti integriranjem obiju strana jednadžbe (2–256) po volumenu male kugle polumjera $r_0 > 0$ sa središtem u $\vec{r}'$. Uključenjem svojstva (2–257c) dobiva se

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_0} (\nabla^2 A + k^2 A)R^2\mathrm{d}R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_{V'} (\nabla^2 A + k^2 A)\,\mathrm{d}V' = -\mu\int_{V'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\,\mathrm{d}V' = -\mu\ .$$

Ako se sad pusti da r_0 teži nuli, onda član k^2R^2A iščezava, pa za dovoljno mali r_0 preostaje samo

$$\int_{V'} \nabla^2 A \mathrm{d}V' = -\mu .$$

Primjenom teorema o divergenciji dobiva se

$$\int_{V'} \nabla^2 A \mathrm{d}V' = \oint_S \nabla A \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = \oint_S \nabla A \cdot \hat{n} r_0^2 \mathrm{d}\Omega$$

jer je $\hat{n}\mathrm{d}S = \hat{n}r_0^2\mathrm{d}\Omega$, gdje $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$ označuje diferencijalni prostorni kut, a $\hat{n}$ usmjerenu okomicu na sferu polumjera r_0. Budući da A ovisi samo o R, izlazi $\nabla A = \hat{n}\partial A / \partial R$ pa je

$$r_0^2 \oint_S \nabla A \cdot \hat{n} \mathrm{d}\Omega = r_0^2 \oint_S \frac{\partial A}{\partial R} \mathrm{d}\Omega = 4\pi r_0^2 \frac{\partial A}{\partial R} = -\mu .$$

Kad $R = r_0$ teži nuli, tad se dobiva

$$4\pi K r_0^2 \frac{\partial A}{\partial R} = -4\pi K r_0^2 \left(\frac{\mathrm{j}k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr_0}}{r_0} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr_0}}{r_0^2} \right) = -4\pi K ,$$

iz čega izlazi rezultat $K = \mu/4\pi$.

Konačno rješenje za vektorski potencijal proizveden jediničnim izvorom,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{a} \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} , \tag{2–262}$$

funkcija je dviju točaka prostora, točke izvora i točke polja. Val stvoren točkastim strujnim izvorom opisan izrazom (2–262) sferni je val jer su mu plohe konstantne faze sfernog oblika. To se rješenje naziva *Greenova funkcija* i označuje simbolom $\vec{G}$, tj.

$$\vec{G}(\vec{r} \mid \vec{r}') = \hat{a}G(\vec{r} \mid \vec{r}') = \hat{a} \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} , \tag{2–263}$$

jer je Greenova funkcija po definiciji rješenje diferencijalne jednadžbe za jedinični izvor. Argument $(\vec{r} \mid \vec{r}')$ Greenove funkcije upućuje na opisanu dvojnu ovisnost.

Vektorski potencijal za općenitu razdiobu struje može se izraziti kao integral

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \mathrm{d}V' = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') G(\vec{r} \mid \vec{r}') \mathrm{d}V' , \tag{2–264}$$

jer se svaka razdioba struje može promatrati kao zbroj jediničnih izvora kojima su pridruženi određeni težinski faktori. Crtica uz oznaku volumena upućuje na to da se integracija obavlja na koordinatama izvora (slika 2.46). Izrazom (2–264) mogu se obuhvatiti i slučajevi u kojima su izvori površinske (plošne) struje ili linijske struje (strujne niti). Razmatranje se može proširiti i na sredstva s gubitcima ako se uzme u obzir kompleksni valni broj, tj. kompleksni koeficijent rasprostiranja. Članom $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}$ u izrazima (2–262) - (2–264) uzeto je u obzir fazno kašnjenje između strujnoga poremećaja i nijime proizvedenog polja. To je kašnjenje linearno razmjerno udaljenosti između točaka $\vec{r}'$ i $\vec{r}$. Drugim riječima, strujni se poremećaj s mjesta izvora $(\vec{r}')$ ne može trenutačno osjetiti na mjestu $(\vec{r})$ gdje se mjere polja, što je posljedica određenog vremenskog kašnjenja. To je kašnjenje posljedica konačne brzine rasprostiranja poremećaja. U slobodnome prostoru to je brzina svjetlosti. Zbog tog kašnjenja, opisani se potencijal nerijetko naziva *retardirani potencijal*.

2.14.3. Hertzov dipol

Pogledajmo sad podrobnije svojstva zračenja točkastog strujnog izvora. Taj se izvor u teoriji antena nerijetko naziva *Hertzov dipol* i najjednostavniji je element zračenja. Naziv je dobio prema njemačkom fizičaru Heinrichu Rudolfu Hertzu (1857-1894) koji je prvi konstruirao antene takvog oblika za svoje pokuse odašiljanja elektromagnetske energije [2]. Umjesto Hertzova dipola, u literaturi se također nerijetko rabi izraz *elementarni dipol* [15].

Budući da je Hertzov dipol u osnovi antena, najprije valja objasniti neke osnovne pojmove u vezi s antenama (odjeljak 10.1). Antena se može definirati kao struktura povezana s prijelaznim područjem između vođenoga vala u prijenosnoj liniji ili valovodu (poglavlja 3 i 4) i slobodnoga prostornog vala i obratno. Energija koju stvara generator signala privodi se anteni prijenosnom linijom. Antena zrači (odašilje) ili prima elektromagnetsku energiju, a prijenosna linija vodi energiju. Prijenosne linije ili valovodi obično se izrađuju s namjerom da se zračenje energije svede na najmanju moguću mjeru, no antene se izvode s namjerom da energiju zrače, ili primaju, s najvećom mogućom učinkovitošću. Antena je, slično oku, naprava koja pretvara elektromagnetske fotone u električne struje. No, za razliku od oka, antena može pretvoriti energiju iz električnog strujnog kruga u fotone koje zrači u slobodni prostor. Najjednostavnije rečeno, antena pretvara fotone u struje i obratno. Foton je kvantna jedinica elektromagnetske energije iznosa hf, gdje je h Planckova konstanta ($6{,}63\cdot10^{-34}$ Js), a f frekvencija u hercima.

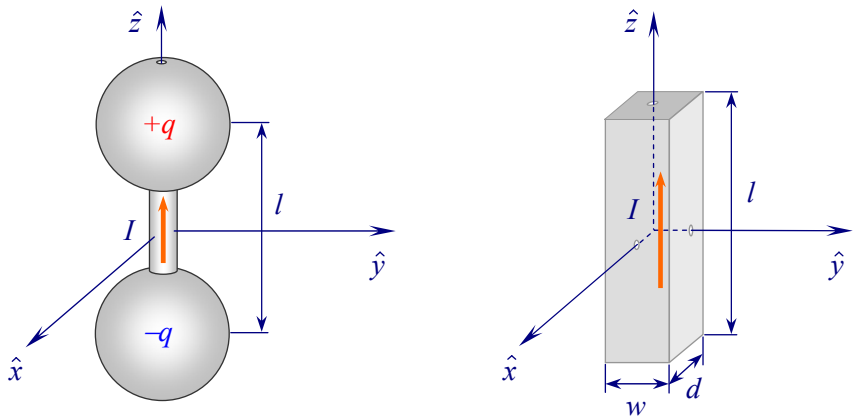
Hertzov se dipol sastoji od dvaju spremnika jednake količine naboja, ali suprotnoga predznaka. Spremnici naboja, međusobno povezani kratkim vodičem, nalaze se na međusobnom razmaku $l \ll \lambda$, kao što je prikazano na slici 2.47a). Pretpostavimo da naboji između spremnika harmonijski titraju kružnom frekvencijom ω. Da bi račun bio što jednostavniji, spremnici se postavljaju na os $\hat{z}$ simetrično u odnosu na ishodište koordinatnog sustava [2], [12]. Takvom električnom dipolu pripada *dipolni moment*

$$\vec{p} = \hat{z}ql\,.$$

Ako za granične vrijednosti $l \to 0$ i $q \to \infty$ umnožak ql ostaje konačan, onda je riječ o Hertzovu dipolu. Zakon očuvanja naboja (2–5) pokazuje da titranje naboja između spremnika naboja stvara izmjeničnu električnu struju $I = \partial q/\partial t$. Za harmonijske titraje vrijedi $I = \mathrm{j}\omega q$. Kad je razmak l znatno manji od valne duljine koju bi imao val frekvencije ω, tad će struja biti jednake jakosti na cijeloj dužini l. Stoga se volumna gustoća struje može napisati kao

$$\vec{J} = \hat{z}Il\delta^3(\vec{r})\,. \qquad (2\text{–}265)$$

Za dipol vrlo malih dimenzija u usporedbi s valnom duljinom i konačnu površinu presjeka (wd), kao što je prikazano na slici 2.47b), izraz za gustoću struje svodi se na



a) b)

Slika 2.47. Hertzov dipol

$$\vec{J} = \hat{z}\frac{I}{wd} = \hat{z}\frac{Il}{wdl}.$$

Umnožak wdl može se prepoznati kao volumen dipola pa ako dimenzije w, d i l istodobno teže nuli, onda recipročni volumen strukture $1/(wdl)$ teži $\delta^3(\vec{r})$, što daje rezultat (2–265).

Uvrsti li se taj rezultat u izraz za vektorski potencijal (2–264), dobiva se

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{z}\frac{\mu Il}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}, \tag{2–266}$$

jer je sva struja koncentrirana u ishodištu. Izraženo matematičkim jezikom, to je jednako svojstvu (2–257c). Budući da A ovisi o r, opet je prikladno upotrijebiti sferni koordinatni sustav, kao što je prikazano na slici 2.48a). Jedinični vektor $\hat{z}$ može se rastaviti na komponente, tj.

$$\hat{z} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \tag{2–267}$$

pa je

$$\vec{A}(r,\theta) = (\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)\frac{\mu Il}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}. \tag{2–268}$$

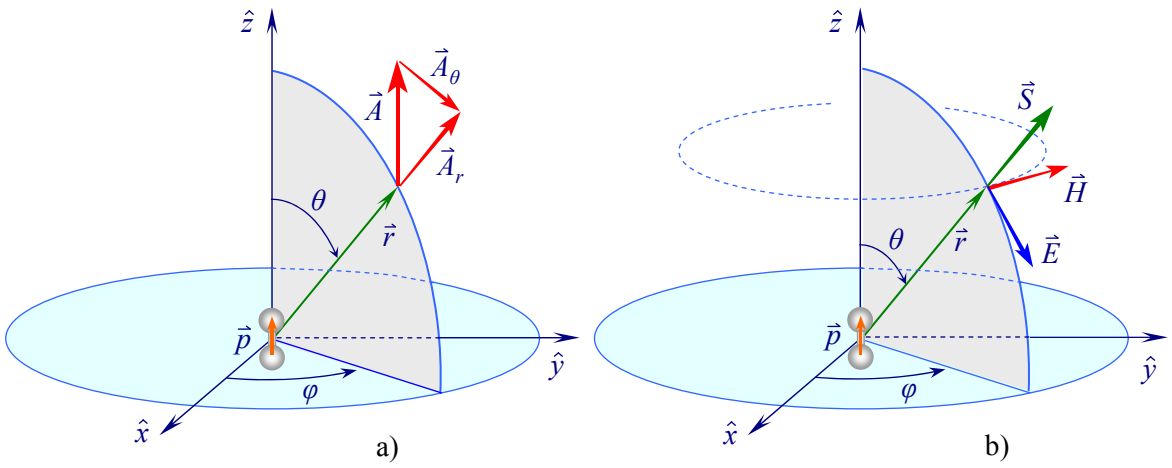
Budući da struja nema φ-komponentu, nema je ni vektorski potencijal. Magnetsko se polje može izravno naći preko rotora vektorskog potencijala u sfernome koordinatnom sustavu kao

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{\mu r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta}r & \hat{\varphi}r\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}. \tag{2–269}$$

Zbog rotacijske simetrije $\partial/\partial\varphi$ i A_φ jednaki su nuli, što vodi do pojednostavnjenja jednadžbe (2–269) pa izraz za magnetsko polje glasi

$$\vec{H} = \hat{\varphi}\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] = \hat{\varphi}\frac{1}{\mu r}\frac{\mu Il}{4\pi}\left(-\sin\theta\frac{\partial\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{\partial r} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}\right) =$$

$$= \hat{\varphi}\frac{\mathrm{j}kIl}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\left(1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)\sin\theta. \tag{2–270}$$



Slika 2.48. a) Dipol električnog momenta $\bar{p}$ stvara vektorski potencijal $\bar{A}$; **b)** vektorski potencijal stvara magnetsko polje. Podalje od dipola Poyntingov je vektor usmjeren radijalno pa se elektromagnetski val iz »točkastog« izvora širi zrakasto u obliku sfernoga vala

Dakle, magnetsko polje ima samo φ-komponentu, što i ne čudi jer iz izraza (2–269) i (2–270) $\vec{H}$ mora biti okomit na $\vec{A}$ koji ima samo z-komponentu, a to je jedino moguće ako $\vec{H}$ leži u φ-ravnini, kao što je prikazano na slici 2.48b). Na istoj je slici prikazano i električno polje koje se može naći iz magnetskog polja primjenom Ampèreova zakona (2–24) i uvjeta $\vec{J} = 0$ za $r \neq 0$. Sličnim postupkom, kao pri rješavanju jednadžbe (2–269), dobiva se

$$\vec{E} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla \times \vec{H} =$$

$$= \mathrm{j}\frac{\eta kIl}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}\left\{\hat{r}\,2\cos\theta\left[\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\left(\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)^2\right]+\hat{\theta}\sin\theta\left[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\left(\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)^2\right]\right\}. \qquad (2\text{–}271)$$

Premda je funkcija pobude vrlo jednostavna (harmonijska funkcija), odziv opisan izrazima (2–270) i (2–271) pokazuje vrlo složenu prostornu ovisnost, zbog postojanja bliskih polja, čija jakost opada s drugom ili trećom potencijom udaljenosti, tj. s $1/r^2$ ili $1/r^3$. Prijenos energije iz Hertzova dipola u okolni prostor putem sfernoga vala može se lako razmotriti primjenom Poyntingova vektora (2–127). Uvrštenjem izraza (2–270) i (2–271) u izraz (2–127) izlazi

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* =$$

$$= \hat{r}\eta\left|\frac{kIl}{4\pi r}\right|^2\left[1-\left(\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)^3\right]\sin^2\theta - \hat{\theta}\eta\left|\frac{kIl}{4\pi r}\right|^2\left[\frac{1}{\mathrm{j}kr}-\left(\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)^3\right]\sin 2\theta\,. \qquad (2\text{–}272)$$

Vektori električnog i magnetskog polja te Poyntingov vektor međusobno su okomiti, kao u ravnome valu. Iz kompleksnog Poyntingova vektora (2–129), za srednju gustoću snage izlazi

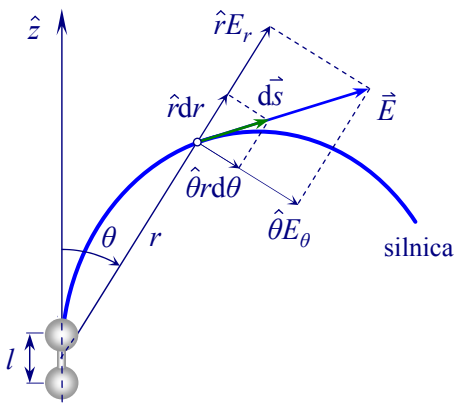
$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{S}\right\} = \hat{r}\frac{\eta}{2}\sin^2\theta\left|\frac{kIl}{4\pi r}\right|^2 . \qquad (2\text{–}273)$$

Može se uočiti da gustoća snage opada s kvadratom udaljenosti od Hertzova dipola.

Silnice električnog polja po definiciji su tangencijalne crte na vektor električnog polja. Otuda se element duljine $\mathrm{d}\vec{s}$ uzduž silnice poklapa sa smjerom vektora $\vec{E}$, kao što je prikazano na slici 2.49. Komponente vektora $\mathrm{d}\vec{s}$ razmjerne su komponentama vektora $\vec{E}$ pa se u sfernome koordinatnom sustavu može napisati [14]

$$\frac{r\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{E_\theta}{E_r}. \qquad (2\text{–}274)$$

Ta se diferencijalna jednadžba može lako riješiti uvođenjem novog vektora



Slika 2.49. Konstrukcija silnice električnog polja Hertzova dipola

$$\vec{C} = \hat{\varphi}\frac{\eta I l}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\left(1-\mathrm{j}\frac{1}{kr}\right)\sin\theta\,, \tag{2–275}$$

koji je definiran jednadžbom

$$\vec{E} = \nabla\times\vec{C}\,. \tag{2–276}$$

Razvoj rotora u sfernome koordinatnom sustavu daje ove komponente električnog polja:

$$E_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(C\sin\theta)\,, \qquad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial(rC)}{\partial r}\,.$$

Uvrštenjem u jednadžbu (2–274) dobiva se diferencijalna jednadžba silnice

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial(rC)}{\partial r}\mathrm{d}r = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(C\sin\theta)\mathrm{d}\theta\,, \tag{2–277}$$

koja se svodi na oblik

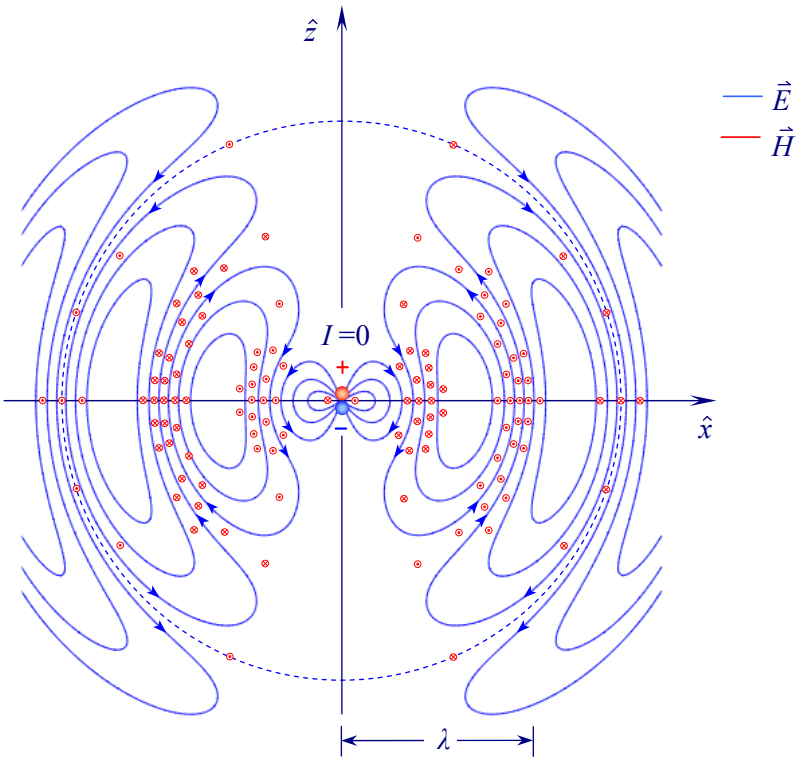
$$\frac{\partial}{\partial r}(Cr\sin\theta)\mathrm{d}r + \frac{\partial}{\partial\theta}(Cr\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 0\,. \tag{2–278}$$

Budući da je totalni diferencijal veličine $Cr\sin\theta$ jednak nuli, može se staviti da je ta veličina konstanta. Uvrštenje vrijednosti za C i ispuštanje konstantnih članova daje

$$\sin^2\theta\left(\frac{1}{kr}+\mathrm{j}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} = \text{ konstanta,} \tag{2–279}$$

$$K = \sin^2\theta\sqrt{1+1/(kr)^2}\,\cos(\omega t - kr + \tan^{-1}kr)\,, \tag{2–280}$$

gdje je izrazu vraćena vremenska ovisnost, a K je realni parametar koji se mijenja od silnice do silnice. Račun je egzaktan uz uvjet $r \gg l$. Član s kosinusom opisuje radijalno gibanje silnica, a faktori ispred njega određuju oblik silnica.



Slika 2.50. Prikaz električnog i magnetskog polja Hertzova dipola u meridijanskoj ravnini

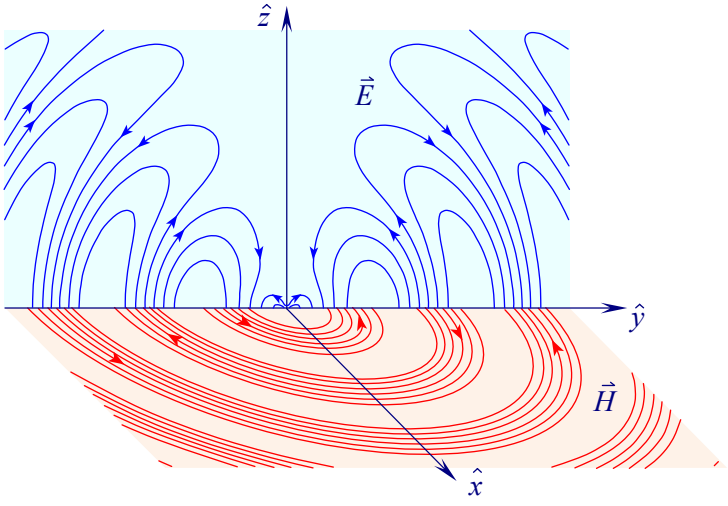
Za Herzov dipol ($l \to 0$) izrazi (2–270) - (2–273), koji vrijede za sve vrijednosti r, čine cjelovite izraze za sferni val i daju mnoštvo korisnih podataka. Na slici 2.50 dana je opća zamisao o poljima opisanim izrazima (2–270) i (2–271). Prikazan je presjek u ravnini u kojoj leži dipol. Zakrivljene crte prikazuju silnice električnog polja, a kružići prikazuju silnice magnetskog polja koje izviru iz ravnine presjeka ili u nju poniru jer su na nju okomite. Na slici 2.51 ta su ista polja prikazana u dvjema ortogonalnim ravninama; električno polje u meridijanskoj ravnini (npr. zx), a magnetsko polje u ekvatorijalnoj ravnini xy. Budući da su valovi koji napuštaju dipol sferni, razdioba polja rotacijski je simetrična. Silnice magnetskog polja tvore kružnice oko osi na kojoj leži dipol. No u blizini samog dipola gustoća je polja znatno veća od one koja se može prikazati na slici.

Na slici 2.50 prikazane su razdiobe silnica električnog i magnetskog polja u trenutku $t = 0$. Jasno se vidi da silnice električnog polja zračećeg vala niti započinju niti završavaju na naboju, nego su zatvorene krivulje. Stoga to polje nema divergenciju. Krivulje su zatvorene slabim radijalnim komponentama E_r u području oko polova. S druge strane, radijalna komponenta iščezava u ekvatorijalnom području, a komponenta E_θ iščezava na polovima. U reaktivnom (indukcijskom) polju blizu dipola, silnice započinju i završavaju na dipolu. Tijekom vremena, vanjski se dio dijagrama rasprostire brzinom kojom se rasprostire sam val. Unutarnji dio dijagrama blizu dipola pulsira u ritmu promjena struje u dipolu, gdje se neke silnice gibaju brzinom većom od brzine svjetlosti.

Fazni su odnosi složeni. Blizu dipola električno i magnetsko polje nisu u fazi. Uz sam dipol, magnetsko je polje u fazi sa strujom na dipolu, a električno je polje u fazi s nabojem na obama krajevima dipola. Reaktivne komponente polja sadrže razmjerno veliku količinu pohranjene energije koja se izmjenjuje između električnih i magnetskih polja.

No, na većim udaljenostima (nekoliko valnih duljina) od dipola, reaktivne komponente postaju zanemarive jer se smanjuju s drugom ili trećom potencijom udaljenosti. Stoga prevladava zračeća komponenta koja opada s prvom potencijom udaljenosti. Energiju iz dipola u okolni slobodni prostor prenosi zračeća komponenta. Ta se energija nikad ne vraća u izvor iz kojeg je odaslana. Zračeće su komponente električnog i magnetskog polja istofazne. Najizraženije reaktivne komponente električnog polja u protufazi su sa zračećom komponentom, a komponente magnetskog polja u faznoj su kvadraturi. To se može lako objasniti ako prihvatimo zamisao da zračeća komponenta ne nastaje izravno iz struje i naboja na dipolu nego iz promjena reaktivnih polja u prostoru oko dipola [16].

Reaktivne su komponente jednake zračećim komponentama na udaljenosti $r = \lambda/(2\pi)$ od ishodišta. Na većim udaljenostima od dipola prevladavaju zračeće komponente. Dakle, može

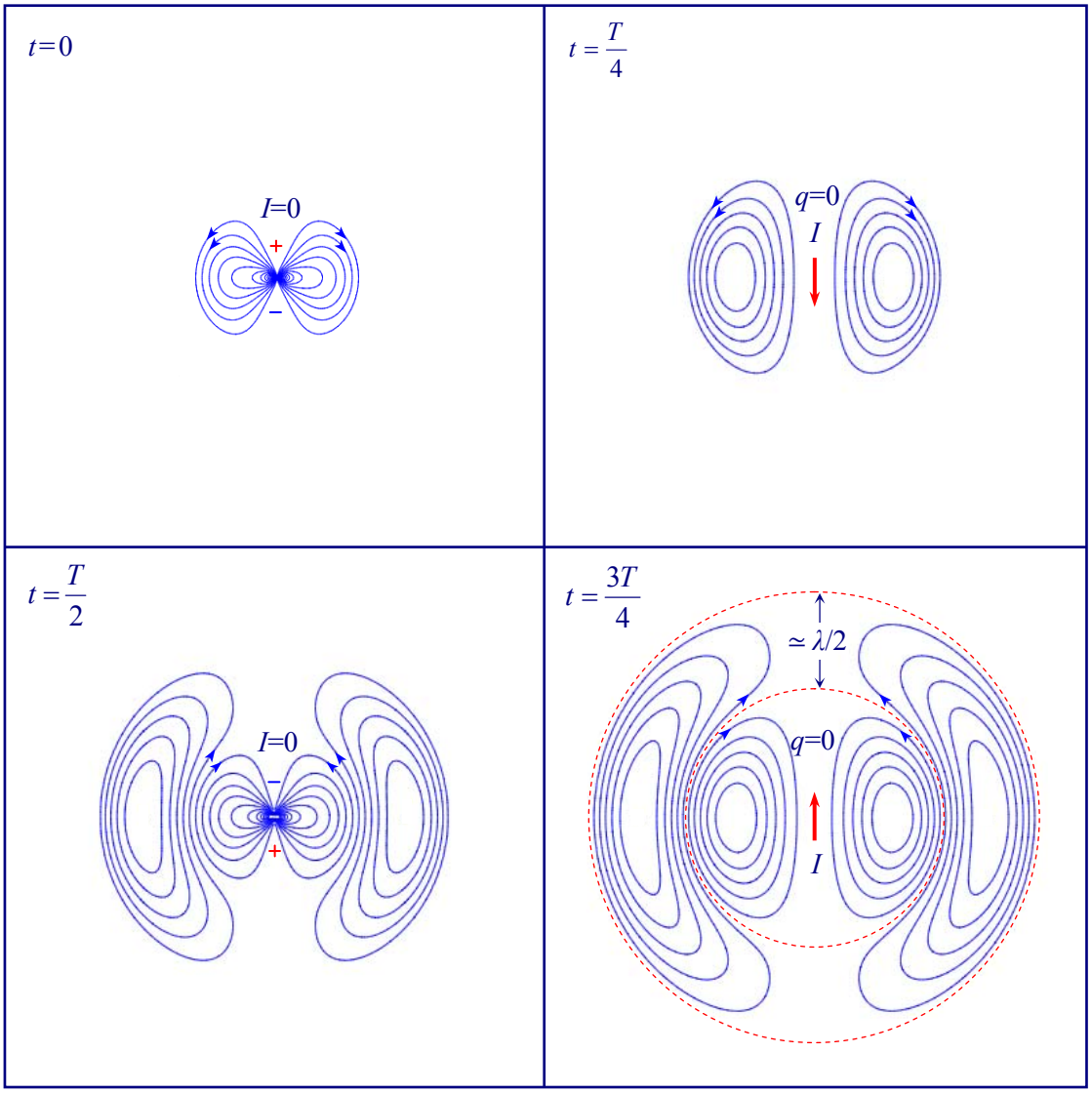


Slika 2.51. Prikaz silnica električnog i magnetskog polja u dvjema ortogonalnim ravninama

se zaključiti da su pojave koje se zbivaju na udaljenostima manjim od približno jedne šestine valne duljine od kratkoga dipola ponajviše reaktivnih obilježja, a one na većim udaljenostima uglavnom imaju obilježja zračenja.

Dinamičko se stanje razlikuje od kvazistacionarnog stanja u tomu što izmjenično električno polje u slobodnome prostoru može inducirati magnetsko polje, a jednako tako izmjenično magnetsko polje može inducirati električno polje, što ima za posljedicu zračenje elektromagnetske energije. Može se primijetiti da zračeće komponente nisu vezane sa svojim izvorom. Tako, primjerice, električno polje vala ne izvire iz naboja koji se nalazi u neposrednoj blizini nego nastaje od promjena magnetskog polja vala, a magnetsko polje vala ne izvire iz stvarnog toka struje u dipolu nego iz promjenljivog električnog polja. To se posebno dobro vidi u rubnom području slike 2.50. Dakako, val ne može nastati ako negdje u prostoru ne postoje naboji i struje. No kad jednom nastane, val će se rasprostirati (širiti) slobodnim prostorom na neograničenu udaljenost i kroz neograničeno vrijeme. Kao primjer mogu se uzeti svjetlosni valovi neke izvangalaktičke zvijezde, koji do nas stižu nakon što su putovali milijune godina.

Slika 2.52 vizualizira kako se u vremenu i prostoru postupno razvija sferni val iz harmonijskih titraja struje i naboja na dipolu. Gušće silnice pokazuju područja s jačim poljem.



Slika 2.52. Prikaz nastajanja zračećeg sfernoga vala podalje od Hertzova dipola. $T=1/f$, $\lambda=c/f$

U dalekoj zoni, $r \gg \lambda/(2\pi)$ (ili $kr \gg 1$), mogu se zanemariti članovi višeg reda u izrazima (2–270) i (2–271) koji se tad svode na:

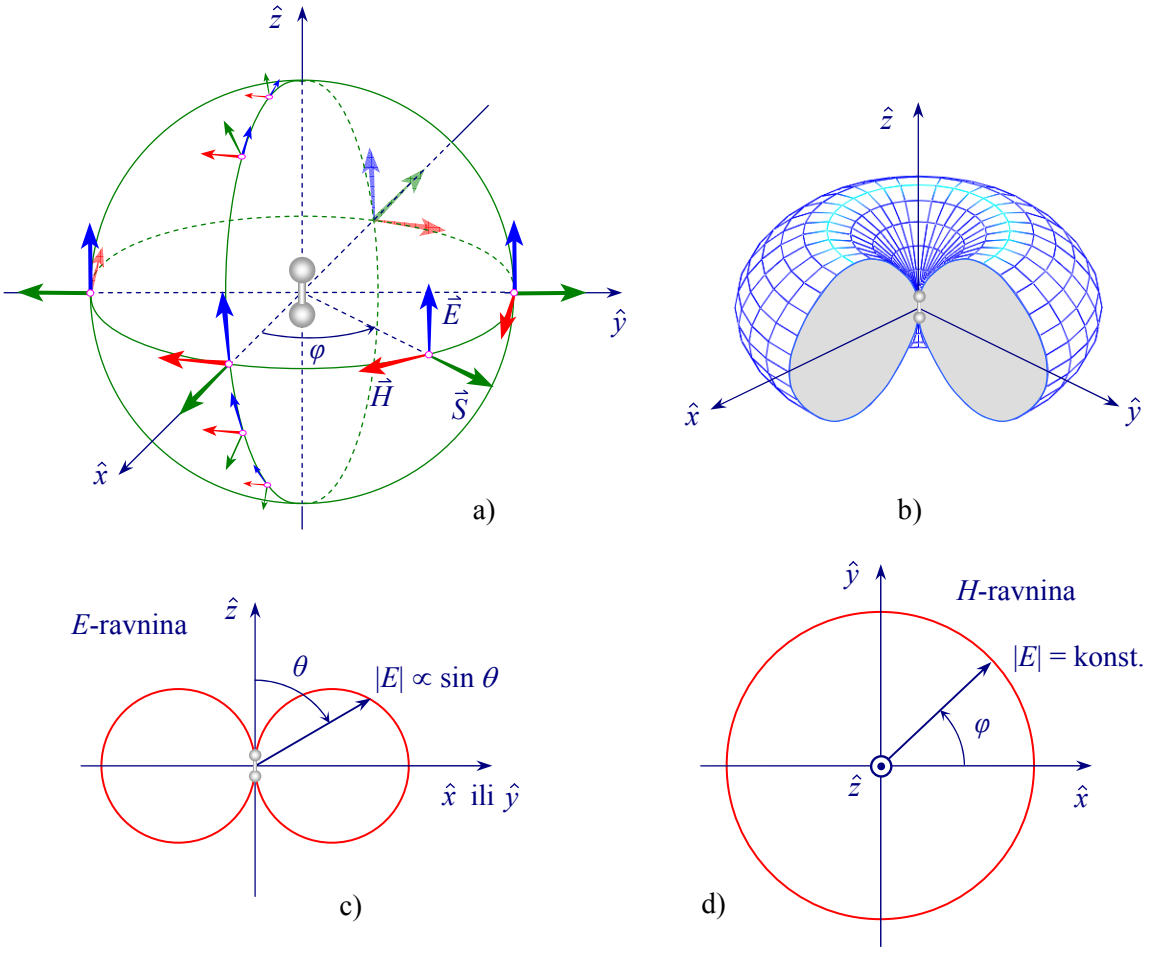
$$\vec{H} = \hat{\varphi}\frac{\mathrm{j}kIl}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\sin\theta\,, \tag{2–281a}$$

$$\vec{E} = \hat{\theta}\frac{\mathrm{j}\eta kIl}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\sin\theta\,. \tag{2–281b}$$

Pritom izraz (2–273) ostaje nepromijenjen, tj.

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{S}\right\} = \hat{r}\frac{\left|\vec{E}\right|^2}{2\eta} = \hat{r}\frac{\eta}{2}\left|\frac{kIl}{4\pi r}\right|^2 \sin^2\theta\,. \tag{2–281c}$$

Valja uočiti da u dalekoj zoni Hertzova dipola električno i magnetsko polje imaju istu prostornu ovisnost i međusobno su ortogonalni. Amplitude polja slabe s faktorom $1/r$ pa gustoća snage opada s faktorom $1/r^2$. Omjer amplituda električnog i magnetskog polja jednak je intrinzičnoj valnoj impedanciji sredstva u kojem se dipol nalazi, $E_\theta/H_\varphi = \eta$. To je baš svojstvo uniformnog ravnog vala u homogenom sredstvu (odjeljak 2.5.2), samo što ravni val ima konstantnu amplitudu u prostoru. No na udaljenostima većim od nekoliko stotina valnih duljina i više, amplituda vala vrlo se malo mijenja s udaljenošću pa se sferni val velikog polumjera ($r \gg \lambda$) u lokalnom području može aproksimirati ravnim valom.



Slika 2.53. a) Vektori $\vec{H}$, $\vec{E}$ i $\vec{S}$ u dalekoj zoni Hertzova dipola; **b)** prostorni dijagram zračenja (trodimenzionalni prikaz); **c)** dijagram zračenja u *E*-ravnini, **d)** dijagram je zračenja u *H*-ravnini izotropan. Dijagrami zračenja istovjetni su za električno i magnetsko polje

Prostorna se razdioba amplituda polja može prikazati grafički. Na slici 2.53a) u trima su dimenzijama prikazani vektori električnog i magnetskog polja te Poyntingov vektor Hertzova dipola smještenog u ishodište koordinatnog sustava. Izrazi (2–281a) i (2–281b) pokazuju da amplitude električnog i magnetskog polja imaju jednaku prostornu ovisnost. Lako je uočiti da je električno polje polarizirano u smjeru $\hat{\theta}$, magnetsko polje u smjeru $\hat{\varphi}$, a Poyntingov vektor, koji označuje vektorski umnožak tih dvaju polja, radijalno je usmjeren iz zamišljene sfere na odabranom polumjeru $r \gg \lambda/(2\pi)$. Približavanjem točke promatranja polovima, moduli svih triju vektora teže nuli, a maksimalni su na ekvatoru. Zbog rotacijske simetrije, amplitude polja na čvrstoj udaljenosti $r \gg \lambda/(2\pi)$ ne ovise o kutu φ, što pokazuje da je zračenje u svim ravninama paralelnim s ravninom xy izotropno. Ovisnost o kutu θ sinusna je, što u svim ravninama u kojima leži os $\hat{z}$ (polarna os) tvori skup kružnica koje dodiruju tu os u ishodištu, a središta im leže u ravnini xy. Tako dobivena prostorna razdioba polja naziva se *dijagram zračenja*, slika 2.53b). No radi preglednosti ta se ovisnost nerijetko prikazuje u dvjema ortogonalnim ravninama, u E-ravnini (bilo koja meridijanska ravnina) u kojoj leži vektor električnog polja i u H-ravnini (ekvatorijalna ravnina) u kojoj leži vektor magnetskog polja. Dijagrami zračenja Hertzova dipola u E- i H-ravnini prikazani su na slici 2.53c) i d).

Hertzov je dipol pogodan model za razmatranje ostalih žičanih antena. Ako je poznata razdioba struja na žici, onda se žičana struktura može rastaviti na mnoštvo Hertzovih dipola. Zatim se doprinosi svih tih dipola vektorski zbrajaju, tj. integriraju, a kao rezultat dobiva se dijagram zračenja takve strukture.

Ukupna zračena snaga P_z dipola može se lako izračunati integriranjem srednje vrijednosti Poyntingova vektora (2–281c) na sferi koja obuhvaća taj dipol, uz $\hat{n} = \hat{r}$ i $\langle S_r \rangle = \hat{r} \langle S \rangle$, tj.

$$P_z = \int_S \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}S = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \langle S_r \rangle r^2 \sin(\theta) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta =$$

$$= \pi\eta \left| \frac{kIl}{4\pi} \right|^2 \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) \, \mathrm{d}\theta = \frac{\eta}{12\pi} |kIl|^2 , \qquad (2–282)$$

gdje je primijenjen integral (H4) iz dodatka H. Valja uočiti da zračena snaga raste s kvadratom frekvencije i s kvadratom dipolnog momenta odnosno struje.

Pri razmatranju antena, na dipol se gleda kao na jednoprolaznu mrežu kojom se ostvaruje elektromagnetska veza između prijenosne linije i slobodnoga prostora (odjeljak 10.1). U tom je slučaju dipol zgodno nadomjestiti *impedancijom zračenja*, čiji je realni dio *otpor zračenja*. U tu se svrhu iz klasične teorije električnih mreža može posuditi relacija $P = \frac{1}{2}|I|^2 R$ koja povezuje disipiranu snagu u otporu s kvadratom efektivne struje $\frac{1}{2}|I|^2$ koja teče tim otporom. Ako se ta relacija izravno usporedi s izrazom (2–282), onda se može lako vidjeti da izraz za otpor zračenja Hertzova dipola poprima oblik

$$R_z = \frac{P_z}{\frac{1}{2}|I|^2} = \frac{\eta}{6\pi} (kl)^2 . \qquad (2–283a)$$

U vakuumu je $\eta = \eta_0 \simeq 120\,\pi$ pa otpor zračenja Hertzova dipola u slobodnome prostoru približno iznosi

$$R_z \simeq 20(kl)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \ \Omega \ . \qquad (2–283b)$$

Drugim riječima, neki otpor $R = R_z$ uz struju I trošit (disipirat) će upravo toliko snage (P_z) koliko kratki dipol otpora zračenja R_z zrači uz pobudnu struju jednakog iznosa (I).

Primjer 2.3. Zračena snaga i otpor zračenja Hertzova dipola

Naći ukupnu zračenu snagu i otpor zračenja Hertzova dipola duljine 1 m, koji je pobuđen izmjeničnom strujom vršne vrijednosti $I=1$ A i frekvencije 1 MHz.

Rješenje:

Valna duljina iznosi

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8 \text{ m/s}}{10^6 \text{ s}^{-1}} = 300 \text{ m}.$$

Budući da je duljina $l=1\text{m} \ll \lambda$ radi se o Hertzovu dipolu pa se može primijeniti izraz (2–282) za izračun ukupne zračene snage dipola,

$$P_z = \frac{\eta}{12\pi}|kIl|^2 = \frac{376,7}{12\pi}\left(\frac{2\pi}{300}\cdot 1\cdot 1\right)^2 = 4,38 \text{ mW}.$$

Toliko mala zračena snaga uz toliko jaku struju posljedica je vrlo malog otpora zračenja. Otpor zračenja može se izravno izračunati iz izraza (2–283) kao

$$R_z = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2\left(\frac{1}{300}\right)^2 = 0,0088\ \Omega\ .$$

Kao što se može vidjeti iz dijagrama zračenja na slici 2.53, Hertzov dipol maksimalno zrači u ekvatorijalnoj ravnini. Veličina koja pokazuje koliko je zračenje neke antene usmjereno u željenome smjeru može se brojčano izraziti relativnom veličinom koja se naziva *usmjerenost* (vidjeti odjeljak 10.1. o antenama). Usmjerenost D definirana je kao omjer gustoće snage koju radijator (antena) odašilje u smjeru najvećeg zračenja i gustoće snage koju bi zračio hipotetski *izotropni radijator*, tj.

$$D = \frac{\hat{r}\cdot\left\langle \vec{S}_{\text{maks}}\right\rangle}{\hat{r}\cdot\left\langle \vec{S}_{\text{i}}\right\rangle} = \frac{\left\langle S_{r,\text{maks}}\right\rangle}{\left\langle S_{\text{i}}\right\rangle}. \tag{2–284}$$

Izotropni radijator zrači jednako u svim smjerovima. Gustoća snage jednaka je količniku snage koja prolazi kroz neku plohu i površine te plohe. Stoga se može zaključiti da je gustoća zračene snage izotropnog radijatora na udaljenosti r jednaka omjeru snage koju zrači i površine sfere polumjera r, tj.

$$\left\langle \vec{S}_{\text{i}}\right\rangle = \hat{r}\frac{P_z}{4\pi r^2}. \tag{2–285}$$

Otuda se vidi da gustoća snage opada s kvadratom udaljenosti od točkastog izvora zračenja što je posve u skladu s fizikalnom intuicijom. To vrijedi za sve izvore zračenja kad se točka promatranja postavi dovoljno daleko od izvora zračenja. Izraz (2–285) ujedno označuje i prosječnu gustoću snage koju zrači bilo koja antena.

Budući da smo već našli izraz za gustoću snage Hertzova dipola, uvrštenjem izraza (2–281c) za $\theta=90°$ i (2–285) u (2–284), za usmjerenost Hertzova dipola dobiva se

$$D = \frac{4\pi r^2\left\langle S_{r,\text{maks}}\right\rangle}{P_z} = \frac{4\pi r^2\frac{\eta}{2}\left|\frac{kIl}{4\pi r}\right|^2}{\frac{\eta}{12\pi}|kIl|^2} = \frac{3}{2}. \tag{2–286}$$

Dakle, Hertzov dipol ima 50 % veću usmjerenost od izotropnoga radijatora.

2.15. Neki teoremi u elektromagnetizmu

Ako su Maxwellove jednadžbe kompletne [10], onda svi osnovni teoremi i načela elektromagnetizma poput Poyntingova teorema, načela dualnosti, teorema o recipročnosti itd. postaju važni korolari Maxwellovih jednadžba, što znači da se mogu izvesti iz Maxwellovih jednadžba bez dodatnih jednadžba ili presumpcija. U ovom ćemo odjeljku izvesti neke važne teoreme (poučke) u elektromagnetizmu [9].

2.15.1. Teorem o jedinstvenosti rješenja

Ako su poznata rješenja Maxwellovih jednadžba i odgovarajući rubni uvjeti, onda teorem o jedinstvenosti rješenja jamči da su ta rješenja jedina moguća rješenja. Drugim riječima, taj teorem kaže da ista pobuda određenog linearnog sustava uvijek uzrokuje isto elektromagnetsko polje u njemu.

U izvodu teorema pretpostavit ćemo da je područje ograničeno plohom S i posve ispunjeno sredstvom konačnih gubitaka. Osim toga, pretpostavit ćemo da su polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ jedinstveno određena strujama izvora koji se nalaze u tom području i tangencijalnim komponentama $\vec{E}$ i $\vec{H}$ na plohi S. Taj se rezultat može dokazati uz pretpostavku da su moguća dva rješenja označena fazorima $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$ i $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$. Ako ta rješenja zadovoljavaju Maxwellove jednadžbe unutar S, onda razlike polja $\vec{E}_2-\vec{E}_1$, $\vec{H}_2-\vec{H}_1$ moraju također zadovoljiti Maxwellove jednadžbe unutar S. Pri tomu se razlike polja moraju nalaziti u području bez izvora što se može lako pokazati njihovim uvrštenjem u rotorske Maxwellove jednadžbe. U funkciji razlike polja, za $\sigma = 0$, Poyntingov teorem daje

$$\oint_S \left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S + \mathrm{j}\omega\int_V\left(\mu\left|\vec{H}_2-\vec{H}_1\right|^2-\varepsilon^*\left|\vec{E}_2-\vec{E}_1\right|^2\right)\mathrm{d}V = 0\,. \quad (2\text{–}287)$$

Prvi integral iščezava, ako polja $\vec{E}$ ili $\vec{H}$ na plohi S zadovoljavaju jedan od sljedećih uvjeta, ili njihovu kombinaciju:

1. $\hat{n}\times\vec{E}=0$, električni zid
2. $\hat{n}\times\vec{H}=0$, magnetski zid
3. $\hat{n}\times\vec{E}=\vec{E}_{\tan}$, fiksno tangencijalno električno polje
4. $\hat{n}\times\vec{H}=\vec{H}_{\tan}$, fiksno tangencijalno magnetsko polje.

Ako se sad pretpostavi da su gubitci u sredstvu vrlo mali, gdje su $\varepsilon=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon''$ i $\mu=\mu'-\mathrm{j}\mu''$ dvije kompleksne veličine, onda će realni dio jednadžbe (2–287) poprimiti oblik

$$\int_V\left(\mu''\left|\vec{H}_2-\vec{H}_1\right|^2+\varepsilon''\left|\vec{E}_2-\vec{E}_1\right|^2\right)\mathrm{d}V = 0\,. \quad (2\text{–}288)$$

Budući da su članovi u podintegralnoj funkciji nenegativni, jednadžba se može zadovoljiti samo ako je $\vec{E}_2=\vec{E}_1$ i $\vec{H}_2=\vec{H}_1$. Time je dokazano da je moguće samo jedno rješenje.

U tom je izvodu pretpostavljeno sredstvo s gubitcima. No sredstvo bez gubitaka može se razmotriti kao specijalni slučaj disipativnog sredstva u kojem gubitci teže nuli u graničnom prijelazu. Jedinstvenost rješenja uključuje da se elektromagnetsko stanje nekog izoliranog prostora može odrediti bez poznavanja uvjeta izvan tog područja. Ako se žele riješiti Maxwellove jednadžbe za to područje, onda je potrebno znati samo gustoću izvora unutar područja i vrijednosti tangencijalnih polja na graničnoj plohi. Taj koncept nalazi brojne primjene na područjima antena, ogibanih i vođenih valova.

2.15.2. Dualnost

Ako jednadžbe koje opisuju dva različita fenomena imaju isti matematički oblik, onda će i njihova rješenja poprimiti isti matematički oblik. To je *načelo dualnosti*. Dvije jednadžbe istog matematičkog oblika nazivaju se *dualnim jednadžbama*. Stoga se veličine koje zauzimaju ista mjesta u dualnim jednadžbama nazivaju *dualnim veličinama*. Pogledajmo sad kako se koncept dualnosti može primijeniti na Maxwellove jednadžbe u općenitom sredstvu opisanom parametrima σ, ε, μ. Ako se, primjerice, Maxwell-Faradayeva jednadžba (2–23) u fazorskom obliku proširi fiktivnom magnetskom strujom gustoće $\vec{M}$, onda se dobiva jednadžba koja je dualna Maxwell-Ampèreovoj jednadžbi pa rotorske jednadžbe postaju simetrične, tj.

$$-\nabla\times\vec{E} = \mathrm{j}\omega\mu\vec{H} + \vec{M}\ ,$$

$$\nabla\times\vec{H} = (\sigma + \mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}) + \vec{J}\ .$$

Premda magnetske struje ne postoje u stvarnosti, vrlo su korisne pri rješavanju mnogih elektromagnetskih problema. Električna struja $\vec{J}$ i magnetska struja $\vec{M}$ označuju struje izvora, dakle to su pobudne veličine. Ako sredstvo ima gubitke, tj. konačnu provodnost, onda se u njemu mogu pojaviti inducirane struje $\sigma\vec{E}$ i stoga ih valja lučiti od struja u izvorima.

Tablica 2.4. Dualne jednadžbe za električne i magnetske izvore

Električni izvori $(\vec{J}\neq 0, \vec{M}=0)$	Magnetski izvori $(\vec{J}=0, \vec{M}\neq 0)$
$\nabla\times\vec{H} = (\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon)\vec{E} + \vec{J}$	$-\nabla\times\vec{E} = \mathrm{j}\omega\mu\vec{H} + \vec{M}$
$-\nabla\times\vec{E} = \mathrm{j}\omega\mu\vec{H}$	$\nabla\times\vec{H} = (\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon)\vec{E}$

Tablica 2.5. Dualne veličine za rješavanje problema u kojima postoje: a) samo električni izvori; b) samo magnetski izvori

Električni izvori $(\vec{J}\neq 0, \vec{M}=0)$	Magnetski izvori $(\vec{J}=0, \vec{M}\neq 0)$
$\vec{E}$	$\vec{H}$
$\vec{H}$	$-\vec{E}$
$\vec{J}$	$\vec{M}$
$\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon$	$\mathrm{j}\omega\mu$
$\mathrm{j}\omega\mu$	$\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon$
k	K
η	$1/\eta$

Sustavnom zamjenom simbola, prva se jednadžba može zamijeniti drugom, i obratno. U praksi se nerijetko susreću problemi u kojima su svi izvori samo električne ili samo magnetske vrste. Tablica 2.4. prikazuje dualne sustave. U lijevome je stupcu sustav opisan električnim izvorima, a u desnome magnetskim izvorima. Način na koji su zamijenjeni simboli u odgovarajućim dualnim jednadžbama prikazan je u tablici 2.5. Prema tom obrascu, u rubnim se uvjetima polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ mogu istodobno zamijeniti, s tim da se magnetsko polje proizvedeno utisnutim električnim strujama mora zamijeniti negativom električnog polja utisnutih magnetskih struja da bi se zadržao ispravan smjer rasprostiranja energije. Otuda se sve

konstante materijala zamjenjuju bez promjene predznaka, a intrinzična se valna impedancija jednostavno zamjenjuje intrinzičnom valnom admitancijom.

2.15.3. Teorem o recipročnosti

Recipročnost je opće načelo koje se može naći u mnogim područjima fizike i inženjerstva. U klasičnoj teoriji električnih mreža, teorem o recipročnosti kaže da se *u svakoj fizikalno ostvarivoj linearnoj mreži, položaji idealnog naponskog izvora i idealnog ampermetra mogu međusobno zamijeniti bez promjene očitanja na ampermetru*. Teorem o recipročnosti jedan je od najkorisnijih teorema za rješavanje zadaća iz elektromagnetizma jer se može uporabiti za određivanje brojnih svojstava praktičnih naprava i sklopova. Budući da vrijedi za harmonijska polja u linearnom i izotropnom sredstvu, u njegovom se izvodu obično polazi od Maxwellovih jednadžba u kompleksnom obliku.

Pretpostavimo najprije da strujni izvor, $\vec{J}^{(a)}$, smješten u točki $\vec{r}^{(a)}$, proizvodi električno polje $\vec{E}^{(a)}$ i magnetsko polje $\vec{H}^{(a)}$, u točki $\vec{r}^{(b)}$ linearnog sredstva, kao što je prikazano na slici 2.54. Taj skup varijabla na zadanoj frekvenciji mora zadovoljiti rotorske Maxwellove jednadžbe:

$$\nabla\times\vec{E}^{(a)} = -\mathrm{j}\omega\vec{B}^{(a)}, \tag{2–289a}$$

$$\nabla\times\vec{H}^{(a)} = \mathrm{j}\omega\vec{D}^{(a)} + \vec{J}^{(a)}. \tag{2–289b}$$

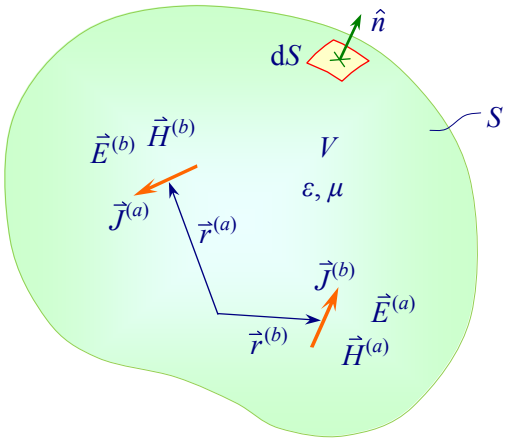
Pretpostavimo sad da je u istom sredstvu prisutan i drugi izvor struje, $\vec{J}^{(b)}$, smješten baš u točki $\vec{r}^{(b)}$ u kojoj se mjere polja u prvom slučaju. Ako taj izvor proizvodi električno polje $\vec{E}^{(b)}$ i magnetsko polje $\vec{H}^{(b)}$ u točki $\vec{r}^{(a)}$ na istoj frekvenciji, onda ta polja moraju zadovoljiti iste Maxwellove jednadžbe:

$$\nabla\times\vec{E}^{(b)} = -\mathrm{j}\omega\vec{B}^{(b)}, \tag{2–290a}$$

$$\nabla\times\vec{H}^{(b)} = \mathrm{j}\omega\vec{D}^{(b)} + \vec{J}^{(b)}. \tag{2–290b}$$

Razmotrimo sad izraz $\nabla\cdot(\vec{E}^{(a)}\times\vec{H}^{(b)} - \vec{E}^{(b)}\times\vec{H}^{(a)})$, koji se primjenom vektorske jednakosti $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B} - (\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{A}$ i jednadžba (2–289) i (2–290) može razviti u oblik

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot(\vec{E}^{(a)}\times\vec{H}^{(b)} - \vec{E}^{(b)}\times\vec{H}^{(a)}) = \\
&= (\nabla\times\vec{E}^{(a)})\cdot\vec{H}^{(b)} - (\nabla\times\vec{H}^{(b)})\cdot\vec{E}^{(a)} - (\nabla\times\vec{E}^{(b)})\cdot\vec{H}^{(a)} + (\nabla\times\vec{H}^{(a)})\cdot\vec{E}^{(b)} = \\
&= \vec{J}^{(a)}\cdot\vec{E}^{(b)} - \vec{J}^{(b)}\cdot\vec{E}^{(a)} + \mathrm{j}\omega(\vec{B}^{(b)}\cdot\vec{H}^{(a)} - \vec{B}^{(a)}\cdot\vec{H}^{(b)}) + \mathrm{j}\omega(\vec{D}^{(b)}\cdot\vec{E}^{(a)} - \vec{D}^{(a)}\cdot\vec{E}^{(b)}).
\end{aligned} \tag{2–291}$$



Slika 2.54. Model Lorentzova teorema o recipročnosti

Ta jednadžba vrijedi za bilo koje linearno sredstvo. Posljednja dva člana nestaju ako je

$$\vec{B}^{(b)} \cdot \vec{H}^{(a)} = \vec{B}^{(a)} \cdot \vec{H}^{(b)}, \tag{2–292a}$$

$$\vec{D}^{(b)} \cdot \vec{E}^{(a)} = \vec{D}^{(a)} \cdot \vec{E}^{(b)}. \tag{2–292b}$$

Kad su ti uvjeti ispunjeni kaže se da je sredstvo *recipročno*, što očito vrijedi za slobodni prostor u kojem je $\vec{B}^{(i)} = \mu_0 \vec{H}^{(i)}$ i $\vec{D}^{(i)} = \varepsilon_0 \vec{E}^{(i)}$ ($i = a, b$). Ako je sredstvo opisano složenijim tenzorskim relacijama građe, $\vec{B}^{(i)} = \overline{\overline{\mu}} \vec{H}^{(i)}$ i $\vec{D}^{(i)} = \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{E}^{(i)}$ ($i = a, b$), onda jednakosti (2–292) poprimaju oblik $\vec{H}^{(a)} \cdot \overline{\overline{\mu}} \cdot \vec{H}^{(b)} = \vec{H}^{(b)} \cdot \overline{\overline{\mu}} \cdot \vec{H}^{(a)}$, odnosno $\vec{E}^{(a)} \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{E}^{(b)} = \vec{E}^{(b)} \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{E}^{(a)}$. Ovdje su $\overline{\overline{\mu}}$ i $\overline{\overline{\varepsilon}}$ tenzori permeabilnosti, odnosno permitivnosti sredstva, kao što je pokazano u odjeljku 2.3.2. Budući da se $\vec{H}^{(b)} \cdot \overline{\overline{\mu}} \cdot \vec{H}^{(a)}$ može napisati i kao $\vec{H}^{(a)} \cdot \overline{\overline{\mu}}^t \cdot \vec{H}^{(b)}$, recipročno sredstvo mora zadovoljiti uvjet $\overline{\overline{\mu}} = \overline{\overline{\mu}}^t$ i $\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\varepsilon}}^t$, gdje eksponent t označuje transpoziciju tenzora. Drugim riječima, matrice tenzora $\overline{\overline{\mu}}$ i $\overline{\overline{\varepsilon}}$ moraju biti simetrične u odnosu na glavnu dijagonalu.

Za recipročno sredstvo jednadžba (2–291) svodi se na jednostavniji oblik

$$\nabla \cdot \left(\vec{E}^{(a)} \times \vec{H}^{(b)} - \vec{E}^{(b)} \times \vec{H}^{(a)} \right) = \vec{J}^{(a)} \cdot \vec{E}^{(b)} - \vec{J}^{(b)} \cdot \vec{E}^{(a)}, \tag{2–293}$$

koji se naziva *Lorentzov teorem o recipročnosti u diferencijalnom obliku*.

Integriranjem jednadžbe (2–293) po volumenu V i primjenom teorema o divergenciji, dobiva se

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \left(\vec{E}^{(a)} \times \vec{H}^{(b)} - \vec{E}^{(b)} \times \vec{H}^{(a)} \right) \mathrm{d}V = \\ = \oint_S \left(\vec{E}^{(a)} \times \vec{H}^{(b)} - \vec{E}^{(b)} \times \vec{H}^{(a)} \right) \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = \\ = \int_V \left(\vec{J}^{(a)} \cdot \vec{E}^{(b)} - \vec{J}^{(b)} \cdot \vec{E}^{(a)} \right) \mathrm{d}V, \end{aligned} \tag{2–294}$$

gdje je $\hat{n}$ jedinični vektor usmjeren prema vani i okomit na plohu S koja omeđuje volumen V (slika 2.54). Izraz (2–294) upućuje na opći oblik teorema o recipročnosti, ali u praksi se često nalaze posebni slučajevi koji vode pojednostavljenju. Razmotrimo sad tri takva slučaja.

Zatvorena ploha ne obuhvaća izvore. U tom je slučaju $\vec{J}^{(a)} = \vec{J}^{(b)} = 0$ pa je desna strana izraza (2–294) jednaka nuli iz čega izravno slijedi

$$\oint_S \vec{E}^{(a)} \times \vec{H}^{(b)} \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = \oint_S \vec{E}^{(b)} \times \vec{H}^{(a)} \cdot \hat{n} \mathrm{d}S. \tag{2–295}$$

Savršeno vodljiva zatvorena ploha. Primjerice, S može biti unutarnja površina zatvorene, savršeno vodljive šupljine. Na površini savršena vodiča $\hat{n} \times \vec{E}^{(a)} = 0$ pa plošni integral u jednadžbi (2–294) iščezava jer je $\vec{E}^{(a)} \times \vec{H}^{(b)} \cdot \hat{n} = (\hat{n} \times \vec{E}^{(a)}) \cdot \vec{H}^{(b)}$. Slično se dobiva i za električno polje $\vec{E}^{(b)}$ pa je konačni rezultat

$$\int_V \vec{J}^{(a)} \cdot \vec{E}^{(b)} \mathrm{d}V = \int_V \vec{J}^{(b)} \cdot \vec{E}^{(a)} \mathrm{d}V \tag{2–296}$$

analogan teoremu o recipročnosti u teoriji električnih mreža. Ako su $\vec{J}^{(a)}$ i $\vec{J}^{(b)}$ infinitezimalni strujni elementi, onda je

$$\vec{J}^{(b)}(\vec{r}^{(b)}) \cdot \vec{E}^{(a)}(\vec{r}^{(b)}) = \vec{J}^{(a)}(\vec{r}^{(a)}) \cdot \vec{E}^{(b)}(\vec{r}^{(a)}), \tag{2–297}$$

gdje su $\vec{r}^{(a)}$ i $\vec{r}^{(b)}$ koordinate točaka u prostoru, u kojima se promatraju učinci (slika 2.54). Drugim riječima, taj rezultat kaže da se odziv sustava $\vec{E}^{(a)}$ ili $\vec{E}^{(b)}$ neće promijeniti ako izvor i točka promatranja međusobno zamijene mjesta. To jest, polje $\vec{E}^{(b)}$ koje uzrokuje izvor $\vec{J}^{(b)}$ na mjestu $\vec{J}^{(a)}$ ima istu vrijednost kao polje $\vec{E}^{(a)}$ koje uzrokuje izvor $\vec{J}^{(a)}$ na mjestu $\vec{J}^{(b)}$.

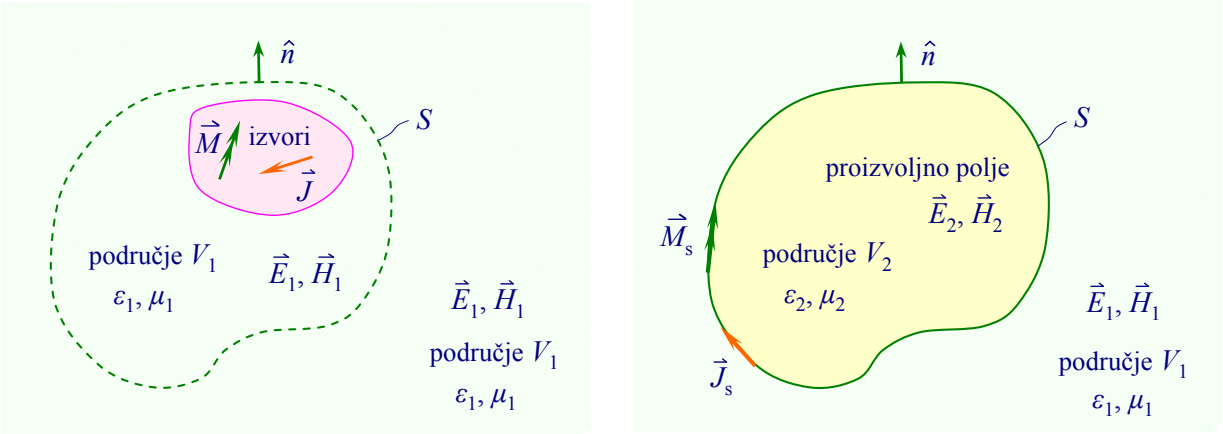
Zatvorena ploha S označuje sferu u beskonačnosti. U tom su slučaju polja, koja izračuvamo na plohi S, vrlo daleko od izvora pa se mogu lokalno promatrati kao ravni valovi. Primjena izraza $\vec{H} = \hat{n} \times \vec{E}/\eta$ za intrinzičnu impedanciju na jednadžbu (2–291) daje

$$\begin{aligned}\left(\vec{E}^{(a)} \times \vec{H}^{(b)} - \vec{E}^{(b)} \times \vec{H}^{(a)}\right) \cdot \hat{n} = \\ = (\hat{n} \times \vec{E}^{(a)}) \cdot \vec{H}^{(b)} - (\hat{n} \times \vec{E}^{(b)}) \cdot \vec{H}^{(a)} = \\ = \frac{1}{\eta} \vec{H}^{(a)} \cdot \vec{H}^{(b)} - \frac{1}{\eta} \vec{H}^{(b)} \cdot \vec{H}^{(a)} = 0\end{aligned}$$

pa se opet dobiva rezultat (2–296). Taj se rezultat može također dobiti ako se na zatvorenu plohu S primijeni rubni uvjet površinske impedancije.

2.15.4. Načelo ekvivalencije

Načelo ekvivalencije uveo je Schelkunoff [21], [9] kao strožu formulaciju Huygensova načela (odjeljak 2.15.6). Načelo ekvivalencije temelji se na teoremu o jedinstvenosti koji kaže da je polje u području s gubitcima jedinstveno zadano izvorima unutar područja uz dodatne tangencijalne komponente električnog polja na granici područja, ili dodatne komponente magnetskog polja, ili njihove kombinacije na dijelovima granice. Polje u sredstvu bez gubitaka može se shvatiti preko graničnog prijelaza odgovarajućeg polja u sredstvu s gubitcima, kad gubitci teže nuli. Drugim riječima, tek kad su posve poznata tangencijalna polja (električno i magnetsko) na zatvorenoj plohi (granici), tad se mogu odrediti polja u području bez izvora. Uzmimo kao primjer zrcalni strujni element na slici 2.55b) u sljedećem odjeljku, koji u području desno od ravnine $z = 0$ stvara jednako polje kao izvor na slici 2.55a). Za izvore koji stvaraju jednaka polja unutar jednog te istog područja kaže se da su *ekvivalentni u tom području*. Stoga se može uvesti *načelo ekvivalencije polja*, koje se odnosi na zamjenu stvarnih izvora elektromagnetskog polja skupom pogodnijih površinskih struja.



Slika 2.55. Načelo ekvivalencije: **a)** izvorni problem; **b)** ekvivalentni problem za područje V_1

Jednostavna primjena toga načela dana je u sljedećem odjeljku 2.15.5. Neka je S zatvorena ploha koja dijeli prostor na dva područja, V_1 i V_2, i omeđuje sve postojeće izvore (npr. antene) koji zrače elektromagnetsko polje, $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$, kao što je prikazano na slici 2.55a). Ako se sad ugase svi izvori u području V_2 i to se područje ispuni proizvoljnim sredstvom ε_2, μ_2, onda se može pretpostaviti da je time u području V_2 uspostavljeno novo elektromagnetsko polje $\vec{E}_2, \vec{H}_2$, čiji izvori (smješteni izvan područja V_2) moraju zadovoljiti Maxwellove jednadžbe, slika 2.55b). Da bi polje preko cjelokupnog područja (V_1 i V_2) bilo valjano rješenje Maxwellovih jednadžba, na graničnu se plohu S moraju postaviti nadomjesni ili *ekvivalentni izvori.* Time će se omogućiti ispravno združivanje rješenja obaju područja. Za tu će svrhu općenito biti potrebni izvori i električnih i magnetskih plošnih struja, koji moraju zadovoljiti rubne uvjete:

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2), \tag{2–298a}$$

$$\vec{M}_s = (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \hat{n}, \tag{2–298b}$$

gdje je okomica $\hat{n}$ na S usmjerena u područje V_1 (odjeljak 2.9.1).

Sad se fiktivne plošne struje $\vec{J}_s$ i $\vec{M}_s$ mogu shvatiti kao nadomjesni izvori koji zračenjem stvaraju polje $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$ u području V_1 i polje $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$ u području V_2. To je bit načela ekvivalencije. No valja zapamtiti da su ovdje izvorni izvori polja uklonjeni iz područja V_2. Na jednak su način izvori polja $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$ uklonjeni iz područja V_1. Valja uočiti da se nova polja $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$ i parametri sredstva ε_2, μ_2 mogu postaviti neovisno o $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$ i ε_1, μ_1.

Najčešće se nadomjesni izvori odabiru na jedan od ovih triju načina:

1. $\vec{E}_2$ i $\vec{H}_2$ postave se na nulu, ali se zadrži isto sredstvo, tj. $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$, $\mu_1 \equiv \mu_2$. Tad jednadžbe (2–298) poprimaju oblik:

   $$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_1, \tag{2–299a}$$

   $$\vec{M}_s = \vec{E}_1 \times \hat{n}, \tag{2–299b}$$

   što se može shvatiti kao da je elektromagnetsko polje u V_1 nastalo od električnih i magnetskih plošnih struja definiranih jednadžbama (2–299) koje se nalaze negdje u neograničenom homogenom sredstvu.

2. $\vec{E}_2$ i $\vec{H}_2$ postave se na nulu i pretpostavi da sredstvo unutar V_2 ima svojstva savršenog električnog vodiča. U tim okolnostima ekvivalentna električna plošna struja ne zrači jer je »kratko spojena« savršeno vodljivim sredstvom u V_2. Za polje u V_1 može se misliti da je nastalo samo od ekvivalentnih magnetskih struja $\vec{M}_s = \vec{E}_1 \times \hat{n}$, ali uz uvjet da se u V_2 nalazi idealno električki vodljivo sredstvo.

3. $\vec{E}_2$ i $\vec{H}_2$ postave se na nulu, a za sredstvo unutar V_2 pretpostavi se da ima svojstva savršenog magnetskog vodiča. U tim okolnostima ekvivalentna magnetska plošna struja ne zrači pa se za polje u V_1 može misliti da je nastalo samo od ekvivalentnih električnih struja $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_1$, ali uz uvjet da se u V_2 nalazi idealno magnetski vodljivo sredstvo.

Metode 2 i 3 posebno su prikladne za opisivanje zračenja otvorskih antena i izračunavanje nadomjesnih elemenata otvora u tankom metalnom zaslonu u valovodu ili u stijenki valovoda (odjeljak 5.10.2).

2.15.5. Teorija zrcalnoga odslikavanja

U mnoštvu zadaća strujni se izvor nalazi u blizini ravnih vodljivih ploha. Teorija zrcalnoga odslikavanja dopušta da se takve plohe odstrane uz dodavanje prividne (zrcalne) slike izvora, koja se nalazi s druge strane vodljive ravnine.

Osvrnimo se najprije na slučaj električne struje plošne gustoće $\vec{J}_s = \hat{x}J_{s0}$ paralelne savršeno vodljivoj ravnini, kao što je prikazano na slici 2.56a). Izvor plošne struje proteže se u beskonačnost u smjeru $\hat{x}$ i $\hat{y}$ i proizvodi ravni val koji se udaljava od strujne plohe u pozitivnome i negativnome smjeru osi $\hat{z}$. Val koji putuje u negativnome smjeru osi $\hat{z}$ reflektira se od vodljive ravnine na koordinati $z=0$ i zatim dalje putuje u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$. Stoga će slijeva od strujne plohe ($0<z<d$), tj. u području između vodljive i strujne plohe, nastati stojni val čija se polja mogu izraziti kao:

$$E_x^{(\mathrm{L})} = A\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\right), \qquad \text{za } 0<z<d, \tag{2–300a}$$

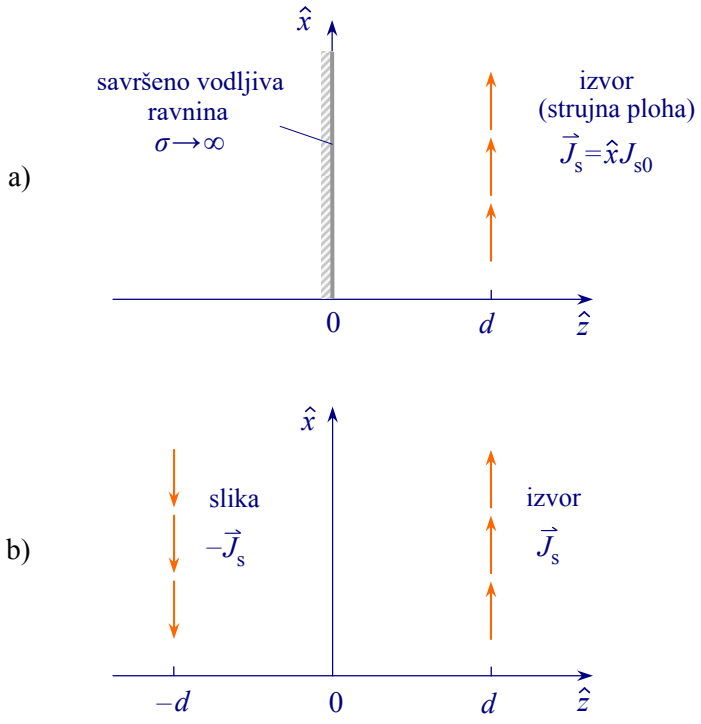
$$H_y^{(\mathrm{L})} = -\frac{A}{\eta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\right), \qquad \text{za } 0<z<d, \tag{2–300b}$$

gdje je η intrinzična impedancija sredstva u kojem se nalazi strujna ploha. Valja uočiti da su polja stojnoga vala tako sazdana da zadovoljavaju rubni uvjet $E_x = 0$, na koordinati vodljive ravnine ($z = 0$). Osim toga, na strujnoj plohi ($z = d$) električno je polje neprekinuto, a magnetsko je polje prekinuto zbog prisutnosti plošne struje.

No, zdesna ($z>d$), strujna ploha stvara putujući val koji putuje u smjeru $+\hat{z}$, tj.

$$E_x^{(\mathrm{D})} = B\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}, \qquad \text{za } z>d, \tag{2–301a}$$

$$H_y^{(\mathrm{D})} = \frac{B}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}, \qquad \text{za } z>d. \tag{2–301b}$$



Slika 2.56. a) Beskonačna je strujna ploha na koordinati $z=d$ ispred beskonačne savršeno vodljive ravnine na koordinati $z=0$ i s njom je paralelna (izvorni problem). **b)** Vodljiva ravnina nadomještena zrcalnom slikom strujne plohe na koordinati $z=-d$ (ekvivalentni problem)

Budući da je plošna magnetska struja jednaka nuli ($\vec{M}_\mathrm{s} = 0$), uvrštenjem izraza (2–300a) i (2–301a) u rubni uvjet (2–160) na $z=d$, tj. $\vec{E}_x^{(\mathrm{D})} = \vec{E}_x^{(\mathrm{L})}\big|_{z=d}$, izlazi

$$\mathrm{j}2A\sin kd = B\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd}. \tag{2–302}$$

S druge strane, uvrštenjem izraza (2–300b) i (2–301b) u rubni uvjet (2–161) na $z=d$, tj. $\hat{z}\times\hat{y}(H_y^{(\mathrm{D})} - H_y^{(\mathrm{L})}) = \vec{J}_\mathrm{s}\big|_{z=d}$, dobiva se

$$J_{\mathrm{s}0} = -\frac{B}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd} - \frac{2A}{\eta}\cos kd, \tag{2–303}$$

Iz izraza (2–302) i (2–303) mogu se izlučiti konstante A i B:

$$A = -\frac{1}{2}\eta J_{\mathrm{s}0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd}, \tag{2–304a}$$

$$B = -\mathrm{j}\eta J_{\mathrm{s}0}\sin kd. \tag{2–304b}$$

Sad se mogu odrediti ukupna polja:

$$\vec{E}_x^{(\mathrm{L})} = -\mathrm{j}\eta J_{\mathrm{s}0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd}\sin kz, \qquad \text{za } 0<z<d, \tag{2–305a}$$

$$\vec{H}_y^{(\mathrm{L})} = J_{\mathrm{s}0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd}\cos kz, \qquad \text{za } 0<z<d, \tag{2–305b}$$

$$\vec{E}_x^{(\mathrm{D})} = -\mathrm{j}\eta J_{\mathrm{s}0}\sin kd\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}, \qquad \text{za } z>d, \tag{2–305c}$$

$$\vec{H}_x^{(\mathrm{D})} = \mathrm{j}J_{\mathrm{s}0}\sin kd\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}, \qquad \text{za } z>d. \tag{2–305d}$$

Isti se problem može riješiti i primjenom teorije zrcalnih slika. Kao što je prikazano na slici 2.56b), vodljiva se ravnina može ukloniti, tako da se na koordinati $z=-d$ postavi zrcalna slika izvora plošne struje ($-\vec{J}_\mathrm{s} = -\hat{x}J_{\mathrm{s}0}$). Teorija zrcalnih slika daje fizikalno ispravan rezultat samo u području s one strane vodljive plohe na kojoj se nalazi stvarna strujna ploha (izvor struje). Dakle, zanimaju nas samo polja u području $z>0$, koja su stvorila te dvije strujne plohe. Ta se polja mogu dobiti superpozicijom pojedinačnih polja izvorne plošne strujne i one zrcalne. Polja koja stvara izvor plošne struje na koordinati $z=d$ bilježe se kao

$$2E_x^{\text{izvor}} = \begin{cases} -\eta J_{\mathrm{s}0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(z-d)} & \text{za } z>d, \\ -\eta J_{\mathrm{s}0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(z-d)} & \text{za } z<d, \end{cases} \tag{2–306a}$$

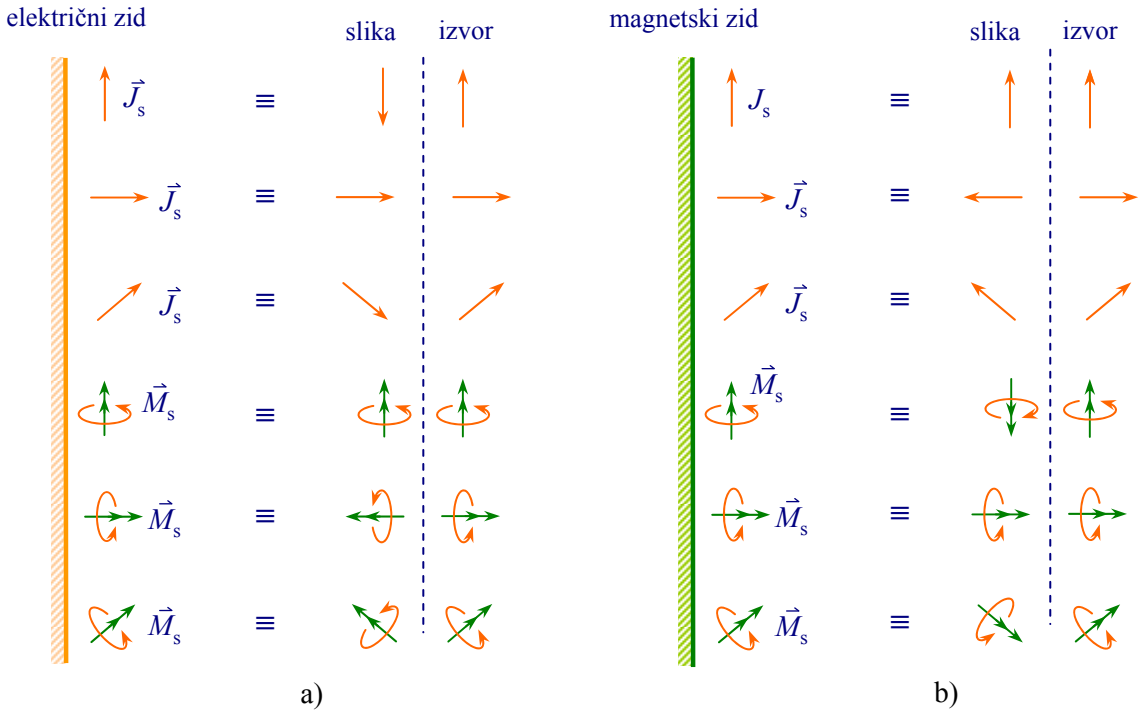
$$2H_y^{\text{izvor}} = \begin{cases} -J_{\mathrm{s}0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(z-d)} & \text{za } z>d, \\ J_{\mathrm{s}0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(z-d)} & \text{za } z<d. \end{cases} \tag{2–306b}$$

Polja koja stvara slika plošne struje na koordinati $z=-d$ bilježe se kao

$$2E_x^{\text{izvor}} = \begin{cases} \eta J_{\mathrm{s}0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(z-d)} & \text{za } z>-d, \\ \eta J_{\mathrm{s}0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(z-d)} & \text{za } z<-d, \end{cases} \tag{2–307a}$$

$$2H_y^{\text{izvor}} = \begin{cases} J_{\mathrm{s}0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(z-d)} & \text{za } z>-d, \\ -J_{\mathrm{s}0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(z-d)} & \text{za } z<-d. \end{cases} \tag{2–307b}$$

Lako se može pokazati da zbrojevi $E_x^{\text{izvor}} + E_x^{\text{slika}}$ i $H_y^{\text{izvor}} + H_y^{\text{slika}}$ daju identičan rezultat onom u izrazima (2–305a) i (2–305b) u području $0<z<d$, odnosno izrazima (2–305c) i (2–305d) u području $z>d$. Na slici 2.57 sažeto je prikazano kako se zrcale karakteristični elementarni izvori struje (električni i magnetski dipoli) na: a) električki savršeno vodljivoj ravnini koja se naziva *magnetski zid* i b) magnetski savršeno vodljivoj ravnini. Metali velike



Slika 2.57. Sažet prikaz zrcalnoga odslikavanja: **a)** na električki savršeno vodljivoj ravnini (električni zid) i **b)** na magnetski savršeno vodljivoj ravnini (magnetski zid)

provodnosti u mikrovalnome se području bar približno ponašaju kao idealni vodič. Premda u prirodi nije pronađen materijal koji se ponaša poput savršenog magnetskog vodiča, uvedena je aproksimacija prikladna s matematičkog aspekta jer se primjenom načela dualnosti neke elektromagnetske zadaće mogu riješiti znatno jednostavnije.

2.15.6. Huygensovo načelo i fizikalna optika

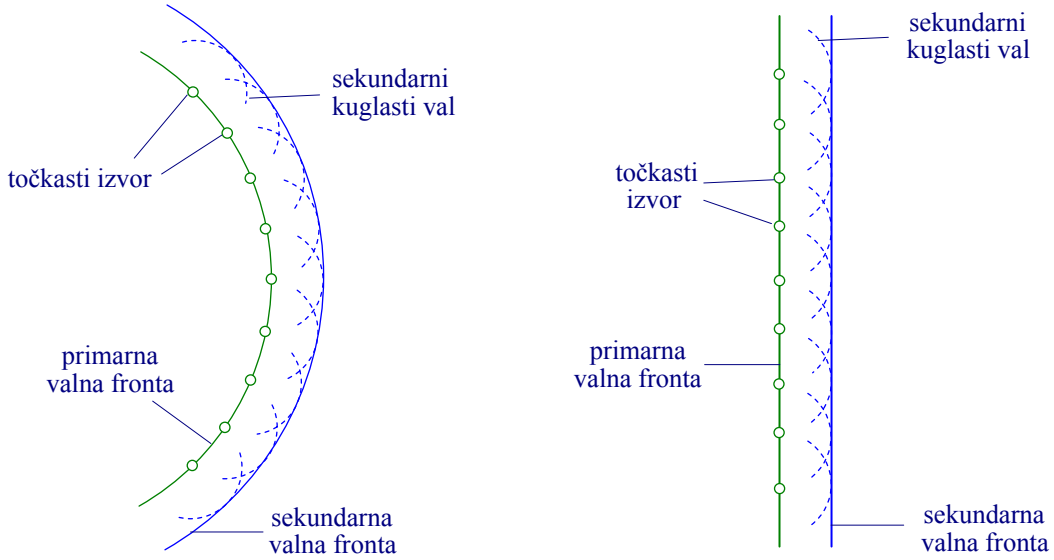
Pri razmatranju problema kod kojih su izvori struja i objekti znatno veći od valne duljine korisno je rabiti Huygensovo načelo koje kaže: *svaka točka primarne valne fronte može biti shvaćena kao izvor sekundarnog sfernoga vala, a sekundarna valna fronta može se složiti kao ovojnica tih sekundarnih sfernih valova,* kako je prikazano na slici 2.58. To temeljno načelo fizikalne optike može se uporabiti za objašnjenje ogiba radiovalova oko prepreka. Zraka koja se ogiba tumači se kao zraka koja se ne može objasniti ni refleksijom ni lomom.

Kao primjer, pogledajmo okomiti upad ravnoga vala na savršeno vodljivu poluravninu, kao što je prikazano na slici 2.59a). Primjenom Huygensova načela jakost električnog polja u točki promatranja T može se izračunati iz integrala

$$E = \int\limits_{\text{na osi } \hat{x}} \mathrm{d}E\,, \tag{2–308}$$

gdje je dE diferencijalno električno polje u točki T koje stvara točkasti izvor na udaljenosti x od ishodišta O. Na taj se način problem prikazan na slici 2.59a) može nadomjestiti ekvivalentnim problemom na slici 2.59b), gdje je »otvor« (komplementarna poluravnina savršeno vodljivoj poluravnini) koji se proteže od $x = a$ do $x = +\infty$ nadomješten beskonačnim brojem sekundarnih točkastih izvora [18]. Stoga imamo

$$\mathrm{d}E = \frac{E_0}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(r+\Delta r)}\mathrm{d}x\,, \tag{2–309}$$



Slika 2.58. Prikaz Huygensova načela fizikalne optike (odnos između točke i vala)

tako da je

$$E = \frac{E_0}{r} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \int_a^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Delta r} \mathrm{d}x \,. \tag{2–310}$$

Ako je $\Delta r \ll r$, onda slijedi

$$\Delta r = \frac{x^2}{2r} \,. \tag{2–311}$$

Supstitucijom $t^2 = 2/r\lambda$ i $u = tx$, izraz (2–310) poprima oblik

$$E = \frac{E_0}{tr} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \int_{ta}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi u^2}{2}} \mathrm{d}u \,, \tag{2–312}$$

što se može napisati kao

$$E = \frac{E_0}{tr} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi u^2}{2}} \mathrm{d}u - \int_0^{ta} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi u^2}{2}} \mathrm{d}u \right). \tag{2–313}$$

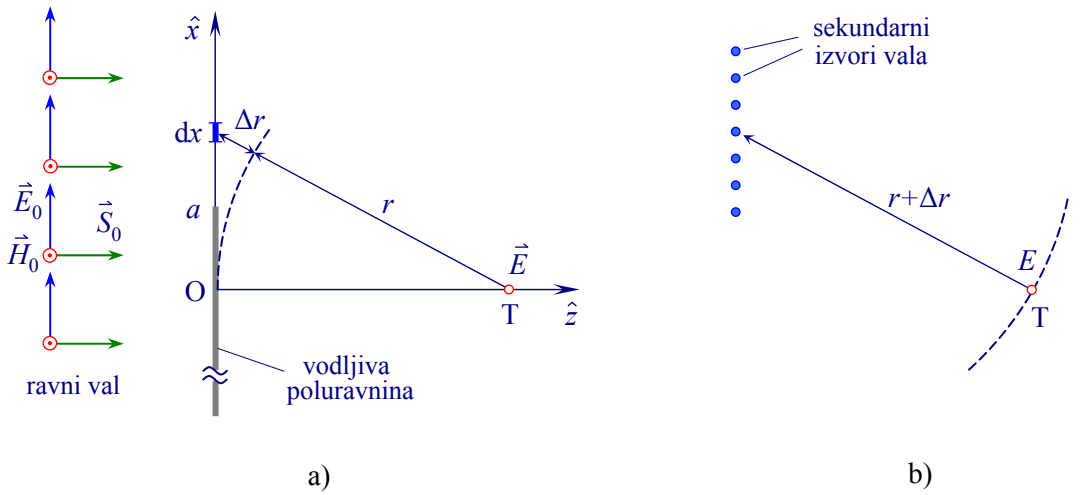
Integrali u izrazu (2–313) u obliku su Fresnelovih integrala [20] pa se mogu napisati kao

$$E = \frac{E_0}{tr} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \left\{ \frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{1}{2} - \left[C(ta) - \mathrm{j}S(ta) \right] \right\}, \tag{2–314}$$

gdje je

$$C(ta) = \int_0^{ta} \cos\left(\frac{\pi u^2}{2} \right) \mathrm{d}u \,, \tag{2–315}$$

$$S(ta) = \int_0^{ta} \sin\left(\frac{\pi u^2}{2} \right) \mathrm{d}u \,. \tag{2–316}$$



Slika 2.59. Ogib ravnoga vala na savršeno vodljivoj poluravnini

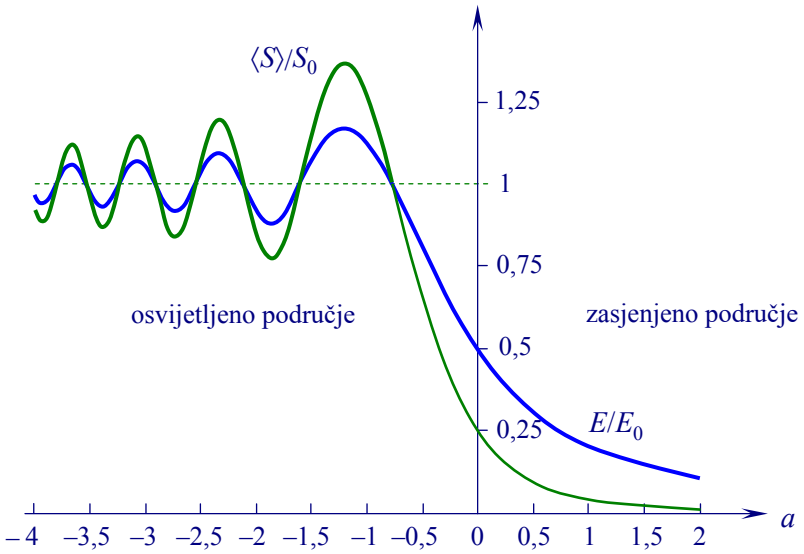
Tad je gustoća snage u točki T jednaka

$$\langle S \rangle = \frac{EE^*}{2\eta_0} = \frac{1}{2} S_0 \left\{ \left[\frac{1}{2} - C(ta) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S(ta) \right]^2 \right\}, \tag{2–317}$$

gdje uz realnu amplitudnu konstantu E_0 izlazi

$$S_0 = \frac{E_0^2 \lambda}{2\eta_0 r}.$$

Rezultat (2–317) prikazan je na slici 2.60 kao krivulja ogiba. Kad a teži u $(-\infty)$ gustoća snage teži vrijednosti S_0, što odgovara slučaju bez prepreke. Za $a=0$, izlazi $\langle S \rangle = S_0/4$, no kad a teži u $+\infty$, tad $\langle S \rangle \to 0$, što odgovara zasjenjenom poluprostoru. Pri tomu gustoća snage ne opada skokovito na prijelazu iz osvijetljenog dijela u zasjenjeni ($a=0$).



Slika 2.60. Razdiobe normirane gustoće snage i električnog polja vala koji se ogiba na vodljivoj poluravnini

2.15.7. Nadomjesne električne i magnetske struje i elementarni magnetski dipol

Proizvoljna razdioba električne struje može se nadomjestiti razdiobom ekvivalentne magnetske struje koja proizvodi posve jednaka $\vec{E}$- i $\vec{H}$-polja bilogdje u prostoru i obratno. Primjenom Maxwellovih jednadžba u diferencijalnom obliku mogu se izvesti relacije koje međusobno povezuju nadomjesne električne i magnetske struje [15], [26]. Kao rezultat dobiva se razdioba nadomjesne magnetske $\vec{M}_\mathrm{J}$ i električne struje $\vec{J}_\mathrm{M}$ koje proizvode posve jednaka polja kao poznate struje, $\vec{J}$ odnosno $\vec{M}$:

$$\vec{M}_\mathrm{J} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla_\mathrm{t}\times\vec{J}\,, \qquad (2\text{–}318\mathrm{a}) \qquad\qquad \vec{J}_\mathrm{M} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\nabla_\mathrm{t}\times\vec{M}\,, \qquad (2\text{–}318\mathrm{b})$$

gdje operator rotora djeluje samo na koordinate u ravninama koje su poprečne na struje $\vec{J}$ i $\vec{M}$.

Iz izraza (2–318a) valja uočiti da je nadomjesna električna struja razmjerna rotoru magnetske struje i da prethodi u fazi 90°, tj. π/2 radijana. Jednako tako, iz izraza (2–318b) vidi se da je nadomjesna magnetska struja razmjerna rotoru magnetske struje i da kasni u fazi 90°, tj. π/2 radijana. Osim toga, te dvije struje moraju i u prostoru biti međusobno ortogonalne da bi proizvele polja jednake polarizacije.

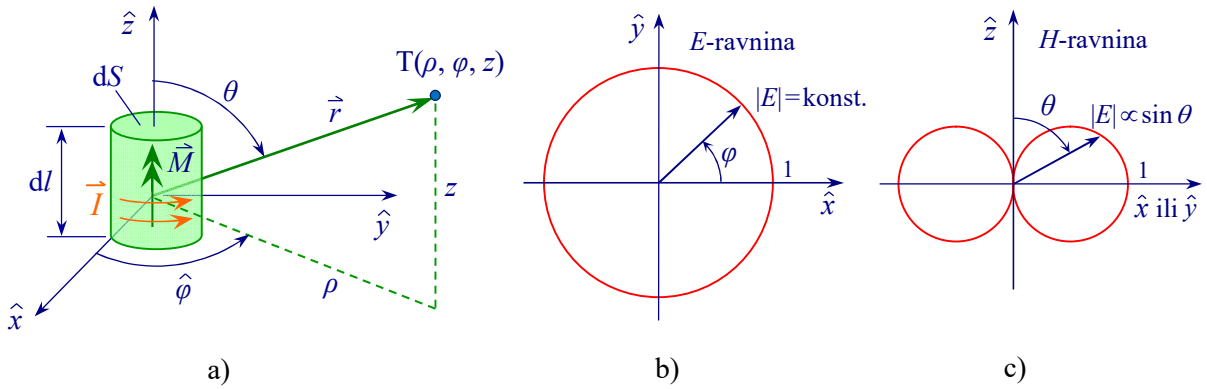
Primjenom načela dualnosti (odjeljak 2.15.2) i izraza (2–270) i (2–271) za polja Hertzova dipola iz odjeljka 2.14.2, mogu se naći dualni izrazi za polja elementarnog magnetskog dipola u cilindričnome koordinatnom sustavu. Pritom izraze za električno polje Hertzova dipola valja zamijeniti izrazima za magnetsko polje magnetskog dipola i obratno. Jednako tako, potrebno je međusobno zamijeniti permitivnost i permeabilnost materijala. Kao rezultat dobiva se:

$$\vec{E} = \hat{\varphi}\pi\eta\frac{I\mathrm{d}S}{r\lambda^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\left(1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)\sin\theta\,, \qquad (2\text{–}319)$$

$$\vec{H} = -\pi\frac{I}{r}\frac{\mathrm{d}S}{\lambda^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}\left\{\hat{r}2\cos\theta\left[\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\left(\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)^2\right]+\hat{\theta}\sin\theta\left[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\left(\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)^2\right]\right\}, \qquad (2\text{–}320)$$

gdje je primijenjena ekvivalencija između magnetske struje $\vec{M}$ koja teče valjkom u smjeru $\hat{z}$ i električne struje $\vec{I}$ koja teče (rotira) u zamci, tj. plaštem tog valjka, u smjeru $\hat{\varphi}$. Veza između struja glasi $M\mathrm{d}l = \eta I\mathrm{d}S = \mathrm{j}2\pi\eta I\mathrm{d}S/\lambda$. Ostali parametri elementarnoga magnetskog dipola poput dijagram zračenja i usmjerenosti (D = 1.5) jednaki su onima kod Hertzova dipola, osim otpora zračenja koji iznosi $R_\mathrm{z} = {}^3\!/_8\,\pi^3\eta(\mathrm{d}S/\lambda^2)$ i jako ovisi o frekvenciji i površini valjka na slici 2.61.

Složе li se elementarni električni i magnetski dipol ortogonalno u zajednički sustav, dobiva se *elementarna površina* zračenja, tj. *Huygensov izvor*. Otuda Hertzov i magnetski dipol te nadomjesne struje imaju vrlo važnu ulogu u analizi površinskih antena (odjeljak 10.1.7).



Slika 2.61. a) Elementarni magnetski dipol i normirani dijagrami zračenja: **b)** u E- i **c)** H-ravnini

Literatura

[1] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Claredon Press, Oxford, 1873.

[2] H. Hertz, *Electric Waves*, McMillan, London, 1893, Dover Publications, New York, 1962.

[3] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

[4] R. B. Adler, L. J. Chu, R. M. Fano, *Electromagnetic Energy Transmission and Radiation*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

[5] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Waves*, McGraw-Hill, New York, 1961.

[6] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

[7] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 2nd ed., Pergamon, Oxford, 1994.

[8] S. Ramo, J. R. Whinnery, T. van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd ed. John Wiley & Sons, New York, 1994.

[9] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[10] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 1, 2, Addison-Wesley, Reading, 1964.

[11] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, New York, 2012.

[12] D. H. Staelin, A. W. Morgenthaler, J. A. Kong, *Electromagnetic Waves*, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.

[13] E. C. Jordan, K. G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.

[14] P. Lorrain, D. R. Corson, F. Lorrain, *Electromagnetic Fields and Waves*, 3rd ed., W.H. Freeman & Company, December 1987

[15] E. Zentner, *Antene i radiosustavi*, Graphis, Zagreb, 2001.

[16] H. H. Skilling, *Fundamentals of Electric Waves*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York 1967.

[17] Z. Haznadar, Ž. Štih, *Elektromagnetizam*, 2. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[18] J. D. Kraus, K. R. Carver, *Electromagnetics*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1973.

[19] E. J. Rothwell, M. J. Cloud, *Electromagnetics*, CRC Press, 2001.

[20] M. Abramowitz, I. A. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover, 1965.

[21] S. A. Schelkunoff, "Some equivalence theorems of electromagnetics and their applications to radiation problems", Bell Syst. Tech. J., Vol. 15, 1936, str. 92-112.

[22] Z. Smrkić, *Mikrovalna elektronika*, Školska knjiga, Zagreb 1986.

[23] F. Ulaby, *Applied Electromagnetics*, Prentice-Hall, New Jersey, 2001.

[24] B. Popović, *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1980.

[25] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, New York and London, 1960.

[26] L. B. Felsen, N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves,* Prentice-Hall, New Jersey, 1973.

3. Teorija prijenosnih linija

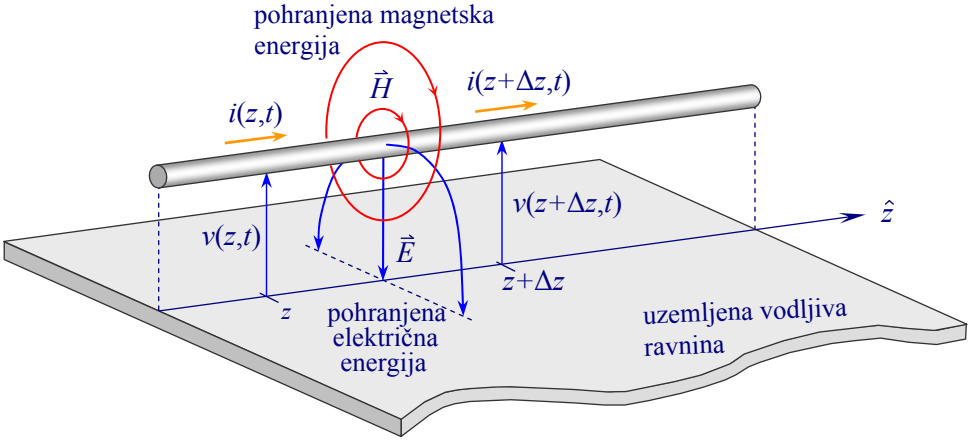
Teorija prijenosnih linija premošćuje procjep između teorije polja i teorije električnih krugova pa zauzima značajno mjestu u analizi mikrovalnih mreža i sklopova. Kao što ćemo vidjeti, rasvjetljavanju fenomena rasprostiranja valova na prijenosnoj liniji može se prići bilo proširenjem teorije električnih krugova, bilo preko teorije polja primjenom Maxwellovih jednadžba. U sljedeća ćemo dva poglavlja prikazati oba pristupa i pokazati da su jednadžbe koje opisuju prijenos energije prijenosnom linijom vrlo slične jednadžbama koje smo našli u poglavlju 2 pri razmatranju rasprostiranja ravnoga vala u neograničenom sredstvu. Kompleksna amplituda vala na prijenosnoj liniji može se definirati na tri načina. To može biti amplituda napona, amplituda struje ili normirana amplituda čiji kvadrat modula ima dimenziju snage koju val prenosi. U bilo kojem od tih prikaza amplituda vala opisana je kompleksnim fazorom čija je veličina razmjerna veličini vala i čiji fazni kut upućuje na relativnu fazu u odnosu na ishodište ili nulu varijable vremena.

3.1. Valovi na prijenosnoj liniji

Osnovna razlika između teorije električnih krugova i teorije prijenosnih linija nalazi se u električnim dimenzijama. U teoriji električnih krugova pretpostavlja da su fizičke izmjere mreže zanemarivo male u odnosu na valnu duljinu, dok, naprotiv, uzdužna dimenzija prijenosne linije može poprimiti manji ili veći dio valne duljine ili više valnih duljina. Najprije ćemo razmotriti svojstva *uniformne prijenosne linije* koja se sastoji od dvaju vodiča postavljenih na razmak znatno manji od valne duljine i kojoj poprečni presjek ne ovisi o uzdužnoj koordinati, tj. poprečne izmjere i svojstva vodljivih i dielektričnih materijala ostaju stalne.

Pretpostavimo sad da se u zraku iznad savršeno vodljive ravnine nalazi vodič u obliku tanke žice tvoreći uniformnu prijenosnu liniju, kao što je prikazano na slici 3.1. Ako je linija beskonačno dugačka i pobuđena samo na jednome kraju, onda su omjeri napona i struje u svim točkama duž linije međusobno jednaki. Taj se omjer naziva *karakteristična impedancija* linije i označuje sa Z_0. Ako je linija na svojem kraju zaključena ili opterećena impedancijom Z_0, onda se ponaša kao da je beskonačno dugačka struktura.

Kad kroz žicu teče istosmjerna ili izmjenična struja, tad se oko žice stvara magnetsko polje konačne jakosti. U tom je polju pohranjena izvjesna količina magnetske energije. Teorija mreža pokazuje da je srednja pohranjena magnetska energija povezana s induktivitetom



Slika 3.1. Prijenosna linija koju čini kružni vodič iznad uzemljene vodljive ravnine

$$\langle W_{\mathrm{m}} \rangle = \frac{1}{2} L_0 I_{\mathrm{ef}}^2 , \tag{3–1a}$$

gdje je I_{ef} efektivna vrijednost struje. Prema tomu, ako pohranjuje magnetsku energiju za vrijeme dok kroz nju teče struja I_{ef}, linija pokazuje induktivitet L_0 koji je dan vrijednošću pohranjene magnetske energije podijeljenom s $I_{\mathrm{ef}}^2/2$, što je preuzeto iz magnetostatike. Ako se zatim taj induktivitet podijeli s ukupnom duljinom linije, onda se dobiva induktivitet L po jedinici duljine, tj. *raspodijeljeni induktivitet* linije.

S druge strane, ako se između žice i uzemljene ravnine postavi istosmjerni ili izmjenični napon efektivne vrijednosti V_{ef}, onda se između njih nastaje električno polje. To znači da je u prostoru između dvaju vodiča pohranjena po vremenu prosječna električna energija

$$\langle W_{\mathrm{e}} \rangle = \frac{1}{2} C_0 V_{\mathrm{ef}}^2 . \tag{3–1b}$$

Drugim riječima, pohranjena električna energija podijeljena s $V_{\mathrm{ef}}^2/2$ daje kapacitet linije, što je preuzeto iz elektrostatike. Dijeljenjem ukupnog kapaciteta linije s njezinom duljinom dobiva se *raspodijeljeni kapacitet* linije C.

Osim pohrane energije u stvarnoj liniji postoji i disipacija energije, tj. dio se elektromagnetske energije pretvara u toplinu, što označuje gubitke u prijenosnoj liniji. Konačna provodnost vodiča proizvodi otpor u kojem nastaju gubitci. Izraz za gubitke snage po jedinici duljine zbog disipacije u vodičima glasi

$$P_{\mathrm{c}} = R I_{\mathrm{ef}}^2 , \tag{3–1c}$$

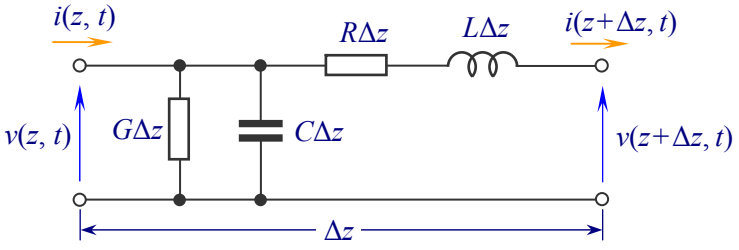
gdje je R *raspodijeljeni otpor* linije. Premda na mikrovalnim frekvencijama ti gubitci nisu jednaki gubitcima u istosmjernom strujnom krugu zbog površinskoga učinka (skin-efekt), može ih se uzeti u račun na jednak način. Jednako tako, ako dielektrik nije savršen, onda se u njemu stvaraju gubitci snage po jedinici duljine

$$P_{\mathrm{d}} = G V_{\mathrm{ef}}^2 , \tag{3–1d}$$

gdje je G *raspodijeljena vodljivost* linije. Stoga se R može pripisati gubitcima u vodiču, a G se može pripisati gubitcima u dielektriku.

U skladu s provedenim razmatranjima, prijenosnu se liniju konačne duljine može predočiti raspodijeljenim parametrima koji ovise o geometriji prijenosne strukture. Na slici 3.2, prikazan je infinitezimalno kratak odsječak linije duljine Δz sastavljen od koncentriranih elemenata, gdje parametri R, L, G i C označuju veličine po jedinici duljine s dimenzijama [1]-[4]:

R = otpor po jedinici duljine, Ω/m;
L = induktivitet po jedinici duljine, H/m;
G = vodljivost po jedinici duljine, S/m;
C = kapacitet po jedinici duljine, F/m.



Slika 3.2. Naponi, struje i nadomjesni elementi elementarne linije duljine Δz

Razmotrimo sad slučaj u kojem je umjesto statičkog napona na jedan kraj linije utisnut vremenski promjenljiv napon. Može se očekivati da će naponi i struje duž linije biti funkcije vremena (t) i položaja (z). Izvedimo najprije relacije između napona i struje na položajima z i $z+\Delta z$. Budući da su otpor i induktivitet linije po jedinici duljine dani s R i L, odsječak linije duljine Δz ima otpor $R\,\Delta z$ odnosno induktivitet $L\Delta z$. Struja $i(z, t)$ koja teče kroz taj otpor i induktivitet stvara razliku potencijala $R\,\Delta z\, i(z,t)+L\Delta z\,[\partial i(z,t)/\partial t]$ između z i $z+\Delta z$. Struja na liniji također ovisi o koordinati z. No pretpostavlja se da ista struja $i(z, t)$ teče otporom i induktivitetom jer je Δz dovoljno mala veličina u usporedbi s valnom duljinom. Stoga parcijalna derivacija upućuje samo na deriviraciju po vremenu t, premda je struja funkcija obiju varijabla, z i t. S druge strane, napon $v(z, t)$ na poprečnim elementima $G\,\Delta z$ i $C\,\Delta z$ proizvodi struju $G\Delta z\, v(z,t)+C\Delta z[\partial v(z,t)/\partial t]$.

U skladu s drugim Kirchhoffovim zakonom zbroj napona u konturi (petlji) mora biti nula, tj.

$$v(z,t) - R\Delta z\, i(z+\Delta z,t) - L\Delta z \frac{\partial i(z+\Delta z,t)}{\partial t} - v(z+\Delta z,t) = 0\,,$$

što se može napisati kao

$$v(z+\Delta z,t) - v(z,t) = -\left[Ri(z+\Delta z,t) + L\frac{\partial i(z+\Delta z,t)}{\partial t}\right]\Delta z\,. \tag{3–2}$$

U skladu s prvim Kirchhoffovim zakonom, zbroj struja u čvoru na koordinati z mora biti jednaka ništici, tj.

$$i(z,t) - G\Delta z\, v(z,t) - C\Delta z \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} - i(z+\Delta z,t) = 0\,,$$

što se može napisati kao

$$i(z+\Delta z,t) - i(z,t) = -\left[Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right]\Delta z\,. \tag{3–3}$$

Dijeljenjem s Δz i primjenom graničnog prijelaza $\Delta z \to 0$, jednadžbe (3–2) i (3–3) u vremenskoj domeni poprimaju oblik parcijalnih diferencijalnih jednadžba prvoga reda:

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -Ri(z,t) - L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\,, \tag{3–4a}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -Gv(z,t) - C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\,. \tag{3–4b}$$

To su *jednadžbe prijenosne linije*, poznate pod nazivom *telegrafske jednadžbe*.

U mikrovalnoj se elektronici pretežno rabe harmonijski signali sinusnoga valnog oblika pa se obično primjenjuje fazorski prikaz:

$$v(z,t) = V(z)\cos\left[\omega t + \varphi_v(z)\right] = \mathrm{Re}\left\{ \underline{V}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}, \tag{3–5a}$$

$$i(z,t) = I(z)\cos\left[\omega t + \varphi_i(z)\right] = \mathrm{Re}\left\{ \underline{I}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}, \tag{3–5b}$$

gdje su kompleksne veličine:

$$\underline{V}(z) = V(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_v(z)}\,, \qquad \underline{I}(z) = I(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i(z)}\,,$$

fazori koji nose podatak o fazama napona i struje signala pa im otuda i naziv (odjeljak 2.2). Fazori ne ovise o vremenu, ali ovise o položaju na liniji. Radi jednostavnosti, u daljnjim će se razmatranjima ispustiti oznaka fazora (podcrtana veličina) vodeći računa da je riječ o kompleksnoj veličini koju pri pretvaranju u vremensku domenu valja najprije pomnožiti faktorom $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, a zatim iz rezultata uzeti samo realni dio, kao što se vidi u izrazu (3–5). Stoga, za prikaz u

frekvencijskoj domeni, derivacije po vremenu ($\partial/\partial t$) valja jednostavno zamijeniti faktorom $j\omega$ čime se parcijalne diferencijalne jednadžbe (3–4) svode na jednadžbe s običnim derivacijama:

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = -\left(R + j\omega L\right) I(z), \tag{3–6a}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = -\left(G + j\omega C\right) V(z). \tag{3–6b}$$

Jednadžbe (3–6) u cijelosti opisuju ponašanje napona i struja na prijenosnoj liniji. Budući da svaka od njih ovisi i o naponu i struji, valja ih svesti na oblik u kojem ovise samo o jednoj od tih dviju varijabla. Sličan smo postupak proveli pri izvođenju valnih jednadžba za val u slobodnome prostoru (odjeljak 2.5.2). Deriviranjem jednadžbe (3–6a) i uvrštenjem (3–6b) može se eliminirati ovisnost o struji pa se ta jednadžba svodi na običnu homogenu diferencijalnu jednadžbu drugoga reda kompleksne varijable. To je valna jednadžba za napon, tj.

$$\frac{\mathrm{d}^2V(z)}{\mathrm{d}z^2} - \gamma^2 V(z) = 0. \tag{3–7a}$$

Slično se deriviranjem jednadžbe (3–6b) dobiva valna jednadžba za struju

$$\frac{\mathrm{d}^2I(z)}{\mathrm{d}z^2} - \gamma^2 I(z) = 0. \tag{3–7b}$$

U jednadžbe (3–7) uvedena je kompleksna veličina γ koja je funkcija frekvencije, tj.

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}. \tag{3–8}$$

Budući da pokazuje kako se linijom prenose naponski i strujni valovi, veličina γ dobila je posebno naziv, *koeficijent rasprostiranja*, baš kao u slučaju s elektromagnetskim valom u slobodnome prostoru. Realna veličina α označuje *koeficijent prigušenja* u neperima po metru (Np/m), a β označuje *fazni koeficijent* u radijanima po metru (rad/m).

Valne jednadžbe (3–7) za liniju bez gubitaka ($\alpha = 0$) imaju oblik valne jednadžbe (2–75) za električno polje (odjeljak 2.5.2), koja opisuje rasprostiranje ravnoga harmonijskog vala u smjeru jedne osi pravokutnoga koordinatnog sustava. Jednadžbe (3–7) mogu se riješiti analitički metodom separacije varijabla kao u odjeljku 2.5.3. Budući da su drugoga reda, općenito imaju dva rješenja. Ovdje ćemo ih riješiti standardnim postupkom snižavanja reda jednadžbe. Tako se, primjerice, u jednadžbu (3–7a) može uvesti supstitucija $\mathrm{d}V/\mathrm{d}z = p$, tj. $\mathrm{d}z = \mathrm{d}V/p$. Derivacija p po z jednaka je $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = \gamma^2 V$. Otuda je $\mathrm{d}V/p = \mathrm{d}p/\gamma^2 V$. Integriranje tog izraza daje $\gamma^2 V^2 = \mathrm{d}p^2$ pa se vađenjem drugoga korijena dobiva dvostruko rješenje $p_{1,2} = \pm \gamma V$. Ako se u izraz $p = \mathrm{d}V/\mathrm{d}z$ uvrsti negativno rješenja ($p = -\gamma V$), onda izlazi $\mathrm{d}V/\mathrm{d}z = -\gamma V$, tj. $\mathrm{d}V/V = -\gamma \mathrm{d}z$. Integriranjem slijeva i zdesna izlazi $\ln V = -\gamma z + \ln A$, gdje je $\ln A$ konstanta integracije. Potenciranjem slijeva i zdesna dobiva se rješenje, $V = A\mathrm{e}^{-\gamma z}$. Uvrštenjem pozitivnog rješenja ($p = +\gamma V$) u izraz $p = \mathrm{d}V/\mathrm{d}z$ dobiva se drugo rješenje, $V = B\mathrm{e}^{\gamma z}$. Dakle, oba ova rješenja ovise o rubnim uvjetima na prijenosnoj liniji. Njihova kombinacija daje opće rješenje oblika

$$V = A\mathrm{e}^{-\gamma z} + B\mathrm{e}^{\gamma z}, \tag{3–9}$$

gdje su konstante integracije A i B općenito kompleksne veličine (fazori). Konstanta A nalazi se uz član koji opisuje val koji putuje u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$, a konstanta B nalazi se uz član koji opisuje val koji putuje u negativnome smjeru $(-\hat{z})$. Da bi se jače naglasio smjer rasprostiranja naponskoga vala, konstante integracije valja zamijeniti novim oznakama $V_0^+ = A$ odnosno $V_0^- = B$. Sad se opće rješenje može napisati kao

$$V(z) = V_0^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} + V_0^- \mathrm{e}^{\gamma z}. \tag{3–10}$$

Slično se može riješiti valna jednadžba (3–7b) za struju, čije je rješenje

$$I(z) = I_0^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} - I_0^- \mathrm{e}^{\gamma z}.$$

No budući da je u jednadžbi (3–6a) struja razmjerna prostornoj derivaciji napona, struja se može izraziti preko napona deriviranjem izraza (3–10) po z. Uvrštenjem tog rezultata u jednadžbu (3–6a) dobiva se

$$I(z) = \frac{\gamma}{R + \mathrm{j}\omega L}\left(V_0^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} - V_0^- \mathrm{e}^{\gamma z}\right), \tag{3–11a}$$

gdje istaknuto mjesto zauzima recipročna vrijednost člana ispred zagrade

$$Z_0 = \frac{R + \mathrm{j}\omega L}{\gamma} = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{G + \mathrm{j}\omega C}}. \tag{3–12}$$

Budući da je to općenito kompleksna veličina i da se mjeri u omima (Ω) dan joj je poseban naziv, *karakteristična impedancija*. Iz izraza (3–12) izlazi da je karakteristična impedancija linije posve realna samo ako je $RC = GL$ ili ako je linija bez gubitaka, tj. $R = G = 0$ (odjeljak 3.1.1). Može se pokazati da linija koja zadovoljava uvjet $RC = GL$ ne unosi izobličenja signala zbog disperzije (odjeljak 2.5.5).

Uvrštenjem izraza (3–12) u rješenje (3–11) za struju konačno se dobiva

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}\left(V_0^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} - V_0^- \mathrm{e}^{\gamma z}\right), \tag{3–11b}$$

gdje je $I_0^+ = V_0^+/Z_0$, a $I_0^- = V_0^-/Z_0$. Negativni predznak u drugom izrazu proizlazi iz činjenice što struja reflektiranoga vala teče u suprotnom smjeru od struje progresivnoga vala. Otuda je karakteristična impedancija jednaka omjeru fazora naponskih i strujnih valova, tj.

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = Z_0 = \frac{V_0^-}{I_0^-}. \tag{3–13}$$

Da je karakteristična impedancija beskonačno dugačke linije baš jednaka ulaznoj impedanciji u tu liniju, može se pokazati sljedećim razmatranjem. Ulazna impedancija beskonačno dugačke linije može se povezati s raspodijeljenim parametara prijenosne linije primjenom nadomjesnog sklopa prikazanog na slici 3.3a). Na usporedbenim (referentnim) ravninama 1 i 2 ulazne impedancije Z_{ul} u ostatak linije međusobno su jednake pa se nadomjesni sklop može pojednostavniti na oblik prikazan na slici 3.3b), gdje su radi jednostavnijeg zapisa uvedene oznake $Z = R + \mathrm{j}\omega L$ i $Y = G + \mathrm{j}\omega C$. Otuda izlazi

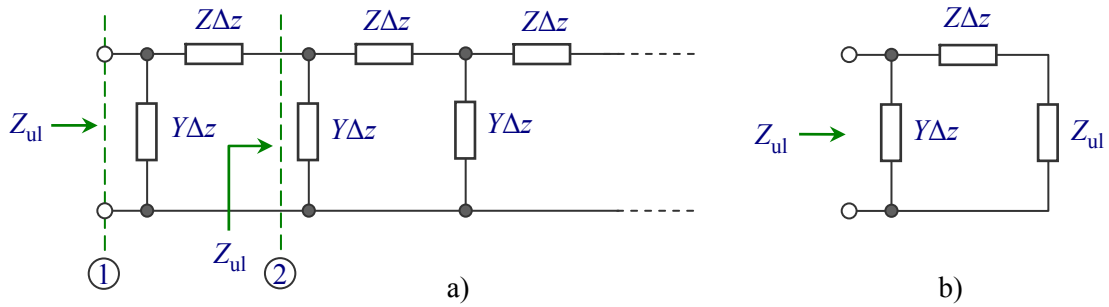
$$Z_{\mathrm{ul}} = \frac{\left(Z\Delta z + Z_{\mathrm{ul}}\right)\dfrac{1}{Y\Delta z}}{Z\Delta z + Z_{\mathrm{ul}} + \dfrac{1}{Y\Delta z}},$$

$$Z_{\mathrm{ul}} Z\Delta z + Z_{\mathrm{ul}}^2 + \frac{Z_{\mathrm{ul}}}{Y\Delta z} = \frac{Z\Delta z}{Y\Delta z} + \frac{Z_{\mathrm{ul}}}{Y\Delta z}$$

pa se sređivanjem izraza i primjenom graničnoga prijelaza $\Delta z \to 0$ konačno dobiva

$$Z_{\mathrm{ul}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{G + \mathrm{j}\omega C}} = Z_0,$$

što pokazuje da je ulazna impedancija beskonačno dugačke uniformne linije jednaka njezinoj karakterističnoj impedanciji definiranoj izrazom (3–12). Ako je takva linija pobuđena samo s jedne strane, primjerice, na svom lijevome kraju, onda postoji samo val koji putuje u smjeru osi $\hat{z}$ jer se reflektirani val koji može nastati na desnome kraju nikad ne stigne vratiti do točke



Slika 3.3. Ulazna impedancija beskonačno dugačke uniformne prijenosne linije

promatranja. Prema tomu, u bilo kojoj točki beskonačno dugačke uniformne linije ulazna je impedancija uvijek jednaka njezinoj karakterističnoj impedanciji, tj. $Z_{ul}=V/I=V^{+}/I^{+}=Z_0$, jer ne postoji reflektirani val.

Ako se fazorima doda vremenski član, onda napon na uniformnoj prijenosnoj liniji u vremenskoj domeni poprima oblik

$$v(z,t)=\mathrm{Re}\left\{\left(V_0^{+}\mathrm{e}^{-\gamma z}+V_0^{-}\mathrm{e}^{\gamma z}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}=$$

$$=\left|V_0^{+}\right|\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\varphi^{+})+\left|V_0^{-}\right|\mathrm{e}^{\alpha z}\cos(\omega t+\beta z+\varphi^{-}), \qquad (3\text{–}14a)$$

gdje su φ^{+} i φ^{-} fazni kutovi fazora V_0^{+} odnosno V_0^{-}. Sličan se izraz može dobiti i za struju, tj.

$$i(z,t)=Y_0\left|V_0^{+}\right|\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\varphi^{+})-Y_0\left|V_0^{-}\right|\mathrm{e}^{\alpha z}\cos(\omega t+\beta z+\varphi^{-}), \qquad (3\text{–}14b)$$

gdje su pretpostavljeni mali gubitci na liniji pa je $Y_0=1/Z_0$ približno realna veličina.

3.1.1. Prijenosna linija bez gubitaka

Za liniju bez gubitaka vrijedi $R=G=0$ pa koeficijent rasprostiranja (3–8) poprima oblik

$$\gamma=\mathrm{j}\beta=\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}, \qquad (3\text{–}15)$$

gdje je

$$\beta=\omega\sqrt{LC} \qquad (3\text{–}16)$$

fazni koeficijent. Stoga, za prijenosne strukture bez gubitaka, mnogi autori pojam *koeficijent rasprostiranja* (γ) nerijetko poistovjećuju s pojmom *fazni koeficijent* (β).

Sad opća rješenja za napon (3–10) i struju (3–11) na liniji bez gubitaka glase:

$$V(z)=V_0^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+V_0^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}, \qquad (3\text{–}17a)$$

$$I(z)=\frac{1}{Z_0}\left(V_0^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-V_0^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right). \qquad (3\text{–}17b)$$

Uz iste argumente, kao u odjeljku 2.5. prilikom razmatranja elektromagnetskoga vala u slobodnome prostoru, valna duljina na uniformnoj liniji bez gubitaka poprima oblik

$$\lambda_{\mathrm{v}}=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}}, \qquad (3\text{–}18)$$

a val se rasprostire faznom brzinom

$$v_{\mathrm{f}}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\lambda_{\mathrm{v}}f. \qquad (3\text{–}19)$$

Nadomjesna shema prijenosne linije s koncentriranim elementima (slika 3.2) upućuje na

niskopropusnu prijenosnu strukturu zaporne frekvencije $\omega_c = 1/(\Delta z\sqrt{LC})$. Do te frekvencije dolazi pri serijskoj rezonanciji induktivnog i kapacitivnog elementa. No budući da se veličinu Δz može uzeti po volji malom ($\Delta z \to 0$), zaporna frekvencija $\omega_c \to \infty$. To znači da u prijenosnoj liniji bez gubitaka uopće ne postoji zaporna frekvencija. No u praksi se ne može ostvariti linija s beskonačno malim razmakom između vodiča. Stoga svaka stvarna prijenosna linija ipak ima određenu graničnu frekvenciju iznad koje se uz *TEM*-mod mogu rasprostirati i neki viši modovi poput modova u valovodima (poglavlje 4) ili pak, s druge strane, linija počinje prekomjerno zračiti elektromagnetsku energiju u okolni prostor.

Za liniju bez gubitaka karakteristična je impedancija u izrazu (3–12) posve realna, tj.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{3–20a}$$

Pri razmatranju elektromagnetskih valova pokazano je da je $\beta = \sqrt{\mu\varepsilon}$. Otuda je $LC = \mu\varepsilon$ za sve prijenosne *TEM*-linije. Uvrštenjem tog rezultata u izraz (3–17), iz izraza (3–20a) izlazi

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{C^2}} = \frac{\varepsilon}{C}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta\frac{\varepsilon}{C} = \frac{1}{v_f C} = \eta\frac{L}{\mu} = v_f L\,, \tag{3–20b}$$

gdje je η intrinzična impedancija sredstva u kojem se val rasprostire. Može se uočiti da se karakteristična impedancija razlikuje od intrinzične impedancije sredstva za faktor ε/C ili L/μ koji ovise o geometriji prijenosne linije (vidjeti odjeljak 4.2.1).

Ako se uzmu u obzir konačni gubitci u vodičima, onda istovjetnost teorije polja i linija više nije posve egzaktna, ali se može pokazati da daje dobru aproksimaciju za praktične prijenosne linije. O tomu će biti više riječi u poglavlju 4.

3.1.2. Prijenosna linija malih gubitaka

U većini mikrovalnih prijenosnih linija gubitci u vodičima i dielektriku vrlo su mali, tj. može se pretpostaviti da je $R \ll \omega L$ i $G \ll \omega C$. Ako se pod korijenom izraza (3–8) izluči faktor $(\mathrm{j}\omega L)(\mathrm{j}\omega C)$, onda se dobiva preinačeni izraz oblika

$$\gamma = \mathrm{j}\omega\sqrt{LC}\sqrt{1 - \mathrm{j}\left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C}\right) - \frac{RG}{\omega^2 LC}}\,.$$

Član s RG može se zanemariti jer se radi o maloj veličini višeg reda. Preostali dio tog izraza pod korijenom može se razviti u Taylorov red oblika $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \ldots$ za mali x [izraz (H8) iz dodatka H]. Uzmu li se samo prva dva člana tog reda, dobiva se približan izraz

$$\gamma \simeq \frac{1}{2}\sqrt{LC}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) + \mathrm{j}\omega\sqrt{LC} = \alpha + \mathrm{j}\beta\,. \tag{3–21}$$

Otuda je fazni koeficijent približno jednak onom za liniju bez gubitaka, tj.

$$\beta \simeq \omega\sqrt{LC}\,, \tag{3–22}$$

a za koeficijent prigušenja približno izlazi

$$\alpha \simeq \frac{1}{2}\sqrt{LC}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{R}{Z_0} + GZ_0\right). \tag{3–23}$$

Prvi dio izraza (3–23) označuje gubitke u vodičima, a drugi se odnosi na gubitke u dielektriku. Ovdje je primijenjena aproksimacija $Z_0 \simeq \sqrt{L/C}$ kao za liniju bez gubitaka. Naime, uz uvjet $R \ll \omega L$ i $G \ll \omega C$ može se lako pokazati da je izraz (3–12) približno jednak izrazu (3–20). Uz pretpostavku da su veličine $R/\omega L$ i $G/\omega C$ manje od 0,01 pogreška je zanemariva.

3.2. Parametri prijenosne linije (teorija polja)

Premda ćemo parametre prijenosne linije potanko izvesti u sljedećem poglavlju primjenom teorije polja, razmotrimo odsječak uniformne prijenosne linije s dvama vodičima u kojoj postoje polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$, kao što je prikazano na slici 3.4, gdje je S ploha poprečnog presjeka linije. Neka je fazor napona između vodiča $V\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$, a fazor struje u vodičima $I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$. U skladu s izrazom (2–121b), srednja vrijednost magnetske energije pohranjene u odsječku linije jedinične duljine može se napisati kao

$$\langle W_\mathrm{m} \rangle = \frac{\mu}{4} \int_S \vec{H} \cdot \vec{H}^* \mathrm{d}S \,.$$

S druge strane, iz teorije električnih mreža dobiva se $\langle W_\mathrm{m} \rangle = L\,|I|^2/4$ pa se izraz za induktivitet linije po jedinici duljine svodi na

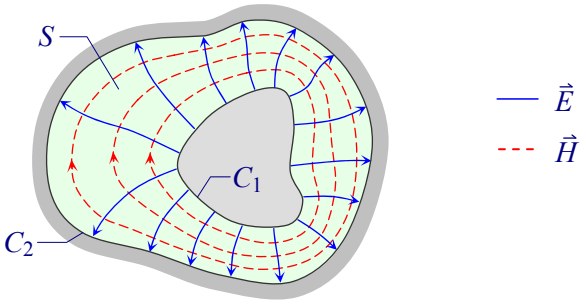
$$L = \frac{\mu}{|I|^2} \int_S \vec{H} \cdot \vec{H}^* \mathrm{d}S \,. \tag{3–24}$$

Sličan se pristup može uzeti za izračunavanje raspodijeljenog kapaciteta preko električne energije koju linija pohranjuje po jedinici duljine. Iz izraza (2–121a) izlazi

$$\langle W_\mathrm{e} \rangle = \frac{\varepsilon}{4} \int_S \vec{E} \cdot \vec{E}^* \mathrm{d}S \,.$$

U teoriji električnih mreža vrijedi $\langle W_\mathrm{e} \rangle = C|V|^2/4$ pa je raspodijeljeni kapacitet

$$C = \frac{\varepsilon}{|V|^2} \int_S \vec{E} \cdot \vec{E}^* \mathrm{d}S \,. \tag{3–25}$$



Slika 3.4. Silnice polja općenite prijenosne *TEM*-linije

Uz pretpostavku da je magnetsko polje tangencijalno na površinu vodiča konačne provodnosti σ, disipacija snage po jedinici duljine može se izraziti kao

$$P_{\mathrm{dis,v}} = \frac{R_\mathrm{s}}{2} \oint_{C_1+C_2} \vec{H} \cdot \vec{H}^* \mathrm{d}l \,,$$

gdje je $R_\mathrm{s} = 1/\sigma\delta$ površinski otpor vodiča definiran izrazom (2–197), δ dubina prodiranja, a $C_1 + C_2$ označuje puteve integracije po rubovima presjeka vodiča. Teorija električnih mreža daje $P_{\mathrm{dis,v}} = R|I|^2/2$ pa za serijski otpor po jedinici duljine izlazi

$$R = \frac{R_\mathrm{s}}{|I|^2} \oint_{C_1+C_2} \vec{H} \cdot \vec{H}^* \mathrm{d}l \,. \tag{3–26}$$

Disipirana snaga po jedinici duljine zbog gubitaka u dielektriku može se izraziti kao

$$P_{\mathrm{dis,d}} = \frac{\omega\varepsilon''}{2} \int_S \vec{E} \cdot \vec{E}^* \mathrm{d}S \,,$$

gdje je ε'' imaginarni dio kompleksne permitivnosti $\varepsilon=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon''=\varepsilon'(1-\mathrm{j}\tan\delta_\varepsilon)$ koja je definirana izrazima (2–42) u odjeljku 2.3.1. Teorija mreža daje $P_{\mathrm{dis,d}}=G|V|^2/2$ pa se paralelna vodljivost po jedinici duljine može napisati kao

$$G=\frac{\omega\varepsilon''}{|V|^2}\int_S \vec{E}\cdot\vec{E}^*\mathrm{d}S\,. \tag{3–27}$$

3.2.1. Parametri suosne linije

Suosna se linija sastoji od unutarnjeg vodiča koji je u cijelosti oklopljen vanjskim suosnim vodičem cjevasta oblika, kao što je prikazano na slici 3.5a). Prostor između vodiča potpuno je ili djelomice ispunjen dielektričnim materijalom koji u osnovi nosi unutarnji vodič. U dielektriku pobuđene linije između dvaju suosnih vodiča nalaze se električno i magnetsko polje. Zbog simetrije i uvjeta da silnice električnog polja moraju uvijek biti okomite na suosne vodiče, silnice su usmjerene radijalno. S druge strane, silnice magnetskog polja koncentrične su s vodičima i okomite na silnice električnog polja, kao što je prikazano na slici 3.5b. Ako je promjer vanjskoga vodiča manji od pola valne duljine, onda se suosnom linijom energija može rasprostirati samo *TEM*-modom. Stoga je razdioba električnog polja u liniji s idealnim vodičima jednaka razdiobi statičkog električnog polja. Izrazi za električno i magnetsko polje izravno slijede iz Gaussova i Ampèreova zakona pa se za putujući *TEM*-val u suosnoj liniji, prikazanoj na slici 3.5b, može napisati:

$$\vec{E}=\frac{V\hat{\rho}}{\rho\ln b/a}\mathrm{e}^{-\gamma z}\,, \tag{3–28}$$

$$\vec{H}=\frac{I\hat{\varphi}}{2\pi\rho}\mathrm{e}^{-\gamma z}\,. \tag{3–29}$$

Uvrštenjem toga u izraze (3–24) - (3–27) dobiva se:

$$L=\frac{\mu}{(2\pi)^2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=a}^{b}\frac{1}{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\quad\text{H/m,} \tag{3–30}$$

$$C=\frac{\varepsilon'}{(\ln b/a)^2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=a}^{b}\frac{1}{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi\varepsilon'}{\ln b/a}\quad\text{F/m,} \tag{3–31}$$

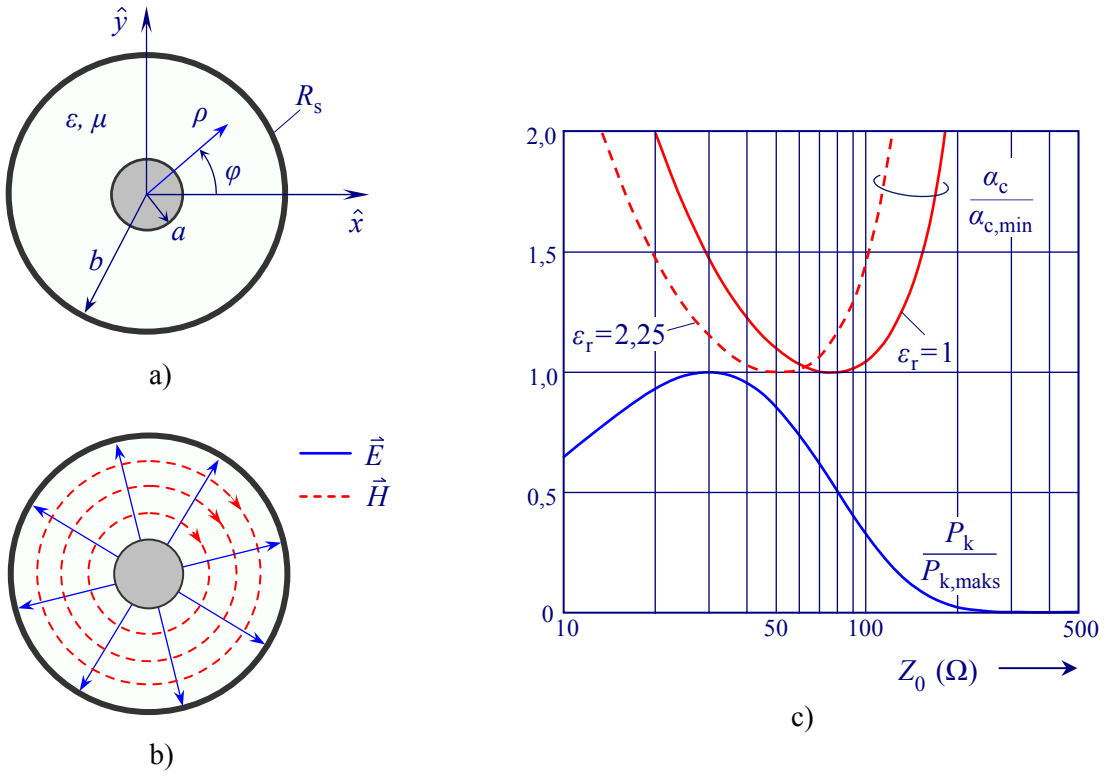
$$R=\frac{R_\mathrm{s}}{(2\pi)^2}\left[\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{a^2}a\mathrm{d}\varphi+\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{b^2}b\mathrm{d}\varphi\right]=\frac{R_\mathrm{s}}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\quad\Omega\text{/m,} \tag{3–32}$$

$$G=\frac{\omega\varepsilon''}{(\ln b/a)^2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=a}^{b}\frac{1}{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi\omega\varepsilon''}{\ln b/a}\quad\text{S/m,} \tag{3–33}$$

gdje je pretpostavljeno da materijal kojim je ispunjena suosna linija ima kompleksnu permitivnost $\varepsilon=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon''$ i realnu permeabilnost $\mu=\mu_0\mu_\mathrm{r}$ te da je R_s površinski otpor vodiča definiran izrazom (2–197).

Karakteristična impedancija linija bez gubitaka definirana je izrazom (3–20), $Z_0=\sqrt{L/C}$, što se može uzeti kao dobra aproksimacija i za linije s malim gubitcima pa se primjenom izraza (3–30) i (3–31) dobiva vrlo praktična formula

$$Z_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\ln\frac{b}{a}\simeq 60\sqrt{\frac{\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}}}\ln\frac{b}{a}\,. \tag{3–34}$$



Slika 3.5. a) Geometrija suosne linije, **b)** razdioba polja, **c)** normirane funkcije (3–35a) i (3–36)

Koeficijent prigušenja za suosne linije malih gubitaka može se odrediti uvrštenjem izraza (3–32) i (3–33) u izraz (3–23). Ukupni koeficijent prigušenja $\alpha = \alpha_c + \alpha_d$ sastoji se od koeficijenta prigušenja zbog gubitaka u vodičima (α_c) i gubitaka u dielektriku (α_d), tj.

$$\alpha_c = \frac{R_s}{2\eta \ln b/a}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), \tag{3–35a}$$

$$\alpha_d = \frac{1}{2}\omega\eta\varepsilon'' = \frac{1}{2}\omega\eta\varepsilon' \tan\delta_\varepsilon, \tag{3–35b}$$

gdje je $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon'}$ intrinzična impedancija dielektričnog materijala kojim je ispunjena suosna linija. Očito je da su gubitci u vodičima funkcija geometrije, ali i frekvencije preko veličine R_s. Korisno je naći omjer b/a pri kojem se postižu minimalni gubitci u vodičima. Deriviranjem izraza (3–35a) po omjeru b/a i izjednačavanjem rezultata s nulom dobiva se $b/a \simeq 3{,}6$. Budući da ta vrijednost odgovara karakterističnoj impedanciji $Z_0 = 77\ \Omega$, na samom početku razvoja mikrovalne elektronike i radiotehnike za karakterističnu impedanciju suosne linije odabrana je vrijednost od 75 Ω, koja se i dalje rabi u sustavima zemaljske televizije. Za liniju ispunjenu polietilenom ($\varepsilon_r = 2{,}25$) minimalni koeficijent prigušenja pojavljuje se pri $Z_0 = 51\ \Omega$.

Primjenom izraza (3–28) dobiva se da je kritična vrijednost snage u suosnoj liniji [4]

$$P_k = \frac{V_{maks}^2}{Z_0} = \frac{E_k^2 b^2}{120}\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}}\,\frac{\ln(b/a)}{(b/a)^2}, \tag{3–36}$$

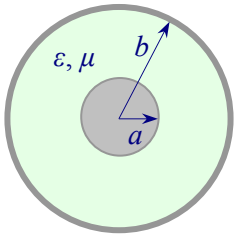
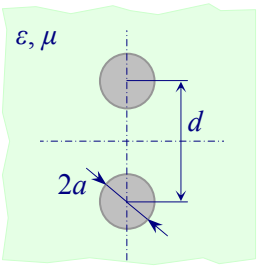
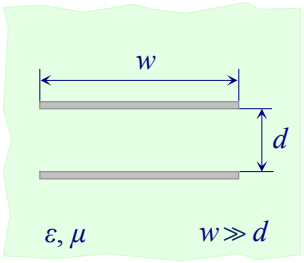
gdje je E_k kritično električno polje, a V_{maks} kritični napon pri kojem dolazi do proboja u dielektriku suosne linije . Uz taj uvjet, može se pokazati da se maksimalna snaga postiže pri omjeru $b/a = \sqrt{e} \simeq 1{,}649$. Toj vrijednosti odgovara karakteristična impedancija $Z_0 = 30\ \Omega$.

Uzimanjem u obzir oba kriterija, uvjet za minimalne gubitke i uvjet za maksimalni prijenos snage, odabrana je karakteristična impedancija od 50 Ω kao kompromisna vrijednost koja se može naći u većini mikrovalnih primjena [4]. Na slici 3.5c) prikazane su relativne vrijednosti koeficijenta prigušenja i maksimalne snage u ovisnosti o Z_0.

Kad približno polovina valne duljine postane veća od promjera vanjskog vodiča suosne linije uz dominantni *TEM*-mod mogu se rasprostirati i viši *TE*- i *TM*-modovi kao u kružnom valovodu. Stoga je valovodni način rasprostiranja elektromagnetske energije suosnom linijom objašnjen u odjeljku 4.5. Da bi se mogle odrediti zaporne frekvencije tih viših modova potrebno je primijeniti Maxwellove jednadžbe na suosne rubne uvjete. Rasprostiranje viših modova uglavnom je nepoželjna pojava, pa se suosne linije obično rabe samo do frekvencije na kojoj se može pojaviti prvi viši mod.

Slično se mogu naći i raspodijeljeni parametri linija drukčije geometrije. U tablici 3.1. prikazani su parametri linija koje se češće susreću u praksi. Izrazi za Z_0 odnose se na linije s malim gubitcima ili bez gubitaka ($R=G=0$). U prvome stupcu dani su parametri suosne linije.

Tablica 3.1. Parametri prijenosnih linija

			
L	$\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$	$\frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\frac{d}{2a}$	$\frac{\mu d}{w}$
C	$\frac{2\pi\varepsilon'}{\ln b/a}$	$\frac{\pi\varepsilon'}{\cosh^{-1} d/2a}$	$\frac{\varepsilon' w}{d}$
R	$\frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$	$\frac{R_s}{2\pi a}\frac{d/a}{\sqrt{(d/2a)^2-1}}$	$\frac{2R_s}{w}$
G	$\frac{2\pi\omega\varepsilon''}{\ln b/a}$	$\frac{\pi\omega\varepsilon''}{\cosh^{-1} d/2a}$	$\frac{\omega\varepsilon'' w}{d}$
Z_0	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\ln\frac{b}{a}$	$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\cosh^{-1}\frac{d}{2a}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\frac{d}{w}$

Najstarija poznata prijenosna struktura jest *Lecherov vod* ili *simetrična dvožična linija* čiji su parametri prikazani u drugom stupcu tablice 3.1. U praksi se vrijednosti karakteristične impedancije simetrične dvožične linije nalaze u rasponu od 100 do 600 Ω. U trećem su stupcu prikazani parametri planparalelne linije za *TEM*-val uz pretpostavku da je širina vodljivih ploča znatno veća od njihovog međusobna razmaka, $w \gg d$ i da su ploče beskonačno tanke. Time je zanemaren utjecaj rubnih polja na krajevima traka pa se rješenje za raspodijeljeni kapacitet svodi na izraz za pločasti kondenzator.

3.3. Prijenosna linija zaključena proizvoljnom impedancijom tereta

3.3.1. Koeficijent refleksije

Razmotrimo prijenosnu liniju karakteristične impedancije Z_0 na koju je priključen teret impedancije Z_T, kao što je prikazano na slici 3.6a). Ishodište koordinatnog sustava može se postaviti tako da se teret nalazi u ravnini $z = 0$. To je vrlo praktično kad se odnos između reflektiranoga i upadnoga vala želi prikazati kao koeficijent refleksije Γ_T. Ako je linija dugačka l, onda se ulazne priključke nalaze u ravnini $z=-l$, u kojoj omjer napona i struje određuje ulaznu impedanciju Z_{ul}, a omjer između reflektiranoga i upadnoga naponskog vala određuje ekvivalentni ulazni koeficijent refleksije Γ_{ul}.

U ravnini tereta ($z=0$) izrazi (3–10) i (3–11) za napon i struju tereta poprimaju oblik:

$$V_T = V_0^+ + V_0^-, \tag{3–37}$$

$$I_T = I_0^+ - I_0^- = \frac{V_0^+ - V_0^-}{Z_0}, \tag{3–38}$$

gdje je $V^+(0)=V_0^+$ i $V^-(0)=V_0^-$. Budući da je $Z_T=V_T/I_T$, primjenom izraza (3–37) i (3–38), dobiva se,

$$Z_T = \frac{V_T}{I_T} = \frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-} Z_0. \tag{3–39}$$

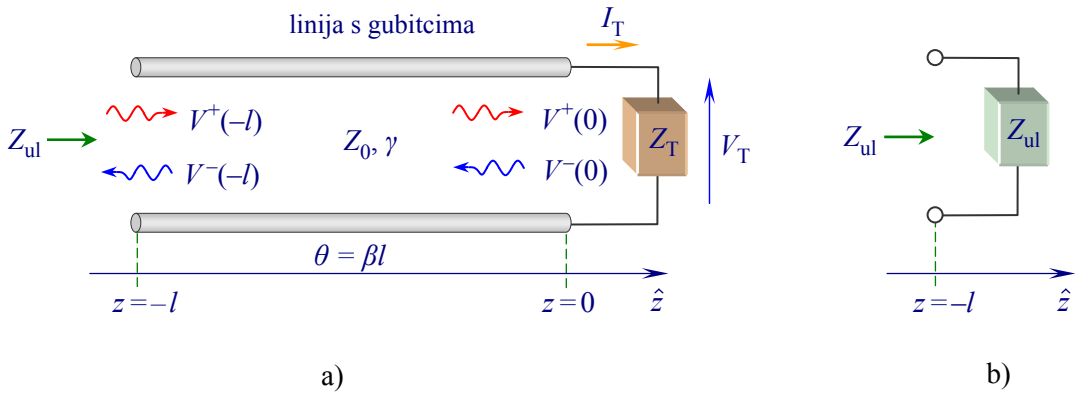
Ako se izraz (3–39) podijeli karakterističnom impedancijom linije Z_0, izlazi

$$z_T = \frac{Z_T}{Z_0} = \frac{1+\dfrac{V_0^-}{V_0^+}}{1-\dfrac{V_0^-}{V_0^+}}, \tag{3–40}$$

gdje z_T označuje normiranu impedanciju tereta. Omjer fazora reflektiranog i upadnog napona općenito je kompleksna veličina, bez dimenzije, koja se naziva *naponski koeficijent refleksije*. Za teret impedancije Z_T taj je koeficijent refleksije definiran kao

$$\Gamma_T = \frac{V_0^-}{V_0^+}. \tag{3–41}$$

Može se uočiti analogija s definicijom koeficijenta refleksije za okomiti upad elektromagnetskoga vala iz slobodnoga prostora na općenito sredstvo, izraz (2–176). Primjenom definicije (3–41), izraz (3–40) može se jednostavnije napisati kao



Slika 3.6. a) Prijenosna linija zaključena impedancijom tereta, **b)** nadomjesna shema na $z=-l$

$$z_\mathrm{T} = \frac{1+\Gamma_\mathrm{T}}{1-\Gamma_\mathrm{T}}. \tag{3–42}$$

Ta se relacije može preurediti u izraz

$$\Gamma_\mathrm{T} = \frac{Z_\mathrm{T} - Z_0}{Z_\mathrm{T} + Z_0} = \frac{z_\mathrm{T} - 1}{z_\mathrm{T} + 1}, \tag{3–43}$$

koji upućuje na ovisnost koeficijenta refleksije tereta o impedanciji tereta.

Analogno naponskom koeficijentu refleksije može se definirati i *strujni koeficijent refleksije*. Za realnu karakterističnu impedanciju linije, primjenom izraza (3–38) izlazi da je strujni koeficijent refleksije jednak negativu naponskog koeficijenta refleksije, $-\Gamma_\mathrm{T}$. No u praksi je uglavnom prihvaćen naponski koeficijent refleksije.

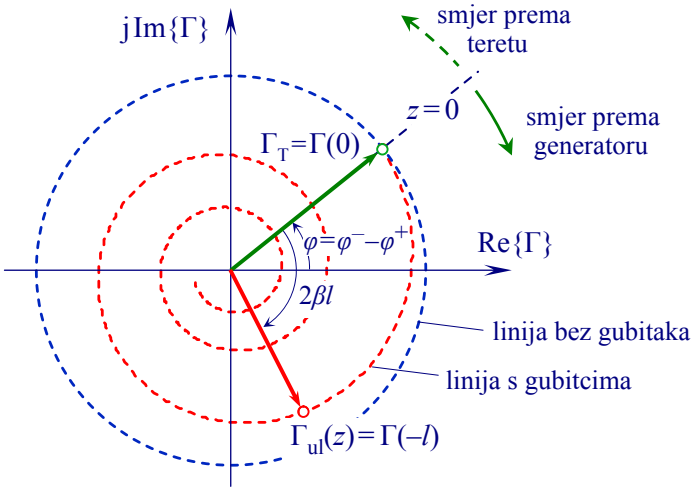
Izraz (3–41) definira koeficijent refleksije na teretu ($l = 0$), ali ta se veličina može poopćiti da vrijedi za bilo koju točku l na liniji. Ako je napon poznat u bilo kojoj točki uniformne prijenosne linije, onda je poznat u svim točkama te iste linije. Drugim riječima, ako je poznat koeficijent refleksije tereta, onda se može odrediti koeficijent refleksije u bilo kojoj točki linije na udaljenosti l od tereta. Tako iz izraza (3–10) i prethodnih razmatranja izlazi

$$\Gamma_\mathrm{ul} = \Gamma(-l) = \frac{V^-(-l)}{V^+(-l)} = \frac{V_0^- \mathrm{e}^{\gamma z}}{V_0^+ \mathrm{e}^{-\gamma z}}\bigg|_{z=-l} = \frac{V_0^- \mathrm{e}^{-\gamma l}}{V_0^+ \mathrm{e}^{\gamma l}},$$

što se uvrštenjem izraza (3–41) svodi na oblik

$$\Gamma_\mathrm{ul} = \frac{Z_\mathrm{ul} - Z_0}{Z_\mathrm{ul} + Z_0} = \Gamma_\mathrm{T} \mathrm{e}^{-2\gamma l}. \tag{3–44}$$

Taj koristan rezultat opisuje transformaciju koeficijenta refleksije tereta na liniji duljine l. Valja uočiti da se faza koeficijenta refleksije Γ_ul mijenja u ovisnosti o koordinati z dvostruko brže nego faza napona ili struje. Otuda je periodičnost promjene koeficijenta refleksije u ovisnosti o koordinati položaja z dvostruko veća u odnosu na periodičnost napona ili struje, što se može intuitivno objasniti sljedećim razmatranjem. Budući da je koeficijent refleksije jednak omjeru fazora reflektiranoga i upadnoga naponskog vala, koji se okreću u suprotnim smjerovima (suprotni predznaci argumenata), fazni kut kompleksnog vektora koeficijenta refleksije Γ_ul dvostruko je veći od kuta fazora napona ili struje. Iz toga izravno slijedi da se na liniji bez gubitaka vrijednost kompleksnog vektora Γ_ul ponavlja svakih pola valne duljine. Drugim riječima, to znači da vrh kompleksnog vektora Γ_ul, u kompleksnoj ravnini koeficijenta refleksije, opiše puni krug već nakon pola valne duljine.



Slika 3.7. Prikaz transformacije koeficijenta refleksije tereta na liniji s gubitcima

Koeficijent refleksije tereta može se grafički prikazati u kompleksnoj ravnini kao kompleksni vektor $\Gamma_T = |\Gamma_T| e^{j\varphi}$, gdje je $\varphi = \varphi^- - \varphi^+$ fazna razlika između napona V_0^- i V_0^+. Jednako tako može se predočiti i koeficijent refleksije Γ_{ul} na ulazu u prijenosnu liniju duljine l, kao što je prikazano na slici 3.7. Ako se promatrač kreće linijom u smjeru prema teretu, onda se kompleksni vektor Γ_{ul} vrti u suprotnome smjeru kazaljke sata, a ako se linijom kreće prema generatoru, onda se Γ_{ul} vrti u smjeru kazaljke sata. Zbog gubitaka u prijenosnoj liniji ($\alpha \neq 0$), vrh kompleksnog vektora Γ_{ul} opisuje spiralu jer mu se modul mijenja po zakonu $e^{-2\alpha l}$.

Ako je linija bez gubitaka, onda se izraz za koeficijent refleksije na liniji svodi na

$$\Gamma_{ul}(-l) = \Gamma_T e^{-j2\beta l}, \tag{3–45}$$

gdje je $\beta l = \theta$ električna duljina linijskog odsječka. Otuda vrh kompleksnog vektora Γ_{ul} na slici 3.7 opisuje kružnicu jer mu je modul konstantan, tj. ne ovisi o duljini linijskog odsječka l.

3.3.2. Ulazna impedancija

Prijenosna se linija zdesna od mjesta promatranja može nadomjestiti koncentriranom kompleksnom impedancijom koju ćemo zvati *ulazna impedancija prijenosne linije*, kao što je prikazano na slici 3.6b). Ta je impedancija u čvrstoj vezi s koeficijentom refleksije Γ_{ul} i jednaka je omjeru fazora napona i struje pa na udaljenosti $l = -z$ od tereta iznosi

$$Z_{ul} = \frac{V(-l)}{I(-l)} = Z_0 \frac{1+\Gamma_{ul}}{1-\Gamma_{ul}} = Z_0 \frac{1+\Gamma_T e^{-2\gamma l}}{1-\Gamma_T e^{-2\gamma l}}. \tag{3–46}$$

Dakle, ako je poznata promjena vrijednosti naponskog koeficijenta refleksije i karakteristična impedancija linije, onda se ulazna impedancije može lako izračunati iz izraza (3–46). Primjenom jednadžbe (3–43), taj se izraz može dalje preinačiti u oblik

$$Z_{ul} = Z_0 \frac{(Z_T + Z_0)e^{\gamma l} + (Z_T - Z_0)e^{-\gamma l}}{(Z_T + Z_0)e^{\gamma l} - (Z_T - Z_0)e^{-\gamma l}} = Z_0 \frac{Z_T \cosh \gamma l + Z_0 \sinh \gamma l}{Z_0 \cosh \gamma l + Z_T \sinh \gamma l}. \tag{3–47}$$

Za liniju bez gubitaka ($\gamma = j\beta$) izraz (3–47) poprima oblik

$$Z_{ul} = Z_0 \frac{Z_T \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + jZ_T \sin \beta l}. \tag{3–48a}$$

Podijele li se sad brojnik i nazivnik izraza (3–48a) s $\cos \beta l$, dobiva se poznati izraz

$$Z_{ul} = Z_0 \frac{Z_T + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_T \tan \beta l}. \tag{3–48b}$$

Izrazi (3–47) i (3–48) pokazuju da se vrijednost ulazne impedancije na čvrstoj frekvenciji mijenja promjenom položaja točke promatranja na liniji. Jednako tako, uz čvrstu vrijednost duljina linije, ulazna se impedancija istovjetno mijenja s frekvencijom. Iz izraza (3–48) također se vidi da se na liniji bez gubitaka vrijednosti impedancija uvijek ponavljaju nakon pola valne duljine, zbog periodičnosti funkcije tangens.

Ulazna impedancija kratko spojene ili reaktivno zaključene prijenosne linije bez gubitaka posve je reaktivna. To je u skladu s fizikalnom intuicijom jer se prijenosna linija sastoji samo od raspodijeljenih kapaciteta i induktiviteta, tj. od čisto reaktivnih elemenata. U tom je slučaju modul koeficijenta refleksije jednak jedinici (vidjeti odjeljak 3.4).

Sličan izraz može se dobiti za ulaznu admitanciju linije bez gubitaka

$$Y_{ul} = \frac{1}{Z_{ul}} = Y_0 \frac{Y_T \cos \beta l + jY_0 \sin \beta l}{Y_0 \cos \beta l + jY_T \sin \beta l}, \tag{3–49}$$

gdje je $Y_0 = 1/Z_0$ karakteristična admitancija prijenosne linije.

3.3.3. Odnos stojnih valova

Ako nema refleksije ($\Gamma_T = 0$), onda je veličina napona duž linije bez gubitaka stalna i iznosi $|V_0^+|$. No ako postoji reflektirani val, onda upadni i reflektirani valovi interferiraju pa na liniji nastaje *stojni val* (odjeljak 2.10.3). U bilo kojoj točki prijenosne linije ($z<0$) fazor napona dan je zbrojem fazora upadnoga i reflektiranoga vala, tj.

$$V(z) = V_0^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + \Gamma_T V_0^+ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}. \tag{3–50}$$

Tad veličina (modul) napona na proizvoljnoj koordinati z iznosi

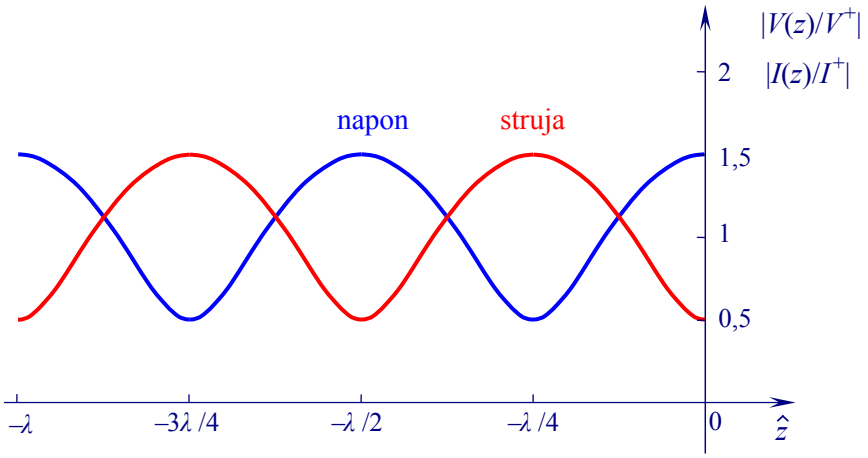
$$|V(z)| = |V_0^+| \left|1 + \Gamma_T \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta z}\right| = |V_0^+| \left|1 + \Gamma_T \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}\right|,$$

gdje je $l = -z$ pozitivna udaljenost mjerena u smjeru od tereta prema generatoru, kao što je prikazano na slici 3.8. Ta se udaljenost u praksi može lako izmjeriti. Ako se koeficijent refleksije tereta napiše u trigonometrijskom obliku kao $\Gamma_T = |\Gamma_T|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, gdje je $\varphi = \varphi^- - \varphi^+$ fazna razlika između fazora V_0^- i V_0^+, onda je

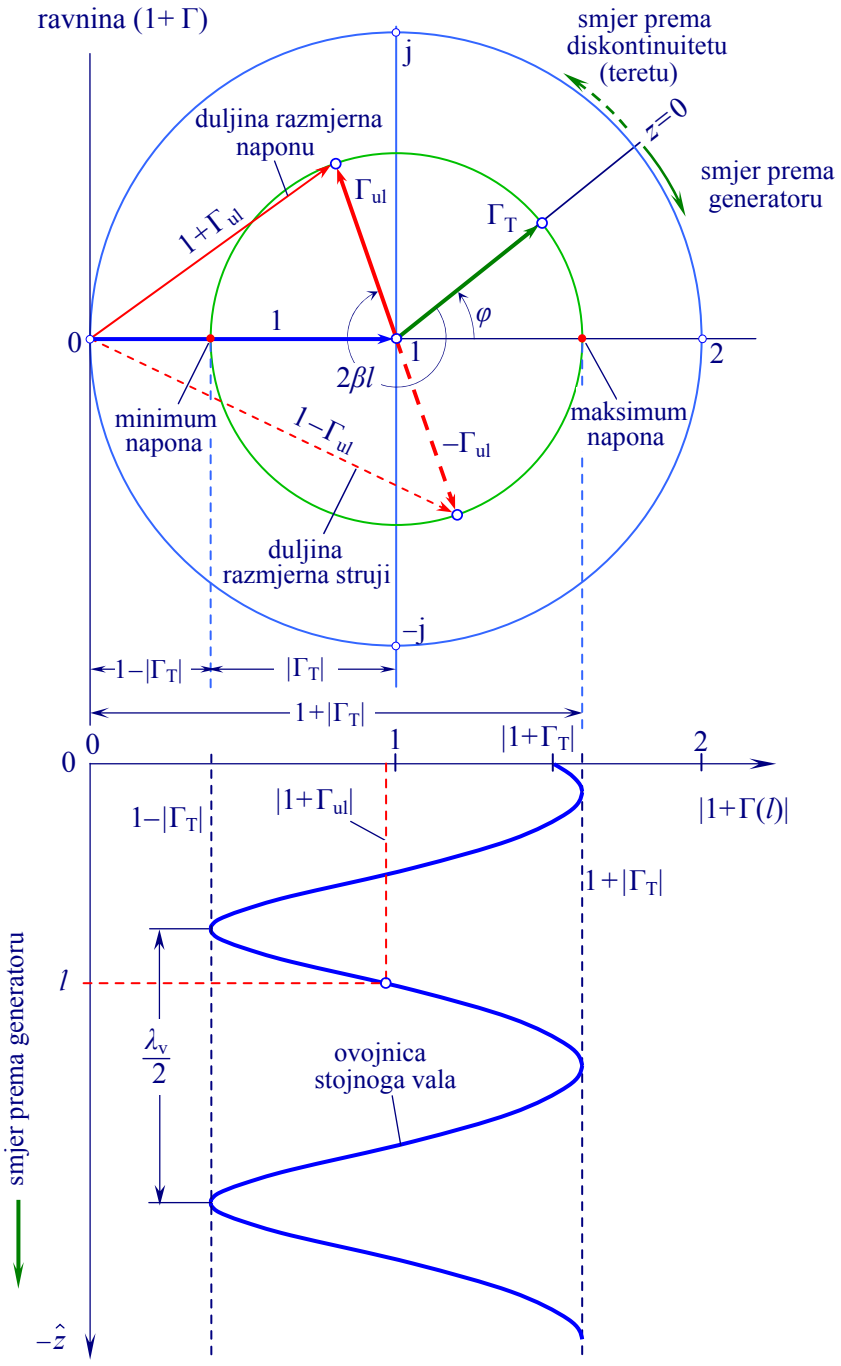
$$\begin{aligned}
|V| &= |V_0^+| \left|1 + \Gamma_T \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi - 2\beta l)}\right| = \\
&= |V_0^+| \sqrt{\left[1 + |\Gamma_T| \cos(\varphi - 2\beta l)\right]^2 + |\Gamma_T|^2 \sin^2(\varphi - 2\beta l)} = \\
&= |V_0^+| \sqrt{\left(1 + |\Gamma_T|\right)^2 - 2|\Gamma_T| \left[1 - \cos(\varphi - 2\beta l)\right]} = \\
&= |V_0^+| \sqrt{\left(1 + |\Gamma_T|\right)^2 - 4|\Gamma_T| \sin^2\left(\beta l - \frac{\varphi}{2}\right)}.
\end{aligned} \tag{3–51}$$

To pokazuje da vrijednosti $|V|$ osciliraju naprijed-natrag između maksimuma $|V_0^+|(1 + |\Gamma_T|)$ za $\beta l - \varphi/2 = n\pi$ i minimuma $|V_0^+|(1 - |\Gamma_T|)$ za $\beta l - \varphi/2 = n\pi + \pi/2$, gdje je n cijeli broj. Taj je rezultat u skladu s fizikalnom intuicijom jer pokazuje da maksimum nastaje na onom mjestu gdje su upadni i reflektirani valovi istofazni, a da minimumi nastaju tamo gdje su upadni i reflektirani valovi u protufazi. Uzastopni maksimumi (i minimumi) nalaze se na razmaku $d = \pi/\beta = \lambda_v/2$, gdje je λ_v valna duljina vođenoga *TEM*-vala u sredstvu koje okružuje vodiče. Udaljenost između maksimuma i njemu najbližeg minimuma iznosi $\lambda_v/4$.

Budući da je strujni koeficijent refleksije jednak $-\Gamma_T$, strujni su valovi u protufazi tamo gdje se naponski valovi zbrajaju u fazi. Otuda su strujni maksimumi i minimumi geometrijski pomaknuti za $\lambda_v/4$ u odnosu na odgovarajuće ekstreme napona. Na slici 3.8 prikazana je ovojnica stojnoga vala napona na liniji, koja odgovara posve realnoj impedanciji tereta $Z_T = 3Z_0$ i



Slika 3.8. Prikaz ovojnica normiranih stojnih valova napona i struje za realni teret $Z_T = 3Z_0$



Slika 3.9. Grafički izvod stojnoga vala $|1+\Gamma|$

gdje je prikaz normiran veličinom $|V_0^+|$. Na slici je također prikazana i ovojnica pripadajućeg normiranog stojnog vala struje.

Omjer maksimalnog i minimalnog napona stojnoga vala na liniji naziva se *odnos stojnih valova napona* ili kraće *odnos stojnih valova* koji je definiran kao

$$\mathrm{OSV} = \frac{\left|V_0^+\right| + \left|V_0^-\right|}{\left|V_0^+\right| - \left|V_0^-\right|} = \frac{1+\left|\Gamma_\mathrm{T}\right|}{1-\left|\Gamma_\mathrm{T}\right|} \,. \tag{3–52}$$

Ako je poznat odnos stojnih valova, onda se lako može naći modul koeficijenta refleksije iz izraza

$$|\Gamma_T| = \frac{\text{OSV} - 1}{\text{OSV} + 1}. \tag{3–53}$$

Ako je linija zaključena prilagođenim teretom, tj. $Z_T = Z_0$, onda izrazi (3–48) pokazuju da ne postoji refleksija, tj. $\Gamma_T = 0$, čemu odgovara OSV = 1. Vrijednosti odnosa stojnih valova nalaze se u rasponu od 1 do ∞, a vrijednosti modula koeficijenta refleksije nalaze se u rasponu od 0 do 1. Usporedba izraza (3–43) s izrazom (3–53) pokazuje da je za pozitivan realan Γ_T normirana impedancija tereta realan broj koji je jednak odnosu stojnih valova, $z_T = \text{OSV}$. Stoga je u naponskom maksimumu ulazna impedancija uvijek realna i veća od Z_0 te glasi

$$Z_{(\text{maks})} = \text{OSV}\, Z_0. \tag{3–54a}$$

No posve je obratno u naponskom minimumu, gdje je ulazna impedancija također realna, ali je manja od Z_0 pa je otuda manja i od ulazne impedancije u maksimumu stojnoga vala, tj.

$$Z_{(\text{min})} = \frac{Z_0}{\text{OSV}}. \tag{3–54b}$$

Omjer tih impedancija jednak je kvadratu odnosa stojnih valova, tj.

$$Z_{(\text{maks})} = \text{OSV}^2 Z_{(\text{min})}. \tag{3–55}$$

Grafički izvod ovojnice stojnoga vala $|1+\Gamma(l)|$ prikazan je na slici 3.9 superpozicijom fazora upadnoga i reflektiranoga naponskog vala.

3.3.4. Tok snage

Kompleksna snaga koja protječe linijom bez gubitaka u smjeru osi $\hat{z}$ može se naći preko Poyntingova teorema, kao za ravni val u homogenom izotropnom sredstvu bez gubitaka (odjeljak 2.6). Ako su $V(z)$ i $I(z)$ vrijednosti fazora napona i struje, onda je

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z). \tag{3–56}$$

Uvrštenjem izraza (3–17) za napon i struju, za liniju bez gubitaka ($\alpha = 0$) izlazi

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2}\left(V_0^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + V_0^- \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right)\frac{1}{Z_0^*}\left(V_0^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - V_0^- \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right)^* = \\ &= \frac{1}{2Z_0} V_0^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\left[1+\Gamma(z)\right]\left(V_0^+\right)^* \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\left[1-\Gamma^*(z)\right] = \\ &= \frac{\left|V_0^+\right|^2}{2Z_0}\left[1-\left|\Gamma(z)\right|^2 + \Gamma(z) - \Gamma^*(z)\right], \end{aligned}$$

gdje je $Z_0 = Z_0^*$. Uvrštenjem izraza $|\Gamma(z)| = |\Gamma_T \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta z}| = |\Gamma_T|$, dobiva se

$$P(z) = \frac{\left|V_0^+\right|^2}{2Z_0}\left(1-\left|\Gamma_T\right|^2\right) + \frac{\left|V_0^+\right|^2}{2Z_0}\left[\Gamma(z) - \Gamma^*(z)\right].$$

Član u uglatoj zagradi iznosi $\mathrm{j}2\mathrm{Im}\{\Gamma(z)\}$ i posve je imaginaran pa konačno izlazi

$$P(z) = \frac{\left|V_0^+\right|^2}{2Z_0}\left(1-\left|\Gamma_T\right|^2\right) + \mathrm{j}\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0}\mathrm{Im}\{\Gamma(z)\}. \tag{3–57}$$

Prvi član zdesna u izrazu (3–57) realan je i označuje srednju snagu. To je stvarna snaga koja se prenosi linijom. Budući da je linija bez gubitaka to je ujedno i snaga koju linija predaje trošilu (teretu), tj.

$$\langle P \rangle = \frac{\left|V_0^+\right|^2}{2Z_0}\left(1-\left|\Gamma_\mathrm{T}\right|^2\right), \tag{3–58a}$$

gdje oznaka $\langle\ \rangle$ označuje srednju snagu (ili prosječnu snagu po vremenu). Valja uočiti da ta snaga ovisi o položaju na prijenosnoj liniji bez gubitaka. Ona je ustvari algebarski zbroj snage koju nosi upadni val na svom putu od generatora do tereta i snage koju nosi reflektirani val. Ovdje je reflektirana snaga uzeta kao negativna veličina jer putuje u suprotnome smjeru od upadne snage. Pritom veličina $|\Gamma_\mathrm{T}|^2$ pokazuje koliki se dio upadne snage reflektira od tereta. To je omjer između reflektirane i upadne snage na teretu ili na bilo kojem drugom mjestu na prijenosnoj liniji bez gubitaka. Ako teret u točki $z=0$ ima pozitivni realni dio, onda je realna snaga veća ili jednaka nuli. Dakle, za pasivni je teret $|\Gamma(z)|=|\Gamma_\mathrm{T}|\le 1$. Pozitivni predznak snage pokazuje da je tok neto snage usmjeren od generatora prema teretu. Stoga će za teret s »negativnim otporom« tok ukupne snage biti usmjeren od tereta prema generatoru. To znači da je tada teret taj koji snabdijeva liniju snagom, što je podrobnije razmotreno u odjeljku 8.9.1.

Imaginarni dio izraza (3–57) označuje jalovu snagu, tj. reaktivnu snagu

$$Q(z) = \frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0}\,\mathrm{Im}\left\{\Gamma(z)\right\} = \frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0}\left|\Gamma_\mathrm{T}\right|\sin(2\beta z-\varphi), \tag{3–58b}$$

gdje je φ fazna razlika između upadnoga i reflektiranoga vala na teretu. Za razliku od srednje snage, reaktivna snaga ne pridonosi prijenosu energije i nije konstantna duž linije bez gubitaka nego joj se predznak periodički mijenja svakih četvrt valne duljine, tako da se u istom trenutku u susjednim odsječcima duljine $\lambda/8$ pohranjuju paketi električne i magnetske energije. Za realni teret, neovisno o njegovoj veličini, reaktivna je snaga jednaka nuli.

Ako teret nije prilagođen karakterističnoj impedanciji linije, onda teret ne preuzima svu raspoloživu snagu iz generatora. Stupanj razgođenja obično se opisuje odnosom stojnih valova ili modulom koeficijenta refleksije ili pak omjerom reflektirane i upadne snage. Taj se omjer može prikazati u decibelima kao

$$\mathrm{RL} = -20\log\left|\Gamma_\mathrm{T}\right|\ \mathrm{dB}. \tag{3–59}$$

Oznaka RL dolazi iz engleske sintagme *return loss* i pojmovno izražava »gubitke« reflektirane snage koji su posljedica disipacije snage u teretu. Prilagođeni teret ne proizvodi refleksiju (tj. $\Gamma_\mathrm{T}=0$) pa $\mathrm{RL}\to\infty$, a pri potpunoj refleksiji ($|\Gamma_\mathrm{T}|=1$) izlazi $\mathrm{RL}=0$ dB jer se cjelokupna upadna snaga vraća u generator bez »gubitaka«. Tako, primjerice, RL = 15 dB odgovara dobro prilagođenom teretu jer će se na njemu reflektirati svega oko 3 % upadne snage.

Ako se veličina $\mathrm{j}\beta$ zamijeni kompleksnom veličinom $\mathrm{j}\beta+\alpha$ koja je jednaka koeficijentu rasprostiranja (γ) linije s gubitcima, onda se izvedeni izrazi za linije bez gubitaka mogu primijeniti i za analizu linija s gubitcima. U mikrovalnim je linijama veličina α nerijetko vrlo malog iznosa pa se za kratke odsječke linija njezin utjecaj može posve zanemariti. No postoje i takve primjene u kojima se ni ti mali gubitci ne smiju zanemariti, kao, primjerice, pri razmatranju rezonatora u odjeljku 7.4. Ako je α razmjerno mala, ali konačna veličina, onda se može pretpostaviti da je karakteristična impedancija linije i dalje približno realna. U skladu s izrazom (3–58a) snaga predana teretu iznosi

$$P_\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V_\mathrm{T} I_\mathrm{T}^*\right\} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{2Z_0}\left|V_0^+\right|^2\left(1-\left|\Gamma_\mathrm{T}\right|^2\right), \tag{3–60}$$

gdje je Z_0 uzeta kao realna veličina kao u izrazu (3–20) u odjeljku 3.1.1.

Uvrštenjem izraza (3–10) i (3–11) u (3–56), snaga u točki $z=-l$ koja putuje linijom s gubitcima prema teretu može se izraziti kao

$$P(-l)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V(-l)\,I^{*}(-l)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\left(V_0^{+}\mathrm{e}^{\gamma l}+V_0^{-}\mathrm{e}^{-\gamma l}\right)\frac{1}{Z_0^{*}}\left(V_0^{+}\mathrm{e}^{\gamma l}-V_0^{-}\mathrm{e}^{-\gamma l}\right)^{*}\right\}=$$

$$=\frac{\left|V_0^{+}\right|^2}{2Z_0^{*}}\mathrm{Re}\left\{\left[\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)l}+\Gamma_\mathrm{T}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\beta)l}\right]\left[\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{j}\beta)l}-\Gamma_\mathrm{T}\mathrm{e}^{-(\alpha-\mathrm{j}\beta)l}\right]\right\}=$$

$$=\frac{\left|V_0^{+}\right|^2}{2Z_0^{*}}\mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{2\alpha l}+\Gamma_\mathrm{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}-\Gamma_\mathrm{T}^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta l}-\mathrm{e}^{-2\alpha l}\left|\Gamma_\mathrm{T}\right|^2\right\}.$$

Budući da je $\Gamma_\mathrm{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}-\Gamma_\mathrm{T}^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta l}=2\,\mathrm{j}\,\mathrm{Im}\{\Gamma_\mathrm{T}\}$ posve imaginarna veličina i $Z_0^{*}\simeq Z_0$, konačno se dobiva

$$P(-l)=\frac{\left|V_0^{+}\right|^2}{2Z_0}\left(1-\left|\Gamma_\mathrm{T}\right|^2\mathrm{e}^{-4\alpha l}\right)\mathrm{e}^{2\alpha l}=\frac{\left|V_0^{+}\right|^2}{2Z_0}\left(1-\left|\Gamma(-l)\right|^2\right)\mathrm{e}^{2\alpha l}, \tag{3–61}$$

gdje je $|\Gamma_\mathrm{T}|$ zamijenjeno s $|\Gamma(-l)|\,\mathrm{e}^{2\alpha l}$. Od ukupne snage koju prima linija na koordinati $z=-l$, teret prima snagu P_T danu izrazom (3–60).

Pritom se preostali dio snage potroši u prijenosnoj liniji, tj.

$$P_\mathrm{dis}=P(-l)-P_\mathrm{T}=\frac{1}{2Z_0}\left|V_0^{+}\right|^2\left[\mathrm{e}^{2\alpha l}-1+\left|\Gamma_\mathrm{T}\right|^2\left(1-\mathrm{e}^{-2\alpha l}\right)\right], \tag{3–62}$$

gdje član $(\mathrm{e}^{2\alpha l}-1)$ u uglatoj zagradi pripada gubitcima upadnoga vala, a član $|\Gamma_\mathrm{T}|^2(1-\mathrm{e}^{-2\alpha l})$ pripada gubitcima reflektiranoga vala. Valja uočiti da oba člana rastu porastom koeficijenta α.

3.3.5. Rubni uvjet na generatoru

Da bismo dobili potpun uvid u interakciju između generatora, prijenosne linije i trošila, te da bismo mogli odrediti upadni naponski val V_0^{+} potreban je dodatan rubni uvjet. Taj se uvjet može izraziti preko parametara generatora. Naime, svaki se generator može prikazati serijskim spojem naponskog izvora elektromotorne sile V_G i unutarnje impedancije Z_G, kao što je prikazano na slici 3.10.

Za generator priključen na neprilagođenu prijenosnu liniju s gubitcima na koordinati $z=-l$, napon $V_\mathrm{ul}=V(-l)$ na priključcima generatora, tj. na ulazu linije, može se izraziti kao

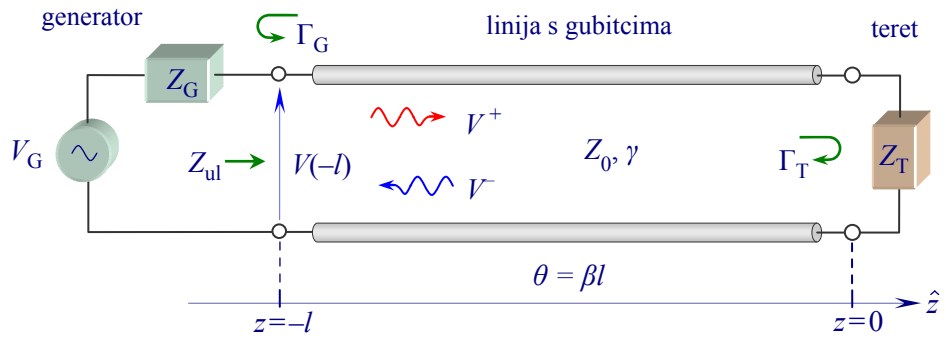
$$V(-l)=V_0^{+}\mathrm{e}^{\gamma l}+V_0^{-}\mathrm{e}^{-\gamma l}=V_0^{+}\left(1+\Gamma_\mathrm{T}\mathrm{e}^{-2\gamma l}\right)\mathrm{e}^{\gamma l}=\frac{Z_\mathrm{ul}}{Z_\mathrm{G}+Z_\mathrm{ul}}V_\mathrm{G},$$

gdje je ulazni koeficijent refleksije dan izrazom (3–44), $\Gamma_\mathrm{ul}=\Gamma_\mathrm{T}\mathrm{e}^{-2\gamma l}$. Otuda izlazi

$$V_0^{+}=\frac{Z_\mathrm{ul}}{Z_\mathrm{G}+Z_\mathrm{ul}}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma l}}{1+\Gamma_\mathrm{T}\mathrm{e}^{-2\gamma l}}V_\mathrm{G}. \tag{3–63a}$$

U skladu s izrazom (3–42), ulazna se impedancija može izraziti preko koeficijenta refleksije $\Gamma_\mathrm{ul}=\Gamma(-l)$ kao

$$Z_\mathrm{ul}=\frac{1+\Gamma(-l)}{1-\Gamma(-l)}Z_0=\frac{1+\Gamma_\mathrm{T}\mathrm{e}^{-2\gamma l}}{1-\Gamma_\mathrm{T}\mathrm{e}^{-2\gamma l}}. \tag{3–64}$$



Slika 3.10. Prijenos snage iz generatora u trošilo preko odsječka prijenosne linije s gubitcima

Na jednak se način može definirati i koeficijent refleksije za generator, tj.

$$\Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0}. \tag{3–65}$$

Uvrštenjem izraza (3–64) i (3–65) u (3–63a), upadni se val napona V_0^+ može izraziti kao

$$V_0^+ = V_G \frac{Z_0}{Z_G + Z_0} \frac{e^{-\gamma l}}{1 - \Gamma_G \Gamma_T e^{-2\gamma l}} = \frac{V_G}{2} \frac{1 - \Gamma_G}{1 - \Gamma_G \Gamma_T e^{-2\gamma l}}. \tag{3–63b}$$

3.3.6. Prijenos snage iz generatora u teret

U odjeljcima 3.3.4. i 3.3.5. proučavali smo tok snage uzduž prijenosne linije te našli rubne uvjete na trošilu i generatoru proizvoljnih impedancija. Stoga se prijenos snage iz generatora u trošilo preko odsječka prijenosne linije s gubitcima karakteristične impedancije Z_0 i duljine l (slika 3.10) može izravno izraziti uvrštenjem izraza (3–63b) u izraz (3–61), što daje

$$P_T = \frac{|V_G|^2 Z_0}{2|Z_0 + Z_G|^2} \frac{1 - |\Gamma_T|^2}{|1 - \Gamma_G \Gamma_T e^{-2\gamma l}|^2} e^{-2\alpha l} = \frac{|V_G|^2}{8Z_0} \frac{|1 - \Gamma_G|^2 \left(1 - |\Gamma_T|^2\right)}{|1 - \Gamma_G \Gamma_T e^{-2\gamma l}|^2} e^{-2\alpha l}. \tag{3–66}$$

Valja uočiti da snaga predana trošilu ovisi o stupnju prilagodbe između generatora i trošila. No također valja uočiti da se najveći prijenos snage iz generatora u trošilo ne postiže kad je linija prilagođena trošilu ($\Gamma_T = 0$) nego kad je nazivnik izraza (3–66) najmanji, tj. kad je član oblika $\Gamma_G \Gamma_T e^{-2\gamma l}$ pozitivna realna veličina. Zanimljivo je da taj član postaje realan i pozitivan kad se koeficijent refleksije $\Gamma_T e^{-2\gamma l} = \Gamma_{ul}$ izjednači s konjugirano kompleksnom vrijednošću koeficijenta refleksije generatora (Γ_G^*). Stoga je taj uvjet dobio poseban naziv: *konjugirano kompleksna prilagodba* (odjeljak 5.4.1). Istodobno je i impedancija Z_{ul} jednaka konjugirano kompleksnoj vrijednosti impedancije generatora Z_G, tj.

$$Z_{ul} = Z_G^*.$$

Ako se, primjerice, trošilo izravno spoji s generatorom ($l = 0$), onda uz uvjet konjugirano kompleksne prilagodbe ($\Gamma_T = \Gamma_G^*$ ili $Z_T = Z_G^*$) izraz (3–66) daje maksimalnu snagu koju trošilo može primiti iz tog generatora, tj.

$$P_A = P_{T,maks} = \frac{|V_G|^2}{8R_G}. \tag{3–67}$$

Ta se snaga naziva *raspoloživa snaga generatora*. O raspoloživoj snazi generatora i o konjugirano kompleksnoj prilagodbi bit će više riječi u poglavljima 5 i 6.

3.3.7. Koeficijent prijenosa

Kad se na nekom mjestu na prilagođenoj prijenosnoj liniji pojavi diskontinuitet (slika 3.11) u obliku paralelno spojene impedancije (Z) dolazi do raspršenja elektromagnetske energije i razgođenja. Pritom nastaju gubitci u prijenosu snage jer se dio snage reflektira i možebitno disipira na samoj impedanciji diskontinuiteta. Rubni uvjet na koordinati diskontinuiteta ($z=0$) traži neprekinutost napona, tj. jednake napone na objema stranama diskontinuiteta

$$V(0) = V_0^+ + V_0^- = V_\mathrm{p}^+(0)\,, \tag{3–68}$$

gdje je $V_\mathrm{p}^+(0)$ preneseni naponski val na istoj koordinati, $z=0$. Dakle, zdesna od diskontinuiteta postoji samo val V_p^+ koji putuje u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$ jer je linija na desnome kraju prilagođena (slika 3.11). Sad se na ravnini $z=0$ može definirati naponski koeficijent prijenosa kao omjer dvaju progresivnih valova, tj. $T = V_\mathrm{p}^+(0)/V_0^+$. Primjenom izraza (3–68) izlazi

$$T = 1+\Gamma = \frac{2Z}{Z_0+2Z}\,, \tag{3–69}$$

gdje je

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z \,||\, Z_0 - Z_0}{Z \,||\, Z_0 + Z_0} = \frac{-Z_0}{Z_0+2Z} \tag{3–70}$$

naponski koeficijent refleksije na diskontinuitetu na $z = 0$. Valja uočiti istovjetnost izraza (3–69) s (2–171) za okomiti upad ravnog vala na granicu dvaju dielektričnih sredstava.

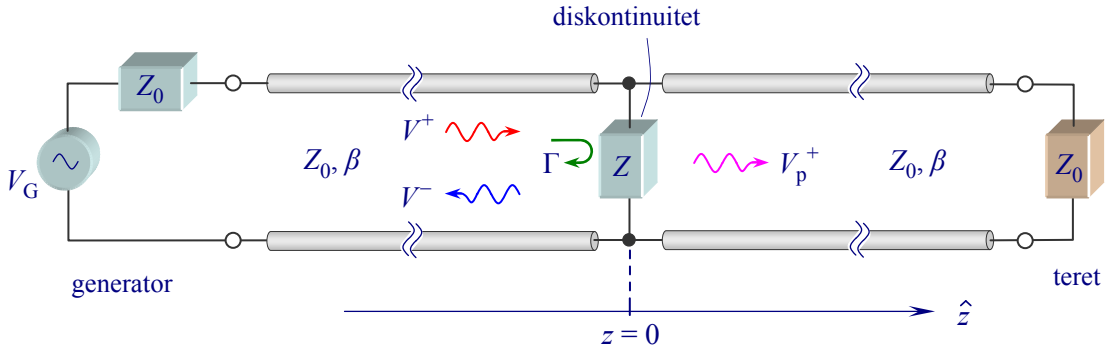
Od diskontinuiteta se reflektira snaga $P_\mathrm{r} = |V_0^-/V_0^+|^2 P^+ = |\Gamma|^2 P^+$, gdje je $P^+ = |V_0^+|^2/(2Z_0)$ upadna snaga. To je ujedno i raspoloživa snaga generatora koji je prilagođen prijenosnoj liniji. S druge strane, preko diskontinuiteta se prenosi snaga $P_\mathrm{p} = |T|^2 P_\mathrm{u}$ pa se mogu definirati tzv. *uneseni gubitci*, tj. gubitci snage koji nastaju umetanjem paralelne impedancije u prijenosnu liniju. Za četveropole, tj. dvoprolazne sklopove, vrijednost unesenih gubitaka recipročna je vrijednosti pojačanja snage i nerijetko se označuju simbolom IL (prema engl. *Insertion Loss*). Matematički izraženo, radi se o omjeru raspoložive i prenesene snage koji se obično izražava u decibelima kao

$$\mathrm{IL} = -20\log|T| = -20\log|1+\Gamma|\,. \tag{3–71a}$$

Za posve reaktivan diskontinuitet prenesena je snaga

$$P_\mathrm{p} = (1-|\Gamma|^2)P_\mathrm{u}\,, \tag{3–72}$$

jer na reaktanciji ne dolazi do disipacije pa ni do gubitaka snage. Taj se izraz često rabi pri razmatranju prilagodnih i filtarskih mreža bez gubitaka te periodičkih prijenosnih struktura.



Slika 3.11. Prijenos naponskog vala kroz ravninu ($z=0$) u kojoj leži diskontinuitet

Za serijski spoj impedancije i linije, struja je neprekinuta pa izlazi:

$$T = 1 - \Gamma = \frac{2Z_0}{Z + 2Z_0}, \tag{3–73}$$

$$\Gamma = \frac{(Z + Z_0) - Z_0}{(Z + Z_0) + Z_0} = \frac{Z}{Z + 2Z_0}. \tag{3–74}$$

Otuda uneseni gubitci za serijski spoj impedancije iznose

$$\mathrm{IL} = -20\log|T| = -20\log|1 - \Gamma|. \tag{3–71b}$$

3.4. Reaktivno zaključena prijenosna linija bez gubitaka

Gubitci u prijenosnoj liniji nerijetko se zanemaruju pri razmatranju mikrovalnih sklopova pa ćemo sad razmotriti nekoliko posebnih slučajeva takvih linija. Razmotrimo najprije kratko spojenu liniju, $Z_T = 0$, prikazanu na slici 3.12a).

Iz izraza (3–43) izlazi da je koeficijent refleksije kratkoga spoja $\Gamma_T = -1$, što je u skladu s intuitivnom slikom, jer fazori upadnoga i reflektiranoga napona moraju imati iste amplitude i suprotne faze da bi napon na kratkome spoju bio nula. Iz toga slijedi da je odnos stojnih valova beskonačan. Prema izrazima (3–10) i (3–13) napon i struja na liniji bez gubitaka glase:

$$V(z) = V_0^+ \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right) = -\mathrm{j}2V_0^+ \sin\beta z, \tag{3–75a}$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right) = \frac{2V_0^+}{Z_0}\cos\beta z. \tag{3–75b}$$

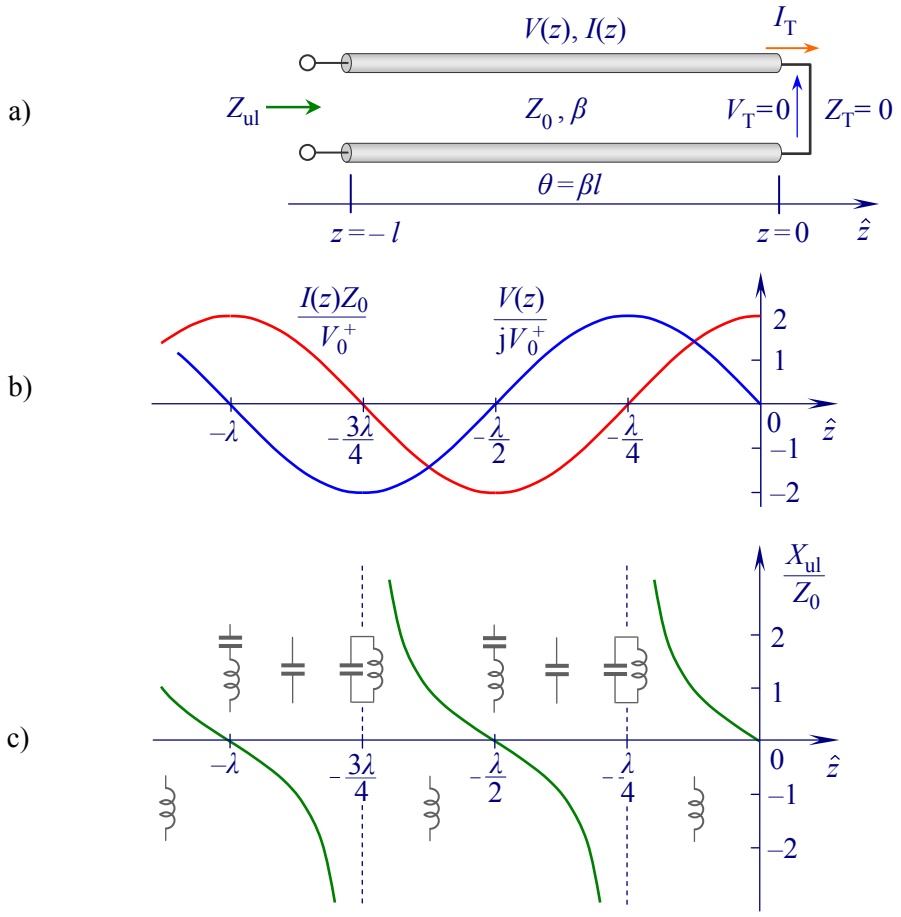
Izrazi (3–75) pokazuju da je na mjestu kratkoga spoja ($z = 0$) napon jednak ništici, a da je struja maksimalna. Za linijski odsječak duljine l, izraz (3–48b) daje ulaznu impedanciju

$$Z_{\mathrm{ul}} = \mathrm{j}Z_0 \tan\beta l. \tag{3–76}$$

Ta je veličina posve imaginarna za bilo koju duljinu odsječka l. Promjenom duljine odsječka l ulazna se impedancija može naći u rasponu vrijednosti od –j∞ do +j∞. Primjerice, kad je $l = 0$ ulazna je impedancija očito nula. No za $l = \lambda/4$ imamo $Z_{\mathrm{ul}} \to \infty$, što je jednako impedanciji otvorenoga kraja. Na slici 3.12b) grafički je prikazano i kako se mijenjaju normirani napon i struja duž prijenosne linije bez gubitaka. Ti su valni oblici zapravo ovojnice stojnoga vala za trenutak $\omega t = 0$. Ovojnice stojnoga vala za trenutak $\omega t = \pi$ dobivaju se zrcaljenjem oko apscisne osi. Pri totalnoj refleksiji, napon je u svakoj točki stojnoga poluvala jednake faze, a isto vrijedi za struju.

Također se vidi da odsječak kratko spojene linije kraći od četvrt valne duljine pretežno pohranjuje magnetsku energiju ($\langle W_{\mathrm{m}}\rangle > \langle W_{\mathrm{e}}\rangle$) pa mu je reaktancija pozitivna. Stoga se može reći da je taj odsječak induktivnog karaktera, što je u odgovarajućim područjima slike 3.12c) obilježeno simbolom induktiviteta. To je posve u skladu s fizikalnom intuicijom, jer vrlo kratak komad dvožične linije podsjeća na kratku zavojnicu s poluzavojem koji je induktivnog karaktera. Kad duljina linijskog odsječka postane veća od četvrt valne duljine, tad reaktancija linije postaje negativna što se može objasniti kapacitivnim karakterom linije i zatim se ta slika periodički ponavlja. Kad reaktancija teži u beskonačnost, tad funkcija reaktancije ima pol pa se kratko spojena linija ponaša poput paralelnoga titrajnog kruga. No kad reaktancija teži nuli, tad se linija ponaša poput serijskoga titrajnog kruga, kao što je prikazano na slici 3.12c).

Razmotrimo sad prijenosnu liniju bez gubitaka koja je na kraju otvorena, tj. $Z_T \to \infty$, kao što je prikazano na slici 3.13a). Otvoreni kraj simbolički je prikazan precrtanim priključcima. Za beskonačnu impedancija tereta, u izraz (3–42) valja uvrstiti $\Gamma_T = 1$. Tad je odnos stojnih valova opet beskonačan. Prema izrazima (3–17) napon i struja na liniji za taj slučaj glase:



Slika 3.12. a) Prijenosna linija zaključena kratkim spojem **b)** Razdioba normiranog napona i struje; **b)** normirana ulazna impedancija. Simboli kapaciteta i induktiviteta pokazuju u kojim dijelovima linije prevladava kapacitivni, a u kojim induktivni karakter reaktancije

$$V(z) = V_0^+ \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right) = 2V_0^+ \cos \beta z \,, \tag{3–77a}$$

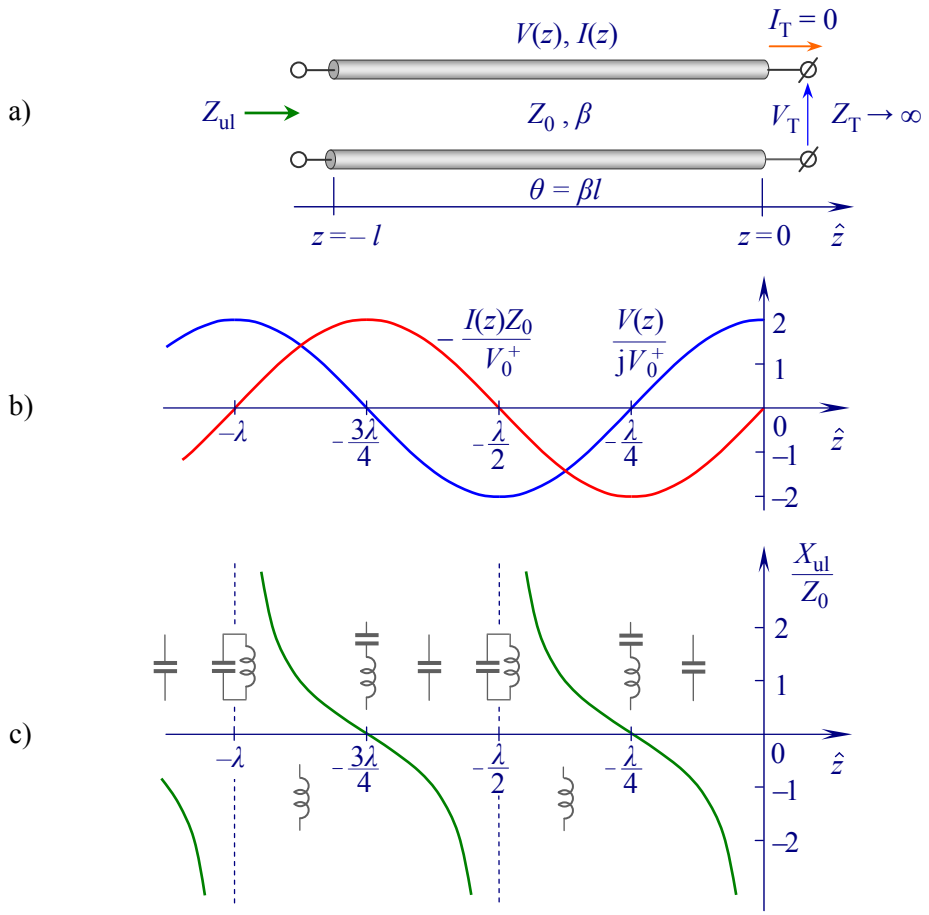
$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right) = -\mathrm{j}\frac{2V_0^+}{Z_0}\sin \beta z \,. \tag{3–77b}$$

Izrazi (3–77) pokazuju da je na otvorenom kraju ($z = 0$) struja jednaka nuli, a da je napon maksimalan. Otuda je ulazna impedancija otvorene linije opet posve imaginarna veličina za bilo koju duljinu l, tj.

$$Z_{\mathrm{ul}} = -\mathrm{j}\frac{Z_0}{\tan \beta l}, \tag{3–78}$$

Na slici 3.13 b) i c) grafički je prikazano kako se mijenjaju normirani napon, struja i impedancija duž otvorene prijenosne linije bez gubitaka. Usporedba izraza (3–77) i (3–78) s izrazima (3–75) i (3–76) pokazuje da je sklop na slici 3.13 dualan sklopu na slici 3.12.

Na liniji bez gubitaka duljine $l = \lambda/4$ normirana ulazna impedancija poprima inverznu vrijednost pa se četvrtvalni odsječak linije nerijetko naziva *invertor impedancije* (odjeljak 7.5.3). Budući da ima svojstvo transformacije impedancije (otpora), takav se linijski odsječak nerijetko naziva *četvrtvalni transformator impedancije.* O četvrtvalnim transformatorima impedancije može se više naći u poglavljima 6 i 7. Kao što je već istaknuto, ulazna se impedancija periodički mijenja u ovisnosti o varijablama l i z, i ponavlja se za cjelobrojne višekratnike poluvalne linije, tj. $Z_{\mathrm{ul}}(z) = Z_{\mathrm{ul}}(z + n\lambda/2)$ za $n = 1, 2, \ldots$



Slika 3.13. a) Prijenosna linija s otvorenim krajem Prikaz napona i struje **b)** i ulazne impedancije **c)**. Simboli kapaciteta i induktiviteta pokazuju u kojem području prevladava kapacitivni, a u kojem induktivni karakter reaktancije na otvorenoj prijenosnoj liniji

U poglavljima 6, 7 i 8 reaktivno opterećeni odsječci linija (stabovi) uspješno se rabe u izvedbama rezonatora, filtarskih struktura i prilagodnih mreža.

Primjer 3.1. Kratak odsječak otvorene i kratko spojene linije bez gubitaka

Naći ulaznu impedanciju linijskog odsječka znatno kraćeg od četvrt valne duljine, koji je na svojem kraju: a) otvoren i b) kratko spojen. Pritom valja pretpostaviti da su odsječci izrađeni od idealne prijenosne linije karakteristične impedancije Z_0.

Rješenje:

a) Primjenom izraza (3–78), ulazna impedancija električki kratke ($\beta l \ll \pi/2$) otvorene linije iznosi

$$Z_{ul} = -\mathrm{j}\frac{Z_0}{\tan \beta l} \simeq -\mathrm{j}\frac{Z_0}{\beta l} = -\mathrm{j}\frac{v_f Z_0}{\omega l},$$

gdje je za $\beta l \ll \pi/2$ uzeto $\tan \beta l \simeq \beta l$. Taj se izraz može prikazati u obliku $Z_{ul} = 1/(\mathrm{j}\omega C')$ gdje je

$$C' \simeq l/(v_f Z_0) = Cl$$

nadomjesni kapacitet kratkog otvorenog odsječka prijenosne linije (slika 3.14), a C raspodijeljeni kapacitet linije. Rezultat tog razmatranja posve je u skladu s fizikalnom intuicijom, jer je na kraju otvorene linije elektromagnetska energija pretežno pohranjena u električnom polju, tj. između dvaju paralelnih kratkih vodiča prevladava kapacitivna impedancija (slika 3.13c)).

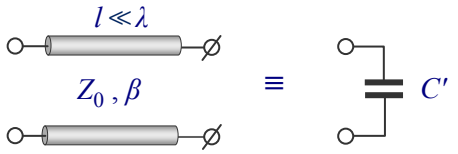
b) Primjenom izraza (3–76), ulazna impedancija električki kratke ($\beta l \ll \pi/2$) kratko spojene linije može se napisati u ovom obliku

$$Z_{\text{ul}} = \text{j}Z_0 \tan \beta l \simeq \text{j}Z_0 \beta l = \text{j}Z_0 \frac{\omega l}{v_{\text{f}}},$$

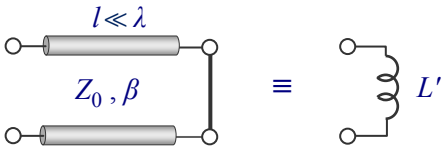
što je ekvivalentno izrazu $Z_{\text{ul}} = \text{j}\omega L'$ pa se iz toga dobiva izraz za nadomjesni induktivitet kratkog kratko spojenog linijskog odsječka, tj.

$$L' \simeq l Z_0 / v_{\text{f}} = Ll,$$

gdje je L raspodijeljeni induktivitet prijenosne linije (slika 3.15). To je također u skladu s fizikalnom intuicijom, jer je na kraju kratko spojene linije, koja podsjeća na poluzavoj zavojnice, elektromagnetska energija pretežno pohranjena u magnetskom polju (slika 3.12c)).



Slika 3.14. Nadomjesni krug električki kratkog linijskog odsječka s otvorenim krajem



Slika 3.15. Nadomjesni krug električki kratkog linijskog odsječka zaključenog kratkim spojem

Primjer 3.2. Reaktancija otvorene i kratko spojene linije bez gubitaka

Naći reaktanciju kratko spojenog i otvorenog odsječka prijenosne linije bez gubitaka duljine 20 mm. Karakteristična impedancija linije iznosi 100 Ω. Naći nadomjesni induktivitet kratko spojenog linijskog odsječka i kapacitet otvorenog linijskog odsječaka za frekvenciju $f = 2{,}5$ GHz, ako je linija ispunjena zrakom.

Rješenje:

Fazni koeficijent iznosi

$$\beta = \frac{\omega}{v_{\text{f}}} = \frac{2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^9}{2{,}998 \cdot 10^8} = 52{,}4 \ \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

pa je $\beta l = 52{,}4 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 1{,}048$ rad. Sad iz formule (3–76) za kratko spojenu liniju izlazi

$$Z_{\text{ul}} = \text{j}Z_0 \tan \beta l = \text{j}50 \tan 1{,}048 = \text{j}50 \cdot 1{,}735 = \text{j}86{,}76\,\Omega,$$

što znači da je $X_L = 86{,}76$ Ω pa nadomjesni induktivitet kratko spojenog odsječka iznosi

$$L' = \frac{X_L}{\omega} = \frac{86{,}76}{2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^9} = 5{,}52 \cdot 10^{-9} = 5{,}52\,\text{nH} \cdot$$

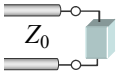
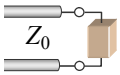
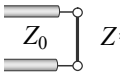
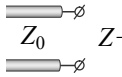
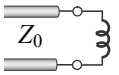
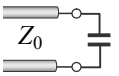
Za otvoreni odsječak, primjenom formule (3–78) dobiva se

$$Z_{\text{ul}} = -\text{j}\frac{Z_0}{\tan \beta l} = -\text{j}\frac{50}{1{,}735} = -\text{j}28{,}81\,\Omega \cdot$$

Otuda je $X_C = -28{,}81$ Ω pa nadomjesni kapacitet iznosi

$$C' = -\frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^9 \cdot 28{,}81} = 2{,}21 \cdot 10^{-12} = 2{,}21\,\text{pF} \cdot$$

Tablica 3.2. Impedancija, koeficijent refleksije i odnos stojnih valova tipičnih tereta

Teret	$\Gamma = \lvert\Gamma\rvert e^{j\varphi}$		OSV
	$\lvert\Gamma\rvert$	$\varphi = \angle\Gamma$	
 $Z = R + jX$	$\sqrt{\frac{(R-Z_0)^2+X^2}{(R+Z_0)^2+X^2}}$	$\tan^{-1}\left(\frac{X}{R-Z_0}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{X}{R+Z_0}\right)$	$\frac{1+\lvert\Gamma\rvert}{1-\lvert\Gamma\rvert}$
 prilagođeni teret	0	nevažan	1
 kratki spoj	–1	±180°	∞
 otvoreni krug	1	0°	∞
	1	$\pm 180° - 2\tan^{-1}\frac{X}{Z_0}$	∞
	1	$\pm 180° + 2\tan^{-1}\frac{X}{Z_0}$	∞

U tablici 3.2 prikazane su vrijednosti impedancije, koeficijenta refleksije i odnosa stojnih valova za terete koji se nerijetko nalaze u praksi

3.5. Smithov dijagram

Prilikom rješavanja zadaća iz prijenosnih linija nerijetko se pojavljuje potreba za izračunavanjem ulazne impedancije linije opterećene proizvoljnom impedancijom tereta. Primjerice, u pravokutnome koordinatnom sustavu kompleksne impedancijske ravnine vrlo je nepraktično prikazivati impedanciju praznoga hoda (beskonačna impedancija) jer bi za to bio potreban neizmjerno velik komad papira. No u odjeljku 3.3. pokazano je da modul koeficijenta refleksije ne prelazi jediničnu vrijednost za bilo koju pasivnu impedanciju pa se tako za $Z \to \infty$ dobiva konačna vrijednost koeficijenta refleksije ($\Gamma = +1$). Iz toga se rodila ideja [8] da se impedancija $Z = R + jX$ prikaže u ravnini koeficijenta refleksije preko transformacije (3–43)

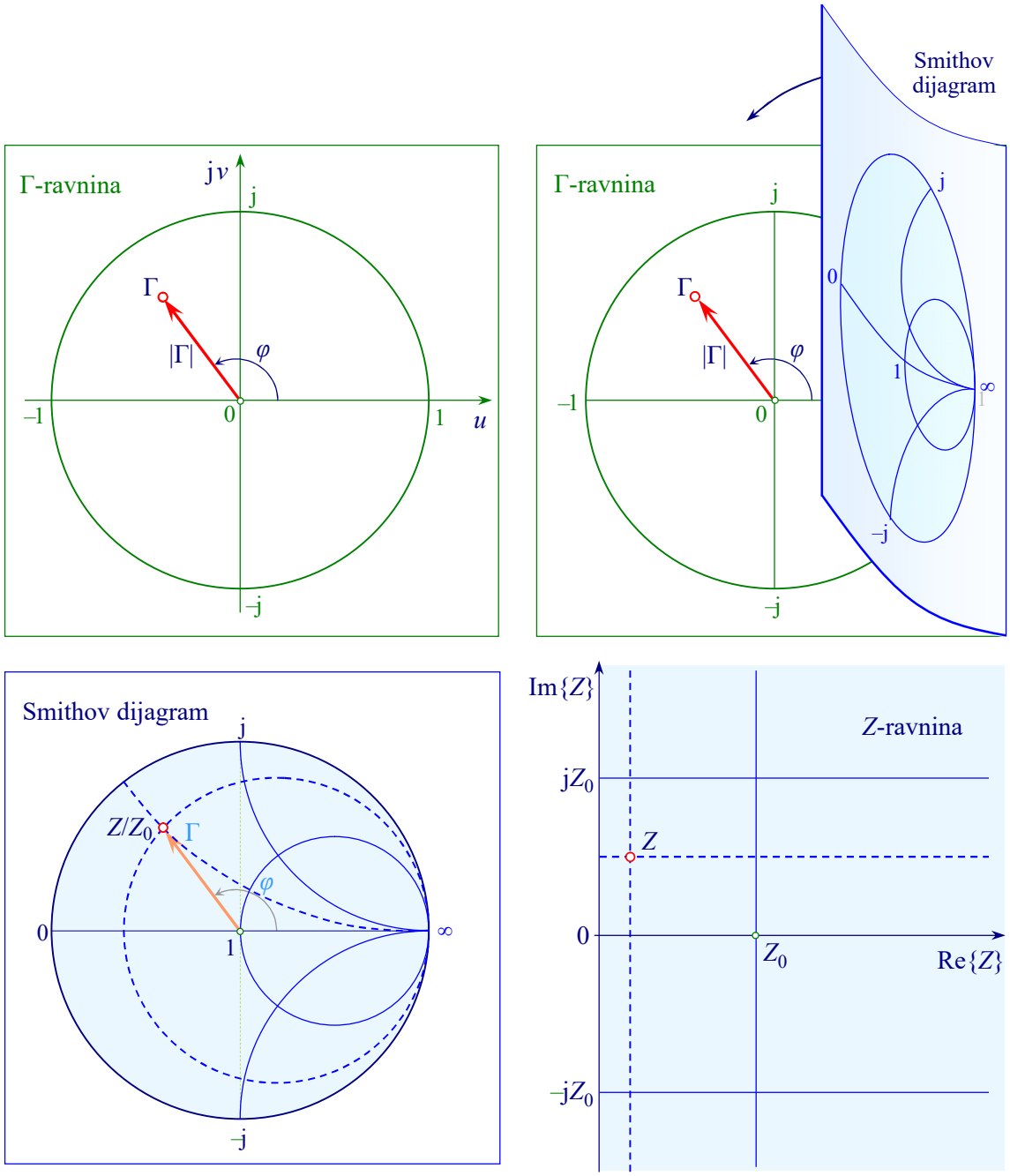
$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}, \tag{3–79}$$

gdje je Z_0 karakteristična impedancija prijenosne linije, odnosno impedancija normiranja. To je ustvari *Möbiusova* transformacija koja za jednu vrijednost impedancije daje jednu vrijednost koeficijenta refleksije (vidjeti dodatak F). Tom se transformacijom kružnica uvijek preslikava u kružnicu, gdje je pravac poseban slučaj kružnice beskonačnog polumjera. Inverznim postupkom, iz poznatog koeficijenta refleksije dobiva se normirana impedancija kao

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}. \tag{3–80}$$

Na slici 3.16 prikazan je koeficijent refleksije kao kompleksni broj, koji se bilježi kao

$$\Gamma = \lvert\Gamma\rvert e^{j\varphi}. \tag{3–81}$$



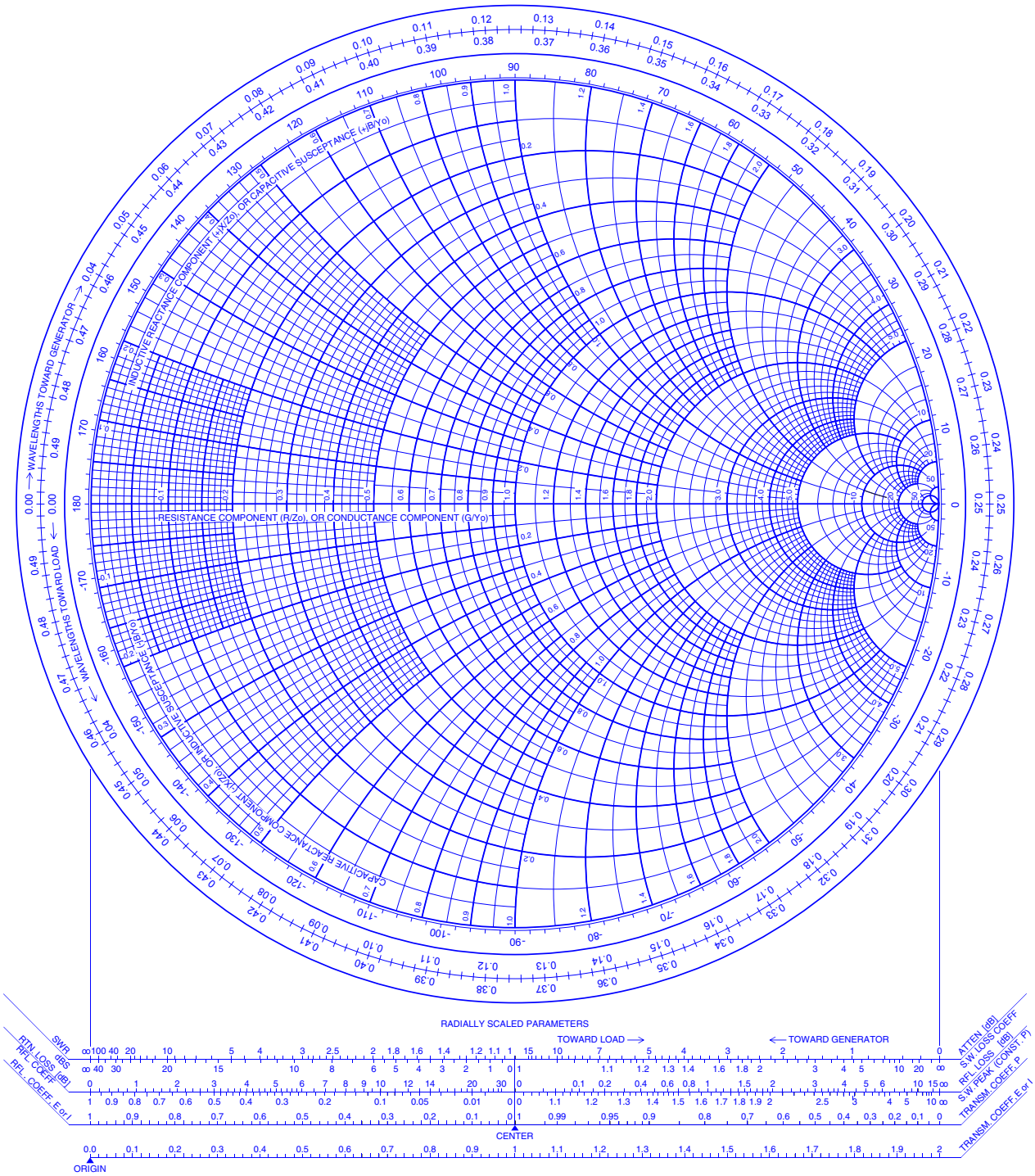
Slika 3.16. Smithov dijagram nastaje konformnim preslikavanjem poluravnine impedancija pozitivnog realnog dijela u jediničnu kružnicu koeficijenta refleksije (pasivne impedancije). Sastoji se od porodica ortogonalnih kružnica koje odgovaraju konstantnim realnim i imaginarnim dijelovima normirane impedancije u desnoj poluravnini kompleksne z-ravnine

Ako se koordinatne osi na slici 3.16 označe s u, odnosno jv, onda je

$$\Gamma = u + \mathrm{j}v\,. \tag{3–82}$$

S druge strane, pripadajuća normirana impedancija $z = Z/Z_0$ može se rastaviti na realni dio r i imaginarni dio x pa iz izraza (3–79) izlazi

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1} = \frac{r+\mathrm{j}x-1}{r+\mathrm{j}x+1}\,. \tag{3–83}$$



Slika 3.17. Jedan od mogućih prikaza Smithova dijagrama

Uvrštenjem izraza (3–82) u (3–83) dobivaju se dvije jednadžbe, jedna za realni dio i druga za imaginarni dio normirane impedancije:

$$\left(u-\frac{r}{r+1}\right)^2+v^2=\frac{1}{(r+1)^2}, \tag{3–84}$$

$$(u-1)^2+\left(v-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}. \tag{3–85}$$

Za konstantne vrijednosti r i x, jednadžbe (3–84) i (3–85) postaju jednadžbe kružnica koje tvore osnovu Smithova dijagrama.

Otuda se vidi da je Smithov dijagram zapravo grafičko sredstvo koje upućuje na izravnu vezu između impedancije i pripadajućeg koeficijenta refleksije i obratno, na prijenosnoj liniji bez gubitaka poznate karakteristične impedancije.

Sve vrijednosti impedancije pozitivnog realnog dijela moraju ležati unutar područja omeđenog kružnicom $|\Gamma| = 1$, kao što je prikazano na slici 3.16. Toj kružnici odgovara vrijednost normiranog otpora $r = 0$ pa se jednadžba (3–82) svodi se na

$$u^2 + v^2 = 1. \tag{3–86}$$

To je jednadžba kružnice jediničnog polumjera sa središtem u točki $u = 0$, $v = 0$ pa joj odgovaraju posve reaktivne impedancije koje se nalaze na imaginarnoj osi u kompleksnoj ravnini impedancija. Jednako tako, bilo kojoj drugoj stalnoj vrijednosti r ili x pripada odgovarajuća kružnica unutar jediničnog kruga. Položaji tih kružnica određeni su jednadžbama (3–84) i (3–85). Središtu dijagrama odgovara $\Gamma = 0$, tj. prilagođen teret. Kružnica za $r = 1$ prolazi središtem Smithova dijagrama. S druge pak strane, točki $\Gamma = 1$ pripada beskonačna normirana impedancija, $r \to \infty$, $jx \to \pm\infty$. To je singularna točka višeznačnih vrijednosti parametara r i x.

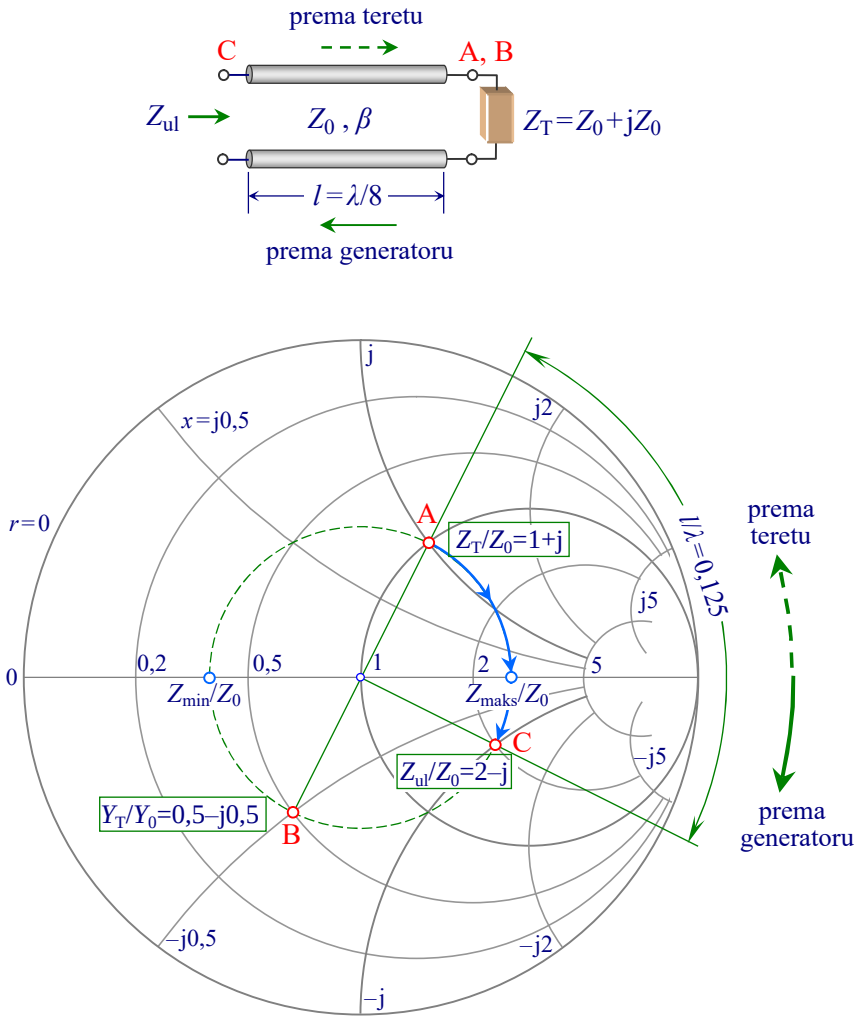
Izvan kružnice za $r = 0$ postoji »pojačanje« refleksije. Dakle, u području izvan Smithova dijagrama amplituda reflektiranoga vala veća je od amplitude upadnoga vala, $|\Gamma| > 1$. To se može dogoditi samo za $r < 0$, tj. kad je vrijednost realnog dijela impedancije tereta negativna pa se r negativne vrijednosti naziva »*negativni otpor*« (odjeljak 8.9).

Da bi postao koristan grafički alat za rješavanje zadaća s prijenosnim linijama, u Smithov dijagram valja ucrtati dovoljno gustu mrežu kružnica stalnih vrijednosti realnih i imaginarnih dijelova normiranih impedancija (slika 3.17).

Tražena normirana vrijednost impedancije može se naći na sjecištu odgovarajućih kružnica realnog i imaginarnog dijela. Na vanjskoj strani Smithova dijagrama nalazi se nekoliko kružnih skala koje upućuju na fazne odnose između dviju točaka na prijenosnoj liniji. Prva vanjska skala pokazuju normiranu duljinu l/λ prijenosne linije za smjer prema generatoru, a druga za smjer prema teretu. Unutarnja skala pokazuje fazni kut koeficijenta refleksije. Ispod Smithova dijagrama prikazano je nekoliko ravnala na kojima se mogu očitati vrijednosti nekih važnijih parametara poput modula koeficijenata refleksije i prijenosa, stojnih valova itd.

Na slici 3.18 prikazano je kako se primjenom Smithova dijagrama može naći vrijednost transformirane impedancije tereta na odsječku prijenosne linije bez gubitaka. Na liniji bez gubitaka veličina $|\Gamma|$ ne ovisi o položaju na liniji. To odgovara koncentričnoj kružnici stalnog odnosa stojnih valova (OSV). Točka A označuje položaj normirane impedancije tereta u Smithovu dijagramu. Kretanjem duž linije od tereta (A) do ulaza u liniju (C) u smjeru prema generatoru, točka se u Smithovu dijagramu kreće po kružnici $|\Gamma|$ u smjeru kazaljke sata. Točkom C određena je ulazna impedanciju koja odgovara transformiranoj impedanciji tereta. Kut za koji se zakrenula točka jednak je dvostrukoj električnoj duljini linije ($2\beta l$) u skladu s izrazom (3–45). Kretanju prema teretu odgovara zakretanje točke u suprotnome smjeru kazaljke sata. Između točaka A i C na sjecištu kružnice $|\Gamma|$ i realne osi nalazi se položaj maksimuma (3–54a). Položaj minimuma nalazi se u suprotnoj točki (3–54b).

Da bismo dobili odgovor na pitanje zašto opseg koncentrične kružnice u Smithovu dijagramu odgovara baš polovici valne duljine, valja se sjetiti da je Smithov dijagram polarni prikaz kompleksnog koeficijenta refleksije koji označuje omjer kompleksnih amplituda upadnoga i reflektiranoga vala. Zamislimo sad da upadni val prolazi linijom pokraj nekog promatrača na putu prema neprilagođenom teretu. Nakon refleksije na teretu, val se vraća prema promatraču kao reflektirani val. Ukupni fazni pomak na putu od promatrača do tereta i natrag dvostruko je veći od faznog pomaka koji val pretrpi samo na putu od promatrača do tereta. Stoga, primje-



Slika 3.18. Primjena Smithova dijagrama za izračun ulazne impedancije odsječka prijenosne linije

rice, za refleksiju od tereta koji je od promatrača udaljen pola valne duljine ukupni fazni pomak iznosi punih 360 (ili 2π radijana). Udalji li se referentna ravnina od tereta za pola valne duljine, doći će do dodatnog faznog pomaka od 360 ili 2π radijana. To odgovara zakretu od punog kruga u ravnini koeficijenta refleksije, tj. u Smithovu dijagramu. Otuda koeficijent refleksije tereta, koji je udaljen upravo jednu cijelu valnu duljinu, pretrpi fazni pomak od 720 ili 4π radijana jer duljina ukupnog prevaljenog puta iznosi dvije valne duljine. Pritom, u točki $\Gamma = 1$, koeficijent refleksije ulazne impedancije prelazi u drugu Riemannovu ravninu. Drugim riječima, uzduž linije, impedancija se ciklički ponavlja svakih pola valne duljine, a broj poluvalnih duljina odgovara broju punih okreta.

Nasuprot točki normirane impedancije na kružnici konstantnog odnosa stojnih valova leži točka recipročne vrijednosti normirane impedancije. To je točka *normirane admitancije*. Stoga se u Smithovu dijagramu mogu istodobno prikazivati i impedancije i admitancije. Pri radu s admitancijama Smithov dijagram valja samo zakrenuti oko središta za 180°, a *smjer prema generatoru*, odnosno *smjer prema teretu* ostaje nepromijenjen. Sad kružnice konstantnog normiranog otpora i konstantne normirane reaktancije postaju kružnicama konstantne normirane vodljivosti g, odnosno konstantne normirane susceptancije b.

Za lakše razumijevanje toga svojstva Smithova dijagrama, valja se sjetiti da je normirana admitancija y jednaka recipročnoj vrijednosti normirane impedancije z, pa invertiranjem izraza (3–80) izlazi

$$y = g + \mathrm{j}b = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} = \frac{1+(-\Gamma)}{1-(-\Gamma)}.$$

Dakle, ako se Γ zamijeni s $(-\Gamma)$ vrijedi formula (3–80) za impedancije. Drugim riječima, invertiranje normirane impedancije ekvivalentno je zakretanju Smithova dijagrama za 180° (ili π radijana) jer se $-\Gamma$ može napisati kao $\Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$. Admitancijski je prikaz posebno koristan prilikom paralelnog spajanja impedancija na prijenosnu liniju (vidjeti odjeljke 6.1. i 6.2).

3.6. Metoda perturbacije za izračunavanje koeficijenta prigušenja na liniji s gubitcima

Izrazi za prigušenje na liniji mogu se naći primjenom metode perturbacije koja se zasniva na pretpostavci da se unošenjem malih gubitaka u prijenosnu strukturu ne stvaraju znatniji poremećaji polja u odnosu na slučaj bez gubitaka. Stoga se za izračunavanje gubitaka mogu uporabiti izrazi za polja u strukturi s idealnim vodičima i dielektrikom bez gubitaka.

U odjeljku 3.3.4. pokazano je da tok snage $P(z)$ koja se prenosi linijom u smjeru osi $\hat{z}$ opada s faktorom $\mathrm{e}^{-2\alpha z}$. Ako je p_{dis} disipirana snaga po jedinici duljine, onda iz zakona očuvanja energije pad snage P po jedinici duljine mora biti upravo jednak p_{dis}, tj.

$$p_{\mathrm{dis}}(z) = -\frac{\partial P(z)}{\partial z}. \tag{3–87}$$

Sad se koeficijent prigušenja prijenosne linije može izraziti kao

$$\alpha = -\frac{1}{2P(z)}\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{p_{\mathrm{dis}}(z)}{2P(z)} = \frac{p_{\mathrm{dis}}(z=0)}{2P_0}, \tag{3–88}$$

gdje je P_0 snaga na koordinati $z = 0$. Dakle, α se može odrediti kad su na nekoj koordinati linije z poznati snaga P koja se prenosi i gubitci snage po jedinici duljine, p_{dis}.

Druga jednostavna metoda za praktično određivanje gubitaka u vodičima *TEM*-linija temelji se na Wheelerovu pravilu prirasta induktiviteta [2], [11]. U odjeljku 2.10.2, izraz (2–198) pokazuje da se gubitci snage u dobrom vodiču površine presjeka S od jednog četvornoga metra mogu izračunati preko tangencijalnog magnetskog polja kao

$$P_{\mathrm{dis}} = \frac{R_{\mathrm{s}}}{2}\int_S \left|\vec{J}_{\mathrm{s}}\right|^2 \mathrm{d}S = \frac{R_{\mathrm{s}}}{2}\int_S \left|\vec{H}_{\tan}\right|^2 \mathrm{d}S \quad \mathrm{W/m^2}. \tag{3–89}$$

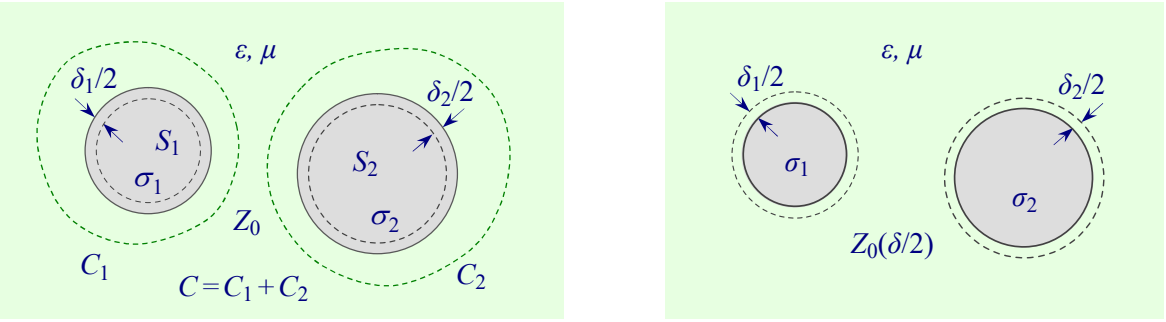
Otuda su gubitci snage po jedinici duljine

$$p_{\mathrm{dis}} = \frac{R_{\mathrm{s}}}{2}\int_C \left|\vec{H}_{\tan}\right|^2 \mathrm{d}l \ \mathrm{W/m}, \tag{3–90}$$

gdje je krivuljni integral uzet na krivulji C koja obuhvaća sve vodiče u njihovom presjeku, slika 3.19a). Sad se primjenom izraza (3–24) može izračunati raspodijeljeni induktivitet linije kao

$$L = \frac{\mu_0}{|I|^2}\int_S \left|\vec{H}_{\tan}\right|^2 \mathrm{d}S, \tag{3–91}$$

uz pretpostavku da su vodiči savršeni. Integracija se obavlja po poprečnom presjeku S dielektričnog dijela linije. Ako se dopuste mali ali konačni gubitci vodiča, onda će i magnetsko polje u vodičima biti konačno pa će se raspodijeljeni induktivitet u izrazu (3–91) povećati za mali



a) b)

Slika 3.19. Pravilo prirasta induktiviteta: **a)** izvorni problem; **b)** problem s perturbacijom

prirast ΔL. Kao što je objašnjeno u poglavlju 2, polja brzo trnu prodiranjem u vodič pa se integral po dubini vodiča može izračunati kao

$$\Delta L = \frac{\mu_0 \delta}{2|I|^2} \int_C \left|\vec{H}_{\tan}\right|^2 \mathrm{d}l \,, \tag{3–92}$$

jer integral u dubinu vodiča (smjer $\hat{z}$) daje

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2z/\delta} \mathrm{d}z = \frac{\delta}{2},$$

gdje je $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}$ dubina prodiranja. Za permeabilnost vodiča uzeta je permeabilnost vakuuma μ_0, što približno vrijedi za sve metale. Sad se disipirana snaga po jedinici duljine može izraziti kao funkcija prirasta induktiviteta

$$p_{\mathrm{dis}} = \frac{R_{\mathrm{s}}|I|^2 \Delta L}{\mu_0 \delta} = \frac{|I|^2 \Delta L}{\sigma \mu_0 \delta^2} = \frac{1}{2}|I|^2 \omega \Delta L \,, \tag{3–93}$$

gdje je $R_{\mathrm{s}} = \sqrt{\omega\mu_0/(2\sigma)} = 1/(\sigma\delta)$ površinski otpor vodiča. Sad se s pomoću izraza (3–88) konačno može izračunati koeficijent prigušenja kao

$$\alpha_{\mathrm{c}} = \frac{p_{\mathrm{dis}}}{2P} = \frac{\omega \Delta L}{2Z_0}, \tag{3–94}$$

jer je $P = |I|^2 Z_0/2$ ukupni tok snage duž linije karakteristične impedancije Z_0. U izrazu (3–94), veličina ΔL pokazuje za koliko će porasti raspodijeljeni induktivitet linije kad se s vodiča odstrani sloj debljine $\delta/2$.

Karakteristična impedancija linije može se izraziti primjenom izraza (3–20) kao

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L}{\sqrt{LC}} = L v_{\mathrm{f}} \,, \tag{3–95}$$

gdje je v_{f} fazna brzina vala, pa se izraz (3–94) svodi na

$$\alpha_{\mathrm{c}} = \frac{\beta \Delta Z_0}{2Z_0}, \tag{3–96}$$

gdje je ΔZ_0 promjena karakteristične impedancije linije nakon što se s njezinih vodljivih zidova odstrani sloj debljine $\delta/2$, kao što je prikazano na slici 3.19b).

Koliko je karakteristična impedancija osjetljiva na promjenu debljine vodiča može se utvrditi razvojem izraza za karakterističnu impedanciju u Taylorov red oko vrijednosti Z_0, tj.

$$Z_0\left(\frac{\delta}{2}\right) \simeq Z_0 + \frac{\delta}{2}\frac{\mathrm{d}Z_0}{\mathrm{d}l}, \tag{3–97}$$

gdje su zadržana samo prva dva člana Taylorova reda. Veličina $Z_0(\delta/2)$ odnosi se na karakterističnu impedanciju linije, čijim je vodičima odstranjen površinski sloj debljine $\delta/2$ u smjeru dimenzije l koja gleda u dubinu vodiča, slika 3.19b). Odgovarajući prirast karakteristične impedancije iznosi

$$\Delta Z_0 = Z_0\left(\frac{\delta}{2}\right) - Z_0 \simeq \frac{\delta}{2}\frac{\mathrm{d}Z_0}{\mathrm{d}l}.$$

Sad iz izraza (3–96) izlazi posebno korisna formula

$$\alpha = \frac{\beta\delta}{4Z_0}\frac{\mathrm{d}Z_0}{\mathrm{d}l} = \frac{R_\mathrm{s}}{4Z_0\eta}\frac{\mathrm{d}Z_0}{\mathrm{d}l}, \tag{3–98}$$

gdje je η intrinzična impedancija dielektričnog sredstva u liniji. To je jedna od najpraktičnijih formula o prirastu induktiviteta jer je za većinu prijenosnih linija obično poznat izraz za karakterističnu impedanciju u ovisnosti o geometriji prijenosne strukture.

Razmotrimo primjer gubitaka u vodiču suosne linije čija je karakteristična impedancija zadana analitičkim izrazom (3–34) kao

$$Z_0 = \frac{\eta}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

Izravnom primjenom formule (3–98) dobiva se

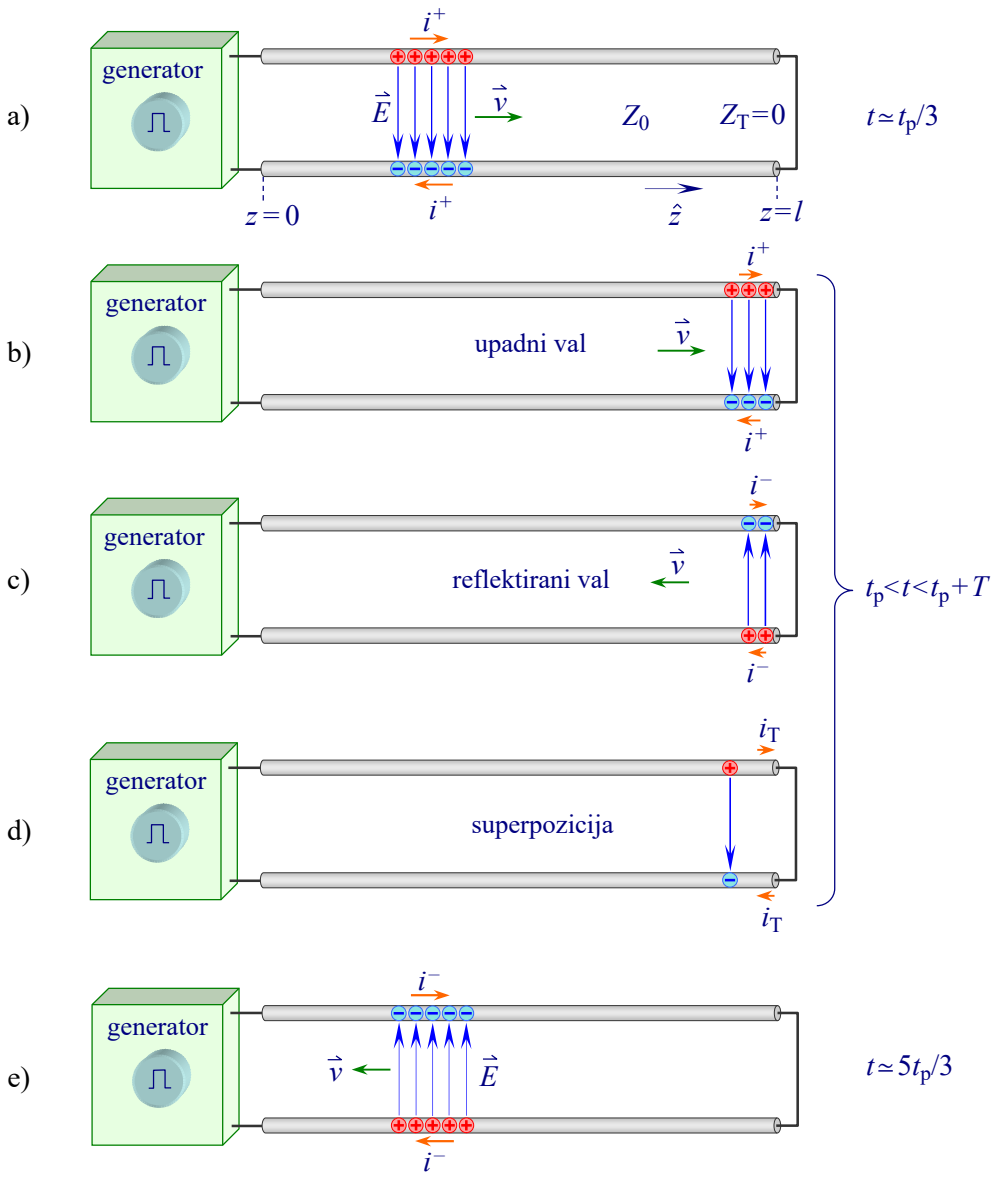
$$\alpha_\mathrm{c} = \frac{R_\mathrm{s}}{2Z_0\eta}\frac{\mathrm{d}Z_0}{\mathrm{d}l} = \frac{R_\mathrm{s}}{4\pi Z_0}\left(\frac{\mathrm{d}\ln b/a}{\mathrm{d}b} - \frac{\mathrm{d}\ln b/a}{\mathrm{d}a}\right) = \frac{R_\mathrm{s}}{4\pi Z_0}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right).$$

To je istovjetno rezultatu (3–35a) iz teorije polja. Negativni predznak druge derivacije dolazi otuda što se derivacija po unutarnjem vodiču mora uzeti u suprotnome smjeru.

3.7. Impulsi na prijenosnoj liniji

Prijenosne se linije sve više rabe za prijenos digitalnih ili impulsno kodiranih informacija. Stoga ćemo razmotriti neke jednostavne primjere uz primjenu dosadašnjih saznanja o rasprostiranju naponskih i strujnih valova na prijenosnoj liniji [5], [10].

Da bismo dobili intuitivnu sliku o zbivanjima na prijenosnoj liniji prilikom rasprostiranja električnog impulsa razmotrimo sljedeći primjer. Na slici 3.20 prikazan je odsječak idealne *TEM*-prijenosne linije, koji je na kraju kratko spojen, a na ulazu je pobuđen signalom pravokutnoga valnog oblika. Ako je duljina linijskog odsječka tako odabrana da je $l = vt_\mathrm{p}$, onda će električnom impulsu trajanja T trebati vrijeme t_p da stigne od generatora, gdje je stvoren, do kratkoga spoja na kraju linije krećući se na svome putu stalnom brzinom rasprostiranja v. Oblikovanjem pozitivnog naponskog impulsa, na gornjem vodiču prijenosne linije dolazi do gomilanja pozitivnog naboja, a na donjem se vodiču istodobno na istoj koordinati ($z = 0$) nagomilava jednaka količina negativnog naboja. Taj »paket« naboja duljine vT dalje putuje stalnom brzinom v. Na slici 3.20a) impuls je prikazan u trenutku $t = t_\mathrm{p}/3$. Strelice koje povezuju pozitivan i negativan naboj označuju silnice električnog polja koje postoji unutar impulsa. Integral električnog polja jednak je naponu između vodiča. Struja teče vodičima samo u području gdje postoji napon, a kontinuitet struje uključuje pomačnu struju $\partial\varepsilon\,\bar{E}/\partial t$ na prednjem i stražnjem rubu impulsa. U trenutku t_p prednji rub impulsa stiže do kraja linije, gdje se nalazi kratki spoj. Na slici 3.20b) prikazano je stanje na liniji kratko nakon $t = t_\mathrm{p}$. Rubni uvjet (kratki spoj) traži da napon bude jednak nuli. Da bi napon ostao jednak nuli u razdoblju $t_\mathrm{p} < t < t_\mathrm{p} + T$ u



Slika 3.20. Refleksija impulsa na kratko spojenoj idealnoj prijenosnoj liniji. **a)** Progresivni impulsni val putuje u smjeru $\hat{z}$. Superpozicijom upadnoga **b)** i reflektiranoga vala **c)** u intervalu $t_p<t<t_p+T$ dobiva se struja **d)** u blizini kratkoga spoja. **e)** Nakon refleksije na kratkome spoju val nastavlja putovati linijom kao reflektirani val u smjeru $-\hat{z}$; taj je val obrnuta replika progresivnog vala

kojem upadni impuls boravi na kratkome spoju, potrebno je stvoriti reflektirani naponski val. Taj val, jednake amplitude ali suprotnog polariteta napona, poništava upadni val na koordinati kratkoga spoja ($z=l$) i dalje nastavlja putovati u suprotnome smjeru osi $\hat{z}$, kao što je prikazano na slici 3.20c). Ukupni napon na liniji u vremenskim trenutcima koji odgovaraju crtežima na slikama 3.20b) i 3.20c) dobiva se superpozicijom upadnoga i reflektiranoga vala. Rezultat je dan na slici 3.20d), a pokazuje da je napon skoro posve poništen. Nakon toga, reflektirani val nastavlja svoj put prema generatoru, kao što je prikazano na slici 3.20e). Taj val stiže do generatora u trenutku $t=2t_p$. Što se nakon toga događa ovisi o unutarnjoj impedanciji generatora. Ako je generator prilagođen karakterističnoj impedanciji prijenosne linije, onda će se reflektirani impuls posve apsorbirati u unutarnjem otporu generatora. U protivnom će doći do nove refleksije na impedanciji generatora. Ta će refleksija zatim oblikovati novi progresivni val koji će putovati u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$. Proces se nastavlja sve dok se ne uspostavi stacionarno stanje.

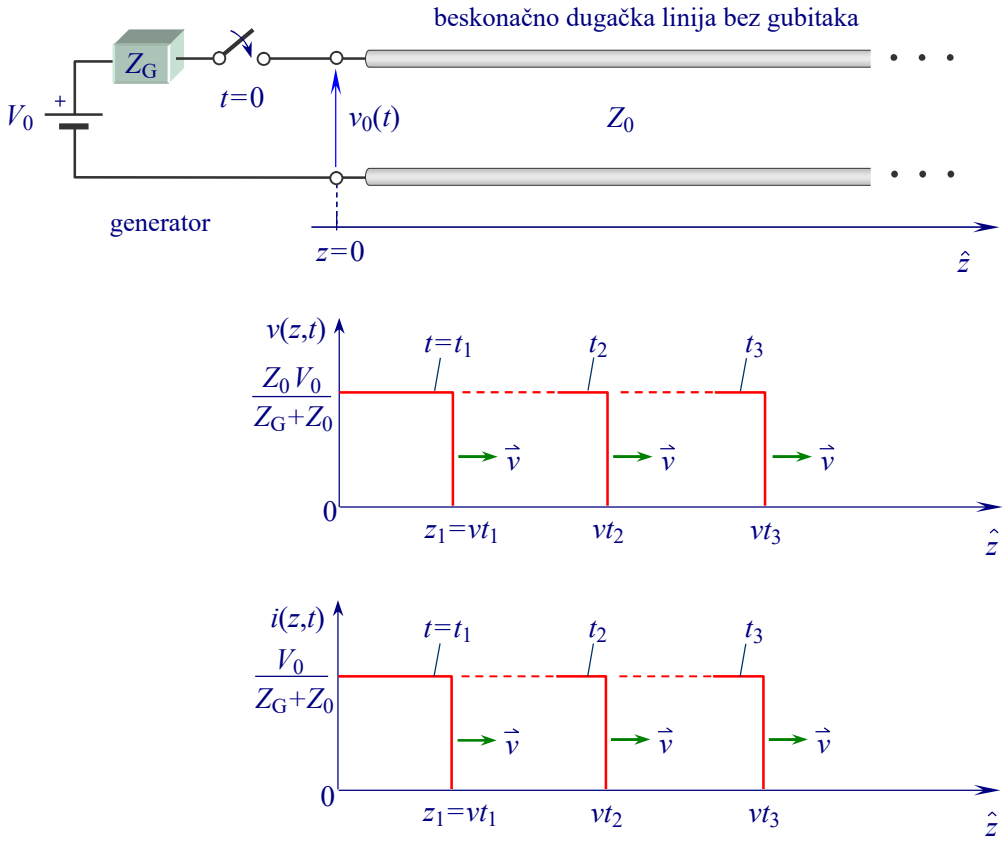
3.7.1. Otporno zaključena prijenosna linija

Da bismo došli do korisnih kvantitativnih rezultata, razmotrimo rasprostiranje skokovitog elektromagnetskog poremećaja na beskonačno dugačkoj prijenosnoj *TEM*-liniji karakteristične impedancije Z_0. Linija je pobuđena naponskim izvorom valnog oblika jediničnog skoka

$$v_G(t) = V_0 u(t), \tag{3–99}$$

gdje je funkcija skoka definirana kao

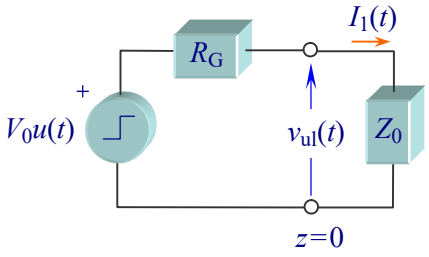
$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } t \geq 0 \\ 0 & \text{za } t < 0. \end{cases} \tag{3–100}$$



Slika 3.21. Napon i struja na prijenosnoj beskonačno dugačkoj prijenosnoj liniji

Opisana se pobuda može ostvariti baterijom elektromotorne sile V_0 i idealnom serijskom sklopkom, kao što je prikazano na slici 3.21. Generator također sadrži frekvencijski neovisnu, tj. realnu unutarnju impedancija R_G. Pretpostavimo da ranije uključenja pobudne veličine u razdoblju $t<0$ u liniji nema pohranjene elektromagnetske energije, tj. da na liniji ne postoje ni napon ni struja. Nakon zatvaranja sklopke, u trenutku $t = 0$, na ulazu linije pojavljuje se elektromagnetski poremećaj oblika naponskog skoka koji se počinje gibati kao progresivni putujući val stalnom brzinom rasprostiranja v u pozitivnom smjeru osi $\hat{z}$. Pritom generator vidi prijenosnu liniju kao otporni teret čija je vrijednost jednaka karakterističnoj impedanciji (slika 3.22). Iz rubnog uvjeta koji traži da napon $v_{ul}(t)$ na prolazu generatora mora biti jednak naponu $v(0, t)$ na liniji na koordinati $z=0$ izlazi

$$v(0,t) = v^+(t) = V_0 \frac{Z_0}{R_G + Z_0} u(t). \tag{3–101}$$



Slika 3.22. Nadomjesni sklop na ulazu prijenosne linije na koordinati $z=0$ za $t>0$

To znači da putujući val na proizvoljnoj koordinati z u trenutku t poprima oblik

$$v(z,t)=v^+\left(t-\frac{z}{v}\right)=V_0\frac{Z_0}{R_G+Z_0}u\left(t-\frac{z}{v}\right), \tag{3–102}$$

gdje je v, brzina kojom val putuje. Odgovarajuća struja na prijenosnoj liniji može se dobiti uvrštenjem izraza (3–102) u izraz (3–14b), tj.

$$i(z,t)=\frac{1}{Z_0}v^+\left(t-\frac{z}{v}\right)=\frac{V_0}{R_G+Z_0}u\left(t-\frac{z}{v}\right). \tag{3–103}$$

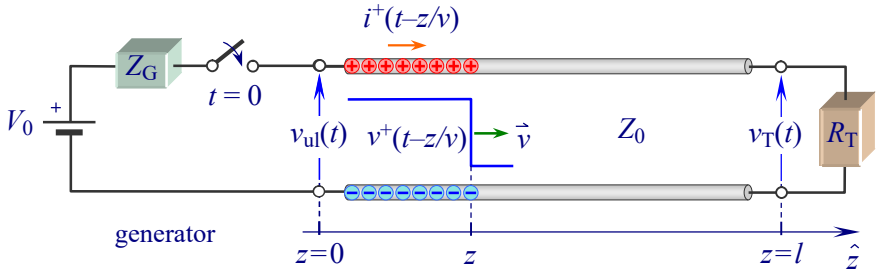
Na slici 3.21 prikazano je i nekoliko faza naponskoga i strujnoga vala koji putuju u duž beskonačno dugačke linije. Odziv na pobudu pravokutnim impulsom trajanja T opisanom u uvodnom dijelu odjeljka (slika 3.20) može se, primjerice, dobiti superpozicijom dviju funkcija skoka, tj. $v_{imp}(t)=V_0u(t)-V_0u(t-T)$.

Uzmimo sad konačnu duljinu opisane prijenosne linije bez gubitaka, koja je na svom kraju opterećena frekvencijski neovisnom impedancijom, kao što je prikazano na slici 3.23. Tako dobiven odsječak prijenosne linije pobuđen je slijeva istim generatorom unutarnjeg otpora R_G, kao na slici 3.21, a zdesna je zaključen otpornim teretom (trošilom) R_T.

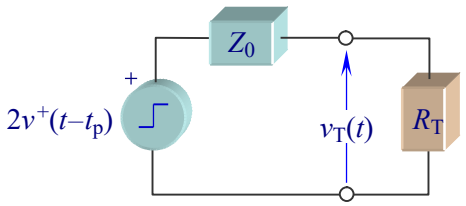
Gibanje putujućih valova, ili razdiobe napona i struje na liniji, od trenutka u kojem je nastao skok napona na ulazu linije pa do trenutka u kojem progresivni val v^+ stiže na kraj odsječka, opisuju izrazi (3–102) i (3–103) kao u slučaju beskonačno dugačke linije. Stoga se prvi putujući val, označen indeksom (1), može izraziti kao

$$v_{(1)}(z,t)=v^+_{(1)}\left(t-\frac{z}{v}\right)=V_0\frac{Z_0}{R_G+Z_0}u\left(t-\frac{z}{v}\right). \tag{3–104}$$

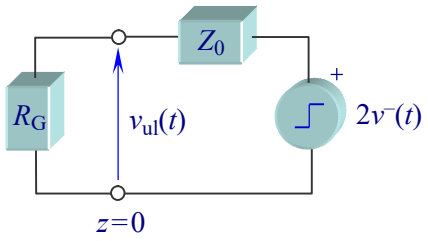
U trenutku $t=l/v=t_p$ fronta toga vala stiže na trošilo na koordinati $z=l$. Budući da trošilo prima energiju iz prijenosne linije kojom se rasprostire putujući val (3–104), ta se linija može nadomjestiti generatorom unutarnje impedancije Z_0 i elektromotorne sile koja je jednaka dvostrukoj vrijednosti napona putujućeg vala (3–104) na koordinati $z=l$, tj.



Slika 3.23. Odsječak prijenosne linije opterećen otpornim trošilom



Slika 3.24. Nadomjesni sklop za opis zbivanja na trošilu na koordinati $z = l$



Slika 3.25. Nadomjesni sklop za opis zbivanja na trošilu na koordinati $z = 0$

$$2v_{(1)}^{+}\left(t-t_p\right)=\frac{2Z_0}{R_G+Z_0}V_0u\left(t-t_p\right). \tag{3–105}$$

Prema slici 3.24, rubni uvjeti na koordinati trošila ($z=l$) daju

$$v_{T(1)}(t)=\left(\frac{2Z_0}{R_G+Z_0}\right)\left(\frac{R_T}{R_T+Z_0}\right)V_0u\left(t-t_p\right). \tag{3–106}$$

Budući da je taj napon ujedno jednak naponu na liniji na koordinati $z = l$, mora se pojaviti reflektirani val koji superpozicijom s upadnim valom zadovoljava rubni uvjet, tj.

$$v_{T(1)}(t)=v_{(1)}(l,t)=v_{(1)}^{+}\left(t-t_p\right)+v_{(1)}^{-}\left(t+t_p\right). \tag{3–107}$$

Taj se reflektirani val (prvi) na koordinati trošila ($z=l$) može izračunati uvrštenjem izraza (3–106) u (3–107). Rezultat je

$$v_{(1)}^{-}\left(t+t_p\right)=\left(\frac{Z_0}{R_G+Z_0}\right)\left(\frac{R_T-Z_0}{R_T+Z_0}\right)V_0u\left(t-t_p\right).$$

Usporedbom s izrazom (3–43) u odjeljku 3.3.1, veličina $(R_T-Z_0)/(R_T+Z_0)$ može se lako prepoznati kao koeficijent refleksije tereta Γ_T.

Na proizvoljnoj koordinati $z<l$, reflektirani val na svom putu u negativnom smjeru osi $\hat{z}$ zadržava oblik kakav ima na koordinati $z=l$, ali kasni za iznos vremena proleta $(l-z)/v$ jer val putuje nalijevo. Stoga je

$$v_{(1)}^{-}\left(t+\frac{z}{v}\right)=\frac{Z_0}{R_G+Z_0}\Gamma_TV_0u\left(t-2t_p+\frac{z}{v}\right). \tag{3–108}$$

Generator ne »osjeća« prisutnost tereta sve do trenutka $t = 2t_p$ kad na priključke generatora stiže prvi reflektirani val. Taj val nosi informaciju o teretu. Ako je, primjerice, R_T manji od Z_0, onda je koeficijent refleksije negativan, pa reflektirani val ima suprotan predznak od upadnoga vala. Za slučaj $R_T>Z_0$, upadni i reflektirani valovi istog su predznaka.

U trenutku nailaska reflektiranoga vala na generator, valja ponovo zadovoljiti rubne uvjete na prolazu generatora za prvi reflektirani val. Stoga ćemo izvor elektromotorne sile zamijeniti kratkim spojem pa od generatora preostaje samo njegov unutarnji otpor. Odgovarajući nadomjesni sklop prikazan je na slici 3.25. Iz njega proizlazi

$$v_{ul(2)}(t)=\frac{2R_G}{R_G+Z_0}v_{(1)}^{-}(t), \tag{3–109}$$

gdje je $v_{ul(2)}(t)$ napon na ulazu linije kad na ulaz stigne prvi reflektirani val.

Da bi bilo moguće zadovoljiti novi rubni uvjet na generatoru, zbog neprekinutosti napona na sučelju generatora s ulazom mreže mora nastati novi (drugi) putujući val koji putuje u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$. Taj se val može napisati kao

$$v^{+}_{(2)}(0,t) = v_{\mathrm{ul}(2)}(0,t) - v^{-}_{(1)}(0,t) = \left(\frac{Z_0}{R_\mathrm{G}+Z_0}\right)\left(\frac{R_\mathrm{T}-Z_0}{R_\mathrm{T}+Z_0}\right)\left(\frac{R_\mathrm{G}-Z_0}{R_\mathrm{G}+Z_0}\right)V_0 u\left(t-2t_\mathrm{p}\right), \quad (3\text{–}110)$$

gdje se član $(R_\mathrm{G}-Z_0)/(R_\mathrm{G}+Z_0)$ može prepoznati kao koeficijent refleksije tereta Γ_G. Indeks 2 upućuje na drugi progresivni val. Za proizvoljnu točku z na liniji taj val upućuje na kašnjenje t_p u odnosu na njegov oblik (3–110) u $z=0$, tj.

$$v^{+}_{(2)}\left(t-\frac{z}{v}\right) = \frac{Z_0}{R_\mathrm{G}+Z_0}\Gamma_\mathrm{T}\Gamma_\mathrm{G}V_0 u\left(t-2t_\mathrm{p}-\frac{z}{v}\right). \quad (3\text{–}111)$$

Kad je unutarnja impedancija generatora prilagođena liniji ($R_\mathrm{G}=Z_0$), tad će generator posve apsorbirati reflektirani val, tj. neće doći do dodatne refleksije na priključcima generatoru.

Promatra li se problem u duljem razdoblju, doći će do niza uzastopnih reflektiranih valova na obama krajevima, pri trošilu i generatoru. Ukupni se napon na liniji može prikazati superpozicijom komponenata progresivnih i reflektiranih putujućih valova, tj.

$$\begin{aligned} v(z,t) = \frac{Z_0}{R_\mathrm{G}+Z_0}V_0\Big[&u\left(t-z/v\right)+\Gamma_\mathrm{T}u\left(t-2t_\mathrm{p}+z/v\right)+\\ &+\Gamma_\mathrm{G}\Gamma_\mathrm{T}u\left(t-2t_\mathrm{p}-z/v\right)+\Gamma_\mathrm{G}\Gamma_\mathrm{T}^2u\left(t-4t_\mathrm{p}+z/v\right)+\\ &+\Gamma_\mathrm{G}^2\Gamma_\mathrm{T}^2u\left(t-4t_\mathrm{p}-z/v\right)+\Gamma_\mathrm{G}^2\Gamma_\mathrm{T}^3u\left(t-6t_\mathrm{p}+z/v\right)+\ldots\Big]. \end{aligned} \quad (3\text{–}112)$$

Slično se dobiva za valni oblik struje na liniji

$$\begin{aligned} i(z,t) = \frac{V_0}{R_\mathrm{G}+Z_0}\Big[&u\left(t-z/v\right)-\Gamma_\mathrm{T}u\left(t-2t_\mathrm{p}+z/v\right)+\\ &+\Gamma_\mathrm{G}\Gamma_\mathrm{T}u\left(t-2t_\mathrm{p}-z/v\right)-\Gamma_\mathrm{G}\Gamma_\mathrm{T}^2u\left(t-4t_\mathrm{p}+z/v\right)+\\ &+\Gamma_\mathrm{G}^2\Gamma_\mathrm{T}^2u\left(t-4t_\mathrm{p}-z/v\right)-\Gamma_\mathrm{G}^2\Gamma_\mathrm{T}^3u\left(t-6t_\mathrm{p}+z/v\right)+\ldots\Big]. \end{aligned} \quad (3\text{–}113)$$

Komponente reflektiranoga vala na liniji bez gubitaka mogu se prikazati kao uzastopne zakašnjele replike prvoga putujućeg vala čije amplitude ovise o koeficijentima refleksije na obama krajevima linije. Izrazi (3–112) i (3–113) pokazuju da u svakom danom trenutku i na svakom danom položaju na liniji postoji konačan broj komponenata. U trenutku $t = 3t_\mathrm{p}$, primjerice, postoje samo tri komponente na ulazu linije na koordinati $z=0$ i samo četiri komponente na izlazu linije na koordinati $z=l$.

Ako su moduli koeficijenata refleksije (generatora i tereta) manji od jedan, amplitude uzastopnih valnih komponenata postaju sve manje i manje pa suma beskonačnoga broja komponenata u izrazima (3–112) i (3–113) konvergira istosmjernim vrijednostima za $t\to\infty$. Istosmjerni napon V_∞ u stacionarnom stanju dobiva se zbrajanjem amplituda svih komponenata putujućih valova za $t\to\infty$, tj.

$$V_\infty = v(z,t\to\infty) = \frac{Z_0V_0}{R_\mathrm{G}+Z_0}\left(\Gamma_\mathrm{T}+\Gamma_\mathrm{G}\Gamma_\mathrm{T}+\Gamma_\mathrm{T}\Gamma_\mathrm{G}^2+\Gamma_\mathrm{G}^2\Gamma_\mathrm{T}^2+\ldots\right) = \frac{Z_0V_0}{R_\mathrm{G}+Z_0}\frac{1+\Gamma_\mathrm{T}}{1-\Gamma_\mathrm{G}\Gamma_\mathrm{T}}. \quad (3\text{–}114)$$

Napon i struja u stacionarnom stanju mogu se jednako tako dobiti izravno izračunavanjem pada istosmjernog napona na trošilu bez prijenosne linije, tj.

$$V_\infty = \frac{Z_0}{R_\mathrm{G}+R_\mathrm{T}}V_0, \qquad I_\infty = \frac{V_0}{R_\mathrm{G}+R_\mathrm{T}}. \quad (3\text{–}115)$$

3.7.2. Kapacitivno i induktivno zaključena prijenosna linija

Ako se prijenosna linija zaključi reaktivnom komponentom poput kapaciteta ili induktiviteta, onda valni oblik reflektiranoga vala neći biti jednak valnom obliku upadnoga vala. Rješenje za reflektirani val može se naći iz rubnog uvjeta koji traži da zbroj upadnoga i reflektiranoga naponskog vala na koordinati $z=l$ mora biti jednak naponu na toj reaktivnoj komponenti.

Pretpostavimo da je linija pobuđena naponom funkcije skoka iz generatora koji je prilagođen prijenosnoj liniji, a da je na drugom kraju zaključena kapacitetom C, koji je na početku prazan, kao što je prikazano na slici 3.26. U razdoblju $0 \le t < t_p$, neće doći do promjena napona na trošilu (tj. napon je jednak ništici), sve dok upadni val oblika

$$v^+(z,t) = \frac{1}{2} V_0 u\left(t - \frac{z}{v}\right) \tag{3–116}$$

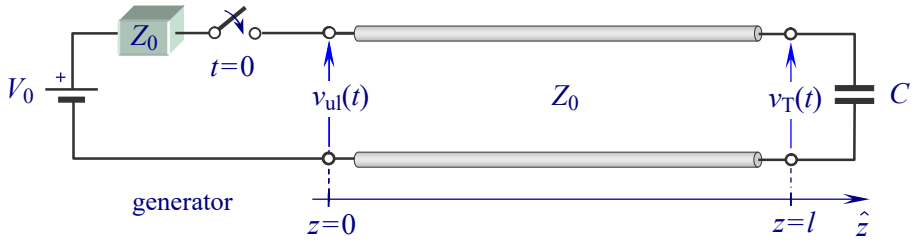
putujući linijom ne stigne do tereta.

U trenutku $t = t_p$ val stiže na kraj linijskog odsječka, gdje pobuđuje »teret« (kapacitet C), kao što je prikazano na slici 3.27. Napon na kapacitetu može se napisati kao

$$v_T(t) = V_0 u\left(t - t_p\right) - Z_0 i_T(t), \tag{3–117}$$

gdje je $i_T(t) = C\,\mathrm{d}v_T/\mathrm{d}t$ pa izlazi

$$Z_0 C \frac{\mathrm{d}v_T}{\mathrm{d}t} + v_T(t) = V_0 u\left(t - t_p\right). \tag{3–118}$$



Slika 3.26. Prijenosna linija bez gubitaka zaključena kapacitetom

Partikularno rješenje jednadžbe (3–118) za $t > t_p$ iznosi V_0, a prijelazna pojava ima oblik $A\mathrm{e}^{t/(Z_0C)} = A\mathrm{e}^{t/\tau_C}$, gdje je $\tau_C = Z_0 C$ vremenska konstanta kojom se kapacitet C puni nabojem. Iz uvjeta $v_T = 0$ za $t = t_p$ može se izračunati konstanta A. Rezultat je

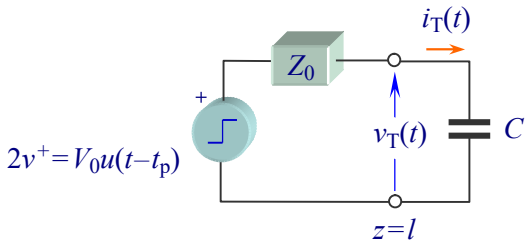
$$v_T(t) = V_0 u\left(t - t_p\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-t_p}{\tau_C}}\right). \tag{3–119}$$

Budući da reflektirani val na koordinati $z = l$ mora zadovoljiti uvjet $v_T(t) = v^+(t) + v^-(t)$, iz izraza (3–116) i (3–119) izlazi

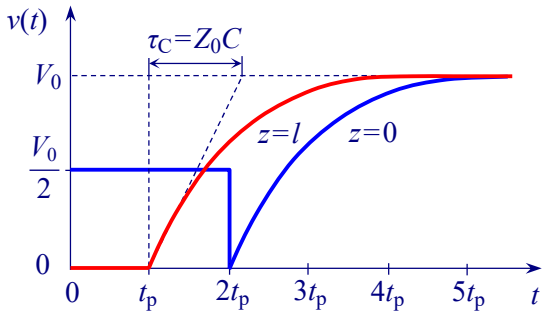
$$v^-(l,t) = V_0 u\left(t - t_p\right)\left(\frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-\frac{t-t_p}{\tau_C}}\right). \tag{3–120}$$

Za vrijednosti $z < l$, povratni val v^- kasni za svojom replikom (3–120) točno toliko koliko traje vrijeme proleta, $(l-z)/v$. Stoga funkcija f^- postaje

$$v^-(z,t) = V_0 u\left(t - 2t_p + \frac{z}{v}\right)\left(\frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-\frac{t-2t_p+z/v}{\tau_C}}\right). \tag{3–121}$$



Slika 3.27. Nadomjesni sklop linije opterećene kapacitetom za koordinatu $z=l$



Slika 3.28. Valni oblik napona na generatoru (plavo) i teretu (crveno)

Na strani generatora linija je prilagođena pa povratni val v^- zadovoljava rubne uvjete bez pojave dodatne refleksije. Cjelovito se rješenje dobiva kao zbroj jednadžba (3–116) i (3–121) te pokazuje da, za dovoljno veliko t, napon na bilo kojem mjestu u razdoblju $0 \le z < l$ poprima vrijednost V_0. To je u skladu s fizikalnom intuicijom koja upućuje na to da napon u stacionarnom stanju mora biti jednak istosmjernom naponu generatora u praznome hodu.

Na slici 3.28 prikazani su valni oblici napona na koordinatama $z=0$ i $z=l$ linijskoga odsječka, koji su izračunani primjenom izraza (3–119), odnosno (3–121).

Na slici 3.29 prikazana je prostorna razdioba napona na liniji za tri različita vremenska trenutka. Može se lako uočiti da se u trenutku u kojem upadni val stigne na koordinatu $z=l$ kapacitet ponaša poput kratkoga spoja. Nakon toga, kapacitet se postupno puni nabojem iz struje koja zbog toga slabi. Na kraju prijelazne pojave struja posve iščezne pa napon na kondenzatoru postiže svoju maksimalnu vrijednost koja je jednaka naponu baterije, tj. elektromotornoj sili generatora.

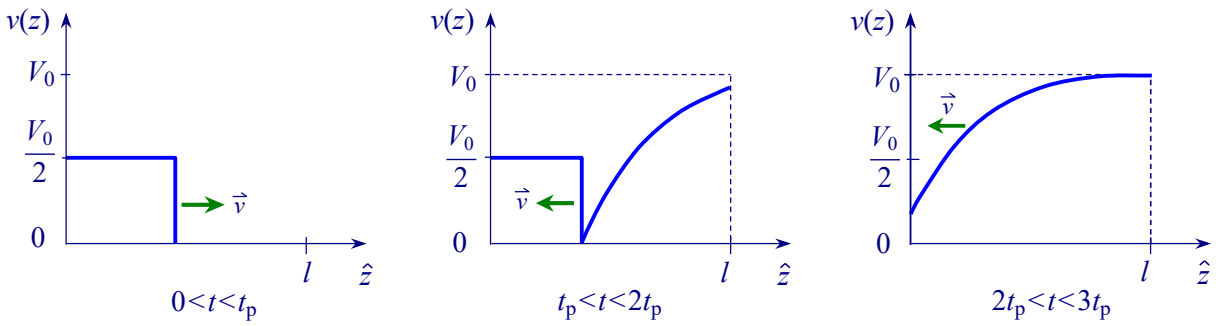
Zamijeni li se kapacitet na slici 3.26 induktivitetom, prvi dio rješenja (3–116) povezan s upadnim valom ostaje nepromijenjen. Na slici 3.30 prikazan je nadomjesni sklop induktivnog tereta. Jednadžba strujnog kruga dobiva se kao zbroj napona u petlji, tj.

$$L\frac{\mathrm{d}i_T}{\mathrm{d}t} + Z_0 i_T(t) = V_0 u\left(t - t_p\right). \tag{3–122}$$

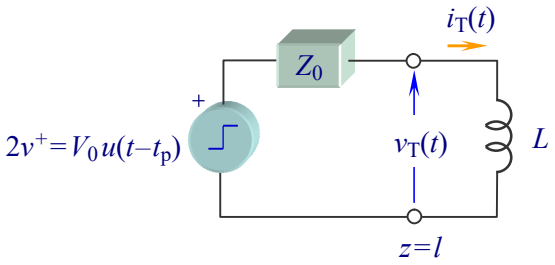
Primjenom rubnog uvjeta, $i_T = 0$ u $t \le t_p$ dobiva se rješenje

$$i_T(t) = \frac{V_0}{Z_0} u\left(t - t_p\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-t_p}{\tau_L}}\right), \tag{3–123}$$

gdje je $\tau_L = L/Z_0$ vremenska konstanta uspona struje u induktivitetu pri pobudi naponom funkcije skoka.



Slika 3.29. Razdioba napon na liniji pobuđenoj naponom funkcije skoka i zaključenoj kapacitetom



Slika 3.30. Nadomjesni sklop induktivno opterećene linije za koordinatu $z=l$

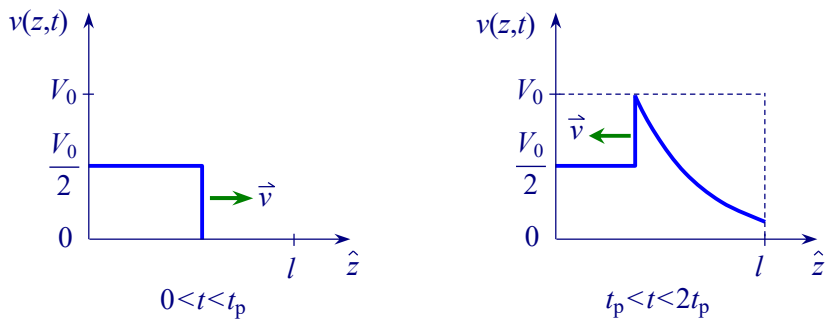
No neprekinutost struje u petlji (na koordinati $z=l$) nalaže $i_T=(v^+ + v^-)/Z_0$ pa izlazi

$$v^-\left(t+\frac{z}{v}\right)=V_0 u\left(t-2t_p+\frac{z}{v}\right)\left(e^{-\frac{t-2t_p+z/v}{\tau_L}}-\frac{1}{2}\right). \qquad (3\text{–}124)$$

Primjenom izraza (3–116) i (3–124), na slici 3.31 prikazana je razdioba napona na liniji za tri različita vremenska trenutka. Valja uočiti da se u trenutku u kojem upadni skok napona stigne na koordinatu $z=l$ induktivitet ponaša poput otvorenog strujnog kruga, a na kraju prijelazne pojave kao kratki spoj.

Iz valnog oblika reflektiranog napona ili ulaznog napona na liniji mogu se odrediti karakter i svojstva impedancije tereta ili diskontinuiteta, a iz vremena odjeka može se odrediti njihova fizička udaljenost ili položaj na liniji, uz uvjet da je pritom poznata brzina rasprostiranja poremećaja (vala) na liniji.

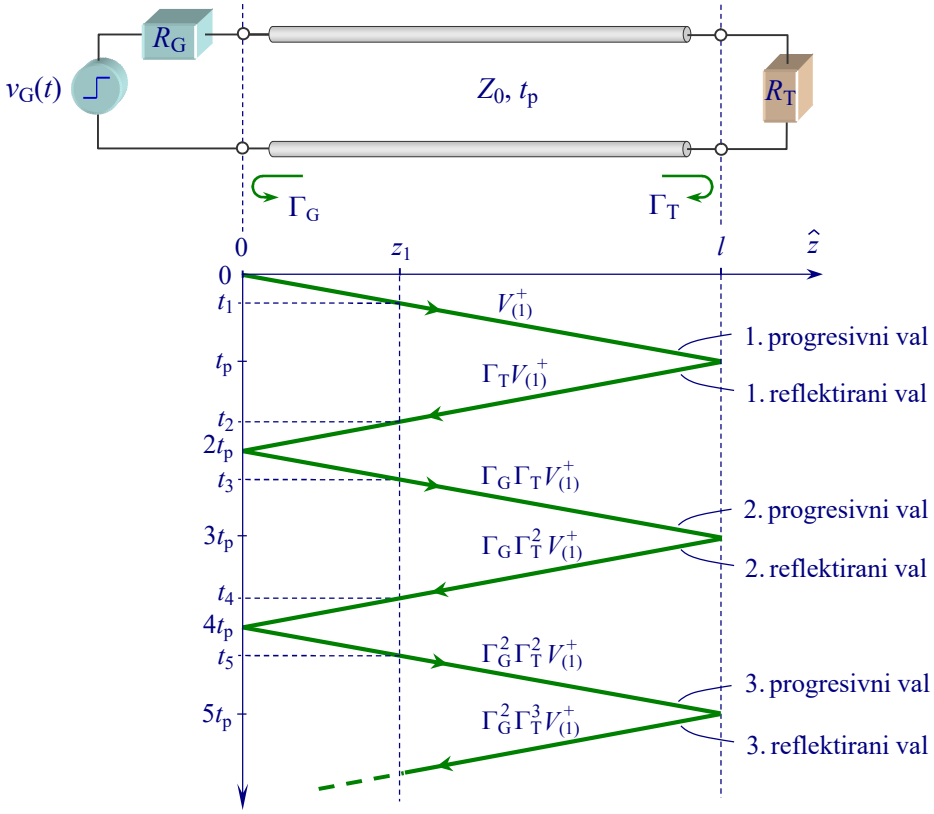
Mjerenjem vremena odjeka ($2t_p$), tj. trenutka u kojem se pojavi prvi reflektirani val, može se odrediti udaljenost tereta ili diskontinuiteta na prijenosnoj liniji. Zato se impulsna pobuda nerijetko rabi u praksi za detektiranje kvarova na prijenosnim linijama i valovodima. Iz oblika i polariteta reflektiranoga vala mogu se odrediti svojstva impedancije tereta. Na tom je načelu zasnovan postupak mjerenja refleksije u vremenskoj domeni (vidjeti odjeljak 9.4.7). Kad se jednom nađe koeficijent refleksije, tad se može odrediti ulazna impedancija prijenosne strukture poput linije i valovoda, tj. može se naći ulazna impedancija mikrovalne mreže. Osnovna prednost postupka mjerenja u vremenskoj domeni leži u jednostavnosti određivanja položaja diskontinuiteta ili tereta na prijenosnoj liniji, za razliku od mjerenja impedancije u frekvencijskoj domeni uporabom heterodinskog analizatora mreža (odjeljak 9.4.4). U osnovi, na istom se načelu zasniva i rad radara za otkrivanje ciljeva u slobodnome prostoru, gdje radarski cilj preuzima ulogu tereta. Iz mjerenja vremena odjeka može se odrediti udaljenost cilja od radara (vidjeti odjeljak 10.3).



Slika 3.31. Razdioba napona na liniji pobuđenoj naponom funkcije skoka i zaključenoj induktivitetom

3.7.3. Refleksijski dijagram

Prijelazna pojava s nizom uzastopnih refleksija na krajevima linijskog odsječka može se grafički prikazati s pomoću *refleksijskog dijagrama* (engl. *reflection diagram* ili *bounce diagram*). Dijagram koji odgovara izrazu (3–112) prikazan je na slici 3.32. Pojedinačne su valne komponente prikazane kosim crtama koje pokazuju proteklo vrijeme t nakon utiskivanja pobudne veličine na ulazu linijskog odsječka u funkciji položaja z na liniji. Na svakom pojedinačnom segmentu dijagrama unesena je amplituda odgovarajuće komponente vala.



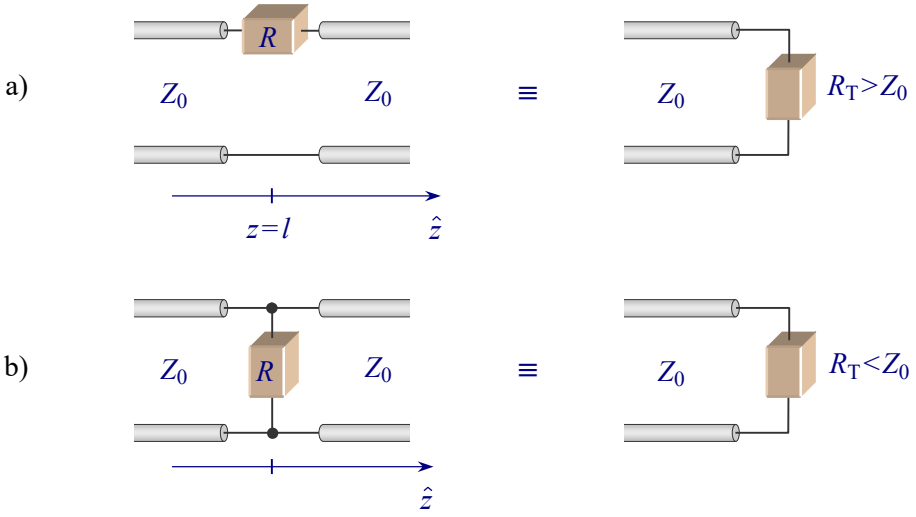
Slika 3.32. Refleksijski dijagram za prijenosnu liniju bez gubitaka s neprilagođenim impedancijama tereta i generatora

Nakon prvoga putujućeg vala $V_{(1)}^+ = V_0 Z_0/(R_G + Z_0)$, sljedeći se naponski val dobiva množenjem prvoga naponskog vala odgovarajućim koeficijentom refleksije (Γ_T ili Γ_G) u skladu s izrazom (3–112). Sljedeći se strujni val pak dobiva množenjem prethodnoga strujnog vala negativom odgovarajućeg koeficijenta refleksije ($-\Gamma_T$ ili $-\Gamma_G$) u skladu s izrazom (3–113).

Refleksijski je dijagram posebno koristan za određivanje položaja elektromagnetskog poremećaja na prijenosnoj liniji u zadanom vremenskom trenutku ili za nalaženje valnog oblika na zadanoj koordinati udaljenosti.

Primjer 3.3. Reflektometar u vremenskoj domeni

Na udaljenosti l od ulaznih priključaka beskonačno dugačke prijenosne linije bez gubitaka karakteristične impedancije 50 Ω (slika 3.21) postavljen je diskontinuitet zbog: a) serijski i b) poprečno spojenog otpora (slika 3.33). Linija je ispunjena homogenim nemagnetičnim dielektrikom relativne permitivnosti 2,25 i pobuđena naponom valnog oblika funkcije skoka iz prilagođenog generatora elektromotorne sile $V_0 = 4$ V. Nailaskom reflektiranoga vala na ulazu linije izmjeren je ukupni napon za slučaj a) 2,4 V, a za slučaj b) 1 V. Potrebno je naći otpor (R) i udaljenost (l) diskontinuiteta, ako reflektirani val stigne na ulaz linije 3ns nakon pojave skoka napona u generatoru.



Slika 3.33. Idealna prijenosna linija s diskontinuitetom na udaljenosti *l*. Diskontinuitet **a)** kao serijski otpor i **b)** kao poprečni otpor. **c)** Odziv ulaznog napona na pobudu oblika funkcije skoka

ljenost između diskontinuiteta i generatora poprima vrijednost

Najprije valja skicirati nadomjesne sklopove serijskog i paralelnog otpornog diskontinuiteta na koordinati $z=l$, slika 3.33a) i b).

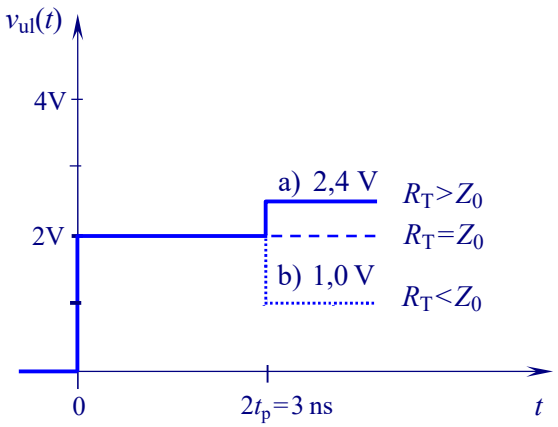
a) Postavljanjem otpora R u seriju s linijom otpor tereta poprima vrijednost $R_T = R + Z_0$ pa iz izraza (3–43) izlazi pozitivan i realan koeficijent refleksije

$$\Gamma_T = \frac{R + Z_0 - Z_0}{R + Z_0 + Z_0} = \frac{R}{R + 2Z_0}.$$

Otuda je napon na diskontinuitetu (2,4V) veći od napona $V^+ = V_0/2 = 2\text{V}$ upadnoga vala, kao što se vidi u odzivu na slici 3.34. Budući da je na diskontinuitetu napon $V_T = V^+ + V^- = V^+(1+\Gamma_T)$, izlazi

$$V_T = \frac{V_0}{2}\left(1 + \frac{R}{R + 2Z_0}\right) = 2{,}4\,\text{V}.$$

Otuda se za slučaj a) konačno dobiva $R = 25\ \Omega$.



Slika 3.34. Odziv napona na pobudu oblika funkcije skoka

b) Na sličan se način za poprečno spojen otpor u liniju ($R_T = R||Z_0$) dobiva (slika 3.34)

$$\Gamma_T = \frac{R \,||\, Z_0 - Z_0}{R \,||\, Z_0 + Z_0} = \frac{-Z_0}{2R + Z_0}.$$

pa uz napon $V_T = 1$ V i tog izraza za slučaj b) izlazi $R = 25\ \Omega$.

Budući da je u homogenom dielektričnom sredstvu prijenosne linije brzina elektromagnetskoga vala izražena kao $v_f = c/\sqrt{\varepsilon_r}$, udaljenost diskontinuiteta od generatora iznosi

$$l = v_f t_p = \frac{2{,}998 \cdot 10^8}{\sqrt{2{,}25}} \frac{3 \cdot 10^{-9}}{2} = 2{,}998 \cdot 10^{-1}\ \text{m} = 30\,\text{cm}.$$

Literatura

[1] K. Kurokawa, *An Introduction to the Theory of Microwave Circuits*, Academic Press, New York, 1969.

[2] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, New York 2012.

[3] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

[4] P. A. Rizzi, *Microwave Engineering - Passive Circuits*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

[5] D. H. Staelin, A. W. Morgenthaler, J. A. Kong, *Electromagnetic Waves*, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.

[6] R. B. Adler, L. J. Chu, R. M. Fano, *Electromagnetic Energy Transmission and Radiation*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

[7] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Waves*, McGraw-Hill, New York, 1961.

[8] P. H. Smith, "Transmission line calculator", Electronics, Vol. 12, No. 1, str. 29-31, January 1939.

[9] E. H. Fooks, R. A. Zakarevičius, *Microwave Engineering Using Microstrip Circuits*, Prentice-Hall, New York, 1990.

[10] S. Ramo, J. R. Whinnery, T. van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1994.

[11] H. A. Wheeler, "Formulas for the skin effect", Proceedings IRE, Vol. 30, Sept. 1942, str. 412-424.

[12] Z. Smrkić, *Mikrovalna elektronika*, Školska knjiga, Zagreb 1986.

4. Valovodi

U poglavlju 2 proučavali smo rasprostiranje ravnih valova u neograničenim dielektricima. Razmatrali smo i pojavu refleksije pri okomitom i kosom nailasku vala na ravne granice s vodičima i dielektricima. U stvarnosti, ne postoje valovi na koje ne djeluju vodiči ili dielektrici, osim ako se ne radi o idealizaciji rasprostiranja radiovalova daleko od površine Zemlje u prostoru između odašiljača i prijamnika. U ovom ćemo poglavlju proučavati vođenje elektromagnetskih valova uz vodljive i dielektrične granice čiji oblik određuje razdiobe polja tih valova. Kad je riječ o vođenom valu tad se ponajprije misli na prijenos energije uzduž prijenosne strukture. Polja vođenih valova čvrsto su povezana sa strujama i nabojima koje ta ista polja induciraju na vodljivim granicama ili ovise o uvjetima refleksije na dielektričnim granicama. Već smo u poglavlju 3 razmatrali kako se elektromagnetski val prenosi dvožičnom linijom. Tad smo našli da se kratko spojena linija ponaša kao geometrijski periodična reaktancija. U ovom ćemo poglavlju tu zamisao najprije proširiti na *planparalelne valovode* (paralelne vodljive ploče), a zatim na *valovode* (šuplje ili dielektrikom ispunjene metalne cijevi koje vode elektromagnetske valove). Predodžba o šupljem valovodu kao mogućoj prijenosnoj strukturi može se razviti na osnovi modela prijenosne linije opterećene kratko spojenim četvrtvalnim stabovima, kao što je prikazano na slici 4.1. Budući da su četvrtvalni stabovi kratko spojeni, njihova je ulazna impedancija beskonačna pa ne opterećuju prijenosnu liniju koja se u ovom slučaju sastoji od dvije savršeno vodljive trake širine w. No poprečno na smjer rasprostiranja vala postoji stojni val; u vodičima stabova teku reaktivne struje, a u prostoru između vodiča pohranjuje se znatna količina elektromagnetske energije. Umetanjem dodatnih stabova, nastaje zatvorena struktura slična metalnoj cijevi pravokutnog poprečnog presjeka, koju nazivamo *pravokutni valovod* [1]-[11], [21].

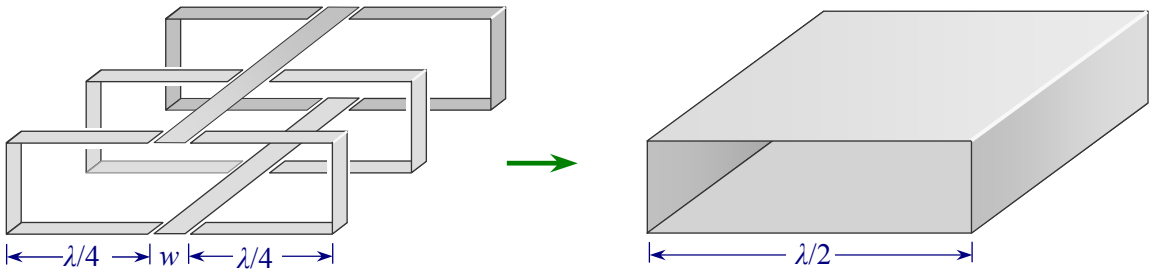
Razmotrimo sad neka svojstva ove nove prijenosne strukture. Ako širina savršeno vodljivih traka (w) teži nuli, onda raspodijeljeni induktivitet linije teži u beskonačnost, a raspodijeljeni kapacitet teži nuli pa karakteristična impedancija u skladu s izrazom

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

teži u beskonačnost. No fizikalna nam intuicija ne daje posve jasan odgovor na pitanje što se događa s brzinom rasprostiranja faze (fazna brzina)

$$v_\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

jer kad $L \to \infty$, tad istodobno $C \to 0$. No može se pokazati da C brže teži nuli negoli što L teži u beskonačnost pa fazna brzina teži u beskonačnost. Objašnjenje za to dano je u poglavlju 2,



Slika 4.1. Razvoj ideje o pravokutnom valovodu s pomoću modela prijenosne linije

gdje je pokazano da fazna brzina vala može poprimiti vrijednosti veće od brzine svjetlosti jer se tom brzinom ne prenosi energija. Sve se to zbiva na frekvenciji za koju je valovod širok točno pola valne duljine. Kao što će se kasnije vidjeti, toj je frekvenciji dan poseban naziv, *zaporna* ili *granična frekvencija* valovoda. Budući da su na toj frekvenciji i fazna brzina i karakteristična impedancija valovoda beskonačne, elektromagnetska se energija ne može prenositi nego samo titra u poprečnome smjeru tvoreći u tom smjeru stojni val.

Kasnije ćemo vidjeti da se i tom prijenosnom strukturom može prenositi elektromagnetska energija iznad odgovarajuće granične ili zaporne frekvencije.

Opisani modeli objašnjavaju samo najjednostavniju vrstu vala. No u valovodima se mogu prenositi i *viši modovi* koje nije jednostavno objasniti izravnom analogijom s dvožičnom prijenosnom linijom. Taj model može poslužiti i za dobivanje nadomjesnog sklopa valovoda s raspodijeljenim parametrima. Fizikalna intuicija navodi na zaključak da se tom »prijenosnom linijom« ne može zatvoriti istosmjerni strujni krug jer je u poprečnome smjeru kratko spojena vodičima. Dakle, valovod se ponaša kao visokopropusni filtar kojim se ispod neke granične frekvencije ne može prenositi energija. U odjeljcima koji slijede vidjet ćemo da se šupljim pravokutnim valovodom energija prenosi dominantnim modom tako da se ravni val uzastopno reflektira na njegovim stijenkama putujući po cik-cak-crti. U drugom su dijelu poglavlja obrađeni dielektrični valovodi i planarne linije te strukture s protusmjernim valovima.

4.1. Planparalelni valovod

Prilikom razmatranja kosog upada vala iz dielektrika na ravnu vodljivu plohu u odjeljku 2.12. utvrđeno je da se energija prenosi duž granične plohe. Također je pokazano da okomito polarizirano električno polje stvara *TE*-val, a da paralelno polarizirano električno polje stvara *TM*-val. Dakle, superpozicijom okomito polariziranog upadnoga i reflektiranoga vala nastaje *TE*-val (slika 2.40a)) čija se polja, prema izrazima (2–229) i (2–230), mogu napisati kao:

$$\vec{E} = \hat{y}\,\mathrm{j}E_0 \sin(k_x x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \tag{4–1}$$

$$\vec{H} = \frac{E_0}{\eta}\left[\hat{x}\frac{-\mathrm{j}\beta}{k}\sin(k_x x) - \hat{z}\frac{k_x}{k}\cos(k_x x)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \tag{4–2}$$

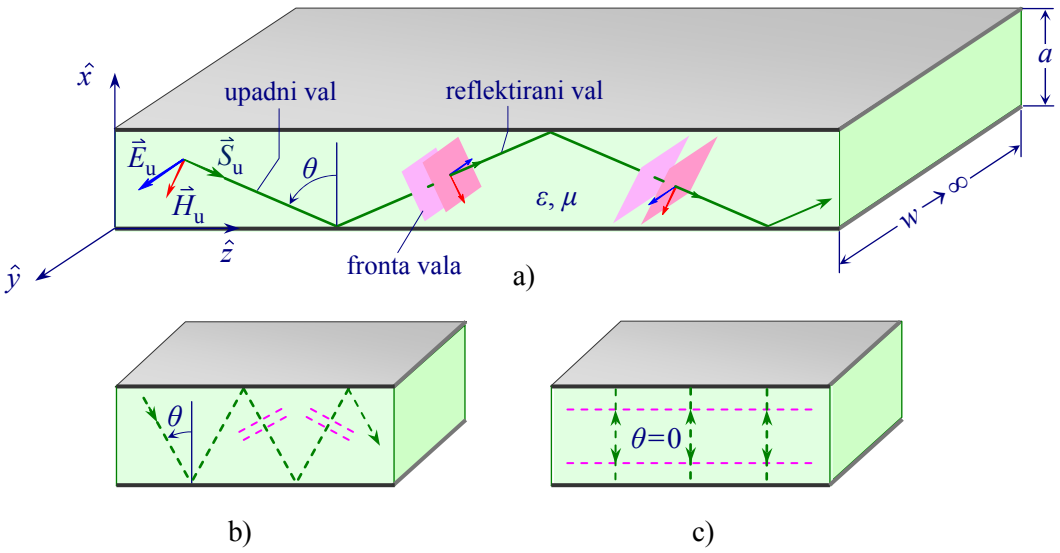
gdje je za ukupnu amplitudu E_0 poprečnog električnog polja uzeta upola manja vrijednost od one u izrazu (2–229). Veličina $\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}k_z$ označuje koeficijent rasprostiranja u smjeru osi $\hat{z}$. Sad komponente valnog broja $k_x = k\cos\theta$ i $\beta = k\sin\theta$ moraju zadovoljiti disperzijsku relaciju

$$k_x^2 + \beta^2 = k^2 = \omega^2\mu\varepsilon. \tag{4–3}$$

Izraz (4–1) pokazuje da se uvijek mogu naći određene diskretne udaljenosti ($x = a$) od donje vodljive plohe na slici 4.2 tako da su i na njima zadovoljeni rubni uvjeti. Primjerice, tangencijalna komponenta električnog polja poprima vrijednost nula za bilo koji cijeli broj m, naime, ako je $k_x a = m\pi$, onda je $\sin(k_x a) = 0$. Taj se uvjet može napisati kao

$$a = \frac{m\pi}{k_x} = \frac{m\pi}{k\cos\theta}. \tag{4–4}$$

Izraženo riječima, ako su poznati: razmak a, višekratnik m i parametri sredstva μ *i* ε, onda je posve određen kut θ pod kojim se val reflektira od vodljivih ploha. Stoga se paralelno s prvom plohom na koordinati $x = a$ može postaviti druga savršeno vodljiva beskonačno tanka ploha, a da pritom ne dođe do promjene razdiobe polja. Ta druga ploha s prvom plohom podržava *TE*-val koji se tad rasprostire u smjeru osi $\hat{z}$. Budući da su obje plohe ravne i međusobno paralelne, nova prijenosna struktura naziva se *planparalelni valovod*. Promijeni li se razmak između ploha, automatski će se promijeniti odgovarajući upadni kut θ.



Slika 4.2. Rasprostiranje *TE*-vala planparalelnim valovodom uzastopnim refleksijama na vodljivim plohama; **a)** $f \simeq 2{,}5 f_c$; **b)** $f \simeq 1{,}1 f_c$; **c)** $f = f_c$ (val se ne rasprostire nego titra u poprečnome smjeru)

U stvarnosti ta se vrsta valovoda može ostvariti s pomoću dviju tankih paralelnih vodljivih ploča, kao što je prikazano na slici 4.2. Rasprostiranje energije može se objasniti nizom uzastopnih refleksija ravnoga vala na donjoj i gornjoj ploči pa val napreduje po cik-cak-crti u smjeru $\hat{z}$. To očito usporava gibanje vala u smjeru te osi jer mu jedna komponenta putuje i poprečnim smjerom trošeći vrijeme višekratnim reflektiranjem. Zbog toga što se val više vremena zadržava u prijenosnoj strukturi rastu gubitci snage u vodičima, a jednako tako raste i količina pohranjene energije, što intuitivno znači da je došlo do smanjenja brzine kojom se prijenosi energija. Postupnim smanjivanjem razmaka između ploča, val se reflektira pod sve oštrijim kutom, $\theta \to 90°$, kao što je prikazano na slici 4.2b). Kad razmak između ploča postane tolik da je $\theta = 90°$, tad fronta vala više uopće ne napreduje u smjeru osi $\hat{z}$ nego samo titra u poprečnome smjeru. To je granični slučaj ($k = k_x = k_c$) pri kojem prestaje prijenos energije duž valovoda, slika 4.2c). Slično se mogu razmatrati svojstva *TM*-vala, samo što je tad magnetsko polje okomito polarizirano na upadnu ravninu, tj. paralelno je s graničnom ravninom.

Da bi unutar planparalelnoga valovoda opstao *TE*-val valja zadovoljiti uvjet $k > k_x$. Budući da se taj uvjet može zadovoljiti za bilo koji cijeli broj m, val se može označiti s TE_m. Ovdje svakom m pripada druga razdioba električnog i magnetskog polja, koju nazivamo modom (od starogrčke riječi *modus* koja znači *oblik u kojem nešto postoji*. Električno polje moda TE_m ima m maksimuma, a magnetsko polje pritom ima m nul-točaka ili m poluvalova stojnoga vala u poprečnome smjeru između vodljivih stijenka valovoda. Budući da je veličina $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ razmjerna frekvenciji, svaki *TE*-mod ima vlastitu *zapornu frekvenciju* (f_c) ispod koje ne postoje uvjeti za prijenos energije. Uvrštenjem izraza (4–4) u jednadžbu (4–3) izlazi

$$f_{cm} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{m}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}, \tag{4–5}$$

gdje se valni broj $k_c = k_x$ obično naziva *zaporni valni broj*.

Val se može rasprostirati samo ako je β u disperzijskoj relaciji (4–3) realna veličina, tj.

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}\,. \tag{4–6}$$

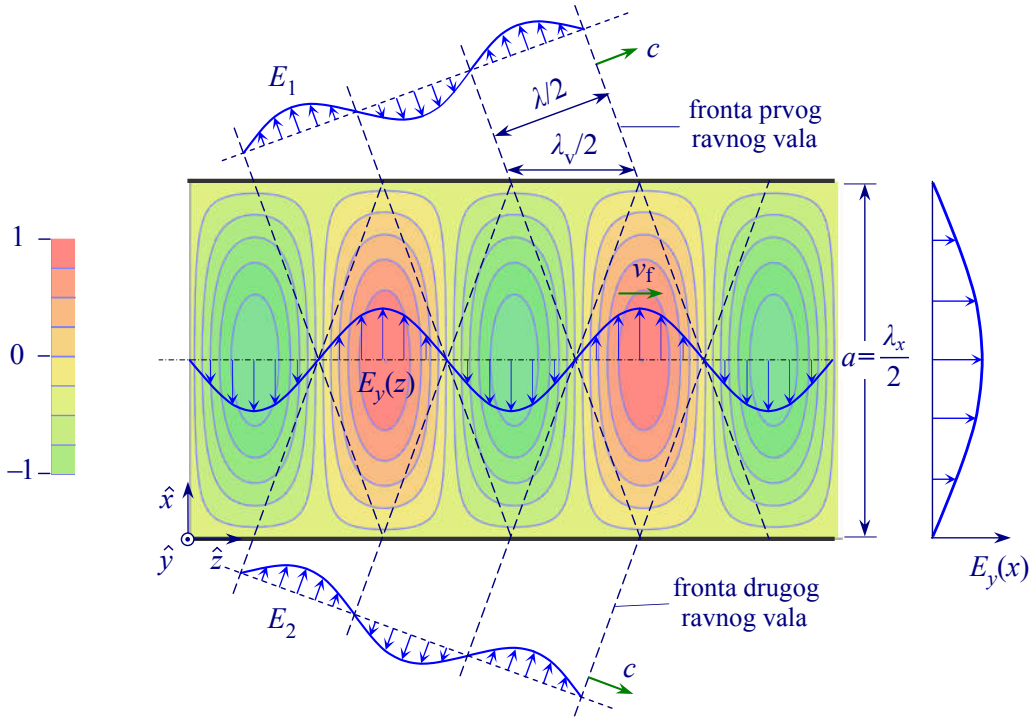
No, na frekvencijama ispod zaporne frekvencije za dani mod, fazni koeficijent β posve je imaginaran pa je koeficijent rasprostiranja $\gamma = j\beta$ posve realan. Stoga se taj koeficijent nerijetko označuje s α, što upućuje na prigušenje »vala«. Tad su polja u valovodu zaporna (ili evanescentna) i intenzitet im eksponencijalno opada u smjeru osi $\hat{z}$. Stoga se ti modovi nazivaju *evanescentni modovi* ili *nerasprostirući modovi*. Svojstva rasprostiranja *TE*-modova analogna su svojstvima odziva visokopropusnog filtra. Stoga se valovod ponaša poput visokopropusne prijenosne strukture s više odziva. Uz to, *svakom modu pripada jedinstven odziv i jedinstvena zaporna frekvencija*.

Budući da stojni val u poprečnome smjeru ($\hat{x}$) ima valnu duljinu, $\lambda_x = 2\pi/k_x$, uvjet (4–4) može se napisati i kao $a = m\lambda_x/2$, gdje je λ_x ujedno i *zaporna valna duljina*. Valna duljina u smjeru $\hat{z}$ iznosi $\lambda_v = 2\pi/\beta$ i naziva se *valna duljina vođenog vala*. Svaki mod ima vlastitu valnu duljinu jer je fazni koeficijent β u izrazu (4–6) funkcija od m. Na slici 4.3 grafički su prikazane relacije između valne duljine ravnoga vala (λ) te prividnih valnih duljina u poprečnome smjeru (λ_x) i uzdužnome smjeru (λ_v) za $m = 1$. Veza između tih triju valnih duljina može se matematički izraziti kao u izrazu (2–111), tj.

$$\left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_v}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 . \tag{4–7}$$

Mod TE_1 prvi je mogući netrivijalni *TE*-mod u opisanoj strukturi. Naime, za $m = 0$ izlazi da je $k_x = 0$ pa izrazi (4–1) i (4–2) pokazuju da planparalelni valovod ne može podržavati polja moda TE_0 jer je za taj slučaj $\vec{E} = \vec{H} = 0$. Pokušajmo fizikalno objasniti tu činjenicu. Budući da uvjet $m = 0$ nužno traži konstantnu jakost električnog polja u poprečnoj dimenziji, u ovoj se strukturi ne mogu zadovoljiti rubni uvjeti za tangencijalnu komponentu električnog polja na graničnim ravninama. Stoga za prvi *TE*-mod (TE_1) vrijedi uvjet

$$a = \frac{\pi}{k_c} = \frac{\lambda_x}{2} . \tag{4–8}$$



Slika 4.3. Razdioba električnog polja E_y u planparalelnome valovodu za TE_1-moda posljedica je superpozicije dvaju ravnih valova koji nailaze na paralelne vodiče pod određenim kutom

Taj uvjet pokazuje da se energija može prenositi valovodom samo ako je razmak a veći od pola valne duljine u sredstvu koje se nalazi između vodljivih ploča. U praktičnim primjenama valovoda, to je sredstvo obično zrak. Za prvi (*najniži*) mod (TE_1) zaporna frekvencija iznosi $f_{c1}=1/(2a\sqrt{\mu\varepsilon})$, a prvi je viši mod ($TE_2$) prisutan na dvostruko višoj frekvenciji, itd. Primjenom izraza (4–5) i (4–6) fazna brzina vala u valovodu može se izraziti kao

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\pi v}{\omega a}\right)^2}} \tag{4–9}$$

gdje je $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ brzina kojom bi se rasprostirao *TEM*-val u sredstvu koje se nalazi u valovodu. Izraz (4–9) pokazuje da je planparalelni valovod disperzivna prijenosna struktura, posebno u blizini zaporne frekvencije pojedinog moda, jer brzina vala znatno ovisi o frekvenciji. Budući da ta vrsta disperzije proizlazi iz geometrije povezane s refleksijom valova na vodljivim plohama, poznata je pod nazivom *geometrijska disperzija*.

U komunikacijskim primjenama disperzija nerijetko stvara izobličenja u prijenosu moduliranih signala. Za idealnu prijenosnu liniju kojom se rasprostire *TEM*-val u zraku, fazni koeficijent definiran je kao $\beta = k = \omega/c$, pa je moguće očekivati prijenos bez izobličenja. Na sreću, za uskopojasne signale u valovodu ne nastaju znatnija izobličenja zbog geometrijske disperzije, osim ako se ne rabe vrlo dugački valovodi (više stotina ili tisuća valnih duljina).

U valovodu bez gubitaka, brzina kojom se giba ovojnica moduliranog signala (brzina kojom se prenosi energija) jednaka je grupnoj brzini (odjeljak 2.5.5), tj.

$$v_g = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)^{-1} = v\sqrt{1 - \left(\frac{m\pi v}{\omega a}\right)^2}\,, \tag{4–10}$$

Izraz (4–9) pokazuje da je fazna brzina u valovodu uvijek veća od v jer je $\beta < k$, a izraz (4–10) pokazuje da je grupna brzina uvijek manja od v. Te su tri brzine međusobno povezane relacijom

$$v^2 = v_f v_g\,. \tag{4–11}$$

Na slici 4.4a) grafički su prikazane fazna i grupna brzina u funkciji frekvencije. Obje su brzine normirane na brzinu $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Na slici 4.4b) prikazana je disperzijska relacija prvih dvaju *TE*-modova (TE_1 i TE_2) planparalelnoga valovoda.

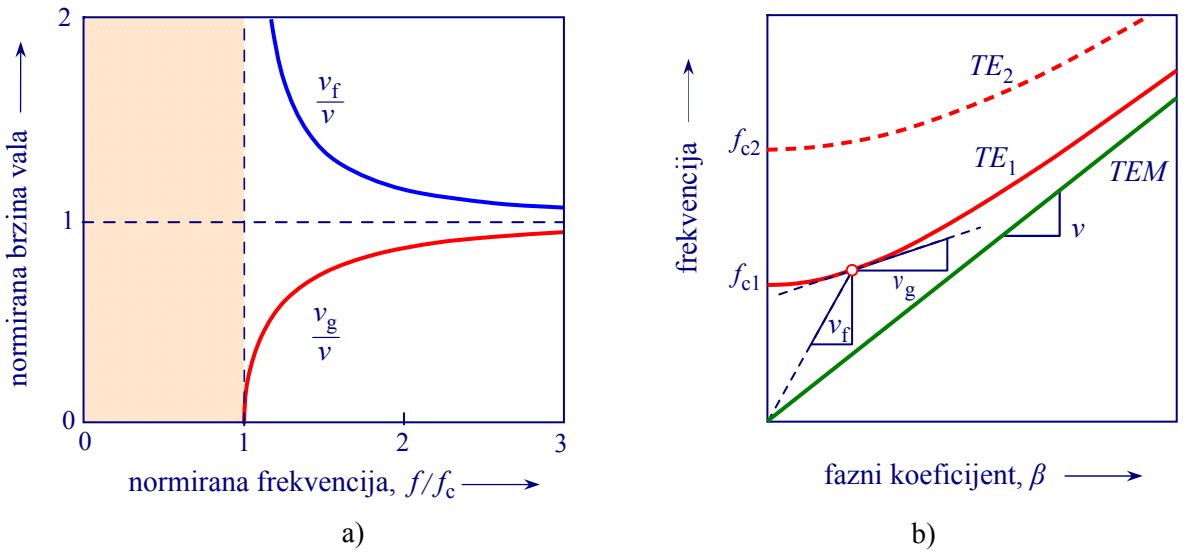
No planparalelnim valovodom mogu se rasprostirati i *TM*-modovi. Ako na slikama 2.40b) i 4.2 električno i magnetsko polje zamijene uloge, onda se dobivaju rješenja (2–238) i (2–239) koja su dualna rješenjima (2–229) i (2–230), kao što je pokazano u odjeljku 2.12.2, tj.

$$\vec{H} = \hat{y}\,H_0 \cos(k_x x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \tag{4–12}$$

$$\vec{E} = \eta H_0 \left[\hat{x}\frac{\beta}{k}\cos(k_x x) + \hat{z}\frac{\mathrm{j}k_x}{k}\sin(k_x x)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \tag{4–13}$$

gdje je H_0 amplituda magnetskog polja. Može se pokazati da i ta polja zadovoljavaju rubne uvjete, $E_y = E_z = H_x = 0$ na koordinati $z = 0$. Svaki se mod beskonačnog skupa *TM*-modova može označiti kao TM_m, gdje opet vrijedi geometrijski uvjet $k_x = m\pi/a$ za m-ti mod. Izrazi (4–12) i (4–13) opisuju razdiobe polja unutar planparalelnoga valovoda gdje razmak između vodljivih ploha zadovoljava isti geometrijski uvjet. Stoga su izrazi za koeficijent rasprostiranja $\mathrm{j}\beta$, faznu brzinu i zapornu frekvenciju f_c jednaki onima za *TE*-modove [izrazi (4–5) - (4–7)].

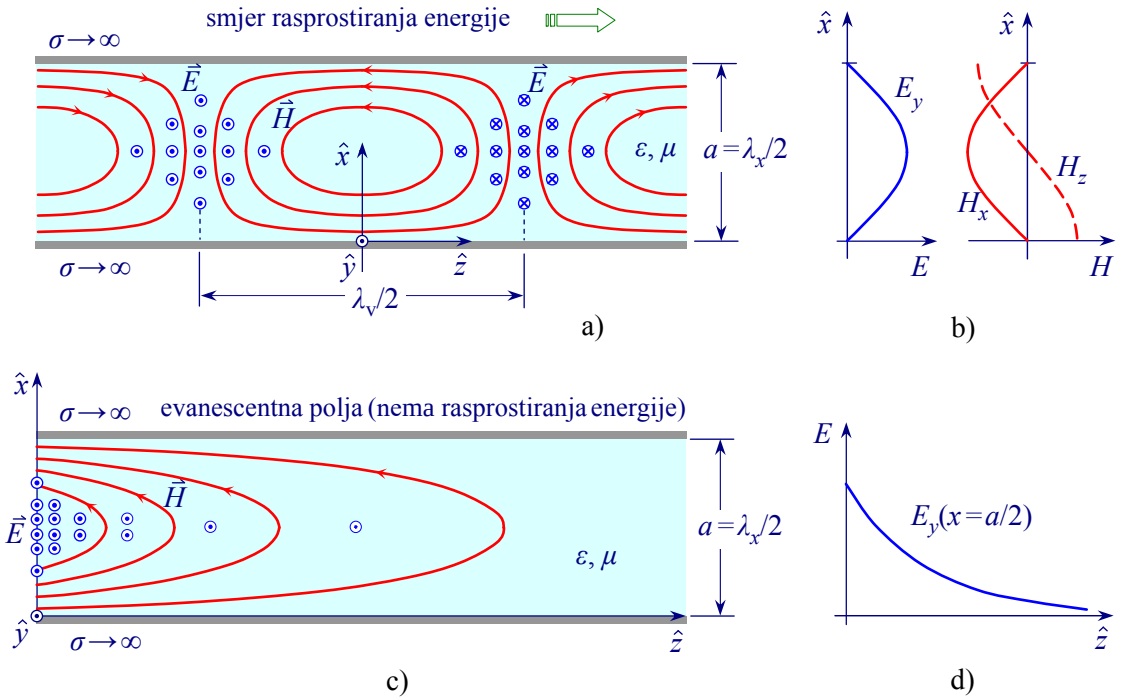
Može se uočiti da za $m = 0$ izlazi $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ i $E_z = 0$, a komponente E_x i H_y ne ovise o koordinati y. Stoga je mod TM_0 identičan *TEM*-modu pa se obično ne ubraja u *TM*-modove.



Slika 4.4. a) Fazna i grupna brzina u ovisnosti o frekvenciji, **b)** disperzijska relacija

No, za $m>1$, između vodljivih ploha nalaze se pravi *TM*-modovi.

Kako izgledaju razdiobe polja najnižih *TE*- i *TM*-modova prikazano je na slikama 4.5 i 4.6. Na slici 4.5a) polja moda TE_1 vizualizirana su silnicama. Tako se u ravnini *xy* (ravnina crteža) silnica magnetskog polja vrtloži i mijenja svoj smjer nakon što val prijeđe pola valne duljine u smjeru rasprostiranja. Ta je slika istovjetna konturnom prikazu na slici 2.37 za kosi upad ravnog vala na savršeno vodljivu plohu. Silnice električnog polja okomite su na ravninu *xy* i u nju ulaze ili iz nje izlaze. Polja su matematički opisana izrazima (4–1) i (4–2). Za $m=1$, u poprečnome se smjeru nalazi samo jedan poluval stojnoga vala, što se vidi na slici 4.5b).



Slika 4.5. Razdiobe električnog i magnetskog polja moda TE_1 u planparalelnome valovodu. **a)** Prikaz s pomoću silnica za $t=0$. **b)** Prikaz po komponentama na koordinati $z=0$: E_y i H_x za $t=T/4$, a H_z za $t=0$. **c)** Za $f<f_c$ u valovodu postoje samo evanescentna polja: $\vec{E}$ za $t=T/4$ ili $\omega t=\pi/2$, a $\vec{H}$ za $t=0$. **d)** Jakost polja opada eksponencijalno u smjeru $\hat{z}$

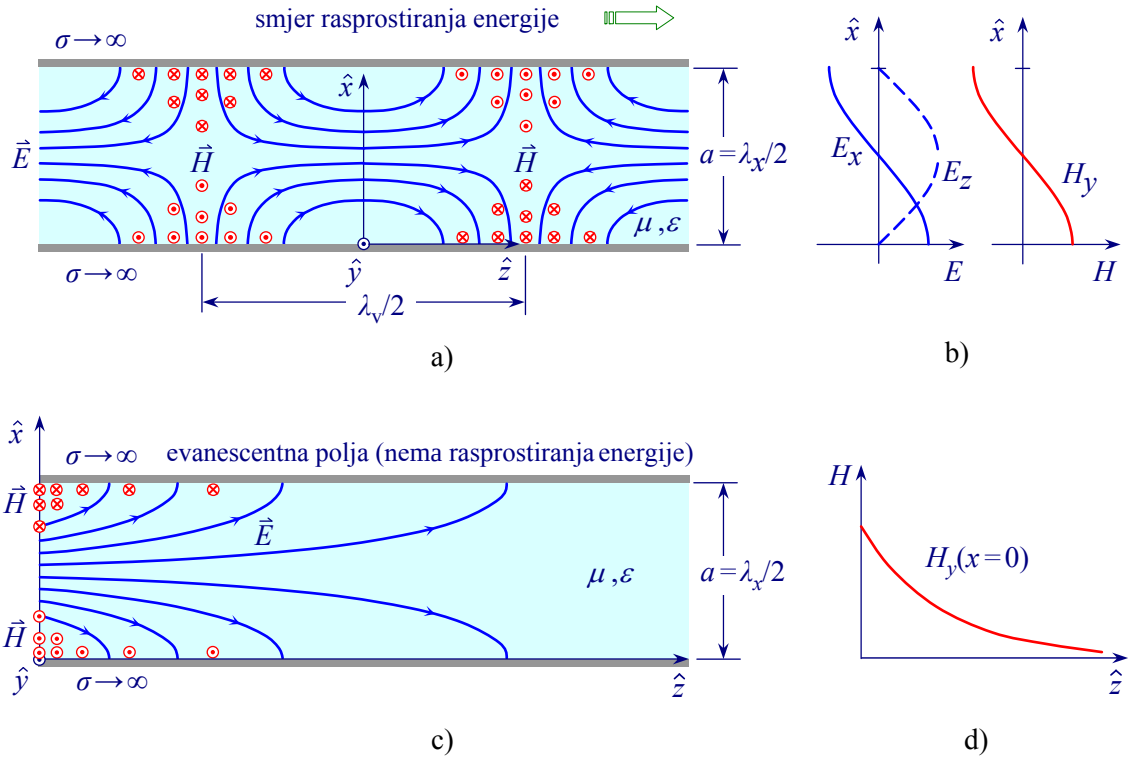
Maksimumi komponente H_z nalaze se uz granične plohe, a maksimum električnog polja, koje je paralelno s vodljivim plohama, nalazi se u sredini valovoda ($a/2$), tj. na najvećoj mogućoj udaljenosti od vodljivih ploha. Razdioba jakosti električnog polja E_y moda TE_1 može se vidjeti i na slici 4.3.

Za $k < k_x$, koeficijent rasprostiranja $\mathrm{j}\beta$ postaje realna veličina

$$\alpha = \mathrm{j}\beta = \sqrt{k_x^2 - k^2}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k^2}\,, \tag{4–14}$$

pa se val ne može rasprostirati. Drugim riječima, na mjestu pobude nastaje totalna refleksija, a u prostoru $z > 0$ nalaze se samo evanescentna polja (slika 4.5c)) koja eksponencijalno opadaju s udaljenošću (slika 4.5d)). Ako se za taj slučaj pogledaju izrazi za polja (4–1) i (4–2), onda se može primijetiti da su poprečne komponente magnetskog i električnog polja međusobno pomaknute u fazi za 90°, što govori o reaktivnom karakteru prijenosne strukture. Stoga ne postoji realna srednja snaga koja se rasprostire, što je obilježje evanescentnog »vala«.

S pomoću slike 2.37 može se doći do važne spoznaje koja se osniva na rezultatu dobivenom strogom matematičkom analizom. Naime, vidi se da površinsku struju u vodiču inducira samo uzdužno magnetsko polje koje ne sudjeluje u prijenosu energije. Uzdužno je polje to slabije što je frekvencija vala viša u odnosu na zapornu frekvenciju i teži nuli kada $f \to \infty$. To znači da porastom frekvencije gubitci teže nuli. Otuda su također gubitci za *TE*-mod manji od onih za *TM*-mod (odjeljak 4.1.3). Nasuprot tomu, snižavanjem frekvencije prema



Slika 4.6. Razdioba električnog i magnetskog polja moda TM_1 u planparalelnome valovodu. **a)** Prikaz s pomoću silnica za $t = 0$. **b)** Prikaz po komponentama na koordinati $z = 0$: E_x i H_y za $t = T/4$, a E_z za $t = 0$. **c)** Za $f < f_c$ u valovodu postoje samo evanescentna polja: $\vec{E}$ u $t = 0$, a $\vec{H}$ u $t = T/4$ ili $\omega t = \pi/2$. **d)** Jakost polja opada eksponencijalno u smjeru $\hat{z}$

zapornoj frekvenciji, gubitci rastu u beskonačnost. U praksi se valovodi obično upotrebljavaju u frekvencijskom području u kojem se prenosi samo jedan, tj. valovodni mod najnižega reda, pa je izbor radne frekvencije ograničen. Za rad na višim frekvencijama valja smanjiti razmak između ploča. Rad blizu zaporne frekvencije ne preporuča se zbog nagle promjene brzine rasprostiranja s frekvencijom ili disperzije, što može izazvati izobličenja u prijenosu signala širokog spektra (vidjeti odjeljak 4.3).

Na slici 4.6 prikazana su polja *TM*-vala za najniži mod, TM_1. Polja su opisana izrazima (4–12) i (4–13). Međusobnom usporedbom slika 4.6a) i 2.42, ne može se uočiti razlika u razdiobi odgovarajućih električnih i magnetskih polja.

4.1.1. Valna impedancija

Valna impedancija odgovarajućeg moda definirana je omjerom poprečnih komponenata električnog i magnetskog polja, dakle samo onih komponenata koje pridonose prijenosu energije. Valna impedancija za *TE*-mod izravno se može dobiti iz izraza (4–1) i (4–2) kao

$$Z_{TE} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{k}{\beta}\eta\,, \tag{4–15}$$

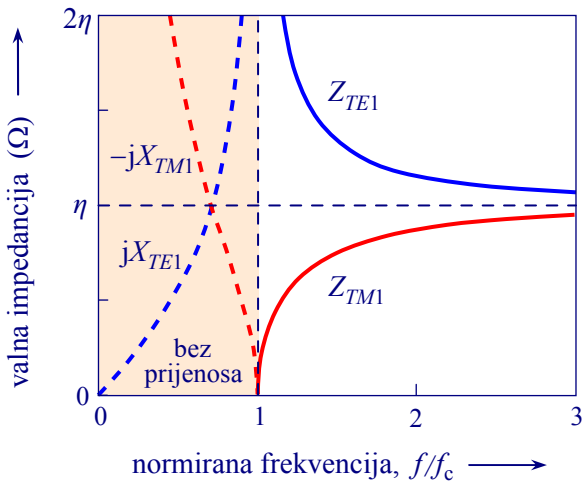
i funkcija je frekvencije. Uvijek je viša od intrinzične valne impedancije sredstva η i realna za $f > f_c$. No za $f < f_c$ postaje posve imaginarna i induktivnog je karaktera pa se u tom slučaju valovodom ne može prenositi energija.

Valna impedancija za *TM*-mod dobiva se iz izraza (4–12) i (4–13) kao

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta}{k}\eta \tag{4–16}$$

i uvijek je niža od intrinzične valne impedancije sredstva η. Za $f > f_c$ pokazuje realne vrijednosti, a za $f < f_c$ posve je imaginarna i kapacitivnog karaktera. Valja uočiti da je u izrazu (4–16) faktor β/k inverzan odgovarajućem faktoru u izrazu (4–15).

Usporedbe radi, na slici 4.7 prikazane su valne impedancije za modove TE_1 i TM_1. Može se uočiti da su ispod zaporne frekvencije obje impedancije posve imaginarne. S druge strane, porastom frekvencije u beskonačnost obje valne impedancije teže intrinzičnoj impedanciji sredstva kojim je ispunjen valovod.



Slika 4.7. Valne impedancije za modove TE_1 i TM_1

4.1.2. Tok snage

Da bismo odredili tok snage, korisno je naći Poyntingov vektor koji pokazuje gustoću snage koja se prenosi planparalelnim valovodom. Kompleksni Poyntingov vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$ za *TE*-mod može se dobiti iz izraza (4–1) i (4–2) kao

$$\vec{S} = \frac{|E_0|^2}{\eta}\left[\hat{z}\frac{\beta}{k}\sin^2(k_x x) - \hat{x}\frac{\mathrm{j}k_x}{k}\sin(k_x x)\cos(k_x x)\right], \tag{4–17}$$

i ima posve jednak oblik kao izraz (2–235) u odjeljku 2.12.1. Iz tog se izraza može izravno odrediti srednja vrijednost gustoće snage kao $\langle \vec{S} \rangle = ½\,\mathrm{Re}\{\vec{S}\}$ koja je različita od nule samo za smjer $\hat{z}$ jer je Poyntingov vektor za smjer $\hat{x}$ posve reaktivan.

Za planparalelni valovod konačne širine $w \gg a$ može se naći tok snage u vatima integriranjem Poyntingova vektora po cijelom poprečnom presjeku valovoda. Primjenom izraza (4–17) dobiva se tok snage modova TE_m kao

$$P_{TE} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^w\int_0^a \vec{E}\times\vec{H}^*\cdot\hat{z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^w\int_0^a \frac{|E_0|^2}{\eta}\frac{\beta}{k}\sin^2(k_x x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\} =$$

$$= \frac{aw}{4\eta k}|E_0|^2\,\mathrm{Re}\{\beta\}, \quad \text{za } m > 0 \tag{4–18}$$

Gustoća snage koja se prenosi planparalelnim valovodom u *TM*-modu može se lako naći primjenom izraza (4–12) i (4–13), kao

$$\vec{S} = \eta|H_0|^2\left[\hat{z}\frac{\beta}{k}\cos^2(k_x x) - \hat{x}\frac{\mathrm{j}k_x}{k}\sin(k_x x)\cos(k_x x)\right], \tag{4–19}$$

gdje je H_0 amplituda upadnog magnetskog polja. Istim se postupkom, kao za *TE*-modove, integriranjem izraza (4–19) po presjeku valovoda dobiva tok snage za modove TM_m, tj.

$$P_{TM} = \frac{\eta aw}{4k}|H_0|^2\,\mathrm{Re}\{\beta\}, \quad \text{za } m > 0. \tag{4–20}$$

Valja reći da je za $m = 0$, tj. za *TEM*-mod i nedisperzivnu liniju ($\beta = k$), vrijednost integrala dvostruka pa se dobiva

$$P_{TEM} = \frac{1}{2}\eta aw|H_0|^2 = \frac{1}{2}aw\frac{|E_0|^2}{\eta}, \tag{4–21}$$

što se moglo i očekivati jer je efektivna vrijednost električnog polja $|E_0|/\sqrt{2}$, a veličina aw odgovara površini presjeka planparalelnoga valovoda.

4.1.3. Gubitci snage i koeficijent prigušenja

U svim stvarnim prijenosnim strukturama nastaju gubitci u prijenosu zbog konačne provodnosti vodiča i zbog možebitnih dielektričnih gubitaka u sredstvu kojim se energija prenosi. Ako je α_d koeficijent prigušenja zbog gubitaka u dielektriku, a α_c koeficijent prigušenja zbog gubitaka u vodiču, onda je ukupni koeficijent prigušenja $\alpha = \alpha_\mathrm{d} + \alpha_\mathrm{c}$.

Za linije ili valovode koji su posve ispunjeni homogenim nemagnetičnim dielektrikom, prigušenje zbog dielektričnih gubitaka može se izračunati iz koeficijenta rasprostiranja. Taj se rezultat može primijeniti na sve valovode i linije s homogenim dielektrikom.

Uporabom kompleksne permitivnosti, koeficijent rasprostiranja može se napisati kao

$$\gamma = \alpha_\mathrm{d} + \mathrm{j}\beta = \sqrt{k_\mathrm{c}^2 - k^2} = \sqrt{k_\mathrm{c}^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}(1 - \mathrm{j}\tan\delta_\varepsilon)}\ . \tag{4–22}$$

Većina dielektrika, u praksi, ima male gubitke ($\tan\delta_\varepsilon \ll 1$) pa se izraz (4–22) može razviti u Taylorov red i pojednostavniti tako da se zadrže samo prva dva člana razvoja, tj.

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2 + \mathrm{j}k^2\tan\delta_\varepsilon} \simeq \sqrt{k_c^2 - k^2} + \mathrm{j}\frac{k^2\tan\delta_\varepsilon}{2\sqrt{k_c^2 - k^2}} = \frac{k^2\tan\delta_\varepsilon}{2\beta} + \mathrm{j}\beta\ , \qquad (4\text{–}23)$$

jer je $\sqrt{k_c^2 - k^2} = \mathrm{j}\beta$. Za sredstvo bez gubitaka, $k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r$ realna je i pozitivna veličina. Izraz (4–23) pokazuje da mali gubitci uopće ne djeluju na fazni koeficijent β. Realni dio tog izraza daje koeficijent prigušenja

$$\alpha_d = \frac{k^2\tan\delta_\varepsilon}{2\beta} \quad \text{Np/m} \quad \text{(za } TE\text{- i } TM\text{-valove)}\ . \qquad (4\text{–}24a)$$

Taj se rezultat može primijeniti na sve *TE*- i *TM*-valove, dok je god valovod potpuno ispunjen homogenim dielektrikom. Ako se primijeni na *TEM*-linije, uz $k_c = 0$, onda se dobiva

$$\alpha_{d(TEM)} = \frac{1}{2}k\tan\delta_\varepsilon \quad \text{Np/m} \quad \text{(za } TEM\text{-valove)}\ . \qquad (4\text{–}24b)$$

Koeficijent prigušenja koji proizlazi iz gubitaka u vodljivim plohama može se izračunati primjenom metode perturbacije (odjeljak 3.6) kao

$$\alpha_c = \frac{p_{dis}}{2P}\ , \qquad (4\text{–}25)$$

gdje je P tok snage u valovodu za idealan slučaj, beskonačne provodnosti ploča ($\sigma \to \infty$), kako je dano izrazima (4–18), (4–20) i (4–21). Veličina p_{dis} označuje disipaciju snage po jedinici duljine, koja se može izračunati s pomoću izraza (3–90) ili (2–193b), gdje valja uzeti u obzir obje vodljive plohe,

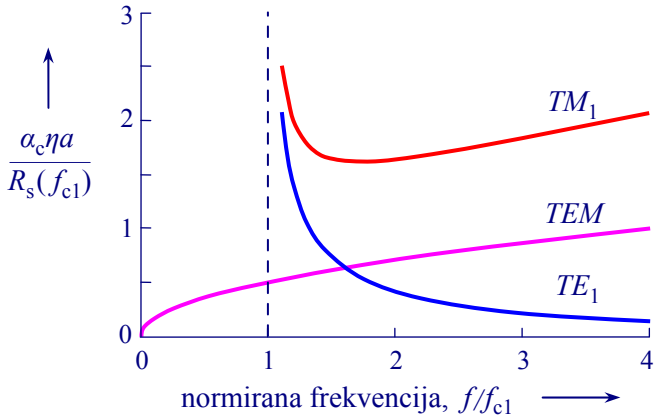
$$p_{dis} = 2\left(\frac{R_s}{2}\right)\int_0^w \left|\bar{H}_{tan}\right|^2 \mathrm{d}y\ . \qquad (4\text{–}26)$$

Za *TM*-modove račun je nešto jednostavniji jer tangencijalno magnetsko polje za $x = 0$ i $x = a$ ima jednostavnu ovisnost (4–12). Kao rezultat, iz izraza (4–26) dobiva se

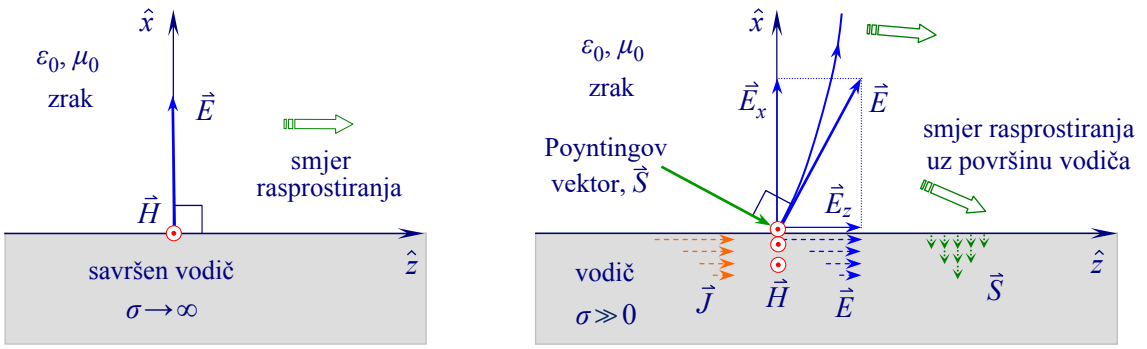
$$p_{dis} = R_s w\left|H_0\right|^2, \qquad (4\text{–}27)$$

gdje je R_s površinski otpor vodiča. Uvrštenjem izraza (4–27) i (4–20) u (4–25) dobiva se

$$\alpha_{c(TM)} = \frac{2kR_s}{\beta\eta a} \quad \text{Np/m.} \qquad (4\text{–}28)$$



Slika 4.8. Normirani koeficijenti prigušenja planparalelnoga valovoda za modove *TEM*, TE_1 i TM_1



Slika 4.9. a) Rasprostiranje ravnoga elektromagnetskoga vala uz površinu savršenog vodiča ($\sigma \to \infty$). **b)** U blizini vodiča konačne provodnosti silnice električnog polja uvijek su nagnute prema naprijed u smjeru prijenosa energije. Isprekidanim su crtama prikazane veličine unutar vodiča, a punim crtama veličine izvan vodiča. Smjer rasprostiranja snage i gustoća snage znatno se mijenjaju u blizini vodiča. Slično se prenose radiovalovi uz površinu Zemlje u frekvencijskom opsegu dugoga vala (< 300 kHz)

Za mod TM_0, tj. za *TEM*-mod, ($m=0$ daje $\beta=k$), koeficijent prigušenja iznosi

$$\alpha_{c(TEM)} = \frac{R_s}{\eta a} \quad \text{Np/m.} \tag{4–29}$$

Na sličan se način može dobiti koeficijent prigušenja za *TE*-mod. Ako se izraz (4–2) uvrsti u (4–26) i zatim se taj izraz s pripadajućim izrazom (4–18) uvrsti u (4–25), onda se dobiva

$$\alpha_{c(TE)} = \frac{2k_c^2 R_s}{k\beta\eta a} \quad \text{Np/m.} \tag{4–30}$$

Na slici 4.8 uspoređeni su koeficijenti prigušenja planparalelnoga valovoda za osnovne modove *TEM* (ili TM_0), TE_1 i TM_1. Krivulje su normirane na $R_s(f_{c1})/(\eta a)$. Koeficijenti prigušenja za *TE*- i *TM*-modove teže u beskonačnost kad f teži f_{c1}. Porastom frekvencije, krivulja za *TM*-val najprije pada, ali postiže minimum (na $\omega=\sqrt{3}\omega_c$) i zatim postupno raste s frekvencijom zbog toga što R_s raste s frekvencijom. Krivulja za *TE*-val uvijek je niža od one za *TM*-val i u cijelom frekvencijskom području monotono opada s frekvencijom jer struje u vodljivim plohama nastaju samo od z-komponente magnetskog polja koja teži nuli kad frekvencija teži u beskonačnost.

Iz relacije neprekinutosti tangencijalnog električnog polja, komponente s obiju strana granice moraju biti međusobno jednake. Otuda je vektor električnog polja uvijek nagnut na smjer prijenosa energije, kao što je prikazano na slici 4.9.

4.2. Opća formulacija vođenih valova

Na osnovi predodžbe o poljima koju smo do sad stekli, može se zamisliti da energiju nose elektromagnetska polja vala u dielektričnom području između granica koje oblikuju određenu vrstu vala. U matematičkoj se analizi uvijek traže takva rješenja valne jednadžbe koja su u skladu s rubnim uvjetima koje nameću vodljive ili dielektrične granice valovoda. Razmatrat ćemo osnovne prijenosne strukture, poput prijenosnih linija, metalnih i dielektričnih valovoda, koji imaju jednolik poprečni presjek, kao što je prikazano na slici 4.10. Pojam prijenosna linija obično se rabi za opis prijenosne strukture s dva ili više vodiča koji su međusobno električki izolirani. Pod pojmom valovada u širem smislu podrazumijeva se bilo koja prije-

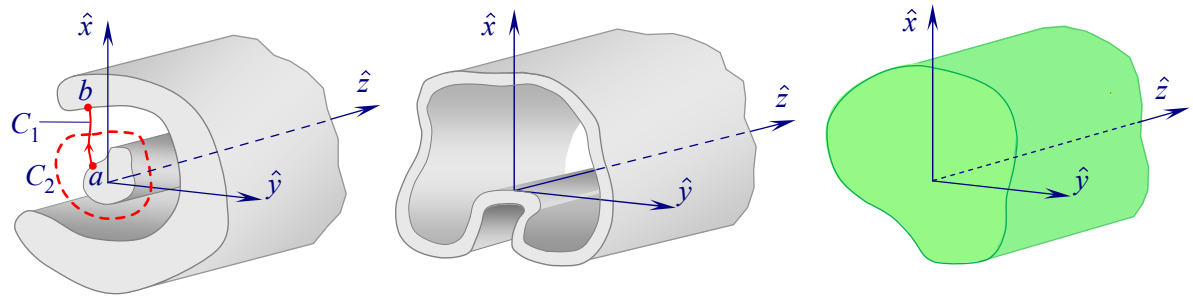
nosna struktura na slici 4.10, kojom se elektromagnetska energija prenosi u željenom smjeru. U užem smislu, valovod je šuplja ili dielektrikom ispunjena metalna cijev u kojoj se val prenosi uzastopnim refleksijama na njegovim vodljivim stijenkama. Dielektrični valovod (ili svjetlovod) posebna je vrsta valovoda, sastavljena od jedne ili više dielektričnih struktura, kojom se val prenosi totalnom refleksijom na granici različitih dielektričnih sredstava.

Za razliku od ravnoga vala u slobodnome prostoru, u prijenosnim se sustavima mogu naći različite konfiguracije električnog i magnetskog polja. U prijenosnim strukturama prikazanim na slici 4.10, Maxwellove jednadžbe (2–23) - (2–26) moraju zadovoljiti rubne uvjete (2–160), (2–161), (2–163) i (2–164). Rezultat je skup rješenja koja se nazivaju *modovi rasprostiranja*. (odjeljak 4.1) Mod je ostvariva prostorna razdioba polja unutar prijenosne strukture, koja zadovoljava zadane rubne uvjete. Svakoj je razdiobi pridružena po jedna karakteristična veličina koja se naziva *koeficijent rasprostiranja*. Modovi, u zatvorenim prijenosnim strukturama poput metalnih valovoda i suosnih linija, tvore beskonačan, ali diskretan skup. Za otvorene prijenosne strukture poput dielektričnog valovoda, slika 4.10c), tom diskretnom skupu valja dodati kontinuirani spektar radijacijskih modova čija se polja protežu u beskonačnost.

Svaki mod pokazuje posebna svojstva rasprostiranja: prigušenje i fazni pomak po jedinici duljine, brzinu rasprostiranja i zapornu (graničnu) frekvenciju. Ako se elektromagnetska energija istodobno rasprostire u više modova, onda razlike u brzini rasprostiranja pojedinih modova mogu prouzročiti izobličenje signala. Da bi se taj neželjeni učinak višemodnog prijenosa izbjegao, dimenzije poprečnoga presjeka linija i valovoda valja tako odabrati da se na zadanoj frekvenciji signala može prenositi samo jedan mod. Iznimku čine višemodni svjetlovodi i predimenzionirani metalni valovodi za prijenos velikih snaga.

Pri proučavanju vođenih valova uzduž uniformnih prijenosnih struktura, rješenja se mogu razvrstati u nekoliko skupina.

1. Valovi koji nemaju ni električnu ni magnetsku komponentu u smjeru rasprostiranja. Budući da se tad i električno i magnetsko polje nalaze samo u poprečnoj ravnini, ti se valovi nazivaju *transverzalni elektromagnetski valovi* (skraćeno *TEM*-valovi).
2. Valovi kod kojih postoji komponenta magnetskog polja u smjeru rasprostiranja nazivaju se *transverzalni električni valovi* (*TE*-valovi) jer se samo cjelokupno električno polje nalazi u poprečnoj ravnini.
3. Valovi kod kojih postoji komponenta električnog polja u smjeru rasprostiranja nazivaju se *transverzalni magnetski valovi* (*TM*-valovi) jer se samo cjelokupno magnetsko polje nalazi u poprečnoj ravnini.
4. Valovi kod kojih u smjeru rasprostiranja postoji i električno i magnetsko polje nazivaju se *hibridni valovi* jer su mješavina *TE*- i *TM*-valova.



a) b) c)

Slika 4.10. Uniformne prijenosne strukture općenitog presjeka; **a)** linija s dva vodiča, **b)** šuplji valovod, **c)** dielektrični valovod

U ovom ćemo odjeljku naći opća rješenja Maxwellovih jednadžba za posebne vrste valova: *TEM*, *TE* i *TM* u cilindričnim prijenosnim linijama i valovodima. Pritom ćemo pretpostaviti da se valovi rasprostiru uzduž uniformne prijenosne strukture s vremenskom i prostornom ovisnošću opisanom sa $e^{j\omega t-\gamma z}$ kao kod dvožične prijenosne linije razmotrene u poglavlju 3. Značenje koeficijenta rasprostiranja $\gamma = \alpha + j\beta$ već smo upoznali kod valova u slobodnome prostoru i na *TEM*-prijenosnoj liniji. Tu ćemo veličinu rabiti i za opis ostalih prijenosnih struktura, poput planarne linije i valovoda. No u valovodu je teško precizno definirati napone i struje jer su raspodijeljeni po poprečnim dimenzijama prijenosne strukture. Zato je gotovo nemoguće definirati karakterističnu impedanciju onako kako se to radi za *TEM*-prijenosne linije, pa ćemo u ovome poglavlju umjesto karakteristične impedancije rabiti pojam valne impedancije kao pri prijenosu vala u neograničenom prostoru.

Prije negoli se pristupi proučavanju rasprostiranja vala u određenoj prijenosnoj strukturi, korisno je koordinatni sustav što bolje prilagoditi poprečnoj geometriji prijenosne strukture, a granice materijala valja opisati što jednostavnijim geometrijskim izrazima da bi se što lakše zadovoljili rubni uvjeti. U svim razmatranjima prijenosnih struktura, koordinatni će sustav biti postavljen tako da se os $\hat{z}$ poklapa s uzdužnim smjerom u kojem se rasprostire val, a preostale dvije koordinate bit će u poprečnoj ravnini. U zadaćama s rotacijskom simetrijom kao kod suosne linije i kružnoga valovoda, korisno je odabrati cilindrični koordinatni sustav, a za pravokutni valovod, planparalelni valovod i planarne strukture valja odabrati pravokutni koordinatni sustav.

Poprečna je ravnina uvijek okomita na smjer rasprostiranja $\hat{z}$ pa poprečno i uzdužno polje ne ovise jedno o drugom. Zato je diferencijalni operator nablu zgodno izraziti kao zbroj poprečnog i uzdužnog dijela:

$$\nabla = \nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4–31}$$

U pravokutnom koordinatnom sustavu, poprečni se dio toga operatora može dalje rastaviti po koordinatama kao

$$\nabla_t = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4–32}$$

Ovdje valja upamtiti da se u ostalim koordinatnim sustavima poprečne komponente ne mogu rastaviti na taj način. Slično tomu, vektori električnog i magnetskog polja mogu se rastaviti na poprečne i uzdužne komponente uz pretpostavku da se radi o harmonijskoj vremenskoj ovisnosti polja $e^{j\omega t}$ te da se val rasprostire u smjeru osi $\hat{z}$:

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}_t(x,y,z) + \hat{z}E_z(x,y,z) = \left[\vec{e}(x,y) + \hat{z}e_z(x,y)\right]e^{-j\beta z}, \tag{4–33a}$$

$$\vec{H}(x,y,z) = \vec{H}_t(x,y,z) + \hat{z}H_z(x,y,z) = \left[\vec{h}(x,y) + \hat{z}h_z(x,y)\right]e^{-j\beta z}, \tag{4–33b}$$

gdje su $\vec{E}_t$ i $\vec{H}_t$ poprečne komponente polja, a $\hat{z}E_z$ i $\hat{z}H_z$ osne (uzdužne) komponente polja. Funkcije $\vec{e}(x,y)$ i $\vec{h}(x,y)$ označuju transverzalne modalne funkcije, a $e_z(x,y)$ i $h_z(x,y)$ longitudinalne modalne funkcije i ovise samo o poprečnim dimenzijama. Budući da je prihvaćen fazorski pristup, cjelovit faktor rasprostiranja poprima oblik $e^{j(\omega t-\beta z)}$. Za val koji se rasprostire u suprotnome smjeru valja samo promijeniti predznak uz član βz.

Ako se u prijenosnoj liniji ili valovodu na mjestima na kojima se izračunavaju polja ne nalaze izvori, onda se Maxwellove rotorske jednadžbe (2–23) i (2–24) mogu napisati u fazorskome obliku kao:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H},$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E},$$

a njihove se komponente u pravokutnom koordinatnom sustavu svode na:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\mathrm{j}\omega\mu H_x, \qquad (4\text{–}34a) \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\mathrm{j}\omega\mu H_y, \qquad (4\text{–}34b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mathrm{j}\omega\mu H_z, \qquad (4\text{–}34c) \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_x, \qquad (4\text{–}34d)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_y, \qquad (4\text{–}34e) \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_z. \qquad (4\text{–}34f)$$

Za ovisnost u uzdužnome smjeru oblika $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$, komponente tih jednadžba svode se na:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}+\mathrm{j}\beta E_y=-\mathrm{j}\omega\mu H_x, \qquad (4\text{–}35a) \qquad -\mathrm{j}\beta E_x-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\mathrm{j}\omega\mu H_y, \qquad (4\text{–}35b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mathrm{j}\omega\mu H_z, \qquad (4\text{–}35c) \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y}+\mathrm{j}\beta H_y=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_x, \qquad (4\text{–}35d)$$

$$-\mathrm{j}\beta H_x-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_y, \qquad (4\text{–}35e) \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_z. \qquad (4\text{–}35f)$$

Pri tomu valja imati na umu da komponenete polja E_x, H_x, E_y … ovise samo o koordinatama x i y, jer je ovisnost o z i t ugrađena u cjelovit faktor rasprostiranja $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t-\mathrm{j}\beta z}$.

Iz prethodnih se šest jednadžba komponente E_x, E_y, H_x i H_y mogu izraziti u ovisnosti samo o uzdužnim komponentama E_z i H_z [komponenta E_x može se, primjerice, naći tako da se iz jednadžba (4–35b) i (4–35d) eliminira varijabla H_y]. Kao rezultat dobiva se:

$$E_x=-\frac{\mathrm{j}}{k_c^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial x}+\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right), \qquad (4\text{–}36a) \qquad E_y=\frac{\mathrm{j}}{k_c^2}\left(-\beta\frac{\partial E_z}{\partial y}+\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \qquad (4\text{–}36b)$$

$$H_x=\frac{\mathrm{j}}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}-\beta\frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \qquad (4\text{–}36c) \qquad H_y=-\frac{\mathrm{j}}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}+\beta\frac{\partial H_z}{\partial y}\right). \qquad (4\text{–}36d)$$

Pritom je uvedena nova konstanta $k_\mathrm{c}^2=k^2-\beta^2$, gdje je $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$. Njezin se drugi korijen,

$$k_\mathrm{c}=\sqrt{k^2-\beta^2}, \qquad (4\text{–}37)$$

naziva *transverzalni valni broj ili zaporni valni broj*. U daljnjem ćemo tekstu pojam *zaporni valni broj* povezivati s fizikalnom slikom »zatvaranja« ili »zapiranja« prijenosne strukture za prijenos elektromagnetske energije kad vrijednost k padne ispod kritične vrijednosti k_c. U primjeni i analizi valovoda, transverzalni valni broj upućuje na činjenicu da u poprečnome smjeru postoji »val« koji ne prenosi energiju, a to je stojni val.

I električno i magnetsko polje u prostoru između vodljivih granica, u kojem nema prostornog naboja, moraju zadovoljiti Helmholtzove valne jednadžbe:

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0,$$

$$\nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0.$$

Trodimenzionalni diferencijalni Laplaceov operator ∇^2 može se također rastaviti na poprečni i uzdužni dio, ako se izraz (4–31) pomnoži sam sa sobom, tj.

$$\nabla^2\vec{E}=\nabla_\mathrm{t}^2\vec{E}+\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}. \qquad (4\text{–}38)$$

Prvi član zdesna označuje dvodimenzionalni Laplaceov operator u ravnini koja je poprečna na smjer rasprostiranja, a drugi član, uz pretpostavljenu ovisnost $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$ u smjeru $\hat{z}$, daje

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -\beta^2 \vec{E}\,.$$

Stoga se Helmholtzove valne jednadžbe mogu konačno napisati kao:

$$\nabla_t^2 \vec{E} + (k^2 - \beta^2)\vec{E} = 0\,, \tag{4–39}$$

$$\nabla_t^2 \vec{H} + (k^2 - \beta^2)\vec{H} = 0\,. \tag{4–40}$$

Jednadžbe (4–39) i (4–40) moraju biti zadovoljene u dielektričnom području prijenosne strukture. Rubne uvjete nameću konfiguracija i električna svojstva vodljivih ili dielektričnih granica. Željene veze između komponenata vala mogu se dobiti iz jednadžba (4–35) ili (4–36).

Gubitci u dielektriku mogu se izraziti preko kompleksne permitivnosti $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r\,(1 - \mathrm{j}\tan\delta_\varepsilon)$ koja je definirana izrazom (2–42).

4.2.1. *TEM*-val

Da bi u prijenosnoj strukturi opstao *TEM*-val, vodič mora biti savršen jer u protivnom postoji komponenta E_z koja podržava struju u smjeru $\hat{z}$. Stoga ćemo razmotriti slučaj sa savršenim vodičima u homogenom dielektričnom sredstvu. Ta aproksimacija dobro odgovara valovodnim strukturama s dobrim vodičima (metalima). *TEM*-valovi određeni su uvjetom $E_z = H_z = 0$, pa jednadžbe (4–36) pokazuju da i sva poprečna polja moraju biti jednaka nuli, osim ako $k^2 = k^2 - \beta^2$ nije jednako nuli, što vodi do neodređenog izraza iz kojeg izlazi da je

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k\,. \tag{4–41}$$

Dakle, zaporni valni broj $k_c = \sqrt{k^2 - \beta^2}$ za *TEM*-valove jednak je nuli jer *TEM*-valovi nemaju zapornu frekvenciju pa se mogu rasprostirati od nulte frekvencije na više. Pri tomu je fazna brzina konstantna i jednaka brzini svjetlosti u pripadajućem sredstvu, tj.

$$v_f = v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\,. \tag{4–42}$$

Ako vrijedi uvjet (4–41), onda se iz izraza (4–36) izravno dobiva jednostavna veza između komponenata električnog i magnetskog polja, tj.

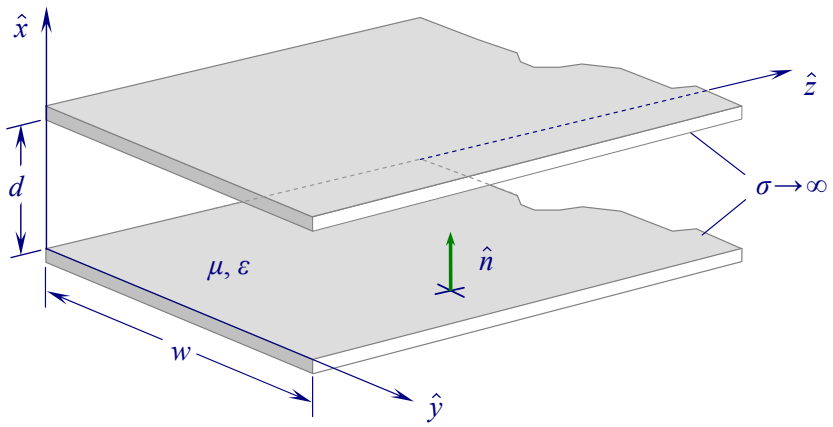
$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \eta\,. \tag{4–43}$$

To je *valna impedancija TEM-moda*, koja je jednaka intrinzičnoj valnoj impedanciji (η) sredstva u kojem se rasprostire ravni val. Valja uočiti da je valna impedancija definirana kao omjer poprečnih komponenata električnog i magnetskog polja. Stoga se veza imeđu poprečnih polja TEM-vala može općenito izraziti kao:

$$\vec{H}_t(x,y) = \frac{1}{\eta}\hat{z} \times \vec{E}_t(x,y)\,, \tag{4–44a}$$

$$\vec{E}_t(x,y) = \eta\vec{H}_t(x,y) \times \hat{z}\,. \tag{4–44b}$$

Za rasprostirnje *TEM*-vala, prijenosna struktura mora imati barem dva vodiča. Pri tomu magnetsko polje u vodičima inducira struju, a električno polje inducira napon između vodiča. Stoga je korisno naći vezu između napona i struje s jedne strane te električnog i magnetskog polja s druge strane. Za suosnu su liniju te veze već izvedene u odjeljku 3.2.1. Nađimo sad vezu između napona i struje te polja za jednu od najjednostavnijih *TEM*-linija, planparalelni valovod opisan u prethodnome odjeljku. Planparalelni valovod sastoji se od dviju savršeno vodljivih paralelnih ploča širine w, međusobnog razmaka d, kao što je prikazano na slici 4.11.



Slika 4.11. Planparalelna *TEM*-linija

Svako rješenje za polja između vodiča u izotropnome sredstvu opisanom s μ i ε mora zadovoljiti Maxwellove jednadžbe i ove rubne uvjete:

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0\,, \tag{4–45a}$$

$$\hat{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s\,, \tag{4–45b}$$

$$\hat{n} \cdot \vec{D} = \rho_s\,, \tag{4–45c}$$

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0\,, \tag{4–45d}$$

koji su uspostavljeni tim istim vodičima. Ovdje je $\hat{n}$ jedinični vektor okomit na površinu vodiča, gdje je $\hat{n} = \hat{x}$ za $x = 0$, a $\hat{n} = -\hat{x}$ za $x = d$.

Ako je razmak d između vodljivih ploča znatno manji od širine ploča w, onda se na krajevima strukture rubna polja mogu zanemariti, što znatno pojednostavnjuje matematičku analizu. Smjerovi polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ mogu se lako odrediti uz pomoć fizikalne slike i izraza (4–44).

Budući da električno polje na vodljivim pločama ne može imati tangencijalne komponente, polje $\vec{E}$ može se postaviti u smjeru osi $\hat{x}$. Ako se val mora rasprostirati u smjeru osi $\hat{z}$, onda $\vec{H}$ valja postaviti u smjeru osi $\hat{y}$, što je također u skladu sa smjerom površinske struje, koji se podudara sa smjerom osi $\hat{z}$. Dakle, može se vidjeti da će u skladu s izrazima (4–44) Maxwellove jednadžbe i rubne uvjete (4–45) zadovoljiti polja:

$$\vec{E} = \vec{E}_\mathrm{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} = \hat{x} E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\,, \tag{4–46a}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_\mathrm{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} = \hat{y} \frac{E_0}{\eta} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\,, \tag{4–46b}$$

gdje valni vektor k ima ulogu faznog koeficijenta β, a valna impedancija (η) definirana je izrazom (4–43). Val opisan izrazima (4–46) označuje $\hat{x}$-polarizirani uniformni ravni val ograničen vodljivim pločama. Rubni uvjeti (4–45) daju gustoću površinskog naboja ρ_s (C/m^2) i gustoću površinske struje $\vec{J}_\mathrm{s}$ (A/m):

$$\rho_\mathrm{s} = \hat{x} \cdot \vec{D}\big|_{x=0} = \varepsilon E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \qquad \text{za } x = 0\,,$$

$$\rho_\mathrm{s} = -\hat{x} \cdot \vec{D}\big|_{x=d} = -\varepsilon E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \qquad \text{za } x = d\,,$$

$$\vec{J}_\mathrm{s} = \hat{x} \times \vec{H}\big|_{x=0} = \hat{z} \frac{1}{\eta} E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \qquad \text{za } x = 0\,,$$

$$\vec{J}_\mathrm{s} = -\hat{x} \times \vec{H}\big|_{x=d} = -\hat{z} \frac{1}{\eta} E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \qquad \text{za } x = d\,.$$

Ukupna struja koja teče u smjeru osi $+\hat{z}$ duž donje ploče na $x = 0$ može se dobiti integriranjem tangencijalne komponente magnetskog polja na širini vodiča, kao

$$I(z) = \int_0^w \vec{J}_s(z) \cdot \hat{z} \mathrm{d}y = H_y(z) w \,. \tag{4–47a}$$

Struja iste vrijednosti teče i na gornjoj ploči ($x = d$), ali u suprotnom smjeru.

S druge strane, ukupni napon $V(z)$ može se definirati krivuljnim integralom električnog polja između dviju ploča, kao

$$V(z) = \int_0^d \vec{E}(z) \cdot x \mathrm{d}x = E_x(z) d \,. \tag{4–47b}$$

Izrazi (4–47) pokazuju izravnu vezu između struje i magnetskog polja, odnosno napona i električnog polja. Stoga je rješenja Maxwellovih rotorskih jednadžba za polja (4–46) korisno prikazati u ovisnosti o V i I. Faradayev zakon $\nabla \times \vec{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\vec{H}$ i Ampèreov zakon $\nabla \times \vec{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}$ u prostoru bez izvora između ploča poprimaju oblik:

$$\hat{y} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z) = -\mathrm{j}\omega\mu \hat{y} H_y(z) \,, \qquad -\hat{x} \frac{\partial}{\partial z} H_y(z) = \mathrm{j}\omega\varepsilon \hat{x} E_x(z) \,.$$

Integriranje prve jednadžbe po x od 0 do d, a druge po y od 0 do w daje:

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x d = -\mathrm{j}\omega\mu d H_y \,, \qquad \frac{\partial}{\partial z} H_y w = -\mathrm{j}\omega\varepsilon w E_x \,.$$

Uvrštenjem izraza (4–47) za $I(z)$, odnosno $V(z)$ izlazi:

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}\omega L I(z) \,, \tag{4–48a}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}\omega C V(z) \,, \tag{4–48b}$$

gdje je

$L = \mu d/w$ raspodijeljeni induktivitet u henrijima po metru (H/m), (4–49a)

$C = \varepsilon w/d$ raspodijeljeni kapacitet u faradima po metru (F/m). (4–49a)

Ti su izrazi poznati iz kvazistatike. Jednadžbe (4–48) jednake su jednadžbama (3–6) za liniju bez gubitaka, a poznate su pod nazivom *jednadžbe prijenosne linije* ili *telegrafske jednadžbe*. Može se pokazati da iste jednadžbe odgovaraju bilo kojoj *TEM*-strukturi s dvama vodičima proizvoljnog, ali jednolikog, poprečnoga presjeka.

Deriviranjem jednadžbe (4–48a) po z i zamjenom $\mathrm{d}I/\mathrm{d}z$ izrazom (4–48b), dobiva se

$$\frac{\mathrm{d}^2V(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\omega^2 LC V(z) \,, \tag{4–50a}$$

valna jednadžba za napon na liniji. Deriviranjem jednadžbe (4–48b) po z i zamjenom $\mathrm{d}V/\mathrm{d}z$ izrazom (4–48a), dobiva se slična valna jednadžba za struju na liniji, tj.

$$\frac{\mathrm{d}^2I(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\omega^2 LC I(z) \,. \tag{4–50b}$$

Valne jednadžbe (4–50) istovjetne su jednadžbama (3–7) za liniju bez gubitaka i funkcije su samo jedne električne veličine, napona odnosno struje. To su homogene diferencijalne jednadžbe drugoga reda, koje se mogu odvojeno riješiti za napon, odnosnu struju. U odjeljku 3.1. pokazano je da se opća rješenja jednadžba (4–50) mogu napisati kao:

$$V(z) = V^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + V^- \mathrm{e}^{+\mathrm{j}kz}, \tag{4–51a}$$

$$I(z) = \frac{V^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - V^- \mathrm{e}^{+\mathrm{j}kz}}{Z_0}, \tag{4–51b}$$

gdje je Z_0 *karakteristična impedancija linije* definirana izrazom (3–13) jednaka omjeru fazora napona i struje na liniji za jedan od smjerova rasprostiranja.

Za liniju s paralelnim pločama disperzijska relacija (4–41) poprima oblik

$$k^2 = \omega^2 LC\,. \tag{4–52}$$

Otuda brzina naponskoga i strujnoga vala koji se rasprostiru linijom iznosi $v = 1/\sqrt{LC}$. Budući da je $LC=\mu\varepsilon$, disperzijska relacija (4–52) može se napisati i kao $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$ i jednaka je odgovarajućoj relaciji za uniformni ravni val u neograničenom sredstvu s μ i ε.

Karakteristična impedancija linije Z_0 ne smije se zamijeniti valnom impedancijom sredstva $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, koja ne ovisi o geometriji prijenosne linije. Valna je impedancija jednaka omjeru poprečnog električnog i magnetskog polja, a karakteristična je impedancija jednaka omjeru fazora napona i struje na beskonačno dugačkoj prijenosnoj liniji, u kojoj napon i struja eksplicitno ovise o dimenzijama *TEM*-linije, kao što smo vidjeli u izrazima (4–49). Dakle, za *TEM*-linije $LC=\mu\varepsilon$, ali je općenito $LC\neq\mu\varepsilon$.

4.2.2. *TE*-val

Transverzalni električni (*TE*) valovi određeni su s $E_z = 0$ i $H_z \neq 0$, pa se jednadžbe (4–36) svode na:

$$E_x = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_\mathrm{c}^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}, \tag{4–53a}$$

$$E_y = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_\mathrm{c}^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \tag{4–53b}$$

$$H_x = -\frac{\mathrm{j}\beta}{k_\mathrm{c}^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \tag{4–53c}$$

$$H_y = -\frac{\mathrm{j}\beta}{k_\mathrm{c}^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}. \tag{4–53d}$$

U tom je slučaju zaporni valni broj različit od nule pa je koeficijent rasprostiranja

$$\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\sqrt{k^2 - k_\mathrm{c}^2} = \sqrt{k_\mathrm{c}^2 - k^2} \tag{4–54}$$

općenito funkcija frekvencije i geometrije prijenosne strukture. Iz jednadžba (4–53) vidimo da se sve komponente elektromagnetskog polja mogu odrediti ako je poznata uzdužna komponenta magnetskog polja $H_z(x, y, z)$. Budući da je $k_\mathrm{c}^2 = k^2 - \beta^2$, iz Helmholtzove jednadžbe (4–40) za magnetsko polje izlazi

$$\nabla_\mathrm{t}^2 H_z + k_\mathrm{c}^2 H_z = 0\,. \tag{4–55}$$

Tu jednadžbu valja riješiti uz zadane rubne uvjete.

Valna impedancija *TE*-moda može se izraziti kao omjer poprečnih komponenata električnog i magnetskog polja, tj.

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{k}{\beta}\eta\,. \tag{4–56}$$

Vidimo da je valna impedancija *TE*-moda frekvencijski ovisna jer je β nelinearna funkcija frekvencije.

TE-valovi mogu se rasprostirati strukturama, koje su posve zatvorene vodičima kao i između dvaju ili više vodiča, ali samo ako je ispunjen uvjet $k_c < k$. Ako je $k_c > k$, onda je β imaginarna veličina, što znači da se u tim uvjetima *TE*-val ne može rasprostirati. Tad je i valna impedancija posve imaginarna, dakle, reaktivna. Pri tomu važnu ulogu ima zaporni valni broj k_c, koji isključivo ovisi o rubnim uvjetima (odjeljak 4.1), što ćemo kasnije vidjeti na primjerima konkretnih prijenosnih struktura.

Također se može vidjeti da je valna impedancija *TE*-valova uvijek veća ili jednaka intrinzičnoj valnoj impedanciji η jer je uvijek $\beta < k$ da bi β bila realna, što je u skladu s izrazima (4–37) i (4–54).

4.2.3. *TM*-val

Transverzalni magnetski (*TM*) valovi određeni su s $E_z \neq 0$ i $H_z = 0$ pa jednadžbe (4–36) poprimaju oblik:

$$E_x = -\frac{\mathrm{j}\beta}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \tag{4–57a}$$

$$E_y = -\frac{\mathrm{j}\beta}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \tag{4–57b}$$

$$H_x = \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \tag{4–57c}$$

$$H_y = -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}. \tag{4–57d}$$

Transverzalni valni broj različit je od nule kao i za *TE*-val pa je $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$. Uzdužna se komponenta električnog polja može naći iz reducirane Helmholtzove jednadžbe

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0. \tag{4–58}$$

Valna impedancija opet upućuje na frekvencijsku ovisnost, ali je različita od one za *TE*-val, tj.

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta}{k}\eta. \tag{4–59}$$

Valja uočiti da je valna impedancija *TM*-valova uvijek manja ili jednaka intrinzičnoj valnoj impedanciji η jer je $\beta < k$ za realni β. To je posve u skladu i s fizikalnom intuicijom. Naime, omjer poprečnih komponenata *TM*-vala veći je od odgovarajućeg omjera za *TEM*-vala jer je za *TM*-val komponenta magnetskog polja u cijelosti poprečna, a električna samo djelomice, što je različito od slučaja s *TEM*-valom, kod kojeg su obje komponente u cijelosti poprečne.

Dualnost *TE*- i *TM*-valova vidi se iz umnoška izraza (4–56) i (4–59), koji daje

$$Z_{TE} Z_{TM} = \eta^2, \tag{4–60}$$

što vrijedi kad obje vrste vala imaju zajednički koeficijent rasprostiranja $\mathrm{j}\beta$.

Ovim se općenitim pristupom može doći do istih rješenja iz odjeljaka 4.2.2. i 4.2.3. za *TE*-, odnosno *TM*-modove u planparalelnome valovodu. Općeniti izrazi za tok i gubitke snage u planparalelnome valovodu nađeni su u odjeljcima 4.1.2. i 4.1.3.

4.3. Pravokutni valovod

U valovodu dobro ili savršeno vodljivih stijenka električna i magnetska polja nalaze su u prostoru unutar cijevi, tako da se nimalo snage ne izgubi zračenjem. Gubitci su u tom prostoru vrlo mali jer je valovod obično ispunjen zrakom. No u stvarnoj izvedbi uvijek postoje izvjesni gubitci zbog pretvorbe malog dijela elektromagnetske energije u toplinu u stijenkama valovoda koje su izvedene od metala visoke provodnosti.

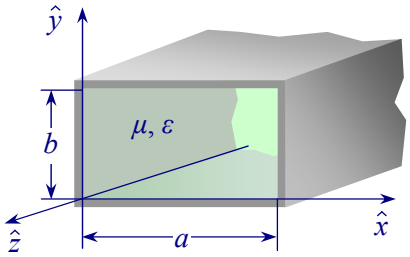
Kao što smo vidjeli u odjeljku 4.1. o planparalelnome valovodu, *dominantni mod* označuje mod s najnižom zapornom frekvencijom. Dimenzije se valovoda obično tako odabiru da je za zadanu frekvenciju ulaznog signala prijenos energija moguć samo dominantnim modom.

Postupak rješavanja valovodnih problema može uključiti sljedeća tri koraka. Prvo, željene valne jednadžbe valja napisati u obliku koji je prikladan za pravokutni ili kružni koordinatni sustav. Zatim se na sustav jednadžba iz prvog koraka primijene rubni uvjeti. Na kraju se kao rezultat dobivaju jednadžbe, obično napisane u obliku parcijalnih diferencijalnih jednadžba koje se potom rješavaju u vremenskoj ili frekvencijskoj domeni [1].

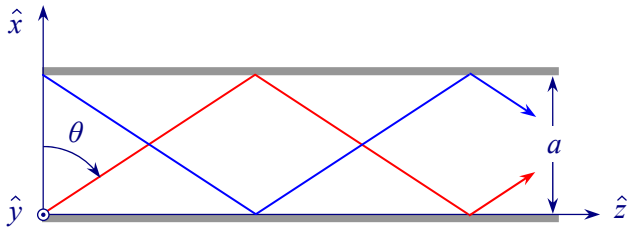
U odjeljku 4.1. pokazano je da se elektromagnetski valovi mogu prenositi uzastopnim refleksijama između dviju vodljivih ravnih ploha koje tvore planparalelni valovod. Ako se planparalelni valovod presječe s dvjema ortogonalnim paralelnim vodljivim plohama, onda se dobiva pravokutni valovod. Budući da su sad polja u poprečnome smjeru u cijelosti ograničena vodljivim plohama, pravokutnim se valovodom ne mogu rasprostirati *TEM*-valovi, nego se energija može prenositi samo *TE*- ili *TM*-modovima. Kao što smo vidjeli kod planparalelnoga valovoda, za zadanu geometriju svakom modu odgovara drugo rješenje Maxwellovih jednadžba, i za svaki dopušteni mod valovod ima točno određenu zapornu frekvenciju. Kad je frekvencija utisnutog signala viša od zaporne frekvencije za dani mod, moguć je prijenos energije i to gotovo bez prigušenja. Ispod zaporne frekvencije ne postoje uvjeti za prijenos elektromagnetske energije pa u tom frekvencijskom području vladaju zaporna ili evanescentna polja.

Sad ćemo naći električna i magnetska polja u pravokutnome valovodu prikazanom na slici 4.12. Širina i visina valovoda iznose a i b, gdje je $a>b$. Pretpostavimo da su stijenke valovoda savršeno vodljive i da je prostor između njih ispunjen homogenim linearnim izotropnim sredstvom permitivnosti ε i permeabilnosti μ.

a)



b)



Slika 4.12. a) Geometrija i koordinatni sustav pravokutnoga valovoda; **b)** refleksija ravnoga vala od bočnih stijenka valovoda

4.3.1. *TE*-valovi

Transverzalni električni (*TE*) valovi određeni su uvjetom $E_z = 0$, a uzdužna magnetska komponenta H_z mora zadovoljiti reduciranu Helmholtzovu valnu jednadžbu (4–55),

$$\nabla_{\mathrm{t}}^2 H_z + k_{\mathrm{c}}^2 H_z = 0\,, \tag{4–61}$$

gdje je $k_{\mathrm{c}}^2 = k^2 - \beta^2$. U odjeljku 2.5.3. pokazano je kako se rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe može pojednostavniti metodom separacije varijabla. Primjenom tog postupka, u skladu s izrazom (2–94b), opće rješenje jednadžbe (4–61) za *TE* modove poprimit će ovaj oblik

$$H_z(x, y) = (A\cos k_x x + B\sin k_x x)(C\cos k_y y + D\sin k_y y)\,, \tag{4–62}$$

gdje realni transverzalni valni brojevi k_x i k_y moraju zadovoljiti separacijsku jednadžbu

$$k_{\mathrm{c}}^2 = k_x^2 + k_y^2\,. \tag{4–63}$$

Ako se uzmu negativne separacijske konstante k_x^2 i k_y^2, rješenja postaju hiperboličke funkcije jer su u tom slučaju k_x i k_y imaginarne veličine. Ta se rješenja ne mogu fizički ostvariti u zatvorenoj elektromagnetskoj strukturi poput valovoda, ali ih je moguće naći kod dielektričnih valovoda (odjeljak 4.7).

Uvrštenjem rješenja (4–62) u jednadžbe (4–53a) i (4–53b) mogu se naći komponente električnog polja E_x i E_y. Deriviranjem jednadžbe (4–53a) po y izlazi

$$E_x(x, y) = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_{\mathrm{c}}^2} k_y (A\cos k_x x + B\sin k_x x)(-C\sin k_y y + D\cos k_y y)\,, \tag{4–64a}$$

a deriviranjem jednadžbe (4–53b) po x izlazi

$$E_y(x, y) = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_{\mathrm{c}}^2} k_x (-A\sin k_x x + B\cos k_x x)(C\cos k_y y + D\sin k_y y)\,. \tag{4–64b}$$

Sad se nepoznate konstante A, B, C i D mogu naći primjenom rubnih uvjeta na vodljivim stijenkama koje leže u ravninama $x = 0$ i a te $y = 0$ i b. Za tangencijalne komponente električnog polja (4–64) rubni uvjeti glase:

$$E_x(x, y) = 0 \quad \text{za } y = 0,\, b, \tag{4–65a}$$

$$E_y(x, y) = 0 \quad \text{za } x = 0,\, a. \tag{4–65b}$$

Uvrštenjem tih rubnih uvjeta u izraze (4–64) izravno slijedi $B = D = 0$ i

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \qquad \text{za } m = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots \tag{4–66a}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \qquad \text{za } n = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots \tag{4–66b}$$

što je u biti jednako odgovarajućem izrazu (4–4) za planparalelni valovod.

Budući da postoje dva uvjeta za vođenje vala (4–66), svakom od *TE*-modova pripada po jedan par cjelobrojnih indeksa m, n. Primjenom izraza (4–66) i uvođenjem nove amplitudne konstante $A_{mn} = AC$ za odgovarajući mod TE_{mn}, ukupno rješenje za uzdužnu komponentu *TE*-vala u fazorskom obliku glasi

$$H_z = A_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}\,, \tag{4–67a}$$

gdje je fazoru vraćen faktor rasprostiranja $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}$. Ako je konstanta A_{mn} realna, onda se cjelovito rješenje u vremenskoj domeni može dobiti uzimanjem realnog dijela izraza (4–67a),

$$H_z(x,y,z,t) = A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos(\omega t-\beta z)\,.$$

Komponente fazora električnog polja dobivaju se iz izraza (4–64):

$$E_x = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_\mathrm{c}^2}\frac{n\pi}{b}A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}\,, \tag{4–67b}$$

$$E_y = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_\mathrm{c}^2}\frac{m\pi}{a}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}\,, \tag{4–67c}$$

$$E_z = 0\,, \tag{4–67d}$$

Odgovarajuće poprečne komponente magnetskog polja mogu se dobiti primjenom Faraday-eva zakona $\vec{H} = (\mathrm{j}/\omega\mu)\nabla\times\vec{E}$ ili iz jednadžba (4–53c) i (4–53d). Rezultat je:

$$H_x = \frac{\mathrm{j}\beta}{k_\mathrm{c}^2}\frac{m\pi}{a}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}\,, \tag{4–67e}$$

$$H_y = \frac{\mathrm{j}\beta}{k_\mathrm{c}^2}\frac{n\pi}{b}A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}\,. \tag{4–67f}$$

Jednadžbe (4–67) čine potpun skup rješenja polja za *TE*-modove pravokutnoga valovoda. Svakom modu pripada odgovarajući koeficijent rasprostiranja $\gamma=\mathrm{j}\beta$. Iz izraza (4–54) izlazi

$$\gamma = \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\sqrt{k^2-k_\mathrm{c}^2} = \mathrm{j}\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\,. \tag{4–68}$$

gdje je

$$k_\mathrm{c} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = 2\pi f_{\mathrm{c}mn}\sqrt{\mu\varepsilon}\,, \tag{4–69}$$

zaporni valni broj, a $f_{\mathrm{c}mn}$ zaporna frekvencija za određeni mod TE_{mn}, tj.

$$f_{\mathrm{c}mn} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}\,. \tag{4–70}$$

Prijenos valovodom moguć je samo uz imaginarni koeficijent rasprostiranja $\gamma=\mathrm{j}\beta$, tj. realni fazni koeficijent. Iz izraza (4–68) – (4–70) izlazi da je prijenos moguć uz uvjet $k>k_\mathrm{c}$ ili

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\left(\frac{f_{\mathrm{c}mn}}{f}\right)^2}\,. \tag{4–71}$$

Drugim riječima, prijenos je moguć samo ako je frekvencija vala viša od zaporne frekvencije $f_{\mathrm{c}mn}$, za dani mod. Za radne frekvencije niže od zaporne, »val« se eksponencijalno prigušuje pa se energija ne prenosi valovodom. Ovdje je koeficijent rasprostiranja posve realna veličina pa se može zamijeniti koeficijentom prigušenja α

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{f_{\mathrm{c}mn}}{f}\right)^2-1}\,, \tag{4–72}$$

Valja uočiti obratni redoslijed članova pod korijenom izraza (4–71) i (4–72).

Kao i kod planparalelnoga valovoda, fazna brzina ovisi o frekvenciji i veća je od brzine svjetlosti $1/\sqrt{\mu\varepsilon}=\omega/k$ u sredstvu kojim je ispunjen valovod jer je $\beta<k$, tj.

$$v_{\mathrm{f}} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{cmn}}{f}\right)^2}} \,. \tag{4–73}$$

Otuda je valna duljina *TE*-vala

$$\lambda_{\mathrm{v}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{cmn}}{f}\right)^2}} \tag{4–74}$$

uvijek veća od valne duljine u sredstvu, $\lambda_{\mathrm{v}} > \lambda$.

Kao i kod planparalelnoga valovoda, grupna je brzina

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{1}{\frac{\partial\beta}{\partial\omega}} \,.$$

Deriviranje faznog koeficijenta $\beta = \sqrt{k^2 - k_{\mathrm{c}}^2} = \sqrt{(\omega/v)^2 - k_{\mathrm{c}}^2}$ po frekvenciji daje

$$\frac{\partial\beta}{\partial\omega} = \frac{\omega/v^2}{\sqrt{(\omega/v)^2 - k_{\mathrm{c}}^2}} = \frac{k}{v\beta},$$

gdje je $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ brzina svjetlosti u sredstvu koje ispunjava valovod. Otuda je grupna brzina

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{v\beta}{k} = v\sqrt{1-\left(\frac{f_{cmn}}{f}\right)^2} \,, \tag{4–75}$$

gdje su fazna i grupna brzina međusobno povezane izrazom $v^2 = v_{\mathrm{f}} v_{\mathrm{g}}$.

Valna impedancija za *TE*-modove dobiva se iz izraza (4–56) kao omjer odgovarajućih transverzalnih polja. Dakle,

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{k}{\beta}\eta \,. \tag{4–76}$$

Ova je impedancija realna kad je $k > k_{\mathrm{c}}$ i za sve je *TE*-modove uvijek veća od intrinzične valne impedancije η u sredstvu kojim je valovod ispunjen jer je $k > \beta$. To je također posve u skladu s fizikalnom intuicijom koja navodi na zaključak da omjer poprečnih komponenata *TE*-vala mora biti veći od omjera komponenata *TEM*-vala jer je za *TE*-val komponenta električnog polja u cijelosti poprečna, a magnetska samo jednim svojim dijelom, što je različito od slučaja s *TEM*-valom, gdje su obje komponente u cijelosti poprečne. Za $k < k_{\mathrm{c}}$, valna je impedancija posve imaginarna, što smo i očekivali jer tad nema prijenosa, tj. sva se energija reflektira. Točno na zapornoj frekvenciji valna impedancija ima pol, tj. teži u beskonačnost.

Ako su zadovoljeni uvjeti za rasprostiranje moda TE_{mn}, onda se snaga koja se prenosi tim modom može izračunati na sličan način kao kod planparalelnoga valovoda, tj.

$$P_{TE} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^b\int_0^a \vec{E}\times\vec{H}^*\cdot\hat{z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^b\int_0^a (E_x H_y^* - E_y H_x^*)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{Z_{TE}\int_0^b\int_0^a (H_y H_y^* - H_x H_x^*)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}.$$

Uvrštenjem izraza (4–67e) i (4–67f) i uzimanjem u obzir činjenice da je

$$\int_0^b\int_0^a \sin^2\frac{m\pi x}{a}\cos^2\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^b\int_0^a \cos^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} \dfrac{ab}{4} & n\neq 0, m\neq 0 \\ \dfrac{ab}{2} & n \text{ili } m = 0 \end{cases},$$

za $n\neq 0$ i $m\neq 0$ dobiva se

$$P_{TE} = \frac{\omega\mu ab}{4k_\mathrm{c}^2}\left|A_{mn}\right|^2 \mathrm{Re}\{\beta\}. \tag{4–77}$$

Ako je jedan od indeksa jednak nuli, onda vrijednost izraza (4–77) valja prepoloviti.

Ako se energija istodobno prenosi dvama modovima, onda je ukupna snaga jednaka zbroju snaga koje se prenose pojedinačnim modovima. To opće pravilo proizlazi iz svojstva ortogonalnosti funkcija koje opisuju promjene polja u poprečnome smjeru. To vrijedi čak i uz male gubitke u stijenkama valovoda. No pri prijenosu energije degenerativnim modovima, između njih može doći do sprege već i pri malim gubitcima pa im se snage ne mogu jednostavno zbrajati. Degenerativni modovi imaju zajednički koeficijent rasprostiranja, a polja su im međusobno ortogonalna.

Kao i kod valovoda s planparalelnim vodičima, prigušenje u pravokutnome valovodu nastaje zbog gubitaka u dielektriku i vodičima. Gubitci u dielektriku mogu se dobiti izravno iz izraza (4–24a). Zbog simetrije, razdiobe struja na donjoj i gornjoj stijenki valovoda međusobno su jednake, a jednake okolnosti vladaju i na bočnim stijenkama. Stoga je dovoljno izračunati samo gubitke koji nastaju u stijenkama na $x=0$ i $y=0$ i rezultat na kraju udvostručiti. U tu se svrhu može primijeniti postupak iz odjeljku 4.1.3. Struja u vodiču povezana je s tangencijalnim magnetskim poljem $|J_s| = |H_{\tan}|$. Za modove TE_{mn} uz $n\neq 0$, u stijenki valovoda na $y=0$ tangencijalne su komponente H_x i H_z, a u stijenki na $x=0$ to su komponente H_y i H_z. Tako razdiobe površinskih struja u stijenkama na $y=0$ i $x=0$ glase:

$$\vec{J}_\mathrm{s}\big|_{y=0} = \hat{n}\times\vec{H}\big|_{y=0} = \hat{y}\times\left(\hat{x}H_x\big|_{y=0} + \hat{z}H_z\big|_{y=0}\right) = -\hat{z}H_x\big|_{y=0} + \hat{x}H_z\big|_{y=0}, \tag{4–78a}$$

$$\vec{J}_\mathrm{s}\big|_{x=0} = \hat{n}\times\vec{H}\big|_{x=0} = \hat{x}\times\left(\hat{y}H_y\big|_{x=0} + \hat{z}H_z\big|_{y=0}\right) = \hat{z}H_y\big|_{x=0} - \hat{y}H_z\big|_{x=0}. \tag{4–78b}$$

No za modove TE_{m0} samo je komponenta H_z tangencijalna, pa je razdioba površinske struje u tom slučaju znatno jednostavnija od one u izrazu (4–78b):

$$\vec{J}_\mathrm{s}\big|_{x=0} = \hat{n}\times\vec{H}\big|_{x=0} = -\hat{y}H_z\big|_{x=0} = \hat{y}A_{m0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}. \tag{4–78c}$$

Ukupni gubitci snage po jedinici duljine za modove TE_{mn} uz $n\neq 0$ mogu se sad izračunati uvrštenjem izraza (4–67e) i (4–67f) u izraze (4–78a) i (4–78b), a njih zatim u izraz (4–26), tj

$$p_\mathrm{dis} = R_\mathrm{s}\int_{x=0}^{a}\left(\vec{J}_\mathrm{s}\big|_{y=0}\cdot\vec{J}_\mathrm{s}^{\,*}\big|_{y=0}\right)\mathrm{d}x + R\int_{y=0}^{b}\left(\vec{J}_\mathrm{s}\big|_{x=0}\cdot\vec{J}_\mathrm{s}^{\,*}\big|_{x=0}\right)\mathrm{d}y.$$

Uvrštenjem ovog izraza i izraza (4–76) u jednadžbu (4–30) konačno se dobiva koeficijent prigušenja zbog gubitaka u vodičima za modove TE_{mn} uz $n\neq 0$, tj.

$$\alpha_{\mathrm{c}TEmn} = \frac{p_\mathrm{dis}}{2P_\mathrm{TE}} = \frac{2R_\mathrm{s}}{b\eta\sqrt{1-\left(\dfrac{f_\mathrm{c}}{f}\right)^2}}\left\{\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{f_\mathrm{c}}{f}\right)^2 + \left[1-\left(\frac{f_\mathrm{c}}{f}\right)^2\right]\frac{\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{b}{a}m^2+n^2\right)}{\dfrac{b^2}{a^2}m^2+n^2}\right\}. \tag{4–79a}$$

Primjenom izraza (4–78c), koeficijent prigušenja za modove TE_{m0} poprima ovaj oblik

$$\alpha_{cTEm0} = \frac{2R_s}{b\eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}\left[1+\frac{2b}{a}\left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right]. \tag{4–79b}$$

4.3.2. *TM*-valovi

Transverzalni magnetski valovi određeni su uvjetom $H_z = 0$, a uzdužna električna komponenta E_z mora zadovoljiti reduciranu Helmholtzovu valnu jednadžbu (4–58), tj.

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0\,. \tag{4–80}$$

Primjenom sličnog postupka kao za *TE*-valove, opće rješenje za uzdužnu komponentu glasi

$$E_z(x,y) = (A\cos k_x x + B\sin k_x x)(C\cos k_y y + D\sin k_y y)\,. \tag{4–81}$$

Izravnim uvrštenjem rubnih uvjeta:

$$E_z(x,y) = 0 \quad \text{za } y = 0,\ b, \tag{4–82a}$$

$$E_z(x,y) = 0 \quad \text{za } x = 0,\ a \tag{4–82b}$$

u izraz (4–81) dobiva se $A = C = 0$ i:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \qquad \text{za } m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{4–83a}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \qquad \text{za } n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{4–83b}$$

kao i kod *TE*-modova. Otuda su zaporni valni broj i fazni koeficijent jednaki izrazima (4–68)-(4–70) za *TE*-modove, a rješenje (4–81) svodi se na

$$E_z = B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}, \tag{4–84}$$

gdje je uvedena nova konstanta $B_{mn} = BD$. Opet postoji dvostruki beskonačan broj rješenja koja odgovaraju različitim cijelim brojevima m i n. No za razliku od slučaja s *TE*-modovima, ovdje $m = 0$ i $n = 0$ nisu rješenja. Poprečne komponente polja za *TM*-modove mogu se naći uvrštenjem izraza (4–84) u jednadžbe (4–57) i dualna su rješenjima (4–67) za *TE*-modove jer se mogu dobiti jednostavnom zamjenom veličina E s $-H$, H s E te ε s μ u odgovarajućim izrazima (4–67), kao što je navedeno u tablici 2.5. odjeljka 2.15.2. Ovdje valja još međusobno zamijeniti i funkcije sinus i kosinus.

Izrazi za koeficijent rasprostiranja, zaporni valni broj, zapornu frekvenciju, faznu i grupnu brzinu te valnu duljinu za *TM*-modove istovjetni su izrazima (4–68)-(4–75) za *TE*-modove.

Valna impedancija za modove TM_{mn} dobiva se iz izraza (4–59) kao

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\sqrt{E_x^2+E_y^2}}{\sqrt{H_x^2+H_y^2}} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta}{k}\eta \tag{4–85}$$

i uvijek je niža od intrinzične impedancije slobodnoga prostora jer u prijenosu energije sudjeluje ukupno (poprečno) magnetskog polja i samo poprečni dio električnog polja.

Koeficijent prigušenja za *TM*-modove može se izračunati na sličan način kao za *TE*-modove primjenom dualnih izraza za magnetska polja. Kao rezultat dobiva se

$$\alpha_{cTMmn} = \frac{2R_s}{b\eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \frac{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^3 + n^2}{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2}. \tag{4–86}$$

4.3.3. Dominantni mod TE_{10}

Valja uočiti da u pravokutnome valovodu ne mogu opstati polja moda TE_{00} (to bi ustvari bio *TEM*-mod) jer su za $m=0$ i $n=0$ sva poprečna polja u izrazima (4–67) jednaka nuli. Budući da je na samom početku razmatranja pretpostavljeno $a > b$, *TE*-mod s najnižom zapornom frekvencijom jest mod TE_{10}, gdje je $m=1$, $n=0$, što se može vidjeti iz izraza (4–69) i (4–70)

$$k_c = \frac{\pi}{a}, \tag{4–87}$$

$$f_{c10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}. \tag{4–88}$$

Za taj je slučaj duljina šire stranice valovoda upravo jednaka jednoj polovini valne duljine za ravni val u sredstvu koje se nalazi u valovodu, tj. $a=\lambda/2$.

Kad je bilo koji od indeksa m ili n jednak nuli, tad su polja pripadajućih *TM*-modova jednaka nuli, što znači da u pravokutnome valovodu ne mogu opstati modovi TM_{00}, TM_{01} i TM_{10}. Otuda je *TM*-mod najnižeg reda mod TM_{11} čija je zaporna frekvencija

$$f_{c11} = \frac{ab}{2\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{a^2+b^2}}$$

uvijek viša od zaporne frekvencije f_{c10} moda TE_{10}.

Mod s najnižom mogućom zapornom frekvencijom naziva se *dominantni mod* jer je to jedini mod koji se može rasprostirati do zaporne frekvencije prvoga višeg moda. Ako je $a>2b$, onda je prvi viši mod TE_{20}. No ako je $a>b$, ali $a<2b$, onda je prvi viši mod TE_{01}.

Općenito se može reći da je u svakom šupljem valovodu najniži mod rasprostiranja uvijek *TE*-mod jer rubni uvjet $E_z = 0$ za *TM*-modove traži veću prostornu promjenu funkcije E_z u poprečnome smjeru od one za H_z kod *TE*-moda najnižeg reda. Stoga riječima, *TE*-modovi imaju najmanji zaporni valni broj pa im je i zaporna frekvencija najniža. Za $a=b$, u valovodu savršeno vodljivih stijenka istodobno se mogu pojaviti dva dominantna moda s istim razdiobama polja u dvjema okomitim (ortogonalnim) ravninama. To su *degenerativni modovi*.

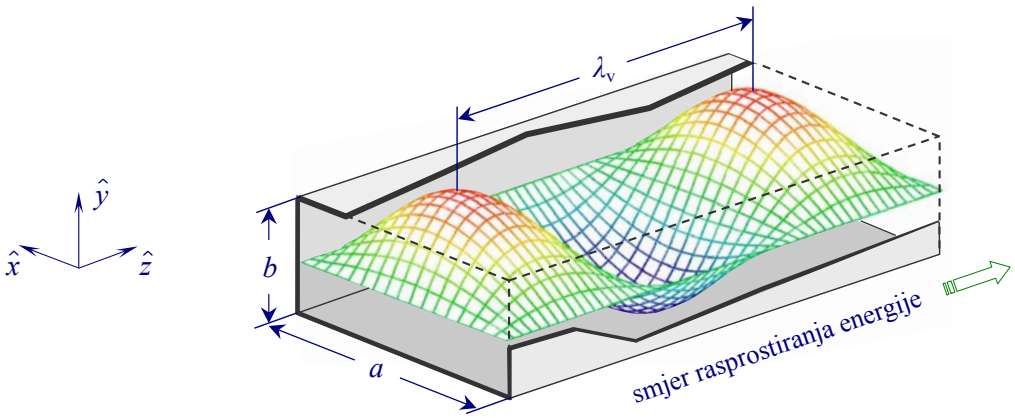
Budući da je između zapornih frekvencija dominantnog i prvoga višeg moda u valovodu moguć prijenos samo dominantnim modom, taj se mod najčešće nalazi u praksi. Stoga ćemo podrobnije razmotriti razdiobe polja i prijenos energije modom TE_{10}. Za $m=1$ i $n=0$ izrazi (4–67) svode se na:

$$H_z = A_{10}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{j(\omega t-\beta z)}, \tag{4–89a}$$

$$H_x = jA_{10}\frac{\beta a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{j(\omega t-\beta z)}, \tag{4– 89b}$$

$$E_y = -jA_{10}\frac{\omega\mu a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{j(\omega t-\beta z)}, \tag{4– 89c}$$

$$E_z = E_x = H_y = 0. \tag{4– 89d}$$



Slika 4.13. Električno polje dominantnoga moda TE_{10} (pogled sa strane)

U tom slučaju, izraz (4–71) za fazni koeficijent daje

$$\beta_{10} = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \,. \tag{4–90}$$

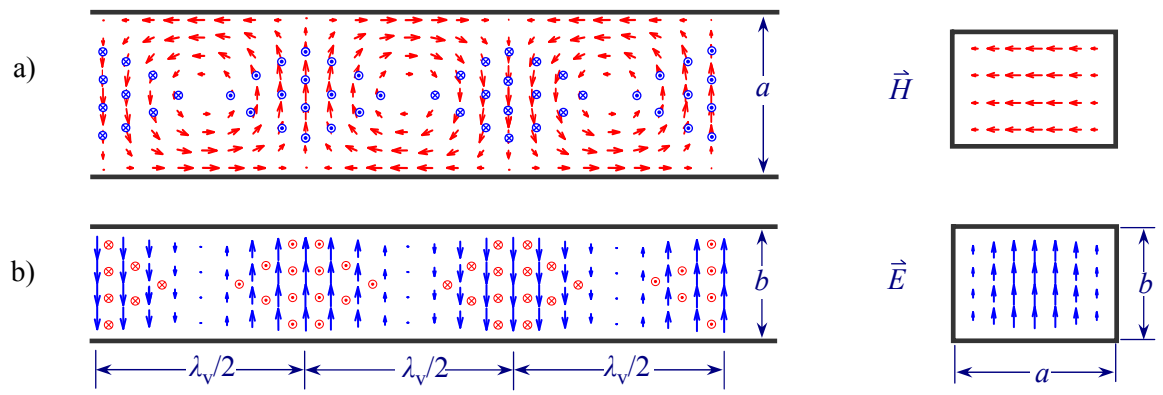
Iz izraza (4–76) i (4–90) valna impedancija iznosi

$$Z_{10} = \frac{k}{\beta_{10}}\eta = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \,. \tag{4–91}$$

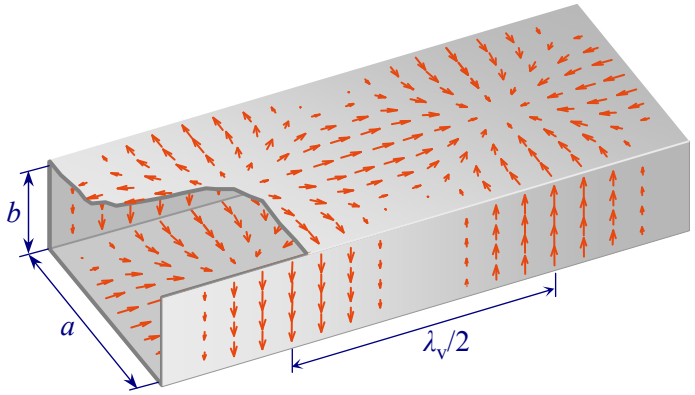
Razdioba trenutačnih vrijednosti električnog polja dominantnoga moda u pravokutnome valovodu opisana izrazom (4–89c) vizualizirana je na slici 4.13.

Na slici 4.14 prikazane su razdiobe vektora električnog i magnetskog polja u uzdužnome i poprečnome smjeru. Budući da magnetsko polje nastaje iz vremenski promjenljive pomačne struje, vektor $\vec{H}$ vrtloži se oko točke u kojoj je $\vec{E} = 0$, tj. na mjestu gdje je pomačna struja $\varepsilon\partial\vec{E}/\partial t$ najveća. Može se uočiti da su razdiobe polja susjednih poluvalova međusobno posve jednake, ali su smjerovi vektora polja suprotni. Tijekom vremena razdiobe polja na slici 4.14 putuju u smjeru $\hat{z}$ faznom brzinom $v_f = \omega/\beta$, ali energija se prenosi grupnom brzinom v_g.

Dominantnim modom TE_{10}, najviše se energije prenosi središnjim dijelom valovoda, gdje je gustoća energije najveća jer u tom području vrijednosti transverzalnih polja poprimaju maksimalne vrijednosti. Pritom se uz bočne stijenke prijenosi zanemariva količina energije.



Slika 4.14. Razdiobe trenutačnih vektora magnetskog polja (crveno) i električnog polja (plavo) za dominantni mod TE_{10} pravokutnoga valovoda **a)** u H-ravnini i **b)** u E-ravnini



Slika 4.15. Razdioba gustoće površinske struje dominantnoga moda TE_{10} na stijenkama valovoda

Razdioba vektora površinske struje na stijenkama valovoda dana je na slici 4.15, a izračunana je s pomoću izraza (4–78). Vektori strujnica okomiti su na vektore tangencijalnog magnetskog polja, a središta iz kojih strujnice prividno izviru ili u koje poniru nalaze se na mjestima maksimuma pomačnih struja u valovodu, što proizlazi iz zakona kontinuiteta struje. Budući da razdioba magnetskog polje putuje faznom brzinom, istom brzinom putuje i razdioba površinskih struja. Stoga se u čvrstoj točki na stijenkama valovoda općenito mijenjaju i jakost i smjer površinske struje. No, za dominantni mod, strujnice su na bočnim stijenkama uvijek okomite na šire stijenke. Valja također uočiti da na široj stijenki valovoda strujnica koincidira sa simetralom stijenke. Stoga se uzduž te simetrale valovod može prorezati, a da pritom ne dođe do presijecanja strujnica. Drugim riječima na takvom uskom rezu ne može doći do zračenja elektromagnetske energije u prostor izvan valovoda, što se može iskoristiti za ubacivanje različitih komponenata u valovod (vidjeti odjeljke 5.9.1, 7.3.1, 7.3.2. i 10.1.7).

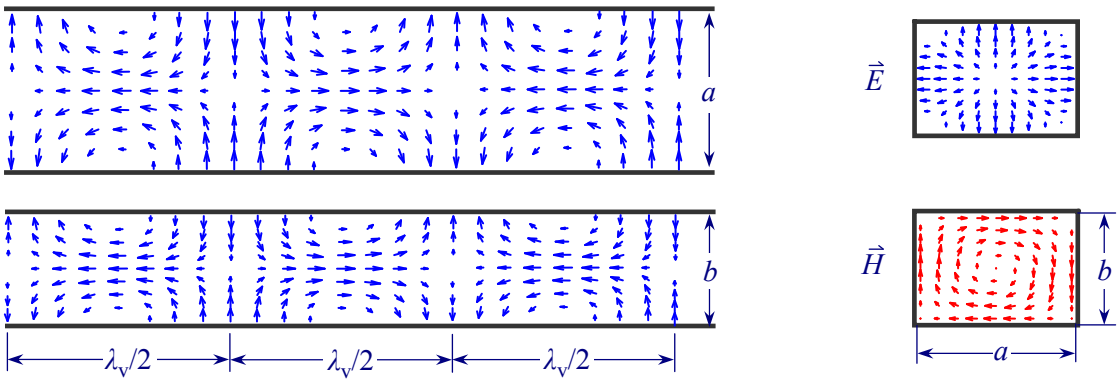
4.3.4. Viši modovi

Budući da zaporna frekvencija određenog moda u izrazu (4–70) ovisi o dimenzijama valovoda, fizička veličina valovoda određuje svojstva rasprostiranja modova. U tablici 4.1 prikazane su normirane zaporne frekvencije nekih modova u ovisnosti o omjeru fizičkih dimenzija (a/b). Frekvencije su normirane na zapornu frekvenciju dominantnoga moda.

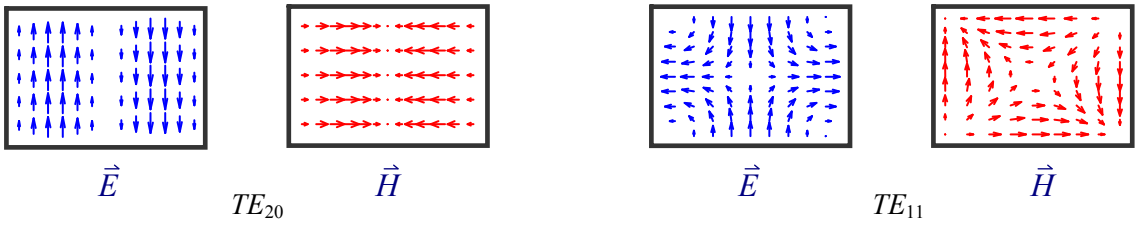
Tablica 4.1. Normirane zaporne frekvencije modova f/f_{c10} pravokutnoga valovoda za $a \geq b$.

$\frac{a}{b}$	TE_{10}	TE_{01}	TE_{11} TM_{11}	TE_{20}	TE_{02}	TE_{21} TM_{21}	TE_{12} TM_{12}	TE_{22} TM_{22}	TE_{30}
1	1	1	1,414	2	2	2,236	2,236	2,828	3
1,5	1	1,5	1,803	2	3	2,500	3,162	3,606	3
2	1	2	2,236	2	4	2,828	4,123	4,472	3
3	1	3	3,162	2	6	3,606	6,083	6,325	3
∞	1	∞	∞	2	∞	∞	∞	∞	3

U pravokutnome valovodu neki su TE_{mn} i TM_{mn} modovi degenerativni, tj. imaju jednake zaporne frekvencije, ali različite konfiguracije polja i općenito se ne mogu pobuditi istom pobudnom strukturom. Tako, primjerice, u valovodu kvadratnog presjeka ($a=b$) modovi TE_{mn} i TE_{nm} te TM_{mn} i TM_{nm} zajednički sudjeluju u degeneraciji. U praksi, pravokutni valovodi obično imaju omjer dimenzija $a=2b$ ili neznatno veći. Svaki od modova ima svoj specifični oblik električnog i magnetskog polja te pripadajuću razdiobu površinskih struja koje teku stijenkama valovoda.



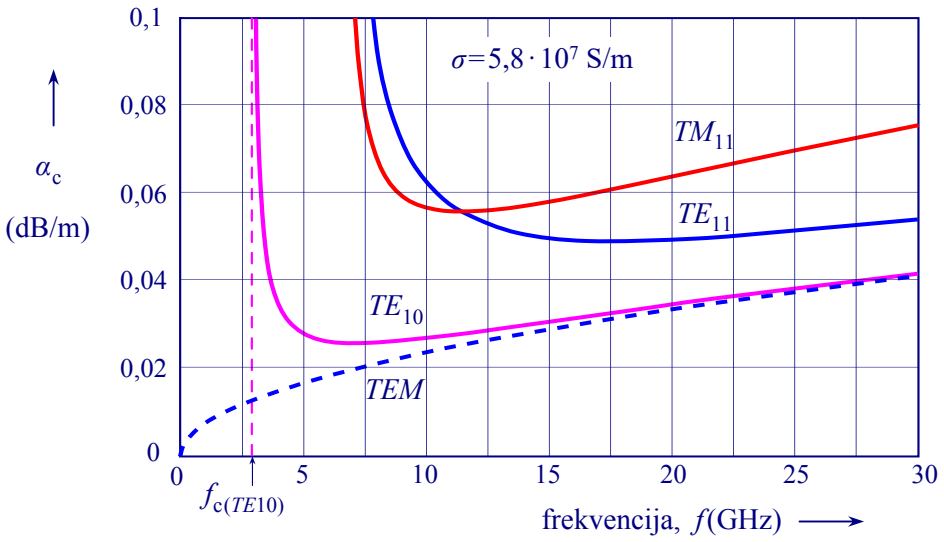
Slika 4.16. Razdiobe električnog polje za mod TM_{11}: **a)** u uzdužnome smjeru na polovici uže stijenke valovoda (gore) i na polovici šire stijenke (dolje); **b)** u poprečnoj ravnini



Slika 4.17. Vektorski prikaz razdioba električnog i magnetskog polja u poprečnoj ravnini za modove TE_{20} i TE_{11}

Na slici 4.16 prikazane su razdiobe vektorskih polja za mod TM_{11}. Za razliku od dominantnoga moda, modom TM_{11} maksimalna se energija prenosi uz simetrale stijenka valovoda. To proizlazi iz činjenice da su kod *TM*-moda poprečne komponente električnog i magnetskog polja maksimalne upravo na sredini (simetrali) svih četiriju stijenka pa je i njihov umnožak maksimalan.

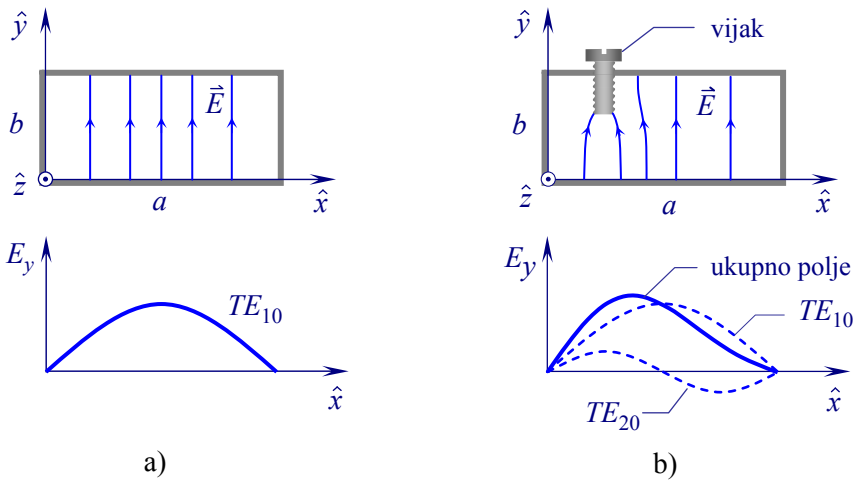
Na slici 4.17 dan je vektorski prikaz električnog i magnetskog polja u poprečnome smjeru modova TE_{20} i TE_{11}, a na slici 4.18 grafički je prikazana koeficijent prigušenja za nekoliko tipičnih modova u pravokutnome valovodu prema izrazima (4–79) i (4–86).



Slika 4.18. Koeficijent prigušenja pravokutnoga valovoda od bakra ($\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7$ S/m) dimenzija $a = 2b = 5{,}1$ cm za modove TE_{10}, TE_{11} i TM_{11} . Usporedbe radi prikazan je koeficijent prigušenja za planparalelni valovod u *TEM*-modu

Pretpostavi li se da je valovod pobuđen samo dominantnim modom (TE_{10}), tad je u skladu s izrazom (4–89c) razdioba električnog polja E_y sinusna, kao što je prikazano na slici 4.19a). Ako je šira stranica a veća od valne duljine, onda postoje uvjeti i za rasprostiranje višeg moda TE_{20}, ali taj se mod ne može pojaviti zbog savršene simetrije valovoda i nepromjenjivosti njegovog poprečnog presjeka. No u mikrovalne sklopove nerijetko se ugrađuju diskontinuiteti koji mogu unijeti nesimetriju u razdiobi polja (odjeljak 5.9). Kako se mogu stvoriti viši modovi u valovodu [24] može se pokazati na primjeru nesimetrično postavljenog vijka (slika 4.19b)). Fizikalna intuicija upućuje na zaključak da će u prostoru ispod vijka doći do porasta jakosti električnog polja jer se uz približno isti potencijal smanjio razmak između gornje i donje metalne granice. Budući da je vijak postavljen nesimetrično nastaje nesimetrična razdioba ukupnog polja. Primjenom načela superpozicije takva se razdioba u prvoj aproksimaciji može rastaviti na polja dvaju modova, TE_{10} i TE_{20}, kao što je prikazano na slici 4.19b). Postoje li u valovodu uvjeti za rasprostiranje obaju modova, polja iza vijka prenosit će energiju obama modovima, a isto će biti i s reflektiranim valom ispred vijka. To je posve logično jer se vijak može zamisliti kao antena koja prima energiju iz moda TE_{10} i ponovo je vraća u valovod. No smanji li se frekvencija signala toliko da je moguć prijenos energije samo modom TE_{10}, tad će to nesimetrično polje opstati samo u blizini vijka, a podalje od njega postojat će samo polje moda TE_{10}. Drugim riječima, polja viših modova bit će evanescentna i neće se rasprostirati, nego će slabjeti eksponencijalnom ovisnošću kako se točka promatranja udaljava od vijka u smjeru $-z$ i $+z$, tj. prema generatoru i prema teretu. Problemi s višim modovima mogu se izbjeći tako da se valovodi dimenzioniraju samo za prijenos energije modom TE_{10}. Stoga je taj mod dobio poseban naziv, *dominantni mod*. Iznimku čini *predimenzionirani valovod* za prijenos velike količine elektromagnetske energije. Naime, povećanjem poprečnih dimenzija valovoda može se znatno smanjiti mogućnost proboja u valovodu. No ovdje pozornost valja usredotočiti na kontrolu i potiskivanje viših modova.

Osim toga valja napomenuti da otvoreni valovod zrači elektromagnetsku energiju poput antene (vidjeti odjeljak 10.1), za razliku od *TEM*-prijenosnih linija čije se zračenje na otvorenom kraju može posve zanemariti jer su im poprečne dimenzije znatno manje od polovine valne duljine. Stoga u primjenama pri kojima se valovodima prenose velike gustoće snage valja poduzeti posebne mjere opreza jer na loše izvedenim spojevima između valovoda ili na otvorenom kraju valovoda može doći do zračenja elektromagnetske energije, koje može biti štetno za ljude ili druge radijske i elektroničke uređaje.

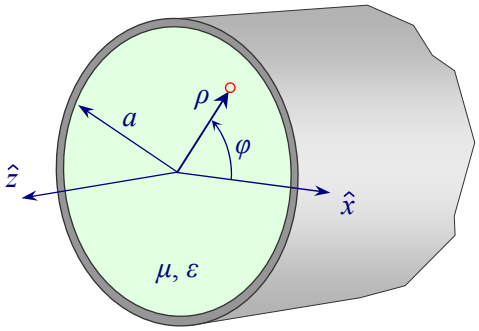


Slika 4.19. a) Valovod pobuđen samo dominantnim modom; **b)** objašnjenje nastajanja višeg moda na diskontinuitetu u obliku vijka

4.4. Kružni valovod

Kružni valovod šuplja je okrugla metalna cijev za vođenje elektromagnetskoga vala. Rasprostiranje ravnoga vala slično je onom kod pravokutnoga valovoda, tako da se opet pojavljuju *TE*- i *TM*-modovi. Kružni je valovod vrlo zanimljiv za primjene zbog jednostavne izvedbe, rotacijske simetrije i vrlo malih gubitaka modovaTE_{0n}. Analiza je nešto složenija u odnosu na pravokutni valovod zbog posebnog oblika Maxwellovih jednadžba u cilindričnome koordinatnom sustavu.

Na slici. 4.20 prikazane su dimenzije kružnoga valovoda polumjera a u cilindričnome koordinatnom sustavu. Rješenja za polja sadrže Besselove funkcije prve vrste pa za razliku od pravokutnoga valovoda ovdje ne postoje analitička rješenja. (Besselove se funkcije mogu naći u tabličnom, grafičkom i integralnom obliku te u obliku redova [17].)



Slika 4.20. Kružni (cilindrični) valovod

U cilindričnim strukturama, poput suosnih linija i kružnih valovoda, komponente elektromagnetskoga vala prikladno je izraziti u cilindričnome koordinatnom sustavu. Izravnom transformacijom u cilindrični koordinatni sustav, skup jednadžba (4–36) poprima novi oblik:

$$E_\rho = -\frac{\mathrm{j}}{k_\mathrm{c}^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial\rho}+\frac{\omega\mu}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}\right), \tag{4–92a}$$

$$E_\varphi = \frac{\mathrm{j}}{k_\mathrm{c}^2}\left(-\frac{\beta}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}+\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right), \tag{4–92b}$$

$$H_\rho = \frac{\mathrm{j}}{k_\mathrm{c}^2}\left(\frac{\omega\varepsilon}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}-\beta\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right), \tag{4–92c}$$

$$H_\varphi = -\frac{\mathrm{j}}{k_\mathrm{c}^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial\rho}+\frac{\beta}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}\right), \tag{4–92d}$$

gdje je

$$k_\mathrm{c}^2 = k^2-\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon-\beta^2, \tag{4–93}$$

a u valnim je oblicima pretpostavljena prostorna i vremenska ovisnost oblika $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z+\mathrm{j}\omega t}$.

4.4.1. *TM*-valovi

Za *TM*-modove kružnoga valovoda, skalarna se Helmholtzova jednadžba (4–56) mora izraziti u cilindričnome koordinatnom sustavu kao

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\varphi^2} = -k_\mathrm{c}^2 E_z \tag{4–94}$$

i riješiti za E_z. Kao u pravokutnome koordinatnom sustavu i pri rješavanju ove parcijalne diferencijalne jednadžbe može se pretpostaviti rješenje u obliku umnoška dviju funkcija, tj.

$$E_z(\rho,\varphi) = R(\rho)P(\varphi)\,. \tag{4–95}$$

Ako su $R(\rho)$ i $P(\varphi)$ samo funkcija polumjera ρ, odnosno obilaznoga kuta φ, onda izlazi

$$\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial\rho^2}P(\varphi) + \frac{P(\varphi)}{\rho}\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial\varphi^2}\frac{R(\rho)}{\rho^2} = -k_c^2 R(\rho)P(\varphi)$$

pa separacija varijabla daje

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)}\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial\rho^2} + \frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho} + k_c^2\rho^2 = -\frac{1}{P(\varphi)}\frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial\varphi^2}\,, \tag{4–96}$$

gdje je izraz slijeva samo funkcija od ρ, a izraz zdesna samo funkcija od φ. Obje strane bit će međusobno jednake za sve vrijednosti varijabla ρ i φ, ako su jednake konstanti. Ako se ta konstanta označi s ν^2, onda se jednadžba (4–96) raspada na dvije obične diferencijalne jednadžbe:

$$-\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\varphi^2} = \nu^2\,, \tag{4–97}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} + \left(k_c^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0\,. \tag{4–98}$$

Opće rješenje prve od njih periodična je funkcija oblika

$$P(\varphi) = A\sin\nu\varphi + B\cos\nu\varphi\,. \tag{4–99}$$

Budući da rješenje od $E_z(\rho,\varphi)$ mora biti periodično po φ, tj. $E_z(\rho,\varphi)=E_z(\rho,\varphi)\pm 2m\pi$ (za cijeli broj m), veličina ν mora biti cijeli broj, n. Otuda rješenje (4–99) poprima oblik

$$P(\varphi) = A\sin n\varphi + B\cos n\varphi\,. \tag{4–100}$$

Druga je jednadžba (4–98) zapravo Besselova diferencijalna jednadžba čije je opće rješenje

$$R(\rho) = CJ_n(k_c\rho) + DY_n(k_c\rho)\,, \tag{4–101}$$

gdje su $J_n(x)$ i $Y_n(x)$ Besselove funkcije prve, odnosno druge vrste n-tog reda realnog argumenta $x=k_c\rho$ (vidjeti dodatak G). Kad $\rho\to 0$, tad vrijednost funkcije $Y_n(x)$ postaje beskonačna za bilo koji n, što daje fizikalno neodrživo rješenje, pa ga se ne može uzeti kao unutarnje rješenje koje uključuje os valovoda. Stoga valja uzeti $D = 0$. U svrhu pojednostavljenja, ishodište koordinate φ može se odabrati tako da ostaje samo ovisnost o kosinusu pa cjelovito rješenje za fazor $E_z(\rho,\varphi)$ poprima oblik

$$E_z = BJ_n(k_c\rho)\cos(n\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}\,, \tag{4–102}$$

gdje je nova amplitudna konstanta B dobivena umnoškom konstanate B izraza (4–100), a C iz izraza (4–101).

Ako je ρ u jednadžbi (4–98) imaginarna veličina, onda ta jednadžba (4–98) prelazi u *modificiranu Besselovu jednadžbu*, čija su rješenja općenito *modificirane Besselove funkcije* prve i druge vrste (dodatak G i [17]) .

Za *TM*-modove mora biti zadovoljen uvjet $H_z=0$ pa iz jednadžba (4–92) i (4–102) poprečne komponente polja poprimaju oblik:

$$E_\rho = Z_{TM}H_\varphi = -\frac{\mathrm{j}\beta}{k_c}BJ_n'(k_c\rho)\cos(n\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}\,, \tag{4–103}$$

$$E_\varphi = -Z_{TM}H_\rho = \frac{\mathrm{j}\beta n}{k_c^2\rho}BJ_n(k_c\rho)\sin(n\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}\,, \tag{4–104}$$

gdje je J_n' prva derivacija funkcije J_n po argumentu. Valna impedancija *TM*-moda jednako je definirana kao u izrazu (4–59) za pravokutni koordinatni sustav, tj. kao omjer poprečnih kom-

ponenata električnog i magnetskog polja,

$$Z_{TM} = \frac{E_\rho}{H_\varphi} = -\frac{E_\varphi}{H_\rho} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \eta\frac{\beta}{k}. \tag{4–105}$$

Rubni uvjet na granici $\rho = a$ sa savršenim vodičem traži $E_z = E_\rho = 0$. Stoga izraz (4–102) pokazuje da će komponenta polja E_z na stijenki valovoda biti jednaka nuli kad je $k_c a$ jedna od nul-točaka Besselove funkcije, tj.

$$k_c a = \omega_c a\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi a}{\lambda_c} = \nu_{nm}, \tag{4–106}$$

gdje je ν_{nm} nula Besselove funkcije prve vrste n-tog reda, tj, $J_n(\nu_{nm})=0$. Izraz (4–104) pokazuje da je istodobno $E_\varphi=0$. Prvih nekoliko vrijednosti ν_{nm} prikazano je u tablici 4.2.

Tablica 4.2. Vrijednosti parametra ν_{nm} za *TM*-modove kružnoga valovoda

n	ν_{n1}	ν_{n2}	ν_{n3}
0	2,405	5,520	8,654
1	3,832	7,016	10,174
2	5,135	8,417	11,620
3	6,380	9,761	13,015
4	7,588	11,065	14,373

Iz jednadžbe (4–106) može se izračunati zaporna frekvencija za bilo koji red Besselove funkcije. Za svaki n postoji beskonačan broj nula funkcije $J_n(k_c\rho)$ pa postoji dvostruko beskonačan skup modova, koji se može označiti kao TM_{nm}. Valja uočiti da prvi indeks označuje kutne promjene, a drugi radijalne promjene.

Fazni koeficijent modova TM_{nm} glasi

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2}, \tag{4–107}$$

a zaporna im je frekvencija

$$f_{cnm} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\nu_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}. \tag{4–108}$$

Za faznu brzinu i valnu duljinu vrijede odgovarajući izrazi za pravokutni valovod.

4.4.2. *TE*-valovi

Diferencijalna jednadžba koja opisuje ponašanje uzdužne komponente H_z za *TE*-modove dualna je jednadžbi (4–94) za uzdužnu komponentu E_z *TM*-modova. Stoga se odmah može napisati rješenje u obliku

$$H_z(\rho,\varphi) = AJ_n(k_c\rho)\cos(n\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}. \tag{4–109}$$

Opet se poprečne komponente mogu izravno dobiti iz jednadžba (4–92) kao:

$$E_\rho = Z_{TE}H_\varphi = \frac{\mathrm{j}\omega\mu n}{k_c^2\rho}AJ_n(k_c\rho)\sin(n\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}, \tag{4–110}$$

$$E_\varphi = -Z_{TE}H_\rho = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c}AJ_n'(k_c\rho)\cos(n\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}, \tag{4–111}$$

gdje je A nova amplitudna konstanta, a valna impedancija TE-moda definirana je na isti način kao u pravokutnome koordinatnom sustavu u izrazu (4–56), preko omjera poprečnih komponenata električnog i magnetskog polja, tj. kao

$$Z_{TE} = \frac{E_\rho}{H_\varphi} = -\frac{E_\varphi}{H_\rho} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \eta\frac{k}{\beta}. \tag{4–112}$$

Sad rubni uvjet na granici sa savršeno vodljivim zidom valovoda na koordinati $\rho = a$ traži $E_\varphi = 0$ ili

$$k_c a = \omega_c a\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi a}{\lambda_c} = \nu'_{nm}, \tag{4–113}$$

gdje je ν'_{nm} nula prve derivacije Besselove funkcije prve vrste n-tog reda, tj. $J'_n(\nu'_{nm}) = 0$. Izrazi za fazni koeficijent i zapornu frekvenciju modova TE_{nm} imaju isti oblik kao odgovarajući izrazi za modove TM_{nm}, samo što se veličina ν_{nm} u izrazima (4–107 i 108) mora zamijeniti veličinom ν'_{nm}. Vrijednosti ν'_{nm} za prvih nekoliko indeksa mogu se naći u tablici 4.3. Izrazi za faznu brzinu, grupnu brzinu i valnu duljinu jednaki su onima za TM-modove.

Tablica 4.3. Vrijednosti parametra ν'_{nm} za TE-modove kružnoga valovoda

n	ν'_{n1}	ν'_{n2}	ν'_{n3}
0	3,832	7,016	10,174
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,706	9,970
3	4,201	8,015	11,346
4	5,318	9,282	12,682

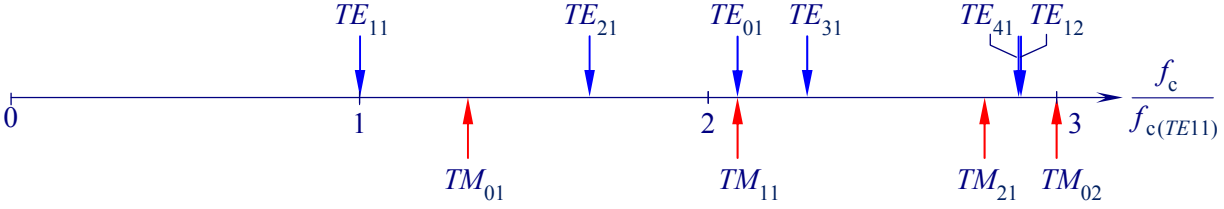
Na ljestvici slike 4.21 prikazani su odnosi između normiranih zapornih frekvencija prvih nekoliko TE- i TM-modova.

Na slici 4.22 prikazane su razdiobe jakosti komponenata H_z i E_z modova TE_{0m} i TM_{0m} na promjeru kružnoga valovoda. Promjene jakosti polja u radijalnom smjeru određene su Besselovim funkcijama prve vrste nultog reda uz zadovoljenje rubnih uvjeta. Modovi za $n = 1$, 2, … mogu se dobiti s pomoću Besselovih funkcija prve vrste, 1., 2., … reda. Na stijenkama valovoda, komponente H_z postižu maksimalne vrijednosti, a komponente E_z jednake su nuli.

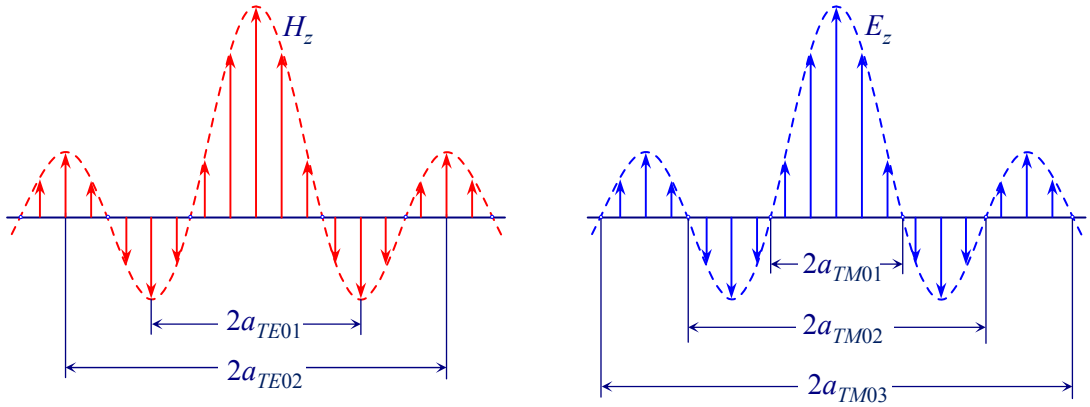
Površinska struja u vodiču povezana je s tangencijalnim magnetskim poljem $|\vec{J}_s| = |\vec{H}_{tan}|$. Za sve modove, na stijenki valovoda na koordinati $\rho = a$, nalaze se tangencijalne komponente H_φ i H_z. Tad je razdioba površinske struje na stijenki kružnoga valovoda dana kao

$$\vec{J}_s = \hat{n}\times\vec{H}\big|_{\rho=a} = -\hat{\rho}\times\left(\hat{\varphi}H_\varphi\big|_{\rho=a} + \hat{z}H_z\big|_{\rho=a}\right) = \hat{\varphi}J_s - \hat{z}J_{sz}, \tag{4–114}$$

gdje je $-\hat{\rho} = \hat{n}$ u skladu sa slikom 4.20.



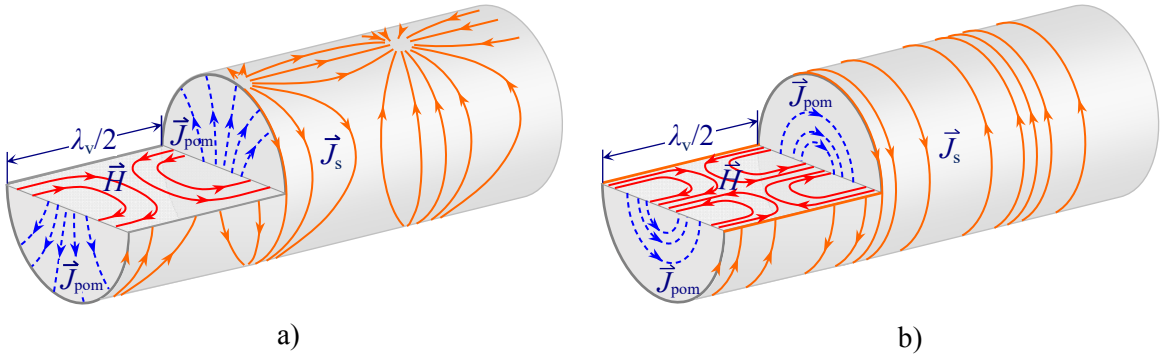
Slika 4.21. Relativne zaporne frekvencije prvih nekoliko TE- i TM-modova u kružnome valovodu



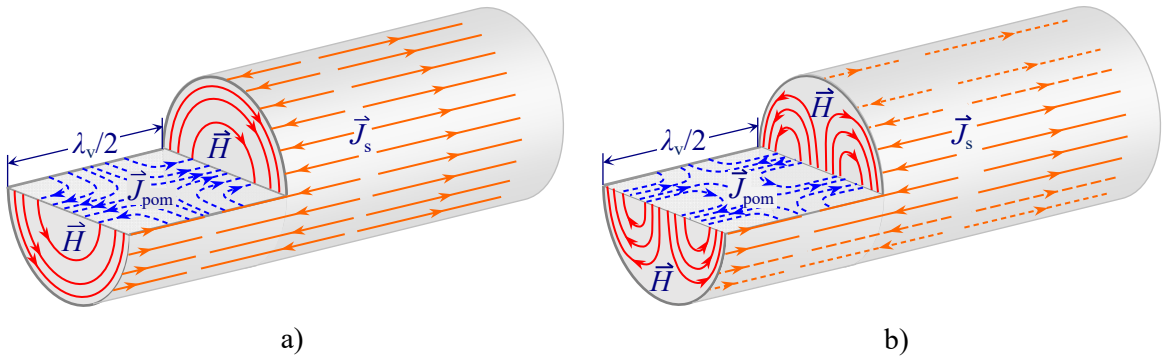
Slika 4.22. Komponente H_z i E_z modova TE_{0m} i TM_{0m} s pripadajućim promjerima valovoda

Razdiobe polja unutar kružnoga valovoda za modove TE_{01} i TE_{11} mogu se vidjeti na slici 4.23. Valja uočiti da je razdioba polja moda TE_{11} vrlo slična onoj za dominantni mod TE_{10} u pravokutnome valovodu. To se može objasniti činjenicom da je mod TE_{11} zapravo dominantni mod kružnoga valovoda jer ima najnižu zapornu frekvenciju, što se vidi iz minimalne vrijednosti parametra ν'_{nm} za dotični mod. Na istoj je slici prikazana i razdioba površinskih struja na unutarnjoj stijenki valovoda.

Na slici 4.24 prikazane su razdiobe polja i površinske struje za modove TM_{01} i TM_{11}.



Slika 4.23. Razdiobe polja i površinskih struja u kružnome valovodu za modove: **a)** TE_{11}, **b)** TE_{01}. Isprekidanim je crtama prikazana razdioba pomačne struje koja je u prostoru pomaknuta za četvrt valne duljine u odnosu na električno polje



Slika 4.24. Razdiobe polja i površinskih struja u kružnome valovodu za modove: **a)** TM_{01}, **b)** TM_{11}

4.4.3. Dominantni mod TE_{11}

Razmotrimo podrobnije dominantni mod kružnoga valovoda, mod TE_{11}, čija se polja dobivaju iz izraza općeg oblika (4–109) - (4–111) za $m=n=1$:

$$H_z = AJ_1(k_c\rho)\cos\varphi\,, \tag{4–115a}$$

$$E_\rho = Z_{TE}H_\varphi = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c^2\rho}AJ_1(k_c\rho)\sin\varphi\,, \tag{4–115b}$$

$$E_\varphi = -Z_{TE}H_\rho = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c}AJ_1'(k_c\rho)\cos\varphi\,. \tag{4–115c}$$

Razdiobe polja u poprečnoj dimenziji valovoda prikazane su na slici 4.25.

Tok snage za dominantni mod može se napisati kao

$$P_{TE11} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{\rho=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\vec{E}\times\vec{H}^*\cdot\hat{z}\rho\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{\rho=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[E_\rho H_\varphi^* - E_\varphi H_\rho^*\right]\cdot\hat{z}\rho\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\right\}$$

Uvrštenje izraza (4–115b) i (4–115c) daje

$$P_{TE11} = \frac{\pi\omega\mu|A|^2\,\mathrm{Re}\{\beta\}}{4k_c^4}\left[(\nu_{11}')^2-1\right]J_1^2(k_c a)\,, \tag{4–116}$$

što je različito od nule samo za realni β.

Koeficijent prigušenja zbog gubitaka u dielektriku dana je izrazom (4–24a), a koeficijent prigušenja zbog gubitaka u vodiču može se naći na sličan način kao kod planparalelnoga valovoda primjenom izraza (4–25), $p_{\mathrm{dis}}/(2P)$. Otuda su mogu izračunati gubitci snage po jedinici duljine kao

$$p_{\mathrm{dis}} = \frac{R_s}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{\varphi=0}^{2\pi}|\bar{J}_s|^2 a\,\mathrm{d}\varphi\right\} = \frac{R_s}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(|\bar{H}_\varphi|^2+|\bar{H}_z|^2\right)a\,\mathrm{d}\varphi\right\}.$$

Uvrštenjem izraza (4–115a) i (4–115b) za mod TE_{11}izlazi

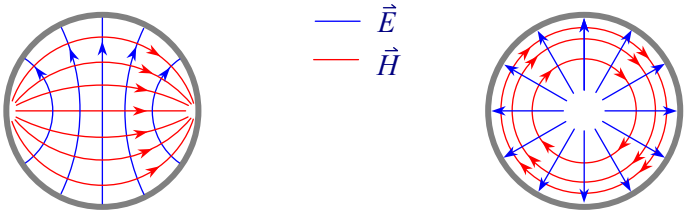
$$p_{\mathrm{dis}(TE11)} = \frac{|A|^2 R_s}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\frac{\beta^2}{k_c^4a^2}\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)J_1^2(k_c a)a\,\mathrm{d}\varphi\right\},$$

$$= \frac{\pi a|A|^2 R_s}{2}\left(1+\frac{\beta^2}{k_c^4a^2}\right)J_1^2(k_c a)\,. \tag{4–117}$$

Otuda se dobiva koeficijent prigušenja dominantnoga moda kao

$$\alpha_{c(TE11)} = \frac{p_{\mathrm{dis}(TE11)}}{2P_{TE11}} = \frac{R_s}{\eta k\beta a}\frac{k_c^4a^2+\beta^2}{\left[(\nu_{11}')^2-1\right]} = \frac{R_s}{a\eta k\beta}\left[k_c^2+\frac{k^2}{(\nu_{11}')^2-1}\right]. \tag{4–118}$$

Na sličan se način mogu naći koeficijenti prigušenja za ostale *TE*- i *TM*-modove. Za modove u kružnome valovodu koeficijent prigušenja pokazuje frekvencijsku ovisnost sličnu onoj za modove u pravokutnome valovodu (slika 4.18) pa opet postoje frekvencije na kojima nastaju minimalni gubitci u valovodu. Te se frekvencije za *TM*-modove pojavljuju na $\sqrt{3}$ puta višoj frekvenciji od zaporne frekvencije pripadajućeg moda.



Slika 4.25. a) Razdiobe električnog i magnetskog polja dominantnoga moda TE_{11} u poprečnoj ravnini. **b)** Razdiobe polja prvoga višeg moda, TM_{01}

No postoji iznimka za modove s kružnom simetrijom (TE_{0m}), kod kojih ne postoje uzdužne komponente provodne struje što se može vidjeti na primjeru moda TE_{01} (slika 4.23b)). Naime, porastom frekvencije električki promjer valovoda ($2a/\lambda$) postaje sve veći pa gustoća plošnih struja na stijenki valovoda postaje sve manja, što rezultira smanjenjem disipacije i koeficijenta prigušenja. Dakle, ako $f\to\infty$, onda $\alpha_{(\mathrm{TE}0m)}\to 0$. Najmanje gubitke upućuje na mod TE_{01} pa se taj mod obično primjenjuje za prijenos mikrovalne energije na velike udaljenosti. Budući da mod TE_{01} nije dominantni mod u kružnome valovodu, na diskontinuitetu može doći do pretvorbe moda TE_{01} u dominantni mod TE_{11}. Stoga i najmanje nepravilnosti u geometriji kružnoga presjeka valovoda mogu pokvariti ta poželjna obilježja.

4.5. Viši modovi u suosnoj liniji

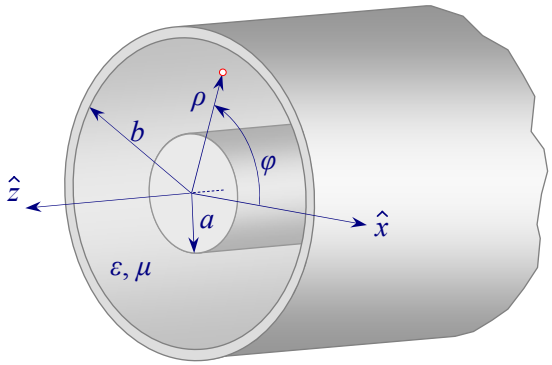
Osim osnovnog *TEM*-vala, suosnom linijom prikazanom na slici 4.26 mogu se rasprostirati i *TE*- i *TM*-modovi višeg reda. *TEM*-mod je opisan u odjeljku 3.2.1. na osnovi rješenja za statička polja. Opći oblik korisnih *TE*- i *TM*-modova u cilindričnom koordinatnom sustavu dani su u odjeljku 4.4. Rubni uvjeti za *TM*-valove traže da E_z bude nula na $\rho=a$ i $\rho=b$ na slici 4.26 pa iz jednadžbe (4–101) izlazi:

$$CJ_n(k_c a)+DY_n(k_c a)=0\,,$$

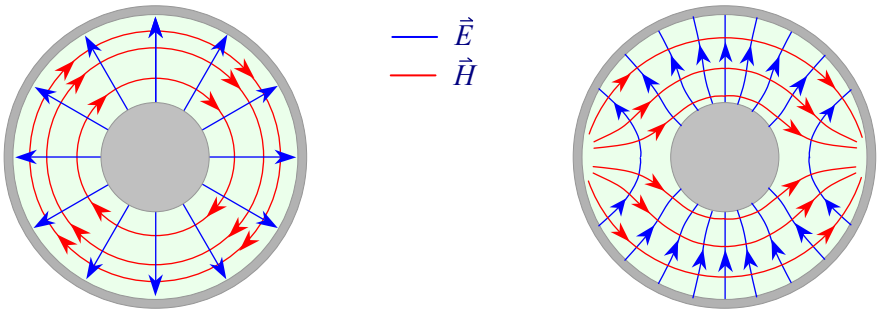
$$CJ_n(k_c b)+DY_n(k_c b)=0\,.$$

Budući da se radi o skupu homogenih jednadžba, netrivijalna rješenja dobivaju se samo kad je determinantna jednaka nuli. Otuda je

$$\frac{Y_n(k_c a)}{J_n(k_c a)}=\frac{Y_n(k_c b)}{J_n(k_c b)}\,. \qquad (4\text{–}119)$$



Slika 4.26. Geometrija suosne linije



Slika 4.27. a) Razdiobe električnog i magnetskog polja *TEM*-moda u poprečnoj ravnini. **b)** Razdiobe polja moda TE_{11}

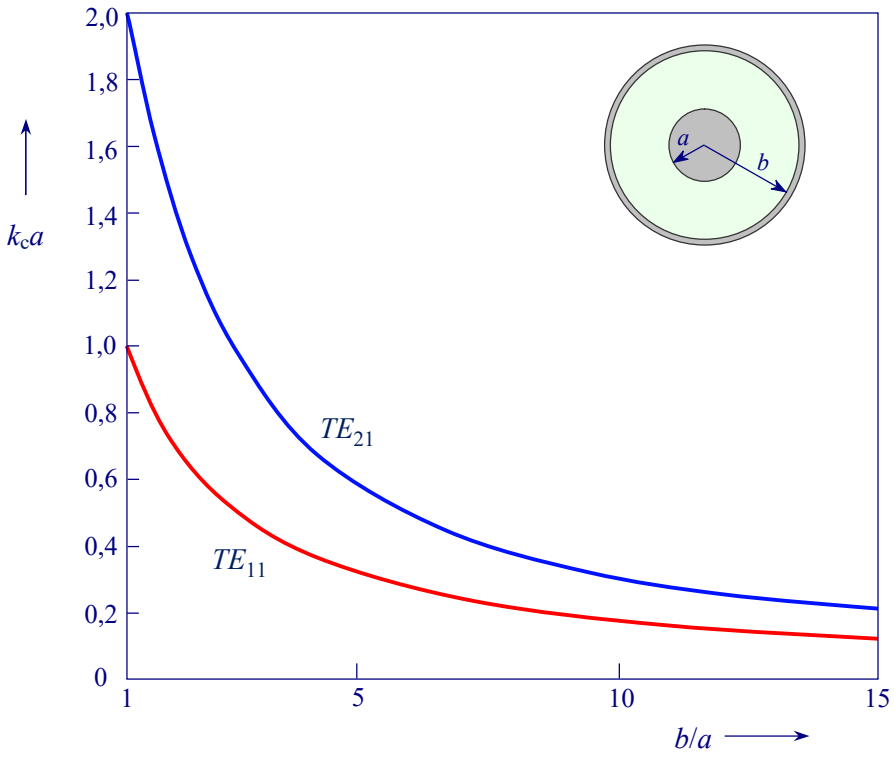
Za *TE*-valove, derivacija komponente H_z okomite na oba vodiča mora biti jednaka nuli na unutarnjem i vanjskom polumjeru. Stoga se umjesto jednadžbe (4–119) dobiva

$$\frac{Y_n'(k_c a)}{J_n'(k_c a)} = \frac{Y_n'(k_c b)}{J_n'(k_c b)}. \tag{4–120}$$

Jednadžbe (4–119) i (4–120) su karakteristične (svojstvene) jednadžbe za k_c. Vrijednosti k_c koje zadovoljavaju te jednadžbe definiraju modove suosne linije. To su transcendentne jednadžbe pa ih je moguće riješiti samo primjenom numeričkih ili grafičkih metoda.

Analogno planparalelnome valovodu, mogu se očekivati neki modovi s takvom zapornom frekvencijom da je razmak između vodiča reda p valnih duljina. Približno rješenje za zapornu valnu duljinu može se napisati kao

$$\lambda_c \simeq \frac{2}{p}\left(\frac{b-a}{2}\right), \quad \text{za } p=1, 2, 3, \ldots \tag{4–121}$$



Slika 4.28. Graf za izračunavanje zaporne frekvencije modova TE_{11} i TE_{21} u suosnoj liniji

Najznačajniji je najniži valovodni *TE*-mod s promjenom jakosti polja u smjeru obilaznoga kuta φ. Taj je mod analogan dominantnome modu TE_{10} pravokutnoga valovoda pa se intuitivno može očekivati da će se njegova zaporna frekvencija pojaviti kad srednji opseg suosne linije postane približno jednak valnoj duljini. Egzaktno rješenje jednadžbe (4–120) pokazuje da to jednostavno pravilo daje vrijednost koja od egzaktnog rezultata ne odstupa više od 4 % za omjer polumjera $b/a < 5$. Općenito, za *TE*-valove *n*-tog reda s promjenama jakosti polja po obilaznom kutu vrijedi približno

$$\lambda_c \simeq \frac{2\pi}{n}\left(\frac{a+b}{2}\right), \text{ za } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4–122}$$

Razdiobe polja u poprečnom presjeku suosne linije za dva najniža moda prikazane su na slici 4.27. Na slici 4.28 prikazano je egzaktno rješenje transcendentne jednadžbe (4–120) za $n = 1$ i za različite omjere b/a.

Naravno, postoje i ostali viši modovi s dodatnim promjenama u radijalnom smjeru, a mod najnižeg reda ima zapornu frekvenciju jednaku *TM*-modu najnižeg reda.

4.6. Analogija između valovoda i prijenosne linije

Na osnovi uočene sličnosti između naizgled različitih fizikalnih pojava i modela, znanstvenici su razvijali koncepciju analogije između njih. Zatim su slijedile apstrakcije i poopćivanja u različitim teorijama. Na tom tragu, u ovom ćemo odjeljku pokazati da su obilježja polja u valovodu istovjetna obilježjima napona i struja na prijenosnoj liniji. Iz te se analogije mogu dalje izvesti nadomjesni krugovi koji će se pokazati posebno korisnim pri objašnjavanju neuobičajenih elektromagnetskih problema [5], [11], [21].

Za *TM*-valove ($H_z = 0$), u pravokutnome valovodu vrijede Maxwellove jednadžbe:

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega\varepsilon E_x, \tag{4–123a}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mathrm{j}\omega\mu H_y, \tag{4–123b}$$

koje su istovjetne jednadžbama (4–34d), odnosno (4–34b) uz uvjet $H_z = 0$. Budući da je $H_z = 0$, iz Faradayeva zakona dobiva se $(\nabla \times \vec{E})_z = 0$, a to znači da komponente električnog polja u poprečnoj ravnini (*xy*) nemaju rotor. Tad je napon na zatvorenom putu jednak nuli pa se vektor $\vec{E}$ u toj ravnini može napisati kao gradijent proizvoljnog skalarnoga potencijala *V*, tj.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \tag{4–124a}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{4–124b}$$

Iz jednadžba (4–123a) i (4–124a) te jednadžba (4–36) izlazi

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = -\mathrm{j}\omega\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x},$$

što se svodi na

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}E_z\right) = -\mathrm{j}\omega\varepsilon V. \tag{4–125}$$

Ovdje je k_c zaporni valni broj odgovarajućeg *TM*-moda. Iz jednadžbe (4–123b) i (4–124a) te jednadžba (4–36) dobiva se

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\omega^2\mu\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x},$$

iz čega izlazi

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \left(\frac{\omega^2 \mu\varepsilon}{k_c^2} - 1 \right) E_z = -\left(\mathrm{j}\omega\mu + \frac{k_c^2}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} \right) \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2} E_z . \qquad (4\text{–}126)$$

Intuitivno, veličina $\mathrm{j}\omega\varepsilon E_z$ opisuje gustoću pomačne struje u uzdužnome smjeru, a $1/k_c^2$ ima dimenziju površine. Zbog toga $\mathrm{j}\omega\varepsilon E_z/k_c^2$ označuje kapacitivnu struju u smjeru $\hat{z}$, koja se može označiti s I_z. Sad jednadžbe (4–125) i (4–126) poprimaju oblik diferencijalnih jednadžba prijenosne linije bez gubitaka:

$$\frac{\partial I_z}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega\varepsilon V , \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -\left(\mathrm{j}\omega\mu + \frac{k_c^2}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} \right) I_z .$$

Usporede li se ove jednadžbe s jednadžbama (3–6) za liniju bez gubitaka ($R = 0$ i $G = 0$), vidi se da veličine:

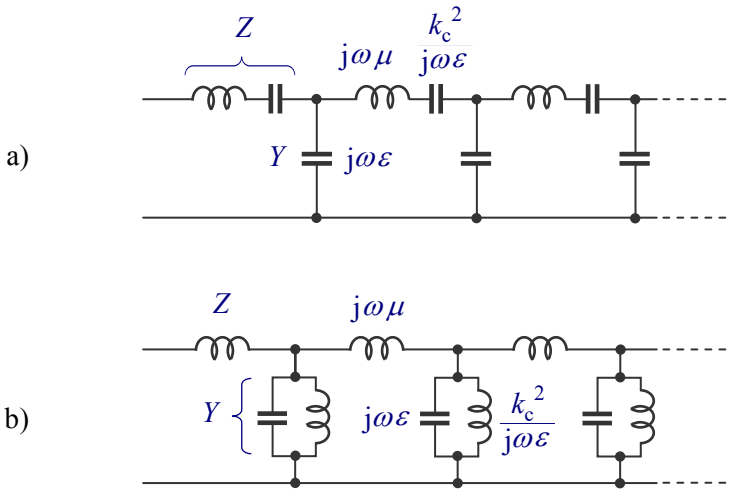
$$Z = \mathrm{j}\omega\mu + \frac{k_c^2}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} , \qquad Y = \mathrm{j}\omega\varepsilon \qquad (4\text{–}127a)$$

imaju ulogu serijske impedancije, odnosno paralelne admitancije po jedinici duljine u nadomjesnoj liniji prikazanoj na slici 4.29a).

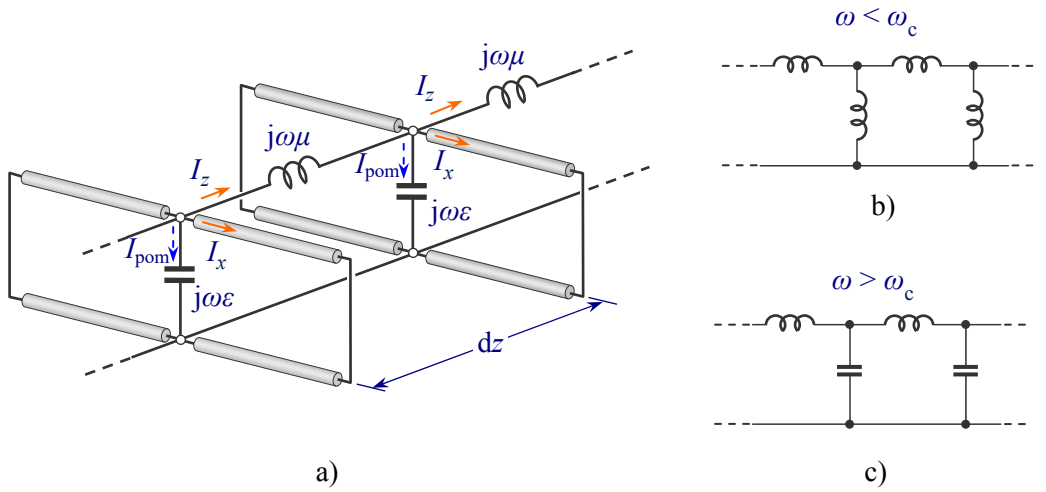
U odjeljcima 3.1. i 4.2. vidjeli smo da su pri rasprostiranju *TEM*-moda uzdužne električne struje koncentrirane u vodičima. No, za *TM*-modove, izraz (4–127a) pokazuje da osim uzdužnih provodnih struja postoje i uzdužne kapacitivne struje koje su raspodijeljene između vodiča. To je u nadomjesnom krugu na slici 4.29a) uzeto u obzir serijskim raspodijeljenim kapacitetima. Budući da *TM*-valovi ne induciraju poprečne provodne struje, nego samo pomačne struje, kao poprečno spojeni elementi u odgovarajućem nadomjesnog krugu nalaze se samo raspodijeljeni kapaciteti. U stvarnim valovodima s vodičima konačne provodnosti, provodne struje ipak stvaraju izvjesne gubitke. Ti se gubitci mogu nadomjestiti malim raspodijeljenim otporom spojenim u seriju s raspodijeljenim induktivitetom.

Uvođenjem skalarnog magnetskog potencijala, na sličan se način mogu naći raspodijeljeni parametri nadomjesnog kruga valovoda za *TE*-modove. Konačni su rezultati:

$$Z = \mathrm{j}\omega\mu , \qquad Y = \mathrm{j}\omega\varepsilon + \frac{k_c^2}{\mathrm{j}\omega\mu} . \qquad (4\text{–}127b)$$



Slika 4.29. Nadomjesni krugovi valovoda za: **a)** *TM*-valove; **b)** *TE*-valove. Za nesavršene vodiče, u seriju s induktivitetima valja dodati male otpore, a za nesavršene dielektrike, paralelno s kapacitetima valja dodati male vodljivosti



Slika 4.30. a) Pojednostavljen prikaz diferencijalnog odsječka pravokutnoga valovoda za dominantni mod. Pripadajuće nadomjesne sheme: **b)** za $\omega<\omega_c$ i **c)** za $\omega>\omega_c$

TE-valovi općenito induciraju uzdužne i poprečne provodne struje u stijenkama valovoda pa se u nadomjesnom krugu pojavljuju i uzdužno i poprečno spojeni raspodijeljeni induktiviteti, kao što je prikazano na slici 4.29b). Budući da su pomačne struje prisutne samo u poprečnome smjeru, u nadomjesnom krugu ne postoje serijskih kapaciteta u skladu s izrazom (4–127b). No postoje iznimke. Primjerice, *TE*-modovi koji pokazuju kružnu simetriju ne induciraju uzdužne provodne struje (poput moda TE_{01} u kružnome valovodu) pa u nadomjesnom krugu ne postoji serijski raspodijeljeni otpor. Pa ipak, u modelu stvarnog valovoda, zbog poprečnih provodnih struja u seriju s poprečnim induktivitetom valja dodati otpornu komponentu male vrijednosti. No, porastom frekvencije, paralelnim se provodnim strujama suprotstavlja sve viša impedancija, a poprečne pomačne struje nailaze na sve nižu impedanciju. Stoga provodne struje postaju sve slabije pa otuda opadaju i disipacija i koeficijent prigušenja.

Ako je dielektrično sredstvo nesavršeno, onda paralelnim kapacitetima u nadomjesnom krugu valja dodati paralelnu vodljivost.

Obje prijenosne strukture pokazuju frekvencijska obilježja visokog propusta. Zaporna se frekvencija linije sa slike 4.29a) pojavljuje kad se serijska reaktancija izjednači s nulom, dok se za liniju na slici 4.29b) pojavljuje kad se paralelna susceptancija izjednači s nulom. Za oba slučaja vrijedi $k_c^2=\omega_c^2\mu\varepsilon$, što je u skladu s izrazom (4–69) i razmatranjima u odjeljku 4.3.1. Karakteristične impedancije nadomjesnih linija na slikama 4.29 mogu se dobiti na jednak način kao za *TEM*-liniju. Tako je karakteristična impedancija

$$Z_{0(TM)}=\sqrt{\frac{Z}{Y}}=\sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu+k_c^2/(\mathrm{j}\omega\varepsilon)}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}}=\eta\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \qquad (4\text{–}128a)$$

jednaka odgovarajućoj valnoj impedanciji (4–85) *TM*-vala iz odjeljka 4.3.2, a

$$Z_{0(TE)}=\sqrt{\frac{Z}{Y}}=\sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\mathrm{j}\omega\varepsilon+k_c^2/(\mathrm{j}\omega\mu)}}=\frac{\eta}{\sqrt{1-\omega_c^2/\omega^2}}, \qquad (4\text{–}128b)$$

odgovara valnoj impedanciji (4–76) *TE*-vala iz odjeljka 4.3.1, kao što se i moglo očekivati. Ovdje je $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ intrinzična impedancija sredstva koje se nalazi u valovodu, a $k_c^2=\omega_c^2\mu\varepsilon$.

Nadomjesna shema pravokutnoga valovoda za dominantni mod na tragu je provedenih razmatranja. Tako se, primjerice, razdioba površinskih struja na slici 4.15 može nadomjestiti dominantnim komponentama struja I_z i I_x za uzdužni, odnosno poprečni smjer, kao što je prikazano na slici 4.30. Pritom je strujom I_{pom} uzeta u obzir gustoća pomačne struje $\mathrm{j}\omega\varepsilon E_y$.

Ispod zaporne frekvencije nadomjesni paralelni stabovi duljine $a/2$ induktivnog su karaktera pa valovod valja nadomjestiti mrežom prikazanom na slici 4.30b). Ta se »prijenosna« struktura sastoji samo od elemenata koji pohranjuju jedan oblik elektromagnetske energije (magnetsku energiju) pa ne podržava rasprostiranje elektromagnetskih valova. Tad u okolišu pobudne strukture postoje samo evanescentna polja koja, u ovom slučaju, pretežno pohranjuju magnetsku energiju. No ni na zapornoj frekvenciji ne postoje uvjeti za prijenos energije. U tom su slučaju stabovi dugački točno četvrt valne duljine pa im je ulazna admitancija jednaka nuli ($Y = 0$), a valna im je impedancija beskonačna. Otuda je provodna struja u uzdužnome smjeru jednaka nuli za bilo koji z, što znači da je i poprečno magnetsko polje jednako nuli. Drugim riječima, Poyntingov je vektor jednak nuli pa nema prijenosa energije. Iznad zaporne frekvencije, ulazna je impedancija stabova kapacitivnog karaktera pa se valovod pretvara u prijenosnu strukturu koja se može nadomjestiti raspodijeljenim parametrima dvožične prijenosne linije, kao što je prikazano mrežom na slici 4.30c). Pri tomu se ne smije smetnuti s uma frekvencijska ovisnost nadomjesnih kapaciteta.

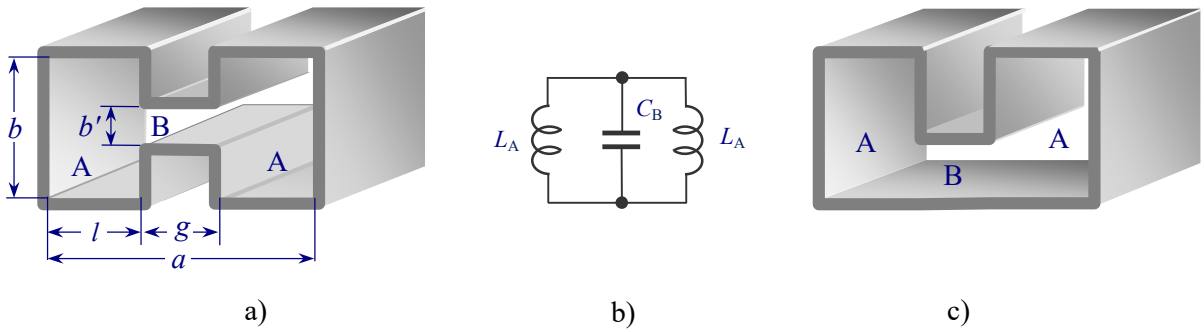
Na jednak se način mogu razmatrati kružni valovodi. Nadomjesni krugovi posebno su korisni za dobivanje bolje fizikalne slike učinaka diskontinuiteta u valovodima (odjeljak 5.9).

Grebenasti valovod

Budući da je širina frekvencijskog području u kojem se val rasprostire samo dominantnim modom manja od jedne oktave, u praksi se često nalaze i širokopojasne izvedbe valovoda. Perturbacijom širih stijenka valovoda (odjeljak 7.4.7) u obliku grebena ili žlijeba (slika 4.31a) dolazi do preraspodjele pohranjene energije u valovodu. Smanjenjem visine valovoda s b na b' i povećanjem širine žlijeba g u sredini šire stijenke (područje B) poraste kapacitet, a u rubnim područjima (A) poraste induktivitet. To ima za posljedicu snižavanje zaporne frekvencije dominantnoga moda TE_{10} i porasta zaporne frekvencije prvoga višeg moda TE_{20}. Na taj način mogu se ostvariti relativne širine radnog frekvencijskog pojasa koje su znatno veće od jedne oktave. Grebenasti valovod ima slična opća svojstva onima kod konvencionalnog pravokutnog valovoda. Na zapornoj je frekvenciji $\beta = 0$, a zaporni se valni broj $k_c = 2\pi/\lambda_c$ može naći primjenom tehnike poprečne rezonancije opisane u odjeljku 4.9. Nadomjesna shema valovoda sastoji se od dvaju paralelnih induktiviteta L_A i paralelnog kapaciteta raspora između grebenova. Iz uvjeta rezonancije nadomjesnog sklopa na slici 4.31b) za zapornu frekvenciju izlazi

$$f_c = \frac{1}{2\pi}\left(C_A \frac{L_B}{2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d\varepsilon}{b'}\right)^{-1/2}\left(\frac{\mu l b}{2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2b'}{\mu\varepsilon l b d}\right)^{1/2}.$$

Sličan se valovod može izvesti s jednim (nesimetričnim) grebenom. O grebenastim se valovodima može više naći u literaturi [3], [6] i [18].



a) b) c)

Slika 4.31. Grebenasti valovod: **a)** simetrična izvedba, **b)** nadomjesni sklop i **c)** nesimetrična izvedba

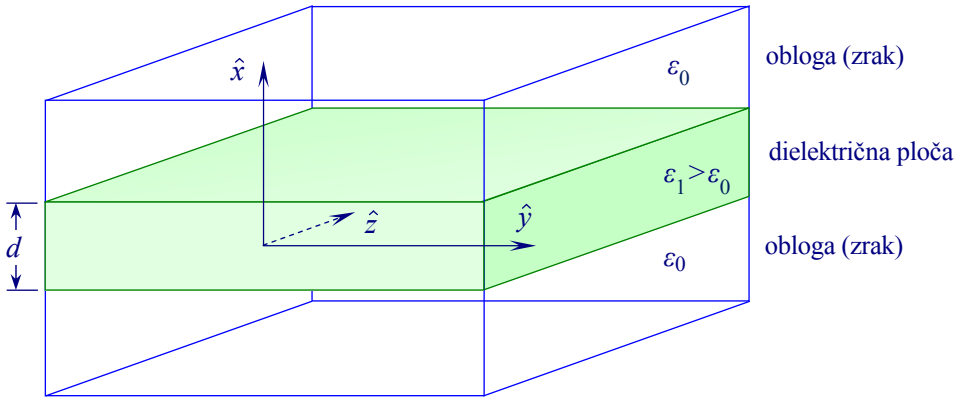
4.7. Dielektrični valovod

Za vođenje ili ograničavanje elektromagnetskih valova nije potrebno uvijek imati vodiče, nego se mogu upotrijebiti i nehomogeni dielektrici. Elektromagnetske valove mogu voditi dielektrične ploče, štapovi i filmovi okruženi dielektrikom manje permitivnosti. Te su vrste valovoda posebno zanimljive za vođenje svjetlosnih valova u optičkim komunikacijskim sustavima jer su metalne prijenosne strukture na iznimno visokim frekvencijama praktički neprimjenjive zbog velikih gubitaka u vodičima.

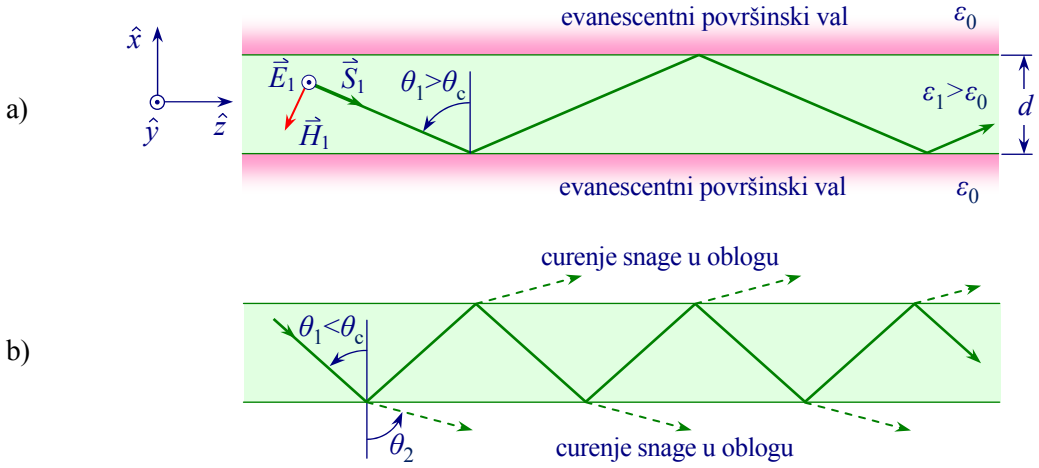
Ta se pojava može objasniti na primjeru vođenja vala dielektričnom pločom, *plosnatim dielektričnim valovodom*. To je najjednostavnija vrsta dielektričnoga valovoda u kojoj se primjenjuje totalna refleksija na graničnim ravninama između dielektrične ploče (*jezgra*) i rjeđeg dielektričnog sredstva (*obloga* ili *omotač*) koje tu ploču okružuje. Načelo rada jednako je onom za planparalelni valovod samo što su na granici dvaju dielektrika tangencijalne komponente električnog polja i okomite komponente magnetskog polja konačnih iznosa. Pritom polja u rjeđem sredstvu tvore površinski val koji je vezan uz površinu same ploče i putuje paralelno s njom, kao što je pokazano u odjeljku 2.11.5. Jakost polja površinskoga vala opada po eksponencijalnom zakonu udaljavanjem od granične površine u poprečnome smjeru. Na višim frekvencijama, posebno uz dielektričnu ploču veće permitivnosti, ta su polja čvršće vezana s pločom.

Razmotrimo ploču debljine d permitivnosti $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$, koja se nalazi u zraku i simetrično je postavljena u pravokutni koordinatni sustav kao što je prikazano na slici 4.32. Pretpostavimo sada da se val rasprostire u smjeru osi $\hat{z}$ i da mu je prostorna ovisnost e^{-jk_z}. Pritom polja ne mijenjaju jakost u smjeru osi $\hat{y}$, tj. $\partial/\partial y = 0$ pa se zadaća svodi na dvodimenzionalni problem [1], [4], [7], [10].

Plosnati se dielektrični valovod može analizirati na dva načina. Egzaktnim rješavanjem elektromagnetskih polja, kao rubni problem ili praćenjem zrake (engl. *ray tracing*), što omogućuje dobivanje bolje fizikalne slike o zbivanjima u dielektričnom valovodu, ali ne daje sve potrebne detalje za analizu zamršenijih modalnih rješenja. Podrobna analiza rubnih uvjeta pokazuje da je u dielektričnom sredstvu s ε_1 razdioba polja u poprečnome smjeru sinusna. No izvan ploče dielektričnoga valovoda prisutna su evanescentna polja, čija jakost eksponencijalno opada udaljavanjem od granice.



Slika 4.32. Ploča savršenog dielektrika kao najjednostavniji oblik dielektričnoga valovoda



Slika 4.33. a) Prijenos snage dielektričnom pločom osniva se na načelu totalne refleksije. **b)** Ako nije ispunjen uvjet totalne refleksije, onda dolazi do loma vala na granici s oblogom u koju curi dio energije pa dolazi do gubitaka u prijenosu

Plosnatim dielektričnim valovodom mogu se rasprostirati *TE*- i *TM*-modovi, baš kao pri kosom upadu vala na dielektrik (vidjeti odjeljak 2.11). No za čvrstu frekvenciju dopušteni su samo neki diskretni upadni kutovi kao kod planparalelnoga valovoda (odjeljak 4.1). Ako je val pobuđen tako da je upadni kut $\theta_u=\theta_1$ veći od kritičnoga kuta θ_c, onda je ispunjen uvjet za totalnu refleksiju, kao što je prikazano na slici 4.33a). U odjeljku 2.11.5. pokazano je da postoji jednostavna ovisnost kritičnoga kuta o permitivnosti za nemagentične dielektrike ($\mu_1=\mu_0$), tj.

$$\theta_c = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r}}\,, \tag{4–129}$$

gdje je ε_r relativna permitivnost dielektrične ploče.

Superpozicijom upadnoga i reflektiranoga vala unutar dielektrične ploče stvaraju se razdiobe polja modova, slične onima u planparalelnome valovodu. Razlika je samo u fazama reflektiranih valova zbog evanescentnih polja koja su posljedica rubnih uvjeta, a protežu se u dielektrički rjeđa područja, iznad i ispod dielektrične ploče. Slične smo okolnosti već susreli pri kosom nailasku vala na granicu dielektrika uz uvjet totalne refleksije (odjeljak 2.11.5).

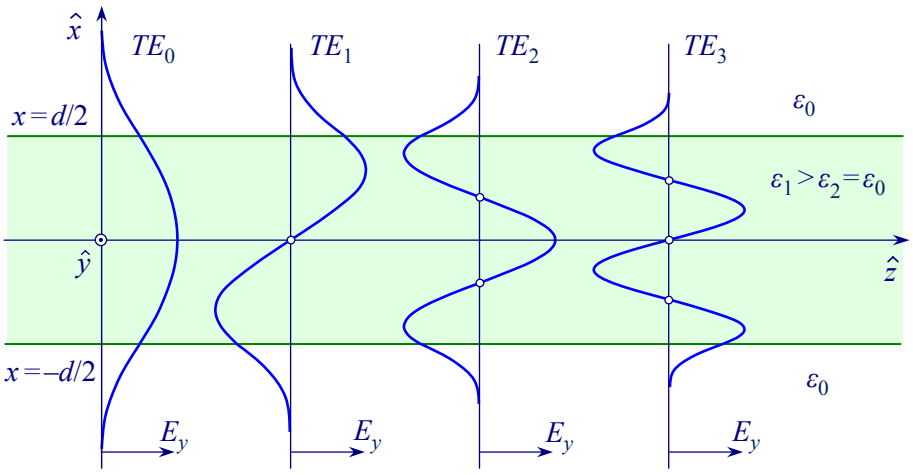
Zamisao zaporne frekvencije za dielektrični valovod objasnit ćemo na nešto drukčiji način od onoga za metalne valovode. Iznad zaporne frekvencije, dielektričnim se valovodom rasprostiru valovi bez prigušenja (k_z je realan). No ispod zaporne frekvencije ili za oštrije upadne kutove koeficijent rasprostiranja postaje kompleksan, tj. $k_z = \beta - j\alpha$. Dakle, i dalje postoje uvjeti za prijenos energije dielektričnim valovodom, ali s gubitcima. Budući da je dielektrik bez gubitaka, gubitci se moraju pripisati zračenju energije u vanjsko sredstvo prilikom svakog nailaska fronte vala na graničnu plohu, kao što je prikazano na slici 4.33b). Drugim riječima, energija »curi« iz dielektričnoga valovoda u okolni prostor pa se takav val naziva *curući val* (engl. *leaky wave*). No to se svojstvo može korisno uporabiti kod antena s curećim valovima (engl. *leaky-wave antenna*).

Za modove bez prigušenja fazni koeficijent $\beta=k_z$ nalazi se u području

$$k_0<\beta<k_1,$$

gdje je k_1 fazni koeficijent, tj. valni broj u dielektričnoj ploči s ε_1.

Budući da postoje tri različita područja, jedno s dielektrikom i dva sa zrakom, polja se u njima moraju zasebno rješavati. Pri tomu se traži da tangencijalna polja na graničnim ravninama zadovolje rubne uvjete.



Slika 4.34. Razdiobe električnog polja za *TE*–modove u dielektričnome valovodu. Broj nula odgovara indeksu odgovarajućeg moda

Za modove koji se mogu rasprostirati dielektričnim valovodom, razdiobe polja slične su onima pri kosom nailasku vala na granicu dvaju dielektričnih sredstava, s time da se sad rubni uvjeti moraju istodobno zadovoljiti na objema graničnim ravninama. Kao što je ranije rečeno, unutar ploče razdiobe poprečnih polja sinusnog su valnog oblika, a izvan ploče jakost im opada eksponencijalno udaljavanjem od granice. Na slici 4.34 skicirane su razdiobe poprečnih polja za najniži i nekoliko viših *TE*-modova. Slične razdiobe imaju polja *TM*-modova. No ako neki modovi imaju jednake zaporne frekvencije, ne znači da su degenerativni. To je opće svojstvo prijenosnih struktura s nehomogenim dielektrikom.

Fazni koeficijent duž dielektričnoga valovoda ovisi o upadnome kutu $\theta_u=\theta_1$ kao

$$\beta = k_z = k_1 \sin\theta_1 . \tag{4–130}$$

Budući da je koeficijent refleksije pri totalnoj refleksiji kompleksna veličina, fazni pomak reflektiranoga vala na graničnoj ravnini funkcija je upadnoga kuta i permitivnosti dielektrične ploče. Primjenom rezultata iz odjeljku 2.11.5, ti se fazni pomaci mogu izraziti kao:

$$\varphi_{TE} = 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}}}{\cos\theta_1}, \tag{4–131a}$$

$$\varphi_{TM} = 2\tan^{-1}\frac{\varepsilon_{r1}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}}}{\varepsilon_{r2}\cos\theta_1}, \tag{4–131b}$$

gdje se vidi da su različiti za *TE*- i *TM*-valove.

To je posljedica faznog pomaka Goos-Hänchen (odjeljak 2.11.5). Nasuprot tomu, kod planparalelnoga valovoda sa savršeno vodljivim stijenkama fazni pomak tangencijalnog električnog polja reflektiranoga vala uvijek iznosi 180°. Usporedbe radi, na slici 4.35 prikazane su razdiobe električnog polja moda TE_2 planparalenog valovoda i moda TE_1 plosnatoga dielektričnog valovoda. Može se uočiti sličnost (antisimetrija) u razdiobi polja tih dvaju modova, samo što u planparalelnom valovodu sa savršenim vodičima nema tangencijalne komponente električnog polja na graničnim ravninama.

Da bi ravni val koji putuje cik-cak-crtom na slici 4.33a) oblikovao određeni mod, nakon što se reflektira na gornjoj i donjoj granici te ponovno naiđe na gornju granicu, mora doći do ukupnog faznog kašnjenja koje je jednako višekratniku od 2π. Stoga karakteristična jednadžba koja opisuje *TE*- i *TM*-modove dielektrične ploče ima oblik

$$-2k_1 d\cos\theta_1 + 2\varphi = 2m\pi\,, \qquad (4\text{–}132)$$

gdje je m redni broj, a φ fazni pomak (4–131) odgovarajućeg *TE*- ili *TM*-moda. Ta se transcendentna jednadžba ne može riješiti analitički.

U skladu s jednadžbom (4–132), mod za $m=0$ može se ostvariti za proizvoljno male vrijednosti $k_1 d$. No, za d znatno manji od valne duljine, u poprečnom se smjeru polja protežu daleko izvan ploče. Stoga se u samoj ploči prenosi malo energije u odnosu na prostor izvan ploče pa prijenosna struktura postaje nepraktično velikih izmjera. U krajnjem slučaju, kad d teži nuli, val poprima oblik ravnoga vala u slobodnome prostoru.

Uvrštenjem izraza (4–131) u (4–132) dobivaju se dvije transcendentne karakteristične jednadžbe za *TE*- i *TM*-modove:

$$\tan\left(\frac{k_1 d\cos\theta_1 - m\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}}}{\cos\theta_1}\,, \qquad \text{za } TE\text{-modove}\,, \qquad (4\text{–}133a)$$

$$\tan\left(\frac{k_1 d\cos\theta_1 - m\pi}{2}\right) = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}}}{\cos\theta_1}\,, \qquad \text{za } TM\text{-modove.} \qquad (4\text{–}133b)$$

Za taj slučaj, iz izraza (4–129), dobiva se kut totalne refleksije

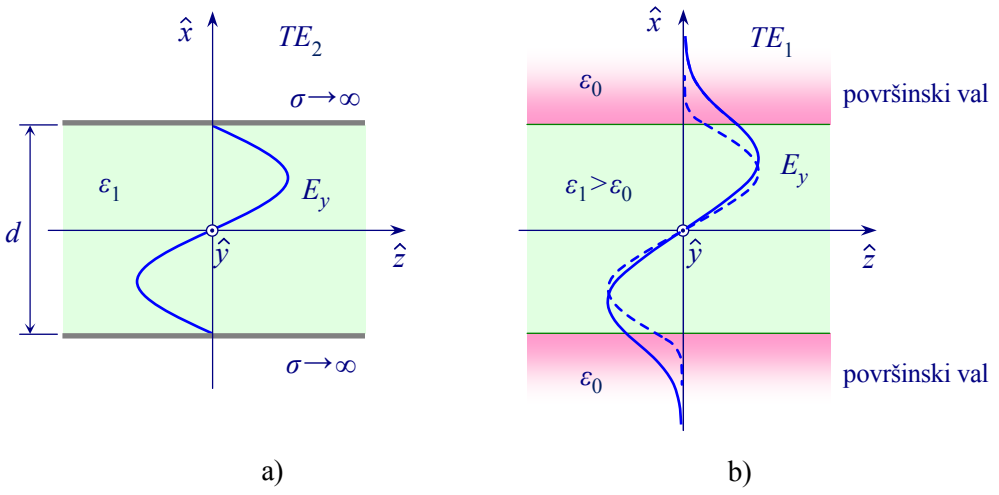
$$\theta_c = \sin^{-1}\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1} = \sin^{-1}\sqrt{1/\varepsilon_{r1}} = 30°\,.$$

Zaporne frekvencije modova u plosnatome dielektričnom valovodu odgovaraju najmanjem mogućem upadnom kutu. To je zaporni ili kritični kut ($\theta_1=\theta_c$) pri kojem je $\beta=k_2$. Budući da je pri kritičnome kutu $\sin^2\theta_c=\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}$, desni član karakterističnih jednadžba za *TE*- i *TM*-modove jednak je nuli pa se jednadžba (4–133) svodi na $k_1 d\cos\theta_c = m\pi$, tj.

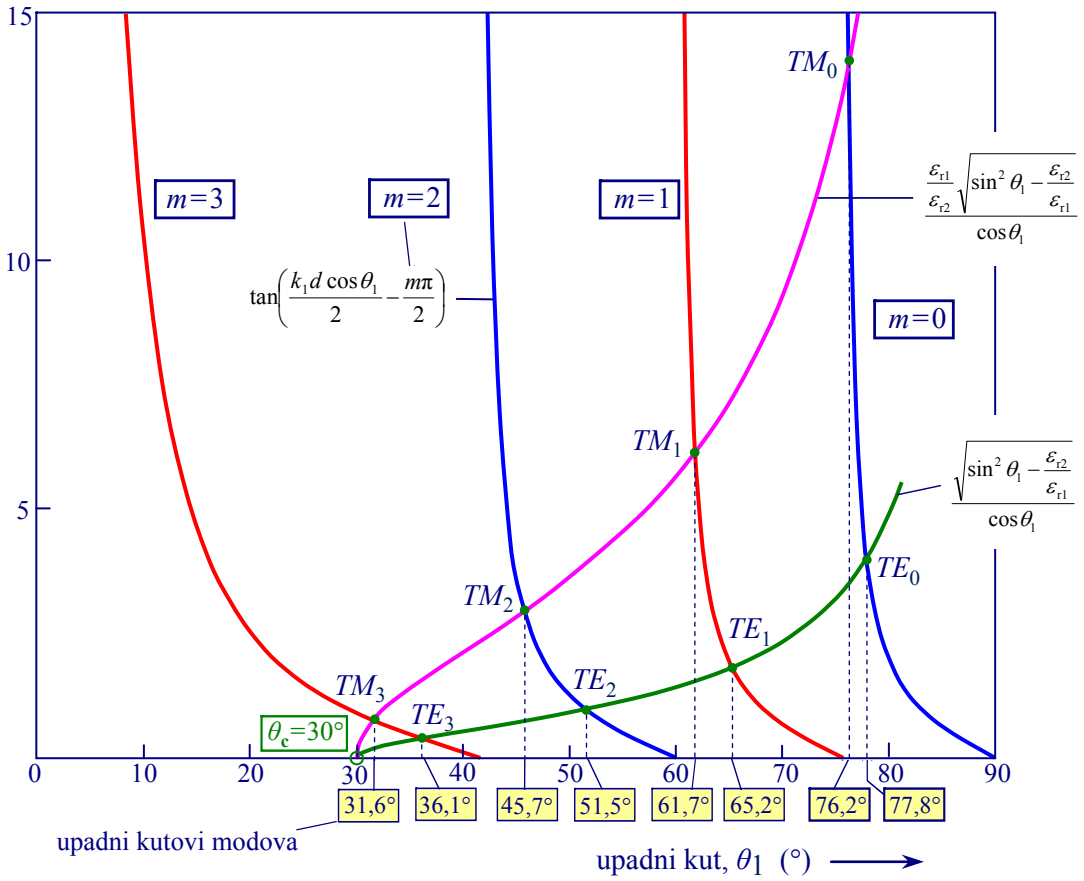
$$\frac{2\pi f_c}{c} d\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\theta_c = m\pi\,.$$

Te se jednadžbe mogu riješiti grafički ili numerički. Novi matematički računalni programi omogućuju jednostavno rješavanje jednadžba (4–133) za varijablu θ_1.

Slikovit prikaz određivanja uvjeta vođenja *TE*- i *TM*-valova dielektričnom pločom može se vidjeti na slici 4.36. Razmotren je konkretni primjer dielektrične ploče debljine 3 cm relativne permitivnosti $\varepsilon_{r1}=4$, koja se nalazi u zraku. Pločom se prenosi val frekvencije 10 GHz.



Slika 4.35. Usporedba modova slične strukture polja: **a)** mod TE_2 planparalelnoga valovoda, **b)** mod TE_1 dielektričnoga valovoda. Crtkano je prikazana razdioba polja na višoj frekvenciji



Slika 4.36. Grafičko rješavanje upadnog kuta $\theta_u = \theta_1$ za *TE*- i *TM*-modove dielektričnoga valovoda zadanih parametara: $\varepsilon_{r1} = 4$, $\varepsilon_{r2} = 1$ i $d = 3$ cm i za radnu frekvenciju 10 GHz. Lijeva strana karakteristične jednadžbe (4–133) prikazana je krivuljama koje podsjećaju na funkciju kotangens; parni modovi (plavo), neparni modovi (crveno). Također su prikazane desne strane karakterističnih jednadžba (4–133) za *TE*-modove (zeleno) i za *TM*-modove (ljubičasto). Sjecišta daju rješenja za pripadajuće modove

Budući da se $\cos^2\theta_c$ može napisati kao $1-\sin^2\theta_c$, što je jednako $1-\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}$, zaporne frekvencije modova poprimaju konačni oblik

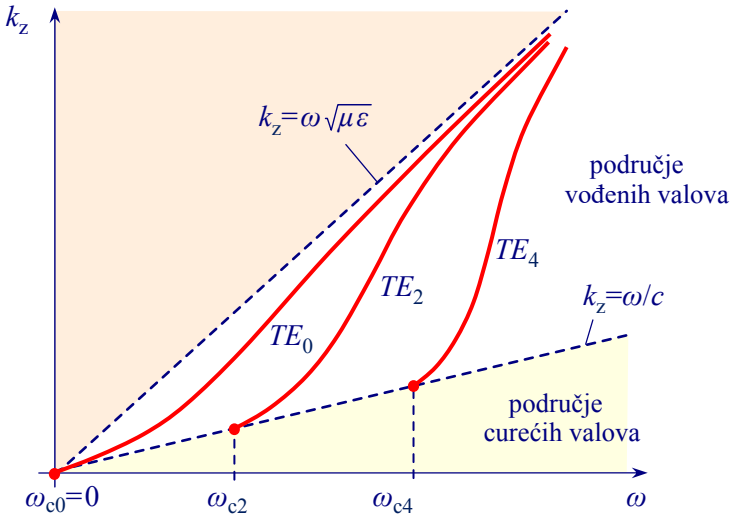
$$f_{cm} = \frac{mc}{2d\sqrt{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r2}}} \quad \text{za } m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4–134}$$

Ako se dielektrična ploča nalazi u zraku ($\varepsilon_{r2} = 1$), kao u ovom primjeru, onda se izraz (4–134) svodi na oblik

$$f_{cm} = \frac{mc}{2d\sqrt{\varepsilon_{r1}-1}} \quad \text{za } m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4–135}$$

Valja uočiti da su dominantni modovi dielektričnog valovoda modovi TE_0 i TM_0 jer su im zaporne frekvencije jednake nuli. Drugim riječima, *TE*- i *TM*-modovi najnižeg reda rasprostiru se bez prigušenja neovisno o tomu koliko tanka bila dielektrična ploča. To je opće svojstvo cilindričnih dielektričnih valovoda. Kao što je objašnjeno u odjeljcima 4.3.1. i 4.3.2, *TE*- i *TM*-modovi jednakih indeksa odgovaraju degenerativnim parovima jednakih zapornih frekvencija.

Koeficijent rasprostiranja odnosno fazni koeficijent nelinearna je funkcija frekvencije pa je dielektrični valovod disperzivna prijenosna struktura.



Slika 4.37. Disperzijski dijagram za simetrične *TE*-modove dielektrične ploče

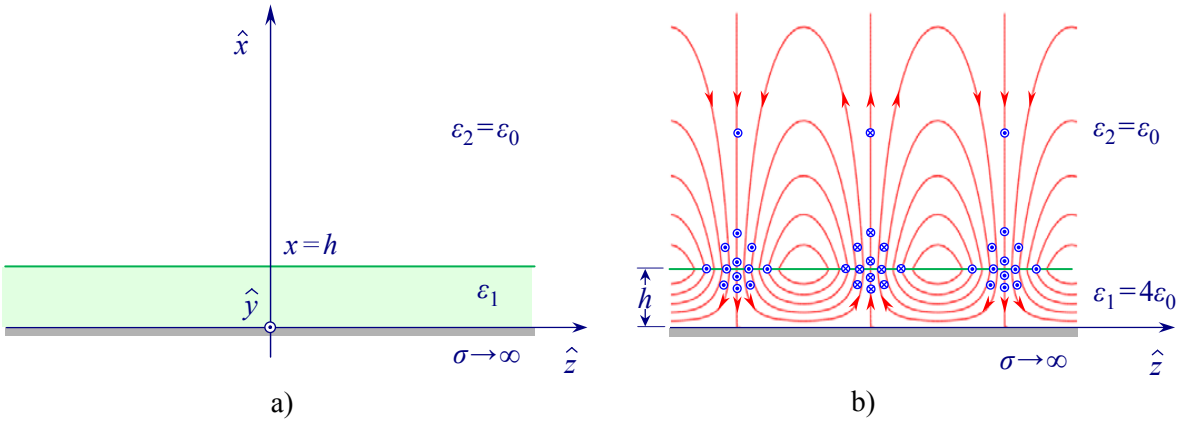
Na slici 4.37 prikazano je kako fazni koeficijent ovisi o frekvenciji za nekoliko prvih *TE*-modova. U području ispod pravca $k_z=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\omega/c$, moguć je prijenos energije, ali uz gubitke zračenjem zbog curećih modova ($\alpha\neq 0$).

Porastom frekvencije, polja se za jedan te isti mod sve više zbijaju unutar ploče pa se sve manje energije prenosi površinskim valovima, kao što je prikazano isprekidanom crtom na slici 4.35b). Stoga razdioba polja dielektričnog valovoda na visokim frekvencijama ($d\gg\lambda_1$, gdje je λ_1 valna duljina u ploči) ima razdiobu vrlo sličnu onoj za planparalelni valovod uz rubne uvjete na savršenom vodiču.

U praksi se kao prijenosna struktura nerijetko primjenjuje uzemljena dielektrična ploča, tj. metalna ploha obložena dielektrikom (slika 4.38a)). Za simetrične razdiobe polja modova, ta struktura odgovara opisanom dielektričnom valovodu jer se odslikavanjem polja na vodljivoj uzemljenoj ravnini upravo dobivaju razdiobe polja dielektričnoga valovoda. Stoga u prijenosu sudjeluju samo oni *TE*- i *TM*-modovi dielektrične ploče čije su tangencijalne komponente električnog polja i okomite komponente magnetskog polja na simetrali izvorne ploče jednake nuli. To su *TE*-modovi parnog indeksa i *TM*-modovi neparnog indeksa. I ti se modovi ponašaju u skladu s karakterističnim jednadžbama (4–133) kad se u njima $d/2$ zamijeni visinom podloge (supstrata) h. Otuda zaporne frekvencije *TM*- i *TE*-modova dielektrikom presvučene vodljive ravnine poprimaju vrijednosti

$$f_{cm}=\frac{mc}{4h\sqrt{\varepsilon_{r1}-1}}\begin{cases}TM\text{ - modovi za }m=0,2,4,\ldots\\ TE\text{ - modovi za }m=1,3,5,\ldots\end{cases} \qquad (4\text{–}136)$$

U toj prijenosnoj strukturi postoji samo jedan dominantni mod, TM_0, koji se rasprostire na svim frekvencijama bez prigušenja. Na slici 4.38b) prikazana je razdioba silnica magnetskog polja moda TE_1. Može se uočiti da je na granici između dvaju dielektrika gustoća silnica, tj. jakost magnetskog polja u zraku jednako onoj u dielektriku. To je u skladu s rubnim uvjetom (2–165d) iz odjeljka 2.9.3, koji pokazuje neprekinutost magnetskog toka $B_{x1}=B_{x2}$, jer za nemagnetično sredstvo ($\mu_{r1}=\mu_{r2}$) izlazi da je $\mu_{r1}H_{x1}=\mu_{r2}H_{x2}$ pa je otuda i $H_{x1}=H_{x2}$. U području iznad dielektrične ploče debljine h jakost polja naglo opada porastom koordinate x, a unutar ploče približno je jednaka polovici poluvala stojnoga vala u smjeru $\hat{x}$, jer se, za val koji upada iz dielektrične ploče u slobodni prostor, granica ponaša slično magnetskome zidu.

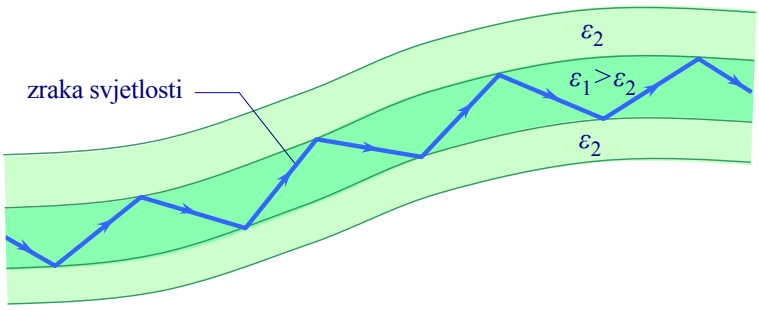


Slika 4.38. a) Dielektrična ploča na uzemljenoj vodljivoj ravnini. **b)** Razdioba silnica magnetskog polja moda TE_1 za dielektričnu ploču s $\varepsilon_1=4\varepsilon_0$, upadni kut u dielektriku $\theta_u=37°$ i kritični kut $\theta_c=30°$. Vektor električnog polja gleda u ili iz ravnine crteža i postiže maksimalne vrijednosti uz graničnu ravninu na mjestima gdje je maksimalno i magnetsko polje

Razdioba silnica električnog polja *TM*-modova slična je razdiobi polja na slici 2.37b) pri kosom nailasku vala na granicu dvaju dielektričnih sredstava uz uvjet totalne refleksije.

Opisane se pojave mogu iskoristiti i za prijenos elektromagnetske energije dielektričnim valovodima (ili svjetlovodima) kružnog presjeka. No u tom je slučaju izračunavanje razdiobe polja modova zamršenije. U kružnom dielektričnom valovodu *TE*- i *TM*-modovi mogući su samo ako su razdiobe polja simetrične i ako ne ovise o obilaznom kutu φ. No za nesimetrične razdiobe polja koje ovise o φ, u kružnome dielektričnom valovodu ne mogu opstati čisti *TE*- i *TM*-modovi, nego nastaju tzv. *hibridni modovi* kao kombinacije *TE*- i *TM*-modova (vidjeti odjeljak 4.8).

Na slici 4.39 prikazan je uzdužni presjek kroz svjetlovod kružnog poprečnog presjeka, koji se sastoji od staklenog vlakna visoke permitivnosti obloženog koncentričnim dielektričnim omotačem niske permitivnosti. Svjetlosni se val opet prenosi totalnom refleksijom. Svjetlovodi su savitljive prijenosne strukture koje pružaju veliku fleksibilnost pri izgradnji optičkih komunikacijskih mreža. No valja paziti na minimalni polumjer zakrivljenosti koji ovisi o kutu totalne refleksije. U protivnom, pri premalim polumjerima zakrivljenosti mogu se pojaviti cureći valovi koji imaju za posljedicu velike gubitke u prijenosu snage. U vezi s problematikom svjetlovoda čitatelj se upućuje na literaturu [10].



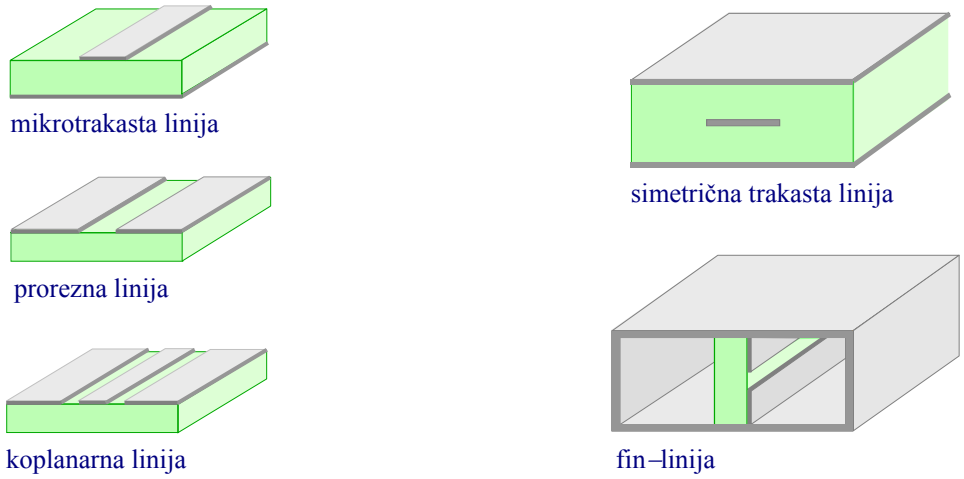
Slika 4.39. Stakleno vlakno (svjetlovod) kružnog poprečnog presjeka

4.8. Planarne linije

Planarne prijenosne linije sastoje se od tankih vodljivih slojeva koji leže u paralelnim ravninama. Ti su slojevi ili trake obično smještene s jedne strane plosnate dielektrične podloge (supstrata) oblika ploče, a na drugoj strani ploče nalazi se uzemljena vodljiva ravnina. No postoje i izvedbe kod kojih se trake nalaze s obiju strana pločaste dielektrične podloge.

Na mikrovalnim frekvencijama obilježja tih prijenosnih linija ovise o njihovoj geometriji i svojstvima materijala. U praksi se najčešće susreću *mikrotrakaste*, *prorezne* i *koplanarne* linije prikazane na slici 4.40. Obično se proizvode tehnologijom za izradu tiskanih ploča, tj. fotolitografskim postupkom. Ti se sklopovi nazivaju *mikrovalni integrirani sklopovi* (engl. *Microwave Integrated Circuits*; MIC). Postupkom epitaksije molekularnim mlazom (MBE) izrada integriranih sklopova proteže se do milimetarskoga valnog područja, što je posebno zanimljivo za masovnu proizvodnju *monolitnih mikrovalnih integriranih sklopova* (MMIC) znatno manje mase i izmjera, a jednako tako i znatno jeftinijih u odnosu na njihove valovodne suparnike. Za primjene u milimetarskome valnom području svaka od navedenih linija može se oklopiti valovodom, pa tako nastaje nova vrsta prijenosnih struktura poput fin-linije.

Planarne su prijenosne linije obično nehomogene, jer je sredstvo unutar kojega se rasprostire val podijeljeno na dva ili više sredstava s materijalima različitih svojstava (to su nerijetko zrak i dielektrična ploča). Dominantni mod rasprostiranja elektromagnetskoga vala u tim linijama tzv. je hibridni mod, sa svim šesterima komponentama elektromagnetskog polja. Prisutnost vodiča na jednoj ili na objema stranama dielektrične ploče povećava složenost prijenosne strukture. Iznimku čini simetrična trakasta linija s *TEM*-modom, jer je ispunjena homogenim dielektrikom.



Slika 4.40. Planarne prijenosne strukture

Koeficijent rasprostiranja γ svakog *TEM*-vala ovisi samo o frekvenciji i svojstvima materijala prijenosnog sredstva. No u nehomogenoj je liniji i valovodu koeficijent rasprostiranja i funkcija položaja što proturječi uvjetu neprekinutosti polja. Stoga se u nehomogenoj liniji ne može rasprostirati *TEM*-val. To je opće svojstvo nehomogenih linija.

Definicija kvazi-*TEM*-moda

Na prvi nas pogled može iznenaditi činjenica da izoliran telefonski kabel, koji je u stvari nehomogena linija, ne može prenositi *TEM*-mod. No na niskim frekvencijama dominantni mod mnogih nehomogenih dvožičnih linija ponaša se poput *TEM*-moda [11]. To posebno vrijedi za izolirane parice (dvožični vod), mikrotrakaste i suosne linije koje su djelomično ispunjene dielektrikom. Stoga se dominantni mod tih linija naziva kvazi-*TEM*-mod. Uzdužne

(longitudinalne) komponente polja, premda različite od nule, imaju znatno manje amplitude od poprečnih (transverzalnih) komponenata polja pa im je učinak zanemariv. Zbog toga se svojstva rasprostiranja kvazi-*TEM*-moda mogu približno proučavati preko statičkog elektriciteta. U tu svrhu nehomogeno sredstvo valja nadomjestiti homogenim sredstvom efektivne permitivnosti. Tako pojednostavljen model vrijedi samo na frekvencijama ispod neke granične frekvencije koja ovisi o obliku i dimenzijama linije u poprečnoj ravnini.

Uvjeti za rasprostiranje *TM*-moda

Razmotrimo nehomogenu liniju, koja je uniformna u smjeru rasprostiranja vala. Najprije valja definirati lokalni koordinatni sustav u nekoj točki na graničnoj ravnini (sučelju) između dvaju sredstava tako da je os $\hat{y}$ okomita na graničnu ravninu, os $\hat{x}$ tangencijalna na graničnu ravninu i okomita na smjer rasprostiranja vala te da je os $\hat{z}$ tangencijalna na graničnu ravninu i da gleda u smjeru rasprostiranja vala, kao što je prikazano na slici 4.41. Ako na graničnoj ravnini između dvaju sredstva postoji tangencijalna komponenta transverzalnog električnog polja, onda ta komponenta mora biti neprekinuta, tj.

$$E_{x1} = E_{x2}\,.$$

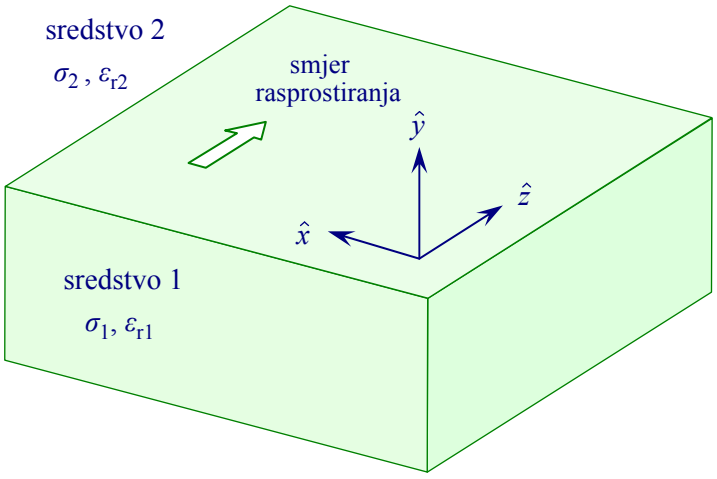
Indeksi 1, odnosno 2 odnose se na razmatrana sredstva. Primjenom Maxwellove jednadžbe $\nabla \times \vec{H} = (\sigma + \mathrm{j}\omega\varepsilon)\vec{E}$ na napredujući val, čije veličine imaju eksponencijalnu ovisnost $\mathrm{e}^{-\gamma z}$ o uzdužnoj dimenziji, dobiva se:

$$E_{x1} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_1 + \sigma_1}\left(\frac{\partial H_{z1}}{\partial y} - \frac{\partial H_{y1}}{\partial z}\right) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_1 + \sigma_1}\left(\frac{\partial H_{z1}}{\partial y} + \gamma H_{y1}\right),$$

$$E_{x2} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_2 + \sigma_2}\left(\frac{\partial H_{z2}}{\partial y} + \gamma H_{y2}\right).$$

Budući da su na graničnoj ravnini tangencijalne komponente električnog polja moraju biti neprekinute, a jednako tako i okomite komponente magnetskog polja ($H_{y1}=H_{y2}=H_y$) izlazi

$$\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_1 + \sigma_1}\frac{\partial H_{z1}}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_2 + \sigma_2}\frac{\partial H_{z2}}{\partial y} = -\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_1 + \sigma_1} - \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_2 + \sigma_2}\right)\gamma H_y\,. \qquad (4\text{–}137a)$$



Slika 4.41. Sučelje između dvaju sredstava različitih električnih i magnetskih svojstava; definiranje lokalnog koordinatnog sustava

Prisutnost komponente H_y traži uzdužnu komponentu H_z pa se elektromagnetska energija ne prenosi *TM*-modom. Iz toga se dolazi do zaključka da se nehomogenom linijom ili valovodom energija može prenositi *TM*-modom ($H_z = 0$), samo ako je poprečno električno polje okomito na graničnu ravninu i ako je istodobno poprečno magnetsko polje tangencijalno u svim točkama granične ravnine.

Uvjeti za rasprostiranje *TE*-moda

Ako je tangencijalna komponenta transverzalnog magnetskog polja različita od nule, onda mora biti neprekinuta duž presjeka, što se može napisati kao

$$H_{x1} = H_{x2}\,.$$

Ako se Maxwellova jednadžba $\nabla \times \vec{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\vec{H}$ primijeni na val koji putuje u smjeru osi $\hat{z}$, onda se, slično prijašnjem slučaju, dobivaju izrazi:

$$H_{x1} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_{z1}}{\partial y} + \gamma E_{y1}\right), \qquad H_{x2} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_{z2}}{\partial y} + \gamma E_{y2}\right).$$

Uvrštenjem tih izraza u jednadžbu neprekinutosti tangencijalnih komponenata magnetskog polja i postavljanjem dodatnog uvjeta na neprekinutost okomitih komponenata električnog toka $D_{y1}=\varepsilon_1 E_{y1}$ i $D_{y2}=\varepsilon_2 E_{y2}$ na granici dvaju sredstava i uz pretpostavku da na graničnoj ravnini nema površinskog naboja, dobiva se

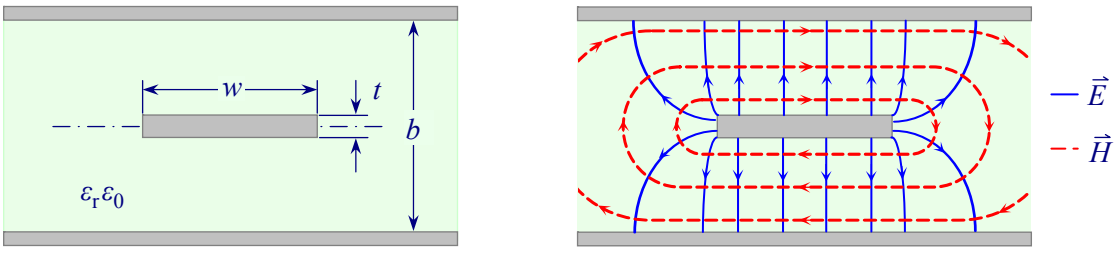
$$\frac{\partial E_{z2}}{\partial y} - \frac{\partial E_{z1}}{\partial y} = \gamma E_{y1}\left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}1}}{\varepsilon_{\mathrm{r}2}} - 1\right). \tag{4–137b}$$

Ta jednadžba pokazuje da prisutnost komponente E_{y1} upućuje na prisutnost komponente E_z pa taj mod nije *TE*. Dakle, može se ustvrditi da se nehomogenom linijom ili valovodom energija može prenositi *TE*-modom, ($E_z = 0$), samo ako je poprečno magnetsko polje posvuda okomito na graničnu ravninu i ako je istodobno poprečno električno polje posvuda tangencijalno na graničnu ravninu.

Ako oba zahtjeva iz prethodnih odjeljaka nisu istodobno ispunjena, onda se mod rasprostiranja elektromagnetskoga vala naziva *hibridni mod* ($H_z \neq 0$, $E_z \neq 0$) i kombinacija je *TE*- i *TM*-modova.

4.8.1. Simetrična trakasta linija

U *simetričnoj trakastoj liniji* tanki tiskani vodič simetrično je smješten između dviju vodljivih uzemljenih ravnina, kao što je prikazano na slici 4.42a). Prostor između dviju ravnina koje se nalaze na međusobnom razmaku b ispunjen je homogenim dielektrikom relativne permitivnosti ε_{r}. Trakasta se linija može razmatrati kao plosnata izvedba suosne linije [2], [3],



a) b)

Slika 4.42. Simetrična trakasta linija; **a)** geometrija i **b)** razdiobe električnog i magnetskog polja

što se može vidjeti iz razdiobe električnog i magnetskog polja na slici 4.42b). No ta struktura ima ozbiljan nedostatak jer joj je unutarnji vodič (traka) okružen krutim dielektrikom pa je nedostupan koncentriranim elektroničkim sastavnim dijelovima, poput poluvodičkih kao što su diode i tranzistori te pasivnih komponenata poput čip-otpornika, kondenzatora i zavojnica (induktiviteta).

Trakastom se linijom val prenosi *TEM*-modom, što znači da je struktura nedisperzivna. Najveća poteškoća pri izračunu parametara te linije leži u činjenici da su razdiobe polja vrlo složene, kao što se vidi na slici 4.42b) i da se ne mogu primijeniti jednostavne analize kao za suosne linije ili valovode koje smo do sad razmatrali. Budući da nas obično zanima samo *TEM*-mod trakaste linije, fazni koeficijent i karakteristična impedancija mogu se naći rješavanjem Laplaceove jednadžbe za elektrostatički slučaj. Jedan od mogućih pristupa primjena je konformnog preslikavanja, ali je postupak rješavanja vrlo složen. Stoga se u uporabi nerijetko nalaze eksplicitni izrazi kao dobre aproksimacije egzaktnih rezultata. U ovom ćemo odjeljku pokazati kako se mogu naći rješenja prihvatljive točnosti primjenom približnog numeričkog rješavanja Laplaceove jednadžbe za beskonačno tanku traku na slici 4.42.

Faznu brzinu *TEM*-vala u nemagnetičnom sredstvu ($\mu = \mu_0$) definirali smo u odjeljku 3.1. kao

$$v_\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}}, \tag{4–138}$$

gdje je $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s brzina svjetlosti u vakuumu. Otuda je fazni koeficijent

$$\beta = \frac{\omega}{v_\mathrm{f}} = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} = k_0\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}\,. \tag{4–139}$$

S druge strane, karakteristična je impedancija *TEM*-linije dana izrazom (3–20) kao

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{v_\mathrm{f} C} = \frac{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}}{cC}, \tag{4–140}$$

gdje su L i C induktivitet, odnosno kapacitet linije po jedinici duljine. Otuda se, primjerice, karakteristična impedancija može dobiti iz raspodijeljenog kapaciteta C.

Primjenom konformnog preslikavanja, za beskonačno tanak središnji vodič ($t = 0$), karakteristična se impedancija može izraziti kao

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{4\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}} \frac{K(u)}{K(u')} = \frac{\eta_0 K(u)}{4\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}} K'(u)}, \tag{4–141a}$$

gdje su funkcije $K(u)$ i $K'(u)$ potpuni eliptični integrali. Njihov se omjer može lako izračunati primjenom izraza:

$$\begin{aligned} &\frac{K(u)}{K'(u)} = \frac{1}{\pi}\ln\left(2\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}\right) && \text{za } 0{,}7 \le u \le 1, \\ &\frac{K(u)}{K'(u)} = \left[\frac{1}{\pi}\ln\left(2\frac{1+\sqrt{u'}}{1-\sqrt{u'}}\right)\right]^{-1} && \text{za } 0 \le u \le 0{,}7\,. \end{aligned} \tag{4–142}$$

Argumenti funkcija $K(u)$ i $K'(u)$ ovise o geometriji prijenosne strukture kao:

$$u = \frac{1}{\cosh(\pi w/2b)}, \qquad u' = \tanh\left(\pi\frac{w}{2b}\right).$$

Kad je trakasti vodič konačne, ali male debljine (t), tad se karakteristična impedancija može izračunati formulom koja je dobivena interpolacijom egzaktnih numeričkih rezultata, tj.

$$Z_0 = \frac{30}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\left\{1 + \frac{4}{\pi w_1}\left[\frac{8}{\pi w_1} + \sqrt{\left(\frac{8}{\pi w_1}\right)^2 + 6{,}27}\right]\right\}, \qquad (4\text{–}141\text{b})$$

gdje su:

$$m = \frac{6(1 - t/b)}{3 - t/b}, \qquad w_1 = \frac{w}{b - t} + \Delta w,$$

$$\Delta w = \frac{t/b}{\pi(1 - t/b)}\left\{1 - \frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{t/b}{2 - t/b}\right)^2 + \left(\frac{t/(4\pi b)}{w/b + 1{,}1t/b}\right)^m\right]\right\}.$$

Veličinom Δw uzeti su u obzir učinci konačne debljine trake (t).

Gubitci u trakastoj liniji nastaju u vodičima trake i uzemljenih ravnina te u dielektriku između uzemljenih ravnina. Budući da se linijom prenosi *TEM*-val, izraz za gubitke u dielektriku ne razlikuje se od izraza (4–24b) za druge *TEM*-linije. Gubitci u vodičima mogu se izračunati metodom perturbacije. Sljedeća formula daje približne rezultate za gubitke u vodičima:

$$\alpha_c = \begin{cases} \dfrac{2{,}7 \cdot 10^{-3} R_s \varepsilon_r Z_0}{30\pi(b - t)} A & \text{za } \sqrt{\varepsilon_r} Z_0 \le 120 \\ \dfrac{0{,}16 \varepsilon_r R_s}{Z_0 b} B & \text{za } \sqrt{\varepsilon_r} Z_0 > 120 \end{cases} \text{ Np/m}, \qquad (4\text{–}143)$$

gdje su:

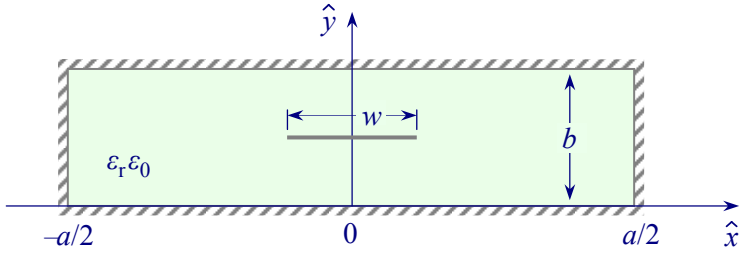
$$A = 1 + \frac{2w}{b - t} + \frac{1}{\pi}\frac{b + t}{b - t}\ln\left(\frac{2b - t}{t}\right),$$

$$B = 1 + \frac{b}{0{,}5w + 0{,}7t}\left(0{,}5 + \frac{0{,}414t}{w} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{4\pi w}{t}\right).$$

Približno rješenje za elektrostatički slučaj može se dobiti numeričkim postupkom rješavanja Laplaceove jednadžbe [1]. Električno polje u trakastoj strukturi, uz zadane rubne uvjete, mora zadovoljiti Laplaceovu jednadžbu

$$\nabla_t^2 \Phi(x, y) = 0,$$

gdje je $\Phi(x,y)$ razdioba električnog potencijala. Da bismo ograničili područje integracije uzet ćemo da se gornji i donji vodiči ne protežu od $x = -\infty$ do $x = +\infty$, nego da su ograničeni na područje konačne širine $\pm a/2$ simetrično u odnosu na os $\hat{y}$, gdje je $a \gg b$, kao što je prikazano na slici 4.43. Pretpostavimo također da je traka beskonačno tanka. Tad se cijela struktura na koordinatama $x = -a/2$ i $x = a/2$ može zatvoriti savršeno vodljivim okomitim zidovima pa se rubni uvjeti za potencijal na vodljivim zidovima svode na:



Slika 4.43. Geometrija oklopljene trakaste strukture

$$\Phi(x,y)=0, \quad \text{za } x=\pm a/2 \tag{4–144a}$$

$$\Phi(x,y)=0, \quad \text{za } y=0,\ b. \tag{4–144b}$$

Laplaceova se jednadžba može riješiti postupkom separacije varijabla. Budući da središnji vodič (traka) koji se nalazi na koordinati $y=b/2$ sadrži površinski naboj, potencijal $\Phi(x,y)$ upućuje na diskontinuitet jer je funkcija $\vec{D}=-\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\nabla_\mathrm{t}\Phi$ diskontinuirana na koordinati $y=b/2$. Stoga treba naći zasebna rješenja za $\Phi(x,y)$ u područjima $0<y<b/2$ i $b/2<y<b$. Opća rješenja za ta dva područja glase:

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ \text{neparni}}}^{\infty} A_n\cos\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a} & \text{za } 0\le y\le b/2\\[2ex] \displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ \text{neparni}}}^{\infty} B_n\cos\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y) & \text{za } b/2\le y\le b.\end{cases} \tag{4–145}$$

Ovdje su uzeti u obzir samo članovi s neparnim indeksom n jer je rješenje parna funkcija od x. Može se lako provjeriti da rješenja (4–145) zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu u dvama odvojenim područjima i da zadovoljavaju rubne uvjete (4–144).

Budući da funkcija potencijala mora biti neprekinuta na koordinati $y=b/2$, iz izraza (4–145) izlazi $A_n=B_n$. Ostale vrijednosti konstanata A_n mogu se naći rješavanjem uz poznatu razdiobu gustoće naboja na traci. Budući da je $E_y=-\partial\Phi/\partial y$, deriviranjem izraza (4–145) dobiva se:

$$E_y(x,y)=\begin{cases}\displaystyle-\sum_{\substack{n=1\\ \text{neparni}}}^{\infty} A_n\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}\cosh\frac{n\pi y}{a} & \text{za } 0\le y\le b/2\\[2ex] \displaystyle+\sum_{\substack{n=1\\ \text{neparni}}}^{\infty} A_n\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}\cosh\frac{n\pi}{a}(b-y) & \text{za } b/2\le y\le b.\end{cases}$$

Razdioba gustoće površinskog naboja na traci, na koordinati $y=b/2$, glasi

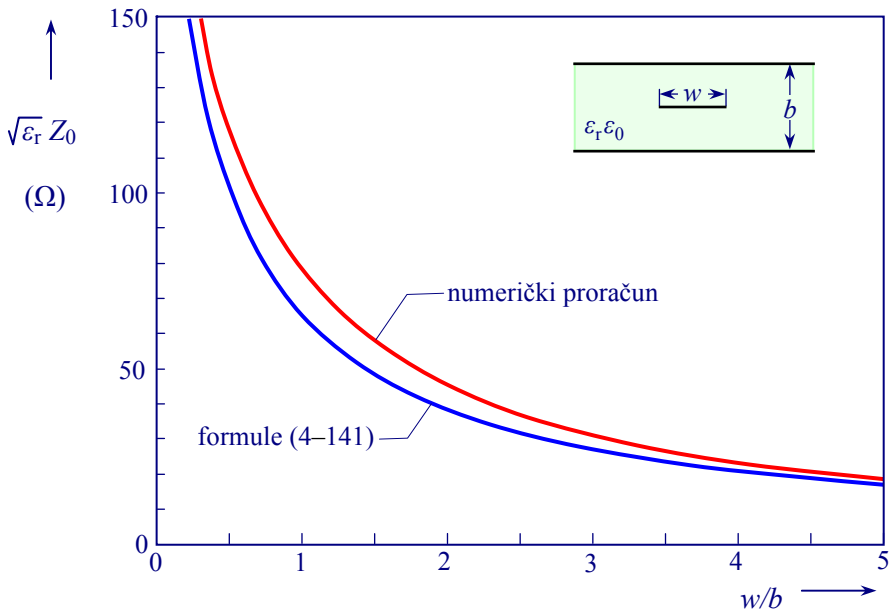
$$\begin{aligned}\rho_s &= D_y(x,y=b/2^+)-D_y(x,y=b/2^-)=\\ &=\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\left[E_y\left(x,y=b/2^+\right)-E_y\left(x,y=b/2^-\right)\right]=\\ &=2\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\sum_{\substack{n=1\\ \text{neparni}}}^{\infty} A_n\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}\cosh\frac{n\pi b}{2a},\end{aligned} \tag{4–146}$$

što je ustvari Fourierov red funkcije gustoće površinskog naboja ρ_s i varijable x. Ako je poznata razdioba naboja na traci, onda se mogu lako naći konstante A_n. Budući da ne znamo stvarnu razdiobu naboja, možemo uzeti dobru aproksimaciju jednolikog naboja na traci, $\rho_s=1$, tj. $\rho_s(x)=1$ za $|x|<w/2$ i $\rho_s(x)=0$ za $|x|>w/2$. Izračunavanjem izraza (4–146) i primjenom svojstva ortogonalnosti funkcija $\cos(n\pi x/a)$, konstante A_n poprimaju vrijednosti

$$A_n=\frac{2a\sin\left(\dfrac{n\pi w}{2a}\right)}{(n\pi)^2\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\cosh\left(\dfrac{n\pi b}{2a}\right)}.$$

Napon između trake i donjeg vodiča može se izraziti krivuljnim integralom polja, tj.

$$V=-\int_0^{b/2}E_y(x=0,y)\mathrm{d}y=\sum_{\substack{n=1\\ \text{neparni}}}^{\infty} A_n\sinh\frac{n\pi b}{2a}.$$



Slika 4.44. Karakteristična impedancija simetrične trakaste linije za $t=0$

Ukupan naboj po jedinici duljine dobiva se integriranjem gustoće naboja po širini trake, tj.

$$Q=\int_{-w/2}^{w/2}\rho_s(x)\mathrm{d}x=w \quad \text{As/m},$$

pa je raspodijeljeni kapacitet trakaste linije

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{w}{\sum\limits_{\substack{n=1\\ \text{neparni}}}^{\infty}\dfrac{2a\sinh\dfrac{n\pi w}{2a}\sinh\dfrac{n\pi b}{2a}}{(n\pi)^2\varepsilon_0\varepsilon_r\cosh\dfrac{n\pi b}{2a}}} \quad \text{F/m.} \tag{4–147}$$

Konačno, karakteristična se impedancija linije može izračunati uvrštenjem izraza (4–147) u (4–140), tj.

$$Z_0=\frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{cC}. \tag{4–148}$$

Na slici 4.44 grafički su uspoređene vrijednosti karakteristične impedancije dobivene primjenom formula (4–141) za beskonačno tanku traku s rezultatom opisanog numeričkog postupka. Bolje poklapanje rezultata može se dobiti boljom aproksimacijom razdiobe naboja na traci [13].

Primjer 4.1. Simetrična trakasta linija

Projektirati simetričnu trakastu liniju karakteristične impedancije 50 Ω za razmak između uzemljenih ravnina $b=3$ mm, debljinu bakrene trake $t=0{,}017$ mm, relativnu permitivnost dielektrika $\varepsilon_r=2{,}55$ i tangens gubitaka 0,0019. Odrediti potrebnu širinu trake i gubitke u liniji na frekvenciji 6 GHz.

Rješenje:

Primjenom formule (4–141) ili s pomoću slike 4.44, za širinu trake dobiva se

$w=2{,}16$ mm.

Na 6 GHz, fazni koeficijent iznosi

$$\beta = \frac{2\pi f\sqrt{\varepsilon_r}}{c} = \frac{2\pi \cdot 6 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2,55}}{2,998 \cdot 10^8} = 200,8 \text{ m}^{-1}.$$

Iz formule (4–24b) koeficijent prigušenja za dielektrično sredstvo iznosi

$$\alpha_d = \frac{1}{2}\beta \tan\delta_\varepsilon = \frac{200,8 \cdot 0,0019}{2} = 0,19 \text{ Np/m, tj. } 1,66 \text{ dB/m.}$$

Iz izraza (2–197), površinski otpor bakra na 6 GHz iznosi

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot 6 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{58,13 \cdot 10^6}} = 0,02\ \Omega..$$

Sad iz izraza (4–143) za koeficijent prigušenja u vodičima izlazi

$\alpha_c = 0,107$ Np/m, tj. 0,929 dB/m.

Otuda ukupni koeficijent prigušenja iznosi $\alpha = \alpha_d + \alpha_c = 1,66 + 0,929 = 2,59$ dB/m. Na 6 GHz valna je duljina $\lambda = c/(\sqrt{\varepsilon_r} f) = 0,05\,\text{m}$ pa ukupno prigušenje po valnoj duljini iznosi $\alpha(\text{dB}) = 0,13\,\text{dB}/\lambda$.

4.8.2. Mikrotrakasta linija

Mikrotrakasta linija jedna je od najpopularnijih planarnih prijenosnih struktura, u prvome redu zbog jednostavne proizvodnje uporabom fotolitografskog postupka tiskanja i lakoće integriranja s drugim pasivnim i aktivnim mikrovalnim komponentama [1], [6], [10]-[16]. Geometrija strukture prikazana je na slici 4.45a). Vodič širine *w* tiskan je na tanki uzemljeni podloga visine *h* relativne permitivnosti ε_r. U mikrotrakastoj liniji elektromagnetski se val rasprostire jednim dijelom zrakom, a drugim dijelom podlogom (supstratom). Stoga se val duž trake ne rasprostire idealnim *TEM*-modom, nego *kvazi-TEM-modom*, tj. dominantnim modom rasprostiranja u mikrotrakastoj strukturi. Drugim riječima, u mikrotrakastoj liniji val se rasprostire slično kao u simetričnoj trakastoj liniji, ali je EM polje malo izobličeno. Ta aproksimacija daje dobre rezultate na frekvencijama do nekoliko GHz. Na slici 4.45b) prikazane su silnice električnog i magnetskog polja u poprečnoj ravnini.

Budući da su na traci mikrotrakaste linije velike gustoće struje, gubitci su znatno veći od onih u valovoda pa se taj tip linije rabi samo za izradu mikrovalnih sklopova i za kraće spojeve između mikrovalnih naprava i sklopova.

Ako se može pretpostaviti da je osnovni mod mikrotrakaste linije kvazi-*TEM*-mod i da je linija bez gubitaka, onda se u skladu s izrazom (4–140) može napisati

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = v_f L = \frac{1}{v_f C}, \tag{4–149}$$

gdje je $v_f = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ fazna brzina vala u mikrotrakastoj strukturi.

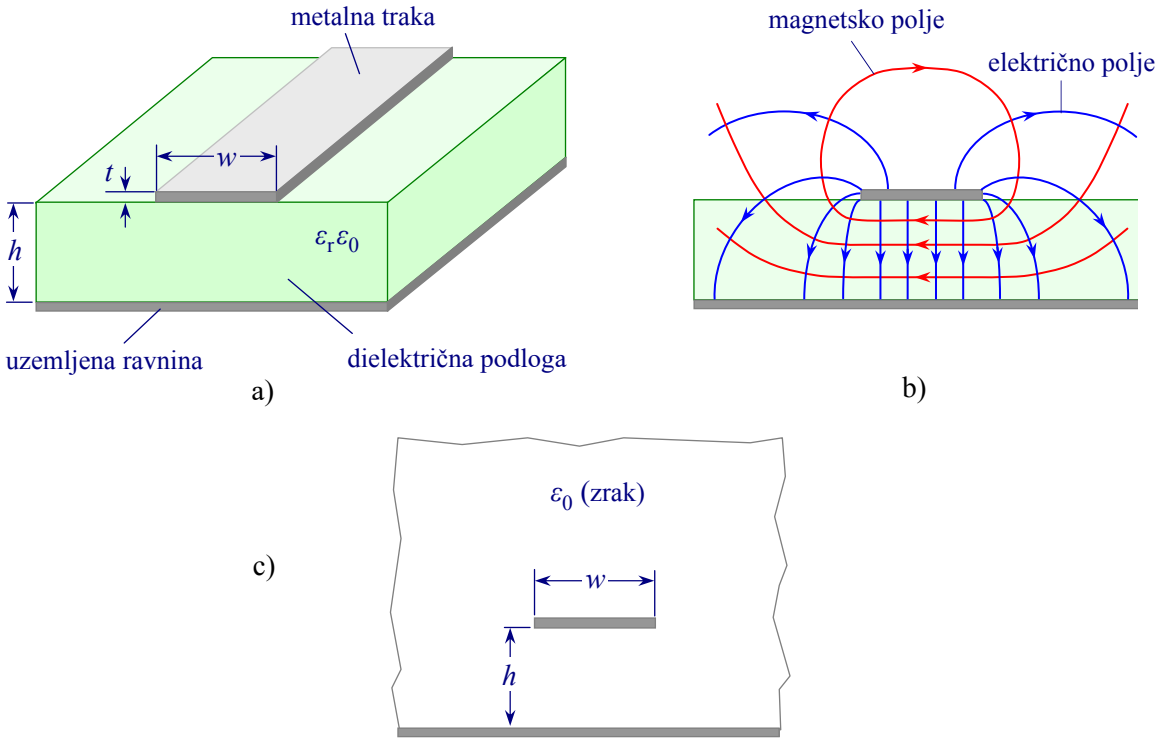
Uklanjanjem podloge i zadržavanjem poprečne geometrije izvorne linije, slika 4.45c), linija je nemagnetična ($\mu = \mu_0$), a val se rasprostire slobodnim prostorom brzinom svjetlosti *c*. Stoga se karakteristična impedancija takve linije može napisati kao

$$Z_{0z} = \sqrt{\frac{L}{C_z}} = cL = \frac{1}{cC_z}, \tag{4–150}$$

gdje dodatni indeks »z« označuje da se radi o liniji koja je ispunjena zrakom.

Sad se kombiniranjem izraza (4–149) i (4–150) dobiva

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{c\sqrt{CC_z}}. \tag{4–151}$$



Slika 4.45. a) Struktura i geometrija mikrotrakaste prijenosne linije; **b)** razdioba polja; **c)** poprečni presjek mikrotrakaste strukture s odstranjenom podlogom

To znači da se tražena karakteristična impedancija može naći ako su poznati raspodijeljeni kapaciteti linije sa i bez podloge. Zbog toga što je fazna brzina u nehomogenom sredstvu mikrotrakaste strukture općenito nepoznata, nužno je odrediti dva nepoznata kapaciteta, C i C_z, sa i bez podloge.

Razdioba statičkog električnog polja i vrijednosti traženih kapaciteta može se naći rješavanjem Laplaceove jednadžbe postupkom numeričke integracije ili konformnim preslikavanjem. Ovim drugim postupkom obavlja se transformacija geometrije mikrotrakaste linije u nadomjesnu planparalelnu strukturu što omogućuje jednostavniji način rješavanja problema.

Efektivna permitivnost

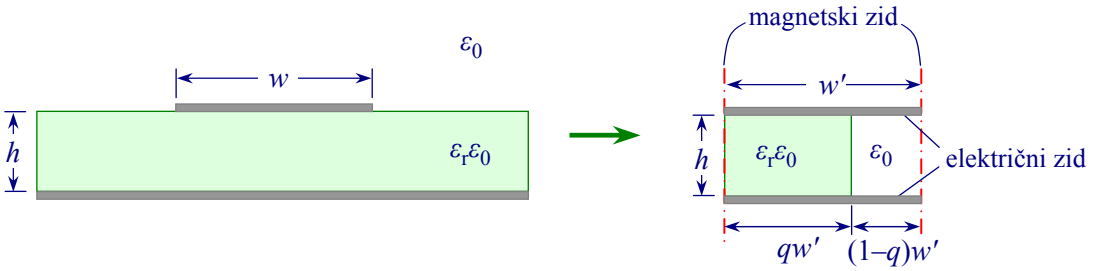
U analizi mikrotrakaste linije ne može se izravno primijeniti pristup preko planparalelne linije jer u dielektriku podloge nije pohranjena cjelokupna električna energija. Stoga tu strukturu valja najprije preurediti u planparalelnu strukturu koja je omeđena idealnim električnim i magnetskim zidovima i koja je djelomično ispunjena dielektrikom podloge, kao što je prikazano na slici 4.46. Pritom je traka nadomjesne linije nešto šira od izvorne trake.

Veličina q, koja je uvedena na slici 4.46, naziva se *faktor ispune*, pokazuje s kojim udjelom dielektrik podloge sudjeluje u vrijednosti raspodijeljenog kapaciteta. Ukupni raspodijeljeni kapacitet mikrotrakaste linije može se izračunati primjenom izraza za pločasti kondenzator, tj.

$$C = \varepsilon_r\varepsilon_0 q\frac{w'}{h} + \varepsilon_0(1-q)\frac{w'}{h} = \frac{\varepsilon_0 w'}{h}\left[1+q(\varepsilon_r-1)\right] \qquad (4\text{–}152a)$$

ili

$$C = \varepsilon_{ef}\varepsilon_0\frac{w'}{h} = \varepsilon_{ef}C_z\,. \qquad (4\text{–}152b)$$



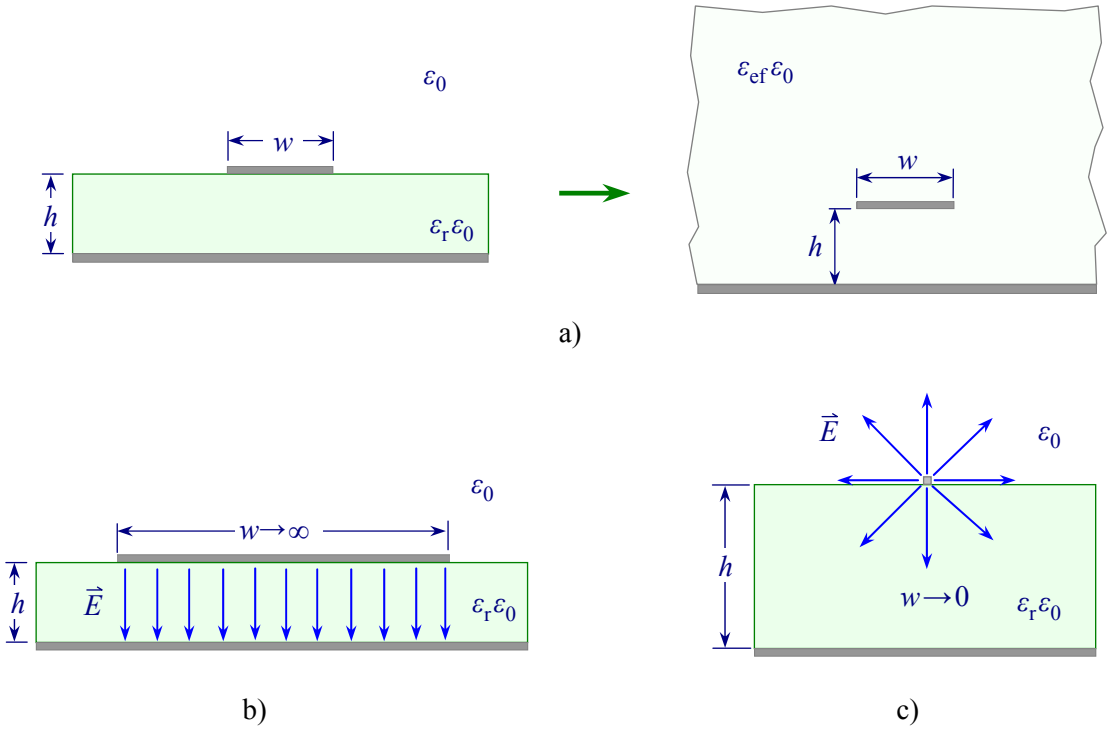
Slika 4.46. Transformacija mikrotrakaste strukture u strukturu s planparalelnim pločama

Ovdje je uvedena nova veličina $\varepsilon_{ef} = 1 + q(\varepsilon_r - 1)$ pod nazivom *efektivna relativna permitivnost* ili kraće *efektivna permitivnost*. Taj, vrlo važan parametar svake mikrotrakaste linije, može se definirati primjenom izraza (4–152b) i omjera izraza (4–149) i (4–151), tj.

$$\varepsilon_{ef} = \frac{C}{C_z} = \left(\frac{c}{v_f}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_v}\right)^2, \tag{4–153}$$

gdje je λ_v valna duljina u mikrotrakastoj strukturi. Nehomogeno sredstvo mikrotrakaste strukture sad se može zamijeniti homogenim sredstvom koje je ispunjeno dielektrikom relativne permitivnosti ε_{ef} (slika 4.47a)). Otuda izlaze izrazi za faznu brzinu i fazni koeficijent:

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}}, \text{ odnosno } \beta = \frac{\omega}{v_f} = k_0\sqrt{\varepsilon_{ef}}\,. \tag{4–154}$$



Slika 4.47. a) Struktura mikrotrakaste linije može se nadomjestiti strukturom istih dimenzija u kojoj je nehomogeno sredstvo zamijenjeno homogenim sredstvom efektivne permitivnosti ε_{ef}. Prikaz krajnjih slučajeva mikrotrakaste linije: **b)** $w/h \to \infty$, **c)** $w/h \to 0$

Razmotrimo sad granične vrijednosti koje može poprimiti efektivna permitivnost mikrotrakaste linije u kvazistatičkim uvjetima, tj. na razmjerno niskim radnim frekvencijama. Kad je širina trake znatno veća od visine dielektrične ploče ($w/h \infty \rightarrow$), tad se struktura ponaša poput pločastog kondenzatora u kojem se cjelokupno električno polje nalazi unutar podloge, slika 4.47b), pa $\varepsilon_{ef} \rightarrow \varepsilon_r$. Nasuprot tomu, za vrlo usku traku ($w/h \rightarrow 0$), električno je polje ravnomjerno raspodijeljeno u zraku i dielektriku, slika 4.47c), pa je efektivna permitivnost jednaka aritmetičkoj sredini relativnih permitivnosti zraka i podloge, $\varepsilon_{ef} = (\varepsilon_r + 1)/2$. Stoga se vrijednosti efektivne permitivnosti mogu naći u rasponu $(\varepsilon_r + 1)/2 \le \varepsilon_{ef} \le \varepsilon_r$.

U literaturi se može naći više različitih formula za izračunavanje raspodijeljenog kapaciteta i efektivne permitivnosti ε_{ef} linije s beskonačno tankom trakom u ovisnosti o omjeru w/h. Najpoznatiji je izraz za efektivnu permitivnost Schneiderova formula

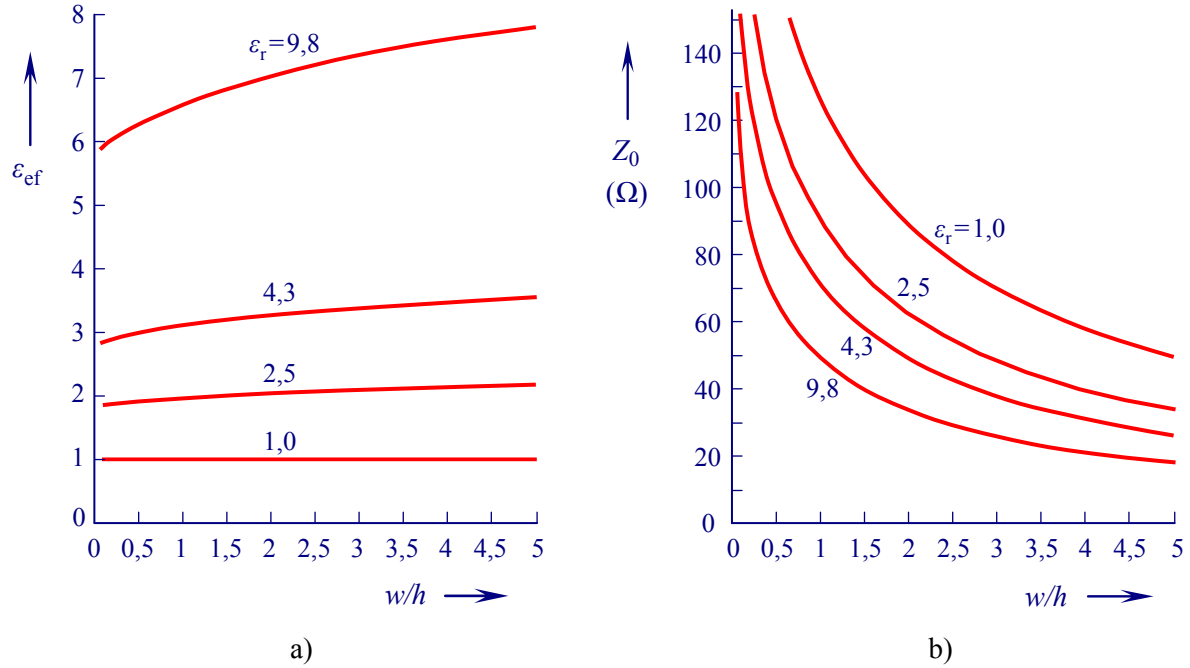
$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 10\dfrac{h}{w}}}, \tag{4–155}$$

Točnije rezultate daje neznatno preinačen izraz [12]

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2}\left(1 + 10\frac{h}{w}\right)^{-0{,}555}. \tag{4–156}$$

Za sve praktične vrijednosti omjera w/h (0,05 do 20) i područje relativne permitivnosti podloge $1 \le \varepsilon_r \le 100$, pogreška u formuli (4–156) ne prelazi 2 %.

Vrijednosti karakteristične impedancije i efektivne permitivnosti mikrotrakaste linije mogu se točnije odrediti odgovarajućim numeričkim postupcima rigoroznim rješavanjem razdiobe polja unutar mikrotrakaste strukture. Na slici 4.48a) grafički je prikazana ovisnost efektivne permitivnosti o omjeru w/h za nekoliko karakterističnih vrijednosti permitivnosti podloge. Rezultati su dobiveni numeričkim postupcima i mogu se iskoristiti za ocjenu točnosti formula (4–155) i (4–156).



a) b)

Slika 4.48. a) Efektivna permitivnost ε_{ef} i **b)** karakteristična impedancija Z_0 u ovisnosti u ovisnosti o normiranoj širini trake w/h

U izrazima (4–151) i (4–153), karakteristična impedancija mikrotrakaste linije ovisi o efektivnoj permitivnosti linije, tj.

$$Z_0 = \frac{Z_{0z}}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}}. \tag{4–157}$$

Za karakterističnu impedanciju postoji čitav niz izraza koji su dobiveni konformnim preslikavanjem ili funkcijskim aproksimacijama rezultata dobivenih primjenom rigoroznih numeričkih postupaka. Tako za beskonačno tanku traku ($t=0$) koja se nalazi u zraku na visini h iznad beskonačne vodljive ravnine, karakteristična se impedancija može vrlo točno izračunati formulom [3]

$$Z_{0z} = Z_0(\varepsilon_r = 1) = \frac{\eta_0}{\frac{w}{h} + 1{,}98\left(\frac{w}{h}\right)^{0{,}172}}, \tag{4–158}$$

gdje je $\eta_0 \simeq 376{,}7\ \Omega$, intrinzična impedancija slobodnoga prostora. Pritom je pogreška manja od 0,3 % za vrijednosti $w/h > 0{,}06$. Primjenom izraza (4–158), (4–157) i (4–156) može se odrediti potrebna vrijednost karakteristične impedancije mikrotrakaste linije za proizvoljnu vrijednost efektivne permitivnosti podloge. Široj traci pripada niža karakteristična impedancija linije, a užoj traci pripada viša karakeristična impedancija. To je u skladu s predodžbom da šira traka ima veći raspodijeljeni kapacitet. Na slici 4.48b) grafički su prikazana obilježja karakteristične impedancije u ovisnosti o normiranoj širini trake za nekoliko praktičnih vrijednosti relativne permitivnosti podloge. Iz izraza (4–157) i (4–158) i slika 4.48b) može se vidjeti da se samo promjenom širine trake može lako ostvariti praktički bilo koja vrijednost karakteristične impedancije mikrotrakaste strukture. No širine traka koje se mogu ostavriti u praksi ipak su ograničene. Naime, izrada uskih traka (visoka Z_0) ograničena je rezolucijom tehnologije izrade tiskanih struktura, a izrada širokih traka (niska Z_0) ograničena je pojavom viših modova.

U literaturi [12], [14], [22] mogu se naći i druge formule za izračunavanje karakteristične impedancije i efektivne permitivnosti linije s beskonačno tankom trakom.

No postoje i formule za sintezu mikrotrakastih linija s pomoću kojih se može odrediti potreban omjer w/h i ε_{ef} za zadanu karakterističnu impedanciju. Za uske trake, tj. za karakteristične impedancije $Z_0 > 44 - 2\varepsilon_r\ \Omega$, dobre rezultate daje formula

$$\frac{w}{h} = \frac{8}{e^A - 2e^{-A}}, \tag{4–159a}$$

gdje je

$$A = \frac{Z_0\sqrt{2(\varepsilon_r+1)}}{120} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\left[\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\varepsilon_r}\ln\left(\frac{4}{\pi}\right)\right]. \tag{4–159b}$$

Za široke trake, tj. za vrijednosti $Z_0 \le 44 - 2\varepsilon_r\ \Omega$, vrijedi formula

$$\frac{w}{h} = \frac{2}{\pi}\left[B - 1 - \ln(2B-1)\right] + \frac{\varepsilon_r - 1}{\pi\varepsilon_r}\left[\ln(B-1) + 0{,}293 - \frac{0{,}517}{\varepsilon_r}\right], \tag{4–160a}$$

$$B = \frac{60\pi^2}{Z_0\sqrt{\varepsilon_r}}. \tag{4–160b}$$

Kad je poznat omjer w/h za zadanu karakterističnu impedanciju Z_0, vrijednost efektivne permitivnosti može se lako izračunati primjenom izraza (4–155) ili (4–156).

Približno elektrostatičko rješenje

U odjeljku 4.8.1. našli smo približno elektrostatsko rješenje za oklopljenu simetričnu trakastu liniju uz pretpostavku jednolike razdiobe površinskog naboja na traci. Sličan se postupak može provesti i za oklopljenu mikrotrakastu liniju, gdje se koordinate bočnih zidova oklopa nalaze na udaljenosti $x=\pm a/2$ od središta trake, kao što je prikazano na slici 4.49 [1]. Pri tomu valja zadati što je moguće veću dimenziju a tako da bočni zidovi nemaju utjecaj na razdiobu polja oko trake. Sad se može riješiti Laplaceova jednadžba

$$\nabla_t^2 \Phi(x,y) = 0, \qquad \text{za } |x| \le a/2, \quad 0 \le y < \infty, \tag{4–161}$$

u području između bočnih zidova i uz ove rubne uvjete:

$$\Phi(x,y) = 0 \quad \text{za } x=\pm a/2, \tag{4–162a}$$

$$\Phi(x,y) = 0 \quad \text{za } y=0, \infty. \tag{4–162b}$$

Budući da je mikrotrakasta linija nehomogena struktura jer je u vertikalnome smjeru razdvojena na područja različite permitivnosti s diskontinuitetom naboja na traci, u tim će područjima postojati zasebna rješenja za potencijal $\Phi(x, y)$. Rješavanjem jednadžbe (4–161) primjenom metode separacije varijabla i uvrštenjem rubnih uvjeta (4–162) dobiva se rješenje

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{n=1 \\ \text{neparni}}}^{\infty} A_n \cos\dfrac{n\pi x}{a} \sinh\dfrac{n\pi y}{a} & \text{za } 0 \le y \le h \\ \sum\limits_{\substack{n=1 \\ \text{neparni}}}^{\infty} B_n \cos\dfrac{n\pi x}{a} \mathrm{e}^{-\frac{n\pi y}{a}} & \text{za } h \le y \le \infty. \end{cases} \tag{4–163}$$

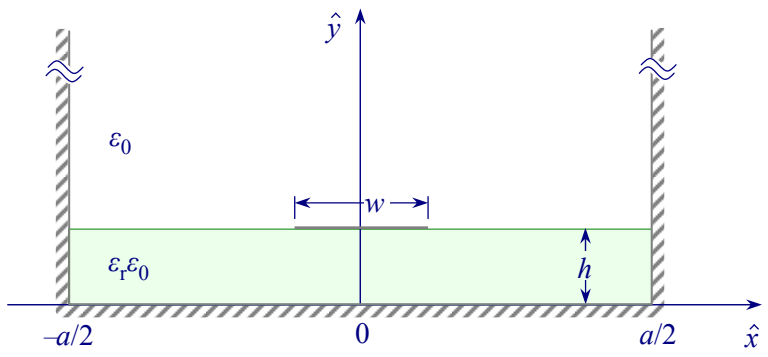
Budući da potencijal mora biti neprekinut na koordinati $y=h$, iz izraza (4–161) dobiva se

$$A_n \sinh\frac{n\pi h}{a} = B_n \mathrm{e}^{-\frac{n\pi h}{a}}$$

pa za potencijal u području $h \le y \le \infty$ izlazi

$$\Phi(x,y) = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{neparni}}}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi h}{a} \mathrm{e}^{-\frac{n\pi(y-h)}{a}}$$

Preostale se konstante A_n mogu naći razmatranjem gustoće površinskog naboja na traci. Jakost električnog polja smjeru osi $\hat{y}$ definirana je kao $E_y = -\partial\Phi/\partial y$ pa je



Slika 4.49. Geometrija oklopljene mikrotrakaste strukture

$$E_y(x,y)=\begin{cases}-\sum\limits_{\substack{n=1\\ \text{neparni}}}^{\infty} A_n\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}\cosh\frac{n\pi y}{a} & \text{za } 0\le y\le h\\ \sum\limits_{\substack{n=1\\ \text{neparni}}}^{\infty} A_n\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi h}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{n\pi(y-h)}{a}} & \text{za } h\le y<\infty.\end{cases} \tag{4–164}$$

Razdioba gustoće površinskog naboja na traci, na koordinati $y=h$, glasi

$$\begin{aligned}\rho_s &= D_y(x,y=h^+)-D_y(x,y=h^-)=\\ &=\varepsilon_0 E_y(x,y=h^+)-\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}E_y(x,y=h^-)=\\ &=\varepsilon_0\sum_{\substack{n=1\\ \text{neparni}}}^{\infty}A_n\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}\left(\sinh\frac{n\pi h}{a}+\varepsilon_{\mathrm{r}}\cosh\frac{n\pi h}{a}\right),\end{aligned} \tag{4–165}$$

što je opet Fourierov red funkcije gustoće površinskog naboja ρ_s i varijable x. Kao i u slučaju sa simetričnom trakastom linijom, može se pretpostaviti jednolika gustoća površinskog naboja na traci, tj. $\rho_s(x)=1$ za $|x|<w/2$ i $\rho_s(x)=0$ za $|x|>w/2$. Iz izraza (4–165) i primjenom svojstva ortogonalnosti funkcija $\cos(n\pi x/a)$, konstante A_n poprimaju ove vrijednosti

$$A_n=\frac{4a\sin\left(\frac{n\pi w}{2a}\right)}{(n\pi)^2\varepsilon_0\left[\sinh\left(\frac{n\pi h}{a}\right)+\varepsilon_{\mathrm{r}}\cosh\left(\frac{n\pi h}{a}\right)\right]}\,.$$

Napon između trake i donjeg vodiča može se izraziti preko krivuljnog integrala kao

$$V=-\int_0^h E_y(x=0,y)\mathrm{d}y=\sum_{\substack{n=1\\ \text{neparni}}}^{\infty}A_n\sinh\frac{n\pi h}{a}.$$

Ukupni naboj po jedinici duljine dobiva se integriranjem gustoće naboja po širini trake,

$$Q=\int_{-w/2}^{w/2}\rho_s(x)\mathrm{d}x=w\quad \text{As/m}.$$

Raspodijeljeni kapacitet trakaste linije može se izračunati primjenom formule

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{w}{\sum\limits_{\substack{n=1\\ \text{neparni}}}^{\infty}\dfrac{4a\sinh\frac{n\pi w}{2a}\sinh\frac{n\pi h}{a}}{(n\pi)^2\varepsilon_0\left[\sinh\frac{n\pi h}{a}+\varepsilon_{\mathrm{r}}\cosh\frac{n\pi h}{a}\right]}}\quad \text{F/m}. \tag{4–166}$$

U skladu s razmatranjima na početku odjeljka o mikrotrakastim linijama, karakteristična se impedancija može izračunati iz izraza (3–20b) ili (4–151), tj.

$$Z_0=\frac{1}{v_{\mathrm{f}}C}=\frac{1}{c\sqrt{CC_{\mathrm{z}}}}, \tag{4–167}$$

gdje su C i C_{z} raspodijeljeni kapaciteti s uključenim dielektrikom podloge, odnosno bez njega, a c je brzina svjetlosti u vakuumu. Kapacitet C_{z} može se izračunati iz izraza (4–166) tako da se umjesto ε_{r} uvrsti 1.

Znatno točniji rezultati mogu se dobiti boljom aproksimacijom razdiobe naboja na traci, poput razdiobe gustoće površinske struje na traci prikazane na slici 4.54.

Utjecaj debljine trake

Konačna debljina trake utječe na veličinu efektivne permitivnosti i karakteristične impedancije. Povećanjem debljine trake dolazi do preraspodjele električnog polja, kao što je prikazano na slici 4.50. Poglavito dolazi do porasta pohranjene električne energije što ima za posljedicu povećanje rubnog kapaciteta i smanjenje karakteristične impedancije. Taj se učinak može nadomjestiti efektivnim proširenjem trake prema ovim približnim formulama:

$$w_{\mathrm{ef}} = w + 0{,}398\left(1 + \ln\frac{4\pi w}{t}\right)t\,, \qquad \text{za } \frac{w}{h} \le \frac{1}{2\pi} \tag{4–168a}$$

$$w_{\mathrm{ef}} = w + 0{,}398\left(1 + \ln\frac{2h}{t}\right)t\,, \qquad \text{za } \frac{w}{h} \ge \frac{1}{2\pi}\,. \tag{4–168b}$$

Prilikom izračunavanja karakteristične impedancije primjenom izraza (4–158), stvarna se širina w može zamijeniti efektivnom širinom trake iz formula (4–168).

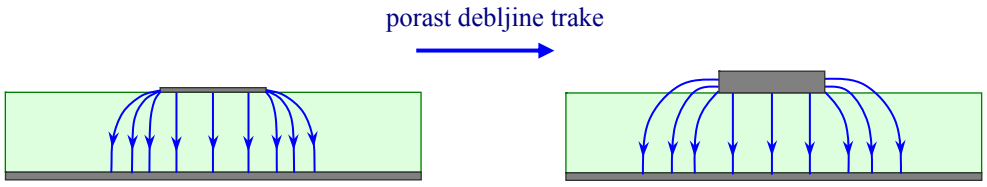
Povećanjem debljine trake dolazi do porasta pohranjene električne energije u području sa zrakom, kao što se vidi na slici 4.50, jer dolazi do preraspodjele električne energije u korist rjeđeg sredstva (područje sa zrakom), pa se vrijednost efektivne permitivnosti smanjuje za

$$\Delta\varepsilon_{\mathrm{ef}}(t) = \frac{(\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1)t/h}{4{,}6\sqrt{w/h}}\,. \tag{4–169}$$

Stoga se ukupna efektivna permitivnost mikrotrakaste strukture može konačno napisati kao

$$\varepsilon_{\mathrm{ef}}(t) = \varepsilon_{\mathrm{ef}} - \Delta\varepsilon_{\mathrm{ef}}(t)\,. \tag{4–170}$$

U mikrotrakastim linijama kod kojih je omjer t/h manji od 0,005 i $2 \le \varepsilon_{\mathrm{r}} \le 10$ te $w/h \ge 0{,}1$ možemo posve zanemariti učinke konačne debljine trake na karakterističnu impedanciju i efektivnu permitivnost, bez unošenja znatnije pogreške.



Slika 4.50. Promjenom debljine trake dolazi do preraspodjele jakosti električnog polja

Anizotropne dielektrične podloge

Ako je dielektrik podloge anizotropan, tj. ako nema jednaku permitivnost u svim smjerovima, onda permitivnost ima oblika tenzora pa je opisana matricom. Toj skupini materijala pripada ferit čija je permeabilnost u statičkom magnetskom polju anizotropna, ali i neki drugi dielektrični materijali poput safira anizotropne permitivnosti. Ako je permitivnost u smjeru jedne osi pravokutnoga koordinatnog sustava različita od permitivnosti u smjeru drugih dviju osi, onda os u kojoj dielektrik ima različitu permitivnost valja postaviti poprečno u odnosu na površinu podloge. Tad se visina h može zamijeniti efektivnom visinom h_{e} prema izrazu

$$h_{\mathrm{e}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_y}}\,h\,,$$

gdje je ε_y relativna permitivnost u okomitom smjeru na podlogu $\hat{y}$, a ε_{r} u smjeru $\hat{x}$ i $\hat{z}$. Sad se umjesto permitivnosti ε_{r} može uzeti geometrijska sredina

$$\varepsilon_{\mathrm{g}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_y}\,.$$

Disperzija u mikrotrakastoj liniji

Udvostručavanjem frekvencije signala u mikrotrakastoj liniji s više dielektrika, fazni se koeficijent β neće točno udvostručiti. To svojstvo posjeduje više vrsta prijenosnih linija, a naziva se *disperzija*. Na slici 4.51a) prikazana je tipična ovisnost faznog koeficijenta o frekvenciji u disperzivnoj liniji. Vidimo da je ta ovisnost općenito nelinearna. Drugim riječima fazna je brzina vala u mikrotrakastoj liniji funkcija frekvencije. Mikrotrakaste su linije disperzivne pa je stoga vrlo teško odrediti točnu funkcijsku vezu između valne duljine i frekvencije. Porastom frekvencije elektromagnetsko se polje sve više zbija unutar podloge u prostoru između trake i vodljive ravnine, pa efektivna permitivnost raste s frekvencijom. Zato statičku efektivnu permitivnost $\varepsilon_{ef}=\varepsilon_{ef}(0)$ valja zamijeniti dinamičkom ili frekvencijski ovisnom efektivnom permitivnošću $\varepsilon_{ef}(\omega)$. Isto tako valja zamijeniti faznu brzinu v_f frekvencijski ovisnom faznom brzinom $v_f(\omega)$, tj.

$$\varepsilon_{ef}(\omega)=\left[\frac{c}{v_f(\omega)}\right]^2 .$$

Frekvencijski ovisna permitivnost može se naći unutar ovih granica:

$$\varepsilon_{ef}(\omega)\to\begin{cases}\varepsilon_{ef} & \text{za}\ \ \omega\to 0\\ \varepsilon_r & \text{za}\ \ \omega\to\infty .\end{cases}$$

Unutar tih granica $\varepsilon_{ef}(\omega)$ mijenja se monotono, kao što je prikazano na slici 4.51b).

Primjenom stroge punovalne numeričke analize moguće je vrlo točno odrediti frekvencijsku ovisnost efektivne permitivnosti mikrotrakaste linije u širokom frekvencijskom području. Na slici 4.52 prikazano je kompletno rješenje za mikrotrakastu liniju.

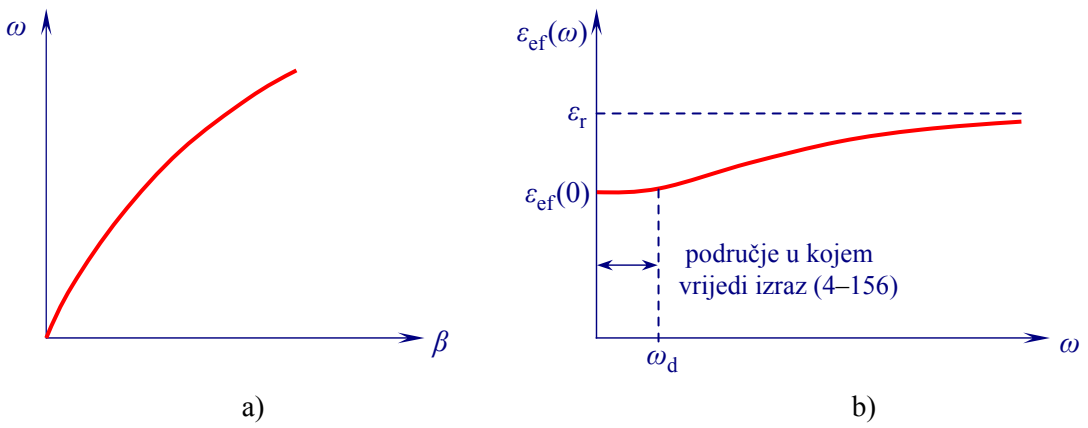
Na osnovi rezultat rigorozne analize izvedene su funkcijske aproksimacije za praktičnu uporabu. Ovdje ćemo pokazati jednostavnu formulu koja daje razmjerno točne rezultate u širokom rasponu vrijednosti w/h i ε_r

$$\varepsilon_{ef}(f)=\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_r}-\sqrt{\varepsilon_{ef}(0)}}{1+F^{-1,5}}+\sqrt{\varepsilon_{ef}(0)}\right]^2 , \qquad (4\text{–}171a)$$

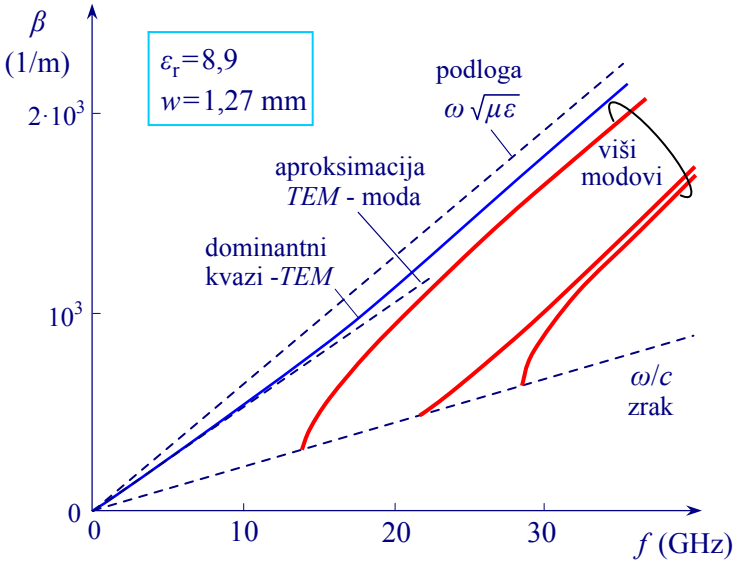
gdje je

$$F=\frac{4hf\sqrt{\varepsilon_r-1}}{c}\left\{\frac{1}{2}+\left[1+2\log\left(1+\frac{w}{h}\right)\right]^2\right\} . \qquad (4\text{–}171b)$$

U formuli (4–171) veličina $\varepsilon_{ef}(0)$ označuje efektivnu permitivnost za statički slučaj, koja je definirana izrazima (4–156) ili (4–155).



Slika 4.51. Frekvencijska ovisnost: **a)** faznog koeficijenta; **b)** efektivne permitivnosti



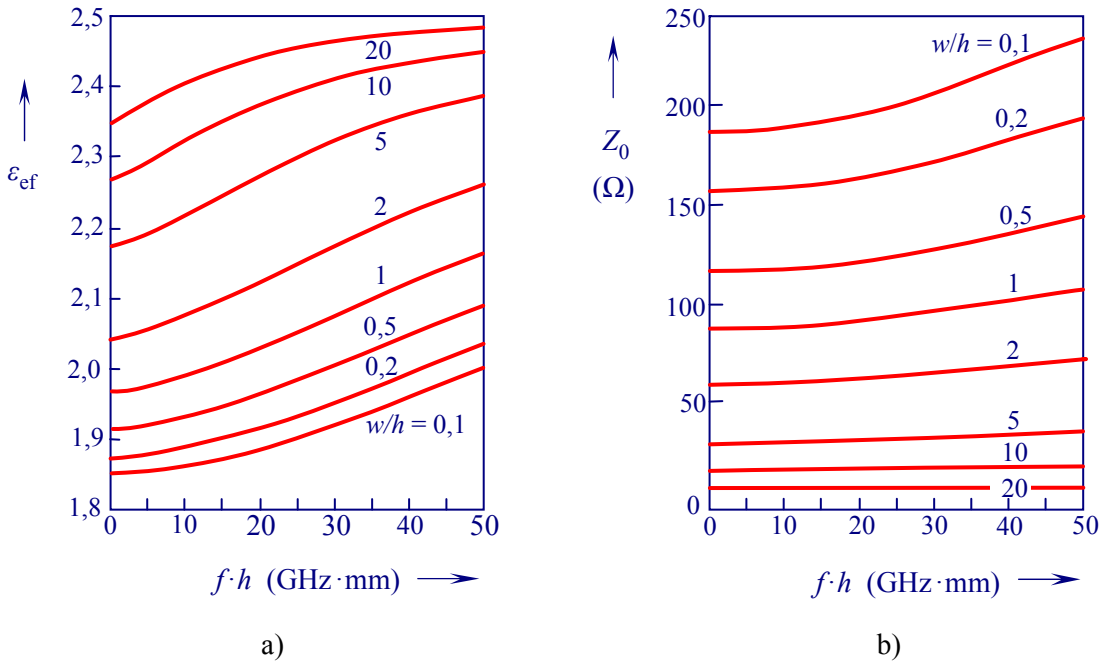
Slika 4.52. Disperzijski dijagram mikrotrakaste linije

Frekvencija ispod koje se mogu zanemariti učinci disperzije dana je ovim izrazom

$$f_{\mathrm{d}} = 0{,}3\sqrt{\frac{Z_0}{h\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1}}}\,, \tag{4–172}$$

gdje se f_{d} mjeri u gigahercima, a h u milimetrima. Izraz (4–172) pokazuje da je ta frekvencija viša za linije visoke karakteristične impedancije, tj. za linije s užom trakom na tankoj podlozi.

Na slici 4.53a) prikazani su učinci disperzije na efektivnu permitivnost mikrotrakaste linije za različite omjere w/h i $\varepsilon_{\mathrm{r}}=2{,}5$. Karakteristike su dobivene na osnovi rigoroznog numeričkog modela mikrotrakaste linije.



Slika 4.53. Obilježja disperzije mikrotrakaste linije izvedene na podlozi $\varepsilon_{\mathrm{r}}=2{,}5$. **a)** Efektivna permitivnost, **b)** karakteristična impedancija

Osim na efektivnu permitivnost, disperzija djeluje i na karakterističnu impedanciju mikrotrakaste linije. Karakteristična se impedancija svake ne-*TEM*-prijenosne strukture može definirati na jedan od sljedećih triju načina:

$$Z_0(f)=\frac{V}{I},\qquad Z_0(f)=\frac{2P}{II^*},\qquad Z_0(f)=\frac{VV^*}{2P}.$$

Zbog toga se u literaturi može naići na više rezultata koji se međusobno razlikuju. Ako se još umjesto prosječnog napona uzme napon na sredini trake, onda se dobiva dodatni skup definicija. Tako prema jednoj definiciji Z_0 raste s frekvencijom, a prema drugoj opada s frekvencijom. No karakteristična impedancija obično ne ovisi o frekvenciji u onoj mjeri u kojoj to ovisi efektivna permitivnost pa se frekvencijska ovisnost karakteristične impedancije nerijetko zanemaruje.

Na slici 4.53b) prikazane su karakteristike frekvencijske ovisnosti karakteristične impedancije mikrotrakaste linije za $\varepsilon_r = 2{,}5$ i za različite omjere w/h. Karakteristike su dobivene na osnovi rigoroznog numeričkog modela mikrotrakaste linije.

Gubitci u mikrotrakastoj liniji

Pri proračunu i izvedbi sklopova s mikrotrakastim linijama nerijetko se susrećemo s dodatnim poteškoćama. To su gubitci u vodičima i dielektriku, gubitci zbog zračenja same mikrotrakaste strukture, diskontinuiteti, utjecaj kućišta te pojava viših modova i površinskih valova.

Zbog gubitaka u dielektriku i vodičima dolazi do prigušenja elektromagnetskoga vala. Prigušenje koje se pripisuje konačnoj vodljivosti vodiča može se uzeti u račun preko raspodijeljenog otpora linije (R), a prigušenje zbog gubitaka u dielektriku može se uzeti u račun preko raspodijeljene vodljivosti (G) na sličan način kao za *TEM*-linije u odjeljcima 3.2. i 3.6.

Za liniju s malim gubitcima, opća teorija linija (odjeljak 3.1.2) daje:

$$Z_0 \simeq \sqrt{L/C}\ ,$$

$$\gamma=\alpha+\mathrm{j}\beta \simeq \frac{R}{2Z_0}+\frac{GZ_0}{2}+\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}\,.$$

U drugome su izrazu koeficijenti prigušenja za vodič i dielektrik međusobno odvojeni:

$$\alpha_c=\frac{R}{2Z_0}, \tag{4–173a}$$

$$\alpha_d=\frac{GZ_0}{2}, \tag{4–173b}$$

pa se ukupni koeficijent prigušenja može napisati kao $\alpha=\alpha_c+\alpha_d$.

U radiokomunikacijskim primjenama prigušenje se nerijetko izražava u decibelima po jedinici duljine, što se može dobiti množenjem veličine α s 8,686. Taj faktor daje približnu vezu između nepera i decibela jer je $20/\ln(10) = 20\log(\mathrm{e}) = 8{,}6858896\ldots$

Gubitci u dielektriku

Za dielektrik s gubitcima, permitivnost ε kompleksna je veličina, tj. $\varepsilon=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon''$. U odjeljku 2.3.1. kakvoća dielektrika definirana je tangensom gubitaka dielektrika kao

$$\tan\delta_\varepsilon=\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}. \tag{4–174}$$

Kod uobičajenih linija ti su gubitci vrlo mali pa je $\tan\delta_\varepsilon \simeq \delta_\varepsilon$. Tada Maxwellova rotorska jednadžba $\nabla\times\vec{H}=(\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon)\vec{E}=\mathrm{j}\omega\varepsilon'\vec{E}+(\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon'')\vec{E}$ pokazuje da se veličina $\omega\varepsilon''$ može prika-

zati kao nadomjesna vodljivost dielektrika s gubitcima bez omske vodljivosti σ. Za dielektrike se normalno uzima da im je provodnost $\sigma = 0$, osim u poluvodičkim podlogama (supstratima) gdje ovisi o količini primjesa.

Srednja električna energija pohranjena u području podloge dana je kao

$$\langle W_{e1} \rangle = \frac{\varepsilon'}{4} \int_{V_1} \vec{E}\vec{E}^* \mathrm{d}V ,$$

gdje je V_1 volumen područja podloge po jedinici duljine linije. Gubitci snage zbog disipacije u dielektriku dani su izrazom

$$P_{\mathrm{dis},\varepsilon} = \frac{\omega\varepsilon''}{2} \int_{V_1} \vec{E}\vec{E}^* \mathrm{d}V$$

pa se omjer između disipirane i pohranjene energije može napisati kao

$$\frac{P_{\mathrm{dis},\varepsilon}}{\langle W_{e1} \rangle} = \frac{2\omega\varepsilon''}{\varepsilon'} .$$

Ako je sav prostor oko trake ispunjen dielektrikom, onda se pohranjena električna energija može izračunati kao $CV^2/4$, a disipirana snaga u podlozi kao $GV^2/2$ pa je

$$G = \frac{\omega\varepsilon''}{\varepsilon'} C . \qquad (4\text{–}175)$$

No dielektrično sredstvo mikrotrakaste sastoji se od dvaju sredstava (zraka i dielektrika podloge), što znači da je dio električne energije pohranjen u volumenu V_2 sa zrakom iznad trake. Stoga je ukupna srednja električna energija pohranjena u mikrotrakastoj strukturi

$$\langle W_{e1} \rangle + \langle W_{e2} \rangle = \frac{\varepsilon'}{4} \int_{V_1} \vec{E}\vec{E}^* \mathrm{d}V + \frac{\varepsilon_0}{4} \int_{V_2} \vec{E}\vec{E}^* \mathrm{d}V = \frac{CV^2}{4} .$$

Ako je cjelokupna linija u zraku, onda se može napisati

$$\langle W_{e1,z} \rangle + \langle W_{e2} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} \int_{V_1} \vec{E}\vec{E}^* \mathrm{d}V + \frac{\varepsilon_0}{4} \int_{V_2} \vec{E}\vec{E}^* \mathrm{d}V = \frac{C_z V^2}{4} .$$

Nije jednostavno izračunati koliko električne energije pripada svakom od tih područja. No može se primijeniti približna metoda koja se osniva na pretpostavci da su volumni integrali od $\vec{E} \cdot \vec{E}^*$ za oba slučaja međusobno približno jednaki. Uz tu je pretpostavku:

$$\varepsilon' \mathrm{I}_1 + \varepsilon_0 \mathrm{I}_2 = CV^2 , \qquad \varepsilon_0 \mathrm{I}_1 + \varepsilon_0 \mathrm{I}_2 = C_z V^2 ,$$

gdje su I_1 i I_2 vrijednosti integrala po volumenu V_1, odnosno V_2. Primjenom izraza $\varepsilon'_r = \varepsilon' / \varepsilon_0$ i rješavanjem gornjih dvaju izraza za I_1 i I_2, dobiva se:

$$\mathrm{I}_1 = \frac{C - C_z}{\varepsilon' - \varepsilon_0} V^2 , \qquad \mathrm{I}_2 = \frac{\varepsilon'_r C_z - C}{\varepsilon' - \varepsilon_0} V^2$$

pa dio ukupne energije koji je pohranjen unutar dielektrika podloge iznosi

$$\frac{\varepsilon'_r \mathrm{I}_1}{\varepsilon'_r \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2} = \frac{\varepsilon'_r}{\varepsilon'_r - 1} \frac{C - C_z}{C} = \frac{\varepsilon'_r}{\varepsilon_{ef}} \frac{\varepsilon_{ef} - 1}{\varepsilon'_r - 1} = q \frac{\varepsilon'_r}{\varepsilon_{ef}} .$$

U skladu s izrazom (4–151), ovdje je upotrijebljen izraz $C = \varepsilon_{ef} C_z$, a faktor ispune q koji je uvijek manji od jedan (vidi sliku 4.46), definiran je izrazima (4–152) kao

$$q = \frac{\varepsilon_{ef} - 1}{\varepsilon'_r - 1} . \qquad \frac{\mathrm{r}\ \ 1}{\varepsilon'_r \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2} = \frac{\varepsilon'_r}{\varepsilon'_r - 1} \frac{C - C_z}{C} = \frac{\varepsilon'_r}{\varepsilon_{ef}} \frac{\varepsilon_{ef}\ \ 1}{\varepsilon'_r - 1} = q \frac{\varepsilon'_r}{\varepsilon_{ef}} . \qquad (4\text{–}176a)$$

Nađe li se veličina q nezavisno, efektivna se permitivnost može riješiti primjenom izraza

$$\varepsilon_{\mathrm{ef}} = \varepsilon_{\mathrm{r}}' q + (1-q)\,. \tag{4–176b}$$

Uz uvedenu pretpostavku može se vidjeti da će se G smanjiti u istom omjeru kojim se dijeli i energija jer u području sa zrakom zapravo nema gubitaka. Tako se, umjesto izraza (4–175), dobiva

$$G = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}'}{\varepsilon_{\mathrm{ef}}}\frac{\varepsilon_{\mathrm{ef}}-1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}'-1}\frac{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}}''}{\varepsilon_{\mathrm{r}}'}C\,. \tag{4–177}$$

Ako se u izraz (4–173b) uvrste izrazi (4–177) i (4–174), onda se koeficijent prigušenja u dielektriku izražen u neperima po metru može napisati u ovome obliku

$$\alpha_{\mathrm{d}} = \frac{\pi}{\lambda_0}\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}'}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{ef}}}}\frac{\varepsilon_{\mathrm{ef}}-1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}'-1}\tan\delta_{\varepsilon} \quad \text{Np/m}, \tag{4–178a}$$

gdje je λ_0 valna duljina u slobodnome prostoru izmjerena u metrima.

Izraz za α_{d} može se naći i u obliku koji daje vrijednosti u decibelima po metru

$$\alpha_{\mathrm{d}} = 27{,}3\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}'}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{ef}}}}\frac{\varepsilon_{\mathrm{ef}}-1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}'-1}\frac{\tan\delta_{\varepsilon}}{\lambda_0} \quad \text{dB/m}. \tag{4–178b}$$

Gubitci u vodičima

Prigušenje nastaje i zbog konačne vodljivosti trake i uzemljene ravnine mikrotrakaste linije. Jednadžba kontinuiteta struje i očuvanja naboja (2–5) pokazuje da se gustoća struje duž vodiča mijenja na jednak način kao i gustoća naboja. Stoga će na vodljivoj traci širine w razdioba gustoće struje biti slična razdiobi gustoće naboja, slika 4.54. Izraz koji dobro opisuje razdiobu gustoće naboja može se napisati kao [6]

$$\rho_{\mathrm{s}}(x) = \frac{2Q_{\mathrm{s}}}{\pi w\sqrt{1-\dfrac{x^2}{(w/2)^2}}}\,,$$

gdje je Q_{s} ukupni površinski naboj na traci. Na beskonačno tankoj traci gustoća struje obrnuto je razmjerna kvadratu udaljenosti od ruba, a na samom rubu postaje beskonačna. Unatoč tomu što ima polove koji se nalaze na rubovima trake, ta je funkcija integrabilna u cijelom području vrijednosti $-w/2 < y < w/2$ pa se nakon integracije dobiva konačna vrijednost struje. Ali budući da računanje gubitaka snage traži integraciju kvadrata gustoće struje, za takvu razdiobu gustoće struje na beskonačno tankoj traci dobili bi se beskonačni gubitci. U praksi su međutim vodiči konačne debljine pa je struja na rubu trake manje singularna te su gubitci snage konačni. Stoga se u račun mora uzeti konačna debljina vodiča. Osim toga valja odrediti u kojem se omjeru ukupna struja podijelila na gornju i donju površinu trake. Naime, kad je širina trake veća od polovice razmaka između trake i uzemljene ravnine, postojanje uzemljene ravnine stvara neravnotežu u razdiobi struje između gornje i donje površine trake.

Konformnim preslikavanjem mogu se naći razdioba struje, omjer u kojem se struja dijeli na gornju i donju površinu trake te gubitci snage. Za raspon vrijednosti $0{,}1 \le w/h \le 10$ dobiva se koristan izraz za raspodijeljeni otpor trake

$$R_{\mathrm{l}} = \frac{R_{\mathrm{s}}}{w}\left[0{,}94 + 0{,}132\frac{w}{h} - 0{,}0062\left(\frac{w}{h}\right)^2\right]\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\ln\frac{4\pi w}{t}\right), \tag{4–179a}$$

S druge strane, za normirani raspodijeljeni otpor uzemljene ravnine izlazi

$$R_2 = \frac{R_s}{w + 5{,}8h + 0{,}03h^2 / w}, \tag{4–179b}$$

gdje uzemljenom ravninom efektivne širine $w + 5{,}8h$ teče struja jednake gustoće (slika 4.54). Veličina $R_s = \sqrt{\pi f \mu_0 / \sigma}$ površinski je otpor vodiča i može se izračunati iz izraza (2–197) u odjeljku 2.10.2. Za bakar provodnosti $\sigma = 58 \cdot 10^6$ S/m, dobiva se $R_s = 8{,}22 \cdot 10^{-3} \sqrt{f}$ u omima, za frekvenciju u GHz. Ukupni raspodijeljeni otpor jednak je zbroju $R_1 + R_2$ pa se za koeficijent prigušenja iz formule (4–173a) dobiva izraz

$$\alpha_c = \frac{R_1 + R_2}{2Z_0}. \tag{4–180}$$

Za kvazi-*TEM*-mod, magnetsko polje i gubitci u vodičima ne ovise o materijalu podloge. Približna analiza metodom perturbacije pokazuje da se koeficijent prigušenja, koji uzima u obzir samo omske gubitke u vodičima, može prikazati kao

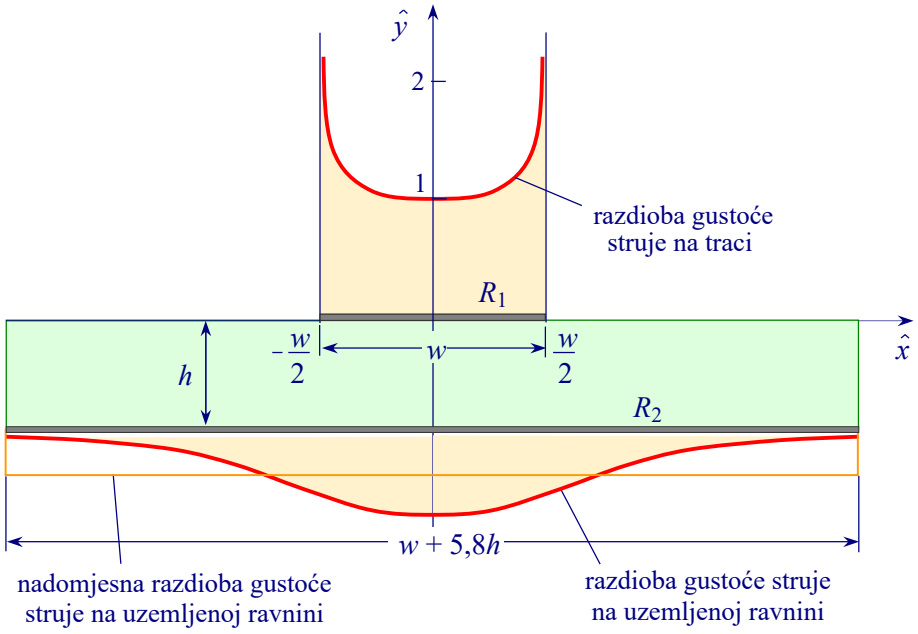
$$\alpha_c = \frac{R_s}{wZ_0} \text{ Np/m}. \tag{4–181a}$$

Taj izraz u praksi daje vrlo točne rezultate. Koeficijent prigušenja izražen u decibelima iznosi

$$\alpha_c = 8{,}686 \frac{R_s}{wZ_0} \text{ dB/m}. \tag{4–181b}$$

U praktičnim mikrotrakastim linijama površinska hrapavost dodatno povećava prigušenje u izrazima (4–180) i (4–181) za faktor koji može poprimiti vrijednost između 1 i 1,5. Točan iznos tog dodatnog prigušenja ovisi o omjeru između hrapavosti površine i dubine prodiranja. Osim toga postupak jetkanja i sam fotolitografski postupak proizvodnje tiskanih vodova ne daju posve glatke rubove trake što pridonosi daljnjem povećanju gubitaka i prigušenja.

Za većinu podloga gubitci u vodičima znatno su veći od onih u dielektriku. To se može vidjeti na sljedećem primjeru.



Slika 4.54. Razdioba površinskog naboja na vodljivoj traci i vodljivoj ravnini. Stalna razdioba na uzemljenoj ravnini označuje razdiobu gustoće struje koja teče efektivnom širinom uzemljene ravnine $w + 5{,}8h$. Površine ispod svih triju krivulja jednake su struji koja teče linijom

Primjer 4.2. Mikrotrakasta linija

Mikrotrakasta linija sastoji se od bakrene trake širine $w = 0{,}82$ mm, koja leži na uzemljenoj podlozi ($\varepsilon_r' = 9{,}7$; tan $\delta_\varepsilon = 0{,}0002$) visine $h = 0{,}56$ mm. Naći karakterističnu impedanciju i efektivnu permitivnost linije te gubitke u vodičima i dielektriku na frekvenciji 10 GHz.

Rješenje:

Iz formula (4–156), (4–158) i (4–157) izlazi $\varepsilon_{ef} = 6{,}9$; $Z_{0z} = 105{,}4\ \Omega$ i $Z_0 = 40\ \Omega$. Iz izraza (4–178) za gubitke u podlozi izlazi $\alpha_d = 0{,}0535$ Np/m ili 0,465 dB/m, a iz formule (4–181) izlaze gubitci u vodičima: $\alpha_c = 0{,}793$ Np/m ili 6,9 dB/m, koji su za više od jednog reda veličine veći od gubitaka u dielektriku. Ukupni gubitci iznose $\alpha = \alpha_d + \alpha_c = 0{,}0535 + 0{,}793 = 0{,}847$ Np/m ili 7,35 dB/m. Na frekvenciji 10 GHz valna duljina u slobodnome prostoru iznosi $\lambda_0 = c/f = 0{,}03$ m pa ukupni gubitci po valnoj duljini iznose 0,221 decibela, što je prihvatljiva vrijednost za većinu primjena.

Zračenje mikrotrakaste linije

Kod linija koje nisu oklopljene, kao što je mikrotrakasta linija, susrećemo se s pojavom zračenja. Zračenje stvara dodatne gubitke energije, a poglavito nastaje na diskontinuitetima. Energija se može zračiti preko površinskih valova koji putuju na granici između podloge i zraka te volumnim valovima u slobodnome prostoru. Može se pokazati da su gubitci zbog zračenja razmjerni veličini

$$\frac{(hf)^2}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Primjerice, za visinu podloge $h = 1$ mm i $\varepsilon_r = 2{,}5$ zračenje je zanemarivo malo do frekvencije oko 3 GHz. Zadržavanjem iste visine podloge i povećavanjem relativne permitivnosti na 10, frekvencijsko područje zanemarivo malog zračenja protegnut će se do 4 GHz. Frekvencija na kojoj se izrači jedan posto snage na otvorenome kraju mikrotrakaste linije može se odrediti formulom

$$f_m = \frac{2{,}14}{h}\sqrt[4]{\varepsilon_r}, \tag{4–182}$$

gdje je frekvencija izražena u gigahercima, a visina dielektrične podloge u milimetrima.

Faktor dobrote mikrotrakaste linije

Kao i za rezonantne tako se i za prijenosne strukture može definirati *faktor dobrote* (Q). Ta je veličina definirana kao omjer pohranjene energije i gubitaka snage u vodičima i dielektriku. Faktor dobrote nerijetko se rabi za procjenu ukupnih gubitaka. Za otvorene prijenosne linije u račun ulaze i gubitci zbog zračenja. Ukupni se faktor dobrote mikrotrakaste linije može izraziti preko pojedinačnih faktora dobrote Q_c, Q_d i Q_z koji uzimaju u obzir gubitke u vodičima i dielektriku te gubitke zbog zračenja. Sad se ukupni faktor dobrote može napisati u obliku

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_z}. \tag{4–183}$$

To se također može napisati i kao

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha}, \tag{4–184}$$

gdje je $\alpha = \alpha_c + \alpha_d + \alpha_z$ cjelokupni koeficijent prigušenja u koji je ugrađen nadomjesni koeficijent prigušenja α_z kao posljedica zračenja mikrotrakaste strukture.

Oklopljena mikrotrakasta linija

Zračenje trake vodi do preslušavanja u komunikacijskim primjenama pa ga valja spriječiti ili maksimalno potisnuti. To se može ostvariti zatvaranjem mikrotrakaste strukture u metalno kućište, kao što je prikazano na slici 4.55a). No prevelike dimenzije kućišta stvaraju uvjete za pojavu neželjenih valovodnih modova koji mogu znatno pokvariti obilježja mikrotrakastog sklopa. Stoga poprečne dimenzije kućišta valja smanjiti ispod pola valne duljine za val najviše frekvencije, koji se rasprostire mikrotrakastom linijom. S druge pak strane, premale dimenzije kućišta mogu utjecati na promjenu vrijednosti karakteristične impedancije i efektivne permitivnosti. Za veće visine kućišta od peterostruke visine podloge i za širinu veću od *efektivne širine uzemljene ravnine* $(w + 5{,}8h)$ utjecaj je kućišta posve zanemariv na razdiobu elektromagnetskog polja, a preko toga i na parametre Z_0 i ε_{ef}.

Ograničenja mikrotrakaste linije

Osim spomenutih problema zbog gubitka u vodičima i dielektriku, i nepoželjne frekvencijske ovisnosti nekih parametara linije, na višim frekvencijama može doći i do pobude valovodnih modova i površinskih valova. Uporabom preširoke trake može doći do pojave viših *TM*-modova. Slično kao i u pravokutnome valovodu, pobuda prvoga višeg moda (ovdje je to mod TM_{10}) nastaje kad se širina trake izjednači s pola valne duljine. Zaporne frekvencije viših modova (TM_{m0}) mogu se odrediti primjenom izraza

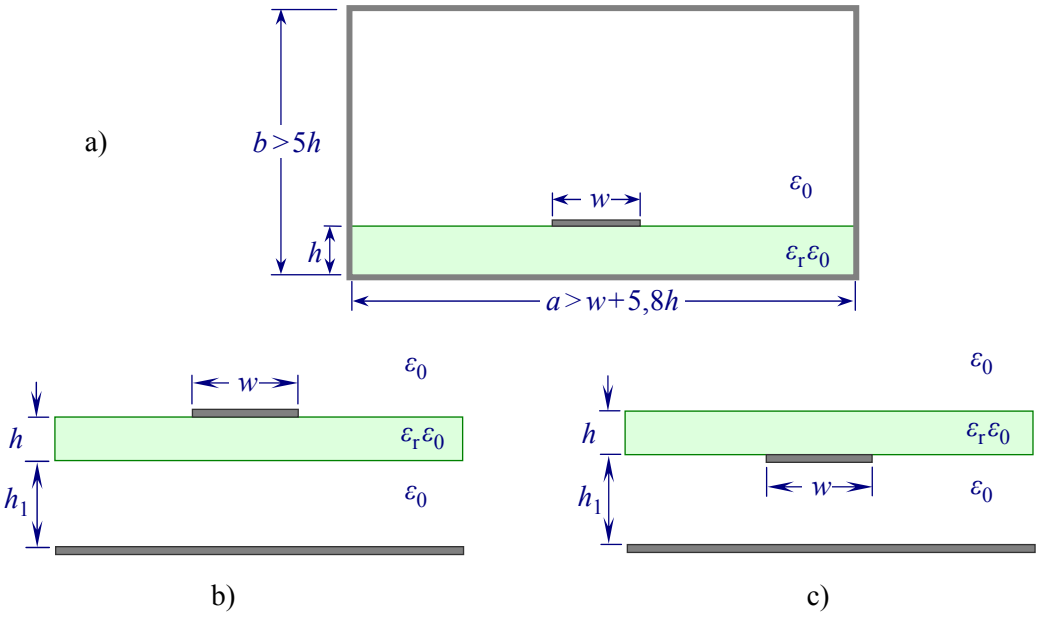
$$f_c(m,0) = \frac{v_f}{\lambda_c(m,0)} = \frac{mc}{2w\sqrt{\varepsilon_{ef}(f)}}, \tag{4–185}$$

gdje je ne m redni broj moda.

Povećanjem visine podloge za nekoliko desetina valne duljine znatno će se pojačati sprega između kvazi-*TEM*-moda i parazitskog površinskog moda. Frekvencija iznad koje započinje znatnija sprega s površinskim modom može se odrediti primjenom izraza

$$f_{pv} = \frac{c}{\sqrt{2}\pi h\sqrt{\varepsilon_r - 1}} \tan^{-1}\varepsilon_r, \tag{4–186}$$

gdje je frekvencija izražena u gigahercima, a visina podloge u milimetrima.



Slika 4.55. a) Mikrotrakasta linija u metalnom kućištu. **b)** Ovješena mikrotrakasta linija; **c)** obratno ovješena mikrotrakasta linija

U mikrovalnome je području kvarcno staklo (SiO_2) jedina čvrsta podloga razmjerno male permitivnosti ($\varepsilon_r = 3{,}78$) i malih gubitaka. Stoga je taj materijal posebno prikladan za izvedbe mikrotrakastih linija u milimetarskome valnom području. Osim toga, taj je materijal vrlo postojan pri promjeni temperature. Da se spriječi pobuda površinskih valova na frekvencijama iznad 100 GHz, u skladu s izrazom (4–186), visina podloge mora biti manja od 0,5 mm.

Neki od navedenih problema mogu se ublažiti preinakom mikrotrakaste linije u ovješenu (slika 4.55b)) i obratno ovješenu mikrotrakastu liniji (slika 4.55c)). Te linije pokazuju manju disperziju i nižu permitivnost pa su prikladne za primjene u milimetarskom valnom području.

4.8.3. Koplanarna linija

Na slici 4.56 shematski je prikazana struktura koplanarne prijenosne linije. Prijenos energije ostvaruje se kvazi-*TEM*-modom. Traka širine w smještena je u sendviču na razmaku s između dviju koplanarnih vodljivih poluravnina koje leže na dielektričnoj ploči (podlozi) obično velike permitivnosti ($\varepsilon_r > 9$). Primjenom aproksimacije kvazi-*TEM*-vala i postupka konformnoga preslikavanja izraz za karakterističnu impedanciju koplanarne linije za neizmjerno tanku traku ($t = 0$) poprima oblik

$$Z_0 \simeq \frac{\eta_0}{4\sqrt{\varepsilon_{ef}}} \frac{K'(u_1)}{K(u_1)}, \tag{4–187}$$

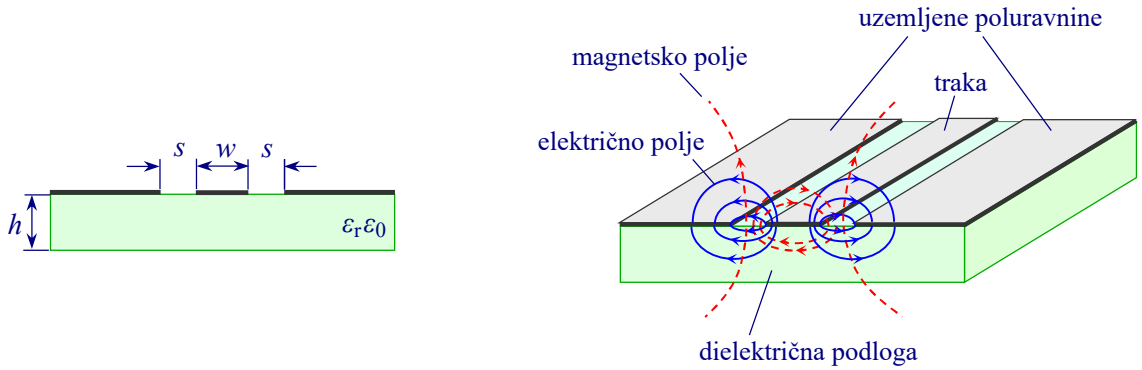
a relativna permitivnost može se izračunati primjenom izraza

$$\varepsilon_{ef} = 1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \frac{K'(u_1)}{K(u_1)} \frac{K(u_2)}{K'(u_2)}, \tag{4–188}$$

gdje su $K(u)$ i $K'(u) = K(u')$ potpuni eliptički integrali varijabla u i $u' = \sqrt{1 - u^2}$. Omjer tih integrala definiran je izrazom (4–142) u odjeljku 4.8.1. Argumenti eliptičkih integrala ovise o izmjerama linije kao:

$$u_1 = \frac{w}{w + 2s}, \qquad u_2 = \frac{\sinh\left(\dfrac{\pi w}{4h}\right)}{\sinh\left[\dfrac{\pi(w + 2s)}{2h}\right]}.$$

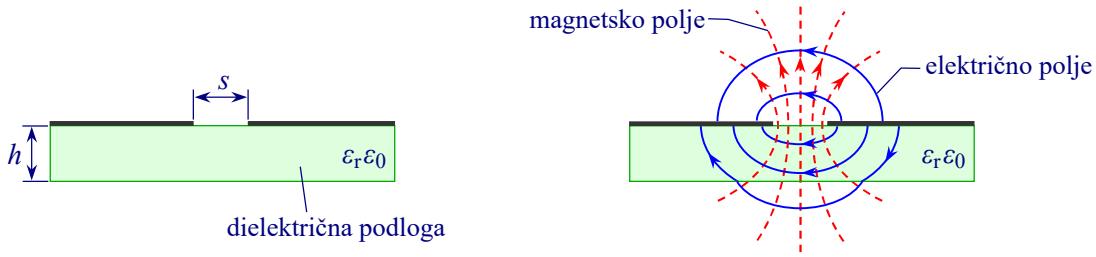
Koplanarna linija posebno je zanimljiva za integriranje aktivnih komponenata jer se traka i uzemljene poluravnine nalaze na istoj visini i razmjerno malom međusobnom razmaku [16]. U praksi se osim toga mogu naći i strukture s uzemljenim koplanarnim valovodima kod kojih se na donjoj plohi podloge nalazi uzemljena ravnina.



Slika 4.56. Koplanarna linija

4.8.4. Prorezna linija

Prorezna linija sastoji se od dviju koplanarnih vodljivih poluravnina razdvojenih uskim prorezom (slika 4.57). Poluravnine su postavljene na dielektričnu ploču visoke permitivnosti. Debljina ploče obično je znatno manja od valne duljine u slobodnome prostoru. Na slici 4.57 prikazane su silnice komponenata elektromagnetskog polja prorezne linije. Silnice električnog polja pretežno su orijentirane u poprečnome smjeru, a magnetsko polje, uz poprečnu komponentu, ima i snažnu komponentu u smjeru rasprostiranja elektromagnetske energije. To znači da se energija rasprostire samo približno *TE*-modom. Dakle, razdioba polja znatno odstupa od idealnog *TEM*-moda pa se ne može razmatrati kao kvazi-*TEM* razdioba. Na visokim je frekvencijama elektromagnetsko polje većim dijelom koncentrirano u dielektričnoj ploči. Povećanjem razmaka (s) raste karakteristična impedancija linije [14].



Slika 4.57. Geometrija prorezne linije i razdiobe polja u poprečnoj ravnini

Budući da dominantni mod prorezne linije nije *TEM*-mod, osnovni parametri ove linije ovise o frekvenciji. Efektivna permitivnost može se izračunati iz izraza

$$\varepsilon_{\text{ef}} = 1 + \frac{\varepsilon_{\text{r}} - 1}{2} \frac{K'(u_b)}{K(u_b)} \frac{K(u_a)}{K'(u_a)},$$

gdje su $K(u)$ i $K'(u) = K(u')$ opet potpuni eliptički integrali sljedećih varijabla:

$$u_a = \sqrt{\frac{2a}{1+a}}, \qquad u'_a = \sqrt{1-u_a^2}, \qquad u_b = \sqrt{\frac{2b}{1+b}}, \qquad u'_b = \sqrt{1-u_b^2},$$

$$a = \tanh\left\{\frac{\pi s}{2h}\left[1 + \frac{0{,}0133}{\varepsilon_{\text{r}} + 2}\left(\frac{\lambda_0}{h}\right)^2\right]^{-1}\right\},$$

$$b = \tanh\left(\frac{\pi s}{2h}\right).$$

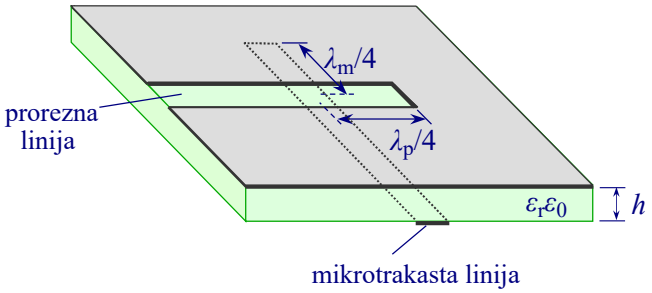
Omjer eliptičkih integrala dan je izrazom (4–142) u odjeljku 4.8.1.

Kao i kod valovoda, karakteristična impedancija prorezne linije može se definirati na jedan od triju načina. Najčešće se rabi formula

$$Z_0 = \frac{V^2}{2P},$$

gdje je V napon definiran linijskim integralom jakosti električnog polja u ravnini metalnih traka, a P označuje snagu vala koji se rasprostire uzduž proreza. No karakteristična se impedancija, uz malu pogrešku, može izračunati i primjenom ove poluempirijske formule

$$Z_0 \simeq \frac{\eta_0}{2\sqrt{\varepsilon_{\text{ef}}}} \frac{K'(u_a)}{K(u_a)}. \qquad (4\text{–}189)$$



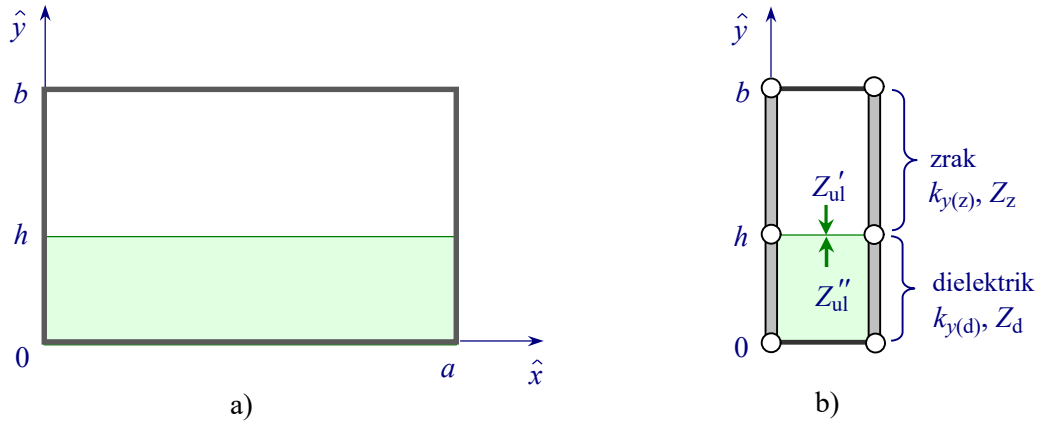
Slika 4.58. Prijelaz s prorezne na mikrotrakastu liniju i obratno

U mikrovalnim integriranim sklopovima nerijetko se zajedno primjenjuje prorezna linija zajedno s mikrotrakastom, kvazi-*TEM*-linijom. To traži širokopojasni prijelaz između tih dviju struktura. Budući da je u proreznoj liniji vrlo jaka uzdužna komponenta magnetskog polja, najjača sprega između mikrotrakaste i prorezne linije postiže kad je traka okomita na prorez, kao što je prikazano na slici 4.58. Spoj se može jednostavno ostvariti konvencionalnom tehnologijom mikrovalnih integriranih sklopova.

Prilikom projektiranja stvarnih sklopova s planarnim linijama, valja imati na umu da je fizička duljina (l) odsječka planarne linije redovito zadana preko električne duljine ($\theta = \beta l$), tj. preko faznog pomaka ili kašnjenja u radijanima (ili stupnjevima). Budući da je u skladu s izrazom (3–18) fazni koeficijent $\beta = 2\pi/\lambda_v$, izlazi da je $l = \theta\lambda_v/2\pi$. To se može napisati i kao $l = \theta\lambda_0/(2\pi\sqrt{\varepsilon_{ef}})$ ili $l = \theta/(1.2f\sqrt{\varepsilon_{ef}})$ u milimetrima, gdje je frekvencija f zadana u gigahercima.

4.9. Metoda poprečne rezonancije

U prethodnim smo odjeljcima zaporni valni broj valovoda (k_c) odredili rješavanjem valne jednadžbe valovoda uz zadane rubne uvjete, tj. uz zadanu geometriju valovoda. Unatoč tomu što je ta tehnika općenito vrlo moćna, za šuplje valovode i valovode složene geometrije ispunjene homogenim dielektrikom, može se pokazati zamršenom, a napose ako postoji više dielektričnih slojeva. Povrh toga, rješenja valne jednadžbe daju cjelovit opis polja koja vladaju unutar valovoda, što daje više podataka nego što je potrebno za izračun koeficijenta rasprostiranja valovoda. Stoga se za analizu nehomogenih valovoda nerijetko rabi *metoda poprečne rezonancije* u kojoj se na zapornoj frekvenciji na poprečni presjek valovoda primjenjuje model prijenosne linije [1], [4], [6], [10] i [18]. To je primjer na kojem se teorija



Slika 4.59. a) Pravokutni valovod djelomično ispunjen dielektrikom. **b)** Nadomjesni sklop za poprečnu rezonanciju; Z'_{ul} i Z''_{ul} ulazne su impedancije u odsječke linije ispunjene dielektrikom, odnosno zrakom

električnih krugova i prijenosnih linija može uspješno primijeniti za pojednostavnjenje zadaća iz teorije polja. Poprečna rezonancija daje korisne rezultate samo na zapornoj frekvenciji valovoda. No kad se traže polja ili prigušenje zbog gubitaka u vodiču, tad valja naći cjelovita rješenja primjenom teorije polja.

U skladu s općim rješenjem Maxwellovih jednadžba za *TE*- i *TM*-valove iz odjeljaka 4.2.1. i 4.2.2, uniformna valovodna struktura uvijek ima koeficijent rasprostiranja oblika

$$\gamma = \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\sqrt{k^2 - k_\mathrm{c}^2} = \mathrm{j}\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\,, \tag{4–190}$$

gdje je $k_\mathrm{c} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ zaporni valni broj valovoda i za odgovarajući je mod fiksna funkcija poprečne geometrije valovoda. Drugim riječima, za poznatu vrijednost k_c može se naći koeficijent rasprostiranja odgovarajućeg moda. Metoda poprečne rezonancije temelji se na činjenici da polja u valovodu na zapornoj frekvenciji titraju samo u poprečnome (transverzalnome) smjeru tvoreći stojni val (odjeljak 4.1). Opisane se okolnosti mogu modelirati nadomjesnim rezonantnim sklopom od prijenosnih linija (odjeljak 7.4.2) uz pretpostavku idealnih vodiča. Jedan od uvjeta koje pritom valja zadovoljiti proizlazi iz činjenice da zbroj impedancija koje gledaju na suprotne strane u bilo kojoj točki takve rezonantne linije mora biti jednak nuli, tj.

$$Z'_\mathrm{ul}(x) + Z''_\mathrm{ul}(x) = 0\,, \quad \text{za svaki } x, \tag{4–191}$$

gdje su $Z'_\mathrm{ul}(x)$ i $Z''_\mathrm{ul}(x)$ ulazne impedancije koje gledaju na suprotne strane iz proizvoljne točke x na rezonantnoj liniji.

Metoda poprečne rezonancije posebno je korisna za valovode koji sadrže više dielektričnih slojeva. Tako se, primjerice, rubni uvjeti na sučeljima dielektrika, koji traže rješavanje simultanih algebarskih jednadžba u pristupu preko teorije polja, mogu jednostavno razmotriti kao sklopovi s odsječcima prijenosnih linija, čiji su krajnji odsječci kratko spojeni. Pritom rješenja vrijede i za dielektrike s gubitcima, kojima odgovara kompleksna permitivnost. Primjenjivost ove metode može se lako vidjeti na primjeru pravokutnoga valovoda prikazanog na slici 4.59a). Valovod je djelomično ispunjen nemagnetičnim dielektrikom ($\mu = \mu_0$) relativne permitivnosti ε_r. Da bismo našli zapornu frekvenciju za modove TE_{0n}, valja uporabiti nadomjesni sklop za poprečnu rezonanciju, slika 4.59b). Za $0 < y < h$, nadomjesna linija odgovara dijelu valovoda koji je ispunjen dielektričnim materijalom. Tom kratko spojenom odsječku prijenosne linije odgovara koeficijent rasprostiranja $\mathrm{j}k_{y(\mathrm{d})}$ za poprečni smjer, a odgovarajuća karakteristična impedancija nadomjesne linije za *TE*-modove glasi

$$Z_\mathrm{d} = \frac{k\eta}{k_{y(\mathrm{d})}} = \frac{k_0\eta_0}{k_{y(\mathrm{d})}}\,, \tag{4–192}$$

gdje je $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$. Za $h<y< b$, valovod je prazan (ispunjen zrakom) s koeficijentom rasprostiranja $\mathrm{j}k_{y(\mathrm{z})}$ i karakterističnom impedancijom nadomjesne linije

$$Z_\mathrm{z} = \frac{k_0\eta_0}{k_{y(\mathrm{z})}}\,. \tag{4–193}$$

Uvrštenjem izraza (4–192) i (4–193) u uvjet (4–191) dobiva se jednadžba

$$k_{y(\mathrm{z})} \tan k_{y(\mathrm{d})} h + k_{y(\mathrm{d})} \tan k_{y(\mathrm{z})}(b - h) = 0 \tag{4–194}$$

s nepoznanicama, $k_{y(\mathrm{z})}$ i $k_{y(\mathrm{d})}$. Dodatna jednadžba izlazi iz činjenice da je koeficijent rasprostiranja $\mathrm{j}\beta$ u uzdužnome smjeru (smjer rasprostiranja) jednak u oba područja i da su tangencijalna polja s obje strane sučelja također jednaka. Otuda, uz uvjet $k_x = 0$, izraz (4–68) daje

$$\beta = \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r} k_0^2 - k_{y(\mathrm{d})}^2} = \sqrt{k_0^2 - k_{y(\mathrm{z})}^2}\,,$$

tj.

$$\varepsilon_\mathrm{r} k_0^2 - k_{y(\mathrm{d})}^2 = k_0^2 - k_{y(\mathrm{z})}^2\,. \tag{4–195}$$

Jednadžbe (4–194) i (4–195) mogu se riješiti grafički ili numerički za varijable $k_{y(z)}$ i $k_{y(d)}$. Kao rezultat dobiva se beskonačan broj rješenja, koja odgovaraju broju n koji označuje broj poluvalova polja u poprečnome smjeru $\hat{y}$ za modove TE_{0n}.

4.10. Prijenosne strukture s protusmjernim valovima

Valovi čija fazna i grupna brzina imaju suprotne predznake nazivaju se *protusmjerni valovi* [3] i poglavito se pojavljuju na geometrijski periodičnim strukturama (odjeljak 7.6) i u meta-materijalima [19], [20]. Njihovo se ponašanje može objasniti primjenom nadomjesne sheme na slici 4.60a). Ta je struktura sastavljena od jednoliko raspoređenih serijskih kapaciteta i paralelnih induktiviteta pa je dualna običnoj prijenosnoj liniji opisanoj u odjeljka 3.1. Stoga iz izraza (3–15) izlazi

$$\gamma = \mathrm{j}\beta = \sqrt{Z'Y'} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C'}\frac{1}{\mathrm{j}\omega L'}} = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\sqrt{L'C'}}. \tag{4–196}$$

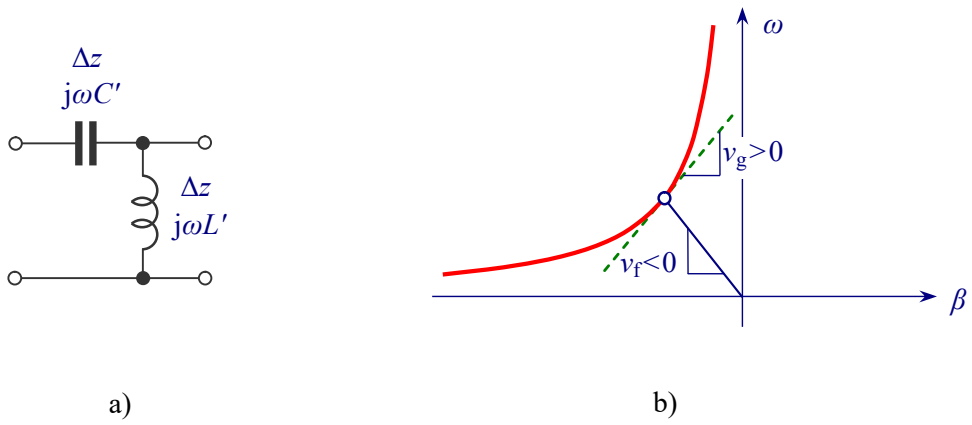
Veza između frekvencije ω i faznog koeficijenta β prikazana je na slici 4.60b). Za taj su slučaj fazna i grupna brzina definirane kao

$$v_\mathrm{f} = \frac{\omega}{\beta} = -\omega^2\sqrt{L'C'}, \tag{4–197}$$

$$v_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta} = \omega^2\sqrt{L'C'}. \tag{4–198}$$

Dakle, vidi se da su i u tako jednostavnoj prijenosnoj strukturi teorijski zadovoljeni uvjeti za rasprostiranje protusmjernih valova. Ako se energija rasprostire u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$, onda će grupna brzina biti u tom istom smjeru jer je to slučaj u kojemu v_g odgovara brzini toka energije. Pritom su fazna i grupna brzina međusobno jednake, ali suprotnoga smjera. Naime, zbog odabrane *C*-*L* konfiguracije, faza poprima sve veće negativne vrijednosti (tj. sve više zaostaje) u smjeru rasprostiranja. Otuda je fazna brzina negativna.

Budući da elementi $L'/\Delta z$ i $C'/\Delta z$ teže u beskonačnost kad Δz teži nuli, lako se može vidjeti da se takva prijenosna linija ne može ostvariti kao homogena struktura.



a) b)

Slika 4.60. a) Nadomjesni krug diferencijalnog odsječka prijenosne linije kojom se rasprostire protusmjerni val; **b)** karakteristika ω-β upućuje na suprotne smjerove fazne i grupne brzine

No može se ostvariti prijenosna struktura sličnih obilježja prikazana na slici 4.61, tako da se u seriju s raspodijeljenim kapacitetom strukture prikazane na slici 4.60a) doda kratak odsječak raspodijeljenog induktiviteta (L), a paralelno s raspodijeljenim induktivitetom doda se odsječak raspodijeljenog kapaciteta (C). U frekvencijskom području ispod rezonantnih frekvencija raspodijeljenih »titrajnih krugova« ta se prijenosna struktura ponaša poput strukture prikazane na slici 4.60. Sad se raspodijeljena impedancija serijskog segmenta i raspodijeljena admitancija paralelnog segmenta mogu izraziti kao:

$$Z(\omega) = \mathrm{j}X(\omega) = \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C'}\right), \qquad Y(\omega) = \mathrm{j}B(\omega) = \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L'}\right).$$

Otuda se mogu izračunati pripadajuća serijska i paralelna rezonantna frekvencija tih raspodijeljenih »rezonantnih krugova« kao:

$$\omega_{\mathrm{rs}} = \frac{1}{\sqrt{LC'}} \text{ , odnosno } \omega_{\mathrm{rp}} = \frac{1}{\sqrt{L'C}}. \tag{4–199}$$

Ispod tih »rezonantnih frekvencija« i serijska reaktancija $X(\omega)$ i paralelna susceptancija $B(\omega)$ pokazuju negativne vrijednosti pa je sad koeficijent rasprostiranja γ imaginaran, dakle moguće je rasprostiranje vala. No u području između tih dviju rezonantnih frekvencija koeficijent rasprostiranja je realan pa ne postoje uvjeti za rasprostiranje vala. Drugim riječima, radi se o zapornome frekvencijskom području. Iznad obiju rezonantnih frekvencija i reaktancija $X(\omega)$ i susceptancija $B(\omega)$ pokazuju pozitivne realne vrijednosti. Otuda je koeficijent rasprostiranja opet imaginaran, pa se prijenosna struktura ponaša slično normalnoj, ali disperzivnoj prijenosnoj liniji.

Primjenom izraza (3–8) ili (3–15) disperzijska se obilježja prijenosne strukture prikazane na slici 4.61, u frekvencijskim područjima $\omega < \omega_{\mathrm{c1}}$ i $\omega > \omega_{\mathrm{c2}}$, mogu izraziti kao

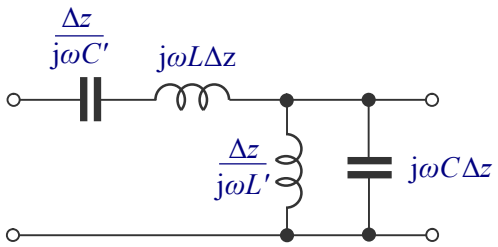
$$\beta(\omega) = \begin{cases} -\sqrt{\omega^2 LC + \dfrac{1}{\omega^2 L'C'} - \dfrac{L}{L'} - \dfrac{C}{C'}} & \text{ako } \omega < \omega_{\mathrm{c1}} \\ \sqrt{\omega^2 LC + \dfrac{1}{\omega^2 L'C'} - \dfrac{L}{L'} - \dfrac{C}{C'}} & \text{ako } \omega > \omega_{\mathrm{c2}} \end{cases} \tag{4–200}$$

gdje ω_{c1} i ω_{c2} označuju nižu, odnosno višu zapornu frekvenciju:

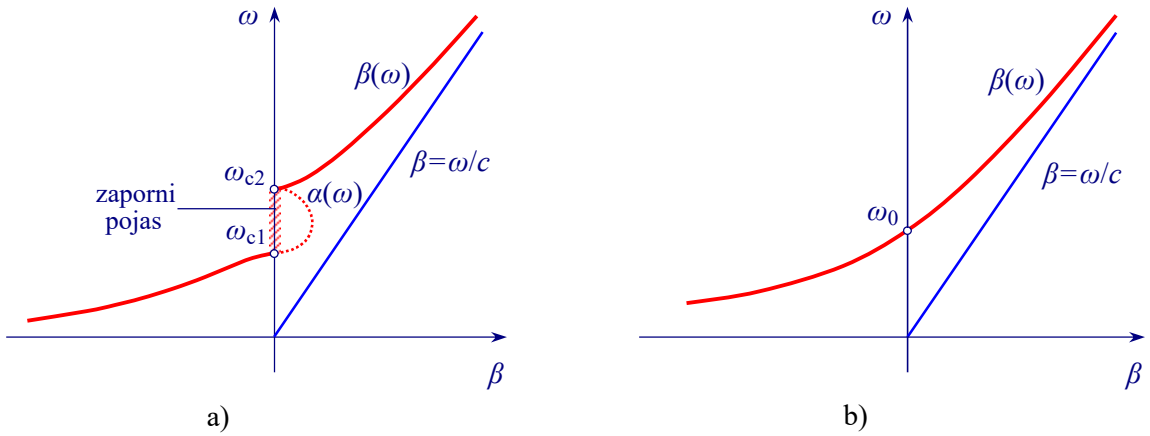
$$\omega_{\mathrm{c1}} = \min(\omega_{\mathrm{rs}}, \omega_{\mathrm{rp}}), \quad \omega_{\mathrm{c2}} = \mathrm{maks}(\omega_{\mathrm{rs}}, \omega_{\mathrm{rp}}).$$

U zapornome pojasu $\omega_{\mathrm{c1}} < \omega < \omega_{\mathrm{c2}}$ koeficijent prigušenja glasi

$$\alpha(\omega) = \sqrt{\frac{L}{L'} + \frac{C}{C'} - \omega^2 LC - \frac{1}{\omega^2 L'C'}}. \tag{4–201}$$



Slika 4.61. Nadomjesni krug diferencijalnog odsječka prijenosne linije kojom se mogu rasprostirati normalni i protusmjerni valovi



Slika 4.62. Disperzijski dijagram ω-β: **a)** neuravnotežen slučaj, **b)** uravnotežen slučaj

Tipični disperzijski dijagram opisane strukture za neuravnotežen slučaj ($\omega_{c1} \neq \omega_{c2}$) prikazan je na slici 4.62a)

Izjednačavanjem rezonantnih frekvencija ($\omega_{c1} = \omega_{c2}$) nestaje zaporni pojas pa se dobiva neprekinuto područje propuštanja. Na prijelaznoj frekvenciji

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC'}} = \frac{1}{\sqrt{L'C}} \tag{4–202}$$

fazni koeficijent mijenja predznak. Sad se fazni koeficijent može izraziti kao

$$\beta = \beta_L + \beta_D = \frac{1}{\omega\sqrt{LC}} + \frac{1}{\omega\sqrt{L'C'}}\,, \tag{4–203}$$

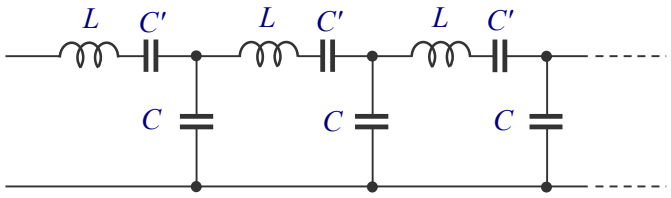
gdje su β_D i β_L fazni koeficijenti za prijenosnu strukturu s normalnim i protusmjernim valovima.

Disperzijski dijagram uravnotežene prijenosne strukture prikazan je na slici 4.62b). Postoje i neke druge prijenosne strukture s filtarskim svojstvima [3] u kojima se mogu pojaviti valovi s faznim kašnjenjem u smjeru rasprostiranja energije. Valja također reći da sve periodične strukture imaju jednak broj progresivnih i protusmjernih »prostornih harmonika«, kao što je pokazano u odjeljku 7.6.

4.11. Brzina prijenosa energije u valovodu

Budući da se često spominje brzina rasprostiranja energije u elektromagnetskome valu, još ćemo se jednom osvrnuti na njezinu fizikalnu interpretaciju. U odjeljcima 2.5. i 2.6. te od 4.1. do 4.4. razmotrili smo neka osnovna svojstva fazne i grupne brzine, gdje smo vidjeli da se grupna brzina obično odnosi na »brzinu kojom se prenosi energija«. Premda ta koncepcija vrijedi u mnogim primjenama, općenito nije točna. U odjeljku 2.6. u izrazu (2–133) definirali smo brzinu kojom se prenosi energija u ravnome valu kao omjer gustoće toka srednje snage i gustoće ukupne srednje energije pohranjene u jediničnom volumenu. Taj se izraz može napisati u prikladnijem obliku za analizu toka snage u prijenosnim linijama i valovodima kao omjer toka srednje snage (P) i ukupne energije po jedinici duljine $\langle W' \rangle$, koja je pohranjena u poljima prijenosne strukture, tj.

$$v_E = \frac{P}{\langle W' \rangle}\,. \tag{4–204}$$



Slika 4.63. Nadomjesni sklop prijenosne strukture koja podržava *TM*-valove

Primjenom te definicija na idealnu prijenosnu liniju iz odjeljka 3.1.1, izlazi $v_E = v_g = v_f$, što je u skladu s fizikalnom intuicijom. No znatno je zanimljiviji slučaj rasprostiranja u prijenosnoj strukturi kojoj odgovara nadomjesni sklop prikazan na slici 4.63. Ta je struktura istovjetna valovodu kojim se energija prenosi *TM*-valom [slika 4.29a) u odjeljku 4.6], gdje je riječ o normalnoj disperziji, $\mathrm{d}v_f/\mathrm{d}\omega < 0$. Otuda, za prijenosnu strukturu prikazanu na slici 4.63 izlazi:

$$P = \frac{1}{2} Z_0 II^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z}{Y}}\, II^* = \frac{II^*}{2}\sqrt{\frac{L}{C}\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)}, \tag{4–205}$$

$$\langle W' \rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{CVV^*}{2} + \frac{LII^*}{2} + \frac{C'}{2}\frac{II^*}{\omega^2 (C')^2}\right] =$$

$$= \frac{L}{4}\left(\frac{CZ_0^2}{L} + 1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) II^* = \frac{LII^*}{2}, \tag{4–206}$$

gdje je $\omega_c = 1/\sqrt{LC'}$ zaporna frekvencija odgovarajućeg *TM*-vala. Pritom je $Z_0 = \sqrt{Z/Y}$ uz $Z = \mathrm{j}\omega L + 1/\mathrm{j}\omega C'$ i $Y = \mathrm{j}\omega C$. Uvrštenjem izraza (4–205) i (4–206) u (4–204) dobiva se izraz

$$v_E = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \tag{4–207}$$

koji posve odgovara izrazu (4–75) za grupnu brzinu $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\beta$ u valovodu.

Fizikalna intuicija navodi na zaključak da dodavanje malog kapaciteta (C') u seriju s induktivitetom (L) efektivno smanjuje taj induktivitet, što ima za posljedicu porast fazne brzine u izrazu (3–19). No, s druge strane, postojanje tog kapaciteta povećava ukupnu količinu pohranjene energije u prijenosnoj strukturi i usporava prijenos energije. Time se smanjuje grupna brzina, što je također u skladu s fizikalnom intuicijom. Do sličnih zaključaka može se doći razmatranjem nadomjesnog sklopa prikazanog na slici 4.29b), koji podržava prijenos energije *TE*-valom. Razlika je samo u tomu što je sad poprečnom kapacitetu u nadomjesnom sklopu na slici 4.29b) paralelno dodan induktivitet koji efektivno smanjuje vrijednost poprečnog kapaciteta, ali istodobno pridonosi povećanju pohranjene energije u prijenosnoj strukturi.

Istovjetnost grupne brzine i *brzine kojom se prenosi energija* može se naći u svim jednostavnim prijenosnim linijama i valovodima bez gubitaka ispunjenim homogenim dielektrikom, ali i u nekim drugim prijenosnim strukturama s normalnom disperzijom. No to ne vrijedi za prijenosne strukture s anomalnom disperzijom ($\mathrm{d}v_f/\mathrm{d}\omega > 0$), uključujući i jednostavne prijenosne linije s gubitcima. U svakom slučaju, koncepcija brzine kojom se prenosi energija korisna je samo za prijenosne sustave s ograničenom disperzijom, u ovojnica ulaznoga signala ne pretrpi veća izobličenja na putu do izlaza prijenosnog sustava. Više o anomalnoj disperziji u dielektričnim materijalima može se naći u odjeljku 2.3.1.

4.12. Usporedba prijenosnih struktura

U prethodnim odjeljcima razmatrali smo različite vrste valovoda i našli da se prijenosne strukture mogu svrstati prema vrsti valova koje podržavaju. Vidjeli smo također da su sve *TEM*-linije nedisperzivne i da nemaju zapornu frekvenciju. Nasuprot tomu, *TE*- i *TM*-valovi pokazuju disperziju i zaporne su im frekvencije općenito različite od nule. Ostala električna značajke uključuju širinu prijenosnog pojasa, prigušenje zbog gubitaka u dielektricima ili vodičima te kapacitet prijenosa snage. Važne su također i mehaničke značajke te fizička veličina (obujam i težina), jednostavnost proizvodnje koja uključuje njezinu cijenu te sposobnost integracije s drugim komponentama (aktivnim i pasivnim). U tablici 4.4. dana je gruba usporedba navedenih značajaka uobičajenih prijenosnih struktura.

Tablica 4.4. Usporedba značajaka prijenosnih linija i valovoda

Značajke	Suosna linija	Valovod	Trakasta linija	Mikrotrakasta linija
željeni modovi	*TEM*	TE_{10}	*TEM*	kvazi-*TEM*
ostali modovi	*TE*, *TM*	*TE*, *TM*	*TE*, *TM*	hibridni *TE*, *TM*
disperzija	nema	osrednja	nema	mala
širina frekvencijskog pojasa	velika	mala	velika	velika
gubitci snage	osrednji	mali	veliki	veliki
kapacitet prijenosa snage	osrednji	velik	mali	mali
fizičke izmjere	osrednje	velike	male	male
jednostavnost proizvodnje	osrednja	osrednja	velika	velika
sposobnost integracije	mala	mala	osrednja	velika

Maksimalni kapacitet prijenosa snage prijenosne strukure važan je parametar pri prijenosu velikih snaga. U valovodu se pri razgođenom trošilu nastaje refleksija, tj. stojni val. Stoga maksimalna dopuštena amplituda upadnoga naponskog vala u sredini valovoda pri prijenosu snage dominanatnim modom može biti i upola manja od probojnoga napona. Otuda izraz za vršnu snagu dominantnoga moda, prije negoli dođe do proboja u valovodu, poprima oblik

$$P_{\mathrm{k}} = \frac{abE_{\mathrm{k}}^2}{4Z_{TE10}}, \tag{4–208}$$

koji pokazuje da maksimalni kapacitet prijenosa snage raste s izmjerama valovoda. Budući da je za većinu valovoda $b = a/2$, mora se zadovoljiti uvjet $a < c/(2f_{\mathrm{maks}})$, gdje je f_{maks} maksimalna radna frekvencija dominantnoga moda, a c brzina svjetlosti. Otuda je

$$P_{\mathrm{k}} = 2{,}58 \cdot 10^{13} \left(\frac{E_{\mathrm{k}}}{f_{\mathrm{maks}}} \right)^2 . \tag{4–209}$$

Na sobnoj temperaturi uz tlak zraka od jedne atmosfere, maksimalno (kritično) električno polje na sredini šire stijenke valovoda ispunjenog zrakom iznosi $E_{\mathrm{k}} = 3 \cdot 106$ V/m. Primjerice, u skladu s izrazom (4–209) na 10 GHz maksimalna snaga koja se može prenositi valovodom približno iznosi 2,3 MW. No suosnom se linijom ispunjenom zrakom na istoj frekvenciji i bez mogućnosti prijenosa viših modova može prenijeti maksimalno samo 520 kW. Maksimalni kapacitet prijenosa snage suosnom linijom izračunan je primjenom izraza (3–36). Ispunom linije stlačenim inernim plinom ili dielektrikom visokog probojnog polja može se povećati maksimalni kapacitet prijenosa snage, ali tada valja uzeti u obzir dodatne gubitke u dielektriku.

Literatura

[1] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, New York, 2012.

[2] S. Ramo, J. R. Whinnery, *Fields and Waves in Modern Radio*, John Wiley & Sons, New York, 1953.

[3] S. Ramo, J. R. Whinnery, T. van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1994.

[4] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Waves*, McGraw-Hill, New York, 1961.

[5] E. C. Jordan, K. G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.

[6] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

[7] D. H. Staelin, A. W. Morgenthaler, J. A. Kong, *Electromagnetic Waves*, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.

[8] P. A. Rizzi, *Microwave Engineering - Passive Circuits*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

[9] K. Kurokawa, *An Introduction to the Theory of Microwave Circuits*, Academic Press, New York, 1969.

[10] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[11] F. E. Gardiol, *Introduction to Microwaves*, Artech House, Dedham, 1984.

[12] T. C. Edwards, M. B. Steer, *Foundations for Microstrip Circuit Design*, 4th ed., John Wiley & Sons, 2016

[13] N. Kinayman, M. I. Aksun, *Modern Microwave Circuits*, Artech House, Norwood, 2005.

[14] K. C. Gupta, R. Garg, I. J. Bahl, *Microwave Lines and Slotlines*, Artech House, Dedham, 1979.

[15] E. H. Fooks, R. A. Zakarevičius, *Microwave Engineering Using Microstrip Circuits*, Prentice-Hall, New York, 1990.

[16] I. Bahl, P. Barthia, *Microwave Solid-State Circuit Design*, 2nd ed., Wiley-Interscience, New York, 2003.

[17] M. Abramowitz, I. A. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover, 1965.

[18] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1951.

[19] P. Russer, *Electromagnetics, Microwave Circuits and Antenna Design for Communications Engineering*, 2nd ed., Artech House, Norwood, 2006.

[20] N. Engheta, R. W. Ziolkowski (Eds.), Metamaterials: Physics and Engineering Explorations, John Wiley & Sons, 2006.

[21] H. H. Meinke, *Einführung in die Elektrotechnik höherer Frequenzen*, Zweiter Band: *Elektromagnetische Felder un Wellen*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[22] R. Sorrentino, G. Bianchi, *Microwave and RF Engineering*, John Wiley & Sons, 2010

[23] Z. Smrkić, *Mikrovalna elektronika*, Školska knjiga, Zagreb 1986.

[24] J. D. Kraus, K. R. Carver, *Electromagnetics*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1973.

5. Analiza mikrovalnih mreža

Na niskim frekvencijama spojevi otpora, kondenzatora, induktiviteta, tranzistora i dioda tvore električne krugove. Ti su krugovi nerijetko linearni pa se odziv na pobudu s više od jednog izvora može naći primjenom načela superpozicije. U tim su niskofrekvencijskim krugovima sastavne komponente međusobno povezane žičanim vodičima. Dimenzije žica i sastavnih komponenata znatno su manje od valne duljine pa se mogu razmatrati kao mreže sastavljene od pasivnih i aktivnih koncentriranih komponenata s jednoznačno definiranim naponima i strujama u bilo kojoj točki mreže. To dopušta zanemarivanje promjene faze između dviju točka unutar mreže. Osim toga, polja se mogu razmatrati kao *TEM* - polja podržana dvama ili više vodiča. To vodi do kvazistatičkih rješenja Maxwellovih jednadžba, koja se svode na Kirchhoffove zakone za napone između čvorova i struje u konturama (petljama), uz primjenu koncepcije impedancije preuzete iz teorije mreža.

Za analizu niskofrekvencijskih sklopova razvijeno je više korisnih metoda, no one se općenito ne mogu izravno primijeniti na mikrovalne sklopove.

Na mikrovalnim frekvencijama, ekvivalentne reaktivne i otporne komponente mogu se spojiti tako da tvore mikrovalne sklopove ili mreže. Kapaciteti i induktiviteti koji ne pripadaju stvarnim elementima električnih krugova nego su posljedica geometrije vodiča za međusobno povezivanje različitih komponenata, obično se nazivaju *parazitski kapaciteti* i *parazitski induktiviteti*. Na višim frekvencijama, ti se parazitski elementi ne mogu zanemariti i obično su nepoželjni. Dok se god parazitski elementi mogu nadomjestiti kapacitetima i induktivitetima, lako ih je ugraditi u koncept električnih mreža. No okolnosti postaju zamršenije kad se dimenzije električnih krugova približe vrijednosti valne duljine. Tad električna i magnetska polja dijele isti prostor pa se njihovi učinci više ne mogu odvojeno razmatrati primjenom nadomjesnih kapaciteta i induktiviteta. No, i u tom slučaju, nakon rješenja elektromagnetskog problema, može se naći odgovarajući nadomjesni sklop koji dobro opisuje zadani elektromagnetski problem u užem frekvencijskom pojasu.

Umjesto žica, na mikrovalnim se frekvencijama za povezivanje pojedinih sklopova rabe prijenosne linije i valovodi. Budući da su priključne komponente nerijetko dulje od četvrtine valne duljine, ne smiju se zanemariti učinci rasprostiranja.

U ovom ćemo poglavlju pokazati kako se neke ideje iz teorije električnih krugova i mreža mogu prilagoditi analizi i izvedbi praktičnih mikrovalnih sklopova [1], [2]. Tomu u prilog ide činjenica da je pri rješavanju mikrovalnih problema puno lakše primijeniti jednostavne i intuitivne predodžbe iz klasične analize niskofrekvencijskih mreža umjesto matematički rigoroznog pristupa koji za isti problem nužno traži rješavanje Maxwellovih jednadžba. Analizom polja obično se dobiva znatno više podataka od nego što je zapravo potrebno jer cjelovita rješenja Maxwellovih jednadžba daju vektorska električna i magnetska polja u svim točkama sklopa. No u praksi nas najčešće zanimaju samo vrijednosti napona i struja na priključcima ili protok snage kroz sklop ili neki drugi skup opće prihvaćenih veličina, umjesto vrlo točnog opisa polja u svim točkama prostora. Izvorni se problem također može jednostavno preinačiti primjenom klasične analize mreža, tako da se međusobno udruži više komponenata i nađe odziv bez podrobnije analize interakcije svakog pojedinačnog elemenata sa susjednim elementom.

Kod primjene valovoda u mikrovalnim mrežama uvodi se pojam *prolaz* (engl. *port*). Time je H. A. Wheeler pedesetih godina prošloga stoljeća poopćio pojam *par priključaka* jer je na valovodu teško odrediti priključke. No, prije negoli se pristupi samom razmatranju mikroval-

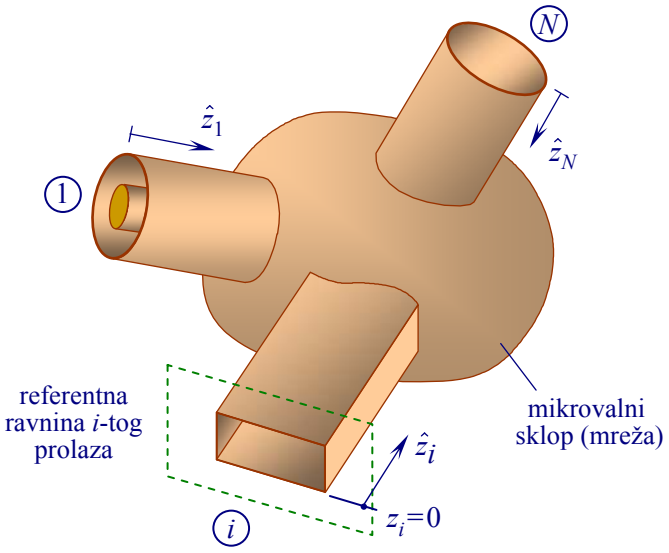
nih mreža, korisno je definirati višeprolaznu mikrovalnu mrežu i neke osnovne pojmove vezane uz mrežu. Pod općim pojmom mikrovalna mreža misli se na elektromagnetski ustroj priključen na N prijenosnih linija poput valovoda, suosne linije, mikrotrakaste linije, svjetlovoda itd. kao što je prikazano na slici 5.1.

Da bi se pojednostavnila daljnja razmatranja, korisno je uvesti neke pretpostavke. Prva je da su priključne linije bez gubitaka, a druga je da se priključnim linijama prenosi samo jedan mod, tj. dominantni mod. To izravno uključuje ograničenje poprećnih dimenzija tih linija ili frekvencijskog područja signala (rad iznad određene donje granične frekvencije).

Ako se na jedan ili više fizičkih prolaza mreže priključi valovod koji podržava više modova rasprostiranja, onda se moraju uvesti dodatni prolazi koji uzimaju u obzir i te modove.

Strogo analitičko razmatranje elektromagnetskih polja unutar naprave ili sklopa, rješavanjem Maxwellovih jednadžba, uz primjenu odgovarajućih rubnih uvjeta, obično je moguće samo za vrlo ograničen broj jednostavnih geometrija. Unatoč toj činjenici, uvođenje fizikalnih svojstava poput recipročnosti, nedisipativnosti i geometrijske simetrije dopušta definiranje glavnih značakaka mreže ili sklopa.

Na svakoj priključnoj liniji i kojom se prilazi mikrovalnoj mreži ili sklopu s vanjske strane, definirana je os pripadajućeg koordinatnog sustava z_i (slika 5.1). Ishodište te koordinatne osi ($z_i = 0$) određuje referentnu ravninu i-tog prolaza. Referentnu ravninu prolaza valja dovoljno udaljiti od mreže ili sklopa, kako bi se svi mogući zaporni modovi mogli dovoljno prigušiti na odsječku priključne linije, koji se nalazi između mikrovalne mreže i referentne ravnine. U praksi je za to dovoljna svega jedna valna duljina. Pojam zaporni ili evanescentni mod pripada modovima kod kojih ne postoje uvjeti za prijenos energije duž priključne linije pa se često nazivaju nerasprostirući modovi (odjeljak 4.1), a mogu nastati na sučelju između priključne linije i mreže ili na diskontinuitetu unutar samog sklopa. Ako su dvije mikrovalne mreže međusobno povezane prijenosnom linijom kraćom od približno jedne valne duljine, onda na toj liniji može doći do sprege između zapornih modova pa analiza takvih mreža postaje vrlo složena. Stoga ćemo u ovoj knjizi razmatranja ograničiti samo na interakcije dominantnih modova.



Slika 5.1. Mikrovalna mreža s N prolaza

5.1. Nadomjesni naponi i struje

Ako na sklopu ili mreži nije jasno i jednoznačno definiran par priključaka, onda je na mikrovalnim frekvencijama gotovo nemoguće mjeriti napone i struje jer na tim frekvencijama ne postoje voltmetri i ampermetri za izravno mjerenje tih veličina. Par priključaka moguće je definirati za *TEM*-linije poput suosne, mikrotrakaste i simetrične trakaste linije. U poglavlju 3 pokazano je da za *TEM*-val na prijenosnoj liniji postoje naponski i strujni valovi koji su jednoznačno povezani s pripadajućim transverzalnim električnim i magnetskim poljima. No u slučaju s *TE*- i *TM*-modovima u valovodima takva jednoznačnost ne postoji. Za dominantni mod TE_{10} pravokutnoga valovoda, primjerice, napon se može naći preko krivuljnoga integrala električnog polja koje vlada između gornje i donje stijenke valovoda. Unatoč tomu, nije jasno treba li uzeti u račun maksimalnu vrijednost napona u sredini valovoda ili neku srednju vrijednost jer se vrijednost napona mijenja u poprečnome smjeru. S druge strane, uzdužna (aksijalna) struja teče gornjom stijenkom jednim smjeru, a donjom stijenkom suprotnim smjerom kao u *TEM*-prijenosnoj liniji, ali nije jasno kako uzeti u obzir struje koje teku u poprečnome smjeru i one u bočnim stijenkama valovoda. Kod drugih su modova okolnosti još složenije jer je, primjerice, za *TM*-modove napon između nasuprotnih stijenka uvijek jednak nuli. Stoga ne postoji jednoznačna definicija napona za sve primjene, pa na mikrovalnim frekvencijama naponi i struje nemaju tako značajnu ulogu kao u niskofrekvencijskom području. No u mnogim se zadaćama nerijetko nastoji naći svrsishodan opis ponašanja mikrovalnih sklopova s pomoću napona, struja i impedancija kako bi se mogle optimalno primijeniti poznate koncepcije preuzete iz teorije niskofrekvencijskih električnih krugova [1]-[3]. Svim je mikrovalnim mrežama zajedničko sljedeće.

1. Napon je razmjeran transverzalnom električnom polju razmatranog moda.
2. Struja je razmjerna transverzalnom magnetskom polju razmatranog moda.
3. Nadomjesni naponi i struje tako su definirani da im je umnožak ($\frac{1}{2}VI^*$) jednak toku snage razmatranog moda.
4. Omjer fazora ekvivalentnog napona i struje (V/I) za jedan putujući val jednak je karakterističnoj impedanciji razmatranog moda. Karakteristična se impedancija obično uzima za normiranje svih ostalih impedancija.

Kako se transverzalna polja mijenjaju s udaljenošću duž prijenosne strukture pokazuje faktor rasprostiranja $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\beta z}$. U poglavlju 2 vidjeli smo da je transverzalno magnetsko polje vezano s transverzalnim električnim poljem jednostavnom konstantom Z_v koja se naziva valna impedancija moda. Tako se za putujući val u pozitivnom smjeru osi $\hat{z}$ može napisati

$$Z_\mathrm{v}\vec{h}(x,y) = \hat{z} \times \vec{e}(x,y)\,. \tag{5–1}$$

Za proizvoljni valovodni mod putujućih valova u smjeru $\pm\hat{z}$, transverzalna se polja s pomoću prvoga pravila mogu napisati kao:

$$\vec{E}_\mathrm{t}(x,y,z) = \vec{e}(x,y)\left(A^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + A^-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right) = \frac{\vec{e}(x,y)}{K_1}\left(V^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + V^-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right), \tag{5–2a}$$

$$\vec{H}_\mathrm{t}(x,y,z) = \vec{e}(x,y)\left(A^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - A^-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right) = \frac{\vec{e}(x,y)}{K_2}\left(I^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - I^-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right), \tag{5–2b}$$

gdje su A^+ i A^- kompleksne amplitude polja normiranih transverzalnih vektorskih modalnih funkcija $\vec{e}(x,y)$ i $\vec{h}(x,y)$. Jednadžbe (5–2) ujedno definiraju ekvivalentne naponske i strujne valove kompleksnih amplituda V^+ i V^- te I^+ i I^-. Omjeri tih amplituda $V^+/I^+ = V^-/I^- = Z_0$ jednaki su karakterističnoj impedanciji nadomjesne linije na prolazu. Lako se može vidjeti da su svojstva transverzalnih polja slična svojstvima naponskih i strujnih valova na liniji. Konstante

proporcionalnosti $K_1=V^+/A^+=V^-/A^-$ i $K_2=I^+/A^+=I^-/A^-$ povezuju polja s naponima i strujama, i lako se mogu naći primjenom odgovarajućih izraza za tok snage i impedanciju na prolazu.

U skladu sa zakonom o očuvanju snage, primjenom trećega i četvrtoga pravila, dobiva se

$$\frac{1}{2}V^+I^{+*}=\frac{1}{2}\left|A^+\right|^2\int_S \vec{e}\times\vec{h}^*\cdot\hat{z}\,\mathrm{d}S=\frac{V^+I^{+*}}{2K_1K_2^*}\int_S \vec{e}\times\vec{h}^*\cdot\hat{z}\,\mathrm{d}S\,, \tag{5–3}$$

iz čega izlazi

$$K_1K_2^*=\int_S \vec{e}\times\vec{h}^*\cdot\hat{z}\,\mathrm{d}S\,,$$

a integral se uzima po presjeku valovoda. Pogodnim normiranjem funkcija $\vec{e}(x,y)$ i $\vec{h}(x,y)$, umnožak $K_1K_2^*$ može se izjednačiti s jedinicom. Premda jednakost (5–3) daje vezu između K_1 i K_2, da bi se obje ove konstante mogle odrediti potrebna je još jedna relacija. Ta se druga relacija može odabrati na različite načine. Može se, primjerice, zamisliti da su poznati naponski i strujni valovi na fiktivnoj prijenosnoj liniji koja je ekvivalentna valovodu za zadani mod. Tad je prikladno odabrati jediničnu impedanciju prijenosne linije, tj.

$$Z_0=\frac{V^+}{I^+}=\frac{V^-}{I^-}=\frac{K_1}{K_2}=1\,.$$

S druge strane, može se uzeti da je

$$Z_0=\frac{K_1}{K_2}=Z_\mathrm{v}\,,$$

gdje je Z_v valna impedancija *TE*- ili *TM*-moda (Z_{TE} ili Z_{TM}).

Jednako se tako mogu razmatrati i viši modovi:

$$\vec{E}_\mathrm{t}(x,y,z)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{K_{1n}}\left(V_n^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z}+V_n^-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_n z}\right)\vec{e}_n(x,y)\,,$$

$$\vec{H}_\mathrm{t}(x,y,z)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{Z_\mathrm{v}K_{2n}}\left(V_n^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z}-V_n^-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_n z}\right)\vec{e}_n(x,y)\,.$$

Kao primjer, uzmimo dominantni mod u šupljem pravokutnom valovodu (odjeljak 4.3.1). Primjenom izraza (5–1) - (5–3) na obilježja valovoda dobiva se:

Polja u valovodu	Model prijenosne linije
$E_y=E_0\sin\dfrac{\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$	$V(z)=V_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$
$H_x=-\dfrac{E_0}{Z_\mathrm{TE}}\sin\dfrac{\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$	$I(z)=I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}=\dfrac{V_0}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$
$P=-b\int_0^a\dfrac{E_0^2}{2Z_\mathrm{TE}}\sin^2\dfrac{\pi x}{a}\,\mathrm{d}x=\dfrac{abE_0^2}{4Z_\mathrm{TE}}$	$P=\dfrac{1}{2}V_0I_0^*$

Ako se uzme da je $Z_0=Z_\mathrm{v}=Z_{TE}$, onda se iz trećeg retka tablice izravno dobivaju ove veze:

$$V_0=E_0\sqrt{\frac{ab}{2}}\,,\qquad I_0=\frac{E_0}{Z_\mathrm{TE}}\sqrt{\frac{ab}{2}}\,.$$

5.2. Zamisao impedancije

U zadaćama s visokim frekvencijama, često se pojavljuje kompleksna veličina poznata pod nazivamo *impedancija*. Budući da se u literaturi mogu naći različite definicije, impedanciju ćemo razmotriti u puno općenitijim okolnostima. Taj je pojam uveo Oliver Heaviside u devetnaestome stoljeću da bi opisao kompleksni omjer napona i struje u izmjeničnim strujnim krugovima u kojima se rabe koncentrirani otpori, induktiviteti i kapaciteti. Impedancija je zatim postala nezaobilazan pojam pri razmatranju prijenosnih linija opisanih raspodijeljenim parametrima. Schelkunoff je tridesetih godina prošloga stoljeća spoznao da se taj pojam može sustavno proširiti i na elektromagnetska polja nakon što je uočio da se impedanciji uvijek mogu pripisati svojstva pojedinog tipa polja ili vala, a jednako tako i sredstva u kojem se polja ili valovi nalaze. Pri tomu je impedancija postala bitna spona između teorije polja i teorije prijenosnih linija, uključujući klasičnu teoriju električnih krugova.

Vezano uz prijenos elektromagnetske energije, u dosadašnjim smo razmatranjima rabili sljedeće definicije i oznake za impedanciju [1].

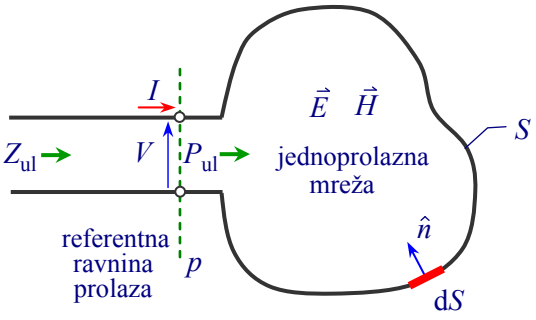
1. ***Intrinsična impedancija sredstva***, $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, visi samo o svojstvima sredstva i jednaka je valnoj impedanciji ravnoga vala.
2. ***Valna impedancija***, $Z_\mathrm{v} = E_\mathrm{t}/H_\mathrm{t} = 1/Y_\mathrm{v}$, karakteristika je posebnog tipa valova. *TEM*-, *TE*- i *TM*-valovi imaju različite valne impedancije (Z_{TEM}, Z_{TE}, Z_{TM}), koje mogu ovisiti o vrsti linije ili valovoda, materijalu i radnoj frekvenciji.
3. ***Karakteristična impedancija***, $Z_0 = 1/Y_0 = \sqrt{L/C}$, omjer je napona i struje putujućeg vala. Budući da su napon i struja jedinstveno definirani za *TEM*-valove, karakteristična je impedancija *TEM*-vala jedinstvena. No *TE*- i *TM*-valovi nemaju jedinstveno definirane napone i struje, pa se njihova karakteristična impedancija može definirati na više načina.

5.2.1. Ulazna impedancija jednoprolazne mreže

U ovom ć emo odjeljku razmotriti neke osnovne odlike impedancije jednoprolazne mreže. Ta je mreža električni krug u koji snaga može ući ili iz njega izaći samo kroz jedan valovod ili prijenosnu liniju bez gubitaka, kao što je prikazano na slici 5.2. Mreža je fizički omeđena savršeno vodljivim materijalom i u njoj se dopušta sredstvo s gubitcima. Kompleksna se snaga predana mreži može izraziti preko Poyntingova teorema (odjeljak 2.6) kao

$$P_\mathrm{ul} = \frac{1}{2}\oint_S \vec{E}\times\vec{H}^*\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = P_\mathrm{dis} + \mathrm{j}2\omega\left(\langle W_\mathrm{m}\rangle - \langle W_\mathrm{e}\rangle\right), \tag{5–4}$$

gdje su i električno i magnetsko polje zadani svojim vršnim vrijednostima, a S je zatvorena ploha koja potpuno obuhvaća mrežu. Jedinični vektor $\hat{n}$ na slici 5.2 usmjeren je u mrežu i okomit je na zatvorenu plohu S, pa je $\hat{n}\mathrm{d}S$ pripadajuća usmjerena diferencijalna površina. Ovdje realna veliči-



Slika 5.2. Općenita jednoprolazna mreža

na P_{dis} označuje srednju snagu koja se disipira unutar volumena omeđenog plohom S, a $\langle W_{\text{m}} \rangle$ i $\langle W_{\text{e}} \rangle$ označuju posve reaktivne (jalove) energije pohranjene u magnetskom i električnom polju.

Na savršeno vodljivim stijenkama granične plohe $\hat{n} \times \vec{E} = 0$ plošni se integral u izrazu (5–4) svodi samo na integral na referentnoj ravnini prolaza p. Ako se na referentnoj ravnini definiraju stvarna poprečna polja modova $\vec{e}$ i $\vec{h}$ dana izrazima (5–1), i ako ih se tako normira da vrijedi

$$\int_p \vec{e} \times \vec{h}^* \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = 1,$$

onda se izraz (5–4) može prikazati kao funkcija vršnih vrijednosti napona i struje na priključcima. Kao rezultat dobiva se

$$P_{\text{ul}} = \frac{1}{2} \int_p V I^* \vec{e} \times \vec{h}^* \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = \frac{1}{2} V I^* . \tag{5–5}$$

Ako se sad lijeva strana jednakosti (5–4) zamijeni izrazom (5–5) i sve podijeli s II^*, dobiva se

$$Z_{\text{ul}} = R_{\text{ul}} + \mathrm{j}X_{\text{ul}} = \frac{P_{\text{dis}} + \mathrm{j}2\omega\left(\langle W_{\text{m}} \rangle - \langle W_{\text{e}} \rangle\right)}{\frac{1}{2}|I|^2}, \tag{5–6}$$

gdje veličina $Z_{\text{ul}} = V/I$ označuje ulaznu impedanciju jednoprolazne mreže. Realni dio ulazne impedancije (otpor) R_{ul} ovisi o disipiranoj snazi, a imaginarni dio (reaktancija) X_{ul} ovisi o neto pohranjenoj energiji unutar mreže. Reaktancija je pozitivna ako postoji višak magnetske energije pa mreža pokazuje induktivni karakter. Nasuprot tomu, negativna reaktancija upućuje na višak električne energije pa mreža pokazuje kapacitivni karakter.

Konjugiranjem jednakosti (5–4) i dijeljenjem s VV^*, dobiva se izraz za ulaznu admitanciju jednoprolazne mreže $Y_{\text{ul}}=I/V$, tj.

$$Y_{\text{ul}} = G_{\text{ul}} + \mathrm{j}B_{\text{ul}} = \frac{P_{\text{dis}} + \mathrm{j}2\omega\left(\langle W_{\text{m}} \rangle - \langle W_{\text{e}} \rangle\right)}{\frac{1}{2}|V|^2}, \tag{5–7}$$

gdje je G_{ul} ulazna vodljivost, a B_{ul} ulazna susceptancija. Susceptancija je pozitivna, ako mreža pohranjuje više električne energije negoli magnetske energije, što daje mreži kapacitivni karakter. Taj se pristup može proširiti na višeprolazne mreže, kao u odjeljcima 5.3.2. i 5.4.4.

Iz izraza (5–6) i (5–7) jasno se vidi da je $Z_{\text{ul}}^*(-\omega) = Z_{\text{ul}}$, odnosno $Y_{\text{ul}}^*(-\omega) = Y_{\text{ul}}$, što znači da su realni dijelovi parne funkcije frekvencije, a imaginarni dijelovi neparne funkcije frekvencije. Jednako se tako može pokazati da je realni dio koeficijenta refleksije,

$$\Gamma_{\text{ul}}(\omega) = \frac{Z_{\text{ul}}(\omega) - Z_0}{Z_{\text{ul}}(\omega) + Z_0},$$

jednoprolazne mreže uvijek parna funkcija frekvencije, a imaginarni dio neparna funkcija frekvencije, gdje je Z_0 karakteristična impedancija linije na prolazu. Također se može pokazati da je modul koeficijenta refleksije $|\Gamma_{\text{ul}}|$ uvijek parna funkcija frekvencije.

5.2.2. Jednoprolazna mreža bez gubitaka

Za mikrovalne sklopove često je opravdano pretpostaviti da su bez gubitaka, tj. da su gubitci u tim sklopovima toliko mali da se mogu zanemariti. Stoga ćemo sad razmotriti svojstva jednoprolaznih nedisipativnih mreža. Ako je mreža na slici 5.2 bez gubitaka, onda je disipirana snaga unutar mreže jednaka nuli pa se u izraz (5–6) može uvrstiti $P_{\text{dis}} = 0$. Otuda je $R = 0$ pa Z_{ul} postaje posve imaginarna impedancija, tj.

$$Z_{\mathrm{ul}} = \mathrm{j}X_{\mathrm{ul}} = \frac{\mathrm{j}4\omega\left(\langle W_{\mathrm{m}}\rangle - \langle W_{\mathrm{e}}\rangle\right)}{|I|^2}. \tag{5–8a}$$

Reaktancija X_{ul} pozitivna je ako je mreža induktivnog karaktera ($\langle W_{\mathrm{m}}\rangle > \langle W_{\mathrm{e}}\rangle$), a negativna ako je kapacitivnog karaktera ($\langle W_{\mathrm{m}}\rangle < \langle W_{\mathrm{e}}\rangle$). Ako su u magnetskom i električnom polju pohranjene jednake količine energije, onda je $\langle W_{\mathrm{m}}\rangle - \langle W_{\mathrm{e}}\rangle = 0$ pa ulazna reaktancija iščezava. U tom je slučaju zadovoljen uvjet rezonancije (odjeljak 7.4). No tu su na izboru dvije mogućnosti: $\langle W_{\mathrm{m}}\rangle = \langle W_{\mathrm{e}}\rangle$ uz $I \neq 0$, gdje je ulazna impedancija nula (serijska rezonancija) i $\langle W_{\mathrm{m}}\rangle = \langle W_{\mathrm{e}}\rangle$ uz $V \neq 0$, gdje je ulazna admitancija nula (paralelna rezonancija) prema izrazu

$$Y_{\mathrm{ul}} = \mathrm{j}B_{\mathrm{ul}} = \frac{\mathrm{j}4\omega\left(\langle W_{\mathrm{m}}\rangle - \langle W_{\mathrm{e}}\rangle\right)}{|V|^2}. \tag{5–8b}$$

Ako je ulazna reaktancija X_{ul} jednaka nuli, onda ulazna susceptancija B_{ul} mora biti beskonačna. To podrazumijeva da je na referentnoj ravnini prolaza napon jednak nuli ($V = 0$). Taj je uvjet moguće ostvariti jer se za posve reaktivan teret cjelokupna upadna snaga reflektira prema generatoru pa razdioba ukupnog napona duž valovoda poprima oblik stojnoga vala $\sin \beta l$. Ako je pak susceptancija B_{ul} jednaka nuli, onda ulazna reaktancija X_{ul} mora biti beskonačna, tj. funkcija ulazne impedancije ima pol. Otuda je struja I na ravnini prolaza jednaka nuli. Lako je zamisliti da će u sklopovima s prijenosnim linijama bez gubitaka funkcije ulazne reaktancije i ulazne susceptancije imati više nula i polova, tj. više frekvencija na kojima će iščeznuti ili postati beskonačne. Takvo ponašanje ulazne reaktancije može se, primjerice, naći u izrazu za ulaznu impedanciju kratko spojene prijenosne linije bez gubitaka u odjeljku 3.4, tj.

$$\mathrm{j}X_{\mathrm{ul}} = \mathrm{j}Z_0 \tan \beta l = \mathrm{j}Z_0 \tan \frac{\omega}{v_{\mathrm{f}}} l, \tag{5–9}$$

gdje je l udaljenost kratkoga spoja od referentne ravnine prolaza, a v_{f} fazna brzina vala.

Na slici 5.3a) prikazana je frekvencijska ovisnost ulazne reaktancije kratko spojene prijenosne linije. Valja uočiti da je strmina reaktancije uvijek pozitivna, tj. $\partial X/\partial\omega > 0$. Slično se ponaša i karakteristika ulazne susceptancije, samo što u tom slučaju nule valja zamijeniti polovima, a polove nulama. Uvjet da strmina reaktancije (ili susceptancije) nikada ne mijenja predznak u sebi sadrži svojstvo samih polova i nula koji se uvijek uzastopno izmjenjuju na frekvencijskoj osi. Izvod tog općeg svojstva reaktivnih jednoprolaznih mreža, poznatog pod nazivom *Fosterov teorem* o reaktanciji, može se naći se u sljedećem odjeljku.

Funkcija tangens u izrazu (5–9) može se preurediti u oblik

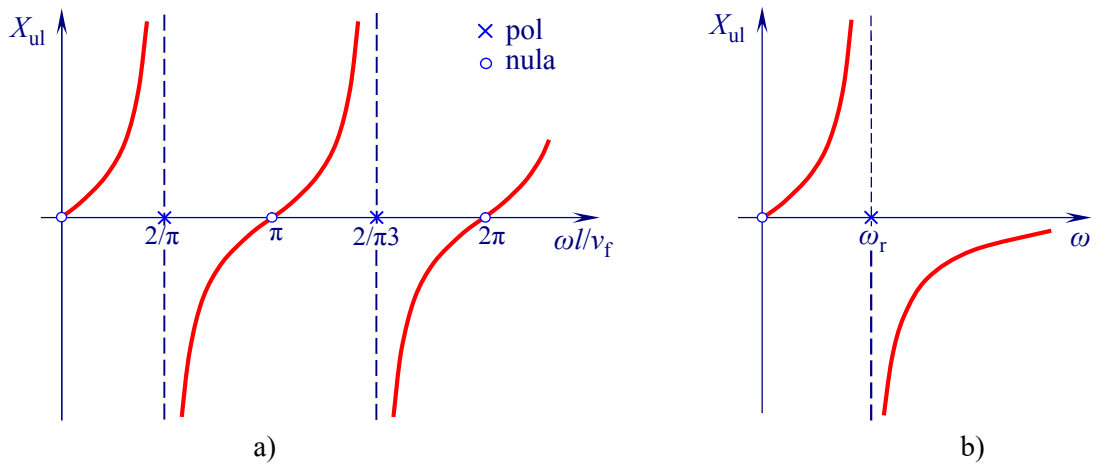
$$\tan \beta l = \frac{1}{\cot \beta l} = \frac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta l\right)}.$$

Ta funkcija ima polove u točkama u kojima tangens ima nule u nazivniku. Električna duljina može se napisati kao $\beta l = \omega l / v_{\mathrm{f}}$. Osim toga, funkcija tangens ima pol kad argument poprimi vrijednost neparnog višekratnika od $\pi/2$ radijana. Stoga svakom polu odgovara frekvencija

$$\omega_{\mathrm{p}} = (2n-1)\frac{\pi v_{\mathrm{f}}}{2l}, \quad \text{za } n = 1, 2, 3...$$

Uvrštenje tih rezultata u izraz (5–9) daje

$$\mathrm{j}X_{\mathrm{ul}} = \frac{\mathrm{j}Z_0}{\tan\left(\dfrac{\omega_{\mathrm{p}}}{v_{\mathrm{f}}} l - \dfrac{\omega}{v_{\mathrm{f}}} l\right)}. \tag{5–10a}$$



Slika 5.3. a) Ulazna reaktancija kratko spojene prijenosne linije; **b)** ulazna reaktancija paralelnoga titrajnog kruga

Kad frekvencija teži frekvenciji pola, tad argument funkcije tangens u izrazu (5–10a) teži nuli, a reaktancija teži u beskonačnost. Ako se funkcija tangens zamijeni svojim argumentom, onda se izraz (5–10a) može napisati u jednostanijem obliku, kao

$$\mathrm{j}X_{\mathrm{ul}} \simeq \mathrm{j}\frac{v_{\mathrm{f}}}{l}\frac{Z_0}{\omega_{\mathrm{r}}-\omega}. \tag{5–10b}$$

Odsječak kratko spojene prijenosne linije blizu pola ponaša se slično jednostavnoj *LC* mreži (paralelni titrajni krug) za koju vrijedi

$$\mathrm{j}X_{\mathrm{ul}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C - \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}} = -\mathrm{j}\frac{\omega}{C(\omega^2-\omega_{\mathrm{r}}^2)} \simeq \mathrm{j}\frac{1}{2C(\omega_{\mathrm{r}}-\omega)}, \tag{5–11}$$

gdje je $\omega_{\mathrm{r}} = 1/\sqrt{LC}$ rezonantna frekvencija *LC* titrajnoga kruga. O titrajnim krugovima može se više naći u odjeljku 7.4. No u mikrovalnoj je mreži sve znatno složenije jer ona teorijski ima beskonačan broj polova i nula, za razliku od jednostavnog paralelnog *LC* kruga koji ima samo jedan pol i dvostruku nulu. Nule se nalaze na $\omega = 0$, gdje iščezava ωL i u beskonačnosti gdje iščezava $1/\omega C$, kao što je prikazano na slici 5.3b). Vrlo je važno uočiti te razlike jer su svojstvene svim mikrovalnim mrežama, bez obzira na to što smo neka od tih svojstava pokazali samo na primjeru kratko spojene linije.

5.2.3. Fosterov teorem o reaktanciji

Sad ćemo podrobnije razmotriti frekvencijsku ovisnost mikrovalne jednoprolazne mreže bez gubitaka. Dokazat ćemo da su u mreži bez gubitaka strmine reaktancije i susceptancije uvijek pozitivne veličine, to jest da je derivacija reaktancije i susceptancije po frekvenciji uvijek pozitivna.

Pretpostavimo da je mikrovalna mreža na slici 5.2 posve reaktivna. Polja unutar mreže zadovoljavaju rotorske Maxwellove jednadžbe:

$$\nabla\times\vec{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\vec{H}, \qquad \nabla\times\vec{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}.$$

Kompleksnim konjugiranjem i deriviranjem po frekvenciji, dobiva se:

$$\nabla\times\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega} = \mathrm{j}\omega\mu\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega} + \mathrm{j}\vec{H}^*\frac{\partial\omega\mu}{\partial\omega}, \qquad \nabla\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega} = -\mathrm{j}\omega\varepsilon\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega} - \mathrm{j}\vec{E}^*\frac{\partial\omega\varepsilon}{\partial\omega}. \tag{5–12}$$

Razmotrimo sad jednakost

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\times\vec{H}\right)=\nabla\times\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}-\vec{E}\cdot\nabla\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}+\nabla\times\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\cdot\vec{H}-\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\cdot\nabla\times\vec{H}\,,\qquad(5\text{–}13)$$

gdje je iskorištena poznata jednakost $\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{B}-\left(\nabla\times\vec{B}\right)\cdot\vec{A}$ (E41) iz dodatka E. Uvrštenjem jednakosti (5–12) u jednakost (5–13) izlazi

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\times\vec{H}\right)=$$

$$=\mathrm{j}\left(\vec{H}\vec{H}^*\frac{\partial\omega\mu}{\partial\omega}+\vec{E}\vec{E}^*\frac{\partial\omega\varepsilon}{\partial\omega}\right)+\mathrm{j}\omega\left(\mu\vec{H}\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}-\mu\vec{H}\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}+\varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}-\varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\right).\qquad(5\text{–}14)$$

Drugi član zdesna jednak je nuli pa je

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\times\vec{H}\right)=\mathrm{j}\left(\vec{H}\vec{H}^*\frac{\partial\omega\mu}{\partial\omega}+\vec{E}\vec{E}^*\frac{\partial\omega\varepsilon}{\partial\omega}\right).$$

Integriranje po obujmu mreže i primjena teorema o divergenciji na lijevu stranu daju

$$\oint_S\left(\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\times\vec{H}\right)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S=-\mathrm{j}\iint_V\left(\vec{H}\vec{H}^*\frac{\partial\omega\mu}{\partial\omega}+\vec{E}\vec{E}^*\frac{\partial\omega\varepsilon}{\partial\omega}\right)\mathrm{d}V=-4\mathrm{j}(\langle W_\mathrm{m}\rangle+\langle W_\mathrm{e}\rangle),\quad(5\text{–}15)$$

gdje je $\langle W_\mathrm{m}\rangle+\langle W_\mathrm{e}\rangle$ ukupna pohranjena energija unutar mreže bez gubitaka, a diferencijalna površina $n\mathrm{d}S$ usmjerena je prema volumenu, tj. gleda u mrežu.

Budući da su i $\hat{n}\times\vec{E}$ i $\hat{n}\times\partial\vec{E}/\partial\omega$ jednaki nuli na savršeno vodljivim stijenkama valovoda i metalne strukture koja okružuje mikrovalnu mrežu, za $\hat{n}$ koji gleda prema mreži, plošni se integral svodi samo na integral na referentnoj ravnini prolaza *p*. Stoga je na ravnini prolaza

$$\int_p\left(\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\times\vec{H}\right)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S=V\frac{\partial I^*}{\partial\omega}+\frac{\partial V^*}{\partial\omega}I\,,\qquad(5\text{–}16)$$

gdje su V i I fazori ekvivalentnog napona i struje na prolazu. Na ulazu svake reaktivne mreže napon i struja vezani su relacijom $V=\mathrm{j}IX$. Deriviranjem i konjugiranjem tog izraza dobiva se

$$\frac{\partial V^*}{\partial\omega}=-\mathrm{j}X\frac{\partial I^*}{\partial\omega}-\mathrm{j}I^*\frac{\partial X}{\partial\omega}\,.$$

Sad se desna strana izraza (5–16) može napisati kao

$$V\frac{\partial I^*}{\partial\omega}+\frac{\partial V^*}{\partial\omega}I=\mathrm{j}XI\frac{\partial I^*}{\partial\omega}-\mathrm{j}XI\frac{\partial I^*}{\partial\omega}-\mathrm{j}II^*\frac{\partial X}{\partial\omega}$$

pa se jednakost (5–15) konačno svodi na

$$\frac{\partial X}{\partial\omega}=\frac{4(\langle W_\mathrm{m}\rangle+\langle W_\mathrm{e}\rangle)}{|I|^2}.\qquad(5\text{–}17\mathrm{a})$$

Izraz zdesna razmjeran je ukupnoj pohranjenoj energiji mreže pa nikako ne može poprimiti negativnu vrijednost. Iz toga proizlazi koristan teorem koji kaže da strmina bilo koje funkcije reaktancije uvijek mora biti pozitivna veličina. To je *Fosterov teorem o reaktanciji* [4].

Ako se u izrazu (5–16) struja I zamijeni s $\mathrm{j}BV$, onda se dobiva dualni izraz

$$\frac{\partial B}{\omega\partial}=\frac{4(\langle W_\mathrm{m}\rangle+\langle W_\mathrm{e}\rangle)}{|V|^2},\qquad(5\text{–}17\mathrm{b})$$

koji pokazuje da je i susceptancija funkcija koja uvijek raste s frekvencijom.

Jednakosti (5–17) također pokazuju da je frekvencijska osjetljivost reaktancije i susceptancije razmjerna cjelokupnoj pohranjenoj energiji.

Riješe li se jednadžbe (5–8) i (5–17) za električnu i magnetsku energiju dobiva se:

$$\langle W_{\mathrm{e}} \rangle = \frac{|I|^2}{8}\left(\frac{\partial X}{\partial \omega} - \frac{X}{\omega}\right) = \frac{|V|^2}{8}\left(\frac{\partial B}{\partial \omega} + \frac{B}{\omega}\right), \tag{5–18a}$$

$$\langle W_{\mathrm{m}} \rangle = \frac{|I|^2}{8}\left(\frac{\partial X}{\partial \omega} + \frac{X}{\omega}\right) = \frac{|V|^2}{8}\left(\frac{\partial B}{\partial \omega} - \frac{B}{\omega}\right). \tag{5–18b}$$

Budući da je energija definirana kao pozitivna veličina, iz izraza (5–18) izlaze uvjeti:

$$\frac{\partial X}{\partial \omega} \geq \left|\frac{X}{\omega}\right| \quad \text{i} \quad \frac{\partial B}{\partial \omega} \geq \left|\frac{B}{\omega}\right|,$$

koji pokazuju da je nagib reaktancije (ili susceptancije) uvijek veći od nagiba pravca koji prolazi ishodištem i točkom promatranja. Te su nejednakosti izvedene u teoriji mreža [4] i mogu se lako provjeriti za jednostavne reaktivne *LC* mreže. Iz toga izlazi da nule i polovi za funkcije reaktancije i susceptancije svake mreže bez gubitaka moraju alternirati, kao što se može vidjeti na slici 5.3a).

5.3. Impedancijske i admitancijske matrice

Pretpostavimo da je više valovoda ili prijenosnih linija povezano tako da tvore mikrovalni sklop s više prolaza kao što je prikazano na slici 5.1. Takav se sklop ili *N*-prolazna mreža može prikazati shematski kao što je prikazano na slici 5.4. Na referentnim ravninama prolaza mogu se definirati naponi i struje za svaki mod rasprostiranja za sebe, kao što je objašnjeno u uvodu ovoga poglavlja. Budući da Maxwellove jednadžbe pokazuju linearnu vezu između električnih i magnetskih polja, mora postojati i linearna veza između napona i struja koji zamjenjuju polja na prolazima. Stoga razmotrimo slučaj u kojem su struje zadane nezavisno, a naponi jedinstveno određeni tim istim strujama. Kao rezultat dobiva se sljedeći sustav s *N* linearnih jednadžba i *N* nepoznanica:

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 + \ldots + z_{1N}I_N \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 + \ldots + z_{2N}I_N \\ &\vdots \\ V_N &= z_{N1}I_1 + z_{N2}I_2 + \ldots + z_{NN}I_N\,. \end{aligned} \tag{5–19}$$

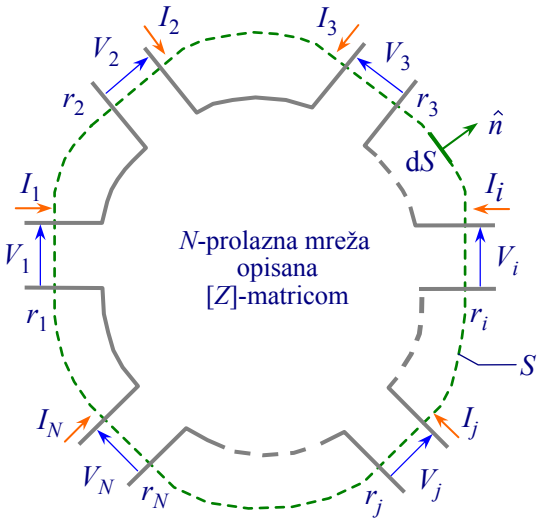
u kojem su V_i i I_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) napon, odnosno struja moda koji se rasprostire na referentnoj ravnini višeprolazne mreže (slika 5.4). Kad u valovodu istodobno postoji više modova rasprostiranja, *N* može biti veći od broja fizičkih prolaza mikrovalne mreže. Sustav jednadžba (5–19) može se zapisati u matričnom obliku kao

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N1} & z_{N2} & \cdots & z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}, \tag{5–20a}$$

U skraćenom obliku to se može simbolički napisati kao

$$[V] = [Z][I], \tag{5–20b}$$

gdje je [*Z*] matrica impedancija, a [*I*] i [*V*] vektorske su matrice struje pobude i napona odziva.



Slika 5.4. Višeprolazna nadomjesna mreža za definiranje impedancijskih i admitancijskih matrica

Ako se naponi mogu neovisno zadati i ako su struje jedinstveno određene tim istim naponima, onda se može napisati sljedeći sustav linearnih jednadžba:

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 + \ldots + y_{1N}V_N \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 + \ldots + y_{2N}V_N \\ &\vdots \\ I_N &= y_{N1}V_1 + y_{N2}V_2 + \ldots + y_{NN}V_N\,. \end{aligned} \tag{5–21}$$

U matričnom obliku vektori struje i napona povezani su matricom admitancija [*Y*] kao

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1N} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N1} & y_{N2} & \cdots & y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \tag{5–22a}$$

ili u skraćenom obliku kao

$$[I] = [Y][V]. \tag{5–22b}$$

Matrice [*Z*] i [*Y*] međusobno su inverzne, tj. vrijedi

$$[Y] = [Z]^{-1}. \tag{5–23}$$

U sustavu linearnih jednadžba (5–19) *Z*-parametri definirani su kao

$$z_{ij} = \left.\frac{V_i}{I_j}\right|_{I_k = 0,\ \text{za}\ k \neq j}. \tag{5–24}$$

Dakle, parametar z_{ij} može se naći tako da se prolaz *j* pobudi strujom I_j i zatim se izmjeri napon praznoga hoda na prolazu *i*, uz to da se svi ostali prolazi ostave neopterećeni, tj. u praznome hodu, $I_k = 0$ za $k \neq j$. Pritom parametar z_{jj} označuje ulaznu impedanciju mreže na pobuđenom prolazu *j*, kad su svi ostali prolazi otvoreni. S druge strane, parametar z_{ij} označuje prijenosnu impedanciju između prolaza *j* i *i*, uz uvjet da su svi preostali prolazi otvoreni.

Ako se naponi mogu neovisno zadati i ako su struje jedinstveno određene tim naponima, onda se mogu definirati *Y*-parametri mreže

$$y_{ij} = \left.\frac{I_i}{V_j}\right|_{V_k=0,\ \text{za}\ k\neq j} . \tag{5–25}$$

Matrica impedancija i admitancija općenite N-prolazne mreže sadrži $N \cdot N$ kompleksnih parametara. Budući da je svaki parametar z_{ij} (ili y_{ij}) kompleksni broj koji sadrži po dva nezavisna člana, matrica sadrži $2N^2$ nezavisnih realnih veličina, tj. ima $2N^2$ stupnjeva slobode. U praksi su međutim mnoge mreže recipročne. To su sve one mreže koje ne sadrže nerecipročno sredstvo ili nerecipročne elemente (ferit i plazma u statičkom magnetskom polju ili aktivni element poput tranzistora). U sljedećim ćemo odjeljcima pokazati da su matrice impedancije i admitancije svake recipročne mreže simetrične, tj. da vrijedi $z_{ij}=z_{ji}$ i $y_{ij}=y_{ji}$ te da su u mreži bez gubitaka (nedisipativna ili reaktivna mreža) svi elementi z_{ij} i y_{ij} posve imaginarni. Svako od tih svojstava može se iskoristiti za smanjenje broja nezavisnih veličina ili stupnjeva slobode u višeprolaznoj mreži.

5.3.1. Recipročne mreže

Može se pokazati da, za mrežu na slici 5.4 koja ne sadrži aktivne komponente, magnetiziranu plazmu ni magnetizirane ferite, vrijedi:

$$z_{ij} = z_{ji}\,, \qquad y_{ij} = y_{ji}\,. \tag{5–26}$$

Drugim riječima, ta je mreža recipročna poput uobičajenih mreža s koncentriranim komponentama. Da bismo to dokazali, primijenimo načelo recipročnosti (2–295),

$$\oint_S \vec{E}^{(a)} \times \vec{H}^{(b)} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}S = \oint_S \vec{E}^{(b)} \times \vec{H}^{(a)} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}S\,, \tag{5–27}$$

iz odjeljka 2.15.3, za dva para polja $\vec{E}^{(a)}$, $\vec{H}^{(a)}$ i $\vec{E}^{(b)}$, $\vec{H}^{(b)}$ čiji se izvori nalaze izvan razmatrane mreže. Zamislimo sad poseban slučaj u kojem savršeno vodljiva ploha S obrubljuje N-prolaznu mrežu tako da je posvuda na njoj $\vec{E}_{\tan} = 0$ osim na referentnim ravninama prolaza. U skladu s 1. i 2. pravilom iz odjeljka 5.1. i primjenom jednakosti (5–1), nadomjesni napon i struja na referentnoj ravnini n-tog prolaza definirani su kao:

$$\vec{E}_n = V_n \vec{e}_n(x_n, y_n)\,, \qquad \vec{H}_n = I_n \vec{h}_n(x_n, y_n)\,.$$

Primjenom 3. pravila iz odjeljka 5.1. i izraza (5–5), prvi plošni integral u jednakosti (5–27) poprima oblik

$$\oint_S \vec{E}^{(a)} \times \vec{H}^{(b)} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}S = \sum_{n=1}^{N} V_n^{(a)} I_n^{(b)} \oint_S \vec{e}_i \times \vec{h}_i \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}S = \sum_{n=1}^{N} V_n^{(a)} I_n^{(b)}\,,$$

pa se načelo recipročnosti (5–26) svodi na

$$\sum_{n=1}^{N} V_n^{(a)} I_n^{(b)} = \sum_{n=1}^{N} V_n^{(b)} I_n^{(a)}\,. \tag{5–28}$$

Za poseban slučaj, u kojem su sve struje $I_n^{(a)} = 0$ osim $I_i^{(a)}$ i sve struje $I_n^{(b)} = 0$ osim $I_j^{(b)}$, izlazi $V_j^{(a)} = z_{ji} I_i^{(a)}$ i $V_i^{(b)} = z_{ij} I_j^{(b)}$ pa se jednakost konačno svodi na $z_{ij}=z_{ji}$. Iz toga proizlazi da je matrica [Z] simetrična. Budući da je inverzna matrica simetrične matrice također simetrična matrica, izlazi da je matrica [Y] recipročne mreže simetrična, tj. $y_{ij}=y_{ji}$. Simetričnost matrica [Z] i [Y] posljedica je svojstva recipročnosti.

U zadaćama iz mikrovalne elektronike često je potrebno izračunati ulaznu impedanciju pasivne dvoprolazne mreže opterećene proizvoljnom impedancijom poput one na slici 5.5a). Ulazna se impedancija mreže može lako naći primjenom sustava linearnih jednadžba (5–19) sa Z-parametrima. Za recipročnu dvoprolaznu mrežu opterećenu impedancijom Z_T izlazi:

$$Z_{ul} I_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 ,$$
$$-Z_T I_2 = z_{12} I_1 + z_{22} I_2 ,$$

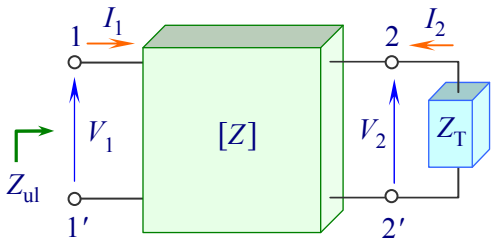
gdje je, u skladu sa slikom 5.5a), $V_1 = Z_{ul} I_1$, a $V_2 = -Z_T I_2$. Omjer struja

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{z_{12}}{z_{22} + Z_T},$$

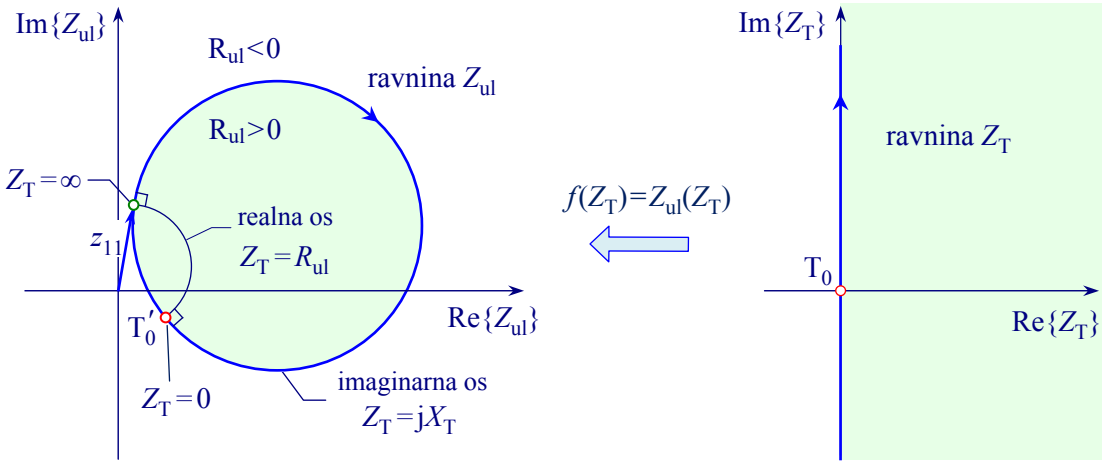
dobiven iz druge jednadžbe, sad se može uvrsti u prvu jednadžbu pa izlazi

$$Z_{ul} = z_{11} + z_{12}\frac{I_2}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + Z_T} . \qquad (5–29)$$

Taj je izraz Möbiusova transformacija impedancije Z_T. Obilježja Möbiusove ili bilinearne transformacije mogu se naći u Dodataku F. Kad se Z_T mijenja od –j∞ do +j∞, kao na slici 5.5b), geometrijsko mjesto (lokus) Z_{ul} postaje kružnica. Ta se kružnica nalazi u desnoj poluravnini kompleksne ravnine ulaznih impedancija Z_{ul}. Za pasivnu mrežu njezina unutrašnjost odgovara desnoj poluravnini ravnine Z_T. To se može lako objasniti ako se pretpostavi da Z_{ul} ima negativni realni dio kad Z_T ima pozitivni realni dio. No to je nemoguće jer je pasivna dvoprolazna mreža zaključena pasivnim realnim dijelom pasivni krug čija ulazna impedancija mora imati pozitivni realni dio. Ta kružnica odgovara posve reaktivnim impedancijama tereta ($Z_T = jX_T$). Na slici 5.5b) ucrtan je i kružni luk koji odgovara realnoj osi u ravnini Z_T. Pri Möbiusovoj transformaciji ostaju sačuvani kutovi, a kružnica se preslikava u kružnicu, gdje je pravac poseban slučaj kružnice beskonačnog polumjera. Otuda se kružnice, koje odgovaraju osima pravokutnoga koordinatnog sustava u ravnini Z_T, sijeku pod pravim kutom.



a)



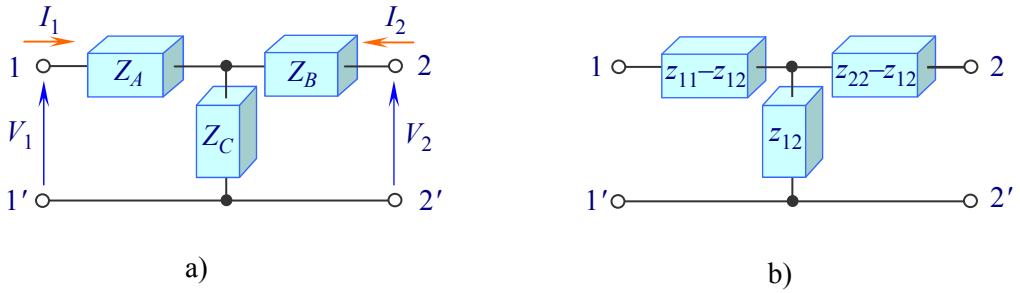
b)

Slika 5.5. Pasivna dvoprolazna mreža opisana *Z*-parametrima: **a)** topologija mreže opterećene proizvoljnim teretom impedancije Z_T, **b)** veza između impedancija Z_T i Z_{ul}

Ako završna impedancija (impedancija tereta Z_T) teži u beskonačnost, onda ulazna impedancija teži parametru z_{11}, što se i moglo očekivati, jer je taj parametar upravo definiran uz otvoreni strujni krug na izlaznom prolazu ($I_2=0$).

Primjer 5.1. *Z*-parametri recipročne dvoprolazne mreže

Naći *Z*-parametre recipročne dvoprolazne T-mreže prikazane na slici 5.6a).



Slika 5.6. *Z*-parametri dvoprolazne T-mreže

Rješenje:

Iz izraza (5–24) i slike 5.6a) može se odrediti parametar z_{11} kao ulazna impedancija na prolazu 1 kad je prolaz 2 otvoren, tj.

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_A + Z_C \,. \tag{5–30}$$

Prijenosna impedancija z_{12} može se naći mjerenjem napona u otvorenom strujnom krugu na prolazu 1 kad je na prolaz 2 utisnuta struja I_2. Primjena izraza za djelilo napona daje

$$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{Z_C V_2}{(Z_B + Z_C) I_2} = Z_C \,. \tag{5–31}$$

Provjerite sami da je $z_{21}=z_{12}$, što pokazuje da je sklop recipročan. Konačno se za z_{22} dobiva

$$z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_B + Z_C \,. \tag{5–32}$$

Sad se elementi nadomjesnog sklopa na slici 5.6b) mogu prikazati linearnom kombinacijom impedancijskih parametara kao:

$$Z_A = z_{11} - z_{12} \,, \qquad Z_B = z_{22} - z_{12} \,, \tag{5–33}$$

a iz izraza (5–31) izravno izlazi

$$Z_C = z_{12} \,.$$

Na osnovi toga može se lako vidjeti da reaktivna mreža (nedisipativna mreža) ima posve imaginarne *Z*-parametre jer su u tom slučaju sve impedancije (Z_A , Z_B i Z_C) posve imaginarne veličine.

Y-parametri dualne Π-strukture mogu se lako naći tako da se *Z*-parametri u izrazima (5–30) - (5–33) jednostavno zamijene *Y*-parametrima, a impedancije se zamijene admitancijama.

5.3.2. Nedisipativne mreže

Razmotrimo sad recipročnu mrežu bez gubitaka s N prolaza. Pokazat ćemo da su elementi impedancijske i admitancijske matrice takve mreže posve imaginarni. Ako je mreža bez gubitaka, dakle nedisipativna, onda ukupna srednja (realna) snaga predana mreži mora biti jednaka nuli, $\mathrm{Re}\{P_{\mathrm{ul}}\} = 0$. Budući da je srednja snaga predana mreži na i-tom prolazu dana kao $\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{V_i I_i^*\}$, ukupna srednja snaga koja upada iz prolaza u mrežu može se napisati kao

$$\langle P_{\mathrm{ul}} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{V_i I_i^*\} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4}(V_i I_i^* + V_i^* I_i) = \frac{1}{4}\left([V]^{\mathrm{t}}[I]^* + [I]^{\mathrm{t}}[V]^*\right). \tag{5–34a}$$

Uvrštenjem jednadžbe (5–20b) dobiva se

$$\langle P_{\mathrm{ul}} \rangle = \frac{1}{4}\left([I]^{\mathrm{t}}[Z]^{\mathrm{t}}[I]^* + [I]^{\mathrm{t}}[Z]^*[I]^*\right) = \frac{1}{4}[I]^{\mathrm{t}}\left([Z]^{\mathrm{t}} + [Z]^*\right)[I]^*. \tag{5–34b}$$

Pri izvodu izraza (5–34b) upotrijebljen je poznati rezultat iz matrične algebre $([A][B])^{\mathrm{t}} = [B]^{\mathrm{t}}[A]^{\mathrm{t}}$, gdje eksponent t označuje transpoziciju matrice ili vektora. Budući da za mrežu bez gubitaka izraz (5–34) mora biti jednak nuli, neovisno o vrijednosti struje pobude, izlazi

$$[Z]^{\mathrm{t}} + [Z]^* = 0. \tag{5–35}$$

To je nužan i dovoljan uvjet da bi $[Z]$ opisala mrežu bez gubitaka. Za jednoprolaznu mrežu, jednadžba (5–34a) svodi se na $\mathrm{Re}\{Z\} = 0$, što pokazuje da je realni dio ulazne impedancije nula. Ako se umjesto jednadžbe (5–20b) uzme (5–22b), onda se dobiva

$$[Y]^{\mathrm{t}} + [Y]^* = 0. \tag{5–36}$$

To je također nužno i dovoljno da bi matrica $[Y]$ mogla opisati mrežu bez gubitaka.

Iz jednadžbe (5–35) izlazi da je $z_{ij} = -(z_{ji})^*$ za mrežu bez gubitaka. Za recipročnu je mrežu bez gubitaka $z_{ij} = z_{ji}$ pa iz jednadžbe (5–35) izravno izlazi $z_{ij} = -(z_{ij})^*$, što znači da su u tom slučaju svi koeficijenti z_{ij} čisto imaginarni, tj.

$$\mathrm{Re}\{z_{ij}\} = 0, \tag{5–37}$$

za bilo koji par indeksa i, j. Slično su i koeficijenti y_{ij} čisto imaginarni za recipročnu mrežu bez gubitaka. To se slaže s fizikalnom intuicijom jer sve mreže sastavljene samo od reaktivnih elemenata, čije su impedancije i admitancije imaginarne, moraju imati imaginarne matrice impedancija i admitancija.

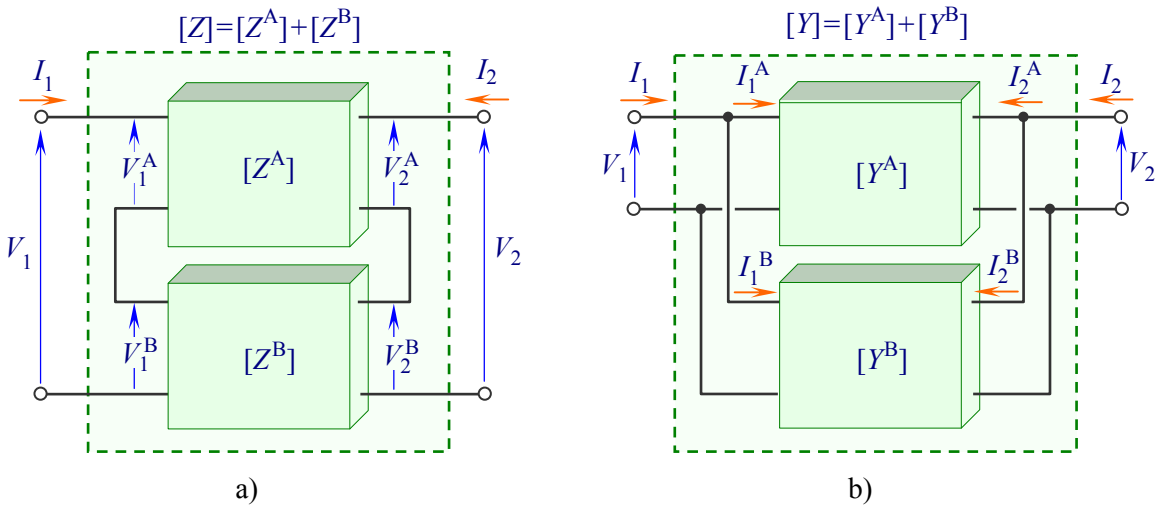
5.3.3. Serijski i paralelni spoj dvoprolaznih mreža

Impedancijske i admitancijske matrice posjeduju još neke posebne značajke koje se mogu iskoristiti prilikom rješavanja serijski ili paralelno spojenih dvoprolaznih mreža. Ako su, primjerice, dvije dvoprolazne mreže spojene serijski, poput onih na slici 5.7a), onda se impedancijski parametri cjelokupne mreže mogu jednostavno dobiti zbrajanjem impedancijskih parametara pojedinačnih mreža, tj.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^{\mathrm{A}} + V_1^{\mathrm{B}} \\ V_2^{\mathrm{A}} + V_2^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^{\mathrm{A}} + z_{11}^{\mathrm{B}} & z_{12}^{\mathrm{A}} + z_{12}^{\mathrm{B}} \\ z_{21}^{\mathrm{A}} + z_{21}^{\mathrm{B}} & z_{22}^{\mathrm{A}} + z_{22}^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \tag{5–38a}$$

gdje eksponenti A i B pripadaju mreži A, odnosno B. Jednako tako, za mreže spojene paralelno, kao na slici 5.7b), admitancijski se parametri cjelokupne mreže mogu dobiti zbrajanjem admitancijskih parametara pojedinačnih mreža, tj.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^{\mathrm{A}} + I_1^{\mathrm{B}} \\ I_2^{\mathrm{A}} + I_2^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^{\mathrm{A}} + y_{11}^{\mathrm{B}} & y_{12}^{\mathrm{A}} + y_{12}^{\mathrm{B}} \\ y_{21}^{\mathrm{A}} + y_{21}^{\mathrm{B}} & y_{22}^{\mathrm{A}} + y_{22}^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \tag{5–38b}$$



Slika 5.7. Međusobno povezivanje dvoprolaznih mreža: **a)** serijski spoj, **b)** paralelni spoj

5.4. Raspršna matrica

Već smo uočili poteškoće pri definiranju napona i struja na linijama kojima se rasprostiru čisti *TEM*-valovi. Osim toga, pri mjerenju napona i struja u mikrovalnome frekvencijskom području pojavljuju se praktični problemi jer izravna mjerenja obično uključuju i veličinu i fazu putujućega vala, koji se rasprostire u danom smjeru. Zato u mikrovalnim mrežama ekvivalentni naponi i struje, i njima odgovarajuće impedancijske i admitancijske matrice, postaju pomalo apstraktni pojmovi. Može se lako pokazati da se prikaz mreža preko raspršne matrice bolje slaže s rezultatima dobivenim izravnim mjerenjima i uvedenim idejama upadnoga, reflektiranoga i prenesenoga vala. Stoga umjesto napona i struja valja uvesti nove kompleksne varijable, tzv. *normirane kompleksne valove snage*.

Na osnovi rezultata iz odjeljka 3.1.1. za prijenosnu liniju bez gubitaka *i*-tog prolaza opće rješenje linijskih jednadžba glasi:

$$V_i(z,t) = A_i \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z+\mathrm{j}\omega t} + B_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z+\mathrm{j}\omega t} = V_i^+(z,t) + V_i^-(z,t)\,, \tag{5–39a}$$

$$I_i(z,t) = \frac{A_i}{Z_{0i}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z+\mathrm{j}\omega t} - \frac{B_i}{Z_{0i}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z+\mathrm{j}\omega t} = \frac{V_i^+(z,t)}{Z_{0i}} - \frac{V_i^-(z,t)}{Z_{0i}}\,. \tag{5–39b}$$

U frekvencijskoj domeni te izraze možemo napisati u fazorskom obliku kao:

$$V_i = \sqrt{Z_{0i}}\left(\frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} + \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}}\right) = \sqrt{Z_{0i}}\left(a_i + b_i\right), \tag{5–40a}$$

$$I_i = \frac{1}{\sqrt{Z_{0i}}}\left(\frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} - \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{Z_{0i}}}\left(a_i - b_i\right). \tag{5–40b}$$

Ovdje su uvedene dvije nove kompleksne varijable:

$$a_i = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}}\,, \tag{5–41a}$$

$$b_i = \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}}\,, \tag{5–41b}$$

koje linearno ovise o ulaznim (V_i^+), odnosno reflektiranim ili izlaznim (V_i^-) kompleksnim fazorima napona. Stoga te nove varijable označuju ulazni, odnosno izlazni *normirani kompleksni val*. Budući da im je dimenzija jednaka drugome korijenu snage, $\sqrt{W}$, kraće ih nazivamo *valovi snage*.

Zbrajanjem i oduzimanjem izraza (5–40), valovi snage na prolazu višeprolazne mreže mogu se lako dovesti u vezu s naponom i strujom na tom prolazu, tj.

$$a_i = \frac{V_i + Z_{0i} I_i}{2\sqrt{Z_{0i}}}, \tag{5–42a}$$

$$b_i = \frac{V_i - Z_{0i} I_i}{2\sqrt{Z_{0i}}}. \tag{5–42b}$$

Razmotrimo sad *N*-prolaznu mrežu prikazanu na slici 5.8, u kojoj je a_i upadni val snage na referentnoj ravnini r_i prolaza *i*. Taj će val snage na istom prolazu proizvesti reflektirani ili izlazni val snage $b_i = S_{ii} a_i$, gdje je S_{ii} koeficijent refleksije ili raspršni parametar za *i*-ti prolaz. Valovi će se također prenijeti na druge prolaze i njihove će amplitude biti razmjerne amplitudi vala a_i. Veze između valova snage svih prolaza mogu se izraziti kao:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11} a_1 + S_{12} a_2 + \ldots + S_{1N} a_N \\ b_2 &= S_{21} a_1 + S_{22} a_2 + \ldots + S_{2N} a_N \\ &\vdots \\ b_N &= S_{N1} a_1 + S_{N2} a_2 + \ldots + S_{NN} a_N . \end{aligned} \tag{5–43}$$

U matričnom obliku taj se sustav jednadžba može napisati kao

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \tag{5–44a}$$

ili u kraćem zapisu kao

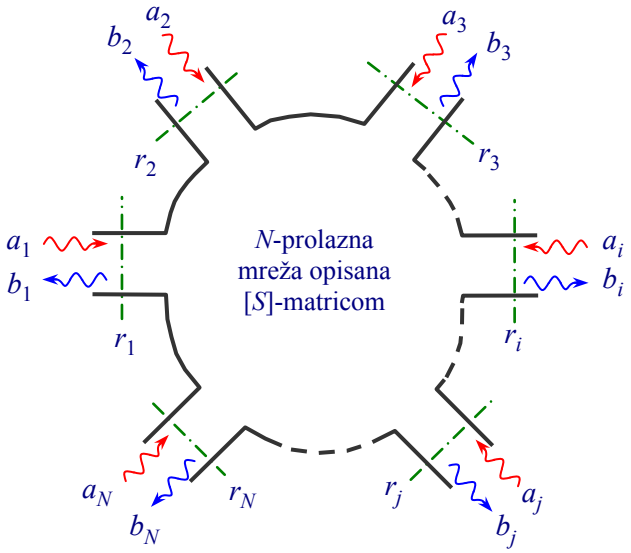
$$[b] = [S][a], \tag{5–44b}$$

gdje je [*S*] *raspršna matrica*, čiji je element *raspršni parametar* definiran kao

$$S_{ij} = \left. \frac{b_i}{a_j} \right|_{a_k = 0 \text{ za } k \neq j}. \tag{5–45}$$

Izraz (5–45) pokazuje da se parametar S_{ij} može odrediti tako da se prolaz *j* pobudi upadnim valom snage a_j i zatim se izmjeri *reflektirani* val snage b_i koji izlazi iz prolaza *i*. Pritom upadni valovi snage na svim prolazima osim prolaza *j* moraju biti jednaki nuli. Drugim riječima, svi prolazi moraju biti zaključiti prilagođenim trošilima da se spriječi refleksija. Parametar S_{ii} označuje koeficijent refleksije na prolazu *i* kad su svi ostali prolazi zaključeni prilagođenim trošilom, a S_{ij} označuje koeficijent prijenosa iz prolaza *j* u prolaz *i* uz uvjet da su svi ostali prolazi zaključeni prilagođenim trošilom. U općenitom slučaju priključne linije na prolazima nemaju jednake karakteristične impedancije pa primjenom izraza (5–41) i (5–45) izlazi

$$S_{ij} = \left. \frac{V_i^- \sqrt{Z_{0j}}}{V_j^+ \sqrt{Z_{0i}}} \right|_{V_k^+ = 0 \text{ za } k \neq j}. \tag{5–46}$$



Slika 5.8. *N*-prolazna mikrovalna mreža opisana raspršnim parametrima

Izraz (5–46) pokazuje kako se raspršni parametri ($S_{ij} = V_i^- / V_j^+$ uz $V_k^+ = 0$ za $k \neq j$) mreže s priključenim linijama jedinstvene karakteristične impedancije pretvaraju u nove raspršne parametre kad su na prolaze iste mreže priključene linije različite karakteristične impedancije.

Raspršna matrica daje cjelovit opis višeprolazne mreže kad se mreža promatra s njezinih prolaza, baš kao što je to slučaj s impedancijskom (ili admitancijskom) matricom koja je opisana u prethodnom odjeljku. Dok impedancijska (i admitancijska) matrica upućuje na vezu između napona i struja na prolazima, raspršna matrica upućuje na vezu između naponskih valova (ili valova snage) koji upadaju na prolaze i koji se reflektiraju od prolaza ili koji iz njih izlaze. Za neke naprave i sklopove raspršni se parametri mogu izračunati primjenom klasičnih metoda analize mreža. Raspršni se parametri mogu izravno mjeriti vektorskim analizatorom mreža (odjeljak 9.4.4). Kad su raspršni parametri neke mreže poznati, tad ih se lako može pretvoriti u parametre drugih matrica.

U većini mikrovalnih zadaća pojavljuju se dvoprolazne mreže. U odjeljku 5.3.1. pokazano je kako se može odrediti ulazna impedancija mreže s pomoću *Z*-parametara. Pogledajmo sad kako se taj problem može riješiti s pomoću *S*-parametara. U tom je slučaju umjesto impedancija Z_{ul} i Z_T umjesno uporabiti pripadajuće koeficijente refleksije koji su izravno povezani s tim impedancijama kao

$$\Gamma_{ul} = \frac{Z_{ul} - Z_0}{Z_{ul} + Z_0}, \text{ odnosno } \Gamma_T = \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0}, \tag{5–47}$$

gdje su impedancije normirane karakterističnom impedancijom sustava (Z_0) u kojem su izmjereni raspršni parametri mreže. Koeficijent refleksije definiran je u odjeljku 3.3.1.

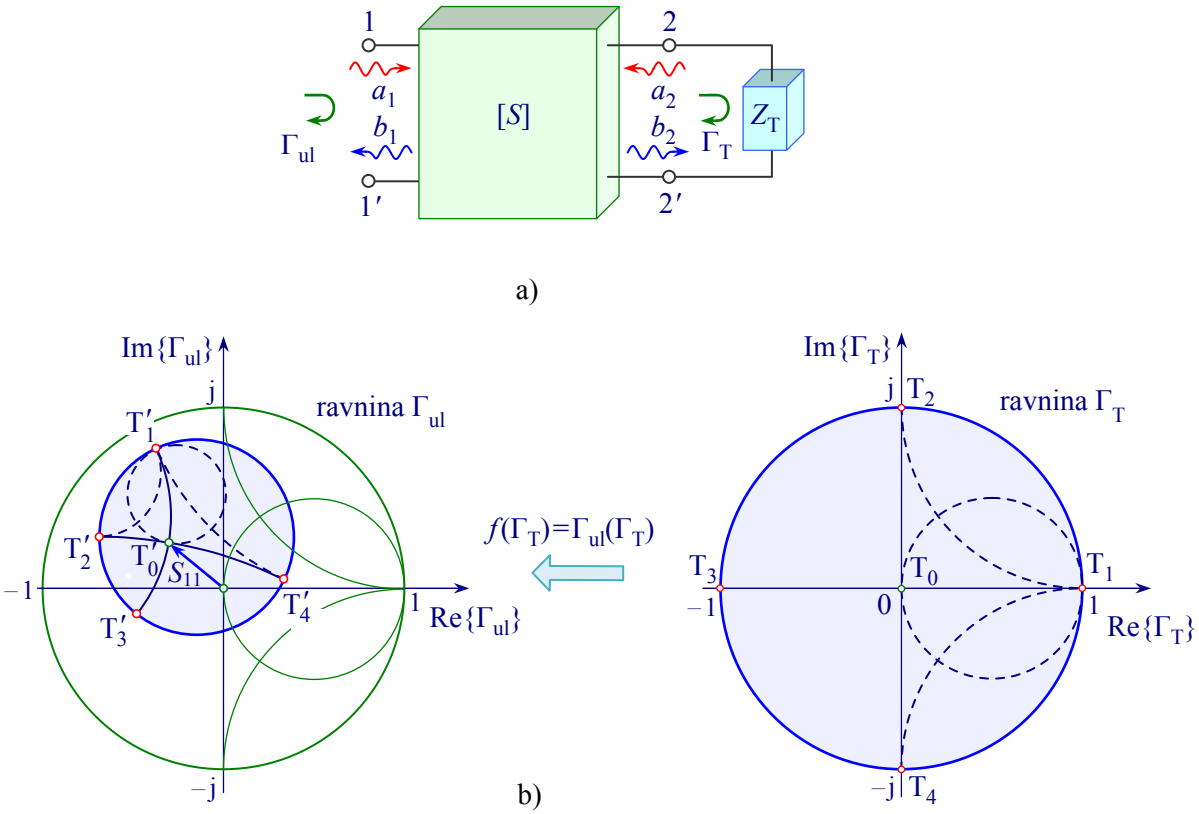
Iz sustava jednadžba (5–43) za općenitu dvoprolaznu mrežu na slici 5.9a) izlazi:

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2, \tag{5–48a}$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2. \tag{5–48b}$$

U izlaznom je krugu $\Gamma_T = a_2/b_2$ ili $a_2 = \Gamma_T b_2$ pa iz jednadžbe (5–48b) izlazi

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{S_{21}\Gamma_T}{1 - S_{22}\Gamma_T}. \tag{5–49}$$



Slika 5.9. Dvoprolazna mreža zadana *S*-parametrima: **a)** topologija mreže opterećene proizvoljnom impedancijom tereta Z_T, **b)** veza između koeficijenata refleksije Γ_T i Γ_{ul}

Dijeljenjem jednadžbe (5–48a) s a_1 i uvrštenjem u rezultat izraza (5–49) dobiva se

$$\Gamma_{ul} = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_T}{1 - S_{22}\Gamma_T}. \tag{5–50}$$

To je također Möbiusova transformacija kojom se koeficijent refleksije tereta Γ_T preslikava u Γ_{ul}, kao što je prikazano na slici 5.9b). Moduli raspršnih parametara pasivne mreže ne mogu biti veći od jedinice, $|S_{ij}| \le 1$, a jednako tako ni modul ulaznog koeficijenta refleksije ne može biti veći od jedinice, $|\Gamma_{ul}| \le 1$, za bilo koji pasivni teret, $|\Gamma_T| \le 1$, uključujući najgori mogući slučaj, tj. čistu reaktanciju $|\Gamma_T| = 1$. Pripadajuće impedancije mogu se jednostavno odrediti očitavanjem vrijednosti na superponiranom Smithovu dijagramu. Može se uočiti da je realna os preslikanog Smithovog dijagrama općenito izobličena, tj. poprima oblik kružnice. No sačuvani su pravi kutovi pod kojima se kružnice sijeku u Smithovu dijagramu. Ako je mreža bez gubitaka, onda se jedinična kružnica tereta $|\Gamma_T| = 1$ preslikava u jediničnu kružnicu $|\Gamma_{ul}| = 1$, ali je pritom realna os općenito opet izobličena.

Slično se može naći koeficijent refleksije na izlazu (prolaz 2) dvoprolazne mreže, tj.

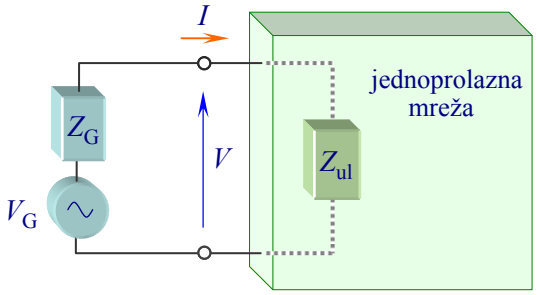
$$\Gamma_{iz} = \frac{b_2}{a_2} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_G}{1 - S_{11}\Gamma_G}, \tag{5–51}$$

kad je prolaz 1 zaključen proizvoljnom unutarnjom impedancijom generatora Z_G, čiji je koeficijent refleksije Γ_G.

Opisane transformacije poglavito nalaze primjene u analizi pojačala (odjeljak 8.8).

5.4.1. Poopćeni valovi snage

Za kompleksnu impedanciju generatora valja uvesti poopćene raspršne parametre [1]. Pogledajmo, primjerice, spoj generatora s jednoprolaznom mrežom nadomještenom njezinom ulaznom impedancijom.



Slika 5.10. Spoj generatora s jednoprolaznom mrežom ili s prolazom višeprolazne mreže

Na slici 5.10 jednoprolazna mreža ulazne impedancije Z_{ul} priključena je na generator elektromotorne sile V_G i unutarnje impedancije Z_G. U skladu s teorijom linearnih mreža, fazori napona V i struje I na ulazu jednoprolazne mreže glase:

$$V = \frac{Z_{ul}}{Z_G + Z_{ul}} V_G \,, \tag{5–52a}$$

$$I = \frac{V_G}{Z_G + Z_{ul}} \,. \tag{5–52b}$$

Generator predaje jednoprolaznoj mreži snagu

$$P_{ul} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{VI^*\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{Z_{ul}\}|I|^2 \,. \tag{5–53}$$

Uvrštenjem izraza (5–52b) u (5–53) dobiva se

$$P_{ul} = \frac{1}{2}\left|\frac{V_G}{Z_{ul}+Z_G}\right|^2 R_{ul} = \frac{\frac{1}{2}R_{ul}|V_G|^2}{(R_{ul}+R_G)^2+(X_{ul}+X_G)^2} \,,$$

što se primjenom algebarskog izraza $(x+y)^2=4xy+(x-y)^2$ može razviti u oblik

$$P_{ul} = \frac{\frac{1}{2}R_{ul}|V_G|^2}{4R_G R_{ul}+(R_{ul}-R_G)^2+(X_{ul}+X_G)^2} \,,$$

gdje su R_{ul} i R_G realni dijelovi od Z_{ul}, odnosno Z_G, a X_{ul} i X_G pripadajući imaginarni dijelovi. Najveća se snaga postiže za najmanju vrijednost nazivnika, tj. uz uvjet:

$$R_{ul} = R_G \,, \quad X_{ul} = -X_G \,. \tag{5–54}$$

Ta se najveća snaga naziva *raspoloživa snaga generatora* i označuje s P_A, tj.

$$P_A = \frac{|V_G|^2}{8\,\mathrm{Re}\{Z_G\}} \qquad (R_G>0). \tag{5–55}$$

Valja uočiti da je raspoloživa snaga određena samo parametrima generatora i ne ovisi o teretu, tj. ne ovisi o ulaznoj impedanciji jednoprolazne mreže. Dakle, da bi generator predao mreži najveću moguću snagu, mora biti zadovoljen uvjet (5–54). To je uvjet konjugirano kompleksne prilagodbe, $Z_{ul}=Z_G^*$. Valja podsjetiti da su pojmovi raspoloživa snaga i konjugirano

kompleksna prilagodba uvedeni odjeljku 3.3.6. prilikom razmatranja interakcije između generatora i trošila međusobno povezanih odsječkom prijenosne linije.

Sad se snaga, koju apsorbira jednoprolazna mreža, može napisati primjenom izraza (5–52) i (5–55) kao

$$P_{\mathrm{ul}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{VI^*\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{Z_{\mathrm{ul}}V_{\mathrm{G}}}{Z_{\mathrm{G}}+Z_{\mathrm{ul}}}\frac{V_{\mathrm{G}}^*}{Z_{\mathrm{G}}^*+Z_{\mathrm{ul}}^*}\right\} = \frac{|V_{\mathrm{G}}|^2}{8\,\mathrm{Re}\{Z_{\mathrm{G}}\}}\frac{4R_{\mathrm{G}}R_{\mathrm{ul}}}{|Z_{\mathrm{G}}+Z_{\mathrm{ul}}|^2} = MP_{\mathrm{A}}, \qquad (5–56)$$

gdje je

$$M = \frac{4R_{\mathrm{G}}R_{\mathrm{ul}}}{|Z_{\mathrm{G}}+Z_{\mathrm{ul}}|^2} \qquad (5–57a)$$

faktor razgođenja impedancije. Taj je faktor uvijek manji ili jednak jedinici. Uz uvjet $Z_{\mathrm{ul}}=Z_{\mathrm{G}}^*$ izlazi $M=1$. Faktor razgođenja određuje dio raspoložive snage predan jednoprolaznoj mreži ili teretu. Primjenom izraza (3–66), izraz (5–56) može se lako preinačiti u oblik

$$M = \frac{(1-|\Gamma_{\mathrm{G}}|^2)(1-|\Gamma_{\mathrm{T}}|^2)}{|1-\Gamma_{\mathrm{G}}\Gamma_{\mathrm{T}}|^2}. \qquad (5–57b)$$

Sad se mogu uvesti nove varijable:

$$a = \frac{V+Z_{\mathrm{G}}I}{2\sqrt{\mathrm{Re}\{Z_{\mathrm{G}}\}}}, \qquad (5–58a)$$

$$b = \frac{V-Z_{\mathrm{G}}^*I}{2\sqrt{\mathrm{Re}\{Z_{\mathrm{G}}\}}}, \qquad (5–58b)$$

poopćeni normirani valovi snage. Te su varijable definirane linearnom kombinacijom napona i struje na prolazu. U skladu s izrazima (5–41), varijabla a ima fizikalni smisao upadnoga naponskog vala normiranog drugim korijenom realnog dijela impedancije generatora, a varijabla b može se uzeti kao reflektirani normirani naponski val.

Sad se može uvesti *poopćeni koeficijent refleksije* koji je definiran omjerom valova snage

$$\Gamma_{\mathrm{ul}} = \frac{b}{a} = \frac{Z_{\mathrm{ul}}-Z_{\mathrm{G}}^*}{Z_{\mathrm{ul}}+Z_{\mathrm{G}}}. \qquad (5–59)$$

Valja uočiti da se taj izraz za realnu impedanciju linije Z_0 svodi na izraz (3–44) uveden u teoriji linija. Uz uvjet $Z_{\mathrm{ul}}=Z_{\mathrm{G}}^*$ brojnik izraza (5–58b) jednak je nuli pa je i koeficijent refleksije nula, $\Gamma_{\mathrm{ul}}=0$. U tom se slučaju izraz (5–58a) svodi na

$$a = \frac{I(Z_{\mathrm{G}}^*+Z_{\mathrm{G}})}{2\sqrt{\mathrm{Re}\{Z_{\mathrm{G}}\}}} = I\sqrt{\mathrm{Re}\{Z_{\mathrm{G}}\}} = \frac{V_{\mathrm{G}}}{2\sqrt{\mathrm{Re}\{Z_{\mathrm{G}}\}}}$$

pa je otuda raspoloživa snaga razmjerna kvadratu modula upadnog vala snage, tj.

$$P_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}|a|^2. \qquad (5–60)$$

Primjenom definicije (5–59), lako se može pokazati da se veličina

$$M = 1-|\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2 \qquad (5–61)$$

može tumačiti kao *koeficijent prijenosa snage*. Uvrštenje izraza (5–60) i (5–61) u (5–56) daje

$$P_{\mathrm{ul}} = \left(1-|\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2\right)P_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}|a|^2\left(1-|\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2\right). \qquad (5–62)$$

Konačno, za *i*-ti prolaz višeprolazne mreže, izrazi (5–58) mogu se napisati kao:

$$a_i = \frac{V_i + Z_i I_i}{2\sqrt{\mathrm{Re}\{Z_i\}}}, \tag{5–63a}$$

$$b_i = \frac{V_i - Z_i^* I_i}{2\sqrt{\mathrm{Re}\{Z_i\}}}, \tag{5–63b}$$

gdje su Z_i zaključne impedancije višeprolazne mreže. Lako se može pokazati da su za realne zaključne impedancije, $Z_i = Z_{0i}$, izrazi (5–63) istovjetni izrazima (5–42).

Primjenom izraza (5–63) mogu izvesti poopćeni raspršni parametri [2].

5.4.2. Veza između raspršne i impedancijske matrice

U ovom ćemo odjeljku pokazati kako se matrica [*S*] može odrediti iz matrica [*Z*] ili [*Y*] i obratno. Radi jednostavnosti pretpostavimo da su sve karakteristične impedancije Z_{0i} na svim prolazima međusobno jednake. (To se ograničenje može ukloniti razmatranjem poopćenih raspršnih parametara.) Da se olakša računanje pretpostavit ćemo da su $Z_{0i} = 1\ \Omega$. U daljnjim razmatranjima valja stoga imati na umu da su impedancijski parametri normirani na karakterističnu impedanciju. Iz izraza (5–41) izravno se mogu izvesti izrazi za ukupni napon i struju na *i*-tom prolazu, $V_i = a_i + b_i$, odnosno $I_i = a_i - b_i$, koji u matričnom obliku glase:

$$[V] = [a] + [b], \tag{5–64a}$$

$$[I] = [a] - [b]. \tag{5–64b}$$

Uvrštenjem ovih jednadžba u izraz $[V] = [Z][I]$ dobiva se $[Z]([a] - [b]) = [a] + [b]$, što se može izraziti kao

$$[Z][b] + [U][b] = [Z][a] - [U][a],$$

dakle

$$([Z] + [U])[b] = ([Z] - [U])[a], \tag{5–65}$$

gdje je [*U*] jedinična matrica,

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{5–66}$$

To je dijagonalna matrica u kojoj su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki jedinici, a svi ostali elementi imaju vrijednost nula.

Množenje lijeve i desne strane jednadžbe (5–65) članom $([Z] + [U])^{-1}$ slijeva daje

$$[b] = ([Z] + [U])^{-1}([Z] - [U])[a].$$

Izravnom usporedbom s jednadžbom (5–44b), $[b] = [S][a]$, izlazi

$$[S] = ([Z] + [U])^{-1}([Z] - [U]). \tag{5–67}$$

Valja uočiti da se za jednoprolaznu mrežu jednadžba (5–67) svodi na

$$S_{11} = \frac{z_{11} - 1}{z_{11} + 1}, \tag{5–68}$$

što je u skladu s izrazom (3–43) za koeficijent refleksije tereta u odjeljku 3.3.1.

Ovisnost Z-parametara o S-parametrima može se naći tako da se jednadžba (5–67) slijeva pomnoži matricom ($[Z]+[U]$). Tad je

$$[Z][S]+[U][S]=[Z]-[U],$$
$$[Z]([U]-[S])=[U]+[S]. \tag{5–69}$$

Množenjem lijeve i desne strane jednadžbe (5–69) članom $([U]-[S])^{-1}$ zdesna, konačno se dobiva

$$[Z]=([U]+[S])([U]-[S])^{-1}. \tag{5–70}$$

Za jednoprolaznu mrežu, izraz (5–70) svodi se na poznati izraz u teoriji linija (3-42), tj.

$$z_{11}=\frac{1+S_{11}}{1-S_{11}}.$$

Veza između admitancijske i raspršne matrice može se dobiti invertiranjem impedancijske matrice (5–70) kao

$$[Y]=[Z]^{-1}=\left\{([U]+[S])([U]-[S])^{-1}\right\}^{-1},$$
$$[Y]=([U]-[S])([U]+[S])^{-1}, \tag{5–71}$$

gdje je primijenjen poznati izraz iz linearne algebre $([A][B])^{-1}=[B]^{-1}[A]^{-1}$.

Za jednoprolaznu mrežu, izraz (5–71) poprima oblik

$$y_{11}=\frac{1-S_{11}}{1+S_{11}},$$

što je u skladu s izrazom $Y=1/Z$, gdje je y_{11} također normirana veličina. Valja uočiti sličnost između ovog algebarskog izraza i matričnog izraza (5–71).

Izraz (5–71) može se konačno preinačiti u oblik

$$[S]=([U]+[Y])^{-1}([U]-[Y]), \tag{5–72}$$

što se za jednoprolaznu mrežu svodi na izraz

$$S_{11}=\frac{1-y_{11}}{1+y_{11}}.$$

5.4.3. Recipročne mreže

Kao što smo vidjeli u prethodnim odjeljcima recipročne mreže imaju simetrične matrice impedancija i admitancija. Jednako je tako i raspršna matrica recipročne mreže simetrična, što se može pokazati sljedećim razmatranjem.

Zbrajanjem i oduzimanjem jednadžba (5–64) izlazi:

$$[a]=\frac{1}{2}([V]+[I])=\frac{1}{2}([Z]+[U])[I], \tag{5–73a}$$

$$[b]=\frac{1}{2}([V]-[I])=\frac{1}{2}([Z]-[U])[I]. \tag{5–73b}$$

Eliminiranjem matrice $[I]$ iz jednadžba (5–73) dobiva se

$$[b]=([Z]-[U])([Z]+[U])^{-1}[a]$$

pa izravna usporedba s jednadžbom (5–44b) daje

$$[S]=([Z]-[U])([Z]+[U])^{-1}. \tag{5–74}$$

Transponiranjem tog matričnog izraza konačno se dobiva

$$[S]^{\mathrm{t}} = \left\{([Z]+[U])^{-1}\right\}^{\mathrm{t}}([Z]-[U])^{\mathrm{t}}. \tag{5–75}$$

Već smo vidjeli da recipročna mreža ima simetričnu matricu impedancija pa je $[Z]^{\mathrm{t}} = [Z]$. Osim toga, budući da je jedinična matrica dijagonalna, izravno izlazi $[U]^{\mathrm{t}} = [U]$. Otuda su i matrice u zagradama jednadžbe (5–75) simetrične pa izlazi

$$[S]^{\mathrm{t}} = ([Z]+[U])^{-1}([Z]-[U]), \tag{5–76}$$

što je ekvivalentno jednadžbi (5–67). To dokazuje da za recipročnu mrežu vrijedi

$$[S] = [S]^{\mathrm{t}}. \tag{5–77}$$

Dakle, recipročna mreža ima važno svojstvo da joj je raspršna matrica simetrična, tj. $S_{ij} = S_{ji}$.

5.4.4. Očuvanje energije i svojstvo unitarnosti raspršne matrice mreže bez gubitaka

Zbog očuvanja energije, zbroj svih snaga koje upadaju na prolaze pasivne mreže mora biti jednaka zbroju disipirane snage P_{dis} u mreži (snaga koju mreža apsorbira) i sume svih snaga koje izlaze iz te mreže na njezinim prolazima. Drugim riječima, u skladu s izrazom (5–34), disipirana snaga u mreži jednaka je zbroju srednjih snaga koje su predane mreži, tj. koje ulaze u mrežu na svim njezinim prolazima, što se može napisati kao

$$P_{\mathrm{dis}} = \langle P_{\mathrm{ul}} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{V_i I_i^*\}. \tag{5–78}$$

Radi jednostavnosti, može se pretpostaviti da su na svim prolazima karakteristične impedancije priključnih linija međusobno jednake, $Z_{01} = Z_{02} = \ldots = Z_{0N} = Z_0$. Tad se uvrštenjem izraza (5–64) u (5–78) dobiva

$$P_{\mathrm{dis}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Re}\{(a_i + b_i)(a_i - b_i)^*\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Re}\{(a_i a_i^* - b_i b_i^* + a_i^* b_i - a_i b_i^*)\}. \tag{5–79}$$

Budući da je član $a_i^* b_i - a_i b_i^* = a_i^* b_i - \left(a_i^* b_i\right)^* = \mathrm{j}2\,\mathrm{Im}\left\{a_i^* b_i\right\}$ čisto imaginaran, izraz za srednju snagu disipiranu u mreži svodi se na

$$P_{\mathrm{dis}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} |a_i|^2 - |b_i|^2, \tag{5–80}$$

gdje je $\frac{1}{2}|a_i|^2$ upadna snaga na i-tom prolazu, a $\frac{1}{2}|b_i|^2$ reflektirana ili izlazna snaga na i-tom prolazu. Ta se jednadžba može napisati u matričnom obliku kao

$$P_{\mathrm{dis}} = \frac{1}{2}\left\{[a]^{\mathrm{t}}[a]^* - [b]^{\mathrm{t}}[b]^*\right\}. \tag{5–81}$$

Primjenom definicije raspršne matrice $[b] = [S][a]$, jednadžba (5–81) može se razviti u oblik

$$P_{\mathrm{dis}} = \frac{1}{2}\left\{[a]^{\mathrm{t}}[a]^* - ([S][a])^{\mathrm{t}}([S][a])^*\right\} = \frac{1}{2}\left\{[a]^{\mathrm{t}}[a]^* - [a]^{\mathrm{t}}[S]^{\mathrm{t}}[S]^*[a]^*\right\},$$

pa se konačno dobiva

$$P_{\mathrm{dis}} = \frac{1}{2}[a]^{\mathrm{t}}\left([U] - [S]^{\mathrm{t}}[S]^*\right)[a]^*, \tag{5–82}$$

gdje je $[U] - [S]^{\mathrm{t}}[S]^*$ *disipacijska matrica* koja je uvijek hermitska matrica. Za pasivnu je mrežu $P_{\mathrm{dis}} \geq 0$, za sve $a_i \neq 0$. Drugim riječima, determinanta i sve glavne subdeterminante disipacijske matrice moraju biti nenegativne. Mreža bez gubitaka ne disipira snagu, $P_{\mathrm{dis}} = 0$ pa za netrivijalno rješenje jednadžbe (5–82) mora biti ispunjen uvjet

$$[U]-[S]^{t}[S]^{*}=0, \tag{5–83}$$

što se može napisati kao

$$[S]^{t}[S]^{*}=[U]. \tag{5–84}$$

Taj je uvjet u matričnoj algebri poznat pod nazivom *uvjet unitarnosti*. No ta temeljna značajka mreža bez gubitaka ne ovisi o simetriji raspršne matrice pa mora vrijediti i za nerecipročne mreže, čije su raspršne matrice nesimetrične.

Uvjet unitarnosti (5–84) može se napisati u obliku reda kao

$$\sum_{k=1}^{N} S_{ki}S_{kj}^{*}=\delta_{ij}\ , \quad \text{za sve } i,j\ , \tag{5–85a}$$

gdje je Kroneckerov simbol $\delta_{ij}=1$ za $i=j$, a $\delta_{ij}=0$ za $i\neq j$. Dakle, za $i=j$ dobiva se

$$\sum_{k=1}^{N} S_{ki}S_{kj}^{*}=\sum_{k=1}^{N}\left|S_{ki}\right|^{2}=1, \quad \text{za } i=j\ . \tag{5–85b}$$

To pokazuje da zbroj kvadrata modula raspršnih parametara svakog stupca raspršne matrice mreže bez gubitaka mora biti jednak jedinici što je u skladu sa zakonom očuvanja energije.

Drugi dio jednadžbe (5–85a) za $i\neq j$ svodi se na oblik

$$\sum_{k=1}^{N} S_{ki}S_{kj}^{*}=0, \ \text{za } i\neq j\ . \tag{5–85c}$$

Ta jednadžba pokazuje da umnožak bilo kojeg stupca raspršne matrice s bilo kojim drugim konjugirano kompleksnim stupcem daje ništicu. To je značajka ortogonalnih vektora.

Drugim riječima, mreža koja ne disipira niti stvara energiju ima raspršnu matricu čiji članovi moraju zadovoljiti N^2 kompleksnih jednadžba (5–85a). Valja naglasiti da se unitarnost matrice provjerava preko stupaca. Ako je mreža recipročna, onda je [*S*] simetrična matrica pa su pritom stupci matrice [*S*] jednaki pripadajućim redcima. Stoga se, samo za takav slučaj, unitarnost matrice može provjeriti s pomoću redaka.

Za dvoprolaznu mrežu bez gubitaka, uvjet unitarnosti je $[S]^{t}[S]^{*}=[U]$ daje

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11}^{*} & S_{12}^{*} \\ S_{21}^{*} & S_{22}^{*} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

iz čega izlazi ovaj sustav linearnih jednadžba:

$$\left|S_{11}\right|^{2}+\left|S_{21}\right|^{2}=1, \tag{5–86a}$$

$$\left|S_{12}\right|^{2}+\left|S_{22}\right|^{2}=1, \tag{5–86b}$$

$$S_{11}S_{12}^{*}+S_{21}S_{22}^{*}=0, \tag{5–86c}$$

$$S_{12}S_{11}^{*}+S_{22}S_{21}^{*}=0. \tag{5–86d}$$

Jednadžbe (5–86c) i (5–86d) upotpunjuju zakon očuvanja energije i nazivaju se *jednadžbe energijske ravnoteže*. Kako su međusobno konjugirano kompleksne, dovoljno je uzeti samo jednu od njih.

Zakon očuvanja energije može se lakše shvatiti ako se jednadžbe (5–86a) i (5–86b) pomnože updnom snagom, $\frac{1}{2}|a_1|^2$, odnosno $\frac{1}{2}|a_2|^2$. Tako, primjerice, iz jednadžbe (5–86a) izlazi

$$\frac{1}{2}\left|S_{11}\right|^{2}\left|a_1\right|^{2}+\frac{1}{2}\left|S_{21}\right|^{2}\left|a_1\right|^{2}=\frac{1}{2}\left|a_1\right|^{2},$$

što se može napisati kao $P_{r1}+P_{p2}=P_{u1}$, gdje je P_{r1} reflektirana snaga na prolazu 1, P_{p2} prenesena snaga na prolaz 2, a P_{u1} je upadna snaga na prolazu 1. Iz toga je očito da jednadžba (5–86a) formulira *zakon očuvanja energije*. Slično se dobiva za pobudu na drugome prolazu

$$\frac{1}{2}|S_{12}|^2|a_2|^2+\frac{1}{2}|S_{22}|^2|a_2|^2=\frac{1}{2}|a_2|^2,$$

što se može napisati kao $P_{p1}+P_{r2}=P_{u2}$.

Primjer 5.2. Raspršna matrica dvoprolazne mreže

Izmjereni raspršni parametri dvoprolazne mreže iznose

$$[S]=\begin{bmatrix} 0{,}1\angle 0° & 0{,}8\angle 90° \\ 0{,}8\angle 90° & 0{,}2\angle 0° \end{bmatrix}.$$

Treba odrediti je li mreža recipročna, simetrična i nedisipativna.

Rješenje:

Budući da je matrica [*S*] simetrična, mreža je recipročna. No zbog toga što je $S_{11}\neq S_{22}$ mreža je fizički nesimetrična. Da bi mreža bila bez gubitaka, tj. nedisipativna, raspršni parametri moraju zadovoljiti uvjet unitarnosti, tj. jednadžbe (5–86). Za prvi i drugi stupac raspršne matrice izlazi:

$$|S_{11}|^2+|S_{21}|^2=(0{,}1)^2+(0{,}8)^2=0{,}65$$
$$|S_{12}|^2+|S_{22}|^2=(0{,}8)^2+(0{,}2)^2=0{,}68.$$

Budući da su oba rezultata manja od jedinice, mreža je disipativna, tj. pasivna.

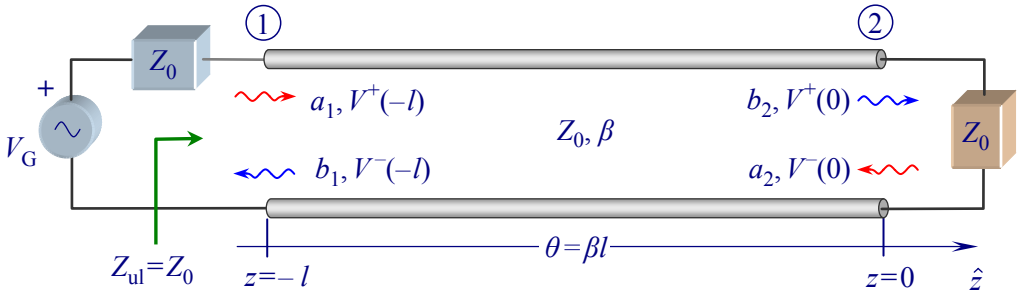
Valja istaknuti da koeficijent refleksije na prolazu *j* proizvoljno zaključene mreže nije općenito jednak parametru S_{jj}, osim ako svi prolazi nisu zaključeni prilagođenim trošilima. Jednako tako prijenosni koeficijent između dvaju prolaza (*i* i *j*) općenito nije jednak S_{ij}, osim ako svi prolazi nisu zaključeni prilagođenim trošilima. Drugim riječima, raspršni parametri neke mreže označuju samo vlastite značajke te iste mreže uz pretpostavku da je mreža linearna i da su raspršni parametri definirani uz prilagođene priključne linije na svim prolazima. Dakle, promjenom impedancija tereta i generatora ne dolazi do promjene raspršnih parametara mreže, ali može doći do promjene koeficijenta refleksije na danom prolazu i koeficijenta prijenosa između dvaju ili više prolaza.

5.4.5. Nerefleksivne mreže

Mreža je nerefleksivna na *i*-tom prolazu ako iz njega ne izlazi snaga kad je samo taj prolaz pobuđen ($a_k=0$, $k\neq i$). Tad je $S_{ii}=0$. To vrijedi i za nerefleksivnost mreže na ostalim njezinim prolazima. Mreža je nerefleksivna na svim svojim prolazima kad su svi članovi na glavnoj dijagonali raspršne matrice jednaki nuli, uz pretpostavku da su svi prolazi opterećeni prilagođenim trošilima. Pogledajmo to na primjeru odsječka prilagođene prijenosne linije.

U mikrovalnim se mrežama u praksi nerijetko nalaze serijski odsječci prilagođenih prijenosnih linija zanemarivo malih gubitaka. Razmotrimo sad raspršne parametre odsječka linije karakteristične impedancije Z_0, koja je jednaka impedanciji sustava u kojem se mjere raspršni parametri (slika 5.11). Stoga je linijski odsječak prilagođen na obama krajevima. Ako je odsječak dugačak *l*, a upadni val V^+ putuje u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$, onda se u skladu s razmatranjima u odjeljcima 3.1. i 3.3. za linijski odsječak bez gubitaka može napisati

$$V^+(-l)=V^+(0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta l}.$$



Slika 5.11. Prilagođena prijenosna linija bez gubitaka

Budući da je linija na kraju zaključena impedancijom Z_0, ne postoji reflektirani val pa je $a_2 = 0$ ili $V^-(0) = 0$. Otuda je i $b_1 = 0$ pa je $Z_{ul} = Z_0$. To znači da je $S_{11} = 0$. Zbog geometrijske je simetrije i $S_{22} = 0$. Stoga je mreža nerefleksivna. U skladu s izrazima (5–40) dobiva se:

$$b_2 = \frac{V^+(0)}{\sqrt{Z_0}},$$

$$a_1 = \frac{V^+(-l)}{\sqrt{Z_0}} = \frac{V^+(0)\mathrm{e}^{j\beta l}}{\sqrt{Z_0}},$$

pa iz definicije raspršnih parametara (5–45) izravno izlazi

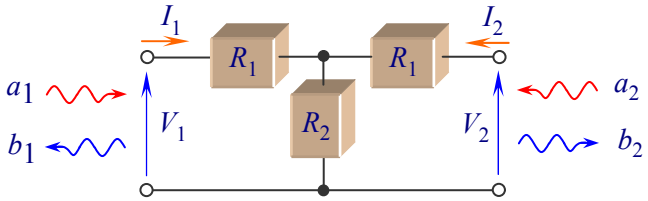
$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} = \frac{\dfrac{V^+(0)}{\sqrt{Z_0}}}{\dfrac{V^+(0)}{\sqrt{Z_0}}\mathrm{e}^{j\beta l}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l}. \tag{5–87}$$

Budući da je sklop na slici 5.11 recipročan ($S_{12} = S_{21}$), raspršna mu je matrica simetrična, tj.

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–88}$$

Primjer 5.3. Prilagođeni atenuator

Odrediti vrijednosti otpora i raspršne parametre prilagođenog atenuatora zadanog prigušenje $L(\mathrm{dB}) = 6$ dB i topologije T-črtveropola. Atenuator je prikazan na slici 5.12, a prilagođen je sustavu karakteristične impedancije 50 Ω.



Slika 5.12. Prilagođeni atenuator T-tipa

Rješenje:

Budući da je atenuator nerefleksivan na obama prolazima ($S_{11} = S_{22} = 0$), ulazna i izlazna impedancija jednake su Z_0, tj. 50 Ω. Slabljenje atenuatora (L) definirano je kao omjer ulazne snage i snage predane teretu, tj.

$$L = 10^{\frac{L(\mathrm{dB})}{10}} = \frac{P_{\mathrm{ul}}}{P_{\mathrm{T}}} = \frac{|a_1|^2}{|b_2|^2} = \frac{1}{|S_{21}|^2},$$

gdje je ulazna snaga jednaka upadnoj snazi, $P_{\mathrm{ul}} = P_{\mathrm{u}} = |a_1|^2/2$. Dakle, prilagođenom teretu predana je izlazna snaga $P_{\mathrm{T}} = P_{\mathrm{iz}}$, koja je manja je od ulazne snage za L puta. U tom su slučaju valovi napona $V_1^+ = V_1$ i $V_2^- = V_2$ pa iz slike 5.12 i definicije za L izlazi $V_1 / V_2 = \sqrt{L}$. Budući da su svi otpori koncentrirane komponente, iz definicije S-parametara izlazi da je $S_{21} = S_{12} = V_2^- / V_1^+ = 1/\sqrt{L}$ posve realna veličina. Otuda je S-matrica prilagođenog atenuatora

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{L} \\ 1/\sqrt{L} & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz uvjeta $Z_{\mathrm{ul}} = Z_{\mathrm{iz}} = Z_0$ izlazi $V_1 = Z_0 I_1$ i $I_2 = -V_2/Z_0$, a u skladu s definicijom napona i struja na slici 5.12 dobiva se $V_2 = V_1 - I_1 R_1 + I_2 R_1$. Primjenom izraza $\sqrt{L} = V_1/V_2$, može se napisati $I_2 = -V_2/Z_0 = -V_1/(Z_0\sqrt{L})$ pa nakon dijeljenja s V_1 i sređivanja izlazi

$$R_1 = Z_0 \frac{\sqrt{L}-1}{\sqrt{L}+1}.$$

Izraz za R_2 može se naći iz izraza $(I_1 + I_2) R_2 = V_1 - I_1 R_1$ za pad napona na tom otporu. Rezultat je

$$R_2 = 2Z_0 \frac{\sqrt{L}}{L-1}.$$

Stoga za zadano slabljenje od 6 dB (ili približno $L = 4$) izlazi

$$R_1 = 50\frac{\sqrt{4}-1}{\sqrt{4}+1} = 16{,}7\,\Omega \quad \text{i} \quad R_2 = 2 \cdot 50 \frac{\sqrt{4}}{4-1} = 66{,}7\,\Omega.$$

Pri upadnoj snazi $|a_1|^2/2$ izlazna je snaga jednaka četvrtini ulazne snage (−6 dB), tj.

$$P_{\mathrm{iz}} = \frac{|b_2|^2}{2} = \frac{|S_{21}a_1|^2}{2} = \frac{|a_1|^2}{2L} = \frac{|a_1|^2}{8} = \frac{P_{\mathrm{ul}}}{4}.$$

5.4.6. Pomak referentnih ravnina

Zbog toga što raspršni parametri povezuju kompleksne amplitude (veličinu i fazu) valova snage koji upadaju ili se reflektiraju na prolazima mikrovalne mreže, moraju se unaprijed odrediti referentne ravnine faze za svaki prolaz mreže posebno. Primjenom rezultata koje smo našli u odjeljku 5.4.5, pokazat ćemo kako dolazi do transformacije raspršnih parametara zbog promjene položaja referentnih ravnina u odnosu na njihov izvorni položaj.

Razmotrimo N-prolaznu mrežu na slici 5.13 kod koje je izvorna referentna ravnina i-tog prolaza smještena na ishodišnoj koordinati $z_i = 0$. Ta se ishodišna koordinata može premjestiti na bilo koje mjesto pobudne prijenosne linije prolaza i. Raspršna matrica mreže s tako definiranim referentnim ravninama prolaza označena je sa $[S]$. Razmotrimo sad skup novih referentnih ravnina koje su definirane na udaljenostima $z_i = l_i$ od prolaza. Tom skupu referentnih ravnina odgovara raspršna matrica $[S']$. Matrične jednadžbe za referentne ravnine $z_i = 0$ i $z_i = l_i$ mogu se izraziti s pomoću upadnih i reflektiranih valova snage na prolazima kao:

$$[b]=[S][a],$$

$$[b']=[S'][a'],$$

gdje se veličine bez crtica odnose na izvorne referentne ravnine na koordinatama $z_i = 0$, a veličine s crticama na nove referentne ravnine na koordinatama $z_i=l_i$.

Ako se na linije bez gubitaka primijeni rezultat (5–88), onda se dobivaju veze između novih i starih valova snage na proizvoljnom prolazu i kao:

$$a_i' = a_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i} \ , \tag{5–89a}$$

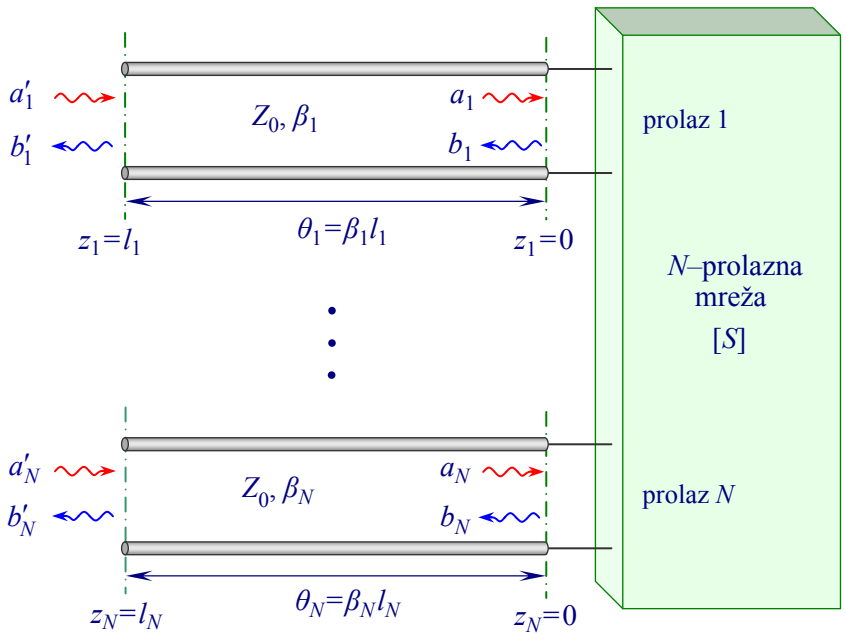
$$b_i' = b_i \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_i} \ , \tag{5–89b}$$

gdje $\theta_i=\beta_i l_i$ označuje električnu duljinu (fazni pomak) koja je razmjerna fizičkom pomaku l_i referentne ravnine od prolaza i prema van. Primjenom matričnoga zapisa, izrazi (5–89) mogu se napisati kao

$$[S']=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_N} \end{bmatrix} [S] \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_N} \end{bmatrix}. \tag{5–90}$$

Valja uočiti da je $S_{ii}' = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta_i} S_{ii}$, što znači da je faza parametara S_{ii} dvaput pomaknuta za električnu duljinu θ_i, što i ne čudi jer val dvaput prolazi istim putom l_i, prvo kao upadni i zatim kao reflektirani val.

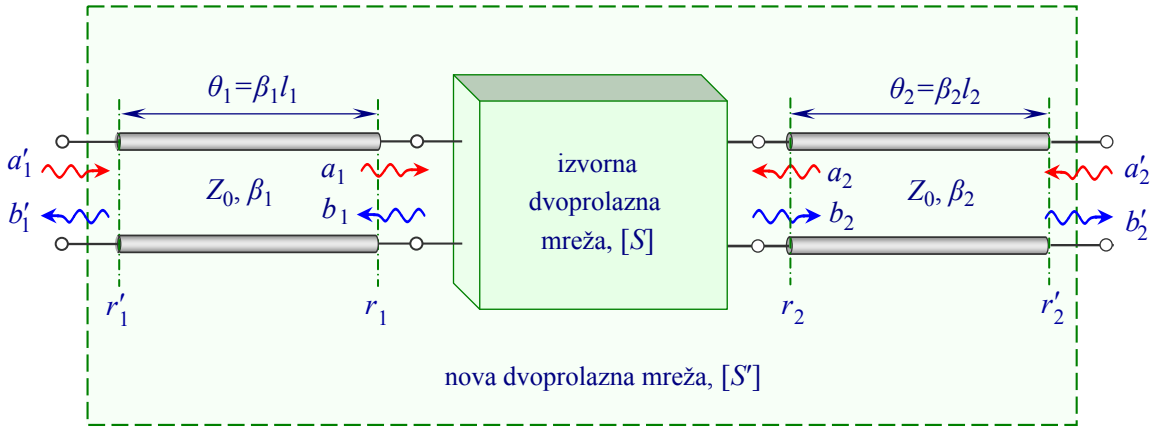
U inženjerskoj praksi vrlo se često primjenjuju dvoprolazne mreže, pa ćemo u sljedećem primjeru razmotriti posljedice pomaka referentnih ravnina na prolazima dvoprolazne mreže.



Slika 5.13. Pomaknute referentne ravnine višeprolazne mreže

Primjer 5.4. Pomak referentnih ravnina na dvoprolaznoj mreži

Za dvoprolaznu mrežu na slici 5.14 opisanu raspršnom matricom [*S*] naći raspršne parametre nove mreže koja nastaje premještanjem referentnih ravnina prolaza prema van. Odrediti također parametre mreže kad se referentne ravnine premjeste bliže mreži.



Slika 5.14. Dvoprolazna mreža s pomaknutim referentnim ravninama

Rješenje:

Na prvome prolazu dvoprolazne mreže (slika 5.14) s pomaknutim referentnim ravninama izraza (5–89) izlazi $a_1' = a_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}$, $b_1' = b_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}$ pa je

$$S_{11}' = \frac{b_1'}{a_1'} = \frac{b_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_1}}{a_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}} = S_{11} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta_1} \qquad \text{ili} \quad S_{11} = S_{11}' \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\theta_1}.$$

Na sličan se način može odrediti i prijenosni parametar

$$S_{12}' = \frac{b_1'}{a_2'} = \frac{b_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_1}}{a_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}} = S_{12} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)} \qquad \text{ili} \quad S_{12} = S_{12}' \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)}.$$

Preostala dva raspršna parametra glase:

$$S_{21}' = \frac{b_2'}{a_1'} = \frac{b_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_1}}{a_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}} = S_{21} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)} \qquad \text{ili} \quad S_{21} = S_{21}' \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)},$$

$$S_{22}' = \frac{b_2'}{a_2'} = \frac{b_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2}}{a_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}} = S_{22} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta_2} \qquad \text{ili} \quad S_{22} = S_{22}' \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\theta_2}.$$

Konačno, raspršna matrica dvoprolazne mreže za nove referentne ravnine poprima oblik

$$[S'] = \begin{bmatrix} S_{11} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta_1} & S_{12} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\theta_1+\theta_1)} \\ S_{21} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\theta_1+\theta_1)} & S_{22} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta_2} \end{bmatrix}.$$

Do istog se rezultata može doći izravnom primjenom izraza (5–90) na dvoprolaznu mrežu.

Pri mjerenju raspršnih parametara tranzistora izvorna referentna ravnina označuje ravnina na vanjskim prolazima mjernog sklopa u koji je ugrađen tranzistor. No nerijetko nas zanimaju raspršni parametri na stvarnim prolazima tranzistora. U tu svrhu valja izvesti inverznu transformaciju raspršnih parametara, tako da se međusobno zamijene položaji referentnih ravnina na slici 5.14. Kao rezultat dobiva se

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11}' \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\theta_1} & S_{12}' \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_1)} \\ S_{21}' \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_1)} & S_{22}' \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\theta_2} \end{bmatrix}.$$

5.5. Prijenosni parametri

Za opisivanje linearnih mikrovalnih mreža s proizvoljnim brojem prolaza mogu se rabiti impedancijski, admitancijski i raspršni parametri. No u mikrovalnoj se praksi dvoprolazne mreže nerijetko povezuju u kaskadu. Tad je vrlo korisno uvesti *prijenosne matrice* koje daju izlazne veličine u funkciji ulaznih veličina. Glavni je razlog za uvođenje matrica prijenosa taj da se matrica koja opisuje cjelokupnu kaskadu jednostavno dobiva množenjem prijenosnih matrica pojedinačnih dvoprolaznih mreža koje se nalaze u kaskadi. Pri tomu nezavisne varijable mogu biti napon i struja, upadni i reflektirani valovi snage ili bilo koje druge dvije linearno nezavisne veličine dvoprolazne mreže. Uporabom napona i struja, odgovarajuća se matrica naziva *strujno-naponska prijenosna matrica* s *ABCD*-parametrima. Ako se odaberu upadni i reflektirani valovi snage, onda se odgovarajuća matrica naziva *matrica prijenosa valova snage*.

5.5.1. Strujno-naponska prijenosna matrica

Na slici 5.15a) prikazana je dvoprolazna mreža s ulaznim veličinama V_1, I_1 i izlaznim veličinama V_2, I_2. Budući da se V_2 i I_2 mogu uzeti kao nezavisne varijable linearne mreže, zavisne varijable V_1, I_1 linearno su vezane s V_2 i I_2. Otuda izlazi:

$$V_1 = AV_2 + BI_2\,, \tag{5–91a}$$

$$I_1 = CV_2 + DI_2\,, \tag{5–91b}$$

gdje su A, B, C i D odgovarajuće kompleksne konstante koje opisuju dvoprolaznu mrežu. Valja uočiti da je smjer struje na slici 5.15a) odabran tako da struja teče slijeva udesno na svim prolazima. To je učinjeno s razlogom, jer tako izlazna struja prve mreža preuzima ulogu ulazne struje sljedeće dvoprolazne mreže u kaskadi, kao što je prikazano na slici 5.15b).

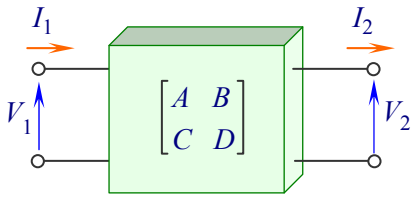
U matričnom obliku sustav jednadžba (5–91) glasi

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{5–92}$$

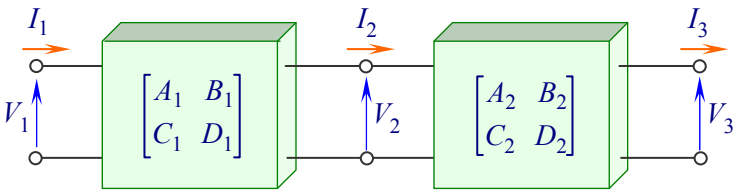
Za kaskadni spoj dviju dvoprolaznih mreža (slika 5.15b)) može se napisati

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}.$$

a)

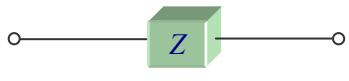
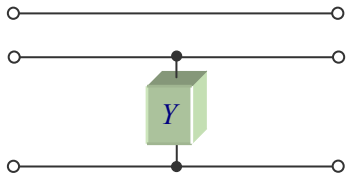
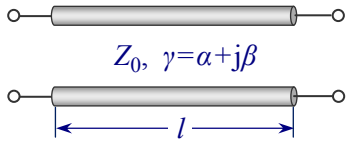
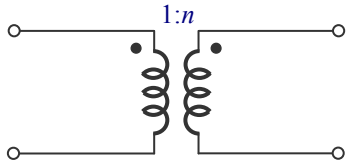
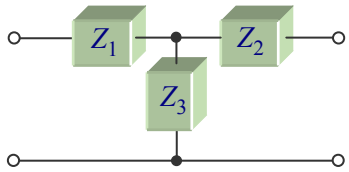
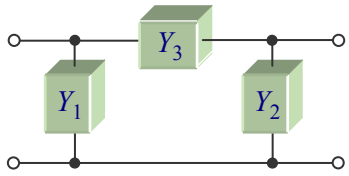


b)



Slika 5.15. a) Dvoprolazna mreža i **b)** kaskadni spoj mreža opisanih *ABCD*-parametrima

Tablica 5.1. *ABCD*-matrice najčešće primjenjivanih dvoprolaznih mreža

Mreža	*ABCD* - matrica
	$\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$
	$\alpha \neq 0$: $\begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ Y_0 \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix}$ $\alpha = 0$: $\begin{bmatrix} \cos \beta l & \mathrm{j} Z_0 \sin \beta l \\ \mathrm{j} Y_0 \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1+\frac{Z_1}{Z_3} & Z_1+Z_2+\frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & 1+\frac{Z_2}{Z_3} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1+\frac{Y_2}{Y_3} & \frac{1}{Y_3} \\ Y_1+Y_2+\frac{Y_1 Y_2}{Y_3} & 1+\frac{Y_1}{Y_3} \end{bmatrix}$

Uvrštenjem druge matrične jednadžbe u prvu izravno se dobiva

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}, \tag{5–93}$$

iz čega se vidi da je *ABCD*-matrica kaskade jednaka umnošku *ABCD*-matrica pojedinačnih dvoprolaznih mreža. Pritom valja pripaziti da redoslijed množenja matrica odgovara redoslijedu pojavljivanja mreža u kaskadi jer množenje matrica općenito nije komutativno.

Parametri strujno-naponske prijenosne matrice mogu se korisno uporabiti i za određivanje ulazne impedancije dvoprolazne mreže opterećene proizvoljnom impedancijom tereta Z_T. Dijeljenjem jednadžba (5–91) izlazi

$$Z_{\text{ul}} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 + BI_2}{CV_2 + DI_2}.$$

Podijele li se potom brojnik i nazivnik strujom I_2, dobiva se koristan izraz

$$Z_{\text{ul}} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AZ_{\text{T}} + B}{CZ_{\text{T}} + D}, \tag{5–94}$$

gdje je $Z_{\text{T}} = V_2/I_2$ impedancija tereta.

Veza između strujno-naponske prijenosne matrice i *Z*-matrice može se lako dobiti ako se u sustavu linearnih jednadžba (5–19) za impedancije promijeni predznak struje I_2, u skladu sa slikom 5.15a) i definicijom *ABCD*-parametara, tj.

$$V_1 = z_{11}I_1 - z_{12}I_2,$$

$$V_2 = z_{21}I_1 - z_{22}I_2.$$

Uvrštenjem ovih izraza u jednadžbu (5–92) dobiva se

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}/z_{21} & (z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21})/z_{21} \\ 1/z_{21} & z_{22}/z_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \tag{5–95}$$

gdje su *ABCD*-parametri definirani preko *Z*-parametara. Sad se iz izraza (5–95) može lako naći da je determinanta *ABCD*-matrice recipročne dvoprolazne mreže ($z_{21} = z_{12}$) jednaka jedinici, tj.

$$AD - BC = 1 \quad \text{(za recipročnu mrežu).}$$

Slično se mogu naći veze s drugim parametrima. U tablici 5.1. prikazani su *ABCD*-parametri najčešće primjenjivanih dvoprolaznih mreža.

5.5.2. Matrica prijenosa valova snage

Primjenom raspršnih parametara mogu se naći parametri matrice prijenosa valova snage. U toj su matrici nezavisni i zavisni valovi snage jednog prolaza povezani s nezavisnim i zavisnim valovima snage drugog prolaza kao

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix}, \tag{5–96}$$

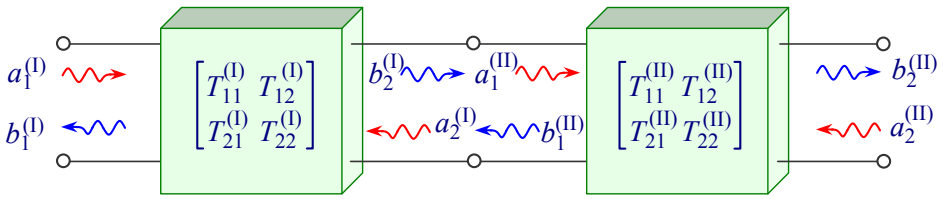
gdje su T_{ij} konstante koje opisuju mrežu. Iz definicije raspršne matrice i matrice prijenosa valova snage izravno se uspostavlja veza između parametara tih dviju matrica kao:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22} & S_{11} \\ -S_{22} & 1 \end{bmatrix}, \tag{5–97a}$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_{22}} \begin{bmatrix} T_{12} & T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} \\ 1 & -T_{21} \end{bmatrix}. \tag{5–97b}$$

T-parametri korisni su za analizu lančanog spoja ili kaskade dvoprolaznih mreža jer za dvije ulančane dvoprolazne mreže (slika 5.16) izlazni (zavisni) val snage $b_2^{(\text{I})}$ prve mreže čini upadni (nezavisni) val snage $a_2^{(\text{II})}$ sljedeće mreže. Slično se može reći i za drugi par valova snage. Stoga se kaskada proizvoljnog broja dvoprolaznih mreža može jednostavno riješiti uzastopnim množenjem prijenosnih matrica pojedinačnih mreža.

Može se također lako pokazati da je za recipročnu mrežu ($S_{21} = S_{12}$) determinanta matrice (5–97a) jednaka jedinici, tj. $T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$.



Slika 5.16. Kaskada dviju dvoprolaznih mreža opisanih *T*-parametrima

No raspršna matrica kaskade dviju dvoprolaznih mreža može se izravno izračunati iz sustava linearnih jednadžba uz oznake valova snage, kao što je prikazano na slici 5.16. Izvod ostavljamo u zadatak čitatelju, a kao rezultat dobiva se

$$[S]_{\text{kaskade}} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(I)} + \dfrac{S_{12}^{(I)} S_{21}^{(I)} S_{11}^{(II)}}{1 - S_{22}^{(I)} S_{11}^{(II)}} & \dfrac{S_{12}^{(I)} S_{12}^{(II)}}{1 - S_{22}^{(I)} S_{11}^{(II)}} \\ \dfrac{S_{21}^{(I)} S_{21}^{(II)}}{1 - S_{22}^{(I)} S_{11}^{(II)}} & S_{22}^{(II)} + \dfrac{S_{12}^{(II)} S_{21}^{(II)} S_{22}^{(I)}}{1 - S_{22}^{(I)} S_{11}^{(II)}} \end{bmatrix}. \tag{5–98}$$

Do istog se rezultata može doći rješavanjem grafa toka signala (odjeljak 5.7). Ako se umjesto druge dvoprolazne mreže na izlaz prve mreže priključi jednoprolazna mreža (teret), čiji je koeficijent refleksije Γ_T jednak raspršnom parametru $S_{11}^{(II)}$, onda se matrica (5–98) svodi na izraz (5–50) za ulazni koeficijent refleksije dvoprolazne mreže zaključene proizvoljnom impedancijom tereta (odjeljak 5.4).

U tablici 5.2. skupno su prikazane pretvorbe parametara korisnih dvoprolaznih mreža.

5.6. Analiza simetričnih mreža primjenom svojstvenih vrijednosti

Razmotrimo transformaciju vektora *N*-tog reda

$$[X] = [x_1 \quad x_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad x_N]^t, \tag{5–99}$$

u novi vektor

$$[X'] = [x_1' \quad x_2' \quad \cdot \quad \cdot \quad x_N']^t, \tag{5–100}$$

primjenom kvadratne matrice $[A]$, *N*-tog reda, što se može izraziti matričnom jednadžbom

$$[A][X] = [X']. \tag{5–101}$$

Transformacija (5–101) može se objasniti na primjeru transformacije točke $T(x_1, x_2)$ u novu točku $T'(x_1', x_2')$ u pravokutnom koordinatnom sustavu x_1, x_2. Transformacija točaka uvijek se može promatrati kao transformacija vektora kojima su hvatišta u ishodištu, a vrhovi u koordinatama tih točaka. Pretpostavimo da transformaciju obavlja dvodimenzionalna matrica $[A]$. Novi će vektor, općenito, imati različit smjer i veličinu u odnosu na izvorni vektor, kao što je prikazano na slici 5.17 slijeva. Općenito, postoji više matrica $[A]$ koje mogu obaviti takvu transformaciju, tj. zadovoljiti jednadžbu (5–101).

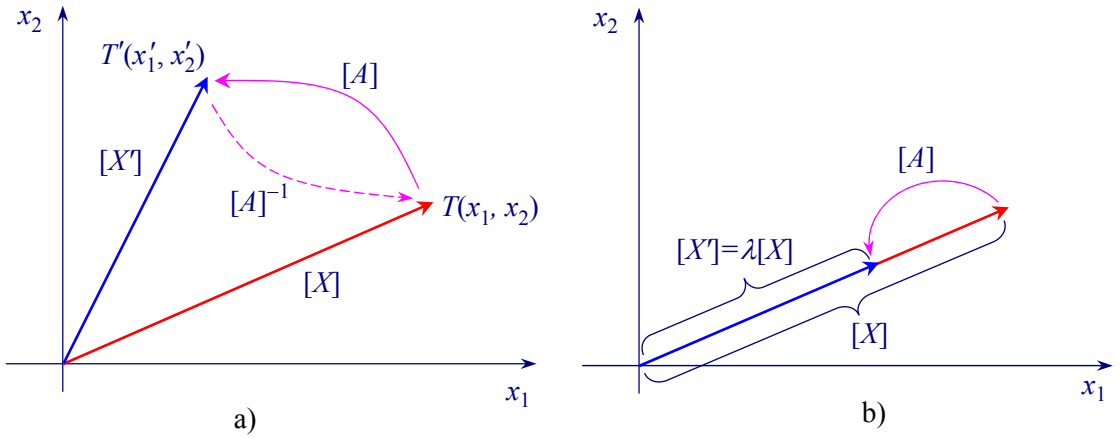
Uvjet (5–103) daje algebarsku jednadžbu *N*-tog stupnja. Općenito se dobiva *N* rješenja ili *N* vrijednosti faktora λ. Korijeni jednadžbe (5–103) mogu se označiti s λ_i. Uvrštenjem tih korijena u jednadžbu (5–102), dobivaju se odgovarajuća rješenja za vektore $[X_i]$:

$$([A] - \lambda_i [U])[X_i] = 0, \quad \text{tj.} \quad [A][X_i] = \lambda_i [X_i].$$

Opisani problem i njegova rješenja toliko su važni da su im dani posebni nazivi. Zadaća formulirana jednadžbom (5–101) poznata je pod nazivom *problem svojstvenih vrijednosti* [6].

Tablica 5.2. Pretvorbe parametara dvoprolazne mreže

	[S]	[Z]	[Y]	[ABCD]
S_{11}	S_{11}	$\frac{(z_{11}-Z_0)(z_{22}+Z_0)-z_{12}z_{21}}{(z_{11}+Z_0)(z_{22}+Z_0)-z_{12}z_{21}}$	$\frac{(Y_0-y_{11})(Y_0+y_{22})+y_{12}y_{21}}{(Y_0+y_{11})(Y_0+y_{22})-y_{12}y_{21}}$	$\frac{A+B/Z_0-CZ_0-D}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{12}	S_{12}	$\frac{2z_{12}Z_0}{(z_{11}+Z_0)(z_{22}+Z_0)-z_{12}z_{21}}$	$\frac{-2y_{12}Y_0}{(Y_0+y_{11})(Y_0+y_{22})-y_{12}y_{21}}$	$\frac{2(AD-BC)}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{21}	S_{21}	$\frac{2z_{21}Z_0}{(z_{11}+Z_0)(z_{22}+Z_0)-z_{12}z_{21}}$	$\frac{-2y_{21}Y_0}{(Y_0+y_{11})(Y_0+y_{22})-y_{12}y_{21}}$	$\frac{2}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{22}	S_{22}	$\frac{(z_{11}+Z_0)(z_{22}-Z_0)-z_{12}z_{21}}{(z_{11}+Z_0)(z_{22}+Z_0)-z_{12}z_{21}}$	$\frac{(Y_0+y_{11})(Y_0-y_{22})+y_{12}y_{21}}{(Y_0+y_{11})(Y_0+y_{22})-y_{12}y_{21}}$	$\frac{-A+B/Z_0-CZ_0+D}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
z_{11}	$Z_0\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	z_{11}	$\frac{y_{22}}{y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}}$	$\frac{A}{C}$
z_{12}	$Z_0\frac{2S_{12}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	z_{12}	$\frac{-y_{12}}{y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}}$	$\frac{AD-BC}{C}$
z_{21}	$Z_0\frac{2S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	z_{21}	$\frac{-y_{21}}{y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}}$	$\frac{1}{C}$
z_{22}	$Z_0\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	z_{22}	$\frac{y_{11}}{y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}}$	$\frac{D}{C}$
y_{11}	$Y_0\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}}$	y_{11}	$\frac{D}{B}$
y_{12}	$Y_0\frac{-2S_{12}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{-z_{12}}{z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}}$	y_{12}	$\frac{BC-AD}{B}$
y_{21}	$Y_0\frac{-2S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{-z_{21}}{z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}}$	y_{21}	$\frac{1}{B}$
y_{22}	$Y_0\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{z_{11}}{z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}}$	y_{22}	$\frac{A}{B}$
A	$\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{21}}$	A
B	$Z_0\frac{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}}{z_{21}}$	$-\frac{1}{y_{21}}$	B
C	$\frac{1}{Z_0}\frac{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{y_{12}y_{21}-y_{11}y_{22}}{y_{21}}$	C
D	$\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{21}}$	D



Slika 5.17. a) Općenita transformacija točke u dvodimenzionalnom koordinatnom sustavu; **b)** transformacija točke $[X]$ u novu točku $[X']=\lambda[X]$

Jednadžbe (5–101) i (5–102) nazivaju se *jednadžbe svojstvenih vrijednosti* matrice $[A]$, a jednadžba (5–103) poznata je pod nazivom *karakteristična jednadžba.* Korijeni λ_i te jednadžbe označuju *svojstvene vrijednosti* matrice $[A]$, a vektor $[X]$ označuje *svojstveni vektor* ili *svojstvenu funkciju* matrice $[A]$. Pokušajmo sad naći takav vektor $[X]$ koji će se primjenom zadane matrice $[A]$ moći transformirati u novi vektor $[X']=\lambda[X]$, gdje je λ konstanta proporcionalnosti [6], [7]. Novi će vektor zadržati isti smjer, ali će promijeniti veličinu, kao što je prikazano na slici 5.17 zdesna. Može se pokazati da postoji više takvih vektora i da se prilikom određivanja takvog vektora može primijeniti postupak dijagonalizacije kvadratne matrice $[A]$.

Opisana transformacija može se matematički izraziti jednadžbom

$$[A][X]=\lambda[X]\,, \tag{5–102a}$$

koja se može preurediti u ovaj oblik:

$$([A]-\lambda[U])[X]=0\,. \tag{5–102b}$$

Jednadžba (5–102b) označuje sustav homogenih jednadžba. Trivijalno rješenje za $[X]=0$ nije primjenjivo, a netrivijalno se rješenje dobiva samo uz uvjet kad je determinanta sustava jednaka nuli, tj.

$$\det|[A]-\lambda[U]|=0\,. \tag{5–103}$$

Provedeno razmatranje sad se može primijeniti na raspršnu matricu N-prolazne mreže, koja je definirana matričnom jednadžbom

$$[S][a]=[b]. \tag{5–104}$$

Izravna usporedba s izrazom (5–101) pokazuje da svojstveni vektor označuje vektor moguće pobude valovima snage, a svojstvena vrijednost označuje odgovarajući koeficijent refleksije izmjeren na i-tom prolazu mreže. Budući da u tom slučaju općenit vektor pobude $[a]$ nije bilo koji vektor nego je to jedan poseban vektor (svojstveni vektor) koji zadovoljava jednadžbu (5–101), jednadžba (5–104) može se napisati kao

$$[S][X]=s[X], \tag{5–105}$$

gdje je $[X]$ svojstveni (pobudni) vektor, a s svojstvena vrijednost raspršne matrice $[S]$. Sređivanjem izraza (5–105) dobiva se ova karakteristična jednadžba raspršne matrice

$$|[S]-s[U]|=0\,. \tag{5–106}$$

Iz sustava homogenih jednadžba (5–106) moguće je odrediti N vrijednosti s za koje postoji N vektora $[X]$ različitih od nule. Za N-prolaznu mrežu, jednadžba (5–106) poprima oblik

$$\det\left|\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdot & \cdot & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & & & S_{2N} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ S_{N1} & . & . & . & S_{NN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & s & & & . \\ \cdot & & \cdot & & . \\ \cdot & & & \cdot & . \\ 0 & . & . & . & s \end{bmatrix}\right| = 0 \qquad (5\text{–}107)$$

što se može napisati kao

$$\det\left|\begin{bmatrix} S_{11}-s & S_{12} & \cdot & \cdot & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22}-s & & & S_{2N} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ S_{N1} & . & . & . & S_{NN}-s \end{bmatrix}\right| = 0\,. \qquad (5\text{–}108)$$

Izjednačenjem determinante (5–108) s nulom dobiva se polinom $F(s)$, N-tog reda oblika

$$F(s) = (-s)^N + d_1(-s)^{N-1} + d_2(-s)^{N-2} + \ldots + d_N\,. \qquad (5\text{–}109)$$

Taj je izraz poznat pod nazivom *karakteristični polinom* i može se izraziti kao funkcija korijena $s_1, s_2 \ldots s_N$ karakteristične jednadžbe

$$F(s) = \left|[S] - s[U]\right| = 0\,,$$

ili kao

$$F(s) = (s_1 - s)\cdot(s_2 - s)\cdots(s_N - s)\,. \qquad (5\text{–}110)$$

Korijeni s_i, za $i = 1, 2 \ldots N$ označuju svojstvene vrijednosti raspršne matrice $[S]$. Neki od njih mogu biti višestruki. Općenito, za svaki korijen s_i postoji jedno netrivijalno rješenje $[X_i]$, tj. jedan svojstveni vektor. Za bilo koju vrijednost s različitu od s_i jednadžba (5–105) ima samo trivijalno rješenje, $[X]=0$.

Valja napomenuti da ako je $[X_i]$ svojstveni vektor jednadžbe (5–105) koji odgovara svojstvenoj vrijednosti s_i, onda i $C_i[X_i]$ označuje svojstveni vektor, gdje je proizvoljna konstanta C_i različita od nule. To znači da veličina svojstvenoga vektora nije zadana jednadžbom svojstvenih vrijednosti (5–105). Veličina svojstvenoga vektora dana je kao

$$\left|C[X_i]\right| = \sqrt{(C[X_i])^t (C[X_i])^*} = C\sqrt{[X_i]^t [X_i]^*}\,. \qquad (5\text{–}111)$$

Konstanta C može se tako namjesti da svojstveni vektor poprimi jediničnu vrijednost.

Ako je mreža bez gubitaka, onda je nužno da je $|s_i| = 1$ jer bi u protivnom ukupna upadna snaga u mrežu bila veća ili manja od ukupne izlazne snage višeprolazne mreže. Za mrežu bez gubitaka to se može lako dokazati primjenom zakona očuvanja energije. Budući da mreža ne disipira snagu, ukupna je izlazna snaga jednaka ukupnoj ulaznoj snazi,

$$P_{\text{dis}} = P_{\text{ul}} - P_{\text{iz}} = \sum_{i=1}^{N} |a_i|^2 - |b_i|^2 = [a]^t [a]^* - [b]^t [b]^* = 0\,.$$

Primjenom jednadžbe (5–105), uz zamjenu $[a]=[X]$ i $[b]=s[X]$, iz prethodnog izraza izlazi

$$[X]^t [X]^* - s[X]^t s^* [X]^* = 0\,,$$

što ima netrivijalno rješenje

$$1 - |s|^2 = 0\,, \text{ ili } |s| = 1\,.$$

Time je dokazano da sve mreže bez gubitaka imaju jedinične module svojstvenih vrijednosti.

5.6.1. Svojstvene vrijednosti dvoprolazne mreže

Razmotrimo sad poseban slučaj dvoprolazne mreže. Prema izrazu (5–105) jednadžba svojstvenih vrijednosti dvoprolazne mreže ima oblik [7]

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{5–112}$$

gdje je svojstveni vektor

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{5–113}$$

Karakteristična jednadžba, prema izrazima (5–106)-(5–108), poprima oblik

$$\det\left|[S] - s[U]\right| = \begin{vmatrix} S_{11} - s & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} - s \end{vmatrix} = 0. \tag{5–114}$$

Svojstvene vrijednosti simetrične dvoprolazne mreže

Razmotrimo recipročnu i geometrijski simetričnu dvoprolaznu mrežu ($S_{11} = S_{22}$, $S_{12} = S_{21}$), koja se često nalazi u praksi. Njezina je karakteristična jednadžba [7]

$$\begin{vmatrix} S_{11} - s & S_{21} \\ S_{21} & S_{11} - s \end{vmatrix} = 0, \tag{5–115}$$

tj.

$$(S_{11} - s)^2 - S_{21}^2 = 0,$$

čija su rješenja:

$$s_1 = S_{11} + S_{21}, \tag{5–116a}$$

$$s_2 = S_{11} - S_{21}. \tag{5–116b}$$

Dakle, svojstvene vrijednosti označuju linearne kombinacije raspršnih parametara simetričnih recipročnih mreža. Otuda se raspršni parametri geometrijski simetrične recipročne mreže mogu izraziti s pomoću svojstvenih vrijednosti kao:

$$S_{11} = \frac{s_1 + s_2}{2}, \tag{5–117a}$$

$$S_{21} = \frac{s_1 - s_2}{2}. \tag{5–117b}$$

Za $s = s_1 = S_{11} - S_{21}$, jednadžba svojstvenih vrijednosti glasi

$$[S][X_1] = s_1[X_1], \tag{5–118}$$

gdje je

$$[X_1] = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}. \tag{5–119}$$

Jednadžba (5–118) može se dalje razviti u oblik

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{21} & S_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = (S_{11} + S_{21}) \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}, \tag{5–120}$$

iz kojeg izlaze dvije istovjetne jednadžbe

$$S_{11}x_{11} + S_{21}x_{12} = (S_{11} + S_{21})x_{11}.$$

Iz toga izravno slijedi

$$x_{12} = x_{11} \tag{5–121}$$

pa je

$$[X_1] = x_{11}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \tag{5–122}$$

gdje je veličina x_{11} proizvoljne vrijednosti.

Za normirani svojstveni vektor dobiva se

$$\|[X_1]\| = 1 = \sqrt{x_{11}^2 + x_{12}^2} = x_{11}\sqrt{2}\ ,$$

tj.

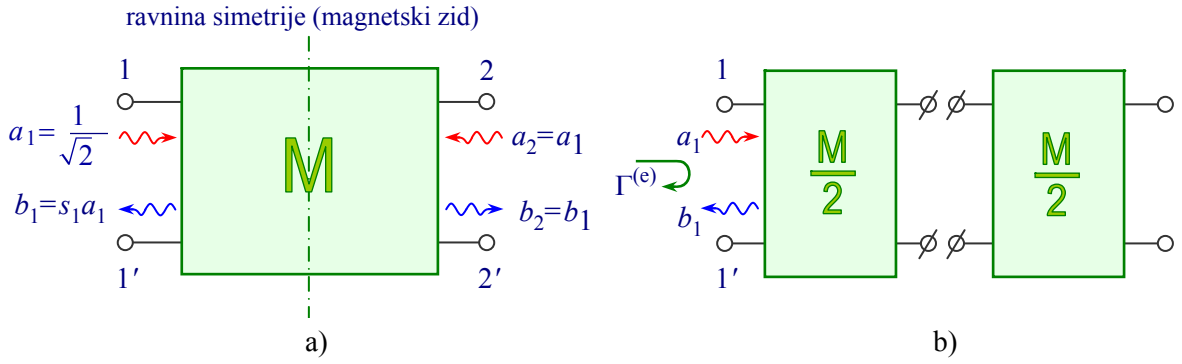
$$x_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ . \tag{5–123}$$

Sad se normirani svojstveni vektor može napisati kao

$$[X_1] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}. \tag{5–124}$$

Svojstveni vektor $[X_1]$ u izrazu (5–124) označuje pobudu dvoprolazne mreže s pomoću dvaju istofaznih upadnih valova snage jednakih amplituda, kao što je prikazano na slici 5.18a). Istofazna pobuda ili pobuda *parnim modom* odgovara uvjetu praznoga hoda (otvoreni strujni krug) na ravnini simetrije dvoprolazne mreže. Tad se i lijeva i desna polovica mreže ponaša posve jednako pa je dovoljno razmotriti samo jednu od njih, kao što je prikazano na slici 5.18b).

Pobuda parnim modom može se fizikalno objasniti ako se pretpostavi da je mreža na prolazima 1 i 2 istodobno pobuđena istofaznim naponskim izvorima elektromotorne sile V, kao što je prikazano na slici 5.19. Tad će u svakom vodiču struja, koja prolazi ravninom simetrije i koju inducirana izvor, na prolazu 1 imati jednaku amplitudu, ali suprotni smjer u odnosu na struju koju inducira izvor na prolazu 2. Stoga će se sve struje na ravnini simetrije poništiti. Budući da je u svim točkama ravnine simetrije struja nula, svaki se vodič može presjeći a da ne dođe do bilo kakve promjene u mreži i na njezinim priključcima. Stoga se za parni mod pobude, simetrična recipročna dvoprolazna mreža može nadomjestiti jednoprolaznom mrežom kojoj svi vodiči na mjestu reza ostaju otvoreni. Tako dobivena jednoprolazna nadomjesna mreža naziva se *svojstvena mreža*. Val snage b_1 reflektiranoga signala opisane



Slika 5.18. a) Simetrična dvoprolazna mreža pobuđena parnim modom; **b)** nadomjesna jednoprolazna svojstvena mreža

mreže jednak je $s_1 a_1$. Na slici 5.18b) prikazana je svojstvena mreža svojstvenoga rješenja za istofaznu pobudu. Za svojstvenu mrežu na slici 5.18b) reflektirani je val snage

$$b_1 = \Gamma^{(e)} a_1 = s_1 a_1$$

pa je pripadajući koeficijent refleksije na ulazu svojstvene mreže

$$\Gamma^{(e)} = s_1 = s^{(e)}, \tag{5–125}$$

gdje je $s_1 = s^{(e)}$ svojstvena vrijednost za parni mod pobude. Oznaka (e) u eksponentu odnosi se na parni mod pobude (prema: engl. *even*).

Na visokim frekvencijama, otvoreni strujni krug može se nadomjestiti magnetskim zidom (tangencijalno magnetsko polje na ravnini simetrije jednako je nuli, $\vec{H}_t = 0$).

Isti postupak može se provesti i za drugu svojstvenu vrijednost $s = s_2 = S_{11} - S_{21}$,

$$[S][X_2] = s_2 [X_2], \tag{5–126}$$

gdje je

$$[X_2] = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}. \tag{5–127}$$

Jednadžba (5–126) može se dalje razviti kao

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{21} & S_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = (S_{11} - S_{21}) \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}, \tag{5–128}$$

što daje dvije istovjetne jednadžbe

$$S_{11} x_{21} + S_{21} x_{22} = (S_{11} - S_{21}) x_{21}.$$

Iz toga izravno izlazi

$$x_{22} = -x_{21} \tag{5–129}$$

pa je

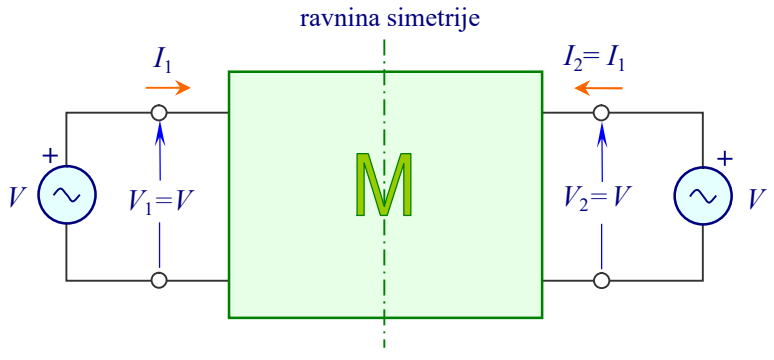
$$[X_2] = x_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{5–130}$$

Za normirani svojstveni vektor dobiva se

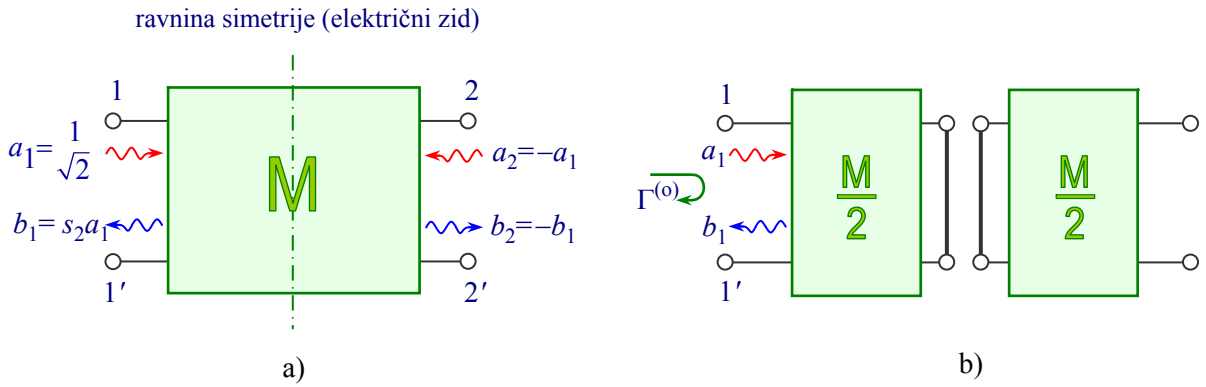
$$[X_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{5–131}$$

gdje je

$$x_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{5–132}$$



Slika 5.19. Simetrična dvoprolazna mreža pobuđena parnim modom



Slika 5.20. a) Simetrična recipročna dvoprolazna mreža pobuđena neparnim modom; **b)** nadomjesna jednoprolazna svojstvena mreža

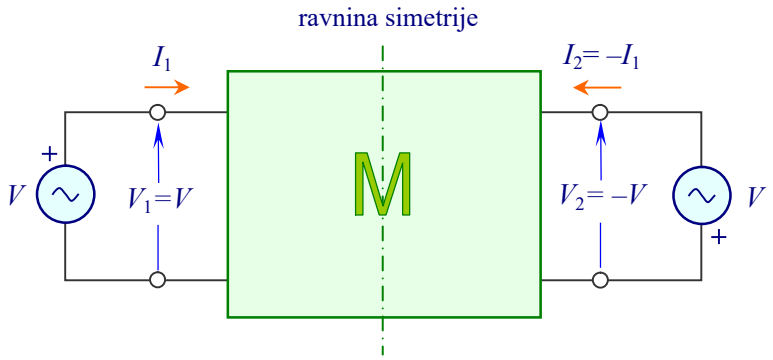
Svojstveni vektor $[X_2]$ u izrazu (5–131) označuje pobudu dvoprolazne mreže s pomoću dvaju protufaznih upadnih valova snage jednakih amplituda, kao što je prikazano na slici 5.20a). Protufazna pobuda ili pobuda *neparnim modom* stvara uvjete kratkoga spoja na ravnini simetrije dvoprolazne mreže. Ekvivalentni primjer prikazan je na slici 5.21, gdje su prolazi 1 i 2 istodobno pobuđeni protufaznim naponskim izvorima elektromotorne sile V. Sad će pad napona, stvoren izvorom na prolazu 1, na svakom vodiču koji prolazi ravninom simetrije imati jednaku amplitudu, ali suprotni predznak u odnosu na napon koji na istim vodičima stvara izvor na prolazu 2. Stoga će se svi naponi na ravnini simetrije poništiti. Budući da su naponi u svim točkama ravnine simetrije jednaki nuli, svi se vodiči mogu presjeći i kratko spojiti, a da pritom ne dođe do promjena u mreži i na njezinim prolazima. Iz toga proizlazi da se za neparni mod pobude simetrična recipročna dvoprolazna mreža može nadomjestiti jednoprolaznom mrežom kojoj su svi vodiči na mjestu reza kratko spojeni, kao što je prikazano na slici 5.20b). U tom je slučaju val snage reflektiranoga signala

$$b_1 = \Gamma^{(o)} a_1 = s_2 a_1$$

pa je koeficijent refleksije na ulazu svojstvene mreže

$$\Gamma^{(o)} = s_2 = s^{(o)}, \tag{5–133}$$

gdje je $s_2 = s^{(o)}$ svojstvena vrijednost za neparni mod pobude. Oznaka (o) u eksponentu odnosi se na neparni mod pobude (prema: engl. *odd*).



Slika 5.21. Simetrična dvoprolazna mreža pobuđena neparnim modom

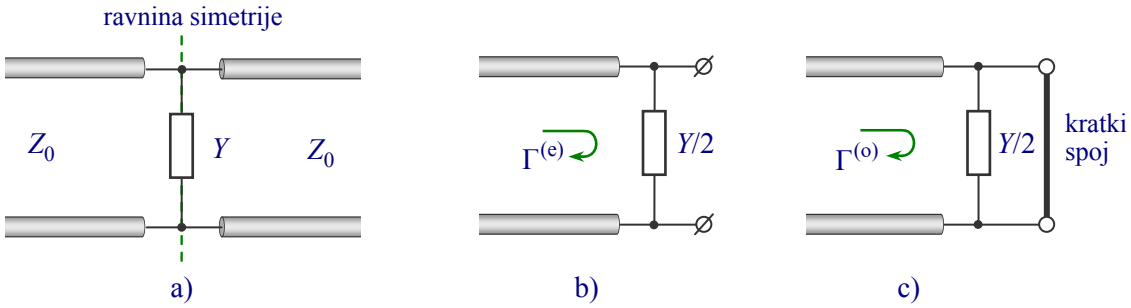
Na visokim frekvencijama, kratki se spoj može nadomjestiti električnim zidom (tangencijalno električno polje na ravnini simetrije jednako je nuli, $\vec{E}_t = 0$).

Uvrštenjem izraza (5–125) i (5–133) u izraze (5–117) mogu se napisati raspršni parametri koji su sad posve određeni koeficijentima refleksije na ulazu svojstvenih mreža za parni, odnosno neparni mod pobude, tj.

$$S_{11} = S_{22} = \frac{\Gamma^{(e)} + \Gamma^{(o)}}{2}, \tag{5–134}$$

$$S_{21} = S_{12} = \frac{\Gamma^{(e)} - \Gamma^{(o)}}{2}. \tag{5–135}$$

Primjer 5.5. Raspršna matrica paralelne admitancije



Slika 5.22. a) Dvoprolazna mreža koja se sastoji od paralelne admitancije simetrična je pa se može rastaviti na dvije svojstvene mreže: **b)** za parnu pobudu i **c)** za neparnu pobudu

Rješenje:

Parnom i neparnom pobudom dobivaju se dvije svojstvene mreže, slike 5.22b) i 5.22c), čiji su parametri (koeficijenti refleksije) dani kao

$$\Gamma^{(e)} = \frac{Y_0 - Y/2}{Y_0 + Y/2} = \frac{2Y_0 - Y}{2Y_0 + Y}, \text{ odnosno } \Gamma^{(o)} = -1,$$

gdje je $Y_0 = 1/Z_0$ karakteristična admitancija sustava. Primjenom izraza (5–134) i (5–135) konačno se dobivaju raspršni parametri izvorne mreže prikazane na slici 5.22a):

$$S_{11} = S_{22} = \frac{\Gamma^{(e)} + \Gamma^{(o)}}{2} = -\frac{Y}{2Y_0 + Y}$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{\Gamma^{(e)} - \Gamma^{(o)}}{2} = \frac{2Y_0}{2Y_0 + Y} = \frac{2Z}{2Z + Z_0},$$

pa uz $Z = 1/Y$ izlazi:

$$S_{11} = S_{22} = -\frac{Z_0}{2Z + Z_0},$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{2Z}{2Z + Z_0}.$$

5.6.2. Svojstvene vrijednosti četveroprolazne mreže

Razmatanja provedena u prethodnom odjeljku lako se mogu proširiti i na četveroprolazne recipročne mreže s jednom i dvjema ravninama simetrije. Kao i pri dvoprolaznim mrežama, obilježja četveroprolaznih mreža mogu se dobiti preko svojstvenih vrijednosti raspršne matrice. Razmotrimo najprije geometrijski simetričnu četveroprolaznu mrežu s jednom ravninom simetrije, koja je prikazana na slici 5.23.

Pobudimo li prolaze 1 i 3 četveroprolazne mreže najprije parnim a zatim neparnim modom, pri čemu su prolazi 2 i 4 zaključeni prilagođenim teretom, dobit ćemo dva skupa pobudnih vektora, prvi za parni i drugi za neparni mod pobude:

$$a_1 = a_3 = a, \quad a_2 = a_4 = 0, \qquad \text{(parni mod)} \qquad (5\text{–}136a)$$

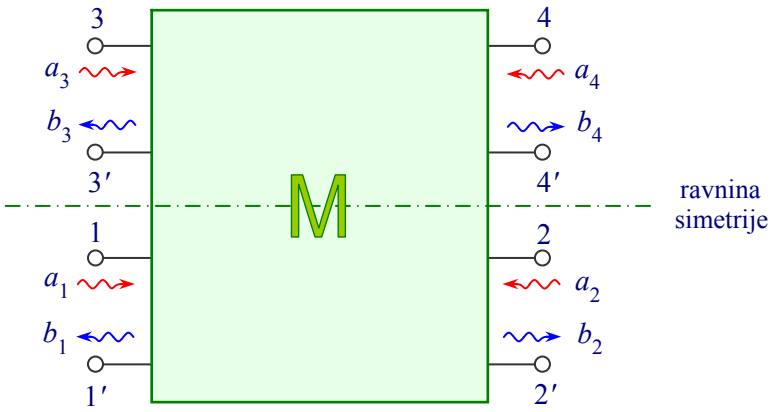
$$a_1 = -a_3 = a, \quad a_2 = a_4 = 0. \qquad \text{(neparni mod)} \qquad (5\text{–}136b)$$

Ako između prolaza 1 i 2 te 3 i 4 mreža nije simetrična ili recipročna, onda pobudne generatore valja premjestiti na desnu stranu mreže, a prilagođene terete na lijevu stranu mreže. Tad će prolazi 2 i 4 biti pobuđeni, a prolazi 1 i 2 zaključeni prilagođenim teretom, tj.

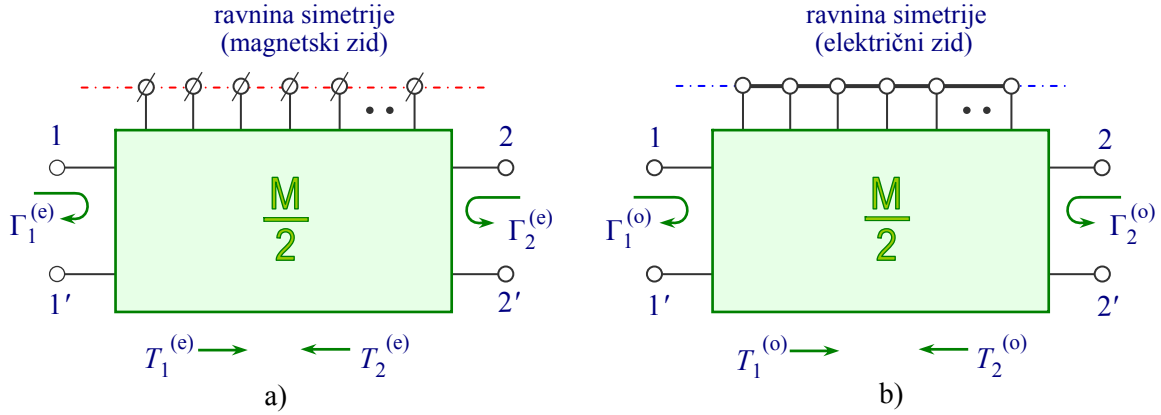
$$a_2 = a_4 = a, \quad a_1 = a_3 = 0, \qquad \text{(parni mod)} \qquad (5\text{–}137a)$$

$$a_2 = -a_4 = a, \quad a_1 = a_3 = 0. \qquad \text{(neparni mod)} \qquad (5\text{–}137b)$$

Kao i u slučaju s dvoprolaznom mrežom opet se dobivaju dvije svojstvene mreže koje su sad dvoprolazne, kao što je prikazano na slici 5.24. Prva od njih prikazana je na na slici 5.24a) i odgovara izrazima za parni mod pobude (5–136a) i (5–137a). Druga je pak prikazana na slici



Slika 5.23. Simetrična četveroprolazna mreža s jednom ravninom simetrije



Slika 5.24. a) Svojstvene mreže četveroprolazne simetrične mreže s jednom ravninom simetrije za parnu pobudu; **b)** za neparnu pobudu

5.24b), a odgovara izrazima za neparni mod pobude. Ako su pritom obje svojstvene mreže simetrične, onda se mogu riješiti ranije opisanim postupkom za simetrične dvoprolazne mreže.

Raspršni parametri izvorne četveroprolazne mreže i u ovom slučaju čine linearnu kombinaciju raspršnih parametara dvoprolaznih svojstvenih mreža ($\Gamma_1^{(e)}, \Gamma_2^{(e)}, T_1^{(e)}, T_2^{(e)}$ za parnu pobudu i $\Gamma_1^{(o)}, \Gamma_2^{(o)}, T_1^{(o)}, T_2^{(o)}$ za neparnu pobudu). Ako je mreža recipročna, onda je dovoljno odrediti prijenosne parametre $T_1^{(e)}$ i $T_1^{(o)}$ samo za jedan smjer prijenosa energije. No za općenit slučaj valja odrediti dva zasebna parametra pa se dobiva:

$$S_{11} = \frac{\Gamma_1^{(e)} + \Gamma_1^{(o)}}{2} = S_{33}, \qquad S_{22} = \frac{\Gamma_2^{(e)} + \Gamma_2^{(o)}}{2} = S_{44}, \tag{5–138a}$$

$$S_{13} = \frac{\Gamma_1^{(e)} - \Gamma_1^{(o)}}{2} = S_{31}, \qquad S_{24} = \frac{\Gamma_2^{(e)} - \Gamma_2^{(o)}}{2} = S_{42}, \tag{5–138b}$$

$$S_{21} = \frac{T_1^{(e)} + T_1^{(o)}}{2} = S_{43}, \qquad S_{41} = \frac{T_1^{(e)} - T_1^{(o)}}{2} = S_{23}, \tag{5–138c}$$

$$S_{12} = \frac{T_2^{(e)} + T_2^{(o)}}{2} = S_{34}, \qquad S_{14} = \frac{T_2^{(e)} - T_2^{(o)}}{2} = S_{32}. \tag{5–138d}$$

Izrazi (5–138) mogu se uporabiti za rješavanje različitih recipročnih i nerecipročnih dvoprolaznih mreža s jednom ravninom simetrije. No ako mreža ima dvije ravnine simetrije, onda je $T_1^{(e)} = T_2^{(e)}$ i $T_1^{(o)} = T_2^{(o)}$ pa su međusobno jednaki još neki raspršni parametri, primjerice, $S_{12} = S_{21} = S_{34} = S_{43}$ te $S_{14} = S_{41} = S_{23} = S_{32}$.

Četveroprolazna mreža s dvjema ravninama simetrije može se prikazati s pomoću četiriju jednoprolaznih svojstvenih mreža (slika 5.25), tako da se izvorna mreža pobudi na svim prolazima različitim kombinacijama pobudnih vektora. Time se dobivaju četiri svojstvena vektora definirana ovim valovima snage:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a \tag{5–139a}$$

$$a_1 = a_3 = a, \quad a_2 = a_4 = -a, \tag{5–139b}$$

$$a_1 = a_2 = a, \quad a_3 = a_4 = -a, \tag{5–139c}$$

$$a_1 = a_4 = a, \quad a_2 = a_3 = -a. \tag{5–139d}$$

Sad je potrebno izračunati samo četiri koeficijenta refleksije koji pripadaju tim svojstvenim mrežama. Raspršni parametri izvorne četveroprolazne mreže konačno se mogu dobiti linearnom kombinacijom tih četiriju koeficijenata refleksije, kao:

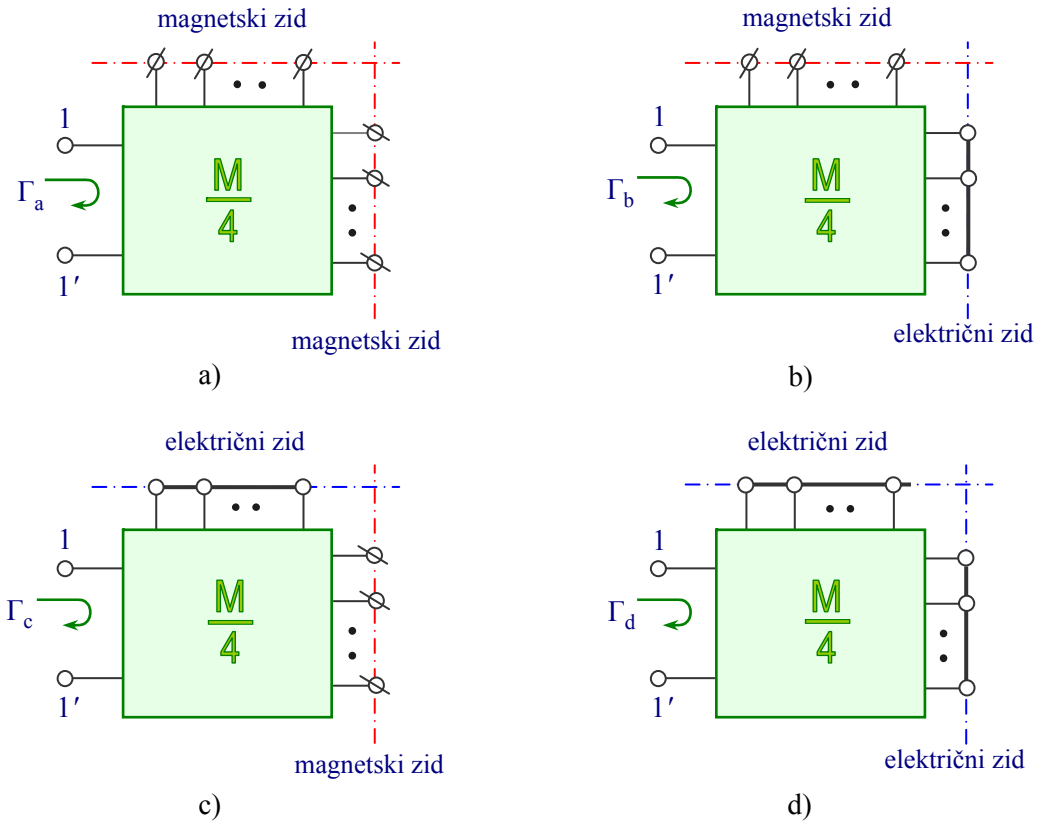
$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = \frac{\Gamma_a + \Gamma_b + \Gamma_c + \Gamma_d}{4}, \tag{5–140a}$$

$$S_{12} = S_{21} = S_{34} = S_{43} = \frac{\Gamma_a - \Gamma_b + \Gamma_c - \Gamma_d}{4}, \tag{5–140b}$$

$$S_{13} = S_{31} = S_{24} = S_{42} = \frac{\Gamma_a + \Gamma_b - \Gamma_c - \Gamma_d}{4}, \tag{5–140c}$$

$$S_{14} = S_{41} = S_{23} = S_{32} = \frac{\Gamma_a - \Gamma_b - \Gamma_c + \Gamma_d}{4}, \tag{5–140d}$$

gdje su zbog dvostruke simetrije mnogi parametri jednaki. Primjenom izraza (5–140) mogu se rješavati sve pasivne četveroprolazne mreže s dvjema ravninama simetrije poput, primjerice, kvadraturnog hibrida i usmjernog sprežnika sa spregnutim prijenosnim linijama (odjeljak 7.3).



Slika 5.25. Četveroprolazna mreža dvostruke simetrije može se razložiti na četiri svojstvene mreže pobuđene: **a)** parno-parnu, **b)** neparno-parnu, **c)** parno-neparnu i **d)** neparno-neparnu

5.7. Grafovi toka signala

U prethodnim smo odjeljcima vidjeli kako se preneseni i reflektirani valovi snage mogu povezati s raspršnim parametrima i kako se primjenom matričnog prikaza mogu razmatrati razni spojevi generatora, mreža i trošila. Prilikom rješavanja mikrovalnih sklopova cilj je uspostaviti vezu između pojedinih prolaza sklopa. U ovom ćemo odjeljku razmatrati *grafove toka signala* koji su korisno oruđe u analizi mikrovalnih sklopova primjenom valova snage. Posve općenito, grafovi toka signala daju grafičku interpretaciju relacija između skupa nezavisnih ulaznih varijabla i skupa zavisnih izlaznih varijabla koje se međusobno nalaze u linearnom odnosu. Kad je jednom ustrojen graf toka signala, rješenje koje daje vezu između zavisne i nezavisne varijable izravno se dobivaiz topologije grafa primjenom formalnih pravila poznatih pod nazivom *Masonovo pravilo*. Osim Masonova pravila prilikom rješavanja jednostavnijih grafova toka signala može se primijeniti *postupak raščlambe ili reduciranja grafa toka signala*. Primjenom razmjerno jednostavnih pravila, tim je postupkom moguće vrlo složen graf toka signala svesti na najjednostavniji mogući oblik, tj. na jednu granu s dvama čvorovima.

Osnovne komponente grafa toka signala jesu *čvor*, *grana, put i petlja*.

- ***Čvor***. Svakom prolazu i mikrovalne mreže pripada po jedan par čvorova (npr. a_i, b_i). Svaki čvor ima vrijednost koja odgovara pripadajućem valu snage. Jedan od čvorova uvijek je nezavisan (a_i) i označuje val snage koji upada na prolaz n, a drugi je zavisan (b_i) i označuje val snage koji napušta prolaz i, tj. reflektira se na tom istom prolazu.
- ***Grana*** je usmjereni izravni put između nezavisnoga i zavisnoga čvora. Svaka grana ima smjer i vrijednost (koeficijent prijenosa) sa smjerom od nezavisnoga čvora a do zavisnoga čvora b. Za mreže opisane raspršnom matricom, koeficijenti prijenosa dani su raspršnim parametrima ili koeficijentima refleksije.

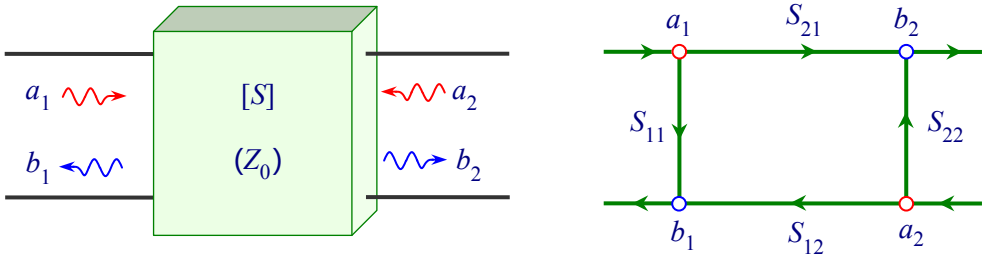
- ***Put***. Više grana čini *put* koji označuje vezu između bilo koja dva čvora, od kojih je jedan nezavisan a drugi zavisan, ali tako da se po putu krećemo u smjeru strelica na granama. Pri tomu se kroz svaki čvor smije proći samo jedanput. ***Vrijednost puta*** umnožak je svih koeficijenata grana na tom putu i općenito označuje koeficijent prijenosa. Grana je najkraći mogući put između dvaju čvorova.
- ***Petlja***. Ako je put zatvoren sam u sebe, onda je riječ o petlji. Ona označuje umnožak svih koeficijenata grana obuhvaćenih na zatvorenom putu koji započinje i završava u jednom te istom čvoru i to tako da se kroz svaki čvor na tom putu smije proći samo jedanput.
- ***Petlja drugoga reda*** označuje umnožak dviju petlja prvoga reda koje se međusobno ne dodiruju.
- ***Petlja trećega reda*** označuje umnožak triju petlja prvoga reda koje se međusobno ne dodiruju. Slično su definirane i petlje višeg reda.

Na slici 5.26a) prikazana je dvoprolazna mreža s odgovarajućim upadnim i reflektiranim valovima snage na svim prolazima, a na slici 5.26b) prikazan je odgovarajući graf toka signala.

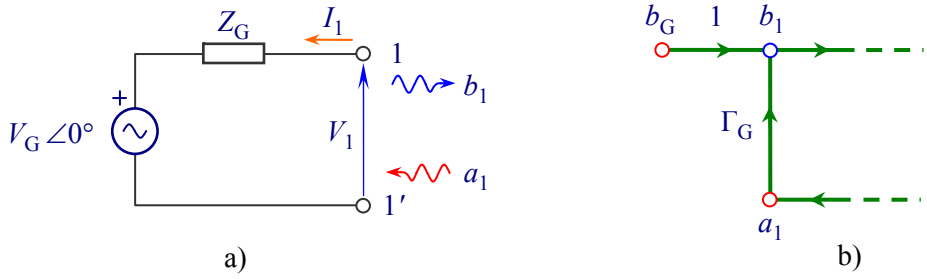
Može se uočiti da valovi snage b_1 i b_2 označuju zavisne čvorove, a valovi snage a_1 i a_2 nezavisne čvorove. Val snage a_1 koji upada na prolaz 1 cijepa se na dva dijela (dvije grane). Prvi odlazi preko S_{11} i napušta prolaz 1 kao dio reflektiranoga vala b_1. Drugi se dio prenosi preko parametra S_{21} do čvora b_2. U čvoru b_2 val izlazi iz mreže kroz prolaz 2. Slično tomu, ulazni se val a_2 djelomično prenosi na prolaz 1 preko parametra S_{12} i napušta mrežu kroz taj prolaz kao dio vala b_1. Drugi se dio ulaznoga vala a_2 djelomice reflektira i napušta mrežu kroz prolaz 2 preko parametra S_{22} tvoreći dio izlaznoga vala snage b_2.

Dvije posebne mreže čine teret i naponski izvor. Svaki se generator ili izvor signala može prikazati primjenom Théveninova teorema (slika 5.27a)), gdje je generator predočen mrežom s izlaznim valom snage b_1 i ulaznim valom snage a_1. Na priključcima generatora 1-1′ vrijedi

$$V_1 = V_G + I_1 Z_G \,. \tag{5–141}$$



Slika 5.26. Prikaz dvoprolazne mreže primjenom grafa toka signala; **a)** definiranje ulaznih i izlaznih valova snage, **b)** graf toka signala



Slika 5.27. a) Generator signala i **b)** pripadajući graf toka signala

Napon i struja na prolazu mogu se napisati kao $V_1 = V_1^+ + V_1^-$ i $I_1 = (V_1^+ - V_1^-)/Z_0$, gdje su naponski valovi definirani kao $V_1^+ = a_1\sqrt{Z_0}$, $V_1^- = b_1\sqrt{Z_0}$. Iz jednadžbe (5–141) slijedi jednakost

$$(a_1 + b_1)\sqrt{Z_0} = V_G + \frac{a_1 - b_1}{\sqrt{Z_0}} Z_G,$$

pa se primjenom definicije koeficijenta refleksije na impedanciji generatora

$$\Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0} \tag{5–142}$$

dobiva

$$b_1 = \frac{\sqrt{Z_0}}{Z_G + Z_0} = V_G + \Gamma_G a_1. \tag{5–143}$$

Radi jednostavnijeg zapisa može se uvesti nova normirana kompleksna varijabla

$$b_G = \frac{Z_0}{Z_G + Z_0} \frac{V_G}{\sqrt{Z_0}}, \tag{5–144}$$

koja se naziva *val snage generatora*. Sad jednakost (5–143) poprima oblik

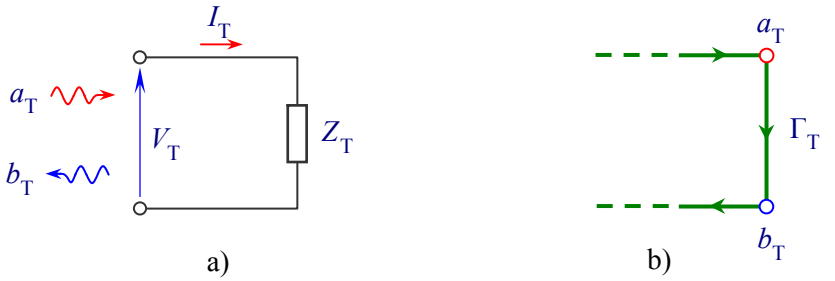
$$b_1 = b_G + \Gamma_G a_1, \tag{5–145}$$

i potpuno opisuje generator s pomoću valova snage. U skladu s jednakošću (5–145) generator se može opisati grafom toka signala koji je prikazan na slici 5.27b).

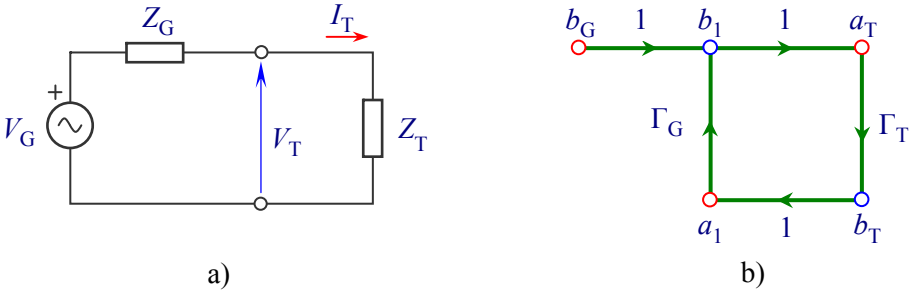
Graf toka signala tereta (slika 5.28) sastoji se od dva čvora i jedne grane. To su ulazni čvor a_T i izlazni čvor b_T te grana čija je vrijednost jednaka koeficijentu refleksije toga tereta,

$$\Gamma_T = \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0} = \frac{b_T}{a_T}. \tag{5–146}$$

Primjenom izraza (5–146) i slike 5.28 dobiva se izlazni reflektirani val snage $b_T = \Gamma_T a_T$.



Slika 5.28. a) Teret i **b)** pripadajući graf toka signala



Slika 5.29. a) Teret izravno priključen na generator i **b)** pripadajući graf toka signala

Ako se teret izravno priključi na generator, kao što je prikazano na slici 5.29a) dobiva se odgovarajući graf toka signala prema slici 5.29b). Radi preglednosti, nezavisni i zavisni čvorovi međusobno su razdvojeni granama jedinične vrijednosti (koeficijent prijenosa jednak jedinici). Iz grafa toka signala izravno izlazi

$$a_T = b_G + \Gamma_G b_T , \tag{5–147}$$

gdje je $a_T = b_1$, a $a_1 = b_T$. Budući da je $b_T = \Gamma_T a_T$, iz jednakosti (5–147) proizlazi

$$a_T = b_G + \Gamma_G \Gamma_T a_T ,$$

tj. dobiva se:

$$a_T = \frac{b_G}{1 - \Gamma_G \Gamma_T} , \tag{5–148}$$

$$b_T = \frac{\Gamma_T b_G}{1 - \Gamma_G \Gamma_T} . \tag{5–149}$$

Sad imamo sve potrebno za analizu mreža primjenom grafova toka signala i valova snage.

Izraz (5–147) može se izvesti i na drugi način koji daje jasniju fizikalnu sliku interakcije između generatora i tereta. U stvari, nakon ukopčavanja generatora nastaje prijelazna pojava koja se može analizirati uz pomoć slike 5.30. Nakon ukopčavanja, generator odašilje val snage b_G. Dio toga vala reflektira se na teretu i vraća se prema generatoru kao val snage $b_G \Gamma_T$. Zbog toga što u općem slučaju generator nije prilagođen na prijenosnu liniju, taj se reflektirani val snage ponovo reflektira na generatoru pa putuje prema teretu kao novi val snage $b_G \Gamma_T \Gamma_G$, itd. Otuda se zbroj svih valova snage koji putuju prema generatoru može napisati kao

$$\begin{aligned} b_T &= b_G \Gamma_T + b_G \Gamma_T^2 \Gamma_G + b_G \Gamma_T^3 \Gamma_G^2 + b_G \Gamma_T^4 \Gamma_G^3 + \ldots = \\ &= b_G \Gamma_T \left[1 + \Gamma_G \Gamma_T + (\Gamma_G \Gamma_T)^2 + (\Gamma_G \Gamma_T)^3 + \ldots + (\Gamma_G \Gamma_T)^n + \ldots \right]. \end{aligned}$$

To je zapravo geometrijski red, čija je suma jednaka

$$b_T = \frac{b_G \Gamma_T}{1 - \Gamma_G \Gamma_T} . \tag{5–150}$$

Budući da je $\Gamma_T = b_T / a_T$, izraz (5–150) poprima oblik

$$b_T = \frac{b_G b_T}{a_T - \Gamma_G b_T}$$

pa se nakon dijeljenja s b_T i sređivanja dobiva izraz (5–147),

$$a_T = b_G + \Gamma_G b_T .$$

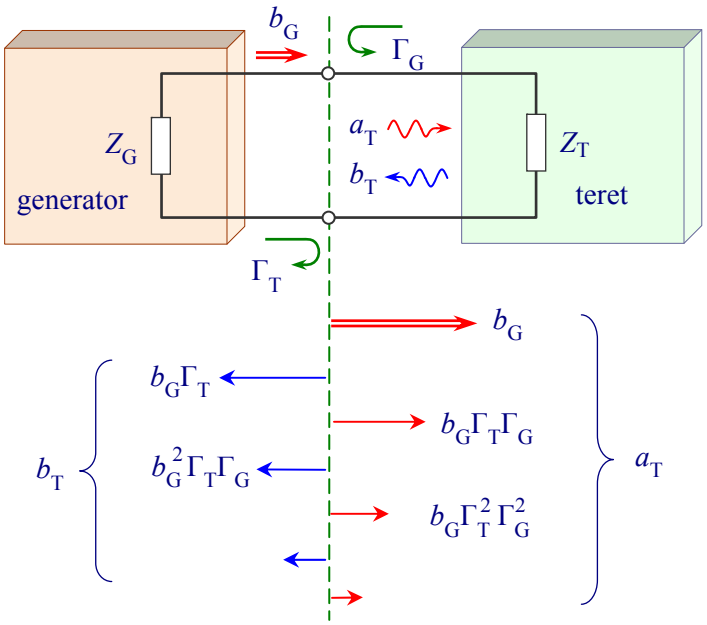
Izraz za snagu predanu teretu može se napisati kao

$$P_T = \frac{1}{2}|a_T|^2 - \frac{1}{2}|b_T|^2 = \frac{1}{2}|a_T|^2 \left(1 - \left| \frac{b_T}{a_T} \right|^2 \right) = \frac{1}{2}|a_T|^2 \left(1 - |\Gamma_T|^2 \right), \tag{5–151}$$

i jednak je izrazu (5–62). Primjenom jednakosti (5–148) izraz (5–151) svodi se na oblik

$$P_T = \frac{|b_G|^2}{2} \frac{1 - |\Gamma_T|^2}{|1 - \Gamma_G \Gamma_T|^2} . \tag{5–152}$$

U odjeljku 5.4.1. pokazano je da je raspoloživa snaga generatora zapravo maksimalno ostvariva snaga koju generator predaje prilagođenom teretu. Dakle, ako je $\Gamma_T = \Gamma_G^*$, onda je



Slika 5.30. Refleksije valova na sučelju između generatora i tereta

$$a_T = \frac{b_G}{1-\Gamma_G\Gamma_G^*}$$

pa iz izraza (5–152) izlazi $P_T\left(\Gamma_T = \Gamma_G^*\right) = P_A = |a_T|^2\left(1-|\Gamma_G|^2\right)/2$, tj.

$$P_T = \frac{|b_G|^2}{2}\frac{1-|\Gamma_G|^2}{\left|1-|\Gamma_G|^2\right|^2}.$$

Budući da se uvijek uzima da je unutarnja impedancija generatora pasivna, tj. $|\Gamma_G| \le 1$, konačno izlazi

$$P_T = \frac{|b_G|^2}{2}\frac{1}{1-|\Gamma_G|^2}. \qquad (5–153)$$

Ako je generator prilagođen na prijenosnu liniju, onda je $Z_G^* = Z_0$ ili $|\Gamma_G|=0$ pa se uz primjenu izraza (5–144) dobiva poznat izraz za raspoloživu snagu generatora

$$P_A = \frac{|V_G|^2}{8Z_0}. \qquad (5–154)$$

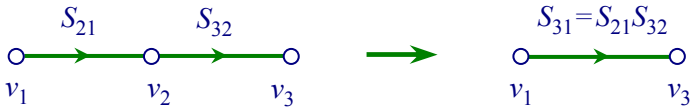
5.7.1. Reduciranje grafa toka signala

Složenija mreža može se riješiti postupkom reduciranja grafova toka signala svođenjem na jednostavniji oblik primjenom nekoliko jednostavnih pravila.

Pravilo za serijske grane (pravilo množenja). Linearne relacije $v_2 = S_{21}v_1$ i $v_3 = S_{32}v_2$ mogu se grafički interpretirati, kao što je prikazano na slici 5.31, gdje je v_1 nezavisna varijabla, a v_2 i v_3 su zavisne varijable. Ako čvor 2 nema drugih ulaza, onda se dobiva

$$v_3 = S_{21}S_{32}v_1. \qquad (5–155)$$

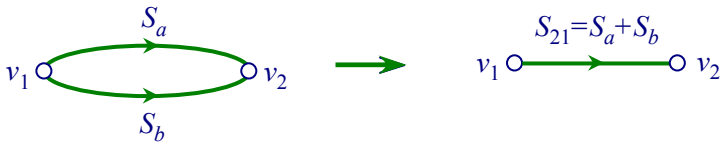
Dakle, pravilo za serijske grane kaže da se dvije serijski spojene grane, čiji zajednički čvor ima samo jedan ulazni i jedan izlazni val snage, mogu združiti u jednu granu čiji je koeficijent jednak umnošku koeficijenata izvornih grana.



Slika 5.31. Graf toka signala za serijski spoj grana (pravilo množenja)

Pravilo za paralelne grane (pravilo zbrajanja). Dvije ili više grana koje izlaze iz jednog zajedničkog čvora i ulaze u drugi zajednički čvor (paralelne grane s istim smjerovima) mogu se združiti u jednu granu čiji je koeficijent jednak zbroju koeficijenata izvornih grana. Na slici 5.32 prikazan je pripadajući graf toka signala. Izvod slijedi izravno iz relacije

$$v_2 = S_a v_1 + S_b v_1 = (S_a + S_b) v_1 . \tag{5–156}$$



Slika 5.32. Graf toka signala paralelnih grana (pravilo zbrajanja)

Pravilo za vlastite petlje (pravilo povratne veze). Ako čvor ima vlastitu petlju (grana koja započinje i završava u istom čvoru) čiji je koeficijent S, onda se ta petlja može ukloniti tako da se koeficijenti svih grana koje ulaze u taj isti čvor pomnože faktorom $1/(1–S)$. Na slici 5.33a) prikazan je graf toka signala vlastite petlje. Iz izvorne mreže dobiva se:

$$v_2 = S_{21} v_1 + S_{22} v_2 ,$$

$$v_3 = S_{32} v_2 .$$

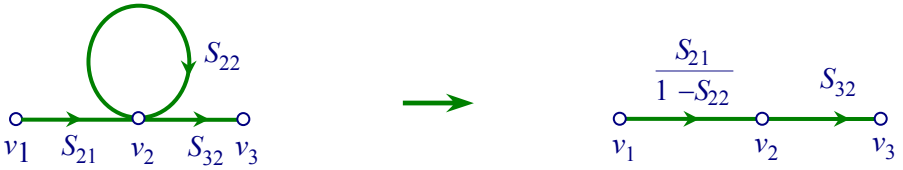
Eliminiranjem varijable v_2 izlazi

$$v_3 = \frac{S_{21} S_{32}}{1 - S_{22}} v_1 , \tag{5–157}$$

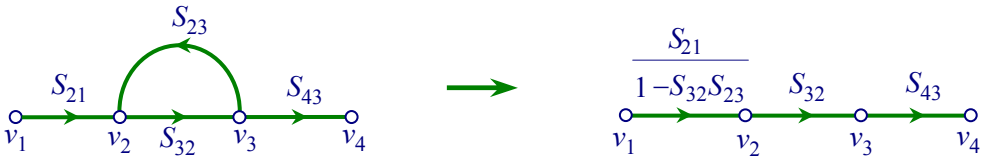
što daje prijenosnu funkciju reduciranog grafa toka signala prikazanog na slici 5.33a).

Ako graf toka signala sadrži petlju povratne veze, kao što je prikazano na slici 5.33b), onda se petlja može ukloniti dijeljenjem ulaznog koeficijenta prijenosa članom $1 – S$, gdje je $S = S_{32}S_{23}$ koeficijent prijenosa u petlji. To se može bolje vidjeti, ako se na čvor 3 primijeni pravilo cijepanja čvora, koje je objašnjeno u sljedećem odjeljku.

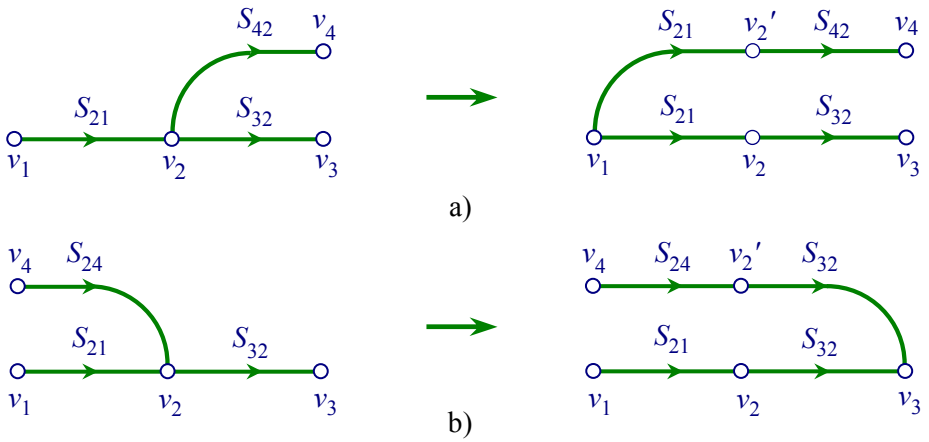
a)



b)



Slika 5.33. a) Vlastita petlja; **b)** petlja integrirana u put



Slika 5.34. Graf toka signala za čvor koji se cijepa

eficijent prijenosa u petlji. To se može bolje vidjeti, ako se na čvor 3 primijeni pravilo cijepanja čvora, koje je objašnjeno u sljedećem odjeljku.

Ako čvor u kojem započinje petlja ima više ulaza i izlaza, onda svaki ulazni koeficijent prijenosa treba podijeliti faktorom $(1-S)$, a svi izlazni koeficijenti prijenosa ostaju nepromijenjeni.

Pravilo cijepanja čvora. Čvor se može rascijepiti na dva odvojena čvora ako tako dobiven graf toka signala sadrži sve kombinacije razdvojenih ulaznih i izlaznih grana koje su spojene s izvornim čvorom, a da pritom ni jedna grana ne čini vlastitu petlju. To je prikazano na slici 5.34a), a izlazi iz razmatranja izvornoga grafa toka signala i grafa toka signala s rascijepljenim čvorom, tj.

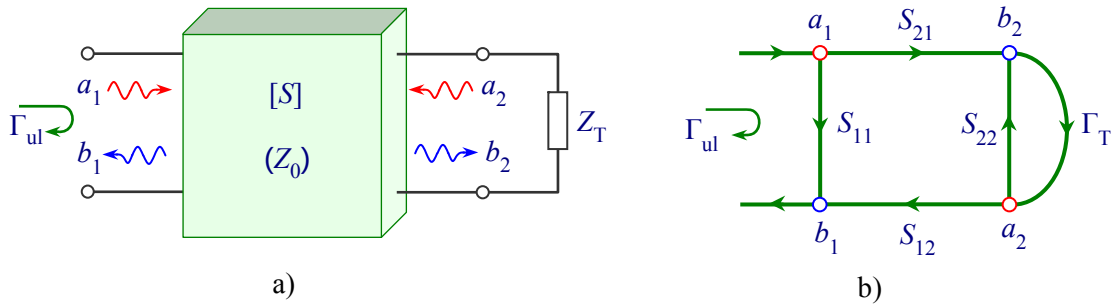
$$v_3 = S_{32}v_1 = S_{21}S_{32}v_1\,, \tag{5–158a}$$

$$v_4 = S_{42}v_2 = S_{21}S_{42}v_1\,, \tag{5–158b}$$

Slično se pravilo može definirati i za graf toka signala s više ulaznih grana i jednom izlaznom granom. Odgovarajući graf toka prikazan je na slici 5.34b).

Primjer 5.6. Koeficijent refleksije na ulazu dvoprolazne mreže

Postupkom reduciranja grafa toka signala, naći izraz za koeficijent refleksije Γ_{ul} na ulazu u dvoprolazne mreže prikazane na slici 5.35a).

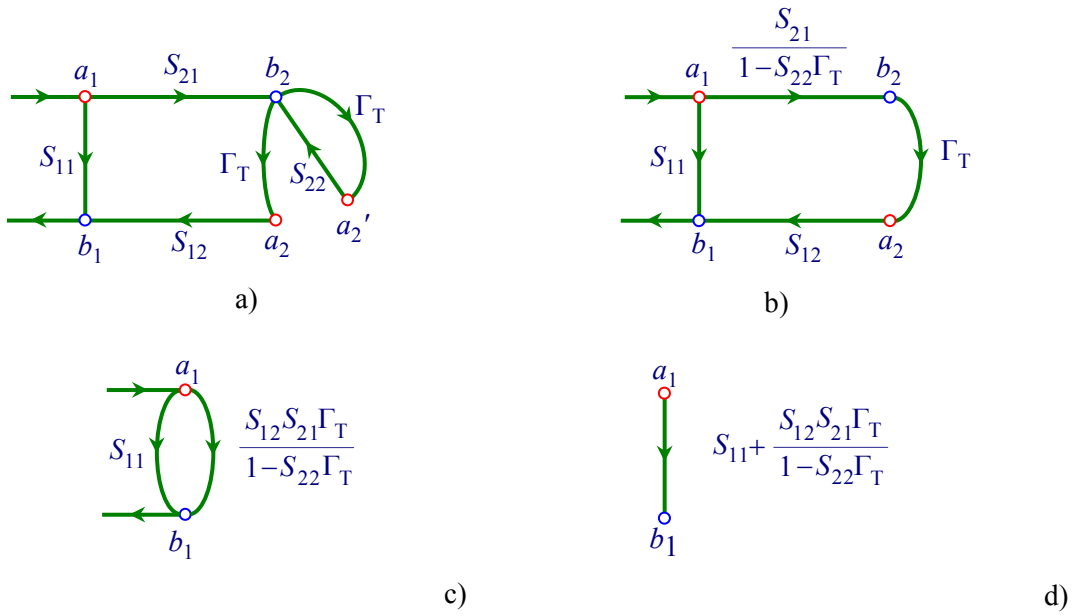


Slika 5.35. a) Dvoprolazna mreža zaključena proizvoljnim teretom; **b)** pripadajući graf toka

Rješenje:

Graf toka signala za sklop sa slike 5.35a) prikazan je na slici 5.35b). Naći ulazni koeficijent refleksije, $\Gamma_{ul}=b_1/a_1$. Na slici 5.36 prikazana su četiri koraka dekompozicije grafa toka signala koji vode rješenju

$$\Gamma_{ul} = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_T}{1-S_{22}\Gamma_T}\,. \tag{5–159}$$



Slika 5.36. Određivanje koeficijenta refleksije na ulazu dvoprolazne mreže primjenom postupka reduciranja grafa toka signala: **a)** cijepanje čvora a_2; **b)** rješavanje vlastite petlje u čvoru b_2; **c)** rješavanje puta sa serijskim granama; **d)** rješavanje paralelnih grana između čvorova a_1 i b_1

5.7.2. Masonovo pravilo

Postupak dekompozicije intuitivno je primamljiv i može se primijeniti na bilo koji graf toka signala. No nije prikladan s gledišta učinkovitosti izračuna. S druge strane, za određivanje omjera valova snage u nekom grafu toka signala može se primijeniti posve općenit postupak koji se naziva *Masonovo pravilo nedodirnih petlja*. To se pravilo može izraziti kao

$$T_{ij} = \frac{P_1\left[1-\sum L_1(1)+\sum L_1(2)-\ldots\right]+P_2\left[1-\sum L_2(1)+\sum L_2(2)-\ldots\right]+\ldots}{1-\sum L(1)+\sum L(2)-\sum L(3)+\ldots}, \qquad (5\text{–}160)$$

gdje je T_{ij} prijenosni parametar između jedne nezavisne varijable (a_i) i jedne zavisne varijable (b_j), uključujući i varijable istog prolaza. Ostale veličine u izrazu (5–160) definirane su ovako:

$P1$, $P2$, ... koeficijenti svih ostvarivih putova koji povezuju nezavisne i zavisne varijable,

$\Sigma L(1)$, $\Sigma L(2)$, ... sume svih ostvarivih petlja prvoga reda, drugoga reda, ...

$\Sigma L_1(1)$, $\Sigma L_1(2)$, ... sume svih ostvarivih petlja prvoga reda, drugoga reda, ... koje ne dodiruju prvi put između varijabla,

$\Sigma L_2(1)$, $\Sigma L_2(2)$, ... sume svih ostvarivih petlja prvoga reda, drugoga reda, ... koje ne dodiruju drugi put između varijabla,

itd. za sve moguće putove između nezavisnih i zavisnih varijabla.

Primjer 5.7. Koeficijent refleksije na ulazu mreže (primjena Masonova pravila)

Riješiti zadatak iz primjera 5.6. primjenom Masonova pravila.

Rješenje:

Ovdje je a_1 nezavisna varijabla, a b_1 je zavisna varijabla.

Kod primjene Masonova pravila za određivanje Γ_{ul}, valja isključiti dio sklopa (mreže) lijevo od čvorova a_1 i b_1. Na slici 5.35b) prikazan je graf toka signala za izračunavanje ulaznog koeficijenta refleksije mreže prikazane na slici 5.35a).

Od čvora a_1 do čvora b_1 vode ova dva puta:

$$P_1 = S_{11},$$

$$P_2 = S_{21}\Gamma_T S_{12}.$$

U grafu toka signala postoji samo jedna petlja, i to prvoga reda

$$\sum L(1) = \Gamma_T S_{22}.$$

Ne postoji niti jedna petlja drugoga ili višega reda. Zbroj svih petlja prvoga reda koje ne dodiruju put S_{11} iznosi

$$\sum L_1(1) = \Gamma_T S_{22}.$$

Ne postoji niti jedna petlja prvoga reda koja ne dodiruje put $S_{21}\Gamma_T S_{12}$ pa je

$$\sum L_2(1) = 0.$$

Konačno, iz izraza (5–160) dobiva se

$$\Gamma_{ul} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{S_{11}(1 - S_{22}\Gamma_T) + S_{21}\Gamma_T S_{12}}{1 - S_{22}\Gamma_T} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_T}{1 - S_{22}\Gamma_T}.$$

što je jednako rezultatu u primjeru 5.6.

Valja napomenuti da je pri uporabi Masonova pravila potreban oprez prilikom konstrukcije grafa toka signala iz odgovarajućeg podskupa mreže jer se lako može pogriješiti ako se previdi neki od sastavnih elementa grafa toka signala (petlja, put). No Masonovu pravilu treba dati prednost prilikom rješavanja složenih mreža s više od dva prolaza.

5.8. Posebna svojstva višeprolaznih mreža

5.8.1. Dvoprolazne mreže

U odjeljcima 5.3.1. i 5.4.1. vidjeli smo kako se kompleksna impedancija tereta transformira s pomoću dvoprolazne mreže, što se često primjenjuje prilikom prilagodbe impedancije tereta na karakterističnu impedanciju linije ili na impedanciju generatora. U tu se svrhu obično primjenjuju razmjerno kratki odsječci prijenosnih linija ili valovoda čiji su gubitci toliko mali da se mogu posve zanemariti. Stoga ćemo pozornost usmjeriti na razmotanje svojstva različitih nedisipativnih recipročnih dvoprolaznih mreža.

U recipročnoj je mreži $S_{12} = S_{21}$ pa raspršna matrica sadrži najviše tri raspršna parametra S_{11}, S_{12} i S_{22}. Budući da su to kompleksni brojevi, moguće ih je opisati s maksimalno šest nezavisnih realnih brojeva koji određuju module i fazne kutove raspršnih parametara. Ako je mreža bez gubitaka, onda su za njezin opis dovoljna samo tri realna broja jer su parametri S_{ij} povezani preko uvjeta unitarnosti kao:

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1, \qquad (5–161a)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1, \qquad (5–161b)$$

$$S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{22}^* = 0. \qquad (5–161c)$$

Iz prve dvije jednadžbe izravno se dobiva

$$|S_{11}| = |S_{22}|. \qquad (5–162)$$

Iz jednadžbe (5–161a) također izlazi

$$|S_{12}| = \sqrt{1-|S_{11}|^2}\ . \tag{5–163}$$

Sad se raspršni parametri mogu napisati kao

$$S_{11} = |S_{11}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1},\quad S_{22} = |S_{11}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}\quad \text{i}\quad S_{12} = \sqrt{1-|S_{11}|^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$$

pa iz jednadžbe (5–161c) izlazi

$$|S_{11}|\sqrt{1-|S_{11}|^2}\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1-\mathrm{j}\psi}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi-\mathrm{j}\varphi_2}\right)=0\,,$$

tj. $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)} = -\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\psi}$. Otuda je $\varphi_1+\varphi_2=2\psi-\pi\pm 2n\pi$ pa je fazni kut ψ posve određen kutovima φ_1 i φ_2 kao

$$\psi = \frac{\varphi_1+\varphi_2-\pi}{2} \mp n\pi\,. \tag{5–164}$$

Rezultati (5–162)-(5–164) posve određuju raspršnu matricu dvoprolazne mreže bez gubitaka kao

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & \sqrt{1-|S_{11}|^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \\ \sqrt{1-|S_{11}|^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} & -S_{11}^*\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\psi} \end{bmatrix}, \tag{5–165}$$

gdje je dovoljno poznavati samo parametre $|S_{11}|$, φ_1 i φ_2. Za geometrijski simetričan dvoprolazni sklop, kakav se susreće u većini filtara, dobiva se $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$ pa je $\psi=\varphi\pm\pi/2\pm n\pi$. To znači da su parametri $S_{12}=S_{21}$ uvijek u faznoj kvadraturi s parametrima $S_{11}=S_{22}$. Tad potrebno poznavati samo parametar S_{11}, kojeg je lako izmjeriti primjenom jednostavnog reflektometra (vidjeti poglavlje 9).

Atenuator

Recipročan sklop namijenjen smanjenju razine snage na prijenosnoj liniji naziva se *atenuator*. Raspršna matrica prilagođenog atenuatora može se napisti kao

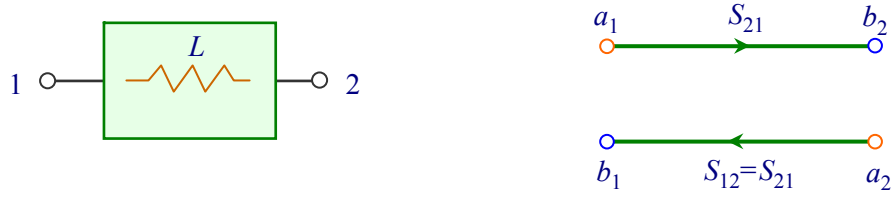
$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{21} \\ S_{21} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–166}$$

To je nerefleksivan sklop s prigušenjem L koje se obično izražava se u dB, a definirano je u primjeru 5.3. kao omjer ulazne i izlazne snage (obratno od pojačanja). Kad je izlaz priključen na prilagođeni teret ($a_2=0$), tad se dobiva

$$L(\mathrm{dB}) = 10\log\frac{P_{\mathrm{ul}}}{P_{\mathrm{iz}}} = 10\log\frac{|a_1|^2}{|b_2|^2} = -20\log|S_{21}|\ (\mathrm{dB})\,, \tag{5–167}$$

gdje atenuator disipira (apsorbira) snagu $P_{\mathrm{dis}}=P_{\mathrm{ul}}-P_{\mathrm{iz}}$.

Simbol i graf toka signala prilagođenog atenuatora prikazani su na slici 5.37.



a) b)

Slika 5.37. Prilagođeni atenuator: **a)** simbol; **b)** graf toka signala

Feritni izolator

Feritni izolator nerecipročan je i nerefleksivan atenuator koji za jedan smjer prijenosa ima malo prigušenje (u idealnom slučaju bez prigušenja, $|S_{21}| \simeq 1$), ali za obratni smjer prijenosa ima veliko prigušenje (u idealnom slučaju beskonačno, $|S_{12}| \simeq 0$). Taj se sklop nerijetko rabi za rasprezanje dviju ulančanih mreža kao, primjerice, prilikom zaštite generatora od negativnog učinka reflektiranoga vala koji nastaje na neprilagođenom trošilu. Feritni se izolator može ostvariti uporabom nerecipročnih materijala poput ferita u jakom statičkom magnetskom polju (vidjeti odjeljak 7.7.3). U praksi se također mogu naći inačice s feritnim cirkulatorom (vidjeti odjeljak 7.7.3) i aktivnim elektroničkim komponentama poput unilateralnih tranzistorskih pojačala jediničnog pojačanja (vidjeti odjeljak 8.8). Raspršna mu je matrica

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} \\ S_{21} & 0 \end{bmatrix}, \tag{5–168}$$

gdje je $|S_{21}| \gg |S_{12}|$ ili obratno. Idealan izolator ima raspršnu matricu oblika

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–169}$$

Simbol i graf toka signala idealnog feritnog izolatora prikazani su na slici 5.38.



a) b)

Slika 5.38. Idealan feritni izolator: **a)** simbol; **b)** graf toka signala

Zakretač faze

Recipročan i nerefleksivan dvoprolazni sklop bez gubitaka idealni je *zakretač faze*. Opisan je raspršnom matricom

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–170}$$

Fazni zakretač, kao što mu i naziv kaže, služi samo za promjenu faze signala pa je stoga posve drukčijeg učinka u odnosu na atenuator koji djeluje samo na amplitudu signala.

Simbol i graf toka signala idealnog faznog zakretača prikazani su na slici 5.39. Taj graf toka odgovara i odsječku prilagođene prijenosne linije bez gubitaka opisane izrazom (5–88).

Girator

Idealni je *girator* nerefleksivan nerecipročan fazni zakretač bez gubitaka koji čini integralni dio troprolaznog feritnog cirkulatora (odjeljak 7.7.3). Raspršna mu je matrica oblika

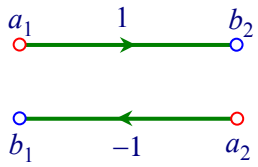


a) b)

Slika 5.39. Idealni fazni zakretač: **a)** simbol; **b)** graf toka signala

$$[S]=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \tag{5–171}$$

a graf toka signala prikazan je na slici 5.40.



Slika 5.40. Graf toka signala idealnog giratora

Spoj dviju prijenosnih linija različitih karakterističnih impedancija

U mikrovalnoj se elektronici u kaskadu nerijetko spaja više prijenosnih linija različite karakteristične impedancije, a jednako je tako često potrebno prenormirati raspršne parametre neke mreže na drugu referentnu impedanciju sustava. Stoga ćemo razmotriti spoj dviju linija različitih karakterističnih impedancija (Z_{01} i Z_{02}) bez gubitka, kao što je prikazano na slici 5.41a). Ako je linija 2 prilagođena ($Z_T=Z_{02}$), onda koeficijent refleksije na prolazu 1 glasi

$$\Gamma_1=\frac{Z_{02}-Z_{01}}{Z_{02}+Z_{01}}. \tag{5–172}$$

Na isti se način dobiva koeficijent refleksije na prolazu 2,

$$\Gamma_2=\frac{Z_{01}-Z_{02}}{Z_{01}+Z_{02}}, \tag{5–173}$$

koji je normiran na karakterističnu impedanciju prijenosne linije 2, tj. Z_{02}.

Iz izraza (5–172) i (5–173) izlazi da je $\Gamma_2=-\Gamma_1$.

Budući da je sklop geometrijski nesimetričan, ali recipročan, raspršna mu je matrica oblika

$$[S]=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{21}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}. \tag{5–174}$$

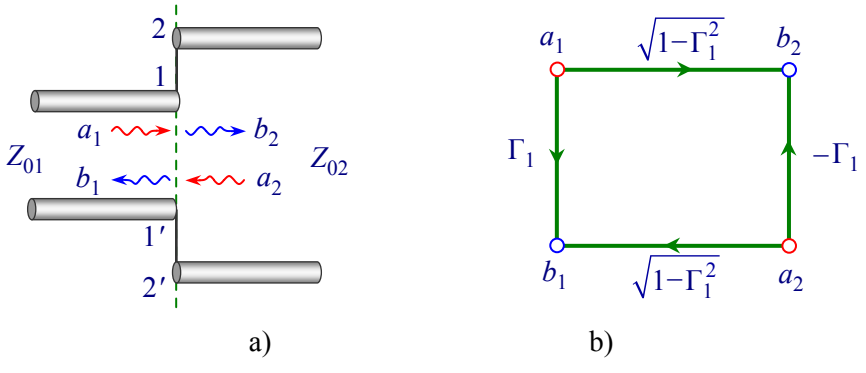
Sklop je također bez gubitaka pa mu je raspršna mu je matrica unitarna, tj. vrijedi:

$$|S_{11}|^2+|S_{21}|^2=1, \tag{5–175}$$

$$S_{11}S_{21}^*+S_{21}S_{22}^*=0. \tag{5–176}$$

Iz izraza (5–175) izravno izlazi

$$|S_{21}|=\sqrt{1-|S_{11}|^2}. \tag{5–177}$$



a) b)

Slika 5.41. a) Diskontinuitet na spoju dviju linija različitih karakterističnih impedancija;
b) pripadajući graf toka signala

Prema slici 5.41a) očito je da je parametar S_{11} jednak koeficijentu refleksije Γ_1, a S_{22} je jednak koeficijentu refleksije Γ_2 i realne su veličine, u skladu s definicijama:

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \Gamma_1 = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}, \tag{5–178}$$

$$S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_1=0} = \Gamma_2 = -\Gamma_1 = \frac{Z_{01} - Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}}, \tag{5–179}$$

$$S_{22} = -S_{11}. \tag{5–180}$$

S druge strane, ako se u izraz (5–176) uvrsti rezultat (5–180), onda izlazi

$$S_{11}(S_{21}^* - S_{21}) = 0. \tag{5–181}$$

Budući da je $Z_{02} \neq Z_{01}$ i $S_{11} \neq 0$, izraz u zagradi mora biti jednak nuli pa je i S_{21} realan, tj.

$$S_{21}^* = S_{21}. \tag{5–182}$$

Dakle, iz izraza (5–177) i (5–182) konačno se dobiva

$$S_{21} = \sqrt{1 - S_{11}^2}. \tag{5–183}$$

Ako se u izraz (5–183) uvrsti izraz (5–178), dobiva se parametar S_{21} izražen s pomoću karakterističnih impedancija prijenosnih linija, tj.

$$S_{21} = \sqrt{1 - \Gamma_1^2} = \frac{2\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}{Z_{01} + Z_{02}}. \tag{5–184}$$

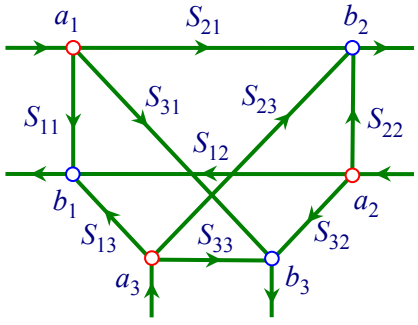
Izraz (5–184) označuje omjer geometrijske i aritmetičke srednje vrijednosti dviju karakterističnih impedancija linija koje tvore diskontinuitet.

Sad se primjenom izraza (5–178), (5–179) i (5–184) može konstruirati graf toka signala za diskontinuitet skoka karakterističnih impedancija, slika 5.41b). Za $Z_{02} = Z_{01}$ izrazi (5–178), (5–179) i (5–184) svode se na očekivano $S_{11}=S_{22}=0$, $S_{12}=S_{21}=1$.

5.8.2. Troprolazne mreže

Jedan od najjednostavnijih troprolaznih sklopova za dijeljenje snage jest T-spoj. To je mreža s jednim ulazom i dvama izlazima (ili s dvama ulazima i jednim izlazom). Taj je spoj najčešće bez gubitaka ili zanemarivo malih gubitaka. Svaki se troprolazni sklop može opisati općenitom raspršnom matricom

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}. \tag{5–185}$$



Slike 5.42. Graf toka signala troprolazne mreže

Graf toka signala općenite troprolazne mreže prikazan je na slici 5.42. Te mreže imaju nekoliko posebnih svojstava koja ćemo podrobnije razmotriti u idućim odlomcima.

Recipročna troprolazna nerefleksivna mreža bez gubitaka

Ako je troprolazna mreža pasivna i ne sadrži anizotropne materijale, onda mora biti recipročna, što znači da ima simetričnu raspršnu ($S_{ij}=S_{ji}$). Da bi se spriječili gubitci snage, mreža se gradi od nedisipativnih elemenata i zahtijeva se nerefleksivnost na svim njezinim prolazima. No može se lako pokazati da je nemoguće ostvariti troprolaznu recipročnu mrežu bez gubitaka, a da su joj pritom sva tri prolaza prilagođena na istu referentnu impedanciju. To se može lako dokazali pođe li se od pretpostavke da je takva mreža ostvariva. Raspršna matrica nerefleksivne recipročne troprolazne mreže ima ovaj oblik

$$[S]=\begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & 0 & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–186}$$

U skladu sa zakonom očuvanja energije, mreža bez gubitaka ima unitarnu raspršnu matricu (odjeljak 5.4.4). Primjenom uvjeta unitarnosti na raspršnu matricu (5–186) dobiva se:

$$|S_{12}|^2+|S_{13}|^2=1, \tag{5–187a}$$

$$|S_{12}|^2+|S_{23}|^2=1, \tag{5–187b}$$

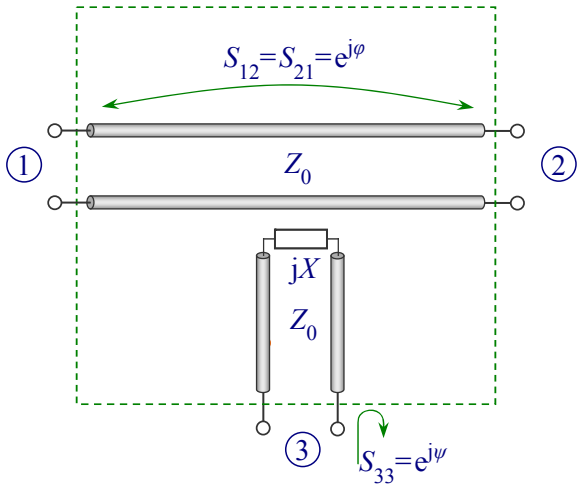
$$|S_{13}|^2+|S_{23}|^2=1, \tag{5–187c}$$

$$S_{13}S_{23}^*=0, \tag{5–187d}$$

$$S_{12}S_{23}^*=0, \tag{5–187e}$$

$$S_{12}S_{13}^*=0. \tag{5–187f}$$

Da bi umnožak dvaju S-parametara u izrazu (5–187e) bio jednak nuli, barem jedan od njih mora biti jednak nuli. Ako uzmemo $S_{12}=0$, onda iz izraza (5–187a) izlazi $|S_{13}|=1$, a iz izraza (5–187b) izlazi $|S_{23}|=1$, što je u opreci s izrazom (5–187c). Stoga možemo ustvrditi da se *sva tri prolaza u recipročnoj mreži bez gubitaka* ***ne mogu*** *istodobno prilagoditi*.



Slika 5.43. Ekvivalentna recipročna mreža bez gubitaka s dva prilagođena prolaza

Recipročna troprolazna mreža bez gubitaka nerefleksivna na dvama prolazima

Najprije provjerimo je li takva troprolazna mreža uopće fizički ostvariva. Ako su prolazi 1 i 2 nerefleksivni, onda se raspršna matrica može napisati u obliku

$$[S]=\begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & 0 & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}. \tag{5–188}$$

Za nedisipativnu mrežu mora biti zadovoljan uvjet unitarnosti raspršne matrice. Iz toga izlazi ovih šest jednadžba:

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1, \tag{5–189a}$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 = 1, \tag{5–189b}$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 = 1, \tag{5–189c}$$

$$S_{13}S_{23}^* = 0, \tag{5–189d}$$

$$S_{12}S_{23}^* + S_{13}S_{33}^* = 0, \tag{5–189e}$$

$$S_{12}S_{13}^* + S_{23}S_{33}^* = 0. \tag{5–189f}$$

Iz jednadžbe (5–189d) proizlazi da barem jedan od parametara S_{13} ili S_{23} mora biti jednak nuli. Uzme li se da je $S_{13} = 0$, iz izraza (5–189a) izlazi $|S_{12}| = 1$ pa iz izraza (5–189b) izlazi $S_{23} = 0$. Budući da je $S_{13} = S_{23} = 0$, iz izraza (5–189c) izlazi $|S_{33}| = 1$, a to znači da je prolaz 3 posve razgođen, tj. reaktivan. Stoga takva mreža nema neku praktičnu primjenu.

Raspršna se matrica razmatrane troprolazne mreže napisati kao

$$[S]=\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} & 0 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \end{bmatrix}. \tag{5–190}$$

Ta se matrica može raščlaniti na dvije submatrice, jednodimenzionalnu matricu

$$[S]_1=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \end{bmatrix}$$

koja odgovara čisto reaktivnoj impedanciji i na dvodimenzionalnu matricu

$$[S]_2=\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

koja odgovara prilagođenoj prijenosnoj liniji, tj. faznom zakretaču. Te su dvije mreže međusobno posve izolirane. Na slici 5.43 shematski je prikazana opisana troprolazna mreža.

Minimalno refleksivna recipročna mreža bez gubitaka

Posve simetričan recipročni troprolazni sklop bez gubitaka s najmanjim mogućim koeficijentom refleksije može se opisati raspršnom matricom

$$[S]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} \end{bmatrix}. \tag{5–191}$$

Iz uvjeta unitarnosti izlazi:

$$|S_{11}|^2 + 2|S_{12}|^2 = 1\,, \tag{5–192a}$$

$$S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{11}^* + S_{12}S_{12}^* = 0\,. \tag{5–192b}$$

Ako se stavi da je $S_{11}=|S_{11}|\,e^{j\psi}$ i $S_{12}=|S_{12}|\,e^{j\varphi}$, onda iz jednadžbe (5–192b) izlazi

$$|S_{11}||S_{12}|\left[e^{j(\psi-\varphi)} + e^{-j(\psi-\varphi)}\right] + |S_{12}|^2 = 0\,. \tag{5–193}$$

Uvrštavanjem $\theta=\psi-\varphi$ i dijeljenjem jednadžbe (5–193) sa $|S_{12}|$ dobiva se

$$|S_{11}|\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) = -|S_{12}|\,, \tag{5–194a}$$

što se može napisati u ovom obliku

$$2|S_{11}|\cos\theta = -|S_{12}|\,. \tag{5–194b}$$

Da bi vrijedio izraz (5–194b), veličina $\cos\theta$ mora biti negativna. Da bi modul parametra S_{11} pritom bio minimalan, θ mora biti neparni višekratnik od $\pm\pi$, tj.

$$\theta = \pm(2n-1)\pi \quad \text{za } n=1,2,3,... \tag{5–195}$$

Uvrsti li se sad rezultat $\theta=\pi$ u jednakost (5–194) izlazi

$$2|S_{11}| = |S_{12}|\,, \tag{5–196}$$

što uvrštenjem u jednadžbu (5–192a), daje $|S_{11}|^2+8|S_{11}|^2=1$, tj.

$$|S_{11}| = \frac{1}{3}. \tag{5–197}$$

Stoga se općenito može napisati

$$S_{11} = \frac{1}{3}e^{j\psi}\,. \tag{5–198}$$

Uvrštenjem izraza (5–198) u jednakost (5–196) izlazi

$$|S_{12}| = \frac{2}{3}\,, \tag{5–199}$$

pa se uz uvjet $\theta=\psi-\varphi=\pm\pi$ dobiva

$$S_{12} = \frac{2}{3}e^{j\varphi} = \frac{2}{3}e^{j(\psi\pm\pi)} = -\frac{2}{3}e^{j\psi}\,. \tag{5–200}$$

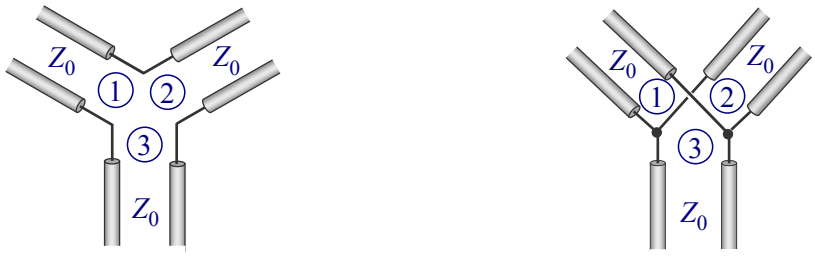
Ako se sad referentne ravnine prolaza razmatranog minimalno refleksivnog troprolaznog sklopa odaberu tako da je $\psi=0$, onda se dobiva ova raspršna matrica

$$[S] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5–201}$$

Ta matrica odgovara T-spoju u kojem su tri beskonačno kratke linije spojene serijski, slika 5.44a). O T-spoju bit će više riječi u odjeljku 7.2. No referentne ravnine prolaza mogu se tako odabrati da je $\psi=\pm\pi$. Tad će raspršna matrica novog troprolaznog sklopa biti jednaka negativu matrice (5–201). Ta matrica odgovara paralelnom spoju triju prijenosnih linija kao što je prikazano na slici 5.44b).

Isti se problem može riješiti i primjenom svojstvenih funkcija (odjeljak 5.6). Karakteristična jednadžba troprolazne mreže opisane matricom (5–191) glasi

$$(S_{11}-s)^3 - 3(S_{11}-s)S_{12}^2 + 2S_{12}^3 = 0\,. \tag{5–202}$$



a) b)

Slika 5.44. a) T-spoj kao serijski spoj linija; **b)** kao paralelni spoj linija

Njezina su rješenja, tj. svojstvene vrijednosti:

$$s_1 = S_{11} + 2S_{12}\,, \qquad s_2 = s_3 = S_{11} - S_{12}\,.$$

Iz tih rješenja izravno izlazi:

$$S_{11} = \frac{s_1 + 2s_2}{3}, \tag{5–203a}$$

$$S_{12} = \frac{s_1 - s_2}{3}. \tag{5–203b}$$

Budući da za mreže bez gubitaka vrijedi $|s_i| = 1$ (za $i = 1, 2, 3$), iz izraza (5–203a) vidimo da je S_{11} minimalan uz uvjet $s_2 = -s_1$. Drugi izraz pokazuje da se minimalna vrijednost parametra S_{11} podudara s maksimalnom vrijednošću parametra S_{12}. Ako je, primjerice, $s_2 = -s_1$, a $s_1 = -1$, onda je:

$$S_{11} = \frac{1}{3}, \qquad S_{12} = -\frac{2}{3},$$

što odgovara izrazima (5–198) i (5–200) i daje željeni rezultat za $\psi = 0$.

Nerecipročna nerefleksivna troprolazna mreža bez gubitaka

Dopusti li se da je nerefleksivna mreža nerecipročna, dobiva se raspršna matrica

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–204}$$

Za mrežu bez gubitaka, raspršna matrica mora biti unitarna. Primjenom uvjeta unitarnosti na matricu (5–204) izlazi:

$$|S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = 1\,, \tag{5–205a}$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{32}|^2 = 1\,, \tag{5–205b}$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1\,, \tag{5–205c}$$

$$S_{31}S_{32}^* = 0\,, \tag{5–205d}$$

$$S_{21}S_{23}^* = 0\,, \tag{5–205e}$$

$$S_{12}S_{13}^* = 0\,. \tag{5–205f}$$

Izraz (5–205e) pokazuje da barem jedan od faktora mora biti jednak nuli. Ako se odabere $S_{21} = 0$, onda izraz (5–205a) daje $|S_{31}| = 1$, pa iz izraza (5–205d) izlazi $S_{32} = 0$. Uvrštenjem tog rezultata u izraz (5–205b) dobiva se $|S_{12}| = 1$, pa iz izraza (5–205f) izlazi $S_{13} = 0$, Taj rezultat, u skladu s izrazom (5–205c), daje $|S_{23}| = 1$. Otuda konačno izlazi raspršna matrica

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{j\varphi_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\varphi_2} \\ e^{j\varphi_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–206}$$

Namjeste li se referentne ravnine tako da je $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, matrica (5–206) svodi se na

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–207a}$$

Ako se sad u izraz (5–205e) uvrsti $S_{23} = 0$, onda se jednakim postupkom dobiva druga moguća raspršna matrica, tj.

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–207b}$$

U matrici (5–207b), izvan glavne dijagonale, jedinice se nalaze na mjestima na kojima se u matrici (5–207a) nalaze nule i obratno. Dakle, to su dvije međusobno transponirane matrice.

Matrica (5–207a) i njezin dual (5–207b) jedine su dvije moguće matrice koje opisuju nerefleksivnu troprolaznu mrežu bez gubitaka sa svojstvom nerecipročnosti, tj. $S_{ij} \neq S_{ji}$ za $i \neq j$.

Naprava opisanih svojstava poznata je pod nazivom *cirkulator*. Stoga se može ustvrditi: *svaka nerefleksivna troprolazna mreža bez gubitaka jest cirkulator*. Na slici 5.45 simbolima su prikazana oba tipa troprolaznih cirkulatora koji zadovoljavaju matrice (5–207). Naziv cirkulator proizlazi iz svojstva da kad mu prolazi nisu zaključeni prilagođenim teretom, pri pobudi jednog prolaza, signal putuje od prolaza do prolaza kružnim tokom (cirkulira) u smjeru strelice. Cirkulatori prikazani na slici 5.45 razlikuju se samo po smjeru cirkuliranja (kruženja) signala. U praksi postoje sklopovi feritnih cirkulatora (odjeljak 7.7.3) čiji raspršni parametri približno zadovoljavaju matrice (5–207).

U izvedbama monolitnih integriranih sklopova (MMIC), nerijetko se mogu naći i inačice troprolaznih cirkulatora izvedenih s kvazi-unilateralnih tranzistorskih pojačala jediničnog pojačanja (vidjeti odjeljke 8.8 i 8.11).

No u praksi se mogu također naći i inačice četveroprolaznih cirkulatora koji se nerijetko rabe u antenskim skretnicama za bolje rasprezanje između prijamnog i odašiljačkog signala.



a) b)

Slika 5.45. Dvije vrste troprolaznih cirkulatora

Neprilagođeni cirkulator

Razmotrimo sklop neznatno razgođenog cirkulatora koji se često nalazi u praktičnoj primjeni. Neka je sklop opisan raspršnom matricom

$$[S]=\begin{bmatrix}\Gamma & \beta & \alpha\\ \alpha & \Gamma & \beta\\ \beta & \alpha & \Gamma\end{bmatrix}. \tag{5–208}$$

Uz pretpostavku da je cirkulator bez gubitaka, iz uvjeta unitarnosti izlazi

$$|\Gamma|^2+|\beta|^2+|\alpha|^2=1, \tag{5–209}$$

$$\Gamma\beta^*+\alpha\Gamma^*+\beta\alpha^*=0. \tag{5–210}$$

Za $\Gamma = 0$, jednadžbe (5–209) i (5–210) traže jedno od ovih rješenja: $\alpha = 0$ i $|\beta| = 1$ ili $\beta = 0$ i $|\alpha| = 1$, što odgovara idealnom prilagođenom cirkulatoru.

Razmotrimo sad prijenos snage u neznatno razgođenom cirkulatoru u kojem je $\Gamma \neq 0$, ali je $|\Gamma| \ll 1$. Ako je glavni smjer prijenosa $1 \to 2 \to 3$, onda je $|\alpha| \simeq 1$, ali manje od jedan, a $|\beta| \simeq 0$. Tada uz uvjet $|\Gamma| \simeq 0$, umnožak $\Gamma\beta \simeq 0$ postaje zanemarivo mala veličina jer su oba faktora male veličine pa se jednadžba (5–210) svodi na $\alpha\Gamma^*+\beta\alpha^*=0$ iz čega izlazi da je $|\beta| \simeq |\Gamma|$. Stoga izraz (5–209) poprima sljedeći oblik

$$|\alpha| \simeq \sqrt{1-2|\Gamma|^2} \simeq 1-|\Gamma|^2, \tag{5–211}$$

gdje je upotrijebljen razvoj u red do člana najnižeg reda uz uvjet da je $2|\Gamma|^2 \ll 1$.

Ako, radi jednostavnosti, pretpostavimo da su veličine α, β i Γ posve realne, onda izlazi da je $\beta \simeq \Gamma$ i $\alpha \simeq 1-\Gamma^2$ pa se raspršna matrica neznatno razgođenog cirkulatora može napisati u ovom obliku

$$[S]=\begin{bmatrix}\Gamma & \Gamma & 1-\Gamma^2\\ 1-\Gamma^2 & \Gamma & \Gamma\\ \Gamma & 1-\Gamma^2 & \Gamma\end{bmatrix}. \tag{5–212a}$$

Ako se odabere druga mogućnost, tj. $|\beta| \simeq 1$, ali manje od jedan i $|\alpha| \simeq 0$, onda se dobiva slična matrica koja je u stvari jednaka transponiranoj matrici (5–212a), tj.

$$[S]=\begin{bmatrix}\Gamma & 1-\Gamma^2 & \Gamma\\ \Gamma & \Gamma & 1-\Gamma^2\\ 1-\Gamma^2 & \Gamma & \Gamma\end{bmatrix}. \tag{5–212b}$$

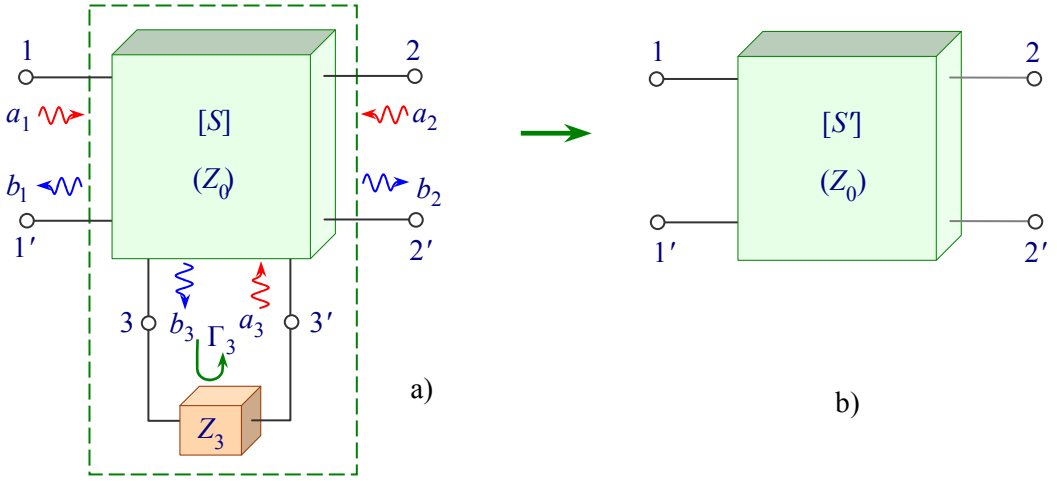
Troprolazna mreža opterećena na jednom prolazu

Ako se troprolazna mreža na jednom od svojih prolaza optereti poznatom impedancijom, onda se može svesti na odgovarajuću dvoprolaznu mrežu. Pretpostavimo da je općenita troprolazna mreža na prolazu 3 zaključena impedancijom Z_3, kao što je prikazano na slici 5.46. Tad u sustavu karakteristične impedancije Z_0 pripadajući koeficijent refleksije završne impedancije poprima oblik

$$\Gamma_3=\frac{Z_3-Z_0}{Z_3+Z_0}=\frac{a_3}{b_3},$$

pa se mreža može matematički opisati sustavom linearnih jednadžba:

$$b_1=S_{11}a_1+S_{12}a_2+S_{13}b_3\Gamma_3, \tag{5–213a}$$



Slika 5.46. a) Troprolazna mreža zaključena proizvoljnom impedancijom na prolazu 3, svodi se na **b)** dvoprolaznu mrežu

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}b_3\Gamma_3, \tag{5–213b}$$

$$b_3 = S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}b_3\Gamma_3, \tag{5–213c}$$

gdje je upadni val snage trećeg prolaza zamijenjen veličinom $a_3 = b_3\Gamma_3$. Sad se, eliminacijom varijable b_3, troprolazna mreža svodi na dvoprolaznu mrežu (slika 5.46b)) opisanu sljedećim raspršnim parametrima

$$[S'] = \begin{bmatrix} S_{11} + \dfrac{S_{13}S_{31}\Gamma_3}{1 - S_{33}\Gamma_3} & S_{12} + \dfrac{S_{13}S_{32}\Gamma_3}{1 - S_{33}\Gamma_3} \\ S_{21} + \dfrac{S_{23}S_{31}\Gamma_3}{1 - S_{33}\Gamma_3} & S_{22} + \dfrac{S_{23}S_{32}\Gamma_3}{1 - S_{33}\Gamma_3} \end{bmatrix}. \tag{5–214}$$

Do istog se rezultata može doći rješavanjem grafa toka signala. Slične se matrice mogu izvesti i za mrežu opterećenu na bilo kojem od preostala dva prolaza.

Taj je postupak često rabi prilikom pretvaranja parametara tranzistora u plivajućem spoju u parametre sa zajedničkom elektrodom (odjeljak 8.4.5), za izvedbu refleksijskih pojačala s feritnim cirkulatorom i za izvedbu feritnog izolatora. Ako je troprolazni sklop na slici 5.46a) cirkulator s prijenosom u smjeru $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, onda se postavljanjem prilagođenog tereta u prolaz 3 pretvara u feritni izolator (dvoprolazni sklop), slika 5.46b), s time da je prijenos snage moguć iz prolaza 1 u prolaz 2, a u suprotnome smjeru prijenos nije moguć ili je vrlo slab.

5.8.3. Četvroprolazne mreže

Pretpostavimo da je pasivna četveroprolazna mreža recipročna i nerefleksivna. Tad je njezina raspršna matrica simetrična, a na glavnoj dijagonali ima samo nule, tj.

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–215}$$

Ova matrica pokazuje da je potrebno odrediti samo šest kompleksnih raspršnih parametara.

Ako nadalje pretpostavimo da je mreža bez gubitaka, onda se iz zakona očuvanja energije (unitarnost matrice) dobiva ovih deset jednadžba:

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1\,, \tag{5–216a}$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 = 1\,, \tag{5–216b}$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{34}|^2 = 1\,, \tag{5–216c}$$

$$|S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{34}|^2 = 1\,, \tag{5–216d}$$

$$S_{13}S_{23}^* + S_{14}S_{24}^* = 0\,, \tag{5–217a}$$

$$S_{12}S_{23}^* + S_{14}S_{34}^* = 0\,, \tag{5–217b}$$

$$S_{12}S_{24}^* + S_{13}S_{34}^* = 0\,, \tag{5–217c}$$

$$S_{12}S_{13}^* + S_{24}S_{34}^* = 0\,, \tag{5–217d}$$

$$S_{12}S_{14}^* + S_{23}S_{34}^* = 0\,, \tag{5–217e}$$

$$S_{13}S_{14}^* + S_{23}S_{24}^* = 0\,. \tag{5–217f}$$

Konjugiranje jednadžbe (5–217a) i zatim množenje parametrom S_{24}^* daje

$$S_{13}^*S_{23}S_{24}^* + S_{14}^*S_{24}S_{24}^* = 0\,.$$

S druge strane, množenjem jednadžbe (5–217f) parametrom S_{13}^*, izlazi

$$S_{13}^*S_{13}S_{14}^* + S_{13}^*S_{23}S_{24}^* = 0\,.$$

Oduzimanjem ovih jednadžba dobiva se

$$S_{14}^*\left(|S_{24}|^2 - |S_{13}|^2\right) = 0\,. \tag{5–218}$$

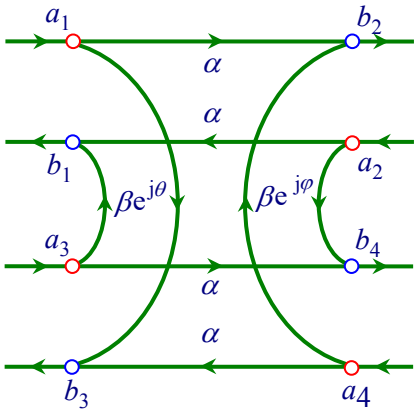
Sličnim postupkom iz jednadžba (5–217b) i (5–217e) izlazi

$$S_{23}\left(|S_{12}|^2 - |S_{34}|^2\right) = 0\,. \tag{5–219}$$

Jednadžbe (5–218) i (5–219) mogu se lako zadovoljiti, ako se postavi $S_{14}=0$ i $S_{23}=0$. Otuda izlazi da u recipročnoj nerefleksivnoj četveroprolaznoj mreži bez gubitaka dva para prolaza moraju biti međusobno izolirana. To je jedinstvena značajka idealnog *usmjernog sprežnika* (vidjeti odjeljak 7.3).

Uvrštenje $S_{14} = 0$ u jednadžbe (5–216a) i (5–216d) daje:

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1\,, \qquad |S_{24}|^2 + |S_{34}|^2 = 1\,.$$



Slike 5.47. Graf toka signala usmjernog sprežnika

Ako se od ovih jednadžba oduzme $|S_{12}|^2 + |S_{24}|^2 = 1$, što izlazi uvrštenjem $S_{23} = 0$ u jednadžbu (5–216b), onda se dobivaju ovi uvjeti:

$$|S_{13}| = |S_{24}|, \qquad |S_{12}| = |S_{34}|.$$

Pogodnim odabirom položaja referentnih ravnina neki raspršni parametri mogu poprimiti posve realne vrijednosti. Tako se može napisati:

$$S_{12} = S_{34} = \alpha, \tag{5–220a}$$

$$S_{13} = \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}, \tag{5–220b}$$

$$S_{24} = \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}, \tag{5–220c}$$

gdje su α i β realni brojevi, a θ i φ fazne konstante, od kojih se jedna uvijek može odabrati po volji. Sad se raspršna matrica (5–215) nerefleksivne četveroprolazne mreže bez gubitaka svodi na prikladniji, ali još uvijek posve općenit oblik

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \\ \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} & \alpha & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–221}$$

Pripadajući graf toka signala prikazan je na slici 5.47.

Ako se u izraz (5–217d) uvrste izrazi (5–220), onda se dobiva

$$\alpha\beta^* \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} + \alpha^* \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = 0.$$

Budući da su α i β realni brojevi, izlazi

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = -\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi \pm 2\pi n)} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta},$$

iz čega se konačno dobiva veza između faznih kutova θ i φ, tj.

$$\varphi = \pi \pm 2\pi n - \theta \quad \text{ili} \quad \theta + \varphi = \pi \pm 2\pi n. \tag{5–222}$$

Iz izraza (5–222) dobivaju se dvije karakteristične izvedbe prilagođenih četveroprolaznih mreža: *simetrični* i *nesimetrični* usmjerni sprežnik. Kao što je već ranije objašnjeno, jedan od faznih kutova (θ ili φ) uvijek se može proizvoljno odabrati. Razmotrimo svojstva tih dvaju sprežnika za uobičajeni slučaj $n = 0$.

(a) Ako se odabere $\theta = \pi/2$, onda iz izraza (5–222) izlazi $\varphi = \pi/2$, što odgovara simetričnom sprežniku. Primjenom te pretpostavke, iz izraza (5–220) izlazi

$$S_{12} = S_{34} = \alpha, \tag{5–223a}$$

$$S_{13} = \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{j}\beta, \tag{5–223b}$$

$$S_{24} = \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{j}\beta, \tag{5–223c}$$

pa raspršna matrica (5–221) poprima oblik

$$[S]_{\mathrm{sim}} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \mathrm{j}\beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \mathrm{j}\beta \\ \mathrm{j}\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \mathrm{j}\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–224}$$

(b) Odabere li se $\theta = 0$, iz izraza (5–222) izlazi $\varphi = \pi$, što odgovara nesimetričnom sprežniku. Sad se iz izraza (5–220) dobiva:

$$S_{12} = S_{34} = \alpha\,, \tag{5–225a}$$

$$S_{13} = \beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \beta\,, \tag{5–225b}$$

$$S_{24} = \beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} = -\beta \tag{5–225c}$$

pa se raspršna matrica (5–221) može napisati u ovom obliku

$$[S]_{\text{nesim}} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\beta \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–226}$$

Posebnu vrstu usmjernih sprežnika čine hibridi, tj. sprežnici sprege 3 dB. U njima se iz ulaznog prolaza na izlazne prolaze prenose jednake količine snage pa se stoga nerijetko rabe za dijeljenje ili slaganje snage. U tom je slučaju $|S_{12}| = |S_{13}|$, tj. $\alpha = \beta$.

Budući da je za simetrični je sprežnik $S_{12} = \alpha$, a $S_{13} = \mathrm{j}\beta$, iz uvjeta očuvanja energije, za $\beta = \alpha$ i mrežu bez gubitaka izlazi $|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1$. Otuda je $2\alpha^2 = 1$ pa je

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Time se raspršna matrica (5–224) za simetrični hibrid svodi na oblik

$$[S]_{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathrm{j} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathrm{j} & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–227}$$

Hibrid opisan tom matricom naziva se *kvadraturni hibrid* ili π/2-hibrid jer su mu izlazni signali međusobno pomaknuti u fazi za 90°, ili π/2 radijana.

Za nesimetrični je sprežnik $S_{12} = \alpha$, $S_{13} = \beta$, a $S_{24} = -\beta$ pa se uz uvjet $\beta = \alpha$ raspršna matrica (5–226) za nesimetrični hibrid svodi na oblik

$$[S]_{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5–228}$$

Zbog posebnih svojstava raspršne matrice taj se hibrid naziva *magični T-spoj* ili π-hibrid. Naime, ako je pobuđen prolaz 1, onda su izlazni signali na prolazima 2 i 3 međusobno protufazni (pomak faze 180° ili π radijana). U nižem frekvencijskom području (ispod 2 GHz) tom je hibridu pandan *balansni transformator*.

Može se dokazati da je usmjerni sprežnik jedina moguća pasivna recipročna nerefleksivna četveroprolazna mreža bez gubitaka.

Izrazi (5–218) i (5–219) mogu se zadovoljiti i tako da se uvrsti $|S_{13}| = |S_{24}|$ i $|S_{12}| = |S_{34}|$. Ako se osim toga referentne ravnine na prolazima odaberu tako da je $S_{13} = S_{24} = \alpha$ i $S_{12} = S_{34} = \mathrm{j}\beta$, što zadovoljava izraz (5–222), onda iz izraza (5–217f) i (5–217e) izlazi:

$$S_{13}S_{14}^* + S_{23}S_{24}^* = \alpha\left(S_{14}^* + S_{23}\right) = 0\,,$$

$$S_{12}S_{14}^* + S_{23}S_{34}^* = \mathrm{j}\beta\left(S_{14}^* - S_{23}\right) = 0\,.$$

Te dvije jednadžbe imaju dva moguća rješenja. Prvo je od njih $S_{14}=S_{23}=0$ i jednako je rješenju koje je ranije dobiveno za usmjerni sprežnik. Drugo rješenje dobiva se za $\alpha=\beta=0$ i traži $S_{12}=S_{13}=S_{24}=S_{34}=0$. To odgovara mreži koja se sastoji od dviju posve raspregnutih dvoprolaznih mreža. Jedna se od njih može nadomjestiti prijenosnom linijom bez gubitaka između prolaza 1 i 4, a druga se može nadomjestiti prijenosnom linijom bez gubitaka između prolaza 2 i 3. Budući da to rješenje nema praktični značaj, neće se dalje razmatrati.

Sad se može izreći opći zaključak: *svaka prilagođena, recipročna, četveroprolazna mreža bez gubitaka jest usmjerni sprežnik.*

5.9. Diskontinuiteti u valovodu

Diskontinuiteti su prisutni u svim praktičnim sklopovima s raspodijeljenim parametrima neovisno o vrsti prijenosne strukture. Ravan komad valovoda ili mikrotrakaste linije sa savršeno jednolikim poprečnim presjekom bit će posve *kontinuiran*, tj. neće biti diskontinuiteta. No u praksi su takve posve ravne prijenosne strukture od malog značenja. Kod primjene prijenosnih linija i valovoda u praktičnome sklopu obično se ne može zadržati ista geometrija njihovog poprečnog presjeka. Do promjene poprečnih dimenzija redovito dolazi na spojevima dviju linija različitih karakterističnih impedancija, pri promjeni smjera rasprostiranja elektromagnetske energije ili na mjestima u kojima se priključuju završne impedancije.

Egzaktna matematička formulacija diskontinuiteta vrlo je složena zadaća. No kako se pojedini diskontinuiteti ponašaju u različitim prijenosnim strukturama može se lako predočiti na osnovi kvalitativnog razmatranja konfiguracije polja koje ti isti diskontinuiteti stvaraju. Kad elektromagnetski val naiđe na neku prepreku, tad dolazi do pobude viših modova. Ti su viši modovi nužni da se na prepreci zadovolje rubni uvjeti.

Bilo kakva nagla promjena poprečnih izmjera valovoda i postavljenje prepreka u valovod stvara diskontinuitete polja pa dolazi do raspršenja elektromagnetske energije. To jest, dolazi do preraspodjele električnog ili magnetskog polja pa svaki takav prijelaz poprima značajke reaktivnog elementa (kapaciteta ili induktiviteta). Već smo vidjeli u odjeljku 4.3.4. da vijak (stupić) u valovodu stvara diskontinuitete polja i da se općenito svi viši modovi neće moći prenositi zbog konačnih poprečnih izmjera prijenosne strukture. Drugim riječima, učinci viših modova mogu se uzeti u obzir efektivnim reaktancijama koje su u paralelnom spoju s valovodom. Kad prevladavaju evanescentni *TE*-modovi, tad je prepreka induktivnog karaktera. No ako u valovodu prevladaju evanescentni *TM*-modovi, onda je prepreka kapacitivnog karaktera. U odjeljku 4.6. pokazano je da se valovodi mogu prikazati nadomjesnim sklopovima poput uobičajenih *TEM*-linija. Ta se ideja može korisno uporabiti za objašnjenje različitih diskontinuiteta u valovodu i pojednostavljenje proračuna valovodnih sklopova.

Rigorozna analiza preko polja općenitih diskontinuiteta obično je složena zadaća i nećemo je prikazati u ovoj knjizi. No modalna je analiza razmjerno jednostavna tehnika i korisna za analizu skokovite promjene poprečne dimenzije valovoda. Koji će se modovi naći u valovodu ponajviše ovisi o vrsti i načinu pobude valovoda. Modovi koji se ne mogu rasprostirati nalaze se samo u blizini izvora ili diskontinuiteta. Kad se jednom nađu komponente polja $\vec{E}$ (ili $\vec{H}$) u poprečnom presjeku valovoda, tad se lako mogu odrediti amplitude različitih valovodnih modova. Pogledajmo to na primjeru pravokutnoga valovoda.

Pretpostavimo da su poznata polja $E_x=0$ i $E_y=f(x, y)$ u poprečnom presjeku pravokutnoga valovoda na koordinati $z=0$. Pod tim ćemo uvjetima pokušati naći polje u području $z>0$ prilagođenog valovoda, što znači da u valovodu postoje samo putujući valovi u smjeru osi $\hat{z}$. Uz uvjet $E_x=0$, superpozicija modova TE_{mn} definiranih izrazom (4–67c) na koordinati $z=0$ daje

$$E_y(z=0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}E_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}. \qquad (5\text{–}229)$$

Valja uočiti da se ovdje radi o dvostrukom Fourierovu redu; sinusni red za varijablu x i kosinusni red za varijablu y. Ovdje su u konstanti E_{mn} sažete amplitudna konstanta A_{mn} i sve ostale konstantne veličine iz izraza (4–67c) pa ta konstanta ima ulogu Fourierovih koeficijenata funkcije E_y. Stoga se amplitude modalnih polja mogu razviti u oblik

$$E_{mn} = \frac{2\varepsilon_n}{ab}\int_0^a\int_0^b E_y(z=0)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \tag{5–230}$$

gdje je $\varepsilon_n=1$ za $n=0$, a $\varepsilon_n=2$ za $n>0$ (Neumannov broj). Kad se odredi konstanta E_{mn}, tad se može izračunati električno polje na diskontinuitetu. Jednostavnim zakretanjem koordinatnih osi, može se naći i rješenje za polje $E_x=f(x, y)$ i $E_y=0$. Rješenje za zadane funkcije H_x i H_y na koordinati $z=0$ mogu se zatim naći primjenom načela dualnosti (odjeljak 2.15.2).

Ako je u valovodu istodobno prisutno više modova, onda svaki od njih može prenositi energiju. No pritom važnu ulogu imaju i zaporni modovi koji ne mogu prenositi energiju. Budući da njihova polja pohranjuju energiju, diskontinuitet će pokazivati reaktivne značajke. Da bi se moglo odrediti koliki je dio energije pohranjen u tim poljima, valja izračunati gustoću toka snage u valovodu, tj. Poyntingov vektor (odjeljak 4.1.2). Realni dio Poyntingova vektora upućuje na tok srednje snage preko diskontinuiteta, a njegov imaginarni dio upućuje na to koliko je energije pohranjeno u okolišu diskontinuiteta pa je razmjeran susceptanciji.

Za zadanu poprečnu komponentu polja, tok kompleksne snage u smjeru osi $\hat{z}$, koji prolazi ravninom $z=0$, može se napisati kao

$$P = \int_S \vec{E}\times\vec{H}^*\cdot\hat{z}\mathrm{d}S = -\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}\left[E_y H_x^*\right]_{z=0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= -\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}E_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right]\left[\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{E_{pq}^*}{Z_{TEpq}^*}\sin\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{q\pi y}{b}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \tag{5–231}$$

gdje je $Z_{TEpq} = k_0\eta_0/\beta_{mn}$ valna impedancija u valovodu dana izrazom (4–76). Zbog svojstva ortogonalnosti sinusnih funkcija, izraz (5–231) svodi se na

$$P = \frac{ab}{2k_0\eta_0}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_{mn}^*}{\varepsilon_n}\left|E_{mn}\right|^2\,. \tag{5–232}$$

Iz ovog izraza proizlazi koristan zaključak, *snaga koja se prenosi valovodom jednaka je algebarskom zbroju snaga koje se prenose pojedinačnim modovima*. Za modove koji se rasprostiru ta je snaga realna, a za sve zaporne modove koji se ne mogu rasprostirati fazni je koeficijent imaginaran ($\beta_{mn}=\mathrm{j}\alpha_{mn}$) pa je snaga tih modova reaktivna (jalova). Drugim riječima, zaporni modovi pohranjuju energiju, a to znači da se diskontinuitet može nadomjestiti reaktancijom (induktivitetom ili kapacitetom ili njihovom kombinacijom).

Ta se teorija može ilustrirati na primjeru diskontinuiteta koji je nastao zbog skokovite promjene poprečnih dimenzija valovoda, slika 5.48. Za slučaj prikazan na slici 5.48a) (skok u E-ravnini) dimenzije su takve da se u objema valovodima može rasprostirati samo dominantni mod TE_{10}. Ako elektromagnetski val upada na diskontinuitet iz nižeg valovoda i ako je viši valovod na svom kraju prilagođen, onda se za približno rješenje može pretpostaviti da je polje E_y u ravnini diskontinuiteta jednako polju upadnoga vala [13], tj.

$$E_y(z=0)\simeq\begin{cases}\sin\dfrac{m\pi x}{a} & \text{za } y<c\\ 0 & \text{za } y>c\,.\end{cases} \tag{5–233}$$

Iz izraza (5–230) izlazi da su samo ove amplitude različite od nule:

$$E_{10} = \frac{c}{b}, \tag{5–234a}$$

$$E_{1n} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{b}. \tag{5–234b}$$

Stoga će nakon sumiranja u izrazu (5–229) preostati samo član za $m = 1$, iz kojeg izlazi *admitancija otvora* u ravnini diskontinuiteta. Kompleksna snaga, koja prolazi ravninom na koordinati $z = 0$, može se izraziti primjenom jednakosti (5–232) i (5–233), kao

$$P = \frac{ac}{2b}\left\{ Y^*_{TE10} + 2\sum_{n=1}^{\infty} Y^*_{TE1n}\left[\frac{\sin\dfrac{n\pi c}{b}}{\dfrac{n\pi c}{b}}\right]^2\right\}, \tag{5–235}$$

gdje se iz izraza (4–76) za valnu impedanciju i izraza (4–71) dobivaju ovi izrazi za valne admitancije *TE*-modova:

$$Y_{TE10} = \frac{1}{\eta}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \qquad \text{za } n = 0,$$

$$Y_{TE1n} = \mathrm{j}\frac{2bY_{TE10}}{\lambda_v\sqrt{n^2-(2b/\lambda_v)^2}} \qquad \text{za } n \geq 1.$$

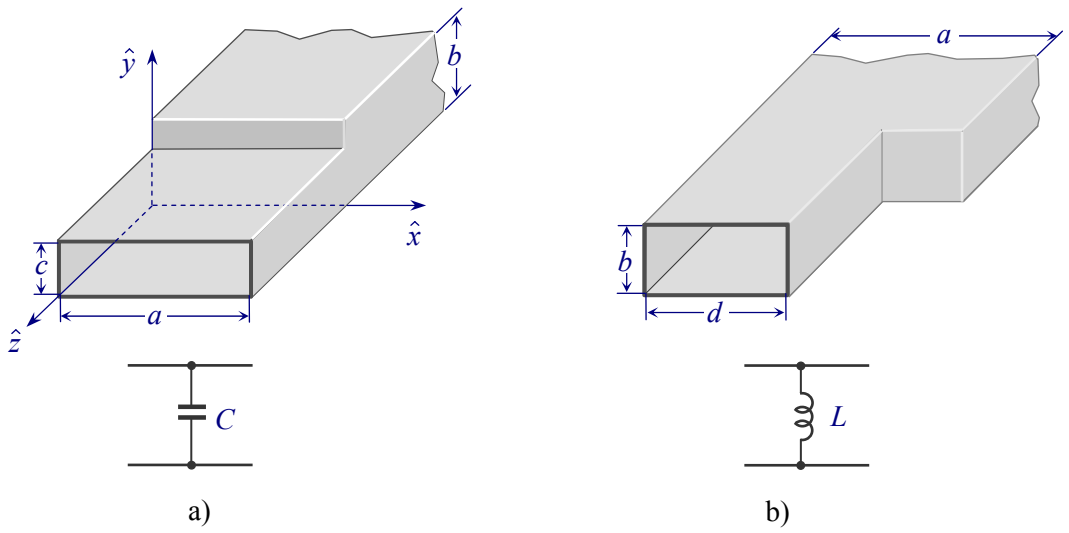
Zaporna frekvencija f_c i valna duljina λ_v odgovaraju modu TE_{10}, a admitancija otvora odnosi se na napon $V = c$ u sredini otvora. U tom je slučaju admitancija otvora

$$Y_a = \frac{P^*}{|V|^2} = Y_{TE10}\left[\frac{a}{2b} + \mathrm{j}\frac{2a}{\lambda_v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\pi c/b)}{(n\pi c/b)^2\sqrt{n^2-(2b/\lambda_v)^2}}\right]. \tag{5–236}$$

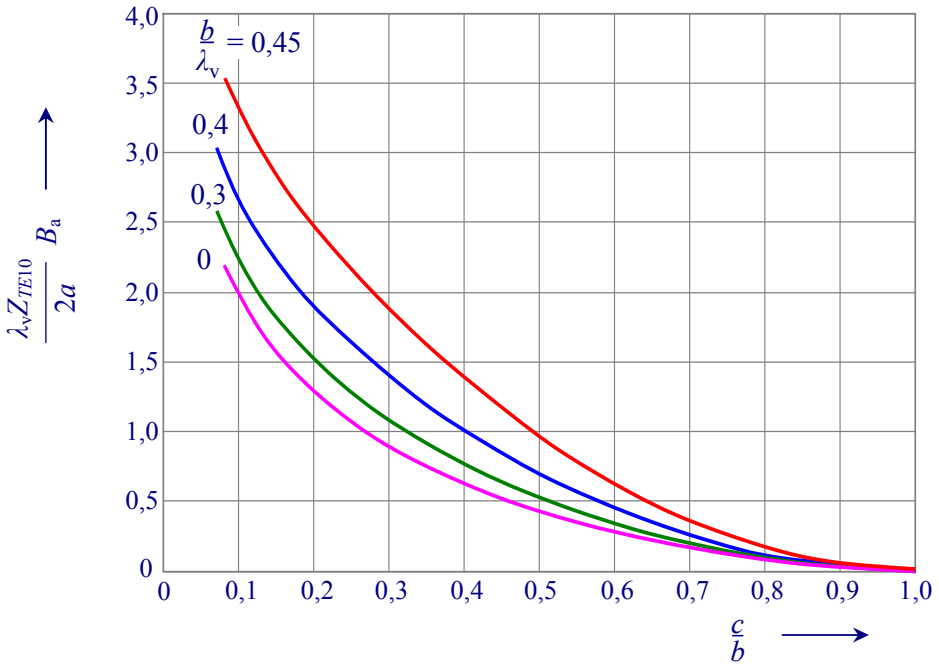
Imaginarni dio daje traženu susceptanciju otvora

$$B_a = \frac{2a}{\lambda_v Z_{TE10}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\pi c/b)}{(n\pi c/b)^2\sqrt{n^2-(2b/\lambda_v)^2}}, \tag{5–237}$$

gdje je λ_v valna duljina, a Z_{TE10} valna impedancija moda TE_{10}. Na slici 5.49 prikazane su izračunane vrijednosti normirane susceptancije otvora B_a za nekoliko vrijednosti omjera b/λ_v.



Slika 5.48. Skokovita promjena: **a)** visine valovoda, **b)** širine valovoda

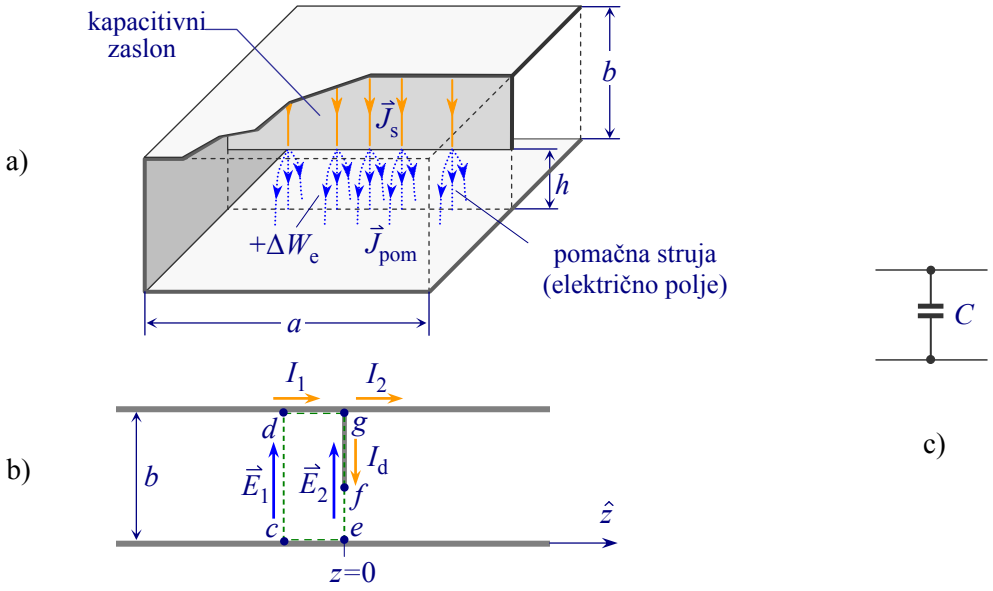


Slika 5.49. Normirana susceptancija skokovitog prijelaza valovoda s jedne visine na drugu

Na sličan se način mogu provesti razmatranja diskontinuiteta sa skokovitim proširenjem valovoda, kao što je prikazano na slici 5.48b). Taj sklop upućuje na induktivne značajke.

Slična obilježja ima sklop kapacitivnog zaslona pobuđenog dominantnim modom (slika 5.50a)). Promotrimo pravokutnu konturu *cdgfe* na slici 5.50b), koja je tako postavljena da je dio njezine stranice (*fg*) tangencijalan na plohu zaslona i da se stranica *cd* nalazi vrlo blizu stranice *efg*. Ako je taj razmak znatno manji od valne duljine, onda vrijedi

$$\int_c^d \vec{E}_1 \mathrm{d}\vec{l} + \int_g^e \vec{E}_2 \mathrm{d}\vec{l} = 0, \qquad (5\text{–}238)$$



Slika 5.50. a) Zaslon (kapacitivni) kao diskontinuitet u pravokutnome valovodu, **b)** poprečni presjek, **c)** nadomjesni sklop

tj. naponi su na diskontinuitetu neprekinuti.

Struje su naprotiv prekinute. To se može lako vidjeti iz sljedećeg razmatranja. Budući da $\vec{E}_2$ mora biti nula na dijelu puta (*fg*), a polje $\vec{E}_1$ ne mora biti nula niti na jednom dijelu puta *cd*, prosječno polje $\vec{E}_2$ na dijelu putu (*ef*) mora biti znatno jače od prosječnog polja $\vec{E}_1$ da bi vrijedila jednadžba (5–238). Dakle, električno polje u otvoru ispod zaslona mora biti znatno jače od onog u ostatku valovoda. Stoga će gustoća pomačne struje $\vec{J}_{\text{pom}} = \text{j}\omega\varepsilon\vec{E}$ u otvoru biti također znatno veća od gustoće pomačne struje u preostalom dijelu valovoda. Budući da ta struja prethodi u fazni električnom polju za 90°, struja koja teče otvorom u zaslonu prethodi naponu za 90°. Sad je provodnu površinsku struju $\vec{J}_s$ i volumnu pomačnu struju $\vec{J}_{\text{pom}}$ korisno zamijeniti običnim strujama da bi se njihovi učinci mogli lakše ugradili u nadomjesni sklop valovoda s koncentriranim elementima. Pomačnu struju snabdijeva provodna struja I_d na otvoru, koja teče zaslonom od svoda valovoda do donjeg ruba zaslona. Budući da je I_d jednaka pomačnoj struji u otvoru, ona prethodi naponu za 90°. Stoga se struja I_1 koja teče valovodom prema zaslonu sastoji od dviju komponenata: struje I_2 koja napušta zaslon u smjeru rasprostiranja energije i kapacitivne struje I_d koja teče otvorom, tj.

$$I_1 = I_2 + I_\text{d}. \tag{5–239}$$

Otuda se vidi da je struja koja teče ravninom zaslona diskontinuirana, a da je susceptancija diskontinuiteta razmjerna kapacitivnoj struji koja teče otvorom. Budući da omjer između fazora struje I_d i fazora napona daje susceptanciju, zaslon se može nadomjestiti paralelnim kapacitetom čija je vrijednost također razmjerna I_d (slika 5.50c)).

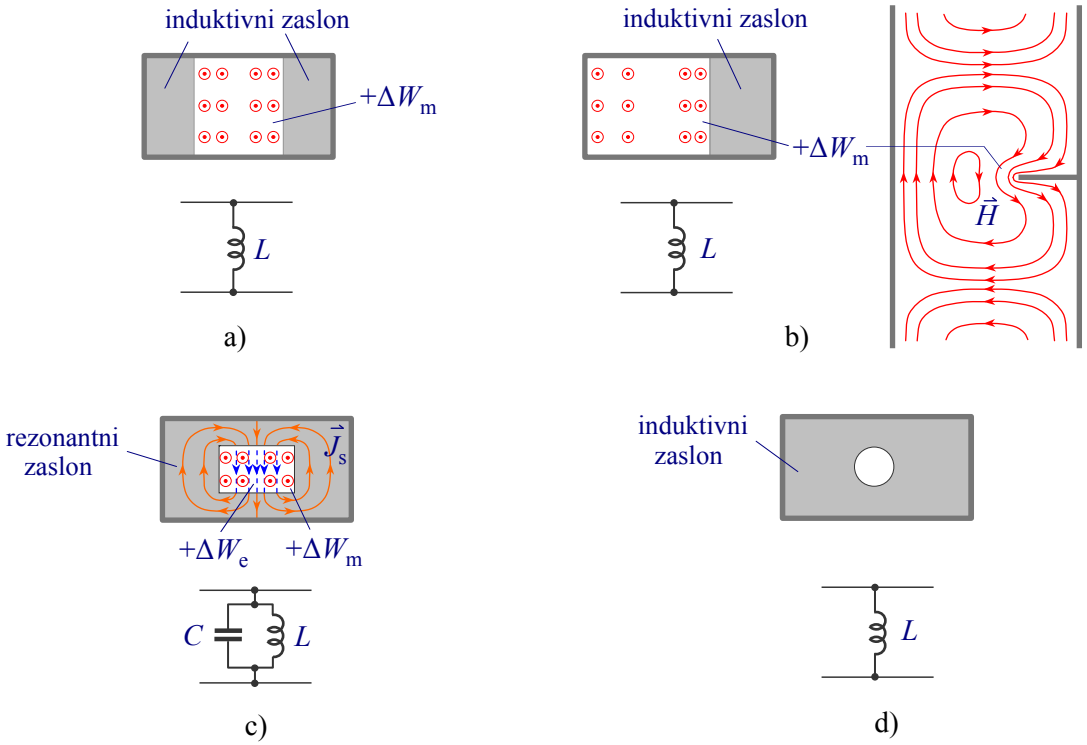
U praksi se obično rabe tanki metalni zasloni ($t \ll \lambda$). No kapacitivni se zasloni obično izbjegavaju jer na njima proboj nastaje pri nižim snagama u valovodu. Osim toga, stroga matematička analiza takvog zaslona znatno je složenija od one za skok u visini valovoda jer vrlo tanak zaslon stvara više modove većih amplituda pa je time konvergencija traženom rješenju znatno sporija.

Na sličan se način mogu razmotriti i druge vrste diskontinuiteta. Induktivni se zasloni (slika 5.51a) i b)) mogu ostvariti tankim poprečnim zaslonom koji premošćuje uže stijenke valovoda i djelomično zaslanja valovod. Budući da je pritom na mjestu zaslona smanjena širina valovoda, magnetsko se polje zgušnjava pa raste pohranjena magnetska energija, što upućuje na induktivni karakter zaslona (slika 5.51b)).

Kombiniranjem kapacitivnog i induktivnog zaslona u obliku paralelnog spoja može se ostvariti rezonantni zaslon, kao što je prikazano na slici 5.51c). Tako je ostvaren simetričan pravokutni otvor koji se ponaša poput paralelnoga titrajnog kruga na određenoj frekvenciji unutar frekvencijskog područja s čistim dominantnim modom.

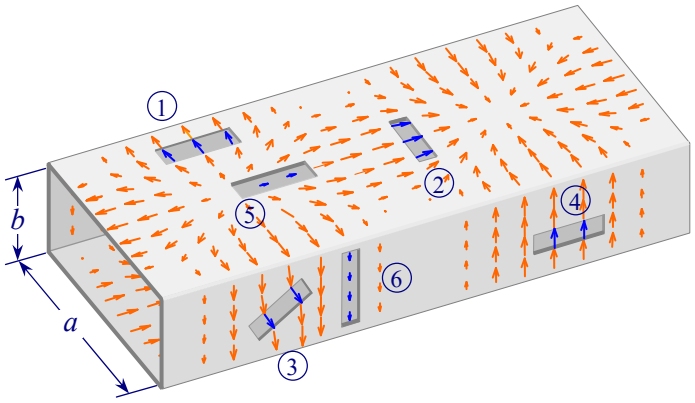
No zaslon s malim kružnim otvorom u poprečnoj ravnini (slika 5.51d)) pokazuje induktivni karakter unutar cijelog frekvencijskog područja u kojem je prisutan samo dominantni mod. Osim kružnog otvora, sprega valovoda s drugim valovodom ili slobodnim prostorom koji okružuje valovod može se ostvariti otvorima različitih oblika u stijenkama valovoda.

Posebno su zanimljivi otvori oblika uskog proreza prikazani na slici 5.52. Na tim prorezima može doći do curenja (zračenja) energije u slobodni prostor ili u drugi valovod. To će zračenje biti učinkovito samo ako prorez presijeca tok površinske struje. Prema zakonu o kontinuitetu struje, prorezom će protjecati pomačna struja. Ta je struja ekvivalentna električnom polju koje je zajedničko valovodu i prostoru izvan valovoda. U skladu s Huygensovim načelom, prorez tako postaje izvor novog vala koji se rasprostire u prostoru izvan valovoda pa se ponaša poput antene.



Slika 5.51. Induktivni i rezonantni zasloni u pravokutnome valovodu

Na slici 5.52 prikazano je više uskih pravokutnih otvora smještenih na različitim mjestima šire i uže stijenke valovoda koji je pobuđen dominantnim modom. Također je prikazana razdioba površinske struje dane izrazom (4–78) u odjeljku 4.3.1. Zbog toga što je za dominantni mod poprečna struja jednaka nuli samo na simetrali šire stijenke valovoda ($x = a/2$), duž te simetrale može se napraviti uzak prorez, a da se pritom ne naruši struktura polja u valovodu, tj. da ne dođe do zračenja elektromagnetske energije iz valovoda u okolni prostor. Tad se kroz taj prorez u valovod može lako ubaciti pomična električna sonda (kratka antena) za mjerenje jakosti električnog polja, čime se može mjeriti odnos stojnih valova unutar te zatvorene prijenosne strukture. Obično se uzima da je stijenka valovoda zanemarivo tanka. No konačna debljina stijenke valovoda efektivno smanjuje veličinu proreza, što treba uzeti u obzir.



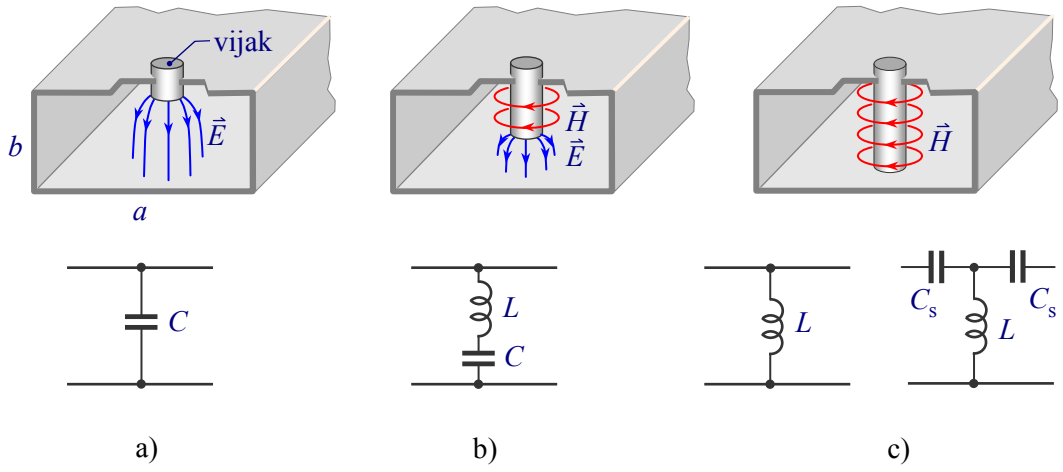
Slika 5.52. Prorezani valovod. Prorezima 1-4 u stijenkama pravokutnoga valovoda može se ostvariti zračenje elektromagnetske energije iz dominantnoga moda u slobodni prostor. Zbog neprekinutosti struje, u tim se prorezima redovito pojavljuje pomačna struja koja je ekvivalentna električnom polju faznog pomaka –90°. Prorezi 5 i 6 gotovo ne zrače jer sijeku neznatan broj strujnica površinske struje

Kao diskontinuitet nerijetko se rabi metalni stupić ili vijak koji ponire u valovod kroz njegovu širu stijenku. Takvi vijci služe za ugađanje frekvencije valovodnih filtara ili rezonatora ili za postavljanje minijaturnih poluvodičkih dioda u strukturu valovoda (odjeljak 8.9.1). Ako je stupić kratak, onda se u njegovom okolišu pohranjuje više električne energije jer je provodna struja koja protječe vodičem stupića gotovo zanemariva. Stoga takav diskontinuitet valja nadomjestiti koncentriranim kapacitetom (slika 5.53a)). Daljnjim poniranjem stupića, u prostoru između stupića i donje stijenke valovoda jača pomačna struje pa u skladu sa zakonom neprekinutosti struje, jača i provodna struja u stupiću te u prostoru oko stupića raste količina pohranjene magnetske energije. Učinak magnetskog polja može se nadomjestiti induktivitetom. Stoga se električki tanak stupić promjenljive duljine može nadomjestiti serijskim spojem induktiviteta i kapaciteta, kao što je prikazano na slici 5.53b). Pri izvjesnoj duljini (dubini) stupića izjednačit će se količine pohranjenih energija u magnetskom i električnom polju pa će u toj strukturi doći do serijske rezonancije (odjeljci 5.2.2. i 7.4). Tad će se, za stupić bez gubitaka, nadomjesna impedancija izjednačiti s nulom. Drugim riječima, na rezonantnoj frekvenciji, stupić se ponaša poput kratkoga spoja pa će doći do totalne refleksije, tj. do potpunog prekida prijenosa energije valovodom. No kad metalni stupić posve premosti valovod u njegovom će okolišu preostati samo magnetska energija jer fizikalna intuicija upućuje na zaključak da tad stupićem protječe samo provodna struja koja inducira magnetsko polje. U tom slučaju stupić valja nadomjestiti induktivitetom, kao što je prikazano na slici 5.53c).

Približi li se stupić bočnoj stijenki valovoda učinak diskontinuiteta će se smanjiti jer će se smanjiti i normirana susceptancija stupića, što je posljedica porasta karakteristične admitancije za dominantni mod valovoda udaljavanjem točke promatranja od simetrale šire stijenke prema bočnoj stijenki valovoda. Paralelnim spajanjem više takvih struktura u poprečnoj ravnini može se pojačati njihov učinak, tj. može se znatno povećati susceptancija diskontinuiteta.

Kad promjer stupića ili debljina zaslona premaše desetinu valne duljine, tad u nadomjesne sklopove valja ugraditi nove nadomjesne reaktivne elemente kojima se može uzeti u obzir kašnjenje signala duž diskontinuiteta u smjeru rasprostiranja energije. To su, primjerice, dva serijska kapaciteta (C_S) u odgovarajućem nadomjesnom T-četveropolu na slici 5.53c) za induktivni stupić u valovodu. Za kapacitivni stupić velikog promjera vrijedi ista topologija nadomjesne mreže u kojoj induktivitet valja zamijeni odgovarajućim kapacitetom.

O valovodnim se diskontinuitetima može više naći u literaturi [14].



Slika 5.53. Stupić kao diskontinuitet u pravokutnome valovodu: **a)** kapacitivni stupić, **b)** stupić u serijskoj rezonanciji i **c)** induktivni stupić te odgovarajući nadomjesni sklopovi

5.10. Pobuda valovoda

5.10.1. Pobuda električnim i magnatskim strujama

U ovom ćemo odjeljku primijenti načelo ekvivalencije (odjeljak 2.15.4) u razmatranju pobude valovoda proizvoljnim električnim i magnetskim strujama, slika 5.54. Zatim ćemo ta razmatranja iskoristiti za izračunavanje pobude i ulazne impedancije električnoga unipola i strujne petlje te pobude kroz otvor u poprečnom zaslonu ili zidu valovoda [1], [2], [13] i [14]. Načelo ekvivalencije kaže da se polja u poprečnome presjeku na koordinati $z=0$ mogu lako zamijeniti nadomjesnim plošnim strujama. Stoga pogledajmo najprije poprečna polja općenitog *TE*-moda u pravokutnome valovodu opisana izrazima (4–67). Pretpostavit ćemo da se polja $\vec{E}^+$ i $\vec{E}^-$ te $\vec{H}^+$ i $\vec{H}^-$ općenito rasprostiru u pozitivnom, odnosno negativnom smjeru $\hat{z}$, što je označeno odgovarajućim eksponentima +, odnosno –. Pripadajućim amplitudnim koeficijentima za dva suprotna smjera pridijeljene su oznake A^+_{mn} i A^-_{mn}. Na koordinati $z = 0$, polja moraju zadovoljiti rubne uvjete (2–160) i (2–161) pa izlazi:

$$\left(\vec{E}^+ - \vec{E}^-\right)\times\hat{z} = 0\,, \qquad \hat{z}\times\left(\vec{H}^+ - \vec{H}^-\right) = \vec{J}_s\,. \tag{5–240}$$

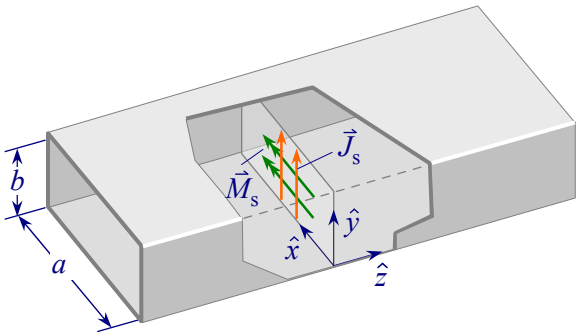
Prva jednakost upućuje na neprekinutost električnog polja na koordinati $z=0$, što uvrštenjem u odgovarajućih izraza (4–67b) i (4–67c) za polja daje

$$A^+_{mn} = A^-_{mn}\,. \tag{5–241}$$

Druga jednakost (5–240) objašnjava da je diskontinuitet poprečnih komponenata magnetskog polja jednak plošnoj struji. Uvrštenjem izraza (4–67e) i (4–67f) za magnetska polja na koordinati $z=0$, dobiva se

$$\vec{J}_s^{\,TE} = \hat{y}\left(H_x^+ - H_x^-\right) - \hat{x}\left(H_y^+ - H_y^-\right) =$$
$$= -\hat{x}\,\frac{2A^+_{mn}n\pi}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} + \hat{y}\,\frac{2A^+_{mn}m\pi}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,, \tag{5–242}$$

gdje je iskorištena jednakost (5–241). Ta će struja pobuditi samo modove TE_{mn} i to u obama smjerovima, $+\hat{z}$ i $-\hat{z}$.



Slika 5.54. Pobuda valovoda električnim i magnetskim plošnim strujama

Iz načela dualnosti, za plošnu struju koja stvara samo modove TM_{mn}, dobiva se

$$\vec{J}_s^{\,TM} = \hat{x}\,\frac{2B_{mn}m\pi}{Z_{TM}a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad y\,\frac{2B^+_{mn}n\pi}{Z_{TM}b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,. \tag{5–243}$$

Sličan se pristup može uporabiti za određivanje plošne magnetske struje uz rubne uvjete:

$$\left(\vec{E}^+ - \vec{E}^-\right)\times\hat{z} = \vec{M}_s\,, \qquad \hat{z}\times\left(\vec{H}^+ - \vec{H}^-\right) = 0\,. \tag{5–244}$$

Za plošnu magnetsku struju na koordinati $z=0$, polja modova TE_{mn} moraju imati neprekinuta magnetska polja (4–67e) i (4–67f), što daje

$$A_{mn}^{+} = -A_{mn}^{-}. \tag{5–245}$$

Uvrštenje izraza (4–67b) i (4–67c) za električna polja u prvu jednadžbu (5–244) daje

$$\vec{M}_{\mathrm{s}}^{TE} = -\hat{x}\frac{2Z_{TE}A_{mn}m\pi}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} - \hat{y}\frac{2Z_{TE}A_{mn}^{+}n\pi}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{5–246a}$$

a za dualnu plošnu magnetsku struju, koja stvara samo modove tipa TM_{mn}, dobiva se

$$\vec{M}_{\mathrm{s}}^{TM} = -\hat{x}\frac{2B_{mn}n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} + \hat{y}\frac{2B_{mn}^{+}m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{5–246b}$$

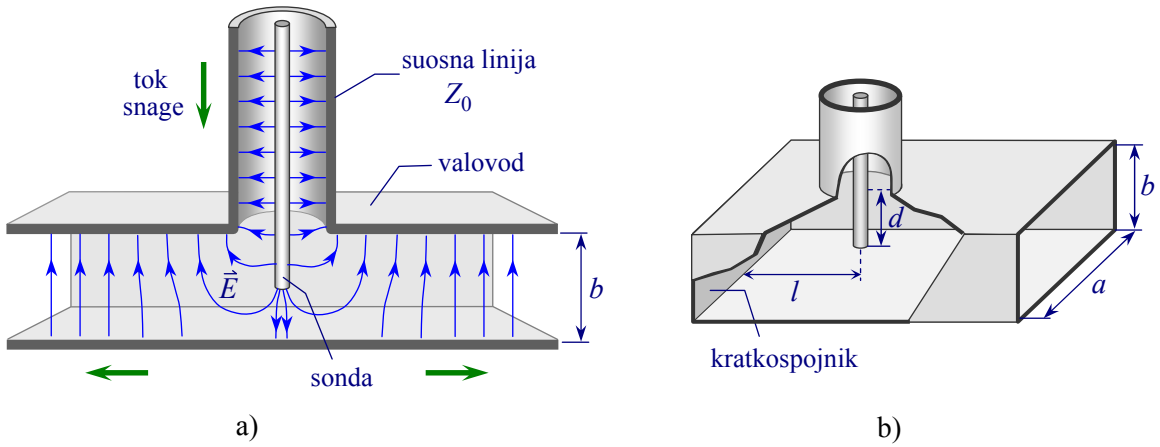
Provedeno razmatranje pokazuje da se valovodni modovi mogu pobuditi bilo električnom bilo magnetskom strujom odgovarajućeg oblika ili kombinacijom tih struja. No takve je struje nerijetko teško ostvariti u praksi pa se obično nadomješćuju strujama unipola ili strujnim petljama. U tom se slučaju pojavljuje velik broj modova od kojih se većina ne može rasprostirati, nego samo pridonosi pohrani energije u okolišu izvora.

Dominantni mod u valovodu može se pobuditi iz suosne linije tako da se *električna sonda* (električni unipol) postavi paralelno s vektorom električnog polja u njegovom maksimumu ili blizu njega ili s pomoću *magnetskog dipola* (strujne petlje) u točki u kojoj se nalazi maksimalno magnetsko polje, ali tako da je vektor magnetskog polja okomit na ravninu u kojoj leži petlja (odjeljak 10.1.7).

Električna se sonda obično izvodi u obliku električnog unipola tako da se središnji vodič suosne linije produži i ubaci u valovod kroz kružni otvor na odgovarajućoj stijenki valovoda, kao što je prikazano na slici 5.55a). Pritom se plašt suosne linije kratko spaja na širu stijenku valovoda. Sonda zrači jednaku snagu u lijevu i desnu stranu valovoda. Budući da je opisani sklop recipročan (odjeljak 5.3.1), suosna linija iz valovoda prima točno toliko snage koliko je i šalje u valovod. Vektor električnog polja u blizini unipola sadrži i komponente koje su na njega okomite, pa se polja u okolišu unipola razlikuju od željenih polja dominantnoga moda TE_{10}. Stoga ta vrsta antene pobuđuje i mnoštvo viših modova. No valovod se obično dimenzionira tako da se njime rasprostire samo dominantni mod TE_{10}. Tad su polja viših modova evanescentna pa udaljavanjem od unipola brzo iščezavaju u svim smjerovima. Budući da samo pohranjuju energiju u blizini unipola, ta polja pridonose reaktanciji unipola.

Na kraju tankog unipola struja je jednaka nuli. Uz harmonijsku pobudu može se pretpostaviti da je na ostalom dijelu unipola razdioba struje približno sinusna jer taj slučaj podsjeća na stojni val na otvorenoj prijenosnoj liniji. Stoga se ta struja može matematički izraziti kao

$$I = I_0 \sin\beta(d - y), \quad 0 \le y \le d, \tag{5–247}$$



Slika 5.55. Pobuda valovoda suosnom linijom preko električne sonde: **a)** simetrična pobuda u obama obama smjerovima; **b)** pobuda u jednom smjeru zatvaranjem valovoda kratkospojnikom

gdje je d visina unipola koji je postavljen paralelno s osi $\hat{y}$, na koordinatama $x=a/2$, $z=0$. Ta struja stvara putujuća elektromagnetska polja dominantnoga moda TE_{10}.

Iz praktičnih se razloga obično želi postići rasprostiranje snage samo u jednome smjeru valovoda. To se može ostvariti zatvaranjem valovoda iza antene s pomoću kratkospojnika, kao što je prikazano na slici 5.55b). Tad se reaktancija antene zbog prisutnosti evanescentnih polja može lako poništiti reaktancijom suprotnog predznaka kratko spojenog odsječka valovoda. Potrebna vrijednost te reaktanacije može se namjestiti ugađanjem udaljenosti kratkospojnika od antene. Maksimalni prijenos snage iz suosne linije u valovod ostvaruje se prilagodbom karakteristične impedancije suosne linije na valnu impedanciju valovoda ugađanjem duljine antene. Više o prilagodbi impedancije može se naći u poglavlju 6.

No poprečne dimenzije valovoda mogu biti tako male da se njime ne može prenositi energija na frekvenciji signala koji upada iz suosne linije. Tad će u okolišu antene biti prisutna samo evanescentna polja i sklop će imati posve reaktivne značajke pa će se cjelokupna energija reflektirati, tj. vratiti suosnom linijom u generator signala.

Razmotrimo sad pobudu valovoda proizvoljnim izvorom struje, kao što je prikazano na slici 5.56. Pretpostavimo da je strujni izvor $\vec{J}$ postavljen unutar prostora omeđenog dvjema referentnim ravninama koje se nalaze na koordinatama z_1 odnosno z_2. Polja koja zrači taj izvor mogu se izraziti beskonačnom sumom valovodnih modova [1]:

$$\vec{E}^{\pm} = \sum_n A_n^{\pm} \vec{E}_n^{\pm} = \sum_n A_n^{\pm} \left(\vec{e}_n \pm \hat{z} e_{zn}\right) \mathrm{e}^{\mp \mathrm{j}\beta_n z}, \tag{5–248a}$$

$$\vec{H}^{\pm} = \sum_n A_n^{\pm} \vec{H}_n^{\pm} = \sum_n A_n^{\pm} \left(\pm \vec{h}_n + \hat{z} h_{zn}\right) \mathrm{e}^{\mp \mathrm{j}\beta_n z}, \tag{5–248b}$$

gdje je n indeks sumiranja koji uključuje sve moguće *TE*- ili *TM*-modove, a indeks t odnosi se na poprečna polja. Predznak + odgovara području $z > z_2$, a predznak minus području $z < z_1$. Nepoznate konstante A_n mogu se lako izračunati primjenom Lorentzova teorema recipročnosti (2–294). Volumen V obuhvaća prostor omeđen stijenkama valovoda između poprečnih ravnina na z_1 i z_2. Pritom strujni izvor zrači polja $\vec{E}^{(a)}$ i $\vec{H}^{(a)}$ u skladu s Lorentzovim teoremom. Ta su polja dana izrazima (5–248). Za polja $\vec{E}^{(b)}$ i $\vec{H}^{(b)}$ valja uzeti valovodni mod n-tog reda, $\vec{E}^{\pm}$ odnosno $\vec{H}^{\pm}$. Sad se za modove koji putuju u negativnome smjeru osi $\hat{z}$ može napisati:

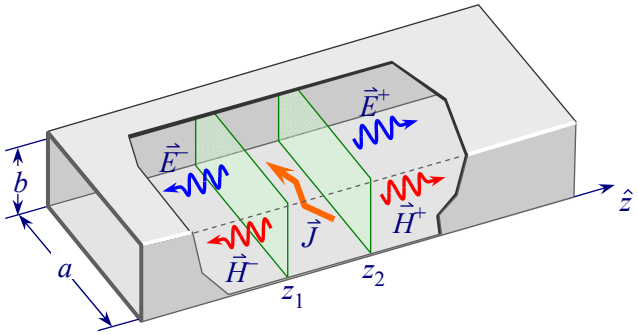
$$\vec{E}^{(b)} = \vec{E}_n^{-} = \left(\vec{e}_n - \hat{z} e_{zn}\right) \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta_n z},$$

$$\vec{H}^{(b)} = \vec{H}_n^{-} = \left(-\vec{h}_n + \hat{z} h_{zn}^{-}\right) \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta_n z}.$$

Iz jednakosti (2–294) dobiva se

$$\oint_S \left(\vec{E}^{(a)} \times \vec{H}_n^{-} - \vec{E}_n^{-} \times \vec{H}^{(a)}\right) \cdot \hat{n} \,\mathrm{d}S = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}_n^{-} \,\mathrm{d}V \tag{5–249}$$

jer su polja $\vec{E}^{(b)}$ i $\vec{H}^{(b)}$ rješenja za područje bez struja $(\vec{J}^{(b)} = 0)$ unutar volumena V. Tad je plošni integral jednak nuli na stijenkama valovoda zbog rubnog uvjeta $\hat{n} \times \vec{E}^{(a)} = \hat{n} \times \vec{E}_n^{-} = 0$.



Slika 5.56. Pobuda valovoda proizvoljnom izvorom električne struje

Budući da su modovi međusobno ortogonalni, tj. vrijedi

$$\int_{S_0} \vec{E}_m^{\pm} \times \vec{H}_n^{\pm} \cdot \hat{n}\mathrm{d}S = 0\,, \qquad \text{za } n \neq m\,,$$

u izrazu za $\vec{E}^{(a)}$ i $\vec{H}^{(a)}$ iščezavanju svi članovi, osim *n*-tog, kad se integracija obavlja na ravnini poprečnoga presjeka valovoda S_0. Primjenom izraza (2–248) dobiva se

$$\int_{z_2} A_n^+ \left[(\vec{e}_n + \hat{z}e_{zn}) \times (-\vec{h}_n + \hat{z}h_{zn}) - (\vec{e}_n - \hat{z}e_{zn}) \times (\vec{h}_n + \hat{z}h_{zn}) \right] \cdot \hat{z}\mathrm{d}S =$$

$$= -2A_n^+ \int_{z_1} \vec{e}_n \times \vec{h}_n \cdot \hat{z}\mathrm{d}S = \int_V \vec{E}_n^- \cdot \vec{J}\mathrm{d}V\,,$$

jer integral na presjeku z_1 iščezava. Otuda je

$$A_n^+ = -\frac{1}{P_n} \int_V \vec{E}_n^- \cdot \vec{J}\mathrm{d}V = -\frac{1}{P_n} \int_V (\vec{e}_n - \hat{z}e_{zn}) \cdot \vec{J}\, \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta_n z}\mathrm{d}V\,, \tag{5–250a}$$

gdje je konstanta $P_n = \int_{S_0} \vec{e}_n \times \vec{h}_n \cdot \hat{z}\mathrm{d}S$ razmjerna protoku snage *n*-tog moda.

Ako se za polja $\vec{E}^{(b)}$ i $\vec{H}^{(b)}$ uzme $\vec{E}^+$ odnosno $\vec{H}^+$, onda se jednakim postupkom dobiva

$$A_n^- = -\frac{1}{P_n} \int_V \vec{E}_n^+ \cdot \vec{J}\mathrm{d}V = -\frac{1}{P_n} \int_V (\vec{e}_n + \hat{z}e_{zn}) \cdot \vec{J}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z}\mathrm{d}V\,. \tag{5–250b}$$

Taj ćemo rezultat primijeniti na pobudu dominantnoga moda pravokutnog valovoda preko električne sonde (unipola) [1], kao što je prikazano na slici 5.55.

Primjer 5.8. Pobuđivanje dominantnoga moda električnom sondom

Za pravokutni valovod pobuđen električnom sondom (unipolom) duljine *d* na udaljenosti *l* od kratkospojnika (slika 5.55b)) odrediti amplitudu električnog i magnetskog polja te ulazni otpor na mjestu pobude sonde. Sonda je smještena na simetrali šire stijenke valovoda. Treba pretpostaviti da je valovod pobuđen samo dominantnim modom TE_{10}.

Rješenje:

Ta se zadaća može riješiti superpozicijom dviju pobuda, pobudom stvarnom sondom i njezinom slikom, kao što je prikazano na slici 5.57.

Za mod TE_{10} polja glase:

$$E_y = e_y \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} = \sin\frac{\pi x}{a} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\,,$$

$$H_x = h_x \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} = -\frac{1}{Z_{TE10}} \sin\frac{\pi x}{a} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\,.$$

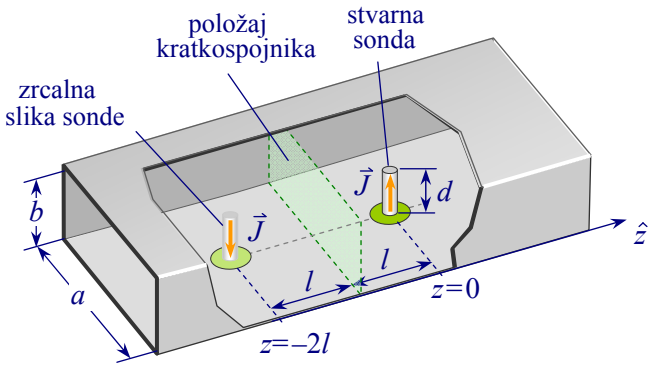
pa konstanta normiranja

$$P_n = \int_{S_0} \vec{e}_n \times \vec{h}_n \cdot \hat{z}\mathrm{d}S$$

za dominantni mod TE_{10} daje

$$P_{10} = 2 \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} \frac{1}{Z_{TE10}} \sin^2\frac{\pi x}{a} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{ab}{Z_{TE10}}\,,$$

gdje je Z_{TE10} valna impedancija, a β fazni koeficijent moda TE_{10}.



Slika 5.57. Električna sonda i njezina zrcalna slika. Promatra se samo zračenje u području $z>0$

Sonda u kratko spojenom valovodu (slika 5.55b)) može se nadomjestiti izvornom sondom i njezinom slikom na koordinati $z=-2l$ u beskonačno dugačkom valovodu, kao što je prikazano na slici 5.57. Uz pretpostavku da je električno polje koje se rasprostire u području $z>0$ jednako

$$E_y^+ = A^+ \sin\frac{\pi x}{a} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z},$$

primjenom izraza (5–250a) izlazi

$$A_n^+ = -\frac{Z_{TE01}}{ab}\left[\int_0^d I_0 \sin k_0(d-y)\mathrm{d}y - \int_0^d I_0 \sin k_0(d-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}\mathrm{d}y\right] =$$

$$= -\frac{I_0 Z_{TE01}}{abk_0}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}-1\right)(1-\cos k_0 d)$$

jer za dominantni mod vrijedi

$$E_{10}^- = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} = 1 & \text{na } z=0, x=\dfrac{a}{2} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l} & \text{na } z=-2l, x=\dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

U tu se svrhu može razmotriti općenit slučaj beskonačno dugačkog valovoda pobuđenog strujnom niti, kao što je prikazano na slici 5.57.

Struja električnog unipola (sonde) može se zamijeniti strujnom niti uzduž njezine osi i za harmonijsku se pobudu može opisati izrazom (5–247). Pri tomu se volumni integral može zamijeniti krivuljnim (linijskim) integralom duž sonde. Valja uočiti da struja u zrcalnoj slici teče suprotnim smjerom (vidjeti odjeljak 2.15.5) što je nužan uvjet da bi zračeća polja proizvedena tim strujama poništila tangencijalno polje na mjestu kratkospojnika ($z=-l$).

Ukupna poprečna polja moda TE_{10} koja stvara sonda duljine d, u području $z>0$, glase:

$$E_y = \frac{I_0 Z_{TE01}}{abk_0}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}-1\right)(1-\cos k_0 d)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z},$$

$$H_x = -\frac{1}{Z_{TE01}}E_y.$$

Ako se valovodom rasprostire samo dominantni mod, onda taj mod prenosi cjelokupnu snagu koja se može izračunati za realnu valnu impedanciju Z_{TE10} kao

$$P = \frac{1}{2Z_{TE10}}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\left|E_y\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{I_0^2 Z_{TE10}}{4abk_0^2}\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}-1\right|^2(1-\cos k_0 d)^2.$$

U nožištu sonde ($y=0$), ukupna se struja suosne linije dobiva iz izraza (5–247) kao

$$I = I(0) = I_0 \sin k_0 d \,.$$

Ulazna se impedancija u suosnu liniju u nožištu sonde može prikazati kao $Z_{\text{ul}} = R_0 + \text{j}X_{\text{ul}}$. Iz Poyntingova teorema (5–6) izlazi da je

$$Z_{\text{ul}} = R_0 + \text{j}X_{\text{ul}} = \frac{P + \text{j}2\omega\left(\langle W_{\text{m}}\rangle - \langle W_{\text{e}}\rangle\right)}{\frac{1}{2}|I|^2},$$

gdje je $\langle W_{\text{m}}\rangle - \langle W_{\text{e}}\rangle$ razlika reaktivnih energija pohranjenih u evanescentnim poljima u okolišu sonde. Otuda je, uz primjenu trigonometrijskih jednakosti $1-\cos 2\theta = 2\sin 2\theta$ i $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, ulazni otpor

$$R_0 = \frac{2P}{I_0^2 \sin^2 k_0 d} = \frac{Z_{TE10}}{2abk_0^2}\left|1 - \text{e}^{-2\text{j}\beta l}\right|^2 \tan^2 \frac{k_0 d}{2} \,.$$

Taj se otpor naziva *otpor zračenja* sonde (usporediti s otporom zračenja antene u odjeljku 10.1.3). Valja uočiti da se njegova vrijednost može mijenjati promjenom duljine sonde d i njezine udaljenosti l od kratkospojnika.

Gdjekad se umjesto dominantnoga moda namjerno želi pobuditi neki od viših modova. Budući da modovi imaju različite razdiobe električnog i magnetskog polja, za njihovu će pobudu biti potrebno uporabiti različite pobudne strukture. Na slici 5.58 prikazane su neke strukture (električni unipoli) za pobudu viših modova u pravokutnome valovodu [20].

Sličnim se strukturama mogu pobuditi i modovi u kružnome valovodu. Na slici 5.59 prikazane su strukture za pobudu dominantnoga moda, TE_{11}, (lijevo) i prvoga višeg moda, TM_{01}, u kružnome valovodu (desno).

No valovod se može izravno pobuditi drugim valovodom preko zajedničkog otvora, kao što je prikazano na slici 5.51. Više o tomu bit će riječi u idućem odjeljku. Na slici 5.60 prikazano je kako se pravokutni valovod, koji podržava rasprostiranje moda TE_{10}, može izravno spregnuti s kružnim valovodom koji podržava rasprostiranje moda TM_{01}.

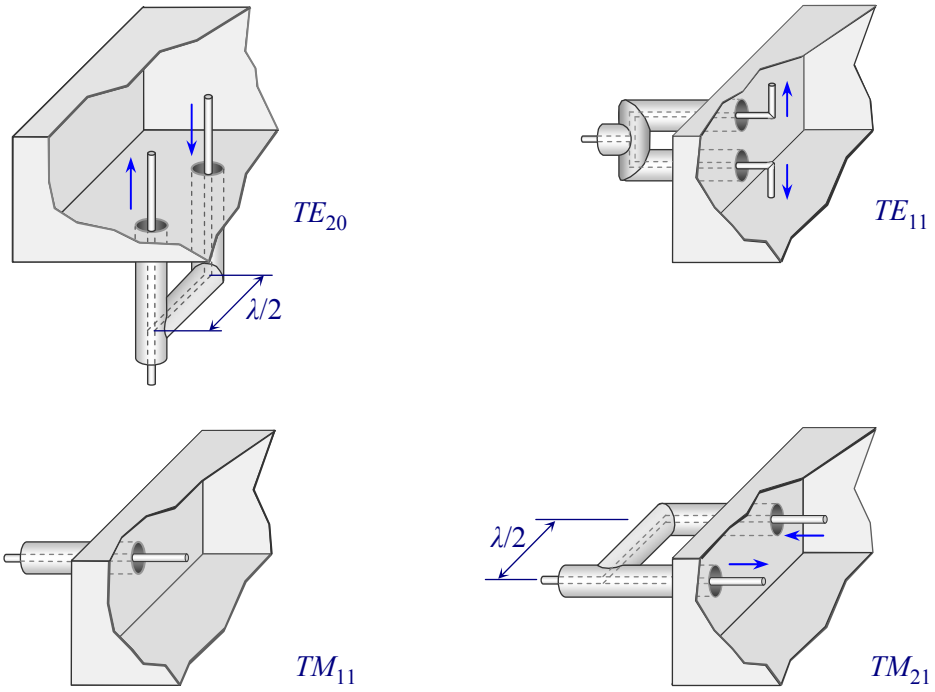
Dominantni mod može se pobuditi i s pomoću magnetskog dipola ili petlje, kao što je prikazano na slici 5.61. Petlja se obično postavlja tamo gdje magnetsko polje u valovodu postiže maksimalnu vrijednost i orijentirana je tako da kroz nju prolazi maksimalan tok magnetskog polja. To se mjesto nalazi na simetrali šire izmjere kratkospojnika ili na bočnoj stijenki valovoda na mjestu koje je od kratkospojnika udaljeno četvrt valne duljine.

Sličnim postupkom kao za pobudu električnom strujom mogu se odrediti koeficijenti pobude n-tog moda pri pobudi magnetskim izvorom $\vec{M}$. Takav izvor također proizvodi putujuće valove u pozitivnome i negativnome smjeru, koji se mogu izraziti kao superpozicija valovodnih modova. Rezultat je:

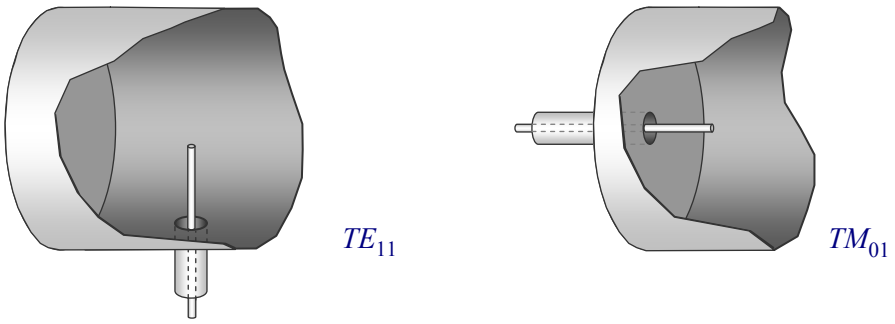
$$A_n^+ = -\frac{1}{P_n}\int_V \vec{H}_n^- \cdot \vec{M}\,\text{d}V = \frac{1}{P_n}\int_V (-\vec{h}_n + \hat{z}h_{zn}) \cdot \vec{M}\,\text{e}^{+\text{j}\beta_n z}\,\text{d}V \,, \tag{5–251a}$$

$$A_n^- = \frac{1}{P_n}\int_V \vec{H}_n^+ \cdot \vec{M}\,\text{d}V = \frac{1}{P_n}\int_V (\vec{h}_n + \hat{z}h_{zn}) \cdot \vec{M}\,\text{e}^{-\text{j}\beta_n z}\,\text{d}V \,, \tag{5–251b}$$

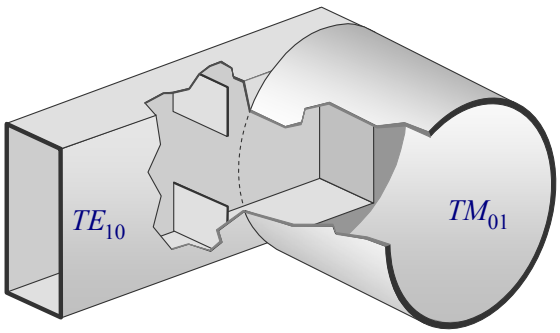
gdje je konstanta normiranja P_n definirana uz izraze (5–250).



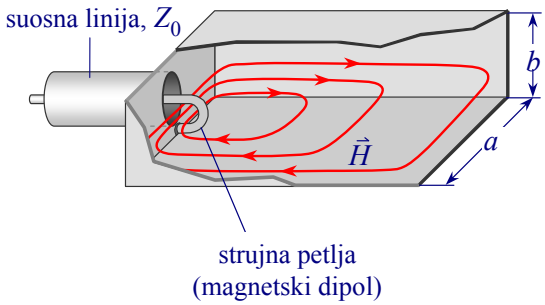
Slika 5.58. Pobuda viših modova u pravokutnome valovodu



Slika 5.59. Pobuda modova u kružnome valovodu električnim unipolom



Slika 5.60. Pobuda kružnoga valovoda (TM_{01}) pravokutnim valovodom (TE_{10})



Slika 5.61. Pobuda valovoda iz suosne linije strujnom petljom

na

5.10.2. Pobuda otvorom u stijenki valovoda

Osim s električnom sondom i strujnom petljom, što je bilo predmet razmatranja prethodnog odjeljka, valovod se može pobuditi elektromagnetskim poljem i kroz mali otvor u poprečnom zaslonu poput onog na slici 5.51d) ili na užoj (bočnoj) ili široj stijenki valovoda. Taj se otvor može razmatrati kao poseban slučaj malog kružnog otvora na neizmjerno tankoj i savršeno vodljivoj plohi [1], [2]. Ako su u općem slučaju na otvoru istodobno prisutni tangencijalno magnetsko polje i okomito električno polje, onda razdioba tih polja izgleda poput onih na slici 5.62. Toj je razdiobi vrlo slična razdioba polja kružnog otvora koji se nalazi na sredini šire stijenke valovoda. Takvi se otvori rabe u sklopovima usmjernih sprežnika i djelila snage. (O valovodnim sprežnicima može se više naći u odjeljku 7.3.1.) Za dovoljno mali otvor, razdiobu polja moguće je jednostavno nadomjestiti s pomoću dvaju dipolnih momenata, električnim i magnetskim, koji djeluju istodobno i međosobno su ortogonalni, kao što je prikazano na slici 5.63. Karakteristike sprege ovise o polarizacijskim svojstvima elementarnih dipola.

Magnetska polarizacijska struja magnetskoga dipola na slici 5.63a) razmjerna je komponenti magnetskog polja koje leži u ravnini otvora (tangencijalna komponenta), tj.

$$\vec{P}_{\mathrm{m}} = -\mu_0 \alpha_{\mathrm{m}} \vec{H}_{\tan} \delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0)\,\delta(z - z_0)\,, \tag{5–252a}$$

gdje je α_{m} fizikalna konstanta magnetske polarizacije otvora sa središtem u točki (x_0, y_0, z_0).

Slično tomu, struja električnoga dipola na slici 5.63b) razmjerna je komponenti električnog polja koja je okomita na otvor, tj.

$$\vec{P}_{\mathrm{e}} = \varepsilon_0 \alpha_{\mathrm{e}} \hat{n} E_{\mathrm{n}} \delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0)\,\delta(z - z_0)\,, \tag{5–252b}$$

gdje je α_{e} fizikalna konstanta električne polarizacije otvora.

Konstante električne i magnetske polarizacije kružnog otvora polumjera r_{o} dane su kao:

$$\alpha_{\mathrm{e}} = \frac{2}{3} r_{\mathrm{o}}^3\,, \qquad \alpha_{\mathrm{m}} = \frac{4}{3} r_{\mathrm{o}}^3\,, \tag{5–253}$$

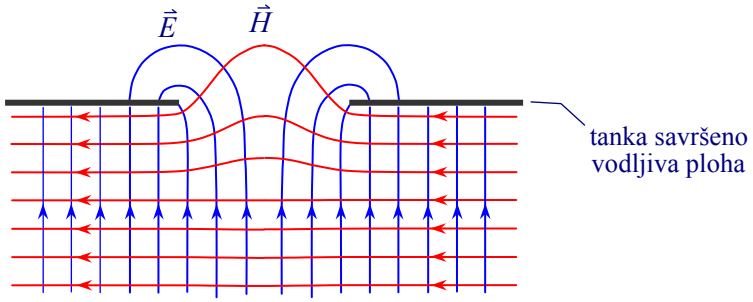
a konstante polarizacije otvora drugih oblika mogu se naći u tablici 5.3 i literaturi [3], [11].

Polarizacijske se struje, električna i magnetska, mogu staviti u vezu s provodnim strujama, električnom i fiktivnom magnetskom, pa Maxwellove rotorske jednadžbe poprimaju ovaj oblik:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\vec{H} - \vec{M}\,, \qquad \nabla \times \vec{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}\,.$$

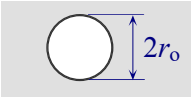
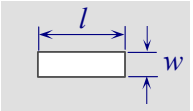
Uvrštenje izraza (5–240) daje:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\vec{H} - \mathrm{j}\omega\mu_0\vec{P}_{\mathrm{m}} - \vec{M}\,, \qquad \nabla \times \vec{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\vec{E} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{P}_{\mathrm{e}} + \vec{J}\,. \tag{5–254}$$



Slika 5.62. Razdioba magnetskog i električnog polja na malom kružnom otvoru u vodljivoj plohi

Tablica 5.3. Električne i magnetske polarizacije različitih otvora u vodljivoj plohi

Oblik otvora		α_e	α_m
kružni otvor		$\frac{2r_o^3}{3}$	$\frac{4r_o^3}{3}$
pravokutni prorez *		$\frac{\pi l w^2}{16}$	$\frac{\pi l w^2}{16}$

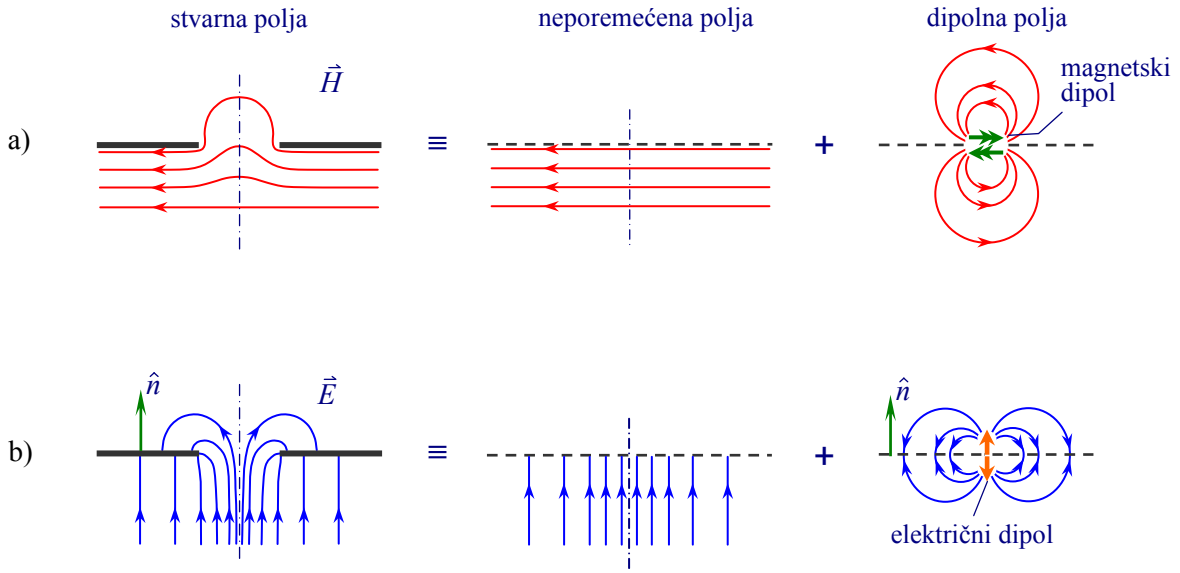
* $\vec{H}$-polje duž proreza

Uočimo da gustoća magnetske struje $\vec{M}$ ima istu ulogu kao $\mathrm{j}\omega\mu_0\vec{P}_m$, a gustoća električne provodne struje $\vec{J}$ ima istu ulogu kao $\mathrm{j}\omega\vec{P}_e$. Stoga je korisno definirati nadomjesne struje:

$$\vec{J} = \mathrm{j}\omega\vec{P}_e, \qquad \vec{M} = \mathrm{j}\omega\mu_0\vec{P}_m \tag{5–255}$$

primjenom kojih se mogu izračunati polja stvorena tim istim strujama.

Za električki male otvore, taj pristup daje dovoljno točne rezultate. Polja na pobuđenoj strani otvora također su poremećena zbog prisutnosti samog otvora, što je na slici 5.63 uzeto u obzir dipolima suprotnoga smjera. Tako je zadržana neprekinutost tangencijalnih polja na otvoru. No valja napomenuti sljedeće. Kad je otvor nadomješten ekvivalentnim električnim ili magnetskim dipolom, polja koja ti dipoli stvaraju izračunavaju se kao da je otvor zatvoren vodljivom stijenkom (zidom). Pritom, nadomjesni dipoli ispravno pokazuju polja spregnuta kroz otvor u vodljivoj stijenki. Sljedeći će primjeri pokazati kako se teorija malog otvora može primijeniti na spregu kroz otvor na poprečnome zaslonu i široj stijenki valovoda.



Slika 5.63. Stvarne razdiobe polja na otvoru mogu se dobiti superpozicijom polja električnoga i magnetskoga dipola te pripadajućih polja za slučaj bez otvora

Otvor u poprečnome zaslonu

Da bismo razmotrili spregu kroz otvor u zaslonu (slika 5.64a)) razmotrimo najprije upad vala dominantnoga moda TE_{10} na savršeno vodljiv zaslon (slika 5.64b)) koji je postavljen na koordinati $z=0$ poprečno na rasprostiranje vala [1]. Na zaslonu dolazi do totalne refleksije pa polja u području $z<0$ imaju oblik stojnoga vala, tj.

$$E_y = A\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right)\sin\frac{\pi x}{a}, \qquad E_x = E_z = 0,$$

$$H_x = -\frac{A}{Z_{TE10}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right)\sin\frac{\pi x}{a}, \qquad H_z = \mathrm{j}\frac{\pi A}{\beta a Z_{TE10}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right)\cos\frac{\pi x}{a}, \qquad (5\text{–}256)$$

gdje je $\mathrm{j}\beta$ koeficijent rasprostiranja, a Z_{TE10} valna impedancija moda TE_{10}. Dakle, na otvoru postoji samo tangencijalna komponenta magnetskog polja H_x. Za *TE*-mod, komponenta električnog polja okomita na otvor jednaka je nuli. Otuda je $\vec{P}_\mathrm{e} = 0$, a iz izraza (5–252a) izlazi

$$\vec{P}_\mathrm{m} = -\hat{x}\alpha_\mathrm{m} H_x \delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\delta\left(y-\frac{b}{2}\right)\delta(z) = \hat{x}\frac{2A\alpha_\mathrm{m}}{Z_{TE10}}\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\delta\left(y-\frac{b}{2}\right)\delta(z). \qquad (5\text{–}257)$$

Uvrštenjem izraza (5–257) u (5–255) za magnetsku struju dobiva se

$$\vec{M} = \mathrm{j}\omega\mu_0\vec{P}_\mathrm{m} = \hat{x}\frac{\mathrm{j}2\omega\mu_0 A\alpha_\mathrm{m}}{Z_{TE10}}\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\delta\left(y-\frac{b}{2}\right)\delta(z). \qquad (5\text{–}258)$$

Raspršna polja na stvarnom otvoru (slika 5.64c)) mogu se razmatrati kao da ih je proizvela nadomjesna struja, $\vec{P}_\mathrm{m}$ zdesna i $-\vec{P}_\mathrm{m}$ slijeva od zaslona, kao što je prikazano na slici 5.64d). Otuda je dipol sa slike 5.64e) ekvivalentan polovici kružne petlje u ravnini *yz*. Da bi se našlo polje koje taj dipol proizvodi, valja upotrijebiti teoriju odslikavanja. Budući da slika strujne petlje kružnog oblika na zaslonu odgovara drugoj polovici strujne petlje, slika dipola $\vec{P}_\mathrm{m}$ proizvodi dodatni magnetski dipol $\vec{P}_\mathrm{m}$. Učinak poprečnog zida (zaslona) može se objasniti primjenom teorije odslikavanja, tako da se struja dipola udvostruči, kao što je prikazano na slici 5.64f). Pritom se koeficijenti prenesenih i reflektiranih valova, koje su proizvele nadomjesne struje, mogu odrediti s pomoću izraza (5–258) i (5–251a) kao

$$A_{10}^{\pm} = -\frac{1}{P_{10}}\int_V \vec{h}_{10}(\pm\mathrm{j}2\omega\mu_0\vec{P}_\mathrm{m})\mathrm{d}V = \mathrm{j}\frac{4A\omega\mu_0\alpha_m}{abP_{10}} = \mathrm{j}\frac{4A\beta\alpha_\mathrm{m}}{abP_{10}} \qquad (5\text{–}259)$$

jer je $\vec{h}_{10} = (-\hat{x}/Z_{TE10})\sin(\pi x/a)$, a $P_{10}=ab/Z_{TE10}$. Konstanta magnetske polarizacije kružnog otvora može se izračunati iz izrazom (5–253), a ukupna polja (5–256) mogu se napisati kao:

$$E_y = A\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - \left(1 - A_{10}^{-}/A\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right]\sin\frac{\pi x}{a}, \qquad \text{za } z<0, \qquad (5\text{–}260a)$$

$$H_x = \frac{-A}{Z_{TE10}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + \left(1 - A_{10}^{-}/A\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right]\sin\frac{\pi x}{a}, \qquad \text{za } z<0, \qquad (5\text{–}260b)$$

$$E_y = A_{10}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\sin\frac{\pi x}{a}, \qquad \text{za } z>0, \qquad (5\text{–}260c)$$

$$H_x = \frac{-A_{10}^{+}}{Z_{TE10}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\sin\frac{\pi x}{a}, \qquad \text{za } z>0. \qquad (5\text{–}260d)$$

Sad se mogu definirati koeficijenti refleksije i prijenosa kao:

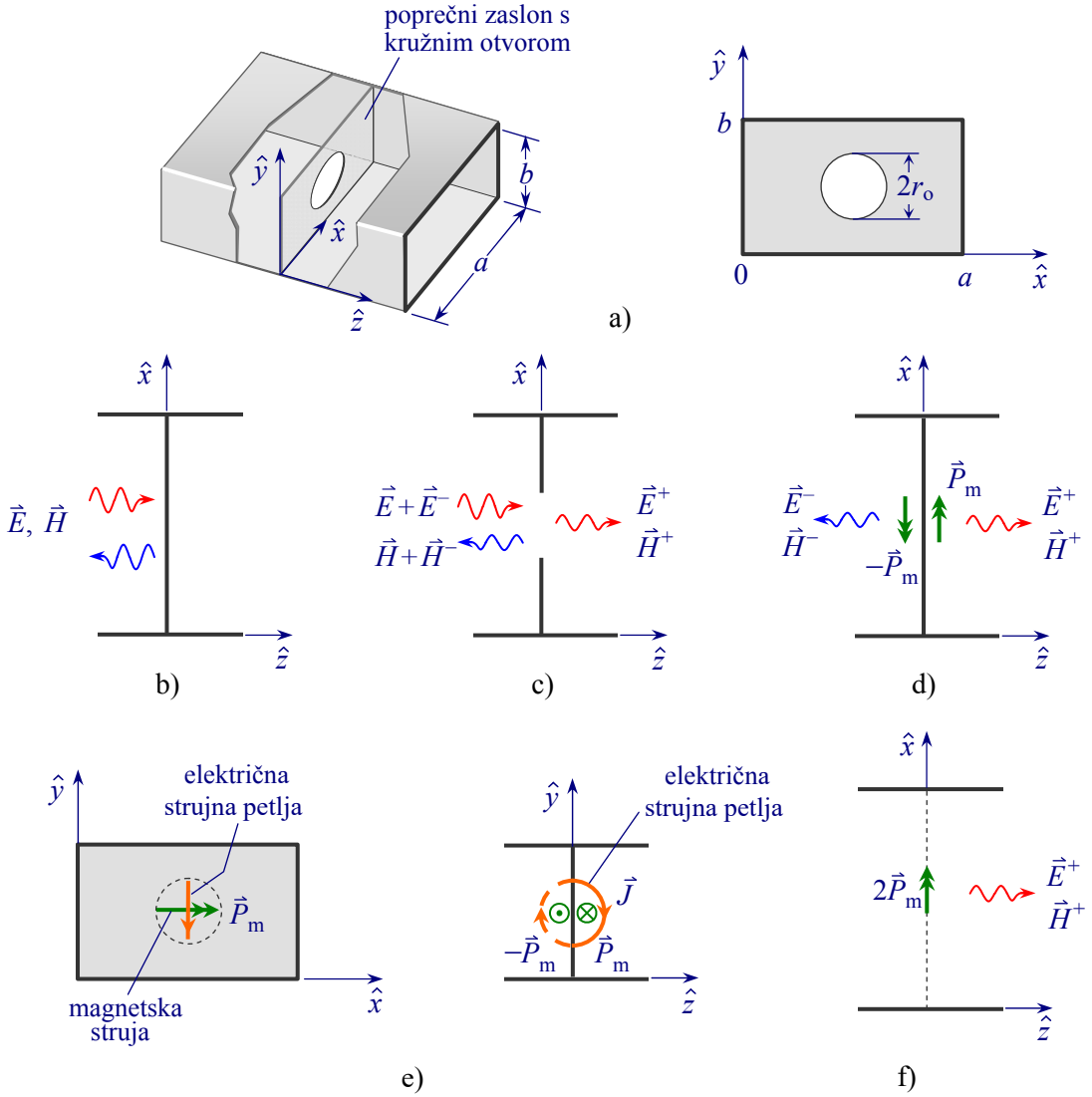
$$\Gamma = \frac{A_{10}^{-} - A}{A} = -1 + \mathrm{j}\frac{16\beta r_\mathrm{o}^3}{3ab}, \qquad (5\text{–}261a)$$

$$T = \Gamma + 1 = \frac{A_{10}^{+}}{A} = \frac{16\beta r_o^3}{ab} \tag{5–261b}$$

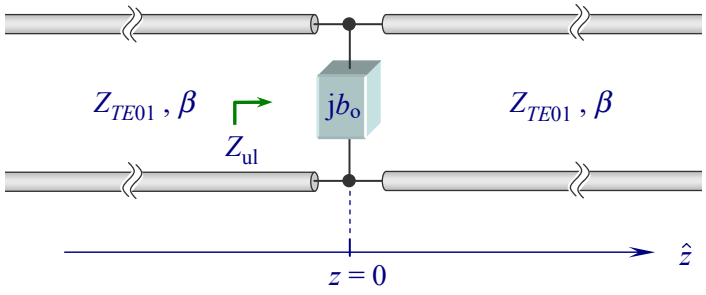
jer je $Z_{TE10} = \eta_0 k_0/\beta$, a $\alpha_m = 4r_o^3/3$ za kružni otvor. Valja uočiti da je veličina $|\Gamma| > 1$, što je fizikalno neostvariv rezultat za pasivnu mrežu. No to je posljedica aproksimacija unesenih u teorijsko razmatranje. Zaslon s otvorom ponaša kao poprečna suceptancija (B_o). Njezina se vrijednost može izračunati usporedbom izraza (5–261a) s izrazom za koeficijent paralelnog spoja poprečne susceptancije B i valne admitancije valovoda $1/Z_{TE10}$, kao što je prikazano na slici 5.65. Uporabom normiranih veličina $b_o = Z_{TE10}B_o$ i $y_{ul} = Z_{TE10}/Z_{ul} = 1 + jb_o$ dobiva se

$$\Gamma = \frac{1 - y_{ul}}{1 + y_{ul}} = \frac{1-(1+jb_o)}{1+(1+jb_o)} = \frac{-jb_o}{2+jb_o}. \tag{5–262}$$

Ako je polumjer otvora dovoljno malen u odnosu na poprečne dimenzije valovoda, onda je $b_o \gg 1$ pa se izraz (5–262) može pojednostavniti kao



Slika 5.64. **a)** Mali kružni otvor u poprečnome zaslonu valovoda. **b)** Polja pri zatvorenom otvoru. **c)** Polja pri otvorenom otvoru. **d)** Polja pri zatvorenom otvoru nadomještenom dipolima. **e)** Magnetske struje nadomještene polupetljama električnih struja. **f)** Polja koja zrače nadomjesni dipoli u pozitivnom smjeru osi $\hat{z}$, gdje je vodljiv zaslon uklonjen primjenom teorije odslikavanja



Slika 5.65. Nadomjesni sklop otvora u poprečnome zidu (zaslonu) valovoda

$$\Gamma = -\frac{1}{1+2/b_o} \simeq 1 - j\frac{2}{b_o} . \tag{5–263}$$

Iz usporedbe s izrazom (5–261a) za promjer kružnog otvora dobiva se

$$2r_o = \left(\frac{-3ab}{\beta b_o}\right)^{1/3} . \tag{5–264}$$

Susceptancija je negativna veličina jer je zaslon s kružnim otvorom induktivnog karaktera.

Slično se ponaša i otvor u užoj (bočnoj) stijenki pravokutnog valovoda. Otvori u široj i užoj stijenki valovoda nerijetko se rabe u sklopovima usmjernih sprežnika (vidjeti odjeljak 7.3.1).

Otvor u široj stijenki valovoda

Otvor u široj stijenki valovoda [1] nerijetko se rabi u sklopovima usmjernih sprežnika (vidjeti odjeljak 7.3.1). Razmotrimo spregu kroz mali otvor polumjera r_0, čije se središte nalazi u točki $x = a/2$, $y = b$, $z = 0$, tj. na simetrali zajedničke šire stijenke dvaju paralelnih valovoda (slika 5.66). Za donji valovod pobuđen slijeva dominantnim modom, upadna polja glase:

$$E_y = A\sin\frac{\pi x}{a}e^{-j\beta z}, \qquad H_x = -\frac{A}{Z_{10}}\sin\frac{\pi x}{a}e^{-j\beta z}, \tag{5–265}$$

pa pobudna polja u središtu otvora ($x=a/2$, $z=0$) iznose $E_y=A$, odnosno $H_x = -A/Z_{TE10}$. Ako se otvor ne nalazi na simetrali, onda valja uzeti u obzir i komponentu H_z koja je tad različita od nule. Sad možemo izračunati nadomjesni električni i magnetski dipol kao:

$$\vec{J} = \hat{y}\, j2\omega\mu_0\alpha_m A\delta\left(x - \frac{a}{2}\right)\delta(y-b)\delta(z), \tag{5–266a}$$

$$\vec{M} = \hat{x}\frac{j2\omega\mu_0\alpha_m A}{Z_{TE10}}\delta\left(x - \frac{a}{2}\right)\delta(y-b)\delta(z). \tag{5–266b}$$

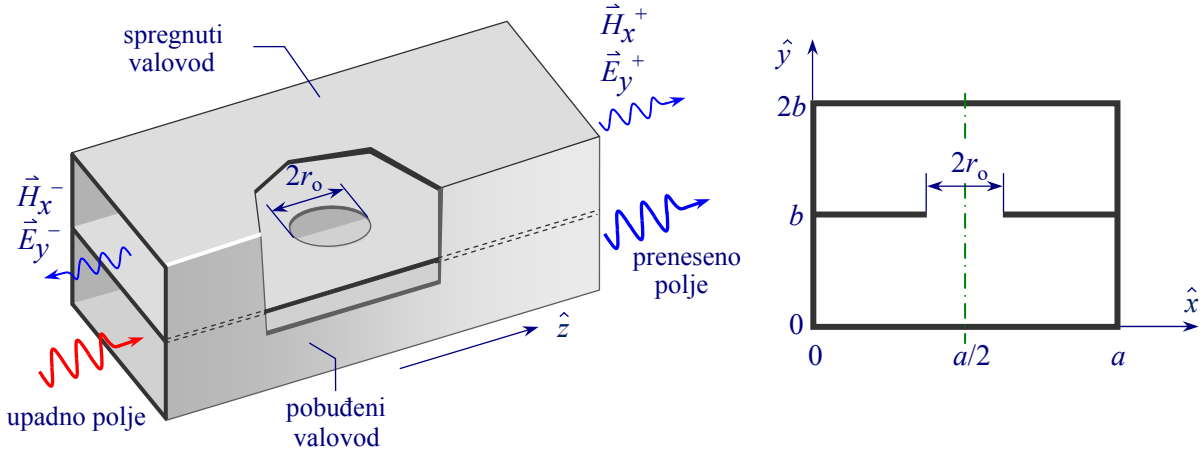
Valja uočiti da su u tom slučaju pobuđena oba dipola (električni i magnetski).

Polja u gornjem valovodu glase:

$$E_y^- = A^-\sin\frac{\pi x}{a}e^{+j\beta z}, \qquad H_x^- = \frac{A^-}{Z_{10}}\sin\frac{\pi x}{a}e^{+j\beta z}, \qquad \text{za } z<0 \tag{5–267}$$

$$E_y^+ = A^+\sin\frac{\pi x}{a}e^{-j\beta z}, \qquad H_x^+ = -\frac{A^+}{Z_{10}}\sin\frac{\pi x}{a}e^{-j\beta z}, \qquad \text{za } z>0 \tag{5–268}$$

gdje je A^+ nepoznata amplituda progresivnog putujućeg vala, a A^- protusmjernog putujućeg vala u gornjem (spregnutom) valovodu.



Slika 5.66. Paralelni valovodi spregnuti preko otvora u zajedničkoj široj stijenki na koordinati $z=0$

Amplitude ukupnog polja progresivnog i protusmjernog vala u gornjem valovodu mogu se dobiti superpozicijom polja proizvedenih električnim i magnetskim strujama (5–266) te izrazima (5–250) kao:

$$A^+ = -\frac{1}{P_{10}}\int_V (E_y^- \cdot J_y - H_x^- M_x)\mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{j}\omega A}{P_{10}}\left(\varepsilon_0\alpha_\mathrm{e} - \frac{\mu_0\alpha_\mathrm{m}}{Z_{TE10}^2}\right), \tag{5–269}$$

$$A^- = -\frac{1}{P_{10}}\int_V (E_y^+ \cdot J_y - H_x^+ M_x)\mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{j}\omega A}{P_{10}}\left(\varepsilon_0\alpha_\mathrm{e} + \frac{\mu_0\alpha_\mathrm{m}}{Z_{TE10}^2}\right), \tag{5–270}$$

gdje je $P_{10}=ab/Z_{TE10}$ konstanta normiranja snage.

5.11. Diskontinuiteti na mikrotrakastoj liniji

Posebno je važno što točnije opisati diskontinuitete u mikrotrakastoj strukturi jer je sklopove koji sadrže mikrotrakaste linije gotovo nemoguće ugađati nakon izrade. Već je rečeno da u neposrednoj blizini diskontinuiteta dolazi do promjene razdiobe električnih i magnetskih polja. Promjena razdiobe električnog polja može se uzeti u obzir nadomjestitim kapacitetom, a promjena razdiobe gustoće magnetskog polja može se uzeti u obzir nadomjesnim induktivitetom. Analiza diskontinuiteta na mikrotrakastoj liniji uključuje izračunavanje tih kapaciteta i induktiviteta na osnovi kvazistatičkih razmatranja ili primjenom rigorozne punovalne analize elektromagnetskih polja [15]-[17].

Utjecaj reaktivnih komponenata diskontinuiteta počinje se tek zamjećivati na mikrovalnim frekvencijama iznad 2 do 3 GHz. Kao i kod disperzije, učinci se diskontinuiteta mogu posve zanemariti ispod tog frekvencijskog područja. O diskontinuitetima u mikrotrakastim strukturama može se više naći u literaturi [18].

5.11.1. Otvoreni kraj linije

Otvoreni kraj linije nerijetko se susreće u prilagodnim mrežama (poglavlje 6) i filtarskim strukturama s paralelnim stabovima (odjeljak 7.5.4). Posebno se često rabi u mikrotrakastim izvedbama jer je otvoreni kraj znatno jednostavnije ostvariti od kratkoga spoja. No u praksi se otvoreni kraj linije ne ponaša kao savršen otvoreni krug, zbog rubnog električnog polja koje se nalazi i u prostoru izvan ruba (slika 5.67a)). Taj višak električne energije oko ruba, može se nadomjestiti kapacitetom C_R koji tu energiju pohranjuje, kao što je prikazano na slici 5.67b).

Budući da je vrijednost tog kapaciteta obično vrlo mala, može ga se nadomjestiti kratkim odsječkom prijenosne linije duljine Δl. Slijedit ćemo razmatranje provedeno na kraju odjeljka 3.4. Također ćemo pretpostaviti da je karakteristična impedancija nadomjesnog odsječka jednaka karakterističnoj impedanciji stvarne linije i da u prostoru iza nadomjesne linije više ne postoje učinci električnog polja u smjeru rasprostiranja elektromagnetskoga vala.

Drugim riječima, učinak otvorenoga kraja stvara dojam kao da je linija električki dulja od linije na koju upućuje njezina fizička duljina. Stoga se to električno produljenje otvorene linije može kompenzirati fizičkim skraćenjem linije za iznos Δl. Impedancija na ulazu u kratki nadomjesni odsječak otvorene linije zaključene magnetskim zidom mora biti jednaka impedanciji rubnog kapaciteta. Ako je taj odsječak otvorene linije (Δl) znatno kraći od četvrt valne duljine, onda impedancija tog odsječka iznosi

$$Z_{AA'} = \frac{Z_0}{\mathrm{j}\tan\beta\Delta l} \simeq \frac{Z_0}{\mathrm{j}\beta\Delta l} = -\mathrm{j}\frac{cZ_0}{\omega\Delta l\sqrt{\varepsilon_{ef}}} \tag{5–271}$$

i mora biti jednaka impedanciji rubnog kapaciteta C_R, tj.

$$Z_{AA'} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_R}. \tag{5–272}$$

Izjednačavanjem izraza (5–271) i (5–272) dobiva se

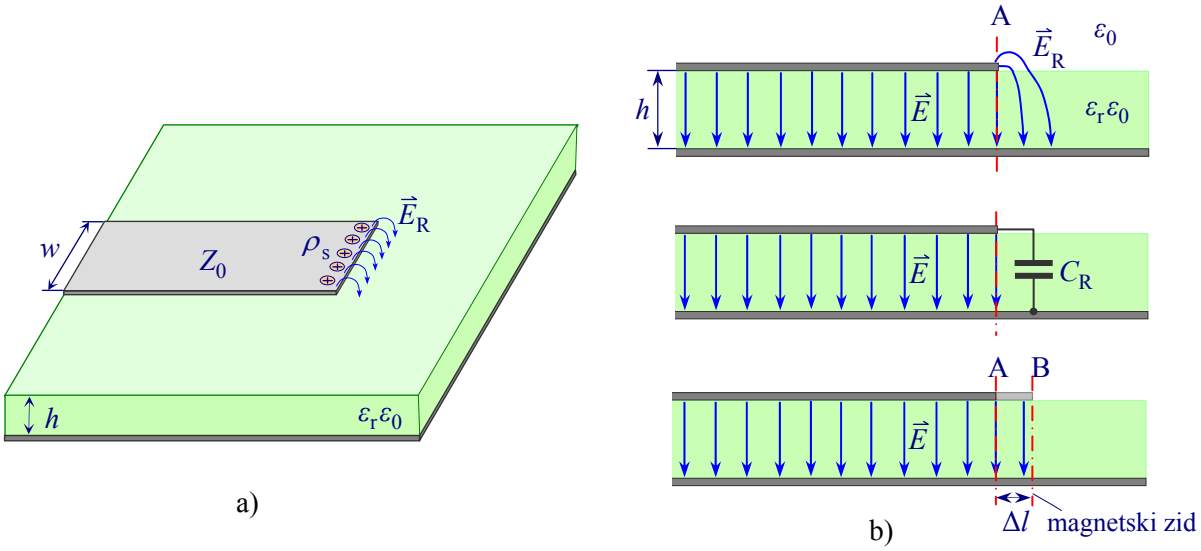
$$\Delta l \simeq \frac{cZ_0}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} C_R = \frac{C_R}{C}, \tag{5–273}$$

gdje se raspodijeljeni kapacitet linije C može odrediti iz izraza $Z_0 = 1/(v_f C) = \sqrt{\varepsilon_{ef}}/cC$. Izraz (5–273) u skladu je s intuitivnom slikom koja upućuje na rubni kapacitet $C_R = C\Delta l$.

Taj je kapacitivni model samo aproksimacija otvorenoga kraja jer zanemaruje induktivitet povezan s preraspodjelom toka struje u liniji i ne uzima u obzir zračenje elektromagnetske energije. Korekciju duljine linije prihvatljive točnosti daje formula [17]

$$\frac{\Delta l}{h} = 0{,}412\left(\frac{\varepsilon_{ef}+0{,}3}{\varepsilon_{ef}-0{,}258}\right)\left(\frac{w/h+0{,}262}{w/h+0{,}813}\right), \tag{5–274}$$

koja vrijedi za velik raspon vrijednosti w/h i relativne permitivnosti podloge.



Slika 5.67. a) Diskontinuitet otvorenoga kraja linije; **b)** nadomjesni sklop

Primjer 5.9. Otvoreni kraj mikrotrakaste linije

Za koliko se moraju skratiti fizičke duljine odsječaka otvorenih stabova izvedenih s mikrotrakstim linijama karakteristične impedancije 25, 50 i 80 Ω. Stabovi su izvedeni na dielektričnim podlogama visine 1,5 mm i relativne permitivnosti $\varepsilon_r = 2{,}52$ i 6. Zanemariti utjecaj debljine trake, gubitaka, disperzije i zračenja na otvorenome kraju.

Rješenje:

Primjenom izraza (4–159) i (4–160) te formule (4–156) mogu se izračunati potrebne širine traka i pripadajuće efektivne permitivnosti. Uvrštenjem vrijednosti zadanih parametara u formulu (5–274) za podlogu relativne permitivnosti ε_r=2,52 dobivaju se sljedeća skraćenja:

a) $Z_0 = 25\ \Omega$, $w/h = 9{,}52$; $w = 14{,}26$ mm; $\varepsilon_{ef} = 2{,}27$ → $\Delta l/h = 0{,}498$; $\Delta l = 0{,}75$ mm;
b) $Z_0 = 50\ \Omega$, $w/h = 2{,}845$; $w = 4{,}27$ mm; $\varepsilon_{ef} = 2{,}089$ → $\Delta l/h = 0{,}457$; $\Delta l = 0{,}69$ mm;
c) $Z_0 = 80\ \Omega$, $w/h = 1{,}27$; $w = 1{,}91$ mm; $\varepsilon_{ef} = 1{,}986$ → $\Delta l/h = 0{,}432$; $\Delta l = 0{,}65$ mm.

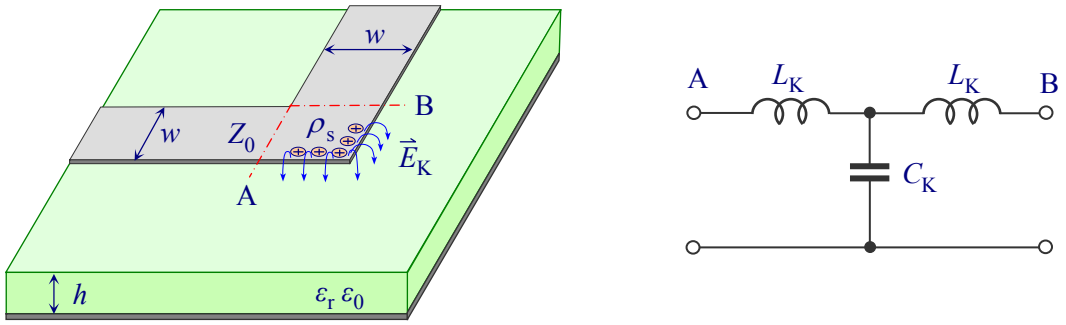
Može se vidjeti da se za permitivnost podloge $\varepsilon_r = 2{,}52$ relativno skraćenje trake ($\Delta l/h$) nalazi u rasponu od 0,43 do 0,5. Za relativnu permitivnost podloge $\varepsilon_r = 6$, dobiva se:

a) $Z_0 = 25\ \Omega$, $w/h = 4{,}295$; $w = 6{,}44$ mm; $\varepsilon_{ef} = 4{,}783$ → $\Delta l/h = 0{,}413$; $\Delta l = 0{,}62$ mm;
b) $Z_0 = 50\ \Omega$, $w/h = 1{,}505$; $w = 2{,}26$ mm; $\varepsilon_{ef} = 4{,}309$ → $\Delta l/h = 0{,}357$; $\Delta l = 0{,}54$ mm;
c) $Z_0 = 80\ \Omega$, $w/h = 0{,}559$; $w = 0{,}839$ mm; $\varepsilon_{ef} = 3{,}990$ → $\Delta l/h = 0{,}283$; $\Delta l = 0{,}43$ mm.

Veća vrijednost relativne permitivnosti podloge ($\varepsilon_r = 6$) traži manje relativno skraćenje. Za zadane vrijednosti karakterističnih impedancija, iznosi relativnog skraćenja ($\Delta l/h$) nalaze se u rasponu od 0,3 do 0,4.

5.11.2. Koljenasti spoj

Taj se spoj rabi prilikom preusmjeravanja toka snage u ortogonalni smjer, što je čest slučaj u mikrotrakastim sklopovima jer se time štedi prostor i nerijetko smanjuje preslušavanje, tj. sprega sa susjednim dijelovima sklopa. U praksi se najčešće rabi najjednostavnije rješenje u obliku oštrog koljenastog spoja prikazanog na slici 5.68a). Budući da pri vrhu koljena nastaje višak metalizacije, spoj upućuje na kapacitivne značajke koje su uzete u obzir paralelnim kapacitetom C_K (slika 5.68b)). No, zbog redistribucije gustoće površinskih struja na traci, uz taj kapacitet u nadomjesnu shemu valja ugraditi i dva serijska induktiviteta L_K.



a) b)

Slika 5.68. a) Koljenasti spoj mikrotrakaste linije; **b)** nadomjesni sklop



a) b)

Slika 5.69. a) Kompenzacija pravokutnog koljenastog spoja; **b)** zaobljeni spoj

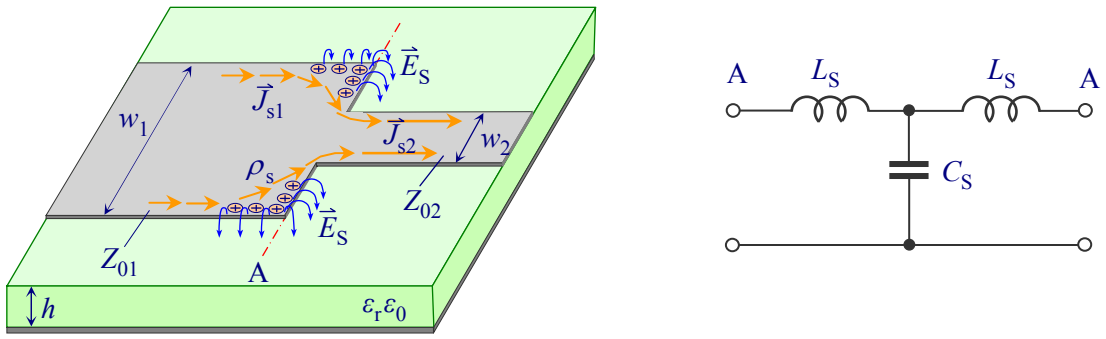
Kapacitivna reaktancija može se znatno smanjiti uklanjanjem dijela metalizacije, kao što je prikazano na slici 5.69a). Optimalni rezultat za velik raspon vrijednosti odnosa w/h dobiva se uvjet $b = 0{,}57w$. No zbog tako velikog suženja trake dolazi do povećanja gustoće površinske struje, što ima za posljedicu porast serijskog induktiviteta. Time se povećava električna duljina spoja, tj. kašnjenje u prijenosu. Znatno manji diskontinuitet ima zaobljeni koljenasti spoj (slika 5.69b)), čiji srednji polumjer zakrivljenosti mora biti veći od trostruke širine trake.

5.11.3. Skok impedancije

U različitim se sklopovima nerijetko rabe linijski odsječci različite karakteristične impedancije. Vrijednost karakteristične impedancije mikrotrakaste linije izrađene na podlozi stalne visine h može se jednostavno mijenjati promjenom širine trake, kao što je prikazano na slici 5.70a). No nagli skok u širini trake stvara diskontinuitet koji je opet posljedica preraspodjele površinske struje i naboja na traci. Taj se diskontinuitet može nadomjestiti mrežom na slici 5.70b), koja je slična nadomjesnoj mreži koljenastog spoja. Utjecaj parazitskog kapaciteta može se znatno smanjiti skraćivanjem odsječka šire trake za iznos

$$\Delta l_S \simeq \Delta l_{OK}\left(1-\frac{w_2}{w_1}\right), \tag{5–275}$$

gdje je Δl_{OK} kompenzacija duljine linije s otvorenim krajem opisane izrazom (5–273).

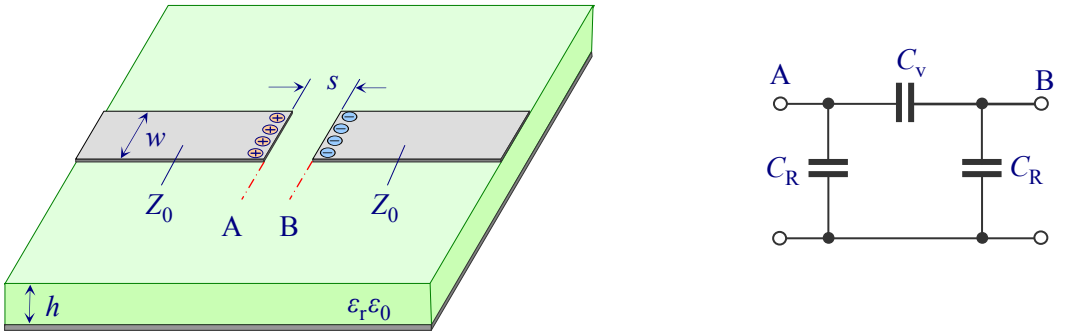


a) b)

Slika 5.70. a) Skokovita promjena a karakteristične impedancije ostvarena skokovitom promjenom širine trake; **b)** nadomjesni sklop

5.11.4. Prorez u mikrotrakastoj liniji

Kao što se može vidjeti u odjeljcima 7.4. i 7.5, pri povezivanju mikrotrakastih rezonatora i filtara s generatorima i drugim sklopovima, te u odjeljcima 8.6.-8.9. u svrhu odvajanja istosmjernog strujnog kruga od RF kruga u izvedbama aktivnih sklopova nerijetko se rabi prorez u mikrotrakastoj liniji, slika 5.71a). Intuitivno, prorez se ponaša kao serijski kapacitet. No na mjestu proreza nalaze se i dva »otvorena« kraja mikrotrakastih linija pa istodobno dolazi do učinaka koji su opisani u odjeljku 5.11.1. Stoga se nadomjesni sklop proreza na slici 5.70a) može prikazati kao π-četveropol, slika 5.71b). Zbog disperzivog karaktera mikrotrakaste linije i složene razdiobe rubnih polja, točne vrijednosti kapaciteta C_v i C_R u nadomjesnoj mreži mogu se dobiti samo na mjerenja ili numeričkom analizom.

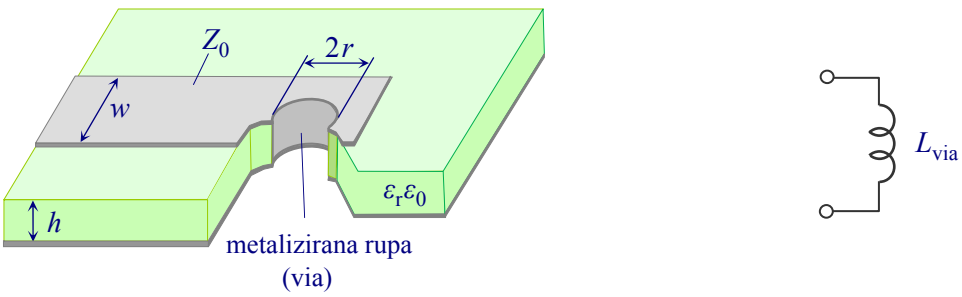


a) b)

Slika 5.71. a) Topologija proreza u mikrotrakastoj liniji i **b)** nadomjesna shema kapaciteta u nadomjesnoj mreži na slici 5.71b) mogu se dobiti samo mjerenjima ili primjenom složene numeričke analize

5.11.5. Prospoj (via) u mikrotrakastoj liniji

Na nižim mikrovalnim frekvencijama, do 10 GHz, dobar prospoj (via) može se ostvariti galvanskim spajanjem trake i uzemljene ravnine uporabom žice ili metalizirane rupe u podlozi (slika 5.72a)). Na frekvencijama ispod nekoliko GHz žičani spoj stvara zanemarive reaktivne učinke. No na višim frekvencijama fizička duljina žice koja je jednaka visini podloge može izazvati jače induktivne učinke, zbog protjecanja struje kroz žicu i pohrane dodatne magnetske energije oko žice (slika 5.72b)). Takav je spoj i frekvencijski ovisan. No povećanjem polumjera žice ili metalizirane rupe i paralelnim spajanjem više takvih komponenata može se znatno smanjiti nadomjesni induktivitet prospoja. Sljedeći izraz daje dobru aproksimaciju induktiviteta prospoja (vije) koja vrijedi u razmjerno širokom frekvencijskom području



a) b)

Slika 5.72. a) Kratki spoj (prospoj) ostvaren metaliziranom rupom ili žicom i **b)** nadomjesna shema

$$L_{\text{via}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[h \cdot \ln\left(\frac{h+\sqrt{r^2+h^2}}{r} \right) + \frac{3}{2}\left(r - \sqrt{r^2+h^2} \right) \right], \tag{5–276}$$

gdje je r polumjer prospoja, a h visina podloge.

Primjenom prospoja može se jednostavno ostvariti galvanski kratki spoj trake s uzemljenom ravninom ili međusobno povezati više traka u višeslojnoj izvedbi tiskane pločice.

Literatura

[1] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, New York 2012.

[2] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

[3] C. G. Montgomery, R. H. Dicke, E. M. Purcell, *Principles of Microwave Circuits*, Vol. 8 of MTT Rd. Lab. Series, McGraw-Hill, New York, 1948.

[4] R. M. Foster,"A reactance theorem", Bell System Technical Journal, Vol. 3, str. 259-267, April 1924.

[5] F. E. Gardiol, *Introduction to Microwaves*, Artech House, Dedham, 1984.

[6] K. Kurokawa, *An Introduction to the Theory of Microwave Circuits*, Academic Press, New York, 1969.

[7] G. H. Owyang, *Foundations for Microwave Circuits*, Springer-Verlag, 1989.

[8] E. H. Fooks, R. A. Zakarevičius, *Microwave Engineering Using Microstrip Circuits*, Prentice-Hall, New York, 1990.

[9] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, McGraw-Hill, New York, 1960.

[10] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, 2nd ed., IEEE Press, New York, 1991.

[11] G. L. Matthaei, L. Young, E. M. T. Jones, *Microwave Filters, Impedance-Matching Networks, and Coupling Structures*, McGraw Hill, New York, 1964.

[12] S. Ramo, J. R. Whinnery, T. van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1994.

[13] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Waves*, McGraw-Hill, New York, 1961.

[14] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1951.

[15] T. C. Edwards, M. B. Steer, *Foundations for Microstrip Circuit Design*, 4th ed., John Wiley & Sons, 2016

[16] I. Bahl, P. Barthia, *Microwave Solid-State Circuit Design*, 2nd ed., Wiley-Interscience, New York, 2003.

[17] E. O. Hammerstad, "Equations for microstrip circuit design", Proceedings of 5th European Microwave Conference, str. 258-272, Hamburg, 1975.

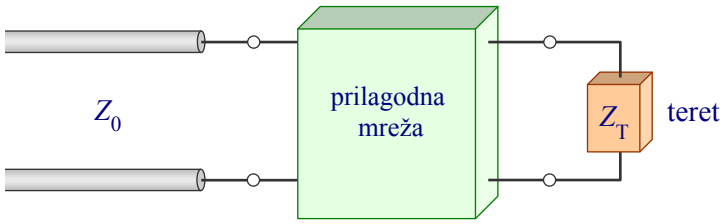
[18] R. K. Hoffman, *Handbook of Microwave Integrated Circuits*, Artech House, Norwood, 1987.

[19] Z. Smrkić, *Mikrovalna elektronika*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[20] R. I. Sarbacher, W. A. Edson, *Hyper and Ultrahigh Frequency Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1943.

6. Prilagodba i transformacija impedancije

U ovom ćemo poglavlju početi primjenjivati teoriju i postupke analize mikrovalnih mreža koje smo razvili u prethodnim poglavljima. U odjeljku 3.3. vidjeli smo da na prijenosnoj liniji zaključenoj impedancijom trošila, tj. pasivnog tereta, koja je različita od karakteristične impedancije linije nastaje reflektirani val pa teret ne prima maksimalnu moguću snagu iz prijenosne linije. Uobičajena impedancija suosnih i mikrotrakastih prijenosnih sustava u mikrovalnome području iznosi 50 Ω. No na frekvencijama ispod 1 GHz gdjekad se rabi i karakteristična impedancija 75 Ω. Postupak pretvorbe proizvoljne impedancije tereta na karakterističnu impedanciju sustava naziva se *prilagodba*. Impedancija tereta može se općenito prilagoditi na bilo koju kompleksnu impedanciju generatora. Pritom se maksimalni prijenos snage ostvaruje kad su impedancije generatora i tereta međusobno konjugirano kompleksne (odjeljci 3.3.6. i 5.4.1). Prilagodba se može ostvariti umetanjem reaktivne (nedisipativne) *prilagodne mreže* između prijenosne linije i tereta, kao što je prikazano na slici 6.1. Reaktivna se mreža može ostvariti primjenom koncentriranih elemenata (kapacitet, induktivitet) ili s pomoću odsječaka prijenosnih linija [1]-[5]. U komunikacijskim primjenama nerijetko se traži prilagodba u što širem frekvencijskom području. Pokazat ćemo da se niti jedan kompleksni teret ne može savršeno prilagoditi u kontinuiranom frekvencijskom pojasu, nego da je to moguće ostvariti samo na konačnom broju diskretnih frekvencija. Unatoč tomu, prihvatljiva razina razgođenosti, izražena odnosom stojnih valova ili modulom koeficijenta refleksije, može se uvije držati unutar zadanog frekvencijskog pojasa. No to se uvijek svodi na kompromis između maksimalno dopustive razine odnosa stojnih valova i minimalno dopustive širine frekvencijskog pojasa.

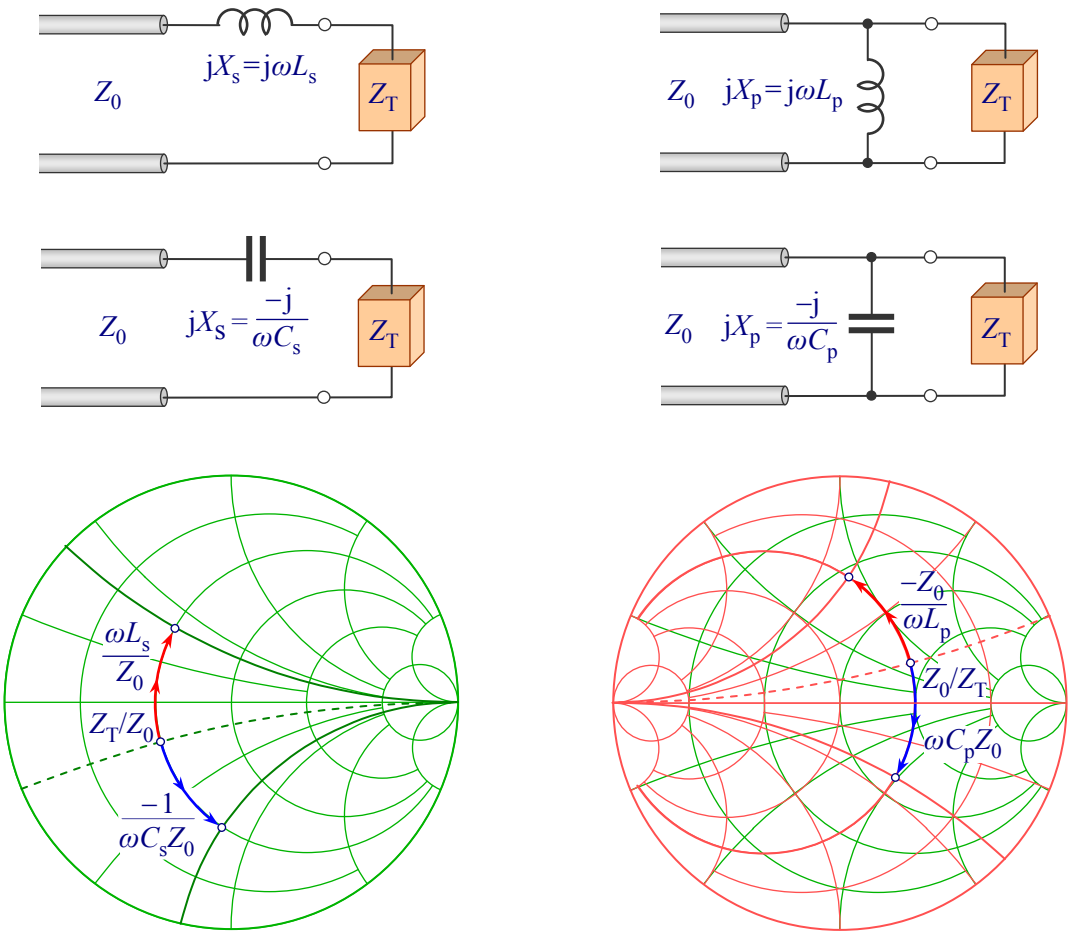


Slika 6.1. Prilagodba proizvoljne impedancije tereta na prijenosnu liniju mrežom bez gubitaka

6.1. Prilagodba s pomoću koncentriranih elemenata

U nižem mikrovalnom području prilagodne se mreže mogu izvesti s koncentriranim *LC* elemenatima. To su u praksi čip-komponenate (čip-kondenzator i čip-zavojnica) (odjeljak 8.11.2) . Prednost je koncentriranih komponenata u njihovim malim dimenzijama i razmjerno širokom frekvencijskom području prilagodbe. No na višim frekvencijama nerijetko se rabe komponente s raspodijeljenim parametrima (odsječci prijenosnih linija ili valovoda). Ovisno o značajkama impedancije tereta, moguće su različite konfiguracije mreža s *LC* elementima.

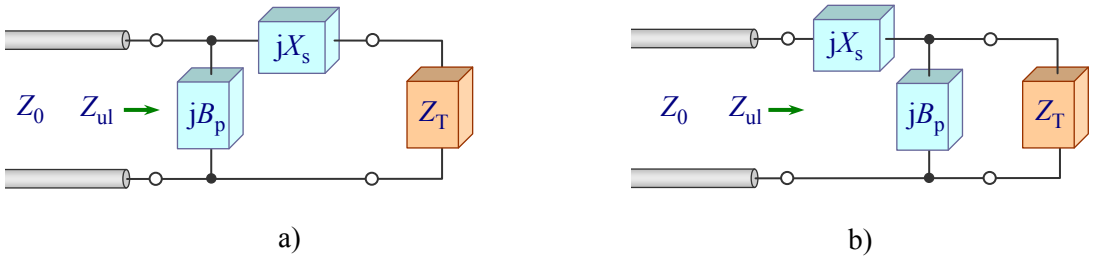
Prije pristupanja proračunu prilagodnih mreža, valja razmotriti transformaciju impedancije tereta preko serijskih i paralelnih reaktancija u Smithovu dijagramu. U tu se svrhu mogu uporabiti induktiviteti i kapaciteti, kao što je prikazano na slici 6.2. Dodavanjem serijske reaktancije, impedancija zadržava isti realni dio, a samo joj se promijeni reaktancija. Stoga se u Smithovu dijagramu točka transformira po kružnici konstantnog realnog dijela (otpora), slika 6.2a). Ako je reaktancija ostvarena induktivitetom, onda se točka normirane impedancije pomiče u smjeru kazaljke sata jer se povećala ukupna reaktancija. Uporabom kapaciteta točka



Slika 6.2. Primjena koncentriranih reaktivnih elemenata za prilagodbu: **a)** serijski, **b)** paralelni

se pomiče u suprotnom smjeru. Postavljanjem reaktancije paralelno teretu, tad se točka kreće po kružnici konstantne normirane vodljivosti u invertiranom Smithovu dijagramu u kojem se prikazuju admitancije, slika 6.2b).

Da bi se ostvarila prilagodba kompleksne impedancije tereta na unutarnju impedanciju generatora potrebna su najmanje dva stupnja slobode, tj. to se može ostvariti s dvjema reaktivnim komponentama. Primjerice, najjednostavnija se prilagodba može ostvariti primjenom L-mreže koja sadrži jednu paralelno (poprečno) spojenu i drugu serijski spojenu reaktanciju



Slika 6.3. Jednostavne prilagodne mreže s koncentriranim elementima: **a)** $\mathrm{Re}\{Z_T\}<Z_0$; **b)** $\mathrm{Re}\{Z_T\}>Z_0$

[1], [2]. Dvije moguće konfiguracije takve mreže prikazane su na slici 6.3. Mrežom sa slike 6.3a) prilagodba se može ostvariti samo ako je realni dio impedancije tereta Z_T manji od Z_0, tj. ako normirana impedancija tereta z_T leži u području Smithova dijagrama izvan kružnice $r=1$. Za ostale impedancije tereta prilagodba se može ostvariti konfiguracijom sa slike 6.3b).

Da bi sustav na slici 6.3a) bio prilagođen, ulazna impedancija Z_{ul} prilagodne mreže zaključene teretom impedancije $Z_T=R_T+jX_T$ mora biti jednaka Z_0, tj.

$$Z_0 = \frac{1}{jB_p + \dfrac{1}{jX_s + R_T + jX_T}}. \tag{6–1}$$

Rastavljanjem ovog izraza na realni i imaginarni dio, dobivaju se dvije jednakosti:

$$Z_0 B_p (X_T + X_s) = Z_0 - R_T, \tag{6–2a}$$

$$X_s + X_T = Z_0 R_T B_p. \tag{6–2b}$$

One sadrže dvije nepoznanice, serijsku reaktanciju X_s i paralelnu susceptanciju B_p. Uvrštenje jednakosti (6–2b) u (6–2a) daje kvadratnu jednadžbu za B_p čija rješenja glase

$$B_p = \pm \frac{\sqrt{(Z_0 - R_T)/R_T}}{Z_0}. \tag{6–3a}$$

Budući da je $\mathrm{Re}\{Z_T\} < Z_0$, izraz pod korijenom uvijek je pozitivan pa je susceptancija B_p uvijek realna veličina, što smo i očekivali. Uvrštenjem rješenja (6–3a) u jednakost (6–2b) dobiva se rješenje za serijsku reaktanciju

$$X_s = -X_T \pm \sqrt{R_T (Z_0 - R_T)}. \tag{6–3b}$$

Valja reći da su oba para rješenja (6–3) fizikalno ostvariva. Pozitivna reaktancija X_s može se ostvariti serijskim induktivitetom, $L_s=X_s/\omega$, a negativna kapacitetom $C_s= -1/(\omega X_s)$. Jednako tako, pozitivnu susceptanciju B_p moguće je ostvariti paralelnim kapacitetom $C_p = B_p/\omega$, a negativnu induktivitetom $L_p = -1/(\omega B_p)$. U praksi se obično odabire onaj par rješenja koji ima manje vrijednosti reaktancija odnosno susceptancija. Time se prilagodba može ostvariti u širem frekvencijskom pojasu.

Ako se impedancije na slici 6.3a) zamijene admitancijama, tj. $Y_T = G_T + jB_T = 1/Z_T$ i $Y_0 = 1/Z_0$, onda dualnoj mreži na slici 6.3b), u kojoj je poprečna admitancija zamijenjena serijskom impedancijom, a serijska impedancija poprečnom admitancijom, odgovara izraz

$$Y_0 = \frac{1}{jX_s + \dfrac{1}{jB_p + G_T + jB_T}}, \tag{6–4}$$

dualan izrazu (6–1). Iz toga izlaze i dva para dualnih fizikalno ostvarivih rješenja:

$$X_s = \pm Z_0 \sqrt{(Y_0 - G_T)/G_T}, \tag{6–5a}$$

$$B_p = -B_T \pm \sqrt{G_T (Y_0 - G_T)}, \tag{6–5b}$$

gdje u ove izraze preko veličina G_T i B_T treba uvrstiti impedanciju tereta, tj.

$$G_T = \frac{R_T}{R_T^2 + X_T^2}, \text{ odnosno } B_T = \frac{X_T}{R_T^2 + X_T^2}.$$

Primjenom rezultata sa slika 6.2, reaktivne komponente prilagodnih mreža prikazanih na slici 6.3 mogu se naći i grafičkim postupkom uporabom Smithova dijagrama. U tu svrhu valja razmotriti sljedeći primjer.

Primjer 6.1. Prilagodba impedancije koncentriranim elementima

Prilagoditi impedanciju tereta koja se sastoji od serijskog spoja otpora 25 Ω i kapaciteta 8,82 pF na prijenosnu liniju karakteristične impedancije 50 Ω. Naći reaktivne elemente prilagodne L-mreže grafičkim putem primjenom Smithova dijagrama ako je frekvencija 1,8 GHz. Rezultate usporediti s rezultatima dobivenim izravnom primjenom formula (6–3).

Rješenje:

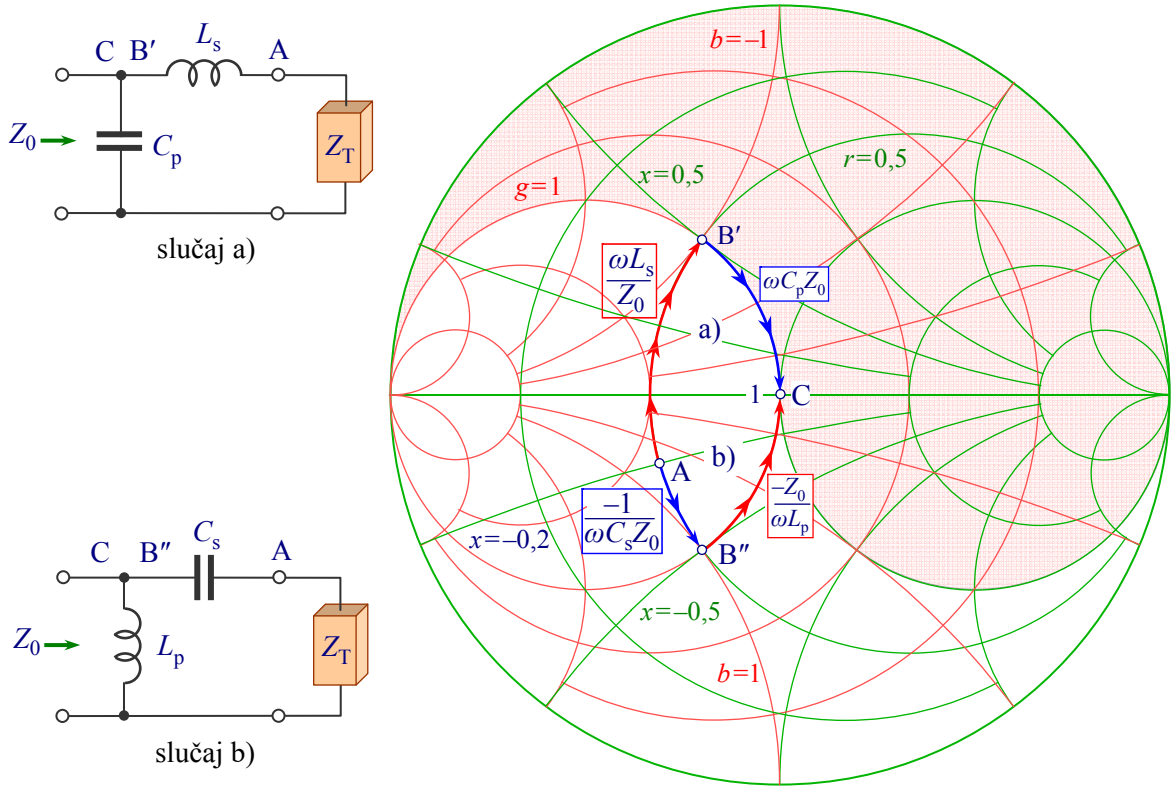
Impedancija tereta na frekvenciji 1,8 GHz iznosi

$$Z_T = R_T + \frac{1}{j\omega C_T} = 25 - \frac{j}{2\pi \cdot 1{,}8 \cdot 10^9 \cdot 8{,}82 \cdot 10^{-12}} = 25 - j10\,\Omega$$

Budući da je realni dio impedancije tereta (25 Ω) manji od karakteristične impedancije linije (50 Ω) valja odabrati prilagodnu mrežu sa slike 6.3a). Da bi se problem mogao riješiti grafički u Smithovu dijagramu najprije je potrebno normirati impedanciju tereta (točka A), tj.

$$z_T = \frac{Z_T}{Z_0} = \frac{25 - j10}{50} = 0{,}5 - j0{,}2\,.$$

U skladu sa slikom 6.3a), impedanciji tereta valja u seriju dodati reaktanciju (po potrebi pozitivnu ili negativnu). Time se točka A transformira u točku B′ (ili B″) koja mora ležati na jediničnoj kružnici ($g = 1$) u admitancijskom dijagramu (invertirani Smithov dijagram na slici 6.4). Ta se transformacija obavlja na kružnici konstantnog realnog dijela (normiranog otpora) jer dodavanje serijske reaktancije ne mijenja realni dio impedancije. Stoga je razlika normiranih impedancija u točkama A i B′ (ili B″) jednaka vrijednosti normirane serijske reaktancije X_s/Z_0. Da bi teret prilagodili prijenosnoj liniji, točka impedancije mora se kretati kružnicom konstantne vodljivosti, $g = 1$, iz točke B′ (ili B″) do točke C u središtu Smithova dijagrama. Sad se s pomoću susceptancije točke B′ (ili B″) konačno može odrediti vrijednost potrebne susceptancije paralelnog prilagodnog elementa B_p, kao što je prikazano na slici 6.4.



Slika 6.4. Postupak prilagodbe impedancije tereta u Smithovu dijagramu reaktivnom L-mrežom s koncentriranim elementima: **a)** poprečni kapacitet u kaskadi sa serijskim induktivitetom, **b)** poprečni induktivitet u kaskadi sa serijskim kapacitetom

Vrijednosti reaktivnih komponenata za rješenje B′ (slučaj a)) mogu se jednostavno odrediti uporabom Smithova dijagrama (slika 6.4). Normirane su reaktancije u točkama A i B′: $x_A = x_T = -0{,}2$ i $x_{B'} = 0{,}5$ iz čega izlazi da je reaktancija serijskog elementa pozitivna, tj. induktivna

$$X_s = Z_0 x_s = Z_0 (x_{B'} - x_A) = 50 \cdot [0{,}5 - (-0{,}2)] = 50 \cdot 0{,}7 = 35\ \Omega .$$

Otuda je serijski induktivitet

$$L_s = \frac{X_s}{\omega} = \frac{35}{2\pi \cdot 1{,}8 \cdot 10^9} = 3{,}1\,\text{nH} .$$

Normirana susceptancija u točki B′ iznosi $b_{B'} = -1$ pa je susceptancija poprečnog elementa pozitivna, tj. kapacitivna

$$C_p = \frac{-b_{B'}}{\omega Z_0} = \frac{-(-1)}{2\pi \cdot 1{,}8 \cdot 10^9 \cdot 50} = 1{,}76\,\text{pF} .$$

Slično se za točku B″ (slučaj b)) dobiva negativna serijska reaktancija koja je stoga kapacitivna, tj.

$$X_s = Z_0 x_s = Z_0 (x_{B''} - x_A) = 50 \cdot [-0{,}5 - (-0{,}2)] = 50 \cdot (-0{,}3) = -15\ \Omega$$

pa je:

$$C_s = \frac{-1}{\omega X_s} = \frac{-1}{2\pi \cdot 1{,}8 \cdot 10^9 \cdot (-15)} = 5{,}9\,\text{pF}, \quad \text{a} \quad L_p = \frac{-Z_0}{\omega b_{B''}} = \frac{-50}{2\pi \cdot 1{,}8 \cdot 10^9 \cdot (-1)} = 4{,}42\,\text{nH} .$$

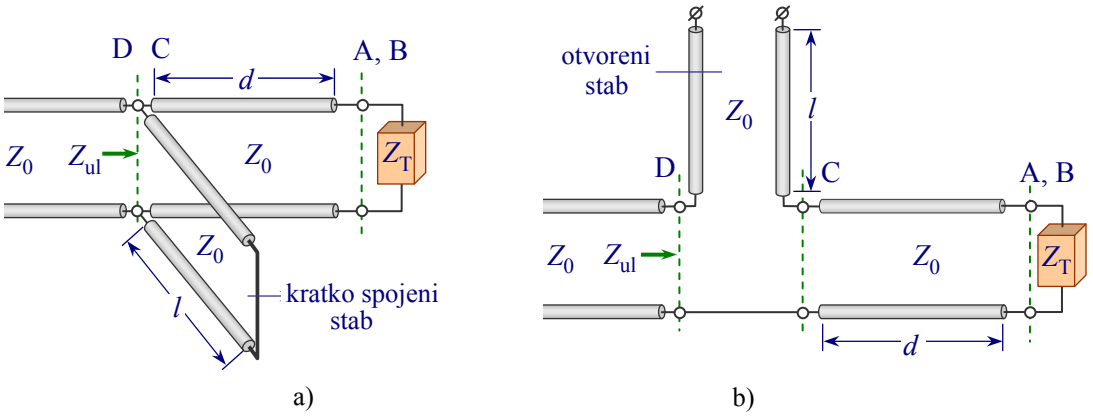
Iz formule (6–3a) dobiva se: $B_p = \pm\sqrt{(Z_0 - R_T)/R_T / Z_0^2} = \pm\sqrt{(50-25)/(25 \cdot 50^2)} = \pm 20$ mS, a iz formule (6–3b) izlazi: $X_s = -X_T \pm \sqrt{R_T (Z_0 - R_T)} = -(-10) \pm \sqrt{25 \cdot (50-25)} = 10 \pm 25\ \Omega$, iz čega izlaze istovjetni rezultati onima dobivenim rješavanjem s pomoću Smithova dijagrama.

Osjenčano područje na slici 6.4 odgovara impedancijama tereta koje nije moguće prilagoditi, za slučaj a). Slično se mogu označiti područja impedancija tereta koje nije moguće prilagoditi ostalim prilagodnim mrežama izvedenim iz slike 6.3.

6.2. Prilagodba jednim stabom

Primjenom paralelno ili serijski spojenog otvorenog ili kratko spojenog odsječka linije (staba) i serijskog odsječka prijenosne linije odgovarajuće duljine moguće je ostvariti prilagodbu impedancije u užem frekvencijskom pojasu. Razmotrit ćemo samo prilagodnu mrežu s paralelno spojenim stabom prikazanu na slici 6.5 jer se takva mreža može znatno jednostavnije izvesti s mikrotrakastom i suosnom strukturom. Ovdje je odabran kratko spojen stab, ali jednako se tako može uporabiti i otvoreni stab. Karakteristične impedancije tih linijskih odsječaka, uključujući stabove, općenito mogu biti različite. No u konkretnim izvedbama s mikrotrakastim i suosnim strukturama iz praktičnih se razloga nerijetko primjenjuju linijski odsječci jednakih karakterističnih impedancija. U postupku prilagodbe s jednim stabom ugađaju se dvije varijable: udaljenost d između tereta i staba te duljina staba l.

Postupak prilagodbe najzornije se može prikazati u Smithovu dijagramu. Impedanciju tereta treba najprije normirati na karakterističnu impedanciju prijenosne strukture (tj., linije ili valovoda). Budući da je stab spojen paralelno s linijom korisno je prijeći iz impedancijskog prikaza na admitancijski. (Pritom se paralelno spojene admitancije jednostavno zbroje.) Normirana impedancija tereta $z_T = Z_T/Z_0$ nalazi se u točki A Smithova dijagrama. Zatim se kroz tu točku povuče kružnica konstantnog odnosa stojnih valova. Pretvorba u normiranu admitanciju $y_T = Y_T/Y_0$ ostvaruje se tako da se točki A na toj kružnici nađe nasuprotna točka B. Od ovog trenutka pa nadalje Smithov ćemo dijagram predočavati kao dijagram normiranih admitancija. Za prilagodbu impedancije tereta paralelnim stabom, normiranu admitancija u točki B valja transformirati u točku u kojoj je realni dio jednak jedinici. To znači da transformirana točka

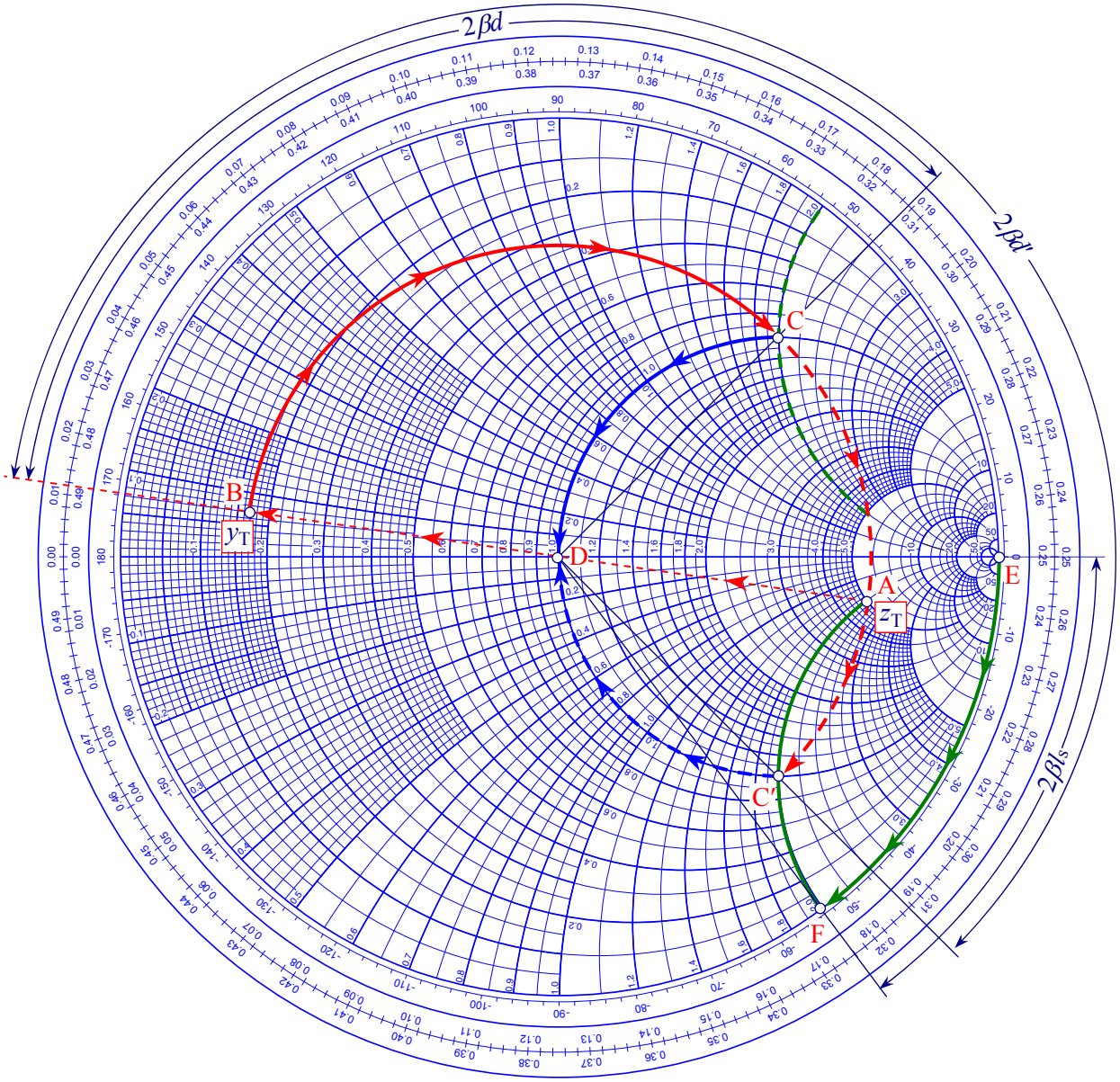


Slika 6.5. a) Prilagodba paralelnim kratko spojenim stabom i **b)** serijskim otvorenim stabom

normirane admitancije mora ležati na kružnici jedinične vodljivosti ($g=1$). No pritom kružnica konstantnog odnosa stojnih valova presijeca kružnicu $1+jb$ u dvije točke, C i C′. Valjana udaljenost d, od tereta do staba, dana je bilo kojim od tih dvaju sjecišta. Pomak točke B do točke C ili C′ može se ostvariti tako da se između tereta i staba umetne serijski odsječak prijenosne linije odgovarajuće duljine d. Kao što je objašnjno u odjeljku 3.5. kretanju linijom bez gubitaka odgovara zakretanje točke na kružnici konstantnog odnosa stojnih valova u Smithovu dijagramu (točka konstantnog modula koeficijenta refleksije). Na taj se način općenito dobivaju dva rješenja, $y_C=1+jb_C$ i $y_{C'}=1-jb_{C'}$, koja se nalaze na sjecištima kružnice stalnog odnosa stojnih valova s jediničnom kružnicom ($g=1$). Prvome rješenju pripada pozitivna susceptancija, a drugome negativna susceptancija istoga iznosa. Obično se odabire ono rješenje koje daje kraći odsječak linije ili kraći stab. Sad se na vanjskoj skali Smithova dijagrama očita vrijednost normirane duljine d/λ s pomoću koje se za poznatu frekvenciju odredi potrebna fizička duljina d. U točki D, ispred spoja sa stabom, normirana ulazna admitancija poprima jediničnu vrijednost (savršena prilagodba, $\Gamma_D=0$). Stoga će normiranu susceptanciju u točki C kompenzirati normirana susceptancija staba $y_s=jb_s$. Na referentnoj ravnini spoja, može se ostvariti potrebnu vrijednost normirane susceptancije, $y_s=jb_s$, i s pomoću otvorenog i s pomoću kratko spojenog staba. Pritom se duljina staba odredi tako da se najprije nađe susceptancija staba $b_s=-b_C$ koja označuje negativ susceptancije u točki C. Da bi se zatim našla potrebna duljina kratko spojenog staba, iz točke E (beskonačna admitancija) valja se kretati rubom Smithova dijagrama ($g=0$) u smjeru prema generatoru do točke F u kojoj se nalazi normirana admitancija jb_s. Sad se na vanjskoj skali očita normirana duljina staba l/λ. Uz tu duljinu staba teret je savršeno prilagođen na prijenosnu liniju. Na slici 6.6 prikazan je postupak prilagodbe za stvarne vrijednosti impedancije tereta i karakteristične impedancije linija.

U konkretnom primjeru na slici 6.6 impedancija je tereta $Z_T=25-j100\ \Omega$, a karakteristična impedancija linijskog odječka i staba iznosi 50 Ω. Otuda je normirana impedancija tereta $z_T=Z_T/Z_0=5-j2$, pa je normirana admitancija tereta $y_T=0{,}172+j0{,}069$ s argumentom 171,9° kojem odgovara normirana duljina $d/\lambda=0{,}011$. U točki C normirana je admitancija $y_C=1+j0{,}2$ s argumentom 45° kojem odgovara normirana duljina $d/\lambda=0{,}188$. Prilagodbu valja obaviti na frekvenciji 6 GHz, za koju je valna duljina $\lambda=50$ mm. Stoga duljina linijskog odsječka iznosi $d=(0{,}187-0{,}011)\lambda=0{,}177\cdot 50=8{,}8$ mm. Drugo rješenje (točka C′) konjugirano je kompleksno u odnosu na točku C, tj. $y_{C'}=1-j2$. Argument te normirane admitancije iznosi –45°, a $d'/\lambda=0{,}312$, pa fizička duljina odsječka iznosi $d'=(0{,}312-0{,}011)\lambda=0{,}301\cdot 50=15{,}05$ mm.

Potrebna duljina kratko spojenog staba određena je električnom udaljenošću točaka E i F na rubu Smithova dijagrama. Prvome rješenju (točka C) odgovara normirana susceptancija staba $b_s=-2$, tj. $l/\lambda=0{,}324-0{,}250=0{,}074$ pa fizička duljinu staba iznosi $l=3{,}7$ mm. Drugome rješenju (točka C′) odgovara normirana susceptancija $b_s=2$ pa je $l'/\lambda=0{,}176+0{,}250=0{,}426$.



Slika 6.6. Postupak prilagodbe u Smitovu dijagramu

Problem prilagodbe jednim paralelnim stabom (slika 6.5a)) može se lako riješiti i analitički [1], [2]. U cilju određivanja duljine d linijskog odsječka i duljine staba l, neovisno o tomu radi li se o otvorenom ili kratko spojenom stabu, impedanciju tereta valja prikazati s pomoću realnog i imaginarnog dijela kao $Z_\mathrm{T} = R_\mathrm{T} + \mathrm{j}X_\mathrm{T}$. Tad se, nakon transformacije preko linijskog odsječka, impedancija tereta preslikava u točku B kao

$$Z_\mathrm{B} = Z_0 \frac{R_\mathrm{T} + \mathrm{j}X_\mathrm{T} + \mathrm{j}Z_0 \tan \beta d}{Z_0 + \mathrm{j}(R_\mathrm{T} + \mathrm{j}X_\mathrm{T}) \tan \beta d}.$$

Budući da se radi o paralelno vezanom stabu, korisno je impedanciju u točki B pretvoriti u pripadajuću admitanciju $Y_\mathrm{B} = G_\mathrm{B} + \mathrm{j}B_\mathrm{B} = 1/Z_\mathrm{B}$, gdje su:

$$G_\mathrm{B} = \frac{R_\mathrm{T}(1 + \tan^2 \beta d)}{R_\mathrm{T}^2 + (X_\mathrm{T} + Z_0 \tan \beta d)^2}, \qquad (6\text{–}6\mathrm{b})$$

$$B_{\mathrm{B}} = \frac{R_{\mathrm{T}}^2 \tan \beta d - (Z_0 - X_{\mathrm{T}} \tan \beta d)(X_{\mathrm{T}} + Z_0 \tan \beta d)}{Z_0 \left[R_{\mathrm{T}}^2 + (X_{\mathrm{T}} + Z_0 \tan \beta d)^2 \right]}. \tag{6–6b}$$

Budući da realni dio admitancije u točki C mora biti jednak karakterističnoj admitanciji pobudne linije ($G_{\mathrm{B}} = Y_0 = 1/Z_0$), primjenom tog uvjeta, potrebna se duljina odsječka (d) može odrediti iz izraza (6–6a). Iz tog se izraza dobiva kvadratna jednadžba za varijablu $\tan \beta d$ u kojoj se varijabla d nalazi u implicitnom obliku, tj.

$$Z_0 (R_{\mathrm{T}} - Z_0) \tan^2 \beta d - 2 Z_0 X_{\mathrm{T}} \tan \beta d + Z_0 R_{\mathrm{T}} - R_{\mathrm{T}}^2 - X_{\mathrm{T}}^2 = 0 .$$

Rješavanjem te jednadžbe dobivaju se dva fizikalno ostvariva rješenja:

$$\tan \beta d = \frac{X_{\mathrm{T}} \pm \sqrt{R_{\mathrm{T}} \left[(Z_0 - R_{\mathrm{T}})^2 + X_{\mathrm{T}}^2 \right] / Z_0}}{R_{\mathrm{T}} - Z_0}, \quad \text{za } R_{\mathrm{T}} \neq Z_0. \tag{6–7}$$

Za $R_{\mathrm{T}} = Z_0$ izlazi $\tan \beta d = -X_{\mathrm{T}}/(2Z_0)$. Za pozitivne vrijednosti $\tan \beta d$, iz izraza (6–7) dobiva se rješenje

$$d = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \frac{X_{\mathrm{T}} \pm \sqrt{R_{\mathrm{T}} \left[(Z_0 - R_{\mathrm{T}})^2 + X_{\mathrm{T}}^2 \right] / Z_0}}{R_{\mathrm{T}} - Z_0}, \quad \text{za } \tan \beta d \geq 0 \tag{6–8}$$

a za negativnu vrijednost $\tan \beta d$ duljini d treba dodati pola valne duljine, tj. $d' = \lambda/2 + d$, jer se negativna duljina fizički ne može ostvariti.

Duljine stabova mogu se naći iz izraza (6–6b), uz uvjet $B_{\mathrm{s}} = -B_{\mathrm{C}}$, jer se ukupna susceptancija u točki C mora poništiti ($Y_{\mathrm{C}} = Y_0 + B_{\mathrm{C}} + B_{\mathrm{s}} = Y_0 = 1/Z_0$). Pritom za otvoreni stab izlazi

$$l_{\mathrm{ok}} = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} Z_0 B_{\mathrm{s}} = -\frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} Z_0 B_{\mathrm{C}}, \tag{6–9a}$$

a za kratko spojen stab dobiva se

$$l_{\mathrm{ks}} = -\frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \frac{1}{Z_0 B_{\mathrm{s}}} = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \frac{1}{Z_0 B_{\mathrm{C}}}. \tag{6–9b}$$

Ako je bilo koja od vrijednosti negativna (tj., $l_{\mathrm{ok}} < 0$ ili $l_{\mathrm{ks}} < 0$), onda je rezultatu potrebno dodati pola valne duljine.

Sličnim se postupkom mogu dobiti odgovarajući izrazi za izračun duljina linijskog odsječka i staba prilagodne mreže sa serijski spojenim stabom prikazane na slici 6.5b). Struktura tih izraza posve je jednaka strukturi izraza za mrežu s paralelnim stabom, samo što je potrebno napraviti odgovarajuće zamjene. Admitancije valja zamijeniti odgovarajućim impedancijama ($Y \rightarrow Z$, $B \rightarrow X$, $G \rightarrow R$, $Y_0 \rightarrow Z_0$) i obratno.

Širina frekvencijskog pojasa unutar kojeg je moguće prilagoditi teret s odnosom stojnih valova manjim od unaprijed zadane vrijednosti temeljna je specifikacija u svakoj praktičnoj izvedbi prilagodnih mreža. U odjeljku 6.4. objašnjeno je da se niti jedan stvarni teret ne može prilagoditi u beskonačno širokom frekvencijskom području. Širina frekvencijskog pojasa prilagodbe u velikoj mjeri ovisi o vrijednostima reaktivnih elemenata i o samoj impedanciji tereta. Naime, promjenom frekvencije mijenjaju se impedancije reaktivnih elemenata; induktivna impedancija mijenja se po zakonu $\mathrm{j} X_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\, 2\pi f_0 L$, a kapacitivna impedancija po zakonu $\mathrm{j} X_{\mathrm{C}} = -\mathrm{j}/(2\pi f_0 C)$. No već smo našli da i električna duljina odsječka prijenosne linije ovisi o frekvenciji, tj.

$$\theta = \beta l = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{v}}} l = \frac{\omega}{v_{\mathrm{f}}} l, \tag{6–10}$$

gdje je v_f fazna brzina kojom se val giba prijenosnom linijom. Drugim riječima, svako odstupanje frekvencije od f_0 vodi razgođenju prilagodne mreže jer se promjenom frekvencije mijenja duljina staba i duljina linijskog odsječka koji je umetnut između tereta i staba (slika 6.5). Zadovoljavajuću je prilagodbu također teško ostvariti u širokom pojasu frekvencija za velik omjer transformacije između impedancije tereta i pobudne linije (ili generatora). Konjugirano kompleksna prilagodba za jednostavne prilagodne mreže uključuje uvjet rezonancije. Osim toga, u stvarnim okolnostima, i impedancija tereta često ovisi o frekvenciji, a posebno kad je teret rezonantan (odjeljak 7.5). Takav se teret primjerice može naći u ulaznoj impedanciji mikrovalnog tranzistora (odjeljci 8.4. i 8.8), koja se obično može prikazati kao serijski spoj malog kapaciteta i otpora. Stoga je širokopojasna prilagodba reaktivnih impedancija vrlo teška zadaća i traži posebnu vještinu da bi se postigao prihvatljivo mali odnos stojnih valova u dovoljno širokom pojasu frekvencija. O tomu će biti više riječi u sljedećim odjeljcima (6.4.-6.8).

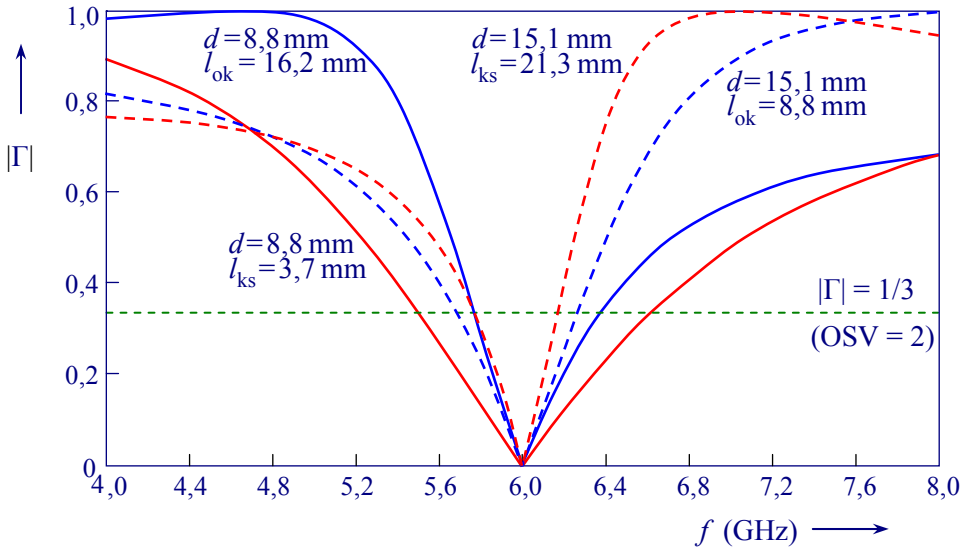
No da bi se stekao dojam o tomu kako širina frekvencijskog pojasa ovisi o duljini prilagodnog staba i linijskog odsječka, razmotrimo frekvencijsku ovisnost prilagodne mreže na primjeru sa slike 6.6. Pretpostavimo da se impedancija tereta sastoji od serijskog spoja otpora $R_T = 250\ \Omega$ i kapaciteta $C_T = 0{,}265$ pF te da se teret prilagođuje prijenosnoj liniji karakteristične impedancije 50 Ω na frekvenciji $f_0 = 6$ GHz. Na središnjoj frekvenciji (6GHz) impedancija tereta iznosi $Z_T = R_T - \mathrm{j}/(2\pi f_0 C) = 250 - \mathrm{j}100\ \Omega$, što znači da je normirana impedancija tereta $z_T = Z_T/50 = 5 - \mathrm{j}2$ upravo jednaka onoj na slici 6.6. Sad se primjenom analitičkih izraza ili nekog od računalnih programa za projektiranje mikrovalnih mreža može lako izračunati duljina linijskog odsječka i staba za bilo koje od dvaju mogućih rješenja (točke *C* i *C*′). Ako se uključe i obje vrste stabova, kratko spojeni i otvoreni, onda se ukupno mogu pojaviti četiri različita slučaja.

Vrijednosti parametara prilagodnih mreže, u ovom primjeru, možemo dobiti primjenom formula (6–8) i (6–9). Za sva četiri moguća slučaja, rezultati su prikazani u ovoj tablici:

	Rješenje	Vrsta staba	Duljina odsječka d, mm	Duljina staba l, mm	Širina pojasa B, GHz
1.	točka C	kratko spojeni stab	8,8	3,7	1,108
2.	točka C	otvoreni stab	8,8	16,2	0,507
3.	točka C′	kratko spojeni stab	15,1	21,3	0,394
4.	točka C′	otvoreni stab	15,1	8,8	0,574

Usporedbe radi, na slici 6.7 prikazana je frekvencijska ovisnost veličine koeficijenta refleksije na ulazu prilagodne mreže (točka D na slici 6.5a)) za sva četiri slučaja. Ta je ovisnost prikazana u rasponu frekvencija od 4 do 8 GHz. Kao što se može vidjeti, teret je prilagođen u razmjerno uskom frekvencijskom pojasu.

Mijenjanjem frekvencije u okolišu f_0 može se naći širina pojasa unutar kojeg je refleksija manja od unaprijed zadane vrijednosti koeficijenta refleksije ili odnosa stojnih valova. U većini praktičnih rješenja dopušta se OSV < 2, što odgovara modulu koeficijenta refleksije manjem od 1/3 (ili –9,54dB). U tablicu su također unesene vrijednosti širine frekvencijskog pojasa prilagodbe za sva četiri slučaja. Valja primijetiti da je širina pojasa približno obrnuto razmjerna ukupnoj duljini ($d+l$) linijskih odsječaka koji sudjeluju u prilagodbi. To je u skladu s fizikalnom intuicijom jer se na kraćim linijskim odsječcima i stabovima električna duljina manje mijenja s frekvencijom. Grafovi i podatci u tablici pokazuju da se najveća širinu pojasa postiže za 1. rješenje (točka C) s kratko spojenim stabom jer je ukupna duljina linijskih odsječaka najkraća (ukupno iznosi 12,5 mm, što točno odgovara četvrtini valne duljine na središnjoj frekvenciji 6 GHz). No i u tom slučaju relativna širina pojasa frekvencija iznosi malih 18,5%.



Slika 6.7. Frekvencijska ovisnost koeficijenta refleksije za oba rješenja (točka *C* i *C'*) s otvorenim i kratko spojenim stabovima. Indeks »ok« odnosi se na otvoreni stab (plavo), a »ks« na kratko spojeni stab (crveno)

6.3. Prilagodba četvrtvalnim transformatorom impedancije

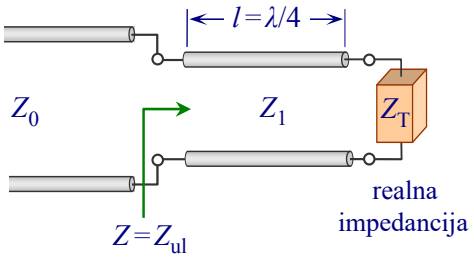
U odjeljku 3.3. o prijenosnim linijama pokazano je kako se impedancija tereta transformira na ulazu odsječka prijenosne linije. Ako je na proračunskoj frekvenciji f_0 linija dugačka točno četvrt valne duljine ($\lambda/4$), onda se takva linija naziva *četvrtvalni transformator impedancije*. Kad se transformacija impedancije obavlja u razmjerno uskom frekvencijskom području, tad će za transformaciju biti dovoljan samo jedan odsječak četvrtvalne linije. No da bi se ostvarila dobra prilagodba unutar šireg frekvencijskog područja potrebno je uporabiti dva, tri ili više četvrtvalnih odsječaka vezanih u kaskadu.

Jedan od nedostataka četvrtvalnog transformatora je taj da obavlja samo transformaciju realnih impedancija. No kompleksna se impedancija tereta uvijek može transformirati u realnu impedanciju umetanjem dodatnog odsječka, odgovarajuće električne duljine, između tereta i prijenosne linije [1], [2], [5]. Taj postupak međutim povećava osjetljivost prilagodne mreže na promjene frekvencije pa tako smanjuje raspoloživu širinu frekvencijskog pojasa. Prilagodba se može ostvariti i produljivanjem ili skraćivanjem fizičke duljine četvrtvalnog transformatora, ako točka impedancije tereta ne leži odveć daleko od realne osi u Smithovu dijagramu ($-\pi/4 < \varphi_T < \pi/4$), gdje je $\varphi_T = \angle\Gamma_T$ (fazni kut koeficijenta refleksije tereta).

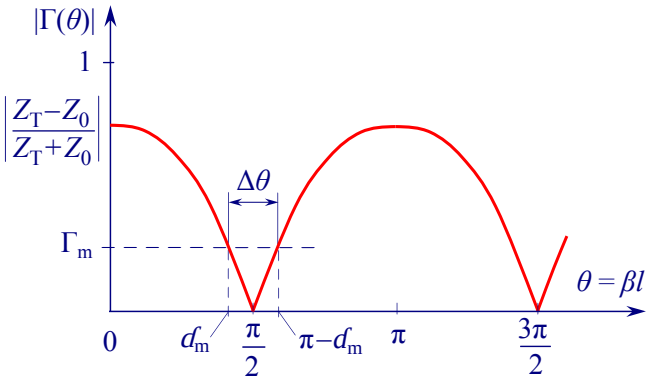
Temeljno načelo rada četvrtvalnog transformatora impedancije može se lako objasniti razmatranjem prilagodbe prijenosne linije karakteristične impedancije Z_0 na posve realnu impedanciju tereta Z_T, kao što je prikazano na slici 6.8. Ako se između ulazne linije i tereta umetne odsječak linije bez gubitaka karakteristične impedancije Z_1 dugačak jednu četvrtinu valne duljine, onda se na priključcima ulazne linije dobiva efektivna impedancija tereta

$$Z = Z_1 \frac{Z_T + \mathrm{j} Z_1 \tan(\beta\lambda/4)}{Z_1 + \mathrm{j} Z_T \tan(\beta\lambda/4)} = \frac{Z_1^2}{Z_T}. \qquad (6\text{–}11)$$

Ako se za Z_1 uzme $\sqrt{Z_0 Z_T}$, onda će teret biti prilagođen ulaznoj liniji jer je tada $Z = Z_0$. Drugim riječima, četvrtvalni odsječak linije transformira impedanciju tereta Z_T u impedanciju $Z = Z_0$ pa stoga djeluje kao idealni transformator omjera zavoja $\sqrt{Z_0/Z_T}$. Savršena prilagodba ostvariva je samo na frekvenciji na kojoj je duljina transformatora jednaka četvrtini valne duljine ili, općenitije, $n\lambda/2 + \lambda/4$, za $n = 0, 1, \ldots$



Slika 6.8. Četvrtvalni transformator impedancije



Slika 6.9. Veličina koeficijenta refleksije na ulazu četvrtvalnog transformatora u ovisnosti o električnoj duljini transformatora

Neka je θ električna duljina transformatora na frekvenciji f, to jest, $\beta(f)l=\theta$, gdje je fazni koeficijent općenito funkcija frekvencije. Za *TEM*-val u liniji ispunjenoj zrakom $\beta l = 2\pi f l/c$. Na bilo kojoj frekvenciji ulazna impedancija na priključcima ulazne linije iznosi

$$Z_{\text{ul}} = Z_1 \frac{Z_\text{T} + \text{j}Z_1 \tan\theta}{Z_1 + \text{j}Z_\text{T} \tan\theta}. \tag{6–12}$$

Iz toga se može odrediti koeficijent refleksije na ulaznoj liniji kao

$$\Gamma = \frac{Z_{\text{ul}} - Z_0}{Z_{\text{ul}} + Z_0} = \frac{Z_1(Z_\text{T} - Z_0) + \text{j}(Z_1^2 - Z_0 Z_\text{T})\tan\theta}{Z_1(Z_\text{T} + Z_0) + \text{j}(Z_1^2 + Z_0 Z_\text{T})\tan\theta} = \frac{Z_\text{T} - Z_0}{Z_\text{T} + Z_0 + \text{j}2\sqrt{Z_0 Z_\text{T}}\tan\theta}. \tag{6–13}$$

Posljednji oblik u izrazu (6–13) dobiven je primjenom uvjeta $Z_1^2 = Z_0 Z_\text{T}$. Uvrštenjem izraza $(Z_\text{T}+Z_0)^2=(Z_\text{T}-Z_0)^2+4Z_\text{T}Z_0$ i $1-\tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$ dobiva se modul koeficijenta refleksije

$$|\Gamma| = \frac{|Z_\text{T} - Z_0|}{\sqrt{(Z_\text{T} + Z_0)^2 + 4Z_0 Z_\text{T}\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{4Z_0 Z_\text{T}}{(Z_\text{T} - Z_0)^2 \cos^2\theta}}}. \tag{6–14}$$

Ako se pretpostavi da frekvencija previše ne odstupa od proračunske frekvencije f_0, za koju je $l=\lambda/4$, tj. θ blizu $\pi/2$ kao što je prikazano na slici 6.9, onda je $1/\cos^2\theta \gg 1$ pa se izraz (6–14) može pojednostavniti na oblik

$$|\Gamma| \simeq \frac{|Z_\text{T} - Z_0|}{2\sqrt{Z_0 Z_\text{T}}} |\cos\theta|, \qquad \text{za } \theta \text{ približno } \pi/2. \tag{6–15}$$

Taj rezultat upućuje na stupanj razgođenosti prilagodne mreže s četvrtvalnim transformatorom u blizini proračunske frekvencije f_0, kao što je prikazano na slici 6.9.

No budući da $|\Gamma|$ ovisi o električnoj duljini θ, istodobno ovisi i o frekvenciji. Ta je ovisnost periodična zbog periodične ovisnosti ulazne impedancije o frekvenciji. Stoga se vrijednost impedancije ponovi svaki put kad se električna duljina transformatora poveća za π radijana. Ako se s Γ_m označi maksimalna dopuštena vrijednost koeficijenta refleksije, onda se može definirati širina frekvencijskog pojasa prilagodnog transformatora kao

$$\Delta\theta = 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta_\text{m}\right), \tag{6–16}$$

jer je odziv funkcije $|\Gamma(\theta)|$ simetričan oko $\theta=\pi/2$, a $|\Gamma|=\Gamma_\text{m}$ na $\theta=\theta_\text{m}$ i na $\pi-\theta_\text{m}$. Zbog naglog porasta vrijednosti $|\Gamma(\theta)|$ s obiju strana $\theta=\pi/2$, korisna je širina frekvencijskog pojasa razmjer-

no mala. Egzaktna vrijednost $\theta=\theta_m$ na rubu korisnog pojasa propuštanja može se naći tako da se u izrazu (6–14) veličina $|\Gamma|$ zamijeni s Γ_m pa izlazi

$$\theta_m = \cos^{-1}\left|\frac{2\Gamma_m}{\sqrt{1-\Gamma_m^2}}\frac{\sqrt{Z_0 Z_T}}{Z_T - Z_0}\right|. \tag{6–17}$$

Ako se energija prenosi *TEM*-valom, onda je

$$\theta = \beta l = \frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}$$

pa ukupna širina frekvencijskog pojasa iznosi

$$\Delta f = 2(f_0 - f_m) = 2\left(f_0 - \frac{2f_0}{\pi}\theta_m\right). \tag{6–18}$$

Otuda je relativna širina frekvencijskog pojasa

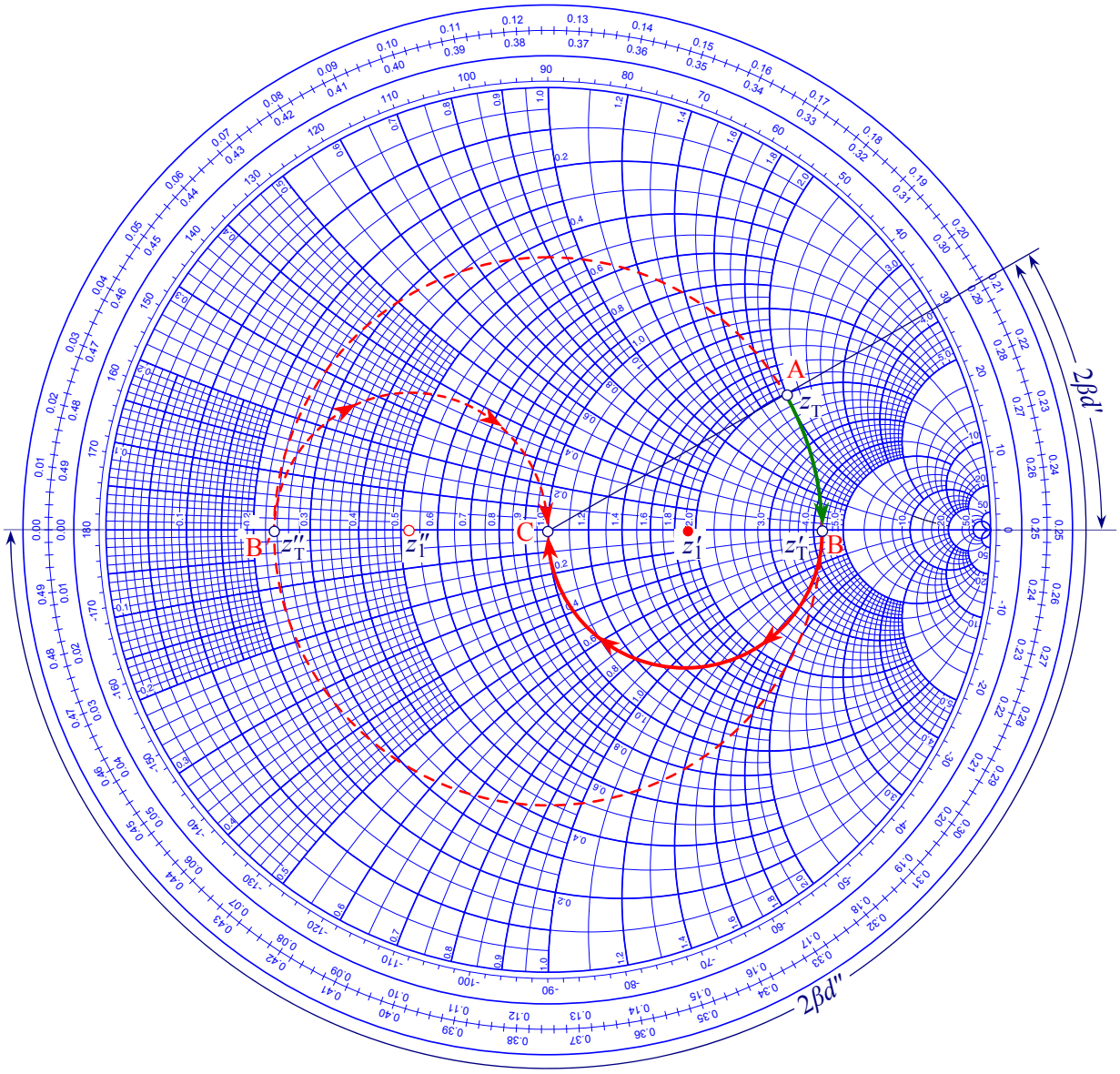
$$\frac{\Delta f}{f_0} = 2 - \frac{4}{\pi}\cos^{-1}\left|\frac{2\Gamma_m}{\sqrt{1-\Gamma_m^2}}\frac{\sqrt{Z_0 Z_T}}{Z_T - Z_0}\right|, \tag{6–19}$$

gdje je u izrazu (6–18) odabrano rješenje na donjem kraju korisnog frekvencijskog pojasa, tj. $\theta_m < \pi/2$. Relativna se širina pojasa obično prikazuje u postotcima, kao $100(\Delta f / f_0)$ %. Izrazi (6–17) i (6–19) pokazuju da širina pojasa transformatora raste kad vrijednost Z_T teži Z_1, što znači da je u tom slučaju teret manje neprilagođen.

Transformacijom visokog otpora trošila na nizak ulazni otpor ($Z_T \gg Z_0$) mikrotrakastim transformatorom impedancije, nerijetko je potrebna toliko uska traka da ju nije moguće izvesti u praksi. Tomu se može doskočiti transformacijom otpora trošila na manji otpor od zadanog na ulazu i dodavanjem u kaskadu još jednog četvrtvalnog transformatora niže karakteristične impedancije od ulaznog otpora, koji obavlja konačnu transformaciju otpora na zadani ulazni otpor. Dobar rezultat postiže se transformacijom otpora trošila na polovinu ulaznog otpora s pomoću transformatora karakteristične impedancije ($Z_2=Z_0/\sqrt{2}$). Iz toga izlazi $Z_1=\sqrt{Z_0 Z_T/2}$, što je za $\sqrt{2}$ puta manja vrijednost od one za jednostruki transformator, što daje približno upola užu traku. Pritom je širina frekvencijskog pojasa upola manja, jer prvom transformacijom raste razgođenje pa se time povećava faktor dobrote prilagodne mreže. Jednak postupak može se primijeniti i pri transformaciji vrlo malog otpora na razmjerno velik ulazni otpor.

Ako je impedancija tereta kompleksna, onda je prije uporabe četvrtvalnog transformatora potrebno odrediti duljinu d' linijskog odsječka koji se postavlja između tereta i transformatora kako bi se impedancija tereta pretvorila u realnu vrijednost. To se može riješiti analitičkim ili grafoanalitičkim postupkom s pomoću Smithova dijagrama (slika 6.10) u sljedećim koracima.

1. Najprije se u Smithov dijagram ucrta normirana impedancija tereta $z_T = Z_T/Z_0$ (točka A).
2. Zatim se točka A, tj. normirana impedancija tereta, z_T, zakrene po kružnici stalnog odnosa stojnih valova u smjeru prema generatoru do sjecišta na realnoj osi (točka B). Time je dobivena normirana realna impedancija z'_T i normirana duljina d'/λ. Obično se rabi točka u kojoj kružnica prvi put siječe realnu os, što daje najkraći odsječak (d'). [No može se iskoristiti i suprotna točka (B′) koja daje drugo moguće rješenje z_T'' i duljinu odsječka d''. Tad je odsječak dulji za četvrtinu valne duljine, a pripadajuća mreža ima manju širinu pojasa. Pritom je jedna od impedancija uvijek veća od Z_0, a druga manja od Z_0.]
3. Konačno se normirana impedancija z'_T transformira s pomoću četvrtvalnog transformatora u ulaznu impedanciju $z_{ul} = Z_{ul}/Z_0$, koja u uvjetima prilagodbe iznosi $1 + j\,0$ (točka C). Prema izrazu (6–11), potrebna karakteristična impedancija transformatora iznosi $Z'_1 = Z_0\sqrt{z'_T}$.



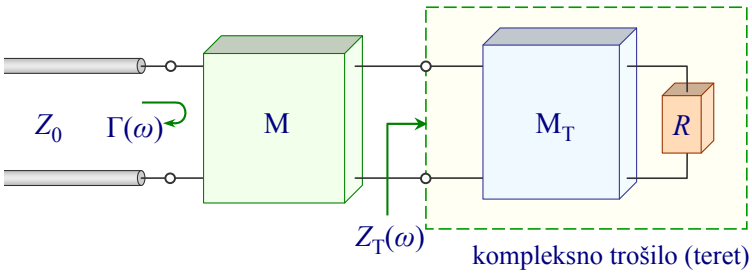
Slika 6.10. Prilagodba odsječkom četvrtvalne linije

6.4. Bode-Fanov kriterij

Pri projektiranju širokopojasnih pasivnih i aktivnih sklopova obično se želi postići najveća širina frekvencijskog pojasa koju je moguće ostvariti uz maksimalno dopustivu razinu modula koeficijenta refleksije ili odnosa stojnih valova. To se može objasniti s pomoću Bode-Fanova kriterija [6], [7], koji daje teorijski minimalnu vrijednost koeficijenta refleksije, koja se može ostvariti uporabom proizvoljne prilagodne mreže za prilagodbu impedancija nekoliko kanonskih oblika tereta uz unaprijed zadanu širinu pojasa. Taj kriterij daje optimalno rješenje u idealnom slučaju, čak i tada kad se praktične izvedbe mogu samo približiti tom rezultatu.

Fanove su spoznaje proizvod analize prijenosa snage iz prilagođenog generatora u kompleksni teret preko podesive reaktivne prilagodne mreže M prikazane na slici 6.11. Pritom je teret nadomješten proizvoljnom fiksnom reaktivnom mrežom M_T i fiksnim otporom R.

Valja imati na umu da je širina frekvencijskog pojasa, unutar kojega je moguće ostvariti zadovoljavajuću prilagodbu, ograničena jer je u nadomjesni teret ugrađena fiksna reaktivna dvoprolazna mreža. Ako ta mreža ne dopušta prijenos snage na izvjesnoj frekvenciji ω_s, onda



Slika 6.11. Općenit ustroj sustava za širokopojasnu prilagodbu kompleksnog tereta

ne postoji niti jedna prilagodna struktura koja bi na toj frekvenciji mogla zajamčiti prijenos snage od generatora do tereta. Na slici 6.12 prikazani su primjeri takvih pojasnozapornih mreža. Kao što se vidi, svaki reaktivni element (tj. onaj koji može pohraniti elektromagnetsku energiju) ili kombinacija više njih na određenim se frekvencijama ponaša kao pojasnozaporna mreža. Fano [7] objasnio je da je najniža razina koeficijenta refleksije, koja se može ostvariti unutar zadanog frekvencijskog pojasa, ograničena integralnim nejednakostima oblika

$$\int_0^\infty \ln\left[\frac{1}{|\Gamma(\omega)|}\right] F_i(\omega)\,\mathrm{d}\omega \le A_i, \quad i = 1,2,3,\ldots,N, \tag{6–20}$$

gdje je $\Gamma(\omega)$ koeficijent refleksije na ulazu proizvoljne prilagodne mreže. Ovdje $F_i(\omega)$ označuje težinske funkcije (poznate funkcije frekvencije), čiji oblik ovisi o strukturi dvoprolazne mreže M_T u nadomjesnom krugu tereta. Konstantni koeficijenti A_i određeni su vrijednostima elemenata mreže M_T i otpora R. Broj integralnih nejednakosti N izravno ovisi o broju nezavisnih reaktivnih elemenata u nadomjesnoj mreži tereta.

Za jednostavni kompleksni teret prikazan na slici 6.12a) kao serijski RL krug ograničenja (6–20) svode se na samo jednu nejednakost

$$\int_0^\infty \ln\frac{1}{|\Gamma(\omega)|}\,\mathrm{d}\omega \le \frac{\pi R}{L}, \tag{6–21}$$

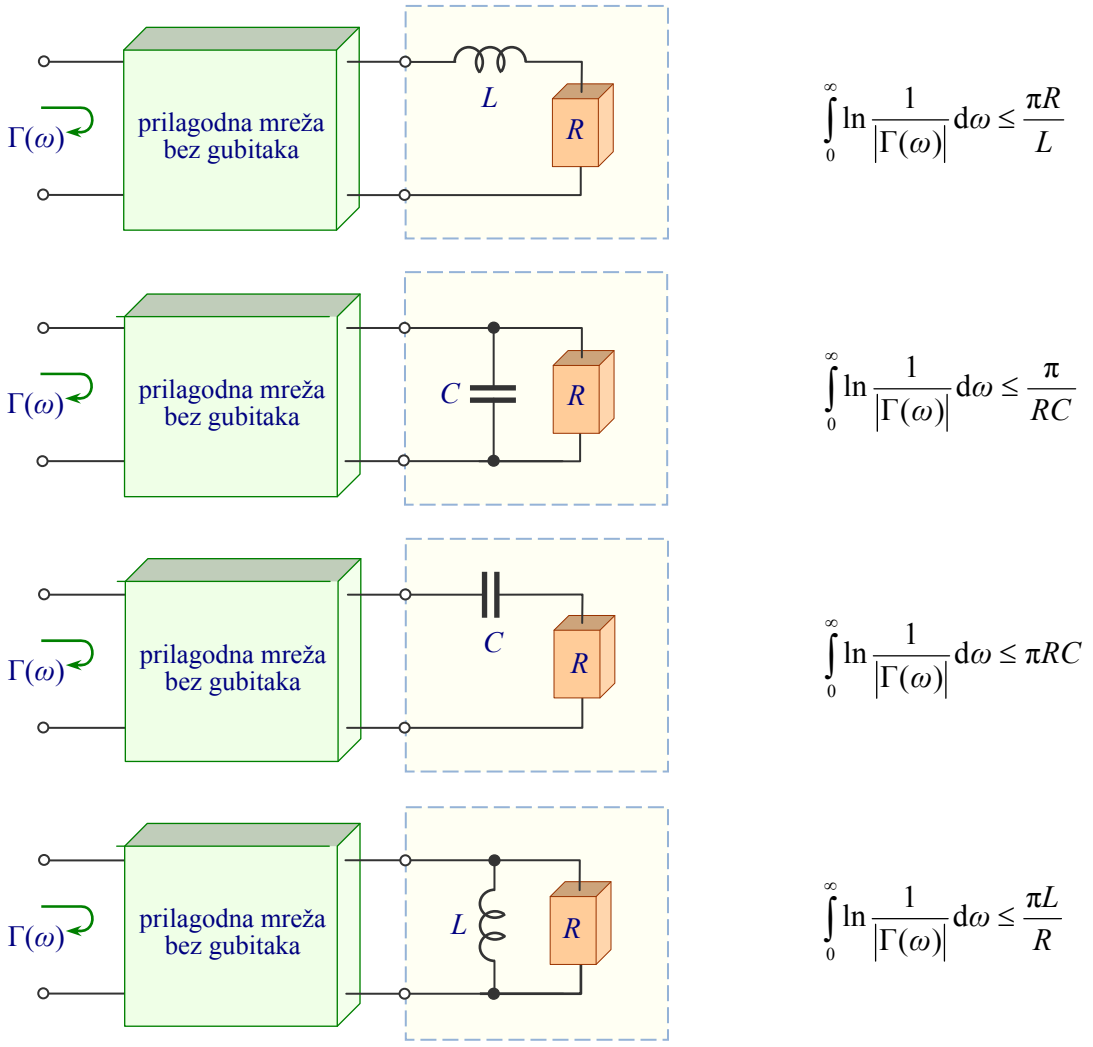
Ta nejednakost u osnovi tvrdi da neovisno o vrsti i topologiji prilagodne mreže, površina ispod funkcije $\ln|1/\Gamma|$ ne može prijeći granicu postavljenu veličinom $\pi R/L$. Drugim riječima, uvijek se može naći optimalni frekvencijski odziv funkcije $|\Gamma(\omega)|$, koji će dati maksimalnu širinu pojasa uz maksimalnu dopuštenu vrijednost odnosa stojnih valova

$$\mathrm{OSV}_{\mathrm{maks}} = \frac{1+\Gamma_\mathrm{m}}{1-\Gamma_\mathrm{m}}.$$

Za ostvarenje prilagodne mreže s idealiziranim odzivom koeficijenta refleksije prema slici 6.13a), iz izraza (6–21) dobiva se

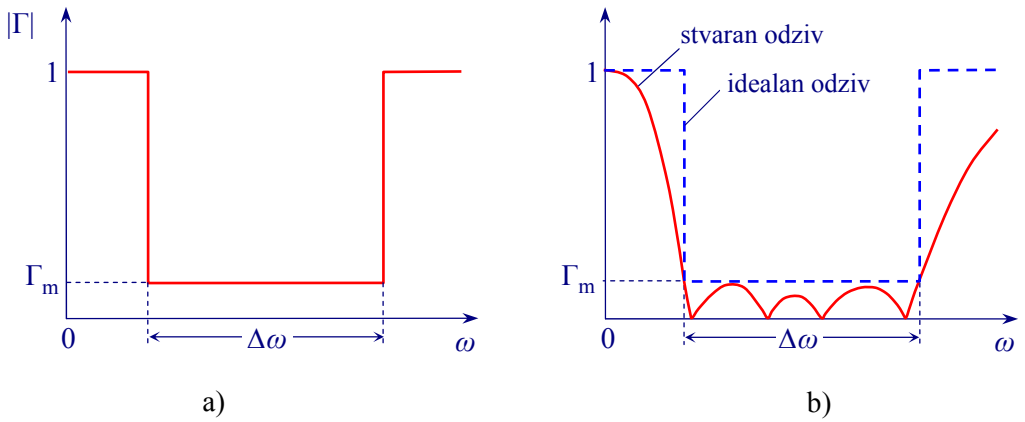
$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \ln\frac{1}{\Gamma_\mathrm{m}}\,\mathrm{d}\omega = \Delta\omega \ln\frac{1}{\Gamma_\mathrm{m}} \le \frac{\pi R}{L}, \tag{6–22}$$

gdje je $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ širina frekvencijskog područja unutar kojeg je modul koeficijenta refleksije jednak Γ_m, a na svim ostalim frekvencijama ima jediničnu vrijednost. Iz izraza (6–22) može se zaključiti sljedeće. Prvo, za zadanu impedanciju tereta (stalna vrijednost omjera R/L), veća se širina pojasa $\Delta\omega$ može ostvariti samo na štetu ostvarivog koeficijenta refleksije Γ_m unutar pojasa. Drugo, unutar frekvencijskog pojasa konačne širine, koeficijent refleksije Γ_m ne može biti nula, osim ako nije $\Delta\omega = 0$. Stoga se savršena prilagodba može ostvariti samo za



Slika 6.12. Ograničenja prema Bodeu i Fanu za prilagodbu *RL* i *RC* tereta prilagodnim mrežama bez gubitaka

konačan broj frekvencija, slika 6.13b). Treće, ako se vrijednost R smanjuje ili L povećava, onda se nužno kvari kakvoća prilagodbe jer se smanjuje $\Delta\omega$ ili povećava Γ_m. To je izravno povezano s faktorom dobrote tereta (vidjeti odjeljak 7.4) koji je za serijski *LR*-krug izravno definiran izrazom $Q=\omega_0 L/R$, gdje je ω_0 središnja frekvencija unutar pojasa prilagodbe. Dakle, znatno je teža zadaća prilagoditi impedanciju tereta visokog faktora dobrote.



Slika 6.13. a) Idealiziran odziv i **b)** fizikalno ostvariv odziv

6.5. Teorija malih refleksija

Čevrtvalni transformator jednostavna je naprava za prilagodbu bilo koje realne impedancije tereta na bilo koju impedanciju linije bez gubitaka. U primjenama kod kojih se traži veća širina frekvencijskog pojasa, treba primijeniti transformatore s više odsječaka [1], [2] i [5]. Proračun takvih transformatora bit će predmet razmatranja idućih dvaju odjeljaka, ali prije toga valja naći približan rezultat za ukupni koeficijent refleksije koji je posljedica djelomičnih refleksija na više manjih diskontinuiteta koji nastaju na sučeljima linijskih odsječaka. Taj se postupak općenito odnosi na *teoriju malih refleksija*.

6.5.1. Transformator s jednim odsječkom

Pogledajmo najprije primjer transformatora s jednim odsječkom, prikazan na slici 6.14. Razmotrit ćemo slučaj impedancije tereta Z_T spojene na prijenosnu liniju karakteristične impedancije Z_0 preko međustupnja koji se sastoji od jedne linije električne duljine $\beta l = \theta$ i karakteristične impedancije Z_1. Na kraju ćemo izvesti približan izraz za ukupan koeficijent refleksije Γ na ulazu sklopa. Za svaki spoj koeficijenti djelomične refleksije i djelomičnog prijenosa iznose:

$$\Gamma_0 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}, \tag{6–23a}$$

$$\Gamma_0' = -\Gamma_0, \tag{6–23b}$$

$$\Gamma_1 = \frac{Z_\mathrm{T} - Z_1}{Z_\mathrm{T} + Z_1}, \tag{6–23c}$$

$$T_{10} = 1 + \Gamma_0 = \frac{2Z_1}{Z_0 + Z_1}, \tag{6–23c}$$

$$T_{01} = 1 + \Gamma_0' = 1 - \Gamma_0 = \frac{2Z_0}{Z_0 + Z_1}. \tag{6–23d}$$

U prilagodni sklop upada val jedinične amplitude, a ukupni reflektirani val kompleksne je amplitude Γ jednake ukupnom koeficijentu refleksije. Dio vala amplitude Γ_0 reflektira se na prvome spoju i vraća prema generatoru. Drugi njegov dio stvara preneseni val amplitude T_{21} koji zatim upada na drugi spoj na trošilu Z_T gdje nastaje novi reflektirani val $\Gamma_1 T_{10} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$. Taj val amplitude $\Gamma_1 T_{10} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}$ zatim upada zdesna na prvi spoj. Pritom se dio $\Gamma_1 T_{10} T_{01} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}$ prenese, a dio $\Gamma_0' \Gamma_1 T_{01} T_{10} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta} = -\Gamma_0 \Gamma_1 T_{01} T_{10} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}$ ponovo reflektira prema trošilu. Slika 6.14b) prikazuje nekoliko prvih reflektiranih valova, kojih teorijski ima beskonačno mnogo. Amplituda Γ ukupnog reflektiranoga vala dana je superpozicijom svih tih djelomičnih valova koji prolaze prvim spojem zdesna nalijevo. Rezultat je

$$\Gamma = \Gamma_0 + T_{01} T_{10} \Gamma_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta} - T_{01} T_{10} \Gamma_0 \Gamma_1^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\theta} \ldots = \Gamma_0 + T_{01} T_{10} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\Gamma_0\right)^n \Gamma_1^n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2n\theta}, \tag{6–24}$$

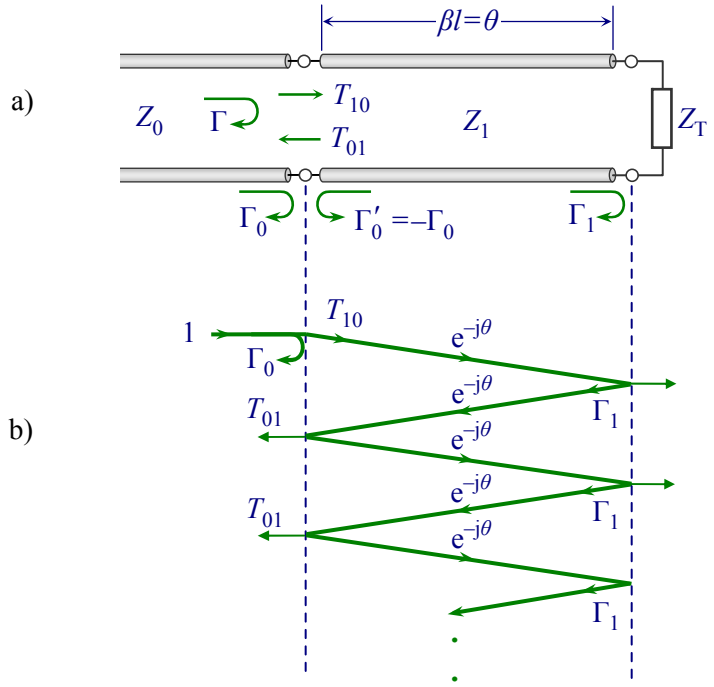
koji ima oblik geometrijskoga reda čiji je zbroj jednak

$$\Gamma = \frac{\Gamma_0 + \Gamma_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}}{1 + \Gamma_0 \Gamma_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}}, \tag{6–25}$$

gdje su T_{01} i T_{10} zamijenjeni s $1 - \Gamma_0$, odnosno $1 + \Gamma_0$, u skladu s izrazima (6–23d) i (6–23c).

Ako su i $|\Gamma_0|$ i $|\Gamma_1|$ mnogo manji od jedinice, onda se Γ može dobro aproksimirati izrazom

$$\Gamma \simeq \Gamma_0 + \Gamma_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}. \tag{6–26}$$



Slika 6.14. a) Mikrovalni sklop s dva diskontinuiteta kao prilagodni transformator, **b)** djelomične refleksije i djelomični prijenosi snage na transformatoru s jednim odsječkom

Taj rezultat upućuje na zaključak da se za male iznose djelomičnih refleksija ukupni koeficijent refleksije može izraziti samo s pomoću refleksije prvoga reda. Drugim riječima, to je u skladu s intuitivnom predodžbom u kojoj je ukupna refleksija samo posljedica prve refleksije na spoju (diskontinuitetu) između Z_0 i Z_1 te prve refleksije na strani tereta između Z_1 i Z_T. Pri tomu je članom $e^{-j2\theta}$ uzeto u obzir fazno kašnjenje na ukupnome putu duž linije na kojem val najprije putuje nadesno i zatim, kao reflektirani val, nalijevo. Taj se rezultat može jednako uspješno proširiti na transformatore impedancije s više odsječaka, ako se zadrže niske razine refleksija na diskontinuitetima.

Primjer 6.2. Četvrtvalni transformator impedancije

Za četvrtvalni transformator (slika 6.14) sa $Z_0 = 100\ \Omega$, $Z_1 = 150\ \Omega$, i $Z_T = 225\ \Omega$ naći pogrešku pri izračunavanju $|\Gamma|$ za najgori mogući slučaj iz približnoga izraza (6–26).

Rješenje:

Koeficijenti djelomičnih refleksija iz izraza (6–18) i (6–20) iznose:

$$\Gamma_0 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = \frac{150 - 100}{150 + 100} = 0,2\ ;$$

$$\Gamma_1 = \frac{Z_T - Z_1}{Z_T + Z_1} = \frac{225 - 150}{225 + 150} = 0,2\ .$$

Budući da je približni izraz (6–26) za Γ posve jednak brojniku točnog izraza (6–25), najveća moguća pogreška nastaje onda kad nazivnik u izrazu (6–25) najviše odstupa od jedinice. To će se dogoditi pri $\theta = 0$ i $\theta = 180°$, a za $\theta = 90°$ oba su rezultata jednaka nuli. Iz izraza (6–25) dobiva se točan rezultat $\Gamma = 0,384$, a iz izraza (6–26) približan rezultat $\Gamma = 0,4$. Pogreška, dakle, iznosi oko 4 %.

6.5.2. Približna teorija za četvrtvalne transformatore s više odsječaka

Veća se širina pojasa može dobiti transformatorom s više odsječaka prijenosnih linija. Na slici 6.15 prikazan je lanac od N linijskih odsječaka jednake duljine i bez gubitaka. Izvedimo približan izraz za ukupni koeficijent refleksije Γ na ulazu takve kaskade.

Na prvome spoju, koeficijent refleksije iznosi

$$\Gamma_0 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}. \tag{6–27}$$

Slično je na n-tom spoju koeficijent refleksije

$$\Gamma_n = \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n}. \tag{6–28}$$

Posljednji koeficijent refleksije u lancu glasi

$$\Gamma_N = \frac{Z_\mathrm{T} - Z_N}{Z_\mathrm{T} + Z_N}. \tag{6–29}$$

Može se pretpostaviti da vrijednosti karakterističnih impedancija Z_n linijskih odsječaka u lancu monotono rastu (ili padaju) slijeva nadesno i da je Z_T realna impedancija. Tad su svi koeficijenti refleksije Γ_n realne veličine i istog su predznaka $\Gamma_n>0$, ako je $Z_\mathrm{T}>Z_0$, a $\Gamma_n<0$, ako je $Z_\mathrm{T}<Z_0$). Bez gubitka općenitosti, u ovom ćemo razmatranju pretpostaviti da je impedancija tereta viša od Z_0. Ukupan koeficijent refleksije $\Gamma = \Gamma(\theta)$ dobiva se zbrajanjem samo reflektiranih valova prvoga reda, koji nastaju na svakom pojedinačnom skoku impedancije. Primjenom rezultata iz prethodnog odjeljka dobiva se ova aproksimacija

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0 + \Gamma_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta} + \Gamma_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\theta} + \Gamma_3 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}6\theta} + \ldots + \Gamma_N \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2N\theta}, \tag{6–30}$$

gdje veličina $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2n\theta}$ označuje fazno kašnjenje zbog različitih udaljenosti koje na svom putu moraju prevaliti djelomično reflektirani valovi.

Izraz (6–30) može se dalje pojednostaviti ako se pretpostavi da je transformator simetričan. Tad je $\Gamma_0=\Gamma_N$, $\Gamma_1=\Gamma_{N-1}$, $\Gamma_2=\Gamma_{N-2}$ itd. (Valja uočiti da to ne znači da su i vrijednosti Z_n simetrično raspoređene.) U tom slučaju izraz (6–30) poprima oblik

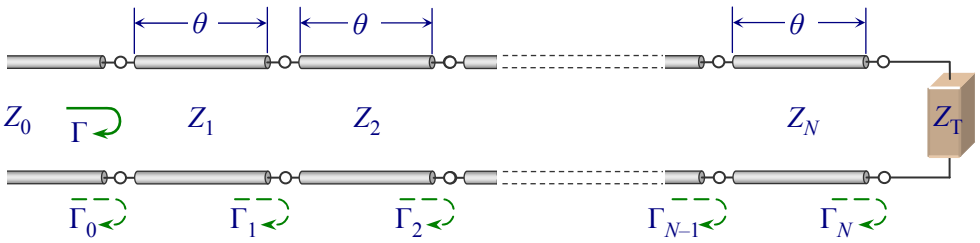
$$\Gamma(\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}N\theta}\left\{\Gamma_0\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}N\theta}\right] + \Gamma_1\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(N-2)\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(N-2)\theta}\right] + \ldots\right\},$$

gdje se zadnji član u vitičastoj zagradi može napisati kao $\Gamma_{(N-1)/2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})$ za neparan N, odnosno kao $\Gamma_{N/2}$ za paran N. Taj se izraz može jednostavnije napisati u obliku konačnog Fourierova kosinusnog reda za varijablu θ, to jest

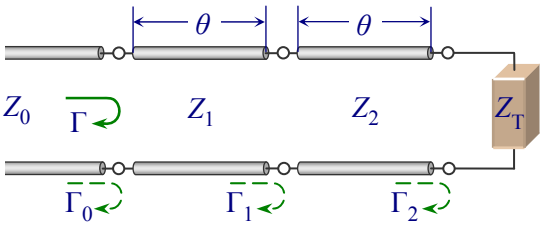
$$\Gamma(\theta) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}N\theta}\left[\Gamma_0 \cos N\theta + \Gamma_1 \cos(N-2)\theta + \ldots + \Gamma_n \cos(N-2n)\theta + \ldots\right], \tag{6–31}$$

gdje zadnji član u uglatoj zagradi glasi $\Gamma_{(N-1)/2}\cos\theta$ za neparan N, a $\frac{1}{2}\Gamma_{N/2}$ za paran N.

Dobiveni rezultat omogućuje sintezu transformatora s različitim odzivima modula koeficijenta refleksije (ili prijenosa snage) u funkciji frekvencije odnosno električne duljine θ. Pritom je samo potrebno uzeti dovoljan broj linijskih odsječaka i pravilno odabrati vrijednosti djelomičnih koeficijenata refleksije Γ_n.



Slika 6.15. Djelomični koeficijenti refleksije prilagodnog transformatora s više linijskih odsječaka



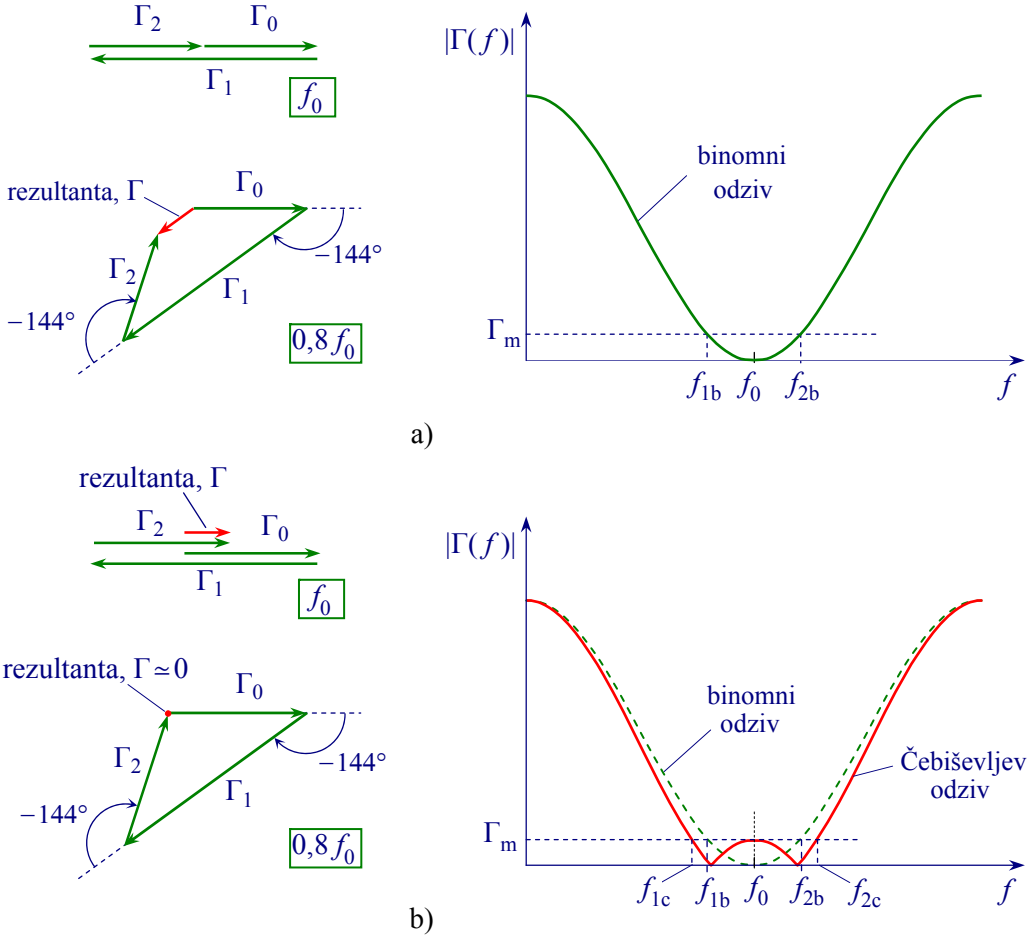
Slika 6.16. Transformator impedancije s dvama četvrtvalnim odsječcima.

Da bismo lakše objasnili značajke širokopojasne transformacije impedancije i dobili jasnu fizikalnu sliku, razmotrimo primjer transformatora s dvama linijskim odsječcima, koji je prikazan na slici 6.16. Bez gubitka općenitosti, uzmimo da je $Z_T > Z_0$. Tad će na središnjoj frekvenciji, na kojoj je električna duljina odsječka jednaka π/2, sva tri koeficijenta refleksije (Γ_0, Γ_1 i Γ_2) biti realna i veća od nule, ali samo ako je $Z_T > Z_2 > Z_1 > Z_0$. Kad su pojedinačni koeficijenti refleksije malih iznosa, tad ukupni koeficijent refleksije na ulazu transformatora ne sadržava niti jedan član oblika $\Gamma_0\Gamma_1$ znatnijeg iznosa pa u skladu s izrazom (6–30) izlazi

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 e^{-j2\theta} + \Gamma_2 e^{-j4\theta}, \tag{6–32}$$

gdje je $\theta=\beta l$ električna duljina linijskog odsječka [4]. Za četvrtvalne odsječke prijenosne linije na središnjoj frekvenciji, $\theta=\pi/2$, iz izraza (6–32) izlazi

$$\Gamma = \Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 . \tag{6–33}$$



Slika 6.17. Izvod koeficijenta refleksije na ulazu transformatora s dva četvrtvalna odsječka na frekvencijama f_0 i $0{,}8f_0$. **a)** Binomni transformator, **b)** Čebiševljev transformator

U svrhu ostvarenja savršene prilagodbe ($\Gamma = 0$), uz simetričan raspored djelomičnih koeficijenata refleksije, mora vrijediti $\Gamma_0 : \Gamma_1 : \Gamma_2 = 1 : 2 : 1$. Može se pokazati da omjeri pojedinačnih koeficijenata refleksije općenito označuju binomne koeficijente.

Na središnjoj frekvenciji f_0 (na kojoj su svi odsječci dugački $\lambda/4$), razlika faze između susjednih koeficijenata refleksije iznosi $\varphi = 180°$. No promjenom frekvencije mijenja se i električna duljina odsječaka ($\theta = \beta l$) pa je tako, primjerice, za $f = 0{,}8 f_0$ fazna promjena $2\theta = 144°$ jer na toj frekvenciji električna duljina odsječka iznosi $\theta = 0{,}8 \cdot 90° = 72°$. Kao što je prikazano na slici 6.17, na središnjoj je frekvenciji ukupni koeficijent refleksije na ulazu jednak nuli. Na frekvenciji $f = 0{,}8 f_0$ veličina koeficijenta refleksije i dalje je mala i iznosi $|\Gamma(0{,}8 f_0)| = 0{,}382 |\Gamma_1|$. Ta je vrijednost znatno manja od vrijednosti koeficijenta refleksije ($|\Gamma(0)| = 4|\Gamma_1|$) kad se impedancija promijeni u jednom skoku s impedancije Z_0 na Z_T. Prilagodni sklop s više četvrtvalnih odsječaka ima pojasnopropusnu karakteristiku pa se obično zadaje maksimalna vrijednost prihvatljivog koeficijenta refleksije (ili odnosa stojnih valova) na ulazu unutar zadana frekvencijskog pojasa.

Krivulja na slici 6.17a) odgovara tipičnom maksimalno glatkom odzivu (binomni). No karakteristične se impedancije u transformatoru s dva četvrtvalna odsječka mogu tako odabrati da je transformator *prekompenziran*, tj.

$$\Gamma_0 = \Gamma_2 = k\Gamma_1,$$

gdje je $k > 1/2$. Tad na središnjoj frekvenciji više ne postoji savršena prilagodba, nego koeficijent refleksije poprima neku unaprijed zadanu maksimalnu vrijednost $|\Gamma(f_0)| = \Gamma_\mathrm{m}$, kao na slici 6.17b). Pritom se u odzivu pojavljuju dvije frekvencije na kojima se može ostvariti savršena prilagodba; prva je od tih frekvencija niža, a druga viša od f_0. No na svim frekvencijama u njihovoj blizini, postiže se manji odnos stojnih valova od onog za maksimalno glatki odziv. Opisani pristup osnova je proračuna Čebiševljevih transformatora impedancije, kod njih se povećanje širine pojasa ostvaruje tako da se dopusti mala ali konačna valovitost karakteristike odnosa stojnih valova unutar pojasa propuštanja. U iduća ćemo dva odjeljka podrobnije izložiti postupke širokopojasne prilagodbe za ta dva, najčešće upotrebljavana odziva, maksimalno glatki odnosno Čebiševljev odziv jednolike valovitosti.

6.6. Binomni transformator

Maksimalno glatki odziv u pojasu propuštanja dobiva se tako da se prvih $N-1$ derivacija od $|\Gamma(\theta)|$ po frekvenciji (ili po θ) izjednači s nulom na središnjoj frekvenciji f_0 na kojoj se obavlja prilagodba. To odgovara karakteristici koeficijenta refleksije

$$\Gamma(\theta) = A(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta})^N, \tag{6–34}$$

gdje je A konstanta. Modul koeficijenta refleksije može se dalje razviti u oblik

$$|\Gamma(\theta)| = \left|A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})^N\right| = 2^N A\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right|^N \left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right|^N = 2^N A|\cos\theta|^N. \tag{6–35}$$

Valja uočiti da je $|\Gamma(\theta)| = 0$ za $\theta = \pi/2$, a isto vrijedi i za sve derivacije

$$\frac{\mathrm{d}^n|\Gamma(\theta)|}{\mathrm{d}\theta^n}$$

za $\theta = \pi/2$ i $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Uvjet $\theta = \pi/2$ odgovara središnjoj frekvenciji f_0, za koju je $l = \lambda/4$ pa je $\theta = \beta l = \pi/2$. Za $\theta = 0$ ili π izlazi

$$\Gamma(0) = \frac{Z_\mathrm{T} - Z_0}{Z_\mathrm{T} + Z_0} \tag{6–36}$$

pa se izraz (6–35) svodi na

$$\left|\Gamma(0)\right| = A2^N .$$

Otuda se za konstantu A dobiva

$$A = 2^{-N}\left|\frac{Z_\mathrm{T} - Z_0}{Z_\mathrm{T} + Z_0}\right|. \tag{6–37}$$

Izraz (6–34) može se napisati u obliku binomnoga reda kao

$$\Gamma(\theta) = 2^{-N}\frac{Z_\mathrm{T} - Z_0}{Z_\mathrm{T} + Z_0}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta})^N = 2^{-N}\frac{Z_\mathrm{T} - Z_0}{Z_\mathrm{T} + Z_0}\sum_{n=0}^{N} C_n^N \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2n\theta}, \tag{6–38}$$

gdje su binomni koeficijenti dani izrazom

$$C_n^N = \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)}{n!} = \frac{N!}{(N-n)!n!}. \tag{6–39}$$

Pritom je $C_n^N = C_{N-n}^N$, $C_0^N = 1$, $C_1^N = N = C_{N-1}^N$ itd. Usporedba izraza (6–39) sa (6–29) pokazuje da je potrebno uzeti

$$\Gamma_n = 2^{-N}\frac{Z_\mathrm{T} - Z_0}{Z_\mathrm{T} + Z_0}C_n^N = \Gamma_{N-n}, \tag{6–40}$$

jer je $C_n^N = C_{N-n}^N$.

Jednostavno rješenje za karakterističnu impedanciju Z_n dobiva se uvođenjem pretpostavke da je Γ_n mala veličina, pa se može uporabiti ova aproksimacija

$$\Gamma_n = \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n} \simeq \frac{1}{2}\ln\frac{Z_{n+1}}{Z_n}, \tag{6–41}$$

$$Z_{n+1} = Z_n \mathrm{e}^{2\Gamma_n} \tag{6–42}$$

jer je $\ln x \simeq 2(x-1)/(x+1)$. Otuda je

$$\ln\frac{Z_{n+1}}{Z_n} = 2\Gamma_n = 2^{-N}C_n^N \ln\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0}, \tag{6–43}$$

gdje je također pretpostavljeno

$$\ln\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0} = 2\frac{Z_\mathrm{T} - Z_0}{Z_\mathrm{T} + Z_0} + \frac{2}{3}\left(\frac{Z_\mathrm{T} - Z_0}{Z_\mathrm{T} + Z_0}\right)^3 + \ldots \simeq 2\frac{Z_\mathrm{T} - Z_0}{Z_\mathrm{T} + Z_0}.$$

Primjenom teorije malih refleksija, za $\theta = 0$, iz izraza (6–24) izlazi

$$\Gamma(0) = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_N .$$

Ako se za izračunavanje karakterističnih impedancija primijeni izraz (6–43) i uzme

$$A = 2^{-(N+1)}\ln\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0},$$

onda se dobiva

$$2^N A = \Gamma(0) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{Z_1}{Z_0} + \ln\frac{Z_2}{Z_1} + \cdots + \ln\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_N}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{Z_1}{Z_0}\frac{Z_2}{Z_1}\cdots\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_N}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0}. \tag{6–44}$$

Opisani postupak vrlo je koristan jer daje eksplicitne izraze za određivanje karakterističnih impedancija linijskih odsječaka binomnog transformatora impedancija. Dakle, umjesto izraza (6–37), za konstantu A, valja upotrijebiti izraz (6–44).

Izraz (6–43) daje rješenje za logaritam impedancija, i kako je razmjeran binomnim koeficijentima, transformator se naziva *binomni transformator*. Budući da je uvedena približna teorija, prihvatljivo točni rezultati mogu se očekivati u sljedećem rasponu vrijednosti Z_T

$$\frac{Z_0}{2} < Z_T < 2Z_0 .$$

Kao primjer, razmotrimo transformator s dvama odsječcima. Iz izraza (6–43) izlazi

$$\ln\frac{Z_1}{Z_0} = \frac{1}{4}\ln\frac{Z_T}{Z_0} \quad \text{ili} \quad Z_1 = Z_T^{1/4} Z_0^{3/4}$$

i

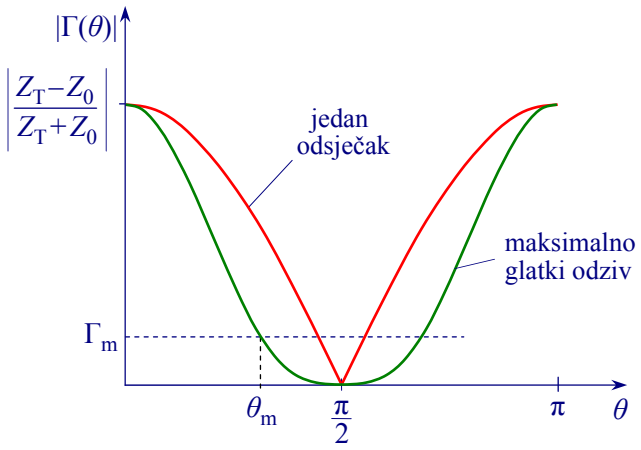
$$\ln\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{4}\ln\frac{Z_T}{Z_0} \quad \text{ili} \quad Z_2 = Z_T^{3/4} Z_0^{1/4}$$

jer je $C_0^2 = 1$ i $C_1^2 = 2$. Iako je primijenjena približna teorija, pokazuje se da su ranije dobivene vrijednosti za Z_1 i Z_2 u posebnom slučaju transformatora s dvama odsječcima istovjetne strogim rješenjima, što ukazuje na visok stupanj točnosti približne teorije.

Tablica 6.1. Proračun binomnih transformatora impedancije

	$N = 2$		$N = 3$			$N = 3$			
Z_T/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,5	1,1067	1,3554	1,0520	1,2247	1,4259	1,0257	1,1351	1,3215	1,4624
2,0	1,1892	1,6818	1,0907	1,4142	1,8337	1,0444	1,2421	1,6102	1,9150
3,0	1,3161	2,2795	1,1479	1,7321	2,6135	1,0718	1,4105	2,1269	2,7990
4,0	1,4142	2,8285	1,1607	2,0000	3,3594	1,0919	1,5442	2,5903	3,6633
6,0	1,5651	3,8336	1,2544	2,4495	4,7832	1,1215	1,7553	3,4182	5,3500
8,0	1,6818	4,7568	1,3022	2,8284	6,1434	1,1436	1,9232	4,1597	6,9955
10,0	1,7783	5,6233	1,3409	3,1623	7,4577	1,1613	2,0651	4,8424	8,6110

	$N = 4$					$N = 5$					
Z_T/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0	Z_5/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0	Z_5/Z_0	Z_6/Z_0
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,5	1,0128	1,0790	1,2247	1,3902	1,4810	1,1064	1,0454	1,1496	1,3048	1,4349	1,4905
2,0	1,0220	1,1391	1,4142	1,7558	1,9569	1,0110	1,0790	1,2693	1,5757	1,8536	1,9782
3,0	1,0354	1,2300	1,7321	2,4390	2,8974	1,0176	1,1288	1,4599	2,0549	2,6577	2,9481
4,0	1,0452	1,2995	2,0000	3,0781	3,8270	1,0225	1,1661	1,6129	2,4800	3,4302	3,9120
6,0	1,0596	1,4055	2,4495	4,2689	5,6625	1,0296	1,2219	1,8573	3,2305	4,9104	5,8275
8,0	1,0703	1,4870	2,8284	5,3800	7,4745	1,0349	1,2640	2,0539	3,8950	6,3291	7,7302
10,0	1,0789	1,5541	3,1623	6,4346	9,2687	1,0392	1,2982	2,2215	4,5015	7,7030	9,6228



Slika 6.18. Usporedba prijenosnih karakteristika transformatora impedancije s jednim i više odsječaka

Egzaktni rezultati, uključujući i učinak višekratnih refleksija u svakom od odsječka, mogu se naći primjenom jednadžba prijenosne linije za svaki pojedinačni odsječak te numeričkim rješavanjem karakterističnih impedancija [5]. Rezultati tih izračuna prikazani u tablici 6.1. daju egzaktne impedancije linija za transformatore s $N=2$ do 6 odsječaka, za različite omjere između impedancije tereta Z_T i karakteristične impedancije pobudne linije Z_0. Tablica daje rezultate samo za omjere $Z_T/Z_0>1$; ako je $Z_T/Z_0<1$, mogu se uporabiti rezultati za Z_T/Z_0, uz to da se okrene redoslijed odsječaka, tj. da Z_1 započinje na teretu. Drugim riječima, rješenja su simetrična oko vrijednosti $Z_T/Z_0=1$ pa se isti transformator koji prilagođuje Z_T na Z_0 može okrenuti i uporabiti za prilagodbu Z_0 na Z_T.

Karakteristika pojasa propuštanja binomnoga transformatora prikazana je na slici 6.18. Neka je Γ_m maksimalna prihvatljiva vrijednost modula koeficijenta refleksije. Iz izraza (6–35) dobiva se kut θ_m kojem odgovara $|\Gamma(\theta_m)|=\Gamma_m$, tj.

$$\theta_m = \cos^{-1}\left|\frac{2\Gamma_m}{\ln Z_T / Z_0}\right|^{1/N}. \qquad (6\text{–}45)$$

Budući da se električna duljina četvrtvalnog odsječaka prijenosne linije može napisati kao $\theta=\pi f/(2f_0)$, relativna je širina frekvencijskog pojasa jednaka

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2(f_0 - f_m)}{f_0} = 2 - \frac{4\theta_m}{\pi} = 2 - \frac{4}{\pi}\cos^{-1}\left|\frac{2\Gamma_m}{\ln Z_T / Z_0}\right|^{1/N} \qquad (6\text{–}46)$$

jer je $\theta_m=\pi f_m/(2f_0)$. U izrazu (6–46) rješenje funkcije $\cos^{-1}$ odabrano je tako da je $\theta_m<\pi/2$. Usporedba slika 6.9 i 6.18 jasno upućuje na to da transformator impedancija s više odsječka ima veću širinu korisnog frekvencijskog pojasa od transformatora s jednim odsječkom.

Primjer 6.3. Proračun binomnoga transformatora impedancije

Proračunati transformator impedancija s trima četvrtvalnim odsječcima kojim treba prilagoditi teret impedancije 50 Ω na prijenosnu liniju karakteristične impedancije 150 Ω. Izračunati širinu pojasa za $\Gamma_m=0{,}05$. Grafički prikazati module koeficijenta refleksije u funkciji frekvencije za egzaktni proračun primjenom tablice 6.1. i transformatore s 1 do 5 odsječaka.

Rješenje:

Za $N=3$, $Z_T=50$ Ω i $Z_0=150$ Ω, primjenom izraza (6–37) dobiva se

$$A = 2^{-N}\left|\frac{Z_\mathrm{T}-Z_0}{Z_\mathrm{T}+Z_0}\right| \simeq \frac{1}{2^{N+1}}\ln\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0} = -0,0687\,.$$

Širina frekvencijskog pojasa može se izračunati iz izraza (6–46) kao

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 2-\frac{4}{\pi}\cos^{-1}\left|\frac{2\Gamma_\mathrm{m}}{\ln Z_\mathrm{T}/Z_0}\right|^{1/N} = 2-\frac{4}{\pi}\cos^{-1}\left|\frac{2\cdot 0,05}{-0,6931}\right|^{1/3} = 0,70\ (\text{ili } 70\ \%)\,.$$

Potrebni binomni koeficijenti mogu se izračunati iz izraza (6–39) kao:

$$C_0^3 = \frac{3!}{3!0!} = 1\,, \qquad C_1^3 = \frac{3!}{2!1!} = 3\,, \qquad C_2^3 = \frac{3!}{1!2!} = 3\,.$$

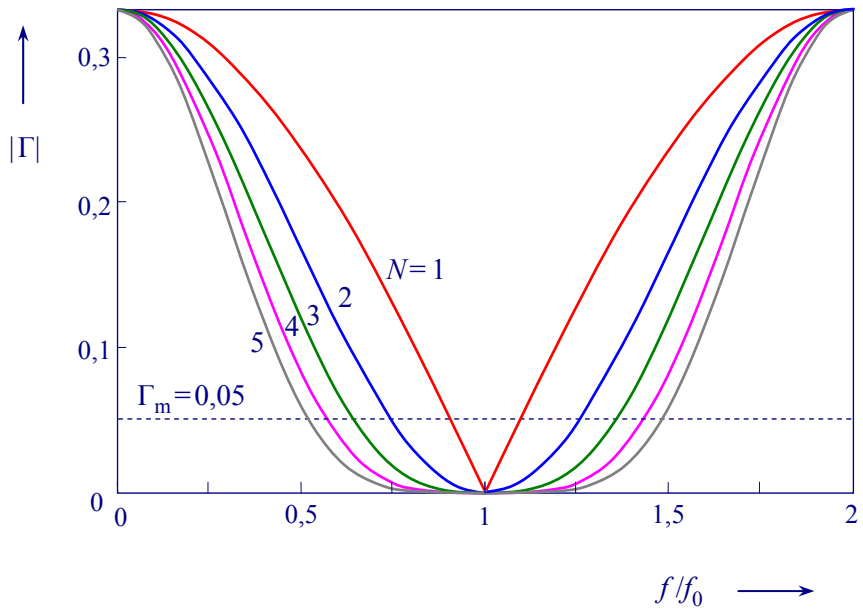
Zatim se primjenom izraza (6–44) mogu odrediti potrebne karakteristične impedancije,

$$n=0:\ \ln Z_1 = \ln Z_0 + 2^{-N}C_0^3\ln\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0} = \ln 100 + 2^{-3}(1)\ln\frac{50}{100} = 4,518 \qquad Z_1 = 91,7\ \Omega;$$

$$n=1:\ \ln Z_2 = \ln Z_1 + 2^{-N}C_1^3\ln\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0} = \ln 91,7 + 2^{-3}(3)\ln\frac{50}{100} = 4,26 \qquad Z_2 = 70,7\ \Omega;$$

$$n=3:\ \ln Z_3 = \ln Z_2 + 2^{-N}C_2^3\ln\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0} = \ln 70,7 + 2^{-3}(3)\ln\frac{50}{100} = 4,0 \qquad Z_3 = 54,5\ \Omega.$$

Da bi se mogli primijeniti podatci iz tablice 6.1. najprije se mora obrnuti redoslijed impedancija, tj. uzet će se da transformator prilagođuje teret impedancije 100 Ω na liniju karakteristične impedancije 50 Ω. Zatim se za omjer $Z_\mathrm{T}/Z_0 = 2$ dobivaju egzaktne vrijednosti karakterističnih impedancija linijskih odsječaka: $Z_1 = 91,7\ \Omega$; $Z_2 = 70,7\ \Omega$; $Z_3 = 54,5\ \Omega$. Ti se rezultati slažu s prethodnim rezultatima u trima značajnim znamenkama. Na slici 6.19 prikazane su veličine koeficijenata refleksije u funkciji normirane frekvencije za egzaktni proračun transformatora s $N = 1$ do 5 odsječaka. Očito je da se veća širina frekvencijskog pojasa postiže s više odsječaka.



Slika 6.19. Frekvencijska ovisnost koeficijenta refleksije na ulazu binimnog transformatora koji prilagođuje teret impedancije 50 Ω na liniju karakteristične impedancije 100 Ω

6.7. Čebiševljev transformator

Za razliku od binomnog transformatora impedancije, Čebiševljev transformator daje optimalnu širinu frekvencijskog pojasa, ako se dopusti konačna valovitost prijenosne karakteristike unutar pojasa propuštanja. Takav transformator impedancije ima znatno bolja obilježja od binomnog transformatora pri istom broju odsječaka. Čebiševljev se transformator može proračunati tako da se funkcija $\Gamma(\theta)$ zamijeni Čebiševljevim polinomom. Stoga ćemo se najprije posvetiti proučavanju obilježja Čebiševljevih polinoma, a zatim razraditi postupak proračuna odgovarajućeg transformatora impedancije primjenom *teorije malih refleksija*.

Čebiševljev polinom n-tog reda, označen s $T_n(x)$ jest polinom n-tog stupnja od x. Polinomi prvih četiriju redova mogu se napisati kao:

$$T_1(x) = x, \tag{6–47a}$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \tag{6–47b}$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \tag{6–47c}$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1. \tag{6–47d}$$

Polinomi višeg reda mogu se dobiti primjenom rekurzivne formule

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \tag{6–48}$$

Na slici 6.20 grafički su prikazani Čebiševljevi polinomi prvih četiriju redova. Iz toga se može izdvojiti nekoliko korisnih svojstava.

- ± 1. To obilježje jednolike valovitosti može se preslikati u pojas propuštanja prilagodnog Za $-1 \le x \le 1$, vrijedi $|T_n(x)| \le 1$. U tom području, Čebiševljevi polinomi osciliraju između transformatora.
- Za $|x| > 1$, vrijedi $|T_n(x)| > 1$. To se područje preslikava u frekvencijsko područje izvan pojasa propuštanja.
- U području $|x| > 1$, za veći n funkcija $|T_n(x)|$ brže raste u ovisnosti o varijabli x.

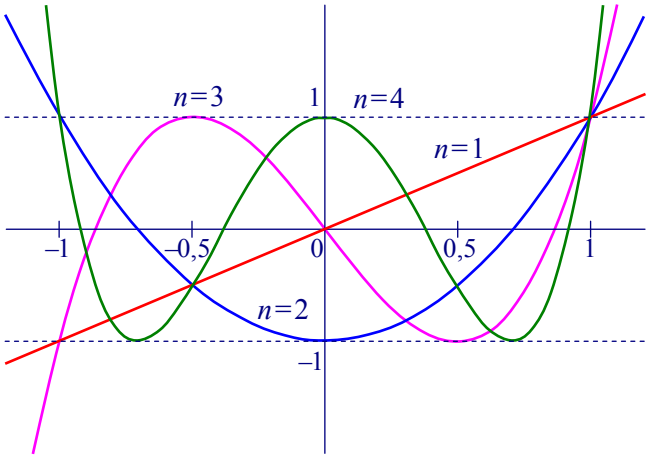
Ako se x zamijeni s $\cos\theta$, onda se Čebiševljevi polinomi mogu izraziti kao

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta,$$

ili kao:

$$T_n(x) = \cos\left(n\cos^{-1}x\right), \quad \text{za } |x| < 1, \tag{6–49a}$$

$$T_n(x) = \cosh\left(n\cosh^{-1}x\right), \quad \text{za } |x| > 1. \tag{6–49b}$$



Slika 6.20. Čebiševljevi polinomi

Budući da se jednolika valovitost traži samo u pojasu propuštanja, θ_m valja preslikati u $x=1$, a $\pi-\theta_\mathrm{m}$ u $x=-1$, gdje su θ_m i $\pi-\theta_\mathrm{m}$ donji, odnosno gornji rub pojasa propuštanja, kao što je prikazano na slici 6.9. To se u izrazu (6–49a) može izvesti zamjenom $\cos\theta$ s $\cos\theta/\cos\theta_\mathrm{m}$, tj.

$$T_n\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_\mathrm{m}}\right)=\cos n\left[\cos^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_\mathrm{m}}\right)\right]. \tag{6–50}$$

No u rasponu električnih duljina $\theta_\mathrm{m}<\theta<\pi-\theta_\mathrm{m}$ vrijedi $|\cos\theta/\cos\theta_\mathrm{m}|\le 1$, pa je unutar istog raspona $|\mathrm{T}_n(\cos\theta/\cos\theta_\mathrm{m})|\le 1$. Stoga ta funkcija potvrđuje da u željenom području propuštanja funkcija $|\mathrm{T}_n(x)|$ oscilira uz jednoliku valovitost.

Budući da se funkcija $\cos^n\theta$ može razviti u sumu kosinusnih članova kao $\cos\theta$, $\cos 2\theta$, … , $\cos N\theta$, Čebiševljevi se polinomi (6–47) mogu napisati u ovom obliku:

$$T_1\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_\mathrm{m}}\right)=\frac{\cos\theta}{\cos\theta_\mathrm{m}}, \tag{6–51a}$$

$$T_2\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_\mathrm{m}}\right)=\frac{1+\cos 2\theta}{\cos^2\theta_\mathrm{m}}-1, \tag{6–51b}$$

$$T_3\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_\mathrm{m}}\right)=\frac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{\cos^3\theta_\mathrm{m}}-\frac{3\cos\theta}{\cos\theta_\mathrm{m}}, \tag{6–51c}$$

$$T_4\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_\mathrm{m}}\right)=\frac{\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3}{\cos^4\theta_\mathrm{m}}-\frac{\cos 2\theta+1}{4\cos^2\theta_\mathrm{m}}+1. \tag{6–51d}$$

Ovi se rezultati mogu uporabiti za proračun prilagodnih transformatora s ne više od četiri linijska odsječka, a u poglavljima koja slijede rabit ćemo ih za proračun usmjernih sprežnika i filtara.

Sad se može pristupiti sintezi pojasa propuštanja Čebiševljeva odziva tako da se postavi funkcija $\Gamma(\theta)$ razmjerna funkciji $\mathrm{T}_N(\cos\theta/\cos\theta_\mathrm{m})$, gdje je N broj odsječaka transformatora. Stoga se primjenom izraza (6–31) dobiva

$$\Gamma(\theta)=2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}N\theta}\left[\Gamma_0\cos N\theta+\Gamma_1\cos(N-2)\theta+\cdots+\Gamma_n\cos(N-2n)\theta+\cdots\right]$$

ili

$$\Gamma(\theta)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}N\theta}T_N\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_\mathrm{m}}\right), \tag{6–52}$$

gdje za parni N zadnji član u redu poprima oblik $(1/2)\Gamma_{N/2}$, a $\Gamma_{(N-1)/2}\cos\theta$ za neparni N.

Kao i u slučaju s binomnim transformatorom i ovaj se put može naći konstanta A tako da se stavi $\theta=0$, što odgovara frekvenciji nula. Otuda je

$$\Gamma(0)=\frac{Z_\mathrm{T}-Z_0}{Z_\mathrm{T}+Z_0}=AT_N\left(\frac{1}{\cos\theta_\mathrm{m}}\right),$$

što daje

$$A=\frac{Z_T-Z_0}{Z_T+Z_0}\frac{1}{T_N\left(\dfrac{1}{\cos\theta_\mathrm{m}}\right)}. \tag{6–53}$$

Ako je unutar pojasa propuštanja maksimalna vrijednost koeficijenta refleksije Γ_m, onda se iz izraza (6–52) dobiva $\Gamma_\mathrm{m}=A$ jer je maksimalna vrijednost funkcije $\mathrm{T}_n(\cos\theta/\cos\theta_\mathrm{m})$, unutar

pojasa propuštanja jedinična. Sad se može odrediti vrijednost θ_m primjenom izraza (6–53) i aproksimacija koje smo uveli u odjeljku o binomnim transformatorima,

$$T_N\left(\frac{1}{\cos\theta_m}\right)=\frac{1}{\Gamma_m}\left|\frac{Z_T-Z_0}{Z_T+Z_0}\right|\simeq\frac{1}{2\Gamma_m}\left|\ln\frac{Z_T}{Z_0}\right|$$

pa je se uvrštenjem izraza (6–3b) dobiva

$$\frac{1}{\cos\theta_m}=\cosh\left[\frac{1}{N}\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\Gamma_m}\left|\frac{Z_T-Z_0}{Z_T+Z_0}\right|\right)\right]\simeq\cosh\left[\frac{1}{N}\cosh^{-1}\left(\left|\frac{\ln Z_T/Z_0}{2\Gamma_m}\right|\right)\right]. \qquad (6–54)$$

Kad je jednom poznata vrijednost θ_m, lako se može odrediti relativna širina pojasa preko izraza (6–19) kao

$$\frac{\Delta f}{f_0}=2-\frac{4\theta_m}{\pi}. \qquad (6–55)$$

Tablica 6.2. Egzaktan proračun Čebiševljevih transformatora za $\Gamma_m=0{,}05$

	$N=2$		$N=3$			$N=4$			
Z_T/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,5	1,1347	1,3219	1,1029	1,2247	1,3601	1,0892	1,1742	1,2775	1,3772
2,0	1,2193	1,6402	1,1475	1,4142	1,7429	1,1201	1,2979	1,5409	1,7855
3,0	1,3494	2,2232	1,2171	1,7321	2,4649	1,1586	1,4876	2,0167	2,5893
4,0	1,4500	2,7585	1,2662	2,0000	3,1591	1,1906	1,6414	2,4369	3,3597
6,0	1,6047	3,7389	1,3383	2,4495	4,4833	1,2290	1,8773	3,1961	5,3500
8,0	1,7244	4,6393	1,3944	2,8284	5,7372	1,2583	2,0657	3,8728	6,3578
10,0	1,8233	5,4845	1,4385	3,1623	6,9517	1,2832	2,2268	4,4907	7,7930

Tablica 6.3. Egzaktan proračun Čebiševljevih transformatora za $\Gamma_m=0{,}2$

	$N=2$		$N=3$			$N=4$			
Z_T/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,5	1,2247	1,2247	1,2247	1,2247	1,2247	1,2247	1,2247	1,2247	1,2247
2,0	1,3161	1,5197	1,2855	1,4142	1,5558	1,2727	1,3634	1,4669	1,5715
3,0	1,4565	2,0598	1,3743	1,7321	2,1829	1,4879	1,5819	1,8965	2,0163
4,0	1,5651	2,5558	1,4333	2,0000	2,7908	1,3692	1,7490	2,2870	2,9214
6,0	1,7321	3,4641	1,5193	2,4495	3,9492	1,4415	2,0231	2,9657	4,1623
8,0	1,8612	4,2983	1,5766	2,8284	5,0742	1,4914	2,2428	3,5670	5,3641
10,0	1,9683	5,0813	1,6415	3,1623	6,0920	1,5163	2,4210	4,1305	6,5950

Iz izraza (6–52) mogu se odrediti potrebni koeficijenti refleksije linijskih odsječaka Γ_n primjenom rezultata (6–51) na razvoj funkcije $T_n(\cos\theta / \cos\theta_m)$ i izračunavanjem sličnih članova oblika $\cos(N-2n)\theta$. Karakteristične impedancije Z_n linijskih odsječaka mogu se konačno naći primjenom izraza (6–27) - (6–29). Kao i u slučaju s binomnim transformatorom, veća se točnost može postići aproksimacijom

$$\Gamma_n \simeq \frac{1}{2}\ln\frac{Z_{n+1}}{Z_n}.$$

Taj je postupak prikazan u primjeru 6.4.

Zbog aproksimacija koje su primjerene malim refleksijama, dobiveni su rezultati približni. No općenito ih je moguće primijeniti za proračun transformatora bilo koje razine valovitosti Γ_m. U tablicama 6.2. i 6.3. prikazani su egzaktni rezultati za transformatore s 2, 3 i 4 odsječka, uz $\Gamma_m=0{,}05$ i $\Gamma_m=0{,}2$.

Primjer 6.4. Proračun Čebiševljeva transformatora impedancije

Primjenom ranije opisane teorije, proračunati Čebiševljev transformator impedancije s trima odsječcima za prilagodbu tereta impedancije 100 Ω na prijenosnu liniju karakteristične impedancije 50 Ω uz $\Gamma_m=0{,}05$. Nacrtati veličinu koeficijenta refleksije u ovisnosti o normiranoj frekvenciji za egzaktne rezultate i broj odsječaka od 1 do 4.

Rješenje:

Izraz (6–52), za $N=3$, daje $\Gamma(\theta)=2e^{-j3\theta}\,[\Gamma_0\cos 3\theta+\Gamma_1\cos\theta]=Ae^{-j3\theta}T_3(\cos\theta)/\cos\theta_m)$. Budući da je $A=\Gamma_m=0{,}05$, iz izraza (6–54) izlazi

$$\frac{1}{\cos\theta_m}=\cosh\left(\frac{1}{N}\cosh^{-1}\left|\frac{\ln Z_T/Z_0}{2\Gamma_m}\right|\right)=\cosh\left[\frac{1}{3}\cosh^{-1}\frac{\ln(100/50)}{2\cdot 0{,}05}\right]=1{,}408.$$

Otuda je $\theta_m=44{,}7°$.

Primjenom izraza (6–51c), zaT_3 dobiva se

$$2[\Gamma_0\cos 3\theta+\Gamma_1\cos\theta]=A(\cos 3\theta+3\cos\theta)/(\cos^3\theta_m)=-(3A\cos\theta)/(\cos\theta_m).$$

Izračunavanjem sličnih članova u članovima $\cos n\theta$ dobiva se:

$\cos 3\theta$: $2\Gamma_0=A/\cos^3\theta_m$,

$\Gamma_0=0{,}0698$;

$\cos\theta$: $2\Gamma_1=3A(1/\cos^3\theta_m-1/\cos\theta_m)$,

$\Gamma_1=0{,}1037$.

Zbog simetrije izlazi:

$\Gamma_3=\Gamma_0=0{,}0698$,

$\Gamma_2=\Gamma_1=0{,}1037$.

Karakteristične impedancije linijskih odsječaka mogu se zatim izračunati kao:

$n=0$: $\ln Z_1=\ln Z_0+2\Gamma_0=\ln 50+2\cdot 0{,}0698=4{,}051$

$Z_1=57{,}5\ \Omega$

$n=1$: $\ln Z_2=\ln Z_1+2\Gamma_1=\ln 57{,}5+2\cdot 0{,}1037=4{,}259$

$Z_1=70{,}7\ \Omega$

$n=2$: $\ln Z_3=\ln Z_2+2\Gamma_2=\ln 70{,}7+2\cdot 0{,}1037=4{,}466$

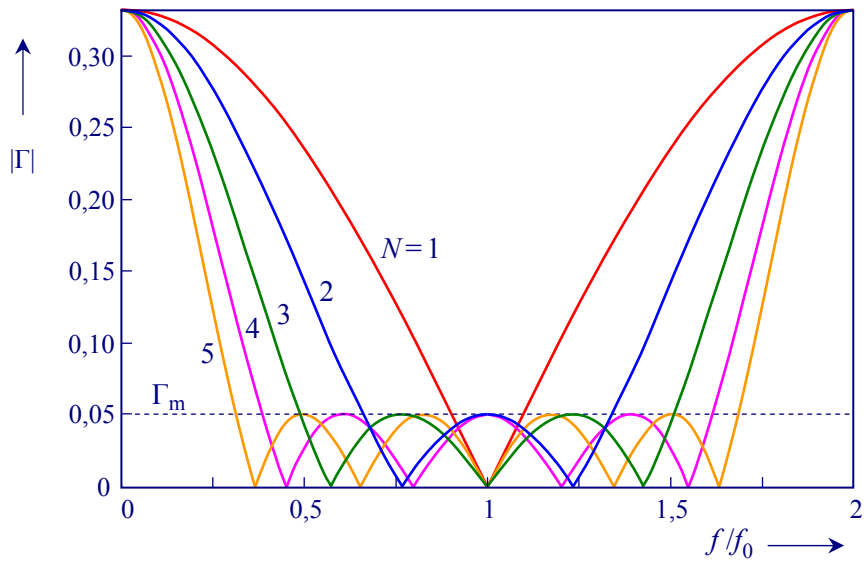
$Z_3=87{,}0\ \Omega$.

Te se vrijednosti mogu usporediti s egzaktnim vrijednostima iz tablice 6.2, koje iznose: $Z_1=57{,}37\ \Omega$, $Z_2=70{,}71\ \Omega$ i $Z_2=87{,}15\ \Omega$.

Širina frekvencijskog pojasa, prema izrazu (6–55), iznosi

$$\frac{\Delta f}{f_0}=2-\frac{4\theta_m}{\pi}=2-4\frac{44{,}7°}{180°}=1{,}01$$

ili 101 %. Taj je rezultat znatno veći od onog u primjeru 6.1. za binomni transformator za isti broj linijskih odsječaka, gdje širina pojasa iznosi 70% uz isti iznos razgođenja. Dakako, ovdje je ostvarena veća širina pojasa na štetu valovitosti unutar pojasa propuštanja Čebiševljeva transformatora.



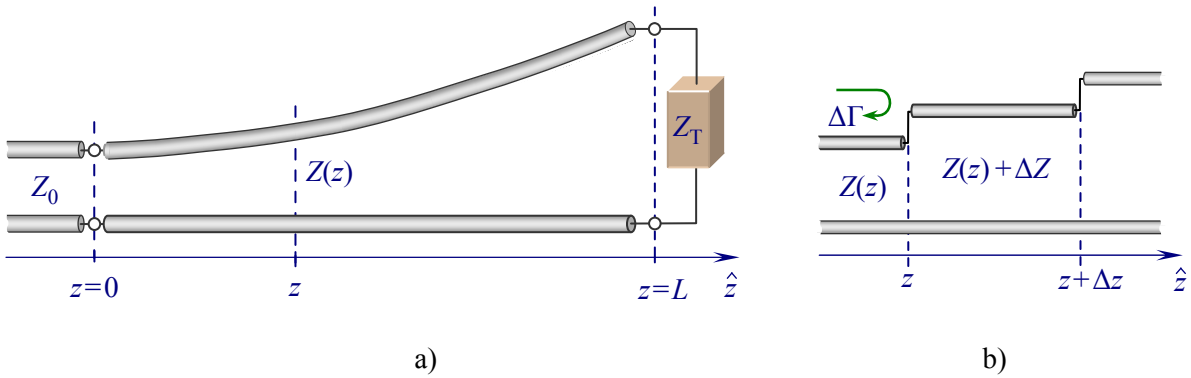
Slika 6.21. Apsolutne vrijednosti koeficijenta refleksije Čebiševljeva transformatora impedancije

Na slici 6.21 prikazane su egzaktne vrijednosti modula koeficijenata refleksije u ovisnosti o normiranoj frekvenciji za $N=1$ do 5 odsječaka i $\Gamma_m=0{,}05$.

6.8. Širokopojasna transformacija impedancije neuniformnom linijom

Transformator impedancije izveden s neuniformnom prijenosnom linijom [2], prikazan na slici 6.22a), može se razmotriti kao granični slučaj transformatora impedancije sa skokovitom promjenom karakteristične impedancije. Kad broj odsječaka neograničeno raste, a njihova duljina istodobno teži nuli, dobiva se neprekinuta (glatka) struktura kojoj je karakteristična impedancija zadana analitičkom funkcijom koordinate z. Drugim riječima, prijenosna je struktura neuniformna, a odabir funkcije po kojoj se mijenja karakteristična impedancija određuje frekvencijska obilježja transformatora impedancije.

U razmatranju koje slijedi pretpostavit ćemo da neuniformna prijenosna linija prilagođuje posve realnu impedanciju trošila Z_T ulaznoj prijenosnoj liniji karakteristične impedancije Z_0. Transformator je karakteristične impedancije $Z(z)$ koja je funkcija udaljenosti na liniji tako da je $Z_T=Z(L)$, odnosno $Z_0=Z(0)$. Ukupni se koeficijent refleksije na ulazu transformatora može naći razmatranjem koeficijenta refleksije na ulazu elementarnog linijskog odsječka duljine Δz



a) b)

Slika 6.22. a) Transformator impedancije s neuniformnom linijom; **b)** elementarni odsječak

(slika 6.22b)) i integriranjem doprinosa svih elementarnih odsječaka uzduž linije od $z=0$ do L. Pretpostavimo da, na koordinati z, odsječak duljine $\Delta z \ll \lambda$ stvara malu skokovitu promjenu karakteristične impedancije iznosa ΔZ, koja proizvodi diferencijalni koeficijent refleksije

$$\Delta\Gamma(z) = \frac{Z(z)+\Delta Z - Z(z)}{Z(z)+\Delta Z + Z(z)} \simeq \frac{\Delta Z}{2Z(z)}. \tag{6–56}$$

Granični prijelaz za $\Delta z \to 0$ daje

$$\mathrm{d}\Gamma(z) = \frac{\mathrm{d}Z(z)}{2Z(z)} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln\frac{Z(z)}{Z_0}\right]\mathrm{d}z, \tag{6–57}$$

gdje je primijenjena relacija $\mathrm{d}[\ln f(z)]/\mathrm{d}f(z) = [f(z)]^{-1}$. Sad se može izračunati doprinos elementarnog odsječka transformatora, sa skokom impedancije u točki z, na koeficijent refleksije na ulazu transformatora kao

$$\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{ul}} = \mathrm{d}\Gamma(0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta z}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln\frac{Z(z)}{Z_0}\right]\mathrm{d}z. \tag{6–58}$$

Kao što smo vidjeli kod transformatora impedancije s više četvrtvalnih transformatora, ukupni se koeficijent refleksije na ulazu transformatora može dobiti zbrajanjem pojedinačnih doprinosa. To je u ovom slučaju ekvivalentno integralu, tj.

$$\Gamma(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^L \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln\frac{Z(z)}{Z_0}\right]\mathrm{d}z, \tag{6–59}$$

gdje je L ukupna duljina transformatora, a $\theta=\beta z$ električna duljina linijskog odsječka. Ako je unaprijed poznata funkcija $Z(z)$, onda se iz izraza (6–59) izravno može izračunati koeficijent refleksije, odnosno frekvencijski odziv transformatora impedancije. Nasuprot tomu, u sintezi transformatora potrebno je odrediti funkciju $Z(z)$ iz karakteristike $\Gamma(\theta)$ koja je funkcija frekvencije. No ta je zadaća znatno složenija i nećemo je ovdje razmatrati. Primjenom elektroničkih računala, taj se problem može jednostavno riješiti nekim od iteracijskih numeričkih postupaka. Pogledajmo sad odziv koeficijenta refleksije ako je $Z(z)$ eksponencijalna funkcija.

6.8.1. Eksponencijalni transformator impedancije

Kao najjednostavniji primjer transformatora s neuniformnom linijom razmotrit ćemo tzv. eksponencijalni transformator. Sastoji se od odsječka neuniformne prijenosne linije čija se karakteristična impedancija mijenja u skladu s eksponencijalnim zakonom, tj.

$$Z(z) = Z_0\mathrm{e}^{az}, \quad \text{za } 0 < z < L, \tag{6–60}$$

kao što je prikazano na slici 6.23a). Koeficijent a može se odrediti iz rubnih uvjeta. Tako je na koordinati $z=0$, $Z(0)=Z_0$, a na koordinati $z=L$, $Z(l)=Z_0\mathrm{e}^{al}$, pa za koeficijent a izlazi

$$a = \frac{1}{l}\ln\left(\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0}\right). \tag{6–61}$$

Otuda je

$$Z(z) = Z_0\mathrm{e}^{\frac{z}{L}\ln\left(\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0}\right)}, \qquad \text{za } 0 < z < L. \tag{6–62}$$

Valja uočiti da se logaritam normirane impeancije mijenja linearno, od 0 do $\ln(Z_\mathrm{T}/Z_0)$, tj.

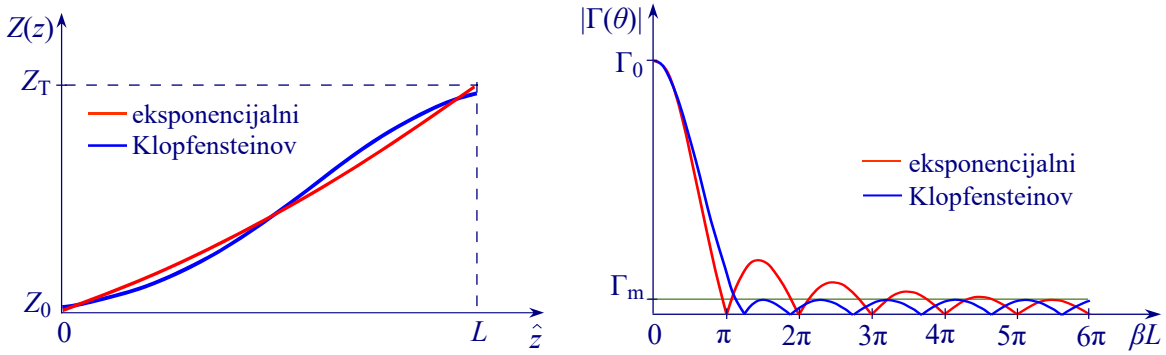
$$\ln\left(\frac{Z(z)}{Z_0}\right) = \frac{z}{L}\ln\left(\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0}\right), \quad \text{za } 0 < z < L \tag{6–63}$$

pa se uvrštenjem izraza (6–62) i (6–63) u izraz (6–59) dobiva

$$\Gamma(\theta)=\int_0^L \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta z}\,\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln\left(\frac{Z(z)}{Z_0}\right)\right]\mathrm{d}z=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0}\right)\int_0^L \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta z}\,\mathrm{d}z=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}\,\frac{\sin\theta}{\theta}, \qquad (6–64)$$

gdje je u posljednji član zdesna uvršteno $\theta=\beta z$ i pretpostavljeno da koeficijent rasprostiranja $\mathrm{j}\beta$ ne ovisi o koordinati z, što vrijedi samo za *TEM*-linije.

Modul koeficijenta refleksije, za količnik $Z_\mathrm{T}/Z_0=2$ prikazan je na slici 6.23b) i oblika je funkcije $\sin x/x$.



a) b)

Slika 6.23. Eksponencijalni i Klopfensteinov transformator za $Z_\mathrm{T}/Z_0=2$. **a)** Funkcija karakteristične impedancije i **b)** modul koeficijenta refleksije

6.8.2. Klopfensteinov transformator impedancije

Za zadanu duljinu transformatora (veću od neke kritične vrijednosti), Klopfensteinov transformator daje najmanji mogući koeficijent refleksije unutar pojasa propuštanja. Drugim riječima, taj transformator za zadani maksimalni dopušteni koeficijent refleksije daje najkraći mogući linijski odsječak. Klopfensteinov transformator izveden je iz Čebiševljeva transformatora s više odsječaka za slučaj u kojem broj odsječaka teži u beskonačnost. Bez podrobnijeg ulaženja u sam izvod, iznijet ćemo samo nužne rezultate za konstrukciju Klopfensteinova transformatora konstantne valovitosti unutar pojasa transformacije [9].

Prirodni logaritam promjena karakteristične impedancije za Klopfenstenov transformator glasi

$$\ln Z(z)=\frac{1}{2}\ln(Z_0Z_\mathrm{T})+\frac{\Gamma_0}{\cosh A}A^2\varphi(2z/L-1,A), \qquad \text{za } 0\le z\le L, \qquad (6–65)$$

gdje je funkcija $\varphi(x,A)$ definirana kao

$$\varphi(x,A)=-\varphi(-x,A)=\int_0^x \frac{I_1(A\sqrt{1-y^2})}{A\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y, \qquad \text{za } |x|\le 1, \qquad (6–66)$$

gdje je $I_1(x)$ modificirana Besselova funkcija prve vrste, prvoga reda (Dodatak G). Funkcija $\varphi(x, A)$ ima ove posebne vrijednosti:

$$\varphi(0, A) = 0,$$

$$\varphi(x, 0) = \frac{x}{2},$$

$$\varphi(1, A) = \frac{\cos\sqrt{(\beta L)^2 - A^2}}{A^2},$$

ali se za druge argumente mora izračunati numerički.

Kao rezultat dobiva se koeficijent refleksije

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta L} \frac{\cos\sqrt{(\beta L)^2 - A^2}}{\cos A}, \quad \text{za} \quad \beta L > A. \tag{6–68}$$

Ako je $\beta L < A$, onda član $\cos\sqrt{(\beta L)^2 - A^2}$ postaje $\cosh\sqrt{A^2 - (\beta L)^2}$.

U izrazima (6–66) i (6–68), $\Gamma_0 = \Gamma(0)$ koeficijent je refleksije na nultoj frekvenciji

$$\Gamma_0 = \frac{Z_\mathrm{T} - Z_0}{Z_\mathrm{T} + Z_0} \simeq \frac{1}{2} \ln \frac{Z_\mathrm{T}}{Z_0}. \tag{6–69}$$

Propusni je pojas definiran s $\beta L \geq A$, pa se maksimalna valovitost može izraziti kao

$$\Gamma_\mathrm{m} = \frac{\Gamma_0}{\cosh A}, \tag{6–70}$$

jer $\Gamma(\theta)$ oscilira između $\pm\, \Gamma_0/\cosh A$ za $\beta L > A$. Radi usporedbe, na slici 6.23b) prikazan je koeficijent refleksije Klopfensteinova transformatora impedancije za $\Gamma_\mathrm{m} = 0{,}02$ i $Z_\mathrm{T}/Z_0 = 2$. Pritom valja uočiti da uz uvjet $|\Gamma| < \Gamma_\mathrm{m} = 0{,}02$ Klopfensteinov transformator daje veću širinu frekvencijskog pojasa s donjom graničnom frekvencijom definiranom uvjetom $\beta L \geq 1.13\ \pi$.

Literatura

[1] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, New York 2012.

[2] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

[3] K. Kurokawa, *An Introduction to the Theory of Microwave Circuits*, Academic Press, New York, 1969.

[4] E. H. Fooks, R. A. Zakarevičius, *Microwave Engineering Using Microstrip Circuits*, Prentice-Hall, New York, 1990.

[5] G. L. Matthaei, L. Young, E. M. T. Jones, *Microwave Filters, Impedance - Matching Networks, and Coupling Structures*, McGraw Hill, New York, 1964.

[6] H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand, New York, 1945.

[7] R. M. Fano, "Theoretical limitations on the broad-band matching and arbitrary impedances", Journal of the Franklin Institute, vol. 249, January 1950, str. 57-83 i February 1950, str. 139-154.

[8] P. A. Rizzi, *Microwave Engineering - Passive Circuits*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

[9] R. W. Klopfenstein, "A transmission line taper of improved design", Proceedings IRE, vol. 44, January 1956, str. 31-35.

7. Pasivni sklopovi

U ovom ćemo poglavlju razmotriti brojne pasivne mikrovalne sklopove koji se rabe kao sastavni dijelovi mikrovalnih komunikacijskih i radarskih sustava, a nezaobilazni su u svakom laboratorijskom radu. Uvodno su obrađene osnovne naprave, poput valovodnih i suosnih atenuatora, pomičnih kratkospojnika i faznih zakretača, koje nalaze primjenu u laboratorijskom radu i mjerenjima. Posebna je pozornost posvećena mikrovalnim rezonatorima, filtrima i periodičnim prijenosnim strukturama te djelilima snage, usmjernim sprežnicima i feritnim nerecipročnim komponentama. Budući da su pasivni sklopovi sastavni dio aktivnih sklopova poput mikrovalnih pojačala, oscilatora, miješala i elektroničkih preklopka, iznimno je važno dobro poznavanje njihovog rada.

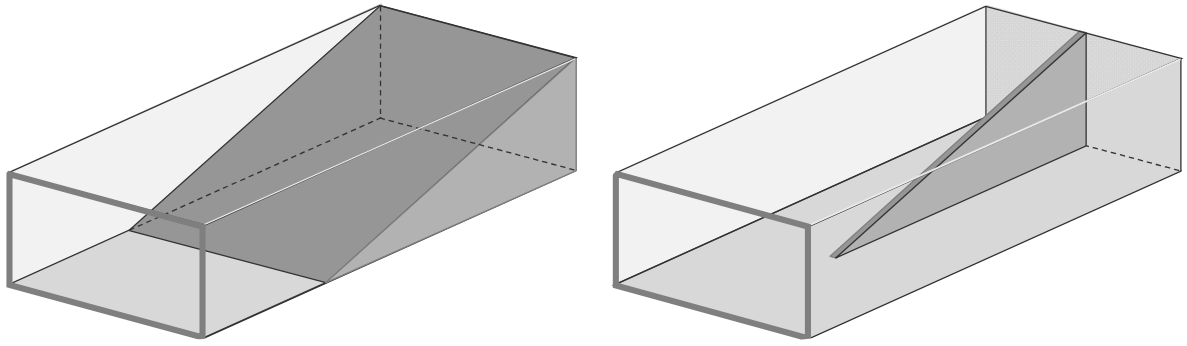
7.1. Valovodne komponente

7.1.1. Prilagođeni teret

U praksi se obično rabe dvije vrste valovodnih i linijskih završnih impedancija. Jedna je od njih prilagođeni teret, a drugi je pomični kratki spoj. Ta se komponente poglavito rabe pri mjerenja impedancije ili raspršnih parametara mikrovalnih elemenata i mreža.

Prilagođen teret stvara uvjete potpune apsorpcije ukupne upadne snage pa je ekvivalentan opterećenju valovoda ili linije vlastitom karakterističnom impedancijom. Na slici 7.1 prikazane su neke od izvedaba završnih opterećenja koja se nalaze u praksi. Apsorberi su izrađeni od materijala s gubitcima. Za duljine apsorbera veće od nekoliko valnih duljina, u praksi je moguće postići odnos stojnih valova manji od 1,01. Piramidalnim oblikom apsorbera postižu se minimalne refleksije jer elektromagnetski val postupno nailazi na sve veću masu ili poprečnu dimenziju apsorbirajućeg materijala. Takve se strukture u prijenosnim linijama ili valovodima mogu analizirati kao linije s gubitcima. Za primjene u užem frekvencijskom području mogu se rabiti završni otpori kraći od četvrt valne duljine.

Na sličan se način mogu ostvariti suosne inačice završnog otpora izvedene uporabom apapsorbera stožastog oblika, koji se nalazi između središnjeg i vanjskog vodiča suosne linije.



a) b)

Slika 7.1. Izvedbe prilagođenog tereta u valovodu: **a)** apsorber u obliku prizme, **b)** apsorber u obliku trokutaste pločice na simetrali šire stijenke valovoda

7.1.2. Pomični kratkospojnik

Pomični kratkospojnik stvara završnu impedanciju koja reflektira ukupnu upadnu snagu i obrće fazu električnog polja. Faza reflektiranoga vala mijenja se promjenom položaja kratkoga spoja. To je ekvivalentno promjenljivoj završnoj reaktanciji. Na slici 7.2 prikazane su izvedbe koje se najčešće nalaze u praksi. Na slici 7.2a) učinak kratkoga spoja u valovodu ostvaren je stapom i elastičnim pernim kontaktom. Galvanski kontakt stapa sa stijenkama valovoda obično stvara probleme zbog prijelaznog otpora pa se nerijetko rabe beskontaktni četvrtvalni stapovi, kao što je prikazano na slici 7.2b). Ako se na četvrtvalnoj udaljenosti od prvoga doda još jedan beskontaktni stap, onda će se znatno pojačati učinak kratkoga spoja. Rad tog sklopa može se objasniti s pomoću nadomjesne sheme na slici 7.2c). Stap se ponaša poput linije niske karakteristične impedancije Z_1, a četvrtvalni odsječak između dvaju stapova ima značajke četvrtvalnog transformatora visoke karakteristične impedancije Z_2 koja je znatno viša od Z_1 i Z_K. Impedancija Z_K na referentnoj ravnini 1-1′ približno je jednaka nuli i njezina se transformacije obavlja uzduž četvrtvalnog odsječka visoke impedancije Z_2 u vrlo visoku impedanciju na referentnoj ravnini 2-2′, tj.

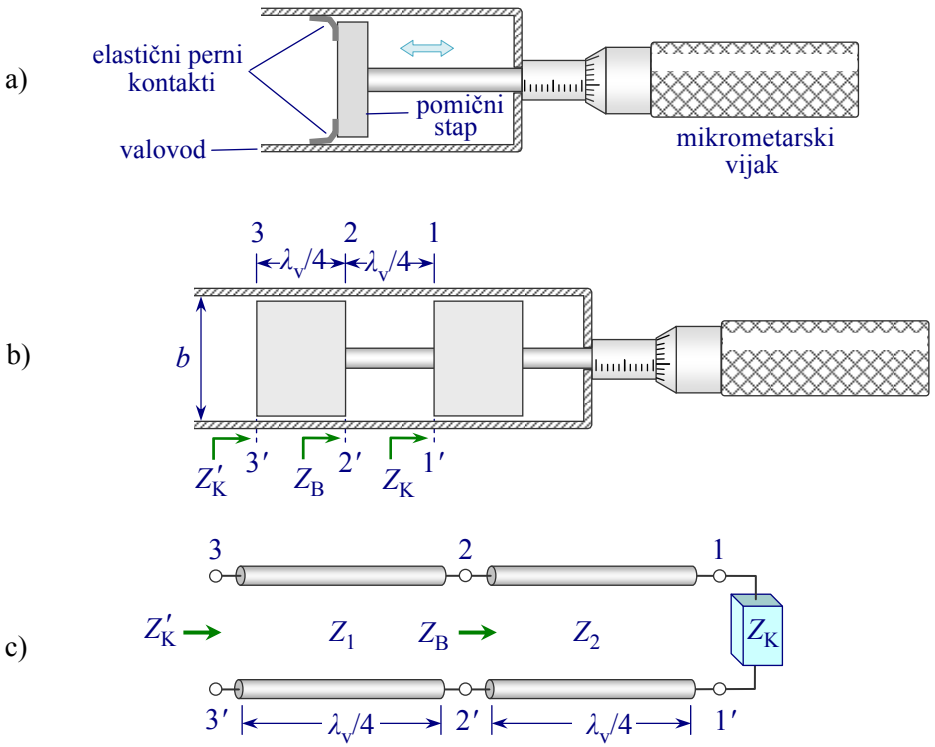
$$Z_B = \frac{Z_2^2}{Z_K}. \tag{7–1}$$

Ta se impedancija preko prvoga četvrtvalnog odsječka impedancije Z_1 dalje transformira na referentnu ravninu 3-3′ u vrlo nisku impedanciju Z_K'

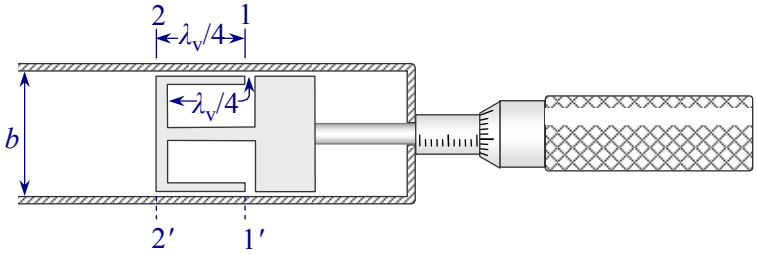
$$Z_K' = \frac{Z_1^2}{Z_B} = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 Z_K \tag{7–2}$$

pa se opisani sklop na referentnoj ravnini 3-3′ ponaša poput idealnoga kratkog spoja.

Slični se sklopovi nalaze i u izvedbama sa suosnim linijama u kojima se stapovi umeću u prostor između središnjeg vodiča i plašta suosne linije.



Slika 7.2. Pomični kratkospojnik u valovodu (uzdužni presjek): **a)** stap s pernim kontaktom, **b)** dvostruki stap i **c)** njegov nadomjesni sklop



Slika 7.3. Skraćeni pomični kratkospojnik s dvama stapovima

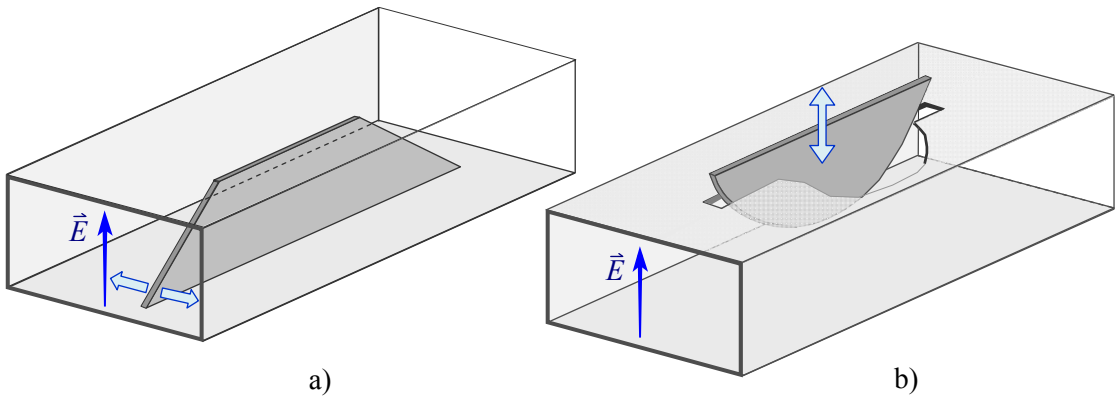
Na slici 7.3 prikazana je alternativna izvedba s manjim utroškom prostora. Prvi je stap izrađen kao prelomljena četvrtvalna linija. Unutarnja linija transformira impedanciju kratkoga spoja u idealni otvoreni krug na ravnini 1-1′. U toj točki impedancija teži beskonačnoj vrijednosti pa aksijalna struja teži nuli. Tako vanjska četvrtvalna linija transformira impedanciju otvorenog kruga na ravnini 1-1′ u kratki spoj na ravnini 2-2′.

Beskontakni stapovi obično se rabe u sklopovima za odvajanje RF strujnog kruga od istosmjernog strujnog kruga u aktivnim sklopovima te za povezivanje dvaju kružnih valovoda ili dviju suosnih linija preko beskontaktnih rotacijskih spojeva.

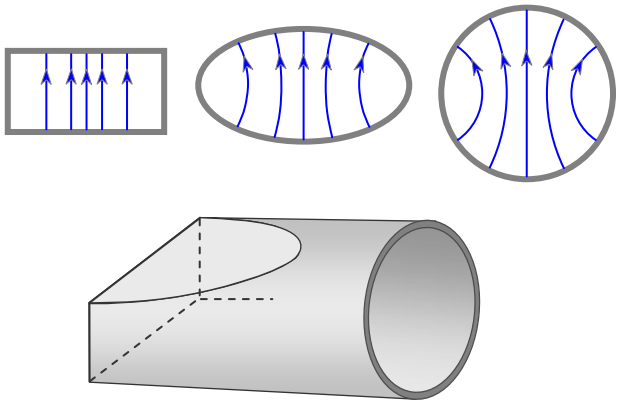
7.1.3. Atenuator

Za slabljenje mikrovalnoga signala poglavito se rabe atenuatori, promjenljivi i neprom-jenljivi. Jednostavne izvedbe valovodnih atenuatora prikazane su na slici 7.4. Tanku otpornu pločicu (ili otporni film na tankoj dielektričnoj pločici) treba postaviti paralelno s vektorom električnog polja dominantnoga moda u valovodu, tj. okomito na širu stijenku valovoda. Time se postiže najjača interakcija s električnim poljem. Budući da električno polje inducira plošne struje u otpornom materijalu dolazi do disipacije, tj. prigušenja elektromagnetske energije. U izvedbi, prikaznoj na slici 7.4a), prigušenje raste približavanjem pločice sredini valovoda. U drugoj izvedbi, na slici 7.4b), otporna pločica ulazi u valovod kroz uski prorez koji je izveden na simetrali šire stijenke valovoda. Takav prorez ne presijeca strujnice pa ne dolazi do curenja elektromagnetske energije iz valovoda u okolni prostor. Prigušenje je to veće što se otporna pločica nalazi dublje u valovodu.

Valovodnim sklopom na slici 7.5 u kružnom se valovodu može razmjerno jednostavno pobuditi mod TE_{11} s pomoću moda TE_{01} iz pravokutnoga valovoda. To je pretvornik modova s postupnim prijelazom iz pravokutnoga valovoda u kružni valovod. Kad se dimenzije valovoda pravilno odaberu neće se pojaviti viši modovi jer u kružnom valovodu mod TE_{11} ima najnižu zapornu frekvenciju baš kao i mod TE_{01} u pravokutnom valovodu.

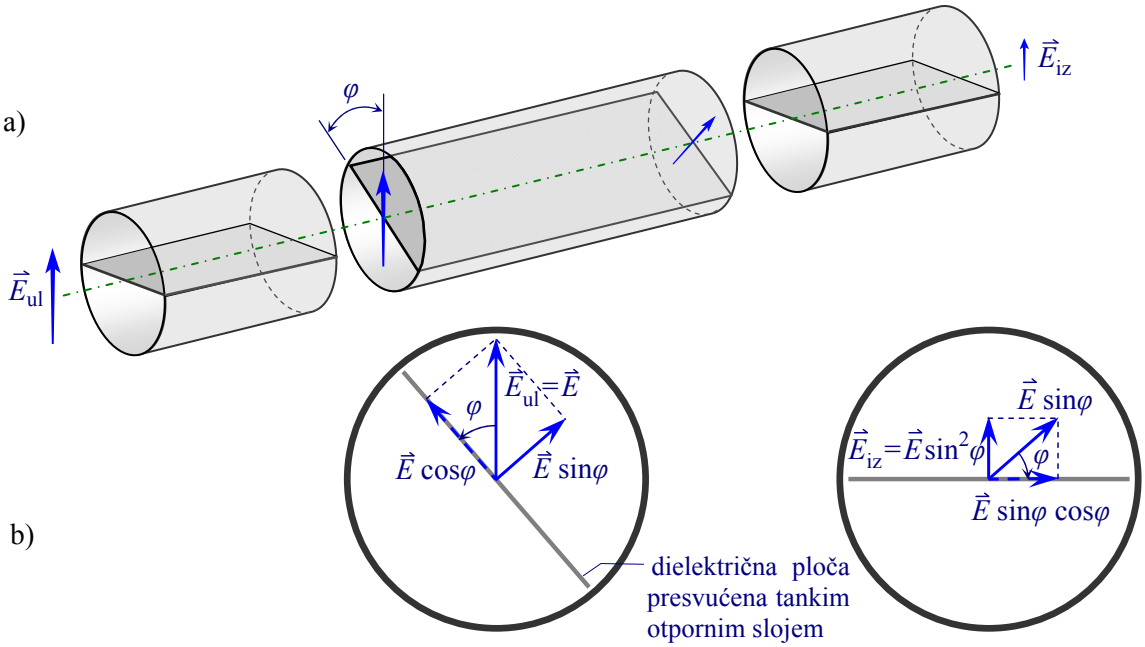


Slika 7.4. Valovodni atenuatori: **a) s** horizontalnim i **b)** s vertikalnim pomicanjem pločastog apsorbera



Slika 7.5. Transformacija moda TE_{01} pravokutnoga valovoda mod TE_{11} kružnoga valovoda

Opisana vrsta prijelaza vrlo se često primjenjuje u polarizacijskim atenuatorima, gdje na oba kraja naprave prilagođuje val iz pravokutnoga valovoda na val kružnoga valovoda. Duž osi odsječka kružnoga valovoda postavljen je tanak otporni sloj, kao što je prikazano na slici 7.6a). Zakretanjem kružnog odsječka valovoda može se mijenjati kut φ između otpornog sloja i vektora električnog polja koje upada iz pravokutnoga valovoda. Val u kružnom odsječku može se razmotriti kao zbroj dvaju modova TE_{11}, jednog kojem je električno polje paralelno s otpornim slojem i drugog kojem je električno polje okomito na otporni sloj. Prvi će mod pretrpjeti prigušenje zbog omskih gubitaka koji stvaraju inducirane struje u otpornom sloju, a drugi će se nastaviti rasprostirati bez gubitaka. Ako je kružni odsječak dovoljno dugačak, onda će prva komponenta postati zanemarivo mala i na drugome će se kraju pojaviti samo komponenta iznosa $E\sin\varphi$. Taj se val može dalje razmotriti kao zbroj dvaju modova: prvoga,



Slika 7.6. Polarizacijski atenuator i objašnjenje načela njegovog rada

amplitude $E\sin^2\varphi$ i drugoga, amplitude $E\sin\varphi\cos\varphi$, kao što je prikazano na slici 7.6b). Ako su pravokutni valovodi na ulazu i izlazu iste orijentacije, onda će se na izlazu valovoda naći samo komponenta $E\sin^2\varphi$, a druga će se reflektirati zbog zaporne karakteristike pravokutnoga valovoda za ortogonalni mod TE_{01}. U praktičnoj se izvedbi u svaki pretvornik modova umeće otporni sloj koji apsorbira snagu zapornoga moda pa nema refleksije. Jakost električnog polja izlaznoga vala razmjerna je kvadratu sinusa kuta φ pa je izlazna snaga razmjerna faktoru $\sin^4\varphi$. Ako je atenuator kalibriran u dB, onda sveukupno prigušenje atenuatora iznosi

$$A = A_0 - 40\log(\sin\varphi) \quad \text{dB}, \tag{7–3}$$

gdje A_0 označuje dodatne gubitke koji nastaju u nesavršeno izvedenom otpornom sloju u odsječku kružnoga valovoda i dvama pretvornicima modova.

Dodatna je prednost tih atenuatora u tomu što im se faza ne mijenja promjenom prigušenja.

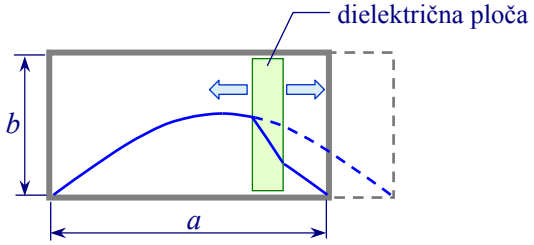
Postoje i suosne izvedbe atenuatora u obliku otpornih T- ili PI- mreža u čiju su strukturu obično ugrađene koncentrirane disipativne komponente (otpori). Širina njihovog frekvencijskog područja ekstremno je široka, od nulte frekvencije do iznad 100 GHz. Najviše radne frekvencije poglavito su ograničene poprečnim dimenzijama i vrstom konektora. Uglavnom se izvode s fiksnim vrijednostima prigušenja (npr. 3, 6, 10, 20 dB).

7.1.4. Fazni zakretač

Na sličan način mogu se ostvariti fazni zakretač. Zamijeni li se otporni sloj u središnjem dijelu polarizacijskog atenuatora na slici 7.6 pločom dielektričnog materijala malih gubitaka relativne permitivnosti veće od jedan, dielektrična će ploča, djelujući na razdiobu električnog polja, mijenjati fazni pomak razmjerno kutu 2θ. Analiza te vrste faznih zakretača složenija je od analize atenuatora pa se čitatelj upućuje na dodatnu literaturu [1].

Jednostavnija izvedba faznih zakretača može se ostvariti tako da se dielektrična ploča konačne debljine postavi uzduž odsječka valovoda, kao što je prikazano na slici 7.7. Pri tomu dielektrična ploča električki proširuje valovod pa efektivno skraćuje valnu duljinu. To ima za posljedicu povećanje električne duljine valovoda što se očituje povećanjem faznog kašnjenja elektromagnetskoga vala. Pri tomu veličina faznog pomaka ovisi o položaju dielektrične ploče u poprečnome smjeru, na sličan način kao što prigušenje ovisi o položaju otpornog filma u atenuatoru na slici 7.4a). Najslabiji učinak na fazu ima dielektrična ploča postavljena tik uz užu stijenku valovoda, a najveći kad je ploča smještena u središte valovoda. Uporabom dielektrika većih gubitaka, povećat će se prigušenje vala, koje će biti veće što će dielektrična ploča biti bliže sredini šire stijenke stranice valovoda.

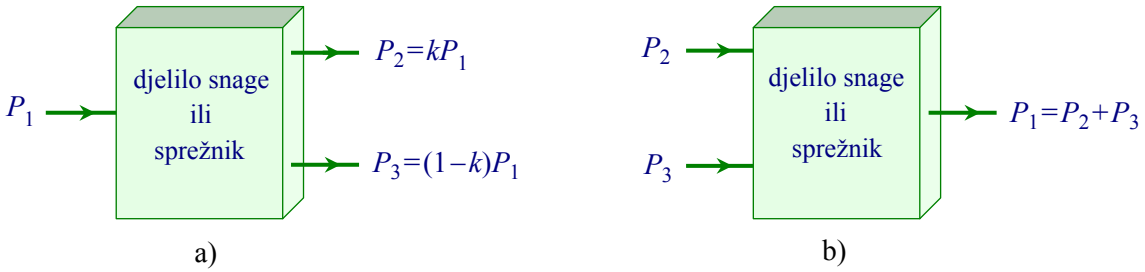
Faza signala može se zakretati i primjenom elektroničkih komponenata. U izvedbama analognih faznih zakretača nerijetko se rabe varaktorske diode, a digitalno (diskretno) zakretanje faze ostvaruje se primjenom PIN-dioda i mikroelektromehaničkih komponenata (odjeljak 8.12). O elektroničkim izvedbama faznih zakretača može se više naći u odjeljku 8.7.2.



Slika 7.7. Jednostavan fazni zakretač u valovodnoj izvedbi

7.2. Djelila snage

Snaga se može dijeliti na više prolaza primjenom sklopova koji se nazivaju *djelila snage*. U praksi su to linijski ili valovodni T-spojevi, hibridi i usmjerni sprežnici. Najjednostavniji je sklop troprolazna naprava shematski prikazana na slici 7.8a).



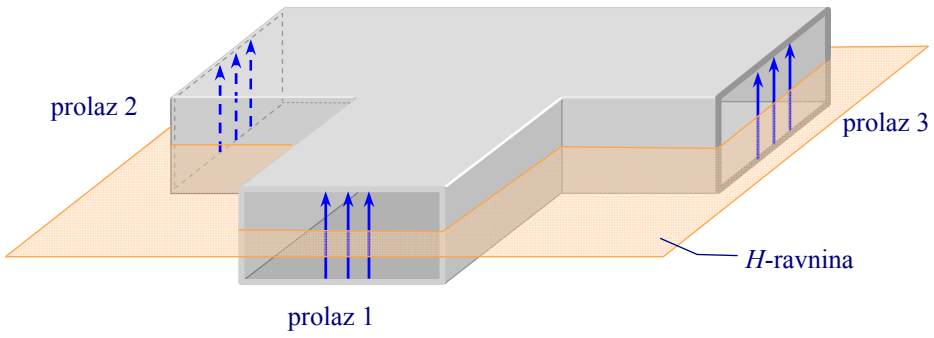
Slika 7.8. a) Sklop troprolaznog djelila snage, **b)** sklop za zbrajanje snage

Djelilo može i ne mora imati gubitke. Može biti i četvroprolazna naprava, koja spada u skupinu usmjernih sprežnika. No djelila se nerijetko izvode i s više od tri ili četiri prolaza. Budući da su to obično recipročne naprave, djelila snage mogu preuzeti funkciju naprave za zbrajanje (slaganje) snage iz više izvora, kao što je prikazano na slici 7.8b). Troprolazne mreže za dijeljenje snage čine T-spojevi i otporna djelila. S druge strane, četvroprolazne su mreže za dijeljenje snage usmjerni sprežnici i hibridi. U primjeni nerijetko nailazimo na djelila snage s koeficijentom dijeljenja $k=1/2$ ili –3 dB, što znači da djelilo dijeli snagu na dva jednaka dijela.

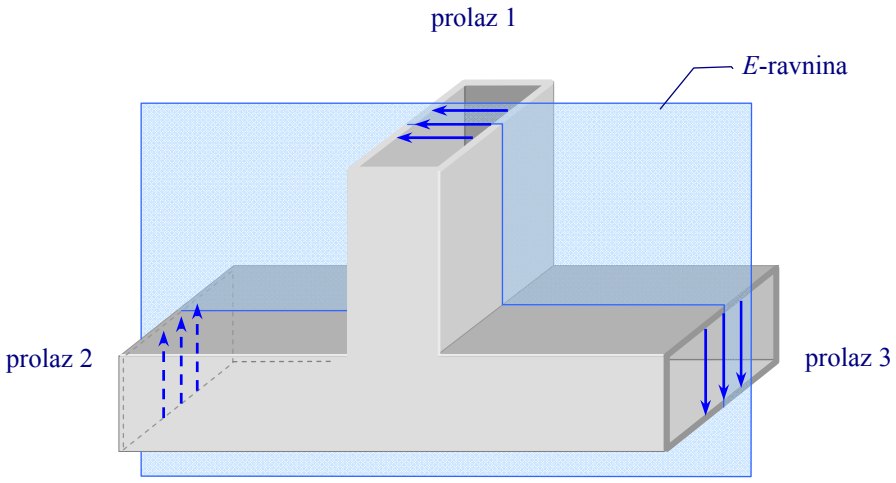
7.2.1. Valovodni T-spoj

Spajanjem dvaju valovoda pod pravim kutom mogu se ostvariti dva jednostavna T-spoja za dijeljenje ili zbrajanje snage. U paralelnom spoju ili spoju u *H*-ravnini prikazanom na slici 7.9, silnice magnetskog polja dominantnoga moda u obama valovodima paralelne su s *H*--ravninom. To je ravnina u kojoj leži ili s kojom je paralelan vektor magnetskog polja. Pobudni signal doveden na prolaz 1 dijeli se na dva istofazna signala jednake amplitude u prolazima 2 i 3. Taj se nedisipativni i recepročni spoj ponaša poput običnog T-spoja opisanog u odjeljku 5.8.2, tj. ne može se istodobno prilagoditi na svim trima prolazima. Ako su prolazi 2 i 3 istodobno pobuđeni istofaznim signalima jednake amplitude, onda se na prolazu 1 dobiva maksimalni signal, a ako su pobudni signali na prolazima 2 i 3 protufazni, ali jednake amplitude, na prolazu 1 neće biti signala jer je polje razmjerno vektorskom zbroju signala.

U serijskom spoju (spoj u *E*-ravnini) prikazanom na slici 7.10, silnice električnog polja dominantnoga moda u obama su valovodima paralelne s *E*-ravninom. To je ravnina u kojoj leži ili s kojom je paralelan vektor električnog polja. Ako se pobudni signal dovede na prolaz



Slika 7.9. Valovodni T-spoj u *H*-ravnini pobuđen na prolazu 1. Električna su polja istofazna na izlaznim prolazima 2 i 3



Slika 7.10. Valovodni T-spoj u *E*-ravnini pobuđen na prolazu 1. Električna su polja protufazna na izlaznim prolazima 2 i 3

1, onda se snaga dijeli na dva protufazna signala jednake amplitude u prolazima 2 i 3. Ako su prolazi 2 i 3 istodobno pobuđeni istofaznim signalima jednake amplitude, onda na prolazu 1 neće biti signala jer je polje razmjeno vektorskoj razlici signala. I taj se spoj ne može istodobno prilagoditi na svima trima prolazima (odjeljak 5.8.2).

7.2.2. Otporno djelilo

Najjednostavniji troprolazni disipativni sklop za dijeljenje snage je *otporno djelilo* prikazano na slici 7.11. To je nerefleksivni sklop koji u širokom frekvencijskom području dijeli snagu na jednake dijelove. Ulazna se snaga dijeli preko triju koncentriranih otpora u zvjezdastom spoju. Slični se sklopovi mogu ostvariti za nejednoliko dijeljenje snage.

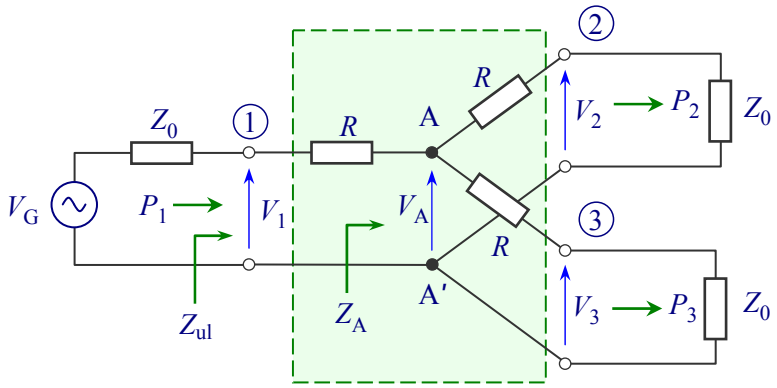
Otporno djelilo, prikazano na slici 7.11, može se jednostavno proračunati primjenom klasične teorije mreža. Zbog simetrije, snage na izlaznim prolazima bit će jednakih iznosa. Gledano zdesna, impedancija u čvorištu A ima vrijednost

$$Z_{\mathrm{A}} = \frac{R + Z_0}{2},$$

pa ulazna impedancija na prolazu 1 iznosi

$$Z_{\mathrm{ul}} = Z_{\mathrm{A}} + R = \frac{R + Z_0}{2} + R\,.$$

Da bi sklop bio nerefleksivan, mora vrijediti $Z_{\mathrm{ul}} = Z_0$. Otuda je vrijednost otpora



Slika 7.11. Troprolazno otporno djelilo s jednolikim dijeljenjem snage

$$R = \frac{Z_0}{3}. \tag{7–4}$$

Za djelilo ulazne impedancije 50 Ω, vrijednost otpora R iznosi 16,7 Ω.

Razmotrimo sad raspršnu matricu otpornog djelila. Iz uvjeta (7–4) i simetrije sklopa izlazi

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0. \tag{7–5}$$

Pretpostavi li se da je pobuđen prolaz 1, na kojem postoji napon efektivne vrijednosti V_1, tad se na čvorištu A inducira napon

$$V_\mathrm{A} = \frac{Z_\mathrm{A}}{R + Z_\mathrm{A}} V_1 = \frac{\frac{2Z_0}{3}}{\frac{Z_0}{3} + \frac{2Z_0}{3}} V_1 = \frac{2}{3} V_1, \tag{7–6}$$

pa su naponi na izlaznim prolazima

$$V_2 = V_3 = \frac{Z_0}{Z_0 + R} V_\mathrm{A} = \frac{Z_0}{Z_0 + \frac{Z_0}{3}} V_\mathrm{A} = \frac{1}{2} V_1. \tag{7–7}$$

Budući da su prolazi 2 i 3 opterećeni prilagođenim impedancijama, prijenosni raspršni parametar dobiva se kao omjer izlaznog i ulaznog napona. Naime, u tom su slučaju ti naponi ujedno jednaki izlaznim, odnosno ulaznim naponskim valovima pa iz izraza (7–7) i simetrije sklopa izlazi

$$S_{21} = S_{31} = S_{23} = \frac{1}{2}. \tag{7–8}$$

Budući da je mreža recipročna, raspršna joj je matrica simetrična, tj.

$$[S] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7–9}$$

Provjerite za vježbu je li matrica (7–9) unitarna.

Snaga predana djelilu na prolazu 1 iznosi

$$P_\mathrm{ul} = P_1 = \frac{V_1^2}{Z_0}, \tag{7–10}$$

a snaga predana prilagođenim trošilima na prolazima 2 i 3 dobiva se iz izraza (7–7),

$$P_2 = P_3 = \frac{\left(\frac{1}{2} V_1\right)^2}{Z_0} = \frac{1}{4}\frac{V_1^2}{Z_0} = \frac{1}{4} P_\mathrm{ul}. \tag{7–11}$$

Isti izraz može se dobiti i primjenom raspršnih parametara i valova snage. Tako je, primjerice,

$$P_2 = |b_2|^2 - |a_2|^2 = |S_{21}|^2 |a_1|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_\mathrm{ul} = \frac{1}{4} P_\mathrm{ul},$$

gdje je $a_2 = 0$ jer je prolaz 2 nerefleksivan. Dakle, svako trošilo prima četvrtinu ulazne snage, što ukupno za oba trošila čini samo jednu polovinu ulazne snage. No druga se polovina ulazne snage disipira u samom djelilu, što se vidi iz izraza

$$P_\mathrm{dis} = P_\mathrm{ul} - P_2 - P_3 = \frac{P_\mathrm{ul}}{2}. \tag{7–12}$$

7.2.3. Wilkinsonovo djelilo

T-spoj bez gubitaka ima nedostatak da se istodobno ne mogu prilagoditi sva tri prolaza. Vidjeli smo da se otporno djelilo može istodobno prilagoditi na svima trima prolazima, ali ono unosi velike gubitke. No moguće je ostvariti troprolazni sklop s gubitcima, koji je istodobno prilagođen na svima trima prolazima i da su mu pritom dva izlazna prolaza međusobno izolirana. Kako se to može ostvariti u praksi objasnit ćemo na primjeru Wilkinsonova djelila [1] - [3], [13].

Wilkinsonovo djelilo snage može se izvesti s proizvoljnim koeficijentom dijeljenja snage, ali najprije ćemo razmotriti jednostavniji slučaj djelila s jednolikim dijeljenjem (3 dB). Djelilo se u praksi najčešće nalazi u trakastoj izvedbi, kao što je prikazano na slici 7.12a). Odgovarajući sklop s prijenosnim linijama prikazan je na slici 7.12b). Sastoji se od rašljastog spoja dviju četvrtvalnih linija karakteristične impedancije $Z_{01}=\sqrt{2}\,Z_0$ i čip-otpora vrijednosti $R=2Z_0$, koji premošćuje prolaze 2 i 3.

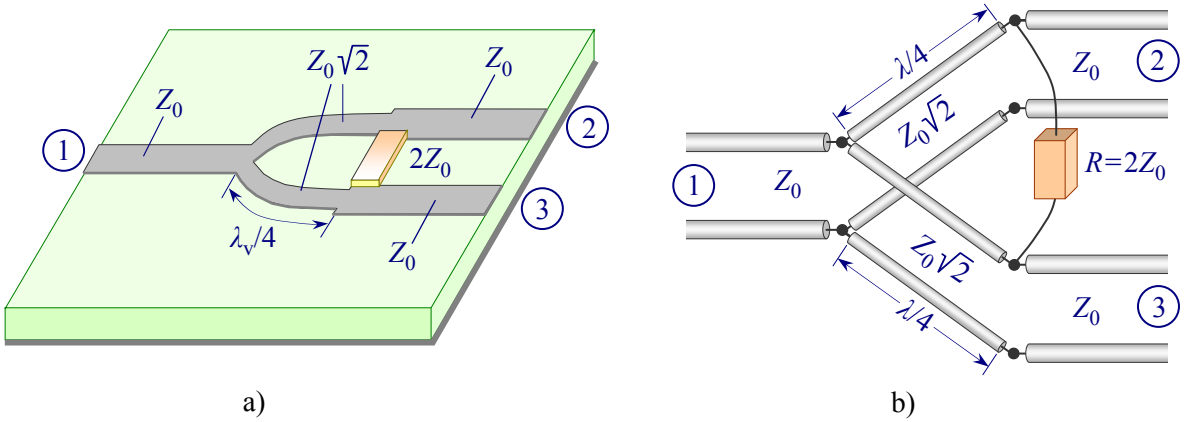
Pri tomu je polaz 1 prilagođen jer dva četvrtvalna linijska odsječka transformiraju impedancije Z_0 s prolaza 2 i 3 u dva paralelna otpora vrijednosti $2Z_0$ na prolaz 1, tj.

$$Z_{\text{ul1}} = \frac{1}{2}\frac{Z_{01}^2}{Z_0} = \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{2}Z_0)^2}{Z_0} = Z_0 \qquad (7\text{–}13)$$

Stoga je $S_{11}=0$. Kad je pobuđen prolaz 1, tad se snaga dijeli popola na prolaze 2 i 3 pa moduli raspršnih parametara $|S_{21}|=|S_{31}|$ iznose $1/\sqrt{2}$. Budući da četvrtvalni odsječci linija unose fazno kašnjenje od $\pi/2$, raspršni parametri poprimaju konačnu vrijednost $S_{21}=S_{31}=-\,\mathrm{j}\,\sqrt{2}$. Otuda su točke 2 i 3 na istome potencijalu pa otpor R ne disipira snagu. Zbog recipročnosti je također $S_{12}=S_{13}=-\,\mathrm{j}\,\sqrt{2}$.

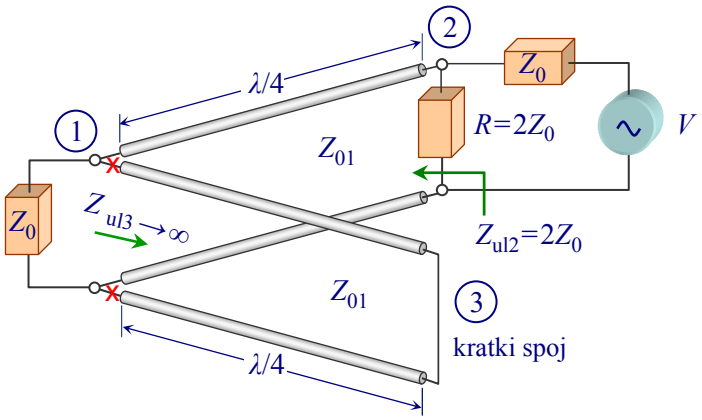
Ako se pobuda premjesti na prolaz 2, onda se pola snage prenosi na prolaz 1, a preostala se polovina troši u otporu R. Pritom se snaga ne prenosi na prolaz 3, što znači da su prolazi 2 i 3 međusobno izolirani ($S_{23}=S_{32}=0$). Drugim riječima, prolaz 3 virtualno je kratko spojen na masu. Ako je tomu zaista tako, onda se virtualni kratki spoj na prolazu 3 može nadomjestiti stvarnim kratkim spojem. Tad se djelilo na tom prolazu može prerezati pa se dobiva nadomjesni sklop prikazan na slici 7.13. Budući da je drugi kraj otpora R uzemljen, taj je otpor spojen paralelno s prolazom 2. Osim toga, nadomjesni sklop pokazuje da je na prolaz 1 priključen kratko spojen četvrtvalni stab beskonačne ulazne impedancije, $Z_{\text{ul3}}\to\infty$. Takav stab ne opterećuje prolaz pa ga se može ispustiti. Tad se impedancija Z_0 s prolaza 1 transformira četvrtvalnim odsječkom karakteristične impedancije $\sqrt{2}\,Z_0$ u vrijednost $2Z_0$ na prolazu 2, tj.

$$Z_{\text{ul2}} = \frac{Z_{01}^2}{Z_0} = \frac{2Z_0^2}{Z_0} = 2Z_0\,. \qquad (7\text{–}14)$$



a) b)

Slika 7.12. a) Wilkinsonovo djelilo snage u mikrotrakastoj izvedbi, **b)** nadomjesni sklop



Slika 7.13. Nadomjesni sklop pri pobudi prolaza 2

Otuda je i prolaz 2 prilagođen jer je opterećen paralelnom kombinacijom dvaju otpora vrijednosti $2Z_0$ pa je $S_{22}=0$. Zbog simetrije sklopa također je $S_{33}=0$.

Stoga je cjelovita raspršna matrica Wilkinsonova djelila za središnju frekvenciju

$$[S]=-\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}. \qquad (7\text{–}15)$$

Dakle, Wilkinsonovo se djelilo na središnjoj frekvenciji ponaša kao nerefleksivna troprolazna mreža, što je omogućeno ugradnjom disipativnog elementa u strukturu djelila. Time je ujedno ostvareno i međusobno rasprezanje (izolacija) prolaza 2 i 3. Osim toga, pri pobudi prolaza 1, raspoloživa se snaga generatora dijeli popola na prolaze 2 i 3, a da pritom ne dolazi do disipacije u otporu R jer se tada oba kraja otpora nalaze na jednakim potencijalima. Kad prolazi 2 i 3 nisu zaključeni prilagođenim impedancijama, tad na tim prolazima dolazi do refleksije. Ako su pritom opteretne impedancije različite, onda će reflektirani signali na prolazima 2 i 3 imati različite amplitude i faze pa će se dio reflektiranih snaga disipirati u otporu R. Kad su ti reflektirani signali protufazni i jednake amplitude, onda će se ukupna reflektirana snaga potrošiti u otporu R pa će prolaz 1 ostati prilagođen. Ta se značajka Wilkinsonova djelila nerijetko primjenjuje u balansnim pojačalima i miješalima te u mrežama za oblikovanje dijagrama zračenja antenskih nizova.

Primjer 7.1. Wilkinsonovo djelilo snage

Proračunati Wilkinsonovo djelilo snage za sustav karakteristične impedancije 50 Ω i frekvenciju $f_0=2$ GHz te grafički prikazati module raspršnih parametara u ovisnosti o frekvenciji unutar frekvencijskog područja od 0 do 4 GHz.

Rješenje:

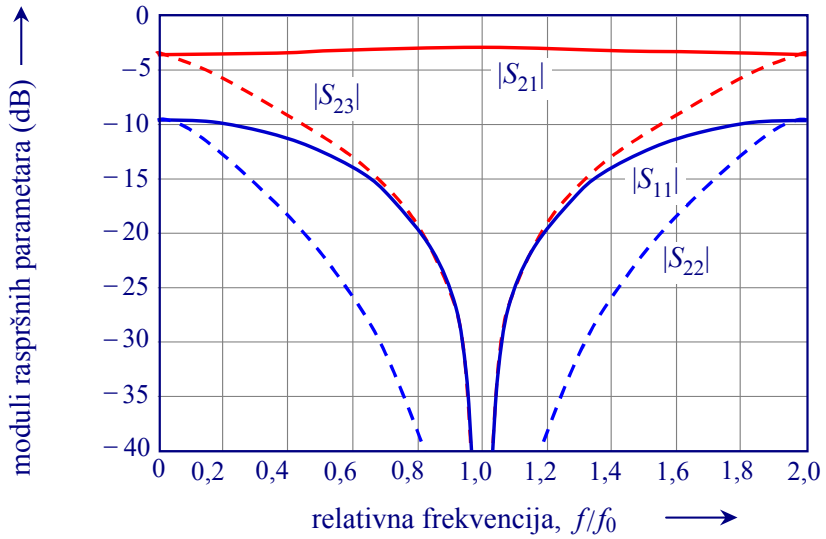
U skladu sa slikom 7.12 i prethodnim razmatranjima, na frekvenciji f_0, odsječci prijenosnih linija u djelilu dugački su $\lambda/4$. Njihova karakteristična impedancija mora iznositi

$$Z_{01}=\sqrt{2}Z_0=70{,}7\ \Omega,$$

a vrijednost otpora između prolaza 2 i 3 mora biti

$$R=2Z_0=100\ \Omega.$$

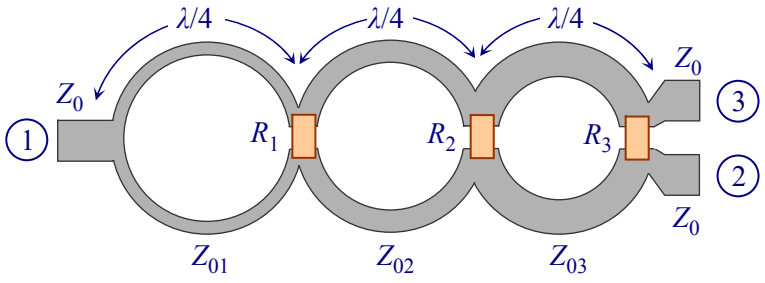
Moduli raspršnih parametra Wilkinsonova djelila prikazani su na slici 7.14 u ovisnosti o normiranoj frekvenciji. Veličina $1/|S_{21}|^2$ označuje raspoložive gubitke snage djelila, a $1/|S_{23}|^2$ označuje izolaciju između prolaza 2 i 3. Unutar širine frekvencijskog pojasa koja čini ±20 % središnje frekvencije, sklop ima razmjerno nisku razinu refleksije, tj. RL $=-20\log|S_{11}|>20$dB (ili $|S_{11}|<0{,}1$). Pri tomu je razina izolacije između prolaza 2 i 3 veća od 20 dB (ili $|S_{23}|<0{,}1$).



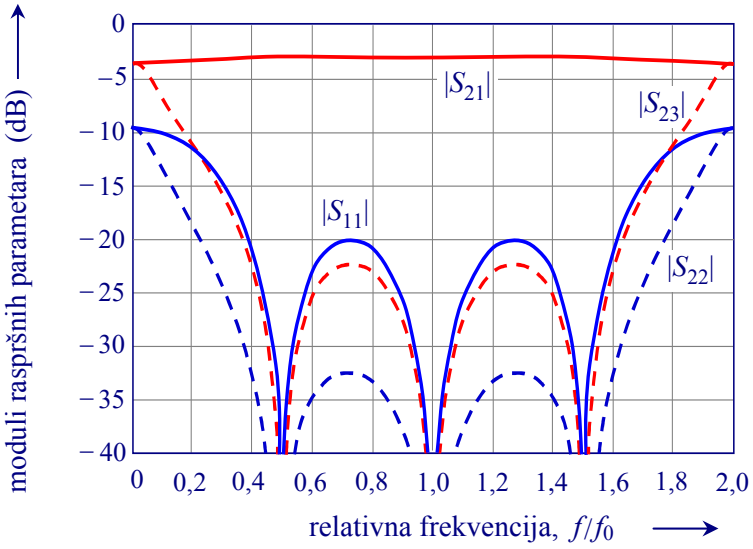
Slika 7.14. Frekvencijski odziv Wilkinsonova djelila s jednolikim dijeljenjem snage. Ulazni je prolaz 1, a izlazni su prolazi 2 i 3

Širina frekvencijskog pojasa Wilkinsonova djelila može se povećati ako se umjesto jednog para četvrtvalnih odsječka uzme više ulančanih odsječaka, kao što je prikazano na slici 7.15. Vrijednosti karakterističnih impedancija četvrtvalnih odsječaka postupno se smanjuju gledajući od ulaznoga prolaza prema izlaznim prolazima. Ovdje valja primijeniti načelo malih sukcesivnih refleksija kao kod širokopojasnih linijskih transformatora impedancije. Time se mogu ostvariti širine pojasa od nekoliko oktava s RL > 17 dB. U praksi se nalaze sklopovi s maksimalno glatkim i Čebiševljevim odzivom. Djelilo Čebiševljeva odziva (odziv konstantne valovitosti) ima veću širinu pojasa za zadani broj odsječaka od izvedbe s maksimalno glatkim odzivom. Primjerice, djelilo s dvama parovima četvrtvalnih odsječaka postiže širinu pojasa do dvije oktave uz iznos odnosa stojnih valova na prolazu 1 manji od 1,4.

Na slici 7.16 prikazana su obilježja širokopojasnog Wilkinsonova djelila prikazanog na slici 7.15. Djelilo je Čebiševljeva odziva, a projektirano je za koeficijente refleksije na prolazima manje od 0,1 ili. $|S_{11}| <- 20$ dB, tj. RL > 20 dB. Sadrži tri para četvrtvalnih odsječaka karakterističnih impedancija: $Z_{01} = 82\ \Omega$, $Z_{02} = 72\ \Omega$, odnosno $Z_{03} = 62\ \Omega$, a vrijednosti pripadajućih poprečnih otpora iznose: $R_1 = 142\ \Omega$, $R_2 = 283\ \Omega$, $R_3 = 253\ \Omega$. Relativna širina frekvencijskog pojasa veća je od dvije oktave (4,2 : 1). Unutar tog frekvencijskog pojasa, valovitost prijenosnog parametra $|S_{21}|$ ne prelazi vrijednost od 0,044 dB, a $|S_{23}| < -22$ dB i $|S_{22}| < -32$ dB.



Slika 7.15. Širokopojasno Wikinsonovo djelilo s trima parovima četvrtvalnih odsječaka



Slika 7.16. Odziv raspršnih parametara Wilkinsonova djelila s trima odsječcima

7.2.4. Nejednoliko dijeljenje snage i Wilkinsonovo djelilo s više izlaznih grana

Wilkinsonovim djelilom snaga se može dijeliti i na nejednake obroke. Mikrotrakasta izvedba prikazana je na slici 7.17. Ako odnos snage između prolaza 2 i 3 označimo s $k^2 = P_3/P_2$, onda se mogu primijeniti sljedeće formule za projektiranje djelila:

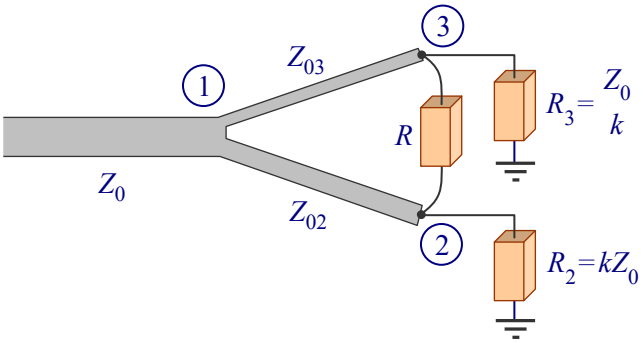
$$Z_{03} = Z_0 \sqrt{\frac{1+k^2}{k^3}}\ , \tag{7–16}$$

$$Z_{02} = k^2 Z_{03} = Z_0 \sqrt{k(1+k^2)}\,, \tag{7–17}$$

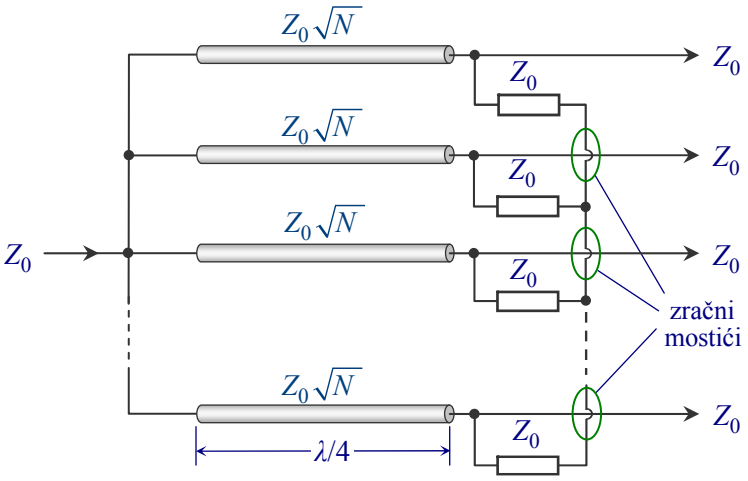
$$R = Z_0\left(k + \frac{1}{k}\right). \tag{7–18}$$

Za $k = 1$ ti se rezultati pojednostavnjuju na slučaj jednolikog dijeljenja snage. Također valja uočiti da su izlazne prijenosne linije prilagođene na impedancije $R_2 = Z_0 k$, odnosno $R_3 = Z_0/k$, a ne na karakterističnu impedanciju sustava Z_0. Stoga u praksi treba dodati četvrtvalne transformatore s pomoću kojih se obavlja daljnja transformacija impedancije na Z_0.

Wilkinsonovo djelilo može se preinačiti u djelilo s više od dva izlazna prolaza, kao što je prikazano na slici 7.18. Sklop s N izlaznih prolaza može se prilagoditi na svim prolazima ako karakteristična impedancija svih N istovjetnih četvrtvalnih transformatora impedancije iznosi $Z_0\sqrt{N}$. Tad su ujedno svi izlazni prolazi međusobno izolirani. Nedostatak ove konfiguracije čine zračni mostići koji služe za priključivanje izolacijskih otpora, što znatno otežava izradu planarne strukture.



Slika 7.17. Wilkinsonovo djelilo s nejednolikim dijeljenjem snage



Slika 7.18. Djelilo s više izlaznih prolaza

7.3. Usmjerni sprežnici i hibridi

U odjeljku 5.7.3. o raspršnim parametrima četveroprolaznih mreža vidjeli smo da recipročna nerefleksivna mreža bez gubitaka odgovara sklopu usmjernog sprežnika. Osnovno načelo rada usmjernog sprežnika može se objasniti uz pomoć slike 7.19 koja prikazuje dva uobičajena simbola usmjernoga sprežnika i definicije prolaza. Usmjerni se sprežnik obično sastoji od dviju prijenosnih linija (ili valovoda) koje su međusobno elektromagnetski spregnute tako da valovi snage na njihovim prolazima zadovoljavaju raspršnu matricu (5–221), odnosno raspršne matrice (5–224) ili (5–226). Postoji čitav niz različitih izvedaba usmjernih sprežnika.

Snaga dovedena na prolaz 1 (*ulazni prolaz*) spregnuta je s prolazom 3 (*spregnuti prolaz*) na što upućuje koeficijent sprege $|S_{13}|^2 = \beta^2$. U matrici (5–221). Preostali se dio ulazne snage prenosi na prolaz 2 (*izravni prolaz*) na što upućuje koeficijent prijenosa snage $|S_{12}|^2 = \alpha^2 = 1 - \beta^2$. U idealnom usmjernom sprežniku prolaz 4 ne prima snagu iz prolaza 1 pa se obično naziva *izolirani prolaz* (ili *raspregnuti prolaz*). Budući da razlikuje upadni od reflektiranoga vala na prijenosnoj liniji, usmjerni se sprežnik nerijetko rabi za mjerenje reflektirane snage.

Svaki je sprežnik obično opisan ovim veličinama koje su izražene u decibelima:

$$\text{sprega} = C = 10 \log \frac{P_1}{P_3} = -20 \log \beta \quad \text{dB}, \tag{7–19}$$

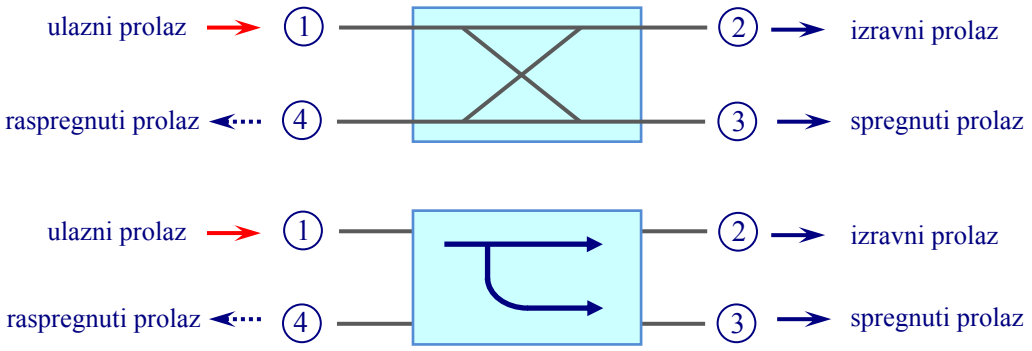
$$\text{usmjerenost} = D = 10 \log \frac{P_3}{P_4} = 20 \log \frac{\beta}{|S_{14}|} \quad \text{dB}, \tag{7–20}$$

$$\text{izolacija} = I = 10 \log \frac{P_1}{P_4} = -20 \log |S_{14}| \quad \text{dB}. \tag{7–21}$$

Koeficijent sprege β^2 pokazuje koliki se dio snage iz glavnog (primarnog) valovoda ili prijenosne linije prenese na spregnuti prolaz sekundarnog valovoda ili linije. To se u praksi iskazuje *spregom C* u decibelima. U stvarnom je sprežniku parametar $|S_{14}|$ različit od nule, tj. *izolacija I* ima neku konačnu vrijednost. Stoga se uvodi mjera kakvoće odvajanja upadnoga vala od reflektiranoga vala koja se naziva *usmjerenost*. Ta se veličina označuje s *D* i definirana je izrazom (7–21). Sprega, usmjerenost i izolacija međusobno su povezani izrazom

$$I = D + C \quad \text{dB}. \tag{7–22}$$

Usmjerenost sprežnika nerijetko se ne može izravno mjeriti, jer je riječ o signalima niske razine. Signal mjeren preko raspregnutog (izoliranog) prolaza nerijetko je maskiran reflektira-



Slika 7.19. Dva uobičajena simbola usmjernoga sprežnika i definicija prolaza

nim valom koji nastaje na nesavršeno prilagođenom teretom, a spregnut je sa sekundarnim valovodom. Primjerice, ako sprega iznosi $C=20$ dB, a usmjerenost $D=35$ dB, te ako je razina reflektirane snage 30 dB ispod razine ulazne snage, onda će razina snage signala prenesenog preko usmjerenog puta biti $D+C=55$ dB ispod razine snage ulaznog signala.

Jedan od načina mjerenja usmjerenosti sprežnika osniva se na uporabi pomičnog prilagođenog tereta. U prvome se koraku sprežnik spoji s generatorom i prilagođenim teretom, kao što je prikazano na slici 7.20a), a zatim se izmjeri izlazna snaga na mjernom (spregnutom) prolazu. Ako je P_{ul} ulazna snaga, onda na mjerni prolaz dolazi snaga $P_C=C^2P_{ul}$, gdje je

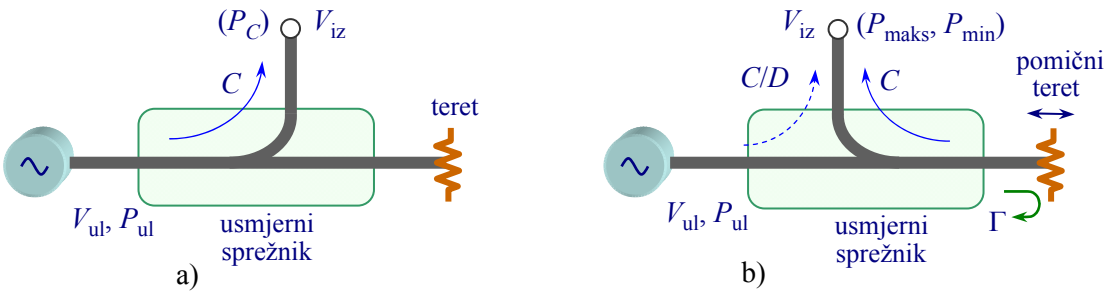
$$C=10^{\frac{-C(\mathrm{dB})}{20}}$$

numerička vrijednost naponskoga koeficijenta sprege, koja je uvijek manja od jedinice.

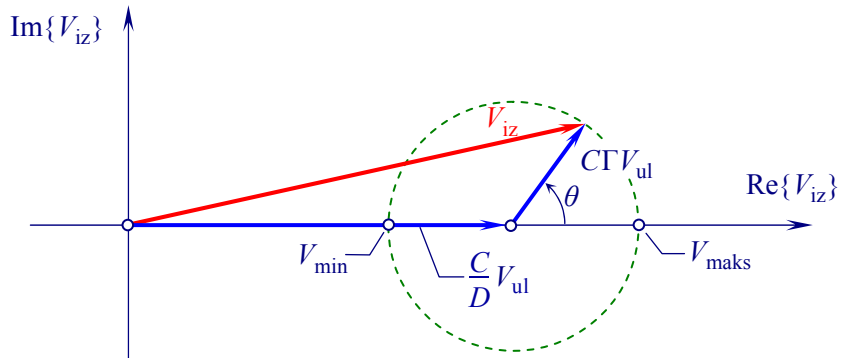
U drugome se koraku sprežnik okrene, kao što je prikazano na slici 7.20b). Ako teret na izlazu glavne grane sprežnika nije idealno prilagođen, onda će na mjernom prolazu doći do interferencije dvaju signala. Prvi od njih izravno stiže iz pobuđenog prolaza, a drugi je posljedica refleksije na teretu i stiže na isti prolaz smanjene amplitude za vrijednost sprege. Budući da je »raspregnuti« signal obično vrlo malog iznosa, tad i tako mali reflektirani signal može posve maskirati raspregnuti signal. No ako se upotrijebi pomični teret, onda se njegovim pomicanjem duž valovoda mijenja fazna razlika između tih signala pa je

$$V_{iz}=V_{ul}\left(\frac{C}{D}+C|\Gamma|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right), \qquad (7\text{–}23)$$

gdje je $D=10^{\frac{D(\mathrm{dB})}{20}}\geq 1$ numerička vrijednost usmjerenosti, $|\Gamma|$ veličina koeficijenta refleksije tereta. Ovdje V_{iz} i V_{ul} označuju fazore napona na izlaznom, odnosno ulaznom prolazu, a θ je fazna razlika između tih fazora. Ako se za detekciju signala upotrijebe detektori s kvadratnom karakteristikom snaga-napon (vidjeti odjeljak 8.5), onda će naponi V_{iz} i V_{ul} biti razmjerni sna-



Slika 7.20. Mjerenje usmjerenosti usmjernoga sprežnika. **a)** Sprežnik u položaju za mjerenje sprege; **b)** sprežnik u položaju za mjerenje izolacije



Slika 7.21. Fazorski prikaz interakcije reflektiranog i izoliranog signala

gama P_{iz} i P_{ul} na istim prolazima. Budući da je riječ o fazorima, naponi »raspregnutog« signala (CV_{ul}/D) i reflektiranog signala ($C|\Gamma|e^{-j\theta}V_{ul}$) vektorski se zbrajaju pa vrh njihove rezultante (7–23) opisuje kružnicu, kao što je prikazano na slici 7.21. Na toj se kružnici mogu odrediti minimalne i maksimalne vrijednosti razine snage prema izrazima:

$$P_{min} = P_{ul}\left(\frac{C}{D} - C|\Gamma|\right)^2, \qquad P_{maks} = P_{ul}\left(\frac{C}{D} + C|\Gamma|\right)^2. \tag{7–24}$$

Sad se iz omjera:

$$M = \frac{P_C}{P_{maks}} = \left(\frac{D}{1+|\Gamma|D}\right)^2, \qquad m = \frac{P_{maks}}{P_{min}} = \left(\frac{1+|\Gamma|D}{1-|\Gamma|D}\right)^2 \tag{7–25}$$

može izračunati usmjerenost sprežnika kao

$$D = M\frac{2m}{m+1}, \quad \text{tj. u decibelima} \quad D = 10\log\left(M\frac{2m}{m+1}\right). \tag{7–26}$$

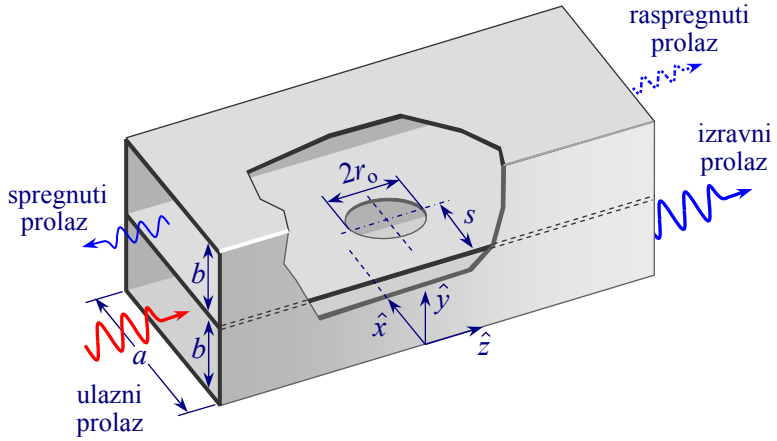
Opisani postupak traži $|\Gamma| < 1/D$ ili, izraženo u decibelima, $RL > D$.

U ovom ćemo odjeljku najprije razmotriti neke od najčešće upotrebljavanih sprežnika poput valovodnih sprežnika kod kojih se sprega ostvaruje preko otvora u stijenki valovoda, a potom ćemo razmotriti sprežnik s paralelno spregnutim prijenosnim linijama i četveroprolazne linijske hibride koji također pripadaju skupini usmjernih sprežnika.

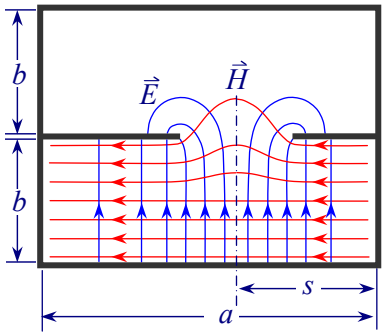
7.3.1. Valovodni sprežnik s jednim otvorom

Teorija sprege preko malog otvora iz odjeljka 5.10.2. koju je razvio Bethe [4], [5] upućuje da su moguće dvije inačice sprežnika koji nosi naziv Betheov sprežnik po izumitelju. Iz teorije sprege preko malog otvora proizlazi da se otvor može nadomjestiti s dvama ekvivalentnim izvorima koji se sastoje od magnetskog i električnog dipola. Prva inačica Betheova sprežnika, prikazana na slici 7.22a), sastoji se od kružnog otvora na zajedničkoj široj stijenki dvaju valovoda. Okomiti električni i aksijalni magnetski dipolni momenti zrače parnom simetrijom u spregnuti valovod, a poprečni magnetski dipolni moment zrači neparnom simetrijom. Promjenom položaja otvora u odnosu na bočnu stijenku valovoda moguće je namjestiti relativne amplitude tih dvaju ekvivalentnih izvora tako da se posve poništi prijenos snage u raspregnuti prolaz, a da se istodobno postigne maksimalni prijenos u spregnuti prolaz. Na slici 7.22b) prikazana je razdioba poprečnih polja u otvoru u trenutku njihovog maksimuma. Pri tomu je donji valovod pobuđen dominantnim modom. Ta je razdioba polja istovjetna onoj na slikama 5.62 i 5.63 pri razmatranju pobude valovoda preko otvora u široj stijenki valovoda.

a)



b)



Slika 7.22. a) Izvedba valovodnoga sprežnika s jednim kružnim otvorom; **b)** razdioba polja u ravnini poprečnog presjeka na mjestu otvora

Osim kružnoga otvora mogu se rabiti i drugi oblici poput uskog proreza znatno kraćeg od valne duljine. Jača se sprega može ostvariti postavljanjem proreza poprijeko u odnosu na tok plošne struje koja teče stijenkama valovoda. Jakost sprege uglavnom ovisi o površini otvora.

Ako se donji valovod na slici 7.22a) pobudi dominantnim modom, onda se polja za taj valovod, u skladu s izrazima (4-89), mogu napisati kao:

$$E_y = A\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z},$$

$$H_x = -\frac{A}{Z_{10}}\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z},$$

$$H_z = \mathrm{j}\frac{\pi A}{\beta a Z_{10}}\cos\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z},$$

gdje je $Z_{10}=\eta_0 k_0/\beta$ valna impedancija moda TE_{10}, a A amplitudna konstanta. Primjenom izraza (5–252) za otvor na mjestu $x=s$, $y=b$ i $z=0$, dobivaju se polarizacijske struje koje proizvodi dominantni mod:

$$\vec{P}_\mathrm{m} = -\alpha_\mathrm{m}\frac{A}{Z_{10}}\left[-\hat{x}\sin\left(\frac{\pi s}{a}\right)+\hat{z}\frac{\mathrm{j}\pi}{\beta a}\cos\left(\frac{\pi s}{a}\right)\right]\delta(x-s)\ \delta(y-b)\ \delta(z),$$

$$\vec{P}_\mathrm{e} = \hat{y}\varepsilon_0\alpha_\mathrm{e}A\sin\frac{\pi s}{a}\delta(x-s)\ \delta(y-b)\ \delta(z).$$

Iz prethodnih izraza i (5–255), slično kao pri izvođenju izraza (5–250) i (5–251), dobivaju se sljedeće amplitude putujućih valova u gornjem valovodu:

$$A_{10}^{+} = -\frac{1}{P_{10}}\int_V \vec{E}_{10}^{-}\cdot\vec{J}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{P_{10}}\int_V \vec{H}_{10}^{-}\cdot\vec{M}\,\mathrm{d}V =$$

$$= -\frac{\mathrm{j}\omega A}{P_{10}}\left[\varepsilon_0\alpha_\mathrm{e}\sin^2\frac{\pi s}{a} - \frac{\mu_0\alpha_\mathrm{m}}{Z_{10}^2}\left(\sin^2\frac{\pi s}{a} + \frac{\pi^2}{\beta^2 a^2}\cos^2\frac{\pi s}{a}\right)\right], \tag{7–27a}$$

$$A_{10}^{-} = -\frac{1}{P_{10}}\int_V \vec{E}_{10}^{+}\cdot\vec{J}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{P_{10}}\int_V \vec{H}_{10}^{+}\cdot\vec{M}\,\mathrm{d}V =$$

$$= -\frac{\mathrm{j}\omega A}{P_{10}}\left[\varepsilon_0\alpha_\mathrm{e}\sin^2\frac{\pi s}{a} + \frac{\mu_0\alpha_\mathrm{m}}{Z_{10}^2}\left(\sin^2\frac{\pi s}{a} - \frac{\pi^2}{\beta^2 a^2}\cos^2\frac{\pi s}{a}\right)\right], \tag{7–27b}$$

gdje je $P_{10}=ab/Z_{10}$ konstanta normiranja snage. Iz jednakosti (7–27) vidi se da je amplituda A_{10}^{+}, vala koji putuje prema prolazu 4, općenito različita od amplitude A_{10}^{-}, vala koji putuje prema prolazu 3, jer je $H_x^{+} = -H_x^{-}$ pa se snaga koja izlazi iz prolaza 4 može posve poništiti ako se postavi $A_{10}^{+}=0$. Za otvore kružnog oblika, uz taj uvjet, iz izraza (5–253) i (7–27a) izlazi:

$$\left(2\varepsilon_0 - \frac{4\mu_0}{Z_{10}^2}\right)\sin^2\frac{\pi s}{a} - \frac{4\pi^2\mu_0}{\beta^2 a^2 Z_{10}^2}\cos^2\frac{\pi s}{a} = 0,$$

$$\left(\frac{4\pi^2}{a^2} - k_0^2\right)\sin^2\frac{\pi s}{a} = \frac{2\pi^2}{a^2},$$

iz čega se može lako izračunati udaljenost otvora od bočne stijenke valovoda, kao

$$s = \frac{a}{\pi}\sin^{-1}\left[\frac{\lambda_0}{\sqrt{2(\lambda_0^2 - a^2)}}\right]. \tag{7–28}$$

Taj izraz upućuje na to da se realno rješenje može dobiti samo za $a \le \lambda_0/\sqrt{2}$. Stoga se uključivanjem donje granice (zaporna frekvencija za dominantni mod) dobiva raspon dimenzije a unutar kojeg je moguće postići potpuno potiskivanje vala u prolazu 4, tj.

$$\frac{\lambda_0}{2} < a < \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}.$$

Prema definiciji (7–19), sprega se može izračunati kao

$$C = 20\log\left|\frac{A}{A_{10}^{-}}\right| \quad \mathrm{dB}, \tag{7–29}$$

a prema definiciji (7–20), usmjerenost iznosi

$$D = 20\log\left|\frac{A_{10}^{-}}{A_{10}^{+}}\right| \quad \mathrm{dB}. \tag{7–30}$$

Proračun Betheova sprežnika započinje izračunom položaja otvora s iz izraza (7–28), a zatim se za zadanu spregu C, iz izraza (7–29) te (7–27) i (5–253) može izračunati polumjer otvora, r_0. Stoga pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 7.2. Betheov sprežnik

Projektirati Betheov usmjerni sprežnik s jednim otvorom na zajedničkoj široj stijenki dvaju paralelnih valovoda u X-pojasu za frekvenciju 9 GHz. Naći polumjer i položaj kružnoga otvora za spregu 24 dB. Izračunati i grafički prikazati spregu i usmjerenost sprežnika u frekvencijskom području od 7 do 11 GHz.

Rješenje:

Dimenzije standardnoga valovoda za frekvencijski pojas X (dodatak J) iznose $a = 22{,}86$ mm i $b = 10{,}16$ mm. Za frekvenciju $f_0 = 9$ GHz valna duljina iznosi $\lambda_0 = c/f_0 = 33{,}33$ mm pa valni broj poprima vrijednost $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = 188{,}5\ \mathrm{m}^{-1}$. Fazni koeficijent u valovodu može se izračunati iz izraza (4–90) kao $\beta_{10} = \sqrt{k_0^2 - (\pi/a)^2} = 129\ \mathrm{rad/m}$. Otuda četvrtvalni razmak između otvora iznosi $d = \pi/(2\beta_0) = 12{,}18$ mm.

Valna impedancija za dominantni mod, u skladu s izrazom (4–91), iznosi $Z_{10} = \eta_0 k_0/\beta_{10} = 550{,}4\ \Omega$. Za konstantu normiranja snage dobiva se $P_{10} = ab/Z_{10} = 4{,}22\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2/\Omega$.

Sad iz izraza (7–28) treba odrediti položaj otvora, tj.

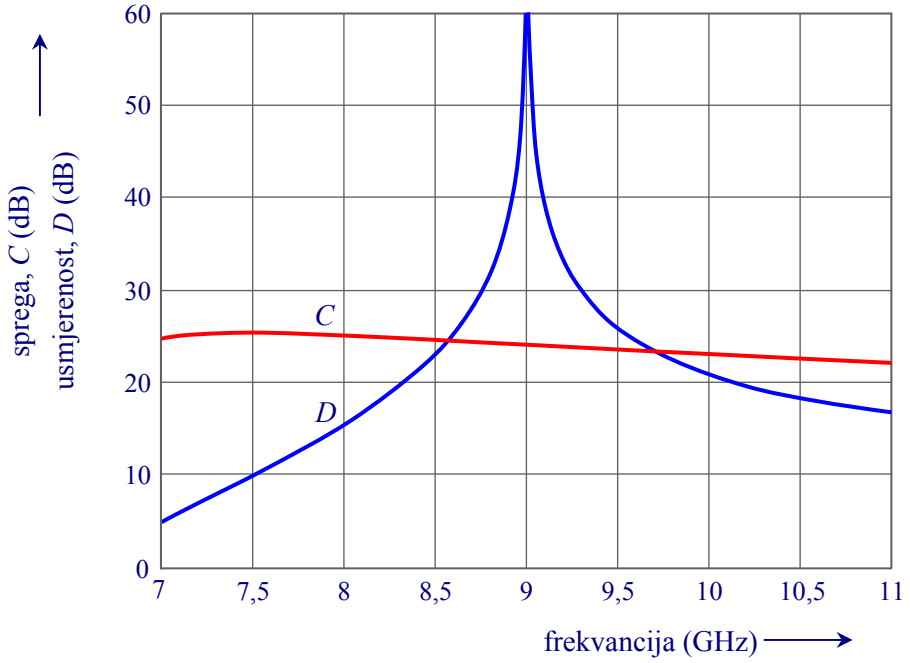
$$s = \frac{a}{\pi}\sin^{-1}\left[\frac{\lambda_0}{\sqrt{2(\lambda_0^2 - a^2)}}\right] = \frac{22{,}86}{\pi}\sin^{-1} 0{,}972 = 9{,}69\ \mathrm{mm}\cdot$$

Otuda je $\sin^2(\pi s/a) = 0{,}9716^2 = 0{,}944$ i $\cos^2(\pi s/a) = 1 - \sin^2(\pi s/a) = 0{,}056$. Za spregu od 24 dB iz izraza (7–29) izlazi $\left|A/A_{10}^-\right| = 10^{C/20} = 10^{24/20} = 15{,}85$. Uvrsti li se taj rezultat u izraz (7–27b) dobiva se

$$\left|\frac{A_{10}^-}{A}\right| = \frac{1}{15{,}85} = \frac{\omega\mu_0}{P_{10}Z_{10}^2}\left[\left(\alpha_e\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} + \alpha_m\right)\sin^2\left(\frac{\pi s}{a}\right) - \frac{\pi^2\alpha_m}{\beta^2 a^2}\cos^2\left(\frac{\pi s}{a}\right)\right] =$$

$$= \alpha_e\frac{2\pi 9\cdot 10^9\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}{4{,}22\cdot 10^{-7}\cdot(550{,}4)^2}\left\{\left[\frac{(550{,}4)^2}{(376{,}7)^2} + 2\right]\cdot 0{,}944 - \frac{2\pi^2}{(129)^2\cdot(22{,}86)^2}\cdot 0{,}056\right\} = 2{,}1\cdot 10^6\,\alpha_e\cdot$$

Otuda je $\alpha_e = 3{,}0\cdot 10^{-8}$. Ovdje je primijenjen izraz (5–253), tj. $\alpha_m = 2\alpha_e$, za vezu između električne i magnetske polarizacije kružnoga otvora.



Slika 7.23. Sprega i usmjerenost Betheova sprežnika

Polumjer otvora može se konačno izračunati iz izraza (5–253), $\alpha_e = 2r_0^3/3 = 3{,}0\cdot 10^{-8}$, a rezultat glasi

$r_o = 3{,}56$ mm.

Izračunavanjem izraza (7–27) i uvrštenjem rezultata u formule (7–29) i (7–30), konačno se mogu naći sprega C i usmjerenost D. Na slici 7.23 prikazane su karakteristike sprege i usmjerenosti Betheova sprežnika u širem frekvencijskom području. Širina frekvencijskog pojasa razmjerno je mala, jer za usmjerenost od 30 dB iznosi svega 537 MHz, a za usmjerenost od 20 dB iznosi 1,81 GHz.

Bethe je također pokazao da se zakretanjem gornjeg valovoda oko osi otvora može postići beskonačna usmjerenost sprežnika (slika 7.24). U tom se slučaju središte otvora postavlja na simetralu šire stijenke, $s = a/2$. Zakrene li se gornji valovod u H-ravnini za kut ψ, promijenit će se amplituda signala u prolazu 4, jer se u tom slučaju mijenja amplituda poprečne komponente magnetskog polja po kosinusnom zakonu, tj. s $\cos\psi$. Pritom okomita komponenta električnog polja ostaje nepromijenjena. Učinak tog zakreta može se ugraditi u prethodni izvod tako da se magnetska polarizacija α_m zamijeni s $\alpha_m \cos\psi$. Tada amplitude valova u izrazima (7–27) na simetrali valovoda, $s = a/2$, poprimaju oblik:

$$A_{10}^{+} = -\frac{\mathrm{j}\omega A}{P_{10}}\left[\varepsilon_0\alpha_e - \frac{\mu_0\alpha_m}{Z_{TE10}^2}\cos\psi\right], \tag{7–31a}$$

$$A_{10}^{-} = -\frac{\mathrm{j}\omega A}{P_{10}}\left[\varepsilon_0\alpha_e + \frac{\mu_0\alpha_m}{Z_{TE10}^2}\cos\psi\right]. \tag{7–31a}$$

Za potpuno poništavanje amplitude vala u prolazu 4, $A_{10}^{+} = 0$, izlazi uvjet

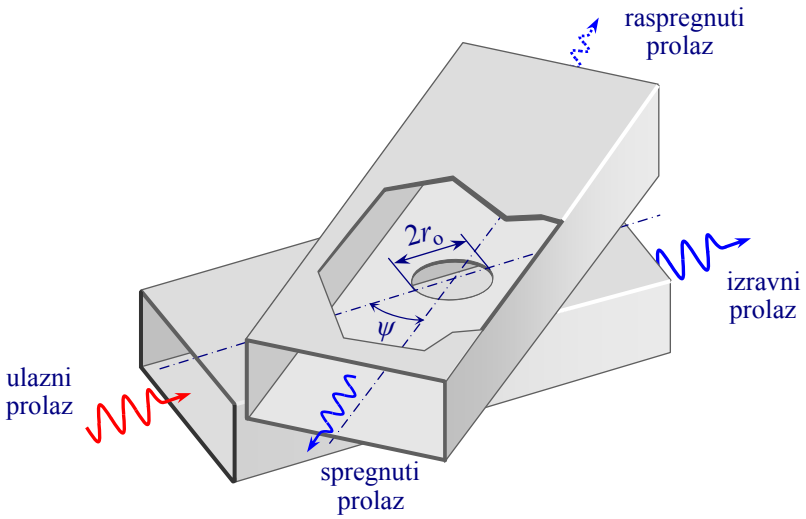
$$\frac{\kappa_0}{2} - \frac{\sigma_0}{Z_{TE10}^2}\cos\ldots] \quad 4,$$

$$\cos\psi = \frac{k_0^2}{2\beta^2}, \tag{7–32}$$

gdje je primijenjena formula $Z_{10} = \eta_0 k_0/\beta$. Sad se izraz (7–29) za spregu svodi na

$$C = 20\log\left|\frac{A}{A_{10}^{-}}\right| = -20\log\frac{4k_0^2 r_0^3}{3ab\beta} \quad \text{dB}. \tag{7–33}$$

Zbog složene geometrije, ta se vrsta sprežnika rjeđe susreće u praksi.

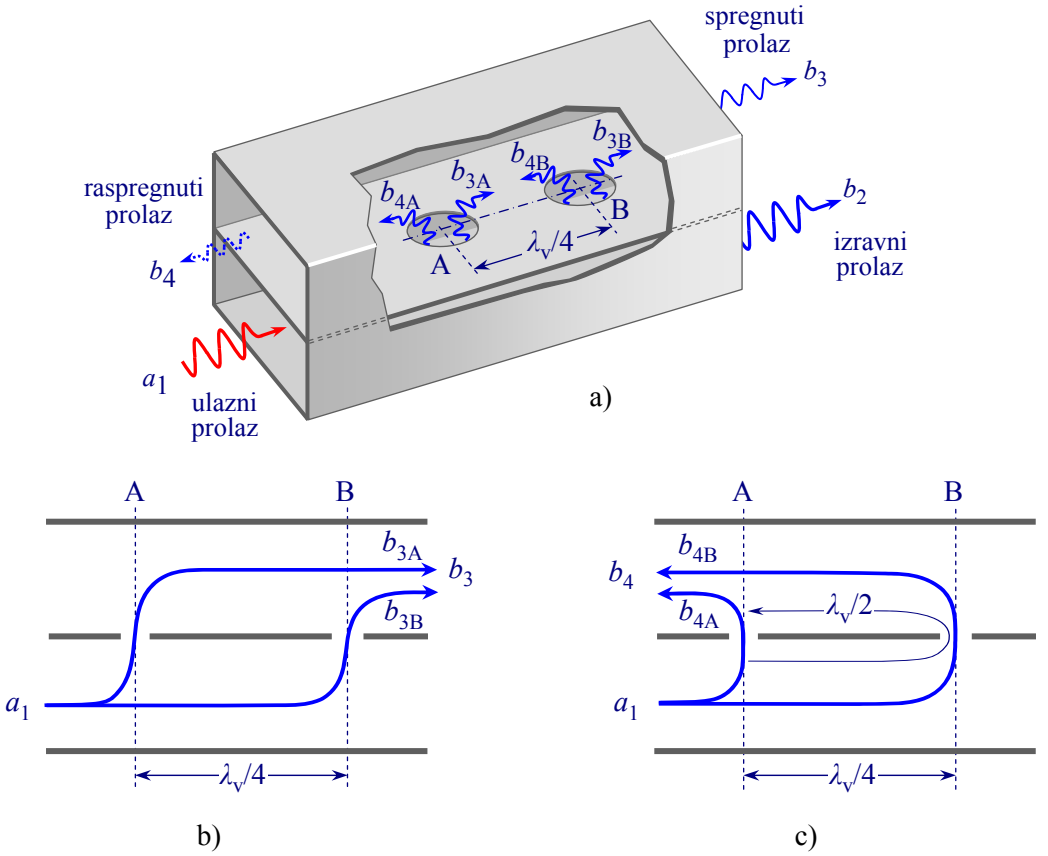


Slika 7.24. Betheov sprežnik sa zakrenutim valovodom

7.3.2. Valovodni sprežnik s više otvora

Betheov sprežnik opisan u odjeljku 7.3.1. uskopojasna je naprava jer se izraza (7–28) izlazi da optimalan pomak otvora ovisi o valnoj duljini, tj. Stoga se umjesto jednog otvora obično rabe sprežnici s dvama i više otvora u široj stijenki valovoda. Na slici 7.25a) prikazana je, primjerice, izvedba sprežnika s dvama otvorima. Za ispravan rad sprežnika, otvori moraju biti međusobno jednaki i znatno manji od valne duljine. Polja koja prelaze iz donjeg u gornji valovod preko otvora A i B imat će razdiobu poput one na slici 7.22b). Te otvore možemo zamisliti kao izvore koherentnog signala jednake amplitude. Pritom valovi snage b_{3A} i b_{3B} stižu na prolaz 3 jednake faze jer su od prolaza 1 do prolaza 3 prešli jednak put jednakom faznom brzinom (slika 7.25b)). Valja uočiti da smjer tih valova odgovara smjeru vala u donjem valovodu. Posve se drukčije ponašaju valovi b_{4A} i b_{4B} koji putuju u suprotnome smjeru prema prolazu 4 jer njihova fazna razlika ovisi o razmaku između otvora. Tako će, primjerice, za četvrtvalni razmak ($\lambda_v/4$) val snage b_{4B} biti suprotne faze od vala b_{4A} jer je prešao dulji put za pola valne duljine, kao što je prikazano na slici 7.25c). Otuda usmjerenost D ovisi o stupnju poništavanja tih dvaju valova

Povećanjem broja otvora može se proširiti frekvencijski pojas i pojačati sprega. Za spregu od 20 dB, iz donjeg se valovoda u gornji prenese svega 1% snage, tj. $|S_{31}|^2=\beta^2=10^{-20/10}=0{,}01$. Stoga na prolaz 2 dolazi 99% upadne snage jer je $|S_{21}|^2=1-|S_{31}|^2=1-10^{-20/10}=0{,}99$. Budući da je naponski koeficijent sprege jednak drugome korijenu koeficijenta prijenosa snage, jakost polja na prolazu 2 manja je za 0,5% od upadnoga polja, tj. $|S_{21}|=\sqrt{0{,}99}=0{,}995$. Stoga vrijedi pretpostavka da su vrijednosti polja na obama otvorima podjednake. No od jednog do drugog otvora faza se mijenja u ovisnosti o njihovom međusobnom razmaku (slika 7.26).



Slika 7.25. a) Valovodni usmjerni sprežnik s dvama istovjetnim otvorima; **b)** i **c)** objašnjenje kako nastaju valovi snage u prolazima 3 i 4

Kao što smo vidjeli kod sprežnika s jednim otvorom, koeficijenti sprege za jedan i drugi smjer rasprostiranja u gornjem valovodu općenito nisu jednaki. Za sprežnik s više otvora valja posebno označiti koeficijente sprege za ta dva smjera. Neka su κ_n^+ i κ_n^- koeficijenti sprege za pozitivni, odnosno negativni smjer rasprostiranja. Ako su razmaci između susjednih otvora jednaki d, onda se ukupni val snage koji napušta prolaz 3 putujući u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$ može napisati kao

$$b_3 = a_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta N d} \sum_{n=0}^{N} \kappa_n^+ , \tag{7–34}$$

gdje je a_1 val snage koji upada na prolaz 1. S druge strane, val snage koji napušta prolaz 4 može se napisati kao

$$b_4 = a_1 \sum_{n=0}^{N} \kappa^- \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2n\beta d} , \tag{7–35}$$

gdje n-ta komponenta vala prevali ukupni put duljine $2n\beta d$. Ovdje je položaj referentne fazne ravnine uzet u sredini nultog otvora ($n = 0$). Iz definicije sprege (7–19) i usmjerenosti (7–20) izlazi:

$$C = -20 \log \left| \frac{b_3}{a_1} \right| = -20 \log \left| \sum_{n=0}^{N} \kappa_n^+ \right| \quad \text{dB}, \tag{7–36}$$

$$D = 20 \log \left| \frac{b_3}{b_4} \right| = 20 \log \left| \frac{\sum_{n=0}^{N} \kappa_n^+}{\sum_{n=0}^{N} \kappa_n^- \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2n\beta d}} \right| \quad \text{dB}. \tag{7–37}$$

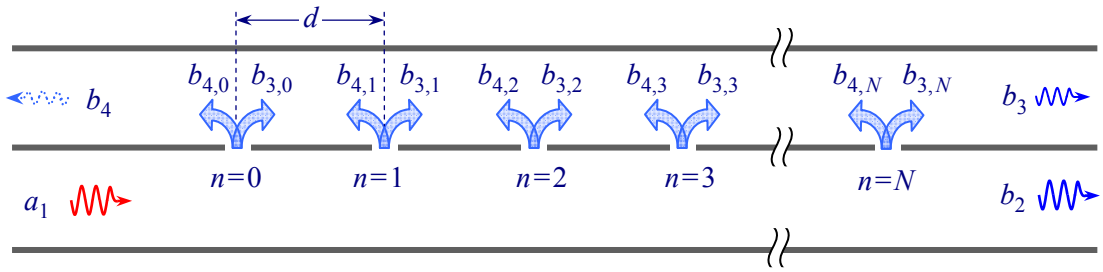
Uzmu li se kružni otvori polumjera r_n smješteni na jednaku udaljenost s od bočne stijenke, tad će svi koeficijenti sprege ovisiti o trećoj potenciji polumjera otvora kao:

$$\kappa_n^+ = K^+ r_n^3 , \qquad \kappa_n^- = K^- r_n^3 ,$$

gdje su K^+ i K^- konstante jednake za sve otvore, ali ovise o frekvenciji. Sad se izrazi (7–36) i (7–37) svode na:

$$C = -20 \log \left| K^+ \right| - 20 \log \sum_{n=0}^{N} r_n^3 \quad \text{dB}, \tag{7–38}$$

$$D = -C - 20 \log \left| K^- \right| - 20 \log \left| \sum_{n=0}^{N} r_n^3 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2n\beta d} \right| \quad \text{dB}. \tag{7–39}$$



Slika 7.26. Shematski prikaz valovodnoga usmjernog sprežnika s $N+1$ otvorom

Drugi član u izrazu (7–38) ne ovisi o frekvenciji, a prvi član ne ovisi o izboru polumjera otvora r_n, ali se sporo mijenja s frekvencijom. Slično je i s izrazom (7–39), gdje se prva dva člana sporo mijenjaju s frekvencijom, a treći član jako ovisi o frekvenciji zbog poništavanja faza u sumi.

Nije nužno da su polumjeri otvora međusobno jednaki. Omjer sprega u nizu otvora može se poredati prema koeficijentima binomnoga ili Čebiševljeva polinoma, kao što je to učinjeno u poglavlju 6 pri razmatranju širokopojasnih transformatora impedancije. Na to nas navodi sličnost zadnjega člana u sumi izraza (7–39)

$$F = \left| \sum_{n=0}^{N} r_n^3 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2n\beta d} \right| \tag{7–40}$$

s izrazom za ukupni koeficijent refleksije na ulazu transformatora impedancije s više četvrtvalnih odsječaka (odjeljak 6.5.1).

Maksimalno glatki odziv sprege usmjernoga sprežnika dobiva se kad su koeficijenti sprege razmjerni koeficijentima binomnoga polinoma

$$r_n^3 = K_\mathrm{a} C_n^N , \tag{7–41}$$

gdje je K_a konstanta koju valja odrediti, a C_n^N binomni koeficijenti (6–39) dani u odjeljku 6.6. Budući da su veličine N i C iz kojih se izračunava konstanta K^+ obično unaprijed zadane, konstanta K_a može se naći uvrštenjem izraza (7–41) u (7–38) pa izlazi

$$20\log K_\mathrm{a} = -\left(C + 20\log\left|K^+\right| + 20\log\sum_{n=0}^{N} C_n^N \right). \tag{7–42}$$

Kad je poznata vrijednost konstante K_a, tad se iz izraza (7–41) izravno dobivaju potrebni polumjeri otvora. Pritom razmak između susjednih otvora d mora iznositi jednu četvrtinu valne duljine vala u valovodu, $\lambda_\mathrm{v}/4$, na središnjoj frekvenciji.

Čebiševljev odziv simetričnog sprežnika ($r_0 = r_N$, $r_1 = r_{N-1}$, itd.) za neparan broj otvora $N+1$ dobiva se tako da se funkcija F dana izrazom (7–40) razvije kao

$$F = \left| \sum_{n=0}^{N} r_n^3 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2n\theta} \right| = 2\sum_{n=0}^{N/2} r_n^3 \cos(N-2n)\theta , \tag{7–43a}$$

gdje je $\theta = \beta d$. Za parni broj otvora sumiranje se obavlja do člana $(N-1)/2$. Taj je rezultat zatim potrebno izračunati za Čebiševljev polinom N-tog stupnja kao

$$F = 2\sum_{n=0}^{N/2} r_n^3 \cos(N-2n)\theta = K_\mathrm{a} \left| T_N\left(\cos\theta / \cos\theta_\mathrm{m}\right) \right| , \tag{7–43b}$$

gdje je potrebno naći konstante θ_m i K_a. Za $\theta = 0$, iz izraza (7–43) izlazi $F = K_\mathrm{a}|T_N(1/\cos\theta_\mathrm{m})|$ pa se iz izraza (7–38) dobiva

$$\begin{aligned} C &= -20\log\left|K^+\right| - 20\log F\big|_{\theta=0} = \\ &= -20\log\left|K^+\right| - 20\log K_\mathrm{a} - 20\log\left|T_N(1/\cos\theta_\mathrm{m})\right| \ \ \mathrm{dB}. \end{aligned} \tag{7–44}$$

Sad se usmjerenost može izračunati iz izraza (7–39) kao

$$\begin{aligned} D &= -C - 20\log\left|K^-\right| - 20\log F = \\ &= 20\log\left|\frac{K^+}{K^-}\right| + 20\log\left|\frac{T_N(1/\cos\theta_\mathrm{m})}{T_N(\cos\theta/\cos\theta_\mathrm{m})}\right| \ \ \mathrm{dB}. \end{aligned} \tag{7–45}$$

Budući da član K^+/K^- ovisi o frekvenciji, frekvencijska obilježja usmjerenosti odstupat će od Čebiševljeva odziva. No to će odstupanje biti vrlo slabo izraženo jer član K^+/K^- neznatno pridonosi usmjerenosti, osim možda u sredini frekvencijskog pojasa. Ispuštanjem tog člana, minimalna vrijednost usmjerenosti dobiva se uz uvjet $T_N(\cos\theta/\cos\theta_m)=1$, tj.

$$D_{\min} = 20\log T_N(1/\cos\theta_m) \quad \text{dB}. \tag{7–46}$$

Taj izraz pokazuje da zadavanje vrijednosti $D_{\min}$ čvrsto određuje vrijednost faktora $\cos\theta_m$ koji zatim čvrsto određuje širinu frekvencijskog pojasa i obratno. Drugim riječima, kad se jednom odabere $D_{\min}$ ili $\cos\theta_m$, tad je određeno i sve ostalo . Nakon toga, iz jednakosti (7–44) može se izračunati konstanta K_a uz zadanu spregu C u sredini frekvencijskog pojasa. Sad se konačno iz izraza (7–43) mogu odrediti polumjeri otvora r_n.

Primjer 7.3. Proračun sprežnika Čebiševljeva odziva

Proračunati usmjerni sprežnik Čebiševljeva odziva sprege 20 dB i minimalne usmjerenosti 30 dB na središnjoj frekvenciji 9 GHz. Uporabiti tri kružna otvora smještena na pravcu udaljenom $s=a/4$ od bočne stijenke valovoda za frekvencijski pojas X (slika 7.27). Naći polumjere otvora i korisnu širinu pojasa te prikazati obilježja sprege i usmjerenosti u rasponu frekvencija od 7 do 11 GHz.

Rješenje:

Izmjere valovoda i frekvencija ($f_0=9$ GHz) jednaki onima iz primjera 7.2 pa su jednaki i svi ostali parametri: $\lambda_0=33{,}33$ mm, $k_0=188{,}5$ m^{-1}, $\beta_{10}=129$ rad/m, $Z_{10}=550{,}4\ \Omega$ i $P_{10}=4{,}22\cdot10^{-7}$ m$^2/\Omega$.

Četvrtvalni razmak između otvora poprima vrijednost $d=\pi/(2\beta_{10})=12{,}18$ mm. Za zadanu udaljenost otvora od bočne stijenke, $s=a/4$, iz izraza (7–27) izlazi:

$$K^+ = \frac{2k_0}{3\eta_0 P_{10}}\left[\sin^2\frac{\pi s}{a} - \frac{2\beta^2}{k_0^2}\left(\sin^2\frac{\pi s}{a} + \frac{\pi^2}{\beta^2 a^2}\cos^2\frac{\pi s}{a}\right)\right] = 3{,}953\cdot10^5,$$

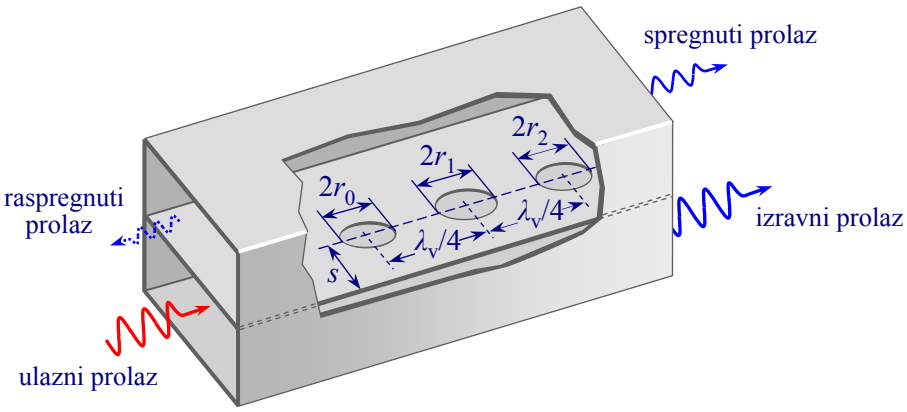
$$K^- = \frac{2k_0}{3\eta_0 P_{10}}\left[\sin^2\frac{\pi s}{a} + \frac{2\beta^2}{k_0^2}\left(\sin^2\frac{\pi s}{a} - \frac{\pi^2}{\beta^2 a^2}\cos^2\frac{\pi s}{a}\right)\right] = 3{,}454\cdot10^5.$$

Za usmjerni sprežnik s trima otvorima $N=2$ pa se iz (7–46) dobiva:

$$30 = 20\log T_2(1/\cos\theta_m)$$

$$31{,}62 = T_2(1/\cos\theta_m) = \cosh(2\cosh^{-1}(1/\cos\theta_m)),$$

$$\cos\theta_m = 0{,}248.$$



Slika 7.27. Čebiševljev sprežnik s trima kružnim otvorima

Otuda je na rubovima frekvencijskog područja $\theta_m = 75{,}66°$, tj. $\pi - \theta_m = 104{,}3°$. Parametar K_a može se izračunati primjenom izraza (7–44) kao:

$$C = 20 = -20\log\left|3{,}953\cdot 10^5\right| - 20\log K_a - 30 \quad \text{dB},$$

$$20\log K_a = -161{,}94,$$

$$K_a = 8\cdot 10^{-9}.$$

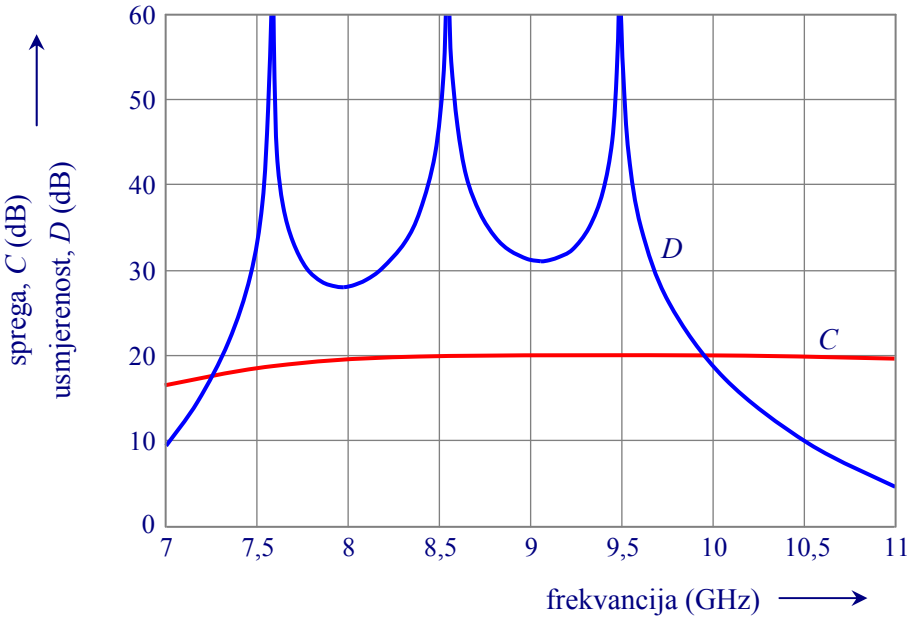
Polumjeri otvora mogu se odrediti primjenom izraza (7–43a) i (6–51b) pa se za $N=2$ dobiva:

$$F = 2(r_0^3\cos 2\theta + r_1^3) = K_a\left|\frac{1+\cos 2\theta}{\cos^2\theta_m} - 1\right|,$$

$$r_0 = r_2 = \left(\frac{K_a}{2\cos^2\theta_m}\right)^{1/3} = \frac{8\cdot 10^{-9}}{2\cdot(0{,}248)^2} = 4{,}03\,\text{mm},$$

$$r_1 = \left(\frac{K_a}{2\cos^2\theta_m} - K_a\right)^{1/3} = \frac{8\cdot 10^{-9}}{(0{,}248)^2} - 8\cdot 10^{-9} = 4{,}96\,\text{mm}.$$

Sprega i usmjerenost mogu se izračunati iz izraza (7–44), odnosno (7–45). Te su veličine prikazane na slici 7.28 unutar frekvencijskog područja 7-11 GHz. Može se uočiti da se područje maksimalne usmjerenosti (7,4 – 9,7 GHz) sasvim ne poklapa s područjem minimalne sprege (10 – 11 GHz). To jest, središte područja minimalne usmjerenosti neznatno je pomaknuto na niže frekvencije (blizu 8 GHz) gdje je sprega neznatno jača od one na proračunskoj frekvenciji (9 GHz). Oko frekvencije 8 GHz usmjerenost je manja za 2 dB od zadane vrijednosti koja iznosi 30 dB.

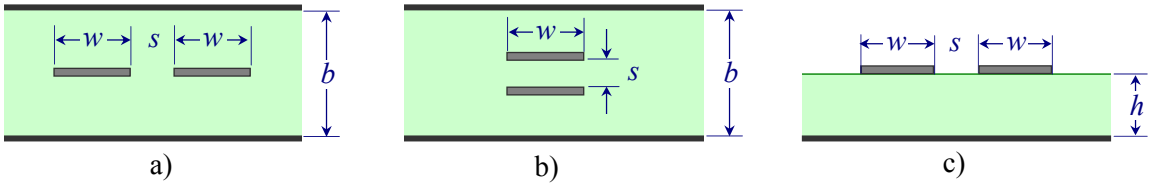


Slika 7.28. Sprega i usmjerenost valovodnog sprežnika Čebiševljeva odziva s trima otvorima

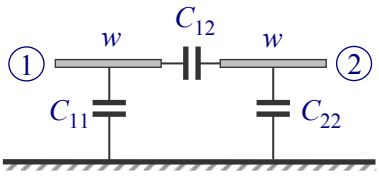
No postoje i druge izvedbe poput sprežnika s otvorima u bočnoj stijenki valovoda te sprežnika kod kojeg se valovodi križaju pod pravim kutom ($\psi = 90°$), a na kvadratnom sjecištu nalaze se dva dijagonalno postavljena otvora [2], [9]. Vrijednost usmjerenosti ovog posljednjeg sprežnika stalna je unutar vrlo širokog frekvencijskog pojasa. No sprega upućuje na nešto manju širinu pojasa.

7.3.3. Usmjerni sprežnici sa spregnutim linijama

Najčešće strukture spregnutih prijenosnih linija koje nalazimo u praksi prikazane su na slici 7.29, a mogu se nadomjestiti osnovnom strukturom koja se sastoji od triju vodiča ili triju žice, kao što je prikazano na slici 7.30.



Slika 7.29. Različite strukture spregnutih linija; **a)** koplanarne spregnute simetrične trakaste linije, **b)** paralelne trakaste linije spregnute po širini traka, **c)** spregnute mikrotrakaste linije



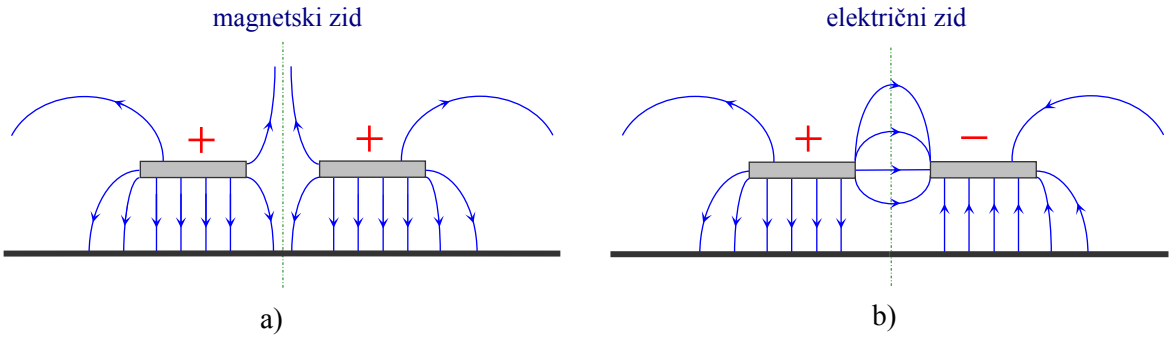
Slika 7.30. Spregnute prijenosne linije s trima vodičima

Ako se može pretpostaviti da se spregnutim linijama rasprostire ravni *TEM*-val, onda se njihova električna obilježja mogu u cijelosti odrediti preko efektivnih kapaciteta koji vladaju između linija i preko pripadajuće fazne brzine elektromagnetskoga vala. Kao što je prikazano na slici 7.30, C_{12} označuje kapacitet između dvaju trakastih vodiča bez prisutnosti uzemljene ravnine, a C_{11} i C_{22} označuju kapacitete između svakog pojedinačnog trakastog vodiča i uzemljene ravnine bez drugog trakastog vodiča. Kad su trake jednakih širina i debljina, a nalaze se na istoj visini iznad uzemljene ravnine, onda je $C_{11}=C_{22}$.

Razmotrimo sad dva posebna slučaja pobude spregnutih linija, tj. parni i neparni mod pobude. Pri parnoj pobudi, struje u obama trakastim vodičima jednakih su jakosti i istoga smjera. No pri neparnoj pobudi struje su jednakih jakosti, ali suprotnoga smjera. Na slici 7.31 naznačene su silnice električnog i magnetskog polja obaju modova pobude. Za parni mod pobude silnice električnog polja pokazuju parnu simetriju oko ravnine simetrije pa između dvaju trakastih vodiča ne teče struja, što znači da je kapacitet C_{12} efektivno otvoren (u praznome hodu). Tad ravnina simetrije označuje savršen magnetski zid. Stoga je kapacitet između pojedinačnog trakastog vodiča i uzemljene ravnine jednak

$$C_e = C_{11} = C_{22}\,, \tag{7–47}$$

uz pretpostavku da su obje trake jednake i da se nalaze na istoj visini iznad uzemljene ravnine.



Slika 7.31. Razdioba električnog polja u spregnutoj liniji pobuđenoj: **a)** parnim i **b)** neparnim modom

Pri tomu svaki trakasti vodič valja promatrati za sebe i uz taj uvjet može se naći kapacitet C_e između trakastog vodiča i uzemljene ravnine uz savršeni magnetski zid. Tad je karakteristična impedancija za parni mod pobude

$$Z_{0e} = \sqrt{\frac{L}{C_e}} = \frac{\sqrt{LC_e}}{C_e} = \frac{1}{v_f C_e}, \tag{7–48}$$

gdje je v_f fazna brzina na prijenosnoj liniji.

Za neparni mod pobude silnice električnog polja pokazuju neparnu simetrije oko simetrale koja se nalazi na nultome potencijalu. Stoga se ravnina simetrije može nadomjestiti savršeno vodljivom uzemljenom ravninom koja prolazi sredinom kapaciteta C_{12}. Drugim riječima, ta ravnina simetrije označuje savršeni električni zid. Opet valja svaku traku promatrati zasebno i

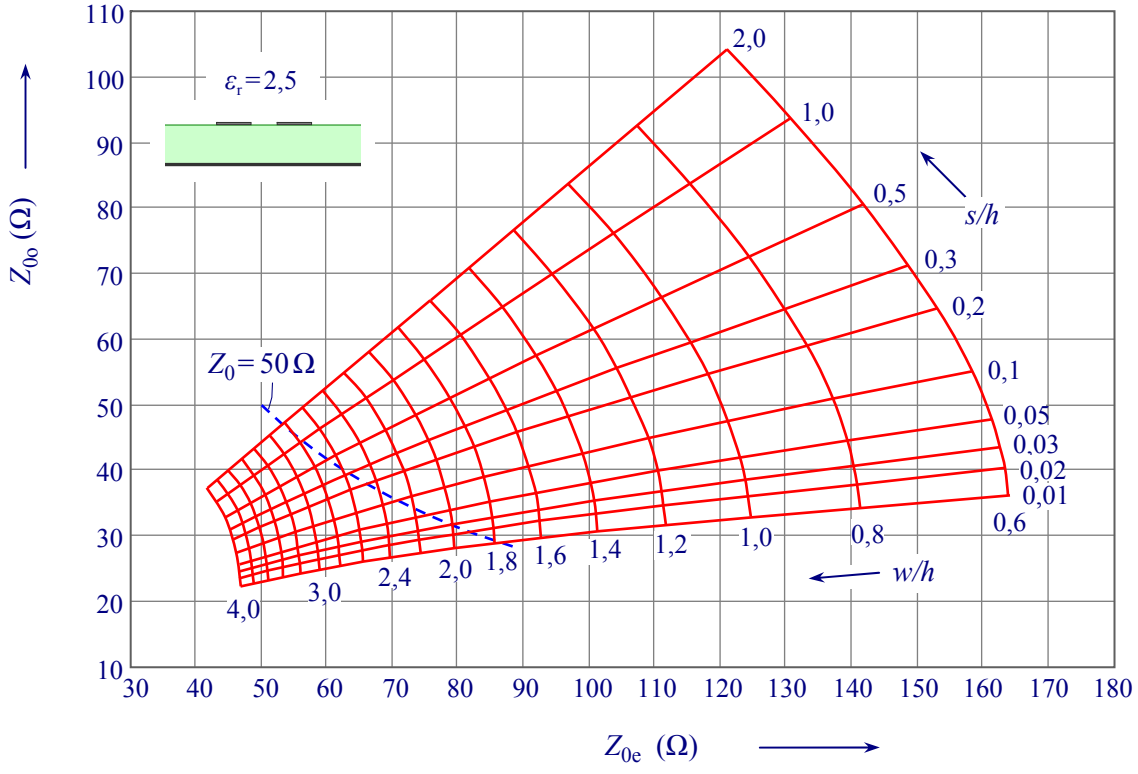
$$Z_{0o} = \frac{1}{v_f C_o}. \tag{7–49}$$

naći kapacitet između traka i uzemljenih ravnina. Otuda je efektivni kapacitet između svake pojedinačne trake i uzemljenih ravnina jednak

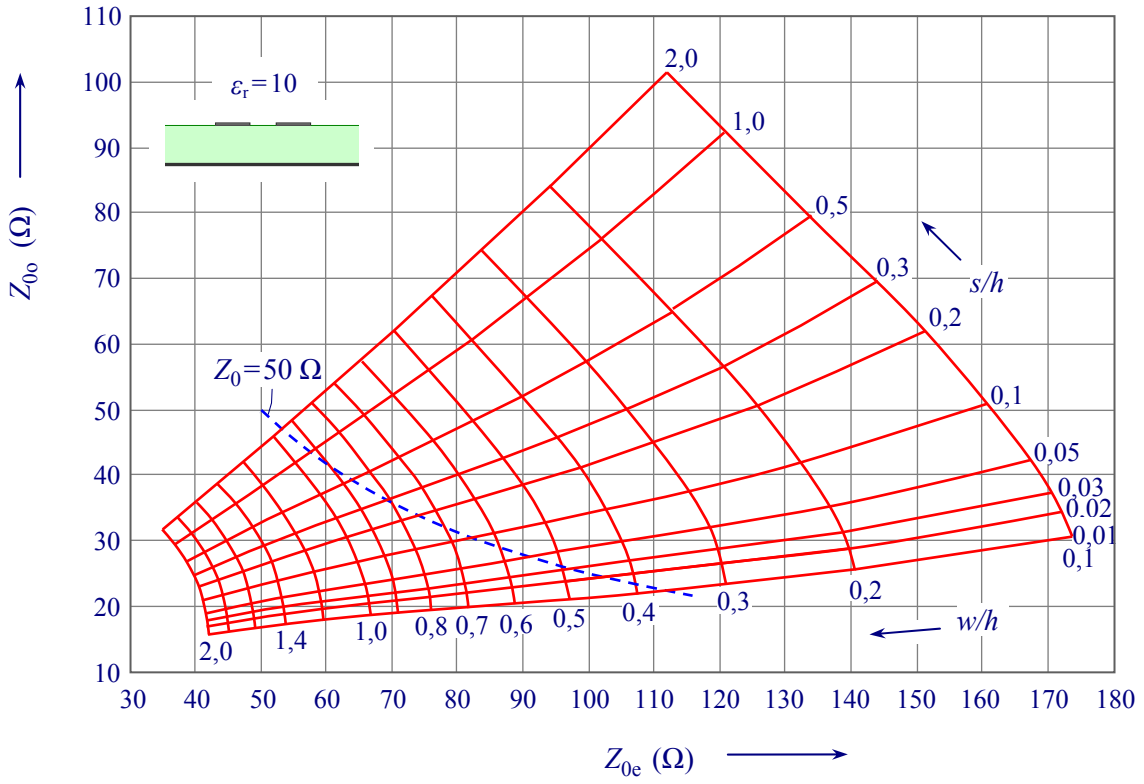
$$C_o = C_{11} + 2C_{12} = C_{22} + 2C_{12} \tag{7–50}$$

pa je karakteristična impedancija za neparni mod pobude

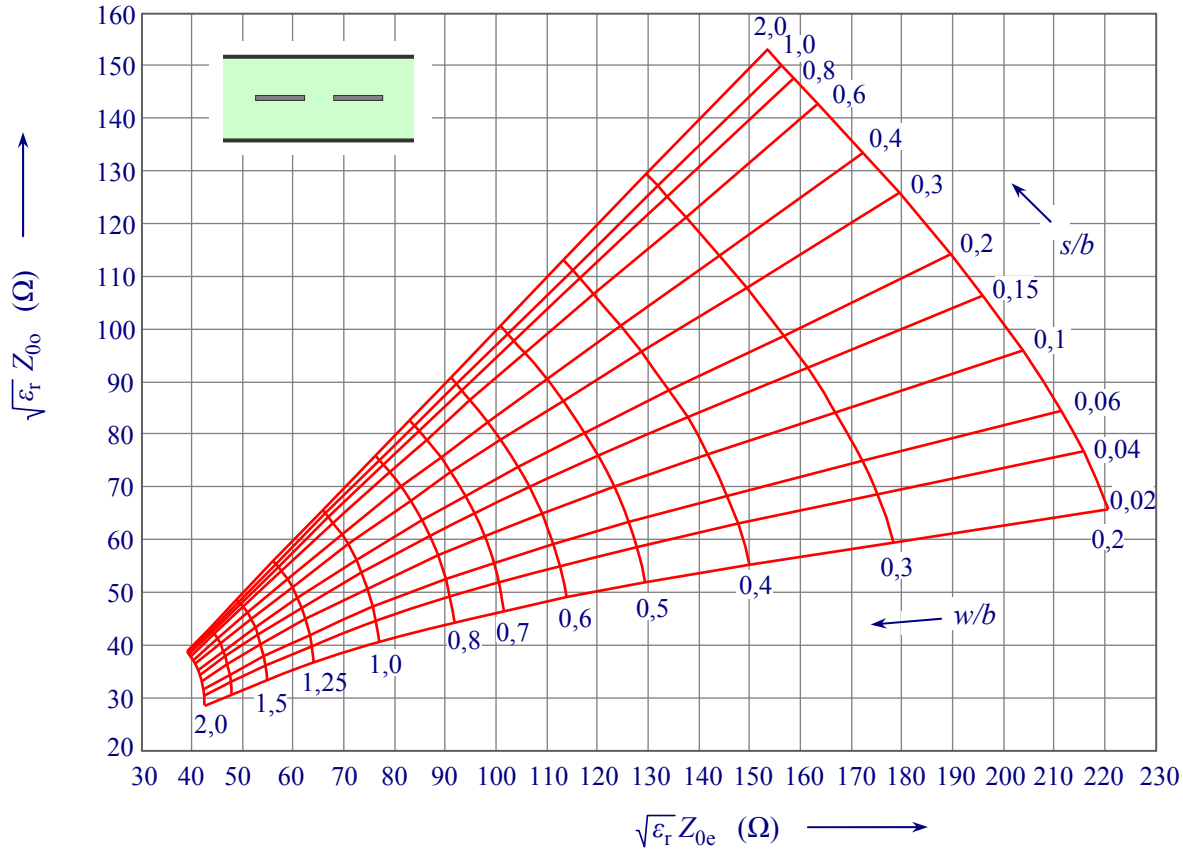
Drugim riječima, Z_{0e} karakteristična je impedancija jednog trakastog vodiča gledano u odnosu na uzemljenu ravninu pri pobudi parnim modom. Slično je tako Z_{0o} karakteristična impedancija jednog trakastog vodiča gledano u odnosu na uzemljenu ravninu pri pobudi neparnim modom. Proizvoljna pobuda spregnute linije može se razmatrati kao superpozicija odgovarajućih amplituda za parnu i neparnu pobudu.



Slika 7.32. a) Spregnute mikrotrakaste linije ($\varepsilon_r = 2{,}5$)



Slika 7.32. b) Spregnute mikrotrakaste linije ($\varepsilon_r = 10$)



Slika 7.33. Karakteristične impedancije za parni i neparni mod spregnutih trakastih linija

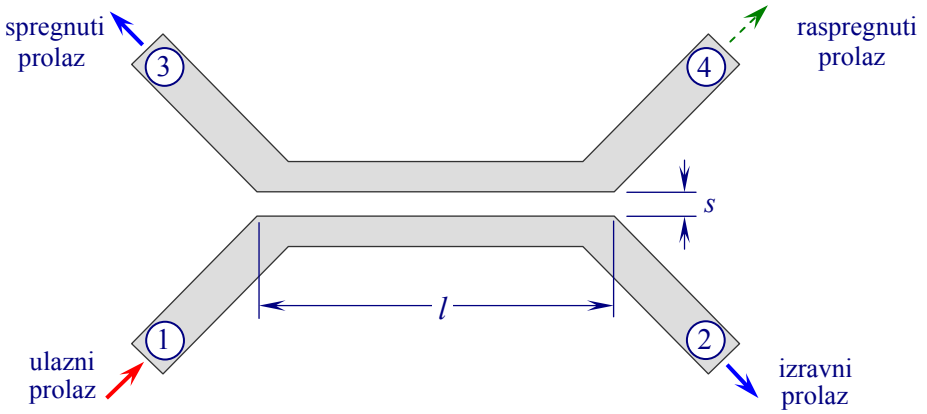
Pri sprezi prijenosnih *TEM*-linija, kapaciteti C_e i C_o mogu se naći primjenom analitičkih postupaka konformnog preslikavanja. No pri razmatranju sprege kvazi-*TEM*-linija nerijetko treba primijeniti složene numeričke postupke. Na tržištu postoji više programskih paketa za izračunavanje parametara spregnutih linija. U literaturi se mogu naći podatci o karakterističnoj impedanciji i faznoj brzini u grafičkom ili tabličnom obliku. Za paralelne spregnute mikrotrakaste linije parametri se moraju izračunati za svaku permitivnost podloge posebno.

Grafički prikaz karakteristične impedancije za parni i neparni mod u funkciji geometrijskih koordinata simetrične spregnute mikrotrakaste linije može se naći na slikama 7.32. Prikazane su vrijednosti za relativnu permitivnost podloge ε_r=2,5 i 10 te za visine podloge znatno manje od valne duljine, $h<\lambda/10$.

Na slici 7.33 prikazane su karakteristike sprežnika sa spregnutim trakastim linijama.

Proračun linijskoga sprežnika

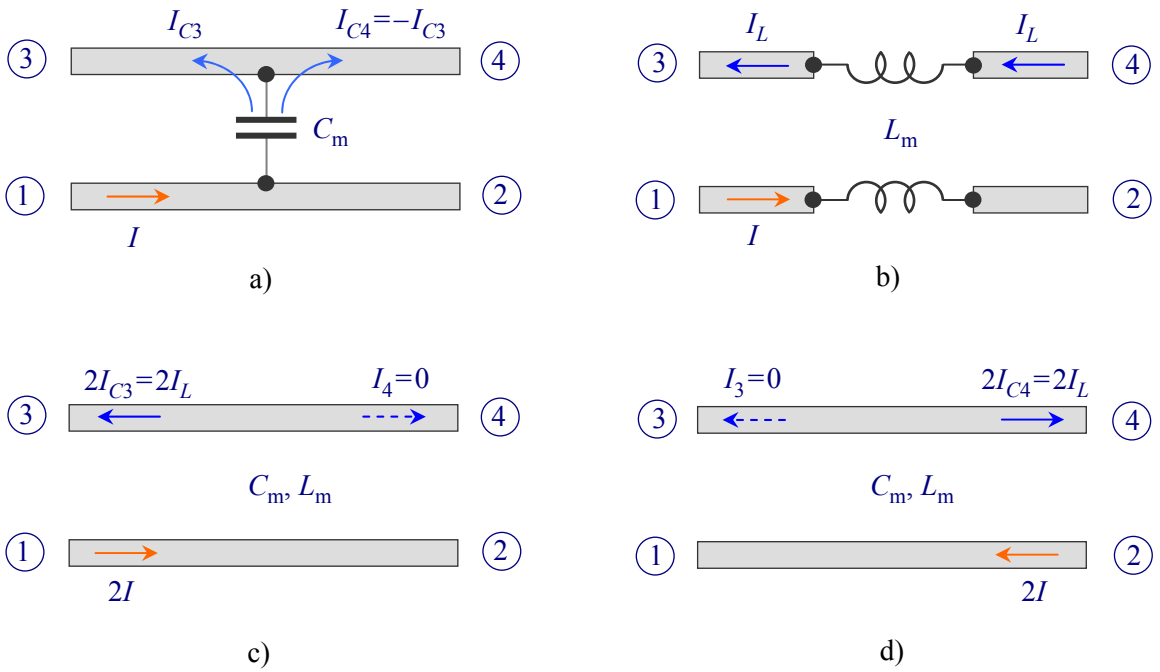
Kad se dvije paralelne prijenosne linije, prikazane na slici 7.34, međusobno približe na dovoljno mali razmak *s* tako da se omogući međudjelovanje njihovih elektromagnetskih polja, između linija će doći do elektromagnetske sprege [1]-[4]. Radi jednostavnosti, na slici 7.34 prikazan je samo po jedan vodič svake od linije, što odgovara trakastim izvedbama. Ako su linije (trake) međusobno jednake i ako su na svojim krajevima opterećene karakterističnom impedancijom Z_0, te ako su parametri linija ispravno odabrani, onda će se takva četveroprolazna mreža ponašati kao usmjerni sprežnik. No za razliku od ranije razmatranih sprežnika tok energije u spregnutoj liniji bit će u suprotnome smjeru od toka energije u glavnoj liniji.



Slika 7.34. Trakasta struktura linijskoga sprežnika

Fizikalni mehanizam koji vodi do usmjerene sprege može se objasniti na kratkom odsječku spregnutih linija prikazanom na slici 7.35. Pretpostavimo da je donja linija pobuđena strujom *I* na prolazu 1. Budući da između linija postoji kapacitet i međuinduktivitet, dio snage iz donje linije (1–2) prenosi se u gornju liniju (3–4). U tu svrhu valja zasebno razmotriti utjecaje kapacitivne i međuinduktivne sprege.

Na slici 7.35a) prikazan je učinak kapacitivne sprege. Dio struje *I* koja teče donjom linijom odvaja se preko kapaciteta C_m u gornju liniju pa u njoj teku struje I_{C3} i I_{C4} istih vrijednosti, ali suprotnih smjerova. No u gornjoj liniji postoji i struja I_L koja je posljedica učinka magnetske indukcije preko međuinduktiviteta L_m kao što je prikazano na slici 7.35b). Teorija magnetske indukcije (Faradayev zakon) pokazuje da je struja I_L suprotnoga smjera u odnosu na struju *I*. Superpozicijom učinaka sa slika 7.35a) i 7.35b) i takvim odabirom razmaka i ostalih parametara linija da se jakosti struja I_{C3}, I_{C4}, I_{L3} i I_{L4} međusobno izjednače, dobit će se idealni usmjerni sprežnik, slika 7.35c), jer će se struje I_{C4} i I_{L4} na prolazu 4 poništiti. Drugim riječima, na tom se prolazu neće pojaviti signal pa se može reći da je prolaz 4 *izoliran* ili



Slika 7.35. Objašnjenje mehanizma elektromagnetske sprege između prijenosnih linija

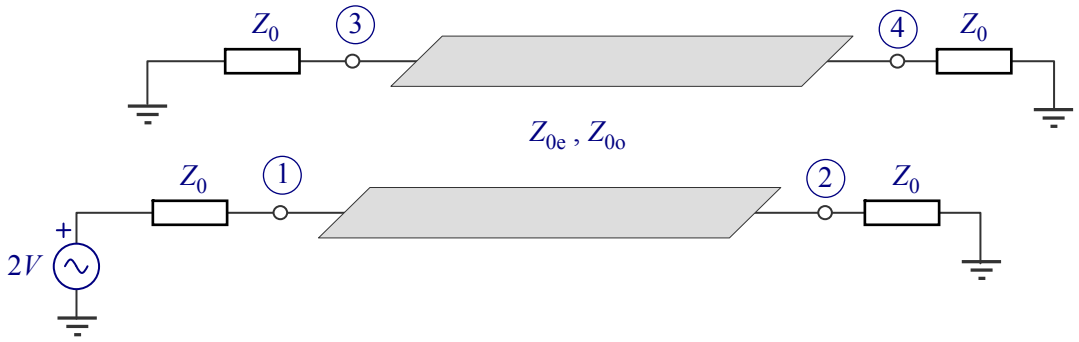
raspregnut od prolaza 1 na koji ulazi snaga. S druge strane, struje I_{C3} i I_{L3} na prolazu 3 nalaze se u fazi pa se dio snage iz donje linije prenosi na prolaz 3. Stoga se prolaz 3 obično naziva *spregnuti prolaz*. Tako je nastao sklop u kojem je spregnuta snaga usmjerena prema prolazu 3, a duljina vodiča nimalo ne utječe na iznos izolacije jer su i međukapacitet i međuinduktivitet linearno razmjerni duljini vodiča. Zbog značajke da je snaga u spregnutoj liniji usmjerena samo u jedan od dvaju prolaza, taj je sklop naziva *linijski usmjerni sprežnik*.

Valja imati na umu da prolazom 2 ne teče struja iste jakosti kao prolazom 1 jer na prolazu 2 nedostaje dio ulazne snage, koji je spregnut s gornjom linijom i predan teretu na prolazu 3.

S druge strane, pri pobudi prolaza 2 dio snage će se spregnuti s prolazom 4, a prolaz 3 ostat će izoliran, kao što je prikazano na slici 7.35d). To proizlazi iz svojstva recipročnosti električnih mreža koje sadrže samo recipročne elemente.

Simetrična struktura na slici 7.34 shematski je prikazana na slici 7.36. U tom su pojednostavljenom sklopu mikrotrakastog sprežnika prikazane samo trake, a zajednički uzemljeni vodič ispušten je radi preglednosti. Sklop je pobuđena na prolazu 1 generatorom unutarnje impedancije Z_0 i elektromotorne sile $2V$, preostala tri prolaza zaključena su linijama karakteristične impedancije Z_0. Fizička je duljina sprežnika l, a električna θ. Kasnije ćemo vidjeti kako značajnu ulogu u proračunu sprežnika ima električna duljina, tj. fazni kut θ.

Budući da je geometrijski simetričan, linijski se sprežnik može analizirati s pomoću parnih i neparnih modova. To znači da se sklop sprežnika može rastaviti na dva zasebna sklopa prikazana na slici 7.37, čija superpozicija daje sklop na slici 7.36. Jedan od tih sklopova (slika 7.37a)) pobuđen je simetrično (parna pobuda), a drugi (slika 7.37b)) pobuđen je antisimetrično (neparna pobuda). U skladu s prethodnim razmatranjima, mreže na slici 7.37 mogu se dalje rastaviti na svojstvene mreže prikazane na slici 7.38 koje se sastoje od linijskih odsječaka karakteristične impedancije Z_{0e} odnosno Z_{0o}. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da su električne duljine traka za parni i neparni mod međusobno jednake i da iznose θ. (Ta pretpostavka nije posve utemeljena za mikrotrakaste spregnute linije jer su fazne brzine za parnu i neparnu pobudu općenito različite. Time je u račun namjerno unesena određena pogreška, ali je zato analiza znatno pojednostavljena.) Karakteristične impedancije Z_{0e} i Z_{0o} razlikuju se od



Slika 7.36. Linijski sprežnik – shematski prikaz sklopa

impedancije Z_0 koja je priključena na svaki prolaz spregnutih linija. Sad se problem rješavanja svojstvenih mreža svodi na problem rješavanja raspršnih parametara linijskog odsječka.

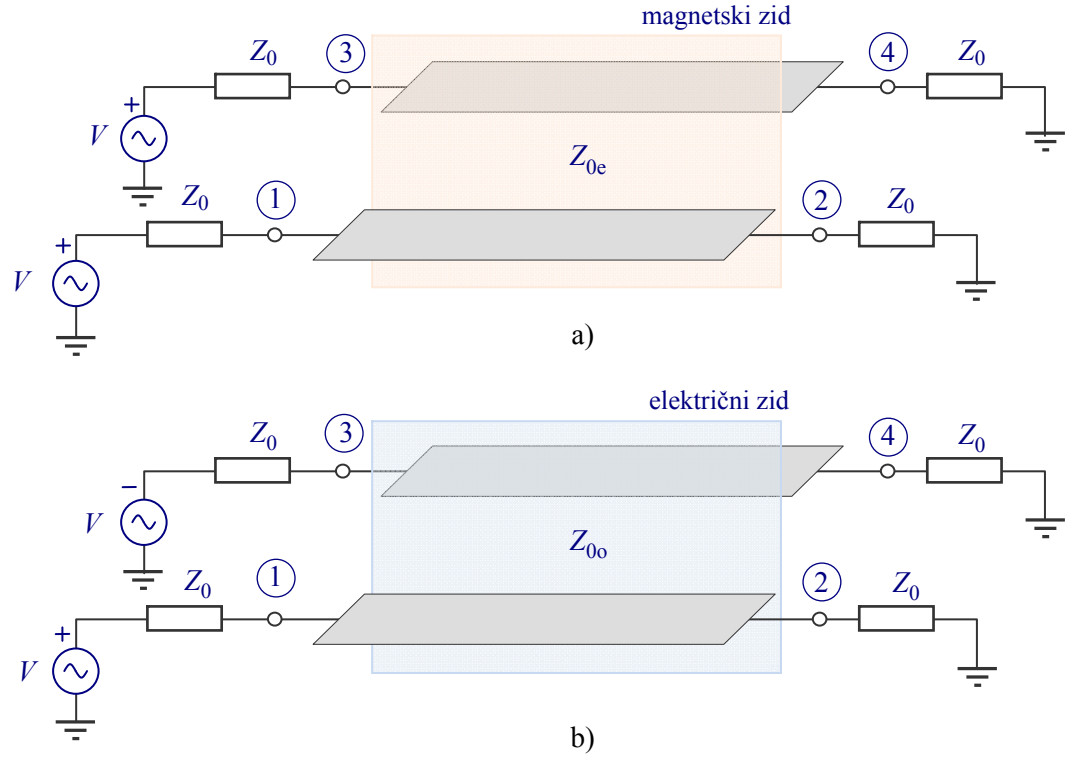
Ako su koeficijenti refleksije za skok impedancija na ulazu svojstvenih mreža:

$$\Gamma_{\mathrm{e}} = \frac{Z_{0\mathrm{e}} - Z_0}{Z_{0\mathrm{e}} + Z_0}, \qquad \Gamma_{\mathrm{o}} = \frac{Z_{0\mathrm{o}} - Z_0}{Z_{0\mathrm{o}} + Z_0}, \tag{7–51}$$

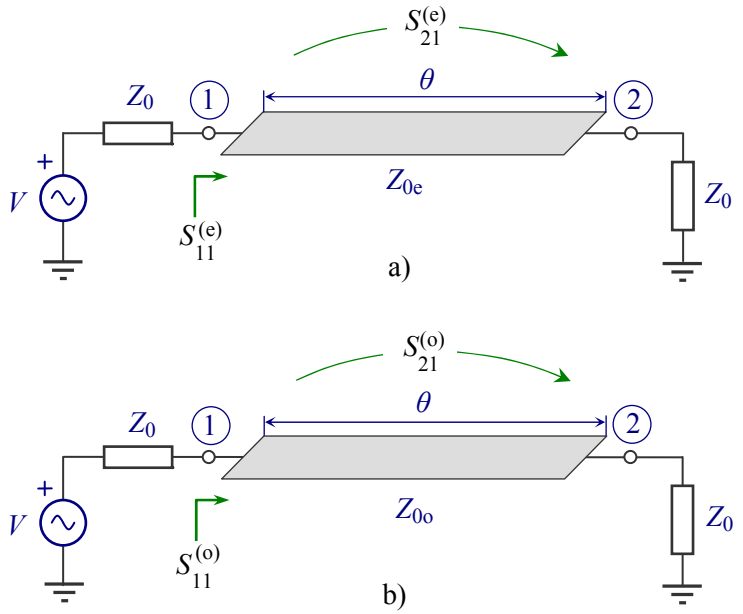
onda su raspršni parametri recipročnih svojstvenih mreža na slici 7.38 dani kao:

$$S_{11}^{(\mathrm{e})} = \Gamma_{\mathrm{e}} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}}{1 - \Gamma_{\mathrm{e}}^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}}, \qquad S_{11}^{(\mathrm{o})} = \Gamma_{\mathrm{o}} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}}{1 - \Gamma_{\mathrm{o}}^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}}, \tag{7–52}$$

$$S_{21}^{(\mathrm{e})} = \frac{(1 - \Gamma_{\mathrm{e}}^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{1 - \Gamma_{\mathrm{e}}^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}}, \qquad S_{21}^{(\mathrm{o})} = \frac{(1 - \Gamma_{\mathrm{o}}^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{1 - \Gamma_{\mathrm{o}}^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}}. \tag{7–53}$$



Slika 7.37. Rastavljanje sklopa linijskoga sprežnika prikazanog na slikama7.34 i 7.36 za slučaj pobude: **a)** parnim modom i **b)** neparnim modom



Slika 7.38. Svojstvene mreže linijskoga sprežnika prikazanog na slici 7.36: **a)** za parni mod i **b)** za neparni mod pobude

Raspršni se parametri odsječka spregnutih linija mogu odrediti primjenom rezultata analize za simetrične četveroprolazne mreže (odjeljak 5.6.2). Za taj, posve simetričan, četveroprolazni recipročni sklop raspršni se parametri mogu izraziti preko parametra svojstvenih mreža za oba moda pobude kao:

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = \frac{S_{11}^{(e)} + S_{11}^{(o)}}{2}, \tag{7–54a}$$

$$S_{31} = S_{13} = S_{42} = S_{24} = \frac{S_{11}^{(e)} - S_{11}^{(o)}}{2}, \tag{7–54b}$$

$$S_{21} = S_{12} = S_{43} = S_{34} = \frac{S_{21}^{(e)} + S_{21}^{(o)}}{2}, \tag{7–54c}$$

$$S_{41} = S_{14} = S_{32} = S_{23} = \frac{S_{21}^{(e)} - S_{21}^{(o)}}{2}. \tag{7–54d}$$

Da bi sprežnik na svim svojim prolazima bio nerefleksivan, svi elementi na glavnoj dijagonali raspršne matrice moraju biti jednaki nuli, tj. $S_{11}=S_{22}=S_{33}=S_{44}=0$. Otuda izraz (7–54a) traži uvjet $S_{11}^{(e)}+S_{11}^{(o)}=0$, iz kojeg uvrštenjem izraza (7–52) izlazi

$$(\Gamma_e + \Gamma_o)\left(1 - \Gamma_e\Gamma_o e^{-j2\theta}\right) = 0. \tag{7–55}$$

Jednadžba (7–55) ima dva rješenja, od kojih je za pasivne mreže fizikalno moguće samo

$$\Gamma_e = -\Gamma_o, \tag{7–56}$$

koje ne ovisi o frekvenciji. To znači da je linijski sprežnik teorijski nerefleksivan u beskonačno širokom frekvencijskom području.

Uvrštenje izraza (7–51) u (7–56) daje

$$\frac{Z_{0e} - Z_0}{Z_{0e} + Z_0} = -\frac{Z_{0o} - Z_0}{Z_{0o} + Z_0},$$

iz čega izlazi temeljni uvjet koji povezuje karakteristične impedancije za parni i neparni mod (Z_{0e} i Z_{0o}) s karakterističnom impedancijom (Z_0) sustava, tj.

$$Z_0 = \sqrt{Z_{0e} Z_{0o}} \,. \tag{7–57}$$

S druge strane, drugo rješenje jednadžbe (7–55),

$$\Gamma_e = \frac{e^{j2\theta}}{\Gamma_o}, \tag{7–58}$$

traži da moduli koeficijenata refleksije Γ_e i Γ_o imaju jedinične vrijednosti ili da bar jedan od tih modula bude veći od jedan. Drugim riječima, uvjet (7–58) traži posve reaktivne svojstvene mreže ili da je jedna od njih aktivna, a to se kosi sa svojstvima pasivne mreže.

Uvrsti li se uvjet (7–57) u izraze (7–51) dobiva se:

$$\Gamma_e = \frac{\sqrt{Z_{0e}} - \sqrt{Z_{0o}}}{\sqrt{Z_{0e}} + \sqrt{Z_{0o}}}, \qquad \Gamma_o = \frac{\sqrt{Z_{0o}} - \sqrt{Z_{0e}}}{\sqrt{Z_{0o}} + \sqrt{Z_{0e}}}. \tag{7–59}$$

Uvrštenjem tih rezultata zajedno s izrazima (7–52) i (7–56) u izraz (7–54b) izlazi

$$S_{31} = \frac{S_{11}^{(e)} - S_{11}^{(o)}}{2} = S_{11}^{(e)} = \frac{\sqrt{Z_{0e}} - \sqrt{Z_{0o}}}{\sqrt{Z_{0e}} + \sqrt{Z_{0o}}} \frac{1 - e^{-j2\theta}}{1 - \left(\dfrac{\sqrt{Z_{0e}} - \sqrt{Z_{0o}}}{\sqrt{Z_{0e}} + \sqrt{Z_{0o}}} \right)^2 e^{-j2\theta}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{Z_{0e}} - \sqrt{Z_{0o}}\right)\left(\sqrt{Z_{0e}} + \sqrt{Z_{0o}}\right) e^{-j\theta} \left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)}{Z_{0e} + Z_{0o} + 2\sqrt{Z_{0e} Z_{0o}} - \left(Z_{0e} + Z_{0o}\right) e^{-j2\theta} + 2\sqrt{Z_{0e} Z_{0o}}\, e^{-j2\theta}} =$$

$$= j \frac{2 \sin\theta \left(Z_{0e} - Z_{0o}\right) e^{-j\theta}}{\left(Z_{0e} + Z_{0o}\right)\left(1 - e^{-j2\theta}\right) + 2Z_0 \left(1 + e^{-j2\theta}\right)} = j \frac{\dfrac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}} \sin\theta}{\dfrac{2Z_0}{Z_{0e} + Z_{0o}} \cos\theta + j \, \sin\theta}. \tag{7–60}$$

Taj se izraz može napisati u sažetijem obliku uvođenjem nove veličine

$$C = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}}, \tag{7–61}$$

koja se naziva *naponski koeficijent sprege*. Uvrštenjem uvjeta (7–57) u (7–61) također izlazi

$$\sqrt{1 - C^2} = \frac{2Z_0}{Z_{0e} + Z_{0o}} \tag{7–62}$$

pa se izraz (7–60) konačno svodi na oblik

$$S_{31} = j \frac{C \sin\theta}{\sqrt{1 - C^2} \cos\theta + j \sin\theta}. \tag{7–63}$$

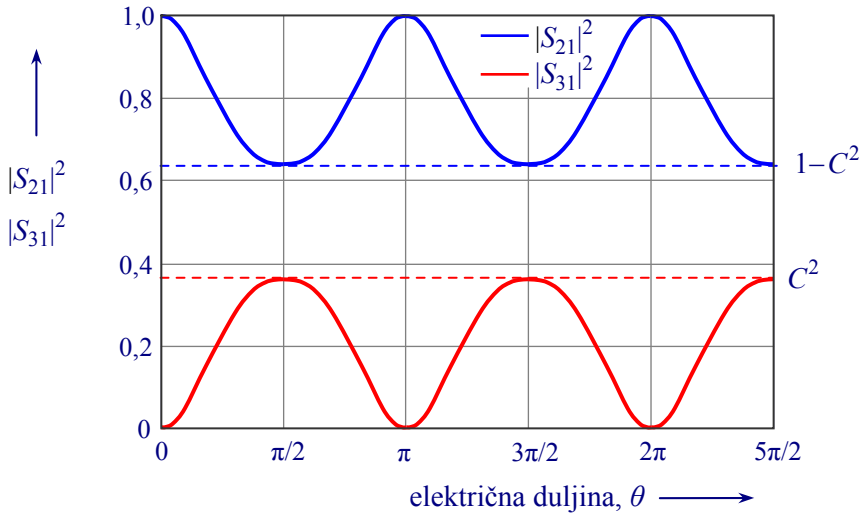
Sličnim postupkom iz izraza (7–54c) izlazi

$$S_{21} = \frac{\sqrt{1 - C^2}}{\sqrt{1 - C^2} \cos\theta + j \sin\theta}. \tag{7–64}$$

Uvrštenjem izraza (7–53) u (7–54d) dobiva se

$$S_{41} = S_{14} = S_{32} = S_{23} = 0. \tag{7–65}$$

Budući da su svi parametri u izrazu (7–65) jednaki nuli i ne ovise o frekvenciji, usmjerenost ne ovisi o frekvenciji. Time su određeni svi raspršni parametri linijskoga sprežnika.



Slika 7.39. Sprega $|S_{31}|^2$ i prijenos snage u glavnoj grani $|S_{21}|^2$ linijskoga sprežnika za $C=0{,}6$ u ovisnosti o električnoj duljini (ili frekvenciji)

Kako se snaga prenosi s prolaza 1 na prolaze 2 i 3 može se vidjeti na slici 7.39, gdje je prikazana ovisnost kvadrata modula raspršnih parametara S_{31} i S_{21} o električnoj duljini sprežnika. Raspršni su parametri izračunani iz izraza (7–63) i (7–64) za naponski koeficijent sprege $C=0{,}6$. Budući da je električna duljina približno linearna funkcija frekvencije, isti graf ujedno upućuje na frekvencijsku ovisnost za fiksnu duljinu odsječka spregnutih linija.

Za vrlo slabu spregu, $C \ll 1$, što je kod ove vrste sprežnika vrlo čest slučaj u praksi, izrazi (7–63) i (7–64) mogu se pojednostavniti na ove približne izraze:

$$S_{31} \simeq \mathrm{j}\frac{C\sin\theta}{\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta} = \mathrm{j}C\sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\,, \tag{7–66}$$

$$S_{21} \simeq \frac{1}{\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\,. \tag{7–67}$$

Izraz (7–66) upućuje na posve sinusnu ovisnost intenziteta sprege, a izraz (7–67) pokazuje da su gubitci u izravnom prolazu zanemarivo mali, tj. da veličina parametra S_{21} ima približno jediničnu vrijednost. Za $C<0{,}1$ izrazi (7–66) i (7–67) daju pogrešku manju od 0,5%.

Ako je sprežnik električki dugačak točno π/2, onda se izrazi (7–63) i (7–64) svode na:

$$S_{31} = C\,, \tag{7–68}$$

$$S_{21} = -\mathrm{j}\sqrt{1-C^2}\,. \tag{7–69}$$

Iz izraza (7–68) i (7–69) može se lako uočiti da zadovoljavaju zakon očuvanja energije jer je ulazna snaga $P_{\mathrm{ul}}=|V|^2/Z_0$, a izlazne su snage $P_2=|V_2|^2/Z_0=(1-C^2)|V|^2/Z_0$, $P_3=C^2|V|^2/Z_0$ i $P_4=0$, tj. $P_{\mathrm{ul}}=P_2+P_3+P_4$. Pri tomu su izlazni naponi na prolazima 2 i 3 međusobno fazno pomaknuti za π/2 radijana. Stoga se taj sprežnik nerijetko rabi kao kvadraturni hibrid, uz uvjet $\alpha=\beta=1/\sqrt{2}$. Uz neznatno složeniji račun, može se pokazati da i općeniti izrazi (7–63) i (7–64) zadovoljavaju zakon očuvanja energije.

Izraz (7–68) pokazuje da je parametar $S_{31}=C$ realna veličina pa ga se može zamijeniti realnim brojem β. Ako se izraz (7–69) napiše u obliku $S_{21}=-\mathrm{j}\alpha=-\mathrm{j}\sqrt{1-C^2}$, gdje je α također realna veličina, onda se raspršna matrica linijskoga sprežnika za središnju frekvenciju može napisati u uobičajenom obliku za simetrični sprežnik kao

$$[S] = -\mathrm{j}\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \mathrm{j}\beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \mathrm{j}\beta \\ \mathrm{j}\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \mathrm{j}\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}. \tag{7–70}$$

U postupku sinteze sprežnika, zadana je karakteristična impedancija Z_0 i naponski koeficijent sprege C, a traže se geometrijski parametri sprežnika. U tu svrhu iz izraza (7–57) i (7–61) mogu se lako odrediti vrijednosti karakterističnih impedancija za parni i neparni mod:

$$Z_{0\mathrm{e}} = Z_0\sqrt{\frac{1+C}{1-C}}, \tag{7–71a}$$

$$Z_{0\mathrm{o}} = Z_0\sqrt{\frac{1-C}{1+C}}. \tag{7–71b}$$

Sad se preko $Z_{0\mathrm{e}}$ i $Z_{0\mathrm{o}}$ i zadanih vrijednosti h ili b i ε_r s pomoću grafova na slikama 7.32 ili 7.33 mogu konačno odrediti preostali geometrijski parametri trakaste strukture, w i s.

U prethodnim je razmatranjima pretpostavljeno da se elektromagnetski valovi za pobudu parnim i neparnim modovima rasprostiru jednakim faznim brzinama što podrazumjeva jednaku električnu duljinu sprežnika za oba moda. No spregnute mikrotrakaste linije i druge ne *TEM*-linije općenito ne zadovoljavaju taj uvjet pa je usmjerenost takvih sprežnika konačna. Činjenica da parni i neparni modovi rasprostiranja u spregnutoj liniji nemaju jednake fazne brzine može se intuitivno objasniti razmatranjem silnica polja na slici 7.31. U području sa zrakom, rubno električno polje parnoga moda slabije je od električnog polja neparnoga moda. Otuda je efektivna permitivnost za parni mod veća, pa je pripadajuća fazna brzina manja. Razlika između faznih brzina može se djelomično kompenzirati nanošenjem tankog dielektričnog sloja na spregnute mikrotrakaste vodiče. Gubitci u vodičima i dielektriku dodatno smanjuju usmjerenost sprežnika s mikrotrakastim i simetričnim trakastim linijama.

Primjer 7.4. Mikrotrakasti usmjerni sprežnik

Projektirati usmjerni mikrotrakasti sprežnik prikazan na slici 7.34 tako da sprega $C = 20$ dB postiže maksimum na frekvenciji 5 GHz. Sprežnik mora biti prilagođen karakterističnoj impedanciji 50 Ω i izveden na dielektričnoj podlozi s $\varepsilon_\mathrm{r} = 2{,}5$ i $h = 0{,}75$ mm. Zanemariti utjecaj debljine trake i disperziju.

Rješenje:

Za spregu od 20dB, naponski koeficijent sprege iznosi $C = 10^{-20/20} = 0{,}1$. Karakteristične impedancije za parni i neparni mod mogu se izračunati iz izraza (7–71) kao:

$$Z_{0\mathrm{e}} = Z_0\sqrt{\frac{1+C}{1-C}} = 55{,}28\ \Omega, \quad Z_{0\mathrm{o}} = Z_0\sqrt{\frac{1-C}{1+C}} = 45{,}23\ \Omega.$$

Sad iz dijagrama na slici 7.32a) izravno izlazi: $w/h = 2{,}79$ i $s/h = 1{,}22$. Otuda se dobiva potrebna širina trake $w = 2{,}09$ mm i razmak između traka $s = 0{,}91$ mm.

Duljina odsječka spregnutih traka, može se lako naći uz pretpostavku da je fazna brzina vala u spregnutim trakama približno jednaka brzini za parni mod rasprostiranja. Za $w = 2{,}09$ mm, iz izraza (4–156) dobiva se efektivna permitivnost podloge $\varepsilon_{\mathrm{ef}} = 2{,}072$. Konačno, duljina spregnutih traka pri maksimalnoj sprezi iznosi

$$l = \frac{\lambda_\mathrm{v}}{4} = \frac{c}{4f\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{ef}}}} = \frac{2{,}998\cdot 10^8}{4\cdot 5\cdot 10^9\cdot\sqrt{2{,}072}} = 10{,}4\ \mathrm{mm}.$$

Primjenom izraza (4–159), širina trake vanjskih priključnih linija (50 Ω) iznosi 2,15 mm.

Langeov sprežnik

Opisanim linijskim sprežnicima mogu se ostvariti samo slabe sprege. Za jače sprege ($C<6$ dB), nerijtko je potreban toliko mali razmak između traka da se takav sprežnik u praksi uopće ne može izvesti. Pri tomu nerijetko nastaju i velike razlike između faznih brzina za parni i neparni mod pa dolazi do degradacije karakteristika usmjerenosti. Stoga se za jake sprege rabi *Langeov sprežnik* koji se sastoji od više parova spregnutih traka [1], [2], [7], [13]. Na slici 7.40a) prikazana je izvorna topologija tog sprežnika, a na slici 7.40b) njegova jednostavnija inačica. Za $\alpha=\beta$ matrica (7–70) poprima poseban oblik

$$[S]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{j} & 1 & 0 \\ -\mathrm{j} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\mathrm{j} \\ 0 & 1 & -\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix}, \tag{7–72}$$

koji odgovara matrici *Langeova kvadraturnog hibrida* sprege $C=3$ dB (odjeljak 5.8.3). Dakle, snaga se na središnjoj frekvenciji dijeli na izlazne prolaze u jednakim iznosima. Između prolaza 1 i 2 te 3 i 4 fazni pomak iznosi $\pi/2$ jer su duljine traka jednake četvrtini valne duljine, a između spregnutih prolaza (1 i 3 te 2 i 4) nema faznog pomaka.

U sprežnicima koji su izvedeni s više od dviju linija, trake se povezuju naizmjence u interdigitalnu strukturu. Sve su trake jednake širine w, a isto vrijedi i za razmake s. Nešto jednostavnija analiza može se provesti zanemarivanjem sprege između svih traka osim susjednih, uz dovoljnu točnost vrijednosti karakterističnih impedancija parnoga i neparnoga moda. Također valja pretpostaviti da se energija rasprostire *TEM*-modom i da su svi prolazi prilagođeni, tj. nerefleksivni. Za zadani broj linija n i poznate vrijednosti $Z_{0\mathrm{o}}$ i $Z_{0\mathrm{e}}$, karakteristična se impedancija sustava može izraziti kao

$$Z_0^2=\frac{Z_{0\mathrm{e}}Z_{0\mathrm{o}}(Z_{0\mathrm{e}}+Z_{0\mathrm{o}})^2}{[Z_{0\mathrm{e}}+(n-1)Z_{0\mathrm{o}}][Z_{0\mathrm{o}}+(n-1)Z_{0\mathrm{e}}]}, \tag{7–73}$$

a naponski koeficijent sprege poprima oblik

$$C=\frac{(n-1)Z_{0\mathrm{e}}^2-(n-1)Z_{0\mathrm{o}}^2}{(n-1)(Z_{0\mathrm{e}}^2+Z_{0\mathrm{o}}^2)+2Z_{0\mathrm{e}}Z_{0\mathrm{o}}}. \tag{7–74}$$

Sad se iz izraza (7–73) i (7–74) mogu izlučiti karakteristične impedancije neparnoga i parnoga moda:

$$Z_{0\mathrm{o}}=\frac{(n-1)(1+q)}{C+q+(n-1)(1-C)}\sqrt{\frac{1-C}{1+C}}Z_0, \tag{7–75a}$$

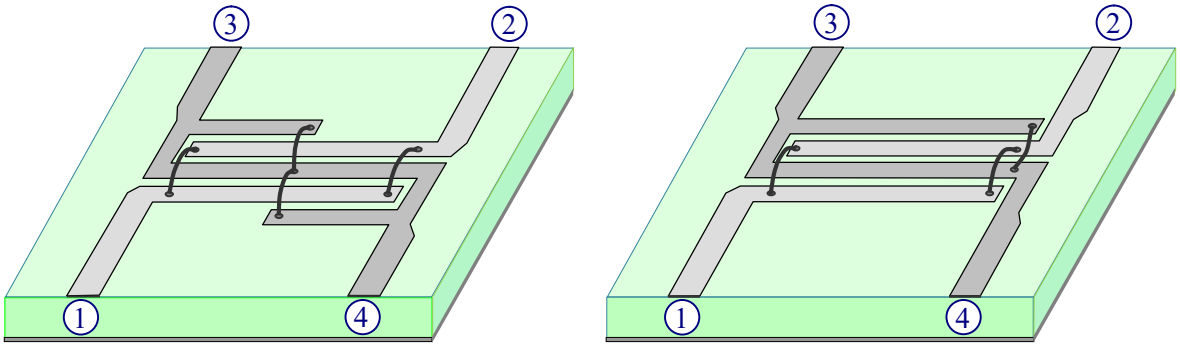
$$Z_{0\mathrm{e}}=Z_{0\mathrm{o}}\frac{C+q}{(n-1)(1-C)}, \tag{7–75b}$$

gdje je $q=\sqrt{C^2+(1-C^2)(n-1)^2}$.

Premda su ti rezultati približni zbog unesenih pojednostavljenja, u praksi daju dovoljnu točnost. Primjenom izraza (7–75) i grafova na slikama 7.32 konačno se može odrediti potrebna širina traka w i njihov međusobni razmak s.

Prednost Langeova hibrida očituje se u činjenici da se spregnuti i izravni prolaz (prolazi 3 i 2) nalaze sa suprotne strane pobuđenog prolaza 1. To je svojstvo vrlo praktično za izvedbe balansnih pojačala, kao što se može vidjeti u odjeljku 8.8.6.

U tablici 7.1. prikazane su vrijednosti karakterističnih impedancija parnoga i neparnoga moda za nekoliko tipičnih vrijednosti sprege i broja traka.



a) b)

Slika 7.40. a) Izvorna izvedba Langeova sprežnika (hibrid) i **b)** inačica s ograncima jednake duljine

Tablica 7.1. Karakteristične impedancije parnoga i neparnoga moda Langeova hibrida

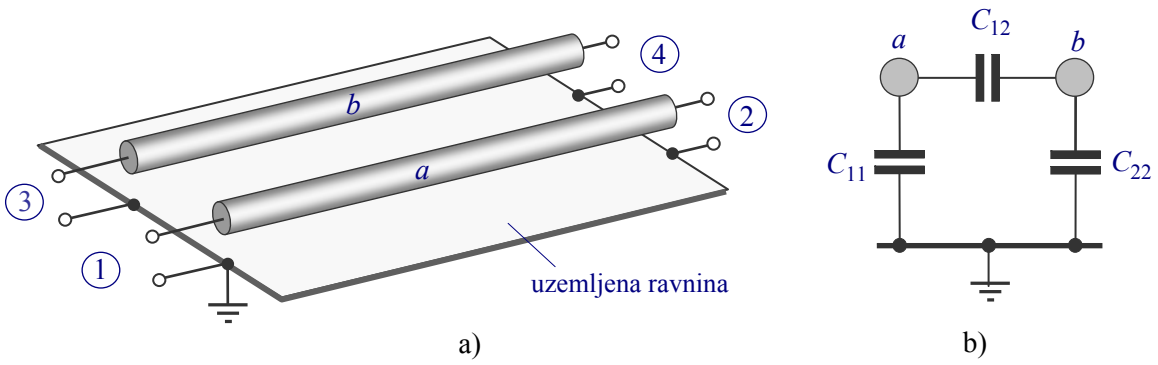
n	2			4			6		
C (dB)	3	6	10	3	6	10	3	6	10
Z_{0e} (Ω)	120,9	86,7	69,4	176,4	142,7	123,8	243,3	204,5	181,1
Z_{0o} (Ω)	20,7	28,8	36,0	52,5	67,9	79,9	82,4	105,0	122,1

7.3.4. Nadomjesni sklop spregnutih linija

Razmatranje sklopova sa spregnutim linijama može se znatno pojednostavniti primjenom nadomjesnog sklopa odsječka s dvjema paralelnim spregnutim linijama. Kao što smo vidjeli u uvodnom dijelu ovoga odjeljka, sustav spregnutih linija *a* i *b* prikazan na slici 7.41a) može se prikazati nadomjesnim sklopom s raspodijeljenim kapacitetima (slika 7.41b)). Matrica kapaciteta nadomjesne mreže na slici 7.41b) može se napisati kao [10]

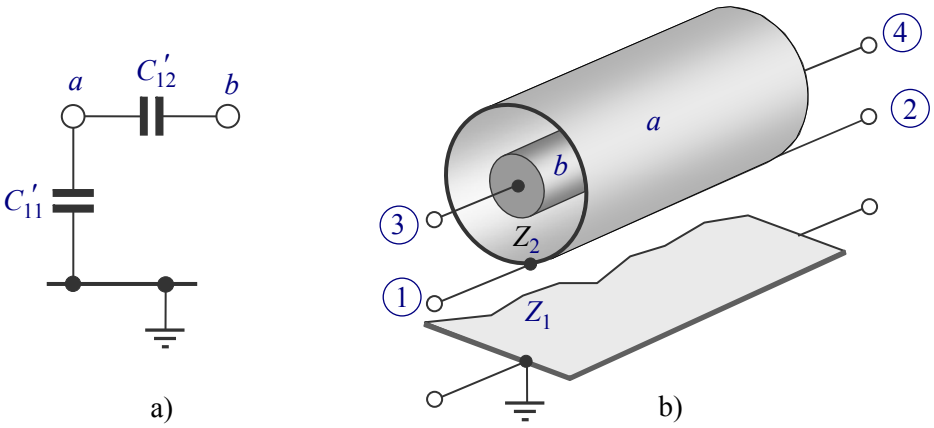
$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11}+C_{12} & -C_{12} \\ -C_{12} & C_{12}+C_{22} \end{bmatrix}. \tag{7–76}$$

Zbroj kapaciteta u jednom retku (ili stupcu) uvijek upućuje na raspodijeljeni kapacitet pripadajuće linije za parni mod pobude. Ako se drugi redak i drugi stupac matrice (7–76) pomnože proizvoljnom konstantom *k*, onda se ta matrica transformira u novu matricu



a) b)

Slika 7.41. a) Shematski prikaz sustava spregnutih linija; **b)** nadomjesna shema



Slika 7.42. Transformacija matrice kapaciteta: **a)** nadomjesna shema, **b)** nadomjesni sklop

$$[C'] = \begin{bmatrix} C_{11}+C_{12} & -kC_{12} \\ -kC_{12} & k^2(C_{22}+C_{12}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11}+C'_{12} & -C'_{12} \\ -C'_{12} & C'_{22}+C'_{12} \end{bmatrix}. \tag{7–77}$$

Za $k = C_{12}/(C_{12}+C_{22})$, dobiva se $C'_{22} = 0$ pa je u tom slučaju linija b posve izolirana od uzemljene ravnine. To znači da zbroj svih elemenata drugog stupca (ili drugog retka) matrice (7–77) mora biti jednak nuli. Tako, primjerice, zbroj elemenata drugog retka matrice (7–77) daje $C'_{22}=k[k(C_{12}+C_{22})-C_{12}]=0$, iz čega izravno izlazi $k=C_{12}/(C_{12}+C_{22})$.

Dakle, vodič linije b posve je izoliran od uzemljene ravnine, ali je i dalje spregnut s linijom a. Otuda transformiranoj matrici (7–77) odgovara nadomjesna shema na slici 7.42a), u kojoj vodiči a i b tvore novu prijenosnu liniju koja se pak može predočiti sklopom na slici 7.42b). Izolacija vodiča b od uzemljenja ostvarena je njegovim oklapanjem vodljivim plaštem (vanjski vodič suosne strukture). Primjenom Richardsove transformacije (odjeljak 7.5.2), taj se uvjet može dalje jednostavno predočiti nadomjesnim sklopom prikazanim na slici 7.43. Taj sklop sadrži dva paralelno spojena linijska odsječka karakterističnih impedancija:

$$Z_1 = \frac{1}{cC'_{11}}, \qquad Z_2 = \frac{1}{cC'_{12}}. \tag{7–78}$$

Da bi se dobila cjelovita nadomjesna shema sustava spregnutih linija s ispravnim impedancijskim vrijednostima na svim prolazima, mora se obaviti još jedna transformacija impedancije i to primjenom idealnih naponskih transformatora omjera transformacije $n:1$. Ako se sad drugi stupac i drugi redak matrice $[C']$ pomnože konstantom n, kao što je prikazano na slici 7.44, onda se dobiva ova matrica kapaciteta

$$[C''] = \begin{bmatrix} C'_{11}+C'_{12} & -nC'_{12} \\ -nC'_{12} & n^2C'_{12} \end{bmatrix}. \tag{7–79}$$

Da bi sklopovi na slikama 7.43 i 7.41b) bili ekvivalentni moraju se zadovoljiti izrazi:

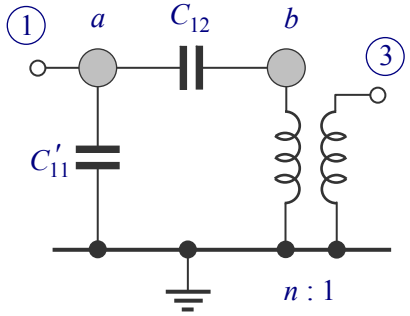
$$C''_{11} = C'_{11} + C'_{12}(1-n) = C_{11}, \tag{7–80a}$$

$$C''_{12} = nC'_{12} = C_{12}, \tag{7–80b}$$

$$C''_{22} = n(n-1)C'_{12} = C_{22}. \tag{7–80c}$$

Može se pokazati da je izraze (7–80) moguće zadovoljiti samo ako je

$$n = 1/k = (C_{12}+C_{22})/C_{12} = 1 + C_{22}/C_{12}. \tag{7–81}$$



Slika 7.44. Transformacija impedancije na prolazu 3

Umetanjem idealnih naponskih transformatora ($n:1$) u prolaze 3 i 4 nadomjesnog sklopa na slici 7.43 dobiva se konačni nadomjesni sklop sustava spregnutih paralelnih linija koji je prikazan na slici 7.45.

Primjenom izraza za raspodijeljeni kapacitet, iz izraza (7–80) dobiva se:

$$C_{11} = \frac{1}{v_\mathrm{f}}\left(\frac{1}{Z_1} - \frac{n-1}{Z_2}\right), \tag{7–82a}$$

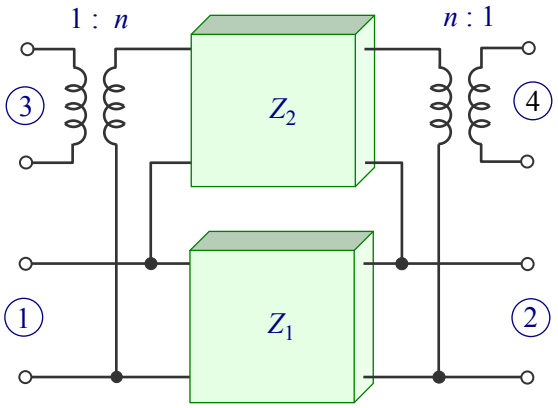
$$C_{12} = \frac{n}{v_\mathrm{f} Z_{12}}, \tag{7–82b}$$

$$C_{22} = \frac{n(n-1)}{v_\mathrm{f} Z_2}. \tag{7–82c}$$

Izrazi (7–82) vrijede za bilo koji par nesimetričnih spregnutih linija. No u praksi su linije često simetrične ($C_{11} = C_{22}$). Za trakaste linije a i b, primjerice, to znači da su im širine traka jednake ($w_a = w_b$), tj. da je $Z_{0\mathrm{e}}^{(a)} = Z_{0\mathrm{e}}^{(b)}$ i $Z_{0\mathrm{o}}^{(a)} = Z_{0\mathrm{o}}^{(b)}$. Tad iz izraza (7–82) izlazi uvjet

$$n^2 = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}. \tag{7–83}$$

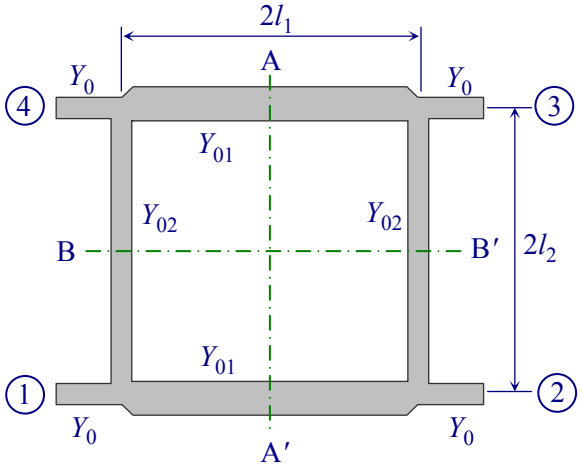
Time su poznati svi parametri nadomjesnog sklopa simetričnih paralelnih linija.



Slika 7.45. Konačni nadomjesni sklop spregnutih linija prikazanih na slici 7.41a)

7.3.5. Kvadraturni hibrid

Svojstva slična Langeovu hibridu ima usmjerni sprežnik s ograncima prikazan na slici 7.46. Za spregu 3 dB i četvrtvalnu duljinu linijskih odsječaka, taj sprežnik ima jednaka obilježja kao *kvadraturni hibrid* jer razlika faze signala na njegovim izlaznim prolazima iznosi 90°. Ti se kvadraturni hibridi obično izvode uporabom mikrotrakastih ili simetričnih trakastih linija, kao što je prikazano na slici 7.46 [1]-[3], [13]. No gdjekad ga se može naći i u izvedbama s valovodima te suosnim linijama [18].



Slika 7.46. Prstenasti kvadraturni hibrid u mikrotrakastoj izvedbi, s dvjema ravinama simetrije

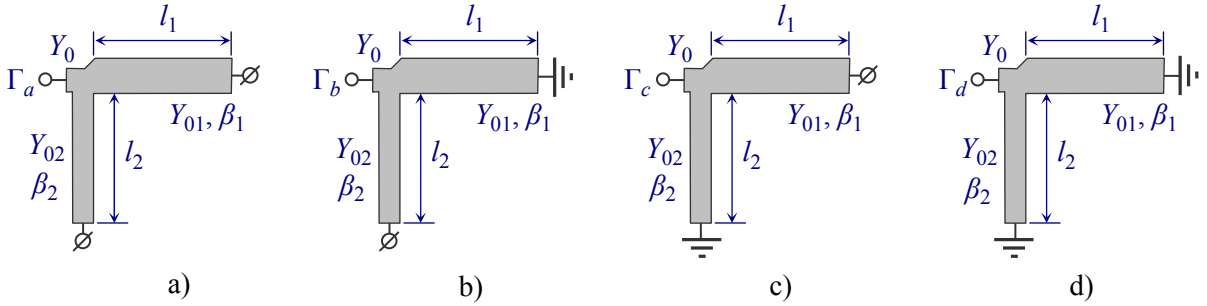
Analiza sprežnika s ograncima može se provesti s pomoću pobude parnim i neparnim modovima. Tad dvije ravnine simetrije (AA′ i BB′), koje taj sklop posjeduje, mogu preuzeti uloge električnog magnetskog zida. Time se sklop može razložiti na četiri jednoprolazne svojstvene mreže prikazane na slici 7.47. Kao što se može lako uočiti, svakoj svojstvenoj mreži odgovara druga kombinacija električnog i magnetskog zida na ravninama simetrije, što rezultira sljedećim koeficijentima refleksije, tj. svojstvenim vrijednostima hibrida:

$$\Gamma_a = \frac{Y_0 - \mathrm{j}Y_{01}\tan\theta_1 - \mathrm{j}Y_{02}\tan\theta_2}{Y_0 + \mathrm{j}Y_{01}\tan\theta_1 + \mathrm{j}Y_{02}\tan\theta_2}, \tag{7–84a}$$

$$\Gamma_b = \frac{Y_0\tan\theta_1 + \mathrm{j}Y_{01} - \mathrm{j}Y_{02}\tan\theta_1\tan\theta_2}{Y_0\tan\theta_1 - \mathrm{j}Y_{01} + \mathrm{j}Y_{02}\tan\theta_1\tan\theta_2}, \tag{7–84b}$$

$$\Gamma_c = \frac{Y_0\tan\theta_2 - \mathrm{j}Y_{01}\tan\theta_1\tan\theta_2 + \mathrm{j}Y_{02}}{Y_0\tan\theta_2 + \mathrm{j}Y_{01}\tan\theta_1\tan\theta_2 - \mathrm{j}Y_{02}}, \tag{7–84c}$$

$$\Gamma_d = \frac{Y_0\tan\theta_1\tan\theta_2 + \mathrm{j}Y_{01}\tan\theta_2 + \mathrm{j}Y_{02}\tan\theta_1}{Y_0\tan\theta_1\tan\theta_2 - \mathrm{j}Y_{01}\tan\theta_2 - \mathrm{j}Y_{02}\tan\theta_1}, \tag{7–84d}$$



Slika 7.47. Četiri svojstvene mreže za opis raspršnih parametara sprežnika s ograncima

gdje je $\tan\theta_1 = \tan\beta_1 l_1$, $\tan\theta_2 = \tan\beta_2 l_2$, a Y_0, Y_{01} i Y_{02} označuju karakteristične admitancije ulaznih linija, uzdužnih linija (između prolaza 1 i 2 te 3 i 4), odnosno poprečnih linija (između prolaza 1 i 4 te 2 i 3), kao što je prikazano na slici 7.46.

Ako se uzme $\tan\theta_1 = \tan\theta_2 = 1$, onda je na središnjoj frekvenciji sprežnika $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$ pa su uzdužni i poprečni linijski odsječci dugački $2l_1 = 2l_2 = \lambda_v/4$. Uz dodatni uvjet $Y_{01}^2 - Y_{02}^2 = Y_0^2$ parametri S_{11} i S_{44} jednaki su nuli, a parametri S_{21} i S_{31} poprimaju vrijednosti $S_{21} = (\Gamma_a + \Gamma_c)/2$, odnosno $S_{31} = (\Gamma_a - \Gamma_c)/2$ pa se za $\tan\theta_1 = \tan\theta_2 = 1$ dobiva $S_{21} = -\mathrm{j}Y_0/Y_{01}$, odnosno $S_{31} = -Y_{02}/Y_{01}$.

Posebna vrsta sprežnika sprege 3 dB dobiva se ako se uzme $Y_{02} = Y_0$ i $Y_{01} = \sqrt{2}Y_0$, tj. ako je karakteristična impedancija uzdužnih ogranaka $Z_{01} = Z_0/\sqrt{2}$. Iz tih se uvjeta na središnjoj frekvenciji sprežnika dobivaju ovi raspršni parametri:

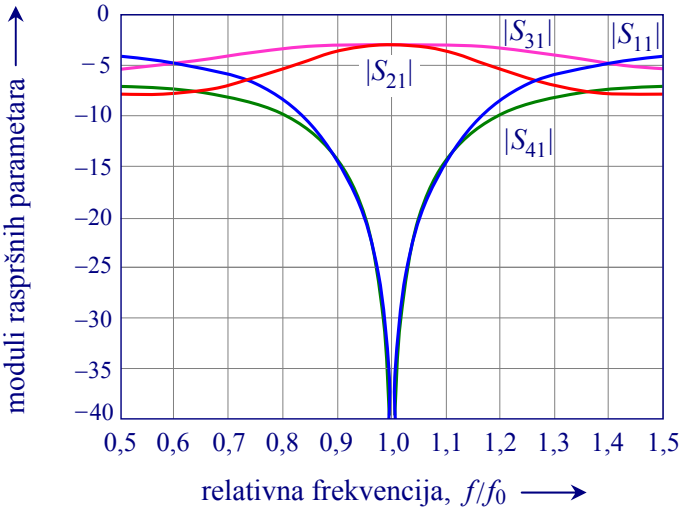
$$S_{11} = 0\,, \quad S_{21} = -\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\,, \quad S_{31} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad S_{41} = 0\,. \tag{7–85}$$

Kao što smo vidjeli u odjeljku o simetričnim mrežama [jednadžbe (5–140)], raspršni se parametri sprežnika s ograncima mogu prikazati kao linearna kombinacija jednakosti (7–84):

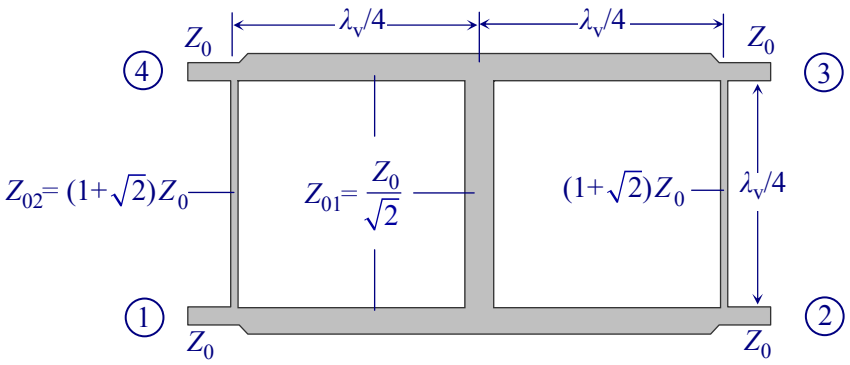
$$S_{11} = \frac{\Gamma_a + \Gamma_b + \Gamma_c + \Gamma_d}{4}\,, \qquad S_{21} = \frac{\Gamma_a - \Gamma_b + \Gamma_c - \Gamma_d}{4}\,,$$
$$S_{31} = \frac{\Gamma_a - \Gamma_b - \Gamma_c + \Gamma_d}{4}\,, \qquad S_{41} = \frac{\Gamma_a + \Gamma_b - \Gamma_c - \Gamma_d}{4}\,. \tag{7–86}$$

Ovi se uvjeti mogu lako ispuniti u prstenastom kvadraturnom hibridu, kojem su signali na izlaznim prolazima međusobno pomaknuti u fazi za 90°. Zbog svojstava simetrije i recipročnosti mnogi su raspršni parametri međusobno jednaki pa se raspršna matrica kvadraturnoga hibrida na središnjoj frekvenciji (5–227) svodi na oblik

$$[S] = -\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\mathrm{j} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\mathrm{j} \\ -\mathrm{j} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\mathrm{j} & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7–87}$$



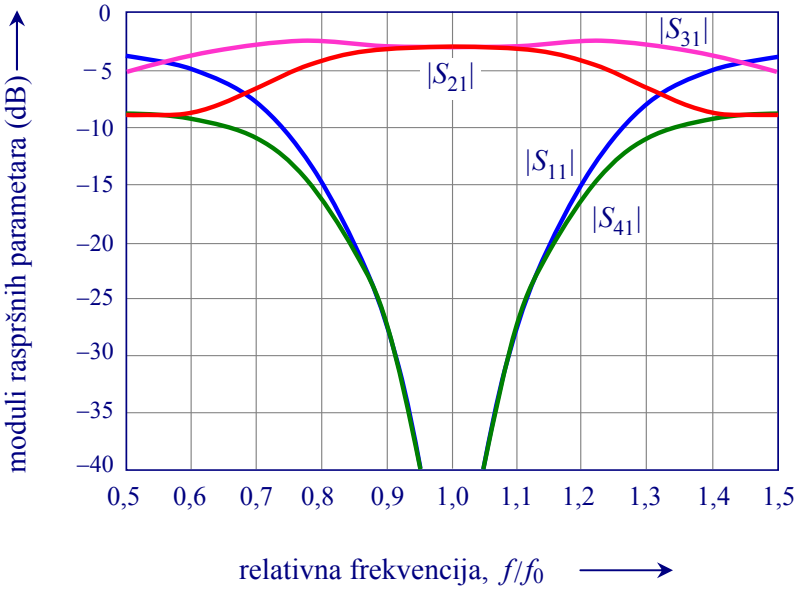
Slika 7.48. Odziv modula raspršnih parametara kvadraturnoga hibrida



Slika 7.49. Širokopojasni kvadraturni hibrid s više ogranaka

Uvrštenjem izraza (7–84) u (7–86) lako se može naći odziv kvardaturnoga hibrida. Na slici 7.48 prikazan je odziv modula raspršnih parametara kvadraturnoga hibrida u funkciji normirane frekvencije. Usmjerni sprežnik upućuje na zadovoljavajuće karakteristike samo u razmjerno uskom frekvencijskom području (10-15%).

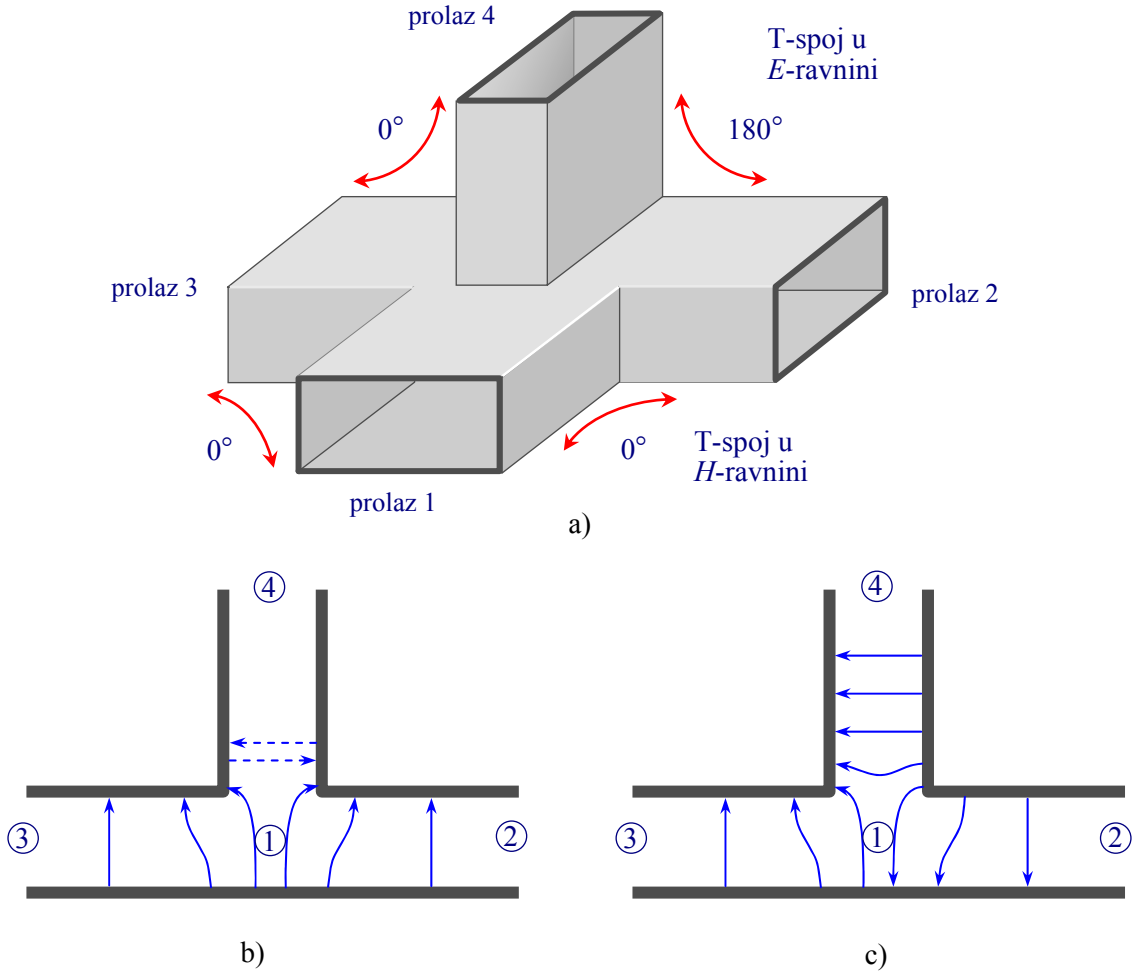
No ako se više kvadraturnih hibrida poveže u kaskadu, uz ispravan odabir karakterističnih impedancija linijskih odsječaka, mogu se postići vrlo dobre karakteristike unutar širokog frekvencijskog pojasa. Jedan je takav sklop prikazan na slici 7.49, a moduli njegovih raspršnih parametara u decibelima prikazani su u funkciji frekvencije na slici 7.50.



Slika 7.50. Odziv raspršnih parametara širokopojasnog kvadraturnga hibrida s trima ograncima u decibelima. Za karakterističnu impedanciju priključnih linija (prolaza) $Z_0 = 50\ \Omega$, svi uzdužni odsječci imaju jednaku karakterističnu impedancije, $Z_{01} = 35{,}5\ \Omega$, a karakteristične impedancije poprečnih odsječaka poprimaju vrijednosti $Z_{01} = 35{,}5\ \Omega$, odnosno $Z_{02} = 120{,}7\ \Omega$

7.3.6. Hibridni T-spoj i balansni transformator

Na slici 7.51a) prikazan je zanimljiv hibridni T-spoj dobiven integracijom idealnih valovodnih T-spojeva u *E*- i *H*-ravnini ([1]-[3], [18] i odjeljak 7.2.1). Kad na valovodnu granu prolaza 1 upada val u dominantnom modu TE_{10}, tad silnice električnog polje poprimaju oblik prikazan na slici 7.51b). To električno polje upućuje na parnu simetriju na ravnini simetrije pa se u grani 4 ne može pobuditi mod TE_{01} jer taj mod traži električno polje neparne simetrije. Stoga ne postoji sprega između prolaza 1 i 4. Sprege između prolaza 1 i 2 te 1 i 3 međusobno su jednaka, što je posljedica simetrije sklopa.



Slika7.51. a) Hibrid *magični*-T dobiven integracijom dvaju valovodnih T-spojeva (u ravninama magnetskog i električnog polja); **b)** razdioba električnog polja pri pobudi prolaza 1; **c)** razdioba električnog polja pri pobudi prolaza 4

Kad mod TE_{01} upada na prolaz 4, tad silnice električnog polja poprimaju oblik poput onog na slici 7.51c). Simetrija opet upućuje na međusobno raspregnute prolaze 1 i 4, što izlazi i iz svojstva recipročnosti. Sprege između prolaza 4 i 2 te 4 i 3 jednake su veličine, ali suprotne faze. No u grane 1 i 4 na samoj ravnini simetrije mogu se ugraditi prilagodni elementi koji ne kvare simetriju sklopa pa se može postići $S_{11} = S_{44} = 0$. Zatim iz uvjeta unitarnosti raspršne matrice za sklop bez gubitaka izlazi $S_{22} = S_{33} = 0$ pa su istodobno prilagođena sva četiri prolaza. Kao što je objašnjeno u odjeljku 5.8.3, u recipročnoj i nerefleksivnoj četveroprolaznoj mreži mora biti zadovoljen i dodatni uvjet $S_{23} = 0$, što znači da su prolazi 2 i 3, kao i prolazi 1 i 4 međusobno raspregnuti. Zbog faznog pomaka od 180º između dvaju prolaza, opisana vrsta sprežnika spada u π- hibride pa joj raspršna matrica ima oblik (5–228), tj.

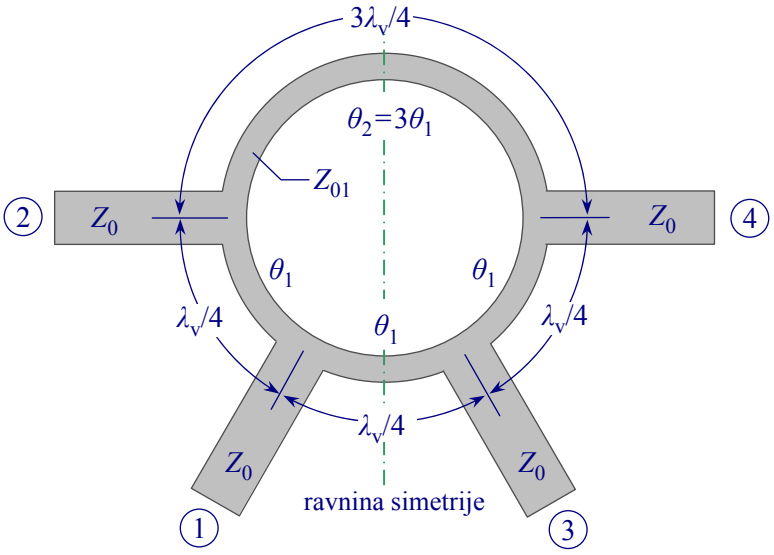
$$[S]_{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7–88}$$

Valovodni hibridni T-spoj pripada skupini usmjernih sprežnika sprege 3 dB i nerijetko se rabi u valovodnim izvedbama balansnih miješala i mosnim sklopovima. Taj je hibrid poznat i pod nazivom *magični* T-spoj.

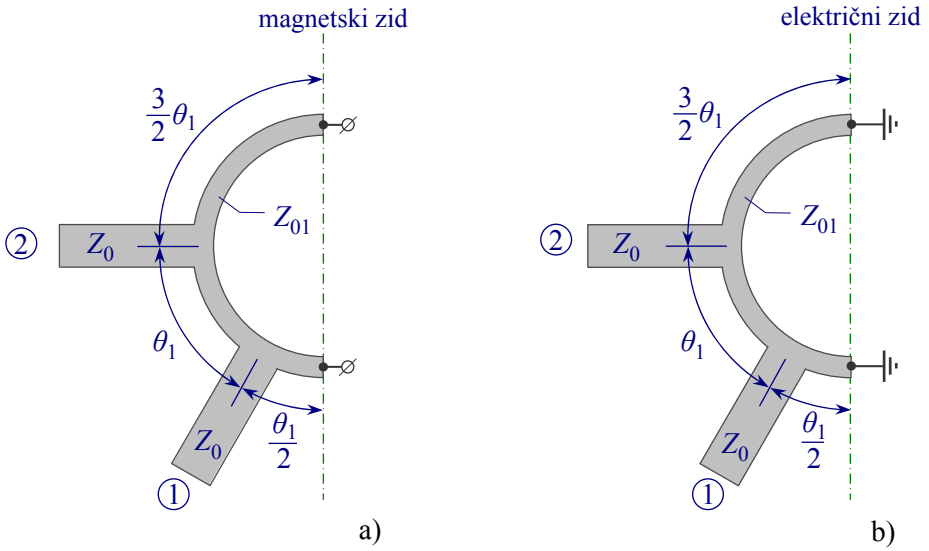
Prstenasti π-hibrid

Mikrotrakasti sklop prikazan na slici 7.52 ponaša se slično hibridnom T-spoju [1]-[3], [13], [18]. Poput kvadraturnoga hibrida i taj sklop pripada sprežnicima s ograncima. No budući da nema dvije ravnine simetrije pripada i skupini nesimetričnih sprežnika poput spoja magično T. Da bismo razumjeli načelo rada tog hibrida razmotrimo upadni val snage na prolazu 2. Taj se val dijeli na dva vala koji prstenom putuju suprotnim smjerovima. Ta dva vala stižu na prolaze 1 i 4 s jednakom fazom, a u protufazi na prolaz 3. Stoga će prolazi 2 i 3 biti međusobno raspregnuti (izolirani). No, zbog simetrije, bit će međusobno raspregnuti i prolazi 1 i 4. To upućuje na sličnost raspršnih matrica prstenastog π-hibrida i spoja magični T-spoj.

Sklop prstenastog π-hibrida prikazanog na slici 7.52 može se lako analizirati primjenom simetrije. Neka su prolazi opterećeni prijenosnim linijama karakteristične impedancije Z_0 i neka je karakteristična impedancije prstenaste linije Z_{01}. Pretpostavimo nadalje da su dijelovi prstena između prolaza 2 i 1, 1 i 3 te 3 i 4 jednake električne duljine θ_1 i neka je odsječak između prolaza 2 i 4 električki dugačak $\theta_2 = 3\theta_1$. Hibrid se može pobuditi tako da ravnina simetrije tvori električni ili magnetski zid. Tad se sklop može rastaviti na dvije svojstvene mreže prikazane na slici 7.53. Ako ravnina simetrije čini magnetski zid, onda se sve linije koje presijecaju taj magnetski zid treba ostaviti otvorene, kao što je prikazano na slici 7.53a). Dobivena svojstvena mreža sastoji se od dviju ulaznih linija (prolazi 1 i 2) karakteristične impedancije Z_0 i linijskog odsječka električne duljine θ_1, karakteristične impedancije Z_{01} koji ih povezuje. Na prolazu 1 paralelno je spojen otvoreni stab admitancije $jB_1 = jY_{01}\tan(3\theta_1/2)$, a na prolazu 2 paralelno je spojen otvoreni stab admitancije $jB_2 = jY_{01}\tan(\theta_1/2)$.



Slika 7.52. Prstenasti π-hibrid u trakastoj izvedbi



Slika 7.53. a) Svojstvena mreža (polovica hibridnog prstena) kad ravnina simetrije čini magnetski zid; **b)** svojstvena mreža kad ravnina simetrije čini električni zid

Pri protufaznoj pobudi hibridnog prstena ravnina simetrije preuzima ulogu električnog zida. Dobivena svojstvena mreža prikazana na slici 7.53b) slična je onoj za istofaznu pobudu, samo što su sad stabovi, koji su nastali presijecanjem mreže, kratko spojeni. Stoga stab jB_1 treba zamijeniti stabom $jB_3 = -jY_{01}\cot(3\theta_1/2)$, a stab jB_2 treba zamijeniti stabom $jB_4 = -jY_{01}\cot(\theta_1/2)$.

Izračunavanjem raspršnih parametara svojstvenih mreža i njihovim uvrštenjem u izraze (5–121) iz odjeljka 5.5.3. mogu se odrediti raspršni parametri tog hibridnog spoja. Na središnjoj je frekvenciji $\theta_1 = \pi/2$ pa su raspršni parametri opisani ovim izrazima:

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = \frac{Y_0^2 - 2Y_1^2}{Y_0^2 + 2Y_1^2}, \tag{7–89}$$

$$S_{41} = S_{23} = 0, \tag{7–90}$$

$$S_{21} = S_{34} = -S_{24} = S_{31} = \frac{-j2Y_0Y_1}{Y_0^2 + 2Y_1^2}. \tag{7–91}$$

Jednakosti (7–90) pokazuju da su prolazi 1 i 4 te 2 i 3 međusobno raspregnuti, a jednakosti (7–91) upućuju na spregu prolaza 2 i 3 s prolazima 1 i 4, s time da su signali na prolazima 4 i 1 međusobno protufazni, jer je $S_{21} = -S_{24}$. Izjednači li se brojnik izraza (7–89) s nulom, svi prolazi postaju nerefleksivni (prilagođeni) iz čega izlazi uvjet $Y_0^2 = 2Y_1^2$, tj.

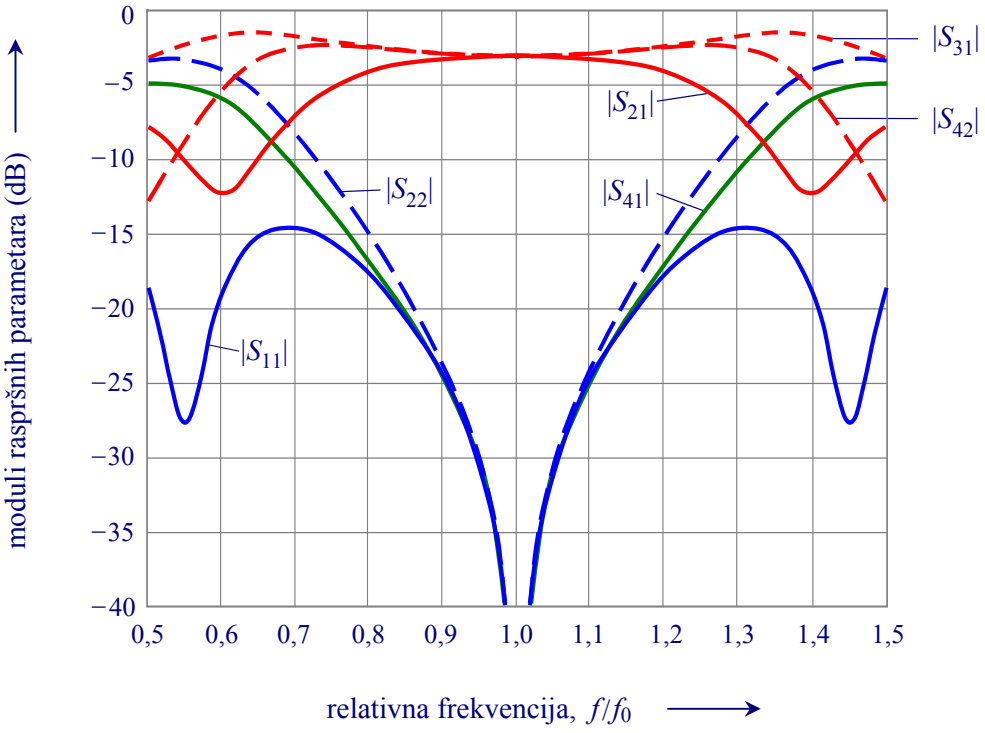
$$Z_1 = \sqrt{2}Z_0. \tag{7–92}$$

Uvrštenjem tog uvjeta u izraz (7–91) dobiva se

$$|S_{21}| = |S_{24}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{7–93}$$

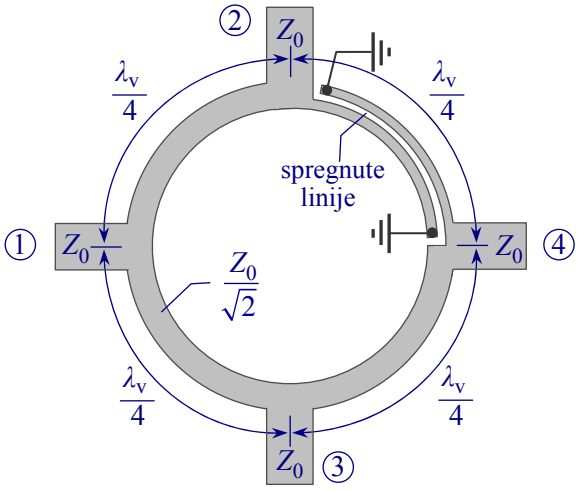
pa raspršna matrica prstenastog hibrida poprima konačni oblik

$$[S]_\pi = \frac{-j}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7–94}$$



Slika 7.54. Frekvencijska ovisnost modula raspršnih parametara prstenastog hibrida

Može se uočiti da je matrica (7–94) slična matrici (7–88) *magičnog* T-spoja. Razlika je samo u tomu što je matrica prstenastog hibrida pomnožena faktorom –j, što odgovara kašnjenju u fazi za π/2. Drugim riječima, sve su referentne ravnine prolaza pomaknute prema van za električnu duljinu $\theta_1 = \pi/2$, što je posljedica četvrtvalnih linijskih odsječaka između susjednih prolaza (slika 7.52). Kad radna frekvencija počinje odstupati od središnje frekvencije hibrida dolazi do postupne degradacije njegovih obilježja. Na slici 7.54 prikazana je frekvencijska ovisnost apsolutnih vrijednosti raspršnih parametra prstenastog π-hibrida. Iz te slike može se odrediti širina korisnog frekvencijskog pojasa prstenastog π-hibrida, koja iznosi oko 30%.



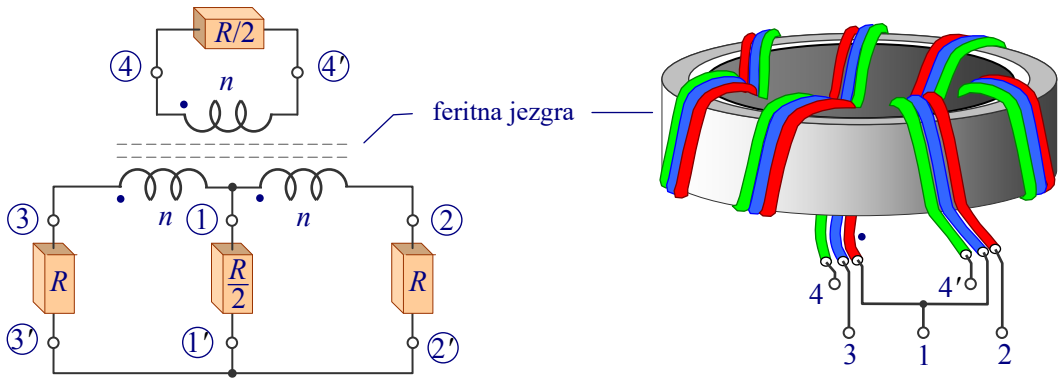
Slika 7.55. Širokopojasni π-hibrid. Fazni pomak od 270° ostvaren je spregnutim linijama četvrtvalne duljine čija su dva dijagonalna prolaza kratko spojena (uzemljena)

Rad uz veću širinu pojasa može se ostvariti uporabom preinačenoga prstenastog π-hibrida prikazanog na slici 7.55. Umjesto odsječka duljine $3\lambda_v/4$ tu je primijenjen sustav spregnutih četvrtvalnih linija, koji obrće fazu za dodatnih 180 stupnjeva, što je ostvareno uzemljivanjem dijagonalnih prolaza četvrtvalnog sprežnika. Premda je na slici 7.55 prikazana izvedba s dvjema spregnutim trakama, u praksi se ovaj sprežnik izvodi kao Langeov hibrid s četirima ili šesterima spregnutim trakama, jer je ovdje potrebna jaka sprega koja se ne može ostvariti sprežnikom sa samo dvjema spregnutim trakama. Karakteristična impedancija prstenastog dijela hibrida iznosi $Z_0\sqrt{2}$, kao i kod izvornoga prstenastog π-hibrida prikazanog na slici 7.52.

Balansni transformator

Osim opisanog prstenastog π-hibrida u praksi se nalaze različiti linijski hibridi i klasični balansni transformatori čija je primjena ograničena na frekvencijsko područje ispod 4 GHz.

Simetrijom su u balansnom transformatoru ostvarena obilježja jednaka π-hibridu [13]. Najjednostavniji oblik prikazan je na slici 7.56a). Pretpostavimo da su svitci transformatora idealni i da svaki od njih ima jednak broj zavoja. Budući da su sekundarni svitci idealnog transformatora odnosa zavoja 1:2 međusobno spojeni serijski, riječ je o jednom zajedničkom svitku sa središnjim izvodom spojenim s priključkom 1 istoimenog prolaza. Primarni je svitak spojen na priključak 4, a preostala su dva sekundarni svitci. Otpori trošila na priključcima 3 i 4 polovičnih su vrijednosti u odnosu na trošila spojena na priključke 1 i 2.



a) b)

Slika7.56. a) Shematski prikaz balansnoga transformatora; **b)** praktična izvedba s trifilarnim svitkom na prstenastoj feritnoj jezgri

Ako se prolaz 4 pobudi izmjeničnim naponom efektivne vrijednosti V i primarom protječe struja efektivne vrijednosti I, onda se jednak napon V mora inducirati u obama sekundarnim svitcima. U skladu sa zakonom očuvanja energije struja u sekundarnim svictima mora biti jedna polovina struje primara, tj. $I/2$. Stoga je očito da prolazom 1 ne protječe struja jer struje u sekundarnim petljama protječu otporom $R/2$ na prolazu 1 suprotnim smjerovima pa je pad napona na prolazu 1 jednak nuli. Stoga je prolaz 1 virtualno kratko spojen i izoliran od prolaza 4 pa snage predane otporima R u prolazima 3 i 2 iznose $P_3 = P_2 = VI/2$ uz suprotne polaritete napona na tim prolazima.

Pri pobudi prolaza 1, zbog simetričnosti sekundarnog strujnoga kruga, struja I u prolazu 1 jednoliko će se raspodijeliti u sekundarnim svitcima. Budući da struje u sekundarnim svitcima teku suprotnim smjerovima, u primaru se ne inducira napon, tj. $V4 = 0$. Drugim riječima, između prolaza 1 i 4 postoji sprega. U idealnome transformatoru transformacijskog odnosa 1:1,

napon na sekundarnom svitku mora biti jednak naponu na primarnom svitku, pa su naponi na sekundarnim svitcima također jednaki nuli. Stoga su na prolazima 3 i 2 naponi istofazni i iznose V jer na prolazu 1 postoji napon jednakog iznosa. Struje u sekundarnim strujnim krugovima iznose $I/2$, pa snage predane otporima R na prolazima 3 i 2 opet iznose $VI/2$.

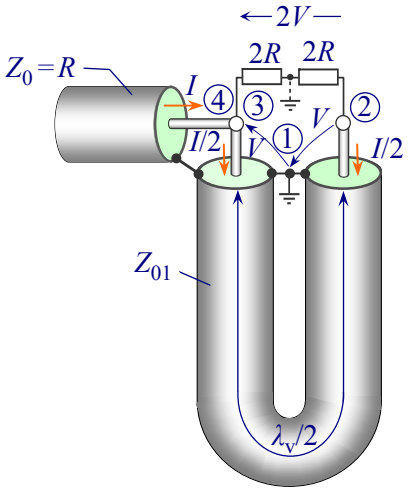
Pri pobudi prolaza 2, sekundarnim svitkom protječe struja iznosa I. Struja jednakog iznosa protječe i primarnim svitkom pa napon na otporu $R/2$ u primarnom krugu iznosi $IR/2 = V/2$. Jednaki naponi postoje i na sekundarnim svitcima. Pri tomu su točke koje označuju početke namatanja svitaka istog polariteta. Primjenom Kirchhoffova zakona za napone u petlji, na prolazu 1 postoji napon $V/2$ pa kroz otpor $R/2$ u tom prolazu protječe struja I. Otuda su trošilima u prolazima 1 i 4 predane jednake snage, tj. $P_1 = P_4 = VI/2$. No pritom je prolaz 3 izoliran jer je napon na njemu jednak nuli. Jednako razmatranje vrijedi i pri pobudi prolaza 3.

Taj je hibrid ustvari transformator pa se može izvesti za širokopojasne primjene u rasponu frekvencija koji ponekad prelazi i nekoliko dekada, jer se na nižim radnim frekvencijama hibrid ponaša poput konvencionalnog transformatora, a na višim se frekvencijama ponaša kao struktura s prijenosnom linijom. U praksi se balansni transformatori mogu ostvariti trifilarnim svitkom na prstenastoj feritnoj jezgri visoke permeabilnosti, tj. istodobnim namatanjem triju električki izoliranih žica u jedan svitak s pet izvoda. Tako se može ostvariti čvrsta sprega uz transformacijski odnos između svitaka 1 : 1 : 1, što je važno za ispravan rad hibrida. Na slici 7.56b) prikazana je praktična izvedba balansnog transformatora i način povezivanja izvoda. Da bi se ostvarili optimalni rezultati potrebno je kod namatanja zavoja iskoristiti cijelu jezgru.

Budući da su opteretne impedancije na prolazima 3 i 4 upola manje od impedancija na prolazima 1 i 2, raspršna matrica nema jednake priključne impedancije na svim prolazima. Za balansni transformator jednakih priključnih impedancija na svim prolazima valja povećati transformacijski odnos između prolaza 4 i prolaza 1 i 2 na vrijednost $\sqrt{2}:1$, a na prolaz 3 valja ugraditi dodatni naponski transformator koji će za taj isti iznos podići napon na njegovom izlazu kao novom prolazu 3. Tad će priključne impedancije na prolazima 3 i 4 postati R pa će raspršna matrica balansnog transformatora biti istovjetna matrici (7–88) *magičnog* T-spoja.

Linijski balansni transformator

Na slici 7.57 shematski je prikazan linijski balansni transformator koji nalazi primjenu pri prilagodbi nesimetrične suosne linije na simetrični dipol. No nerijetko se primjenjuje i u izvedbama mikrotrakstih balansnih sklopova. Središnji mu je dio poluvalni odsječak prijenosne linije ($l=\lambda_v/2$), koji je savijen u oblik trombona ili slova U. Plaštevi suosnih linija uzemljeni su

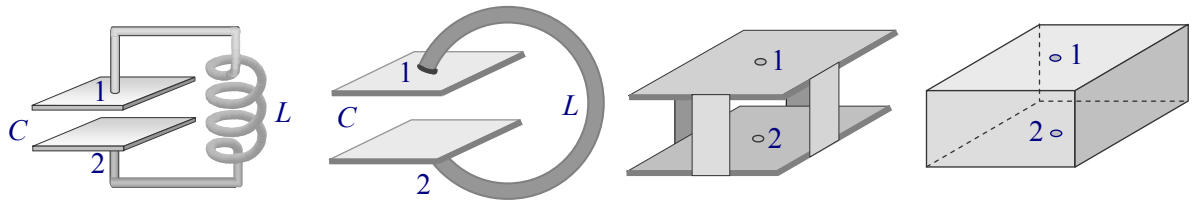


Slika 7.57. Balansni transformator s poluvalnom linijom u obliku trombona

u čvorištu 1. Priključak 4 pobudne linije izravno je spojen s priključkom 3. U čvorištu 3 ulazna struja efektivne vrijednosti I dijeli se na dvije jednake struje, prva ulazi u teret, a druga u poluvalni odsječak. Prolazeći linijom, struja mijenja smjer pa se smjer struje koja protječe trošilom podudara sa smjerom struje koja ulazi u poluvalni odsječak na priključku 2. Budući da između priključka 3 i uzemljenog čvorišta 1 postoji napon efektivne vrijednosti V, napon jednake vrijednosti vlada između čvorišta 1 i 2. Otuda ukupni napon između priključaka 3 i 2 iznosi $2V$. Da bi sklop bio prilagođen, između priključaka 3 i 2 valja spojiti trošilo otpora $4R$. Stoga sklop ujedno obavlja i transformaciju impedancije u omjeru 1:4. Izbor karakteristične impedancije poluvalne linije nije posebno kritičan, ali se u praksi nerijetko odabire vrijednost $Z_{01}=Z_0=R$. U nekim je izvedbama korisno zajedničku točku između dvaju otpora $2R$ uzemljiti bez utjecaja na rad sklopa. Zbog uporabe poluvalnog odječka sklop je razmjerno uskopojasan.

7.4. Mikrovalni rezonatori

Prijenosne linije i valovodi primjenjuju se za učinkovit prijenos elektromagnetske energije od izvora do trošila. Nasuprot tomu, rezonator je naprava koja pohranjuje energiju. Rezonator je ekvivalentan titrajnome krugu. Na niskim frekvencijama opotrebljava se paralelni spoj kondenzatora (kapaciteta) i zavojnice (induktiviteta), kao što je prikazano na slici 7.58a). Da bi ta struktura rezonirala na višim frekvencijama treba smanjiti vrijednosti kapaciteta i induktiviteta, slika 7.58b). Daljnji porast rezonantne frekvencije može se ostvariti smanjivanjem induktiviteta na način da se žičana struktura zamijeni s više poprečno (paralelno) spojenih trakastih vodiča, kao na slici 7.58c). Dodavanjem novih trakastih vodiča struktura se konačno pretvara u *šupljinski rezonator* koji tvori posve zatvorenu kutiju s metalnim plohama oblika kvadra, slika 7.58d). Takav rezonator ima više rezonantnih modova, a u modu s najnižom rezonantnom frekvencijom postiže se samo jedan maksimum napona koji se nalazi u prostoru između točaka 1 i 2 u središtima gornje i donje plohe. Šupljinski rezonatori mogu poprimiti i druge oblike poput valjkastog, kuglastog itd., a da zadrži dobre rezonantne značajke.



Slika 7.58. Evolucija šupljinskog rezonatora (desno) iz jednostavnog titrajnog LC-kruga (lijevo)

U dielektričnom sredstvu koje je u cijelosti oklopljeno vodljivim granicama (savršen električni vodič ili savršen magnetski vodič), Maxwellove jednadžbe dopuštaju rješenja različita od nule samo na posebnim (diskretnim) frekvencijama. Svaki se takav oklop naziva *rezonator*. Ako se na oklop primijene rubni uvjeti, onda rješenje Maxwellovih jednadžba vodi do problema sa svojstvenim vrijednostima. Problem svojstvenih vrijednosti rezultira skupom različitih rješenja poznatih pod nazivom *rezonantni modovi*, a to su svojstvene funkcije. Svakoj od njih pripada određena svojstvena vrijednost odnosno *rezonantna frekvencija*. Broj je modova, koji čine takav skup diskretnih vrijednosti, beskonačan.

Zatvaranjem valovodnog odsječka na obama krajevima metalnim ravninama postavljenim okomito na os valovoda, dobiva se *šupljinski rezonator*. Tako ostvaren rezonator rezonira kad mu je duljina jednaka cijelom broju poluvalova stojnoga vala. Razdioba polja može se lako odrediti u skladu s izvedenim izrazima za valovode iz odjeljaka 4.3. i 4.4. Slične se značajke rezonancije mogu naći i u strukturama koje nisu u cijelosti okružene vodljivim oklopom. To je tipično za rezonatore koji se sastoje od odsječaka prijenosnih linija (mikrotrakaste, suosne

itd.) koji su na krajevima otvoreni, a ti se otvoreni krajevi mogu samo približno nadomjestiti magnetskim zidom. Da bi se rezonator pobudio poljem, u stijenkama šupljinskog rezonatora nerijetko se moraju izvesti odgovarajući otvori. Budući da otvori mijenjaju razdiobu polja, općenito dolazi do odgovarajuće promjene rezonantne frekvencije. Pri tomu neki modovi na otvorima mogu izazvati zračenje elektromagnetske energije iz rezonatora u okolni prostor.

Kad su izmjere rezonatora svega nekoliko centimetara, tad se najniža rezonantna frekvencija nalazi unutar mikrovalnoga frekvencijskog područja. U idućim ćemo odjeljcima vidjeti da su rezonatori nezaobilazne komponente filtara, oscilatora, usklađenih pojačala, valomjera itd. Budući da imaju neke zajedničke značajke s običnim titrajnim krugovima, koji se sastoje od koncentriranih *RLC* elemenata, započet ćemo razmatranjem obilježja serijskoga i paralelnoga titrajnog kruga. Potom ćemo razmotriti neke primjene rezonatora s raspodijeljenim parametrima poput prijenosnih linija te šupljih i dielektričnih valovoda.

7.4.1. Serijski i paralelni titrajni krugovi

U okolišu rezonantne frekvencije, svaki mikrovalni rezonator može se modelirati bilo serijskim bilo paralelnim *RLC* nadomjesnim sklopom izvedenim s koncentriranim elementima [1]-[4], [11]. Na slici 7.59 prikazan je serijski *RLC* rezonantni krug s koncentriranim elementima, čija je ulazna impedancija

$$Z_\mathrm{s} = R_\mathrm{s} + \mathrm{j}\omega L_\mathrm{s} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C_\mathrm{s}}. \tag{7–95}$$

Kompleksna snaga predana rezonatoru iznosi

$$P_\mathrm{ul} = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}Z_\mathrm{s}|I|^2 = \frac{1}{2}\left(R_\mathrm{s} + \mathrm{j}\omega L_\mathrm{s} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C_\mathrm{s}}\right)|I|^2, \tag{7–96}$$

gdje je uvrštena veza $V = IZ_\mathrm{s}$. Otpor R_s označuje gubitke snage u titrajnom sustavu. Disipirana snaga u otporu R_s te srednje pohranjene energije u magnetskom i električnom polju, unutar induktiviteta L_s, odnosno kapaciteta C_s, dane su ovim izrazima:

$$P_\mathrm{dis} = \frac{1}{2}|I|^2 R_\mathrm{s}, \tag{7–97}$$

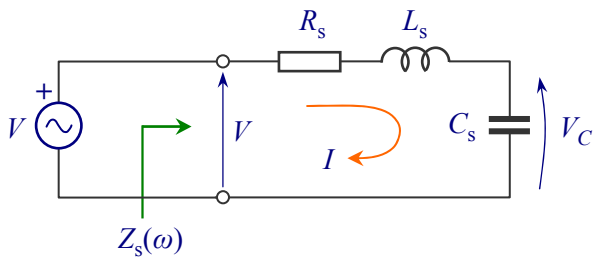
$$\langle W_\mathrm{m}\rangle = \frac{1}{4}|I|^2 L_\mathrm{s}, \tag{7–98}$$

$$\langle W_\mathrm{e}\rangle = \frac{1}{4}|V_\mathrm{C}|^2 C_\mathrm{s} = \frac{1}{4}|I|^2 \frac{1}{\omega^2 C_\mathrm{s}}, \tag{7–99}$$

gdje je V_C napon na kapacitetu C_s. Sad se kompleksna snaga može napisati kao

$$P_\mathrm{ul} = P_\mathrm{dis} + \mathrm{j}2\omega\left(\langle W_\mathrm{m}\rangle - \langle W_\mathrm{e}\rangle\right), \tag{7–100}$$

a ulazna impedancija kao



Slika 7.59. Serijski titrajni krug

$$Z_s = \frac{2P_{ul}}{|I|^2} = \frac{P_{dis} + j2\omega\left(\langle W_m\rangle - \langle W_e\rangle\right)}{\frac{1}{2}|I|^2}. \tag{7–101}$$

Rezonancija se pojavljuje kad su srednje pohranjene energije električnog i magnetskog polja međusobno jednake, $\langle W_m\rangle = \langle W_e\rangle$. Uz uvjet rezonancije, iz izraza (7–101) i (7–97) izlazi

$$Z_s(\omega = \omega_r) = \frac{2P_{dis}}{|I|^2} = R_s, \tag{7–102}$$

što je posve realna veličina. Iz izraza (7–98) i (7–99) i uvjeta $\langle W_m\rangle = \langle W_e\rangle$ izravno se dobiva koristan izraz za rezonantnu frekvenciju,

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}}. \tag{7–103}$$

Drugi značajan parametar neopterećenog rezonantnog sklopa njegov je faktor dobrote ili unutarnji Q- faktor, definiran kao

$$Q_0 = \omega \frac{\langle W_m\rangle + \langle W_e\rangle}{P_{dis}} = \frac{\langle W_m\rangle + \langle W_e\rangle}{\frac{1}{2}|I|^2 R_s} = \frac{\omega}{2R_s}\frac{\partial X}{\partial \omega}. \tag{7–104}$$

Izraz (7–104) pokazuje da faktor dobrote označuje mjeru gubitaka rezonantnog kruga. Pri tomu, manji gubitci znače veći Q_0. Za serijski titrajni krug, prikazan na slici 7.59, faktor dobrote može se izračunati iz izraza (7–104) primjenom izraza (7–100) i činjenice da je u rezonanciji $\langle W_m\rangle = \langle W_e\rangle$. Otuda je

$$Q_0 = \omega \frac{2\langle W_m\rangle}{P_{dis}} = \frac{\omega_r L_s}{R_s} = \frac{1}{\omega_r R_s C_s}, \tag{7–105}$$

što znači da Q_0 raste smanjivanjem otpora R_s.

Razmotrimo sad ponašanje ulazne impedancije serijskoga titrajnog kruga u okolišu rezonantne frekvencije. S pomoću izraza (7–103), ulazna impedancija (7–95) poprima ovaj oblik

$$Z_s = R_s + j\omega L_s\left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_s C_s}\right) = R_s + j\omega L_s \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2}, \tag{7–106}$$

Uvrštenjem izraza $\omega = \omega_r + \Delta\omega$, gdje je $\Delta\omega$ mala veličina, dobiva se $\omega^2 - \omega_r^2 \simeq 2\omega\Delta\omega$ pa se u okolišu rezonantne frekvencije izraz (7–106) može aproksimirati kao

$$Z_s \simeq R_s + j2L_s\Delta\omega = R_s + j\frac{2R_s Q_0 \Delta\omega}{\omega_r}. \tag{7–107}$$

U odjeljku 7.4.2. može se vidjeti kako se taj izraz može korisno uporabiti za određivanje nadomjesnih sklopova rezonatora s raspodijeljenim parametrima.

Rezonator s gubitcima može se alternativno razmatrati kao rezonator bez gubitaka ako se rezonantna frekvencija ω_r zamijeni kompleksnom efektivnom rezonantnom frekvencijom

$$\omega_r \leftarrow \omega_r\left(1 + \frac{j}{2Q_0}\right). \tag{7–108}$$

Za rezonator bez gubitaka, tj. za $R_s = 0$, iz izraza (7–107) izlazi

$$Z_s \simeq j2L_s(\omega - \omega_r), \tag{7–109}$$

pa uvrštenje kompleksne frekvencije (7–108) daje

$$Z_s \simeq \mathrm{j}2L_s\left(\omega-\omega_r-\mathrm{j}\frac{\omega_r}{2Q_0}\right)=\frac{\omega_r L_s}{Q_0}+\mathrm{j}2L_s(\omega-\omega_r)=R_s+\mathrm{j}2L_s\Delta\omega\,, \qquad (7\text{–}110)$$

što je istovjetno izrazu (7–107). To je koristan postupak jer su za većinu praktičnih rezonatora gubitci vrlo mali pa se faktor dobrote može odrediti metodom perturbacije tako da se kao početno rješenje uzme slučaj bez gubitaka. U sljedećem koraku učinak gubitaka može se lako ugraditi, ako se ω_r zamijeni kompleksnom frekvencijom iz izraza (7–108).

Unutarnji faktor dobrote može se izraziti i u ovisnosti o širini frekvencijskog pojasa titrajnoga kruga. Širina pojasa $B=(\omega_2-\omega_1)/2\pi=f_2-f_1$ definirana je kao frekvencijsko područje omeđeno frekvencijama na kojima titrajni krug prima polovinu srednje snage od one u rezonanciji. To se zbiva na frekvencijama za koje su imaginarne komponente ulazne impedancije upravo jednake realnoj komponenti, tj. $|Z_s|=\sqrt{2}R_s$, kao što je prikazano na slici 7.60. Stoga se iz izraza (7–107) dobiva

$$\left|R_s+\mathrm{j}2R_sQ_0\frac{\Delta\omega}{\omega_r}\right|=\sqrt{2}R_s\,, \qquad (7\text{–}111)$$

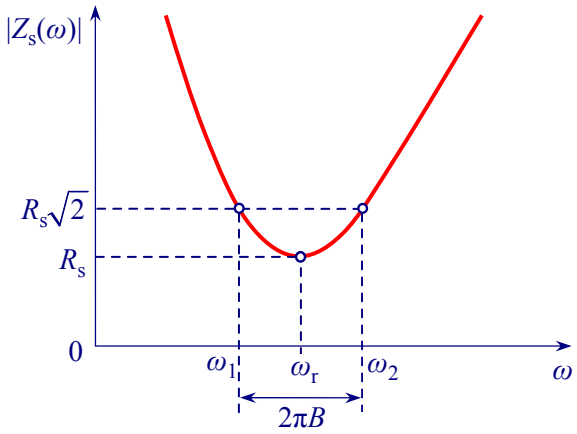
iz čega izlazi da je Q-faktor obrnuto razmjeran širini frekvencijskog pojasa

$$Q_0=\frac{\omega_r}{2\Delta\omega}=\frac{f_r}{B}\,. \qquad (7\text{–}112)$$

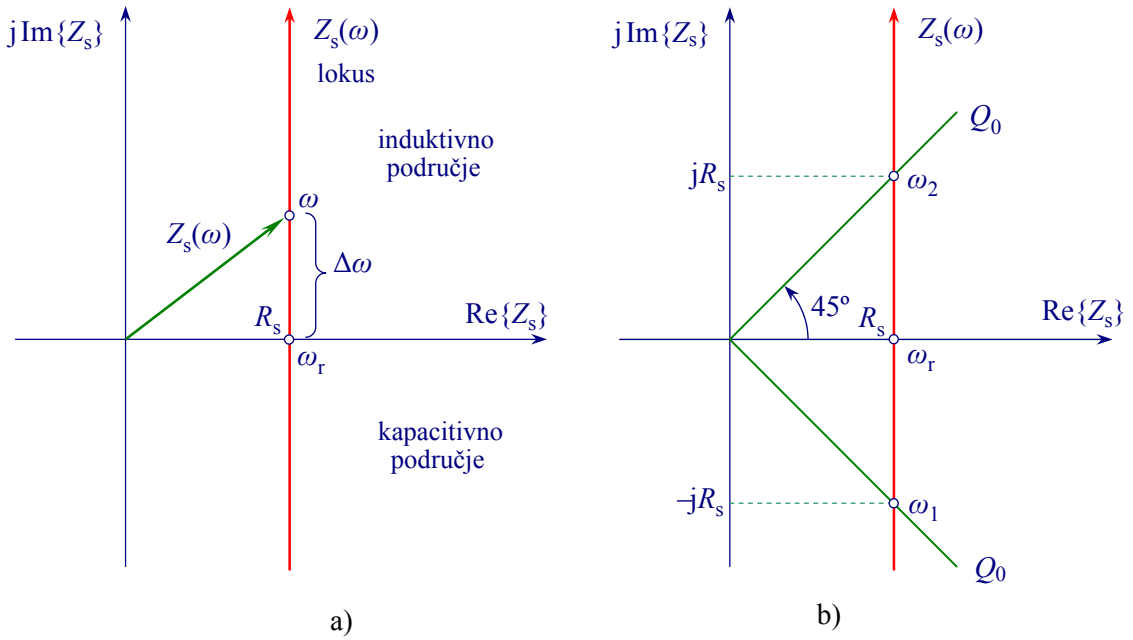
Drugim riječima, širina frekvencijskog pojasa rezonatora obrnuto je razmjerna unutarnjem faktoru dobrote, tj. $B=f_r/Q_0$.

U kompleksnoj ravnini, točke ulazne impedancije serijskoga titrajnog kruga tvore tzv. *lokus* (geometrijsko mjesto) impedancija. Za serijski titrajni krug taj lokus impedancija poprima oblik vertikalnog pravca, kao što je prikazano na slici 7.61a), jer mu je realni dio konstantne vrijednosti R_s pa se promjenom frekvencije mijenja samo reaktancija. Strelica na tom lokusu upućuje na smjer porasta frekvencije. Na rezonantnoj frekvenciji ω_r lokus ulazne impedancije siječe realnu os kompleksne ravnine impedancija. Ispod rezonantne frekvencije dominira kapacitivna komponenta impedancije pa se lokus nalazi ispod realne osi, a za frekvencije iznad rezonantne frekvencije lokus se nalazi u gornjoj poluravnini (induktivno područje).

Na slici 7.61b) prikazano je kako se unutarnji faktor dobrote može odrediti preko širine frekvencijskog pojasa titrajnoga kruga $B=f_2-f_1$. Sjecišta lokusa s pravcima, koji polaze iz ishodišta pod kutovima ± 45°, određuju frekvencije f_2 i f_1 čija razlika daje širinu frekvencijskog pojasa titrajnoga kruga što je u skladu s izrazima (7–111) i (7–112). U tim su točkama imaginarne komponente ulazne impedancije titrajnoga kruga jednake realnoj komponenti $\pm R_s$.

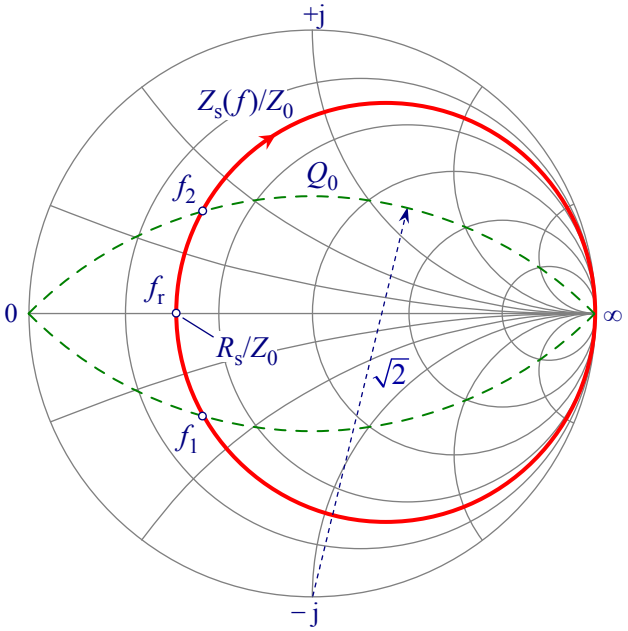


Slika 7.60. Grafički prikaz frekvencijske ovisnosti modula ulazne impedancije serijskoga titrajnog kruga



Slika 7.61. a) Lokus ulazne impedancije serijskoga titrajnog kruga u kompleksnoj ravnini impedancija, **b)** određivanje širine pojasa odnosno unutarnjeg Q-faktora titrajnoga kruga

Na slici 7.62 prikazan je lokus normirane ulazne impedancije serijskoga titrajnog kruga u Smithovu dijagramu. Taj lokus ima oblik kružnice i poklapa se s kružnicom konstantnog realnog dijela, R_s/Z_0. Unutarnji Q-faktor može se odrediti na jednak način kao na slici 7.61. Pravci pod $\pm 45°$ preslikavaju se u Smithov dijagram u kružnice polumjera $\sqrt{2}$ sa središtima u



Slika 7.62. Prikaz lokusa ulazne impedancije serijskoga titrajnog kruga u Smithovu dijagramu i načina određivanja širine pojasa odnosno unutarnjeg faktora dobrote titrajnog kruga. Strelica upućuje na smjer porasta frekvencije. U skladu s Fosterovim teoremom, porastom frekvencije, točka na lokusu uvijek se kreće u smjeru kazaljke sata

točkama ∓j. Sjecišta tih kružnica s kružnicom lokusa opet određuju frekvencije f_2 i f_1, a njihova razlika daje širinu frekvencijskog pojasa B.

Paralelni titrajni krug, prikazan na slici 7.63, rezonantna je mreža koja je dualna mreži serijskoga titrajnog kruga. Kako je ulazna admitancija paralelnoga titrajnog kruga

$$Y_\mathrm{p} = G_\mathrm{p} + \mathrm{j}\omega C_\mathrm{p} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L_\mathrm{p}}, \tag{7–113}$$

generator mu predaje kompleksnu snagu

$$P_\mathrm{ul} = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}Y_\mathrm{p}^*|V|^2 = \frac{1}{2}\left(G_\mathrm{p} + \mathrm{j}\omega C_\mathrm{p} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L_\mathrm{p}}\right)|V|^2, \tag{7–114}$$

gdje je $I^*=Y^*V^*$. U vodljivosti $G_\mathrm{p}=1/R_\mathrm{p}$ disipira se snaga

$$P_\mathrm{dis} = \frac{1}{2}\frac{|V|^2}{R_\mathrm{p}}, \tag{7–115}$$

a srednje energije pohranjene u kapacitetu C_p i induktivitetu L_p iznose:

$$\langle W_\mathrm{e}\rangle = \frac{1}{4}|V|^2 C_\mathrm{p}, \tag{7–116}$$

$$\langle W_\mathrm{m}\rangle = \frac{1}{4}|I_L|^2 L_\mathrm{p} = \frac{1}{4}|V|^2\frac{1}{\omega^2 L_\mathrm{p}}, \tag{7–117}$$

gdje je I_L struja kroz induktivitet L_p. Sad se kompleksna snaga može napisati kao

$$P_\mathrm{ul} = P_\mathrm{dis} + \mathrm{j}2\omega\left(\langle W_\mathrm{m}\rangle - \langle W_\mathrm{e}\rangle\right), \tag{7–118}$$

što je istovjetno izrazu (7–100). U skladu s time, ulazna se admitancija može izraziti kao

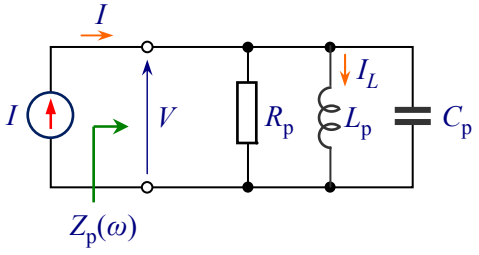
$$Y_\mathrm{p} = \frac{2P_\mathrm{ul}^*}{|V|^2} = \frac{P_\mathrm{dis} + \mathrm{j}2\omega\left(\langle W_\mathrm{e}\rangle - \langle W_\mathrm{m}\rangle\right)}{\frac{1}{2}|V|^2}. \tag{7–119}$$

Kao i kod serijskoga titrajnog kruga, opet dolazi do rezonancije kad su srednje pohranjene energije u električnom i magnetskom polju međusobno jednake, tj. $\langle W_\mathrm{m}\rangle=\langle W_\mathrm{e}\rangle$. Sad iz izraza (7–119) i (7–115) izlazi da je u rezonanciji ulazna impedancija posve realna, tj.

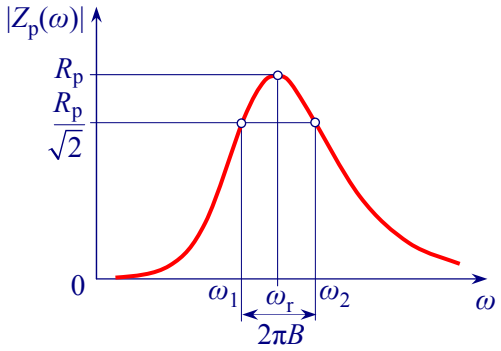
$$Y_\mathrm{p}(\omega=\omega_\mathrm{r}) = \frac{P_\mathrm{dis}}{\frac{1}{2}|V|^2} = G_\mathrm{p} = \frac{1}{R_\mathrm{p}}. \tag{7–120}$$

Iz izraza (7–116) i (7–117) i uvjeta $\langle W_\mathrm{e}\rangle=\langle W_\mathrm{m}\rangle$ opet se dobiva

$$\omega_\mathrm{r} = \frac{1}{\sqrt{L_\mathrm{p}C_\mathrm{p}}}. \tag{7–121}$$



Slika 7.63. Paralelni titrajni krug



Slika 7.64. Grafički prikaz frekvencijske ovisnosti modula ulazne impedancije paralelnoga titrajnog kruga

Iz definicije (7–104) i rezultata (7–117) faktor dobrote Q_0 neopterećenog paralelnoga titrajnog kruga može se izraziti kao

$$Q_0 = \omega \frac{2\langle W_m \rangle}{P_{dis}} = \frac{R_p}{\omega_r L_p} = \omega_r R_p C_p , \tag{7–122}$$

jer je u rezonanciji $\langle W_e \rangle = \langle W_m \rangle$. Izraz (7–122) upućuje na porast faktora dobrote paralelnoga titrajnog kruga povećanjem otpora R_p odnosno smanjenjem vodljivosti G_p.

Blizu rezonancije ulazna se admitancija paralelnog titrajnog kruga može pojednostavniti na sličan način kao impedancija serijskoga titrajnog kruga pa s dobiva

$$Y_p \simeq G_p + j2C_p\Delta\omega = G_p + j\frac{2G_pQ_0\Delta\omega}{\omega_r} . \tag{7–123}$$

Kad $R_p \to \infty$, tj. $G_p \to 0$, primjenom izraza (7–122) izraz (7–123) može se svesti na

$$Y_p \simeq j2C_p\Delta\omega . \tag{7–124}$$

Sad se, kao i kod serijskoga titrajnog kruga, gubitci mogu uključiti primjenom izraza (7–108).

Impedancija paralelnoga titrajnog kruga jednaka je recipročnoj vrijednosti admitancije dane izrazom (7–113), pa modul ulazne admitancije paralelnoga titrajnog kruga ima jednaku frekvencijsku ovisnost kao modul ulazne impedancije serijskoga titrajnog kruga. Na slici 7.64 prikazan je modul ulazne impedancije paralelnog titrajnog kruga u ovisnosti o frekvenciji.

U rezonanciji je ulazna impedancija maksimalna. Realna je i jednaka otporu R_p u skladu s izrazom (7–120). Lokusi ulazne admitancije i impedancije, prikazani u Smithovu dijagramu na slici 7.65, međusobno su zakrenuti za 180° jer su im pripadajući koeficijenti refleksije suprotnoga predznaka.

Na frekvenciji na kojoj je imaginarna komponenta ulazne admitancije posve jednaka realnoj komponenti, titrajni krug prima upola manje snage od one u rezonanciji pa je

$$|Y_p| = \sqrt{2}G_p , \tag{7–125}$$

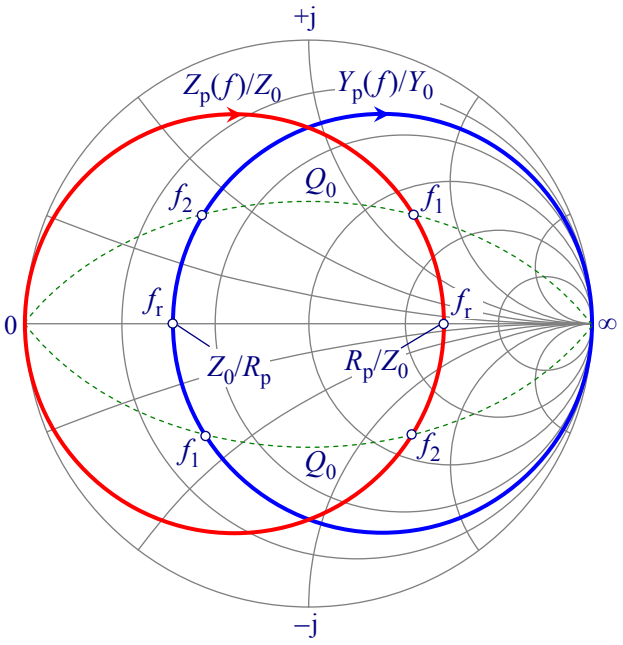
tj.

$$|Z_p| = \frac{R_p}{\sqrt{2}} , \tag{7–126}$$

kao što je prikazano na slici 7.64. Uvrštenjem u izraz (7–122), dobiva se relacija

$$Q_0 = \frac{\omega_r}{2\Delta\omega} = \frac{f_r}{B} , \tag{7–127}$$

koja je posve jednaka izrazu (7–112) za serijski titrajni krug.



Slika 7.65. Lokusi normirane impedancije i normirane admitancije paralelnoga titrajnog kruga u Smithovu dijagramu. Uočljiva je dualnost dvaju lokusa

7.4.2. Rezonantni sklopovi s prijenosnim linijama

Idealni titrajni krugovi s koncentriranim elementima nisu prikladni za uporabu u mikrovalnome području pa se na mikrovalnim frekvencijama poglavito rabe rezonantne strukture s raspodijeljenim parametrima. Unatoč tomu, prilikom razmatranja rezonatora s prijenosnim linijama, titrajni krugovi mogu poslužiti kao prva aproksimacija. Već je u odjeljku 3.4. objašnjeno je da se reaktivno zaključena linija određene duljine na diskretnim frekvencijama ponaša slično titrajnome krugu. Stoga ćemo u ovom odjeljku razmotriti primjenu odsječaka prijenosnih linija različite duljine, koji su na svojim krajevima kratko spojeni ili otvoreni. Budući da nas kod rezonatora ponajviše zanima faktor dobrote, najprije ćemo razmotriti značajke linija s gubitcima.

Kratko spojena poluvalna linija

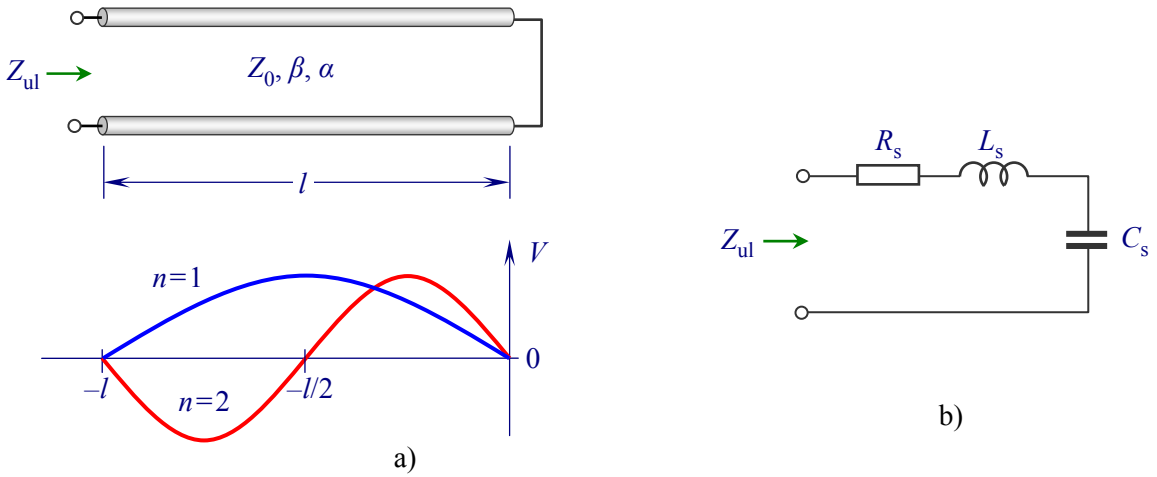
U mikrovalnom se inženjerstvu kao rezonantna struktura najčešće rabi kratko spojen poluvalni odsječak valovoda pa ćemo razmatranje započeti odsječkom kratko spojene poluvalne linije s gubitcima prikazane na slici 7.66. Linija ima karakterističnu impedanciju Z_0, fazni koeficijent β i koeficijent prigušenja α. Pretpostavimo da je na rezonantnoj frekvenciji $\omega = \omega_r$ duljina linije $\lambda_v/2$, gdje je $\lambda_v = 2\pi/\beta$. U poglavlju o prijenosnim linijama izveden je izraz za ulaznu impedanciju kratko spojene linije s gubitcima,

$$Z_{ul} = Z_0 \tanh(\alpha + \mathrm{j}\beta)l\,. \tag{7–128}$$

što se može dalje razviti u oblik

$$Z_{ul} = Z_0 \frac{\tanh \alpha l + \mathrm{j}\tan \beta l}{1 + \mathrm{j}\tanh \alpha l \tan \beta l}\,. \tag{7–129}$$

Za liniju bez gubitaka ($\alpha = 0$), taj se izraz svodi se na (3–76), tj. $Z_{ul} = \mathrm{j}Z_0 \tan\beta l$.



Slika 7.66. a) Odsječak kratko spojene linije i razdioba napona na liniji za prvi i drugi mod.
b) Nadomjesna shema koja vrijedi u okolišu rezonantne frekvencije

Prijenosne linije koje se rabe u rezonatorima obično imaju vrlo male gubitke pa se može pretpostaviti da je $\alpha \ll 0$, iz čega izlazi $\tanh(\alpha l) \simeq \alpha l$. Obično nas zanimaju obilježja ulazne impedancije samo u okolišu rezonantne frekvencije, $\omega = \omega_r + \Delta\omega$, gdje je $\Delta\omega$ mala veličina. Uz pretpostavku da linija prenosi *TEM*-mod dobiva se

$$\beta l = \frac{\omega l}{v_f} = \frac{\omega_r l}{v_f} + \frac{\Delta\omega l}{v_f}, \tag{7–130}$$

gdje je v_f fazna brzina vala u prijenosnoj liniji. Budući da je $l = \lambda_v/2 = \pi v_f/\omega_r$ za $\omega = \omega_r$, izlazi

$$\beta l = \pi + \pi\frac{\Delta\omega}{\omega_r}$$

pa je

$$\tan\beta l = \tan\left(\pi + \pi\frac{\Delta\omega}{\omega_r}\right) = \tan\left(\pi\frac{\Delta\omega}{\omega_r}\right) \simeq \pi\frac{\Delta\omega}{\omega_r}.$$

Uvrštenjem tih rezultata u izraz (7–129) i primjenom aproksimacije $\alpha l\Delta\omega/\omega_r \ll 1$, dobiva se

$$Z_{ul} \simeq Z_0 \frac{\alpha l + \mathrm{j}\dfrac{\pi\Delta\omega}{\omega_r}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\pi\Delta\omega}{\omega_r}\alpha l} \simeq Z_0\left(\alpha l + \mathrm{j}\frac{\pi\Delta\omega}{\omega_r}\right). \tag{7–131}$$

Izraz (7–131) sličan je izrazu za ulaznu impedanciju serijskoga titrajnog kruga, tj.

$$Z_{ul} = Z_s \simeq R_s + \mathrm{j}2\Delta\omega L_s, \tag{7–132}$$

što upućuje na to da se, u okolišu rezonantne frekvencije, kratko spojen poluvalni odsječak prijenosne linije može nadomjestiti serijskim titrajnim krugom s elementima:

$$R_s \simeq Z_0\alpha l, \tag{7–133a}$$

$$L_s \simeq \frac{\pi Z_0}{2\omega_r}. \tag{7–133b}$$

Kapacitet nadomjesnog titrajnog kruga dobiva se iz uvjeta rezonancije kao

$$C_s = \frac{1}{\omega_r^2 L_s} \simeq \frac{2}{\pi Z_0 \omega_r}. \tag{7–133c}$$

Otuda rezonantni sklop prikazan na slici 7.66 rezonira pri $l=\lambda_v/2$, tj. za $\Delta\omega=0$, a ulazna mu je impedancija na toj frekvenciji posve realna, tj. $Z_{ul}=R_s\simeq\alpha l Z_0$. Rezonancija se također pojavljuje za $l=n\lambda_v/2$, $n=1, 2, 3\ldots$ Na slici 7.66 prikazane su razdiobe napona duž rezonatora za rezonantne modove $n=1$ i $n=2$. Vršna vrijednost napona u maksimumu stojnoga vala uvijek je jednaka dvostrukoj vrijednosti amplitude napona upadnoga vala.

Valja napomenuti da sklop na slici 7.66 nije rezonator u pravom smislu te riječi jer je slijeva jako opterećen omskim otporom, tj. karakterističnom impedancijom pobudne linije, pa se u njemu pohranjuje razmjerno mala količina energija. U odjeljku 7.4.5. koji govori o sprezi rezonatora s teretom ili generatorom, vidjet ćemo da se količina pohranjene energije može znatno povećati, ako se sklop slijeva spoji na generator ili pobudnu liniju preko male poprečne reaktancije ili mu se ulaz kratko spoji. No unutarnji Q-faktor tog rezonatora može se ipak odrediti primjenom izraza (7–105) i (7–133) kao

$$Q_0=\frac{\omega_r L_s}{R_s}=\frac{\pi}{2\alpha l}=\frac{\beta}{2\alpha}, \tag{7–134}$$

jer je za prvu rezonanciju $\theta=\beta l=\pi$. Kao što smo i očekivali, taj rezultat pokazuje da je faktor dobrote obrnuto razmjeran koeficijentu prigušenja prijenosne linije.

Kratko spojena četvrtvalna linija

Kratko spojena četvrtvalna prijenosna linija na slici 7.67a) ponaša se poput paralelnoga titrajnog kruga, tj. ulazna impedancija kratko spojene linije duljine l iznosi

$$Z_{ul}=Z_0\tanh(\alpha+\mathrm{j}\beta)l=Z_0\frac{\tanh\alpha l+\mathrm{j}\tan\beta l}{1+\mathrm{j}\tanh\alpha l\tan\beta l}=Z_0\frac{1-\mathrm{j}\tanh\alpha l\cot\beta l}{\tanh\alpha l-\mathrm{j}\cot\beta l}, \tag{7–135a}$$

gdje je posljednji rezultat dobiven množenjem brojnika i nazivnika s $-\mathrm{j}\cot\beta l$. Pretpostavi li se sad da na frekvenciji $\omega=\omega_r$ duljina linijskog odsječka iznosi $l=\lambda/4$ i da je $\omega=\omega_r+\Delta\omega$, za *TEM*-liniju izlazi

$$\beta l=\frac{\omega_r l}{v_f}=\frac{\Delta\omega l}{v_f}$$

pa je

$$\cot\beta l=\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_r}\right)=-\tan\left(\frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_r}\right)\simeq-\frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_r}.$$

Za liniju s malim gubitcima, može se uzeti da je $\tanh(\alpha l)\simeq\alpha l$ pa iz izraza (7–135a) izlazi

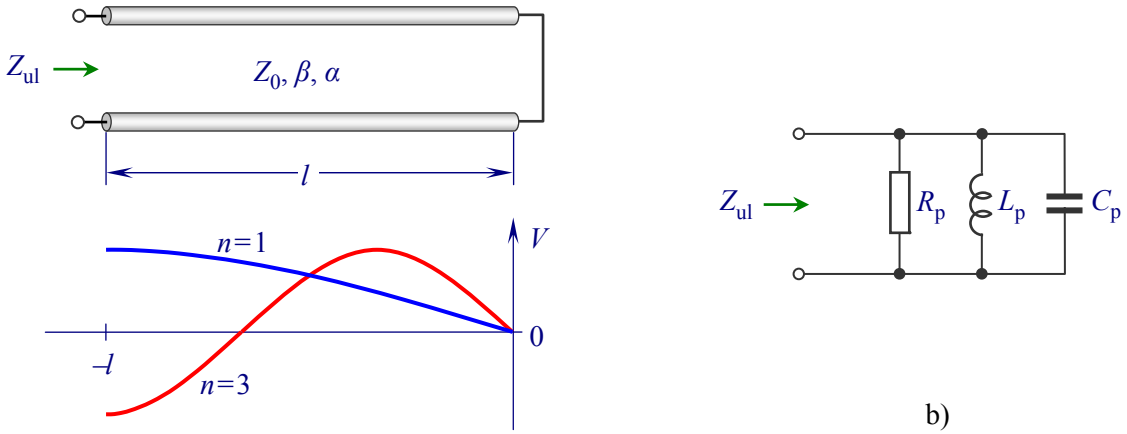
$$Z_{ul}\simeq Z_0\frac{1+\mathrm{j}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\Delta\omega}{\omega_r}\alpha l}{\alpha l+\mathrm{j}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\Delta\omega}{\omega_r}}\simeq\frac{Z_0}{\alpha l+\mathrm{j}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\Delta\omega}{\omega_r}} \tag{7–135b}$$

jer je $\alpha l\Delta\omega/(2\omega_r)\ll 1$. Taj rezultat ima sličan oblik kao izraz (7–123) za ulaznu admitanciju paralelnoga titrajnog kruga, tj.

$$Z_{ul}=Z_p\simeq\frac{1}{\dfrac{1}{R_p}+\mathrm{j}2\Delta\omega C_p}.$$

Otuda su elementi nadomjesnog sklopa:

$$R_p\simeq\frac{Z_0}{\alpha l},\quad C_p\simeq\frac{\pi}{4\omega_r Z_0},\quad L_p\simeq\frac{4Z_0}{\pi\omega_r}. \tag{7–136}$$



Slika 7.67. a) Četvrtvalni odsječak kratko spojene prijenosne linije s gubitcima i razdioba napona (ili električnog polja) u rezonatoru za prvi i treći mod. **b)** Nadomjesna shema koja vrijedi u frekvencijskome području u okolišu rezonantne frekvencije

Drugim riječima, sklop na slici 7.67a) prikazuje paralelni tip rezonancije kad je prijenosna linija dugačka četvrtinu valne duljine. U rezonanciji je tada ulazna impedancija opet posve realna, tj. $Z_{ul} = R_p \simeq Z_0/(\alpha l)$. Unutarnji faktor dobrote rezonatora može se odrediti primjenom izraza (7–122) i (7–135b) kao

$$Q_0 = \omega_r R_p C_p \simeq \frac{\pi}{4\alpha l} = \frac{\beta}{2\alpha}, \tag{7–137}$$

jer je u rezonanciji $l = \pi/(2\beta)$.

Otvorena poluvalna linija

Praktični rezonator koji nerijetko nalazimo u mikrotrakastoj izvedbi sastoji se od odsječka otvorene poluvalne prijenosne linije prikazane na slici 7.68a). Ulazna mu je impedancija

$$Z_{ul} = \frac{Z_0}{\tanh(\alpha + j\beta)l} = Z_0 \frac{1 + j\tanh\alpha l \tan\beta l}{\tanh\alpha l + j\tan\beta l}. \tag{7–138a}$$

Pretpostavimo sad da na frekvenciji $\omega = \omega_r$ duljina linije iznosi $l = \lambda/2$. Budući da ćemo se usredotočiti samo na područje u okolišu rezonantne frekvencije, može se uzeti $\omega = \omega_r + \Delta\omega$. Kao i za kratko spojenu poluvalnu liniju, električna duljina rezonatora glasi

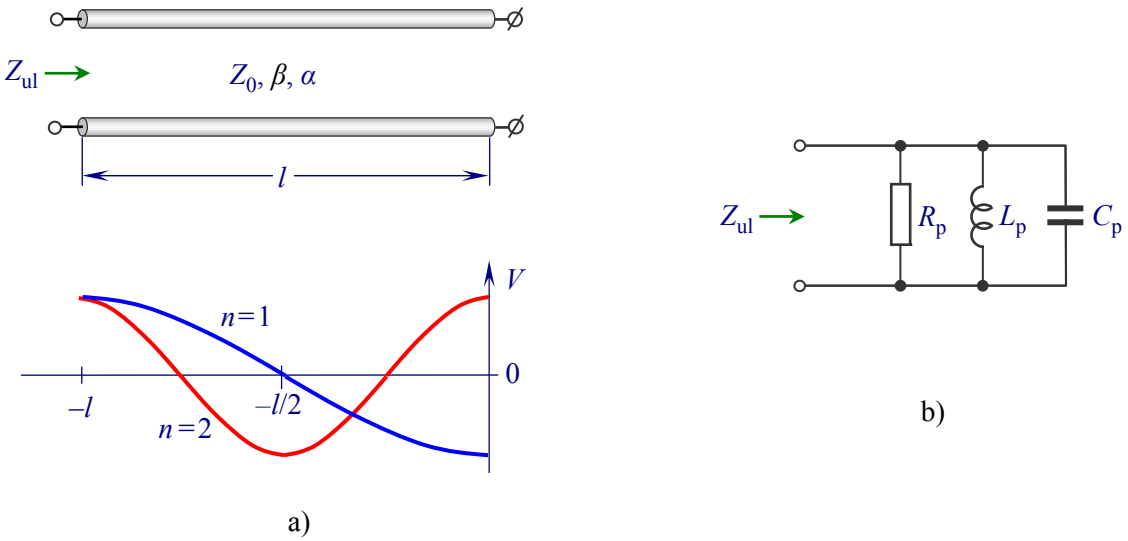
$$\beta l = \pi + \pi\frac{\Delta\omega}{\omega_r}.$$

Primjenom ovog izraza i uvjeta $\Delta\omega/\omega_r \ll 1$, izlazi $\tanh(\alpha l) \simeq \alpha l$ i

$$\tan\beta l = \tan\left(\pi\frac{\Delta\omega}{\omega_r}\right) \simeq \pi\frac{\Delta\omega}{\omega_r},$$

što uvrštenjem u izraz (7–138a) daje

$$Z_{ul} \simeq \frac{Z_0}{\alpha l + j\pi\dfrac{\Delta\omega}{\omega_r}}. \tag{7–138b}$$



Slika 7.68. a) Odsječak otvorene poluvalne linije s gubitcima i razdioba napona (ili električnog polja) u rezonatoru za prvi i drugi mod. **b)** Nadomjesna shema

Usporedbom recipročne vrijednosti toga izraza s izrazom (7–123) za ulaznu admitanciju paralelnoga titrajnog kruga dobiva se:

$$R_p \simeq \frac{Z_0}{\alpha l}, \quad C_p \simeq \frac{\pi}{2\omega_r Z_0}, \quad L_p \simeq \frac{2Z_0}{\pi\omega_r}. \tag{7–139}$$

Unutarnji Q-faktor tog rezonatora može se odrediti iz izraza (7–122) i (7–139) kao

$$Q_0 = \omega_r R_p C_p \simeq \frac{\pi}{4\alpha l} = \frac{\beta}{2\alpha}, \tag{7–140}$$

jer je u rezonanciji $l=\pi/\beta$. Dakle, u okolišu frekvencije za koju je $l=\lambda/2$, poluvalni se rezonator ponaša poput paralelnoga titrajnog kruga.

Otvorena četvrtvalna linija

Ako se poluvalni linijski odsječak na slici 7.68a) prepolovi, onda se dobiva četvrtvalna linijska struktura koja se ponaša poput serijskoga titrajnog kruga jer se otvoreni strujni krug time preslikava u strukturu niske impedancije. Za $l=\lambda/4$, u okolišu rezonancije ($\omega=\omega_r$) izlazi

$$\beta l = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_r}.$$

Uvrštenje tog rezultata u izraz (7–138) daje

$$Z_{ul} \simeq Z_0\alpha l + \mathrm{j}\pi Z_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_r},$$

iz čega izlazi:

$$R_s \simeq Z_0\alpha l, \quad L_s \simeq \frac{\pi Z_0}{4\omega_r}, \quad C_s \simeq \frac{4}{\pi Z_0\omega_r}. \tag{7–141}$$

Može se uočiti da su ti izrazi slični izrazima za kratko spojenu poluvalnu liniju, samo što su dobivene vrijednosti nadomjesnih elemenata R i L upola manje, a vrijednost elementa C dvostruko veća jer je linijski odsječak upola kraći.

Uvrštenjem izraza (7–141) u (7–105), unutarnji Q-faktor poprima oblik

$$Q_0 = \frac{\omega_r L_s}{R_s} \simeq \frac{\pi}{4\alpha l} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

jer je u rezonanciji $l = \pi/2\beta$, pa se u okolišu frekvencije za koju je $l = \lambda/4$, četvrtvalni rezonator ponaša kao serijski titrajni kruga.

Primjer 7.5. Faktor dobrote poluvalnoga suosnog rezonatora

Naći unutarnji faktor dobrote poluvalnog odsječka suosne linije izrađene od bakra ($\sigma = 5{,}08 \cdot 10^7$ S/m) i ispunjene teflonom ($\varepsilon_r = 2{,}08$ i $\tan\delta_\varepsilon = 0{,}0004$) na frekvenciji 4 GHz. Promjeri vanjskog i unutarnjeg vodiča iznose $2b = 7$ mm, odnosno $2a = 3$ mm. Usporediti vrijednost faktora dobrote s onom kad se u rezonatoru nalazi zrak umjesto teflona.

Rješenje:

Površinski otpor bakra može se izračunati iz izraza (2– 203) kao

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5{,}08 \cdot 10^7}} = 0{,}0176\,\Omega\,.$$

Koeficijent prigušenja može se izračunati iz izraza (3–35) kao

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{R_s}{\eta \ln(b/a)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) + \omega\varepsilon''\eta\right] = \frac{0{,}0176 \cdot \sqrt{2{,}08}}{2 \cdot 376{,}7 \ln(3{,}5/1{,}5)}\left(\frac{2}{3 \cdot 10^{-3}} + \frac{2}{3 \cdot 10^{-3}}\right) +$$

$$+ \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^9 \cdot 2{,}08 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}0004 \cdot 376{,}7}{2 \cdot \sqrt{2{,}08}} = 0{,}0379 + 0{,}0242 = 0{,}0621\,\text{Np/m}\,.$$

$$Q_{\text{teflon}} = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\omega}{2v_f\alpha} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2{,}08}}{2 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 0{,}0621} = 973\,.$$

Za liniju ispunjenu zrakom ($\varepsilon'' = 0$) postoje samo gubitci u vodičima pa iz izraza (3–35) izlazi

$$Q_{\text{zrak}} = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\omega}{2c\alpha} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^9}{2 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 0{,}0263} = 1594\,.$$

Primjer 7.6. Faktor dobrote poluvalnoga mikrotrakastog rezonatora

Naći unutarnji faktor dobrote poluvalnog odsječka otvorene mikrotrakaste linije karakteristične impedancije $Z_0 = 50\ \Omega$. Traka je izvedena od bakra ($\sigma = 5{,}08 \cdot 10^7$ S/m) i postavljena na dielektričnu ploču visine $h = 1{,}5$ mm, permitivnosti $\varepsilon_r = 2{,}52$ i tangensa gubitaka $\tan\delta_\varepsilon = 0{,}001$. Također izračunati potrebnu duljinu trake za prvu rezonanciju na frekvenciji 4 GHz.

Rješenje:

Za $Z_0 = 50\ \Omega$ i parametre podloge ($h = 1{,}5$ mm, $\varepsilon_r = 2{,}52$), iz izraza (4–159) za širinu trake izlazi $w = 4{,}27$ mm, a iz izraza (4–156) efektivna permitivnost iznosi $\varepsilon_{ef} = 2{,}09$. Rezonantna duljina iznosi

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{v_f}{2f} = \frac{c}{2f\sqrt{\varepsilon_{ef}}} = \frac{2{,}998 \cdot 10^8}{2 \cdot 4 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2{,}09}} = 25{,}9\ \text{mm}\,.$$

Sad se može izračunati fazni koeficijent iz izraza (4–154) kao

$$\beta = \frac{2\pi f}{v_f} = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{\varepsilon_{ef}} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2{,}09}}{2{,}998 \cdot 10^8} = 121{,}2\ \text{rad/m}\,.$$

Iz izraza (4–181a), za koeficijent prigušenja izlazi

$$\alpha_c = \frac{R_s}{wZ_0} = \frac{0{,}0176}{4{,}27 \cdot 10^{-3} \cdot 50} = 0{,}0826 \text{ Np/m},$$

gdje je vrijednost površinskog otpora $R_s = 0{,}0176\Omega$ preuzeta iz primjera 7.5. Koeficijent prigušenja zbog gubitaka u dielektriku može se izračunati iz izraza (4–178a) kao

$$\alpha_d = \frac{\pi}{\lambda_0} \frac{\varepsilon_r'}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} \frac{\varepsilon_{ef} - 1}{\varepsilon_r' - 1} \tan\delta_\varepsilon = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 10^9}{2{,}998 \cdot 10^8} \frac{2{,}52}{\sqrt{2{,}09}} \frac{2{,}09 - 1}{2{,}53 - 1} 0{,}001 = 0{,}0524 \text{ Np/m}.$$

Konačno se može izračunati faktor dobrote kao

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{121{,}2}{2 \cdot (0{,}0826 + 0{,}0524)} = 449.$$

7.4.3. Valovodni rezonatori

Na frekvencijama iznad nekoliko gigaherca rezonatori s prijenosnim linijama imaju razmjerno nizak faktor dobrote pa se umjesto njih nerijetko rabe zatvorene metalne kutije, tj. rezonantne šupljine. U tu je svrhu najjednostavnije uporabiti odsječke valovoda. Budući da otvoreni valovod zrači elektromagnetsku energiju poput antene, valovodni se odsječak mora zatvoriti na obama krajevima savršeno vodljivim ravninama. Zatvaranjem valovoda dobiva se šuplji ili dielektikom ispunjen prostor omeđen ravnim vodljivim stijenkama, u kojem se može pohraniti električna i magnetska energija. Zbog konačne vodljivosti metalnih stijenka i možebitnih dielektričnih gubitaka u rezonatoru dolazi do gubitaka snage. Ti se gubitci mogu izraziti preko ekvivalentnog otpora u nadomjesnoj shemi titrajnog sustava. Pohrana energije u magnetskom i električnom polju može se prikazati preko ekvivalentnog induktiviteta, odnosno kapaciteta. Polja se u rezonatoru mogu pobuditi preko malih otvora, električnih sonda ili strujnih petlja (magnetskih dipola) kao pri pobuđivanju valovoda (vidjeti odjeljak 5.10).

Pravokutni rezonatori

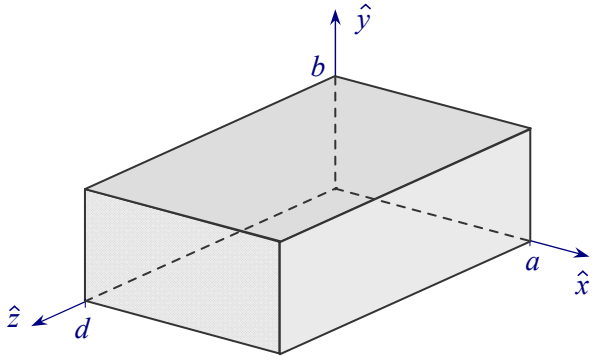
Analizi valovodnih rezonatora može se pristupiti na sličan način kao u analizi rezonatora s *TEM*-linijama. Za razliku od prijenosnih linija, u valovodu postoji mogućnost rezonancija i u poprečnome smjeru pa je konfiguracija elektromagnetskog polja u valovodnome rezonatoru obično znatno složenija. U tu svrhu mogu poslužiti valovodi proizvoljnog presjeka. Na slici 7.69 prikazan je šupljinski rezonator jednostavne konfiguracije napravljen od odsječka pravokutnoga valovoda duljine d u kojem je pobuđen dominantni mod TE_{10}. Odsječak je kratko spojen na obama krajevima ($z = 0$, d). Pritom u uzdužnome smjeru nastaje stojni val kao kod kratko spojene prijenosne linije. Na slici 7.70 prikazane su razdiobe jakosti električnog polja za nekoliko osnovnih modova (vidjeti sličnost s pravokutnim valovodom o odjeljku 4.3) .

Prema izrazu (4–68), fazni koeficijent za modove TE_{mn} ili TM_{mn} glasi

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \qquad (7\text{–}142)$$

gdje je $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. Primjenom rubnih uvjeta na tangencijalne komponente električnog polja $E_x = E_y = 0$ na koordinatama $z = 0$ i $z = d$ izlazi da je u uzdužnome smjeru (smjer osi $\hat{z}$) postoji stojni val kao u linijskome rezonatoru. Za zadani d, jedino netrivijalno rješenje dobiva se uz

$$\beta_{mn} d = l\pi, \qquad \text{za } l = 1, 2, \ldots \qquad (7\text{–}143)$$



Slika 7.69. Odsječak pravokutnoga valovoda kratko spojen na obama krajevima (na $z=0$ i $z=d$) tvori šupljinski rezonator

No ta se relacija slaže s jednakošću (7–142) samo za neke diskretne vrijednosti k_0. Jednakosti (7–142) i (7–143) bit će zadovoljene samo ako je $k=k_{mnl}$, gdje je

$$k_{mnl}=\sqrt{\left(\frac{l\pi}{d}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{7–144}$$

rezonantni valni broj rezonatora. S pomoću tih jedinstvenih vrijednosti valnoga broja mogu se jednoznačno odrediti odgovarajuće *rezonantne frekvencije*

$$f_{mnl}=\frac{v_\mathrm{f}k_{mnl}}{2\pi}=v_\mathrm{f}\sqrt{\left(\frac{l}{2d}\right)^2+\left(\frac{m}{2a}\right)^2+\left(\frac{n}{2b}\right)^2}\,, \tag{7–145}$$

gdje je v_f fazna brzina u sredstvu kojim je rezonator ispunjen. Te su frekvencije *svojstvene vrijednosti rezonatora*, a njima pripadajuće razdiobe polja nazivaju se *svojstvene funkcije* ili *modovi rezonatora*. Ako je $b<a<d$, onda je mod s najnižom rezonantnom frekvencijom mod TE_{101} koji odgovara valovodnom odsječku duljine $\lambda_\mathrm{v}/2$ u kojem vlada dominantni mod. Stojni val u šupljinskom rezonatoru općenito se može pojaviti u svim trima dimenzijama. Rješenje (7–145) vrijedi samo za pravokutne rezonantne šupljine. Premda se u praksi može naći mnoštvo različitih oblika, samo se za neke od njih mogu dobiti analitička rješenja.

Radi jednostavnosti razmotrimo polja i faktor dobrote uz pobudu dominantnim modom TE_{10}. Tad su u rezonatoru mogući samo modovi TE_{10l} koji imaju l poluvalova u »uzdužnom« smjeru, tj. u smjeru osi $\hat{z}$. Za $n=0$, iz izraza (7–145) izlazi

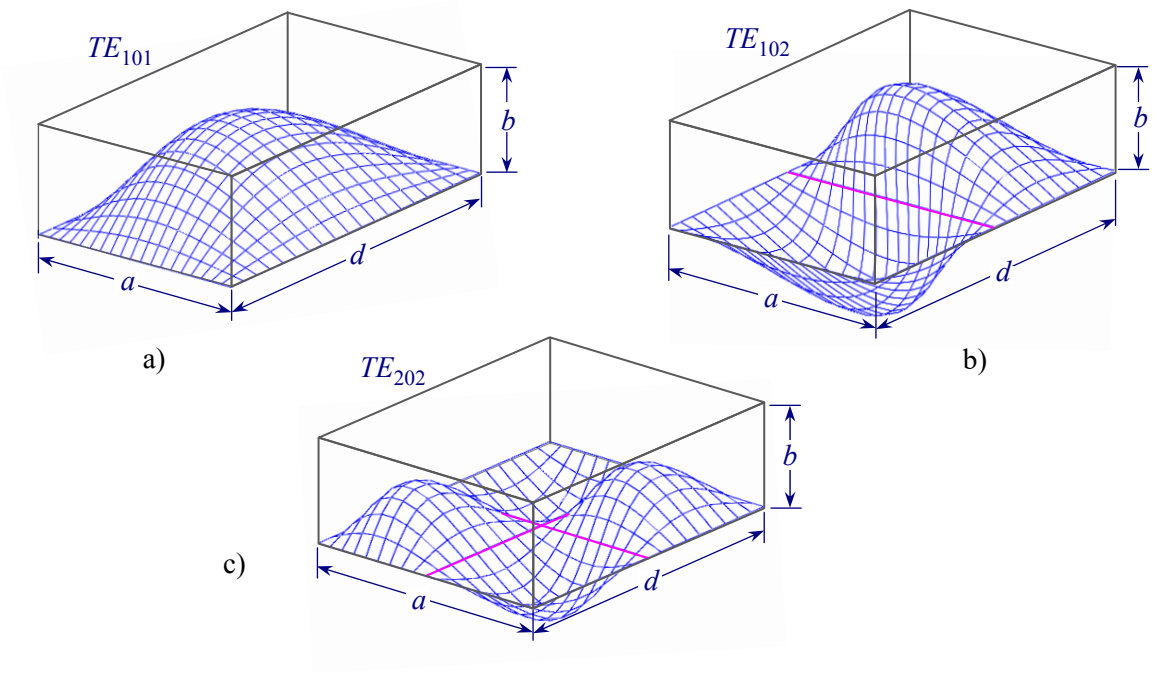
$$k=k_{10l}=\sqrt{\left(\frac{l\pi}{d}\right)^2+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\beta_{10}^2}\,, \tag{7–146}$$

iz čega se može odrediti rezonantna frekvencija. Uvrštenjem izraza (7–143) u izraze (4–89), izravno se dobivaju rješenja za polja u rezonatoru:

$$E_y=E_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{l\pi z}{d}, \tag{7–147a}$$

$$H_x=-\mathrm{j}\frac{E_0}{Z_\mathrm{TE}}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{l\pi z}{d}, \tag{7–147b}$$

$$H_z=\mathrm{j}\frac{2\pi E_0}{k\eta a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{l\pi z}{d}, \tag{7–147c}$$

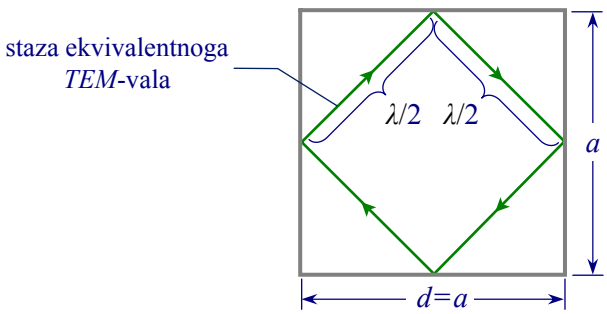


Slika 7.70. Razdiobe komponenata električnog polja E_y za modove: **a)** TE_{101} ($n=0$, $m=1$, $l=1$), **b)** TE_{102} ($n=0$, $m=1$, $l=2$) i **c)** TE_{202} ($n=0$, $m=2$, $l=2$)

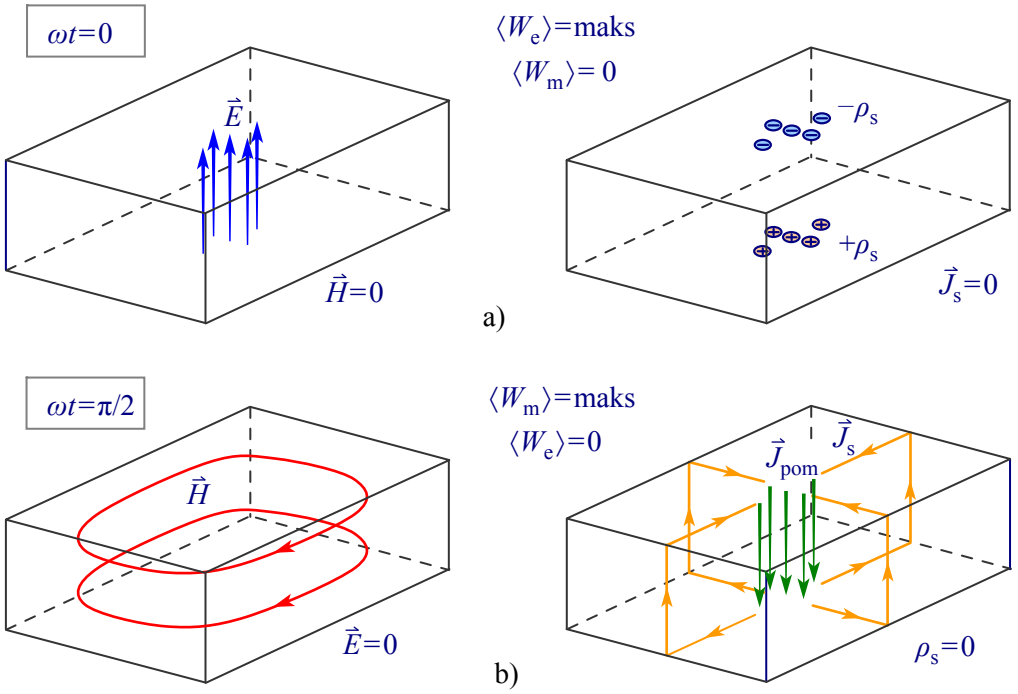
gdje je $E_0 = 2A_{10}k_{10}lZ_{TE}a/\pi$ amplitudna konstanta. Valja uočiti da su komponente magnetskog polja u faznoj kvadraturi s električnim poljem. To uvijek vrijedi za rezonatore bez gubitaka jer je u *LC* krugovima bez gubitaka napon uvijek pomaknut u odnosu na struju za ±90°.

Na slici 7.70a) prikazana je razdioba jakosti električnog polja moda TE_{101}. Može se uočiti da u tom modu električno polje postiže svoj maksimum na sredini rezonatora, a na svim bočnim stijenkama električno je polje jednako nuli jer je to polje tangencijalno na te stijenke. Na slici 7.70b) prikazana je razdioba jakosti električnog polja višeg moda TE_{102} s dvama poluvalovima stojnoga vala u uzdužnome smjeru (smjer osi $\hat{z}$), a na slici 7.70c) razdioba moda TE_{202} s po dva poluvala stojnoga vala u uzdužnom i poprečnom smjeru (smjer osi $\hat{x}$).

Za poseban slučaj valovodnog rezonatora kvadratne baze ($d = a$), mod TE_{101} s najnižom rezonantnom frekvencijom može se objasniti kao superpozicija upadnoga i reflektiranoga ravnog *TEM*-vala koji se kao posljedica rubnih uvjeta reflektira od bočnih stijenka pod kutom od 45°. Staza kojom putuje takav ravni val čini »puni krug« opsega 2λ, gdje je λ valna duljina u slobodnome prostoru, kao što je prikazano na slici 7.71. Ovako pravilna staza i geometrija ravnoga vala vrijedi samo za poseban slučaj valovodnog rezonatora s kvadratnom bazom re-

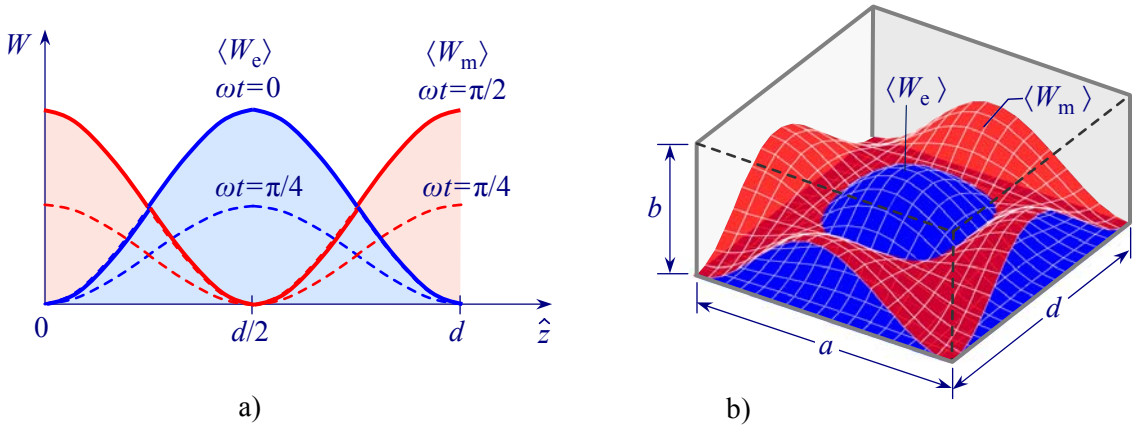


Slika 7.71. Shematski prikaz staze ekvivalentnog ravnoga vala za mod TE_{101} za poseban slučaj, kvadratnog rezonatora ($d=a$). Ravni se val uzastopno reflektira na savršeno vodljivim bočnim stijenkama pod kutovima od 45° kao posljedica rubnih uvjeta



Slika 7.72. Shematski prikaz razdioba polja, naboja i struja za mod TE_{101}. **a)** električno polje i površinski naboj u trenutku $t=0$, **b)** magnetsko polje te površinska i pomačna struja u trenutku $t=T/4$

zonatora i modove TE_{m0m}, tj. samo za ravni val koji upada na dvije stijenke pod kutom od 45°. No, za druge geometrije valovoda, fronta ravnoga vala reflektira se općenito pod različitim kutovima od stijenka valovoda pa staza ravnoga vala ne zadržava tako pravilnu putanju i tako jednostavnu geometriju. Na 7.72 shematski su prikazane razdiobe polja i naboja u karakterističnim vremenskim trenutcima moda TE_{101}. U trenutku kad je električno polje maksimalno, maksimalan je i površinski naboj na stijenkama rezonatora. U istom su trenutku magnetsko polje i površinska struja jednaki nuli. Nasuprot tomu, četvrt periode ranije (ili kasnije), magnetsko polje te površinska i pomačna struja postižu svoje maksimalne vrijednosti, a električno polje i površinski naboj u tom su trenutku jednaki nuli. Vidi se također da je razdioba strujnica pomačne i provodne struje posve u skladu s jednadžbom kontinuiteta struje (2–5).



Slika 7.73. a) Razdiobe trenutačne električne i magnetske energije u rezonatoru za mod TE_{101} u smjeru osi $\hat{z}$ na koordinati $x=a/2$. **b)** Plošni prikaz razdiobe energija za $\omega t = \pi/4$

Kako izgleda razdioba električne i magnetske energije u rezonatoru za mod TE_{101} može se vidjeti na slici 7.73. Usporedite rezultate s razmatranjima upada ravnoga vala na savršeno vodljivu ravninu u odjeljku 2.10.3, slika 2.29.

Faktor dobrote pravokutnoga rezonatora

Kao što je prikazano u odjeljku 7.4.1. stvarni titrajni sustav (ili rezonator) ima konačne gubitke pa se za njega definira unutarnji Q-faktor kao omjer pohranjene energije u rezonatoru i snage koja se disipira u jednom titraju. Očito je definicija faktora dobrote jedinstvena samo za posve određeni mod. Isto tako, Q-faktor ovisi o modu, tj. o određenoj konfiguraciji polja ili gustoći površinskih struja.

Gubitci snage u rezonantnoj šupljini posljedica su gubitaka u vodičima i dielektriku. Ako u rezonatoru nema dielektrika, onda se u račun uzimaju samo gubitci u vodičima. U ovom ćemo odjeljku izračunati faktor dobrote šupljeg rezonatora za mod TE_{10l}. No ako je rezonator ispunjen dielektrikom, onda treba uzeti u obzir i gubitke u dielektriku.

Unutarnji Q-faktor šupljeg rezonatora može se jednostavno izračunati iz izraza (7–104) kao

$$Q_0 = 2\omega_\mathrm{r}\frac{\langle W_\mathrm{e}\rangle}{P_\mathrm{dis}}. \tag{7–148}$$

Pohranjena energije u rezonatoru dobiva se integriranjem polja po volumenu, a gubitci snage integriranjem tangencijalnog magnetskog polja na svim vodljivim površinama.

Pohranjena električna i magnetska energija mogu se izračunati iz izraza (2–121) kao

$$\langle W_\mathrm{e}\rangle = \frac{\varepsilon}{4}\int_0^d\int_0^b\int_0^a E_y E_y^* \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\varepsilon abd}{16}E_0^2, \tag{7–149a}$$

$$\langle W_\mathrm{m}\rangle = \frac{\mu}{4}\int_0^d\int_0^b\int_0^a (H_x H_x^* + H_z H_z^*)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\mu abd}{16}E_0^2\left(\frac{1}{Z_\mathrm{TE}^2}+\frac{\pi^2}{k^2\eta^2a^2}\right). \tag{7–149b}$$

Primjenom izraza (4–76) i (7–142), izraz u zagradi svodi se na ε/μ, što pokazuje da je $\langle W_\mathrm{e}\rangle = \langle W_\mathrm{m}\rangle$. Dakle, u rezonanciji su električna i magnetska energija međusobno jednake kao u titrajnome krugu.

Za dobre vodiče, gubitci su u stijenkama valovoda mali pa se može primijeniti metoda perturbacije iz odjeljka 3.6. Otuda su gubitci snage u zidovima valovoda

$$P_\mathrm{zid} = \frac{R_\mathrm{s}}{2}\int_{\text{zidovi}} |H_t|^2\,\mathrm{d}S, \tag{7–150}$$

gdje je $R_\mathrm{s} = \sqrt{\omega\mu_0/(2\sigma)}$ površinski otpor metalnih zidova, a H_t je tangencijalno magnetsko polje na stijenkama rezonatora. Uvrštenjem izraza (7–147b) i (7–147c) u (7–150) dobiva se

$$P_\mathrm{zid} = \frac{R_\mathrm{s}}{2}\left\{2\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}|H_x|_{z=0}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\int_{z=0}^{d}\int_{y=0}^{b}|H_z|_{x=0}^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2\int_{z=0}^{d}\int_{x=0}^{a}\left[|H_x|_{y=0}^2+|H_z|_{y=0}^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right\} =$$

$$= \frac{R_\mathrm{s}E_0^2\lambda^2}{8\eta^2}\left(\frac{l^2ab}{d^2}+\frac{bd}{a^2}+\frac{l^2a}{2d}+\frac{d}{2a}\right). \tag{7–151}$$

Ovdje je primijenjeno svojstvo simetrije pravokutne valovodne šupljine, njezinih modova i razdioba površinskih struja, tj. nasuprotni zidovi jednako pridonose gubitcima pa su integrali udvostručeni. Izraz je također pojednostavljen primjenom izraza $k=2\pi/\lambda$ i $Z_{TE}=k\eta/\beta=2d\eta/l\lambda$.

Faktor dobrote rezonatora ispunjenog savršenim dielektrikom, ali izrađenog od vodiča konačne provodnosti, može se jednostavno izračunati iz (7–148) kao

$$Q_c = 2\omega_r \frac{\langle W_e \rangle}{P_{zid}} = \frac{\omega_r \mu}{R_s} \frac{\int_V |\vec{H}|^2 \, dV}{\int_S |\vec{H}_{tan}|^2 \, dS} \simeq \frac{2}{\delta} \frac{\int_V |\vec{H}|^2 \, dV}{\int_S |\vec{H}_{tan}|^2 \, dS} = \frac{V_{rez}}{\delta S_{rez}}. \quad (7–152)$$

Za pravokutne je rezonatore vrijednost $|H_{tan}|^2$ približno jednaka $2|H|^2$. Ako je magnetsko polje konstantno u cijelome volumenu i na svim zidovima rezonatora, onda se $|H|^2$ može izvaditi ispred znaka obaju integrala pa izlazi da je faktor dobrote približno jednak kvocijentu volumena V_{rez} i umnoška dubine prodiranja s oplošjem rezonatora ($\delta \cdot S_{rez}$), tj. približno je jednak kvocijentu volumena u kojima se energija pohranjuje, odnosno disipira.

Točan izraz za faktor dobrote rezonatora u modu TE_{10l} može se dobiti uvrštenjem izraza (7–149) i (7–151) u (7–152), tj.

$$Q_{c,10l} = \frac{(k_{10l} ad)^3 b \eta}{2\pi^2 R_s} \frac{1}{2l^2 a^3 b + 2bd^3 + l^2 a^3 d + ad^3}. \quad (7–153)$$

Dielektrični gubitci u rezonatoru mogu se uzeti preko kompleksne permitivnosti sredstva koje se nalazi u rezonatoru. U odjeljku 2.7. objašnjeno je kako se dielektrik s gubitcima može nadomjestiti efektivnom provodnošću $\sigma = \omega\varepsilon'' = \omega \varepsilon_r \varepsilon_0 \tan \delta_\varepsilon$, gdje je $\tan \delta_\varepsilon$ tangens gubitaka dielektrika. Disipacija snage u dielektriku može se izračunati primjenom izraza (2–130) kao

$$P_d = \frac{\omega\varepsilon''}{2} \int_V |\vec{E}|^2 \, dV = \frac{abd\,\omega\varepsilon''}{8} |E_0|^2, \quad (7–154)$$

gdje je vektor električnog polja dan izrazom (7–147a). Konačno se faktor dobrote šupljine ispunjene dielektrikom s gubitcima, ali savršeno vodljivih zidova, može izračunati primjenom izraza (7–148) kao

$$Q_d = \frac{2\omega \langle W_e \rangle}{P_d} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \frac{1}{\tan \delta_e}. \quad (7–155)$$

Jednostavnost ovoga izraza proizlazi iz činjenice da se integral u izrazu (7–149a) krati s jednakim integralom u izrazu (7–154). Taj rezultat također vrijedi za bilo koji mod rezonatora.

Ako su u rezonatoru istodobno prisutni gubitci u dielektriku i vodičima, $P_d + P_c$, onda je ukupni faktor dobrote

$$Q_0 = \frac{1}{\frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d}}. \quad (7–156)$$

Primjer 7.7. Projektiranje pravokutnoga valovodnoga rezonatora

Projektirati rezonator rezonantne frekvencije $f_r = 7{,}5$ GHz, koji se sastoji od odsječka šupljeg pravokutnoga valovoda WR-112 ($a = 34{,}85$ mm $b = 15{,}8$ mm). Valovodni je odsječak na oba kraja zatvoren ravnim plohama, a sve su stijenke rezonatora posrebrene ($\sigma = 6{,}173 \cdot 10^7$ S/m). Naći duljinu d valovodnog odsječka i unutarnji faktor dobrote za rezonantne modove TE_{10l} za $l = 1$ i $l = 2$.

Rješenje:

Na rezonantnoj frekvenciji, valni broj iznosi

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot 7{,}5 \cdot 10^9}{2{,}998 \cdot 10^8} = 157{,}18 \text{ rad/m}.$$

Potrebna duljina rezonatora za mod TE_{10l} može se naći iz izraza (7–145) za $m = 1$, $n = 0$, te za $l = 1$ i $l = 2$, tj.

$$d = \frac{l\pi}{\sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}}.$$

a) za $l=1$, $$d = \frac{\pi}{\sqrt{157{,}18^2 - (\pi/0{,}03485)^2}} = 0{,}0244\text{m} = 24{,}4\text{ mm},$$

b) za $l=2$, $$d = \frac{2\pi}{\sqrt{157{,}18^2 - (\pi/0{,}03485)^2}} = 0{,}0488\text{m} = 48{,}8\text{ mm}.$$

Površinski otpor za srebro na frekvenciji 7,5 GHz iznosi

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 7{,}5 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 6{,}173 \cdot 10^7}} = 0{,}0219\,\Omega.$$

Primjenom izraza (7–153) uz $\eta = 376{,}7\ \Omega$, za faktore dobrote dobiva se:

a) za $l=1$, $Q_{c,TE101} = 9.854$,

b) za $l=2$, $Q_{c,TE102} = 12.326$

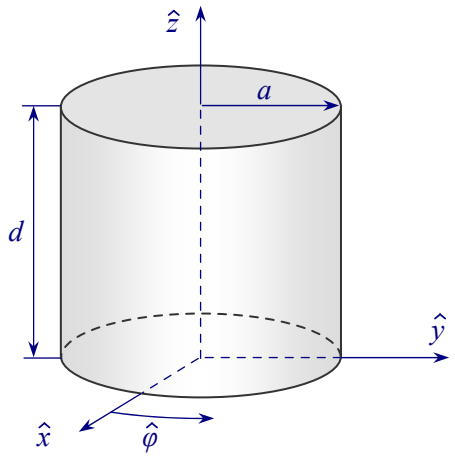
Valjkasti rezonatori

Šupljina valjkastog oblika može se ostvariti tako da se odsječak kružnog valovoda duljine d i polumjera a, zatvori na obama krajevima savršeno vodljivim ravninama okomitim na os valovoda, kao što je prikazano na slici 7.74. Ta se vrsta rezonantne šupljine nerijetko rabi u valomjerima za mjerenje frekvencije jer im je za isti volumen faktor dobrote obično viši u usporedbi s pravokutnim rezonatorom. Polja u rezonatoru mogu se dobiti iz odgovarajućih polja kružnog valovoda danih izrazima (4–92). Mod s najnižom rezonantnom frekvencijom, TE_{111}, potječe od dominantnoga moda TE_{11} kružnoga valovoda s jednim poluvalom stojnoga vala u smjeru osi $\hat{z}$. U razmatranju ćemo opet pretpostaviti da su zidovi rezonatora izrađeni od savršenog vodiča.

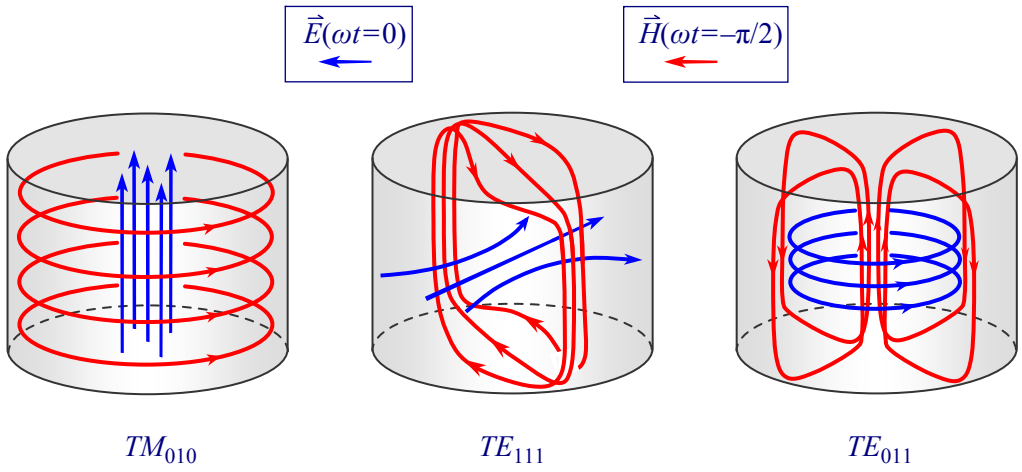
Rezonantna se frekvencija može odrediti primjenom rubnog uvjeta koji traži da tangencijalne (poprečne) komponente električnog polja iščeznu na savršeno vodljivim plohama koje se nalaze na koordinatama $z=0$ i $z=d$. Primjenom izraza (4–108), za TM-modove dobiva se

$$f_{mnl} = \frac{v_f}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\nu_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2}, \qquad (7\text{–}157)$$

a za TE-modove veličinu ν_{nm} valja zamijeniti s ν'_{nm}, kao kod kružnog valovoda.



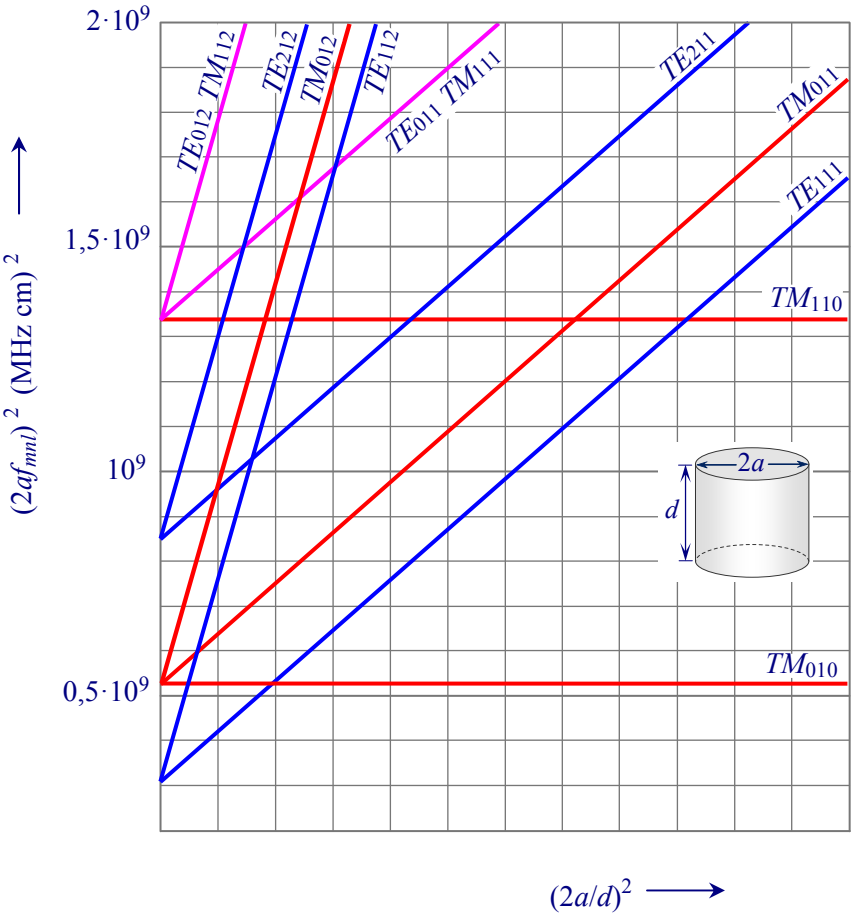
Slika 7.74. Rezonantna šupljina valjkastog oblika izrađena od odsječka kružnog valovoda



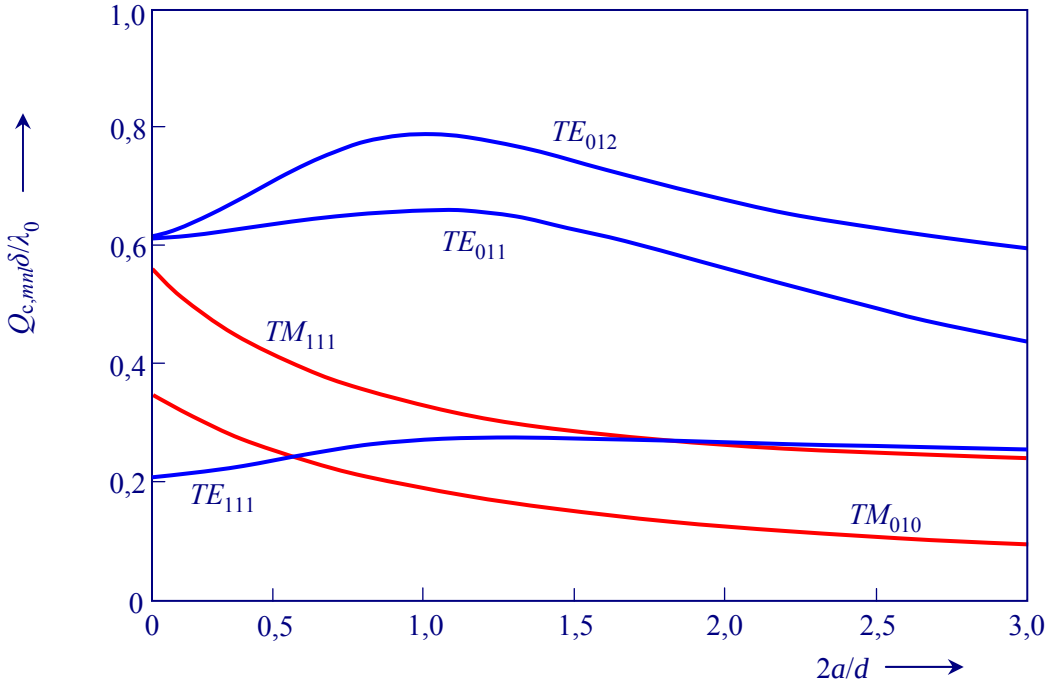
Slika 7.75. Razdiobe polja valjkastog rezonatora za modove TM_{010},TE_{111} i TE_{011}

Na slici 7.75 prikazane su razdiobe polja za nekoliko modova valjkastog rezonatora.

Gubitci u rezonatoru ovise o razdiobi magnetskog polja odnosno o razdiobi površinske struje koja to polje stvara. Na slici 7.76 prikazan je dijagram modova valjkaste šupljine za zadane dimenzije valjka.



Slika 7.76. Dijagram modova valjkastog rezonatora



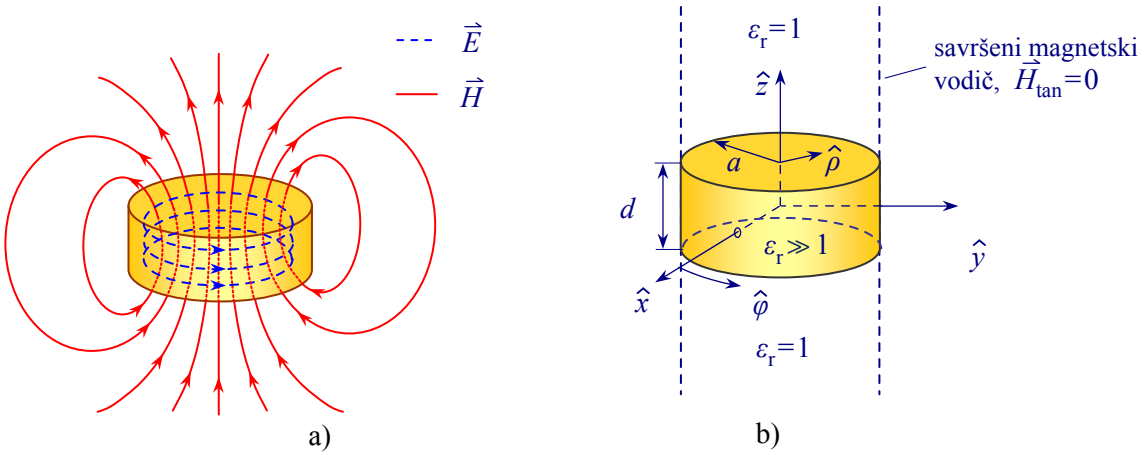
Slika 7.77. Faktor dobrote valjkastog rezonatora u ovisnosti o dimenzijama

Slično kao za pravokutni rezonator, gubitci se mogu naći preko razdioba polja modova. Na slici 7.77 prikazano je kako faktor dobrote ovisi o dimenzijama rezonatora. Valja uočiti da mod TE_{011} ima znatno viši faktor dobrote od modova TE_{111} i TM_{010}. Stoga se taj mod često nalazi u sklopovima valomjera i sklopovima za stabilizaciju frekvencije mikrovalnih oscilatora. Izraz za faktor dobrote pravokutnog rezonatora, u kojem su prisutni samo gubitci u dielektriku, jednak je izrazu (7–155), tj. $Q_d = \varepsilon'/\varepsilon'' = 1/\tan\delta_\varepsilon$.

7.4.4. Dielektrični rezonator

U odjeljku 4.8.2. o mikrotrakastim linijama vidjeli smo da se smanjenje dimenzija mikrovalnih sklopova može postići povećanjem permitivnosti podloge. Na sličan se način može ostvariti smanjenje dimenzija rezonatora. Ako se, primjerice, šupljinski rezonator ispuni dielektrikom visoke permitivnosti i malih gubitaka, onda se obujam rezonatora može smanjiti za više od dva reda veličine. U odjeljku 7.4.3. vidjeli smo da metalne stijenke rezonantnih šupljina stvaraju razmjerno velike gubitke čime snižavaju faktor dobrote rezonatora. Ti se gubitci mogu smanjiti izvedbama dielektričnih rezonatora visoke permitivnosti koji su samo djelomično oklopljeni metalnim plohama. Za razliku od šupljinskih rezonatora, u dielektričnim rezonatorima gubitci u dielektriku nerijetko su veći od gubitaka u metalnim stijenkama.

Dielektrični su rezonatori strukture izvedene od dielektričnog materijala visoke permitivnosti ($\varepsilon_r > 20$) i malih gubitaka ($\tan\delta_\varepsilon < 0{,}001$) i nerijetko su valjkastog ili polukuglastog oblika. Zbog velike permitivnosti, elektromagnetsko je polje zbijeno unutar dielektričnog materijala pa su dimenzije dielektričnog rezonatora znatno manje od praznog šupljinskog rezonatora za odgovarajući rezonantni mod. Rezonantna je frekvencija određena dimenzijama i permitivnošću materijala. Zbog malih gubitaka, unutarnji Q-faktor dielektričnih rezonatora nalazi se u rasponu od nekoliko tisuća do iznad deset tisuća. Materijali od kojih se izrađuju obično su mješavine nekoliko vrsta metalnih oksida poput titanij-oksida TiO_2, barij-titanata Ba_2TiO_9 ili barij-tetra-titanata $Ba_2Ti_9O_{20}$. Dodavanjem oksida drugih metala, kao što su Mg, Sn, Zn, Sr, Zr itd., dobiva se ne samo širok spektar vrijednosti permitivnosti ($\varepsilon_r = 30$ do 1000), nego i vrlo

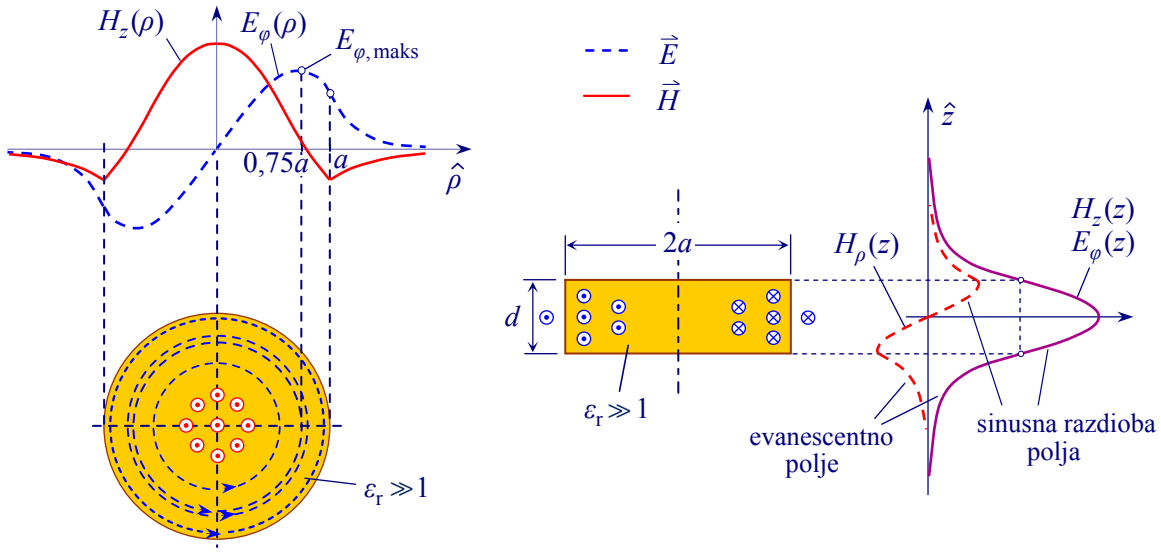


Slika 7.78. a) Razdioba električnog i magnetskog polja valjkastog dielektričnog valovoda za mod $TE_{01\delta}$. Rezonator je izoliran u slobodnomu prostoru. **b)** Model dielektričnog rezonatora sa stijenkama od savršenog magnatskog vodiča

dobra kontrola temperaturnog koeficijenta permitivnosti od pozitivnih do negativnih vrijednosti. Zbog tih svojstava, dielektrični se rezonatori uspješno rabe za stabilizaciju frekvencije osciliranja poluvodičkih oscilatora i za rezonantne strukture u uskopojasnim filtrima unutar frekvencijskog područja od 300 MHz do 300 GHz.

Kao i šupljinski rezonatori, tako i dielektrični rezonatori mogu rezonirati u više modova na različitim rezonantnim frekvencijama. U rezonatorima valjkastog oblika, rezonantni modovi odgovaraju modovima dielektričnog valovoda, a to su *TE*- i *TM*-modovi te hibridni modovi. Za zadanu čvrstu vrijednost promjera valjka ($2a$), rezonantna se frekvencija može jednostavno mijenjati promjenom visine valjka (d). No, za razliku od šupljinskih rezonatora, ovdje d općenito ne mora biti višekratnik polovine valne duljine, zbog rubnih polja koja se nalaze izvan dielektričnog valjka.

Za točno određivanje rezonantne frekvencije, valja uporabiti razmjerno složenu teoriju. Jedna od najjednostavnijih rezonantnih struktura jest valjkasti rezonator male visine, oblika tablete, kao što je prikazano na slici 7.78. Mod s najnižom rezonantnom frekvencijom jest mod $TE_{01\delta}$ za valjke omjera $2a/d > 1{,}5$. Za dielektrične materijale permitivnosti oko 40, u tom



Slika 7.79. Razdioba polja po komponentama

se modu unutar dielektričnog valjka pohranjuje više od 95% električne energije i više od 60% magnetske energije, što se može vidjeti na slici 7.79 iz razdiobe polja po komponentama. Ostatak energije pohranjuje se u zračnom prostoru u okolišu valjka.

Egzaktna analiza rezonantnih modova dielektričnog valovoda može se jedino izvesti numerički, zbog poteškoća pri modeliranju rubnih polja. No i pojednostavljenom se analizom može doći do razmjerno točnih rezultata, ali, što je možda i vrijednije, njome se može dobiti jasnija fizikalna slika o zbivanjima u rezonatoru. Odgovarajući model prikazan je na slici 7.79b) gdje je dielektrični valjak visoke permitivnosti zatvoren stijenkama savršenog magnetskog vodiča. Time su nametnuti rubni uvjeti za koje tangencijalne komponente magnetskog polja iščezavaju na savršenom magnetskom vodiču cilindričnog oblika ($\rho = a$). To znatno pojednostavnjuje analizu, ali omogućuje da se uzmu u obzir i rubna polja na bazama valjka.

Kao što je već rečeno, mod dielektričnog rezonatora koji se lako spreže s mikrotrakastom strukturom jest mod $TE_{01\delta}$. Taj mod sadrži polja koja titraju u valjku u aksijalnom smjeru $\hat{z}$, slika 7.78b). Unutar dielektrika ($|z| < d/2$), polja se mogu opisati kao:

$$H_z = H_0 J_0(k_c\rho)\left(A^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + A^- \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},$$

$$H_\rho = -H_0 \frac{\mathrm{j}\beta}{k_\rho} J_0'(k_c\rho)\left(A^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - A^- \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},$$

$$E_\varphi = H_0 \frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{k_\rho} J_0'(k_c\rho)\left(A^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + A^- \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},$$

gdje je H_0 amplitudna konstanta,

$$\beta = \sqrt{\varepsilon_r k_0^2 - k_\rho^2}$$

fazni koeficijent, a $k_0 = 2\pi f\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ valni broj u slobodnome prostoru. Vrijednost $k_c\rho$ dobiva se iz uvjeta $H_z = 0$ na koordinati $\rho = a$, tj.

$$k_c a = \nu_{01} = 2{,}4048\ .$$

Iz simetrije, za parne modove izlazi $A^+ = A^-$, a za neparne modove izlazi $A^+ = -A^-$.

Iste komponente polja prisutne su i izvan dielektrika u području sa zrakom ($|z| > d/2$), ali ta su polja evanescentna, tj. ne rasprostiru se, jer cilindrična struktura promjera $2a$ ispunjena zrakom čini evanescentni valovod. Stoga polja u prostoru sa zrakom opadaju s faktorom $\mathrm{e}^{-|\alpha|z}$, gdje je koeficijent prigušenja α dan kao

$$\alpha = \sqrt{k_c^2 - k_0^2}\ .$$

Budući da poprečna polja moraju biti neprekinuta na bazama valjka ($z = \pm d/2$), dobiva se uvjet rezonancije [11]

$$\beta d = 2\tan^{-1}\frac{\alpha}{\beta} + l\pi,$$

gdje je $l = 0, 1, 2, \ldots$ Primjenom izraza za α i β, iz uvjeta rezonancije numerički se mogu naći rezonantne frekvencije. Za mod najnižeg reda (za $l = 0$) visina valjka kraća je od pola valne duljine. Stoga taj mod nosi oznaku $TE_{01\delta}$, gdje je $0 < \delta < 1$.

Budući da električno polje ima samo komponentu E_φ, silnice električnog polja imaju oblik koncentričnih kružnica maksimalne gustoće na koordinati $\rho \simeq 0{,}75a$. Tok električnog polja ima sličnu ulogu onoj gdje u električnom vodiču strujne petlje stvara magnetsko polje kao kod magnetskog dipola. Otuda magnetsko polja H_z ima najveću gustoću na osi valjka i opada prema bazama valjka. Oblik razdiobe magnetskog polja $H_z(\rho)$ poklapa se s Besselovom funkcijom prve vrste nultog reda koja je rješenje valne jednadžbe dielektričnog štapa kružnog

presjeka. Točna analiza sa stvarnim rubnim uvjetom na granici između dielektričnog valjka i zraka upućuje na to da ta komponenta polja na cilindričnoj stijenki nije jednaka nuli nego da je konačne vrijednosti, kao što je prikazano na slici 7.79 [11].

Izvan valjka, polja su evanescentna i opadaju po eksponencijalnom zakonu. Ta se polja prostiru daleko u prostor u smjeru osi što može izazvati dodatne gubitake snage. Da bi se spriječili ti gubitci snage u rezonatoru s modom $TE_{01\delta}$, dielektrični se valjak obično postavlja u prostor omeđen dvjema paralelnim vodljivim ravnim plohama (slika 7.80). Između valjka i vodljivih ploha nalazi se sloj zraka ili dielektričnog materijala male permitivnosti. Time se smanjuje gustoća inducirane provodne struje u vodljivim plohama pa se smanjuju i gubitci u njima. Kao i oko pločastog dielektričnog valovoda (odjeljak 4.7), tako i oko kružnog dielektričnog štapa vladaju evanescentna polja. Stoga valjak treba dodatno oklopiti koncentričnom vodljivom strukturom (isprekidana crta na slici 7.80) u radijalnome smjeru. Tad cjelokupni oklop poprima oblik cilindrične šupljine, ali znatno manjih izmjera od odgovarajućeg šupljinskog rezonatora ispunjenog zrakom. Udaljenost vodiča od dielektričnog rezonatora treba optimizirati radi kompromisa između malih izmjera strukture i visokog faktora dobrote rezonatora.

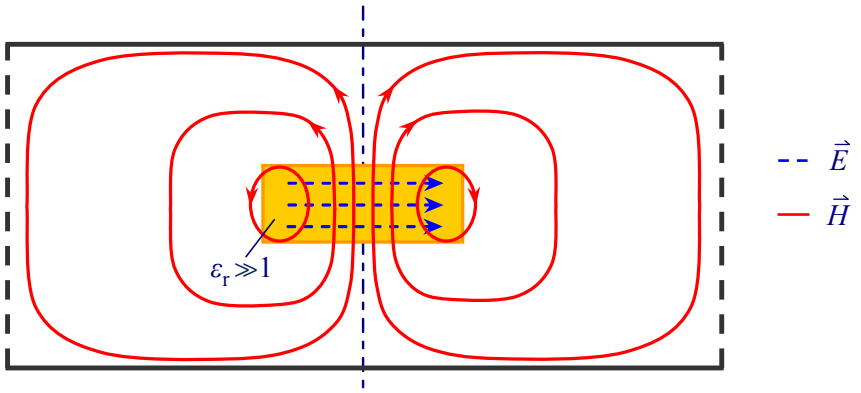
Premda je oblik izoliranog dielektričnog rezonatora vrlo jednostavan, egzaktno rješenje Maxwellovih jednadžba znatno je složenije od rješenja za šupljinski rezonator. Rješenja su još složenija ako se dielektrični valjak nalazi u prostoru između dviju paralelnih vodljivih ploha kao što je prikazano na slici 7.80. Stoga se egzaktna rezonantna frekvencija za određene rezonantne modove, poput moda $TE_{01\delta}$, mogu izračunati samo primjenom razmjerno složenih numeričkih postupaka. Rezonantna frekvencija izoliranog dielektričnog valjka za mod $TE_{01\delta}$ može se približno izračunati empirijskom formulom

$$f_\mathrm{r} = \frac{34}{a\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}}\left(\frac{a}{d} + 3{,}45\right), \qquad (7\text{–}158)$$

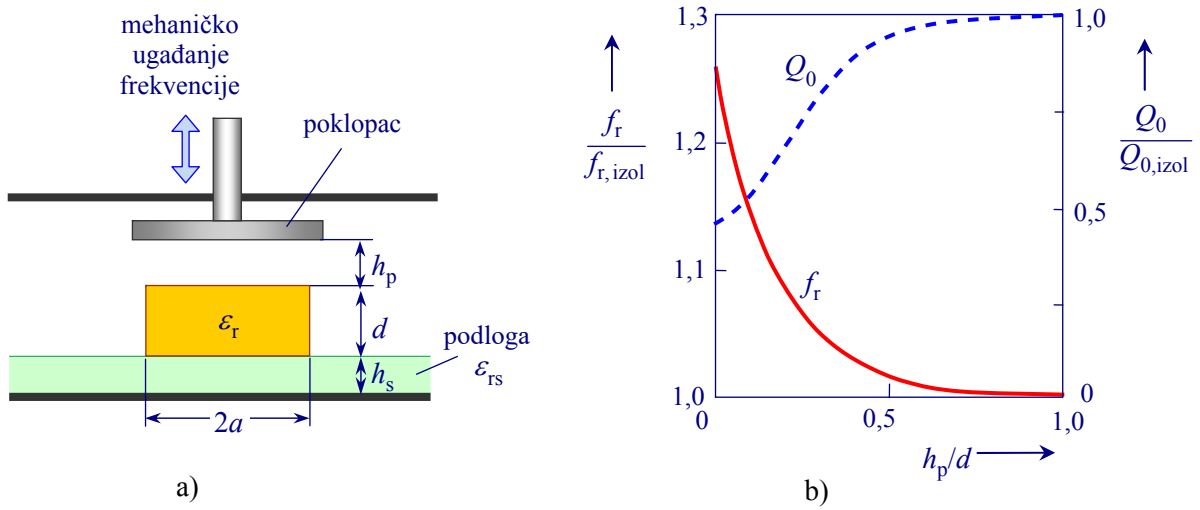
gdje je rezonantna frekvencija dana u GHz, a polumjer valjaka a i visina valjka zadani su u milimetrima. Formula je dobivena na osnovi egzaktnih numeričkih rezultata i daje rezultate uz pogrešku manju od 2 % za geometrijske parametre valjka i permitivnosti u rasponu:

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{d} < 2 \quad \text{i} \quad 30 < \varepsilon_\mathrm{r} < 50\,.$$

Za rezonator relativne permitivnosti $\varepsilon_\mathrm{r}=38{,}5$ i izmjera $d=2$ mm, $a=2{,}6$ mm, izraz (7–158) daje za rezonantnu frekvenciju približno $f_\mathrm{r}=10{,}0$ GHz.



Slika 7.80. Dielektrični valjak valja postaviti između dviju paralelnih vodljivih ploha da se spriječi curenje elektromagnetske energije u smjeru osi valjka. Gubitci zračenjem u radijalnom smjeru spriječeni su suosno postavljenim vodljivim cilindričnim oklopom (isprekidano)



Slika 7.81. a) Oklopljeni dielektrični rezonator na podlozi mikrotrakaste linije. Promjenom visine poklopca može se ugađati rezonantna frekvencija za mod $TE_{01\delta}$. **b)** Ovisnost rezonantne frekvencije i faktora dobrote o visini poklopca

Postavljanjem dielektričnog rezonatora između paralelnih vodljivih ploha dolazi općenito do povećanja rezonantne frekvencije. Naime, prisutnost vodljivih ploha u blizini valjka povećava gustoću pohranjene magnetske energije u njegovom okolišu, što je u skladu s rezultatima teorije perturbacije (odjeljak 7.4.7). Približe li se vodljive plohe dielektričnom rezonatoru u plohama se induciraju jake površinske struje zbog čega rastu gubitci, tj. opada Q-faktor. S time valja računati prilikom postavljanja rezonatora na vrlo tanku dielektričnu podlogu mikrotrakaste linije, slika 7.81a).

Promjena udaljenosti između gornje vodljive plohe (poklopca) i dielektričnog rezonatora može se korisno upotrijebiti za ugađanje rezonantne frekvencije i do 25 %. Na slici 7.81b) prikazano je kako visina poklopca h_p utječe na rezonantnu frekvenciju i Q-faktor. Utjecaj je najveći u području $h_p < d/2$. Kao što je ranije rečeno, valja uočiti da približavanjem poklopca rezonatoru raste rezonantna frekvencija i istodobno opada Q-faktor. No za veće udaljenosti poklopca od rezonatora, $h_2 > d$, taj je utjecaj gotovo zanemariv.

7.4.5. Fabry-Perotov rezonator

Na vrlo visokim frekvencijama (> 100 GHz), primjenom opisanih tehnika, teško je ostvariti rezonatore s dovoljno visokim faktorom dobrote. Razmatranje izraza za faktor dobrote zbog gubitaka u vodičima pokazuje da u linijskim i valovodnim rezonatorima faktor dobrote opada s faktorom $1/\sqrt{f}$. Budući da na visokim frekvencijama dimenzije rezonatora za modove nižeg reda postaju vrlo male, šupljinski rezonatori postaju nepraktični. Rabe li se pak viši modovi, rezonantne frekvencije susjednih modova često su preblizu frekvencije radnog moda. Stoga, zbog konačne širine frekvencijskog pojasa neželjenih susjednih modova, nerijetko dolazi do njihovog nedovoljnog potiskivanja, pa klasični rezonatori postaju neupotrebljivi.

Ti nedostatci rezonatora s modom visokog reda mogu se znatno smanjiti uklanjanjem bočnih stijenka šupljinskoga rezonatora jer se istodobno smanjuju gubitci u vodičima i broj mogućih rezonantnih modova. Time je ostvarena otvorena rezonantna struktura koja se sastoji od dviju paralelnih vodljivih ravnina između kojih titra ravni val, kao što je prikazano na slici 7.82a). Ta je vrsta rezonatora poznata pod nazivom *Fabry-Perotov rezonator* jer je u osnovi slična optičkom interferometru Fabryja i Perota. Da bi takav rezonator bio upotrebljiv, vodljive ravnine moraju biti savršeno paralelne i dovoljno velike površine kako se snaga ne bi

gubila zračenjem u okolni prostor. To se zračenja može smanjiti koncentriranjem energije u središnjem dijelu, oko osi rezonatora, tako da se ravne vodljive ploče zamijene zakrivljenim strukturama paraboličnog ili sfernog oblika, slika 7.82b). Takvi kvazioptički rezonatori rabe se u milimetarskome i submilimetarskome valnom području i slični su izvedbama koje nalazimo kod lasera za rad u infracrvenom i vidljivom području elektromagnetskoga spektra.

Pri razmatranju rada rezonatora sa slike 7.82a) može se pretpostaviti da se paralelne ploče protežu u beskonačnost. Tad između ploča vladaju polja stojnoga *TEM*-vala oblika:

$$E_x = E_0 \sin k_0 z\,, \qquad H_y = \mathrm{j}\frac{E_0}{\eta_0}\cos k_0 z\,,$$

gdje je E_0 proizvoljna amplitudna konstanta, a η_0=376,7 Ω intrinzična impedancija slobodnoga prostora. Ta polja ujedno zadovoljavaju rubni uvjet $E_x = 0$ na $z = 0$. Da bi bio zadovoljen i rubni uvjet na drugoj vodljivoj ravnini, na koordinati $z = d$, udaljenost d mora biti tolika da vrijedi $k_0 d = l\pi$ za $l = 1, 2, 3, \ldots$, čime je određena rezonantna frekvencija, tj.

$$f_\mathrm{r} = \frac{ck_0}{2\pi} = \frac{cl}{2d} \quad \text{za } l = 1, 2, 3, \ldots$$

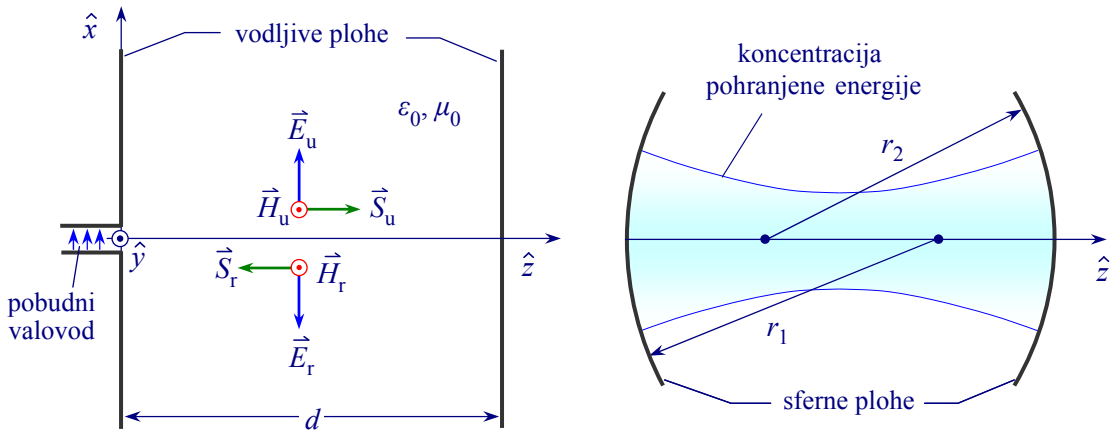
Budući da se radi o jednodimenzionalnom rasprostiranju, rezonantna je frekvencija određena samo jednim indeksom (l) za razliku od triju indeksa za pravokutne i valjkaste rezonatore.

Faktor dobrote može se odrediti na jednak način kao i kod drugih vrsta rezonatora, tj. iz omjera pohranjene energije u prostoru između ravnina i disipirane snage unutar jednog titraja. U prostoru koji je omeđen jednim četvornim metrom poprečnoga presjeka pohranjena je električna energija

$$\langle W_\mathrm{e} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4}\int_{z=0}^{d} |E_x|^2 \,\mathrm{d}z = \frac{\varepsilon_0 |E_0|^2}{4}\int_{z=0}^{d} \sin^2\frac{l\pi z}{d}\,\mathrm{d}z = \frac{\varepsilon_0 |E_0|^2 d}{8}\,.$$

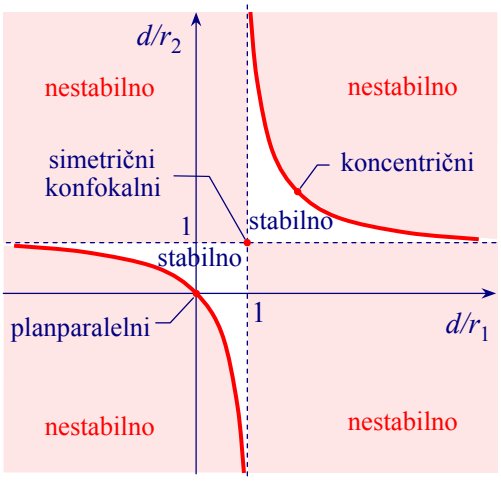
U tom je prostoru također pohranjena i jednaka količina magnetske energije. Gubitci snage po četvornome metru u objema vodljivim ravninama mogu se izraziti kao

$$P_\mathrm{c} = 2\frac{R_\mathrm{s}}{2}|H_y(z=0)|^2 = \frac{R_\mathrm{s}|E_0|^2}{\eta_0^2}\,.$$



a) b)

Slika 7.82. Fabry-Perotov rezonator: **a)** planparalelni; **b)** sferni s polumjerima zakrivljenosti $r_1 = r_2$



Slika 7.83. Stabilnost modova u Fabry-Perotovu rezonatoru

Otuda za faktor dobrote zbog gubitaka u vodičima izlazi

$$Q_{\mathrm{c}} = \frac{\omega(\langle W_{\mathrm{e}}\rangle + \langle W_{\mathrm{m}}\rangle)}{P_{\mathrm{c}}} = \frac{\omega\varepsilon_0 d\eta_0^2}{4R_{\mathrm{s}}} = \frac{\pi l \eta_0}{4R_{\mathrm{s}}},$$

iz čega se vidi da Q raste razmjerno redu moda l. Za takve rezonatore, indeks l obično iznosi nekoliko tisuća ili više. Ako je sredstvo između ravnina ispunjeno dielektričnim materijalom s gubitcima, onda se može lako utvrditi da faktor dobrote zbog gubitaka u dielektriku iznosi

$$Q_{\mathrm{d}} = \frac{1}{\tan\delta_{\varepsilon}}.$$

Primjenom geometrijske optike, može se pokazati da Fabry-Perotov rezonator podržava stabilan rezonantni mod ako je zadovoljen uvjet

$$0 \le \left(1 - \frac{d}{r_1}\right)\left(1 - \frac{d}{r_2}\right) \le 1.$$

Taj se uvjet može grafički prikazati (slika 7.83), gdje funkcije d/r_1 i d/r_2 označuju hiperbole, a veličine r_1 i r_2 polumjeri su zakrivljenosti vodljivih ploha (zrcala). Može se uočiti da postoji nekoliko mogućih konfiguracija koje jamče manje-više stabilne modove. *Planparalelni rezonator*, ustvari je idealiziran rezonator, kod kojeg su polumjeri zakrivljenosti beskonačni, $r_1 = r_2 = \infty$, pa toj konfiguraciji odgovara točka $d/r_1 = d/r_2 = 0$. Budući da se točka nalazi na rubu stabilnog područja, svaka geometrijska nepravilnost može izazvati nestabilnost sustava.

Druga je vrsta *simetrični konfokalni rezonator* za koji je $r_1 = r_2 = d$. Radna točka tog rezonatora leži u središtu dijagrama na granici između stabilnog i nestabilnog područja pa je vrlo osjetljiva na nepravilnosti geometrije. Treću vrstu čine koncentrični rezonatori kod kojih središta zakrivljenosti koincidiraju, tj. $r_1 = r_2 = d/2$. I u ovom slučaju radna točka leži na granici između stabilnog i nestabilnog područja. Stabilan rad može se postići uz $d/r_1 = d/r_2 \simeq 0{,}6$. Tad se radi o kombinaciji planparalelne i konfokalne izvedbe. No stabilan rad može se dobiti uz uvjet $d/r_1 = d/r_2 \simeq 1{,}4$. Tad je riječ o kombinaciji konfokalne i koncentrične izvedbe.

Fabry-Perotov rezonator može se pobuditi valovodom, kao što je prikazano na slici 7.82a). Za rezonatore s pojasnopropusnom prijenosnom karakteristikom pobudni se valovodi postavljaju simetrično u odnosu na zrcala (ravna ili zakrivljena). Umjesto valovoda, za pobudu se mogu uporabiti i polupropusne stijenke samog rezonatora poput tanke dielektrične ploče velike permitivnosti dielektrika.

7.4.6. Pobuda rezonatora

Pri ugradnji rezonatora u mikrovalne sklopove i sustave potrebno ih je povezati s prijenosnim strukturama, linijama ili valovodima. Rezonatori se mogu povezivati u jednoprolazne ili dvoprolazne sklopove. Na slici 7.84 prikazan je spoj serijskoga titrajnog kruga s generatorom unutarnjeg otpora konačne vrijednosti. U usporedbi sa slikom 7.59 može se uočiti da se u proširenoj rezonantnoj strukturi pojavljuje dodatni otpor koji snižava faktor dobrote.

Prema izrazu (7–105), na priključcima A-A′, faktor dobrote nove mreže može se definirati kao

$$Q_T = \frac{\omega_r L_s}{R_s + R_G}$$

i naziva se *faktor dobrote opterećenog rezonatora*, Q_T. Taj se izraz može preinačiti u oblik

$$\frac{1}{Q_T} = \frac{R_s + R_G}{\omega_r L_s} = \frac{R_s}{\omega_r L_s} + \frac{R_G}{\omega_r L_s}, \tag{7–159a}$$

gdje se pojavljuje dodatni član koji zadržava opći oblik izraza za faktor dobrote serijskoga titrajnog kruga. Novi član u tom izrazu naziva se vanjski faktor dobrote jer je jednak omjeru pohranjene energije unutar izvornog rezonatora i disipirane snage u vanjskom otporu za vrijeme jednog titraja. On nema fizikalni smisao, nego samo uspostavlja matematičku vezu između faktora dobrote Q_0 i Q_T. Stoga se može napisati

$$\frac{1}{Q_T} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_v}, \tag{7–159b}$$

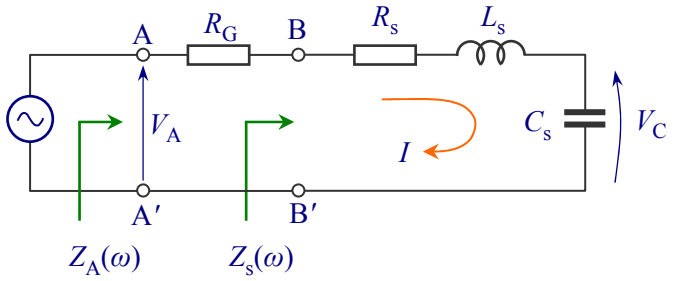
gdje je Q_v vanjski Q-faktor. Iz izraza (7–159) može se vidjeti da će rezonantna struktura imati to viši Q-faktor što je slabije opterećena teretom ili generatorom u vanjskom krugu. Do istog se rezultata može doći razmatranjem paralelnoga titrajnog kruga opterećenog unutarnjom vodljivošću generatora u skladu s Nortonovom nadomjesnom shemom.

Na slici 7.85 prikazano je kako se faktori dobrote $Q_0 = \omega_r/(\omega_2 - \omega_1)$, $Q_v = \omega_r/(\omega_4 - \omega_3)$ i $Q_T = \omega_r/(\omega_6 - \omega_5)$ mogu odrediti grafički iz lokusa ulazne impedancije rezonatora na osnovi mjerenja analizatorom mreža.

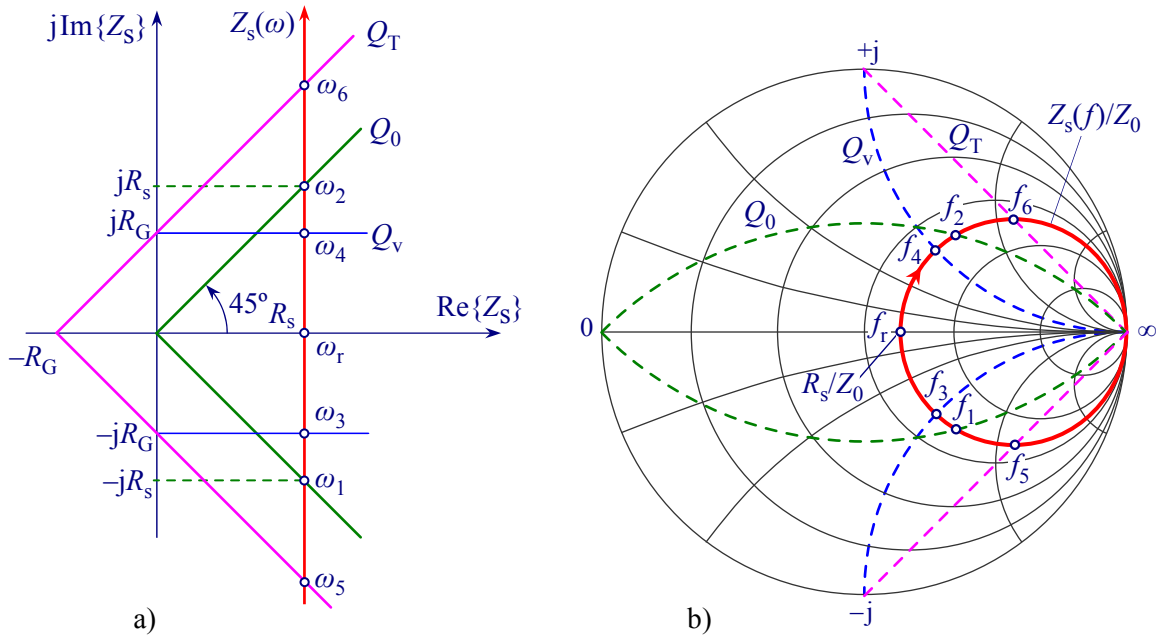
Iz praktičnih razloga nerijetko se uvodi veličina κ pod nazivom *faktor sprege*. Ona se nalazi u rasponu $0 < \kappa < \infty$. Faktor sprege definira se kao omjer unutarnjeg i vanjskog faktora dobrote

$$\kappa = \frac{Q_0}{Q_v}. \tag{7–160}$$

Za $\kappa = 0$ rezonator je neopterećen, tj. $Q_T = Q_0$, a za $\kappa = 1$ kritično je spregnut, tj. $Q_v = Q_0$ pa je $Q_T = Q_0/2$. Na slici 7.86 prikazano je nekoliko lokusa ulazne impedancije rezonatora serijskog tipa rezonancije za različite vrijednosti faktore sprege.

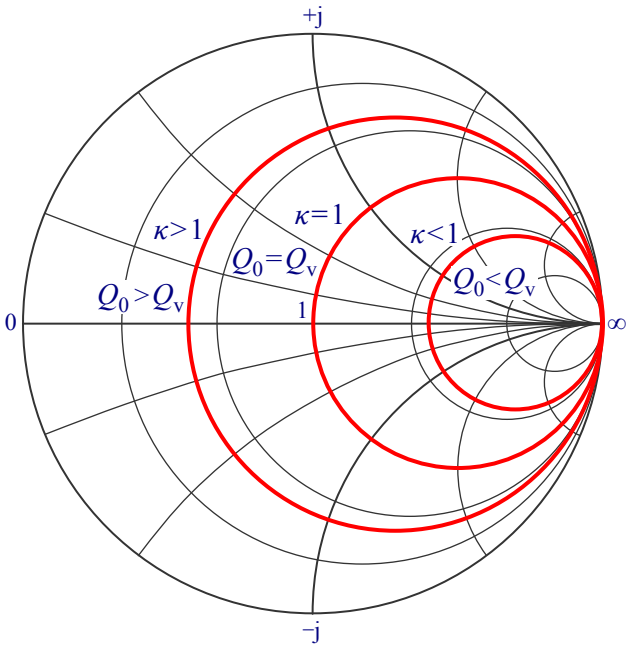


Slika 7.84. Serijski titrajni krug spojen na generator s konačnim unutarnjim otporom

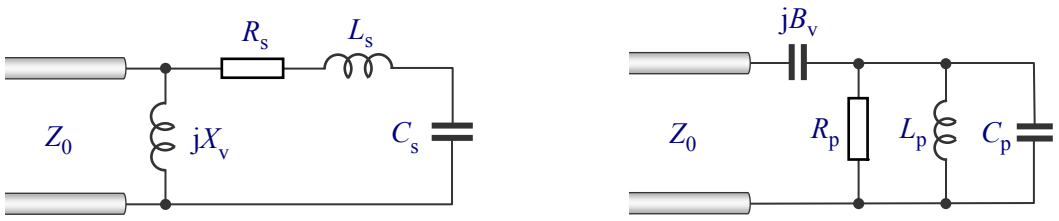


Slika 7.85. Grafičko određivanje faktora dobrote opterećenog rezonatora: **a)** u impedancijskoj ravnini, **b)** u Smithovu dijagramu

Unutarnja impedancija generatora i impedancija tereta opterećuju rezonator pa u ukupni faktor dobrote treba uključiti i impedancija generatora (ili tereta). Te su impedancije u praksi obično realne i jednake karakterističnoj impedanciji priključne linije. Rezonator, čija se nadomjesna shema može svesti na serijski titrajni krug, valja spregnuti preko male poprečno spojene reaktancije, slika 7.87a). Za induktivni sprežni element, serijski se titrajni krug transformira u paralelni titrajni krug. Pritom je serijski titrajni krug pobuđen malo ispod rezonantne frekvencije pa se može nadomjestiti kapacitetom koji tvori novi paralelni titrajni krug s poprečnim induktivitetom veznog elementa.



Slika 7.86. Opterećeni rezonator za različite vrijednosti faktora sprege



a) b)

Slika 7.87. a) Sprega serijskoga titrajnog kruga s prijenosnom linijom, **b)** sprega paralelnoga titrajnog kruga

S druge strane, rezonator s nadomjesnom shemom paralelnoga titrajnog kruga valja spregnuti preko male serijske susceptancije (slika 7.87b)). Ako je sprežni element kapacitivnog karaktera, onda se paralelni titrajni krug transformira u serijski titrajni krug. Ovdje je paralelni titrajni krug pobuđen malo ispod rezonantne frekvencije pa ga valja nadomjestiti induktivitetom koji zatim dolazi u serijsku rezonanciju sa sprežnim kapacitetom.

Poluvalni mikrotrakasti rezonator spregnut preko proreza

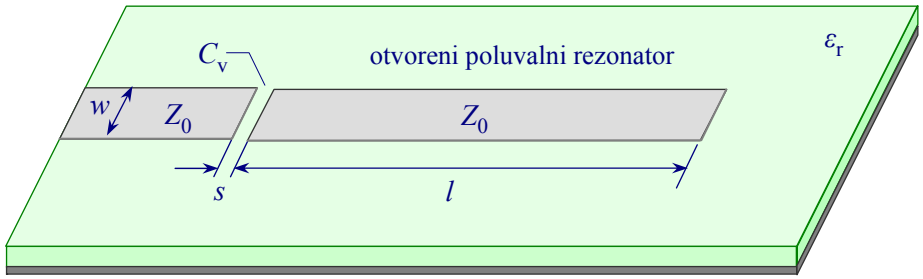
Na slici 7.88 prikazan je nadomjesni sklop poluvalnoga mikrotrakastog rezonatora koji je otvoren na obama krajevima i spregnut s generatorom preko malog serijskog kapaciteta. Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo da je rezonator bez gubitaka. Ulazna impedancija u točki B sastoji se od serijskog spoja ulazne impedancije poluvalne linije i kapacitivne reaktancije proreza, tj.

$$Z_{ul} = \frac{1}{j\omega C_v} + \frac{Z_0}{j\tan \beta l} = -j\frac{\tan \beta l + b_v}{b_v \tan \beta l} Z_0 \,, \tag{7–161}$$

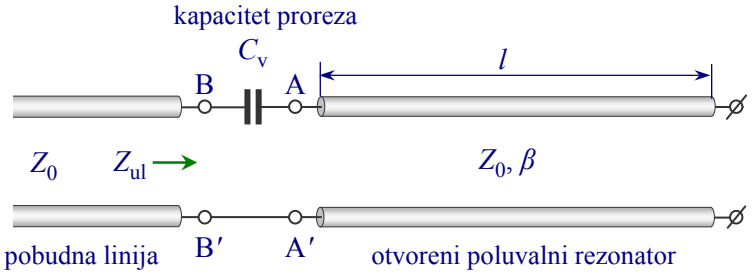
gdje je normirana susceptancija proreza $\omega C_v Z_0$ označena s b_v. Serijska se rezonancija postiže kad je $Z_{ul}=0$ ili kad je brojnik u izrazu (7–161) jednak nuli. Dakle,

$$\tan \beta l + b_v = 0 \,. \tag{7–162}$$

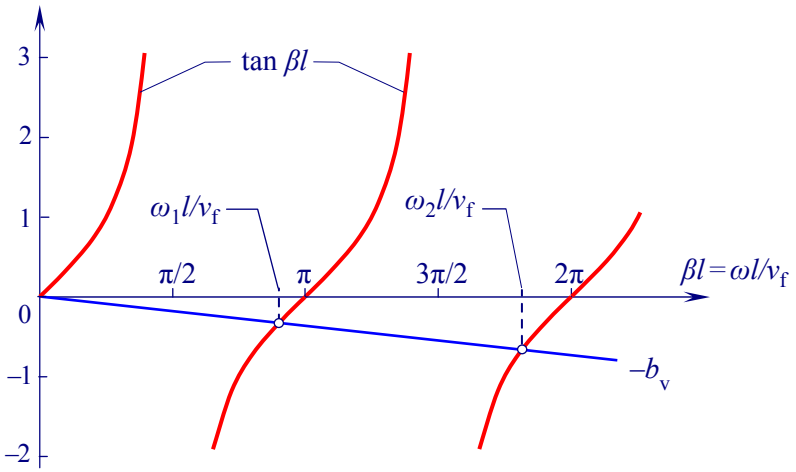
a)



b)



Slika 7.88. a) Poluvalni mikrotrakasti rezonator spregnut preko proreza; **b)** nadomjesni sklop



Slika 7.89. Grafičko rješavanje jednadžbe (7–162)

Ta se transcendentna jednadžba može riješiti numerički ili grafički kao što je prikazano na slici 7.89. U praksi je veličina $b_v \gg 1$ pa će prva rezonantna frekvencija biti vrlo blizu frekvencije za koju je $\beta l = \pi$. Iz slike 7.89 vidi se da vezni kapacitet snižava rezonantnu frekvenciju.

U ovom se slučaju ulazna impedancija u okolišu prve rezonantne frekvencije ω_1 može dobro opisati impedancijom serijskoga titrajnog kruga. To je u skladu sa slikom 7.87b) iz koje se vidi da se dodavanjem serijskog sprežnog elementa, linijski rezonator paralelnog tipa rezonancije pretvara u rezonator serijskog tipa rezonancije. Dakle, serijski reaktivni element ima ulogu invertora impedancije, kao što je objašnjeno u odjeljku 7.5.3. Analitičko rješenje jednadžbe (7–162) može se naći razvojem funkcije (7–161) u Taylorov red (vidjeti dodatak H5) oko prve rezonantne frekvencije ω_1, kao

$$Z_{ul}(\omega) = Z_{ul}(\omega_1) + \left.\frac{\mathrm{d}Z_{ul}(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_1} (\omega - \omega_1) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 Z_{ul}(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}\right|_{\omega_1} (\omega - \omega_1)^2 + \ldots \qquad (7\text{–}163)$$

Za serijsku rezonanciju valja zadovoljiti uvjet $Z_{ul}(\omega_1)=0$ pa nestaje prvi član u Taylorovom razvoju. Budući da je u mikrovalnim rezonatorima faktor dobrote toliko visok da se frekvencijski pojas od interesa nalazi unutar područja u kojem $|Z_{ul}(\omega)|$ ne prelazi vrijednost koja je 1,41 puta veća od minimalne vrijednosti u serijskoj rezonanciji, rezonantna frekvencija ω_1 neće znatnije odstupati od frekvencije prvoga pola na kojoj je $\tan\beta l = 0$ pa je dovoljno zadržati samo član prvoga reda u Taylorovom razvoju. Uvrštenjem uvjeta (7–162) u izraz (7–161), izlazi

$$\left.\frac{\mathrm{d}Z_{ul}(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_1} = -\mathrm{j}\frac{Z_0}{b_v \cos^2 \beta l \tan \beta l}\frac{\mathrm{d}(\beta l)}{\mathrm{d}\omega} = \mathrm{j}\frac{1+b_v^2}{b_v^2}\frac{l}{v_f}Z_0 \simeq \mathrm{j}\frac{Z_0 l}{b_v^2 v_f} \simeq \mathrm{j}\frac{\pi Z_0}{\omega_1 b_v^2}, \qquad (7\text{–}164)$$

jer je $b_v \gtrsim 1$ i $l \simeq v_f / \omega_1$, gdje je v_f fazna brzina ravnoga vala u prijenosnoj liniji. Ako je prijenosna struktura u rezonatoru disperzivna kao kod valovoda, onda će izraz (7–164) biti nešto složeniji jer će derivacija faznog koeficijenta biti općenito složenija funkcija frekvencije zbog nelinearne veze između koeficijenta faze i frekvencije.

Prema izrazu (7–163), u okolišu rezonantne frekvencije ulazna impedancija poprima oblik

$$Z_{ul}(\omega) = \mathrm{j}\frac{\pi}{b_v^2}\frac{\omega - \omega_1}{\omega_1}Z_0 . \qquad (7\text{–}165)$$

Do istog se rezultata može doći linearizacijom funkcije tangens u ranije opisanom grafičkom postupku.

Gubitci u linijskom rezonatoru mogu se uključiti tako da se realna rezonantna frekvencija ω_1 u izrazu (7–165) zamijeni kompleksnom frekvencijom $\omega_1(1 + j/2Q_0)$ primjenom izraza (7–108) iz odjeljka 7.4.2. Tad se ulazna impedancija transformira u oblik

$$Z_{ul}(\omega) = \frac{\pi}{2Q_0 b_v^2} Z_0 + j\frac{\pi}{b_v^2}\frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} Z_0 . \tag{7–166}$$

Iz izraza (7–166) vidi se da je u rezonanciji ulazna impedancija jednaka nadomjesnom serijskom otporu $\pi Z_0/(2Q_0 b_v^2)$. Pri kritičnoj je vezi $R_s = Z_0$ pa za sprežnu susceptanciju izlazi

$$B_v = \frac{1}{Z_0}\sqrt{\frac{\pi}{2Q_0}} . \tag{7–167}$$

U skladu s definicijom (7–160), faktor sprege za taj slučaj iznosi

$$\kappa = \frac{Z_0}{R_s} = \frac{2}{\pi} Q_0 b_v^2 . \tag{7–168}$$

Rezonator je preopterećen kad je faktor sprege veći od jedinice, $\kappa > 1$, tj. $b_v > \sqrt{\pi/(2Q_0)}$, a podopterećen kad je $\kappa < 1$, tj. kad je $b_v < \sqrt{\pi/(2Q_0)}$.

Primjer 7.8. Mikrotrakasti rezonator spregnut preko kapacitivnog proreza

Naći fizičku duljinu poluvalnoga mikrotrakastog rezonatora koji rezonira na najnižoj rezonantnoj frekvenciji $f_r = 8$ GHz. Odrediti odgovarajuću vrijednost kapaciteta proreza preko kojeg je kritično spregnut s generatorom unutarnje impedancije 50 Ω. Parametri mikrotrakaste linije iznose: efektivna permitivnost $\varepsilon_{ef} = 2{,}05$ i koeficijent prigušenja $\alpha = 1{,}5$ dB/m. Pritom treba zanemariti disperziju i rubna polja na otvorenim krajevima odsječka mikrotrakaste linije.

Rješenje:

Prva rezonancija nastaje pri fizičkoj duljini $l = \lambda_v/2$ koja približno iznosi

$$l = \frac{\lambda_v}{2} = \frac{v_f}{2f_r} = \frac{c}{2f_r\sqrt{\varepsilon_{ef}}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 8\cdot 10^9\cdot\sqrt{2{,}05}} = 13{,}09\,\text{mm}$$

bez učinka sprežnog kapaciteta. Faktor dobrote može se izračunati primjenom izraza (7–141) kao

$$Q_0 = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha\lambda_v} = \frac{\pi}{2\alpha l} = \frac{\pi\cdot(8{,}686\,\text{dB/Np})}{2\cdot 0{,}0131\,\text{m}\cdot 1{,}5\,\text{dB/m}} = 695 .$$

Potrebna vrijednost susceptnacije proreza može se izračunati primjenom izraza (7–167), tj.

$$b_v = \sqrt{\frac{\pi}{2Q_0}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\cdot 695}} = 0{,}0475 ,$$

iz čega proizlazi vrijednost kapaciteta proreza

$$C_v = \frac{b_v}{Z_0\omega} = \frac{0{,}0475}{50\cdot 2\pi(8\cdot 10^9)} = 0{,}0189\,\text{pF} .$$

Nakon što je određen kapacitet sprežnog elementa, može se točnije izračunati rezonantna frekvencija rješavanjem transcendentne jednadžbe (7–162). U skladu sa slikom 7.89, ta je frekvencija nešto niža od zadane rezonantne frekvencije. Sad se postupnim snižavanjem frekvencije od početne vrijednosti 8 GHz lako može naći rezonantna frekvencija (7,881 GHz) koja zadovoljava jednadžbu (7–162). To je oko 1,5 % niža vrijednost od zadane. Naknadnim skraćivanjem linije za 1,5 % pogreška se smanji na 0,01 %.

Poluvalni valovodni rezonator spregnut preko otvora u zaslonu

Kao što je objašnjeno u odjeljku 7.4.3, valovodni rezonator elektromagnetska je struktura zatvorenog tipa (šupljina omeđena metalnim zidovima) pa se sprega s pobudnim valovodom najjednostavnije ostvaruje preko otvora u zaslonu koji se postavlja okomito na os valovoda (odjeljak 5.10.2). Želi li se valovodni rezonator pobuditi suosnom linijom, najjednostavnije je uporabiti električnu sondu ili magnetski dipol kao prilikom pobude valovoda suosnom linijom (odjeljak 5.10.1).

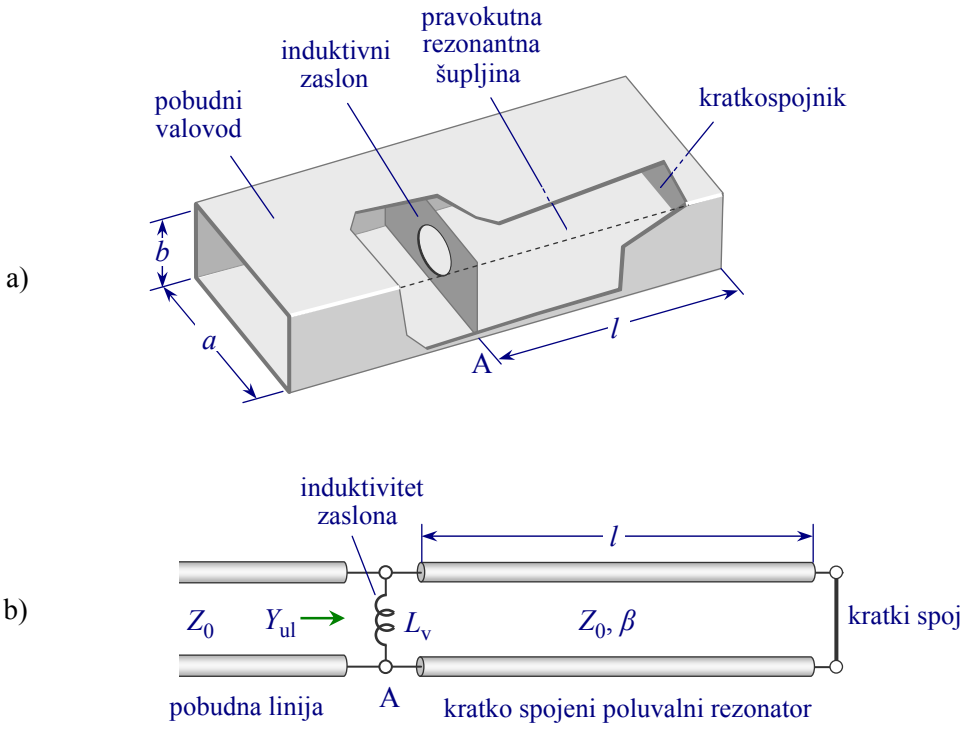
Na slici 7.90a) prikazana je izvedba kratko spojenog poluvalnog valovodnog rezonatora kod kojeg je sprega s drugim valovodom ostvarena preko induktivnog otvora. Njegov nadomjesni sklop na slici 7.90b) upućuje na to da se radi o dualnom slučaju otvorenog poluvalnog rezonatora prikazanog na slici 7.88b), gdje su su otvoreni krajevi zamijenjeni kratkim spojem, a serijski kapacitivni sprežni element zamijenjen je poprečnim induktivnim elementom. Stoga se može primijeniti analitički postupak koji smo rabili kod otvorenog poluvalnog rezonatora, samo što umjesto ulazne impedancije treba uzeti ulaznu admitanciju dualnog oblika, tj.

$$Y_{\mathrm{ul}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_v} + \frac{1}{\mathrm{j}Z_0 \tan \beta l} = -\mathrm{j}\frac{\tan \beta l + x_v}{x_v Z_0 \tan \beta l}, \tag{7–169}$$

gdje je $x_\mathrm{v} = \omega L_\mathrm{v}/Z_0$ normirana poprečna sprežna reaktancija kojom se serijski tip rezonancije pretvara u paralelni tip rezonancije. Za kružni je otvor $x_\mathrm{v} = -1/b$ prema izrazu (2–264). U rezonanciji je ulazna admitancija jednaka nuli, što znači da brojnik izraza (7–169) treba izjednačiti s nulom, iz čega izlazi uvjet

$$\tan \beta l + x_v = 0\,. \tag{7–170}$$

Taj je uvjet sličan uvjetu (7–162) za slučaj otvorenog poluvalnoga mikrotrakastog rezonatora spregnutog preko kapacitivnog proreza.



Slika 7.90. a) Pravokutni rezonator spregnut s pobudnim valovodom preko induktivnog zaslona; **b)** nadomjesni sklop

Ako se umjeso *TEM* prijenosne strukture rabi valovod valja imati na umu da je valovod disperzivna prijenosna struktura, pa je derivacija faznog koeficijenta u izrazu (7–164) nešto složenija u odnosu na odgovarajući izraz u primjeru 7.8. Stoga za pravokutni valovod izlazi

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\sqrt{k_0^2 - k_c^2} = \frac{k_0}{c\beta}, \tag{7–171}$$

U praksi je $x_\mathrm{v} \ll 1$ pa je prva rezonantna frekvencija vrlo blizu frekvenciji za koju je $\beta l = \pi$.

Razvojem ulazne admitancije (7–169) u Taylorov red i primjenom izraza (7–171) izlazi

$$Y_\mathrm{ul}(\omega) = \mathrm{j}\frac{\pi k_0(\omega - \omega_1)}{cZ_0 x_\mathrm{v}^2 \beta^2}, \tag{7–172}$$

gdje se vrijednosti β, k_0 i x_v moraju izračunati za rezonantnu frekvenciju ω_1.

Gubitci u valovodu mogu se uključiti preko kompleksne rezonantne frekvencije $\omega_1(1+\mathrm{j}/2Q)$ u brojniku izraza (7–172) kao što smo učinili pri izvodu izraza (7–166). Rezultat je

$$Y_\mathrm{ul}(\omega) = \frac{\pi k_0 \omega_1}{2cZ_0 Q\beta^2 x_\mathrm{v}^2} + \mathrm{j}\frac{\pi k_0(\omega - \omega_1)}{cZ_0 x_\mathrm{v}^2 \beta^2}. \tag{7–173}$$

Na rezonantnoj je frekvenciji admitancija posve realna, a paralelni otpor u nadomjesnom titrajnome krugu iznosi $R_\mathrm{p} = 2cZ_0 Q\beta^2 x_\mathrm{v}^2/(\pi k_0 \omega_1)$. Kritična se sprega postiže uz uvjet $R_\mathrm{p} = Z_0$, koji daje potrebnu vrijednost sprežne reaktancije

$$X_\mathrm{v} = Z_0\sqrt{\frac{\pi k_0 \omega_1}{2cQ\beta^2}}. \tag{7–174}$$

Sad se iz tog izraza može naći potrebna vrijednost promjera kružnog otvora.

Prijenosni valovodni rezonator

Rezonator pojasnopropusne vrste može se ostvariti s dvama istovjetnim zaslonima na približno poluvalnom razmaku, kao što je prikazano na slici 7.91a). Nadomjesni sklop na slici 7.91b) bit će prilagođen karakterističnoj impedanciji linije u točki A (izlazni prolaz) ako se admitancija u toj točki (paralelni spoj karakteristične admitancije linije i susceptancije induktivnog diskontinuiteta) preslika u sebi kompleksno konjugiranu vrijednost u točki B, gdje se zatim paralelno spaja istovjetni diskontinuitet čija je susceptancija suprotnog predznaka od preslikane admitancije u točki B. U prvom koraku valja naći normiranu admitanciju u točki A

$$y_\mathrm{A} = 1 + \mathrm{j}b_\mathrm{v},$$

gdje je $b_\mathrm{v} = -Z_0/(\omega L_\mathrm{v})$ normirana susceptancija diskontinuiteta (zaslona). Ta se admitancija može lako preslikati u sebi konjugiranu admitanciju, sa susceptnacijom suprotnog predznaka,

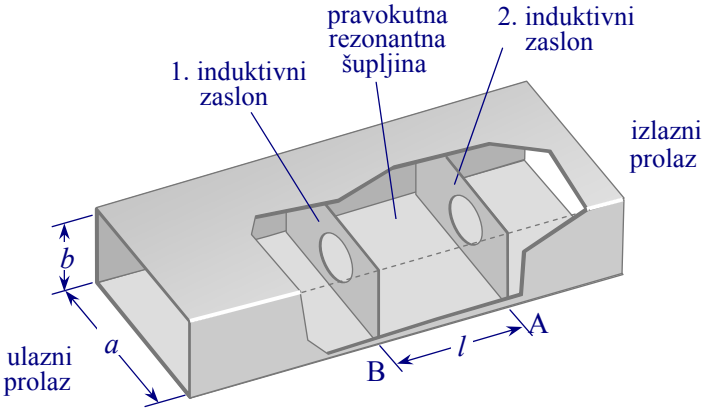
$$y_\mathrm{B} = 1 - \mathrm{j}b_\mathrm{v},$$

i odsječkom linije odgovarajuće električne duljine nešto manje od pola valne duljine ($l < \lambda_\mathrm{v}/2$), kao što je prikazano na slici 7.92c). Stoga dodavanjem normirane admitancije diskontinuiteta iznosa b_v u točki B (ulazni prolaz) može se ostvariti prilagodba sklopa jer je tada

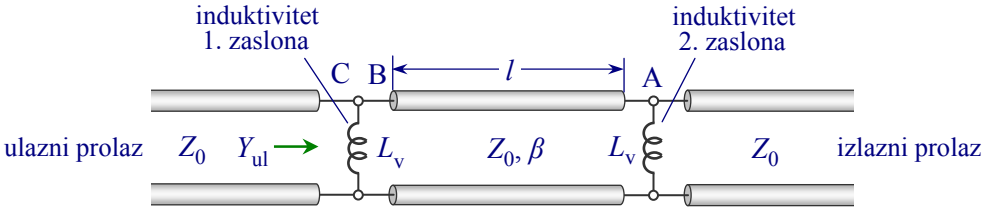
$$y_\mathrm{ul} = y_\mathrm{B} + \mathrm{j}b_\mathrm{v} = 1.$$

Pri tomu je razmatrani sklop savršeno prilagođen samo na rezonantnoj frekvenciji. Ta je vrsta rezonatora osnovna komponenta za gradnju pojasnopropusnih filtara. Prijenosna karakteristika sklopa prikazana je na slici 7.92.

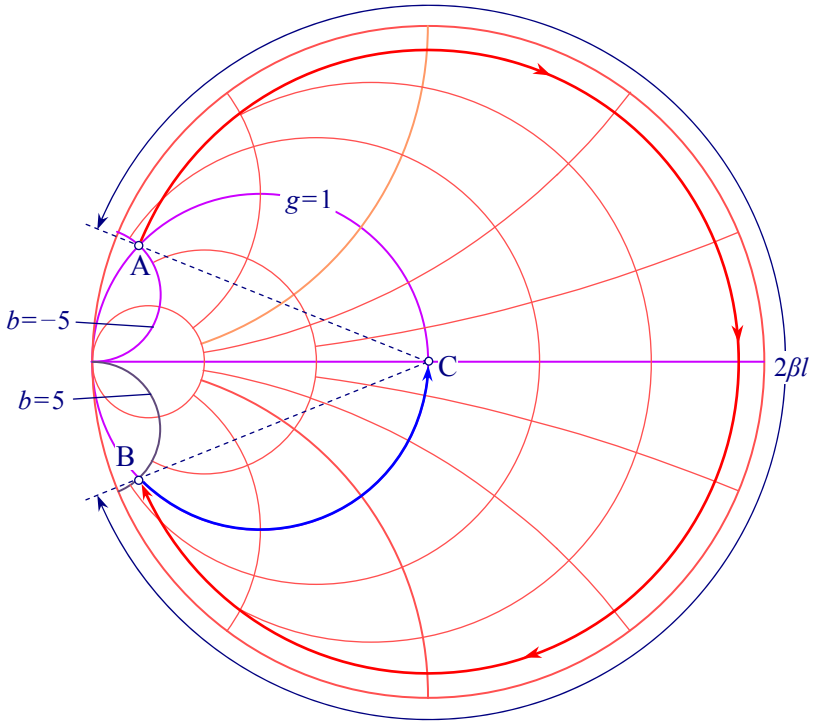
a)



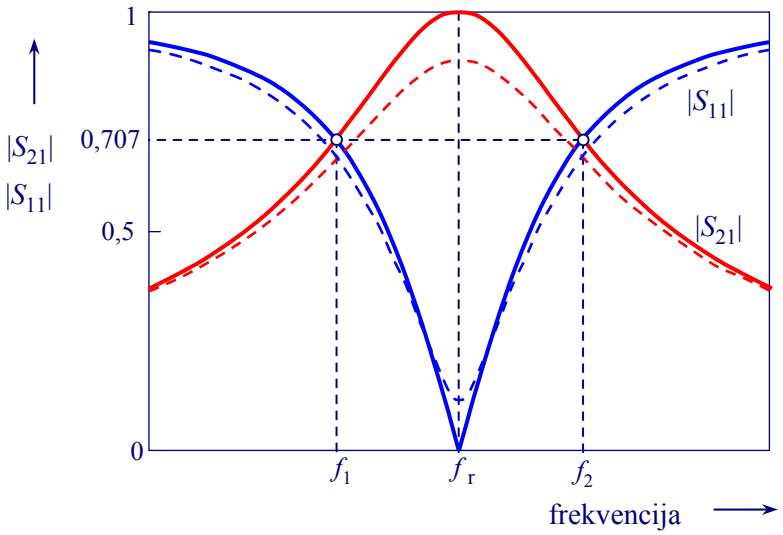
b)



c)



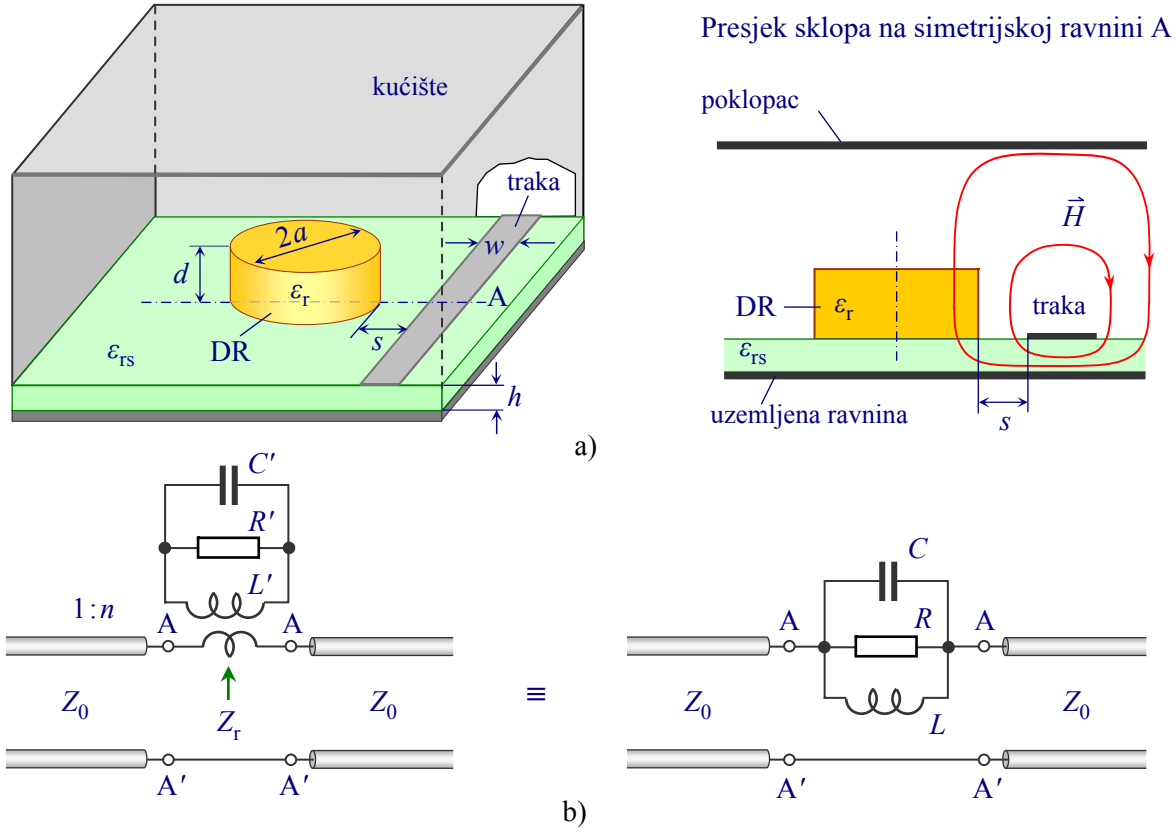
Slika 7.91. a) Valovodni prijenosni rezonator pojasnopropusne vrste. **b)** Nadomjesni sklop rezonatora. **c)** Rješenje u Smithovu dijagramu za normirane admitancije. Transformacijom točke A (na mjestu 1. zaslona) u točku B s pomoću valovodnog odsječka električne duljine βl dobiva se normirana admitancija u točki B čija je vrijednost jednaka konjugirano kompleksnoj admitanciji u točki A. Dodavanjem istovjetnog diskontinuiteta (2. zaslon) poništavaju se reaktivne komponente i sklop je prilagođen valnoj impedanciji pobudnog valovoda



Slika 7.92. Obilježja poluvalnoga rezonatora pojasnopropusnog tipa bez gubitaka (puno) i s uključenim gubitcima (isprekidano)

Sprega dielektričnog rezonatora s mikrotrakastom linijom

Budući da se izvan valjka nalazi više magnetske energije nego električne energije, spregu rezonatora s prijenosnom linijom lakše je ostvariti preko magnetskog polja. Na slici 7.93a) prikazano je kako se može ostvariti sprega između dielektričnog rezonatora u modu $TE_{01\delta}$ i mikrotrakaste linije preko zajedničkog magnetskog polja. Smanjenjem razmaka s između rezonatora i trake širine w povećava se sprega i smanjuje vanjski faktor dobrote. Da se smanji



Slika 7.93. a) Dielektrični valjak (DR) smješten na podlozi mikrotrakaste linije može se spregnuti s linijom preko zajedničkog magnetskog polja. **b)** Nadomjesni sklop u ravnini simetrije A

zračenje energije u okolni prostor, dielektrični rezonator treba zatvoriti u metalno kućište, kao što je objašnjeno u odjeljku 7.4.4.

Na slici 7.93b) prikazan je nadomjesni sklop rezonatora spregnutog s mikrotrakastom linijom. U točki A nadomjesnog sklopa rezonator se ponaša kao paralelni titrajni krug spojen u seriju s prijenosnom linijom karakteristične impedancije Z_0. Stoga nadomjesni sklop ima značajke pojasnozapornog filtra (odjeljak 7.5). Jačina sprege može se regulirati promjenom razmaka s, odnosno omjerom zavoja $(1:n)$ idealnog naponskog transformatora, gdje je $n>1$. Ulazna impedancija u primar transformatora može se izraziti s pomoću izraza (7–123) kao

$$Z_{\mathrm{r}} = \frac{R'/n^2}{1+\mathrm{j}\dfrac{2Q_0\Delta\omega}{\omega_{\mathrm{r}}}}, \tag{7–175}$$

gdje je $Q_0 = R'/(\omega_{\mathrm{r}}L')$ faktor dobrote neopterećenog rezonatora, $\omega_{\mathrm{r}} = 1/\sqrt{LC}$ rezonantna frekvencija, a $\Delta\omega = \omega - \omega_{\mathrm{r}}$ frekvencijska devijacija od rezonantne frekvencije. U rezonanciji se paralelni titrajni krug može zamijeniti otporom vrijednosti $R = R'/n^2$ pa se za faktor sprege, definiran izrazom (7–160), dobiva

$$\kappa = \frac{Q_0}{Q_{\mathrm{v}}} = \frac{R}{R_{\mathrm{v}}} = \frac{R}{2Z_0} = \frac{R'}{2n^2Z_0}, \tag{7–176}$$

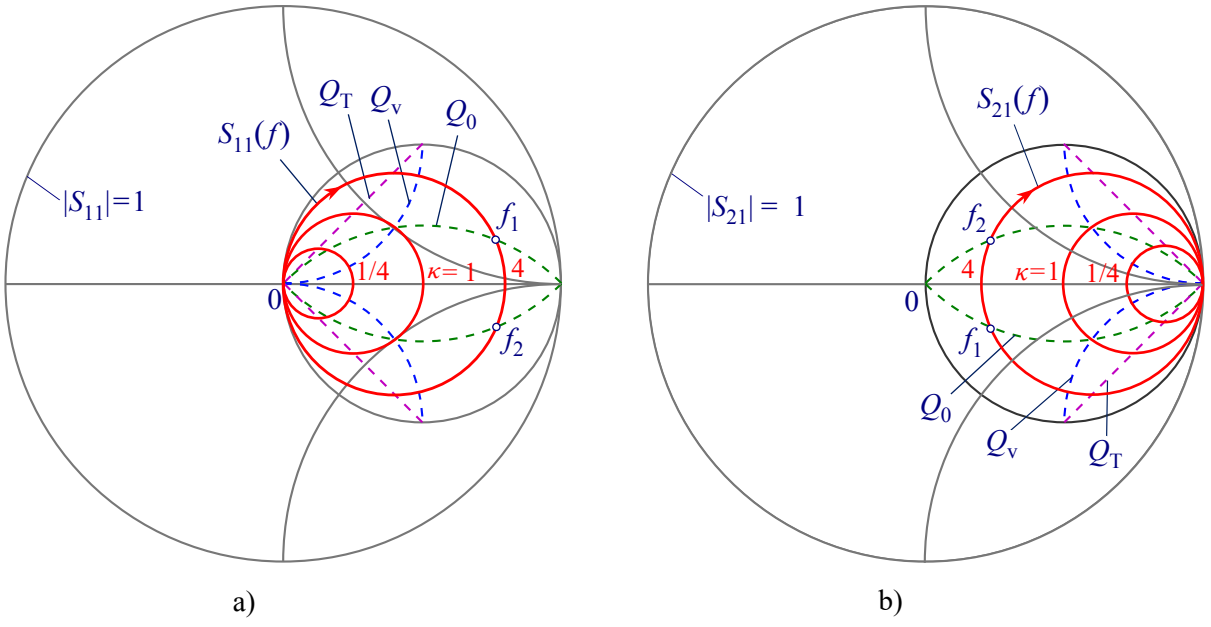
gdje je $R_{\mathrm{v}}=2Z_0$ ukupni vanjski otpor (na ulazu i izlazu) kojim je rezonator opterećen. Koeficijent refleksije na ulazu sklopa definiran je izrazom (3–74) pa u rezonanciji poprima oblik

$$\Gamma(\omega_{\mathrm{r}}) = \frac{R'}{R'+2n^2Z_0} = \frac{\kappa}{1+\kappa}. \tag{7–177}$$

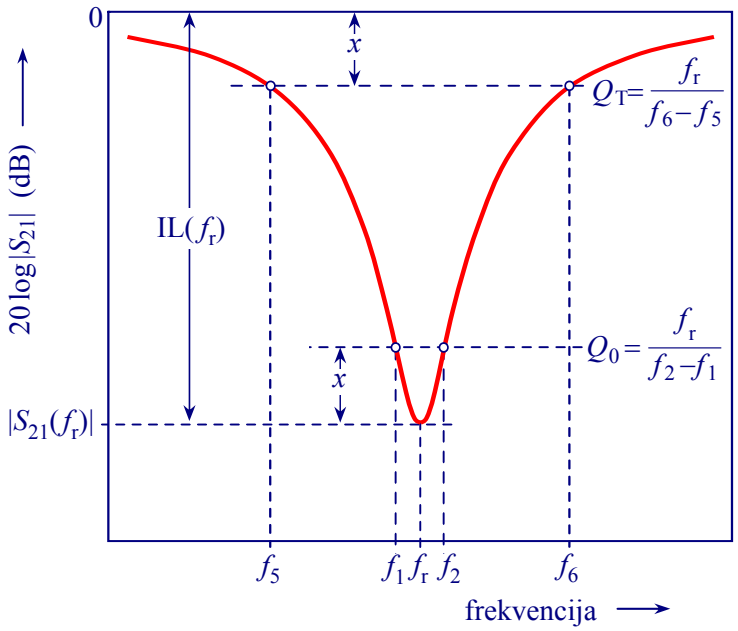
Stoga se faktor sprege može izraziti preko koeficijenta refleksije u rezonanciji kao

$$\kappa = \frac{\Gamma(\omega_{\mathrm{r}})}{1-\Gamma(\omega_{\mathrm{r}})}, \tag{7–178}$$

a koeficijent refleksije može se lako odrediti mjerenjem. U nekim slučajevima, omjer transformacije može se odrediti analitički, ali općenito ga je bolje odrediti mjerenjem.



Slika 7.94. Određivanje faktora dobrote iz lokusa dobivenih mjerenjima: **a)** $S_{11}(f)$ i **b)** $S_{21}(f)$



Slika 7.95. Određivanje faktora dobrote iz skalarnih mjerenja parametra S_{21}

Budući da su koeficijenti prijenosa i refleksije međusobno povezani preko izraza (3–73) kao $\Gamma + T = S_{11}(\omega) + S_{21}(\omega) = 1$, za raspršne parametre sklopa na slici 7.93b) izlazi [11]:

$$S_{11}(\omega) = S_{22}(\omega) = \frac{\kappa}{\kappa + 1 + \mathrm{j}\dfrac{2Q_0\Delta\omega}{\omega_r}}, \qquad S_{12}(\omega) = S_{21}(\omega) = \frac{1 + \mathrm{j}\dfrac{2Q_0\Delta\omega}{\omega_r}}{\kappa + 1 + \mathrm{j}\dfrac{2Q_0\Delta\omega}{\omega_r}}. \tag{7–179}$$

Stoga u rezonanciji ($\omega = \omega_r$, tj. $\Delta\omega = 0$) raspršna matrica poprima oblik

$$S(\omega_r) = \frac{1}{\kappa + 1}\begin{bmatrix} \kappa & 1 \\ 1 & \kappa \end{bmatrix}. \tag{7–180}$$

Uneseno slabljenje može se izraziti u ovisnosti o κ kao

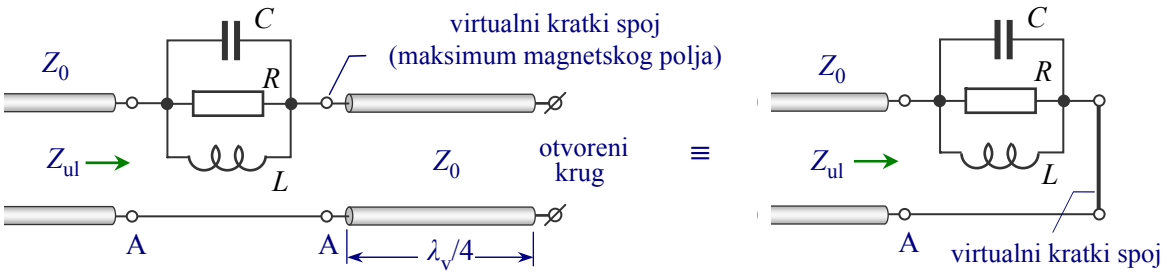
$$\mathrm{IL} = -20\log S_{21} = 20\log(\kappa + 1). \tag{7–181}$$

Faktori dobrote opterećenog i neopterećenog rezonatora mogu se dobiti iz mjerenja raspršnih parametara s pomoću vektorskog analizatora mreža slično kao za obični titrajni krug samo što se sad lokusi koeficijenta refleksije i prijenosa nalaze unutar jedinične kružnice za realni dio impedancije, $r = 1$. Na slici 7.94 prikazani su tipični lokusi parametara $S_{11}(\omega)$ i $S_{21}(\omega)$ za dielektrični rezonator spregnut s mikrotrakastom linijom. Faktori dobrote mogu se naći i iz odziva modula prijenosnog raspršnog parametra $|S_{21}|$ koji je dobiven mjerenjem s pomoću skalarnog ili vektorskog analizatora mreža. Postupak je prikazan na slici 7.95, gdje se faktori dobrote Q_T i Q_0 određuju preko odgovarajućih frekvencijskih devijacija kao kod običnih titrajnih krugova s pomoću izraza (7–112) ili (7–127). Te se devijacije mogu odrediti na slici 7.95 uz pomoć faktora x (u decibelima), koji se može izračunati iz izraza

$$x(\mathrm{dB}) = 3 - 10\log\left[1 + 10^{-\frac{\mathrm{IL}(\omega_r)}{10}}\right]. \tag{7–182}$$

Slično se može izračunati faktor sprege iz vrijednosti unesenih gubitaka, tj.

$$\kappa = 10^{\frac{\mathrm{IL}(\omega_r)}{20}} - 1. \tag{7–183}$$

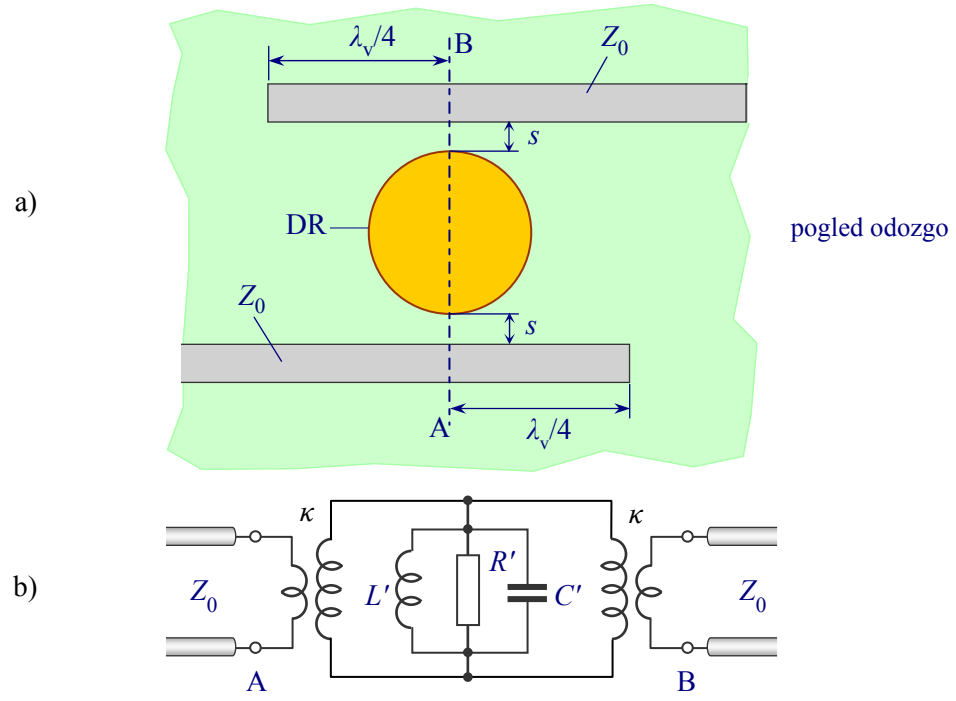


Slika 7.96. Određivanje faktora dobrote preko skalarnih mjerenja parametra S_{21}

Sklop sa slike 7.93 nerijetko se nalazi u izvedbama tranzistorskih oscilatora kao sklop za stabilizaciju frekvencije titranja primjenom serijske povratne veze (odjeljak 8.9.2). S više takvih rezonatora u nizu mogu se ostvariti uskopojasni pojasnozaporni filtri.

Dielektrični rezonator na slici 7.93 može se spregnuti samo s jednim prolazom mikrotrakaste linije. Pritom se drugi kraj linije može ostaviti otvorenim. Da bi se ostvarila najjača moguća sprega, otvoreni kraj mora biti udaljen od referentne ravnine A točno četvrt valne duljine gdje se nalazi maksimum magnetskog polja preko kojeg se ostvaruje sprega. Tada nadomjesni sklop sa slike 7.93b) poprima oblik prikazan na slici 7.96. Linijski odsječak s otvorenim krajem ponaša se kao otvoreni četvrtvalni rezonator ili stab. Premda je rezonantan, taj otvoreni stab neznatno utječe na rezonantna značajke cjelokupnog rezonatora jer mu je faktor dobrote znatno niži od faktora dobrote samog dielektričnog rezonatora.

Paralelno s mikrotrakastom linijom, sa suprotne strane dielektičnog rezonatora, u sklopu prikazanom na slici 7.93, može se spregnuti dodatna mikrotrakasta linija. Time se dobiva prijenosni rezonator poput onog na slici 7.97a). Nadomjesnim sklopom prikazanim na slici 7.97b) sad se može naći prijenosna karakteristika koja je vrlo slična karakteristici valovodnog rezonatora prikazanog na slici 7.92. Takav sklop često nalazi primjene u pojasnopropusnim filtrima (odjeljak 7.5) i tranzistorskim oscilatorima s paralelnom povratnom vezom (odjeljak 8.9.2) gdje služi za stabilizaciju frekvencije osciliranja.



Slika 7.97. Dielektrični rezonator (DR) spregnut s dvjema mikrotrakastim linijama

7.4.7. Perturbacija rezonatora

U praksi se šupljinski rezonatori nerijetko modificiraju tako da se namjerno izazovu male promjene njihovog oblika ili da se u rezonantnu šupljinu unesu mali dielektrični ili metalni dijelovi. Primjerice, rezonantna frekvencija šupljine može se jednostavno ugađati s pomoću malog vijka (dielektričnog ili metalnog) koji ulazi u volumen šupljine ili promjenom obujma same rezonantne šupljine pomičnim stijenkama. Također postoje primjene kod kojih se određuje permitivnost dielektričnog materijala mjerenjem pomaka rezonantne frekvencije nakon što se u šupljinu unese komadić toga materijala.

U nekim se slučajevima može egzaktno izračunati učinak takvih perturbacija (poremećaja) na značajke rezonatora, ali se vrlo često mora pribjeći aproksimacijama. Korisna tehnika kojom je to moguće ostvariti naziva se *metoda perturbacije*. Ona pretpostavlja da se polja u šupljini pri malim promjenama oblika ili svojstava materijala neće znatnije promijeniti u odnosu na slučaj bez poremećaja [2]. Stoga se ta metoda koncepcijski ne razlikuje od perturbacijske metode koju smo rabili prilikom proučavanja gubitaka u dobrim vodičima u odjeljku 3.6, gdje smo pretpostavili da ne dolazi do veće razlike između polja u sklopovima izvedenim s dobrim i savršenim vodičima.

Sad ćemo izvesti izraze za približnu promjenu rezonantne frekvencije kad je rezonantna šupljina poremećena malim promjenama njezinog oblika ili malim promjenama materijala kojim je šupljina ispunjena.

Perturbacija oblika rezonatora

Promjena obujma (volumena) rezonantne šupljine može se shvatiti kao promjena oblika zidova. Za male promjene to se može razmatrati metodom perturbacije. Na slici 7.98 prikazana je proizvoljna šupljina kojoj se pri promjeni oblika metalnih zidova mijenjaju rubni uvjeti što ima za posljedicu promjenu rezonantne frekvencije.

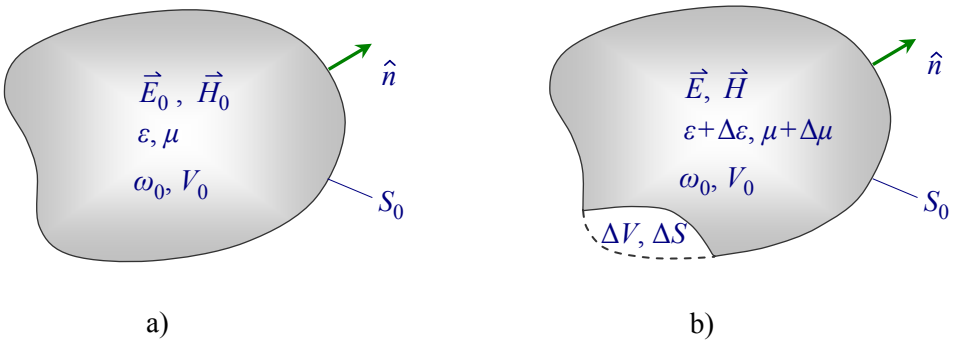
Ako su $\vec{E}_0$ i $\vec{H}_0$ polja izvornoga rezonatora, a $\vec{E}$ i $\vec{H}$ polja poremećenog rezonatora, onda se mogu napisati rotorske Maxwellove jednadžbe za ta dva slučaja:

$$\nabla\times\vec{E}_0 = -\mathrm{j}\omega_0\mu\vec{H}_0, \qquad \nabla\times\vec{H}_0 = \mathrm{j}\omega_0\varepsilon\vec{E}_0, \tag{7–184}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\vec{H}, \qquad \nabla\times\vec{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}, \tag{7–185}$$

gdje su ω_0 i ω rezonantne frekvencije izvornog i poremećenog rezonatora, a ε i μ permitivnost i permeabilnost homogenog materijala.

Konjugiranjem lijeve jednadžbe (7–184) i skalarnim množenjem s $\vec{H}$, te skalarnim množenjem desne jednadžbe (7–185) s $\vec{E}_0^*$, dobiva se par jednadžba:



Slika 7.98. Perturbacija rezonatora; **a)** izvorni rezonator, **b)** rezonator poremećenog oblika

$$\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}_0^*=\mathrm{j}\omega_0\mu\vec{H}\cdot\vec{H}_0^*,\qquad\qquad \vec{E}_0^*\cdot\nabla\times\vec{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}_0^*\cdot\vec{E}\,.$$

Primjenom vektorske jednakosti $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$ na razliku tih dviju jednadžba dobiva se

$$\nabla\cdot(\vec{E}_0^*\times\vec{H})=\mathrm{j}\omega_0\mu\vec{H}\cdot\vec{H}_0^*-\mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}_0^*\cdot\vec{E}\,. \tag{7–186}$$

Sličnim postupkom, iz desne jednadžbe (7–184) i lijeve jednadžbe (7–185) izlazi

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}_0^*)=-\mathrm{j}\omega\mu\vec{H}_0^*\cdot\vec{H}+\mathrm{j}\omega_0\varepsilon\vec{E}_0^*\cdot\vec{E}\,. \tag{7–187}$$

Sad se na integral zbroja jednadžba (7–186) i (7–187) po volumenu V_0 može primijeniti teorem o divergenciji, tj.

$$\int_{V_0}(\vec{E}_0^*\times\vec{H}+\vec{E}\times\vec{H}_0^*)\mathrm{d}V=\oint_S(\vec{E}_0^*\times\vec{H}+\vec{E}\times\vec{H}_0^*)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\,.$$

Pritom drugi plošni integral mora biti jednak nuli jer je $\hat{n}\times\vec{E}=0$ posvuda na S. Otuda izlazi

$$\oint_S\vec{E}_0^*\times\vec{H}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S=-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)\int_V(\mu\vec{H}_0^*\cdot\vec{H}+\varepsilon\vec{E}_0^*\cdot\vec{E})\mathrm{d}V\,. \tag{7–188}$$

Pretpostavimo li da je poremećaj oblika ΔS izazvao malu udubinu na izvornoj plohi S_0, dobiva se nova ploha $S=S_0-\Delta S$. Otuda se desna strana jednakosti (7–188) može napisati kao

$$\oint_S\vec{E}_0^*\times\vec{H}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S=\oint_{S_0}\vec{E}_0^*\times\vec{H}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S-\oint_{\Delta S}\vec{E}_0^*\times\vec{H}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S=-\oint_{\Delta S}\vec{E}_0^*\times\vec{H}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S$$

jer je $\hat{n}\times\vec{E}_0=0$ posvuda na S_0. Posljednji je član negativan što je u skladu sa smjerom okomice $\hat{n}$ na plohu S_0. Sad iz izraza (7–188) izravno slijedi

$$\omega-\omega_0=-\mathrm{j}\frac{\displaystyle\oint_{\Delta S}\vec{E}_0^*\times\vec{H}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S}{\displaystyle\int_V(\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}_0^*+\mu\vec{H}\cdot\vec{H}_0^*)\mathrm{d}V}\,. \tag{7–189}$$

To je egzaktna formula za promjenu rezonantne frekvencije zbog promjene oblika plohe. Taj se izraz, međutim, još uvijek ne nalazi u prikladnom obliku jer točne vrijednosti polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ u poremećenom rezonatoru obično nisu poznate. No ako se pretpostavi da ΔS odgovara udubini u plohi koja je dovoljno plitka i glatka, onda se poremećena polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ mogu zamijeniti izvornim poljima $\vec{E}_0$ i $\vec{H}_0$ pa integral u brojniku izraza (7–180) poprima oblik

$$\oint_{\Delta S}\vec{E}_0^*\times\vec{H}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\simeq\oint_{\Delta S}\vec{E}_0^*\times\vec{H}_0\cdot\hat{n}\mathrm{d}S=-\mathrm{j}\omega_0\int_{\Delta V}(\varepsilon\left|\vec{E}_0\right|^2-\mu\left|\vec{H}_0\right|^2)\mathrm{d}V\,.$$

Ova jednakost proizlazi iz zakona očuvanja kompleksne snage (2–124). Njezinim uvrštejem u formulu (7–189) i zamjenom polja $\vec{E}_0$ i $\vec{H}_0$ poljima $\vec{E}$ i $\vec{H}$ u nazivniku, dobiva se

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\simeq\frac{\displaystyle\int_{\Delta V}(\mu\left|\vec{H}_0\right|^2-\varepsilon\left|\vec{E}_0\right|^2)\mathrm{d}V}{\displaystyle\int_{V_0}(\mu\left|\vec{H}_0\right|^2+\varepsilon\left|\vec{E}_0\right|^2)\mathrm{d}V}\,. \tag{7–190}$$

Valja uočiti da su članovi u brojniku razmjerni količinama magnetske i električne energije (ΔW_m i ΔW_e) koje su bile pohranjene u volumenu ΔV prije nego što je »odstranjen« poremećajem oblika, tj. udubine (uleknine) na plohi. Nasuprot tomu, nazivnik je razmjeran ukupnoj pohranjenoj energiji u rezonatoru prije perturbacije pa se formula (7–190) može napisati u jednostavnijem obliku kao

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0} \simeq \frac{\Delta W_\mathrm{m}-\Delta W_\mathrm{e}}{\langle W_\mathrm{m}\rangle+\langle W_\mathrm{e}\rangle}. \qquad (7\text{–}191)$$

Iz toga se može zaključiti da će udubina izazvati porast rezonantne frekvencije, ako je na njezinom mjestu bilo pohranjeno više magnetske energije nego električne energije. Nasuprot tomu, rezonantna će se frekvencija sniziti, ako je udubina nastala na mjestu u kojem je u rezonatoru bilo pohranjeno više električne energije. Izbočina ima suprotan učinak na rezonantnu frekvenciju.

To se može lako pokazati na primjeru pravokutnoga valovodnog rezonatora u modu TE_{101} prikazanog na slici 7.69. Ako se, primjerice, taj rezonator malo skrati na jednome od svojih krajeva, što znači da poremećaj oblika poprima oblik udubine, onda će rezonantna frekvencija porasti jer je do poremećaja došlo u maksimumu magnetskog polja, tj. tamo gdje je gustoća pohranjene magnetske energije maksimalna, a električne energije gotovo da i nema.

S druge strane, pogledajmo slučaj u kojem se na sredini istog rezonatora s pomoću kratkog vijka malo smanji razmak između gornje i donje stijenke, što je opet ekvivalentno udubini. Budući da je taj poremećaj oblika nastao na mjestu maksimuma električnog polja, rezonantna će se frekvencija malo smanjiti. To je u skladu s fizikalnom intuicijom jer je nadomjesnom paralelnom titrajnom krugu rezonatora paralelno spojen mali kapacitet kratkog vijka u valovodu (odjeljak 5.9).

Perturbacija materijala

Na slici 7.99 prikazana je šupljina poremećena promjenom permitivnosti ($\Delta\varepsilon$) ili permeabilnosti ($\Delta\mu$) cjelokupnog materijala ili dijela materijala koji ispunjava rezonator. Ako su $\vec{E}_0$ i $\vec{H}_0$ polja izvornog rezonatora, a $\vec{E}$ i $\vec{H}$ polja poremećenog rezonatora, onda se rotorske Maxwellove jednadžbe za ova dva slučaja mogu napisati u ovome obliku:

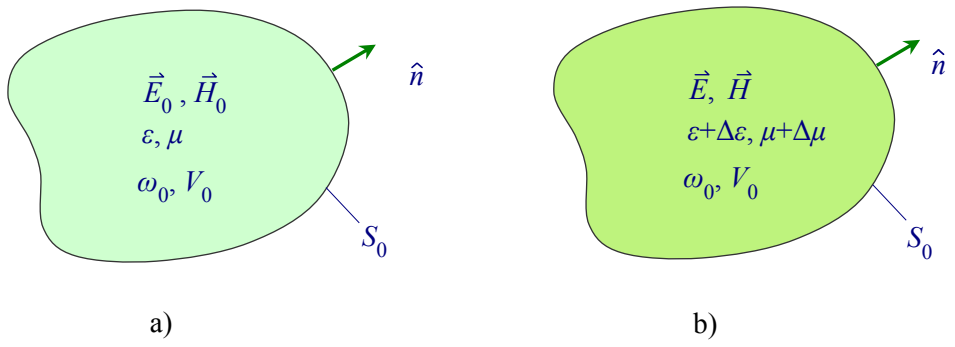
$$\nabla\times\vec{E}_0 = -\mathrm{j}\omega_0\mu\vec{H}_0, \qquad \nabla\times\vec{H}_0 = \mathrm{j}\omega_0\varepsilon\vec{E}_0, \qquad (7\text{–}192)$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\mathrm{j}\omega(\mu+\Delta\mu)\vec{H}, \qquad \nabla\times\vec{H} = \mathrm{j}\omega(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\vec{E}, \qquad (7\text{–}193)$$

gdje je ω_0 rezonantna frekvencija izvornog rezonatora, a ω rezonantna frekvencija poremećenog rezonatora.

Ako se lijeva jednadžba (7–192) konjugira i skalarno pomnoži s $\vec{H}$ i zatim se desna jednadžba (7–193) skalarno pomnoži s $\vec{E}_0^*$, dobiva se ovaj par jednadžba:

$$\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}_0^* = \mathrm{j}\omega_0\mu\vec{H}\cdot\vec{H}_0^*, \qquad \vec{E}_0^*\cdot\nabla\times\vec{H} = \mathrm{j}\omega(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\vec{E}_0^*\cdot\vec{E}.$$



a) b)

Slika 7.99. Perturbacija rezonatora; **a)** izvorni rezonator, **b)** poremećeni rezonator

Oduzimanjem tih dviju jednadžba i primjenom vektorske jednadžbe

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} \tag{7–194}$$

dobiva se

$$\nabla \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{H}) = \mathrm{j}\omega_0 \mu \vec{H} \cdot \vec{H}_0^* - \mathrm{j}\omega(\varepsilon + \Delta\varepsilon)\vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \,. \tag{7–195}$$

Slično tomu, konjugiranjem desne jednadžbe (7–192) i skalarnim množenjem s $\vec{E}$ te skalarnim množenjem lijeve jednadžbe (7–193) s $\vec{H}_0^*$, izlazi drugi par jednadžba:

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}_0^* = -\mathrm{j}\omega_0 \varepsilon \cdot \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \,, \qquad \vec{H}_0^* \cdot \nabla \times \vec{E} = -\mathrm{j}\omega(\mu + \Delta\mu)\vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \,.$$

Oduzimanje tih dviju jednadžba i primjena vektorske jednadžbe (7–195) daju

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_0^*) = -\mathrm{j}\omega(\mu + \Delta\mu)\vec{H}_0^* \cdot \vec{H} + \mathrm{j}\omega_0 \varepsilon \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \,. \tag{7–196}$$

Zbrojimo li sad jednadžbe (7–195) i (7–196) te integriramo rezultat po volumenu V_0 i zatim primijenimo teorem o divergenciji dobiva se

$$\int_{V_0} \nabla \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) \mathrm{d}V = \oint_{S_0} (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) \hat{n} \mathrm{d}S = 0 \,,$$

gdje je plošni integral jednak nuli jer je $\hat{n} \times \vec{E} = 0$ na S_0. Otuda je

$$\mathrm{j} \int_{V_0} \left\{ \left[\omega_0 \varepsilon - \omega(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \right] \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + \left[\omega_0 \mu - \omega(\mu + \Delta\mu) \right] \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \right\} \mathrm{d}V = 0 \tag{7–197}$$

pa iz izraza (7–197) slijedi

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{-\int_{V_0} (\Delta\varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}_0^* + \Delta\mu \vec{H} \cdot \vec{H}_0^*) \mathrm{d}V}{\int_{V_0} (\varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}_0^* + \mu \vec{H} \cdot \vec{H}_0^*) \mathrm{d}V} \,. \tag{7–198}$$

To je egzaktan izraz za promjenu rezonantne frekvencije do koje je došlo perturbacijom materijala. No taj se izraz još uvijek ne nalazi u prikladnom obliku jer točne vrijednosti polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ u poremećenom rezonatoru obično nisu poznate. Ali ako se pretpostavi da su $\Delta\varepsilon$ i $\mu\Delta$ male veličine, onda se poremećena polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ mogu aproksimirati izvornim poljima $\vec{E}_0$ i $\vec{H}_0$, a frekvencija u nazivniku izraza (7–198) može se aproksimirati s ω_0 pa se dobiva

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \simeq \frac{-\int_{V_0} (\Delta\varepsilon \left| \vec{E}_0 \right|^2 + \Delta\mu \left| \vec{H}_0 \right|^2) \mathrm{d}V}{\int_{V_0} (\varepsilon \left| \vec{E}_0 \right|^2 + \mu \left| \vec{H}_0 \right|^2) \mathrm{d}V} \,. \tag{7–199}$$

Iz tog se rezultata vidi da svaki porast veličina ε ili μ u bilo kojoj točki rezonatora snižava rezonantnu frekvenciju. No koliki će biti taj utjecaj ovisi o razdiobi polja. To se može pokazati na primjeru rezonatora s poluvalnom kratko spojenom linijom, prikazanim na slici 7.66a). Promjeni li se permitivnost blizu kratkoga spoja, gdje je električno polje slabo, neće doći do veće promjene rezonantne frekvencije. No ako se isto učini u sredini rezonatora, tj. u maksimumu električnog polja, doći će do znatnije promjene rezonantne frekvencije. Osim toga, članovi u izrazu (7–199) mogu se staviti u vezu s pohranjenom električnom i magnetskom energijom u izvornom i poremećenom rezonatoru. Tako se snižavanje rezonantne frekvencije može povezati s porastom pohranjene energije u poremećenom rezonatoru.

7.5. Mikrovalni filtri

Mikrovalni su filtri pasivni dvoprolazni sklopovi koji omogućuju prijenos mikrovalne energije u prilagođeni teret u skladu s određenom prijenosnom funkcijom. Idealni filtar omogućuje savršen prijenos snage na svim frekvencijama unutar pojasa propuštanja uz beskonačno slabljenje izvan tog pojasa (pojas zapiranja). U stvarnosti se takva idealna obilježja ne mogu postići, pa se u postupku proračuna moraju dopustiti određeni kompromisi da bismo se mogli što više približiti idealnim zahtjevima uz prihvatljive tolerancije. Ovisno o određenim zahtjevima sustava u kojem se nalazi, filtar može imati niskopropusnu, pojasnopropusnu, pojasnozapornu ili visokopropusnu prijenosnu karakteristiku.

Da bi se slabljenje u pojasu propuštanja svelo na najmanju moguću mjeru, filtri se grade od reaktivnih elemenata koji su recipročni i bez gubitaka. Na nižim frekvencijama to su idealni induktiviteti i kapaciteti. Ti elementi imaju vrlo jednostavne frekvencijske karakteristike čime je omogućen razvoj posve općenitog i cjelovitog postupka sinteze filtarskih mreža. Osim toga, taj pristup omogućuje izravnu sinteza filtara vrlo različitih frekvencijskih karakteristika. No u mikrovalnome području proračun filtara znatno je zamršenija zadaća jer se na tako visokim frekvencijama moraju primijeniti elementi s raspodijeljenim parametrima, čija je ovisnost o frekvenciji složenija pa ne postoji općenit i cjelovit postupak sinteze. Unatoč tih dodatnih poteškoća zbog visokih frekvencija, razvijen je niz vrlo korisnih metoda za proračun mikrovalnih filtara [1], [2], [4].

Postoji niz različitih topologija filtara. Možda baš filtri čine skupinu mikrovalnih sklopova s najviše različitih izvedaba u kojima sudjeluju različite prijenosne strukture i različite vrste rezonatora.

Slabljenje signala izvan pojasa propuštanja filtra ostvaruje se djelomičnom ili potpunom refleksijom mikrovalne energije na samom ulazu filtra. Kao što smo vidjeli u odjeljku 5.4.4, ako se u dvoprolaznoj mreži zanemare gubitci (disipacija u sastavnim elementima), onda se u skladu sa zakonom očuvanja energije moduli raspršnih parametara nalaze u ovom suodnosu

$$|S_{11}|^2 = 1 - |S_{21}|^2 . \tag{7–200}$$

Parametar $|S_{21}|^2$ funkcija je frekvencije i označuje prijenosnu karakteristiku ili prijenosno pojačanje snage u filtru koji je na ulazu i izlazu zaključen karakterističnom impedancijom sustava. Budući da je uobičajeni filtar sastavljen samo od pasivnih elemenata, ta je veličina uvijek manja od jedan pa se u analizi filtara nerijetko prikazuje njezina recipročna veličina, karakteristika prijenosnog slabljenja snage A (atenuacija)

$$A(\omega) = \frac{1}{|S_{21}(\omega)|^2} = \frac{1}{1 - |S_{11}(\omega)|^2} . \tag{7–201}$$

Tu se funkciju može prikazati u decibelima kao

$$\mathrm{IL} = 10\log\frac{1}{|S_{21}|^2} = -20\log|S_{21}| , \tag{7–202}$$

tj. $\mathrm{IL} = 10\log A(\omega)$ i tad se naziva *uneseni gubitci*. Slična se definicija može naći u odjeljku 3.3.7, izrazi (3–71).

U razmatranjima koja slijede pretpostavit će se da je filtar recipročna dvoprolazna mreža bez gubitaka sastavljena samo od elementa L i C. Prva je zadaća sinteze filtra određivanje svojstava parametra S_{21}. Može se pokazati da impedancijska funkcija povezana s prijenosnom funkcijom mora biti realna i pozitivna. Druga je zadaća sinteze pronalaženje prikladnih postupaka za određivanje odgovarajuće mreže. Ovo je poglavlje uglavnom usredotočeno na tu drugu zadaću s primjenom na filtre maksimalno glatkog i Čebiševljeva odziva. Uobičajen pristup teorije mreža zasniva se na ljestvičastim niskopropusnim *prototipnim mrežama* koje su

normirane na završnu impedanciju 1 Ω i zapornu (graničnu) frekvenciju 1 rad/s. Zatim se primjenom određenih transformacija frekvencije i impedancije mogu ostvariti odgovarajući odzivi filtra: visokopropusni, pojasnopropusni ili pojasnozaporni. Budući da tako dobivena ljestvičasta mreža sadrži koncentrirane *LC* elemenate, ostvarenje odgovarajućeg filtra u mikrovalnome frekvencijskom području zahtijeva uvođenje faktora dobrote i imitancije umjesto koncentriranih *LC* elemenata.

7.5.1. Sinteza filtara

Ako je prijenosna funkcija zadana raspršnim parametrima, onda je prva zadaća sinteze određivanje ulazne pobudne imitancije (impedancije ili admitancije) mreže iz karakteristike prijenosne funkcije. Za dvoprolaznu mrežu prikazanu na slici 7.100 koja se nalazi između jednakih zaključnih impedancija $Z_0 = 1\ \Omega$, moduli parametara S_{11} i S_{21} povezanei su izrazom (7–200).

Savršen filtar u pojasu propuštanja nema gubitaka, a u zapornome pojasu slabljenje mu je beskonačno. Osim toga, u pojasu propuštanja ima linearni fazni odziv (da se izbjegnu izobličenja signala). Naravno, takvi filtri ne postoje u praksi. Stoga treba napraviti neke kompromise u čemu leži umijeće proračuna filtara.

Postupak koji ćemo opisati u ovome poglavlju nudi visok stupanj kontrole faze i amplitude u propusnome i zapornome pojasu filtra te omogućuje sustavnu sintezu željenog odziva. Ako se primjerice traže mali gubiti u pojasu propuštanja, onda valja odabrati maksimalno glatki odziv, dok će Čebiševljev odziv udovoljiti zahtjevu za oštrijim odzivom u zapornome pojasu. Ako je moguće smanjiti kakvoću amplitudnog odziva u korist faznog odziva, onda valja uporabiti filtar s linearnom faznom karakteristikom. U svim tim primjerima obilježja filtara mogu se izravno poboljšati povećanjem broja komponenata u filtru. Za niskopropusne prototipove filtara, koje ćemo razmatrati, red filtra jednak je broju njegovih reaktivnih elemenata.

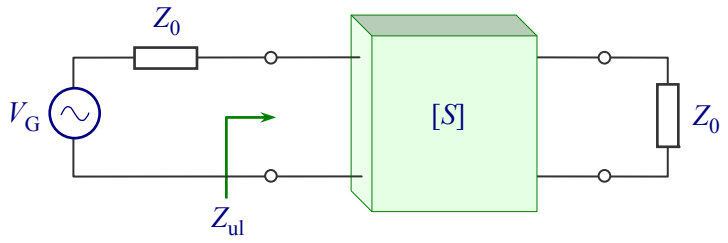
Pri sintezi filtra, odziv je definiran karakteristikom slabljenja prema izrazu (7–201). U tom je izrazu $|S_{11}(\omega)|^2$ parna funkcija frekvencije pa se može izraziti kao polinom od ω^2,

$$|S_{11}(\omega)|^2 = \frac{M(\omega^2)}{M(\omega^2)+N(\omega^2)}, \tag{7–203}$$

gdje su M i N realni polinomi od ω^2. Ako se izraz (7–203) uvrsti u (7–200), onda izlazi

$$A(\omega) = 1 + \frac{M(\omega^2)}{N(\omega^2)}. \tag{7–204}$$

Dakle, za fizički ostvariv filtar njegovo prijenosno slabljenje mora imati oblik kao u izrazu (7–204). Valja uočiti da se zadavanjem izraza $A(\omega)$ istodobno unosi ograničenje na koeficijent refleksije $\Gamma(\omega)=S_{11}(\omega)$. Sad ćemo razmotriti nekoliko praktičnih filtarskih odziva.



Slika 7.100. Dvoprolazna recipročna mreža bez gubitaka (filtar) zaključena na ulazu i izlazu karakterističnom impedancijom sustava Z_0

Maksimalno glatki odziv

Ta se karakteristika također naziva *binomni* ili *Butterworthov odziv* i optimalna je po tomu što jamči maksimalno glatki odziv u pojasu propuštanja za unaprijed zadani broj filtarskih elemenata ili red filtra. Za niskopropusni filtar, taj je odziv definiran *binomnim polinomom*

$$A(\omega) = 1 + k^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N}, \tag{7–205}$$

gdje je N red filtra, a ω_c zaporna frekvencija. Pojas propuštanja nalazi se u rasponu od $\omega = 0$ do $\omega = \omega_c$. Na rubu pojasa propuštanja prijenosno je slabljenje $1 + k^2$. Za praktičnu vrijednost –3 dB, dobva se $k = 1$. Tu ćemo vrijednost zadržati u daljnjim razmatranjima. Za $\omega > \omega_c$, slabljenje monotono raste s frekvencijom, kao što je prikazano na slici 7.101. Za $\omega \gg \omega_c$, $A(\omega) \simeq k^2(\omega/\omega_c)^{2N}$, iz čega se vidi da prijenosno slabljenje raste s faktorom $20 \cdot N$ dB po dekadi. Poput binomnog odziva za prilagodne transformatore s više odsječaka, na frekvenciji $\omega = 0$, prvih je $(2N-1)$ derivacija polinoma (7–205) jednako nuli .

Čebiševljev odziv

Prijenosno slabljenje niskopropusnog filtra stalne valovitosti oblika

$$A(\omega) = 1 + k^2 T_N^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right), \tag{7–206}$$

može se dobiti uporabom *Čebiševljeva polinoma* N-tog reda definiranog izrazima (6–50), tj.

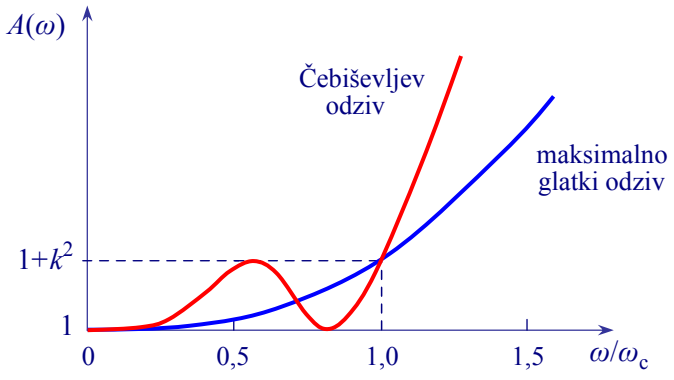
$$T_N\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_m} \right) = \cos\left[N \cos^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_m} \right) \right],$$

gdje $T_N(x)$ oscilira između ± 1 za $|x| \le 1$, a monotono raste za $|x| > 1$, tj. za $\omega > \omega_c$.

U zapornom je pojasu Čebiševljev odziv strmiji od maksimalno glatkog odziva, kao što se vidi na slici 7.101. Parametar k^2 određuje razinu valovitosti unutar pojasa propuštanja. Za velik x, $T_N(x) \simeq (2x)^N$ pa izraz za prijenosno slabljenje za $\omega \gg \omega_c$ poprima oblik

$$A(\omega) \simeq 1 + \frac{k^2}{4} \left(\frac{2\omega}{\omega_c} \right)^{2N},$$

iz čega se opet vidi porast slabljenja s faktorom $20 \cdot N$ dB po dekadi. No prijenosni gubitci *Čebiševljevih filtara* veći su od onih za binomne filtre za $2^{2(N-1)}$ puta na svim frekvencijama u području $\omega \gg \omega_c$. Ustvari, niti jedan drugi polinom za zadani parametar valovitosti k^2 ne može dati veće slabljenje izvan pojasa propuštanja. Drugim riječima, za zadano prigušenje u zapornome pojasu, Čebiševljev polinom daje najmanju valovitost.



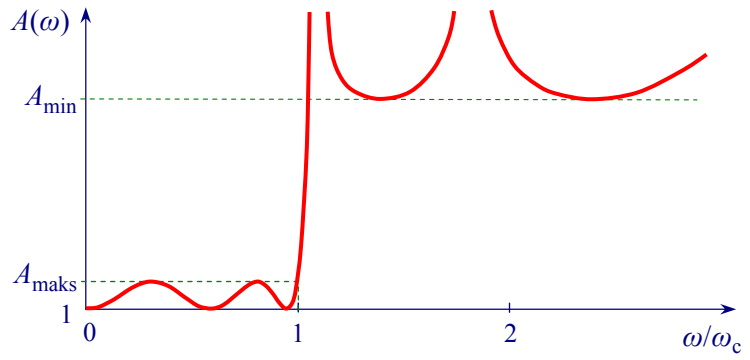
Slika 7.101. Maksimalno glatki i Čebiševljev odziv niskopropusnog filtra (N=3)

Kad je slabljenje u pojasu propuštanja $1+k^2$, tad je modul koeficijenta refleksije

$$|\Gamma| = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \ .$$

Eliptička funkcija

Filtri maksimalno glatkog i Čebiševljevia odziva imaju monotono povećanje slabljenja izvan pojasa propuštanja. U većini primjena dovoljno je zadati razinu minimalno dopuštenog slabljenja u zapornome pojasu, što omogućuje strmiji porast slabljenja izvan pojasa propuštanja. Filtri s takvim odzivom nazivaju se *eliptički filtri* i upućuju na jednoliku valovitost unutar pojasa propuštanja i zapornog pojasa, kao što je prikazano na slici 7.102. Pri tomu valja zadati maksimalno slabljenje u pojasu propuštanja A_{maks} i minimalno slabljenje u zapornome pojasu A_{min}. Sinteza eliptičkih filtara nešto je složenija zadaća od sinteze ranije opisanih dvaju tipova filtara i izlazi iz okvira ove knjige te je nećemo razmatrati.



Slika 7.102. Odziv eliptičkog niskopropusnog filtra

Linearna faza.

U prije razmatranim filtrima zadan je amplitudni odziv. No u nekim primjenama želi se postići linearan fazni odziv unutar pojasa propuštanja da bi se smanjila izobličenja u prijenosu signala. S druge strane, oštar amplitudni odziv izvan pojasa nije kompatibilan s odzivom faze visoke kakvoće, pa sinteza filtra s valjanim odzivom faze obično ne daje dobra amplitudna obilježja u zapornome pojasu. Linearna fazna karakteristika može se postići uz fazni odziv

$$\varphi(\omega) = A\omega\left[1 + p\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}\right], \qquad (7\text{–}207)$$

gdje je $\varphi(\omega)$ faza naponske prijenosne funkcije filtra, a p je konstanta. S faznim je odzivom u čvrstoj vezi grupno kašnjenje definirano kao

$$\tau_d = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\omega} = A\left[1 + p(2N+1)\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}\right]. \qquad (7\text{–}208)$$

Izraz (7–208) upućuje na frekvencijsku ovisnost grupnog kašnjenja, za filtar s linearnim faznim odzivom, maksimalno glatka funkcija.

Mogu se zadati i znatno općenitije specifikacije filtara, ali opisani primjeri najčešće se nalaze u praksi. Dalje ćemo razmatrati proračun prototipova niskopropusnog filtra koji su normirani po impedanciji i po frekvenciji. Normiranje pojednostavnjuje proračun filtara proizvoljne središnje ili zaporne frekvencije, impedancije i vrste (niskopropusni, visokopropusni, pojasnopropusni ili pojasnozaporni). U sljedećem se koraku prototipu niskopropusnog filtra mogu promijeniti mjerila za zadanu frekvenciju odnosno impedanciju. I na kraju, prije



Slika 7.103. Postupak proračuna mikrovalnog filtra primjenom metode s prijenosnim slabljenjem

same izrade filtara u mikrovalnome području, obično se koncentrirani *LC* elementi zamjenjuju elementima s raspodijeljenim parametrima. Taj je proces prikazan na slici 7.103.

Prototip niskopropusnog filtra maksimalno glatkog odziva

Razmotrimo niskopropusni filtar s dvama elementima, koji je prikazan na slici 7.104. Izvedimo normirane vrijednosti elemenata L i C za maksimalno glatki odziv [2] uz pretpostavku da je impedancija izvora 1 Ω, a završna impedancija R te zaporna frekvencija $\omega_c=1$.

Iz izraza (7–205) dobiva se željeno prijenosno slabljenje za $N=2$ kao

$$A(\omega)=1+\omega^4. \tag{7–209}$$

Ulazna je impedancija filtra funkcija frekvencije, tj.

$$Z_{ul}(\omega)=\mathrm{j}\omega L+\frac{R(1-\mathrm{j}\omega RC)}{1+\omega^2R^2C^2}. \tag{7–210}$$

Budući da je Z_{ul} zapravo normirana (bezdimenzionalna) veličina i

$$\Gamma(\omega)=\frac{Z_{ul}-1}{Z_{ul}+1}, \tag{7–211}$$

prijenosno se slabljenje može napisati kao

$$A(\omega)=\frac{1}{1-\left|\Gamma(\omega)\right|^2}=\frac{1}{1-\dfrac{Z_{ul}-1}{Z_{ul}+1}\dfrac{Z_{ul}^*-1}{Z_{ul}^*+1}}=\frac{\left|Z_{ul}+1\right|^2}{2(Z_{ul}+Z_{ul}^*)}. \tag{7–212}$$

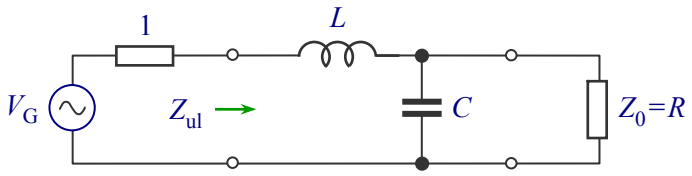
Iz izraza (7–210) izlazi

$$Z_{ul}+Z_{ul}^*=\frac{2R}{1+\omega^2R^2C^2}$$

pa je

$$\left|Z_{ul}+1\right|^2=\left(\frac{R}{1+\omega^2R^2C^2}+1\right)^2+\left(\omega L-\frac{\omega CR^2}{1+\omega^2R^2C^2}+1\right)^2,$$

tako da se izraz (7–212) može napisati u ovom obliku



Slika 7.104. Prototip niskopropusnog filtra, $N=2$

$$A(\omega)=\frac{1+\omega^2R^2C^2}{4R}\left[\left(\frac{R}{1+\omega^2R^2C^2}+1\right)^2+\left(\omega L-\frac{\omega CR^2}{1+\omega^2R^2C^2}+1\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{4R}\left(R^2+2R+1+R^2\omega^2C^2+\omega^2L^2+\omega^4L^2C^2R^2-2\omega^2LCR^2\right)=$$

$$=1+\frac{1}{4R}\left[(1-R)^2+\left(R^2C^2+L^2-2LCR^2\right)\omega^2+L^2C^2R^2\omega^4\right]. \qquad (7\text{–}213)$$

Valja uočiti da izraz (7–213) označuje polinom varijable ω^2. Usporedba sa željenim odzivom (7–210) upućuje na to da R mora poprimiti jediničnu vrijednost, jer za $\omega=0$ mora biti $A(\omega)=1$. Pri tomu i koeficijent uz ω^2 mora biti jednak nuli, što daje

$$C^2+L^2-2LC=(C-L)^2=0,$$

to jest, $L=C$. Budući da koeficijent uz ω^4 mora biti jedan, izlazi

$$\frac{1}{4}L^2C^2=\frac{1}{4}L^4=1$$

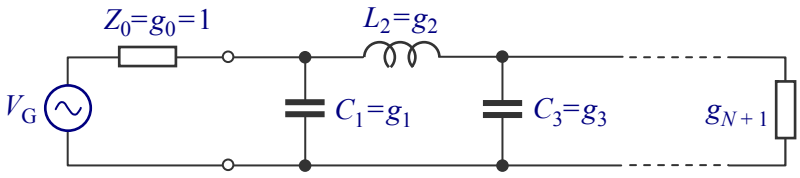
ili $L=C=\sqrt{2}$.

U načelu taj se postupak može proširiti za određivanje nadomjesnih elemenata filtara s proizvoljnim brojem komponenata, ali nije praktičan za velik N. Za proračun normiranih niskopropusnih filtara impedancije generatora 1 Ω i zaporne frekvencije $\omega_c=1$, vrijednosti elemenata za mreže ljestvičaste strukture sa slike 7.105 mogu se naći sprimjenom sljedećih izraza:

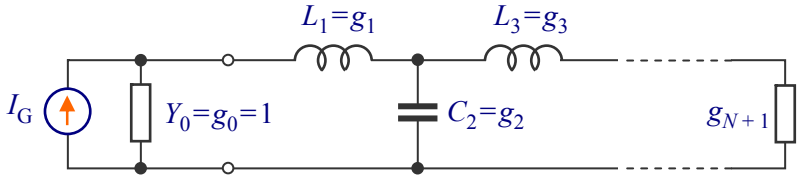
$$g_0=1,\ g_{N+1}=1, \qquad (7\text{–}214a)$$

$$g_n=2\sin\frac{2n-1}{2N}\pi,\quad n=1,2,\ldots,N, \qquad (7\text{–}214b)$$

gdje je g_n vrijednost induktiviteta u henrijima ili kapaciteta u faradima, s time da su oba kraja filtra zaključena impedancijom 1 Ω.



a)



b)

Slika 7.105. Dvije karakteristične ljestvičaste strukture za prototipove niskopropusnih filtara:
a) prototip koji započinje paralelnim elementom (Π-struktura),
b) prototip koji započinje serijskim elementom (T-struktura)

U tablici 7.2. dane su vrijednosti elemenata niskopropusnih filtara maksimalno glatkog odziva za N=1 do 9 izračunate s pomoću izraza (7–214). Valja uočiti da se vrijednosti za N=2 slažu s ranije dobivenim analitičkim rješenjem. Ti se podatci mogu primijeniti za sintezu obiju vrsta filtara prikazanih na slici 7.105 na sljedeći način. Vrijednosti elemenata pobrojane su od g_0 (impedancija generatora) do g_{N+1} (impedancija tereta), za filtar s N reaktivnih elemenata. Pritom elementi alterniraju između serijskih i paralelnih veza, gdje je g_n definiran kao:

g_0 = unutarnji otpor generatora, slika 7.105a) ili unutarnja vodljivost generatora, slika 7.105b),

g_n = serijski induktivitet ili paralelni kapacitet za N=1 do 9,

g_{N+1} = otpor tereta, ako je g_N paralelni kapacitet ili vodljivost tereta, ako je g_N serijski induktivitet.

Stoga se može reći da su mreže na slici 7.105 međusobno dualne i posve su jednakih odziva $A(\omega)$. Pri proračunu praktičnog filtra najprije valja odrediti veličinu ili red filtra što je obično nametnuto zadanom vrijednošću prijenosnog slabljenja na određenoj frekvenciji izvan propusnog pojasa filtra. Preuređenjem izraza (7–205) dobiva se

$$N = \frac{\log\left[10^{\frac{A(\omega)}{10}} - 1\right]}{2\log\left(\omega/\omega_c\right)}. \qquad (7\text{–}215)$$

Za filtar s N>10 valja odabrati kaskadni spoj dvaju filtara nižeg reda.

Tablica 7.2. Vrijednosti elemenata prototipova niskopropusnih filtara maksimalno glatkog odziva (g_0=1, ω_c=1, N=1-9)

N	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
1	2,0000	1,0000								
2	1,4142	1,4142	1,0000							
3	1,0000	2,0000	1,0000	1,0000						
4	0,7654	1,8478	1,8478	0,7654	1,0000					
5	0,6180	1,6180	2,0000	1,6180	0,6180	1,0000				
6	0,5176	1,4142	1,9318	1,9318	1,4142	0,5176	1,0000			
7	0,4450	1,2470	1,8019	2,0000	1,8019	1,2470	0,4450	1,0000		
8	0,3902	1,1111	1,6629	1,9615	1,9615	1,6629	1,1111	0,3902	1,0000	
9	0,3473	1,0000	1,5321	1,8794	2,0000	1,8794	1,5321	1,0000	0,3473	1,0000

Primjer 7.9. Proračun niskopropusnog filtra

Naći minimalan broj potrebnih elemenata za proračun niskopropusnog filtra maksimalno glatkog odziva zaporne frekvencije 8 GHz i minimalnog slabljenja 20 dB na frekvenciji 12 GHz.

Rješenje:

Uvrštenjem zadanih vrijednosti u izraz (7–215) izlazi

$$N = \frac{\log\left(10^{20/10} - 1\right)}{2\log(12/8)} = \frac{\log(99)}{2\log(1{,}5)} = 5{,}67.$$

Dakle, potrebno je uzeti najmanje šest elemenata da bi se zadovoljilo postavljenim zahtjevima.

Prototip niskopropusnog filtra Čebiševljeva odziva

Za niskopropusni filtar Čebiševljeva odziva zaporne frekvencije $\omega_c = 1$, prijenosno se slabljenje može izračunati s pomoću izraza (7–206) kao [1]

$$A(\omega) = 1 + k^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \tag{7–216}$$

gdje $1+k^2$ daje raspon valovitosti u pojasu propuštanja. Uz obilježja Čebiševljevih polinoma

$$T_N(0) = \begin{cases} 0 & \text{za neparni } N \\ 1 & \text{za parni } N, \end{cases}$$

iz izraza (7–216) izlazi da će na frekvenciji $\omega = 0$ slabljenje filtra biti jedinično za neparni N, odnosno $1+k^2$ za parni N.

Za filtar s dvama elementima na slici 7.104, prijenosno je slabljenje dano izrazom (7–213) u ovisnosti o vrijednostima nadomjesnih elemenata. Iz izraza (6–47b) izlazi $T_2(x) = 2x^2 - 1$ pa izrazi (7–203) i (7–206) daju jednadžbu

$$1 + k^2\left(4\omega^4 - 4\omega^2 + 1\right) = 1 + \frac{1}{4R}\left[(1-R)^2 + \left(R^2C^2 + L^2 - 2LCR^2\right)\omega^2 + L^2C^2\omega^4\right] \tag{7–217}$$

koja se može riješiti za R, L i C ako je poznat parametar valovitosti (k^2). Stoga je za $\omega = 0$

$$k^2 = \frac{(1-R)^2}{4R},$$

tj.

$$R = 1 + 2k^2 \pm 2k\sqrt{1+k^2} \qquad \text{(za parni } N\text{).} \tag{7–218}$$

Rješavanjem koeficijenata uz ω^2 i ω^4 dobivaju se dodatne jednadžbe:

$$4k^2 = \frac{1}{4R}L^2C^2R^2,$$

$$-4k^2 = \frac{1}{4R}\left(R^2C^2 + L^2 - 2LCR^2\right),$$

koje se mogu uporabiti za izračunavanje vrijednosti elemenata L i C. Iz izraza (7–218) očito je da vrijednost R nije jedinična, što znači da je filtar u stvari neprilagođen ako teret ima jediničnu normiranu impedanciju. To se može ispraviti umetanjem četvrtvalnoga transformatora impedancije ili dodavanjem još jednog filtarskog elementa tako da N postane neparan. Za neparan N može se pokazati da je $R = 1$. (To je posljedica činjenice da je prijenosno slabljenje jedinične vrijednosti za $\omega = 0$ i neparni N.)

Za Čebiševljev niskopropusni filtar s $\omega_c' = 1$, vrijednosti elemenata mogu se izračunati iz sljedećih izraza:

$$g_{N+1} = \begin{cases} 1 & \text{za neparni } N \\ 2k^2 + 1 + 2k\sqrt{1+k^2} & \text{za parni } N \end{cases}.$$

Kad je element g_N kapacitet, tad je $g_{N+1} = R$, a kad je g_N induktivitet, tad je $g_{N+1} = 1/R$. Ostali se elementi mogu dobiti iz izraza

$$g_n = \frac{4a_{n-1}a_n}{b_{n-1}g_{n-1}}, \tag{7–219}$$

gdje su:

$$a_n = \sin\frac{2n-1}{2N}\pi, \qquad b_n = \sinh^2\frac{\beta}{2N} + \sin^2\frac{n\pi}{N},$$

$$\beta = \ln\frac{\sqrt{1+k^2}+1}{\sqrt{1+k^2}-1}, \qquad g_1 = \frac{2a_1}{\sinh\dfrac{\beta}{2N}}.$$

Tablica 7.3. Vrijednosti elemenata prototipova niskopropusnih filtara Čebiševljeva odziva ($g_0=1$, $\omega_c=1$, $N=1$ do 9, valovitost 0,5 dB i 3 dB)

Valovitost 0,5 dB

N	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
1	0,6986	1,0000								
2	1,4029	0,7071	1,9841							
3	1,5963	1,0967	1,5963	1,0000						
4	1,6703	1,1926	2,3661	0,8419	1,9841					
5	1,7058	1,2296	2,5408	1,2296	1,7058	1,0000				
6	1,7254	1,2479	2,6064	1,3137	2,4758	0,8696	1,9841			
7	1,7372	1,2258	2,6381	1,3444	2,6381	1,2258	1,7372	1,0000		
8	1,7451	1,2647	2,6564	1,3590	2,6964	1,3389	2,5093	0,8796	1,9841	
9	1,7504	1,2690	2,6678	1,3973	2,7239	1,3673	2,6678	1,2690	1,7504	1,0000

Valovitost 3,0 dB

N	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
1	1,9953	1,0000								
2	3,1013	0,5339	5,8089							
3	3,3487	0,7117	3,3487	1,0000						
4	3,4389	0,7483	4,3471	0,5920	5,8089					
5	5,4817	0,7618	4,5381	0,7618	3,4817	1,0000				
6	3,5045	0,7685	4,6061	0,7929	4,4641	0,6033	5,8089			
7	3,5182	0,7723	4,6386	0,8039	4,6386	0,7723	3,5182	1,0000		
8	3,5277	0,7745	4,6575	0,8089	4,6990	0,8018	4,4990	0,6073	5,8089	
9	3,5340	0,7760	4,6692	0,8118	4,7272	0,8118	4,6692	0,7760	3,5340	1,0000

Numeričke vrijednosti za g_n mogu se naći u tablicama 7.3. za normirane prototipove niskoporopusnih filtara valovitosti $A_m=0,5$ dB i 3 dB, za $N=1$do 9. Te se tablice mogu uporabiti za proračun obiju ljestvičastih struktura na slici 7.105. Podatci u tablicama ovise o zadanoj razini valovitosti $A_m = 10\log(1+k^2)$ unutar pojasa propuštanja. Kad je zadano prijenosno slabljenje na frekvenciji izvan pojasa propuštanja, tad se minimalan broj elemenata može odrediti iz izraza

$$N = \frac{\cosh^{-1}\sqrt{\left(10^{A(\omega)/10}-1\right)/\left(10^{A_m/10}-1\right)}}{\cosh^{-1}(\omega/\omega_c)}, \tag{7–220}$$

gdje su prijenosno slabljenje $A(\omega)$ na frekvenciji ω i valovitost A_m zadani u decibelima. Vrijednost inverzne funkcije hiperboličnog kosinusa može se lako naći iz izraza

$$\cosh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

7.5.2. Transformacije filtara

Transformacija impedancije

Niskopropusni filtar, granične frekvencije $\omega_c = 1$ i zaključen teretom impedancije $R_T = 1\ \Omega$, može se uzeti kao polazište za proračun visokopropusnih, pojasnopropusnih i pojasnozapornih filtara proizvoljne završne impedancije. Stoga ga nazivamo *prototipni filtar*. U ovom ćemo odjeljku za frekvencijsku varijablu prototipa niskopropusnog filtra rabiti oznaku ω'. Prijenosno slabljenje maksimalno glatkog i Čebiševljeva odziva može se prikazati kao [1]

$$A = 1 + P(\omega'^2). \tag{7–211}$$

Stvarna je impedancija tereta R_T obično različita od 1 Ω pa se elementi odgovarajućeg filtra dobivaju množenjem svih reaktancija i otpora generatora faktorom R_T. Drugim riječima, reaktancije prototipnog filtra možemo gledati kao da su normirane na vrijednost R_T. Dakle, stvarne vrijednosti induktiviteta i kapaciteta poprimaju ove vrijednosti:

$$L'_k = R_T L_k, \tag{7–222a}$$

$$C'_k = \frac{C_k}{R_T}, \tag{7–222b}$$

$$R' = R_T R. \tag{7–222c}$$

Zamijeni li se frekvencijska varijabla ω' novom varijablom ω u skladu s izrazom

$$\omega' = f(\omega),$$

izraz za prijenosno slabljenje poprima oblik

$$A = 1 + P(\omega'^2) = 1 + P[f^2(\omega)]. \tag{7–223}$$

Kao funkcija od ω' ili f, izraz (7–223) označuje prijenosno slabljenje prototipa niskopropusnog filtra. No kao funkcija od ω izraz (7–223) ima drukčiju karakteristiku, ovisno o tomu kako je odabrana funkcija $f(\omega)$. Razmotrimo sad nekoliko frekvencijskih transformacija.

Transformacija frekvencijskog pojasa

Želimo li promijeniti zapornu frekvenciju od jedinične vrijednosti na proizvoljnu vrijednost ω_c, valja uzeti ovu relaciju [1], [2]

$$f(\omega) = \frac{\omega}{\omega_c} \tag{7–224}$$

pa je

$$A = 1 + P\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right). \tag{7–225}$$

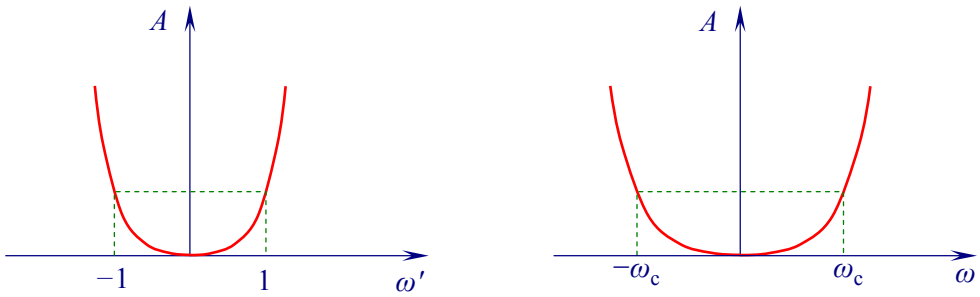
Zaporna se frekvencija pojavljuje kad argument poprimi jediničnu vrijednost, tj. kad je $\omega = \omega_c$. Sad serijske impedancije i paralelne admitancije prototipnog filtra treba zamijeniti novim impedancijama i admitancijama:

$$\mathrm{j}X'_k = \mathrm{j}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)L_k, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{j}B'_k = \mathrm{j}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)C_k,$$

gdje je ω' zamijenjeno s ω/ω_c da bi se ostvarilo prijenosno slabljenje prema izrazu (7–225).

Ispitivanjem posljednjih izraza dobivaju se nove varijable L_k i C_k kao:

$$L'_k = \frac{L_k}{\omega_c}, \qquad C'_k = \frac{C_k}{\omega_c}. \tag{7–226}$$



a) b)

Slika 7.106. a) Odziv niskopropusnog prototipnog filtra; **b)** promjena frekvencije

Prijenosna slabljenja u ovisnosti o ω' i ω uspoređena su na slici 7.106.

Transformacija niskopropusnog odziva u visokopropusni odziv

Visokopropusni filtar [1] može se ostvariti tako da se za funkciju $f(\omega)$ odabere $-\omega_c/\omega$, iz čega izlazi izraz za prijenosno slabljenje oblika

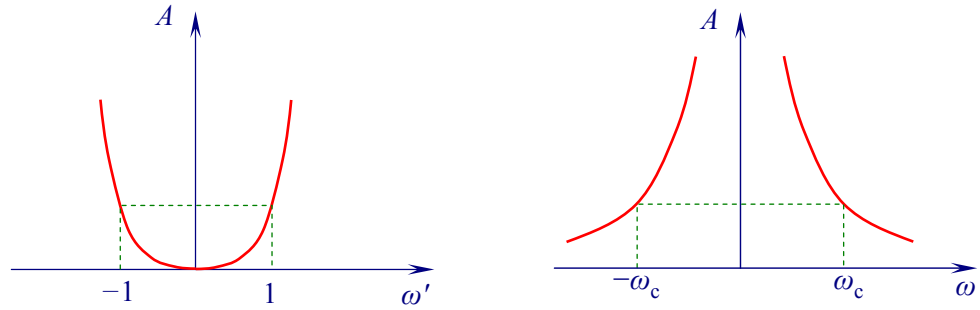
$$A = 1 + P\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right). \tag{7–227}$$

Ta frekvencijska transformacija preslikava točku $\omega'=0$ u točke $\omega=\pm\infty$, točke $\omega'=\pm1$ u točke $\omega=\mp\omega_c$, a točke $\omega'=\pm\infty$ u $\omega=0$. Na taj su način međusobno zamijenjena područja propuštanja i zapiranja, kao što je prikazano na slici 7.107. Da bi se dobilo prijenosno slabljenje u obliku izraza (7–227), serijske impedancije i paralelne admitancije u novom filtru moraju se odabrati tako da je:

$$\mathrm{j}X_k' = -\mathrm{j}\frac{\omega_c}{\omega}L_k, \quad \text{odnosno} \quad \mathrm{j}B_k' = -\mathrm{j}\frac{\omega_c}{\omega}C_k.$$

Iz tih se izraza vidi da induktivitete L_k treba zamijeniti kapacitetima C_k', a kapacitete C_k treba zamijeniti induktivitetima L_k' u skladu s izrazima:

$$C_k' = \frac{1}{\omega_c L_k}, \qquad L_k' = \frac{1}{\omega_c C_k}. \tag{7–228}$$



a) b)

Slika 7.107. Transformacija niskopropusnog odziva u visokopropusni odziv

Transformacija niskopropusnog odziva u pojasnopropusni odziv

Da bismo dobili pojasnopropusni odziv [1], razmotrimo promjenu varijable prema izrazu

$$\omega' = f(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right). \tag{7–229}$$

Iz te se jednadžbe može izlučiti ω kao

$$\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\omega' \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)^2 \omega'^2 + \omega_0^2}\ .$$

Nadalje, ako se uzme da je $\omega_0^2 = \omega_1\omega_2$, izlazi

$$\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\omega' \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_2 - \omega_1)^2 \omega'^2 + 4\omega_1\omega_2}\ . \tag{7–230}$$

Pritom se točka $\omega' = 0$ preslikava se u točke $\omega = \pm\omega_0$, a točke $\omega' = \pm 1$ preslikavaju se u četiri točke $\pm(\omega_2 - \omega_1)/2 \pm (\omega_2 + \omega_1)/2 = \pm\omega_2$ i $\mp(\omega_2 - \omega_1)/2 \pm (\omega_2 + \omega_1)/2 = \pm\omega_1$. Stoga se propusni pojas prototipnog filtra između ± 1 preslikava u dva propusna pojasa koji se protežu u rasponu od ω_1 do ω_2, odnosno od $-\omega_2$ do $-\omega_1$. To svojstvo označuje pojasnopropusne filtre sa središtima pojasa propuštanja na frekvencijama $\pm\omega_0$. Frekvencija ω_0 jednaka je geometrijskoj sredini frekvencija ω_1 i ω_2, kao što je prikazano na slici 7.108.

Potrebni filtarski elementi mogu se odrediti razmatranjem frekvencijskog ponašanja serijskog i paralelnog spoja induktiviteta L i kapaciteta C na slici 7.109. Za serijski je spoj

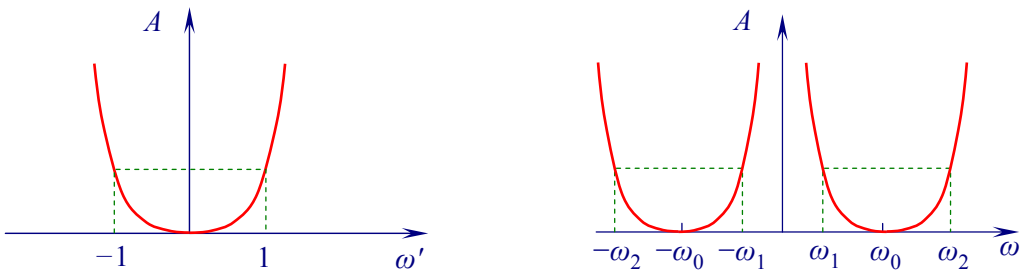
$$\mathrm{j}X' = \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \mathrm{j}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right),$$

a za paralelni je spoj

$$\mathrm{j}B' = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = \mathrm{j}\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right).$$

Ako se $\sqrt{LC}$ izjednači s $1/\omega_0$, onda se dobiva:

$$\mathrm{j}X' = \mathrm{j}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right), \quad \text{odnosno} \quad \mathrm{j}B' = \mathrm{j}\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

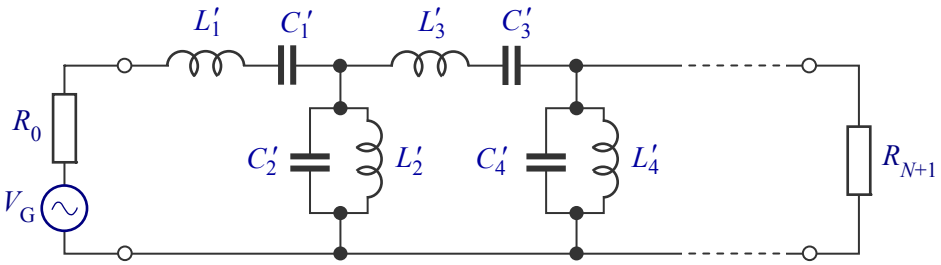


a) b)

Slika 7.108. Grafički prikaz transformacije niskopropusnog odziva u pojasnopropusni odziv



Slika 7.109. Serijski i paralelni titrajni krugovi



Slika 7.110. Pojasnopropusni filtar

Potrebna se frekvencijska transformacija može dobiti zamijene li se impedancije $jX_k = j\omega L_k$ i admitancije $jB_k = j\omega C_k$ u prototipnom filtru serijskim, odnosno paralelnim titrajnim krugovima u skladu s izrazima:

$$jX_k' = j\sqrt{\frac{L_k'}{C_k'}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = jL_k\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right), \tag{7–231}$$

$$jB_k' = j\sqrt{\frac{C_k'}{L_k'}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = jC_k\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right). \tag{7–232}$$

S pomoću uvjeta

$$L_k'C_k' = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_1\omega_2} \tag{7–233}$$

i izraza (7–231) dobivaju se elementi serijskog titrajnog kruga koji nadomješćuju serijski induktivitet prototipnog niskopropusnog filtra:

$$\sqrt{\frac{L_k'}{C_k'}} = \omega_0 L_k' = \frac{\omega_0 L_k}{\omega_2 - \omega_1},$$

$$L_k' = \frac{L_k}{\omega_2 - \omega_1}, \qquad C_k' = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0^2 L_k}. \tag{7–234}$$

Na sličan način, s pomoću izraza (7–232) i uvjeta (7–233), mogu se odrediti i elementi paralelnoga titrajnog kruga koji nadomješćuju paralelni kapacitet u prototipu niskopropusnoga filtra:

$$\sqrt{\frac{C_k'}{L_k'}} = \omega_0 C_k' = \frac{\omega_0 C_k}{\omega_2 - \omega_1},$$

$$C_k' = \frac{C_k}{\omega_2 - \omega_1}, \qquad L_k' = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0^2 C_k}. \tag{7–235}$$

Mreža razmatranog pojasnopropusnog filtra prikazana je na slici 7.110.

Transformacija niskopropusnog odziva u pojasnozaporni odziv

Na sličan način može se izvršiti transformacija niskopropusnoga odziva u pojasnozaporni, kao što je prikazano na slici 7.111. Primjenom inverzne transformacije mogu se odrediti elementi pojasnozapornoga filtra, tj.

$$\omega' = f(\omega) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^{-1}. \tag{7–236}$$

Sad se serijski induktiviteti niskopropusnog prototipnog filtra moraju zamijeniti paralelnim *LC* titrajnim krugovima čiji su elementi:

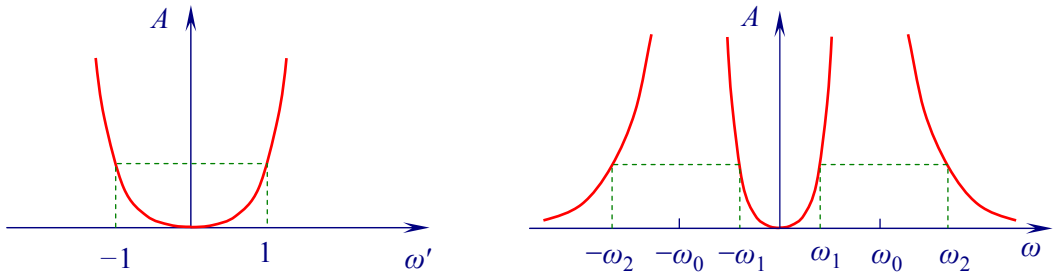
$$L'_k = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0^2} L_k\,, \qquad C'_k = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1) L_k}\,, \tag{7–237}$$

a paralelne kapacitete niskopropusnog prototipnog filtra treba transformirati u serijske titrajne krugove čije su vrijednosti *LC* elemenata:

$$L'_k = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1) C_k}\,, \qquad C'_k = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0^2} C_k\,. \tag{7–238}$$

Ljestvičasta struktura pojasnozapornoga filtra dualna je mreži pojasnopropusnog filtra prikazanog na slici 7.110, a dobiva se sustavnom zamjenom serijskih titrajnih krugova paralelnim titrajnim krugovima i obratno.

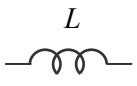
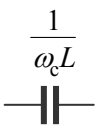
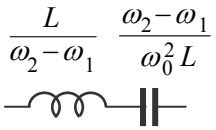
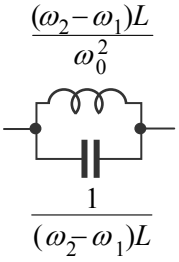
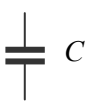
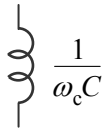
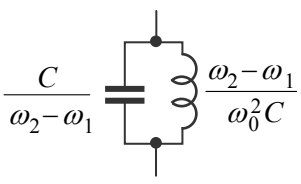
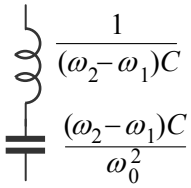
Transformacije elemenata u prethodnim izrazima ne uključuju promjenu mjerila impedancije, koja se može ostvariti primjenom izraza (7–222).



Slika 7.111. Transformacija niskopropusnog odziva prototipnog filtra u pojasnozaporni odziv

U tablici 7.4. skupno su prikazane transformacije niskopropusnoga prototipnog filtra u visokopropusni, pojasnopropusni i pojasnozaporni filtar.

Tablica 7.4. Transformacije prototipnog filtra

Niski propust	Visoki propust	Pojasni propust	Pojasna brana
			
			

L $\quad \frac{1}{\omega_c L}$ $\quad \frac{L}{\omega_2-\omega_1}$ $\quad \frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_0^2 L}$ $\quad \frac{(\omega_2-\omega_1)L}{\omega_0^2}$ $\quad \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)L}$

C $\quad \frac{1}{\omega_c C}$ $\quad \frac{C}{\omega_2-\omega_1}$ $\quad \frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_0^2 C}$ $\quad \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)C}$ $\quad \frac{(\omega_2-\omega_1)C}{\omega_0^2}$

Primjer 7.10. Pojasnopropusni filtar

Proračunati pojasnopropusni filtar topologije T, Čebiševljeva odziva valovitosti 0,5 dB s $N = 3$, središnje frekvencije 1 GHz, relativne širine pojasa 12 % i zrcalne impedancije 50 Ω.

Rješenje:

Za $N = 3$ i topologiju prema slici 7.105b), iz tablice 7.3. izlaze ove vrijednosti prototipa niskopropusnog filtra:

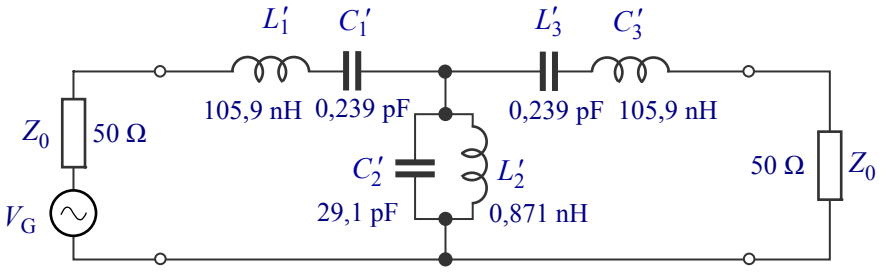
$$g_1 = 1{,}5963 = L_1, \quad g_2 = 1{,}0967 = C_2, \quad g_3 = 1{,}5963 = L_3, \quad g_4 = 1{,}0 = R_T.$$

Sad s pomoću izraza (7–222) i (7–233) - (7–236) treba obaviti transformaciju impedancije i frekvencije. Otuda izlaze sljedeće vrijednosti elementa pojasnopropusnog filtra prikazanog na slici 7.112:

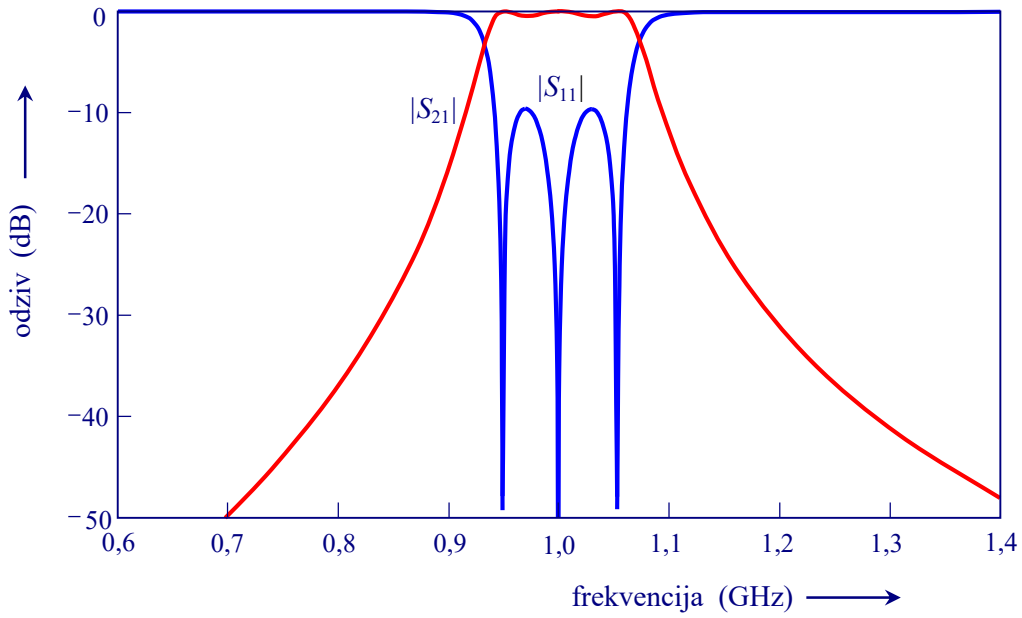
$$L_1' = L_3' = \frac{L_1 Z_0}{\omega_2 - \omega_1} = 105{,}9 \text{ nH}, \qquad C_1' = C_3' = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0^2 L_1 Z_0} = 0{,}239 \text{ pF},$$

$$L_2' = \frac{(\omega_2 - \omega_1) Z_0}{\omega_0^2 C_2} = 0{,}871 \text{ nH}, \qquad C_2' = \frac{C_2}{(\omega_2 - \omega_1) Z_0} = 29{,}09 \text{ pF}.$$

Odziv filtra prikazan je na slici 7.113, gdje je $|S_{21}(\omega)|^2 = 1/A(\omega)$ i $|S_{11}(\omega)|^2 = 1 - 1/|A(\omega)|$ u skladu s izrazom (7–201).



Slika 7.112. Pojasnopropusni filtar



Slika 7.113. Odziv pojasnopropusnog filtra

Richardsova transformacija

Transformacija oblika

$$\Omega = \tan \beta l = \tan\left(\frac{\omega l}{v_\mathrm{f}}\right) \tag{7–241}$$

preslikava kompleksnu ravninu ω u novu ravninu Ω, koja se ponavlja s periodom $\omega l/v_\mathrm{f} = 2\pi$. Tu je transformaciju uveo Richards [6] u svrhu sinteze LC mreža s pomoću otvorenih i kratko spojenih stabova. Primjenom izraza (7–241), induktivna se impedancija svodi na

$$\mathrm{j}X_L = \mathrm{j}\Omega L = \mathrm{j}L \tan \beta l\,, \tag{7–242}$$

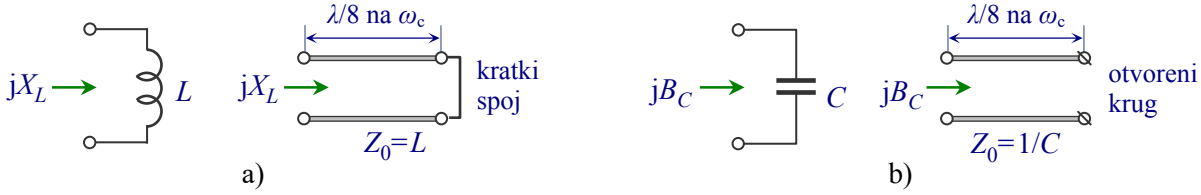
a kapacitivna admitancija poprima oblik

$$\mathrm{j}B_C = \mathrm{j}\Omega C = \mathrm{j}C \tan \beta l\,. \tag{7–243}$$

Ti rezultati pokazuju da induktivitet valja nadomjestiti kratko spojenim stabom električne duljine βl i karakteristične impedancije L, a kapacitet valja nadomjestiti otvorenim stabom električne duljine βl i karakteristične impedancije $1/C$. Ovdje je pretpostavljena jedinična zrcalna impedancija filtra.

Zaporna frekvencija niskopropusnog prototipa pojavljuje se na jediničnoj frekvenciji. Da bi filtar, transformiran Richardsovom transformacijom (7–241), zadržao jednu te istu zapornu frekvenciju, valja postaviti uvjet $\Omega = 1 = \tan \beta l$, iz čega izlazi duljina staba $l = \lambda/8$, gdje je λ valna duljina linije na zapornoj frekvenciji ω_c. Na frekvenciji $\omega_0 = 2\omega_\mathrm{c}$, linije će biti dugačke $\lambda/4$ pa će nastati pol u karakteristici slabljenja. Na frekvencijama koje se razlikuju od ω_c, impedancije stabova neće se više slagati s izvornim impedancijama koncentriranih elemenata pa će se odziv filtra razlikovati od odziva niskopropusnog prototipa. Pri tomu će se odziv u frekvencijskoj domeni periodički ponavljati s periodom $4\omega_\mathrm{c}$.

Na slici 7.114 prikazani su sličnost i veza između koncentriranih i raspodijeljenih elemenata. Budući da su duljine svih stabova jednake ($\lambda/8$ na ω_c), nazivaju se *sumjerljive linije*.



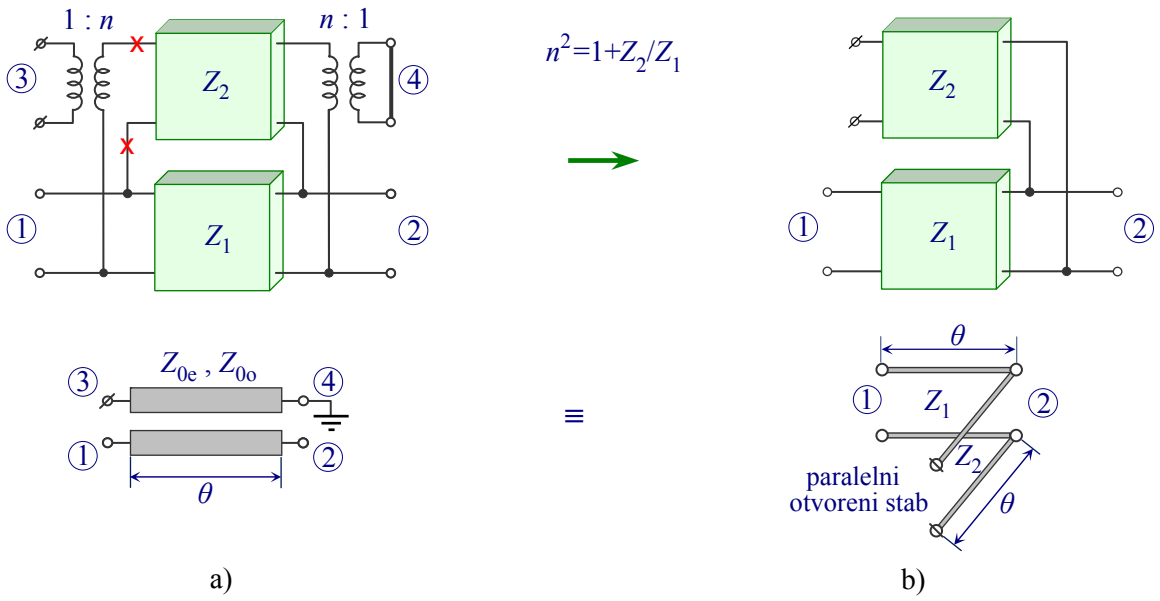
Slika 7.114. Richardsova transformacija: **a)** induktiviteta, **b)** kapaciteta

Transformacije odsječaka spregnutih linija i Kurodina transformacija

Posebno zanimljive dvoprolazne sklopove s filtarskim obilježjima možemo dobiti transformacijom s pomoću odsječaka paralelnih spregnutih linija, tako da se od četiriju prolaza odaberu dva za vanjske prolaze, a preostala se dva uzemlje, ostave otvorenima ili se spoje s jednim od vanjskih prolaza. U tu svrhu može se primijeniti nadomjesni sklop spregnutih linija prikazan na slici 7.45 u odjeljku 7.3.4. Općenito, karakteristične impedancije pojedinačnih linija ne moraju biti međusobno jednake, ali u praksi se nerijetko primjenjuju simetrične trakaste strukture jednakih širina traka. U kratkom razmatranju koje slijedi, pogledajmo kako se transformira odsječak simetričnih spregnutih traka, kad je jedan kraj spregnute trake kratko spojen, a drugi je otvoren [4], [10].

Na slici 7.115a) prikazan je simetričan odsječak spregnutih mikrotrakastih linija, kojemu je prolaz 4 uzemljen, tj. kratko spojen na masu, a prolaz 3 otvoren.

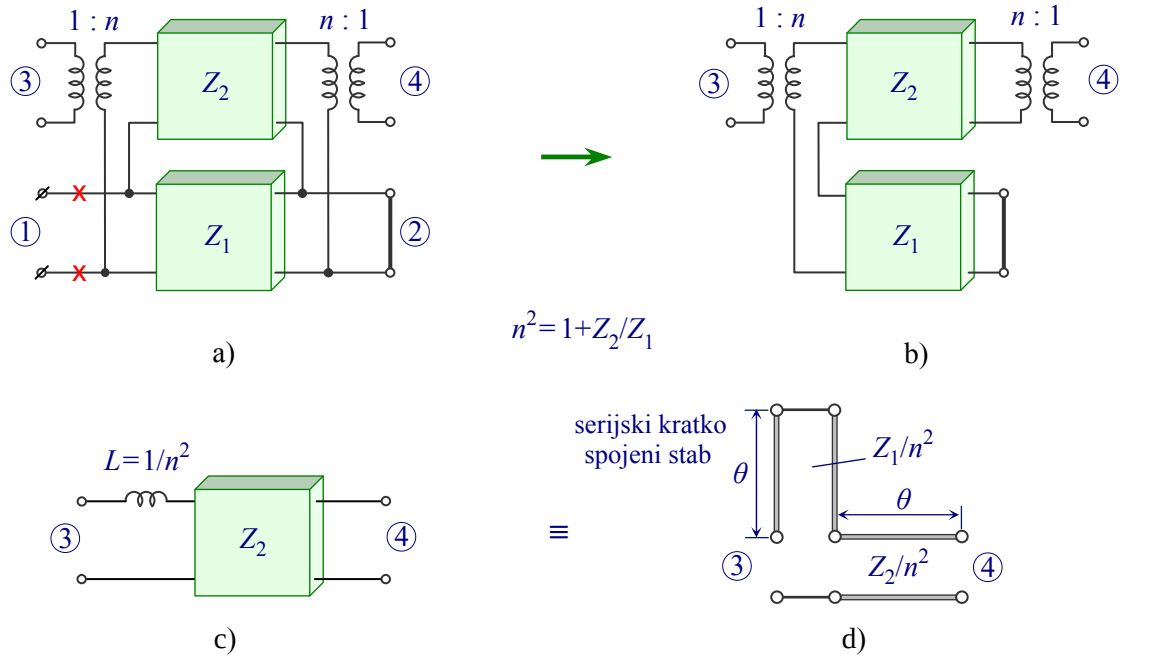
Primjenom nadomjesne sheme sa slike 7.45, dobiva se sklop koji se sastoji od jednog serijskog odsječka linije karakteristične impedancije Z_1 i otvorenog staba karakteristične



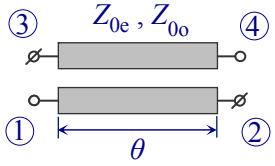
Slika 7.115. Transformacija odsječka para spregnutih mikrotrakastih linija koji je reaktivno opterećen na prolazima 3 i 4: **a)** izvorni sklop i **b)** nadomjesni dvoprolazni sklop

impedancije Z_2, koji je spojen na prolaz 2. Linijski odsječak i stab imaju jednake električne duljine θ. Time je nadomjesni sklop sveden na jednostavan oblik prikazan na slici 7.115b). Očigledno je da se radi o niskopropusnom sklopu koji postaje pojasnozaporan na frekvenciji na kojoj je električna duljina $\theta=\pi/2$.

Ako se sad umjesto prolaza 3 i 4 otvorenim krugom, odnosno kratkim spojem zaključe prolazi 1 i 2, a prolazi 3 i 4 postave kao vanjski prolazi mreže, onda se dobiva dualna pojasnozaporna mreža, kao što se može vidjeti na slici 7.116. Primjenom Richardsove transformacije mreža sa slike 7.116b) transformira se u konačni oblik na slici 7.116c), gdje je serijski kratko spojen stab zamijenjen induktivitetom $L=Z_1/n^2$, a serijski odsječak linije ima karakterističnu



Slika 7.116. Transformacija sklopa sa slike 7.116 u kojem su sad reaktivno zaključeni prolazi 1 i 2



Slika 7.117. Simetričan odsječak spregnutih linija s dva otvorena dijagonalna prolaza

koja iznosi $Z = Z_2/n^2$. Pritom je $n^2 = 1 + Z_2/Z_1$. Za male koeficijente sprege, $C \ll 1$, nadomjesna karakteristična impedancija Z_2 znatno je manja od Z_1. Budući da je u mikrotrakastoj tehnici nemoguće izvesti stab koji je serijski spojen s linijom, u praksi se uvijek rabi prva izvedba (slika 7.115).

Opisani sklopovi na slikama 7.115 i 7.116, poznati pod nazivom prvi Kurodin identitet, istovjetni su i nerijetko se rabe u praktičnim izvedbama filtara [4], [10]. Korisni su za transformiranje serijski spojenih stabova u paralelno spojene stabove i obratno. Time se sklopovi s nepraktičnim vrijednostima karakterističnih impedancija mogu zamijeniti lakše ostvarivim.

Slično je izveden nadomjesni sklop (slika 7.117) za odsječak spregnutih linija s otvorenim krugovima na dijagonalnom paru prolaza. Izvod je prikazan na slici 7.118. Sklop ima značajke slična četvrtvalnom transformatoru impedancije i pojasnopropusnog je karaktera pa se često rabi u izvedbama trakastih pojasnopropusnih filtara s otvorenim poluvalnim rezonatorima međusobno spregnutim četvrtvalnim odsječcima. Sklopovi na slikama 7.118d) i 7.118f) pripadaju sklopu s otvorenim prolazima 1 i 4 te vanjskim prolazima 3 i 2 na slici 7.118a). Otuda mreže u pravokutnicima s isprekidanim crtama odgovaraju drugom Kurodinom identitetu. Kratkim spajanjem dijagonalnih prolaza dobiva se dualni Kurodin identitet.

Na slici 7.119 skupno su prikazani prvi i drugi Kurodini identiteti.

Sklop na slici 7.118f) može se također prikazati u obliku prikazanom na slici 7.120a), ako se Z_2 razloži na dva dijela, kZ_2 i $(1-k)Z_2$. Prebacivanjem dijela kZ_2 nalijevo preko naponskog transformatora i primjenom Kurodine transformacije na preostali dio sklopa dobiva se sklop prikazan na slici 7.120b), iz čega izlazi da je

$$k = \frac{n}{n+1}. \tag{7–244}$$

Karakterstične impedancije linijskih odsječaka mogu se dovesti u vezu s karakterističnim impedancijama Z_{0e} i Z_{0o} za parni i neparni mod spregnutih linija. Tako izlazi:

$$Z_1 = \frac{Z_{0e} + Z_{0o}}{2}, \qquad Z_2 = n^2 \frac{Z_0^2}{Z_1} = \frac{1}{C^2}\frac{Z_0^2}{Z_1}, \tag{7–245}$$

gdje je $C = 1/n$ naponski faktor sprege definiran izrazom (7–61), $C = (Z_{0e} - Z_{0o})/(Z_{0e} + Z_{0o})$. Za trake različitih širina, veličina k iznosi

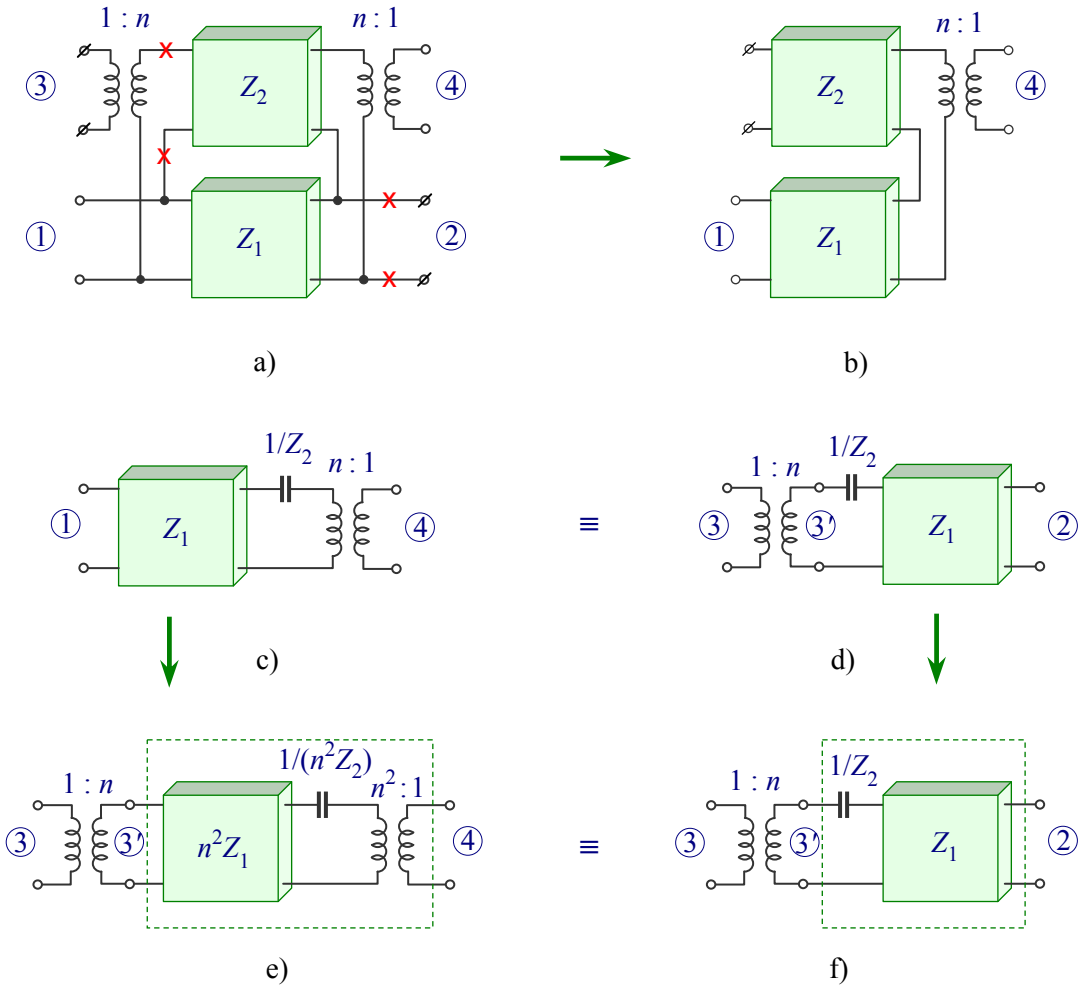
$$k = 1 - (n-1)\frac{Z_1}{Z_2}.$$

Otuda se sklop sa slike 7.117 može nadomjestiti mrežom na slici 7.120c). To je vrlo bitan sklop za gradnju pojasnopropusnih filtara i transformatora impedancije sa spregnutim linijama. Posebno je zanimljiv kao transformator impedancije, gdje uspješno zamjenjuje četvrtvalni transformator visokog faktora transformacije. Po volji visok faktor transformacije može se ostvariti povećanjem razmaka između traka.

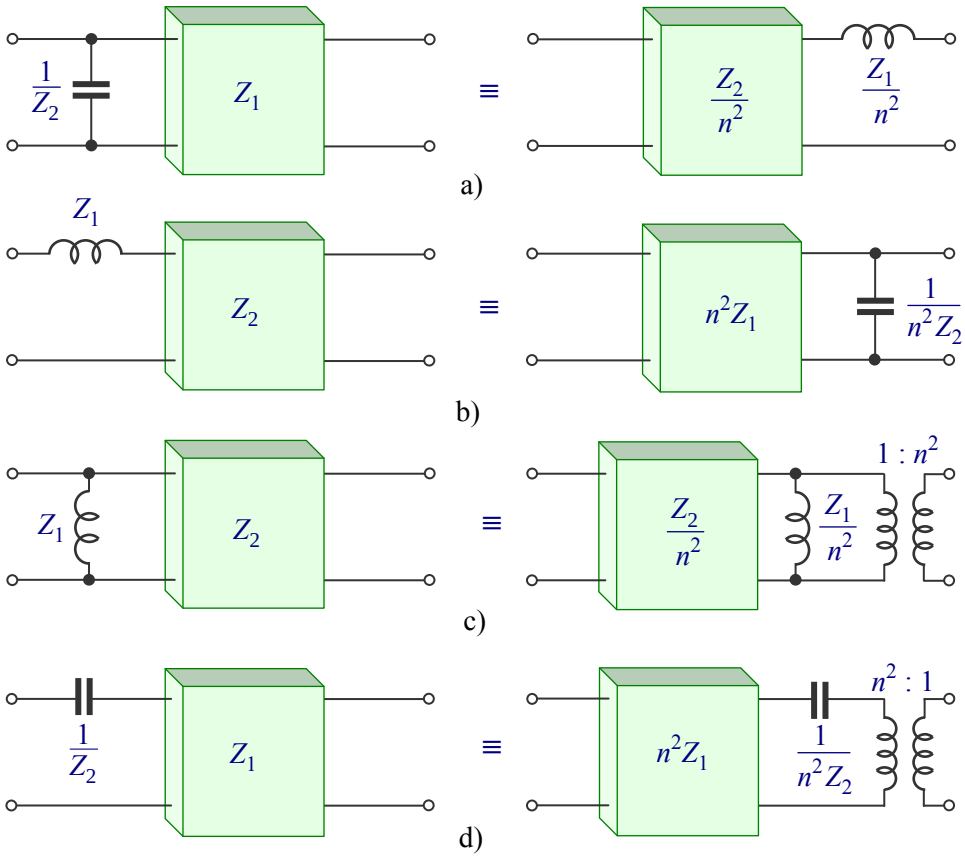
Na frekvenciji za koju je odsječak spregnute linije dugačak četvrt valne duljine otvoreni se stabovi na slici 7.120c) ponašaju kao kratki spoj pa u nadomjesnom sklopu ostaje samo serijski odsječak linije niske impedancije koji se ponaša kao četvrtvalni transformator impedancije. Slabljenjem sprege smanjuje se razlika između karakterističnih impedancija za parni i neparni mod pa se karakteristična impedancija tog nadomjesnog četvrtvalnog odsječka može namjestiti na po volji malu vrijednost. Na taj se način mogu ostvariti veliki transformacijski omjeri. Za veće omjere transformacije, $n = 1/C \gg 1$, u praksi je Z_1 približno jednak Z_0 pa omjer transformacije impedancije približno iznosi $n^2 : 1$, tj. $1 : C^2$. Opisani sklop obavlja transformaciju Z_0 na nižu vrijednost.

Sličan sklop s kratko spojenim dijagonalnim prolazima 2 i 3 transformira impedanciju Z_0 na veću vrijednost s inverznim transformacijskim omjerom $(1 : n^2)$. Taj sklop također posjeduje pojasnopropusnu karakteristiku i nerijetko se rabi u izvedbama interdigitalnih pojasnopropusnih filtara. Nadomjesna shema sklopa prikazana je na slici 7.121, gdje je $Y_{0e} = 1/Z_{0e}$, a $Y_{0o} = 1/Z_{0o}$. Izvedba odgovarajućeg interdigitalnog filtra prikazana je na slici 7.144d) u odjeljku 7.5.4.

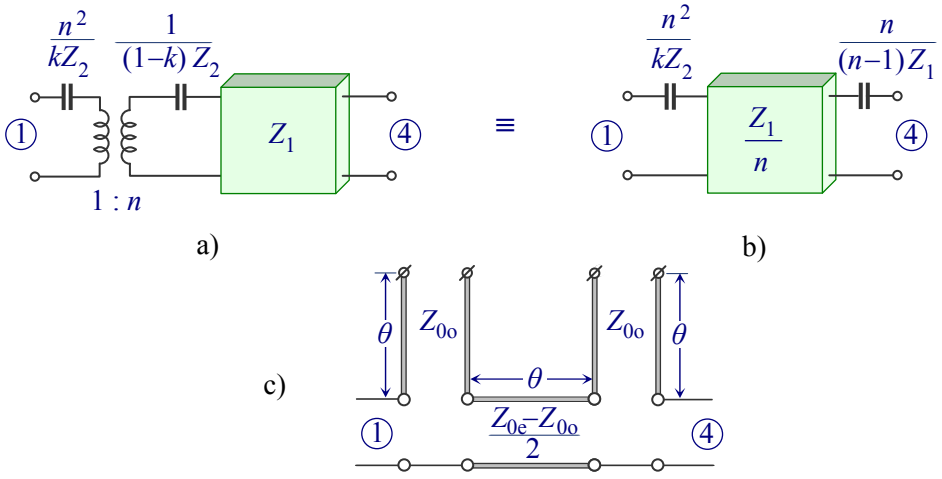
Jednako se tako mogu izvesti i nadomjesni dvoprolazni sklopovi za druge kombinacije reaktivno opterećenih dvaju prolaza odsječka spregnutih linija [4], [2].



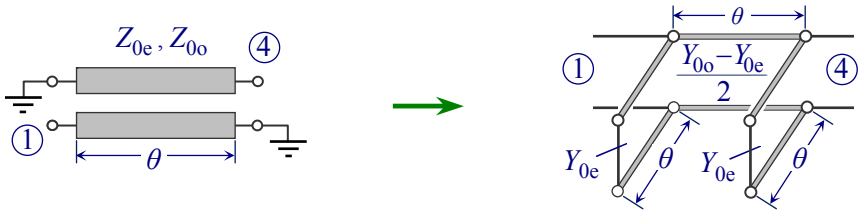
Slika 7.118. Izvod drugoga Kurodina identiteta



Slika 7.119. Kurodini identiteti, $n^2 = 1 + Z_2/Z_1$



Slika 7.120. Nadomjesni sklop odsječka spregnutih linija s dvama otvorenim dijagonalnim prolazima



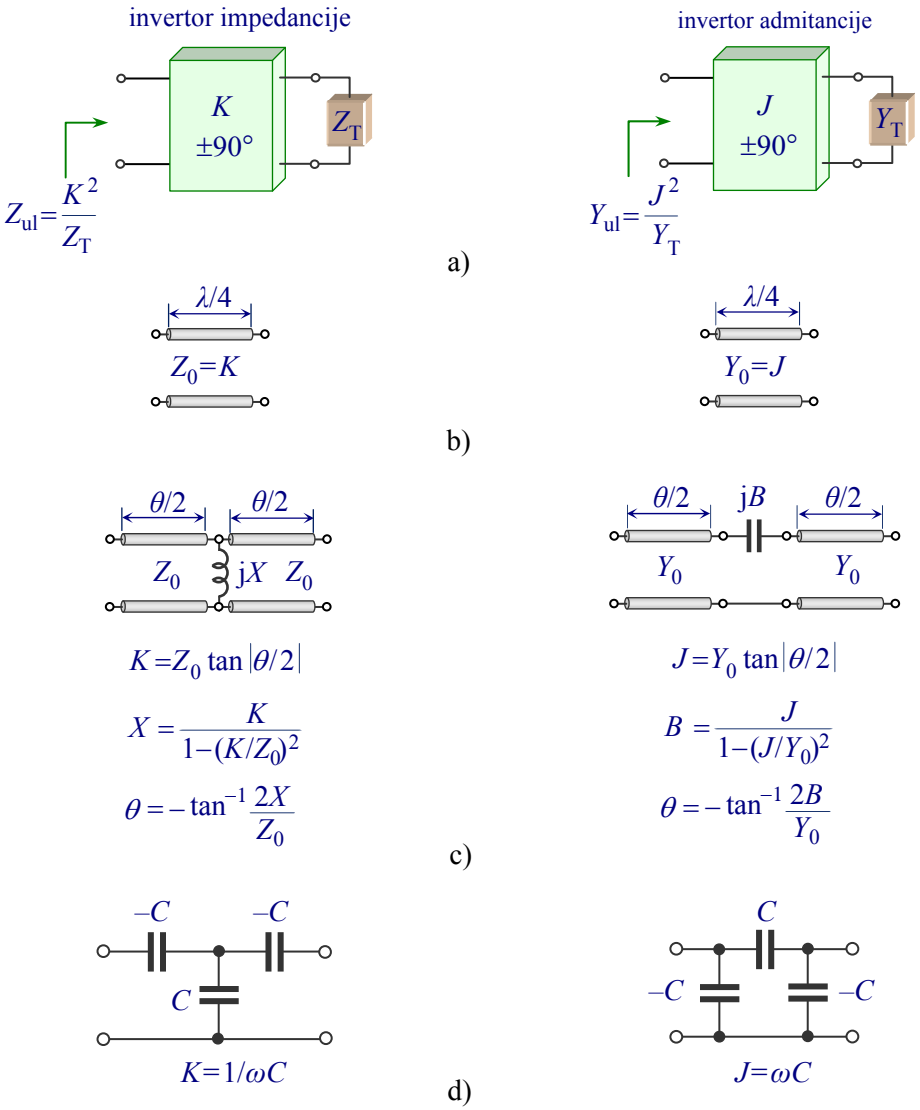
Slika 7.121. Nadomjesni sklop odsječka spregnutih linija s dvama kratko spojenim dijagonalnim prolazima

7.5.3. Invertori impedancije i admitancije

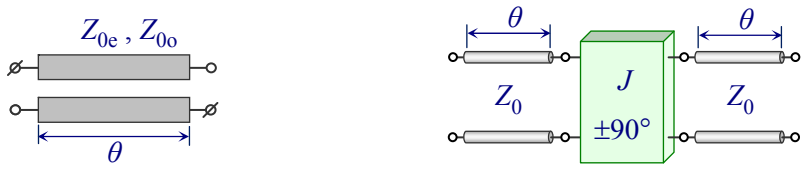
U izvedbama filtara, ovisno o vrsti prijenosne linije, nerijetko se rabe samo serijski ili samo paralelni elementi. Kao što smo vidjeli u prethodnom odjeljku, za pretvorbu serijskog kratko spojenog staba u paralelno spojen otvoreni stab može se primijeniti Kurodina transformacija, ali ne postoji jednostavna transformacija serijski spojenog otvorenog staba u paralelni stab. Tom se problemu može doskočiti primjenom impedancijskih invertora (K) i admitancijskih invertora (J) na slici 7.122a). Ti su invertori posebno korisni u izvedbama pojasnopropusnih i pojasnozapornih filtara razmjerno uskog frekvencijskog pojasa (<10 %).

Invertori ustvari služe invertiranju impedanciju ili admitanciju tereta pa se mogu rabiti za pretvorbu serijski spojenih elemenata u paralelno spojene elemente i obratno [4], [1] i [2]. Taj ćemo postupak kasnije iskoristiti za proračun pojasnozapornih i pojasnopropusnih filtara.

Najjednostavniji oblik invertora J ili K može se ostvariti primjenom četvrtvalnih transformatora impedancije odgovarajuće karakteristične impedancije, kao što je prikazano na slici 7.122b). Tim se postupkom također mogu jednostavno odrediti $ABCD$-matrice invertora primjenom $ABCD$-matrice odsječka prijenosne linije.



Slika 7.122. a) Invertori impedancije i admitancije. **b)** Izvedba s pomoću četvrtvalnih transformatora impedancije. **c)** Izvedba s odsječcima linija i reaktancijama. **d)** Izvedba s kapacitetima



a) b)

Slika 7.123. Ekvivalencija između **a)** odsječka spregnutih linija i **b)** invertora admitancije

U praksi se nerijetko događa da obični četvrtvalni linijski transformator impedancije nije pogodan kao impedancijski invertor, zbog ograničenog izbora karakterističnih impedancija mikrotrakaste linije. Stoga invertore J i K valja izvesti na druge načine. Jedan je takav prikazan na slici 7.122c). Invertori tog oblika imaju prednosti pri modeliranja filtara sa spregnutim rezonatorima. Za tu vrstu invertora obično su potrebni odsječci prijenosne linije negativne duljine $\theta/2$, koji se mogu integrirati u priključne prijenosne linije na svakom kraju invertora.

No invertori se također mogu izvesti i s pomoću mreža koje sadrže samo koncentrirane reaktivne elemente (pozitivne i negativne). Ti su invertori također frekvencijski ovisni. Na slici 7.122d) prikazani su invertori sastavljeni samo od kapaciteta. Slično se mogu izgraditi invertori samo od induktiviteta. Negativni reaktivni elementi mogu se ugraditi u pridružene titrajne krugove kao njihovi sastavni dijelovi i tako odstraniti iz cjelokupne mreže filtra. Tako se, primjerice, može izvesti filtar sastavljen od titrajnih krugova koji su međusobno spregnuti samo jednim reaktivnim elementom.

Invertori impedancije prikazani na slikama 7.122c) i 7.122d) znatno su šireg frekvencijskog pojasa u odnosu na četvrtvalni odsječak prijenosne linije sa slike 7.122b).

Pri razmatranju četvrtvalnog odsječka spregnutih linija, reaktivno opterećenog na dijagonalnim prolazima, vidjeli smo da se takva struktura ponaša kao četvrtvalni transformator impedancije. Njegov se transformacijski omjer može mijenjati u znatno većem rasponu nego kod običnog četvrtvalnoga linijskog transformatora impedancije. Zato, primjerice, sklop sa slike 7.117 ima značajke invertora admitancije, kao što je prikazano na slici 7.123 i nerijetko se rabi u izvedbama pojasnopropusnih filtara sa spregnutim linijama. Vrijednost J može se odrediti preko karakterističnih impedancija za parni i neparni mod (Z_{0e} i Z_{0o}) i slabo ovisi o θ za $\theta \simeq \pi/2$. Nasuprot tomu, za zadanu vrijednost J valja naći odgovarajuće impedancije Z_{0e} i Z_{0o}.

Ovisnost J o frekvenciji u uskopojasnim primjenama može se zanemariti. Može se pokazati da potrebne karakteristične impedancije za parni i neparni mod poprimaju oblik:

$$Z_{0e} = Z_0\left(1 + JZ_0 + J^2Z_0^2\right), \tag{7–246a}$$

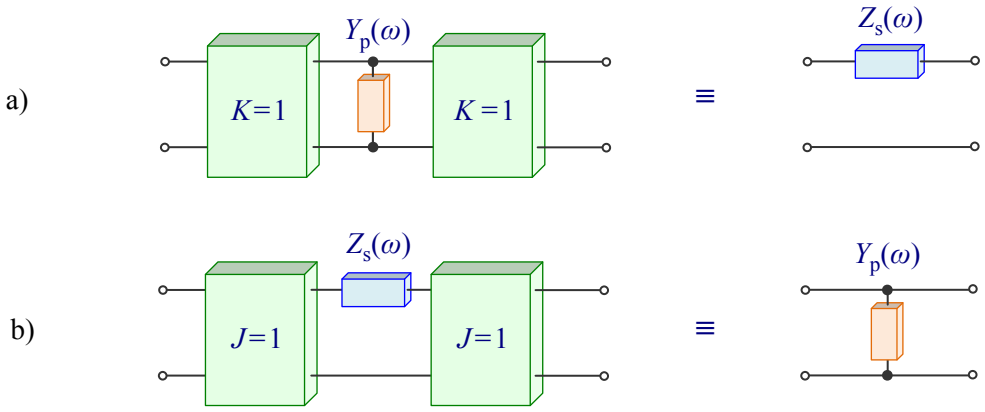
$$Z_{0o} = Z_0\left(1 - JZ_0 + J^2Z_0^2\right), \tag{7–246b}$$

gdje je Z_0 karakteristična impedancija priključnih linija na prolazima spregnutih linija.

Primjena invertora impedancije

Invertori impedancije mogu se rabiti za pretvorbu mreža s paralelnim titrajnim krugovima u mreže koje se sastoje od serijskih titrajnih krugova i obratno [4], [1], kao što je prikazano na slici 7.124. Uporabom admitancijskih invertora pojasnopropusni filtar treba pretvoriti u mrežu koja se sastoji samo od paralelnih titrajnih krugova i to tako da svi upotrijebljeni induktiviteti i kapaciteti imaju jednake vrijednosti. Time invertori omogućuju uporabu posve jednakih titrajnih krugova, tj. rezonatora, bilo paralelnih bilo serijskih.

Razmotrimo najprije paralelno spojenu admitanciju s idealnim invertorom impedancije karakteristične impedancije K spojenim na obama krajevima mreže (slika 7.124a)). Kratki



Slika 7.124. a) Pretvorba paralelnog titrajnog kruga u serijski primjenom impedancijskog invertora. **b)** Pretvorba serijskog titrajnog kruga u paralelni primjenom admitancijskog invertora

spoj na izlazu preslikava se u otvoreni krug koji je paralelno spojen s admitancijom. Tad se ulazna impedancija može napisati kao

$$Z_{ul} = \frac{K^2}{Z_p} = K^2 Y_p = Y_p = Z_s .$$

Otuda je očito da dva impedancijska invertora pretvaraju paralelnu admitanciju u ekvivalentnu serijsku impedanciju $Z_s(\omega) = Y_p(\omega)$. Tako, primjerice, paralelni titrajni krug definiran izrazom $Y_p(\omega) = j\omega C - j/\omega L = j\omega C(1-\omega_r^2/\omega^2)$ prelazi u serijski titrajni krug sa $Z_s(\omega) = j\omega L(1-\omega_r^2/\omega^2)$, gdje induktivitet L u henrijima ima jednaku numeričku vrijednost kao kapacitet C u faradima. Da bismo admitanciju $Y_1(\omega) = j\omega C_1(1-\omega_r^2/\omega^2)$ paralelnoga titrajnog kruga mogli pretvorili u impedanciju serijskoga titrajnog kruga s proizvoljnim induktivitetom L, valja vrijednost K odabrati tako da se zadovolji uvjet

$$K^2 j\omega C_1\left(1-\frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right) = j\omega L\left(1-\frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right).$$

Otuda izlazi

$$K = \sqrt{\frac{L}{C_1}}.$$

Time se paralelni element transformira u serijski element koji zadržava jednaku frekvencijsku ovisnost i proizvoljnu razinu impedancije.

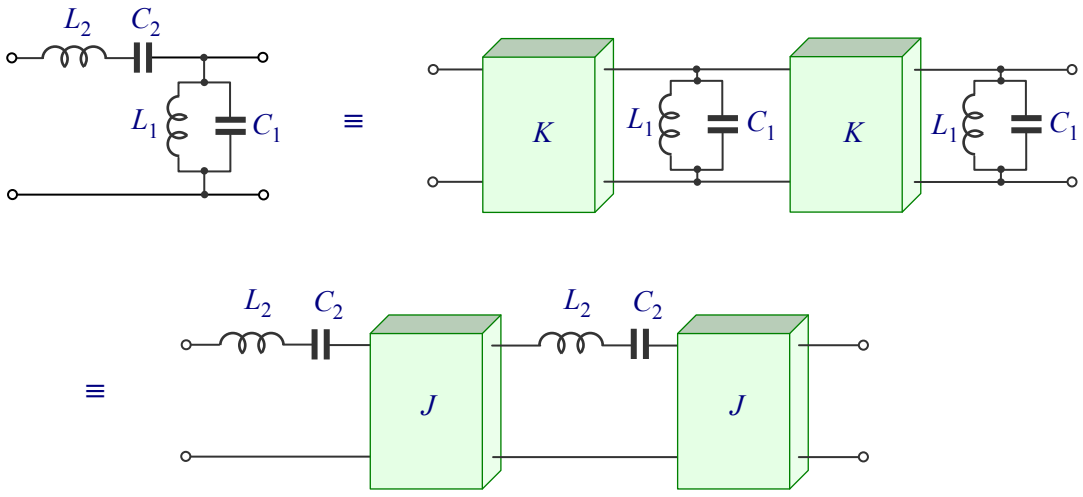
Slični se rezultati dobivaju za dualni slučaj prikazan na slici 7.124b). Za otvoreni izlazni krug, admitancijski invertor J priključen na objema stranama serijske impedancije daje ulaznu admitanciju

$$Y_{ul} = \frac{J^2}{Y_s} = J^2 Z_s = Y_p .$$

Dakle, admitancijske i impedancijske funkcije za paralelni, odnosno serijski titrajni krug mogu se izraziti kao:

$$Y = j\omega C\left(1-\frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right) = j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right), \qquad Z = j\omega L\left(1-\frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right) = j\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right),$$

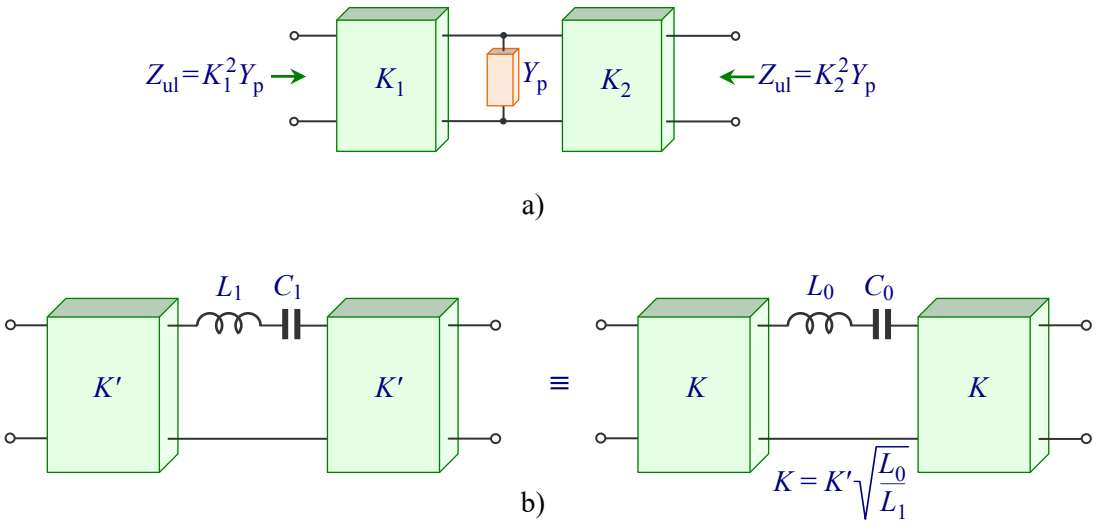
gdje $\sqrt{C/L}$ označuje admitanciju titrajnoga kruga, a $\sqrt{L/C}$ njegovu impedanciju. Preostali dio izraza varijabla je frekvencije.



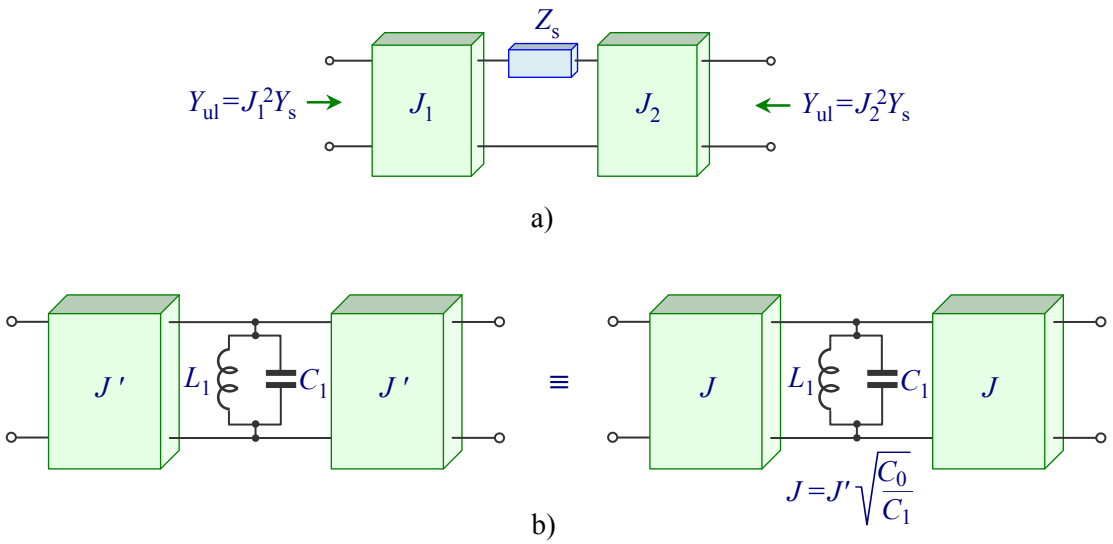
Slika 7.125. Pretvorba odsječka pojasnopropusnog filtra u mrežu koja sadrži samo istovrsne titrajne krugove

Kako se primjenjuju invertori u praksi može se vidjeti na primjeru sklopa prikazanog na slici 7.125. Najprije ćemo razmotriti uporabu impedancijskog invertora K za pretvorbu filtarskog odsječka u mrežu s dvama istovjetnim titrajnim krugovima. Stoga impedanciju K valja odabrati tako da se uspostavi istovjetnost $K^2 \mathrm{j}\omega C_1(1-\omega_\mathrm{r}^2/\omega^2) = \mathrm{j}\omega L_2(1-\omega_\mathrm{r}^2/\omega^2)$, iz čega izlazi $K = \sqrt{L_2/C_1}$. Za drugi slučaj na slici 7.125 valja naći admitanciju J tako da se zadovolji ova istovjetnost $J^2 \mathrm{j}\omega L_2(1-\omega_\mathrm{r}^2/\omega^2) = \mathrm{j}\omega C_1(1-\omega_\mathrm{r}^2/\omega^2)$, iz čega izravno izlazi $J = \sqrt{C_2/L_1}$.

Promjena razine impedancije i admitancije može se ostvariti uporabom različitih invertora na ulazu i izlazu filtra. Ako su na slici 7.126a) vrijednosti invertora slijeva i zdesna različite i iznose K_1, odnosno K_2, onda se na lijevoj strani sklopa paralelna admitancija pojavljuje kao serijski element vrijednosti $K_1^2 Y_\mathrm{p}$, a zdesna kao $K_2^2 Y_\mathrm{p}$. Impedancijski i admitancijski invertori mogu se preinačiti tako da ih je moguće prilagoditi proizvoljnoj promjeni razine impedancije i admitancije titrajnoga kruga. Na slici 7.126b) razina impedancije titrajnoga kruga promijeni se iz vrijednosti $\sqrt{L_2/C_1}$ u vrijednost $\sqrt{L_0/C_0}$ promjenom impedancije invertora K' u K, gdje je K tako odabran da je



Slika 7.126. Promjena razine impedancije mijenja vrijednosti nadomjesnih elemenata i invertora



Slika 7.127. Promjena razine admitancije mijenja vrijednosti nadomjesnih elemenata i invertora

$$\frac{(K')^2}{\sqrt{L_1/C_1}}=\frac{K^2}{\sqrt{L_0/C_0}}=\frac{(K')^2}{\omega_0 L_1}=\frac{K^2}{\omega_0 L_0}$$

ili

$$K=K'\sqrt{\frac{L_0}{L_1}}\,.$$

Gledano s priključaka, novi je sklop ekvivalentan starome sklopu.

Slično se mogu izvesti transformacije za dulani slučaj, tj. za topologije sa slike 7.124b). Pritom valja zamijeniti samo K s J i L s C i obratno. Rezultat je prikazan na slici 7.127.

Impedancijski i admitancijski invertori prikazani na slikama 7.122 i 7.123 idealni su četvrtvalni transformatori impedancije. Ne postoje bitne razlike u njihovim svojstvima kad rade kao invertori impedancije. Jedino što je različito jest uporaba simbola K koji označuje karakterističnu impedanciju impedancijskoga invertora, za razliku od simbola J koji označuje karakterističnu admitanciju admitancijskoga invertora. Impedancijski invertor karakteristične impedancije K ekvivalentan je admitancijskom invertoru karakteristične admitancije $J=1/K$. Za $K=J$ invertori imaju jedinične vrijednosti.

Korisna primjena invertora impedancije može se vidjeti na jednostavnom primjeru pojasnopropusnoga filtra s različitim impedancijama tereta i generatora, $R_T \neq R_G$ prikazanog na slici 7.128a). Najprije treba upotrijebiti invertore kako bi se zadana mreža pretvorila u novu mrežu koja je na objema stranama zaključena otporima jednake vrijednosti R i koja se sastoji od istovjetnih serijskih titrajnih krugova s elementima L_0 i C_0.

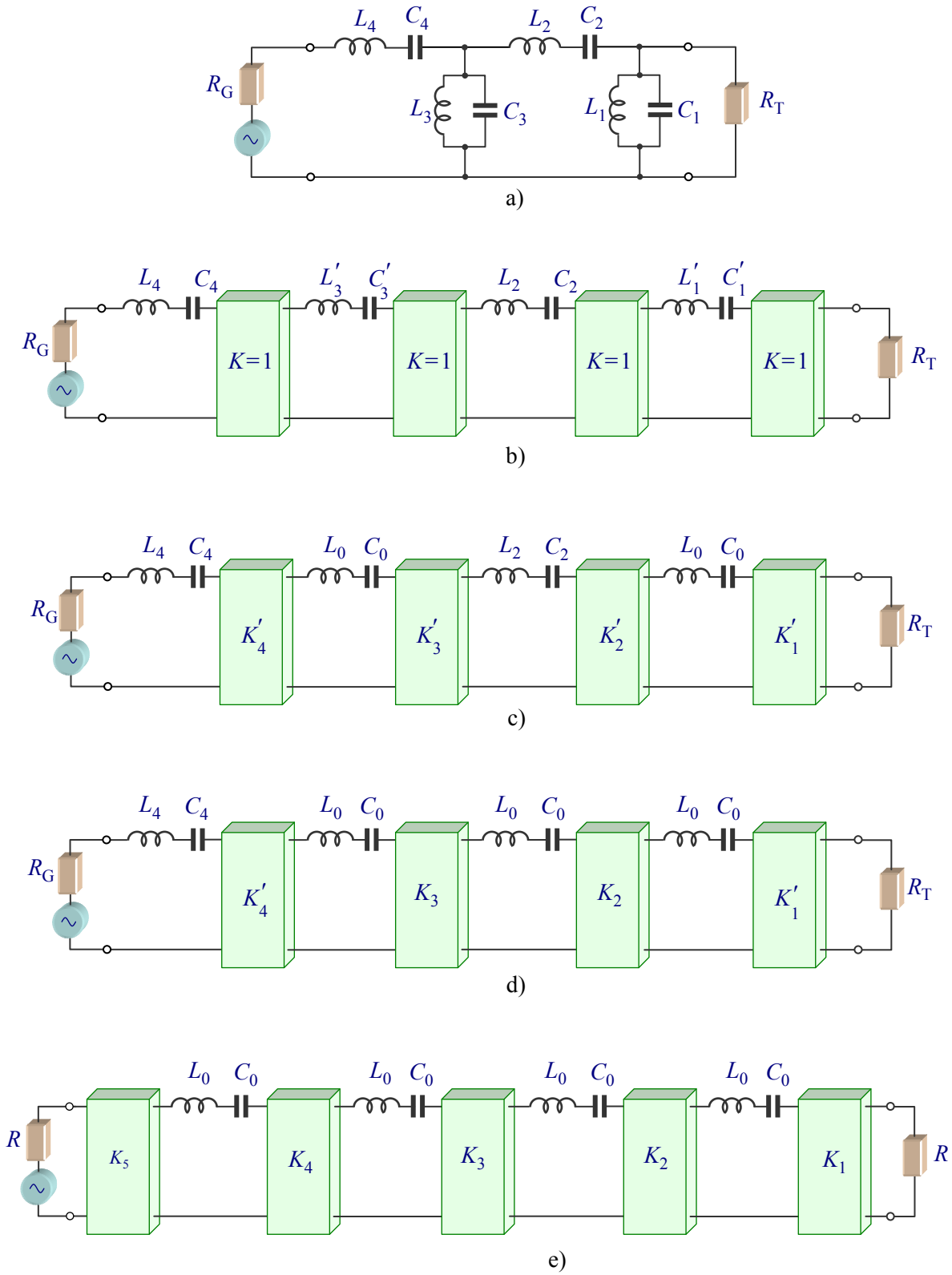
Postupak transformacije najlakše je shvatiti ako se transformacija izvede u nekoliko logičnih međukoraka. Prvo treba uvesti jedinične invertore za pretvorbu paralelnih titrajnih krugova u serijske titrajne krugove. Ako su svi $J_i=K_i$ jednaki jedinici, onda mreža na slici 7.128a) prelazi u oblik prikazan na slici 7.128b), gdje je $L_1'=C_1$, a $L_3'=C_3$. Sad se može promijeniti razina impedancije titrajnih krugova 1 i 3 u $\sqrt{L_0/C_0}$ tako da se prvi i drugi te treći i četvrti invertor pretvore u invertore karakterističnih impadancija:

$$K_1'=K_2'=\sqrt{L_0/L_1'}=\sqrt{L_0/C_1}\,,$$

odnosno

$$K_3'=K_4'=\sqrt{L_0/L_3'}=\sqrt{L_0/C_3}\,.$$

Nova mreža prikazana na slici 7.128c) ostvarena je transformacijom sa slike 7.126b).



Slika 7.128. Postupak postupne transformacije pojasnopropusnog filtra **a)** u mrežu s istovjetnim serijskim titrajnim krugovima **e)**

U sljedećem koraku valja promijeniti razinu impedancije drugog titrajnog kruga $\sqrt{L_2 / C_2} = \omega_0 L_2$ na razinu $\omega_0 L_0$ promjenom invertora 2 i 3 uz zadovoljenje uvjeta

$$\frac{K_2^2}{\omega_0 L_0} = \frac{K_2'^2}{\omega_0 L_2}, \text{ odnosno } \frac{K_3^2}{\omega_0 L_0} = \frac{K_3'^2}{\omega_0 L_2}.$$

Otuda se dobiva:

$$K_2 = K_2' \sqrt{\frac{L_0}{L_2}} = \sqrt{\frac{L_0^2}{L_2 C_1}}, \qquad K_3 = K_3' \sqrt{\frac{L_0}{L_2}} = \sqrt{\frac{L_0^2}{L_2 C_3}}, \tag{7–247}$$

iz čega proizlazi nova mreža prikazana na slici 7.128d).

Da bi se promijenila impedancija R_T u R, nužno je promijeniti karakterističnu impedanciju prvoga invertora zadovoljenjem jednadžbe

$$\frac{K_1^2}{R} = \frac{K_1'^2}{R_T}.$$

Iz tog uvjeta izlazi

$$K_1 = K_1' \sqrt{\frac{R}{R_T}} = \sqrt{\frac{L_0 R}{C_1 R_T}}. \tag{7–248}$$

U posljednjem koraku potrebno je još obaviti transformaciju četvrtoga invertora u

$$K_4 = K_4' \sqrt{\frac{L_0}{L_4}} = \sqrt{\frac{L_0^2}{L_4 C_3}} \tag{7–249}$$

i umetnuti peti invertor između generatora unutarnjeg otpora R_G i četvrtoga titrajnog kruga. Ako karakteristična impedancija petog invertora zadovoljava uvjet

$$\frac{K_5'^2}{R} = R_G,$$

onda se R_G može zamijeniti novom impedancijom generatora R. Da bi se induktivitet L_4 zamijenio s L_0, impedancija petoga invertora mora se promijeniti u skladu s uvjetom

$$\frac{K_5^2}{L_0} = \frac{K_5'^2}{L_4},$$

iz čega izlazi potrebna vrijednost karakteristične impedancije

$$K_5 = K_5' \sqrt{\frac{L_0}{L_4}} = \sqrt{\frac{L_0 R R_G}{L_4}}. \tag{7–250}$$

Tako je dobivena konačna mreža prikazana na slici 7.128e).

Ako se umjesto zadavanja istovjetnih titrajnih krugova odaberu L_{01}, L_{02}, L_{03}, … , a vrijednosti impedancije tereta i generatora u izvornome filtru označe s R_T i R_G, a s R_{0T} i R_{0G} u transformiranoj mreži, onda se mogu dobiti općeniti izrazi za $K_{n,n-1}$ za filtar s N titrajnih krugova, tj. rezonatora:

$$K_{10} = \sqrt{\frac{L_{01} R_{0T}}{C_1 R_T}}, \tag{7–251a}$$

$$K_{n,n-1} = \sqrt{\frac{L_{0n} L_{0n-1}}{L_n C_{n-1}}}, \text{ za neparni } n; \qquad K_{n,n-1} = \sqrt{\frac{L_{0n} L_{0n-1}}{C_n L_{n-1}}}, \text{ za parni } n; \tag{7–251b}$$

$$K_{N+1,N} = \sqrt{\frac{R_{0G} L_{0N}}{R_G C_N}}\text{, za neparni } N; \qquad K_{N+1,N} = \sqrt{\frac{R_{0G} R_G L_{0N}}{L_N}}\text{, za parni } N. \qquad (7\text{–}251c)$$

Ekvivalentni filtar prikazan je na slici 7.129a).

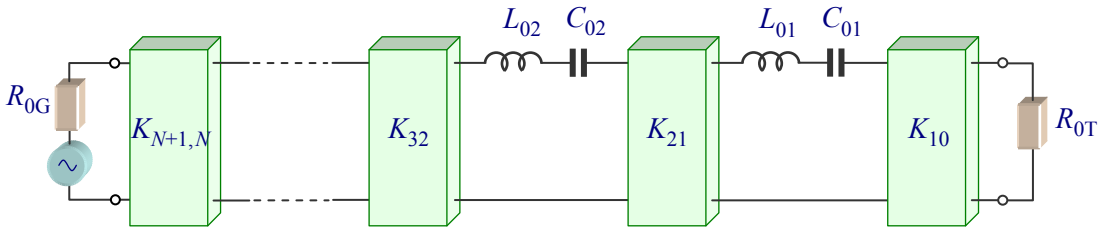
Primjenom admitancijskih invertora, filtar prikazan na slici 7.129a) može se transformirati u mrežu koja se sastoji samo od paralelnih titrajnih krugova, kao što je prikazano na slici 7.129b). Slično se za $J_{n,n-1}$ u filtru s N titrajnih krugova dobiva:

$$J_{10} = \sqrt{\frac{C_{01}}{C_1 R_{0T} R_T}}\,, \qquad (7\text{–}252a)$$

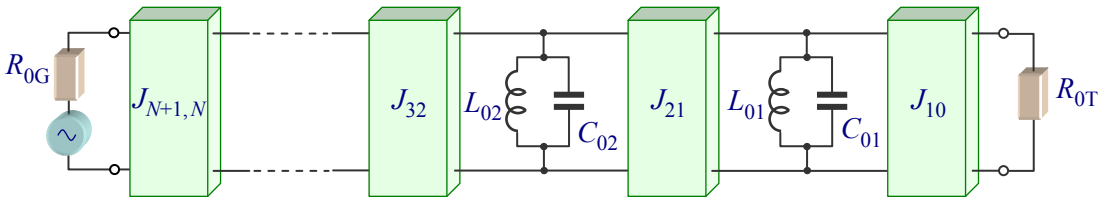
$$J_{n,n-1} = \sqrt{\frac{C_{0n} C_{0n-1}}{C_n L_{n-1}}}\text{, za neparni } n; \qquad J_{n,n-1} = \sqrt{\frac{C_{0n} C_{0n-1}}{L_n C_{n-1}}}\text{, za parni } n; \qquad (7\text{–}252b)$$

$$J_{N+1,N} = \sqrt{\frac{C_{0N}}{R_{0G} R_G C_N}}\text{, za neparni } N; \qquad J_{N+1,N} = \sqrt{\frac{R_G C_{0N}}{R_{0G} L_N}}\text{, za parni } N. \qquad (7\text{–}252c)$$

Dosad smo razmatrali idealan frekvencijski neovisan četvrtvalni transformator impedancije električne duljine π/2 bez obzira na frekvenciju. Takvi idealni invertori međutim ne postoje u stvarnosti. No za uskopojasne filtre relativne širine pojasa od 2 do 3 posto, obilježja tih invertora ne odstupaju znatnije od idealnog invertora. Za veće širine pojasa, odstupanje od idealnih obilježja može se tako modelirati da se idealnom invertoru sa svake strane dodaju kratki odsječci prijenosne linije, koji se zatim sjedine s rezonatorima.



a)



b)

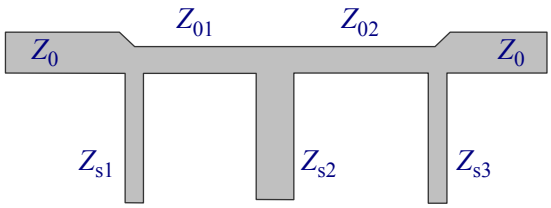
Slika 7.129. Ekvivalentne mreže filtara s općenito različitim titrajnim krugovima dobivene primjenom **a)** impedancijskih invertora i **b)** admitancijskih invertora

7.5.4. Izvedbe mikrovalnih filtara

Proračun filtara s koncentriranim elementima koji smo razmatrali u prethodnim odjeljcima daje dobre rezultate na nižim frekvencijama, ali na mikrovalnim frekvencijama suočeni smo s izvjesnim problemima. Prvo, koncentrirani elementi, poput induktiviteta i kapaciteta, obično su raspoloživi samo za ograničen broj vrijednosti i teško ih je primijeniti na mikrovalnim frekvencijama. Osim toga, na tako visokim frekvencijama nisu zanemarive udaljenosti između filtarskih elemenata. Zato se za gradnju filtara na mikrovalnim frekvencijama rabe elementi s raspodijeljenim parametrima, kao što su odsječci linija i valovoda. Pri tomu je obično potrebno obaviti pretvorbu koncentriranih elemenata u odsječke prijenosnih linija uporabom Richardsove transformacije. Uz to je često potrebno fizički razdvojiti filtarske elemenata umetanjem dodatnih odsječaka prijenosnih linija. To se može izvesti primjenom Kurodine transformacije. Budući da takvi dodatni odsječci prijenosnih linija ne utječu na odziv filtra, ta se vrsta proračuna naziva *sinteza redundantnih filtara*. Za poboljšanje odziva filtra mogu se uporabiti dodatni odsječci prijenosnih linija, što vodi do neredundantne sinteze. Više o sintezi mikrotrakastih filtara može se naći u literaturi [14], a valovodnih u literaturi [4].

Niskopropusni filtar s otvorenim stabovima

Jedna od najjednostavnijih izvedaba niskopropusnog filtra može se ostvariti ulančanom strukturom poprečno spojenih otvorenih stabova razmaknutih serijskim linijskim odsječcima. Duljina svih stabova i linijskih odsječaka iznosi osminu valne duljine na zapornoj frekvenciji. Na slici 7.130 prikazana je načelna shema takvog filtra u mikrotrakastoj izvedbi. Primjenom teorije linija našli smo da se kratak otvoreni stab, kraći od četvrt valne duljine, ponaša poput kapaciteta, a kratak serijski odsječak linije visoke impedancije ponaša se poput induktiviteta. Broj stabova jednak je redu filtra, što se može vidjeti na sljedećem primjeru [2].



Slika 7.130. Niskopropusni filtar trećega reda u mikrotrakastoj tehnici

Primjer 7.11. Niskopropusni filtar sa stabovima

Proračunati niskopropusni Čebiševljev filtar trećega reda u izvedbi s mikrotrakastim linijama (slika 7.130). Zadano je: granična frekvencija 5 GHz, valovitost 0,5 dB i zrcalne impedancije 50 Ω.

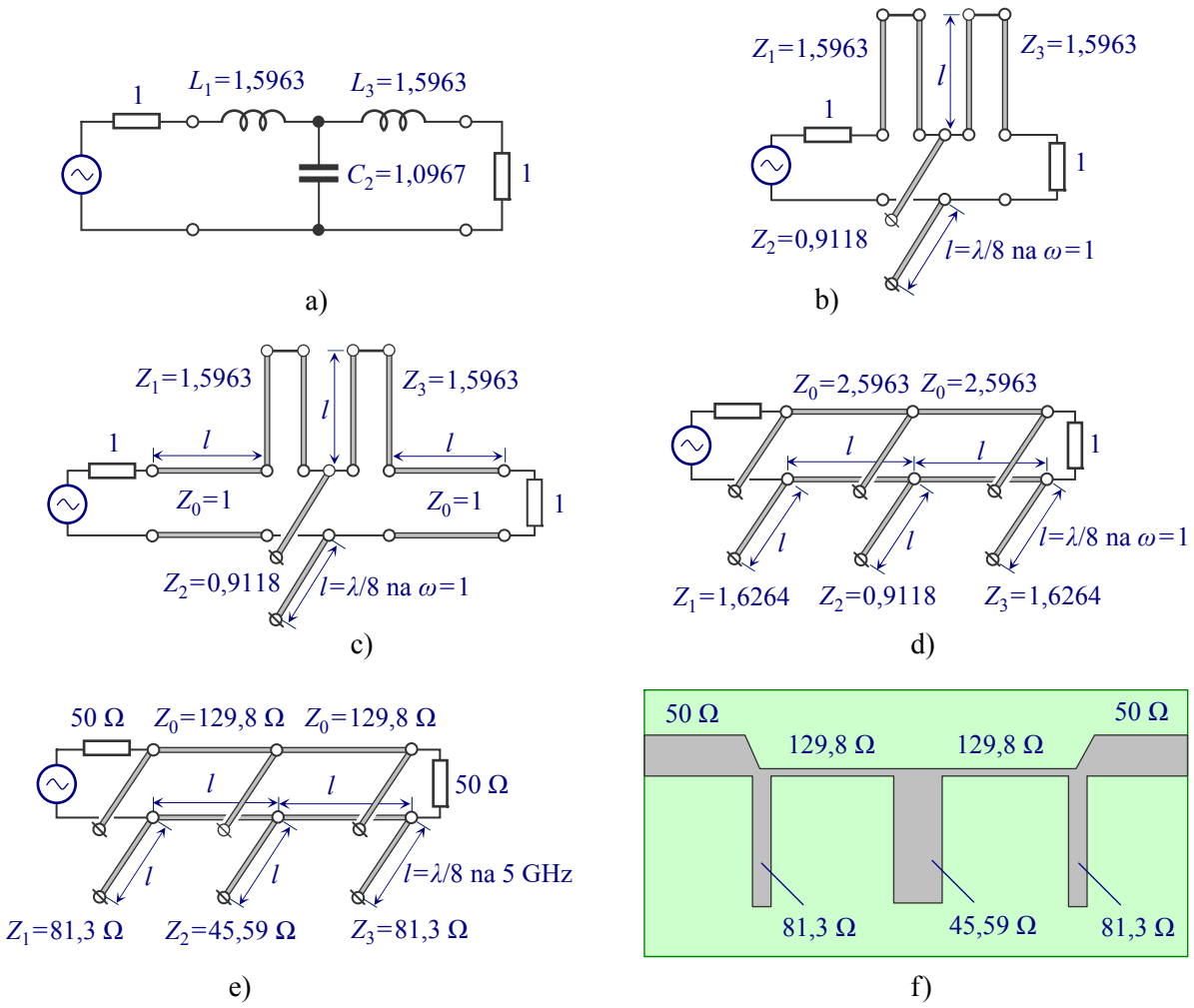
Rješenje:

Za zadanu valovitost odziva niskopropusnog prototipa prikazanog na slici 7.131a), vrijednosti normiranih elemenata izravno se mogu dobiti iz tablice 7.3:

$$g_1 = 1{,}5963 = L_1; \quad g_2 = 1{,}0967 = C_1; \quad g_3 = 1{,}5963 = L_3; \quad g_4 = 1{,}0 = R_T.$$

Primjenom Richardsove transformacije, serijski se induktiviteti mogu lako pretvoriti u kratko spojene stabove, a paralelni kapaciteti u otvorene stabove, kao što je prikazano na slici 7.131b). U skladu s izrazima (7–233) karakteristična impedancija serijskih stabova iznosi L, a paralelnog staba $1/C$. Za analizu sumjerljivim linijama svi su stabovi dugački $\lambda/8$ na $\omega = \omega_c$. (Obično je najbolje zadržati normirane vrijednosti do posljednjeg koraka u proračunu.)

Budući da se serijski stabovi na slici 7.131b) ne mogu ostvariti mikrotrakastim linijama, primjenom Kurodine transformacije valja sve serijski spojene stabove pretvoriti u paralelne stabove. Prije toga



Slika 7.131. Postupak projektiranja niskopropusnog filtra trećega reda. **a)** Niskopropusni prototip. **b)** Primjena Richardsove transformacije. **c)** Dodavanje jediničnih elementa na obama krajevima filtra. **d)** Primjena prvoga Kurodina identiteta. **e)** Nakon frekvencijskog skaliranja. **f)** Izvedba filtra u mikrotrakastoj tehnici

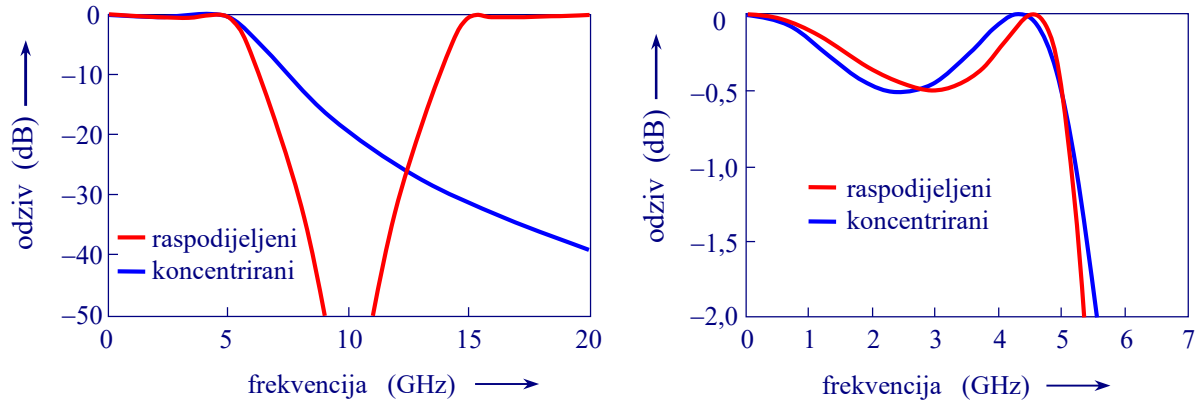
na obama je krajevima filtra potrebno dodati jedinične linijske elemente, kao što je prikazano na slici 7.131c). Ti redundantni elementi ne utječu na značajke filtra jer su prilagođeni na generator i teret (Z_0=1 Ω). Primjenom Kurodine transformacije sa slike 7.131b) na obama se krajevima filtra dobiva

$$n^2 = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} = 1 + \frac{1}{1,5963} = 1,6264 .$$

Rezultat je prikazan na slici 7.131d).

Na kraju je potrebno obaviti transformacije impedancije i frekvencije što se može ostvariti množenjem normiranih karakterističnih impedancija s 50 Ω te uključivanjem stabova i serijskih odsječaka duljine λ/8 na 5 GHz. Konačni je sklop prikazan na slici 7.131e), a topologija mikrotrakaste strukture na slici 7.131f).

Izračunan amplitudni odziv filtra grafički je prikazan na slici 7.132. Usporedbe radi prikazan je i odziv filtra s koncentriranim elementima. Do frekvencije 5 GHz oba su filtra vrlo sličnog odziva. No na višim frekvencijama dolazi do velićih odstupanja. Iznad granične frekvencije filtar s raspodijeljenim parametrima ima znatno strmiji odziv. Odziv filtra s raspodijeljenim parametrima periodično se ponavlja svakih 20 GHz. To je posljedica periodičnosti Richardsove transformacije, odnosno linijskih elemenata od kojih je sam filtar izgrađen.



Slika 7.132. Odziv parametra $|S_{21}|$ u dB niskopropusnih filtara izvedenih s koncentriranim i raspodijeljenim elementima

Niskopropusni filtar s odsječcima prijenosnih linija visoke i niske karakteristične impedancije

Niskopropusni se filtri mogu na razmjeno jednostavan način izvesti primjenom mikrotrakastih ili simetričnih trakastih linija. U tu se svrhu u kaskadu može spojiti veći broj linijskih odsječaka čije se karakteristične impedancije uzastopne skokovito mijenjaju između niskih i visokih vrijednosti u odnosu na zrcalnu impedanciju filtra. Ta je vrsta filtara dobro prihvaćena u praksi zbog jednostavnog proračuna i razmjerno malog zauzimanja prostora na tiskanoj pločici. No zbog uvedenih aproksimacija značajke im nisu tako dobre kao kod filtara s paralelnim stabovima pa im je područje primjene ograničeno.

Najprije ćemo naći približne nadomjesne sklopove za kratke odsječke prijenosnih linija vrlo visoke i vrlo niske karakteristične impedancije. *ABCD*-parametri odsječka duljine l karakteristične impedancije Z_0 prikazani su u tablici 5.1, a primjenom tablice 5.2. mogu se pretvoriti u *Z*-parametre. Kao rezultat, dobiva se:

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{A}{C} = -\frac{\mathrm{j}Z_0}{\tan \beta l}, \qquad Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{C} = -\frac{\mathrm{j}Z_0}{\sin \beta l}. \tag{7–253}$$

Serijski su elementi nadomjesnog *T*-sklopa

$$Z_{11} - Z_{12} = -\mathrm{j}Z_0 \frac{\cos \beta l - 1}{\sin \beta l} = \mathrm{j}Z_0 \tan\left(\frac{\beta l}{2}\right), \tag{7–254}$$

a paralelni je element jednak Z_{12}. Tako, za $\beta l < \pi/2$, serijski elementi imaju pozitivnu reaktanciju (induktivitet), a paralelni element ima negativnu reaktanciju (kapacitet). Sad je moguće konstruirati cjelovit nadomjesni sklop (slika 7.133) s elementima:

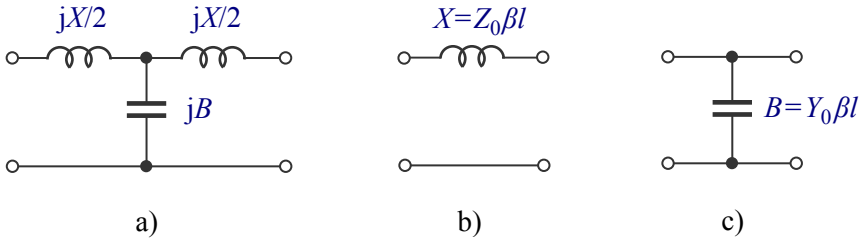
$$\frac{X}{2} = Z_0 \tan\left(\frac{\beta l}{2}\right), \qquad B = \frac{1}{Z_0} \sin \beta l. \tag{7–255}$$

Ako pretpostavimo da je odsječak kratak ($\beta l < \pi/4$) i da mu je karakteristična impedancija visoka, onda se izrazi (7–255) svode na

$$X \simeq Z_0 \beta l, \qquad B \simeq 0, \tag{7–256}$$

što odgovara nadomjesnom sklopu na slici 7.133b) (serijski induktivitet). Za kratku liniju niske karakteristične impedancije, izrazi (7–255) svode se na oblik

$$X \simeq 0, \qquad B \simeq Y_0 \beta l, \tag{7–257}$$



Slika 7.133. Približni nadomjesni sklopovi kratkih odsječaka prijenosnih linija. **a)** Nadomjesni *T*-sklop kratkog odsječka prijenosne linije. **b)** Nadomjesni sklop kratkog odsječka linije visoke karakteristične impedancije. **c)** Nadomjesni sklop kratkog odsječka linije niske karakteristične impedancije

što odgovara nadomjesnom sklopu na slici 7.114c) (paralelni kapacitet). Serijske induktivitete niskopropusnog prototipa valja nadomjestiti kratkim odsječcima linije visoke karakteristične impedancije ($Z_0 = Z_v$), a paralelne kapacitete valja nadomjestiti kratkim odsječcima linije niske karakteristične impedancije ($Z_0 = Z_n$). Da bi omjer Z_v/Z_n bio što veći, karakteristične impedancije Z_v i Z_n treba postaviti na maksimalne, odnosno minimalne vrijednosti koje je moguće ostvariti u praksi. Duljine linija mogu se odrediti primjenom izraza (7–256) i (7–257). Da bi se postigao najbolji mogući odziv u okolišu zaporne frekvencije, duljine odsječaka treba proračunati za frekvenciju $\omega = \omega_c$. Spajanjem rezultata (7–256) i (7–257) s izrazima za transformaciju impedancije i frekvencije (7–222), tj. (7–225) dobivaju se potrebne električne duljine induktivnog i kapacitivnog odsječka:

$$\beta l = \frac{LR_0}{Z_v} \quad \text{(induktivitet)}, \tag{7–258a}$$

$$\beta l = \frac{CZ_n}{R_0} \quad \text{(kapacitet)}, \tag{7–258b}$$

gdje je R_0 završna impedancija filtra, a L i C označuju normirane vrijednosti elemenata g_k niskopropusnoga prototipa.

Primjer 7.12. Niskopropusni filtar izveden s linijama skokovite impedancije

Proračunati niskopropusni filtar maksimalno glatkog odziva i zaporne frekvencije f_c=3 GHz, koji je izveden u obliku lančanog spoja linija niske i visoke karakteristične impedancije. Potrebno je postići slabljenje veće od 20 dB na frekvenciji 4 GHz. Zrcalna impedancija filtra iznosi 50 Ω, a najviša impedancija linije koja se može praktički izvesti iznosi 110 Ω, a najniža 18 Ω.

Rješenje:

Minimalni potrebni red filtra za zadano slabljenje izvan pojasa (20 dB na 4 GHz) dobiva se primjenom izraza (7–205)

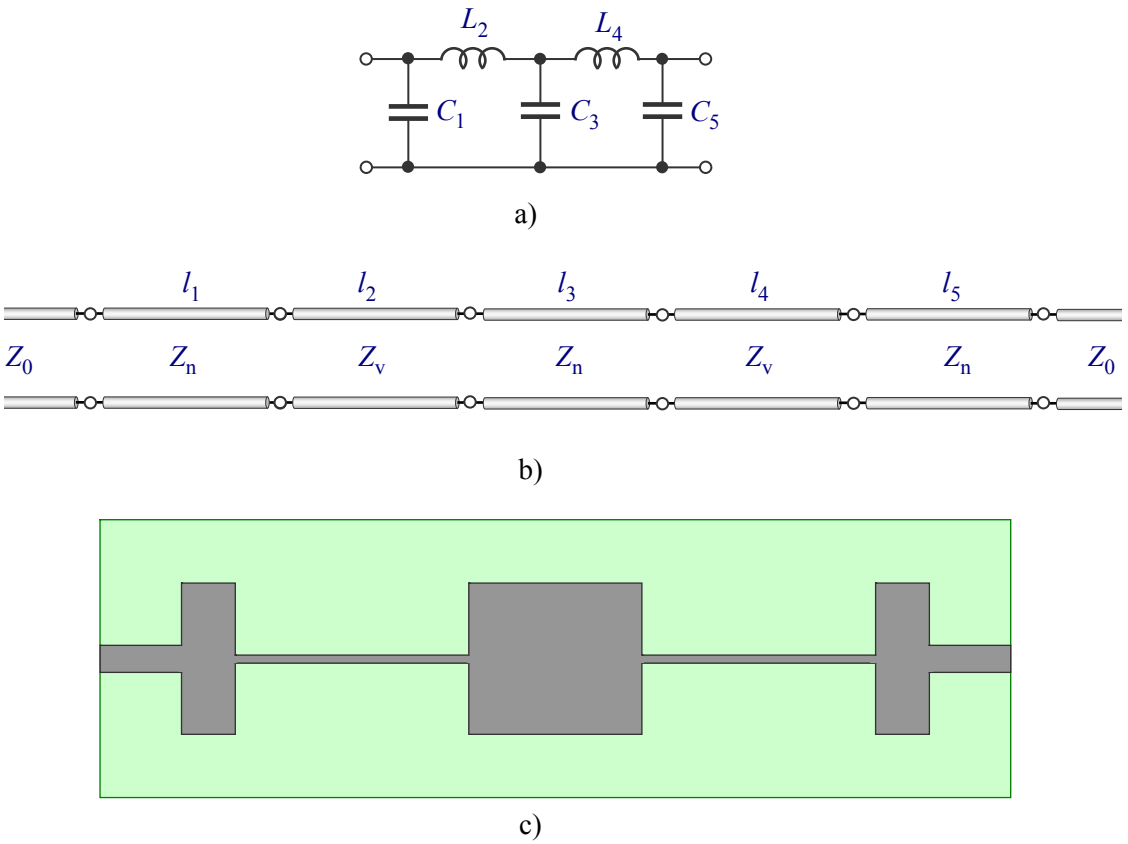
$$N = \frac{\log(10^{20/10} - 1)}{2\log(3/1{,}8)} = 4{,}49 \;\rightarrow\; N = 5.$$

Za filtar petoga reda, N=5, tablica 7.2. daje ove vrijednosti niskopropusnog prototipa:

$$g_1 = g_5 = 0{,}6180 = C_1 = C_5\,,$$

$$g_2 = g_4 = 1{,}6180 = L_1 = L_5\,,$$

$$g_3 = 2{,}0000 = C_3\,.$$



Slika 7.134. Proračun niskopropusnog filtra: **a)** mreža niskopropusnog prototipa, **b)** primjena linija sa skokovitom promjenom impedancije, **c)** izgled tiskane pločice

Niskopropusni prototip prikazan je na slici 7.134a). U sljedećem je koraku potrebno naći električne duljine linijskih odsječaka niske i visoke karakteristične impedancije koji zamjenjuju serijske induktivitete, odnosno paralelne kapacitete:

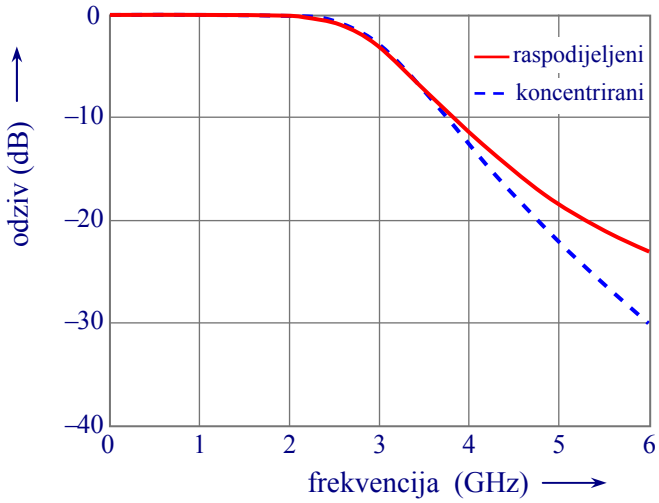
$$\beta l_1 = \beta l_5 = g_1 \frac{Z_\mathrm{n}}{R_0} = 0{,}6180 \frac{18}{50}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 12{,}8°,$$

$$\beta l_2 = \beta l_4 = g_2 \frac{R_0}{Z_\mathrm{v}} = 1{,}6180 \frac{50}{110}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 42{,}1°,$$

$$\beta l_3 = g_3 \frac{Z_\mathrm{n}}{R_0} = 2{,}0 \frac{18}{50}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 41{,}3°.$$

Konačni filtar shematski je prikazan na slici 7.134b), gdje su uzete vrijednosti $Z_\mathrm{n} = 18\ \Omega$ i $Z_\mathrm{v} = 110\ \Omega$. Valja uočiti da su u sve linije kraće od četvrt valne duljine, tj. svi su kutovi manji od 45°. Kad su jednom poznate električne duljine linijskih odsječaka, tad se lako mogu odrediti njihove geometrijske duljine, slika 7.134c).

Na slici 7.135 prikazana je usporedba amplitudnih odziva niskopropusnih filtara s raspodijeljenim parametrima i s koncentriranim elementima. Karakteristike u pojasu propuštanja vrlo su slične, ali filtar s koncentriranim elementima ima veće slabljenje na višim frekvencijama. Razlog je tomu što na visokim frekvencijama vrijednosti reaktancija odsječaka linija znatno odstupaju od reaktancija koncentriranih elemenata. Osim toga, filtri s linijskim odsječcima obično imaju parazitske pojaseve propuštanja na višim frekvencijama. No odzivi neće biti savršeno periodični zbog toga što duljine linija nisu sumjerljive.



Slika 7.135. Amplitudni odziv niskopropusnog filtra izvedenog s odsječcima linija niske i visoke karakteristične impedancije. Odziv je uspoređen s odgovarajućim filtrom koji je izveden s koncentriranim elementima.

Filtri s izravno vezanim rezonatorima

Budući da pojasnopropusni i pojasnozaporni filtri s koncentriranim komponentama sadrže *LC* strukture koje se ponašaju poput serijskih ili paralelnih titrajnih krugova (rezonatora), razmotrit ćemo odlomku razmotriti filtre koji rabe linijske i šupljinske rezonatore. Pojasnopropusni filtri sa spregnutim linijama poseban su slučaj te vrste filtara [1] - [4].

U poglavlju o rezonatorima vidjeli smo da otvorene ili kratko spojene četvrtvalne ili poluvalne odsječke prijenosnih linija možemo nadomjestiti serijskim ili paralelnim *LC* titrajnim krugovima. Stoga, u mikrovalnim filtrima, odsječci prijenosnih linija često imaju ulogu rezonatora. Takve su strukture posebno prikladne za mikrotrakaste filtre zbog jednostavne i jeftine proizvodnje. U ovom ćemo odlomku opisati mikrotrakasti filtar koji sadrži rezonatore oblika poluvalnih odsječaka otvorenih prijenosnih linija. Ti su rezonatori labavo spregnuti kapacitivno preko proreza. Na slici 7.136 prikazan je filtar s trima poluvalnim rezonatorima.

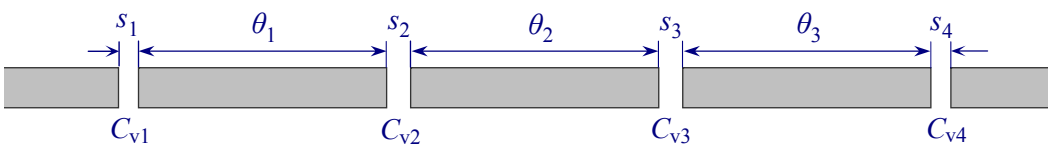
Ulazna admitancija otvorene prijenosne linije ima oblik

$$Y_{\mathrm{ul}} = \mathrm{j}\frac{1}{Z_0}\tan\beta l\,.$$

To se može dalje razviti u Taylorov red oko frekvencije ω_0 za koju je $\beta(\omega_0)l=\pi$, tj.

$$Y_{\mathrm{ul}} \simeq \mathrm{j}\frac{l}{Z_0}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\bigg|_{\omega_0}\frac{\omega-\omega_0}{\cos^2\left[\beta(\omega_0)l\right]} = \mathrm{j}\frac{\beta_0' l}{Z_0}(\omega-\omega_0) = \mathrm{j}\frac{\pi\omega_0}{Z_0}\frac{\beta_0'}{\beta_0}\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\,, \qquad (7\text{–}259)$$

gdje je $\beta_0' = \mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\omega$ na frekvenciji $\omega=\omega_0$.



Slika 7.136. Mikrotrakasti filtar s kapacitivno vezanim poluvalnim otvorenim rezonatorima

S druge strane, ulazna se admitancija paralelnog titrajnog LC kruga može napisati kao

$$Y_{\mathrm{ul}} = \mathrm{j}\omega C - \frac{\mathrm{j}}{\omega L} = \mathrm{j}\omega C\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) =$$

$$= \mathrm{j}\omega C \frac{1}{\omega^2}(\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0) \simeq \mathrm{j}2\omega_0 C \frac{\omega-\omega_0}{\omega_0} = \mathrm{j}2\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}. \qquad (7\text{–}260)$$

Kao što smo vidjeli u odjeljku 7.4.2, odsječak otvorene prijenosne linije može se nadomjestiti paralelnim titrajnim krugom u frekvencijskom području čija širina ne prelazi približno 20% središnje frekvencije filtra. U tom slučaju vrijedi

$$\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\pi\omega_0}{2Z_0}\frac{\beta_0'}{\beta_0}. \qquad (7\text{–}261)$$

U filtru prikazanom na slici 7.136 otvoreni poluvalni linijski rezonatori mogu se nadomjestiti paralelnim titrajnim krugovima. Umetanjem odgovarajućih admitancijskih invertora između titrajnih krugova mogu se ostvariti uvjeti u kojim su svi rezonatori međusobno jednaki.

U skladu sa slikom 7.122c) može se zaključiti da se mreža na slici 7.137a) ponaša kao admitancijski invertor s dvama linijskim odsječcima negativne električne duljine $\beta l = -\varphi/2$ između kojih se nalazi serijski (vezni) kapacitet proreza C_{v} (odjeljak 5.11.4). Na mjestu susceptancije $B = \omega C_{\mathrm{v}}$, primjenom izraza (3–49) iz odjeljka 3.3.2, admitancija tereta Y_{T} transformira se preko linijskog odsječka duljine $-\varphi/2$ u

$$Y_{\mathrm{ul}}' = Y_0 \frac{Y_{\mathrm{T}} - \mathrm{j}Y_0 \tan\dfrac{\varphi}{2}}{Y_0 - Y_{\mathrm{T}}\mathrm{j}\tan\dfrac{\varphi}{2}}.$$

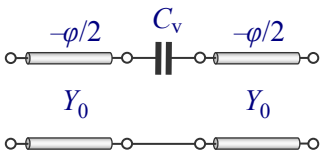
Ta se admitancija dalje transformira preko veznog kapaciteta C_{v} u

$$Y_{\mathrm{ul}}'' = \frac{\mathrm{j}BY_{\mathrm{ul}}'}{\mathrm{j}B + Y_{\mathrm{ul}}'},$$

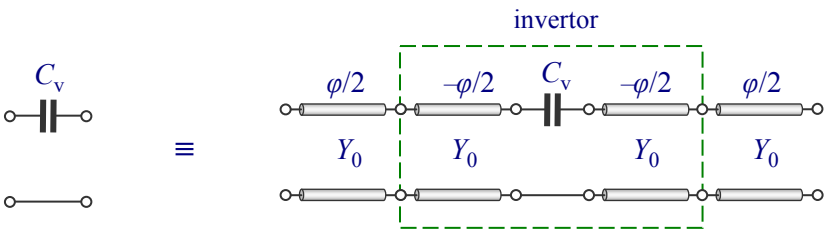
a nakon još jedne transformacije, izraz za ulaznu admitanciju konačno poprima oblik

$$Y_{\mathrm{ul}} = Y_0 \frac{Y_{\mathrm{ul}}'' - \mathrm{j}Y_0 \tan\dfrac{\varphi}{2}}{Y_0 - Y_{\mathrm{ul}}''\mathrm{j}\tan\dfrac{\varphi}{2}} = \frac{\mathrm{j}Y_0^2 Y_{\mathrm{T}}\left[B\left(1-\tan^2\dfrac{\varphi}{2}\right) - Y_0\tan\dfrac{\varphi}{2}\right] + 2B - Y_0^3\tan\dfrac{\varphi}{2}\left(2B - Y_0\tan\dfrac{\varphi}{2}\right)}{Y_{\mathrm{T}}\left(Y_0^2 + 2BY_0\tan\dfrac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{j}Y_0^2\left[B\left(1-\tan^2\dfrac{\varphi}{2}\right) - Y_0\tan\dfrac{\varphi}{2}\right]}.$$

a)



b)



Slika 7.137. a) Prorez u mikrotrakastoj liniji kao admitancijski invertor; **b)** nadomjesni sklop kapaciteta proreza u kojem su odsječci električne duljine $\varphi/2$ sastavni dio vanjskog kruga

Izjednačavanjem s nulom izraza u uglatim zagradama dobiva se

$$\frac{\omega C_{\mathrm{v}}}{Y_0} = \frac{B}{Y_0} = \frac{\tan\dfrac{\varphi}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2}\tan\varphi\,. \tag{7–262a}$$

Primjenom tog uvjeta izlazi

$$Y_{\mathrm{ul}} = \frac{Y_0^2\tan\dfrac{\varphi}{2}\left(2B - Y_0\tan\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\left(Y_0 + 2B\tan\dfrac{\varphi}{2}\right)Y_{\mathrm{T}}} = \frac{Y_0^2\tan^2\dfrac{\varphi}{2}}{Y_{\mathrm{T}}}\,. \tag{7–262b}$$

Iz uvjeta (7–262b) izravno izlazi vrijednost karakteristične admitancije invertora, tj.

$$J = Y_0\tan\frac{\varphi}{2}\,. \tag{7–263}$$

Ovdje valja napomenuti da prisutnost odsječka prijenosne linije negativne električne duljine ($-\varphi/2$) ne stvara poteškoće u invertoru na slici 7.137a), jer se negativna duljina može jednostavno »ugraditi« u poluvalne linijske rezonatore, tako da se linijski rezonatori skrate za $\varphi/2$. Objašnjenje se nalazi na slici 7.137b). Budući da $B = \omega C_{\mathrm{v}}$ i $\varphi/2$ ovise o frekvenciji, invertor nije idealan. No veličina J neće se znatnije mijenjati u frekvencijskog pojasa čija širina ne prelazi $0{,}2\omega_0$.

Proračun filtra uvijek započinje niskopropusnim prototipom. Za maksimalno glatki i Čebiševljev filtar, koeficijenti g_n mogu se odrediti s pomoću izraza (7–214), odnosno (7–219) ili s pomoću tablica 7.2. i 7.3.

Rezonatori na slici 7.136 približno su dugački pola valne duljine, a prorezi se mogu približno nadomjestiti serijskim kapacitetima $C_{\mathrm{v}n}$. Dodavanjem odsječaka negativne električne duljine $-\varphi/2$ s obiju strana linijskog odsječka, električna duljina rezonatora θ može se prikazati kao zbroj triju komponenata

$$\theta_n = \pi + \frac{\varphi_n}{2} + \frac{\varphi_{n+1}}{2},\ \text{za } n = 1,\ 2,\ \ldots, N, \tag{7–264}$$

gdje je $\varphi_n < 0$. Ta električna duljina kompenzira reaktivni učinak kapaciteta proreza pa u skladu sa slikom 7.122c) za taj slučaj izlazi $\varphi_n = -\tan^{-1}(2Z_0B_n)$. Budući da je u skladu s izrazom (7–263), $J = Y_0\tan\varphi/2$, potrebna kapacitivna susceptancija proreza iznosi

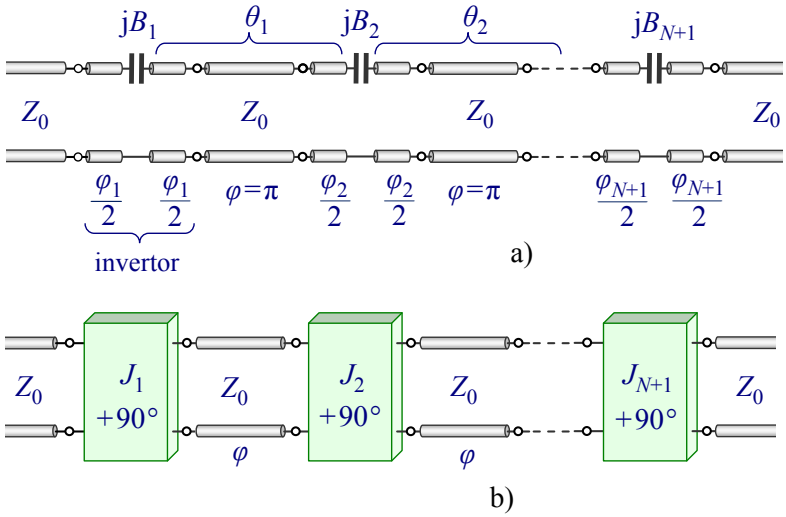
$$B_n = \frac{J_n}{1-\left(Z_0J_n\right)^2}\,. \tag{7–265}$$

Sad se filtar može nadomjestiti sklopom na slici 7.138a), tj. može se općenito prikazati kao na slici 7.138b).

Ako je poznat fazni koeficijent β ili fazna brzina v_{f} u prijenosnoj liniji, onda se stvarne duljine poluvalnih linijskih rezonatora mogu izračunati s pomoću izraza (7–264) kao

$$l_n = \frac{\theta_n}{\beta},\ \text{za } n = 1, 2, \ldots, N. \tag{7–266}$$

Sklop prikazan na slici 5.71b) bolje opisuje prorez jer su njime uzeti u obzir učinci na otvorenome kraju linije. U tom se sklopu slijeva i zdesna od uzdužnoga kapaciteta nalaze paralelni kapaciteti koji električki produžuju prijenosnu liniju. Njihov se utjecaj može jednostavno kompenzirati odgovarajućim skraćenjem rezonatora.



Slika 7.138. Model filtra s admitancijskim invertorima

Vrijednosti invertora mogu se staviti u vezu s koncentriranim elementima u niskopropusnom prototipu primjenom tablice 7.4. i formula za transformaciju impedancije (7–252):

$$Z_0 J_1 = \sqrt{\frac{\pi(\omega_2 - \omega_1)}{2\omega_0 g_1}}\,, \tag{7–267a}$$

$$Z_0 J_n = \frac{\pi(\omega_2 - \omega_1)}{2\omega_0 \sqrt{g_{n-1} g_n}}\,, \qquad \text{za } n=2,3,\ldots,N \tag{7–267b}$$

$$Z_0 J_N = \sqrt{\frac{\pi(\omega_2 - \omega_1)}{2\omega_0 g_N g_{N+1}}}\,. \tag{7–267b}$$

Proračunavanje filtra s poluvalnim rezonatorima koji su spregnuti preko kapacitivnih proreza može se vidjeti na sljedećem primjeru.

Primjer 7.13. Pojasnopropusni filtar s kapacitivno vezanim poluvalnim rezonatorima

Proračunati Čebiševljev filtar s kapactivno vezanim otvorenim poluvalnim rezonatorima valovitosti 0,5 dB, središnju frekvenciju 5 GHz i širinu pojasa 600 MHz. Na frekvenciji 5,75 GHz traži se slabljenje veće od 20 dB.

Rješenje:

Nađimo najprije normiranu frekvenciju za niskopropusni prototip. Primjenom izraza (7–228) izlazi

$$\omega' = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \frac{5}{0{,}6}\left(\frac{5{,}75}{5} - \frac{5}{5{,}75}\right) = 2{,}337\,.$$

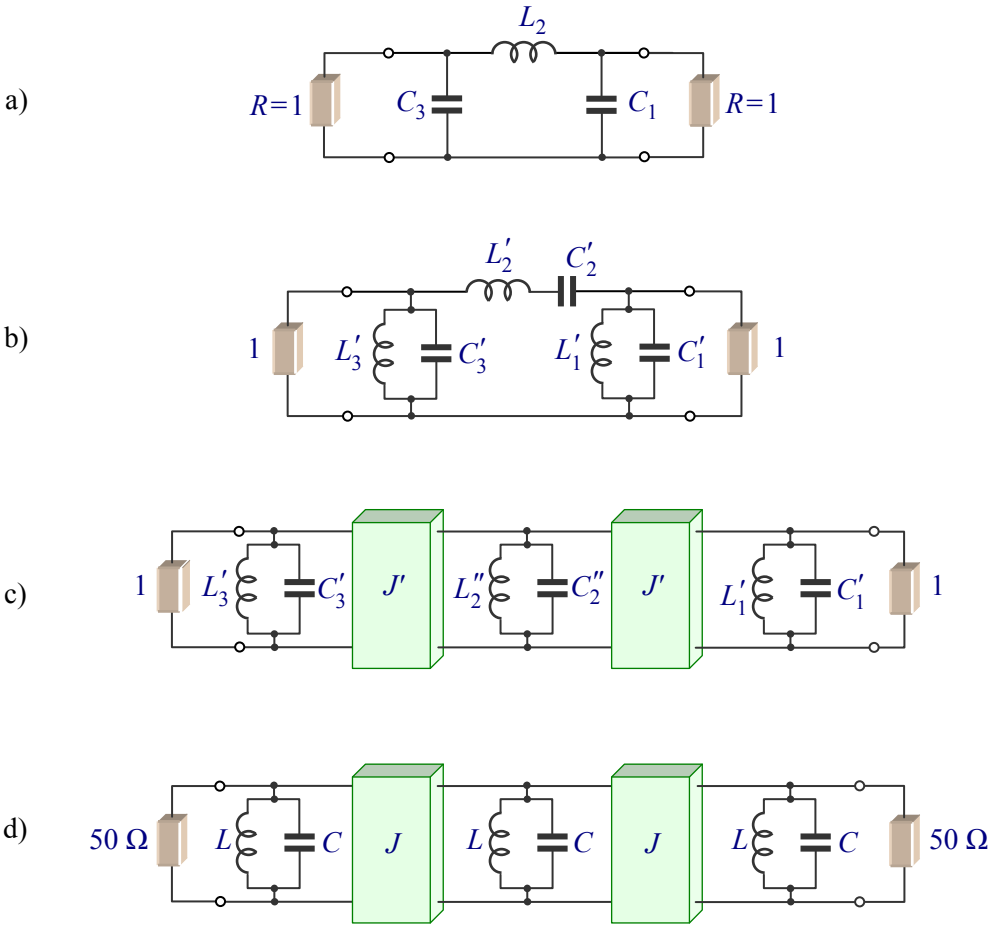
Sad se red filtra odnosno broj potrebnih rezonatora, može odrediti primjenom izraza (7–220). Za zadano slabljenje izvan pojasa od 20 dB na normiranoj frekvenciji $\omega/\omega_c = 2{,}337$ i za valovitost unutar pojasa propuštanja $A_m = 0{,}5$ dB, dobiva se:

$$N = \frac{\cosh^{-1}\sqrt{\left(10^{A/10}-1\right)/\left(10^{A_m/10}-1\right)}}{\cosh^{-1}(\omega/\omega_c)} = \frac{\cosh^{-1}\sqrt{\left(10^{20/10}-1\right)/\left(10^{0{,}5/10}-1\right)}}{\cosh^{-1}(2{,}337)} = 2{,}71.$$

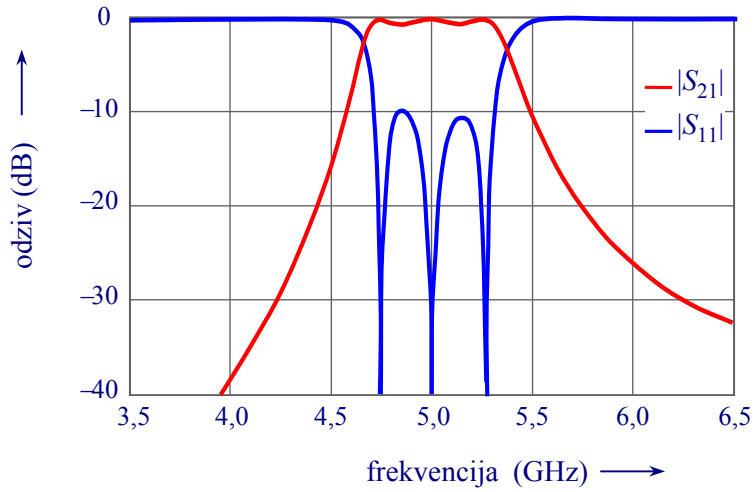
Dakle potrebna su najmanje tri odsječka ($N = 3$) da bi se na frekvenciji 5,75 GHz moglo ostvariti veće slabljenje od 20 dB. Stoga valja krenuti od niskopropusnog prototipa s trima elementima (slika 7.139a)), koji se frekvencijskom transformacijom može preinačiti u oblik pojasnopropusnog filtra s titrajnim krugovima, kao što je prikazano na slici 7.139b). Primjenom relacija (7–219) ili tablice 7.3. izravno se mogu naći elementi niskopropusnog prototipa: $g_1 = g_3 = 1{,}5963$ i $g_2 = 1{,}0967$. Uvođenjem invertora admitancije (odjeljak 7.5.3), mreža sa slike 7.139b) može se dalje transformirati u oblik prikazan na slici 7.139c). Taj je oblik dualan filtru sa slike 7.128 uz primjenu impedancijskih invertora. U sljedećem se koraku transformacijama (7–252b) filtar dovodi u konačan oblik (slika 7.139d)), koji je istovjetan obliku prikazanom na slici 7.129b). Parametri invertora mogu se konačno odrediti primjenom izraza (7–267). Sprežni kapaciteti mogu se izračunati iz izraza (7–265) kao $C_{vn} = B_n/\omega_0$, a električne duljine rezonatora iz formule (7–264). U sljedećoj su tablici skupno prikazani svi rezultati.

n	g_n	$Z_0 J_n$	B_n	C_{vn}	θ_n
1	1,5963	0,3436	$7{,}79\cdot10^{-3}$	0,2481 pF	152,85°
2	1,0967	0,1440	$2{,}94\cdot10^{-3}$	0,0936 pF	163,62°
3	1,5963	0,1440	$2{,}94\cdot10^{-3}$	0,0936 pF	152,85°
4	1,0000	0,3436	$7{,}79\cdot10^{-3}$	0,2481 pF	–

Na slici 7.140 prikazana je prijenosna i refleksijska karakteristika filtra. Može se uočiti da obilježja filtra nisu posve simetrična u odnosu na središnju frekvenciju, što je posljedica frekvencijske karakteristike invertora impedancije.



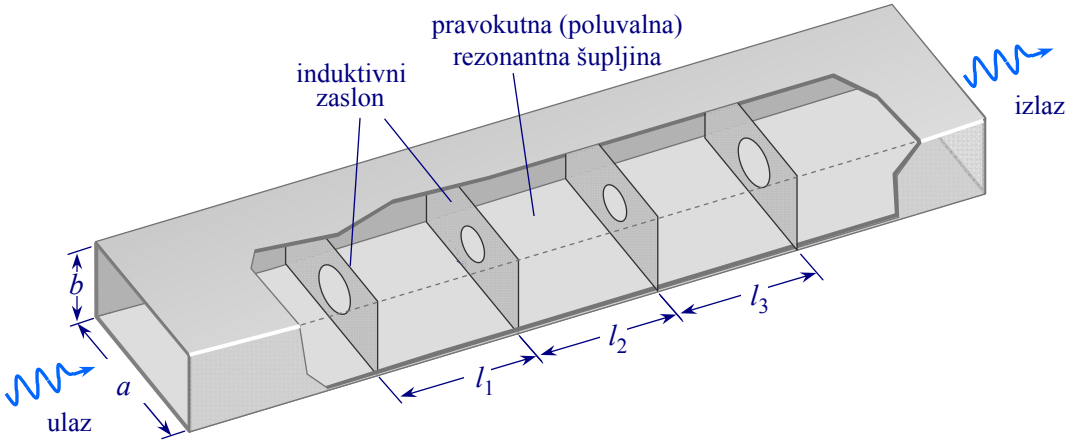
Slika 7.139. **a)** Niskopropusni prototip; **b)** transformacija u pojasnopropusni prototip; **c)** transformacija u pojasnopropusni filtar s invertorima admitancije i **d)** konačna mreža filtra



Slika 7.140. Karakteristike pojasnopropusnog filtra kapacitivno spregnutih poluvalnih rezonatora Čebiševljeva odziva; $B = 0{,}6$ GHz, $f_0 = 5$ GHz, $A_m = 0{,}5$ dB, $A(5{,}75\text{GHz}) > 20$ dB

Osim linijskih sklopova u praksi se nerijetko nalaze izvedbe s valovodnim rezonatorima. U valovodnim filtrima istodobno je moguće rabiti više modova (degenerativni modovi), čime se mogu ostvariti kompaktnije izvedbe uskpojasnih filtara s vrlo strmim bokovima prijenosne karakteristike. U primjeni se nerijetko nalaze i filtri s dielektričnim i YIG rezonatorima koji su obrađeni u odjeljcima 7.4.4. i 7.7.3.

Dualni filtar, ranije opisanom, filtar je s valovodnim rezonatorima (slika 7.141) koji su međusobno spregnuti preko paralelnih induktivnih zaslona čineći integralni dio rezonatora. To je tzv. *filtar s izravnom spregom rezonatora*. U tu se svrhu može uporabiti rezonator prikazan na slici 7.91 u odjeljku 7.4.6, koji je spregnut s valovodom na obama krajevima preko zaslona kružnih otvora induktivnog karaktera (odjeljak 5.9, slika 5.51d)). Postoje izvedbe valovodnih filtara kod kojih su između rezonatora umetnuti četvrtvalni valovodni odsječci čija je uloga invertiranje impedancije ili admitancije. Proračun tih filtara ne razlikuje se u osnovi od proračuna opisanog filtra s kapacitivno spregnutim poluvalnim linijskim rezonatorima. U valovodnoj inačici, paralelni induktivni zasloni imaju ulogu invertora impedancije. S pomoću valovodnih rezonatora mogu se ostvariti uskopojasni pojasnopropusni i pojasnozaporni filtri s malim unesenim gubitcima, tj. visokog faktora dobrote.



Slika 7.141. Pojasnopropusni filtar s induktivno spregnutim valovodnim rezonatorima

O veličini otvora u zaslonima ovisi jakost sprege, a o njoj pak ovisi širina pojasa i oblik prijenosne karakteristike filtra (maksimalno glatki ili Čebiševljev odziv). Umjesto kružnog otvora može se rabiti pravokutni otvor ili zaslon sastavljen od induktivnih stupića koji premošćuju šire stijenke valovoda (vidjeti odjeljak 5.9. o diskontinuitetima valovoda).

Pojasnopropusni filtri s paralelnim spregnutim linijama

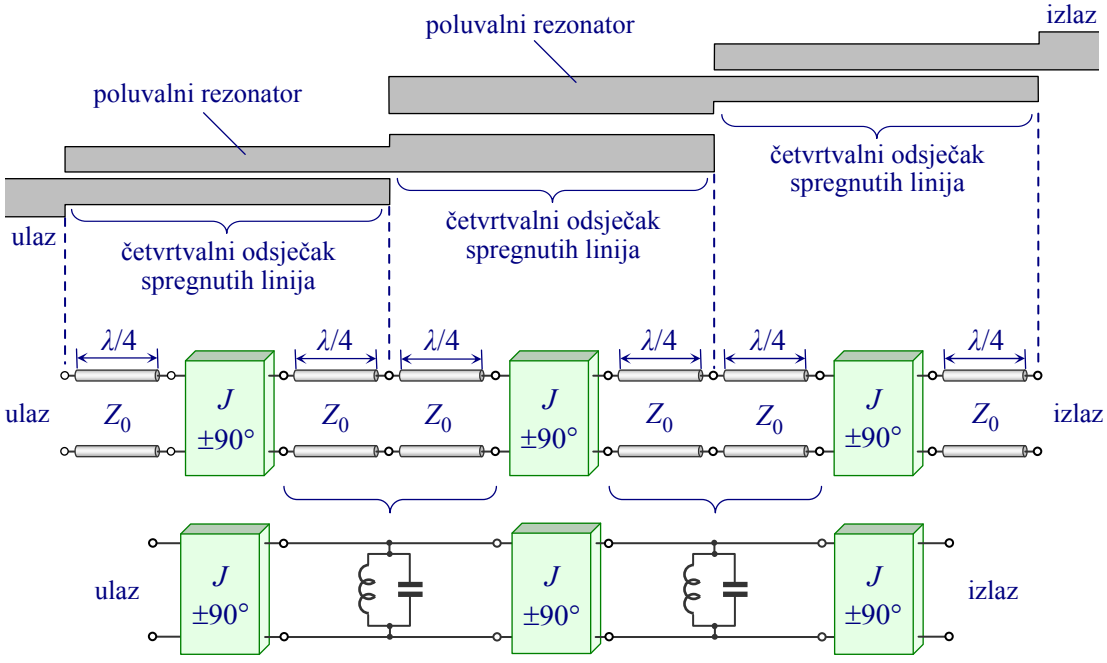
Kompaktnija izvedba pojasnopropusnog filtra može se ostvariti uporabom spregnutih linija kao što je prikazano na slici 7.142 [1] - [4]. Filtar općenito sadrži N četvrtvalnih odsječaka spregnutih linija u lančanom spoju. U odjeljcima 7.5.2. i 7.5.3. našli smo da osim transformacijskih obilježja takvi odsječci posjeduju i filtarska (rezonantna) svojstva jer spojeni u lančani spoj tvore strukturu od $N-1$ otvorenih poluvalnih linijskih rezonatora (vidjeti odjeljak 7.4.2, slika 7.68). Pri tomu je svaki rezonator spregnut sa susjednim rezonatorom preko četvrtvalnih odsječaka spregnutih linija.

Na slici 7.142 shematski je prikazana izvedba trakastog (ili mikortrakastog) filtra s trima četvrtvalnim odsječcima spregnutih linija koji spojeni u kaskadu tvore dva poluvalna rezonatora međusobno spregnuta preko četvrtvalnih spregnutih paralelnih linija. Primjenom nadomjesne sheme odsječka spregnutih linija s otvorenim dijagonalnim prolazima (slika 7.123b)) dobiva se nadomjesna shema filtra s invertorima. Dva četvrtvalna linijska odsječka susjednih invertora mogu se združiti u poluvalni odsječak koji se može nadomjestiti paralelnim titrajnim krugom. Tako se dolazi do konačnog oblika koji je sličan onome u primjeru 7.13. za filtar s kapacitivno spregnutim poluvalnim linijskim rezonatorima (slika 7.139d)). Stoga se mogu uporabiti iste formule (7–267) za proračun invertora J. Razlika je jedino u tomu što se izvedbom sa spregnutim četvrtvalnim odsječcima koji su integrirani u poluvalne rezonatore može postići znatno jača sprega.

U odjeljku 7.5.3. vidjeli smo da četvrtvalni odsječak spregnutih linija ima svojstvo invertora impedancije i admitancije. Za danu vrijednost J, potrebne karakteristične se impedancije parnoga i neparnoga moda mogu dobiti s pomoću izraza (7–246):

$$Z_{0e} = Z_0\left(1 + JZ_0 + J^2Z_0^2\right), \qquad Z_{0o} = Z_0\left(1 - JZ_0 + J^2Z_0^2\right), \tag{7–268}$$

gdje je Z_0 karakteristična impedancija priključnih linija na prolazima spregnutih linija.



Slika 7.142. Pojasnopropusni filtar s paralelnim spregnutim linijama

Primjer 7.14. Pojasnopropusni filtar s paralelnim spregnutim linijama

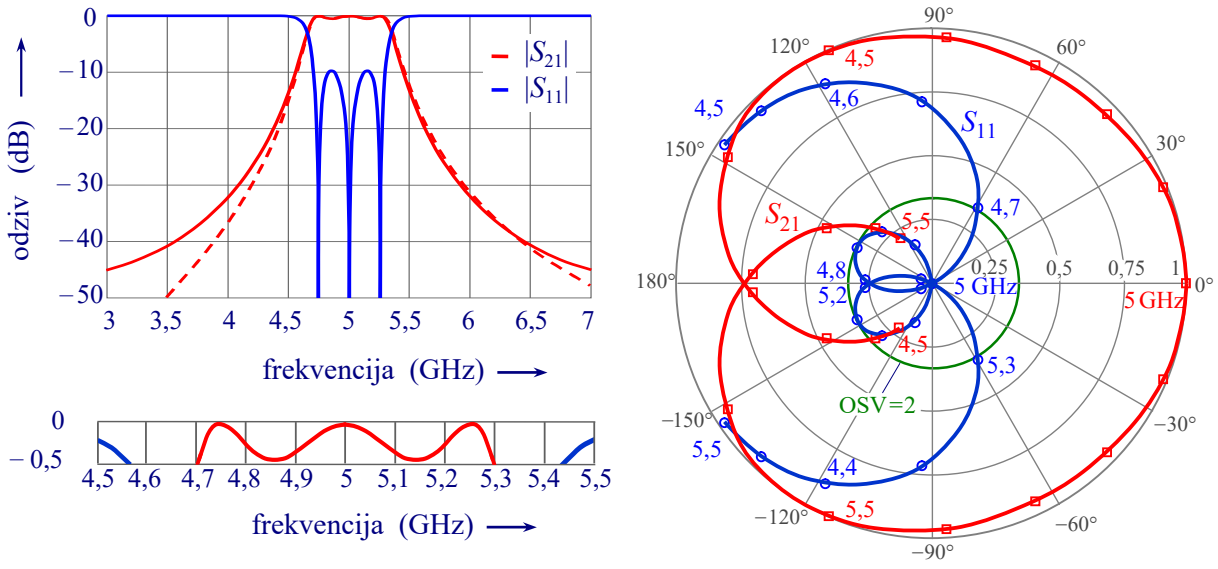
Proračunati Čebiševljev filtar s odsječcima paralelnih spregnutih linija i specifikacijom iz primjera 7.13, tj. valovitost je 0,5 dB, središnja frekvencija 5 GHz, širina pojasa 600 MHz i slabljenje veće od 20 dB na frekvenciji 5,75 GHz. Podrobnije prikazati odziv u području valovitosti.

Rješenje:

Normirana frekvencija, red filtra i elementi niskopropusnog prototipa jednaki su onima u primjeru 7.13, tj. $\omega' = 2{,}337$, $N = 3$ te $g_1 = g_3 = 1{,}5963$ i $g_2 = 1{,}0967$. Jednaki su i parametri invertora koji se mogu naći primjenom izraza (7–267). Karakteristične impedancije za parni i neparni mod invertora mogu se konačno odrediti s pomoću izraza (7–268). U sljedećoj su tablici skupno prikazani svi rezultati.

n	g_n	$Z_0 J_n$	Z_{0o}	Z_{0e}
1	1,5963	0,3436	38,7226 Ω	73,0854 Ω
2	1,0967	0,1440	43,8917 Ω	58,1379 Ω
3	1,5963	0,1440	43,8917 Ω	58,1379 Ω
4	1,0000	0,3436	38,7226 Ω	73,0854 Ω

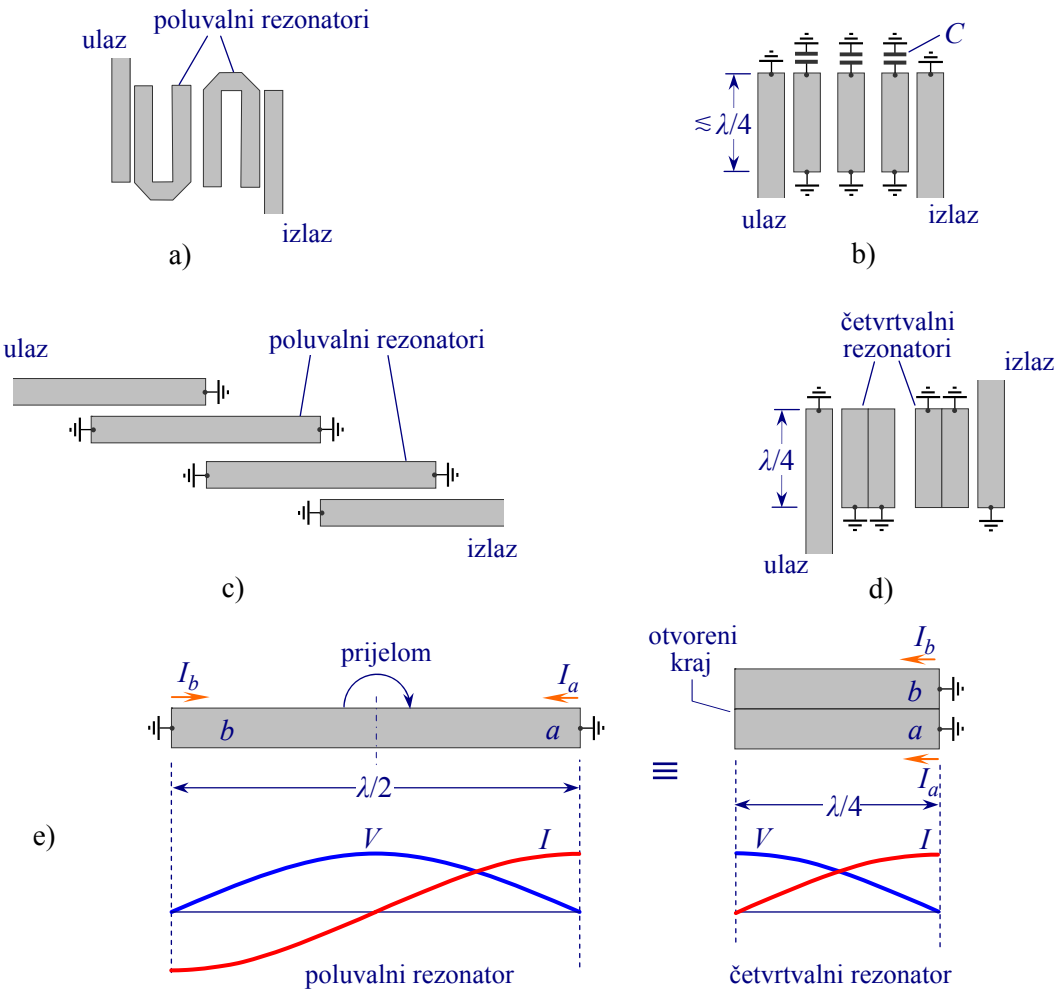
Na slici 7.143a) prikazana je prijenosna i refleksijska karakteristika filtra. Vidi se da obilježja filtra nisu posve simetrična u odnosu na središnju frekvenciju, što je posljedica frekvencijske karakteristike invertora impedancije. Na slici 7.143b) prikazani su raspršni parametri S_{11} i S_{22} u polarnom dijagramu. Valovitost na lokusu parametra S_{21} redovito se pojavljuje u obliku petlji na lokusa parametra S_{11}.



a) b)

Slika 7.143. a) Odziv pojasnopropusnog filtra izvedenog s paralelnim spregnutim linijama (pune crte) i idealnog Čebiševljeva filtra (isprekidana crta) uz dinamičko područje od 50 i 0.5 dB. **b)** Prikaz raspršnih parametara S_{11} i S_{22} u polarnome dijagramu s korakom od 50 MHz

Za fizičku izvedbu filtra mogu se uporabiti simetrične trakaste linije ili mikrotrakaste linije. U tom slučaju valja primijeniti rezultate razmatranja iz odjeljka 7.3.3. o linijskim usmjernim sprežnicima. Budući da se pojavljuju odsječci linija različitih koeficijenata naponske sprege, trake susjednih odsječaka imat će općenito različite širine. Razmacima između traka može se upravljati jakošću sprege. Vanjski odsječci koji povezuju filtar s pobudnim linijama na ulazu i izlazu traže jaču spregu, a odsječci u geometrijskom središtu filtra imaju najslabiju spregu pa su razmaci između traka najveći.



Slika 7.144. Pojasnopropusni filtar sa spregnutim linijskim rezonatorima: **a)** poluvalni oblika ukosnice **b)** češljasti sa završnim kapacitetima, **c)** poluvalni s kratko spojenim rezonatorima i **d)** četvrtvalni interdigitalni. **e)** Razvoj četvrtvalnoga rezonatora prelamanjem poluvalnoga rezonatora u geometrijskom središtu i priljubljivanjem dužih stranica

Na slici 7.144 prikazano je nekoliko različitih topologija pojasnopropusnih filtara sa spregnutim linijama [4]. Umjesto odsječaka spregnutih linija s otvorenim dijagonalnim prolazima može se uporabiti kompaktnija inačica s poluvalnim rezonatorima oblika ukosnice, kao što je prikazano na slici 7.144a).

Zbog uporabe prijenosnih linijskih rezonatora, filtri sa spregnutim linijama imaju periodičan odziv, tj. višestruke odzive na neparnim harmonicima središnje frekvencije osnovnog pojasa. No izvedbe s mikrotrakastim spregnutim linijama na podlogama relativne permitivnosti veće od dva nerijetko pokazuju i parazitske odzive na dvostruko višoj frekvenciji, zbog razlike u faznoj brzini parnog i neparnog moda posebno pri jakoj sprezi. Stoga se ti filtri često izbjegavaju u izvedbama dipleksera, tj. u filtarskim skretnicama za smanjnje interferencije između RF kanala odašiljača i prijamnika u primjenama bežičnih komunikacijskih sustava.

Na slici 7.144b) prikazan je filtar češljaste konfiguracije spregnutih linija. Rezonatori su na otvorenom kraju kapacitivno opterećeni pa su kraći od četvrt valne duljine. Ta je inačica filtra posebno pogodna za izvedbe sa simetričnim trakastim i suosnim linijama.

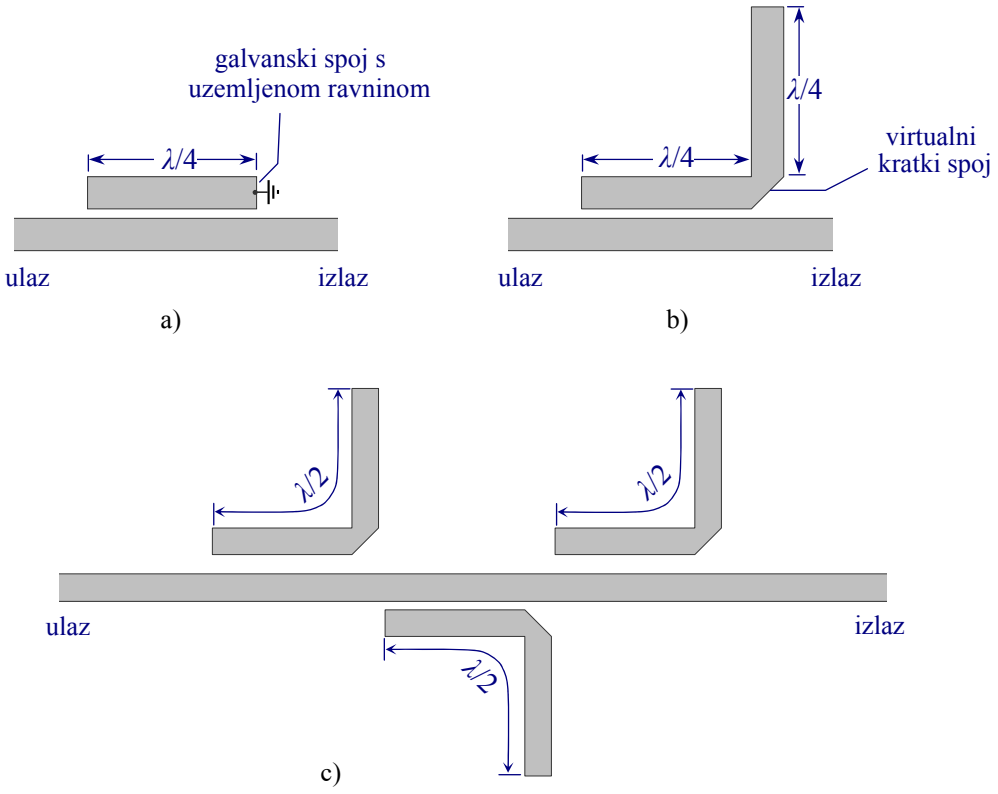
Filtar dualan onome na slici 7.142 može se ostvariti s pomoću četvrtvalnih odsječaka spregnutih linija koji su kratko spojeni na svojim dijagonalnim prolazima, kao što je prikazano

na slici 7.144c). Proračun tog filtra ne razlikuje se od onog za filtar prikazan na slici 7.142. Kompaktniji filtar može se ostvariti interdigitalnom strukturom više spregnutih četvrtvalnih odsječaka, slika 7.144d), tako da se poluvalni rezonatori na slici 7.144c) prelome, a dobiveni prelomljeni segmenti međusobno priljube kao na slici 7.144d). Ekvivalencija između poluvalnoga i četvrtvalnoga linijskog rezonatora objašnjena je u odjeljku 7.4.2, gdje je objašnjeno zašto karakteristična impedancija nadomjesnog četvrtvalnog otvorenog rezonatora mora biti upola manja od karakteristične impedancije izvornog poluvalnog rezonatora. Uz pomoć slike 7.144e) do istog se zaključka može doći intuitivnim putem. Prelamanjem poluvalnog kratko spojenog rezonatora dobiva se otvoreni četvrtvalni rezonator dvostruke širine trake što upućuje na nižu karakterističnu impedanciju potonjeg rezonatora.

Pojasnozaporni filtri s odsječcima spregnutih linija

Primjenom odsječka spregnutih linija mogu se ostvariti i pojasnozaporni filtri. Na slici 7.145 prikazana je izvorna i preinačena struktura opisana u odjeljku 7.5.2. (slika 7.115). Umjesto galvanskoga kratkog spoja na jednom kraju spregnute linije može se uporabiti virtualni kratki spoj, tj. virtualno uzemljenje. Moguće ga je ostvariti otvorenim četvrtvalnim stabom okomito postavljen na smjer spregnute trake. Tako izvedena spregnuta struktura ukupno je dugačka pola valne duljine. Budući da je otvorena na obama krajevima ponaša se poput poluvalnoga rezonatora koji je elektromagnetski spregnut s glavnom linijom duž četvrtvalnog segmenta. Struktura sa slike 7.145b) nešto je užeg frekvencijskog pojasa u odnosu na izvornu inačicu (vidjeti sliku 7.146a)), ali njezina izvedba nije tehnološki zahtjevna jer ne traži galvanski prospoj (via) s uzemljenom vodljivom ravninom.

Na slici 7.145c) prikazana je topologija filtra s trima pojasnozapornim odsječcima sa slike 7.145b). Promjenom razmaka između spregnutih traka mogu se postići filtri različite širine zapornog pojasa i oblika prijenosne karakteristike.

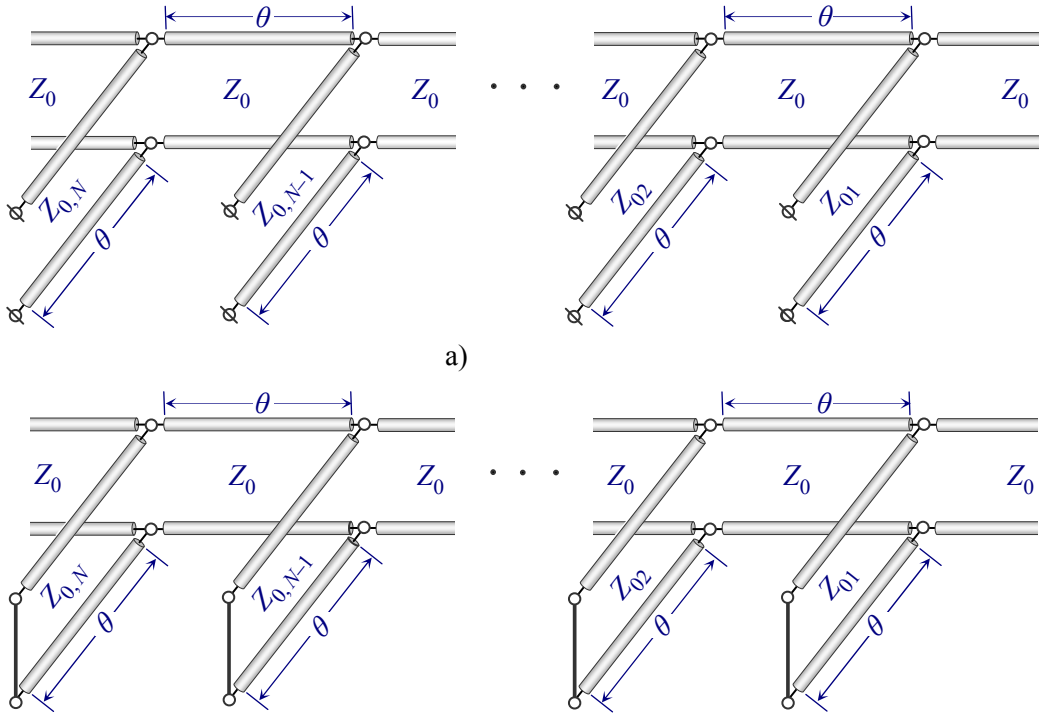


Slika 7.145. Pojasnozaporne strukture s odsječcima spregnutih linija: **a)** izvorna, **b)** preinačena. **c)** Izvedba pojasnozapornog filtra s trima odsječcima

Pojasnopropusni i pojasnozaporni filtri s četvrtvalnim rezonatorima

U prethodnim odlomcima vidjeli smo da se otvoreni ili kratko spojeni četvrtvalni stabovi vladaju kao serijski, odnosno paralelni titrajni krugovi. Stoga se takvi paralelni stabovi mogu nanizati uzduž prijenosne linije da bi se ostvarili pojasnozaporni ili pojasnopropusni filtri, kao što je prikazano na slici 7.146. Četvrtvalni odsječci linije između susjednih stabova djeluju kao admitancijski invertori koji jednostavno pretvaraju paralelne titrajne krugove u serijske titrajne krugove. Pri tomu su svi stabovi i odsječci linija dugački $\lambda/4$ na središnjoj frekvenciji ω_0.

Unutarnja impedancija filtra sa stabovima iznosi Z_0 pa su takvi filtri kompaktni i jednostavno se proračunavaju. Nedostatak im je u tomu što karakteristične impedancije često traže vrijednosti koje je teško ili čak nemoguće ostvariti u praksi.



Slika 7.146. a) Pojasnozaporni filtar i **b)** pojasnopropusni filtri s paralelnim stabovima ($\theta=\pi/2$ na središnjoj frekvenciji)

Razmotrimo najprije pojasnozaporni filtar s N otvorenih stabova koji je prikazan na slici 7.146a). Formule za proračun potrebnih karakterističnih impedancija stabova, Z_{0n}, izvest ćemo kao funkcije elemenata niskopropusnog prototipa preko nadomjesnog sklopa. Za inačicu pojasnopropusnog filtra s kratko spojenim stabovima slijedi isti postupak pa ćemo formule za taj slučaj prikazati bez opširnijeg izvoda.

Kao što je prikazano na slici 7.147a), paralelni otvoreni stab, blizu frekvencije ω_0 na kojoj je $\theta=\beta l=\pi/2$, može se nadomjestiti serijskim LC titrajnim krugom. Ulazna impedancija otvorenog staba karakteristične impedancije Z_{0n} iznosi

$$Z = -\mathrm{j}\frac{Z_{0n}}{\tan\theta},$$

gdje je $\theta=\pi/2$ za $\omega=\omega_0$. Ako se dopusti promjena frekvencije, $\omega=\omega_0+\Delta\omega$, gdje je $\Delta\omega \ll \omega_0$, onda je $\theta=\pi/2(1+\Delta\omega/\omega_0)$ pa se ta impedancija može aproksimirati izrazom

$$Z = \mathrm{j}Z_{0n}\tan\frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_0}. \qquad (7\text{–}269a)$$

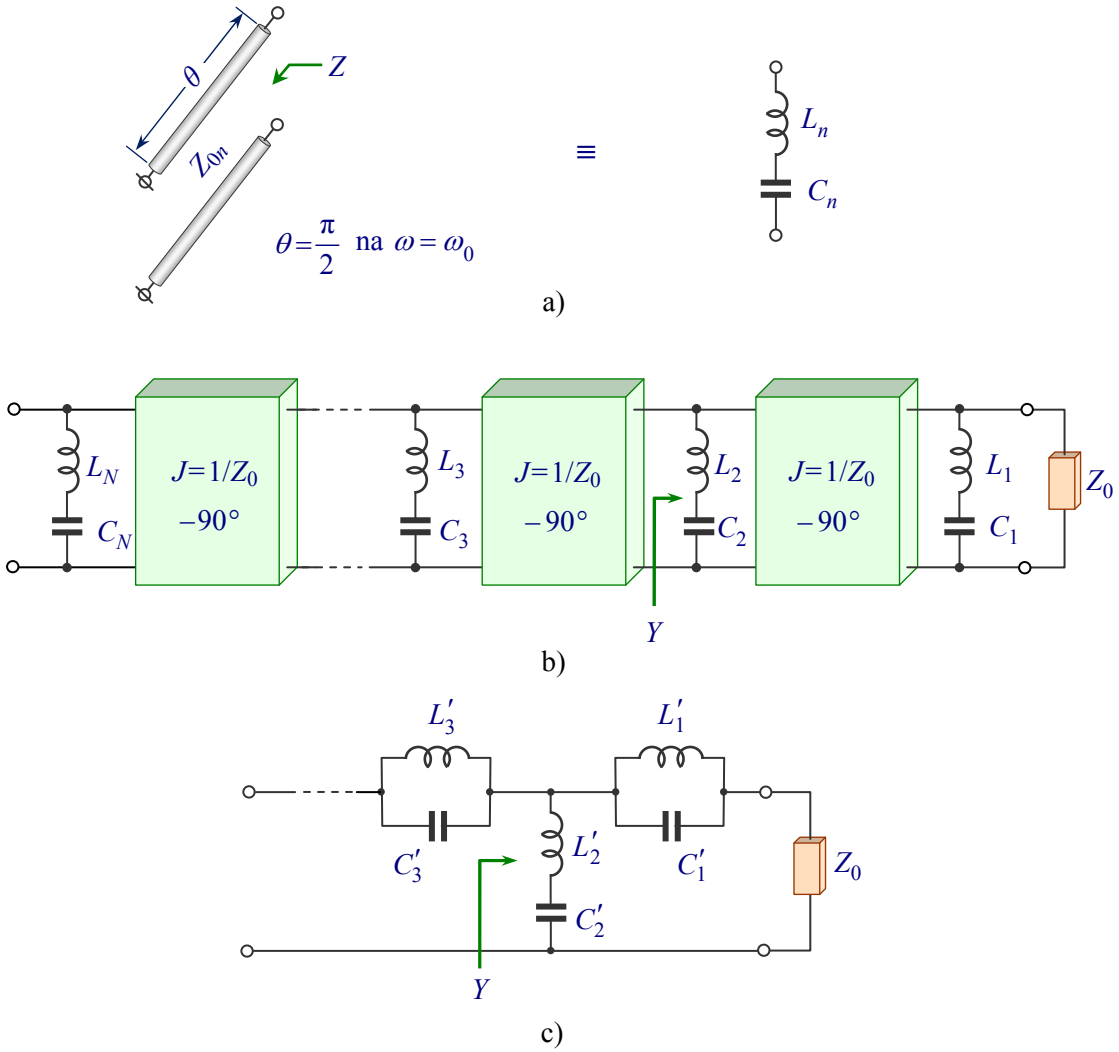
Impedancija ekvivalentnog serijskoga titrajnog kruga glasi

$$Z = \mathrm{j}\omega L_n + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_n} = \mathrm{j}\sqrt{\frac{L_n}{C_n}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \simeq 2\mathrm{j}\sqrt{\frac{L_n}{C_n}}\,\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0} \simeq 2\mathrm{j}L_n\left(\omega-\omega_0\right), \qquad (7\text{–}269b)$$

gdje je $L_nC_n = 1/\omega_0^2$. Izjednačavanjem izraza (7–269) dobiva se karakteristična impedancija staba u ovisnosti o parametrima rezonatora (titrajnoga kruga), tj.

$$Z_{0n} = \frac{4\omega_0 L_n}{\pi}. \qquad (7\text{–}270)$$

Ako se sad uzme da su četvrtvalni odsječci linija između stabova idealni admitancijski invertori, onda se pojasnozaporni filtar sa slike 7.146a) može nadomjestiti sklopom na slici 7.147b). Elementi toga sklopa mogu se dovesti u vezu s koncentriranim elementima niskopropusnog prototipa na slici 7.147c).



Slika 7.147. Nadomjesni sklop pojasnozapornog filtra sa slike 7.146a). **a)** Nadomjesni sklop otvorenog staba električne duljine približno π/2. **b)** Nadomjesni filtarski sklop sa serijskim titrajnim krugovima i admitancijskim invertorima. **c)** Nadomjesni sklop pojasnozapornog filtra s koncentriranim elementima

Prema slici 7.147b), admitancija Y na mjestu titrajnoga kruga L_2C_2 može se napisati kao

$$Y = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_2 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}} + \frac{\dfrac{1}{Z_0^2}}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L_1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}} + \dfrac{1}{Z_0}} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{j}\sqrt{\dfrac{L_2}{C_2}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} + \frac{\dfrac{1}{Z_0^2}}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} + \dfrac{1}{Z_0}}, \tag{7–271a}$$

a admitancija u odgovarajućoj točki nadomjesnog sklopa na slici 7.147c) iznosi

$$Y = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_2' + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2'}} + \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L_1'}} + Z_0} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{j}\sqrt{\dfrac{L_2'}{C_2'}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} + \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\sqrt{\dfrac{C_1'}{L_1'}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} + Z_0}. \tag{7–271b}$$

Ta će dva rezultata biti međusobno jednaka kad su zadovoljeni uvjeti:

$$\frac{1}{Z_0^2}\sqrt{\frac{L_1'}{C_1'}} = \sqrt{\frac{C_1'}{L_1'}}, \qquad \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2'}{C_2'}}. \tag{7–272}$$

Budući da je $L_nC_n = L_n'C_n' = 1/\omega_0^2$, jednadžbe (7–272) mogu se riješiti za L_n pa izlazi:

$$L_1 = \frac{Z_0^2}{\omega_0^2 L_1'}, \qquad L_2 = L_2'. \tag{7–273}$$

Iz izraza (7–270) i primjenom elemenata pojasnozapornog filtra iz tablice 7.4. koji su impedancijski transformirani, dobivaju se ove karakteristične impedancije stabova:

$$Z_{01} = \frac{4Z_0^2}{\pi\omega_0 L_1'} = \frac{4Z_0\omega_0}{\pi g_1\left(\omega_2 - \omega_1\right)}, \qquad Z_{02} = \frac{4\omega_0 L_2'}{\pi} = \frac{4Z_0\omega_0}{\pi g_2\left(\omega_2 - \omega_1\right)}. \tag{7–274}$$

Sad se lako može naći opće rješenje karakteristične impedancije stabova pojasnozapornog filtra, koje glasi

$$Z_{0n} = \frac{4Z_0\omega_0}{\pi g_n\left(\omega_2 - \omega_1\right)}. \tag{7–275}$$

Za pojasnopropusni filtar, koji rabi kratko spojene stabove, odgovarajući je rezultat

$$Z_{0n} = \frac{\pi Z_0\left(\omega_2 - \omega_1\right)}{4g_n\omega_0}. \tag{7–276}$$

Svi ti rezultati vrijede samo za filtre koji imaju ulaznu i izlaznu impedanciju Z_0 pa se ne mogu rabiti za Čebiševljeve filtre s parnim N.

Primjer 7.15. Proračun pojasnozapornog filtra

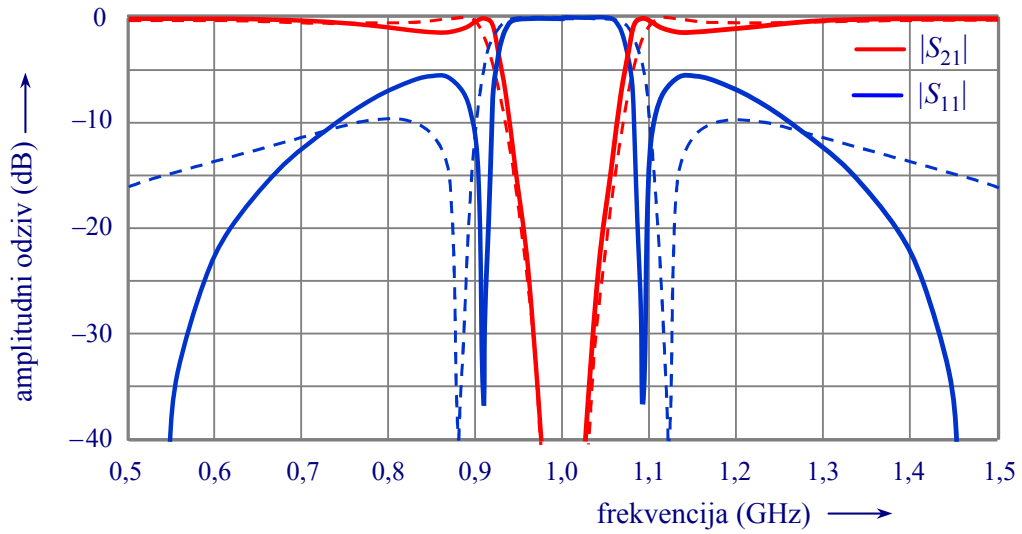
Proračunati pojasnozaporni filtar s trima četvrtvalnim otvorenim stabovima Čebiševljeva odziva valovitosti 0,5 dB prikazan na slici 7.136a). Neka je središnja frekvencija filtra 5 GHz, širina zapornog pojasa 20% i impedancija 50 Ω.

Rješenje:

Relativna širina frekvencijskog pojasa iznosi $(\omega_2 - \omega_1)/\omega_0 = 0{,}2$. Vrijednosti elemenata niskopropusnog prototipa za $N = 3$ mogu se dobiti iz tablice 7.3. Vrijednosti karakterističnih impedancija stabova dobivaju se iz izraza (7–275), tj.

n	g_n	Z_{0n}
1	1,5963	199,4 Ω
2	1,0967	290,2 Ω
3	1,5963	199,4 Ω

Sklop filtra sa stabovima i serijskim odsječcima linija duljine $\lambda_v/4$ proračunan za rad na frekvenciji 1 GHz prikazan je na slici 7.146a). Izračunati odziv filtra na pobudu sinusnim signalom u rasponu frekvencija od 0,5 do 1,5 GHz prikazan je na slici 7.148 punim crtama. Valovitost izvan zapornog područja nešto je veća od 0,5 dB zbog uvedenih aproksimacija prilikom izvođenja formula. Obilježja filtara s četvrtvalnim odsječcima mogu se poboljšati dopuštanjem promjenljive vrijednosti karakterističnih impedancija linijskih odsječaka koji povezuju stabove, prikazano crtkano, vidjeti [14], str. 169.



Slika 7.148. Odziv pojasnozapornog filtra

Pojasnopropusni filtri s kapacitivno vezanim poprečno spojenim rezonatorima

Znatno kompaktnija izvedba pojasnopropusnog filtra može ostvariti kapacitivnom spregom poprečno postavljenih rezonatora koji se mogu izvesti uporabom četvrtvalnih kratko spojenih stabova ili poluvalnih otvorenih stabova [2], [4]. Razmotrimo kompaktni filtar s kratko spojenim stabovima neznatno kraćim od $\lambda/4$ na središnjoj frekvenciji ω_0, kao što je prikazano na slici 7.149. Rezonatori, tj. stabovi, međusobno su vezani kapacitetima koji su serijski spojeni u lanac. Takvi se filtri nerijetko nalaze u ulaznim stupnjevima komunikacijskih prijanika u nižem mikrovalnom području na frekvencijama pokretnih ćelijskih sustava lokalnih mreža

(WLAN), gdje se traže male dimenzije sklopova. Smanjenje dimenzija postiže se primjenom suosnih stabova ispunjenih keramičkim materijalom visoke permitivnosti.

Proračun filtra može se lakše shvatiti s pomoću nadomjesnog sklopa pojasnopropusnog filtra na slici 7.150, u kojoj su paralelni titrajni krugovi (rezonatori) povezani sa susjednim rezonatorima preko invertora impedancije. Kao i u prethodnim izvedbama, impedancijski invertori služe za pretvorbu poprečnih paralelnih titrajnih krugova u serijski spojene serijske titrajne krugove. Dodatni invertori na krajevima filtra služe za transformaciju impedancije na potrebnu razinu. Sličnim razmatranjem kao za pojasnozaporni filtar admitancijski invertori poprimaju vrijednosti:

$$Z_0 J_{01} = \sqrt{\frac{\pi(\omega_2 - \omega_1)}{4\omega_0 g_1}}, \tag{7–277a}$$

$$Z_0 J_{n,n+1} = \frac{\pi(\omega_2 - \omega_1)}{4\omega_0 \sqrt{g_n g_{n+1}}}, \tag{7–277b}$$

$$Z_0 J_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\pi(\omega_2 - \omega_1)}{4\omega_0 g_N g_{N+1}}}. \tag{7–277c}$$

Slično se dobiva za vezne kapacitete:

$$C_{01} = \frac{J_{01}}{\omega_0 \sqrt{1 - (Z_0 J_{01})^2}}, \tag{7–278a}$$

$$C_{n,n+1} = \frac{J_{n,n+1}}{\omega_0}, \tag{7–278b}$$

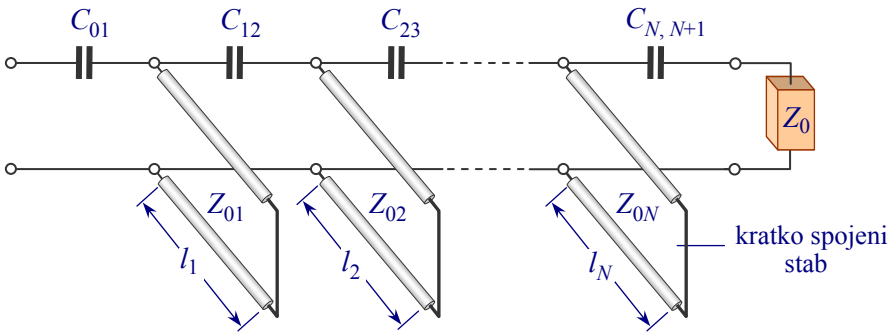
$$C_{N,N+1} = \frac{J_{N,N+1}}{\omega_0 \sqrt{1 - (Z_0 J_{N,N+1})^2}}. \tag{7–278a}$$

Valja uočiti da su izrazi za krajnje kapacitete drukčiji od onih za unutarnje kapacitete.

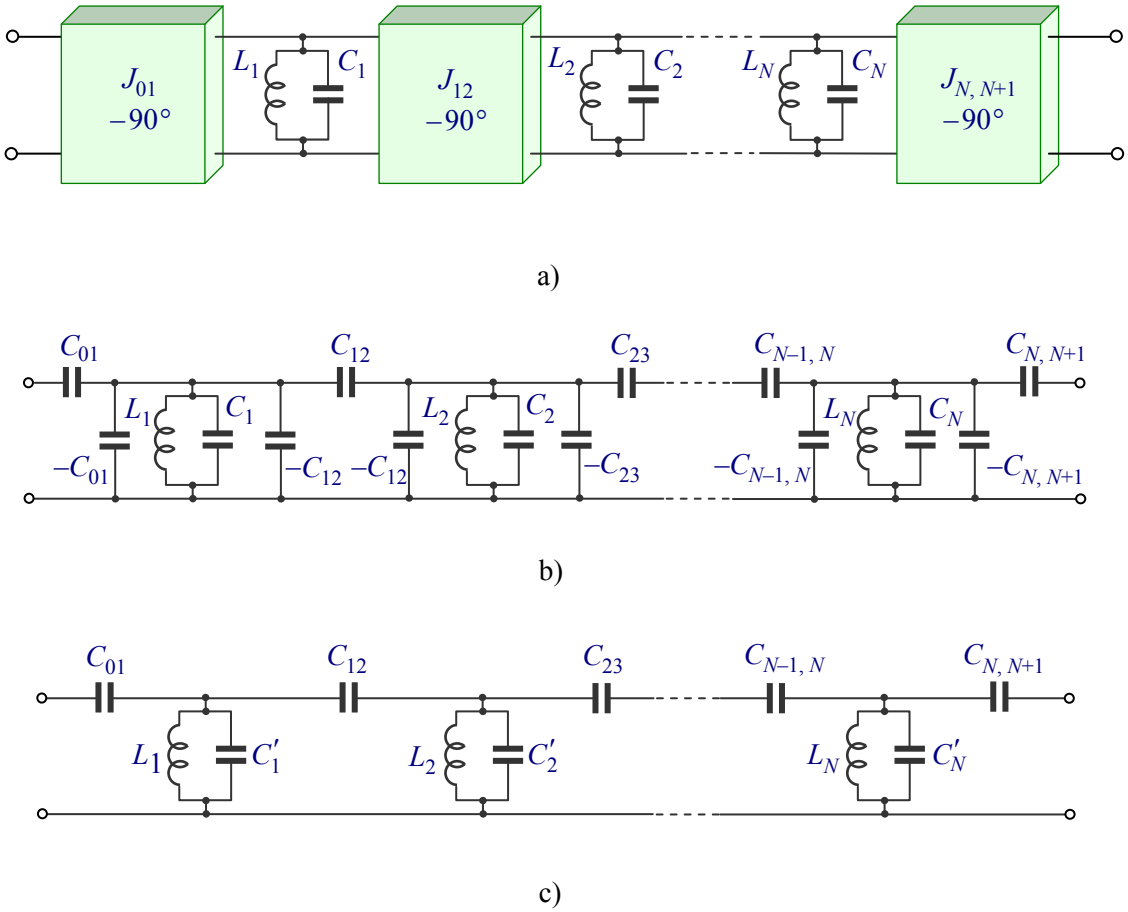
Kao rezultat dobiva se nadomjesni sklop filtra na slici 7.150b). Negativni kapaciteti u mrežama invertora dovoljno su manji od kapaciteta paralelnih titrajnih krugova na slici 7.150 pa se od njih mogu jednostavno oduzeti. Nakon toga, mreža se pojednostavnjuje na oblik prikazan na slici 7.150c), sa stvarnim poprečnim kapacitetima

$$C_n' = C_n + \Delta C_n = C_n - C_{n-1,n} - C_{n,n+1}, \tag{7–279}$$

gdje član $\Delta C_n = -(C_{n\,-1,\,n} + C_{n,\,n+1})$ označuje promjenu kapaciteta rezonatora zbog dodavanja invertora.



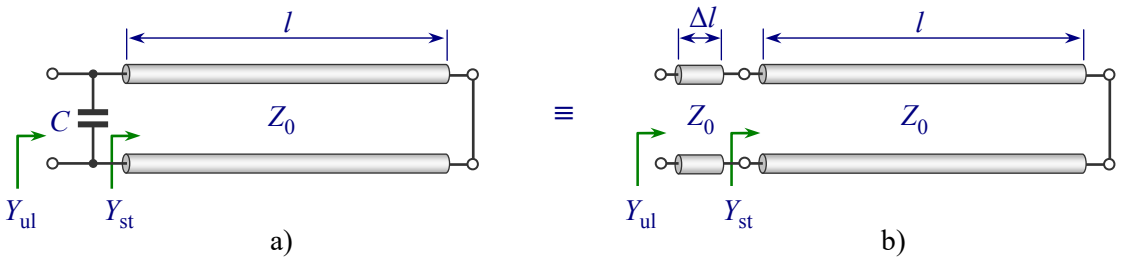
Slika 7.149. Pojasnopropusni filtri s paralelnim stabovima ima ($\theta = \pi/2$ na središnjoj frekvenciji)



Slika 7.150. Nadomjesni sklop pojasnopropusnog filtra sa slike 7.149a). **a)** Općenit pojasnopropusni filtar s admitancijskim invertorima. **b)** Nadomjesni sklop pojasnopropusnog filtra s invertorima oblika kapacitivnog π-četveropola. **c)** Pojednostavljen nadomjesni sklop bez negativnih kapaciteta koji su ugrađeni u paralelne titrajne krugove

Sad se invertor može izvesti kao Π-mreža s kapacitetima, koja je prikazana na slici 7.122d).

Paralelni rezonatori na slici 7.150c) mogu se konačno zamijeniti poprečnim kratko spojenim stabovima, kao što je prikazano na slici 7.149. Valja imati na umu da ω_0 više ne odgovara rezonantnoj frekvenciji stabova jer su vrijednosti kapaciteta rezonatora već promijenjene za iznos ΔC_n. Zbog toga su na središnjoj frekvenciji filtra (ω_0) duljine kratko spojenih stabova (poprečnih rezonatora) kraće od četvrt valne duljine, slika 1.151a). Ta se promjena kapaciteta može nadomjestiti dodavanjem vrlo kratkog odsječka linije (Δl) karakteristične impedancije jednake karakterističnoj impedanciji staba, kao što je prikazano na slici 7.151b). Taj kratki



Slika 7.151. Kompenzacija duljine linijskih rezonatora (titrajnih krugova) zbog paralelnih kapaciteta

odsječak linije opterećen je kratko spojenim stabom ulazne admitancije $Y_{st} = 1/(\mathrm{j}\, Z_0 \tan \beta l)$, pa se admitancija na ulazu u taj kratki odsječak linije može napisati kao

$$Y_{ul} = Y_0 \frac{Y_{st} + \mathrm{j} Y_0 \tan(\beta \Delta l)}{Y_0 + \mathrm{j} Y_{st} \tan(\beta \Delta l)} \simeq Y_{st} + \mathrm{j} \beta \Delta l Y_0 ,$$

gdje je pretpostavljeno $\beta \Delta l \ll 1$, što obično uvijek vrijedi za ovu vrstu filtara. S druge strane, za izvorni sklop prikazan na slici 7.151a) vrijedi $Y_{ul} = Y_{st} + \mathrm{j}\omega_0 C$. Budući da na središnjoj frekvenciji ω_0 ulazne admitancije obaju sklopova na slici 7.151 moraju biti međusobno jednake, dobiva se

$$\Delta l \simeq \frac{\omega_0 C Z_0}{\beta} = \frac{\omega_0 C Z_0}{2\pi} \lambda .$$

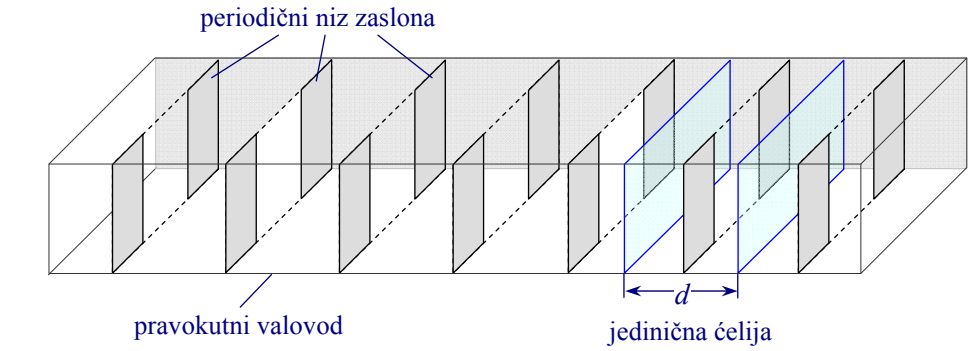
Konačno, za duljinu n-tog staba s uključenim skraćenjem Δl izlazi

$$l_n = \frac{\lambda}{4} + \frac{\omega_0 \Delta C_n Z_0}{2\pi} \lambda , \qquad (7\text{–}280)$$

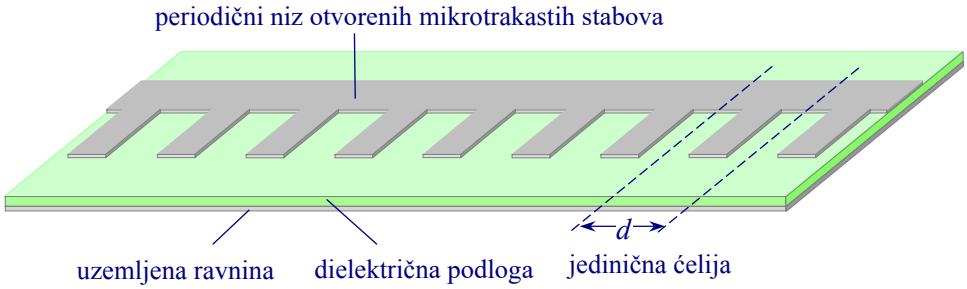
gdje valja voditi računa o činjenici da je ΔC_n negativna veličina što se vidi iz izraza (7–279).

7.6. Periodične prijenosne strukture

Postoje mnogi mikrovalni problemi u kojima nas zanimaju periodično opterećene prijenosne strukture, prijenosne linije i valovodi [1], [2]. Takva struktura može biti obični valovod, s periodično razmaknutim istovjetnim zaslonima ili mikrotrakasta linija s periodično raspoređenim otvorenim ili kratko spojenim stabovima, kao što je prikazano na slici 7.152. No to mogu biti i složenije strukture poput niza istovjetnih šupljina, svaka s po jednim valovodnim izlazom na dvjema suprotnim stijenkama. Ovdje valja uočiti da se radi o periodičnoj strukturi duž koje se može prenositi elektromagnetska energija.



a)



b)

Slika 7.152. Primjeri periodičnih prijenosnih struktura

Jedna od najočitijih odlika periodičnih struktura jest ta da se ponašaju poput električnih filtara. Postoje frekvencijski pojasevi u kojima se tim strukturama mogu prenositi valovi, ali postoje i frekvencijski pojasevi unutar kojih je prijenos nemoguć. Ti se pojasevi naizmjence pojavljuju tvoreći pojasnopropusni filtar s beskonačnim brojem pojaseva propuštanja. S tim je u vezi i zanimljivo ponašanje brzine rasprostiranja vala u ovisnosti o frekvenciji. Naime, ne postoji jedinstveno definirana brzina za poremećaj na zadanoj frekvenciji. Zbog periodične prirode polja, mora se pristupiti analizi s pomoću razvoja u Fourierov red, pri čemu različite Fourierove komponente putuju različitim brzinama. Stoga ne postoji jedinstven način odabira »prave« komponente za definiranje brzine. U stvari, komponente sve kraće i kraće valne duljine, ali iste frekvencije, putuju sve manjim i manjim brzinama, tako da se mogu naći komponente koje zaista putuju vrlo sporo. To je jedno od glavnih svojstava periodičnih struktura u mikrovalnim primjenama, gdje se nerijetko želi da polja putuju brzinama koje su znatno manje od brzine svjetlosti. Takve se primjene nalaze u mikrovalnim cijevima poput magnetrona i cijevi s putujućim valom te u linearnim akceleratorima elementarnih čestica.

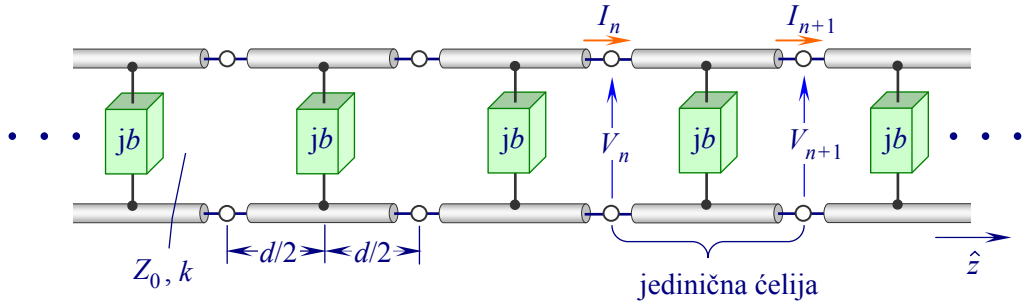
Da bismo mogli shvatiti osnovne značajke, postupke analize i tipična obilježja periodičnih struktura, razmotrit ćemo jednostavan primjer prijenosne linije koja je periodično opterećena poprečno postavljenim kapacitetima. Nadomjesni krug takve linije prikazan je na slici 7.153. U prvoj aproksimaciji, u nižem frekvencijskom području, taj se nadomjesni krug može primijeniti na strukturu prikazanu na slici 7.152b). U skladu s izrazom (3–19), za fizički glatku prijenosnu liniju, poput suosne linije, fazna je brzina

$$v_\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_\mathrm{r} \varepsilon_0}}, \tag{7–281}$$

gdje je ε_r relativna permitivnost nemagnetičnog sredstva u kojem se nalazi vodič. Fazna se brzina u glatkoj liniji može smanjiti samo povećanjem permitivnosti, ε_r. No taj postupak ima velik nedostatak, jer se tada poprečne dimenzije linije također moraju smanjiti kako bi se spriječilo rasprostiranje energije višim modovima. Sličan se problem pojavljuje i kod suosnih valovoda (odjeljak 4.5). Fazna se brzina ne može smanjiti samo povećanjem raspodijeljenog kapaciteta C jer se pri svakoj promjeni konfiguracije linije u smislu povećanja kapaciteta mora istodobno smanjiti raspodijeljeni induktivitet L, da bi se zadovoljila jednakost $LC = \mu_0 \varepsilon$. No ukidanjem ograničenja na fizički glatku liniju, može se ostvariti efektivno povećanje raspodijeljenog kapaciteta, bez utjecaja na vrijednost L. Ako je pritom razmak između susjednih koncentriranih kapaciteta dovoljno mali u odnosu na valnu duljinu, onda se može očekivati da će se linija ponašati kao glatka prijenosna struktura u kojoj je fazna brzina

$$v_\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{L\left(C + \dfrac{C_0}{d}\right)}}, \tag{7–282}$$

gdje je d duljina ćelije (linijskog odsječka) u kojoj je smješten koncentrirani kapacitet C_0.



Slika 7.153. Nadomjesni sklop periodične prijenosne strukture

U nadomjesnom sklopu na slici 7.153 taj je kapacitet ugrađen u paralelnu normiranu admitanciju $jb = j\omega C_0 Z_0$ koja je smještena u sredinu osnovne ćelije duljine d. Na istoj je slici dana i veza između napona i struja na početku i kraju n-tog odsječka (ćelije) prijenosne linije.

Budući da su sve ćelije vezane u kaskadu, prirodno je odabrati $ABCD$-parametre za analizu periodično opterećene linije. Prema definiciji $ABCD$-parametara u odjeljku 5.5.1, veza između napona i struja n-te ćelije periodične strukture može se napisati kao

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}. \tag{7–283}$$

Sad se osnovna ćelija može matematički izraziti u normiranom obliku kao

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \mathrm{j}\sin\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{j}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{j}b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \mathrm{j}\sin\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{j}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix},$$

gdje je $\theta = kd$, a k je fazni koeficijent izvorne, tj. neopterećene linije. Množenjem matrica i uvrštenjem u matričnu jednadžbu koja povezuje napone i struje u kaskadi, dobiva se

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta & \mathrm{j}\left(\frac{b}{2}\cos\theta + \sin\theta - \frac{b}{2}\right) \\ \mathrm{j}\left(\frac{b}{2}\cos\theta + \sin\theta + \frac{b}{2}\right) & \cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}. \tag{7–284}$$

Valja uočiti da je $A = D$, jer je mreža simetrična.

Ako se tom periodičnom strukturom može rasprostirati elektromagnetski val, onda napon i struja na ulazu u ćeliju $n+1$ moraju biti jednaki naponu i struji na ulazu u n-tu ćeliju, s time da se ispusti faktor rasprostiranja koji uzima u obzir fazno kašnjenje zbog konačnog vremena rasprostiranja. Stoga se za val koji se rasprostire u smjeru $\hat{z}$, može napisati:

$$V_n = \mathrm{e}^{\gamma d} V_{n+1}, \tag{7–285a}$$

$$I_n = \mathrm{e}^{\gamma d} I_{n+1}, \tag{7–285b}$$

gdje je $\gamma = \mathrm{j}\beta + \alpha$ koeficijent rasprostiranja vala periodičnom strukturom. Uvrštenje u jednadžbu (7–284) daje

$$\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\gamma d} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\gamma d} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = 0. \tag{7–286}$$

Netrivijalno rješenje ove jednadžbe za V_{n+1} i I_{n+1} dobiva se samo kad je determinanta u izrazu (7–286) jednaka nuli. Rezultat je kvadratna jednadžba svojstvenih vrijednosti za γ, tj.

$$\mathrm{e}^{2\gamma d} - (A + D)\mathrm{e}^{\gamma d} + AD - BC = 0. \tag{7–287}$$

Budući da za sve recipročne mreže vrijedi $AD - BC = 1$, iz te kvadratne jednadžbe izlazi

$$\cosh\gamma d = \frac{A + D}{2} = \cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta, \tag{7–288}$$

gdje su vrijednosti za A i D preuzete iz izraza (7–283). Budući da je desna strana ovoga izraza posve realna, samo dvije kombinacije parametara za α i β u koeficijentu rasprostiranja γ mogu dati realnu vrijednost različitu od nule. Prva kombinacija daje $\alpha = 0$, $\gamma = \mathrm{j}\beta$, a odgovara valu koji se rasprostire strukturom bez gubitaka. U tom se slučaju izraz (7–288) svodi na

$$\cos\beta d = \cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta, \tag{7–289}$$

što se može riješiti za β samo ako je apsolutna vrijednost desne strane manja od jedinice. Valja uočiti da postoji beskonačan skup vrijednosti β koje zadovoljavaju jednadžbu (7–289).

Druga moguća kombinacija, $\gamma = \alpha$, $\beta = 0$ ili π, pripada evanescentnom valu što odgovara zapornom pojasu frekvencija. Budući da je odabrana linija bez gubitaka, u njoj ne dolazi do disipacije nego dolazi do totalne refleksije. Apsolutna vrijednost desne strane izraza (7–289) mora biti veća od jedinice, tj.

$$\cosh \alpha d = \left| \cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta \right| > 1, \tag{7–290}$$

što daje dva rješenja za α; pozitivno rješenje ($\alpha > 1$) ogovara progresivnom putujućem valu, a negativno rješenje ($\alpha < 0$) odgovara putujućem valu u negativnom smjeru $\hat{z}$. Ako je $\beta = \pi$, onda su reaktivni elementi na slici 7.153 međusobno udaljeni $\lambda/2$, što daje istu ulaznu impedanciju kao za slučaj $\beta = 0$.

Dakle, očito je da periodično opterećena prijenosna struktura ima pojaseve propuštanja i zapiranja, koji ovise o frekvenciji i vrijednosti normirane susceptancije. Drugim riječima, takva se struktura ponaša poput električnog filtra. Valovi napona i struja opisani jednadžbama (7–285) vrijede samo na početku i kraju ćelije, ali ne i u području unutar ćelije. Ti su valovi slični elastičnim, *Blochovim valovima*, koji se rasprostiru periodičnom kristalnom rešetkom. Valja također uočiti da je rasprostiranje moguće za oba smjera, $+\hat{z}$ i $-\hat{z}$ jer je i $-\gamma$ rješenje.

Valja nešto reći i o karakterističnoj impedanciji Blochovih valova u periodičnoj strukturi. Na izlazu n-te ćelije ta se impedancija može definirati kao

$$Z_{\mathrm{B}} = Z_0 \frac{V_{n+1}}{I_{n+1}}, \tag{7–291}$$

jer su naponi i struje u prethodnim razmatranjima normirane vrijednosti. Jednadžba (7–286) daje $(A - \mathrm{e}^{\gamma d})V_{n+1} + BI_{n+1} = 0$, pa iz izraza (7–291) izlazi

$$Z_{\mathrm{B}} = \frac{-BZ_0}{A - \mathrm{e}^{\gamma d}}. \tag{7–292}$$

Član $\mathrm{e}^{\gamma d}$ može se izračunati iz kvadratne jednadžbe (7–287) kao

$$\mathrm{e}^{\gamma d} = \frac{A + D \pm \sqrt{(A+D)^2 - 4}}{2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1},$$

gdje je pretpostavljeno da je ćelija simetrična, $A = D$. Uvrštenjem toga u izraz (7–291), karakteristična se impedancija periodične strukture može napisati u konačnom obliku kao

$$Z_{\mathrm{B}}^{\pm} = \frac{\pm BZ_0}{\sqrt{A^2 - 1}}. \tag{7–293}$$

Pozitivni predznak odgovara karakterističnoj impedanciji vala koji se rasprostire u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$, a negativni predznak odgovara valu koji se rasprostire u suprotnome smjeru. Iz matrice (7–284) izlazi da je parametar B posve imaginaran. Za simetričnu mrežu u kojoj je $\alpha = 0$ i $\beta \neq 0$ (pojasni propust) jednadžba (7–288) daje $\cosh \gamma d = A \leq 0$, a izraz (7–293) upućuje na realnu Z_{B}. Ako je $\alpha \neq 0$ i $\beta = 0$ (pojasna brana), onda za simetričnu mrežu jednadžba (7–288) daje $\cosh \gamma d = A \geq 0$, a izraz (7–293) upućuje na imaginarnu Z_{B}. Te su okolnosti slične onima u valovodu, kad je valna impedancija realna za frekvencije iznad zaporne za zadani mod, a imaginarna ispod zaporne frekvencije gdje vladaju evanescentni modovi.

Kad se rabe u praktičnim sustavima, periodične su strukture konačne duljine. Razmotrimo takvu strukturu zaključenu proizvoljnom impedancijom tereta Z_{T}. Tad se koeficijent refleksije na teretu, koji se nalazi na položaju N-te ćelije, može napisati kao

$$\Gamma_{\mathrm{T}} = \frac{V_N^-}{V_N^+} = -\frac{Z_{\mathrm{T}} / Z_{\mathrm{B}}^+ - 1}{Z_{\mathrm{T}} / Z_{\mathrm{B}}^- + 1}. \tag{7–294}$$

Ako je jedinična ćelija simetrična, onda je $Z_{\mathrm{B}}^+ = -Z_{\mathrm{B}}^- = Z_{\mathrm{B}}$ pa se izraz (7–294) svodi na poznati oblik za konvencionalne prijenosne linije

$$\Gamma_{\mathrm{T}} = \frac{Z_{\mathrm{T}} - Z_{\mathrm{B}}}{Z_{\mathrm{T}} + Z_{\mathrm{B}}}. \tag{7–295}$$

Da bi se izbjegle refleksije, periodičnu strukturu treba zaključiti teretom $Z_{\mathrm{T}} = Z_{\mathrm{B}}$, čija je impedancija uvijek realna u pojasu propuštanja za strukturu bez gubitaka. Kad se periodična struktura priključi na proizvoljnu realnu impedanciju, poput valne impedancije valovoda ili karakteristične impedancije prijenosne linije, tad se prilagodba može ostvariti četvrtvalnim transformatorom impedancije.

Osnovno uporište u razmatranju rasprostiranja vala periodičnom strukturom čini teorem poznat pod nazivom *Floquetov teorem*, koji tvrdi: »rješenja elektromagnetskih polja pojedinog moda rasprostiranja u periodičnoj strukturi u uvjetima stacionarnog stanja imaju svojstva da su polja na zadanoj frekvenciji u susjednim ćelijama povezana kompleksnom konstantom«. Dokaz teorema nije teško shvatiti, a slijedi iz ove činjenice. Ako se cijela struktura pomakne za jediničnu ćeliju duljine d duž svoje osi, za koju ćemo uzeti da je os $\hat{z}$, onda će ona i dalje biti posve jednaka izvornoj strukturi pa će se nova valna funkcija razlikovati od izvorne samo za konstantni faktor, a to je upravo faktor rasprostiranja $\mathrm{e}^{-\gamma d}$. Može se uočiti da takvo obilježje ima jednostavna funkcija $\mathrm{e}^{-\gamma z}$, koja pomnožena faktorom $\mathrm{e}^{-\gamma d}$ (kad se z poveća za d), opet daje izvornu funkciju. Ustvari, znatno općenitiju funkciju varijable z čini umnožak $\mathrm{e}^{-\gamma z}$ s proizvoljnom periodičnom funkcijom od z periode d, koja se neće promijeniti ako se koordinata z poveća za d. Takva se funkcija od z može izraziti kao Fourierov red koji se može napisati kao suma eksponencijalnih funkcija oblika $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nz/d}$, gdje je n cijeli broj, pozitivan ili negativan. Otuda je valna funkcija suma eksponencijalnih funkcija $\mathrm{e}^{-(\gamma + \mathrm{j}2\pi n/d)z}$ s pripadajućim koeficijentima.

Taj se rezultat može različito tumačiti ovisno o prirodi koeficijenta rasprostiranja γ, koji općenito može biti kompleksan. No da bi struktura bila bez gubitaka γ mora biti posve realan ili posve imaginaran broj. Ako je realan, onda svi članovi sume porastom varijable z opadaju po eksponencijalnom zakonu tvoreći evanescentne »valove«. Nasuprot tomu, ako je γ posve imaginaran ($\gamma = \mathrm{j}\beta$), primjenom definicije

$$\beta_n = \beta + \frac{2\pi n}{d}, \tag{7–296}$$

eksponencijalne funkcije u sumi mogu se napisati kao $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z}$. Ta je funkcija poznata pod nazivom *prostorni harmonik*. Vraćanjem vremenske ovisnosti preko faktora $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, svaka pojedinačna Fourierova komponenta poprima oblik $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta_n z)}$. Taj prostorno vremenski faktor opisuje napredujući val kružne frekvencije ω, valne duljine $2\pi/\beta_n$, koji putuje duž osi $\hat{z}$ faznom brzinom

$$v_{\mathrm{f}n} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\beta + \dfrac{2\pi n}{d}}. \tag{7–297}$$

Drugim riječima, primjenom izraza (7–296) elektromagnetski se poremećaj može tumačiti superpozicijom mnoštva putujućih valova različitih brzina $v_{\mathrm{f}n}$, koje postaju to manje što je n veći. Fazni koeficijent β_n može postati negativan za velike i negativne vrijednosti n. U skladu s izrazom (7–297), i fazna će brzina biti negativna. S druge strane, grupna se brzina n-tog prostornoga harmonika može napisati, u skladu s definicijom (2–114), kao

$$v_{gn} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta_n} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\left(\beta + 2\pi n/d\right)}{\mathrm{d}\omega}} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}} = v_g \,. \tag{7–298}$$

Ta je grupna brzina zajednička svim harmonicima. Iz izraza (7–297) i (7–298) vidi se da za neke prostorne harmonike (približno polovicu njih) fazna i grupna brzina imaju suprotne predznake, što znači da se njihova faza i energija koju prenose gibaju jedna nasuprot drugoj. To se svojstvo rabi u oscilatorima s povratnim (protusmjernim) valom u odjeljku 8.10. Izraz *protusmjerni val*, ili *povratni val*, uobičajeno se rabi za opis pojave kod koje su fazne i grupne brzine suprotnog predznaka.

Premda se Blochovi valovi mogu razviti u beskonačan skup prostornih harmonika, svi prostorni harmonici moraju biti istodobno prisutni da bi ukupno polje zadovoljilo sve rubne uvjete. Svojstvena jednadžba za β u periodičnoj strukturi uvijek daje rješenja oblika (7–296) kao dodatak osnovnome rješenju. Ta druga moguća rješenja upravo su prostorni harmonici. Stoga potpun dijagram k-β tvori krivulju $k_0 d$, u ovisnosti o βd, gdje je βd neprekinuta periodična funkcija izvan intervala $-\pi \le \beta d \le \pi$. Nagib pravca koji prolazi ishodištem i točkom na toj krivulji daje faznu brzinu, a nagib tangente na krivulju u toj točki daje grupnu brzinu.

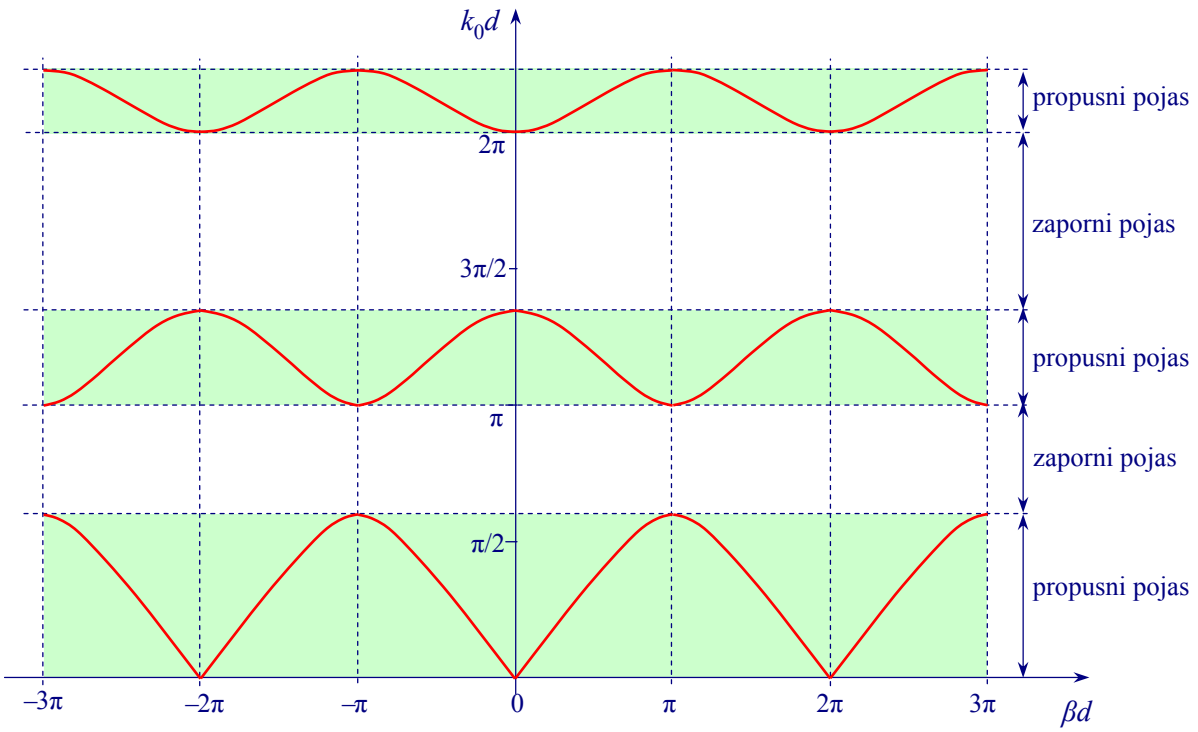
Ako se prijenosna linija na slici 7.153 periodično optereti kapacitetima, onda jednadžba (7–289) poprima oblik

$$\cos\beta d = \cos kd - \frac{b}{2}\sin kd = \cos kd - Kkd\sin kd \,, \tag{7–299}$$

gdje je veličina b izražena kao

$$b = \omega C_0 Z_0 = 2Kkd \,, \tag{7–300}$$

i gdje je uveden faktor $K = \omega C_0 Z_0/(2kd)$.



Slika 7.154. Dijagram k-β prijenosne linije periodično opterećene kapacitetima za $K = 0{,}393$

Jednadžba (7–299) upućuje na periodično ponavljanje pojasnopropusne i pojasnozaporne karakteristike. Na slici 7.154 prikazan je dijagram k-β disperzivne periodične strukture za poseban slučaj $K = 0{,}393$. Pri tomu je $b = 0{,}786\,kd$. Uz tu se vrijednost pojasni propust u najnižem frekvencijskom području nalazi u rasponu vrijednosti $0 < kd < 0{,}6\,\pi$. Iza propusnog pojasa slijedi zaporni pojas na koji se nadovezuje novi pojasni propust i tako se dalje pojasevi propusta i zapiranja međusobno izmjenjuju.

Dijagrami k-β drugih periodičnih prijenosnih struktura imaju sličan oblik onome na slici 7.154. Ako su pak admitancije na slici 7.153 induktivnog karaktera, onda će područja pojasnih i zapornih pojasa međusobno zamijeniti položaje na ordinati $k_0 d$. Stoga će se u niskom frekvencijskom području umjesto pojasnoga propusta pojaviti zaporni pojas, što je u skladu s fizikalnom intuicijom, jer paralelni induktivitet stvara kratki spoj na nultoj frekvenciji.

Budući da je k_0 linearna funkcija frekvencije, slika istodobno odgovara dijagramu ω-β.

7.7. Feritne komponente

Dosad smo razmatrali samo recipročne naprave i mreže kod kojih odziv između bilo koja dva prolaza, i i j, nije ovisio o smjeru toka signala (stoga je $S_{ij} = S_{ji}$). To je svojstveno svim napravama koje se sastoje od pasivnog i izotropnog materijala. No pri uporabi anizotropnih materijala koji imaju različita električne ili magnetske značajke za različite smjerove, može se očekivati nerecipročno ponašanje naprava.

U ovom ćemo odjeljku proučiti rasprostiranje valova ferimagnetskim materijalima i naučiti kako se to znanje može uporabiti za konstrukciju feritnih naprava poput izolatora, cirkulatora, faznih zakretača i giratora [1], [2], [16]-[18]. To su sve nerecipročne naprave jer sadrže magnetizirane ferimagnetske smjese (ferite) koje spadaju u skupinu anizotropnih materijala.

Feriti su polikristalni magnetski oksidi (ferimagnetski materijali) s općenitom kemijskom formulom $MO{\cdot}Fe_2O_3$ u kojoj je M dvovalentni metal poput mangana, magnezija, cinka, nikla, kobalta, kadmija itd. Među anizotropne materijale uz spomenute okside željeza spada i YIG (itrij-željezo-granat) empirijske formule $Y_3Fe_5O_{12}$. U feritima, atomima se željeza izmjenjuju orijentacije magnetskih dipola. No ovdje magnetski momenti dviju orijentacija nisu međusobno jednaki što rezultira magnetizmom. Budući da ti materijali imaju znatno manju provodnost od metala, u njima je moguće rasprostiranje mikrovalnih signala. Stoga se u feritima lako može uspostaviti interakcija između vanjskog statičkog magnetskog polja i unutarnjeg dinamičkog (mikrovalnog) elektromagnetskog polja.

Nasuprot feromagnetskim materijalima (npr. željezo, čelik), ferimagnetski materijali imaju velik otpor i jako su anizotropni na mikrovalnim frekvencijama. Magnetska se anizotropnost ferimagnetskih materijala postiže utiskivanjem vanjskog magnetizirajućeg polja. To polje nastoji postrojiti magnetske dipole u feritnom materijalu kako bi nastao rezultantni moment magnetskog dipola koji uzrokuje njihovo precesijsko gibanje na frekvenciji kojom je moguće upravljati promjenom jakosti statičkog magnetskog polja. Ako je mikrovalni signal kružno polariziran u smjeru precesije magnetskih dipola, onda će doći do jake interakcije s dipolnim momentima. No za suprotnu će polarizaciju interakcija izostati. Uz zadani smjer rotacije, smjer polarizacije mijenja se sa smjerom rasprostiranja, što znači da će se mikrovalni signali različito rasprostirati u različitim smjerovima. Taj se učinak može korisno uporabiti za izvođenje usmjernih naprava poput feritnoga izolatora i cirkulatora. To također uključuje mogućnost upravljanja utisnutim mikrovalnim signalom mijenjanjem jakosti vanjskog statičkog magnetskog polja, što se može iskoristiti za izvedbe elektronički (strujno) upravljanih faznih zakretača, elektromagnetskih sklopka te elektronički upravljanih rezonatora i filtara.

7.7.1. Magnetski materijali

S gledišta elektromagnetskih polja, makroskopske značajke materijala mogu se opisati njegovom relativnom permeabilnošću μ_r, koja je definirana kao

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \tag{7–301}$$

gdje su veličine μ i μ_0 definirane u odjeljku 2.3. Vektor magnetskog toka (magnatske indukcije) $\vec{B}$ u vezi je s vektorom jakosti magnetskog polja $\vec{H}$ preko konstante permeabilnosti kao

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_r\mu_0\vec{H}\,. \tag{7–302}$$

U sljedećim ćemo razmatranjima magnetski tok $\vec{B}$ uzeti kao odziv materijala na pobudu magnetskim poljem $\vec{H}$.

U tablici 7.5. prikazana su osnovna magnatska svojstva nekih poznatih materijala [15].

Tablica 7.5. Relativna permeabilnost nekih poznatih materijala

Materijal	Tip	Relativna permeabilnost	Materijal	Tip	Relativna permeabilnost
srebro	dijamagnetski	0,99998	aluminij	paramagnetski	1,00002
olovo	dijamagnetski	0,999983	paladij	paramagnetski	1,0008
bakar	dijamagnetski	0,999991	kobalt	feromagnetski	250
voda	dijamagnetski	0,999991	nikal	feromagnetski	600
vakuum	nemagnetski	1	čelik	feromagnetski	2000
zrak	paramagnetski	1,0000004	čisto željezo	feromagnetski	200.000

Magnetska svojstva materijala određena su orbitalnim gibanjem elektrona, elektronskim spinom i nuklearnim spinom. Svo troje može se modelirati slabom atomskom strujom koja teče u kružnim petljama magnetskog momenta IS, gdje je I struja u amperima, a S je površina petlje u četvornim metrima.

Magnetsko polje stvoreno strujnom petljom slično je magnetskom polju permanentnog magneta [15]. Stoga se strujna petlja može zamijeniti magnetskim dipolom sa sjevernim (N) i južnim (S) polom kao na slici 7.155. Veličina magnetskog momenta $\vec{m}$ petlje površine S iznosi $m = IS$, a smjer mu je okomit na ravninu petlje u skladu s pravilom desne ruke. Magnetizacija u materijalu povezana je s atomskim strujnim petljama koje su, s jedne strane, posljedica orbitalnog gibanja elektrona oko atomske jezgre i sličnih gibanja protona jednog oko drugog unutar jezgre, te s druge strane, elektronskog spina ili rotacije elektrona oko vlastite osi. Budući da je magnetski moment jezgre znatno slabiji od magnetskog momenta elektrona, magnetski je moment atoma uglavnom određen zbrojem magnetskih momenata njegovih elektrona. Magnetski je moment materijala pak određen međudjelovanjem momenata magnetskih dipola njegovih atoma s utisnutim vanjskim magnetskim poljem. To ponašanje ovisi o kristalnoj strukturi materijala i služi kao osnova za klasifikaciju materijala u dijamagnetske,



Slika 7.155. Mali magnetski štapić ekvivalentan je strujnoj petlji, tj. magnetskom momentu



Slika 7.156. Magnetski momenti materijala s različitim magnetskim svojstvima

paramagnetske, feromagnetske, antiferomagnetske ili ferimagnetske. Dijamagnetski materijali uopće nemaju permanentne dipolne momente. No materijali s permanentnim dipolnim momentima koji pripadaju preostalim vrstama imaju vrlo različita svojstva i organizaciju strukture (slika 7.156).

Orbitalni magnetski moment i spinski magnetski moment

Da bismo zadržali što jednostavniji prikaz magnetskih materijala, započet ćemo s razmatranjem na osnovi klasičnog modela atoma, u kojemu se pretpostavlja da se elektroni kreću u kružnim putanjama oko jezgre, a zatim ćemo rezultate proširiti primjenom kvantno-mehaničkog modela materije. Elektron s nabojem $-q$ koji se kreće konstantnom brzinom v u kružnoj putanji polumjera r napravi jednu revoluciju za vrijeme $T=2\pi r/v$. To kružno gibanje elektrona stvara slabu kružnu struju I (strujnu petlju) iznosa

$$I = -\frac{q}{T} = -\frac{qv}{2\pi r}. \tag{7–303}$$

Veličina pripadajućeg *orbitalnog magnetskog momenta* $\vec{m}_o$ iznosi

$$m_o = IS = -\frac{qv}{2\pi r}\pi r^2 = -\frac{qvr}{2} = -\frac{q}{2m_e}P_e, \tag{7–304}$$

gdje je $P_e = m_e vr$ *kutni moment elektrona*, a m_e masa elektrona u mirovanju. U skladu s rezultatima kvantne fizike, orbitalni kutni moment je kvantiziran, tj. P_e je uvijek neki cjelobrojni višekratnik reducirane Planckove konstante $\hbar = h/2\pi$, gdje je h Planckova konstanta (dodatak B). To jest, $P_e = 0, \hbar, 2\hbar, \ldots$ Otuda je minimalni orbitalni magnetski moment elektrona

$$m_o = -\frac{q\hbar}{2m_e}. \tag{7–305}$$

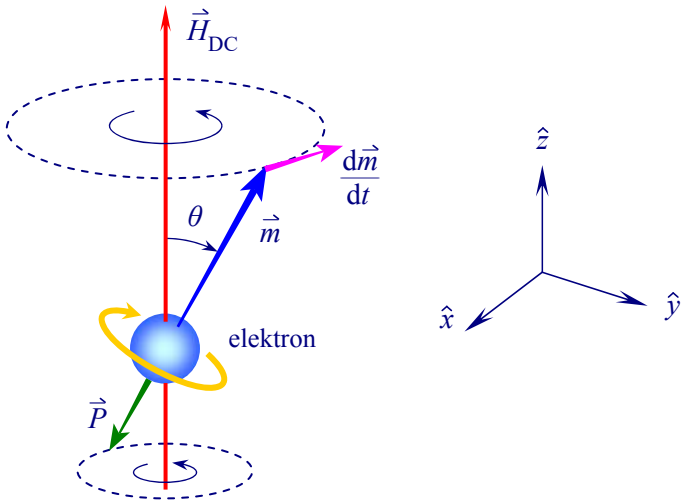
Unatoč činjenici da sve tvari sadrže elektrone koji posjeduju magnetske dipolne momente, većina je tvari efektivno nemagnetična. Tomu je tako jer su bez vanjskog magnetskog polja atomi većine materijala nasumično orijentirani pa je preostali magnetski moment jednak nuli ili je vrlo mali.

Uz magnetski moment koji nastaje orbitalnim gibanjem, rotacijom oko vlastite osi elektron stvara i *spinski magnetski moment*, m_s. Iz kvantne teorije izlazi

$$m_s = -\frac{q\hbar}{2m_e} = 9{,}27 \cdot 10^{-24}\ \text{Am}^2, \tag{7–306}$$

što je posve jednako minimalnom orbitalnom magnetskom momentu m_o. Elektroni atoma s neparnim brojem elektrona obično se pojavljuju u parovima u kojima članovi para imaju obratne smjerove spinova. Stoga se njihovi doprinosi poništavaju. Ako je broj elektrona u atomu neparan, onda je spinski magnetski moment konačan zbog nesparenog elektrona.

Prema relaciji (7–305) spinski je magnetski moment obrnuto razmjeran masi elektrona. No i jezgra atoma stvara spinsko gibanje, ali zbog toga što je njezina masa znatno veća od mase elektrona njezin je magnetski moment za tri reda veličine manji od onog za elektron.



Slika 7.157. Magnetski moment elektrona koji se vrti oko svoje osi u statičkom magnetskom polju

Većina makroskopskih teorija mikrovalnih feritnih naprava temelji se na jednadžbi gibanja vektora magnetizacije [16] - [18]. Ta se jednadžba može izvesti razmatranjem elementarnog magnetskog dipola s dipolnim momentom $\vec{m}$ u statičkom (istosmjernom) magnetskom polju $\vec{H}_{DC}$. U uvjetima ravnoteže, vektor dipolnog momenta gleda u smjeru koji se, primjerice, može postaviti u smjeru osi $\hat{z}$. Pretpostavimo sad da je magnetski dipol nagnut zbog djelovanja male vanjske sile tako da zatvara kut θ s $\vec{H}_{DC}$, kao što je prikazano na slici 7.157.

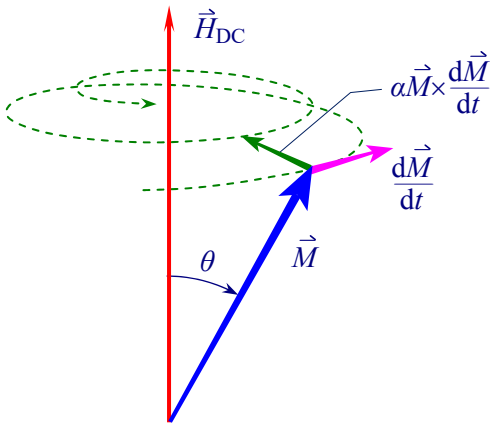
Elektron se može predočiti mehaničkim zvrkom pa za njega vrijedi drugi Newtonov zakon

$$\vec{T} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \tag{7–307}$$

koja kaže da je mjera promjene kutnog momenta $\vec{P}$ elektrona (zvrka) u njutn metar sekundama jednaka utisnutom mehaničkom okretnom momentu $\vec{T}$ u njutn metrima. No magnetski je moment elektrona povezan s kutnim momentom preko relacije

$$\vec{m} = -\gamma \vec{P}. \tag{7–308}$$

Kao što se vidi, ta su dva momenta međusobno antiparalelna. Konstanta $\gamma = 1{,}759 \cdot 10^{11}$ kulona po kilogramu naziva se *giromagnetski omjer* ili *specifični naboj* elektrona jer označuje omjer naboja i mase elektrona. Ako se strujna petlja nađe u statičkom magnetskom toku $\vec{B}_{DC}$, onda prima mehanički okretni moment $m \times \vec{B}_{DC}$. To je onaj isti okretni moment koji usmjerava magnetsku iglu kompasa prema sjevernome polu. Iz jednadžba (7–307) i (7–308) izlazi



Slika 7.158. Giromagnetski učinak u feritu s gubitcima

$$\vec{T} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}t}. \tag{7–309}$$

Ako se elektron nalazi u statičkom magnetskom polju $\vec{H}_{\mathrm{DC}}$, onda će mehanički okretni moment na $\vec{m}$ biti jednak

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}_{\mathrm{DC}} = \mu_0 \vec{m} \times \vec{H}_{\mathrm{DC}}. \tag{7–310}$$

Kombiniranjem relacija (7–309) i (7–310) dobiva se *jednadžba gibanja magnetskog dipola*

$$\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\mu_0(\vec{m} \times \vec{H}_{\mathrm{DC}}). \tag{7–311}$$

Ta se jednadžba može napisati i kao

$$\gamma P B_{\mathrm{DC}} \sin\theta = \omega_{\mathrm{L}} P \sin\theta = m\mu_0 H_{\mathrm{DC}} \sin\theta, \tag{7–312}$$

gdje je θ kut između vektora $\vec{m}$ i $\vec{H}_{\mathrm{DC}}$, a $\omega_{\mathrm{L}} = \gamma\mu_0 H_{\mathrm{DC}}$ *Larmorova frekvencija* ili *frekvencija precesije*. Ta frekvencija linearno ovisi o jakosti utisnutog statičkog magnetskog polja, a ne ovisi o kutu θ.

Feritni se materijal može nadomjestiti skupom N efektivnih elektrona (nesparenih spinova) koji se vrte unutar jediničnog volumena. Budući da su razmaci između elektrona atomskih dimenzija, makroskopski se može uzeti da su efektivni elektroni jednoliko raspoređeni i da se ukupni magnetski moment može izraziti sumom svih magnetskih momenata efektivnih elektrona po jedinici volumena. Tako se dolazi do vektora magnetizacije $\mathrm{d}\vec{M}_{\mathrm{DC}} = N\vec{m}$ koji je sličan vektoru jakosti magnetskog polja. Sad se jednadžba (7–311) može napisati u ovom obliku

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}_{\mathrm{DC}}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\mu_0(\vec{M}_{\mathrm{DC}} \times \vec{H}_{\mathrm{DC}}). \tag{7–313}$$

Tenzor susceptibilnosti u neograničenom sredstvu

Kad je magnetizirani ferit pobuđen ravnim elektromagnetskim valom, tad se ukupno efektivno magnetsko polje u jednadžbi (7–313) može opisati superpozicijom statičkog magnetskog polja $\vec{H}_{\mathrm{DC}}$ i harmonijskog mikrovalnog magnetskog polja $\vec{H}_{\mathrm{rf}}$, tj.

$$\vec{H}_{\mathrm{uk}} = \vec{H}_{\mathrm{DC}} + \vec{H}_{\mathrm{rf}}. \tag{7–314}$$

Jednako tako, ukupna se magnetizacija sastoji od istosmjerne i mikrovalne magnetizacije $\vec{M}_{\mathrm{DC}}$, odnosno $\vec{M}_{\mathrm{rf}}$, tj.

$$\vec{M}_{\mathrm{uk}} = \vec{M}_{\mathrm{DC}} + \vec{M}_{\mathrm{rf}}. \tag{7–315}$$

Uz pretpostavku da smjer vektora $\vec{H}_{\mathrm{DC}}$ koincidira sa smjerom vektora $\vec{M}_{\mathrm{DC}}$, za taj je smjer odabrana os $\hat{z}$. Uvrštenjem izraza (7–314) i (7–315) u jednadžbu (7–313) rastavljenu na komponente dobiva se:

$$\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}t} = -\gamma\mu_0(H_{\mathrm{DC}} + H_z)M_y + \gamma\mu_0 H_y(M_{\mathrm{DC}} + M_z), \tag{7–316a}$$

$$\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}t} = \gamma\mu_0(H_{\mathrm{DC}} + H_z)M_x - \gamma\mu_0 H_x(M_{\mathrm{DC}} + M_z), \tag{7–316b}$$

$$\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}t} = -\gamma\mu_0 H_y M_x + \gamma\mu_0 H_x M_y, \tag{7–316c}$$

jer je $\mathrm{d}M_{\mathrm{DC}}/\mathrm{d}t = 0$. U razvoju po komponentama, radi kraćeg zapisa ispuštena je oznaka »rf« za mali izmjenični signal. Ako se pretpostavi da su komponente mikrovalnoga signala znatno

manje od istosmjernih (statičkih) veličina, onda je opravdano zanemariti članove koji sadrže umnoške harmonijskih veličina. Kako se radi o harmonijskim veličinama može se primijeniti fazorski način označivanja pa se jednadžbe (7–316) svode na ove fazorske jednadžbe:

$$\mathrm{j}\omega M_x = -\omega_\mathrm{L} M_y + \omega_\mathrm{m} H_y, \tag{7–317a}$$

$$\mathrm{j}\omega M_y = \omega_\mathrm{L} M_x - \omega_\mathrm{m} H_x, \tag{7–317b}$$

$$\mathrm{j}\omega M_z \simeq 0, \tag{7–317c}$$

gdje je $\omega_\mathrm{m}=\gamma\mu_0 M_\mathrm{DC}$ *kružna frekvencija magnetizacije*. Ako se jednadžbe (7–317) riješe za M_x, M_y i M_z, onda se dobivaju ove jednadžbe:

$$M_x = \chi_{xx} H_x + \chi_{xy} H_y, \tag{7–318a}$$

$$M_y = \chi_{yx} H_x + \chi_{yy} H_y, \tag{7–318b}$$

$$M_z = 0, \tag{7–318c}$$

koje opisuju prisilnu precesiju magnetskih dipola i pokazuju linearnu vezu između $\vec{H}_\mathrm{DC}$ i $\vec{M}$. Veličine χ_{xx}, χ_{xy}, χ_{yx} i χ_{yy} označuju članove tenzora magnetske susceptibilnosti $\bar{\bar{\chi}}$:

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \frac{\omega_\mathrm{L}\omega_\mathrm{m}}{\omega_\mathrm{L}^2 - \omega^2}, \tag{7–319a}$$

$$\chi_{xy} = -\chi_{yx} = \mathrm{j}\frac{\omega\omega_\mathrm{m}}{\omega_\mathrm{L}^2 - \omega^2}. \tag{7–319b}$$

Skup jednadžba (7–318) može se napisati u matričnom obliku kao

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}, \tag{7–320}$$

gdje je $[M]$ odziv magnetizacije na pobudu magnetskim poljem $[H]$ preko tenzora susceptibilnosti $\bar{\bar{\chi}}$. Kad u anizotropnom feritnom materijalu istodobno djeluju i statičko i dinamičko magnetsko polje, tad veza između gustoće magnetskog toka i magnetskog polja poprima oblik

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{M} + \vec{H} = \bar{\bar{\mu}}\vec{H}, \tag{7–321a}$$

gdje je $\bar{\bar{\mu}}$ *tenzor permeabilnosti*. Za izotropni je materijal $\vec{B} = \mu\vec{H}$, gdje je μ skalar (konstanta permeabilnosti). Budući da je sad poznata veza između vektora magnetizacije i magnetskog polja, jednadžba (7–321a) može se napisati u matrični oblik kao

$$\left[\vec{B}\right] = \bar{\bar{\chi}}\left[\vec{H}\right] + \mu_0 [U]\left[\vec{H}\right], \tag{7–321b}$$

gdje je $[U]$ jedinična matrica. Otuda tenzor permeabilnosti za materijal pobuđen statičkim magnetskim poljem u smjeru osi $\hat{z}$ poprima oblik

$$\bar{\bar{\mu}} = \mu_0 \{[U] + [\chi]\} = \begin{bmatrix} \mu & \mathrm{j}\kappa & 0 \\ -\mathrm{j}\kappa & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix}, \tag{7–322}$$

gdje je $\mu=\mu_0(1+\chi_{xx})=\mu_0(1+\chi_{yy})$ ili

$$\mu = \mu_0\left[1 + \frac{\omega_\mathrm{L}\omega_\mathrm{m}}{\omega_\mathrm{L}^2 - \omega^2}\right], \tag{7–323a}$$

a $\kappa = -\mathrm{j}\mu_0\chi_{xy}$ ili

$$\kappa = \mu_0 \frac{\omega\omega_\mathrm{m}}{\omega_\mathrm{L}^2 - \omega^2}. \tag{7–323b}$$

Materijal koji posjeduje takav tenzor permeabilnosti naziva se *girotropni materijal*. Valja odmah primijetiti da samo jedna komponenta magnetskog polja (*x* ili *y*) stvara dvije komponente magnetskog toka (*x* i *y*), koje su međusobno pomaknute u fazi za 90°. Materijal je anizotropan jer mu je matrica, koja opisuje tenzor permeabilnosti, nesimetrična. Stoga se može očekivati da će mikrovalne mreže koje sadrže takve materijale biti nereciprocne.

Okrene li se smjer statičkog polja $\vec{H}_\mathrm{DC}$, doći će do promjene predznaka veličine $\vec{M}_\mathrm{DC}$ pa će se isto dogoditi i s ω_L i ω_m. Relacije (7–323) pokazuju da tad dolazi do promjene predznaka veličine κ, ali ne i μ. No ako nije pobuđen statičkim poljem ($H_\mathrm{DC}=0$), materijal nije magnetiziran pa je $\omega_\mathrm{L}=\omega_\mathrm{m}=0$. Tad iz jednadžbe (7–323) izlazi $\mu=\mu_0$, $\kappa=0$, što znači da se materijal ponaša kao obični izotropni materijal, što se moglo i očekivati. Budući da se za normalne jakosti statičkog magnetskog polja Larmorova frekvencija nalazi u mikrovalnome području, magnetizirani feriti nalaze mnoštvo korisnih primjena u mikrovalnim napravama.

U dosadašnjim su razmatranjima zanemareni gubitci u materijalu pa su realne veličine μ i κ singularne na Larmorovoj frekvenciji ω_L, kao što se vidi iz izraza (7–323). No u praksi postoje konačni gubitci koji su posljedica interakcije između susjednih spinova te između spinova i kristalne rešetke pa μ *i* κ ostaju konačni. Slično se zbiva u šupljinskom rezonatoru u okolišu rezonantne frekvencije, gdje polja ne mogu poprimiti beskonačne vrijednosti neovisno o tomu koliki bili gubitci. U praksi međutim nastaju i dodatni gubitci pri slabim statičkim poljima koja ne mogu potpuno zasititi ferit pa se za stabilizaciju vektora magnetizacije u jednadžbu gibanja mora uvesti prigušni član. Gubitci se mogu uključiti preko kompleksne rezonantne frekvencija, tj. tako da se ω_L zamijeni s $\omega_\mathrm{L}+\mathrm{j}\alpha\omega$, kao što smo to učinili pri razmatranju faktora dobrote rezonatora. Veličina α, faktor prigušenja, povezana je sa širinom frekvencijskog pojasa, tj. s faktorom dobrote precesijskog gibanja. Sad veličine μ i κ poprimaju kompleksne vrijednosti, tj.

$$\mu = \mu' - \mathrm{j}\mu'',$$
$$\kappa = \kappa' - \mathrm{j}\kappa''.$$

Drugim riječima, nakon što je impulsno pobuđen poprečnom komponentom magnetskog polja (precesijska sila), vektor magnetizacije postupno se vraća u svoj početni položaj spiralnom stazom zbog djelovanja prigušnih sila, kao što je prikazano na slici 7.158.

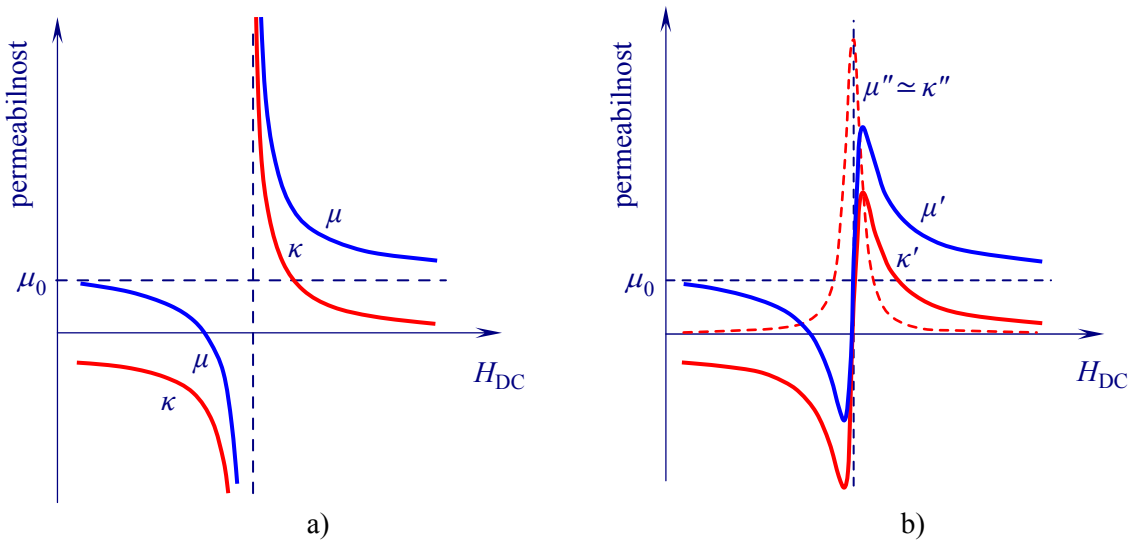
Tenzor permeabilnosti za feritno sredstvo s gubicama poprima oblik

$$\overline{\overline{\mu}} = \mu_0 \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{\omega_\mathrm{m}(\omega_\mathrm{L} + \mathrm{j}\alpha\omega)}{(\omega_\mathrm{L} + \mathrm{j}\alpha\omega)^2 - \omega^2} & -\mathrm{j}\dfrac{\omega_L\omega_\mathrm{m}}{(\omega_\mathrm{L} + \mathrm{j}\alpha\omega)^2 - \omega^2} & 0 \\ \mathrm{j}\dfrac{\omega_L\omega_\mathrm{m}}{(\omega_\mathrm{L} + \mathrm{j}\alpha\omega)^2 - \omega^2} & 1 + \dfrac{\omega_\mathrm{m}(\omega_\mathrm{L} + \mathrm{j}\alpha\omega)}{(\omega_\mathrm{L} + \mathrm{j}\alpha\omega)^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7–324}$$

Odvajanjem realnog i imaginarnog dijela dobivaju se sljedeći elementi matrice:

$$\mu' = \mu_0 \left\{ 1 + \frac{\omega_\mathrm{m}\omega_\mathrm{L}(\omega_\mathrm{L}^2 - \omega^2) + \omega_\mathrm{m}\omega_\mathrm{L}\alpha^2\omega^2}{\left[\omega_\mathrm{L}^2 - (1+\alpha^2)\omega^2\right]^2 + 4\omega_\mathrm{L}^2\alpha^2\omega^2} \right\}, \tag{7–325a}$$

$$\kappa' = \mu_0 \frac{\omega_\mathrm{m}\omega_\mathrm{L}\left[\omega_\mathrm{L}^2 - (1+\alpha^2)\omega^2\right]}{\left[\omega_\mathrm{L}^2 - (1+\alpha^2)\omega^2\right]^2 + 4\omega_\mathrm{L}^2\alpha^2\omega^2}, \tag{7–325b}$$



Slika 8.159. Obilježja tenzorske permeabilnosti ferita; **a)** bez gubitaka, **b)** s gubitcima

$$\mu'' = \mu_0 \frac{\alpha\omega_m\omega\left[\omega_L^2 + (1+\alpha^2)\omega^2\right]}{\left[\omega_L^2 - (1+\alpha^2)\omega^2\right]^2 + 4\omega_L^2\alpha^2\omega^2}, \tag{7–325c}$$

$$\kappa'' = \mu_0 \frac{2\alpha\omega_m\omega_L\omega^2}{\left[\omega_L^2 - (1+\alpha^2)\omega^2\right]^2 + 4\omega_L^2\alpha^2\omega^2}. \tag{7–325d}$$

Na slici 7.159a) prikazana su obilježja tenzorske permeabilnosti idealnog ferita bez gubitaka koja na frekvenciji ω_L ima singularitet. No na frekvenciji ω_L u feritu s gubitcima te veličine poprimaju konačne vrijednosti na što upućuju realne vrijednosti μ' i κ' na slici 7.159b). Imaginarne veličine μ'' i κ'' odgovaraju gubitcima i najveće su na Larmorovoj frekvenciji ω_L.

7.7.2. Rasprostiranje elektromagnetskih valova u feritima

Na osnovi mikroskopske slike o zbivanjima unutar magnetiziranog ferita, gdje važnu ulogu ima tenzor permeabilnosti, moguće je odrediti značajke rasprostiranja elektromagnetskih valova u magnetiziranom feritnom sredstvu. Rješavanjem Maxwellovih jednadžba uz različite rubne uvjete koje diktira oblik prijenosne strukture, mogu se naći razdiobe polja unutar strukture i objasniti njzino elektromagnetsko ponašanje. Budući da je permeabinost ferita izrazito anizotropana i nereciprična, postavljanjem feritnog materijala u valovode i druge prijenosne strukture mogu se ostvariti korisni nereciprični sklopovi poput feritnog cirkulatora i izolatora. Feromagnetska se rezonancija u nekim materijalima nerijetko primjenjuje u izvedbama rezonatora visokog faktora dobrote, čija se rezonantna frekvencija može lako mijenjati promjenom jakosti vanjskog statičkog magnetskog polja. Stoga ćemo u ovom odjeljku ponajprije razmotriti značajke rasprostiranja ravnoga elektromagnetskoga vala u magnetiziranom feritu.

Rasprostiranje valova paralelno sa smjerom istosmjernog polja

Nakon što je određen tenzor permeabilnosti i tako uspostavljena relacija građe koja povezuje $\vec{B}$ i $\vec{H}$, mogu se naći rješenja Maxwellovih jednadžba:

$$\nabla\times\vec{E} = -\mathrm{j}\omega\vec{B} = -\mathrm{j}\omega\overline{\overline{\mu}}\cdot\vec{H}, \tag{7–326a}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}, \tag{7–326b}$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = 0, \tag{7–326c}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0. \tag{7–326d}$$

Razmotrimo najjednostavniju moguću zadaću, rasprostiranje ravnoga elektromagnetskoga vala u neograničenom feritnom sredstvu u smjeru u kojem je utisnuto istosmjerno magnetsko polje $\vec{H}_{\mathrm{DC}}$. Za harmonijsko mikrovalno električno polje

$$\vec{E}_{\mathrm{rf}} = \vec{E}_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \tag{7–327}$$

gdje je $\vec{E}_0$ konstantni vektor malog izmjeničnog signala u ravnini *xy*, jednadžba (7–326a) daje

$$\nabla \times \vec{E}_{\mathrm{rf}} = -\vec{E}_0 \times \nabla \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} = \mathrm{j}\beta \vec{E}_0 \times \hat{z} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} = -\mathrm{j}\omega \overline{\overline{\mu}} \cdot \vec{H}_{\mathrm{rf}}. \tag{7–328}$$

Pretpostavi li se da je rješenje za $\vec{H}_{\mathrm{rf}}$ jednako

$$\vec{H}_{\mathrm{rf}} = \vec{H}_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \tag{7–329}$$

gdje je $\vec{H}_0$ također konstantni vektor u ravnini *xy*, iz jednadžbe (7–326b) izlazi

$$\mathrm{j}\beta \vec{H}_0 \times \hat{z} = \mathrm{j}\omega\varepsilon \vec{E}_0. \tag{7–330}$$

Polje $\vec{E}_0$ može se eliminirati uvrštenjem jednadžba (7–330) i (7–329) u (7–328), kao

$$\mathrm{j}\beta \frac{\mathrm{j}\beta}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} \left(\vec{H}_0 \times \hat{z} \right) \times \hat{z} = -\mathrm{j}\omega \overline{\overline{\mu}} \cdot \vec{H}_0. \tag{7–331}$$

Primjenom vektorske jednakosti $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ na lijevu stranu jednadžbe (7–331) i uz činjenicu da je $\hat{z} \cdot \vec{H}_0 = 0$, dobiva se jednadžba

$$\beta^2 \vec{H}_0 = \omega^2 \varepsilon \overline{\overline{\mu}} \cdot \vec{H}_0, \tag{7–332}$$

koja se može napisati u matričnom obliku kao

$$\begin{bmatrix} \beta^2 - \omega^2\varepsilon\mu & -\mathrm{j}\omega^2\varepsilon\kappa \\ \mathrm{j}\omega^2\varepsilon\kappa & \beta^2 - \omega^2\varepsilon\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = 0, \tag{7–333}$$

gdje su H_x i H_y komponente malog RF signala. Netrivijalno rješenje za $\vec{H}_0$ dobiva se tako da se determinanta matrice u jednadžbi (7–333) izjednači s nulom. To daje svojstvenu jednadžbu

$$\left(\beta^2 - \omega^2\varepsilon\mu \right)^2 - \omega^4\varepsilon^2\kappa^2 = 0, \tag{7–334}$$

iz koje slijede dva rješenja za fazni koeficijent:

$$\beta_{\pm} = \omega\sqrt{\varepsilon(\mu \pm \kappa)}. \tag{7–335}$$

Budući da giromagnetska rezonancija posjeduje rotacijska obilježja (slika 7.157), primjena rotirajućeg magnetskog polja proizvodi posebne učinke unutar ferita. Intuitivno je jasno da će rotirajuće (izmjenično) magnetsko polje, čiji se smjer rotacije podudara sa smjerom rotacije magnetskog momenta, izazvati snažnu interakciju sa statičkim magnetskim poljem. Za drugi smjer rotacije, interakcija će izostati. Pogledajmo stoga koje se polarizacije valova mogu rasprostirati u magnetiziranom feritnom sredstvu.

Uvrstimo li rješenje β_+ u prvu od jednadžba (7–333) izlazi

$$\left(\beta_+^2 - \omega^2\varepsilon\mu \right) H_x - \mathrm{j}\omega^2\varepsilon\kappa H_y = 0, \tag{7–336}$$

što nakon uvrštenja izraza (7–335) daje

$$H_x = \mathrm{j}H_y. \tag{7–337}$$

U skladu s izrazima (7–329) i (7–335) za val koji putuje u smjeru $+\hat{z}$, magnetsko je polje

$$\vec{H}_+ = H_0(\hat{x} - \mathrm{j}\hat{y}) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_+ z}, \tag{7–338}$$

što odgovara desno kružno polariziranom valu (vidjeti odjeljak 2.7). Električno se polje može izravno dobiti primjenom Ampèreova zakona (7–326b) i veze $E=\eta H$ za ravni val, tj.

$$\vec{E}_+ = -\eta_+ H_0(\mathrm{j}\hat{x}+\hat{y})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_+ z}\,, \tag{7–339}$$

gdje je valna impedancija u smjeru magnetizacijskog polja

$$\eta_+ = \frac{\beta_+}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu+\kappa}{\varepsilon}}\,. \tag{7–340}$$

Slično tomu, polja povezana s β_- lijevo su kružno polarizirana:

$$\vec{H}_- = H_0(\hat{x}+\mathrm{j}\hat{y})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_- z}\,, \tag{7–341}$$

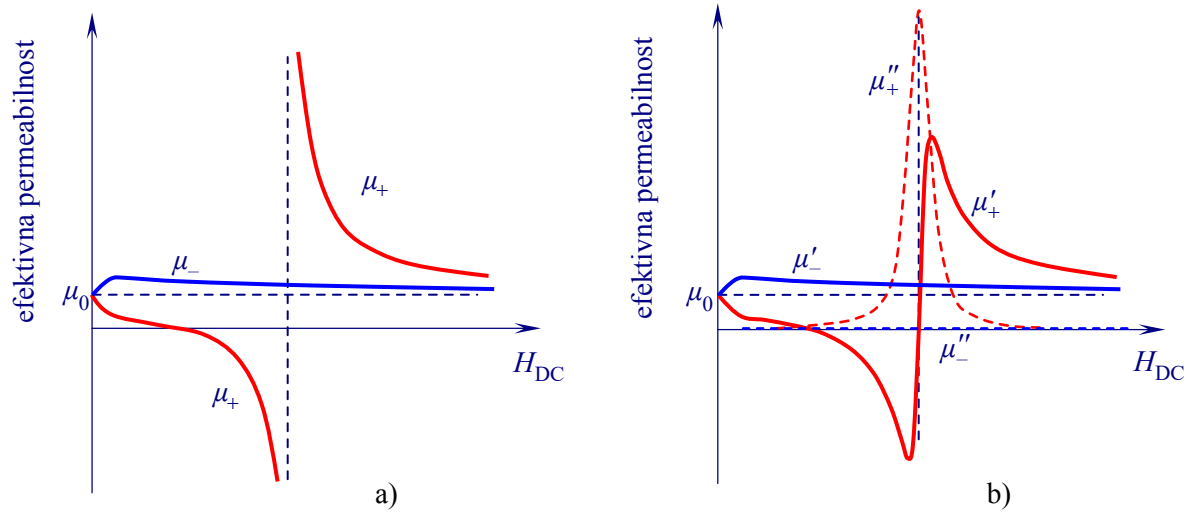
$$\vec{E}_- = \eta_- H_0(\mathrm{j}\hat{x}-\hat{y})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_- z}\,, \tag{7–342}$$

a valna je impedancija vala koji putuje u suprotnome smjeru od smjera magnetizacijskog polja

$$\eta_- = \frac{\beta_-}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu-\kappa}{\varepsilon}}\,. \tag{7–343}$$

U izrazima (7–335), (7–340) i (7–343) može se prepoznati da taj anizotropni materijal posjeduje efektivne permeabilnosti različitih vrijednosti za kružno polarizirane valove koji se rasprostiru u suprotnim smjerovima. Tako je, primjerice, za val koji putuje u pozitivnome smjeru osi $\hat{z}$, efektivna permeabilnost jednaka $\mu_+=\mu+\kappa$, a za val koji putuje u negativnome smjeru osi $\hat{z}$ ona je $\mu_-=\mu-\kappa$. Na slici 7.160a) te su efektivne permeabilnosti ferita prikazane u funkciji jakosti istosmjernog magnetskog polja koje djeluje u smjeru rasprostiranja vala. Na slici 7.160b) prikazana je efektivna permeabilnost ferita s gubitcima. Na objema slikama može se uočiti da kod desno polariziranog vala na frekvenciji ω_L nastaje jaka interakcija s magnetskim momentom. To i ne čudi jer se u tom slučaju vektor magnetskog polja izmjeničnog signala i vektor magnetskog momenta vrte u istome smjeru (giromagnetska rezonancija). Za suprotni smjer vrtnje magnetskog polja, tj. za lijevu kružnu polarizaciju, značajke efektivne permeabilnosti ne pokazuju rezonantna svojstva.

Da bismo shvatili što se zbiva s proizvoljnim valom koji se rasprostire u smjeru osi $\hat{z}$, valja ga rastaviti na dvije ortogonalne kružne polarizacije jer se samo kružno polariziranim valovima mogu pridružiti brzine rasprostiranja koje imaju smisla. U prethodnim smo razmatranjima vidjeli da će takva dva kružno polarizirana vala putovati različitim brzinama.



Slika 7.160. Permeabilnosti μ_+ i μ_- u ovisnosti o jakosti statičkog magnetskog polja za mikrovalna rotacijska polja: **a)** bez gubitaka, **b)** s gubitcima

Pogledajmo sad kako se magnetiziranim feritom giba linearno polarizirani ravni val u smjeru statičkog polja. Naime, svaki se linearno polarizirani val može rastaviti na dva ortogonalno kružno polarizirana vala (vidi odjeljak 2.7) pa neka bude tako i s našim RF magnetskim poljem u ravnini $z=0$, tj.

$$\vec{H}(0)=\hat{x}H_0=(\hat{x}+\mathrm{j}\hat{y})\frac{H_0}{2}+(\hat{x}-\mathrm{j}\hat{y})\frac{H_0}{2}. \tag{7–344}$$

Prvi val na desnoj strani izraza lijevo je kružno polariziran i rasprostire se u smjeru osi $\hat{z}$ s faznim koeficijentom β_-, dok drugi val (desno kružno polariziran) putuje u istom smjeru s faznim koeficijentom β_+. Nakon što val u feritu prijeđe put duljine z, magnetsko se polje može napisati u obliku

$$\vec{H}(z)=(\hat{x}+\mathrm{j}\hat{y})\frac{H_0}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_- z}+(\hat{x}-\mathrm{j}\hat{y})\frac{H_0}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_+ z}. \tag{7–345}$$

Grupiranjem $\hat{x}$ - i $\hat{y}$ -komponenata magnetskog polja i primjenom trigonometrijskih relacija dobiva se

$$H(z)=\frac{H_0}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_- z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_+ z}\right)\left\{\hat{x}+\hat{y}\tan\left(\frac{\beta_- -\beta_+}{2}z\right)\right\}. \tag{7–346}$$

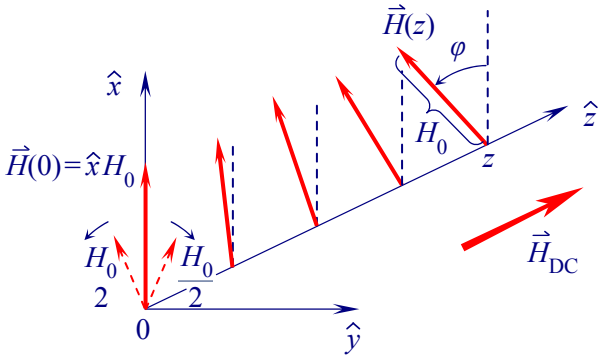
Može se uočiti da je to i dalje linearno polarizirani val, ali mu je polarizacijska os u ravnini xy zakrenuta u odnosu na os $\hat{x}$ (slika 7.161) za kut

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{H_y}{H_x}=-\frac{\beta_+-\beta_-}{2}z. \tag{7–347}$$

Tu je pojavu prvi uočio Faraday promatrajući prolazak svjetlosti kroz tekućine s posebnim magnetskim svojstvima pa je njemu u čast dobila naziv *Faradayeva rotacija*. Ta je značajka prisutna i u feritnim materijalima te se primjenjuje u nizu mikrovalnih nereciprocnih naprava poput giratora (nereciprocnih faznih zakretača), feritnih cirkulatora i feritnih izolatora.

Kad je $\omega<\omega_\mathrm{L}$, tad su μ i κ pozitivni, gdje je $\mu>\kappa$. Otuda je β_+ veće od β_- pa se ravnina polarizacije zakreće u suprotnome smjeru kazaljke sata, gledajući u smjeru rasprostiranja kao na slici 7.161. Mjera promjene kuta iznosi $(\beta_+-\beta_-)/2$ rad/m. Na frekvencijama oko 10 GHz, u magnetiziranim feritima postižu se zakreti od 90° po centimetru pa i više.

Pretpostavimo sad da se ranije opisani linearno polarizirani val vraća prema ravnini $z=0$, nakon što je u feritu prevalio izvjesni put na kojemu se njegova ravnina polarizacije zakrenula za kut φ u odnosu na os $\hat{x}$. Njegova će se polarizacijska ravnina nastaviti zakretati u istom smjeru premda se val rasprostire u suprotnome smjeru, što znači da će se val vratiti u ravninu



Slika 7.161. Faradayeva rotacija

$z = 0$ s polarizacijskom ravninom zakrenutom za kut 2φ u odnosu na os $\hat{x}$. To odudara od uobičajene slike u kojoj se vijak uvrće u drvenu ploču tako da se izvijač okreće u jednom smjeru, a izlazi iz ploče tako da se okreće u suprotnome smjeru. Dakle, u našem slučaju polarizacijska se ravnina ne može »odvrnuti« kad se smjer rasprostiranja obrne. To znači da Faradayeva rotacija ima nereciprocan učinak na rasprostiranje elektromagnetskoga vala.

Rasprostiranje valova poprečno na smjer istosmjernog polja (dvolomnost)

Razmotrimo slučaj u kojem je istosmjerno magnetsko polje poprečno na smjer rasprostiranja elektromagnetskoga vala. Pretpostavimo da val putuje u smjeru osi $+\hat{z}$, a da je statičko magnetsko polje u smjeru osi $+\hat{x}$. U tom će slučaju elementi tenzora permeabilnosti (7–322) promijeniti mjesta pa se dobiva

$$\overline{\overline{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \mathrm{j}\kappa \\ 0 & -\mathrm{j}\kappa & \mu \end{bmatrix}. \tag{7–348}$$

Za polja ravnoga vala, Maxwellove rotorske jednadžbe svode se na oblik:

$$\mathrm{j}\beta E_y = -\mathrm{j}\omega\mu_0 H_x, \tag{7–349a}$$

$$\mathrm{j}\beta H_y = \mathrm{j}\omega\varepsilon E_x \tag{7–349d}$$

$$-\mathrm{j}\beta E_x = -\mathrm{j}\omega(\mu H_y + \mathrm{j}\kappa H_z), \tag{7–349b}$$

$$-\mathrm{j}\beta H_x = \mathrm{j}\omega\varepsilon E_y \tag{7–349e}$$

$$0 = -\mathrm{j}\omega(-\mathrm{j}\kappa H_y + \mu H_z), \tag{7–349c}$$

$$0 = \mathrm{j}\omega\varepsilon E_z. \tag{7–349f}$$

Budući da je $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, izlazi da je $E_z = 0$ i $\nabla \cdot \vec{D} = 0$. Iz jednadžbe (7–349d) i (7–349e) izravno se može izračunati valna impedancija kao

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon}, \tag{7–350}$$

Uvrštenjem valne impedancije u jednadžbe (7–349a) i (7–349b) može se eliminirati ovisnost o H_x i H_y, a uvrštenjem jednadžbe (7–349c) u (7–349b) može se eliminirati H_z pa se dobiva:

$$\beta^2 E_y = \omega^2\mu_0\varepsilon E_y, \tag{7–351a}$$

$$\mu(\beta^2 - \omega^2\mu\varepsilon)E_x = -\omega^2\varepsilon\kappa^2 E_x. \tag{7–351b}$$

Za $E_x = 0$, jednadžbe (7–351) daju rješenje

$$\beta_\mathrm{o} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon} \tag{7–352}$$

pa se ukupna polja, koja putuju u smjeru osi $\hat{z}$, mogu napisati kao

$$\vec{E}_\mathrm{o} = \hat{y}E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_\mathrm{o} z}, \qquad \vec{H}_\mathrm{o} = -\hat{x}\frac{E_0}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_\mathrm{o} z} \tag{7–353}$$

jer jednadžba (7–349d) upućuje na $H_y = 0$ za $E_x = 0$, a jednadžba (7–349c) upućuje na $H_z = 0$ za $H_y = 0$. Valu, opisanom poljima (7–351), pripada valna impedancija

$$\eta_\mathrm{o} = \frac{\beta_\mathrm{o}}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}. \tag{7–354}$$

Budući da u tom slučaju magnetizacija ne djeluje na obilježja rasprostiranja, pripadajući val naziva se obični ili *redoviti val* (engl. *ordinary wave*). Ti su uvjeti rasprostiranja uvijek prisutni kad ne postoje okomite komponente mikrovalnog magnetskog polja na istosmjerno magnetsko polje $\vec{H}_{\mathrm{DC}}$. Pritom se val rasprostire u obama smjerovima ($+\hat{z}$ i $-\hat{z}$) s istim koeficijentom rasprostiranja koji ne ovisi o magnetizaciji (H_{DC}).

No moguće je i drugo rješenje jednadžba (7–351). Ako se uzme da je $E_y=0$, onda izlazi

$$\beta_{\mathrm{e}} = \omega\sqrt{\mu_{\mathrm{e}}\varepsilon}\,, \tag{7–355}$$

s pripadajućom efektivnom permeabilnošću

$$\mu_{\mathrm{e}} = \frac{\mu^2 - \kappa^2}{\mu}\,. \tag{7–356}$$

Valja uočiti da ta permeabilnost može poprimiti i negativne vrijednosti za različite vrijednosti frekvencija ω i ω_0 odnosno za različite vrijednosti statičkog magnetskog polja H_{DC}. Val s koeficijentom rasprostiranja (7–355) naziva se *izvanredni val* (engl. *extraordinary wave*). Obilježja rasprostiranja toga vala ovise o magnetizaciji ferita, a električno mu je polje oblik

$$\vec{E}_{\mathrm{e}} = \hat{y}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_{\mathrm{e}}z}\,. \tag{7–357a}$$

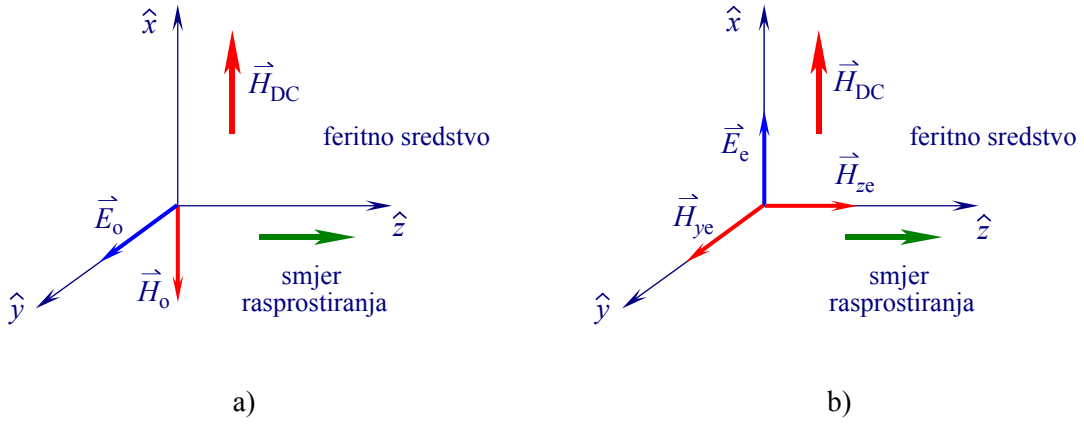
No budući da je $E_y=0$, jednadžba (7–349e) upućuje na $H_x=0$ pa se komponente polja H_y i H_z mogu izravno dobiti iz jednadžbe (7–349d), odnosno (7–349c). Stoga se ukupno rješenje za magnetsko polje može napisati kao

$$\vec{H}_{\mathrm{e}} = \frac{E_0}{\eta_{\mathrm{e}}}\left(\hat{y} + \hat{z}\frac{\mathrm{j}\kappa}{\mu}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_{\mathrm{e}}z}\,, \tag{7–357b}$$

s pripadajućom valnom impedancijom

$$\eta_{\mathrm{e}} = \frac{\beta_{\mathrm{e}}}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{e}}}{\varepsilon}}\,. \tag{7–358}$$

Na slici 7.162 grafički su prikazana vektorska polja redovitoga i izvanrednoga vala te vektor magnetizacije. Polja opisana izrazima (7–357) linearno su polarizirana polja, ali se iz izraza (7–357b) može vidjeti da magnetsko polje ima uzdužnu komponentu H_z. Pri tomu su poprečne komponente električnog i magnetskog polja redovitoga vala okomite na odgovarajuće poprečne komponente izvanrednoga vala.



a) b)

Slika 7.162. Polja u magnetiziranom feritu: **a)** redoviti val i **b)** izvanredni val

Međudjelovanje mikrovalnoga polja i ferita pri giromagnetskoj rezonanciji dolazi samo preko one komponente mikrovalnoga magnetskog polja koja je okomita na vektor magnetizacije $\vec{H}_{DC}$, kao što se prikazano na slici 7.157. Zato fazni koeficijent (β_o) vala polariziran u smjeru osi $\hat{y}$ ne ovisi o feromagnetskim svojstvima ferita koji je magnetiziran u smjeru osi $\hat{x}$. No val polariziran u smjeru osi $\hat{x}$ rasprostire se uz fazni koeficijent β_e (izvanredni val). Taj učinak, u kojem koeficijent rasprostiranja ovisi o smjeru polarizacije, poznat je u optici i naziva se *dvolom*. Naime, opaženo je da se zraka svjetlosti prolaskom kroz neke kristale istodobno lomi u dvije zasebne zrake. Ta je značajka prvi put uočena u kristalu kalcita, kalcijkarbonat ($CaCO_3$) u kristalnom obliku, ali i u nekim drugim kristalima i prozirnim materijalima. Kalcit se zbog tog svojstva nerijetko naziva *islandski dvolomac*, prema mjestu otkrića.

Izraz (7–356) pokazuje da efektivna permeabilnost izvanrednog vala može poprimiti negativnu vrijednost ako je $\kappa^2 > \mu^2$. Taj uvjet ovisi o vrijednostima veličina ω, ω_0 i ω_m, ali za čvrstu frekvenciju uvijek će postojati područje magnetizacije za koje će μ_e imati negativnu vrijednost. U tom će slučaju fazni koeficijent β_e biti imaginaran pa neće biti uvjeta za rasprostiranje, tj. val će biti evanescentan. Drugim riječima, na feritnom sredstvu takvih svojstava, doći će do totalne refleksije $\hat{x}$ -polariziranog vala.

7.7.3. Feritne mikrovalne komponente

Postavljanjem ferita u valovod, prijenosnu liniju ili trakastu prijenosnu strukturu mogu se ostvariti najrazličitije nerecipročne komponente poput giratora, feritnih izolatora, cirkulatora, faznih zakretača, magnetski upravljanih rezonatora.

Feritni izolator

Kao što pokazuju izrazi (4–89a) i (4–89b) u odjeljku 4.3.3, magnetsko polje dominantnoga moda u pravokutnome valovodu sastoji se od dviju komponenata:

$$H_z = A_{10}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{j(\omega t-\beta z)}, \qquad H_x = jA_{10}\frac{\beta a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{j(\omega t-\beta z)}, \tag{7–359}$$

prve uzdužne (H_z) i druge poprečne (H_x). Te su komponente međusobno fazno pomaknute za 90° (fazna kvadratura) pa se mogu naći dvije ravnine paralelne s bočnim stijenkama valovoda u kojima je na njih okomito magnetsko polje kružno polarizirano. Iz izraza (7–359) izlazi da će amplitude komponenata magnetskog polja biti jednake kad se zadovolji uvjet

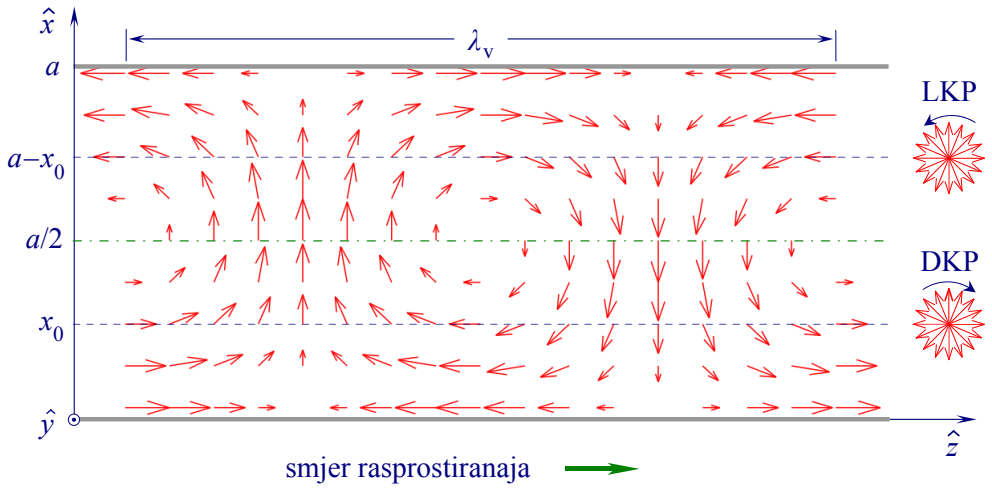
$$\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{\beta a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right),$$

iz čega se lako dobiva koordinata x_0 na kojoj je magnetsko polje kružno polarizirano

$$x_0 = \frac{a}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\pi}{\beta_{10}a}\right). \tag{7–360}$$

Na jednakoj udaljenosti od osi valovoda (na koordinati $x = a - x_0$) nalazi se još jedna ravnina u kojoj je polje također kružno polarizirano, ali se vrti u suprotnome smjeru. Učinak prigušenja može se udvostručiti ako se na koordinatu $x = a - x_0$ postavi druga feritna pločica, a statičko se magnetsko polje suprotno polarizira.

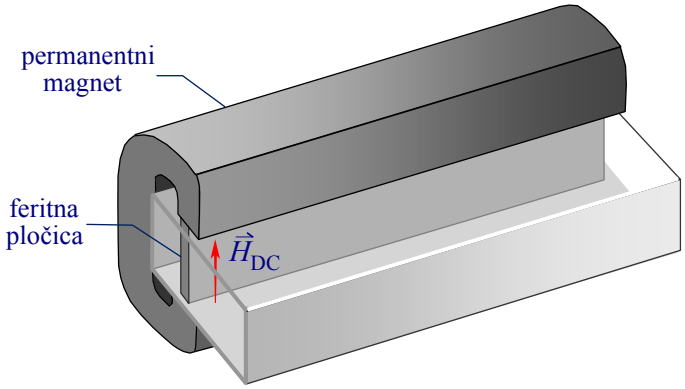
Na slici 7.163 dan je vektorski prikaz magnetskog polja dominantnoga moda u valovodu. Posebno su istaknuta područja oko ravnina u kojima se pojavljuje kružno polarizirani val (isprekidane crte). S obzirom na oblik silnica magnetskoga polja, očito je da je magnetsko polje linearno polarizirano uz bočne stijenke valovoda jer tamo postoji samo uzdužna komponenta polja ($H_z \neq 0$, $H_x = 0$). Jednako tako, poprečno je polje na simetrali šire stijenke valovoda također linearno polarizirano jer je na simetrali uzdužno polje jednako nuli ($H_x \neq 0$, $H_z = 0$).



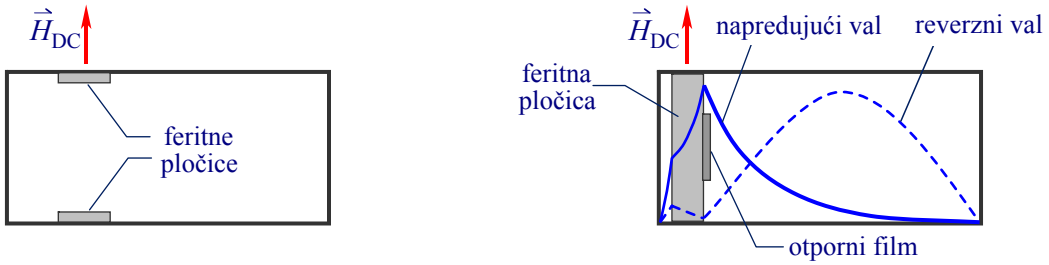
Slika 7.163. Položaji ravnina $x=x_0$ i $x=a-x_0$ za desno kružno polarizirano (DKP), odnosno lijevo kružno polarizirano (LKP) magnetsko polje dominantnoga moda

Smjer rotacije polja ovisi o smjeru rasprostiranja (naprijed ili natrag). Pretpostavimo sad da je u ravnini $x=x_0$ postavljena tanka feritna pločica koja se nalazi u jakom vanjskom istosmjernom magnetskom polju $\bar{H}_{DC} = \hat{y}\,(\gamma/\omega_g\mu_0)$ usmjerenom paralelno s osi $\hat{y}$, kao što je prikazano na slici 7.164. Snažno magnetsko polje može se jednostavno ostvariti s pomoću permanentnog magneta čiji magnetski tok prolazi stijenkama valovoda koje moraju biti izvedene od nemagnetičnog metala poput bakra, srebra ili mjedi.

Kad se smjer vrtnje kružno polariziranog magnetskog polja podudara sa smjerom vrtnje vektora magnetskog momenta ($\bar{m}$) i kad se frekvencija vala nalazi blizu frekvencije giromagnetske rezonancije, tad dolazi do snažne interakcije mikrovalnog polja s feritnim materijalom. Ovdje je elektromagnetsko polje koncentrirano unutar ferita pa pozitivno kružno polarizirano polje gubi energiju zbog gubitaka u feritu. Primjenom dovoljno dugačke feritne pločice (od jedne do nekoliko valnih duljina), za dani smjer rasprostiranja, može se ostvariti prigušenje vala za više od deset decibela. No za suprotni smjer rasprostiranja magnetsko je polje vala ortogonalno polarizirano pa izostaje interakcija polja s feritom. Stoga se energija uglavnom prenosi prostorom oko ferita uz neznatne gubitke.



Slika 7.164. Pravokutni valovod opterećen tankom feritnom pločicom



a) b)

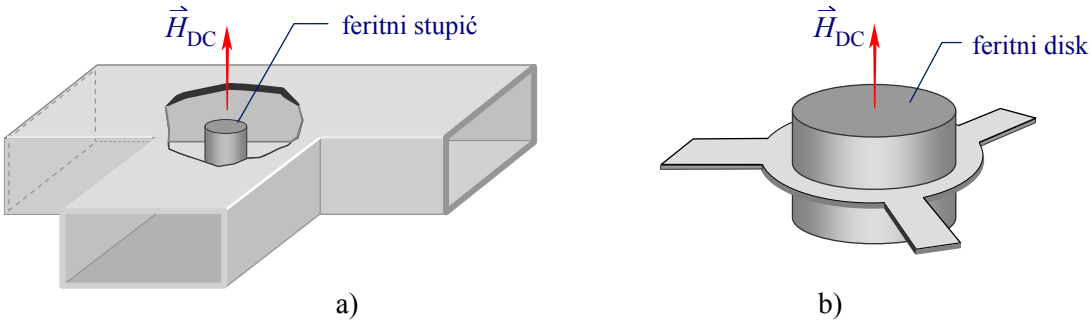
Slika 7.165. a) Feritni izolator s feritnom pločicom u *H*-ravnini. **b)** Feritni izolator s pomakom polja

No ta vrsta feritnog izolatora ima nedostatke. Jedan je od njih razmjerno uzak frekvencijski pojas s prihvatljivim omjerom prigušenja naprijed-natrag. Feritna pločica također stvara jak poremećaj polja u odnosu na slučaj s praznim valovodom, zbog čega je izolacija slaba, a magnetske se značajke znatno mijenjaju s temperaturom. U radu s velikim mikrovalnim snagama nerijetko je otežano hlađenje ferita zbog njegovog razmjerno velikog toplinskog otpora.

Bolje odvođenje toplinske energije iz ferita može se ostvariti postavljanjem tankih pločica ferita tako da širom plohom naliježu na stijenku valovoda (slika 7.165a)). Budući da je za magnetizaciju ferita potrebno znatno jače statičko magnetsko polje, veću je i težina sklopa. Za male mikrovalne snage nerijetko se rabi izvedba prikazana na slici 7.164, gdje se tanak sloj apsorpcijskog materijala nanese na plohu feritne pločice koja je bliže sredini valovoda (slika 7.165b)). Za jedan smjer rasprostiranja, pri jakoj interakciji polja i ferita, maksimum električnog polja može se namjestiti na koordinatu na kojoj se nalazi apsorpcijski materijal što ima za posljedicu jako prigušenje signala. Za drugi smjer rasprostiranja, kad nema interakcija polja i ferita, prigušenje je vrlo slabo jer je tad električno polje na mjestu apsorpcijskog materijala vrlo slabo (maksimum polja nalazi se u dijelu sa zrakom, podalje od feritne pločice).

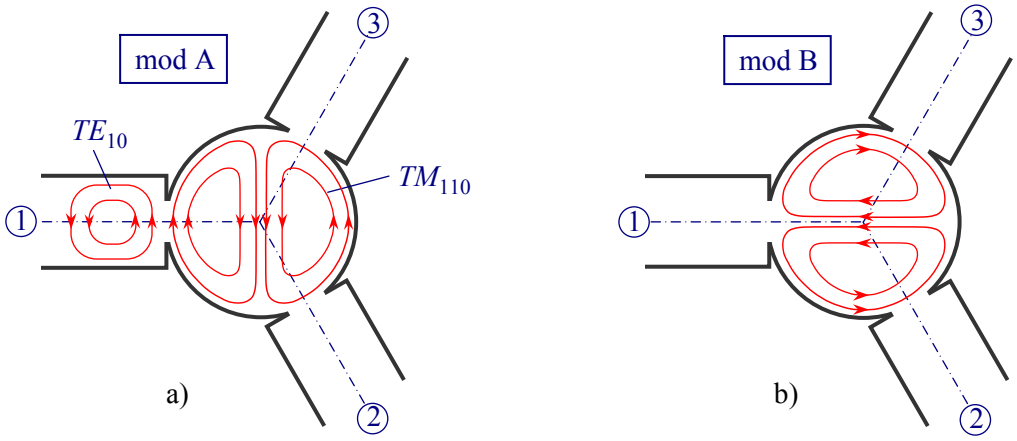
Feritni cirkulator

Cirkulatori su troprolazne nereciprocne naprave koje je moguće ostvariti postavljanjem komadića magnetizirana ferita u središte valovodnog, suosnog ili trakastog T-spoja. Ponašanje cirkulatora kao troprolazne mreže objašnjeno je u odjeljku 5.8.2. Magnetizacija ferita proizvodi rotaciju strukture polja, koja je tako namještena da dolazi do rasprezanja jednog od triju prolaza. To svojstvo posjeduje *spojni cirkulator*. Nekoliko struktura spojnog cirkulatora prikazano je na slici 7.166. Unutar ukupnog frekvencijskog pojasa dominantnoga moda, valovodnim je cirkulatorima moguće postići izolaciju veću od 20 dB i unesene gubitke manje od 0,3 dB. Rad spojnog cirkulatora može se objasniti pojednostavljenim modelom koji se sastoji od cilindrične šupljine spregnute s trima valovodima u simetričnom Y-spoju, kao što je prikazano na slici 7.167.



a) b)

Slika 7.166. a) Valovodni cirkulator; **b)** trakasti cirkulator

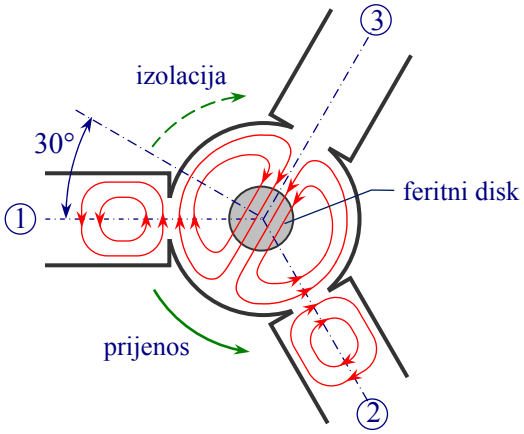


Slika 7.167. Cilindrična šupljina rezonira u modu TM_{110} i spregnuta je s trima valovodima: **a)** mod A, **b)** mod B

Valovodom na prolazu 1 rasprostire se dominantni mod TE_{10} i magnetskim poljem pobuđuje rezonantne modove u valjkastom šupljinskom rezonatoru preko otvora u stijenki šupljine. U tu svrhu razmotrimo rezonantni mod TM_{110} koji je prostorno degenerativan. Silnice magnetskog polja degenerativnih modova označenih s A i B, prikazane su na slici 7.167.

Dominantni mod valovoda spregnut je s modom A valjkaste šupljine (slika 7.167a)), a mod B ostaje raspregnut zbog geometrijske simetrije (slika 7.167b)). Budući da svaka linearna kombinacija dvaju rezonantnih degenerativnih modova čini i dalje rezonantni mod, linearno polarizirani mod A može se složiti iz dvaju kružno polariziranih modova koji se mogu simbolički označiti kao ½(A+jB) odnosno ½(A−jB).

Unošenje magnetizirane feritne strukture valjkastog oblika u središte šupljine kvari degenerativnost modova. Za mod s pozitivnom i negativnom kružnom polarizacijom, ferit pokazuje skalarnu permeabilnost μ_+, odnosno μ_-. Tim modovima odgovaraju dvije različite rezonantne frekvencije f_+, odnosno f_-. Ako se frekvencija signala namjesti između tih dviju rezonantnih frekvencija, onda za mod s nižom rezonantnom frekvencijom ulazna impedancija poprima kapacitivni karakter, a za mod višom rezonantnom frekvencijom poprima iduktivni karakter. Stoga su modovi međusobno fazno pomaknuti. Vektorski zbroj dvaju kružno polariziranih valova jednake amplitude daje linearno polarizirani val koji je prostorno zakrenut u odnosu na izvorni mod A neopterećene (prazne) šupljine. Veličina i obilježja ferita odabiru se tako da zajedno s odgovarajućom vrijednošću statičkog magnetskog polja H_{DC} proizvedu geometrijski zakret od 30°, kao što je prikazano na slici 7.168.



Slika 7.168. Magnetsko polje u rezonantnoj šupljini opterećenoj magnetiziranim feritom

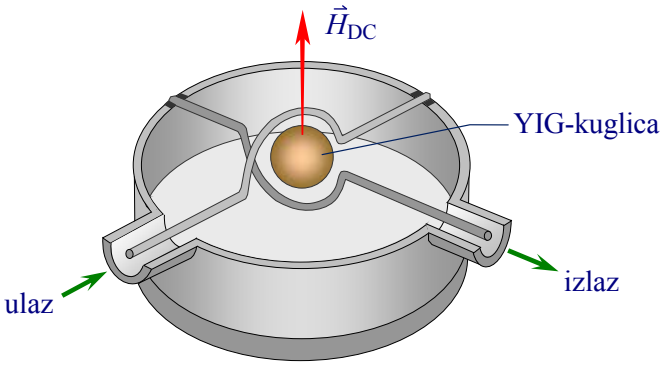
Konfiguracija magnetskog polja, geometrijski zakrenuta unošenjem magnetiziranog ferita više nije spregnuta s prolazom 3 zbog nesimetrije polja. Signal koji upada na prolaz 1 spregnut je s prolazom 2. Budući da je valovodni spoj rotacijski simetričan, ta se slika ponavlja svakih 120°. Tako je signal koji pobuđuje prolaz 2 spregnut s prolazom 3, a prolaz 1 je raspregnut. Slično, signal koji pobuđuje prolaz 3 izlazi kroz prolaz 1, a prolaz 2 je raspregnut.

Opisani je model znatno pojednostavljen da bi se na razmjerno jednostavan način moglo objasniti osnovno načelo rada. U tu je svrhu pretpostavljena labava (slaba) veza između valovoda i rezonantne šupljine i zanemaren poremećaj elektromagnetskog polja unošenjem feritnog materijala u šupljinu. No i u tako pojednostavljenoj fizikalnoj slici zahtjevi za simetrijom i zakretom polja u tom opisu ostaju i dalje valjani. Nasuprot tomu, u stvarnim je izvedbama cirkulatora rezonantna šupljina obično čvrsto spregnuta s pobudnim valovodom da bi se mogla ostvariti što veća širina frekvencijskog pojasa uz što manje unesene gubitke.

Giromagnetski YIG-rezonator

U magnetiziranom kristalu itrij-željezo-granata (engl. *Yttrium-Iron Garnet*; YIG) giromagnetska rezonancija upućuje na vrlo usku spektralnu liniju poput one na slici 7.159b), omogućujući ugađanje rezonantne frekvencije rezonatora, tj. izvedbu magnetski upravljanih filtara. kemijska formula za YIG glasi $5Fe_2O_3\ 3Y_2O_3$. Polirana kuglica YIG-a, postavljena u središte ortogonalno spojenih poluzavoja u jakom statičkom magnetskom polju, upućuje na zanimljiva svojstva (slika 7.169). Pritom statičko polje djeluje u smjeru osi koja leži u ravninama obaju poluzavoja. Izvan rezonancije, prijenosne linije na izlazima poluzavoja elektromagnetski su raspregnute jer su poluzavoji međusobno ortogonalni pa ne dijele zajedničko magnetsko polje. No u rezonanciji element κ, koji se nalazi izvan glavne dijagonale matrice tenzora permeabilnosti $\bar{\bar{\mu}}$, omogućuje spregu između ortogonalnih poluzavoja. Pravilno izveden i dobro prilagođen sklop ponaša se poput uskopojasnog giratora (odjeljak 5.8.1). Rezonantna frekvencija razmjerna je jakosti statičkog magnetskog polja $\vec{H}_{DC}$ iz snažnog elektromagneta i ne ovisi o veličini kuglice YIG-a. Obično se rabe kuglice polumjera 0,4–1 mm.

Drugim riječima, sklop na slici 7.169 ponaša se kao elektronički upravljan *giromagnetski filtar*. Mijenjanjem jakosti istosmjerne struje elektromagneta može se lako ugađati frekvencija pojasnopropusnog filtra u rasponu od 0,5 do 40 GHz. Stoga ova vrsta filtara (rezonatora) često nalazi primjenu u složenim uređajima mikrovalne instrumentacije poput širokopojasnih analizatora spektra i analizatora mreža, gdje imaju važnu ulogu u sklopovima uskopojasnih elektronički upravljanih filtara te u sklopovima oscilatora čija se frekvencija osciliranja može dinamički ugađati u širem rasponu od jedne oktave (vidjeti odjeljak 8.9. i poglavlje 9).



Slika 7.169. Sprežna struktura YIG-rezonatora s dvama ortogonalnim poluzavojima

Literatura

[1] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

[2] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, New York 2012.

[3] P. A. Rizzi, *Microwave Engineering - Passive Circuits*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

[4] G. L. Matthaei, L. Young, E. M. T. Jones, *Microwave Filters, Impedance-Matching Networks, and Coupling Structures*, McGraw Hill, New York, 1964.

[5] H. A. Bethe, "Theory of diffraction by small holes", Phys. Rev., vol. 66, str. 163-182, 1944.

[6] P. I. Richards, "Resistor-transmission line circuits", Proceedings IRE, vol. 36, str. 217-220, February 1948.

[7] E. H. Fooks, R. A. Zakarevičius, *Microwave Engineering Using Microstrip Circuits*, Prentice-Hall, New York, 1990.

[8] S. Ramo, J. R. Whinnery, T. van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1994.

[9] K. Kurokawa, *An Introduction to the Theory of Microwave Circuits*, Academic Press, New York, 1969.

[10] J. A. G. Malherbe, Microwave Transmission Line Filters, Artech House, Dedham, 1979.

[11] D. Kajfez, P. Gullion, Ed., *Dielectric Resonators*, Artech House, Dedham, 1986.

[12] S. B. Cohn, "Parallel-coupled transmission-line-resonator filters", IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-6, str. 223-231, April 1958.

[13] B. Modlic, J. Bartolić, *Miješanje, mješala i sintezatori frekvencije*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[14] J-S. Hong, 2nd ed., *Microstrip Filters for RF/Microwave Applications*, John Wiley & Sons, New York 2011.

[15] F. Ulaby, *Fundamentals of Applied Electromagnetics*, Prentice-Hall, New Jersey, 2001.

[16] R. F. Soohoo, *Microwave Magnetics*, Harper & Row, New York, 1985.

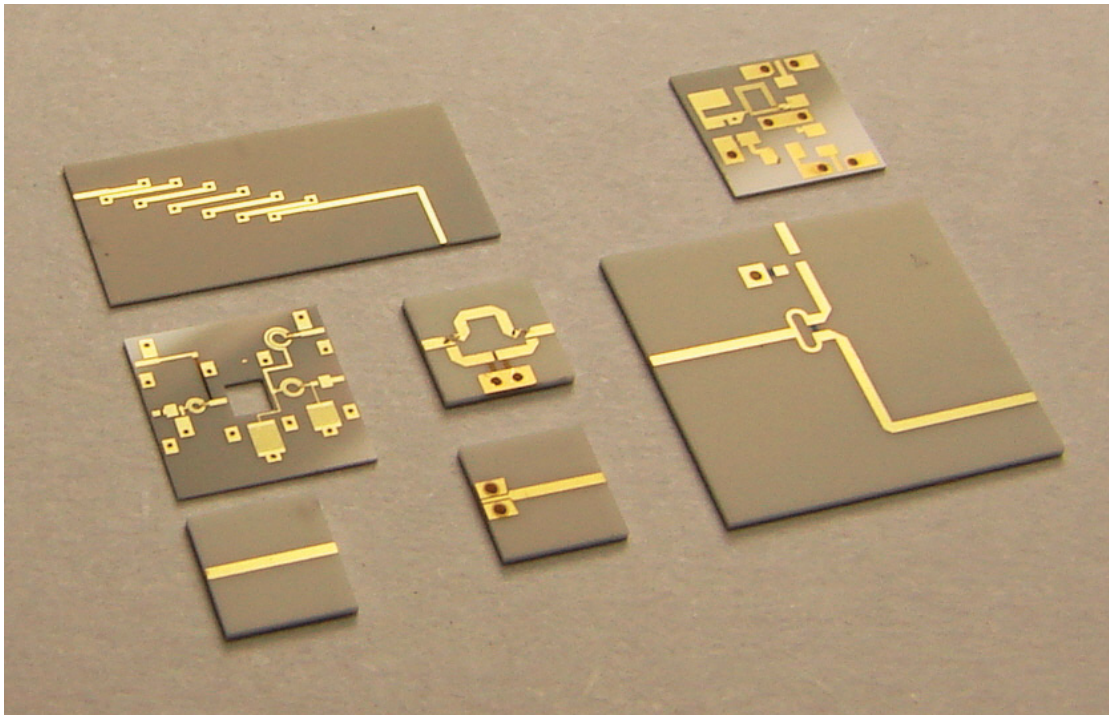
[17] J. Helszajn, *YIG Resonators and Filters*, John Wiley & Sons, 1985.

[18] J. Helszajn, *Passive and Active Microwave Circuit*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[19] F. E. Gardiol, *Introduction to Microwaves*, Artech House, Dedham 1984.

[20] M. Kummer, *Grundlagen der Mikrowellentechnik*, VEB Verlag Technik, Berlin, 1989.

[21] R. Sorrentino, G. Bianchi, *Microwave and RF Engineering*, Wiley & Sons, 2010.



Tipični pasivni mikrotrakasti sklopovi



Tipične valovodne komponente

8. Aktivni sklopovi

Komponente i sklopove koje smo dosad obrađivali bile su linearne i pasivne. No razni mikrovalni sustavi (poglavlje 10) nerijetko traže nelinearne i aktivne komponente. To su poglavito diode, tranzistori i elektronske cijevi koji se rabe za detekciju, miješanje, pojačavanje, množenje frekvencije, prekopčavanje i generiranje signala. Budući da su u mnogim aktivnim komponentama i pripadajućem sklopovlju nezaobilazna pitanja osjetljivosti i nelinearnih izobličenja, najprije ćemo razmotriti osnovna obilježja šuma i nelinearnosti u aktivnim komponentama i mrežama. Nakon toga razmotrit ćemo osnove mikrovalnih elektronskih cijevi koje još uvijek imaju značajnu ulogu u pojačavanju i generiranju signala velikih snaga (stotine vata do nekoliko megavata u impulsnom režimu rada). Zatim ćemo obraditi najznačajnije poluvodičke komponente za detekciju, miješanje, prekopčavanje, pojačavanje i generiranje signala. Na kraju ćemo objasniti osnovna načela rada i metodologiju proračunavanja sklopova koji upotrebljavaju spomenute komponente, uključujući i mikrovalne integrirane sklopove. Pri proračunu i konstrukciji sklopova poglavito ćemo voditi računa o njihovoj primjeni u mikrovalnim komunikacijskim sustavima.

8.1. Šum u aktivnim komponentama i sklopovima

Električni je šum posljedica toplinom pobuđenih nasumičnih kolebanja nositelja naboja u elektroničkoj napravi, prijenosnom ustroju ili prijenosnom sredstvu na temperaturi iznad apsolutne nule. To je poglavito šum toka elektrona u vodičima i elektronskim cijevima, toka elektrona ili šupljina u poluvodičkim elektroničkim elementima te šum koji nastaje prilikom rasprostiranja kroz ionosferu ili neki drugi ionizirani plin [1-3]. Električni šum može ući u mikrovalni sustav iz vanjskih izvora ili se može stvoriti unutar samog sustava. Razina šuma mikrovalnog sustava uspostavlja donju granicu jakosti signala koji je moguće detektirati uz prisutnost šuma. Stoga je poželjno svaki šum unutar sustava svesti na najmanju moguću mjeru kako bi se poboljšala kakvoće prijama ili prijenosa obavijesti s pomoću moduliranih signala. No u radiometrijskim i radioastronomskim sustavima, upravo šum (vanjski šum) čini »korisni signal« koji prima antena i koji je predmet daljnje obrade, pa tad valja lučiti šum dobiven iz antene od neželjenog šuma koji se stvara u sklopovima samog prijamnika.

8.1.1. Izvori šuma

Šum obično nastaje zbog slučajnog gibanja naboja ili nosilaca naboja u napravama ili materijalima. Takva gibanja mogu proizvesti različiti fizikalni mehanizmi. Rezultat su toga sljedeće vrste šuma.

1. *Toplinski šum* osnovna je vrsta šuma. Uzrokovan je toplinskim titranjem vezanih naboja. Također je poznat pod nazivom Johnsonov ili Nyquistov šum.
2. *Šum sačme* nastaje zbog slučajnih kolebanja nosilaca naboja u elektronskoj cijevi ili u potencijalnoj barijeri poluvodičkog elementa.
3. *Šum treperenja* (engl. *flicker noise*) nastaje u poluvodičkim elementima i vakuumskim elektronskim cijevima. Snaga šuma treperenja obrnuto je razmjerna frekvenciji pa se često naziva 1/*f*-šum.
4. *Šum plazme* nastaje zbog slučajnog gibanja naboja u ioniziranom plinu plazme, ionosfera i iskrište električnog kontakta.

5. *Kvantni šum* rezultat je kvantne prirode nosilaca naboja i fotona; obično je zanemariv u odnosu na druge izvore šuma u nižem frekvencijskom području i pri višim termodinamičkim temperaturama.

Gdjekad je potrebno, u svrhu mjerenja, imati kalibrirani izvor šuma. Pasivni generatori šuma sadrže otpor tereta koji se nalazi na stalnoj temperaturi u termostatu ili je kriogenički hlađen. S druge strane, aktivni se izvori šuma mogu ostvariti uporabom lavinskih dioda ili izboja u plinom punjenoj cijevi. Te vrste izvora šuma općenito daju znatno veće snage šuma u odnosu na pasivne (otporne) izvore.

8.1.2. Snaga šuma i nadomjesna temperatura šuma

Razmotrimo otpor (otpornik) na termodinamičkoj temperaturi T kelvina (K), kao što je prikazano na slici 8.1. Elektroni se u otporu gibaju nasumično, a kinetička im je energija razmjerna temperaturi T. Takvo gibanje elektrona proizvodi mala, nasumična kolebanja napona na priključcima otpora koja nazivamo električni šum (slika 8.1). Prosječna je vrijednost toga napona jednaka nuli, ali je njegova efektivna vrijednost različita od nule, a dana je Planckovim zakonom zračenja crnoga tijela [3]

$$\langle v_{\text{š}} \rangle = \sqrt{\frac{4hfBR}{\mathrm{e}^{\frac{hf}{kT}} - 1}}, \tag{8–1}$$

gdje je:

h=6,546·10^{-34} Js Planckova konstanta,

k=1,380·10^{-23} J/K Boltzmannova konstanta,

T termodinamička temperatura u kelvinima (K),

B širina frekvencijskog pojasa sustava u Hz,

f središnja frekvencija pojasa u Hz,

R otpor u Ω.

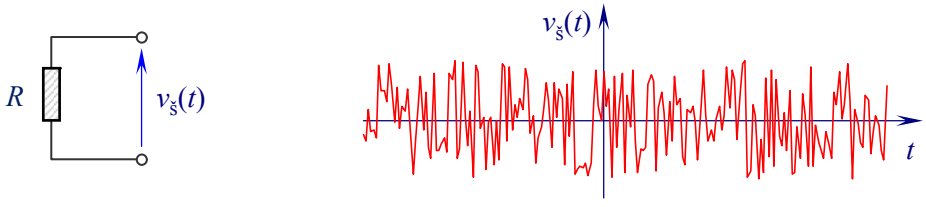
Taj rezultat proizlazi iz kvantne mehanike i vrijedi za bilo koju frekvenciju f. Na mikrovalnim i nižim frekvencijama i ne preniskim temperaturama gornji se rezultat može pojednostavniti primjenom činjenice da je $hf \ll kT$. (Kao primjer za najgori slučaj, neka je f=100 GHz i T=100 K. Tad je hf=6,5·10^{-23} ≪ kT=1,4·10^{-21}). Razvojem eksponencijalne funkcije u izrazu (8–1) u Taylorov red, uz uvjet $hf \ll kT$, i zadržavanjem samo prvih dvaju članova, dobiva se

$$\mathrm{e}^{\frac{hf}{kT}} - 1 \simeq \frac{hf}{kT},$$

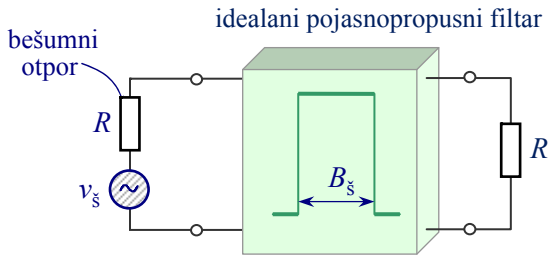
tako da se izraz (8–1) svodi na

$$\langle v_{\text{š}} \rangle = \sqrt{4kTBR}\,. \tag{8–2}$$

Izraz (8–2) naziva se *Rayleigh-Jeansova aproksimacija* i najčešće se rabi prilikom razmatranja mikrovalnih sustava [3]. No u ekstremnom slučaju, za vrlo visoke frekvencije i vrlo niske temperature, ta aproksimacija ne mora vrijediti pa tad valja primijeniti izraz (8–1). Može



Slika 8.1. Napon šuma na priključcima otpornika



Slika 8.2. Nadomjesni sklop šumnog otpora koji predaje otporu tereta maksimalnu snagu šuma preko idealnog pojasnopropusnog filtra

se lako vidjeti da snaga šuma u izrazu (8–2) ne ovisi o frekvenciji. To je odlika izvora bijelog šuma. Snaga šuma izravno je razmjerna širini pojasa koja je u praksi obično ograničena širinom pojasa mikrovalnoga sustava. Budući da se neovisni izvori bijelog šuma mogu razmatrati primjenom slučajnih varijabla Gaussove (ili normalne) razdiobe, snage su šuma (ili varijance) aditivne.

Šumni otpor na slici 8.1 može se zamijeniti Théveninovim nadomjesnim sklopom koji se sastoji od bešumnog otpora i izvora napona šuma danog u izrazu (8–2), kao što je prikazano na slici 8.2. Budući da se radi o nasumičnom (stohastičnom), a ne sinusnom signalu, izvor je osjenčan. Kad se na taj sklop priključi otpor tereta R, tad šumni otpor predaje maksimalnu snagu šuma bešumnom otporu R, što je u skladu sa zamisli raspoložive snage. Stoga se i za izvor šuma može uvesti koncept raspoložive snage koji daje

$$P_š = \left(\frac{\langle v_š \rangle}{2R} \right)^2 R = \frac{4kTBR}{4R} = kTB \tag{8–3}$$

jer veličina $\langle v_š \rangle$ označuje efektivnu vrijednost napona šuma. Taj bitan rezultat daje maksimalnu ostvarivu snagu šuma otpora (jednodimenzionalnog crnog tijela) koji se nalazi na apsolutnoj temperaturi T. Pogledajmo nekoliko primjera.

- Ako $B \to 0$, onda $P_š \to 0$. Dakle, sustav manje širine pojasa radi s manjom snagom šuma.
- Ako $T \to 0$, onda opet $P_š \to 0$, što znači da hladniji elementi i naprave stvaraju manje šuma.
- Ako pak B teži u beskonačnost, onda i $P_š$ teži u beskonačnost. To je tzv. *ultraljubičasta katastrofa* koja se u stvarnosti ne može dogoditi jer izrazi (8–2) i (8–3) ne vrijede kad f (ili B) teži u beskonačnost. U tom se slučaju mora uzeti izraz (8–1).

Izraz (8–3) pokazuje da, neovosno o vrijednosti otpora, svi otpori koji se nalaze na istoj temperaturi proizvode jednaku raspoloživu snagu šuma. Pri tomu valja voditi računa da će se mjerač snage ili prijamnik morati prilagoditi na drugu vrijednost otpora.

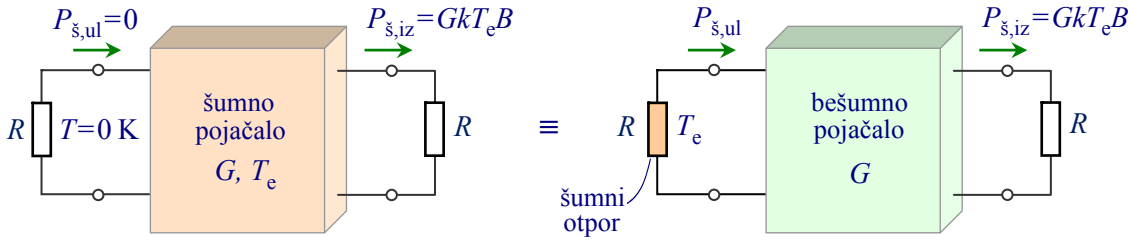
Ako je u igri izvor *bijelog šuma*, onda mu, bez obzira na to je li toplinskog ili netoplinskog podrijetla, snaga šuma ne ovisi o frekvenciji. Stoga se može nadomjestiti izvorom toplinskog šuma i opisati *nadomjesnom temperaturom šuma*. Zamislimo sad da izvor bijelog šuma impedancije R predaje snagu šuma $P_š$ otporu tereta R, kao što je prikazano na slici 8.3. Taj se izvor šuma može nadomjestiti šumnim otporom vrijednosti R na temperaturi T_e, gdje je nadomjesna temperatura T_e tako odabrana da taj otpor predaje teretu jednaku snaga šuma kao razmatrani izvor šuma. Tad je

$$T_e = \frac{P_š}{kB}. \tag{8–4}$$

To upućuje na prikaz šumnih obilježja sklopova i sustava preko nadomjesne temperature šuma T_e. Pritom se šum mjeri uz stalnu numeričku vrijednost B koja općenito označuje širinu



Slika 8.3. Nadomjesna temperatura šuma T_e izvora bijela šum



Slika 8.4. Definicija nadomjesne temperature šuma pojačala

pojasa sklopa ili sustava. Razmotrimo sad šumno pojačalo širine pojasa B i raspoloživog pojačanja snage G. Ako je pojačalo prilagođeno na bešumne otpore generatora i tereta, kao što je prikazano na slici 8.4 i ako se izvor šuma nalazi na hipotetskoj temperaturi šuma $T=0$ K, onda je izlazna snaga šuma pojačala posljedica snage šuma koja se stvara unutar samog pojačala. Zamijeni li se pojačalo idealnim bešumnim pojačalom i pobudi otporom na temperaturi

$$T_e = \frac{P_{š,iz}}{GkB}\ , \tag{8–5}$$

teret će primiti jednaku snagu šuma kao u slučaju sa stvarnim pojačalom. To znači da je u obama slučajevima izlazna snaga $P_{š,iz} = GkT_eB$, gdje T_e označuje nadomjesnu temperaturu šuma pojačala.

8.1.3. Faktor šuma

Osim nadomjesne temperature šuma, šumna svojstva prijamnih sklopova i sustava mogu se opisati *faktorom šuma*, F. Zamislimo sad da je na ulazu pojačala na slici 8.4 spojen vanjski generator koji stvara ulaznu snagu signala $P_{s,ul}$, odnosno izlaznu snagu $P_{s,iz}$. Tad je faktor šuma definiran kao omjer odnosa signal/šum na ulazu i izlazu prijamnika, tj.

$$F = \frac{P_{s,ul} / P_{š,ul}}{P_{s,iz} / P_{š,iz}}, \tag{8–6}$$

gdje su $P_{š,ul}$ i $P_{š,iz}$ snage šuma na ulazu, odnosno izlazu. Drugim riječima, faktor šuma upućuje na smanjenje odnosa signal/šum na izlaznim priključcima dvoprolaznog sklopa ili prijamnika u odnosu na odnos signal/šum na ulaznim priključcima i stoga je uvijek je veći od jedinice. Prema definiciji, ulazna je snaga šuma jednaka snazi toplinskog šuma koju stvara otpor na standardnoj temperaturi $T_0=290$ K. Ta je temperatura tako odabrana da množenjem s Botzmannovom konstantom daje vrijednost snage šuma $P_{š,ul}=kT_0B \simeq 4\cdot 10^{-21}$ W. Ako, primjerice, širina pojasa iznosi 10 MHz, onda je snaga šuma otpora na temperaturi 290 K u dBm

$$P_{š,ul} = 10\log(1,38\cdot 10^{-23}\ \text{J/K}\cdot 290\text{K}\cdot 10^{7}\ \text{Hz}) + 30\ \text{dB} = -104\ \text{dBm}\,.$$

Ukupna snaga šuma koja ulazi u prijamnik ili pojačalo na slici 8.4 može se nadomjestiti snagom koja je razmjerna zbroju nadomjesne snage šuma generatora ili antene T_A i nadomjesne temperature šuma prijamnika T_e. Ta se ukupna temperatura nerijetko naziva *radna*

temperatura šuma sustava, $T_{op}=T_A+T_e$. Ako se pretpostavi da je prijamnik bešuman, onda će ukupna snaga šuma na izlazu prijamnika biti

$$P_{š,iz} = k(T_A + T_e)BG\,, \tag{8–7}$$

gdje je *G raspoloživo pojačanje* prijamnika definirano kao omjer raspoložive snage na izlazu prijamnika ili pojačala i raspoložive snage generatora (odjeljak 8.8.1). Temperature šuma u izrazu (8–7) mogu se zbrojiti jer ne postoji korelacija između šuma generatora i šuma pojačala. Naime, snaga šuma razmjerna je kvadratu efektivnog napona šuma, a ukupni napon dvaju izvora nasumičnog signala jednak je drugome korijenu zbroja kvadrata pojedinačnih napona iz izvora nasumičnih signala. Drugim riječima, te se veličine zbrajaju kao kvadrati efektivnih vrijednosti, tj. po snazi koja je razmjerna kvadratu efektivnog napona. Uvrštenjem izraza (8–7) u definiciju faktora šuma (8–6), dobiva se

$$F = \frac{P_{s,ul}/P_{š,ul}}{P_{s,iz}/P_{š,iz}} = \frac{P_{s,ul}}{kT_0B}\frac{k(T_0+T_e)BG}{GP_{s,iz}} = 1+\frac{T_e}{T_0}\,, \tag{8–8a}$$

gdje je u skladu s definicijom faktora šuma uzeto $T_A=T_0$ i $P_{s,iz}=GP_{s,ul}$. Faktor šuma, izražen u decibelima, uvijek je veći od nule, tj.

$$F = 10\log\left(1+\frac{T_e}{T_0}\right) \geq 0\,\text{dB}\,. \tag{8–8b}$$

Izluči li se iz izraza (8–8a) nadomjesna temperatura šuma, dobiva se

$$T_e = (F-1)T_0\,, \tag{8–9}$$

što pokazuje da efektivna temperatura može biti viša ili niža od standardne temperature 290 K, ali ne može biti negativna.

Ako je pojačalo na ulazu neprilagođeno uz odgovarajući koeficijent refleksije Γ, onda je izlazna snaga šuma

$$P_{š,iz} = kT_0GB(1-|\Gamma|^2) + kT_0(F-1)GB\,,$$

gdje prvi član nastao od ulazne snage šuma umanjen refleksijom na ulazu, a drugi član nastao od šuma unutar smog pojačala prema izrazu (8–10). Otuda faktor šuma razgođenog pojačala na ulazu poprima oblik

$$F_{razg} = \frac{P_{s,ul}P_{š,iz}}{P_{s,iz}P_{š,ul}} = 1+\frac{F-1}{1-|\Gamma|^2}\,, \tag{8–10}$$

i pokazuje da se za nizak faktor šuma može postići samo dobrom prilagodbom na ulaznim priključcima pojačala. Ako je pojačalo razgođeno i na izlazu, onda je problem još složeniji, posebno kad je pojačalo nije unilateralno.

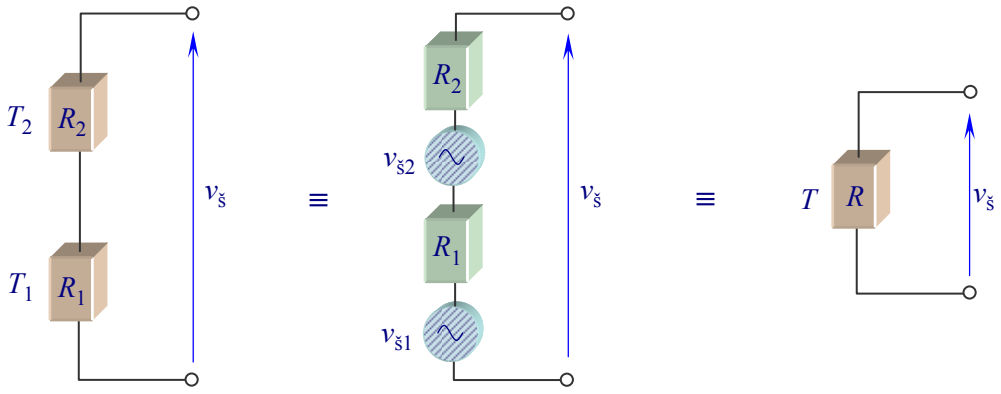
8.1.4. Mreže s više izvora toplinskoga šuma i kaskada više šumnih mreža

Na slici 8.5 prikazan je složeniji slučaj u kojem izvori šuma nisu na jednakoj temperaturi. Dva otpora (R_1 i R_2) spojena u seriju nalaze se na različitim termodinamičkim temperaturama T_1, odnosno T_2. Budući da su izvori šuma u tim otporima nekorelirani, ukupna snaga šuma koju proizvode na izlaznim priključcima razmjerna je zbroju kvadrata efektivnih vrijednosti napona na priključcima pojedinačnih otpora, tj. $\langle v_š^2\rangle = \langle v_{š1}^2\rangle + \langle v_{š2}^2\rangle$.

Uvrštenjem izraza (8–2) izlazi

$$\langle v_š^2\rangle = 4kT_1BR_1 + 4kT_2BR_2 = 4kTB(R_1+R_2)\,.$$

Konačno, primjenom izraza (8–3) dobiva se koristna relacija



Slika 8.5. Temperatura šuma serijskog spoja otpora

$$P_{\text{š}} = \frac{\left\langle v_{\text{š}}^2 \right\rangle}{4(R_1+R_2)} = \frac{4kT_1BR_1}{4(R_1+R_2)} + \frac{4kT_2BR_2}{4(R_1+R_2)} = k\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}T_1 + \frac{R_2}{R_1+R_2}T_2\right)B\,. \qquad (8\text{–}11)$$

Usporedba s izrazom (8–3) pokazuje da se temperatura šuma serijskog spoja otpora svodi na

$$T = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2\,, \qquad (8\text{–}12)$$

gdje dioni faktori $\alpha_1 = R_1/R$ i $\alpha_2 = R_2/R$ pokazuju s kolikim udjelom otpori R_1 i R_2 sudjeluju u ukupnoj temperaturi šuma T serijske kombinacije otpora, $R = R_1 + R_2$.

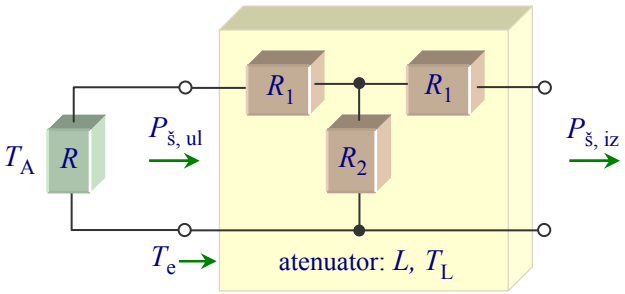
Iz izraza (8–11) i (8–12) izlazi da zbroj dionih faktora mora biti jednak jedinici, tj.

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1\,. \qquad (8\text{–}13)$$

Izrazi (8–11)-(8–13) vrijede općenito za proizvoljan broj serijski ili paralelno spojenih otpora. Ako su otpori u termodinamičkoj ravnoteži ($T_1 = T_2 = T$), onda iz izraza (8–11) slijedi $P_{\text{š}} = kTB$.

Ako se recipročna mreža na slici 8.5 pobudi zdesna prilagođenim generatorom, onda će se disipirana snaga razdijeliti na otpore R_1 i R_2 s istim dionim faktorima α_1 i α_2. Izraz (8–12) poznat je pod nazivom *Pierceovo pravilo* i može se primijeniti na bilo koju recipročnu mrežu s proizvoljnim brojem izvora šuma.

Pierceovo pravilo može se odmah primijeniti na razmatranje nadomjesne temperature šuma prilagođenog atenuatora prikazanog na slici 8.6. Atenuator slabljenja L nalazi se na termodinamičkoj temperaturi T_{L}. Taj se primjer nerijetko pojavljuje u praksi kad se između antene i ulaza prijamnika nalazi dug odsječak prijenosne linije s gubitcima.



Slika 8.6. Prilagođeni atenuator prigušenja L, koji se nalazi na termodinamičkoj temperaturi T_{L}

Pojačanje atenuatora jednako je recipročnoj vrijednosti njegovog prigušenja, $G=1/L$. Atenuator je recipročna dvoprolazna mreža, pa se može primijeniti Pierceovo pravilo. Pobudi li se atenuator na izlaznom prolazu prilagođenim generatorom, otpor R primit će L puta manju snagu od ukupne raspoložive snage generatora. Otuda otporu R pripada dioni faktor $\alpha_1=1/L$. Prema izrazu (8–13), $\alpha_2 = 1 - 1/L$ označuje dioni faktor atenuatora. Primjenom Pierceova pravila (8–12), temperatura šuma kaskade glasi

$$T = \alpha_1 T_\mathrm{A} + \alpha_2 T_\mathrm{L} = \frac{1}{L} T_\mathrm{A} + \left(1 - \frac{1}{L}\right) T_\mathrm{L} .$$

Otuda je raspoloživa snaga šuma na izlazu atenuatora $P_{\mathrm{š,iz}}=kTB$. Iz izraza (8–7) dobiva se snaga $P_{\mathrm{š,iz}}=k(T_\mathrm{A}+T_\mathrm{e})BG$. Budući da te snage moraju biti međusobno jednake, tj.

$$P_{\mathrm{š,iz}} = \frac{k(T_\mathrm{A}+T_\mathrm{e})B}{L} = k\left[\frac{1}{L} T_\mathrm{A} + \left(1 - \frac{1}{L}\right) T_\mathrm{L}\right] B ,$$

slijedi izraz za nadomjesnu temperaturu šuma prilagođenog atenuatora

$$T_\mathrm{e} = (L-1) T_\mathrm{L} . \qquad (8–14)$$

Uvrštenjem tog izraza u (8–8a) konačno se dobiva izraz za faktor šuma atenuatora

$$F = 1 + \frac{T_\mathrm{e}}{T_0} = 1 + (L-1)\frac{T_\mathrm{L}}{T_0} . \qquad (8–15)$$

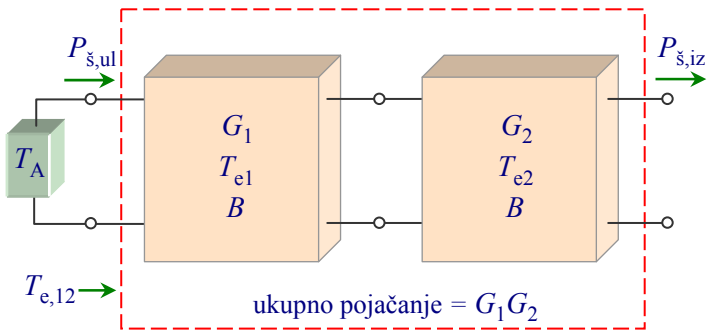
Budući da se faktor šuma mjeri na standardnoj temperaturi ($T_\mathrm{L}=T_0$), izraz (8–15) svodi se na

$$F = L . \qquad (8–16)$$

Jednom riječju, faktor šuma atenuatora jednak je njegovom prigušenju. Primjerice, suosna linija prigušenja $L=7$ dB na sobnoj će temperaturi imati faktor šuma $F=7$ dB.

U mikrovalnim sustavima različite se komponente nerijetko spajaju u lančane ili kaskadne spojeve. Svaka od tih komponenata kvari šumna svojstva sustava. Da bismo našli koliki je utjecaj pojedinih komponenata na degradaciju šumnih obilježja sustava, razmotrit ćemo nadomjesnu temperaturu i faktor šuma kaskade dvaju pojačala. Razmatranje će biti dovoljno općenito da će se rezultati moći primijeniti i na druge komponente poput atenuatora, filtara, RF sklopka i miješala. Vidjet ćemo da prva komponenta u kaskadi obično najviše utječe na ukupni šum sustava.

Na slici 8.7 prikazana je kaskada dvaju pojačala s pojačanjima G_1 i G_2, nadomjesnim temperaturama šuma T_{e1} i T_{e2} te faktorima šuma F_1 i F_2. Pretpostavit ćemo da pojačala imaju jednake širine frekvencijskog pojasa, tj. $B_1=B_2=B$. Ukupno pojačanje kaskade jednako je umnošku pojedinačnih pojačanja, $G_{12}=G_1G_2$.



Slika 8.7. Nadomjesna temperatura šuma kaskade dvaju pojačala

Izlazna snaga šuma kaskade sastoji se od više komponenata. Ulazni šum $P_{š,ul} = kT_A B$ i nadomjesna temperatura šuma prvoga pojačala T_{e1} pojačavaju se cijelim lancem, dakle G_1G_2 puta. No efektivna temperatura šuma drugoga pojačala T_{e1} pojačava se samo u pripadajućem pojačalu, dakle G_2 puta. Otuda ukupna snaga šuma na izlazu kaskade iznosi

$$P_{š,iz} = kT_A BG_1G_2 + kT_{e1} BG_1G_2 + kT_{e2} BG_2 .$$

Ta snaga mora biti jednaka snazi nadomjesne mreže, prikazane na slici 8.7 crtkanim četverokutom. Njezina je nadomjesna temperatura šuma T_{e12}i pripadajuće pojačanje G_1G_2. Otuda se može očekivati izlazna snaga šuma

$$P_{š,iz} = kT_A BG_1G_2 + kT_{e12} BG_1G_2 .$$

Izjednačavanjem tih dvaju izraza izravno se dobiva

$$T_{e12} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} . \tag{8–17}$$

To je vrlo korisna formula koja pokazuje da šumu kaskade najviše pridonosi prvo pojačalo u lancu jer je utjecaj efektivne temperature drugoga pojačala smanjen pojačanjem prvoga pojačala. Ako je, primjerice, pojačanje prvoga pojačala 10, tj. 10 dB, onda će se učinak šuma drugoga pojačala u nizu smanjiti na jednu desetinu.

Primjenom izraza (8–8a), faktor šuma kaskade pojačala poprima oblik

$$F_{12} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} . \tag{8–18}$$

Izrazi (8–17) i (8–18) mogu se poopćiti za proizvoljan broj komponenata u lancu:

$$T_{e12...} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} + \frac{T_{e3}}{G_1G_2} + \ldots \tag{8–19}$$

$$F_{12...} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1G_2} + \ldots \tag{8–20}$$

Postavi li se na ulaz lanca sklop sa slabljenjem, znatno će se povećati faktor šuma lanca. Uvrštenjem izraza (8–16) u (8–18), faktor šuma kaskade prilagođeni atenuator – pojačalo poprima oblik

$$F_{12} = L + (F_2 - 1)L = LF_2 , \tag{8–21}$$

gdje je L prigušenje atenuatora, a F_2 faktor šuma pojačala koje slijedi iza atenuatora. Drugim riječima, pasivni sklop slabljenja L ispred pojačala povećava faktor šuma pojačala za L puta. To je čest slučaj u radiokomunikacijskim primjenama jer se antena s prijamnikom nerijetko mora povezati dugačkim odsječkom prijenosne linije konačnog slabljenja. Tomu se može doskočiti umetanjem dodatnog RF pojačala između antene i prijenosne linije.

Pri povezivanju više pojačala u kaskadu valja istodobno voditi računa i o faktoru šuma i o pojačanju jer se iz izraza (8–18) vidi da obje veličine imaju ulogu u oblikovanju izraza za ukupni faktor šuma kaskade dvaju pojačala. Ako je na raspolaganju više pojačala s različitim vrijednostima faktora šuma i pojačanja, onda nije svejedno kojim se redoslijedom ta pojačala postavljaju u kaskadu. Veličina koja pokazuje koja će kombinacija pojačala dati najmanji ukupni faktor šuma jest *mjera šuma*, $M_š$, koja je definirana kao

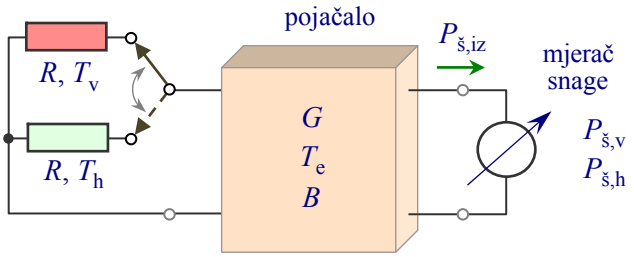
$$M_š = \frac{F - 1}{1 - 1/G} , \tag{8–22}$$

gdje je F faktor šuma, a G raspoloživo pojačanje pojačala. Na prvo mjesto kaskade valja uvijek postaviti pojačalo s najmanjim iznosom mjere šuma i tako redom.

8.1.5. Izvori šuma za mjerenje temperature šuma

Nadomjesna temperatura šuma pojačala, prijamnika i drugih aktivnih i pasivnih komponenata mikrovalnoga sustava može se jednostavno mjeriti s pomoću dvaju izvora toplinskoga šuma poznatih izlaznih snaga. Izvor s višom temperaturom naziva se *vrući izvor*, a onaj s nižom *hladni izvor*. Temperatura šuma nepoznatog prijamnog sustava ili pojačala može se izmjeriti tako da se za dvije različite ulazne snage šuma izmjere snage izlaznog šuma i zatim izračuna njihov omjer, kao što je prikazano na slici 8.8.

Neka su T_v i T_h temperature šuma vrućega, odnosno hladnoga izvora, $T_v > T_h$. Snage šuma $P_{š,v}$ i $P_{š,h}$ na izlazu pojačala koje odgovaraju tim izvorima mogu se izraziti kao:



Slika 8.8. Mjerenje temperature šuma pojačala ili prijamnika *Y*-metodom

$$P_{š,v} = kT_v BG + kT_e BG\,, \tag{8–23a}$$

$$P_{š,h} = kT_h BG + kT_e BG\ . \tag{8–23b}$$

To su dvije jednadžbe s dvije nepoznanice: efektivne temperature šuma T_e te umnoška širine pojasa i pojačanja, BG. Međusobnim dijeljenjem tih snaga može se eliminirati nepoznanica BG, tj.

$$Y = \frac{P_{š,v}}{P_{š,h}} = \frac{T_v + T_e}{T_h + T_e}\,. \tag{8–24}$$

Faktor Y može se lako odrediti mjerenjem izlaznih snaga, $P_{š,v}$ i $P_{š,h}$. Prema tom faktoru, mjerna se metoda naziva *Y-metoda*. Iz izraza (8–24) konačno se može izlučiti nadomjesna temperatura šuma pojačala,

$$T_e = \frac{T_v - YT_h}{Y - 1}\,, \tag{8–25}$$

u ovisnosti o temperaturama dvaju izvora šuma i faktoru Y.

Može se pokazati da je točnost *Y*-metode najveća za $Y \simeq 2{,}4$. Najveća pogreška pri mjerenju nastaje kad su razlike u temperaturama izvora male jer će tada faktor Y biti približno jednak jedinici pa će nazivnik izraza (8–25) biti približno jednak nuli. Drugi izvor pogreške nastaje zbog toga što se izlazne snage za vrući i hladni izvor šuma ne mjere istodobno. Naime, između jednog i drugog mjerenja može doći do promijene pojačanja, zbog promjene temperature okoline ili promjene napona napajanja pojačala. Stoga može doći do pogreške pri mjerenju faktora Y, koja pridonosi pogreški u određivanju nadomjesne temperature šuma pojačala. No kako su promjene temperature i napona napajanja obično spori vremenski procesi, taj se problem može ublažiti ili posve eliminirati tako da se mehanička sklopka za prekopčavanje izvora šuma na slici 8.8 zamijeni brzom elektroničkom sklopkom.

Faktor šuma može se odrediti iz nadomjesne temperature šuma, tj. iz izraza (8–8a).

U praksi je dovoljan samo jedan kalibrirani izvor šuma jer se za drugi uvijek može uzeti otpor na sobnoj ili standardnoj temperaturi, $T_0 = 290$ K. Izvori šuma za te potrebe rabe polu-

vodičke diode ili vakuumske elektronske cijevi. Aktivne izvore šuma možemo karakterizirati s pomoću njihove nadomjesne temperature šuma preko omjera dodatnog šuma (engl. *Excess Noise Ratio*; *ENR*) koji je definiran u decibelima kao

$$\mathrm{ENR(dB)} = 10\log\frac{P_{\check{s}} - P_0}{P_0} = 10\log\frac{T_{\check{s}} - T_0}{T_0} = 10\log\left(\frac{T_{\check{s}}}{T_0} - 1\right), \tag{8–26}$$

gdje su $P_{\check{s}}$ i $T_{\check{s}}$ snaga šuma, odnosno nadomjesna temperatura šuma izvora, a P_0 i T_0 označuju snagu šuma, odnosno temperaturu šuma pasivnog izvora koji se nalazi na sobnoj temperaturi. Za poluvodičke izvore šuma tipične vrijednosti ENR nalaze se u rasponu od 10 do 40 dB.

8.2. Nelinearne komponente i mreže

Iako se u većini suvremenih analiza elektroničkih sklopova podrazumijeva da su elektroničke komponente linearne kad rade u uvjetima malog signala, u praksi prijamnih sustava i svih onih kod kojih se traže minimalna izobličenja to ipak ostaje samo, više ili manje, dobra aproksimacija. Neki sklopovi, poput pojačala malog signala, samo su neznatno nelinearni pa se u analizama obično uzima da su linearni. U tim sklopovima nelinearnosti izravno kvare obilježja sustava pa ih valja svesti na najmanju moguću mjeru. S druge pak strane, sklopovi miješala i množila frekvencije obično do krajnosti iskorištavaju nelinearnosti za obavljanje svojih funkcija. Dobro je poznato da su gotovo sve poluvodičke komponente nelinearne. No i linearne komponente, poput otpora, kapaciteta i induktiviteta u ekstremnim radnim uvjetima pokazuju izvjesnu nelinearnost. Stoga koncept linearnih sklopova uključuje visok stupanj idealizacije pa je za puno razumijevanje elektroničkih sklopova, interferencije i ostalih aspekata elektromagnetske kompatibilnosti potrebno razmotriti nelinearnosti i sve njihove posljedice [4], [5].

Za sve linearne sklopove vrijedi načelo superpozicije. Ako na pobudnu veličinu x_1 sklop daje odziv y_2, a na pobudu x_2 daje odziv y_2, onda će na pobudu oblika $ax_1 + bx_2$ dati odziv $ay_1 + by_2$, gdje su a i b proizvoljne konstante, koje mogu biti realne i kompleksne ili vremenski promjenljive veličine. Taj se kriterij može primijeniti na bilo koji sklop ili sustav pa iz te definicije izlazi da se u odzivu linearne komponente ili sklopa mogu naći samo one frekvencijske komponente koje se nalaze i u pobudnim veličinama. Zato se može reći da linearni i vremenski nepromjenljivi sklopovi ne stvaraju komponente na novim frekvencijama koje nisu prisutne u pobudi, što je posve različito u usporedbi s nelinearnim sklopovima koji stvaraju znatan broj komponenata na novim frekvencijama. Stoga se uz pomoć tog kriterija mogu lako razlučiti linearni od nelinearnih sklopova.

Nelinearne se komponente mogu grubo podijeliti na slabo nelinearne i jako nelinearne. Slabe nelinearnosti su one koje je moguće aproksimirati konačnim redom potencija i koje nisu pobuđene odveć velikim signalom da bi došlo do promjene istosmjernih radnih uvjeta. Taj je kriterij obično ispunjen za pojačala klase A. Sklopove sa slabo izraženom nelinearnošću moguće je analizirati redovima potencija ili redovima Volterre [5]. No pristup preko redova potencija obično nije prikladan za analizu sklopova s izrazito jakom nelinearnošću, zbog toga što je u razvoj reda obično potrebno uključiti nepraktično velik broj članova. Osim toga, pri pobudi velikim signalom takvi redovi nerijetko sporo konvergiraju. Stoga je potrebno odabrati učinkovitije postupke nelinearne analize. U tu svrhu valja primijeniti iteracijske ili relaksacijske postupke. Jedan je od najučinkovitijih *metoda ravnoteže harmonika* (engl. *harmonic balance*) koja se u osnovi zasniva na rastavljanju nelinearne mreže na linearni i nelinearni podsklop. Ovdje je najvažnije da su sve nelinearne komponente koncentrirane u nelinearnom podsklopu koji se rješava u vremenskoj domeni rješavanjem nelinearnih diferencijalnih jednadžba. S druge strane, linearni se podsklop rješava u frekvencijskoj domeni klasičnim pristupom, u kojem su naponi i struje izraženi preko fazora te međusobno povezani

impedancijama na svim značajnim harmoničkim frekvencijama. Ti se problemi mogu također vrlo učinkovito rješavati i primjenom matematičkih računalnih programa. No također postoje i različiti specijalizirani računalni programi za analizu mikrovalnih mreža u koje je uključena neka od metoda rješavanja nelinearnih problema.

Da bi se razumio učinak nelinearnih izobličenja na rad mikrovalnih komunikacijskih i radarskih sustava u ovom ćemo odjeljku pozornost usmjeriti razmatranju osnovnih svojstava nelinearne komponente i mehanizmu koji vodi do izobličenja valnog oblika pobudnog signala, što je ekvivalentno nastajanju novih frekvencijskih komponenata, tj. nelinearnih izobličenja.

8.2.1. Nelinearni dvopol i nelinearnost

Uobičajeni način da se uz pomoć nelinearne komponente stvore nove frekvencije je taj da se strujno naponska karakteristika nelinearne komponente opiše redom potencija i da se pretpostavi da je pobudni napon sastavljen od više sinusnih veličina.

Na slici 8.9 prikazana je najjednostavnija moguća nelinearna mreža koja sadrži samo nelinearnu komponentu (dvopol) i izvor pobudnog napona v_p. Budući da je unutarnja impedancija izvora jednaka nuli, napon na nelinearnom dvopolu jednak je naponu izvora pa struju možemo jednostavno odrediti uvrštenjem napona izvora u red potencija [4], [5]. Otuda izraz za struju u petlji glasi

$$i = g_1 v_p + g_2 v_p^2 + g_3 v_p^3 + ... + g_k v_p^k + ... \,, \tag{8–27}$$

gdje su g_1, g_2, g_3 … g_k … realni koeficijenti. Pretpostavimo da je pobudni napon sastavljen od dvaju sinusnih signala

$$v_p = v_p(t) = V_1 \cos(\omega_1 t) + V_2 \cos(\omega_2 t) \tag{8–28}$$

i da je nelinearni dvopol opisan redom potencija smo do trećega stupnja. Uvrštenjem vrijednosti napona iz izraza (8–8a) u red (8–7), prvi član reda poprima oblik

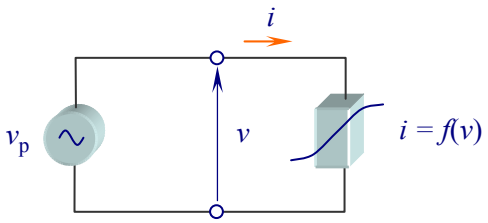
$$i_1(t) = g_1 v_p(t) = g_1 V_1 \cos(\omega_1 t) + g_1 V_2 \cos(\omega_2 t)\,. \tag{8–29a}$$

Jednakim postupkom i primjenom poznatih trigonometrijskih formula za kvadrate i umnoške kosinusa drugi član reda, kvadratni, daje

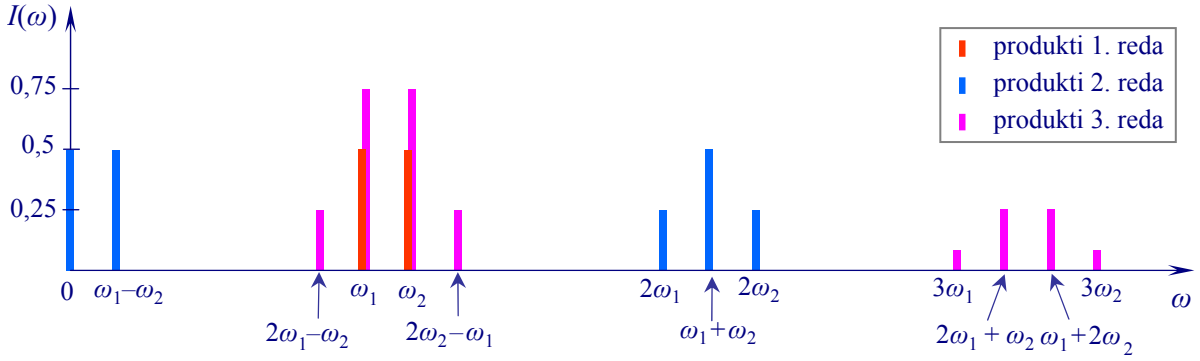
$$\begin{aligned} i_{II}(t) &= g_2 v_{in}^2(t) = g_2 (V_1 \cos\omega_1 t + V_2 \cos\omega_2 t)^2 = \\ &= g_2 (V_1^2 \cos^2 \omega_1 t + 2V_1 V_2 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t + V_2^2 \cos^2 \omega_2 t)^2 = \\ &= \frac{g_2}{2}\left(V_1^2 + V_2^2\right) + \frac{g_2}{2} V_1^2 \cos 2\omega_1 t + \frac{g_2}{2} V_2^2 \cos 2\omega_2 t + \\ &+ g_2 V_1 V_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t + g_2 V_1 V_2 \cos(\omega_1 + \omega_2)t\,. \end{aligned} \tag{8–29b}$$

Treći član, kubni, daje

$$\begin{aligned} i_{III}(t) &= \frac{3g_3}{4}\left(V_1^3 + 2V_1 V_2^2\right)\cos\omega_1 t + \frac{3g_3}{4}\left(V_2^3 + 2V_1^2 V_2\right)\cos\omega_2 t \; + \\ &+ \frac{3g_3}{4} V_1^2 V_2 \cos(2\omega_1 - \omega_2)t + \frac{3g_3}{4} V_1 V_2^2 \cos(\omega_1 - 2\omega_2)t + \\ &+ \frac{3g_3}{4} V_1^2 V_2 \cos(2\omega_1 + \omega_2)t + \frac{3g_3}{4} V_1 V_2^2 \cos(\omega_1 + 2\omega_2)t + \\ &+ \frac{g_3}{4} V_1^3 \cos 3\omega_1 t + \frac{g_3}{4} V_2^3 \cos 3\omega_2 t. \end{aligned} \tag{8–29c}$$



Slika 8.9. Nelinearni dvopol pobuđen izmjeničnim signalom iz idealnog naponskog izvora



Slika 8.10. Spektralni prikaz struje nelinearnog dvopola pobuđenog s dvama sinusnih signala

Ukupna struja koja protječe nelinearnim dvopolom, naziva se *struja kratkoga spoja* jer je unutarnja impedancija izvora jednaka nuli pa su novostvorene frekvencijske komponente kratko spojene naponskim izvorom. Ta je struja zbroj svih komponenata struje u izrazima (8–29)

$$i(t) = i_{\mathrm{I}}(t) + i_{\mathrm{II}}(t) + i_{\mathrm{III}}(t)\,. \tag{8–30}$$

Može se lako vidjeti da struja u peljii sadrži velik broj novih frekvencijskih komponenata ili kraće novih frekvencija. Na slici 8.10 prikazan je spektar struje opisan izrazima (8–29). Pobudni naponi na frekvencijama ω_1 i ω_2 jednakih su iznosa, $V_1 = V_2 = 1$ V, a koeficijenti nelinearnog dvopola iznose: $g_1 = g_2 = 1/2$ i $g_3 = 1/3$. Uključivanje članova četvrtoga, petoga i viših stupnjeva, izazvat će pojavu još većeg broja novih frekvencija. Drugim riječima, ako se pretpostavi da je neki nelinearni dvopol pobuđen energijom iz izvora čisto sinusnih titraja na kružnoj frekvenciji ω, u njemu će doći do pretvorbe energije i njezine preraspodjele u nove modove na novim frekvencijama 2ω, 3ω, itd. To *spektralno raspršenje* energije svojstveno je svim parametarskim sustavima, a poglavito nelinearnim reaktivnim dvopolima, nelinearnom kapacitetu ili induktivitetu, o čemu će biti više riječi u razmatranjima miješanja na nelinearnom kapacitetu.

Odmah na početku proučavanja nelinearnih pojava valja lučiti koncept stupanj od koncepta red. *Stupanj* neke nelinearnosti jednostavno se odnosi na potenciju napona $v(t)$ u nelinearnoj prijenosnoj karakteristici. No frekvencijska komponenta miješanja n-toga *reda* proizlazi iz zbroja (ili razlike) n pobudnih frekvencija. Isto tako, da bi se razmatranje moglo zadržati u analitičkim okvirima valja zanemariti sve frekvencijske komponente iznad neke vrijednosti koja će ovisiti o jačini nelinearnosti, veličini pobudnog napona te o željenoj točnosti rezultata.

Analiza nelinearnog dvopola može se najlakše objasniti linearnom kombinacijom dviju frekvencija, ω_1 i ω_2, što je i u praksi najčešći slučaj. U prisutnosti dvaju sinusnih signala, na nelinearnom dvopolu stvara se *frekvencija miješanja*

$$\omega_{m,n} = m\omega_1 + n\omega_2\,, \tag{8–31}$$

a njoj pripadajuća frekvencijska komponenta naziva se *produkt miješanja*. Indeksi m i n nalazi se u skupu svih realnih i cijelih brojeva. Dakle m, $n = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ Zbroj

apsolutnih vrijednosti m i n naziva se *red produkta miješanja*. Da bi frekvencije $\omega_{m,n}$ bile različite za sve moguće kombinacije indeksa m, n potrebno je da su ω_1 i ω_2 nerazmjerne. Par frekvencija je razmjeran ako je omjer tih frekvencija racionalan broj. Tad je razmjeran i cijeli sustav. Pritom su dopuštene i negativne frekvencije, što je podrobnije objašnjeno u odjeljku 8.2.2.

Dubljim uvidom u izraz (8–29) može se pokazati da član k-toga reda u redu potencija (8–27) stvara nove frekvencije miješanja k-toga ili bilo kojeg nižeg reda. Te su frekvencije uvijek kombinacije frekvencijskih komponenata napona k-toga reda, koji postoji na priključcima nelinearnog dvopola. To ne znači da je u svakom nelinearnom dvopolu $|m|+|n|<k$. Spajanje linearnoga otpora u serijski krug s izvorom i nelinearnim dvopolom, kao što je prikazano na slici 8.9, imalo bi za posljedicu da pad napona na otporu ima jednak broj komponenata kao i struja kratkoga spoja. To znači da ukupni napon na nelinearnom dvopolu uključuje i produkte miješanja višega reda. Stoga se može općenito reći da nelinearni dvopol stvara frekvencije miješanja koje uključuju sve moguće harmonike pobudnih frekvencija, pa čak i one kod kojih je zbroj $|m|+|n|$ veći od najvišega stupnja u redu potencija.

Iz izraza (8–29) može se izvesti još jedan zanimljiv zaključak. Naime, članovi neparnoga stupnja u redu potencija stvaraju samo produkte miješanja neparnoga stupnja, a članovi parnoga stupnja stvaraju samo produkte parnoga stupnja. To se svojstvo primjenjuje u balansnim sklopovima jer se na taj način mogu potisnuti mnogi neželjeni produkti miješanja, bili oni parnoga, ili neparnoga stupnja.

Iz izraza (8–29c) vidjeli smo da struja na frekvenciji osnovnog harmonika (pobudnog signala) ne ovisi samo o pobudnom naponu i linearnom članu izraza (8–27), nego i o svim nelinearnostima neparnoga stupnja. Porastom razine pobudnog napona, kubni član sve više pridonosi ukupnoj struji jer amplitude članova u izrazu (8–29c) rastu s trećom potencijom pobudnog napona. Taj primjer pokazuje i kako članovi višega stupnja, u izrazu (8–27) stvaraju produkte miješanja nižega reda. Dakle, članovi kružne frekvencije ω_1 u izrazu (8–29c) nastaju kao kombinacije trećega reda. U ovom su slučaju moguće ove dvije kombinacije:

$$\omega_1 = \omega_1 + \omega_1 - \omega_1 \quad \text{i} \quad \omega_1 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_2 \,. \tag{8–32}$$

Prisutnost negativnih frekvencija može se lako objasniti na primjeru trigonometrijskih funkcija koje se mogu izraziti u eksponencijalnom obliku preko fazora. Tako se, primjerice, funkcija $\cos\omega t$ može napisati kao zbroj dvaju fazora, tj.

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}, \tag{8–33}$$

gdje je u drugome fazoru frekvencija negativna.

Pomak istosmjerne radne točke

Izraz (8–29b) upućuje na to da kvadratni član proizvodi istosmjernu komponentu struje

$$I_0 = \frac{g_2}{2}\left(V_1^2 + V_2^2\right) .$$

Ako se u seriju s nelinearnim dvopolom spoji linearni otpor, onda će zbog protjecanja istosmjerne struje, nastale u nelinearnom dvopolu, doći do pada napona na otporu i do promjene prednapona, tj. istosmjerne radne točke. To se pripisuje ispravljačkom svojstvu kvadratnoga člana i svih preostalih članova parnoga stupnja, koji se nalaze u razvoju funkcije nelinearnoga dvopola. S time valja računati pri proračunu miješala s izrazito nelinearnim elemenata poput Schottkyjeve diode i bipolarnog tranzistora. Ako je korisni signal nedopustivo velikog iznosa, onda ta pojava može znatno pokvariti dinamička obilježja pojačala klase A, jer promjenom jakosti istosmjerne struje, tj. radne točke, redovito dolazi do promjene pojačanja.

Generiranje harmonika

Osnovno svojstvo nelinearnih elemenata generiranje je viših harmoničkih komponenata pobudne frekvencije. U izrazima (8–29) to su članovi na frekvencijama $k\omega_1$ i $k\omega_2$. Stoga k-ta harmonička komponenta pobudnog signala označuje frekvenciju miješanja k-toga reda. Kod uskopojasnih prijamnika, generiranje viših harmonika ne stvara ozbiljniji problem jer su viši harmonici nalaze znatno izvan frekvencijskog pojasa prijamnog signala. No u nekim primjenama, poput uzlaznih pretvornika u odašiljačima, viši harmonici mogu interferirati s drugim komunikacijskim sustavima pa ih valja svesti na najmanju moguću mjeru primjenom filtara ili nekim od postupaka linearizacije. Svojstvo generiranja harmonika na nelinearnom otporu učinkovito se rabi u sklopovima množila frekvencije u milimetarskome valnom području.

Produkti intermodulacije

Komponente struje koje u izrazima (8–29) nastaju kao linearne kombinacije dvaju ili više signala u širem smislu nazivaju se *produkti intermodulacije* (*IM produkti*). Oni se u pojačalu ili miješalu uzimaju kao parazitski signali koji mogu interferirati s korisnim signalima i znatno pokvariti odnos signala prema šumu, tj. sniziti razinu osjetljivosti prijamnog sustava. Posebno su štetne komponente na frekvencijama $2\omega_1-\omega_1$ i $2\omega_1+\omega_1$ u izrazu (8–29c), koje stvara kubni član nelinearnog dvopola, jer se nerijetko nalaze unutar frekvencijskog područja prijamnog signala ili barem blizu toga područja. Stoga je za miješanje potrebno odabrati, ako je moguće, nelinearne komponente sa slabije izraženim članovima neparnih potencija. Jedna je od takvih komponenata tranzistor s učinkom polja (FET) kod kojeg prevladava utjecaj kvadratnoga člana.

Zasićenje izlazne snage

Iz izraza (8–29a) i (8–29c), koji se odnose na neparne potencije napona u izrazu (8–28), slijedi da je komponenta struje osnovnog harmonika na frekvenciji ω_1 dana izrazom

$$i_1(t)=\left(g_1V_1+\frac{3}{4}g_3V_1^3 \right)\cos\omega_1 t\ .$$

Ako je koeficijent g_3 u članu s trećom potencijom negativan, onda dolazi do zasićenja struje odziva, tj. jakost struje ne raste proporcionalno porastu pobudnoga napona.

Jasnija se fizikalna slika o ponašnju nelinearnog dvopola može dobiti razmatranjem u sljedećem primjeru. Na slici 8.11 prikazana je nelinearna mreža koja se sastoji od linearnoga i nelinearnoga otpora te naponskog izvora. Pretpostavimo da su u nelinearnu funkciju $i=f(v)$ uključeni samo članovi neparnoga stupnja

$$i=f(v)=v+0{,}5v^3+0{,}5v^5\ . \tag{8–34}$$

Kao što je ranije rečeno, prisutnost linearnoga otpora sudjeluje u stvaranju posve novih frekvencijskih komponenata napona. Izraz za napon na nelinearnom dvopolu može se dobiti primjenom inverzije reda, što se može naći u dodatak K i literaturi [4], tj.

$$v=\left[f(i)\right]^{-1}=i-0{,}5i^3+0{,}25i^5+0{,}5i^7+... \tag{8–35}$$

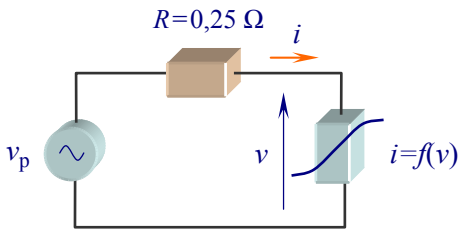
Napon na otporu ($R=0{,}25\ \Omega$) iznosi $v_R=0{,}25i$ pa pribrajanje ove vrijednosti redu (8–35) daje

$$v_\mathrm{p}=1{,}25i-0{,}5i^3+0{,}25i^5+0{,}5i^7+... \tag{8–36}$$

Ponovnim invertiranjem reda dobiva se izraz za struju u ovisnosti o pobudnome naponu, tj.

$$i=0{,}8v+0{,}2v_\mathrm{p}^3+0{,}092v_\mathrm{p}^5-0{,}0572v_\mathrm{p}^7+... \tag{8–37}$$

Taj red potencija sadrži samo članove neparnoga stupnja jer oba dvopola u strujnom krugu, i linearni i nelinearni otpor, imaju samo članove neparnoga stupnja. Ovdje se prešutno uzima da je linearni otpor specijalni slučaj nelinearnoga otpora čiji se red potencija sastoji samo od



Slika 8.11. Nelinearni dvopol lineariziran serijskim otporom

jednog i to prvoga stupnja. Red (8–37) je beskonačan, ali se iz praktičnih razloga može ograničiti do člana petoga ili višega stupnja, ovisno o tomu koliko je jaka nelinearnost.

Pretpostavimo sad da je nelinearni dvopol opisan idealnom kvadratnom karakteristikom u skladu sa slikom 8.12a), tj.

$$f(V) = g_2 V^2 . \tag{8–38}$$

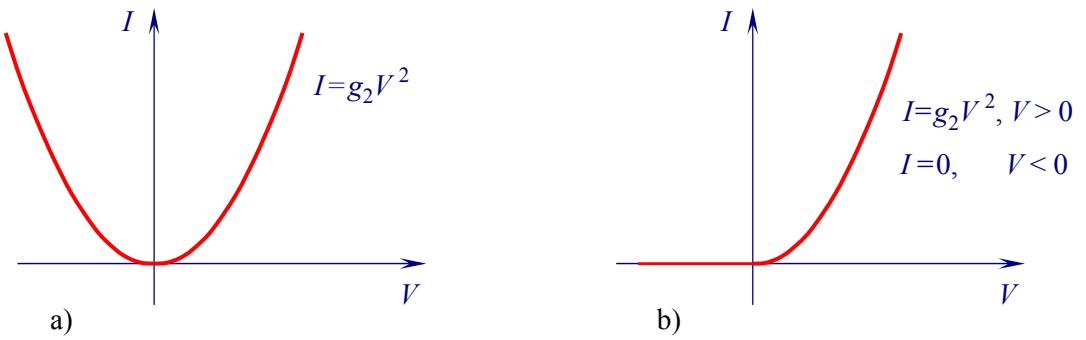
U odnosu na dosadašnja razmatranja s redovima potencija, ova karakteristika sadrži dva nezgodnih svojstava. Prvo, izraz (8–38) ne može se invertirati jer ne postoji linearni član. Drugo, struja opisana izrazom (8–38) ima samo produkte miješanja parnoga reda, iako pobudni signal označuje komponentu prvoga reda, dakle neparnoga reda. To znači da ne može teči struja frekvencije pobudnog signala. Osim toga, pri negativnom je prednaponu diferencijalni otpor negativan, što znači da se radi o aktivnom dvopolu, tj. o izvoru signala. No postoje takve elektroničke komponente koje pokazuju približno kvadratnu strujno-naponsku karakteristiku u području $V > 0$, a ne pokazuju odziv u području negativnih napona, kao što je prikazano na slici 8.12b). Ako se uz izmjenični pobudni signal doda istosmjerni prednapon, onda se može napisati ovakav red potencija

$$f(v + V_0) = g_2 (v + U_0)^2 = g_2 (V_0^2 + 2V_0 v + v^2) , \tag{8–39}$$

gdje je g_2 konstanta, a v mala izmjenična veličina superponirana na prednapon V_0. Stoga izraz (8–39) sadrži linearni član $2V_0 v$. To drugim riječima kazuje, da je u praksi teško ostvariti komponentu s čisto kvadratnom karakteristikom. Izrazom (8–39) mogu se opisati karakteristike tipičnog spojnog FET-a, MOSFET-a i MESFET-a, što znači da ni te komponente nemaju idealnu kvadratnu karakteristiku. Pretpostavimo sad da je u seriju s nekim nelinearnim dvopolom, čija karakteristika uključuje samo članove parnoga reda, spojen linearni otpor, dakle član neparnoga reda. Tad je

$$I = f(V) = V + 2V^2 + 3V^4 , \tag{8–40}$$

gdje su velikim slovima bez indeksa označene veličine koje u sebi sadrže izmjenične i istosmjerne komponente. Invertiranjem reda dobiva se



Slika 8.12. a) Strujno-naponska karakteristika nelinearnog dvopola idealne kvadratne karakteristike.
b) Struno-naponska karakteristika s *realnom* kvadratnom karakteristikom

$$V_\mathrm{p} = 2I - 2I^2 + 8I^3 - 43I^4 + 64I^5 + \ldots, \tag{8–41}$$

što sadrži sve potencije struje I. Ponovnim invertiranjem ovoga reda dobiva se izraz za struju I u funkciji napona V_p. Dakle, unatoč toga što izvorni red sadrži samo jedan član neparnoga reda, struja sadrži frekvencije miješanja svih redova, parnih i neparnih, uključujući i one iznad četvrtoga reda.

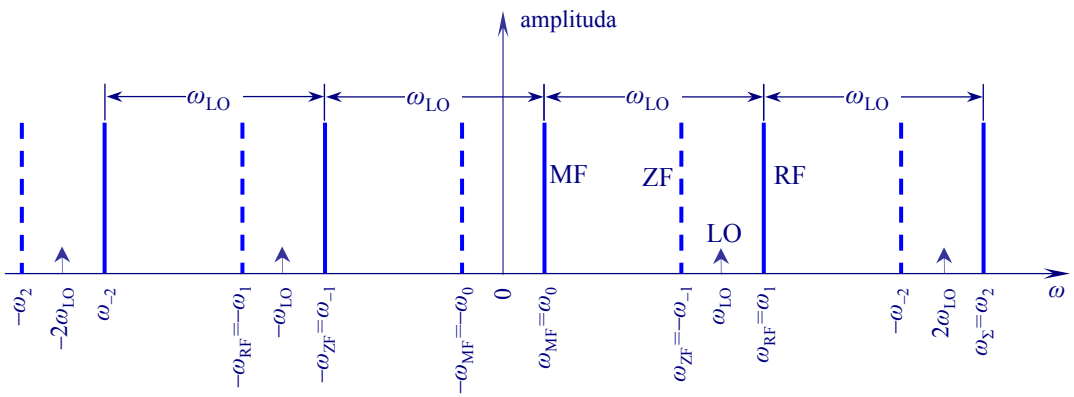
8.2.2. Frekvencije miješanja i matrica pretvorbe

Ako je miješalo pobuđeno na frekvenciji ω_LO i ima međufrekvenciju $\omega_\mathrm{MF} = \omega_0$, onda odziv na MF mogu dati samo ulazni signali na frekvencijama $n\omega_\mathrm{LO} \pm \omega_0$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$ Za daljnja razmatranja, korisno je definirati frekvencije miješanja kao

$$\omega_n = \omega_0 + n\omega_\mathrm{LO}, \tag{8–42}$$

gdje je $n = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ Za $n < 0$ frekvencije miješanja su negativne. Ovakav način označivanja frekvencija miješanja znatno pojednostavnjuje teorijski pristup miješalima [6]. Otuda je frekvencija gornjeg bočnog pojasa $\omega_0 + n\omega_\mathrm{LO}$ pozitivna, a frekvencija je donjeg bočnog pojasa $\omega_0 - n\omega$ negativna. Ovdje n označuje indeks frekvencije bočnog pojasa, pa se frekvencije gornjega i donjega bočnog pojasa mogu pisati kao $\omega_{+n} = \omega_0 + n\omega_\mathrm{LO}$, odnosno $\omega_{-n} = \omega_0 - n\omega_\mathrm{LO}$, a međufrekvencija ω_0. Budući da se električne veličine mogu opisati fazorima koji su vezani s pozitivnom frekvencijom, fazori napona na frekvencijama ω_{+1}, ω_0, ω_{-1} mogu se, primjerice, označiti s V_{+1}, V_0, V_{-1}. Ako je frekvencija korisnog RF signala $\omega_\mathrm{RF} = \omega_{+1}$, onda je $\omega_\mathrm{ZF} = -\omega_{-1}$ zrcalna frekvencija i obratno, ako je $\omega_\mathrm{RF} = -\omega_{-1}$, onda je $\omega_\mathrm{ZF} = \omega_{+1}$. Na slici 8.13 dan je spektralni prikaz frekvencijskih komponenata miješanja, tj. bočnih pojasa. Negativnim frekvencijama pridružene su konjugirano kompleksne vrijednosti napona. Pritom se odgovarajuće impedancije na negativnim frekvencijama prikazuju kao konjugirano kompleksne vrijednosti veličina u uobičajenom prikazu s pozitivnim frekvencijama.

Trenutačna vrijednost naponom upravljanog nelinearnoga dvopola ovisi o naponu na priključcima samog dvopola ili napona na nekom drugom mjestu unutar nelinearnog sklopa. Pritom je bitno da je vrijednost dvopola jednoznačna funkcija napona. To isto vrijedi i za dvopole upravljane strujom. Tako je, primjerice, vodljivost Schottkyjeve diode za mali signal moguće prikazati eksponencijalnom funkcijom napona ili linearnom funkcijom struje. Za oba je slučaja funkcija jednoznačna, pa se nelinearni dvopol može izraziti u ovisnosti o naponu ili struji. No u praksi postoje elektroničke komponente poput tunelske (ili Esakijeve) diode, kod kojih vrijednost struje najprije raste s naponom, a zatim daljnjim porastom napona opada. U tom slučaju nelinearnost valja izraziti kao funkciju napona jer je napon višeznačna funkcija struje, a istosmjernu komponentu dovoditi iz naponskog izvora.



Slika 8.13. Označivanje frekvencija miješanja

Pri razmatranju nelinearnih sklopova istodobno pobuđenih velikim i malim signalima, poput miješala, valja uvesti pojam *diferencijalnih* ili *inkrementnih veličine*. Nelinearni dvopol, opisan strujno-naponskom karakteristikom $I = f(V)$ označuje naponom upravljanu vodljivost (slika 8.14). Ako se sad pretpostavi da su na nelinearni dvopol istodobno dovedeni istosmjerni napon upravljanja V_0, koji obično u praksi označuje prednapon, i jedan mali izmjenični napon $v(t)$, onda se struja dvopola može razviti u Taylorov red oko radne točke V_0, tj.

$$I(V_0 + v) = f(V_0 + v) = f(V_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f(V)}{\mathrm{d}V}\right|_{V=V_0} v + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 f(V)}{\mathrm{d}V^2}\right|_{V=V_0} v^2 + \ldots, \tag{8–43}$$

gdje je, radi jednostavnijeg pisanja, u izrazu $v(t)$ ispuštena varijabla t koja upućuje na ovisnost o vremenu. Ako se još pretpostavi da je $v \ll V_0$ i da je nelinearnost dovoljno mala da bi red konvergirao, onda se struja malog signala može napisati kao

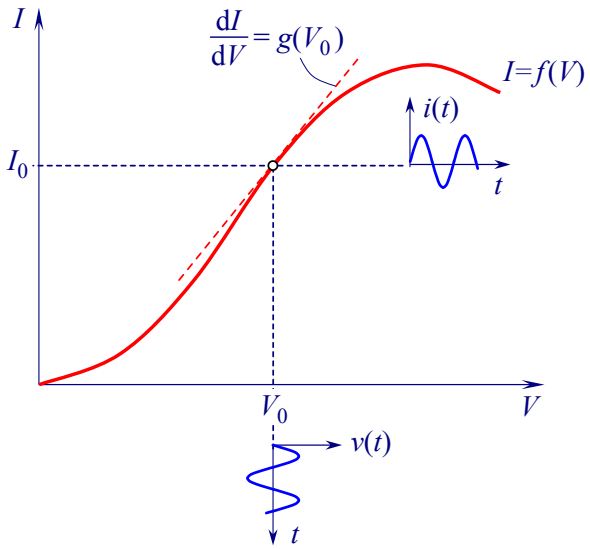
$$i = f(V_0 + v) - f(V_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(V)}{\mathrm{d}V}\right|_{V=V_0} v + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 f(V)}{\mathrm{d}V^2}\right|_{V=V_0} v^2 + \ldots, \tag{8–44}$$

Ovdje je struja i sveukupna struja malog signala, koja se sastoji od istosmjerne i izmjeničnih komponenata. To znači da struja i može imati istosmjernu komponentu čak i onda kad napon v ima samo izmjenične komponente. To je posljedica *ispravljačkog učinka* članova parnoga stupnja. Ipak, u uvjetima malog izmjeničnog signala promjena istosmjerne radne točke vrlo je mala u usporedbi s veličinom $f(V_0)$, tako da su istosmjerne komponente u članovima v_2, v_4, ... zanemarivo male. Ako su svi članovi iznad prvoga stupnja zanemarivo mali, onda se razvoj u red (8–44), zadržavanjem samo prvog člana reda, može pojednostavniti na

$$i = \left.\frac{\mathrm{d}f(V)}{\mathrm{d}V}\right|_{V=V_0} v = g(V_0)v, \tag{8–45}$$

gdje je $g(V_0)$ diferencijalna vodljivost u točki V_0. Veličina V_0 ne mora biti istosmjerna veličina. Ona označuje napon upravljanja i općenito može biti vremenski promjenljiv napon velikog signala, kao što je to, primjerice, napon lokalnog oscilatora u sklopu miješala

$$i = \left.\frac{\mathrm{d}f(V)}{\mathrm{d}V}\right|_{V=V_{\mathrm{LO}}(t)} \cdot v(t). \tag{8–46}$$



Slika 8.14. Određivanje diferencijalne vodljivosti na strujno-naponskoj karakteristici nelinearnog dvopola

Izraz (8–46) može se pisati u obliku

$$i(t) = g(t)v(t)\,. \tag{8–47}$$

Trenutačne vrijednosti vremenski promjenljive vodljivosti $g(t)$ tvore derivaciju strujno-naponske karakteristike nelinearnog dvopola u točkama trenutačnih vrijednosti napona velikog signala.

Na jednak način može se dobiti izraz za diferencijalni otpor strujno-naponske karakteristike $V=F(I)$ strujom upravljanog otpora $r(I)$, tj.

$$v(t) = r(t)i(t)\,, \tag{8–48}$$

gdje je

$$r(t) = \left.\frac{\mathrm{d}F(I)}{\mathrm{d}I}\right|_{I=I_{\mathrm{LO}}(t)}\,. \tag{8–49}$$

Sličan se postupak može primijeniti na nelinearni kapacitet. Ako je $Q=f(V)$ karakteristika koja povezuje naboj s naponom, onda je *diferencijalni naboj kapaciteta*

$$q(t) = \left.\frac{\mathrm{d}f(V)}{\mathrm{d}V}\right|_{V=V_{\mathrm{LO}}} v(t)\,, \tag{8–50}$$

što se može napisati kao

$$q(t) = c(t)v(t)\,, \tag{8–51}$$

gdje je $c(t)$ valni oblik kapaciteta. Struja koja protječe tim kapacitetom dobiva se deriviranjem naboja po vremenu:

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = c(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + u(t)\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{8–52}$$

U frekvencijskoj domeni, napon i struju vremenski promjenljivog dvopola povezuje matrica pretvorbe (engl. *conversion matrix*). Na svim frekvencijama miješanja opisanim izrazom (8–42), fazori opisuju napon na dvopolu i struju koja kroz njega protječe. Zbroj tih fazora daje ukupni fazor napona

$$v'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{V}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 + n\omega_{\mathrm{LO}})t}. \tag{8–53}$$

U tom se izrazu nalazi eksponencijalni član s frekvencijom miješanja u skladu s razmatranjima s početka ovoga odjeljka. Uvedene su kompleksne amplitude fazora $\underline{V}_n$. Kasnije će biti potrebno označiti kojoj frekvencijskoj komponenti one pripadaju. Unatoč tomu što postoji velika sličnost između izraza (8–53) i Fourierova reda, izraz (8–53) nije Fourierov red, nego zbroj fazorskih komponenata na odgovarajućim frekvencijama.

Jednako se razmatranje može provesti i za struju pa se dobiva

$$i'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{I}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 + n\omega_{\mathrm{LO}})t}\,. \tag{8–54}$$

Premda sume u izrazima (8–53) i (8–54) sadrže beskonačan broj članova, od $-\infty$ do $+\infty$, sumiranje se iz praktičnih razloga ograničuje na područje od $-N$ do N, gdje se najviša frekvencija miješanja nalazi blizu N-tog harmonika LO. Ovdje se područja sumiranja mora ograničiti, kako bi se izračunavanje moglo provesti s pomoću računala.

Na početku razmatranja obilježja miješanja na nelinearnoj impedanciji ili admitanciji, treba izvesti matricu pretvorbe vremenski promjenljive vodljivosti. Valni oblik vodljivosti $g(t)$ može se razviti u Fourierov reda kao

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_{\mathrm{LO}}t}. \tag{8–55}$$

Struja i napon vodljivosti povezani su Ohmovim zakonom, $i'(t) = g(t)\,u'(t)$. Uvrštenjem izraza (8–53), (8–54) i (8–55) u jednadžbu (8–47), u frekvencijskoj je domeni

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{I}_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} G_n \underline{V}_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,[\omega_0+(n+m)\omega_{\mathrm{LO}}]t}, \tag{8–56}$$

gdje je $\omega_k = \omega_0 + k\omega_{\mathrm{LO}}$. Izraz (8–56) pokazuje da na objema stranama izraza postoje komponente istih frekvencija. Izdvajanjem članova istih frekvencijama s obiju strana jednakosti (8–56) dobiva se matrična jednadžba pretvorbe

$$[\underline{I}] = [G][\underline{V}]. \tag{8–57}$$

Elemente matrice pretvorbe [G] čine članovi Fourierova reda valnog oblika vremenski promjenljive vodljivosti $g(t)$ od istosmjerne komponente do $2N$-tog harmonika. Budući da je dinamička vodljivost $g(t)$ realna funkcija vremena, izravno izlazi da članovi matrice [G] te vektora [$\underline{I}$] i [$\underline{V}$] s negativnim i pozitivnim frekvencijama moraju biti međusobno konjugirano kompleksni, tj.

$$G_{-n} = G_n^*, \quad \underline{V}_{-n} = \underline{V}_n^*, \quad \underline{I}_{-n} = \underline{I}_n^*. \tag{8–58}$$

Premda matrica u jednadžbi (8–57) označuje vodljivost, njezini članovi (osim istosmjernog, G_0) mogu općenito biti kompleksni. To ne znači da se vodljivost ponaša slično reaktanciji, nego da postoje fazni pomaci između frekvencijskih komponenata u matrici pretvorbe koja u tom slučaju označuje matricu prijenosne vodljivosti.

Na isti se način može odrediti matrica prijenosnog otpora u kojoj su R_n Fourierove komponente diferencijalnoga otpora. Pripadajuća matrična jednadžba glasi [$\underline{V}$]=[R][$\underline{I}$].

Ako se nelinearni dvopol može prikazati kao vremenski promjenljiv otpor ili vodljivost, onda je matrica prijenosnih otpora jednaka inverznoj matrici prijenosnih vodljivosti i obratno. Dakle, ako je u vremenskoj domeni

$$g(t) = \frac{1}{r(t)}, \tag{8–59a}$$

onda je u frekvencijskoj domeni

$$[R] = [G]^{-1}. \tag{8–59b}$$

Na jednak se način može naći matrica pretvorbe vremenski promjenljivog kapaciteta, ako je poznat valni oblik tog kapaciteta. Valni oblik naboja na kapacitetu $c(t)$ ponaša se u skladu s izrazom (8–51) i može se razviti u Fourierov red, tj.

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_{\mathrm{LO}}t}. \tag{8–60}$$

Vrijednost struje koja protječe kapacitetom valja izračunati s pomoću izraza (8–52), a valni oblik naboja $q(t)$ može se prikazati kao

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_{\mathrm{LO}}t}. \tag{8–61}$$

Uvrštenjem izraza (8–53), (8–60) i (8–61) u (8–51), dobiva se

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_n \underline{V}_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{n+m}t}. \tag{8–62}$$

Struja se lako može dobiti deriviranjem naboja po vremenu, kao u izrazu (8–52). Budući da deriviranju u frekvencijskoj domeni odgovara množenje s jω, izlazi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{I}_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}\omega_{n+m} C_n \underline{V}_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{n+m} t}, \tag{8–63}$$

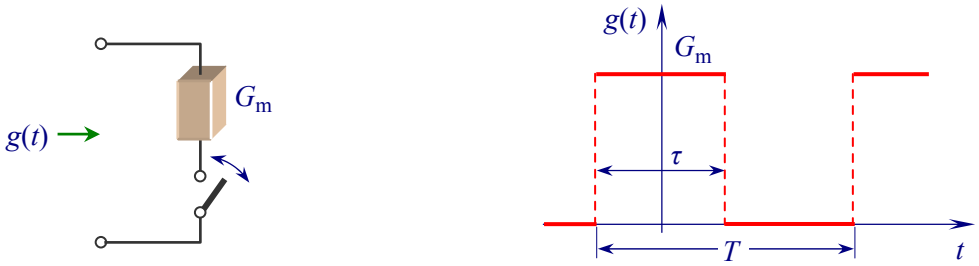
Izdvajanjem članova istih frekvencija dobiva se matrična jednadžba

$$[\underline{I}] = \mathrm{j}[\Omega][C][\underline{V}], \tag{8–64}$$

gdje je [Ω] dijagonalna matrica čiji se elementi na frekvencijama miješanja nalaze u rasponu od ω_{-N} do ω_N.

Primjer 8.1. Matrica pretvorbe vremenski promjenljive vodljivosti

Naći matricu pretvorbe vremenski promjenljive vodljivosti pravokutnoga valnog oblika prikazanog na slici 8.15.



a) b)

Slika 8.15. a) Vremenski promjenljiva vodljivost ostvarena prekopčavanjem linearne vodljivosti s pomoću idealne sklopke. **b)** Valni oblik promjenljive vodljivosti za $\tau/T = 0{,}5$

Rješenje:

Prema slici 8.15, radni ciklus iznosi 50% pa se Fourierov red vremenski promjenljive vodljivosti može napisati kao

$$g(t) = G_\mathrm{m}\left(0{,}5 + 0{,}318\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{\mathrm{LO}}t} + 0{,}318\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_{\mathrm{LO}}t} - 0{,}106\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega_{\mathrm{LO}}t} - 0{,}106\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega_{\mathrm{LO}}t} + \right.$$
$$\left. + 0{,}064\mathrm{e}^{\mathrm{j}5\omega_{\mathrm{LO}}t} + 0{,}064\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5\omega_{\mathrm{LO}}t} - \ldots\right), \tag{8–65}$$

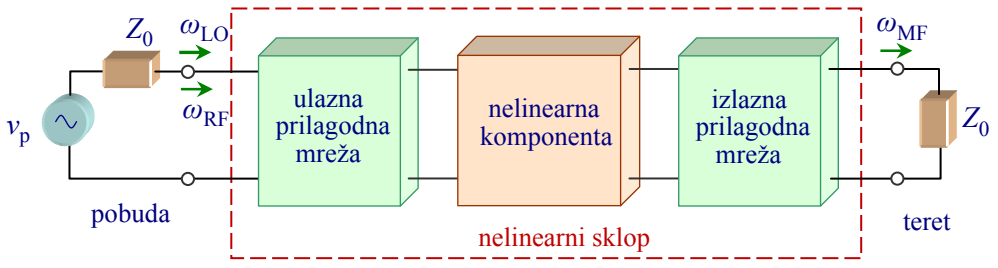
gdje je G_m vršna vrijednost valnog oblika vodljivosti $g(t)$. Koeficijenti izraza u zagradi tvore elemente matrice prijenosnih vodljivosti. Ovdje za $2N = 6$, matrica prijenosnih vodljivosti glasi

$$[G] = G_\mathrm{m}\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}318 & 0 & -0{,}106 & 0 & 0{,}064 & 0 \\ 0{,}318 & 0{,}5 & 0{,}318 & 0 & -0{,}106 & 0 & 0{,}064 \\ 0 & 0{,}318 & 0{,}5 & 0{,}318 & 0 & -0{,}106 & 0 \\ -0{,}106 & 0 & 0{,}318 & 0{,}5 & 0{,}318 & 0 & -0{,}106 \\ 0 & -0{,}106 & 0 & 0{,}318 & 0{,}5 & 0{,}318 & 0 \\ 0{,}064 & 0 & -0{,}106 & 0 & 0{,}318 & 0{,}5 & 0{,}318 \\ 0 & 0{,}064 & 0 & -0{,}106 & 0 & 0{,}318 & 0{,}5 \end{bmatrix} \tag{8–66}$$

Matrica (8–66) ima jedno zanimljivo svojstvo. Ako je diferencijalna vodljivost parna funkcija, što podrazumijeva parnu funkciju napona, onda su svi elementi matrice pretvorbe realni brojevi. Stoga je matrica simetrična i recipročna, što znači da su gubitci pretvorbe iz RF pojasa u MF pojas jednaki gubitcima pretvorbe iz MF u RF pojas.

8.2.3. Nelinearna analiza velikog signala

Nelinearna analiza ili analiza velikog signala ima za cilj određivanje valnih oblik napona ili struje na nelinearnoj impedanciji ili admitanciji. Kad su jednom poznati napon i struja na nelinearnoj komponenti, tad se može odrediti matrica pretvorbe, tj. mogu se odrediti obilježja pretvorbe signala iz jednog frekvencijskog pojasa u drugi frekvencijski pojas. Kod miješala (odjeljak 8.6) obično se uzima da je korisni RF signal frekvencije ω_{RF} zanemarivo mali u odnosu na pobudni signal iz lokalnog oscilatora (LO) frekvencije ω_{LO}. Miješanjem tih dvaju signala na izlazu se dobiva međufrekvencijski (MF) signal frekvencije ω_{MF}. Nadomjesnom shemom, prikazanom na slici 8.16, može se opisati više vrsta nelinearnih sklopova, bez obzira na to je li nelinearna komponenta dioda ili tranzistor. Pretpostavimo da pobudni signal sadrži samo čisto sinusnu (izmjeničnu) veličinu i istosmjerni prednapon. Ispred i iza nelinearne komponente valja postaviti sprežne mreže koje uspostavljaju optimalno opteretno okruženje nelinearnoj komponenti. Često se takve sprežne ili prilagodne mreže pretvaraju u serijske impedancije, tzv. *ugradbene impedancije* (engl. *embedding impedance*), uz pomoć jednostavnih linearnih transformacija. Njih je moguće odrediti analitički ili s pomoću mjerenja na frekvencijama pojedinih harmonika signala lokalnog oscilatora. S jedne strane, one filtriraju i prilagođuju, a s druge strane preko njih se dovode statički naponi napajanja i pobudni izmjenični signali. U višem frekvencijskom području uglavnom se primjenjuju linearne mreže s raspodijeljenim parametrima. U nižem frekvencijskom području, nelinearnosti reaktivnih komponenata obično se mogu zanemariti. No na višim frekvencijama, a posebno u mikrovalnome području, nužno je rabiti rigorozne postupke nelinearne analize. U sklopovima miješala ili množila frekvencije, nelinearnu komponentu nerijetko čine Schottkyjeva dioda ili tranzistor. Te se elektroničke komponente mogu prikazati kvazistatičkom nadomjesnom shemom, koja uključuje i linearne i nelinearne komponente mreža. Nelinearne komponente opisuju se u vremenskoj domeni nelinearnim diferencijalnim jednadžbama, pa ih valja rješavati jednim od postupaka numeričke integracije. Stoga se i nelinearne mreže mogu rješavati u vremenskoj domeni. No pritom se obično suočavamo s trima problemima. Prvo, prilagodne mreže mogu sadržavati komponente s raspodijeljenim parametrima i disperzivnim svojstvima, pa se njima teško barata u vremenskoj domeni. U praksi se pokazalo da je takve komponente najbolje opisati s pomoću *S*-, *Z*- ili *Y*-parametara na frekvencijama svih harmonika pobudnog signala. No budući da su ti parametri definirani u frekvencijskoj domeni ne mogu se lako uporabiti za opisivanje nelinearnih komponenata. Drugo, vremenska konstanta ugradbene linearne mreže može biti znatno veća od periode pobudnog signala pa se tad numerička integracija mora obaviti kroz velik broj perioda, tj. u razdoblju dok nelinearni sustav ne dođe u stacionarno stanje. I treće, svaka linearna ili nelinearna reaktivna komponenta traži dodatnu diferencijalnu jednadžbu u sustavu jednadžba koje opisuju sklop. Stoga, složene sprežne mreže i modeli nelinearnih komponenata mogu sadržavati toliko velik broj reaktivnih komponenata da je zadaće s opisanim nelinearnim mrežama teško riješiti.



Slika 8.16. Općenit nelinearni sklop sastoji se od nelinearne komponente te izlazne i ulazne prilagodne mreže

Analiza u vremenskoj domeni daje najpotpunije rezultate jer se istodobno mogu riješiti problemi prijelaznih pojava i problemi stacionarnog stanja. No u visokofrekvencijskim sklopovima obično nas zanimaju samo stacionarni procesi, pa se češće rabi *postupak ravnoteže harmonika* (engl. *harmonic balance method*) u frekvencijskoj domeni [4], [5].

Za analizu neizrazito nelinearnih sklopova pogodni su postupci koji primjenjuju nelinearnu prijenosnu funkciju. Pritom se primjenjuju redovi Volterre i redovi potencija [5]. Postupak s redovima Volterre prikladan je za analizu miješala kad je na ulaz istodobno priključeno više RF signala na nerazmjernim frekvencijama.

Postupci s *opisnim funkcijama* (engl. *describing functions method*) pripadaju približnim postupcima koji provode pretvorbu nelinearnog sustava u linearni sustav.

Pri analizi nelinearnog sklopa pobuđenog velikim periodičkim signalom prikladno je da se opteretno okruženje nelinearne komponente nadomjesti višeprolaznom mrežom ili sklopom. U takvoj linearnoj mreži, općenito, se nalaze linearne impedancije, prijenosne linije i sve ostale linearne komponente električnih mreža. Te se višeprolazne mreže mogu opisati matricom impedancija ograničene veličine.

Zbog navedenih poteškoća, prilikom rješavanja nelinearnih mreža u vremenskoj domeni često se primjenjuje *postupak ravnoteže harmonika* [4] koji se temelji na činjenici da su svi nelinearni sustavi sastavljeni od jednostavnih linearnih i nelinearnih elemenata. Ako se sad sve nelinearne komponente skupe u nelinearni podsklop, a svi ili veći dio linearnih elemenata smjesti u linearni podsklop, onda postupak dopušta odabir najpogodnije metode za rješavanje svakog podsklopa za sebe. Pritom se linearni podsklop obično rješava u frekvencijskoj domeni, a nelinearni podsklop u vremenskoj domeni. Sad se pri pobudi nelinearne mreže sinusnim signalom, interakcija između podsklopova jednostavno riješi uz pomoć Fourierove transformacije. Konačno rješenje dobiva se iteracijskim postupkom koji obično započinje tako da se na priključcima linearnog podsklopa zadaju naponi i struje za neke početne uvjete. Zatim se primjenom inverzne Fourierove transformacije dobivena rješenja pretvore u početne uvjete za rješavanje linearnog podsklopa. Budući da na nelinearnoj komponenti pri pobudi velikim signalom dolazi do »spektralnog raspršenja« signala, pritom nastaju nove harmoničke komponente. Ti novi signali doimlju se kao da su reflektirani od nelinearne komponente i pobuđuju linearni dio mreže. Na linearnom dijelu mreže zatim dolazi do refleksije tih signala, pa nelinearnu komponentu u drugoj iteraciji pobuđuje signal koji više nije sinusnog valnog oblika. Taj se ciklus refleksija na nelinearnom i linearnom dijelu mreže ponavlja dok god odstupanja između rješenja u dvjema uzastopnim iteracijama ne postanu manja od unaprijed zadanog malog broja. To odstupanje unosi izvjesnu pogrešku u iteracijski postupak. No ako ta pogreška ne prelazi nekoliko promila amplitude valnog oblika na svim prolazima, iteracijski se postupak zaustavlja i dobiva približno numeričko rješenje. Budući da je za postizanje stacionarnog stanja obično potreban velik broj iteracija, izračunavanje se obavlja uz pomoć računala. U opisanom numeričkom postupku valni se oblici napona i struja uzorkuju, jer se za analizu i sintezu spektra primjenjuje postupak diskretne Fourierove transformacije. Jedan od najučinkovitijih algoritam je *brze Fourierove transformacije* (engl. *Fast Fourier Transform*; FFT).

8.2.4. Dinamičko područje prijamnog sustava

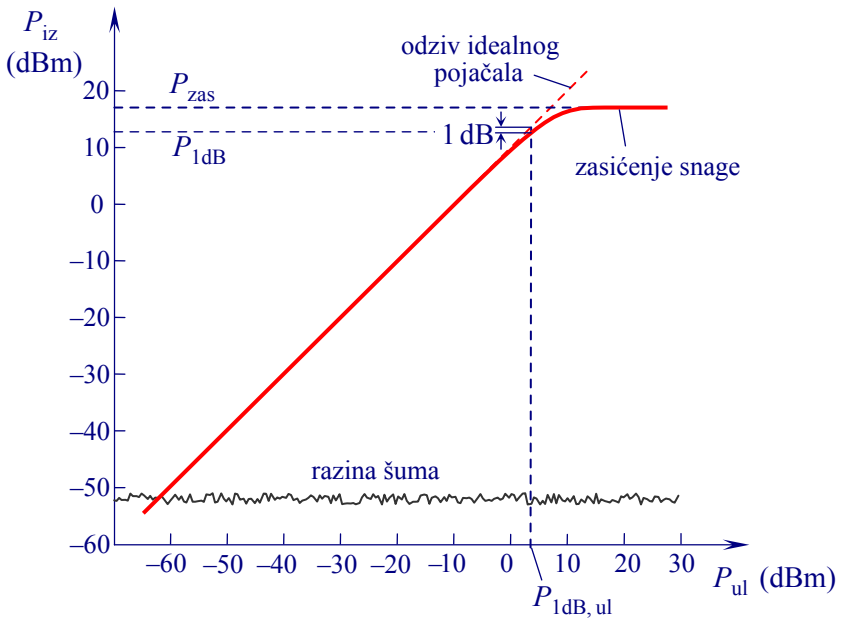
U prethodnim se poglavljima podrazumijevalo da su sve naprave s jedne strane *linearne*, što znači da im je izlaz izravno razmjeran ulazu i da su s druge strane *deterministične*, što znači da se izlazni signal može predvidjeti na osnovi poznavanja ulaznog signala. Ustvari, unutar neograničenog područja razina ulaznog i izlaznog signala, tako se ne ponaša ni jedna naprava. No, u praksi, uvijek postoji konačno područje razina signala unutar kojeg vrijedi ta pretpostavka. To se područje naziva *dinamičko područje* naprave (ili sustava) [4]-[5].

Kao primjer, razmotrimo stvarno mikrovalno pojačalo pojačanja 10 dB. Ako je pojačalo idealno, onda izlazna snaga ovisi o ulaznoj snazi kao

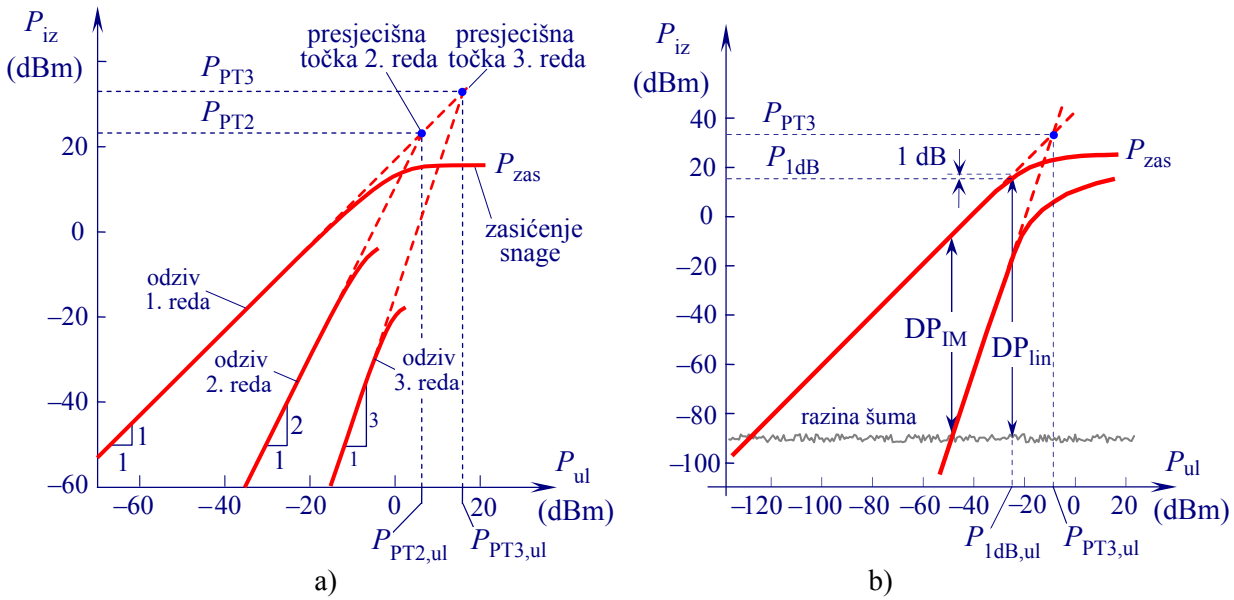
$$P_{iz} = 10 P_{ul} \tag{8–67}$$

i taj bi izraz trebao vrijediti za bilo koju vrijednost snage P_{ul}. Stoga, primjerice, uz $P_{ul} = 0$ trebalo bi biti $P_{iz} = 0$, a uz $P_{ul} = 10^3$ W trebalo bi biti $P_{iz} = 10^4$ W. Očigledno, niti jedan od tih uvjeta neće vrijediti u praksi. Naime, zbog šuma stvorenog u samom pojačalu i vanjskog šuma koji može ući u pojačalo kroz ulazne priključke, snaga na izlazu neće biti jednaka nuli pa čak i onda kad je ulazna snaga jednaka nuli. S druge strane, vrlo velike ulazne snage dovode do uništenja pojačala. Stvarni odnos između ulazne i izlazne razine snage može izgledati poput prikazanog na slici 8.17. Pri vrlo niskim razinama ulazne snage, u izlaznoj će snazi prevladavati šum pojačala. Ta se razina često naziva *prag šuma* prijamnog sustava. Tipične se vrijednosti praga šuma nalaze u rasponu od –100 dBm do –60 dBm unutar zadane širine pojasa sustava. Niže razine mogu se ostvariti hlađenjem naprava u ulaznim stupnjevima sustava ili uporabom vrlo uskog frekvencijskog pojasa, ako to dopušta širina spektra korisnog signala. Sjetimo se našeg primjera. Iznad praga šuma pojačalo raspolaže područjem ulaznih snaga u kojem se izlazna snaga može dobro aproksimirati izrazom $P_{iz} = 10\,P_{ul}$. To je korisno dinamičko područje naprave ili sustava. Na gornjem kraju dinamičkog područja najprije dolazi do postupnog zasićenja izlaznog signala, kad izlazna snaga više ne može pratiti linearnu ovisnost o snazi ulaznoga signala. Količinska mjera koja navješćuje pojavu zasićenja snage dana je *točkom kompresije*. Primjerice, to može biti *točka kompresije* od 1 dB, koja se definira kao razina ulazne snage za koju je razina izlazne snage 1 dB niža od razine idealnog pojačala. Za definiranje točke kompresije može se jednako tako upotrijebiti i pripadajuća razina izlazne snage. Uz prekomjernu ulaznu snagu, može doći do uništenja pojačala.

Kao što smo vidjeli u uvodnom dijelu (odjeljak 8.2.1), u prisutnosti više signala različitih frekvencija, na nelinearnim komponentama nastaju novi produkti miješanja izvornih frekvencijskih komponenata. Neki od tih produkata mogu se naći blizu frekvencije korisnog signala a neki se mogu posve poklapiti s frekvencijom korisnog signala. Takve je parazitske odzive nemoguće odstraniti filtriranjem jer bi to izazvalo i filtriranje korisnog signala.



Slika 8.17. Prikaz dinamičkog područja stvarnog pojačala



Slika 8.18. a) Prikaz odziva prvoga, drugoga i trećega reda te način određivanja presjecišnih točaka. **b)** Određivanje dinamičkog područja

U komunikacijskim primjenama najštetnija su intermodulacijska izobličenja trećega reda, kad dva RF signala bliskih frekvencija (f_1 i f_2), stvaraju drugi par signala na frekvencijama $2f_1-f_2$ i $2f_2-f_1$. Ako se frekvencije f_1 i f_2 međusobno malo razlikuju, onda se opisani produkti mogu naći u frekvencijskom pojasa ulaznih signala, na frekvencijskom razmaku $\Delta f=f_2-f_1$, iznad f_2 i ispod frekvencije f_1 izvornog para ulaznih signala. U miješalu opisanom u odjeljku 8.6. tako dobiven spektar transponira se u međufrekvencijski (MF) pojas s pomoću signala LO stvarajući smetnje koje kvare odnos signal/šum. Osim toga, signali na frekvencijama f_2 i f_1 međusobnim miješanjem na karakteristici koja sadrži nelinearnost drugoga stupnja mogu u miješalu stvoriti MF signal koji se tad pojavljuje kao smetnja u komunikacijskom ili radarskom sustavu. Ta se pojava u prijamnoj tehnici amplitudno moduliranih signala (AM) naziva *zviždanje* jer takav parazitski MF signal nakon demodulacije nerijetko upada u područje čujnih frekvencija. No ova je pojava jednako tako nepoželjna i u sustavima s drugim vrstama modulacije, analognim i digitalnim.

Postoji i drugi način vrednovanja pojačala i miješala u vezi s nelinearnim izobličenjima. To je eksperimentalna metoda presjecišnih točaka drugoga i trećega reda [4]. Tim se postupkom dobivaju razmjerno točni rezultati samo onda kad je razina izlaznog signala znatno niža od razine zasićene izlazne snage. Na slici 8.18a) prikazan je skup krivulja koji pokazuje obilježja zasićenja izlazne snage te intermodulacijskih izobličenja drugoga i trećega reda. Promijene li se istodobno razine dvaju ulaznih signala za 1 dB, razina intermodulacijskog produkta trećega reda promijenit će se za 3 dB, a razina produkta drugoga reda promijenit će se za 2 dB. No pri nekoj razini ulaznog signala doći će do zasićenja izlazne snage jer je raspoloživa snaga, tj. izdašnost, svakog realnog sustava konačna. Ispod te razine, obilježja intermodulacijskih produkata poprimaju oblik pravca. Istodobno dolazi do zasićenja obilježja produkata višega reda.

Apsolutna razina intermodulacijskog produkta određenog reda može se naći linearnom ekstrapolacijom u točki u kojoj se sijeku ekstrapolirani odzivi intermodulacijskog produkta i izlazne snage (produkt prvoga reda), kao što je prikazano na slici 8.18a). Dobiveno se sjecište naziva *presjecišna točka* (engl. *intercept point*). Svakom produktu izobličenja određenog reda (drugoga, trećega, ...) pripada odgovarajuća presjecišna točka. Primjerice, razina intermodulacijskog produkta trećega reda može se izraziti preko presjecišne točke trećega reda kao

$$P_{\text{IM3}} = 3P_{\text{iz}} - 2P_{\text{PT3}}\,, \tag{8–68}$$

gdje je P_{PT3} razina snage u presjecišnoj točki trećega reda (u dBm), P_{iz} izlazna snaga korisnog signala (u dBm), a P_{IM3} je razina intermodulacijskog produkta trećega reda (u dBm). Kao i kod parazitskih signala, P_{IM3} se u praksi određuje mjerenjem jer ne postoji valjan analitički postupak izračunavanja intermodulacijskih izobličenja. Sličan izraz vrijedi i za intermodulacijska izobličenja drugoga reda, tj.

$$P_{\text{IM2}} = 2P_{\text{iz}} - P_{\text{PT2}}, \tag{8–69}$$

gdje je P_{PT2} razina snage u presjecišnoj točki drugoga reda (u dBm), a P_{IM2} razina produkta drugoga reda (u dBm).

Pri tomu valja imati na umu da se presjecišne točke za pojačala poglavito definiraju na izlaznim priključcima, a kod miješala se najčešće definiraju na ulaznim priključcima. U prijamniku, intermodulaciji obično najviše pridonosi miješalo. Taj se problem može riješiti smanjenjem pojačanja RF pojačala koja se nalaze ispred sklopa miješala. No to su obično proturječni zahtjevi u vezi s ostvarenjem minimalnog faktora šuma.

Kad su poznate značajke temperature šuma prijamnika, pojačala ili miješala, može se definirati *dinamičko područje* prijamnog sustava. Ono se obično definira kao razlika između minimalnog detektibilnog signala i maksimalnog ulaznog signala koji je još prihvatljiv prije nego dođe do kompresije ili neželjenih učinaka intermodulacije, kao što je prikazano na slici 8.18b). Kod superheterodinskog prijamnika razina najmanjeg mogućeg signala (minimalni detektibilni signal) određena je sveukupnim faktorom šuma, a maksimalni dopušteni ulazni signal označuje točku u kojoj se pojavljuje specificirana kompresija odziva sveukupnog pojačanja pretvorbe iz RF u MF područje (obično 1 dB). Uz pretpostavku da MF pojačalo ne ograničuje sustav, u odzivu miješala dolazi do kompresije signala. Ako je minimalni detektibilni signal, P_{MDS}, primjerice, definiran razinom snage signala koja je za 3 dB viša od razine snage šuma prijamnog sustava, onda je

$$P_{\text{MDS}} = 2kT_0BF\,, \tag{8–70}$$

gdje je F ukupni faktor šuma prijamnika. Uvrste li se poznate veličine i upotrijebi prikaz u decibelima dobiva se

$$P_{\text{MDS}} = -174 + 3 + 10\log B + 10\log F \;\; \text{dBm}. \tag{8–71}$$

Za pojačala snage *linearno dinamičko područje* s jedne je strane ograničeno šumom, tj. minimalnim detektibilnim signalom, P_{MDS}, a s druge strane točkom kompresije od 1 dB, P_{1dB}. Ulazni signal koji proizvodi kompresiju odziva pojačanja ovisi o ukupnom pojačanju prijamnika iz RF pojasa u MF pojas pa je linearno dinamičko područje definirano kao

$$\begin{aligned}\text{DP}_{\text{lin}} &= P_{\text{1dB}} - 10\log G - P_{\text{MDS}} = \\ &= P_{\text{1dB}} - 10\log G - \left[-174 + 3 + 10\log B + 10\log F\right] \;\; \text{dB}\end{aligned} \tag{8–72}$$

gdje je P_{1dB} ulazna snaga pri kojoj dolazi do kompresije izlazne snage od 1 dB, a G je raspoloživo pojačanje prijamnika.

U komunikacijskim primjenama nerijetko se definira tzv. *dinamičko područje bez intermodulacijskih izobličenja trećega reda* kao maksimalna razina izlaznog signala za koju je snaga intermodulacijskog produkta trećega reda jednaka razini šuma prijamnika, tj.

$$\text{DP}_{\text{IM}} = \frac{2}{3}\left[P_{\text{IM3}} - 10\log G - P_{\text{MDS}}\right] \;\; \text{dB}.$$

8.3. Mikrovalne elektronske cijevi

Mikrovalne elektronske cijevi glavni su izvori mikrovalne snage u radarskim sustavima velikih snaga te u akceleratorima čestica. U mikrovalnim se cijevima najčešće rabi pojava *brzinske modulacije* elektronskoga snopa (mlaza) koji u interakciji s elektromagnetskim polje u rezonatoru ili u prijenosnoj strukturi sa sporim valom stvara uvjete za pojačanje ili generiranje mikrovalne snage [7]-[11]. Klistroni, magnetroni i cijevi s putujućim valom glavni su predstavnici mikrovalnih elektronskih cijevi. Klistroni se rabe za pojačanje i generiranje snage, a magnetroni se poglavito rabe kao oscilatori velike izlazne snage. U milimetarskome valnom području kao izvori velike snage rabe se girotroni. Poluvodički oscilatori uspješno zamjenjuju cijevi u mikrovalnim odašiljačima male i srednje snage (100 W do nekoliko kW). Više o oscilatorima može se naći u odjeljcima 8.9.1. i 8.9.2. o poluvodičkim oscilatorima. No unatoč činjenici da su poluvodički oscilatori u primjenama u kojima se radi s malim snagama uspješno zamijenili mikrovalne elektronske cijevi, zahtjevi za velikom snagom mogu se jedino ispuniti uporabom mikrovalnih cijevi. Nasuprot elektronskim cijevima, koje poglavito služe za pojačavanje ili generiranje mikrovalnih signala, postoje i mikrovalne cijevi koje crpe mikrovalnu energiju za ubrzavanje čestica.

Konvencionalne elektronske cijevi poput trioda, tetroda i pentoda nisu tako uspješne kao izvori signala iznad 1 GHz, zbog induktiviteta izvoda i kapaciteta između elektroda. Porastom frekvencije u mikrovalno područje, dolazi i do ograničenja zbog konačnog *vremena proleta* elektrona između elektroda. To je temeljno ograničenje u radu konvencionalnih elektronskih cijevi na visokim frekvencijama i može se izraziti kao

$$\theta_{\mathrm{p}} = \omega\tau_{\mathrm{p}} = \frac{\omega d}{v}, \tag{8–73}$$

gdje je d razmak između elektroda, a v brzina elektrona. Veličina $\tau_{\mathrm{p}} = d/v$ naziva se *vrijeme proleta*. Za frekvencije ispod mikrovalnih, kut proleta je zanemariv. Da bi se smanjili negativni učinci vremena proleta valja povećati brzinu elektrona ili smanjiti razmak između elektroda. Budući da je na mikrovalnim frekvencijama vrijeme proleta razmjerno veliko u odnosu na periodu titraja mikrovalnoga signala, elektroni između elektroda (npr. katoda – rešetka) mogu titrati naprijed-natrag bez ikakvog korisnog učinka na pojačanje snage.

Postoje dvije osnovne skupine mikrovalnih cijevi, one koje rabe rezonantne šupljine (klistroni i neki magnetroni) te one koje rabe elektromagnetski spore prijenosne strukture (cijevi s putujućim valom). Obje vrste cijevi rabe *valove prostornog naboja* i *ciklotronske valove*. Valove prostornog naboja tvore uzdužni (longitudinalni) titraji elektrona koji u interakciji s elektromagnetskim poljima u rezonantnim šupljinama ili elektromagnetski sporim prijenosnim strukturama daju pojačanje snage. Značajke rezonatora i sporih prijenosnih struktura (periodične elektromagnetske strukture) već su razmatrane u odjeljcima 7.4, odnosno 7.6. U ovom ćemo odjeljku razmotriti rasprostiranje valova prostornog naboja u elektronskome snopu te njihovu interakciju s rezonatorima i sporim prijenosnim strukturama.

Načelno je teško naći egzaktna rješenja za mikrovalne cijevi. Stoga ćemo u razmatranjima koja slijede primijeniti izvjesne aproksimacije da bismo došli do takvih matematičkih modela koji će omogućiti ispravan opis osnovnog fenomena uz znatno pojednostavljenje računa.

Prije razmatranja elektronskih cijevi čiji se rad osniva na učincima vremena proleta elektrona osvrnut ćemo se na osnovnu interakciju između električnog polja i naboja u gibanju unutar hipotetske vakuumske diode prikazane na slici 8.19. Neka je ukupni naboj Q zgusnut u beskonačno tankoj plohi paralelnoj s elektrodama diode i neka se giba brzinom v u smjeru $\hat{z}$. Da bismo izbjegli zbrku s negativnim predznacima pretpostavimo da je elektronski naboj pozitivan tako da katoda postaje pozitivna elektroda, a anoda negativna elektroda. U točki z

međuelektrodnog prostora, električno polje ima skokovitu promjenu. Jakost polja može se izvesti iz Gaussova zakona

$$\varepsilon\,(E_2 - E_1) = Q/S\,, \tag{8–74}$$

gdje je S površina presjeka diode. Napon V između elektroda može se odrediti s pomoću relacije (4–47) kao

$$V = \int_0^L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{z} = E_1 z + E_2(d-z)\,.$$

Eliminiranjem E_1 primjenom izraza (8–74) dobiva se

$$V = E_2 d - \frac{Qz}{\varepsilon S}\,.$$

Pritom se na desnoj elektrodi (anodi) inducira naboj

$$Q_2 = -\varepsilon S E_2 = -\frac{\varepsilon S}{d}\left(V + \frac{Qz}{\varepsilon S}\right).$$

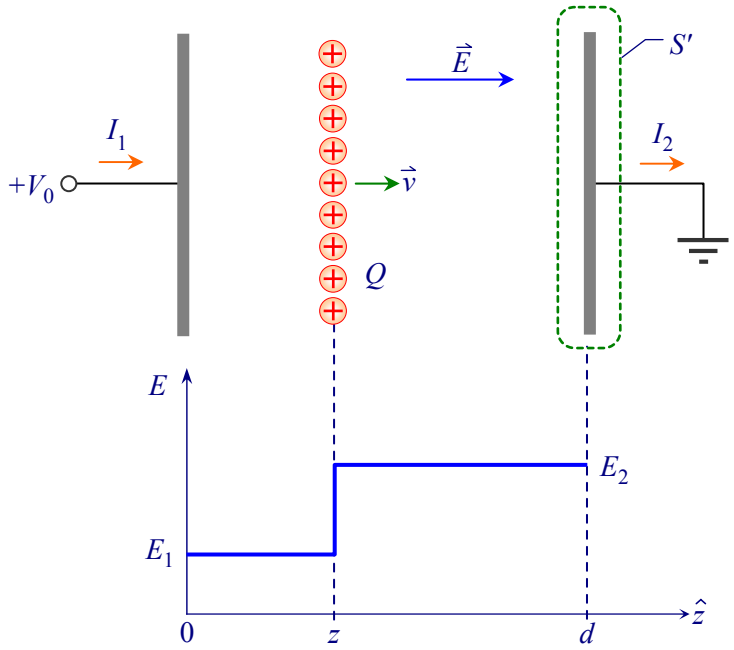
Promjena naboja u jedinici vremena jednaka je struji u priključnim vodičima, tj.

$$I_2 = -\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon S}{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{\varepsilon S}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{Qv}{d}\,, \tag{8–75}$$

gdje je $C=\varepsilon S/d$ kapacitet diode. Taj koristan rezultat upućuje na to da se struja sastoji od dviju komponentata, pomačne kapacitivne struje i doprinosa konvekcijske struje, tj. slobodnoga naboja u gibanju. Stoga naboj Q ne pridonosi struji samo u trenutku kad stigne na anodu, nego inducira naboje na objema elektrodama dokle god putuje međuelektrodnim prostorom.

Jednadžba (8–75) može se poopćiti za proizvoljnu razdiobu naboja $\rho(z)$ koja putuje proizvoljnom brzinom $v(z)$ integriranjem po z na intervalu od 0 do d i dijeljenjem s d, tj.

$$I_2 = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{Qv}{d} + \frac{1}{d}\int_0^d \rho(z)v(z)\mathrm{d}z\,. \tag{8–76}$$



Slika 8.19. Dioda s prostornim nabojem koji se kreće stalnom brzinom

To je Shockleyjev teorem koji kaže da nosioci naboja u slobodnom gibanju prostorom između elektroda diode pridonose *vanjskoj* struji preko *unutarnje* struje uprosječene duž cijele diode. Taj je teorem izravno povezan s jednadžbom kontinuiteta struje (2–5), tj.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

i Poissonovim zakonom

$$\nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = \rho .$$

Kombinacija tih dviju jednadžba daje

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \right) = 0 , \tag{8–77}$$

Drugim riječima, ukupna struja nema divergenciju. Integriranjem jednadžbe (8–77) po zatvorenoj plohi S' prikazanoj na slici 8.19, opet izlazi rezultat jednak onom u izrazu (8–75), tj.

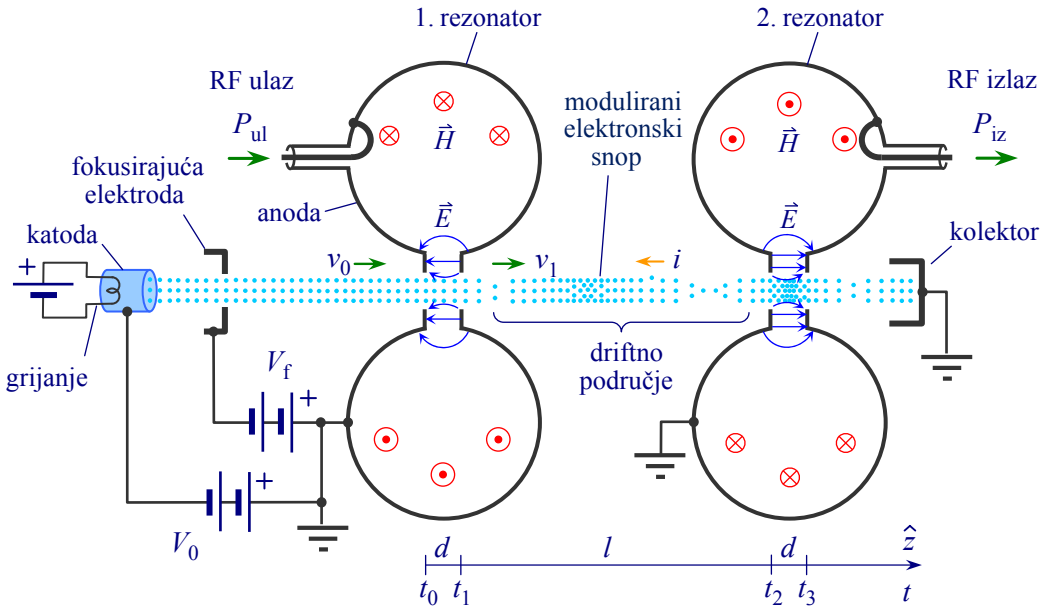
$$A\left(\frac{\partial \varepsilon \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \right) = I . \tag{8–78}$$

8.3.1. Klistron

Primjena klasičnih vakuumskih cijevi na gornjem kraju radnog frekvencijskog područja inherentno je ograničena vremenom proleta elektrona između katode i anode. Kad to vrijeme postane sumjerljivo periodi RF signala, pojačanje signala postaje nedostatno. Razvojem mikrovalne elektronike i istraživanjima interakcije između elektronskog snopa i elektromagnetskog polja u rezonantnim i prijenosnim strukturama sa sporim valom riješen je problem ograničenja primjene elektronskih cijevi u višem frekvencijskom području. Štoviše, većina njih primjenjuje učinak vremena proleta u pozitivnom smislu za ostvarenje funkcije pojačavanja snage [7].

Na slici 8.20 shematski je prikazana izvedba klistona s dvije rezonantne šupljine toroidalnog oblika. Elektronski se snop proizvodi u elektronskome topu koji se sastoji od užarene katode i fokusirajuće elektrode. Snop elektrona velike kinetičke energije prolazi kroz otvore u rasporima rezonantnih šupljina (*d*), u kojima dolazi do snažne interakcije s mikrovalnim poljem. U rasporu prvoga rezonatora mijenja se brzina elektrona ovisno o jakosti i predznaku električnog polja u rasporu. Elektroni koji napuštaju prvi rezonator većom brzinom sustižu sporije elektrone u prostoru iza rezonatora. Prostor između dvaju rezonatora naziva se *driftno područje*. U njemu nastaju gusti *elektronski oblaci*. Nasuprot tomu, kad brzi elektroni napuste neko područje, a spori u njega još ne stignu, dolazi do smanjenja koncentracije elektrona. Taj proces *brzinske modulacije* izaziva *modulaciju gustoće*. Na slici 8.21 podrobnije je prikazano kako dolazi do brzinske modulacije primjenom izmjeničnog signala na rasporu rezonatora.

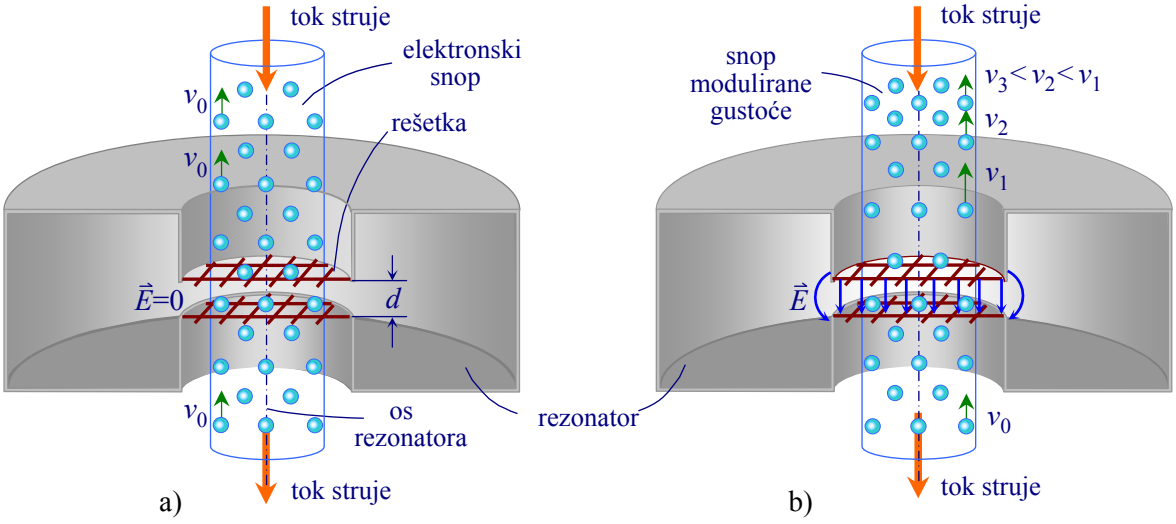
Unutar driftnog područja na putu između dvaju rezonatora može se pojaviti više elektronskih oblaka. Nakon prevaljenog puta duljine *l* elektronski oblak stiže u drugi rezonator gdje predaje dio svoje kinetičke energije električnom RF polju koje vlada u rasporu tog rezonatora. Budući da je kapacitet raspora duljine *d* obično prevelik da bi se na njega mogao utisnuti izmjenični napon ili iz njega učinkovito izvukla snaga, kapacitivni se učinak kompenzira induktivitetom rezonantne šupljine. Pola periode kasnije, na drugome se rezonatoru okrene smjer električnog polja. No tad polje djeluje na znatno manju koncentraciju elektrona jer u tom trenutku u rezonator stiže razrijeđen snop elektrona. Pritom električno polje gubi dio energije, ali znatno manje nego što je primilo u prethodnoj poluperiodi. To je ekvivalentno po jačavanju signala. Ovdje je pretpostavljeno da je duž cijelog puta elektronski snop jako zgusnut, tj. zanemaren je učinak odbojnih sila između elektrona.



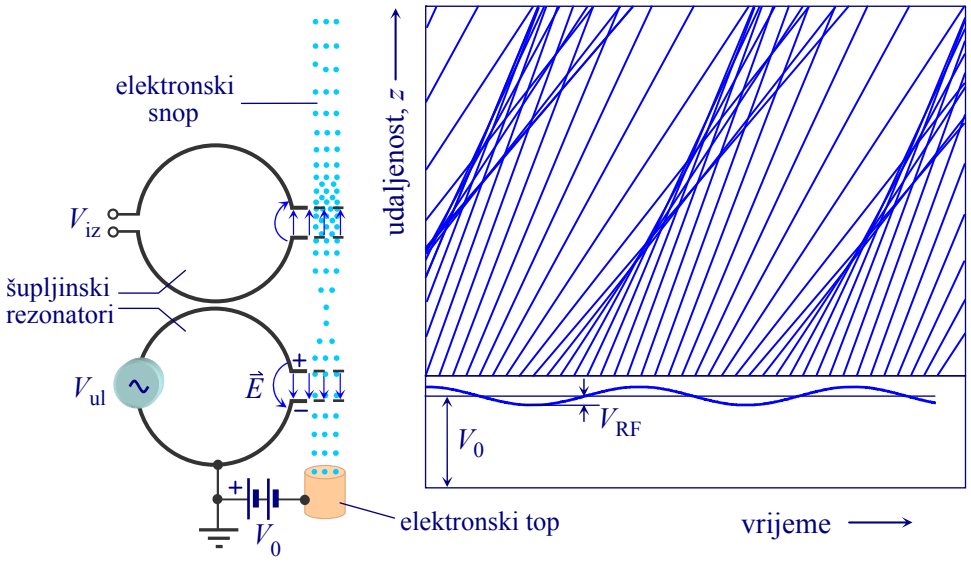
Slika 8.20. Shematski prikaz izvedbe klistrona s dvama rezonatorima

S pomoću slike 8.22 može se naći položaj elektrona unutar klistrona u funkciji vremena. Sličan se učinak može ostvariti i sa šupljinama drukčijeg oblika, ali je za interakciju s elektronskim snopom uvijek potreban dovoljno uzak raspor u kojem je prisutno jako mikrovalno električno polje.

Budući da elektroni gube brzinu unutar poluperiode u kojoj predaju kinetičku energiju polju, na izlasku iz drugog rezonatora snop je djelomično »demoduliran«, tj. brzinska je modulacija smanjena pa je struja snopa skoro stalna. Na kraju svog puta elektroni stižu na pozitivno nabijenu elektrodu kolektora čime se zatvara istosmjerni strujni krug.



Slika 8.21. Shematski prikaz šupljinskoga rezonatora sa spuštenim središnjim dijelom i mehanizam brzinske modulacije. **a)** Slučaj bez mikrovalnog električnog polja u rasporu rezonatora i **b)** slučaj s ubrzavajućim mikrovalnim električnim poljem u rasporu rezonatora



Slika 8.22. Applegateov dijagram klistrona s dvama rezonatorima

U prostoru između dvaju rezonatora ne postoji istosmjerno polje jer se rezonatori nalaze na istom potencijalu pa na brzinu mogu djelovati samo izmjenična polja u rasporima rezonatora. Ako se na raspor utisne izmjenični napon $V_{RF} = V_1 \sin \omega t$, onda električno polje u rasporu poprima vrijednost V_{RF}/d pa je na elektronu učinjen rad

$$W = \int_{z_0}^{z_0+d} F \mathrm{d}z = \int_{t}^{t+\tau} qE \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \,,$$

gdje je τ vrijeme proleta elektrona u rasporu. Uz pretpostavku da se početna brzina v_0 ne mijenja za vrijeme prolaska elektrona rasporom, dobiva se

$$W = \int_{t}^{t+\tau} qV_1 \frac{\sin \omega t}{d} v_0 \mathrm{d}t \,.$$

To je u skladu s pretpostavkom $V_1 \ll V_0$. Budući da je $v_0\tau = d$, integracija daje

$$W = \frac{qV_1}{\tau} \int_{t}^{t+\tau} \sin \omega t \mathrm{d}t = -\frac{qV_1}{\omega\tau} \cos \omega t \Big|_{t}^{t+\tau} =$$

$$= -2\frac{qV_1}{\omega\tau} \left[\cos \omega(t+\tau) - \cos \omega t\right] = 2\frac{qV_1}{\omega\tau} \sin \frac{\omega(t+\tau)+\omega t}{2} \sin \frac{\omega(t+\tau)-\omega t}{2},$$

gdje su primijenjene trigonometrijske relacije $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ i $\sin(A \pm B) = \sin A \cdot \cos B \pm \cos A \cdot \sin B$. Konačni je rezultat u obliku

$$W = \kappa q V_1 \sin \omega\left(t + \frac{\tau}{2}\right), \tag{8–79}$$

gdje je uvedena nova veličina, *faktor sprege snopa*,

$$\kappa = \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} \,. \tag{8–80}$$

Kut proleta $\theta = \omega\tau$ definiran izrazom (8–73) upućuje na fazni pomak snopa zbog konačnog vremena proleta τ unutar raspora prvoga rezonatora. Za $\tau = 0$ ili $\theta = 0$, faktor sprege κ jednak je jedinici. No porastom θ brzinska modulacija postaje neučinkovita jer faktor sprege κ sve više odstupa od jedinice. Tako, primjerice, za $\theta = \pi/2$ faktor sprege iznosi 90 %. Stoga je glavni

razlog zbog kojeg se konvencionalne elektronske cijevi ne rabe u mikrovalnome području vrlo mala učinkovitosti prijenosa energije kao posljedica učinaka konačnog vremena proleta.

Kinetička energija elektrona koji napuštaju raspor može se izraziti kao

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = q(V_0 + \kappa V_1 \sin \omega t_1)\,. \tag{8–81}$$

Ovdje ćemo pretpostaviti da je amplituda izmjeničnog napona na rasporu znatno manja od istosmjernog napona ubrzavanja V_0. To se naziva *aproksimacija malog signala*. Time se varijable istosmjernih i izmjeničnih veličina mogu odvojiti pa se međusobni umnošci tih dviju varijabla smiju odbaciti kao male veličine drugoga reda.

Iz jednadžbe (8–81) izravno se može odrediti brzina elektrona u trenutku kad napuštaju prvi rezonator

$$v_1 = v_0\sqrt{1+\frac{\kappa V_1}{V_0}\sin\omega t_1} \simeq v_0\left(1+\frac{\kappa V_1}{2V_0}\sin\omega t_1\right), \tag{8–82}$$

gdje je veličina $a = \kappa V_1/V_0$, *indeks modulacije*, znatno manja od jedinice pa je primijenjena aproksimacija $\sqrt{1+a} \simeq 1 + a/2$. Elektroni ulaze brzinom v_1 u driftno područje (područje između dvaju rezonatora) u kojem nema statičkog električnog polja. Trenutak $t = t_2$, nakon što je elektron prevalio put $d+l$, može se izraziti kao

$$t_2 = t_1 + \frac{l}{v_1} \simeq t_1 + \frac{l/v_0}{1+\dfrac{\kappa V_1}{2V_0}\sin\omega t_1} \simeq t_1 + T_0\left(1-\frac{\kappa V_1}{2V_0}\sin\omega t_1\right), \tag{8–83}$$

gdje vrijeme proleta elektrona na putu duljine l iznosi $T_0 = l/v_1$.

Ako se s n_0 označi gustoća elektrona u snopu, onda se istosmjerna struja snopa površine presjeka S može izraziti kao

$$I_0 = qn_0v_0S\,.$$

Sad se može naći struja snopa modulirane gustoće kao funkcija vremena u bilo kojoj točki driftnog područja. Broj elektrona koji izlaze iz raspora u jedinici vremena jednak je

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t_1} = \frac{I_0}{q}\,.$$

Ti isti elektroni zatim prolaze referentnom ravninom koja je smještena na udaljenosti z od prvoga raspora, ali to čine unutar intervala $\mathrm{d}t_2$ jer im je općenito gustoća različita. Na tom se mjestu trenutačna struja može izraziti kao

$$i_2 = q\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t_2} = I_0\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t_2}\,. \tag{8–84}$$

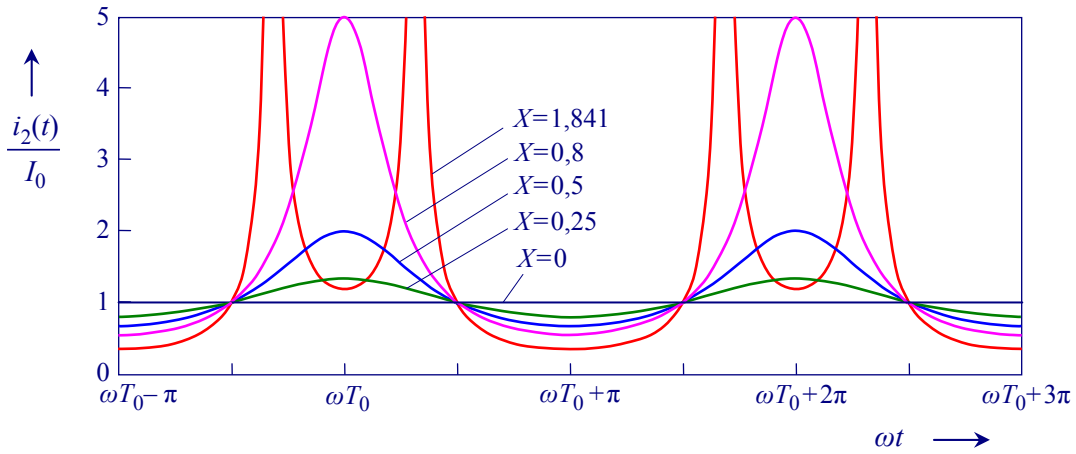
Deriviranjem izraza (8–83) po t_1, dobiva se veličina $\mathrm{d}t_1 = \mathrm{d}t_2$ pa iz izraza (8–14) izlazi

$$i_2(t) = \frac{I_0}{1-\dfrac{1}{2}\dfrac{\kappa V_1}{V_0}\omega T_0\cos\omega(t-T_0)} = \frac{I_0}{1-X\cos\omega(t-T_0)}\,, \tag{8–85}$$

gdje je kut proleta $z/v_0 = \omega T_0$, a veličina

$$X = \frac{1}{2}\frac{\kappa V_1}{V_0}\omega T_0 \tag{8–86}$$

naziva se *parametar zbijanja*. Čak i kad je indeks modulacije $a = \kappa V_1/V_0$ znatno manji od jedan, taj parametar obično ima vrlo malu vrijednost jer se kut proleta može postaviti na po vo-



Slika 8.23. Normirana struja elektronskoga snopa u rasporu drugog rezonatora u funkciji vremena za različite vrijednosti faktora zbijanja X

lji veliku vrijednost produljenjem puta L između dvaju raspora. To ima za posljedicu da je i uz razmjerno mali indeks modulacije valni oblik struje vrlo izobličen i daleko od sinusnog valnog oblika.

Na slici 8.23 prikazani su tipični valni oblici struje elektronskoga snopa na ulasku u drugi rezonator za nekoliko različitih vrijednosti parametra X. Za parametar zbijanja $X>1$ valni se oblik struje cijepa poprimajući izgled dvaju jako oštrih šiljka. Porastom X, prvi šiljak nastaje pri faznom kutu $\pi/2+n2\pi$, a drugi se pomiče prema faznom kutu $3\pi/2+n2\pi$, za $n=0, 1, 2, \ldots$

Za izračunavanje izlazne snage potrebna je samo komponenta osnovnog harmonika struje na ulazu u drugi rezonator. Stoga je potrebno struju razviti u Fourierov red da bi se našla amplituda struje osnovnog harmonika. Do analitičkog rješenja može se doći primjenom Besselovih funkcija $J_n(X)$ prve vrste, n-tog reda, argumenta x (dodatak G)

$$i_2(t)=I_0\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(X)\cos\left[n\omega(t-T_0)\right]\right\}, \tag{8–87}$$

gdje je funkcija struje razvijena u Fourierov red oko točke ωT_0 kao parna funkcija.

Komponenta osnovnog harmonika struje snopa u rasporu drugog rezonatora poprima iznos $I_2=2I_0J_1(X)$. Za vrijednost parametra $X=1{,}84$ izlazi maksimalna vrijednost $I_{2\text{maks}}=1{,}16I_0$. To je 16 posto veća vrijednost od istosmjerne komponente.

Maksimalna učinkovitost klistrona postiže se kad su rezonantne frekvencije obaju rezonatora jednake. Stoga ćemo pretpostaviti da su rezonatori i raspori posve jednaki.

Da bi se našao izraz za pojačanje snage klistrona valja pretpostaviti da je faktor zbijanja toliko mali da struja u izrazu (8–85) zadržava približno sinusni valni oblik,

$$i_2\simeq I_0\left(1+X\cos\omega t_0\right)\qquad \text{za } X\ll 1. \tag{8–88}$$

Tad je amplituda struje osnovnog harmonika u izlaznom krugu približno jednaka $I_2=I_0X$, tj.

$$I_2=\frac{\kappa V_1}{2V_0}\frac{\omega L}{v_0}I_0\,. \tag{8–89}$$

Uz pretpostavku da je izlazni faktor sprege jednak ulaznom, izlazna je snaga

$$P_{\text{iz}}=\frac{1}{2}I_2^2\kappa^2R_{\text{r2}}\,.$$

Tu je R_{r2} preslikani otpor trošila R_T na raspor drugog rezonatora u uvjetima konjugirano kompleksne prilagodbe u izlaznom krugu pojačala. Budući da se ponaša kao paralelni titrajni krug, rezonator s malim razmakom ploča u rasporu podržava snažno električno polje.

Ulazna se snaga može izraziti kao

$$P_{ul} = \frac{1}{2}\frac{V_1^2}{R_{ul}},$$

gdje je $R_{ul} = R_{r1}$ ulazni otpor na rasporu prvoga rezonatora. Pojačanje snage malog signala, može se izraziti omjerom izlazne i ulazne snage kao

$$G_P = \frac{P_{iz}}{P_{ul}} = \frac{I_2^2 \kappa^2 R_{r2}^2}{V_1^2}.$$

Ovdje je pretpostavljeno da su elektroničke impedancije obaju raspora jednake $R_{r1}=R_{r2}=R_r$ jer su rezonatori međusobno jednaki. Uvrštenjem izraza (8–89) konačno se dobiva

$$G_P = \frac{P_{iz}}{P_{ul}} = \left(\frac{I_0 R_r \omega L \kappa^2}{2 V_0 v_0} \right)^2. \tag{8–90}$$

Ako se pretpostavi da je izmjenična RF struja jednaka struji snopa u rasporu, a klistron radi u režimu maloga signala, onda se u skladu s izrazom (8–90) na otporu drugog rezonatora razvija amplituda izmjeničnog napona

$$V_2 \simeq X I_0 R_r. \tag{8–91}$$

Pretpostavi li se da je pojačanje snage znatno veće od jedinice, učinkovitost pojačala može se izraziti omjerom izlazne RF snage i istosmjerne snage $P_{DC}=I_0V_0$, tj.

$$\eta = \frac{P_{iz}}{P_{DC}} = \frac{1}{2}\frac{I_2^2 \kappa^2 R_r}{I_0 V_0} = \frac{\kappa I_2 V_2}{2}. \tag{8–92}$$

Stoga se za teorijski maksimalno ostvarivu učinkovitost dobiva η=58 % uz κ=1 i I_{2maks}= =1,116I_0. No učinkovitost stvarnog klistrona s dvama rezonatorima ne prelazi 40 % jer u ovoj analizi nisu uzeti u obzir stvarni gubitci u rezonatorima i negativni učinci prostornog naboja i konačnog vremena proleta u rasporima rezonatora.

Veće pojačanje snage može se postići dodavanjem neopterećenih rezonatora u driftno područje. Tad pojačanje eksponencijalno raste s brojem takvih rezonatora. Prvi i zadnji rezonator obavljaju slične zadaće kao odgovarajući rezonatori u klistornu s dvama rezonatorima. Dodatni jalovi rezonatori samo služe za pojačanje modulacije gustoće, tj. za pojačanje izmjenične komponente struje snopa.

Budući da elektroni u klistronu s više rezonatora prevaljuju vrlo dug put, potrebno je dobro zgusnuti elektronski snop što se može ostvariti vanjskim magnetskim poljem koje djeluje u smjeru snopa. U tu se svrhu rabe permanentni magneti ili elektromagneti.

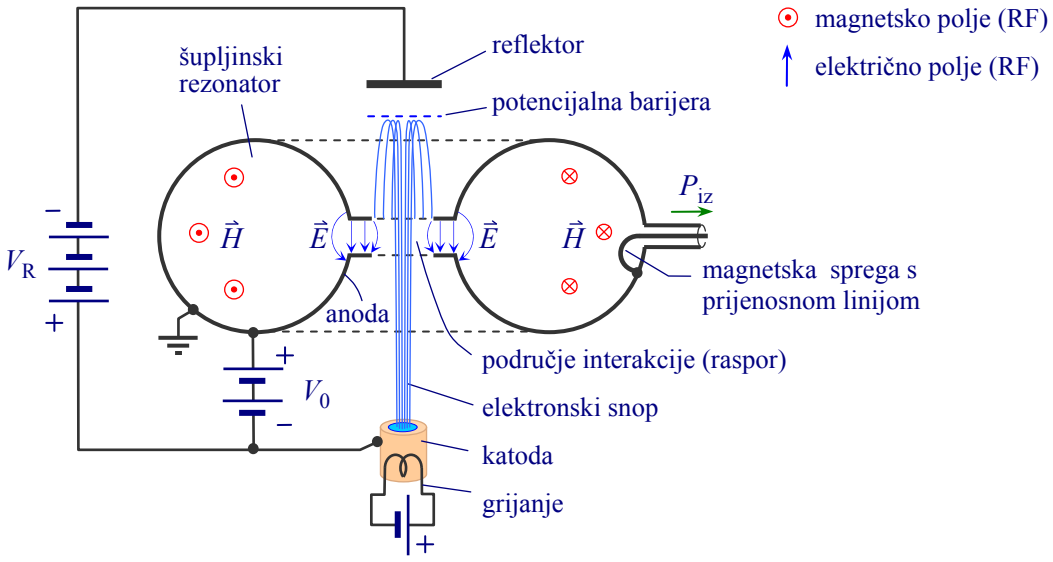
Tipično pojačanje snage klistrona s dvama rezonatorima iznosi od 20 do 30 dB. Teorijski, pojačanje klistrona s više rezonatora raste eksponencijalno s brojem dodatnih rezonatora i nalazi se u rasponu od 50 do 70 dB. Uz učinkovitost veću od 40 % na frekvenciji 10 GHz ostvaruju se izlazne snage u neprekinutom režimu rada iznad 500 kW, a iznad 30 MW s impulsima trajanja kraćeg od 1 μs. U nižem frekvencijskom području (UHF) klistron se rabi kao pojačalo snage u izlaznim stupnjevima radiodifuzijskih odašiljača. U mikrovalnome području klistron s više rezonatora nalazi primjenu u radarskim sustavima i u sustavima linearnih akceleratora za ubrzavanje nabijenih čestica. U sustavima za fuziju plazme postižu su snage iznad 1 MW na 350 GHz. Primjenom odgovarajuće povratne veze između ulaznih i izlaznih prolaza klistrona može se ostvariti funkcija oscilatora (odjeljak 8.9.2).

8.3.2. Refleksni klistron

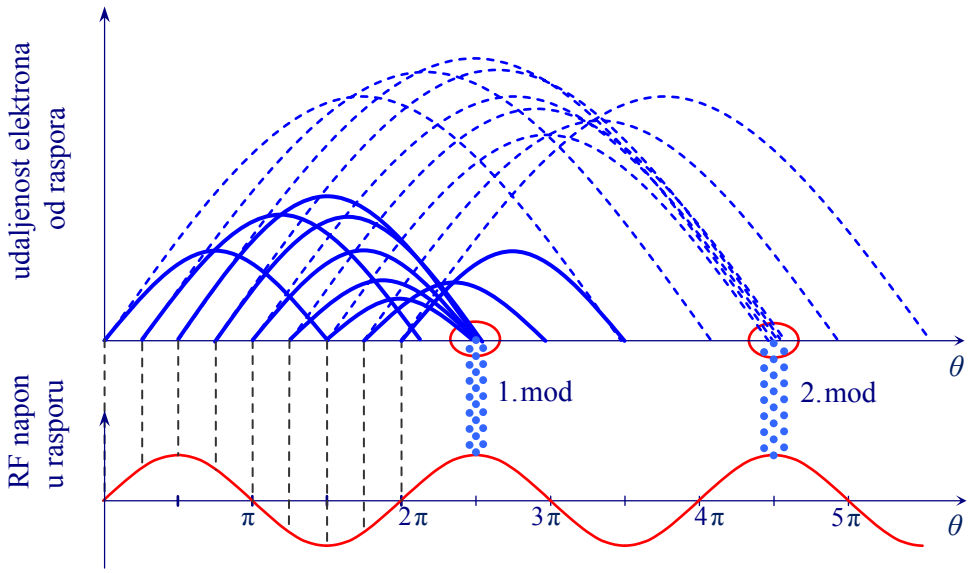
Klistron se može izvesti i s jednim rezonatorom, tako da se elektronski snop modulirane gustoće vrati natrag u rezonator primjenom odbojnog električnog polja na reflektoru. Tako modulirani snop stvara pozitivnu povratnu vezu koja vodi do samopobude oscilacija. Stoga su refleksni klistroni mikrovalni oscilatori. Na slici 8.24 shematski je prikazana struktura refleksnog klistrona kod kojeg šupljinski rezonator ima dvostruku ulogu. Istodobno obavlja brzinsku modulaciju elektronskoga snopa i pretvara kinetičku energiju moduliranih elektrona u elektromagnetsku energiju. Za razliku od klistrona s dvama rezonatorima u refleksnom klistronu svaki elektron dva put prođe kroz otvore na rezonatoru. Elektroni su u snopu ubrzani jakim električnim poljem primjenom visokog napona V_0 između katode i rezonatora koji ima ulogu anode. Ubrzani elektroni zatim prolijeću kroz otvor u rezonatoru toroidalnog oblika gdje su brzinski modulirani RF poljem koje vlada u rasporu, kao što je prikazano na slici 8.24. Budući da je potencijal elektrode reflektora negativan u odnosu na katodu, ispred reflektora se stvara *potencijalna barijera* na kojoj se elektroni reflektiraju i potom vraćaju u rezonator. Na svom putu (od rezonatora do reflektora i natrag) elektroni stvaraju guste skupine. Elektroni različitih brzina, tj. kinetičkih energija, prodiru različito duboko u prostor ispred reflektora. Kad se skupina reflektiranih elektrona vrati u rezonator ispravne faze u odnosu na izmjenično električno polje koje postoji u rasporu rezonatora, tad skupina elektrona predaje dio svoje kinetičke energije elektromagnetskom polju, tj. elektroni predaju energiju usporavajućem električnom polju. Ovisno o veličini negativnog potencijala reflektora, u prostoru između rezonatora i reflektora istodobno može nastati više skupina (oblaka) elektrona. Samopobudu oscilacija potiče električni šum koji je prisutan u svakom elektronskome snopu.

Na slici 8.25 grafički je objašnjen učinak brzinske modulacije na zgušnjavanje elektrona i fazu kojom elektroni pristižu u rezonator u prvome i drugome modu. Refleksni klistron nije tako snažan generator mikrovalne snage kao klistron s više rezonatora, ali se primjenjuje kao izvor srednjih snaga u milimetarskome valnom području. U nižem mikrovalnome području u primjeni ga potiskuju poluvodički, poglavito tranzistorski, izvori snage (odjeljak 8.9).

Učinkovitost pretvorbe istosmjerne energije u mikrovalnu energiju bit će to veća što je skupina elektrona gušća. Pritom svakoj skupini elektrona pripada po jedan mod oscilacija. Prvi mod stvara skupina koja prva stigne u rezonator. Ona pripada najnegativnijem naponu reflektora. U tom modu klistron proizvodi najveću izlaznu snagu jer je put elektrona najkraći pa



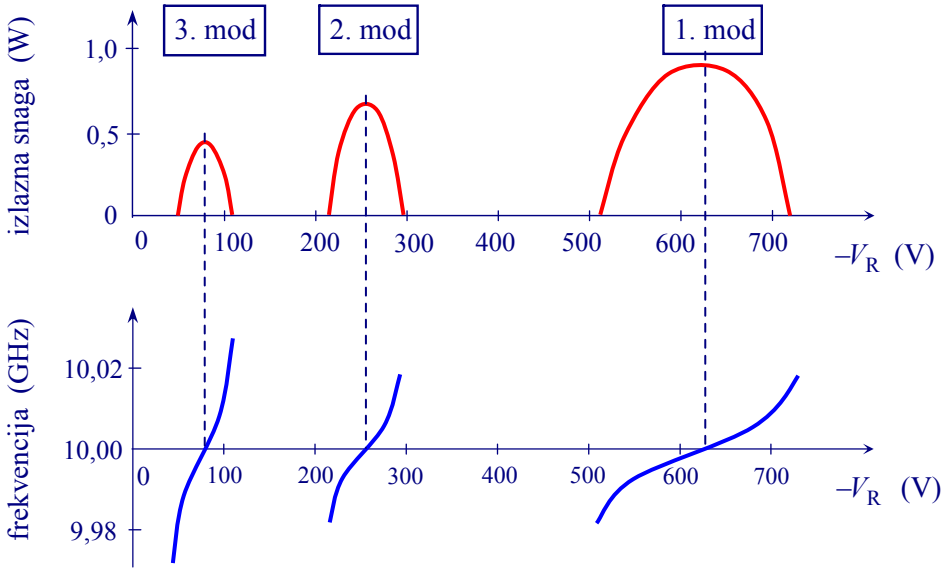
Slika 8.24. Shematski prikaz refleksnog klistrona



Slika 8.25. Prikaz zgušnjavanja elektrona u ovisnosti o izmjeničnom naponu na elektrodama rezonatora

odbojne sile koje vladaju između samih elektrona traju kraće i skupine elektrona ostaju vrlo guste. Pri tomu treba uzeti u obzir i činjenicu da odbojne sile između elektrona razrjeđuju skupine elektrona. Na kraju svoga puta elektroni se skupljaju na stijenkama rezonatora, čime se zatvara istosmjerni strujni krug.

Kad je vrijednost napona reflektora tolika da maksimalno zgusnut elektronski oblak ne upada u raspor u trenutku najjačeg mogućeg usporavajućeg polje, tad učinkovitost oscilatora ne postiže maksimalnu vrijednost i dolazi do izvjesne promjene frekvencije osciliranja. Otuda se može zaključiti da su izlazna snaga i frekvencija funkcije napona reflektora. Na slici 8.26 grafički je prikazano kako izlazna snaga i frekvencija osciliranja ovise o naponu reflektora. Budući da se promjenom napona reflektora mijenja frekvencija osciliranja, to se obilježje može iskoristiti za moduliranje (FM) ili elektroničko ugađanje frekvencije.



Slika 8.26. Izlazna snaga i frekvencija u ovisnosti o naponu reflektora

Analiza rada refleksnog klistrona može se provesti na sličan način kao za klistron s dvama rezonatorima samo što se gustinski modulirani elektronski snop sad ne usmjerava u drugi rezonator, nego se odbijen od reflektora vraća u prvi (jedini) rezonator. Elektronička vodljivost i susceptancija nelinearne su veličine jer su razmjerne faktoru $2J_1(X)/X$, gdje je X (faktor zbijanja) jednak onom u izrazu (8–86). Osim toga obje veličine ovise o funkciji proletnog kuta u rasporu i ukupnog proletnog kuta od anode do reflektora i natrag do anode. O refleksnom klistronu može se više naći u literaturi [7]-[11].

8.3.3. Cijev s putujućim valom

Cijevi prve generacije, tj. klistroni i magnetorni, rabe rezonatore pa im je frekvencijsko radno područje vrlo usko. Signali se mogu pojačavati samo u blizini rezonantne frekvencije pojačala, koja je posve određena geometrijom cijevi. Budući da je mehaničko ugađanje sporo, u tim se cijevima središnja frekvencija ne može brzo mijenjati.

No radarski i komunikacijski sustavi nerijetko traže rad u širem frekvencijskom području. S jedne strane traži se pojačanje širokopojasnih signala, a s druge generiranje signala kojima se frekvencija može ugađati elektroničkim sredstvima. Takve se funkcije mogu lako ostvariti elektronskim cijevima druge generacije u kojima se interakcija elektronskoga snopa s elektromagnetskim poljem ostvaruje unutar geometrijskog područja od nekoliko valnih duljina. Osnovne interakcije slične su onima kod klistrona, ali funkcije brzinske modulacije, drifta i sprege s izlazom ostvaruju se uzduž cijele naprave.

Da bismo lakše shvatili kako se interakcijom elektromagnetskoga vala i elektronskoga snopa koji skupa putuju ostvaraje pojačanje, uvedimo sad jednodimenzionalni model. Pri tomu ćemo pretpostaviti da se elektronski snop gustoće $\rho(t,z)$ giba u smjeru osi $\hat{z}$, u kojem djeluje i električno polje elektromagnetskoga vala

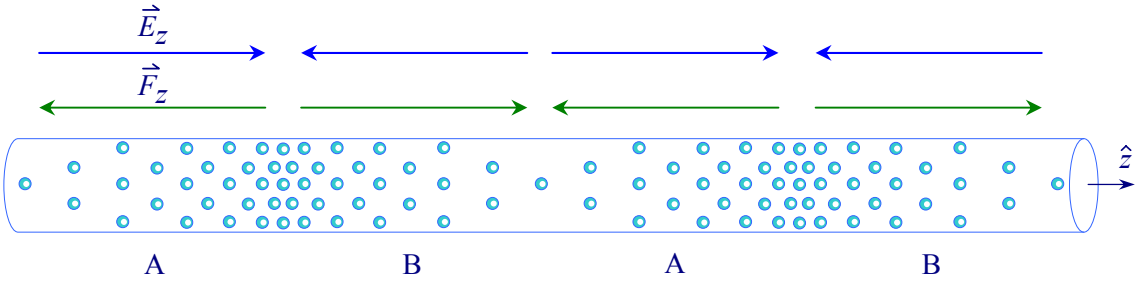
$$\vec{E}(t,z) = E_z \cos(\omega t - \beta_z z)\,, \tag{8–93}$$

gdje je β_z fazni koeficijent u smjeru rasprostiranja pa je $v_f = \omega/\beta_z$ fazna brzina vala. Tad je gustoća struje elektronskoga snopa

$$J_z = \rho(t,z)v_z(t,z)\,. \tag{8–94}$$

Elektroni u snopu prikazani su na slici 8.27. Na mjestima A elektroni će osjetiti silu usporavanja, dok će elektroni na mjestima B osjećati silu ubrzanja pa će se zbiti u guste elektronske oblake. Pretpostavimo sad da ti gusti elektronski oblaci putuju neznatno brže od elektromagnetskog polja. Tad će gusti elektronski oblaci ulaziti u usporavajuće polje i postupno gubiti energiju. Taj gubitak kinetičke energije elektrona imat će za posljedicu povećanje amplitude električnog polja. Drugim riječima, doći će do pretvorbe kinetičke energija elektrona (snopa) u elektromagnetsku energiju vala. Na tom načelu zasniva se rad cijevi s putujućim valom (engl. *Traveling Wave Tube;* TWT) [8]-[11]. Nasuprot tomu, kad elektroni putuju manjom brzinom od fazne brzine vala, uzimat će energiju iz polja pa brzina raste na štetu energije polja. Na tom se načelu zasniva rad linearnog akceleratora čestica. Naravno, ako bi prijenosna struktura bila beskonačno dugačka elektroni bi naizmjence prolaziti kroz usporavajuća i ubrzavajuća polja bez vidljiva učinka. No u strukturama konačne duljine mogu se stvoriti okolnosti u kojima će prevladati jedan od opisanih učinaka.

Pokušajmo sad uz pomoć matematičke analize elektronskoga snopa moduliranog signalom valne prirode pokazati jesu li intuitivni argumenti temeljeni na slici 8.27 bili ispravni. Izraz (8–94) nelinearan je jer mu je član zdesna umnožak dviju vremenskih funkcija. Budući da je egzaktno rješenje nelinearnog sustava obično vrlo složeno, razmatranje ćemo ograničiti samo na male signale. To je moguće ostvariti linearizacijom nelinearnih jednadžba ili rastavljanjem svih vremenskih funkcija na njihov statički i vremenski ovisan dio.



Slika 8.27. Modulacija gustoće elektronskoga snopa. U području A električna sila F usporava elektrone koji se zgušnjavaju pri kraju tog područja. Naprotiv, sila F u području B djeluje u suprotnome smjeru i ubrzava elektrone pa je na kraju područja B koncentracija elektrona najmanja. Taj se proces periodično ponavlja u ritmu utisnutog električnog polja

Takva se interakcija može opisati ovim jednadžbama:

- jednadžba gibanja elektrona,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}\,, \tag{8–95a}$$

- jednadžba kontinuiteta gustoće elektrona,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot n\vec{v} = 0\,, \tag{8–95b}$$

- Poissonova jednadžba za polje stvoreno modulacijom gustoće,

$$\nabla\cdot\varepsilon\vec{E} = \rho\,. \tag{8–95c}$$

Sve su te jednadžbe nelinearne i općenito se ne mogu riješiti analitičkim postupcima. No za male izmjenične promjene varijabla, uvođenjem tzv. *aproksimacije malog signala*, moguće ih je riješiti, kao što je objašnjeno u analizi klistrona. Ako se uz takvu linearizaciju jednadžba upotrijebi harmonijska prostorno-vremenska ovisnost, kao u izrazu (8–93), onda se izraz za brzinu može napisati kao

$$v(z,t) = v_0 + \mathrm{Re}\left\{v_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta_z z)}\right\}, \tag{8–96}$$

gdje su indeksom 0 označene istosmjerne veličine, a indeksom 1 izmjenične veličine.

Za komponente prvoga reda, iz jednadžba (8–95) dobiva se:

$$\mathrm{j}\omega v_1 - \mathrm{j}\beta_z v_0 v_1 = \frac{q}{m}E_1\,, \tag{8–97a}$$

$$\mathrm{j}\omega n_1 - \mathrm{j}\beta_z n_0 v_1 - \mathrm{j}\beta_z n_1 v_0 = 0\,, \tag{8–97b}$$

$$-\mathrm{j}\beta_z \varepsilon_0 E_1 = q n_1\,. \tag{8–97c}$$

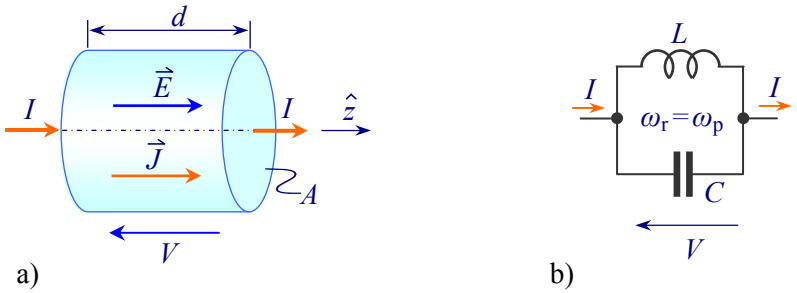
To je sustav homogenih diferencijalnih jednadžba čije se rješenje može dobiti samo ako je zadovoljena svojstvena jednadžba

$$\frac{q^2 n_0}{\varepsilon_0 m} - (\omega - \beta_z v_0)^2 = 0\,. \tag{8–98}$$

Otuda izlazi

$$\beta_z = \frac{\omega \pm \omega_\mathrm{p}}{v_0}\,, \tag{8–99}$$

gdje je ω_p frekvencija plazme (2–58) definirana kao



Slika 8.28. Model plazme: **a)** element prostora, **b)** nadomjesna shema

$$\omega_p = \sqrt{\frac{q\rho_0}{\varepsilon_0 m}} = q\sqrt{\frac{n_0}{\varepsilon_0 m}}\,, \tag{8–100}$$

a n_0 označuje prosječnu gustoću elektrona u ravnoteži.

Frekvencija plazme može se objasniti sljedećim razmatranjem. Pretpostavimo da se u jednolikom izmjeničnom polju $\vec{E}(t) = E_z \cos(\omega t)$ nalazi skupina nositelja naboja i da nema istosmjernog drifta (v_0=0) te da su sudari i učinci difuzije, tj. toplinskog gibanja, zanemarivi. Tad iz drugog Newtonova zakona izlazi

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}E(t)\,,$$

pa se, uz jednoliku gustoću nositelja naboja n, gustoća struje može opisati jednadžbom

$$\frac{\mathrm{d}J(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{q^2 n}{m}E(t)\,.$$

Obratimo sad pozornost na malo valjkasto područje duljine (visine) d i baze površine A. Os toga valjka paralelna je utisnutom električnom polju kao što je prikazano na slici 8.28a). Veza između napona i struje u tom valjkastom području može se izraziti kao

$$\frac{\mathrm{d}I_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}V(t)\,, \quad \text{gdje je} \quad L = \frac{md}{q^2 nA}\,.$$

Očito je da se to valjkasto područje ponaša poput induktiviteta zbog tromosti nositelja naboja. No struji nositelja treba dodati pomačnu struju kroz dielektrik

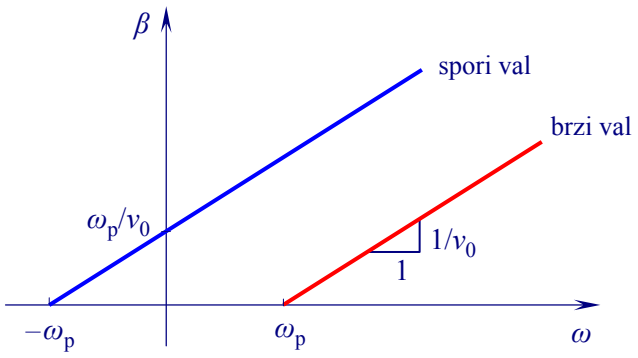
$$I_d = C\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}\,, \quad \text{gdje je} \quad C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\,.$$

Budući da ukupnu struju čini zbroj tih dviju struja, valjkasti dio prostora može se prikazati paralelnim strujnim krugom induktiviteta L i kapaciteta C, kao što je prikazano na slici 8.28b). To je dakle paralelni titrajni krug rezonantne frekvencije

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = q\sqrt{\frac{n}{\varepsilon_0 m}}\,,$$

gdje je za permitivnost uzeta vrijednost permitivnosti vakuuma, ε_0. Usporedba ovoga izraza s izrazom (8–100) upućuje na to da je ω_r jednaka frekvenciji plazme ω_p koja odgovara prirodnoj rezonantnoj frekvenciji skupine slobodnih nositelja naboja.

Rezultat (8–99) pokazuje da na snopu mogu putovati dva vala različitih gustoća naboja, koji odgovaraju pozitivnom i negativnom predznaku u izrazu (8–99). Oba su vala uzdužna (longitudinalna) poput akustičkog vala u zraku, tj. i električno polje i modulacija gustoće u smjeru su rasprostiranja. Na slici 8.29 prikazani su disperzijski dijagrami tih dvaju valova jed-



Slika 8.29. Disperzijski dijagram cijevi s putujućim valom

nostavnog oblika, tj. dvaju pravaca jednakih nagiba. Ovdje je grupna brzina obaju valova jednaka prosječnoj brzini snopa

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{1}{\dfrac{\partial\beta}{\partial\omega}} = v_0 . \tag{8–101}$$

To je posve u skladu s fizikalnom intuicijom jer energiju (kinetičku) prenose slobodni nositelji naboja čija je prosječna brzina upravo jednaka grupnoj brzini. No fazne im brzine nisu jednake. Pozitivni predznak u izrazu (8–99) tvori *spori val*, čija je fazna brzina uvijek manja od v_0, tj.

$$v_{\mathrm{f}-} = \frac{\omega}{\beta_-} = v_0 \frac{\omega}{\omega + \omega_{\mathrm{p}}} < v_0 . \tag{8–102}$$

Tom slučaju odgovara gornji (lijevi) pravac na slici 8.29. Stoga za promatrača koji putuje duž snopa prosječnom brzinom, taj val izgleda kao povratni val. Drugim riječima, taj se val promatraču doimlje kao da putuje u suprotnome smjeru od smjera u kojem se giba snop.

S druge strane, negativni predznak u izrazu (8–99) daje *brzi val* čija je fazna brzina uvijek veća od v_0, gdje je

$$v_{\mathrm{f}+} = \frac{\omega}{\beta_+} = v_0 \frac{\omega}{\omega - \omega_{\mathrm{p}}} > v_0 . \tag{8–103}$$

Tom slučaju odgovara donji (desni) pravac na slici 8.29.

Za uzdužne valove koji se gibaju uzduž snopa, magnetsko je polje jednako nuli. Uistinu, za putujući val u smjeru $\hat{z}$, operator ∇ može se zamijeniti sa $\hat{z}\mathrm{j}\beta_z$ pa iz Maxwellove jednadžbe (2–2) ili (2–24) izlazi

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}(-\mathrm{j}\beta_z\hat{z}\times\hat{z}E_z) = 0 ,$$

što je u skladu s prethodnim razmatranjima jer uzdužni valovi nisu elektromagnetski valovi. Kako su u igri energije koje se nalaze u obliku električne energije i kinetičke energije čestica, ti se valovi nerijetko nazivaju *elektrokinetički valovi* (ili plazmeni valovi).

Razmotrimo sad kako ti valovi prenose snagu. Kinetička energija u snopu po jedinici površine i po jedinici vremena jednaka je

$$P_{\mathrm{kin}} = nv\frac{1}{2}mv^2 , \tag{8–104}$$

gdje je $n = n_0 + \mathrm{Re}\,\{n_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta_z z)}\}$ broj elektrona u snopu. Uvrštenjem toga u izraz (8–104) dobivaju se članovi nultoga reda koji sadrže samo istosmjerne veličine, članovi prvoga reda koji sadrže umnoške istosmjernih i izmjeničnih veličina i članovi drugoga reda koji sadrže umnoške dviju izmjeničnih veličina. Prva skupina daje izraz za prijenos prosječne (srednje) energije

$$P_0 = \frac{1}{2} m v_0^3 n_0 ,$$

a druga kategorija daje članove čija je srednja vrijednost nula, dok treća kategorija daje korekciju zbog modulacije snopa izmjeničnim signalom. Član drugoga reda daje

$$P_{\mathrm{RF}} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \frac{3}{2} m n_0 v_0 v_1^2 + \frac{3}{2} m v_0^2 v_1 n_1 \right\} ,$$

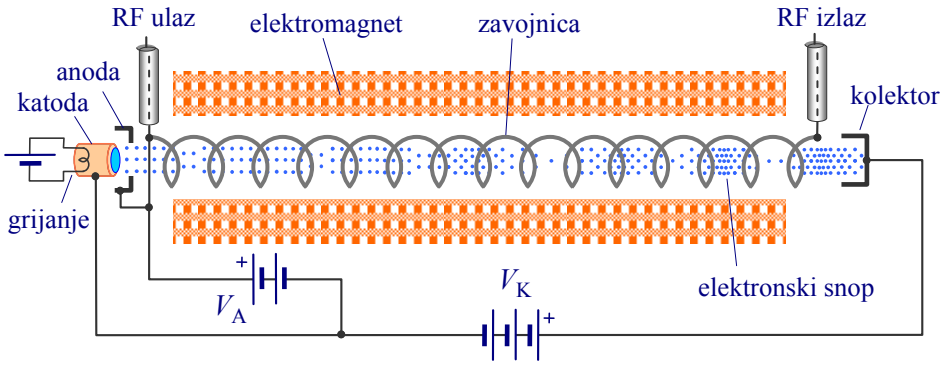
što se s pomoću jednadžbe (8–97c) može napisati kao

$$P_{\mathrm{RF}} = \frac{3}{4} m n_0 v_0 |v_1|^2 \frac{\omega}{\omega - \beta_z v_0} . \qquad (8–105)$$

Indeks »RF« označuje izmjeničnu (mikrovalnu) komponentu. Uvrštenjem β_z iz izraza (8–99) vidi se da brzi val prenosi *pozitivnu snagu*, a spori val *negativnu snagu*. Drugim riječima, kinetička energija snopa raste ako je snop moduliran valom koji putuje brže od elektrona (mod linearnog akceleratora čestica), a opada ako je modulacijski val sporiji (mod cijevi s putujućim valom).

Budući da je brzina elektromagnetskoga vala u vakuumu znatno veća od fizički ostvarive brzine elektrona, elektromagnetski se val stavlja u neku vrstu strukture sa sporim valom i to tako da se brzina komponente vala u smjeru elektronskoga snopa učini manjom od brzine elektronskoga snopa. Jedno od najjednostavnijih i najučinkovitijih rješenja je i najstarije poznato, suosna linija sa središnjim vodičem u obliku zavojnice. Uz pretpostavku da se brzina vala koji prati oblik središnjega vodiča ne mijenja u odnosu na brzinu svjetlosti, brzina vala u aksijalnom smjeru (smjer duž osi zavojnice) bit će manja i ovisit će o omjeru između duljine zavoja i njegovog koraka. U prvim izvedbama cijevi s putujućim valom elektronski je snop bio smješten u prostor između zavojnice i vanjskog vodiča suosne strukture, no ubrzo se pokazalo da se veće pojačanje može dobiti ako se snop smjesti u središnji dio zavojnice, duž njezine osi.

Shematski prikaz cijevi s putujućim valom dan je na slici na slici 8.30. Tok elektrona, stvoren na katodi, zbija se u uzak snop elektrostatički ili s pomoću elektromagneta u kojem postoji jako statičko magnetsko polja u uzdužnome smjeru. Kao što je objašnjeno, brzina vala u smjeru gibanja elektronskoga snopa smanjuje se zavojnicom ili sličnom periodičnom struk-

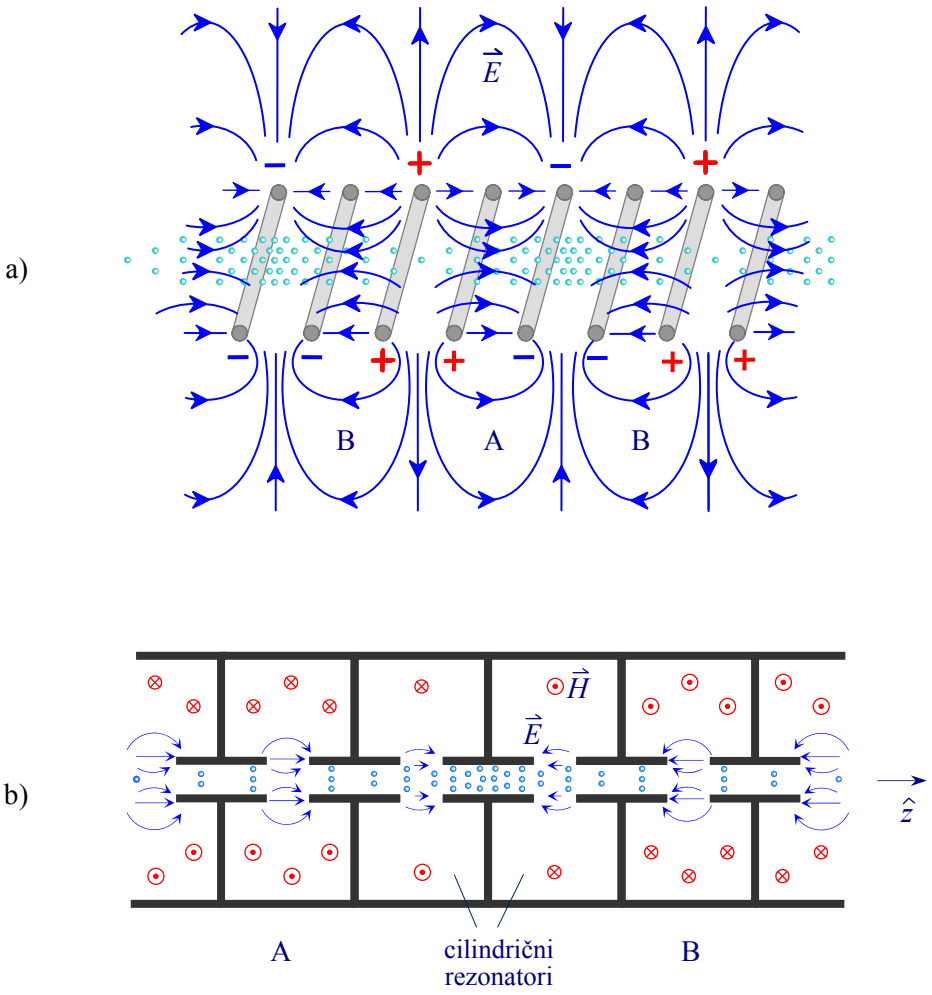


Slika 8.30. Cijev s putujućim valom

turom izlomljenih vodljivih elemenata (odjeljak 7.6). Time se omogućuje interakcija između elektronskoga snopa i vala koji putuje takvom strukturom. Namještanjem visokog napona ubrzavanja mogu se stvoriti optimalni radni uvjeti pri kojima su fazna brzina i brzina elektrona približno jednake.

Elektromagnetski val dovodi se valovodom ili suosnom linijom na lijevi kraj zavojnice prikazane na slici 8.30. U tu se svrhu rabe pobudne strukture slične prijelazu između valovoda i suosne linije (odjeljak 5.10.1). RF polje zavojnice stvara stalnu silu na elektrone u snopu, čak i kad je signal polja slab. Zavojnicom se mogu postići širine frekvencijskog pojasa do jedne oktave (2:1), što je dovoljno za većinu primjena.

U praktičnim se izvedbama mogu naći i druge vrste elektromagnetski sporih struktura poput periodičnih rezonatora spregnutih preko otvora kojim ujedno prolazi i elektronski snop (slika 8.31). Električno polje između susjednih otvora uglavnom sadrži uzdužnu komponentu preko koje se ostvaruje interakcija između vala i elektronskoga snopa. Kako struktura s periodično ulančanim rezonatorima usporava elektromagnetski val može se objasniti na ovaj način. Zbog visokog Q-faktora rezonatora, tj. zbog velike količine energije koja se u njemu pohranjuje, elektromagnetski se poremećaj ne može dovoljno brzo prenijeti iz jednog rezonatora u drugi.



Slika 8.31. Strukture sa sporim elektromagnetskim valom. Razdiobe električnog i magnetskog polja te elektrona u snopu: **a)** u zavojnici, **b)** u nizu periodičnih rezonatora

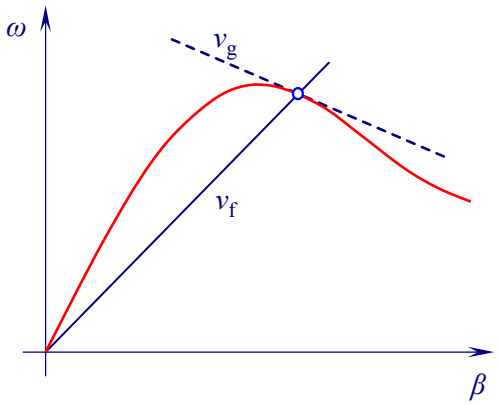
Budući da se primjenom cijevi s putujućim valom može ostvariti vrlo veliko pojačanje (i do 100 dB) mogu se očekivati nestabilnosti u radu, tj. može doći do spontanih oscilacija i uz provedbu svih potrebnih mjera opreza. Stoga se ulazni dio valovoda sa zavojnicom obično prevlači apsorpcijskim materijalom poput grafita. Taj materijal prigušuje i povratni u napredujući val. U praksi je dovoljno slabljenje od 50 dB da bi se ukupno pojačanje u petlji smanjilo ispod jedinice, a da se pritom zadrži dovoljno veliko korisno pojačanje (oko 50 dB).

U tipičnoj cijevi za 4 GHz uz napon ubrzanja oko 1500 V, brzina elektrona nešto je veća od jedne trinaestine brzine svjetlosti. Da bi se uzdužna komponenta polja rasprostirala malo nižom brzinom od brzine snopa, sveukupna duljina žice zavojnice mora biti više od trinaest puta veća od duljine same zavojnice. Da bi cijeli elektronski snop prošao zavojnicom koja je u praksi dugačka i više od 30, za zgušnjavanje snopa obično se rabi uzdužno magnetsko polje. Pritom gustoća toka magnetskoga polja iznosi nekoliko stotina gausa.

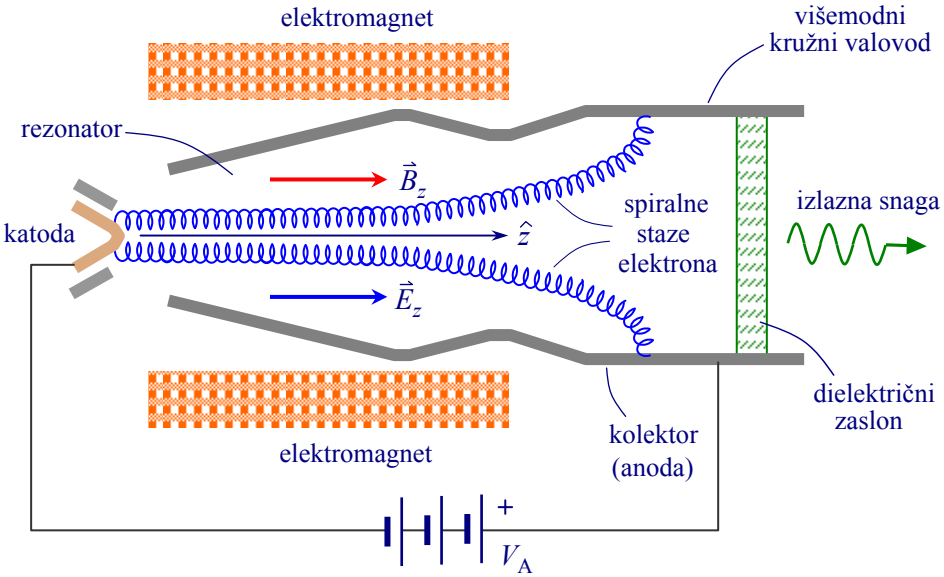
Cijevi s putujućim valom nalaze primjene kao širokopojasna pojačala snage u satelitskim komunikacijskim sustavima te u frekvencijski agilnim i širokopojasnim radarskim sustavima. Ovisno o izvedbi ustroja za usporavanje vala rade na frekvencijama u rasponu od 1 do 180 GHz uz širinu radnog frekvencijskog područja od 0,5 do 3 oktave i uz pojačanje izlazne snage od 30 do 70 dB ovisno o namjeni. Posebnim se izvedbama postižu izlazne snage iznad 3 kW u neprekinutom režimu rada, a impulsne snage i preko 120 kW.

Cijev s putujućim valom može se tako preinačiti da radi kao oscilator. Primjer je oscilator s povratnim valom (engl. *Backward Wave Oscillator*; BWO) u kojem se rabi negativan nagib karakteristike ω-k, kao što je prikazano na slici 8.32. Izostavljanjem apsorpcijskog materijala na zavojnici, u cijevi velikog pojačanja nastaje snažan povratni val. U tim uvjetima pojačanje u petlji povratne veze može prijeći jediničnu vrijednost pa se cijev ponaša kao mikrovalni oscilator. Pritom cijev rabi samo prolaz na početku zavojnice u blizini elektronskoga topa, iz kojeg se crpi mikrovalna snaga. Dobro svojstvo tog oscilatora nalazi se u činjenici da mu se frekvencija osciliranja može elektronički ugađati u širokom rasponu (više od jedne oktave) pa se nerijetko rabi u mjernoj instrumentaciji.

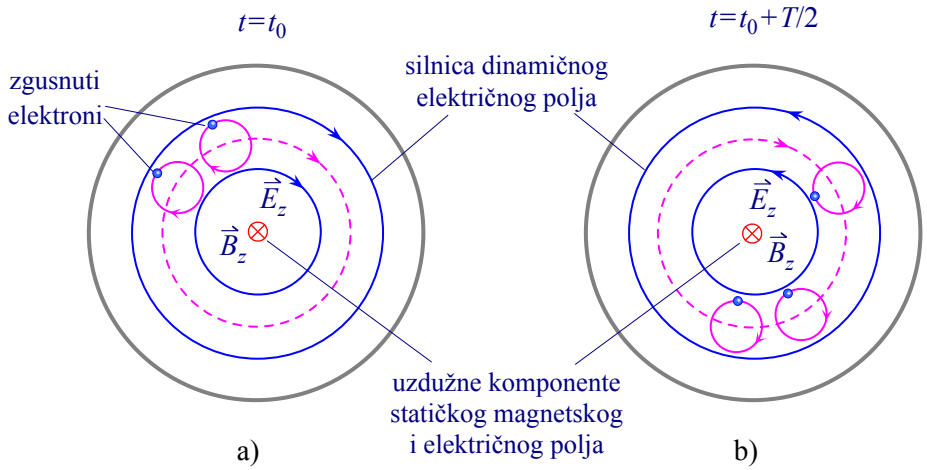
Druga vrsta cijevi s putujućim valom je *girotron*. Girotron obično rabi cilindričnu valovodnu šupljinu (slika 8.33), u kojoj istodobno djeluju uzdužna statička polja (magnetska i električna), elektroni putuju paralelno osi šupljine [10]. Pritom su staze elektrona oblika cikloide s vlastitim središtima vrtnje, kao što je shematski prikazano na slici 8.34. Tako usnopljeni elektroni predaju energiju električnom polju moda TE_{01}. Budući da je područje interakcije, tj. anoda, velikog obujma i puno većeg promjera od valne duljine te je moguće postići velike gustoće konvekcijske struje i magnetskog polja, girotron postaje vrlo snažan izvor elektromagnetske energije u području milimetarskih i submilimetarskih valnih duljina.



Slika 8.32. Disperzijski dijagram protusmjernog (povratnog) vala



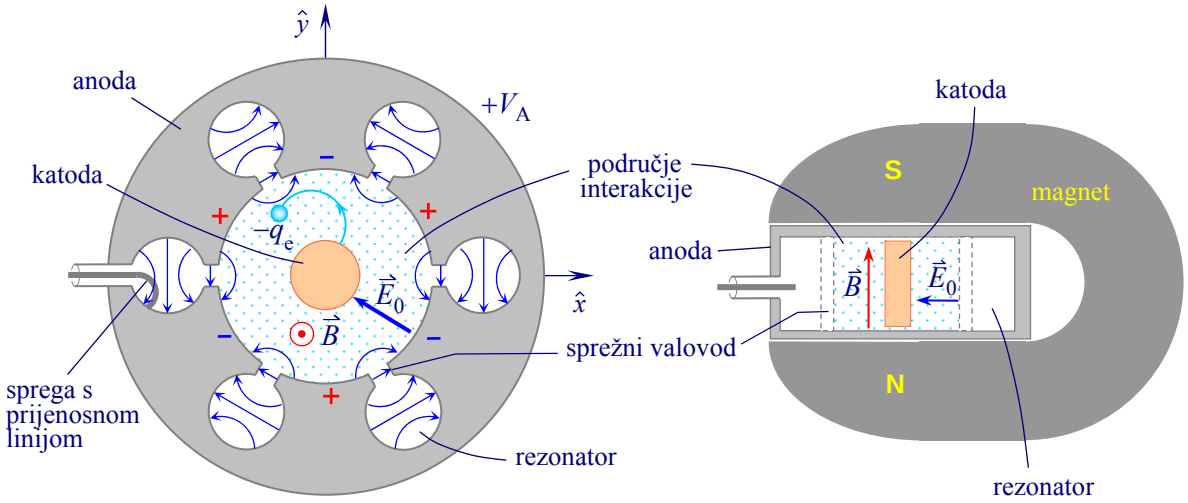
Slika 8.33. Shematski prikaz girotrona i razdioba jakosti magnetske indukcije u smjeru gibanja elektrona



Slika 8.34. Girotron pobuđen modom TE_{01}

8.3.4. Magnetron

Magnetron je snažan mikrovalni oscilator [7], [8], [10]. To je u osnovi elektronska cijev (dioda) s ukrižanim električnim i magnetskim poljima. Premda postoji nekoliko inačica, razmotrit ćemo samo rad magnetrona s više šupljinskih rezonatora, koji se najčešće nalazi u praksi. Taj se magnetron sastoji od cilindrične katode koja je suosna s većom cilindričnom anodom, kao što je prikazano na slici 8.35a). U anodu je integrirano više kružnih valovodnih rezonatora koji su elektromagnetski spregnuti s međuelektrodnim prostorom. U tom prostoru dolazi do međudjelovanja konvekcijske elektronske struje i rubnog elektromagnetskog polja rezonatora. Između katode i anode postoji jako statičko električno polje jakosti E koje je uspostavljeno visokim anodnim naponom V_A od nekoliko stotina volta do nekoliko desetaka kV. Osim toga paralelno s osi suosne strukture, tj. okomito na električno polje utisnuto je statičko magnetsko polje iz snažnog permanentnog magneta (slika 8.35b)). To magnetsko polje pretvara radijalno gibanje elektrona u oblik zakrivljene staze.



a) b)

Slika 8.35. a) Shematski prikaz magnetrona sa šest rezonatora, **b)** pogled sa strane

Katoda je zagrijana žarnom niti i emitira elektrone u vakuum. Ti se elektroni na svom putu prema anodi ubrzavaju jakim statičkim radijalnim električnim poljem koje vlada u prostoru između katode i anode. Ako se s a i b označe polumjeri katode i anode (slika 8.36), onda se električno polje u magnetronu može opisati izrazom (3–28) koji vrijedi za suosnu liniju, tj.

$$\vec{E}_0(\rho) = -\hat{\rho}\frac{V_A}{\rho \ln b/a} \,. \tag{8–106}$$

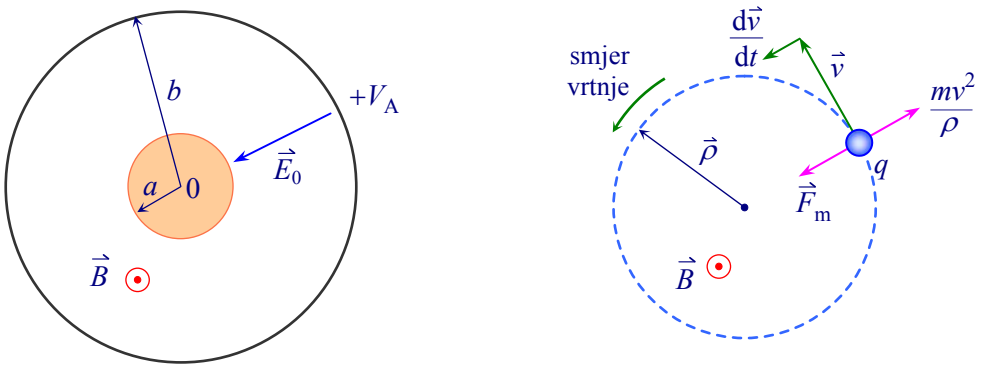
Potencijal na bilo kojoj radijalnoj udaljenosti ρ može se izraziti preko krivuljnog integrala električnog polja, tj.

$$V(\rho) = \int_a^\rho \frac{V_A}{\rho' \ln(b/a)} \mathrm{d}\rho' = \frac{\ln(\rho/a)}{\ln(b/a)} V_A \tag{8–107}$$

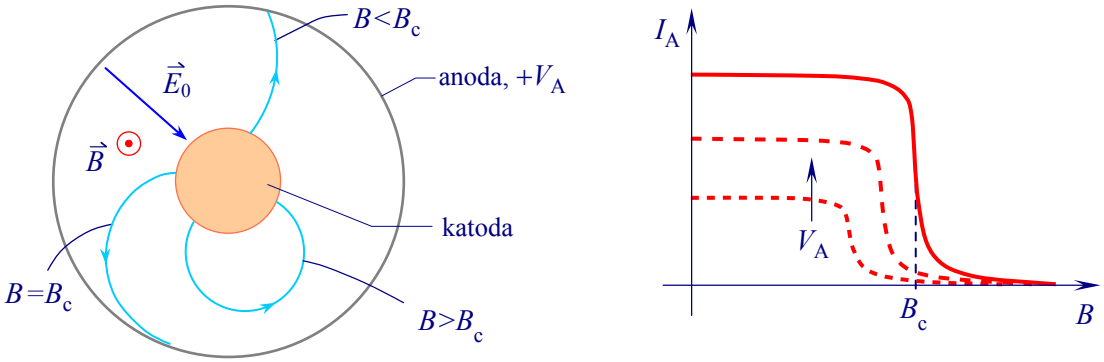
pa je brzina elektrona na tom polumjeru dana kao

$$v(\rho) = \sqrt{\frac{2q}{m} V(\rho)} \,, \tag{8–108}$$

gdje je q naboj, a m masa elektrona.



Slika 8.36. Geometrija magnetrona i staza elektrona u homogenom magnetskom polju



a) b)

Slika 8.37. a) Elektronske staze u homogenom magnetskom i radijalnom električnom polju za tri različite gustoće magnetskog toka, **b)** ovisnost anodne struje o gustoći magnetskog toka

Na slici 8.37a) prikazane su tri karakteristične staze elektrona, koje odgovaraju određenim vrijednostima gustoće magnetskog toka (magnetske indukcije) B uz stalnu jakost električnog polja između katode i anode. Na istoj je slici prikazana i ovisnost anodne struje o magnetskoj indukciji. Pri kritičnoj vrijednosti indukcije B_c dolazi do nagle promjene jakosti anodne struje (slika 8.37b)). Za stvaranje kritične indukcije potreban je anodni napon iznosa

$$V_c = \frac{qB_c^2 b^2}{8m}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)^2 . \qquad (8\text{–}109)$$

Kritična indukcija može se izraziti kao funkcija kritičnog napona:

$$B_c = \frac{b}{b^2-a^2}\sqrt{\frac{8mV_c}{q}} . \qquad (8\text{–}110)$$

Kombiniranim djelovanjem ukrižanih polja, Newtonova jednadžba gibanja (za nerelativističke brzine) elektrona koji kruži brzinom $\vec{v}$ unutar polja magnetske indukcije (gustoće magnetskog toka) $\vec{B}$ jednaka je zakonu Lorentzove sile (2–12)

$$\vec{F}_m = q(\vec{v}\times\vec{B}) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} . \qquad (8\text{–}111)$$

Ta sila djeluje okomito na vektore brzine $\vec{v}$ i gustoće magnetskog toka $\vec{B}$, samo ako se smjerovi tih vektora ne poklapaju. Za elektronsku stazu koja se nalazi u ravnini okomitoj na magnetski tok, slika 8.36, sila $\vec{F}_m$ djeluje na vektor brzine tako da se elektron giba po kružnoj stazi polumjera ρ. Kako polumjer staze ovisi o brzini elektrona i gustoći magnetskog toka može se vidjeti iz jednadžbe ravnoteže sile i centrifugalne akceleracije,

$$qvB = \frac{mv^2}{\rho} , \qquad (8\text{–}112)$$

gdje je $B = |\vec{B}|$. Otuda izlazi da se elektron vrti u magnetskom polju kružnom frekvencijom $\omega_C = v/\rho$, pa je $q\omega_C B\rho = m\omega_C^2\rho$. Sad se može definirati *ciklotronska frekvencija* kao

$$f_C = \frac{q}{m}\frac{B}{2\pi} \qquad (8\text{–}113)$$

koja ne ovisi o polumjeru staze, nego je razmjerna veličini magnetskog toka B. Drugim riječima, postoji linearna veza između ciklotronske frekvencije i gustoće magnetskog toka. Faktor proporcionalnosti između tih veličina određen je samo fizikalnim konstantama (q i m) kao

$$\frac{f_C}{B} = \frac{q}{2\pi m} = 2{,}8 \cdot 10^{10} \text{ Hz/T}. \tag{8–114}$$

Da bi konvekcijska struja elektrona u statičkom magnetskom polju tekla po kružnoj stazi frekvencijom (f_C) u mikrovalnome području, vrijednosti gustoće magnetskog toka moraju se naći u rasponu od 0,1 do 10 T.

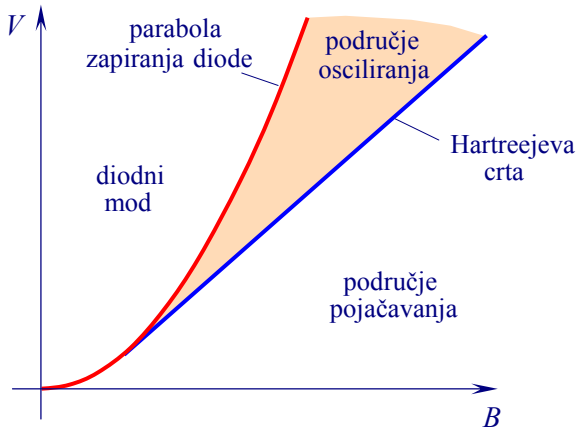
Izraz (8–109) pokazuje da je kritični anodni napon V_c razmjeran kvadratu modula kritične magnetske indukcije. To je prikazano parabolom u tzv. *Hartreejevom dijagramu* na slici 8.38. Područje koje se nalazi iznad parabole odgovara istosmjernom slučaju u kojem elektroni stižu do anode stvarajući protok istosmjerne struje iz izvora napajanja. Taj se mod stoga naziva *diodni mod*. Točke koje leže baš na paraboli odgovaraju elektronima koji stižu na anodu tangencijalnom stazom. Kad se točka nalazi ispod parabole, elektroni se vraćaju na katodu. Ti elektroni ne stižu do anode zbog manjka energije, nego zbog toga što im vektor brzine progresivno odstupa od smjera prema anodi. Kad su zadovoljeni određeni uvjeti, samo dolazi do malog zakreta vektora koji omogućuje elektronima da ipak stignu do anode.

Dijagram napon-indukcija upućuje na to da u uskom području ispod parabole može doći do spontanih oscilacija koje rastu dok ne zauzmu stabilnu ranu točku. To je područje s donje strane ograničeno Hartreejevom crtom (pravcem) koji je tangencijalan na parabolu na slici 8.38. Za oscilacije na zadanoj frekvencije ω taj se pravac može algebarski izraziti kao

$$V_H = \frac{1}{2} B_H \omega (b^2 - a^2) - \frac{m}{2(-q)} \omega^2 b^2 . \tag{8–115}$$

Opisano gibanje svojstveno je samo magnetronu uz statičke uvjete napajanja. No ako se pretpostavi da magnetron već oscilira, onda će se u prostoru između anode i katode istodobno naći i RF polje. To RF polja može znatno promijeniti jednostavnu stazu elektrona, a njegov će utjecaj na gibanje elektrona umnogome ovisi o smjeru dinamičkog električnog polja.

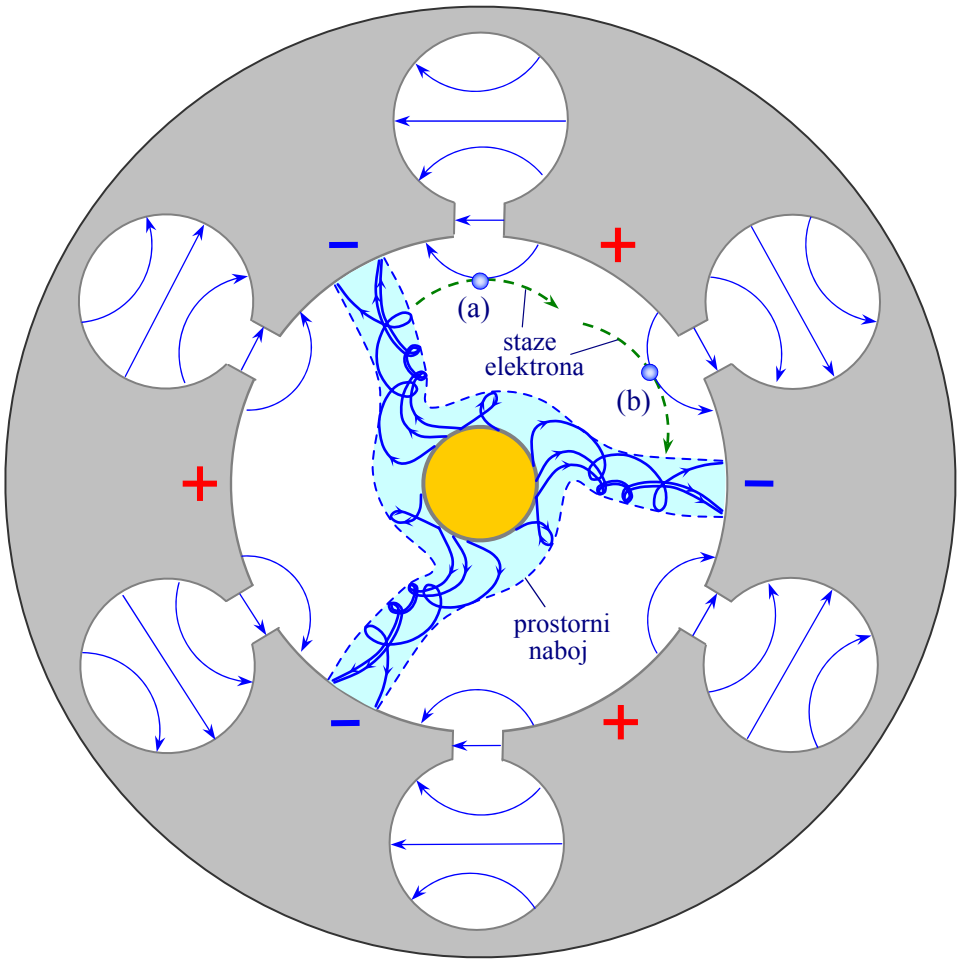
Anode magnetrona obično imaju oblik višestrukih rezonantnih šupljina, kao što je prikazano na slici 8.39. Statičko magnetsko polja mora biti dovoljno jako da se magnetron bez RF signala nađe u zapornom režimu rada. Cilindrične šupljine imaju ulogu rezonantnih krugova. Na rasporu rezonatora uglavnom je koncentrirano električno polje, a glavnina magnetskog polja nalazi se u unutarnjem dijelu šupljine. Pod utjecajem RF napona u rezonatorima se obli-



Slika 8.38. *V-B* karakteristika magnetrona

kuju »polovi« između susjednih rezonatora. Ti »polovi« ciklički mijenjaju predznak, premda se cijela anoda nalazi na stalnom pozitivnom statičkom potencijalu u odnosu na katodu. Anoda je tako projektirana da putujući val prođe dva pola za vrijeme jedne periode RF signala, *π-mod*. Stoga se ta vrsta magnetrona naziva *magnetron s putujućim valom*.

Sad se u uvjetima snažnih oscilacija mogu analizirati elektronske staze. Na slici 8.39 prikazana su rubna mikrovalna električna polja na otvorima rezonatora. Ako se elektron u točki (a) ubrzava radijalnim statičkim električnim poljem i vrti u smjeru kazaljke sata u statičkom magnetskom polju, onda tangencijalno RF električno polje koje je prisutno između polova povećava kinetičku energiju elektrona i otuda njegovu tangencijalnu brzinu. Porastom tangencijalne brzine raste magnetska sila ($Fm = BqV$) s daljnjom tendencijom ubrzavanja elektrona u smjeru prema katodi. Taj porast magnetske sile teži neutraliziranju radijalne sile pozitivnog potencijala anode pa se elektroni ubrzano vraćaju na katodu s koje su bili izbačeni u međuelektrodni prostor. No u točki (b) elektron se nalazi u tangencijalnom RF polju koje ga usporava i pritom mu oduzima kinetičku energiju pa raste amplituda oscilacija. To kočenje elektrona ima za posljedicu opadanje magnetske sile i tangencijalne brzine elektrona pa se elektron nastavlja gibati prema anodi pod utjecajem jakog statičkog električnog polja. Stoga je izvjesno da će elektroni iz područja (b) stići na anodu i usput RF polju u rasporu predati dio svoje kinetičke energije sadržane u tangencijalnoj komponenti brzine.



Slika 8.39. Mikrovalno okretajno električno polje i prostorni naboj magnetrona u radu

Vrtlozi elektrona u međuelektrodnom prostoru oblikuju uska zrakasta područja koja izgledom podsjećaju na žbice kotača bicikla. Da bi se što više snage prenijelo u elektromagnetski krug, okretajnu brzinu žbica treba prilagoditi okretajnoj brzini elektromagnetskoga vala, čime se uspostavlja sinkronizam. To se u praksi ostvaruje smanjenjem brzine elektromagnetskoga vala periodičnim opterećenjem cilindričnim rezonantnim šupljinama.

Promjena smjera proizvedena mikrovalnim signalom omogućuje većini elektrona da stigne do anode nakon vrtložnog gibanja u međuelektrodnom prostoru (slika 8.39). Žbice se okreću brzinom koju nameće odgovarajući rezonantni mod. Vrtložno strujanje elektrona u žbici u snažnom je međudjelovanju s električnim poljem odgovarajućeg moda. Pritom elektroni predaju dio svoje kinetičke energije elektromagnetskom polju u rezonatorima. Rezonatori su pak spregnuti s izlaznom prijenosnom linijom ili valovodom koji snabdijevaju teret potrebnom elektromagnetskom energijom. Kao što je ranije rečeno, neki su elektroni po izlasku iz katode prekomjerno ubrzani pa se vraćaju na katodu. Budući da crpe dio energije iz elektromagnetskog polja, ti elektroni smanjuju učinkovitost magnetrona i dodatno zagrijavaju katodu.

Elektroni koji se vrte u žbici učinkovito obavljaju pretvorbu snage iz istosmjernog izvora napajanja u mikrovalnu snagu. Magnetroni su snažni izvori mikrovalne snage do frekvencija od 100 GHz pa i više. Zbog razmjerno male plovršine katode, češće se rabe u impulsnom režimu rada. Stoga se nerijetko nalaze u radarskim primjenama, gdje ih u nižem frekvencijskom području do 30 GHz postupno istiskuju cijevi s putujućim valom i modularni poluvodički izvori, a u milimetarskome i submilimetarskome području girotroni. U frekvencijskom područja do 30 GHz ostvaruje se učinkovitost od 40 do 85 %, a u submilimetarskome valnom području do desetak posto. Magnetroni se nerijetko rabe i u industriji za sušenje drva i rudače te za zagrijavanje, varenje i taljenje dielektričnih materijala. U domaćinstvu se rabe za pripremanje hrane u mikrovalnim pećnicama, gdje obično rade u kontinuiranom režimu rada s izlaznim snagama u rasponu od petsto vata do nekoliko kilovata.

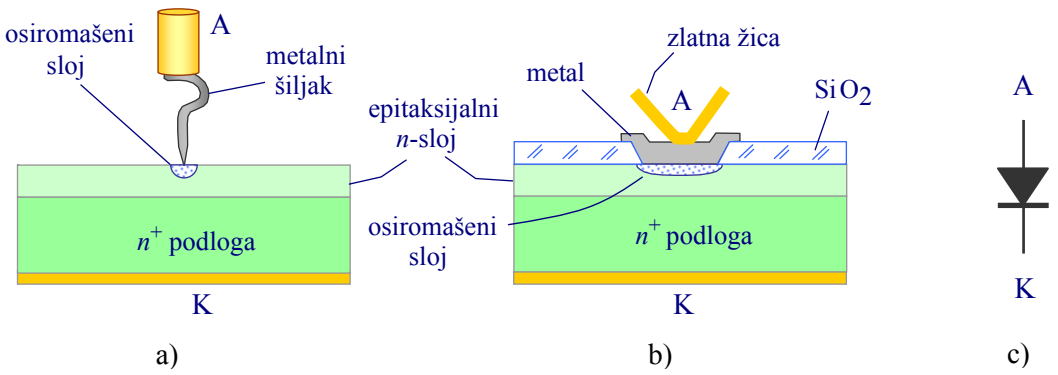
8.4. Mikrovalne poluvodičke komponente

U ovom ćemo odjeljku razmotriti praktične strukture poluvodičkih mikrovalnih komponenata koje mogu obavljati različite elektroničke funkcije poput pretvorbe frekvencije, upravljanja frekvencijom i snagom te generiranja signala [11] - [15]. Prema broju elektroda te se komponente mogu grubo podijeliti na diode i tranzistore. Prema elektroničkoj impedanciji koju pokazuju na mikrovalnim frekvencijama mogu se također razvrstati na pasivne i aktivne. Budući da se njihov rad zasniva na elektroničkim pojavama, mahom pokazuju nelinearna obilježja otpora ili kapaciteta. Premda se neke od njih ponašaju kao pasivne impedancije (Schottkyjeva, varaktorska i PIN-dioda) nerijetko ih svrstavamo u aktivne komponente jer im se impedancijska obilježja mijenjaju elektroničkim sredstvima.

8.4.1. Schottkyjeva dioda

Najstarija je poznata mikrovalna poluvodička komponenta *točkasta dioda* i još se ponekad pmjenjuje za miješanje i detektiranje u mikrovalnim prijamnicima. Dobiva se pritiskom tankog metalnog šiljka oblika opruge na kristal silicija (slika 8.40a)). Električne karakteristike određene su veličinom, oblikom i pritiskom šiljka te svojstvima epitaksijalnog sloja silicija. Budući da istodobno čini i kontakt i prijelaz, točkasti kontakt ima vrlo mali kapacitet.

Znatno bolje karakteristike ima dioda sa Schottkyjevom barijerom ili kraće Schottkyjeva dioda [12]. Izrađuje se nanošenjem odgovarajućeg metala na čistu i posve ravnu površinu silicija ili galij-arsenida (slika 8.40b)) stvarajući tako spoj između metala i poluvodiča. Obilježja te diode ovise o vrsti upotrijebljenog metala, dimenzijama spoja i koncentraciji primjesa u poluvodiču. Budući da ne zahtijeva uporabu opružnog kontakta s kućištem, Schottkyjeva je dioda mehanički znatno stabilnija od točkaste diode.



Slika 8.40. Presjek: **a)** točkaste i **b)** silicijeve Schottkyjeve diode; **c)** električni simbol

Struja spoja i_j ima eksponencijalnu ovisnost o naponu spoja v_j,

$$i_j = I_s\left(e^{\alpha v_j} - 1\right), \tag{8–116}$$

gdje je I_s reverzna zasićena struja spoja (obično manja od 10^{-9} A). Veličina $\alpha = q/(\eta kT)$ ovisi o svojstvima i temperaturi Schottkyjeva spoja, gdje je q naboj elektrona, T apsolutna temperatura spoja u kelvinima, k Boltzmannova konstanta, a η parametar spoja čija se vrijednost nalazi u rasponu od 1 do 1,5. Na sobnoj temperaturi (290 K), konstanta α poprima vrijednost od oko $40\ V^{-1}$.

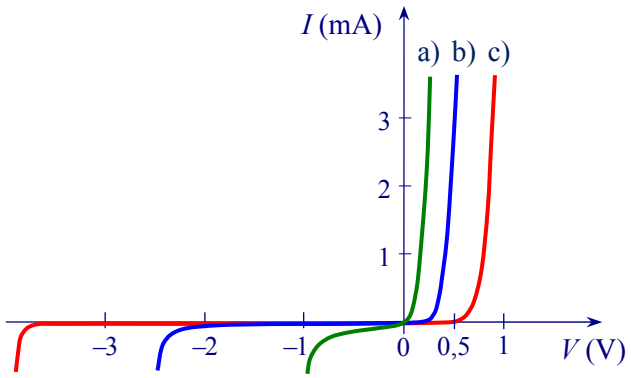
Kapacitet spoja također je nelinearna funkcija napona, a može se izraziti kao

$$C_j = \frac{C_{j0}}{\sqrt{1 + \dfrac{v_j}{\Phi}}}, \tag{8–117}$$

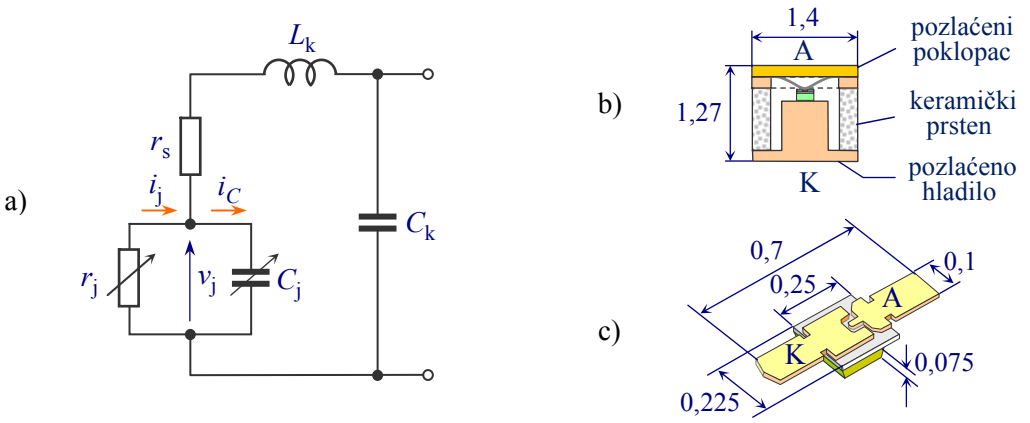
gdje je C_{j0} kapacitet spoja uz nulti napon spoja, a Φ ugrađeni potencijal spoja. Za promjer spoja reda μm, kapacitet spoja može se zanemariti do frekvencija od nekoliko GHz.

Na slici 8.41 prikazane su strujno-naponske karakteristike tipične točkaste i Schottkyjeve diode. Iznad koljena prikazanih karakteristika dinamička je vodljivost vrlo velika. Probojni je napon dioda razmjerno nizak što ih čini vrlo osjetljivim na proboj statičkim nabojem.

Na slici 8.42a) prikazana je nadomjesna shema Schottkyjeve diode postavljene u ujedno od mikrovalnih kućišta prikazanih na slici 8.42b) i c). Otpor r_j označuje nelinearni otpor spoja metal-poluvodič (recipročna vrijednost dinamičke vodljivosti), a C_j kapacitet spoja. Otpor r_s je serijski otpor kontakata i izvoda, a L_s i C_s označuju induktivitet, odnosno kapacitet kućišta.



Slika 8.41. Tipične strujnonaponske karakteristike Schottkyjeve diode za različite razine napona Schottkyjeve barijere: **a)** nulta, **b)** niska i **c)** visoka

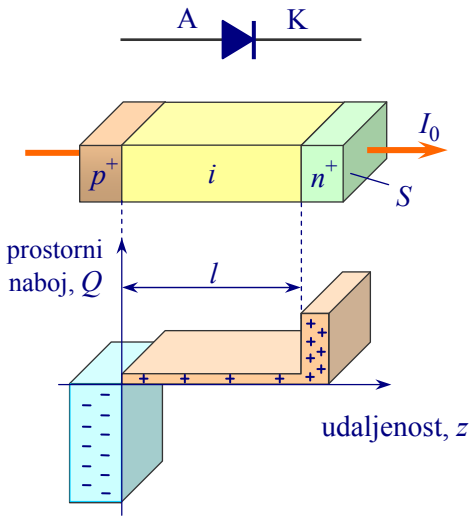


Slika 8.42. a) Nadomjesna shema Schottkyjeve diode ugrađene u kućište. Tipična kućišta s dimenzijama: **b)** keramičko kućište za valovodne primjene i **c)** kućište *beam-lead* za planarne primjene

Iznimno mali kapacitet spoja i rad s većinskim nositeljima naboja daje im prednost u sklopovima detektora i miješala u odnosu na klasične *pn*-slojne diode. Ponovljivost i visok stupanj pouzdanosti tehnologije poluvodičkih komponenata i mikrovalnih monolitnih integriranih sklopova omogućuje proizvodnju parova i kvarteta Schottkyjevih dioda velike kakvoće. Za primjene u sklopovima balansnih miješala, takve se strukture ugrađuju u posebna kućišta slična onima za tranzistor (odjeljak 8.4.5). Kad se rabi kao komponenta s naponski upravljanim kapacitetom uz negativni prednapon naziva se varaktorska dioda (odjeljak 8.10.2).

8.4.2. PIN-dioda

PIN-dioda je mikrovalna poluvodička komponenta sa svojstvima elektronički upravljanog otpora. Može se ugraditi u valovodne, suosne i mikrotrakaste sklopove za potrebe prekopčavanja, prigušenja, ograničavanja, modulacije i zakretanja faze mikrovalnih signala [12]. Te se diode izrađuju od silicija tako da je između jako dopiranih p^+ i n^+ slojeva umetnut visokootporni poluvodički *i*-sloj (intrinzični sloj), kao što je prikazano na slici 8.43. Na niskim frekvencijama PIN-dioda se ponaša kao obična *pn*-dioda, dakle kao ispravljač. U tablici 8.1. prikazane su vrijednosti geometrijskih parametara tipične PIN-diode.



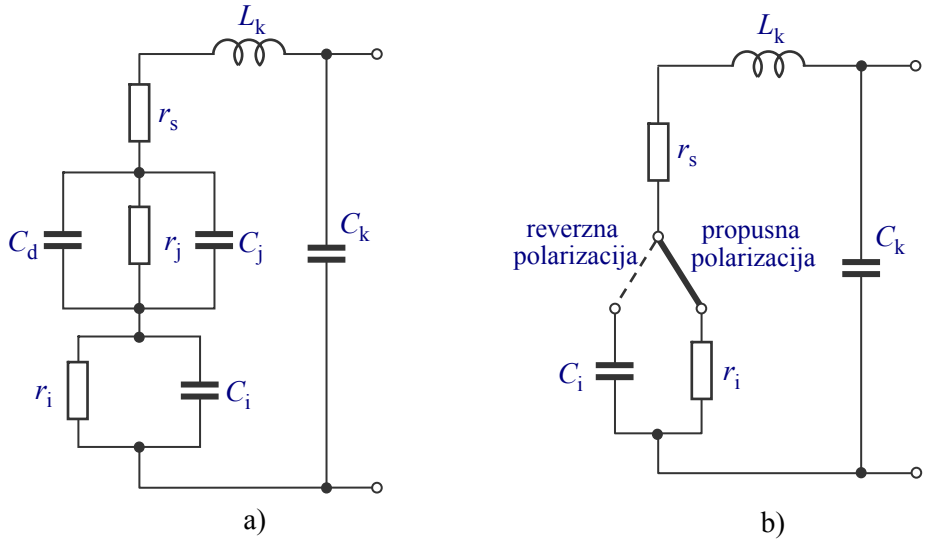
Slika 8.43. Simbol i struktura PIN-diode te razdioba prostornog naboja u diodi

Bez vanjskog napona, intrinzični sloj ima velik otpor, koji je moguće dodatno povećati reverznom polarizacijom diode. No postupnim propusnim polariziranjem diode vrijednost otpora naglo opada zbog injektiranja pokretljivih nositelja naboja u intrinzični sloj, šupljina iz sloja p^+ i elektrona iz sloja n^+. U visokofrekvencijskom području, struja PIN-diode uglavnom je uvjetovana rekombinacijom nositelja naboja u *i*-sloju, a ne učincima drifta i difuzije kao u *pn*-spoju ili Schottkyjevoj diodi. Stoga je vodljivost *i*-sloja razmjerna količini injektiranog naboja koja je pak razmjerna istosmjernoj struji napajanja. Na slici 8.44a) prikazan je nadomjesni sklop PIN-diode. Otpor r_i i kapacitet C_i karakteriziraju *i*-sloj. Kapacitet C_i stalne je vrijednosti na frekvencijama iznad 1 GHz. Otpor r_j i kapaciteti C_j i C_d obilježja su *pn*-diode. Serijski otpor r_s otpor je neosiromašenog dijela čipa i prisutan je i uz propusnu i uz reverznu polarizaciju. Kad se čip PIN-diode postavi u kućište, tad valja uzeti u obzir i njegove parazitske reaktancije. Induktivitet kućišta L_k i kapacitet C_k ovise o obliku kućišta.

Tablica 8.1. Tipične vrijednosti parametara PIN-diode

	Debljina, l (cm)	Površina, S (cm^2)
sloj p^+	$0{,}76 \cdot 10^{-3}$	$2{,}0 \cdot 10^{-3}$
sloj i	$7{,}6 \cdot 10^{-3}$	$3{,}12 \cdot 10^{-3}$
sloj n^+	$10{,}2 \cdot 10^{-3}$	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$
metalizacija	$0{,}127 \cdot 10^{-3}$	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$
hladilo	$10{,}2 \cdot 10^{-2}$	$12{,}9 \cdot 10^{-3}$

Zbog toga što su *p*- i *n*-slojevi jako dopirani, osiromašeni sloj ne ponire dublje u te slojeve pa je širina osiromašenog sloja približno jednaka duljini *i*-sloja. Stoga je uz reverznu polarizaciju kapacitet PIN-diode određen duljinom *i*-sloja. Taj je kapacitet vrlo mali (dijelovi pF). Pri toj je polarizaciji difuzijski kapacitet zanemarivo mali, a otpor je spoja vrlo velik. Također je impedancija paralelnog spoja r_i, C_i zanemarivo mala u odnosu na impedanciju paralelnog spoja C_j i r_s, koji je spojen u seriju, pa se nadomjesna shema pojednostavnjuje na oblik prikazan na slici 8.44b). No u uvjetima propusne polarizacije, difuzijski je kapacitet C_d toliko velik da upućuje na učinke kratkoga spaja na elemente r_j i C_j koji su s njim u paralelnom spoju. S druge strane, C_i obično ima malu vrijednost pa je u nadomjesnoj shemi za propusnu polarizaciju opravdano zadržati samo serijski spoj otpora r_s i r_i, kao što je prikazano na slici 8.44b).



Slika 8.44. a) Nadomjesna shema PIN-diode u mikrovalnom području; **b)** pojednostavljena shema za propusnu i reverznu polarizaciju

Pogledajmo sad kako otpor *i*-sloja ovisi o struji napajanja I_0. Gustoća struje u poluvodiču može se izraziti kao funkcija provodnosti poluvodiča σ koja ovisi o prostornim gustoćama elektrona i šupljina, n_0 i p_0, te pokretljivostima nositelja naboja, μ_e, $\mu_š$, tj.

$$J = \sigma E = E(n_0 q\mu_e + p_0 q\mu_š)\,. \tag{8–118}$$

Razmatranje se može pojednostavniti uz pretpostavku da su gustoće elektrona i šupljina u *i*-sloju međusobno jednake tako da se mogu zamijeniti ambipolarnom pokretljivošću

$$\mu_{ap} = \frac{2\mu_e\mu_š}{\mu_e + \mu_š}\,. \tag{8–119}$$

Primjerice, gustoće nositelja naboja u siliciju iznose μ_e=1350 cm^2/(Vs), $\mu_š$=400 cm^2/(Vs) pa je ambipolarna pokretljivost μ_{ap}=620 cm^2/(Vs). Ako su poznati duljina l i površina presjeka *i*-sloja S, onda se otpor toga sloja može izračunati primjenom izraza (8–118) i (8–119) kao

$$r_i = \frac{l}{\sigma S} = \frac{l}{2n_0 q\mu_{ap} S}\,. \tag{8–120}$$

Razmatranjem prostornog naboja u *i*-sloju i uz pretpostavku da je gustoća nositelja naboja konstantna, ukupni je naboj u *i*-sloju jednak

$$Q_0 = qn_0 lS\,, \tag{8–121}$$

gdje je lS volumen *i*-sloja. U stacionarnom stanju taj naboj održava tok struje kroz diodu, I_0.

Ako struja naglo padne na nulu, onda će naboj pohranjen u *i*-sloju opadati s vremenom kao

$$Q(t) = Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_r}}\,, \tag{8–122}$$

gdje je τ_r vrijeme života rekombiniranih nositelja naboja. U stacionarnom stanju rekombinacija je ta koja u cijelosti uravnotežuje tok struje. Brzina kojom se naboj počinje mijenjati nakon trenutačnog prekida toka struje mora biti jednaka izvornoj struji, tj.

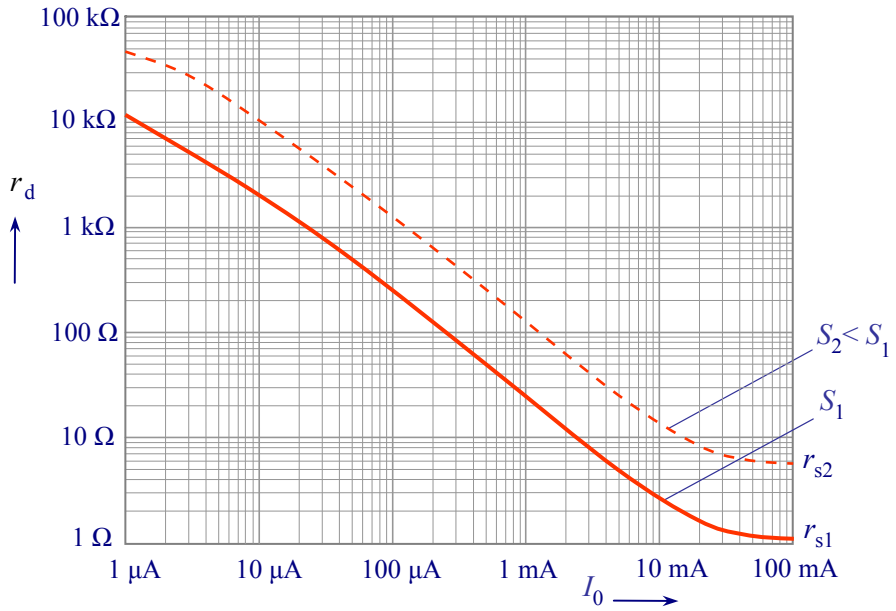
$$I_0 = \left.\frac{\partial Q(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{Q_0}{\tau_r}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_r}}\right|_{t=0} = \frac{Q_0}{\tau_r}\,. \tag{8–123}$$

Otuda, uz primjenu izraza (8–121), ukupni naboj u *i*-sloju poprima oblik $Q_0 = qn_0 lA = I_0\tau_r$ pa se uvrštenjem u izraz (8–120) dobiva

$$r_i = \frac{l^2}{2\mu_{ap} I_0 \tau_r}\,. \tag{8–124}$$

Povećanjem istosmjerne struje raste broj nositelja naboja. Stoga vodljivost *i*-sloja raste približno linearno sa strujom. Kad je dubina difuzije nositelja naboja znatno veća od duljine *i*-sloja, tad se može pretpostaviti da je gustoća naboja konstantna. No kad je duljina *i*-sloja približno jednaka dubini difuzije, tad se gustoća nositelja naboja mijenja s duljinom z približno funkciji cosh(z), ali je otpor sloja i dalje obrnuto razmjeran istosmjernoj struji napajanja.

Tipična ovisnost otpora intrinzičnog sloja prikazana je na slici 8.45. Pri velikim strujama propusne polarizacije intrinzični se sloj ponaša kao kratki spoj i u nadomjesnoj shemi ostaje samo serijski otpor diode r_s. Za tipične PIN-diode, pri maksimalnoj struji propusne polarizacije, otpor r_i manji je od 1 Ω. Stoga je vrijednost otpora diode poglavito ograničena serijskim otporom kontakata r_s (0,5 do 2 Ω). No u radu s malim strujama u zapornom području, otpor r_i obično je veći od 10 kΩ. U prvoj aproksimaciji, otpor diode obrnuto je razmjeran razini istosmjerne struje, na što upućuje izraz (8–124). Zahvaljujući svojstvu da se približno ponaša kao čisti otpor u širokom rasponu vrijednosti otpora, tj. u širokom rasponu struja, PIN-dioda je u praksi našla čitav niz različitih primjena kao strujno upravljani otpor.



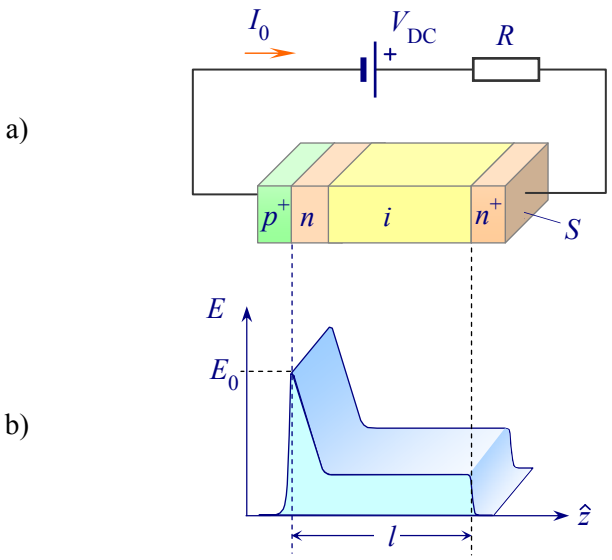
Slika 8.45. Ovisnost ukupnog otpora PIN-diode ($r_s + r_i$) o struji propusne polarizacije I_0. Isprekidanom crtom prikazana je karakteristika diode manje površine presjeka

PIN-diode nerijetko se rabe u sklopovima za prekopčavanje velikih RF snaga. U zapornom području rade uz visok RF napon i jaku struju, a u propusnom području rade uz jaku RF struju i nizak napon. U usporedbi s drugim poluvodičkim komponentama, probojni napon PIN-dioda razmjerno je visok (od stotinjak do nekoliko tisuća volta).

8.4.3. IMPATT dioda

Svaki sklop pojačala ili oscilatora sadrži aktivnu komponentu koja stvara mikrovalnu snagu na radnoj frekvenciji i isporučuje ju teretu. Fazni pomak između struje i napona aktivne komponente mora biti veći od 90°, a manji od 270°. Tad je realni dio impedancije (otpor) negativan. Pretvorba istosmjerne energije u izmjeničnu zbiva se kad istosmjerno električno polje izazove gibanje nositelja naboja u suprotnome smjeru od onog u kojem se nastoji mijenjati izmjenično električno polje. Time je obavljen rad i istosmjerno polje gubi energiju koju apsorbira izmjenično polje. Ovo je lako razumljivo za prvu poluperiodu RF signala. No u suprotnoj poluperiodi mora se na neki način spriječiti gubitak stečene energije slobodnih nositelja naboja. Lavinska dioda s efektom vremena proleta (*IMPATT dioda*, prema eng. *IMPact Avalanche and Transit Time*) primjer je diode s negativnim otporom [13]. Da bismo objasnili rad diode, pretpostavit ćemo Readovu strukturu poluvodiča prikazanu na slici 8.46. Kao poluvodički materijal mogu se rabiti germanij, silicij, galij-arsenid i indij-fosfid. Ideja je stvoriti skupinu slobodnih nositelja naboja *lavinskim probojem* (*Zenerov proboj*) i potaknuti je na gibanje kroz poluvodič stalnom brzinom.

Kad valentni elektron napusti atom kojem pripada i prijeđe u vodljivi pojas, ostavljajući za sobom šupljinu, kaže se da je ioniziran. Proces ionizacije traži energiju veću od energije zabranjenog pojasa. Valentni elektron može primiti tu energiju na nekoliko načina: toplinskim vibracijama kristala (*toplinska ionizacija*), energijom upadne svjetlosti (*fotoionizacija*) ili sudaranjem s nositeljem naboja velike energije (*udarna ionizacija*). Povisi li se reverzni napon diode toliko da njime stvoreno električno polje odstrani sve slobodne nositelje naboja iz poluvodiča, nastaje *ispražnjeni sloj*. Osim toga, na skokovitom prijelazu p^+n prisutno je vrlo jako električno polje, kao što je prikazano na slici 8.46b). Kad to polje dostigne vrijednost od oko 350 kV/cm, u siliciju dolazi do lavinskoga proboja pa nastaju parovi *elektron-šupljina*. U lavinskome



Slika 8.46. a) Shematski prikaz Readove strukture lavinske diode, **b)** razdioba električnog polja

proboju nositelji naboja dobivaju dovoljno energije kojom mogu dalje ionizirati valentne elektrone sudaranjem s kristalnom rešetkom. Svaki ionizirani elektron može stvoriti jedan ili više novih parova elektron-šupljina. Taj se buran proces naziva *lavinska multiplikacija*.

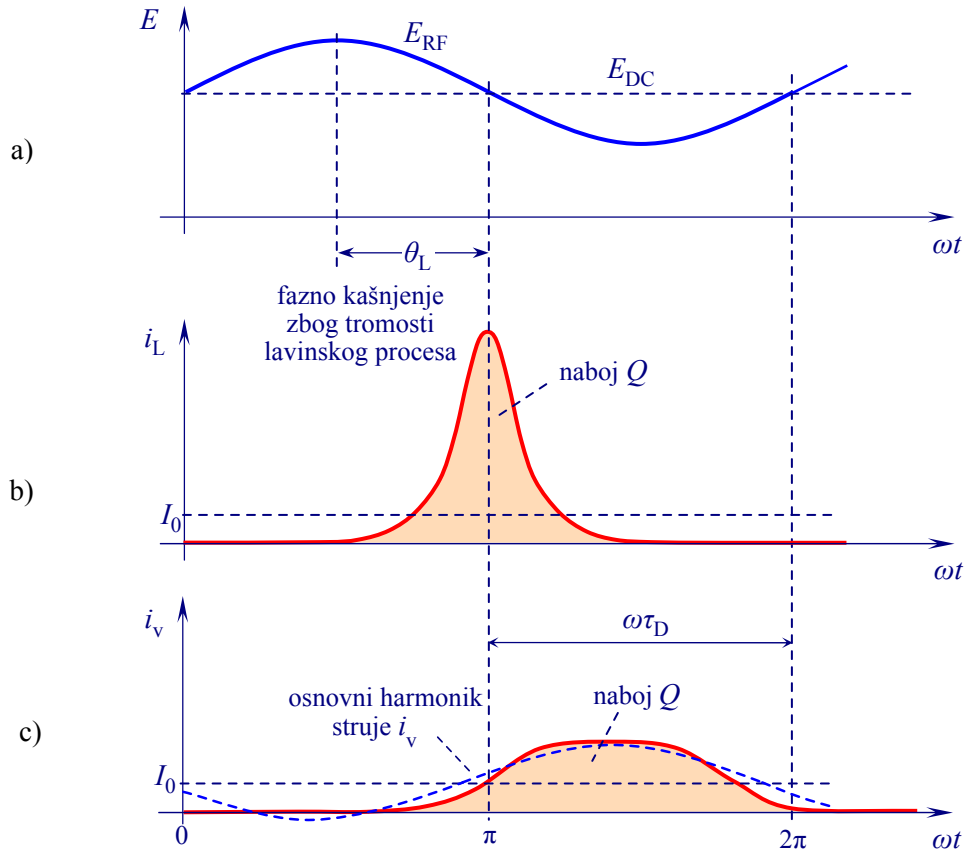
U strukturi na slici 8.46a) šupljine napuštaju diodu kroz sloj p^+ i njihov se utjecaj može zanemariti. Elektroni ulaze u ispražnjeni sloj u kojem je električno polje ispod kritične vrijednosti pa ne dolazi do daljnje multiplikacije nositelja naboja. Jedna je od osnovnih odlika poluvodiča *zasićena brzina* (v_z) nositelja naboja koja nastaje pri vrlo jakim poljima zbog raspršnih učinaka u kristalnoj rešetki. U siliciju se brzina elektrona zasićuje na oko 10^7 cm/s pri jakostima električnog polja iznad 20 kV/cm. To znači da se *vrijeme proleta* nositelja naboja u osiromašenom području može regulirati duljinom toga sloja i učiniti neovisnim o prednaponu diode. Sad se može objasniti proces pretvorbe istosmjerne energije u izmjeničnu i nastajanje mikrovalnih oscilacija. Ako se pretpostavi da je reverzni prednapon postavljen na vrijednost koja jamči lavinski proboj, onda u toj točki postoji višak prostornog naboja.

Na slici 8.47 prikazani su fazni odnosi između izmjeničnih napona i struja IMPATT diode u stanju stacionarnih oscilacija. Za vrijeme prve poluperiode izmjeničnog titraja polje raste, započinje lavinska multiplikacija i stvaraju se novi nositelji naboja eksponencijalnim porastom. Rezultat je prikazan na slici 8.47b), gdje se vidi relativna gustoća prostornog naboja u obliku šiljastog impulsa, čiji je vrh fazno pomaknut za oko 90° u odnosu na maksimum izmjeničnog napona na diodi. To fazno kašnjenje lavinske struje (θ_L) nastaje zbog činjenice da brzina kojom se stvaraju novi parovi elektron šupljina u lavinskome području ne ovisi samo o jakosti električnog polja, nego i o gustoći elektrona i šupljina koji se već nalaze unutar lavinskoga područja. Srednja vrijednost struje jednaka je istosmjernoj struji napajanja I_0.

Ako je duljina ispražnjenog područja diode l, onda se vrijeme proleta nositelja naboja (elektrona) u *driftnom području* može izraziti kao

$$\tau_D = \frac{v_z}{l} \ . \tag{8–125}$$

Napon na diodi razmjeran je električnom polju prikazanom na slici 8.47a). Kad je vrijeme proleta približno jednako polovici periode RF signala, tad će inducirana struja i_v u vanjskom strujnom krugu biti protufazna naponu na diodi (slika 8.47c). Otuda će i osnovna Fourierova komponenta struje diode biti protufazna u odnosu na napon na diodi. Površina ispod valnog oblika struje i_v daje ukupnu vrijednost naboja (Q) slobodnih nositelja u diodi pa zbog zakona



Slika 8.47. Odziv IMPATT diode na izmjenični pobudni signal koji je superponiran na istosmjerni prednapon diode

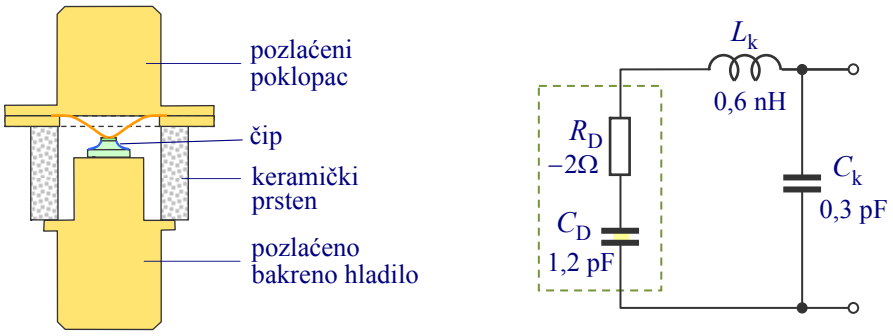
očuvanja naboja mora biti jednaka površini ispod valnog oblika struje lavinskoga područja. Budući da je omjer fazora napona i struje osnovnog harmonika jednak impedanciji diode na osnovnom harmoniku, realni će dio te impedancije biti negativan. Drugim riječima, u tim uvjetima IMPATT dioda ostvaruje *negativni otpor*. Negativni otpor preuzima ulogu izvora izmjeničnog (mikrovalnog) signala jer zadovoljenjem određenih uvjeta u strujnom krugu može doći do spontanih oscilacija. O tomu će biti više riječi u odjeljku 8.9.1. Frekvencija oscilacija određena je vremenom proleta i približno glasi

$$f_o = \frac{v_z}{2l}. \tag{8–126}$$

Stoga, primjerice, za frekvenciju oscilacija 10 GHz potrebna duljina ispražnjenog sloja iznosi $l_D = 5$ μm. Za tipičnu površinu spoja 10^{-4} cm^2, gustoća struje napajanja prelazi 2000 A/cm^2. Budući da se radi o velikim gustoćama struje napajanja i maloj učinkovitosti diode, potrebno je osigurati učinkovito odvođenje topline iz aktivnog područja diode.

Na slici 8.48a) prikazan je uvećani presjek diode u tipičnom mikrovalnome kućištu. Čip diode obično je postavljen na bakreni kontakt koji istodobno služi i kao hladilo. Time su osigurani dobri električni i toplinski kontakti diode s mikrovalnim sklopom. Na slici 8.48b) prikazana je pojednostavljena nadomjesna shema IMPATT diode s parazitskim reaktancijama kućišta. Te reaktancije valja uzeti u obzir prilikom proračuna oscilatora ili refleksijskih pojačala.

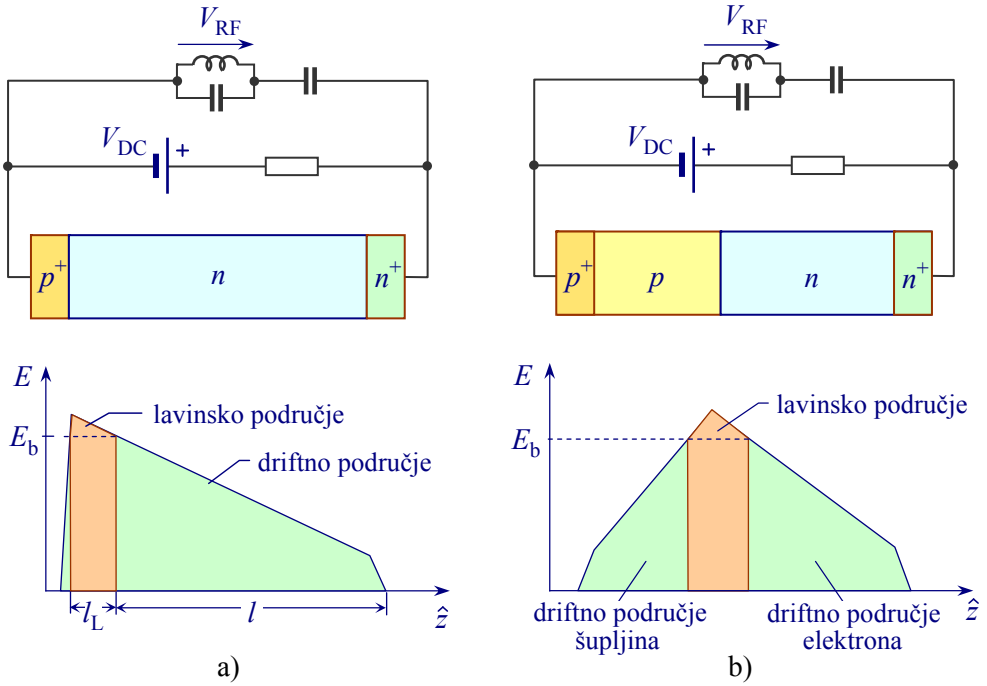
Tipične vrijednosti elemenata nadomjesne sheme diode namijenjene za rad na 10 GHz i izlaznu snagu 1 W prikazani su na slici 8.48b). Tipični radni uvjeti podrazumijevaju napajanje iz strujnog izvora istosmjerne struje (do 200 mA), uz probojni napon od oko 65 V i učinkovitost od 7 %. Maksimalna teorijska učinkovitost silicijevih dioda iznosi oko 15 %, a dioda od galij-arsenida oko 23 %. Osim opisane nesimetrične strukture s Readovim profilom polja, češće se



Slika 8.48. a) Geometrija tipičnog kućišta IMPATT diode za valovodne primjene i **b)** nadomjesna shema s parazitskim elementima kućišta

rabe jednostavne $p^+ n n^+$, $p^+ n_1 n_2 n^+$ i $p^+ pnn^+$ strukture trokutastog profila polja (slika 8.49). Te strukture mogu biti nesimetrične (slika 8.49a)) ili simetrične (slika 8.49b)). Simetrične su učinkovitije jer u pretvorbi istosmjerne energije u mikrovalnu sudjeluju oba tipa nositelja naboja, elektroni i šupljine. IMPATT dioda rabi se u milimetarskom valnom području. U mikrovalnome području do nekoliko desetaka GHz, IMPATT diodu uspješno zamjenjuje učinkovitiji MESFET ili HEMT (odjeljak 8.4.5).

Smanji li se nagib trokutastog profila polja, IMPATT-mod može prijeći u TRAPATT-mod (engl. *TRApped Plama Avalanche Tranit Time*). Zbog manje strmine profila polja, lavinsko područje proteže se duž cijelog ispražnjenog područja stvarajući vrlo gust »ionizirani plin« elektrona i šupljina, sličan plazmi. Budući da rade uz visok reverzni napon i veliku gustoću struje napajanja, TRAPATT diode obično rade u impulsnom režimu rada. No zbog tromosti procesa u kojem se stvara *plazma* radne su im frekvencije relativno niske, ali daju razmjerno veliku izlaznu snagu uz visoku učinkovitost i temperaturnu stabilnost. Također im je malen umnožak pojačanja i širine frekvencijskog pojasa. Osim toga, ostvaruju iznimno malo dinamičko područje, a razine su im šuma vrlo visoke. Elektronička im se impedancija znatno mijenja promjenom radnog ciklusa. Iniciranje procesa TRAPATT ostvaruje se IMPATT- modom diode pa su potrebne vrlo složene izvedbe oscilatora. Zbog navedenih nedostataka primjena im je vrlo ograničena.

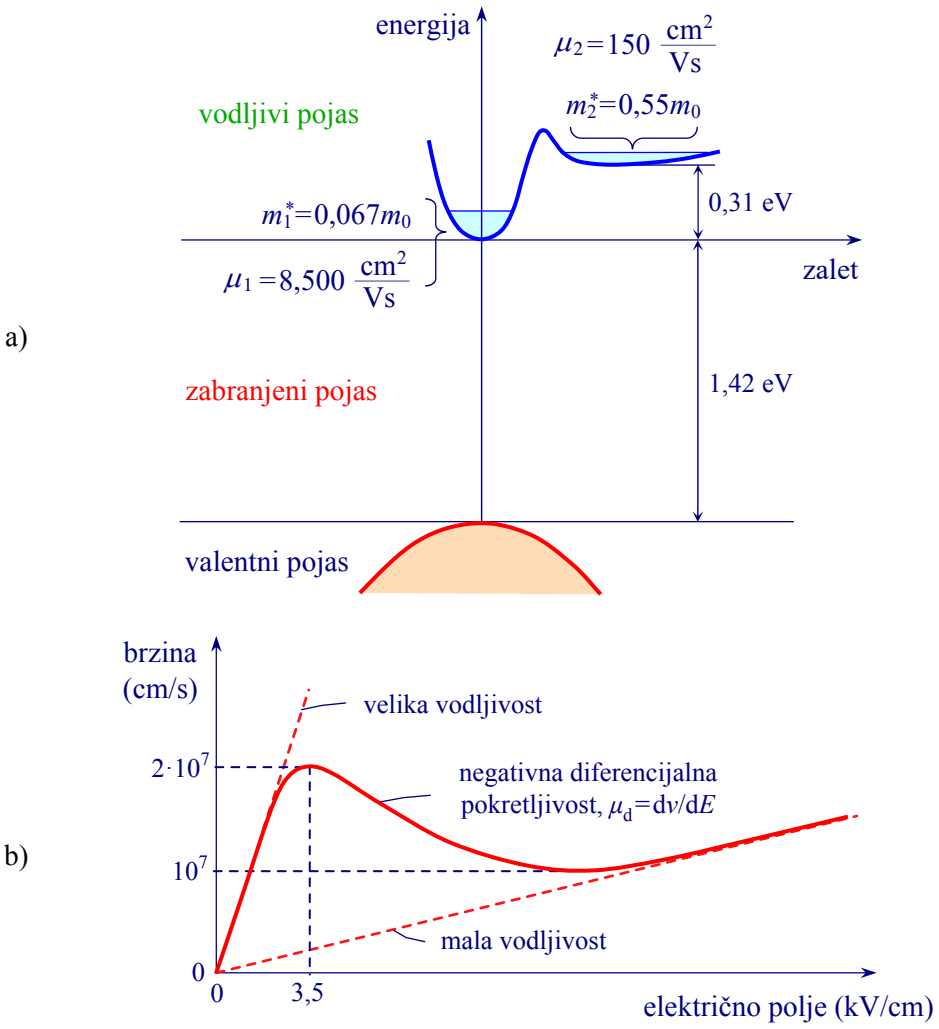


Slika 8.49. Struktura i profil električnog polja IMPATT diode: **a)** s jednim i **b)** s dva driftna područja

8.4.4. Gunnova dioda

Za razliku od učinka IMPATT diode, koji je moguće ostvariti u bilo kojem poluvodiču brižljivo odabranih profila primjesa, Gunnov je učinak proizvod mase samo stanovitih vrsta poluvodiča *n*-tipa [14]. To su kompoziti trovalentnih i peterovalentnih poluvodiča poput galij-arsenida (GaAs), indij-fosfida (InP), indij-arsenida (InAs) ili dvovalentnih i šesterovalentnih poluvodiča poput kadmij-telurida (CdTe). Ti su poluvodiči poznati pod nazivom *višedolinski poluvodiči* jer im vodljivi pojas sadrži dvije ili više energijskih razina koje elektroni mogu zauzeti ovisno o zaletu elektrona. Premda se gotovo svi komercijalni Gunnove komponente, tj. diode izrađuju se od GaAs ili InP, u posljednje vrijeme bolje radne karakteristike ostvaruju diode od galij-nitrida (GaN) i indij-nitrida (InN). Navedeni kompoziti kritični su za Gunnov učinak u materijalu *n*-tipa, kao što je prikazano na slici 8.50a). U nižem energijskom pojasu elektroni imaju malu efektivnu masu (m_1*) i veliku pokretljivost (μ_1), ali u višem energijskom pojasu efektivna im je masa (m_2*) znatno veća, a pokretljivost (μ_2) znatno manja. Premda nemaju klasičan *pn*-prijelaz, te se komponente nazivaju diodama.

Bez istosmjernoga prednapona svi se elektroni nalaze u nižem energijskom stanju i imaju veliku pokretljivost. Dovođenjem istosmjernog napona na pločicu poluvodiča *n*-tipa kinetička im energija poraste. No kad im se preko istosmjernog polja dovede veća energija od 0,36 eV, elektroni postupno prelaze u više energijsko stanje gubeći na pokretljivosti. Dođe li do promjene pokretljivosti iz μ_1 u μ_2, popraćene energijskim skokom ΔW i odgovarajućom promjenom efektivnih masa iz m_1* u m_2*, prosječna će se brzina elektrona početi opadati dalj-



Slika 8.50. a) Energijski dijagram i **b)** brzina elektrona u funkciji električnog polja poluvodiča GaAs

njim porastom električnog polja. To se može protumačiti nastankom *negativne diferencijalne pokretljivosti*: $\mathrm{d}v/\mathrm{d}E = -\mu_\mathrm{d}$. Na slici 8.50b) grafički je prikazana tipična ovisnost brzine elektrona o jakosti električnog polja u pločici galij-arsenida, u kojoj je uspostavljeno uniformno električno polje. Budući da je struja elektrona razmjerna njihovoj brzini, a napon razmjeran jakosti polja, u području vrijednosti električnog polja pri kojem se elektroni usporavaju pojavit će se negativna diferencijalna brzina, tj. »negativni otpor«. Jakost istosmjernog električnog polja pri kojem u GaAs nastaje maksimum negativnog otpora poprima vrijednost oko 10 kV/cm, što je približno jednako trostrukoj vrijednosti polja praga (3,5 kV/cm).

No negativna diferencijalna pokretljivost, u blizini negativne elektrode (katode), obično izaziva lokalno nagomilavanje naboja (elektrona) što ima za posljedicu izrazito nelinearnu strukturu električnog polja u materijalu. Tad se koncentracija elektrona povećava velikom brzinom pa u galij-arsenidu pri koncentraciji donora od $n = 10^{21}\ \mathrm{m}^{-3}$ vremenska konstanta porasta iznosi nepune 3 ps. Razdioba naboja obično je vrlo nestabilna pa i najmanja nakupina naboja spontano raste velikom brzinom i pretvara se u gust »oblak« negativnog naboja. No, zbog zakona očuvanja naboja, ispred tog elektronskog oblaka razvija se osiromašeni sloj u kojem je koncentracija naboja znatno manja od one u ravnotežnom stanju (slika 8.51a)). Rezultat je toga dipolna domena u kojoj električno polje ima trokutasti profil poput onoga na slici 8.51b). Taj jak i brz porast polja u dipolnoj domeni postupno poništava polje izvan domene. Time je onemogućeno nagomilavanje novih skupina elektrona dokle god je dipolna domena prisutna u materijalu. Kad jednom nastane, domena se počinje gibati stalnom, tj. zasićenom brzinom (oko 10^7 cm/s u GaAs). Dolaskom na anodu dipolna domena brzo iščezne i u tom času ponovo započinje nagli porast električnog polja na katodi te se opisani proces periodički ponavlja. Prilikom svakog dolaska na anodu, dipolna domena inducira strujni impuls u vanjskome krugu (slika 8.51c)). Perioda tog procesa jednaka je vremenu proleta domene $\tau = l/v_\mathrm{z}$ pa je se prirodna frekvencija tih strujnih impulsa može napisati kao

$$f_\mathrm{o} = \frac{v_\mathrm{z}}{l}, \tag{8–127}$$

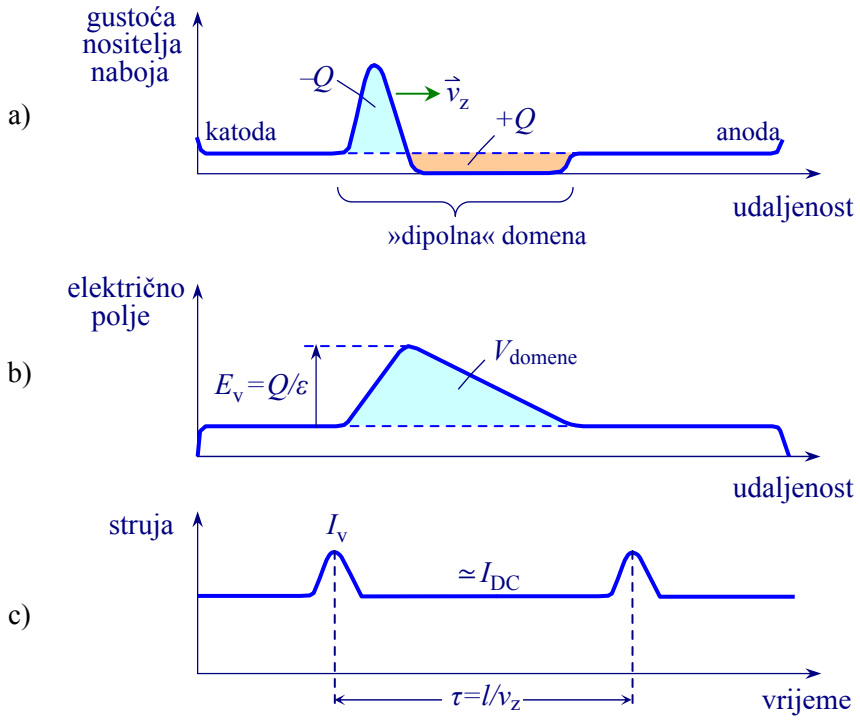
gdje je v_z zasićena brzina, a l duljina aktivnoga sloja.

Otuda su elektronička obilježja Gunnove diode frekvencijski ovisna pa se negativni otpor prisutan u frekvencijskom području užem od jedne oktave. Za razliku od IMPATT diode, za istu radnu frekvenciju, Gunnova dioda traži dvostruko dulje aktivno područje. Primjerice, za frekvenciju 10 GHz optimalna duljina Gunnove diode od GaAs iznosi 10 μm.

Da bi se postigla što veća učinkovitost Gunnova oscilatora, diodu je potrebno postaviti u rezonantni strujni krug (vidjeti odjeljak 8.9.1). Pri tomu će strujni impulsi pobuđivati rezonantni krug ispravnom fazom podržavajući mikrovalne oscilacije. No reaktivne komponente titrajnoga kruga izvan rezonantne frekvencije remete prirodni ritam titraja u Gannovoj diodi. Zbog toga oscilatori s Gunnovom diodom rade u nekoliko različitih modova ovisno o omjeru između prirodne frekvencije diode i rezonantne frekvencije titrajnoga kruga.

U slabo onečišćenim poluvodičima ne može se razviti domena s prostornim nabojem, ali je i dalje prisutan negativni otpor. Tomu odgovara znatno učinkovitiji *mod s ograničenim nagomilavanjem prostornog naboja* ili *LSA-mod* (prema engl. *Limited Space Accumulation*).

Učinkovitost Gunnovih oscilatora razmjerno je mala (ispod 10%) ovisno o modu u kojem radi. Napon napajanja oscilatora za frekvenciju 10 GHz nalazi se u rasponu od 9 do 12 V. Primjenom tipičnih komercijalnih dioda postižu se izlazne snage od 10 do 200 mW, uz pripadajuće struje napajanja između 50 i 600 mA. Učinkovitost tih oscilatora ne prelazi 3%. Za više frekvencije osciliranja treba odabrati diode s kraćim aktivnim područjem odnosno višom prirodnom frekvencijom. Zbog kraćeg aktivnog sloja, diode za više radne frekvencije traže niže napone napajanja. Prednost Gunnove diode u odnosu na IMPATT diodu je u tomu što radi s razmjerno niskim naponima napajanja kao većina drugih poluvodičkih komponenata.



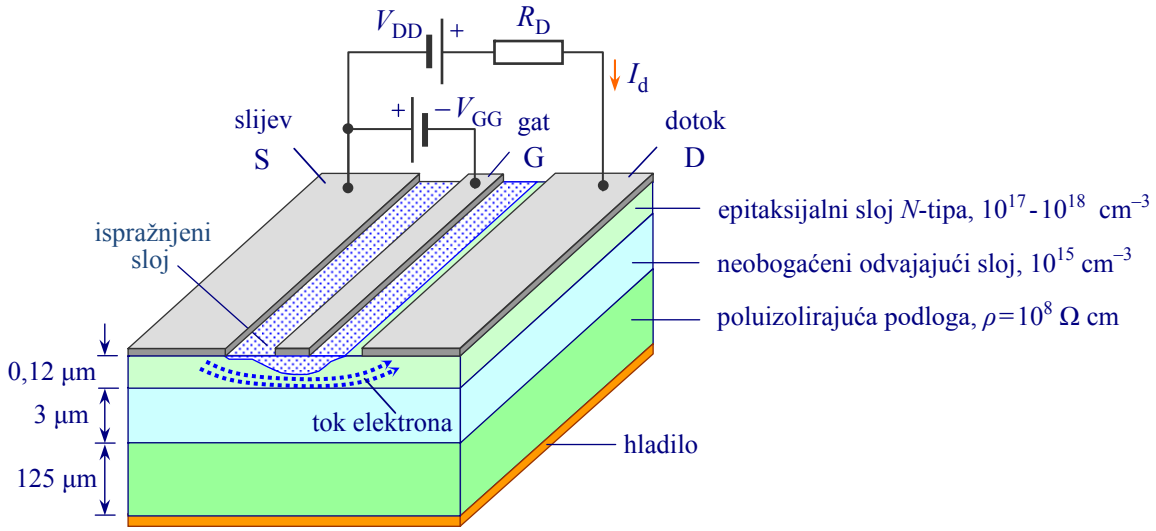
Slika 8.51. a) Gustoća prostornog naboja koja tvori »dipolnu« domenu. **b)** Razdioba električnog polja. **c)** Valni oblik struje u vanjskom krugu diode

8.4.5. Mikrovalni tranzistori

Unipolarni tranzistori

U sklopovima niskošumnih pojačala i u pojačalima snage, ali i u sklopovima oscilatora i miješala, u mikrovalnome frekvencijskom području nerijetko se rabi unipolarni tranzistor s učinkom polja i Schottkyjevom barijerom između gata i kanala [15], [18]. Skraćenica mu je MESFET prema engl. *MEtal-Semiconductor Field Effect Transistor*. Izvodi se postavljanjem metalnih elektroda na tanki epitaksijalni sloj galij-arsenida *n*-tipa, kao što je prikazano na slici 8.52. Struktura MESFET-a približno je jednaka strukturi spojnog FET-a. Jednako tako, slične su im ulazne i izlazne strujno-naponske karakteristike pa se može reći da im se rad zasniva na sličnom načelu. No ipak postoje izvjesne razlike koje se ogledaju u različitim dimenzijama elektroda, materijalu i nekim kvantitativnim parametrima. U kanalu MESFET-a izvedenog na podlozi od galij-arsenida (GaAs) elektroni postižu veliku zasićenu brzinu pri relativno malim jakostima električnog polja. Zato elektroni u većem dijelu kanala putuju zasićenom brzinom koja ne ovisi o jakosti električnog polja. To je razlog kratkom vremenu proleta ispod elektrode gata, koje omogućuje rad na vrlo visokim frekvencijama. Za dimenzije gata znatno manje od jedne četvrtine mikrometara zaporne se frekvencije MESFET-a nalaze iznad 100 GHz.

Za određivanje nadomjesnog sklopa obično se rabe raspršni parametri dobiveni mjerenjem u uvjetima pobude malim signalom. Takvi su nadomjesni sklopovi posebno korisni za modeliranje faktora šuma i za ekstrapolaciju raspršnih parametra izvan frekvencijskog područja unutar kojeg je provedeno mjerenje. Model MESFET-a prikazan na slici 8.53 osniva se na najčešće primjenjivanoj strukturi prikazanoj na slici 8.52. Ispod metalne elektrode gata nastaje Schottkyjeva barijera (kao kod Schottkyjeve diode). Otpori r_g, r_d i r_s označuju otpore neosiromašenog dijela kanala i kontakata. Kapaciteti C_{gs} i C_{gd} posljedica su kapaciteta ispražnjenog sloja između gata i slijeva, odnosno između gata i dotoka.



Slika 8.52. Idealizirana struktura MESFET-a izvedenog na podlozi od galij-arsenida (GaAs)

Zaporna frekvencija može se definirati kao frekvencija koja se izračunava pri jediničnom strujnom pojačanju i uz kratko spojen dotok. U pojednostavljenoj nadomjesnoj shemi u kojoj su zadržani samo značajni elementi, kapacitet C_{gs} i zavisni strujni izvor, strujno se pojačanje može izraziti kao

$$\frac{I_D}{I_G} = \frac{g_m V_{GS}}{j\omega C_{gs} V_{GS}}, \tag{8–128}$$

gdje je $V_{GS}=V_C$, a g_m prijenosna vodljivost ili *strmina*. Bez dubljeg ulaženja u fizikalni model MESFET-a, primjenom aproksimacije zasićene brzine, C_{gs} se može izraziti u ovisnosti o geometrijskim parametrima i g_m kao

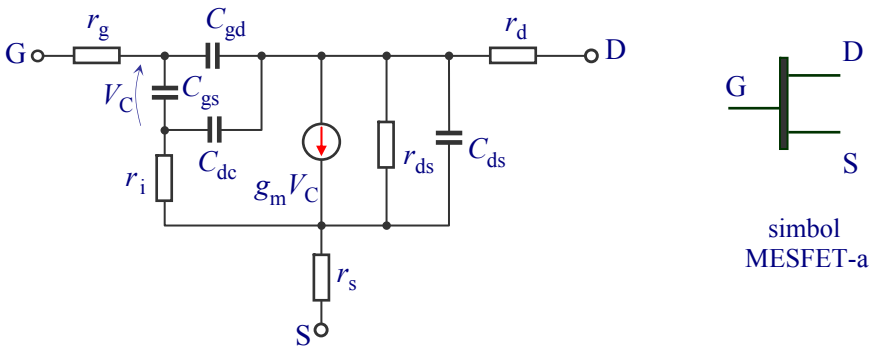
$$C_{gs} = \frac{\varepsilon w l}{b} = \frac{g_m l}{v_z}, \tag{8–129}$$

gdje su geometrijski parametri MESFET-a: w širina gata (poprečna dimenzija u odnosu na smjer struje u kanalu) i l duljina gata (uzdužna dimenzija). ε je permitivnost galij-arsenida, a v_z je zasićena brzina elektrona u kanalu. S pomoću tog izraza može se odrediti gornja zaporna frekvencija uz jedinično strujno pojačanje, kao

$$f_t = \frac{g_m}{2\pi C_{gs}} = \frac{v_z}{2\pi l} = \frac{1}{2\pi\tau}, \tag{8–130}$$

gdje je τ vrijeme proleta elektrona u kanalu MESFET-a. Za MESFET duljine gata l=0,25 µm i $v_z=1{,}34\cdot10^7$ cm/s zaporna frekvencija iznosi 85 GHz. Približno jednak rezultat dobiva se za vrijednosti g_m i C_{gs} u nadomjesnoj shemi na slici 8.53.

Za ispravan rad svakog pojačala ili bilo kojeg drugog sklopa, tranzistoru je potrebno postaviti odgovarajuću »statičku« radnu točku. Na slici 8.54 prikazana je ovisnost istosmjerne struje dotoka (I_D) o istosmjernom naponu dotok-slijev (V_{DS}) u funkciji istosmjernog napona gat-dotok (V_{GS}) tipičnog MESFET-a. Na slici su također prikazane četiri tipične radne točke koje odgovaraju posve određenoj ulozi tranzistora u sklopu. Za primjene u sklopovima pojačala klase A razmjerno velike izlazne snage i uz minimalna intermodulacijska izobličenja treba odabrati radnu točku T_1 koja omogućuje maksimalni hod napona i struje u linearnom području rada. Radna točka T_2 uz minimalnu struju I_D i visok napon V_{DS} daje dobre rezultate u



Tipčne vrijednosti nadomjesnih elemenata i parametri radne točke:

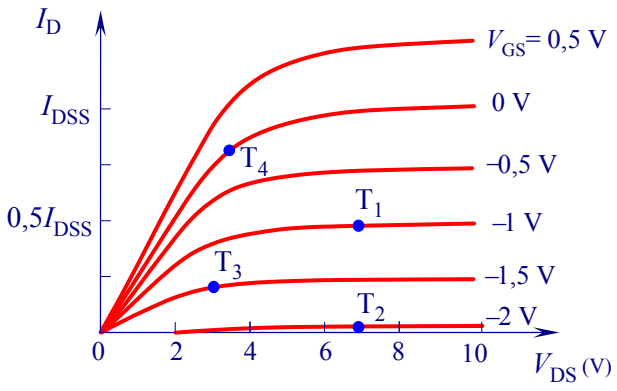
$r_g = 3\ \Omega$	$r_{ds} = 400\ \Omega$	$r_d = 3\ \Omega$	$r_i = 2{,}6\ \Omega$	$r_s = 2\ \Omega$
$C_{gs} = 0{,}62$ pF	$C_{ds} = 0{,}12$ pF	$C_{gd} = 0{,}014$ pF	$C_{dc} = 0{,}02$ pF	
$V_{GS} = 0$ V	$V_{DS} = 5$ V	$I_D = 70$ mA	$g_m = 53$ mS	$\tau_0 = 5$ ps

Slika 8.53. Nadomjesna shema za mali signal i simbol MESFET-a

sklopovima pojačala snage klase AB i B. Minimalni faktor šuma može se postići uz radnu točku T_3 pri razmjerno niskom naponu V_{DS} i struji I_D koja ne prelazi jednu šestinu struje I_{DSS} (zasićene struje dotoka pri nultom naponu V_{GS}). Za sklopove pojačala srednjeg pojačanja s niskim naponom napajanja obično se rabi radna točka T_4.

U višem mikrovalnome području nerijetko se rabi poboljšana izvedba MESFET-a poznata pod nazivom HEMT (prema engl. *High Electron Mobility Transistor*). To je heterospojni unipolarni tranzistor s vrlo pokretljivim elektronima koji se gibaju uskim kanalom ostvarenim umetanjem tankog sloja GaAs obogaćenog aluminijem između slabo dopirane podloge i epitaksijalnog sloja. Maksimalne frekvencije osciliranja HEMT-a nalaze u milimetarskome valnom području. Budući da ekstremno uzak kanal smanjuje jedan stupanj slobode nasumičnom gibanju elektrona, HEMT upućuje na manji faktor šuma u odnosu na MESFET.

U jednostupanjskom pojačalu s GaAs MESFET-om moguće je ostvariti pojačanje snage u rasponu od 8 do 15 dB na 2 GHz uz faktor šuma manji od 1 dB. S HEMT-om se postižu pojačanja snage veća od 15 dB na 8 GHz i 6 dB na 50 GHz uz pripadajuće razine faktora šuma od 0,4 i 1,8 dB. U frekvencijskom području oko 10 GHz, snažni MESFET i HEMT mogu proizvesti izlazne snage od nekoliko vata. Heterospojni tranzistori od galij-nitrida (GaN) dobra su zamjena za GaAs MESFET i MOSFET snage u nižem mikrovalnom području zbog velike gustoće snage koju mogu obraditi i rad uz razmjerno visok napon napajanja.



Slika 8.54. Izlazna strujno-naponska karakteristika tipičnog MESFET-a i različite radne točke

Bipolarni tranzistor

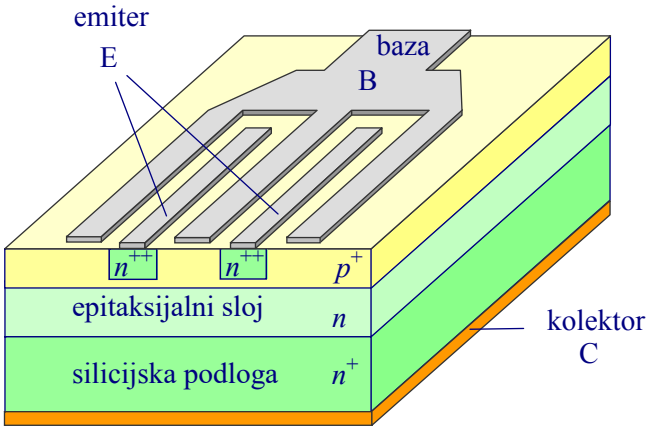
Na nižim mikrovalnim frekvencijama (ispod 10 GHz) nerijetko se rabe bipolarni tranzistori koji su obično izrađeni od silicija u *npn*-konfiguraciji. Osnovno načelo rada jednako je onom u niskofrekvencijskih tranzistora. U pojačalima zajedničkog emitera ulazni se signal dovodi na bazu tranzistora. Na kolektor se priključuje odgovarajuća impedancija tereta. U odnosu na niskofrekvencijski tranzistor, mikrovalni tranzistor ima znatno složeniji nadomjesni sklop zbog parazitskih elementa samog čipa te kućišta, otpora i induktiviteta izvoda. Osim toga, nerijetko je prisutna i jaka povratna veza između kolektora i baze tako da bipolarni tranzistor postaje potencijalno nestabilan, tj. sklon oscilacijama, bez obzira na to jesu li ili ne ulazni i izlazni krugovi proračunati tako da se spriječi pojava oscilacija.

Osnovna struktura bipolarnog tranzistora sastoji se od interdigitalne konstrukcije spoja emiter-baza, kao što je prikazano na slici 8.55a). Vrlo uski emiter smanjuje kapacitet spoja baza-emiter, $C_{b'e}$, a relativno mali razmak između baze i kolektora smanjuje vrijeme proleta. Da bi se povećala struja kolektora, a time izlazna snaga, valja uporabiti više emiterskih prstiju u paraleli.

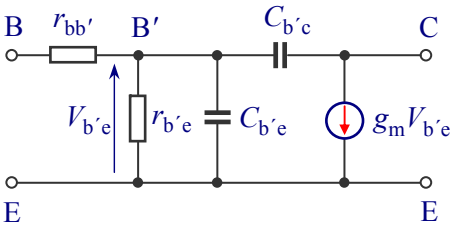
S pomoću pojednostavljene nadomjesne sheme bipolarnog tranzistora na slici 8.56 može se približno odrediti zaporna frekvencija za jedinično strujno pojačanje i kratko spojen kolektor. Rezultat je sličan onom za unipolarne tranzistore, tj.

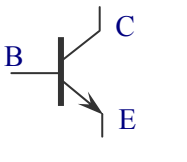
$$f_t = \frac{g_m}{2\pi C_{b'e}}. \qquad (8\text{–}131)$$

a)



b)





simbol
npn- tranzistora

Vrijednosti nadomjesnih elemenata tranzistora AT-41400 i parametri radne točke:

$r_{b'b}$=6,8 Ω	$r_{b'e}$=110 Ω	$C_{b'e}$=18 pF	$C_{b'c}$=0,16 pF
g_m=0,88 S	τ_{ec}=16,4 ps	V_{CE} = 8 V	I_C=25 mA

Slika 8.55. a) Idealizirana struktura bipolarnog tranzistora i **b)** pojednostavljena nadomjesna shema

Maksimalna frekvencija osciliranja može se odrediti s pomoću približnog izraza

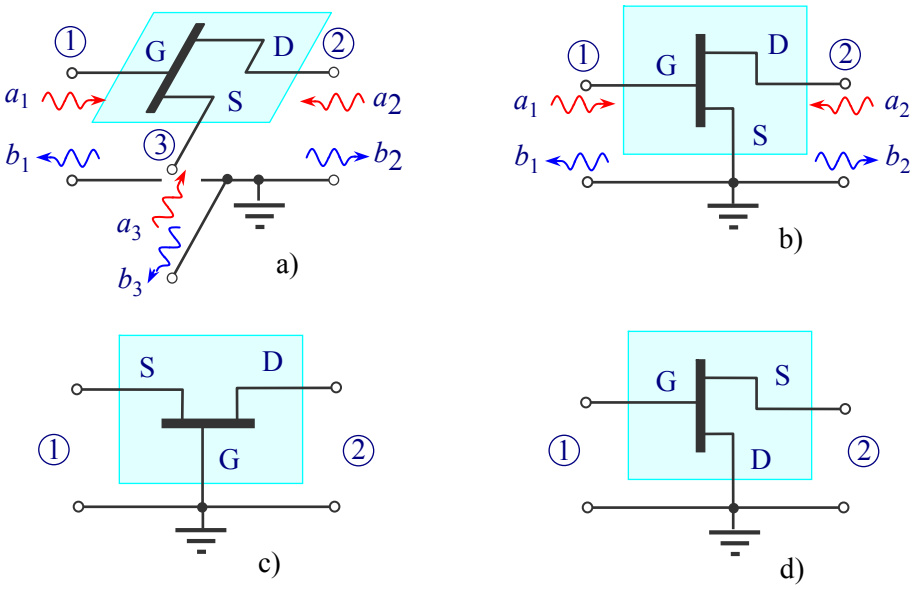
$$f_{\text{maks}} = \sqrt{\frac{f_t}{8\pi r_{bb'} C_{b'c}}} . \qquad (8\text{–}132)$$

Za tranzistor s nadomjesnom shemom na slici 8.55b), zaporna frekvencija iznosi oko 7,8 GHz, a maksimalna frekvencija osciliranja iznosi 15,9 GHz. U frekvencijskom području ispod 5 GHz daje se prednost uporabi silicijevih bipolarnih tranzistora pred GaAs MESFET-om, osim u izvedbama pojačala s ekstremno niskom razinom faktora šuma. Pojačanje bipolarnog tranzistora inherentno je veće od pojačanja unipolarnih tranzistora zbog znatno veće prijenosne vodljivosti ili strmine g_m. Bipolarni su tranzistori pogodni za primjene u oscilatorima i pojačalima snage. Na frekvencijama oko 2 GHz mogu ostvariti pojačanja od 15 do 20 dB uz faktor šuma oko 2 dB. Na 10 GHz pojačanje snage ne prelazi 7 dB pa je bolje rješenje uporaba GaAs MESFET-a. Unapređenjem tehnologije heterospojeva znatno su poboljšana visokofrekvencijska obilježja bipolarnih tranzistora. Heterospojni bipolarni tranzistori (engl. *Heterojunction Bipolar Transistor*; HBT) pokazuju vrlo mali otpor baze, veliko strujno pojačanje i porast zaporne frekvencije za 2 do 3 puta. Ostvareni HBT sa spojem na osnovi SiGe i InP pokazuju maksimalnu frekvenciju osciliranja iznad 500 GHz, s mogućnošću uporabe u milimetarskome i submilimetarskome valnom području.

Mjerenje raspršnih parametara mikrovalnih tranzistora

Za analizu mikrovalnih tranzistorskih pojačala uobičajeno je primijeniti postupak s raspršnim parametrima malog signala. Pritom se tranzistor može prikazati kao troprolazni sklop ili kao dvoprolazni sklop s jednom zajedničkom elektrodom. Druga se konfiguracija češće nalazi u praksi jer je mjerenje raspršnih parametara tranzistora znatno jednostavnije u dvoprolaznom sklopu.

Pri razmatranju pojačala tranzistor se nerijetko nalazi u spoju sa zajedničkom elektrodom. Kod primjene unipolarnih tranzistora to je obično slijev, a kod bipolarnih tranzistora to je emiter. Stoga se za sve mikrovalne tranzistore nerijetko mjere parametri u spoju zajedničkog slijeva odnosno emitera. Naime, može se pokazati da su pojačanje snage i stabilnost tranzistora najveći upravo u tom spoju. No prilikom razmatranja oscilatora i pojačala sa serijskom povratnom vezom tranzistor je prikladno prikazati kao troprolazni sklop s »plivajućim« elek-



Slika 8.56. Osnovni načini spajanja tranzistora: **a)** kao troprolazni sklop u plivajućem spoju te kao dvoprolazni sklop u spoju zajedničkog: **b)** slijeva, **c)** gata i **d)** dotoka

trodama u odnosu na masu (uzemljenje), kao što je prikazano na slici 8.56a). Osim toga, parametri troprolaznog sklopa mogu se jednostavno pretvoriti u parametre dvoprolaznog sklopa s bilo kojom zajedničkom elektrodom tako da se odabrana zajednička elektroda kratko spoji na masu. Ako se primjerice prolaz 3 na slici 8.56a) kratko spoji, onda se dobiva sklop u spoju zajedničkog slijeva kao na slici 8.56b). Budući da se prikaz s troprolaznim parametrima može lako izvesti iz dvoprolaznih parametara za bilo koju zajedničku elektrodu, dvoprolazni sklop s jednom zajedničkom elektrodom može se pretvoriti u bilo koji od preostala dva.

Pogledajmo neke značajke troprolaznih parametara tranzistora. Odabran je unipolarni tranzistor, ali isto vrijedi i za bipolarni tranzistor. Radi jednostavnosti, prolaz s gatom označen je kao prolaz 1, onaj s dotokom kao prolaz 2, a onaj sa slijevom kao prolaz 3. No jednako se tako može odabrati i drugi redoslijed oznaka prolaza. Da ne bi došlo do zabune s raspršnim parametrima u dvoprolaznom prikazu s jednom zajedničkom elektrodom, raspršne parametre u troprolaznom prikazu označit ćemo tildom ($\tilde{S}_{ij}$ za $i, j = 1, 2, 3$). Tako se za sklop na slici 8.56a) može napisati matrična jednadžba

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{13} \\ \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} & \tilde{S}_{23} \\ \tilde{S}_{31} & \tilde{S}_{32} & \tilde{S}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}. \tag{8–133}$$

Ako se jedna od elektroda kratko spoji na masu, onda se izravno dobivaju dvoprolazni parametri za tu elektrodu koja onda postaje *zajednička* za ulazni i izlani krug. Primjerice, kad se kratko spoji slijev u trećem prolazu ($V_3 = 0$), tad je $b_3 = -a_3$ jer je koeficijent refleksije »tereta« (kratkoga spoja) u trećem prolazu jednak $\Gamma_3 = -1$. Lako se može pokazati da se raspršna matrica, tako dobivenog dvoprolaznog sklopa sa zajedničkom elektrodom u trećem prolazu, svodi na

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} - \dfrac{\tilde{S}_{13}\tilde{S}_{31}}{1+\tilde{S}_{33}} & \tilde{S}_{12} - \dfrac{\tilde{S}_{13}\tilde{S}_{32}}{1+\tilde{S}_{33}} \\ \tilde{S}_{21} - \dfrac{\tilde{S}_{23}\tilde{S}_{31}}{1+\tilde{S}_{33}} & \tilde{S}_{22} + \dfrac{\tilde{S}_{23}\tilde{S}_{32}}{1+\tilde{S}_{33}} \end{bmatrix}. \tag{8–134}$$

Isti se rezultat može dobiti izravnim uvrštenjem $\Gamma_3 = -1$ u izraz (5–214) koji je izveden u odjeljku 5.8.2. Slični se izrazi mogu izvesti i za ostale dvije zajedničke elektrode.

Valja naglasiti da raspršna matrica u jednadžbi (8–133) ima neka posebna svojstva jer svi parametri nisu međusobno nezavisni. Budući da iz Kirchhoffova zakona izlazi da zbroj svih struja koje ulaze u troprolazni sklop mora biti jednak nuli, primjenom jednadžbe (8–133) dobiva se

$$\sum_{i=1}^{3} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{3} \left(a_i - \sum_{j=1}^{3} \tilde{S}_{ij} a_j \right) = 0 \qquad \text{za } j = 1, 2, 3$$

jer su članovi $(a_i - b_i)$ razmjerni struji u prolazu I_i. Pritom amplitude upadnih valova snage valja odabrati nezavisno. Ako se uvrsti $a_2 = a_3 = 0$, onda izravno izlazi

$$a_1 - \sum_{i=1}^{3} \tilde{S}_{i1} a_1 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \sum_{i=1}^{3} \tilde{S}_{i1} = 1\,,$$

što pokazuje da zbroj raspršnih parametara u stupcu 1 mora biti jednak jedinici. Ako se upadni valovi snage postave na nulu i za druge dvije kombinacije, onda se općenito dobiva uvjet

$$\sum_{i=1}^{3} \tilde{S}_{ij} = 1 \qquad \text{za } j = 1, 2, 3. \tag{8–135a}$$

Taj uvjet kaže da zbroj raspršnih parametara u svakom stupcu mora dati jedinicu.

Uz pretpostavku da su naponi na svim prolazima međusobno jednaki, struje su u svim prolazima nula. Otuda izlazi da je $a_i=b_i$ kad je $a_1=a_2=a_3=a$, i $b_1=b_2=b_3=b$ pa se dobiva

$$b_i = \sum_{j=1}^{3} \widetilde{S}_{ij} a_j = \sum_{j=1}^{3} \widetilde{S}_{ij} a = a ,$$

iz čega izlazi drugi bitan uvjet

$$\sum_{j=1}^{3} \widetilde{S}_{ij} = 1 \qquad i=1,2,3. \tag{8–135b}$$

Dakle, zbroj raspršnih parametara u svakom retku mora također dati jedinicu.

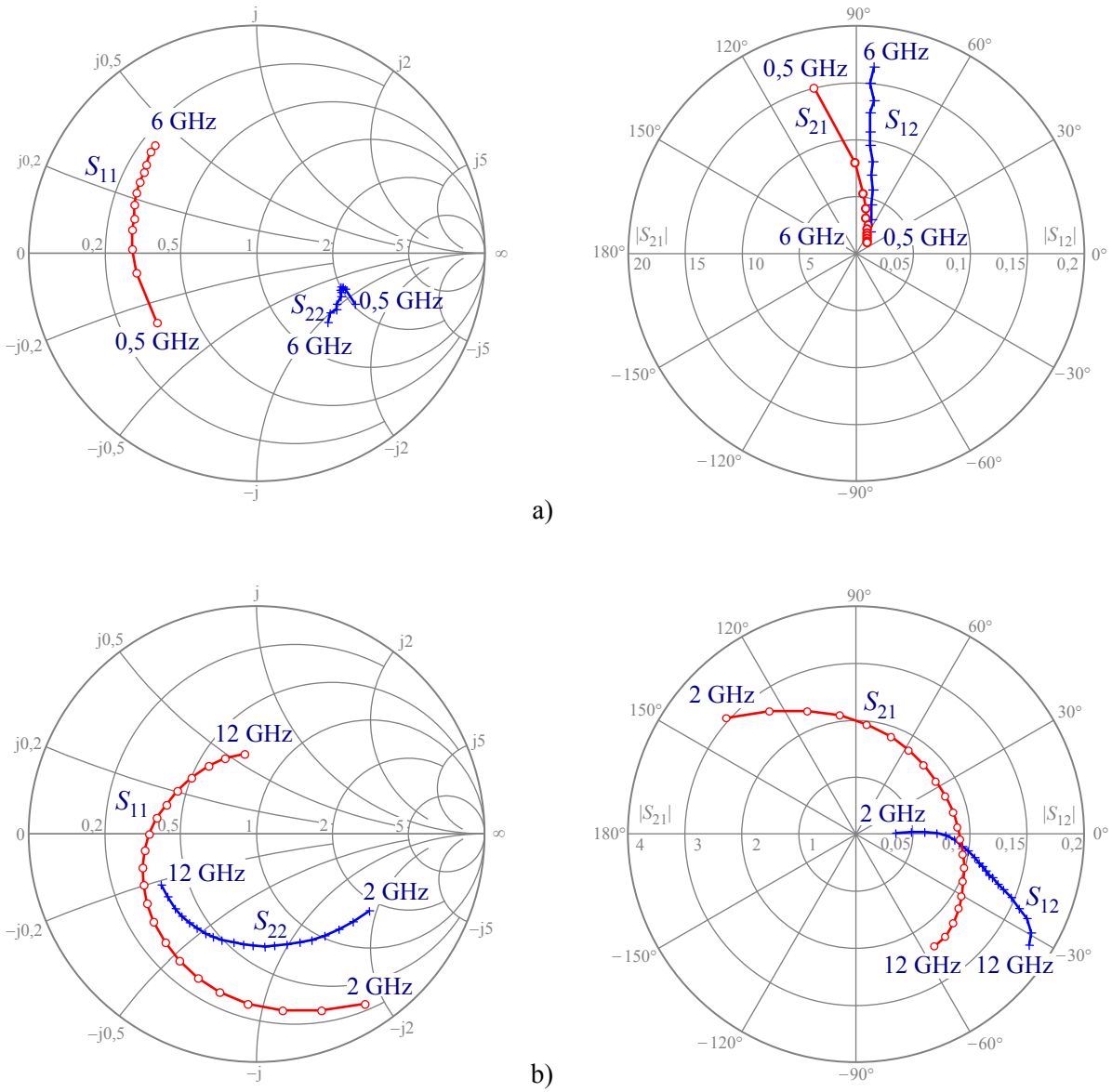
Postavljanjem uvjeta (8–135) na troprolazni sklop tranzistora dobivaju se potrebne veze između raspršnih parametara za troprolazni i dvoprolazni prikaza tranzistora:

$$\begin{aligned}
&\tilde{S}_{33} = \frac{S_{11}+S_{12}+S_{21}+S_{22}}{4-(S_{11}+S_{12}+S_{21}+S_{22})}, \quad \tilde{S}_{22} = S_{22} + \frac{\tilde{S}_{23}\tilde{S}_{32}}{1+\tilde{S}_{33}}, \\
&\tilde{S}_{32} = \frac{1+\tilde{S}_{33}}{2}(1-S_{12}-S_{22}), \qquad \tilde{S}_{23} = \frac{1+\tilde{S}_{33}}{2}(1-S_{21}-S_{22}), \\
&\tilde{S}_{31} = 1-\tilde{S}_{32}-\tilde{S}_{33}, \quad \tilde{S}_{13} = 1-\tilde{S}_{23}-\tilde{S}_{33}, \quad \tilde{S}_{21} = 1-\tilde{S}_{23}-\tilde{S}_{22}, \\
&\tilde{S}_{12} = 1-\tilde{S}_{32}-\tilde{S}_{22}, \quad \tilde{S}_{11} = 1-\tilde{S}_{21}-\tilde{S}_{31}.
\end{aligned} \tag{8–136}$$

Raspršni se parametri tranzistora mogu izmjeriti vektorskim analizatorom mreža, vektorskim voltmetrom ili višeprolaznim reflektometrom. O načelu rada analizatora mreža može se naći u odjeljku 9.4.3. Prilikom mjerenja tranzistor se obično smješta u dvoprolazni ispitni sklop tako da mu se jedna od elektroda spaja na masu pa postaje zajednička za ulazni i izlazni krug. Čipovi tranzistora mogu se smjestiti u odgovarajuća kućišta koja štite čip od nepoželjnih utjecaja atmosfere i svjetlosti. No metalni izvodi elektroda nerijetko unose dodatne induktivne i kapacitivne učinke što rezultira u dodatnim faznim pomacima te transformaciji impedancije. U mikrovalnome području, svi raspršni parametri tranzistora ovise o frekvenciji.

Na slici 8.57 grafički su prikazani raspršni parametri tipičnog bipolarnog tranzistora unutar frekvencijskog područja od 500 MHz do 6 GHz i MESFET-a unutar frekvencijskog područja od 2 do 12 GHz. Raspršni parametri S_{11} i S_{22}, obično se prikazuju u Smithovu dijagramu jer su povezani s ulaznom, odnosno izlaznom impedancijom. Parametar S_{21} povezan je s prijenosnim pojačanjem snage preko kvadrata njegovog modula, dok je parametar S_{12} povezan s prijenosom snage u obratnom smjeru, s izlaza na ulaz, pa njegova veličina upućuje na jačinu povratne veze. Valja primijetiti da lokus parametara S_{11} dobro prati kružnicu konstantnog realnog dijela impedancije, što znači da se strujni krug baze bipolarnog tranzistora može nadomjestiti serijskim spojem *R-L-C* elemenata. Slično se ponaša i krug gata MESFET-a u nižem frekvencijskom području. Modul parametra S_{21} opada porastom frekvencije kod obje vrste tranzistora s približno 6 dB po oktavi, dok je s parametrom S_{12} upravo suprotno. Također je indikativno da je modul parametra S_{21} MESFET-a manjeg iznosa od onog kod bipolarnog tranzistora jer MESFET upućuje na znatno manje vrijednosti prijenosne vodljivosti, kao što se može vidjeti u nadomjesnim shemama na slikama 8.53 i 8.55b).

Kod većine tranzistora, modul umnoška parametara S_{12} i S_{21} gotovo da i ne ovisi o frekvenciji. U odjeljku 8.8.2. pokazano je da taj faktor snažno djeluje na stabilnost tranzistora i jačinu unutarnje povratne veze. Drugim riječima, pri projektiranju pojačala valja odabrati tranzistor sa što manjim modulima parametra S_{11}, S_{22} i S_{12}, što će jamčiti veću stabilnost pojačala i manji utjecaj impedancije tereta na ulaznu impedanciju pojačala te manji utjecaj impedancije generatora na izlaznu impedanciju pojačala. Na slici 8.58 prikazani su moduli prijenosnih parametara i njihovog umnoška u funkciji frekvencije za tipični bipolarni tranzistor.

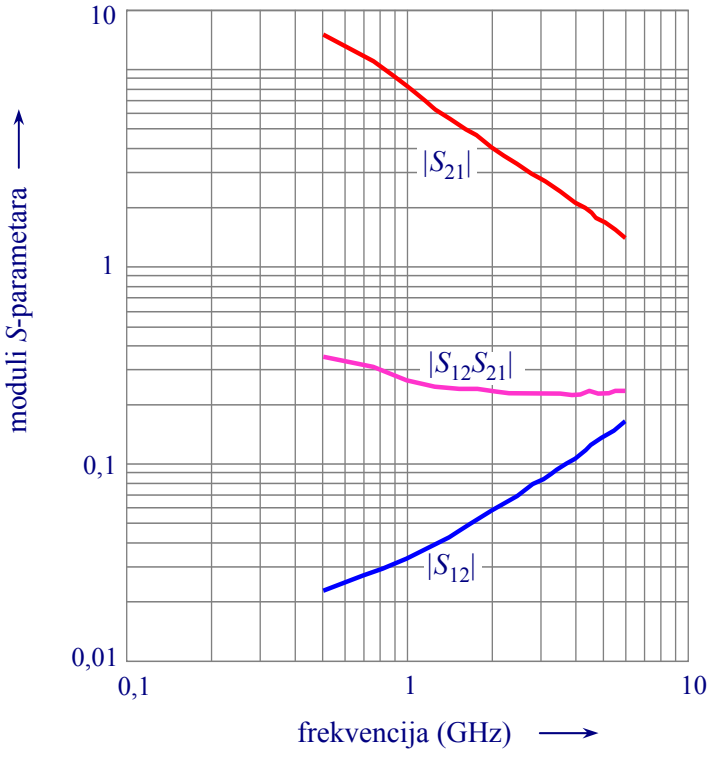


Slika 8.57. a) *S*-parametri bipolarnog tranzistora AT-41400 u spoju zajedničkog emitera u frekvencijskom području od 0,5 do 6 GHz. **b)** *S*-parametri MESFET-a NE72089 u spoju zajedničkog slijeva u frekvencijskom području od 2 do 12 GHz. Parametri su izmjereni u sustavu 50 Ω

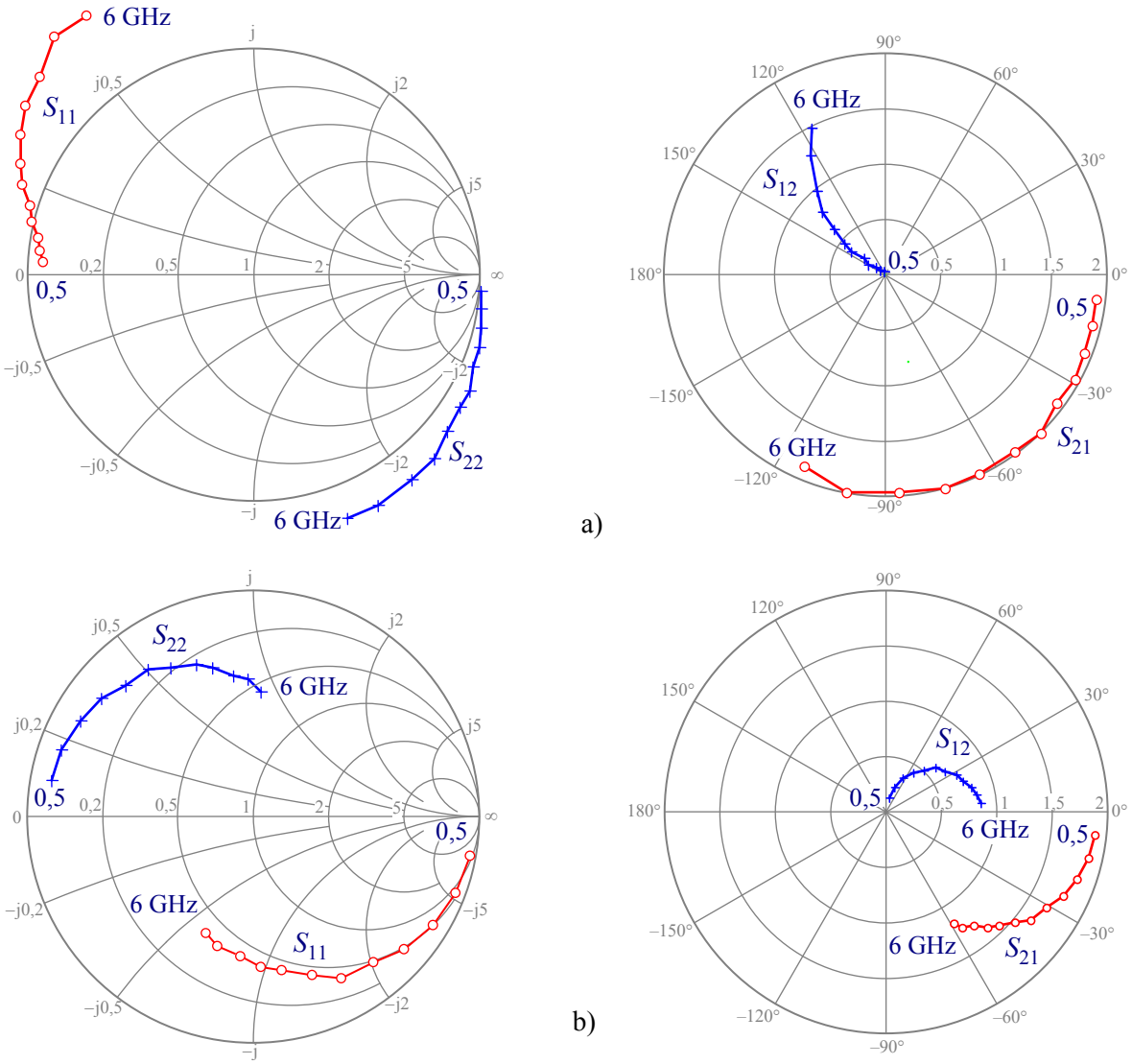
Primjenom izraza (8–133) - (8–136), raspršni parametri tranzistora koji su izračunani ili izmjereni u spoju jedne zajedničke elektrode mogu se lako pretvoriti u parametre za druge dvije zajedničke elektrode. Na slici 8.59 prikazani su *S*-parametri bipolarnog tranzistora (model AT-41400) u spoju zajedničke baze i zajedničkog kolektora u frekvencijskom području od 0,5 do 6 GHz. Usporedba s parametrima za spoj zajedničkog emitera (slika 8.57a)) pokazuje da parametri S_{11} i S_{22} u spoju zajedničke baze i zajedničkog kolektora leže blizu ruba ili preko ruba Smithova dijagrama što upućuje na nestabilnost tranzistora u tim spojevima. O nestabilnosti tranzistora može se više naći u odjeljci 8.8. i 8.9. Na niskim frekvencijama, ulazna impedancija tranzistora u spoju zajedničke baze vrlo je niska, a izlazna impedancija vrlo visoka, što se može vidjeti iz položaja parametara S_{11} i S_{22} u Smithovu dijagramu. No na višim frekvencijama, lokusi obaju parametra nalaze u području s negativnim otporom (izvan Smithova dijagrama) što pokazuje da su tranzistori u tom spoju izrazito nestabilni. U spoju

zajedničkog kolektora lokusi S_{11} i S_{22} pokazuju suprotna obilježja (visoka ulazna impedancija, a niska izlazna impedancija). U oba su spoja parametri $|S_{21}|$ približno konstantni u širokom frekvencijskom području, a vrijednosti parametra $|S_{12}|$ znatno su veće od onih za spoj zajedničkog emitera također upućuje na potencijalno nestabilan tranzistor. Stoga se tranzistori u spoju zajedničke baze i kolektora obično ne preporučuju za izvedbe sklopove pojačala, ali su zato pogodni za izvedbe sklopova oscilatora (odjeljak 8.9.2) jer ih nije potrebno destabilizirati. Slične karakterisike ima i MESFET.

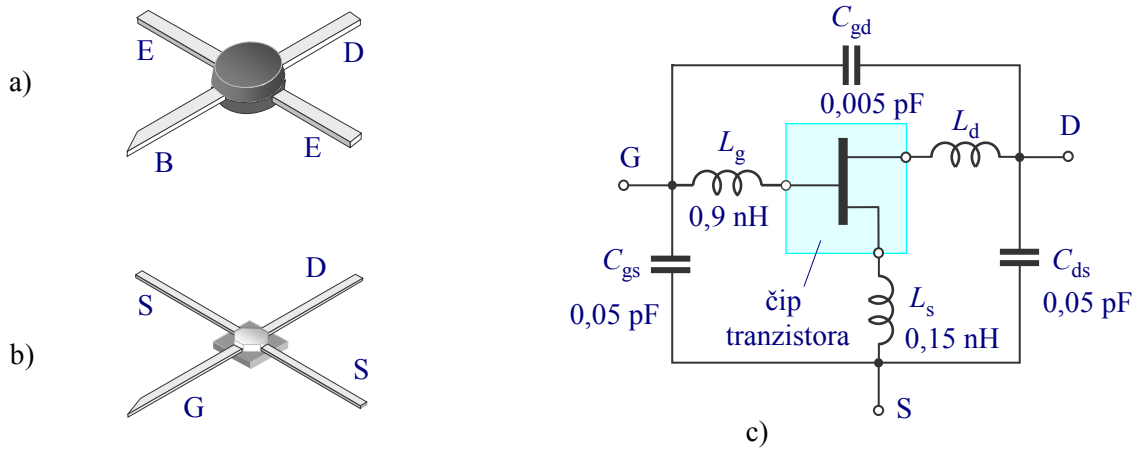
Na slici 8.60a) i b) prikazana su tipična kućišta mikrovalnih tranzistora i jednostavnih integriranih sklopova. Promjeri kućišta obično se nalaze u rasponu od 1 do 2 mm. Izvodi su izrađeni od tankih pozlaćenih bakrenih traka i prilagođeni mikrotrakastim izvedbama sklopova pojačala, oscilatora, miješala i sl. Trakasti izvodi obično imaju ulogu hladila za odvođenje toplinske energije koja se u čipu stvara zbog didipacije snage dobivene iz istosmjernog napajanja i RF ulazne snage. Kućišta su obično prilagođena uporabi tranzistora u spoju zajedničkog emitera ili slijeva pa su za te elektrode predviđena po dva izvoda. Na slici 8.60 c) također je prikazana nadomjesna shema s tipičnim vrijednostima parazitskih induktiviteta i kapaciteta kućišta. Ti elementi stvaraju dodatne fazne pomake transformirajući vrijednosti raspršnih parametra i snižavaju zapornu frekvenciju tranzistora jer se ponašaju kao niskopropusni filtri. Osim opisanih, u praksi se nalazi čitav niz specijaliziranih kućišta. Tako se, primjerice, u nižem frekvencijskom području nerijetko nalaze kućišta namijenjena izvedbama u SMD-tehnologiji, a za tranzistore velike izlazne RF snage obično se izrađuju kućišta na posebno izvedenim hladilima. Ta su hladila oblika četvrtastih pločica ili vijaka, a izrađena su od metala velike toplinske vodljivosti poput bakra. Za ekstremno velike snage kao hladila se rabe podloge od dijamanta koji je bolji toplinski vodič od bakra. Za razliku od bakra i srebra kod kojih se toplina prenosi konvekcijski putem slobodnih elektrona, u dijamantu (savršenom izolatoru) toplina se prenosi toplinskim fononima, tj. kvantima titranja u kristalu na danoj temperaturi.



Slika 8.58. Grafički prikaz modula raspršnih parametara bipolarnog tranzistora AT-41400



Slika 8.59. Grafički prikaz raspršnih parametara bipolarnog tranzistora AT-41400 u spoju: **a)** zajedničke baze i **b)** zajedničkog kolektora. Parametri su izmjereni u sustavu 50Ω

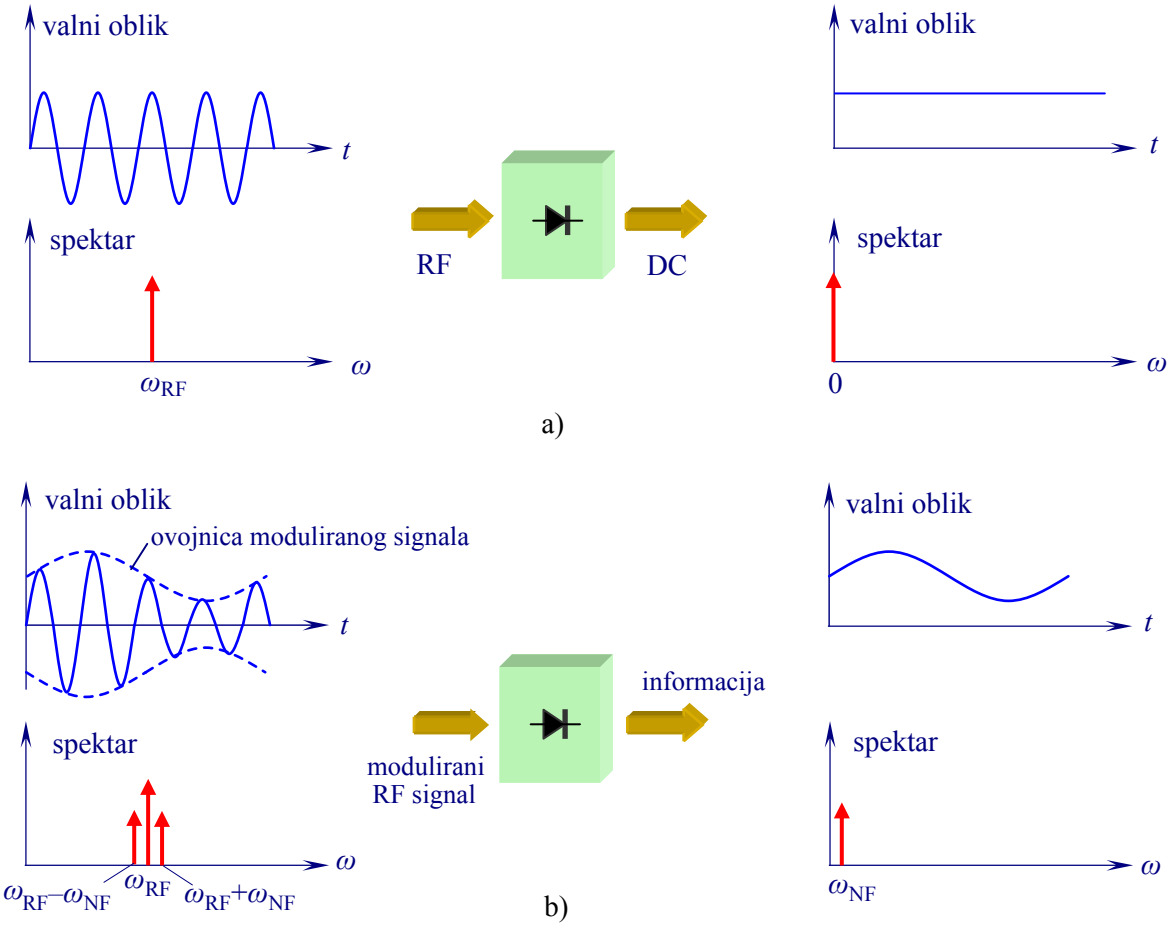


Slika 8.60. a) Plastično kućište komercijalnih tranzistora, **b)** keramičko kućište. **c)** Nadomjesna shema kućišta MESFET-a ili HEMT-a. Slična nadomjesna shema odgovara bipolarnom tranzistoru, uz zamjenu oznaka izvoda: G s B, D sa C i S s E

8.5. Detektori

Detektor je naprava koja pretvara mikrovalni signal u istosmjerni napon ili demodulira amplitudno modulirani (AM) mikrovalni signal, tj. izdvaja korisnu informaciju niske frekvencije iz moduliranog signala. U tu svrhu rabi se nelinearni otpor *pn*-diode i spoj metal-poluvodič [12], [1]. Učinkovitost detektora s *pn*-slojnom diodom vrlo je mala zbog velikog difuzijskog kapaciteta spoja. No za ispravljanje mikrovalnih signala redovito se rabe Schottkyjeve diode (odjeljak 8.4.1). Učinkovitost detektora smanjuje šum spektralne karakteristike $1/f$ (*šum treperenja*, engl. *flicker noise*), koji prevladava u niskom frekvencijskom području blizu nulte frekvencije. No osjetljivost se detektora može povećati uporabom heterodinske tehnike, tj. translacijom (ili *transpozicijom*) spektra moduliranog signala s pomoću miješala (odjeljak 8.6). Detektor se obično primjenjuje kao senzor mikrovalne snage u sklopovima za kontrolu ili automatsku regulaciju izlazne snage generatora te u različitim mjernim uređajima (odjeljci 9.4.3. i 9.4.5). Osim toga, nezaobilazna je komponenta mjernih uređaja, poput reflektometara, analizatora mreža sa šesteroprolaznim hibridom, apsorpcijskih valomjera i sl. Primjene detektora protežu se duboko u submilimetarsko valno područje. Na slici 8.61 prikazane su osnovne funkcije detektora kao ispravljača i demodulatora mikrovalnih signala.

Kao senzor RF snage, u detektorima mikrovalnih signala obično se rabi Schottkyjeva dioda, tj. spoj metal-poluvodič zbog malog kapaciteta spoja. U odjeljku 8.4.1. vidjeli smo da se dioda može modelirati kao nelinearni otpor (varistor). Njezina se strujno-naponska karakteristika može izraziti kao



Slika 8.61. a) Ispravljanje RF signala ili pretvorba izmjeničnog signala u istosmjerni napon. **b)** Demodulacija amplitudno moduliranog signala ili izdvajanje informacije iz moduliranog signala

$$I(V) = I_s\left(e^{\alpha V} - 1\right), \tag{8–137}$$

gdje je I_s reverzna zasićena struja spoja (u području pA ili nA), a veličina $\alpha = 40\ \mathrm{V}^{-1}$ na temperaturi oko 290 K. Za male RF signale, dinamička je vodljivost diode (recipročna vrijednost dinamičkog otpor) jednaka prvoj derivaciji struje po naponu u određenoj radnoj točki.

Schottkyjeva dioda ima i nelinearni kapacitet spoja (8–117) koji je paralelno spojen s nelinearnim otporom, slika 8.40b). Na nižim frekvencijama taj se kapacitet može zanemariti. No postoji i serijski spojen otpor supstrata koji stvara gubitke. Za diode ugrađene u kućište valja uzeti u obzir i parazitske reaktancije koje snizuju graničnu frekvenciju detektora.

Napon diode općenito se može prikazati kao superpozicija istosmjernog napona V_0 i malog izmjeničnog (RF) napona $v(t)$,

$$V = V_0 + v\,. \tag{8–138}$$

Uvrštenjem tog izraza u jednadžbu (8–137) i njezinim razvojem u Taylorov red oko V_0 izlazi

$$I(V) = I_0 + v\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}V}\right|_{V_0} + \frac{1}{2}v^2\left.\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}V^2}\right|_{V_0} + \ldots, \tag{8–139}$$

gdje je $I_0 = I(V_0)$ istosmjerna struja zbog prednapona. Prva se derivacija struje po naponu može izračunati kao

$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}V}\right|_{V_0} = \alpha I_s e^{\alpha V_0} = \alpha(I_0 + I_s) = g_d = \frac{1}{r_j}, \tag{8–140}$$

gdje je r_j otpor spoja u radnoj točki (V_0, I_0), a g_d je *dinamička vodljivost* diode. Druga se derivacija može izračunati kao

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}V^2}\right|_{V_0} = \left.\frac{\mathrm{d}^2 g_d}{\mathrm{d}V^2}\right|_{V_0} = \alpha^2 I_s e^{\alpha V_0} = \alpha^2(I_0 + I_s) = \alpha g_d = g_d'. \tag{8–141}$$

Uvrštenjem izraza (8–140) i (8–141) u jednadžbu (8–139) konačno izlazi

$$I(V) = I_0 + i = I_0 + v g_d + \frac{v^2}{2} g_d' + \ldots \tag{8–142}$$

To je tzv. *aproksimacija malog signala*, koja daje dovoljno točne rezultate kad se primjenjuje na detektore malog signala.

8.5.1. Detekcija nemoduliranog signala

U primjenama detekcije malog nemoduliranog RF signala na frekvenciji ω_{RF} bez istosmjernog prednapona ($V_0 = 0$), mikrovalni napon na diodi može se izraziti kao $v = V_{RF}\cos(\omega_{RF} t)$ pa red (8–142) poprima oblik

$$I(V) = V_{RF} g_d \cos(\omega_{RF} t) + \frac{V_{RF}^2}{2} g_d' \cos^2(\omega_{RF} t) + \ldots =$$

$$= \frac{V_{RF}^2}{4} g_d' + V_{RF} g_d \cos(\omega_0 t) + \frac{V_{RF}^2}{4} g_d' \cos(2\omega_{RF} t) + \ldots \tag{8–143}$$

Taj je slučaj prikazan na slici 8.61a). U jednadžbi (8–143) veličina

$$I_{DC} = \frac{V_{RF}^2 g_d'}{4} \tag{8–144}$$

označuje ispravljenu struju (istosmjerna komponenta) koja je razmjerna kvadratu izmjeničnog napona. Dakle, detektor radi u *području kvadratne ovisnosti* izlazne struje o RF naponu.

8.5.2. Detekcija moduliranog signala

Detektor se može primijeniti i za demodulaciju amplitudno (AM) moduliranog signala u svrhu izdvajanja informacije kojom je prethodno moduliran RF signal. Osnovno načelo rada demodulatora prikazano je na slici 8.61b), a blokovska shema demodulatora na slici 8.62. Amplitudno modulirani signal može se prikazati kao

$$V_{\mathrm{RF}}(1+M\cos\omega_{\mathrm{NF}}t)\cos\omega_{\mathrm{RF}}t =$$

$$= V_{\mathrm{RF}}\cos\omega_{\mathrm{RF}}t + \frac{1}{2}MV_{\mathrm{RF}}\left[\cos(\omega_{\mathrm{RF}}-\omega_{\mathrm{NF}})t + \cos(\omega_{\mathrm{RF}}+\omega_{\mathrm{NF}})t\right], \qquad (8\text{–}145)$$

gdje je A amplituda RF signala koji se naziva *nositelj* frekvencije ω_{RF}, M je indeks modulacije, a ω_{NF} modulacijska frekvencija koja u komunikacijskim primjenama označuje frekvenciju signala korisne informacije. Indeks modulacije M je uvijek manji ili jednak jedinici; $M=1$ odgovara sto postotnoj modulaciji. Ovdje valja uočiti da je $\omega_{\mathrm{RF}} \gg \omega_{\mathrm{NF}}$ jer je f_{RF} u mikrovalnome području, a ω_{NF}, u području audio- ili video-frekvencija (kHz ili MHz).

Uz pretpostavku da detektor ovojnice radi u području kvadratne ovisnosti, uvrštenjem izraza (8–145) u jednadžbu (8–139) izlazi

$$i(t) = V_{\mathrm{RF}}g_{\mathrm{d}}\left[\cos\omega_{\mathrm{RF}}t + \frac{M}{2}\cos(\omega_{\mathrm{RF}}-\omega_{\mathrm{NF}})t + \frac{M}{2}\cos(\omega_{\mathrm{RF}}+\omega_{\mathrm{NF}})t\right] +$$

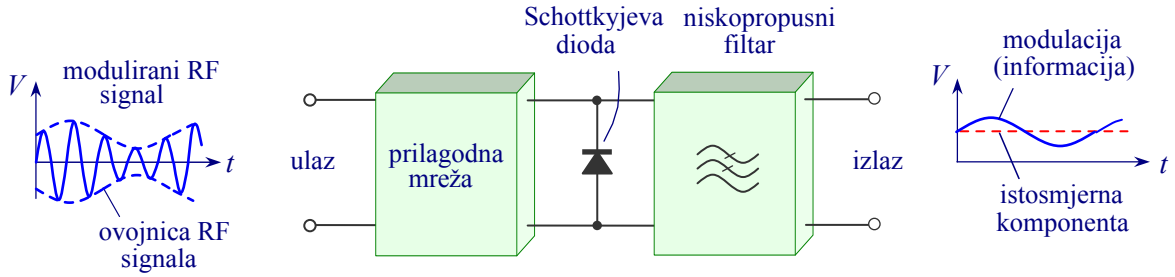
$$+\frac{V_{\mathrm{RF}}^2}{4}g_{\mathrm{d}}'\left[1+\frac{M^2}{2}+2M\cos\omega_{\mathrm{NF}}t+\frac{M^2}{2}\cos 2\omega_{\mathrm{NF}}t+\cos 2\omega_{\mathrm{RF}}t+\right.$$

$$+M\cos(2\omega_{\mathrm{RF}}-\omega_{\mathrm{NF}})t+2M\cos(2\omega_{\mathrm{RF}}+\omega_{\mathrm{NF}})t+\frac{M^2}{2}\cos 2\omega_{\mathrm{RF}}t+$$

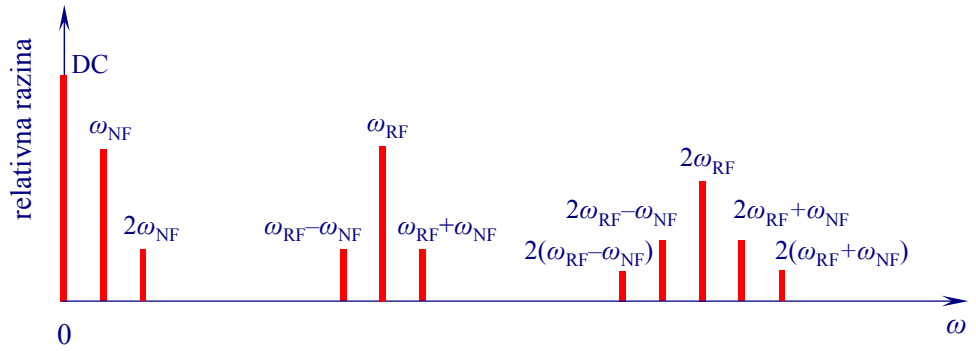
$$\left.+\frac{M^2}{4}\cos 2(\omega_{\mathrm{RF}}-\omega_{\mathrm{NF}})t+\frac{M^2}{4}\cos 2(\omega_{\mathrm{RF}}+\omega_{\mathrm{NF}})t\right]. \qquad (8\text{–}146)$$

Spektar na izlazu detektora opisan je izrazom (8–146) i grafički prikazan na slici 8.63.

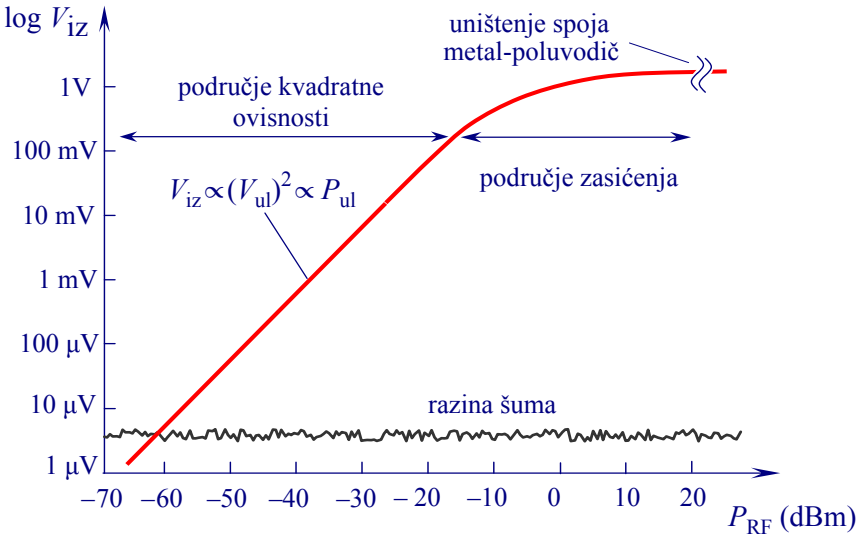
Korisnom izlaznom signalu na frekvenciji ω_{NF}, amplituda $\frac{1}{2}M\,g_{\mathrm{d}}'V_{\mathrm{RF}}^2$ razmjerna je snazi RF signala pa dioda radi u području kvadratne ovisnosti. Stoga se može reći da je izlazni napon razmjeran kvadratu ulaznog napona ili izravno razmjeran ulaznoj snazi. Većina detektora radi u tom području. No struja diode također sadrži komponente na frekvenciji ω_0 i njezinim višim harmonicima, ali te se frekvencije obično ne nalaze u spektru izlaznog signala. To se postiže postavljanjem jednostavnog niskopropusnog filtra između diode i izlaznog prolaza detektora.



Slika 8.62. Načelna shema detektora



Slika 8.63. Spektralni prikaz struje na izlazu demodulatora AM signala



Slika 8.64. Odziv mikrovalnog detektora sa Schottkyjevom diodom

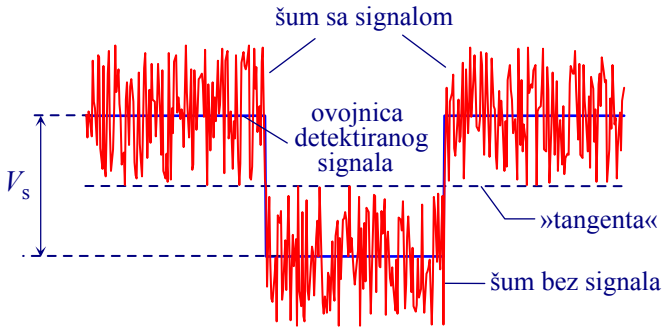
Na slici 8.64 prikazan je tipičan odziv izlaznog napona detektora u funkciji ulazne RF snage. Kad snaga RF signala poraste iznad neke kritične vrijednosti ne mogu se više zanemarivati komponente višeg reda u Taylorovom razvoju funkcije (8–139) pa dolazi do postupnog zasićenja, tj. kompresije izlaznog napona. Porastom snage ulaznog RF signala iznad određene granice dolazi do termičkog razaranja poluvodiča i uništenja Schottkyjeve barijere. Ta je granična razina snage razmjerna površini presjeka spoja metal-poluvodič.

Detektor je u mikrovalnim prijamnicima namijenjen detekciji malih signala u rasponu snaga od –60 do –30 dBm. Osjetljivost detektora signala niske razine ovisi o učinkovitosti ispravljanja, izlaznoj impedanciji, svojstvima šuma diode, ulaznoj impedanciji, širini pojasa, svojstvima šuma pojačala i prilagodnoj RF strukturi.

Velik utjecaj na osjetljivost detektora ima šum spektralne ovisnosti $1/f$ (šum treperenja). U sklopovima detektora na niskim modulacijskim frekvencijama Schottkyjeve diode imaju oko 35 dB niže razine šuma u odnosu na točkaste diode. Dok točkasta dioda i bez prednapona postiže veliku osjetljivost, Schottkyjevoj je diodi zbog znatno više potencijalne barijere spoja potrebno dovesti istosmjernu struju vrijednosti od 10 do 80 µA.

Učinkovitost ispravljanja definira se preko strujne osjetljivosti

$$\beta_i = \frac{i_{DC}}{P_{ul}}, \qquad (8–147)$$



Slika 8.65. Određivanje tangencijalne osjetljivosti

gdje je i_{DC} istosmjerna struja koja teče u izlaznome krugu detektora, a P_{ul} mikrovalna snaga na ulazu detektora. Prema nadomjesnoj shemi diode na slici 8.43 izlazi

$$\beta_i = \frac{q}{2\eta kT} \frac{1}{\left(1+\frac{R_s}{R_j}\right)^2} \frac{1}{1+\frac{\omega^2 C_j^2 R_s R_j^2}{R_s+R_j}}. \tag{8–148}$$

Gubitci snage ulaznog signala koja se dovodi na otpor spoja diode R_j iznose

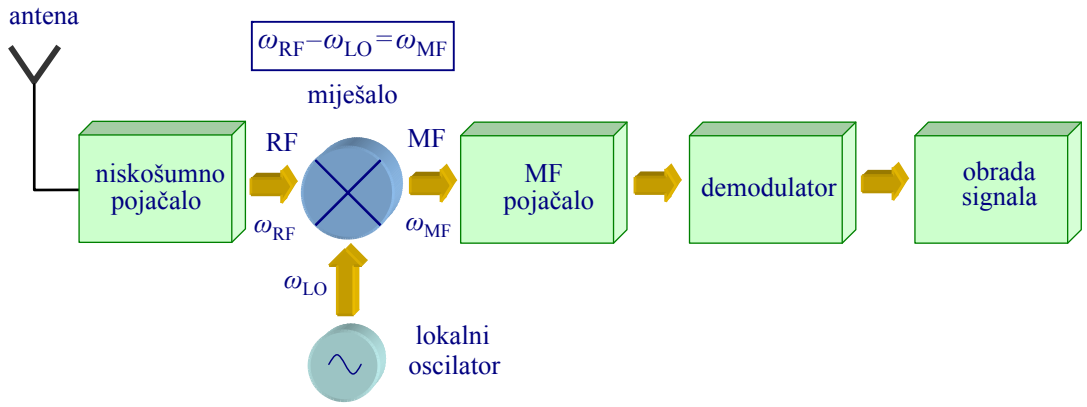
$$L = 10\log\left(1+\frac{R_s}{R_j}+\omega^2 C_j^2 R_s R_j\right) \text{ dB}. \tag{8–149}$$

Premda postoji više definicija osjetljivosti detektora, najčešće je u uporabi *tangencijalna osjetljivost* (engl. *Tangential Signal Sensitivity*; *TSS*). Ta veličina označuje izravnu mjeru odnosa signal/šum napona na pojačalu detektiranog signala. Mjerenje se provodi impulsno moduliranim RF signalom, a detektirani se signal na izlazu osjetljivog videopojačala promatra osciloskopom. Pritom se razina ulaznog RF signala namjesti tako da se najviši vrhovi šuma bez ulaznog RF signala na ekranu osciloskopa izjednaće s najnižim vrhovima šuma kad je na ulazu priključen RF signal. Uvjet je prikazan na slici 8.65, gdje je V_s razmjeran naponu detektiranog RF signala bez šuma (visina ovojnice) zabilježenog na ekranu osciloskopa. Tako određena razina RF signala određuje TSS detektora za zadanu širinu pojasa videopojačala, a odnos signal/šum približno iznosi 2,5 (ili 8 dB). TSS ovisi o širini frekvencijskog pojasa video-pojačala. U praksi se obično uzima širina pojasa 1 MHz.

Osim točkastih i Schottkyjevih dioda u sklopovima detektora ponekad se rabe i degenerirane tunelske ili protuspojne diode.

8.6. Miješala

Miješalo je ključna komponenta u mnogim radiofrekvencijskim uređajima i sustavima [4], [16]. Budući da su njegove primjene češće u prijamnim sustavima, na slici 8.66 shematski je prikazan tipičan radioprijamnik s transpozicijom frekvencije (*heterodinski prijamnik*). Slab radiofrekvencijski (RF) signal, koji iz antene ulazi u prijamnik, najprije valja pojačati u vrlo osjetljivom niskošumnom RF pojačalu, a zatim pomiješati u miješalu sa signalom lokalnoga oscilatora (LO) i transponirati u novo frekvencijsko područje kao međufrekvencijski (MF) signal. Naziv međufrekvencija vuče korijene iz prvih heterodinskih prijamnika s amplitudnom modulacijom u kojima je međufrekvencija bila niža od frekvencija RF signala i LO, ali viša od frekvencije modulacijskog signala (informacije). Dakle, u spektralnom prikazu, međufrekvencija se nalazila između spektara RF signala i LO oscilatora s jedne strane i frekvencije



Slika 8.66. Blokovska shema heterodinskog prijamnika sa silaznim miješalom (pretvornikom)

modulacijskog signala s druge strane pa joj otuda i naziv. U osnovi, miješalo sadrži nelinearnu komponentu poput diode ili tranzistora. Ako je mikrovalni val nositelj informacije, koji se kraće naziva RF signal frekvencije ω_{RF}, a signal LO frekvencije ω_{LO}, onda će nelinearno miješalo proizvesti signale međufrekvencije $\omega_{MF}=\omega_{RF}-\omega_{LO}$, frekvencije sume $\omega_{\Sigma}=\omega_{RF}+\omega_{LO}$ i mnoštvo drugih frekvencija $\omega_{MF}=m\omega_{RF}\pm n\omega_{LO}$, gdje su m i n cijeli brojevi. MF signal, koji je obično znatno niže frekvencije od frekvencija RF signala i LO, dalje se pojačava u MF pojačalu i na kraju demodulira. Na taj se način iz ovojnice signala izdvaja korisna informacija.

Smisao miješanja je u tomu da se spektar RF signala transponira u novo frekvencijsko područje, ali tako da u MF signalu ostanu sačuvane sve značajke spektra izvornog moduliranog RF signala. U kontekstu miješala i prijamnika pojam transpozicija frekvencije znači linearnu operaciju translacije ili premještanja spektra u drugo frekvencijsko područje.

Miješalo je u osnovi troprolazni sklop, a njegov simbol na slici 8.66 upućuje na to da je izlazni signal razmjeran umnošku dvaju ulaznih signala. To je idealiziran pogled na rad miješala jer miješalo na nelinearnoj ili vremenski promjenljivoj napravi proizvodi velik broj harmonika i niz novih neželjenih komponenata, uključujući intermodulacijska izobličenja, zrcalni signal, ali i druga nelinearna izobličenja koja imaju za posljedicu zasićenje izlazne snage i povećanje gubitaka pri prijenosu korisnog signala (odjeljak 8.2).

Ako je RF signal amplitudno moduliran (AM) niskofrekvencijskim signalom modulacijske frekvencije ω_{NF}, onda se u skladu s izrazom (8–145) može napisati

$$(1+M\cos\omega_{NF}t)\cos\omega_{RF}t=\cos\omega_{RF}t+\frac{1}{2}M\left[\cos(\omega_{RF}-\omega_{NF})t+\cos(\omega_{RF}+\omega_{NF})t\right].$$

Spektar tog signala sastoji se od signala RF nositelja na frekvenciji ω_{RF} i dvaju bočnih pojasa na frekvencijama $\omega_{RF}-\omega_{NF}$ i $\omega_{RF}+\omega_{NF}$ [35]. Nakon miješanja, spektar bočnih pojasa postaje

$$\cos\left[(\omega_{RF}-\omega_{LO})t+\omega_{NF}t\right]+\cos\left[(\omega_{RF}+\omega_{LO})t-\omega_{NF}t\right],$$

gdje je frekvencija RF signala viša od frekvencije LO. Kad je frekvencija nositelja niža od frekvencije LO, tad nakon miješanja spektar ostaje nepromijenjen jer AM signal ima simetrične bočne pojase. Otuda se vidi da frekvencija lokalnoga oscilatora može biti viša ili niža od frekvencije nositelja.

Za frekvencijski (FM) i fazno moduliran (PM) nositelj oblika $\cos[\omega_{RF}t+\varphi(t)]$, spektar nakon miješanja za $\omega_{RF}>\omega_{LO}$ poprima oblik $\cos[(\omega_{RF}-\omega_{LO})t+\varphi(t)]$, a za $\omega_{RF}<\omega_{LO}$ ima oblik $\cos[(\omega_{RF}-\omega_{LO})t-\varphi(t)]$. Ako je ω_{LO} viša od ω_{RF}, onda spektar bočnog pojasa pokazuje inverznu sliku u kojoj više frekvencije u spektru RF signala postaju niže frekvencije u spektru MF signala i obratno. Tomu je tako jer frekvencijski i fazno modulirani signali nemaju simetrične

bočne pojase. Oduzimanjem spektra $\varphi(t)$ od međufrekvencije dolazi do međusobne zamjene VF i NF komponenata. Da se spriječi ta spektralna inverzija, frekvencija LO obično je niža od frekvencije RF nositelja u frekvencijski ili fazno moduliranim sustavima.

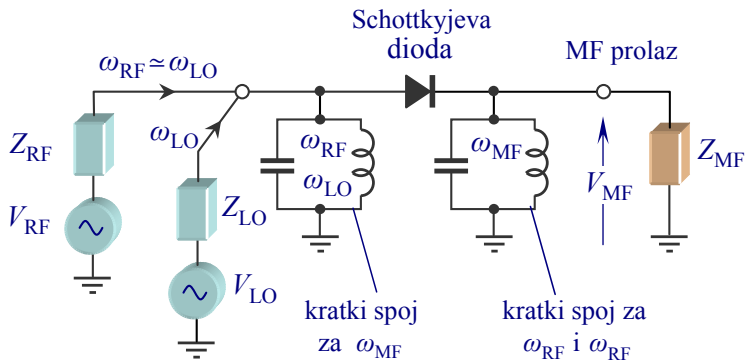
Miješalo u zajednici s lokalnim oscilatorom čini sklop pretvornika frekvencije. Kad pretvara frekvenciju iz višeg u niže frekvencijsko područje nerijetko se naziva *silazno miješalo* (ili silazni konvertor). U obratnom slučaju, riječ je o *uzlaznom miješalu*. Prijamnici se mogu naći u brojnim radijskim sustavima s prijamnim frekvencijama u rasponu od 10 kHz do iznad 1 THz. Tehnološki razvoj poluvodičkih komponenata i novih materijala te razvoj učinkovitih postupaka obradbe radiofrekvencijskih signala znatno su utjecali na promjene u koncepciji radijskih sustava, što se posredno odrazilo na koncepciju izvedaba miješala u suvremenim prijamnim i odašiljačkim sustavima. U mikrovalnim se sklopovima najčešće nalaze diodna miješala sa Schottkyjevom diodom ili miješala s MESFET-om (s jednim ili dvama gatovima). No, u sklopovima miješala, na frekvencijama ispod mikrovalnih, nerijetko se rabe tranzistori (bipolarni te spojni FET i MOSFET).

Kad se pretvorba frekvencije ostvaruje na nelinearnoj reaktanciji, tad se sklop naziva *parametarsko miješalo* ili *parametarski pretvornik*. Nelinearna se reaktancija u mikrovalnim primjenama uglavnom ostvaruje varaktorskom diodom. Parametarsko miješalo s nelinearnom reaktancijom potencijalno je nestabilan sklop pa se u sklopu uzlaznog miješala može ostvariti pojačanje snage. Veliki signal LO u tim izvedbama obično naziva *pumpni signal* koji nelinearnu reaktanciju opskrbljuje energijom. S druge strane, sklop silaznog parametarskog miješala ne nalazi primjenu jer je potencijalno nestabilan. Pojačanje snage, generiranje subharmonika i viših harmonika ostvaruju se pretvorbom dijela snage LO (pumpni signal) u snagu na frekvenciji željenog izlaznog MF signala. Drugim riječima, ti sklopovi crpe snagu iz LO koji »pumpa« nelinearnu reaktanciju velikim signalom visoke frekvencije.

Miješala se nerijetko rabe i kao produktni detektori i kvadraturni demodulatori za demodulaciju frekvencijski i fazno moduliranih signala te za demodulaciju SSB, DSB, FFSK, QPSK i BPSK moduliranih signala i njihovih inačica [35].

8.6.1. Diodno miješalo

Na slici 8.67 prikazan je pojednostavljen sklop mikrovalnog diodnog miješala. Korisni RF signal spojen je s diodom preko filtarske mreže impedancije Z_{RF}. Slično tomu, signal LO doveden je na diodu preko impedancije Z_{LO}. Međufrekvencijski se signal pojavljuje na impedanciji Z_{MF} koja označuje ulaznu impedanciju MF pojačala. Pri uporabi točkastih ili Schottkyjevih dioda valja osigurati zatvaranje istosmjernog strujnog kruga, što se u MF krugu ostvaruje primjenom RF prigušnice ili paralelnim titrajnim krugom kao na slici 8.67.



Slika 8.67. Miješalo sa Schottkyjevom diodom

Pretpostavimo da su na diodu priključena dva pobudna napona, napon lokalnoga oscilatora i ulazni RF napon, te da je još prisutna samo međufrekvencijska komponenta, a da su sve ostale frekvencijske komponente kratko spojene odgovarajućim reaktivnim opterećenjem. Tad se struja diode može razviti u Taylorov red oko istosmjerne radne točke. To se ekvivalentno može prikazati redom potencija

$$i_D = I_0 + g_1 v + g_2 v^2 + g_3 v^3 + \dots , \tag{8–150}$$

gdje je I_0 istosmjerna struja napajanja, v je promjena napona oko radne točke, a g_1, g_2, g_3, … odgovarajući koeficijenti u razvoju. Pretpostavimo da se napon v sastoji od signala lokalnoga oscilatora $v_{LO} = V_{LO} \cos \omega_{LO} t$, ulaznog RF signala $v_{RF} = V_{RF} \cos \omega_{RF} t$ i međufrekvencijskog signala $-v_{MF} = V_{MF} \cos(\omega_{LO} t + \varphi)$, gdje je φ fazni kut MF signala. Uvrštenjem ovih veličina u red potencija (8–150) izlazi

$$\begin{aligned} i_D = {} & I_0 + g_1(v_{LO} + v_{RF} - v_{MF}) + \\ & + g_2(v_{LO}^2 + v_{RF}^2 + v_{MF}^2 + 2v_{LO}v_{RF} - 2v_{LO}v_{MF} - 2v_{RF}v_{MF}) + \\ & + g_3(v_{LO}^3 + v_{RF}^3 - v_{MF}^3 + 3v_{LO}^2 v_{RF} - 3v_{LO}^2 v_{MF} + 3v_{LO}v_{RF}^2 + \\ & + 3v_{LO}v_{MF}^2 - 3v_{RF}^2 v_{MF} - 6v_{LO}v_{RF}v_{MF}). \end{aligned} \tag{8–151}$$

Obično se u analizama mikrovalnih miješala pretpostavlja da su na diodi prisutni samo naponi RF signala i LO. To dalje pretpostavlja da je završna impedancija na međufrekvenciji jednaka nuli, što je nestvarna pretpostavka. Naime, želi li se na međufrekvencijskom (izlaznom) prolazu miješala postići konačan signal, završna impedancija na međufrekvencijskom prolazu ne smije biti jednaka nuli. Impedancije opteretne mreže na različitim harmonicima utisnutih signala određuju napone tih harmonika na diodi.

No napon LO obično je znatno viši od ostalih napona (RF i MF) pa je za male razine ulaznoga RF signala opravdano zanemariti sve članove koji odgovaraju članovima višeg reda RF i MF signala. Zadržavanjem samo linearnih članova u izrazima za v_{RF} i v_{MF}, struja diode je

$$\begin{aligned} i_D = {} & I_0 + g_1(v_{LO} + v_{RF} - v_{MF}) + g_2(v_{LO}^2 + 2v_{LO}v_{RF} - 2v_{LO}v_{MF}) + \\ & + g_3(v_{LO}^3 + 3v_{LO}^2 v_{RF} - 3v_{LO}^2 v_{MF}. \end{aligned} \tag{8–152}$$

Kao što smo vidjeli u odjeljku 8.2, član v_{LO}^2 daje drugi harmonik frekvencije LO, tj.

$$v_{LO}^2 = V_{LO}^2 \cos^2 \omega_{LO} t = \frac{1}{2} V_{LO}^2 \cos 2\omega_{LO} t . \tag{8–153}$$

S druge strane, član $2v_{LO}v_{RF}$ bitan je za proces miješanja jer izravno stvara međufrekvencijski signal, $\omega_{MF} = \omega_{RF} - \omega_{LO}$, tj.

$$2v_{LO}v_{RF} = V_{LO}V_{RF}\left[\cos(\omega_{RF} - \omega_{LO})t + \cos(\omega_{RF} + \omega_{LO})t\right]. \tag{8–154}$$

Druga frekvencijska komponenta odgovara frekvenciji zbroja, $\omega_\Sigma = \omega_{RF} + \omega_{LO}$ i može se upotrijebiti za transpoziciju signala u više frekvencijsko područje.

Član s umnoškom $-2v_{LO}v_{MF}$ može se napisati kao

$$-2v_{LO}v_{MF} = -V_{LO}V_{MF}\left\{\cos\left[(\omega_{LO} - \omega_{MF})t - \varphi\right] + \cos\left[(\omega_{LO} + \omega_{MF})t + \varphi\right]\right\}. \tag{8–155}$$

Taj član daje *zrcalnu* komponentu $\omega_{ZF} = \omega_{LO} \pm \omega_{MF}$. Naziv joj proizlazi iz činjenice da se u spektralnom prikazu redovito pojavljuje kao zrcalna slika RF signala u odnosu na signal LO. Ta komponenta »izlazi« iz miješala i nakon što se reflektira, primjerice na ulaznom RF filtaru, ponovno se miješa stvarajući dodatni MF signal. Ovisno o fazi s kojom se vrati, izlazni će se MF signal povećati ili smanjiti. Stoga se u nekim izvedbama to svojstvo primjenjuje za smanjenje gubitaka pretvorbe. Taj je postupak u literaturi [4] poznat pod nazivom *obnavljanje*

zrcalne komponente. Osim toga, član (8–155) sadrži i komponentu na frekvenciji izvornog RF signala, koja općenito pridonosi zasićenju izlaznog signala i porastu gubitaka pretvorbe.

Član $-3g_3v_{\mathrm{LO}}^2v_{\mathrm{MF}}$ pridonosi MF signalu veličinom $-1{,}5g_3V_{\mathrm{LO}}^2V_{\mathrm{MF}}$ pa se ukupna struja MF signala uporabom fazora u frekvencijskoj domeni može napisati kao

$$I_{\mathrm{MF}} = -g_1V_{\mathrm{MF}} + g_2V_{\mathrm{LO}}V_{\mathrm{RF}} - \frac{3}{2}g_3V_{\mathrm{LO}}^2V_{\mathrm{MF}}. \tag{8–156}$$

Stoga će se na završnoj impedanciji Z_{MF} u MF prolazu miješala inducirati napon

$$V_{\mathrm{MF}} = Z_{\mathrm{MF}}I_{\mathrm{MF}} = \frac{g_2V_{\mathrm{LO}}Z_{\mathrm{MF}}}{1+\left(g_1+\frac{3}{2}g_3V_{\mathrm{LO}}^2\right)Z_{\mathrm{MF}}}. \tag{8–157}$$

Ovdje valja reći da razvoj u red potencija do polinoma trećega stupnja vrijedi samo za male vrijednosti napona LO. Stoga je član $1{,}5g_3V_{\mathrm{LO}}^2$ razmjerno malen u odnosu na g_1. Izraz (8–157) pokazuje da napon MF signala linearno ovisi o amplitudi RF napona, tj. u tim se radnim uvjetima miješalo ponaša kao linearni sklop.

Kao što se vidi u ovome kratkom razmatranju i odjeljku 8.2, zbog spektralnog raspršenja snage na diodi, u miješalu se dio snage ulaznog RF signala pretvara u nove spektralne komponente. No samo je jedna od njih korisna izlazna MF komponenta. Sve su ostale komponente nepoželjne jer u osnovi stvaraju gubitke u pretvorbi energije. Stoga posebno korisnu veličinu u sklopovima miješala čine *gubitci pretvorbe*. Ta se veličina definira kao recipročna vrijednost raspoloživog pojačanja kod pojačala, tj. kao omjer snage ulaznog (RF) signala i snage izlaznog (MF) signala. Gubitci pretvorbe izražavaju se u decibelima, kao

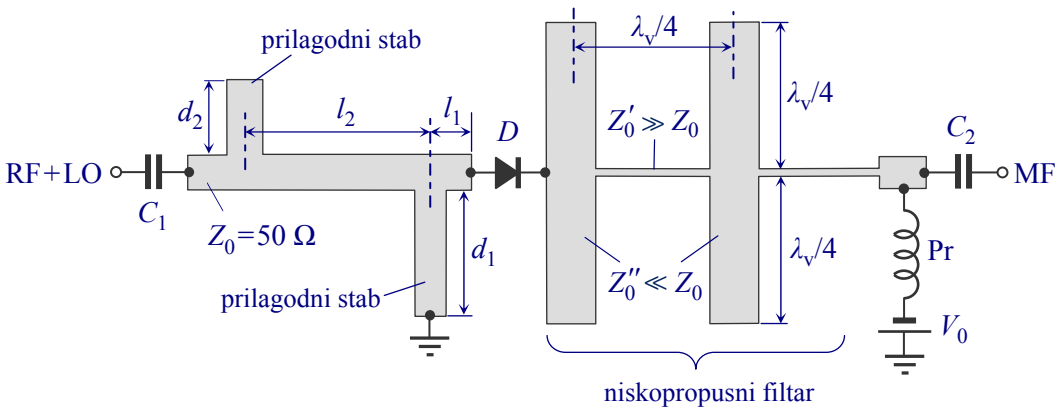
$$L_{\mathrm{c}} = 10\log\frac{\text{raspoloživa snaga ulaznog RF signala}}{\text{raspoloživa snaga izlaznog MF signala}}. \tag{8–158}$$

U pasivnim su diodnim miješalima gubitci pretvorbe veći od nule, što znači da je pojačanje pretvorbe negativno (u decibelima). No, za razliku od pojačala, kod miješala su frekvencije ulaznog i izlaznog signala međusobno različite. Tipična diodna miješala pokazuju gubitke pretvorbe između 6 i 10 dB. Gubitci se mogu smanjiti reaktivnim zaključenjem frekvencijskih komponenata neželjenih produkata miješanja. S jedne strane, takvi postupci znatno sužavaju frekvencijski pojas miješala, tj. miješalo postaje vrlo selektivno, a s druge strane sam sklop miješala postaje znatno složeniji. Zbog toga se takva rješenja rjeđe nalaze u primjeni.

U sklopovima diodnih miješala faktor šuma ovisi o temperaturi šuma Schottkyjeve diode, gubitcima pretvorbe te o tomu radi li miješalo kao jednopojasni ili dvopojasni prijamnik [4]. Faktor šuma tipičnih mikrovalnih miješala nalazi se u rasponu od 6 do 10 dB. Posebne izvedbe s obnavljanjem komponenata sume i zrcalne komponente pokazuju vrijednosti faktora šuma ispod 3 dB u frekvencijskom području oko 10 GHz. Faktor šuma može se dodatno smanjiti hlađenjem Schottkyjeve diode na kriogene temperature. Kao opće pravilo, može se prihvatiti da je faktor šuma diodnog miješala približno jednak gubitcima pretvorbe.

Na slici 8.68 prikazana je izvedba diodnog miješala s mikrotrakastim linijama. Dioda je smještena u »seriju« s prijenosnim strukturama: ulazna prilagodna mreža s filtrima za RF signal i LO te izlaznim MF filtrom. Dioda se može postaviti i paralelno (poprečno) s prijenosnom strukturm, no takav se spoj izbjegava u mikrotrakastoj izvedbi jer tada diodu valja galvanski spojiti s uzemljenom ravninom što zahtijeva bušenje podloge (supstrata).

U ulaznom krugu prilagodba se ostvaruje na frekvenciji RF signala da bi se smanjili gubitci pretvorbe i faktor šuma. U tu je svrhu korisno uporabiti otvorene ili kratko spojene stabove. Za prilagodbu u širem frekvencijskom području valja uzeti što je moguće električki kraće stabove na frekvenciji RF signala. Još se širi frekvencijski pojas može ostvariti primjenom



Slika 8.68. Mikrotrakasta izvedba miješala sa Schottkyjevom diodom

više stabova ili četvrtvalnih transformatora impedancije ili linijskih transformatora s neuniformnim prijenosnim linijama.

U mikrovalnome području ulazna impedancija Schottkyjeve diode, pri nominalnoj pobudi signalom lokalnoga oscilatora, obično odgovara impedanciji 50 Ω. Stoga prilagodba miješala u RF krugu ne čini posebno težak zadatak. U krugu MF signala uvjete prilagodbe obično nameće vrijednost ulazne impedancije MF pojačala. Pri transpoziciji prema dolje, MF krug je ugođen na frekvenciju razlike frekvencija RF signala i LO. Stoga se izlazni krug izvodi primjenom niskopropusnog filtra koji je konstruiran tako da čini što nižu impedanciju (kratki spoj) za frekvenciju LO. U tu se svrhu poglavitno primjenjuju ljestvičaste niskopropusne strukture paralelno priključenih odsječaka prijenosnih linija (stabovima) duljine $\lambda_v/4$ niske karakteristične impedancije, $Z_0' \ll Z_0$, međusobno odvojeni četvrtvalnim odsječcima visoke impedancije $Z_0'' \gg Z_0$, kao što je prikazano na slici 8.68. Ovdje λ_v označuje valnu duljinu u mikrotrakastoj liniji i to na frekvenciji LO. Niskopropusne strukture mogu se ostvariti na način opisan u odjeljku 7.5.4.

Veličinom amplitude signala LO i istosmjernog naponskog izvora V_0 namješta se istosmjerna struja diode, o kojoj ovisi impedancija diode na frekvencijama RF signala i LO. Izvor istosmjernog napona odvojen je od MF signala prigušnicom (*Pr*) razmjerno velike induktivnosti L, tako da je zadovoljen uvjet $\omega_{MF}L > 100\ \Omega$ u sustavu impedancije 50 Ω. Pozitivnim prednaponom može se smanjiti potrebna razina amplitude LO i razina šuma miješala, ali se time obično povećavaju gubitci pretvorbe.

Pri pretvorbi prema gore međufrekvencija je u RF području i to nerijetko blizu frekvencije LO pa je za izdvajanje MF signala potrebno uporabiti RF filtre, pojasnopropusne ili visokopropusne. O mikrovalnim filtrima može se više naći u odjeljku 7.5. Ako se radi o mikrotrakastoj izvedbi, može se rabiti RF filtar s paralelnim spregnutim mikrotrakastim linijama.

Balansno miješalo

Premda su miješala s jednom diodom vrlo praktična i prikladna za izvedbe prijamnika u području vrlo visokih frekvencija, ona imaju puno nedostataka. To su loša izolacija između prolaza lokalnoga oscilatora te ulaznog i izlaznog prolaza, i slabo potiskivanje parazitskih signala miješanja, koji čine izvore intermodulacije i šuma. Ti se nedostatci mogu prevladati primjenom balansnih miješala [4], [16]. Pri tomu valja istaknuti nekoliko prednosti balansnih miješala u odnosu na miješala s jednom diodom:

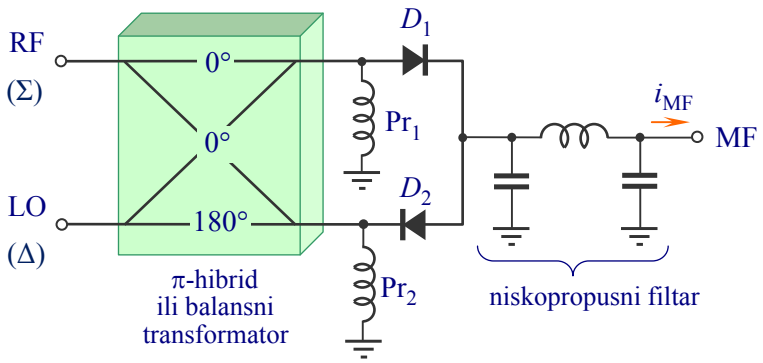
- inherentno svojstvo potiskivanja intermodulacijskih produkata i parazitskih odziva,
- visok stupanj izolacije između LO i RF prolaza bez uporabe filtara,
- manja osjetljivost na razgođenost prolaza miješala,
- te potiskivanje AM šuma lokalnoga oscilatora.

No da bi se to moglo ostvariti potrebna je veća snaga LO. Osim toga, balansna miješala općenito imaju veći faktor šuma i veće gubitke pretvorbe, zbog složenosti prilagodbe pojedinačnih dioda u hibridnim sklopovima.

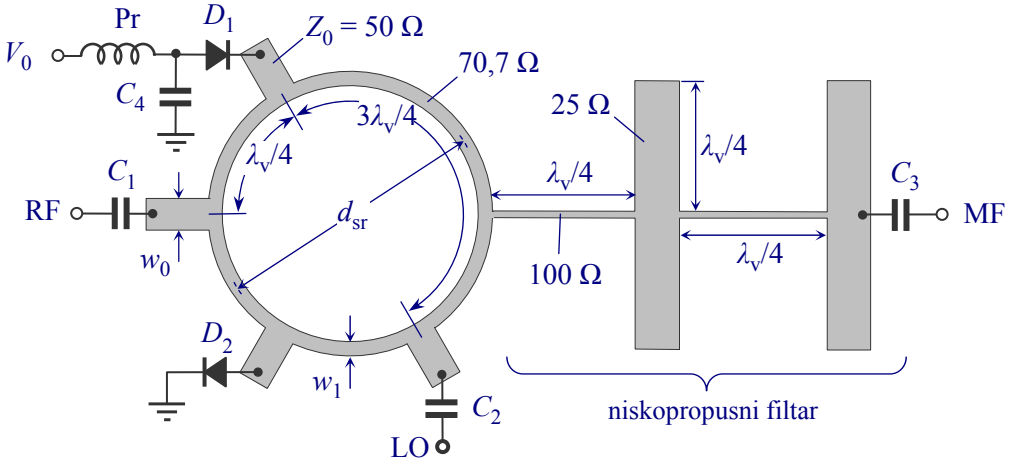
U mikrovalnome području na prvom se mjestu postavljaju zahtjevi na jednostavnost konstrukcije i uklanjanje potrebe za filtriranjem RF signala, što se uspješno ostvaruje uporabom balansnih miješala. Poznate su dvije izvedbe jednostrukih balansnih miješala koje se osnivaju na prstenastom π-hibridu i kvadraturnom π/2-hibridu te dvije osnovne vrste dvostrukih balansnih miješala koje se osnivaju na uporabi prstenastog odnosno zvjezdastog kvarteta dioda. U biti sve četiri vrste miješala ostvaruju slične značajke, a izvjesne razlike u načinu spajanja hibrida i dioda daje im neka posebna svojstva po kojima se međusobno razlikuju. U frekvencijskom području do nekoliko GHz najčešće se primjenjuju dvostruka balansna miješala s kvartetom dioda, a u mikrovalnome području primjenu češće nalaze balansna miješala s kvadraturnim i prstenastim hibridima.

Balansna miješala s balansnim transformatorima ili π-hibridima sadrže dva jednostrana miješala, kao što je prikazano na slici 8.69. Prolazi RF signala i LO mogu se međusobno zamijeniti, a da sklopovi zadrže sve osnovne funkcije. Signal LO dovodi se na prolaz Δ balansnog transformatora. Izolacija između RF prolaza i prolaza LO dobra je onoliko koliko je dobro izveden sam hibrid ili balansni transformator. Kod izvedbe s balansnim transformatorom, struja LO kruži u sekundarnom krugu transformatora pa ako je ostvarena dobra ravnoteža sklopa, ne postoji komponenta struje koja protječe iz priključka 3 prema uzemljenju.

Na slici 8.70 shematski je prikazan sklop balansnog miješala s prstenastim π-hibridom, koji je izveden u mikrotrakastoj tehnici (odjeljak 7.3.6). Diode su na prstenasti hibrid priključene protufazno preko dvaju međusobno izoliranih prolaza. To omogućuje jednostavno dovođenje istosmjernog prednapona. RF signal dovodi se na prolaz Σ koji je simetrično postavljen u odnosu na diode. Pritom, diode nije potrebno izravno spojiti na prsten hibrida. No važno je da su odsječci linija između dioda i prstena jednake duljine jer, u protivnome, različite duljine odsječaka unose diferencijalni fazni pomak koji kvari ravnotežu sklopa. Signal LO dovodi se na prolaz Δ koji protufazno pobuđuje prolaze s diodama. Diode su priključene na pripadajuće prolaze sa suprotnim polaritetom pa signal LO istodobno otvara i zatvara obje diode. Budući da je prsten na istosmjernom potencijalu konačne vrijednosti, valja ga galvanski izolirati od ulaza RF i MF signala te LO. To je moguće izvesti minijaturnim čip-kondenzatorima ili interdigitalnim kapacitetima (odjeljak 8.11.2).



Slika 8.69. Balansno miješalo s balansnim transformatorom ili π -hibridom

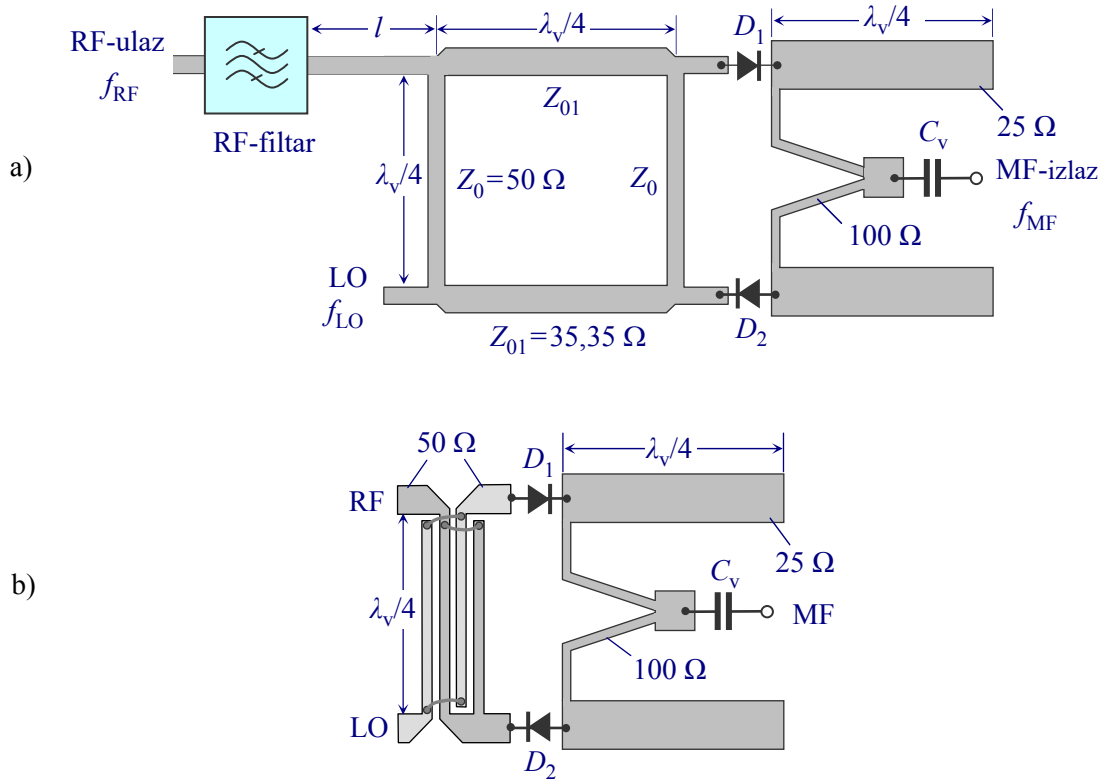


Slika 8.70. Izvedba balansnog miješala s prstenastim π-hibridom u mikrotrakastoj tehnici

Korisni se MF signal uzima u točki koja je simetrično postavljena u odnosu na diode, a nalazi se nasuprot prolazu RF signala. No ako je frekvencija MF signala znatno niža od frekvencija RF signala i signala LO, što je najčešći slučaj u praksi, onda nije toliko kritično mjesto s kojeg se uzima MF signal. Izdvojeni MF signal dovodi se MF pojačalu preko niskopropusnoga filtra. Filtar je sastavljen od kaskade visokoomskih serijskih $\lambda_v/4$ linija i paralelno spojenih otvorenih $\lambda/4$ stabova niske karakteristične impedancije. Zrcalna impedancija toga filtra na frekvencijama RF signala i signala LO mora biti dovoljno visoka da se utjecaj MF kruga na rad miješala smanji na najmanju moguću mjeru. Za zadovoljavajući rad miješala u praksi je dovoljno da su karakteristične impedancije serijskih odsječaka barem dva puta više, a karakteristične impedancije otvorenih stabova barem dva puta niže od karakteristične impedancije sustava (50 Ω). Linijski odsječci duljine $\lambda_v/4$ obično se projektiraju za frekvenciju LO jer je taj signal znatno jači od RF signala pa je i njegov utjecaj na ponašanje MF pojačala znatno veći. Na frekvenciji RF signala može se pokvariti prilagodba zbog reaktivnih komponenata filtra u MF krugu. Taj se problem može riješiti ispravnom konstrukcijom prilagodne mreže u RF prolazu. Primjenom formula za izračunavanje karakteristične impedancije i efektivne permitivnosti mikrotrakastih linija mogu se odrediti dimenzije prstenastog hibrida. Ako je, primjerice, miješalo na slici 8.70 predviđeno za prijam signala na frekvenciji $f_{RF} = 12$ GHz uz $f_{MF} = 1{,}5$ GHz i frekvenciju lokalnoga oscilatora $f_{LO} = 10{,}5$ GHz te ako se uzme podloga visine $h = 0{,}25$ mm i $\varepsilon_r = 2{,}5$, onda se primjenom formula navedenih u odjeljku 4.8.2. dobivaju vrijednosti širine trake $w_0 = 0{,}71$ mm i $w_1 = 0{,}4$ mm za liniju karakteristične impedancije 50 Ω, odnosno 70,7 Ω. Efektivne permitivnosti tih istih linija iznose $\varepsilon_{ef0} = 2{,}08$, odnosno $\varepsilon_{ef1} = 1{,}82$. Na frekvenciji LO valna duljina u mikrotrakastoj liniji karakteristične impedancije 70,7 Ω iznosi $\lambda_{v1} = 21{,}2$ mm pa je srednja vrijednost promjera prstena $d_{sr} = 10{,}1$ mm.

Na početku razvoja mikrovalnih prijamnih sustava za gradnju balansnih miješala redovito su primjenjivani valovodni ortogonalni T-spojevi, tj. magični *T*-spoj (odjeljak 7.3.6, slika 7.51). U milimetarskome i submilimetarskome valnom području, osim valovodnih, često se rabe miješala s *fin-linijama*.

Na slici 8.71 prikazane su izvedbe balansnih miješala s kvadraturnim hibridima (odjeljak 7.3.5). Kvadraturni hibrid ima to svojstvo da se signal LO koji se reflektira na neprilagođenim diodama uvijek pojavljuje na prolazu RF signala, a ne vraća se na prolaz LO s kojeg je odaslan. U radioprijamnicima se u RF prolaz redovito postavlja RF filtar. Budući da je frekvencija f_{LO} različita od f_{RF}, može se očekivati da će se reflektirani signali LO koji napuštaju hibrid kroz RF prolaz reflektirati na RF filtru i vratiti na diode D_1 i D_2. Ti će se reflektirani



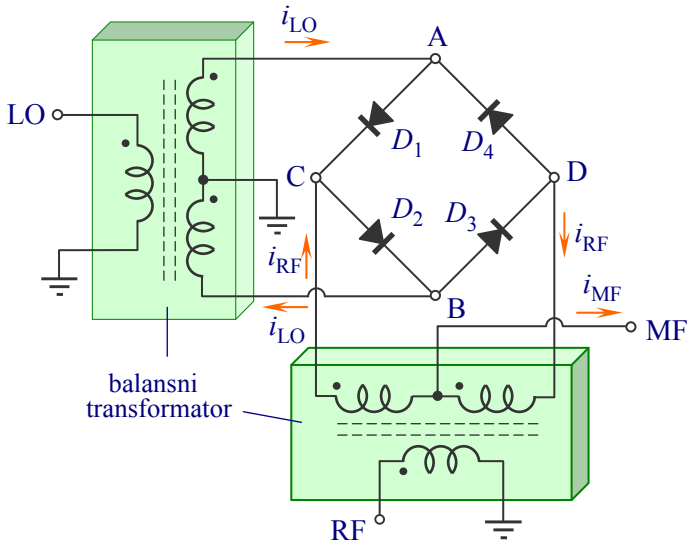
Slika 8.71. Balansna miješala: **a)** s kvadraturnim hibridom s ograncima i **b)** s Langeovim hibridom

signali zatim vektorski zbrojiti s izravnim signalima pa će u općem slučaju doći do neuravnotežene pobude dioda zbog čega će se smanjiti izolacija između prolaza LO i RF signala te će se povećati faktor šuma i gubitci pretvorbe. Taj se problem može prevladati tako da se između hibrida i diode D_1, primjerice, umetne četvrtvalni linijski odsječak karakteristične impedancije Z_0. Time će se izjednačiti električke udaljenosti između dioda i LO pa će se reflektirani signali LO vraćati na prolaz LO oscilatora, a ne na RF prolaz.

U nižem mikrovalnome području nerijetko se nalazi i izvedba integriranog miješala prema slici 8.71b) s Langeovim kvadraturnim hibridom koji je opisan u odjeljku 7.3.3 (slika 7.40). Miješala s tom vrstom hibrida pokazuju veću širinu pojasa i zauzimaju znatno manju površinu tiskane pločice u mikrotrakastoj izvedbi. Ostala obilježja sklopa približno su jednaka obilježjima sklopa na slici 8.71a).

Dvostruko balansno miješalo

Ako se dva balansna miješala s π-hibridom spoje u zajednički sklop, kao što je prikazano na slici 8.72, onda se dobiva *dvostruko balansno miješalo*. Diode se nalaze u prstenastom spoju koji je pobuđen signalom LO između čvorišta A i B te RF signalom između čvorišta C i D. Pri kvalitativnim razmatranja, može se uzeti da diode imaju ulogu idealnih sklopka koje se otvaraju i zatvaraju u ritmu signala LO oscilatora. Ako je razina napona LO između čvorišta A i B dovoljno velikog iznosa, onda vodljivost dioda valja opisati pravokutnim i posve simetričnim valnim oblikom. Središnji je izvod transformatora u krugu LO uzemljen, a na središnjem se izvodu RF transformatora obavlja odvajanje korisnog MF signala. Budući da je sklop simetričan, središnji izvodi transformatora mogu međusobno zamijeniti uloge. No ako se MF signal odvaja u krugu LO i ako je pritom izolacija LO/MF nedostatna, onda nerijetko dolazi do prekomjerne pobude osjetljivog MF pretpojačala signalom LO što u praksi smanjuje pojačanje i stvara dodatna nelinearna izobličenja.

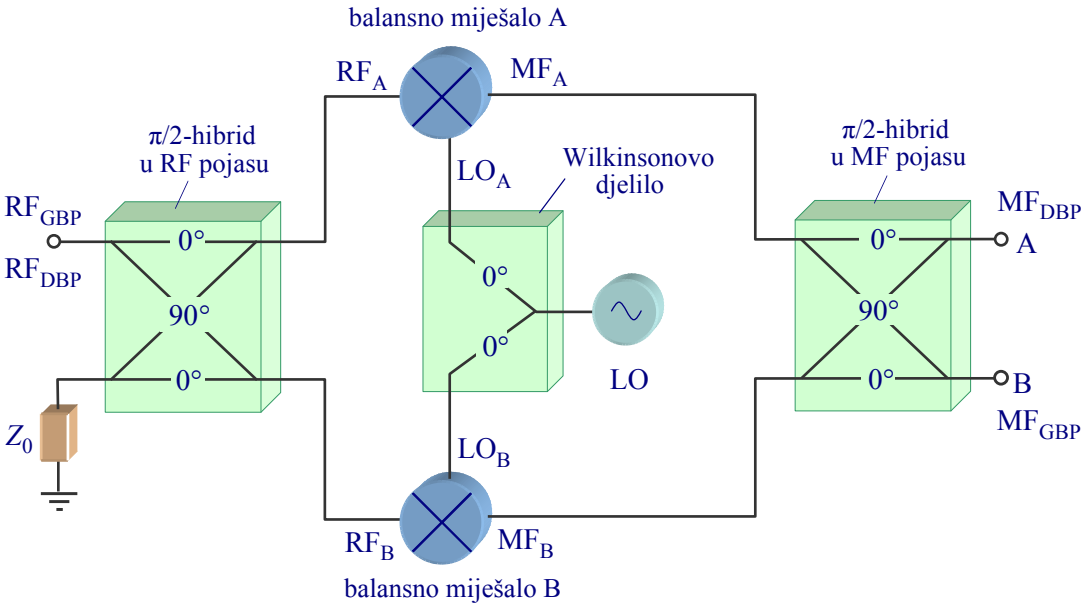


Slika 8.72. Dvostruko balansno miješalo

SSB miješalo

Prilikom projektiranja miješala cilj postići najmanje moguće gubitke pretvorbe i faktor šuma. Povezivanjem dvaju ili više miješala s pomoću hibridnih sklopova moguće je istodobno upravljati fazom korisnog i zrcalnog signala. Ako je tako unutar sklopa moguće međusobno odvojiti MF komponente koje su nastale od zrcalnog i korisnog RF signala, onda se dobiva SSB miješalo koje se temelji na radu SSB modulatora [35].

Na slici 8.73 prikazan je sklop miješala u kojem je usklađivanjem faza onemogućen prijam signala iz zrcalnog pojasa. Sklop sadrži nekoliko hibrida i dva balansna ili dvostruka balansna miješala. Najprije se ulazni signal, primjenom kvadraturnog hibrida, podijeli na dva signala jednakih amplituda koji su međusobno fazno pomaknuti za 90°. Ti se signali zatim privode dvama balansnim miješalima na kojima se miješaju s istofaznim signalima LO dobivenim na



Slika 8.73. SSB miješalo koje se sastoji od dvaju balansnih miješala i kvadraturnih hibrida

Wilkinsonova djelila snage. Stoga MF signali dobiveni transponiranjem iz gornjeg bočnog pojasa ($\omega_{RF} > \omega_{LO}$) i donjeg bočnog pojasa ($\omega_{RF} < \omega_{LO}$) međusobno su suprotnih faza. Ti se MF signali zatim vektorski zbrajaju na kvadraturnom hibridui pojavljuju se na suprotnim izlazima hibrida. Na izlaznom prolazu A kvadraturnog hibrida, MF signal ima spektralna svojstva RF signala iz donjeg bočnog pojasa, a na prolazu B, MF signal zadržava značajke RF signala iz gornjeg bočnog pojasa. RF signali gornjeg i donjeg bočnog pojasa jedan su drugome zrcalni.

Opisanim se sklopom u praksi može ostvariti potiskivanje zrcalnog pojasa preko 20 dB u razmjerno širokom frekvencijskom području, ovisno o širini pojasa kvadraturnih hibrida. Stoga se taj sklop može rabiti u prijamnicima za istodoban prijam signala iz dva frekvencijska područja, ali samo ako su razine prijamnih signala podjednake. U protivnom može doći do preslušavanja između kanala, gdje kanal s jačim RF signalom može ometati kanal sa slabijim RF signalom.

Postoji niz izvedaba višestrukih balansnih miješala za posebne namjene poput miješala velikih RF signala, miješala s visokom međufrekvencijom te miješala neosjetljiva na neprilagođenost MF i RF prolaza (vidjeti, primjerice, literaturu [4], [16] i [17]).

Harmoničko miješalo

Osim toga, nerijetko se u uporabi nalaze harmonička miješala koja za transpozicju RF signala u MF područje rabe više harmonike frekvencije LO. To je miješalo posebno zanimljiva za milimetarsko i submilimetarsko valno područje kad je nepraktično ili čak nemoguće generirati osnovnu frekvenciju LO u tako visokom frekvencijskom području. Gubitci pretvorbe takvih miješala nekoliko su decibela veći u usporedbi s konvencionalnim miješalima. Učinkovito harmoničko miješalo može se lako ostvariti uporabom dviju Schottkyjevih dioda u protuspoju (slika 8.74), koje miješaju RF signal s drugim harmonikom LO i učinkovito potiskuju miješanje s osnovnim harmonikom, što smanjuje gubitke pretvorbe. Za diode posve jednakih karakteristika sklop ne daje odziv za osnovnu frekvenciju LO, nego samo za parne harmonike frekvencije LO. Pobudi li se par dioda (A i B) u protuspoju velikim signalom LO, dobivaju se sljedeće struje dioda:

$$i_A = -I_s\left(e^{-\alpha V} - 1\right), \qquad i_B = -I_s\left(e^{\alpha V} - 1\right).$$

Prema izrazu (8–140) u odjeljku 8.5. diferencijalne vodljivost dioda glase

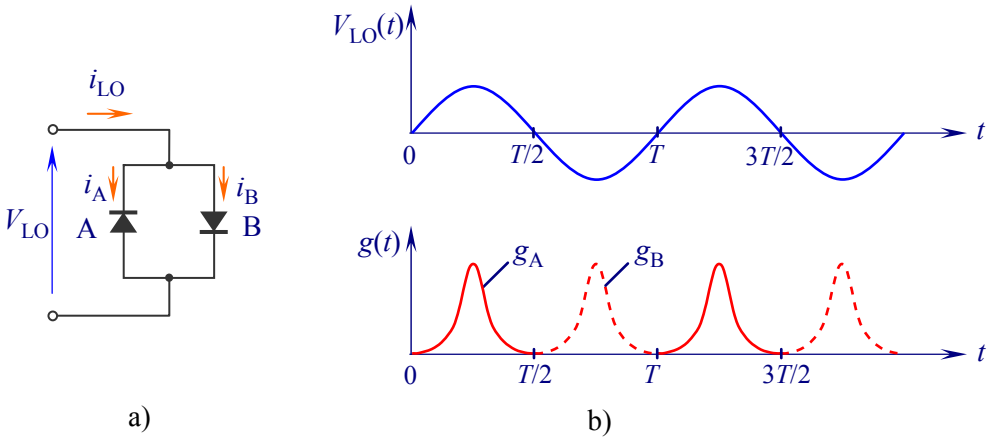
$$g_A = \alpha I_s e^{-\alpha V}, \qquad g_B = \alpha I_s e^{\alpha V},$$

i približno su jednake valnim oblicima struja diode. Ukupna diferencijalna vodljivost dviju dioda u paralelnom protuspoju jednaka je zbroju pojedinačnih vodljivosti, tj.

$$g = g_A + g_B = \alpha I_s(e^{\alpha V} + e^{-\alpha V}) = 2\alpha I_s \cosh(\alpha V). \tag{8–159}$$

Budući da je funkcija kosinus hiperbolički parna funkcija, diferencijalna vodljivost $g(t)$ sadrži samo parne harmonike napona LO pa je miješalo posve neosjetljivo na miješanje s osnovnim harmonikom. Drugim riječima, struja u petlji protuspoja sadrži samo parne harmonike, a struja u vanjskom krugu sadrži samo neparne harmonike. Diode u protuspoju opterećuju jedna drugu na frekvencijama neparnih harmonika. Valja uočiti da se istosmjerna komponenta struje ne zatvara u vanjskome krugu. Da bi protuspoj dioda učinkovito miješao, korisni se RF signal mora dovesti na diode tako da su njime obje diode pobuđene istofazno.

Harmoničko miješalo također učinkovito potiskuje amplitudno modulirani šum LO blizu frekvencije osnovnog harmonika. Budući da posjeduje neka od svojstava balansnih miješala, često se uzima kao poseban slučaj balansnog miješala. O ovoj vrsti miješala može se više naći u literaturi [16].

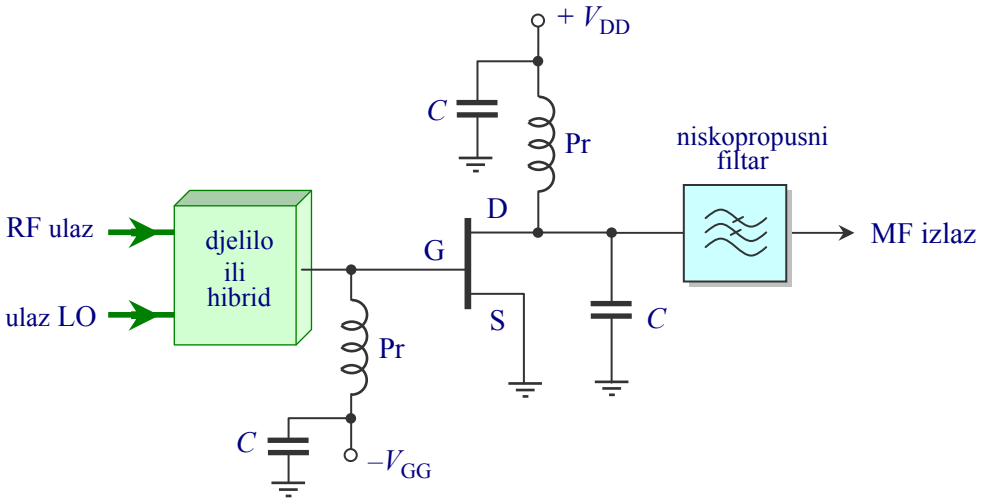


Slika 8.74. a) Diode u protuspoju. **b)** Valni oblici napona i diferencijalne vodljivosti

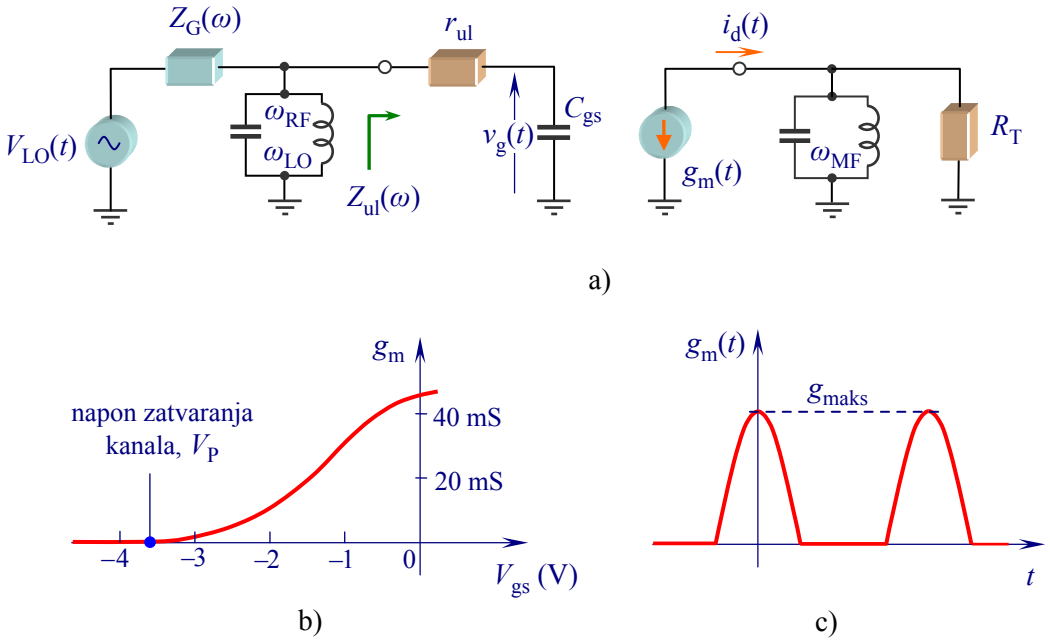
8.6.2. Tranzistorsko miješalo

U mikrovalnom području mogu se rabiti i aktivna miješala s MESFET-om. Premda su u praksi ispitane mnoge izvedbe miješala, najbolje karakteristike imaju miješala kod kojih su RF signal i signal LO dovedeni na gat, a MF signal odvodi se s dotoka (slika 8.75). Miješanju ili pretvorbi frekvencije, najviše pridonosi vremenski promjenljiva strmina tranzistora. Maksimalna strmina postiže se postavljanjem radne točke blizu napona praga V_P, kao u miješalima sa spojnim FET-om u nižem RF području ispod 1 GHz. Ostvarenjem kratkoga spoja za signal LO na dotoku postiže se vrlo stabilan rad sklopa jer pritom kapacitet gat-dotok poprima minimalnu vrijednost. U takvim miješalima općenito je nepoželjna prisutnost viših harmonika LO pa ih se nastoji smanjiti na najmanju moguću mjeru. Kad se traže ultimativno niske razine intermodulacijskih izobličenja, tad je MESFET preporučljivo upotrijebiti kao vremenski upravljani otpor. Pri tomu signal LO valja dovodi na gat, a RF signal na dotok. Obilježja takvog sklopa slična su obilježjima diodnih miješala, a i pristup analizi im je istovjetan. Balansne izvedbe miješala rabe pristupe koji su obrađeni u prethodnom odjeljku.

Nerijetko se rabe i izvedbe miješala s MESFET-om s dvama gatovima. Njih karakterizira dobra izolacija između RF prolaza i LO. Pritom se RF signal dovodi na gat 1, a signal LO na gat 2.



Slika 8.75. Sklop miješala s MESFET-om



Slika 8.76. a) Nadomjesna shema miješala s MESFET-om; **b)** ovisnost prijenosne vodljivosti MESFET-a o naponu gat-slijev; **c)** vremenski promjenljiva prijenosna vodljivost

Ako su gat i dotok virtualno uzemljeni na svim neželjenim frekvencijama, onda se nadomjesni sklop sa slike 8.75 može pojednostaviti na oblik prikazan na slici 8.76a). U shemi je zanemaren utjecaj induktiviteta izvoda slijeva. Pri kratko spojenom dotoku za komponentu LO, kapacitet C_{gd} u paralelnom je spoju s C_{gs}. Obično je $C_{gd} \ll C_{gs}$ pa se C_{gd} može zanemariti. Paralelni je titrajni krug na izlazu usklađen na međufrekvenciji, a ulazni je krug usklađen na frekvencijama RF signala i LO. Stoga se ulazna impedancija može napisati kao

$$Z_{ul}(\omega) = r_g + r_s + r_i + \frac{1}{j\omega C_{gs}}, \tag{8–160}$$

gdje je C_{gs} kapacitet između gata i slijeva pri naponu $V_{GG}=V_P$. Ovdje je $\omega=\omega_{LO}$ frekvencija LO, a r_g, r_s i r_i su otpori intrinzičnog MESFET-a (odjeljak 8.4). U ulaznom se krugu uvijek nastoji idealno prilagoditi generator RF signala i LO na ulaznu impedanciju FET-a. No često se frekvencije LO i RF signala međusobno znatno razlikuju pa je skoro nemoguće istodobno prilagoditi oba izvora signala. U tom slučaju prilagodbu valja ostvariti na frekvenciji RF signala i prihvatiti manje razgođenje kruga LO. Razgođenje LO može se nadoknaditi povećanje njegove snage. Najmanja potrebna snaga LO može se procijeniti uz pomoć slike 8.76b). Radna se točka u ulaznom krugu obično namješta tako da se prednapon gata postavi na vrijednost V_P, pri kojoj kanalom prestaje protjecati struja. Najveće dopuštene vrijednosti pozitivnog napona za većinu GaAs MESFET-ova nalaze se u rasponu $0{,}5 < V_{GS,maks} < 0{,}6$ V. To su vrijednosti napona V_{GS} pri kojima još ne dolazi do ispravljavačkih učinaka na spoju gat-slijev. Najveća vrijednost reverznog napona ograničena je probojnim naponom barijere gat-slijev, čime je određena maksimalna dopuštena amplituda signala LO na spoju gat-slijev

$$V_{LO,maks} = V_{GS,maks} - V_P .$$

Tad najveća dopuštena snaga signala LO iznosi

$$P_{LO} = \frac{1}{2}(V_{GS,maks} - V_P)^2 \omega_{LO}^2 C_{gs}^2 \, (r_g + r_s + r_i) . \tag{8–161}$$

Ako krug gata nije prilagođen na frekvenciji LO, onda se moraju uključiti gubitci zbog refleksije. Ulazna impedancija MESFET-a nije osjetljiva na promjene snage LO dok ne dođe do ispravljanja RF signala. Stoga je ulazna impedancija na frekvenciji RF signala približno jednaka ulaznoj impedanciji na frekvenciji LO, pa izraz (8–161) vrijedi i na frekvenciji ω_{RF}. Pritom valja ulaznu impedanciju miješala konjugirano kompleksno prilagoditi generatoru RF signala na jednak način kao u sklopu RF pojačala. Ako je napon RF signala zadan kao

$$v_{RF}(t) = V_{RF} \sin(\omega_{RF} t) \tag{8–162}$$

i generator prilagođen, tj. ako je $Z_{RF}(\omega_{RF}) = Z_{ul}^{*}(\omega_{RF})$, onda mali napon na kapacitetu C_{gs} iznosi

$$v_{RF,\,g}(t) = \frac{V_{RF} \cos(\omega_{RF} t)}{2\omega_{RF} C_{gs}(r_g + r_s + r_i)}\,. \tag{8–163}$$

Osnovna komponenta prijenosne vodljivosti na slici 8.76c) iznosi

$$g_1(t) = \frac{1}{2} g_{maks} \cos(\omega_{RF} t), \tag{8–164}$$

gdje je g_{maks} vršna vrijednost valnog oblika prijenosne vodljivosti $g_m(t)$. Stoga ukupna struja malog signala u krugu dotoka iznosi

$$i_d(t) = g_m(t) v_g(t). \tag{8–165}$$

U izraz su uključene komponente na frekvencijama RF i MF signala te na svim ostalim frekvencijama miješanja. Ako se u izraz (8–165) uvrste izrazi (8–163) i (8–164) i primijene jednostavne trigonometrijske transformacije, onda se dobiva

$$i_{MF}(t) = \frac{g_{maks} V_{RF} \cos(\omega_{MF} t)}{8\omega_{RF} C_{gs}(r_g + r_s + r_i)}, \tag{8–166}$$

gdje je $\omega_{MF} = \omega_{RF} - \omega_{LO}$ frekvencija MF signala. Izlazna snaga predana radnoj komponenti završne impedancije u MF krugu iznosi

$$P_{MF} = \frac{1}{2} I_{MF}^2 R_T = \frac{g_{maks}^2 V_{RF}^2 R_T}{128\omega_{RF}^2 C_{gs}^2 (r_g + r_s + r_i)^2} \tag{8–167}$$

gdje je I_{MF} amplituda MF struje u izrazu (8–166). Raspoloživa snaga konjugirano kompleksno prilagođenog generatora iznosi

$$P_{RF} = \frac{V_{RF}^2}{8\,\mathrm{Re}\{Z_{RF}(\omega_{RF})\}} = \frac{V_{RF}^2}{8(r_g + r_s + r_i)}\,. \tag{8–168}$$

Konačno, pojačanje pretvorbe G_c dobiva se kao omjer snage predane MF teretu i raspoložive snage RF generatora pa je

$$G_c = \frac{P_{MF}}{P_{RF}} = \frac{g_{maks}^2 R_T}{16\omega_{RF}^2 C_{gs}^2 (r_g + r_s + r_i)}\,. \tag{8–169}$$

Izraz (8–169) vrijedi samo ako su sve neželjene komponente kratko spojene i uz optimalni prednapon gata, blizu V_P. Pojačanje pretvorbe može se povećati ako se poveća vrijednost radne komponente MF tereta i produži elektroda gata, što smanjuje vrijednosti otpora r_s i r_i, te ako se odabere MESFET veće strmine. No u praktičnoj je izvedbi teško ostvariti vrijednosti završne impedancije veće od 200 Ω pa se u praksi mogu očekivati razine pojačanja pretvorbe između 0 i 10 db.

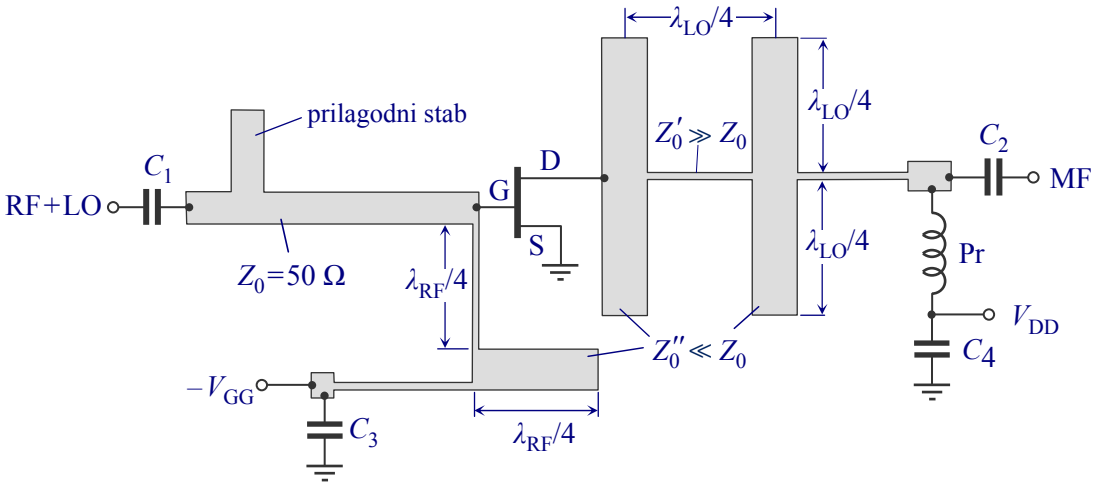
Prilikom projektiranja miješala treba poduzeti sljedeće korake:

- Odrediti parametre g_{maks}, $r_g+r_s+r_i$ i $C_{gs}(V_P)$. Vršna vrijednost strmine g_{maks} i ukupnog otpora $r_g+r_s+r_i$ može se odrediti mjerenjem istosmjernih parametara. Kapacitet C_{gs} može se procijeniti iz izmjerenih raspršnih parametara MESFET-a.
- Odabrati vrijednost R_T koju je moguće ostvariti u praksi i koja će zadovoljiti zahtjeve s obzirom na pojačanje pretvorbe.
- Izračunati ulaznu impedanciju s pomoću izraza (8–160). Ako je faktor dobrote ulaznog kruga prevelik, tako da se ulazni krug ne može prilagoditi unutar željenog frekvencijskog područja, onda valja računati i s gubitcima zbog refleksije.
- Posljednji je korak projektiranje ulaznih i izlaznih prilagodnih mreža.

Na slici 8.77 prikazana je izvedba miješala sa zajedničkim slijevom u mikrotrakastoj tehnici. Prilagodba MESFET-a u ulaznom krugu ostvarena je otvorenim stabom. Potreban negativni prednapon dovodi se na gat preko odsječka visokoomske linije dugačke četvrt valne duljine na frekvenciji RF signala. Taj linijski odsječak ujedno spaja galvanski na masu napon MF signala koji može biti prisutan na gatu. Za ispravan rad miješala, napon LO na dotoku mora biti kratko spojen, tj. virtualno uzemljen. To je ostvareno postavljanjem otvorenog niskoomskog četvrtvalnog staba na frekvenciji LO izravno na dotok. Taj je stab integralni dio niskopropusnog MF filtra. Preko njega na dotok se dovodi istosmjerni napon V_{DD}. Pri radu s MESFET-om, prije negoli se priključi napon dotoka V_{DD}, gat je uvijek dobro galvanski spojiti s masom ili baterijom V_{GG}. U protivnom, ako je gat otvoren i na dotok se priključi napon V_{DD}, može doći će do prekomjerne struje zbog malog otpora kanala što nerijetko vodi do uništenja MESFET-a.

Tijekom izrade sklopova s GaAs MESFET-om valja primijeniti posebne mjere opreza kao i pri radu sa Schottkyjevom diodom (odjeljak 8.6.1), zbog velike osjetljivosti spoja gat-slijev (kontakt Schottkyjeve barijere) na vanjski statički naboj. Stoga prilikom ugradnje MESFET-a u mikrotrakasti sklop, valja dobro uzemljiti sam sklop, ali i odgovarajuću aparaturu ili alat za montažu (lemljenje ili lijepljenje) te osobu koja svima njima rukuje.

S MESFET-om se mogu ostvariti balansna i dvostruka balansna miješala te subharmonička miješala. U vezi s time, zainteresiran čitatelj upućuje se na dodatnu literaturu [17].



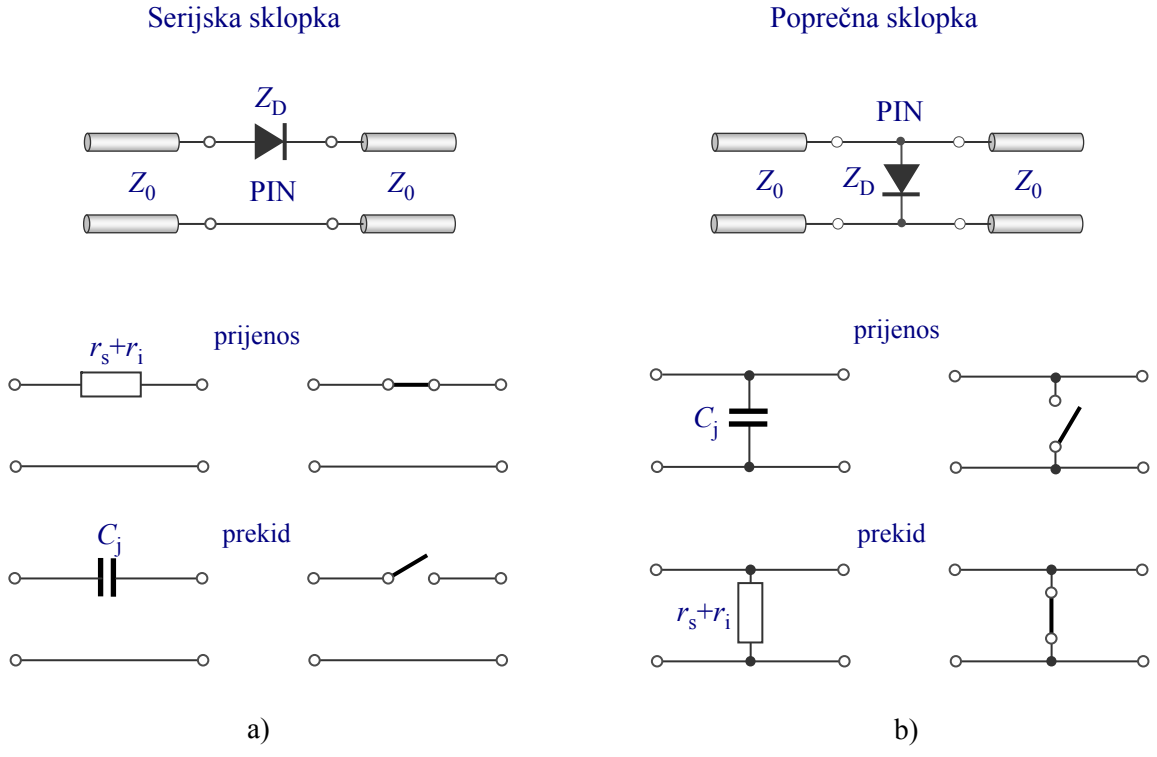
Slika 8.77. Izvedba miješala s MESFET-om u mikrotrakastoj tehnici

8.7. Sklopovi s PIN-diodom

U mikrovalnim sustavima nerijetko je potrebno preusmjeriti tok signala iz jednog kanala u drugi ili mijenjati parametre signala, poput amplitude i faze. Te se funkcije mogu ostvariti s pomoću elektronički upravljanih sklopka koje se osnivaju na poluvodičkim komponenatma poput PIN-dioda i unipolarnih tranzistora (FET). U ovom ćemo se odjeljku usredotočiti samo na primjene PIN-dioda u sklopovima sklopka, zakretača faze i atenuatora [12]. Neke od navedenih funkcija mogu se ostvariti i uporabom minijaturnih elektromehaničkih komponenata (MEMS, vidjeti odjeljak 8.12).

8.7.1. Sklopke s PIN-diodama

Elektroničke se sklopke susreću u različitim mikrovalnim sustavima. Najčešće se nalaze u upravljačkim sklopovima poput zakretača faze i atenuatora te u mrežama za preusmjeravanje RF signala i mrežama za oblikovanje dijagrama zračenja antenskih nizova u komunikacijskim i radarskim sustavima. Elektronički upravljana sklopka može se lako ostvariti PIN-diodom u serijskom ili poprečnom spoju. Na slici 8.78 prikazane su dvije osnovne ideje za izvedbu sklopke. Prekopčavanjem PIN-diode iz reverzne u propusnu polarizaciju, njezine impedancija skokovito mijenja vrijednost iz visoke u nisku i obratno. U idealiziranom prikazu to odgovara otvorenim i zatvorenim kontaktima sklopke. Na slici 8.44b) u odjeljku 8.4.2. prikazana je nadomjesna shema propusno, odnosno zaporno polarizirane PIN-diode, a na slici 8.45 može se vidjeti da, pri struji propusne polarizacije (tipično 10 – 100 mA), dioda pokazuje vrlo mali otpor (0,5 do 2 Ω) serijske kombinacije dvaju otpora, otpora intrinzičnog sloja r_i i otpora r_s. Oba su otpora vrlo linearana. Stoga, pri prekopčavanju malih RF signala, dioda ne stvara jače intermodulacijske produkte. S druge strane, kao što se može vidjeti u nadomjesnoj shemi na slici 8.44b) za zapornu polarizaciju, diodu valja nadomjestiti serijskim spojem vrlo malog kapaciteta C_j (obično manjeg od 0,2 pF) i otpora r_s, čiji se utjecaj nerijetko zanemaruje jer mu je vrijednost mnogo manja od vrijednosti kapacitivnog otpora diode u zapiranju.



Slika 8.78. Sklopka s PIN-diodom: **a)** serijska; **b)** poprečna

Prema nadomjesnim shemama za serijsku sklopku (slika 8.78a)) gubitci snage L (ili atenuacija) u serijskoj impedanciji definirani su izrazom (3–73b) kao

$$L = -20\log\left|\frac{2Z_0}{2Z_0 + Z_\mathrm{D}}\right| \qquad \text{(za serijsku sklopku).} \tag{8–170a}$$

Kad se propusno polarizirana dioda spoji u seriju s prijenosnom linijom (slika 8.78a)), tad sklopka propušta RF signal uz minimalne unesene gubitke. Nasuprot tomu, kad je dioda zaporno polarizirana, tad slabo propušta signal jer mali serijski kapacitet diode stvara visoku serijsku impedanciju $1/(\mathrm{j}\omega C_\mathrm{j})$ koja jamči dobru izolaciju između ulaznoga i izlaznoga prolaza. Za tipične je diode izolacija veća od 20 dB na frekvencijama do desetak GHz.

Gubitci snage u poprečnoj impedanciji definirani su izrazom (3–73a) kao

$$L = -20\log\left|\frac{2Z_\mathrm{D}}{2Z_0 + Z_\mathrm{D}}\right| \qquad \text{(za paralelnu sklopku).} \tag{8–170b}$$

Kad je dioda poprečno (paralelno) spojena na prijenosnu liniju, tad sklopka propušta RF signal pri zapornoj polarizaciji diode, slika 8.78b). Pritom mali kapacitet diode stvara malu refleksiju (razgođenost) koja neznatno povećava unesene gubitke, pa se gotovo cjelokupna snaga prenosi mimo diode jer kapacitet ne disipira snagu RF signala. Premda intrinzični sloj bez prednapona upućuje na velik otpor, kapacitet intrinzičnog sloja može ostati toliko velik da će na mikrovalnim frekvencijama impedancija diode biti dovoljno niska da stvori razmjerno jaku refleksiju na liniji. Stoga se rad bez negativnog prednapona ne preporučuje. No pri propusnoj polarizaciji, na diodi dolazi skoro do potpune refleksije RF signal pa je prijenos signala vrlo slab.

Dakle, impedancija diode Z_D približno je jednaka $r_\mathrm{i} + r_\mathrm{s}$ pri propusnoj polarizaciji i $1/(\mathrm{j}\omega C_\mathrm{j})$ (pri zapornoj polarizaciji). Za poznate parametre diode pri propusnoj i zapornoj polarizaciji, primjenom izraza (8–170) mogu se lako izračunati uneseni gubitci u prijenosu RF signala sklopkom, odnosno izolacija kad se želi spriječiti prijenos signala.

S pomoću izraza (8–170), sad se mogu izvesti korisne formule za projektiranje serijske i poprečne sklopke. Za serijsku sklopku na slici 8.78a) dobiva se:

$$\text{izolacija} = 10\,\log\left[1 + \frac{1}{\left(4\pi f C_\mathrm{j} Z_0\right)^2}\right]\ \text{dB} \qquad \text{(zaporna polarizacija diode),} \tag{8–171a}$$

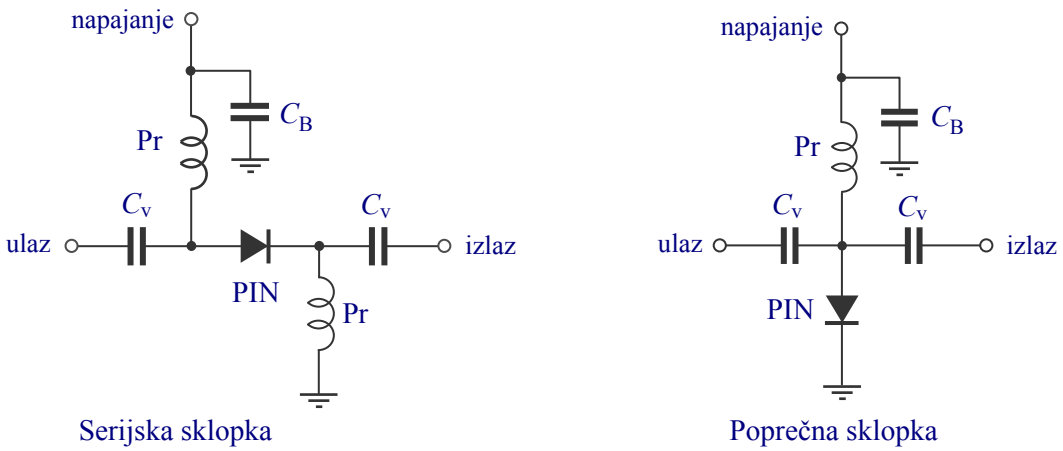
$$\text{uneseni gubitci} = 20\,\log\left(1 + \frac{r_\mathrm{s} + r_\mathrm{i}}{2Z_0}\right)\ \text{dB} \qquad \text{(propusna polarizacija diode).} \tag{8–171b}$$

Za poprečnu sklopku, prikazanu na slici 8.78b), izlazi:

$$\text{izolacija} = 20\,\log\left[1 + \frac{Z_0}{2(r_\mathrm{s} + r_\mathrm{i})}\right]\ \text{dB} \qquad \text{(propusna polarizacija diode),} \tag{8–171c}$$

$$\text{uneseni gubitci} = 10\log\left[1 + \left(\pi f C_\mathrm{j} Z_0\right)^2\right]\ \text{dB} \qquad \text{(zaporna polarizacija diode).} \tag{8–171d}$$

Uporabom osnovnih sklopka, prikazanih na slici 8.78, mogu se izvesti složenije sklopke s proizvoljnim brojem prolaza. Ovisno o izvedbi, sklopka u jednom od dvaju mogućih stanja (isključeno ili uključeno) stvara veliku refleksiju pa se gotovo cjelokupna ulazna RF snaga vraća u generator. U obama stanjima u diodi se disipira malo snage jer se radi o režimu rada s vrlo malim otporom (nizak napon) ili vrlo velikim otporom (slaba struja). O tomu valja voditi računa prilikom projektiranja refleksivnih sklopka. Da bi se omogućilo dovođenje upravljačke struje odnosno napona, diodi je potrebno dodati odgovarajuću niskopropusnu mrežu. Na slici



Slika 8.79. Izvedbe refleksivnih sklopka s koncentriranim elementima

8.79 prikazane su dvije osnovne sklopovske izvedbe takvih mreža s koncentriranim komponentama. Kapaciteti C_v na ulaznome i izlaznome prolazu odvajaju istosmjernu od RF veličine te istodobno osiguravaju dovoljno nisku serijsku impedanciju da ne bi došlo do prevelikih gubitaka u prijenosa snage. S druge pak strane, induktiviteti (RF prigušnice) moraju osigurati visoku impedanciju za RF signal. Umjesto zavojnica u mikrovalnom se području često rabe odsječci četvrtvalnih linija visoke karakteristične impedancije. O izvedbama RF prigušnica i sklopova za dovođenje napajanja aktivnim komponentama može se više naći u odjeljku 8.8.3.

Sklopke s PIN-diodama razmjerno su brze elektroničke komponente. Tipično je vrijeme prekopčavanja kraće od 10 ns.

Izolacija između prolaza može se znatno povećati postavljanjem više refleksivnih sklopka u kaskadu. Učinak se može znatno pojačati, ako se diode međusobno razmaknu četvrt valne duljine, kao što je prikazano u primjeru 8.2. No veći broj sklopka nerijetko unosi veće gubitke u stanju propusta. Stoga je najbolja izvedba sklopke uvijek rezultat kompromisa između vrijednosti unesenih gubitaka i izolacije, koji ovisi o konkretnoj primjeni.

Primjer 8.2. Sklopka s PIN-diodom u poprečnom spoju

Treba izračunati slabljenje signala na prijenosnoj liniji karakteristične impedancije $Z_0 = 50\ \Omega$ za frekvenciju 2,5 GHz pri propusnoj i zapornoj polarizaciji PIN-dioda za sklopku:

a) s jednom diodom u poprečnom spoju,

b) s dvjema diodama na razmaku $l = \lambda/4$,

c) s dvjema diodama na razmaku $l = \lambda/2$.

Parametri idealizirane PIN-diode ($r_s = 0$) pri propusnoj polarizaciji iznose $r_i = 1\ \Omega$, a pri reverznoj polarizaciji $C_j = 0{,}1$ pF.

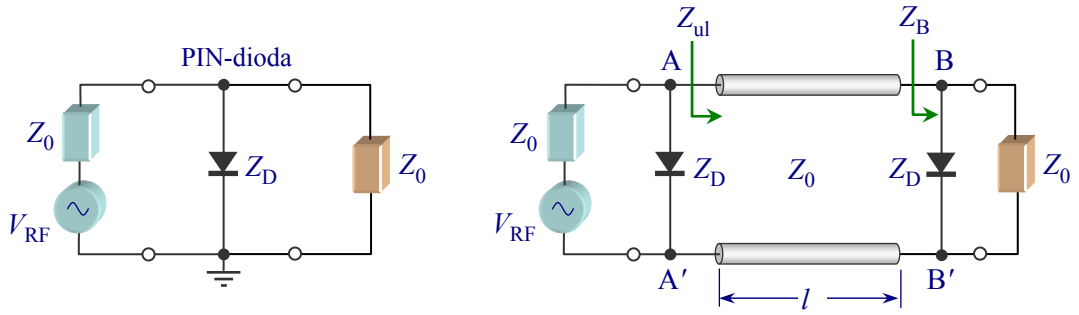
Rješenje:

a) Pri propusnoj polarizaciji diode poprečna impedancija iznosi $Z_D = r_i = 1\ \Omega$ pa u skladu s izrazima (8–170b), odnosno (8–171c) slabljenje signala iznosi

$$\text{izolacija} = -20\log\left|\frac{2Z_D}{2Z_D + Z_0}\right| = -20\log\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1 + 50} = 28{,}3\,\text{dB}\ .$$

Pri reverznoj polarizaciji, impedancija diode iznosi

$$Z_D = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_D} = \frac{-\mathrm{j}}{2\pi\cdot 2{,}5\cdot 10^9\cdot 0{,}5\cdot 10^{-12}} = -\mathrm{j}127{,}3\ \Omega\,. \qquad (8\text{–}172)$$



a) b)

Slika 8.80. a) Refleksivna sklopka s PIN-diodom. **b)** Sklopka s dvjema diodama na razmaku l

Otuda, u skladu s izrazom (8–170b) odnosno (8–171d), uneseni gubitci iznose

$$\text{uneseni gubitci} = -20\log\left|\frac{2Z_D}{2Z_D+Z_0}\right| = -20\log\left|\frac{2\cdot(-\mathrm{j}127{,}3)}{2\cdot(-\mathrm{j}127{,}3)+50}\right| = 0{,}16\ \text{dB}$$

b) Mreža na slici 8.80b) može se lako riješiti s pomoću *ABCD*-parametara. Primjenom tablice 5.1, *ABCD*-parametri paralelne admitancije i serijskog odsječka linije daju sljedeću *ABCD*-matricu za mrežu prikazanu na slici 8.80b)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_D & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{j}Z_0\sin\theta \\ \mathrm{j}Y_0\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_D & 1 \end{bmatrix}, \tag{8–173}$$

gdje je $Y_D = 1/Z_D$, $Y_0 = 1/Z_0$, a $\theta = \beta l = \pi/2$ električna duljina linijskog odsječka. Za četvrtvalni je odsječak $\theta = \pi/2$ matrični izraz (8–173) znatno se pojednostavnjuje pa nakon množenja izlazi

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_D & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{j}Z_0 \\ \mathrm{j}Y_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_D & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{j}Z_0\begin{bmatrix} Y & 1 \\ Y_0^2+Y_D^2 & Y \end{bmatrix}.$$

Sad se primjenom tablice 5.2. može izravno odrediti parametar S_{21} kao

$$S_{21} = \frac{2}{A+B/Z_0+CZ_0+D} = \frac{-\mathrm{j}2}{2+2Z_0Y_D+Z_0^2Y_D^2} = \frac{-\mathrm{j}2}{1+(1+Z_0Y_D)^2}. \tag{8–174}$$

Prijenosni gubitci definirani su preko kvadrata modula prijesnog raspršnog parametra. Stoga za propusnu polarizaciju dioda, $Z_D = r_i = 1\ \Omega$, dobiva se sljedeća vrijednost izolacije:

$$\text{izolacija} = -20\log|S_{21}| = 20\log\left|\frac{1+(1+Z_0Y_D)^2}{2}\right| = 20\log\left[\frac{1+(1+50\cdot1)^2}{2}\right] = 62{,}3\,\text{dB}.$$

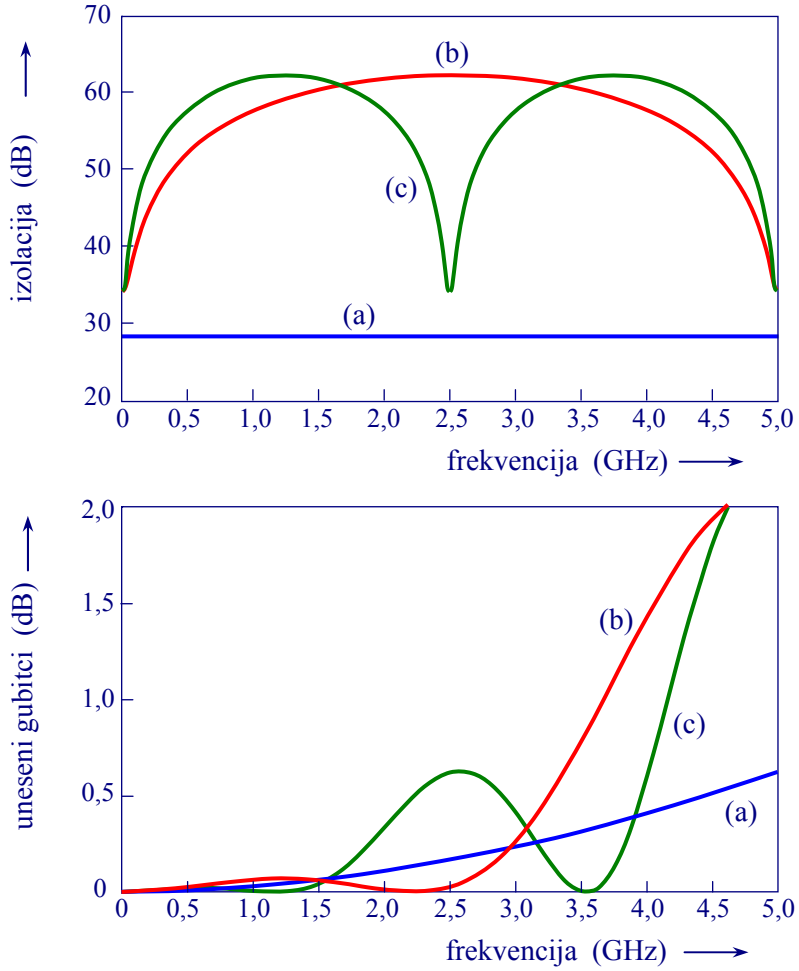
Može se uočiti da je izolacija u sklopu s dvjema diodama na četvrtvalnom razmaku znatno veća u odnosu na izolaciju s jednom diodom u zadatku a). Fizikalna intuicija govori u prilog toga rezultata, što se može ovako objasniti. Druga dioda stvara vrlo nisku impedanciju u točki B, koja se preslikava u vrlo visoku impedanciju u točki A. Budući da je u toj točki također smještena dioda niske impedancije, modul koeficijenta refleksije vrlo je blizu jedinice jer je impedancija na koju se normira vrlo visoka. Ta jaka refleksija u točki A znatno smanjuje prodor signala na izlaz sklopa.

Primjenom izraza (8–174) mogu se naći uneseni gubitci. Ako se za impedanciju diode uvrsti izraz (8–172), tj. $Y_D = 1/Z_D = 1/(-\mathrm{j}\,127{,}3) = \mathrm{j}7{,}86$ mS, onda uneseni gubitci iznose

$$\text{uneseni gubitci} = 20\log\left|\frac{1+(1+Z_0Y_D)^2}{2}\right| = 20\log\left|\frac{1+(1+\mathrm{j}50\cdot0{,}00785)^2}{2}\right| = 0{,}026\,\text{dB},$$

što je manje od vrijednosti 0,16 dB koja je dobivena u zadatku a).

Očito je da su obilježja sklopke s dvjema diodama na četvrtvalnom razmaku znatno bolje od onih s jednom diodom. No, u ovome slučaju, obilježja znatno ovise o frekvenciji jer je duljina prijenosne linije funkcija frekvencije. To se može vidjeti na slici 8.81, gdje su prikazana obilježja razmatranih sklopka u širem frekvencijskom području.



Slika 8.81. Izolacija i uneseni gubitci u ovisnosti o frekvenciji oko središnje frekvencije $f_0 = 2{,}5$ GHz za sklopku: (a) s jednom diodom; (b) s dvjema diodama uz $l = \lambda/4$, c) s dvjema diodama uz $l = \lambda/2$

c) Za poluvalni razmak između dioda, sklop se ponaša poput paralelno spojenih dioda, pa se umjesto izraza (8–173) mogu uzeti formule (8–171) kao u zadatku a) uz prepolovljenu impedanciju diode. Otuda je

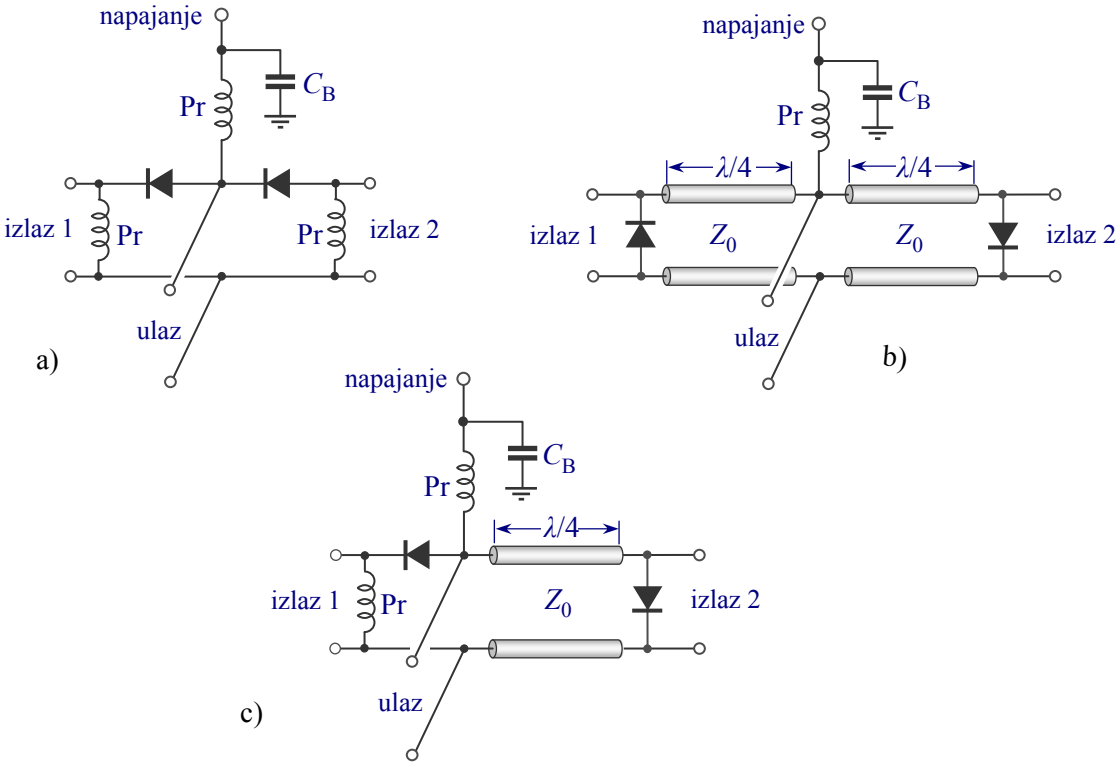
$$\text{izolacija} = -20\log\left|\frac{2(Z_D/2)}{2Z_D/2)+Z_0}\right| = -20\log\frac{2\cdot 0{,}5}{2\cdot 0{,}5+50} = -20\log\frac{1}{51} = 34{,}15\,\text{dB}\ .$$

Uvrštenjem impedancije reverzno polarizirane diode –j127,3 Ω u izraz (8–171d) s prepolovljenom impedancijom diode (dvije diode u paralelnom spoju) dobiva se

$$\text{uneseni gubitci} = -20\log\left|\frac{2(Z_D/2)}{2(Z_D/2)+Z_0}\right| = -20\log\left|\frac{2\cdot(-\text{j}127{,}3/2)}{2\cdot(-\text{j}127{,}3/2)+50}\right| =$$

$$= -20\log\left|-1+\text{j}50/127{,}3\right| = 10\log\left[1+(50/127{,}3)^2\right] = 0{,}623\,\text{dB}\,.$$

Izolacija je u tom slučaju veća oko 6 dB u odnosu na slučaj s jednom diodom. To je posve u skladu s fizikalnom intuicijom jer su sad diode praktički spojene paralelno pa se preko poluvalne linije impedancija Z_B preslikava u sebi jednaku impedanciju u točki A. Stoga je napon na prepolovljenoj impedanciji (dvije diode u paralelnom spoju) također prepolovljen, što znači da će snaga u izlaznoj liniji biti približno jednaka četvrtini snage u slučaju a). Otuda je izolacija povećana za približno 6 dB. No uneseni gubitci pri reverznoj polarizaciji veći su od gubitaka u sklopu s jednom diodom koji je razmatran u primjeru a).



Slika 8.82. Troprolazne sklopke s jednim ulazom i dvama izlazima; **a)** serijska, **b)** paralelna i **c)** serijsko-paralelna

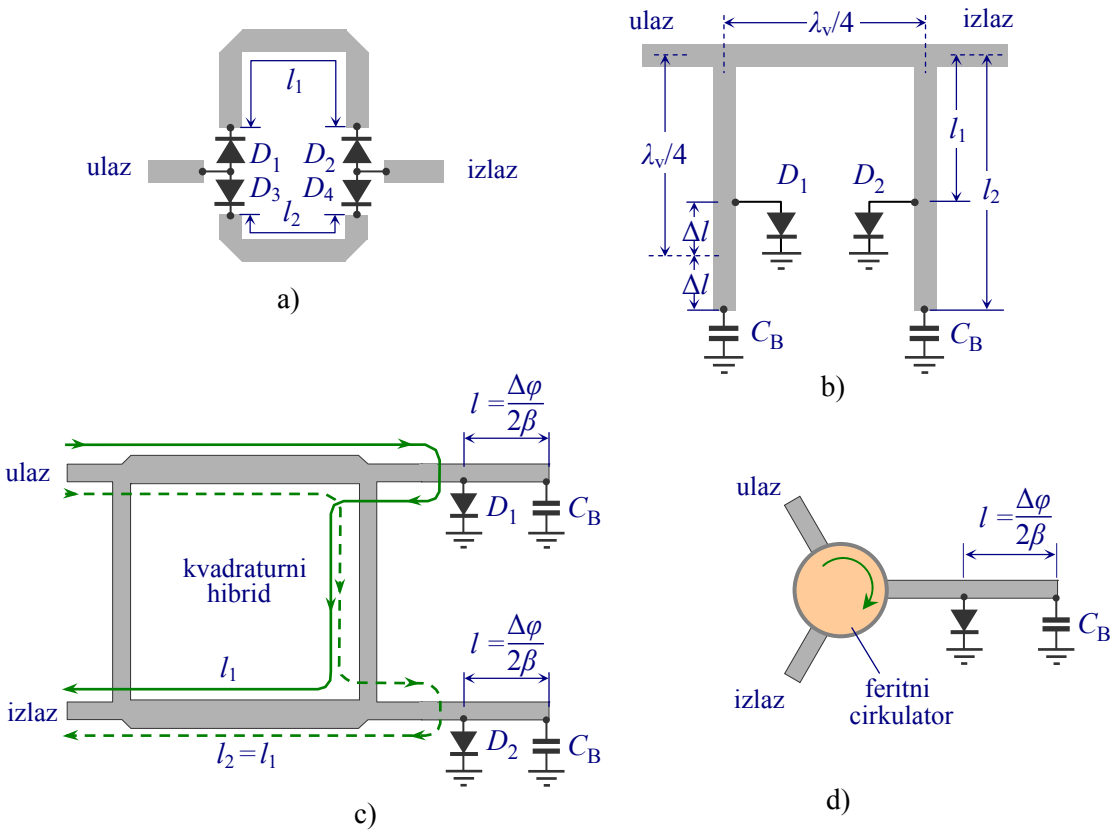
Povezivanjem više elementarnih sklopka mogu se ostvariti sklopke s više ulaznih ili izlaznih prolaza. Na slici 8.82 prikazane su izvedbe troprolaznih sklopka koje se nerijetko nalaze u mikrovalnim sustavima. Na slikama 8.82a) i b) uvijek je jedna od dioda propusno polarizirana, a druga zaporno, i obratno. Ulazni signal na prolazu 3 prekopčavanjem se preusmjerava na prolaz 1 ili prolaz 2. Pri pozitivnom naponu napajanja vodi desna dioda, a lijeva je dioda u zapiranju, što znači da se snaga iz ulaznoga prolaza prenosi na izlaz 1, dok je pritom izlaz 2 izoliran. Četvrtvalne linije u drugoj izvedbi ograničuju širinu radnog frekvencijskog područja.

U sklopu na slici 8.82c) obje su diode istodobno propusno (ili nepropusno) polarizirane. Kad su propusno polarizirane, snaga iz ulaznoga prolaza prenosi se na izlaz 1, a izlaz 2 je izoliran zbog »kratkoga spoja« propusno polarizirane diode na izlazu 2. Pri nepropusnoj polarizaciji dioda, ulazna se snaga prenosi na izlaz 2 jer serijski spojena dioda izolira izlaz 1 od ulaza, a preko poprečno spojene diode snaga se bez većih gubitaka prenosi na izlaz 2.

8.7.2. Zakretači faze i fazni modulatori

Primjenom opisanih sklopka s PIN-diodom mogu se ostvariti različiti sklopovi zakretača faze i faznih modulatora. U usporedbi s feritnim zakretačima faze, diodni zakretači faze imaju prednost u malim dimenzijama i velikoj brzini prekopčavanja RF signala. Lako ih je također ugraditi u planarne integrirane sklopove. U praksi se nalaze tri osnovne izvedbe koje se osnivaju na jednom od sljedećih načela: prekopčavanjem linija različite duljine, reaktivnim opterećenjem prijenosne linije ili primjenom različitih hibrida i feritnog cirkulatora [12].

Na slici 8.83 prikazane su mikrotrakaste izvedbe navedenih sklopova. Kad su PIN-diode D_1 i D_2 na slici 8.83a) istodobno propusno polarizirane, a PIN-diode D_3 i D_4 u zapiranju, tad signal putuje odsječkom duljine l_1. Promjenom polarizacija dioda, signal putuje odsječkom duljine l_2, pa razlika u kašnjenju signala za ta dva slučaja iznosi $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \beta\,(l_1 - l_2)$.

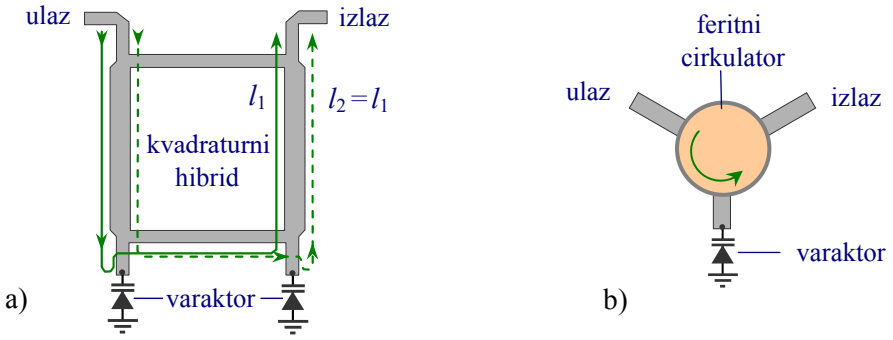


Slika 8.83. Zakretači faze i fazni modulatori s: **a)** prekopčavanjem linija različite duljine, **b)** reaktivno opterećenim linijama, **c)** kvadraturnim hibridom i **d)** feritnim cirkulatorom

Rad sklopa na slici 8.83b) temelji se na reaktivnom »opterećenju« prijenosne linije reaktancijama suprotnoga predznaka. Time se mijenja fazni koeficijent $\beta = \omega\sqrt{LC}$ jer povećanje raspodijeljenog kapaciteta prijenosne linije usporava val, a njegovo smanjenje povećava faznu brzinu u skladu s izrazom (3–16). U prvome slučaju, kad su PIN-diode D_1 i D_2 istovjetnih obilježja istodobno propusno polarizirane, tad su poprečni odsječci linije istovjetni kratko spojenim stabovima duljine l_1, koji su kraći od četvrt valne duljine za iznos Δl, pa se ponašaju kao induktivne reaktancije. No kad su diode u zapiranju, tad se odsječci ponašaju kao kratko spojeni stabovi duljine l_2 koja je dulja od četvrt valne duljine za iznos Δl. Zbog toga se stab u drugom slučaju ponaša kao reaktancija kapacitivnog karaktera jer kapaciteti C_B ostvaruju uvjete kratkoga spoja na radnoj frekvenciji. Učinci tako stvorenih diskontinuiteta mogu se kompenzirati korekcijom karakteristične impedancije uzdužnog četvrtvalnog odsječka linije i karakterističnim impedancijama dvaju linijskih segmenata od kojih se stabovi sastoje.

Prilagođen sklop zakretača faze ili faznog modulatora može se izvesti primjenom kvadraturnog hibrida i dviju dioda, kao što je prikazano na slici 8.83c). Refleksije koje nastaju na posve jednakim impedancijama PIN-dioda (D_1 i D_2) zbrajaju u fazi na »izoliranom« prolazu hibrida jer signali prijeđu put jednake duljine, $l_1 = l_2$. Stoga je pobudni prolaz prilagođen. Signali se reflektiraju na diodama kad su one propusno polarizirane, a kad su u zapiranju signali se reflektiraju na kapacitetima C_B pa prelaze dulji put trpeći tako veće fazno kašnjenje. Budući da razlika u prijeđenom putu signala iznosi $2l$, fazno je kašnjenje $\Delta\varphi = 2\beta l$.

Na sličnom se načelu zasniva rad sklopa na slici 8.83d) u kojem se umjesto kvadraturnog hibrida rabi feritni cirkulator (odjeljak 7.7.3). No ovdje je dovoljno uporabiti samo jednu diodu. Signal se reflektira na propusno polariziranoj diodi koja tad čini kratki spoj na liniji.



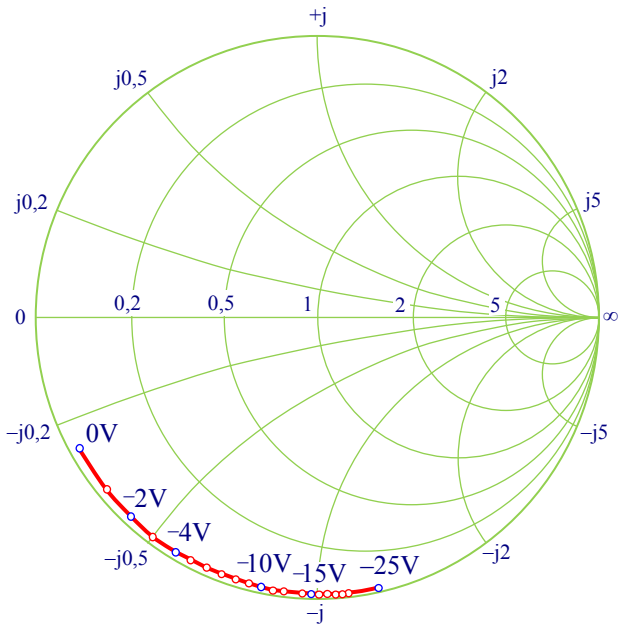
Slika 8.84. Zakretači faze i fazni modulatori s varaktorskom diodom. Izvedba: **a)** s kvadraturnim hibridom i **b)** s feritnim cirkulatorom

No pri reverznoj polarizaciji diode signal se reflektira na kapacitetu C_B s kraja prijenosne linije gdje preuzima ulogu kratkoga spoja na radnoj frekvenciji. Otuda opet fazna razlika iznosi $\Delta\varphi = 2\beta l$.

Ako se u izvedbama na slikama 8.83c) i 8.83d) PIN-dioda s odsječkom linije duljine l zamijeni varaktorskom diodom, onda se može ostvariti sklop s kontinuiranim zakretom faze, kao što je prikazano na slici 8.84 Razlika faze bit će razmjerna fazi koeficijenta refleksije varaktorske diode.

Mijenjanjem reverznog napona na diodi dolazi do promjene kapaciteta, što ima za posljedicu promjenu reaktancije pa preko nje i faze koeficijenta refleksije. U izvedbama na slici 8.84 koeficijent prijenosa izravno ovisi o koeficijentu refleksije dioda. Kako se naponom mijenja kapacitivna impedancija tipične varaktorske diode može se vidjeti na slici 8.85 u Smithovu dijagramu.

Sporim promjenama istosmjernog napona upravljanja u sklopovima na slici 8.84 ostvaruju se zakretači faze, a brzom promjenom tih veličina dobivaju se sklopovi faznih modulatora.



Slika 8.85. Tipična obilježja impedancije varaktorske diode u funkciji napona napajanja

8.7.3. Atenuatori s PIN-diodom

Umjesto rada u dvama krajnjim stanjima, u zapiranju i uz propusnu polarizaciju, PIN-dioda može se upotrijebiti i kao analogna komponenta. Tako se kontinuiranom promjenom struje napajanja u paralelnoj ili serijskoj »sklopki« (slika 8.78) trošilu mogu predati različite razine snage pa se može ostvariti sklop atenuatora. No promjenom istosmjerne struje napajanja mijenja se i vodljivost intrinzičnog sloja diode. Zbog toga se istodobno mijenjaju disipacija u samoj diodi i koeficijent refleksije na ulazu sklopa. Da bi se izbjegla promjena koeficijenta refleksije promjenom struje diode, pogodno je uporabiti rješenja s kvadraturnim hibridom ili cirkulatorom, kao u izvedbama zakretača faze s varaktorskom diodom (slika 8.84).

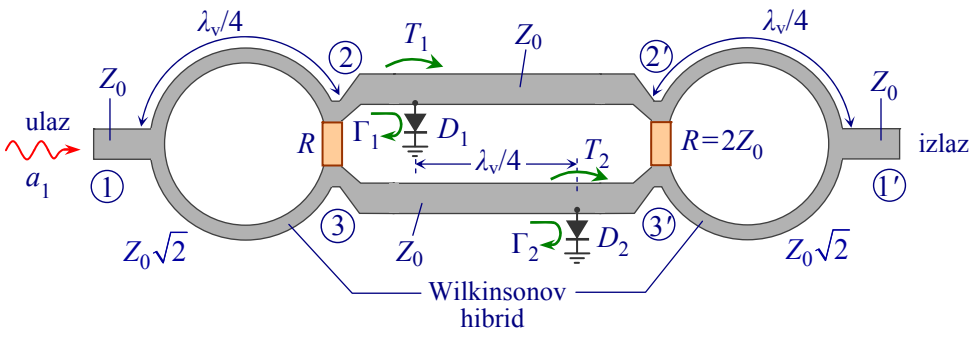
Na slici 8.86 prikazana je jedna od mogućih izvedaba prilagođenog atenuatora. Primjenom idealnog Wilkinsonova djelila (odjeljak 7.2.3) ulazna se snaga najprije dijeli na dva jednaka dijela. Prva dioda prima snagu iz prolaza 2 ulaznog djelila preko kraćeg linijskog odsječka karakteristične impedancije Z_0, no druga je dioda pobuđena iz prolaza 3 preko linijskog odsječka koji je dulji za četvrt valne duljine. Ako na prolaz 1 upada val snage a_1, onda iz prolaza 2 i 3 na diode upadaju valovi snage amplitude $a_1/\sqrt{2}$. Pritom faza signala na diodi D_2 kasni $\pi/2$ u odnosu na fazu signala na diodi D_1. Pretpostavimo li da su impedancije dioda posve jednake, reflektirani signali koji se od dioda vrate na prolaz 1 Wilkinsonova djelila imat će jednake amplitude, ali suprotne faze jer je ukupni put signala od hibrida do diode D_2 u donjem ogranku dulji za pola valne duljine. Stoga će se ti reflektirani signali na prolazu 1 poništiti. No zbog zakona očuvanja energije, snage tih reflektiranih signala u cijelosti će se disipirati u otporu $R = 2Z_0$. Otuda će prolaz 1 ostati prilagođen na središnjoj frekvenciji djelila. Koeficijenti refleksije i prijenosa na diodama mogu se izračunati iz izraza (3–70) i (3–69) kao:

$$\Gamma_D = \Gamma_{D1} = \Gamma_{D2} = \frac{-Z_0}{2r_D + Z_0} \text{ , odnosno } T_D = T_{D1} = T_{D2} = \frac{2r_D}{2r_D + Z_0},$$

gdje je ukupni otpor diode (r_D) jednak zbroju intrinzičnog i serijskog otpora PIN-diode.

Razmotrimo samo prenesene valove snage. Oni se dobivaju množenjem koeficijenata prijenosa s valovima snage koji upadaju na dvije diode jednakih obilježja. Otuda su amplitude tih valova ($a_1|T_D|/\sqrt{2}$) međusobno jednake, a i faze su im jednake. Preneseni valovi potom pobuđuju prolaze 2′ i 3′ drugog djelila. Budući da su istofazni, zbrajaju se u fazi na prolazu 1′ izlaznog djelila (konstruktivna interferencija). Iz prolaza 1 u sklop upada snaga $P_{ul} = |a_1|^2$ pa je izlazna snaga $P_{iz} = |T_D|^2 P_{ul}$. Otuda je ukupno prigušenje sklopa, na središnjoj frekvenciji, jednako unesenim gubitcima, tj.

$$\text{IL} = 10\log\frac{P_{ul}}{P_{iz}} = -10\log|T_D|^2. \qquad (8\text{–}175)$$



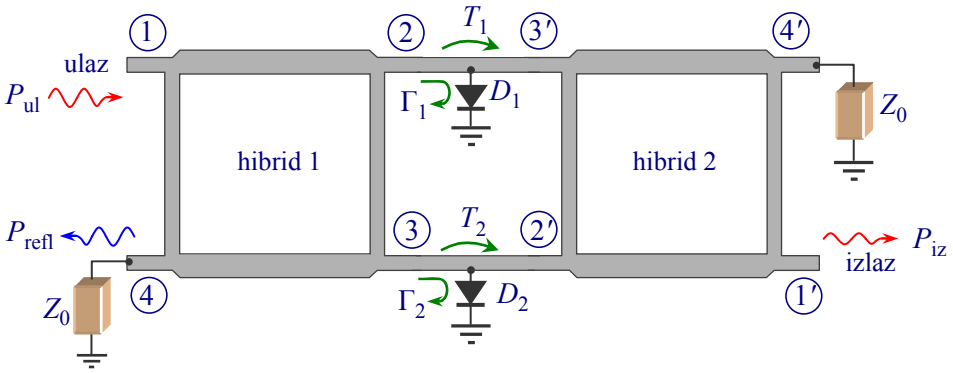
Slika 8.86. Izvedba nerefleksivnog atenuatora s dvama Wilkinsonovim djelilima

U izvodu toga izraza zanemareni su gubitci u djelilima i odsječcima linija između djelila, što znači da će u stvarnoj izvedbi gubitci biti nešto veći od onih opisanih izrazom (8–175). Linijski odsječci koji se nalaze između djelila, a čija ukupna duljina ne može biti manja od četvrt valne duljine, smanjuju korisnu širinu frekvencijskog pojasa. Unatoč tomu, primjenom širokopojasnih Wilkinsonovih djelila može se ostvariti zavidna širina radnog frekvencijskog područja uz prihvatljivu razinu odnosa stojnih valova na prolazima sklopa.

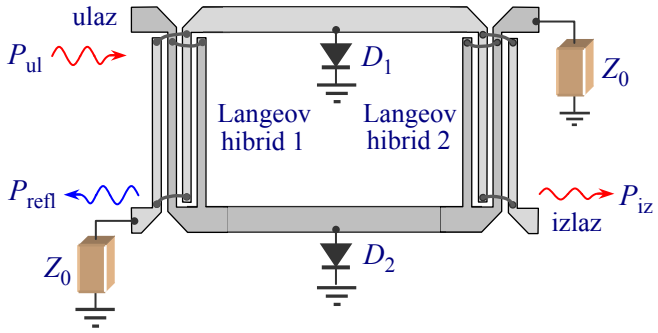
Kad impedancije dioda nisu posve jednake ili djelila nisu simetrična ili frekvencija odstupa od središnje frekvencije djelila, tad može doći do neravnoteže u sklopu. U tom se slučaju cjelokupna reflektirana snaga neće disipirati u otporu R ulaznog djelila. Osim toga, dio prenesene snage disipirat će se na otporu R izlaznog djelila pa neće stići na izlazni prolaz. Stoga u stvarnom sklopu redovito dolazi do izvjesnog razgođenja ulaznog kruga i dodatnog povećanja unesenih gubitaka.

Promjenom struje napajanja od svega nekoliko μA do nekoliko desetaka mA, atenuacijom se može upravljati u rasponu od 0,5 do 40 dB. Budući da je opisani sklop recipročan i posve simetričan, ulazni i izlazni prolazi mogu se međusobno zamijeniti bez ikakvih posljedica na rad sklopa.

Slično se ponaša i sklop s kvadratnim hibridima, prikazan na slici 8.87a), ali mu je radno frekvencijsko područje uže, zbog razmjerno uskopojasne karakteristike kvadraturnog hibrida s ograncima (odjeljak 7.3.5) u usporedbi s Wilkinsonovim djelilom (odjeljak 7.2.3). Uneseni se gubitci na središnjoj frekvenciji mogu izračunati s pomoću izraza (8–175). U nižem frekvencijskom području preporučljivo je uporabiti Langeov hibrid (3 dB-sprežnik) (odjeljak 7.3.3) kojim se može ostvariti rad u znatno širem frekvencijskom pojasu, slika 8.87b).



a)



b)

Slika 8.87. Izvedbe atenuatora s dvjema PIN-diodama i s **a)** kvadraturnim hibridima i **b)** Langeovim 3 dB sprežnicima

8.8. Tranzistorska pojačala

Pojačala su dvoprolazni aktivni sklopovi. To su izrazito nereciproćni sklopovi kod kojih se signal prenosi s ulaza na izlaz uz pojačanje, a u suprotnome je smjeru prijenos signala znatno slabije izražen, tj. u tom je smjeru prisutno prigušenje signala. Kao aktivni element za pojačavanje mikrovalnih signala može se uporabiti bipolarni ili unipolarni tranzistor (odjeljak 8.4). Svojstva i karakteristike pojačala mogu se opisati primjenom parametara mreža (odjeljak 5.3-5.5), poput *Z*-, *Y*-, *h*- i *S*-parametara. Na mikrovalnim se frekvencijama međutim ne mogu jednostavno mjeriti impedancijski i admitancijski parametri tranzistora. No lako je mjeriti raspršne parametre, pa se metodologija projektiranja mikrovalnih pojačala obično zasniva na primjeni tih parametara. Raspršni se parametri obično mjere postavljanjem tranzistora u ispitni sklop s priključnim linijama karakteristične impedancije 50 Ω. Nerijetko se tim priključnim linijama tranzistoru istodobno dovode mjerni RF signal i istosmjerno napajanje. Samo mjerenje obavlja se primjenom analizatora mreža ili nekog drugog vektorskog reflektometra. Pri projektiranju pojačala uvijek valja imati na umu da se raspršni parametri razlikuju od tranzistora do tranzistora pa čak i onda kad tranzistori nose istu tipsku oznaku. Vrijednosti raspršnih parametara također se mijenjaju zbog promjene radnih uvjeta tranzistora poput temperature, napona napajanja i pobudnog velikog RF signala. Stoga rad pojačala valja provjeriti u cjelokupnom frekvencijskom području, što se također odnosi na ispitivanje stabilnosti izvan radnog frekvencijskog područja.

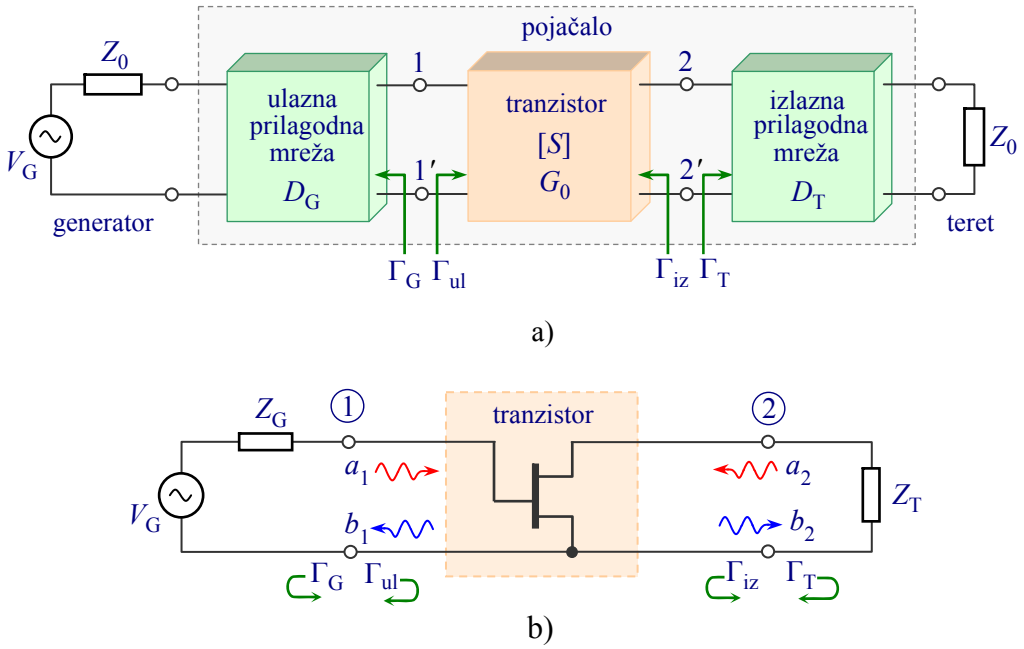
U postupku projektiranja mikrovalnog pojačala obično se žele postići sljedeći ciljevi.

- Stabilno pojačanje, tj. rad bez oscilacija.
- Maksimalno pojačanje snage.
- Minimalni faktor šuma prvoga stupnja. (Svaki tranzistor traži posebnu vrijednost impedancije generatora koja jamči minimalnu vrijednost faktora šuma. Tu impedanciju obično daje sam proizvođač tranzistora.)
- Odnos stojnih valova na ulazu i izlazu što bliže jedinici, tj. što manje vrijednosti pripadajućih koeficijenata refleksije.
- Dovoljno veliko i što izjednačenije pojačanje unutar zadanog frekvencijskog pojasa.
- Fazni odziv kao linearna funkcija frekvencije.
- Neosjetljivost na promjene nazivnih vrijednosti raspršnih parametara.

Mnogi od tih ciljeva ne mogu se postići istodobno, jer su zahtjevi koje treba ispuniti nerijetko proturječni. Stoga se strategija proračuna sastoji u traženju kompromisa, na način da se uvijek neka obilježja žrtvuju u korist drugih, značajnijih. To ponajprije ovisi o konkretnoj primjeni pojačala. Tako, primjerice, da bi se zajamčio stabilan rad pojačala, nerijetko se mora žrtvovati dio njegovog pojačanja. S druge strane, pri projektiranju niskošumnih pojačala nerijetko se dopušta veće razgođenje na ulazu da bi se ostvario manji faktor šuma. Budući da je često u igri mnoštvo različitih parametara, korisno je primijeniti neki od postupaka optimiranja s pomoću računala.

8.8.1. Pojačanje snage dvoprolazne mreže

Pojačalo s mikrovalnim tranzistorom može se prikazati kao lančani spoj triju mreža, tako da se između dviju pasivnih prilagodnih mreža bez gubitaka umetne aktivni četveropol (tranzistor), kao što je prikazano na slici 8.88a). Prilagodnim se mrežama smanjuju refleksije na ulazu i izlazu pojačala čime se povećava prijenosno pojačanje snage. Tranzistor je na ulazu opterećen impedancijom mreže koja obavlja prilagodbu s generatorom, a na izlazu je opterećen ulaznom impedancijom izlazne prilagodne mreže koja prilagođuje izlaznu impedanciju tranzistora karakterističnoj impedanciji Z_0 izlazne prijenosne linije.



Slika 8.88. a) Tranzistorsko pojačalo; **b)** pojednostavljeni sklop pojačala

Temeljni sklop pojačala može se predočiti tranzistorom koji je na ulazu (prolaz 1) opterećen impedancijom generatora, a na izlazu (prolaz 2) impedancijom tereta, kao što je prikazano na slici 8.88b). Za opisivanje mikrovalnih pojačala prikladno je primijeniti rasprsne parametre i sljedeće tri definicije pojačanja snage [1], [10], [15]:

- pogonsko pojačanje snage = $G_P = P_T/P_{ul}$ (ili kraće *pojačanje snage*) označuje omjer snage disipirane u teretu Z_T i snage koju generator predaje dvoprolaznoj mreži. Stoga to pojačanje ne ovisi o Z_G, premda ponašanje nekih aktivnih sklopova znatno ovisni o Z_G;
- prijenosno pojačanje snage = $G_T = P_T/P_{AG}$ označuje omjer između snage predane teretu i raspoložive snage generatora. Ono ovisi i o Z_G i o Z_T pa mu se često daje prednost u odnosu na druge dvije definicije pojačanja;
- raspoloživo pojačanje snage = $G_A = P_{AM}/P_{AG}$ označuje omjer raspoložive snage na izlazu dvoprolazne mreže i raspoložive snage generatora. Ovo pojačanje ovisi o Z_G, ali ne ovisi o Z_T. No karakteristike mnogih aktivnih sklopova ovise o Z_T.

Ta su tri pojačanja funkcije rasprsnih parametara aktivne dvoprolazne mreže i koeficijenata refleksije pripadajućih impedancija koje su priključene na ulazni i izlazni prolaz tranzistora. Ako tranzistor nije bezuvjetno stabilan, onda su ta tri pojačanja općenito različita. No za uvjetno stabilni tranzistor, o kojem ćemo reći nešto više u kasnijim odjeljcima, razlike u pojačanjima obično nisu velike.

U razmatranjima koja slijede upotrebljavat ćemo rasprsne parametre tranzistora, pa ćemo najprije definirati koeficijente refleksije na impedancijama generatora, odnosno tereta, kao:

$$\Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0}, \qquad \Gamma_T = \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0}, \tag{8–176}$$

gdje je Γ_G koeficijent refleksije generatora, Γ_T koeficijent refleksije tereta (trošila), a Z_0 karakteristična impedancija mjernog sustava u kojem su izmjereni rasprsni parametri.

U ulaznom krugu proizvoljno zaključene dvoprolazne mreže u općem slučaju ne vladaju uvjeti za maksimalni prijenos snage. Ulaznoj impedanciji tranzistora ili aktivne mreže pripada odgovarajući koeficijent refleksije Γ_{ul} koji je definiran izrazom (5–50) u odjeljku 5.4.1, tj.

$$\Gamma_{\mathrm{ul}} = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_{\mathrm{T}}}{1 - S_{22}\Gamma_{\mathrm{T}}} = \frac{Z_{\mathrm{ul}} - Z_0}{Z_{\mathrm{ul}} + Z_0}, \tag{8–177}$$

gdje je Z_{ul} ulazna impedancija tranzistora na prolazu 1 kad mu je izlazni prolaz zaključen proizvoljnom impedancijom tereta Z_{T}.

Jednako tako, izlaznoj impedanciji Z_{iz} na prolazu 2 odgovara koeficijent refleksije Γ_{iz} definiran izrazom (5–51), koji glasi

$$\Gamma_{\mathrm{iz}} = \frac{b_2}{a_2} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_{\mathrm{G}}}{1 - S_{11}\Gamma_{\mathrm{G}}} = \frac{Z_{\mathrm{iz}} - Z_0}{Z_{\mathrm{iz}} + Z_0}, \tag{8–178}$$

gdje je ulazni prolaz zaključen proizvoljnom unutarnjom impedancijom generatora, Z_{G}.

Izraz (5–62) u odjeljku 5.4.1 i izraz (5–224) u odjeljku 5.8 pokazuju da mreža iz generatora prima snagu

$$P_{\mathrm{ul}} = \frac{1}{2}|a_1|^2\left(1 - |\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2\right) = \frac{1}{2}|b_{\mathrm{G}}|^2 \frac{1 - |\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2}{|1 - \Gamma_{\mathrm{G}}\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2}\ . \tag{8–179}$$

Slično je i u izlaznom krugu, gdje mreža (tranzistor) predaje teretu snagu

$$P_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}|b_2|^2 - \frac{1}{2}|a_2|^2 = \frac{1}{2}|b_2|^2\left(1 - |\Gamma_{\mathrm{T}}|^2\right), \tag{8–180}$$

gdje je $|b_2|^2/2$ snaga koja upada na teret, a $|a_2|^2/2$ reflektirana snaga od tereta. Iz jednadžbe izlaznog kruga pojačala $b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$ i veze $\Gamma_{\mathrm{T}} = a_2/b_2$, tj. $a_2 = \Gamma_{\mathrm{T}}b_2$, izlazi

$$b_2(1 - S_{22}\Gamma_{\mathrm{T}}) = S_{21}a_1. \tag{8–181}$$

Primjenom definicije pogonskog pojačanja snage te primjenom izraza (8–181), (8–180) i (8–179) dobiva se

$$G_{\mathrm{P}} = \frac{P_{\mathrm{T}}}{P_{\mathrm{ul}}} = \frac{|b_2|^2\left(1 - |\Gamma_{\mathrm{T}}|^2\right)}{|a_1|^2\left(1 - |\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2\right)} = \frac{1}{1 - |\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2}|S_{21}|^2 \frac{1 - |\Gamma_{\mathrm{T}}|^2}{|1 - S_{22}\Gamma_{\mathrm{T}}|^2}. \tag{8–182}$$

Ta je definicija posebno pogodna za određivanje pojačanja snage lančanog spoja (kaskade) pojačala. Može se pokazati da cjelokupno pogonsko pojačanje kaskade N pojačala iznosi

$$G_{\mathrm{P}} = G_{\mathrm{P1}} \cdot G_{\mathrm{P2}} \cdots G_{\mathrm{P}N}, \tag{8–183}$$

što je jednako umnošku pogonskih pojačanja pojedinačnih pojačala u kaskadi. Ulazna snaga u neki stupanj jednaka je snazi koju tom stupnju predaje prethodni stupanj, $P_{\mathrm{ul}(n)} = P_{\mathrm{T}(n-1)}$, jer je ulazna impedancija sljedećeg stupnja zapravo zaključna impedancija prethodnog stupnja.

Raspoloživa ili maksimalno ostvariva snaga generatora P_{AG} dobiva se pod uvjetom konjugirano kompleksne prilagodbe ($\Gamma_{\mathrm{G}} = \Gamma_{\mathrm{ul}}^*$) pa primjena tog uvjeta na izraz (8–179) daje

$$P_{\mathrm{AG}} = \frac{1}{2}|b_{\mathrm{G}}|^2 \frac{1}{1 - |\Gamma_{\mathrm{G}}|^2} = \frac{1}{2}|a_1|^2 \frac{|1 - \Gamma_{\mathrm{G}}\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2}{\left(1 - |\Gamma_{\mathrm{G}}|^2\right)}. \tag{8–184}$$

Iz definicije prijenosnog pojačanja te izraza (8–180), (8–184) i (8–181) izlazi

$$G_{\mathrm{T}} = \frac{P_{\mathrm{T}}}{P_{\mathrm{AG}}} = \frac{1 - |\Gamma_{\mathrm{G}}|^2}{|1 - \Gamma_{\mathrm{G}}\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2}|S_{21}|^2 \frac{1 - |\Gamma_{\mathrm{T}}|^2}{|1 - S_{22}\Gamma_{\mathrm{T}}|^2}. \tag{8–185}$$

Uvrštenjem izraza (8–177) u (8–185) dobiva se

$$G_T = \frac{\left(1-|\Gamma_G|^2\right)|S_{21}|^2\left(1-|\Gamma_T|^2\right)}{\left|\left(1-S_{11}\Gamma_G\right)\left(1-S_{22}\Gamma_T\right)-S_{12}S_{21}\Gamma_G\Gamma_T\right|^2}, \tag{8–186}$$

pa se uvrštenjem izraza (8–178) u (8–186) izraz (8–185) konačno svodi na ekvivalentan oblik

$$G_T = \frac{1-|\Gamma_G|^2}{|1-S_{11}\Gamma_G|^2}|S_{21}|^2\frac{1-|\Gamma_T|^2}{|1-\Gamma_{iz}\Gamma_T|^2}. \tag{8–187}$$

Izraz za raspoloživo pojačanje snage izravno izlazi iz izraza (8–187) uz uvjet $\Gamma_T = \Gamma_{iz}^*$, tj.

$$G_A = \frac{P_{AM}}{P_{AG}} = \frac{1-|\Gamma_G|^2}{|1-S_{11}\Gamma_G|^2}|S_{21}|^2\frac{1}{1-|\Gamma_{iz}|^2}, \tag{8–188}$$

gdje je P_{AM} raspoloživa snaga na izlazu mreže (tranzistora).

Primjenom izraza (5–57), može se lako pokazati da je pogonsko pojačanje snage jednako umnošku $M_{ul}G_T$, a raspoloživo pojačanje snage jednako umnošku $M_{iz}G_T$, gdje su M_{ul} i M_{iz} faktori razgođenja u ulaznom, odnosno izlaznom krugu pojačala.

Ako je tranzistor istodobno opterećen prilagodnim impedancijama Z_0 na ulazu i izlazu, kao prilikom mjerenja raspršnih parametara, onda nastaje poseban slučaj prijenosnog pojačanja snage. Budući da je tada $\Gamma_T=\Gamma_G=0$, izrazi (8–185) i (8–187) pojednostavnjuju se na oblik

$$G_0 = |S_{21}|^2. \tag{8–189}$$

To se pojačanje snage obično naziva *intrinzično pojačanje snage* tranzistora.

Primjer 8.3. Usporedba definicija pojačanja snage

Raspršni parametri mikrovalnog tranzistora na frekvenciji 10 GHz izmjereni su u mjernom sustavu karakteristične impedancije 50 Ω:

$$S_{11} = 0{,}6\angle -170° \qquad S_{12} = 0{,}05\angle 20°$$
$$S_{21} = 2{,}0\angle 80° \qquad S_{22} = 0{,}5\angle -70°.$$

Na pojačalo su priključeni generator impedancije $Z_G=25$ Ω i teret impedancije $Z_T=60$ Ω. Izračunati pogonsko, prijenosno i raspoloživo pojačanje snage.

Rješenje:

Koeficijenti refleksije generatora i tereta izravno se dobivaju iz izraza (8–176):

$$\Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0} = \frac{25-50}{25+50} = -0{,}333, \qquad \Gamma_T = \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0} = \frac{60-50}{60+50} = 0{,}091.$$

Iz izraza (8–177) i (8–178) mogu se izračunati koeficijenti refleksije na ulazu i izlazu tranzistora:

$$\Gamma_{ul} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_T}{1-S_{22}\Gamma_T} = 0{,}6\angle -170° + \frac{(0{,}05\angle 20°)(2{,}0\angle 80°)0{,}091}{1-(0{,}5\angle -70°)0{,}091} = 0{,}6\angle -171°,$$

$$\Gamma_{iz} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_G}{1-S_{11}\Gamma_G} = 0{,}5\angle -70° + \frac{(0{,}05\angle 20°)\cdot(2{,}0\angle 80°)\cdot(-0{,}333)}{1-(0{,}6\angle -170°)\cdot(-0{,}333)} = 0{,}54\angle -70{,}6°.$$

Pogonsko pojačanje snage izlazi iz izraza (8–182)

$$G_{\mathrm{P}} = \frac{1}{1-|\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2}|S_{21}|^2\frac{1-|\Gamma_{\mathrm{T}}|^2}{|1-S_{22}\Gamma_{\mathrm{T}}|^2} = \frac{2^2\cdot(1-0{,}091^2)}{(1-0{,}6^2)\cdot|1-0{,}5\angle-70°)\cdot(-0{,}333)|^2} = 6{,}38 \quad (=8{,}05\,\mathrm{dB})\,.$$

Iz izraza (8–185) za prijenosno se pojačanje snage dobiva

$$G_{\mathrm{T}} = \frac{1-|\Gamma_{\mathrm{G}}|^2}{|1-\Gamma_{\mathrm{G}}\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2}|S_{21}|^2\frac{1-|\Gamma_{\mathrm{T}}|^2}{|1-S_{22}\Gamma_{\mathrm{T}}|^2} =$$

$$= \frac{(1-0{,}333^2)\cdot 2^2\cdot(1-0{,}091^2)}{|1-(-0{,}333)\cdot(0{,}6\angle-171°)|^2\cdot|1-(0{,}5\angle-70°)\cdot 0{,}091|^2} = 5{,}63 \quad (=7{,}5\,\mathrm{dB})\,,$$

a iz izraza (8–188) raspoloživo je pojačanje snage

$$G_{\mathrm{A}} = \frac{1-|\Gamma_{\mathrm{G}}|^2}{|1-S_{11}\Gamma_{\mathrm{G}}|^2}|S_{21}|^2\frac{1}{1-|\Gamma_{\mathrm{iz}}|^2} = \frac{(1-0{,}333^2)\cdot 2^2}{|1-(0{,}6\angle-170°)(-0{,}333)|^2\cdot(1-0{,}54^2)} = 7{,}78 \ (=8{,}9\,\mathrm{dB})\,.$$

Može se uočiti da se za odabrani tranzistor vrijednosti svih triju pojačanja međusobno razlikuju.

Drugi poseban slučaj nastaje za $S_{12}=0$, kad nema prijenosa snage s izlaza na ulaz pojačala, nego postoji samo prijenos snage od generatora prema teretu. Stoga se takvo pojačalo naziva *unilateralno pojačalo*. Tad se izrazi (8–117) i (8–178) svode ove jednostavne formule:

$$\Gamma_{\mathrm{ul}} = S_{11}\,, \qquad \text{za } S_{12}=0 \tag{8–190a}$$

$$\Gamma_{\mathrm{iz}} = S_{22}\,, \qquad \text{za } S_{12}=0. \tag{8–190b}$$

Drugim riječima, impedancija tereta ne utječe na ulaznu impedanciju pojačala, a ni impedancija generatora ne utječe na izlaznu impedanciju pojačala. Uz te se uvjete iz izraza (8–185) dobiva prijenosno pojačanje za unilateralni slučaj, tj.

$$G_{\mathrm{TU}} = \frac{1-|\Gamma_{\mathrm{G}}|^2}{|1-S_{11}\Gamma_{\mathrm{G}}|^2}|S_{21}|^2\frac{1-|\Gamma_{\mathrm{T}}|^2}{|1-S_{22}\Gamma_{\mathrm{T}}|^2}\,. \tag{8–191}$$

U tom se izrazu jasno vide učinci prilagodbe na ulazu i izlazu pojačala. Zato se veličine

$$D_{\mathrm{G}} = \frac{1-|\Gamma_{\mathrm{G}}|^2}{|1-S_{11}\Gamma_{\mathrm{G}}|^2} \quad \text{i} \quad D_{\mathrm{T}} = \frac{1-|\Gamma_{\mathrm{T}}|^2}{|1-S_{22}\Gamma_{\mathrm{T}}|^2}\,, \tag{8–192}$$

obično nazivaju *dobitci prilagodbe* ulazne i izlazne prilagodne mreže. Sad se izraz za unilateralno prijenosno pojačanje može napisati u skraćenom obliku kao umnožak triju faktora:

$$G_{\mathrm{TU}} = D_{\mathrm{G}}G_0D_{\mathrm{T}}\,, \tag{8–193}$$

gdje je uvršten izraz (8–189) za intrinzično pojačanje, $G_0=|S_{21}|^2$.

Ako je $|S_{11}|<1$ i $|S_{22}|<1$, unilateralni se tranzistor uvijek može istodobno konjugirano kompleksno prilagoditi na ulazu i izlazu ($\Gamma_{\mathrm{G}} = S_{11}^*$ i $\Gamma_{\mathrm{T}} = S_{22}^*$) pa se izraz (8–192) svodi na oblik za *maksimalno unilateralno prijenosno pojačanje*

$$G_{\mathrm{TU\,maks}} = \frac{1}{1-|S_{11}|^2}|S_{21}|^2\frac{1}{1-|S_{22}|^2}\,, \tag{8–194}$$

gdje se izrazi (8–192) za dobitke prilagodbe svode na jednostavniji oblik, tj.

$$D_{G0} = \frac{1}{1-|S_{11}|^2}, \qquad D_{T0} = \frac{1}{1-|S_{22}|^2}. \tag{8–195}$$

Tad su sva tri pojačanja međusobno jednaka ($G_T = G_P = G_A$) i proračun prilagodnih mreža postaje znatno jednostavniji. Stoga, primjerice, za prijenosno pojačanje umjesto izraza (8–187) treba uzeti izraz (8–191).

U praktičnim se izvedbama nerijetko nalaze tranzistori s malim vrijednostima parametra $|S_{12}|$ pa se s pravom postavlja pitanje može li se u tom slučaju parametar S_{12} posve zanemariti, a da se pritom obilježja pojačala znatnije ne poremete. Odgovor na pitanje koliko je neki tranzistor »unilateralan« može se, primjerice, dobiti promatranjem omjera između prijenosnog pojačanja i unilatralnog prijenosnog pojačanja. Omjer izraza (8–185) i (8–191) daje

$$\frac{G_T}{G_{TU}} = \left|\frac{1-\Gamma_{ul}\Gamma_G}{1-S_{11}\Gamma_G}\right|^{-2} = \left|1-\frac{\Gamma_G(\Gamma_{ul}-S_{11})}{1-S_{11}\Gamma_G}\right|^{-2} = \left|1-\frac{S_{12}S_{21}\Gamma_G\Gamma_{ul}}{(1-S_{11}\Gamma_G)(1-S_{22}\Gamma_T)}\right|^{-2}. \tag{8–196}$$

To se može kraće napisati kao

$$\frac{G_T}{G_{TU}} = \frac{1}{|1-u|^2}, \tag{8–197}$$

gdje veličina

$$u = \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_G\Gamma_{ul}}{(1-S_{11}\Gamma_G)(1-S_{22}\Gamma_T)} \tag{8–198}$$

pokazuje koliko se omjer (8–196) razlikuje od idealne jedinične vrijednosti. Ako je poznata vrijednost u, onda se u skladu s izrazom (8–197) omjer G_T/G_{TU} može naći u rasponu

$$\frac{1}{(1+|u|)^2} < \frac{G_T}{G_{TU}} < \frac{1}{(1-|u|)^2}.$$

Pri konjugirano kompleksnoj prilagodbi ($\Gamma_G = S_{11}^*$, $\Gamma_T = S_{22}^*$), kad pojačanje G_{TU} postiže maksimalnu vrijednost, tad se pogreška nalazi unutar granica

$$\frac{1}{(1+U)^2} < \frac{G_T}{G_{TU}} < \frac{1}{(1-U)^2}, \tag{8–199}$$

gdje realna veličina U označuje *mjeru unilateralnosti* koja iznosi

$$U = \frac{|S_{11}S_{12}S_{21}S_{22}|}{\left(1-|S_{11}|^2\right)\left(1-|S_{22}|^2\right)}. \tag{8–200}$$

Što je vrijednost U manja, tranzistor ili pojačalo bliže su unilateralnom. Manji U može se postići tehnološkim minimiziranjem parametra $|S_{12}|$, što se slaže s intuitivnom predodžbom. No i smanjivanje parametara $|S_{11}|$ i $|S_{22}|$ ima sličan učinak. Premda parametar $|S_{21}|$ povećava faktor U, uvijek ga se želi učiniti što je moguće većim, jer je izravno povezan s pojačanjem. Stoga tranzistori s malim umnoškom $|S_{12}S_{21}|$ i sa S_{11} i S_{22} blizu središta Smithova dijagrama upućuju na unilateralni slučaj. No tranzistori s malim $|S_{12}S_{21}|$, ali velikim $|S_{11}|$ ili $|S_{22}|$ mogu biti izrazito neunilateralni pa prije proračuna pojačala uvijek valja provjeriti vrijednost U.

Zbog frekvencijske ovisnosti raspršnih parametara, veličina U ovisi o frekvenciji. Račun pokazuje da je za vrijednosti $U < 0{,}05$ odstupanje pojačanja manje od 0,45 dB, što je prihvatljiva vrijednost u većini praktičnih izvedaba.

8.8.2. Stabilnost pojačala

Za razliku od pasivnih mreža, aktivne mreže mogu pokazivati nestabilnosti u radu. Naime, aktivne mreže ostvaruju pojačanje crpeći istosmjernu snagu iz izvora napajanja te ju potom djelomično pretvaraju u snagu korisnog mikrovalnog signala. U određenim se okolnostima pri toj pretvorbi snage mogu pojaviti spontane oscilacije pa mreža postaje neupotrebljiva kao pojačalo. Tako nastale nestabilnosti ili oscilacije obično su posljedica pojave »*negativnog otpora*« na prolazima aktivne mreže. Je li neko pojačalo stabilno ili nije može se ustanoviti uz pomoć uvjeta koji traži da zbroj snaga koje se reflektiraju na prolazima ili iz njih izlaze mora biti manji od zbroja svih snaga koje upadaju u mrežu (vidjeti odjeljak 5.4.4). Da bi se onemogućile nestabilnosti u radu pojačala, potrebno je suzbiti pojavu negativnog otpora na obama prolazima za sve moguće kombinacije pasivnih impedancija trošila (tereta) i generatora te za sve frekvencije na kojima aktivna komponenta, tj. tranzistor, ostvaruje pojačanje. Kad na bilo kojem prolazu realni dio ulazne impedancije poprimi negativnu vrijednost, tj. upućuje na negativni otpor, tad je modul koeficijenta refleksije na prolazu veći od jedinice.

Pretpostavimo li da ulazna impedancija $Z_{ul} = -R + \mathrm{j}X_{ul}$ aktivne mreže na slici 8.89a) sadrži negativni otpor ($R_{ul} = -R$), modul pripadajućeg koeficijenta refleksije može se izraziti kao

$$|\Gamma_{ul}| = \left|\frac{-R + \mathrm{j}X - Z_0}{-R + \mathrm{j}X + Z_0}\right| = \sqrt{\frac{(Z_0 + R)^2 + X^2}{(Z_0 - R)^2 + X^2}} > 1 .$$

Ako se izraz za struju u ulaznom krugu napiše kao

$$I_{ul} = \frac{V_G}{R_G - R_{ul} + \mathrm{j}(X_{ul} + X_G)} ,$$

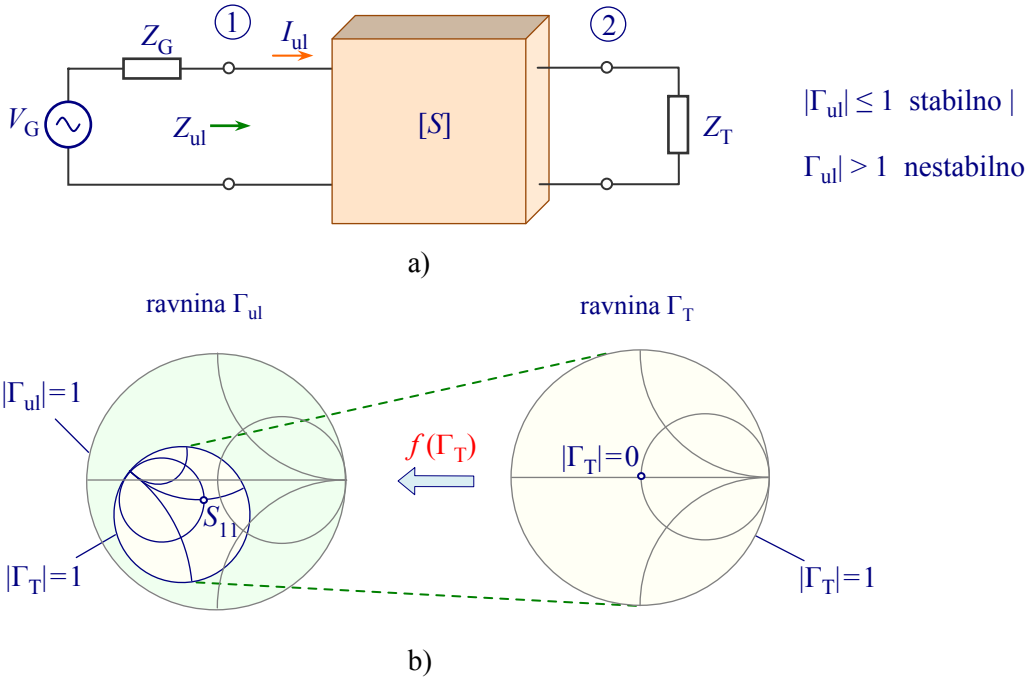
a na nekoj se frekvenciji dogoditi da je $R_G = R_{ul}$ i $X_G + X_{ul} = 0$, onda će struja I_{ul} težiti u beskonačnost (slika 89a)). Dakle, čak i ako se napon generatora postavi na nulu, i najmanje električne fluktuacije poput šuma mogu izazvati samopobudu oscilacija na frekvenciji za koju je ukupna impedancija u ulaznom krugu jednaka nuli (vidjeti odjeljak 8.9). Čim se pojave parazitske oscilacije (neovisno o njihovoj frekvenciji) s nerijetko velikim amplitudama, pojačalo više neće moći ispravno raditi ni u zadanom frekvencijskom području. To se događa zbog toga što nelinearni učinci, poput ispravljačkog efekta i miješanja, izazivaju promjene u statičkoj radnoj točki tranzistora te postaju izvor novih parazitskih signala (vidjeti odjeljak 8.2).

Koeficijent refleksije ulazne impedancije dvoprolazne mreže opterećene na izlazu trošilom Z_T čiji koeficijent refleksije iznosi Γ_T, može se prikazati izrazom

$$\Gamma_{ul} = f(\Gamma_T) = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_T}{1 - S_{22}\Gamma_T} = \frac{S_{11} - \Gamma_T\Delta}{1 - S_{22}\Gamma_T} . \qquad (8\text{–}201)$$

Taj izraz označuje Möbiusovu transformaciju $f(\Gamma_T)$ s pomoću koje se proizvoljna impedancija tereta može transformirati u ulaznu impedanciju mreže. Möbiusovom transformacijom kružnica se uvijek preslikava u kružnicu (vidjeti dodatak F), gdje je pravac poseban slučaj kružnice beskonačnog polumjera.

Ako je barem jedan od prijenosnih parametara jednak nuli ($S_{12} = 0$ ili $S_{21} = 0$), onda impedancija tereta neće utjecati na ulaznu impedanciju, a niti će impedancija generatora utjecati na izlaznu impedanciju mreže. Tad transformirana kružnica degenerira u točku pa koeficijent refleksije na ulazu postaje jednak parametru S_{11}. To je poseban slučaj koji označuje posve nereciprocnu mrežu u kojoj se prijenos snage ostvaruje samo u jednome smjeru (unilateralno).



Slika 8.89. Grafička interpretacija uvjeta stabilnosti mreže za ulazni prolaz. **a)** Aktivna dvoprolazna mreža; **b)** transformacija jedinične kružnice Smithova dijagrama $|\Gamma_T|=1$ iz ravnine impedancije tereta u ravninu ulazne impedancije, tj. u ravnini Γ_{ul}

Posve reaktivan teret dat će najveće odstupanje ulaznog koeficijenta refleksije od raspršnog parametra S_{11} i time se može ostvariti maksimalni koeficijent refleksije na ulazu mreže. To se može vidjeti na primjeru transformacije kružnice $|\Gamma_T|=1$ na ulaz mreže s pomoću Möbiusove transformacije (8–201). Ovdje se pravac može uzeti kao poseban slučaj kružnice beskonačnog polumjera. Na slici 8.89b) zorno je prikazana transformacija kružnice $|\Gamma_T| = 1$ u ravninu ulaznog koeficijenta refleksije Γ_{ul}. U Smithovu dijagramu takva kružnica označuje lokus normirane ulazne impedancije svih mogućih reaktivnih »opterećenja« izlaznog prolaza mreže. Ako transformirana kružnica $|\Gamma_T|=1$ ne izlazi izvan Smithova dijagrama, onda je ulazni krug bezuvjetno stabilan. Kad to istodobno vrijedi i za izlazni krug, tad kažemo da je mreža *bezuvjetno stabilna*. Ako je tomu tako na svim frekvencijama, onda je mreža *apsolutno stabilna*. Pritom je očito da su tada istodobno zadovoljeni uvjeti $|S_{11}|<1$ i $|S_{22}|<1$. To su nužni, ali ne i dovoljni, uvjeti da bi neka mreža bila bezuvjetno stabilna. Stoga ćemo potanje razmotriti uvjete stabilnosti. Za izlaznu impedanciju mreže dobiva se simetričan izraz

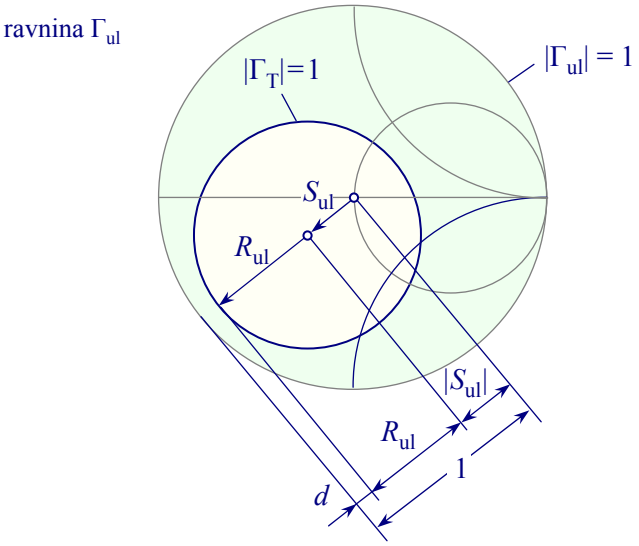
$$\Gamma_{iz} = f(\Gamma_G) = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_G}{1-S_{11}\Gamma_G} = \frac{S_{22}-\Gamma_G\Delta}{1-S_{11}\Gamma_G}. \qquad (8\text{–}202)$$

Dakle, ako veličine Γ_T i Γ_G opisuju kružnice, onda i veličine Γ_{ul} i Γ_{iz} opisuju kružnice jer oblik izraza (8–201) i (8–202) odgovara Möbiusovoj transformaciji (F1) i (F2) iz dodatka F.

Time su ispunjeni uvjeti da se ocjena bezuvjetne stabilnosti aktivne dvoprolazne mreže može provesti na osnovi geometrijskih uvjeta koji glase:

$$|\Gamma_{ul}| = \left|\frac{S_{11}-\Gamma_T\Delta}{1-S_{22}\Gamma_T}\right| < 1, \qquad (8\text{–}203)$$

$$|\Gamma_{iz}| = \left|\frac{S_{22}-\Gamma_G\Delta}{1-S_{11}\Gamma_G}\right| < 1. \qquad (8\text{–}204)$$



Slika 8.90. Grafički prikaz uvjeta stabilnosti

Ti se uvjeti mogu izraziti riječima: *da bi mreža bila bezuvjetno stabilna moduli koeficijenata refleksije na ulazu i izlazu te mreže moraju biti manji od jedinice za sve moguće kombinacije pasivnih impedancija tereta i generatora*.

U izrazima (8–203) i (204) implicitno su prisutna već spomenuta dva nužna uvjeta za bezuvjetnu stabilnost

$$|S_{11}|<1 \quad \text{i} \quad |S_{22}|<1, \tag{8–205}$$

uz $\Gamma_T=0$, odnosno $\Gamma_G=0$.

Razmotrimo sad uvjet za ocjenu bezuvjetne stabilnosti aktivne dvoprolazne mreže koji se temelji na geometrijskom uvjetu (8–203) za ulaz dvoprolazne mreže prikazane na slici 8.89.

Analizu stabilnosti provest ćemo samo za ulazni prolaz (slika 8.89) jer se zbog simetrije izraza (8–203) i (8–204) mogu izravno odrediti uvjeti stabilnosti za izlazni prolaz međusobnom zamjenom indeksa. Budući da uvjeti (8–205) nisu dovoljno strogi da bi se neka mreža mogla proglasiti bezuvjetno stabilnom, valja podrobnije analizirati uvjete stabilnosti. Rubni uvjet za bezuvjetnu stabilnost može se predočiti slikom 8.90. Da bi vrijednost $|\Gamma_{ul}|$ uvijek bila manja od jedinice za bilo koji pasivni teret, kružnica $|\Gamma_{ul}|$ za $|\Gamma_T| = 1$ mora cijelim svojim opsegom ležati unutar jedinične kružnice, tj. unutar Smithova dijagrama. To ujedno znači da polumjer R_{ul} i udaljenost središta od ishodišta $|S_{ul}|$ budu istodobno manji od jedan. U skladu sa slikom 8.90, za najgori slučaj, nužan uvjet za bezuvjetnu stabilnost može se napisati kao

$$|S_{ul}|+R_{ul}<1. \tag{8–206}$$

Izrazi za središte i polumjer kružnica ulaznog koeficijenta refleksije, za $|\Gamma_T|=1$ izvedeni su u dodatku F. Tako iz izraza (F7) i (F8) izlazi:

$$S_{ul}=\frac{S_{11}-S_{22}^{*}\Delta}{1-|S_{22}|^2}, \tag{8–207}$$

$$R_{ul}=\left|\frac{S_{12}S_{21}}{1-|S_{22}|^2}\right|. \tag{8–208}$$

Može se uočiti da izraz (8–207) podsjeća na izraz (8–203), ako se za koeficijente refleksije tereta i generatora uzme $\Gamma_T = S_{22}^{*}$. Iz izraza (8–208) vidi se da će polumjer biti najmanji, ako

za aktivnu mrežu vrijedi $|S_{12}| \ll 1$, a istodobno se vrijednost parametra $|S_{22}|$ ne nalaze blizu jedinice, što upućuje na unilateralni slučaj. Uz to mora biti zadovoljen i dodatni uvjet $|S_{22}|<1$.

Uvrštenje izraza (8–207) i (8–208) u nejednakost (8–206) daje

$$\left|\frac{S_{11}-S_{22}^{*}\Delta}{1-|S_{22}|^{2}}\right|+\left|\frac{S_{12}S_{21}}{1-|S_{22}|^{2}}\right|<1. \tag{8–209}$$

Svođenjem na zajednički nazivnik, nejednakost (8–209) poprima oblik

$$\left|1-|S_{22}|^{2}\right|>\left|S_{11}-S_{22}^{*}\Delta\right|+\left|S_{12}S_{21}\right|. \tag{8–210}$$

Budući da je za bezuvjetnu stabilnost nužan uvjet $|S_{22}|<1$, s lijeve strane nejednakosti može se ispustiti apsolutna vrijednost pa izraz (8–210) izravno prelazi u konačni oblik

$$\mu'=\frac{1-|S_{22}|^{2}}{\left|S_{11}-S_{22}^{*}\Delta\right|+\left|S_{12}S_{21}\right|}>1, \tag{8–211}$$

poznat kao *Edwardsov faktor stabilnosti* koji je u [19] izveden na nešto zamršeniji način. Može se pokazati da je to nužan i dovoljan uvjet za određivanje bezuvjetne stabilnosti aktivne mreže. Drugim riječima, ako mreža zadovoljava nejednadžbu (8–211), onda je mreža bezuvjetno stabilna. Očito je da su u izrazu (8–211) implicitno sadržani i uvjeti $R_{ul}<1$ i $|S_{ul}|<1$. Razmatranjem uvjeta $|S_{iz}|+R_{iz}<1$ za izlazni krug dobiva se dual uvjeta stabilnosti (8–211) u kojem su indeksi 1 i 2 međusobno zamijenjeni.

Za unilateralnu mrežu ($S_{12}=0$) iz izraza (8–211), i njegovog dualnog izraza, izlazi

$$\frac{1-|S_{11}|^{2}}{|S_{11}|^{2}\left|1-|S_{11}|^{2}\right|}>1, \qquad \frac{1-|S_{22}|^{2}}{|S_{11}|^{2}\left|1-|S_{22}|^{2}\right|}>1, \tag{8–212}$$

što se svodi na nužne i dovoljne uvjete (8–205) za bezuvjetnu stabilnost unilateralne mreže.

Izraz (8–211) može se preinačiti u oblik

$$K=\frac{1-|S_{11}|^{2}-|S_{22}|^{2}+|\Delta|^{2}}{2|S_{12}S_{21}|}>1, \tag{8–213}$$

kojeg je prvi u ovome obliku sa *S*-parametrima izveo Kurokawa [20]. No faktor stabilnosti K poznatiji je pod nazivom *Rollettov faktor stabilnosti*, prema Rollettu [21], koji je sličan izraz izveo preko *y*-parametara. Posve isti izraz dobiva se razmatranjem stabilnosti za izlazni krug.

Iz uvjeta (8–210) i njegovog duala mogu se izvesti ova dva pomoćna uvjeta:

$$|S_{12}S_{21}|<1-|S_{22}|^{2}, \quad \text{(8–214a)}, \qquad |S_{12}S_{21}|<1-|S_{11}|^{2}. \quad \text{(8–214b)}$$

Bilo koji od ovih pomoćnih uvjeta u kombinaciji s Kurokawinim uvjetom stabilnosti $K>1$ daje nužan i dovoljan uvjet za bezuvjetnu stabilnost mreže. Naime, ako je zadovoljen uvjet (8–214a), onda je automatski zadovoljen i uvjet (8–214a), i obratno. Također se može pokazati da se za ocjenu bezuvjetne stabilnosti uz uvjet $K>1$ umjesto pomoćnog izraza (8–214) može primijeniti bilo koji od ovih triju izraza:

$$|\Delta|=|S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21}|<1, \tag{8–215}$$

$$B_1=1+|S_{11}|^{2}-|S_{22}|^{2}+|\Delta|^{2}>0, \tag{8–216a}$$

$$B_2=1+|S_{22}|^{2}-|S_{11}|^{2}+|\Delta|^{2}>0, \tag{8–216b}$$

koji tad s uvjetom (8–213) čini potpun skup nužnih i dovoljnih uvjeta za bezuvjetnu stabilnost. U praksi se najčešće rabi par uvjeta $K>1$, $|\Delta|<1$ jer je računski najjednostavniji.

Kombiniranjem tih dvaju uvjeta dobiven je posve simetričan i jedinstven faktor stabilnosti

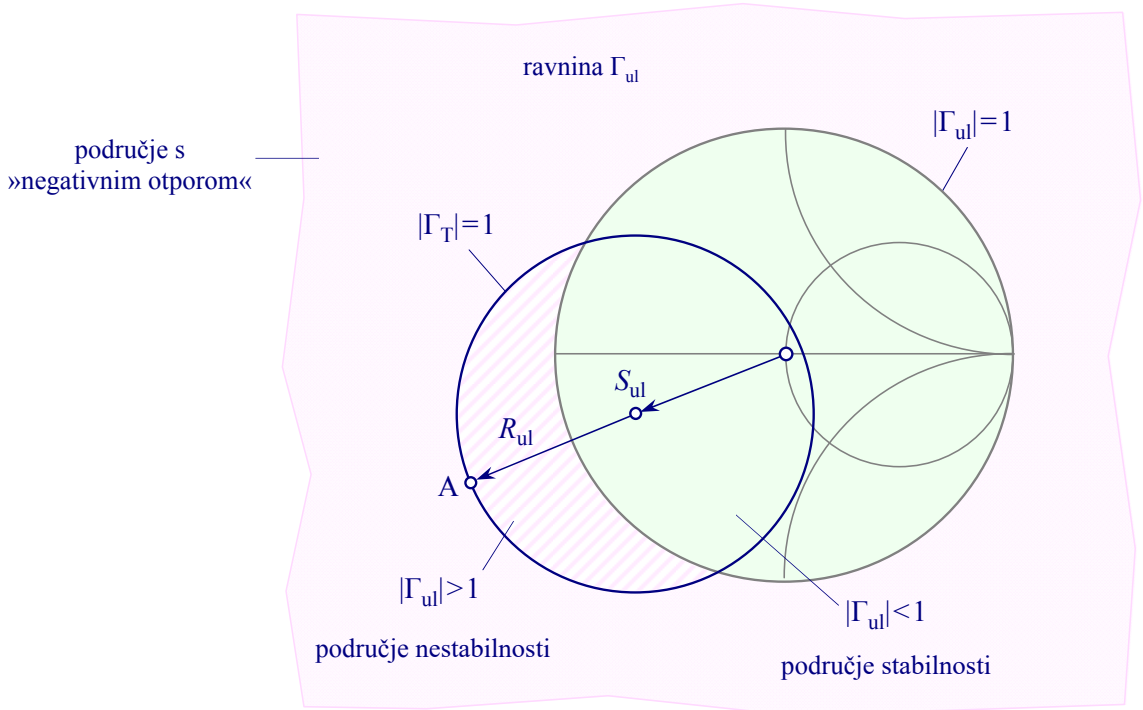
$$K_t = \frac{3 - \left|2S_{11}\right|^2 - 2\left|S_{22}\right|^2 + \left|\Delta\right|^2 - \left|1 - \left|\Delta\right|^2\right|}{4\left|S_{12}S_{21}\right|} > 1, \qquad (8\text{–}217)$$

kojem se ne mijenja vrijednost dodavanjem proizvoljnih reaktancija (serijski ili paralelno), uključujući i kaskadu odsječaka prijenosne linije, na bilo koji prolaz mreže [22].

Kad kružnica ulaznog koeficijenta refleksije jednim dijelom izlazi izvan Smithova dijagrama, kao što je prikazano na slici 8.91, tad je tranzistor uvjetno stabilan ili potencijalno nestabilan. Unatoč tomu, može se zajamčiti stabilan rad pojačala ako se odabere impedancija tereta za koju ulazna impedancija tranzistora ostaje unutar Smithova dijagrama. No tad je nemoguće provesti istodobnu konjugirano kompleksnu prilagodbu na ulaznom i izlaznom prolazu. O tomu će biti više riječi u idućem odjeljku.

Točka A na rubu kružnice upućuje na najveći mogući negativni otpor što odgovara ulaznoj impedanciji tranzistora uz maksimalnu nestabilnost. Ako su istodobno $|S_{11}|>1$ i $|S_{22}|>1$, onda se može dogoditi da kružnice ulazne i izlazne impedancije gotovo u cijelosti leže izvan Smithova dijagrama. Tad je riječ o praktički apsolutno nestabilnom tranzistoru koji je posve neupotrebljiv za sklopove pojačala, ali je posebno zanimljiv za oscilatore (odjeljak 8.9).

Opisani postupak utvrđivanja stabilnosti dvoprolaznih mreža primjenjiv je samo na vanjske impedancije, ali ne i na moguće unutarnje oscilacije. Stoga, pri ulančanom spajanju pojačala, analizu stabilnosti valja najprije provesti za svaki pojedini stupanj i zatim za cjelokupni lanac pojačala pa postaje vrlo zamršen u primjenama s velikim brojem stupnjeva. U tom smislu, preporučljivo je upotrijebiti Nyquistov kriterij stabilnosti [23] koji traži da karakteristična jednadžba aktivne mreže nema niti jedan korijen u desnoj poluravnini kompleksne ravnine.



Slika 8.91. Lokus Γ_{ul} (Γ_T) uvjetno stabilne mreže; područje s negativnim otporom je osjenčano

8.8.3. Osnovna načela proračuna tranzistorskih pojačala

U ovom ćemo odjeljku razmotriti različite aspekte vezane uz proračun i konstrukciju mikrovalnih tranzistorskih pojačala. Također ćemo razmotriti primjenu kružnica konstantnog pojačanja s ciljem postizanja najvećeg ostvarivog pojačanja snage primjenom unilateralnog i neunilateralnog tranzistora, te bezuvjetno stabilnog i potencijalno nestabilnog tranzistora.

Istodobna prilagodba na obama prolazima

Ako je pojačalo bezuvjetno stabilno moguće ga je istodobno prilagoditi na ulazu i izlazu [1], [9]. Kao što smo vidjeli u odjeljku 5.4.1, maksimalni prijenos snage iz generatora u mrežu ostvaruje se uz uvjete konjugirano kompleksne prilagodbe $Z_G = Z_{ul}^*$. No jednako tako mreža predaje maksimalnu snagu teretu kad je teret konjugirano kompleksno prilagođen na izlaznu impedanciju mreže, $Z_T = Z_{iz}^*$. (Naime, primjenom Théveninova teorema, svaka se mreža na odabranom prolazu može nadomjestiti generatorom s izvorom napona čija je vrijednost jednaka naponu na otvorenim priključcima toga prolaza, a unutarnja impedancija toga generatora jednaka je ulaznoj impedanciji na tom prolazu kad su u mreži svi izvori isključeni.) U tom je slučaju $\Gamma_{ul} = \Gamma_G^*$ i $\Gamma_{iz} = \Gamma_T^*$, pa je pogonsko pojačanje snage jednako prijenosnom pojačanju. Dakle, u sklopu pojačala, konjugirano kompleksna prilagodba traži

$$\Gamma_G^* = \Gamma_{ul} = \frac{S_{11} - \Delta\Gamma_T}{1 - S_{22}\Gamma_T} \quad \text{i} \quad \Gamma_T^* = \Gamma_{iz} = \frac{S_{22} - \Delta\Gamma_G}{1 - S_{11}\Gamma_G}. \tag{8–218}$$

Uvrštenjem drugoga izraza u konjugirani oblik prvoga izraza izlazi

$$\Gamma_G\left(1 - |S_{22}|^2\right) + \Gamma_G^2\left(S_{22}^*\Delta - S_{11}\right) = \Gamma_G\left(S_{11}^*S_{22}^*\Delta - |S_{11}|^2 - S_{12}^*S_{21}^*\Delta\right) + S_{11}^*\left(1 - |S_{22}|^2\right) - S_{12}^*S_{21}^*S_{22}.$$

Primjenom jednadžbe $|\Delta|^2 = \Delta(S_{11}^*S_{22}^* - S_{12}^*S_{21}^*)$, taj se izraz može pojednostavniti i svesti na oblik kvadratne jednadžbe s jednom kompleksnom nepoznanicom, Γ_G, kao

$$\left(S_{11} - S_{22}^*\Delta\right)\Gamma_G^2 - \left(1 + |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 - |\Delta|\right)\Gamma_G + \left(S_{11} - S_{22}^*\Delta\right)^* = 0. \tag{8–219}$$

Opći se oblik jednadžbe (8–219) može napisati kao

$$A_1\Gamma_G^2 - B_1\Gamma_G + C_1 = 0, \tag{8–220}$$

gdje su koeficijenti A_1 i C_1 međusobno konjugirani. Na sličan se način može dobiti kvadratna jednadžba s nepoznanicom Γ_T. Rješenja tih kvadratnih jednadžba, tj. koeficijenti refleksije završnih impedancija uz istodobnu prilagodbu na ulazu i izlazu, mogu se napisati kao:

$$\Gamma_G = \Gamma_{G0} = \frac{1}{2A_1}\left(B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4|A_1|^2}\right), \tag{8–221a}$$

$$\Gamma_T = \Gamma_{T0} = \frac{1}{2A_2}\left(B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4|A_2|^2}\right), \tag{8–221b}$$

gdje su koeficijenti A_1 i A_2 dani kao:

$$A_1 = S_{11} - S_{22}^*\Delta, \tag{8–222a}$$

$$A_2 = S_{22} - S_{11}^*\Delta, \tag{8–222b}$$

a koeficijenti B_1 i B_2 dani su izrazima (8–216). Drugim riječima, ako se na bezuvjetno stabilnu mrežu priključe impedancije generatora i tereta dane izrazima (8–221), onda će mreža biti istodobno prilagođena na obama krajevima uz maksimalno moguće pojačanje snage.

Kvadratna jednadžba ima svojstvo da joj je umnožak korijena jednak omjeru koeficijenata C i A. Iz toga izlaze korisni rezultati $|\Gamma_{G0,1}||\Gamma_{G0,2}| = 1$ i $|\Gamma_{T0,1}||\Gamma_{T0,2}| = 1$ jer su koeficijenti A i C međusobno konjugirani, tj. imaju zajednički modul. Drugim riječima, uvijek postoji po jedno korisno rješenje za ulazni i izlazni krug, s modulom manjim od jedinice, $|\Gamma_{G0}| \leq 1$ i $|\Gamma_{T0}| \leq 1$. Ta rješenja odgovaraju pasivnim impedancijama tereta i generatora. To znači da se pojačalo može istodobno prilagoditi na obama prolazima samo za pozitivne vrijednosti diskriminante u izrazima (8–221) i za pozitivne vrijednosti pripadajućih koeficijenata B. Ako je $B_2^2 < 4|A_2|^2$, onda rješenje za Γ_{T0} poprima oblik pa je $|\Gamma_{G0}|=1$. To odgovara posve reaktivnoj impedanciji tereta pa je pojačanje snage jednako nuli. Dakle, za bezuvjetno stabilno pojačalo vrijedi $B_2 > 2|A_2|$, a to je upravo uvjet koji vodi do izbora predznaka u diskriminanti izraza (8–221).

Drugim riječima, to je ujedno dokaz da se samo bezuvjetno stabilno pojačalo može istodobno prilagoditi na ulazu i izlazu za maksimalni prijenos snage. Pri tomu su sva tri pojačanja međusobno jednaka, $G_P = G_T = G_A$. Uvrštenjem izraza (8–221) u izraz (8–185) za prijenosno pojačanje dobiva se izraz za maksimalno ostvarivo pojačanje [15]:

$$G_{\text{maks}} = \left|\frac{S_{21}}{S_{12}}\right|\left(K - \sqrt{K^2 - 1}\right). \tag{8–223}$$

To je pojačanje funkcija Kurokawina faktora stabilnosti K i veličine $|S_{21}/S_{12}|$ koja se naziva *faktor kakvoće* tranzistora. Za $K=1$ dobiva se maksimalno stabilno pojačanje snage

$$G_{\text{MSG}} = \left|\frac{S_{21}}{S_{12}}\right|. \tag{8–224}$$

Za unilateralni tranzistor ($S_{12}=0$) treba uzeti izraz (8–194) koji vrijedi za maksimalno unilateralno pojačanje snage.

Kružnice konstantnog pogonskog pojačanja

Kad nije moguće zanemariti utjecaj parametra S_{12}, za karakteriziranje pojačala korisno je uzeti pogonsko pojačanje G_P koje ne ovisi o impedanciji generatora. Često nas ne zanima maksimalno ostvarivo pojačanje, posebno kad se želi povećati širina frekvencijskog pojasa pojačala ili kad se želi naći optimum između minimalnog faktora šuma i maksimalnog pojačanja. Tad pri proračunu valja upotrijebiti kružnice konstantnog pogonskog pojačanja. Osim toga, proučavanje geometrijskih svojstava kružnica konstantnog pojačanja pruža dobar uvid u radna obilježja mikrovalnog pojačala. Te su kružnice posve različite za bezuvjetno stabilne i potencijalno nestabilne tranzistore pa ćemo ta dva slučaja razmatrati odvojeno.

Na ovom je mjestu korisno uvesti *normirano pojačanje snage*

$$g_P = \frac{G_P}{|S_{21}|^2}. \tag{8–225}$$

Primjenom poznatih relacija, $|\Gamma_T|^2 = \Gamma_T\Gamma_T^*$ i $2\text{Re}\{Z\} = Z + Z^*$, iz izraza (8–185) dobiva se

$$g_P = \frac{1 - \Gamma_T\Gamma_T^*}{1 - |S_{11}|^2 + \Gamma_T\Gamma_T^*(|S_{22}|^2 - |\Delta|^2) - \Gamma_T(S_{22} - S_{11}^*\Delta) - \Gamma_T^*(S_{22}^* - S_{11}\Delta^*)}, \tag{8–226}$$

Rješavanjem nazivnika i prebacivanjem člana $1 - |\Gamma_T|^2$ s desne na lijevu stranu te dijeljenjem dobivene jednadžbe koeficijentom uz član $\Gamma_T\Gamma_T^*$ u nazivniku, izraz (8–226) svodi se na oblik

$$\Gamma_T\Gamma_T^* - \frac{g_P(S_{22} - S_{11}^*\Delta)\Gamma_T + g_P(S_{22}^* - S_{11}\Delta^*)\Gamma_T^* - (1 - |S_{11}|^2)g_P + 1}{(|S_{22}|^2 - |\Delta|^2)g_P + 1} = 0. \tag{8–227}$$

Usporedba s izrazom (F11) u dodatku F pokazuje da jednadžba (8–227) opisuje kružnicu u ravnini Γ_T. Središte je te kružnice u točki $\Gamma_T = S_{TP}$, gdje je S_{TP} koeficijent uz Γ_T^*. Polumjer kružnice (R_{TP}) može se odrediti ako se zna da je konstantni član jednak $|S_{TP}|^2 - (R_{TP})^2$. Stoga je

$$S_{TP} = \frac{\left(S_{22}^* - S_{11}\Delta^*\right)g_P}{\left(|S_{22}|^2 - |\Delta|^2\right)g_P + 1}, \tag{8–228a}$$

$$R_{TP} = \frac{\sqrt{1 - 2K|S_{12}S_{21}|g_P + |S_{12}S_{21}|^2 g_P^2}}{\left|\left(|S_{22}|^2 - |\Delta|^2\right)g_P + 1\right|}, \tag{8–228b}$$

gdje je izraz za R_{TP} pojednostavnjen primjenom jednadžbe:

$$\left|S_{11}\Delta^* - S_{22}^*\right|^2 = |S_{12}S_{21}|^2 + \left(|S_{22}|^2 - |\Delta|^2\right)\left(1 - |S_{11}|^2\right),$$

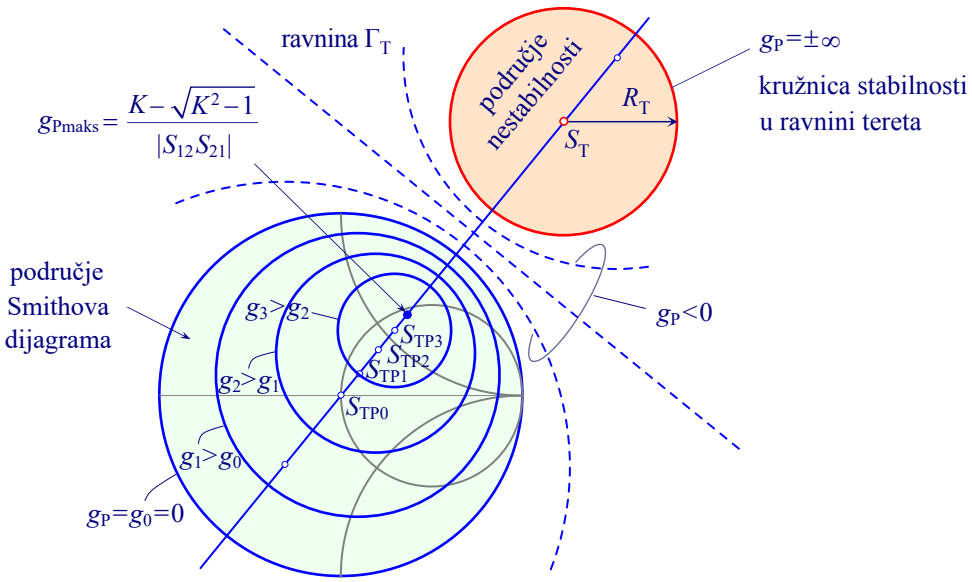
$$|S_{22}|^2 - |\Delta|^2 = 1 - |S_{11}|^2 - 2K|S_{12}S_{21}|.$$

Kružnice konstantnog pojačanja snage korisno je ucrtati u ravninu koeficijenata refleksije tereta. Za bezuvjetno stabilne tranzistore sve te kružnice leže unutar Smithova dijagrama, kao što je prikazano na slici 8.92. Kad g_P teži nuli, tad i središte odgovarajuće kružnice teži nuli, tj. u ishodište, $S_{TP} \to 0$, a polumjer pritom teži jedinici, $R_{TP} \to 1$. To odgovara posve reaktivnim impedancijama tereta koje se nalaze na rubu Smithova dijagrama gdje je $|\Gamma_T| = 1$. Pri tomu teret ne prima snagu jer je $g_P = 0$, što se može vidjeti iz izraza (8–226).

Postupnim povećanjem g_P iz nule smanjuje se R_{TP} i kad se izjednači s nulom, normirano pojačanje snage postiže maksimalnu vrijednost koja je dana izrazom

$$g_P = \frac{K - \sqrt{K^2 - 1}}{|S_{12}S_{21}|}. \tag{8–229}$$

Drugim riječima, kružnice konstantnog pojačanja sažimaju se u točku koja odgovara koeficijentu refleksije tereta za maksimalno pojačanje snage. Uz uvjet $K = 1$ i $R_{TP} = 0$ postiže se maksimalno normirano stabilno pojačanje, $g_{Pmaks} = 1/|S_{12}\,S_{21}|$ u skladu s izrazom (8–223).



Slika 8.92. Kružnice konstantnog normiranog pojačanja snage za bezuvjetno stabilan tranzistor prikazane u ravnini koeficijenta refleksije tereta

Kružnica za beskonačno pojačanje naziva se *kružnica stabilnosti*. U tom se slučaju izrazi (8–228a) i (8–228b) svode na:

$$S_{\mathrm{T}} = \frac{S_{22}^{*} - S_{11}\Delta^{*}}{|S_{22}|^{2} - |\Delta|^{2}}, \tag{8–230a}$$

$$R_{\mathrm{T}} = \left| \frac{S_{12}S_{21}}{|S_{22}|^{2} - |\Delta|^{2}} \right| \tag{8–230b}$$

i odgovaraju središtu, odnosno polumjeru kružnice stabilnosti u ravnini tereta.

Kružnica stabilnosti može se naći i u ravnini impedancije generatora, gdje upućuje na područje impedancija generatora koje se ne smiju priključiti na ulaz tranzistora kako bi se izbjegle nestabilnosti u radu pojačala. Središte i polumjer te kružnice mogu se izravno dobiti iz izraza (8–230) tako da indeksi 1 i 2 međusobno zamijene mjesta, tj.

$$S_{\mathrm{G}} = \frac{S_{11}^{*} - S_{22}\Delta^{*}}{|S_{11}|^{2} - |\Delta|^{2}}, \tag{8–231a}$$

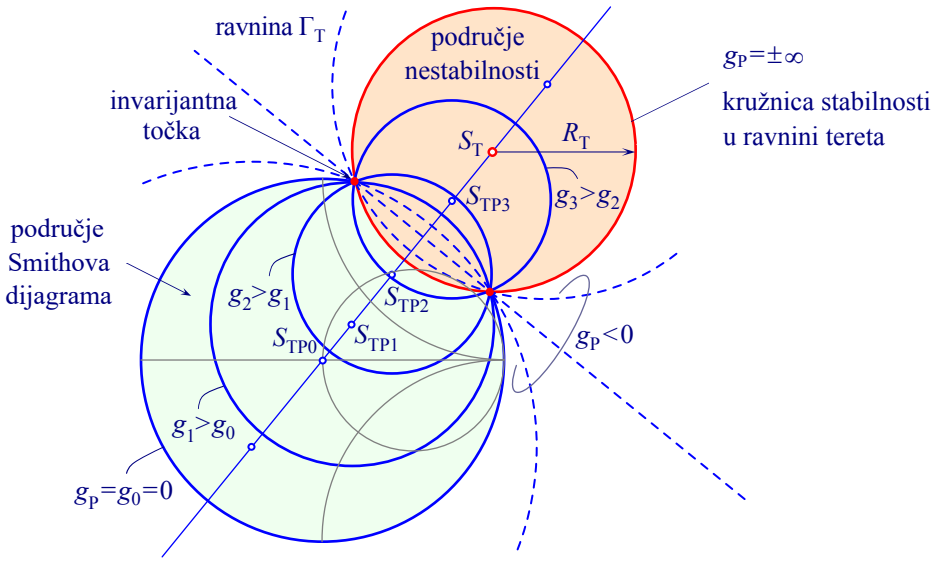
$$R_{\mathrm{G}} = \left| \frac{S_{12}S_{21}}{|S_{11}|^{2} - |\Delta|^{2}} \right|. \tag{8–231b}$$

Ako kružnica stabilnosti ne siječe Smithov dijagram, kao na slici 8.92, i ako je $|S_{11}| < 1$, onda je tranzistor bezuvjetno stabilan. U tom slučaju samo unutrašnjost kružnice stabilnosti pripada impedancijama tereta koje daju negativni otpor na ulazu mreže, tj. nestabilnu mrežu. Sve ostale impedancije tereta daju pasivnu ulaznu impedanciju. Središta svih kružnica konstantnog pojačanja određenog tranzistora nalaze se na jednom te istom pravcu na kojem leži i središte kružnice stabilnosti jer i S_{T} i S_{TP} imaju isti kompleksni brojnik samo što je u izrazu za S_{TP} pomnožen faktorom g_{P}.

Za stabilan tranzistor, kružnice konstantnog pojačanja obično se ucrtavaju u ravnine koeficijenata refleksije tereta i generatora za vrijednosti pojačanja koje su manje za 1 dB, 2 dB, 3 dB … od maksimalnog normiranog pojačanja danog izrazom (8–229).

Za potencijalno nestabilan tranzistor s $|K| < 1$ ne postoji realna vrijednost g_{P} koja može dati $R_{\mathrm{TP}} = 0$. Normirano pojačanje $g_{\mathrm{P}} = 0$ opet odgovara rubu Smithova dijagrama. Za većinu nestabilnih tranzistora kružnica stabilnosti siječe rub Smithova dijagrama u dvjema točkama. Može se pokazati da kroz te iste točke prolaze sve kružnice konstantnog pojačanja, tj. te točke ne ovise o pojačanju (slika 8.93). U praksi postoje četiri posebna slučaja, ovisno o tomu je li modul parametra S_{11} manji ili veći od jedinice i je li kružnica stabilnosti tereta obuhvatila ishodište (središte Smithova dijagrama) ili ne.

Za potencijalno nestabilan tranzistor, obično se ucrtavaju kružnice koje odgovaraju vrijednostima koje su manje za 1 dB, 2 dB, 3 dB … od normiranog pojačanja $1/|S_{12}\,S_{21}|$. Na slici 8.93 prikazan je najčešći slučaj u kojem je $|S_{11}| < 1$ i kružnica stabilnosti ne obuhvaća ishodište. Za $|S_{11}| < 1$, središte Smithova dijagrama nalazi se u području stabilnosti, dakle, u području izvan kružnice stabilnosti. To područje odgovara pozitivnim vrijednostima pojačanja snage. Za izrazito nestabilan tranzistor, $K < -1$, okolnosti su slične onima za bezuvjetno stabilan tranzistor, samo što se unutar Smithova dijagrama nalaze kružnice konstantnog pojačanja negativnih vrijednosti. To znači da je ulazna snaga negativna, tj. pojačana snaga na ulazu mreže (tranzistora) putuje prema generatoru, što je posljedica negativnog otpora u ulaznoj impedanciji tranzistora.



Slika 8.93. Kružnice konstantnog normiranog pojačanja snage potencijalno nestabilnog tranzistora prikazane u ravnini koeficijenta refleksije tereta

Kružnice konstantnog raspoloživog pojačanja

Na sličan način mogu se naći kružnice konstantnog raspoloživog pojačanja G_A. Zbog toga što je slučaj raspoloživog pojačanja dualan slučaju pogonskog pojačanja, izrazi za središta i polumjere kružnica konstantnog raspoloživog pojačanja u ravnini generatora imaju posve jednak oblik kao odgovarajući izrazi (8–228) za pogonsko pojačanje u ravnini tereta, tj.

$$S_{GA}=\frac{\left(S_{11}^{*}-S_{22}\Delta^{*}\right)g_A}{\left(\left|S_{11}\right|^2-\left|\Delta\right|^2\right)g_A+1}, \tag{8–232a}$$

$$R_{GA}=\frac{\sqrt{1-2K\left|S_{12}S_{21}\right|g_A+\left|S_{12}S_{21}\right|^2 g_A^2}}{\left|\left(\left|S_{11}\right|^2-\left|\Delta\right|^2\right)g_A+1\right|}, \tag{8–232b}$$

gdje smo samo međusobno zamijenili indekse u izrazima (8–228) i gdje smo g_P zamijenili s g_A, normiranim raspoloživim pojačanjem snage, tj.

$$g_A=\frac{G_A}{\left|S_{21}\right|^2}. \tag{8–233}$$

Kružnice konstantnog dobitka prilagodne mreže za unileteralno pojačalo

U odjeljku 8.8.1, vidjeli smo da je prijenosno pojačanje G_T funkcija impedancije tereta i generatora. Struktura izraza (8–191) pokazuje da se sastoji od triju članova koji se nalaze u umnošku. To su dobitci prilagodbe (8–192) na ulazu i izlazu te intrinzično pojačanje aktivne komponente (tranzistora), $|S_{21}|^2$, definirano izrazom (8–189). Za unilateralni slučaji ($S_{12}=0$) i bezuvjetno stabilne tranzistore, uvjeti su stabilnosti $|S_{11}|<1$ i $|S_{22}|<1$, pa su ulazni i izlazni koeficijenti refleksije jednaki raspršnim parametrima, tj. $\Gamma_{ul}=S_{11}$ i $\Gamma_{iz}=S_{22}$, a maksimalno unilateralno pojačanje postiže se uz ove jednostavne uvjete na ulazu i izlazu pojačala:

$$\Gamma_G=S_{11}^{*}, \tag{8–234a}$$

$$\Gamma_T=S_{22}^{*}. \tag{8–234b}$$

Uz te se uvjete izrazi za dobitke prilagodnih mreže generatora i tereta mogu napisati kao:

$$D_{G0} = \frac{1}{1-|S_{11}|^2}, \tag{8–235a}$$

$$D_{T0} = \frac{1}{1-|S_{22}|^2}. \tag{8–235b}$$

Za određivanje odstupanja dobitaka od njihove maksimalne vrijednosti valja uvesti relativne dobitke $d_G = D_G/D_{G0} = D_G\,(1-|S_{11}|^2)$ i $d_T = D_T/D_{T0} = D_T\,(1-|S_{22}|^2)$ čije se vrijednosti nalaze između nule i jedinice. Primjenom tih izraza sad se u Smithovu dijagramu mogu konstruirati kružnice konstantnih relativnih dobitaka prilagodbe u ravninama koeficijenta refleksije generatora i tereta. Lako se može pokazati da su središta tih kružnica:

$$S_{DG} = \frac{d_G S_{11}^*}{1-|S_{11}|^2\,(1-d_G)}, \qquad S_{DT} = \frac{d_T S_{22}^*}{1-|S_{22}|^2\,(1-d_T)}, \tag{8–236}$$

a njihovi polumjeri:

$$R_{DG} = \frac{\sqrt{1-g_G}\,(1-|S_{11}|^2)}{1-|S_{11}|^2\,(1-d_G)}, \qquad R_{DT} = \frac{\sqrt{1-g_T}\,(1-|S_{22}|^2)}{1-|S_{22}|^2\,(1-d_T)}. \tag{8–237}$$

Može se uočiti da središta kružnica leže na pravcu koji prolazi ishodištem ravnine koeficijenta refleksije generatora i tereta te odgovarajućim konjugirano kompleksnim raspršnim parametrima S_{11}^* i S_{22}^*. Znači da središta imaju negativnu vrijednost kuta odgovarajućeg S-parametra. Za maksimalne dobitke ($d_G = 1$, odnosno $d_T = 1$) polumjeri su jednaki nuli, što znači da se kružnice konstantnog dobitka sažimaju u odgovarajuće točke koje se nalaze u S_{11}^* i S_{22}^*. Pritom se kružnica nultog dobitka uvijek poklapa s rubom Smithova dijagrama. Kružnice stabilnosti koristan su alat pri proračunavanju pojačala za zadanu vrijednost pojačanja te pri namjernom razgođenju ulaznog ili izlaznog kruga s ciljem povećanja širine frekvencijskog pojasa uz primjenu jednostavnih prilagodnih mreža s jednim stabom ili s dvjema reaktivnim komponentama, tj. s jednom rezonancijom). Primjena kružnica stabilnosti pri proračunavanju pojačala s pojačanjem manjem od maksimalnog može se naći u primjeru 8.4.

8.8.4. Izvedbe pojačala i sklopovi za dovođenje napajanja aktivnim komponentama

Da bi tranzistor u sklopu pojačala mogao obavljati funkciju pojačavanja mora mu se dovesti odgovarajući napon napajanja, tj. mora se postaviti ispravna istosmjerna radna točka. Pri proračunavanju tranzistorskih sklopova i mjerenju parametara tranzistora valja voditi računa o tomu da se istosmjerne veličine dovedu tranzistoru uz najmanji mogući utjecaj na RF karakteristike sklopa pojačala, miješala ili oscilatora, a izvor istosmjernog napona ili struje mora biti što bolje izoliran od RF snage koja se stvara u sklopu. S druge strane, tranzistoru se istodobno moraju postaviti ispravne vrijednosti impedancije na zadanoj radnoj frekvenciji. Stoga ćemo u ovom odjeljku pokazati osnovne izvedbe sklopova za dovođenje napajanja i izvedbe prilagodnih mreža.

Dovođenje struje napajanja na određene elektrode tranzistora obično se ostvaruje preko serijskog induktiviteta (zavojnice koja ima ulogu RF prigušnice). U tu se svrhu mogu rabiti i dijelovi prilagodnih mreža, poput linijskih odsječaka i stabova. Rasprezanje između istosmjernog i RF strujnog kruga obično se ostvaruje s pomoću serijskog ili paralelnog kapaciteta (kondenzatora). Spojen u seriju s tokom signala, kapacitet prekida istosmjerni tok struje, a za RF signal ne čini diskontinuitet ako mu je reaktancija dovoljno mala. No induktivitet djeluje posve suprotno jer se ponaša kao kratki spoj za istosmjernu struju, a upućuje na visok reaktivni otpor (ili približno otvoreni strujni krug) za RF signal. Stoga induktivitet priječi protjecanje

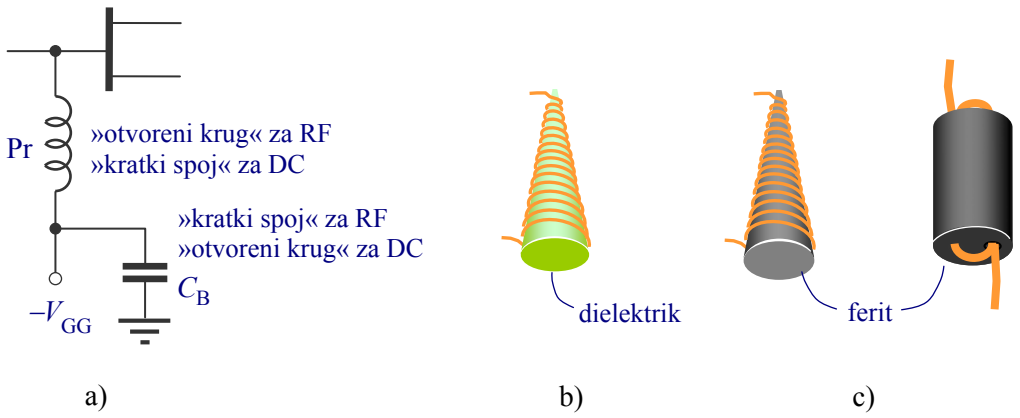
RF struje u vanjskom krugu u kojem se nalaze izvori napajanja. U tablici 8.2. prikazane su vrijednosti reaktivnog otpora kapaciteta i induktiviteta za tri različita frekvencijska područja.

Tablica 8.2. Reaktancije induktiviteta i kapaciteta u ovisnosti o frekvenciji

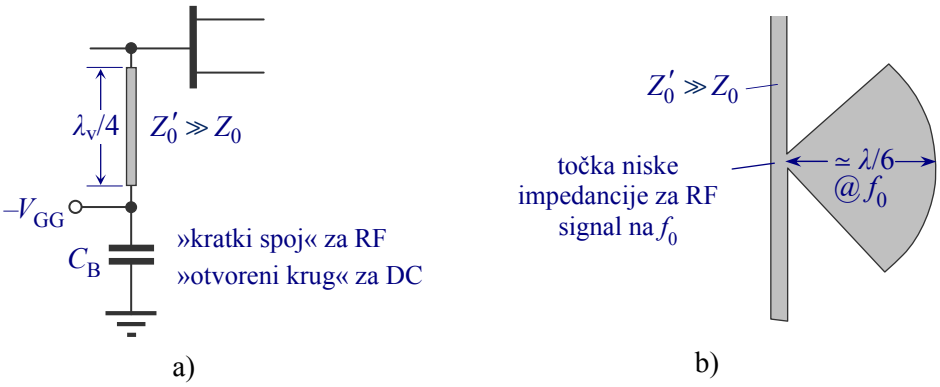
Frekvencija	1 GHz	10 GHz	100 GHz
L=0,1 nH	0,628 Ω	6,28 Ω	62,8 Ω
L=1,0 nH	6,28 Ω	62,8 Ω	628 Ω
C=0,1 pF	1592 Ω	159 Ω	15,9 Ω
C=1,0 pF	159 Ω	15,9 Ω	1,59 Ω
C=10 pF	15,9 Ω	1,59 Ω	0,16 Ω

Osnovni sklop za dovođenje napajanja, prikazan na slici 8.94a), pokazuje kako se primjenom induktiviteta može jednostavno dovesti prednapon na odgovarajuću elektrodu tranzistora i kako se primjenom kapaciteta može blokirati prodor tih istosmjernih veličina u druge RF dijelove sklopa ili u sklopove koji su povezani s pojačalom preko ulaznoga i izlaznoga prolaza. Kao što je netom spomenuto, induktivitet ima ulogu RF prigušnice koja djeluje kao otvoreni RF strujni krug na ulaznoj priključnici tranzistora. Stoga je paralelno (poprečno) spojena prigušnica s prijenosnom linijom »nevidljiva« za RF signal koji prolazi prijenosnom linijom do ili od tranzistora.

Budući da impedancija $j\omega L$ nikad nije beskonačno velika, jer ni frekvencija ni L nemaju beskonačne vrijednosti, prigušnice čine nesavršen otvoreni RF krug. Obično se izvode kao zavojnice. No na višim frekvencijama induktivitet zavoja i kapacitet između zavoja stvaraju parazitske rezonancije pa se zavojnice na višim frekvencijama ponašaju kao kombinacija paralelnih i serijskih titrajnih struktura. Utjecaj parazitskih rezonancija može se smanjiti tako da se tanka izolirana žica zavojnice namota na minijaturnu dielektričnu strukturu stožastog oblika, čiji je širi dio bliže izvoru napajanja, kao što je prikazano na slici 8.94b). Tako pojedinačni zavoji postižu različite rezonantne frekvencije pa prigušnica može zadržati zadovoljavajuća obilježja unutar frekvencijskog područja od nekoliko oktava. Dodatno se proširenje radnog frekvencijskog područja RF prigušnice, na donjem kraju frekvencijskog područja, može ostvariti uporabom feritnog materijala ugrađenog u samu strukturu prigušnice, slika 8.94c). Za ispravan rad niskopropusne mreže s ugrađenom prigušnicom, drugi kraj prigušnice valja uzemljiti čip-kondenzatorom koji RF napon kratko spaja na masu. Opisane vrste prigušnica obično se rabe na frekvencijama od desetak MHz do desetak GHz.



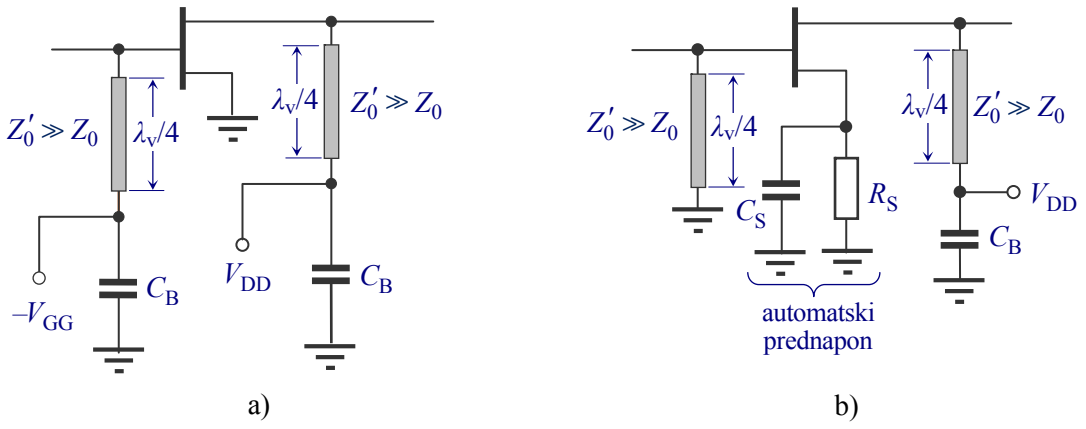
Slika 8.94. a) Jednostavan sklop s RF prigušnicom za dovođenje napajanja aktivnoj komponenti. **b)** Stožasta »širokopojasna« RF prigušnica. **c)** RF prigušnice na feritnom materijalu



Slika 8.95. a) Alternativan način dovođenje istosmjernih veličina odsječkom uske četvrtvalne trakaste linije visoke karakteristične impedancije. **b)** Zamjena kapaciteta radijalnim stabom

U višem frekvencijskom području iznad desetak gigaherca, umjesto RF prigušnice u obliku zavojnice, pri mikrotrakastim izvedabama redovito se rabi četvrtvalni odsječak visokoomske prijenosne linije Z_0', kao što je prikazano na slici 8.95a). U poglavlju o linijama pokazano je da četvrtvalna linija transformira kratki spoj u otvoreni strujni krug i obratno. Kompaktniji se sklop može izvesti mikrotrakastom linijom oblika meandara ili spirale (odjeljak 8.10.2). Zbog frekvencijske ovisnosti mikrotrakastih linijskih odsječaka, sklop je razmjerno uskopojasan. Niska impedancija na frekvenciji RF signala na drugome kraju linijskog odsječka može se ostvariti čip kondenzatorom kao u prethodnom slučaju ili s pomoću mikrotrakastog radijalnog staba, kao što je prikazano na slici 8.95b). Optimalni polumjer radijalnog staba oblika kružnog isječka od 90° približno je jednak šestini valne duljine u mikrotrakastoj strukturi za RF signal frekvencije f_0. Umjesto radijalnog staba može se uzeti i klasični niskoomski otvoreni četvrtvalni stab. Za približno jednaku površinu metalizacije, četvrtvalni stab upućuje na nisku impedanciju u nešto užem frekvencijskom području u odnosu na radijalni stab.

U pojačalima srednje i velike snage s MESFET-om, napon V_{GS} obično je negativan, a V_{DS} pozitivan. Na slici 8.96a) shematski je prikazan sklop za dovođenje napajanja MESFET-u koji sadrži izvor negativnog napona u krugu gata i izvor pozitivnog napona u krugu dotoka. No primjenom automatskog prednapona MESFET se može napajati samo iz jednog izvora istosmjernog napona, kao što je prikazano na slici 8.96b). Budući da istosmjerna struja I_D, koja protječe kanalom MESFET-a, automatski stvara negativan prednapon V_{GS} na otporu R_S. Porastom te struje povećava se napon slijeva V_S pa V_{GS} postaje sve više negativan težeći zapiranju kanala, tj. smanjenju struje I_D. Tako se ostvaruje stabilna radna točka u istosmjernom



Slika 8.96. Napajanje MESFET-a: **a)** čvrsti prednapon, **b)** automatski prednapon

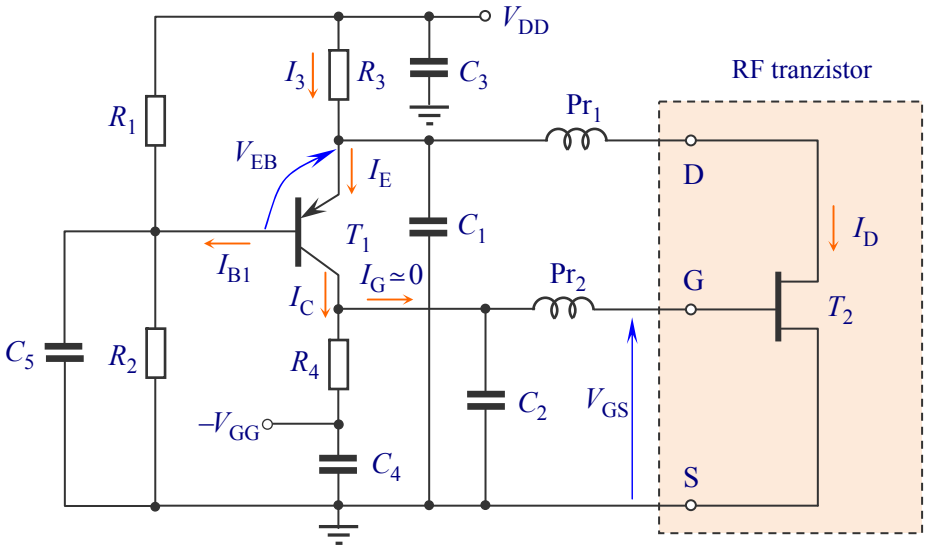
strujnom krugu. Kod pojačala snage, struje dotoka mogu poprimiti vrijednosti do nekoliko stotina miliampera i više pa treba uzeti dovoljno debelu traku da ne bi došlo do njezinog pregrijavanja ili čak pregaranja pri velikim vrijednostima istosmjerne struja.

Slično se mogu izvesti aktivni sklopovi za napajanje bipolarnih *npn* tranzistora, samo što se umjesto izvora $-V_{GG}$ na slici 8.94a) mora uzeti izvor $+V_{BB}$ jer je bipolarni tranzistor strujno upravljana komponenta koja traži pozitivan prednapon V_{BE} .

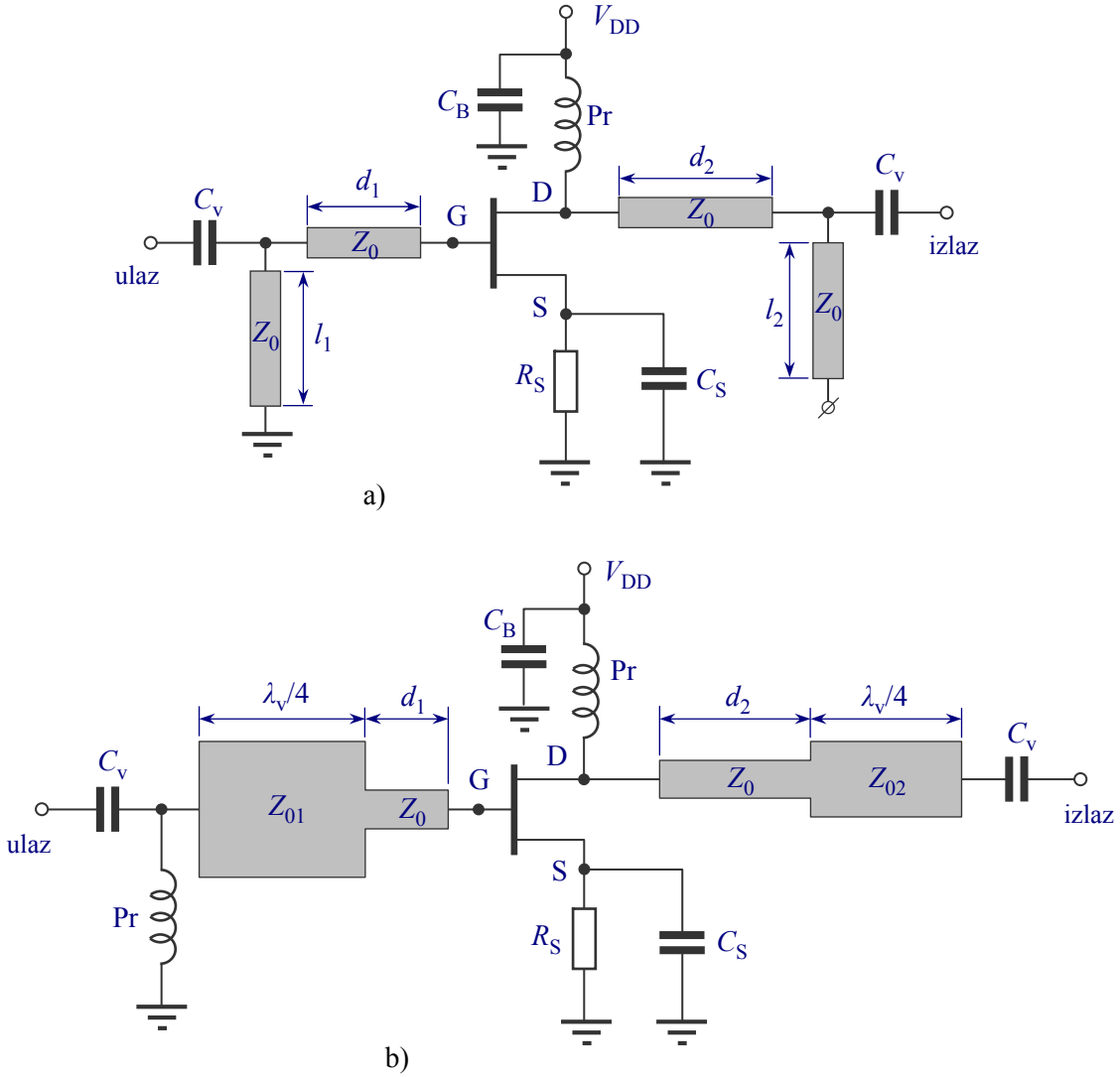
Stabilnija radna točka MESFET-a (ili HEMT-a) može se ostvariti aktivnim sklopom prikazanim na slici 8.97. Za napajanje MESFET-a T_2, uspostavlja se vrlo jaka negativna povratna veza u istosmjernome strujnom krugu s pomoću niskofrekvencijskog bipolarnog tranzistora T_1 tipa *pnp*. Rad sklopa može se opisati ovako. Porastom struje I_D, jača struja I_3 pa se snižava napon između emitera i baze (V_{EB}) tranzistora T_1. Time se smanjuje struja I_C, što ima za posljedicu porast napona V_{GS} i struje I_D. Stoga dolazi do stabilizacije radne točke. Zadani napon V_{DS} MESFET-a postavlja djelilo napona R_1/R_2. Isključivanjem izvora napajanja V_{GG}, tj. spajanjem otpora R_4 na masu, sklop se može rabiti za napajanje bipolarnog tranzistora.

Istosmjerni strujni krug tranzistora T1 odvaja se od RF strujnog kruga MESFET-a s pomoću prigušnica (Pr_1 i Pr_2) i kondenzatora (C_1 i C_2).

Prilagodba na ulazu i izlazu uskopojasnog ili usklađenog pojačala može se ostvariti koncentriranim *L-C* komponenatama ili paralelnim stabovima i serijskim linijskim odsječcima ili četvrtvalnim transformatorima impedancije ili kombinacijom svih navedenih (poglavlje 6). Na slici 8.98 prikazane su dvije tipične izvedbe uskopojasnih (rezonantnih) pojačala s pomoću mikrotrakastih linija i MESFET-om kao aktivnom komponentom. Spoj zajedničkog slijeva jamči maksimalnu stabilnost pojačala uz maksimalno pojačanje snage pa se ostali spojevi rjeđe nalaze u izvedbama pojačala. Ispravna radna točka tranzistora postiže se automatski, padom napona na otporu u krugu elektrode slijeva. Slična se topologija može naći u izvedbama s bipolarnim tranzistorom u spoju zajedničkog emitera. Vezni kapacitet C_v služi za blokiranje istosmjernih veličina (napona i struja napajanja) prema ulazu i izlazu sklopa. Pri tomu se potrebne istosmjerne veličine za namještanje ispravne radne točke tranzistora obično dovode tranzistoru preko RF prigušnice koja se može ostvariti minijaturnom zavojnicom na feritnoj jezgri ili preko visokoomskog četvrtvalnog linijskog odsječka (slike 8.94 - 8.96).



Slika 8.97. Aktivni sklop za napajanje MESFET-a



Slika 8.98. Mikrovalno pojačalo s MESFET-om: **a)** prilagodne mreže ostvarene paralelnim stabovima, **b)** prilagodne mreže ostvarene četvrtvalnim transformatorima

Pojačalima izvedenim s pomoću prilagodnih stabova (slika 8.98a)) obično se ostvaruju manje širine pojasa u odnosu na pojačala s četvrtvalnim prilagodnim transformatorima impedancije (slika 8.98b)), jer su sklopovi sa stabovima nerijetko jako rezonantni. Osim toga, za svaki stab uvijek postoji barem jedna frekvencija, izvan radnog frekvencijskog pojasa, na kojoj se stab ponaša kao kratki spoj. U tom će slučaju tranzistor biti opterećen posve reaktivno, a to je najgori mogući slučaj s gledišta stabilnosti jer se uporabom uvjetno stabilnih tranzistora mogu pojaviti parazitske oscilacije i nestabilnosti u radu pojačala. Izvan pojasa prilagodbe, sklopovi s četvrtvalnim transformatorom impedancije imaju manje reaktivno radno okruženje jer je uvijek prisutna izvjesna radna komponenta impedancije generatora ili tereta, ovisno o tomu radi li se o ulaznoj ili izlaznoj prilagodnoj mreži. Time je zajamčena veća stabilnost pojačala s uvjetno stabilnim tranzistorom No, s druge strane, prilagodne strukture sa stabovima zauzimaju manje prostora na tiskanoj pločici u odnosu na izvedbe s četvrtvalnim transformatorima pa su pogodnije za gradnju kompaktnih sklopova pojačala. Stoga u konkretnoj primjeni valja potražiti kompromisno rješenje.

Primjer 8.4. Proračun unilateralnog pojačala

Raspršni parametri unilateralnog mikrovalnog tranzistora na frekvenciji 5 GHz izmjereni su u mjernom sustavu karakteristične impedancije 50 Ω:

$$S_{11} = 0{,}75\angle -150° \qquad S_{12} = 0$$

$$S_{21} = 3{,}6\angle 52° \qquad S_{22} = 0{,}45\angle -60°\,.$$

a) Izračunati optimalne impedancije generatora i tereta, maksimalne dobitke prilagodnih mreža na strani generatora i tereta te maksimalno unilateralno pojačanje.

b) Konstruirati kružnice konstantnog dobitka u ravnini koeficijenta refleksije generatora. Primjenom tih kružnica naći potrebnu vrijednost impedancije generatora za unilateralno pojačanje 13 dB.

Rješenje:

a) Budući da je $S_{12} = 0$ te $|S_{11}| < 1$ i $|S_{22}| < 1$, tranzistor je unilateralan i bezuvjetno stabilan na zadanoj frekvenciji. Prema izrazima (8–234), optimalni koeficijenti refleksije impedancije generatora i tereta iznose: $\Gamma_G = S_{11}^* = 0{,}6\angle 150°$, odnosno $\Gamma_T = S_{22}^* = 0{,}45\angle 60°$. Odgovarajuće impedancije mogu se izravno očitati u Smithovu dijagramu ili izračunati s pomoću izraza:

$$Z_G = \frac{1+\Gamma_G}{1-\Gamma_G} = \frac{1+0{,}75\angle 150°}{1-0{,}75\angle 150°} = 7{,}6 + \mathrm{j}13{,}1\,\Omega\,;$$

$$Z_T = \frac{1+\Gamma_T}{1-\Gamma_T} = \frac{1+0{,}45\angle 60°}{1-0{,}45\angle 60°} = 53{,}0 + \mathrm{j}52{,}8\,\Omega\,.$$

Iz izraza (8–235) dobitci prilagodbe generatora i tereta iznose:

$$D_{G0} = \frac{1}{1-|S_{11}|^2} = \frac{1}{1-0{,}75^2} = 2{,}29 = 3{,}6\,\mathrm{dB}\,;$$

$$D_{T0} = \frac{1}{1-|S_{22}|^2} = \frac{1}{1-0{,}45^2} = 1{,}254 = 1{,}0\,\mathrm{dB}\,.$$

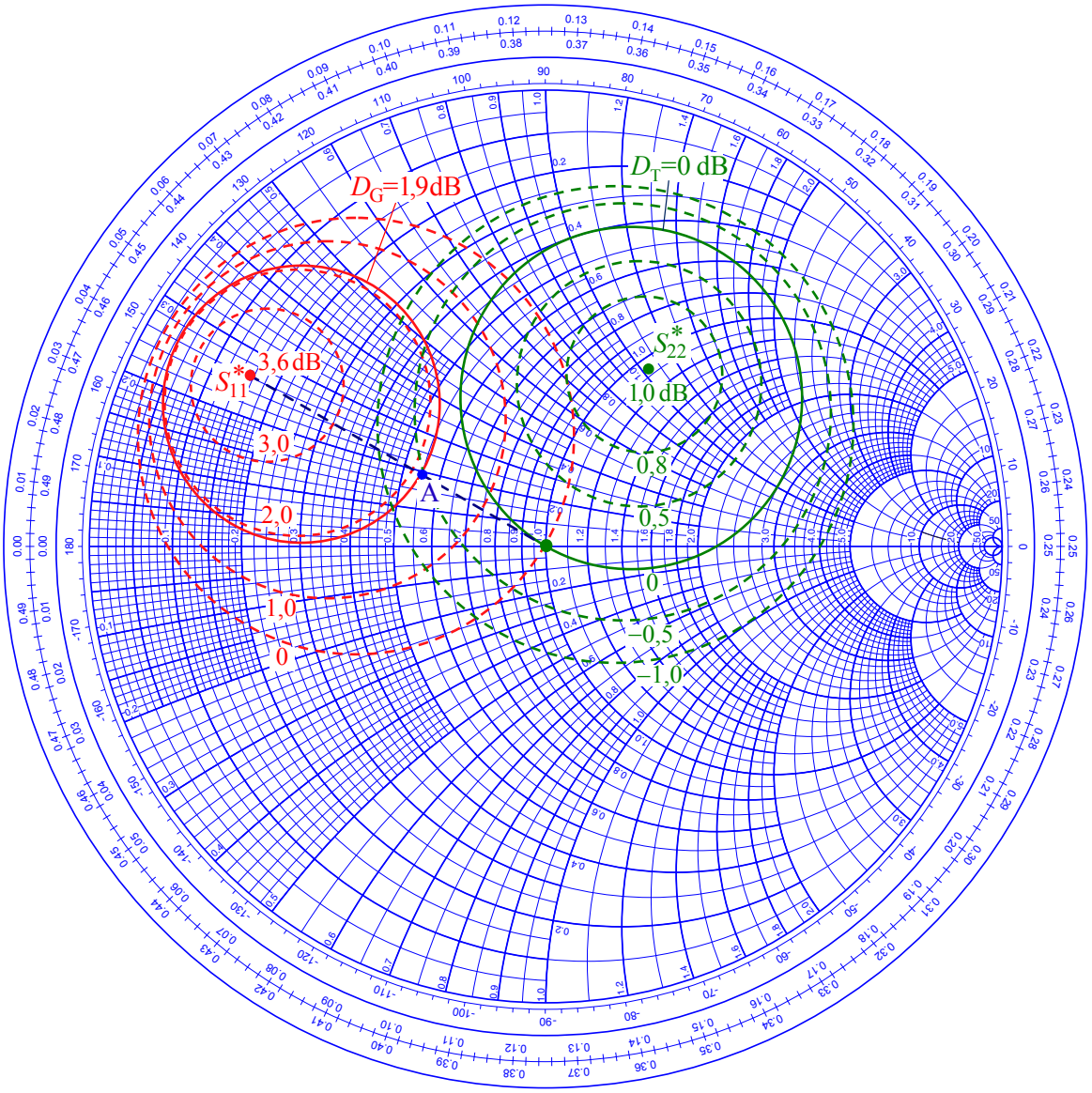
Intrinzično pojačanje iznosi $G_0 = |S_{21}|^2 = 13{,}0 = 11{,}1$ dB. Sad se iz izraza (8–194) može izračunati maksimalno unilateralno pojačanje, tj.

$$G_{TUmaks} = D_{G0}\,|S_{21}|^2\,D_{T0} = 2{,}29 \cdot 13{,}0 \cdot 1{,}254 = 37{,}1 = 15{,}7\,\mathrm{dB}\,.$$

Računanjem s decibelima, dobiva se jednak rezultat, $G_{TUmaks}(\mathrm{dB}) = 3{,}6 + 11{,}1 + 1{,}0 = 15{,}7$ dB.

b) Na slici 8.99 u Smithovu su dijagramu prikazane kružnice konstantnih vrijednosti dobitaka prilagodbe u prilagodnim mrežama generatora i tereta (izrazi (8–236) i (8–237)). Budući da se traži ukupno unilateralno pojačanje od 13 dB, prilagodne mreže valja tako projektirati da ukupno pojačanje bude 2,7 dB manje od maksimalnog (15,7 dB). Iz rezultata za D_{T0} proizlazi da se pojačanje može smanjiti za 1 dB, ako se izlazni krug pojačala uopće ne prilagodi, tj. ako se uzme $\Gamma_T = 0$ ili $Z_T = 50\ \Omega$. Tad nije ni potrebna prilagodna mreža, što znatno pojednostavnjuje konstrukciju pojačala. Potom je još samo potrebno prilagodnom mrežom generatora postići dobitak $D_G = 3{,}6 - (G_{TUmaks} - 13) = 1{,}9$ dB, što traži relativni dobitak $d_G = D_G - D_{G0} = -1{,}7$ dB. Ucrtavanjem kružnice konstantnog dobitka od 1,9 dB u Smithov dijagram može se naći odgovarajući koeficijent refleksije generatora Γ_G. Bilo koja točka na toj kružnici daje Γ_G koji može zajamčiti traženo pojačanje. No najjednostavnije je postaviti Γ_G na zraku koja povezuje točku najvećeg dobitka sa središtem Smithova dijagrama (točka A). Stoga će ta točka biti najbliže središtu Smithova dijagrama čime je omogućena jednostavna prilagodba u ulaznom krugu i to u širokom frekvencijskom pojasu. Normirana impedancija generatora u točki A iznosi $z_G = 0{,}55 + \mathrm{j}0{,}19$ i može se izravno očitati iz Smithova dijagrama. Konačno se može izračunati stvarna impedancija generatora, $Z_G = Z_0 z_G = 50 \cdot (0{,}55 + \mathrm{j}0{,}19) = 27{,}5 + \mathrm{j}9{,}5\ \Omega$.

Prilagodna mreža koja jamči traženu impedanciju generatora može se konstruirati primjenom koncentriranih ili raspodijeljenih komponenata. Odabere li se pristup s koncentriranim komponentama, valja uzeti prilagodnu mrežu prikazanu na slici 6.3a) jer je modul te impedancije manji od Z_0, što se vidi iz njezinog položaja izvan kružnice $1+jb$ u Smithovu dijagramu admitancija. Postupak je sličan onome iz primjera 6.3, ali odvija se u suprotnome smjeru, jer u ovom slučaju valja transformirati impedanciju pobudne linije (Z_0) u potrebnu impedanciju $Z_G = 27{,}5 + j9{,}5\ \Omega$. Budući da se radi o frekvenciji 5GHz, prednost treba dati prilagodbi raspodijeljenim parametrima pa se može uzeti jedno od sklopovskih rješenja prikazanih na slici 8.98. Za veće širine pojasa, može se uporabiti jedan od širokopojasnih transformatora impedancije (odjeljci 6.5-6.8).



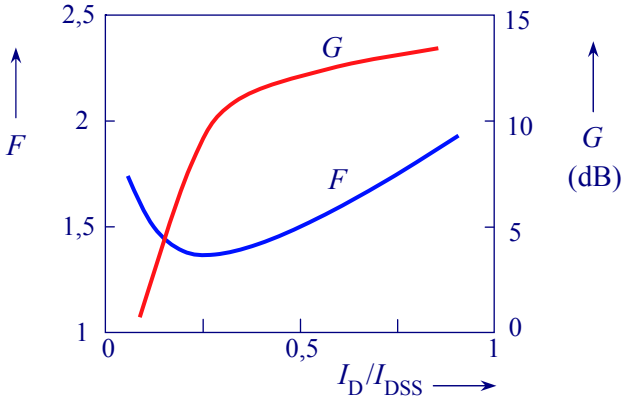
Slika 8.99. Kružnice konstantnog dobitka prilagodbe generatora D_G (plavo) i tereta D_T (zeleno) te proračun impedancija generatora i tereta za zadano pojačanje od 13 dB

8.8.5. Niskošumna pojačala

Uz pojačanje i stabilnost, kod pojačala maloga signala, važna su i šumna svojstva, tj. faktor šuma pojačala. U tipičnim mikrovalnim komunikacijskim sustavima, prijamni signal može poprimiti niske razine, u području nanovata. Stoga ga je potrebno toliko pojačati da bi mogao proizvesti željenu izlaznu informaciju u obliku zvučnog, slikovnog ili digitalnog signala razine koliku je imao prilikom odašiljanja. Prvi stupanj pojačala ima zadaću pojačati slabe signale bez dodavanja veće količine šuma. Ako je pojačanje prvoga pojačala u lancu veće od 10, onda će signal na izlazu toga stupnja biti već toliko jak da dodatni šum koji se stvara u sljedećim stupnjevima neće moći znatnije pokvariti ukupni odnos signal/šum pojačala ili prijamnika. Pri proračunavanju prvoga stupnja, minimiziranje šuma znatno je korisnije od maksimiziranja pojačanja ili prilagodbe jer izravno utječe na osjetljivost pojačala, tj. prijamnika.

Stoga ćemo se u ovom odjeljku usredotočiti na projektiranje pojačala za najmanji mogući faktor šuma. U tranzistorima postoje tri glavna doprinosa šumu. To su: toplinski šum koji nastaje u otpornim elementima nadomjesne sheme tranzistora, šum sačme zbog diskretne prirode nositelja naboja koji sudjeluju u struji *pn*-spoja ili spoja metal-poluvodič i šum treperenja čija je gustoća spektra snage inverzna funkcija frekvencije ($1/f$) u frekvencijskoj domeni. Kod bipolarnih je tranzistora šum treperenja obično zanemariv u odnosu na šum sačme i toplinski šum za frekvencije iznad nekoliko kHz, ali kod MESFET-a može biti izrazito jak do frekvencije od 100 MHz. Doprinos tog šuma posebno je naglašen u mikrovalnim oscilatorima s MESFET-om, gdje se redovito pojavljuje u obliku modulacijskog šuma u izlaznom spektru oscilatora blizu frekvencije nositelja (odjeljak 8.9.2). Struja koja protječe tranzistorom nije glatka krivulja nositelja naboja, nego se sastoji od diskretnih nositelja naboja koji prolaze *pn*-slojem ili spojem metal-poluvodič manje-više nasumično poput kapi kiše koje padaju na tanak limeni krov stvarajući buku, tj. šum. Šum povezan s tom strujom naziva se *šum sačme* i razmjeran je vrijednosti istosmjerne struje, tj. broju nositelja naboja. Taj šum ima ravnu gustoću spektra snage baš kao i toplinski šum.

Za aktivnu komponentu koja proizvodi nisku razinu šuma rabi se izraz *niskošumna komponenta*. Ta će komponenta proizvoditi manje šuma pri manjim jakostima istosmjerne struje. No zbog toga što strmina (prijenosna vodljivost) tranzistora, a otuda i pojačanje, opadaju smanjenjem struje napajanja, svaki tranzistor ima optimalnu vrijednost struje napajanja pri kojoj šum postiže minimalnu razinu. U stvarnoj primjeni nužan je kompromis između niske razine šuma i prihvatljive vrijednosti pojačanja, koji daju optimalni faktor šuma (F_m) za zadani tranzistor. Na slici 8.100 prikazana je tipična karakteristika faktora šuma u funkciji struje dotoka tipičnog MESFET-a. Ovdje je struja normirana na struju I_{DSS} (odjeljak 8.4.5). Sličnu ovisnost o struji kolektora pokazuju i bipolarni tranzistori.



Slika 8.100. Obilježja pojačanja i faktora šuma tipičnog MESFET-a u ovisnosti o normiranoj istosmjernoj struji dotoka za frekvenciju 10 GHz

Odlike pojačala malih signala, primjerice, u ulaznim stupnjevima osjetljivih mikrovalnih prijamnika, dane su nadomjesnom temperaturom šuma ili faktorom šuma, koji su međusobno povezani izrazom (8–8a), tj. $T_e=(F-1)T_0$. U literaturi [24] pokazano je da faktor šuma pojačala ovisi o optimalnoj impedanciji ($1/Y_m$) kao

$$F = F_m + \frac{R_š}{G_G}\left|Y_G - Y_m\right|^2, \tag{8–238}$$

gdje je $R_š$ nadomjesni otpor šuma tranzistora, a $Y_G=G_G+jB_G$ unutarnja admitancija generatora spojenog na ulaz pojačala. Veličina Y_m naziva se *optimalna admitancija generatora* pri kojoj pojačalo stvara najmanji šum, tj. najmanji faktor šuma, F_m.

Primjenom izraza (3–42) ili (3–80) i zamjenom impedancija admitancijama, tj. $Z_G=1/Y_G$, $Z_m=1/Y_m$, admitancije Y_G i Y_m mogu se izraziti preko pripadajućih koeficijenata refleksije Γ_G i Γ_m kao:

$$Y_G = \frac{1}{Z_0}\frac{1-\Gamma_G}{1+\Gamma_G}, \tag{8–239a}$$

$$Y_m = \frac{1}{Z_0}\frac{1-\Gamma_m}{1+\Gamma_m}. \tag{8–239b}$$

Uvrštenjem ovih relacija u izraz (8–238) dobiva se

$$F = F_m + \frac{4R_š}{Z_0}\frac{\left|\Gamma_G - \Gamma_m\right|^2}{(1-\left|\Gamma_G\right|^2)\left|1+\Gamma_m\right|^2}. \tag{8–240}$$

Dakle, prilikom projektiranja niskošumnih pojačala, tranzistor se ne prilagođuje maksimalnom prijenosu snage, nego se obično prilagođuje minimalnom faktoru šuma [1], [10], [15], [18]. Stoga umjesto da se impedancija generatora (Z_G) namjesti na konjugirano kompleksnu vrijednost ulazne impedancije (Z_{ul}), ona se postavlja na vrijednost impedancije za minimalni faktor šuma, $Z_G=1/Y_m$. Za bipolarne tranzistore, te dvije točke nisu međusobno jako udaljene unutar Smithova dijagrama, ali za MESFET mogu biti međusobno jako udaljene. Ako je za $Z_G=1/Y_m$ pojačanje znatno manje od najvećeg ostvarivog za $Z_G=Z_{G(maks)}$, onda za pojačalo s bezuvjetno stabilnim tranzistorom treba potražiti kompromisno rješenje. Do njega se može doći tako da se u Smithovu dijagramu koeficijent refleksije Γ_G namjesti na vrijednost koja se nalazi negdje na spojnici između točaka Γ_m i $\Gamma_{G(maks)}$. Najbolje je odabrati točku koja pritom daje najmanju mjeru šuma $M_š$ definiranu izrazom (8–22) u odjeljku 8.1.4. Za to je potreban iterativni postupak u kojem se može krenuti od početne vrijednosti koja se nalazi na sredini dužine koja povezuje koeficijente refleksije Γ_m i $\Gamma_{G(maks)}$.

Veličine F_{min}, $R_š$ i Y_m različite su za različite tranzistore, a nazivaju se *parametri šuma* tranzistora. Obično ih daje proizvođač tranzistora ili se dobivaju mjerenjima. Impedancija generatora može se, primjerice, mijenjati sve dok se ne očita minimalna vrijednost faktora šuma na mjeraču faktora šuma (odjeljak 8.1.5). Tako je nađena vrijednost F_m uz uvjet $Y_G=Y_m$. Zatim se može točno izmjeriti admitancija Y_m jednim od reflektometrijskih postupaka (vidjeti odjeljke 9.4.1-9.4.3). Otpor šuma $R_š$ može se odrediti iz mjerenja faktora šuma uz uvjet $\Gamma_G=0$, gdje se odgovarajuća vrijednost faktora šuma $F(\Gamma_G=0)$ uvrsti u formulu

$$R_š = \left[F(\Gamma_G=0) - F_m\right]\frac{\left|1+\Gamma_m\right|^2}{4\left|\Gamma_m\right|^2}Z_0.$$

Izraz (8–240) može se uporabiti za proračun Γ_G za zadani faktor šuma. Za konstantni faktor šuma taj izraz daje kružnice u ravnini koeficijenta refleksije generatora, Γ_G. Sad se iz izraza (8–240) može izlučiti parametar

$$N = \frac{\left|\Gamma_G - \Gamma_m\right|^2}{1-\left|\Gamma_G\right|^2} = \frac{Z_0}{4R_š}(F - F_m)\left|1+\Gamma_m\right|^2 \tag{8–241}$$

koji odgovara zadanom faktoru šuma. Parametar N je konstanta za zadani faktor šuma i parametre šuma tranzistora. Jednadžba (8–241) može se dalje razviti kao

$$N = \frac{\Gamma_G\Gamma_G^* - (\Gamma_G\Gamma_m^* + \Gamma_G^*\Gamma_m) + \Gamma_m\Gamma_m^*}{1-\left|\Gamma_G\right|^2},$$

$$\left|\Gamma_G\right|^2(1+N) + \left|\Gamma_m\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{\Gamma_G\Gamma_m^*\right\} = N\,. \tag{8–242}$$

Množenjem te jednadžbe, slijeva i zdesna, faktorom $(1+N)$ dobiva se

$$\left|\Gamma_G\right|^2(1+N)^2 + \left|\Gamma_m\right|^2 - 2(1+N)\,\mathrm{Re}\left\{\Gamma_G\Gamma_m^*\right\} = N^2 + N(1-\left|\Gamma_m\right|^2),$$

pa nakon dijeljenja s $(1+N)^2$ izlazi

$$\left|\Gamma_G - \frac{\Gamma_m}{1+N}\right|^2 = \frac{N^2 + N(1-\left|\Gamma_m\right|^2)}{(1+N)^2},$$

što se može prepoznati kao jednadžba kružnice (F3) u dodatku F. Otuda se središte i polumjer kružnice mogu napisati kao:

$$S_F = \frac{\Gamma_m}{N+1}, \tag{8–243a}$$

$$R_F = \frac{\sqrt{N^2 + N(1-\left|\Gamma_m\right|^2)}}{N+1}. \tag{8–243b}$$

Te se kružnice mogu prikazati u ravnini Γ_G u Smithovu dijagramu za diskretne vrijednosti faktora šuma ili parametra N. Za $N=0$, tj. $F=F_m$, kružnica degenerira u točku Γ_m u kojoj se postiže minimalni faktor šuma. Ako je $\Gamma_G=\Gamma_m$ stabilna točka, onda se pojačalo može proračunati za minimalni faktor šuma F_m. U primjeru 8.6. vidjet ćemo kako se konstruiraju kružnice i kako ih se može uporabiti za proračun niskošumnog pojačala.

Primjer 8.5. Proračun mikrovalnog pojačala za maksimalno pojačanje

Konstruirati mikrovalno pojačalo za središnju frekvenciju 8 GHz. Raspršni parametri MESFET-a izmjereni su u sustavu karakteristične impedancije $Z_0=50\ \Omega$:

$$S_{11} = 0{,}75\angle -120° \qquad S_{12} = 0{,}06\angle 40°$$

$$S_{21} = 2\angle 40° \qquad S_{22} = 0{,}6\angle -80°\,.$$

Parametri šuma tranzistora iznose: $F_m=2$ dB, $\Gamma_m=0{,}7\angle 150°$, $R_š=15\ \Omega$. Izračunati impedancije tereta i generatora za maksimalno pojačanje snage. Naći pripadajući faktor šuma i usporediti ga s najmanjim mogućim faktorom šuma. Za navedeno pojačalo projektirati prilagodne mreže za izvedbu u mikrotrakastoj tehnici za podlogu $\varepsilon_r=2{,}52$ i $h=0{,}57$ mm.

Rješenje:

Najprije valja provjeriti stabilnost tranzistora i istražiti mogućnost istodobne prilagodbe na obama prolazima za maksimalno pojačanje. Determinanta iznosi $\Delta = S_{11}S_{22} + S_{12}S_{21} = 0{,}445\angle 175{,}4°$ pa iz izraza (8–213) izlazi faktor stabilnosti

$$K = \frac{1-\left|S_{11}\right|^2 - \left|S_{22}\right|^2 + \left|\Delta\right|^2}{2\left|S_{12}S_{21}\right|} = \frac{1-(0,75)^2-(0,6)^2+(0,445)^2}{2\cdot 0,06\cdot 2,0} = 1{,}15\,.$$

Budući da je $|\Delta| < 1$ i $K > 1$, tranzistor je bezuvjetno stabilan i može se istodobno prilagoditi na obama krajevima. Iz izraza (8–216a) i (8–222a) mogu se odrediti veličine:

$$B_1 = 1 + |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2 = 1 + (0{,}75)^2 - (0{,}6)^2 - (0{,}445)^2 = 1{,}004$$

$$A_1 = S_{11} - S_{22}^* \Delta = -0{,}308 - \mathrm{j}0{,}39 .$$

Njihovim uvrštenjem u izraz (8–221a) dobiva se optimalni koeficijenti refleksije generatora za maksimalno pojačanje

$$\Gamma_{G0} = \frac{1}{2A_1}\left(B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4|A_1|^2} \right) = -0.54 + \mathrm{j}0{,}69 = 0{,}87\angle 128° .$$

Jednako tako, iz izraza (8–216b) i (8–222b) dobiva se: $B_2 = 0{,}6$ i $A_2 = -0{,}04 - \mathrm{j}0{,}29$ pa iz izraza (8–221b) izlazi da optimalni koeficijent refleksije tereta iznosi

$$\Gamma_{T0} = -0{,}11 + \mathrm{j}0{,}79 = 0{,}79\angle 98° .$$

Pripadajuće impedancije generatora i tereta mogu se lako odrediti preko pripadajućih koeficijenata refleksije:

$$Z_{G0} = Z_0 \frac{1+\Gamma_{G0}}{1+\Gamma_{G0}} = 4{,}19 + \mathrm{j}24{,}2\,\Omega ; \quad Z_{T0} = Z_0 \frac{1+\Gamma_{T0}}{1+\Gamma_{T0}} = 10{,}0 + \mathrm{j}42{,}7\,\Omega .$$

Maksimalno pojačanje može se izravno izračunati iz izraza (8–223) kao

$$G_{maks} = \left|\frac{S_{21}}{S_{12}}\right| \left(K - \sqrt{K^2 - 1} \right) = \left|\frac{0{,}75}{0{,}08}\right| \left(1{,}15 - \sqrt{1{,}15^2 - 1} \right) = 19{,}45 = 12{,}9\,\mathrm{dB} .$$

Pripadajući faktor šuma ovisi o impedanciji generatora, tj. o njegovom koeficijentu refleksije. Uvrštenjem koeficijenta refleksije $\Gamma_G = \Gamma_{G0}$ i otpora šuma $R_š = 15\Omega$ u izraz (8–240) dobiva se

$$F = F_m + \frac{4R_š}{Z_0} \frac{|\Gamma_{G0} - \Gamma_m|^2}{(1 - |\Gamma_{G0}|^2)|1 + \Gamma_m|^2} = 1{,}814 = 2{,}59\,\mathrm{dB} .$$

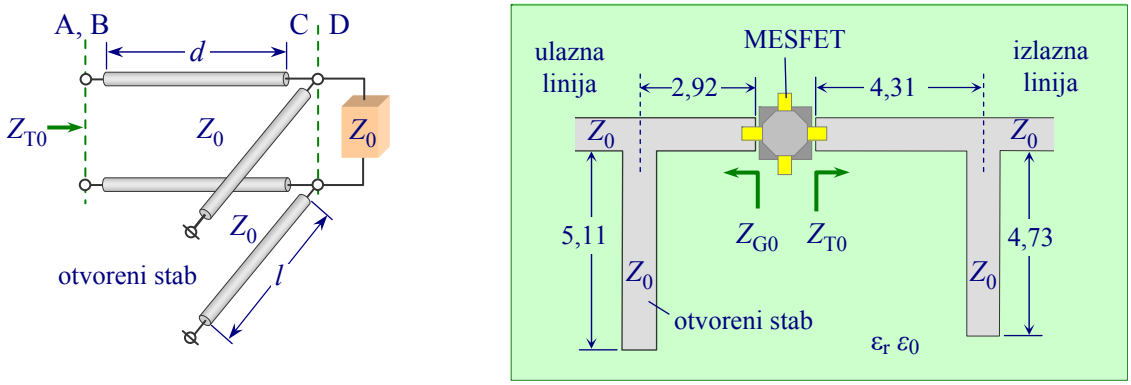
Iz toga se vidi da je faktor šuma veći za 0,59 dB od najmanjeg mogućeg ($F_m = 2$ dB).

Primjenom rezultata za Γ_{G0} i Γ_{T0}, može se pristupiti konstrukciji prilagodnih mreža. Budući da se radi o frekvenciji 8GHz, prednost valja dati prilagodnim mrežama s prijenosnim linijama. Kad se ne traži velika širina pojasa pojačala, tad se prilagodba može ostvariti jednim paralelnim stabom. Za izvedbe s mikrotrakastim linijama, prilagodne mreže valja izvesti s pomoću otvorenih stabova jer je ta vrsta stabova tehnološki manje zahtjevna od kratkoga spoja (odjeljak 5.11.5) za koji je potrebno bušenje podloge i metaliziranje rupe. Najjednostavnija je konstrukcija uz istu karakterističnu impedanciju svih linijskih odsječaka i stabova ($Z_0 = 50\Omega$).

Zbog ograničenog prostora, objasnit ćemo samo postupak određivanja parametara linijskog odsječka i paralelnog staba izlazne prilagodne mreže. Impedancija Z_{T0}, koja je određena koeficijentom refleksije Γ_{T0}, označuje impedanciju koja gleda u prilagodnu mrežu prema impedanciji Z_0, kao što je prikazano na slici 8.101a). To zahtijeva obrnuti postupak u odnosu na onaj proveden u primjeru 6.3, u kojem je opisan postupak prilagodbe zadane impedancije na karakterističnu impedanciju pobudne linije. Naime, u ovom slučaju valja transformirati karakterističnu impedanciju izlazne linije (Z_0) u zadanu impedanciju tereta Z_{T0}. Postupak započinje tako da se u Smithov dijagram najprije ucrta normirana impedancija $z_{T0} = 0{,}2 + \mathrm{j}0{,}854$, kojoj odgovara točka A. Traženjem inverzne vrijednosti dobiva se normirana admitancija $y_{T0} = 0{,}26 - \mathrm{j}1{,}11$. Ona leži u točki B, kao što je prikazano na slici 8.102. Koncentrična kružnica koja prolazi točkama A i B presijeca kružnicu $1 + \mathrm{j}b$ u dvije točke, C i C′, koje daju dva moguća rješenja za duljinu linijskog odsječka između tranzistora i staba. Kretanjem u smjeru prema teretu,od točke B do točke C, dobiva se potrebna duljina odsječka. Na vanjskoj skali Smithova dijagrama mogu se očitati relativne normirane duljine d/l za točke B i C. Njihova razlika daje normiranu duljinu linijskog odsječka, tj.

$$d/\lambda = 0{,}3643 - 0{,}1981 = 0{,}1663 .$$

Na frekvenciji 8 GHz, to daje $d_{2,z} = 7{,}19$ mm za liniju ispunjenu zrakom,što je istaknuto indekom »z«.



a) b)

Slika 8.101. a) Shematski prikaz izlazne prilagodne mreže koja obavlja transformaciju impedancije Z_0 u impedanciju tereta Z_{T0}. **b)** Izvedba pojačala s mikrotrakastim linijama (sve su mjere u mm).

Susceptancija staba može se izravno odrediti iz susceptancije točke C. Budući da normirana admitancija u točki C iznosi 1 + j2,62, tražena je susceptancija staba $b_s = 2{,}62$. Duljina otvorenog staba računa se u smjeru prema generatoru od točke E (točka nulte admitancije) do točke F koja leži na obodu Smithova dijagrama u sjecištu s kružnicom konstantne normirane susceptancije točke C. Sad se u točki F kojoj odgovara normirana admitancija $y_F = j2{,}62$, na obodu Smithova dijagrama može očitati relativna električna duljina staba, $l_{s2,z}/\lambda = 0{,}192$. Za prijenosnu liniju ispunjenu zrakom, ta vrijednost daje fizičku duljinu staba $l_{s2,z} = 7{,}19$ mm.

Sličnim se postupkom, za odgovarajuću točku C ulaznoga kruga, mogu odrediti parametri ulazne prilagodne mreže. Rezultat je: $d_{1,z}/\lambda = 0{,}1125$, $d_{1,z} = 4{,}22$ mm; $l_{s1,z}/\lambda = 0{,}2066$, $l_{s1,z} = 7{,}74$ mm.

Sad se može pristupiti konstrukciji stvarnih prilagodnih sklopova izvedenih primjenom mikrotrakastih linija. Za mikrotrakastu liniju karakteristične impedancije $Z_0 = 50\ \Omega$ izrađenu na dielektričnoj podlozi visine $h = 0{,}57$ mm i permitivnosti $\varepsilon_r = 2{,}52$, iz izraza (4–159) i (4–156) dobiva se: $w = 1{,}42$ mm i $\varepsilon_{ef} = 2{,}089$. Otuda, za frekvenciju 8 GHz, valna duljina u mikrotrakastoj liniji iznosi:

$$\lambda_v = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_{ef}}} = \frac{2{,}998 \cdot 10^8}{8 \cdot 10^9 \sqrt{2{,}089}} = 0{,}02593\,\text{m} = 25{,}93\,\text{mm}\,.$$

Sad se mogu lako naći potrebne fizičke duljine stabova i linijskih odsječaka. Za ulazni krug izlazi:

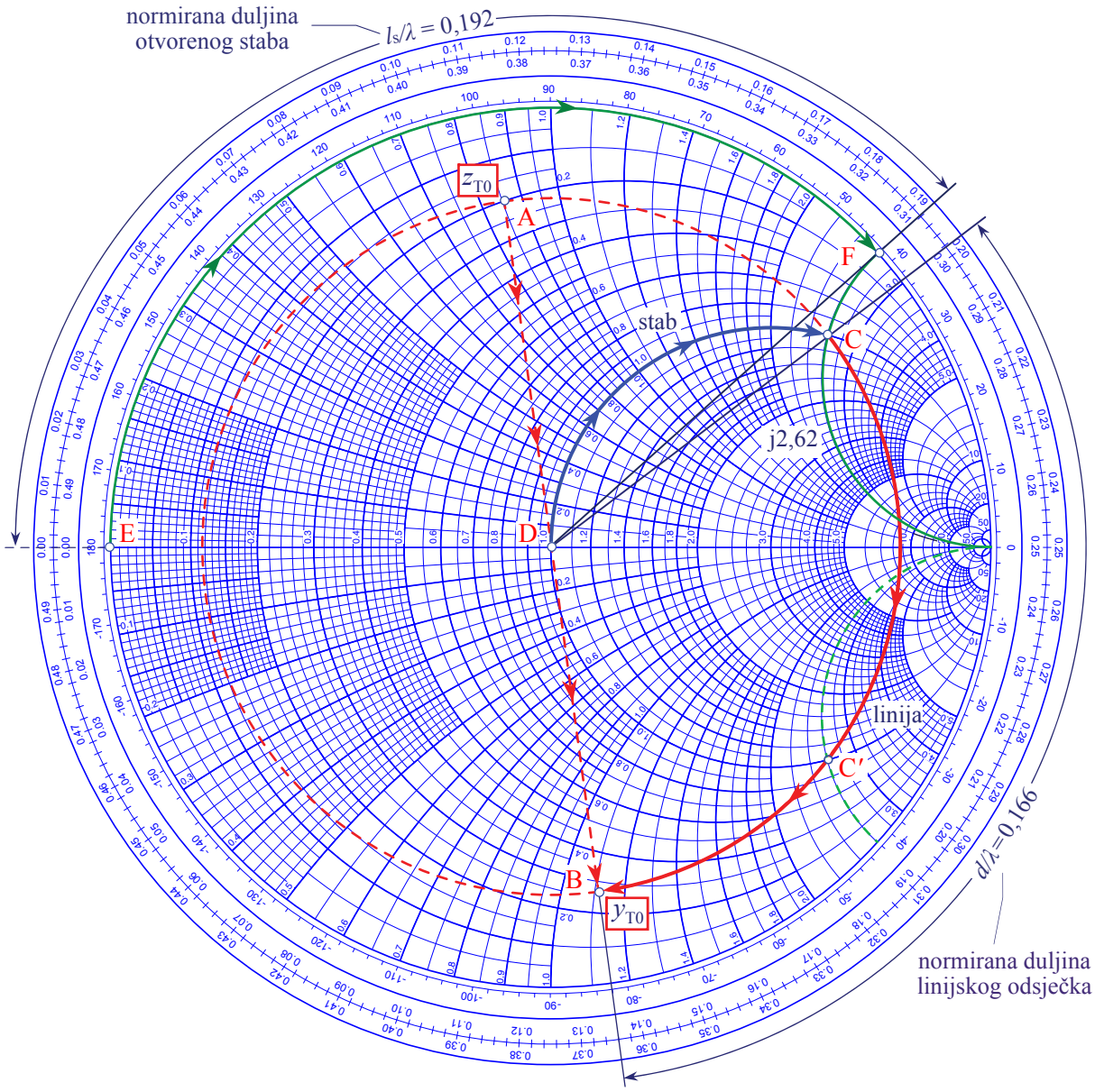
$$d_1 = 0{,}1125 \cdot 25{,}93 = 2{,}92\,\text{mm}\,;\ l_{s1} = 0{,}2066 \cdot 25{,}93 = 5{,}36\,\text{mm}\,,$$

a za izlazni krug izlazi:

$$d_2 = 0{,}1662 \cdot 25{,}93 = 4{,}31\,\text{mm}\,;\ l_{s2} = 0{,}1919 \cdot 25{,}93 = 4{,}98\,\text{mm}\,.$$

Nakon toga valja kompenzirati kapacitivne učinke na kraju otvorene linije odgovarajućim skraćivanjem stabova (odjeljak 5.11.1). Primjenom formule (5–274) skraćenja ulaznog i izlaznog staba iznose $\Delta l = 0{,}254$ mm pa konačna vrijednost duljine staba u ulaznom krug iznosi $l_{s1} = 5{,}11$ mm, a u izlaznom krugu $l_{s2} = 4{,}73$ mm. Na slici 8.101b) prikazan je nacrt tiskane pločice pojačala s prlagodnim mrežama na ulaznu i izlazu. Radi preglednosti ispušteni su sklopovi za dovođenje napajanja i blokiranje istosmjernih veličina do priključnih linija (vidjeti odjeljak 8.8.4) te je zanemaren utjecaj diskontinuiteta mikrotrakastih T-spojeva.

U konačnoj izvedbi, slijev MESFET-a valja izravno kratko spojiti s vodljivom uzemljenom ravninom metalnim prospojem i uporabiti aktivni sklop za istosmjerno napajanje, kao što je izvedeno na slici 8.97. Druga je moguća izvedba, uporaba automatskog prednapona, kao u primjeru prikazanom na slici 8.98. Pri tomu slijev valja spojiti na masu preko paralelnog spoja otpora i kapaciteta.



Slika 8.102. Prilagodba izlaznog stupnja s jednim kratko spojenim stabom

Primjer 8.6. Proračun mikrovalnog pojačala za minimalan šum

Izračunati impedancije tereta i generatora pojačala za najmanji ostvarivi faktor šuma za tranzistor iz primjera 8.5. Provjeriti koliko se pritom smanjilo pojačanje u odnosu na primjer 8.5.

Rješenje:

Budući da je tranzistor bezuvjetno stabilan ($K = 1{,}14$ i $|\Delta| = 0{,}445$) mogu se ostvariti radni uvjeti s minimalnim faktorom šuma. U tom slučaju na ulaz pojačala valja priključiti impedanciju generatora čiji koeficijent refleksije iznosi $\Gamma_m = 0{,}7\angle 150°$, umjesto vrijednosti Γ_{G0} za maksimalno pojačanje. Time je već određena impedancija generatora, pa je za izračunavanje pojačanja najbolje uzeti izraz (8–188)

za raspoloživo pojačanje koje je funkcija samo impedancije generatora. Izlazna se impedancija može dobiti preko $\Gamma_G=\Gamma_m$, tj.

$$\Gamma_{iz} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_m}{1-S_{11}\Gamma_m} = 0{,}07 - \mathrm{j}0{,}725 = 0{,}73\angle -84{,}5° .$$

Uvrštenjem izlazne impedancije u izraz (8–188), raspoloživo pojačanje iznosi

$$G_A = \frac{1-|\Gamma_m|^2}{|1-S_{11}\Gamma_m|^2}|S_{21}|^2 \frac{1}{1-|\Gamma_{iz}|^2} = 11{,}9 = 10{,}7\ \mathrm{dB} .$$

To je pojačanje za 2,2 dB manje od maksimalno ostvarivog ($G_{maks} = 12{,}9$ dB; primjer 8.5), što je prihvatljiva vrijednost. U izlaznom je krugu zadovoljen uvjet za maksimalni prijenos snage iz pojačala u teret, tj. $\Gamma_T=\Gamma_{iz}^* = 0{,}07+\mathrm{j}0{,}725=0{,}73\angle 84{,}5°$.

Otuda, koeficijent refleksije na ulazu tranzistora iznosi

$$\Gamma_{ul} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_T}{1-S_{22}\Gamma_T} = -0{,}526 - \mathrm{j}0{,}617 = 0{,}81\angle -130{,}5° ,$$

pa ulazna impedancija mreže poprima vrijednost

$$Z_{ul} = \frac{1+\Gamma_{ul}}{1-\Gamma_{ul}} = 6{,}31 - \mathrm{j}22{,}8\,\Omega .$$

Preko koeficijenta refleksije generatora može se doći do odgovarajuće impedancije, tj.

$$Z_G = Z_0 \frac{1+\Gamma_m}{1+\Gamma_m} = 14 + \mathrm{j}7{,}9\,\Omega .$$

Impedancija tereta može se izračunati iz pripadajućeg koeficijenta refleksije, tj.

$$Z_T = Z_0 \frac{1+\Gamma_T}{1+\Gamma_T} = 16{,}9 + \mathrm{j}52{,}1\,\Omega .$$

Sad se može pristupiti proračunu prilagodnih mreža na ulazu i izlazu. Prilagodba se može ostvariti na način opisan u primjeru 8.5.

U sklopovima osjetljivih prijamnika često se stavlja više pojačala u lanac (kaskadu). Pritom se mora istodobno voditi računa i o faktoru šuma i o pojačanju jer faktor šuma kaskade dvaju pojačala ovisi o faktoru šuma prvoga i drugoga pojačala te o raspoloživom pojačanju prvoga pojačala. U odjeljku 8.1. vidjeli smo da je mjera šuma, dana izrazom (8–22), veličina koja može dati odgovor na pitanje koje je pojačalo u lancu bolje staviti na prvo mjesto. Usporedba pojačala s $F=1{,}814$ iz primjera 8.5. s pojačalom iz ovoga primjera s $F=F_m$ daje

$$M_{š1} = \frac{F-1}{1-1/G_{maks}} = \frac{1{,}814-1}{1-1/19{,}45} = 0{,}858 \ > \ M_{š2} = \frac{F_m-1}{1-1/G} = \frac{1{,}585-1}{1-1/11{,}876} = 0{,}639 .$$

Taj rezultat pokazuje da je na prvo mjesto bolje postaviti pojačalo s najmanjim šumom, $M_{š2}$, a to je pojačalo iz ovoga primjera. To je intuitivno očekivan rezultat. No na vrlo visokim frekvencijama, u milimetarskome valnome području, pojačanja tranzistora mogu biti toliko mala da raspoloživo pojačanje pojačala ne prelazi razinu od 6 do10 dB. Stoga se može dogoditi da pojačalo s manjim faktorom šuma, ali manjim pojačanjem ostvari manju mjeru šuma od pojačala s većim faktorom šuma i većim pojačanjem.

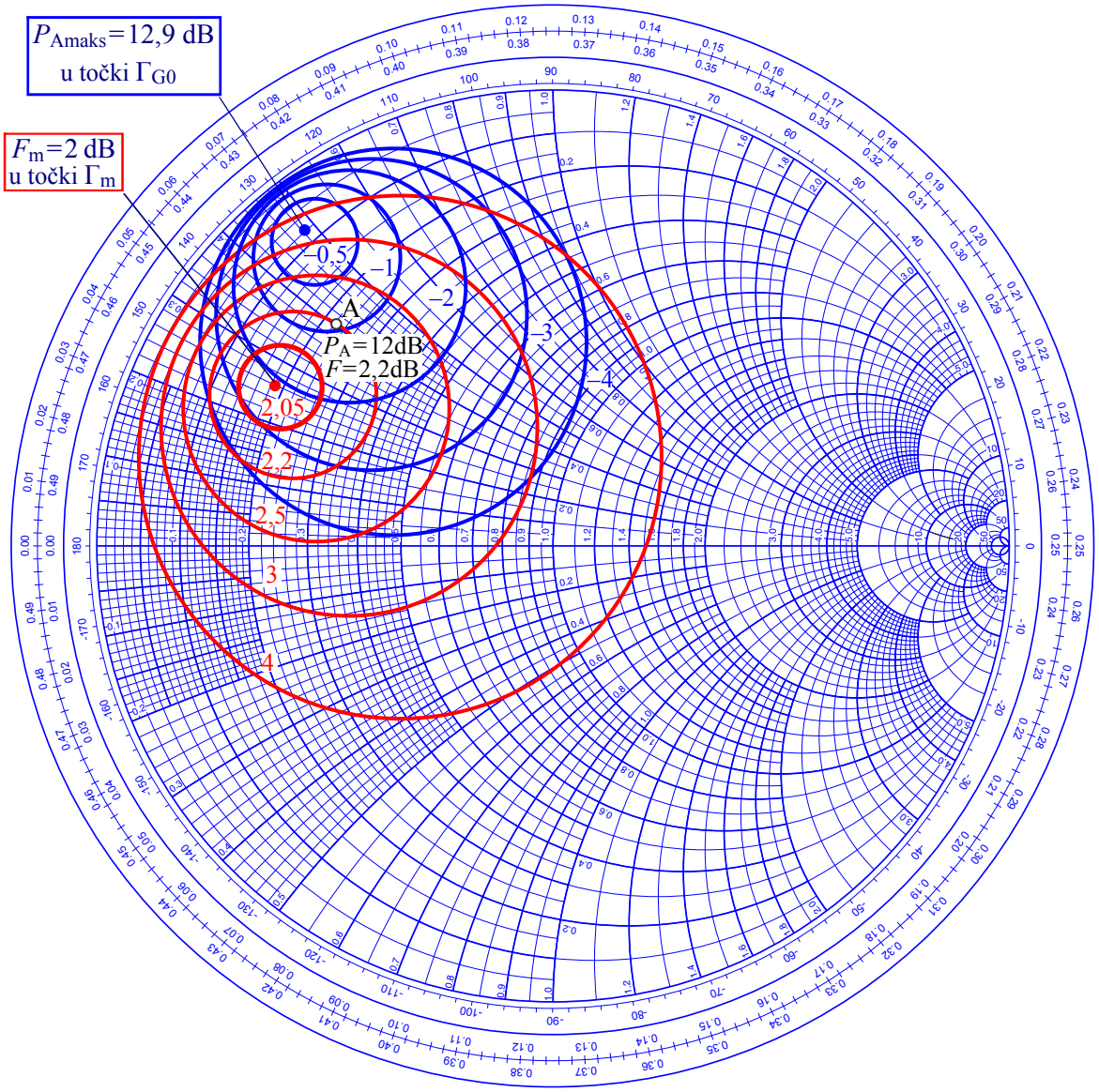
Ako se traži optimum između pojačanja i faktora šuma u smislu postizanja minimalne mjere šuma, onda je korisno prikazati porodice kružnica konstantnog raspoloživog pojačanja i konstantnog faktora šuma u ravninu koeficijenta refleksije (ili impedancije) generatora, kao što je prikazano na slici 8.103. Kružnice su konstruirane s pomoću izraza (8–232) i (8–237).

Opisan se grafički postupak također nerijetko rabi kad se traži najmanja moguća vrijednost šuma ili najmanja refleksija. Naime, za bezuvjetno stabilan tranzistor, na kružnici konstantnog pojačanja za zadanu vrijednost pojačanja uvijek se može naći točka s najmanjim mogućim F ili najmanjim OSV. Također se može naći točka s kompromisnim rješenjem uz prihvatljivo male razine OSV i F. Jedno od

mogućih rješenja označeno je točkom A na slici 8.103. Normirana impedancija generatora za tu točku iznosi $y_G = 0{,}22 + \mathrm{j}\,0{,}4$. Zbog toga što ulazni krug nije prilagođen maksimalnom prijenosu snage valja odrediti razinu razgođenosti ulaznoga kruga. Ta se razgođenost može matematički izraziti faktorom razgođenja preko izraza (5–57). Za točku A, faktor razgođenja iznosi

$$M_{\mathrm{ul}} = \frac{(1-|\Gamma_G|^2)(1-|\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2)}{|1-\Gamma_G\Gamma_{\mathrm{ul}}|^2} = \frac{(1-0{,}7^2)\cdot(1-0{,}81^2)}{|1+(0{,}7\angle 150°)\cdot(0{,}81\angle -130{,}5°)|^2} = 0{,}695\cdot$$

U decibelima to iznosi $10\log(M_{\mathrm{ul}}) = -1{,}58$ dB. U teoriji linija, taj je izraz ekvivalentan izrazu koji upućuje na gubitke snage zbog refleksije, $1-|\Gamma_T|^2$.



Slika 8.103. Kružnice konstantnog raspoloživog pojačanja snage (plavo) i faktora šuma (crveno). Za šum su prikazane kružnice s apsolutnim vrijednostima faktora šuma, a za pojačanje relativne vrijednosti u odnosu na maksimum (12,9 dB). Impedancija kod koje se postiže najveće pojačanje izračunana je u primjeru 8.5, a iznosi Z_{G0}=4,19+j24,2 Ω

8.8.6. Širokopojasna pojačala

Proračun širokopojasnih pojačala znatno je složenija zadaća od one za uskopojasno (usklađeno) pojačalo obrađeno u prethodnim odjeljcima [17], [18]. Prilagodne mreže valja tako projektirati da pruže zadovoljavajuću stabilnost, konstantno pojačanje i grupno kašnjenje u cijelom pojasu frekvencija. Kao što smo vidjeli, uporaba tehnike kompenzacije prilagodnih mreža ima za posljedicu razgođenje ulaznoga i izlaznoga kruga, dakle velik odnos stojnih valova (OSV) na ulazu i izlazu. Stoga se u svrhu povećanja širine frekvencijskog pojasa rabe sklopovi sa složenijim prilagodnim mrežama, balansni sklopovi, sklopovi s paralelnom i serijskom povratnom vezom te otpornim opterećenjem.

Balansno pojačalo

Spajanjem dvaju električki jednakih pojačala u balansni sklop može se ostvariti stabilno širokopojasno pojačalo s razmjerno ravnom karakteristikom pojačanja te malim OSV na ulazu i izlazu [18], [1]. Najčešći sklop balansnog pojačala u praksi, prikazan na slici 8.104, rabi dva kvadraturna hibridna sprežnika (Langeov sprežnik) s faktorom dijeljenja $k = 1/2$. No mogu se primijeniti i druge vrste hibrida (odjeljak 7.3).

Primjenom raspršne matrice idealnog kvadraturnog hibrida za središnju frekvenciju, dobiva se matrična jednadžba iz koje se mogu odrediti odnosi između valova snage u ulaznome krugu

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{j} & 1 & 0 \\ -\mathrm{j} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\mathrm{j} \\ 0 & 1 & -\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-\mathrm{j}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathrm{j} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathrm{j} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8–244}$$

Budući da je prolaz 4 hibrida 1 zaključen prilagođenim teretom, $a_4 = 0$. Ako se izraz (8–244) razloži na skup linearnih jednadžba, onda se dobiva:

$$b_1 = \frac{-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}(a_2 + \mathrm{j}a_3), \quad b_2 = \frac{-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}a_1, \quad b_3 = \frac{-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}(\mathrm{j}a_1), \quad b_4 = \frac{-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}(\mathrm{j}a_2 + a_3). \tag{8–245}$$

Za ulazni krug pojačala A vrijedi izraz $\Gamma_{\mathrm{ulA}} = a_2/b_2$, iz kojeg izlazi

$$a_2 = \Gamma_{\mathrm{ulA}} b_2 = \frac{-\mathrm{j}}{\sqrt{2}} a_1 \Gamma_{\mathrm{ulA}}. \tag{8–246a}$$

Jednako tako, izraz $\Gamma_{\mathrm{ulB}} = a_3/b_3$ za pojačalo B daje

$$a_3 = \Gamma_{\mathrm{ulB}} b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 \Gamma_{\mathrm{ulB}}. \tag{8–246b}$$

Uvrštenjem izraza (8–246) u prvi izraz (8–245) za b_1, dobiva se

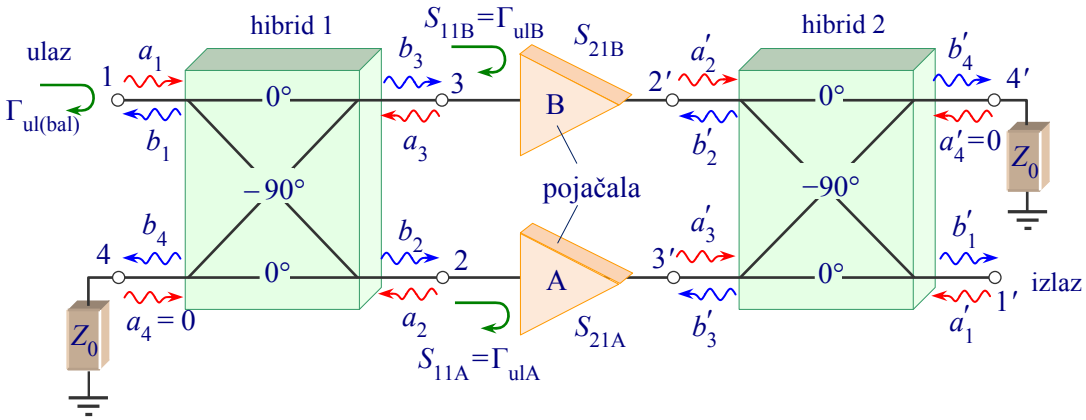
$$b_1 = \frac{-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\left(\frac{-\mathrm{j}}{\sqrt{2}} a_1 \Gamma_{\mathrm{ulA}} + \frac{\mathrm{j}}{\sqrt{2}} a_1 \Gamma_{\mathrm{ulB}}\right) = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mathrm{ulB}} - \Gamma_{\mathrm{ulA}}) a_1.$$

Dijeljenjem toga izraza s a_1, izlazi

$$\Gamma_{\mathrm{ul(bal)}} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mathrm{ulB}} - \Gamma_{\mathrm{ulA}}). \tag{8–247}$$

Sličan se izraz dobiva za izlazni krug, tj.

$$\Gamma_{\mathrm{iz(bal)}} = \frac{b_1'}{a_1'} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mathrm{izA}} - \Gamma_{\mathrm{izB}}). \tag{8–248}$$



Slika 8.104. Balansno pojačalo s kvadraturnim hibridom

Za posve jednaka pojačala, $S_{11A}=S_{11B}$, dobiva se $\Gamma_{ul(bal)}=0$ i $\Gamma_{iz(bal)}=0$, što znači da je u tom slučaju balansno pojačalo savršeno prilagođeno na ulazu i izlazu. Indeks »bal« odnosi se na veličine vezane uz balansno pojačala, a indeksi »A« i »B« na veličine pojedinačnih pojačala.

Ukupno pojačanje balansnog pojačala, tj. parametar $S_{21(bal)}$, može se naći iz sljedećeg razmatranja. U skladu s oznakama na slici 8.104, val snage na izlazu pojačala iznosi

$$b'_1 = b_2 S_{21A}\frac{1}{\sqrt{2}} + b_3 S_{21B}\left(\frac{-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\right). \tag{8–249}$$

Budući da je:

$$b_2 = \frac{a_2}{\Gamma_{ulA}} = \frac{-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}a_1, \qquad b_3 = \frac{a_3}{\Gamma_{ulB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}a_1,$$

iz izraza (8–249) dobiva se

$$b'_1 = \frac{-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}a_1 S_{21A}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{a_1}{\sqrt{2}}S_{21B}\left(\frac{-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\right).$$

Stoga prijenosni parametar balansnog pojačala iznosi

$$S_{21(bal)} = \frac{b'_1}{a_1} = \frac{-\mathrm{j}}{2}\left(S_{21A} + S_{21B}\right). \tag{8–250}$$

Sad se može odrediti prijenosno pojačanje balansnog pojačala G_T kao kvadrat apsolutne vrijednosti prijenosnog parametra, tj.

$$G_{T(bal)} = \left|S_{21(bal)}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|S_{21A} + S_{21B}\right|^2. \tag{8–251}$$

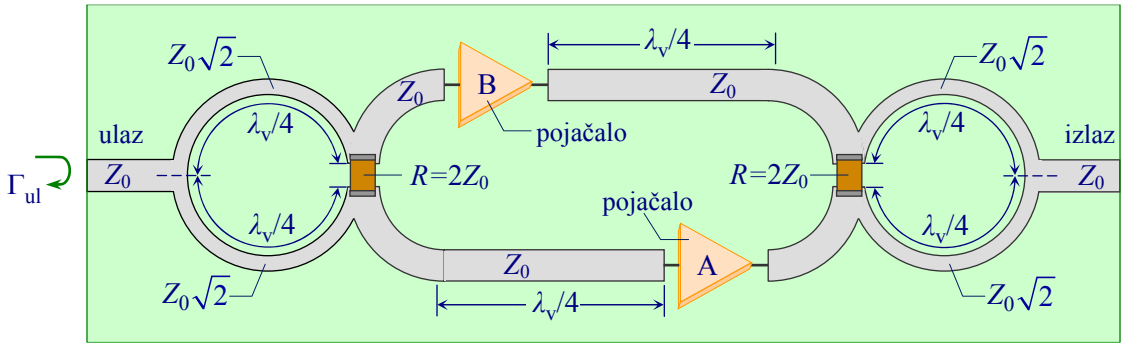
Za posve jednaka pojačala, $S_{11A}=S_{11B}$, iz izraza (8–251) izlazi $S_{21(bal)}=-\mathrm{j}\,S_{21A}$, pa je prijenosno pojačanje savršeno uravnoteženog balansnog pojačala

$$G_{T(bal)} = \left|S_{21A}\right|^2. \tag{8–252}$$

Drugim riječima, ako su oba pojačala u balansnom pojačalu posve jednaka i hibridi idealni, onda je ulazni odnos stojnih valova jednak jedinici, tj. $\Gamma_{ul(bal)}=0$, a pojačanje je balansnog pojačala jednako pojačanju osnovnog pojačala, koje je dano izrazom (8–252).

Sličnim razmatranjem, za povratni parametar S_{12} balansnog pojačala dobiva se

$$\left|S_{12(bal)}\right| = \frac{1}{2}\left|S_{12A} + S_{12B}\right|. \tag{8–253}$$



Slika 8.105. Balansno pojačalo s Wilkinsonovim djelilom snage

Balansna pojačala mogu se ostvariti i uporabom drugih vrsta hibrida, kao što su prstenasti kvadraturni hibrid s ograncima, prstenasti π-hibrid i Wilkinsonovo djelilo snage. Za posljednja dva hibridna sklopa fazni se pomak od 90° ostvaruje dodavanjem četvrtvalnih linijskih odsječaka u grane balansnog pojačala.

Na slici 8.105 prikazana je mikrotrakasta izvedba balansnog pojačala s Wilkinsonovim djelilima snage. Budući da su kod tih djelila izlazni signali u fazi, u jednu od grana (primjerice donju) ispred pojačala valja umetnuti četvrtvalni odsječak prijenosne linije karakteristične impedancije Z_0 da bi se ostvario potreban fazni pomak od 90°. Tad će se reflektirane snage, koje mogu nastati na ulazima pojačala, disipirati u otporu R ulaznoga djelila jer će stići u protufazi na izlazne prolaze toga djelila i tako se neće pojaviti na ulazu balansnog pojačala.

S druge strane, da bi signali u objema granama prevalili jednak put, tj. da bi stigli do izlaznog djelila s jednakim fazama, u gornju granu, iza pojačala, valja dodati četvrtvalni linijski odsječak jednak onome u donjoj grani. Pojavi li se razlika u fazama ili amplitudama signala na ulazima izlaznoga djelila, komponente razlike disipirat će se u otporu R toga djelila. Ovdje izlazno djelilo ima ulogu sklopa za slaganje (zbrajanje) snage. Rad sklopa s Wilkinsonovim djelilom u osnovi se ne razlikuje od onog s kvadraturnim hibridom, samo što je ova izvedba jednostavnija i upućuje na znatno veću širinu pojasa koja je posljedica veće širine pojasa Wilkinsonova djelila u usporedbi s prstenastim kvadraturnim hibridom (usporediti raspršne parametre tih dvaju hibrida u odjeljcima 7.2.2. i 7.3.5).

Ukupno je pojačanje balansnog pojačala jednako pojačanju osnovnog pojačala. Budući da se radi o nelinearnoj pojavi (odjeljak 8.2), zbog upola manje snage na ulazima pojedinačnih pojačala (A i B), ukupna će intermodulacijska izobličenja drugoga i trećega reda balansnog pojačala biti manja u usporedbi s izobličenjima pojedinačnih pojačala, pri jednakoj razini snage pobudnoga signala. Drugim riječima, u idealnom slučaju, za istu razinu intermodulacijskih izobličenja balansno će pojačalo dati dvostruko veću izlaznu snagu. Kombiniranjem više takvih pojačala s pomoću iste vrste hibrida mogu se postići znatno veće izlazne snage u klasi A. No zbog konačnih gubitaka u hibridima, u stvarnim će izvedbama izlazna snaga biti neznatno manja.

Balansna su pojačala inherentno znatno stabilnija od običnih pojačala, na što upućuje sljedeće razmatranje.

Uz uvjet savršene simetrije za balansno pojačalo vrijede izrazi:

$$\left|\Gamma_{\mathrm{ul(bal)}}\right| = \left|\Gamma_{\mathrm{iz(bal)}}\right| = 0\,, \qquad \left|S_{11(\mathrm{bal})}\right| = \left|S_{22(\mathrm{bal})}\right| = 0\,,$$

$$\left|S_{12\mathrm{A}}\right| = \left|S_{12\mathrm{B}}\right| = \left|S_{12(\mathrm{bal})}\right|, \qquad \left|S_{21\mathrm{A}}\right| = \left|S_{21\mathrm{B}}\right| = \left|S_{21(\mathrm{bal})}\right|.$$

Otuda se apsolutna vrijednost determinante raspršne matrice balansnog pojačala svodi na

$$\left|\Delta_{(\mathrm{bal})}\right| = \left|S_{11(\mathrm{bal})}S_{22(\mathrm{bal})} - S_{12(\mathrm{bal})}S_{21(\mathrm{bal})}\right| = \left|S_{12(\mathrm{bal})}S_{21(\mathrm{bal})}\right|,$$

pa faktor stabilnosti (K) balansnog pojačala poprima oblik

$$K_{(\mathrm{bal})} = \frac{1-\left|S_{11(\mathrm{bal})}\right|^2 - \left|S_{22(\mathrm{bal})}\right|^2 - \left|\Delta_{(\mathrm{bal})}\right|^2}{2\left|S_{12(\mathrm{bal})}S_{21(\mathrm{bal})}\right|} = \frac{1+\left|S_{12(\mathrm{bal})}S_{21(\mathrm{bal})}\right|^2}{2\left|S_{12(\mathrm{bal})}S_{21(\mathrm{bal})}\right|}. \tag{8–254}$$

Budući da je faktor stabilnost samo funkcija umnoška apsolutnih vrijednosti prijenosnih parametara, minimalna vrijednost faktora stabilnosti može se izračunati kao funkcija nove varijable $x = |S_{12(\mathrm{bal})}\, S_{21(\mathrm{bal})}|$. Uvrštenjem te varijable u izraz (8–248) faktor stabilnosti poprima jednostavniji oblik,

$$K_{(\mathrm{bal})} = \frac{1+x^2}{2x}. \tag{8–255}$$

Fizikalno ostvariv rezultat dobiva se samo za pozitivne vrijednosti x jer ona označuje apsolutnu vrijednost. Na grafu funkcije (8–254) za pozitivni x postoji minimum. Deriviranjem funkcije $K_{(\mathrm{bal})}$ po x i izjednačavanjem rezultata s nulom

$$\frac{\mathrm{d}K_{(\mathrm{bal})}}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2-1}{2x^2} = 0, \tag{8–256}$$

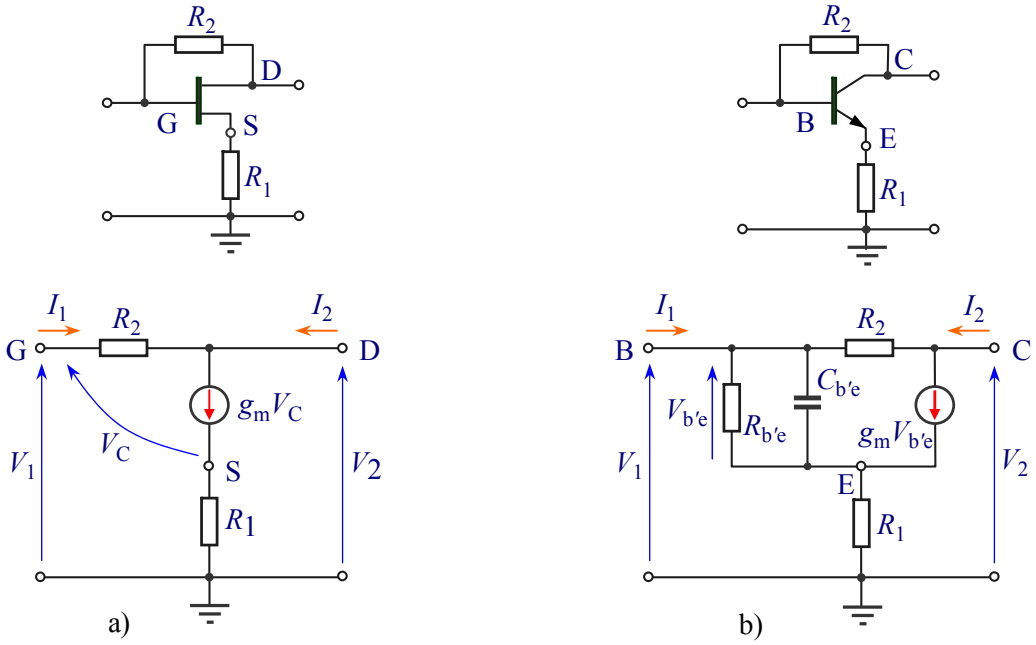
dobivaju se dva rješenja ($x_{1,2} = \pm 1$) za koordinatu ekstrema. Otuda je minimalna vrijednost faktora stabilnosti jednaka jedinici, što označuje rubnu stabilnost. Iz toga se može zaključiti da je simetrično balansno pojačalo na središnjoj frekvenciji hibrida uvijek bezuvjetno stabilno, neovisno u tomu jesu li osnovna pojačala bezuvjetno stabilna ili uvjetno stabilna. Najveća nestabilnost pojačala nastaje uz uvjet $|S_{12(\mathrm{bal})}\, S_{21(\mathrm{bal})}| = 1$, tj. kad je

$$\left|S_{21(\mathrm{bal})}\right| = \frac{1}{\left|S_{12(\mathrm{bal})}\right|}. \tag{8–257}$$

Širina pojasa balansnog pojačala ne prelazi širinu pojasa pojedinačnih pojačala. Prednosti balansnih pojačala mogu se sažeti u sljedećem. Pri projektiranju pojedinačnih pojačala pozornost valja prije svega usmjeriti na pojačanje i faktor šuma koji moraju pokazivati što manje promjene unutar zadanog pojasa frekvencija. Odnos stojnih valova pojedinačnih pojačala manje je bitan, jer odnos stojnih valova cjelokupnog balansnog pojačala uglavnom ovisi o obilježjima hibrida, zbog toga što se možebitne refleksije apsorbiraju na zaključnim otporima hibrida ili otporima unutar hibrida (Wilkinsonovo djelilo). Balansna su pojačala inherentno vrlo stabilna, barem na središnjoj frekvenciji. Stga ih je lako povezati u kaskadu (lanac) jer su u tom spoju pojedinačna pojačala međusobno izolirana hibridima, tj. usmjernim sprežnicima. Izlazna im je snaga udvostručena u odnosu na pojedinačna pojačala uz istu razinu intermodulacijskih izobličenja. Ispadne li iz rada jedno od pojačala, balansno pojačalo nastavit će i dalje raditi uz smanjeno pojačanje. Inherentno su širokopojasna pa se lako postižu širine pojasa veće od jedne oktave. Širina frekvencijskog pojasa poglavito ovisi o svojstvima hibrida.

Pojačalo s povratnom vezom

Širina radnog frekvencijskog pojasa može se povećati i primjenom povratne veze [11], [17], [18]. U tu se svrhu nerijetko rabe otporni elementi i to prije svega u izvedbama linearnih integriranih sklopova. Povratnom se vezom mogu također kompenzirati frekvencijske ovisnosti intrinzičnog pojačanja $|S_{21}|^2$ i odnosa stojnih valova, zbog frekvencijske ovisnosti parametara $|S_{11}|$ i $|S_{22}|$. Zanemarivanjem parazitskih elemenata u nadomjesnoj shemi MESFET-a na slici 8.53 i bipolarnog tranzistora na slici 8.55 te kombiniranjem omske serijske i paralelne povratne veze mogu se dobiti jednostavni modeli pojačala kao što je prikazano na slici 8.106.



Slika 8.106. Pojačala s povratnom vezom: **a)** s MESFET-om i **b)** s bipolarnim tranzistorom

Matrična jednadžba s admitancijskim parametrima za sklop s MESFET-om (slika 8.106a)) može se napisati kao

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_2} & -\dfrac{1}{R_2} \\ \dfrac{g_\mathrm{m}}{1+g_\mathrm{m}R_1} & \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \tag{8–258}$$

Slična se matrična jednadžba može napisati za sklop s bipolarnim tranzistorom. Sad se primjenom tablice 5.2, *Y*-parametri pojačala s povratnom vezom mogu jednostavno pretvoriti u odgovarajuće *S*-parametre:

$$S_{11(\mathrm{poj})} = S_{22(\mathrm{poj})} = \frac{1}{N}\left[1 - \frac{g_\mathrm{m}Z_0^2}{R_2(1+g_\mathrm{m}R_1)}\right], \tag{8–259a}$$

$$S_{12(\mathrm{poj})} = \frac{1}{N}\frac{2Z_0}{R_2}, \tag{8–259b}$$

$$S_{21(\mathrm{poj})} = \frac{1}{N}\left[\frac{2Z_0}{R_2} - \frac{2g_\mathrm{m}Z_0}{1+g_\mathrm{m}R_1}\right], \tag{8–259c}$$

gdje je

$$N = 1 + \frac{2Z_0}{R_2} + \frac{g_\mathrm{m}Z_0^2}{R_2(1+g_\mathrm{m}R_1)}. \tag{8–260}$$

Izraz (8–259a) pokazuje da se izborom pogodne vrijednosti otpora R_2 može ostvariti istodobna prilagodba na obama prolazima, tj. $S_{11(\mathrm{poj})}=S_{22(\mathrm{poj})}=0$. Izjednačavanjem izraza (8–259a) s nulom izlazi uvjet

$$R_1 = \frac{Z_0^2}{R_2} - \frac{1}{g_\mathrm{m}}. \tag{8–261}$$

Uvrštenjem toga izraza u izraze (8–259b) i (8–259c) dobiva se:

$$S_{12(\text{poj})} = \frac{Z_0}{R_2 + Z_0}, \tag{8–262a}$$

$$S_{21(\text{poj})} = \frac{Z_0 - R_2}{Z_0}. \tag{8–262b}$$

Izraz (8–262b) u skladu je s poznatom relacijom iz teorije pojačala s povratnom vezom, tj.

$$R_2 = Z_0\left(1 + \left|S_{21(\text{poj})}\right|\right). \tag{8–263}$$

Izraz (8–261) pokazuje da se uz uvjet $S_{11}=S_{22}=0$ može ostvariti pozitivna vrijednost otpora R_1 samo za dovoljno velike vrijednosti strmine tranzistora. Prvi član u izrazu (8–261) ima oblik formule za ulaznu impedancije četvrtvalnog transformatora impedancije i pokazuje kako se otpor R_1 transformira u dio otpora R_1, primjenom povratne veze. Izbacivanjem otpora R_1, u igri ostaje samo paralelna povratna veza, gdje otpor R_2 poprima vrijednost

$$R_2 = g_{\text{m}} Z_0^2 \tag{8–264}$$

koja odgovara najmanjoj mogućoj strmini. Izraz (8–264) pokazuje da će otpor R_2 biti to veći što je veća strmina uz zadanu vrijednost karakteristične impedancije sustava (obično 50Ω). Najmanja strmina tranzistora potrebna za održanje uvjeta $S_{11} = S_{22} = 0$, uz $R_1 = 0$ i za zadano pojačanje, tj. $S_{21(\text{poj})}$, može se dobiti uvrštenjem izraza (8–264) u izraz (8–262b), tj.

$$g_{\text{m(min)}} = \frac{1 - S_{21(\text{poj})}}{Z_0}. \tag{8–265}$$

To se može ilustrirati jednostavnim primjerom. Za pojačalo pojačanja snage $|S_{21(\text{poj})}|^2 = 10$ (ili 10 dB), u sustavu impedancije 50 Ω, potrebna je strmina čija vrijednost iznosi najmanje

$$g_{\text{m(min)}} = \frac{1 - (-10^{10/20})}{Z_0} = \frac{1 + 3{,}16}{50} = 83{,}2\,\text{mS}.$$

Valja uočiti da je za raspršni parametar S_{21} uzeta negativna numerička vrijednost, što je u skladu sa smjerom struje u strujnom izvoru nadomjesnih shema na slikama 8.53, 8.55 i 8.106. Potrebna vrijednost otpora u paralelnoj povratnoj vezi dobiva se iz izraza (8–264),

$$R_2 = g_{\text{m}} Z_0^2 = 0{,}0832 \cdot 50^2 = 208\ \Omega.$$

Kad su u nadomjesni sklop na slici 8.106a) uključena oba otpora, R_1 i R_2, tad se iz izraza (8–261) može vidjeti da se najmanji odnos stojnih valova na ulazu i izlazu pojačala postiže uz uvjet $R_1 R_2 \simeq Z_0^2$ i dovoljno veliku vrijednost strmine. No strmina većine MESFET-a, posebno u visokom mikrovalnom području, obično upućuje na razmjerno malu vrijednost pa konstrukciji takvih pojačala valja pristupiti s oprezom. Izraz (8–262b) pokazuje da pojačanje pojačala ovisi samo o otporu R_2, što se može iskoristiti za postizanje približno konstantnog pojačanja u stvarnim izvedbama pojačala s povratnom vezom.

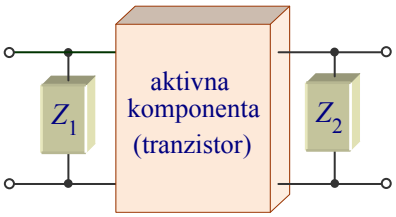
U dosadašnjim smo razmatranjima pretpostavili da je tranzistor idealan i da mu fazni pomak *S*-parametra S_{21} iznosi 180 stupnjeva u cjelokupnom frekvencijskom području. No na visokim se frekvencijama faza brzo mijenja s frekvencijom (odjeljak 8.4.5) pa se na nekoj frekvenciji može dogoditi da je faza parametra S_{21} takva da je izlazni val snage u fazi s ulaznim valom snage. To znači da je riječ o pozitivnoj povratnoj vezi. Tom se problemu može doskočiti tako da se jakost povratne veze postupno smanjuje porastom frekvencije. Najjednostavnije je rješenje da se otporu R_2 u paralelnoj povratnoj vezi doda u seriju induktivitet odgovarajuće vrijednosti. Induktivitet stvara povoljan fazni pomak u struji povratne veze, čime se kompenzira frekvencijska ovisnost faze parametra S_{21} u širem frekvencijskom području.

Pojačalo s otpornom prilagodbom

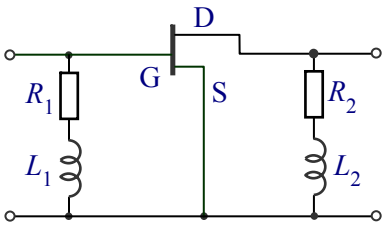
Umjesto otpornom povratnom vezom, širokopojasni se odziv pojačala može ostvariti postavljanjem otpornih impedancija paralelno s prolazima pojačala, kao što je prikazano na slici 8.107. Time se može održavati približno konstnatno pojačanje unutar širokog pojasa frekvencija te istodobno upravljati razinom pojačanja i odnosom stojnih valova. Zbog toga se taj pristup obično naziva *otporna prilagodba* (engl. *lossy matching*).

No porastom frekvencije općenito opada vrijednost parametra $|S_{21}|$ tranzistora pa su u seriju s otporima R_1 i R_2 dodani induktiviteti L_1 i L_2, kao što je prikazano u sklopu s MESFET-om na slici 8.108. Naime, na visokim frekvencijama, induktiviteti povećavaju module poprečnih impedancija pa smanjuju gubitke što je ekvivalentno povećanju pojačanja. U ulaznim krugovima niskošumnih pojačala međutim izbjegava se unošenje disipativnih elemenata jer pridonose porastu faktora šuma, tj. smanjenju odnosa signal/šum. No u izvedbama pojačala širine frekvencijskog pojasa od jedne ili više oktava, u praksi se takva rješenja teško mogu izbjeći.

U sklopovima pojačala za mikrovalno frekvencijsko područje, induktiviteti na slici 8.108 nerijetko se zamjenjuju kratkim kratko spojenim odsječcima prijenosne linije.



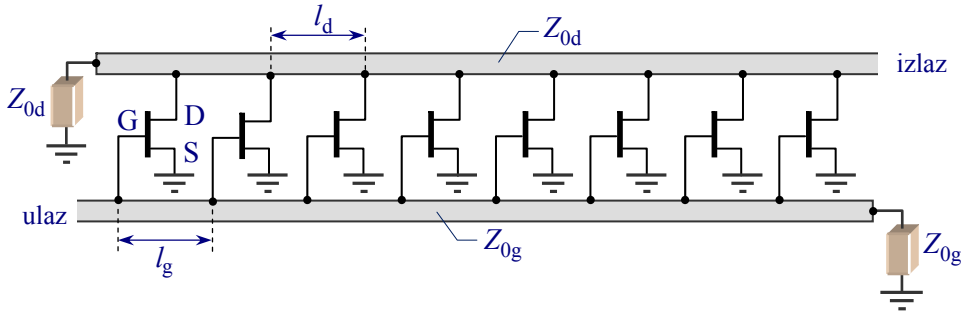
Slika 8.107. Načelni sklop širokopojasnog pojačala s otpornim opterećenjem prolaza



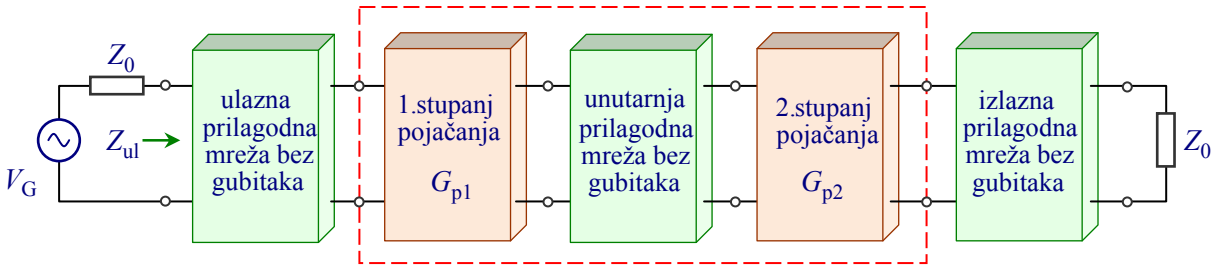
Slika 8.108. Izvedba širokopojasnog pojačala s MESFET-om

Raspodijeljeno pojačalo

Razvoj monolitnih integriranih sklopova (odjeljak 8.11) omogućio je ostvarenje raspodijeljenih širokopojasnih pojačala. Širine pojasa takvih pojačala prelaze jednu dekadu. Sklop se sastoji od mnoštva tranzistora koji su spojeni poprečno između dviju prijenosnih linija, kao što je prikazano na slici 8.109.



Slika 8.109. Raspodijeljeno pojačalo



Slika 8.110. Prijenos snage iz pojačala 1 u pojačalo 2 preko prilagodne mreže bez gubitaka

Duljine linijskih odsječaka između susjednih tranzistora valja tako odabrati da je kašnjenje između susjednih gatova jednako kašnjenju između susjednih dotoka istih tranzistora. Na liniji dotoka može se pobuditi progresivni i povratni (protusmjerni) putujući valovi. Osnovno načelo rada raspodijeljenog pojačala slično je onom kod valovodnog sprežnika s više otvora (odjeljak 7.3.2). Izlazni signali tranzistora zbrajaju se u fazi tvoreći progresivni val, ako su fazne brzine u liniji dotoka i gata međusobno jednake. Odabirom pogodnog razmaka (l_g, l_d) između susjednih tranzistora može se ostvariti poništavanje povratnoga vala u širokom pojasu frekvencija. Karakteristične impedancije prijenosnih linija (Z_{0g}, Z_{0d}) ne moraju biti jednake karakterističnoj impedanciji sustava (obično 50 Ω), nego ih treba posebno prilagoditi impedanciji gata i impedanciji dotoka tranzistora.

8.8.7. Lančani spoj više pojačala

Proračun pojačala s dvama stupnjevima pojačanja obavlja se tako da se izlazna impedancija prvoga pojačala u lancu izravno prilagodi ulaznoj impedanciji sljedećeg pojačala. Pritom se uvijek želi postići što veće pojačanje uz što manji odnos stojnih valova između pojačala. Ako pojačanje prvoga pojačala nije manje od 8 do10 dB, onda faktor šuma drugoga pojačala i svih ostalih pojačala u lancu neće u većoj mjeri pokvariti faktor šuma kaskade. Za prilagodnu mrežu bez gubitaka, razgođenje ulaznoga kruga drugoga pojačala jednako je razgođenju izlaznoga kruga prvoga pojačala [10] jer se radi o jednom te istom strujnom krugu (slika 8.110). Stoga i pripadajući faktori razgođenja moraju biti međusobno jednaki. Snaga koja ulazi u dvoprolaznu prilagodnu mrežu bez gubitaka jednaka je snazi koja napušta tu istu mrežu. Otuda je izlazna snaga prvoga stupnja jednaka snazi koja ulazi u drugi stupanj. To znači da će prilagodna mreža bez gubitaka, koja je konjugirano kompleksno prilagođena na jednome od prolaza, biti istodobno konjugirano kompleksno prilagođena i na drugome prolazu. Iz toga slijedi teorem: *bilo koja dvoprolazna mreža bez gubitaka, koja je konjugirano prilagođena na jednome od svojih prolaza, a sastoji se od više dvoprolaznih mreža u kaskadi ili se na njih može rastaviti, istodobno je konjugirano prilagođena na svim prolazima svojih sastavnica.*

Vidjeli smo da se kod bezuvjetno stabilnog pojačala može ostvariti istodobna konjugirano kompleksna prilagodba na obama prolazima. Tad su sva tri pojačanja međusobno jednaka i maksimalna. No uvjetno stabilno pojačalo s $K<1$ ne može se istodobno prilagoditi na obama prolazima. U tom slučaju valja odabrati pogonsko pojačanje snage G_p. Ono je u praksi najkorisniji parametar za karakteriziranje pojačala jer je primjenjivo na bilo koje stvarno pojačalo, neovisno o tomu može li se ostvariti konjugirano kompleksna prilagodba ili ne.

Ako se upadna snaga u pojačalo s dvama stupnjevima (slika 8.110) izrazi kao

$$P^+ = \frac{1}{2}|a|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{V^+}{\sqrt{Z_0}}\right|^2 = \frac{|V^+|^2}{2Z_0}\,, \qquad (8\text{–}266)$$

onda je ulazna snaga u prvo pojačalo jednaka

$$P_{\text{ul}} = \frac{1}{2}\left(|a|^2 - |b|^2\right) = \left(1 - |\Gamma_{\text{ul}}|^2\right)P^+, \tag{8–267}$$

gdje je Γ_{ul} koeficijent na ulazu pojačala. Budući da je snaga predana izlaznoj prijenosnoj liniji karakteristične impedancije Z_0 jednaka je $G_{\text{P1}}G_{\text{P2}}P_{\text{ul}}$, ukupno je pojačanje pojačala s dvama stupnjevima jednako

$$G_{\text{P}} = \frac{P_{\text{T}}}{P_{\text{ul}}} = G_{\text{P1}}G_{\text{P2}}\,. \tag{8–268}$$

Stoga izraz za odgovarajuće prijenosno pojačanje poprima oblik

$$G_{\text{T}} = \frac{P_{\text{T}}}{P^+} = \left(1 - |\Gamma_{\text{ul}}|^2\right)G_{\text{P1}}G_{\text{P2}}\,. \tag{8–269}$$

No stabilnan rad lančanog spoja pojačala u praksi nije lako ostvariti jer je nužno ipitati stabilnost svakog pojedinačnog stupnja kao i cjelokupne kaskade (odjeljak 8.8.2). Osim toga, složenost projektiranja lančanog spoja pojačala s *ciljnom funkcijom*, koja često sadrži više parametara, nerijetko traži optimizaciju. Stoga je za sintezu lančanog spoja pojačala preporučljivo primijeniti neki od komercijalnih računalnih paketa za projektiranje mikrovalnih mreža.

8.8.8. Pojačala snage i obilježja tranzistora u režimu rada s velikim signalom

Pojačala snage nelinearni su sklopovi čiji je glavni cilj pojačavanje velikih signala na zadanoj frekvenciji ili, češće, u zadanom frekvencijskom pojasu. Mikrovalni se signal obično mora pojačati do zadane razine snage uz zadanu vrijednost pojačanja snage. Ako amplituda signala na priključcima tranzistora postane sumjerljiva vrijednostima istosmjernih međuelektrodnih veličina, onda obilježja tranzistora postaju izrazito nelinearna, tj. vrijednosti raspršnih parametara više neće biti jednake onima za mali signal. Kod većine tranzistora najveće promjene pretrpe moduli raspršnih parametara S_{21} i S_{22}. Maksimalna izlazna snaga pojačala može se odrediti primjenom raspršnih parametara velikog signala, ali te je parametre teško mjeriti i prikladno definirati. Stoga se obilježja tranzistora u režimu rada s velikim signalom nerijetko dobivaju mjerenjima pojačanja i izlazne snage u funkciji impedancija generatora. Jedan od postupaka temelji se na određivanju koeficijenata refleksije generatora i tereta koji daju najveće moguće pojačanje za zadanu razinu izlaznog signala. Drugi način opisivanja tranzistora u režimu rada s velikim signalom temelji se na ucrtavanju kontura konstantne izlazne snage u Smithov dijagram u funkciji koeficijenta refleksije teret, Γ_{T} uz konjugirano kompleksnu prilagodbu na ulazu. Dobivene se krivulje nazivaju *konture povlačenja impedancijom tereta* (engl. *load-pull contours*) ili kraće, konture povlačenja teretom. Konture povlačenja impedancijom tereta slične su kružnicama konstantnog pojačanja, ali odstupaju od kružnog oblika zbog nelinearnih učinaka velikog signala. Prilikom projektiranja pojačala za velike izlazne snage, bitan je parametar učinkovitost pojačala, tj. omjer izlazne RF snage i disipirane DC snage, $\eta = P_{\text{RF,iz}}/P_{\text{DC}}$. Učinkovitost se može povećati odabirom radne točke sa što manjom mirnom strujom tranzistora i najvećim mogućim hodom RF napona na izlazu. To je moguće ostvariti smanjenjem kuta protjecanja RF struje u izlaznom krugu tranzistora. Obzirom na iznos kuta protjecanja θ, pojačala se klasificiraju u više klasa. Klasa A - linearno pojačalo s $\eta = 1/2$ i $\theta = 2\pi$, klasa B - linearno pojačalo s $\eta = \pi/4$ i $\theta = \pi$, klasa C - nelinearno pojačalo $\theta < \pi/2$. No za daljnje povećanje učinkovitosti potrebno je voditi računa o zaključnim impedancijama na frekvencijama viših harmonika kao kod pojačala klase F. Gornja granica učinkovitosti klase F iznosi $\eta = 1$, što je neostvarivo u praksi.

Zbog ograničenog prostora, pojačala snage neće biti predmetom podrobnijeg razmatranja. Više o tim pojačalima čitatelj može naći u literaturi [1], [15], [17], [18], [37].

8.9. Mikrovalni oscilatori

Za generiranje koherentnih sinusnih valnih oblika, koji se mogu uporabiti za prijenos poruka ili energije, obično se rabe oscilatori. U ovom ćemo odjeljku najprije razmatrati oscilatore s negativnim otporom koji nastaje u poluvodičkim diodama ili destabiliziranim tranzistorima, a na kraju ćemo posvetiti pozornost tranzistorskim oscilatorima s povratnom vezom.

Svaki je oscilator u osnovi nelinearan sklop koji pretvara istosmjernu energiju u izmjeničnu jer za generiranje mikrovalne snage rabi aktivne komponente koje su inherentno nelinearne. No kad se na oscilatore izravno primjenjuju pojmovi iz teorije linearnih mreža, poput kompleksne impedancije, nužan je dodatan oprez. Pa ipak, u praksi se najčešće rabi pristup preko nelinearne impedancije, a posebno onda kad je opravdano pretpostaviti da u sklopu oscilatora postoji periodični signal u kojem prevladava osnovni harmonik. Oscilator bez vanjskog signala, tj. koji nije u sinkroniziranom stanju, naziva se *slobodni oscilator*.

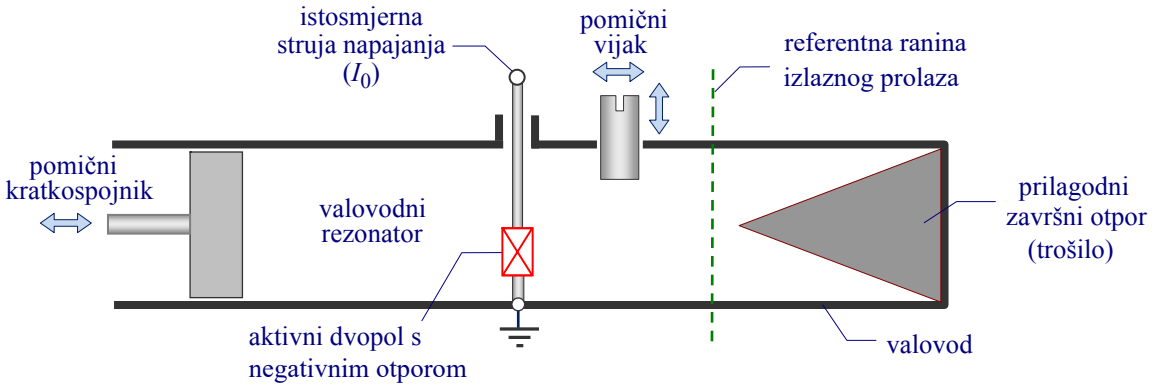
U teoriji elektroničkih sklopova oscilator se može opisati na dva načina: jednoprolaznim modelom u kojem su gubitci titrajnog kruga kompenzirani uporabom impedancije *s negativnim otporom* ili dvoprolaznim modelom u kojem se dio izlaznog signala pojačala vraća na ulaz povratnom vezom preko rezonantnog kruga. U oba je slučaja frekvencija osciliranja približno određena rezonantnom frekvencijom rezonantnog kruga. U odjeljku 7.4. vidjeli smo da se na visokim frekvencijama rezonantni krug može ostvariti odsječkom valovoda ili prijenosne linije ili dielektričnim valjkom visoke permitivnosti ili pak kuglicom magnetskog materijala visoke permeabilnosti i malih gubitaka. Opis tih sklopova primjenom elektromagnetske teorije vrlo je složen postupak pa se stvarni sklop oscilatora obično nastoji modelirati nadomjesnim sklopom koji je opisan impedancijama ili raspršnim parametrima. Tu pomaže činjenica da su dimenzije aktivnih elektroničkih komponenata obično znatno manje od valne duljine pa ih valja zamijeniti diskretnim komponentama s više parova priključaka na kojima se mogu definirati naponi i struje.

Prirodno je pretpostaviti da je pristup s jednoprolaznom aktivnom komponentom (aktivni dvopol) i neprigušenim titrajnim sustavom posebno prikladan za oscilatore koji sadrže diode s negativnim otporom [9], [26], [27], a da je pristup preko pojačala s povratnom vezom prikladniji za tranzistorske oscilatore [17], [18], [27], [29]. Ti su pristupi ekvivalentni i mogu se primijeniti na sve sklopove oscilatora [11]. Naime, dioda s negativnim otporom može se zamisliti kao refleksijsko pojačalo [25], a svaki se tranzistor primjenom odgovarajuće povratne veze može svesti na impedanciju s negativnim otporom na bilo kojem njegovom prolazu.

Pasivni dio oscilatora ima dvije osnovne zadaće: odrediti frekvenciju oscilacija i ostvariti prilagodbu između trošila i aktivnog dijela. Trošilo je obično prijenosna linija zaključena prilagođenim teretom. Budući da te dvije funkcije imaju različite zahtjeve dobro ih je pridružiti različitim dijelovima sklopa. To je teško postići u diodnom oscilatoru, ali u tranzistorskom se oscilatoru, primjerice, rezonator može smjestiti na jedan prolaz, a prilagodna mreža s teretom na drugi prolaz pa ih je moguće odvojeno optimizirati. Svaki oscilator treba istosmjerni strujni krug za dovođenje napajanja i radiofrekvencijski izlazni strujni krug. Odvajanje istosmjernih veličina od izmjeničnih i obratno obavlja se odgovarajućim filtarskim strukturama, kao što je pokazano u odjeljku 8.8.4. U daljnjim ćemo se razmatranjima poglavito usredotočiti na izmjenične učinke.

8.9.1. Mikrovalni oscilatori s negativnim otporom

Već smo u odjeljku 7.4. o rezonatorima vidjeli da se u svakom električnom krugu s induktivitetom i kapacitetom ili s odsječkom prijenosne linije mogu pojaviti titraji, ako se u krug unese električni poremećaj. No u svakom pasivnom sklopu takve oscilacije ubrzo utrnu ili se priguše protekom vremena zbog konačnog otpora koji se nalazi u svakoj zavojnici, kondenzatoru ili odsječku prijenosne linije. Intuicija upućuje na to da se to prigušenje može spriječiti ako se pozitivni otpori u navedenim komponentama ponište odgovarajućim negativnim otporom. To se načelo uspješno primjenjuje u *oscilatorima s negativnim otporom*. Taj je



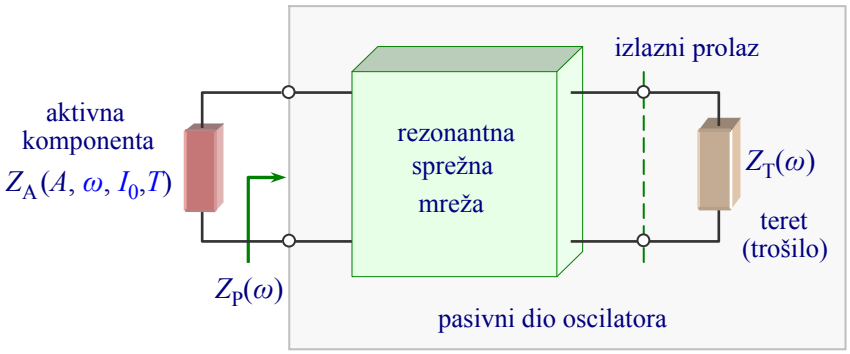
Slika 8.111. Shematski prikaz mikrovalnog oscilatora

negativni otpor u nekim mikrovalnim napravama ugrađen u nelinearnu elektroničku impedanciju, tj. u aktivni dvopol [26] koji se može ostvariti različitim fizikalnim mehanizmima u poluvodičkim diodama i elektronskim cijevima. Slični se učinci mogu ostvariti povratnom vezom pri uporabi tranzistora i klasičnih elektronskih cijevi.

Na slici 8.111 shematski je prikazan valovodni mikrovalni oscilator s aktivnim dvopolom u kojem je sadržan negativni otpor. Pristup analizi oscilatora s negativnim otporom poglavito je prikladan zbog svoje jednostavnosti.

Mikrovalni oscilatori s negativnim otporom u praksi poprimaju različite oblike, ovisno o izvedbi rezonatora koji određuju frekvenciju osciliranja. Moguće su izvedbe oscilatora s cilindričnim i pravokutnim valovodima te suosnim, mikrotrakastim, koplanarnim i drugim linijama. U valovodnim izvedbama sprega s teretom može se ostvariti zaslonom, strujnom petljom i kapacitivnom sondom. U izvedbama s prijenosnim linijama, sprega se obično ostvaruje preko linijskog transformatora impedancije, spregnutih linija, kapacitivnih proreza, paralelnih stabova i koncentriranih reaktivnih komponenata (čip kondenzatora i čip zavojnica).

Neovisno o izboru konkretne izvedbe, svaki se oscilator uvijek može svesti na osnovni oblik prikazan nadomjesnom shemom na slici 8.112 [25]-[27]. Aktivni dvopol karakterizira njegova elektronička impedancija Z_A koja je sasvim općenito funkcija amplitude RF struje A, frekvencije ω, istosmjerne struje napajanja I_0, temperature T itd. To se može zabilježiti kao $Z_A\,(A, \omega, I_0, T)$. Pri tomu je aktivnom dvopolu suprotstavljena linearna pasivna opteretna impedancija $Z_P(\omega)$ koja ovisi samo o frekvenciji. To je zapravo ulazna impedancija sprežne dvoprolazne mreže koja se nalazi između tereta i aktivnog dvopola. Pritom sprežna mreža transformira impedanciju tereta (trošila) $Z_T(\omega)$ u potrebnu impedanciju $Z_P(\omega)$ na sučelju s aktivnim dvopolom, kao što je prikazano na slici 8.112. U praksi je teret (trošilo) oscilatora obično prilagođen prijenosnoj liniji realne karakteristične impedancije, tj. je $Z_T(\omega)=Z_0$.



Slika 8.112. Shematski prikaz oscilatora s aktivnim dvopolom

Dva su temeljna razloga zbog kojih se referentna ravnina postavlja na priključke aktivnog dvopola, a ne na izlazni prolaz oscilatora pri $Z_T(\omega)$.

- Impedancija koja se vidi s izlaznog prolaza, kad se gleda prema rezonatoru, jako ovisi o frekvenciji, a jednako tako i o amplitudi RF struje. Razlog je tomu što ta impedancija sadrži i aktivni dvopol i rezonantni krug visokog faktora dobrote pa to znatno otežava analizu oscilatora i traži dobro poznavanje svojstava aktivnih i pasivnih linearnih mreža.
- Kad je jednom poznata struja kroz aktivni dvopol, lako se može odrediti i struja na izlaznom prolazu oscilatora rutinskim postupkom uporabom prijenosne funkcije linearne pasivne mreže.

Radi pojednostavnjenja razmatranja valja uvesti dvije pretpostavke. Prvo, u mikrovalnim se oscilatorima elektronička impedancija obično sporo mijenja s frekvencijom u usporedbi s impedancijom pasivne mreže, što se može napisati kao

$$\left|\frac{\mathrm{d}Z_\mathrm{P}(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right| \ll \left|\frac{\partial Z_\mathrm{A}(\omega)}{\partial\omega}\right|. \tag{8–270}$$

Drugo, aktivni dvopol crpi energiju iz idealnog strujnog izvora stalne struje I_0.

Ipak valja imati na umu da je taj model oscilatora dodatno idealiziran jer je zanemaren niz drugih pojava poput niskofrekvencijskih oscilacija u krugu napajanja, učinaka opterećenja na višim harmonicima te subharmoničkih i parametarskih oscilacija.

No u normalnim mikrovalnim oscilatorima mogu se zanemariti učinci viših harmonika jer su harmoničke komponente struje aktivnog dvopola obično dobro filtrirane rezonatorom visokog faktora dobrote, koji čini integralni dio sprežne mreže. To se može pretpostaviti i u ovom slučaju. Drugim riječima, faktor dobrote aktivnog dvopola znatno je manji od faktora dobrote pasivne mreže pa se može uzeti da impedancija aktivnog dvopola, u okolišu radne točke, ovisi samo o amplitudi struje RF signala, a ne ovisi o frekvenciji i struji napajanja. Stoga se elektronička impedancija može dalje pisati kao $Z_\mathrm{A}(A)$, tj. samo kao funkcija amplitude struje.

Na slici 8.112 pasivni dio oscilatora ima ulaznu impedanciju $Z_\mathrm{P}(\omega)$ koja u sebi sadrži impedanciju tereta $Z_\mathrm{T}=R_\mathrm{T}+\mathrm{j}X_\mathrm{T}$ i rezonantni sklop koji približno određuje frekvenciju titranja oscilatora. Realni dio impedancije tereta sadrži korisni otpor R_T (trošilo) koji je obično završni otpor prijenosne linije karakteristične impedancije Z_0. Sprežna mreža transformira impedanciju Z_0 u $Z_\mathrm{P}(\omega)$ tako da je zadovoljen uvjet $R_\mathrm{P}=-R_\mathrm{A}$.

Ako aktivni dvopol stvara snagu P_g, onda teret R_T prima snagu P_o koja označuje izlaznu snagu oscilatora. Za disipativnu sprežnu mrežu ($P_\mathrm{g}>P_\mathrm{o}$) može se napisati

$$P_\mathrm{o} = \eta P_\mathrm{g}, \tag{8–271}$$

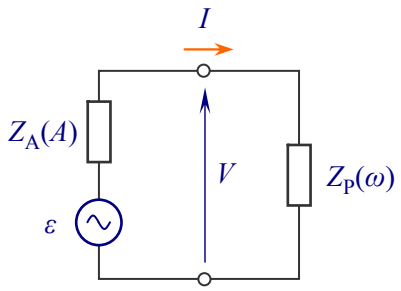
gdje je η koeficijent učinkovitosti sprežne mreže, koji je općenito manji od jedan, tj. $\eta \le 1$. Razliku do jedinice (100%) označuju gubitci unutar same mreže. Dakle,

$$\eta = \frac{P_\mathrm{o}}{P_\mathrm{g}} = 1 - \frac{P_\mathrm{dis}}{P_\mathrm{g}}, \tag{8–272}$$

gdje je P_dis disipirana snaga u sprežnoj mreži.

U svakom se oscilatoru stvara električni šum koji poglavito nastaje u aktivnom dvopolu te u manjoj mjeri u sprežnoj mreži i teretu (trošilu). Na slici 8.113 prikazana je pojednostavljena nadomjesna shema oscilatora u obliku serijskog strujnog kruga, u kojoj su svi izvori šuma objedinjeni jednim naponskim izvorom $\varepsilon(t)$ nasumične amplitude i frekvencije. Uvođenjem fazora RF struje I i napona šuma ε te primjenom drugoga Kirchhoffova zakona na taj strujni krug [25] dobiva se jednadžba oscilatora

$$\left[Z_\mathrm{A}(A) + Z_\mathrm{P}(\omega)\right] I = \varepsilon\,. \tag{8–273}$$



Slika 8.113. Nadomjesna shema oscilatora u obliku serijskog strujnog kruga

Struju se u vremenskoj domeni može napisati kao $i(t) = \mathrm{Re}\{A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\}$, gdje je

$$I = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}. \tag{8–274}$$

Razmotrimo slobodni i bešumni oscilator u kojem je $\varepsilon = 0$. Ako pretpostavimo da je u strujnom krugu oscilatora već uspostavljeno stacionarno stanje s oscilacijama, onda je $I \neq 0$ pa iz jednadžbe oscilatora (8–273) nužno izlazi

$$Z_\mathrm{A}(A) + Z_\mathrm{P}(\omega) = 0. \tag{8–275}$$

Rastavljanjem impedancija na realne i imaginarne dijelove, $Z_\mathrm{A}(A)=R_\mathrm{A}(A)+\mathrm{j}X_\mathrm{A}(A)$, odnosno $Z_\mathrm{P}(\omega)=R_\mathrm{P}(\omega)=\mathrm{j}X_\mathrm{P}(\omega)$, dobivaju se dva uvjeta:

$$R_\mathrm{A}(A) + R_\mathrm{P}(\omega) = 0, \tag{8–276}$$

$$X_\mathrm{A}(A) + X_\mathrm{P}(\omega) = 0. \tag{8–277}$$

Iz realnog dijela jednadžbe (8–275) obično se dobiva amplituda oscilacija pa se jednadžba (8–276) naziva *amplitudni uvjet oscilatora*, koji upućuje na to da gubitke u krugu kompenzira negativni otpor. Imaginarni dio naziva se *fazni uvjet oscilatora* jer je zadovoljen na rezonantnoj frekvenciji koja određuje frekvenciju osciliranja.

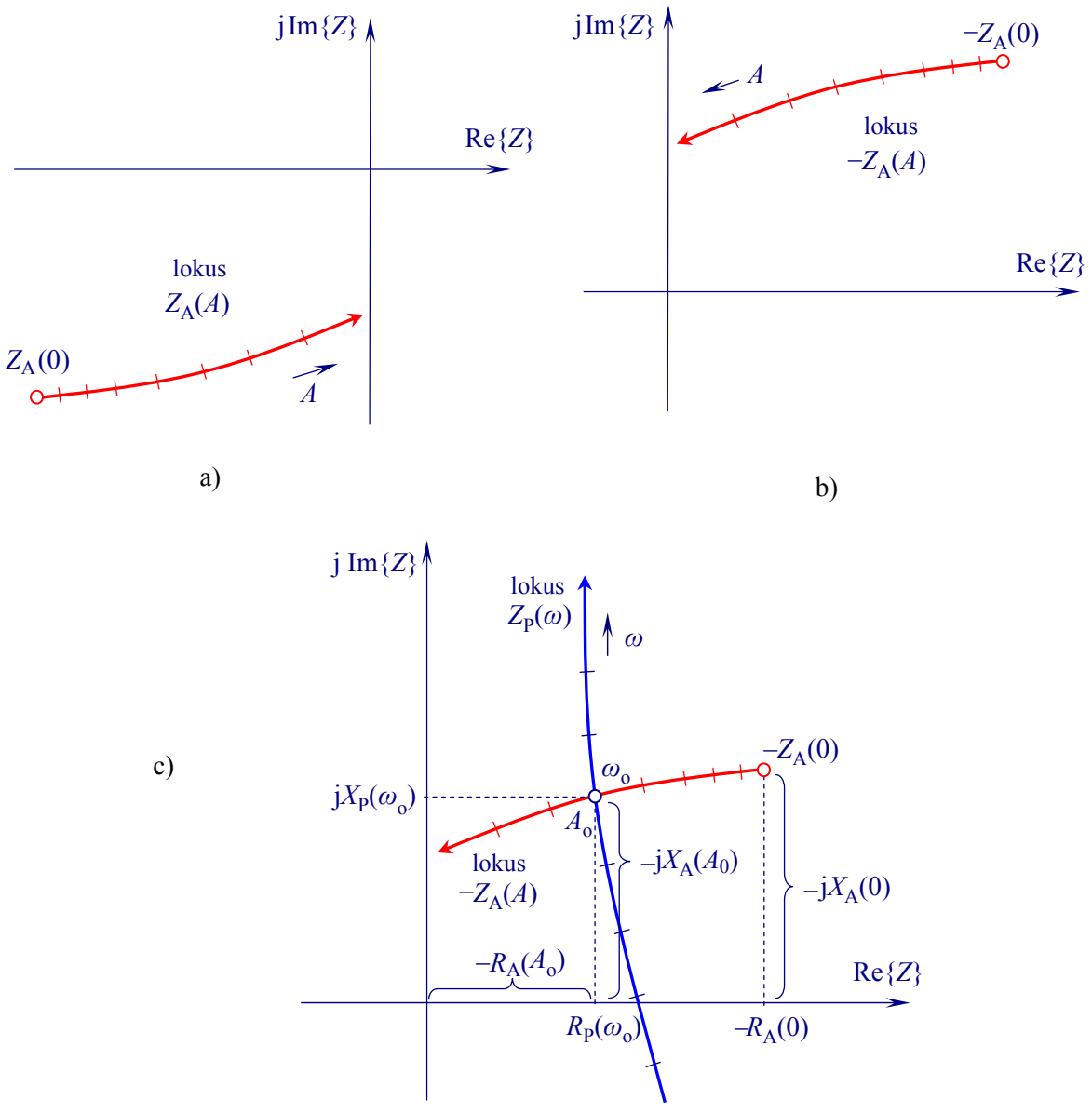
Ako je poznata ovisnost elektroničke impedancije o amplitudi struje RF signala i ovisnost opteretne impedancije o frekvenciji, onda se frekvenciju i amplitudu titraja u stacionarnom stanju može grafički odrediti. Zbog toga što sadrži negativni otpor, *lokus elektroničke impedancije* $Z_\mathrm{A}(A)$ nalazi se u lijevoj poluravnini (drugi ili treći kvadrant) kompleksne ravnine impedancija. Na slici 8.114a) prikazan je tipičan lokus elektroničke impedancije aktivnog dvopola na jednoj frekvenciji. Na tom se lokusu kao parametar nalazi amplituda RF struje A. Negativni otpor nije otpor u uobičajenom smislu riječi. No budući da je dimenzija realnog dijela omjera fazora napona i struje na priključcima u omima, a predznak negativan uvriježio se naziv negativni otpor (odjeljci 3.5, 8.4.3 - 8.4.5 i 8.8.2). Negativni predznak upućuje na to da su napon i struja u protufazi. Drugim riječima, taj se otpor može shvatiti kao generator signala jer pokazuje da je aktivni dvopol sposoban stvoriti mikrovalnu snagu izravnom pretvorbom istosmjerne energije u izmjeničnu energiju.

Uobičajeno je da apsolutna vrijednost negativnog otpora opada porastom amplitude RF struje. To jest, nakon što negativni otpor stvori određenu količinu mikrovalne energije, tom »izvoru energije« opada izdašnost. Na to se može gledati i na ovaj način. Oscilator ne može stvoriti više snage od one koju može preuzeti iz istosmjernog izvora napajanja. To je u skladu sa zakonom očuvanja energije. No postoje i takvi aktivni dvopoli kod kojih vrijednost negativnog otpora najprija raste, a zatim, nakon što dosegne maksimalnu vrijednost počinje opadati u skladu sa zakonom očuvanja energije. Na slici 8.114b) prikazan je negativ lokusa $Z_\mathrm{A}(A)$.

U kompleksnoj ravnini impedancija, funkcija $Z_\mathrm{P}(\omega)$ označuje *lokus pasivne impedancije* ili geometrijsko mjesto impedancije koja je suprotstavljena aktivnom dvopolu i opterećuje ga.

Budući da se radi o pasivnoj mreži, lokus $Z_P(\omega)$ nalazi se u desnoj poluravnini (pozitivne vrijednosti otpora). Na taj se lokus kao parametar nanosi frekvencija ω.

Sad se jednadžba (8–275) može riješiti grafički tako da se nađu koordinate sjecišta između lokusa opteretne impedancije i negativa lokusa elektroničke impedancije aktivnog dvopola, kao što je prikazano na slici 8.114c). Naime, ako postoji sjecište između tih dvaju lokusa i ako su zadovoljeni dinamički uvjeti koji jamče stabilnu radnu točku oscilatora, onda ta točka (sjecište) na lokusu $Z_P(\omega)$ određuje frekvenciju oscilacija ω_o, a na lokusu $-Z_A(A)$ određuje amplitudu RF struje A_o. Postoje i takva sjecišta koja ne daju stabilnu radnu točku, tj. takve točke nisu stabilna rješenja jednadžbe oscilatora. O stabilnosti radne točke bit će više riječi u idućim odlomcima.



Slika 8.114. a) Lokus aktivnog dvopola $Z_A(A)$ funkcija je amplitude RF struje; **b)** negativ lokusa $Z_A(A)$. **c)** Sjecište između lokusa $Z_P(\omega)$ i $-Z_A(A)$ označuje radnu točku, u kojoj se mogu očitati frekvencija i amplituda RF struje slobodnoga oscilatora

Snaga oscilatora

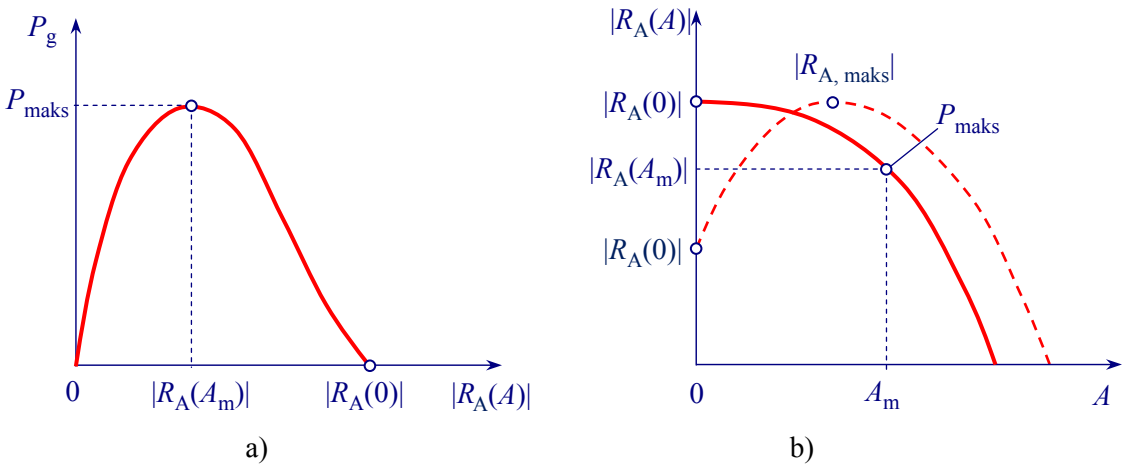
U aktivnom se dvopolu stvara snaga koja je određena umnoškom kvadrata efektivne RF struje $(A/\sqrt{2})^2$ i $R_A(A)$, realnog dijela aktivnog dvopola, tj.

$$P_g = \left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2 \mathrm{Re}\{Z_A(A)\} = \frac{A^2}{2} R_A(A). \qquad (8\text{–}278)$$

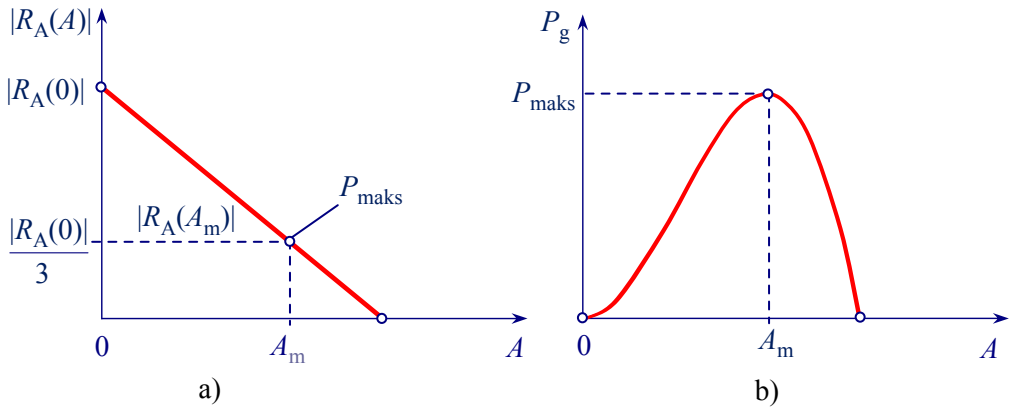
Budući da je realni dio elektroničke impedancije negativna veličina, snaga P_g općenito je negativna, što znači da ta snaga napušta dvopol. Drugim riječima, ne radi se o disipiranoj snazi u dvopolu nego o snazi koju stvara sam aktivni dvopol. No u daljnjim razmatranjima primijenit ćemo pristup u kojem je generirana snaga pozitivna veličina, tj. kao da se radi o snazi koju disipira pasivna linearna mreža.

Za svaki se oscilator može naći određeni otpor trošila pri kojem oscilator generira maksimalnu snagu P_{maks}. Maksimalnoj snazi odgovara amplituda A_m i pripadajući otpor $R_A(A_m)$. Dakle, negdje na lokusu aktivnog dvopola $-Z_A(A)$ leži točka A_m u kojoj aktivni dvopol generira maksimalnu snagu [25]. To se može intuitivno shvatiti promatranjem izraza (8–278) za dva krajnja slučaja. Generirana snaga bit će nula ako je amplituda RF struje jednaka nuli. Jednako tako, generirana će snaga biti nula kad je negativni otpor jednak nuli. To upućuje na zaključak da negdje između tih dvaju krajnjih slučajeva mora postojati amplituda i njoj pripadajući otpor koji daju maksimalnu vrijednost generirane snage. To se može lako provjeriti tako da se postupno mijenja vrijednost otpora R_P od nule do $|R_A(0)|$, kao što je prikazano na slici 8.115a). Za $R_P = 0$ generirana je snaga jednaka nuli jer je tad $R_A = 0$. Porastom R_P generirana snaga najprije raste, ali nakon izvjesne točke počinje opadati jer tom području amplituda brzo teži ka nuli. Time je potvrđena naša pretpostavka.

Na slici 8.115b) prikazana je tipična ovisnost apsolutne vrijednosti negativnog otpora o amplitudi RF struje. U trenutku pokretanja oscilacija, koje nastaju iz šuma, negativni je otpor najveći, a amplituda minimalna. Porastom amplitude titraja vrijednost negativnog otpora postupno pada, što je u skladu sa zakonom očuvanja energije. U toj prijelaznoj pojavi, daljnjim porastom oscilacija postiže se stabilna radna točka. No neki aktivni dvopoli imaju takvu karakteristiku da je oscilacije nemoguće pokrenuti bez vanjskog podražaja. Taj je slučaj prikazan isprekidanom crtom. Oscilacije se ne mogu pokrenuti iz šuma dok je god otpor R_P veći od vrijednosti $|R_A(0)|$, iako je za neke amplitude vrijednost negativnog otpora veća od otpora R_P, kao što je prikazano na slici 8.115b).



Slika 8.115. a) Ovisnost generirane snage o negativnom otporu aktivnog dvopola; **b)** ovisnost negativnog otpora o amplitudi RF struje



Slika 8.116. a) Linearna ovisnost negativnog otpora i **b)** generirana snaga u funkciji amplitude

Ovisnost negativnog otpora o amplitudi može se aproksimirati linearnom funkcijom kao na slici 8.116a). U tom se slučaju može lako pokazati da se maksimalna snaga postiže uz negativni otpor čija vrijednost odgovara jednoj trećini maksimalnog negativnog otpora za nultu amplitudu RF struje, tj.

$$R_A(A_m) = \frac{1}{3} R_A(0). \tag{8–279}$$

Taj se vrlo bitan rezultat može uspješno primijeniti za proračun većine oscilatora s negativnim otporom, uključujući i tranzistorske oscilatore (odjeljak 8.9.2).

Porast oscilacija

Postoji li sjecište lokusa pasivne impedancije i lokusa aktivnog dvopola, oscilator može ući u stanje sa stabilnim oscilacijama, tj. stalnom amplitudom. Ako se pretpostavi da je nakon ukopčavanja oscilatora amplituda RF struje malo veća od nule (zbog šuma ili prijelazne pojave nakon ukopčavanja napona napajanja), onda se jednadžba (8–275) za slobodni i bešumni oscilator (ε=0) može preinačiti u oblik

$$\left[Z_A(0) + Z_P(\omega)\right] I = 0,$$

gdje je $Z_A(0)$ impedancija aktivnog dvopola za mali signal. Budući da je na početku oscilacija amplituda struje mala, ali konačna, impedancija $Z_P(\omega)$ neće biti jednaka negativu elektroničke impedancije $-Z_A(0)$ niti za jednu realnu frekvenciju ω. Stoga, da bi se zadovoljila jednadžba oscilatora, treba uzeti kompleksnu frekvenciju, na način na koji je uvedena u odjeljku 7.4.1,

$$\omega = \omega' - \mathrm{j}\alpha, \tag{8–280}$$

gdje je ω' njezin realni dio koji označuje dinamičku frekvenciju »periodičnih« titraja, a α je njezin imaginarni dio koji upućuje na promjenjivost amplitude titraja. Pozitivna vrijednost α označuje porast amplitude titraja s vremenom, a negativna vrijednost označuje prigušenje. Vremenski faktor, koji odgovara kompleksnoj frekvenciji ($\omega'-\mathrm{j}\alpha$), može se prikazati kao

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega' t}\mathrm{e}^{\alpha t},$$

gdje su i ω' i α funkcije vremena. Dinamička analiza u idućem odlomku pokazuje da je radna točka stabilna samo ako se pri porastu amplitude RF struje točka na lokusu negativa elektroničke impedancije približava sjecištu zdesna, kad se iz radne točke gleda u smjeru porasta frekvencije (slika 8.114c)).

Kako započinju oscilacije i kako oscilator zauzima stacionarnu radnu točku (A_o, ω_o) može se bolje vidjeti na konkretnom primjeru oscilatora prikazanom na slici 8.117, gdje je pasivna impedancija $Z_P(\omega)$ sastavljena od impedancije serijskog titrajnog kruga i otpora trošila R_T, tj.

$$Z_{\mathrm{P}}(\omega) = \mathrm{j}\left(\omega L_{\mathrm{r}} - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{r}}}\right) + R_{\mathrm{r}} + R_{\mathrm{T}}\,. \tag{8–281}$$

Kao što je pokazano u odjeljku 7.4. o mikrovalnim rezonatorima, izraz (8–281) dovoljno je općenit da se može uporabiti za opis frekvencijske ovisnosti ulazne impedancije bilo koje elektromagnetske strukture serijskog tipa rezonancije u okolišu rezonantne frekvencije određenog moda. U skladu s razmatranjima u odjeljku 7.4, u okolišu rezonantne frekvencije ($\omega_{\mathrm{r}} = 1/\sqrt{L_{\mathrm{r}}C_{\mathrm{r}}}$) za strukture s visokim unutarnjim faktorom dobrote, impedancija $Z_{\mathrm{P}}(\omega)$ može se aproksimirati izrazom

$$Z_{\mathrm{P}}(\omega) \simeq \mathrm{j}2(\omega - \omega_{\mathrm{r}})L_{\mathrm{r}} + R_{\mathrm{r}} + R_{\mathrm{T}}\,, \tag{8–282}$$

gdje je otpor tereta R_{T} prikazan kao sastavni dio titrajnoga kruga ili rezonatora. Uvrštenjem izraza (8–280) u (8–282), tj. zamjenom ω s $\omega' - \mathrm{j}\alpha$, dobiva se

$$Z_{\mathrm{P}}(\omega) \simeq \mathrm{j}2(\omega' - \omega_{\mathrm{r}})L_{\mathrm{r}} + 2\alpha L_{\mathrm{r}} + R_{\mathrm{r}} + R_{\mathrm{T}}\,. \tag{8–283}$$

Dakle, aktivni dvopol »vidi« efektivnu pasivnu impedanciju serijskog rezonantnog kruga

$$Z_{\mathrm{P}}(\omega') + 2\alpha L_{\mathrm{r}}\,,$$

koja je funkcija dinamičke frekvencije $\omega'(t)$ i dinamičke amplitude preko dodatnog serijskog otpora $2\alpha L_{\mathrm{r}}$ koji smanjuje unutarnji faktor dobrote pasivne impedancije u času ukopčavanja.

Na početku, struja oscilatora titra na dinamičkoj frekvenciji $\omega'(t)$ i ima dinamičku amplitudu $A(t)$. I frekvencija i amplituda titraja općenito su funkcije vremena dokle god oscilacije ne uđu u stacionarno stanje. U stacionarnom stanju postižu se stalne vrijednosti amplitude RF struje i frekvencije pa izlazi:

$$R_{\mathrm{r}} + R_{\mathrm{T}} = -R_{\mathrm{A}}(A_{\mathrm{o}})\,, \tag{8–284a}$$

$$2(\omega_{\mathrm{o}} - \omega_{\mathrm{r}})L_{\mathrm{r}} + X_{\mathrm{A}}(A_{\mathrm{o}}) = 0\,, \tag{8–284b}$$

što je grafički prikazano na slici 8.118.

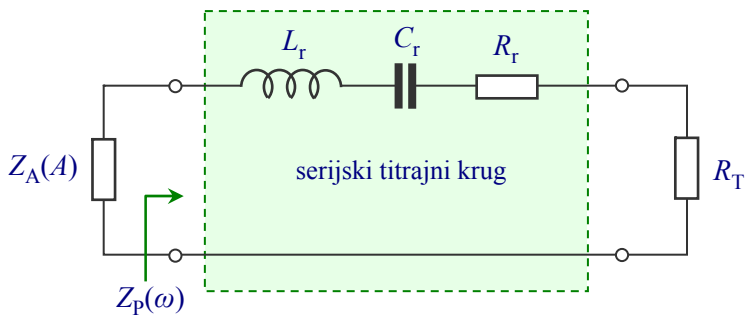
Budući da je u času ukopčavanja oscilatora

$$-R_{\mathrm{A}}(A_{\mathrm{o}}) = R_{\mathrm{r}} + R_{\mathrm{T}} + 2\alpha(0)L_{\mathrm{r}}\,, \tag{8–285}$$

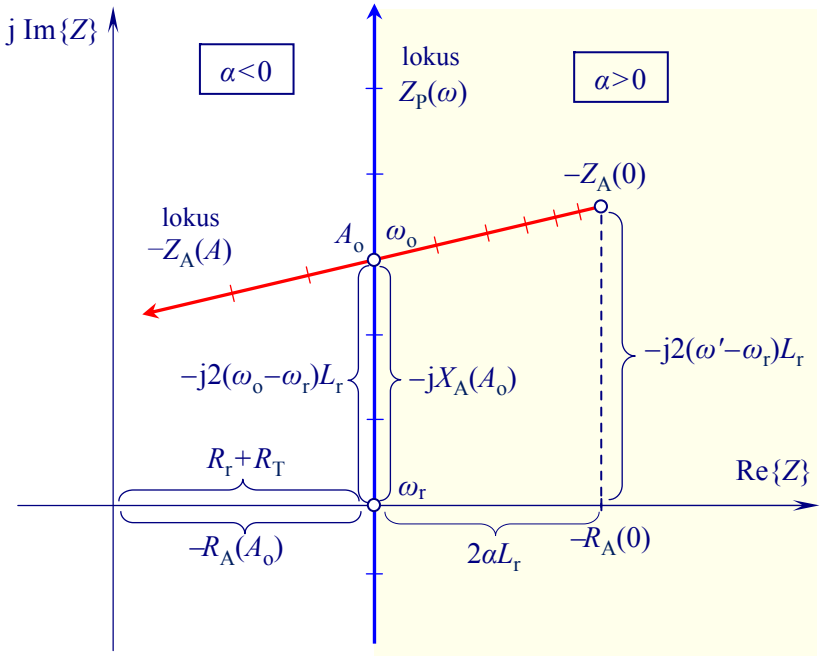
izlazi

$$\alpha(0) = -\frac{R_{\mathrm{A}}(0) + R_{\mathrm{r}} + R_{\mathrm{T}}}{2L_{\mathrm{T}}}\,. \tag{8–286}$$

Očito je da veća negativna vrijednost u brojniku izraza (8–286) daje veću vrijednost koeficijenta porasta titraja α, koji je veći od nule u području s desne strane lokusa pasivnog kruga (rezonatora). Nasuprot tomu, slijeva je područje prigušenja oscilacija.



Slika 8.117. Sklop oscilatora sa serijskim titrajnim krugom



Slika 8.118. Grafički prikaz zauzimanja stabilne radne točke

Analiza dinamičke stabilnosti radne točke oscilatora

Stabilnost radne točke oscilatora može se ispitati primjenom metode perturbacije, tj. unošenjem malih poremećaja u sustav oscilatora i promatranjem kako oscilator reagira na te poremećaje. Uvjet stabilnosti nalaže da svi poremećaji amplitude RF struje i frekvencije moraju iščeznuti ubrzo nakon što se pojave [11], [26]. Drugim riječima, oscilatoru je omogućeno vraćanje u stacionarno stanje u kojem je bio netom prije poremećaja. Neka su δA i δs mali poremećaji amplitude RF struje A, odnosno kompleksne frekvencije $s = \alpha + \mathrm{j}\,\omega$. Ukupna impedancija u strujnom krugu oscilatora može se prikazati funkcijom

$$Z(A,s) = Z_\mathrm{P}(s) + Z_\mathrm{A}(A,s), \tag{8–287}$$

gdje je impedancija Z_P linearna, tj. ne ovisi o amplitudi.

U okolišu radne točke (A_o, ω_o), funkcija $Z(A, s)$ može se razviti u Taylorov red

$$Z(A,s)\big|_{s_\mathrm{o},A_\mathrm{o}} = Z(A_\mathrm{o},s_\mathrm{o}) + \frac{\partial Z}{\partial s}\bigg|_{s_\mathrm{o},A_\mathrm{o}} \delta s + \frac{\partial Z}{\partial A}\bigg|_{s_\mathrm{o},A_\mathrm{o}} \delta A\,,$$

gdje je $s_\mathrm{o} = \mathrm{j}\omega_\mathrm{o}$ kompleksna frekvencija u izvornoj radnoj točki, a $\delta s = \delta\alpha + \mathrm{j}\,\delta\omega$ označuje poremećaj kompleksne frekvencije, tj. njezine amplitude i realne frekvencije. Da bi titraji bili stabilni, funkcija $Z(A, s)$ mora biti jednaka nuli, tj.

$$Z(A_\mathrm{o},s_\mathrm{o}) + \frac{\partial Z}{\partial s}\bigg|_{s_\mathrm{o},A_\mathrm{o}} \delta s + \frac{\partial Z}{\partial A}\bigg|_{s_\mathrm{o},A_\mathrm{o}} \delta A = 0\,. \tag{8–288}$$

Prvi član u tom izrazu odgovara izvornoj radnoj točki, $Z(A_\mathrm{o}, s_\mathrm{o}) = 0$, pa jednadžba (8–288) poprima oblik

$$-\mathrm{j}\frac{\partial Z}{\partial \omega}\bigg|_{s_\mathrm{o},A_\mathrm{o}} \delta s + \frac{\partial Z}{\partial A}\bigg|_{s_\mathrm{o},A_\mathrm{o}} \delta A = 0\,,$$

čije rješenje za δs glasi

$$\delta s = -\left.\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial A}}{\dfrac{\partial Z}{\partial s}}\right|_{s_o, A_o} \qquad \delta A = -\mathrm{j}\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial A}\dfrac{\partial Z^*}{\partial \omega}}{\left|\dfrac{\partial Z}{\partial s}\right|^2}\delta A\,, \tag{8–289}$$

gdje su derivacije uzete u radnoj točki (A_o, ω_o) i nazivnik je racionaliziran. Sad se Z i δs mogu izraziti preko svojih komponenata pa izlazi

$$\delta\alpha + \mathrm{j}\delta\omega = -\mathrm{j}\frac{\left(\dfrac{\partial R}{\partial A} + \mathrm{j}\dfrac{\partial X}{\partial A}\right)\left(\dfrac{\partial R}{\partial \omega} - \mathrm{j}\dfrac{\partial X}{\partial \omega}\right)}{\left|\dfrac{\partial Z}{\partial s}\right|^2}\delta A\,. \tag{8–290}$$

Samo realni dio jednakosti (8–290), koji se može napisati kao

$$\left(\frac{\partial X}{\partial A}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial A}\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)\delta A = \left|\frac{\partial Z}{\partial s}\right|^2 \delta\alpha\,, \tag{8–291}$$

daje važne podatke za utvrđivanje dinamičke stabilnosti oscilatora. Naime, ako se u stabilnoj radnoj točki dogodio pozitivan poremećaj amplitude δA, onda amplituda RF struje mora opadati s vremenom da bi se vratila na vrijednost A_o koju je imala u stabilnoj radnoj točki prije negoli je nastao poremećaj. Stoga se traži $\delta\alpha < 0$, pa iz jednakosti (8–291) izlazi koristan uvjet

$$\frac{\partial R}{\partial A}\frac{\partial X}{\partial \omega} - \frac{\partial X}{\partial A}\frac{\partial R}{\partial \omega} > 0\,. \tag{8–292}$$

U normalnim okolnostima pasivna je mreža linearna, što se može zabilježiti kao:

$$\frac{\partial R_\mathrm{P}}{\partial A} = 0\,, \quad \frac{\partial X_\mathrm{P}}{\partial A} = 0\,,$$

pa se nejednakost (8–292) svodi na oblik

$$\frac{\partial R_\mathrm{A}}{\partial A}\frac{\partial (X_\mathrm{A} + X_\mathrm{P})}{\partial \omega} - \frac{\partial X_\mathrm{A}}{\partial A}\frac{\partial (R_\mathrm{A} + R_\mathrm{P})}{\partial \omega} > 0\,. \tag{8–293}$$

Za linearnu pasivnu mrežu, parcijalne derivacije po frekvenciji mogu se zamijeniti običnim derivacijama. Ako je u pasivni dvopol ugrađen rezonator visokog Q-faktora, što je gotovo uvijek ispunjeno u mikrovalnim oscilatorima, onda je $\partial X_\mathrm{P}/\partial\omega \gg \partial X_\mathrm{A}/\partial\omega$ pa se nejednakost (8–293) može dalje pojednostavniti na

$$\frac{\partial R_\mathrm{A}}{\partial A}\frac{\mathrm{d}X_\mathrm{P}}{\mathrm{d}\omega} - \frac{\partial X_\mathrm{A}}{\partial A}\frac{\mathrm{d}R_\mathrm{P}}{\mathrm{d}\omega} > 0\,. \tag{8–294}$$

Za jednostavno ugođene pasivne mreže (slika 8.118) sa serijskim tipom rezonancije, $\mathrm{d}R_\mathrm{P}/\mathrm{d}\omega$ vrlo je mala veličina pa se drugi član nejednakosti (8–294) može zanemariti. Osim toga, reaktancije većine aktivnih dvopola pokazuju slabu ovisnost o amplitudi, tj. $\partial X_\mathrm{A}/\partial A \ll 1$ pa se nejednakost (8–294) može konačno svesti na vrlo jednostavan oblik

$$\frac{\partial R_\mathrm{A}}{\partial A}\frac{\mathrm{d}X_\mathrm{P}}{\mathrm{d}\omega} > 0\,. \tag{8–295}$$

Ta približna nejednakost pokazuje da za stabilnu radnu točku u oscilatoru s jednostavno ugođenom pasivnom mrežom obje derivacije moraju imati isti predznak. Ustvari, obje su derivacije obično pozitivne. Prva je derivacija pozitivna zbog zakona očuvanja energije iz kojeg se vidi da veličina negativnog otpora opada porastom amplitude RF struje, slika 8.115b). Druga je derivacija također pozitivna, što je posljedica općeg svojstva jednostavno ugođenih mreža serijskog tipa rezonancije da im u okolišu rezonantne frekvencije reaktancija stalno raste s frekvencijom. To je u skladu s Fosterovim teoremom za mreže bez gubitaka (vidjeti odjeljak 5.2.3).

Nejednakost (8–294) može se grafički interpretirati. U tu svrhu valja odrediti derivacije pasivnog kruga po frekvenciji i aktivnog kruga po amplitudi kao:

$$\frac{\mathrm{d}Z_\mathrm{P}}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\mathrm{d}R_\mathrm{P}}{\mathrm{d}\omega}+\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X_\mathrm{P}}{\mathrm{d}\omega}=\left|\frac{\mathrm{d}Z_\mathrm{P}}{\mathrm{d}\omega}\right|\cos\theta_\mathrm{P}+\mathrm{j}\left|\frac{\mathrm{d}Z_\mathrm{P}}{\mathrm{d}\omega}\right|\sin\theta_\mathrm{P}, \tag{8–296a}$$

$$\frac{\partial Z_\mathrm{A}}{\partial A}=\frac{\partial R_\mathrm{A}}{\partial A}+\mathrm{j}\frac{\partial X_\mathrm{A}}{\partial A}=\left|\frac{\partial Z_\mathrm{A}}{\partial A}\right|\cos\theta_\mathrm{A}+\mathrm{j}\left|\frac{\partial Z_\mathrm{A}}{\partial A}\right|\sin\theta_\mathrm{A}, \tag{8–296b}$$

gdje su θ_A i θ_P kutovi kompleksnih vektora tih derivacija u ravnini impedancija. Uvrštenje realnih i imaginarnih dijelova iz izraza (8–296) u nejednakost (8–294) daje

$$\left|\frac{\mathrm{d}Z_\mathrm{P}}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_\mathrm{o}}\left|\frac{\partial Z_\mathrm{A}}{\partial A}\right|_{A_\mathrm{o}}(\sin\theta_\mathrm{P}\cos\theta_\mathrm{A}-\cos\theta_\mathrm{P}\sin\theta_\mathrm{A})>0.$$

Budući da su apsolutne vrijednosti uvijek pozitivne, sad se primjenom trigonometrijske relacije za sinus razlike kutova dobiva jednostavan uvjet

$$\sin(\theta_\mathrm{P}-\theta_\mathrm{A})>0,$$

gdje je $\theta_\mathrm{P}-\theta_\mathrm{A}=\theta$ kut sjecišta između dvaju lokusa, kao što je prikazano na slici 8.119. Taj se uvjet može napisati u konačnom obliku kao

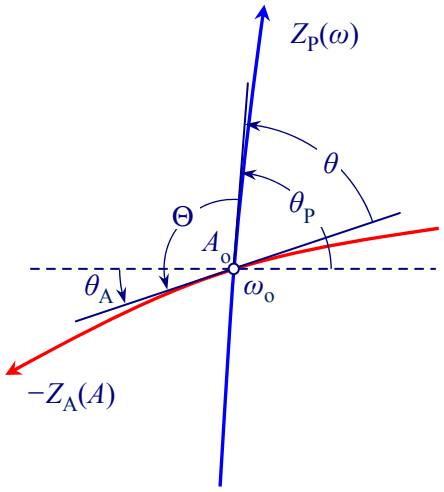
$$0<\theta<\pi \tag{8–297a}$$

ili

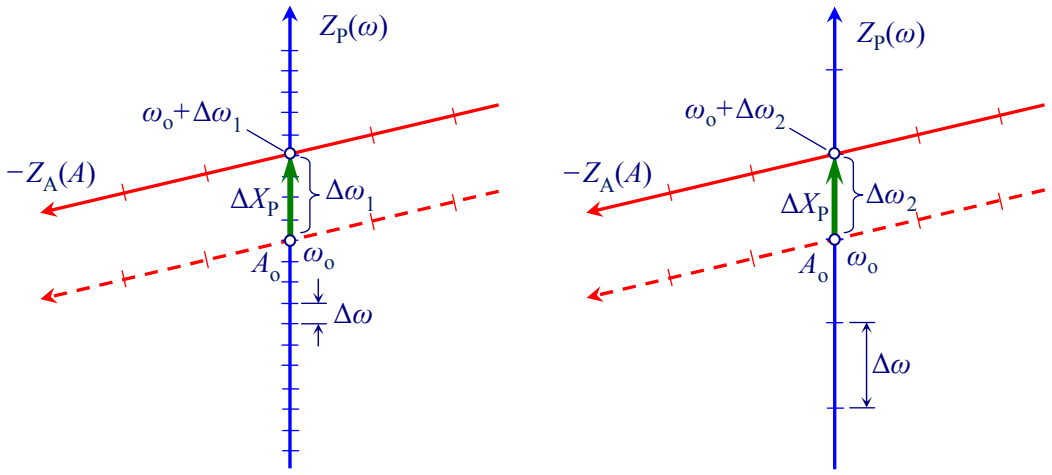
$$0<\Theta<\pi, \tag{8–297b}$$

gdje kut $\Theta=180°-\theta$ zatvaraju krakovi, tj. tangente na lokusima u radnoj točki, gledajući u smjerovima strelica na tim lokusima. Geometrijski uvjet (8–297) pokazuje da je radna točka stabilna samo ako kut sjecišta (Θ) između dvaju lokusa nije negativan. Kao što ćemo vidjeti u sljedećim odjeljcima, oscilator ostvaruje najbolja obilježja kad su lokusi međusobno okomiti, tj. kad je $\Theta=\theta=90°$.

Opteretno okruženje i stabilnost napona napajanja stvarnog oscilatora nikad nisu idealni pa u radu nerijetko dolazi do promjena položaja lokusa pasivne mreže ili aktivnog dvopola što ima za posljedicu promjenu položaja sjecišta tih dvaju lokusa. To će u konačnici rezultirati istodobnim promjenama frekvencije oscilacija, ali i njihove amplitude. Općenito se može reći da oscilator s rezonatorom većeg faktora dobrote daje veću stabilnost frekvencije što se može



Slika 8.119. Definiranje kutova θ_P, θ_A, θ i Θ



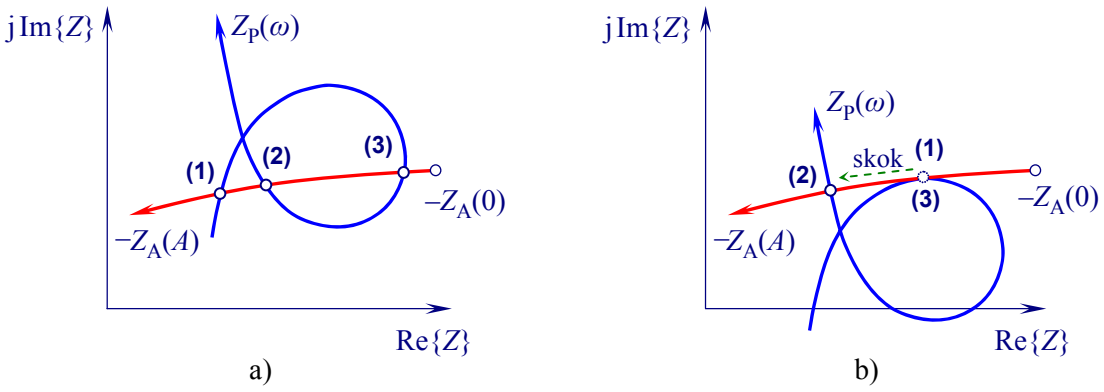
Slika 8.120. Oscilator s malim Q-faktorom (lijevo) i velikim Q-faktorom (desno)

vidjeti na sljedećem primjeru. Na slici 8.120 prikazani su lokuse aktivnog dvopola i pasivne mreže u okolišu stabilne radne točke dvaju oscilatora s istim aktivnim dvopolom, ali različitih Q-faktora. Točke jednakog prirasta frekvencije $\Delta\omega$ gusto su raspoređene na lokusu pasivnog kruga niskog Q-faktora (lijevo), za razliku od lokusa kojem pripada visoki Q-faktora (desno), kod kojeg i mali prirast frekvencije izaziva znatnu promjenu reaktancije. Ako, primjerice, zbog promjene struje napajanja dođe do promjene reaktancije aktivnog dvopola za iznos ΔX_P ili se za jednak iznos promijeni reaktancija tereta, onda će doći do relativnog pomaka negativa elektroničke impedancije u odnosu na lokus pasivne mreže u vertikalnome smjeru. Zbog toga će doći i do pomaka radne točke što će rezultirati odgovarajućom promjenom frekvencije oscilatora. Na slici 8.120 vidi se da ista devijacija reaktancije u oscilatoru nižeg Q-faktora proizvodi veću promjenu frekvencije u odnosu na oscilator s višim Q-faktorom. Stoga ocilator s rezonatorom višeg Q-faktora upućuje na veću stabilnost frekvencije osciliranja.

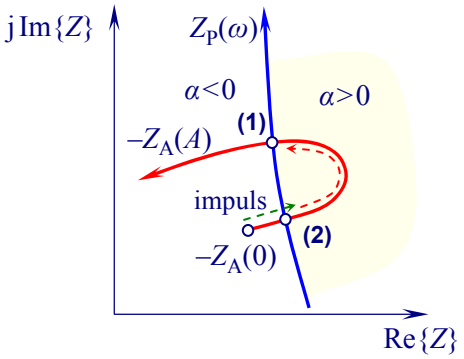
Rad oscilatora u okolišu petlje na lokusu pasivnog i aktivnog dvopola

U prethodnom smo razmatranju objasnili kako se povećanjem Q-faktora može povećati stabilnost frekvencije oscilatora, tj. koliko je oscilator otporan na vanjske poremećaje. Ako se radna točka nalazi u okolišu petlje na lokusu pasivnog dvopola, onda u oscilatoru može doći do ispunjenja uvjeta $dX_P/d\omega < 0$. Petlja često nastaje u višestruko ugođenom rezonantnom sklopu ili na liniji s udaljenom refleksijom, slika 8.121a). Prethodna razmatranja upućuju na zaključak da točka **(3)** ne odgovara stabilnoj radnoj točki oscilatora. Podrobna dinamička analiza oscilatora pokazuje da je točka **(2)** uvjetno stabilna, a da je bezuvjetno stabilna samo radna točka **(1)**. Drugim riječima, to znači da će oscilator nakon ukopčavanja zauzeti radnu točku **(1)**. Radnu točku **(2)** oscilator može zauzeti samo ako se lokus s petljom na slici 8.121a) premjesti ispod lokusa $-Z_A(A)$ i tako izgubi sjecište na dijelu petlje na kojem se nalazi točka **(1)**. Tad će se radna točka naći u točki **(2)** na gornjem kraku lokusa $Z_P(\omega)$, kao što je prikazano na slici 8.121b). Taj je skok radne točke popraćen skokovitim promjenama amplitude i frekvencije RF struje. Vraćanjem lokusa $Z_P(\omega)$ u početni položaj, nova će se radna točka zadržati u točki **(2)** na slici 8.121a). Osim toga, neposredno prije skoka prisutan je nagli porast šuma što se može objasniti razmatranjima u sljedećem odjeljku.

S druge strane, neki aktivni dvopoli (Gunnova dioda i magnetron) nerijetko pokazuju petlju na lokusu elektroničke impedancije. Takve komponente, uz određene istosmjerne radne uvjete, u času ukopčavanja mogu imati vrlo malu vrijednost negativnog otpora koji porastom amplitude RF struje najprije raste, a zatim nakon što postigne maksimalnu vrijednost počinje opadati, kao što smo vidjeli na slici 8.115b). Primjer takvog lokusa prikazan je na slici 8.122,



Slika 8.121. a) Petlja na lokusu pasivnog dvopola. **b)** Spuštanjem ili podizanjem petlje u ravnini impedancija može doći do skokovite promjene radne točke, kao pri skoku iz točke **(1)** u točku **(2)**, što rezultira skokovitim promjenama izlazne snage i frekvencije



Slika 8.122. Petlja na lokusu elektroničke impedancije može onemogućiti spontani porast oscilacija

gdje uz odabrani pasivni krug oscilacije ne mogu spontano započeti, nego je potreban vanjski pobudni impuls da bi se dinamička radna točka preko točke **(1)** preselila u područje porasta oscilacija ($\alpha > 0$). Kad se radna točka jednom nađe u tom području amplituda oscilacija raste dok se ne nađe u radnoj točki koja jamči stacionarno stanje, poput stabilne radne točke **(2)** na slici 8.122.

I u jednom i u drugom slučaju, prilikom ugađanja pasivnog sklopa, mogu se javiti skokovite promjene frekvencije i izlazne snage koje su obično popraćene histerezom.

Šum oscilatora

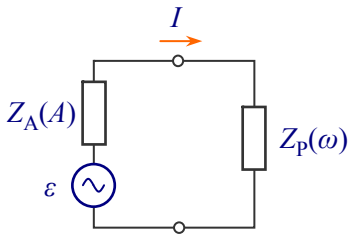
Aktivne naprave proizvode šum. Bez obzira na stvarni izvor šuma njegov se učinak može uključiti serijskim naponskim izvorom, kao što je prikazano na slici 8.123. Tom modelu oscilatora [25] odgovara jednadžba oscilatora

$$\left[Z_{\mathrm{A}}(A) + Z_{\mathrm{P}}(\omega)\right] I = \varepsilon\,, \tag{8–298}$$

u kojoj je umnožak ukupne impedancije i struje jednak naponu šuma. Podijele li se obje strane jednadžbe (8–298) s I, a $Z(A)$ prebaci na desnu stranu, dobiva se

$$Z_{\mathrm{P}}(\omega) = -Z_{\mathrm{A}}(A) + \frac{\varepsilon}{I}\,. \tag{8–299}$$

Da bi oscilator bio upotrebljiv, šum mora biti niske razine. Stoga ćemo pretpostaviti da je ε mala veličina. Zatim se RF struja može približno prikazati kao umnožak amplitude struje bešumnog oscilatora i nekog faznog člana. To znači da se drugi član jednadžbe (8–298) zdesna



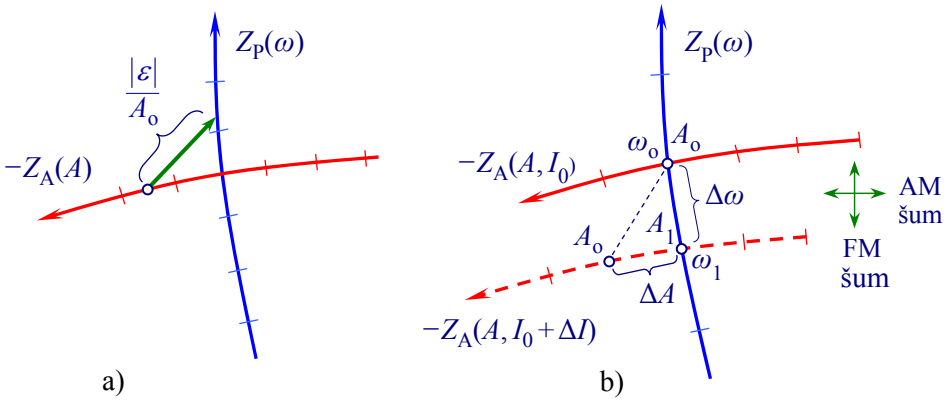
Slika 8.123. Nadomjesna shema šumnog oscilatora

može zamijeniti veličinom $(|\varepsilon|/A_o)e^{-j\varphi}$, gdje je φ fazna razlika između I i ε. To daje

$$Z_p(\omega) = -Z_A(A) + \frac{|\varepsilon|}{A_o} e^{-j\varphi}. \qquad (8\text{–}300)$$

Budući da se dominantni izvor šuma nalazi unutar samog aktivnog dvopola, bilo je sasvim prirodno da se nadomjesnu impedanciju šuma $(|\varepsilon|/A_o)e^{-j\varphi}$ ugradi u lokus aktivnog dvopola. Tako je dobiven novi lokus aktivnog dvopola i postavljena nova impedancijska veza opisana izrazom (8–300). To se sad može zorno prikazati grafički (slika 8.124a)). Dva su lokusa međusobno povezana fazorom $(|\varepsilon|/A_o)e^{-j\varphi}$ koji se naziva *vektor šuma*. Budući da su razine šuma u ispravno izvedenom oscilatoru vrlo male u odnosu na razine RF signala oscilatora, duljina strelice vektora šuma $|\varepsilon|/A_o$ vrlo je mala. Vrh i hvatište tog kompleksnog vektora određuju trenutačnu frekvenciju i trenutačnu amplitudu oscilacija. Budući da je ε izvor šuma, vektor šuma je nasumični vektor pa se njegov smjer i veličina nasumično mijenjaju u vremenu. To znači da se i ω i A mijenjaju nasumično proizvodeći komponente FM i AM šuma koje ćemo sad podrobnije razmotriti.

Da bismo dobili što jasniju sliku o šumu oscilatora, potanko ćemo razmotriti novi lokus elektroničke impedancije koji čini desnu stranu jednadžbe (8–300). Promjenom struje napajanja općenito dolazi do pomaka lokusa elektroničke impedancije aktivnog dvopola, kao što je prikazano na slici 8.124b). Ako je ta promjena struje posljedica nekog nasumičnog procesa, onda se može zamisliti da lokus elektroničke impedancije nasumično koleba u poprečnom i uzdužnom smjeru. U tom se slučaju u sjecištu s lokusom pasivnog kruga mogu odrediti trenutačne vrijednosti frekvencije i amplitude oscilacija. Točnije rečeno, amplituda kolebanja ovisi o položaju radne točke na negativu lokusa aktivnog dvopola jer i A_o i $|\varepsilon|$ ovise o radnoj



Slika 8.124. a) Grafički prikaz veze između vektora šuma, lokusa negativa elektroničke impedancije i lokusa pasivne impedancije. **b)** Nasumično treperenje lokusa elektroničke impedancije koje je posljedica šuma u struji napajanja proizvodi nasumične promjene amplitude i frekvencije, tj. stvara se AM i FM šum u izlaznom mikrovalnom signalu

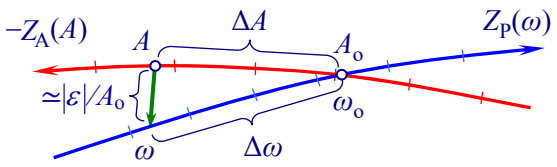
točki. Što je veći napon šuma u radnoj točki i što je manja amplituda A_o to će lokus aktivnog dvopola jače kolebati. Drugim riječima, doći će do većih nasumičnih promjena trenutačne frekvencije i amplitude RF struje, što upućuje na izraženije razine šuma. Budući da su pritom odstupanja amplitude (ΔA) i frekvencije ($\Delta\omega$) od njihivih srednjih vrijednosti posljedica modulacijskog postupka, nasumične promjene amplitude nazivaju se *amplitudno modulirani šum* (*AM šum*), a nasumične promjene frekvencije nazivaju se *frekvencijski modulirani šum* (*FM šum*). AM šumu uzrok su poglavito uzdužna kolebanja lokusa elektroničke impedancije, a FM šum većinom nastaje zbog poprečnih kolebanja lokusa.

Budući da frekvencija i amplituda oscilatora ovise o struji i naponu napajanja aktivnog dvopola, šum u struji ili naponu napajanja treba svesti na najmanju moguću mjeru. Baterijski izvori napajanja, kod kojih je šum prije svega posljedica kemijskih procesa u bateriji, proizvode znatno manju količinu modulacijskog šuma od stabiliziranih izvora napajanja koji upotrebljavaju Zenerove diode za dobivanje referentnog napona. Rad Zenerove diode osniva se na lavinskoma proboju koji stvara velike količine bijeloga šuma zbog izrazito šumnog procesa lavinske multiplikacije. Stoga u stabiliziranim izvorima napajanja treba potisnuti šum Zenerove diode na najmanju moguću mjeru.

Već i tako pojednostavljena slika oscilatora daje puno korisnih informacija. Tako, primjerice, povećanjem faktora dobrote pasivnog kruga, $Z_P(\omega)$ će se brže mijenjati s frekvencijom pa će jednakom pomaku lokusa aktivnog dvopola odgovarati manja devijacija frekvencije, kao što je objašnjeno na slici 8.120. Drugim riječima, razina FM šuma smanjuje se povećanjem faktora dobrote pasivnog kruga. Na toj je zamisli ostvarena jedna od najjednostavnijih metoda stabilizacije frekvencije opterećenjem oscilatora rezonatorom visokog faktora dobrote. Pri tomu će razina AM šuma ostati gotovo nepromijenjena jer su promjene amplitude uglavnom određene uzdužnim kolebanjima lokusa aktivnog dvopola i ne ovise o faktoru dobrote.

Ako se tijekom ugađanja pasivnog kruga lokusi sijeku pod vrlo oštrim kutom, kao u blizini točke ① na slici 8.121b) prije skoka, onda se može očekivati porast razina AM i FM šuma. Takav je slučaj podrobnije prikazan na slici 8.125. U tim okolnostima i slaba kolebanja lokusa aktivnog dvopola mogu izazvati velike devijacije amplitude i frekvencije, što znači da rastu razine modulacijskog šuma. Očito je da se najmanje razine šuma postižu kad su lokusi međusobno okomiti ($\Theta=\theta=90°$).

No taj vrlo pojednostavljen model šuma ima i svoja ograničenja. Primjerice, pri vrlo brzim kolebanjima lokusa aktivnog dvopola, amplituda oscilacija ne može slijediti vrijednost na koju upućuje sjecište jer se pohranjena energija u rezonatoru visokog faktora dobrote, a otuda i amplituda RF struje, ne mogu trenutačno promijeniti. Stoga valja očekivati da će visokofrekvencijske komponente AM šuma brzo opadati izvan frekvencijskog područja omeđenog točkama polovične snage rezonatora, koje je obrnuto razmjerno faktoru dobrote. Brza kolebanja lokusa aktivnog dvopola općenito djeluju i na FM šum. No, dok je god riječ o vremenski sporim komponentama, pojednostavljeni model daje dovoljno točnu i jasnu sliku o šumnim obilježjima oscilatora.



Slika 8.125. Objašnjenje učinka modulacijskog šuma kad se lokusi sijeku pod oštrim kutom

Sinkronizacija oscilatora

Ako se u slobodni oscilator ubaci izvana signal frekvencije koja je blizu frekvencije slobodnoga oscilatora, onda će struja oscilatora biti prisiljena titrati na frekvenciji tog vanjskog signala [28], [25]. Ta se pojava naziva *sinkronizacija oscilatora*. Jedan od načina sinkronizacije prikazan je na slici 8.126a). Pritom se pasivni krug može odvojiti od sinkronizacijskog generatora s pomoću cirkulatora. No impedancija pasivnog dijela koju vidi aktivni dvopol ostat će nepromijenjena. Nadomjesna shema sinkroniziranog oscilatora (slika 8.126b)) u osnovi je jednaka onoj za šumni oscilator (slika 8.123), samo što je sad naponski izvor ε, kojim smo ranije opisivali nasumični signal (šuma), zamijenjen izvorom malog sinkronizacijskog signala V_s koji je koherentan. Budući da taj signal dolazi izvana, ugrađen je u pasivni krug. Uz pretpostavku da je oscilator sinkroniziran frekvencijom ω_s vanjskog (sinkronizacijskog) signala, jednadžba sinkroniziranog oscilatora ima isti oblik kao jednadžba šumnog oscilatora, tj.

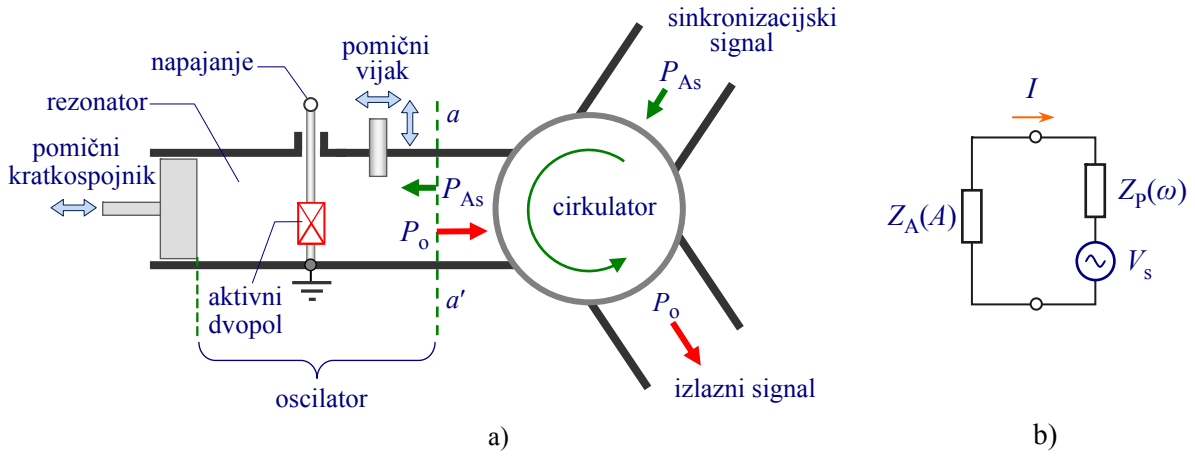
$$\left[Z_P(\omega) + Z_A(A)\right] I = V_s \,. \tag{8–301}$$

Razmatranje će biti ograničeno na sinkronizaciju malim signalom, čija je amplituda znatno manja od amplitude titraja slobodnoga oscilatora. U tom će slučaju amplituda RF struje biti približno jednaka amplitudi slobodnoga oscilatora. Sad se izraz (8–301) može napisati kao

$$Z_P(\omega) = -Z_A(A) + \frac{|V_s|}{A_o} e^{-j\varphi} \,, \tag{8–302}$$

gdje je φ razlika faze između fazora I i V_s. Jednadžba (8–302) pokazuje da se u uvjetima sinkronizacije impedancije $Z_A(A)$ i $Z_P(\omega)$ međusobno razlikuju za malu kompleksnu veličinu $(|V_s|/A_o)e^{-j\varphi}$ koja ima dimenziju impedancije kao i u izrazu (8–300) za šum. Na negativu elektroničke impedancije općenito se mogu naći dvije točke koje geometrijski zadovoljavaju taj uvjet. No samo jedna od njih daje stabilno rješenje, što se može dokazati razvojem dinamičkog modela sinkroniziranog oscilatora. (Budući da ta građa izlazi iz okvira ove knjige, čitatelj se upućuje na dodatnu literaturu [25]-[28].)

U grafičkom prikazu u impedancijskoj ravnini tim rješenjima pripadaju vektori prikazani na slici 8.127a) punom i isprekidanom crtom. Isprekidana strelica odgovara nestabilnom rješenju, a puna strelica pripada stabilnom rješenju i naziva se *sinkronizacijski vektor*. Vrh tog vektora uvijek se nalazi na lokusu pasivnog kruga i njegov je položaj određen frekvencijom sinkronizacijskoga signala. No hvatište mu se uvijek nalazi na negativu lokusa aktivnog dvopola i pokazuje trenutačnu amplitudu struje sinkroniziranog oscilatora. Prema izrazu (8–302), duljina sinkronizacijskoga vektora iznosi $|V_s|/A_o$, gdje konstantna vrijednost $|V_s|$ kaže da je i vrijednost snage sinkronizacijskog signala približno stalna. Promjenom vanjske frekvencije ω_s



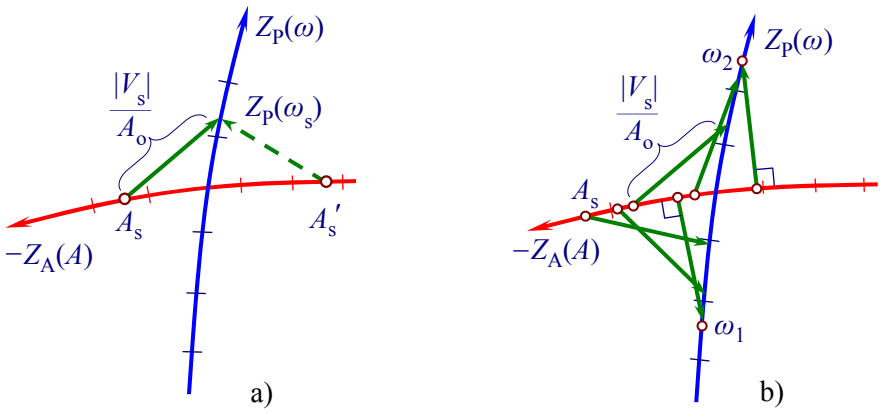
Slika 8.126. a) Shematski prikaz sinkroniziranog oscilatora i **b)** nadomjesna shema

vrh tog vektora prati sve promjene vanjske frekvencije na lokusu $Z_P(\omega)$ pa se za svaku frekvenciju može odrediti položaj hvatišta odgovarajućeg sinkronizacijskoga vektora na lokusu $-Z_A(A)$. Svakom hvatištu odgovara druga amplituda A_s, kao što je prikazano na slici 8.127b). Ako se pritom zadrži stalna vrijednost $|V_s|$ i ako je ona dovoljno mala, onda će promjenom ω_s duljina vektora ostati približno jednaka jer uz te uvjete promjenom frekvencije dolazi do neznatne promjene amplituda titraja ($A_s \simeq A_o$).

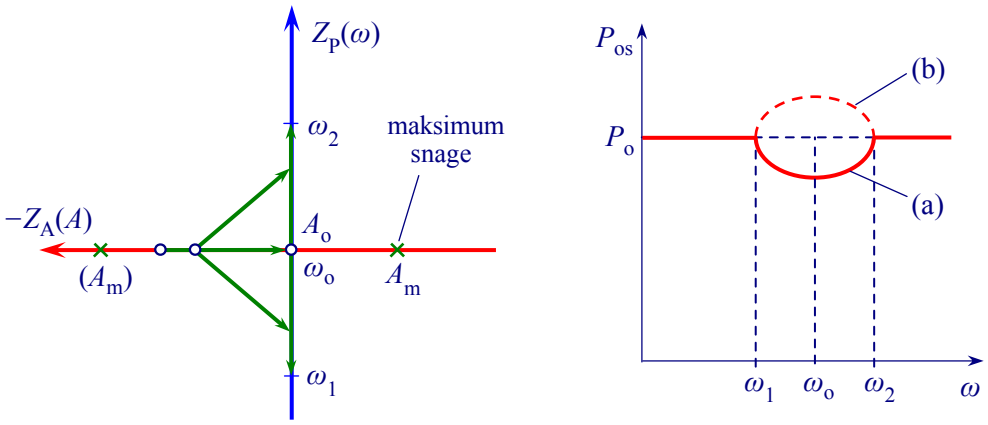
No frekvencijsko područje u kojem se može ostvariti sinkronizacija nije neograničeno. Naime, kad frekvencija ω_s postane veća od ω_2 ili manja od ω_1 sinkronizacijski vektor više ne može premostiti lokuse jer je tad udaljenost od točke $Z_P(\omega)$ do točke $-Z_A(A)$ veća od $|V_s|/A_o$. Drugim riječima, sinkronizacijski signal više nema dovoljno energije da zadovolji jednadžbu (8–302) pa oscilator izlazi iz sinkronizma. Dakle, sinkronizaciju je moguće ostvariti i održavati samo u rasponu frekvencija od ω_1 do ω_2, tj. unutar odgovarajućeg frekvencijskog pojasa koji se naziva *sinkronizacijsko područje*. U tom se području fazni kut φ ukupno promijeni za približno 180º, što se može vidjeti promatranjem položaja dvaju rubnih vektora na frekvencijama ω_1 i ω_2, koji su međusobno paralelni, ali upereni u suprotne strane.

Na slici 8.127b) može se također uočiti da promjene frekvencije sinkronizacijskoga signala stvaraju odgovarajuće promjene amplitude RF struje, što rezultira promjenama izlazne snage. Pri sinkronizaciji malim signalom, lokusi se u okolišu sjecišta (radne točke) mogu aproksimirati ravnim crtama. Kad se lokusi sijeku pod pravim kutom, ovisnost izlazne snage o frekvenciji sinkronizacijskoga signala bit će u obliku simetrične poluelipse, kao što je prikazano na slici 8.128. Ta je ovisnost konkavna (uleknuta) ili konveksna (izbočena), ovisno o tomu s koje se strane sjecišta nalazi točka amplitude A_m uz koju oscilatotor proizvodi maksimalnu izlaznu snagu snagu. Ako se ta točka nalazi s desne strane sjecišta, onda će poluelipsa biti konkavna jer će se za $\omega_s = \omega_o$ (sredina sinkronizacijskoga područja) hvatište pripadajućeg sinkronizacijskoga vektora maksimalno udaljiti od točke A_m. Obratna se ovisnost dobiva kad se točka, koja odgovara maksimalnoj snazi, nalazi lijevo od sjecišta dvaju lokusa.

Kad se lokusi ne sijeku pod pravim kutom, tad je poluelipsa nagnuta. Iz nagiba poluelipse može se odrediti kut pod kojim se lokusi sijeku. Stoga se eksperiment sa sinkronizacijom može primijeniti za ispitivanje je li oscilator podopterećen ili je preopterećen, i sijeku li se lokusi pod pravim kutom ili ne. Kad je lokus pasivne mreže (tereta) tako namješten da oscilator proizvodi maksimalnu snagu, tad promjene frekvencije sinkronizacijskoga signala stvaraju minimalne promjene izlazne snage.



Slika 8.127. a) Veza između sinkronizacijskoga vektora, lokusa pasivne impedancije i lokusa aktivnog dvopola; crtkani vektor odgovara nestabilnom rješenju. **b)** Promjene položaja sinkronizacijskoga vektora uz promjene frekvencije sinkronizacijskoga signala od ω_1 do ω_2



Slika 8.128. Promjene izlazne snage (P_{os}) sinkroniziranog oscilatora u odnosu na snagu P_o slobodnoga oscilatora unutar sinkronizacijskoga područja, gdje poluelipsa (a) odgovara položaju točke A_m u području $\alpha>0$, a poluelipsa (b) odgovara položaju točke (A_m) u području $\alpha<0$

Primjenom jednostavnog modela oscilatora sa serijskim titrajnim krugom (slika 8.117), koji smo uveli prilikom proučavanja započinjanja oscilacija, može se izvesti približan izraz za širinu područja sinkronizacije [25]. Na slici 8.129 vidi se da na samom rubu sinkronizacijskoga područja udaljenost između točaka ω_o i $\omega_o+\Delta\omega_m$ na lokusu $Z_P(\omega)$ iznosi

$$\left|Z_P(\omega_o+\Delta\omega_m)-Z_P(\omega_o)\right|=2\Delta\omega_m L_r\,.$$

Oznaka ω_m odgovara maksimalnom odstupanju frekvencije uz zadani $|V_s|$ za koji oscilator baš izlazi iz sinkronizacije. Na slici 8.129 pretpostavljeno je da je sinkronizacijski signal toliko mali da se lokusi mogu prikazati pravcima, tj. da je sinkronizacijsko područje smješteno simetrično u odnosu na frekvenciju ω_o slobodnoga oscilatora. Pri tomu se promjena amplitude A_o unutar sinkronizacijskoga područja može zanemariti.

Iz geometrije na slici 8.129 izravno izlazi

$$\left|2\Delta\omega_m L_r\sin\theta\right|=\frac{|V_s|}{A_o}\,. \tag{8–303}$$

Primjenom izraza (8–271) i (8–278) može se naći izraz za snagu slobodnoga oscilatora, tj.

$$P_o=\frac{1}{2}R_T A_o^2\,. \tag{8–304}$$

S druge strane, raspoloživa snaga generatora sinkronizacijskoga signala dana je izrazom

$$P_{As}=\frac{|V_s|^2}{8R_T}\,. \tag{8–305}$$

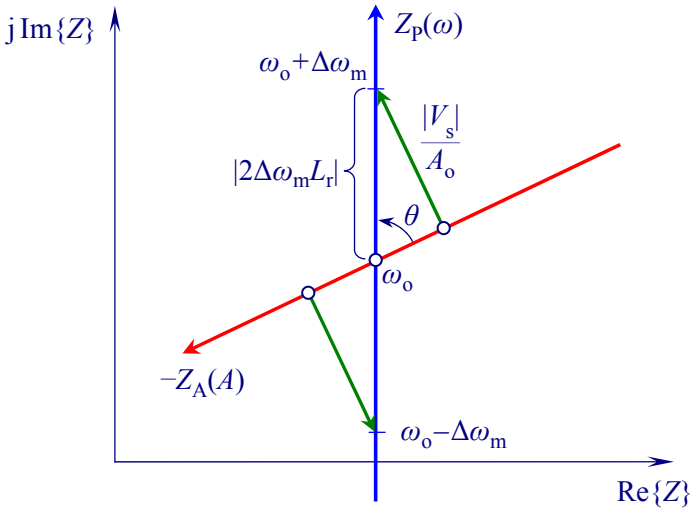
Osim toga, jednadžba (8–303) može se pojednostavniti uvođenjem izraza za vanjski faktor dobrote rezonatora, tj.

$$Q_v=\frac{\omega_r L_r}{R_T}\simeq\frac{\omega_o L_r}{R_T}\,. \tag{8–306}$$

Uvrštenjem izraza (8–304)-(8–306) u jednadžbu (8–303) izlazi koristan izraz za širinu frekvencijskog područja unutar kojeg se može ostvariti sinkroniziracija oscilatora, tj.

$$B_s=2\Delta f_m=\frac{2f_o}{Q_v}\sqrt{\frac{P_{As}}{P_o}}\,\frac{1}{\sin\theta}\,, \tag{8–307}$$

gdje je $f_o=\omega_o/2\pi$, a $\Delta f_m=(\omega_m-\omega_o)/2\pi=f_m-f_o$.



Slika 8.129. Grafički prikaz zauzimanja stabilne radne točke

Taj je izraz u osnovi jednak formuli koju je izveo Adler [28] za sinkronizirani oscilator s triodom.

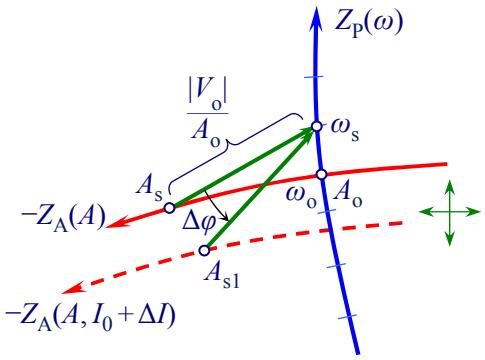
U sinkroniziranom oscilatoru, RF struja titra u ritmu frekvencije vanjskoga signala pa se primjenom sinkronizacijskog signala vrlo stabilne frekvencije može znatno potisnuti fazno modulirani šum oscilatora. Na slici 8.130 prikazan je slučaj sinkronizacije šumnog oscilatora, s nasumičnim kolebanjima lokusa aktivnog dvopola. Pritom je položaj vrha sinkronizacijskoga vektora čvrsto određen frekvencijom vanjskog signala. No njegovo hvatište i dalje nasumično titra da bi ostala zadovoljena jednadžba sinkronizacije (8–302). Dakle, nasumične promjene smjera sinkronizacijskoga vektora u izrazu (8–302) odgovaraju nasumičnim promjenama faze ($\Delta\varphi$), a mjera promjene faze jest frekvencija što je u skladu s izrazom $\mathrm{d}\varphi(t)/\mathrm{d}t=\omega(t)$. Stoga se sinkronizacijom ne može posve potisnuti FM šum jer će uvijek preostati konačna razina tzv. rezidualnog FM šuma.

Iz slike 8.130 može se lako zaključiti da povećanje amplitude sinkronizacijskoga signala smanjuje promjene smjera sinkronizacijskoga vektora, pa se time smanjuje rezidualni FM šum. Budući da je duljina sinkronizacijskoga vektora obrnuto razmjerna snazi FM šuma, povećanjem snage sinkronizacijskoga signala povećava se potiskivanje FM šuma oscilatora.

Iz prethodnih se razmatranja može također zaključiti da se sinkronizacijom uopće ne može potisnuti AM šum jer su kolebanja amplitude ΔA uglavnom određena položajem hvatišta a ne vrha sinkronizacijskoga vektora.

Kad se frekvencija sinkronizacijskog signala približi rubu sinkronizacijskoga područja, tad poprečna kolebanja stvaraju dodatni AM šum jer je uz čvrst položaj vrha sinkronizacijskoga vektora moguće samo uzdužno gibanje njegovog hvatišta uz nepromijenjenu duljinu. Slično tomu, longitudinalna kolebanja pojačavaju fazno modulirani šum pa otuda i FM šum. Stoga uz sam rub sinkronizacijskoga područja dolazi do snažne pretvorbe FM šuma u AM šum i obratno. Zato sinkronizacija daje najbolje rezultate kad su lokusi međusobno okomiti i kad se frekvencija sinkronizacijskoga signala nalazi na sredini sinkronizacijskoga područja.

Budući da u sinkroniziranom režimu rada frekvencija oscilatora prati frekvenciju sinkronizacijskoga signala, sinkronizirani se oscilator može uvjetno shvatiti kao neka vrsta pojačala FM signala. No, budući da mu izlazna snaga gotovo uopće ne ovisi o amplitudi ulaznoga signala, ponaša se poput zasićenog pojačala.



Slika 8.130. Grafička interpretacija potiskivanja FM šuma sinkronizacijom i pretvaranje dijela FM šuma u rezidualni fazno modulirani šum

Refleksijsko pojačalo

Ako jednadžba oscilatora (8–273) nije zadovoljena, u sklopu prikazanom na slici 8.111 ili 8.112, onda ne može doći do spontanih oscilacija, tj. ne postoji presjek između lokusa, $-Z_A(A)$ i $Z_P(\omega)$, kao što je prikazano na slici 8.131. To se zbiva kad je otpor pasivne mreže veći od apsolutne vrijednosti negativnog otpora, $R_P(\omega) > |R_A(A)|$. No takav se sustav ponaša poput *refleksijskog pojačala* [25] jer je i dalje prisutan negativni otpor aktivnoga dvopola, ali nema spontanih oscilacija. U prikazu na slici 8.131 sinkronizacijski vektor ima ulogu *pobudnog vektora*. Bez obzira na veličinu amplitude naponskog generatora pobudnoga signala V_G, dva se lokusa na frekvenciji vanjskoga signala ω_o uvijek mogu premostiti pobudnim vektorom jer je njegova duljina $|V_G|/A_o$ jednaka omjeru amplituda elektromotorne sile pobudnog generatora i RF struje koja protječe aktivnim dvopolom. Naime, male vrijednosti $|V_G|$ daju male vrijednosti A_o, pa se uvijek može naći takva duljina pobudnoga vektora $|V_G|/A_o$ kojom će pobudni vektor moći premostiti lokuse.

Sklop refleksijskog pojačala prikazan je na slici 8.131a). Sličan je sklopu sinkroniziranog oscilatora, slika 8.126a). Ako se pobudni signal dovede aktivnome dvopolu preko feritnog cirkulatora, onda će se na izlazu pojaviti reflektirani signal od negativnog otpora. Signal je pritom pojačan jer je modul koeficijenta refleksije veći od jedinice. Tad se iz izraza (5–59) za poopćeni koeficijent refleksije izravno dobiva ovaj izraz za pojačanje snage

$$G = |\Gamma|^2 = \left|\frac{Z_P - Z_A^*}{Z_P + Z_A}\right|^2 . \tag{8–308}$$

Odabere li se takva reaktancija pasivnog sklopa, da je pritom zadovoljen uvjet $X_P = -X_A$, tj. da je sklop u rezonanciji, reaktivne komponente u brojniku i nazivniku će se poništiti. Uz taj se uvjet izraz (8–308) svodi na oblik

$$G = \left(\frac{R_P - R_A}{R_P + R_A}\right)^2 . \tag{8–309}$$

Očito je da vrijednost R_P mora uvijek biti veća od $|R_A|$ jer se u suprotnome sklop pretvara u oscilator pa izrazi (8–308) i (8–309) više ne vrijede. Promjenom vrijednosti R_P, pojačanje se može teorijski namjestiti na bilo koju vrijednost između jedinične i beskonačne.

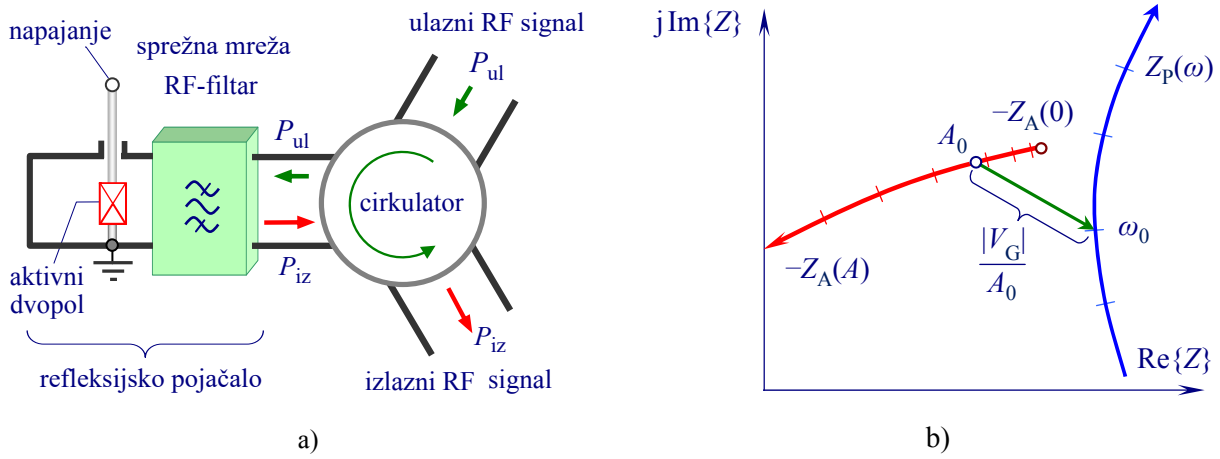
Potrebna vrijednost otpora R_P za zadano pojačanje G može se lako izračunati preuredi li se izraz (8–309) u oblik

$$R_P = -R_A \frac{\sqrt{G}+1}{\sqrt{G}-1} . \tag{8–310}$$

Pogledajmo ovaj primjer. Ako se od negativnog otpora $R_A = -5\ \Omega$, traži pojačanje od 13 dB ili 20 puta, onda je aktivnom dvopolu potrebno suprotstaviti otpor pasivne mreže iznosa

$$R_P = -(-5)\frac{\sqrt{20}+1}{\sqrt{20}-1} = 5 \cdot 1{,}58 = 7{,}88\ \Omega .$$

Valja primijetiti da porast negativnog otpora za 2,88 Ω dovodi pojačalo na rub oscilacija pa pojačanje teži u beskonačnost. Da bi pojačalo ostalo u stabilnom režimu rada, negativni otpor valja čvrsto držati na vrijednosti koja jamči zadano pojačanje. Stoga treba izbjegavati razine pojačanja veće od 15-20 dB jer bi pri tim vrijednostima već i male promjene radne temperature ili napona napajanja ili odnosa stojnih valova tereta mogle radnu točku pomaknuti u područje spontanih oscilacija. Zbog inherentne sklonosti prema nestabilnom radu, refleksijska se pojačala izbjegavaju u praksi, posebno u mikrovalnome području ispod 100 GHz, gdje ih uspješno zamjenjuju tranzistorska pojačala. Slična se rješenja nalaze kod parametarskih pojačala koja rabe nelinearne reaktancije pobuđene velikim pumpnim signalom (odjeljak 8.10).



Slika 8.131. a) Refleksijsko pojačalo s aktivnim dvopolom i **b)** objašnjenje rada s pomoću lokusa

Premda refleksijska pojačala nemaju veću primjenu u praksi, korisna su za razumijevanje ponašanja nelinearnih aktivnih komponenata u režimu rada s velikim signalom. Na slici 8.131b) može se vidjeti da porast amplitude ulaznoga signala povećava amplitudu RF struje A_o koja se nalazi na hvatištu pobudnog vektora. Ako je lokus $Z_A(A)$ izrazito nelinearan, onda se praćenjem položaja hvatišta pobudnoga vektora može dobiti vrlo dobar uvid u ponašanje nelinearne reaktancije i negativnog otpora aktivnog dvopola pri pobudi velikim signalom.

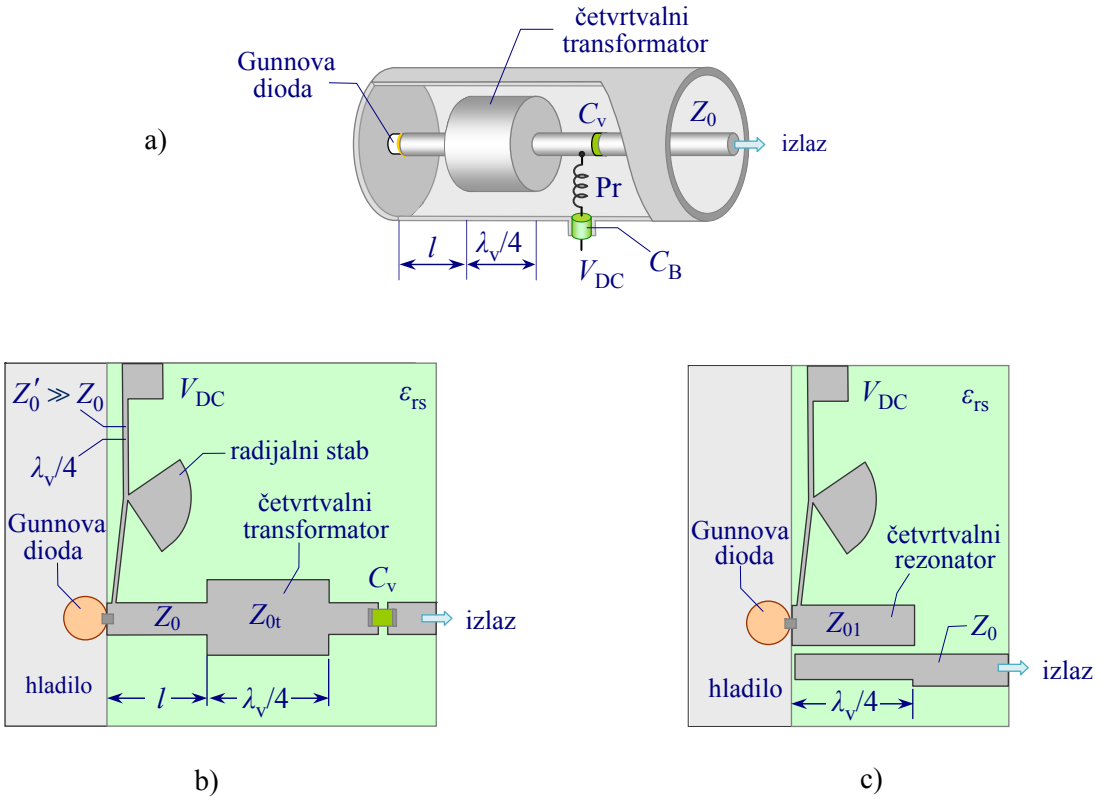
Izvedbe oscilatora s negativnim otporom

Aktivni dvopol valja odabrati u skladu s područjem primjene vodeći računa o zahtjevima koji se postavljaju na parametre oscilatora poput frekvencijskog područja, razine izlazne snage i dopuštene razine FM šuma. Tako se u mikrovalnome i nižem milimetarskome području prednost se daje tranzistorskim oscilatorima (odjeljak 8.9.2), a u višem milimetarskome i submilimetarskome valnom području mogu se uspješno upotrebljavati diode s negativnim otporom poput Gunnove i IMPATT diode). Diodni se oscilatori mogu ostvariti primjenom poznatih vrsta prijenosnih struktura poput suosne linije, mikrotrakaste linije i valovoda.

Na slici 8.132a) prikazana je izvedba oscilatora s četvrtvalnim transformatorom, u kojem je dioda smještena uz kratko spojen kraj suosne linije. Linijskim odsječkom duljine l uglavnom se određuje frekvencija osciliranja f_0, tj. zadovoljava se fazni uvjet oscilatora (8–277). Četvrtvalni transformator karakteristične impedancije Z_{0t} služi za namještanje ispravnog omskog optrećenja. Time se može zadovoljiti amplitudni uvjet (8–276) i postići tražena razina izlazne

snage. Da bi se povećao faktor dobrote i tako dodatno potisnuo FM šum oscilatora, duljinu l treba postaviti na približno pola valne duljine. Ako je reaktivni dio aktivnog dvopola kapacitivnog karaktera, onda će za ostvarenje zadane frekvencije osciliranja biti potrebno produljiti odsječak kako bi poprimio induktivni karakter. Uz induktivni karakter reaktancije aktivnog dvopola (što je rijedak slučaj), valja smanjiti duljinu l. Na slici 8.132a) također je prikazana struktura za dovođenje potrebnog napona napajanja. Napon napajanja dovodi se diodi preko RF prigušnice i središnjeg vodiča suosne linije. Istosmjerne veličine odvajaju se od impedancije tereta primjenom veznog kapaciteta C_v koji je spojen u seriju sa središnjim vodičem. U načelu, ta se izvedba sklopa za dovođenje napajanja bitno ne razlikuje od onih za napajanje tranzistora u sklopovima pojačala (odjeljak 8.8.4). Snaga RF signala oscilatora uzima se izravno na izlazu strukture.

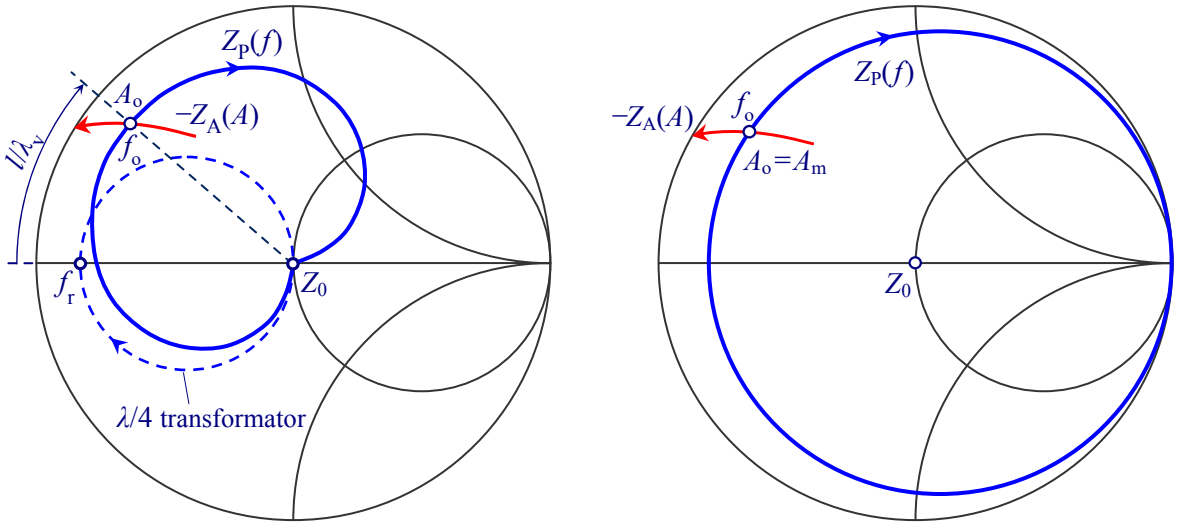
Sličan se oscilator može naći i u mikrotrakastoj izvedbi. Linijski odsječak i četvrtvalni transformator impedancije na slici 8.132b) imaju iste uloge kao u opisanom suosnom sklopu. Postupak prilagodbe prikazan je u Smithovu dijagramu na slici 8.133a). Aktivni je dvopol prilagođen teretu kaskadom linijskog odsječka i četvrtvalnog transformatora impedancije. Kao u izvedbi sa suosnom linijom i ovdje linijski odsječak (l) služi za poništavanje reaktivne komponente, pa time zadovoljava fazni uvjet, kao što je prikazano na slici 8.133a). Za dovođenje napajanja može se primijeniti jedno od rješenja iz odjeljka 8.8.4. U sklopovima diodnih oscilatora, kao aktivni dvopol, obično se rabi IMPATT ili Gunnova dioda ugrađena u keramičko kućište. Pri tomu se jedan kraj spaja na uzemljenu ravninu koja je ujedno i hladilo za odvođenje toplinske energije iz aktivne komponente. No IMPATT i Gunnova dioda imaju vrlo male vrijednosti negativnog otpora (od nekoliko desetinki do nekoliko destaka oma). To zahtijeva vrlo velik omjer transformacije impedancije. Primjerice, da bi se impedancija trošila od 50 Ω prilagodila tipičnom negativnom otporu IMPATT diode od oko $-0{,}5$ Ω potrebna je



Slika 8.132. Diodni oscilator s četvrtvalnim transformatorom impedancije. Izvedbe sa: **a)** suosnom linijom; **b)** mikrotrakastom linijom; **c)** spregnutim mikrotrakastim linijama

karakteristična impedancija klasičnog četvrtvalnog transformatora od $Z_{0t}=\sqrt{50\cdot 0{,}5}=5\,\Omega$. Tako mala vrijednost karakteristične impedancije traži vrlo široku traku, uz istu visinu dielektrične podloge, pa se nerijetko pojavljuje problem s višim modovima koji mogu izazvati parazitske oscilacije na neželjenim frekvencijama.

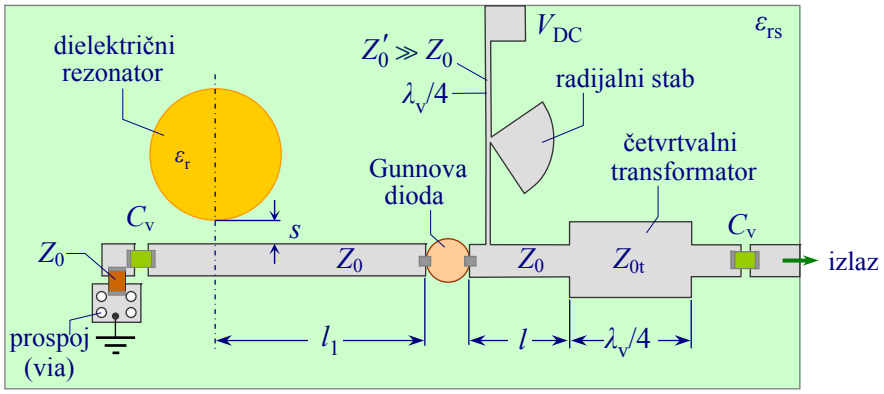
U tom slučaju prednost treba dati sklopu prikazanom na slici 8.132c), koji za transformaciju realnog dijela impedancije rabi odsječak spregnutih linija s dvama otvorenim dijagonalnim prolazima. Na slici 7.120 vidjeli smo da se takva struktura na središnjoj frekvenciji f_o ponaša slično četvrtvalnome transformatoru impedancije čija nadomjesna karakteristična impedancija iznosi $Z_{0t}=(Z_{0e}-Z_{0o})/2$. Smanjenjem sprege, tj. povećanjem razmaka između traka, može se dobiti proizvoljno mala nadomjesna karakteristična impedancija i tako zadovoljiti zahtjev za ekstremno velikim transformacijskim omjerom. Odsječak trake izravno spojen s aktivnim dvopolom ponaša se kao otvoreni četvrtvalni rezonator koji je elektromagnetski spregnut s drugim odsječkom u izlaznoj liniji. Budući da trake nisu međusobno galvanski spojene, dodatna je prednost ove izvedbe u odvajanju istosmjernog napona od izlaznog prolaza. Trake općenito ne moraju biti jednake širine pa se u cilju povećanja faktora dobrote uz diodu obično stavlja šira traka. Na taj se način može ujedno povećati transformacijski omjer. Na slici 8.133b) prikazan je postupak prilagodbe lokusa pasivne impedancije elektroničkoj impedanciji aktivnog dvopola. Ulazna impedancija pasivne mreže ima oblik sličan kružnici stalnog realnog dijela u Smithovu dijagramu. U području ispod rezonancije, kad frekvencija teži nuli, ulazna impedancija teži u beskonačnost. Slična se ovisnost pojavljuje na dvostruko višoj frekvenciji od rezonantne. U sklopu s četvrtvalnim transformatorom impedancije, na tim istim frekvencijama, ulazna impedancija pasivne mreže teži impedanciji Z_0. To pokazuje da je prvi sklop znatno otporniji na parazitske oscilacije.



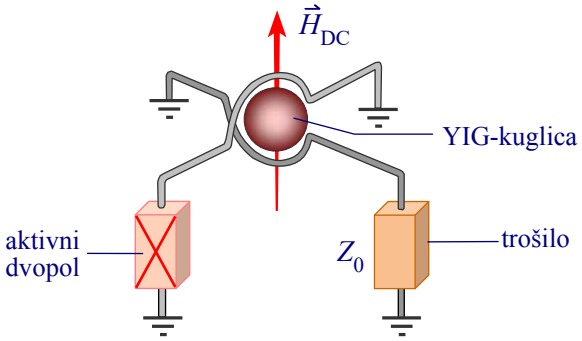
a) b)

Slika 8.133. a) Grafički proračun mikrotrakastog diodnog oscilatora s četvrtvalnim transformatorom. Reaktivna komponenta elektroničke impedancije kompenzirana je zakretanjem lokusa četvrtvalnog transformatora linijskim odsječkom duljine l. **b)** Proračun oscilatora s četvrtvalnim odsječkom spregnutih linija. Budući da se lokus pasivne mreže približno poklapa s kružnicom stalnog otpora, za male otporne komponente nije potrebna rotacija lokusa pa se četvrtvalni odsječak spregnutih linija može izravno spojiti s aktivnim dvopolom (diodom)

a)



b)



Slika 8.134. a) Izgled tiskane pločice diodnog oscilatora s dielektričnim rezonatorom. **b)** Shematski prikaz oscilatora s YIG-rezonatorom

Jače potiskivanje FM šuma može se ostvariti sklopovima s višim faktorom dobrote. U tu svrhu valja primijeniti dielektrični rezonator, kao što je prikazano u sklopu oscilatora s Gunnovom diodom na slici 8.134a). Dielektrični je rezonator smješten iza Gunnove diode i spregnut je s mikrotrakastom linijom u modu $TE_{01\delta}$ (odjeljci 7.4.4. i 7.4.6). Linija s kojom je rezonator spregnut ima ulogu staba visokog faktora dobrote, koji stabilizira frekvenciju oscili-ranja. Duljina staba (l_1) iznosi oko pola valne duljine. U rezonanciji, dielektrični rezonator upućuje na vrlo visoku impedanciju pa je impedancija prilagodnog otpora (na kraju linije iza rezonatora) praktički raspregnuta od aktivne komponente. Stoga se linijski odsječak duljine l_1 ponaša poput otvorenog staba. No zbog vrlo visokog Q-faktora, izvan rezonancije počinju djelovati iznimno jake reaktivne komponente koje vraćaju frekvenciju osciliranja prema zadanoj. Budući da su u igri dva titrajna sustava, onaj s linijskim odsječkom duljine l i ovaj sa stabom, treba izjednačiti njihove rezonantne frekvencije. Daleko izvan rezonancije dielektrični je rezonator raspregnut pa dioda vidi samo omsko opterećenje prilagođene linije (l_1), koje sprečava nastanak neželjenih modova i parazitskih oscilacija.

Umjesto dielektričnog rezonatora može se upotrijebiti YIG-rezonator (odjeljak 7.7.3). Rezonator s kuglicom feritnog materijala (YIG) uz visok faktor dobrote pokazuje i sposobnost ugađanja rezonantne frekvencije promjenom jakog statičkog magnetskog polja. Na slici 8.134b) prikazana je načelna shema oscilatora s YIG-rezonatorom, čiju je frekvenciju oscili-ranja moguće ugađati u frekvencijskom području širem od jedne oktave (2 : 1). Pri tomu su dva ortogonalna zavoja spregnuta s YIG-kuglicom, gdje je jedan od njih spregnut s aktivnim dvopolom (diodom), a drugi s trošilom. Kad je utisnuto jako statičko magnetsko polje, tad u rezonanciji YIG-kuglice dolazi do jake frekvencijski selektivne sprege između zavoja čime se omogućuje prijenos energije iz jednog zavoja u drugi. Impedancija koja je suprotstavljena aktivnome dvopolu može se izraziti kao [26]

$$Z_{\mathrm{P}} = \mathrm{j}\omega L_{\mathrm{s}} + \frac{\dfrac{Z_0}{Q_{\mathrm{v}}}}{\dfrac{1}{Q_{\mathrm{T}}} + \mathrm{j}\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{r}}'} - \dfrac{\omega_{\mathrm{r}}'}{\omega'}\right)},$$

gdje je L_{s} induktivitet zavoja, Q_{v} i Q_{T} vanjski Q-faktor i Q-faktor opterećenog rezonatora, a ω_{r}' rezonantna frekvencija opterećene YIG-kuglice. Veličine Q_{T} i ω_{r}' dane su kao:

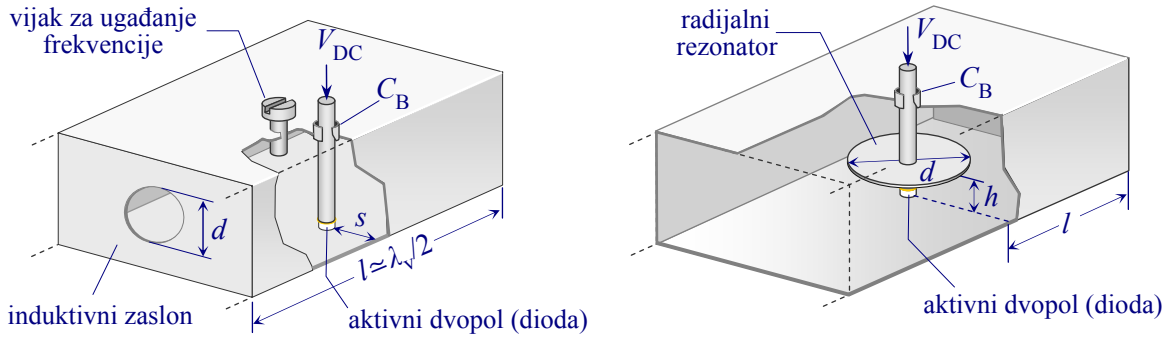
$$\frac{1}{Q_{\mathrm{T}}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\mathrm{v}}} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\omega_{\mathrm{r}} L_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{T}}}\right)^2},$$

$$\omega_{\mathrm{r}}' = \omega_{\mathrm{r}} \left[1 + \frac{1}{2Q_{\mathrm{v}}} \frac{\dfrac{\omega_{\mathrm{r}} L_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{T}}}}{1 + \left(\dfrac{\omega_{\mathrm{r}} L_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{T}}}\right)^2} \right],$$

gdje je Q_0 unutarnji Q-faktor, a ω_{r} prirodna rezonantna frekvencija YIG-kuglice. Rezonantna frekvencija ω_{r} pa otuda i frekvencija osciliranja razmjerne su jakosti statičkog magnetskog polja H_{DC} i monotono rastu s jakošću polja. Ovdje je ω_{r}' općenito različito od ω_{r} zbog učinaka induktiviteta zavoja i otpora trošila. Takvi se oscilatori rabe u mikrovalnoj instrumentaciji poput analizatora spektra i analizatora mreža (odjeljci 9.3. i 9.4). Diodna rješenja nerijetko pokazuju nestabilnosti u radu i promjenu izlazne snage s frekvencijom, pa se u praksi češće nalaze tranzistorski oscilatori s YIG-rezonatorima (odjeljak 8.9.2).

Osim prijenosnih linija, kao sastavni dijelovi diodnih oscilatora, mogu poslužiti i valovodi [26]. Na slici 8.135a) dioda je smještena u pravokutni rezonator preko induktivnog stupića. Poluvalni rezonator ostvaren je induktivnim zaslonom i kratkospojnikom. Stupić se postavlja na udaljenost *s* od bočne stijenke. Ta udaljenost s ispravno odabranim promjerom *d* sprežnog otvora u induktivnom zaslonu daje optimalno opterećenje diode. Frekvencija oscilatora ugađa se kapacitivnim vijkom koji se obično postavlja blizu maksimuma električnog polja. Za najniži mod pravokutnog rezonatora (TE_{101}), stupić valja postaviti u sredinu uzdužne izmjere rezonatora, kao što je prikazano na slici 8.135a). Budući da valna impedancija valovoda može biti više od tisuću puta veća od negativnog otpora aktivnog dvopola, pogodno je stupić postaviti što bliže jednoj od bočnih stijenka na sredini uzdužne dimenzije rezonatora koja je blizu poluvalne vrijednosti. Valovodnim diodnim oscilatorima osnovni je nedostatak što su izmjere aktivnih komponenata znatno manje od izmjera šupljinskog rezonatora pa je gdjekad teško mehanički i električki prilagoditi jednu drugoj. Osim toga, projektiranje oscilatora s Gunnovom diodom može biti vrlo zamršeno zbog toga što valovodni rezonatori pokazuju mnoštvo viših modova koji se mogu spregnuti sa širokopojasnim obilježjima impedancije aktivnih elemenata i tako stvoriti nestabilnosti u radu. Da bi se smanjila mogućnost pojave viših modova valja smanjiti visinu valovoda na najmanju moguću vrijednost pa čak i na štetu faktora dobrote, tj. stabilnosti frekvencije i FM-šuma. No u području milimetarskih i submilimetarskih valnih duljina, prednost treba dati valovodima jer na frekvencijama iznad 100 GHz gubitci u mikrotrakastim i suosnim linijama mogu toliko narasti da oscilatori postanu posve nepraktični.

Napon napajanja dovodi se diodi preko metalnog stupića. Stupić je izoliran od stijenke valovoda suosnim kondenzatorom (C_{B}) koji sprečava gubitak mikrovalnog signala zračenjem u prostor izvan valovoda.



a) b)

Slika 8.135. Izvedbe diodnog oscilatora u valovodnoj tehnici

Na slici 8.135b) prikazana je izvedba s radijalnim rezonatorom (disk-rezonator) kojim se postiže postupna prilagodba malog negativnog otpora aktivnog dvopola na visoku valnu impedanciju valovoda. Ugađanjem udaljenosti (l) između aktivnog dvopola i kratkospojnika, postiže se optimalna prilagodba za najveću izlaznu snagu.

8.9.2. Tranzistorski oscilatori

Tranzistorski se oscilatori mogu ostvariti u različitim oblicima. Silicijski bipolarni tranzistori pogodni su za oscilatore u frekvencijskom području do 10 GHz, jer pokazuju manje razine fazno moduliranog šuma i veću učinkovitost pretvorbe istosmjerne energije u mikrovalnu, u usporedbi s MESFET-om. No u višem frekvencijskom području (do 50 GHz) pogodniji je MESFET, a za frekvencijsko područje od 30 do 150 GHz valja rabiti HEMT zbog svoje visoke frekvencije osciliranja. Pri razmatranju pojačala u odjeljku 8.8.2. glavni je problem bio kako spriječiti oscilacije. S tim u vezi vidjeli smo da su mnogi tranzistori samo uvjetno stabilni čime je ograničen izbor impedancija tereta i generatora koje mogu jamčiti stabilnost rada pojačala. Pritom su područja stabilnosti i nestabilnosti bila prikazana grafički u Smithovu dijagramu primjenom kružnica stabilnosti za ulazni i izlazni krug pojačala. Za razliku od pojačala kod kojih se opteretne impedancije odabiru unutar područja stabilnosti, pri proračunu oscilatora, ulazne i izlazne opteretne impedancije tranzistora odabiru se iz područja nestabilnosti. Time će se stvoriti uvjeti za samopobudu titraja, tj. oscilacija. U tim područjima i ulazna i izlazna impedancija tranzistorskog sklopa pokazuje negativni otpor. Pritom se oscilacije pojavljuju na frekvenciji na kojoj reaktancije ulaznog i izlaznog kruga iščezavaju. Stoga se na tranzistorski oscilator može gledati kao na oscilator s negativnim otporom. Ako je tranzistor bezuvjetno stabilan, onda ga se mora učiniti nestabilnim primjenom serijske ili paralelne povratne veze. Taj se postupak naziva *destabilizacija tranzistora*. Pri tomu je najjednostavnije dodati neku reaktanciju (obično kapacitivnu) u seriju s elektrodom slijeva ili emitera. Kao što smo vidjeli u odjeljku 8.4.5, većina tranzistora u spojevima zajedničkog gata ili zajedničke izrazito su nestabilni pa ih obično ne treba dodatno destabilizirati.

U ovom ćemo odjeljku najprije pokazati opće uvjete za oscilacije u višeprolaznoj aktivnoj mreži na osnovi raspršnih parametara za mali signal. Ovdje ćemo rabiti prikaz tranzistora kao dvoprolaznog sklopa s jednom zajedničkom elektrodom ili kao troprolaznog sklopa s tranzistorom u tzv. *plivajućem spoju*. Nakon razmatranja uvjeta za početak osciliranja i za postizanje maksimalne izlazne snage prikazat ćemo nekoliko primjera proračuna oscilatora uključujući projektiranje oscilatora stabilne frekvencije primjenom dielektričnog i YIG-rezonatora.

Osnovni model oscilatora s aktivnim četveropolom

Rad oscilatora može se najbolje intuitivno shvatiti uz pomoć modela pojačala s pozitivnom povratom vezom [11], [15]. Na slici 8.136a) prikazana je nadomjesna shema tranzistorskog oscilatora s paralelnom povratnom vezom u kojoj se obično nalazi rezonantna mreža visokog faktora dobrote. Veličine $V_{ul}(\omega)$ i $V_{iz}(\omega)$ označuju napone (signale) na ulazu i izlazu pojačala naponskog pojačanja $A(\omega)$. Rezonantna mreža povratne veze opisana je prijenosnom funkcijom $H(\omega)$. Porast oscilacija može se opisati na sljedeći način. U trenutku ukopčavanja oscilatora, cjelokupno pojačanje u petlji povratne veze veće je od 1 pa je na ulazu i izlazu pojačala prisutan samo šum. Mali dio (p od 1, gdje je $p<1$) izlaznog signala (šum) vraća se na ulaz preko selektivne mreže pa se signal na ulazu pojačala nalazi u obliku malog, približno sinusnog, signala. Naime, zbog razmjerno visokog Q-faktora mreže, komponente šuma izvan rezonantne frekvencije znatno su potisnute. Taj se mali približno sinusni signal zatim pojačava u aktivnoj komponenti. Dio pojačanog signala ponovno se vraća na ulaz i proces se nastavlja dok god amplituda signala na izlazu ne uđe u zasićenje, tj. kad dođe do stabilizacije amplitude titraja. Izlazni napon sklopa na slici 8.136a) može se opisati relacijom

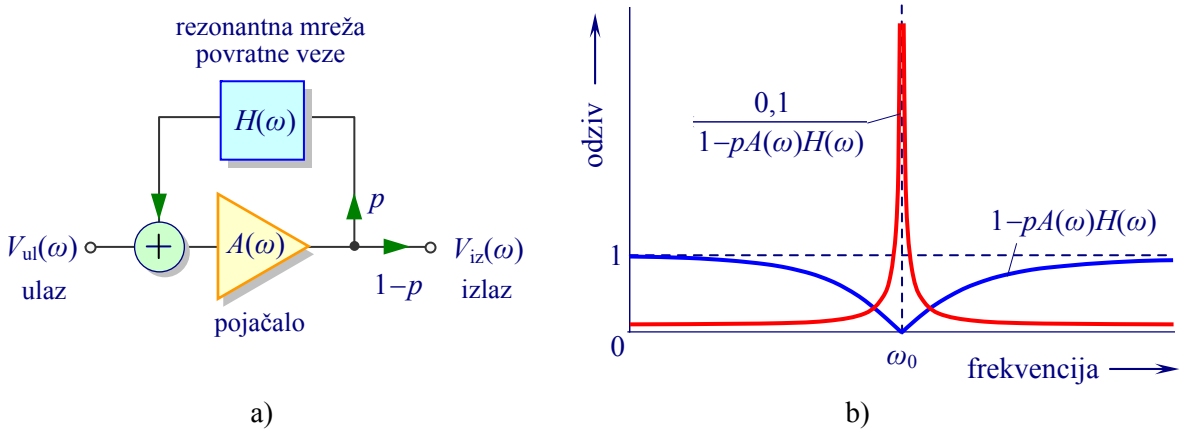
$$V_{iz}(\omega) = \frac{(1-p)A(\omega)}{1-pA(\omega)H(\omega)}\, V_{ul}(\omega)\,.$$

Budući da je $V_{ul}(\omega)$ vrlo mala veličina, uvjet za oscilacije može se napisati kao

$$pA(\omega)H(\omega) = 1,$$

što je na izvjesnoj frekvenciji ω_0 jednako Nyquistovu kriteriju. Pretpostavimo sad da $V_{iz}(\omega)$ ne ovisi o frekvenciji i da frekvencijski selektivna prijenosna karakteristika $H(\omega)$ upućuje na rezonanciju na frekvenciji ω_0. Na slici 8.136b) grafički je prikazana frekvencijska ovisnost funkcije $1-pA(\omega)H(\omega)$. Njezina inverzna funkcija (smanjena 10 puta) pokazuje oštar vrh koji teži u beskonačnost na frekvenciji ω_0, jer frekvencijska selektivnost sklopa poprima enormne razmjere. Iz toga se može lako zaključiti da i rezonantna mreža s osrednjim faktorom dobrote može proizvesti signal visoke spektralne čistoće. Pri tomu valja imati na umu da je šum filtriran unutar vrlo uskog pojasa frekvencija, zbog enormno povećane selektivnosti.

Stoga se može ustvrditi da je svaki *oscilator uskopojasno pojačalo šuma*. Primjenom teorije nasumičnih signala doista se može pokazati da uskopojasno filtriran šum ima približno sinusni valni oblik i da stupanj koherencije raste suženjem frekvencijskog pojasa. S druge pak strane, iz toga se može zaključiti da *niti jedan oscilator ne može biti posve bešuman*. Taj se model može uspješno primijeniti i na oscilator s negativnim otporom u koji je ugrađen izvor šuma (slika 8.123 u odjeljku 8.9.1).



Slika 8.136. Tranzistorski oscilator kao pojačalo s paralelnom povratnom vezom: **a)** nadomjesna shema; **b)** odziv prijenosne funkcije u petlji paralelne povratne veze

Uvjeti osciliranja višeprolazne aktivne komponene

Uvjeti osciliranja koje smo izveli u odjeljku 8.9.1. mogu se primijeniti na jednoprolazne aktivne komponente koje se nalaze u interakciji s jednoprolaznom pasivnom mrežom. Ako se međutim želi ostvariti oscilator s aktivnim tropolom (bipolarni ili unipolarni tranzistor), onda uvjete osciliranja valja poopćiti [27]. Stoga ćemo u ovom odjeljku naći uvjete osciliranja općenite aktivne N-prolazne mreže spojene s općenitom pasivnom N-prolaznom mrežom, kao što je prikazano na slici 8.137.

Ako su mreže na slici 8.137 opisane matricama impedancije, veza između napona i struja na njihovim zajedničkim prolazima može se prikazati kao:

$$[V_A]=[Z_A][I_A], \qquad [V_P]=[Z_P][I_P], \tag{8–311}$$

gdje je $[I_P]=-[I_A]$ vektor pobude, a $[V_P]=-[V_A]$ vektor odziva. Kombiniranjem tih jednadžba dobiva se

$$\big([Z_A]+[Z_P]\big)[I_A]=0\,. \tag{8–312}$$

Ako pretpostavimo da već postoje oscilacije, onda je $[I_A]\neq 0$, pa je matrica $[Z_A]+[Z_P]$ singularna iz čega slijedi uvjet osciliranja N-prolazne mreže, tj.

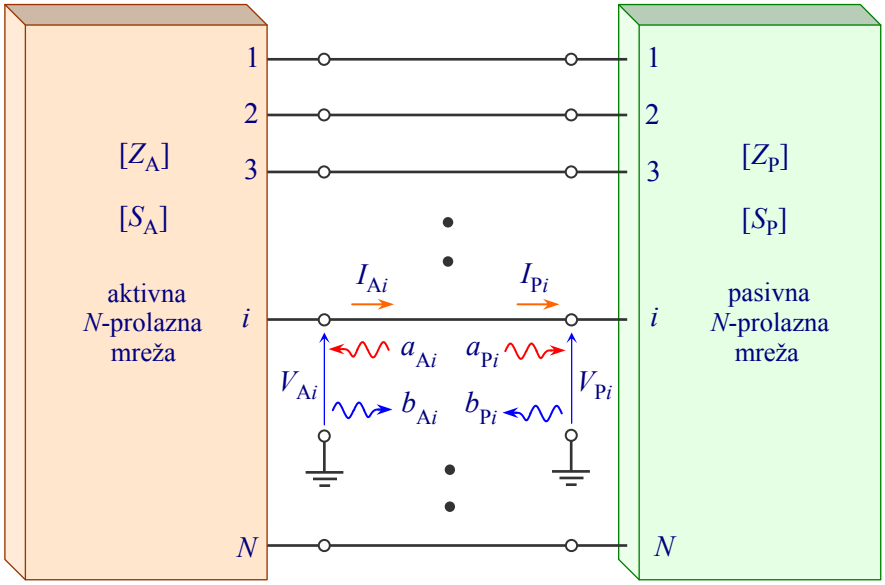
$$\big|[Z_A]+[Z_P]\big|=0\,. \tag{8–313}$$

Jednadžbe (8–312) i (8–313) jednake su strukture kao jednadžba (8–273) za $\varepsilon=0$, odnosno jednadžba (8–275) iz uvjeta osciliranja koji je izveden u odjeljku 8.9.1. za oscilator s jednoprolaznom aktivnom komponentom (aktivni dvopol). Sličan uvjet osciliranja može se izvesti za mreže opisane matricama admitancija. Rezultat je

$$\big|[Y_A]+[Y_P]\big|=0\,. \tag{8–314}$$

U mikrovalnome području aktivne su komponente (tranzistori) češće definirane raspršnim parametrima. Ako su aktivna komponenta i pasivna mreža na slici 8.137 opisane raspršnim parametrima, onda se mogu napisati ove jednadžbe:

$$[b_A]=[S_A][a_A], \qquad [b_P]=[S_P][a_P]\,. \tag{8–315}$$



Slika 8.137. Sklop oscilatora sastoji se od N-prolazne aktivne komponente i N-prolazne pasivne mreže. Aktivna i pasivna mreža opisane su impedancijskim, odnosno raspršnim parametrima

Na sučelju između mreža ulazni (upadni) i izlazni (reflektirani) valovi snage moraju zadovoljiti uvjete $[b_P]=[a_A]$, odnosno $[b_A]=[a_P]$. Uvrštenjem tih uvjeta u jednadžbe (8–315) mogu se eliminirati valovi snage $[b_P]$, $[b_A]$ i $[a_A]$. Kao rezultat dobiva se

$$[a_P]=[S_A][S_P][a_P]=0\,. \tag{8–316}$$

Ta se jednadžba može napisati i kao

$$\left([S_A][S_P]-[U]\right)[a_P]=0\,. \tag{8–317}$$

gdje je $[U]$ jedinična matrica.

Budući da je $[a_P]\neq 0$, svojstvena jednadžba daje opći uvjet osciliranja

$$\left|[S_A][S_P]-[U]\right|=0\,. \tag{8–318}$$

Uvjet osciliranja dvoprolaznog sklopa

Oscilator s tranzistorom u zajedničkom spoju s jednom od svojih triju elektroda tipičan je oscilator s dvoprolaznom mrežom. Kao primjer, može se odabrati oscilator s MESFET-om u spoju sa zajedničkim gatom, kao što je prikazano na slici 8.138. Neka su raspršne matrice tranzistora i pasivne mreže dane kao:

$$[S_A]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \tag{8–319a}$$

$$[S_P]=\begin{bmatrix} \Gamma_G & 0 \\ 0 & \Gamma_T \end{bmatrix}, \tag{8–319b}$$

gdje su Γ_G i Γ_T koeficijenti refleksije, tj. raspršni parametri pasivne mreže koji kod pojačala odgovaraju koeficijentima refleksije generatora, odnosno tereta.

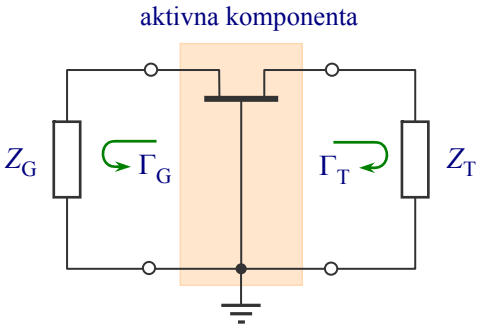
Primjenom izraza (8–319), svojstvena jednadžba (8–318) svodi se na

$$\begin{vmatrix} S_{11}\Gamma_G-1 & S_{12}\Gamma_T \\ S_{21}\Gamma_G & S_{22}\Gamma_T-1 \end{vmatrix}=0\,. \tag{8–320}$$

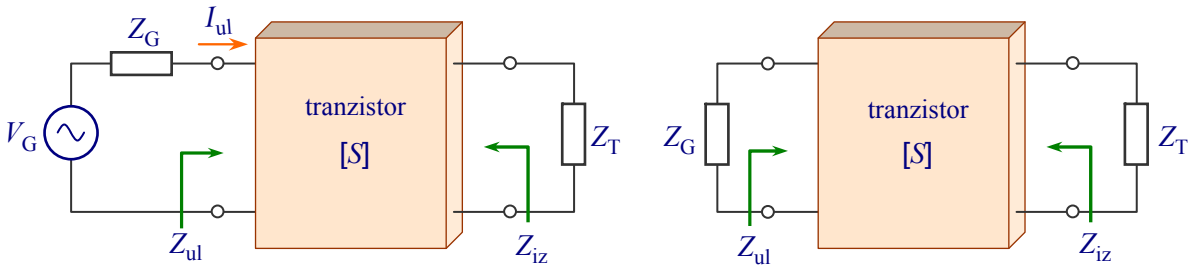
Izjednačavanjem te determinante s nulom, tj. $(S_{11}\Gamma_G-1)(S_{22}\Gamma_T-1)-S_{12}\Gamma_T\,S_{22}\Gamma_G=0$, i dijeljenjem sa $S_{22}\Gamma_T-1$ i Γ_G, odnosno sa $S_{11}\Gamma_G-1$ i Γ_T, dobivaju se ova dva uvjeta osciliranja:

$$S_{11}+\frac{S_{12}S_{21}\Gamma_T}{1-S_{22}\Gamma_T}=\Gamma_{ul}=\frac{1}{\Gamma_G}\,, \tag{8–321a}$$

$$S_{22}+\frac{S_{12}S_{21}\Gamma_G}{1-S_{11}\Gamma_G}=\Gamma_{iz}=\frac{1}{\Gamma_T}\,, \tag{8–321b}$$



Slika 8.138. Sklop oscilatora s dvoprolaznom aktivnom komponentom (MESFET je u spoju sa zajedničkim gatom)



Slika 8.139. a) Pojačalo kao generički sklop tranzistorskog oscilatora; **b)** tranzistorski oscilator

gdje su koeficijenti refleksije aktivne mreže Γ_{ul} i Γ_{iz} zapravo koeficijenti refleksije na ulazu, odnosno izlazu tranzistora. Svaki od uvjeta (8–321) identičan je uvjetu osciliranja za oscilator s aktivnim dvopolom (odjeljak 8.9.1). Drugim riječima, ako dvoprolazni sklop oscilira na jednom prolazu, onda istodobno mora oscilirati i na drugom prolazu. Pri proračunu ove vrste oscilatora, vrijednost Γ_G valja tako odabrati da se omoguće oscilacije na prvome prolazu, tj. $\Gamma_G > 1$, a vrijednost Γ_T odabire se tako da se na drugome prolazu dobiva potrebna izlazna snaga.

Kako dolazi do samopobude oscilacija možemo objasniti s pomoću pojačala na slici 8.139a). Za početak zamislimo da se u ulaznom krugu pojačala nalazi naponski izvor V_G u serijskom spoju s impedancijama Z_G i Z_{ul}. Tad je struja u ulaznom strujnom krugu

$$I_{ul} = \frac{V_G}{Z_G + Z_{ul}}.$$

Ako se vrijednost napona V_G postupno smanjuje na nulu, ali tako da istodobno i impedancija $Z_G + Z_{ul}$ teži nuli, onda je moguće održavati stalnu vrijednost struje I_{ul} uz konačnu razinu izlazne snage, kao što je prikazano na slici 8.139b). Za samopobudu oscilacija u ulaznome krugu uz $V_G = 0$, mora biti zadovoljen isti onaj uvjet koji smo našli za oscilator s aktivnim dvopolom u odjeljku 8.9.1. Bez obzira na to što u oscilatoru ne postoji vanjski generator, impedanciju jednoprolazne mreže prikazane na slici 8.139b) slijeva zvat ćemo impedancijom »generatora«. Dakle, impedancija generatora pasivne mreže mora biti u ravnoteži s negativom elektroničke impedancije na »ulazu«, tj.

$$Z_G = R_G + jX_G = -R_{ul} - jX_{ul}. \qquad (8–322)$$

Budući da je ova jednadžba kompleksna, izlaze ova dva nezavisna uvjeta:

$$R_{ul} = -R_G, \qquad (8–323a)$$

$$X_{ul} = -X_G. \qquad (8–323b)$$

Drugim riječima, tranzistor na ulazu mora pokazivati negativni otpor u skladu s uvjetom (8–323a). Pri tomu ulazni krug mora istodobno biti u rezonanciji u skladu s uvjetom (8–323b) iz kojeg izlazi frekvencija titranja ω_o jer su reaktancije X_{ul} i X_G funkcije frekvencije. Ti su uvjeti istovjetni amplitudnom i faznom uvjetu (8–276), odnosno (8–277) iz odjeljka 8.9.1.

Primjenom uvjeta (8–322) i sljedećih izraza za koeficijente refleksije:

$$\Gamma_{ul} = \frac{Z_{ul} - Z_0}{Z_{ul} + Z_0} \quad \text{i} \quad \Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0},$$

izlazi

$$\Gamma_{ul} = \frac{Z_G + Z_0}{Z_G - Z_0} = \frac{1}{\Gamma_G}. \qquad (8–324a)$$

Izraz (8–324a) pokazuje da je koeficijent refleksije na ulazu pojačala jednak recipročnoj vrijednosti koeficijenta refleksije impedancije generatora Γ_G. Drugim riječima, da bi sklop prikazan na slici 8.139b) oscilirao, na »ulaznim« priključcima mora biti zadovoljen uvjet

$$\Gamma_{ul}\Gamma_G = 1, \tag{8–324b}$$

što je istovjetno uvjetu (8–321a). Slično, iz razmatranja izlaznog kruga izlazi uvjet (8–321b).

Uvjet osciliranja troprolaznog sklop

Ako je aktivna mreža bezuvjetno stabilna, kao što je to nerijetko slučaj s tranzistorima u spoju sa zajedničkim slijevom (emiterom), onda se uvjeti (8–321) ne mogu zadovoljiti jer se ni na jednom prolazu ne može pojaviti negativni otpor. U tom se slučaju aktivnoj mreži, tj. tranzistoru najprije mora dodati serijska ili paralelna povratna veza, da bi se tranzistor destabilizirao i time potaknulo spontano titranje. Stoga prije pristupanja proračunu oscilatora valja ispitati stabilnost tranzistora primjenom Kurokawina uvjeta (8–213)

$$K = \frac{1-|S_{11}|^2-|S_{22}|^2+|\Delta|^2}{2|S_{12}S_{21}|}, \tag{8–325a}$$

gdje je

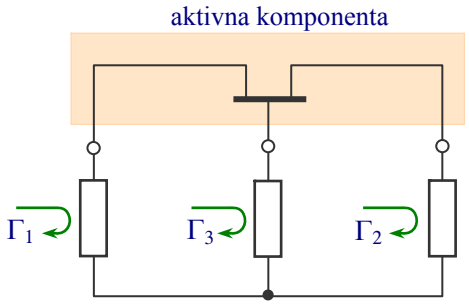
$$|\Delta| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| \tag{8–325b}$$

apsolutna vrijednost determinante raspršne matrice. Ako je $K < 1$ ili $|\Delta| > 1$, onda je aktivna komponenta potencijalno nestabilna. Drugim riječima, aktivna će komponenta oscilirati ako joj se na prolaze priključe odgovarajuće pasivne mreže u skladu s uvjetima (8–321). Tranzistori su najstabilniji u spoju sa zajedničkim emiterom. Stoga se za primjene u oscilatorima nerijetko odabire spoj sa zajedničkim gatom (bazom) ili spoj sa zajedničkim dotokom (kolektorom) koji gotovo uvijek daju potencijalno nestabilnu mrežu.

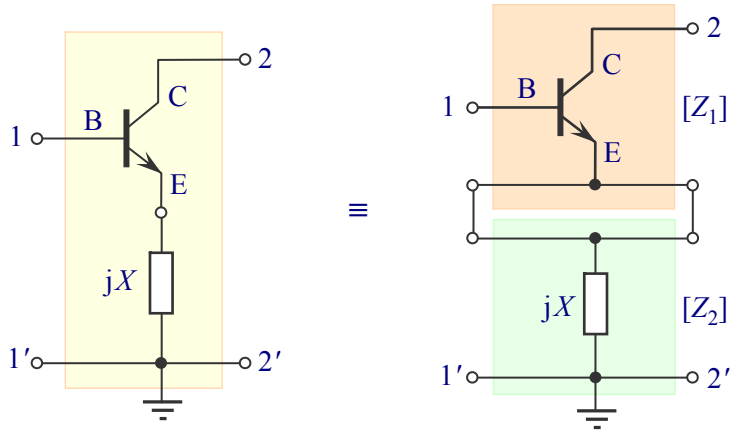
Ako je $K > 1$ i $|\Delta| < 1$, onda je dvoprolazna komponenta bezuvjetno stabilna i valja je najprije destabilizirati primjenom povratne veze, bilo serijske bilo paralelne. Pri destabilizaciji tranzistora serijskom povratnom vezom valja odabrati prikaz tranzistora kao troprolazne mreže (odjeljak 8.4.5). Primjenom izraza (8–136) parametri u spoju s jednom zajedničkom elektrodom (dvoprolazni sklop) mogu se pretvoriti u parametre troprolaznog sklopa u kojem se tranzistor nalazi u »plivajućem« spoju. Sad se bilo koja od triju elektroda može opteretiti odgovarajućom reaktivnom impedancijom pa se tranzistor može jednostavno destabilizirati. Ugradnjom poznate impedancije u jedan od prolaza, troprolazni sklop tranzistora može se svesti na pogodnu dvoprolaznu mrežu primjenom izraza (5–214) iz odjeljka 5.8.2. Primjerice, ako se u krug gata MESFET-a umetne teret koeficijenta refleksije Γ_3, kao što je prikazano na slici 8.140, uvjet osciliranja (8–318) svodi se na

$$\begin{vmatrix} \widetilde{S}_{11}\Gamma_1 - 1 & \widetilde{S}_{12}\Gamma_2 & \widetilde{S}_{13}\Gamma_3 \\ \widetilde{S}_{21}\Gamma_1 & \widetilde{S}_{22}\Gamma_2 - 1 & \widetilde{S}_{23}\Gamma_3 \\ \widetilde{S}_{31}\Gamma_1 & \widetilde{S}_{32}\Gamma_2 & \widetilde{S}_{33}\Gamma_3 - 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8–326}$$

Jednadžba (8–326) opći je oblik uvjeta osciliranja troprolazne aktivne mreže priključene na odgovarajuću troprolaznu pasivnu mrežu. Pritom valja naglasiti da raspršni parametri $\widetilde{S}_{ij}$ u determinanti izraza (8–136) pripadaju troprolaznoj aktivnoj mreži. Označeni su tildom da bi se razlikovali od izvornih raspršnih parametara (8–319a), za tranzistor prikazan dvoprolaznim sklopom u spoju sa zajedničkom elektrodom. Isti se uvjet može dobiti klasičnim pristupom koji daje rezultat $\Gamma_{ul1}\Gamma_1 = \Gamma_{ul2}\Gamma_2 = \Gamma_{ul3}\Gamma_3 = 1$, gdje su Γ_{uli}, za $i = 1,2,3$ koeficijenti refleksije na prolazima troprolazne aktivne mreže, tj. za tranzistor u plivajućem spoju.



Slika 8.140. Oscilator s troprolaznom aktivnom mrežom



Slika 8.141. Destabilizacija tranzistora kapacitivnom reaktancijom u seriji s emiterom

Trošilo, tj. disipativna komponenta, obično je ugrađeno samo u jednu od impedancija pasivne mreže na slici 8.140. No disipativne se komponente mogu ugraditi u jednu ili u obje preostale impedancije s ciljem stabilizacije amplitude titraja ili potiskivanja mogućih parazitskih parametarskih oscilacija.

Mreža na slici 8.140 idealna je za destabilizaciju bezuvjetno stabilnog tranzistora. Ako se, primjerice, u strujni krug gata postavi odgovarajuća reaktancija, onda će se na dotoku ili slijevu pojaviti negativni otpor. Time je ostvaren nestabilan dvoprolazni sklop jer je u njega ugrađena serijska pozitivna povratna veza preko reaktancije u strujnome krugu gata. Na jednak se način može destabilizirati bipolarni tranzistor.

Jedno od najjednostavnijih rješenja destabilizacije prikazano je na slici 8.141, gdje je u seriju sa slijevom (emiterom) prema masi spojen kapacitet, $jX=-j/(\omega C)$. Osim kapacitetom, potrebna se kapacitivna reaktancija može ostvariti otvorenim stabom kraćim od četvrt valne duljine. Umjesto uporabe troprolaznih *S*-parametara tranzistora u plivajućem spoju, taj se problem može riješiti i primjenom matrica impedancija, tako da se *S*-matrice aktivne i pasivne mreže pretvore u odgovarajuće *Z*-matrice koje se zatim zbroje, što rezultira skupnom *Z*-matricom koju na kraju treba pretvoriti u *S*-matricu. Više o pretvorbi *S*-parametra u *Z*- i *Y*-parametre i obratno može se naći u odjeljku 5.4.2.

Primjer 8.7. Destabilizacija tranzistora

Destabilizirati bezuvjetno stabilan tranzistor AT-41485 na frekvenciji 4,5 GHz. Raspršni parametri tranzistora u spoju sa zajedničkim emiterom izmjereni su u mjernom sustavu karakteristične impedancije 50 Ω na zadanoj frekvenciji 4,5 GHz i radnoj točki I_C=25 mA, V_{CE}=8 V:

$$[S]=\begin{bmatrix} 0{,}64\angle 125° & 0{,}125\angle 63° \\ 1{,}74\angle 23° & 0{,}4\angle -71° \end{bmatrix}.$$

Destabilizaciju valja ostvariti serijskom povratnom vezom s jednom reaktivnom komponentom. Naći vrijednosti reaktancija kojima se postižu maksimalni moduli koeficijenata refleksije na ulazu i izlazu nove mreže, tj. destabiliziranog tranzistora. Grafički prikazati raspršne parametre S_{11d} i S_{22d} destabiliziranog tranzistora.

Rješenje:

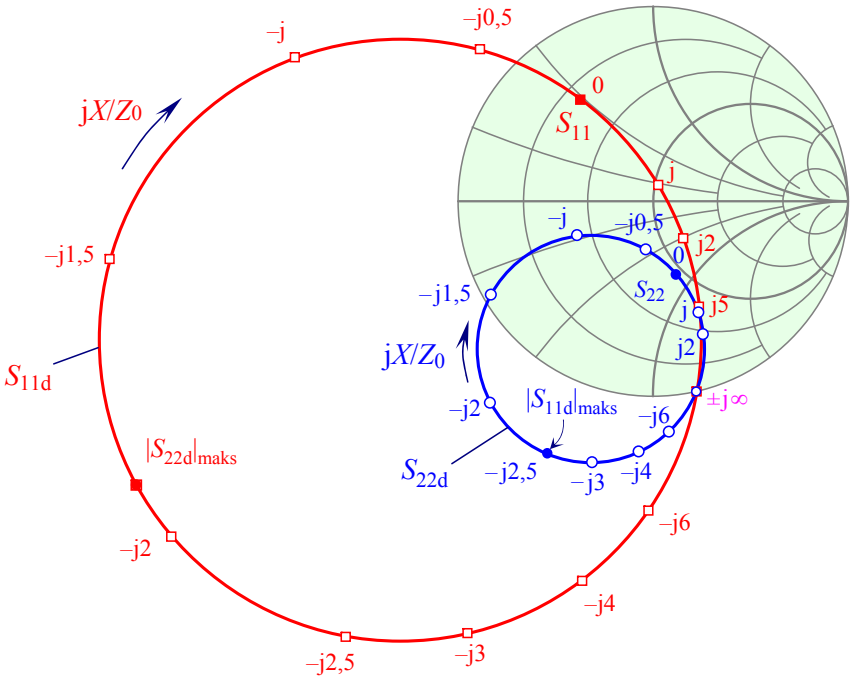
Budući da je faktor stabilnosti $K = 1{,}032$ veći od jedan, a $|\Delta| = 0{,}136$ manje od jedan na frekvenciji 4,5 GHz, tranzistor je bezuvjetno stabilan pa ga treba destabilizirati. Primjenom izraza (8–326) parametri S_{ij}, za $i, j = 1, 2$ tranzistora u spoju sa zajedničkim emiterom mogu se zatim pretvoriti u parametre tranzistora u plivajućem spoju ($\tilde{S}_{ij}$, za $i, j = 1, 2, 3$). Rezultat je

$$\left[\tilde{S}\right] = \begin{bmatrix} 0{,}565\angle -169{,}9° & 0{,}540\angle 22{,}6° & 1{,}062\angle -5{,}9° \\ 1{,}725\angle 34{,}7° & 0{,}593\angle -89{,}1° & 0{,}577\angle -137{,}6° \\ 0{,}894\angle -81° & 0{,}624\angle 38{,}1° & 0{,}621\angle 53{,}4° \end{bmatrix}.$$

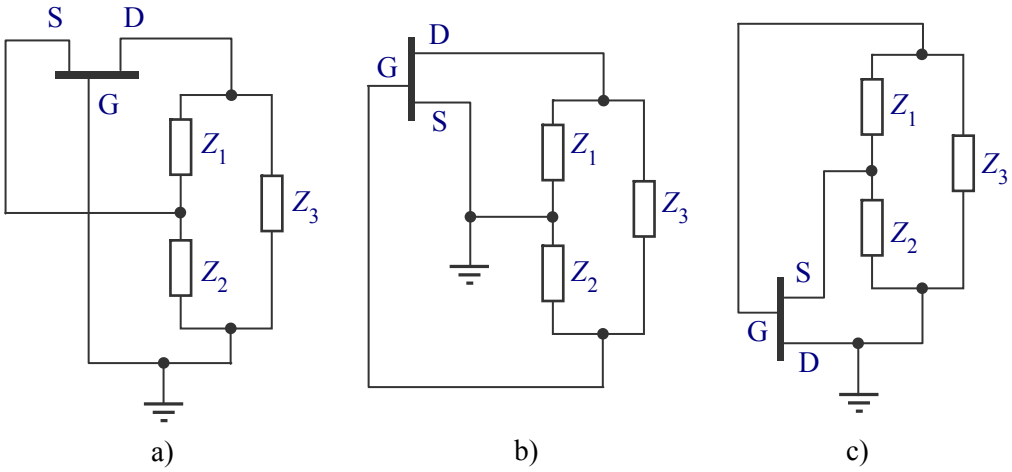
Potom u prolaz 3 plivajućeg spoja valja postaviti reaktivnu impedanciju $\mathrm{j}X = \mathrm{j}X_3$ pripadajućeg koeficijenta refleksije Γ_3. Pri tomu se iz izraza (5–214) izravno dobivaju S-parametri novog dvoprolaznog sklopa (destabiliziranog tranzistora) poput onoga na slici 8.141. Kako reaktancija u zajedničkoj točki dvoprolazne mreže na slici 8.141 utječe na raspršne parametre tranzistora AT-41485 na frekvenciji 4,5 GHz može se najbolje vidjeti iz promjena vrijednosti reaktancije za destabilizaciju tranzistora i bilježenjem odgovarajućih promjena raspršnih parametara S_{11d} i S_{22d}, kao što je prikazano na slici 8.142.

Geometrijska mjesta (lokusi) novih raspršnih parametara S_{11d} i S_{22d} oblika su kružnice. Valja uočiti da vrijednosti modula tih S-parametara porastu primjenom kapacitivne reaktancije ($-\mathrm{j}X/Z_0$), pa lokusi raspršnih parametara većim dijelom izlaze izvan Smithova dijagrama u područje negativnog otpora.

Za vrijednosti X/Z_0 između $-\infty$ i $-0{,}4$ sklop upućuje na negativni otpor u ulaznome krugu. Maksimalni koeficijenti refleksije u ulaznome i izlaznome krugu dobivaju se za $X/Z_0 = -1{,}9$; odnosno za $X/Z_0 = -2{,}5$.



Slika 8.142. Lokusi raspršnih parametara (S_{11d} i S_{22d}) destabiliziranog tranzistora AT-41485 na frekvenciji 4,5 GHz u funkciji normirane reaktancije u krugu emitera



Slika 8.143. Tranzistorski oscilator su spoju sa zajedničkim: **a)** gatom, **b)** slijevom i **c)** dotokom

U primjeru 8.7. može se vidjeti da induktivna reaktancija ima suprotan učinak. Naime, manje vrijednosti pozitivne reaktancije pomiču *S*-parametre S_{11d} i S_{22d} prema središtu Smithova dijagrama što može znatno olakšati prilagodbu u izvedbama pojačala, a nerijetko ima i pozitivan učinak na stabilnost pojačala. Pritom treba pratiti i vrijednosti preostalih parametara S_{12d} i S_{21d} kako bi se vidio učinak induktivne reaktancije na pojačanje pojačala.

Na slici 8.143 shematski su prikazane tri osnovne konfiguracije oscilatora s MESFET-om ili HEMT-om. Iste konfiguracije vrijede i za bipolarne tranzistore. U mikrovalnom području, impedancije Z_1, Z_2 i Z_3 mogu se ostvariti primjenom raspodijeljenih ili koncentriranih parametara. Dvije od tih impedancija mogu biti posve reaktivne, a u trećoj se nalazi otpor trošila. Valja primijetiti da su sve tri konfiguracije na slici 8.143 u osnovi istovjetne konfiguraciji koja je prikazana na slici 8.140 jer se zvjezdasti spoj pasivnih impedancija na slici 8.140 uvijek može pretvoriti u trokutasti spoj impedancija na slici 8.143. Ako se za impedancije Z_1, Z_2 i Z_3 uzmu koncentrirane komponente, onda se dobivaju poznati tipovi oscilatora poput Colpittsova, Clappova ili Hartleyjeva oscilatora [29].

U uvodnom smo dijelu već vidjeli da se oscilator može uvijek promatrati kao pojačalo s povratnom vezom, gdje se na ulaz dovodi dio izlaznog signala. No uvjetno stabilnim tranzistorima obično nije potrebna povratna veza jer ona već postoji unutar samog tranzistora što se može vidjeti iz parametra S_{12}.

U obama su primjerima prijenosni parametri pasivne mreže bili jednaki nuli. No isto se načelo može proširiti i na složenije pasivne mreže kod kojih postoje izravne veze između prolaza preko pogodnih impedancija.

Početak osciliranja i maksimalna izlazna snaga

Kao što je pokazano u odjeljku 8.9.1. na primjeru oscilatora s negativnim otporom, da bi oscilacije mogle spontano započeti, u času ukopčavanja treba odabrati $R_G < |R_{ul}|$, gdje se veličina R_{ul} izračunava primjenom raspršnih parametara malog signala. To znači da se, u slučaju dvoprolazne aktivne mreže, jednakosti (8–321) moraju preinačiti u nejednakosti oblika:

$$\left|\Gamma_{ul}\Gamma_G\right| > 1, \tag{8–327a}$$

$$\left|\Gamma_{iz}\Gamma_G\right| > 1. \tag{8–327b}$$

Drugim riječima, u času ukopčavanja modul koeficijenta refleksije na svim prolazima aktivne mreže mora biti veći od modula koeficijenta refleksije odgovarajućih impedancija

pasivne mreže. Ako su pritom još zadovoljeni isti dinamički uvjeti (8–294) kao kod oscilatora s aktivnim dvopolom, onda će oscilacije spontano započeti i rasti tako dugo dok pojačanje snage ne dođe u zasićenje zbog nelinearnosti u tranzistoru. Oscilator proizvodi maksimalnu snagu uz najveću moguću vrijednost negativnog otpora na izlazu aktivne mreže. Stacionarne oscilacije upućuju na režim rada s velikim signalom. Drugim riječima, ako amplitude signala na priključcima tranzistora postanu sumjerljive vrijednostima istosmjernih veličina, obilježja tranzistora postaju izrazito nelinearna pa će se vrijednosti raspršnih parametara promijeniti u odnosu na one za mali signal. Pritom, kod većine tranzistora najveće promjene pretrpe moduli raspršnih parametara S_{21} i S_{22}. Fizikalna intuicija upućuje na činjenicu da modul parametra S_{21}, tj. pojačanje, mora opadati porastom RF snage koju tranzistor može predati teretu, zbog konačne izdašnosti svakog tranzistora. To proizlazi iz činjenice da su naponi i struje napajanja tranzistora ograničene, zbog mogućeg proboja i prekomjerne disipacije DC snage što rezultira porastom temperature te u konačnici može razoriti kristalnu strukturu poluvodiča. Osim toga, nelinearnosti u tranzistoru stvaraju nove frekvencijske komponente (više harmonike frekvencije osnovnog signala ili intermodulacijske produkte pri pobudi s više ulaznih signala različite frekvencije). Prisutnost viših harmonika na izlazu oscilatora općenito je nepoželjno, osim ako oscilator nije projektiran kao množilo frekvencije ili miješalo.

Od svakog se oscilatora traži što veća izlazna snaga uz prihvatljivu razinu učinkovitosti pretvorbe istosmjerne snage u mikrovalnu, visok stupanj potiskivanja viših harmonika i što veća stabilnost frekvencije osciliranja. Na stabilnost frekvencije između ostalog utječu promjene opteretne impedancije, radne temperature i napona napajanja. Da bi se svi ti ciljevi mogli ostvariti valja se držati sljedećih smjernica.

1. Faktor dobrote opterećenog izlaznog kruga oscilatora mora biti veći od deset kako bi se dovoljno potisnuli viši harmonici u signalu oscilatora.
2. Za maksimalno potiskivanje viših harmonika tranzistor mora raditi u klasi A.
3. Mreža na strani generatora mora biti u rezonanciji na frekvenciji osciliranja i mora imati razmjerno veliku strminu reaktancije ($\mathrm{d}X_\mathrm{G}/\mathrm{d}\omega$) odnosno visok faktor dobrote. Tad se sve promjene reaktancije mogu lako kompenzirati malim promjenama frekvencije, što će omogućiti vraćanje reaktancije X_G na potrebnu vrijednost $-X_\mathrm{ul}$. Time raste stabilnost frekvencije osciliranja i smanjuje se »povlačenje« frekvencije pri promjeni impedancije tereta. Temperaturna stabilnost frekvencije može se poboljšati tako da se u ulazni krug ili u krug povratne veze ugradi temperaturno stabilan rezonator visokog faktora dobrote.
4. Veća učinkovitost i veća izlazna snaga mogu se postići radom tranzistora u klasi B ili C. No pri radu u tim klasama oscilacije ne nastaju spontano. Stoga valja uporabiti sklop s automatskim prednaponom, koji omogućuje da u trenutku ukopčavanja napona napajanja oscilator radi u klasi A, čime dolazi do potrebne samopobude, tj. potrebnog porasta amplitude oscilacija s vremenom. No porastom amplitude, ubrzo se stvore okolnosti u kojima tranzistor postupno prelazi u režim rada klase B ili C.

U klasi A struja kolektora (ili dotoka) teče tijekom cijele periode RF signala pa dolazi do velike disipacije snage u tranzistoru. U sklopu oscilatora klase B struja teče samo tijekom jedne poluperiode RF signala, dok u klasi C struja teče samo u dijelu poluperiode RF signala. Na taj se način disipacija snage u tranzistoru može smanjiti na najmanju moguću mjeru pa je za rad u klasi C učinkovitost pretvorbe istosmjerne snage u izmjeničnu veća. No zbog iznimno velikog sadržaja viših harmonika u klasi C, prilagodnu mrežu oscilatora valja tako konstruirati da se ponaša kao niskopropusni filtar. Učinkovitost mikrovalnih oscilatora (i pojačala) nerijetko opisuje pojam *učinkovitost dodane snage*, definiran kao

$$\eta_\mathrm{PA} = \frac{\text{izlazna RF snaga} - \text{ulazna RF snaga}}{\text{ulazna DC snaga}}. \tag{8–328}$$

Ovdje se pod ulaznom istosmjernom (DC) snagom podrazumijeva snaga koju oscilatoru (ili pojačalu) daje istosmjerni izvor napajanja. Učinkovitost se može dodatno povećati ako se omogući upravljanje komponentama viših harmonika.

Postupak proračuna oscilatora s tranzistorom može se podijeliti u sljedeće tri faze.

1. Najprije treba odabrati uvjetno stabilan (potencijalno nestabilan) tranzistor na frekvenciji osciliranja ω_o. (U slučaju da je tranzistor bezuvjetno stabilan, valja ga destabilizirati primjenom serijske ili paralelne povratne veze.)
2. Rezonantnu mrežu na strani generatora valja tako proračunati da je $|\Gamma_{iz}| > 1$. Ako je potrebno, $|\Gamma_{iz}|$ se može povećati uporabom serijske ili paralelne povratne veze.
3. Nakraju, valja proračunati izlaznu prilagodnu mrežu tako da su zadovoljeni uvjeti:

$$R_T(\omega_o) = -\frac{R_{iz}(0,\omega_o)}{3}, \tag{8–329a}$$

$$X_T(\omega_o) = -X_{iz}(0,\omega_o). \tag{8–329b}$$

Argument 0 pokazuje da je amplituda RF struje jednaka nuli, tj. da je riječ o parametrima maloga signala. Uvjet (8–329a) proizlazi iz aproksimacije koja polazi od pretpostavke da negativni otpor u tranzistorskom oscilatoru opada linearno s amplitudom RF struje. Izraz (8–279) pokazuje da oscilator generira maksimalnu izlaznu snagu u radnoj točki u kojoj se vrijednost negativnog otpora smanji na jednu trećinu vrijednosti koju ima u režimu rada s malim signalom. U praksi se pokazalo da ta aproksimacija daje dobre rezultate i za bipolarne i za unipolarne tranzistore.

U opisanom postupku proračuna i dalje je nepoznata vrijednost maksimalne izlazne snage koja se može ostvariti stvarnim tranzistorom jer je analiza provedena raspršnim parametarima maloga signala. Maksimalna izlazna snaga oscilatora može se odrediti primjenom raspršnih parametara velikoga signala, ali te je parametre teško definirati, zbog nelinearnih učinaka. Stoga je predložen alternativni postupak koji se zasniva na mjerenju razine zasićene izlazne snage pojačala izvedenog s tranzistorom koji će se upotrijebiti u sklopu oscilatora.

Pri projektiranju oscilatora obično se želi postići što veća razlika između izlazne i ulazne snage $(P_{iz} - P_{ul})_{maks}$, gdje se na oscilator gleda kao na pojačalo s povratnom vezom. Veličina $(P_{iz} - P_{ul})_{maks}$ jednaka je stvarnoj snazi koju oscilator predaje teretu. Izlazna snaga oscilatora s MESFET-om može se izračunati primjenom formule

$$P_{iz} = P_{zas}\left(1 - e^{-\frac{GP_{ul}}{P_{zas}}}\right), \tag{8–330}$$

gdje je P_{zas} zasićena izlazna snaga pojačala, a G maksimalno stabilno pojačanje malog signala usklađenog pojačala s tranzistorom u spoju sa zajedničkim slijevom [30]. Cilj je naći maksimum veličine $P_{iz} - P_{ul}$, što se može napisati kao $d(P_{iz} - P_{ul}) = 0$, tj. $\partial P_{iz}/\partial P_{ul} = 1$.

Deriviranje izraza (8–330) po ulaznoj snazi i izjednačenje rezultata s jedinicom daje

$$G e^{-\frac{GP_{ul}}{P_{zas}}} = 1,$$

iz čega izlazi

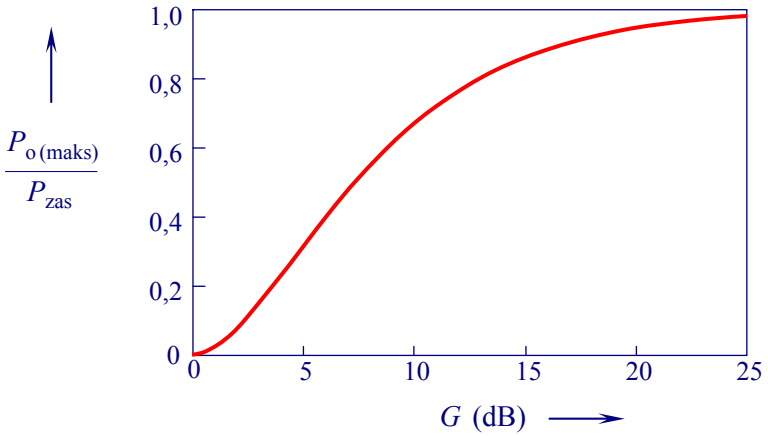
$$\frac{P_{ul}}{P_{zas}} = \frac{\ln G}{G}. \tag{8–331}$$

Pri maksimalnoj vrijednosti $(P_{iz} - P_{ul})$, izlazna je snaga pojačala $P_{iz} = P_{zas}(1 - 1/G)$ pa se primjenom izraza (8–331) maksimalna izlazna snaga oscilatora može izraziti kao

$$P_{o(maks)} = (P_{iz} - P_{ul})_{maks} = P_{zas}\left(1 - \frac{1}{G} - \frac{\ln G}{G}\right). \qquad (8–332)$$

Dakle, maksimalna izlazna snaga oscilatora može se procijeniti na osnovi izmjerene zasićene izlazne snage pojačala u spoju zajedničkog slijeva i prijenosnog pojačanja malog signala. Na slici 8.144 grafički je prikazan izraz (8–332) u ovisnosti o pojačanju, gdje se vidi da je za veliku izlaznu snagu oscilatora potrebno ostvariti što veće pojačanje snage tranzistora. Može se uočiti da uz maksimalno stabilno pojačanje tranzistora od 10 dB, maksimalna izlazna snaga oscilatora doseže tek 67% vrijednosti zasićene snage, tj. manja za 1,74 dB od razine zasićene snage izražene u dBm. Uz maksimalno stabilno pojačanje od 20 dB maksimalna izlazna snaga oscilatora doseže 94,4% vrijednosti zasićene snage, što je svega 0,25 dB ispod razine zasićene snage. Stoga, pojačanje snage maloga signala ima značajnu ulogu u ostvarenju maksimalne izlazne snage i maksimalne učinkovitosti mikrovalnog tranzistorskog oscilatora, tj. tranzistor s većim maksimalnim stabilnim pojačanjem općenito je učinkovitiji u pretvorbi istosmjerne snage u mikrovalnu snagu.

Obilježja tranzistora u režimu rada s velikim signalom moguće je također odrediti primjenom postupaka koji su opisani u odjeljku 8.8.8. Znatno više o tim postupcima može se naći u literaturi [37]. Za oblikovanje optimalnog valnog oblika izlaznog napona oscilatora, u analizi izrazito nelinearnog pojačala snage treba uzeti u obzir opteretnu impedanciju na frekvencijama viših harmonika. Pasivna mreža mora istodobno omogućiti ispravno opterećenje i povratnu vezu za sve odabrane harmonike. Razmatranje rada na pojedinim harmonicima može se provesti na jednak način kao za osnovni harmonik jer je mreža povratne veze posve linearna. Ustvari, u praksi je dovoljno razmotriti samo drugi i treći harmonik jer izlazna snaga, a jednako tako napon i struja viših harmonika obično brzo opadaju s frekvencijom. Takav pristup omogućuje analizu rada tranzistora u klasama E i F velike učinkovitosti.



Slika 8.144. Maksimalna izlazna snaga oscilatora u ovisnosti o prijenosnom pojačanju maloga signala

Proračun tranzistorskog oscilatora

Na slici 8.145 prikazana je pojednostavljena nadomjesna shema MESFET-a s kapacitetom C spojenim u seriju sa slijevom. Izvorna nadomjesna shema MESFET-a prikazana je na slici 8.53. U nadomjesnoj shemi na slici 8.145 zadržani su samo kapacitet C_{gs} i zavisni strujni izvor $g_m V_C$, gdje je V_C napon između gata i slijeva. Postavljanjem induktivitet L između gata i mase dobiva se sklop koji podsjeća na Colpittsov oscilator [17], [29]. Kapacitet C_{gs} unutarnji je kapacitet. Kapacitetom C_S namješta se potrebni iznos povratne veze. Budući da je oscilator nestabilan sklop, očito je da kapacitet C_S stvara pozitivnu povratnu vezu, tj. destabilizira intrinzični MESFET. Može se uočiti da je frekvencija osciliranja određena titrajnim krugom

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_{gs}+C_S}{LC_{gs}C_S}}\,.$$

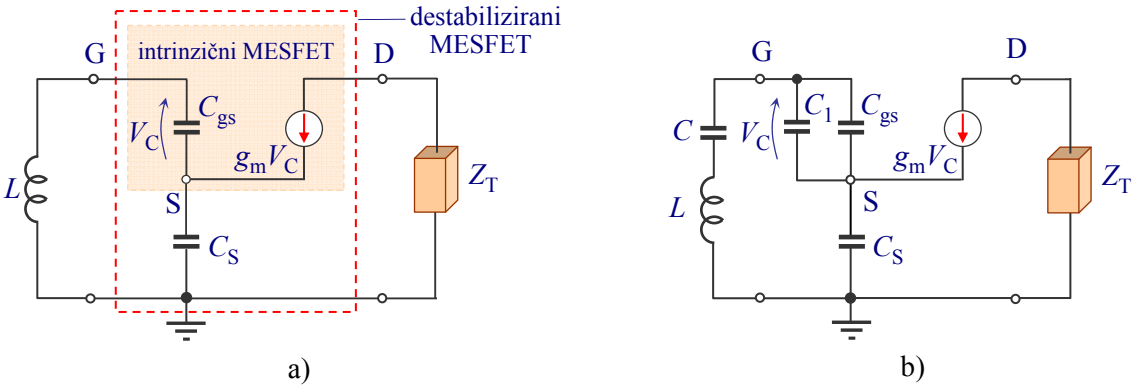
Ugradnjom serijskoga titrajnog kruga između gata i mase, umjesto induktiviteta, dobiva se Clapp-Gourietov oscilator [17], [29]. Pritom treba dodati »vanjski« kapacitet C_1 između gata i slijeva radi bolje kontrole povratne veze i smanjenja utjecaja »unutarnjeg« kapaciteta C_{gs}, kao što je prikazano na slici 8.145b). Ako su vrijednosti kapaciteta C_S i C_1 znatno veće od vrijednosti kapaciteta C koji se nalazi u serijskome titrajnom krugu, onda će frekvencija osciliranja biti približno jednaka rezonantnoj frekvenciji serijskoga titrajnog kruga. Budući da je titrajni krug smješten u »ulazni krug«, tj. ugrađen je u impedanciju generatora kao serijski titrajni krug, većina mikrovalnih oscilatora svodi se na Clapp-Gourietov oscilator.

Ako se u oscilator sa slike 8.145b), umjesto kapaciteta C ugradi varaktorska dioda, onda se može jednostavno ostvariti kvalitetan naponski upravljani oscilator (engl. *Voltage Controlled Oscillator*; VCO). Promjenom kapaciteta mijenja se rezonantna frekvencija linijskog rezonatora serijskog tipa rezonancije, pa se time mijenja frekvencija osciliranja.

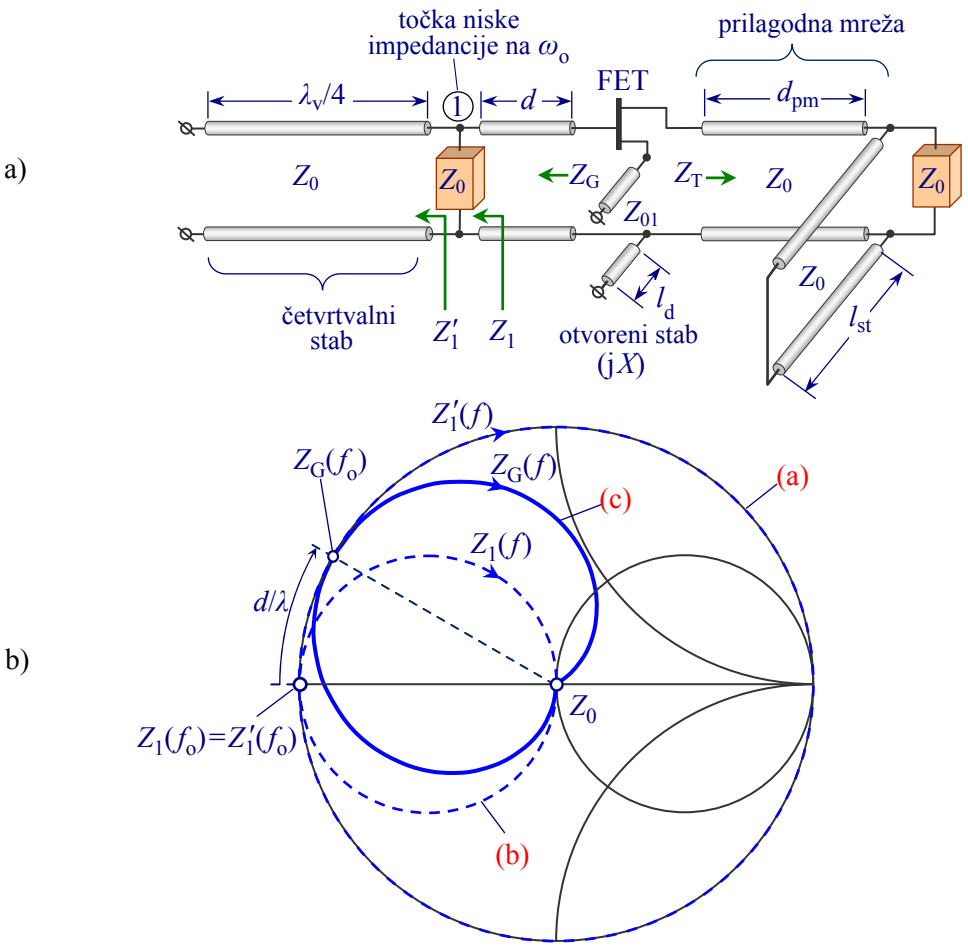
Na slici 8.146a) shematski je prikazan oscilator s destabiliziranim MESFET-om vrlo sličan oscilatoru prikazanom na slici 8.145. Radi preglednosti ispušteni su svi elementi koji sudjeluju u postavljanju statičke radne točke. Umjesto kapaciteta C_S upotrijebljen je kratak odsječak otvorene linije (stab) duljine l_d. Da bi se postigao što veći kapacitet sa što kraćim stabom valja uzeti što nižu karakterističnu impedanciju staba ($Z_{01} < Z_0$).

Induktivna se reaktancija u krugu gata može ostvariti kratko spojenim linijskim odsječkom kraćim od četvrt valne duljine. No faktor dobrote takve mreže bio bi razmjerno mali pa bi i stabilnost frekvencije bila razmjerno mala (odjeljak 8.9.1). Stoga je u sklopu prikazanom na slici 8.146a) induktivna reaktancija u krugu gata ostvarena kaskadom otvorenoga četvrtvalnog staba i linijskoga odsječka duljine d. Na frekvenciji osciliranja f_o, taj stab stvara vrlo nisku impedanciju (virtualni kratki spoj) pa za odsječak d kraći od četvrt valne duljine gat tranzistora »vidi« potrebnu induktivnu reaktanciju. Nalijevo od točke ① impedancija otvorenoga staba bez gubitaka posve je reaktivna pa njegov lokus $Z_1'(f)$ leži na samome rubu Smithova dijagrama, što je na slici 8.146b) prikazano kružnicom (a). Time je povećana ukupna duljina linijske strukture, što ima za posljedicu povećanje unutarnjeg faktora dobrote pa se može očekivati veća stabilnost frekvencije osciliranja i niža razina FM šuma oscilatora.

Na desnom kraju četvrtvalnoga rezonatora (staba), paralelno s linijskom strukturom, spojen je otpor Z_0 koji omski opterećuje gat samo na frekvencijama izvan f_o. Time su učinkovito spriječene moguće parazitske oscilacije na neželjenim frekvencijama. U točki ① na otporu Z_0, lokus $Z_1'(f)$ transformira se u lokus $Z_1(f)$ oblika kružnice (b) koja prolazi središtem Smithova



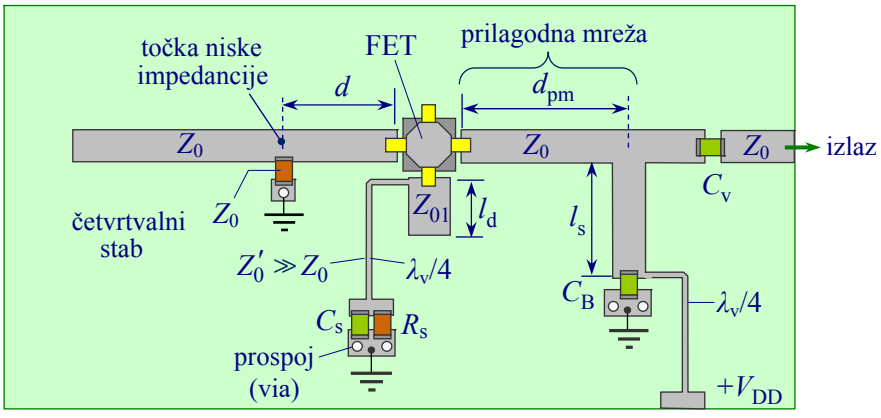
Slika 8.145. Tranzistorski oscilator sa serijskom kapacitivnom povratnom vezom u krugu slijeva. Izvedbe ekvivalentne: **a)** Colpittsovu oscilatoru, **b)** Clapp-Gourietovu oscilatoru



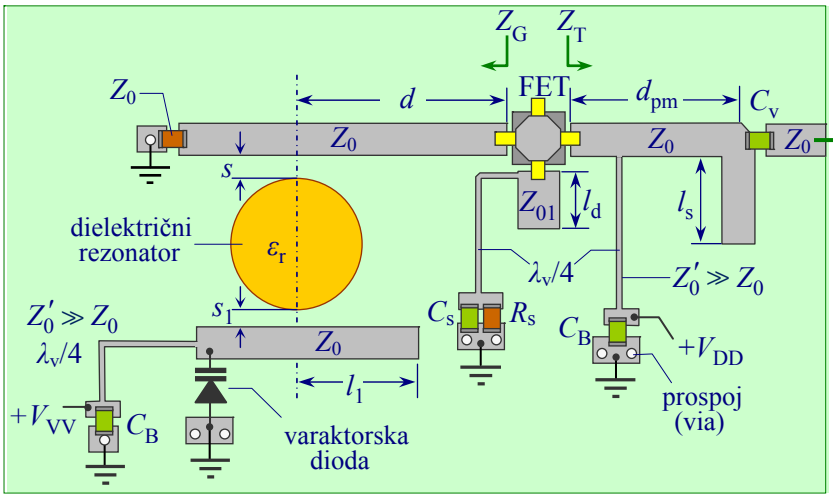
Slika 8.146. Oscilator s MESFET-om: **a)** shematski prikaz i **b)** lokus impedancije generatora

dijagrama. U rezonanciji, oko točke $Z_1(f_o)=Z_1'(f_o)$, oba se lokusa nalaze vrlo blizu točke kratkoga spoja jer se ulazna impedancija otvorenoga četvrtvalnog staba ustvari sastoji samo od otpora gubitaka u stabu [izraz (7–141) u odjeljku 7.4.2].

Transformacijom impedancije na linijskom odsječku fizičke duljine d, lokus (b) prelazi u lokus (c) oblika cikloide, što se može objasniti na ovaj način. Električna duljina linijskog odsječka raste linearno s frekvencijom. Otuda i kut zakreta lokusa (b) u Smithovu dijagramu upućuje na jednaku ovisnost pa dijelovi lokusa na nižim frekvencijama pretrpe manji zakret od onih na višim frekvencijama. Tom se transformacijom lokusa konačno postiže potrebna induktivna impedancija generatora Z_G, na frekvenciji osciliranja f_o.



Slika 8.147. Mikrotrakasta izvedba oscilatora s MESFET-om



Slika 8.148. Tranzistorski oscilator stabiliziran dielektričnim rezonatorom i moduliran varaktorom

U skladu s izrazima (8–329), u krug dotoka valja postaviti odgovarajuću impedanciju tereta (Z_T), čiji realni dio mora biti jednak jednoj trećini otpora u uvjetima rada s malim signalom što je u skladu s izrazom (8–329a). Ta se impedancija može postići uporabom prilagodne sprežne mreže kojom se impedancija Z_0 transformira u Z_T. U tu se svrhu može uzeti odsječak prijenosne linije s paralelnim stabom kakav se sreće u prilagodnim strukturama pojačala.

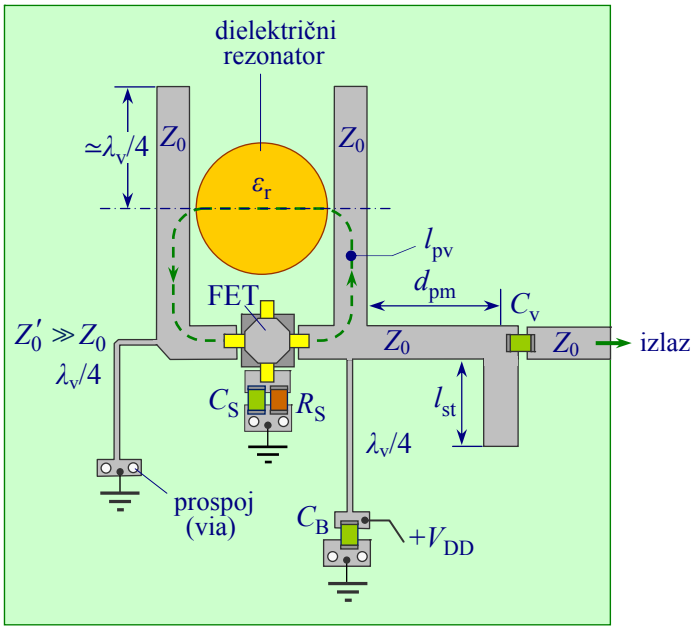
Dodavanjem odsječka s varaktorom koji je labavo spregnut s četvrtvalnim stabom može se lako ostvariti naponski upravljan oscilator (VCO), kakav je opisan u sljedećem odlomku.

Na slici 8.147 prikazana je mikrotrakasta izvedba opisanog sklopa, u kojoj su pridodane mreže za dovođenje napajanja. Istosmjerna radna točka ostavrena je sklopom automatskog prednapona paralelnim spojem otpora R_S i kapaciteta C_S u krugu slijeva. Mikrovalni signal na slijevu izoliran je od sklopa za automatski prednapon četvrtvalnim odsječkom mikrotrakaste linije visoke karakteristične impedancije. Na udaljenosti d od gata, elektroda gata elektrostatički je spojena na masu otporom Z_0. Napon napajanja V_{DD} dovodi se dotoku mrežom poput one u krugu slijeva. Slično se može ostvariti i oscilator s bipolarnim tranzistorom uz neznatne promjene sklopa za namještanje radne točke.

Oscilator znatno veće stabilnosti frekvencije može se ostvariti tako da se umjesto mikrotrakastog otvorenog četvrtvalnoga rezonatora upotrijebi dielektrični rezonator, kao što je prikazano na slici 8.148. Zahvaljujući visokom vlastitom Q-faktoru, dielektrični rezonator ujedno određuje i frekvenciju osciliranja. Prijenosna linija u kojoj se nalazi dielektrični rezonator zaključena je prilagodnim teretom (Z_0). Time se sprečava preskakivanje modova i rad u neženjenim radnim točkama zbog parazitskih rezonancija. Na rezonantnoj frekvenciji rezonator paralelnog tipa rezonancije upućuje na vrlo visoku radnu impedanciju pa je prilagodni teret iza rezonatora gotovo posve raspregnut. No u takvom se spoju ipak gubi dio snage u rezonatoru i prilagodnom teretu što neznatno smanjuje učinkovitost pretvorbe istosmjerne snage u mikrovalnu snagu.

Sklopu se može dodati varaktor u svrhu elektroničkog upravljanja frekvencijom osciliranja (VCO) te frekvencijske i fazne modulacije, kao što je prikazano na slici 8.148. Varaktor je ugrađen u odsječak mikrotrakaste linije koja je labavo spregnuta s dielektričkim rezonatorom preko magnetskog polja. Ispravnim namještanjem duljine l_1 otvorenog staba i razmaka s_1 između staba i dielektričnog rezonatora može se ostvariti optimalno opterećenje rezonatora varaktorskom diodom. Napon upravljanja varaktorom označen je s V_{VV}.

Na slici 8.149 prikazana je mikrotrakasta izvedba mikrovalna oscilatora s paralelnom povratnom vezom u kojoj se nalazi dielektrični rezonator. Mreža povratne veze u osnovi se ne

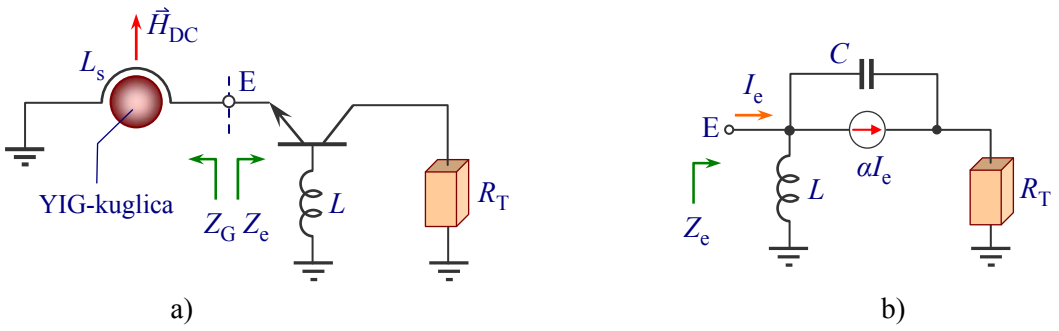


Slika 8.149. Tranzistorski oscilator s paralelnom povratnom vezom stabiliziran dielektričnim rezonatorom

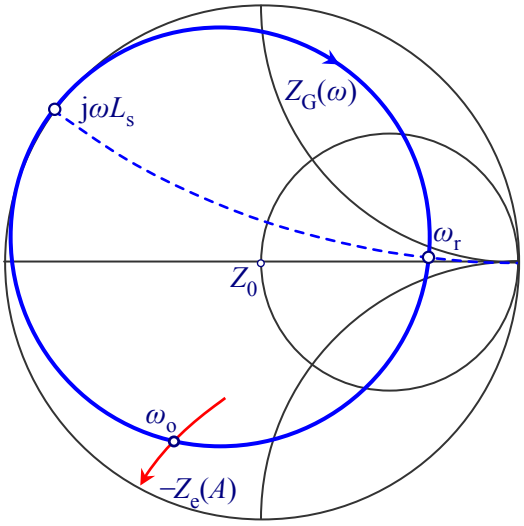
razlikuje od one na slici 7.97 u odjeljku 7.4.6. Frekvencija osciliranja približno je određena rezonantnom frekvencijom dielektričnoga rezonatora, a jačina povratne veze namješta se spregom rezonatora s mikrotrakastim linijama. Namještanjem duljine l_{pv} postiže se optimalna radna točka. Dielektričnim se rezonatorom može stabilizirati frekvencija osciliranja i potisnuti FM-šum. Porastom temperature dolazi do rastezanja kovina i povećanja kapacitivnih komponenata unutar tranzistora, pa frekvencija osciliranja obično opada s temperaturom. No primjenom rezonatora s negativnim temperaturnim koeficijentom permitivnosti, temperaturna se ovisnost može kompenzirati u razmjerno širokom rasponu promjene temperature. Kao i u izvedbama sa serijskom povratnom vezom (slika 8.148), u izlazni strujni krug sklopa na slici 8.149 valja postaviti prilagodnu mrežu kojom se može zadovoljiti amplitudni uvjet (8–329a) uz maksimalnu izlaznu snagu.

Stabilnost oscilatora može se dodatno poboljšati povećanjem vanjskog Q-faktora, tj. smanjenjem sprege između rezonatora i mikrotrakastih linijama. No time se smanjuje učinkovitost oscilatora pa je obično potrebno postići kompromis oko tih dvaju oprečnih zahtjeva.

Slično se mogu ostvariti vrlo jednostavne izvedbe oscilatora s paralelnom povratnom vezom primjenom komercijalnih mikrovalnih monolitnih pojačala.



Slika 8.150. a) Načelna shema tranzistorskog oscilatora s YIG-rezonatorom i **b)** pojednostavljena nadomjesna shema tranzistora gledano s priključka emitera



Slika 8.151. Lokusi impedancije $Z_G(\omega)$ i negativa ulazne impedancije $-Z_e(A)$ tranzistora na priključku emitera

U izvedbi na slici 8.150a), umjesto dielektričnog rezonatora upotrijebljen je YIG-rezonator (odjeljak 7.7.3). Time je ostvaren tranzistorski oscilator s elektroničkim ugađanjem frekvencije osciliranja u širokom frekvencijskom području (više od jedne oktave). Sklop je izveden s bipolarnim tranzistorom u spoju sa zajedničkom bazom. Tranzistor je dodatno destabiliziran induktivitetom L u krugu baze, kao što je prikazano na slici 8.150a). Rezonantna frekvencija YIG-rezonatora ugađa se istosmjernom strujom, tj. statičkim magnetskim poljem $\bar{H}_{DC}$. Budući da je rezonator postavljen u krug emitera, izoliran je od izlaznog kruga samim tranzistorom. U strujnome krugu kolektora smješteno je trošilo otpora R_T. Taj otpor valja prilagoditi izlaznoj impedanciji tranzistora koja sadrži negativni otpor. Krajnje pojednostavljen nadomjesni sklop tog oscilatora prikazan je na slici 8.150b) [26]. Kapacitet C odgovara kapacitetu tranzistora između baze i kolektora. Budući da je struja emitera približno jednaka struji kolektora, strujno pojačanje (α) u spoju sa zajedničkom bazom približno je jednako jedinici. Jednostavan račun pokazuje da je elektronička admitancija na priključku emitera približno jednaka

$$Y_e \simeq \left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)\frac{1}{R_T}+\frac{1}{j\omega L}, \tag{8–333}$$

gdje je $\omega_c = 1/\sqrt{LC}$. Za $\omega < \omega_c$, realni dio Y_e poprima negativnu vrijednost, tj. pojavljuje se »negativni otpor«.

Strujno pojačanje α slabi porastom amplitude RF struje emitera pa otuda opada i realni dio elektroničke admitancije Y_e. Tipičan lokus negativa elektroničke impedancije $Z_e(A) = 1/Y_e(A)$ prikazan je u Smithovu dijagramu na slici 8.151. S druge strane, izraz za impedanciju pasivne mreže generatora, koja sadrži YIG-rezonator, na referentnoj ravnini na emiteru poprima oblik

$$Z_G = j\omega L_s + \frac{\dfrac{R_0}{Q_v}}{j\left(\dfrac{\omega}{\omega_r}-\dfrac{\omega_r}{\omega}\right)+\dfrac{1}{Q_0}}, \tag{8–334}$$

gdje je ω_r rezonantna frekvencija YIG-kuglice, a Q_v i Q_0 vanjski i unutarnji Q-faktori. R_0 je otpor gubitaka u krugu YIG-rezonatora. Lokus Z_G oblika je kružnice velikog polumjera. Taj lokus dodiruje rub Smithova dijagrama u točki reaktancije $\omega_r L_s$, gdje je L_s induktivitet zavoja YIG-rezonatora. Sjecište tog lokusa s negativom lokusa $Z_e(A) = 1/Y_e(A)$ određuje frekvenciju i

amplitudu oscilacija. Budući da je faktor dobrote Q_0 vrlo visok, frekvencija oscilacija (ω_o) približno je određena rezonantnom frekvencijom rezonatora (ω_r) koja je pak razmjerna jakosti statičkog magnetskog polja H_{DC}. Stoga je linearnost ugađanja frekvencije tranzistorskog oscilatora znatno bolja u usporedbi s diodnim oscilatorom (odjeljak 8.9.1).

Primjer 8.8. Oscilator s bipolarnim tranzistorom na 4,5 GHz

Proračunati mikrovalni oscilator s bipolarnim tranzistorom AT-41485 za frekvenciju osciliranja 4,5 GHz iz primjera 8.7. Naći maksimalnu izlaznu snagu, ako zasićena izlazna snaga tranzistora u sklopu pojačala klase A iznosi 150 mW u radnoj točki $I_C = 25$ mA, $V_{CE} = 8$ V. Mikrovalni pasivni sklop izvesti u mikrotrakastoj tehnici na podlozi relativne permitivnosti $\varepsilon_r = 2{,}55$ i visine $h = 0{,}72$ mm. Zanemariti gubitke u dielektriku i vodičima.

Rješenje:

Odabrati topologiju oscilatora prema slici 8.147. Najprije valja izračunati najveću snagu osciliranja prema izrazu (8–332). Za tranzistor AT-41485 na frekvenciji 4,5 GHz, izlazi da je $|\Delta| = 0{,}136 < 1$, a iz izraza (8–213) izlazi da je faktor stabilnosti $K = 1{,}032 > 1$. To znači da je tranzistor bezuvjetno stabilan. Stoga se dobiva iz izraza (8–332) za maksimalno pojačanje $G_{maks} = 10{,}83$. Uz zasićenu izlaznu snagu $P_{zas} = 150$ mW dobiva se

$$P_{o\,(maks)} = P_{zas}\left(1 - \frac{1}{G} - \frac{\ln G}{G}\right) = 0{,}15\left(1 - \frac{1}{10{,}83} - \frac{\ln 10{,}83}{10{,}83}\right) = 0{,}103\ \text{W}\,.$$

Dakle, maksimalna koju oscilator može dati trošilu iznosi približno 100 mW, tj. 20 dBm.

Budući da je tranzistor na frekvenciji 4,5 GHz bezuvjetno stabilan valja ga destabilizirati. U tu se svrhu mogu upotrijebiti rezultati iz primjera 8.7. Destabilizacija se može ostvariti s pomoću kapacitivne reaktancije $jX = -j\,93{,}5\ \Omega$ pripadajućeg koeficijenta refleksije $\Gamma = 1\angle -56{,}25°$. Uvrštenjem te vrijednosti u izraz (8–134) dobivaju se raspršni parametri destabiliziranog tranzistora:

$$[S_d] = \begin{bmatrix} 3{,}02\angle -151{,}9° & 2{,}12\angle -17{,}2° \\ 2{,}84\angle 54{,}6° & 1{,}27\angle -134{,}1° \end{bmatrix}$$

Sad se kružnice stabilnosti destabiliziranog tranzistora mogu ucrtati u Smithov dijagram, kao što je prikazano na slici 8.152. Budući da je $|S_{22d}| > 1$, središte je Smithova dijagrama nestabilna točka pa sve impedancije izvan kružnice stabilnosti daju negativni otpor. Koeficijent refleksije generatora Γ_G valja odabrati tako da se nalazi što bliže sjecištu ruba Smithova dijagrama sa zrakom koja prolazi središtem kružnice stabilnosti. Tada Γ_G leži duboko unutar područja nestabilnosti. Ako se Γ_G baš postavi na sam rub Smithova dijagrama, onda odgovarajuća vrijednost izlazne impedancije za mali signal leži baš na kružnici nestabilnosti u ravnini Γ_T. Na slici 8.152 ponuđena su tri različita koeficijenta refleksije generatora ($\Gamma_{G1}=1\angle 134{,}5°$, $\Gamma_{G2}=1\angle 180° = -1$ i $\Gamma_{G3}=1\angle -134{,}5°$) s ruba Smithova dijagrama, koji daju negativni otpor na izlazu destabiliziranog tranzistora. Budući da sve te tri točke leže na rubu Smithova dijagrama, pripadaju im posve reaktivne impedancije generatora koje je lako ostvariti.

Potrebne impedancije tereta mogu se izračunati iz izlaznih impedancija destabilizirana tranzistora. Izlazna impedancija nalazi se izvan Smithova dijagrama jer sadrži negativni otpor. Stoga su na slici 8.152 prikazane impedancije tereta za mali signal koje su jednake negativnim vrijednostima odgovarajućih izlaznih impedancija. Valja uočiti da će promjena impedancije generatora imati velik utjecaj na promjenu vrijednosti impedancije tereta, tj. koeficijenta refleksije Γ_T za mali signal. No da bi se mogla postići maksimalna izlazna snaga oscilatora potrebno je realni dio impedancije tereta smanjiti na približno jednu trećinu vrijednosti za mali signal u skladu s uvjetom (8–329a). Stoga su u isti graf ucrtane i projicirane vrijednosti koeficijenta refleksije tereta za veliki signal (Γ_T'), označene apostrofom. Također se jasno vidi da sve vrijednosti Γ_T za mali signal leže na kružnici stabilnosti za impedanciju generatora. To i ne čudi jer te vrijednosti odgovaraju posve reaktivnim impedancijama generatora. No sve vrijednosti Γ_T' za veliki signal leže unutar područja nestabilnosti, tj. izvan područja stabilnosti u ravnini Γ_T.

Sad je potrebno odabrati potrebnu vrijednost impedancije generatora, a najpogodnija je $\Gamma_G = -1$ (kratki spoj u krugu baze) jer ju je najjednostavnije ostvariti. Za $\Gamma_G = -1$ izlazi sljedeći koeficijent refleksije na izlazu destabiliziranog tranzistora

$$\Gamma_{iz} = S_{22d} + \frac{S_{12d} S_{21d} \Gamma_G}{1 - S_{11d} \Gamma_G} = 2{,}141 \angle -29{,}5° .$$

Iz toga se dobiva izlazna impedancija destabilizirana tranzistora za mali signal, tj.

$$Z_{iz} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{iz}}{1 - \Gamma_{iz}} = 50 \frac{1 + (1{,}86 - \mathrm{j}1{,}06)}{1 - (1{,}86 - \mathrm{j}1{,}06)} = -96{,}4 - \mathrm{j}56{,}8\,\Omega .$$

U skladu s uvjetom (8–329a), da bi se ostvarila maksimalna izlazna snaga oscilatora, impedanciju tereta valja namjestiti na vrijednost

$$Z_T = -\frac{\mathrm{Re}\{Z_{iz}\}}{3} - \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\{Z_{iz}\} = 32{,}1 + \mathrm{j}56{,}8\ \Omega .$$

Ta se završna impedancija može lako ostvariti transformacijom impedancije Z_0 u Z_T preko sprežne mreže s jednim stabom. Prilagodba izlaznog kruga oscilatora može se zatim provesti na jednak način kao pri prilagodbi pojačala u primjeru 8.5. (slika 8.102). U ovom primjeru duljina linijskoga odsječka iznosi $d = 14{,}9$ mm, a duljina otvorenoga staba iznosi $l_{st} = 10{,}37$ mm. Obje vrijednosti dane su za linije ispunjene zrakom i bez korekcije duljine staba zbog rubnih polja.

U strujnome krugu baze može se ostvariti virtualni kratki spoj otvorenim četvrtvalnim stabom. S druge strane, kapacitivna reaktancija za destabilizaciju tranzistora u krugu emitera ostvarena je primjenom kratkog otvorenog mikrotrakastog staba. Za odabranu karakterističnu impedanciju toga staba, $Z_{01} = 50\ \Omega$, potrebna električna duljina staba iznosi $\theta_d = \beta l_d = \tan^{-1}(50/93{,}5) = 0{,}491$ radijana. Indeks »d« upućuje na to da se radi o komponenti za destabilizaciju tranzistora. Sad se može izračunati fizička duljina staba ispunjenog zrakom, tj.

$$l_d = \frac{\theta_d}{\beta} = \frac{\theta_d}{2\pi} \lambda_0 = \frac{\theta_d c}{2\pi f} = \frac{0{,}491 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 4{,}5 \cdot 10^9} = 5{,}21\ \mathrm{mm} .$$

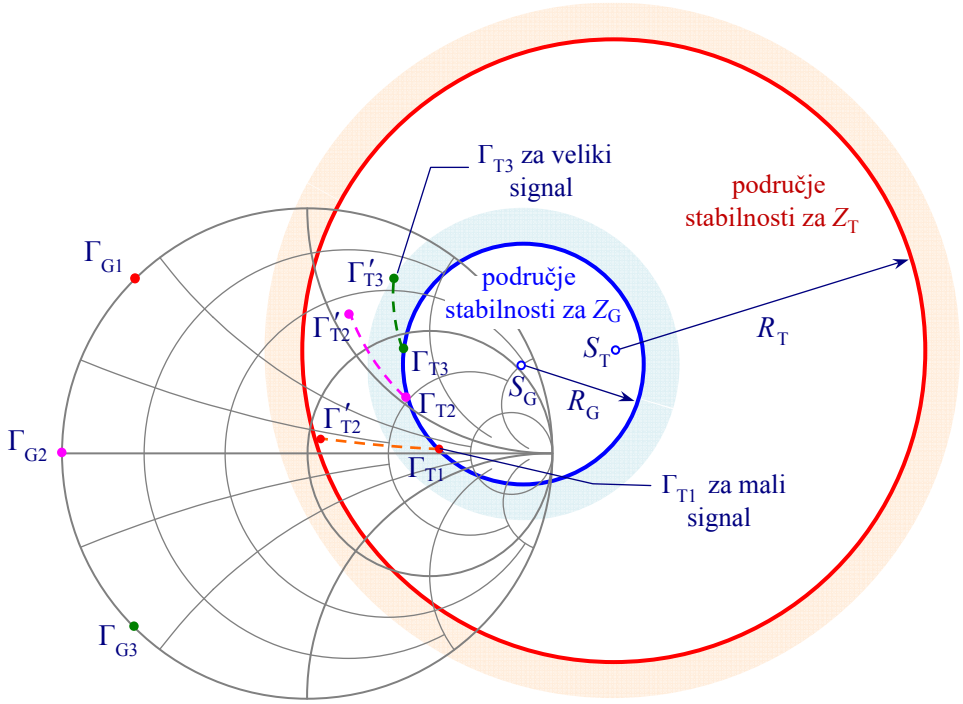
Budući da je oscilator potrebno izvesti primjenom mikrotrakastih linija, valja izračunati efektivnu permitivnost podloge te dimenzije staba w i l_d. Za odabranu karakterističnu impedanciju staba od 50 Ω te permitivnost materijala i visinu podloge ($\varepsilon_r = 2{,}55$ i $h = 0{,}72$ mm) iz izraza (4–156) i (4–159) dobiva se $w = 2{,}03$ mm i $\varepsilon_{ef} = 2{,}11$. Tad fizička duljina mikrotrakastog staba, bez skraćenja otvorenog kraja, iznosi $l_d/\sqrt{\varepsilon_{ef}} = 5{,}21/\sqrt{2{,}11} = 3{,}6$ mm. Primjenom formule (5–274), na jednak način kao u primjeru 8.5, može se izračunati potrebno skraćenje staba od 0,254 mm. Stoga konačna fizička duljina mikrotrakastog staba iznosi $l_d = 3{,}34$ mm. Na jednak se način mogu odrediti potrebne duljine linijskog odsječka i staba izlazne prilagodne mreže.

Umjesto prilagodbe stabom, na izlazu se može uporabiti i četvrtvalni transformator impedancije ili četvrtvalni odsječak spregnutih linija, od kojih ovaj posljednji ima dodatnu prednost jer blokira prodor istosmjernih veličina prema teretu. Ako se umjesto kratkoga spoja ($\Gamma_G = -1$), na bazi tranzistora odabere koeficijent refleksije $\Gamma_G = 1 \angle 134{,}5°$, onda uopće nije potrebna prilagodna mreža jer tad odgovarajuća impedancija tereta iznosi približno 50 Ω, kao što se vidi za Γ_{T1} na slici 8.152.

Uporabom vrlo selektivnih sklopova može se dodatno povećati stabilnost frekvencije osciliranja i potisnuti FM-šum oscilatora. U tu se svrhu na otvoreni kraj rezonantnog staba u krugu baze može postaviti dielektrični rezonator. Kao što smo vidjeli kod oscilatora na slici 8.148, dielektrični rezonator u okolišu rezonantne frekvencije ponaša se poput vrlo selektivnog otvorenog strujnog kruga pa je teret s lijeve strane linije u krugu baze posve raspregnut. No uvijek ostaje izvjesna otporna komponenta koja je razmjerna naponskom faktoru sprege rezonatora s mikrotrakastom linijom. Ta je disipativna komponenta korisna jer povećava dinamičku stabilnost sklopa i smanjuje sadržaj viših harmonika na izlazu oscilatora. No pritom valja računati sa smanjenom učinkovitošću pretvorbe istosmjerne snage u mikrovalnu jer se dio mikrovalne snage troši na otpornoj komponenti u krugu »generatora«.

Nakon mjerenja i ispitivanja izvedenog sklopa, obično je potrebno obaviti manje izmjene u izlaznoj prilagodnoj mreži jer formula (8–329a) daje samo približnu vrijednost impedancije tereta. Te manje ispravke najlakše je izvesti na kraju otvorenih stabova. Stoga se preporuča da se u prvoj izvedbi (pro-

totipu) oscilatora svi stabovi, uključujući i onaj četvrtvalnoga rezonatora, učine nešto duljim (do 5%) kako bi se naknadnim skraćenjem sklop mogao optimalno ugoditi. Ugađanje se može lako ostvariti mehaničkim odstranjivanjem metalizacije na krajevima stabova. To je još jedna prednost primjene otvorenih stabova u odnosu na kratko spojene stabove.



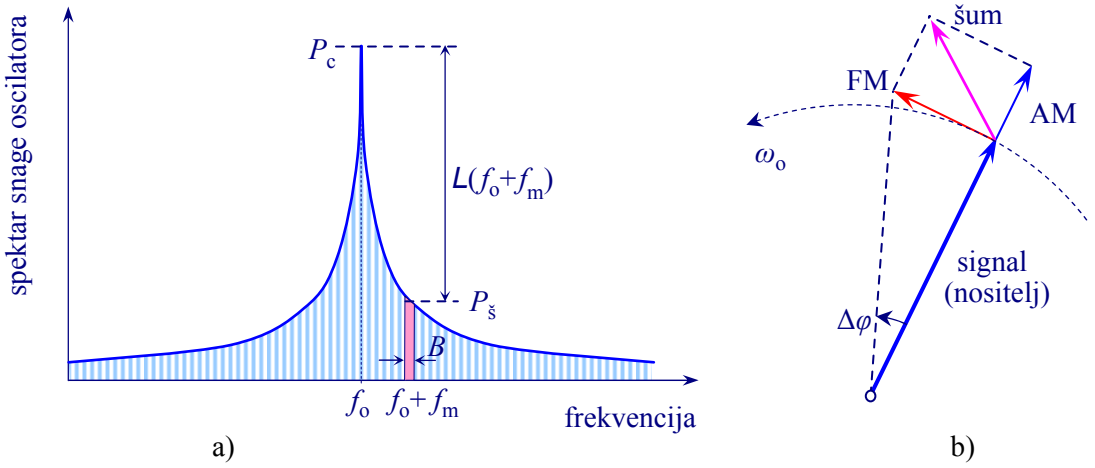
Slika 8.152. Kružnice stabilnosti za razmatrani oscilator u primjeru 8.7. U objema ravninama (Z_G i Z_T), područja nestabilnosti nalaze se izvan odgovarajućih kružnica stabilnosti. Prikazane su potrebne impedancije tereta za tri različite vrijednosti koeficijenta refleksije generatora, Γ_G. Osjenčana su područja nestabilnosti, tj. područja koja daju negativni otpor

Šum tranzistorskog oscilatora

Kao što smo vidjeli pri razmatranju oscilatora s aktivnim dvopolom, nijedan oscilator nije savršen izvor sinusnoga signala. Osim viših harmonika postoje i nasumična kolebanja amplitude i frekvencije [11], [15], [17]. Ta kolebanja nazivamo *električni šum* (odjeljak 8.1). U spektru oscilatora u okolišu frekvencije osciliranja uvijek se mogu naći bočni pojasi zbog modulacijskoga šuma (AM-šum i FM-šum), kao što je prikazano na slici 8.153a). U vremenskoj domeni, struja RF signala ometana šumom može se izraziti kao

$$i_{\mathrm{RF}}(t) = \left[A_{\mathrm{o}} + a(t)\right]\cos\left[\omega_{\mathrm{o}} t + \varphi(t)\right], \tag{8–335}$$

gdje su $a(t)$ i $\varphi(t)$ nasumični (slučajni) signali. Veličina $a(t)$ opisuje AM-šum, $\varphi(t)$ *fazni šum*, a derivacija tog šuma ($\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$) opisuje FM-šum. Te su veličine definirane u odjeljku 8.9.1. Pritom uporaba pojma fazni šum ima smisla samo ako najveća devijacija faze ne prelazi vrijednost 2π radijana. U vektorskome dijagramu na slici 8.153b) bešumni signal frekvencije ω_{o} (*nositelj*) prikazan je fazorom stalne veličine koji se vrti stalnom brzinom. Šum je prikazan dodatnim fazorom promjenljive (nasumične) amplitude i brzine vrtnje. Komponenta u smjeru fazora nositelja opisuje AM-šum, a okomita joj komponenta opisuje FM-šum. U dobro izvedenim oscilatorima ukupna je snaga šuma nekoliko redova veličine manja od snage nositelja. Zajednička mjera vrednovanja šuma može se definirati preko snage unutar širine pojasa B uz zadani otklon (devijaciju) frekvencije ω_{m} od frekvencije nositelja ω_{o}. Indeks m pokazuje da se radi o spektralnoj komponenti modulacijskoga šuma. Dijeljenjem te snage sa širinom frekvencijskog pojasa B i snagom nositelja dobiva se korisna relativna veličina



Slika 8.153. Šum oscilatora: **a)** spektar snage, **b)** fazorski dijagram

$$L(f) = 10\log\frac{P_š(f_m, B)}{P_o(f_o)B}\ \text{dBc/Hz}. \tag{8–336}$$

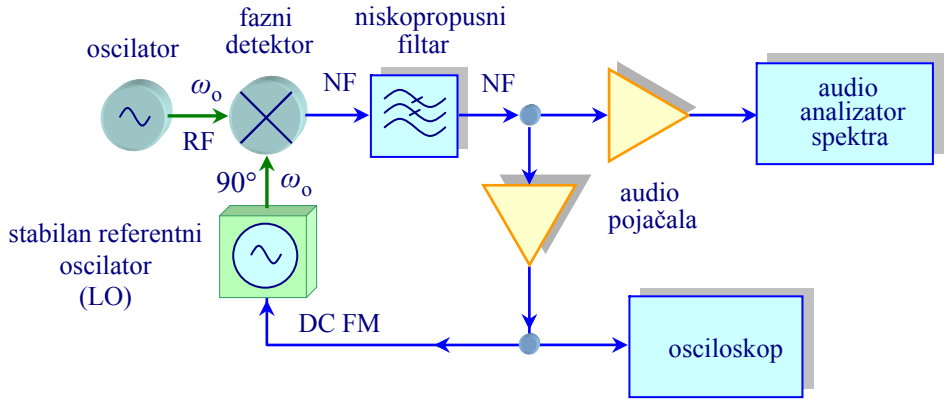
Ta se veličina odvojeno definira za komponente AM- i FM-šuma. Budući da se snaga šuma obično mjeri u jednom bočnom pojasu (lijevom ili desnom), veličinu $L(f)$ trebalo bi ispravno nazivati jednobočnom (SSB) mjerom šuma oscilatora. Za FM-šum nerijetko se uzima druga mjera, a to je *kvadrat efektivne devijacije*, Δf_{ef}. To je prosječna vrijednost kvadrata frekvencijske devijacije šuma unutar zadane širine pojasa. Slična definicija vrijedi za fazni šum, $\Delta\varphi_{ef}$. Kod mjerenja analizatorom spektra, širina pojasa odgovara širini filtra razlučivosti analizatora. Potrebno je još zadati modulacijsku frekvenciju f_m, tj. otklon spektralne komponente šuma od frekvencije nositelja. Veza između efektivne devijacije i snage FM-šuma može se napisati kao

$$(\Delta\varphi_{ef})^2 = \left(\frac{\Delta f_{ef}}{f_m}\right)^2 = 2\frac{P_{FM}}{P_o}, \tag{8–337}$$

gdje je P_{FM} snaga bočne komponente FM-šuma.

Amplitudno modulirani šum može se jednostavno mjeriti primjenom detektora ovojnice (odjeljak 8.5). Na izlazu detektora dobiva se član $A_o+a(t)$ koji opisuje trenutačnu amplitudu oscilatora u izrazu (8–335). Detektirane (demodulirane) komponente AM-šuma mogu se zatim izmjeriti primjenom niskofrekvencijskog analizatora spektra (odjeljak 9.3).

Mjerenje FM-šuma znatno je složenije. Za mjerenje SSB faznog šuma obično se rabe postupci s faznim detektorom (slika 8.154). Njime se mogu mjeriti spektralne komponente šuma koje su udaljene od frekvencije nositelja više od nekoliko desetaka Hz. Signal oscilatora miješa se na balansnom miješalu sa signalom niskošumnog referentnog oscilatora jednake frekvencije. Pritom signali dvaju oscilatora moraju biti u faznoj kvadraturi, tj. fazni pomak između signala iznosi 90°. Signal oscilatora izravno se transponira u frekvencijsko područje audio- ili video-signala (od desetak Hz do nekoliko stotina kHz). Amplituda signala iz miješala nosi podatak o faznom šumu pa se dalje primjenjuje opisani postupak za mjerenje AM-šuma. Fazni pomak od 90° između dvaju signala može se održavati dovođenjem transponiranog signala na ulaz modulatora frekvencije niskošumnog generatora signala. Time se poništava istosmjerna komponenta transponiranog signala, što se može pratiti na zaslonu osciloskopa. Pritom signal oscilatora kojem se mjeri fazni šum mora biti dobro izoliran od signala LO kako bi se spriječila izravna fazna sinkronizacija oscilatora. Budući da je za to mjerenje obično potrebno veliko dinamičko područje (> 100 dB), valja uporabiti niskošumno audio-pojačalo iza kojeg slijedi elektronički upravljiv atenuator.



Slika 8.154. Mjerenje faznog šuma oscilatora

Kod tranzistorskih oscilatora s MESFET-om u blizini nositelja obično se nalaze vrlo jake komponente šuma treperenja ($1/f$) pa se u nižem mikrovalnom području (do 8 GHz) nerijetko rabe oscilatori s bipolarnim tranzistorima kod kojih su te komponente šuma manje izražene.

Tik uz nositelj, kod svih ispravno izvedenih oscilatora, snaga komponenata FM-šuma znatno je veća od snage komponenata AM-šuma, jer indeks modulacije AM-šuma ovisi samo o amplitudi kolebanja struje izvora napajanja (a/A_o), a kod FM-šuma indeks modulacije ovisi o omjeru devijacije frekvencije i modulacijske frekvencije ($\Delta f/f_m$). Dakle, kad modulacijska frekvencija teži nuli, niskofrekvencijske komponente FM-šuma mogu poprimiti iznimno velike vrijednosti. Stoga, kad se promatra spektar šuma vrlo blizu nositelja, uvijek će se naići na vrlo izražene spektralne komponente FM-šuma. Koliko će one biti jake ovisi samo o tomu koliko se blizu nositelja promatra spektar oscilatora.

Ako je na pokazivaču analizatora spektra nesimetričan spektar signala oscilatora, onda se vjerojatno radi o šumu podjednako jakih koreliranih komponenata AM- i FM-šuma. To se nerijetko događa u loše izvedenim oscilatorima, kad se u blizini frekvencije osciliranja nalaze petlje na lokusu impedancije tereta (odjeljak 8.9.1).

8.10. Množila frekvencije i parametarska pojačala

Primjenom nelinearnog ili vremenski promjenljivog kapaciteta mogu se ostvariti sklopovi množila frekvencije, parametarskih pojačala te sklopovi pretvornika frekvencije s pojačanjem ili bez njega [4], [6], [16]. Najopćenitije, to uključuje pretvorbu snage na jednoj frekvenciji u snagu na drugoj frekvenciji. U varaktorskoj diodi, može istodobno biti u interakciji više frekvencijskih komponenata. Neke od njih čine korisne ulazne ili izlazne signale, a druge mogu biti komponente s *reaktivnim* (jalovim) snagama na pomoćnim frekvencijama (engl. *idler*), koje ne čine sastavni dio ni ulaznoga ni izlaznoga kruga.

Jedna od najjednostavnijih primjena nalazi se u sklopu *generatora harmonika* ili *množila frekvencije*. Za varaktor pobuđen na kružnoj frekvenciji ω_0, snaga se oslobađa u izlaznom krugu na frekvenciji $2\omega_0$ ili $3\omega_0$ ili općenito na $n\omega_0$, gdje je n cijeli broj veći od jedan.

Druga jednostavna primjena varaktorske diode nalazi se u sklopovima *djelila frekvencije* ili *generatora subharmonika*. Pritom se varaktorska dioda pobuđuje na frekvenciji ω_0, a teretu se predaje snaga na frekvenciji ω_0/n, gdje je n cijeli broj. Djelila nalaze primjene u sustavima za mjerenja i sintezu frekvencija. Ti sklopovi spadaju u kategoriju regeneracijskih sklopova odnosno subharmoničkih oscilatora, premda se osnovno načelo rada zasniva na pretvorbi frekvencije.

Varaktori se mogu upotrebljavati i za generiranje novih frekvencija koje nisu u harmoničkoj vezi s frekvencijom pobudnog signala. U tu kategoriju spadaju pretvornici frekvencije parametarskog tipa i parametarska pojačala.

8.10.1. Manley-Roweove relacije

Relacije Manley-Rowea [31] povezuju frekvencije sa snagama u nelinearnoj reaktanciji, uključujući nelinearni kapacitet. Valja odmah reći da ove formule ne vrijede za varaktorsku diodu s gubitcima pa previđanje ove činjenice može ponekad dovesti do ozbiljnih pogrešaka. Unatoč tomu, Manley-Roweove formule vrlo su korisne za intuitivno razmatranje pretvornika frekvencije, parametarskih pojačala te množila i djelila frekvencije.

U tu svrhu razmotrimo nelinearni kapacitet pobuđen signalom s dvjema frekvencijama ω_{RF} i ω_{LO}. Na nelinearnosti nastaju frekvencije miješanja $m\omega_{\mathrm{RF}} + n\omega_{\mathrm{LO}}$, za pozitivne i negativne cjelobrojne vrijednosti m i n, kao u odjeljku 8.6. Općenito se može reći da kapacitet teorijski razmjenjuje snagu sa završnim impedancijama na svim mogućim frekvencijama miješanja.

Naboj na kapacitetu $c(t)$ može se razviti u dvostruki Fourierov red (vidjeti odjeljak 8.2) kao

$$q(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{m,n} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(m\omega_1 + n\omega_2)t}\,, \tag{8–338}$$

gdje se za realni q traži $Q_{m,n}=Q^*_{-m,-n}$. Prema izrazu (8–52), u odjeljku 8.2, struja koja protječe kapacitetom $c(t)$ potpuna je derivacija izraza (8–338) po vremenu, tj.

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}(m\omega_1 + n\omega_2) Q_{m,n} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(m\omega_1 + n\omega_2)t}\,, \tag{8–339}$$

gdje je $I_{m,n}=\mathrm{j}(m\omega_{RF}+n\omega_{\mathrm{LO}})Q_{m,n}$. Napon se također može razviti u dvostruki Fourierov red kao

$$v(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{mn} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(m\omega_1 + n\omega_2)t}\,, \text{ gdje je } V_{m,n}=V^*_{-m,-n}. \tag{8–340}$$

Srednja snaga koja se dovodi nelinearnom kapacitetu jednaka je nuli jer je kapacitet bez gubitaka, što je u skladu sa zakonom očuvanja energije. No nelinearni kapacitet pretvara snagu signala jedne frekvencije u snagu na drugoj frekvenciji. Budući da se nelinearnome kapacitetu bez gubitaka dovodi snaga $P_{m,n}=2\mathrm{Re}\{V_{m,n} I^*_{m,n})\}$ na frekvenciji $m\omega_{\mathrm{RF}}+n\omega_{\mathrm{LO}}$, izlazi

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} = 0\,, \tag{8–341}$$

gdje je $P_{m,n}=P_{-m,-n}$. Množenjem svakog člana sume faktorom $(m\omega_{RF}+n\omega_{\mathrm{LO}})/(m\omega_{RF}+n\omega_{\mathrm{LO}})$ dobivaju se Manley-Roweove relacije koje daju dodatne informacije uz jednadžbu (8–341):

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{mP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_2} = 0\,, \tag{8–342a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{nP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_2} = 0\,. \tag{8–342b}$$

U Manley-Roweove relacije (8–342) automatski je ugrađeno svojstvo nedisipativnosti kapaciteta jer su izvedene iz jednadžbe (8–341) koja zadovoljava zakon očuvanja energije.

8.10.2. Pobuda varaktora harmonijskim signalom

Varaktorske diode (varaktori) za množila frekvencije i parametarska miješala, tj. pretvornike frekvencije, često se ostvaruju kao strukture tipa p^+ na podlozi tipa n galij-arsenida (GaAs) ili silicija (Si). Budući da je vrlo teško ostvariti uniformna područja s poluvodičem tipa p^+ na vrlo visokim frekvencijama, primjena je tih dioda ograničena na niža frekvencijska područja. No na visokim frekvencijama raste potreba za minimiziranjem serijskog otpora i maksimiziranjem širine područja promjene kapaciteta. U tom smislu postaju superiorni varak-

tori sa Schottkyjevom barijerom. U cilju ostvarivanja velike učinkovitosti i velike izlazne snage, varaktorske diode zahtijevaju više probojne napone. Povećanjem površine spoja dobiva se veći kapacitet od onog koji se može dopustiti kod dioda u otpornim miješalima. Osim toga, veća površina olakšava odvođenje toplinske energije jer većina množila frekvencije i uzlaznog pretvornika frekvencije rade s vrlo visokim razinama pobudne snage koja se djelomično troši u serijskom otporu diode.

Za varaktorsku diodu općenito vrijedi nadomjesni sklop Schottkyjeve diode za otporna miješala (odjeljak 8.4.1). No postoje neke razlike u parametrima. Naponski ovisan nelinearni kapacitet varaktora definiran je izrazom

$$C_{\mathrm{j}}(V) = \frac{C_{\mathrm{j0}}}{\left(1+\dfrac{V}{\Phi}\right)^{p}}, \tag{8–343a}$$

gdje je $C_{\mathrm{j0}} = C_{\mathrm{j}}(0)$ kapacitet spoja pri nultom naponu spoja, V reverzni napon na spoju, a Φ ugrađeni difuzijski potencijal barijere. Eksponent $p$ovisi o profilu dopiranja spoja i vrijednost mu je 1/2 za oštar prijelaz odnosno 1/3 za linearni prijelaz. Budući da u normalnom radu dioda obično nije pobuđena u području propusne polarizacije, taj se dio karakteristike diode obično ne razmatra.

Izraz (8–343a) može se preinačiti u oblik

$$C_{\mathrm{j}}(V) = C_{\min}\left(\frac{\Phi - V_{\mathrm{b}}}{\Phi - V}\right)^{p}, \tag{8–343b}$$

gdje je $C_{\min}$ kapacitet pri zapornom probojnom naponu V_{b} dan kao

$$C_{\min} = \frac{C_{\mathrm{j0}}\Phi^{p}}{(\Phi - V)^{p}}.$$

Na slici 8.155 prikazana je ovisnost kapaciteta spoja $C_{\mathrm{j}}(V)$ o naponu za tipičnu varaktorsku diodu.

Pri razmatranju parametarskih sustava valja definirati novu veličinu, *elastanciju* $S = 1/C$, kao inverzni kapacitet [4]. Tad iz izraza (8–343b) izlazi

$$S(V) = S_{\mathrm{maks}}\left(\frac{\Phi - V}{\Phi - V_{\mathrm{b}}}\right)^{p}. \tag{8–344}$$

Kakvoća spoja diode može se definirati s pomoću nekoliko parametara. Jedan je od njih *dinamička zaporna frekvencija*

$$f_{\mathrm{c}} = \frac{S_{\mathrm{maks}} - S_{\min}}{2\pi r_{\mathrm{s}}}, \tag{8–345}$$

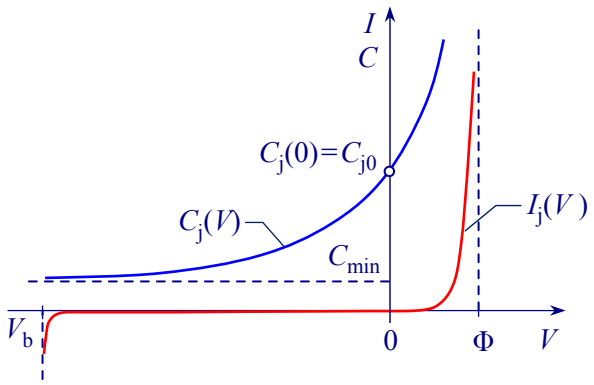
gdje je S_{maks} vrijednost elastancije pri probojnom naponu. Budući da $S_{\min}$ teži nuli kad napon teži ugrađenom potencijalu Φ, može se uvesti aproksimacija

$$f_{\mathrm{c}} \simeq \frac{S_{\mathrm{maks}}}{2\pi r_{\mathrm{s}}}. \tag{8–346}$$

Drugi parametar, *faktor dobrote*, Q_{d}, definiran je na jednak način kao za serijsku *RC*- mrežu

$$Q_{\mathrm{d}} = \frac{S_{\mathrm{maks}}}{2\pi f_0 r_{\mathrm{s}}}, \tag{8–347}$$

gdje je f_0 frekvencija na kojoj treba odrediti faktor dobrote, a r_{s} serijski je otpor kontakata. Faktor dobrote varaktora proizvođači najčešće definiraju pri vrijednosti V=–6 V.



Slika 8.155. Ovisnost struje i kapaciteta varaktorske diode o naponu

Varaktorske diode imaju visoke vrijednosti dinamičkog faktora dobrote pa su vrlo učinkovite na visokim frekvencijama. No što se tiče primjena u sklopovima velike izlazne snage pokazuju male mogućnosti. Stoga se za velike izlazne snage, a posebno u nižem frekvencijskom području, češće nalaze primjene varaktorske diode s oštrim ili linearnim prijelazom p^+n tipa. Njihove strujno-naponske karakteristike imaju jednak oblik kao i karakteristike dioda sa Schottkyjevom barijerom. No p^+n diode daju veće promjene kapaciteta uz jednake promjene napona i zato postižu veću učinkovitost pretvorbe pri višim razinama pobude. Te su značajke rezultat dužeg vremena života manjinskih nositelja naboja, pa su te diode posve nezanimljive za otporna miješala.

Izraz (8–343b) može se prilagoditi pobudi sinusnim naponom $V_0\sin\omega t$ pa izlazi

$$C_j(V) = C_{min}\left(\frac{\Phi - V_b}{\Phi - V_0\sin\omega t}\right)^p. \tag{8–348}$$

Ako se u nazivniku izraza (8–348) izluči član Φ^p i funkcija razvije u red, dobiva se

$$C_j(V) = C_{min}\left(\frac{\Phi - V_b}{\Phi}\right)^p\left[1 + pu_0\sin(\omega t) + \frac{p(p+1)}{2!}u_0^2\sin^2(\omega t) + \ldots\right], \tag{8–349}$$

gdje je $u_0 = V_0/\Phi$ pa je opći oblik kapaciteta

$$C_j(V) = C_0 + C_1\sin(\omega t) + C_2\sin(2\omega t) + C_3\sin(3\omega t) + \ldots \tag{8–350}$$

Na jednak način može se u red razviti i elastancija, tj.

$$S(V) = S_0 + S_1\sin(\omega t) + S_2\sin(2\omega t) + S_3\sin(3\omega t) + \ldots \tag{8–351}$$

Može se također pokazati da je i naboj na diodi periodična funkcija. Veza između naboja, napona i kapaciteta glasi

$$Q(V) = \int C(V)\mathrm{d}V. \tag{8–352}$$

Uvrštenjem izraza (8–343b) u izraz (8–352) i integriranjem dobiva se

$$Q(V) = C_{min}\frac{(\Phi - V_b)^p}{1-p}(\Phi - V)^{-(p-1)}. \tag{8–353}$$

Zamjenom V s $V_0\sin(\omega t)$ i razvojem funkcije (8–350) u binomni red, izravno izlazi

$$Q(V) = Q_0 + Q_1\sin(\omega t) + Q_2\sin(2\omega t) + Q_3\sin(3\omega t) + \ldots \tag{8–354}$$

8.10.3. Množila frekvencije

Periodičnost naboja na diodi izravno vodi do množenja frekvencije. Struja koja protječe diodom može se izraziti preko naboja kao

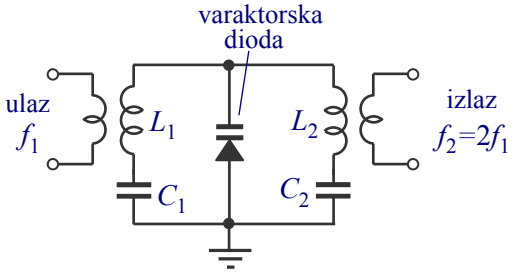
$$I = \frac{\mathrm{d}Q(V)}{\mathrm{d}t}. \tag{8–355}$$

Uvrštenjem naboja iz izraza (8–353) izlazi

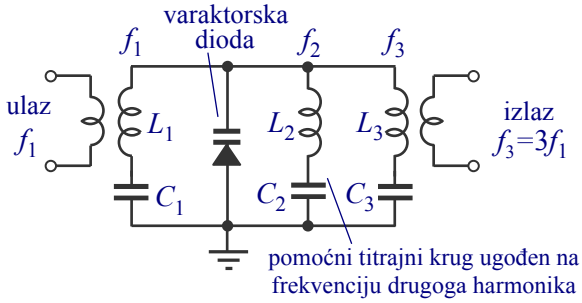
$$I = \omega Q_1 \cos(\omega t) + 2\omega Q_2 \cos(2\omega t) + \ldots \tag{8–356}$$

Dakle, struja diode sadrži komponentu osnovnog harmonika i članove viših harmonika.

Na slici 8.156 prikazan je jednostavan sklop za udvostručivanje frekvencije [6]. Sastoji se od kombinacije dvaju titrajnih krugova međusobno vezanih impedancijom diode. Izvan rezonantne frekvencije, impedancija varaktorske diode znatno je manja od reaktancije titrajnih krugova. Stoga glavnina struje osnovnog harmonika teče ulaznim titrajnim krugom, a gotovo sva struja drugoga harmonika teče izlaznim titrajnim krugom. Pritom su ulazni i izlazni prolazi spregnuti s pripadajućim titrajnim krugovima međuinduktivnom vezom.



Slika 8.156. Sklop za udvostručivanje frekvencije



Slika 8.157. Sklop za utrostručivanje frekvencije

Na sličan se način mogu ostvariti množila frekvencije s faktorom množenja tri i četiri. Na slici 8.157 prikazana je shema sklopa koji utrostručuje frekvenciju ulaznog signala. Budući da je ovisnost kapaciteta varaktora o naponu nerijetko kvadratna, korisno je poprečno postaviti pomoćni serijski titrajni krug ugođen na frekvenciju drugoga harmonika koji se na toj frekvenciji ponaša poput kratkoga spoja. Time se snaga proizvedena na frekvenciji drugoga harmonika može vratiti u proces množenja na frekvenciji trećega ili četvrtoga harmonika i tako iskoristiti u svrhu povećanja učinkovitosta množila frekvencije. Treći titrajni krug ugođen je na frekvenciju trećega ili četvrtoga harmonika i spregnut je s izlaznim prolazom.

Učinkovita množila frekvencije mogu se ostvariti i primjenom tranzistora, unipolarnih i bipolarnih. Više o tomu može se naći u literaturi [5].

8.10.4. Uvod u parametarske sustave

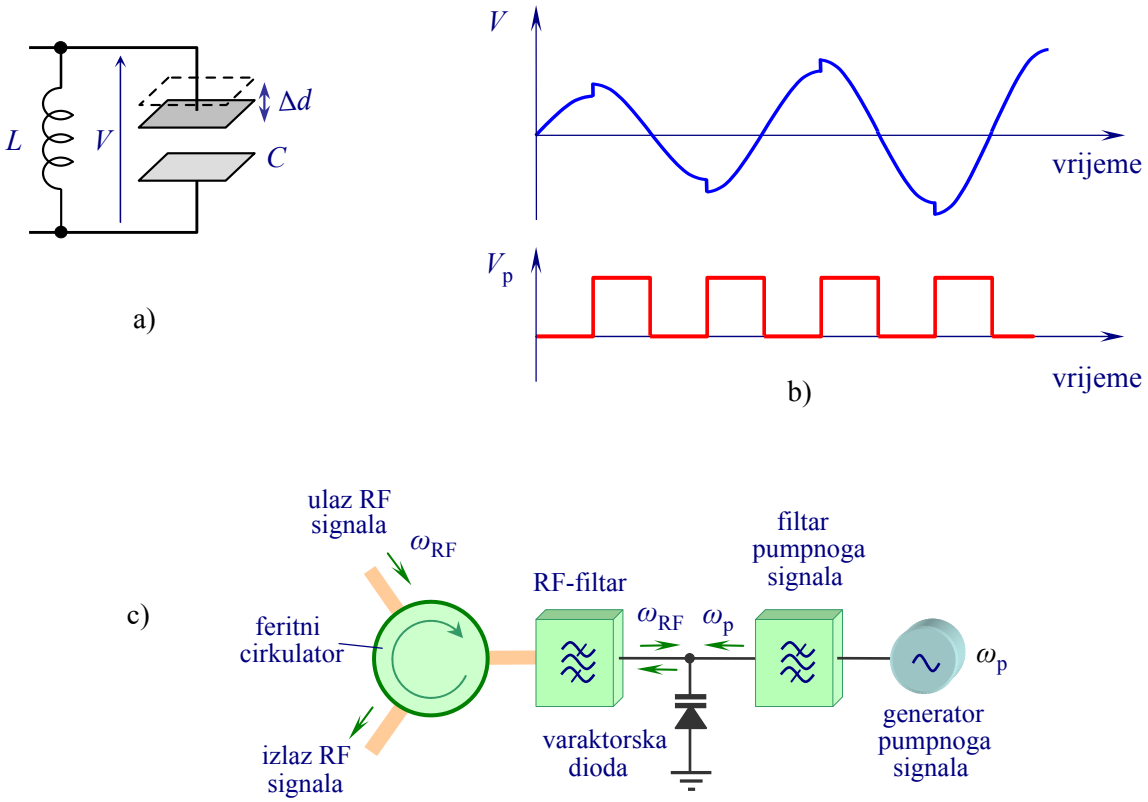
Parametarsko pojačalo elektronički je sklop u kojem se promjenom jednoga parametara elektromagnetska energija na frekvenciji f_p pretvara u snagu na drugoj frekvenciji f_s. Zasniva se na vremenski promjenljivoj ili nelinearnoj reaktanciji. Primjenom varaktorske diode s vremenski promjenljivom reaktancijom, tj. kapacitetom može se ostvariti refleksijsko pojačalo u mikrovalnome frekvencijskom području. Načelo rada može se objasniti s pomoću slike 8.158a) u kojoj se kapacitet kondenzatora može namjerno mijenjati. Kad se na kondenzator kapaciteta C dovede izmjenični napon amplitude V, na kondenzatoru će se pojaviti naboj vršne vrijednosti $Q = CV$. Istodobno je u kondenzatoru pohranjena energija $W_\mathrm{e} = ½CV^2 = ½QV$. Ako se pri vršnoj vrijednosti napona, bez obzira na njegov polaritet, poveća razmak između ploča za Δd, onda će se kapacitet smanjiti na $C - \Delta C$. Pritom na kondenzatoru ostaje isti naboj,

ali napon poraste na $V+\Delta V$. Zbog toga što je $Q=(C-\Delta C)(V+\Delta V)$, povećava se pohranjena energija na frekvenciji oscilirajućega signala, tj.

$$W_e+\Delta W_e=\frac{1}{2}(C-\Delta C)(V+\Delta V)^2=\frac{1}{2}Q(V+\Delta V)\,. \qquad (8\text{–}357)$$

Porast energije jednak je obavljenom radu koji je potreban za razmicanje ploča nabijenog kondenzatora, tj. za svladavanje sile kojom se ploče nabijene suprotnim nabojima privlače. Vraćanjem ploča u početni položaj, u trenutku kad je pohranjeni naboj jednak nuli, ne obavlja se rad, pa izostaje učinak na oscilirajući signal. Ako se razmak između ploča opet poveća u trenutku sljedećeg maksimuma (negativnog), ponovo će dio energije biti predan električnom signalu. Taj se postupak dalje ponavlja kako je prikazano na slici 8.158b). U stvarnim izvedbama, umjesto kondenzatora s mehaničkim mijenjanjem kapaciteta, rabi se varaktorska dioda. Potrebna se promjena kapaciteta postiže pomoćnim signalom, tzv. *pumpnim signalom*, koji ima dvostruko višu frekvenciju od korisnoga radiofrekvencijskog signala.

Na slici 8.158c) prikazana je načelna shema refleksijskog pojačala s varaktorskom diodom. Premda pojačanje može porasti do beskonačnosti, izlazna snaga pojačala ne raste u nedogled zbog konačnih gubitaka u varaktorskoj diodi i ostalim komponentama u strujnom krugu te zbog konačne izdašnosti pumpnog izvora, što je pak povezano sa zakonom očuvanja energije. Na jednak se način može ostvariti i uzlazno miješalo s pojačanjem i pretvorbom frekvencije signala u više frekvencijsko područje. Budući da se načelo rada parametarskog pojačala zasniva na nelinearnoj reaktanciji, inherentno se radi o niskošumnim sklopovima. Razine šuma mogu se dodatno sniziti hlađenjem do kriogeničkih temperatura pa se parametarska pojačala nerijetko primjenjuju u niskošumnim ulaznim stupnjevima radioastronomskih i radiometrijskih prijamnika.



Slika 8.158. a) Načelo rada parametarskog pojačala, **b)** grafički prikaz pumpanja energije porastom napona na kondenzatoru i **c)** shema parametarskog pojačala

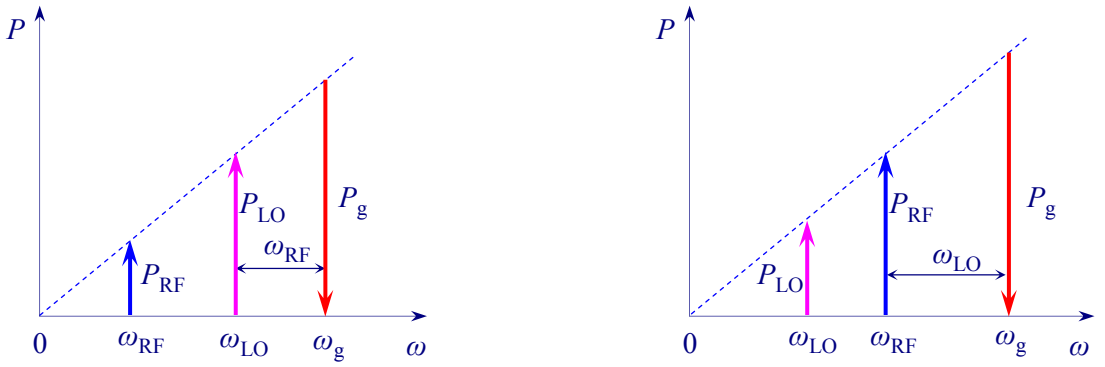
8.10.5. Uzlazni pretvornik

Jedan od najjednostavnijih parametarskih sklopova jest uzlazni pretvornik s gornjim bočnim pojasom. Iz praktičnih razloga poglavito se upotrebljavaju uzlazni pretvornici jer su to stabilni sklopovi s pojačanjem snage. Ovdje je varaktorska dioda pobuđena na frekvenciji ω_{LO}, a signal se dovodi na frekvenciji ω_{RF} koja može biti viša ili niža od ω_{LO}. Iz mnoštva stvorenih frekvencijskih komponenata na izlazu primjenom filtra izdvaja se frekvencijska komponenta gornjeg bočnog pojasa, $\omega_g = \omega_{LO} + \omega_{RF}$. Pretpostavimo sad da je na svim ostalim frekvencijama miješanja varaktorska dioda »opterećena« beskonačnom impedancijom, tj. da se nalazi u otvorenom strujnom krugu. Tad su, uz pumpni signal na frekvenciji ω_{LO}, još prisutni samo signali na frekvencijama ω_g i ω_{RF}. Pri tomu su zanemareni gubitci u svim sprežnim mrežama i filtrima, osim gubitaka u serijskom otporu diode r_s.

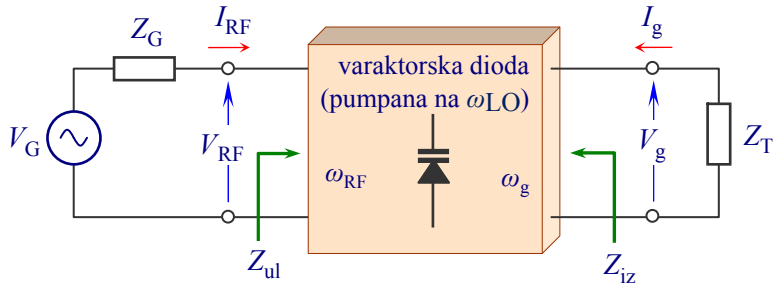
Na slici 8.159 prikazan je vrlo jednostavan način primjene Manley-Roweovih formula na uzlazni pretvornik [4], [6]. Na slici 8.159a) dan je spektrografski prikaz odnosa snaga ulaznog i izlaznog RF signala te pobudnog signala LO (pumpe) kad je $\omega_{LO} > \omega_{RF}$. Na slici 8.159b) prikazan je slučaj $\omega_{LO} < \omega_{RF}$. Strelice na spektralnim komponentama pokazuju koje komponente ulaze, a koje izlaze iz sklopa pretvornika frekvencije.

Sklop pretvornika uzlazne transpozicije frekvencije shematski je prikazan na slici 8.160. U sklopu su razdvojeni prolazi za ulazni odnosno izlazni signal. Jednadžbe malog signala, koje opisuju sklop, mogu se prikazati u sljedećem matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} V_{RF} \\ V_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + \dfrac{S_0}{j\omega_{RF}} & \dfrac{S_1^*}{j\omega_g} \\ \dfrac{S_1}{j\omega_{RF}} & r_s + \dfrac{S_0}{j\omega_{RF}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{RF} \\ I_g \end{bmatrix}, \tag{8–358}$$



Slika 8.159. Spektralni prikaz odnosa između snaga ulaznog i izlaznog RF signala



Slika 8.160. Načelni sklop uzlaznog pretvornika frekvencije

gdje su V_{RF}, V_g, I_{RF} i I_g fazorske komponente napona i struja na ulaznoj i izlaznoj frekvenciji. S_0 i S_1 su koeficijenti diferencijalne elastancije varaktora u uvjetima pobude velikim signalom LO, tj. pumpe. Oni se mogu odrediti jednim od postupaka nelinearne analize, analitički ili numerički, primjenom računala.

Za ulazni krug vrijedi

$$V_{RF} = -I_{RF}Z_G + V_G, \tag{8–359}$$

gdje je Z_G impedancija izvora elektromotorne sile V_G. Uvrštenjem izraza (8–359) u jednadžbu (8–358) može se eliminirati varijabla V_{RF}. Kombiniranjem dviju jednadžba u izrazu (8–359) može se eliminirati i varijabla I_{RF}, tj.

$$V_g = \left[r_s + \frac{S_0}{j\omega_g} + \frac{|S_1|^2}{\omega_{RF}\omega_g} \frac{1}{Z_G + r_s + \dfrac{S_0}{j\omega_{RF}}} \right] I_g + \frac{S_1}{j\omega_{RF}} \frac{V_G}{Z_G + r_s + \dfrac{S_0}{j\omega_{RF}}}. \tag{8–360}$$

Iz izraza (8–360) može se izvesti izlazni nadomjesni sklop. On se sastoji od nadomjesnog izvora napona, koji je dan drugim članom zdesna u izrazu (8–360), i serijske impedancije koja je dana prvim članom. Stoga je izlazna impedancija

$$\begin{aligned} Z_{iz} = R_{iz} + jX_{iz} &= r_s + \frac{S_0}{j\omega_g} + \frac{|S_1|^2}{\omega_{RF}\omega_g} \frac{1}{Z_G + r_s + \dfrac{S_0}{j\omega_{RF}}} = \\ &= r_s + \frac{S_0}{j\omega_g} + \frac{m_1^2\omega_c^2}{\omega_{RF}\omega_g} \frac{r_s^2}{Z_G + r_s + \dfrac{S_0}{j\omega_{RF}}}, \end{aligned} \tag{8–361}$$

gdje je veličina m_1, koeficijent modulacije elastancije, definirana s pomoću izraza (8–345) za $\omega_c = 2\pi f_c$ kao

$$m_1 = \frac{|S_1|}{S_{maks} - S_{min}} = \frac{|S_1|}{\omega_c r_s}.$$

Razinu *razmjenjive izlazne snage* [9] valja odrediti dijeljenjem polovine kvadrata amplitude izlaznog napona uz otvorene izlazne priključke s realnim dijelom izlazne impedancije. Iz izraza (8–360) dobiva se

$$P_{iz} = \frac{1}{2R_{iz}} \frac{|S_1|^2}{\omega_{RF}^2} \frac{|V_G|^2}{\left| Z_G + r_s + \dfrac{S_0}{j\omega_{RF}} \right|^2}. \tag{8–362}$$

S druge strane, ulazna je razmjenjiva snaga $|V_G^2|/(2R_G)$, gdje je R_G realni dio impedancije Z_G. Omjer tih dviju snaga daje vrijednost razmjenjivog pojačanja. Primjenom izraza (8–360) dobiva se

$$\frac{1}{G} = \left(\frac{\omega_{RF}}{m_1\omega_c} \right)^2 \frac{\left| Z_G + r_s + \dfrac{S_0}{j\omega_{RF}} \right|^2}{r_s R_G} + \frac{\omega_{RF}}{\omega_g} \frac{r_s + R_G}{R_G}.$$

Lako se može vidjeti da kad serijski otpor diode teži nuli, G teži omjeru frekvencija ω_g/ω_{RF}, što je u skladu s Manley-Roweovim relacijama.

Na sličan način može se odrediti i ulazna impedancija. Na strani tereta vrijedi

$$V_g = -Z_T I_g .$$

Uvrštenjem tog izraza u sustav jednadžba (8–358) izlazi

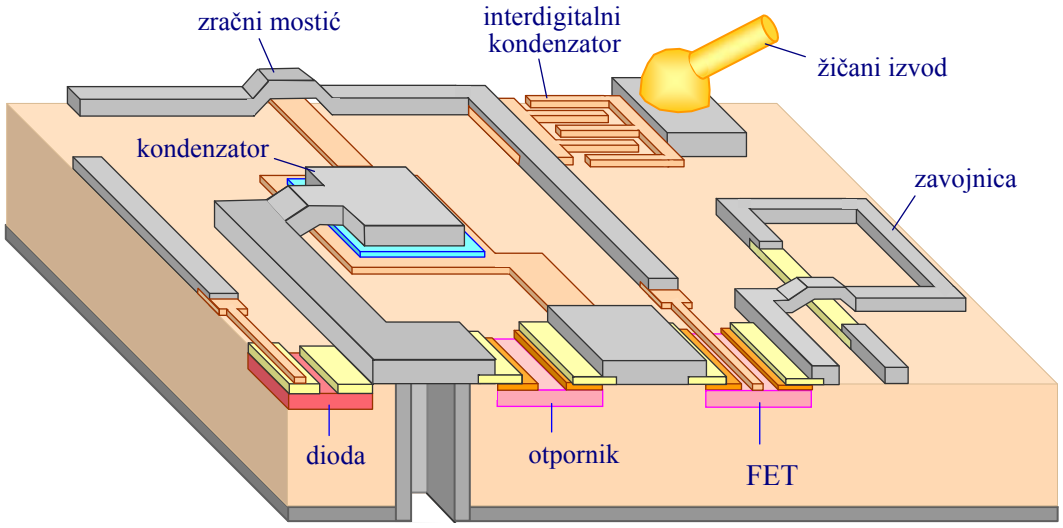
$$Z_{ul} = R_{ul} + jX_{ul} = r_s + \frac{S_0}{j\omega_{RF}} + \frac{m_1^2\omega_c^2}{\omega_{RF}\omega_g} \frac{r_s^2}{Z_G + r_s + \frac{S_0}{j\omega_{RF}}} . \qquad (8–363)$$

Dovođenjem ulaznog i izlaznog kruga u rezonanciju može se znatno povećati pojačanje pretvorbe i smanjiti faktor šuma. Ne ulazeći dublje u analizu faktora šuma, može se općenito reći da sklopovi s nelinearnom reaktancijom stvaraju manje šuma od sklopova s nelinearnim otporom jer se jedini izvori šuma u varaktorskim sklopovima nalaze u serijskom otporu r_s i otporima gubitaka unutar sprežnih mreža.

8.11. Mikrovalni integrirani sklopovi

Tendencija razvoja svake razvijene tehnologije usmjerena je smanjenju dimenzija, težine, cijene i povećanju složenosti. Posljednjih se dvadesetak godina i mikrovalna tehnologija kreće u tom smjeru, prije svega, zahvaljujući snažnom razvoju mikrovalnih integriranih sklopova sa svrhom zamjene masivnih i skupih valovodnih i suosnih naprava minijaturnim, laganim i jeftinim planarnim napravama. Ta je tehnologija slična, a po mnogim svojstvima i obilježjima istovrijedna, tehnologiji digitalnih integriranih sklopova koja je znatno ubrzala razvoj računalnih sustava velikih mogućnosti obradbe podataka.

Mikrovalni integrirani sklopovi (engl. *Microwave Integrated Circuits*; MIC) sjedinjuju razne prijenosne strukture poput koncentriranih otpornika, zavojnica i kondenzatora te aktivne komponente poput dioda i tranzistora. Tehnologija mikrovalnih integriranih sklopova napredovala je do točke u kojoj je moguća integracija cjelokupnih mikrovalnih podsustava, poput prednjeg kraja prijamnika, radarskog i komunikacijskog primopredajnog modula, na jednom jedinom čipu čija površina može iznositi samo nekoliko četvornih milimetara.



Slika 8.161. Izvedba mikrovalnog sklopa u MMIC-tehnologiji

Postoje dvije različite vrste mikrovalnih integriranih sklopova. Hibridni mikrovalni integrirani sklopovi imaju jedan ili više slojeva metalizacije za vodiče i prijenosne linije, a koncentrirane komponente, poput otpora, kapaciteta, induktiviteta, dioda, tranzistora itd., postavljaju se lemljenjem, lijepljenjem ili zavarivanjem na metalizirane kontakte. U novije se vrijeme razvijaju monolitni mikrovalni integrirani sklopovi (engl. *Monolithic Microwave Integrated Circuit*; MMIC) kod kojih su aktivne i pasivne komponente tehnološki izvedeni na ili u samoj podlozi. Podloga je od poluvodičkog materijala, najčešće galij-arsenida, ali u milimetarskome valnom području za pasivne se sklopove uspješno rabe i podloge od indij-fosfida. Na podlozi se općenito primjenjuje nekoliko metalnih, dielektričnih i otpornih slojeva.

MMIC-tehnologija ima niz prednosti u odnosu na druge tehnologije proizvodnje mikrotrakastih sklopova. Jedna od najvećih nalazi se u posve automatiziranom proizvodnom procesu, pri kojem je ponovljivost električnih obilježja proizvedenih sklopova vrlo velika. Njome se također postižu krajnje male dimenzije i težine sklopova, pa nalaze veliku primjenu u profesionalnim radiokomunikacijskim i vojnim sustavima posebne namjene. Na slici 8.161 prikazana je izvedba tipičnog sklopa u MMIC-tehnologiji.

No MMIC-tehnologija upućuje i na izvjesne nedostatke. To je ponajprije visoka cijena ulaganja u samu tehnologiju za proizvodnju sklopova na skupim poluvodičkim podlogama poput galij-arsenida i indij-fosfida. Proizvodna postrojenja i alati vrlo su skupi, a tolerancije izmjera pojedinih elektroničkih komponenata toliko su male da je za male proizvodne serije često neisplativa. Proizvodnja sklopova koji sadrže nemali broj odsječaka prijenosnih linija ili hibrida obično je skupa i nerijetko ekonomski neisplativa jer linijske komponente vrlo često zauzimaju veliku površinu na poluvodičkoj podlozi (čipu).

8.11.1. Materijali za podloge mikrovalnih integriranih sklopova

Materijali podloga za izradu mikrotrakastih struktura dijele se na savitljive (plastične) i krute (keramičke) te na meke i tvrde. Meki se materijali poglavito rabe za izradu laminata, a tvrdi se materijali nerijetko primjenjuju u tehnologiji tankoga filma.

Uz tehnologiju koja se primjenjuje za oblikovanje metalnog trakastog vodiča, valja računati i s nekoliko dodatnih faktora koje je dobro razmotriti prilikom odabira materijala za podloge:

- relativna permitivnost i njezina ovisnost o temperaturi i frekvenciji,
- tangens gubitaka ($\tan\delta_\varepsilon$),
- površinska hrapavost,
- homogenost i izotropnost,
- dopušteno temperaturno područje,
- toplinska vodljivost,
- temperaturni koeficijent rastezanja,
- mehanička čvrstoća, stabilnost, obradivost itd,
- kemijska svojstva; adhezivnost s metalnim slojem, otpornost na vlagu i jetkala, itd.

Glavne odlike tih materijala prikazane su u dodatku D.

U uporabi se često nalaze meke teflonske podloge (engl. *poly-tetra-fluoro-ethylene*; PTFE) zbog svojih izvanrednih dielektričnih svojstava. Teflonske podloge ojačane staklenim tkanjem imaju neznatno veće gubitke, ali znatno veću mehaničku i kemijsku stabilnost. Zbog uporabe staklenoga tkanja pokazuju stanovitu neizotropnost.

Meke podloge izrađuju se u obliku tankih ploča koje su na objema stranama metalizirane (obično bakrom). Debljine ploča nalaze se u rasponu vrijednosti od 0,125 do 6,35 mm, a debljine metalizacije obično iznose 17,5 ili 35 μm.

8.11.2. Pasivne koncentrirane komponente

Široko rasprostranjena primjena integriranih sklopova, u kombinaciji s napretkom tehnologije i minijaturizacije dovela je do razvoja komponenata mikrovalnih sklopova znatno manjih dimenzija od valne duljine [33], tj. kudikamo manjih od komponenata mreža s raspodijeljenim parametrima. Te su koncentrirane komponente nerijetko manje od desetine valne duljine elektromagnetskoga vala u slobodnome prostoru. Time je omogućeno integriranje znatno većeg broja komponenata po jedinici površine, što je posebno korisno za rad u nižem mikrovalnom području. Ipak, viši faktor dobrote, tj. manje gubitke, moguće je postići jedino uporabom sklopova s raspodijeljenim parametrima. Koncentrirane komponente mogu se proizvesti izravno na dielektričnoj podlozi (otpori, kapaciteti ili induktiviteti).

Otpornici

U mikrovalnim integriranim sklopovima najčešće se rabe planarni metalslojni otpornici. Geometriju metalnog sloja karakterizira njegova duljina l, širina w i debljina t, slika 8.162a). Pritom debljina metalnog sloja mora biti znatno manja od dubine prodiranja δ na radnoj frekvenciji. U odjeljku 2.7. pokazano je da dubina prodiranja elektromagnetskog polja u vodič opada porastom frekvencije f kao posljedica površinskog učinka, tj. $\delta=(\pi f\mu_{\mathrm{m}}\sigma)^{-1/2}$, gdje je σ provodnost, a μ_{m} permeabilnost metalnog sloja. Čip-otpornici obično se izrađuju od nemagnetičnih materijala za koje je $\mu_{\mathrm{m}}=\mu_0=4\pi 10^{-7}$ Vs/Am.

Da bi se metal-slojni otpornik ponašao kao koncentrirana komponenta, njegove izmjere w i l moraju biti znatno manje od valne duljine. Tad će razdioba struje uzduž presjeka otpornika biti posvuda jednolika, a vrijednost otpora neće ovisiti o frekvenciji. Vrijednost otpora metal-slojnog otpornika, prikazanog na slici 8.162, može se izračunati formulom

$$R=\frac{l}{\sigma w t}. \tag{8–364}$$

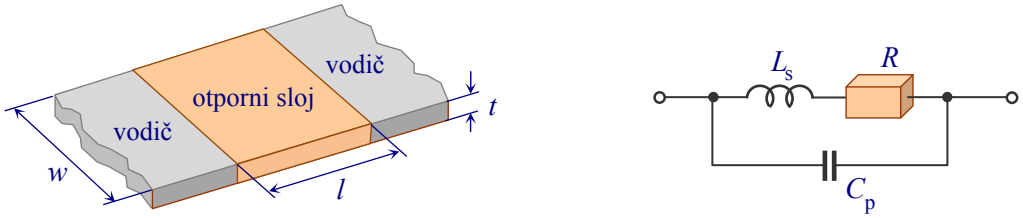
No u praksi je poznato da stvarni otpor umnogome ovisi o kakvoći postupka nanošenja metala na podlogu te o finoći strukture i hrapavosti metalnog sloja. Stoga se nerijetko uvodi novi parametar koji karakterizira tanke metalne slojeve ili filmove u mikrovalnim integriranim sklopovima. To je otpor po kvadratu metalnog filma, $R_{\square}$, debljine t u koji su uključeni parametri tehnologije izrade. Taj se otpor može napisati kao

$$R_{\square}=\frac{1}{\sigma t}. \tag{8–365}$$

Primjenom tog parametra konačno se može naći formula za traženi otpor metalnog sloja, tj.

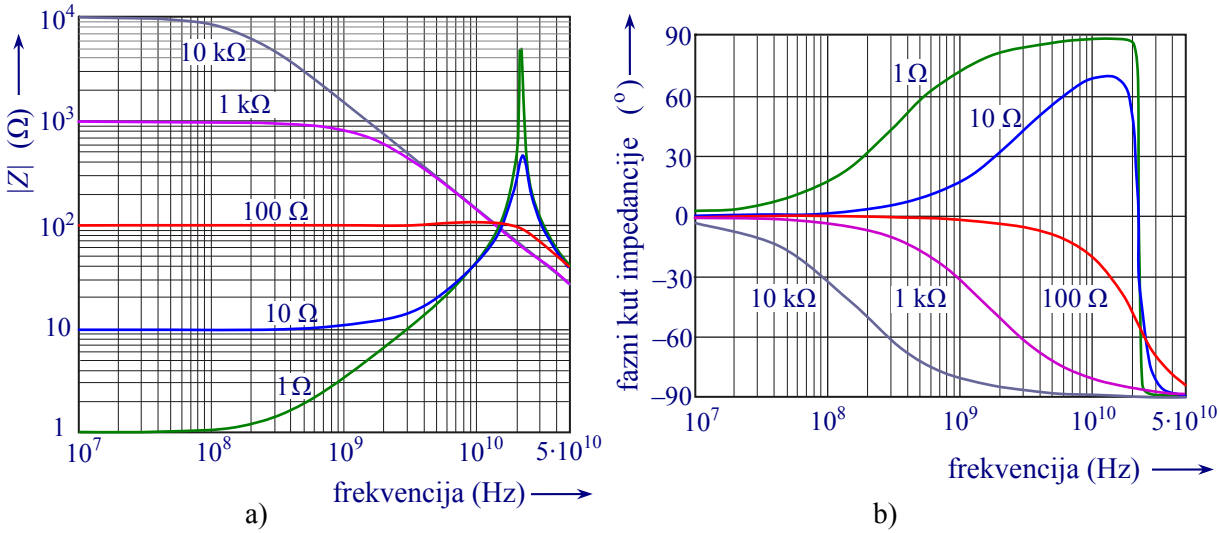
$$R=R_{\square}\frac{l}{w}. \tag{8–366}$$

Uz tipičnu vrijednost otpora, još je važno poznavati izdržljivost otpornika u pogledu disipacije snage te temperaturni koeficijent i stabilnost strukture metal-slojnog otpornika.



a) b)

Slika 8.162. a) Shematski prikaz metal-slojnog otpornika i **b)** nadomjesna shema stvarnog otpornika



Slika 8.163. Modul **a)** i fazni kut **b)** impedancije tipičnih čip-otpornika duljine 1 mm

No realni otpornici, ali i druge pasivne čip-komponente, imaju parazitske elemente zbog konačnih izmjera i blizine uzemljene ravnine. Na slici 8.162 b) prikazana je najednostavnija moguća nadomjesna shema otpornika koja sadrži parazitski serijski induktivitet tipične vrijednosti u rasponu od 5 do 10 nH i paralelnog kapaciteta do nekoliko pikofarada. Svi ti parametri znatno ovise o obliku i izmjerama same strukture, a jednako tako i o postupcima priključivanja komponente na tiskanu pločicu. Stoga stvarni otpornik, bilo čip bilo monolitni, ima ograničeno frekvencijsko područje primjene. Na slici 8.163 prikazani su moduli i fazni kutovi impedancije tipičnih čip-otpornika duljine 1 mm za nekoliko nominalnih vrijednosti otpora.

Zavojnice

Na slici 8.164 prikazane su tipične izvedbe i oblici koncentriranih induktivnih komponenata za rad u mikrovalnome području. U osnovi postoje tri skupine koncentriranih komponenata s induktivitetom, zavojnica na dielektričnom tijelu te ravni i spiralni trakasti vodiči. Sve se te komponente mogu dovoljno točno proračunati s pomoću nekoliko empirijskih formula. Izrađuju se konvencionalnim postupcima izrade trakastih sklopova, tj. vodljiv sloj nanosi se na materijal podloge. Omski gubitci u zavojnici nastaju zbog konačne provodnosti metala vodljivog sloja. To se uzima u obzir serijskim otporom R. Da ne bi došlo do povećanja gubitaka, debljina trakastog vodiča mora biti barem tri do četiri puta veća od dubine prodiranja δ.

Jedno od najznačajnijih obilježja koncentrirane (minijaturne) zavojnice njezin je faktor dobrote. Faktor dobrote definiran je izrazom (7–105) u odjeljku 7.4.1, tj.

$$Q = \frac{\omega L}{R}.$$

Vrijednost induktiviteta zavojnice na slici 8.164a) može se naći u literaturi [38]. Na istoj je slici prikazana i razmjerno jednostavna nadomjesna shema zavojnice, koja sadrži parazitski serijski otpor tipične vrijednosti od 0,2 do 1 Ω i paralelni kapacitet do nekoliko desetina pikofarada. Kao i za čip-otpornik, svi ti parametri ovise o obliku i izmjerama same strukture.

Na slici 8.165 prikazani su moduli i fazni kutovi impedancije čip-induktiviteta duljine oko 1 mm i topologije sa slike 8.164a), za nekoliko nominalnih vrijednosti induktiviteta.

Vrijednost ravnog trakastog induktiviteta, slika 164 b), može se izračunati formulom

$$L = 2l\left[\ln\left(\frac{l}{w+t}\right) + 0{,}22\frac{w+t}{l} + 1{,}19\right] \text{ nH}, \qquad (8\text{–}367)$$

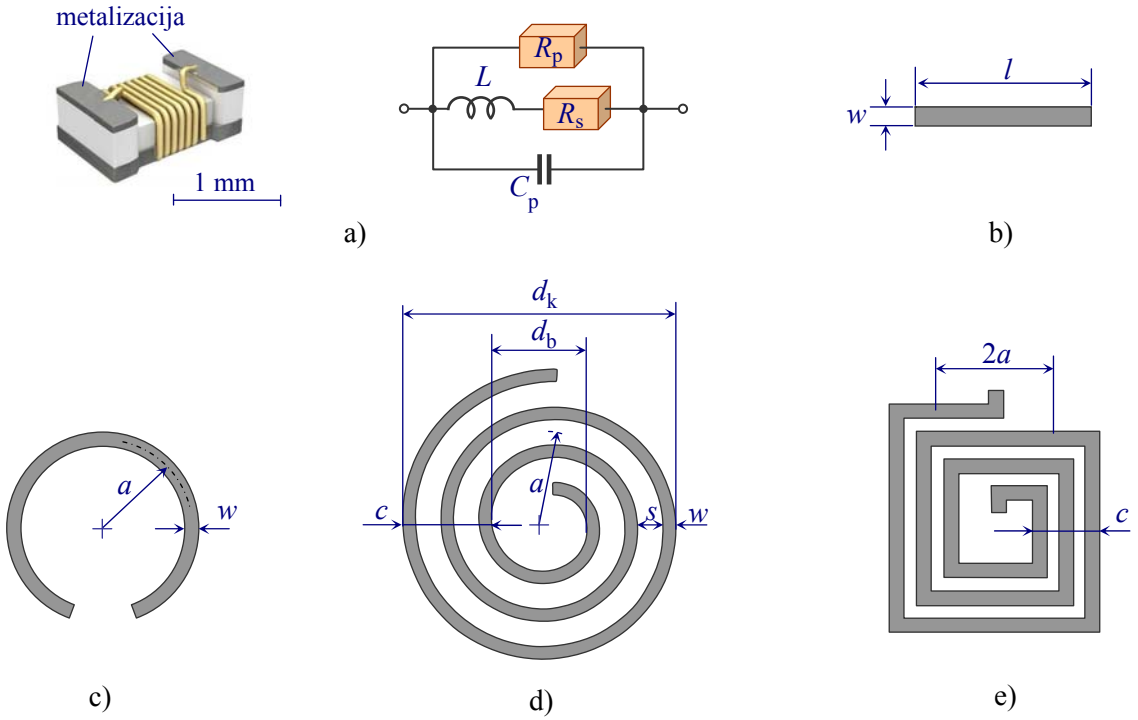
izraženo u nH. Ovdje je duljina l zadana u cm, a otpor gubitaka iznosi

$$R = \frac{Kl}{2\sigma w \delta}, \tag{8–368a}$$

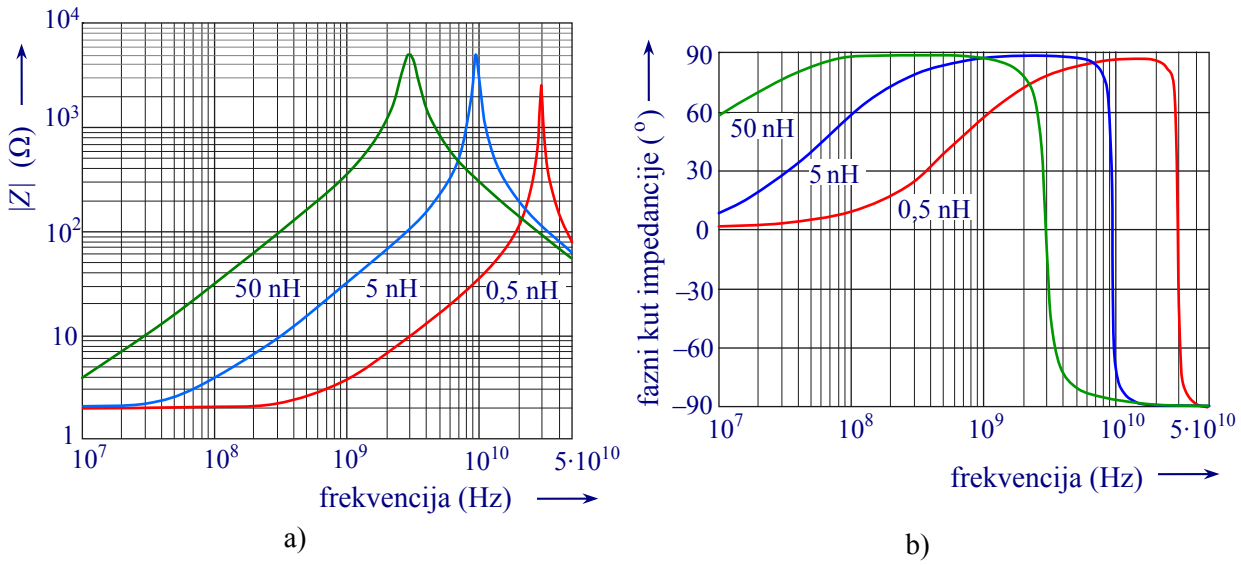
gdje su u obzir uzete struje s obiju strana trake. Faktor K ovisi o razdiobi struje i nalazi se u rasponu od 1,3 do 2. Primjenom izraza (8–186) za dubinu prodiranja struje u metal dobiva se

$$R = 10^{-3} \frac{Kl}{w} \sqrt{\frac{f}{\sigma}}, \tag{8–368b}$$

što pokazuje da je serijski otpor razmjeran drugome korijenu frekvencije. Ravni, uski, vodiči pokazuju vrijednosti induktiviteta u rasponu od 0,5 do 4 nH.



Slika 8.164. Koncentrirani induktiviteti; **a)** stvitak s pripadajućom nadomjesnom shemom, **b)** ravna traka, **c)** trakasti zavoj, **d)** kružna trakasta spirala i **e)** kvadratna trakasta spirala



Slika 8.165. Modul **a)** i fazni kut **b)** impedancije tipičnih čip-zavojnica duljine 1 mm sa slike 8.164a)

Veće vrijednosti induktiviteta mogu se ostvariti uporabom spiralnih zavojnica. Induktivitet zavojnice s jednim zavojem na slici 8.164) može se približno izračunati formulom

$$L = 2\pi a\left[\ln\left(\frac{8\pi a}{w}\right) - 2\right] \text{ nH}, \tag{8–369}$$

gdje je a srednji polumjer zavoja u cm, a w širina trake u cm. Induktivitet uglavnom ovisi o površini petlje.

Za veći broj zavoja (slika 8.164d)) dobre rezultate daje formula

$$L = \frac{394a^2N^2}{8a + 11c} \quad \text{nH}, \tag{8–370}$$

gdje je $a=(d_k+d_b)/4$ srednji polumjer u cm, a $c=(d_k-d_b)/2$ u cm, a N broj zavoja.

Induktivitet se može odrediti i primjenom ove empirijske formule, dobivene mjerenjima, s pogreškom manjom od 5%,

$$L = 21{,}5aN^{5/3}\ln(8a/c) \quad \text{nH}. \tag{8–371}$$

Za spiralne zavojnice kvadratnog oblika sa slike 8.164e) vrijedi formula

$$L = 24{,}1aN^{5/3}\ln(8a/c) \quad \text{nH}, \tag{8–372}$$

gdje je $2a$ srednja stranica kvadrata, a c je širina zavojnice u cm. U obama primjerima minimalna se duljina zavojnice dobiva za odnos $a/c=0{,}75$.

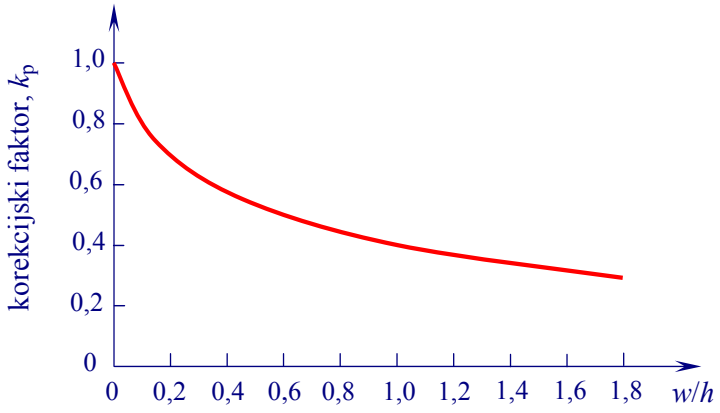
Kružna spirala ima nešto manju duljinu od kvadratne spirale pa joj je neznatno veći faktor dobrote. No kvadratna spirala ima prednost zbog jednostavnije izvedbe procesom jetkanja. Pri jakoj sprezi između zavoja, induktivitet je približno razmjeran kvadratu broja zavoja. Najveći mogući faktor dobrote može se dobiti formulom

$$Q = 2{,}2\frac{d_{\text{maks}}}{k_p}\sqrt{\frac{f}{\sigma}}, \tag{8–373}$$

za ukupnu duljinu zavojnice d_{maks} u cm i faktor $k_p=1$, a induktivitet primjenom formule

$$L = 5{,}21N^2d_{\text{maks}} \quad \text{nH}. \tag{8–374}$$

Faktor dobrote razmjeran je drugome korijenu frekvencije dok je god duljina zavojnice manja od desetine valne duljine. Za veće zavojnice moraju se uzeti u obzir učinci raspodijeljenih parametara.



Slika 8.166. Relativno smanjenje induktiviteta zbog utjecaja vodljive ravnine u blizini planarne zavojnice

Ako je zavojnica smještena blizu uzemljene ravnine, kao u mikrotrakastim izvedbama, onda vrijednosti induktiviteta u prijašnjim izrazima valja smanjiti zbog učinka raspodijeljenog linijskog kapaciteta. Učinci tog kapaciteta mogu se uzeti u obzir korekcijskim faktorom k_p koji je grafički prikazan na slici 8.166, a nalazi se u nazivniku izraza (8–373).

Ako se rabi podloga s uzemljenom ravninom (mikrotrakasta linija), onda se nadomjesni induktivitet vrlo tanke i razmjerno kratke trake može izračunati primjenom izraza

$$L = \frac{Z_0 l}{v_f}, \tag{8–375}$$

gdje je v_f fazna brzina elektromagnetskoga vala, a Z_0 karakteristična impedancija mikrotrakaste linije (vidjeti primjer 3.1. u odjeljku 3.4).

Koncentrirani kapaciteti

U mikrovalnim integriranim sklopovima na dielektričnoj podlozi mogu se izravno izraditi i minijaturne kapacitivne komponente. No u hibridnim se integriranim sklopovima rabe i čip-kondenzatori koji se lemljenjem ugrađuju na potrebno mjesto.

Nerijetko se rabe čip-kondenzatori izrađeni na keramičkoj podlozi visoke permitivnosti i malog tangensa gubitaka, slika 8.167a). Njihov se kapacitet može izračunati primjenom izraza

$$C = \varepsilon \frac{S}{t} = \varepsilon \frac{lw}{t}, \tag{8–376}$$

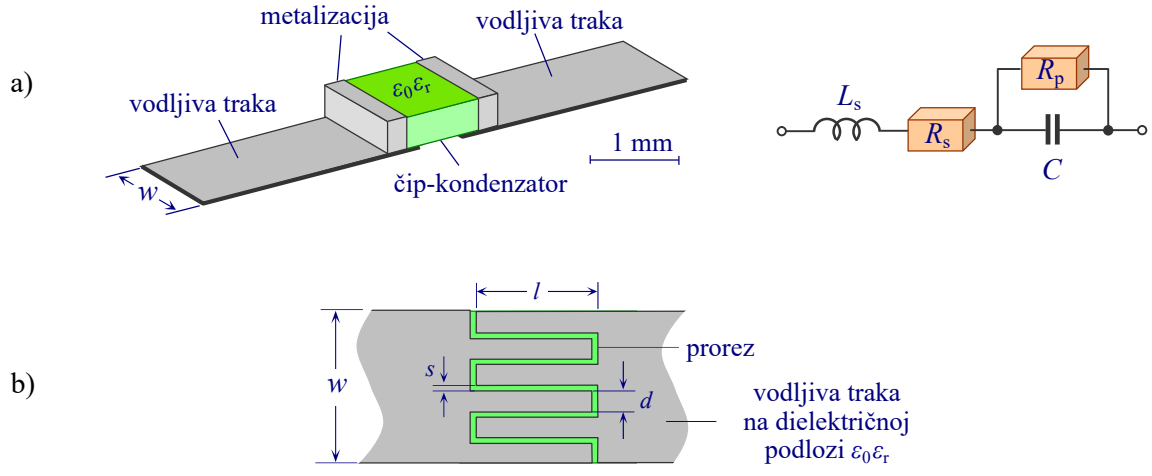
gdje je $S=lw$ površina kondenzatora, a t debljina keramičke podloge.

Ti se kondenzatori izrađuju od dielektrika silicij-dioksid (SiO_2) ili silicij-nitrid koji se često rabe u monolitnim integriranim sklopovima. Čip-kondenzatorima od SiO_2 mogu se ostvariti specifični kapaciteti od 40 pF/mm^2 i vrijednosti kapaciteta od 0,25 do 100 pF. Veće vrijednosti kapaciteta mogu se ostvariti višeslojnim strukturama.

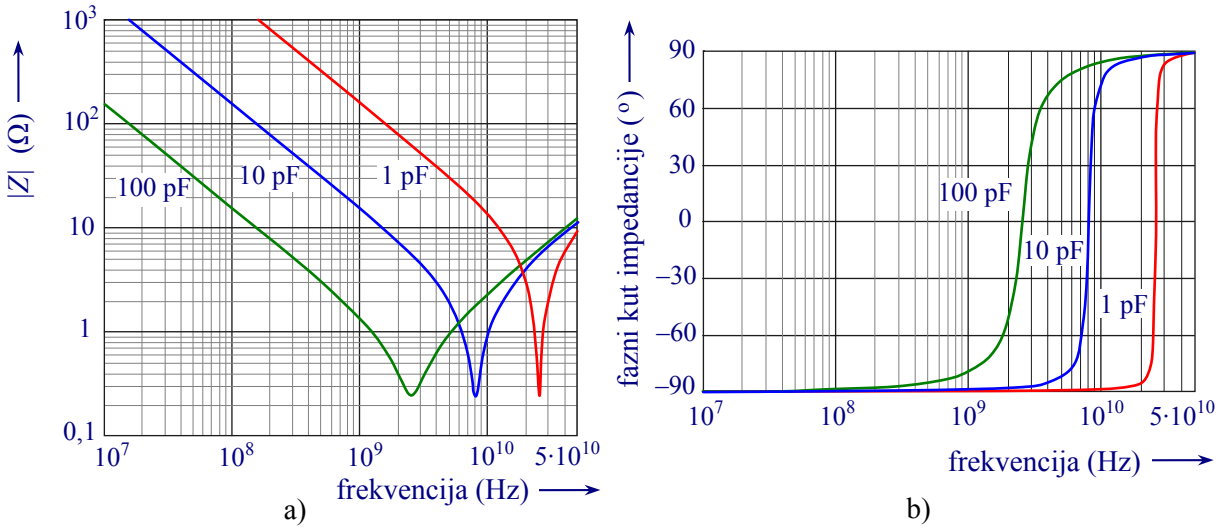
Planarni interdigitalni kapacitet može se izravno integrirati u mikrotrakastu liniju kao što je prikazano je na slici 8.167b). Vrijednost kapaciteta može se izračunati formulom

$$C = \varepsilon_0 \frac{1+\varepsilon_r}{2}(N-1)\, l \frac{K'(u)}{K(u)}, \tag{8–377}$$

gdje su funkcije K i K' potpuni eliptički integrali (odjeljak 4.8.1) argumenta $u=\tan^2(a\pi/4b)$ i geometrijskih parametara: $a=d/2$, $b=(d+s)/2$. N je broj prstiju interdigitalne strukture.



Slika 8.167. a) Planarni čip-kondenzator i nadomjesna shema, **b)** interdigitalni kondenzator



Slika 8.168. Modul **a)** i fazni kut **b)** impedancije tipičnih čip-kondenzatora duljine 1 mm

Učinak kratke otvorene mikrotrakaste linije niske karakteristične impedancije, može se izraziti formulom za koncentrirani kapacitet (odjeljak 5.11.1)

$$C = \frac{l}{v_f Z_0},$$

gdje je v_f fazna brzina, Z_0 karakteristična konstanta, a l duljina linijskog odsječka.

Na slici 8.167a) prikazana i najjednostavnija nadomjesna shema čip-kondenzatora, koja se sastoji od kapaciteta i parazitskih elemenata, serijskog otpora tipične vrijednosti od 0,2 do 1 Ω, paralelnog otpora R_p čiji se učinak može nerijetko zanemariti i serijskog induktiviteta L_s do nekoliko desetaka pikohenrija. Kao i kod čip-otpornika i čip-zavojnice, svi ti parametri ovise o obliku i izmjerama same strukture. Na slici 8.168 prikazani su moduli i fazni kutovi impedancije tipičnih čip-kondenzatora duljine 1 mm prikazanog na slici 8.167a) za nekoliko nominalnih vrijednosti kapaciteta.

8.12. RF-MEMS sklopke

Mikroelektromehanički sustav (MEMS, engl. *Micro-Electro-Mechanical-System*) [34] minijaturna je elektromehanička naprava koja sadrži više mehaničkih i električkih sastavnih dijelova. Premda se u praksi nalazi kao minijaturni senzor i aktuator za obavljanje različitih funkcija, MEMS se u mikrovalnim primjenama poglavito rabi kao minijaturna mehanička sklopka za prekopčavanje radiofrekvencijskih signala. U svrhu smanjenja potrošnja energije prilikom prekopčavanja, upotrebljava se mehanizam elektrostatičke aktuacije. MEMS-tehnologija temelji se na različitim alatima i metodologijama za izradu malih elektromehaničkih struktura čije se dimenzije nalaze u području mikrometara. Veći je dio MEMS-tehnologije preuzet iz tehnologije poluvodičkih integriranih krugova, a gotovo su sve poznate strukture i komponente izrađene na silicijevim podlogama kao u izvedbama monolitnih integriranih sklopova.

Upotrebljavaju se dvije osnovne vrste MEMS-sklopke. Prva se temelji na vrlo elastičnom metalnom jezičcu (peru) vrlo male mase, a druga na elastičnom metalnom mostiću ili membrani. Na slici 8.169 prikazana je izvedba s jezičcem. Kad između elastične metalizacije i uzemljene ravnine nema statičkog električnog polja, tad se sklopka nalazi u stanju »isključeno« (slika 8.169a)). Pri tomu sklopka ima vrlo mali kapacitet za mikrovalne signale. Uključivanjem istosmjernog napona između jezičca i uzemljene ploče stvara se dovoljno jako

električno polje koje privlači i savija elastični jezičac prema vrlo tankom dielektričnom sloju velike permitivnosti. Taj sloj leži na uzemljenoj ravnini ili trakastom vodiču pa se tako ostvaruje velik kapacitet između dvaju kontakata. MEMS-sklopka na slici 8.169 prekopčava dva kapaciteta: mali kapacitet u stanju »isključeno« (slika 8.169a)) i velik kapacitet u stanju »uključeno« (slika 8.169b)). Sklopke s galvanskim kontaktima izbjegavaju se u praktičnim izvedbama jer pri zatvaranju strujnoga kruga može doći do pojave prijelaznog otpora ili iskrenja pa se jezičac ili membrana mogu slijepiti s uzemljenom pločom i prestaje osnovna funkcija sklopke.

Za geometriju sklopke sa slike 8.169, kapaciteti u stanju »isključeno« i »uključeno« mogu se izračunati primjenom približnih izraza:

$$C_{\text{isklj}} = \frac{1}{\dfrac{h_\text{d}}{\varepsilon_\text{d} S} + \dfrac{h_\text{z}}{\varepsilon_0 S}}, \tag{8–378}$$

$$C_{\text{uklj}} = \frac{\varepsilon_\text{d} S}{h_\text{d}}, \tag{8–379}$$

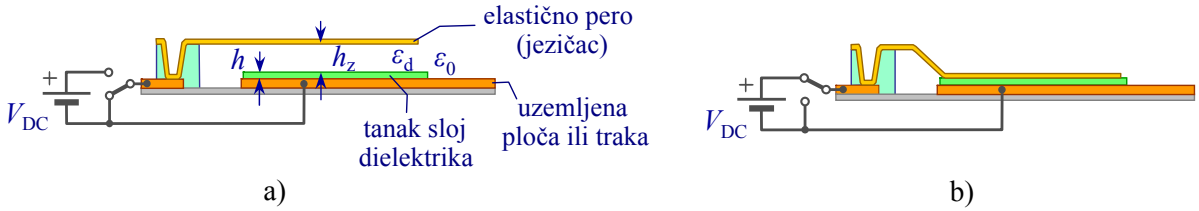
gdje je S površina kapacitivnog kontakta sklopke. Mjera kakvoće sklopke definirana je omjerom kapaciteta u stanju »uključeno« i »isključeno«, tj.

$$\text{mjera kakvoće} = \frac{C_{\text{uklj}}}{C_{\text{isklj}}} = 1 + \frac{h_\text{z}\varepsilon_\text{d}}{h_\text{d}\varepsilon_0}. \tag{8–380}$$

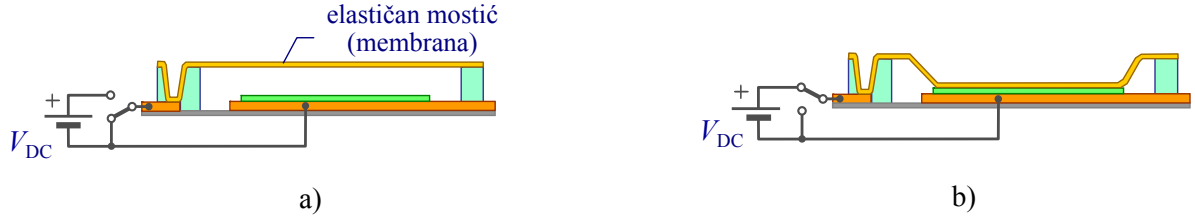
Za tipične parametre sklopke $h_\text{z}=2$ μm, $h_\text{d}=0{,}1$ μm i $\varepsilon_\text{d}=7{,}5\varepsilon_0$ (slika 8.166), mjera kakvoće sklopke poprima redovito veće vrijednosti od 100.

Na slici 8.170 prikazana je izvedba MEMS-sklopke s elastičnim perom oblika mostića ili membrane, koja se obično rabi za prekopćavanje u izvedbama s koplanarnom linijom. Geometrija sklopke minimalno se razlikuje od one na slici 8.169, pa se kapaciteti u stanju »isključeno« na slici 8.170a) i »uključeno« na slici 8.170b) mogu izračunati primjenom izraza (8–378) i (8–379), a mjera kakvoće sklopke primjenom izraza (8–380).

MEMS-sklopke nalaze primjene u sklopovima faznih zakretača i sklopovima za ugađanje rezonantne frekvencije titrajnih struktura poput mikrovalnih rezonatora i rezonantnih antena te u primjenama u kojima se kao sklopke rabe PIN-diode.



Slika 8.169. Shematski prikaz MEMS-sklopke s elastičnim perom ili jezičcem učvršćenim na jednom kraju u stanju: **a)** »isključeno« i **b)** »uključeno«.



Slika 8.170. Shematski prikaz MEMS-sklopke s elastičnim mostićem (membranom) u stanju: **a)** »isključeno« i **b)** »uključeno«

Osnovni nedostatci MEMS-sklopka posljedica su mehaničke prirode tih komponenata, što se očituje u maloj brzini prekopčavanja. Vrijeme života MEMS-sklopka razmjerno je kratko, pa se ne rabe u primjenama s velikim brojem ciklusa prekopčavanja. Jednako tako, za neke je primjene nominalna vrijednost upravljačkoga napon previsoka pa se često poseže za drugim rješenjima. U tablici 8.3. uspoređeno je nekoliko ključnih parametara sklopka s PIN-diodama, FET-ovima te MEMS-komponentama.

Prednosti MEMS-sklopka nalaze se prije svega u jednostavnosti izvedbe sklopova za dovođenje upravljačkih veličina. Odlikuju se također mogućnošću prekopčavanja signala iznimno visokih radnih frekvencija (iznad 40 GHz), malim gubitcima, malim intermodulacijskim izobličenjima i poglavito malom potrošnjom energije prilikom isključivanja i uključivanja strujnoga kruga.

Tablica 8.3. Usporedba ključnih parametara poluvodičkih sklopka i MEMS-sklopka

Vrsta sklopke	Uneseni gubitci	Izolacija	Potrošnja snage	Istosmjerni napon	Brzina prekopčavanja	Frekvencijski pojas
PIN-dioda	0,1-0,8 dB	25-45 dB	1-5 mW	1-10 V	1-5 ns	uzak/širok
FET	0,5-1,0 dB	20-50 dB	1-5 mW	1-10 V	2-10 ns	uzak/širok
MEMS	0,06-0,5 dB	25-60 dB	1 μW	10-20 V	> 30 μs	širok (1-40 GHz)

Literatura

[1] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, New York, 2012.

[2] H. A. Haus, R. B. Adler, *Circuit Theory of Linear Noisy Networks*, John Wiley & Sons, New York, 1959.

[3] W. W. Mumford, E. H. Scheibe, *Noise Performance Factors in Communication Systems*, Horizon House - Microwave, Dedham, 1968.

[4] B. Modlic, J. Bartolić, *Miješanje, mješala i sintezatori frekvencije*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[5] S. A. Maas, *Nonlinear Microwave and RF Circuits*, Artech House, 2nd ed., Boston, 2003.

[6] P. Penfield, R. P. Rafuse, *Varactor Applications*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1962.

[7] J. C. Slater, *Microwave Electronics*, Dover Publications, New York, 1969.

[8] F. E. Gardiol, *Introduction to Microwaves*, Artech House, Dedham, 1984.

[9] K. Kurokawa, *An Introduction to the Theory of Microwave Circuits*, Academic Press, New York, 1969.

[10] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

[11] T. G. Van de Roer, *Microwave Electronic Devices*, Chapman & Hall, London, 1994.

[12] K. Chang, *Microwave Solid-State Circuits and Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1994.

[13] G. Gibbons, *Avalanche-Diode Microwave Oscillators*, Claredon Press, Oxford, 1973.

[14] G. S. Hobson, *The Gunn Effect*, Claredon Press, Oxford, 1974.

[15] R. Sorrentino, G. Bianchi, *Microwave and RF Engineering*, Wiley & Sons, 2010.

[16] S. A. Maas, *Microwave Mixers*, 2nd ed., Artech House, Norwood, 1993.

[17] G. D. Vendelin, A. M. Pavio, U. L. Rohde, *Microwave Circuit Design Using Linear and Nonlinear Techniques*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

[18] G. Gonzalez, *Microwave Transistor Amplifiers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.

[19] M. L. Edwards, J. H. Sinsky, "A new criterion for linear 2-port stability using a single geometrically derived parameter", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques vol. 40, No. 12, December 1992, str. 2303-2310.

[20] K. Kurokawa, "Power waves and the scattering matrix", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-13, March 1965, str. 194-202.

[21] J. M. Rollett, "Stability and power-gain invariants of linear two-ports", IRE Transactions on Circuit Theory, vol. CT-9, March 1962, str. 29-32.

[22] E. L. Tan, "A quasi-invariant single-parameter criterion for linear two-port unconditional stability", MWCL-14(10), 2004, str. 487-489.

[23] M. Ohtomo, "Proviso on the unconditional stability criteria for linear twoports", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 43, no. 5, May 1995, str. 1197–1200.

[24] H. Rothe, W. Dahlke, "Theory of noisy fourpoles", Proceedings IRE, Vol. 44, No. 6, 1956, str. 811-818.

[25] K. Kurokawa, "Injection locking of microwave solid-state oscillators", Proceedings IEEE, vol. 60, No. 10, 1973, str. 1386-1410.

[26] K. Kurokawa, "Microwave solid state oscillator circuits", u M. J. Howes, D. V. Morgan (eds.), *Microwave Devices: Device Circuit Interactions*, Chapter 5, str. 209-265, John Wiley & Sons, New York, 1976.

[27] E. Holzman, R. Robertson, *Solid-State Microwave Power Oscillator Design*, Artech House, Norwood 1992.

[28] R. Adler, "A study of locking phenomena in oscillators", Reprint: Proceedings IEEE, vol. 60, No. 10, 1973, str. 1380-1385.

[29] B. Modlic, I. Modlic, *Titranje i oscilatori*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[30] K. M. Johnson, "Large signal GaAs MESFET oscillator design", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-27, March 1979, str. 217-227.

[31] H. E. Rowe, "Some general properties of nonlinear elements. – Part II. Small signal theory", Proc. IRE, vol. 46, No. 5, 1958, str. 850-860.

[32] A. J. Baden Fuller, *Microwaves*, Pergamon Press, Oxford, 1969.

[33] J-S. Hong, 2nd ed., *Microstrip Filters for RF/Microwave Applications*, John Wiley & Sons, New York 2011.

[34] H. J. De Los Santos, *RF MEMS Circuit Design for Wireless Communications*, Artech House, Boston, 2002.

[35] B. Modlic, I. Modlic, *Modulacije i modulatori*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

[36] D. M. Pozar, *Microwave and RF Design of Wireless Systems*, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[37] F. Giannini, G. Leuzzi, *Nonlinear Microwave Circuit Design*, John Wiley & Sons, Chichester, 2004.

[38] C. Bowick, J. Blyler, C. Ajluni, *RF Circuit Design*, 2nd ed., Elsevier, Burlington, 2008.

9. Uvod u mikrovalna mjerenja

Inženjerska je znanost u osnovi eksperimentalna, što znači da bi se teorijska razmatranja prikazana u ovoj knjizi morala moći provjeriti eksperimentalno. Stoga ćemo u ovom poglavlju opisati osnovne mjerne tehnike, postupke i instrumentaciju koji će nam pomoći pri mjerenju mikrovalnih sklopova i sustava. Mjerenja u mikrovalnome području poglavito se provode harmonijskim ili *monokromatskim* signalima koji su određeni dvjema veličinama, snagom koja se mjeru u vatima (W) i frekvencijom koja se mjeri u gigahercima (GHz). Pritom se svaki modulirani signal može prikazati kombinanjem više monokromatskih signala. Ti elementarni signali, u frekvencijskoj domeni prikazani kao *spektralne linije*, oblikuju *spektar* signala koji je definiran frekvencijama i amplitudama pojedinačnih spektralnih linija dobivenih Fourierovom transformacijom valnog oblika. Stoga ćemo najprije proučiti mjerne postupke i instrumentaciju za mjerenje snage i frekvencije mikrovalnoga signala. Zatim ćemo se upoznati s osnovnim tehnikama mjerenja koeficijenta refleksije, tj. impedancije jednoprolaznih i višeprolaznih mreža i sklopova.

Postupci mjerenja faktora šuma, tangencijalne osjetljivosti detektora te AM- i FM-šuma oscilatora obrađeni su u odjeljcima 8.1, 8.5. i 8.9.

9.1. Mjerenje mikrovalne snage

Jedno od temeljnih mjerenja u mikrovalnome frekvencijskom području jest mjerenje snage [1], [2]. Na niskim frekvencijama, snaga se obično mjeri preko mjerenja napona i struje. Kao što smo vidjeli u prethodnim poglavljima, te veličine nerijetko gube smisao u mikrovalnim prijenosnim sustavima s raspodijeljenim parametrima pa se mjerenja snage na mikrovalnim frekvencijama obično ostvaruju s pomoću toplinskih osjetila poput termistora i mjernih pretvornika poput termopara.

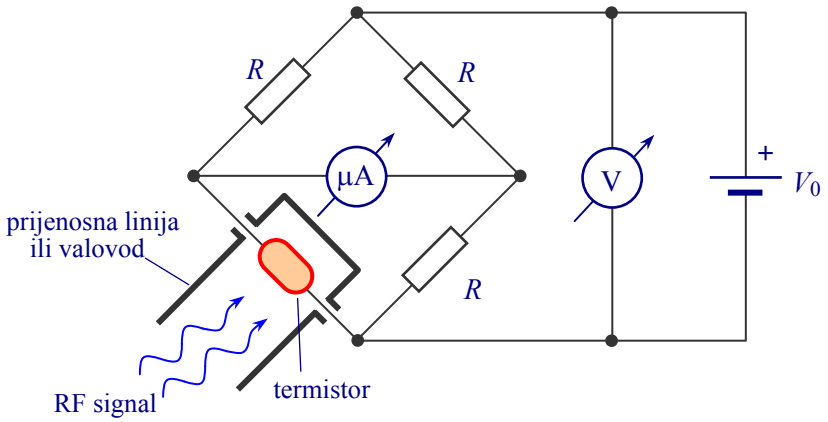
9.1.1. Termistor

Na slici 9.1 prikazano je osjetilo snage (*termistor*) koje zaključuje prijenosnu liniju kao prilagođeni teret i u idealnim uvjetima apsorbira svu upadnu mikrovalnu snagu. Termistor je nelinearni otpor s negativnim temperaturnim koeficijentom, tj. otpor mu opada porastom disipirane snage. Izrađen je od poluvodičkog materijala i obično je oblikovan u malu kuglicu promjera 0,4-0,5 mm. Time su zajamčeni mala masa, mali toplinski otpor i mali kapacitet. Na taj je način smanjena tromost mjernog sustava, tj. toplinska vremenska konstanta. Termistor se postavlja u Wheatstoneov most kojem se na okomitu dijagonalu dovodi prednapon iz istosmjernog ili izmjeničnog izvora niske frekvencije.

Bez mikrovalnoga signala u liniji most je uravnotežen, tj. istosmjerni se prednapon tako namjesti da nelinearni otpor poprimi vrijednost R koju imaju i precizni otpori u preostalim granama mosta. V_0 je napon pri kojem je uspostavljena ravnoteža mosta. U ravnoteži kroz ampermetar ne protječe struja, a termistor disipira snagu

$$P_0 = \frac{V_0^2}{4R}. \tag{9–1}$$

Na prijenosnu liniju zaključenu termistorom zatim se dovodi mikrovalna snaga koja se želi izmjeriti. Ta snaga proizvodi dodatnu disipaciju i zagrijavanje termistora pa most više nije uravnotežen. Ravnoteža se može ponovno uspostaviti snižavanjem prednapona za vrijednost ΔV. Snaga koju most pritom predaje nelinearnom otporu iznosi



Slika 9.1. Mjerenje snage nelinearnim otporom

$$P_1 = \frac{(V_0 - \Delta V)^2}{4R}. \tag{9–2}$$

Ako se ta snaga smanji za vrijednost koja je jednaka disipiranoj RF snazi P_{RF}, onda je

$$P_{RF} = P_0 - P_1 = \frac{\Delta V}{4R}(V_0 - \Delta V). \tag{9–3}$$

Uz istosmjerni napon, u strujni krug mosta može se dodati i izvor niskofrekvencijskog (NF) signala. Tad se most može automatski uravnotežiti primjenom povratne veze u krugu NF signala. Na mjernoj skali mikroampermetra izravno se očita vrijednost snage u milivatima.

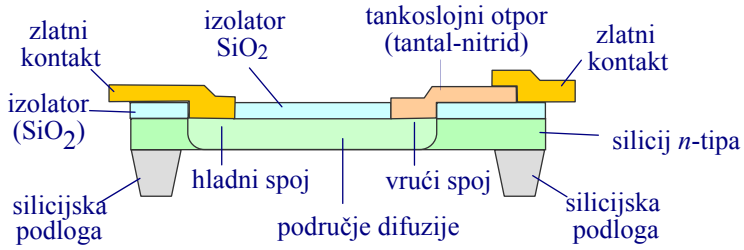
Budući da je termistor osjetljiv na promjene temperature okolice, u mjerni se sklop obično ugrađuje još jedan Wheatstoneov most s dodatnim termistorom [2], [3]. On na izlazu mosta stvara referentni napon koji se dodaje naponu mjernog termistora. Ako referentni termistor ostvaruje izravan termički kontakt s kućištem u koje je ugrađen i mjerni termistor, onda se utjecaj temperature okolice može posve kompenzirati.

Termistorskim mjerilom mogu se mjeriti razine snaga u rasponu od 1 μW do 10 mW i to unutar širokog frekvencijskog područja od 10 MHz do 18 GHz.

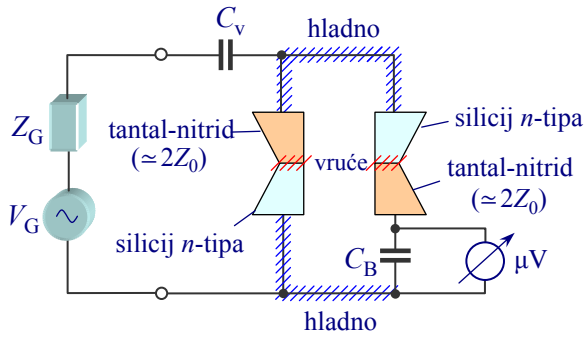
9.1.2. Termopar

Znatno kvalitetnije i osjetljivije osjetilo snage jest *termopar*. On se također postavlja u suosnu liniju kao trošilo poput termistora. Disipacijom snage na izlazu termopara stvara se razlika potencijala. Naime, na kontaktu dvaju različitih metala općenito se pojavljuje napon razmjeran temperaturi (*Seebeckov učinak*). Dva kontakta mogu se serijski spojiti tako da je jedan kontakt podvrgnut zagrijavanju (vrući spoj), a drugi je toplinski izoliran pa je zaštićen od zagrijavanja (hladni spoj). U serijskom spoju pojavit će se razlika napona koja je razmjerna ulaznoj mikrovalnoj snazi. Ta se razlika napona izravno mjeri vrlo osjetljivim voltmetrom. Unatoč tomu što je načelo rada tog osjetila snage vrlo jednostavno, u praktičnoj se izvedbi pojavljuju problemi vezani uz prilagodbu na prijenosnu liniju unutar širokog frekvencijskog područja. Tom se problemu može doskočiti uporabom tehnologije tankog filma tako da se kontakti ostvare nanošenjem različitih materijala na minijaturnu poluvodičku podlogu, kao što je prikazano na slici 9.2.

Na slici 9.3 prikazano je osjetilo snage s dvama istovjetnim termoparovima. U istosmjernome su strujnom krugu termoparovi spojeni serijski, a u mikrovalnome krugu spojeni su paralelno.



Slika 9.2. Termopar



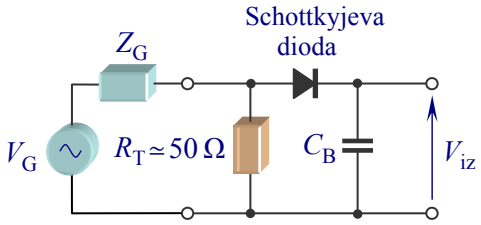
Slika 9.3. Shematski prikaz osjetila snage s dvama termoparovima

Mjerila snage s termoparom mogu raditi u vrlo širokom frekvencijskom području od desetak MHz do 50 GHz, a razine snage koje je njima moguće mjeriti nalaze se u rasponu od 0,1 µW do 100 mW.

9.1.3. Diodni detektor

Za mjerenje mikrovalne snage mogu se također rabiti Schottkyjeve diode (odjeljak 8.4.1) u spoju detektora ovojnice (odjeljak 8.5). No pritom se kod dioda ne rabi učinak toplinskog zagrijavanja kao kod termistora i termopara. U odjeljku 8.5. vidjeli smo da se rad detektora ovojnice poglavito zasniva na nelinearnoj strujno-naponskoj karakteristici Schottkyjeve diode. Osjetljivost tog osjetila ovisi o tangencijalnoj osjetljivosti Schottkyjeve diode (odjeljak 8.5) i znatno je veća je od osjetljivosti toplinskih osjetila snage. U rasponu razina mikrovalnog signala od –60 do –20 dBm, izlazni napon detektora razmjeran je kvadratu ulaznog napona, tj. linearno ovisi o ulaznoj snazi. No na višim razinama ulaznoga signala ponaša se poput ispravljača linearnog odziva između ulaznoga i izlaznoga napona. Za oba slučaja, za nemodulirane signale na izlazu detektora ovojnice dobiva se istosmjerni napon koji se dalje obrađuje u istosmjernome pojačalu. Radi povećanja osjetljivosti mikrovalni se signal nerijetko impulsno modulira ili se istosmjerni detektirani napon uzorkuje pravokutnim impulsima jednakog trajanja signala i stanke. Zatim se dobiveni detektirani signal dalje obrađuje u uskopojasnom audio-pojačalu čija je središnja frekvencija jednaka frekvenciji takta signala uzorkovanja. Na slici 9.4 shematski je prikazan sklop detektora za mjerenje mikrovalne snage. Budući da je ulazna impedancija Schottkyjeve diode u spoju detektora ovojnice znatno viša od tipične karakteristične impedancije mjernog sustava (50 Ω), »širokopojasna prilagodna mreža« sadrži samo jedan otpor, završni otpor vrijednosti 50 Ω.

Dok god radi u području linearne ovisnosti između ulazne snage i izlaznoga napona (kvadratni zakon), detektorom se može mjeriti i snaga amplitudno moduliranih mikrovalnih signala (odjeljak 8.5).



Slike 9.4. Detektor ovojnice u sustavu mjerila snage

Prema izrazu (8–140) otpor diode bez mikrovalnoga signala iznosi

$$R_d = r_j = \frac{1}{g_d} = \frac{1}{\left.\frac{dI}{dV}\right|_{V=0}} = \frac{1}{\alpha I_s},$$

gdje je $\alpha \simeq 40\ V^{-1}$ na sobnoj temperaturi ($\simeq 290$ K). Otuda je otpor Schottkyjeve diode znatno veći od karakteristične impedancije sustava (50 Ω) jer reverzna zasićena struja diode upućuje na tipične vrijednosti u području mikroampera. Izborom poluvodiča, koncentracije donora i metalnog kontakta te reverzne struje ($\simeq 10$ μA), otpor Schottkyjeve diode valja održavati na vrijednosti od oko 2,5 kΩ, što daje kompromis između osjetljivosti diode i veličine otpora. Naime, prevelik otpor smanjuje učinkovitost pretvorbe RF signala u istosmjerni, a preniski otpor stvara poteškoće pri širokopojasnoj prilagodbi.

Budući da je u diodnom osjetilu i osjetilu koje se temelji na termoparu izlazna veličina napon, pri mjerenju se može uporabiti zajednički mjerni uređaj.

9.1.4. Mjerna nesigurnost i faktor umjeravanja

Mjerna nesigurnost pri mjerenju mikrovalne snage poglavito ovisi o kvaliteti upotrijebljenih konektora [3] i prilagodbi mjerila snage impedanciji izvora čija se snaga mjeri. U odjeljku 5.4.1. našli smo izraz (5–57b) za faktor razgođenja između generatora i trošila. Nazivnik tog izraza $|1+\Gamma_G\Gamma_T|^2$ upućuje na mjernu nesigurnost pri mjerenju snage, gdje je Γ_G i Γ_T koeficijenti refleksije impedancije generatora (izvora snage) i trošila (mjerila snage). Stoga se mjerna nesigurnost može naći u rasponu vrijednosti $(1 \pm |\Gamma_G\Gamma_T|)^2$. Primjerice, za vrijednosti modula koeficijenata refleksije od 0,1 i manje, mjerna nesigurnost mjerenja snage ne prelazi 2 % ili 0,086 dB.

Samo u idealnom slučaju, mjerilo snage preuzet će svu mikrovalnu snagu iz izvora snage i pretvorit je u niskofrekvencijski signal. No u stvarnosti mjerilo ne apsorbira svu snagu nego se dio izgubi refleksijom, što je uzeto u obzir članom $(1-|\Gamma_T|^2)$ u izrazu (5–62). Osim zbog refleksije, snaga se gubi i zbog zračenja u okolni prostor te zbog disipacije u vodičima i dielektricima spojnih konektora te priključnih linijskih odsječaka koji povezuju konektor s osjetilom snage. Ukupan učinak svih tih izvora gubitaka može se uzeti u obzir dodatnim faktorom koji se naziva *učinkovitost mjerila snage*, η_M. Stoga se omjer između apsorbirane snage i upadne snage na osjetilo može izraziti *faktorom umjeravanja*

$$K_U = \eta_M\left(1-|\Gamma_M|^2\right),$$

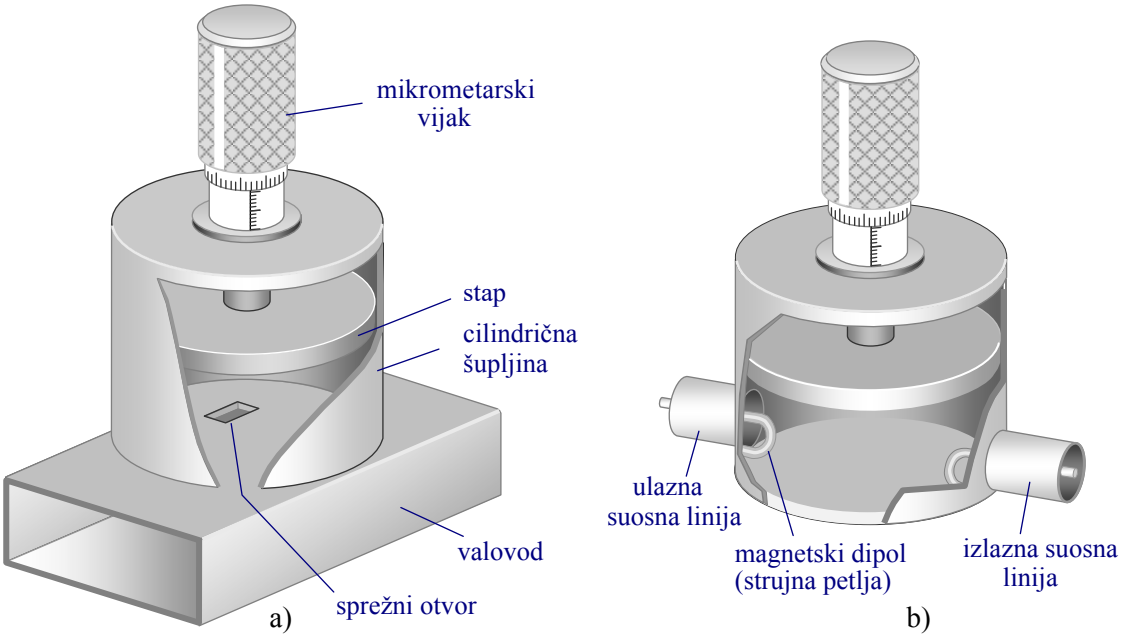
gdje je $\Gamma_M = \Gamma_T$, koeficijent refleksije mjerila snage. Proizvođač mjerila snage obično daje podatak o faktoru umjeravanja K_U u cjelokupnom radnom frekvencijskom području mjerila snage. Taj se faktor najčešće osniva na mjerenjima koja su sljediva prema državnim etalonima. No valja imati na umu da je i dalje prisutna mjerna nesigurnost $(1 \pm |\Gamma_G\Gamma_T|)^2$ koja ovisi o impedanciji izvora čija se snaga mjeri.

9.2. Mjerenje frekvencije

Pri mjerenju frekvencije najčešće se primjenjuju dva, u osnovi, posve različita načela. Jedno se od njih osniva na prostornoj razdiobi polja unutar rezonantne šupljine (valomjera), a drugo na brojanju perioda mikrovalnog signala primjenom digitalne tehnike. Nerijetko se rabi i treći pristup za relativna mjerenja frekvencije primjenom analizatora spektra koji transponira mikrovalni signal u niže frekvencijsko područje gdje se dalje obrađuje klasičnim elektroničkim postupcima. Mjerenje frekvencije može se ostvariti i mjerenjem valne duljine na prijenosnoj liniji ili u valovodu uporabom prorezane linije i diodne sonde.

9.2.1. Valomjer

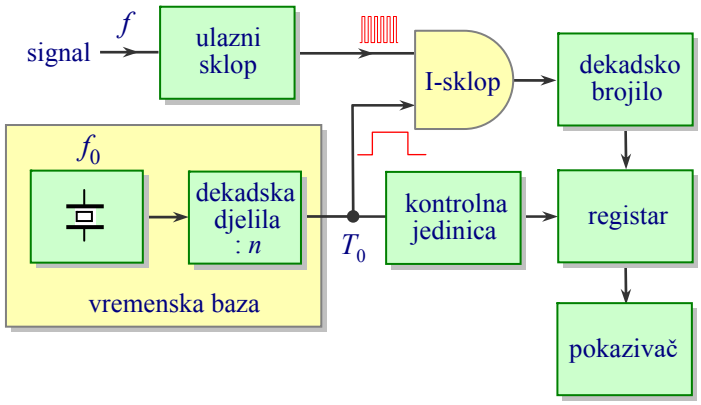
Na slici 9.5 shematski su prikazane izvedbe prijenosnih ili refleksijskih valomjera za mjerenje frekvencije [1], [2] i [4]. Položaj stapa u cilindričnom valovodu mehanički se namješta dok se rezonantna frekvencija valomjera ne uskladi s frekvencijom signala. Ako je rezonantna šupljina spojena kao pojasnozaporni filtar, prema slici 9.5a), onda će u rezonanciji preneseni signal biti minimalan, a za spoj pojasnoga propusta, prema slici 9.5b), izlazni će signal biti maksimalan. Većina je valomjera opremljena skalama koje su izravno umjerene po frekvenciji. Pritom razlučivost valomjera ovisi o širini pojasa rezonantne strukture. Za veliku rezoluciju potrebne su šupljine vrlo visokog faktora dobrote opterećenog rezonatora Q_T (> 1.000). Za to su prikladne šupljinski rezonatori u spoju pojasno zapornog filtra. Točnost mjerenja nalazi se u području ispod 0,1 % i ovisi o temperaturi s faktorom 10^{-5}/°C. Najčešće se rabe cilindrični rezonatori u modu TE_{011} zbog njegovog visokog faktora dobrote.



Slike 9.5. Valomjer s rezonantnom spregnut kao: **a)** pojasnozaporni filtar, **b)** pojasnopropusni filtar

9.2.2. Digitalno brojilo

Znatno veća točnost mjerenja frekvencije postiže se digitalnim mjerilom frekvencije [2] i [4]. Na slici 9.6 prikazana je blokovska shema mikrovalnoga brojila, s konvencionalnim digitalnim brojilom za niže frekvencijsko područje. Konvencionalno brojilo sadrži digitalne sklopove koji broje periode mjerenoga signala tijekom vrlo precizno određenog razdoblja. Osnovni mu je dio oscilator vrlo stabilne frekvencije, koji s dekadskim djelilima tvori vremensku bazu brojila. Oscilator je nerijetko stabiliziran kvarcnim kristalom koji je obično



Slika 9.6. Izravno mjerenje frekvencije digitalnim brojilom

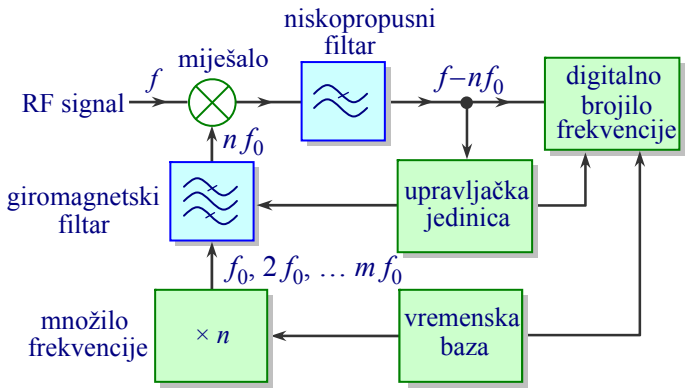
ugrađen u termostat. Time se postiže maksimalna točnost frekvencije, reda 10^{-10}.

U ulaznom se sklopu nalaze pojačalo i okidni sklop. Oni pretvaraju izvorni signal, koji je obično sinusnog valnog oblika, u povorku pravokutnih impulsa. Tako formirani niz pravokutnih impulsa frekvencije ulaznoga signala dovodi se na jedan od ulaza I-sklopa. Na drugi ulaz I-sklopa dovodi se impuls iz vremenske baze, koji određuje koliko će dugo I-sklop biti otvoren. Trajanje tog impulsa, $T_0 = n/f_0$, točno je određeno periodom titraja, tj. frekvencijom f_0 vrlo stabilnog oscilatora i dekadskih djelila. Broj ulaznih impulsa N koje brojilo izmjeri za vrijeme trajanja T_0 impulsa vremenske baze razmjeran je nepoznatoj frekvenciji, tj. $N = fT_0$, pa je nepoznata frekvencija

$$f = N / T_0 . \tag{9–4}$$

Na slici 9.7 prikazana je načelna shema mikrovalnog brojila. Razlika između mikrovalnih i konvencionalnih digitalnih brojila samo je u tomu što je na ulazu mikrovalnih brojila postavljen sklop za transpoziciju frekvencije signala u niže frekvencijsko područje. U tu svrhu služi heterodinski pretvornik frekvencije. Pri tomu je važno da je lokalni oscilator pretvornika frekvencijski i fazno povezan s referentnim izvorom frekvencije. Ovakvi sustavi postižu jednaku točnost mjerenja kao oni s izravnim digitalnim brojilom, s time da omogućuju mjerenja do frekvencija optičkih signala, iznad 2 THz (2.000 GHz).

Točnost mjerenja frekvencije u najvećoj mjeri ovisi o točnosti frekvencije oscilatora u vremenskoj bazi. Stabilnost frekvencije može se povećati primjenom sustava koji se osnivaju na prijelazu atoma iz jedne u drugu energijsku razinu. Svaki materijal ima karakteristične frekvencije na kojima apsorbira i emitira elektromagnetsko zračenje (kvantna fizika). Elektroni svakog elementa mogu se naći u jednom od više diskretnih energijskih stanja. Na temperaturi apsolutne ništice elektroni će zauzeti najniža moguća energijska stanja, ali na višim tempera-



Slika 9.7. Shematski prikaz brojila frekvencije s heterodinskim pretvornikom frekvencije

turama pobuđeni elektroni povremeno će prelaziti u stanje više energije. Kod povratka u niže energijsko stanje elektroni emitiraju elektromagnetsku energiju u obliku fotona. Frekvencija fotona koji nastaje prijelazom iz stanja s energijom W_2 u stanje s energijom W_1 može se izraziti kao

$$f_{12} = \frac{W_2 - W_1}{h}, \tag{9–5}$$

gdje je h Planckova konstanta (vidjeti odjeljak 10.4).

Neki materijali posjeduju vrlo uske energijske razine koje omogućuju vrlo stabilne interakcijske frekvencije. To je posebno prisutno kod vodika, rubidija, cezija i talija, koji pokazuju prijelaz između dviju hiperfinih razina u mikrovalnome frekvencijskom području:

vodikov maser	1,420405751 GHz
rubidijeva ćelija	6,834682608 GHz
cezijev snop	9,192631770 GHz
talijev snop	21,310833945 GHz

Točnost frekvencije dobivene snopom cezijevih atoma reda je 10^{-12}. Usporedbe radi, maksimalna točnost pri određivanju duljine i mase reda je veličine 10^{-9}. Frekvencija je inverzna funkcija vremena pa je frekvencijska norma istodobno i norma za *mjerenje vremena*. Studenoga 1967. godine, opća konferencija za utege i mjere prihvatila je ovu definiciju sekunde:

Sekunda je trajanje 9.192.631.770 perioda elektromagnetskoga zračenja koje odgovara prijelazu između dviju hiperfinih razina osnovnoga stanja cezijevog atoma 133.

Budući da je sekunda definirana preko hiperfinog prijelaza u ceziju, cezijev se izvor naziva *primarni etalon*. Cezijev atomski sat sastoji se od frekvencijskog etalona i brojila. Zbog jednostavnosti izvedbe, prednost se daje atomskom satu s rubidijevim snopom.

9.3. Mjerenje spektra

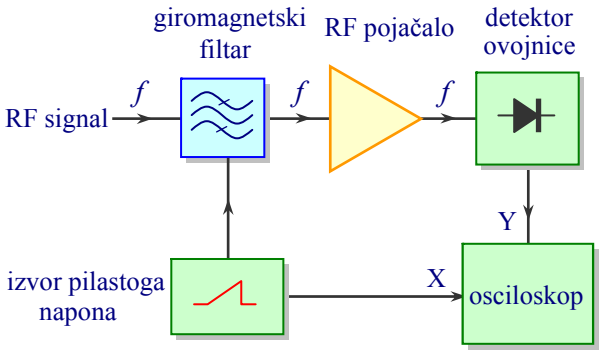
Dosad opisani postupci mjerenja frekvencije podrazumijevali su mjerenja čisto sinusnih signala. No takvi instrumenti ne daju uvid u finu strukturu signala poput modulacije. Za podrobniji opis signala potreban je *analizator spektra* [2], [4] i [7]. Analizator je spektra instrument koji omogućuje raščlambu signala u frekvencijskoj domeni prikazivanjem njegovog spektra, najčešće na ekranu osciloskopa.

Jednostavna izvedba, prikazana na slici 9.8, sadrži elektronički upravljan filtar. U toj se izvedbi i širina pojasa i prigušenje signala mijenjaju promjenom središnje frekvencije filtra. Zbog toga prikaz spektra na ekranu osciloskopa ne daje stvarnu sliku spektra signala, nego označuje konvoluciju signala s prijenosnom funkcijom filtra. Drugim riječima, kakvoća razlučivosti takvog analizatora određena je selektivnošću samog filtra.

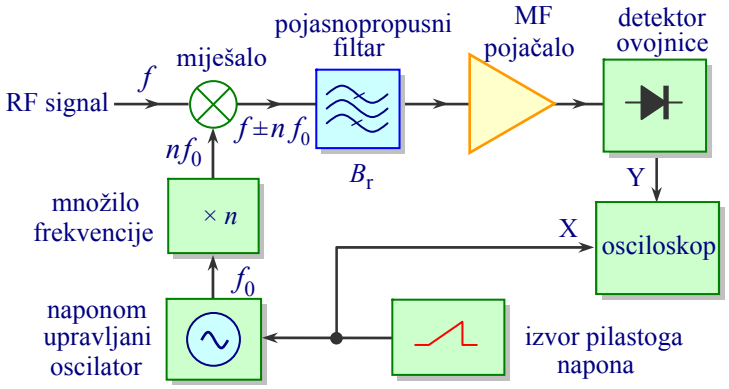
Na slici 9.9 shematski je prikazana izvedba analizatora spektra s transpozicijom frekvencije (heterodinski prijamnik; odjeljak 10.2.1). Na ulazu analizatora postavljen je sklop sličan onome na ulazu mikrovalnoga brojila frekvencije (slika 9.7). Signal frekvencije f ulazi u miješalo u kojem se miješa s jednim od harmonika lokalnog oscilatora frekvencije f_0. Na izlazu tog miješala dobiva se transponirana komponenta frekvencije $|f \pm nf_0|$, gdje je n cijeli broj. Da bi se neka frekvencijska komponenta mogla prenijeti pojasnopropusnim filtrom bez većih izobličenja, mora se zadovoljiti uvjet

$$|f + nf_0| = f_2, \tag{9–6}$$

gdje je f_2 međufrekvencija. Osjetljivost analizatora spektra može se povećati postavljanjem niskošumnog RF pretpojačala ispred miješala.



Slika 9.8. Načelna shema jednostavnog analizatora spektra



Slika 9.9. Heterodinski tip analizatora spektra s harmoničkim miješalom na ulazu

Ako je taj uvjet zadovoljen, onda će se na ekranu osciloskopa pojaviti odziv korisnog signala. Frekvencija lokalnog oscilatora f_0 elektronički se mijenja i linearna je funkcija vremena. Takav se generator naziva *vobler* ili *generator frekvencijske baze*. Zbog toga se sklop ponaša kao uskopojasni filtar s vremenski promjenljivom središnjom frekvencijom. Spektralna je »crta«, tj. linija, na ekranu analizatora spektra zapravo frekvencijski odziv rezolucijskog filtra. To je obično zadnji blok prije detekcije ovojnice. Želi li se postići visoka rezolucija uz visoku točnost mjerenja frekvencije i amplitude signala, treba uskladiti brzinu promjene frekvencije lokalnoga oscilatora sa širinom rezolucijskog filtra (B_r) i širinom frekvencijskog područja unutar kojeg se spektar mjeri.

Budući da se na ulazu analizatora spektra rabi harmoničko miješalo, za istu se frekvencijsku komponentu ulaznog signala može dobiti više odziva na izlazu. Stoga se nerijetko suočavamo se problemom kako razlučiti lažne komponente spektra, tj. zrcalne komponente, od stvarne komponente. Tom se problemu može doskočiti uporabom predselekcijskoga YIG-filtra koji je razmotren u odjeljku 7.7.3, a čija se središnja frekvencija elektronički ugađa istodobno s frekvencijom lokalnoga oscilatora. Širina pojasa tog filtra znatno je veća od širine pojasa rezolucijskog filtra pa taj filtar ne utječe na točnost prikazivanja amplitude spektralnih linija.

Odziv miješala zapravo sadrži sve moguće intermodulacijske produkte na frekvencijama $|mf + nf_0|$. No, dok je god amplituda ulaznog signala dovoljno mala, članovi za koje je $m \neq 1$ imaju zanemarivo malu amplitudu. Da bi taj uvjet bio zadovoljen, ulazni se signal mora držati na dovoljno niskoj razini. To se u praksi ostvaruje postavljanjem promjenljivog atenuatora ispred miješala.

Analizator spektra može poslužiti za apsolutno mjerenje snage i frekvencije signala, ali mu je točnost obično nedovoljna. Stoga se poglavito rabi za relativno mjerenje snage i relativno mjerenje frekvencijskih komponenata u složenom spektru signala. Povećanje osjetljivosti i razlučivosti može se ostvariti tako da se iza pojačala postavi još jedan heterodinski prijamnik. Transpozicijom signala u niže frekvencijsko područje lako se mogu izvesti pojasnopopusni filtri vrlo male širine pojasa, tj. visoke selektivnosti.

9.4. Mjerenje impedancije i reflektometri

Mjerenje impedancije nepoznatog tereta može se ostvariti preko mjerenja odnosa stojnih valova ili koeficijenta refleksije. U tu se svrhu rabe uzdužno prorezane suosne mjerne linije i valovodi [1]. U liniju se kroz prorez unosi pomična mjerna sonda s ugrađenim detektorom ovojnice, kojom se mjeri odnos stojnih valova. Prilikom razmatranja usmjernoga sprežnika vidjeli smo da sprežnik može razlučiti upadni od reflektiranoga vala koji prijenosnom linijom putuje suprotnim smjerom. Stoga se to svojstvo sprežnika može korisno uporabiti za mjerenje koeficijenta refleksije i prijenosa, gdje je omjer fazora polja reflektiranoga i upadnoga vala jednak koeficijentu refleksije. Taj pristup omogućuje brzo mjerenje refleksije, ali je točnost mjerenja ograničena zbog konačne usmjerenosti usmjernih sprežnika ugrađenih u mjerni sustav. No točnost se mjerenja može povećati sofisticiranim postupcima umjeravanja.

9.4.1. Mjerenje impedancije na osnovi mjerenja odnosa stojnih valova

Kao što smo vidjeli u odjeljku 3.3, na neprilagođenoj prijenosnoj liniji nastaje stojni val koji nosi informaciju o impedanciji tereta kojim je linija zaključena. Otuda se razvila jedna od najstarijih metoda mjerenja impedancije u valovodu i na prijenosnoj liniji [1] i [4]. Mjerenjem razdiobe ovojnice stojnoga vala (slika 9.10) može se odrediti normirana impedancija tereta prikazom u Smithovu dijagramu (slika 9.11). Postupak se svodi na sljedeće korake:

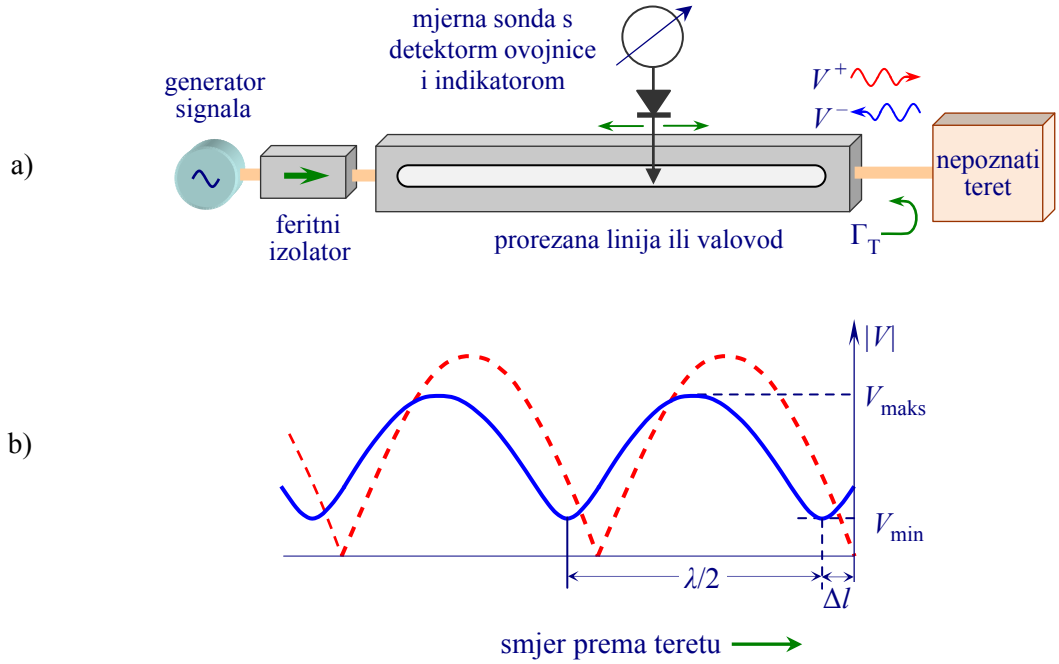
1. Izmjeri se odnos stojnih valova (OSV = $V_{\text{maks}}/V_{\text{min}}$) na porezanoj liniji opterećenoj nepoznatim teretom.
2. U Smithov se dijagram unese odgovarajuća kružnica konstantnog OSV.
3. Odredi se udaljenost prvoga minimuma stojnoga vala od referentne ravnine nepoznata tereta (Δl). Referentna ravnina može se odrediti kad se teret zamijeni kratkospojnikom.
4. Odredi se razmak između dvaju susjednih minimuma ($\lambda/2$), iz čega se izračuna valna duljina i normirana udaljenost minimuma, $\Delta l/\lambda$.
5. U Smithov dijagram unese se vrijednost normirane impedancije u točki minimuma stojnoga vala ($|Z|_{\text{min}}/Z_0 = 1/\text{OSV}$).
6. Zatim se na kružnici konstantnog OSV točka minimuma zakrene za $\Delta l/\lambda$ prema teretu (suprotno od smjera kazaljke sata) u točku A i nađe normirana impedancija tereta (Z_{T}/Z_0). Pritom se vrijednost $\Delta l/\lambda$ očita na kružnoj skali izvan Smithova dijagrama.

Impedancija tereta može se izmjeriti i bez uporabe Smithova dijagrama. Najprije valja naći modul koeficijenta refleksije iz izraza (3–53), tj. izravno preko odnosa stojnih valova kao

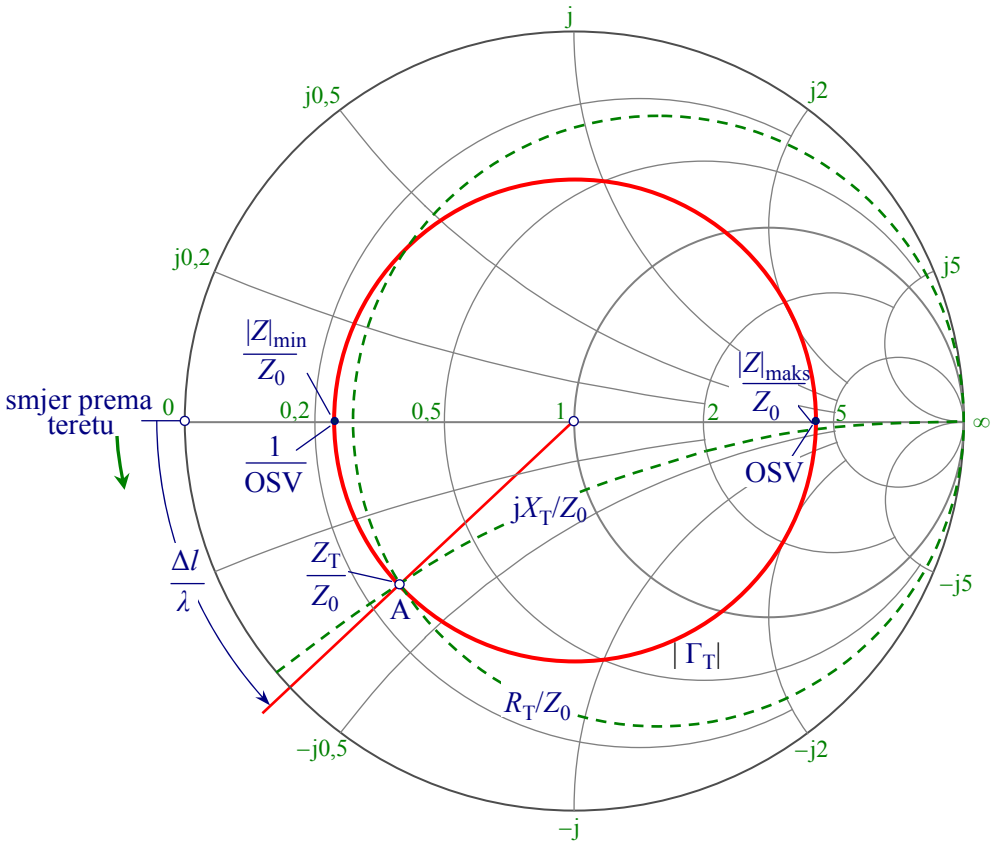
$$|\Gamma_{\text{T}}| = \frac{\text{OSV} - 1}{\text{OSV} + 1}. \tag{9–7}$$

S druge strane, faza koeficijenta refleksije može se odrediti mjerenjem udaljenosti prvoga minimuma stojnoga vala od tereta (Δl). Ustvari, taj se razmak može naći, kao što je opisano u postupku rješavanja ulazne ipedancije uz pomoć Smithova dijagrama. Tad se faza može izračunati primjenom izraza

$$\varphi_{\text{T}} = 4\pi\frac{\Delta l}{\lambda} + \pi \pm 2n\pi \quad \text{za } n = 0, 1, 2 \ldots \tag{9–8}$$



Slika 9.10. a) Prorezana mjerna linija za mjerenje odnosa stojnih valova i **b)** ovojnice napona stojnoga vala duž prijenosne linije. Isprekidanom crtom prikazana je ovojnica stojnoga vala kad je umjesto tereta priključen kratkospojnik



Slika 9.11. Prikaz određivanja impedancije u Smithovu dijagramu

Time je posve određen koeficijent refleksije tereta

$$\Gamma_T = |\Gamma_T| e^{j\varphi_T}$$

pa se impedancija tereta može izračunati primjenom izraza (3–42) kao

$$Z_T = Z_0 \frac{1+\Gamma_T}{1-\Gamma_T}.$$

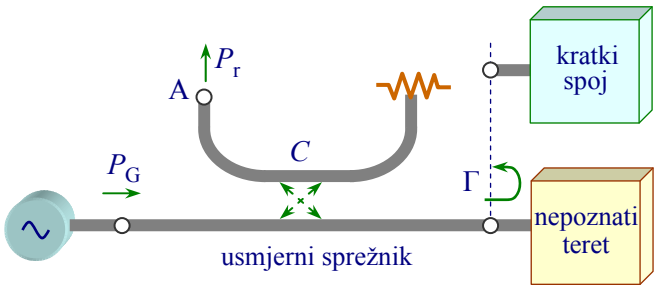
Ako se položaj minimuma mjeri u prorezanom valovodu, onda za valnu duljinu λ valja uzeti vrijednost λ_v, u skladu s izrazom (4–74) iz odjeljka 4.3.

U praksi su mjerenja prorezanom linijom i valovodom razmjerno zamršena i nerijetko nedovoljno točna. Glavni doprinos mjernoj nesigurnosti nastaje zbog opterećenja mjerne linije detektorskom sondom i nemogućnosti preciznog određivanja položaja minimuma. Osim toga, mjerenja se istodobno mogu ostvariti samo na jednoj frekvenciji. Veća točnost i brže mjerenje impedancije može se ostvariti uporabom reflektometra.

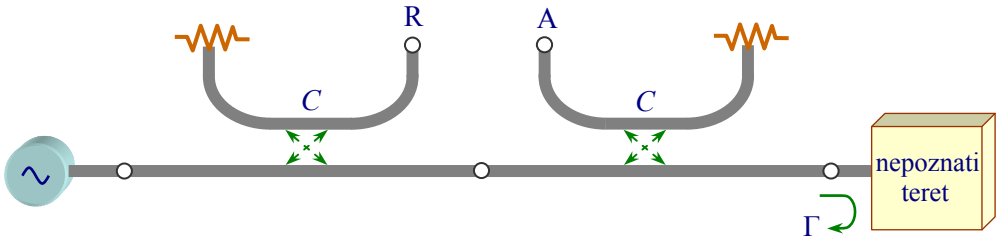
9.4.2. Troprolazni i četveroprolazni reflektometri

Iz obilježja sprežnika (odjeljak 6.5) vidi se da ga je moguće uporabiti za mjerenje reflektirane snage. Spajanjem sprežnika s nepoznatim teretom kao na slici 9.12 i mjerenjem snage u prolazu A može se odrediti veličina, ali ne i faza, koeficijenta refleksije tereta. Najprije se na prolazu A izmjeri razina snage P_r uz priključen teret na izlaznom prolazu, a zatim se izlazni prolaz sprežnika kratko spoji i na prolazu A izmjeri odgovarajuća snaga $P_{r(ks)}$. Modul koeficijenta refleksije $|\Gamma|$ ili raspršnog parametra $|S_{11}|$ tad iznosi

$$|S_{11}| = |\Gamma| = \sqrt{\frac{P_r}{P_{r(ks)}}}. \qquad (9–9)$$



Slika 9.12. Troprolazni reflektometar s jednim usmjernim sprežnikom



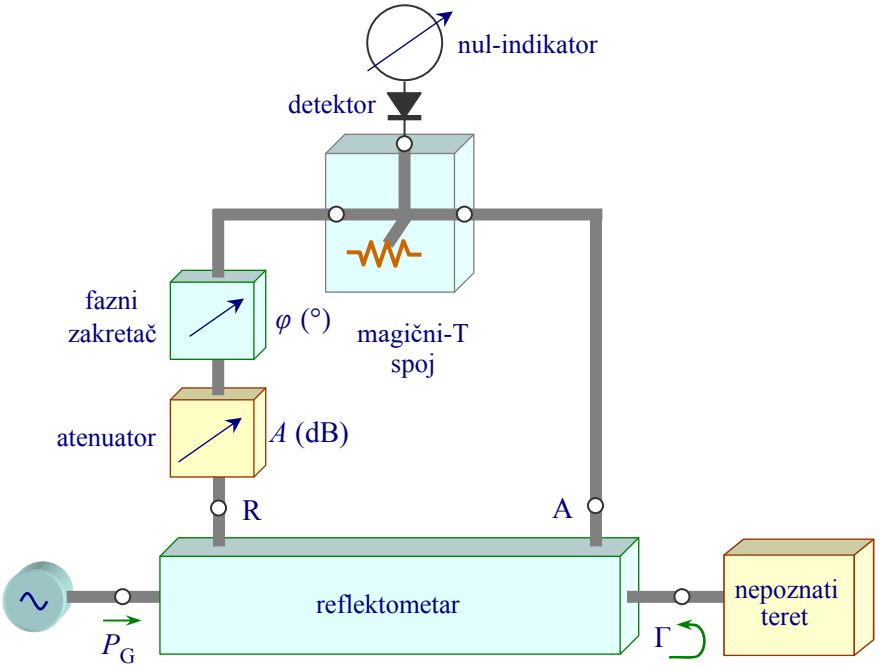
Slika 9.13. Četvroprolazni reflektometar s dvama usmjernim sprežnicima

Umjesto jednog usmjernog sprežnika mogu se uzeti dva protusmjerno spojena sprežnika, kao što je prikazano na slici 9.13. Prolaz R referentni je prolaz, a prolaz A mjerni je prolaz. Pri tomu su snage na prolazima R i A razmjerne upadnoj snazi, odnosno reflektiranoj snazi na nepoznatom teretu. Prednost je tog spoja u odnosu na troprolazni reflektometar u tomu što prilikom umjeravanja nije potrebno isključiti teret i zamijeniti ga kratkim spojem. No i dalje ostaje problem određivanja faze koeficijenta refleksije.

Reflektometar s dvama usmjernim sprežnicima jednakih sprega (slika 9.13) može se proširiti mosnim spojem, kojim je moguće mjeriti fazu koeficijenta refleksije. Jednostavno rješenje prikazano je na slici 9.14. Signali iz grana R i A dovode se na hibridni magični T-spoj preko promjenljivog atenuatora i faznog zakretača (odjeljak 7.3.6). Indikator u poprečnoj grani pokazat će nulu kad signali na prolazima T-spoja u *E*-ravnini poprime jednake amplitude i faze. Dakle, za bilo koji pasivni sklop (dvopol), promjenom prigušenja i faznog pomaka u grani prolaza R, na indikatoru se može namjestiti nula. Pritom valja očitati fazu signala (φ) na faznom zakretaču i prigušenje (A_k) u decibelima na atenuatoru. Iz tih dviju veličina konačno se može naći omjer valova snage koji izlaze iz prolaza A i R. Taj omjer odgovara modulu koeficijenta refleksije $|\Gamma|$, tj. modulu raspršnog parametra $|S_{11}|$ nepoznatog tereta. No prije samog mjerenja valja obaviti umjeravanje mjernog sustava s pomoću kratkospojnika koji valja postaviti na mjerni prolaz reflektometra umjesto nepoznatog tereta. Mijenjanjem prigušenja i zakreta faze, pokazivanje indikatora treba postaviti na nulu i zabilježiti odgovarajuća pokazivanja atenuatora (A_k) u decibelima i faznog zakretača (φ_k) u radijanima. Sad se omjer valova snage, tj. koeficijent refleksije, može lako izračunati primjenom izraza

$$S_{11} = \Gamma = 10^{\frac{A-A_\mathrm{k}}{20}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi-\varphi_\mathrm{k})}. \qquad (9\text{–}10)$$

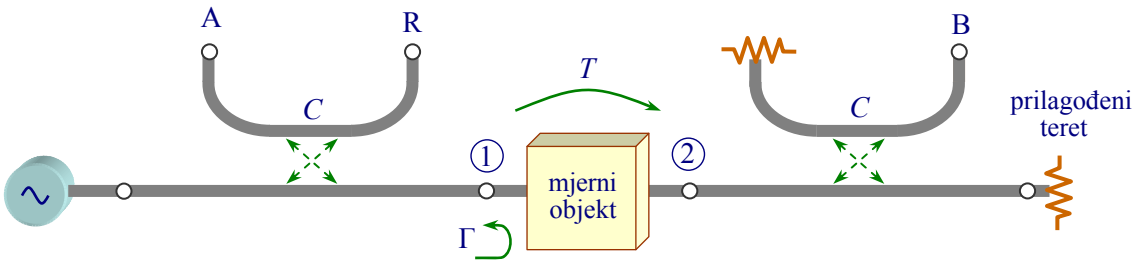
Dijeljenje s 20 dB u eksponentu odgovara vađenju drugoga korijena jer je koeficijent refleksije, tj. parametar $|S_{11}|$ razmjeran naponu, a ne snazi.



Slika 9.14. Reflektometar s dvama usmjernim sprežnicima

9.4.3. Mjerenje prijenosnih parametara

Pri mjerenju parametara dvoprolaznih i višeprolaznih mreža potrebno je izmjeriti prijenosne parametre između dvaju ili više prolaza. To se može ostvariti neznatnom preinakom opisanog reflektometra s usmjernim sprežnicima, kao što je prikazano na slici 9.15. Novi mjerni sustav omogućuje istodobno mjerenje modula parametara $|S_{11}|$ i modula prijenosnog parametra $|S_{21}|$ i pogodan je za mjerenje refleksijskih i prijenosnih karakteristika filtara i pojačala. Takva se konfiguracija nalazi u izvedbi reflektometra s vektorskim voltmetroma. Dodavanjem faznog mosta (slika 9.14) između prolaza R i B može se mjeriti i faza parametra S_{21}. Time se mogu istodobno mjeriti parametri S_{11} i S_{21}. Okretanjem mjernog objekta, na jednak se način mogu izmjeriti preostala dva parametra, S_{22} i S_{12}.



Slika 9.15. Mjerenje koeficijenata refleksije i prijenosa

Uz manje preinake, takav se spoj može naći u gotovo svim modelima analizatora mreža i vektorskih voltmetara.

9.4.4. Vektorski analizator mreža

Analizatori mreža u osnovi se rabe za mjerenje raspršnih parametara jednoprolaznih i dvoprolaznih sklopova, obično u širokom frekvencijskom području [2], [4] - [6] i [8]. Mjerenja mogu biti skalarna, ako se mjeri samo veličina raspršnih parametara ili vektorska, ako se mjeri i veličina i faza raspršnih parametara. Raspršni se parametri određuju na osnovi mjerenja upadnih, reflektiranih i prenesenih valova signala. Dinamičkom promjenom frekvencije u širokom frekvencijskom području i primjenom Fourierove transformacije može se lako naći odziv jedoprolaznih i dvoprolaznih sklopova u vremenskoj domeni. Rezolucija u vremenskoj domeni ovisi o omjeru najviše i najniže frekvencije.

Na slici 9.16 shematski je prikazan ustroj tipičnog vektorskog analizatora mreža koji se sastoji od sljedećih triju jedinica.

- **Generator signala** čini izvor mikrovalnih signala s analognim frekvencijskim prebrisavanjem ili je to sintezator frekvencije koji je fazno sinkroniziran na diskretnim frekvencijama sa stabilnim referentnim izvorom visoke stabilnosti frekvencije, čime je omogućena visoka točnost mjerenja.
- **Ispitni sklop** sastoji se od usmjernih sprežnika, linija za kašnjenje signala, preklopke, atenuatora i djelila snage, a služi za dobivanje referentnih i ispitnih signala. Na slici 9.16 prikazana je najjednostavnija izvedba takvog sklopa, slična onoj na slici 9.15.
- **Analizator** je elektronički uređaj koji uspoređuje referentne i ispitne signale dobivene iz ispitnog sklopa i na pokazivaču prikazuje raspršne parametre u ovisnosti o frekvenciji.

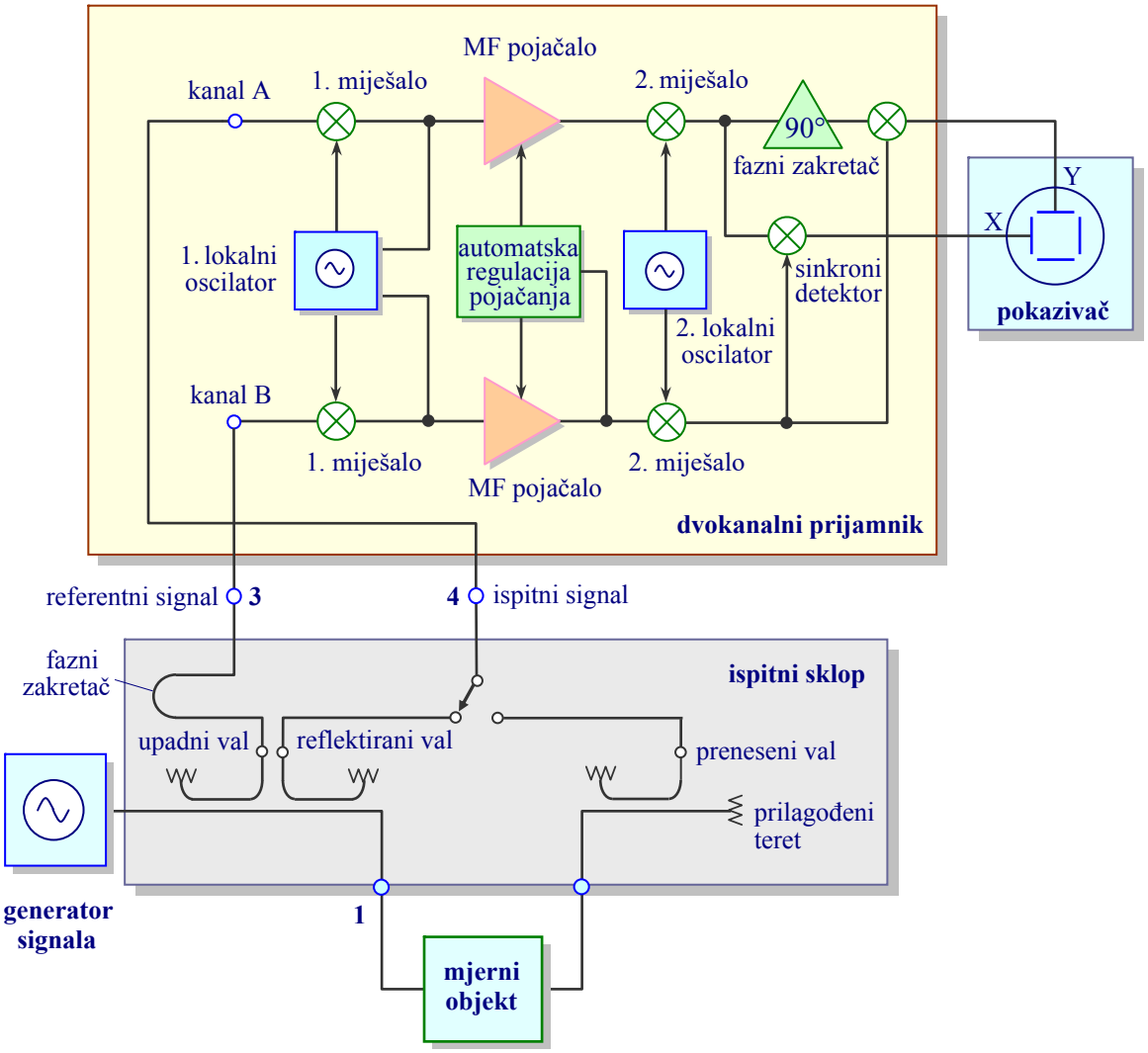
Za vektorska mjerenja rabi se fazni zakretač koji služi izjednačavanju faznog kašnjenja na linijama ispitnog i referentnog signala. Ugađanje faznog zakretača nerijetko se ostvaruje elektroničkim putem s pomoću umjeravanja. Za mjerenje svih četiriju raspršnih parametara u

dvoprolaznom ispitnom sklopu sa sprežnicima, priključke ispitnog sklopa treba obrnuti. U tu svrhu služi elektromehanička RF preklopka s pripadajućim linijskim odsječcima, kao što je prikazano na slici 9.16. Time je omogućeno posve automatizirano mjerenje, ali uz porast mjerne nesigurnosti. Cjelokupni ispitni sklop obično je građen posve simetrično da se smanje međusobne razlike u prijeđenom putu signala unutar kanala A i B. Pri tomu se upadni i reflektirani signali razdvajaju usmjernim sprežnicima.

Signali iz ispitnog sklopa dovode se na dvokanalni prijamnik analizatora. Ovdje se mikrovalni signali u obama kanalima zamjenjuju transponiranim signalima u niže frekvencijsko područje. To su međufrekvencijski signali u kojima su sačuvane značajke i amplitude i faze ulaznih signala. Dobiveni su miješanjem ili uzorkovanjem. Uporabom bilo kojeg od tih dvaju postupaka, dobivaju se signali stalne frekvencije. Ti se signali u analizatoru zatim obrađuju analognim ili digitalnim postupcima.

Pretpostavimo da je reflektometar kalibriran i ugođen tako da daje točnu vrijednost modula koeficijenta refleksije

$$\frac{b_\mathrm{s}}{b_\mathrm{r}} = \Gamma = |\Gamma| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} . \tag{9–11}$$



Slika 9.16. Shematski prikaz analizatora mreža

Analizator, prikazan na slici 9.16, obavlja više funkcija određenim redoslijedom.

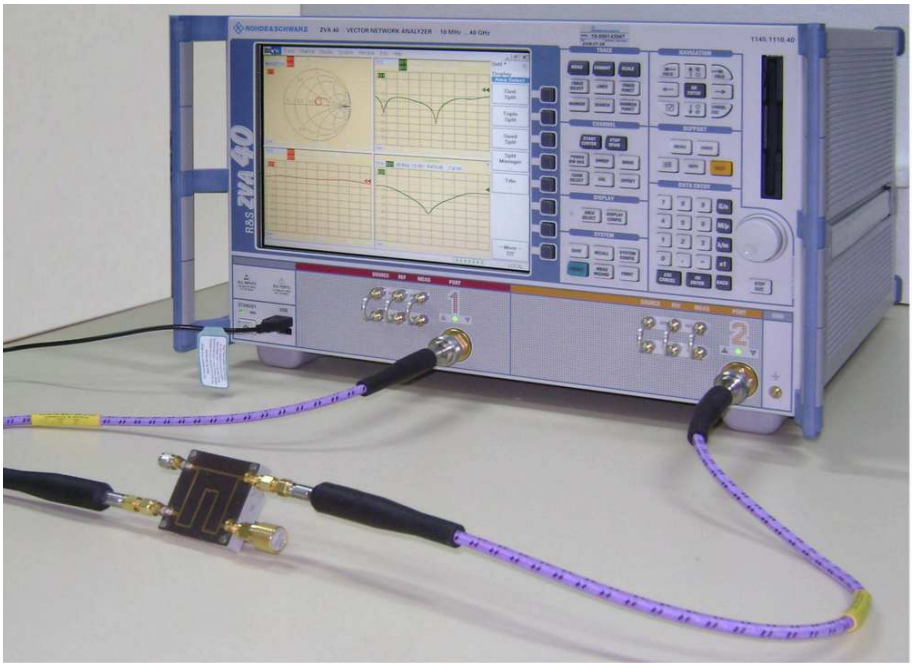
1. Dvije jedinice za uzorkovanje daju prvi međufrekvencijski signal čvrste frekvencije jer se za miješanje ili uzorkovanje rabi lokalni oscilator (vobler) promjenljive frekvencije kao kod analizatora spektra u odjeljku 9.3. Pri toj su transpoziciji frekvencije sačuvane sve značajke amplitude i faze izvornog ulaznog signala.
2. Dva pojačala s automatskom povratnom vezom normiraju amplitudu ulaznog signala s pomoću signala iz referentnog kanala. Na izlazima pojačala referentnog i signalnog kanala dobiva se:

$$V_{\mathrm{r}}(t) = V_0 \cos(\omega_{\mathrm{MF}} t)\,, \tag{9–12a}$$

$$V_{\mathrm{s}}(t) = V_0 |\Gamma| \cos(\omega_{\mathrm{MF}} t + \varphi)\,, \tag{9–12b}$$

   gdje je ω_{MF} međufrekvencija.
3. Sljedeća transpozicija frekvencije ostvaruje se s pomoću drugih dvaju miješala i lokalnog oscilatora fiksne frekvencije. Ta se međufrekvencija obično nalazi u području oko 100 kHz i u njoj su sačuvane izvorne značajke korisnog signala.
4. Korisni i referentni MF signali nakon miješanja u drugom miješalu dovode se na novo zajedničko miješalo na kojem se kao rezultat dobiva napon razmjeran veličini $|\Gamma|\cos\varphi$.
5. Iz korisnog se signala, nakon kašnjenja od 90° i miješanja s referentnim signalom na produktnom detektoru, dobiva napon razmjeran veličini $|\Gamma|\sin\varphi$.
6. Ta se dva napona konačno dovode na zaslon pokazivača koji omogućuje grafički prikaz koeficijenta refleksije Γ u kompleksnoj ravnini (Smithov dijagram).
7. Dijeljenju korisnog signala s referentnim signalom odgovara veličina $\tan\varphi$. Ispravljanje tih dvaju niskofrekvencijskih signala daje $|\Gamma|$.

Kad omjer $b_{\mathrm{s}}/b_{\mathrm{r}}$ nije posve jednak Γ, tad se razlike faze i amplitude kompenziraju atenuatorima i faznim zakretačima u niskofrekvencijskom dijelu analizatora.



Slika 9.17. Vektorski analizator mreža tvrtke Rohde & Schwarz (model ZVA 40)

Vektorski analizatori mreža obično sadrže brzo računalo (mikroprocesor) kojim se primjenom određenih numeričkih algoritama smanjuje mjerna nesigurnost koja je posljedica nesavršenosti usmjernih sprežnika u ispitnome sklopu (slika 9.17).

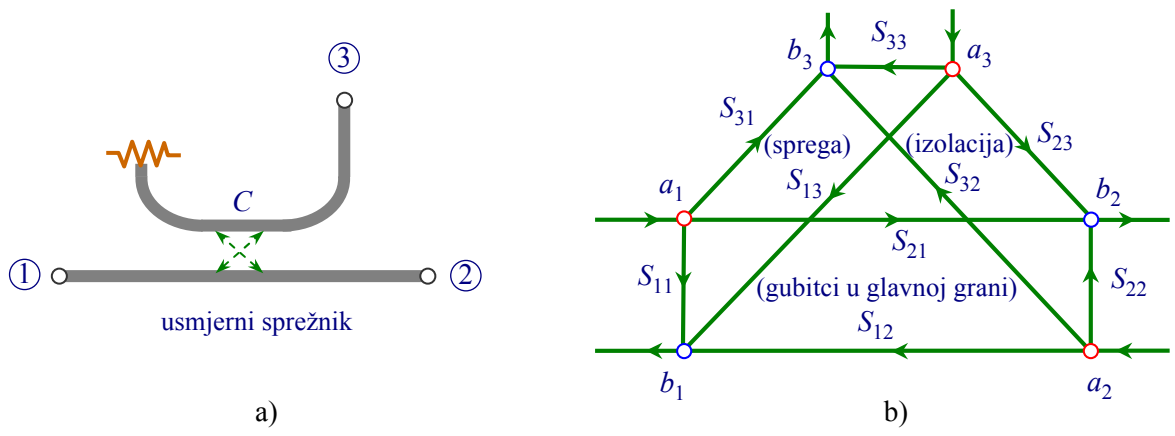
Mjerenje *S*-parametara mreža sa simetričnim parom priključaka može se lako ostvariti dodavanjem balansnog transformatora (engl. *bal-un*) između mjernog sklopa i prolaza analizatora [8]. No suvremeni analizatori mreža posjeduju posebne jedinice koje taj proces mogu softverski simulirati.

Postupci umjeravanja analizatora mreža

U ovom ćemo odlomku razmotriti postupak umjeravanja u svrhu smanjenja mjerne nesigurnosti na primjeru jednoprolaznog analizatora mreža ili reflektometra s jednim mjernim prolazom. Utvrđivanje mjerne nesigurnosti ovisi o poznavanju prirode mjerene veličine i postupka njezinog mjerenja. Stoga ćemo najprije podrobnije razmotriti sam mjerni postupak. Kao što smo vidjeli u prethodnim razmatranjima, na ulazu reflektometra ili ispitnog sklopa analizatora mreža nalazi se usmjerni sprežnik koji služi za odvajanje reflektiranog signala od upadnog signala. Na slici 9.18a) prikazan je troprolazni sklop usmjernog sprežnika čiji je četvrti prolaz zaključen prilagođenim teretom. No ni jedan usmjerni sprežnik nema savršenu usmjerenost niti su sprežnici, priključni konektori i adapteri te mjerni kabeli savršeno prilagođeni karakterističnoj impedanciji mjernog sustava. Stoga u praksi dolazi do neizbježnih mjernih pogrešaka tijekom mjerenja raspršnih parametara ili koeficijenta refleksije nepoznatog tereta. Na slici 9.18b) prikazan je odgovarajući graf toka signala usmjernog sprežnika sa zaključenim četvrtim prolazom (odjeljci 5.7. i 5.8.2).

Dio snage koja upada na prolaz 1 raspoloživ je na prolazu 3, pa se može odrediti s pomoću parametra S_{31}, tj. iz faktora sprege C usmjernog sprežnika. Kod savršenog usmjernog sprežnika, dio snage koji upada na prolaz 2 trebao bi biti posve je »izoliran«, tj. raspregnut od prolaza 3 (odjeljaci 5.8.3. i 7.3). No u praksi je nemoguće ostvariti sprežnik beskonačne izolacije, tj. beskonačne usmjerenosti D. Također je nemoguće ostvariti savršeno nerefleksivan sprežnik, tj. $S_{11}=S_{22}=S_{33}=S_{44}=0$. Sve te nesavršenosti sprežnika izvor su dodatnih mjernih pogrešaka.

Te se mjerne pogreške mogu znatno smanjiti postupkom umjeravanja mjernog sustava. Umjeravanje se obično provodi primjenom nekoliko mjernih etalona. To su najčešće tri precizne i poznate zaključne impedancije: kratki spoj, otvoreni kraj linije i prilagođeni teret. No da bismo mogli razumjeti kako se umjeravanjem može smanjiti mjerna pogreška, a time i mjerna nesigurnost, najprije treba istražiti gdje se nalaze izvori mjernih pogrešaka. Time će se



Slika 9.18. Troprolazni reflektometar s jednim usmjernim sprežnikom

olakšati razvoj odgovarajućeg matematičkog modela za smanjenje učinaka mjernih pogrešaka. No točnost cjelokupnog mjernog sustava ovisi i o točnosti samih mjernih etalona. Budući da se porastom frekvencije kakvoća fiksnog tereta progresivno kvari, za umjeravanje se na frekvencijama iznad dvadesetak gigaherca obično rabi pomični teret. Pritom se dovoljna točnost postiže šesterima očitanjima za šest različitih položaja pomičnog tereta. Potom se matematičkim postupkom interpolacije odrede potrebni koeficijenti mjernih etalona za točno i precizno mjerenje raspršnih parametara.

Netočnosti mjernih etalona koje nastaju višekratnim ponavljanjem umjeravanja, tj. mehaničkim trošenjem materijala od kojih je etalon izrađen), i porast mjerne nesigurnosti do koje dolazi zbog savijanja mjernih kabela posebno su primjetni na višim frekvencijama (obično iznad 20 GHz) te znatno smanjuju točnost mjerenja *S*-parametara.

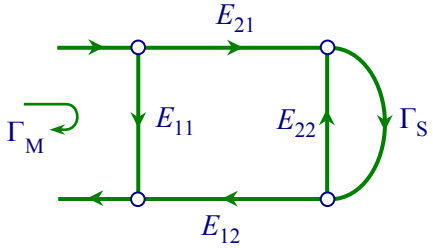
Nekoliko je izvora mjernih pogrešaka zajedničko svim reflektometrijskim sustavima. To su poglavito nesavršenost sprežnika te razgođenost detektora (prijamnika) i usmjernih sprežnika. Učinci tih nesavršenosti mogu se minimizirati umjeravanjem. Postoje i drugi izvori mjernih pogrešaka, tj. mjerne nesigurnosti. Da bi se mjerna nesigurnost smanjila na najmanju moguću mjeru treba uporabiti generatore visoke spektralne čistoće, uključujući visoku kratkotrajnu i dugotrajnu stabilnost njihove frekvencije. To poglavito upućuje na minimiziranje fazno i amplitudno moduliranoga šuma te maksimiziranje dugotrajne stabilnosti amplitude signala generatora. Valja također uporabiti usmjerne sprežnike ili mostove što veće usmjerenosti, koji uz to moraju biti dobro prilagođeni karakterističnoj impedanciji sustava.

U skladu sa slikom 9.18b), na slici 9.19 prikazan je graf toka signala nadomjesnog četveropola koji uključuje sve izvore mjernih pogrešaka (E_{11}, E_{12} i E_{21} te E_{22}).

Koeficijent mjerne pogreške E_{11} može se objasniti efektivnom usmjerenošću. Naime, dio signala iz generatora nikad ne stigne do mjernog objekta jer uvijek dio signala zbog nesavršene izolacije dospije u detektor ili miješalo u prolazu 3. S druge strane, dio upadnog signala reflektira se na mjernom prolazu zbog nesvršenosti mjernog kabela i konektora. To je pak posljedica činjenice da stvarni usmjerni sprežnik nema beskonačnu izolaciju.

Koeficijenti mjerne pogreške E_{12} i E_{21} mogu se objasniti gubitcima u samom mjernom sustavu. Umnožak tih koeficijenata naziva se *frekvencijski odziv* i ustvari je sastavljen od više sastavnica mjernog sustava: sprežnika, mjernih kabela, konektora te miješala ili detektora.

Posljednji izvor mjerne pogreške, koeficijent E_{22}, posljedica je nesavršene prilagodbe generatora. Naime, ako se s mjernog prolaza pogleda natrag u mjerni sustav preko svih adaptera (konektora) i kabela, onda se može shvatiti da u stvarnom slučaju ne postoji idealna prilagodba. Refleksijom mjernog signala na nepoznatom teretu, dio mjernog signala vraća se u mjerni sustav, na kojem se djelomično reflektira zbog nesavršene prilagodbe i ponovno putuje kao sekundarni val prema teretu. Stoga se na mjernom prolazu oblikuje beskonačan niz uzastopnih refleksija. Budući da pogreška ovisi o umnošku tih parcijalnih refleksija, njihov se učinak može osjetiti samo pri većem stupnju razgođenosti.



Slika 9.19. Graf toka signala za model bloka u koji su uključeni svi izvori mjerne pogreške

Sad se izmjereni koeficijent refleksije tereta može izračunati iz matrice dvoprolaznog bloka koji uključuje sve izvore mjerne pogreške (engl. *error box*). Iz pripadajućeg grafa toka signala (slika 9.19) izlazi

$$\Gamma_M = E_{11} + \frac{E_{21}E_{12}\Gamma_S}{1 - E_{22}\Gamma_S}, \tag{9–13}$$

gdje je Γ_S koeficijent refleksije stvarnog tereta (nepoznata impedancija). No pritom valja zapamtiti da i dalje postoji konačna mjerna nesigurnost zbog netočnosti koeficijenata refleksije samih etalona koji nikad nisu idealni.

Stvarni se koeficijent refleksije tereta može izlučiti iz izraza (9–13) kao

$$\Gamma_S = \frac{\Gamma_M - E_{11}}{E_{21}E_{12} + E_{22}(\Gamma_M - E_{11})}. \tag{9–14}$$

Valja uočiti da je stvarni koeficijent refleksije funkcija triju koeficijenata pogrešaka (E_{11}, $E_{12}E_{21}$ i E_{22}) i izmjerenog (efektivnog) koeficijenta refleksije tereta Γ_M.

Tri nepoznata koeficijenta mjerne pogreške mogu se jednostavno eliminirati primjenom triju impedancija, *mjernih etalona*, poznatih koeficijenata refleksije. Za etalone se obično odabiru prilagođeni teret ($\Gamma_{pt}=0$), kratki spoj ($\Gamma_{ks}=e^{-j\pi}=-1$) i otvoreni krug ($\Gamma_{ok}=e^{j0}=1$).

Ako se umjesto nepoznatog tereta na mjerni prolaz postavi prilagođeni teret ($\Gamma_{pt} \simeq 0$), kao etalon, onda se u skladu s izrazom (9–13) može izravno izmjeriti efektivna usmjerenost E_{11}, tj.

$$\Gamma_{M(pt)} = E_{11} + \frac{E_{21}E_{12}\Gamma_{pt}}{1 - E_{22}\Gamma_{pt}} \simeq E_{11}. \tag{9–15a}$$

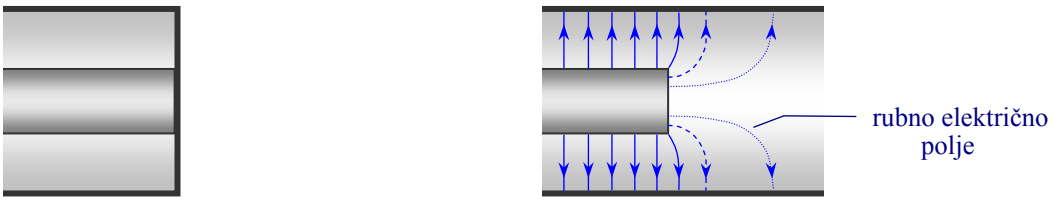
Taj podatak valja zabilježiti ili privremeno pohraniti u memoriji mjernog sustava.

Ako se zatim umjesto nepoznatog tereta priključi fiksni kratkospojnik (slika 9.20a)), kao drugi etalon koji će u suosnoj liniji i valovodu stvoriti uvjete približno jednake idealnome kratkom spoju koeficijenta refleksije $\Gamma_{ks} \simeq e^{-j\pi} = -1$, onda iz izraza (9–13) izlazi

$$\Gamma_{M(ks)} = E_{11} + \frac{E_{21}E_{12}\Gamma_{ks}}{1 - E_{22}\Gamma_{ks}} \simeq E_{11} - \frac{E_{21}E_{12}}{1 + E_{22}}. \tag{9–15b}$$

Kratki se spoj ujedno upotrebljava za uspostavu referentne ravnine mjernog prolaza.

Treći je etalon »otvoreni krug« (prazni hod). U suosnoj se tehnici otvoreni krug može ostvariti produljenjem vanjskog vodiča (plašta suosne linije) tako da u području bez središnjeg vodiča utrnu sva evanescentna rubna polja. Time se sprečava zračenje elektromagnetske energije u okolni prostor (slika 9.20b)). Slične smo uvjete našli na otvorenom kraju mikrotrakaste linije u odjeljku 5.11.1. No suosni otvoreni krug upućuje na mali završni (rubni) kapacitet, čija vrijednost ovisi o geometriji odabranog konektora pa impedancija otvorenog kruga nikad nije beskonačna nego je blago kapacitivna i ovisna o frekvenciji. Pripadajući se



a) b)

Slika 9.20. a) Suosni kratkospojnik i **b)** otvoreni kraj suosne linije u kojem rubno električno polje stvara frekvencijski ovisan kapacitivni učinak

kapacitet može jednostavno i točno modelirati u širem rasponu frekvencija. Za etalon u valovodnoj izvedbi valja samo pomaknuti kratkospojnik za četvrt valne duljine, $\lambda_v/4$, čime se preslikava u prazni hod. Naime, otvoreni se valovod ne može primijeniti kao otvoreni strujni krug jer, poput antene, učinkovito zrači elektromagnetske energije u okolni prostor. Za idealan otvoreni strujni krug ($\Gamma_{ok} \simeq e^{j0} = 1$) izraz (9–13) daje

$$\Gamma_{M(ok)} = E_{11} + \frac{E_{21}E_{12}\Gamma_{ok}}{1 - E_{22}\Gamma_{ok}} \simeq E_{11} + \frac{E_{21}E_{12}}{1 - E_{22}}. \qquad (9\text{–}15c)$$

Sad se primjenom tih triju nezavisnih rješenja, dobivenih s pomoću triju nezavisnih etalona, konačno može izračunati koeficijent pogreške zbog frekvencijske ovisnosti mjernog sklopa ($E_{12}E_{21}$) i koeficijent pogreške zbog neprilagođenog generatora (E_{22}) kao:

$$E_{11} = \Gamma_{M(pt)}\ , \qquad (9\text{–}16a)$$

$$E_{21}E_{12} = \frac{(\Gamma_{ok} - \Gamma_{ks})(\Gamma_{M(ok)} - \Gamma_{M(pt)})(\Gamma_{M(ks)} - \Gamma_{M(pt)})}{\Gamma_{ok}\Gamma_{ks}(\Gamma_{M(ok)} - \Gamma_{M(ks)})}, \qquad (9\text{–}16b)$$

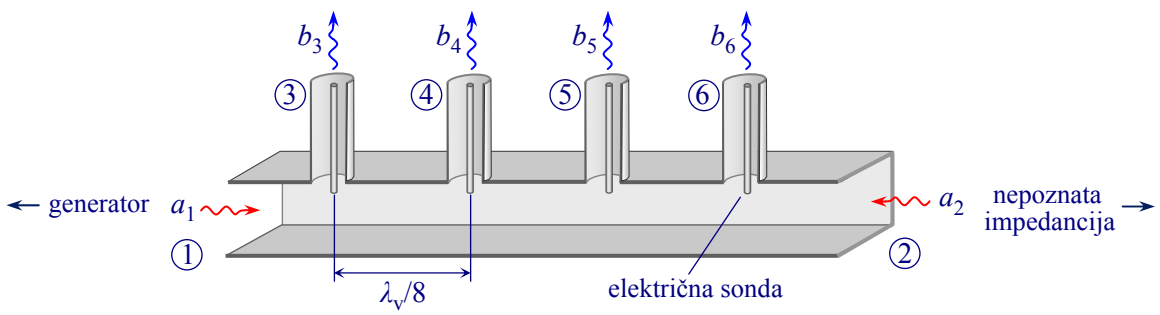
$$E_{22} = \frac{\Gamma_{ks}(\Gamma_{M(ok)} - \Gamma_{M(pt)}) - \Gamma_{ok}(\Gamma_{M(ks)} - \Gamma_{M(pt)})}{\Gamma_{ok}\Gamma_{ks}(\Gamma_{M(ok)} - \Gamma_{M(ks)})}. \qquad (9\text{–}16c)$$

Uvrštenjem ovih vrijednosti u izraz (9–14) konačno se dobiva točna vrijednost koeficijenta refleksije stvarnog tereta koji se mjeri.

Pri mjerenju prijenosnih parametara, za umjeravanje je nužno uporabiti dodatne mjerne etalone. O tomu se može naći viu literaturi [8].

9.4.5. Reflektometar sa šesteroprolaznim hibridom

Osim heterodinskih analizatora mreža u praksi se mogu naći i analizatori mreža sa šesteroprolaznim hibridom [2], [4], [9] i [10]. Središnji dio čini šesteroprolazni hibrid čija se dva prolaza priključuju na generator signala i mjerni objekt, tj. prolaz višeprolazne mreže, slika 9.21. Na preostale prolaze priključena su četiri detektora ovojnice (odjeljak 8.5.2) ili četiri osjetila mikrovalne snage (odjeljak 9.1). Ispravljeni istosmjerni naponi ili struje na izlazima detektora razmjerni su snagama mikrovalnih signala na pripadajućim prolazima hibrida. Veličina i fazni kut koeficijenta refleksije nepoznate impedancije dobivaju se kao linearna kombinacija četiriju detektiranih signala, s time da se amplitude dobivaju vađenjem drugoga korijena iz snage. Informacija o fazi koeficijenta refleksije sadržana je u geometrijskim razmacima između prolaza 3-6. Zatim se računskim postupkom iz tih istosmjernih veličina odredi i veličina i faza koeficijenta refleksije mjernog objekta. Primjenom hibrida s većim brojem prolaza u mjerenje se može uvesti zalihost pa se može donekle povećati točnost mjerenja i širina radnog frekvencijskog područja.



Slika 9.21. Reflektometar sa šesteroprolaznim hibridom

Četiri mjerne sonde obično se nalaze na međusobnim razmacima od osmine valne duljine. Ako se labavo spregnu s valovodom, onda se njihovo međudjelovanje može posve zanemariti. Referentne ravnine valova snage a_1 i a_2 udaljene su od prve sonde u valovodu (sonda 3) za višekratnik polovine valne duljine ($n\lambda_v/2$). Tad signali na izlazima sonda približno iznose:

$$|b_3| \simeq \kappa |a_1 + a_2|, \quad |b_4| \simeq \kappa |a_1 + \mathrm{j}a_2|,$$
$$|b_5| \simeq \kappa |a_1 - a_2|, \quad |b_6| \simeq \kappa |a_1 - \mathrm{j}a_2|, \tag{9–17}$$

gdje je naponski faktor sprege $\kappa \ll 1$ i jednak za sve četiri sonde. Omjer a_2/a_1 jednak je koeficijentu refleksije jednoprolaznog sklopa nepoznate impedancije spojene na prolaz 2. Amplituda i faza refleksije može odrediti samo iz mjerenja amplituda (modula) valova snage na sondama (b_3, b_4, b_5 i b_6). No, budući da su izrazi (9–17) primjenjivi samo za središnju frekvenciju na kojoj su razmaci između sonda jednaki $\lambda_v/2$, opisani je mjerni postupak ograničen na uzak pojas oko središnje frekvencije.

Slični se rezultati mogu postići primjenom simetričnih i nesimetričnih sprežnika spojenih u šesteroprolaznu mrežu. Raspršna matrica šesteroprolaznog hibrida može se napisati kao

$$S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \mathrm{j} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{j} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\mathrm{j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{j} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stupci 3-6 upućuju na disipativan hibrid. Ograničenje na širinu ostvarivog frekvencijskog područja poglavito ovisi o vrsti upotrijebljenih sprežnika. Ova vrsta hibrida upućuje na manja frekvencijska ograničenja od sustava s četirima sondama.

Praktična primjena opisanih sustava također postaje znatno složenija kad se uzmu u obzir stvarne komponente. Ta neizravna mjerna tehnika zahtijeva složen postupak umjeravanja i razmjerno sofisticiranu matematičku proceduru da bi se kompleksni koeficijent refleksije mogao precizno odrediti iz četiriju mjerenja (očitanja) amplitude.

Najveća prednost šesteroprolaznog reflektometra nalazi se u jednostavnosti njegove fizičke izvedbe. Dok tradicionalni heterodinski analizatori mreža traže komponente vrhunske kakvoće za pretvorbu frekvencije i detekciju faze, šesteroprolazni reflektometar sadrži jednostavne pasivne linearne krugove u kombinaciji s nekoliko detektora ovojnice. Stoga je takvo rješenje znatno jeftinije u odnosu na heterodinski analizator mreža.

Nedostatci opisanog mjernog sustava proizlaze iz složenosti postupka umjeravanja, manje osjetljivosti i manjeg dinamičkog područja jer je teško eliminirati utjecaj viših harmonika. Osim toga, rad šesteroprolaznih analizatora mreža ograničen je na uže frekvencijsko područje u odnosu na heterodinsku inačicu.

9.4.6. Mjerenje raspršnih parametara recipročne dvoprolazne mreže refleksijom

Raspršni parametri nerefleksivnog recipročnog dvoprolaznog sklopa mogu se naći mjerenjem koeficijenta refleksije Γ na jednom od prolaza [4], dok je pritom drugi prolaz kratko spojen ($\Gamma_T = -1$), kao što je prikazano na slici 9.22. Iz pripadajućeg grafa toka signala, ulazni se koeficijent refleksije Γ može dovesti u vezu s raspršnim parametrima $S_{12} = S_{21}$, kao

$$\Gamma = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{\Gamma_T \simeq -1} = S_{21}^2 \Gamma_T \simeq -S_{21}^2. \tag{9–18}$$

Prigušenje i fazni pomak dvoprolaznog sklopa tad iznose:

$$L = -10\log|\Gamma| + 10\log|\Gamma_{\mathrm{T}}| \simeq -10\log|\Gamma|, \tag{9–19}$$

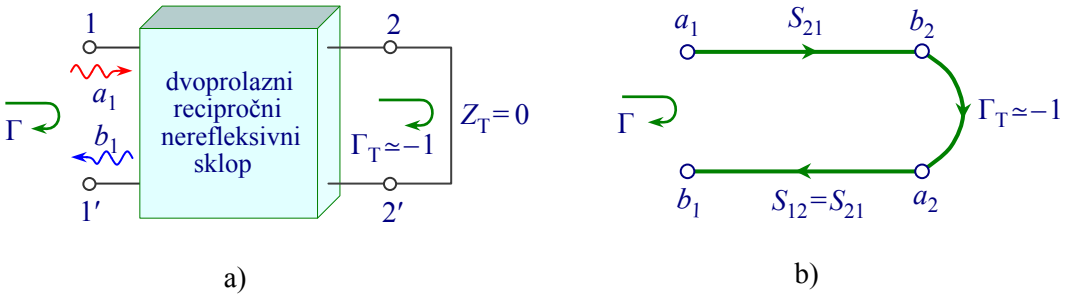
$$\theta = \frac{1}{2}\arg(\Gamma) - \frac{1}{2}\arg(\Gamma_{\mathrm{T}}) \pm n\pi \simeq \frac{1}{2}\arg(\Gamma) + \frac{\pi}{2} + n\pi\,. \tag{9–20}$$

Tim se postupkom mogu mjeriti samo recipročni i nerefleksivni dvoprolazni sklopovi. U praksi se nerijetko rabi za mjerenje prigušenja suosnih kabela čija je karakteristična impedancija jednaka impedanciji sustava Z_0.

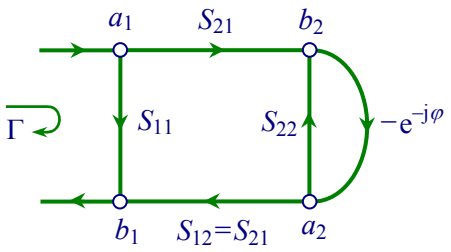
No, zamjenom fiksnog kratkospojnika pomičnim kratkospojnikom, opisani se postupak može poopćiti za recipročne i refleksivne sklopove. U tom je slučaju faza upadnoga vala snage na drugome prolazu dodatno zakrenuta za φ radijana (slika 9.23). Ako se i dalje može pretpostaviti da je kratkospojnik bez gubitaka, onda izlazi

$$\Gamma = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{\Gamma_{\mathrm{T}} \simeq -\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}} = S_{11} - \frac{S_{21}^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{1 + S_{22}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}\,. \tag{9–21}$$

To je ustvari konformno preslikavanje, kao što smo vidjeli u odjeljku 5.4. Mijenja li se φ, točka pripadajućeg koeficijenta refleksije Γ na ulazu giba se po kružnici. Sad se vrijednosti raspršnih parametara mogu dobiti iz polumjera i koordinata središta kružnice, grafički ili računalnim programom. Budući da je svaka kružnica određena trima točkama, kružnica se ulaznog koeficijenta refleksije može lako naći iz triju mjerenja koeficijenata refleksije za tri različita položaja kratkospojnika, tj. za tri poznate vrijednosti kuta φ, ali tako da niti jedan razmak (pri promjeni položaja kratkospojnika) ne smije biti jednak višekratniku polovine valne duljine na frekvenciji mjerenja. Konačno se primjenom izraza (9–21) mogu izračunati sva tri nepoznata raspršna parametra, S_{11}, S_{22} i $S_{12}=S_{21}$.



Slika 9.22. a) Mjerenje prigušenja nerefleksivnog dvoprolaznog sklopa s pomoću refleksije.
b) Pripadajući graf toka signala



Slika 9.23. Graf toka signala prilikom mjerenja proizvoljnog recipročnog dvoprolaznog sklopa zaključenog pomičnim kratkospojnikom

9.4.7. Reflektometri u vremenskoj domeni

Mjerenje koeficijenta refleksije opisano u prethodnim razmatranjima daje mjeru refleksije u funkciji frekvencije. Ako koeficijent refleksije nastaje na diskontinuitetu u liniji ili negdje unutar sustava, onda mjerenje na jednoj frekvenciji ne daje podatak o položaju diskontinuiteta. No u praksi nas često zanima podatak o mjestu na kojem nastaje diskontinuitet. Mjerenjima na više frekvencija unutar vrlo širokog frekvencijskog područja i pretvorbom podataka u vremensku domenu primjenom Fourierove transformacije moguće je odrediti položaj diskontinuiteta. To je u sofisticiranim analizatorima mreža ostvareno ugradnjom mikroprocesora i programske podrške s algoritmom brze Fourierove transformacije. Razlučivost po udaljenosti bit će to bolja što je veći omjer između najviše i najniže frekvencije na kojima se mjere raspršni parametri u frekvencijskoj domeni.

No mjerenja se mogu ostvariti i izravno u vremenskoj domeni tako da se prijenosnom linijom odašilju impulsi i nakon refleksije na diskontinuitetu detektiraju [2], [4] i [11]. U vremenskoj domeni, mjerna se veličina prikazuje kao funkcija vremena. Uz pretpostavku homogenih uvjeta rasprostiranja, vremenska je os ekvivalentna osi udaljenosti. U nekim primjenama ta vrsta analize ima znatne prednosti. Nabrojimo samo one značajnije:

- pronalaženje kvarova (diskontinuiteta) na prijenosnim linijama,
- odvajanje odjeka od željenog signala pri višestaznom rasprostiranju,
- premještanje referentnih ravnina preko nepoznatih nepravilnosti na linijama,
- mjerenja višeslojnih dielektričnih struktura s gubitcima i bez gubitaka, itd.

Da bi se postigla dobra razlučivost detekcije za bliske diskontinuitete, vrijeme porasta ulaznoga signala mora biti što je moguće kraće. Idealni ulazni signal jest funkcija skoka, ali se često rabi i vrlo uski impuls oštrih rubova koji dobro aproksimira Diracov impuls.

Ako je linija kojom se impuls prenosi nedisperzivna i ako diskontinuitet ne ovisi o frekvenciji, onda će reflektirani impuls biti vjerna replika ulaznog impulsa. Jedino može doći do promjene visine i položaja reflektiranog impulsa na vremenskoj osi (vidjeti odjeljak 3.7). Visina, tj. amplituda reflektiranog impulsa razmjerna je veličini koeficijenta refleksije, a položaj mu je razmjeran vremenskom kašnjenju koje ovisi o udaljenosti diskontinuiteta od izvora signala te o permitivnosti i permeabilnosti sredstva u kojem se impuls prenosi. Na taj se način mogu vrlo točno odrediti i položaj i karakter diskontinuiteta. Ako je koeficijent refleksije diskontinuiteta frekvencijski ovisan, onda prijamni signal neće zadržati oblik oštrog impulsa. To poglavito otežava utvrđivanje karaktera diskontinuiteta, premda mu se položaj može odrediti. No jednostavni reaktivni diskontinuiteti daju karakteristične odzive iz kojih se mogu vrlo lako odrediti i vrsta i karakter diskontinuiteta (odjeljak 3.7).

U odjeljku 3.7. vidjeli smo neke tipične odzive na funkciju jediničnog skoka. Odziv na funkciju jediničnog skoka (Heavisideova funkcija) može se općenito dobiti integriranjem po vremenu odziva $h(t)$ na jedinični impuls (Diracov impuls, $\delta(t)$), tj.

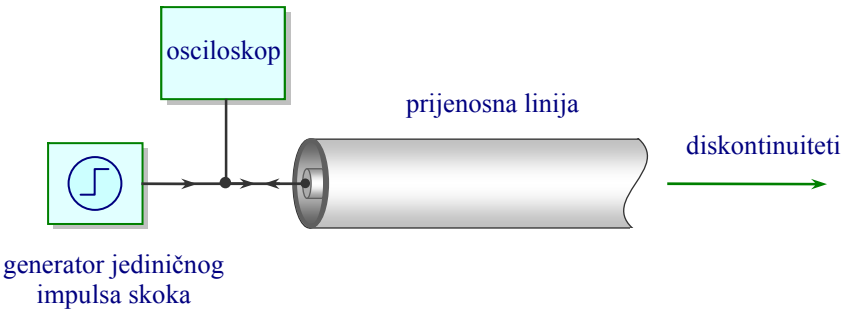
$$U(t) = \int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\tau\,, \tag{9–22}$$

unutar razdoblja od 0 do t.

Valne veličine jednoprolazne naprave mogu se razdvojiti na pobudni dio i odziv. Pobuda $a(t)$ opisuje ponašanje upadnoga vala u funkciji vremena. Odziv $b(t)$ opisuje ponašanje reflektiranoga vala u funkciji vremena. Stoga valja definirati sljedeću veličinu

$$b(t)=\Gamma_U(t)$$

kao funkciju odziva na pobudu $a(t)=u(t)$.



Slika 9.24. Reflektometar u vremenskoj domeni

Preporuča se uporaba funkcije skoka umjesto Diracova impulsa jer je nemoguće ostvariti idealni Diracov impuls, a čak i njegova aproksimacija stvara velike probleme. Predznak, veličina i oblik odziva u vremenskoj domeni pokazuju je li teret (diskontinuitet) otpornog, induktivnog ili kapacitivnog karaktera (vidjeti odjeljak 3.7).

Analiza mreža koja se temelji na veličini $\Gamma_U(t)$ poznata je pod nazivom *reflektometrija u vremenskoj domeni* ili kraće TDR, prema engl. *Time Domain Reflectometry*. Teorijski, bilo koja mjerna veličina poput impedancije Z, admitancije Y ili S-parametara može se prikazati u vremenskoj domeni kao odziv na pobudu funkcijom skoka.

Načelna shema reflektometra koji izravno mjeri parametre mikrovalne jednoprolazne mreže u vremenskoj domeni prikazana je na slici 9.24. Mjerni sustav sastoji se od osciloskopa visoke granične frekvencije i generatorom funkcije skoka, [8] i [11].

Raspršni parametri mogu se dobiti iz odziva u vremenskoj domeni. Signal $v_1(t)$ i njegov spektar $F_1(\omega)$ međusobno su povezani izravnom i inverznom Fourierovom transformacijom:

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t \,, \tag{9–23}$$

$$v_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t \,, \tag{9–24}$$

gdje je $\omega = 2\pi f$. Ako se signal rasprostire duž prijenosne linije i reflektira na diskontinuitetu, tako da se njegov valni oblik promijeni u $v_2(t)$, onda se odgovarajući spektar može napisati kao

$$F(\omega) = \frac{F_2(\omega)}{F_1(\omega)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_2(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty} v_1(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t} \,. \tag{9–25}$$

Stvarni su valni oblici konačnog trajanja pa je i područje integracije konačno. Nadalje, mogu se rabiti uzorkovani valni oblici, ako se zajamči da najviša frekvencijska komponenta signala ne prelazi polovinu frekvencije uzorkovanja. Stoga izraz (9–25) daje dobar temelj za brzo mjerenje raspršnih parametara u širokom frekvencijskom području.

Jednako tako, širokopojasnim mjerenjima u frekvencijskoj domeni i primjenom inverzne Fourierove transformacije može se odrediti ponašanje sklopa u vremenskoj domeni. Stoga se analizatorima mreža s velikim omjerom između najviše i najniže frekvencije mjerenja, može postići visoka rezolucija pri određivanju položaja diskontinuiteta na prijenosnoj liniji.

Većina analizatora mreža i reflektometara obavlja mjerenje u frekvencijskoj domeni (spektar), a razlozi su tomu sljedeći.

- Za razliku od mjerenja u vremenskoj domeni, mjerenja u frekvencijskoj domeni mogu se lakše ostvariti u uskom frekvencijskom pojasu. Stoga je odnos signala prema šumu mjernih veličina znatno veći pa se takvim mjernim sustavom postiže veće dinamičko područje u usporedbi s izravnim mjerenjima u vremenskoj domeni.
- Pretvorba analognog signala u digitalni signal (A/D pretvorba) moguća je samo do nekoliko GHz. U mjernom sustavu koji se osniva na heterodinskom pristupu (odjeljci 8.6. i 10.2.2), takvo ograničenje ne postoji jer se A/D pretvorba obavlja na razini međufrekvencijskog signala.

Budući da vektorski analizator mreža mjeri i amplitudu i fazu *S*-parametara, ne pojavljuje se problem neodređenosti pri transformaciji u vremensku domenu.

Literatura:

[1] E.L. Ginzton, *Microwave Measurements*, McGraw-Hill, Inc., 1957.

[2] G. H. Bryant, *Principles of Microwave Measurements*, Peter Peregrinus Ltd., Revised Edition, 1988.

[3] *Fundamentals of RF and Microwave Power Measurements*, Agilent Application Note 64-1C.

[4] F. E. Gardiol, *Introduction to Microwaves*, Artech House, Dedham, 1984.

[5] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York 2005.

[6] L. F. Chen, C. K. Ong, C. P. Neo, V. V. Varadan, V. K. Varadan, *Microwave Electronics. Measurement and Material Characterization*, John Wiley & Sons, 2004.

[7] C. Rauscher, *Fundamentals of Spectrum Analysis*, Rohde & Schwarz, GmbH, Munich, 2004

[8] M. Hiebel, *Fundamentals of Vector Network Analysis*, Rohde & Schwarz, GmbH, München, 2007.

[9] G. F. Engen, "The six-port reflectometer", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. MTT-25, No. 12, Dec. 1977, str. 1075-1080.

[10] G. F. Engen, "An improved circuit for implementing the six-port technique of microwave measurements", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. MTT-25, No. 12, Dec. 1977, str. 1080-1083.

[11] *Time Domain Reflectometry*, Hewlett-Packard Application Note 62.

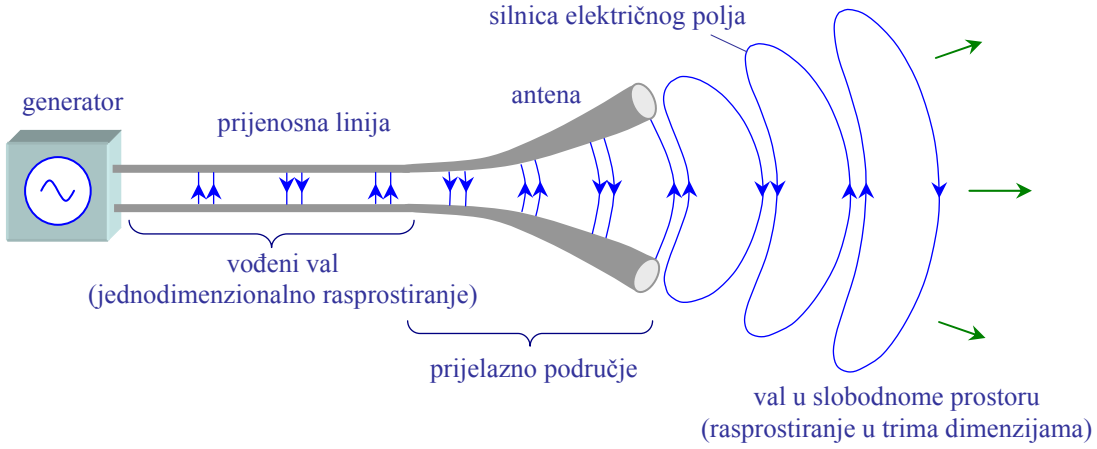
10. Uvod u mikrovalne sustave i primjene

Mikrovalni sustavi sastoje se od pasivnih i aktivnih mikrovalnih naprava složenih u jednu cjelinu kojom se ostvaruje neka složena funkcija. Među brojnim mikrovalnim sustavima treba spomenuti mikrovalne komunikacijske sustave i mikrovalne radarske sustave. Budući da antene čine nerazdvojni dio svakog mikrovalnoga komunikacijskog i radarskog sustava najprije ćemo razmotriti osnovna obilježja zračenja mikrovalnih antena.

10.1. Mikrovalne antene

Za puno razumijevanje rada mikrovalnih komunikacijskih i radarskih sustava važno je poznavanje parametara antena i svojstava rasprostiranja elektromagnetskih valova u stvarnim uvjetima. Stoga ćemo u ovom odjeljku objasniti osnovna obilježja antena kao sastavnih komponenata radijskih sustava [1]–[6].

Antene su elektromagnetske naprave koje pretvaraju vođeni elektromagnetski val iz prijenosne linije u prostorni (sferni) val u slobodnome prostoru i obratno. Stoga se antena s jedne strane pojavljuje kao komponenta električnog strujnog kruga, dok s druge strane preuzima ulogu sučelja s elektromagnetskim valom koji se rasprostire (širi) slobodnim prostorom (slika 10.1). Postupnim otvaranjem otvorene dvožične prijenosne linije raste količina zračene snage. Na slici 10.1 može se zapravo vidjeti da je antena prijelazno područje između vođenog vala u prijenosnoj liniji i prostornog vala u slobodnome prostoru.



Slika 10.1. Antena kao naprava koja pretvara jednodimenzionalni vođeni val iz prijenosne linije u prostorni val u slobodnome prostoru

Dovoljno daleko od antene svaki se sferni val može aproksimirati ravnim valom. Stoga pri definiranju značajnih parametara antena i radiokomunikacijske veze, valja iskoristiti rezultate koe smo našli u odjeljku 2.14. To se poglavito odnosi na pojavu zračenja elektromagnetske energije u slobodni prostor, što je objašnjeno na primjeru Hertzova dipola (odjeljak 2.14.3). Premda je Hertzov dipol najjednostavnija i najmanja moguća antena, teško ga se može upotrijebiti za učinkovito odašiljanje i primanje elektromagnetskih valova. Osnovni razlog neučinkovitosti zračenja Hertzova dipola nalazi se u njegovom iznimno malom otporu zračenja koji je obično dva reda veličine manji od karakteristične impedancije (Z_0 = 50 Ω) uobičajenih mikrovalnih sustava. Ako se k tomu doda mali serijski kapacitet Hertzova dipola,

tj. visoka serijska reaktancija, onda se može lako vidjeti da je prilagodba te izrazito reaktivne strukture gotovo nemoguća zadaća, posebice kad se želi postići iole korisna širina pojasa. Zato se umjesto Hertzova dipola u praktičnoj uporabi redovito nalaze žičane antene znatno većih izmjera poput poluvalnoga dipola. Osim toga, u mikrovalnome se području nerijetko rabe površinske antene ili otvorne antene poput valovodnog lijevka, reflektorske i lećaste antena te skupina žičanih i valovodnih struktura zračenja koja se naziva *antenski niz*.

10.1.1. Dijagram zračenja i intenzitet zračenja

Snaga koju antena prima ili zrači funkcija je kutnog položaja i radijalne udaljenosti. Već smo u odjeljku 2.14.3. vidjeli da Hertzov dipol ne zrači elektromagnetsku energiju jednakom jakošću u svim smjerovima. U točki koja je dovoljno daleko od antene, svaka se antena doimlje poput točkastog izvora elektromagnetske energije, pa je za prikaz prostorne razdiobe jakosti polja prirodno upotrijebiti sferni koordinatni sustav. Daleko od proizvoljne antene, vektor električnog polja u sfernome koordinatnom sustavu može se napisati kao

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = \left[\hat{\theta}\,F_\theta(\theta,\varphi) + \hat{\varphi}\,F_\varphi(\theta,\varphi)\right]\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{r} \quad \text{V/m}, \tag{10–1}$$

gdje su $\hat{\theta}$ i $\hat{\varphi}$ jedinični vektori u sfernome koordinatnom sustavu, a $k_0 = 2\pi/\lambda$. Veličine $F_\theta(\theta,\varphi)$ i $F_\varphi(\theta,\varphi)$ funkcije su *prostornoga dijagrama zračenja* za polja. Električno polje može biti polarizirano u smjeru $\hat{\theta}$ ili u smjeru $\hat{\varphi}$, ali ne i u radijalnom smjeru $\hat{r}$. Izraz (10–1) pokazuje da polje opada s udaljenošću s faktorom $1/r$, kao u izrazu (2–281) za Hertzov dipol iz odjeljka 2.14.3. Pripadajuće komponente magnetskog polja mogu se napisati kao:

$$H_\varphi = \frac{E_\theta}{\eta_0}, \qquad H_\theta = \frac{-E_\varphi}{\eta_0}, \tag{10–2}$$

gdje je $\eta_0 \simeq 376{,}7\ \Omega$, intrinzična valna impedancija slobodnoga prostora. Uvrštenjem izraza (10–1) i (10–2) u izraz (2–127) za Poyntingov vektor te uvrštenjem rezultata u izraz (2–129), gustoća srednje snage koju prenose polja slobodnim prostorom može se izračunati samo iz vršne jakosti električnog polja kao

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{S}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E}\times\vec{H}^*\right\} = \frac{1}{2\eta_0}\left|\vec{E}\right|^2 \quad \text{W/m}^2, \tag{10–3}$$

gdje $\vec{S} = \hat{r}S_r$ ima samo radijalnu komponentu jer su i električno i magnetsko polje okomiti na smjer rasprostiranja energije.

Već smo kod Hertzova dipola vidjeli da daleko od antene, u tzv. dalekoj zoni, prevladavaju samo zračeća polja, stoga je korisno naći udaljenost od antene na kojoj se reaktivna polja mogu zanemariti u odnosu na zračeća polja. Ta praktična udaljenost za geometrijski velike antene iznosi

$$r_{\mathrm{dp}} = \frac{2d^2}{\lambda} \tag{10–4}$$

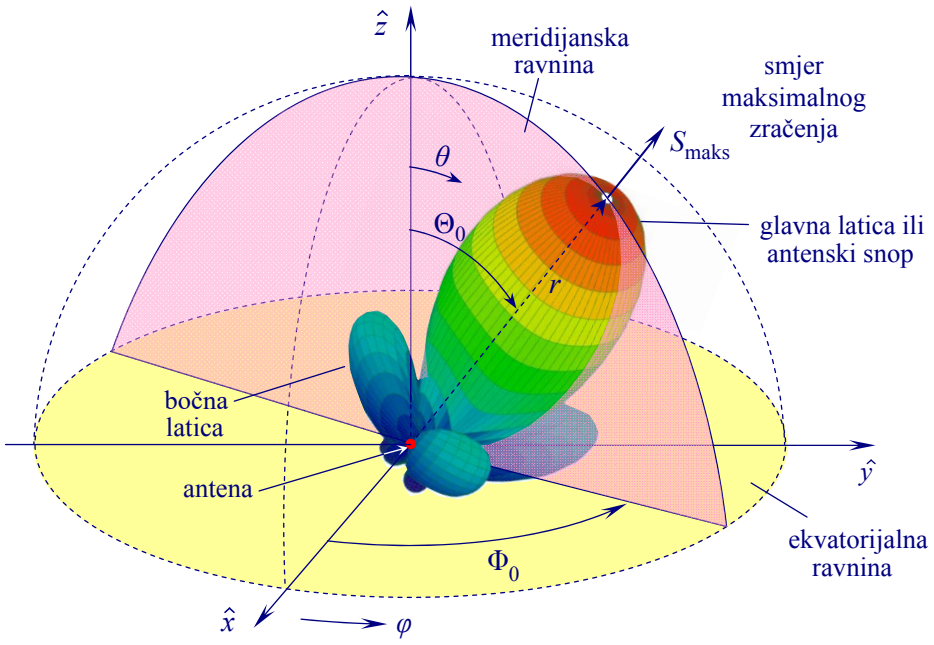
gdje je d najveća dimenzija antene. Izraz (10–4) dobiven uz uvjet da je u točki promatranja u smjeru maksimalnog zračenja gustoća snage u fronti sfernoga vala manja za jedan posto od gustoće snage u fronti ravnoga vala [1]. U području izvan polumjera r_{dp} (*Fraunhoferova* ili *daleka zona*) dijagram zračenja praktički ne ovisi o udaljenosti. No u području između r_{dp} i područja u kojem prevladavaju indukcijska (reaktivna) polja i dalje pretežu zračeća polja, ali oblik dijagrama zračenja ovisi o udaljenosti. To prijelazno područje naziva se *Fresnelova zona*. Za električki male antene, poput kratkog električnog dipola i male petlje, izraz (10–4) daje premalu vrijednost pa valja uzeti vrijednost r_{dp} od najmanje dvije valne duljine.

Prostorne razdiobe električnog polja, $F_\theta(\theta,\varphi)$ i $F_\varphi(\theta,\varphi)$ u izrazu (10–1) prikazane u sfernome koordinatnom sustavu tvore *prostorni dijagram zračenja*. Prema izrazu (10–3), gustoća snage ovisi o kvadratu polja pa se može prikazati i dijagram zračenja gustoće snage. Dijagram zračenja prikazuje se u logaritamskome (dB) ili linearnome mjerilu u relativnim vrijednostima u odnosu na maksimum zračenja koji tad iznosi 0 dB, tj. 1.

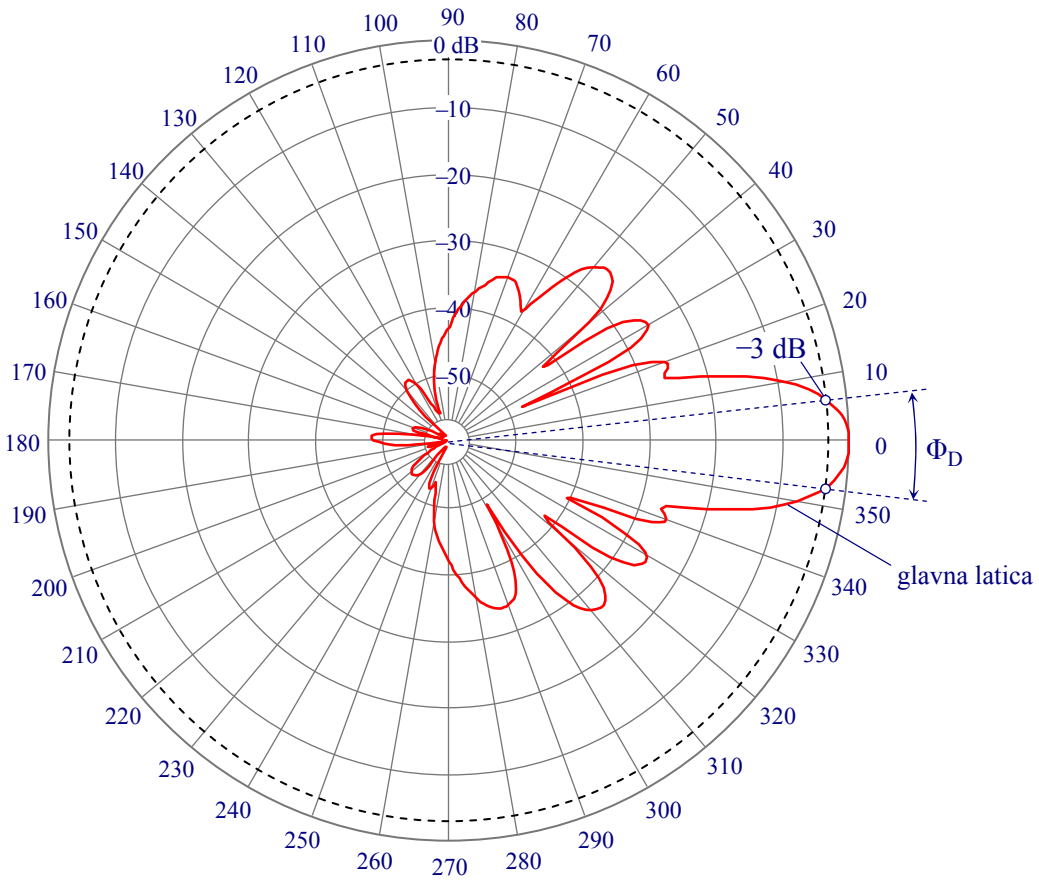
Na slici 10.2 prikazan je tipični prostorni dijagram zračenja usmjerene antene, koji se sastoji od antenskoga snopa (glavna latica) s maksimalnom jakošću zračenja i više bočnih (sekundarnih) latica slabo izražena zračenja, obično u neželjenim smjerovima. Razdioba polja ili gustoće snage poglavito ovisi o razdiobi struja u vodičima antenske strukture. No razne pasivne strukture koje okružuju antenu ili su njezin sastavni dio, mogu jako utjecati na razdiobu polja elektromagnetskoga vala u prostoru daleko od antene. Glavna latica (kod usmjerenih antena) označuje prostorni kut unutar kojega antena zrači ili prima glavninu energije. Smjer maksimalnog zračenja (ili prijama) definiran je dvama kutovima Φ_0 i Θ_0, gdje je Θ_0 polarni kut, a Φ_0 obilazni kut koji se može očitati u ekvatorijalnoj ravnini sfernoga koordinatnog sustava. Omjer gustoće snage u smjeru maksimalnog zračenja i maksimuma najizraženije bočne latice naziva se *potiskivanje bočnih latica*.

Umjesto prostornog dijagrama zračenja obično se uzimaju presjeci prostornog dijagrama zračenja u dvjema međusobno okomitim ravninama. Tako se nerijetko rabi dijagram zračenja u meridijanskoj (vertikalnoj) ravnini i projekcija prostornog dijagrama zračenja na ekvatorijalnu (horizontalnu) ravninu. Kut φ u horizontalnoj ravnini naziva se *obilazni kut* ili *kut azimuta*, a kut θ u vertikalnoj ravnini naziva se *polarni kut*. Njemu je komplementaran kut elevacije $(90°-\theta)$. Na slici 10.3 prikazan je tipični dijagram zračenja u jednoj od tih ravnina. Dijagram se obično normira veličinom gustoće snage u smjeru maksimalnog zračenja. Tad u smjeru maksimalnog zračenja pokazuje jediničnu vrijednost, tj. nultu vrijednost u decibelima.

Antene mogu odašiljati i primati elektromagnetske valove različite polarizacije. Kao što je objašnjeno u odjeljku 2.8, polarizacija elektromagnetskoga vala definirana je orijentacijom vektora zračećeg električnog polja. Prema prijedlogu udruge IEEE, polarizacija antene definirana se kao polarizacija zračećeg polja kad antena odašilje. Primjerice, ravni dipol koji leži



Slika 10.2. Prostorni dijagram zračenja antene. Antena se nalazi u ishodištu sfernoga koordinatnog sustava. Bojom je označen intenzitet zračenja (plavo → crveno)



Slika 10.3. Dijagram zračenja antene u polarnom prikazu u meridijanskoj ravnini. Dijagram je normiran na 0 dB u točki maksimalne gustoće snage. Kut usmjerenosti (Φ_D) određen je dvjema točkama u kojima relativna gustoća snage padne za 3 dB u odnosu na maksimalnu gustoću snage

na osi $\hat{z}$, zrači samo θ-komponentu električnog polja u dalekoj zoni. Stoga, u glavnoj latici dipola, koja ima maksimum pod kutom $\theta = 90°$, električno je polje orijentirano vertikalno pa se može reći da je dipol linearno polariziran u vertikalnome smjeru. Kasnije ćemo vidjeti da se maksimalni prijenos snage između antena ostvaruje kad su one istovjetno polarizirane.

10.1.2. Usmjerenost

U većini komunikacijskih primjena traži se da antena zrači ili prima elektromagnetsku energiju samo u jednom smjeru pa antenski sustav obično ima jedan glavni snop (glavna latica u dijagramu zračenja) i veći broj bočnih latica, kao što je prikazano na slici 10.3. U ispravno izvedenoj anteni razine bočnih latica nerijetko su znatno niže od razine zračenja u smjeru maksimalnog zračenja. No, u komunikacijskim primjenama, razine bočnih latice ponekad se namjerno povećavaju kako bi se ostvarilo šire područje pokrivanja radijskim signalom. Osim toga, može se ostvariti i svesmjerno zračenje, ali samo u jednoj ravnini poput Hertzova dipola i drugih antena koje se sastoje od ravne žice. Zračenje je svesmjerno u ravnini koja je okomita na ravnu žicu (H-ravnina). Ako žica leži na osi $\hat{z}$, tj. $\theta = 0$, tad je to ekvatorijalna ravnina, $\theta = 90°$. Nerijetko se obilježja zračenja antene prikazuju u ravninama električnog i magnetskog polja.

Ako je sredstvo u kojem se prenosi elektromagnetska energija izotropno, onda je dijagram zračenja antene jednak za antenu koja zrači i koja prima. Ta odlika antena izravno proizlazi iz načela recipročnosti (odjeljak 2.15.3).

Kut usmjerenosti Φ_D (ili Θ_D) označuje kut oko smjera maksimalnog zračenja, a određen je dvjema točkama u kojima gustoća snage padne na polovicu iznosa gustoće snage zračene u smjeru maksimuma (slika 10.3), a jakost polja se smanji za faktor $1/\sqrt{2}$.

Svakoj se anteni može naći *fazno središte*. Ako se iz faznog središte povuče zamišljena sfera polumjera koji se nalazi u dalekoj zoni antene, onda će se kretanjem po toj sferi zabilježiti najmanje promjene faze odaslanog signala.

Pri proučavanju antena korisno je definirati *intenzitet zračenja* $U(\theta,\varphi)$ kao

$$U(\theta,\varphi) = r^2 \left\langle S_r \right\rangle = \frac{r^2}{2} \hat{r}\,\mathrm{Re}\left\{ \hat{\theta} E_\theta \times \hat{\varphi} H_\varphi^* - \hat{\varphi} E_\varphi \times \hat{\theta} H_\theta^* \right\} =$$

$$= \frac{r^2}{2\eta_0}\left(\left|E_\theta\right|^2 + \left|E_\varphi\right|^2 \right) = \frac{1}{2\eta_0}\left(\left|F_\theta\right|^2 + \left|F_\varphi\right|^2 \right) \quad \mathrm{W}, \tag{10–5}$$

gdje su upotrijebljeni izrazi (10–1) do (10–3). Kao što se može vidjeti, intenzitet zračenja ne ovisi o udaljenosti i mjeri se u vatima, a pokazuje kutnu razdiobu zračene snage. U odjeljku 2.14.3. objašnjeno je da se snaga koju antena zrači može dobiti integriranjem razdiobe srednje gustoće snage na sferi polumjera r, ako je sredstvo unutar te sfere bez gubitaka. Stoga se primjenom izraza (10–5) može napisati da je zračena snaga

$$P_\mathrm{z} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\langle S_r(\theta,\varphi) \right\rangle r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U(\theta,\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{10–6}$$

U odjeljku 2.14.3. također je uveden pojam izotropnoga radijatora s pomoću kojega je moguće uspoređivati obilježja zračenja različitih antena. Izotropni je radijator fiktivna antena koja jednako zrači u svim smjerovima ili koja jednako prima iz svih smjerova. Budući da smjer vektora polja u dalekoj zoni ovisi o smjeru struje koja ga stvara, izotropni je radijator nemoguće fizički ostvariti. Ako se izotropni radijator predoči točkastim izvorom, onda se može zamisliti da će se snaga koju on zrači jednoliko raspodijeliti na sferi polumjera r u čijem se središtu nalazi izotropni radijator. Otuda izlazi da je gustoća srednje snage, koja prolazi tom sferom, jednaka omjeru zračene snage i površine sfere ($4\pi r^2$), tj.

$$S_\mathrm{sred} = \left\langle S_\mathrm{i} \right\rangle = \frac{P_\mathrm{z}}{4\pi r^2}\,. \tag{10–7}$$

Iz toga proizlazi jasna intuitivna slika da gustoća snage točkastog izvora opada s kvadratom udaljenosti, tj. da je jakost polja daleko od antene obrnuto razmjerna udaljenosti što je u skladu s izrazom (10–1).

U komunikacijskim i radarskim primjenama, potrebno je znati koliko je zračenje antene koncentrirano u željenome smjeru. Na to pitanje odgovor daje bezdimenzionalna veličina D koja se naziva *usmjerenost*, a uvedena je u odjeljku 2.14.3. Usmjerenost je definirana kao omjer maksimalnog intenziteta zračenja (U_maks) u glavnoj latici antene i srednjeg (prosječnog) intenziteta zračenja (U_sred) po cjelokupnom prostoru, tj.

$$D = \frac{U_\mathrm{maks}}{U_\mathrm{sred}} = \frac{4\pi U_\mathrm{maks}}{P_\mathrm{z}} = \frac{4\pi U_\mathrm{maks}}{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} U(\theta,\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}, \tag{10–8}$$

gdje je zračena snaga (P_z) povezana sa srednjim intenzitetom zračenja (U_sred) preko izraza (10–6). Usmjerenost je veličina bez dimenzija i definirana je u dB kao

$$D_\mathrm{dB} = 10\log D\,.$$

Otuda se vidi da je usmjerenost izotropnoga radijatora jedinična, tj. $D_\mathrm{i} = 1$ (ili 0 dB) jer se za $U(\theta,\varphi) = 1$ integral u nazivniku izraza (10–8) svodi na

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi\,,$$

što je prostorni kut sfere (kugle), koji se nalazi u brojniku izraza (10–8).

Fizikalna intuicija upućuje na zaključak da će antena veće usmjerenosti imati manje kutove usmjerenosti i obratno. Stoga su te veličine intuitivno povezane. No ne postoji izravna veza između tih veličina jer kutovi usmjerenosti ovise samo o veličini i obliku glavne latice (snopa antene), a usmjerenost ovisi o integralu cjelokupnog dijagrama zračenja u čemu važnu ulogu imaju bočne latice. Otuda je jasno da dvije različite antene mogu imati jednake kutove usmjerenosti, a različite usmjerenosti i obratno. Teorijski rezultat za usmjerenost daje

$$D \simeq \frac{4\pi}{\Phi_\mathrm{D}\Theta_\mathrm{D}} = \frac{4\pi}{\Omega_\mathrm{A}} = \frac{41.253}{\Phi_\mathrm{D}^\mathrm{o}\,\Theta_\mathrm{D}^\mathrm{o}} \qquad (10\text{–}9\mathrm{a})$$

gdje je Ω_A prostorni kut antene, a kutovi $\Phi_\mathrm{D}^\mathrm{o}$ i $\Theta_\mathrm{D}^\mathrm{o}$ zadani su u lučnim stupnjevima. No, za antenu oblika pravokutnog otvora, čija je glavna latica razmjerno uska u dvjema okomitim ravninama i za jednoliku razdiobu struje na otvoru, bolje rezultate daje približna formula

$$D \simeq 32.400/(\Phi_\mathrm{D}^\mathrm{o}\,\Theta_\mathrm{D}^\mathrm{o}) \qquad (10\text{–}9\mathrm{b})$$

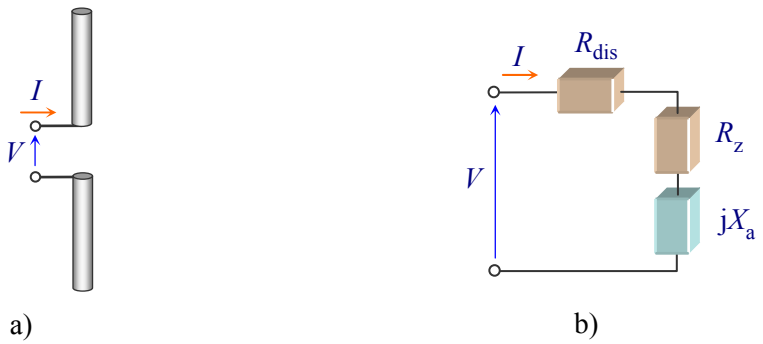
10.1.3. Impedancija antene

Ako se antenu na slici 10.4a) promatra s priključaka na kojima je pobuđena signalom iz generatora, onda se na tim priključcima mogu izmjeriti napon i struja. Omjer fazora napona i struje čini impedanciju antene. Ako se antena nalazi posve sama u slobodnome prostoru, onda se ta impedancija naziva *vlastita impedancija antene*.

Stvarna antena ne zrači u prostor cjelokupnu snagu koja joj je privedena jer se dio snage uvijek disipira u samoj anteni zbog konačne provodnosti vodiča i konačnih gubitaka u dielektričnom materijalu od kojih je antena izrađena. Snagu koju antena zrači u slobodni prostor generator »doživljava« kao gubitak snage, jer ta snaga napusti elektromagnetski sustav i nikad se u njega ne vraća osim ako ne postoji refleksija. Tom gubitku snage razmjeran je neki otpor koji se naziva *otpor zračenja* (vidjeti odjeljak 2.14.3). Stoga se dio ulazne impedancije svake antene može nadomjestiti otporom zračenja, R_z. Slično se gubitci u vodičima i dielektričnim dijelovima antene mogu prikazati otporom R_dis. Pritom se misli da kroz oba otpora teče struja jednake jakosti I koja teče i ulaznim priključkom antene.

Reaktivna komponenta vlastite impedancije antene X_a posljedica je indukcijskih polja koja pohranjuju reaktivnu energiju u neposrednoj blizini antene. Stoga se konačni izraz za impedanciju antene može napisati kao

$$Z_\mathrm{a} = R_\mathrm{a} + \mathrm{j}X_\mathrm{a} = R_\mathrm{z} + R_\mathrm{dis} + \mathrm{j}X_\mathrm{a}\,. \qquad (10\text{–}10)$$



a) b)

Slika 10.4. a) Antena kao ravna žičana struktura i **b)** njezina nadomjesna shema

Maksimalna snaga koju antena može primiti iz generatora ili pobudne linije postiže se uz konjugirano kompleksnu prilagodbu, tj. $Z_a = Z_G^*$, kao što je objašnjeno u odjeljku 5.4.1.

U stvarnoj anteni nastaju gubitci jer se dio privedene snage generatora troši u vodičima i dielektricima unutar same antene. Stoga je korisno definirati *faktor učinkovitosti zračenja* η_z, kao omjer zračene snage i ukupne snage privedene anteni, tj.

$$\eta_z = \frac{P_z}{P_{ul}} = \frac{P_{ul} - P_{dis}}{P_{ul}} = 1 - \frac{P_{dis}}{P_{ul}} = \frac{R_z}{R_z + R_{dis}}, \tag{10–11a}$$

jer je $P = I^2 R/2$. Taj je faktor uvijek manji od jedan. Ako se uključi razgođenost, tj. koeficijent refleksije antene (Γ_a), onda se može izvesti izraz za totalnu učinkovitost zračenja

$$\eta_{tot} = \left(1 - |\Gamma_a|^2\right)\eta_z . \tag{10–11b}$$

10.1.4. Dobitak

Veličina koja je povezana s privedenom snagom, a ne zračenom snagom kao kod usmjerenosti, naziva se *dobitak* antene. Veza dobitka G i usmjerenosti D dana je kao

$$G = \eta_z D \tag{10–12}$$

gdje je η_z učinkovitost zračenja definirana izrazom (10–11a). Dobitak je veličina koja je posebno korisna kad se antena razmatra kao dio komunikacijskog ili radarskog sustavu jer su uzeti u obzir gubitci u anteni. *Totalni dobitak* antene dobiva se tako da se umjesto učinkovitosti zračenja uvrsti totalna učinkovitost. Dobitak se obično prikazuju u decibelima, tj.

$$G_{dB} = 10 \log G,$$

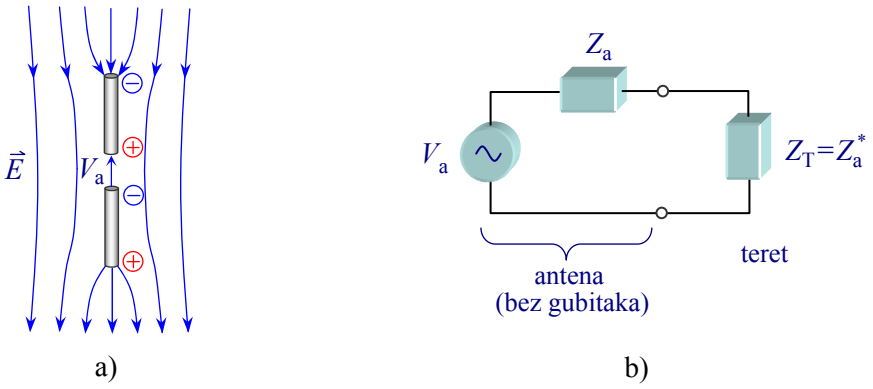
i obično se mjeri u odnosu na dobitak izotropnog radijatora (0 dB), pa mu je jedinica dBi.

10.1.5. Efektivna površina i efektivna duljina antene

Efektivna površina prijamne antene A_{ef} definira se kao omjer između prijamne snage P_p apsorbirane na prilagođenom teretu priključenom na antenu i srednje gustoće snage u radijalnom smjeru upadnog elektromagnetskoga vala, tj.

$$A_{ef} = \frac{P_p}{\langle S_r \rangle} . \tag{10–13}$$

Pritom se uzima da je teret prilagođen za maksimalni prijenos snage te da antena nema gubitaka, da joj je polarizacija istovjetna polarizaciji upadnoga vala i da joj je maksimum glavne latice usmjeren prema izvoru zračenja.



Slika 10.5. a) Induciranje napona na otvorenim priključcima antene u paralelno polariziranom električnom polju. **b)** Nadomjesni sklop antene opterećene prilagođenim teretom

Kao što je prikazano na slici 10.5a), na žičanu antenu nailazi ravni elektromagnetski val amplitude električnog polja E_0. Prema izrazu (10–3), gustoća snage elektromagnetskoga vala koji upada na antenu iznositi

$$\langle S_r \rangle = \frac{E_0^2}{2\eta_0}. \tag{10–14}$$

Na otvorenim priključcima antene, električno polje toga vala inducira napon vršne vrijednosti V_a, koja se može dobiti integriranjem električnog polja E uzduž antene. Stoga se na trošilu (prijamniku) antena doimlje kao naponski izvor elektromotorne sile V_a u seriji s vlastitom impedancijom antene, kao što je prikazano u nadomjesnoj shemi na slici 10.5b). Ako je antena bez gubitaka ($\eta = 1$, tj. $R_a = R_z$) i njezina reaktancija poništena u rezonanciji vanjskom reaktancijom suprotnog predznaka, a otpor trošila jednak otporu zračenja antene R_z, onda je ostvarena prilagodba za maksimalni prijenos snage pa je prijamna snaga

$$P_p = P_A = \frac{V_a^2}{8R_z}, \tag{10–15}$$

gdje je P_A raspoloživa snaga generatora, tj. antene [izraz (3–67) iz odjeljka 3.3.6]. Tako, primjerice, za Hertzov dipol (odjeljak 2.14.3) ili antenu s vrlo kratkim vodičima ukupne duljine $l = \Delta z \ll \lambda$, napon na otvorenim priključcima iznosi $V_a = E_0 \Delta z$. Uvrštenjem izraza (2–286) za otpor zračenja Hertzova dipola u izraz (10–15) te uvrštenjem dobivenog rezultata i izraza (10–14) u relaciju (10–13), za efektivnu površinu dobiva se

$$A_{ef} = \frac{P_p}{\langle S_r \rangle} = \frac{V_a^2}{8R_z}\frac{1}{\frac{E_0^2}{2\eta}} = \frac{(E_0 \Delta z)^2}{8 \cdot 80\pi^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2}\frac{120\pi}{\frac{E_0^2}{2}} = \frac{3}{2}\frac{\lambda^2}{4\pi}. \tag{10–16}$$

Budući da usmjerenost Hertzova dipola iznosi $D = 3/2$ [izraz (2 – 286) iz odjeljka 2.14.3)], iz izraza (10–16) izlazi korisna relacija

$$A_{ef} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D. \tag{10–17}$$

Ta je relacija posve općenita i vrijedi za sve vrste antena. Formula (10–16) pokazuje nam koliki dio fizičke površine antene sudjeluje u usmjeravanju zračenja u željenome smjeru. Za površinske ili otvorne antene postoji veza između geometrijske (ili fizičke) površine otvora A_g i efektivne površine preko relacije

$$A_{ef} = \kappa_{otv} A_g, \tag{10–18}$$

gdje je κ_{otv} *koeficijent učinkovitosti otvora*, koji je uvijek manji od jedinice. Drugim riječima, efektivna površina antene približno pokazuje kolike se dimenzije stvarne antene mogu očekivati, ako su poznati usmjerenost i frekvencija.

Kod linearnih se antena umjesto efektivne površine uvriježio pojam efektivne duljine. Za prijamnu antenu na slici 10.5a) efektivna duljina $l_{ef,p}$ jednaka je omjeru napona V_a na otvorenim priključcima antene i jakosti električnog polja E na mjestu antene, tj.

$$l_{ef,p} = \frac{V_a}{E}. \tag{10–19a}$$

Pritom se pretpostavlja da antena ima istovjetnu polarizaciju kao i upadni val, te da joj je maksimum glavne latice usmjeren prema izvoru zračenja. Valja također uočiti da se efektivna duljina antene definira za prijamnu antenu s otvorenim priključcima, za razliku od antene s prilagođenim priključcima pri definiranju efektivne površine.

Efektiva duljina može se definirati i za odašiljačku antenu, a označuje duljinu nadomjesne linearne antene kojom teče struja maksimalne jakosti I_{maks} u razdiobi struje stvarne antene. Ovdje se podrazumijeva da obje antene na istoj udaljenosti proizvode jednaku jakost polja u smjeru maksimalnog zračenja. Efektivna duljina odašiljačke antene dobiva se integriranjem razdiobe struje uzduž žičane strukture izvorne antene, tj.

$$l_{ef,o} = \frac{1}{I_{maks}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I(z)\mathrm{d}z \,. \qquad (10\text{–}19b)$$

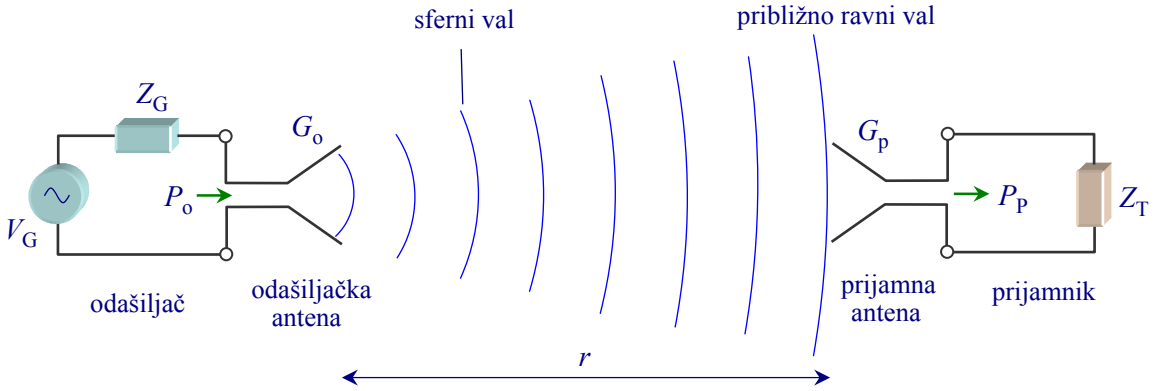
Ovdje je l fizička duljina antene, z je koordinata u smjeru duljine antene s ishodištem ($z = 0$) na polovini duljine l, a $I(z)$ stvarna je razdioba struje na anteni čija se efektivna duljina određuje.

10.1.6. Antena u komunikacijskim sustavima

Na antenu se može gledati kao na napravu koja pretvara vođeni val na prijenosnoj liniji u »ravni val« koji se rasprostire slobodnim prostorom. To je ujedno njezina osnovna funkcija. Stoga se antena sa strane priključaka (prolaza) doimlje kao element električnog kruga, dok onaj drugi kraj čini sučelje s ravnim valom koji se rasprostire. Antene su inherentno dvosmjerne (recipročne) pa se mogu istodobno rabiti za odašiljanje i prijam radiofrekvencijskih (RF) signala. To je u skladu s fizikalnom intuicijom jer su uobičajene antene sastavljene od recipročnih materijala, a i sredstvo, u kojem se rasprostire elektromagnetski val, je izotropno (vidjeti načelo recipročnosti, odjeljak 2.15.3).

Na slici 10.6 prikazana je osnovna funkcija odašiljačke i prijamne antene. Svaki odašiljač može se nadomjestiti naponskim izvorom RF signala i serijskom impedancijom (unutarnja impedancija generatora signala). Takav odašiljač predaje anteni snagu P_o. Odašiljačka antena zrači sferni val, koji se na velikim udaljenostima od antene u konačnom prostoru oko točke promatranja može aproksimirati ravnim valom. Prijamna antena preuzima dio elektromagnetske energije iz tog ravnoga vala. Prijamnu snagu P_p, koja se pojavljuje na njezinim priključcima, antena predaje teretu koji zapravo čini ulaznu impedanciju prijamnika.

Gustoća toka snage izotropnoga radijatora ($D = 1 = 0$ dB) na udaljenosti r od antene može se izračunati primjenom izraza (10–7) pa je gustoća snage koju stvara stvarna odašiljačka antena u smjeru maksimalnog zračenja jednaka umnošku gustoće snage izotropnoga radijatora i dobitka antene, tj.



Slika 10.6. Odašiljačka i prijamna antena u osnovnom radijskom sustavu

$$\langle S_r \rangle = \frac{G_o P_o}{4\pi r^2} \quad \text{W/m}^2. \tag{10–20}$$

Uvrštenjem izraza za efektivnu površinu otvora prijamne antene (10–12) u izraz (10–20), prijamna se snaga može izraziti kao

$$P_p = A_{ef} \langle S_r \rangle = \frac{G_o P_o A_{ef}}{4\pi r^2} \quad \text{W}. \tag{10–21}$$

Primjenom veze između usmjerenosti ili dobitka antene i njezine efektivne površine (10–16) konačno se dobiva

$$P_p = \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 G_p G_o P_o \quad \text{W}. \tag{10–22}$$

To je poznata *Friisova prijenosna formula* koja pokazuje koliku snagu prima prijamna antena. U praksi, vrijednost dobivena izrazom (10–22) može se objasniti kao najveća ostvariva prijamna snaga jer postoji nekoliko faktora koji mogu znatno smanjiti prijamnu razinu u stvarnom radijskom sustavu. Ti faktori uključuju polarizacijski nesklad između antena i razgođenja impedancije na objema antenama. No postoje i takve pojave pri rasprostiranju koje vode dodatnom prigušenju (slabljenju) signala ili depolarizaciji te učincima višestaznog prijenosa koji mogu prouzročiti djelomično ili potpuno poništavanje prijamnog polja u određenim točkama prostora, ali i porast prijamne snage iznad vrijednosti koju jamči Friisova formula (konstruktivna interferencija).

Formula (10–22) pokazuje da prijamna snaga opada povećavanjem razmaka između odašiljača i prijamnika s faktorom $1/r^2$. To je posljedica sfernog rasprostiranja elektromagnetske energije iz točkastog izvora, jer se svaka antena gledana iz velike udaljenosti doimlje poput točkastog izvora.

Također se vidi da je prijamna snaga razmjerna umnošku odašiljačke snage i dobitka odašiljačke antene ($G_o P_o$). Ta dva člana, dobitak odašiljačke antene i izlazna snaga odašiljača, opisuju odašiljač pa se u smjeru maksimalnog zračenja odašiljačke antene (u smjeru glavnog snopa) taj umnožak može tumačiti kao snaga koju zrači izotropni radijator uz ulaznu snagu $G_o P_o$. Stoga je tom umnošku dan poseban naziv, *efektivna izotropno zračena snaga* (*EIRP*), tj.

$$\text{EIRP} = G_o P_o \quad \text{W}. \tag{10–23}$$

Ta se veličina u odnosu na jedan vat nerijetko izražava u decibelima kao

$$\text{EIRP} = 10 \log \frac{G_o P_o}{1\,\text{W}} \quad \text{dBW}, \tag{10–24a}$$

ili u odnosu na jedan milivat kao

$$\text{EIRP} = 10 \log \frac{G_o P_o}{10^{-3}\,\text{W}} \quad \text{dBm}. \tag{10–24b}$$

Ako se zračena snaga normira u odnosu na poluvalni dipol, onda je riječ o efektivnoj zračenoj snazi (ERP) koja je uvijek manja od EIRP za 2,15 dB, koliko iznosi usmjerenost poluvalnoga dipola (odjeljak 10.1.7). Dakle,

$$\text{ERP} = \text{EIRP} - 2{,}15 \quad \text{dBd}, \tag{10–25}$$

gdje se jedinicom dBd naglašava da je snaga normirana na dobitak poluvalnoga dipola.

10.1.7. Osnovne vrste antena

Premda proračun antena izlazi iz okvira ove knjige, pri koncipiranju radijskih sustava, antene i njihova obilježja igraju značajnu ulogu. U zemaljskim radijskim komunikacijama osim toga nužno je poznavati i temeljne značajke rasprostiranja elektromagnetskih valova uz površinu Zemlje te u njezinoj atmosferi koja nije posve homogeno elektromagnetsko sredstvo (vidjeti odjeljak 10.5).

Žičane antene poput električnog dipola i strujne petlje, prve su poznate vrste antena koje je izmislio i rabio Hertz u svojim prvim eksperimentima s elektromagnetskim valovima. Te i njima slične antene kasnije su se rabile u pionirskim radovima na području radijskih ili bežičnih komunikacija (engl. *wireless communication*).

Već smo spomenuli da je Hertzov dipol jedna od najjednostavnijih struktura zračenja, ali ima ozbiljan nedostatak jer je to zračenje iznimno neučinkovito zbog izrazito malog otpora zračenja (vidjeti primjer 2.3) s kojim je u seriju spojen veliki kapacitivni otpor dipola. No povećanjem duljine žičane strukture, raste otpor zračenja i pada serijska (kapacitivna) reaktancija antene.

Postavljanjem više istovjetnih antena u pravilne matrične strukture (nizove) mogu se ostvariti izvori vrlo usmjerenog elektromagnetskog zračenja.

Jedna od najjednostavnijih mikrovalnih antena jest ljevkasta antena. Dobivena je postupnim otvaranjem pravokutnoga ili kružnoga valovoda u strukturu ljevkasta oblika. Budući da zrači kroz otvor, tj. površinu, pripada porodici površinskih ili otvornih antena. U tu skupinu spadaju i reflektorske i lećaste antene koje su posebno zanimljive za usmjerene radijske veze, daljinska istraživanja i radioastronomiju u mikrovalnome i milimetarskome valnom području. Prorez u stijenki valovoda također se ponaša poput antene (vidjeti odjeljak 5.9).

Komunikacijski i radarski sustavi sve više rabe frekvencijski pojas velike širine. Za vrlo širokopojasne primjene (engl. *Ultra-Wide-Band*; UWB) potrebne su antene čija se impedancija i dijagram zračenja te usmjerenost previše ne mijenjaju unutar frekvencijskog pojasa od nekoliko oktava. Stoga ćemo spomenuti i osnovne vrste širokopojasnih antena i načelo njihovog rada.

Posebnu skupinu antena čine antene niskog profila koje su kompatibilne s tehnologijom mikrovalnih integriranih krugova jer se mogu izvesti primjenom mikrotrakastih linija.

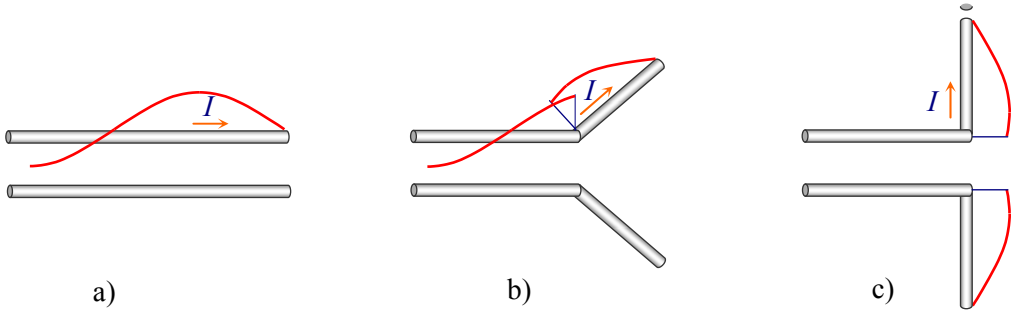
Antene se mogu grubo podijeliti u sljedeće skupine:

Električki male antene Dimenzije antene znatno manje od valne duljine	**Širokopojasne antene** Dijagram zračenja, dobitak i impedancija približno stalni u širokom pojasu frekvencija
Mala usmjerenost	Mali do umjeren dobitak
Mali otpor zračenja	Stalni dobitak
Velika ulazna reaktancija	Realna ulazna impedancija
Mala učinkovitost zračenja	Velika širina pojasa
Rezonantne antene Antena dobro radi u jednom ili više selektivnih frekvencijskih pojaseva	**Otvorne antene** Primaju i odašilju EM-valove kroz površinu otvora
Mali do umjeren dobitak	Velik dobitak
Realna ulazna impedancija	Dobitak raste s frekvencijom
Velika ulazna reaktancija	Realna ulazna impedancija
Uzak frekvencijski pojas	Umjerena širina pojasa

Žičane antene

Kratka žičana antena može se shvatiti kao struktura nastala prelamanjem dvaju kratkih krakova na kraju otvorene prijenosne linije (slika 10.7). Prije negoli se krakovi otvore (slika 10.7a)), u liniji postoji stojni val s maksimumom električnog polja (i napona) na otvorenom kraju linije. Nasuprot tomu, struja i magnetsko polje na kraju linije jednaki su nuli. Zračenje paralelnih vodiča dvožične linije zanemarivo je malo dok je god razmak između žica znatno manji od valne duljine. U poglavljima 3 i 4 vidjeli smo da to zračenje na mikrovalnim frekvencijama sprečava uporabom suosnih linija i valovoda u kojima su polja oklopljena samom prijenosnom strukturom. Načelo superpozicije upućuje na zaključak da zračenje jedne žice poništava zračenje druge žice jer su struje u tim žicama protufazne i teku paralelno.

Postupnim otvaranjem krakova prijenosne linije (slika 10.7b)) povećava se razmak između vodiča i struje u dvama vodičima više ne teku paralelno. To ima za posljedicu porast zračenja elektromagnetske energije u slobodni prostor. Na slici 10.7c) prikazana je konačna struktura električnog dipola s dvama krakovima koji leže na istome pravcu. Može se pretpostaviti da se otvaranjem krakova razdioba struje na vodičima neće znatno promijeniti u odnosu na razdiobu struje stojnoga vala na slici 10.7a). Stoga se može uzeti da će razdioba struje na vodičima žičane antene ostati sinusne razdiobe i da će objema krakovima teći istim smjerom.



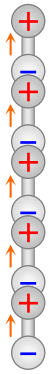
Slika 10.7. Postupnim proširivanjem krakova otvorene prijenosne antene dobiva se antena

Žičani dipoli električki su razmjerno male i jeftine strukture zračenja čija je primjena obično ograničena na frekvencije u rasponu od desetak MHz do nekoliko GHz. Dipol i njegova inačica unipol iznad vodljive ravnine, pružaju svesmjerno pokrivanje u ravnini koja je okomita na žičanu strukturu. Nalaze se u uporabi u komunikacijskim sustavima i kao odašiljačke antene za zemaljsku radiodifuziju.

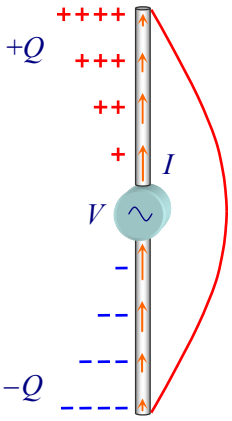
Za vrlo kratku antenu razdioba se struje može aproksimirati linearnom funkcijom jer se funkcija sinusa malog argumenta može zamijeniti samim argumentom. Stoga se obilježja zračenja električnog dipola kraćeg od desetine valne duljine ($l < \lambda/5$) ne razlikuju od onih u Hertzova dipola. Dijagrami zračenja i usmjerenost su im posve jednaki, tj. $D = 1{,}5$ i $\Theta_D = 90°$. No primjenom izraza (10–19) može se vidjeti da je efektivna duljina kratkog dipola upola manja od njegove geometrijske duljine ($l_{ef} = l/2$). To znači da je zračena snaga četvrtina one koju bio zračio dipol jednolike razdiobe struje poput Hertzova dipola. Iz izraza (2–283b) za otpor zračenja kratkog električnog dipola izlazi

$$R_z \simeq 20\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \ \Omega. \qquad (10\text{–}26)$$

No taj će otpor zračenja biti znatno veći u odnosu na otpor zračenja Hertzova dipola jer je duljina žičane antene znatno veća, a otpor raste s kvadratom duljine žice. Tako, primjerice, za ravni dipol duljine $0{,}2\,\lambda$ izlazi otpor zračenja od 8 Ω što je znatno veća vrijednost od one za Hertzov dipol iz primjera 2.3. u odjeljku 2.14.3.



Slika 10.8. Lanac Hertzovih dipola



Slika 10.9. Razdioba struje i naboja na žičanoj anteni

Svaka se žičana struktura može rastaviti na beskonačan broj elementarnih dipola (Hertzov dipol) kao na slici 10.8. Kod lančanog spoja više Hertzovih dipola, pozitivni naboj na kraju jednog dipola poništen je jednakom količinom naboja sa suprotnog kraja sljedećeg dipola. U tom slučaju iščezavaju članovi $1/r^3$ i preostaju samo indukcijski i radijacijski članovi. No kad struja nema jednoliku razdiobu duž žičane strukture, nego je raspodijeljena kao na slici 10.9, antena se može prikazati kao lanac strujnih elemenata ili Hertzovih dipola čije se amplitude neznatno razlikuju. Pritom naboji susjednih elemenata nisu posve poništeni pa dolazi do nagomilavanje naboja na površini žice, kao što je prikazano na slici 10.9. Taj površinski naboj stvara razmjerno jake komponente električnog polja okomite na površinu žice.

Ukupno se polje u nekoj točki prostora može lako dobiti vektorskim zbrajanjem, tj. integriranjem, doprinosa svih Hertzovih dipola. Za žicu proizvoljne duljine, koja leži na osi $\hat{z}$ simetrično u odnosu na ishodište, dobiva se

$$E_\theta = \mathrm{j}\eta_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{2\pi r} I_\mathrm{m} \frac{\cos\left(\frac{k_0 l}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{k_0 l}{2}\right)}{\sin\theta}, \tag{10–27}$$

gdje je I_m maksimalna vrijednost struje na žici. Razlomak zdesna prostorni je dijagram zračenja i ovisi samo o kutu θ pa ujedno odgovara dijagramu zračenja u E-ravnini. Budući da ne ovisi o kutu φ, rotacijski je simetričan oko osi $\hat{z}$ pa je u H-ravnini svesmjeran (Φ_D=360°). To i ne čudi jer je dobiven integriranjem doprinosa Hertzovih dipola koji su razmješteni uzduž osi $\hat{z}$. Član s eksponencijalnom funkcijom pridonosi samo faznom kašnjenju između faznog središta dipola i točke promatranja. Budući da nas obično zanima samo amplitudu električnog polja taj se član može izostaviti jer mu je modul jednak jedinici.

Od svih ravnih žičanih antena najčešće se rabi *poluvalni dipol* (l=λ/2). On čini kompromis između prihvatljivo male duljine, dovoljno velike usmjerenosti i prikladne vrijednosti impedancije zračenja. Za poluvalni dipol, dijagram zračenja u izrazu (10–27) poprima oblik

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}. \tag{10–28}$$

Maksimalna vrijednost struje I_m=I_0=$I(0)$ nalazi se na koordinati (z=0), u središtu dipola.

Iz izraza (10–28), za kut usmjerenosti izlazi Θ_D=78°, a u H-ravnini zračenje je svesmjerno (Φ_D = 360°). Zračena se snaga može dobiti na jednak način kao za Hertzov dipol integriranjem Poyntingova vektora na površini sfere velikog polumjera. Uvrštenjem izraza (10–27) u (10–3), a njega u izraz (10–6), nakon integriranja dobiva se

$$P_z = 2{,}44\frac{\eta_0}{8\pi} I_m^2 . \tag{10–29}$$

Budući da je snaga jednaka umnošku otpora i kvadrata efektivne struje koja teče otporom, otpor zračenja poluvalnoga dipola iznosi približno

$$R_z = \frac{2P_z}{I_m^2} = 73\,\Omega . \tag{10–30}$$

Točan račun za beskonačno tanku žicu poluvalne duljine daje impedanciju antene

$$Z_a = 73 + \mathrm{j}42{,}5\ \Omega . \tag{10–31}$$

To objašnjava činjenicu da tanki poluvalni dipol ima i reaktivnu (induktivnu) komponentu. Utjecaj te komponente može se djelomično kompenzirati povećanjem debljine vodiča od kojih je dipol izrađen, čime se povećava kapacitet na krajevima dipola. Induktivna komponenta impedancije dipola može se posve poništiti neznatnim skraćivanjem krakova dipola.

Uvrštenjem izraza (10–27) za jakost električnog polja u dalekoj zoni u izraz za intenzitet zračenja (10–5), maksimalni intenzitet zračenja dobiva se za θ=90°, tj.

$$U_m = \frac{r^2}{2\eta_0}\left|E_\theta\right|^2_{maks} = \frac{1}{2\eta_0}\frac{\eta_0^2 I_0^2}{(2\pi)^2} = \frac{\eta_0}{8\pi^2} I_0^2 \quad \mathrm{W} .$$

Uvrštenjem tog rezultata u izraz za usmjerenost (10–8) dobiva se

$$D_{\lambda/2} = \frac{4\pi U_m}{P_z} = 1{,}64 = 2{,}15\ \mathrm{dB} . \tag{10–32}$$

To je nešto veća vrijednost od usmjerenosti Hertzova dipola i malih antena, koja iznosi 1,5 ili 1,76 dB. Stoga za vrlo kratke dipole usmjerenost iznosi 1,5 i raste do 1,64 za poluvalni dipol.

Dodavanjem parazitskih (kratko spojenih) dipola paralelno postavljenih na ispravnim razmacima od pobuđenim dipolom može se ostvariti antenski niz usmjerenog dijagrama zračenja (Yagijeva antena) dobitka između 7 i 16 dBi [1]–[4].

Efektivna duljina poluvalnoga dipola može se dobiti iz izraza (10–19b). Rezultat je

$$l_{ef,\lambda/2} = \frac{\lambda}{\pi}, \tag{10–33}$$

a za efektivnu površinu iz izraza (10–17) izlazi

$$A_{ef,\lambda/2} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_{\lambda/2} = 0{,}131\lambda^2 . \tag{10–34}$$

Ta se površina može zamisliti kao fiktivna površina koja okružuje poluvalni dipol, iz koje prijamna antena crpi snagu i šalje je prema teretu.

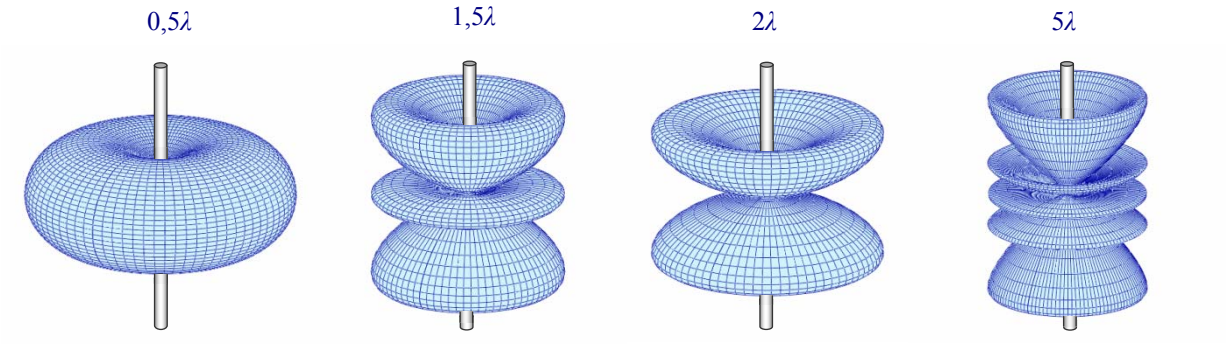
Punovalni dipol (l=λ) ima još uži snop u E-ravnini (Θ_D=47°) i veću usmjerenost

$$D_\lambda = 2{,}41 = 3{,}82\,\mathrm{dB} . \tag{10–35}$$

Budući da je dvostruko dulji od poluvalnoga dipola, efektivna mu je duljina dvostruko veća, $l_{ef,\lambda} = 2\lambda/\pi$. Nedostatak je punovalnoga dipola u tomu što ga je nemoguće pobuditi u središtu, gdje je ulazna impedancija vrlo visoka i za neizmjerno tanku žicu teži u beskonačnost. U točki najveće struje na polovici svakog kraka, impedancija zračenja približno iznosi 199 Ω.

Za žice dulje od valne duljine, u dijagramu zračenja pojavljuju se velike bočne latice ili višestruke glavne latice. Slika 10.10 prikazuje prostorni dijagrami zračenja poluvalnoga dipola te dipola duljine 1,5 λ, 2λ i 5 λ.

Žičana se struktura može postaviti okomito na veću ravnu uzemljenu plohu. Tad se umjesto



Slika 10.10. Dijagram zračenja ravnih žica različite duljine pobuđenih harmonijskom strujom

poluvalnoga dipola može uporabiti samo jedan od njegovih dvaju četvrtvalnih krakova, kao što je prikazano na slici 10.11. Time se dobiva četvrtvalni *unipol* na uzemljenoj ravnini. Teorija odslikavanja pokazuje da se na vodljivoj ravnini četvrtvalni krak preslikava u cjelovit poluvalni dipol. Pritom struja u slici teče u istome smjeru kao u unipolu. Stoga su obilježja zračenja unipola u prostoru iznad uzemljene ravnine posve jednaka obilježjima zračenja poluvalnoga dipola.

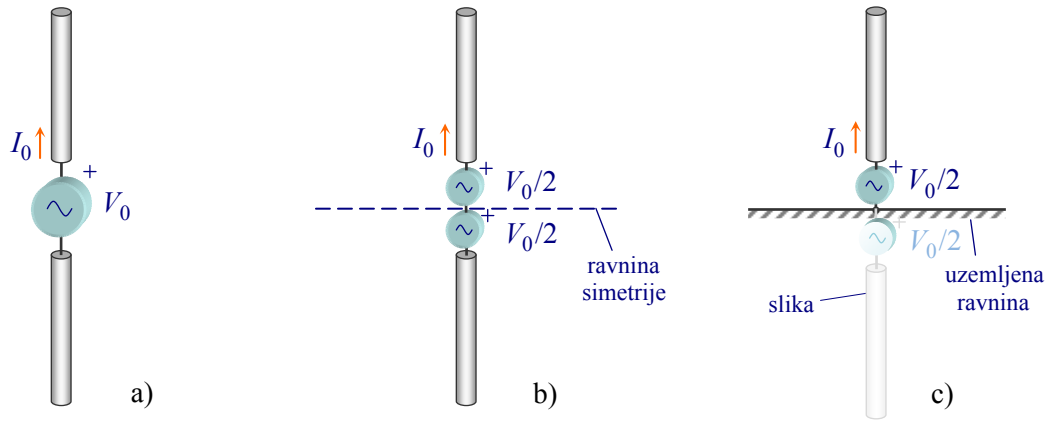
Očito je da se naponski izvor na slici 10.11 može prikazati serijskim spojem dvaju istovjetnih izvora polovične vrijednosti elektromotorne sile. Budući da kroz strukturu unipola i dipola teku struje jednake jakosti, impedancija četvrtvalnog unipola upola je manja od impedancije poluvalnog dipola, tj.

$$Z_{\text{unipol}} = \frac{Z_{\text{dipol}}}{2} = \frac{73\,\Omega}{2} = 36{,}5\,\Omega\,. \tag{10–36}$$

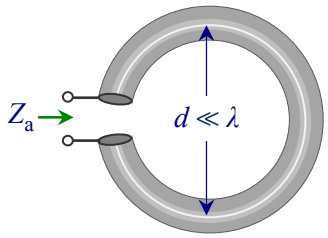
Unipol se može lako pobuditi nesimetričnom prijenosnom strukturom poput suosne linije. Pobudom iz generatora standardne impedancije $Z_0 = 50\ \Omega$, bez uporabe prilagodne mreže, odnos stojnih valova iznosi OSV = 50/36,5 = 1,37. To je manje od OSV = 2, što se uzima kao granična specifikacija u većini radiokomunikacijskih primjena.

Budući da je zračena snaga unipola uz istu struju jednaka polovini zračene snage dipola, usmjerenost unopola dvostruko je veća od usmjerenosti dipola, tj.

$$D_{\text{unipol}} = \frac{4\pi U_{\text{m}}}{P_{\text{z}}} = 3{,}28 = 5{,}15\,\text{dB}\,. \tag{10–37}$$



Slika 10.11. Razvoj unipola iz dipola. **a)** Dipol, **b)** dipol s dvama serijski spojenim generatorima i ravninom simetrije, **c)** unipol iznad uzemljene ravnine



Slika 10.12. Elementarni magnetski dipol (petljasta antena)

Diferencijalnom električnom dipolu dualan je diferencijalni magnetski dipol oblika strujne petlje prikazane na slici 10.12. Primjenom načela dualnosti, u odjeljku 2.14.7. izvedeni su izrazi (2–319) i (2–320) za električno, odnosno magnetsko polje elementarnog magnetskog dipola. Otuda su im dualni i dijagrami zračenja, samo što je varijabla električnog polja u tim izrazima zamijenjena varijablom magnetskog polja i obratno. Usmerenost im je istovjetna, tj. D=1,5. No impedancija zračenja im je posve različita [1]–[4], tj.

$$R_z = \frac{8}{3}\pi^3\eta\left(\frac{\mathrm{d}S}{\lambda^2}\right)^2 = 31.147\left(\frac{\mathrm{d}S}{\lambda^2}\right)^2 \quad \Omega$$

Slično tomu, obilježja zračenja male petlje istovjetna su obilježjima zračenja kratkog električnog dipola. Kad petlja leži u horizontalnoj ravnini u kojoj zrači izotropno, tad joj je električno polje horizontalno polarizirano. Pritom magnetsko polje u dalekoj zoni ima samo θ-komponentu, a električno polje ima samo φ-komponentu (dualno Hertzovu dipolu).

Veća petlja kvadratnog oblika i opsega oko 1,1 λ ima slične značajke kao poluvalni dipol, samo što joj je usmjerenost nešto veća (3,09 dB) uz otpor zračenja oko 100 Ω.

Antenski nizovi

Veća usmjerenosti može se postići povećanjem dimenzija antene. Primjerice, to se može ostvariti kombiniranjem dviju ili više jednakih antena istovjetne polarizacije. Takav se ustroj naziva *antenski niz*, bez obzira na to jesu li pojedinačne antene postavljene na pravac ili na neku ravnu ili zakrivljenu plohu. Antene od kojih se niz sastoji obično se nazivaju elementi niza, a pobuđuju se preko mreža za oblikovanje dijagrama zračenja. U tu se svrhu nerijetko rabe djelila snage, usmjerni sprežnici i hibridi (odjeljci 7.2. i 7.3). Antenski se nizovi obično rabe za odašiljanje i primanje signala preko jedne uske glavne latice. Pritom se promjenom razdiobe amplituda struje elemenata niza može mijenjati razina potiskivanja bočnih latica, a promjenom razdiobe faza struje može se mijenjati smjer glavne latice. No, povećanjem razmaka između antenskih elemenata u nizu, mogu se također postići dijagrami zračenja s više glavnih latica. To se nerijetko rabi u sustavima s *pametnim antenama* (engl. *smart antenna*). Tako se može ostvariti istodobno komuniciranje s više korisnika u ćelijskom komunikacijskom sustavu u kojem korisnici dijele isto zemljopisno područje i isti radijski kanal, a da pritom ne dolazi do znatnije interferencije, tj. smetnja.

Slika 10.13 prikazuje linearni niz s N izotropnih radijatora koji su svi postavljeni na zajedničku os. Kad se elementi zračenja nalaze na jednakim međusobnim razmacima, tad se radi o *pravilnom antenskom nizu*. Ako se točka promatranja T nalazi na velikoj udaljenosti r od niza, onda se može pretpostaviti da su sve zrake od elemenata niza do točke promatranja približno paralelne i da s osi niza zatvaraju kut θ. Ako je kut θ različit od 90°, onda zrake nisu jednake duljine, što znači da postoji različito vrijeme rasprostiranja od pojedinih elementa niza do točke T. Prema izrazu (10–1), rasprostiranje polja sfernoga vala duž zrake $\hat{r}$ može se opisati faznim članom $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_0 r)}$.

Iz geometrije na slici 10.13 vidi se da razlika u prijeđenom putu elektromagnetskih valova dvaju susjednih elemenata iznosi $\Delta = d\cos\theta$, gdje je d razmak između elemenata. Ta razlika u prijeđenom putu stvara razliku u fazi $\psi = k_0 d\cos\theta$. Ako faza struje pobude između susjednih elemenata iznosi α i progresivno raste od prvog do N-tog elementa, onda se ukupna fazna razlika bilo kojih dvaju susjednih valova može napisati kao

$$\delta = k_0 d\cos\theta + \alpha\,. \tag{10–38}$$

Ukupno polje u točki T uvijek se može dobiti superpozicijom polja pojedinačnih izvora. Ako se faza prvoga elementa uzme kao referentna faza, onda se za ukupno polje dobiva

$$E = E_1 + E_2 e^{j\delta} + E_3 e^{j2\delta} + \ldots + E_N e^{j(N-1)\delta}\,. \tag{10–39}$$

To je posve općenit izraz za zračenje skupa izvora proizvoljnih amplituda i ima oblik konačnog reda. Račun se može znatno pojednostavniti ako se pretpostavi da su amplitude struja svih izvora jednake. Tad se izraz (10–39) svodi na

$$E = E_0\left[1 + e^{j\delta} + e^{j2\delta} + \ldots + e^{j(N-1)\delta}\right] = E_0 F\,. \tag{10–40}$$

Veličina u zagradi naziva se *faktor niza* F. To je geometrijski red za varijablu $e^{j\delta}$. Množenje članom $e^{j\delta}$ i oduzimanje rezultata od te iste jednadžbe daje sumu reda, tj.

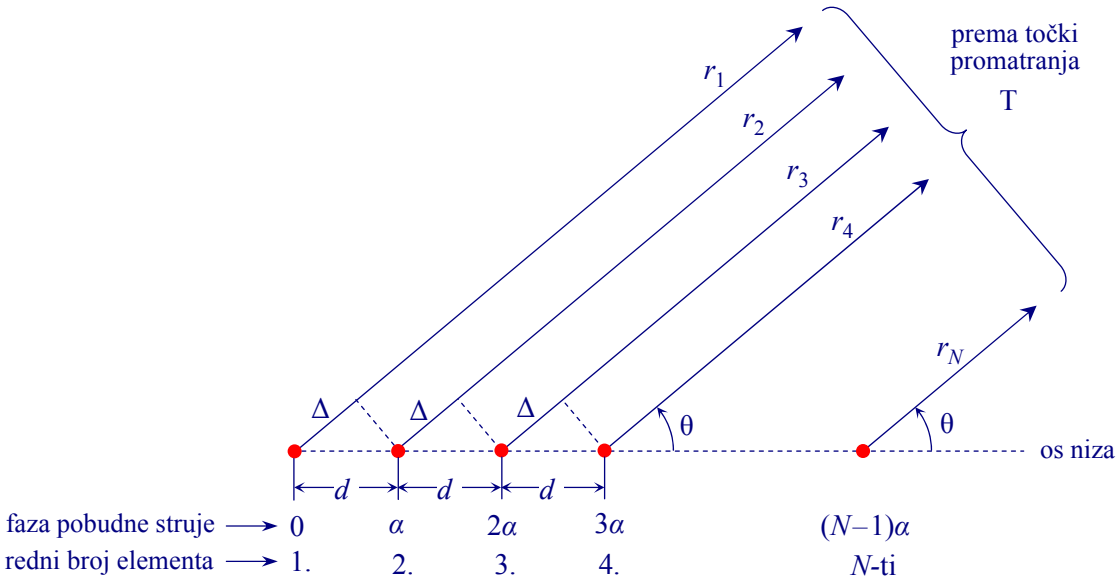
$$E = E_0\frac{1 - e^{jN\delta}}{1 - e^{j\delta}}\,.$$

Izluči li se iz brojnika član $e^{jN\delta/2}$, a iz nazivnika $e^{j\delta/2}$, dobiva se

$$E = E_0\frac{e^{jN\delta/2}}{e^{j\delta/2}}\frac{e^{jN\delta/2} - e^{-jN\delta/2}}{e^{j\delta/2} - e^{-j\delta/2}} = E_0 e^{j(N-1)\delta/2}\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\,. \tag{10–41}$$

Član ispred razlomka jedinične je amplitude i sadrži samo informaciju o fazi. U dijagramu zračenja obično nas zanimaju samo apsolutne vrijednosti polja. Dijeljenjem s E_0 i uzimanjem apsolutne vrijednosti dobiva se apsolutna vrijednost faktora niza, što odgovara dijagram zračenja niza izotropnih radijatora, tj.

$$|F| = \left|\frac{E}{E_0}\right| = \left|\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\right|. \tag{10–42}$$



Slika 10.13. Linearni niz izotropnih radijatora jednolikih razmaka između elemenata

Za istofaznu pobudu ($\alpha = 0$) glavna je latica usmjerena poprečno na os niza ($\theta = 90°$) pa se takav niz obično naziva *poprečni niz* (engl. *broadside array*). Ispravnim namještanjem faza struje pobude, smjer maksimuma zračenja može se poklopiti sa smjerom osi niza. Tad je riječ o *uzdužnome nizu* (engl. *endfire array*). U tom je slučaju $\theta = 0°$ ili 180°, tj. $\cos(\theta) = \pm 1$, pa iz izraza (10–38) izlazi fazni uvjet za uzdužni niz

$$\alpha = \mp k_0 d \ . \tag{10–43}$$

Da bi dijagram zračenja niza imao samo jednu glavnu laticu, valja ispravno odabrati razmak između elemenata. U dijagramu zračenja niza neće se pojaviti više od jedne glavne latice, ako je zadovoljen uvjet

$$d < \frac{\lambda}{1 + \left|\cos \Theta_0\right|}, \tag{10–44}$$

gdje je Θ_0 smjer glavne latice. Otuda se za razmak d manji od pola valne duljine ne može pojaviti više od jedne glavne latice.

Za veće razmake između susjednih elemenata može se pojaviti više glavnih latica, pa se u nizovima s upravljivim snopom elementi obično postavljaju na poluvalni razmak. S druge strane, pri većim kutovima α i manjim razmacima ($d < \lambda/4$) može se dogoditi da se uopće ne pojavi glavna latica. Zato je poluvalni razmak između elemenata dobar kompromis koji jamči dovoljno mali broj elemenata uz dobra obilježja zračenja niza s jednom glavnom laticom.

Iz izraza (10–39) ili (10–42) izlazi da se maksimum faktora niza postiže uz uvjet $\delta = 0$. Pritom ti izrazi postižu maksimalnu vrijednost, $F_{\text{maks}} = N$. To je posve u skladu s fizikalnom intuicijom, jer za $\delta = 0$ svi članovi konačnog reda (10–40) poprimaju jediničnu vrijednost. Otuda im je zbroj jednak broju elemenata (N). Faktor niza obično se normira dijeljenjem izraza (10–43) s brojem elemenata.

Slika 10.14a) prikazuje faktor niza u funkciji kuta δ za niz s 5 elemenata i $d = 0{,}4\lambda$ u ravnini θ. Budući da je δ funkcija kuta θ, za poprečne nizove u području oko glavne latice ta su dva dijagrama skoro jednaka. Na slici 10.14b) prikazani su prostorni dijagrami uzdužnoga niza za $N = 5$ i tri različite faze struje pobude. Valja uočiti da su ti dijagrami rotacijski simetrični, što je u skladu s fizikalnom intuicijom, jer se svi izotropni radijatori nalaze na zajedničkoj osi.

Ako se umjesto hipotetskog izotropnoga radijatora rabi stvarni element zračenja poput električnog dipola, onda se ukupni dijagram zračenja (F_{uk}) dobiva umnoškom faktora niza (F) s dijagramom zračenja osnovnog elementa zračenja (F_{el}), tj.

$$F_{\text{uk}} = F_{\text{el}} F \ . \tag{10–45}$$

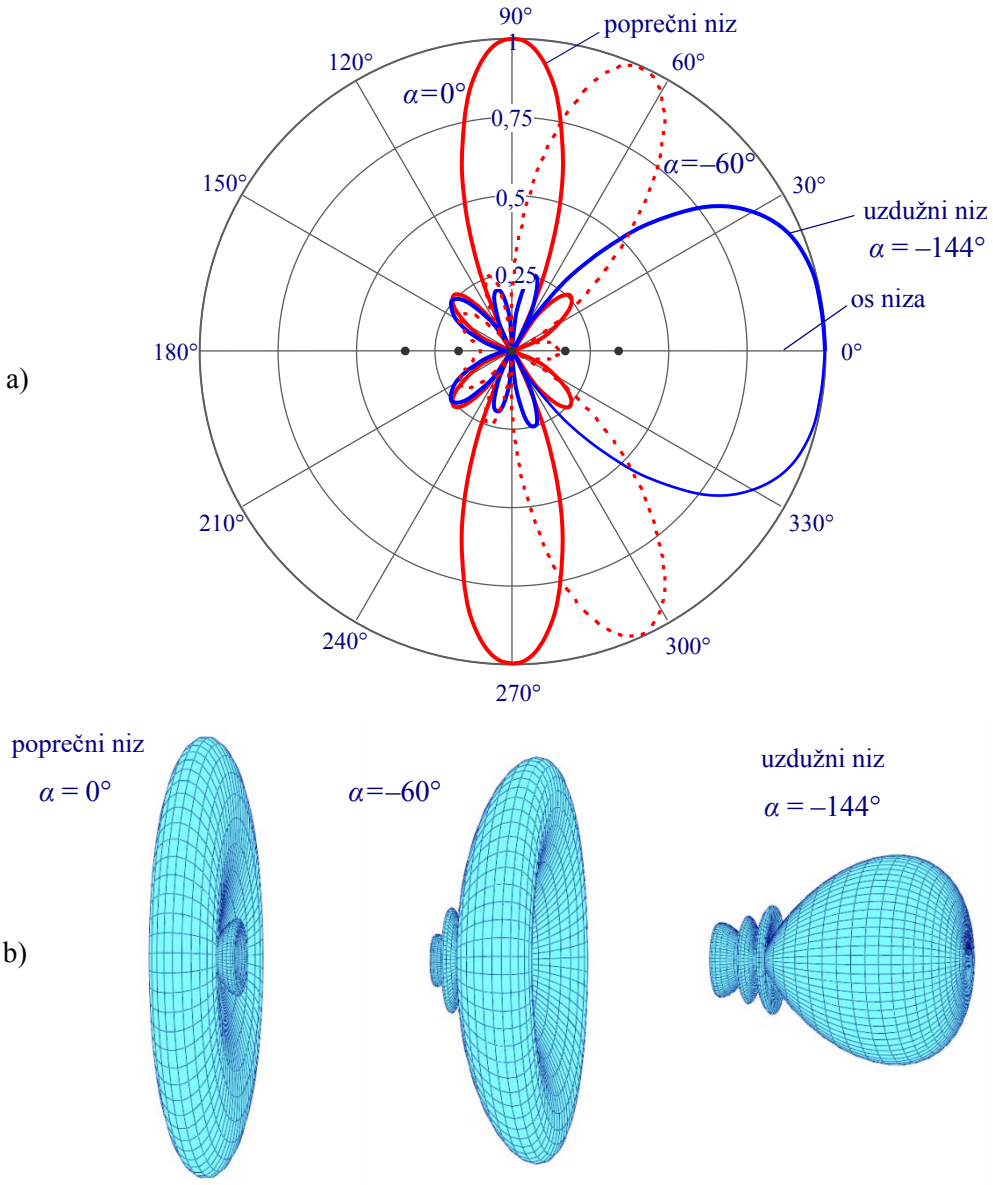
Usmjerenost niza može se dobiti integriranjem prostornog dijagrama zračenja na kružnici dovoljno velikog polumjera r. Za poprečni niz izotropnih elemenata, rezultat je

$$D_{\text{p}} \simeq \frac{2L}{\lambda}, \tag{10–46}$$

gdje je $L = Nd$ duljina niza. Taj približan rezultat vrijedi za razmak između elemenata u rasponu od $0{,}2\lambda$ do $0{,}8\lambda$ za broj elemenata veći od dva. Otuda se vidi da usmjerenost ustvari ovisi o ukupnoj duljini niza, a ne o razmaku između elemenata.

Uzdužni niz ima dvostruko veću usmjerenost od poprečnoga niza, $D_{\text{u}} = 2D_{\text{p}} = 4L/\lambda$, jer je zračenje jače koncentrirano oko osi niza u odnosu na poprečni niz.

Razmještanjem elemenata zračenja na ravnu ili zakrivljenu plohu mogu se dobiti površinski antenski nizovi. Na slici 10.15 elementi zračenja razmješteni su na ravnu plohu u obliku pravilne rešetke. U njoj su linearni nizovi postavljeni na osi paralelne s osima $\hat{x}$ i $\hat{y}$. Nizovi koji leže na samim osima $\hat{x}$ i $\hat{y}$ nazivaju se glavni ili osnovni nizovi.



Slika 10.14. Faktor linearnoga niza s pet izotropnih radijatora: **a)** u θ-ravnini (E-ravnini), **b)** prostorni za poprečni niz s $\alpha=0°$ i $\alpha=-60°$ te za uzdužni niz $\alpha=-144°$

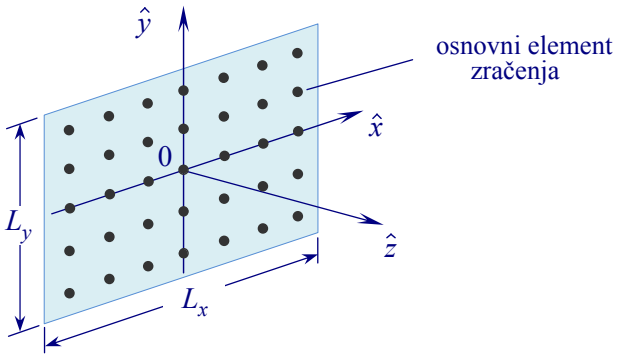
Dijagram zračenja dobiva se umnoškom dijagrama zračenja osnovnih linearnih nizova i dijagramom zračenja osnovnog elementa zračenja. Podrobnom analizom dobiva se ovaj izraz za usmjerenost pravilnog površinskog niza

$$D = \pi D_x D_y \cos\Theta_0 , \tag{10–47}$$

gdje je D_x usmjerenost linearnog niza na osi $\hat{x}$, D_y usmjerenost niza na osi $\hat{y}$, a Θ_0 smjer maksimalnog zračenja. Kad su svi elementi pobuđeni istofazno, niz najjače zrači okomito na plohu u kojoj leže elementi površinskog niza. Uvrštenjem izraza (10–46) za usmjerenost linearnih nizova u smjeru osi $\hat{x}$ i $\hat{y}$, dobiva se

$$D = \frac{4\pi L_x L_y}{\lambda^2} = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{\text{geom}} , \tag{10–48}$$

iz čega se vidi da je efektivna površina površinskog niza jednaka njegovoj geometrijskoj ili fizičkoj površini. Promjenom faze struje pobudnih elemenata može se zakretati glavna latica



Slika 10.15. Pravokutni površinski niz

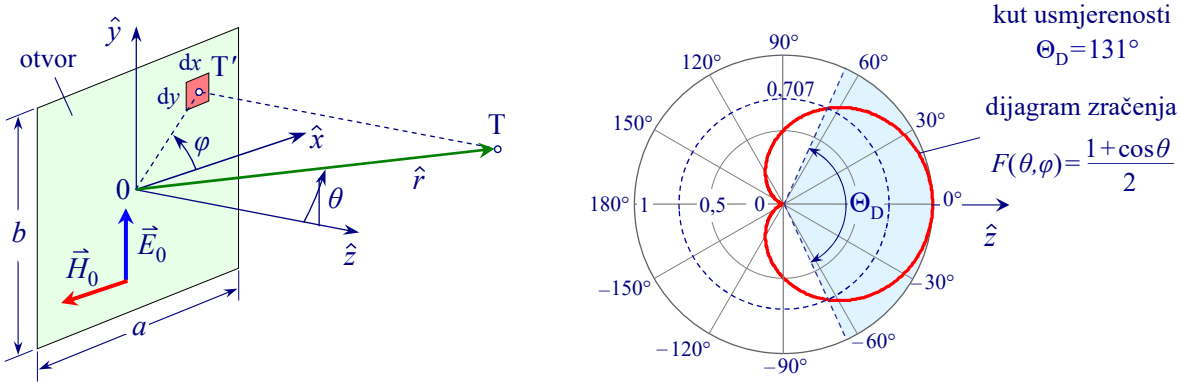
ili snop. Na tom se načelu osnivaju antenski nizovi s elektronički upravljanim snopom za primjene u radarskim sustavima za praćenja objekata koji se prostorom kreću velikom brzinom. Osim toga mogu se ostvariti nizovi i s više glavnih latica koje prenose različite poruke u pokretnim radiokomunikacijskim sustavima. Takvi nizovi imaju također mogućnost elektroničkog ugađanja smjera nultočke. Time se mogu ostvariti adaptivne antene (tzv. *pametne antene*) sa sposobnošću potiskivanja signala smetnji, koji dolaze iz različitih smjerova.

Površinske antene

Otvoreni valovod zrači energiju. Ako je pobuđen dominantnim modom (odjeljak 4.3), onda mu je razdioba polja na otvoru približno jednaka razdiobi polja u poprečnoj ravnini unutar valovoda. Ukupno polje na nekoj udaljenosti od otvora može se naći superpozicijom doprinosa svih malih elementarnih površina u otvoru. U osnovi to je jednako okolnostima koje vladaju u dipolima i unipolima, ali sad se umjesto jednodimenzionalne razdiobe struje $I(z)$ rabi dvodimenzionalna razdioba polja $E(x,y)$ na otvoru. Primjenom Huygensova načela (odjeljci 2.15.6 i 2.15.7), svaki elementarni dio otvora postaje izvor novoga vala. Polje elementarne površine u dalekoj zoni može se napisati kao $\mathrm{d}E = \mathrm{j}E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\mathrm{d}x\mathrm{d}y(1+\cos\theta)/(2\lambda r)$.

Pretpostavimo da je pravokutni otvor pobuđen poljima jednolike razdiobe amplituda i faza unutar područja površine $a \cdot b$, kao što je prikazano na slici 10.16, gdje su a i b izmjere otvora. Ako su električno polje E_0 i magnetsko polje H_0 u otvoru stalne jakosti i ako je električno polje polarizirano u smjeru osi $\hat{y}$, onda su polja daleko od antene u E- i H-ravnini:

$$E_\theta = \mathrm{j}k_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{2\pi r} E_0 ab \frac{1+\cos\theta}{2} \frac{\sin\left(\frac{k_0 b}{2}\sin\theta\right)}{\frac{k_0 b}{2}\sin\theta}, \qquad E\text{-ravnina}, \varphi = 90°, \qquad (10\text{–}49a)$$



Slika 10.16. Geometrija pravokutnog otvora i dijagram zračenja elementarne površine

$$E_\varphi = \mathrm{j}k_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{2\pi r} E_0 ab \frac{1+\cos\theta}{2} \frac{\sin\left(\frac{k_0 a}{2}\sin\theta\right)}{\frac{k_0 a}{2}\sin\theta}, \qquad H\text{-ravnina, } \varphi = 0°. \tag{10–49b}$$

Za velike otvore (a, $b \gg \lambda$), glavna je latica vrlo uska pa se u izrazima (10–49), za male kutove oko smjera maksimalnog zračenja, faktor $(1+\cos\theta)/2$ koji dolazi iz Huygensova izvora može aproksimirati jedinicom. Stoga dijagrami zračenja u E- i H-ravnini poprimaju oblik funkcije $\sin X/X$. Tad prostorni dijagram zračenja poprima oblik

$$F(\theta,\varphi) = \frac{\sin\left(\frac{k_0 a}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)}{\frac{k_0 a}{2}\sin\theta\cos\varphi} \frac{\sin\left(\frac{k_0 b}{2}\sin\theta\sin\varphi\right)}{\frac{k_0 b}{2}\sin\theta\sin\varphi}, \tag{10–50}$$

gdje su $\sin\theta\cos\varphi$ i $\sin\theta\sin\varphi$ varijable dijagrama zračenja.

Obilježja zračenja otvor antene slična su onima u površinskih nizova. Kutovi usmjerenosti u glavnim ravninama mogu se izračunati iz ovih izraza:

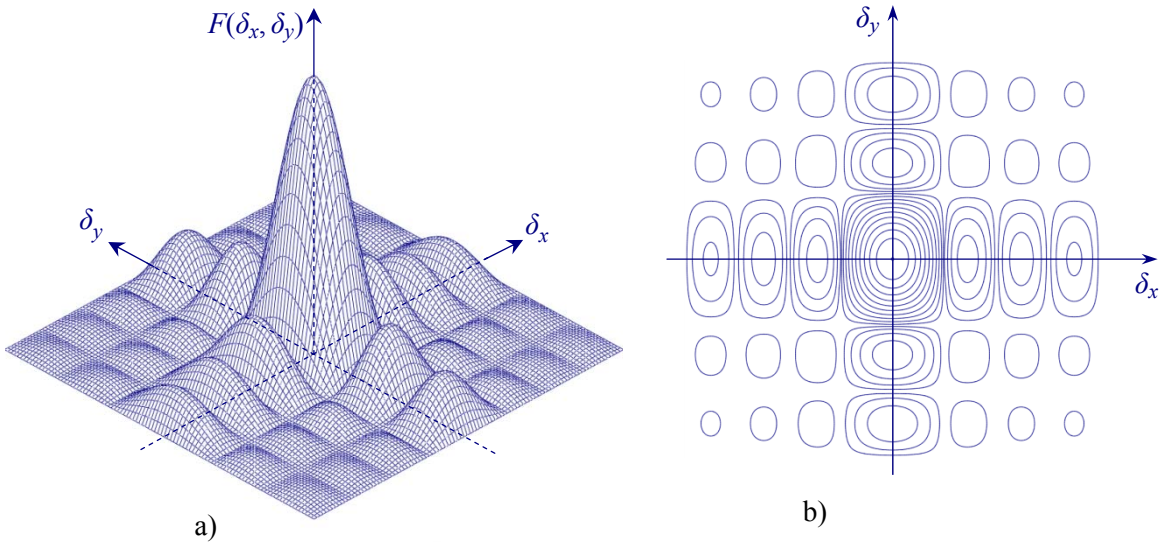
$$\Phi_\mathrm{D} = 0{,}886\frac{\lambda}{a} = 50{,}8\frac{\lambda}{a} \quad \text{stupnjeva,} \tag{10–51a}$$

$$\Theta_\mathrm{D} = 0{,}886\frac{\lambda}{b} = 50{,}8\frac{\lambda}{b} \quad \text{stupnjeva.} \tag{10–51b}$$

Usmjerenost pravokutnog otvora jednolike razdiobe polja na otvoru može se dobiti integriranjem prostornog dijagrama zračenja po diferencijalnom prostornom kutu na sferi velikog polumjera. Rezultat je

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} ab\,. \tag{10–52}$$

Otuda izlazi da je efektivna površina pravokutnog otvora jednolike razdiobe jakosti polja na otvoru jednaka geometrijskoj (fizičkoj) površini otvora, $A_\mathrm{ef} = A_\mathrm{geom} = ab$. To vrijedi za sve otvore jednolike razdiobe polja, neovisno o obliku otvora.

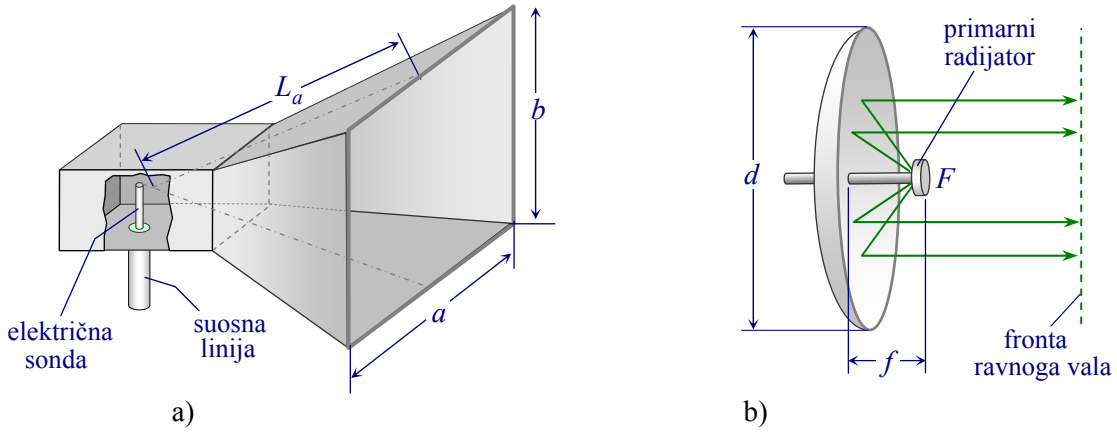


Slika 10.17. a) Prostorni dijagram zračenja pravokutnog otvora u funkciji varijabla δ_x i δ_y.
b) Konturni dijagram.

Slika 10.17a) prikazuje dijagram zračenja otvora jednolike razdiobe polja u funkciji varijabla $\delta_x = \sin\theta\cos\varphi$ i $\delta_y = \sin\theta\sin\varphi$ za izmjere otvora $a = 4\lambda$ i $b = 3\lambda$. Potiskivanje bočnih latica iznosi približno 13,5 dB. Valja uočiti da su bočne latice najizraženije u smjeru glavnih osi, a u dijagonalnom su smjeru znatno manje. Slika 10.17b) prikazuje konturni dijagram zračenja za isti otvor.

Potiskivanje bočnih latica može se povećati monotonim smanjenjem jakosti polja ili pobudnih struja prema rubovima otvora. Primjerice, za sinusnu razdiobu dobiva se potiskivanje od 23,5 dB. Stoga ljevkasta antena kvadratnog otvora ($a = b$), sinusne razdiobe polja na jednoj glavnoj osi i jednolike razdiobe na drugoj osi ima različite razine potiskivanja bočnih latica na glavnim osima.

U površinske antene spadaju ljevkaste i reflektorske antene (slika 10.18) te lećaste antene. Ljevkasta antena ostvaruje se postupnim proširenjem otvora pravokutnog, kružnog ili eliptičnog valovoda. Maksimalno je zračenje u smjeru osi valovoda. Lijevak se obično pobuđuje suosnom linijom preko električne sonde koja se postavlja u pobudni valovod, kao što je prikazano na slici 10.18a) (vidjeti također odjeljak 5.10.1). Pri tomu otvor lijevka valja postupno otvarati uz odgovarajuće povećanje duljine kako bi se spriječilo nastajanje viših valovodnih modovi i smanjilo sferno izobličenje polja na otvoru lijevka, koje proizlazi iz rubnih uvjeta. Udvostručenjem stranice otvora lijevka duljinu lijevka valja učetverostručiti.



Slika 10.18. a) Ljevkasta antena, **b)** parabolični reflektor

Za optimalni piramidalni lijevak, prikazan na slici 10.18a), usmjerenost se može izračunati primjenom ove približne formule

$$D = \frac{6{,}3ab}{\lambda^2}. \qquad (10\text{–}53)$$

Toj usmjerenosti odgovara efektivna površina

$$A_{\text{ef}} = 0{,}51ab, \qquad (10\text{–}54)$$

iz čega se vidi da je iskorištena približno polovina geometrijske površine otvora ($A_{\text{geom}} = ab$).

Za optimalni lijevak vrijede ove geometrijske relacije [1]:

$$L_a = \frac{a^2}{2\lambda}, \qquad L_b = \frac{b^2}{3\lambda}, \qquad (10\text{–}55)$$

gdje su duljine L_a i L_b visine trokutastih stranica lijevka do zamišljena vrha. Općenito te duljine nisu međusobno jednake. Kutovi usmjerenosti u E- i H-ravnini mogu se izračunati primjenom približnih formula [1]:

$$\Theta_D = 80° \frac{\lambda}{b}, \qquad \Phi_D = 53° \frac{\lambda}{a}. \tag{10–56}$$

U sustavima usmjerenih veza na visokim frekvencijama te u radioastronomiji i radarskim sustavima nerijetko se rabi parabolični reflektor visoke usmjerenosti (slika 10.18b)). Rad reflektorskih antena s paraboličnim reflektorom temelji se na načelu rada optičkih teleskopa s konkavnim zrcalima. Reflektor se pobuđuje primarnim radijatorom iz žarišne točke (F) koja udaljena f od tjemena rotacijskoga paraboloida. Kao primarni radijator može se uporabiti ljevkasta antena ili neka druga vrsta antene srednje usmjerenosti (6-15 dB). Vrijednosti usmjerenosti reflektorskih antene nalaze se u rasponu od 30 do 60 dB, pa i više.

Usmjerenost parabolične antene može se izračunati iz ove približne formule [1]

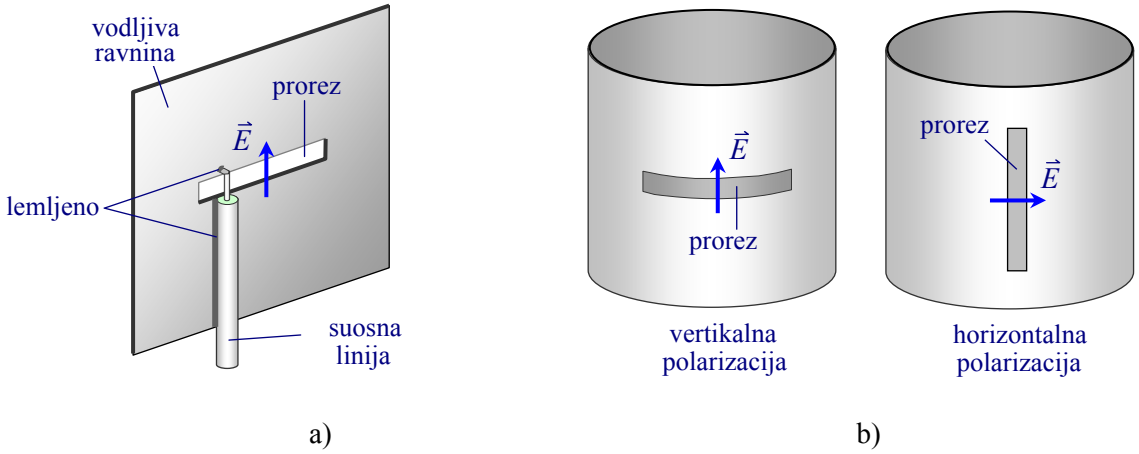
$$D = 0{,}65\left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2 = 20\log\frac{d}{\lambda} + 8{,}07\,\text{dB}, \tag{10–57}$$

što znači da je približno iskorišteno 65% geometrijske površine paraboličnog reflektora.

Prorezne antene

Posebnu skupinu čine prorezne antene, koje se mogu razmatrati kao dualne strukture dipolima. Prorezne antene mogu se, primjerice, izvesti tako da se na ravnoj ili zakrivljenoj vodljivoj plohi ili stijenki valovoda napravi uzak prorez (slika 5.52 iz odjeljka 5.9). Ako je prorez tako izveden da je s njim paralelno tangencijalno magnetsko polje, onda prorez sa širim bridovima presijeca površinske električne struje koje to polje inducira na vodljivoj plohi. Zbog kontinuiteta struje, na prorezu se provodna struja pretvara u pomačnu struju pa se u prorezu pojavljuje ekvivalentno električno polje. Budući da je to polje zajedničko za prostor unutar i izvan valovoda, u skladu s Huygensovim načelom otvor postaje izvor novoga vala izvan valovoda. Obilježja zračenja takvog otvora vrlo su slična karakteristikama električnoga dipola [1]–[5]. Prorezna se antena može lako ugraditi u metalnu oplatu zrakoplova i drugih prometala ne narušavajući njihovu aerodinamičnost (slika 10.19).

Prorez se može također pobuditi prijenosnom linijom, kao što je prikazano na slici 10.19a) i prilagoditi karakterističnoj impedanciji linije ispravnim izborom mjesta pobude. Na cilindričnim plohama može se postići vertikalno i horizontalno polarizirano zračenje. Za dovoljno mali polumjer cilindra ($< \lambda/2$) s prorezom koji je paralelan s osi cilindra postiže se gotovo svesmjeran dijagram u E-ravnini što je nemoguće postići jednim električnim dipolom.



a) b)

Slika 10.19. Prorezna antena: **a)** u ravnoj vodljivoj plohi, **b)** u cilindričnoj plohi

Mikrotrakaste antene

Za integriranje s elektroničkim komponentama i sklopovima, posebno su zanimljive mikrotrakaste antene. Poznato je da otvoreni kraj mikrotrakaste linije zrači elektromagnetsku energiju. To je zračenje znatno učinkovitije kad su dimenzije širine trake reda veličine valne duljine. Slika 10.20 prikazuje izvedba mikrotrakaste antene s pravokutnim rezonatorom (engl. *patch*). Ta se struktura ne razlikuje od oklopljenog mikrotrakastog rezonatora. No, za razliku od njega, ta struktura ostaje otvorena u poluprostoru iznad dielektrične podloge, čime se omogućuje zračenje energije u slobodni prostor. Zračenju poglavito pridonose dva zračeća ruba u kojima vlada rubno električno polje $\vec{E}_R$. Najniža rezonantna frekvencija *patcha* postiže se kad je njegova duljina jednaka polovini valne duljine u mikrotrakastome sredstvu, $l=\lambda_v/2$. Ako je širina *patcha* približno jednaka njegovoj duljini, tj. $w \simeq l$, onda valna duljina približno iznosi $\lambda_v \simeq \lambda_\varepsilon = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r}$, gdje je ε_r relativna permitivnost dielektrične podloge mikrotrakaste strukture, a λ_0 valna duljina u slobodnome prostoru. Pritom se točna vrijednost efektivne permitivnosti može odrediti s pomoću izraza (4–156). Zbog kapacitivnog učinka otvorenih krajeva otvorenog rezonatora, duljinu *patcha* (l) valja skratiti približno za visinu podloge (h). O kompenzaciji otvorenog kraja mikrotrakaste linije može se više naći u odjeljku 5.11.1.

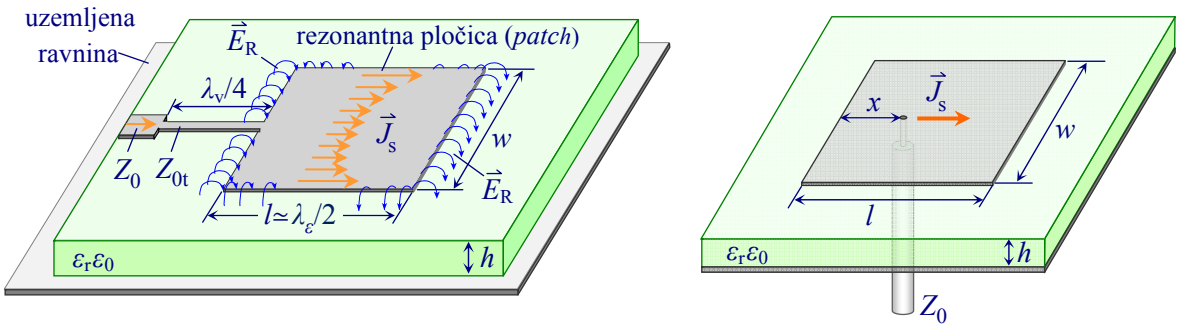
Mikrotrakaste antene mogu se izrađivati uobičajenim postupkom izrade tiskanih pločica. Stoga su pogodne za masovnu proizvodnju i integraciju s aktivnim sklopovima. Imaju malu visinu ($h \ll \lambda$) pa spadaju u antene niskog profila. Lako ih je prilagoditi drugim prijenosnim linijama, svim vrstama trakastih i suosnih linija. Slika 10.20a) prikazuje pobudu mikrotrakastom linijom na zračećem rubu, a slika 10.20b) pobudu suosnom linijom kroz uzemljenu ravninu produljenjem središnjeg vodiča suosne linije do *patcha*. Pritom se prilagodba na $Z_0 = 50\ \Omega$ može lako ostvariti četvrtvalnim transformatorom impedancije kao na slici 10.20a) ili postavljanjem pobudne točke na ispravnu udaljenost (x) od zračećeg ruba na slici 10.20b).

Tipične vrijednosti otpora zračenja nalaze se u rasponu od 100 do 200 Ω pa se, primjerice, namještanjem koordinata pobudne točke može lako prilagoditi različitim karakterističnim impedancijama suosne linije. Više o tomu može se naći u literaturi [1]–[4].

Mikrotrakaste antene imaju veliku učinkovitost zračenja (preko 80%) i lako se integraju u linearne i površinske antenske nizove na ravnim ili zakrivljenim uzemljenim dielektričnim podlogama. No, zbog toga što su inherentno rezonantne, mikrotrakaste antene pripadaju skupini uskopojasnih antena. Relativna širina pojasa, bez posebnih zahvata, ne prelazi 10%.

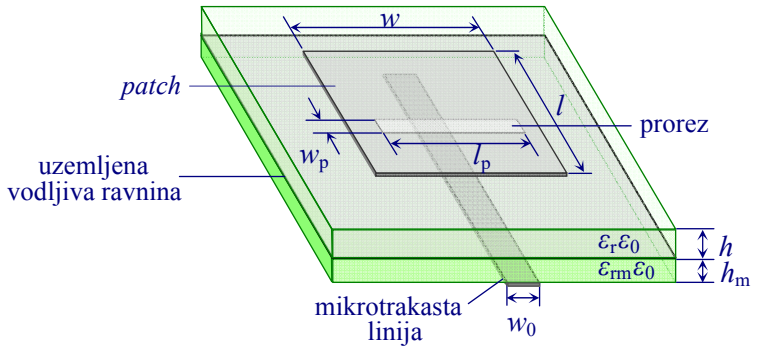
Dodavanjem parazitskog rezonatora (*patcha*), u sloj iznad aktivnog radijatora ili na istoj podlozi pokraj njega, moguće je postići relativne širine pojasa i preko 40%.

Uz pravokutni oblik *patcha* u praksi se nalaze i drugi oblici poput kružnog, eliptičnog i trokutastog. Ta vrsta antena i njezine inačice (npr. PIFA, prema engl. *Planar Inverted F antenna*) rabe se u ručnim radijskim uređajima poput pametnog telefona, RF kartica svih

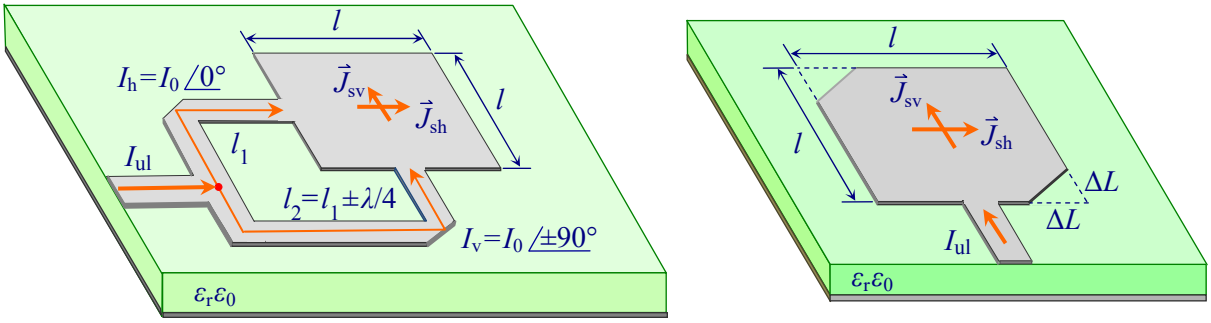


a) b)

Slika 10.20. Pravokutna mikrotrakasta antena pobuđena: **a)** mikrotrakastom i **b)** suosnom linijom



Slika 10.21. Pravokutna mikrotrakasta antena pobuđena mikrotrakastom linijom preko proreza u uzemljenoj ravnini

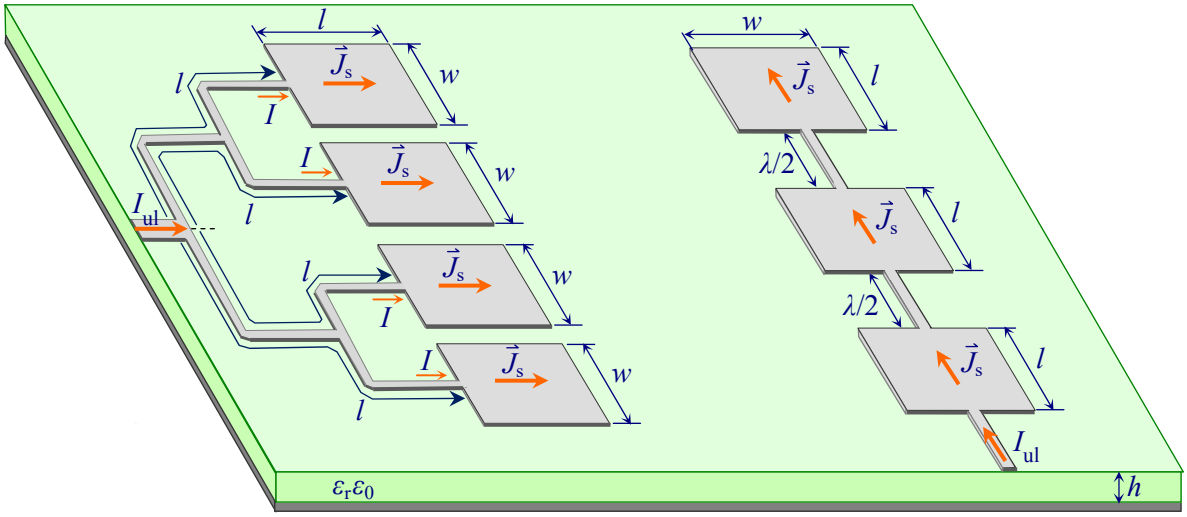


a) b)

Slika 10.22. Kvadratna kružno polarizirana mikrotrakasta antena pobuđena mikrotrakastom linijom: **a)** na dvama ortogonalnim rubovima i **b)** okrnjenim dijagonalnim uglovima

vrsta osobnih računala, raznih RF senzorskih sustva, sustava za radiofrekvencijsku identifikaciju (engl. *Radio Frequency Identification*; RFID) te za bežični elektromagnetske energije.

Osim pobude prikazane na slici 10.20, može se ostvariti i pobuda preko proreza u uzemljenoj ravnini (slika 10.21). Ovdje prorez ima ulogu prorezne antene kojom se pobuđuje *patch* koji zrači elektromagnetsku energiju u slobodni prostor. Kao rezultat dobiva se višeslojna



Slika 10.23. Nizovi mikrotrakastih antena pobuđeni: **a)** paralelno i **b)** serijski

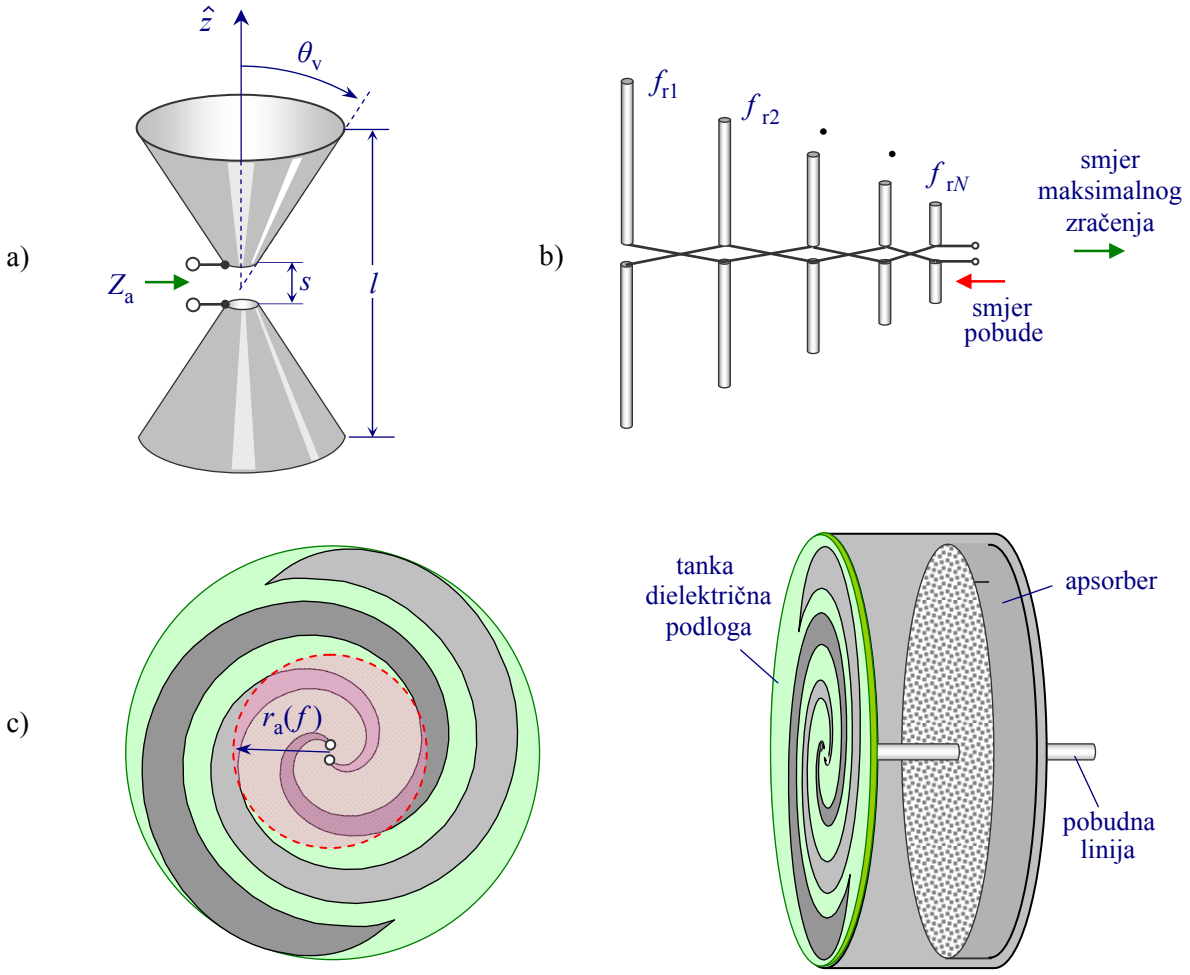
planarna antena u kojoj je pobudna struktura smještena s druge strane uzemljene ravnine, čime se parazitsko zračenje pobudne strukture svodi na najmanju moguću mjeru. Prorez je pobuđen mikrotrakastom linijom kao u izvedbi prikazanoj na slici 4.58 u odjeljku 4.8.4.

Osim linearne polarizacije mikrotrakastom je antenom moguće ostvariti i kružnu polarizaciju. Na slici 10.22 prikazano je nekoliko jednostavnih izvedaba kružno polariziranih antena s pravokutnim rezonantnim pločicama. Slično se mogu izvesti inačice s pločicama kružnog oblika.

Na slici 10.23 prikazana je izvedba antenskih nizova s mikortrakastim antenama. Pobudna mreža može se postaviti na istu podlogu (supstrat) na kojoj se nalazi *patch* ili se može primijeniti pobuda preko proreza u uzemljenoj ravnini kao u izvedbi prikazanoj na slici 10.21.

Širokopojasne antene

U širokopojasnim komunikacijskim i radarskim primjenama rabe se antene čija se impedancijska obilježja i obilježja zračenja neznatno mijenjaju unutar širokog frekvencijskog pojasa, do nekoliko oktava. Velika širina frekvencijskog pojasa može se ostvariti bikoničnom antenom (slika 10.24a)) izvedenom od dvaju vodljivih stožaca koji leže na zajedničkoj osi i čiji se vrhovi nalaze na minimalnom razmaku. Razmakom između vrhova određuje se gornja granična frekvencija ($f_g \simeq 2\,c/s$), a ukupnom duljinom (l) dvaju stožaca određuje se donja granična frekvencija, ($f_d \simeq 2\,c/l$), gdje je c brzina svjetlosti. Ulazna impedancija (impedancija zračenja) gotovo je posve realna i neovisna o frekvenciji, a vrijednost joj ovisi o vršnom kutu



Slika 10.24. a) Bikonična antena. **b)** Log-periodična antena. **c)** Spiralna antena

stošca θ_v. Polarizacija je linearna i određena je položajem osi stožaca. U *H*-ravnini, okomitoj na os stošca, dijagram je zračenja izotropan (svesmjeran), a u *E*-ravnini usmjeren. U nižem frekvencijskom području, blizu f_d, zračenje je najjače u poprečnome smjeru na os. Povećanjem frekvencije glavna se latica razdvaja u dvije čiji se smjerovi pomiču prema plaštevima gornjeg i donjeg stošca.

Osim bikoničnih antena u širokopojasnim se primjenama rabe *logaritamski periodične antene* (log-periodične) antene te različite *sukomplementarne* (engl. *self-complementary*) i *spiralne* antene. Slika 10.24a) prikazuje log-periodičnu antenu koja se sastoji od niza električnih dipola [1]. Svaki dipol zadužen za zračenje unutar uskog frekvencijskog pojasa. Log-periodičnom antenom maksimalno se zračenje ostvaruje u smjeru osi niza od duljih prema kraćim elementima. Naime, antena na slici 10.24b) periodična je struktura. Krakovi dipola kraći od četvrt valne duljine za zadanu frekvenciju ponašaju se kao kapacitivni elementi pa se u frekvencijskom području u kojem su ti elementi kraći od četvrt valne duljine struktura ponaša kao kapacitivno opterećena prijenosna linija. No, za elemente dulje od četvrt valne duljine, ova je struktura zaporna, tj. elementi se ponašaju kao reflektori. Stoga strukturu valja pobuđivati u smjeru od kraćih elemenata prema duljim elementima. Da bi se ostvario dijagram zračenja čiji je maksimum usmjeren prema kraćim elementima, susjedne elemente valja pobuđivati protufazno. Dobitak tipičnih log-periodičnih antena nalazi se u rasponu od 6 do 12 dB, a širina radnog frekvencijskog područja iznosi više oktava.

Tipična spiralna antena, prikazana na slici 10.24c), izvedena od tiskanih vodiča postavljenih na tanku dielektričnu podlogu zrači približno kružno polarizirani val. »Aktivni« dio antene (spirale) za zadanu frekvenciju *f* približno je određen područjem opsega od jedne vale duljine, tj. srednjeg polumjera $r_a(f) \simeq \lambda/(2\pi) = c/(2\pi f)$. Maksimum dijagrama zračenja antene usmjeren je okomito na plohu spirale. Obično se upotrebljava samo zračenje u jednome smjeru, što se može jednostavno ostvariti zatvaranjem jedne strane antene cilindričnom šupljinom koja je ispunjena odgovarajućim disipativnim materijalom.

10.2. Mikrovalni komunikacijski sustavi

Mikrovalni sustavi bežičnih veza čine važnu primjenu mikrovalne tehnologije. Rabe se za prijenos glasa, podataka ili televizijskih signala na velike udaljenosti od lokalnih radijskih veza unutar gradskog i ruralnog područja preko međugradskih i satelitskih usmjerenih veza do veza s letjelicama koje se nalaze duboko u svemiru. Valja dodati i brz razvoj mobilnih komunikacija (posebno 5G) koje traže prostor u mikrovalnome frekvencijskom području, bez obzira na to je li riječ o zemaljskim sustavima ili satelitskim sustavima sa satelitima u niskim kružnim i eliptičnim putanjama ili sa satelitima u geostacionarnim putanjama.

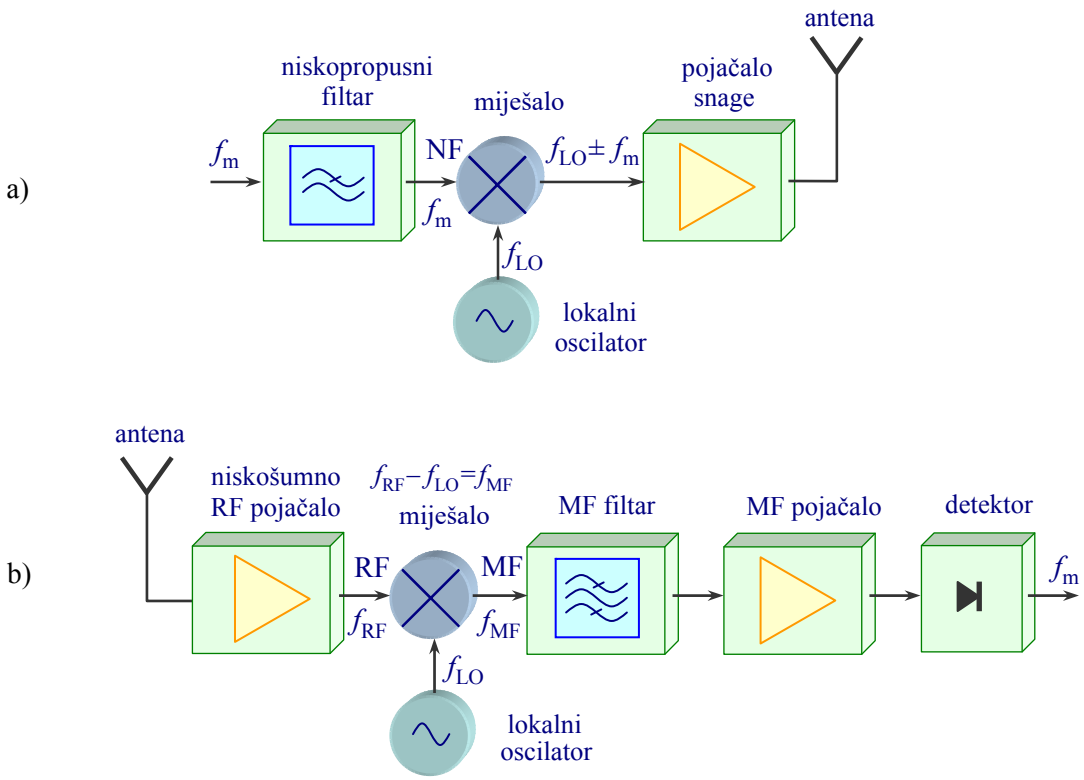
Primjenom modulacije i različitih tehnika multipleksiranja mikrovalni sustavi usmjerenih veza mogu prenositi velik broj kanala osnovnoga pojasa. To je osnovna prednost te vrste komunikacijskih sustava. Normalni mikrovalni val nositelj, primjerice, na frekvenciji 4 GHz, razmjerno male relativne širine pojasa (do deset posto), može prenositi do sto tisuća govornih kanala ili više od šezdeset televizijskih kanala.

Mikrovalni komunikacijski sustavi mogu se zasnivati i na uporabi vođenoga vala. Tako se velik broj komunikacijskih kanala može prenositi od izvora signala do prijamnika suosnim linijama, valovodima, ali razmjerno jako prigušenje signala u suosnom prijenosnom ustroju općenito ograničuje njegovu uporabu na frekvencijsko područje ispod 1 GHz, kao što je to slučaj kod kabelske televizije i sličnih telekomunikacijskih mreža za prijenos podataka između računala. U mikrovalnome i milimetarskome valnom području manje prigušenje pri prijenosu signala ostvaruje se uporabom kružnih valovoda, a u još višem frekvencijskom području prema optičkim valnim duljinama rabe se dielektrični valovodi ili svjetlovodi.

Slobodnim se prostorom radijska komunikacija uglavnom ostvaruje ravnocrtnim rasprostiranjem elektromagnetskoga vala od odašiljačke do prijamne antene. Za razliku od valova na nižim frekvencijama, mikrovalovi ne prate obrise površine Zemlje niti se reflektiraju od ionosferskog sloja. Stoga je u zemaljskim sustavima usmjerenih veza nužna uporaba repetitorskih postaja s većim ili manjim razmacima između repetitora, ovisno o konfiguraciji terena i radnom frekvencijskom području. Naime, na značajke rasprostiranja elektromagnetskih valova na visokim frekvencijama znatno utječu i atmosferske pojave, poput kiše, magle i snijega, dodatno prigušenje zbog plinova u zraku, pojava višestaznog prijenosa zbog refleksije elektromagnetskoga vala od površine Zemlje na kopnu i moru te refleksije od različitih prirodnih i umjetnih prepreka. Komunikacijski se satelit također može zamisliti kao repetitorska postaja preko koje je radiovalovima moguće povezati vrlo udaljene postaje na Zemlji.

10.2.1. Mikrovalni odašiljači i prijamnici

Osnovni mikrovalni radiokomunikacijski sustav s amplitudnom modulacijom prikazan je na slici 10.25. Ulazni signal nalazi se u frekvencijskom području tzv. *osnovnog pojasa* (prema engl. *base band*). U praksi to su govorni, podatkovni ili slikovni signali na frekvenciji f_m. U odašiljačkom dijelu sustava, prikazanog na slici 10.25a), niskopropusni filtar sprečava prijenos frekvencijskih komponenata izvan frekvencijskog područja kanala osnovnog pojasa (modulacijska komponenta signala). Uz pomoć lokalnoga oscilatora i nelinearnog ili vremenski promjenljivog elementa u miješalu, signal se iz osnovnog pojasa transponira u mikrovalno frekvencijsko područje. To je uzlazna pretvorba frekvencije (prema gore) i može se ostvariti sklopovima miješala opisanim u odjeljku 8.6. Pojačalo snage pojačava mikrovalni signal koji zatim antena zrači u slobodni prostor.



Slika 10.25. Mikrovalni radiokomunikacijski sustav s amplitudnom modulacijom: **a)** odašiljač i **b)** prijamnik

U prijamniku (slika 10.25b)) najprije se primljeni signal iz antene dovodi na niskošumno pretpojačalo iako se mogu naći primjeri mikrovalnih sustava u kojima je taj stupanj ispušten. Zatim se pojačani korisni signal miješalom transponira u međufrekvencijsko (MF) područje na sličan način kao kod odašiljača. To je primjer heterodinskog prijamnika. Pri tomu je spektralni sadržaj MF signala jednak spektralnom sadržaju odaslanog mikrovalnoga signala pa je sadržaj informacije očuvan te se nakon daljnjeg pojačavanja u MF pojačalu može demodulirati i tako ponovno vratiti u izvorni oblik. Prije pojačavanja u MF pojačalu signal se obično filtrira u MF filtru da se spriječi prodor signala viših harmonika i intermodulacijskih produkata u MF pojačalo, kao signala smetnji koje nastaju u procesu miješanja.

U praksi se nalazi čitav niz inačica opisane izvedbe radiokomunikacijskog sustava veza. Najveće razlike između njih posljedica su odabira modulacijskog postupka. No osnovni im je način rada zajednički. Bolji odnos signal/šum može se ostvariti primjenom frekvencijske modulacije. No, zbog veće otpornosti na smetnje i većih mogućnosti multipleksiranja u vremenskoj domeni, u suvremenim se mikrovalnim komunikacijskim sustavima uglavnom primjenjuju digitalni modulacijski postupci.

10.2.2. Šumna svojstva mikrovalnoga prijamnika

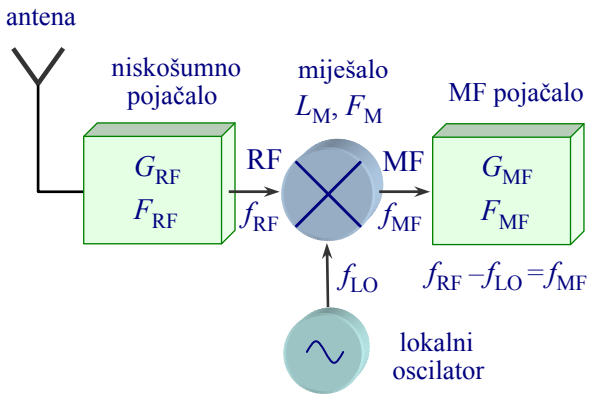
Prednji kraj prijamnika povezan je s antenskim sustavom prijenosnom linijom ili valovodom. U tom sustavu ukupna snaga šuma na izlazu prijamnika $P_{š,iz}$ posljedica je šuma antene, šuma zbog gubitaka u prijenosnoj liniji i šuma ostalih naprava u sklopu prijamnika. Snaga šuma na izlazu jednoznačno određuje minimalni signal prijamnika koji se može detektirati, tj. maksimalnu udaljenost odašiljača od prijamnika za zadanu snagu odašiljača.

Ako se prednji kraj prijamnika sastoji od sklopova čija su obilježja prikazana na slici 10.26, onda se nadomjesna temperatura šuma prijamnika T_p može izračunati s pomoću izraza (8–19) iz odjeljka 8.1. kao

$$T_p = T_{RF} + \frac{T_M}{G_{RF}} + \frac{L_M}{G_{RF}} T_{MF}, \tag{10–58}$$

gdje su T_{RF} nadomjesna temperatura šuma RF pojačala, G_{RF} pojačanje snage RF pretpojačala, T_M nadomjesna temperatura šuma miješala, L_M gubitci pretvorbe miješala, a T_{MF} nadomjesna temperatura šuma MF pojačala i ostatka prijamnog lanca. Ako je veza između temperature šuma T i faktora šuma F dana izrazom (8–8a), tj.

$$F = 1 - \frac{T}{T_0}, \tag{10–59}$$



Slika 10.26. Prednji kraj mikrovalnoga prijamnika prikazana na slici 10.25b)

gdje je $T_0 = 290$ K standardna temperatura pri kojoj se obavlja mjerenje, onda se može napisati sljedeći izraz za ukupni faktor šuma prijamnika

$$F_{\mathrm{p}} = F_{\mathrm{RF}} + \frac{F_{\mathrm{M}} - 1}{G_{\mathrm{RF}}} + \frac{(F_{\mathrm{MF}} - 1)L_{\mathrm{M}}}{G_{\mathrm{RF}}}, \tag{10–60}$$

gdje je F_{RF} faktor šuma RF pretpojačala, F_{M} faktor šuma miješala, a F_{MF} faktor šuma MF pojačala. Pritom je pojačanje snage prijamnika $G_{\mathrm{pr}} = G_{\mathrm{RF}} G_{\mathrm{MF}} / L_{\mathrm{M}}$.

Ako se ispred prijamnika ugradi prijenosna linija ili RF filtar s gubitcima L_{F}, onda se ukupna nadomjesna temperatura šuma prijamnika može napisati kao

$$T_{\mathrm{uk}} = \left(L_{\mathrm{F}} - 1\right) T_{\mathrm{F}} + L_{\mathrm{F}}\, T_{\mathrm{p}}, \tag{10–61}$$

gdje je T_{F} fizička temperatura na kojoj se nalazi prijenosna linija ili filtar, a T_{p} nadomjesna temperatura šuma prijamnika. Tad je radna temperatura šuma sustava $\mathrm{T_{op}} = T_{\mathrm{A}} + T_{\mathrm{uk}}$.

Ako iz antene u prijamni sustav ulazi temperaturu šuma T_{A} i snaga signala $P_{\mathrm{s,ul}}$, onda su odgovarajuće snage na izlazu prijamnog sustava $P_{\mathrm{š,iz}} = kT_{\mathrm{op}} B G_{\mathrm{pr}} / L_{\mathrm{F}}$ i $P_{\mathrm{s,iz}} = P_{\mathrm{s,ul}}\, G_{\mathrm{pr}} / L_{\mathrm{F}}$, gdje je $k = 1{,}380 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmannova konstanta, a B širina frekvencijskog pojasa. Otuda je odnos signal/šum na izlazu

$$\left.\frac{S}{\check{S}}\right|_{\mathrm{iz}} = \frac{P_{\mathrm{s,iz}}}{P_{\mathrm{š,iz}}} = \frac{P_{\mathrm{s,ul}}}{kB\left[T_{\mathrm{A}} + \left(L_{\mathrm{F}} - 1\right) T_{\mathrm{F}} + L_{\mathrm{F}} T_{\mathrm{p}}\right]}. \tag{10–62}$$

Iz izraza (10–62) može se lako vidjeti kako gubitci prijenosne linije ili RF filtra na ulazu prijamnika smanjuju odnos signal/šum, tj. osjetljivost prijamnika. Naime, maksimalna osjetljivost prijamnika postiže se minimiziranjem gubitaka u komponentama koje su smještene ispred prijamnika.

10.2.3. Satelitski komunikacijski i radiodifuzijski sustavi

Satelitske komunikacije imaju značajnu ulogu u informacijskom povezivanju korisnika, što uključuje prijenos govornih, slikovnih i podatkovnih signala u multimedijskim komunikacijskim sustavima. Pritom satelit ima ulogu radiorelejne postaje čijim je signalima moguće pokriti velik dio Zemljine površine i istodobno komunicirati s drugim satelitima u globalnom telekomunikacijskom sustavu. Satelitske veze mogu biti pokretne i fiksne. Iz geostacionarne putanje koja se nalazi na visini 35.786 km iznad ekvatora, satelit može pokriti više od jedne trećine zemljine površine i može se povezati s bilo kojom točkom unutar tog područja. Satelit se nalazi u geostacionarnoj putanji oko Zemlje kad se nalazi na kružnoj stazi koja leži u ekvatorijalnoj ravnini na takvoj visini da je perioda obilaska satelita oko Zemlje jednaka periodi obrtaja Zemlje oko svoje osi.

U satelitskom komunikacijskom sustavu, satelit prima signale *uzlazne veze* iz zemaljskih postaja, obrađuje te signale i ponovno ih vraća na Zemlju u *silaznoj vezi*. Međunarodna telekomunikacijska unija (ITU – *International Telecommuniaction Union*) dodijelila je više frekvencijskih pojaseva za satelitske komunikacije. U SAD, većina komercijalnih satelita za domaće komunikacije rabi pojaseve 4/6 GHz (3,7 - 4,2 GHz za silazne veze i 5,925 - 6,425 GHz za uzlazne veze te pojaseve 12/14 GHz (11,7 - 12,2 GHz za silazne i 14,0 - 14,5 GHz za uzlazne veze). Svakoj je vezi dodijeljena širina pojasa od 500 MHz. Primjena različitih (odvojenih) pojaseva za segment uzlazne veze Zemlja-satelit i za segment silazne veze satelit-Zemlja, omogućuje uporabu zajedničke antene za obavljanje obiju funkcija bez smetnja koje mogu nastati interferencijom između signala uzlazne i silazne veze. U silaznim se vezama redovito rabi niži frekvencijski pojas jer su slabljenja atmosfere manja na nižim frekvencijama, pa su za jednaku kakvoću veze dovoljne manje razine izlazne snage satelitskog odašiljača koji se poglavito napaja Sunčevom energijom.

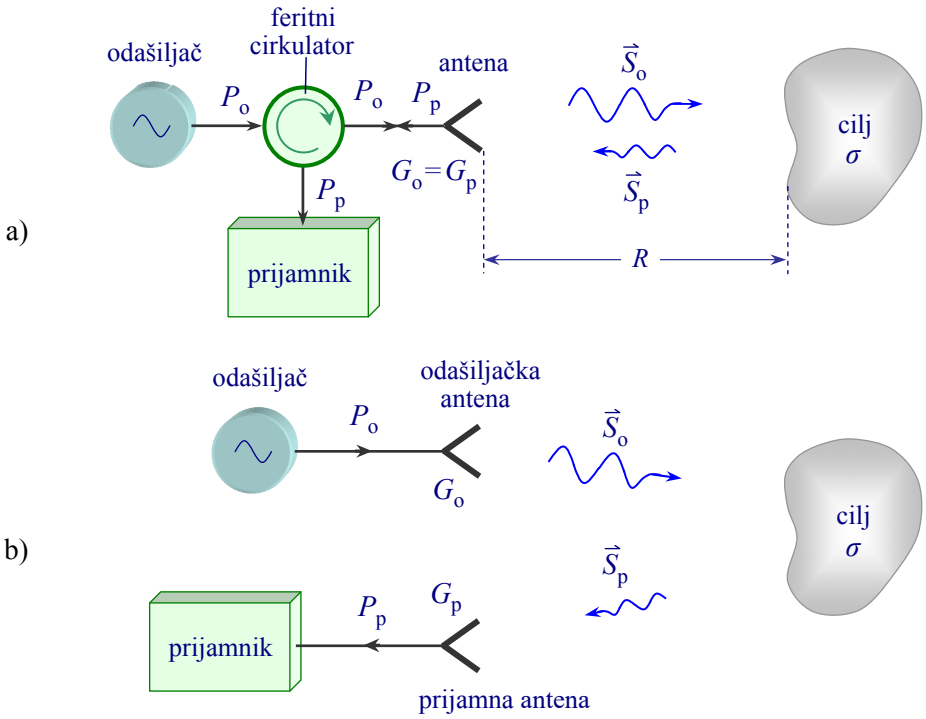
10.3. Radarski sustavi

Radar (prema engl. *Radio Detection And Ranging*) čini jednu od najznačajnijih primjena mikrovalne tehnologije. Osnovno načelo rada temelji se na odašiljanju snažnog mikrovalnoga signala (impulsnog ili stalne amplitude) koji se djelomično reflektira od udaljenog cilja i, nakon što se vrati kao odjek, detektira u osjetljivom prijamniku. Uporabom vrlo usmjerene antene moguće je precizno odrediti smjer cilja na osnovi položaja antene. Udaljenost do cilja može se odrediti mjerenjem vremena koje je potrebno signalu da prijeđe ukupan put do cilja i nazad. S pomoću radara može se odrediti i radijalna brzina cilja mjerenjem Dopplerova frekvencijskog pomaka prijamnog signala. Radar nalazi civilnu primjenu u sustavima za nadzor zračnog prometa na zračnim lukama i za automatsko prizemljenje zrakoplova, u pomorskoj navigaciji, za određivanje visine, za pronalaženje predmeta pod zemljom, u sustavima zaštite unutarnjeg i vanjskog prostora, za mjerenje brzine te u kartografiji. Vojne primjene nalazi u zračnoj i pomorskoj navigaciji, detekciji i praćenju zrakoplova, projektila i svemirskih letjelica te upravljanju letom projektila, za pronalaženje predmeta pod zemljom i vodom te u upravljanju i nadzoru paljbe artiljerijskih projektila. Radar se intenzivno rabi i u nizu znanstvenih i industrijskih primjena poput radioastronomije, kartografije i daljinskih istraživanja prirodnih resursa ta za točno mjerenje udaljenosti.

Osnovni je radarski sustav shematski prikazan na slici 10.27. U sustavu s jednom zajedničkom antenom, antena se istodobno rabi i za odašiljanje i za prijam, dok se u sustavu s dvjema antenama za te iste funkcije rabe odvojene antene. Većina radara rabi zajedničku antenu. Slika 10.27a) prikazuje sustav sa zajedničkom antenom za odašiljanje i prijam, a slika 10.27b) prikazuje radarski sustav s odvojenim antenama (bistatički radar) kad se želi povećati izolacija između odašiljača i prijamnika.

Ako radar odašilje snagu P_o antenom dobitka G_o, onda gustoća upadne snage na cilj iznosi

$$\langle S_o \rangle = \frac{P_o G_o}{4\pi R^2}, \tag{10–63}$$



Slika 10.27. Osnovni radarski sustavi: **a)** sa zajedničkom antenom za prijamnik i odašiljač i **b)** s odvojenim antenama (bistatički radar)

gdje je R udaljenost do cilja. Pritom se pretpostavlja da se cilj nalazi u smjeru maksimalnog zračenja antene. Na cilju dolazi do raspršenja dijela upadne snage u različitim smjerovima, gdje je reflektirana komponenta obično najveća. Omjer između gustoće raspršene snage u zadanome smjeru i gustoće upadne snage definira se kao *radarski presjek cilja* ili *efektivna površina cilja* (engl. *Radar Cross Section*; RCS)

$$\sigma = \frac{P_s}{\langle S_o \rangle}, \tag{10–64}$$

gdje je P_s ukupna raspršena snaga na cilju. Radarski presjek mjeri se u četvornim metrima te ovisi o upadnome kutu i o kutu refleksije, tj. o kutu raspršenja, a jednako tako i o polarizaciji upadnoga elektromagnetskog vala. Radarski presjek cilja poglavito ovisi o raspršnim (refleksijskim) svojstvima i obliku cilja.

Budući da je cilj konačne veličine, gustoća snage koju cilj reemitira razmjerna je faktoru $1/(4\pi R)^2$, pa gustoća snage raspršenog polja na mjestu prijamne antene iznosi

$$\langle S_p \rangle = \frac{P_o G_o \sigma}{(4\pi R)^2}. \tag{10–65}$$

Primjenom izraza (10–13) i (10–17), za monostatički radar ($G_o = G_p = G$), izraz za prijamnu snagu poprima oblik radarske jednadžbe [9], tj.

$$P_p = \frac{P_o G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4}. \tag{10–66}$$

Prijamna snaga P_p opada s četvrtom potencijom udaljenosti, što znači da za detekciju udaljenog cilja malog radarskog presjeka valja uporabiti vrlo osjetljiv niskošumni prednji kraj radarskoga prijamnika.

Zbog šuma antene i zbog šuma samog prijamnika, uvijek postoji neka minimalna razina prijamne snage koja se može detektirati radarom. Ako se ta snaga označi s P_{min}, onda iz izraza (10–66) izlazi

$$R_{maks} = \left[\frac{P_o G^2 \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 P_{min}} \right]^{\frac{1}{4}}. \tag{10–67}$$

Obradom signala nakon detekcije može se učinkovito sniziti razina minimalnog detektibilnog signala i tako povećati udaljenost do cilja pri kojoj se sa sigurnošću može detektirati cilj zadane efektivne površine. Jedno od rješenja nalazi se u integraciji impulsa odjeka cilja. To se može ostvariti analognom obradom signala, ali digitalna obrada nakon digitalizacije analognog signala daje veću otpornost na smetnje i veću fleksibilnost radarskome sustavu.

10.3.1. Impulsni radar

Impulsni radar određuje udaljenost cilja na osnovi mjerenja vremena kašnjenja mikrovalnog signala na putu od odašiljača do cilja i natrag do prijamnika. Slika 10.28 prikazuje načelnu blokovsku shemu tipičnog impulsnog radara. Odašiljački se dio sastoji od jednobočnog pretvornika prema gore koji transponira međufrekvencijski signal f_{MF} u mikrovalno frekvencijsko područje uz pomoć signala lokalnoga oscilatora frekvencije f_{LO}. Isti lokalni oscilator služi za transpoziciju prijamnog signala u MF područje u prijamnom dijelu radara. Nakon pojačavanja snage mikrovalni se impulsi odašilju u prostor putem antene. Preklopkom odašiljač/prijamnik upravlja se iz impulsnog generatora kojim se definira trajanje odašiljačkog impulsa τ i frekvencija ponavljanja (repeticijska frekvencija, $f_r = 1/T_r$). Tipična su trajanja radarskih impulsa između 50 ns i 100 ms. Impulsi kraćeg trajanja pružaju bolju razlučivost po udaljenosti, a impulsi duljeg trajanja daju bolji odnos signal/šum nakon obrade signala u

prijamniku. Tipične repeticijske frekvencije radara nalaze se u rasponu od 100 Hz do 1 kHz. Viša repeticijska frekvencija daje više odraza cilja po jedinici vremena što poboljšava obilježja radara, a niža repeticijska frekvencija otklanja višeznačnost prilikom određivanja udaljenosti uz uvjet $R > cT_r/2$. Dva se bliska cilja mogu razlučiti kao dva odvojena cilja, ako je $T_2 > T_1 + \tau$, što je ekvivalentno uvjetu

$$\frac{2R_2}{c} \geq \frac{2R_1}{c} + \tau\,. \tag{10–68}$$

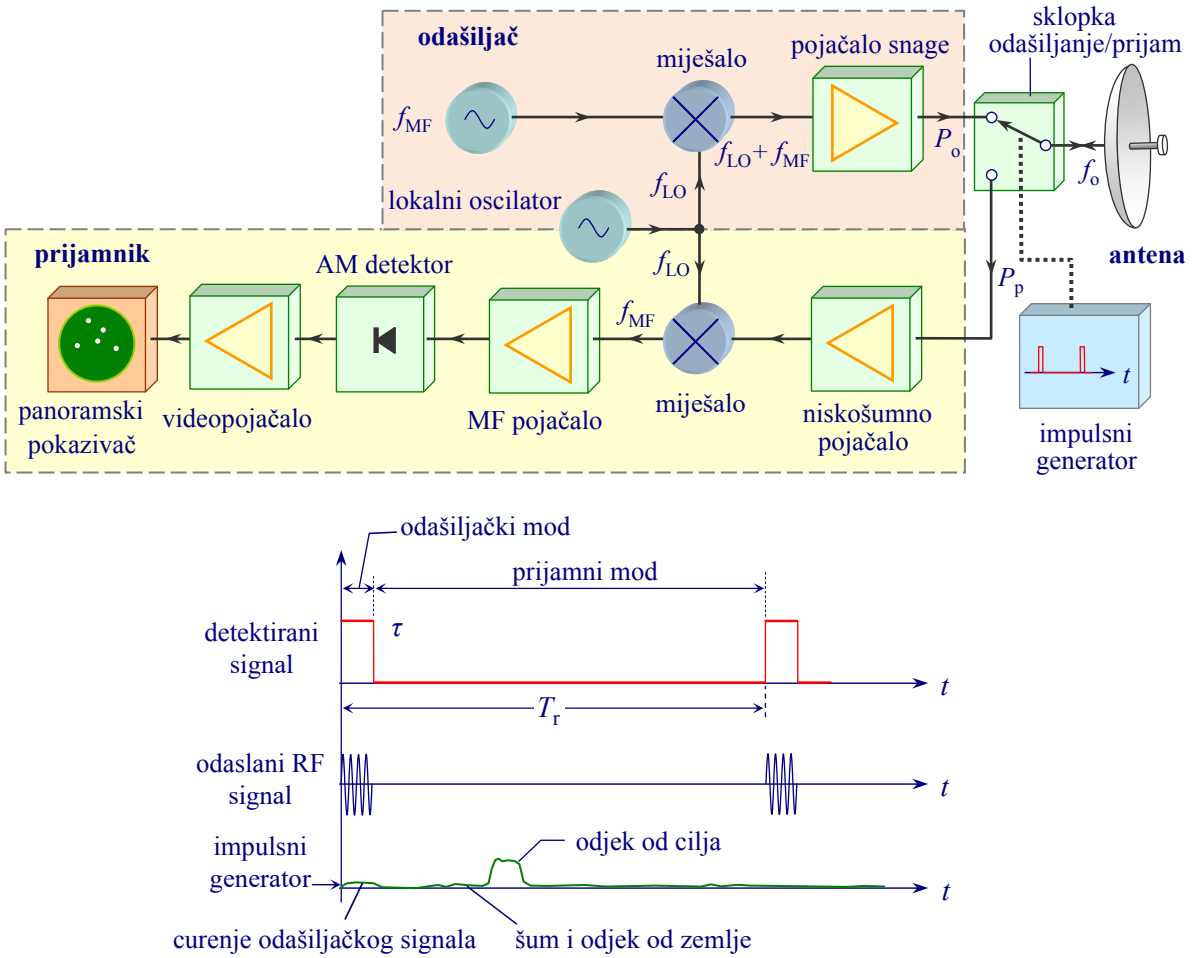
Razlučivost po udaljenosti, ΔR, definirana je minimalnim razmakom između ciljeva da se spriječi preklapanje odjeka dvaju ciljeva. U skladu s izrazom (10–68), do toga dolazi kad je

$$\Delta R = R_2 - R_1 = \frac{c\tau}{2}\,. \tag{10–69}$$

Neki radari odašilju impuls kraćeg trajanja od jedne nanosekunde. Za $\tau = 1$ ns, $\Delta R = 15$ cm.

S druge strane, kutna razlučivost ovisi o kutu usmjerenosti Φ_D antene po azimutu (obilazni kut), tj. $\Delta x = \Phi_D R$, gdje je Φ_D u radijanima.

U prijamnom modu rada, povratni se signal pojačava u niskošumnom ulaznom pojačalu i miješa se signalom lokalnoga oscilatora frekvencije f_{LO} proizvodeći željeni MF signal. Primjena zajedničkog lokalnoga oscilatora za odašiljač i prijamnik znatno pojednostavnjuje izvedbu radarskog sustava i otklanja probleme vezane za frekvencijski drift, što je čest slučaj u izvedbama s odvojenim oscilatorima. MF signal zatim se pojačava u MF pojačalu, obično logaritamskog odziva amplitude. Nakon detekcije signal se dovodi na video-pojačalo i prika-



Slika 10.28. Koncepcija impulsnog radarskog sustava i vremenski dijagram

zuje na ekranu radarskog pokazivača. Impulsni radari obično rabe antenu koja se mehanički okreće pa po azimutu pokriva kutno područje od 360 stupnjeva. U tom slučaju ekran pokazivača prikazuje položaj cilja u polarnom koordinatnom sustavu. Mnogi suvremeni radari rabe elektroničko zakretanje antenskoga snopa i elektronička računala u svrhu digitalne obrade primljenog signala.

Preklopka odašiljač/prijamnik impulsnog radara obavlja dvije funkcije: oblikuje povorku mikrovalnih radarskih impulsa i prekopčava antenu između odašiljača i prijamnika. Obično se traži velika izolacija između odašiljača i prijamnika (između 80 i 100 dB) da se spriječi prodor odašiljačkog signala izravno u prijamnik. U protivnom može doći do uništenja ulaznog pojačala prijamnika ili znatnog smanjenja pojačanja, tj. sniženja osjetljivosti, zbog ispravljačkog učinka u ulaznome pojačalu (vidjeti odjeljke 8.2.1. i 8.2.5). Prekopčavanje se može ostvariti i feritnim cirkulatorom. No, budući da cirkulatori postižu izolaciju od samo 20 do 30 dB, valja uptrijebiti dodatne sklopove, primjerice, elektroničke sklopke visoke izolacije.

Odnos signal/šum ($S/\check{S}$) impulsnog radara jednak je omjeru primljene snage P_p i srednje ulazne snage šuma $P_{\check{\mathrm{s}},\mathrm{ul}}$, kao što je dano izrazom

$$\frac{S}{\check{S}} = \frac{P_\mathrm{p}}{P_{\check{\mathrm{s}},\mathrm{ul}}} = \frac{P_\mathrm{p}\tau}{kT_\mathrm{op}}, \tag{10–70}$$

gdje je T_op radna temperatura šuma sustava dana u izrazu (8–7). Otuda minimalni odnos signal/šum odgovara slučaju $P_\mathrm{p}=P_\mathrm{p,min}$, tj.

$$\left(\frac{S}{\check{S}}\right)_\mathrm{min} = \frac{P_\mathrm{p,min}\tau}{kT_\mathrm{op}}. \tag{10–71}$$

Uvrštenjem u izraz (10–69) dobiva se

$$R_\mathrm{maks} = \left[\frac{P_\mathrm{o}\tau G^2\lambda^2\sigma}{(4\pi)^3 kT_\mathrm{op}\left(S/\check{S}\right)_\mathrm{min}}\right]^{\frac{1}{4}}. \tag{10–72}$$

Umnožak $P_\mathrm{o}\tau$ jednak je energiji odaslanog impulsa pa je, u skladu s izrazom (10–70), maksimalna udaljenost, na kojoj se može detektirati cilj, određena energijom odaslanog impulsa, a ne samom razinom odaslane snage P_o. Drugim riječima, radar snažnijeg impulsa i kraćeg trajanja imat će jednake performanse kao radar s impulsom manje snage, ali duljeg trajanja. No radarski sustav s impulsom duljeg trajanja imat će manju razlučivost cilja po udaljenosti od radara s impulsom kraćeg trajanja.

Domet radara može se povećati povećanjem odnosa signal/šum. To se može ostvariti digitalnom integracijom višekratnih odjeka. Time se povećava ukupna energija primljena od cilja. Broj impulsa razmjeran je repeticijskoj frekvenciji, f_r. Stoga se za povećanje dometa traži što veća repeticijska frekvencija, koliko to dopuštaju ostali parametri radara.

10.3.2. Dopplerov radar

Ako cilj ima komponentu brzine u radijalnom smjeru u odnosu na radarsku antenu, onda će zbog Dopplerova učinka dolaći do frekvencijskog pomaka u prijamnom signalu, tj. frekvencija će mu se razlikovati od frekvencije odaslanog signala. Ako je frekvencija radara f_o i radijalna brzina cilja v_r, onda taj frekvencijski pomak (ili Dopplerova frekvencija) iznosi

$$f_\mathrm{d} = \frac{2v_\mathrm{r}f_\mathrm{o}}{c}, \tag{10–73}$$

gdje je c brzina svjetlosti. Tad je prijamna frekvencija $f_\mathrm{o} \pm f_\mathrm{d}$. Pozitivni predznak odgovara cilju koji se približava anteni, a negativni odgovara cilju koji se udaljava.

Skica radarskog sustava na slici 10.27a) može se uzeti kao načelna shema Dopplerova radara gdje je frekvencija signala odjeka spektralno pomaknuta za Dopplerovu frekvenciju u odnosu na frekvenciju odaslanog signala. Dopplerov je radar znatno jednostavniji od impulsnog radara jer rabi kontinuirani elektromagnetski val, a oscilator odašiljača istodobno obavlja funkciju lokalnoga oscilatora u prijamniku. Filtar iza miješala ima pojasnopropusni odziv koji odgovara očekivanoj najnižoj i najvišoj Dopplerovoj frekvenciji. Pri tomu je nužno da filtar ima dovoljno veliko prigušenje na nultoj frekvenciji u smislu eliminiranja odjeka od statičnog cilja. Tad nije potreban visok stupanj izolacije između odašiljača i prijamnika pa se odvajanje prijamnog signala od odašiljačkog signala može ostvariti feritnim cirkulatorom. Ugradnjom dodatnog miješala uz neznatno povećanje složenosti sustava Dopplerov radar može razlučiti cilj koji se približava radaru od cilja koji se od njega udaljava. U suvremenim radarima taj se problem rješava kombiniranjem Dopplerova i impulsnog radara u cjelovit radarski sustav.

Ako se smjer vektora brzine cilja ne poklapa sa smjerom pravca na kojem leže cilj i antena radara, onda se Dopplerova frekvencija može izračunati iz izraza

$$f_{\mathrm{D}} = \pm\frac{2v_{\mathrm{r}}}{\lambda_0} = \pm\frac{2v}{\lambda_0}\cos\theta\,, \tag{10–74}$$

gdje je θ kut između radijalnog vektora i vektora brzine cilja.

Više o radarskim sustavima čitatelj može naći u literaturi [9].

10.4. Radiometrija

Radarski sustav prima informaciju o cilju (objektu) preko odaslanog signala i prijamom njegovog odjeka. Stoga je riječ o aktivnom sustavu za daljinsko istraživanje. *Radiometrija* je međutim pasivna tehnika jer dobiva informaciju o cilju samo iz snage koju taj cilj emitira. Naime, svako stvarno tijelo (cilj) zrači izvjesnu količinu elektromagnetske energije u obliku šuma i djelomično reflektira zračenja okolnih tijela. *Radiometar* je vrlo osjetljiv prijamnik posebne izvedbe za mjerenje snage šuma koju zrači neko tijelo.

Sve tvari na konačnoj termodinamičkoj temperaturi zrače elektromagnetsku energiju. Atomski plinovi zrače elektromagnetske valove na diskretnim frekvencijama ili valnim duljinama, tj. pokazuju diskretne spektralne linije. U skladu s kvantnom teorijom, svaka spektralna linija u spektru zračenja atomskog plina odgovara točno određenom prijelazu elektrona s jedne na drugu (nižu) atomsku energijsku razinu. Pri prijelazu između kvantnih stanja W_1 i W_2, frekvencija f emitiranog zračenja, tj. fotona, dana je Bohrovim uvjetom

$$f = \frac{W_2 - W_1}{h}\,, \tag{10–75}$$

gdje je h Planckova konstanta. Kvantna teorija definira kvantne energijske razine atoma i dopuštene prijelaze između kvantnih razina pa stoga definira spektralne linije atomskog plina.

Energija koja upada na atom može se apsorbirati u atomu dajući mu potrebnu energiju za skok elektrona u više energijsko stanje (na višu energijsku razinu), ako frekvencija upadnog vala zadovoljava Bohrov uvjet. Stoga je apsorpcijski spektar plina identičan njegovom emisijskom spektru. To se načelo može primijeniti i na znatno složenije strukture uključujući molekularne plinove, tekućine i krutine.

Emisija zračenja atoma uzrokovana je sudarom s drugim atomom ili česticom. Vjerojatnost da će doći do sudara (pa stoga i emisije) ovisi o gustoći atoma i kinetičkoj energiji njihovog nasumičnog gibanja. Budući da je kinetička (ili toplinska) energija materije definirana preko njezine termodinamičke temperature, proizlazi da količina energije koju materija zrači raste s temperaturom.

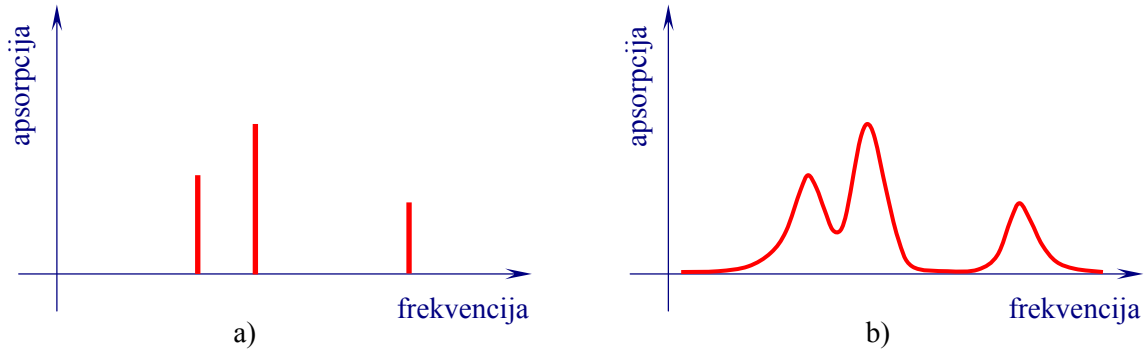
S molekulom, koja se sastoji od dvaju ili više atoma, povezan je sustav vibracijskih i rotacijskih modova koji opisuju relativno gibanje atoma u odnosu na drugi. Ti modovi definiraju odgovarajući skup dopuštenih energijskih razina. Zbog doprinosa iz vibracijskih, rotacijskih i elektronskih prijelaza, spektri molekula također sadrže diskretne spektralne linije, ali je njihov broj znatno veći od broja spektralnih linija atoma. U vidljivom dijelu spektra spektralne linije nekih molekularnih plinova toliko su međusobno blizu da ih je teško međusobno razlučiti, posebno kad molekule sadrže velik broja atoma.

Apsorpcija elektromagnetske energije u molekulama plinova obično uključuje interakciju električnog ili magnetskog polja upadnoga vala s električnim ili magnetskim dipolima ili momentom dipolnoga para molekule. Od svih plinova u Zemljinoj atmosferi, samo kisik i vodena para jače apsorbiraju elektromagnetsku energiju u mikrovalnome spektru. Osim toga, molekula kisika ima permanentni magnetski moment koji u jakoj magnetskoj interakciji s upadnim poljem proizvodi porodicu rotacijskih spektralnih linija na frekvencijama oko 60 GHz i izoliranu spektralnu liniju na frekvenciji 118,8 GHz. S druge strane, vodena para ima polarnu molekulu s električnim dipolom. Električna interakcija s upadnim poljem proizvodi rotacijske linije na frekvencijama 22,25 i 183,3 GHz te na nekoliko frekvencija duboko u infracrvenome području (iznad 300 GHz).

Dakle, spektar apsorpcije i emisije neke molekule sastoji se od oštro definiranih frekvencijskih linija (slika 8.29) koje odgovaraju prijelazima između oštro definiranih (kvantiziranih) energijskih razina molekule. Takav je spektar svojstven izoliranom, neporemećenom i stacionarnom molekularnom sustavu. No molekule se neprestance gibaju zbog toplinske pobude, sudarajući se s okolnim molekulama istoga plina ili s drugim materijalnim objektima poput čestica prašine. To uzrokuja promjenu širine energijskih razina pa pripadajuće spektralne linije poprimaju konačnu širinu, kao što je prikazano na slici 8.29b). Proširenje spektralne linije ima različite uzroke. Najveće proširenje nastaje zbog sudara između molekula. Ta je pojava posebno korisna za objašnjenje apsorpcije mikrovalne energije u atmosferi.

Dosad opisani mehanizmi zračenja atoma i molekula temelje se na kvantnoj teoriji. No prijelazom s plinova na tekućine i krutine, raste broj interakcija između čestica pa spektar zračenja (ili apsorpcije) postaje sve zamršeniji. Tekućina i krutina uvijek se mogu zamisliti kao enormno velika molekula s mnoštvom stupnjeva slobode. To vodi do toliko velikog broja spektralnih linija na malom razmaku da spektar zračenja postaje efektivno neprekinut pa se može reći da je zračenje prisutno na svim frekvencijama.

Tu je teoriju uveo njemački fizičar Max Planck 1901. godine u izvodu *zakona zračenja crnoga tijela*. Prije Planckova rada, znanstvenici devetnaestoga stoljeća bezuspješno su pokušavali izvesti spektar zračenja krutina jer su svoj rad temeljili na postulatima klasične mehanike. Ključ rješenja bio je u Planckovoj zamisli da se emitiranje energije zbiva samo u diskretnim kvantima pa je ta pretpostavka postala izvorištem kvantne teorije.



Slika 10.29. Apsorpcijski spektar: **a)** izolirane molekule plina, **b)** plin sa mnoštvom molekula

Zamisao *crnoga tijela* kao elektromagnetskog radijatora od temeljnog je značaja za razumijevanje toplinske emisije stvarnih materijala jer njegov spektar emisije označuje referentnu razinu, u odnosu na koju se može izraziti emisivnost zračenja bilo kojeg tijela. Općenito se apsorbira samo dio zračenja koje upada na površinu krute (ili tekuće) materije, a preostali se dio istodobno reflektira. *Crno je tijelo definirano kao idealiziran, savršeno taman materijal koji apsorbira cjelokupno upadno zračenje na svim frekvencijama i za sve polarizacije i koji pritom ništa ne reflektira*. Kvantno-mehanički model crnoga tijela može se opisati kao da se sastoji od tako velikog broja kvantiziranih energijskih razina s odgovarajuće velikim brojem dopuštenih prijelaza, da se svaki foton apsorbira pri upadu na površinu crnoga tijela, bez obzira kolike je energije ili koje je frekvencije. Uz to što je savršen apsorber, crno je tijelo također savršen radijator. Naime, kad ne bi došlo do zračenja energije, energija koja se apsorbira u materijalu nastavila bi povećavati temperaturu crnoga tijela.

U praksi se crno tijelo može dobro aproksimirati šupljim tijelom malog otvora. Svako zračenje koje ulazi kroz taj otvor apsorbira se ili je podvrgnuto višestrukim refleksijama na unutarnjim stijenkama, tako da se sva izvorna energija apsorbira prije negoli se reflektira na vanjskoj površini. Ako se to šuplje tijelo nalazi na nekoj fiksnoj termodinamičkoj temperaturi T, onda će njegova unutarnja površina emitirati i apsorbirati fotone istom mjerom pa energija koja izlazi iz otvora u termodinamičkoj ravnoteži sliči zračenju crnoga tijela. Na mikrovalnim se frekvencijama dobra aproksimacija crnoga tijela može naći u materijalima visokog stupnja apsorpcije kakvi se rabe pri konstrukciji neječnih elektromagnetskih komora.

U skladu s Planckovim zakonom zračenja, crno tijelo prosječno zrači jednoliko u svim smjerovima *spektralnom svjetlinom*

$$B_f = \frac{2hf^3}{c^2}\frac{1}{\mathrm{e}^{hf/kT}-1}. \qquad (10\text{–}76a)$$

U izrazu (10–76a) prisutne su samo dvije varijable, f i T, tj. frekvencija i temperatura. Slika 10.30 prikazuje porodicu krivulja B_f u funkciji frekvencije s temperaturom kao parametrom. Da bi se dobio prikaz za velik raspon vrijednosti primijenjeno je logaritamsko mjerilo na objema koordinatnim osima (log-log mjerilo). Krivulje pokazuju dva zanimljiva obilježja. Prvo, porastom temperature raste ukupna razina svjetline. Drugo, frekvencija pri kojoj B_f postiže svoju maksimalnu vrijednost raste s temperaturom.

Na mikrovalnim frekvencijama i na termodinamičkim temperaturama koje nisu blizu apsolutne nule, tj. za $x = hf/kT \ll 1$ vrijedi aproksimacija

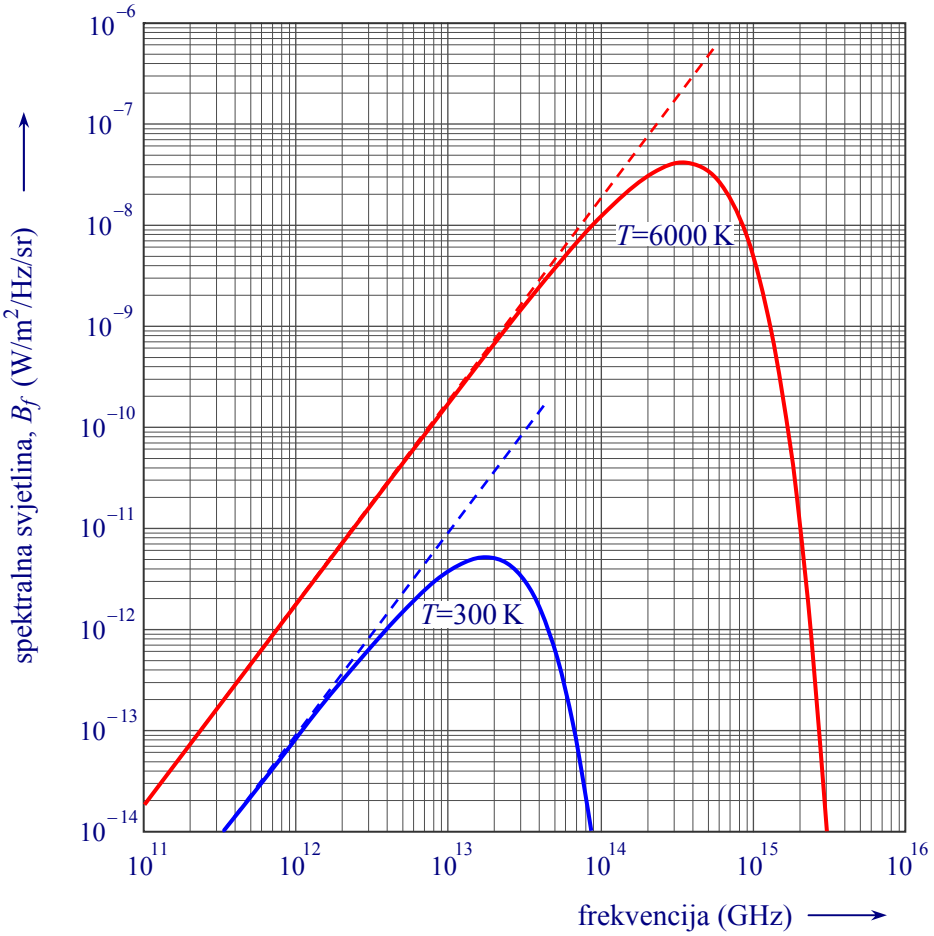
$$\mathrm{e}^x - 1 = \left(1 + x + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right) - 1 \simeq x, \quad \text{za } x \ll 1$$

pa se izraz (10–76a) može pojednostavniti na oblik

$$B_f = \frac{2f^2kT}{c^2} = \frac{2kT}{\lambda^2}. \qquad (10\text{–}76b)$$

To je poznata Rayleigh-Jeansova aproksimacija koja je vrlo korisna u mikrovalnome i nižem frekvencijskom području. Na slici 10.30 prikazana je isprekidanim pravcima. Matematički je jednostavnija od Planckova zakona. Uz uvjet $f/T < 3{,}9 \cdot 10^8$ Hz/K pogreška je manja od 1%. No za crno tijelo na sobnoj temperaturi 300 K ova će aproksimacija vrijediti za $f < 117$ GHz što pokriva cijeli RF i mikrovalni spektar te velik dio milimetarskog valnog područja.

Poznato je da svako tijelo u termodinamičkoj ravnoteži na temperaturi T zrači energiju u skladu s Planckovim zakonom. Primjenom Rayleigh-Jeansove aproksimacije, u mikrovalnome se području taj rezultat svodi na $P = \mathrm{k}TB$, gdje je P zračena snaga. Taj se rezultat može strogo



Slika 10.30. Planckov zakon zračenja crnoga tijela

primijeniti samo na zračenje *crnoga tijela*, što vodi *termodinamičkoj ravnoteži*. No stvarno tijelo dijelom reflektira upadnu energiju, što znači da ne zrači istu količinu energije koju bi zračilo crno tijelo na istoj temperaturi. Stoga se uvodi nova veličina, *emisivnost*, kao mjera koja pokazuje koliku snagu zrači stvarno tijelo u odnosu na snagu koju zrači crno tijelo na istoj termodinamičkoj temperaturi, tj.

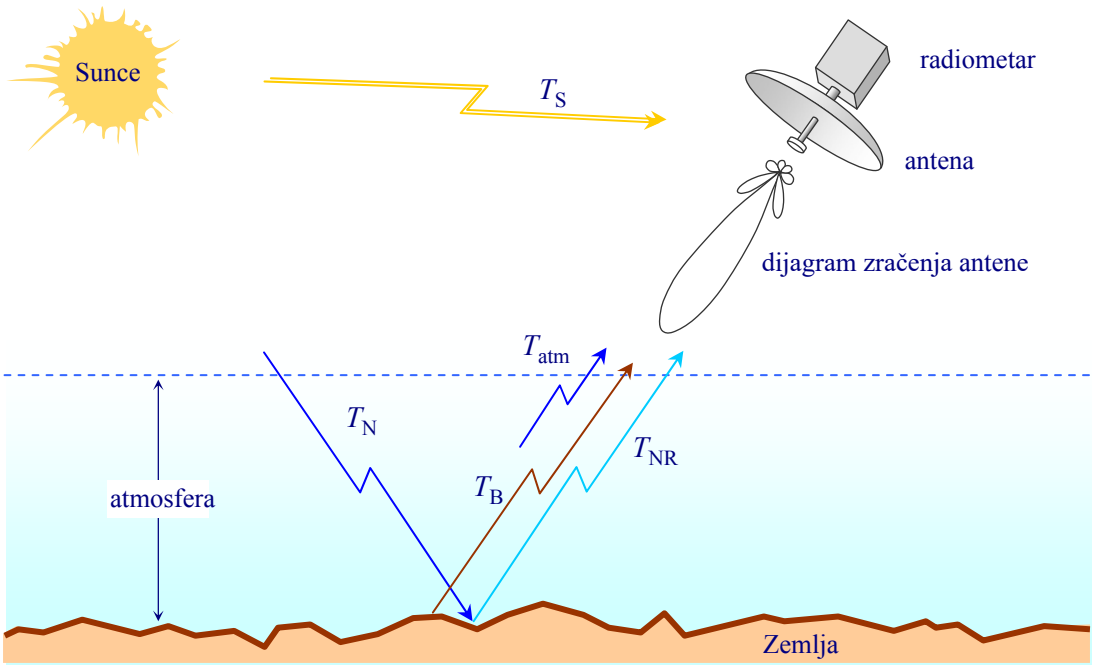
$$e = \frac{P}{kTB}, \tag{10–77}$$

gdje je P snaga koju zrači stvarno tijelo, a kTB je snaga koju bi na temperaturi T zračilo idealno crno tijelo. Stoga za stvarno tijelo vrijedi $0 \le e < 1$, a za idealno crno tijelo $e = 1$. Otuda se može definirati *svjetlina* nekog tijela ili temperatura svjetline T_B kao

$$T_B = eT, \tag{10–78}$$

gdje je T termodinamička temperatura tijela. To nam govori da, gledano s radiometrijskog stajališta, stvarno tijelo uvijek se doimlje »hladnije« od njegove termodinamičke temperature jer je $0 \le e < 1$.

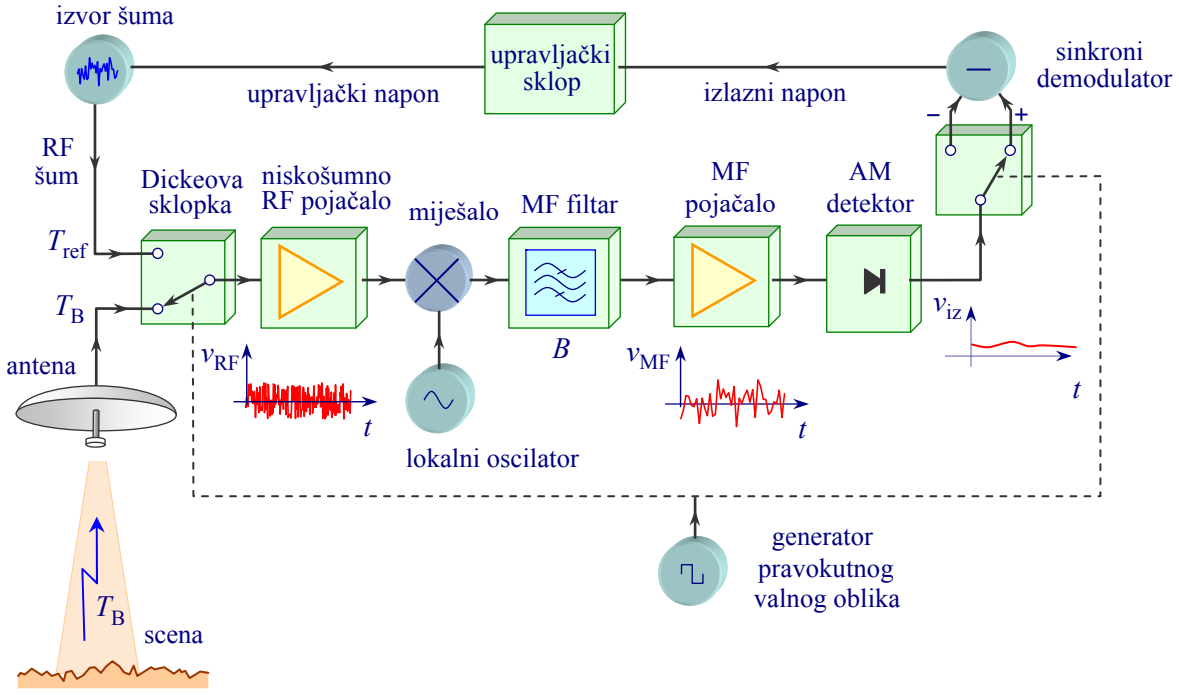
Slika 10.31 prikazuje primjer uporabe radiometra za mjerenje snage šuma različitih objekata. Antena je usmjerena u određeno područje na Zemlji koje ima temperaturu svjetline T_B. Atmosfera zrači energiju u svim smjerovima, a T_{atm} je komponenta koja zrači izravno prema anteni, dok se od Zemlje u smjeru antene reflektira komponenta T_{NR}. Na antenu nerijetko upada i snaga šuma jačih točkastih izvora šuma, poput Sunca, preko bočnih latica antene (vidjeti odjeljak 10.1). Stoga je temperatura svjetline koju svaki radiometar »vidi« funkcija



Slika 10.31. Izvori šuma u tipičnoj radiometrijskoj primjeni

scene koju »promatra« glavnom laticom, kuta pod kojim »promatra«, frekvencije, polarizacije, prigušenja atmosfere i dijagrama zračenja antene.

Slika 10.32 pak prikazuje sustav *Dickeova radiometra* kao vrlo osjetljivog heterodinskog prijamnika čiji se ulaz primjenom *Dickeove sklopke* naizmjence prekopčava između antene i izvor šuma za umjeravanje. Na izlazu prijamnika nalazi se sinkroni detektor koji naizmjence prima signale koji su poljedica T_B ili T_{ref}, gdje je T_{ref} poznata referentna temperatura šuma.



Slika 10.32. Shematski prikaz uravnoteženog Dickeovog radiometara

Minimalni mjerljiv prirast temperature šuma iznosi [11]

$$\Delta T_{\min} = \frac{C\left(T_{\mathrm{B}} + T_{\mathrm{prij}}\right)}{\sqrt{B\tau}} + \left|T_{\mathrm{B}} - T_{\mathrm{ref}}\right| \frac{\Delta G}{G}, \tag{10–79}$$

gdje je C konstanta radiometra (obično 2), a $\Delta G/G$ je normirana promjena pojačanja prijamnika. Ako je $T_{\mathrm{ref}} = T_{\mathrm{B}}$, onda se iz izraza (10–79) može vidjeti da nestabilnost pojačanja nema nikakav učinak na osjetljivost i točnost mjerenja.

Mikrovalna radiometrija izrazito je interdisciplinarno znanstveno polje jer primjenjuje rezultate istraživanja različitih znanstvenih područja poput elektrotehnike, oceanografije, geofizike te znanosti o atmosferi i svemiru [11].

10.5. Rasprostiranje mikrovalova

Elektromagnetski se valovi u slobodnome prostoru rasprostiru kao ravne zrake bez prigušenja ili nekih drugih nepoželjnih učinaka. No slobodni je prostor idealizacija kojom se služimo prilikom aproksimacije rasprostiranja u atmosferi ili blizu površine Zemlje. U praksi se karakteristike komunikacijskih, radarskih ili radiometrijskih sustava mogu ozbiljno pokvariti refleksijom, lomom, ogibom ili apsorpcijom elektromagnetske energije u atmosferskim plinovima. U ovom ćemo odjeljku razmotriti neke posebne pojave pri rasprostiranju koje mogu znatno utjecati na rad mikrovalnih sustava. Pritom valja uzeti u obzir činjenicu da se učinci rasprostiranja ne mogu egzaktno kvantificirati, ali ih je moguće opisati primjenom statističkih metoda.

10.5.1. Atmosferski učinci u troposferi

Relativna permitivnost atmosfere blizu je jedinice, ali je ustvari funkcija atmosferskog tlaka, temperature i vlažnosti. Za mikrovalno područje, može se opisati empirijskim izrazom

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \left[1 + 10^{-6}\left(\frac{79P}{T} - \frac{11V}{T} + \frac{3{,}8\cdot 10^{5} V}{T^{2}}\right)\right]^{2}, \tag{10–80}$$

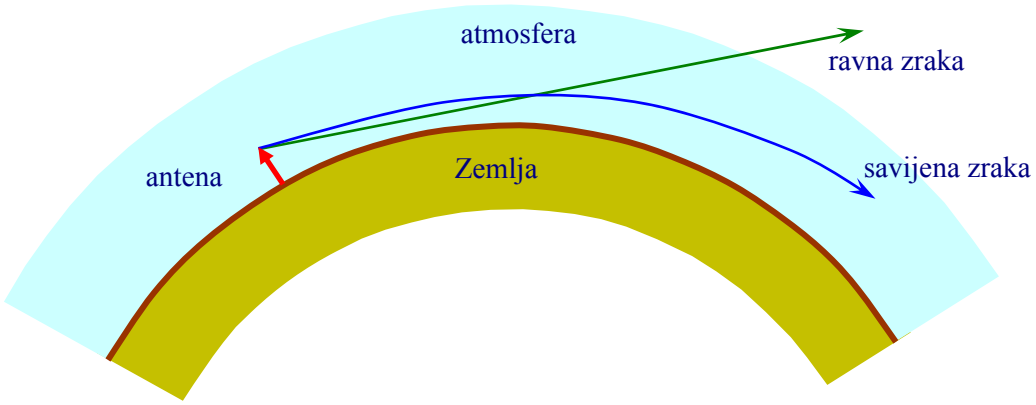
gdje je P atmosferski tlak u hektopaskalima, T temperatura u kelvinima, a V tlak vodene pare u hektopaskalima. Taj rezultat pokazuje da relativna permitivnost općenito opada s visinom težeći jedinici jer i tlak i vlažnost brže opadaju s visinom negoli temperatura. Smanjivanje permitivnosti s visinom uzrokuje savijanje elektromagnetskih valova prema Zemlji (slika 10.33). Savijanje radiovalova gdjekad je korisno jer se time može povećati domet u komunikacijskim i radarskim primjenama i preko granica koje postavlja Zemljin horizont.

Ako se antena nalazi na visini h iznad površine Zemlje, jednostavna geometrija pokazuje da se udaljenost do horizonta može izračunati formulom

$$d = \sqrt{2Rh}, \tag{10–81}$$

gdje je R polumjer Zemlje. Iz slike 10.33 može se iščitati da se učinak loma na domet može uzeti u obzir preko efektivnog polumjera $1{,}33R$, čija prosječna vrijednost ovisi o vremenskim prilikama. U radarskim primjenama, ti učinci loma mogu dovesti do pogrešaka prilikom određivanja položaja cilja blizu horizonta.

Vremenske prilike mogu gdjekad proizvesti temperaturnu inverziju pri kojoj u nižim slojevima atmosfere temperatura raste s visinom. Tad jednakost (10–81) pokazuje da permitivnost atmosfere opada znatno brže s visinom nego u normalnim uvjetima. To katkad čini obilježja prijenosa vrlo slična onima pri prijenosu elektromagnetskih valova planparalelnim valovodom. Stoga se ta pojava obično naziva *valovodno vođenje* ili *anomalno rasprostiranje.*



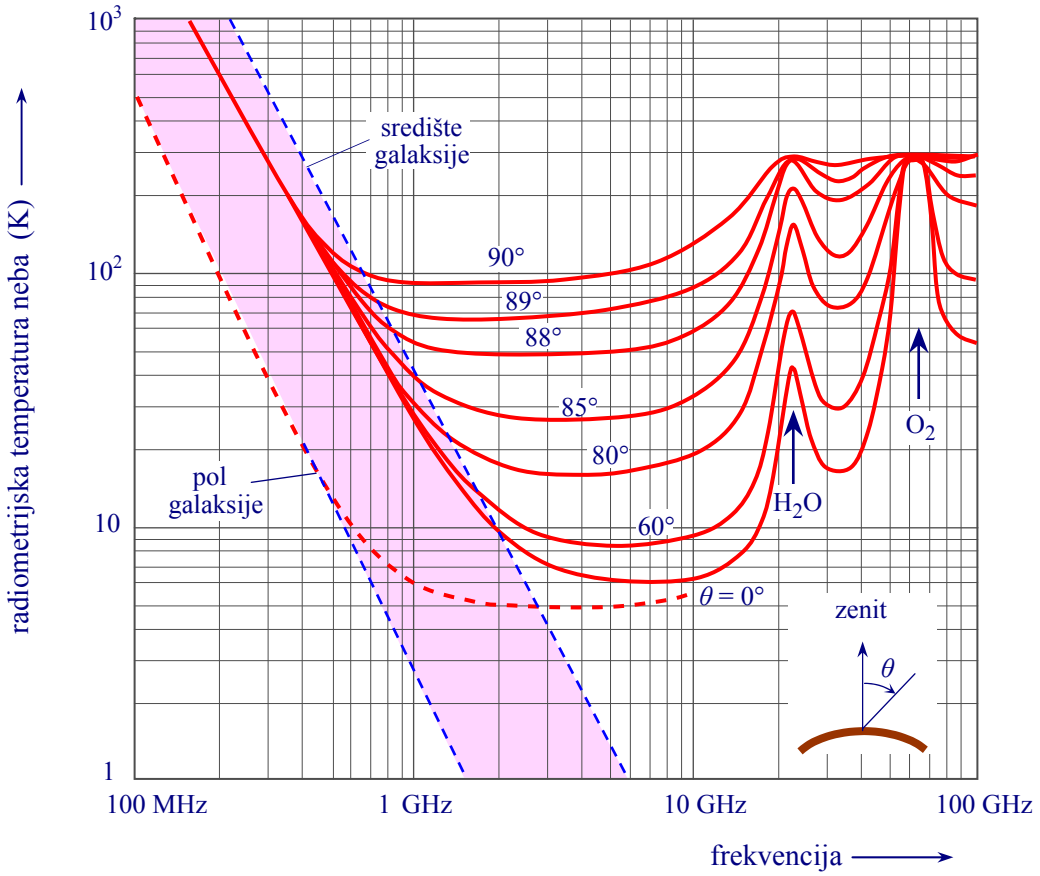
Slika 10.33. Lom radiovalova u atmosferi

U tim se uvjetima radiovalovi mogu prenositi paralelno s površinom Zemlje na velike udaljenosti uz znatno manje slabljenje od onog koje predviđa ovisnost $1/r^2$ pri rasprostiranju ravnoga vala u slobodnome prostoru. Slični se uvjeti rasprostiranja mogu naći u svjetlovodima i dielektričnim valovodima s postupnim snižavanjem indeksa loma prema rubu svjetlovoda. Takvi »atmosferski valovodi« postižu debljine u vertikalnome smjeru od 10 do 200 m i mogu se pojaviti blizu površine Zemlje, ali i na većim visinama.

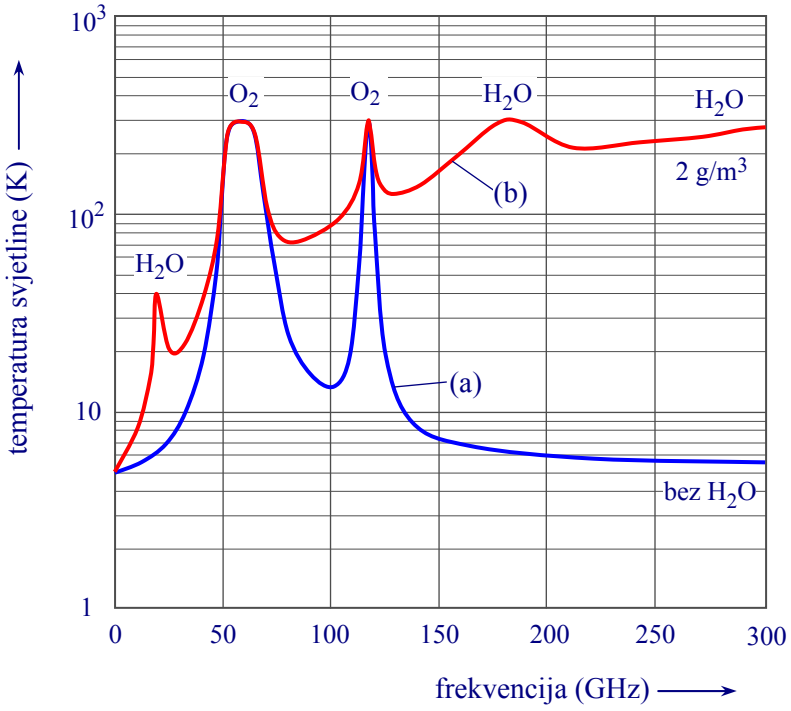
U atmosferi može doći i do disipativnog slabljenja (prigušenja) zbog apsorpcije mikrovalne energije poglavito u molekulama vodene pare i kisika. Ostali atmosferski plinovi malo pridonose apsorpciji. Stoga se najveća apsorpcija pojavljuje na frekvencijama koje se poklapaju s molekularnim rezonancijama kisika i vode u plinovitom stanju. Slika 10.34 grafički prikazuje ovisnost temperature šuma o frekvenciji, a slika 10.35 prikazuje ovisnost radiometrijske temperature atmosfere o frekvenciji u frekvencijskom području od 0 do 300 GHz. Na frekvencijama nižim od 10 GHz utjecaj je atmosfere razmjerno malen. No na frekvencijama 22,2 i 183,3 GHz mogu se uočiti selektivna povećanja apsorpcije zbog prisutnosti molekula vodene pare, a na frekvencijama oko 60 i 119 GHz zbog prisutnosti molekula kisika. Između tih rezonantnih vrhova nalaze se frekvencijska područja na 35, 94 i 135 GHz, s razmjerno malim prigušenjem mikrovalne energije, pa ih nazivamo *radijskim prozorima*. Ta se područja nalaze u milimetarskome valnom području gdje se uspješno rabe u radiokomunikacijskim i radarskim primjenama uz prijenos snage s najmanjim mogućim atmosferskim gubitcima. Oborine poput kiše i snijega te kondenzacija vodene pare u obliku magle i oblaka u nižim slojevima atmosfere (troposfera) dodatno povećavaju slabljenje mikrovalnih signala, posebice na frekvencijama iznad 10 GHz. U nižem frekvencijskom području (< 1 GHz) prevladava utjecaj šuma koji dolazi na Zemlju iz naše galaksije (*Mliječna staza*). Maksimalno zračenje dolazi iz njezinog središta, a minimalno iz njezinih polova.

Najniža temperatura neba (3 - 5 K), koja se može izmjeriti u smjeru pola galaksije, poznata je pod nazivom *pozadinska temperatura* svjetline kozmičkoga zračenja. To je vjerojatno preostalo zračenje nakon »velikoga praska« prilikom rađanja svemira. U smjeru horizonta temperatura šuma neba iznosi od 50 do 100 K, a u smjeru prema Zemlji između 290 i 300 K.

No, u nekim prilikama, odabir frekvencije u lokalnom maksimumu apsorpcije može imati i prednost, kao pri ograničavanju dometa radijske veze ili kad se radiometrijskim postupcima mjere svojstva atmosfere. Stoga se daljinska istraživanja atmosfere (temperatura, količina vodene pare i oborine) obično obavljaju na frekvencijama blizu 20 i 55 GHz na kojima se pojavljuje jaka apsorpcija zbog prisutnosti vodene pare u atmosferi. Osim toga za komunikacije između svemirskih brodova, izvan ionosfere, nerijetko se rabi frekvencijsko područje oko 60 GHz, koje omogućuje razmjerno širokopojasne komunikacije uz veću imunost na smetnje od zemaljskih sustava, zbog povećane apsorpcije nižih slojeva atmosfere.



Slika 10.34. Radiometrijska temperatura neba uz gustoću vodene pare od 7,5 g/m^3



Slika 10.35. Emitirana svjetlina atmosfere u smjeru zenita na koju je dodana temperatura kozmičkoga zračenja. (a) Bez vodene pare. (b) Uz prisutnost vodene pare ukupne masa 2 g unutar vertikalnog stupca površine poprečnog presjeka 1cm^2

10.5.2. Ionosfera i rasprostiranje elektromagnetskih valova u jednostavnoj plazmi

Visoki slojevi atmosfere neprestano su izloženi ionizirajućem Sunčevom i kozmičkom zračenju pa Zemlju obavija kuglasti sloj ioniziranih čestica (plazme), koji je otuda naziva *ionosfera*. Na nižim je frekvencijama od mikrovalnih, ionosferski sloj atmosfere nepropustan za signale ispod desetak MHz. Učinak ionosfere na radiokomunikacije može se ustanoviti razmatranjem rasprostiranja ravnoga vala u *jednostavnoj plazmi*. Pritom se radi jednostavnosti može pretpostaviti da ionizirane čestice, koje oblikuju plazmu, efektivno miruju i da stoga ne dolaze u interakciju sa statičkim magnetskim poljem. To u stvarnosti i nije posve točno jer se plazma zbog promjena temperature i drugih sila ipak giba te u području sjevernoga i južnoga magnetskog pola dolazi do dodatnih učinaka zbog Faradayeve rotacije.

Plazma je sačinjena od elektrona i pozitivnih jednovalentnih iona homogene gustoće $n_e = n_i$ s pripadajućim masama m_e i m_i. Fazor volumne gustoće struje, koja ovisi o brzini elektrona v_e i brzini pozitivnih iona v_i, može se izraziti kao

$$\vec{J} = n_e q(\vec{v}_e - \vec{v}_i)\,. \tag{10–82a}$$

Brzine čestica razmjerne su električnom polju $\vec{E}$ na način opisan jednadžbom (8–95a):

$$\vec{v}_e = \frac{q}{\mathrm{j}\omega m_e}\vec{E}\ , \qquad \vec{v}_i = \frac{-q}{\mathrm{j}\omega m_i}\vec{E}\,. \tag{10–83}$$

Kombiniranjem jednadžba (10–82a) i (10–83) dobiva se Ohmov zakon za plazmu

$$\vec{J} = \frac{n_e q^2}{\mathrm{j}\omega m_e}\left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right)\vec{E} = \sigma\vec{E}\,. \tag{10–82b}$$

Budući da je $m_i \simeq 1830\, Z m_e$, gdje je Z atomski broj, doprinos je struji od iona zanemariv. Stoga je provodnost σ posve jednaka onoj u izrazu (2–56) iz odjeljka 2.3.1. S druge strane, provodnost plazme imaginarna je veličina, pa je gustoća struje pomaknuta u fazi za $-90°$ u odnosu na fazu električnog polja koje tu struju stvara. To je glavna razlika između struje u ionosferi koju inducira električno polje vala i struje u krutom vodiču. Naime, u metalu je gibanje elektrona ograničeno otporom materijala, a u ionosferi struja je ograničena gustoćom zraka, koja je toliko mala da se sudari s molekulama mogu zanemariti. Imaginarna provodnost može se ekvivalentno prikazati kao efektivna permitivnost plazme koja postaje realna veličina i niža od permitivnosti vakuuma (ε_0), što se može vidjeti iz izraza (2–57), tj.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\sigma}{\mathrm{j}\omega} = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right), \tag{10–84}$$

gdje je $\omega_p = 2\pi f_p$ kružna frekvencija plazme dana izrazom (2–58) kao

$$\omega_p = \sqrt{(n_e q^2)/m_e\varepsilon}\ .$$

Izraz (10–84) pokazuje da je za sve frekvencije ispod frekvencije plazme permitivnost plazme negativna veličina. Otuda je valna impedancija $\sqrt{\varepsilon/\mu} = \eta$ imaginarna. Stoga se može zaključiti da će se za $\omega < \omega_p$ val koji nailazi iz slobodnoga prostora reflektirati na sloju ioniziranog zraka. To se također može vidjeti iz koeficijenta rasprostiranja, tj. njegovog kvadrata

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right). \tag{10–85}$$

Za $\omega < \omega_p$, k^2 je negativno pa je $\mathrm{j}k = \alpha$ i $\beta = 0$. Otuda je $\vec{E} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{-\alpha\hat{k}\cdot\vec{r}}$, gdje su:

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}\ , \qquad \beta = 0. \tag{10–86}$$

Stoga se elektromagnetski val ne može rasprostirati, nego se reflektira.

Za $\omega > \omega_p$, k^2 je pozitivna veličina pa se ioniziranim zrakom može rasprostirati val bez prigušenja. Tad su:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\ , \qquad \alpha = 0. \tag{10–87}$$

Budući da u tom slučaju fazni koeficijent β može poprimiti vrijednost manju od k u slobodnome prostoru, fazna brzina vala u plazmi može biti veća od brzine svjetlosti, tj.

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\ . \tag{10–88}$$

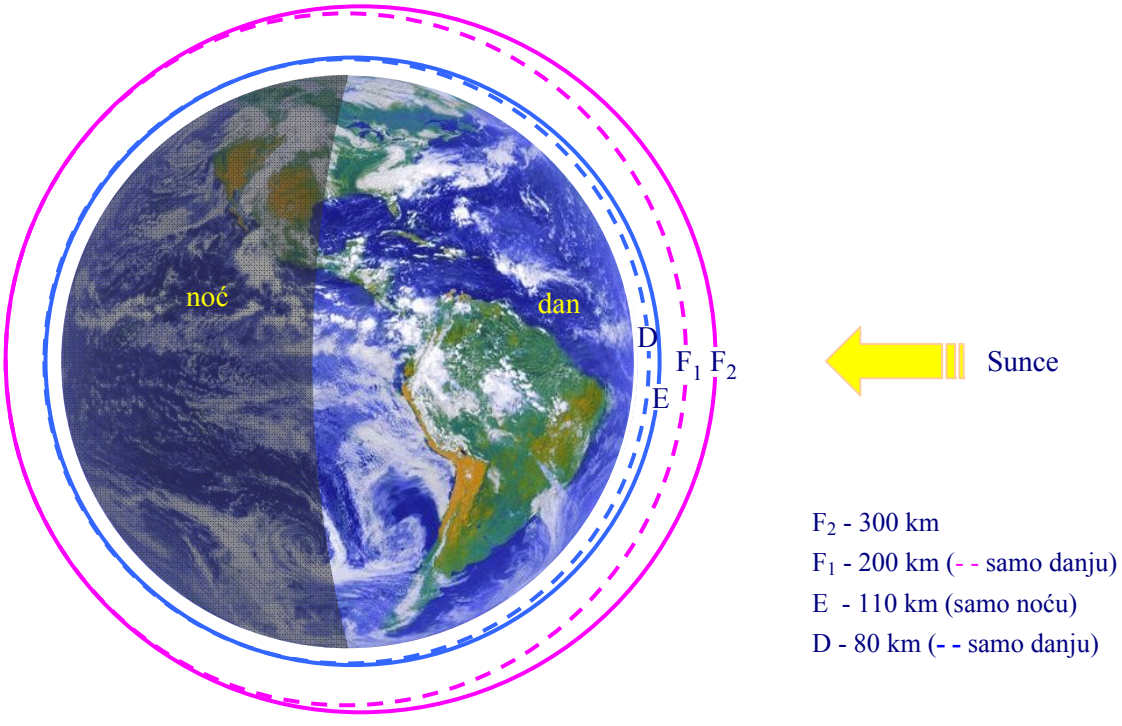
No grupna brzina ($v_g = d\omega/d\beta$) manja je od brzine u savršenom dielektriku. Deriviranjem izraza (10.87) po frekvenciji dobiva se

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\ . \tag{10–89}$$

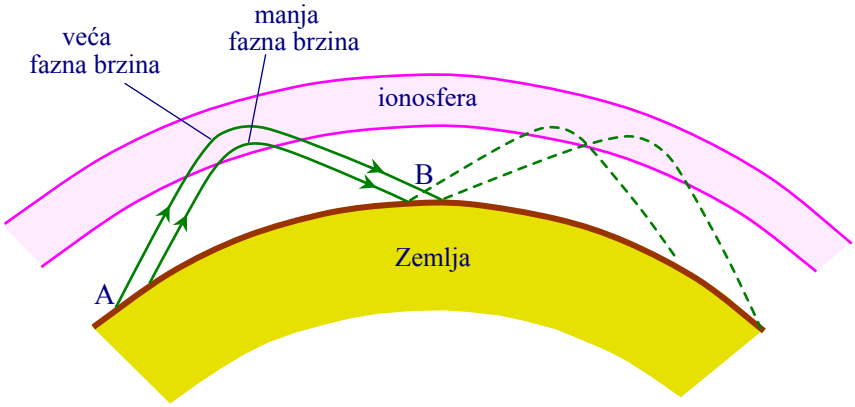
Valja primijetiti da su izrazi (10–85) - (10–89) posve jednaki odgovarajućim izrazima za pravokutni valovod, gdje je ω_p jednaka zapornoj frekvenciji valovoda (vidjeti odjeljak 4.3).

Za $\omega = \omega_p$, u plazmi su mogući longitudinalni valovi ($\vec{\beta} \times \vec{E} = 0$), ali pritom plazma titra na mjestu bez prijenosa energije jer je $v_g = 0$.

U odjeljku 2.3.1. našli smo da za prosječnu gustoću elektrona u ionosferi ($n_e = 10^{12}$ 1/m^3) frekvencija plazme iznosi $f_p = \omega_p/(2\pi) = 8{,}98$ MHz. Stoga slojevi plazme stvaraju neku vrstu Faradayeva kaveza koji, na frekvencijama nižim od f_p, sprečava prijenos radiosignala od



Slika 10.36. Tipične visine ionosferskih slojeva



Slika 10.37. Lom zrake elektromagnetskoga vala na ionosferskome sloju i možebitna višestruka refleksija od površine Zemlje i ionosferskoga sloja

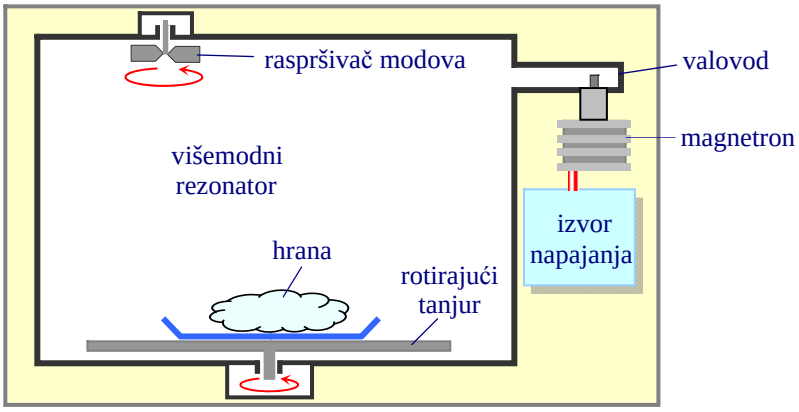
zemaljskih postaja do satelita ili drugih objekata u svemiru i obratno. Plazma uzrokuje jedan od većih problema pri povratku svemirskih letjelica velikom brzinom u Zemljinu atmosferu. Zbog trenja s česticama zraka, oko svemirske letjelice stvara se gust sloj plazme koji obavija letjelicu stvarajući elektromagnetski štit (oklop) poput Fradayeva kaveza. Time su onemogućene bilo kakve radijske komunikacije tijekom jedne od najosjetljivijih faza cijelog događaja.

Ionosferski je sloj nehomogen i sastoji se od više slojeva različite gustoće ioniziranih čestica gdje su jače ionizirani viši slojevi. Slika 10.36 prikazuje tipične visine ionosferskih slojeva. Te su vrijednosti različite za dan i noć. Elektromagnetski valovi koji nailaze pod određenim kutom iz zraka na ionosferski sloj niže permitivnosti od zraka »lome« se na sličan način kao pri totalnoj refleksiji valova koji iz optički gušćeg sredstva nailazi na granicu s rjeđim sredstvom. Zbog manje gustoće nižih slojeva valovi nižih frekvencija koji upadaju pod izvjesnim kutom na ionosferu ne lome se oštro kao pri nailasku na vodič, nego se savijaju, kao što je prikazano na slici 10.37. Time se radijske veze mogu ostvariti daleko iza horizonta. Dodatnom refleksijom od tla elektromagnetska se energija može prenositi na još veće udaljnosti na sličan način kao u planparalelnome valovodu (odjeljak 4.1).

10.6. Mikrovalno zagrijavanje

Mikrovalovi se mogu uspješno iskoristiti za zagrijavanje različitih materijala s dielektričnim gubitcima. Kao izvor mikrovalne energije za primjene u industriji i domaćinstvu te u nekim medicinskim primjenama obično se rabi magnetron, opisan u odjeljku 8.3.4. Za te je primjene namijenjen frekvencijski pojas oko 2,4 GHz, zbog optimalne dubine prodiranja mikrovalova u materijale. Snage se nalaze u rasponu od nekoliko stotina vata do nekoliko kilovata, ovisno o primjeni. Magnetron je valovodom spojen s višemodnom rezonantnom šupljinom (pećnicom) u koju se postavlja materijal koji valja sušiti ili zagrijavati: hrana, papir, plastika, keramika, sukno, građevni materijal itd. U rezonantnoj šupljini ili na izlazu iz pobudnog valovoda nalazi se naprava koja upravlja pobuđivanjem modova. To je obično metalno krilce koje svojom vrtnjom mijenja razdiobu elektromagnetskog polja modova u rezonantnoj šupljini. Time se postiže ravnomjernija razdioba električnog i magnetskog polja, što omogućuje jednoliko zagrijavanje materijala. Na slici 10.38 shematski je prikazana mikrovalna pećnica za pripremu hrane u domaćinstvu.

Kad se za zagrijavanje materijala rabi vruć zrak, toplina se stvara izvan materijala i obično se prenosi konvekcijskim putem (vruć zrak). Pritom se najprije zagrijava površinski sloj materijala, a potom se u dublje slojeve materijala toplina prenosi poglavito toplinskim vođenjem. Zbog temperaturnog gradijenta između površine i unutarnjeg dijela materijala, središnji je dio



Slika 10.38. Mikrovalna pećnica

uvijek hladniji od površinskog sloja. Zato je taj proces zagrijavanja razmjerno spor i neučinkovit. Za zagrijavanje se mogu primijeniti i izvori infracrvenoga zračenja koje također zagrijava površinu objekta elektromagnetskim zračenjem u submilimetarskome valnom području. Pri tom zagrijavanju zrak koji okružuje objekt nije toliko vruć jer se zagrijava neizravno preko površine objekta. No mikrovalno zračenje ulazi u dublje slojeve materijala pa se elektromagnetska energija pretvara u toplinsku unutar samog materijala preko mikrovalne pobude dipolnih momenata molekula vode, tj. preko dielektričnih gubitaka u materijalima velikog tangensa gubitaka. Osim toga nije dobro da materijal sadrži bilo kakve metalne dijelove jer bi moglo doći do indukcije jakih struja na vodičima ili internog proboja u dielektriku i zraku.

Budući da se rabe snažni izvori mikrovalova, propuštanje mikrovalne snage u prostor izvan pećnice mora se smanjiti na najmanju moguću mjeru da bi se spriječilo izlaganje živih organizama štetnim učincima mikrovalnoga zračenja. Zato magnetron, valovod i rezonantna šupljina moraju biti dobro oklopljeni. Posebno valja pripaziti na elektromagnetsko brtvljenje vrata pećnice osiguranjem minimalnih mehaničkih tolerancija pa se na spoj oko okvira vrata obično postavljaju apsorpcijski materijal i četvrtvalne elektromagnetske brtve (pojasne brane) da bi se propuštanje mikrovalne energije smanjilo na prihvatljivu razinu.

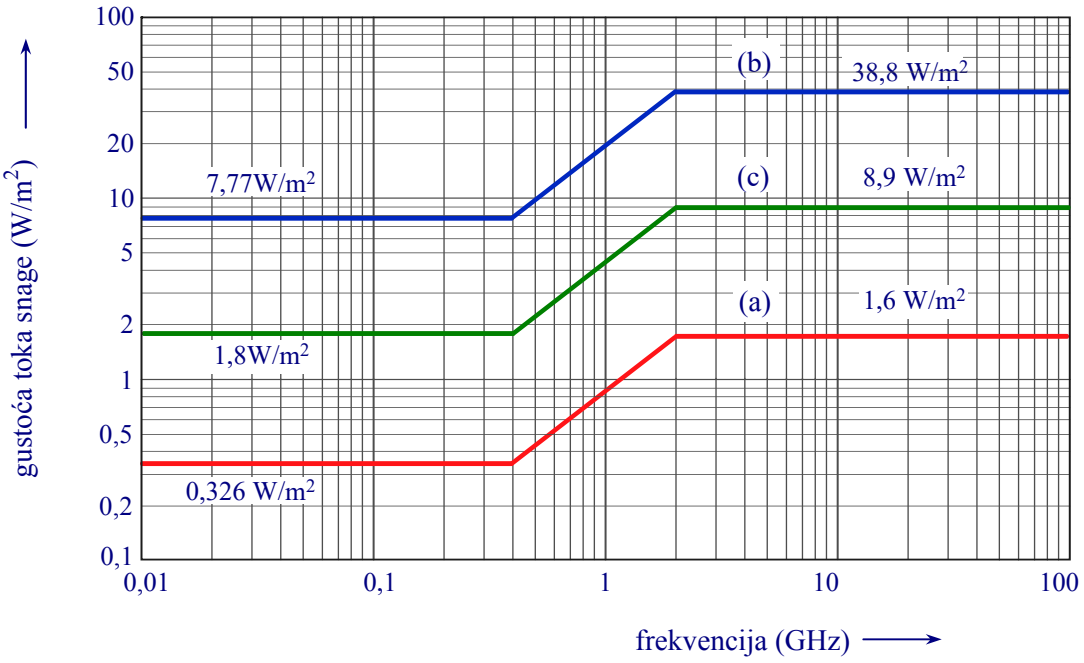
10.7. Učinci elektromagnetskoga zračenja na živa bića

Mikrovalno je zračenje neionizirajuće jer je u mikrovalnome frekvencijskom području energija mikrovalnog fotona nedovoljna da izazove kidanje kemijskih veza. No ipak postoje toplinski učinci za koje je dokazano da su potencijalno opasni za ljudsko zdravlje. Naime, ljudsko je tijelo puno dipolnih molekula vode koje dobro apsorbiraju elektromagnetsku energiju i pretvaraju je u toplinu. Slično se zbiva u mikrovalnoj pećnici (odjeljak 10.6). Pri izlaganju razmjerno niskim razinama elektromagnetskoga zračenja, ljudski organizam ne osjeća porast temperature tkiva, što može biti opasno, posebno ako nastaje u mozgu, očima, testisima i organima u trbušnoj šupljini. Dugotrajna izloženost prekomjernim razinama elektromagnetskog polja može izazvati kataraktu, sterilnost pa čak i neka maligna oboljenja.

Elektromagnetski se valovi međutim nerijetko rabe u terapijske svrhe, ali tad se obično primjenjuju lokalno, tj. na manji dio ljudskoga tijela. Pri izlaganju cjelokupnog tijela elektromagnetskome zračenju, ljudski organizam apsorbira elektromagnetsku energiju, uglavnom iz električnog polja. Tijelo se pritom automatski adaptira nastalom porastu temperature povećanom aktivnošću krvotoka čime će se temperatura tijela vratiti na normalnu vrijednost. No kad razina elektromagnetskoga zračenja prijeđe određeni prag, tad ljudski organizam više neće biti u stanju održavati toplinsku ravnotežu pa može doći do pregrijavanja i opeklina na tijelu.

U posljednjih dvadesetak godina izrađen je velik broj studija koje su se bavile učincima elektromagnetskoga zračenja na ljudski organizam u svrhu određivanja praga na kojem dolazi do opisanih ireverezibilnih promjena u ljudskome organizmu. Za razine gustoće toka snage ispod 100 mW/cm^2 (ili 1 kW/m^2) nisu utvrđene trajne posljedice za ljudsko zdravlje. Usporedbe radi, za sunčanog dana Sunce nas zrači elektromagnetskom energijom čija nadomjesna gustoća toka srednje snage iznosi približno 140 mW/cm^2 ili 1,4 kW/m^2 (primjer 2.2. iz odjeljka 2.13). No i dalje su nužna istraživanja utjecaja elektromagnetskoga zračenja na ljudski organizam jer još ni izdaleka nisu poznati svi mehanizmi koji dovode do fizioloških, neuroloških i drugih promjena u ljudskome tijelu. Da bi se zdravlje ljudi zaštitilo od mogućih rizika zbog negativnih učinaka elektromagnetskoga zračenja nadležna ministarstva ili državne službe svih zemlje uvode norme koje definiraju maksimalne razine elektromagnetskoga zračenja do kojih je dopušteno izlaganje ljudskoga organizma. Jedna od najjednostavnijih metoda uvodi tzv. granične vrijednosti jakosti polja ili ekvivalentne gustoće toka snage nesmetanog ravnog vala za slučaj u kojem val istodobno obasjava cjelokupno ljudsko tijelo. To je pitanje posebno aktualizirano uvođenjem sve većeg broja novih radijskih usluga poput pokretnih komunikacijskih sustava tehnologije 5G i radarskih sustava za civilne službe. Na slici 10.39 prikazane su najviše dopuštene razine gustoće toka snage nesmetanog ravnog elektromagnetskog vala u Republici Hrvatskoj [12]. Najstroži uvjet (a) odnosi se na izloženost u području povećane osjetljivosti, tj. na mjestima cjelodnevnog boravka ljudi, u bolnicama, dječjih vrtića i sl. Najblaži uvjet (b) odnosi se na profesionalno osoblje pri kraćoj izloženosti učincima elektromagnetskoga zračenja, a uvjet (c) odnosi se na javna područja (sve površine izvan naseljenih područja).

Lako se može uočiti da su u nižem frekvencijskome području (10 – 400 MHz) dopuštene peterostruko manje razine gustoće snage u odnosu na mikrovalno frekvencijsko područje od 2 do 300 GHz. U nižem frekvencijskom području elektromagnetski val dublje ponire u ljudsko tijelo i dodatno stvara rezonancijske učinke jer dimenzije ljudskog tijela i pojedinih unutarnjih organa mogu postati sumjerljive polovini valne duljine elektromagnetskoga vala. Rezonancijski učinci najače su izraženi u frekvencijskom području od 70 do 400 MHz.



Slika 10.39. Granične razine gustoće toka snage u ovisnosti o frekvenciji za Republiku Hrvatsku; (a) područja povećane osjetljivosti, (b) profesionalna izloženost, (c) javna područja

Primjer 10.1. Gustoća toka srednje snage u blizini bazne postaje

Antena bazne postaje ćelijskog sustava GSM na frekvenciji 960 MHz ima visinu, tj. duljinu antenskog niza $h = L = 1{,}6$ m i dobitak $G_o = 13$ dB. Naći gustoću snage na udaljenosti $r = 20$ m u dalekoj zoni antene u smjeru maksimalnog zračenja ako izlazna snaga odašiljača iznosi $P_o = 10$ W. Treba također provjeriti je li zadovoljena norma za izloženost pučanstva u Republici Hrvatskoj.

Rješenje:

Numerički dobitak antene iznosi

$$G_o = 10^{\frac{13}{10}} \simeq 20,$$

a valna duljina vala iznosi

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{960 \cdot 10^6} = 0{,}31 \text{ m}$$

pa iz izraza (10–4) za polumjer daleke zone (Fraunhoferova zona) izlazi

$$r_{dp} = \frac{2d^2}{\lambda} = \frac{2 \cdot (1{,}6)^2}{0{,}31} = 16{,}5 \text{ m},$$

gdje je za najveću izmjeru antene (d) uzeta visina antenskog niza, $h = L = 1{,}6$ m. Dakle, točka promatranja udaljena $r = 20$ m od antene nalazi se u dalekoj zoni. Sad se primjenom izraza (10–20) može naći gustoća toka srednje snage na udaljenosti r u smjeru maksimalnog zračenja antene, tj.

$$\langle S_r \rangle = \frac{P_o G_o}{4\pi r^2} = \frac{10 \cdot 20}{4\pi \cdot (20)^2} \simeq 0{,}04 \text{ W/m}^2.$$

Hrvatska norma (slika 10.39) za frekvenciju 960 MHz daje graničnu vrijednost gustoće snage za područje povećane osjetljivosti od 0,8 W/m^2, pa je norma zadovoljena.

Literatura

[1] E. Zentner, *Antene i radiosustavi*, Graphis, Zagreb 2001.

[2] W. L. Stutzman, G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York 1998.

[3] C. A. Balanis, *Antenna Theory – Analysis and Design*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York 2005.

[4] P-S. Kildal, *Fundamentals of Antenna Engineering*, Kildal Antenn AB, 2015.

[5] J. Hirokawa. *Waveguide Slot Antenna Analysis using Eigenfunction Expansion Method*, Design Egg Inc., 2020.

[6] D. M. Pozar, *Microwave and RF Design of Wireless Systems*, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[7] F. E. Gardiol, *Introduction to Microwaves*, Artech House, Dedham, 1984.

[8] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, New York 2012.

[9] M. I. Skolnik, *Introduction to Radar Systems*, McGraw-Hill, New York, 1962.

[10] F. T. Ulaby, *Applied Electromagnetics*, Prentice-Hall, New Jersey, 2001.

[11] F. T. Ulaby, R. K. Moore, A. K. Fung, *Microwave Remote Sensing: Active and Passive*, Volume I, *Microwave Remote Sensing, Fundamentals and Radiometry*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

[12] "Pravilnik o izmjenama i dopunama Pravilnika o zaštiti od elektromagnetskih polja", Ministarstvo zdravstva RH, NN br. 31/2019.

Dodatci

Dodatak A: SI elektromagnetske jedinice

Simbol	Veličina	Izvedena jedinica	Jedinica	Temeljna jedinica
I	jakost struje	amper (SI temeljna jedinica)	A	A = W/V = C/s
q	električni naboj	kulon	C	A·s
V	potencijal (razlika elektromotorne sile)	volt	V	J/C = kg· m^2·s^{-3}·A^{-1}
R, Z, X	otpor, impedancija, reaktancija	om	Ω	V/A = kg·m^2·s^{-3}·A^{-2}
ρ	otpornost	om metar	Ω·m	kg·m^3·s^{-3}·A^{-2}
P	snaga (električna)	vat	W	V·A = kg· m^2·s^{-3}
C	kapacitet	farad	F	C/V = kg^{-1}·m^{-2}·A^2·s^4
	elastancija	recipročni farad	F^{-1}	V/C = kg·m^2·A^{-2}·s^{-4}
ε	permitivnost	farad po metru	F/m	kg^{-1}·m^{-3}· A^2·s^4
χ_e	električna susceptibilnost	(bez dimenzija)	–	–
G, Y, B	vodljivost, admitancija, susceptancija	simens	S	Ω^{-1} = kg^{-1}· m^{-2}·s^3·A^2
σ	provodnost	simens po metru	S/m	kg^{-1}· m^{-3}· s^3·A^2
H	magnetsko polje, jakost magnetskog polja	amper po metru	A/m	A·m^{-1}
Φ_m	magnetski tok	veber	Wb	V·s = kg·m^2·s^{-2}·A^{-1}
B	gustoća magnetskog toka, magnetska indukcija	tesla	T	Wb/m^2 = kg·s^{-2}·A^{-1} = =N·A^{-1}·m^{-1}
	reluktancija	amper-zavoj po veberu	A/Wb	kg^{-1}·m^{-2}·s^2·A^2
L	induktivitet	henri	H	Wb/A = V·s/A = = kg·m^2·s^{-2}·A^{-2}
μ	permeabilnost	henri po metru	H/m	kg·m·s^{-2}·A^{-2}
χ_m	magnetska susceptibilnost	(bez dimenzija)	–	–

Dodatak B: Fizikalne konstante

permitivnost vakuuma	$\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \cdot 10^{-12}$ F/m
permeabilnost vakuuma	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
intrinzična impedancija vakuuma	$\eta_0 = 376{,}73\ \Omega$
brzina svjetlosti u vakuumu	$c = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}$ m/s
naboj elektrona	$q = 1{,}60217733 \cdot 10^{-19}$ As
masa elektrona	$m_e = 9{,}1093897 \cdot 10^{-31}$ kg
Boltzmannova konstanta	$k = 1{,}38064852 \cdot 10^{-23}$ J/K
Planckova konstanta	$h = 6{,}62607004 \cdot 10^{-34}$ Js
giromagnetski omjer elektrona	$\gamma = 1{,}75881962 \cdot 10^{11}$ As/kg

Dodatak C: Predmetci decimalnih jedinica

množitelj	predmetak	znak
10^{24}	jota	Y
10^{21}	zeta	Z
10^{18}	eksa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hekto	h
10^{1}	deka	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	mikro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	piko	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	ato	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	jokto	y

Dodatak D: Električna svojstva materijala

Provodnost materijala

Materijal	Provodnost (S/m) @20°C	Materijal	Provodnost (S/m) @20°C
srebro	$6{,}173 \cdot 10^7$	čelik (nehrđajući)	$1{,}1 \cdot 10^6$
bakar	$5{,}813 \cdot 10^7$	živa	$1{,}0 \cdot 10^6$
zlato	$4{,}098 \cdot 10^7$	grafit	$0,\ 7 \cdot 10^6$
krom	$3{,}846 \cdot 10^7$	morska voda	~3–5
aluminij	$3{,}816 \cdot 10^7$	fiziološka otopina	~4
mjed	$2{,}56 \cdot 10^7$	germanij	~2,2
volfram	$1{,}83 \cdot 10^7$	ljudsko tkivo	~0,2–0,7
cink	$1{,}67 \cdot 10^7$	svježa voda	$\sim 10^{-2}$
nikal	$1{,}449 \cdot 10^7$	vlažno tlo	$\sim 10^{-3} – 10^{-2}$
željezo	$1{,}03 \cdot 10^7$	galij-arsenid (GaAs)	$\sim 8 \cdot 10^{-3}$
bronca	$1{,}0 \cdot 10^7$	silicij	$\sim 4{,}4 \cdot 10^{-4}$
platina	$9{,}52 \cdot 10^6$	destilirana voda	$\sim 2{,}0 \cdot 10^{-4}$
kositar	$9{,}0 \cdot 10^6$	suho tlo	$\sim 10^{-5} – 10^{-4}$
bizmut	$8{,}7 \cdot 10^6$	staklo	$\sim 10^{-12}$
lem	$7{,}0 \cdot 10^6$	parafin	$\sim 10^{-16} – 10^{-14}$
olovo	$4{,}56 \cdot 10^6$	vakuum	0

Dubina prodiranja elektromagnetskoga vala u metale

Metal	Dubina prodiranja, δ (m)		
	10 GHz	1 GHz	100 MHz
srebro	$0{,}641 \cdot 10^{-6}$	$2{,}03 \cdot 10^{-6}$	$6{,}41 \cdot 10^{-6}$
bakar	$0{,}660 \cdot 10^{-6}$	$2{,}09 \cdot 10^{-6}$	$6{,}60 \cdot 10^{-6}$
zlato	$0{,}786 \cdot 10^{-6}$	$2{,}49 \cdot 10^{-6}$	$7{,}86 \cdot 10^{-6}$
aluminij	$0{,}815 \cdot 10^{-6}$	$2{,}58 \cdot 10^{-6}$	$8{,}15 \cdot 10^{-6}$
mjed	$0{,}995 \cdot 10^{-6}$	$3{,}15 \cdot 10^{-6}$	$9{,}95 \cdot 10^{-6}$
kositar	$1{,}68 \cdot 10^{-6}$	$5{,}31 \cdot 10^{-6}$	$16{,}8 \cdot 10^{-6}$
čelik (nerđajući)	$4{,}80 \cdot 10^{-6}$	$15{,}2 \cdot 10^{-6}$	$48{,}0 \cdot 10^{-6}$

Relativna permitivnost i tangens kuta gubitaka dielektričnih materijala

Materijal	Frekvencija	ε_r	$\tan\delta_\varepsilon$ (25 ºC)
alkohol (etilni)		25	0,1
alumina 99,5%	10 GHz	9,8 – 10,5	0,0003
bakelit		4,74	0,022
barij-tetratitanat	6 GHz	37 ± 5%	0,0005
berilij-oksid	10 GHz	6,4	0,0003
drvo (suho)		1,5 – 4,0	0,01
galij-arsenid	10 GHz	12,8	0,006
guma		2,5 – 3,0	0,002
kvarc (SiO_2)	10 GHz	3,78	0,0001
led		4,2	0,05
najlon (610)	3 GHz	2,84	0,012
papir		3,0	0,008
parafin	10 GHz	2,24	0,001
pleksi-staklo	3 GHz	2,6	0,0002
polietilen	10 GHz	2,25	0,0004
polistiren	10 GHz	2,54	0,00033
porculan (hladan postupak)	100 MHz	5,04	0,0078
rexolite (1422)	3 GHz	2,54	0,00048
silicij	10 GHz	11,9	0,004
snijeg		3,3	0,5
staklo	3 GHz	4,82	0,0054
pjenasti polistiren (103.7)	3 GHz	1,03	0,0001
teflon	10 GHz	2,08	3,7
titanij-dioksid (D-100)	6 GHz	96 ± 5%	0,001
tlo (suho)		2,8	0,05
vakuum		1	0
vazelin	10 GHz	2,16	0,001
voda (destilirana)	3 GHz	76,7	0,157
zrak (na razini mora)		1,0006	

Parametri materijala za podloge mikrotrakastih linija

Materijal	ε_r	$10^4 \tan\delta_\varepsilon$	Toplinska vodljivost (W/mK)
PTFE	2,03	3,7	–
PTFE sa staklenim tkanjem	2,4 – 2,6	19	0,24
PTFE sa staklenim vlaknima	2,2 – 2,3	12	0,24
PTFE ispunjen keramikom i staklenim vlaknima	2,9 – 3,0	12	0,44
PTFE ispunjen keramikom	10,3	18	–
alumina (Al_2O_3) 95%	9,5 – 10,5	4	20
alumina (Al_2O_3) 99,5%	9,8 – 10,5	2	20
safir (anizotropan)	9,3/11,5	0,3/0,9	40
FR4 (epoksi-smola sa staklenim tkanjem)	3,4	100	–
berilij-oksid (BeO)	6,6 – 6,8	1 – 3	250
aluminij-nitrid	8,8	10	–
ferit	11 – 16	2	3
staklo	5	20 – 40	1
kvarc (SiO_2)	3,75	1	1,4

Dodatak E: Vektorska analiza

Transformacija koordinata

Pravokutne ⇔ cilindrične:

	$\hat{x}$	$\hat{y}$	$\hat{z}$
$\hat{\rho}$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\hat{\varphi}$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\hat{z}$	0	0	1

Pravokutne ⇔ sferne: $\hat{z}$

	$\hat{x}$	$\hat{y}$	$\hat{z}$
$\hat{r}$	$\sin\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta$
$\hat{\theta}$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$-\sin\theta$
$\hat{\varphi}$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0

Cilindrične ⇔ sferne:

	$\hat{\rho}$	$\hat{\varphi}$	$\hat{z}$
$\hat{r}$	$\sin\theta$	0	$\cos\theta$
$\hat{\theta}$	$\cos\theta$	0	$-\sin\theta$
$\hat{\varphi}$	0	1	0

Ove se tablice mogu upotrijebiti za transformaciju jediničnih vektora i vektorskih komponenata, primjerice
$\hat{\rho} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi$.

U pravokutnom koordinatnom sustavu vektori $\vec{A}$ i $\vec{B}$ mogu se zapisati kao

$$\vec{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z, \quad \vec{B} = \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z,$$

gdje su $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ jedinični vektori u smjeru osi x, y, odnosno z, a A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z su komponente vektora $\vec{A}$, odnosno $\vec{B}$ u smjeru tih istih osi.

Zbrajanje vektora

$$\vec{A} + \vec{B} = \hat{x}(A_x + B_x) + \hat{y}(A_y + B_y) + \hat{z}(A_z + B_z) \tag{E1}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{E2}$$

Množenje vektora

(a) Skalarn i umnožak

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{E3}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} \quad \text{komutativnost} \tag{E4}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C} \quad \text{distributivnost} \tag{E5}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \quad \text{gdje je } \theta \text{ kut između vektora } \vec{A} \text{ i } \vec{B} \tag{E6}$$

(b) Vektorski umnožak

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{x}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{y}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{z}(A_xB_y - A_yB_x) \tag{E7}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \hat{n}|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta \tag{E8}$$

gdje je θ kut između vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$, a $\hat{n}$ jedinični vektor okomit na ravninu u kojoj leže $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

$$\vec{A}\times(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}) \tag{E9}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} \tag{E10}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A} \tag{E11}$$

Vektorske derivacije

Pravokutni koordinatni sustav

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{Hamiltonov operator (nabla)} \tag{E12}$$

$$\nabla f = \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z} \qquad \text{gradijent} \tag{E13}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{divergencija} \tag{E14}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad \text{rotor} \tag{E15}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{E16}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \hat{x}\nabla^2 A_x + \hat{y}\nabla^2 A_y + \hat{z}\nabla^2 A_z = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \tag{E17}$$

Cilindrični koordinatni sustav

$$\nabla f = \hat{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{E18}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{E19}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{r}/\rho & \hat{\varphi} & \hat{z}/\rho \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & A_\varphi & A_z \end{vmatrix} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \hat{\varphi}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \hat{z}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right] \tag{E20}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{E21}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \tag{E22}$$

Sferni koordinatni sustav

$$\nabla f = \hat{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{\partial f}{r\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \tag{E23}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{E24}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta}r & \hat{\varphi}r\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{r}\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right] + \hat{\theta}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r}\right] + \hat{\varphi}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] \tag{E25}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{E26}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \tag{E27}$$

Vektorski integrali

$$\int_V \nabla \cdot A \mathrm{d}V = \oint_S A \cdot \hat{n} \mathrm{d}S \qquad \text{Gaussov teorem o divergenciji} \tag{E28}$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = \oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad \text{Stokesov teorem} \tag{E29}$$

Neke korisne vektorske jednakosti

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \left|\vec{A}\right|^2 \tag{E30}$$

$$\underline{\vec{A}} \cdot \underline{\vec{A}}^* = \left|\underline{\vec{A}}\right|^2 \qquad \text{(gdje je } \underline{\vec{A}} \text{ fazor)} \tag{E31}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \tag{E32}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \tag{E33}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0 \tag{E34}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \tag{E35}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \tag{E36}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{E37}$$

$$\nabla \cdot (fg) = g\nabla f \times f \nabla g \tag{E38}$$

$$\nabla \cdot (f\vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \vec{A} \tag{E39}$$

$$\nabla \times (f\vec{A}) = \nabla f \times \vec{A} + f \nabla \times \vec{A} \tag{E40}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \tag{E41}$$

$$\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) \tag{E42}$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}\nabla \cdot \vec{B} - \vec{B}\nabla \cdot \vec{A} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} \tag{E43}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \tag{E44}$$

Helmholtzov teorem

$$\vec{F}(\vec{r}') = -\nabla \left[\int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{4\pi \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} \mathrm{d}V' - \oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}') \cdot \hat{n}'}{4\pi \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} \mathrm{d}S' \right] + \nabla \times \left[\int_V \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{4\pi \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} \mathrm{d}V' + \oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}') \times \hat{n}'}{4\pi \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} \mathrm{d}S' \right] \tag{E45}$$

Dodatak F: Möbiusova transformacija

Kompleksna varijabla *w* opisana je kao Möbiusova transformacija [1] neke druge kompleksne varijable *z*, ako se *w* izrazi u obliku

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{F1}$$

gdje su *a*, *b*, *c* i *d* kompleksne konstante. To je razlomljena linearna funkcija koja se može rastaviti na dvije linearne funkcije i inverziju pa se često naziva *bilinearna transformacija*:

$t = cz + d$ (linearna transformacija)

$s = \frac{1}{t}$ (inverzija)

$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} s$ (linearna transformacija)

Ta funkcija preslikava kružnicu iz kompleksne ravnine *z* u kružnicu u kompleksnoj ravnini *w* i obratno (slika F1), pri čemu se pravac uzima kao specijalni slučaj kružnice. Dvije točke koje zadovoljavaju izraz (F1) ostaju na mjestu. Budući da je to konformno preslikavanje, kutovi se između dviju krivulja (kružnica) ne mijenjaju.

Budući da implicitno sadrži inverziju, Möbiusova transformacija ima još jedno zanimljivo obilježje. Ako kružnica obuhvaća ishodište, kao što je prikazano na slici F1, onda i transformirana kružnica obuhvaća ishodište u svojoj ravnini. Kako inverzija ishodišta označuje beskonačnost, razvidno je da će područje unutar jednog kruga odgovarati području izvan drugog kruga. Iz tog se razloga obrće smjer vrtnje točke na kružnici (slika F1). Ako kružnica ne obuhvaća ishodište, onda ga ne obuhvaća ni transformirana kružnica pa područje unutar kruga odgovara području unutar njegove transformacije, a smjer vrtnje ostaje nepromijenjen.

Ako se izraz (F1) riješi za z, dobiva se

$$z = -\frac{dw - b}{cw - a}. \tag{F2}$$

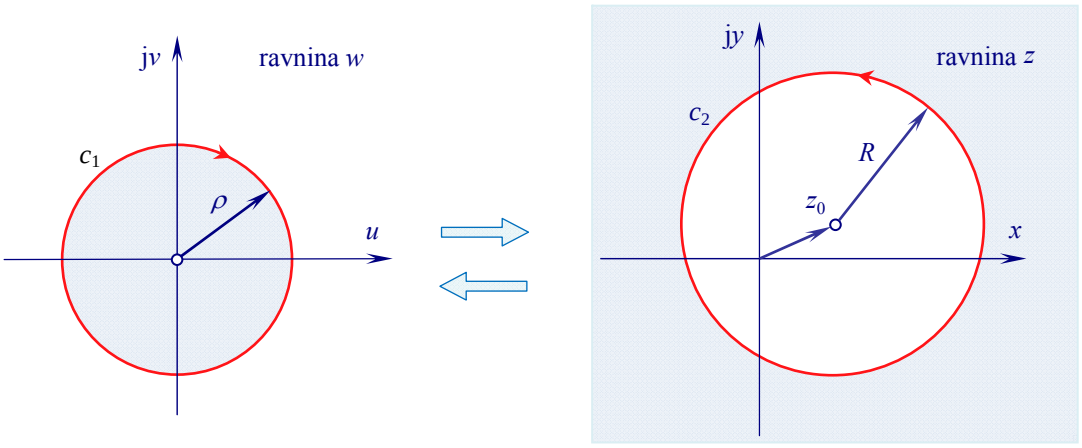
To pokazuje da kad je w Möbiusova transformacija varijable z, onda je z također Möbiusova transformacija varijable w.

Kružnica u kompleksnoj ravnini $z = x + \mathrm{j}\,y$ sa središtem u $z_0 = x_0 + \mathrm{j}\,y_0$ i polumjerom R može se napisati u ovom obliku

$$R^2 = |z - z_0|^2 = |x + \mathrm{j}y - x_0 + \mathrm{j}y_0|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2. \tag{F3}$$

Jednadžba (F3) može se dalje razviti u ovaj oblik

$$|z - z_0|^2 - R^2 = |x + \mathrm{j}y - x_0 + \mathrm{j}y_0|^2 = (z - z_0)(z - z_0) - R^2 = \\ = zz^* - zz_0^* - z^* z_0 + z_0 z_0^* - R^2 \tag{F4}$$



Slika F1. Konformno preslikavanje kružnice c_1 iz ravnine w u kružnicu c_2 u ravnini z

Kružnicu polumjera ρ sa središtem u ishodištu ravnine w može se napisati kao $ww^* = \rho^2$. Primjenom transformacije (F1), dobiva se

$$\rho^2 = \left(\frac{az + b}{cz + d}\right)\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)^* = \frac{(az + b)\ \left(a^* z^* + b^*\right)}{(cz + d)\ \left(c^* z^* + d^*\right)}. \tag{F5}$$

Množenjem lijeve i desne strane s nazivnikom desne strane izlazi

$$zz^*\left(aa^* - \rho^2 cc^*\right) - z\left(\rho^2 cd^* - ab^*\right) - z^*\left(\rho^2 c^* d - a^* b\right) + bb^* - \rho^2 dd^* = 0. \tag{F6}$$

Izravnom usporedbom s izrazom (F4) očito je da je središte kružnice u ravnini z

$$z_0 = \frac{\rho^2 c^* d - a^* b}{aa^* - \rho^2 cc^*} = \frac{\rho^2 c^* d - a^* b}{|a|^2 - \rho^2 |c|^2} \tag{F7}$$

i da je kvadrat polumjera kružnice

$$R^2 = z_0 z_0^* - \frac{|b|^2 - \rho^2 |d|^2}{|a|^2 - \rho^2 |c|^2}, \tag{F8}$$

što se može svesti na oblik

$$R = \rho \frac{|ad - bc|}{\left||a|^2 - \rho^2 |c|^2\right|}. \tag{F9}$$

Često je potrebno transformirati kružnicu kojoj je središte u ishodištu ravnine w, tj. $|w - w_0| = \rho$. Tad je

$$w - w_0 = \frac{az + b}{cz + d} - w_0 = \frac{(a - cw_0)z + (b - dw_0)}{cz + d}. \tag{F10}$$

Ako se sad definiraju nove kompleksne konstante $a' = a - cw_0$, $b' = b - dw_0$, onda se formule (F7) i (F9) mogu primijeniti tako da se a i b zamijene s a', odnosno b', tj. izraz (F10) može se napisati kao

$$w' = w - w_0 = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}. \tag{F11}$$

Dodatak G: Besselove funkcije

Besselova diferencijalna jednadžba može se napisati kao

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}y^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}+\left(x^2-n^2\right)y=0\,, \tag{G1}$$

gdje je n obično cijeli broj u fizikalnim problemima. Opće rješenje jednadžbe (G1) glasi

$$y(x)=AJ_n(x)+BY_n(x)\,, \tag{G2}$$

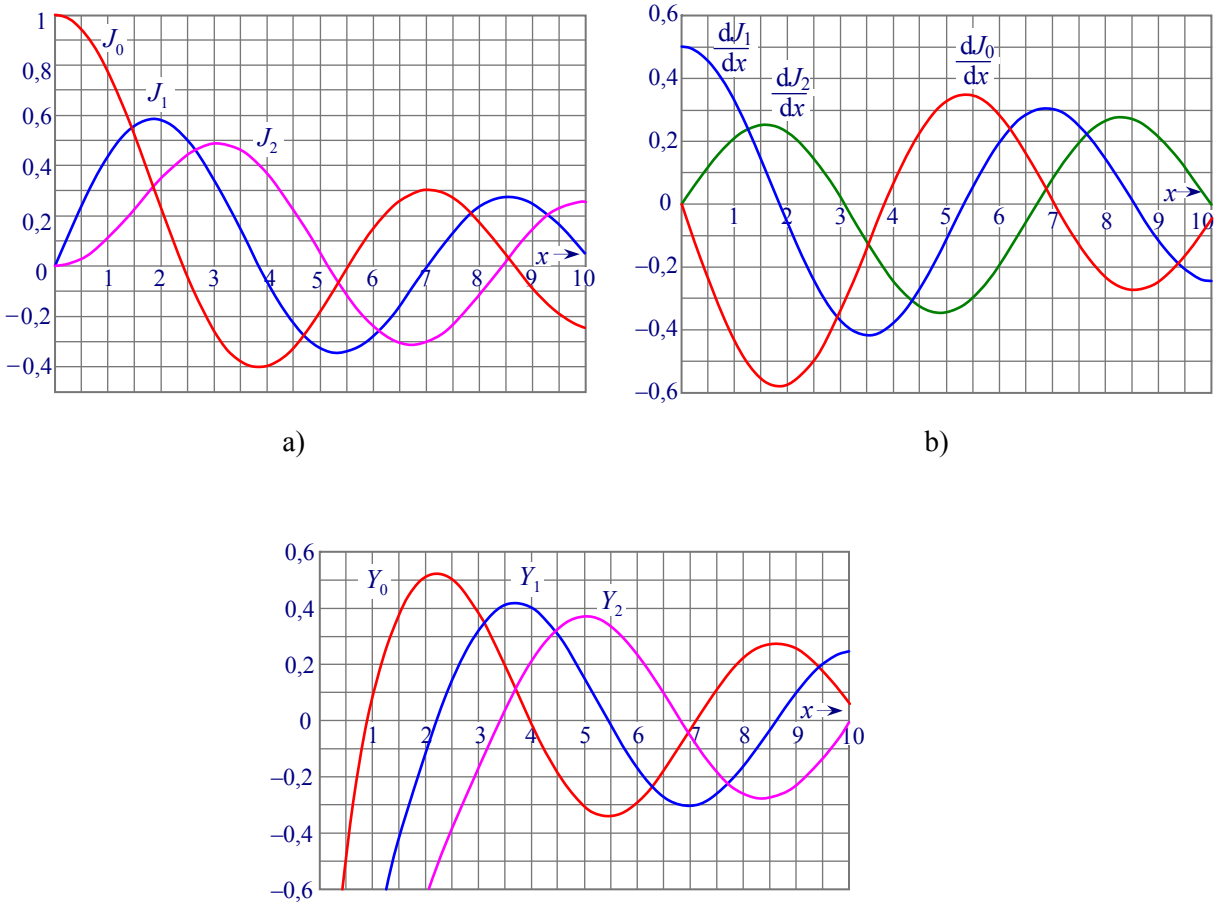
gdje su $J_n(x)$ i $Y_n(x)$ Besselove funkcije prve i druge vrste, n-tog reda za realni argument x, a A i B proizvoljne su konstante koje valja odrediti iz rubnih uvjeta. Besselova funkcija $Y_n(x)$ naziva se Neumannovom funkcijom. Besselove funkcije prikazane su na slici G1.

Besselove funkcije mogu se prikazati u tabličnom obliku, integralnom obliku i u obliku reda kao:

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x/2)^{n+2m}}{m!(n+m)!}\,, \tag{G3a}$$

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right)J_n(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2m}-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x/2)^{n+2m}}{m!(n+m)!}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}+\sum_{l=1}^{n+m}\frac{1}{l}\right), \tag{G3b}$$

gdje je $\gamma=0{,}5772\ldots$ Eulerova konstanta. Indeks n označuje red funkcije i on je obično cijeli broj u fizikalnim problemima.



Slika G1. Besselove funkcije: **a)** prve vrste, **b)** derivacije funkcija prve vrste i **c)** druge vrste

Za prikaz radijalnog rasprostiranja vala, obično se uvodi kombinacija funkcija prve i druge vrste, koje se nazivaju *Hankelove funkcije* prve i druge vrste, a definirane su kao:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + \mathrm{j}Y_n(x), \quad H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - \mathrm{j}Y_n(x). \tag{G4}$$

Ako je varijabla x u jednadžbi (G1) imaginarna tako da se x može zamijeniti s jx, onda se jednadžba (G1) pretvara u *modificiranu Besselovu jednadžbu*

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}y^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} - \left(x^2 + n^2\right)y = 0. \tag{G5}$$

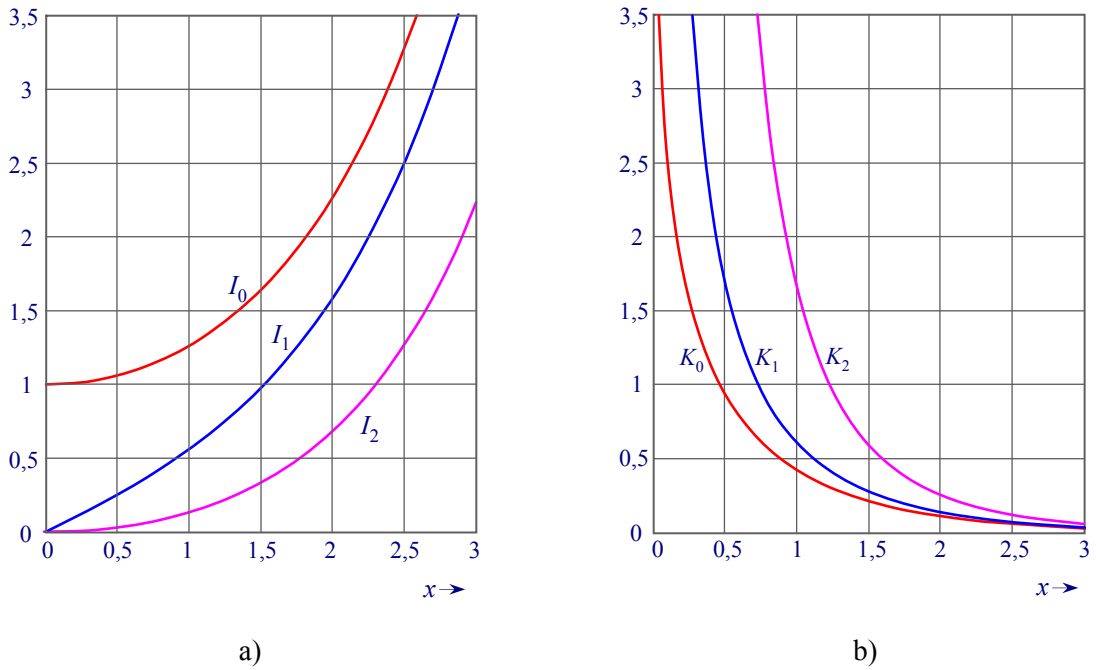
Ta jednadžba ima opće rješenje oblika

$$y(x) = CI_n(x) + DK_n(x), \tag{G6}$$

gdje su $I_n(x)$ i $K_n(x)$ *modificirane Besselove funkcije* prve i druge vrste, n-tog reda. Ovdje su C i D opet proizvoljne konstante koje valja odrediti iz rubnih uvjeta. Modificirane Besselove funkcije prve i druge vrste prikazane su na slici G2. Modificirane Besselove funkcije prve vrste mogu se prikazati u obliku reda kao:

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m}}{m!(n+m)!}. \tag{G7}$$

O Besselovim funkcijama može se više naći u literaturi [2].



a) b)

Slika G2. Modificirane Besselove funkcije: **a)** prve vrste i **b)** druge vrste

Dodatak H:

Korisni integrali

$$\int_0^a \cos^2\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \sin^2\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}, \qquad \text{za } n \geq 1 \tag{H1}$$

$$\int_0^a \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{za } m \neq n \tag{H2}$$

$$\int_0^a \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = 0 \tag{H3}$$

$$\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3} \tag{H4}$$

Taylorov red

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} + \ldots \tag{H5}$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{H6}$$

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots \qquad \text{za } |x| < 1 \tag{H7}$$

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 2}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \ldots \qquad \text{za } |x| \leq 1 \tag{H8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots \qquad \text{za } |x| < 1 \tag{H9}$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad \text{za } -1 < |x| \leq 1 \tag{H10}$$

$$\ln(1 - x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right) \qquad \text{za } -1 \leq |x| < 1 \tag{H11}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \tag{H12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \tag{H13}$$

Dodatak I: Tablica visokofrekvencijskih suosnih kabela

Tip	Z_0 (Ω)	Radni napon (V)	Prigušenje (dB/100m) @100 MHz	Kapacitet (pF/m)	Promjer (mm)	Bilješka
RG 22	95	-	11,5	52,0	10,3	parični
RG 58 C	50	1900	16,07	98,4	4,95	
RG 59 B	75	2300	11,15	68,9	6,15	
RG 62 A	93	750	8,86	44,3	6,15	
RG 108 A	78	1000	24,60	77,1	5,97	parični
RG 174	50	1500	29,19	88,4	2,54	submini
RG 213	50	5000	6,23	96,8	10,29	
RG 214	50	5000	7,54	96,8	10,80	
RG 218	50	11000	3,11	96,8	22,10	
RG 223	50	1900	15,74	96,8	5,49	
21-204	50	1900	-	96,8	7,24	triosni
21-541	73	2300	16,40	70,5	6,14	
21-597	75	2500	19,02	65,6	3,81	submini
21-738	52	2000	-	96,8	4,95	triosni
AL 0,8/3,2 L	60	3000	14,60	84,0	4,90	
HFE 1,5/6,5	60	1500	6,60	84,00	8,80	Cu žica
HFE 1,5/6,5 L	60	6000	7,70	84,0	8,80	pletenica
HFE 2,3/10	60	9500	4,60	84,00	12,60	Cu žica
Teflonski kabeli						
RG 178 B	50	1000	45,92	93,00	1,90	
RG 187 A	75	1200	32,81	63,0	2,79	
RG 188 A	50	1200	37,39	95,0	2,79	
RG 196	50	1000	45,92	93,0	2,03	
RG 196 A	95	1500	45,92	49,0	3,94	

Dodatak J: Tablica normiranih pravokutnih valovoda

Pojas*	Preporučeno frekvencijsko područje (GHz)	Zaporna frekvencija moda TE_{10} (GHz)	Oznaka EIA	Unutarnje izmjere (mm)	Vanjske izmjere (mm)
L	1,12 – 1,70	0,908	WR-650	165,1 × 82,55	169,16 × 86,61
	1,45 – 2,20	1,157	WR-510	129,54 × 64,77	133,60 × 68,83
R	1,70 – 2,60	1,372	WR-430	109,22 × 54,61	113,28 × 58,67
	2,20 – 3,30	1,736	WR-340	86,36 × 43,18	90,42 × 47,24
S	2,60 – 3,95	2,078	WR-284	72,14 × 34,04	76,20 × 38,10
	3,30 – 4,90	2,577	WR-229	58,17 × 29,08	61,42 × 32,33
H (G)	3,95 – 5,85	3,152	WR-187	47,55 × 22,15	50,80 × 25,40
	4,90 – 7,05	3,711	WR-159	40,39 × 20,19	43,64 × 23,440
C (J)	5,85 – 8,20	4,301	WR-137	34,85 × 15,80	38,10 × 19,05
W (H)	7,05 – 10,0	5,259	WR-112	28,50 × 12,62	31,75 × 15,87
X	8,20 – 12,4	6,557	WR-90	22,86 × 10,16	25,40 × 12,07
	10,0 – 15,00	7,868	WR-75	19,05 × 9,53	21,59 × 9,93
Ku (P)	12,4 – 18,0	9,486	WR-62	15,80 × 7,90	17,83 × 9,93
	15,0 – 22,0	11,574	WR-51	12,95 × 6,48	14,99 × 8,51
K	18,0 – 26,5	14,047	WR-42	10,68 × 4,32	12,70 × 6,35
	22,0 – 33,0	17,328	WR-34	8,64 × 4,32	10,66 × 6,35
Ka (R)	26,5 – 40,0	21,081	WR-28	7,11 × 3,56	9,14 × 5,59
Q	33,0 – 50,5	26,342	WR-22	5,7 × 2,8	7,72 × 4,88
U	40,0 – 60,0	31,357	WR-19	4,8 × 2,4	6,81 × 4,42
V	50,0 – 75,0	39,863	WR-15	3,8 × 1,9	5,79 × 3,91
E	60,0 – 90,0	48,350	WR-12	3,1 × 1,5	5,13 × 3,56
W	75,0 – 110,0	59,010	WR-10	2,54 × 1,27	4,58 × 3,30
F	90,0 – 140,0	73,840	WR-8	2,03 × 1,02	4,06 × 3,05
D	110,0 l – 170,0	90,854	WR-6	1,7 × 0,83	3,68 × 2,858
G	140,0 – 220,0	115,750	WR-5	1,3 × 0,648	3,33 × 2,680

* Slovo u zagradama odgovara alternativnoj oznaci

Dodatak K: Invertiranje reda potencija

Ako je koeficijent *a* različit od nule, onda se red potencija

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 \ldots + . \tag{K1}$$

može invertirati u ovaj red [3]

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + Gy^7 + \ldots , \tag{K2}$$

gdje su:

$$aA = 1 \tag{K3a}$$

$$a^3B = -b \tag{K3b}$$

$$a^5C = 2b^2 - ac \tag{K3c}$$

$$a^7D = 5abc - a^2d - 5b^3 \tag{K3d}$$

$$a^9E = 6a^2bd + 3a^2 + 14b^4 - a^2e - 21ab^2c \tag{K3e}$$

$$a^{11}F = 7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2bc^2 - 42b^5 - 28a^2b^2d \tag{K3f}$$

$$a^{13}G = 8a^4bf + 8a^4ce + 4a^4d^2 + 120a^2b^3d + 180a^2b^2c^2 + \\ + 132b^6 - a^5g - 36a^3b^2e - 72a^3bcd - 12a^3c^3 - 330ab^4c \tag{K3g}$$

Literatura

[1] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

[2] M. Abramowitz, I. A. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover, 1965.

[3] B. Modlic, J. Bartolić, *Miješanje, mješala i sintezatori frekvencije*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

Kazalo imena

Abramowitz, M., 117, 120, 195, 196, 199, 246, 823
Adler, R., 689, 692, 737, 738
Adler, R. B., 15, 120, 164, 737
Ajluni, C., 731, 738
Aksun, M. I., 220, 221, 246
Ampère, A-M., 15

Baden Fuller, A. J., 738
Bahl, I. J., 221, 225, 238, 246, 333, 338, 737
Balanis, C. A., 15, 54, 59, 95, 108, 112, 120, 207, 213, 221, 239, 246, 763, 785, 786, 810
Balmain, K. G., 3, 13, 14, 15, 120, 203, 246
Barthia, P., 221, 239, 246, 333, 338, 737 Bartolić, J., 379, 405, 409, 413, 416, 535, 546, 548, 550, 558, 560, 609, 612, 613, 614, 619, 721, 723, 727, 737
Bethe, H. A., 385, 535
Bianchi, G., 225, 246, 584, 595, 635, 646, 658, 673, 700, 718, 718, 738
Blyler, J., 731, 738
Bode, H. W., 370
Boswick, C., 731, 738
Brillouin, L., 52, 55, 120
Bryant, G. H., 739, 740, 743, 745, 751, 757, 760, 762

Carver, K. R., 3, 14, 15, 31, 116, 120 194, 246
Chang, K., 584, 586, 605, 624, 629, 737
Chen, L. F., 751, 762
Cheng, D. K., 120
Chu, L. J., 15, 120, 164
Cloud, M. J., 15, 120
Cohn, S. B., 535
Collin, R. E., 15, 50, 54, 95, 120, 122, 164, 165, 206, 221, 239, 246, 247, 249, 268, 279, 321, 329, 338, 339, 340, 344, 348, 354, 367, 369, 375, 379, 398, 405, 409, 412, 413, 419, 462, 469, 471, 472, 473, 482, 483, 495, 501, 511, 517, 535, 562, 572, 578, 579, 635, 646, 658, 672, 737, 762
Corson, D.R., 15, 92, 101, 120

Dahlke, W., 658, 737
De Los Santos, H. J., 735, 738
Dicke, R. H., 249, 329, 338

Edson, R. I., 326, 338
Edwards, M. L., 333, 643, 737
Edwards, T. C., 221, 224, 225, 246, 338
Engen, G. F., 757, 762
Engheta, N., 241, 246

Fano, R. M., 15, 120, 164, 351, 370
Faraday, M., 15
Felsen, L. B., 119, 120
Feynman, R. P., 15, 108, 120
Fooks, E. H., 164, 221, 246, 338, 357, 369, 405, 535
Foster, R. M., 255, 338, 357
Fung, A. K., 800, 810

Gardiol, F. E., 203, 214, 221, 246, 247, 338, 398, 412, 413, 419, 462, 535, 562, 572, 579, 737, 743, 745, 747, 751, 757, 758, 760, 762, 810
Garg, R., 221, 225, 238, 246
Gauss, K. F., 15
Giannini, F., 673, 710, 738
Gibbons, G., 584, 589, 737
Ginzton, E. L., 739, 743, 747, 762
Gonzalez, G., 595, 658, 646, 654, 665, 668, 673, 674, 737
Gullion, P., 419, 443, 444, 458, 535
Gupta, K. C., 221, 225, 238, 246

Hammerstad, E. O., 333, 334, 338
Harrington, R. F., 15, 33, 120, 164, 165, 207, 239, 246, 315, 321, 338
Haus, H. A., 537, 737
Haznadar, Z., 13, 14, 15, 52, 120
Helszajn, J., 338, 409, 412, 413, 517, 520, 535
Hertz, H., 1, 15, 99, 120
Hiebel, M., 751, 754, 757, 760, 761, 762
Hirokawa, J., 763, 786, 810
Hobson, G. S., 584, 593, 737
Hoffmann, R. K., 333, 338
Holzman, E., 674, 675, 689, 701, 738
Hong, J-S., 490, 508, 535, 730, 738
Johnson, K. M., 709, 738
Jones, E. M., 329, 338, 348, 354, 369, 385, 398, 419, 462, 477, 479, 482, 483, 495, 501, 503, 508, 512, 535
Jordan, E. C., 3, 13, 14, 15, 120, 203, 246

Kajfez, D., 419, 441, 442, 456, 535
Kildal, P-S., 763, 776, 778, 785, 786, 810
Kinayman, N., 220, 221, 246
Kong, J. A., 15, 54, 76, 95, 99, 120, 153, 164, 165, 207, 246
Kraus, J. D., 3, 13, 14, 15, 31, 116, 120 194, 246
Kummer, M., 535
Kurokawa, K., 120, 122, 164, 165, 246, 281, 282, 338, 370, 535, 562, 572, 643, 645, 674, 675, 676, 679, 682, 686, 689, 691, 693, 697, 698, 715, 727, 728, 737, 738

Landau, L. D., 15, 25, 51, 120
Leighton, R. B., 15, 108, 120
Leuzzi, G., 673, 710, 738
Lifshitz, E. M., 15, 25, 51, 120
Lorentz, H. A., 120
Lorrain, F., 15, 92, 101, 120
Lorrain, P., 15, 92, 101, 120

Maas, S. A., 546, 548, 558, 609, 614, 619, 721, 737
Malherbe, J. A. G., 406, 477, 479, 535
Marcuvitz, N., 119, 200, 206, 239, 246, 320, 321
Matthaei, G. L., 329, 338, 348, 354, 370, 385, 398, 419, 462, 477, 479, 482, 483, 495, 501, 503, 508, 512, 535
Maxwell, J. C., 1, 14, 15, 120
Meinke, H.H., 165, 203, 246
Modlic, B., 379, 405, 409, 413, 416, 535, 546, 548, 550, 558, 560, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 618, 619, 627, 674, 700, 707, 711, 721, 723, 727, 737, 738
Modlic, I., 610, 611, 618, 627, 674, 700, 707, 711, 738
Montgomery, C. G., 249, 329, 338
Moore, R. K., 800, 810
Morgenthaler, A. W., 15, 54, 76, 95, 99, 120, 153, 164, 165, 207, 246
Mumford, W. W., 537, 538, 737

Neo, C. P., 751, 762

Ohtomo, M., 643, 737
Ong, C. K., 751, 762
Owyang, G. H., 282, 284, 338

Pavio, A. M., 619, 623, 646, 658, 665, 668, 673, 674, 711, 719, 737
Penfield, P., 552, 721, 724, 727, 737
Popović, B., 120
Pozar, D. M., 15, 34, 70, 120, 122, 151, 164, 165, 184, 207, 218, 221, 226, 239, 246, 247, 249, 251, 266, 321, 323, 324, 328, 330, 332, 338, 339, 340, 344, 348, 351, 354, 370, 379, 398, 405, 409, 412, 419, 442, 458, 462, 466, 471, 482, 490, 495, 501, 508, 511, 517, 535, 537, 605, 635, 643, 645, 646, 658, 665, 673, 737, 738, 751, 762, 763, 810
Purcell, E. M., 249, 329, 338

Rafuse, R. P., 552, 721, 724, 727, 737
Ramo, S., 15, 25, 120, 153, 164, 165, 206, 216, 241, 243, 246, 338, 535
Rauscher, C., 745, 762
Richards, P. I., 477, 535
Rizzi, P. A., 122, 130, 164, 246, 370, 379, 398, 409, 412, 413, 419, 495, 535
Robertson, R., 674, 675, 689, 701, 738
Rohde, U. L., 619, 623, 646, 658, 665, 668, 673, 674, 711, 719, 737
Rollett, J. M., 643, 738
Rothe, H., 658, 737
Rothwell, E. J., 15, 120
Rowe, H. E., 721, 738
Russer, P., 241, 246

Sands, M., 15, 108, 120
Sarbacher, W. A., 326, 338
Scheibe, E. H., 537, 538, 737
Schelkunoff, S. A., 42, 112, 120, 253
Sinsky, J. H., 643, 737
Skilling, H. H., 3, 5, 14, 15, 103, 120
Skolnik, M. I., 794, 797, 810
Slater, J. C., 562, 564, 579, 737
Smith, P. H., 146, 164
Smrkić, Z., 13, 14, 15, 120, 164, 165, 227, 338
Sommerfeld, A., 120
Soohoo, R. F., 517, 520, 535
Sorrentino, R., 225, 246, 584, 595, 635, 646, 658, 673, 700, 718, 738
Staelin, D. H., 15, 54, 76, 95, 99, 120, 153, 164, 165, 207, 246
Steer, M. B., 224, 225, 246, 338
Stegun, I. A., 117, 120, 195, 196, 199, 246, 823
Stratton, J. A., 15, 120
Stutzman, W. L., 763, 776, 785, 786, 810

Štih, Ž., 13, 14, 15, 52, 120

Tan, E. L., 644, 737
Thiele, G. A., 763, 810

Ulaby, F. T., 10, 13, 14, 15, 61, 120, 518, 535, 800, 802, 810

van de Roer, T. G., 562, 572, 584, 668, 674, 682, 700, 719, 737
Van, Duzer, T., 15, 25, 120, 153, 164, 165, 206, 216, 241, 243, 246, 338, 535
Varadan, V. K., 751, 762
Varadan, V. V., 751, 762
Vendelin, G. D., 619, 623, 646, 658, 665, 668, 673, 674, 711, 719, 737

Wheeler, H. A., 151, 164
Whinnery, J. R., 15, 25, 120, 153, 164, 165, 216, 206, 241, 243, 246, 338, 535

Young, L., 329, 338, 348, 354, 370, 385, 398, 419, 462, 477, 479, 482, 483, 495, 501, 503, 508, 512, 535

Zakarevičius, R. A., 164, 221, 246, 338, 357, 370, 405, 535
Zentner, E., 15, 99, 119, 120, 763, 764, 776, 778, 784, 785, 786, 789, 810
Ziolkowski, R. W., 241, 246

Kazalo pojmova

A

ABCD-parametri, 277-279, 281
admitancija
- , elektronička, 715
- elementa prototipnog filtra, 271
- , karakteristična, 134
- , nelinearna, 253, 257
- , normirana, 150, 344, 409
- , optimalna, 658
- , raspodijeljena, 125, 204, 242
- , ulazna, 134, 206, 252-255, 423
- , valna, 110

admitancijska matrica, 257
admitancijski invertor, 484
admitancijski parametri, 257
aktivni element, 634
aktivna komponenta, 537, 640, 674
aktivni dvopol, 551, 674-699
AM šum, 615, 687-688, 719-721
Ampèreov zakon, 15-19, 29, 45, 90, 96, 101, 181, 526
analiza velikog signala, 557
analizator mreža, 162, 264, 446, 456, 534, 601, 634, 698, 751-762
analizator spektra, 534, 698, 719-721,743-747, 753
anizotropno sredstvo, 30-32, 228, 517-526
anomalna disperzija, 26, 50, 244
antena, 99-107, 763-789
- , dijagram zračenja, 764-766
- , dobitak, 1, 769
- , efektivna duljina, 770-771
- , efektivna površina, 1, 769-770
- , impedancija, 768-769
- , otpor zračenja, 768-769
- , radarska, 793-797
- , radioastronomska, 783, 785
- , radiometarska, 800-801
- , u komunikacijskim sustavima, 771-772
- , usmjerenost, 1, 766-768
- , vrste, 773-789

antenski niz, 778-782, 787-788
Applegateov dijagram, 566
atenuator (prigušivač), 273, 300-301, 373, 542-544
- , elektronički ugađan, 632
- s PIN-diodom, 624, 632
- , valovodni, 373-375

B

balansni transformator, 314, 416-417
balansno miješalo, 614-619, 623, 720
balansno pojačalo, 665-668
Besselova funkcija, 195-198, 441, 568, 820-821
Besselova jednadžba, 196-197, 820-821
bezuvjetna stabilnost, 641-649
bijeli šum (*vidi* toplinski šum)
bikonična antena, 788-789
bilinearna transformacija (*vidi* Möbiusova transformacija)
binomni filtar (maksimalno glatki odziv), 464, 466-468
binomni koeficijenti, 358-362
binomni odziv (*vidi* maksimalno glatki odziv)
binomni polinom, 392
binomni transformator impedancije, 358- 362
biološki učinci, 808
bipolarni tranzistor, 598-599, 602- 604
blisko polje, 101-103, 764
Blochova impedancija, 514
Blochovi valovi, 514
Bode-Fanov kriterij, 351-353
Boltzmannova konstanta, 538, 585, 792, 812
Brewsterov kut (*vidi* kut totalnog prijenosa)
brzi elektromagnetski valovi, 575-576
brzina
- , diferencijalna, 594
- , fazna (*vidi* fazna brzina)
- , grupna (*vidi* grupna brzina)
- nositelja naboja, 18, 33
- prijenosa energije, 55-56, 243-244
- svjetlosti (u vakuumu), 1, 12, 36, 40, 50, 55, 92, 812
- , zasićena, 590, 594-596

brzinska modulacija, 562-566, 570

C

ciklotronska frekvencija, 30, 581
ciklotronski valovi, 562
cilindrični rezonator *(vidi* valjkasti rezonator)
cilindrični valovod (*vidi* kružni valovod)
ciljna funkcija, 673
cirkulator (*vidi* feritni cirkulator)
crno tijelo, 538, 798-800

Č
Čebiševljev
- filtar, 464, 471, 476, 490-492, 498-500, 508
- odziv, 357-358, 364-367, 381, 392-394, 464, 469-471, 476, 500, 502, 508
- polinom, 363-364, 392, 464, 469
- transformator impedancije, 357-358, 363-367

četveroprolazna mreža
- , graf toka signala, 312
- , nerefleksivna i bez gubitaka, 311-314
- , raspršna matrica, 311
- , svojstvene vrijednosti, 289-291

četvrtvalni rezonator, 427, 429, 457, 459, 503-508, 695-697, 713, 717
četvrtvalni stab, 379, 457, 505, 508, 652, 712-713
četvrtvalni stap, 372
četvrtvalni transformator, 144, 348-351, 355, 654, 695-697, 717
četvrtvalni unipol, 777
čip
- komponente, 338, 587, 591, 728, 730-735
- kondenzator, 338, 651, 675, 734-735
- otpornik, 379, 730-731
- tranzistora, 598, 601, 604
- zavojnica, 338, 675, 731-734

D
daleko polje (daleka zona), 94-95, 105, 764, 766
daljinsko istraživanje, 797, 803
decibeli ↔ neperi, 58, 231
degenerativni modovi, 188, 192, 208, 500, 533
detektor ovojnice, 385, 605-609
Dickeov radiometar, 801-802
dielektrični gubitci, 24-26, 174
dielektrični materijali (tablice), 814, 815
dielektrični rezonator, 439-443, 454-457, 713-714, 717
dielektrični valovod, 207-213
dielektrik, 23-26
- , umjetni, 31-32

dijagram modova rezonatora, 438
dijagram zračenja, 105-106, 764-766
dinamička amplituda oscilatora, 680-681
dinamička frekvencija oscilatora, 680-681
dinamička radna točka oscilatora, 686
dinamička stabilnost radne točke, 682
dinamička vodljivost, 555
- , Schottkyjeve diode, 585

dinamička zaporna frekvencija, 723
dinamički faktor dobrote varaktora, 723
dinamičko područje prijamnika, 558-561
diodno miješalo, 611-620
diodno množilo frekvencije, 724-725
diodno osjetilo snage, 741-743
dipol
- , električni, 11, 31, 32, 328-331, 774
- , elementarni, 99 (*vidi* Hertzov dipol)
- , magnetski (elementarni), 119, 328-331, 778
- , molekularni, 22, 798, 808
- , poluvalni, 772, 775-777

dipolni moment, 21, 31, 99
disipacijska matrica, 270
diskontinuitet
- na liniji, 141, 161-164, 302
- na mikrotrakastoj liniji, 333-338
- polja, 17, 64
- u valovodu, 193-194, 314-321

disperzija, 26, 49
- , anomalna, 26
- , geometrijska, 169
- u mikrotrakastoj liniji, 305-308
- u valovodu, 131, 243-244

disperzijska relacija, 40, 89, 167-170
disperzijski dijagram (k-β), 212, 230, 243, 574-578
divergencija, 5, 8, 17, 815
djelilo snage, 376
- , otporno, 377-378
- , T-spoj, 377
- , Wilkinsonovo, 379-382

dobitak
- antene, 769
- prilagodbe, 638, 649, 655

dominantni mod, 131, 185, 190-194, 200, 202, 211, 214, 221, 324-328, 431, 437, 531
driftno područje, 564-569, 590-592
dualnost, 65, 89, 109, 315, 322
dubina prodiranja, 57-60, 71, 73, 128, 152, 234, 731, (*tablica*) 813
dvoprolazna mreža
- , *ABCD*-parametri, 277-279
- bez gubitaka, 271, 299-300
- , graf toka signala, 292, 297
- , kaskada, 277-280
- , paralelni spoj, 261-262
- , pasivna, 299-303
- , pomak referentne ravnine, 276
- , serijski spoj, 261-262
- , simetrična, 284-288
- , raspršni parametri, 264-265, 272
- , *T*-parametri, 279
- , *Z*-parametri, 259-260

dvostruko balansno miješalo, 617

E
efektivna duljina antene, 770-771
efektivna izotropno zračena snaga (EIRP), 772
efektivna masa, 23, 593
efektivna permitivnost, 215, 222-225
- plazme, 29, 806

efektivna površina cilja (radarski presjek), 1, 794
efektivna površina antene, 769, 772, 781-784
efektivna površina otvora, 781-784
efektivna površina površinskog niza, 781
efektivna širina trake, 229
efektivna zračena snaga (ERP), 772
eksponencijalni transformator impedancije, 368
ekvivalentni izvori (*vidi* nadomjesni izvori)
elastancija, 723-724, 730, 811
električna duljina, 149
električna energija, 51-52, 122, 128

električna polarizacija, 24, 31
električna sonda, 319, 322-325
električna susceptibilnost, 24, 811
električni dipol, 21
električni zid, 66
električno polje, 9-11, 15
elektrokinetički val, 575
elektromagnetizam, 15-119
elektromagnetska energija, 12, 19, 25, 41, 46, 49, 51
- , brzina rasprostiranja, 49-50, 55-56, 169, 192, 243-244
- , disipirana, 52, 162
- , induktivna, 54
- , kapacitivna, 54
- , očuvanje, 25, 33, 68
- , pohranjena, 51, 54, 162
- , smjer rasprostiranja, 45
- , srednja, 54
- , tok, 51
- , zračenje, 92

elektromagnetska periodična struktura (*vidi* periodična struktura)
elektromagnetski spektar, 2
elektromagnetski val, 35
elektronička admitancija, 715
elektronička impedancija, 569, 584, 675-680
elektroničko ugađanje, 572, 697, 715
elektronska polarizacija, 26
elektronske cijevi (*vidi* mikrovalne elektronske cijevi)
elektronski mlaz (snop), 562
elektronski oblak, 564
elektronski top, 564, 566
elementarni magnetski dipol, 119
emisivnost, 798, 800
energija, 51
- , električna (*vidi* električna energija)
- , elektromagnetska (*vidi* elektromagnetska energija)
- fotona, 99
- , kinetička, 19, 90
- , magnetska (*vidi* magnetska energija)

energijski dijagram, 593
E-ravnina, 41, 105, 376, 424, 775, 782-785
evanescentni val, 46
evanescentno polje, 43, 82, 85, 168-172, 184, 194, 207-208, 322-326, 441, 514, 756

F

Fabry-Perotov rezonator, 443-489
faktor
- ispune, 222, 232
- kakvoće, 646
- niza, 779
- rasprostiranja, 57, 178, 186
- razgođenja, 267, 672
- refleksije (*vidi* koeficijent refleksije)
- sprege, 446, 450, 455, 479
- sprege mlaza, 566
- stabilnosti, 643-646, 659, 668, 706, 716
- učinkovitosti otvora antene, 770
- učinkovitosti zračenja, 769
- umjeravanja, 742

faktor dobrote (*Q*-faktor)
- dielektričnoga rezonatora, 443
- Fabry-Perotova rezonatora, 444-445
- linijskoga rezonatora, 427- 431
- mikrotrakaste linije, 235
- opterećenoga rezonatora, 446
- titrajnoga kruga, 420, 424
- , unutarnji, 440
- valovodnoga rezonatora, 435-439
- , vanjski, 446
- varaktora, 723

faktor šuma, 540-545
- atenuatora, 542-543
- kaskade pojačala, 543-544, 672-673
- , kružnice, 658-659, 664
- linije s gubitcima, 543-544
- , mjerenje, 545-546
- miješala, 615-618
- pojačala, 634, 657-664
- prijamnika, 561
- tranzistora, 595, 597, 599

faktor umjeravanja, 742
Faradayev zakon, 15, 18, 20, 40, 88, 181, 203
Faradayeva rotacija, 527, 805
fazna brzina, 40, 56
fazna konstanta (*vidi* fazni koeficijent)
fazni broj (*vidi* fazni koeficijent)
fazni koeficijent, 39, 44
- u cijevi s putujućim valom, 572
- u dielektričnom valovodu, 208
- u disperzivnom sredstvu, 49
- u dobrom vodiču, 58
- u feritnom sredstvu, 527-530
- u ionosferi (plazmi), 806
- u mikrotrakastoj liniji, 223
- u periodičnoj strukturi, 513
- u planparalelnome valovodu, 168-170
- u prijenosnoj liniji, 124, 126-127
- u prijenosnoj strukturi s protusmjernim valom, 242-243
- u rezonatoru, 425, 431, 441
- u simetričnoj trakastoj liniji, 217
- u sredstvu s gubitcima, 57-61
- u valovodu, 186-191, 197, 210-214
- , vektorski, 44, 46

fazni zakretač, 301
- prekopčavanjem prijenosnih linija, 629-630
- reaktivnim opterećenjem linije, 630
- , refleksijski, 630-631
- s PIN-diodom, 629-630
- , varaktorski, 631
- , valovodni, 375

fazor, 19-20
feritne naprave, 517-534
- , cirkulator, 308-309, 532-534
- , girator, 301-302
- , izolator, 301, 530-532

feritno sredstvo, 27-31, 258, 517
- , gubitci, 523
- , rasprostiranje *TEM*-vala, 524-530
- , tenzor permeabilnosti, 522
filtar, 462-511
- , niskopropusni, 466-470, 490
- , niskopropusni prototip, 466, 469
- , izvedbe, 490-511
- , pojasnopropusni, 473-479, 495-511
- , pojasnozaporni, 474, 504-508
- , transformacije, 471-489
- , visokopropusni, 472
fizikalne konstante (*tablica*), 812
Floquetov teorem, 515
Fosterov teorem, 253-256, 422, 683
foton, 99, 538, 745, 797-799, 808
Fourierova analiza, 20
Fourierova transformacija, 50, 558, 739, 751, 760
Fourierov red, 219, 227, 315, 356, 512, 554-556, 568, 721
frekvencija, 19
- , kružna (kutna), 19, 20
- osciliranja, 534, 572, 578, 591, 599, 674, 694-699, 708-719
- precesije (*vidi* Larmorova frekvencija)
frekvencijska komponenta (*vidi* harmonička frekvencija)
Fresnelov integral, 117
Fresnelova zona, 764
Fresnelovi koeficijenti, 80
Friisova prijenosna formula, 772
funkcija jediničnog skoka, 155, 760

G
Gaussov teorem, 17, 52, 818
Gaussov zakon, 15, 28, 36, 38, 44, 66, 93, 120, 562
Gaussova razdioba, 539
girator, 301-302, 517, 527, 530, 534
giromagnetska rezonancija, 526, 530-531, 534
giromagnetski filtar (*vidi* YIG-filtar)
giromagnetski omjer, 520, 812
giromagnetski rezonator (*vidi* YIG-rezonator)
girotron, 562, 578-579, 584
girotropni tenzor, 30
girotropno sredstvo, 523
Goos-Hänchenov fazni pomak, 83, 209
gradijent, 3-5, 8, 95, 203, 817
graf toka signala, 291-303, 312, 754, 761
granična frekvencija (*vidi* zaporna frekvencija), 127, 166, 176, 186, 248, 463, 471, 490, 606, 761, 788
granična ravnina (ploha), 17, 64-71, 73, 76-87, 108, 166-171, 207-209, 215-216, 252
granična razina (vrijednost), 99, 606, 810
granični prijelaz, 18, 49, 108, 112, 123, 125, 368
grebenasti valovod, 206
Greenova funkcija, 98
grupna brzina, 59-50, 55, 169, 187-189, 191, 198, 241- 244, 515-516, 575, 806
grupno kašnjenje, 465, 665
gubitci
- pretvorbe, 556, 612-614, 791
- snage, 19, 33, 54, 59, 122, 139, 141, 150, 167, 173, 188, 235, 244, 431, 435, 768-769
- u dielektriku, 25-26, 127-130, 173, 188, 231, 244, 435-436, 439, 445, 730, 808
- u feritu, 523
- u magnetskom materijalu, 27
- u vodiču, 50, 72, 127, 130, 174, 188, 218, 233, 244, 435, 443, 732
- , uneseni, 141-142, 462, 625, 632, 736
- zbog refleksije, 138-139, 622, 664, 742
- zračenjem, 208, 212, 231, 235
Gunnov oscilator, 594, 694-698
Gunnov učinak, 593
Gunnova dioda, 593-595, 685, 695
gustoća
- električne struje, 16, 27, 35
- električnoga toka, 11, 15, 21
- elektrona u ionosferi, 29
- energije, 51, 54-55
- magnetske struje, 35
- magnetskoga toka, 12, 15
- naboja, 16, 28
- pomačne struje, 16
- sile, 19
- silnica, 8, 41-42
- toka snage (*vidi* Poyntingov vektor)

H
harmonička frekvencija (komponenta), 547, 548, 550, 558, 607, 612, 676
harmoničko miješalo, 619-620, 746
harmonijska funkcija, 19-20, 32, 51, 54, 95, 101
harmonijska prostorno-vremenska ovisnost, 573
harmonijska vremenska ovisnost, 52, 177
harmonijske jednadžbe, 38, 43
harmonijske valne funkcije, 38, 43
Hamiltonov operator (*vidi* nabla)
Hartreejev dijagram, 582
Heavisideova funkcija (*vidi* funkcija jediničnog skoka)
Helmholtzov teorem, 95, 818
Helmholtzova jednadžba, 38, 42, 95, 178, 182, 185, 189, 195
hermitska matrica, 30, 270
Hertzov dipol, 94, 99-107, 763, 770, 773-776, 778
heterodinski pretvornik frekvencije, 744-745
heterodinski prijamnik, 563, 609-610, 745, 747, 791, 800
hibrid,
- , kvadraturni ($\pi/2$), 290, 313, 403, 409-411, 615-619, 630-633, 665
- , Langeov, 405-406, 418, 617, 633, 665
- , nesimetrični, 313
- , prstenasti (π), 313, 413-416, 615-618
- s ograncima (kvadraturni), 413
- sa spregnutim linijama, 403
- , simetrični, 313

- , šesteroprolazni, 605, 757-758
- , širokopojasni prstenasti (π) , 415
- , valovodni magični T-spoj, 316, 412-413, 750
hibridni valovi (modovi), 176, 213-214, 216, 244, 440
H-ravnina, 41, 105, 376, 412, 532, 766, 775, 781-784, 789
Huygensovo načelo, 112, 116-118, 318, 782, 785

I
IMPATT dioda, 589-592, 594, 694-696
IMPATT oscilator, 694-696
impedancija, 20, 54, 251, 811
- antene, 768
- , elektronička, 675-680, 703, 715
- generatora (unutarnja), 139-140, 266, 635
- , intrinzična, 41, 56-59, 68-71, 78, 92, 105, 251, 812
- , karakteristična, 125, 131, 216, 231, 251
- , nelinearna, 674
- , normirana, 132, 146
- , optimalna, 658
- , plošna (površinska), 72, 112
- tereta (trošila), 132, 146
- , ulazna, 134, 140, 251-253, 259, 266, 634
- , valna, 41, 56-57, 172, 179-183, 187, 189-191, 196-198, 205, 249, 251
- zračenja, 106, 768, 775
impedancija prijenosne linije
- , karakteristična, 125-127, 131, 182, 216, 221, 225, 237-238
- , ulazna, 125, 134
impedancijska matrica, 256-258, 268
impedancijski invertor, 144, 449, 482-489
impedancijski parametri, 256-258
indeks loma, 25-26, 78, 803
indeks modulacije, 567, 607, 720
indukcijsko polje, 102, 764, 768
intermodulacija,
- , izobličenje, 560-561, 669
- , produkti, 550, 560, 567, 708, 746
intrinzična valna impedancija, 41, 56-59, 68-71, 78, 92, 105, 251, 812
intrinzični MESFET, 711
intrinzični sloj, 586-588, 625
intrinzično pojačanje snage, 637-638
invertor
- admitancije, 482-489
- impedancije, 144, 449, 482-489
ionosfera, 805-807
istodobna prilagodba pojačala, 645
izolacija, 380-384, 532, 625-628, 736, 793, 796
izotropni radijator, 109, 767
izotropno sredstvo, 11, 25, 30

J
jalova snaga, 138, 315, 721
jedinična matrica, 268
jednadžba
- , disperzijska (*vidi* disperzijska relacija)
- , dualna, 109
- energijake ravnoteže, 271
- , Helmholtzova (*vidi* Helmholtzova jednadžba)
- kontinuiteta struje (očuvanja naboja), 16, 20
- , Maxwellova (*vidi* Maxwellove jednadžbe)
- očuvanja energije (*vidi* zakon očuvanja energije)
- prijenosne linije, 123, 181
- , separacijska, 43
- silnice, 101
- svojstvenih vrijednosti (*vidi* karakteristična jednadžba)
- , telegrafska, 123, 181
- , valna (*vidi* valna jednadžba)
jednoprolazna mreža, 251-254
- , reaktivna, 252-254

K
kalibracija (*vidi* umjeravanje)
karakteristična impedancija,
- koplanarne linije, 237
- Lecherova voda, 131
- mikrotrakaste linije, 221-222, 224-227, 230
- neuniformne linije, 367-370
- planparalelne linije, 131, 182
- prijenosne linije, 125-127, 131, 182, 216, 221, 225, 237-238
- prorezne linije, 238
- simetrične trakaste linije, 217-220
- suosne linije, 129-131
karakteristična (svojstvena) jednadžba, 282
klistron
- , refleksni (*vidi* refleksni klistron)
- s dvjema šupljinama, 564-569
Klopfensteinov transformator, 369-370
koaksijalna linija (*vidi* suosna linija)
koaksijalni rezonator (*vidi* suosni rezonator)
koeficijent faze (*vidi* fazni koeficijent)
koeficijent prigušenja
- evanescentnog polja (moda), 82
- u dobrom vodiču, 71
- u mikrotrakastoj liniji, 231, 233-235
- u prijenosnoj liniji, 124, 127, 130, 151-153
- u prijenosnoj s prousmjernim valom 242
- u simetričnoj trakastoj liniji, 218, 221
- u sredstvu s gubitcima, 57-59
- u valovodu, 174-175, 186, 188-189, 193-194, 200-201
- , vektorski, 46
koeficijent prijenosa, 68-69, 71, 78, 141
koeficijent rasprostiranja
- u dielektričnom valovodu, 208, 211
- u dobrom vodiču, 71
- u mikrotrakastoj liniji, 231
- u periodičnoj strukturi, 513
- u planarnoj liniji, 214
- u planparalelnome valovodu, 166-169, 173
- u prijenosnoj liniji, 124, 126, 138
- u strukturi s protusmjernim valom, 241

- u sredstvu bez gubitaka, 46, 69
- u sredstvu s gubitcima, 56, 68, 98
- u valovodu, 186-189, 239
- , vektorski, 46
- vođenoga vala, 175, 177, 182-183
koeficijent refleksije
- poopćeni, 267, 693
- na prijenosnoj liniji, 132-142, 146-151
- za kosi upad vala, 78-84
- za okomiti upad vala, 68-72
koeficijent sprege, 383
koeficijent učinkovitosti, 676
količina gibanja (*vidi* zalet)
kompleksna snaga, 54, 137, 316, 419
koncentrirani elementi, 122, 258, 318, 419, 733
konformno preslikavanje, 147, 217, 222, 225, 233, 237, 398, 759, 818-819
konjugirano kompleksna prilagodba, 140, 280, 339, 347, 569, 636, 638, 645, 672, 769
konvekcijska struja, 33
koplanarna linija, 214, 237
kosi upad vala, 76-90
Kramers-Kronigove relacije, 25
kratko spojena linija (stab), 134, 142-145, 343-348
kratkospojnik
- , fiksni, 322-326, 699, 747, 756, 759
- , pomični, 372-373, 675, 759
kritična veza (sprega), 446
kritični kut (*vidi* kut totalne refleksije)
kružna frekvencija, 19-20, 39
- magnetizacije, 522
- plazme, 29, 805
kružna polarizacija, 61-63, 80, 526, 530-533, 789
kružni otvor, 318, 328-332, 385-393, 451, 500
kružni valovod (*vidi* valovod)
kružnice
- konstantnog dobitka prilagodbe, 649
- konstantnog faktora šuma, 658-659
- konstantnog pogonskog pojačanja, 646
- konstantnog odnosa stojnih valova, 149, 344
- konstantnog raspoloživog pojačanja, 649
- stabilnosti, 648
Kurodina tranasformacija, 477
Kurodini identiteti, 479-481
kut totalne refleksije, 81
kut totalnoga prijenosa (Brewsterov kut), 80
kutna frekvencija (*vidi* kružna frekvencija)
kutni moment, 519
kvadraturni hibrid, 313, 403, 409-411
kvazi-*TEM*-mod (val), 214, 221, 236-237, 244

L
Langeov sprežnik (hibrid), 405-406
Laplaceov operator, 36, 97, 178
Laplaceova jednadžba, 217-219, 226
laplasijan (*vidi* Laplaceov operator)
Larmorova frekvencija (precesije), 521
lavinska dioda, 538, 589
lavinska multiplikacija, 590
lavinski proboj, 589
linearna polarizacija, 62
linearno dinamičko područje, 561
linija (*vidi* prijenosna linija)
linijski invertor (*vidi* inveror impedancije), 144
log-periodična antena 788-789
lokalni oscilator, 557, 609-616, 744-746, 752, 791, 792, 793-797
lokus
- aktivnoga dvopola, 677
- elektroničke impedancije, 677
- pasivne impedancije, 677
- ulazne impedancije, 259, 421, 641
longitudinalna (uzdužna) komponenta, 84, 88
longitudinalni val, 574
Lorentzov teorem, 110-111
Lorentzov zakon, 18
Lorentzova sila, 18
Lorenzov uvjet, 96

Lj
Ljevkasta antena, 783-785

M
magični T-spoj, 313, 412-414, 616, 750
magnetizacija, 520-523
magnetska energija, 51-52, 121, 128
magnetska indukcija (*vidi* gustoća magnetskoga toka)
magnetska polarizacija, 27, 329, 389, 521
magnetska susceptibilnost, 27
magnetska struja, 33-34
magnetski dipol, 119, 322, 326, 328-332, 778
magnetski vektorski potencijal, 95
magnetski zid, 67
magnetsko polje, 11-13, 15 maksimalna frekvencija osciliranja, 599 maksimalno glatki (binomni) odziv
- , filtar, 464, 466
- , transformator impedancije, 358, 361
maksimalno ostvarivo pojačanje snage, 646
maksimalno stabilno pojačanje snage, 646
maksimalno unilateralno pojačanje snage, 638
Manley-Roweove relacije, 721, 726, 727
masa
- čestice, 26
- , efektivna, 593
- elektrona, 519, 812
- iona, 805
matrica
- , *ABCD*, 277-279
- , admitancijska, 257
- , hermitska, 32
- , impedancijska, 256
- , jedinična, 268
- pretvorbe, 555
- prijenosa valova snage, 279
- , prijenosna, 277
- prijenosne vodljivosti, 556
- prijenosnoga otpora, 557
- , raspršna, 263, (kaskade) 280

Maxwellove jednadžbe
- u diferencijalnom obliku, 15, 20
- u fazorskom obliku, 20
- u integralnom obliku, 17-18

medij (*vidi* sredstvo)
međufrekvencija, 552, 609, 791
MEMS (*vidi* MEMS)
metoda
- perturbacije, 151-153, 458-461, 682
- poprečne rezonancije, 239-241
- ravnoteže harmonika, 546, 558

miješalo, 609
- , diodno, 611-620
- , silazno, 610-611
- , tranzistorsko, 620-623
- , uzlazno, 611

mikrotrakasta antena, 786-788
mikrotrakasta linija
- , diskontinuitet, 333-338
- , disperzija, 229-231
- , efektivna permitivnost, 222-224, 230
- , faktor dobrote, 235
- , fazni koeficijent, 223
- , geometrija, 221-222
- , gubitci, 231
- , karakteristična impedancija, 221, 224-227, 230
- , koeficijent prigušenja, 231
- , kvazi-*TEM*-mod, 221
- , spregnuta, 395-398

mikrovalna mjerenja, 739-762
mikrovalna pećnica,808
mikrovalne elektronske cijevi, 562-584
- , cijev s protusmjernim valom, 578
- , cijev s putujućim valom, 572-578
- , girotron, 578-579
- , klistron, 564-569
- , magnetron, 579-584
- , refleksni klistron, 570-572
- ,vakuumska dioda 562-564

mikrovalne poluvodičke komponente, 584-604
mikrovalni integrirani sklopovi, 728-735
mikrovalni komunikacijski sustavi, 789-792
mikrovalni tranzistori, 595-604
mikrovalno zagrijavanje,808
minimalni detektibilni signal, 561
mjera šuma, 544
mjera unilateralnosti, 639
mjerenje
- AM šuma oscilatora, 718-720
- faktora šuma, 545-546
- faznog šuma oscilatora, 718-720
- frekvencije, 743-745
- impedancije, 747-762
- koeficijenta refleksije,747-762
- raspršnih parametara, 751-762, 599-604
- snage, 739-742
- spektra, 745-747
- temperature šuma, 545-546

množilo frekvencije, 721, 724-725
Möbiusova transformacija, 146, 259, 640, 818-820
mod
- degerativni, 188, 192, 208, 500, 533
- dielektričnog rezonatora, 440-443
- dielektričnog valovoda, 208-213
- Fabry-Perotova rezonatora, 445
- linijskog rezonatora, 426-429
- , LSA, 594
- refleksnoga klistrona, 570-572
- šupljinskoga rezonatora, 431, 437
- u valovodu (definicija), 167

modulacija gustoće, 564
modulator s PIN-diodom, 630-631
modulator s varaktorskom diodom, 631
mosni spoj, 413, 739-740, 750
mreža
- , aktivna, 706
- , nedisipativna, 252, 261, 270-272
- , nerefleksivna, 272
- , reaktivna, 252-254
- , recipročna, 258-260, 269-270
- , simetrična, 280-291
- , tablica *ABCD*-matrica kanonskih mreža, 278

N
nabla 4, 817
naboj elektrona, 9, 22, 519, 812
načelo
- ekvivalencije, 112-113
- , Huygensovo, 116-119
- superpozicije, 10, 774

nadomjesna električna i magnetska struja, 119
nadomjesna provodnost dielektrika, 232
nadomjesna struja na referentnoj ravnini, 249, 258
nadomjesna temperatura šuma, 538-546
nadomjesni izvori, 113
nadomjesni napon na referentnoj ravnini, 249, 258
nadomjesni sklop (shema)
- antene, 768
- bipolarnog tranzistora, 598
- diskontinuiteta mikrotrakaste linije, 333-338
- diskontinuiteta u valovodu, 315-320
- grebenastog valovoda, 206
- IMPATT diode, 592
- kondenzatora, 734
- kratkog odsječka prijenosne linije, 492-493
- linijskog rezonatora, 426-429
- MESFET-a, 597
- mikrotrakastog rezonatora, 448
- modela plazme, 574
- oscilatora s negativnim otporom, 675, 687
- otpornika, 730
- periodične prijenosne linije, 513
- PIN-diode, 587, 624
- pojačala s povratnom vezom, 670
- pomičnog kratkospojnika u valovodu, 372
- prijenosne linije s protusmjernim valom, 241
- spregnutih linija, 406-408, 478-481
- spregnutog dielektričnog rezonatora, 454, 757

- spregnutog rezonatora, 447-448
- Schottkyjeve diode, 586
- sinkroniziranog oscilatora, 689
- šumnog otpora, 539
- , Théveninov, 539
- tranzistorskog oscilatora, 711, 172, 715
- valovoda, 203-206, 244
- valovodnog rezonatora, 419, 451, 453
- Wilkinsonova djelila, 379-380
- zavojnice, 732

napon,
- , nadomjesni, 249
- praznoga hoda, 257

naponski koeficijent refleksije (*vidi* koeficijent refleksije)
naponski koeficijent sprege, 384, 402-405
naponski transformator, 407-408
naponski ugađan oscilator (VCO), 713
naponski val, 124
negativni otpor, 148, 594, 640, 677, 699, 704
nelinearnost, 546-560
- , admitancija, 557
- , analiza velikog signala, 557
- , diferencijalna vodljivost, 553-556
- , diferencijalni naboj, 554
- , diferencijalni otpor, 551
- , dvopol, 547-549
- , impedancija, 557, 674
- kapaciteta, 554, 606, 721-725
- , komponenta, 546, 550
- mreža, 546-547, 550, 559
- , otpor (komponenta), 550, 585, 605-606, 739
- pojačala, 673
- , prijenosna funkcija, 558
- , reaktancija, 611, 694, 721, 727-729

neparni mod pobude, 287, 395
neper, 58, 231
nerefleksivne mreže, 272-274
Neumannova funkcija, 820
neuniformna linija, 367-370
neuniformni val, 78, 83
niskopropusni filtar
- , linijski, 492-495
- , prototip, 466
- s poprečnim stabovima, 490

niskošumno pojačao, 657-659, 662-664
normirana admitancija, 150
normirana impedancija, 132, 146-150
Nyquistov kriterij stabilnosti, 644, 700
Nyquistov šum (*vidi* toplinski šum)

O

obilazni kut, 12, 196, 213, 765, 795
obratno ovješena linija, 236-237
odašiljač
- , radarski, 793-797
- , radiokomunikacijski, 789-791

odnos signal/šum, 540, 609, 657, 671, 791-796
odnos stojnih valova (OSV), 136-137
- , mjerenje, 747-749

odslikavanje (*vidi* zrcalno odslikavanje)
ogib elektromagnetskoga vala, 116-118
Ohmov zakon za polja, 27
okomiti upad vala, 67-76
opisna funkcija, 558
optimizacija, 634, 673
orbitalni magnetski moment, 519
ortogonalnost, 63-64
oscilator
- , amplitudni uvjet, 677, 703
- , cijevni, 562, 570, 578, 579
- , dinamička stabilnost, 682-686
- , diodni, 674, 694
- , fazni uvjet, 677, 703
- , Gunnov, 594
- , IMPATT, 591
- , mikrotrakasti, 695
- , naponski upravljan (VCO), 717
- , porast osciliranja, 680-682, 708
- s dielektričnim rezonatorom, 697, 713-714
- s negativnim otporom, 674-699
- , sinkronizacija, 689-693
- , slobodni, 689
- , strujno upravljan (YIG), 697-698, 715
- , suosni, 695
- , šum, 686-688, 719-721
- , tranzistorski, 699-721
- , učinkovitost, 709
- , valovodni, 698-699

osjetljivost detekcije
- , strujna, 608
- , tangencijalna, 609

osjetljivost prijamnika, 657, 726, 792, 797
otvoreni stab, 343
otvorska antena (*vidi* površinska antena)
ovješena mikrotrakasta linija, 236-237

P

parametarski sustavi, 720-728
parametarsko pojačalo, 723-724
parametri
- , *ABCD*, 277-279, 281
- , admitancijski, 257
- , impedancijski, 256-258
- , pretvorba (*tablica*), 281
- , prijenosni valni, 279
- , raspodijeljeni, 122
- , raspršni, 263
- šuma tranzistora, 660
- , tablica pretvorbe, 281

parni mod pobude, 285, 395
periodična struktura, 511-517
- , dijagram k-β, 516-517
- , fazna brzina, 515
- , grupna brzina, 516
- , karakteristična impedancija, 514
- , zavojnica, 576-578

permeabilnost
- , mjerna jedinica (*tablica*), 811
- , negativna, 529
- , skalarna, 11, 21, 27
- slobodnoga prostora, 14, 812

- , tenzorska, 31
- vakuuma, 21, 812

permitivnost
- atmosfere, 802-804
- dielektrika (*tablica*), 814, 815
- materijala, 11, 24-26
- , mjerna jedinica (*tablica*), 811
- , negativna, 29, 805
- plazme, 29, 806
- , relativna, 11, 814, 815
- , slobodnoga prostora, 11, 14, 21, 812
- , tenzorska, 30
- , vakuuma, 21, 812

perturbacija
- oscilatora, 682-684
- , prigušenje u prijenosnoj liniji, 151-153
- rezonantne šupljine, 458-461

petljasta antena, 778
Pierceovo pravilo, 542
PIN-dioda, 586-589
- , kapacitet, 587
- , otpor intrinzičnoga sloja, 588

Planckov zakon zračenja crnoga tijela, 798-800
Planckova konstanta, 99, 521, 745, 797, 812
planparalelna linija,131, 180-181
planparalelni valovod, 166-183
plazma, 29
- , ciklotronska frekvencija, 30
- , fazni koeficijent, 806
- , frekvencija, 29, 30, 574
- , girotropni tenzor, 30
- , ionosfera, 805-807
- , koeficijent prigušenja, 806
- , model, 29, 574
- , permitivnost, 29, 806
- , šum, 537
- u statičkom magnetskom polju, 30

plivajući spoj, 310, 599-602
pobuda valovoda, 321-333
podloga planarne strukture, 214, 221, 334, 729, 815
pogonsko pojačanje snage, 635-636
Poissonova jednadžba (zakon), 564, 573
pojačalo
- , cijev s putujućim valom, 578
- , klistron, 569
- , parametarsko, 723-724
- s negativnim otporom (*vidi* refleksijsko pojacalo)
- , tranzistorsko, 634-673

pojačanje snage (definicije), 635
pojasnopropusni filtar
- , frekvencijska transformacija, 473-474
- s četvrtvalnim rezonatorima, 506-507
- s izravno vezanim rezonatorima, 495-501
- s koncentriranim elementima, 476
- s poprečnim rezonatorima, 508-511
- sa spregnutim linijama, 501-504

pojasnozaporni filtar
- , frekvencijska transformacija, 474-475
- s četvrtvalnim rezonatorima, 505-508
- sa spregnutim linijama, 504

pokretljivost nositelja naboja, 588, 593-594
polarizacija
- , električna, 21, 26
- elektromagnetskoga vala, 61
- , ionska, 21, 26
- kružnog otvora (električna), 329
- kružnog otvora (magnetska), 328-329
- , magnetska, 27
- , orijentacijska, 21, 26
- u materijalu, 10, 21-27, 31

polarizacijski kut (Brewsterov kut), 80
poluvalni dipol, 775-777
pomačna struja, 32-33
pomični kratkospojnik (valovodni), 372-373
pomični teret, 384, 755
poopćeni koeficijent refleksije, 267
poopćeni valovi snage, 267-268
poprečna rezonancija, 239-241
potencijal
- , električni, 31
- , gravitacijski, 3-4

povratna veza
- , graf toka signala, 296
- , oscilator, 570, 700
- , pojačalo, 668-670

povratni val, 516, 575, 578
površinska antena, 782-785
površinska ipedancija (plošna impedancija), 72
površinska struja (plošna struja), 64-67, 71-75, 88
površinski naboj (plošni naboj), 64-67
površinski otpor (plošni otpor), 72
površinski učinak (skin-efekt), 58-60, 66, 71, 73
površinski val
- na dielektričnom valovodu, 207
- na granici dvaju dielektrika, 83

Poyntingov teorem, 52
Poyntingov vektor, 53, 56
pn-spoj, 587
pravilo desne ruke, 6, 13, 18
pravokutni valovod, 165, 184-194, 824
prazni hod, 160, 257, 285, 756
precesija magnetskoga dipola, 517
presjecišna točka, 560-561
preslikavanje (*vidi* konformno preslikavanje)
pretvorba parametara (*tablica*), 281
pretvornik frekvencije, 550, 611, 721-729, 790
prigušivač (*vidi* atenuator)
prigušnica, 650-653
prag osjetljivosti prijamnika (*vidi* osjetljivost prijamnika)
prijamnik
- , heterodinski, 609
- , osjetljivost, 657, 726, 792, 797
- , radarski, 793-797
- , radiokomunikacijski, 789-792
- , radiometrijski, 797, 800

prijenos zaleta (količine gibanja), 91
prijenosna linija
- bez gubitaka, 126, 141-145
- , diskontinuitet, 141

- , dvožična, 131
- , jednadžbe, 123-124
- , koplanarna, 237
- malih gubitaka, 127
- , mikrotrakasta, 221-237
- , model, 122
- , parametri, 128
- , planarna, 214
- , planparalelna, 131, 180
- , prijenos impulsa, 153-164
- , prijenos snage, 137-140
- , prorezna, 238
- , reaktivno zaključena, 142-145, 158-162
- , rubni uvjet na generatoru, 139
- s protusmjernim valom, 241-243
- , simetrična trakasta, 216-221
- , suosna, 129-131
- , teorija, 121-164
- , tok snage, 137
- , ulazna impedancija, 134
- , uniformna, 121
- , zaključena proizvoljnim teretom, 132

prijenosni gubitci (slabljenje), 464
prijenosno pojačanje snage, 635-638
prilagodba impedancije, 339-370
- , Bode-Fanov kriterij, 351-353
- četvrtvalnim transformatorom, 348-351
- koncentriranim elementima, 339-343
- , konjugirano kompleksna, 140
- neuniformnom linijom, 367-370
- stabom, 343-348
- , širokopojasna, 354-370

prilagodba za najmanji faktor šuma, 657-664
prividna valna duljina, 48, 168
prolaz (*definicija*), 247
prorezna antena, 785
prospoj (via), 337, 504, 697, 712-714
prostorni harmonik, 515
prostorni naboj, 16
protusmjerni val, 241, 516, 578, 672
provodna struja, 21, 33
provodnost, 13-14, 27-28, (*tablica*) 811
pumpni signal, 611, 725
putujući valovi
- na periodičnoj strukturi, 514
- na prijenosnoj liniji, 129
- u slobodnome prostoru, 43, 51

Q

Q-faktor (*vidi* faktor dobrote)

R

radar
- , Dopplerov, 796-797
- , impulsni, 794-796

radarski presjek cilja (*vidi* efektivna površina cilja)
radarski sustav, 793-797
radiokomunikacijski sustav, 789-792
- , satelitski, 792

radiometar, 800-802
radiometrija, 797-802
radioodašiljač, 790-797
radioprijamnik, 609-611, 790-797, 801
radiovalovi, 51
raspoloživa snaga
- antene, 770
- generatora, 140, 266, 296
- šuma, 539

raspoloživo pojačanje, 635, 637, 649
rasprostiranje
- , atmosferski učinci, 802
- ravnoga vala, 35-64
- , učinci plazme (ionosfera), 805

raspršna matrica
- cirkulatora, 307-309
- četveroprolazne mreže, 310-314
- , definicija, 263
- dvoprolazne mreže, 299-303
- feritnoga izolatora, 301
- giratora, 301-302
- kvadraturnoga hibrida, 410
- Langeova hibrida, 405
- linijskoga odsječka, 273
- magičnoga T-spoja, 413
- nesimetričnog hibrida, 313
- otpornoga djelila, 378
- , pomak referentnih ravnina, 274
- prilagođenog atenuatora, 273-274, 300
- prstenastoga hibrida, 414
- simetričnog hibrida, 312
- spoja dviju prijenosnih linija, 302-303
- T-spoja, 306
- troprolazne mreže, 303-310
- usmjernoga sprežnika, 312, 405
- , veza s impedancijskom matricom, 268-269
- Wilkinsonova djelila, 380
- zakretača faze, 301

raspršni parametri
- , definicija, 263
- tranzistora, 599-602
- u plivajućem spoju, 600-601

ravni val
- , lom, 76-80
- , ogib, 116-118
- , refleksija, 68, 76
- u električki vodljivom sredstvu, 56-61
- u dielektričnom sredstvu bez gubitaka, 35-48
- u feritu, 524-530

Rayleigh-Jeansova aproksimacija, 538, 799-800
reaktivna energija, 252, 326
reaktivna impedancija, 1421-45, 147, 183
reaktivna mreža, 253, 254, 261
reaktivna snaga, 53, 138
reaktivno polje (*vidi* indukcijsko polje)
reaktivno zaključena linija, 134, 142-145, 425
recipročne mreže, 258-260, 269-270
recipročno sredstvo, 111
recipročnost, 110
red potencija, 547-552, 825
referentna ravnina, 248

refleksija, 67
refleksijski dijagram, 162
refleksijsko pojačalo, 693-694
refleksivnost, 70, 81
refleksni klistron, 570-572
reflektometar, 749-751, 757, 760-762
relativna permitivnost, 11, 732, 814, 815
rezonancija
- , atomska, 1
- , giromagnetska, 525, 534
- , molekularna, 1, 803
- , nuklearna, 1
- , paralelna, 253, 423-425, 427, 429
- , parazitska, 651
- , poprečna, 238
- , serijska, 127, 253, 419-422, 426, 429, 446, 681, 715

rezonantna frekvencija, 420, 424
rezonator, 418-461
- , dielektrični, 439-443, 454-457, 713-714, 718
- , Fabry-Perotov, 443-445
- , linijski, 425-431
- , mikrotrakasti, 448-450
- , perturbacija, 458-461
- , pobuda, 446-457
- , radijalni, 699
- , šupljinski, 562-572, 579-584
- , titrajni krug, 419-425
- , valovodni, 431-439, 451-454
- , YIG, 534, 697, 715

RF-MEMS, 735-737
Richardsova transformacija, 407, 477
rotor, 5-8, 18, 817
rubni uvjeti, 64-67
rubno polje (rasipno polje), 180, 333

S

S-matrica (*vidi* raspršna matrica)
S-parametri (*vidi* raspršni parametri)
Schottkyjeva barijera, 584-585
Schottkyjeva dioda, 584-587
separacija varijabla, 42, 185, 196
separacijska jednadžba, 43
separacijska konstanta, 43, 185
Shockleyjev teorem, 564
sila
- , električna, 9, 18
- , elektromagnetska sila, 9
- , magnetska, 19
- , nuklearna, 9
- , Lorentzova, 18
- slabe interakcije, 9
- teže, 9

silnica vektorskoga polja, 8, 12, 90, 101
simetrična matrica, 258, 269
simetrična trakasta linija, 217
- , fazni koeficijent, 217
- , karakteristična impedancija, 217, 220
- , približno rješenje, 218-220
- , prigušenje, 218
- , raspodijeljeni kapacitet, 220

simetrične mreže, 272, 284-291
skin-efekt (*vidi* površinski učinak)
sklopka
- , idealna, 556
- , RF-MEMS, 735-737
- s PIN diodom, 624-629

Smithov dijagram, 146-150
snaga, 51-56
Snellov zakon
- loma, 78
- refleksije, 78

spektralna svjetlina (*vidi* svjetlina)
spinski magnetski moment, 519
spiralna antena, 788-789
spiralna zavojnica, 732-733
spori elektromagnetski valovi, 575-577
sprega
- , električna sonda, 322-327
- , elektromagnetska, 383, 399
- , kapacitivna, 448
- , kritična, 446
- , magnetska, 454, 457
- , magnetska petlja, 326, 328
- preko otvora, 328-333, 385

spregnute linije
- , karakteristična impedancija, 395-399
- , nadomjesni sklop, 406-409
- , naponski koeficijent sprege, 402
- , parni i neparni mod, 395-401, 404

sprežnik (*vidi* usmjerni sprežnik)
SSB-miješalo, 618-619
stab
- , četvrtvalni, 379, 457, 503-509, 712-713
- , paralelni, 333, 343, 613-616, 623, 652
- , prilagodni, 144, 165, 333, 343-348, 654, 660-662, 705
- , radijalni, 652, 695
- , serijski, 344, 346,

stabilnost
- , apsolutna, 641
- , bezuvjetna, 641
- , faktor, 643-644, 668
- frekvencije oscilatora, 684-685, 714, 744
- , kružnice stabilnosti, 647-650
- modova u Fabry-Perotovu rezonatoru, 445
- pojačala, 640-644, 668
- radne točke oscilatora, 682-685
- , temperaturna, 708
- , uvjetna, 644

step-funkcija (*vidi* funkcija jediničnog skoka)
stojni val, 43, 70
- na prijenosnoj liniji, 135-137, 143
- , odnos, 135-137, 143, 146
- , okomiti upad ravnoga vala, 74-75, 114
- u šupljinskom rezonatoru, 431, 437

Stokesov teorem, 17-18, 818
struja
- , disipativna, 33
- , inducirana, 34

- , konvekcijska, 33
- , linijska, 34
- , magnetska, 32-35
- , nadomjesna, 249
- , plošna, 34
- , polarizacijska, 33
- , pomačna, 33, 35
- , provodna (kondukcijska), 21, 33-35
- , reaktivna, 33
- , utisnuta, 32-35

strujna petlja, 321, 326, 328, 518, 743, 775, 778
strujni koeficijent refleksije, 133
suosna linija
- , analiza polja, 129-131
- , gubitci, 151-153
- , karakteristična impedancija, 129, 131, 153
- , koeficijent prigušenja, 130
- , podatci o suosnim kabelima (*tablica*), 823
- , raspodijeljeni parametri, 129, 131
- , *TEM*-mod, 129
- , viši modovi, 201-203

suosni rezonator, 430
supstrat (*vidi* podloga planarne strukture)
susceptibilnost
- , električna, 24, 27, 811
- , magnetska, 27, 522, 811

svjetlina, 799
svojstvena funkcija, 282
svojstvena mreža, 285
svojstvena vrijednost, 280, 282
svojstveni vektor, 282

Š

šum
- , 1/*f*, 537, 605, 657, 720
- , bijeli (*vidi* toplinski šum)
- , faktor, 540
- , izvori, 537
- , Johnsonov (*vidi* toplinski šum)
- , kvantni, 538
- lavinske multiplikacije, 538, 688
- , mjera, 544
- , mjerenje, 545-546, 720-721
- , modulacijski, 719
- , nadomjesna temperatura, 539
- , napon, 538
- oscilatora, 676, 686-688, 700-701, 719-721
- otpornika, 539
- , Pierceovo pravilo, 542
- pojačala, 540, 543, 657-664
- , radna temperatura, 540
- sačme, 537, 657
- , snaga, 539
- , termodinamička temperatura, 538
- , toplinski, 537-539, 657
- treperenja (*vidi* 1/*f* -šum)

T

tangencijalna osjetljivost, 609
tangens gubitaka (tanδ), 25, 59, (*tablica*) 814-815

TE- i *TM*-valovi i modovi
- , definicija, 176
- , fazna brzina, 169, 187
- , fazni koeficijent, 186, 197
- , grupna brzina, 169, 187
- , koeficijent prigušenja, 171, 188-189
- , koeficijent rasprostiranja, 173, 182, 186
- , kosi upad vala na granicu dielektrika, 77-87
- , kosi upad vala na savršen vodič, 87-90
- , prigušenje zbog gubitaka u dielektriku, 174
- , prigušenje zbog gubitaka u vodiču, 174-175, 188, 190, 200
- , razdiobe polja, 171, 191, 193, 199, 201
- , tok snage, 173, 187, 200
- , valna duljina vođenog vala, 168, 187
- , valna impedancija, 172, 183, 187, 189, 191, 193, 197-198
- , zaporna frekvencija, 167, 186, 190, 192, 197, 198
- , zaporni valni broj, 178, 186, 198

tehnologija
- MMIC, 729-730
- tankoga filma, 730
- tiskanih ploča, 214, 340

TEM-valovi i modovi
- , brzina prijenosa energije, 55
- , definicija, 41, 179
- , fazna brzina, 40, 179
- , fazni koeficijent, 39, 44, 169, 170
- , grupna brzina, 49-50, 55
- , intrinzična valna impedancija, 41
- , koeficijent rasprostiranja, 46, 179
- , prigušenje zbog gubitaka u dielektriku, 174
- , prigušenje vođenog vala zbog gubitaka u vodiču, 175
- , tok snage, 55
- , tok snage vođenog vala, 173
- u sredstvu bez gubitaka, 38-49
- , valna impedancija vođenog vala, 179

temperatura šuma (*vidi* nadomjesna temperatura šuma)
tenzor
- , girotropni, 30
- permeabilnosti, 31, 522
- permitivnosti, 30
- susceptibilnosti, 522

teorem (poučak)
- ekvivalencije (*vidi* načelo ekvivalencije)
- , Floquetov, 515
- , Fosterov, 253-256
- , Gaussov, 17, 818
- , Helmholtzov, 95, 818
- o divergenciji (vidi Gaussov teorem)
- o jedinstvenosti rješenja, 108
- o recipročnosti, 110-112, 766, 771
- , Poyntingov, 52-54
- , Shockleyjev, 564
- , Stokesov, 17-18, 818
- , Théveninov, 292, 645

teorija malih refleksija, 354-358
termistor, 739
termodinamička ravnoteža, 542
termodinamička temperatura šuma, 538, 797
termopar, 739-741
Théveninov teorem, 645
titrajni krug, 254, 419-425
tlak zračenja, 91
točka kompresije, 559
tok snage, 51-55, 81, 138, 140, 173
toplinski šum, 537-539, 657
totalna refleksija, 70, 73, 81, 83, 87, 171, 207
totalni prijenos, 80
transformacija
- , Fourierova, 558, 760-761
- koordinata, 816
- , Kurodina, 477
- , Möbiusova, 146, 640, 818-819
- impedancije (*vidi* prilagodba impedancije)
- , Richardsova, 477
- vektora, 280

transformacije filtara, 471-476
transformator impedancije
- , binomni, 358- 362
- , Čebiševljev, 357-358, 363-367
- , četvrtvalni, 146, 348-351, 354-355
- , eksponencijalni, 368-360
- , Klopfensteinov, 369-370
- neuniformnom linijom, 367-370
- s više četvrtvalnih odsječaka, 356-358
- sa spregnutim linijama, 477-481

transmisivnost, 70
transpozicija, 605
transverzalni val, 41, 46
tranzistor
- , bipolarni, 598-599
- , MESFET, 595-597
- u plivajućem spoju, 599-602

tranzistorski oscilator, 699-721
- , Clapp-Gourietov, 707, 711
- , Colpittsov, 707, 711
- , Hartleyjev, 707
- , izvedba, 711-718
- , maksimalna izlazna snaga, 709-711
- , naponski ugađan (VCO), 715
- , osnovni model, 700
- s dielektričnim rezonatorom, 713-714
- , strujno ugađan, (YIG), 715-716
- , uvjet osciliranja, 701-704

tranzistorsko miješalo, 620-623
tranzistorsko pojačalo, 634-673
- , balansno, 666-668
- , izvedba, 650-656, 659-664
- , lančani spoj (kaskada), 672-673
- , niskošumno, 657-659, 662-664
- , prilagodba,653-656
- , raspodijeljeno, 671-672
- s otpornom prilagodbom, 671
- s povratnom vezom, 668-670
- , stabilnost, 640-644
- , širokopojasno, 665-672
- , unilateralno, 638-639
- velikoga signala, 673

TRAPATT dioda, 592
troprolazna mreža, 303-310
- , bez gubitaka, 304-308
- , graf toka signala, 303
- , nerecipročna, 307-309
- , nerefleksivna, 304, 307-309
- opterećena na jednom prolazu, 309-310
- , recipročna, 304-307

U
učinci elektromagnetskoga zračenja, 808-810
učinkovitost
- ispravljanja, 608
- mjerila snage, 742
- množila frekvencije, 724
- oscilatora, 709
- osjetila snage, 742
- otvora antene, 770
- pojačala, 569
- pretvorbe, 724, 742
- sprežne mreže, 676
- zračenja, 769

udarna ionizacija, 589
ugađanje frekvencije, 320, 443, 534, 572
ugradbena impedancija, 557
ulazna admitancija linije, 134
ulazna impedancija linije, 134
umjeravanje analizatora mreža, 754-757
uneseni gubitci, 141-142, 462, 625-628, 632
uniformni ravni val, 41
unilateralno pojačalo, 638
unilateralno prijenosno pojačanje, 638
unipol, 777
unitarnost raspršne matrice, 270-272
usmjerenost.
- , antene, 1, 766-767
- usmjernoga sprežnika, 383-385, 391

usmjerni sprežnik
- , Betheov, 385-390
- , Langeov, 405-406
- sa spregnutim linijama, 395-408
- , valovodni s više otvora, 390-394

uvjet
- , Lorenzov, 96
- očuvanja faze, 78
- , rubni, 64-67
- stabilnosti, 640-644
- unitarnosti (*vidi* unitarnost raspršne matrice)
- zračenja, 67

uvjetna stabilnost, 644
uzlazni pretvornik, 726-728

V
valentni elektron, 589-590
valna admitancija, 110
valna duljina
- na prijenosnoj liniji, 126
- *TEM*-vala, 39, 69
- vođenoga vala, 126, 135, 168

valna impedancija, 41, 57, 59, 68-71, 78, 172, 179, 182-183, 187, 189, 191, 197-198
valna jednadžba, 36, 56, 124
valni broj, 38
valni vektor, 44-48, 56, 76-77, 92, 180
valomjer, 743
valovi prostornoga naboja, 562
valovi snage, 262-263, 266-268, 292
valovod
- , analogija s prijenosnom linijom, 203-206
- , dielektrični, 207-213
- , grebenasti, 206
- , kružni, 195-203
- , opća formulacija vođenih valova, 175-183
- , planparalelni, 166-175
- , pravokutni, 165, 184-194, (*tablica*) 824
valovodne komponente, 371-375, 385-394, 412, 431-439, 452-454, 500, 531-533
valjkasti rezonator, 437-439
varaktorska dioda, 585, 631, 715, 721-729
varistor, 605
VCO (*vidi* naponski ugađan oscilator)
vektor dielektričnog pomaka, 21 (*vidi* gustoća električnog toka)
vektor magnetizacije (*vidi* magnetska polarizacija)
vektorska polja, 3-8
vektorske formule, 816-818
vektorski analizator mreža (*vidi* analizator mreža)
vektorski (magnetski) potencijal, 95
visokopropusni filtar, 472
viši modovi, 166, 169, 190, 193, 197-203, 209, 230
vodljivi pojas, 589, 593
volumna gustoća energije, 51
volumna gustoća naboja, 27
volumna gustoća struje, 27
vremenski promjenljiv kapacitet, 555, 721, 725
vremenski promjenljiva vodljivost, 554
vrijeme
- proleta, 157, 160, 562, 564, 590, 596, 598
- vrijeme relaksacije naboja, 28
- života nositelja naboja, 588

W

Wheelerovo pravilo prirasta induktiviteta, 151
Wilkinsonovo djelilo (hibrid), 379-383

Y

Yagijeva antena, 776
YIG, 517, 534
- , filtar, 534-534, 746
- , oscilator, 697, 714-715
- , rezonator, 534-534, 697-699, 715

Y-parametri, 257-258

Z

Z- parametri, 257
zabranjeni pojas, 589, 593
zaključena prijenosna linija, 121- 145
- , koeficijent refleksije, 121-134
- , naponski minimumi i maksimumi, 135, 137
- , odnos stojnih valova, 136-137
- , ulazna impedancija, 134

zakon
- , Biot-Savartov, 12
- , Coulombov, 9
- Lorentzove sile, 18
- očuvanja energije, 19, 25, 52, 67, 81, 270
- očuvanja faze, 78
- očuvanja naboja, 10, 16, 20
- zakon zračenja crnoga tijela, 798-799

zalet, 29, 90, 91, 593
zaporna frekvencija valovoda, 167, 179, 186, 189-190, 192, 197-201, 206
zaporna frekvencija niskopropusnoga filtra, 464-468
zaporna valna duljina
- suosne linije, 201-203
- valovoda, 167,

zaporni modovi, 315
zaporni pojas, 242-243, 514-517
zaporni valni broj, 167, 178, 186, 189-190
zaporno polje (*vidi* evanescentno polje)
zasićena brzina nositelja naboja, 590
zasićena izlazna snaga, 550, 559, 709-710
zaslon u valovodu (*vidi* diskontinuitet)
zavojnica
- , čip, 731-734
- , feritna, 651
- , širokopojasna RF, 651

zračenje
- crnoga tijela, 798-800
- elektromagnetske energije, 92-107, 763
- , spektar elektromagnetskoga zračenja, 2
- ubrzanog naboja, 92
- , učinci na živa bića, 808-809

zrcalna frekvencija, 552
zrcalna komponenta, 612-613, 746
zrcalni pojas, 618
zrcalno odslikavanje, 114-116
zviždanje, 560

Ž

žičane antene, 764, 768, 770, 771, 773

O autoru



Juraj Bartolić rođen je u Zagrebu 1948. godine. Diplomirao, magistrirao i doktorirao na FER-u u Zagrebu 1971., 1975., odnosno 1982. godine iz područja mikrovalne elektronike. Od 1972. do 1974. godine bio je uposlen u tvornici RIZ Zagreb, gdje je aktivno sudjelovao u razvoju prvoga hrvatskoga višekanalnog digitalnog mikrovalnog uređaja za usmjerene radioveze. Od prosinca 1974. godine uposlen je na Zavodu za komunikacijske i svemirske tehnologije Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, gdje je od 1997. godine do umirovljenja u listopadu 2018. godine djelovao kao redoviti profesor.

Održavao je nastavu na preddiplomskom, diplomskom i doktorskom studiju Fakulteta elektrotehnike i računarstva iz područja mikrovalne elektronike, antena, rasprostiranja elektromagnetskih valova, daljinskih istraživanja i radiometrije te vodio niz diplomskih i magistarskih radova i doktorskih disertacija. Predavao je problematiku aktivnih integriranih antena na Europskoj doktorskoj školi European School of Antennas (ESoA) i bio gostujući nastavnik na nekoliko međunarodnih ljetnih škola.

U okviru znanstvene djelatnosti vodio je niz državnih znanstvenoistraživačkih projekta te bio koordinator više projekata Europske zajednice. Uspostavio je i organizirao međunarodni znanstveni skup ICECOM u Dubrovniku te u više navrata predsjedavao skupom. Autor je i suautor dvaju sveučilišnih udžbenika te više poglavlja u knjigama inozemnih i domaćih nakladnika. Njegov znanstveni opus uključuje više od dvije stotine znanstvenih radovima objavljenih u međunarodnim i domaćim časopisima ili u zbornicima znanstvenih skupova. Suvlasnik je jednog patenta iz područja elektromagnetske kompatibilnosti.

Od 2001. do 2004. godine obnašao je dužnost predstojnika Zavoda za komunikacijske i svemirske tehnologije. Bio je član i predsjedavajući Matičnog povjerenstva za područje tehničkih znanosti, polje elektrotehnike i računarstva. Član je više međunarodnih i domaćih strukovnih udruga poput IEEE, EuMA, EurAAP, KoREMA, ELMAR. Godine 2008. dobitnik je Zlatne plakete *Josip Lončar* za posebno istaknute i trajne rezultate u znanstveno-istraživačkom radu.

Nakladnik:

KIKLOS – KRUG KNJIGE d.o.o.

Jurjevska 20, 10000 Zagreb

Tel.: +385 1 466 8204

Mob. + 385 98 909 7964

E-pošta: kiklos.hr@hotmail.com

Tiskanje dovršeno u travnju 2021.

Važno je napomenuti da u svjetskoj znanstvenoj literaturi postoji veliki broj udžbenika koji se bave područjem mikrovalne elektronike. Ovo je međutim prvi takav udžbenik pisan na hrvatskome jeziku. Osim te jezične prednosti valja napomenuti sveobuhvatnost pokrivenog gradiva, tj. knjiga vrlo iscrpno pokriva područje mikrovalnog inženjerstva, od uvodnih poglavlja koja se bave osnovama elektromagnetizma do iscrpnog opisa prijenosnih linija i pojedinačnih mikrovalnih sklopova. Nadalje, iz opisa fenomena i iz objašnjenja danih u knjizi vidi se da je autor godinama predavao predmet Mikrovalna elektronika i da se trudio približiti ovu izuzetno kompleksnu materiju studentima. U udžbeniku se uspijeva vrlo složen matematički aparat iznijeti na razumljiv i pristupačan način, što osigurava cjelovitost postavki i egzaktnost zaključaka u knjizi. Udžbenik također sadrži sve bitne sadržaje koji su studentu potrebni za samostalno rješavanje problema.

Zvonimir Šipuš

ISBN: 978-953-7992-19-4

9 789537 992194